DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Zusammenhang zwischen Leseflüssigkeit und Textverständnis im Mathematikunterricht“

Verfasst von / submitted by

Patrick Eisenhut

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 333
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Deutsch
Betreut von / Supervisor:	Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Danksagung

Ich möchte mich bedanken bei ...

... Stefan Götz, der diese Diplomarbeit in erster Linie möglich gemacht hat. Danke für die vielen und genauen Korrekturen und Hinweise.

... die drei Lehrpersonen, die mich bei meiner Untersuchung richtig toll unterstützt haben.

... allen Studienkolleginnen und -kollegen, die bei Groß- und Kleinigkeiten geholfen haben.

Nicht vergessen darf ich ...

... Karin, die mir den Glauben gab, dass ich irgendwann fertig werden muss. Danke, dass du da warst.

... Arthur, der mir die letzte Motivation geschenkt hat.

... alle Geschwister und Freunde, die zugehört haben.

Abstract

In der Lehr- und Lernumgebung der Sekundarstufe II wird zunehmend Verständnis von Begriffen und Konzepten sowie die Vernetzung von Kompetenzen gefordert. Das zeigt sich besonders am Fokus auf Kompetenzorientierung im Rahmen der neuen zentralen schriftlichen Reife- und Diplomprüfung. Die Fähigkeit, Texte sinngemäß zu erfassen und zu bearbeiten, darf als Basis vieler anderer Kompetenzen verstanden werden, da Lesen im Schulalltag die wichtigste Form der Informationsaufnahme darstellt und auch im Alltag eine unentbehrliche Fertigkeit ist.

In dieser Arbeit soll untersucht werden, welchen Einfluss Leseflüssigkeit auf die Ausbildung von mathematischen Problemlösekompetenzen hat. Dabei wird von der Vermutung ausgegangen, dass die Förderung von Leseflüssigkeit mit der von mathematischem Problemlösen in engem Zusammenhang steht. Diese Annahme soll in zwei Teilen überprüft werden. Im ersten Teil wird der aktuelle Forschungsstand zu den behandelten Gebieten dargestellt und im zweiten Teil mit empirischen Ergebnisdaten aus Schulen in Verbindung gebracht. Diese setzen sich aus Leistungen zu Lesestandserhebungen sowie regulären schriftlichen Leistungsüberprüfungen in Mathematik zusammen. Dabei wird auch auf signifikante Zusammenhänge zu anderen mathematischen Kompetenzen Rücksicht genommen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Ergebnisse der PISA-Studie 2015 für Österreich waren im Teilgebiet Lesen ernüchternd. Mehr als jede fünfte Schülerin oder jeder fünfte Schüler hat unter Niveau 1a abgeschnitten [SB16, S.61] und kann demnach nicht sinnerfassend lesen. Die PISA-Studie, entwickelt von der OECD, der Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung, ist eine internationale Vergleichsstudie für 15-Jährige, die alle drei Jahre durchgeführt wird. Die hohe Zahl an Teilnehmerinnen und Teilnehmern macht sie zu einer international vergleichbaren und relevanten Datenquelle. Die PIRLS-Studie, ebenfalls eine internationale Vergleichsstudie, untersucht die Lesekompetenz bei 10-Jährigen. Die Ergebnisse dieser Altersstufe stimmten bei der PIRLS-Studie 2011 gut mit denen der PISA-Studie überein. In beiden Fällen erreichten etwa 20% der Getesteten nur Stufe 1 oder darunter [SWS12, S.14][SB16, S.61]. Das Niveau dieser Schülerinnen und Schüler wird so beschrieben, dass sie aus kurzen Texten nur explizit vorhandene Informationen entnehmen können. „Es fehlt aber an allgemeinem Textverständnis.“ [SWS12, S.14]

Die genannten Studien legen nahe, dass viele Schülerinnen und Schüler große Schwierigkeiten damit haben, Texte sinngemäß zu erfassen. Die Ergebnisse der PISA-Studie weisen bei einer Auswertung nach dem Zusammenhang von Leseleistung und mathematischer Leistung eine signifikante Korrelation im Bereich der Risikogruppen auf. Das heißt, wenn eine Schülerin oder ein Schüler in einer der beiden Risikogruppen ist, ist es wahrscheinlich, dass er oder sie auch in der anderen ist. Das belegt einen Zusammenhang zumindest bei unterdurchschnittlichen Leistungen zwischen mathematischer Kompetenzen und Lesekompetenz. Dieser ist nicht weiter überraschend und wird auch in allen Lehrplänen der Sekundarstufe berücksichtigt. Dort ist die Förderung der sprachlichen Kompetenzen in allen Fächern verankert. Das ist naheliegend, denn Sprache dient als zentrales Kommunikationswerkzeug in allen Unterrichtsfächern. Sehr treffend heißt es dazu im

Lehrplan der BHS:

> Sprache ist die Basis für Lehr- und Lernprozesse in allen Unterrichtsgegenständen. Für den situationsadäquaten Einsatz von Sprache in Wort (gehobene Umgangssprache) und Schrift (Standardsprache) sind alle Lehrkräfte verantwortlich. Lernende mit Defiziten in der Beherrschung des sprachlichen Registers (Textkompetenz, fachliche Diskurskompetenz) sind in allen Unterrichtsgegenständen angemessen zu fördern. [BGB14]

Außerdem stellt der Grundsatzerlass Leseerziehung gleich zu Beginn fest: „Leseerziehung betrifft alle Unterrichtsgegenstände“[Bil16, S.2] und führt später aus: „Die Leseerziehung soll in allen Unterrichtsgegenständen in allen Schularten und auf allen Schulstufen in Verbindung mit den anderen Unterrichtsprinzipien besondere Bedeutung erhalten.“ [Bil16, S.5]

Damit ist festgelegt, dass sprachliche Kompetenzen auch außerhalb der Sprachfächer zu berücksichtigen sind. Dieser Tatsache werden neuere Konzepte wie der sprachsensible Fachunterricht oder der Begriff Bildungssprache gerecht.

In dieser Arbeit soll das sehr umfangreiche Gebiet Sprache eingegrenzt werden, wofür der Teilbereich der Lesekompetenz genauer untersucht wird. Lesekompetenz wird sowohl durch die Bildungsstandards als auch die internationalen Vergleichsstudien gut erhoben.

Insbesondere im Mathematikunterricht kommt dem Lesen ein besonderer Stellenwert zu, das für das Verständnis bei Textaufgaben eine wichtige Rolle spielt [Wil16, S.21]. Eine erweiterte Lesekompetenz wird dementsprechend bei der schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Mathematik bei einigen Teil 1- und allen Teil 2-Aufgaben[1] gefordert. In den Medien wurde dieser Umstand als „textlastig“ bezeichnet und auch häufig kritisiert [15]. Jedoch wird durch diese „Textlastigkeit“ lediglich eine Forderung des Lehrplans und die Vernetzung von Kompetenzen abgebildet. Dass Lesekompetenz auch im Mathematikunterricht verlangt wird, ist auch mit einem Blick in aktuelle Schulbücher nachvollziehbar. So etwa aus einem HAK-Lehrbuch:

[1] Teil 1-Aufgaben sind kurz gefasst und sollen die Grundkompetenzen prüfen, Teil 2-Aufgaben bestehen aus mehreren Teilaufgaben zu einem Themenbereich und sind zur Prüfung der Vernetzung und Vertiefung von Kompetenzen gedacht.

> Ihre Spiegelreflexkamera benützt einen Kleinbildfilm, die Größe eines einzelnen Negativs beträgt 24mm mal 36mm. Die Kamera ist mit zwei Objektiven ausgestattet: einem 24mm Weitwinkelobjektiv und einem 180 mm Teleobjektiv. Sie wollen ein Gebäude mit einer Breite von 60m und einer Höhe von 20m frontal aufnehmen. Ermitteln Sie, in welcher Entfernung vom Gebäude Sie sich aufstellen müssen, damit das Gebäude zur Gänze auf das Bild passt. Berechnen Sie zuerst den horizontalen (Bildbreite) und dann den vertikalen (Bildhöhe) Sehwinkel des Objektivs. Überlegen Sie anhand des Ergebnisses, wann es sinnvoll ist, ein Weitwinkelobjektiv zu verwenden, und wann ein Teleobjektiv. [Sch+13, S.40]

Hier werden Kompetenzen im Umgang mit ähnlichen Dreiecken, Darstellungswechsel und Fachsprache der Optik gefordert. Zusätzlich ist der Komplexitätsgrad der Sprache hoch, der sich aus einer Vielzahl von Fachwörtern und Nebensatzkonstruktionen ergibt.

Die großflächige Untersuchung „Lesen - Denken - Rechnen“ in der Steiermark hat 2006 an der Schnittstelle von Primar- zu Sekundarstufe festgestellt, dass es einen signifikanten Zusammenhang zwischen Lesekompetenz und Sachrechenkompetenz gibt [Höf06, S.21]. Zu ähnlichen Ergebnissen kommt auch Jordan [Jor11], der Berufsschüler und -absolventen untersucht und Klieme/Neubrand/Lüdtke [KNL01], die sich auf internationale PISA-Daten stützen, also Fünfzehnjährige im Fokus haben.

Der in diesen Untersuchungen beobachtete Zusammenhang soll in der Sekundarstufe II (also im weiteren Bildungsweg) in dieser Arbeit verifiziert und konkretisiert werden.

Lesekompetenz als Ganzes zu erfassen, ist schwierig. Standardisierte Tests wie das Salzburger Lesescreening oder der Wiener Lesetest sind nicht geeignet, da sie nur bis zur achten beziehungsweise vierten Schulstufe konzipiert sind. Deshalb bietet es sich an, Lesekompetenz genauer zu betrachten, um einen relevanten Teilbereich davon zu finden, der verhältnismäßig einfach und zuverlässig erhoben werden kann. Für einige wichtige Komponenten von Lesekompetenz wird der nationale Bildungsbericht 2012 herangezogen. In diesem werden die kognitiven Voraussetzungen für Lesekompetenz beschrieben: als signifikantester Faktor für das sinnerfassende Lesen wird mit einer Korrelation von 0,64 die Leseflüssigkeit angegeben [Her12, S.29].

Mit dieser Einschränkung auf den Faktor der Leseflüssigkeit soll in dieser Arbeit folgender Frage nachgegangen werden:

> Wie wirkt sich Leseflüssigkeit auf mathematische Kompetenzen (insbesondere auf die Textaufgaben-Problemlösefähigkeit) der Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II aus und welche Empfehlungen lassen sich daraus für den Mathematikunterricht ableiten?

Aufgrund der Ergebnisse der LDR-Untersuchung [Höf06] wird die Hypothese aufgestellt, dass bei geringer Leseflüssigkeit mit niedriger Textrechenkompetenz zu rechnen ist.

Die Beantwortung beginnt mit einer theoretischen Auseinandersetzung der Begrifflichkeiten des Forschungsfeldes, gefolgt von einer Methodenbeschreibung zur Feststellung von Leseflüssigkeit und mathematischen Kompetenzen. Die beschriebenen Methoden werden dann auf erhobenes Datenmaterial angewendet. Abschließend werden anhand dieser Ergebnisse Schlüsse auf die Einbeziehung von Leseflüssigkeit in den Mathematikunterricht gezogen.

2 Theoretischer Hintergrund

2.1 Literacy

Dem Beispiel einschlägiger Fachliteratur folgend ([Lei13][RN14]) geht auch diese Arbeit von den theoretischen Modellen aus, die von der OECD im Zusammenhang mit den PISA-Studien beschrieben werden. Ein zentraler Begriff dabei ist *Literacy*. Dieser wird von der OECD in Zusammenhang mit Mathematik, Lesen und Naturwissenschaften als Kompetenz übersetzt. Kompetenzen sind in diesem Literacy-Diskurs „basale Kulturwerkzeuge“ [Art+01, S.78], die zur Bewältigung des Lebens in dem untersuchten Alter, also am Ende der Pflichtschulzeit, dienen. Dabei ist mit „Literacy“ die menschliche Verwendung von Sprache gemeint. Dies umfasst das Lesen, Schreiben, Hören und Sprechen in einer Sprache. Jede Sprache erfüllt in vielfältiger Weise zahlreiche Funktionen, beispielsweise Kommunikation, Lernmedium oder Kunstform. Für eine Person in einer Sprache gebildet zu sein, meint in diesem Kontext das (implizite) Wissen über Konstruktionsregeln der Sprache und die Fähigkeit, diese in verschiedenen sozialen Kontexten anzuwenden. Darauf aufbauend hat die OECD weiterführende Begriffe definiert, auf die im Folgenden näher eingegangen wird:

- Lesekompetenz (reading literacy) bezeichnet hier

  > die Fähigkeit, schriftliches Textmaterial zu verstehen, zu nutzen, darüber zu reflektieren und sich mit ihnen auseinanderzusetzen, um eigene Ziele zu erreichen, das eigene Wissen und Potenzial weiterzuentwickeln und am gesellschaftlichen Leben teilzuhaben. [EO10, S.23]

  Hervorzuheben ist bei dieser Definition, dass sie eine Anwendung für die beschriebenen Fähigkeiten liefert.

- Auch für Mathematik bietet das OECD eine grundsätzliche Definition an. Der Begriff „Mathematical Literacy“ ist „die Fähigkeit einer Person, die Rolle der Mathematik in der Welt zu erkennen und zu verstehen, begründete Urteile treffen zu können und sich mit Mathematik in einer Art zu beschäftigen, die ihren eigenen Bedürfnissen als konstruktiver, interessierter und reflektierter Mensch gerecht werden.“ [EO10, S.84]

  In diesem Kontext kann Mathematik als Sprache betrachtet werden. Daraus folgt, dass Schülerinnen und Schüler den spezifischen Aufbau der Sprache begreifen müssen, analog einer anderen Sprache. Dieses Wissen zur Lösung von Nicht-Standard-Problemen muss in einer Bandbreite an sozialen Kontexten eingesetzt werden können [EO10, S.72ff].

  „Mathematical Literacy“ kann zwar als Überbegriff mathematischer Kompetenzen gesehen werden, ist aber durch den Bezug zu einem Sprachsystem nicht mit dem Kompetenzbegriff, wie er im österreichischen Bildungssystem verwendet wird, ident.

2.2 Lesekompetenz

Die Bildungsstandards für die achte Schulstufe Deutsch [BIF11] verlangen im Kompetenzbereich Lesen vier Gebiete:

i) ein allgemeines Verständnis für Texte bzw. Textsorten

ii) explizite Informationen finden

iii) textbezogene Interpretationen entwickeln

iv) Textinhalte reflektieren

Diese Bereiche haben einen anderen Fokus als die PISA-Definition. Hier steht ein engerer institutionalisierter Rahmen im Vordergrund, insbesondere das Metawissen über Textsorten. Dieses hat auch in der schriftlichen Reife- und Diplomprüfung einen hohen Stellenwert. Die beschriebenen Kompetenzen werden vom Schulsystem als Ergebnis von Lernprozessen verlangt. Wie diese Prozesse ablaufen, beschreiben Modelle zur Lesekompetenz, die in der Fachliteratur in unterschiedlicher

Ausprägung und Fokussierung zu finden sind. Für diese Arbeit werden im Folgenden ein kognitives Modell nach Schreblowski [Sch04] und ein häufig referenziertes Modell mit didaktischem Zugang von Rosebrock und Nix [RN14] vorgestellt. Im Anschluss werden die Modelle am Ende von Abschnitt 3.2.2 miteinander verglichen.

2.2.1 Kognitives Modell

Schreblowski beschreibt Lesen als generellen Kommunikationsprozess, der aus vier Komponenten und deren Zusammenspiel besteht. Diese sind Motivation, Vorwissen, Strategien und Metakognition [Sch04, S.15]. Eine weitere Komponente kann parallel zum Lesen das prozedurale Wissen darstellen. Im Folgenden werden diese Komponenten näher im Kontext des Leseprozesses beschrieben.

Das Vorwissen ist besonders für das Erschließen von Texten entscheidend. Jede Informationsaufnahme ist auch immer ein Einordnen in einen Kontext von Vorwissen [Sch04, S.22f]. Personen mit hohem Vorwissen auf einem Gebiet organisieren ihr (Fach-)Wissen beim Lesen anders als ein Laie, sie setzen bestimmte Strategien ein, die sich nach ihrer Erfahrung bewährt haben.

Strategien sind in der Fachliteratur nicht klar einzugrenzen beziehungsweise widersprüchlich definiert. Schreblowski [Sch04, S.25] klassifiziert Strategien als beabsichtigte und überlegte Handlungen. Welche Strategien angewendet werden, um einen Text zu verarbeiten, hängt davon ab, welche Strategien bekannt sind und welche sich davon als erfolgreich erwiesen haben. Verfügt ein Leser oder eine Leserin über ein großes Strategierepertoire, ist es wahrscheinlicher, dass er oder sie bei Misserfolg einer Strategie auf eine andere zurückgreift. Die Wechselwahrscheinlichkeit bei Misserfolg nimmt also mit der Vielfalt der bekannten Strategien zu.

Das prozedurale Wissen, also das Wissen, welche Bedeutung bestimmte Zeichen haben, kann als die basale Voraussetzung des Lesens verstanden werden. Damit ist nicht nur das Erkennen von einzelnen Buchstaben, sondern auch von ganzen Wörtern und Satzteilen gemeint, die auf einen Blick erfasst werden. Je geübter ein Leser oder eine Leserin, desto weniger Augenbewegungen benötigt er oder sie beim Lesen. Bis zu einem gewissen Grad ist die Beherrschung dieser Komponente notwendig, um einen Text in einer angemessenen Zeit zu bearbeiten. Sie ist ebenso wie die Strategien dafür verantwortlich, das Lesen effizienter zu machen, es zu beschleunigen [Sch04, S.27ff].

2.2.2 Didaktisches Modell

Das Mehrebenenmodell von Rosebrock/Nix beschreibt Lesen nicht nur als Informationsentnahme und -verarbeitung, sondern bezieht auch die subjektive und die soziale Dimension mit ein. Das Modell bildet Lesen in diesen drei Ebenen ab, wie in Abbildung 3.1 dargestellt. Die hierarchie-niedrigste Ebene ist die Prozessebene.

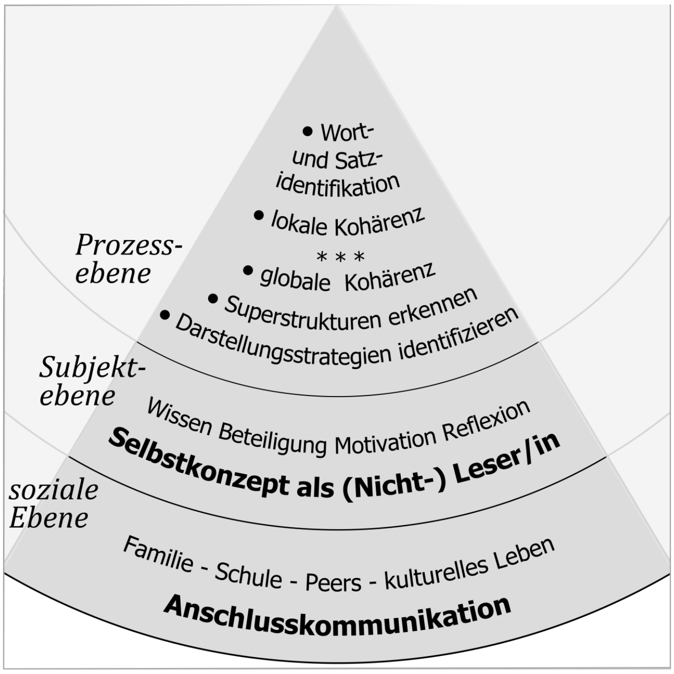


Abbildung 2.1: Mehrebenenmodell des Lesens [RN14, S.15]

Diese beginnt mit der Dekodierfähigkeit die Buchstaben zu Wörtern und Wörter zu Sätzen zusammenfasst. Diese kognitiven Abläufe finden bei geübten Leserinnen und Lesern flüssig und ohne bewusste Anstrengung statt [RN14, S.17ff]. Ähnlich verhält es sich mit der lokalen Kohärenzbildung, die Sinnbildung über mehrere Sätze. Diese basale Dimension des Lesens kann mit Lautleseverfahren gefördert werden [RN14, S.33ff].

Nach Rosebrock/Nix beginnt komplexes Leseverstehen erst mit der Herstellung globaler Kohärenz. Ab dieser Stufe wird eine bewusste kognitive Leistung benötigt, während die niedrigeren Stufen großteils automatisiert ablaufen (sollten). Globale Kohärenz ist erreicht, wenn eine strukturierte inhaltliche Vorstellung des Textes als Einheit gebildet wird. Diese komplexen und basalen Vorgänge führen zu einem mentalen Modell, das sich beim Lesen ständig anpasst und Aspekte des Gelesenen abbildet. In dieses mentale Modell fließt auch die hierarchie-höchste Stufe der Metaperspektive ein, die die Strategien und Muster eines Textes erkennt und bewertet [RN14, S.17ff]. Sie ist mit dem Punkt „Darstellungsstrategien identifizieren" in Abb. 3.1 dargestellt. Auf dieser Ebene ist auch die Lektüre von fachlichen Lehrtexten verortet. Diese verlangen einerseits fachspezifisches Vorwissen und haben andererseits einen speziellen strukturellen Aufbau. Um diesen Punkt zu fördern, werden im Kapitel 3.6 Methoden vorgestellt.

Auf der Subjektebene steht der Leser oder die Leserin selbst im Mittelpunkt. Diese Ebene geht teilweise über rein kognitive Modelle [Sch04][EO10] hinaus. Sie umfasst Motivation, Vorwissen und Reflexion. Genauer die Motivation, sich die Prozesse des Lesens anzueignen und zu verbessern. Vorwissen ist hier ähnlich zu verstehen wie bei Schreblowski, als kognitive Ressource, die in die Interpretation eingebracht wird und Sinnzusammenhänge herstellt. Ebenfalls zur Subjektebene zählt die individuelle Perspektive der lesenden Person zum eigenen Lesen, deren Selbstkonzept zum Lesen.

Auf der sozialen Ebene werden Lektüreprozesse in soziale Kontexte eingebettet. Das umfasst die Eigenschaft des Lesens als Teilhabe am gesellschaftlichen Leben sowie Vorgänge, die Lektüre wieder in Kommunikation überführen. Dabei spielt das soziale Umfeld, also Schule, Familie und Peers eine entscheidende Rolle [RN11, S.23ff.]. Diese Ebene ist besonders in der Schule entscheidend, da häufig erwartet wird, dass Schülerinnen und Schüler sich über Gelesenes austauschen, oder dieses zumindest wiedergeben können.

Die drei beschriebenen Ebenen des Lesens sind nach diesem Modell stark miteinander verknüpft und beeinflussen einander. Die Anordnung in Abbildung 3.1 bezieht sich auf den momentanen Akt des Lesens und wie nahe die Ebenen bei diesem zueinander stehen.

Das zuvor beschriebene Modell von Schreblowski (Abschnitt 3.2.1)(und OECD) ist hier der Prozessebene und teilweise der Subjektebene zuzuordnen. Damit kann das Mehrebenenmodell als Erweiterung des kognitiven Modells betrachtet werden.

Dem Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit am nächsten kommt das Modell von Rosebrock und Nix. Ihr Mehrebenenmodell ist in schulische Umgebung einzubetten und daraus motiviert.

Einen lokalen gemeinsamen Nenner der Modelle bilden die hierarchie-niedrigen Fähigkeiten der Dekodierung und Wort-(Satz-)erkennung, die die Leseflüssigkeit im Wesentlichen ausmachen. Diese sollten ab der Sekundarstufe weitestgehend automatisiert vorausgesetzt werden können. In dieser Arbeit soll untersucht werden, inwiefern sich solche Fähigkeiten auf die Textaufgaben-Problemlösefähigkeit im Mathematikunterricht auswirken und mit dieser in Zusammenhang stehen (vgl. Ende des Abschnitts 2).

2.3 Leseflüssigkeit

Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, sind die basalen Aspekte der Lesekompetenz ein zentrales Interesse dieser Arbeit und werden deshalb nun genauer betrachtet. Ein Begriff, der diese treffend beschreibt ist *Leseflüssigkeit* wie er von Rosebrock und Nix verwendet wird [RN11][RN14]. Sie verstehen unter Leseflüssigkeit die Fähigkeit „zur genauen, automatisierten, schnellen und sinnkonstituierenden leisen und lauten Lektüre“ [RN11, S.15], also einen Text „mühelos und routiniert“ [RN11, S.15] zu lesen.

Leseflüssigkeit ist im hierarchie-niedrigen Teil der Prozessebene des Mehrebenenmodells verortet (siehe Abschnitt 3.2.2) und stellt eine Basisfertigkeit für sinnerfassendes Lesen dar.

Leseflüssigkeit setzt sich aus vier Teilbereichen zusammen:

i) Automatisierung

ii) Lesegeschwindigkeit

iii) Dekodierungsgenauigkeit

iv) prosodische Segmentierung

Die Dimension der Automatisierung des Dekodierens kann als Überkategorie angesehen werden, da sich die anderen Aspekte aus ihr ergeben. Eine ausreichendes

Niveau an Automation bei der Dekodierung von Buchstaben zu Wörtern setzt kognitive Ressourcen frei, die für die weitere Verarbeitung des Gelesenen verwendet werden können, wie etwa die Zuordnung eines Problems zu mathematischen Strukturen oder arithmetischen Berechnungen [Ber08, S.290]. Das Arbeitsgedächtnis wird entlastet. So können den gelesenen Wörtern Bedeutung zugeordnet werden. Ist die Automation nicht ausreichend vorhanden, schlägt sich dies in Lesegeschwindigkeit, Dekodierungsgenauigkeit und Segmentierung nieder.

Der Aspekt der Lesegeschwindigkeit bezeichnet die Anzahl der gelesenen Wörter pro Minute. Dieser Teil ist sehr gut messbar und ist damit zur Erhebung von Leseflüssigkeit von großer Bedeutung. Nach Rosebrock sollte beim stillen und lauten Lesen eine Mindestgeschwindigkeit von etwa 100 Wörtern pro Minute erreicht werden, um in der Lage zu sein, die semantischen Segmente eines Textes einander zuordnen zu können. Darunter ist es schwierig, sich am Ende eines Satzes an den Anfang zu erinnern. Das Arbeitsgedächtnis kann die Informationen nicht so lange behalten. In diesem Bereich zu lesen wird als „Frustrationsniveau“ eingestuft [RN14, S.37]. Eine zu hohe Lesegeschwindigkeit ist jedoch auch nicht ideal. Bei mehr als etwa 300 Wörtern pro Minute leidet die Sinnerfassung ebenfalls zunehmend, da bei dieser Geschwindigkeit viele Wörter nicht, oder nicht genau gelesen werden können und keine Zeit für Korrekturen bleibt. Diese Obergrenze ist jedoch individuell stark differierend.

Ebenfalls wichtig für die Leseflüssigkeit ist die Genauigkeit des Dekodierens. Darunter fällt der Anteil der falsch gelesenen Wörter, die unterschieden werden in korrigierte und nicht korrigierte. Bei Texten mit unbekanntem Vokabular oder Satzstrukturen kann der Fehleranteil höher sein als bei bekannten Texten. Ein erfahrener Leser beziehungsweise eine erfahrene Leserin wird auf seine oder ihre Fehler aufmerksam und korrigiert diese selbstständig. Nicht korrigierte Fehler können es schwierig bis unmöglich machen, einen Text zu erschließen. Wenn der Fehleranteil $\geq 10\%$ beträgt, ist es nahezu unmöglich, sinnerfassend zu lesen. Der oder die Lesende befindet sich auf dem „Frustrationsniveau“. Ein Fehleranteil zwischen 5% und 10% macht es mit Unterstützung möglich einen Text zu erfassen. Dieser Bereich wird „Instruktionsniveau“ genannt. Bei geringeren Fehleranteilen ist ein „Unabhängigkeitsniveau“ erreicht. Diese Einteilung berücksichtigt nicht die Lesegeschwindigkeit. Wird jedes Wort einzeln gelesen und werden dabei keine Fehler gemacht, kann dies schnell unter das Frustrationsniveau fallen, obwohl der Fehleranteil sehr gering ist [RN11, S.60f].

Ein weiterer Aspekt der Leseflüssigkeit ist die Segmentierung von Sätzen. Damit ist die Bündelung von semantisch-syntaktisch Zusammengehörendem gemeint. Dieser Teil ist besonders gut beim lauten Lesen beobachtbar, in dem sich die Segmentierung in der Prosodie, also der Betonung, Rythmus, Pausen und Satzmelodie niederschlägt. Dieser Vorgang verlangt implizites Wissen über Satzstrukturen und das Erkennen von Satzteilen während des Lesens. Ein klare Prosodie weist damit eine Verstehensleistung der lokalen Kohärenz aus [RN14, S.36ff].

Das Niveau mit dem ein Text gelesen werden kann, ergibt sich nicht allein aus den Lesefähigkeiten einer Person, sondern die Komplexität des Textes und seine Altersgemäßheit spielen ebenfalls eine Rolle. Ein Text mit bekannten Wörtern und einfachen Satzkonstruktionen kann auf Unabhängigkeitsniveau gelesen werden, während ein Sachtext über ein unbekanntes Gebiet unter das Frustationsniveau fallen kann.

Nach den Ergebnissen der internationalen Vergleichsstudie PISA gibt es in Österreich auch in der Sekundarstufe noch einen hohen Anteil an Schülerinnen und Schülern, die nur „langsam, stockend und/oder mit fehlerhafter Betonung (vor-) lesen.“[RN11, S.11]. Das erschwert das Verständnis beim Lesen und hemmt die Lesemotivation. Diese Umstände können oder haben bereits bei diesen Jugendlichen zu einem Negativ-Kreislauf geführt. Sie lesen nicht flüssig, haben deshalb auch keine Freude am Lesen und meiden es dementsprechend. Wenig Lesen führt wiederum zu einer Verschlechterung der Leseflüssigkeit [RN11, S.11]. Derartige Defizite ziehen Probleme in fast allen Fächern nach sich und betonen die Relevanz, betroffene Schülerinnen und Schüler in ihrer Leseflüssigkeit zu fördern. Wie hier schon angedeutet, ist Sprache im Bezug auf Anforderungsniveaus differenziert zu betrachten. Deshalb wird in den nächsten Abschnitten näher auf verschiedene Register von Sprache eingegangen und darauf, welchen Stellenwert diese in der Schule haben.

2.4 Bildungssprache

Sprache kann auf verschiedene Arten und mit verschiedenen Absichten verwendet werden. Diese unterschiedlichen Formen von Sprache werden *Register* genannt. In Bildungseinrichtungen wird mit zunehmender Schulstufe ein besonderes Register von Sprache verwendet, um fachliches Wissen zu vermitteln, das eine Basis für berufliche und gesellschaftliche Kommunikation darstellt: die *Bildungssprache*. Ihre Leistung besteht darin, komplexe Sachverhalte in vielfältigen Umgebungen zu kommunizieren [LG10, S.9ff]. Dazu im Kontrast steht das Register der *Alltagssprache*, die vorrangig der Kommunikation im privaten Umfeld dient und auch Einbußen bei der allgemeinen Verständlichkeit zugunsten von ökonomischen oder sozialen Aspekten hinnimmt. Alltagssprache ist konzeptionell mündlich, ist also stark an das Medium der Mündlichkeit geknüpft.

Bildungssprache hingegen orientiert sich an geschriebener Sprache, ist konzeptionell schriftlich [LG10, S.12][CW14, S.8]. Sie hat besondere Merkmale auf lexikalischer, semantischer und syntaktischer Ebene. Lexikalische Besonderheiten sind die häufige Verwendung von Komposita, Fachbegriffen und Präfixverben. Syntaktisch zeichnet sie sich unter anderem durch explizite Textverknüpfungen, komplexe Satzgefüge und Passivkonstruktionen aus [LG10, S.13]. Aufgrund der höheren Komplexität ist von einer deutlich längeren Erwerbsdauer von Bildungssprache im Gegensatz zur Alltagssprache auszugehen. Studien zur Mehrsprachigkeit im englischen Sprachraum haben gezeigt, dass alltagssprachliche Fähigkeiten bereits nach ein bis zwei Jahren erworben werden, wohingegen für Bildungssprache fünf bis acht Jahre benötigt werden [LG10, S.17]. Dieser Unterschied belegt deutlich die kognitive Mehrleistung, die Bildungssprache von Lernenden verlangt. Dies trifft dementsprechend auch auf Schülerinnen und Schüler zu, deren Erstsprache die Unterrichtssprache ist.

Jim Cummins differenzierendes Modell von Sprache [Cum79], das in der Fachliteratur weithin anerkannt wird [Lei13][PT15][LG10] u. a., ist aus der Forschung zur Mehrsprachigkeit hervorgegangen und teilt Sprache in zwei Bereiche. Einerseits die „Basic Interpersonal Communicative Skills“, kurz BICS, die der Alltagssprache entsprechen, und andererseits der „Cognitive Academic Language Proficiency“ (CALP), welche die Bildungssprache beschreibt. Nach Cummins sind beide Register Ausprägungen von Sprache, die einer gemeinsamen Basis entspringen und sich so gegenseitig beeinflussen [Cummins nach Lei13]. Im schulischen Kontext kommt der Bildungssprache ein hoher Stellenwert zu, da Lerninhalte, wie Schulbücher, Fachtexte und die Äußerungen der Lehrpersonen großteils diesem Register zuzuordnen sind. Eine mangelnde Beherrschung stellt daher eine Hürde für den Wissenserwerb in der Schule dar.

Da Bildungssprache ein allgemein bildungsorientiertes Register darstellt, wird im nächsten Kapitel die besondere Ausprägung der Bildungssprache in einzelnen Fachgebieten, insbesondere der Mathematik beschrieben.

2.5 Fachsprache

Innerhalb eines Fachgebietes wird eine spezialisierte Form der Bildungssprache eingesetzt, die als *Fachsprache* bezeichnet wird. Diese ist nach Lange und Gogolin eine Teilmenge von Bildungssprache [LG10, S.12]. Diese Fachsprachen sind verständlicherweise in jedem Fach unterschiedlich. Für diese Arbeit ist die mathematische Fachsprache von Interesse und wird hier genauer beschrieben. Zweifellos treffen viele Merkmale auch auf andere Fachsprachen, insbesondere naturwissenschaftliche, zu.

Wie Sprache selbst ist auch die mathematische Fachsprache ständigem Wandel unterzogen. Sie stellt Konventionen bereit, die Einheitlichkeit über möglichst viele Sprecher und Sprecherinnen sicherstellt. Diese Konventionen beziehen sich auf Begriffe, Symbole und Wendungen. Fachsprache konsistent zu verwenden bietet sich im (Mathematik-)Unterricht an, da wiederkehrende und stabile Begriffe Sicherheit schaffen und den Überblick zu bewahren helfen [MS99, S.43f].

Es folgen einige Besonderheiten der mathematischen Fachsprache, sie können nicht vollständig aufgezählt werden, sollen aber einen Überblick über die vielfältigen Eigenschaften derselben geben. Im Deutschen erfüllt das Passiv mehrere wichtige Funktionen, wie Verbindlichkeit auszudrücken. Es benötigt keinen Agens und man-Konstruktionen können vermieden werden [MS99, S.48]. Diese Eigenschaften sind in der mathematischen Fachsprache erwünscht, weshalb das Passiv häufig zum Einsatz kommt. Eine weitere wichtige Besonderheit sind mathematische Verneinungen. Diese sind semantisch gleichzusetzen mit logischen und stehen häufig im Widerspruch zu alltagssprachlichen Verneinungen. In der mathematischen Fachsprache decken eine Aussage und ihre Verneinung alle möglichen Fälle ab. Beispielsweise könnte für die Aussage „Alle Dreiecke sind rechtwinkelig." Folgendes als alltagssprachliche Verneinung formuliert werden: „Kein Dreieck ist rechtwinkelig." Diese Aussagen decken nicht alle Möglichkeiten ab, da der Fall, dass nur einige Dreiecke rechtwinkelig sind, in keiner der beiden Aussagen berücksichtigt wird. Mathematisch (und logisch) wäre die Verneinung: „Nicht alle Dreiecke sind rechtwinkelig." bzw. „Es gibt mindestens ein Dreieck, das nicht rechtwinkelig ist." [MS99, S.53f]

Jede Fachsprache zeichnet sich auch durch Fachbegriffe aus. Bei mathematischen Fachbegriffen kommt es häufig zu lexikalischen Überschneidungen mit der Alltagssprache, wie bei den Begriffen „ähnlich" oder „Wurzel". Zudem gibt es auch Polysemie, also mehrfache Bedeutung innerhalb der Fachsprache, wie bei „Körper" in Algebra und Geometrie [MS99, S.56]. Pro Schulstufe müssen zwischen 50 und 200 dieser Fachbegriffe neu erworben werden [MS99, S.117].

Ein wichtiger Bestandteil der mathematischen Fachsprache sind Symbole. Diese können ebenfalls mehrfache Bedeutungen haben. Als Beispiel sei das Gleichheitszeichen erwähnt, das als Prozess- und als Relationszeichen gedeutet werden kann [Drü12, S.7].

Außerdem herrscht in der mathematischen Fachsprache hohe Prägnanz, die sich in der Vermeidung von Redundanz und im minimalen Aufwand in der jeweiligen Situation äußert. Meier und Schweiger weisen darauf hin, dass ein mathematischer Text anders als ein Alltagstext zu lesen ist. Beispielsweise hat Belletristik oft einen hohen Anteil an Redundanz, der zu Strategien führt, die auf prägnante Texte nicht gut angewendet werden können. Hinzu kommt der fehlende Interpretationsspielraum, da Fachsprache danach strebt, eindeutig und vollständig zu formulieren [MS99, S.64f].

Diese Besonderheiten und inneren Differenzen von Sprache legen nahe, besonders in Fächern, in denen Fachsprache eine wichtige Rolle spielt, auf diese auch im Unterricht explizit einzugehen. Damit wird sich der nächste Abschnitt beschäftigen und dazu Konzepte von Leisen, Tajmel und Gogolin vorstellen.

2.6 Sprachsensibler Fachunterricht

Da Sprache in allen Fächern ein beachtenswertes Thema ist, wurde in der Forschung eine neue Disziplin etabliert. Theoretische Überlegungen und praktische Methodenkataloge wurden entwickelt, um diesem Umstand Rechnung zu tragen [Lei13][PT15][Taj17]. Josef Leisen veröffentlicht seit 1994 zu diesem Thema einige einflussreiche Publikationen, die vor allem wegen ihrer umfangreichen Praxiswerkzeugsammlung hervorzuheben sind. Er definiert sprachsensiblen Fachunterricht als den „bewusste(n) Umgang mit Sprache beim Lehren und Lernen im Fach“ [Lei13, S.3]. Diese weit gefasste Definition lenkt den Fokus darauf sprachliche Kompetenzen als Fachlehrkraft nicht vorauszusetzen oder vom Deutschunterricht zu verlangen, sondern in jedem Fach Wert auf die Förderung von (Fach-)Sprache zu legen. Diese Forderung ist auch im Fach Mathematik in den Bildungsstandards der achten Schulstufe verankert, welche die angemessene Verwendung der mathematischen Fachsprache rezeptiv als auch produktiv fordern [BIF13].

Der sprachsensible Fachunterricht orientiert sich wie die Bildungsstandards an einem Kompetenzmodell und richtet die Lehr- nach den Lernprozessen aus. Diese werden durch die Lehrperson materiell und personell gesteuert und sind den jeweiligen Lernsituationen anzupassen. Grundsätzlich werden diese Situationen in Schritte eingeteilt, die von der Einführung über den Lernprozess zur Evaluierung der Kompetenzen reicht [Lei13, S.77ff]. Es sollen Lern- und Leistungssituationen strikt voneinander getrennt werden, da beide unterschiedlichen kognitiven Mustern folgen. So soll in Lernsituation Neues gelernt, verstanden und ergänzt werden. In Leistungssituationen hingegen stehen Erfolgswunsch und Anwendungsleistung im Vordergrund [Lei13, S.86f].

Ein weiterer wichtiger Punkt bei Leisen ist die erstsprachige Pluralität, die besonders in der österreichischen Schullandschaft ein Rolle spielt. Wie bereits beschrieben, ist der Erwerb der Bildungssprache in der Zweitsprache ein sehr umfangreicher Prozess. Insbesondere im Fachunterricht kann Fach- und Bildungssprache gefördert werden. Um Lernenden, deren Zweitsprache Deutsch ist, angemessene Möglichkeiten zu bieten, dem Fachunterricht auf den kognitiv hierarchieniedrigsten Ebenen zu folgen, ist das Einbeziehen des verwendeten Mediums Sprache in den Unterricht unerlässlich.

Sprachsensibler Fachunterricht wird bei Leisen also als Werkzeug charakterisiert, das Lernende, unabhängig ihrer Erstsprache, zur Bildungssprache hinführt und in dieser Kompetenzen vermittelt. Lernende mit Deutsch als Zweitsprache wenden in herausfordernden Situationen wie im Fachunterricht häufig Strategien an, um Fehler oder Anstrengung zu vermeiden. Diese können darin bestehen die Kommunikationsabsicht so abzuwandeln, dass sie mit einfachen, häufig auch ungeeigneten, sprachlichen Mitteln erfüllt werden kann. Es könnten auch Fehler bewusst in Kauf genommen, oder Kommunikation ganz vermieden werden, was zu dem in Abschnitt 3.3 beschriebenen Negativ-Kreislauf führt. Die Strategien, die das Sprachlernen effektiv unterstützen, bestehen darin, Hilfsmittel wie ein Wörterbuch, oder eine Lehrperson zu Rate zu ziehen, zu paraphrasieren und Lösungen durch Transfer aus der Erstsprache zu finden. Sprachsensibler Fachunterricht versucht die Verwendung dieser Strategien zu fördern [Lei13, S.27].

Sprachliche Kompetenzen sind natürlich auch für muttersprachlich Lernende eine Schlüsselkompetenz für Beruf und Gesellschaft und stehen ebenso im Fokus des sprachsensiblen Fachunterrichts. Eine Grundthese desselben besagt, dass die Lernenden so wenig Sprachhilfen wie möglich erhalten, „aber so viele, wie individuell zum erfolgreichen Bewältigen der Sprachsituation nötig.“ [Lei13, S.6] Damit ist ein Differenzierung impliziert, die sich im gezielten Einsatz von Sprachhilfen niederschlagen kann.

Differenzierung ist ein zentrales Anliegen des sprachsensiblen Fachunterrichts. Wie Leisen schreibt, ist Heterogenität eine Tatsache und keine Wertung [Lei13, S.7]. Angesichts der PISA-Ergebnisse und vieler individueller Eindrücke von Lehrenden ist es auch wenig überraschend, dass in einer Klasse Lernende nahezu aller Leistungsniveaus zu finden sind.

Leisen beschreibt ein Lesekompetenzmodell, das an das PISA-Modell angelehnt ist und leitet daraus Einflussfaktoren ab, die sich auf die Lesekompetenz auswirken. Dabei stehen sich Merkmale des Lesers oder der Leserin und des Textes gegenüber. Auf der Seite der Leser und Leserinnen spielen Vorwissen, Wortschatz, Motivation und lexikalischer Zugriff eine Rolle. Unter lexikalischem Zugriff wird die Zuordnung von Bedeutungen zu Buchstabenfolgen verstanden [Lei13, S.114f]. Dieser Faktor der Worterkennung ist dem hierarchie-niedrigen Bereich des Modells von Rosebrock/Nix zuzuordnen und bündelt sich im Begriff der Leseflüssigkeit (vgl. Abschnitt 3.2.2 und 3.3). Als Leistungskriterien für das Lesen nennt Leisen unter anderem basale Wahrnehmungsprozesse, unter denen er Blickbewegungsverhalten, lexikalischen Zugriff, Sinn- und Formerfassung auf Satzebene und Arbeitsgedächtniskapazität versteht [Lei13, S.127].

Alle hier genannten Kriterien bestätigen den Stellenwert von Leseflüssigkeit im Prozess des Lesens. Im nächsten Abschnitt wird darauf eingegangen, welche Leseanlässe es im Mathematikunterricht geben kann und welche Arten von Texten dabei von Bedeutung sind.

2.7 Lesen im Mathematikunterricht

Im Mathematikunterricht gibt es zahlreiche Leseanlässe. Häufig werden die Texte aus dem Schulbuch stammen, durch Medienvielfalt können diese aber auch aus Zeitungen, oder aus dem Internet entnommen sein [Drü12, S.4f]. Drüke-Noe unterscheidet bei mathematischen Texten Instruktionstexte zum Erwerb neuen Wissens, und Aufgabentexte, die eine Bearbeitung verlangen. Aufgabentexte treten im Unterricht häufiger auf [Drü12, S.5] und lassen sich in drei Typen einteilen, deren Grenzen aber nicht klar zu ziehen sind:

Eingekleidete Aufgaben, die eine mathematische Operation verlangen, deren Sachbezug fadenscheinig und ersetzbar ist.

Textaufgaben, als Mitteltyp, die einen nachvollziehbaren Sachbezug haben und dieser auch eine Rolle bei der Bearbeitung spielt.

Sachaufgaben beziehen sich auf ein Problem, zu dem keine eingrenzende, sondern eine offene Aufgabe gestellt wird. Damit sind auch verschiedene Lösungswege und Lösungen möglich [Jor11, S.51f].

Im Folgenden wird der Begriff „Textaufgabe“ als Oberbegriff für diese drei Typen verwendet. Höfert nennt als mathematikspezifische Anforderungen von Textaufgaben das Verstehen von Aussagen über räumlich-zeitliche Zusammenhänge, Kausalzusammenhänge, Relationen (größer als, Vierfache, die Hälfte von, ...) und Quantoren (alle, mindestens eins, genau zwei, ...). Dazu bedarf es Fähigkeiten in Klassifikation, der Ordnung von Elementen nach Kriterien, Volums- und Anzahlinvarianz, räumliche und zeitliche Orientierung [Höf06, S.28f].

Jordan beschreibt ein Modell für den Prozess des Bearbeitens von Textaufgaben, das „Situation Problem Solver"-Modell (*SPS-Modell*). Es gliedert den Prozess des Lösens einer Textaufgabe in fünf aufeinander folgende Phasen. Zu Beginn steht das Textverständnis, in der Informationen während des Lesens aus dem Text entnommen und verarbeitet werden. Falls eine Fragestellung vorhanden ist, wird danach mit den Informationen ein Problemmodell gebildet. Dieses wird durch einen speziellen Blickwinkel auf den Text erzeugt durch den die Situation zeitlich und funktional in ein geordnetes System abgebildet wird. Damit soll die Struktur der Frage erfasst werden.

In der nächsten Phase wird durch Abstraktion und Reduktion von nicht nötigen Informationen ein mathematisches Problemmodell erstellt. Dieses legt die Art der Verknüpfung der vorhandenen Werte fest.

Die vierte Phase beschreibt die numerische Berechnung einer Lösung. Dabei wird mit Hilfe von mathematischen Operationen eine Lösung der Aufgabe berechnet.

Zum Schluss wird diese Lösung interpretiert und überprüft, ob sie sinnvoll erscheint. Es wird von Jordan erwähnt, dass es sich bei diesem Modell um einen idealisierten Bearbeitungsprozess handelt, der in Praxis auch in anderer Reihenfolge oder mit Auslassungen stattfinden kann [Jor11, S.56f].

Dieses Modell soll im empirischen Teil dieser Arbeit verwendet werden. Gestützt wird es durch die etablierte Beschreibung mathematischer Lösungsfindung von Polya, die dem SPS-Modell sehr ähnlich ist. Dieser hat schon vor über 60 Jahren das Verstehen einer Aufgabe an den Beginn der Problembearbeitung gestellt [Pol95, S.19f].

Die wichtigste Quelle für Textaufgaben im Mathematikunterricht ist in vielen Fällen das Schulbuch. Wenn diese Aufgaben den Großteil der Klasse über- oder unterfordern, ist es schwierig mit diesen zu arbeiten. In anderen Sprachräumen ist es üblich, Texte, die im Unterricht eingesetzt werden, nach Lesbarkeitsformeln zu klassifizieren. Damit hat die Lehrperson einen Anhaltspunkt bei der Auswahl von Texten und muss nicht alle verwendeten Texte einordnen und nötigenfalls anpassen. Das übersteigt überdies die Kapazitäten einer Fachlehrkraft.

2.8 Mathematische Lesekompetenz

In Untersuchungen zur Lesekompetenz im Mathematikunterricht [Höf06] und fachlichen Artikeln zu diesem Thema [Drü12][Reb12][MP12][Jor11] wird eine mathematische Lesekompetenz konstatiert, die im SPS-Modell den ersten drei Phasen zugeordnet werden kann. Diese Lesekompetenz teilt sich in die sprachliche Ebene, die Ebene der Kontexte und die mathematische Ebene, die jedoch nicht scharf voneinander getrennt sind. In Zusammenhang mit Leseflüssigkeit ist die sprachliche Ebene von Bedeutung. Diese besteht wiederum aus Wort-, Satz- und Textebene. Die Besonderheiten der mathematischen Fachsprache werden auf diese Ebenen aufgeteilt [Drü12, S.6f].

Damit kann mathematische Lesekompetenz als Adaption des Modells von Rosebrock/Nix (siehe Abschnitt 3.2.2) gesehen werden, indem die Prozessebene in hier beschriebener Weise angepasst ist. Die Subjekt- und soziale Ebene bleiben dabei unverändert.

Drüke-Noe beschreibt Maßnahmen, um beim Lesen von mathematischen Texten zu unterstützen. Diese können Lesestrategien, wie sie aus der deutschen Fachdidaktik bekannt sind, in leicht adaptierter Form sein. Konkret können das vorgegebene Fragen zu einem Text sein, die beantwortet werden müssen, oder Fragen, die die Schülerinnen und Schüler selbst an den Text stellen müssen (vor oder nach dem Lesen). Eine weitere mögliche Strategie ist das farbige Markieren von Fachbegriffen, die zuvor bekannt sein müssen [Fer09, S.10ff].

In Frage kommen auch Darstellungstransfers von Inhalten, wie sprachliche Verlaufsbeschreibungen von Funktionsgraphen, oder Ablaufdiagramme von Prozessen [Drü12, S.10].

3 Methoden

3.1 Leseprotokoll

Da Leseflüssigkeit einen zentralen Faktor in der Lesekompetenz darstellt (siehe Abschnitt 3.3) und im Fokus dieser Arbeit steht, stellt sich die Frage, wie Probleme in der Leseflüssigkeit diagnostiziert werden können. Dazu schlagen Rosebrock/Nix vor, das Lautlesen zu beobachten, um anhand von Leitfragen eine Einschätzung der Lesegeschwindigkeit der Schülerin oder des Schülers vorzunehmen. Eine Weiterentwicklung davon, die deutlich präziser ist, stellt das Lautleseprotokoll dar. Diese Methode stammt aus der angloamerikanischen Forschung und ist dort gut etabliert [RN11, S.82f].

Bei einem Lautleseprotokoll liest eine Schülerin oder ein Schüler der Lehrperson in einer eins-zu-eins-Situation eine Minute lang einen Text vor. Die Lehrperson notiert sich die Anzahl der gelesenen Wörter, der auftretenden Fehler, der Füllwörter und die Intonation [RN11, S.83f].

Diese Methode ist relativ einfach anzuwenden und kann innerhalb einer Unterrichtseinheit mit einer ganzen Klasse durchgeführt werden. Werden Leseprotokolle regelmäßig angefertigt, können damit Fortschritte oder gegebenenfalls Förderbedarf sichtbar gemacht werden. So zeigt sich etwa bei Untersuchungen im angloamerikanischen Sprachraum, dass die Leistungen nach den Sommerferien deutlich geringer sind als davor [RN11, S.73].

Für ein Lautleseprotokoll sind Texte geeignet, die nicht im Frustrationsniveau für den Großteil der Klasse liegen (sollten). Wie spannend, lustig oder interessant der Text ist, also der motivationale Aspekt, spielt dabei ebensowenig eine Rolle, wie der inhaltliche Aspekt. Nur der sprachliche Aspekt, also die strukturelle Komplexität der Texte, ist ausschlaggebend. Um diesen objektiv zu bestimmen, wurden zahlreiche Lesbarkeitsformeln, großteils für englischsprachige Texte, entwickelt [RN11, S.71f]. Diese ordnen Texten einen numerischen Wert zu, der deren Schwierigkeit angibt.

3.1.1 Lesbarkeitsindex Lix

Eine dieser Formeln ist der Lesbarkeitsindex Lix, der 1968 in Schweden entwickelt und kurz darauf für die deutsche Sprache adaptiert wurde. Er lässt sich vergleichsweise einfach und elektronisch sehr zuverlässig berechnen. Zudem wurde gezeigt, dass der Lix im Vergleich zu anderen, weit komplexeren Formeln, ebenso valide ist [RN11, S.76]. Konkret wird der Lix mit folgender Formel errechnet, die die strukturellen Merkmale der durchschnittlichen Satzlänge und dem relativen Anteil „langer“ Wörter, die aus mehr als sechs Buchstaben bestehen, einbezieht:

$$\mathrm{LIX} = \frac{A}{B} + \frac{C \cdot 100}{A}$$

wobei A die Anzahl der Wörter, B die Anzahl der Sätze und C die Anzahl der Wörter mit mehr als sechs Buchstaben ist.

Bemerkenswert ist, dass Werte unterschiedlicher Qualität addiert werden. Einer der Summanden ist die durchschnittliche Satzlänge, die theoretisch positiv unbeschränkt ist. Der andere Summand ist der Prozentsatz an langen Wörtern von der Gesamtzahl der Wörter, der theoretisch zwischen 0 und 100 liegen kann.

Der empfohlene Wert des Lix wird für erzählende Texte ab der achten Schulstufe mit 38 angegeben. Dieser Richtwert liegt an der Grenze zwischen den Kategorien „leichter Text“ und „Belletristik“ [RN11, S.75f].

In Abschnitt 3.7 wird erwähnt, dass Angaben zur Textkomplexität, wie der Lix-Wert, hilfreiche Informationen für Lehrkräfte darstellen können. Instruktionstexte sind in Schulbüchern jedoch nach keiner Anspruchsdimension eingestuft und gekennzeichnet, was aufgrund ihrer Alternativlosigkeit auch nicht sinnvoll erscheinen würde. Übungsaufgaben sind in vielen Schulbüchern nach unterschiedlichen Kriterien wie Handlungsbereichen oder Schwierigkeitsgraden eingestuft, zusätzlich jedoch können sich Aufgaben derselben Einstufung in ihrem sprachlichen Anspruch erheblich unterscheiden.

Dazu seien die folgenden beiden Aufgaben aus einem Schulbuch vorgestellt, die beide eine identische Kennzeichnung der Handlungsbereiche und Schwierigkeit haben.

> Laut dem Forscher Stanley S. Stevens besteht bei unseren Sinnesorganen ein Zusammenhang zwischen der objektiven Reizstärke R und dem subjektiven Empfinden E. Sehr oft lässt sich dieser Zusammenhang mittels der Funktionsgleichung $E(R) = k \cdot R^N$ beschreiben. Der Wert k entspricht dabei einem konstanten Wert, der nur von der jeweiligen Maßeinheit abhängig ist. Vergleichen Sie die Graphen für folgende Sinnesreize und interpretieren Sie die sichtbaren Unterschiede. [Sch+13, S.79]

> Im 19. Jahrhundert benutzte man in Australien Kamele für den Lastentransport. In den 1920er-Jahren wurden sie freigelassen und haben sich seitdem stark vermehrt. Heute gibt es dort ca. 600 000 wildlebende Kamele. Ihre Anzahl verdoppelt sich ca. alle 8 Jahre. Die Zunahme der Kamele kann durch die Funktion $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$ angenähert werden. Berechnen Sie die Konstante λ. Berechnen Sie die jährliche Zunahme in Prozent. Berechnen Sie, wie viele Kamele vor 80 Jahren freigelassen worden sein müssten, wenn sie sich die ganze Zeit im selben Tempo wie jetzt vermehrt hätten. (Tatsächlich waren es 20000.) Beschreiben Sie, wie Sie graphisch ermitteln können, wann es 1 Million Tiere gibt. [Sch+13, S.121]

Wie in diesen Beispieltexten treten insbesondere bei mathematischen Texten häufig Formeln, Zahlen und Variablennamen auf. Wie diese bei der Lix-Berechnung zu werten sind, ist nicht definiert. Bei unterschiedlichen Varianten der Wertung weicht der Lix-Wert jedoch nicht um mehr als 5 Punkte ab. Die folgenden Werte wurde mit einem Online-Werkzeug[1] berechnet.

Die erste Aufgabe weist einen Lix-Wert von 67,6 auf, was einer hohen Komplexität entspricht. Die zweite Aufgabe unterscheidet sich mit einem Lix-Wert von 37,3 und damit niedriger Komplexität deutlich von der ersten. An dieser großen Differenz wird sichtbar, dass Textkomplexität ein Kriterium zur Einstufung von mathematischen Aufgaben sein kann.

[1] https://www.psychometrica.de/lix.html

3.2 Mathematische Kompetenzen

Die mathematischen Kompetenzen sollen anhand einer Mathematikschularbeit gemessen werden, da diese eine hohe Relevanz für die Schülerinnen und Schüler hat und damit auch von einer hohen Leistungsbereitschaft auszugehen ist. Es wird außerdem angenommen, dass eine Schularbeit einen ausreichenden Einblick in die mathematischen Kompetenzen geben kann und deshalb mit einem eigens erstellten Testformat vergleichbar ist.

Da sich die Schularbeiten aus verschiedenen erhobenen Klassen unterscheiden, soll ein Kriterienkatalog für jede Schularbeit erarbeitet werden. Ein Kriterium erfasst, ob eine bestimmte Teilleistung erbracht ist, was mit einem Punkt gezählt wird. Ist diese Teilleistung nicht oder nicht vollständig erbracht, wird kein Punkt gezählt. Dieses binäre System ist an die schriftliche Reife- und Diplomprüfung angelehnt. Die Formulierung der Teilleistungen, die die Kriterien erfassen, basieren auf den Bildungsstandards der achten Schulstufe und dem SPS-Modell (siehe Abschnitt 3.7) für die Bearbeitung von Textaufgaben.

Die Erhebung mittels einer Schularbeit soll auf zwei Ebenen geschehen. Einerseits ist dies die Ebene „mathematisches Textverständnis“. Dafür werden Kriterien erstellt, die auf die Übersetzung von Text in mathematische Struktur fokussiert sind. Diese decken in Bezug auf das SPS-Modell die Phasen des Textverständnisses, der Problemmodellbildung und Reduktion zu einem mathematischen Modell ab. Außerdem orientieren sie sich an den Handlungsbereichen „Darstellen, Modellieren (H1)“, „Interpretieren (H3)“ und „Argumentieren, Begründen (H4)“ der Bildungsstandards für Mathematik der achten Schulstufe [BIF13].

Andererseits soll die Ebene „Operieren“ Kriterien beinhalten, die operationale mathematische Fähigkeiten ins Zentrum stellen. Im SPS-Modell entspricht dies den Phasen der numerischen Berechnung und der Lösungsinterpretation. Bezüglich der Bildungsstandards sind die Kriterien dieser Ebene den Handlungsbereichen „Rechnen, Operieren (H2)“ und „Interpretieren (H3)“ zuzuordnen [BIF13].

Sollte eine Aufgabe eine der Ebenen nicht verlangen, wird dafür kein Kriterium erstellt. Bei den unterschiedlichen Schularbeiten kann es zu einer unterschiedlichen Anzahl an Kriterien kommen. Der arithmetische Mittelwert der Ergebnisse aller Kriterien einer Schularbeit soll eine vergleichbare Variable liefern.

3.3 Auswertungsmethoden

Für die Auswertung ergeben sich folgende relevante Variablen:

W = Anzahl der Wörter aus dem Lautleseprotokoll

L = Anteil der falsch gelesenen Wörter aus dem Lautleseprotokoll

T = Mittelwert der erfüllten Kriterien zur Ebene „mathematisches Textverständnis“

O = Mittelwert der erfüllten Kriterien zur Ebene „Operieren“

3.3.1 Korrelation

Da eine Korrelation zwischen den erhobenen Variablen angenommen wird, bietet sich zur Analyse der Daten der Korrelationskoeffizient an. Als Voraussetzung für diesen sollen die Variablen normalverteilt sein, wovon ausgegangen wird. Es wird die Pearson-Korrelation verwendet, da alle Variablen intervallskaliert sind. Der Koeffizient für die Zufallsvariablen X und Y wird folgendermaßen berechnet [HEK09, S.546]:

$$r_{X,Y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}}.$$

Dieser Koeffizient, der zwischen $+1$ und -1 liegen kann, gibt an, ob es einen statistischen Zusammenhang zwischen den Variablen gibt, kann aber keine Aussage über das Gegenteil machen.

Vom Korrelationskoeffizienten ausgehend, wird eine lineare Regression nach der Methode der kleinsten Quadrate angewandt. Damit soll eine gegebenenfalls lineare Abhängigkeit der Variablen gezeigt werden. Sollten die Korrelationskoeffizienten gering, also nahe null, ausfallen, ist dies allerdings kein Indiz dafür, dass die Variablen nicht korrelieren. Es gibt nur Auskunft darüber, dass mit dieser Methode kein linearer Zusammenhang festgestellt werden kann. Die Güte der Regression wird durch das Bestimmtheitsmaß $B_{Y,X} = r_{X,Y}^2$ eingeordnet [HEK09, S.579].

Die Aussagekraft dieser Korrelationsauswertung ist beschränkt. Sie wird aber aus zwei Gründen eingesetzt: einerseits, da mit ihr kein großer Aufwand verbunden ist, andererseits um eine tendenzielle Ausrichtung der Korrelationen zu zeigen.

3.3.2 Clusteranalyse

Um sich der Forschungsfrage nach den Zusammenhängen von Leseflüssigkeit und mathematischen Kompetenzen anzunähern, wurde die Hypothese aufgestellt, dass es eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern gibt, die sowohl eine geringe Leseflüssigkeit als auch geringe Werte bei den Kriterien der mathematischen Kompetenzen aufweisen.

Um Gruppen wie diese in einer Stichprobe zu finden, ist die Clusteranalyse gut geeignet. Sie fasst nach einem Algorithmus die einzelnen Objekte, hier die Leistungen von Schülerinnen und Schülern, zu Gruppen zusammen. Um die folgende Beschreibung verständlicher zu machen, werden diese Schülerinnen- und Schülerleistungen als *Objekte* und Zusammenfassungen von Objekten als *Gruppen* bezeichnet. In der Fachliteratur ist oft als Synonym für *Gruppen* der Begriff *Cluster* gebräuchlich. Eine erste Überlegung betrifft die Anzahl der erwarteten Gruppen. Ist die Anzahl der erwarteten Gruppen festgelegt, sind partitioniernde Verfahren geeignet. Da die Anzahl jedoch nicht aus der Forschungsfrage hervorgeht, bietet sich ein Verfahren an, das eine sinnvolle Gruppenanzahl selbst finden lässt. „Sinnvoll“ bezieht sich hier auf die numerischen Zusammenhänge der Daten und muss nicht auch im konkreten Sachverhalt zielführend sein. Dies können hierarchische Verfahren leisten, die in divisive und agglomerative Verfahren unterteilt werden.

Divisive Verfahren gehen von einer Gruppe aus, die alle Objekte beinhaltet und diese dann schrittweise verfeinert, bis alle Objekte in einer eigenen Gruppe sind.

Agglomerative Verfahren funktionieren in die entgegengesetzte Richtung. Sie fassen die einzelnen Objekte zu immer größeren Gruppen zusammen, um schließlich eine Gruppe mit allen Objekten zu erhalten. In der praktischen Anwendung haben sich agglomerative Verfahren durchgesetzt und werden auch in dieser Arbeit zum Einsatz kommen.

Da kein Informationsgehalt gegeben ist, wenn alle Objekte in einer eigenen Gruppe sind, noch alle in einer großen Gruppe vereinigt sind, sollte ein Schritt als „Lösung“ herangezogen werden, bei dem die Gruppenanzahl zwischen eins und der Anzahl der Objekte liegt. Wie eine mögliche Gruppenanzahl ermittelt wird, hängt von der Art des Algorithmus ab, mit dem Gruppen vereinigt werden [Hud03, S.18ff].

Als Grundlage für agglomerative Verfahren kann ein Distanzmaß herangezogen werden. Die Objekte mit der geringsten Distanz werden im jeweiligen Schritt zu einer Gruppe vereinigt. Damit die verschiedenen Variablen der Objekte bei der Abstandsberechnung gleich gewichtet werden, ist es notwendig, die Daten zu standardisieren [Bac+16, S.468]. Dazu werden die Werte x_{kj} jeder Variable j von allen Objekten k folgender Transformation unterzogen:

$$z_{kj} = \frac{x_{kj} - \bar{x}_j}{s_j}$$

mit $\bar{x}_j$ = Mittelwert der Werte der Variable j
und s_j = Standardabweichung der Werte der Variable j [Bac+16, S.512].

Da die vorhandenen Variablen intervallskaliert sind, wird als Distanzmaß die quadrierte euklidische Distanz d verwendet. Diese ist für zwei Objekte k und l definiert als

$$d_{k,l} = \sum_{j=1}^{J} |z_{kj} - z_{lj}|^2$$

wobei z_{kj} der standardisierte Wert der Variable j von Objekt k ist und J die Anzahl der Variablen angibt.

Damit kann der erste Schritt der Clusterung durchgeführt werden. Allerdings ist noch offen, wie Abstände zwischen Gruppen und Objekten bestimmt werden.

Dazu gibt es mehrere etablierte Verfahren, von denen sich besonders das Ward-Verfahren hervorhebt. Dieses soll im Gegensatz zu anderen meistens „sehr gute Partitionen“ finden. Die Voraussetzungen für das Ward-Verfahren werden durch die erhobenen Daten erfüllt [Bac+16, S.489], weshalb dieses in der vorliegenden Untersuchung zum Einsatz kommt.

Die Definition des Ward-Verfahrens zieht zur Gruppenbildung nicht die Abstände zwischen den Gruppen heran, wie dies bei zahlreichen andere Methoden der Fall ist, sondern vereinigt Gruppen, die ein Varianzmaß innerhalb der Gruppen möglichst gering halten. Dieses wird Fehlerquadratsumme V_g für Gruppe g genannt und ist definiert als

$$V_g = \sum_{k=1}^{K_g} \sum_{j=1}^{J} (z_{kjg} - \bar{z}_{jg})^2$$

wobei z_{kjg} der standardisierte Wert der Variable j des Objekts k in Gruppe g und $\bar{z}_{jg}$ der standardisierte Mittelwert der Variable j in der Gruppe g ist [Bac+16, S.485]. Die Variable k summiert hier über alle Objekte in der Gruppe g.

Im Folgenden ist mit Fehlerquadratsummen die Summe der V_g aller Gruppen gemeint. Da es nicht praktikabel ist, für alle möglichen Gruppen das Varianzmaß zu berechnen, wird stattdessen mit einer rekursiven Abstandsformel ein Distanzmaß bestimmt, das den Fehlerquadratsummen gleichwertig ist. Die Anzahl der Objekte in Gruppe C_i wird mit n_i bezeichnet und der Abstand zwischen Gruppe C_i und C_j als $d(C_i, C_j)$. Der Abstand zwischen einer Gruppe C_k und der Vereinigung der Gruppen C_i und C_j wird bestimmt durch

$$\begin{aligned} d(C_k, C_i \cup C_j) = \frac{n_i + n_k}{n_i + n_j + n_k} \cdot d(C_i, C_k) + \frac{n_j + n_k}{n_i + n_j + n_k} \cdot d(C_j, C_k) \\ - \frac{n_k}{n_i + n_j + n_k} \cdot d(C_i, C_j) \end{aligned}$$

[Bac+16, S.484f].

Wenn zwei Gruppen nur aus einem Objekt bestehen, wird als Abstand zwischen ihnen die quadrierte euklidische Distanz verwendet. Damit ist die Abstandsformel vollständig definiert. Es kann gezeigt werden, dass die so berechneten Distanzwerte der Hälfte der Erhöhung der Fehlerquadratsummen entsprechen [Bac+16, S.485]. Es werden folglich in jedem Schritt diejenigen Objekte oder Gruppen vereinigt, deren Distanzwert am geringsten ist.

Um zu entscheiden, wie viele Gruppen sinnvoll sind, wird die Veränderung der Fehlerquadratsummen in Abhängigkeit von der Gruppenanzahl in einem Koordinatensystem dargestellt. Ist in dieser Grafik ein „Knick“ zu erkennen, kann dieser als Entscheidungsgrundlage dienen. Diese Methode wird „Elbow-Kriterium“ genannt [Bac+16, S.495]. In Abbildung 4.1 ist so ein „Knick“ deutlich bei drei Clustern zu erkennen und würde damit die diese Gruppenanzahl empfehlen. In Fällen wie in Abbildung 4.2 kann mit dieser Methode keine Aussage über die optimale Clusteranzahl getroffen werden. Im Zweifelsfall können die Steigungsdifferenzen eine gewählte Lösung untermauern.

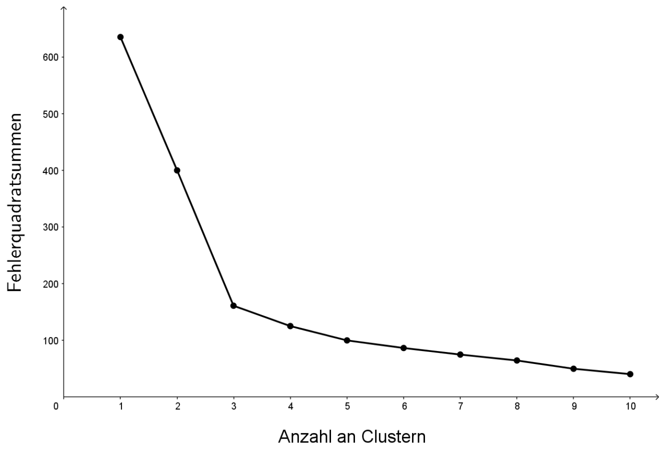


Abbildung 3.1: Elbow-Kriterium Beispiel 1

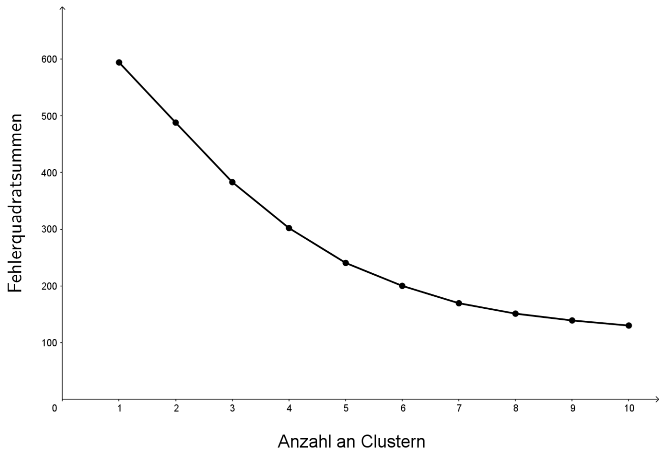


Abbildung 3.2: Elbow-Kriterium Beispiel 2

4 Untersuchung und Ergebnisse

4.1 Stichprobe

Im Folgenden wird der Begriff „Probanden“ in der maskulinen Form für die Menge der Schülerinnen und Schüler verwendet, die an der Untersuchung teilgenommen haben und schließt damit alle Geschlechter mit ein. Untersucht wurde an zwei berufsbildenden höheren Schulen in Wien, in insgesamt drei Klassen. Die Stichprobengröße beträgt $n = 44$ und setzt sich folgendermaßen zusammen:

- Klasse A: 2. Jahrgang Aufbaulehrgang, Handelsakademie (13. Schulstufe), 21 SchülerInnen, davon 13 in der Stichprobe
- Klasse B: 3. Jahrgang, Handelsakademie (11. Schulstufe), 23 SchülerInnen, davon 15 in der Stichprobe
- Klasse C: 3. Jahrgang, Höhere Technische Lehranstalt (11. Schulstufe), 24 SchülerInnen, davon 16 in der Stichprobe

Die nicht berücksichtigten Schülerinnen und Schüler sind auf fehlende Einverständniserklärungen, Leseprotokolle oder Schularbeiten zurückzuführen. Aus pragmatischen Gründen war es nicht möglich, die Stichprobe innerhalb eines angemessenen Zeitraums zu vergrößern.

4.2 Leseflüssigkeit

Zur Erhebung der Leseflüssigkeit für die Sekundarstufe II stand kein standardisiertes Diagnosewerkzeug zur Verfügung. Zur Anwendung kam deshalb das Leseprotokoll, wie es in Kapitel 4.1 beschrieben wurde [RN11]. Es erlaubt mit verhältnismäßig geringem Aufwand eine aussagekräftige Diagnostik und kann an die jeweilige Klasse angepasst werden.

Um eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern mit dem Leseprotokoll zu testen, wurde ein Text ausgesucht, der für die Gruppe leicht lesbar sein sollte, sich also an dem niedrigsten Leistungsniveau der Gruppe orientiert. Anhand des Lix-Richtwertes (vgl. Abschnitt 4.1.1) von 38 für die achte Schulstufe für erzählende Texte wurde eine Auswahl getroffen. Diese fiel auf einen Text aus einem Printmedium mit einem Lix von 38,9, was einem niedrigen Komplexitätsgrad entspricht. Damit sollte der Text von den Schülerinnen und Schülern auf dem Unabhängigkeitsniveau (vgl. Abschnitt 3.3) gelesen werden können. Insbesondere deswegen, da die Schulstufe der erhobenen Klassen deutlich über dem des Richtwertes liegt. Der verwendete Text befindet sich im Anhang A.1).

Nach einigen Versuchen hat sich besonders die Technik bewährt, dem Prüfling gegenüber zu sitzen. Diese oder dieser liest von einem Blatt laut vor, auf dem sich nur der Text befindet. Der Prüfende hat eine eigene Kopie des Textes für jede Schülerin und jeden Schüler. Auf dieser werden während des Lesens sämtliche Fehler und Füllwörter notiert, sowie Anmerkungen zur Intonation vermerkt. Nach Ablauf einer Minute wird eine Marke gesetzt, um die gelesenen Wörter zu bestimmen. Dadurch ist sichergestellt, dass der Prüfling durch die Notizen nicht gestört wird und es besteht außerdem nur ein geringer Schreibaufwand für den Prüfenden.

Als Variablen dienen die Anzahl der gelesenen Wörter, sowie die Anzahl der korrigierten und nicht korrigierten Fehler. Da korrigierte Fehler zwar den Sinn des Textes bewahren, aber den Lesefluss unterbrechen und damit auch die lokale Kohärenzbildung erschweren, werden sie für die Berechnung der Fehleranteile berücksichtigt. In der Literatur ist der Umgang mit den unterschiedlichen Fehlertypen nicht erwähnt. Dementsprechend wird die Summe der korrigierten und nicht korrigierten Fehler für die Auswertung des Fehleranteils herangezogen. Da es sich um einen Text mit geringem Anforderungsniveau handelt, werden Schülerinnen und Schüler mit Fehleranteilen von über 3% oder weniger als 100 Wörtern pro Minute als Risikogruppe eingestuft [RN11, S.62]. Da alle Schülerinnen und Schüler den selben Text lesen, ist die Vergleichbarkeit gewährleistet.

4.3 Ergebnisse – Leseprotokoll

Der Mittelwert $\bar{x}_w$ der Anzahl der gelesenen Wörter W[1] beträgt 155,9 mit einer Standardabweichung von $s_w = 17{,}9$.

Der Mittelwert $\bar{x}_L$ der Fehleranteile L liegt bei 1,77% mit einer Standardabweichung von $s_L = 1{,}22\%$. In Abbildung 5.1 sind die Ergebnisse der Leseprotokolle abgebildet. Jede Markierung repräsentiert das Ergebnis eines Protokolls. Die im vorherigen Abschnitt erwähnte 3%-Grenze ist durch eine Linie gekennzeichnet.

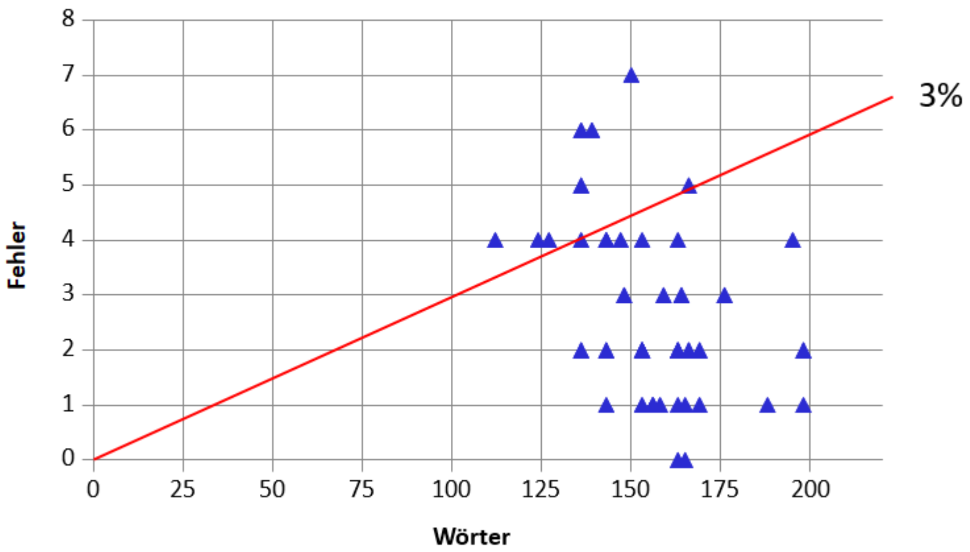


Abbildung 4.1: Ergebnisse des Leseprotokolls

Von der Stichprobe sind acht Probanden der Risikogruppe mit einem Fehleranteil $> 3\%$ zuzuordnen, was einem Anteil von etwa 18% der Probanden entspricht. Dieser Wert liegt nahe an den 20% der Schülerinnen und Schüler, die nach der PISA-Studie nicht sinnerfassend lesen können [SB16]. Bei der Wortanzahl liegt mit 32 Probanden der Großteil zwischen 140 und 170 Wörtern und damit innerhalb der Standardabweichung. Nur vier Probanden haben deutlich über 180 Wörter in einer Minute gelesen. Unter 100 Wörtern und damit im Risikobereich lag keiner der Probanden. Die Fehleranzahl ist gleichmäßig zwischen eins und vier verteilt,

[1] es werden die Variablennamen aus Abschnitt 4.3 verwendet

zwei Probanden haben komplett fehlerfrei gelesen und fünf waren mit mehr als vier Fehlern in der letzten Quantile. Die Intonation wurde zwar im Kommentar festgehalten, aber nicht systematisch bewertet und kann daher nicht berücksichtigt werden.

4.4 Kriterien der Schularbeiten

Nach der Beschreibung aus Abschnitt 4.2 sind Kriterien für die Ebenen „mathematisches Textverständnis“ und „Operieren“ für jede Klasse erstellt worden. Diese beziehen sich direkt auf die jeweilige Schularbeiten. Die Angaben der Schularbeiten sind im Anhang A.2 zu finden. Es kann pro Kriterium ein Punkt erreicht werden. Der Anteil der erreichten Punkte von den möglichen bildet eine Variable pro Ebene.

Die folgende Auflistung beinhaltet die Kriterien nach Klasse und Ebene getrennt. Zuerst ist die Aufgabennummer der Schularbeit angeführt, auf die sich das Kriterium bezieht, gefolgt von der dafür erforderlichen Leistung.

- Klasse A: mathematisches Textverständnis
  - 1.a+b) Richtigen Zeitabstand zwischen den Angaben (8 Stunden) verwendet
  - 1.c) $a = e^{\lambda}$ oder Gleichwertiges
  - 1.d) $N(t)$ mit $2 \cdot N_0$ ersetzt, oder gleichwertiger Ansatz
  - 1.e) N_0 als Antwort erkannt oder gleichwertig
  - 2.a + Angabe) Zwei Zeitlinien mit korrekten Abständen und Werten gezeichnet.
  - 3.a) Kest berücksichtigt
- Klasse A: Operieren
  - 1.a+b) Formel richtig umgeformt/bestimmt
  - 1.d) Richtig berechnet
  - 2.b) Beträge richtig berechnet

  - 3.a) Richtig berechnet (unabhängig, ob Kest berücksichtigt, oder nicht)
  - 3.b) Richtig auf i umgeformt

  Zu Aufgabe 4 wurden keine Kriterien erstellt, da diese Aufgabe nur in Excel zu lösen war und damit die Nachvollziehbarkeit des Lösungswegs nicht gewährleistet ist.

- Klasse B: mathematisches Textverständnis
  - 1.1) Funktion richtig aufgestellt
  - 1.2) Zunahme als Lösung
  - 1.3) 75kg als Ergebnis der Funktion eingesetzt
  - 2.1) 100 Jahre und 96% in Berechnung richtig berücksichtigt
  - 2.2) $a = e^{\lambda}$ oder Gleichwertiges
  - 2.3) Halbwertszeit korrekt mathematisch abgebildet
  - 2.4) Prozentsatz als Ergebnis
- Klasse B: Operieren
  - 1.2) Richtig berechnet
  - 1.3) Richtig berechnet
  - 2.3) Richtig berechnet
  - 2.4) Richtig berechnet

  Bei Klasse B war eine Hälfte der Schularbeit auf Englisch. Diese Hälfte wurde nicht berücksichtigt, da die zu vergleichende Variable Leseflüssigkeit auf Deutsch gemessen wurde und Englischkenntnisse in dieser Untersuchung keine Rolle spielen.

- Klasse C: mathematisches Textverständnis
  - 1. zumindest 3 sinngemäße Antworten
  - 2.2 sinngemäße Antwort
  - 3.1 Beschriftung und Funktionsgleichung sind richtig vorhanden

  - 4.1 Beschriftung richtig und Begründung vorhanden
  - 4.2 Funktionen gleichgesetzt
  - 6.1 Koordinaten richtig bestimmt
  - 6.2 Rotationsformel für y-Achse (mit Umkehrfunktion) verwendet und Grenzen $(5,h)$ richtig eingesetzt
  - 6.3 Formel von 6.2 verwendet und 100 für $V(h)$ eingesetzt

- Klasse C: Operieren
  - 2.1 Formel richtig
  - 3.2 Formel richtig
  - 4.2 Richtiges Ergebnis
  - 4.3 Richtiges Ergebnis
  - 5. Richtiges Ergebnis
  - 6.2 Richtiges Ergebnis
  - 6.3 Richtiges Ergebnis

Die Bonusaufgabe wurde nicht berücksichtigt, da sie über die normalen Anforderungen der Schularbeit hinausgeht.

4.5 Ergebnisse – Kriterien der Schularbeiten

Der Mittelwert $\bar{x}_O$ der Kriterien für die Ebene „Operieren“ O liegt bei rund 0,500 mit einer Standardabweichung von $s_O = 0{,}304$. Für die Ebene „mathematisches Textverständnis“ T liegt der Mittelwert $\bar{x}_T$ der Kriterien bei rund 0,603 mit einer Standardabweichung von $s_T = 0{,}252$. In Abbildung 5.2 sind die Punktedurchschnitte in den beiden Ebenen für alle Probanden dargestellt. Je zwei sich berührende Balken gehören zu einem Probanden. Wird ein Balken von keinem anderen berührt, ist der zweite Wert 0. Die Probanden sind nach der Summe der Kriteriendurschnitte aus beiden Ebenen sortiert.

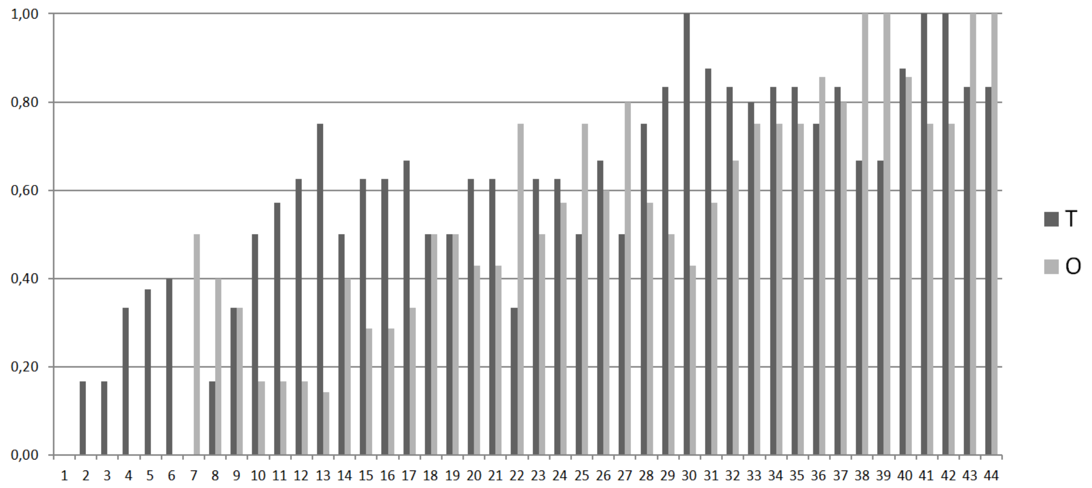


Abbildung 4.2: Ergebnisse der Kriterien der Schularbeit

Bei der Ebene „Operieren“ haben 24 Probanden, das entspricht etwa 54%, weniger oder genau die Hälfte der Kriterien erfüllt und zehn Probanden (ca. $22,7\%$) nicht einmal ein Viertel.

Beim „mathematischen Textverständnis“ hatten 16 Probanden, das sind rund 36%, genau oder weniger als 0,5 im Punktedurchschnitt und fünf Probanden (ca. $11,4\%$) unter 0,25 im Punktedurchschnitt.

Die Ergebnisse beim „Operieren“ sind im Mittel schlechter ausgefallen als beim „mathematischen Textverständnis“. Bei der Betrachtung einzelner Probandenleistungen fällt auf, dass es Fälle mit starker Abweichung der Ergebnisse auf beiden Ebenen gibt. Der Proband mit der größten Ebenendifferenz hat die Ergebnisse $T = 0{,}75$ und $O = 0{,}14$ und kommt aus Klasse C. Seine Ergebnisse des Leseprotokolls sind mit $W = 147$ und $L = 2{,}72\%$ knapp über der Risikogrenze. Da die Klasse C die Schularbeit mit dem größten Textumfang hat und hier mathematisches Textverständnis[2] explizit gefordert wird (siehe Anhang A.2), kann vermutet werden, dass mathematische Texte und der Umgang damit im Unterricht auch stärker im Mittelpunkt stehen als in den Klassen A und B. Dieser Umstand könnte erklären, warum es diesem Probanden, trotz geringer Leseflüssigkeit, möglich war, relevante Informationen aus komplexen Aufgabentexten zu entnehmen. Das glei-

[2] im Sinne der ersten drei Phasen des SPS-Modells aus Abschnitt 3.7

che Phänomen ist bei drei weiteren Probanden[3] dieser Klasse, aber in keiner der anderen zu beobachten.

Die größte gegenteilige Ebenendifferenz hat ein Proband aus Klasse B mit $T = 0{,}00$ und $O = 0{,}50$. Beim Leseprotokoll liegen die Ergebnisse $W = 159$ und $L = 1{,}89$ im Mittelfeld. Die Schularbeiten der Klasse A und B haben einen deutlich geringeren Textumfang und lassen dadurch die Umkehrvermutung von Klasse C zu, dass mathematisches Textverständnis in den beiden Klassen kein zentrales Anliegen ist. Damit wäre auch das Phänomen erklärbar, dass ein Proband mit mittelmäßiger Leseflüssigkeit kein Kriterium des mathematischen Textverständnisses, jedoch die Hälfte beim Operieren erfüllt hat. Es gibt noch einen weiteren Probanden der das gleiche Ergebnisverhalten aufweist. Auch dieser Proband ist aus Klasse B.

4.6 Ergebnisse der übergreifenden Auswertungen

4.6.1 Korrelation

Die Korrelationskoeffizienten zwischen den Variablen ergeben nach der Formel aus Abschnitt 4.3.1 folgende Werte:

r	W	L	T	O
W	1			
L	-0,562	1		
T	0,000	-0,168	1	
O	0,121	-0,241	0,578	1

Zwischen den domäneninternen Variablen W und L sowie zwischen O und T ist der Korrelationskoeffizient hoch (siehe Abbildung 5.4). Damit kann eine Korrelation (siehe Abschnitt 4.3.1) zwischen mathematischem Textverständnis und operativen Fähigkeiten angenommen werden. Die domänenübergreifenden Ausgleichsgeraden in Abbildung 5.3 haben bloßen Orientierungscharakter.

[3] Zwei davon sind in der Lese-Risikogruppe.

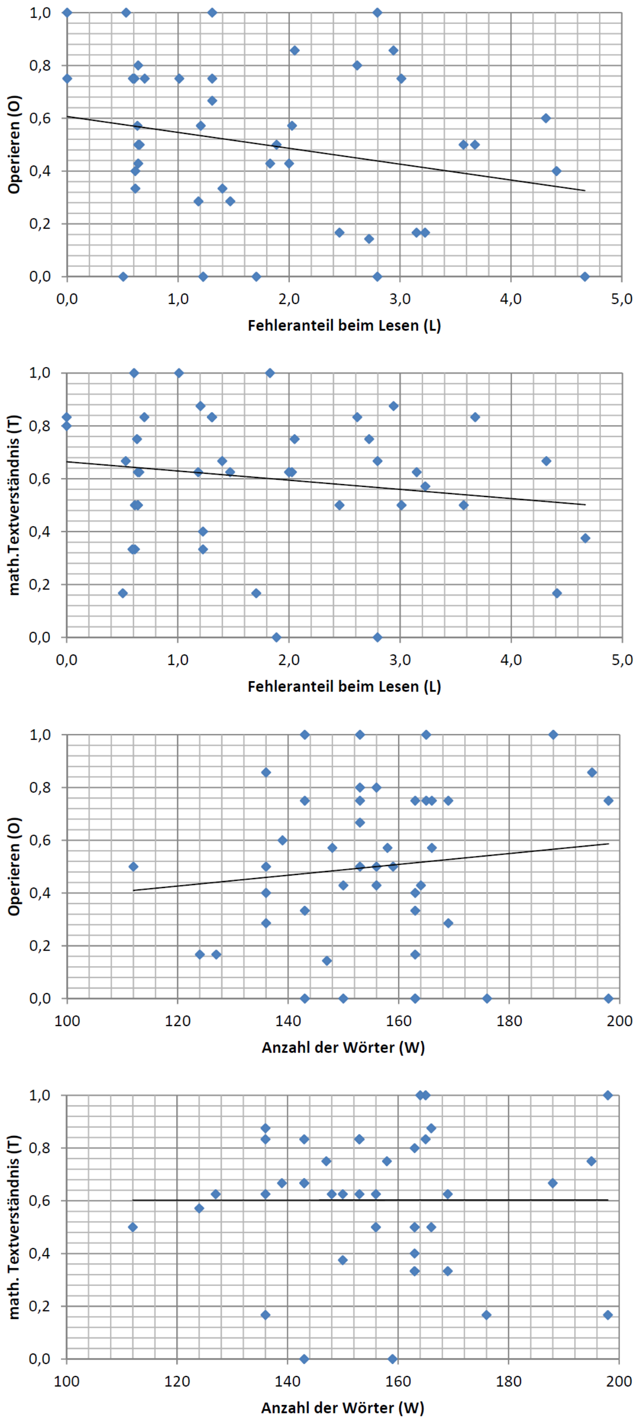
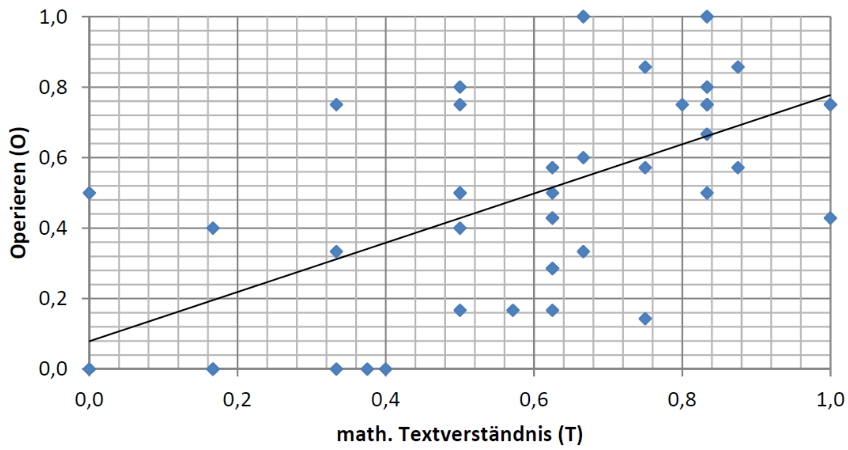


Abbildung 4.3: domänenübergreifende Ergebnisse mit linearer Regression



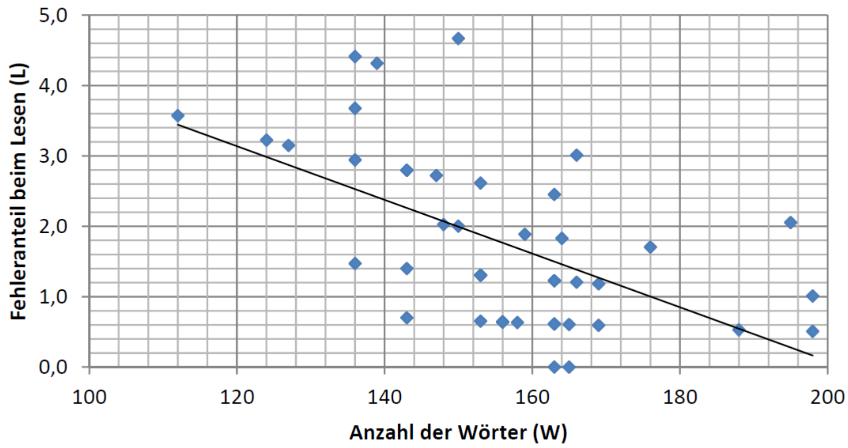


Abbildung 4.4: domäneninterne Ergebnisse mit linearer Regression

Die Korrelationskoeffizienten zwischen den domänenübergreifenden Variablen sind sehr niedrig und lassen keine relevanten Aussagen über lineare Zusammenhänge zu. Das Bestimmtheitsmaß liegt bei diesen unter 0,06, also können nur weniger als 6% der Varianz einer Variable mit der, der anderen erklärt werden. Dennoch deutet das negative Vorzeichen bei r_{LT} und r_{LO} eine erwartete gegenläufige Korrelation an. Ein höherer Fehleranteil würde in diesem Fall niedrigere Werte der Kriterien auf beiden Ebenen erwarten lassen.

4.6.2 Clusteranalyse

Wie in Abschnitt 4.3.2 beschrieben wurde eine Clusteranalyse mit den erhobenen Daten durchgeführt. Dazu wurden die vier Variablen W, L, T, O wie in Abschnitt 4.3 beschrieben, berücksichtigt. Bei der Clusterung hat das Elbow-Kriterium eine ideale Clusteranzahl von drei ergeben, was in Abbildung 5.5 dargestellt wird.

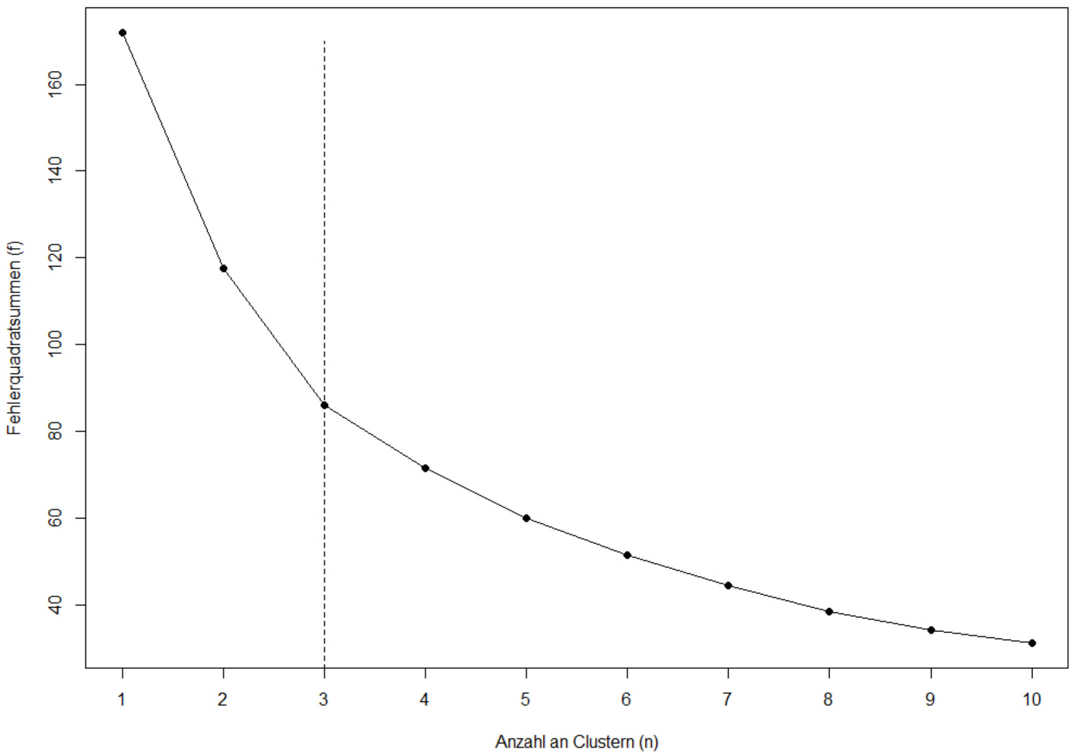


Abbildung 4.5: Optimale Clusteranzahl mit dem „Elbow-Kriterium"

Der sichtbare „Knick" wird durch die Steigungsdifferenzen gestützt: Sei $k_{i,i+1}$ die Steigung des Graphen zwischen i und $i+1$ Clustern, dann gilt $k_{i,i+1} = f_{i+1} - f_i$, wobei f_i die Fehlerquadratsummen bei i Clustern darstellt. Die Steigungsdifferenzen $k_{2,3} - k_{1,2} = 23,06$ und $k_{3,4} - k_{2,3} = 16,75$ sind im Vergleich zu $k_{4,5} - k_{3,4} = 3,24$ deutlich höher. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass sich diese Differenzen ab fünf Clustern nur geringfügig ändern. Deshalb ist die letzte signifikante Steigungsdifferenz bei drei Clustern als Lösung zu wählen.

Eine übliche Darstellung bei agglomerativen Verfahren ist das Dendrogram, das die Schritte der Gruppenbildung sichtbar macht. In Abbildung 5.6 ist das Dendrogram für die vorliegende Clusteranalyse zu sehen. Die blauen Rechtecke zeigen die drei Gruppen, die als Ergebnis der Analyse verwendet werden.

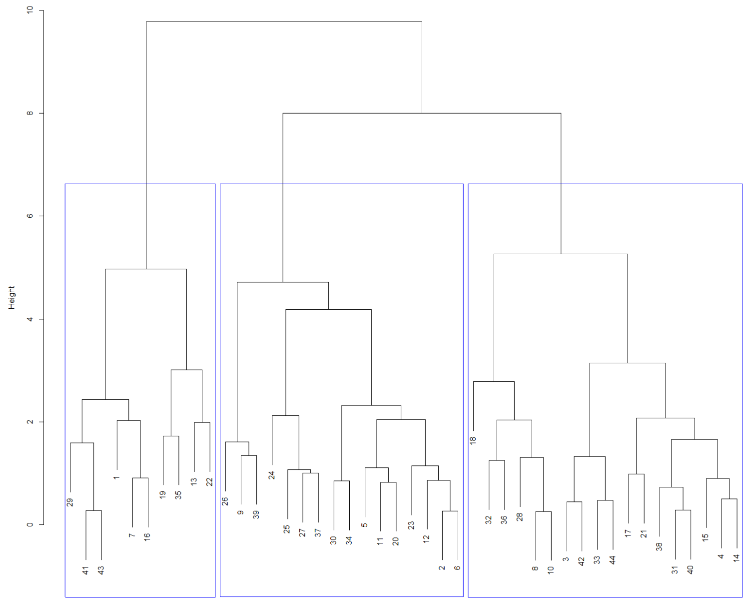


Abbildung 4.6: Cluster Dendrogram mit dem Ward-Verfahren

Die drei gebildeten Gruppen bestehen aus zehn, 16 und 18 Probandenleistungen. Diese zeichnen sich durch folgende Merkmale aus:

1. Schwarz: zehn Leistungen; befinden sich am unteren Ende der gelesenen Wörter, und dem Operieren. Der Fehleranteil ist bei dieser Gruppe am höchsten. Beim mathematischen Textverständnis sind die Werte stark gestreut.

2. Rot: 16 Leistungen; bilden bei mathematischem Textverständnis und Operieren das Spitzenfeld, bei den gelesenen Wörtern teilen sie sich mit der grünen Gruppe das Mittelfeld. Drei der vier meisten gelesenen Wörter sind aus der roten Gruppe. Beim Fehleranteil teilt sich die rote mit der grünen Gruppe das Mittelfeld, wobei zusätzlich die besten, also fehlerfreien Leseleistungen in der roten Gruppe zu finden sind.

3. Grün: 18 Leistungen; bilden in allen Variablen das Mittelfeld.

In Abbildung 5.7 werden die Ergebnisse aller Variablen in einer Streudiagramm-Matrix veranschaulicht. Die Buchstaben in den Quadraten stehen für jeweils eine Variable. Diese Variable wird in den Streudiagrammen in der Zeile und Spalte, in der sie steht, dargestellt. In jedem Streudiagramm sind alle Leistungen bezüglich zweier Variablen abgebildet. Die Skalen an den Seiten der Matrix gelten jeweils für alle Streudiagramme der Zeile beziehungsweise der Spalte.

Zusätzlich sind die Probandenleistungen nach ihrer jeweiligen Gruppenzugehörigkeit eingefärbt. Diese Streudiagramm-Matrix ist eine komprimierte Form der Abbildungen 5.3 und 5.3, wobei hier das Augenmerk auf den Clustergruppen liegt. Welche Schlüsse diese Gruppierung und die anderen Ergebnisse zulassen, wird im nächsten Abschnitt genauer behandelt.

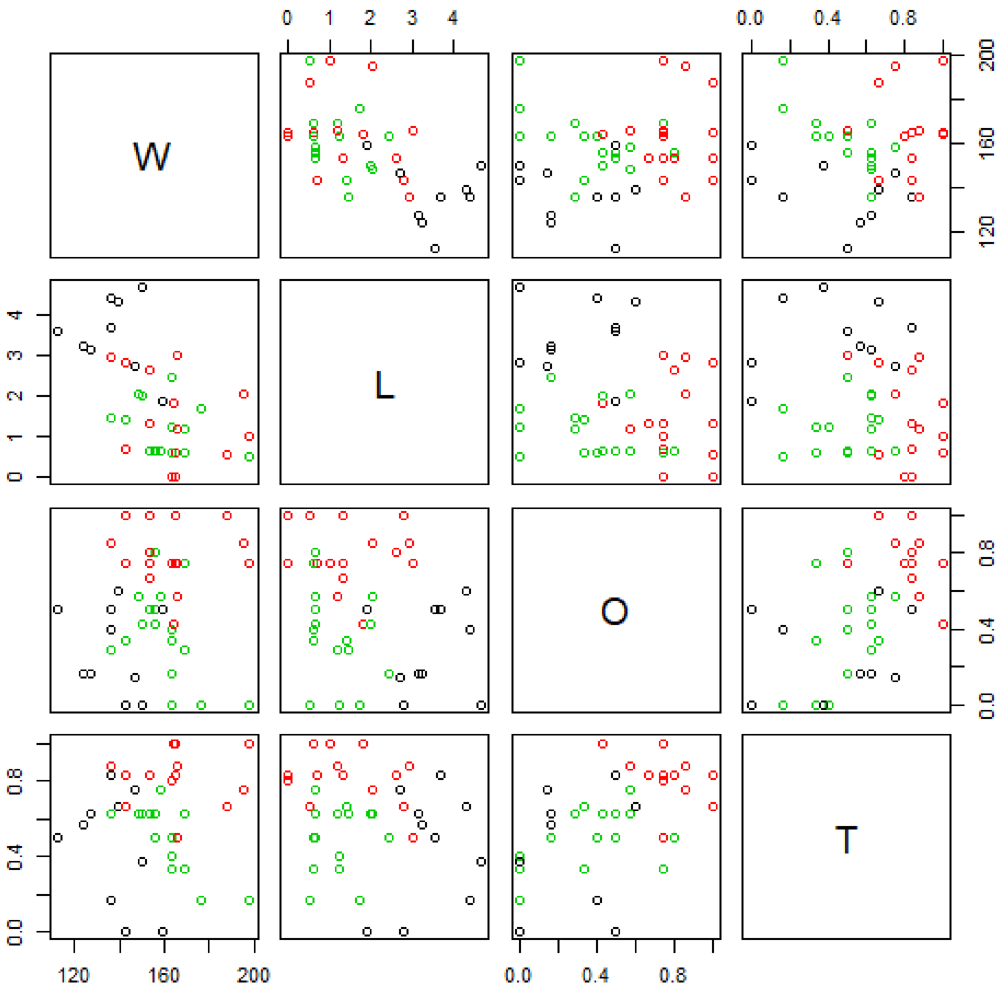


Abbildung 4.7: Streudiagramm-Matrix

4.7 Interpretation der Ergebnisse

Die Clusteranalyse hat eine Gruppe ergeben, die fast identisch mit der in Abschnitt 5.3 definierten Lese-Risikogruppe (schwarze Gruppe) ist. Aus diesem Grund ist die schwarze Gruppe für die Beantwortung der Forschungsfrage besonders interessant. Diese Gruppe beinhaltet sieben von acht Leistungen der Probanden aus der Lese-Risikogruppe. Da diese Gruppe auch bei den gelesenen Wörtern sehr geringe Werte erzielt hat, kann vermutet werden, dass ein hoher Fehleranteil mit einer geringeren Wörteranzahl zusammenhängt. Die Wörteranzahl und der Fehleranteil sind die beiden Variablen, die die Leseflüssigkeit messen. Damit kann der schwarzen Gruppe eine geringe Leistung der Leseflüssigkeit zugeordnet werden.

Neun von zehn Leistungen dieser Gruppe haben $\leq 50\%$ auf der Ebene „Operieren“ erreicht und der Durchschnitt liegt bei etwa 0,3. Umgekehrt betrachtet, gibt es zahlreiche Leistungen aus der grünen Gruppe, die ebenfalls schlechte Ergebnisse beim Operieren aufweisen, allerdings deutlich bessere Leseflüssigkeitswerte. Das deutet darauf hin, dass bei unzureichender Leseflüssigkeit die operationalen Fähigkeiten darunter leiden, aber nicht unbedingt umgekehrt. Ein Faktor dabei ist die Bearbeitungszeit, die für Dekodierungsprozesse aufgewendet werden muss und dann nicht mehr ausreichend für mathematische Operationen zur Verfügung steht. Andererseits kann auch angenommen werden, dass mangelnde Leseflüssigkeit den Erwerb von mathematisch-operationalen Kompetenzen, wie sie in den Bildungsstandards im Handlungsbereich „Rechnen, Operieren“[BIF13, S.3] verlangt werden, erschwert (siehe dazu Abschnitt 3.3 und 3.4).

Auf der Ebene „mathematisches Textverständnis“ hat die schwarze Gruppe im Vergleich zur gesamten Stichprobe etwas schlechter abgeschnitten. Der Mittelwert liegt bei etwa 0,44, die Leistungen sind aber stark gestreut. In der restlichen Stichprobe lag der Durchschnitt bei etwa 0,64.

Das lässt vermuten, dass die Kriterien für das mathematische Textverständnis einer geringeren Abhängigkeit von der Leseflüssigkeit unterliegen, als die Kriterien für das Operieren. Unerwartet ist die hohe Standardabweichung von 0,30 der schwarzen Gruppe, insbesondere da die anderen beiden Gruppen mit 0,13 und 0,17 eine deutlich niedrigere Streuung aufweisen. Eine mögliche Erklärung bietet die kleine Gruppengröße, die Zufallsfaktoren schlecht filtert.

Dennoch zeigt sich auf beiden Ebenen der erwartete Effekt, dass Schwächen in der Leseflüssigkeit meist auch eine geringe Leistung beim mathematischen Textverständnis und dem Operieren nach sich ziehen. Da die Leistungen der schwarzen Gruppe nahezu gleich auf die drei erhobenen Klassen aufgeteilt sind, ist belegt, dass diese Effekte standortübergreifend beobachtet werden konnten und untermauert damit ihre Validität.

Die rote Gruppe vereint bei den Kriterien beider Ebenen die besten Ergebnisse in sich. Die grüne Gruppe bildet ebenfalls bei beiden Ebenen das Mittelfeld. Jedoch lassen sich die beiden Gruppen bei den Variablen der Leseflüssigkeit nicht voneinander trennen. Die Mittelwerte bei den gelesenen Wörtern sind mit 162,8 und 160,2 fast ident. Auch beim Fehleranteil ist der Unterschied der Mittelwerte 1,45 und 1,12 gering im Gegensatz zur schwarzen Gruppe, deren Mittelwert von 3,44 sich stark abhebt. Die Spitzenleistungen sind in beiden Variablen auf die rote und grüne Gruppe aufgeteilt. Deshalb lässt sich aus dieser Gruppierung kein Zusammenhang einer guten Leseflüssigkeit mit den dabei erhobenen mathematischen Fähigkeiten feststellen.

4.8 Conclusio

Auch wenn diese Untersuchung mit ihrem geringen Stichprobenumfang keine aussagekräftige Antwort geben kann, so deutet das Ergebnis doch in die selbe Richtung, wie ähnliche, wesentlich größer angelegte Studien. Die LDR-Untersuchung [Höf06] und auch die Untersuchung von Jordan [Jor11] weisen einen deutlichen Zusammenhang zwischen Lesekompetenz auf verschiedenen Stufen und mathematischem Textverständnis nach. Die vorliegende Arbeit soll einen weiteren Beitrag leisten, diesem Thema Gewicht zu verleihen und insbesondere die Sekundarstufe II darin hervorzuheben. Bereits eine einfache Bewertung von Texten für den Unterricht nach Textkomplexität könnte Lehrpersonen helfen, eine geeignete Passung zwischen Leser bzw. Leserin und Text zu finden. Eine weitergehende Untersuchung wäre denkbar, die Lösungshäufigkeiten von mathematischen Aufgaben mit Lesbarkeitsindizes wie dem Lix in Zusammenhang bringt.

Außerdem zeigen die erhobenen Leseprotkolle, dass Leseflüssigkeit auch in der Sekundarstufe II keinesfalls vorausgesetzt werden darf. Vielmehr sind bewusst ein Augenmerk auf Defizite in diesem Bereich zu legen und unterstützende Maßnahmen zu ergreifen. Leseflüssigkeit kann, wie von Rosebrock/Nix [RN11] beschrieben, auch im Fachunterricht mit Lautleseanlässen gefördert werden. Um sprachliche Kompetenzen im Fach breiter zu unterstützen, bieten sich die Methoden des sprachsensiblen Fachunterrichts (siehe Abschnitt 3.6) an. Insbesondere für den Mathematikunterricht sind die Vorschläge von Drüke-Noe aus Abschnitt 3.8 zu empfehlen.

Die Ergebnisse dieser Arbeit und die sprachliche Heterogenität im österreichischen Schulsystem untermauern die Forderung, im Mathematikunterricht Sprache zum Thema zu machen und bewusst und produktiv einzusetzen.

A Anhang

A.1 Text des Leseprotokolls

Auch Serhat und sein Mitbewohner Gerald Kleiner sind von den Urlaubern manchmal genervt. „Die Touristenhorden können manchmal ganz schön anstrengend sein“, erzählt er, während er mit Gerald durch die engen Gassen von Sliema schlendert. Die beiden sind auf der Suche nach einer neuen Sonnenbrille, ein wichtiges Accessoire auf Malta. Nach der Shoppingtour sitzen die Austauschstudenten aus Deutschland in einem der vielen Straßencafés an der Promenade und trinken Cola. Gerald studiert Sport, das passt ziemlich gut hierher, denn Malta ist ein Paradies vor allem für Wassersportler. Schon im Frühjahr ist es warm genug, um im Meer zu tauchen und zu schwimmen oder Surfen zu gehen. „Beim Lehrerstudium geht es hier vor allem darum, wie man Kindern in der Schule Spaß am Sport vermittelt“, sagt Gerald. „Diesem Aspekt wird auf Malta deutlich mehr Aufmerksamkeit geschenkt als in Deutschland.“ Er schreit mehr, als dass er spricht. Direkt neben dem Café wird mal wieder die Straße aufgerissen. „Für einen Straßenbauingenieur ist das hier der Himmel auf Erden“, sagt Heinrich Semar. Der deutsche Professor und Bauingenieur lebt seit elf Jahren auf Malta. „Nirgendwo sonst liegen Theorie und Praxis so nah beieinander“, sagt er. Alle Projekte, die Studenten auf Malta planten, würden auch umgesetzt. „Dieser Praxisvorteil ist unschlagbar.“ Das Institut, das Semar selbst aufgebaut hat, ist sehr klein: „Wer hierher als Gaststudent kommt, lernt sehr viel. Durch die individuelle Betreuung ist das akademische Niveau sehr hoch.“ Oft sitzen in den höheren Semestern nur fünf oder sechs Studenten in den Seminaren und planen Projekte.

A.2 Angabe der Schularbeiten

Hier sind die Angaben der Schularbeiten zu finden, die für die Erhebung verwendet wurden. Die Schularbeit von Klasse B bestand aus einem deutsch- und einem englisch-sprachigen Teil. Für die Erhebung wurde nur der deutschsprachige verwendet, somit ist auch nur dieser hier abgebildet.

Klasse A:

1) Wachstums-/Abnahmemodelle

In einer Bakterienkultur sind nach 4 Stunden bereits 6.000 Bakterien und nach weiteren 8 Stunden 9.000 Bakterien vorhanden.

a) Berechne das Wachstumsgesetz $N(t) = No \,.\, a^t$.
b) Berechne das Wachstumsgesetz $N(t) = No \,.\, e^{\lambda.t}$.
c) Beschreibe, welcher Zusammenhang zwischen den beiden Gesetzen besteht?
d) Berechne, nach wie vielen Stunden sich die Bakterien verdoppelt haben?
e) Berechne, wie viele Bakterien am Anfang in der Kultur waren?
f) Zeichne die Funktion mit Excel und berechne d) mit dem PC.

(3/3/2/3/3/3)

2) Zinseszinsrechnung

Für eine Realität bieten:

A: € 30.000,- sofort, € 100.000,- nach 2 Jahren, € 50.000,- nach insgesamt 4 Jahren.
B: € 50.000,- sofort, € 50.000,- nach 1 Jahr, € 80.000,- nach insgesamt 5 Jahren.

a) Zeichne die Zahlungsvarianten auf je eine Zeitlinie.
b) Berechne jeweils für A und B den gesamten Zahlungsbetrag. Wer bietet mehr?
c) Berechne b) auch mit Excel.

(i=5%p.a. dekursiver Zinseszins)
(4/4/1/4)

3) Einfache Verzinsung

Ein Sparbuch wurde am 3. 7. 2016 mit € 2.000,- eröffnet.

a) Berechne das Guthaben am 31.12.2016, wenn mit i = 2% p.a. einfacher Verzinsung gerechnet wird. Berücksichtige die KeSt von 25%.
b) Berechne allgemein aus der einfachen Zinsformel $K_n = K_0 .\, (1 + n.i)$ den Zinssatz i.

(3/3)

4) Logistisches Wachstum - Höhenwachstum eines Strauches

Das Höhenwachstum eines Strauches wird in guter Näherung durch eine logistische Funktion beschrieben:

$$h(t) = \frac{176}{4 + 40 \cdot e^{-t}}\ ; \quad t \geq 0$$

Dabei ist t die Zeit in Jahren und h(t) die Höhe in Dezimetern.

a) Zeichne die Funktion mit Excel, wähle ein geeignetes Intervall in Jahren.
b) Lies aus der Zeichnung ab, welche Maximalhöhe der Strauch erreichen kann.

(4/3)

Klasse B:
deutscher Teil der Angabe

1. Jemand hat durch Krankheit an Gewicht verloren und soll nun wieder zunehmen. Der Essplan verspricht bei korrektem Einhalten durch 4 Wochen eine konstante Gewichtszunahme von 5 % des zu Wochenbeginn vorhandenen Gewichtes.

- Stelle die Wachstumsfunktion auf, wenn bei 51 kg gestartet wird. [1 Punkt]
- Berechne die Gewichtszunahme, die ein 51 kg schwerer Mensch nach 4 Wochen erreichen kann. [2 Punkte]
- Gib die Zeit an, nach der das Idealgewicht von 75 kg erreicht wird. [2 Punkte]

2. Von einer Menge Radium sind nach 100 Jahren ca. 96 % vorhanden.

- Gib den Zerfallsfaktor a an. [1 Punkt]
- Berechne λ. [2 Punkte]
- Berechne die Halbwertszeit. [2 Punkte]
- Gib den %-Satz an, wie viel nach 200 Jahren noch vorhanden ist. [2 Punkte]

Klasse C:

1 Der aktuelle Weltrekord im 100 m-Lauf wird von Usain Bolt mit einer Zeit von 9,58 s gehalten. Sein Lauf wird durch die folgenden Funktionen beschrieben:

$s(t)$ ... zurückgelegter Weg (in m) nach t Sekunden
$v(t)$ ... Momentangeschwindigkeit (in m/s) nach t Sekunden
$a(t)$ ... Momentanbeschleunigung (in m/s^2) nach t Sekunden

Beschreibe, was mit den folgenden Ausdrücken im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:

a) $s'(9{,}58)$ **[1 Punkt]**

b) $v'(2)$ **[1 Punkt]**

c) $\int_0^{4{,}79} v(t)\,dt$ **[1 Punkt]**

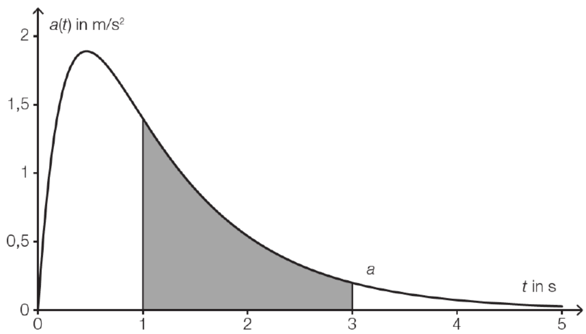
d) $\frac{s(9{,}58)}{9{,}58}$ **[1 Punkt]**

e) $\frac{v(7)-v(1)}{7-1}$ **[1 Punkt]**

Beschreibe, was die folgende Ungleichung im gegebenen Sachzusammenhang bedeutet:

$$\int_0^{4{,}79} v(t)\,dt < \int_{4{,}79}^{9{,}58} v(t)\,dt$$ **[1 Punkt]**

2 Die Beschleunigung eines Werkstücks wird für $t \geq 0$ näherungsweise durch die Funktion a beschrieben. Der Graph der Funktion a ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. **[2 Punkte]**

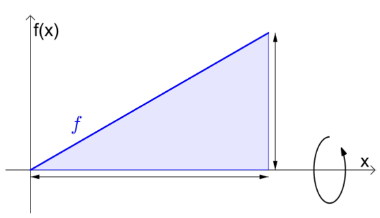


– Erstelle eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der markierten Fläche.

$A =$ ____________________

– Interpretiere die Bedeutung dieses Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang.

3 Das Volumen eines Drehkegels mit Radius r und Höhe h beträgt $V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$.



– Beschrifte die Skizze und gib eine Funktionsgleichung für f an. **[2 Punkte]**

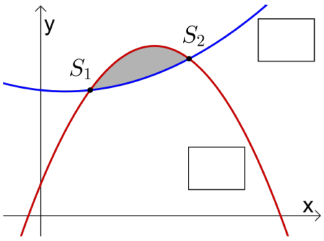
– Leite die Formel für das Volumen mit Hilfe der Integralrechnung her. **[3 Punkte]**

Klasse C (Fortsetzung):

④ In der Abbildung sind die Graphen der beiden Funktionen

$$f(x) = x^2 - x + 24 \qquad \text{und} \qquad g(x) = -5 \cdot x^2 + 23 \cdot x + 6$$

dargestellt.



- Beschrifte die Graphen der Funktionen f und g und begründe deine Antwort. **[1 Punkt]**
- Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte S_1 und S_2. **[3 Punkte]**
- Berechne den markierten Flächeninhalt. **[3 Punkte]**

⑤ Berechne das bestimmte Integral.

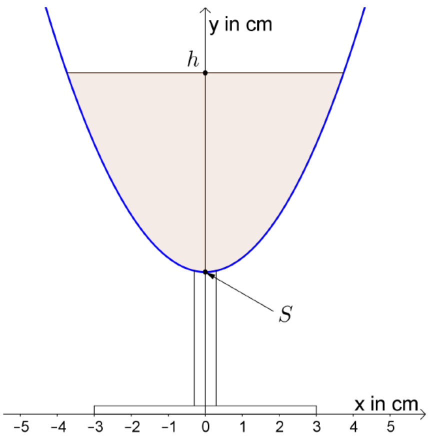
a) $\displaystyle\int_0^3 9 \cdot x^2 \cdot e^{x^3}\, dx$ **[3 Punkte]**

b) $\displaystyle\int_0^\pi x \cdot \cos(x)\, dx$ **[3 Punkte]**

⑥ Die Innenwand eines Glases wird durch den Graphen der Funktion

$$y(x) = 0{,}5 \cdot x^2 + 5$$

beschrieben.



- Bestimme die Koordinaten vom Punkt S. **[1 Punkt]**
- Begründe mit der Integralrechnung, warum das Volumen der eingefüllten Flüssigkeit

  $$V(h) = h^2 - 10 \cdot h + 25 \text{ cm}^3$$

  beträgt. **[3 Punkte]**
- Berechne bei welcher Füllhöhe sich 100 ml Flüssigkeit im Glas befinden. **[2 Punkte]**

⑦ **Bonusaufgabe:** Bestimme eine Stammfunktion von $f(x) = \ln(x)$ mit partieller Integration. **[2 Punkte]**

Literatur

[Art+01] Cordula Artelt u. a. „Lesekompetenz: Testkonzeption und Ergebnisse". In: *PISA 2000 Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (2001), S. 69–86.

[Bac+16] Klaus Backhaus u. a. *Multivariate Analysemethoden*. 14. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2016.

[Ber08] Derek H. Berg. „Working memory and arithmetic calculation in children: The contributory roles of processing speed, short-term memory, and reading". In: *Journal of Experimental Child Psychology* 99.4 (2008), S. 288–308.

[BGB14] BGBl. *Lehrplan der Handelsakademie*. 2014. URL: `https://www.hak.cc/files/syllabus/Lehrplan_HAK_2014.pdf`.

[BIF11] BIFIE. *Bildungsstandards für Deutsch 8. Schulstufe*. 2011. URL: `https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_d_sek1_kompetenzbereiche_d8_2011-01-02.pdf`.

[BIF13] BIFIE. *Bildungsstandards für Mathematik 8. Schulstufe*. 2013. URL: `https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_sek1_kompetenzbereiche_m8_2013-03-28.pdf`.

[Bil16] Bundesministerium für Bildung (BMB). *Grundsatzerlass Leseerziehung*. 2016. URL: `https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/prinz/leseerziehung_ge.pdf?5te8dj`.

[CW14] Carla Carnevale und Alexandra Wojnesitz. *Sprachsensibler Fachunterricht in der Sekundarstufe; Grundlagen - Methoden - Praxisbeispiele.* (ÖSZ Praxisreihe Heft 23). Graz: ÖSZ, 2014.

[Cum79] James Cummins. „Linguistic interdependence and the educational development of bilingual children“. In: *Review of Educational Research* 49/79 (1979), S. 221–251.

[Drü12] Christina Drüke-Noe. „Leseverstehen - mit Sprache muss man rechnen“. In: *PM - Praxis Mathematik* Heft 46 (2012), S. 2–11.

[EO10] Organisation for the Economic Co-operation und Development (OECD). *PISA 2009 Assessment Framework.* OECD Publishing, 2010.

[Fer09] Ingrid Fertl. *Textverständnis in allen Fächern. Lesestrategien im Unterrichtsgegenstand Mathematik.* Wien: bm:ukk, 2009.

[HEK09] Joachim Hartung, Bärbel Elpelt und Karl-Heinz Klösener. *Statistik.* München: de Gruyter Oldenbourg, 2009.

[Her12] Barbara Herzog-Punzenberger. *Nationaler Bildungsbericht Österreich 2012, Band 2: Fokussierte Analysen bildungspolitischer Schwerpunktthemen.* BIFIE, 2012.

[Höf06] Sabine Höfert. *Lesen - Denken - Rechnen. Die LDR-Untersuchung an steirischen Volks- und Hauptschulen.* Graz, 2006. URL: `https://www.imst.ac.at/imst-wiki/images/e/e2/336_Langfassung_Hoefert.pdf`.

[Hud03] Marcus Hudec. *Skriptum zur Vorlesung Multivariate statistische Verfahren.* Universität Wien, 2003.

[Jor11] Roland Jordan. *Entwicklung und Validierung eines Testverfahrens zur Ermittlung der Lesekompetenz und des mathematischen Textverständnisses mit empirischer Untersuchung an allgemeinbildenden und berufsbildenden Schulen.* Münster: WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, 2011.

[KNL01] Eckhard Klieme, Michael Neubrand und Oliver Lüdtke. „Mathematische Grundbildung, Lesekompetenz und individuelle Lernvoraussetzungen: Ein Modell zur Erklärung von Leistungsunterschieden“. In: *PISA 2000 Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (2001), S. 183–190.

[LG10] Imke Lange und Ingrid Gogolin. *Durchgängige Sprachbildung. Eine Handreichung*. Münster: Waxmann, 2010.

[Lei13] Josef Leisen. *Handbuch Sprachförderung im Fach. Sprachsensibler Fachunterricht in der Praxis. Grundlagenteil*. Stuttgart: Ernst Klett Sprachen, 2013.

[MS99] Hermann Maier und Fritz Schweiger. *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht*. Wien: öbv&hpt, 1999.

[15] *Mathematik-Zentralmatura: ‚Aufgaben sind sehr textlastig'*. 2015. URL: `https://diepresse.com/home/bildung/schule/4729653/MathematikMatura_Aufgaben-sehr-textlastig`.

[MP12] Michael Meyer und Susanne Prediger. „Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht. Herausforderungen, Chancen und Förderansätze". In: *PM - Praxis Mathematik* Heft 45 (2012), S. 2–9.

[PT15] Inger Petersen und Tanja Tajmel. „Bildungssprache als Lernmedium und Lernziel des Fachunterrichts". In: *Schule in der Migrationsgesellschaft. Band 2: Sprache - Rassismus - Professionalität* (2015), S. 84–111.

[Pol95] George Polya. *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Tübingen: Francke Verlag, 1995.

[Reb12] Mike Reblin. „Sachaufgaben mag ich nicht. Die Bedeutung von Texten für die Gestaltung von Mathematikunterricht". In: *PM - Praxis Mathematik* Heft 46 (2012), S. 33–37.

[RN11] Cornelia Rosebrock und Daniel Nix. *Leseflüssigkeit fördern. Lautleseverfahren für die Primar- und Sekundarstufe*. Seelze: Klett/Kallmayer, 2011.

[RN14] Cornelia Rosebrock und Daniel Nix. *Grundlagen der Lesedidaktik und der systematischen schulischen Leseförderung*. Hohengehren: Schneider, 2014.

[Sch+13] Martin Schodl u. a. *Angewandte Mathematik*. Wien: Manz, 2013.

[Sch04] Stephanie Schreblowski. *Training von Lesekompetenz*. Münster: Waxmann, 2004.

[SB16] Birgit Suchań und Simone Breit, Hrsg. *PISA 2015. Grundkompetenzen am Ende der Pflichtschulzeit im internationalen Vergleich*. Graz: Leykam, 2016.

[SWS12] Birgit Suchań, Christina Wallner-Paschon und Claudia Schreiner, Hrsg. *PIRLS & TIMSS 2011. Erste Ergebnisse*. Graz: Leykam, 2012.

[Taj17] Tanja Tajmel. *Naturwissenschaftliche Bildung in der Migrationsgesellschaft*. Wiesbaden: Springer Fachmedien, 2017.

[Wil16] Nadine Wilhelm. *Zusammenhänge zwischen Sprachkompetenz und Bearbeitung mathematischer Textaufgaben*. Wiesbaden: Springer Fachmedien, 2016.