

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Der gute Ton der Querflöte - Fourieranalyse in der Musik

verfasst von / submitted by

Angelika Schwarz

angestrebter akademischer Grad /

in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt /

degree programme code as it appears

on the student record sheet:

A 190 406 347

Studienrichtung lt. Studienblatt /

degree programme as it appears

on the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik

UF Französisch

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Dankesworte	1
2	Die Querflöte	2
2.1	Geschichtliche Entwicklung der Querflöte	2
2.2	Tonerzeugung bei der Querflöte	4
2.2.1	Schwingungen	5
2.2.2	Wellen	9
2.2.3	Ausbreitung des Schalls	9
3	schwingende Luftsäulen	13
3.1	Pfeifen	15
3.1.1	geschlossene Pfeifen	15
3.1.2	offene Pfeifen	18
3.1.3	Beispiel: die Querflöte	19
3.2	Sinuswellen in der Musik - Saiteninstrumente	20
3.2.1	Blasinstrumente - am Beispiel der Querflöte	22
3.3	Partialtöne	22
3.3.1	die harmonische Naturton-Reihe	23
3.3.2	Zusammenhang zwischen Wellengleichung und Klang	24
3.4	Klangfarben verschiedener Instrumente	25
3.5	Obertöne und Schwebungen	27
4	Fourier - Theorie	28
4.1	Lebenslauf Jean Baptiste Joseph Fourier	28
4.2	Allgemeines zur Fourier - Theorie	29
4.3	Die Fourier-Reihe	30
4.3.1	Fourier-Koeffizienten	34
4.3.2	fundamentales Problem	45
4.3.3	Approximation im quadratischen Mittel	45
4.3.4	Das Gibbs Phänomen	60
4.3.5	komplexe Schreibweise	64

4.3.6	Fourierentwicklung einer Funktion beliebiger Periode p	66
4.3.7	Fourierreihen aus Potenzreihen	68
4.3.8	Fourierentwicklung und ihre Anwendungen	71
4.3.9	Beispiel Zickzack-Welle	73
4.3.10	trigonometrische Identität	75
4.3.11	Beispiel Sinus-Funktion mit Spektraldarstellung	76
4.3.12	Beispiel: Spektraldarstellung einer Rechtecksfunktion	79
4.3.13	Lösungen einiger wichtiger Funktionen	86
4.4	Zusammenfassung der Theorie	87
5	Fourier - Theorie in Bezug auf Obertöne in der Musik	90
6	Schlussworte	93
6.1	Zusammenfassung	93
6.2	Abstract	95

1 Einleitung

*„Mathematik ist Musik des Geistes,
Musik ist Mathematik der Seele.“¹*

Da mir sowohl die Mathematik als auch die Musik sehr am Herzen liegen, war es mir wichtig diese zwei Gebiete miteinander zu verknüpfen. Ich selbst spiele Querflöte und habe mich zu Beginn meiner Diplomarbeit mit der geschichtlichen Entwicklung und dann insbesondere mit der Tonerzeugung dieses Instruments beschäftigt. Des Weiteren wird in den nächsten Kapiteln genauer auf schwingende Luftsäulen aus physikalischer und mathematischer Sicht eingegangen. Es werden die Klangfarben verschiedener Instrumente beleuchtet und genauer das Phänomen der Obertöne betrachtet.

Das größte Kapitel dieser Diplomarbeit nimmt die Fourier - Theorie ein. Diese wird zunächst aus theoretischer Sicht erklärt und später werden einige Beispiele vorgestellt. Im letzten Abschnitt dieser Arbeit wird das Obertonspektrum der Querflöte analysiert.

1.1 Dankesworte

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern, Brigitte und Wilhelm, die mir mein Studium ermöglicht haben und mir stets bei all meinen Entscheidungen zur Seite stehen.

Darüber hinaus möchte ich mich bei Herrn ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith recht herzlich bedanken. Nicht nur bei der Erstellung meiner Diplomarbeit, sondern auch während meiner ganzen Studienzeit hat er mich bestens unterstützt.

¹Daniil Charms (1905-1942)

2 Die Querflöte

In diesem Kapitel werden die physikalischen Grundlagen der Tonerzeugung der Querflöte näher erläutert.

2.1 Geschichtliche Entwicklung der Querflöte

In der Natur kann man oftmals beobachten, dass der Wind Geräusche oder manchmal sogar Töne erzeugt. Menschen haben diese Erscheinungen schon vor geraumer Zeit erkannt und mittels diesem Wissen Gegenstände geschaffen, die als Vorreiter unserer heutigen Instrumente gelten. Es handelte sich hierbei um rohrähnliche Gegenstände bzw. um Hohlkörper, bei denen mit Hilfe eines Luftstromes über eine Kante Schall erzeugt werden konnte.² In der Frühzeit stand die Entwicklung der Querflöte in Europa zuerst im Schatten der Blockflöte. Es entwickelten sich schon sehr früh zwei quer gehaltene Typen: einerseits die Querflöte und andererseits eine militärische Querpfeife. Nach ca. 1500 entstand die Querflötenfamilie in den drei Größen Diskant, Tenor-Alt und Bass. In frühen Griffstabellen ist zu erkennen, dass die Querflöte nur in bestimmten Tonarten spielbar war und keinen lückenlosen chromatischen Tonumfang besaß. Schon zu dieser Zeit war es allerdings möglich dem Instrument einen Tonumfang von bis zu drei Oktaven zu entlocken. Die Familie Hotteterre gestaltete das Holzblasinstrumentarium um und wählte als Grundlage für das neue Soloinstrument die Größe des Tenors. Diese alte Mittelgröße wird bis in die Gegenwart für den Begriff der Querflöte verwendet. Die späteste Neukonstruktion der Familie Hotteterre war die Flûte traversière, wobei immer noch Intonationsprobleme in gewissen Tonarten vorhanden waren.³ „Aufgrund der mangelhaften Stimmung der Gabelgriffe versuchte man [...] einzelne schlecht stimmende Töne mittels spezieller Klappen zu erzeugen.“⁴ So entstanden in der Barockzeit einklapprige Flöten und in der Wiener Klassik besaßen die Flöten schon vier bis sechs Klappen. Für eine Komposition Mozarts wurde eine Flöte, die noch über zwei zusätzliche Klappen verfügte, gebaut. Mit diesem Instrument war es

²vgl. Bork/Meyer 1988, S.27

³vgl. Tremmel 2004, S.186f.

⁴Tremmel 2004, S.187

möglich die tiefen Töne c^1 und cis^1 zu erzeugen. Darüber hinaus wurden die Tonlöcher der Flöte vergrößert, damit sich die Flöte auch in einem immer lauter werdenden Orchester durchsetzen konnte. Dies führte allerdings zu weiteren Intonationsproblemen und daher war man um eine Neukonstruktion bemüht. Theobald Böhm baute eine konische Ringklappenflöte mit großen Tonlöchern, die physikalisch korrekt angeordnet wurden. Im Jahr 1874 stellte er ein weiteres Flötenmodell vor: die Deckelklappen- oder Zylinderflöte, welche aus Metall hergestellt wurde. Diese Querflöte hatte eine zylindrische Bohrung und nochmals vergrößerte Tonlöcher. Der dadurch entstandene neue Klang wurde nicht in jedem Land sofort positiv aufgenommen. Dennoch hat sich die 'Böhmflöte' in der Gegenwart in den Orchestern etabliert.⁵

Die folgende Abbildung zeigt eine Querflöte der Marke 'Muramatsu' mit offenen Ringklappen und H-Fuß.



Abbildung 1: Muramatsu EX III RBE

Es steht also fest, dass die heute verwendeten Querflöten immer noch die gleiche Grundidee aufweisen: Querflöten bestehen (vereinfacht gesagt) aus einem Rohr, welches als Resonator wirkt, und einer Kante, gegen die der Luftstrahl des Spielers/der Spielerin gelenkt wird.⁶

⁵vgl. Tremmel 2004, S.187f.

⁶vgl. Bork/Meyer 1988, S.27

2.2 Tonerzeugung bei der Querflöte

Die Querflöte gehört zur Instrumentengruppe der Aerophone. Die Tonerzeugung erfolgt durch den schwingenden Luftstrom und das Flötenrohr wirkt als Resonator.⁷

Vereinfacht kann man sagen, dass die Tonerzeugung bei der Querflöte auf einer Wechselwirkung zwischen „einem schwingenden Luftblatt (zwischen der Lippenöffnung und der Anblaskante des Mundlochs der Flöte) und den Resonanzen der im Flötenkorpus vorhandenen Luft zurückführen“⁸ ist. In der folgenden Grafik ist dies dargestellt:

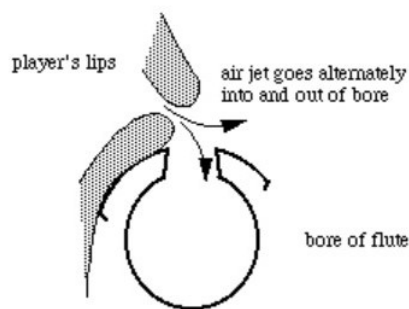


Abbildung 2: Tonerzeugung Querflöte⁹

In der Anfangsphase des Flötentones ist der strömungstechnische Vorgang entscheidend. Dieses Phänomen lässt sich mit den strömungstechnischen Abläufen an Hand eines Tragflügels erklären:¹⁰ „Wenn seine Kante etwas unsymmetrisch angeströmt wird oder wenn er hinter seiner Kante etwas unsymmetrisch geformt ist, bildet sich beiderseits der Kante ein unterschiedlicher Druck aus. Dabei stellt sich - nach Bernoulli - dort ein höherer Druck ein, wo die Strömungsgeschwindigkeit geringer ist. Im Fall des Tragflügels bewirkt der Druckunterschied eine Bewegung des Flügels quer zur Strömungsrichtung. Lässt sich dagegen der angeströmte Körper nicht bewegen, dann tritt vor seiner Kante eine Ausgleichsströmung von der Seite höheren Druckes zur anderen Seite auf. Da sie jedoch keinen stabilen Zustand erreicht, führen die andauernden Druckschwankungen zu einer Schallerzeugung“¹¹

⁷vgl. Görne 2011, S.51

⁸Meyer 2008, S.328

⁹<http://newt.phys.unsw.edu.au/jw/fluteacoustics.html>

¹⁰vgl. Bork/Meyer 1988, S.28

¹¹Bork/Meyer 1988, S.28

Das bedeutet, zwischen der Lippenöffnung und der Anblaskante des Mundlochs der Querflöte pendelt ein Luftblatt hin- und her. Wenn sich der begrenzte Luftstrahl eines Flötisten/einer Flötistin gegen die Kante der Querflöte richtet entsteht ein strömungstechnischer Ablauf. Die dabei entstandenen Ausgleichsströmungen vor der Kante haben einen schwingungsähnlichen Zustand, der Luftstrahl kommt dadurch in eine Pendelbewegung und ein Ton entsteht.¹²

„Die eigentliche Stabilisierung des Flötentones erfolgt aber dadurch, dass die Luftschwingungen vor der Kante durch die Resonanzen des Flötenkorpus - genauer der im Korpus eingeschlossenen Luftsäule - [...] synchronisiert werden.“¹³

2.2.1 Schwingungen

Bei einer regelmäßigen Bewegung spricht man von einer Schwingung. Diese Schwingung verläuft regelmäßig und wellenförmig. Durch Schwingungen wird Schall erzeugt, den das menschliche Ohr entweder als Ton oder als Klang (Zusammenklang mehrerer Töne) wahrnimmt. Bei einer unregelmäßigen Bewegung spricht man von einem Geräusch.¹⁴ „Unter Schwingungen versteht man den Bewegungsvorgang, in den der aus der Ruhelage gebrachte Körper [...] oder Punkt gebracht wurde, mit der Tendenz, wieder in die Ruhelage zurückzukehren.“¹⁵ Der Körper kommt allerdings nicht sofort in seine Ausgangslage zurück. Er erreicht erst nach dem Ausschlagen auf die andere Seite seinen ursprünglichen Ausgangspunkt. Bei diesem Vorgang bezeichnet man mit dem Begriff Elongation die Entfernung vom Ausgangspunkt und mit dem Begriff Amplitude die weiteste Entfernung. Als Periode wird die Schwingungsdauer, das heißt die Zeit, die für eine vollständige Schwingung benötigt wird, bezeichnet. Mit dem Begriff Frequenz wird die sich ergebende Periode pro Sekunde definiert. Die Tonhöhe wird mittels der Frequenz bestimmt - je höher der Ton empfunden wird, desto häufiger findet eine Schwingung in einer bestimmten Zeitperiode statt.¹⁶ Die Frequenz wird mit der Einheit Hertz, abgekürzt *Hz*, angegeben.¹⁷ Sie ist das wichtigste Merkmal der Sinusschwingung

¹²vgl. Meyer 2008, S.328f.

¹³Meyer 2008, S.329

¹⁴vgl. Tremmel 2004, S.12

¹⁵Tremmel 2004, S.12

¹⁶vgl. Tremmel 2004, S.12

¹⁷vgl. Steppat 2014, S.36

und gibt die Tonhöhe an.¹⁸

Für die spätere Fourier-Theorie ist es sehr wichtig, alles über Sinus-Schwingungen in Erfahrung zu bringen. Der Wert für die Frequenz f der Schwingung setzt sich aus der Winkelgeschwindigkeit, die wir mit ω bezeichnen, des rotierenden Zeigers zusammen (siehe auch Abbildung (4)). Wenn man für den vollen Winkel $360^\circ \triangleq 2\pi$ rad setzt, dann gilt $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Setzt man für die Frequenz $f = \frac{1}{T}$, dann erhält man $\omega = 2\pi \cdot f$. Wie bereits zuvor erwähnt ist die *Frequenz* einer Sinus-Schwingung, die in der Akustik für die Tonhöhe verantwortlich ist, das wichtigste Merkmal. Ein weiterer wichtiger Begriff ist die *Amplitude*. Diese entspricht dem Betrag des Maximalwertes bzw. der Zeigerlänge einer Sinus-Schwingung und ist in der Musik verantwortlich für die Lautstärke.¹⁹ Das dritte Merkmal einer Sinus-Schwingung ist der *Phasenwinkel* φ , welcher „ein Maß für die zeitliche Verschiebung dieser Sinus-Schwingung gegenüber einer anderen Sinus-Schwingung“²⁰ ist. Das Maß für den Phasenwinkel φ ist Radiant.²¹ Eine harmonische Schwingung entspricht mathematisch einer Sinuskurve mit positiver und negativer Auslenkung. Das Maximum der Funktion befindet sich bei einem Viertel der Periodendauer und das Minimum bei Dreiviertel.²² Dies ist in der folgenden Abbildung zu sehen:

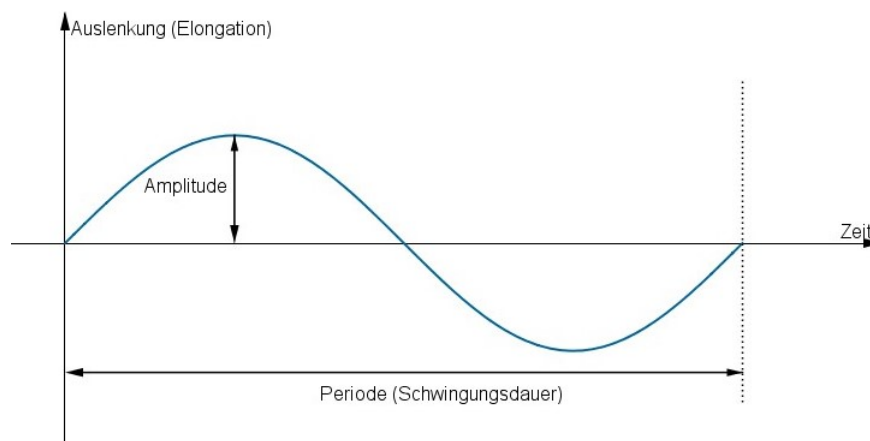


Abbildung 3: Sinusschwingung

Bezeichnet man die Periodendauer mit T und die Frequenz mit f , so kann man die

¹⁸vgl. Karrenberg 2010, S.39

¹⁹vgl. Karrenberg 2010, S.39ff.

²⁰Karrenberg 2010, S.41

²¹vgl. Karrenberg 2010, S.41

²²vgl. Steppat 2014, S.36

Frequenz direkt mit der Gleichung $f = \frac{1}{T}$ berechnen.²³

Man erhält eine Sinuskurve, in dem man „die Länge des Sinus für einen stetig wachsenden Winkel φ als Kurve“²⁴ abträgt. Dies ist in der folgenden Abbildung dargestellt:

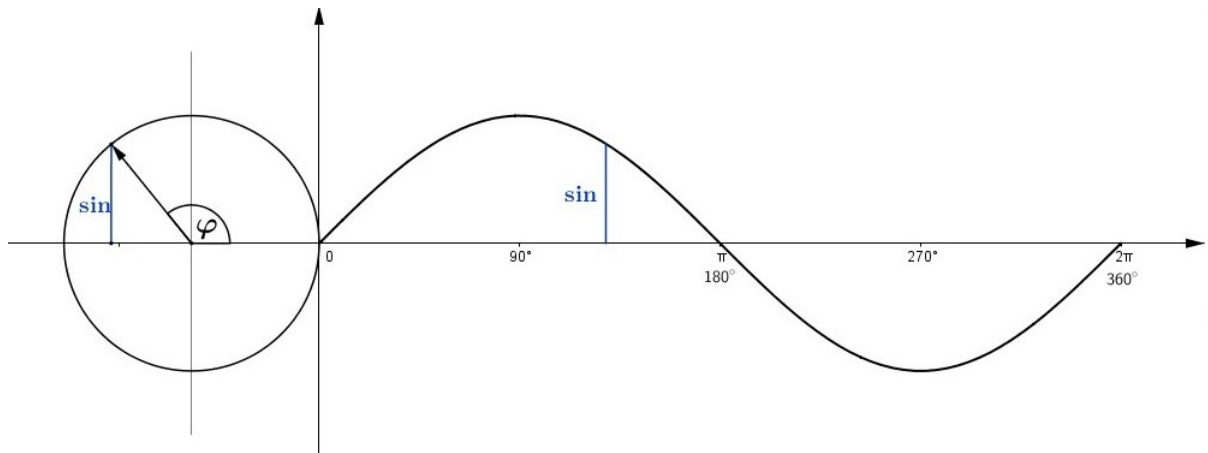


Abbildung 4: Sinuskurve²⁵

Man kann gut erkennen, dass die Sinuskurve von einem rotierenden Vektor gezeichnet ist. Eine um 90° verschobene Sinusschwingung nennt man Cosinusschwingung $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Dies kann man in der nächsten Abbildung (5), die mit Geogebra erstellt wurde, gut erkennen:

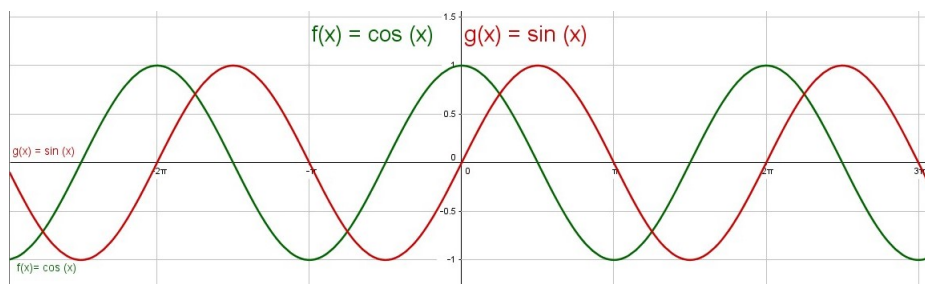


Abbildung 5: Sinus- und Cosinuskurve

In Abbildung (4) erkennt man die Periode der Sinusschwingung im Bereich von 0° bis 360° . Ausgelegt auf den Cosinus, würde die Periode den Abschnitt von 90° bis $360^\circ + 90^\circ$

²³vgl. Steppat 2014, S.36

²⁴vgl. Barkowsky 1996, S.28

²⁵vgl. Barkowsky 1996, S.29

darstellen. Aus der Addition einer Sinusschwingung mit einer Cosinusschwingung ergibt sich wieder eine sogenannte harmonische Schwingung.²⁶

Definition: Man kann eine harmonische Schwingung als

$$f(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

definieren, wobei $\omega = 2\pi \cdot f$ ist, d.h. Kreisumfang 2π mal der Frequenz f . Eine Kreisumdrehung bedeutet dabei eine einmalige Sinusschwingung. Eine zweifache Frequenz f entsteht bei einer zweimaligen Umdrehung in der gleichen Zeit, usw. Deshalb sagt man:²⁷ „ ω ist [...] eine Frequenzangabe mit Referenz auf die rotierende Vektordarstellung.“²⁸

ω wird dabei als Kreisfrequenz bezeichnet.²⁹ Ein Nullphasenwinkel φ_0 ist der „Punkt im Schwingungsverlauf, mit dem die Abbildung beginnt.“³⁰

$$\varphi_0 = \arctan \frac{B}{A}.$$

Die Amplitude a wird durch die Koeffizienten A und B durch die Abhängigkeit $a = \sqrt{A^2 + B^2}$ dargestellt.

periodische Schwingungen:

„Periodische Schwingungen sind solche, die sich immer und immer wieder nach einer bestimmten Periodendauer T auf die gleiche Art wiederholen. Theoretisch – d. h. idealisiert betrachtet – dauern sie deshalb unendlich lange in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft. Praktisch ist das natürlich nie der Fall, aber es vereinfacht die Betrachtungsweise.“³¹ Fünf wichtige periodische Signale wollen wir hier anführen: Sinusfunktion, Dreiecksfunktion, Rechtecksfunktion, Sägezahnfunktion und Nadelimpuls.³²

Einige ausgewählte Beispiele werden wir in den folgenden Kapiteln noch näher betrachten.

²⁶vgl. Barkowsky 1996, S.29

²⁷vgl. Barkowsky 1996, S.31

²⁸Barkowsky 1996, S.31

²⁹vgl. Barkowsky 1996, S.31

³⁰Barkowsky 1996, S.31

³¹Karrenberg 2010, S.34

³²vgl. Karrenberg 2010, S.35

2.2.2 Wellen

Schall breitet sich „durch Wellen in Form von Druckschwankungen und schwingenden Auslenkungen der Luftmoleküle“³³ aus. Bei einer Longitudinalwelle stimmt die Richtung, in welche die Teilchen schwingen, mit der Richtung der Ausbreitung der Welle überein. Schallwellen breiten sich in Form solcher Longitudinalwellen aus.³⁴ Bei dieser Art von Wellen bleiben die Teilchen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ruhig und die Bewegung erfolgt nur in Ausbreitungsrichtung. Man spricht auch von einer ebenen Wellenausbreitung. Die ebene Schallausbreitung findet in Rohren, wie zum Beispiel dem Resonanzkörper der Querflöte, statt.³⁵

2.2.3 Ausbreitung des Schalls

Zuerst wollen wir uns die Frage stellen, wie sich Schall überhaupt ausbreiten kann. Wir wollen uns dazu eine Feder vorstellen, die langsam hin- und her bewegt wird. Die Luft fließt dabei um diese Feder herum. Wenn man die Feder schnell genug bewegt, so hat die Luft, welche die Feder umgibt, nicht genügend Zeit für den Umströmungsvorgang und deshalb wird die angrenzende Luftschicht zusammengepresst. Dies führt zu einer Steigerung des Drucks und daraus folgt eine Komprimierung der benachbarten Luftschicht. An dieser Stelle nimmt der Druck zu. Dieser Prozess ist fortlaufend. Das heißt es breitet sich bei schneller Bewegung der Feder eine Druckwelle aus.³⁶

Schallwellen breiten sich daher in jedem Gas, wie eben zum Beispiel in Luft, als **Longitudinalwellen** aus. Daher entsteht Schall in einem Gas durch schwingende Bewegungen.³⁷ Grundsätzlich unterscheidet man drei Typen von Schallquellen:³⁸

- a) eindimensionale: Stäbe und Saiten, die zum Schwingen gebracht werden
- b) zweidimensionale: schwingende Platten und Membrane
- c) dreidimensionale: schwingende Luftsäulen

³³Steppat 2014, S.42

³⁴vgl. Reuter/Auhagen 2014, S. 325

³⁵Steppat 2014, S.44f.

³⁶vgl. Gabath 2003, S.3 [Online]

³⁷vgl. Gabath 2003, S.3 [Online]

³⁸vgl. Gabath 2003, S.3 [Online]

Wir interessieren uns vor allem für die schwingenden Luftsäulen und werden näheres dazu in Kapitel 3 erläutern.

Überlagerung von Wellen:

Wir betrachten das für Wellen geltende Überlagerungsprinzip an Hand der Wellenausbreitung an der Wasseroberfläche, da für die Schallausbreitungen in der Luft die selben Erkenntnisse gelten. Beim Werfen zweier Steine auf die Wasseroberfläche kann man erkennen, dass von den zwei Eintauchstellen der Steine Wellen entstehen. Als Wellenberg wird dabei die Ausbreitung der Wellen in positiver Richtung bezeichnet und als Wellental das Ausschlagen der Welle in negativer Richtung. Eine Überlagerung entsteht, wenn sich zwei Wellenberge treffen.³⁹ Die dabei entstehende Amplitude ist dabei „die Summe der beiden Amplituden der sich begegnenden Wellen.“⁴⁰ Falls die beiden Wellen gleich große Amplituden besitzen, so wird die resultierende Amplitude verdoppelt. Falls allerdings ein Wellental auf einen Wellenberg (mit gleich großen Amplituden) trifft, so löschen sie einander aus. Schwingungen, die von einer Wand wieder zurückprallen nennt man kohärente Schwingungen, das heißt sie stehen in einem Zusammenhang. Bei solchen Schwingungen ist die Phasenlage entscheidend, ob es bei den hin- und zurücklaufenden Wellen zu einer Überlagerung oder zu einer Auslöschung kommt. Eine vollständige Auslöschung entsteht, wenn die Phase um 180 Grad verschoben ist. Wenn die Phasenlage und die Amplitude gleich groß sind, dann werden die Amplituden verdoppelt.⁴¹

Es ergeben sich zwei Sonderfälle, die sogenannte konstruktive und destruktive Interferenz. Wenn die Wellenberge und Wellentäler zweier Wellen mit gleicher Wellenlänge aufeinander liegen spricht man von konstruktiver Interferenz. Die Welle, die durch diese Überlagerung entsteht, ist wiederum eine harmonische Welle mit gleicher Wellenlänge, allerdings größerer Amplitude wie die einzelnen Wellen vor der Überlagerung. Eine destruktive Interferenz wird erreicht, wenn zwei Wellen einen Unterschied von einer halben Wellenlänge aufweisen. Dabei überlagern sich Wellentäler der einen Welle mit Wellenbergen der anderen und es entsteht wieder eine harmonische Welle, die die gleiche Wellenlänge wie ihre Einzelwellen aufweist. Bei der destruktiven Interferenz hat

³⁹vgl. Steppat 2014, S.46

⁴⁰ Steppat 2014, S.46

⁴¹vgl. Steppat 2014, S.46

die daraus resultierende Welle eine kleinere Amplitude als die größere der beiden sich überlagernden Wellen.⁴²

In Abbildung (6) ist die konstruktive Interferenz dargestellt. Man kann erkennen, dass die Auslenkung der entstandenen Welle verstärkt wurde.

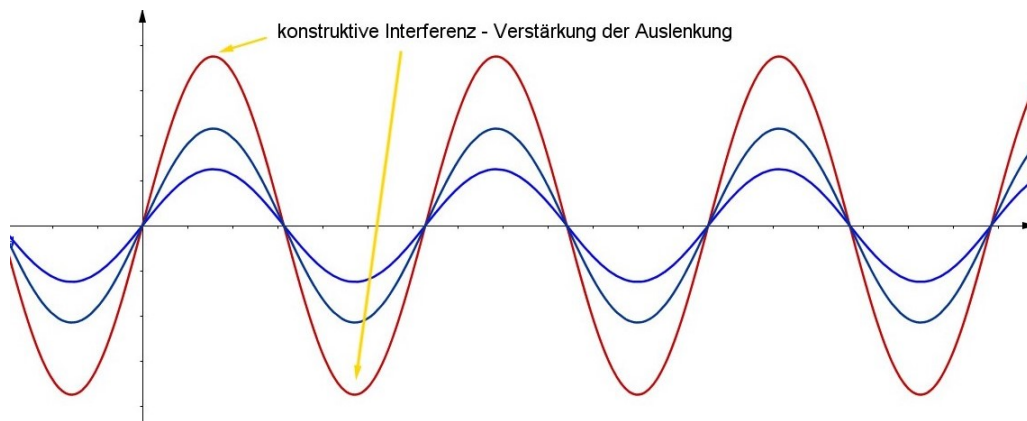


Abbildung 6: konstruktive Interferenz⁴³

In Abbildung (7) ist die destruktive Interferenz, d.h. eine Verminderung der Auslenkung der resultierenden Welle zu sehen. Die beiden Wellen, die in blau dargestellt sind, unterscheiden sich dabei um eine halbe Wellenlänge.

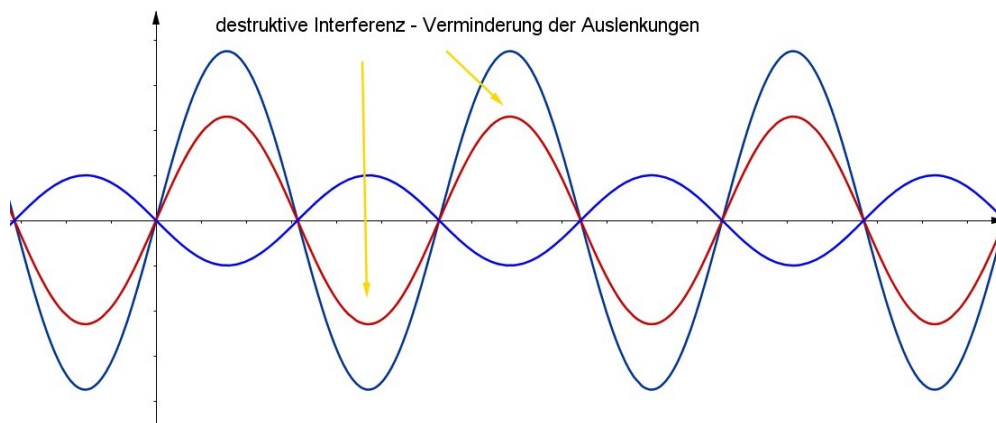


Abbildung 7: destruktive Interferenz⁴⁴

Schwebungen in der Musik:

Diese Erkenntnisse lassen sich auch auf die Musik übertragen:

Schwebungen in der Musik entstehen, wenn sich Schwingungen überlagern, deren Fre-

⁴²vgl. Gabath 2003, S.10f. [Online]

⁴³vgl. Gabath 2003, S.11 [Online]

⁴⁴vgl. Gabath 2003, S.11 [Online]

quenzen sich nur sehr gering voneinander unterscheiden. Wenn der Frequenzunterschied zweier Schwingungen beispielsweise ein Hertz beträgt,⁴⁵ dann entsteht „durch Überlagerung und Auslöschung eine periodische Lautstärkeschwankung mit einer Schwebungsfrequenz von einem Hertz. Somit entspricht die Schwebungsfrequenz immer der Differenz der beiden Frequenzen.“⁴⁶ Schwebungen werden bis circa acht Hertz als Lautstärkeschwankungen empfunden. Alle Schwebungen über acht Hertz werden als Rauigkeit wahrgenommen. Ausgelegt auf das Stimmen von Musikinstrumenten ist die hörbare Schwebung eine wichtige Hilfe. So wird zum Beispiel beim Stimmen eines Klaviers als erstes der Ton a^1 mit zu Hilfenahme einer Stimmgabel auf 440 Hertz gebracht. Der Ton der Stimmgabel dient als Vergleichston. Eine Schwebung ist dann hörbar, wenn sich die Frequenz der zu stimmenden Klaviersaite von dem Vergleichston der Stimmgabel geringfügig unterscheidet. Je schneller die Schwebung, desto mehr distanziert sich der Ton vom Vergleichston der Stimmgabel. Je mehr man sich dem Vergleichston annähert, desto langsamer wird die Schwebung und bei kompletter Übereinstimmung verschwindet die Schwebung zur Gänze.⁴⁷

Weiters wollen wir uns nun die Frage stellen, wie man zwei gleichzeitig erklingende Töne unterscheiden kann. Wann nimmt also unser Gehör zwei Töne mit unterschiedlicher Frequenz auch als verschiedene Töne wahr? Mathematisch ausgedrückt müssen wir folgende Gleichung betrachten:

$$\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) = 2 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{f_1 - f_2}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{f_1 + f_2}{2} \cdot t\right)$$

Der Bruch $\frac{f_1 - f_2}{2}$ ist dabei der langsam oszillierende Term. Aus physikalischer Sicht wird dies als Schwebung bezeichnet.⁴⁸

Spielt man beispielsweise ein a' mit einer Frequenz von 440 Hz und dann einen Ton, der eine um weniger als 10 Hz höhere oder tiefere Frequenz hat, so nimmt das menschliche Gehör diesen Unterschied als Schwebung wahr. Bei einem Unterschied um mehr als 30 Hz hören wir zwei verschiedene Töne und bei einem Frequenzunterschied im Mittelbereich ist eine Reibung bzw. ein Flattern hörbar.⁴⁹

⁴⁵vgl. Steppat 2014, S.47

⁴⁶Steppat 2014, S.47

⁴⁷vgl. Steppat 2014, S.46f.

⁴⁸vgl. Kemp 2010, S.8 [Online]

⁴⁹vgl. Kemp 2010, S.8 [Online]

3 schwingende Luftsäulen

Angenommen wir haben ein zylindrisch gebohrtes Rohr, welches am linken Ufer ($x = 0$) verschlossen sei. Dieses Rohr habe den Querschnitt q in cm^2 . Ein Abschnitt dieses Rohres habe die Länge l in cm und sei durch das Intervall $0 \leq x \leq l$ darstellbar. In diesem Rohr befindet sich Luft mit Masse m in g . Mit p_0 in dyn/cm^2 wird der Druck dieses Gases bezeichnet und mit V_0 in cm^3 das dazugehörige Volumen. Die Dichte ρ_0 ist gegeben durch die Formel $\rho_0 = \frac{m}{V_0}$.⁵⁰ Die Abbildung (8) stellt das zylindrisch gebohrte Rohr dar. Der Querschnitt an der Stelle l sei verschiebbar.

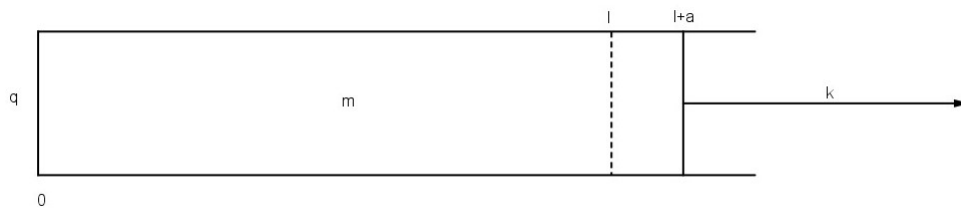


Abbildung 8: zylindrisch gebohrtes Rohr

Wenn an dieser Stelle nun eine Kraft k wirkt, dann verschiebt sich l ein bisschen nach rechts. Wir wollen diese Stelle mit $l + a$ bezeichnen. Dies hat eine Veränderung des Volumens im Rohr um den Wert $\Delta V = a \cdot q$ zur Folge. Das ursprüngliche Volumen V_0 nimmt also zu und das entstandene Volumen V ist gegeben mit $V = V_0 + \Delta V$. Der vorhandene Druck p_0 im Rohr nimmt ebenfalls zu und so ergibt sich $p = p_0 + \Delta p$. Angenommen diese zuvor beschriebene Zustandsänderung geht langsam und somit isotherm von statten, dann gilt⁵¹

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0.$$

Diese Gleichung wird als **Boyle - Mariotte'sches Gesetz** bezeichnet und wurde nach Robert Boyle und Edme Mariotte benannt. Folglich gilt die Beziehung

$$(p_0 + \Delta p) \cdot (V_0 + \Delta V) = p \cdot V = p_0 \cdot V_0$$

$$p_0 \cdot V_0 + \Delta p \cdot V_0 + \Delta V \cdot p_0 + \Delta p \cdot \Delta V = p_0 \cdot V_0$$

⁵⁰Reimer 2011, S.84

⁵¹vgl. Reimer 2011, S.84

und daraus folgt wenn wir $p_0 \cdot V_0$ von beiden Seiten der Gleichung abziehen

$$p_0 \cdot \Delta V + V_0 \cdot \Delta p + \Delta p \cdot \Delta V = 0.$$

Im nächsten Schritt dividieren wir die Gleichung durch V_0 und erhalten daher⁵²

$$\Delta p + \frac{\Delta V \cdot p_0}{V_0} + \frac{\Delta p \cdot \Delta V}{V_0} = 0.$$

Das Glied $\frac{\Delta p \cdot \Delta V}{V_0}$ zweiter Ordnung verschwindet für $\Delta V \rightarrow 0$ und wird daher im weiteren Verlauf vernachlässigt.⁵³ Nun führen wir eine weitere Äquivalenzumformung durch und bekommen

$$\Delta p = -\frac{p_0 \cdot \Delta V}{V_0}.$$

Durch diese Druckänderung wirkt auf der linken Seite des zylindrisch gebohrten Rohres die Kraft $q \cdot \Delta p$. Diese am linken Ufer wirkende Kraft und die Kraft k am rechten Ufer ergeben gemeinsam Null, d.h. sie stehen miteinander im Gleichgewicht. Deshalb erhält man die Gleichung⁵⁴

$$\begin{aligned} k &= -q \cdot \Delta p = -q \cdot \left(-\frac{p_0 \cdot \Delta V}{V_0} \right) = q \cdot \frac{p_0 \cdot \Delta V}{V_0} = \\ &= q \cdot p_0 \cdot \frac{\Delta V}{V_0} = q \cdot p_0 \cdot \frac{a \cdot q}{l \cdot q} = p_0 \cdot q \cdot \frac{a}{l} \end{aligned}$$

Wenn man jetzt ϵ als $\epsilon := p_0$ definiert erhalten wir für die Kraft k :⁵⁵

$$k = \epsilon \cdot q \cdot \frac{a}{l}$$

Diese Gleichung wird als **Hook'sches Gesetz für Gase** bezeichnet.⁵⁶

Die Auslenkungsfunktion sei gegeben mit $u(x, t)$ und c definieren wir als

$$c := \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}.$$

Daraus ergibt sich auch beim zylindrisch gebohrten Rohr die Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung, welche sowohl bei offenen als auch bei geschlossenen Enden eines Rohres gültig ist und immer nur das lokale Verhalten der Luft ausdrückt.⁵⁷

⁵²vgl. Reimer 2011, S.84f.

⁵³vgl. Reimer 2011, S.85

⁵⁴vgl. Reimer 2011, S.85

⁵⁵vgl. Reimer 2011, S.85

⁵⁶vgl. Reimer 2011, S.85

⁵⁷vgl. Reimer 2011, S.85f.

3.1 Pfeifen

Man spricht von einer Pfeife, wenn „die im Rohr befindliche Luftsäule auf irgendeine Weise in Schwingungen angeregt“⁵⁸ wird. Eine Pfeife ist an ihren Enden entweder offen oder geschlossen. Daher gibt es zwei Typen von Pfeifen:⁵⁹

Typ 1: offen - geschlossen

Typ 2: offen - offen

3.1.1 geschlossene Pfeifen

Man nennt eine Pfeife geschlossen, wenn entweder das linke oder das rechte Ende offen ist. Eine geschlossene Pfeife entspricht zum Beispiel dem Modell einer Klarinette, einer Oboe, eines Saxophones oder eines Fagotts, wenn man sich am geschlossenen Ende der Pfeife ein Mundstück vorstellt. Durch ein Rohrblatt wie bei der Klarinette und dem Saxophon bzw. durch ein Doppelrohrblatt bei der Oboe und dem Fagott wird die Luft im Rohr in Schwingungen versetzt und durch diese schwingende Luftsäule werden Töne erzeugt. Mathematisch wichtig ist, dass die Schwingungen geschlossener Pfeifen die Wellengleichung erfüllen. Bei einer geschlossenen Pfeife findet am Ende des Rohres keine Bewegung der Luft in Längsrichtung statt und dort entsteht ein sogenannter Schwingungsknoten. Am offenen Ende entstehen jedoch keine Druckunterschiede, weswegen wir in die Gleichung $k(x, t) = \epsilon \cdot q \cdot u_x(x, t)$ $k(l, t) = 0$ setzen. Daraus ergibt sich, dass auch $u_x(l, t) = 0$ ist. Dadurch entsteht also ein Schwingungsbauch mit den Randbedingungen $u(0, t) = 0$ und $u_x(l, t) = 0$. Damit die Lösungen $u(x, t)$ der Wellengleichung auch die zweite Randbedingung erfüllen, wird folgender Produktansatz verwendet⁶⁰

$$u(x, t) = f(x) \cdot g(t).$$

Damit die Wellengleichung erfüllt werden kann, müssen die Funktionen $f(x)$ und $g(t)$ mit der Konstanten γ folgende Differentialgleichungen mit den Randbedingun-

⁵⁸Reimer 2011, S.86

⁵⁹vgl. Reimer 2011, S.86

⁶⁰vgl. Reimer 2011, S.86f.

gen $f(0) = 0$ und $f'(l) = 0$ erfüllen:⁶¹

$$f''(x) = -\gamma^2 \cdot f(x) \text{ und } g''(t) = -\gamma^2 c^2 \cdot g(t)$$

Sowohl die erste Differentialgleichung als auch die erste Randbedingung werden durch die Funktion

$$f(x) = \sin(\gamma x)$$

gelöst. Weiters bilden wir die erste Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$ und erhalten somit $f'(x) = \gamma \cdot \cos(\gamma x)$, die dann auch die zweite Randbedingung für folgende γ erfüllt:

$$\gamma = \frac{2k-1}{l} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ für } k \in 1, 2, 3, \dots$$

Wir erhalten daher folgende Grundlösungen für $k = 1, 2, 3, \dots$:⁶²

$$u(x, t) = \left(a_k \cdot \cos \frac{c(k - \frac{1}{2}) \cdot \pi}{l} \cdot t + b_k \cdot \sin \frac{c(k - \frac{1}{2}) \cdot \pi}{l} \cdot t \right) \cdot \sin \frac{(k - \frac{1}{2}) \cdot \pi}{l} \cdot x$$

Wenn wir diese Lösungen etwas umformen ergibt sich

$$u(x, t) = \left(a_k \cdot \cos \frac{c(2k-1) \cdot \pi}{2l} \cdot t + b_k \cdot \sin \frac{c(2k-1) \cdot \pi}{2l} \cdot t \right) \cdot \sin \frac{(2k-1) \cdot \pi}{2l} \cdot x$$

Bei diesen Grundlösungen $u_{2k-1}(x, t)$ handelt es sich um Lösungen zur doppelten Saitenlänge $2l$. Diese sind gegeben mit den Frequenzen⁶³

$$\nu_{2k-1} = \frac{c}{4l} \cdot (2k-1) \Rightarrow \nu_{2k-1} = (2k-1) \cdot \nu_1 \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Diese Grundlösungen sind für das Intervall $0 \leq x \leq l$ definiert und die ersten fünf Schwingungen sind in Abbildung (9) dargestellt. In dieser Grafik sieht man die Funktion $u_k(x, 0)$ mit $k = 1, 3, 5$. Im Unterschied zur Naturton-Reihe treten jetzt nur mehr Obertöne ungerader Ordnung auf, das heißt die Frequenzen bilden das Verhältnis $1 : 3 : 5 : 7 : \dots$ und die Reihenfolge der Obertöne lautet daher Duodezime, Sext, ...⁶⁴

Der tiefste Ton ist das u_1 . Alle anderen (höheren) Töne entstehen durch das Öffnen von Grifflöchern bzw. Klappen. Damit wird erreicht, dass die Rohrlänge verkürzt wird

⁶¹vgl. Reimer 2011, S.87

⁶²vgl. Reimer 2011, S.87

⁶³vgl. Reimer 2011, S.88

⁶⁴vgl. Reimer 2011, S.88f.

⁶⁵Reimer 2011, S.88

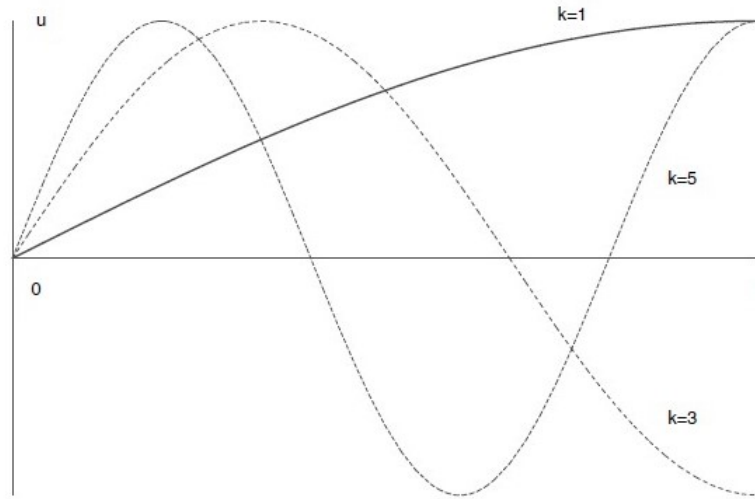


Abbildung 9: ersten 5 Schwingungen⁶⁵

und dadurch ertönen die nächst höheren Töne.⁶⁶ „In einem gewissen Sinn bedeutet das nur, daß die Rohrlänge verkürzt wird, diese Töne also ihrerseits wieder als tiefste Töne angesehen werden können.“⁶⁷ Alle anderen Töne haben klarerweise ebenfalls Obertöne, welche auch das Verhältnis $1 : 3 : 5 : \dots$ haben. „Jeder Ton des Instruments hat also eine Klangfarbe, die durch den Griff, den Ansatz und das Material bestimmt wird, aus dem das Rohr als Resonanzkörper gefertigt wird.“⁶⁸

Wir wollen im Folgenden nur den tiefsten Ton u_1 und die dazugehörigen Obertöne genauer betrachten. Wir betrachten daher nochmal die Formel

$$\nu_{2k-1} = \frac{c}{4l} \cdot (2k - 1).$$

Setzen wir nun $k = 1$, dann erhalten wir

$$\nu_1 = \frac{c}{4l}.$$

Die Konstante c sei nun definiert durch $c := \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}$ und somit ergibt sich als Formel für die geschlossene Pfeife:⁶⁹

$$\nu_1 = \frac{1}{4l} \cdot \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}.$$

⁶⁶vgl. Reimer 2011, S.89

⁶⁷Reimer 2011, S.89

⁶⁸Reimer 2011, S.89

⁶⁹vgl. Reimer 2011, S.89

Die Normaltemperatur des Rohres ist vorgegeben durch

$$p_0 = 1,0133 \text{ bar} = 1,0133 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-1} \text{ g sec}^{-2}$$

$$\rho_0 = 0,001293 \text{ cm}^{-3} \text{ g}$$

Daher ist die Frequenz bei einer geschlossenen Pfeife nur von der Länge des Rohres abhängig. Man erhält die Länge durch umformen der vorherigen Formel:⁷⁰

$$l = \frac{1}{4\nu_1} \cdot \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}.$$

3.1.2 offene Pfeifen

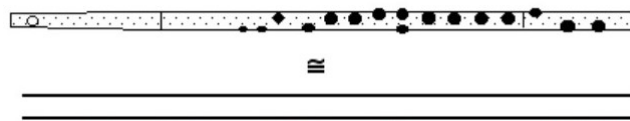


Abbildung 10: offene Pfeife⁷¹

Bei der Querflöte handelt es sich um eine offene Pfeife. An dem einen Ende, beim Kopfstück, wird die Luft des Spielers/der Spielerin über das Mundloch der Querflöte angeblasen und ein Luftstrom wird durch das Instrument geschickt. Dadurch werden Längsschwingungen, sogenannte Longitudinalschwingungen, erzeugt.⁷² Am anderen Ende, beim Fußstück der Querflöte, kann diese Luft wiederum entweichen. An den Rohrenden entsteht bei einer offenen Pfeife ein Schwingungsbauch. Die Anfangsbedingungen $u_x(0, t) = 0$ und $u_x(l, t) = 0$ sind zu jedem Zeitpunkt erfüllt. Wenn wir den Produktansatz ausführen kommen wir auf folgende Bedingungen: $f'(0) = 0$ und $f'(l) = 0$. Die Differentialgleichung $f''(x) = -\gamma^2 \cdot f(x)$ erfüllt die zuvor angeführten Randbedingungen und hat die Lösungen $f(x) = \cos \gamma x$ mit $\gamma = \frac{k\pi}{l}$ für $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Dies ergibt die Eigenschwingung $u_k(x, t) = A_k \cdot \cos \frac{ck\pi}{l}(t - \phi_k) \cdot \cos \frac{k\pi}{l}x$. Diese unterscheidet sich von der Eigenschwingung einer schwingenden Seite nur durch den ortsabhängigen Faktor $\cos \frac{k\pi}{l}x$. Die Frequenzen umfassen die volle harmonische Naturton-Reihe und stehen in den Verhältnissen $1 : 2 : 3 : \dots$. Die Formel von Mersenne ist von der Gestalt $\nu_1 = \frac{c}{2l}$, wobei c die Schallgeschwindigkeit ist ($c = 331 \text{ m/s}$).⁷³

⁷⁰vgl. Reimer 2011, S.89f.

⁷¹<http://newt.phys.unsw.edu.au/jw/fluteacoustics.html>

⁷²vgl. Reimer 2011, S.93f.

⁷³vgl. Reimer 2011, S.94f.

In der nachfolgenden Grafik sieht man die Schwingungsbäuche offener und geschlossener Pfeifen:

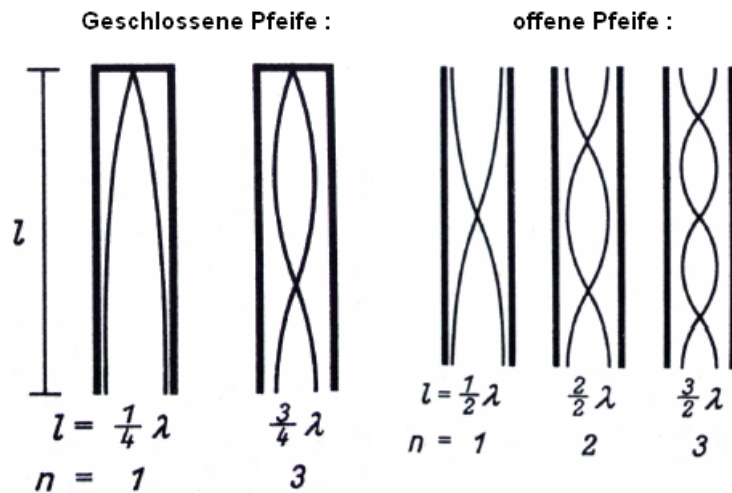


Abbildung 11: Schwingungsbauch⁷⁴

3.1.3 Beispiel: die Querflöte

Das c^1 ist der tiefste Ton einer Querflöte mit C-Fuß. Dies bedeutet, dass alle Klappen geschlossen sind und die Grifflöcher abgedeckt sind. Dieser Ton hat die Frequenz $\nu_1 = \frac{3}{5} \cdot 435 \text{ Hz} = 261 \text{ Hz}$ in reiner Stimmung. Für die Rohrlänge l berechnen wir daher $l = \frac{c}{2\nu_1} = \frac{331}{2 \cdot 261} \text{ m} \approx 0,6341 \text{ m}$. Unser Instrument ist also ungefähr 63 cm lang - dies stimmt gut mit der Wirklichkeit überein.⁷⁵

Es ist allerdings zu beachten, dass kein Blasinstrument vollkommen als offene oder geschlossene Pfeife betrachtet werden kann. Am Beispiel der Querflöte kann man dies gut erläutern: dieses Instrument hat beim Kopfstück kein ganz offenes Ende. Der Luftstrom des Rohres wird zuerst zum Stimmkorken am Ende des Flötenkopfstückes geleitet, bevor er das Blasloch erreicht. Der Luftstrom des Rohres wird dadurch also gehemmt. Außerdem bedeutet dies, dass die Obertöne gerader Ordnung nicht so stark ausgeprägt sind (bei einer geschlossenen Pfeife entfallen diese zur Gänze).⁷⁶

⁷⁴<https://www.physikerboard.de/topic,12502,-orgelpfeifen.html>

⁷⁵vgl. Reimer 2011, S.95

⁷⁶vgl. Reimer 2011, S.95

3.2 Sinuswellen in der Musik - Saiteninstrumente

Wie schon in vorherigen Kapiteln erwähnt verbindet man Schwingungen immer automatisch mit Sinusfunktionen bzw. Cosinus- und Tangensfunktionen.⁷⁷ Ausgelegt auf die Musik bedeutet dies, dass sich Schallwellen durch Sinusfunktionen darstellen lassen. Wir betrachten im Folgenden den Grundton als einen reinen Sinuston. Wenn wir die Wellenlänge dieses Tones halbieren, so bedeutet dies eine Verdoppelung der Frequenz. Der Kammerton a^1 hat eine Frequenz von 440 Hz . Dies bedeutet, dass beispielsweise die A-Seite einer Violine 440-mal pro Sekunde zum Schwingen gebracht wird. Diesen Kammerton wollen wir in der nächsten Abbildung mit Hilfe der Funktion $f(x) = \sin(2x)$ darstellen.⁷⁸

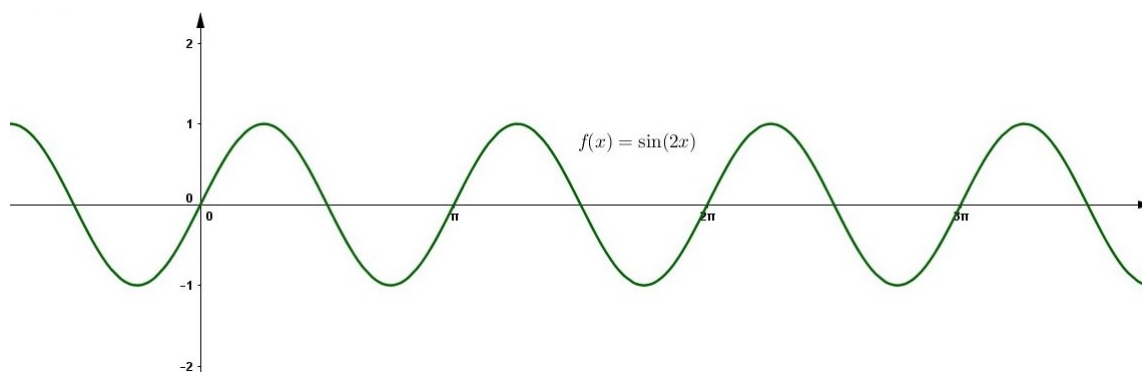


Abbildung 12: $f(x)=\sin(2x)$

Die Funktion $f(x) = \sin(4x)$ beschreibt den Ton, der um eine Oktave höher ist. Dies entspricht beispielsweise dem gespielten A auf der E-Saite einer Violine.⁷⁹ Diese Funktion ist in Abbildung (13) dargestellt. Man erkennt, dass sich die Frequenz verglichen mit der Funktion in Abbildung (12) verdoppelt hat. Die Schwingung dargestellt durch die Funktion $f(x) = \sin(3x)$ liegt zwischen den anderen beiden zuvor vorgestellten Schwingungen und stellt die Quinte auf A, der Ton der E-Saite, dar.⁸⁰ Eine einfache Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ stellt das Anzupfen der A-Saite eines Cellos dar. Das tiefe E des Cellos wird durch die Funktion $f(x) = \sin(\frac{3}{4}x)$ in Abbildung (15) dargestellt und die Schwingung der Funktion $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$ in Abbildung (16) ist das tiefe A, welches nur auf einem Kontrabass spielbar ist.⁸¹

⁷⁷vgl. Haftendorn 2016: S.157

⁷⁸vgl. Haftendorn 2016: S.159

⁷⁹vgl. Haftendorn 2016: S. 159f.

⁸⁰vgl. Haftendorn 2016: S.195

⁸¹vgl. Haftendorn 2016: S.160

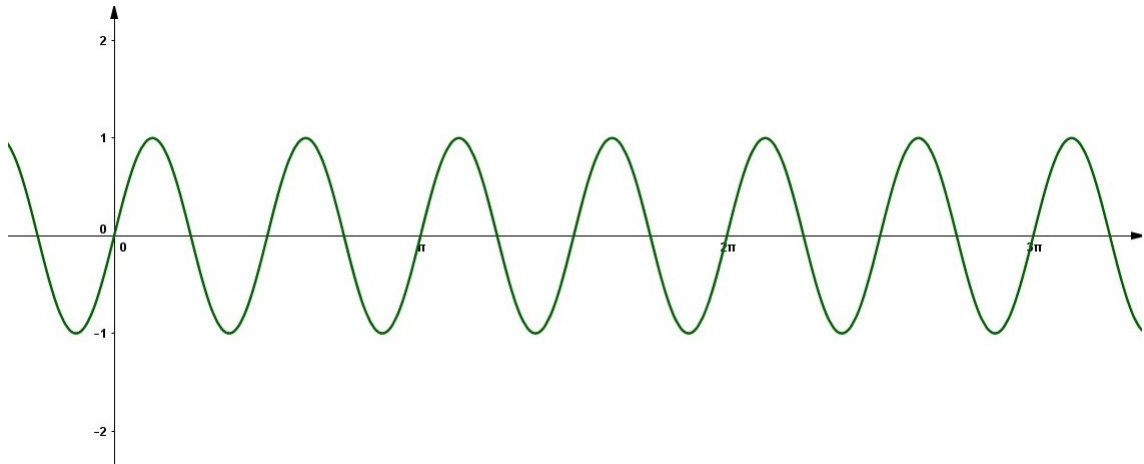


Abbildung 13: $f(x)=\sin(4x)$

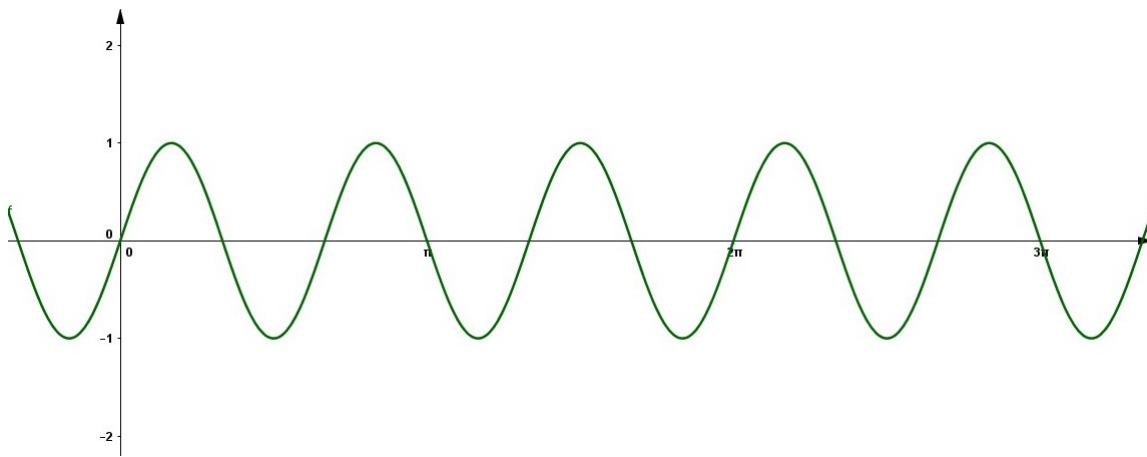


Abbildung 14: $f(x)=\sin(3x)$

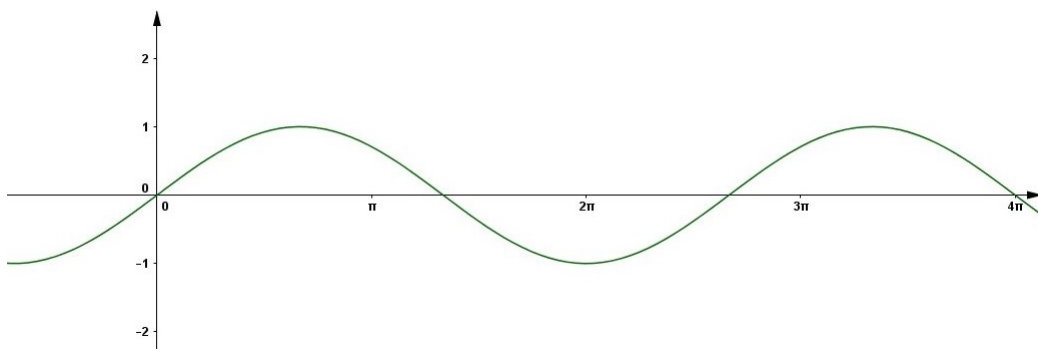


Abbildung 15: $f(x)=\sin(0.75x)$

An diesen Beispielen und an Hand der Funktionsgraphen kann man sehr gut erkennen, dass die Tonhöhe von der Frequenz abhängig ist - sie stehen in einem direkt proportionalen Verhältnis: je tiefer der Ton, desto niedriger ist die Frequenz und vice versa.

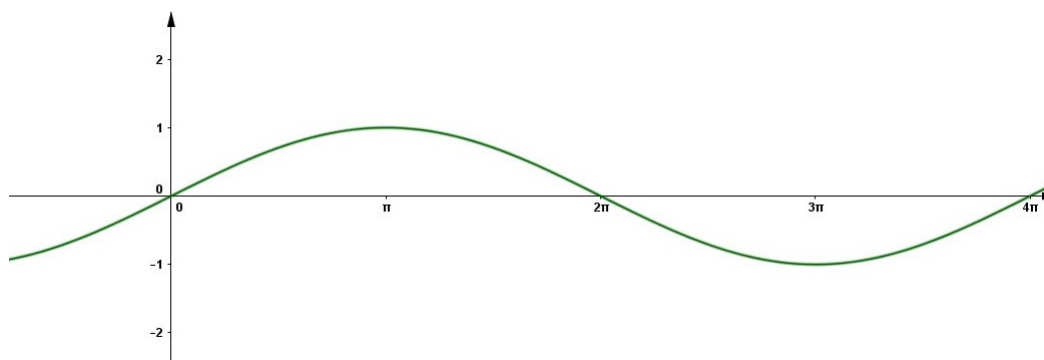


Abbildung 16: $f(x)=\sin(0.5x)$

3.2.1 Blasinstrumente - am Beispiel der Querflöte

Angenommen wir haben eine Querflöte mit C-Fuß und wollen nun die Frequenz des tiefsten Tones, also des c^1 berechnen. Unsere Querflöte hat eine Länge l mit $l = 0,6341 \text{ m}$. Dann wird λ berechnet als $\lambda = 2 \cdot l = 2 \cdot 0,6341 = 1,2682 \text{ m}$. Da die Schallgeschwindigkeit mit $c = 330 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ angegeben wird, berechnet sich die Frequenz f durch $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{330}{1,2682} = 260,21 \text{ Hz}$. Der Ton c^1 hat also eine Frequenz von circa 260 Hz auf unserer angenommenen Querflöte.⁸²

3.3 Partialtöne

In der Realität der Tonerzeugung tritt eine Schwingung nie ganz alleine auf.⁸³ „Der Ton als Ergebnis einfacher sinusförmiger Schwingungen kann nur im Tongenerator erzeugt werden.“⁸⁴ Zu einer vorhandenen Grundschwingung treten immer auch mehrere andere Schwingungen jeweils mit höherer Frequenz auf. Da diese musikalisch höher klingen nennt man sie Obertöne. Deshalb ist jeder musikalische Ton genau genommen ein Klang, weil immer mehrere Schwingungen anzutreffen sind.⁸⁵ Aus diesem Grund ist in der musikalischen Praxis und auch in der Natur der Sinuston kaum existent. Zum Grundton, auch Grundschwingung genannt, kommen weitere periodische Schwingungen hinzu, welche ganzzahlige Vielfache des Grundtones sind.⁸⁶ Das heißt, jeder Ton der

⁸²vgl. Haftendorn 2016, S.161

⁸³vgl. Kloss 2004, S.16

⁸⁴Ziegenrucker 2012, S.11

⁸⁵vgl. Kloss 2004, S.16

⁸⁶vgl. Ziegenrucker 2012, S.11

erklingt wird von anderen Tönen mit einer zwei-, drei-, vier-, fünffachen Frequenz usw. begleitet.⁸⁷ Diese Schwingungen heißen Partialtöne, harmonische Obertöne oder Teiltöne.⁸⁸ Diese Töne sind für unser Harmonieverständnis grundlegend und werden daher auch als die Harmonischen bezeichnet. Der Begriff der Partialtöne/Teiltöne wird verwendet um zu verdeutlichen, dass jeder Ton, den Grundton inklusive, nur einen Teil des Ganzen darstellt.⁸⁹ In der folgenden Grafik ist die Obertonreihe für den Grundton C dargestellt:

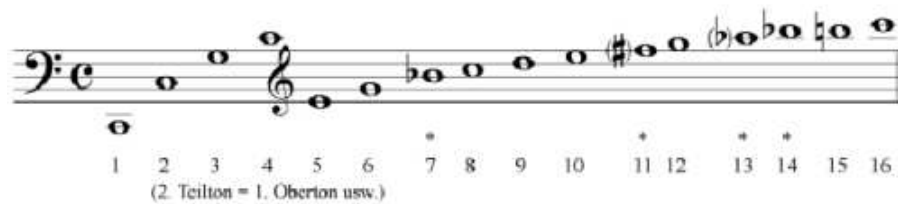


Abbildung 17: Obertonreihe für den Grundton C ⁹⁰

Es sei angemerkt, dass der 7., 11., 13. und 14. Partialton nicht genau mit der reinen Skala übereinstimmen und deshalb in der Abbildung (17) gekennzeichnet sind.⁹¹ Diese Töne sind etwas tiefer als notiert.⁹²

3.3.1 die harmonische Naturton-Reihe

Die harmonische Naturton-Reihe (mathematisch korrekt: Naturton-Folge) wird von einem Grundton $u_1(x, t)$ und den zeitgleich erklingenden Obertönen $u_k(x, t)$ für $k = 1, 2, 3, \dots$ mit den Frequenzen

$$\nu_k = k \cdot \nu_1, \text{ für } k = 1, 2, 3, \dots$$

gebildet. Höchstwahrscheinlich war diese schon Aritoxenos, aber sicher jedoch Mersenne, bekannt. Die Tonhöhen dieser Naturton-Reihe verhalten sich also im Verhältnis

$$1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : \dots,$$

⁸⁷vgl. Kloss 2004, S.16

⁸⁸vgl. Ziegenrucker 2012, S.11

⁸⁹vgl. Kloss 2004, S.16

⁹⁰<http://gehoerbildung-musiktheorie.de/musiktheorie/obertonreihe/>

⁹¹vgl. Kloss 2004, S.16

⁹²vgl. Ziegenrucker 2012, S.12

also so wie ihre Ordnungen k .⁹³

Musikalisch gesehen entspricht dies folgender Reihenfolge: Oktave, Quinte, Quarte, Terz, kleine Terz. All diese Intervalle werden von unserem Gehör als konsonant, dh. als wohlklingend empfunden.⁹⁴

3.3.2 Zusammenhang zwischen Wellengleichung und Klang

Die Wellengleichung ist mathematisch gesehen eine lineare Funktion und somit „ist jede endliche und jede (konvergente) unendliche Summe von Grundlösungen

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t)$$

wieder eine Lösung der Wellengleichung, sie stellt also wieder eine mögliche Saitenschwingung dar, kurz einen 'Ton'.“⁹⁵ Wenn sich mehrere Grund- und Obertöne überlagern, nennt man dies in der Musik einen Klang. Diese Bezeichnung wird auch verwendet, wenn beispielsweise mehrere verschiedene Saiten zum Schwingen gebracht werden, da dadurch auch eine Überlagerung einzelner Töne stattfindet. Mathematisch kann ein Klang durch folgende Gleichung beschrieben werden:⁹⁶

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos \left(2\pi \nu_k \cdot t \right) + b_k \cdot \sin \left(2\pi \nu_k \cdot t \right) \right) \cdot \sin \left(\frac{k\pi}{l} \cdot x \right)$$

Jeder Klang ist durch eine bestimmte Klangfarbe gekennzeichnet, welche durch die sogenannten *Fourier-Koeffizienten* $a_1, a_2, a_3, \dots$ und $b_1, b_2, b_3, \dots$ gekennzeichnet ist. Diesen Fourier-Koeffizienten werden wiederum die Frequenzen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ zugewiesen. Ausgelegt auf das Beispiel einer schwingenden Saite können die Fourier-Koeffizienten aus den Anfangswerten

$$A(x) := u(x, 0) \text{ und } B(x) := u_t(x, 0)$$

berechnet werden.⁹⁷

Dies bedeutet, dass der Anfangswert $A(x)$ dazu dient, die **Form** der schwingenden Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ zu beschreiben. Es gilt somit

$$A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \left(\frac{k\pi}{l} \cdot x \right).$$

⁹³vgl. Reimer 2011, S.72

⁹⁴vgl. Reimer 2011, S.72

⁹⁵Reimer 2011, S.73

⁹⁶vgl. Reimer 2011, S.73

⁹⁷vgl. Reimer 2011, S.73f.

Die Werte $a_1, a_2, a_3, \dots$ können dann mit Hilfe der Fourier-Theorie (siehe Kapitel 4) aus der Funktion $A(x)$ berechnet werden.⁹⁸

Die Anfangsgeschwindigkeit für die Punkte x der schwingenden Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ wird von der Funktion $B(x)$ dargestellt. Die Werte $b_1, b_2, b_3, \dots$ ergeben sich dann auf analoge Weise aus der Funktion $B(x)$.⁹⁹

Die Amplituden und Phasen eines Klanges werden von beiden Folgen, d.h. von den Werten $a_1, a_2, a_3, \dots$ und $b_1, b_2, b_3, \dots$, zusammen vorgegeben. Dies bedeutet jeder Klang und die dazugehörige subjektive Wahrnehmung der Klangfarbe werden nur von den Anfangswerten bestimmt. Diese Anfangswerte werden bei Streichinstrumenten wiederum durch die Art der Energiezufuhr (zum Beispiel: streichen, zupfen, anschlagen) festgelegt.¹⁰⁰

3.4 Klangfarben verschiedener Instrumente

In diesem Kapitel versuchen wir die Frage genauer zu beantworten, warum ein gespielter Ton auf verschiedenen Instrumenten (bei gleicher Tonhöhe) anders klingt. Wenn also ein Cello ein A auf der untersten und zugleich dünnsten Saite spielt, dann klingt es anders als wenn beispielsweise ein Klavier, eine Posaune, ein Fagott, etc. das gleiche A in Tenorlage erklingen lässt. Der Unterschied ist die **Klangfarbe**! Beim Spielen eines Tones erklingt eben nicht nur der Grundton, sondern es schwingen auch viele Obertöne mit, die dem jeweiligen Instrument seinen charakteristischen Klang geben.¹⁰¹

Die Klangfarbe eines Instruments wird im Wesentlichen durch das Auftreten der Obertöne bestimmt. Ihre Anzahl, Stärke und ihr Verhältnis sind dabei ausschlaggebend. Die unterschiedlichen Klangfarben lassen sich gut durch ihre Schwingungsbilder veranschaulichen. Die Blockflöte ist obertonarm und entspricht daher am ehesten dem Bild der Sinuskurve.¹⁰² Eine Violine ist sehr obertonreich und ihr Klangbild ergibt sich durch „die Addition vieler, gleichmäßig schwächer werdender Obertöne.“¹⁰³ Die Klangfarbe entspricht daher dem Bild einer Sägezahnkurve. Ein annähernd rechteckiges Schwingungsbild tritt bei der Klarinette auf, da die Klangfarbe durch ungeradzahlige Obertöne

⁹⁸vgl. Reimer 2011, S.74

⁹⁹vgl. Reimer 2011, S.74

¹⁰⁰vgl. Reimer 2011, S.74

¹⁰¹vgl. Haftendorn 2016: S.251

¹⁰²vgl. Kloss 2004, S.16

¹⁰³Kloss 2004, S.16

entsteht. Diese Beispiele zeigen, dass das Obertonbild der Instrumente im Allgemeinen nicht regelmäßig verläuft, sondern manche Obertöne viel stärker ausgeprägt sind als andere.¹⁰⁴ Im Prinzip sind die Obertöne bei allen Instrumenten gleich, „aber sie gehen mit verschiedener Amplitude (Schwingungsauslenkung, Lautstärke) in die Summe all dieser Schwingungen ein.“¹⁰⁵

Zur Verdeutlichung betrachten wir zwei gleich hohe Töne, die jedoch ein verschiedenes Obertonspektrum haben. Wir betrachten als erstes die Funktion $f(t) = 10 \cdot \sin(t) + 5 \cdot \sin(2t) + 3 \cdot \sin(3t) + 4 \cdot \sin(4t) + 6 \cdot \sin(5t) + 8 \cdot \sin(6t)$. In der nächsten Abbildung ist die Funktion $g(t) = 10 \cdot \sin(t) - 5 \cdot \sin(2t) - 3 \cdot \sin(3t) + 1 \cdot \sin(4t) + 5 \cdot \sin(5t) + 2 \cdot \sin(6t)$ dargestellt.¹⁰⁶

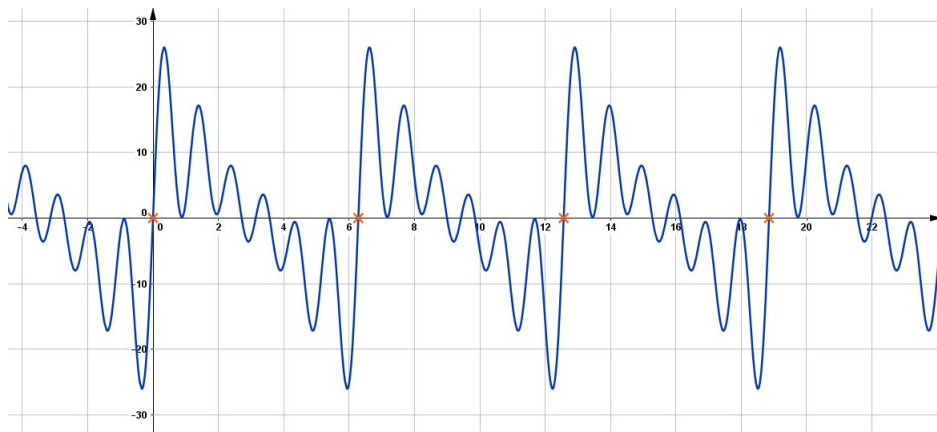


Abbildung 18: Funktion $f(t)$

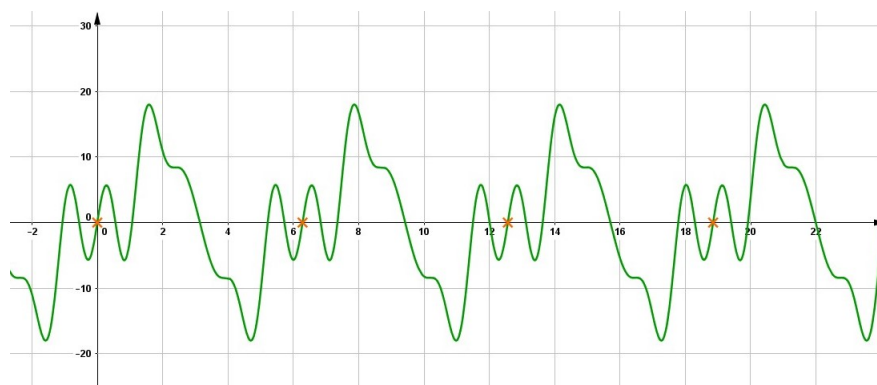


Abbildung 19: Funktion $g(t)$

Wie man in den Abbildungen gut durch die orangen Punkte erkennen kann, haben die

¹⁰⁴vgl. Kloss 2004, S.16

¹⁰⁵Haftendorn 2016, S.252

¹⁰⁶vgl. Haftendorn 2016, S.252

beiden Funktionen die gleiche Frequenz und somit die gleiche Tonhöhe, aber ein unterschiedliches Obertonspektrum. Mit Hilfe elektronischer Methoden ist es heutzutage möglich die Obertonspektren 'echter' Instrumente sichtbar zu machen. Das wichtigste Hilfsmittel ist dabei die **Fourier-Analyse**.¹⁰⁷

Dies werden wir aus mathematischer Sicht in den kommenden Kapiteln näher erläutern.

3.5 Obertöne und Schwebungen

Wir erinnern uns, dass eine Schwebung entsteht, wenn zwei Töne ähnlicher Frequenz gemeinsam zum Erklingen gebracht werden.¹⁰⁸ Wenn wir uns jetzt vorstellen zwei verschiedene Töne auf einem Instrument gleichzeitig zu spielen, so werden auch durch die Obertöne des Zweiklangs Schwebungen hervorgerufen. Spielt man zum ersten Ton die passende Quinte dazu, so steht diese zum Grundton im Verhältnis 3:2. Ist das Verhältnis des zweiten Tones zum Grundton $\sqrt{2} : 1$, so entsteht ein Tritonus (drei ganze Töne). Es treten umso mehr Schwebungen in der Musik auf, je komplizierter das Verhältnis des zweiten Tones zum Grundton ist. Folglich gilt: je kleiner das Frequenzverhältnis der erklingenden Zweitöne ist, desto "besser" klingen sie. Kleine Frequenzverhältnisse sind zum Beispiel: Quinte (3:2), Quarte (4:3), große Terz (5:4), kleine Terz (6:5), etc. Beim Bilden einer Tonleiter sollten daher die gut klingenden Zweitöne möglichst vorkommen. Eine Oktave entsteht durch Verdoppelung der Frequenz und muss exakt gebildet werden.¹⁰⁹

¹⁰⁷vgl. Haftendorn 2016, S.252

¹⁰⁸vgl. Kemp 2010, S.22 [Online]

¹⁰⁹vgl. Kemp 2010, S.23f. [Online]

4 Fourier - Theorie

„Il résulte de tout ce qui a été démontré dans cette section, concernant le développement [sic] des fonctions en séries trigonométriques que si l'on suppose une fonction $f(x)$, dont la valeur est représentée dans un intervalle déterminé depuis $x = 0$ jusqu'à $x = x$, par l'ordonnée d'une ligne courbe tracée arbitrairement, on pourra toujours développer [sic] une fonction en une série qui ne contiendra que les sinus ou les cosinus, ou les sinus et les cosinus d'arcs multiples ...“¹¹⁰

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830)

4.1 Lebenslauf Jean Baptiste Joseph Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier wurde am 21. März im Jahre 1768 in Auxerre, Frankreich geboren. Schon im Alter von neun Jahren verstarb seine Mutter und ein Jahr später wurde er zum Vollwaisen, da auch sein Vater verstarb. Erste Interessen für das Fach Mathematik zeichneten sich 1780 ab, als Fourier in die Schule Ecole Royale Militaire wechselte. Mit 14 Jahren begann er das Buch



'cours de mathématique' von Bezouts zu lesen. Im Jahre 1787 wollte er Priester werden und trat da-

Abbildung 20: Jean Baptiste Joseph Fourier¹¹²

zu ins Kloster ein, welches er allerdings schon 1789 wieder verließ, da sein Interesse an der Mathematik stärker war. Somit bekam er 1790 eine Stelle als Lehrer an der Schule Ecole Royale Militaire und seine Interessen galten der Mathematik, der Religion und auch der Politik. Seine politische Einstellung und vor allem seine Mitgliedschaft im Revolutionskomitee brachten ihn schließlich während der französischen Revolution ins Gefängnis. Nach Beruhigung der politischen Lage in Frankreich begann er 1794 an der Ecole Normal in Paris zu studieren. An dieser Universität hörte er Vorlesungen von den Mathematikern Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace und Gaspard Monge. 1795 erhielt er eine Anstellung an der Ecole Polytechnique in Paris. Fourier wurde

¹¹⁰Henze/Last 2010, S.321

¹¹²<http://www.uh.edu/engines/epi1878.htm>

1797 Nachfolger von Joseph-Louis Lagrange und erhielt die Professur für Mechanik und Analysis an der Universität. Fourier nahm in den darauf folgenden Jahren bis 1801 an einer Expedition Napoleons nach Ägypten teil und wurde dort Mitbegründer des Kairo-Institutes - er war dort ein Mitglied der Abteilung für Mathematik. Nach seiner Rückkehr nach Frankreich arbeitete er wie zuvor als Professor an der Universität in Paris. 1802 wurde Fourier durch Napoleon zum Präfekt des Département der Isere in Grenoble, wo er seiner Forschung im Bereich der Wärmeleitung nachging und schließlich auch große mathematische Resultate erzielte. Seine Arbeit mit dem Titel 'Über die Ausbreitung von Wärme in festen Körpern' wurde 1807 veröffentlicht. Als er 1817 nach Paris zurückkehrte, wurde er in die Akademie der Wissenschaften aufgenommen. Später wurde er sogar zum Sekretär der mathematischen Abteilung gewählt. Das Hauptwerk von Jean Baptiste Joseph Fourier trägt den Namen 'La théorie analytique de la chaleur' und erschien 1822. In diesem klassischen Werk untersuchte er mit Hilfe trigonometrischer Reihen und Integrale Probleme der Wärmeleitung. Durch seine Arbeit wurde die weitere Forschungsarbeit im Bereich der trigonometrischen Reihen und Funktionen in einer Veränderlichen angekurbelt. Jean Baptiste Joseph Fourier ist am 16. Mai 1830 im Alter von 62 Jahren in Paris verstorben.¹¹³

4.2 Allgemeines zur Fourier - Theorie

Die Fourier - Theorie befasst sich mit der Darstellung periodischer Vorgänge. Diese Periodizität ist auch in der Musik von Bedeutung. Die Grundschwingung und die verschiedenen Oberschwingungen eines Tones haben einen sinusartigen Verlauf. Da all diese Schwingungen andere Amplituden haben, tragen sie zur Gesamtschwingung bei. Periodische Funktionen stellen ein mathematisches Modell für diese Schwingungen dar.¹¹⁴ „Ein Ton, der z. B. von einer schwingenden Saite erzeugt werden kann, setzt sich [...] aus Sinus- und Kosinus-Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen mit zugehörigen Amplituden zusammen.“¹¹⁵ Diese zusammengesetzten harmonischen Funktionen haben Frequenzen im Verhältnis $1 : 2 : 3 : \dots$. Im Allgemeinen muss man unendlich viele solche Oberschwingungen zulassen.¹¹⁶

¹¹³vgl. <https://www.math.tugraz.at/~predota/old/history/mathematiker/fourier.html>

¹¹⁴vgl. Rolf 2009, S.405

¹¹⁵Goebbels 2013, S.700

¹¹⁶vgl. Rolf 2009, S.405

Es werden dabei grundsätzlich zwei Aspekte unterschieden:

- a) die *Fourier - Analyse*: diese hat die Aufgabe „aus einer gegebenen Funktion die Amplituden der Oberschwingungen zu berechnen“¹¹⁷
- b) die *Fourier - Synthese*: bei dieser Methode soll man „aus gegebenen Amplituden der Oberschwingungen die Funktion wieder zusammensetzen“¹¹⁸

Konkret ausgelegt auf das Gebiet der Akustik heißt das, dass bei der Fourier - Analyse aus einem Ton seine Obertöne herausgefiltert werden sollen und bei der Fourier-Synthese rekonstruiert man aus den gegebenen Obertönen den ursprünglichen Ton. Mit zu Hilfenahme technischer Mittel ist sowohl die Fourier-Analyse, als auch die Fourier-Synthese (annähernd) durchführbar.¹¹⁹

Am Rande sei angemerkt, dass das menschliche Ohr ein gewaltiges Leistungsvermögen hat und so ist es uns Menschen beispielsweise möglich fehlende Grundtöne beim Hören hinzuzufügen. Es ist daher anzunehmen, dass mehrere Mechanismen beim Hörvorgang stattfinden. Im Innenohr werden die eingehenden Wellen analysiert, d.h. unser Gehör betreibt Fourier- Analyse.¹²⁰ So verrät uns unser Ohr beispielsweise, dass beim Hören eines Tones lediglich eine Sinus-Schwingung auftritt. Daraus kann man folgern, dass mehrere Töne auch mehrere Sinus-Schwingungen bedeuten. Darüber hinaus sind in allen periodischen Schwingungen bzw. Signalen (abgesehen vom Sinus) mehrere Töne enthalten. Ausgelegt auf die Musik heißt das, dass auch Klänge oder Vokale mehrere Töne beinhalten.¹²¹

4.3 Die Fourier-Reihe

Die Fourier - Reihe geht auf den Physiker und Mathematiker Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) zurück (siehe auch Kapitel 4.1). Diese mathematische Reihe hat eine gewisse Ähnlichkeit mit Sinusreihen, Cosinusreihen bzw. mit der Potenzreihe. Schon im 18.Jahrhundert behauptete Fourier, dass sich periodische Funktionen, ganz gleich

¹¹⁷Rolf 2009, S.405

¹¹⁸Rolf 2009, S.405

¹¹⁹vgl. Rolf 2009, S.405

¹²⁰vgl. Barkowsky 1996, S.5

¹²¹vgl. Karrenberg 2010, S.37

welche Form sie haben, in eine Folge von Sinus- und Cosinusschwingungen zerlegen lassen.¹²²

„Alle Schwingungen/Signale können so aufgefasst werden, als seien sie aus lauter Sinus-Schwingungen verschiedener Frequenz und Stärke (Amplitude) zusammengesetzt.“¹²³ Außerdem gilt dieses Fourier-Prinzip nicht nur für periodische Signale, sondern für alle Schwingungen, wie beispielsweise auch für einmalige Signale und nicht-periodische Schwingungen.¹²⁴

Dies ist eine fundamentale Erkenntnis mit weitreichenden Konsequenzen für die Naturwissenschaften. Alle Schwingungen besitzen also nur einen einzigen Baustein: Sinus-Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen.¹²⁵

Wir betrachten nun eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgender Periodizitätseigenschaft:

$$f(x) = f(x + 2\pi) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Außerdem soll die **Generalvoraussetzung** gelten, dass f über das Intervall $[0, 2\pi]$ integrierbar ist.¹²⁶

Grundsätzlich stellen wir uns die Frage, ob die Funktion f wie folgt in Sinus- und Cosinusfunktionen aufgebaut werden kann:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \dots \quad (2)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Reihe. Die Grundschwingung wird in der ersten runden Klammer dargestellt und alle weiteren Klammern werden als Oberschwingungen gesehen. Die Größen $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$ stellen die Amplituden dar und sind somit Konstanten (genauso wie der Term $\frac{a_0}{2}$).¹²⁷

Allerdings ist noch nicht klar definiert, wie man all diese Größen wählen muss, damit diese Reihe an so vielen Stellen x wie möglich gegen $f(x)$ konvergiert.¹²⁸ Die Fourier-Koeffizienten a_k und b_k sind die einzigen Unbekannten unserer Funktion f . Das Ziel der Fourier-Analyse ist es diese zu bestimmen.¹²⁹ Zur Vorbereitung auf die Wahl dieser

¹²²vgl. Barkowsky 1996, S.26

¹²³Karrenberg 2010, S.38

¹²⁴vgl. Karrenberg 2010, S.38

¹²⁵vgl. Karrenberg 2010, S.38

¹²⁶vgl. Rolf 2009, S.406

¹²⁷vgl. Rolf 2009, S.406

¹²⁸vgl. Rolf 2009, S.406

¹²⁹vgl. Barkowsky 1996, S.27

Größen betrachten wir zunächst die folgenden Hilfssätze:¹³⁰

Lemma 1: Jedes Intervall $[\alpha, \beta]$ der Länge $\beta - \alpha = 2\pi$ heißt **Periodenintervall**.

Häufig verwendete Periodenintervalle sind beispielsweise $[0, 2\pi]$ und $[-\pi, \pi]$.¹³¹

(i) Die Funktion f ist durch ihre Restriktion auf ein Periodenintervall $[\alpha, \beta]$, (α, β) oder $(\alpha, \beta]$ eindeutig festgelegt.

(ii) f ist über jedes kompakte Intervall $[\alpha_1, \beta_1]$ integrierbar und es gilt für $k \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x) \, dx = \int_{\alpha_1 + k \cdot 2\pi}^{\beta_1 + k \cdot 2\pi} f(x) \, dx$$

(iii) Für jedes Periodenintervall $[\alpha, \beta]$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx$$

Beweis:¹³²

ad (i):

Durch sukzessives Anwenden von (1) ergibt sich für $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x - k \cdot 2\pi)$$

Wenn für unser gegebenes x das Argument $x - k \cdot 2\pi$ in $[\alpha, \beta]$ liegen soll, dann muss $\alpha \leq x - k \cdot 2\pi < \beta = \alpha + 2\pi$ gelten. Daraus ergibt sich:

$$0 \leq x - k \cdot 2\pi - \alpha < 2\pi$$

$$0 \leq \frac{x}{2\pi} - k - \frac{\alpha}{2\pi} < 1$$

$$k \leq \frac{x - \alpha}{2\pi} < k + 1$$

Nach der Definition der Gaußklammer ergibt sich also $k = \left\lfloor \frac{x - \alpha}{2\pi} \right\rfloor$. Mit diesem k ist somit $f(x)$ durch $f(x - k \cdot 2\pi)$ eindeutig festgelegt.

Entsprechendes ergibt sich dann auch für das Intervall $(\alpha, \beta]$, da $f(\alpha) = f(\beta)$ ist.

¹³⁰vgl. Rolf 2009, S.406

¹³¹Rolf 2009, S.406

¹³²vgl. Rolf 2009, S.406

ad (ii):

Wegen der Substitution $t = x + k \cdot 2\pi$ und der Periodizität gilt:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \, dx = \int_0^{2\pi} f(x + k \cdot 2\pi) \, dx = \int_{k \cdot 2\pi}^{(k+1) \cdot 2\pi} f(t) \, dt.$$

Das heißt f ist also insbesondere über Intervalle der Art $[k \cdot 2\pi, (k+1) \cdot 2\pi]$ integrierbar und f ist ebenfalls über jedes Teilintervall eines solchen Intervalls integrierbar. Sei nun $[\alpha_1, \beta_1]$ ein beliebiges Intervall. $[\alpha_1, \beta_1]$ kann als endliche Vereinigung von Teilintervallen aufgefasst werden, sodass die Funktion f auch darüber integrierbar ist. Wir erhalten analog wie zuvor:

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x) \, dx = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x + k \cdot 2\pi) \, dx = \int_{\alpha_1 + k \cdot 2\pi}^{\beta_1 + k \cdot 2\pi} f(t) \, dt.$$

ad (iii)

Wir können ohne Einschränkung $\alpha \in [0, 2\pi)$ annehmen. Nach (i) existiert ein $k_\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha + k_\alpha \cdot 2\pi \in [0, 2\pi)$ und nach (ii) gilt:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f = \int_{\alpha + k_\alpha \cdot 2\pi}^{\beta + k_\alpha \cdot 2\pi} f.$$

Wenn $\alpha \in [0, 2\pi)$ ist

$$\int_0^{2\pi} f = \int_0^{\alpha} f + \int_{\alpha}^{2\pi} f \stackrel{(ii)}{=} \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} f + \int_{\alpha}^{2\pi} f = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f = \int_{\alpha}^{\beta} f.$$

Aufgrund verwendeter Regeln existieren alle vorkommenden Integrale.¹³³

□

Lemma 2: Folgende Integrale können auch elementar berechnet werden:

(i)

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \, dx = 0 \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(0 \cdot x) \, dx = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dx = 2\pi$$

¹³³vgl. Rolf 2009, S.407

(ii)

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \, dx = 0 \text{ für } k \in \mathbb{N}_0$$

(iii)

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(lx) \, dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(lx) \, dx = \pi \delta_{kl} \text{ für } k, l \in \mathbb{N}$$

(iv)

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \sin(lx) \, dx = 0 \text{ für } k, l \in \mathbb{N}_0$$

Dabei ist das Kronecker-Symbol δ_{kl} folgendermaßen definiert:

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

Wenn das Ergebnis der Integrale 0 ist, spricht man von *Orthogonalitätsrelationen* der trigonometrischen Funktionen.¹³⁴

4.3.1 Fourier-Koeffizienten

In der Fourier-Reihe ist die Wahl der Koeffizienten a_k und b_k entscheidend.¹³⁵ Diese Koeffizienten „bestimmen die Phase und die Amplitude der Schwingung eines jeden Terms.“¹³⁶ Es handelt sich hierbei um eine sinusförmige Schwingung.¹³⁷

Satz:¹³⁸ Wenn im Intervall $[0, 2\pi]$ die Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (3)$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf das Intervall $[0, 2\pi]$ gilt, dann folgt daraus:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \quad \text{für } k \geq 0$$

¹³⁴vgl. Rolf 2009, S.407f.

¹³⁵vgl. Barkowsky 1996, S.37

¹³⁶Barkowsky 1996, S.37

¹³⁷vgl. Barkowsky 1996, S.37

¹³⁸vgl. Rolf 2009, S.408

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \quad \text{für } k \geq 1.^{139}$$

Beweis:¹⁴⁰ Auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ ist die Funktion f stetig, weil die Funktion dort gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktionen ist.

- (a) für a_k : Wir multiplizieren die Gleichung (3) mit $\cos(nx)$ für festes $n \in \mathbb{N}$ und danach integrieren wir. Dies ist möglich, da auch $f(x) \cos(nx)$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ stetig ist und da für durchmultiplizierte Reihen die gleichmäßige Konvergenz erhalten bleibt. Wir erhalten daher:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx = \\ &= \underbrace{\frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(nx) \, dx}_{=0 \text{ (Lemma2)}} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(nx) \, dx + b_k \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(nx) \, dx \right)}_{\pi \delta_{kn}}. \end{aligned}$$

Auf Grund von Lemma 2 fallen auf der rechten Seite die meisten Integrale weg. Für $n = 0$ ergibt sich der nullte Term mit dem Wert $\frac{a_0}{2} = a_0 \cdot \pi$ und für $n \geq 1$ bleibt der n -te Term $a_n \cdot \pi$ übrig. Daher folgt:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx = a_n \cdot \pi.$$

- (b) für b_k : Wir multiplizieren die Gleichung (3) mit $\sin(nx)$ für festes $n \in \mathbb{N}$ und integrieren sie. Dies ist wiederum möglich, da auch $f(x) \sin(nx)$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ stetig ist und da für durchmultiplizierte Reihen die gleichmäßige Konvergenz erhalten bleibt. Daher erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx = \\ &= \underbrace{\frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \sin(nx) \, dx}_{=0 \text{ (Lemma2)}} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx) \sin(nx) \, dx + b_k \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(nx) \, dx \right)}_{\pi \delta_{kn}} \end{aligned}$$

¹³⁹vgl. Rolf 2009, S.408

¹⁴⁰vgl. Rolf 2009, S.409

Auf der rechten Seite ist das Ergebnis einiger Integrale durch das Lemma 2 Null.
Für $n \geq 1$ bleibt der n -te Term $b_n \cdot \pi$ übrig. Daraus folgt:¹⁴¹

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx = b_n \cdot \pi$$

□

Wir haben also durch diesen Beweis gezeigt, wie man die Fourier-Koeffizienten a_k und b_k ausrechnen kann, falls die Funktion f als (trigonometrische) Reihe darstellbar ist. Es lässt sich umgekehrt auch zeigen, dass unter bestimmten Voraussetzungen eine periodische Funktion als trigonometrische Reihe mit diesen Koeffizienten darstellbar ist. Wir führen nun den Begriff der *stückweise stetigen Funktion* ein, damit wir die Voraussetzungen kompakt formulieren können.¹⁴²

Definition: stückweise stetige Funktion¹⁴³

Eine Funktion $f(x)$ mit $[a; b] \subset D_f$ heißt im Intervall $[a; b]$ **stückweise stetig**, wenn sie in $[a; b]$ nur endlich viele Unstetigkeitsstellen, wie zum Beispiel Sprungstellen, hat und alle einseitigen Grenzwerte an diesen Stellen als eigentliche Grenzwerte existieren, d.h. endlich sind.

Mit anderen Worten ausgedrückt: Angenommen das Intervall $(-\pi, \pi)$ wird durch eine endliche Anzahl von Punkten $x_j \in [-\pi, \pi], j = 1, \dots, n$, sodass

$$-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = \pi$$

gilt, zerlegt.¹⁴⁴

„Wir nennen eine Funktion $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ **stückweise stetig** auf dem abgeschlossenen Intervall $[-\pi, \pi]$, falls es ein solches Gitter gibt, sodass jede der Einschränkungen $f|_{(x_{j-1}, x_j)}, j = 1, \dots, n$, stetig ist und sich stetig auf das abgeschlossene Intervall $[x_{j-1}, x_j]$ fortsetzen lässt.“¹⁴⁵

¹⁴¹vgl. Rolf 2009, S.409

¹⁴²vgl. Dietmaier 2014, S.281

¹⁴³Dietmaier 2014, S.281

¹⁴⁴vgl. Arens u.a. 2012, S.1045

¹⁴⁵Arens u.a. 2012, S.1045

Nun ist es möglich die Reihenentwicklung einer periodischen Funktion folgendermaßen darzustellen:¹⁴⁶

Fourierentwicklung einer Funktion f mit der Periode 2π

Sei $f(x)$ eine periodische Funktion mit Periode 2π und $f'(x)$ ihre erste Ableitung. Wenn $f(x)$ und $f'(x)$ stückweise stetig auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ sind, dann gilt an allen Stetigkeitsstellen:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

An allen Unstetigkeitsstellen der Funktion f gilt:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \frac{1}{2} \left(\lim_{\substack{s \rightarrow x \\ s < x}} f(s) + \lim_{\substack{s \rightarrow x \\ s > x}} f(s) \right)$$

Dabei sind die Fourier-Koeffizienten folgendermaßen definiert:

Definition: Die Fourier-Koeffizienten der Funktion f sind definiert durch:

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \text{ für } k \geq 0$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \text{ für } k \geq 1$$

Diese Definition der Koeffizienten der Fourier-Reihe nennt man auch die Euler-Fourier'sche Formel.¹⁴⁷

Bemerkung: Man beachte, dass der Koeffizient a_k auch für $k = 0$ definiert ist und man daher auch den Summand $\frac{a_0}{2}$ berechnen kann.

Der Koeffizient a_k ($\neq 0$) in der Fourier-Reihe bewirkt eine Verschiebung der Schwingung entlang der Ordinate.¹⁴⁸

Eine andere Schreibweise ist die folgende:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (4)$$

Die rechte Seite nennt man die **Fourier-Entwicklung** oder die **Fourier-Reihe** von

¹⁴⁶vgl. Dietmaier 2014, S.282

¹⁴⁷vgl. Rolf 2009, S.409

¹⁴⁸vgl. Barkowsky 1996, S.37

der Funktion f . Diese Schreibweise ist eine Relation und besagt, dass die Funktion f die Fourier-Koeffizienten a_k und b_k besitzt, welche zuvor definiert wurden.¹⁴⁹

Wenn die Funktion f mit $f(x)$ ungerade ist, dann ist auch $f(x) \cos(kx)$ ungerade und falls $f(x)$ gerade ist, dann ist $f(x) \sin(kx)$ ungerade.¹⁵⁰

$$f(x) \text{ ungerade} \Rightarrow a_k = 0 \text{ und } b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

$$f(x) \text{ gerade} \Rightarrow b_k = 0 \text{ und } a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

Exkurs: gerade und ungerade Funktionen

Funktionen sind entweder gerade, ungerade oder 'gemischt'. Gilt für eine Funktion $f(-x) = f(x)$, so ist sie gerade. Für ungerade Funktionen gilt $f(-x) = -f(x)$. Bei einer 'Mischung' von geradem und ungeradem Anteil ergibt sich:¹⁵¹

$$f_{gerade}(x) = \left(\frac{f(x) + f(-x)}{2} \right)$$

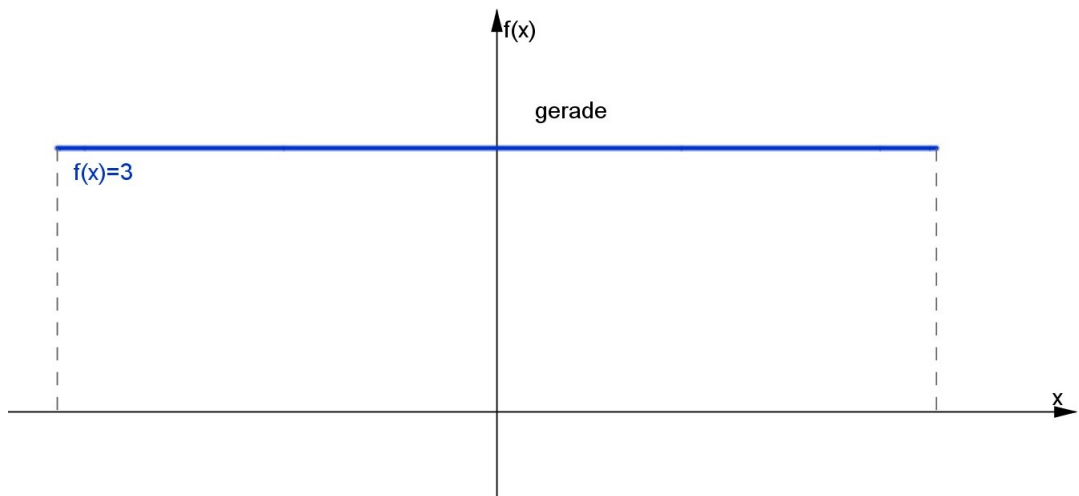
$$f_{ungerade}(x) = \left(\frac{f(x) - f(-x)}{2} \right).$$

¹⁴⁹vgl. Rolf 2009, S.410

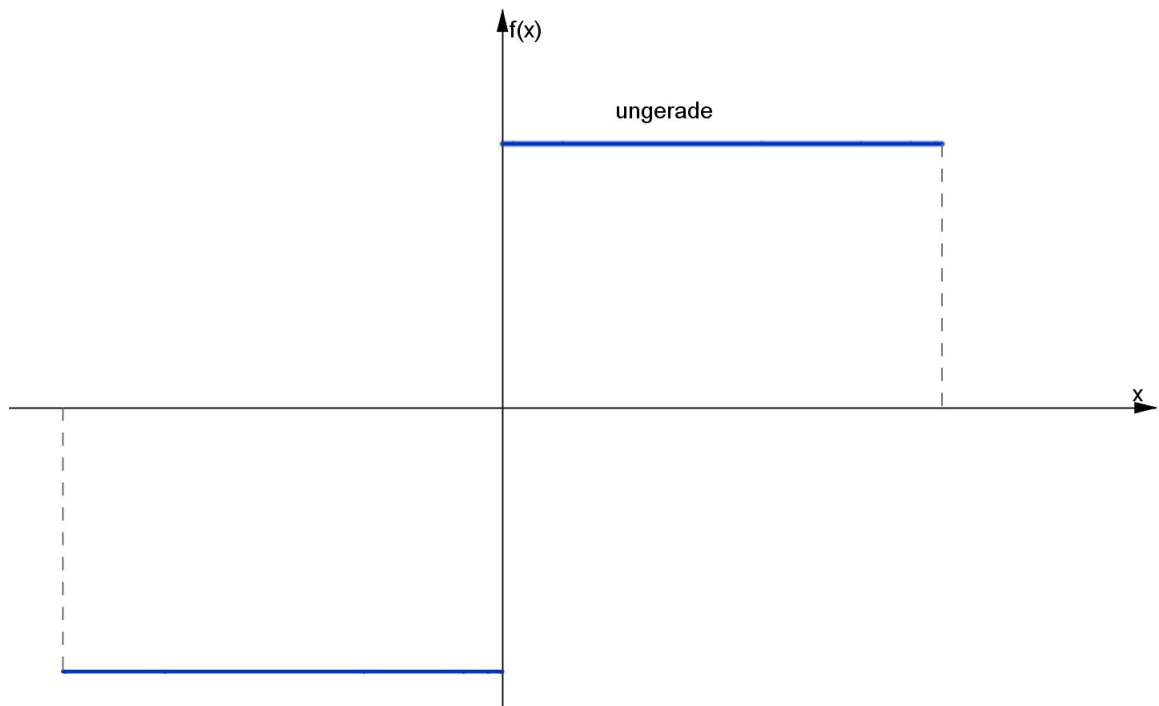
¹⁵⁰vgl. Dietmaier 2014, S. 282

¹⁵¹vgl. Butz 2011, S.4

Beispiel für eine gerade Funktion:

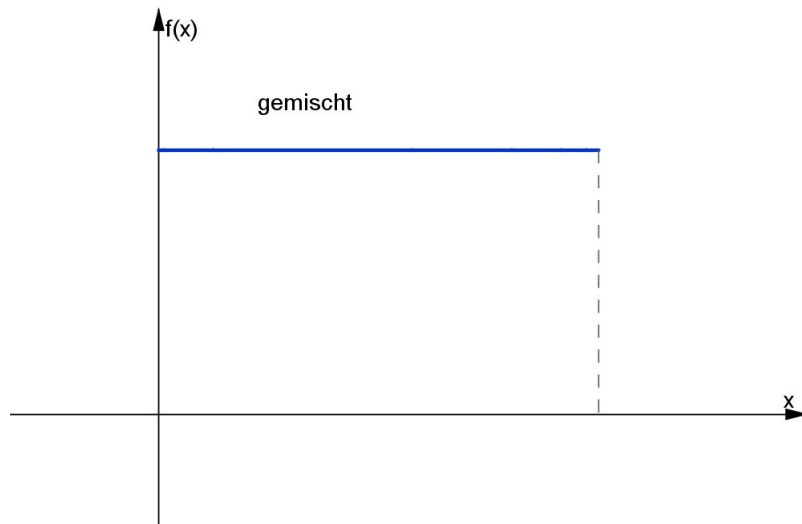


Beispiel für eine ungerade Funktion:



Beispiel für eine gemischte Funktion:

(gemischte Funktion = gerader Anteil + ungerader Anteil)



Dieses Wissen ist wichtig, um die obige Berechnung der Fourier-Koeffizienten gerader und ungerader Funktionen zu erklären. Wir wollen dies noch einmal aufschreiben und danach den Beweis anführen:

Lemma 3:¹⁵²

Ist die Funktion f gerade, dann gilt: $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Ist die Funktion f ungerade, dann gilt: $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$

Beweis:¹⁵³

Alle zwei Fälle können nach dem gleichen Prinzip bewiesen werden.

Wir sehen uns zunächst den Fall einer geraden Funktion f an. Es gilt also

$f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nun rechnet man:

$$\begin{aligned}
 \pi b_k &= \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx = \\
 &\stackrel{(Lemma 1, (iii))}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx = \\
 &\stackrel{Substitution \, x=-t}{=} - \int_{\pi}^{-\pi} f(-t) \sin(-kt) \, dt = \\
 &= - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \, dt = -\pi b_k
 \end{aligned}$$

¹⁵²vgl. Rolf 2009, S.416

¹⁵³vgl. Rolf 2009, S.417

Somit gilt $\pi b_k = -\pi b_k$ und die erste Behauptung für eine gerade Funktion f wurde gezeigt.

Nun betrachten wir den Fall für eine ungerade Funktion f . Das heißt es gilt

$-f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -\pi a_k &= \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx = \\ &\stackrel{(Lemma1,(iii))}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx = \\ &\stackrel{Substitution \, x=-t}{=} - \int_{\pi}^{-\pi} f(-t) \cos(-kt) \, dt = \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \, dt = -\pi a_k \end{aligned}$$

Man erhält somit $-\pi a_k = -\pi a_k$ und somit wurde auch die zweite Behauptung für eine ungerade Funktion f bewiesen.

□

Beispiel zur Berechnung der Fourierkoeffizienten

Beispiel: Es sei die Funktion f mit

$$f(x) = \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 - \frac{x}{\pi} \text{ für } x \in [-\pi, \pi)$$

gegeben. Es soll nun die $\cos - \sin$ Darstellung der gegebenen 2π periodischen Funktion berechnet werden.¹⁵⁴

Lösung:¹⁵⁵

Wir wollen zunächst den Graphen der Funktion mit Hilfe des Programmes Geogebra zeichnen:

¹⁵⁴vgl. Karpfinger 2014, 2015: S.739

¹⁵⁵vgl. Karpfinger 2014, S.370f.

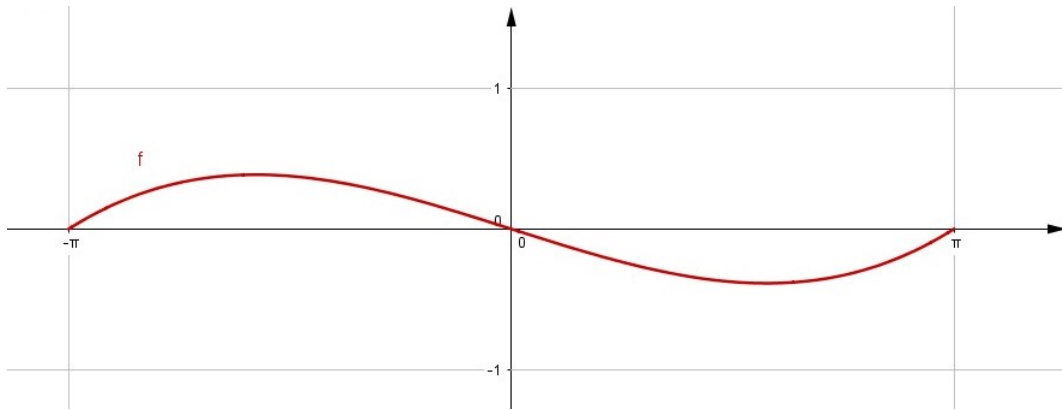


Abbildung 21: Funktionsgraph $f(x)$

Berechnung von a_k : Für den Fourierkoeffizienten a_k erhalten wir $a_k = 0$, da die vorliegende Funktion f ungerade ist.

Berechnung von b_k : Den Fourierkoeffizienten b_k berechnet man, indem man die Formel für $b_k = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi f(x) \cdot \sin(kx) \, dx$ ausrechnet. In unserem Beispiel müssen wir mehrmals die Methode der partiellen Integration und der Substitution anwenden:

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi f(x) \cdot \sin(kx) \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \left(\left(\frac{x}{\pi} \right)^3 - \frac{x}{\pi} \right) \cdot \sin(kx) \, dx = \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{x^3}{\pi^3} \cdot \sin(kx) \, dx - \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{x}{\pi} \cdot \sin(kx) \, dx = \\
 &= \frac{2}{\pi^4} \cdot \int_0^\pi x^3 \cdot \sin(kx) \, dx - \frac{2}{\pi^2} \cdot \int_0^\pi x \cdot \sin(kx) \, dx
 \end{aligned}$$

partielle Integration von $\int x^3 \cdot \sin(kx) \, dx$:

$$\begin{aligned}
 f' &= \sin(kx) & g &= x^3 \\
 F &= -\frac{\cos(kx)}{k} & g' &= 3x^2 \\
 \Rightarrow \int x^3 \cdot \sin(kx) \, dx &= -\frac{\cos(kx)}{k} \cdot x^3 + \int \frac{\cos(kx)}{k} \cdot 3x^2 \, dx = \\
 &= -\frac{x^3 \cdot \cos(kx)}{k} + \int \frac{\cos(kx)}{k} \cdot 3x^2 \, dx = \\
 &= -\frac{x^3 \cos(kx)}{k} + \frac{3}{k} \cdot \int x^2 \cdot \cos(kx) \, dx
 \end{aligned}$$

partielle Integration von $\int x^2 \cdot \cos(kx) \, dx$:

$$\begin{aligned} f' &= \cos(kx) & g &= x^2 \\ F &= \frac{\sin(kx)}{k} & g' &= 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int x^2 \cdot \cos(kx) \, dx = \frac{x^2 \sin(kx)}{k} - \frac{2}{k} \cdot \int x \cdot \sin(kx) \, dx$$

partielle Integration von $\int x \cdot \sin(kx) \, dx$:

$$\begin{aligned} f' &= \sin(kx) & g &= x \\ F &= -\frac{\cos(kx)}{k} & g' &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int x \cdot \sin(kx) \, dx = -\frac{x \cdot \cos(kx)}{k} + \int \frac{\cos(kx)}{k} \, dx$$

Berechnung von $\int \frac{\cos(kx)}{k} \, dx$ mittels Substitution:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(kx)}{k} &= \left(\begin{array}{l} u = kx \\ du = k \, dx \end{array} \right) = \int \frac{\cos u}{k} \cdot \frac{du}{k} = \\ &= \frac{1}{k^2} \cdot \int \cos u \, du = \frac{1}{k^2} \cdot \sin u = \frac{1}{k^2} \cdot \sin(kx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{insgesamt}}{\Rightarrow} \int x^3 \cdot \sin(kx) \, dx &= -\frac{x^2 \cdot \cos(kx)}{k} + \frac{3}{k} \cdot \left(\frac{x^2 \cdot \sin(kx)}{k} - \frac{2}{k} \cdot \left(-\frac{x \cdot \cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2} \right) \right) = \\ &= -\frac{x^3 \cdot \cos(kx)}{k} + \frac{3}{k} \cdot \left(\frac{x^2 \cdot \sin(kx)}{k} + \frac{2x \cdot \cos(kx)}{k^2} - \frac{2 \sin(kx)}{k^3} \right) = \\ &= -\frac{x^3 \cdot \cos(kx)}{k} + \frac{3x^2 \cdot \sin(kx)}{k^2} + \frac{6x \cdot \cos(kx)}{k^3} - \frac{6 \cdot \sin(kx)}{k^4} \end{aligned}$$

Nachdem wir dieses Integral mittels partieller Integration berechnet haben, müssen wir noch $\int x \cdot \sin(kx) \, dx$ berechnen:

$$\begin{aligned} f' &= \sin(kx) & g &= x \\ F &= -\frac{\cos(kx)}{k} & g' &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin(kx) \, dx &= -\frac{x \cdot \cos(kx)}{k} + \int \frac{\cos(kx)}{k} \, dx = \\ &= -\frac{x \cdot \cos(kx)}{k} + \frac{1}{k^2} \cdot \sin(kx) \end{aligned}$$

Jetzt können wir das gesamte Integral mit Grenzen berechnen:

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi^4} \cdot \int_0^\pi x^3 \cdot \sin(kx) \, dx - \frac{2}{\pi^2} \cdot \int_0^\pi x \cdot \sin(kx) \, dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi^4} \cdot \left(\left(-\frac{x^3 \cdot \cos(kx)}{k} + \frac{3x^2 \cdot \sin(kx)}{k^2} + \frac{6x \cdot \cos(kx)}{k^3} - \frac{6 \cdot \sin(kx)}{k^4} \right) \Big|_0^\pi \right) + \\
&\quad - \frac{2}{\pi^2} \cdot \left(\left(-\frac{x \cdot \cos(kx)}{k} + \frac{1}{k^2} \cdot \sin(kx) \right) \Big|_0^\pi \right) = \\
&= \left(-\frac{2x^3 \cdot \cos(kx)}{\pi^4 \cdot k} + \frac{6x^2 \cdot \sin(kx)}{\pi^4 \cdot k^2} + \frac{12x \cdot \cos(kx)}{\pi^4 \cdot k^3} - \frac{12 \cdot \sin(kx)}{\pi^4 \cdot k^4} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2x \cdot \cos(kx)}{\pi^2 \cdot k} - \frac{2 \cdot \sin(kx)}{\pi^2 \cdot k^2} \right) \Big|_0^\pi = \\
&= \left(\cos(kx) \cdot \left(-\frac{2x^3}{\pi^4 \cdot k} + \frac{12x}{\pi^4 \cdot k^3} + \frac{2x}{\pi^2 \cdot k} \right) + \sin(kx) \cdot \left(\frac{6x^2}{\pi^4 \cdot k^2} - \frac{12}{\pi^4 \cdot k^4} - \frac{2}{\pi^2 \cdot k^2} \right) \right) \Big|_0^\pi = \\
&= \left(\cos(k \cdot \pi) \left(-\frac{2\pi^3}{\pi^4 \cdot k} + \frac{12\pi}{\pi^4 \cdot k^3} + \frac{2\pi}{\pi^2 \cdot k} \right) + \sin(k \cdot \pi) \cdot \left(\frac{6\pi^2}{\pi^4 \cdot k^2} - \frac{12}{\pi^4 \cdot k^4} - \frac{2}{\pi^2 \cdot k^2} \right) \right) + \\
&- \left(\cos(k \cdot 0) \cdot \left(-\frac{2 \cdot 0^3}{\pi^4 \cdot k} + \frac{12 \cdot 0}{\pi^4 \cdot k^3} + \frac{2 \cdot 0}{\pi^2 \cdot k} \right) + \sin(k \cdot 0) \cdot \left(\frac{6 \cdot 0^2}{\pi^4 \cdot k^2} - \frac{12}{\pi^4 \cdot k^4} - \frac{2}{\pi^2 \cdot k^2} \right) \right) = \\
&= (-1)^k \cdot \left(-\frac{2\pi^3}{\pi^4 \cdot k} + \frac{12\pi}{\pi^4 \cdot k^3} + \frac{2\pi}{\pi^2 \cdot k} \right) = \\
&= (-1)^k \cdot \left(-\frac{2\pi^2 k^2}{\pi^3 \cdot k^3} + \frac{12}{\pi^3 \cdot k^3} + \frac{2\pi^2 k^2}{\pi^3 \cdot k^3} \right) = \\
&= (-1)^k \cdot \frac{12}{\pi^3 \cdot k^3}
\end{aligned}$$

Wir erhalten also $b_k = (-1)^k \cdot \frac{12}{\pi^3 \cdot k^3}$.

Die Fourierreihe F zu unserer Funktion f hat daher die folgende Gestalt:¹⁵⁶

$$F(x) = \frac{12}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(kx)}{k^3}$$

¹⁵⁶vgl. Karpfinger 2014: S.371

4.3.2 fundamentales Problem

Das **fundamentale Problem** bei der Beschäftigung mit Fourier-Reihen besteht darin, herauszufinden, wann aus der Relation (4) eine richtige Gleichung entsteht. Wir stellen uns folgende zwei Hauptfragen:

(1) Für welche x konvergiert die Fourier-Reihe?

↪ Konvergenzproblem

(2) „Für welche dieser x konvergiert die Fourier - Reihe gegen $f(x)$?“

↪ Darstellungsproblem¹⁵⁷

Konvergenz der Fourier-Reihe: Wie bei jeder Reihe bedeutet die Konvergenz der Fourier-Reihe die Konvergenz ihrer Teilsummen:¹⁵⁸

$$F_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, n \rightarrow \infty \quad (5)$$

Die Teilsummen hängen linear von der Funktion ab. Falls die beiden Teilsummen für $n \rightarrow \infty$ konvergieren, dann gilt die Linearität auch für die Werte der Fourier-Reihe. Dadurch wird das Berechnen der Fourier-Koeffizienten erleichtert: wenn man die Fourier-Koeffizienten der Funktion f und der Funktion g schon ausgerechnet hat, dann erhält man die Fourier-Koeffizienten von der Summe der beiden Funktionen $f + g$ direkt durch¹⁵⁹ „die Addition der entsprechenden einzelnen Fourier-Koeffizienten.“¹⁶⁰

4.3.3 Approximation im quadratischen Mittel

Zuerst wollen wir zwischen zwei wichtigen Arten der Approximation unterscheiden.

Es sei nun (f_n) eine Folge von Funktionen und eine weitere Funktion wollen wir mit f bezeichnen. All diese Funktionen haben den gleichen Definitionsbereich D .¹⁶¹

Wir sprechen von **punktweiser Konvergenz**, falls gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

¹⁵⁷vgl. Rolf 2009, S.410

¹⁵⁸vgl. Rolf 2009, S.410

¹⁵⁹vgl. Rolf 2009, S. 410f.

¹⁶⁰Rolf 2009, S.411

¹⁶¹vgl. Arens u.a. 2012, S.1037

Wir sprechen von **gleichmäßiger Konvergenz**, falls gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Um diesen Unterschied klar zu machen, wollen wir folgendes Beispiel betrachten:

Beispiel:¹⁶² Unser Definitionsbereich D ist gegeben mit $D = [0, 1]$ und die Folge (f_n) ist definiert durch:

$$f_n(x) = x^n \quad \text{für } x \in [0, 1]$$

Es gilt daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass die Folge (f_n) die Funktion f im Sinne der punktweisen Konvergenz approximiert. Aber nicht im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz, da wir immer ein $\tilde{x} < 1$ nahe bei 1 finden können, egal wie groß wir n wählen, sodass gilt:

$$f_n(\tilde{x}) > 0,9.$$

Somit gilt auch:

$$\max_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| > 0,9$$

Das heißt, die Folge von Funktionen konvergiert punktweise, aber eben nicht gleichmäßig.¹⁶³

Die nachfolgende Grafik macht dies noch einmal deutlich: Es gibt immer eine Stelle $\tilde{x} < 1$ mit $\tilde{x} > 0,9$, egal wie groß n gewählt wird.¹⁶⁴

Daraus können wir schließen, dass es Folgen von Funktionen gibt, welche punktweise, jedoch nicht gleichmäßig konvergieren. In umgekehrter Weise kann auch gezeigt werden, dass jede Folge, die gleichmäßig konvergiert auch punktweise konvergent ist. Außerdem sagt man: gleichmäßige Konvergenz ist stärker als punktweise und vice versa.¹⁶⁶

¹⁶²vgl. Arens u.a. 2012, S.1038

¹⁶³vgl. Arens u.a. 2012, S.1038

¹⁶⁴vgl. Arens u.a. 2012, S.1038

¹⁶⁵vgl. Arens u.a. 2012, S.1038

¹⁶⁶vgl. Arens u.a. 2012, S.1038

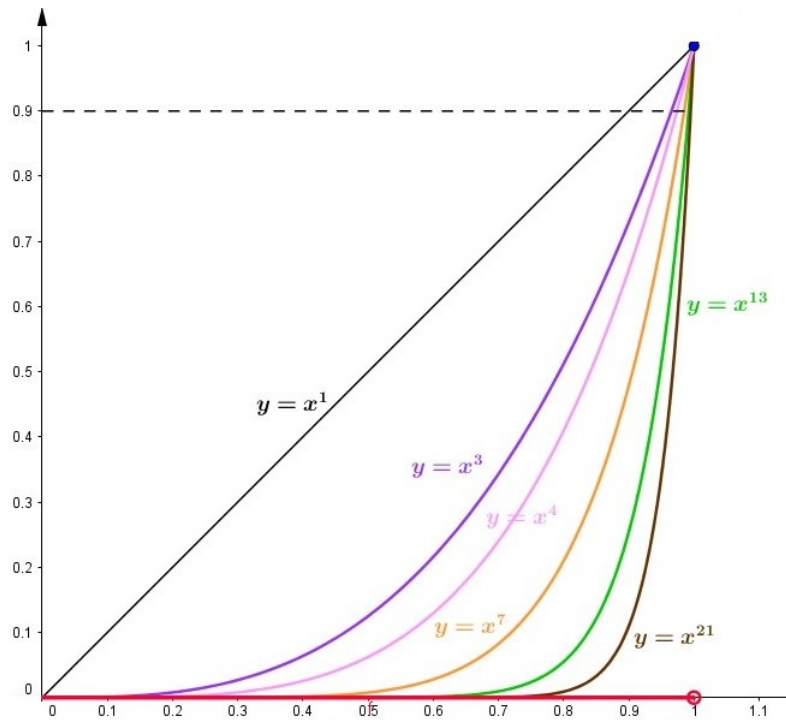


Abbildung 22: Approximation ¹⁶⁵

Wir werden uns nun mit dem **Skalarprodukt** beschäftigen, um gute Approximationen erhalten zu können.¹⁶⁷ Die Menge der trigonometrischen Polynome bildet im Sinne der linearen Algebra einen Vektorraum, der beispielsweise die Menge der trigonometrischen Monome als Basis hat:¹⁶⁸

$$\{e^{ikx} | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Aus der linearen Algebra kennen wir den Begriff **Norm**. Dieser Begriff wird verwendet, um Abstände von Vektoren anzugeben. Wir definieren also ein Skalarprodukt auf den Vektorraum der trigonometrischen Polynome:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} p(x) \overline{q(x)} dx$$

Dieses Skalarprodukt nennt man das L^2 - **Skalarprodukt**.

Bemerkungen: Man schreibt $\langle p, q \rangle$, wenn es um ein Skalarprodukt von Funktionen handelt. Es reicht für das Integral die Grenzen $-\pi$ und π zu wählen, da unsere Funktionen aus dem Vektorraum der trigonometrischen Polynome die Periode 2π haben.

Eine besondere Eigenschaft weisen die trigonometrischen Monome auf. Sie sind bezüglich

¹⁶⁷vgl. Arens u.a. 2012, S.1038

¹⁶⁸vgl. Arens u.a. 2012, S.1037

dieses Skalarprodukts paarweise orthogonal. Dies überprüfen wir, indem wir uns zwei solcher Funktionen, nämlich konkret die Funktionen e^{ijx} und e^{ikx} , hernehmen und ihr Skalarprodukt berechnen:¹⁶⁹

$$\begin{aligned}\langle e^{ijx}, e^{ikx} \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i \cdot (j-k) \cdot x} dx = \\ &= \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi & \text{für } j = k, \\ \left(\frac{-i}{j-k} \cdot e^{i \cdot (j-k) \cdot x} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{für } j \neq k. \end{cases}\end{aligned}$$

Dies gilt für $j, k \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten daher die folgende Aussage über eine **Orthonormalbasis** für die Menge der trigonometrischen Polynome:¹⁷⁰

Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ bilden die Funktionen

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{ikx}$$

eine Orthonormalbasis auf die Menge der trigonometrischen Polynome. Das heißt es gilt:

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k, \\ 0 & \text{für } j \neq k. \end{cases}$$

Jedes Skalarprodukt ist auch mit einer bestimmten Norm verknüpft. In diesem Fall ist das L^2 -Skalarprodukt mit der L^2 -**Norm** verbunden:¹⁷¹

$$\|p\|_{L^2} = (\langle p, p \rangle)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |p(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Mit Hilfe dieser Norm kann man den Abstand zweier trigonometrischer Polynome p und q berechnen:

$$\|p - q\|_{L^2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |p(x) - q(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Norm dieser Differenz wird als **Abstand im quadratischen Mittel** bezeichnet.¹⁷² In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass die beste Approximation im Sinne des

¹⁶⁹vgl. Arens u.a. 2012, S.1038

¹⁷⁰vgl. Arens u.a. 2012, S.1039

¹⁷¹vgl. Arens u.a. 2012, S.1039

¹⁷²vgl. Arens u.a. 2012, S.1039

quadratischen Mittels das Fourierpolynom einer Funktion ist. Dazu wollen wir den Abstand einer Funktion $f \in L^2(-\pi, \pi)$ zu einem trigonometrischen Polynom q n -ten Grades von der Gestalt

$$q = \sum_{k=-n}^n q_k \varphi_k$$

mit Koeffizienten $q_k \in \mathbb{C}$ betrachten.¹⁷³

Nun verwenden wir die Orthogonalität der Funktionen φ_k und können somit folgende Norm berechnen:

$$\begin{aligned} \|f - q\|_{L^2}^2 &= \langle f - q, f - q \rangle = \langle f, f \rangle - 2\operatorname{Re}\langle f, q \rangle + \langle q, q \rangle = \\ &= \langle f, f \rangle - 2\operatorname{Re}\left\langle f, \sum_{k=-n}^n q_k \varphi_k \right\rangle + \left\langle \sum_{k=-n}^n q_k \varphi_k, \sum_{k=-n}^n q_k \varphi_k \right\rangle = \\ &= \|f\|_{L^2}^2 - 2\operatorname{Re} \sum_{k=-n}^n \overline{q_k} \langle f, \varphi_k \rangle + \sum_{k=-n}^n |q_k|^2. \end{aligned}$$

Nun wissen wir, dass Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} |q_k - \langle f, \varphi_k \rangle|^2 &= (q_k - \langle f, \varphi_k \rangle) \overline{(q_k - \langle f, \varphi_k \rangle)} = \\ &= |q_k|^2 - q_k \overline{\langle f, \varphi_k \rangle} - \overline{q_k} \langle f, \varphi_k \rangle + |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 = \\ &= |q_k|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{q_k} \langle f, \varphi_k \rangle) + |\langle f, \varphi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Daraus folgern wir:

$$\|f - q\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=-n}^n |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 + \sum_{k=-n}^n |q_k - \langle f, \varphi_k \rangle|^2.$$

Das Erstaunliche an diesem Ergebnis ist, dass die ersten beiden Terme nur von der Funktion f abhängen und nicht von dem trigonometrischen Polynom q . Darüber hinaus kann der dritte Term auf keinen Fall negativ sein, da er die Summe von Quadraten ist. Somit ist der Abstand der Funktion f zum trigonometrischen Polynom im quadratischen Mittel genau dann minimal wenn gilt:

$$q_k = \langle f, \varphi_k \rangle \quad \text{für } k = -n, \dots, n$$

Denn genau dann wird der dritte Term 0. Dieses Polynom erhält einen speziellen Namen. Es wird als **Fourierpolynom** bezeichnet!¹⁷⁴

¹⁷³vgl. Arens u.a. 2012, S.1040

¹⁷⁴vgl. Arens u.a. 2012, S.1040

Definition: Fourierpolynom

Wir definieren das Fourierpolynom p_n n -ten Grades zu einer Funktion $f \in L^2(-\pi, \pi)$ als

$$p_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dieses Fourierpolynom hat die Fourierkoeffizienten:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Dieses eindeutig bestimmte Fourierpolynom eignet sich für die Approximation im quadratischen Mittel der Funktion f am besten.¹⁷⁵

Konvergenz: Somit können wir zum Konvergenzproblem zurückkommen (siehe auch Kapitel 4.3.2). Wir stellen uns also die Frage „in welchem Sinn die Folge (p_n) der Fourierpolynome gegen die Funktion f konvergiert.“¹⁷⁶ Aus unseren Überlegungen zur Approximation im quadratischen Mittel wissen wir, dass für eine Funktion $f \in L^2(-\pi, \pi)$ und dem dazugehörigen Fourierpolynom p_n n -ten Grades folgende Gleichung gelten muss:¹⁷⁷

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \right|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2\pi \cdot \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

Daraus folgt wiederum:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \right|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung nennt man **Bessel'sche Ungleichung**.

Satz:¹⁷⁸

Für jede auf $[-\pi, \pi]$ quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die BESSELSche Ungleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

¹⁷⁵vgl. Arens u.a. 2012, S.1040

¹⁷⁶Arens u.a. 2012, S.1043

¹⁷⁷vgl. Arens u.a. 2012, S.1044

¹⁷⁸Bärwolff 2009, S.235

Dabei sind a_k, b_k die Fourier-Koeffizienten von f .

Auf der linken Seite dieser Abschätzung steht eine Reihe mit nicht negativen Gliedern.

Nach dem Monotoniekriterium für Folgen gilt daher, dass die Reihe

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \right)$$

konvergent ist. Das heißt man bildet Teilsummen mit Summationsindex von $-N$ bis N und bildet den Limes für $N \rightarrow \infty$. Die Fourierkoeffizienten fallen ab, da die Reihe konvergent ist und dann gilt:

$$c_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \pm\infty)$$

Diese Aussage ist das Riemann-Lebesgue-Lemma.¹⁷⁹ Man erkennt daraus auch, dass eine integrierbare Funktion Fourierkoeffizienten besitzt, welche Nullfolgen sind.¹⁸⁰

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0.$$

Die Bessel'sche Ungleichung ergibt, dass eine Funktion $g \in L^2(-\pi, \pi)$ existiert. Die Folge der Fourierpolynome konvergiert dann gegen diese Funktion g . Eine wichtige Überlegung ist die **Vollständigkeit des Raumes** $L^2(-\pi, \pi)$. Daraus folgt, dass zwei Funktionen f und g die gleichen Fourierkoeffizienten besitzen, das heißt es gilt.¹⁸¹

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Man erhält aus der Bessel'schen Ungleichung für $n \rightarrow \infty$ unter Verwendung bestimmter Eigenschaften eines trigonometrischen Funktionensystems, wie beispielsweise der Vollständigkeit, die sogenannte **Parseval'sche Ungleichung**:¹⁸²

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

¹⁷⁹vgl. Arens u.a. 2012, S.1044

¹⁸⁰vgl. Bärwolff 2009, S.235

¹⁸¹vgl. Arens u.a. 2012, S.1044

¹⁸²vgl. Bärwolff 2009, S.235

Fourier'scher Entwicklungssatz¹⁸³

Die Folge (p_n) der Fourierpolynome zu einer Funktion $f \in L^2(-\pi, \pi)$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen f , d.h.

$$\int_{k=-\infty}^{\infty} |p_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Die in diesem Sinne konvergente Reihe

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \right)$$

mit den Fourierkoeffizienten (c_k) von f heißt **Fourierreihe**.

Außerdem gilt die **Parseval'sche Gleichung**

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Dies nennt man die **Fourierdarstellung** der Funktion f bzw. wird die Funktion f in eine Fourierreihe entwickelt.¹⁸⁴

Das natürliche Umfeld der Fourierreihen ist mit der Approximation im quadratischen Mittel und dem Raum der quadratisch - integrierbaren Funktionen abgedeckt.¹⁸⁵

Wir wollen nun noch explizit einen Satz über die Konvergenz im quadratischen Mittel anschreiben:

Satz:¹⁸⁶

Die Funktion f sei eine stückweise stetige Funktion auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe dieser Funktion f auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ im quadratischen Mittel gegen die Funktion f . Deshalb gilt für die Teilsummen s_m der konvergenten Fourier-Reihe der Funktion f :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - s_m\|_2 = 0.$$

Die Konvergenz im quadratischen Mittel kann immer dann betrachtet werden, wenn Spitzen bzw. Zacken im Funktionsgraphen für die Untersuchung eines periodischen

¹⁸³Arens u.a. 2012, S.1044

¹⁸⁴vgl. Arens u.a. 2012, S.1044

¹⁸⁵vgl. Arens u.a. 2012, S.1045

¹⁸⁶vgl. Bärwolff 2009, S.236

Vorganges unbedeutend sind. Falls solche Ausreißer im Funktionsgraphen von entscheidender Bedeutung sind bzw. falls sie unbedingt vermieden werden sollen, dann greift man auf die punktweise oder gleichmäßige Konvergenz zurück.¹⁸⁷

Wie im vorigen Absatz schon angedeutet, gibt es natürlich auch noch andere Arten von Konvergenz. Wollen wir beispielsweise die Konvergenz einer Fourierreihe an einer einzelnen Stelle untersuchen, so benötigen wir die punktweise Konvergenz.¹⁸⁸

punktweise Konvergenz:¹⁸⁹

Eine Funktion f mit $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ sei stückweise stetig differenzierbar. Dann sagt man die Fourierreihe der Funktion f konvergiert punktweise, falls

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

für jedes $x \in [-\pi, \pi]$ gilt.

Nun wollen wir ein Beispiel zur punktweisen Konvergenz betrachten.

Beispiel:¹⁹⁰

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^3$. Für $x \in (-\pi, \pi)$ ist diese Funktion stückweise stetig differenzierbar und auch ihre Ableitung $f'(x) = 3x^2$ ist stetig auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$. In der nachfolgenden Abbildung (23) ist die Funktion $f(x) = x^3$ auf $(-\pi, \pi)$ in blau dargestellt.

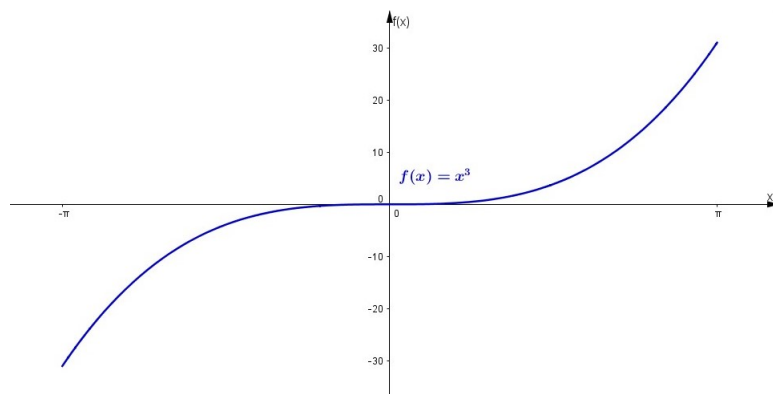


Abbildung 23: $f(x) = x^3$

¹⁸⁷vgl. Bärwolff 2009, S.237

¹⁸⁸vgl. Arens u.a. 2012, S.1045

¹⁸⁹vgl. Arens u.a. 2012, S.1047

¹⁹⁰vgl. Arens u.a. 2012, S.1047f.

Wir werden zunächst die Fourierreihe ausrechnen und dann näher auf die punktweise Konvergenz eingehen.

Da es sich in unserem Fall um eine ungerade Funktion handelt, ist der Fourierkoeffizient $a_k = 0$. Den Koeffizienten b_k berechnen wir mit der Formel:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Wir setzen nun also für $f(x)$ die Funktion $f(x) = x^3$ ein und erhalten:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^3 \sin(kx) dx$$

Dieses Integral können wir mit Hilfe partieller Integration lösen:

$$\begin{aligned} f' &= \sin(kx) & g &= x^3 \\ F &= -\frac{\cos(kx)}{k} & g' &= 3x^2 \\ \Rightarrow \int x^3 \sin(kx) dx &= -\frac{\cos(kx)}{k} \cdot x^3 + \int \frac{\cos(kx)}{k} \cdot 3x^2 dx = \\ &= -\frac{x^3 \cdot \cos(kx)}{k} + \frac{3}{k} \cdot \int \cos(kx) \cdot x^2 dx \end{aligned}$$

Das Integral $\int \cos(kx) \cdot x^2 dx$ wird ebenfalls mit partieller Integration gelöst:

$$\begin{aligned} f' &= \cos(kx) & g &= x^2 \\ F &= \frac{\sin(kx)}{k} & g' &= 2x \\ \Rightarrow \int x^2 \cos(kx) &= \frac{x^2 \cdot \sin(kx)}{k} - \frac{2}{k} \cdot \int \sin(kx) \cdot x dx \end{aligned}$$

Partielle Integration von $\int x \cdot \sin(kx) dx$ ergibt:

$$\begin{aligned} f' &= \sin(kx) & g &= x \\ F &= -\frac{\cos(kx)}{k} & g' &= 1 \\ \Rightarrow \int x \cdot \sin(kx) dx &= -\frac{x \cdot \cos(kx)}{k} + \int \frac{\cos(kx)}{k} dx \end{aligned}$$

Das nun vorkommende Integral $\int \frac{\cos(kx)}{k} dx$ berechnen wir mittels Substitution:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(kx)}{k} dx &= \left(\begin{array}{l} u = kx \\ du = k dx \end{array} \right) = \int \frac{\cos(u)}{k} \cdot \frac{du}{k} = \\ &= \frac{1}{k^2} \cdot \int \cos(u) du = \frac{1}{k^2} \cdot \sin(u) = \frac{1}{k^2} \cdot \sin(kx) \end{aligned}$$

Nachdem wir all diese Integrale ausgerechnet haben, können wir jetzt die Teilergebnisse in die ursprüngliche Rechnung einsetzen:

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{\text{insgesamt}} \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{x^3 \cdot \cos(kx)}{k} + \frac{3}{k} \cdot \left(\frac{x^2 \cdot \sin(kx)}{k} - \frac{2}{k} \cdot \left(-\frac{x \cdot \cos(kx)}{k} + \frac{1}{k^2} \cdot \sin(kx) \right) \right) \right) \Bigg|_0^\pi = \\
& = \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{x^3 \cdot \cos(kx)}{k} + \frac{3}{k} \cdot \left(\frac{x^2 \cdot \sin(kx)}{k} + \frac{2x \cdot \cos(kx)}{k^2} - \frac{2}{k^3} \cdot \sin(kx) \right) \right) \Bigg|_0^\pi = \\
& = \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{x^3 \cdot \cos(kx)}{k} + \frac{3x^2 \cdot \sin(kx)}{k^2} + \frac{6x \cdot \cos(kx)}{k^3} - \frac{6 \cdot \sin(kx)}{k^4} \right) \Bigg|_0^\pi = \\
& = \left(\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{6x \cdot \cos(kx)}{k^3} - \frac{x^3 \cdot \cos(kx)}{k} \right) + \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{3x^2 \cdot \sin(kx)}{k^2} - \frac{6 \cdot \sin(kx)}{k^4} \right) \right) \Bigg|_0^\pi = \\
& = \left(\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{6\pi \cdot \cos(k\pi)}{k^3} - \frac{\pi^3 \cdot \cos(k\pi)}{k} \right) + \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{3\pi^2 \cdot \sin(k\pi)}{k^2} - \frac{6 \cdot \sin(k\pi)}{k^4} \right) \right) + \\
& - \left(\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{6 \cdot 0 \cdot \cos(k \cdot 0)}{k^3} - \frac{0^3 \cdot \cos(k \cdot 0)}{k} \right) + \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{3 \cdot 0^2 \cdot \sin(k \cdot 0)}{k^2} - \frac{6 \cdot \sin(k \cdot 0)}{k^4} \right) \right) = \\
& = \cos(k\pi) \cdot \left(\frac{12\pi}{\pi k^3} - \frac{2\pi^3}{\pi k} \right) = (-1)^k \cdot \left(\frac{12}{k^3} - \frac{2\pi^2}{k} \right) = b_k
\end{aligned}$$

Aus diesen Fourierkoeffizienten erhalten wir folgende Fourierreihe:¹⁹¹

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \left(\frac{12}{k^3} - \frac{2\pi^2}{k} \right) \cdot \sin(kx)$$

Die Funktion f dritten Grades mit $f(x) = x^3$ und fünf ihrer Fourierpolynome sind in Abbildung (24) dargestellt.

¹⁹¹vgl. Arens u.a. 2012, S.1047

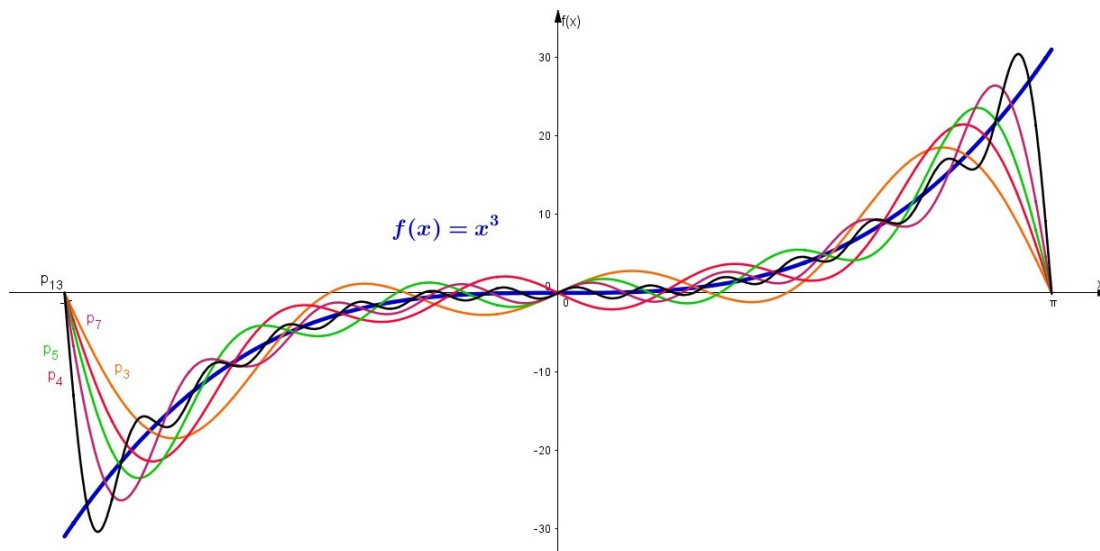


Abbildung 24: Fourierpolynome von $f(x) = x^3$

Im Folgenden wollen wir als Beispiel die Fourierentwicklung einer sogenannten **Sägezahnfunktion** betrachten:

Beispiel: In diesem Beispiel wollen wir die Fourierreihe für die vorliegende Sägezahnfunktion berechnen:¹⁹²

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & \text{für } x = \pm \pi \end{cases}$$

und außerdem gilt für die Periode der Funktion f :

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

Der Funktionsgraph der Funktion f ist in Abbildung (25) dargestellt:

¹⁹²vgl. Dietmaier 2014, S.283f.

¹⁹³<http://www.mathe-online.at/mathint/fourier/i.html>

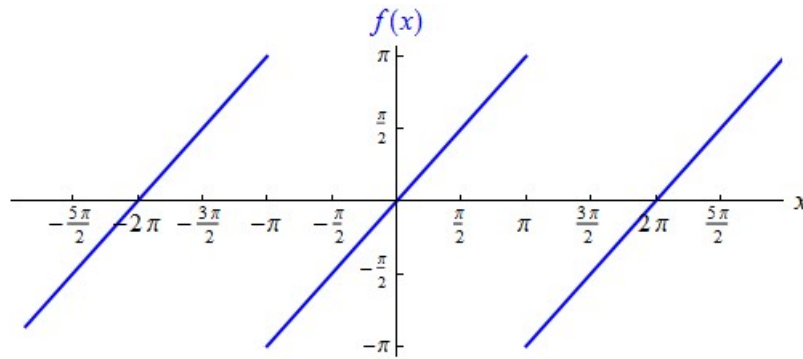


Abbildung 25: Sägezahnfunktion¹⁹³

Da die Funktion f ungerade (und punktsymmetrisch) ist, ist der Koeffizient $a_k = 0$. Dies kann man allerdings auch noch explizit nachrechnen:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cos(kx) \, dx + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\pi}^{2\pi} (x - 2\pi) \cos(kx) \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x \cos(kx) \, dx - 2 \cdot \int_{\pi}^{2\pi} \cos(kx) \, dx \end{aligned}$$

Partielle Integration von $\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x \cos(kx) \, dx$:

$$g = x \text{ und } g' = 1$$

$$f' = \cos(kx) \text{ und } f = \frac{\sin(kx)}{k}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} x \cos(kx) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(x \cdot \frac{1}{k} \cdot \sin(kx) \right) \Bigg|_0^{2\pi}$$

Für den Koeffizienten a_k ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} a_k &= \underbrace{\frac{1}{\pi} \cdot \left(x \cdot \frac{1}{k} \cdot \sin(kx) \right) \Bigg|_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1}{k} \cdot \sin(kx) \, dx}_{=0} - 2 \cdot \left(\frac{1}{k} \cdot \sin(kx) \right) \Bigg|_{\pi}^{2\pi} = \\ &= -2 \cdot \frac{1}{k} \cdot \left(\underbrace{\sin(2\pi k)}_{=0} - \underbrace{\sin(\pi k)}_{=0} \right) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Der Koeffizient $a_k = 0$.

Wir berechnen nun also den Koeffizienten b_k :

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx$$

partielle Integration:

$$\begin{aligned}
 g &= x \text{ und } g' = 1 \\
 f' &= \sin(kx) \text{ und } F = -\frac{\cos(kx)}{k} \\
 b_k &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi x \sin(kx) \, dx = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x \cos(kx)}{k} \Big|_0^\pi + \underbrace{\int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{k} \, dx}_{\text{Substitution}} \right)
 \end{aligned}$$

Substitution:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{k} \, dx &= \left(\begin{array}{l} u = kx \\ du = k \, dx \end{array} \right) = \int \frac{\cos(u)}{k} \frac{du}{k} = \frac{\sin(u)}{k^2} = \frac{\sin(kx)}{k^2} \Big|_0^\pi \\
 \Rightarrow b_k &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin(kx)}{k^2} - \frac{x \cos(kx)}{k} \right) \Big|_0^\pi = \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\underbrace{\frac{\sin(k\pi)}{k^2}}_{=0} - \frac{\pi \cos(k\pi)}{k} - \underbrace{\frac{\sin(k) \cdot 0}{k^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{0 \cdot \cos(k\pi)}{k}}_{=0} \right) = \\
 &= -\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi \cos(k\pi)}{k} \right) = -\frac{2}{k} \cos(k\pi) = -\frac{2}{k} \cdot (-1)^k = \frac{2}{k} \cdot (-1)^{k+1}
 \end{aligned}$$

Für die Fourier-Reihe folgt daraus:¹⁹⁴

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \cdot (-1)^{k+1} \sin(kx) = 2 \cdot \left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Anmerkung:

Bei Abbruch der Fourierreihe bei einem bestimmten n wird durch die Summe eine Näherung der Funktion $f(x)$ dargestellt. Je größer wir dabei unser n wählen, desto besser ist die Näherung an den Stetigkeitsstellen. Sogenannte 'Überschwinger', d.h. sichtbare Abweichungen von der ursprünglichen Funktion $f(x)$ treten in der Nähe von Unstetigkeitsstellen auf und diese werden nicht geringer je größer wir unser n wählen. Allerdings gilt: je größer wir n wählen, desto mehr nähern sich die Überschwinger den

¹⁹⁴vgl. Dietmaier 2014, S.283

Unstetigkeitsstellen an. Dies nennt man das *Gibbs-Phänomen*.¹⁹⁵

Dies ist auch bei unserem Beispiel, der Sägezahnfunktion, beobachtbar. In der folgenden Abbildung (26), die mit dem Programm Geogebra erstellt wurde, ist die Summe der ersten 10 Summanden der Fourier-Reihe in grün und die Sägezahnfunktion in blau dargestellt.¹⁹⁶

Außerhalb der Sprungstellen sieht man, dass die Zacken gut durch eine stetige oszillierende Funktion angenähert werden kann. Allerdings werden die Sprünge durch eine stetige Funktion nicht adäquat approximiert.¹⁹⁷

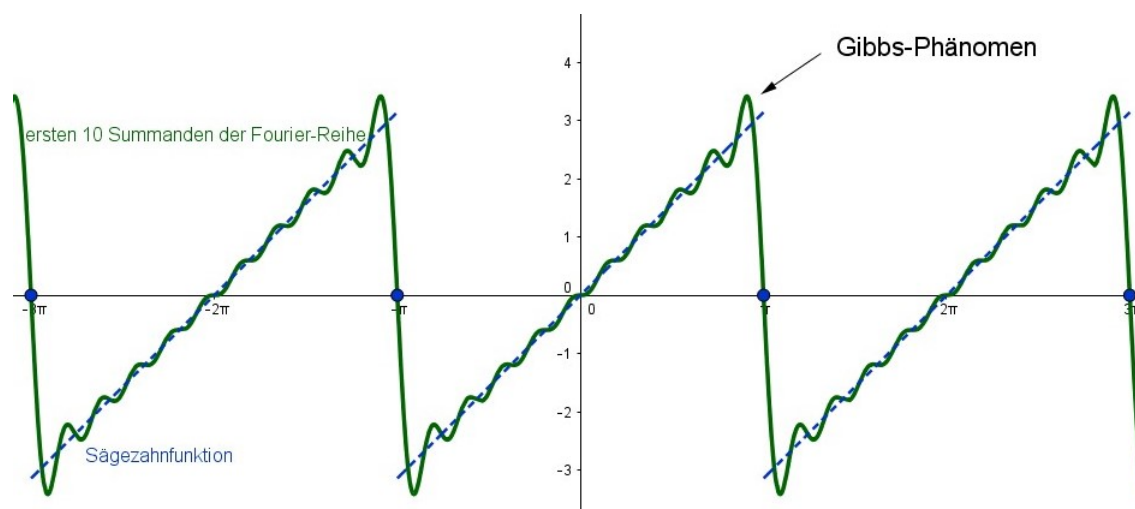


Abbildung 26: Sägezahnfunktion und Gibbs-Phänomen

¹⁹⁵vgl. Dietmaier 2014, S.283

¹⁹⁶vgl. Dietmaier 2014, S.283

¹⁹⁷vgl. Rolf 2009, S.416

4.3.4 Das Gibbs Phänomen

Bei einer Funktion, die Sprungstellen hat, kann die Fourier-Reihe nicht durchgehend gleichmäßig konvergieren. In diesem Abschnitt interessieren wir uns dafür, wie sich die Konvergenz in der Nähe einer solcher Sprungstelle verhält. Beim Betrachten einiger Beispiele stellt man fest, dass sich die Teilsummen 'eigenartig' verhalten. Diese schießen nämlich¹⁹⁸ „deutlich über die Sprunghöhe hinaus, nehmen gewissermaßen einen 'Anlauf'.“¹⁹⁹. Diese Beobachtung trägt den Namen **Gibbs-Phänomen**.²⁰⁰

Im vorigen Kapitel haben wir diese Beobachtung bereits an der Sägezahnfunktion festgestellt. Zur genaueren Beleuchtung dieses Phänomens wollen wir nun die *Sprungfunktion* genauer betrachten:

Sprungfunktion:²⁰¹

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{für } x \in \{-\pi, 0, \pi\}. \end{cases} \quad (6)$$

Wir wollen nun also die Fourierkoeffizienten unserer Sprungfunktion berechnen:²⁰²

Da es sich um eine ungerade Funktion handelt, erhalten wir $a_k = 0$ und somit treten nur mehr Sinusterme auf.

Den Fourierkoeffizienten b_k erhält man durch die Formel:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^T f(x) \cdot \sin(kx) \, dx$$

Als erstes wollen wir $f(x) = 1$ für $0 < x < \pi$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(kx) \, dx &= \frac{1}{\pi} \cdot \left. \frac{(-\cos(kx))}{k} \right|_0^{\pi} = \\ &= -\frac{1}{\pi k} \cos(k\pi) + \frac{1}{\pi k} \cos(k \cdot 0) = \frac{1}{\pi k} \cdot (-(-1)^k + 1) = \frac{1}{\pi k} \cdot (1 - (-1)^k) \end{aligned}$$

Für die Funktion $f(x) = -1$ für $-\pi < x < 0$ erhalten wir:

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot \sin(kx) \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left. \frac{(\cos(kx))}{k} \right|_{-\pi}^0 =$$

¹⁹⁸vgl. Rolf 2009, S.452 f.

¹⁹⁹Rolf 2009, S.453

²⁰⁰vgl. Rolf 2009, 453

²⁰¹vgl. Rolf 2009, S.453ff.

²⁰²vgl. Arens u.a. 2012, S.1051

$$= \frac{1}{\pi k} \cdot \cos(k \cdot 0) - \frac{1}{\pi k} \cdot \cos(-\pi k) = \frac{1}{\pi k} \cdot (1 - (-1)^k)$$

Daher erhalten wir insgesamt für den Koeffizienten b_k :

$$\Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi k} \cdot (1 - (-1)^k) + \frac{1}{\pi k} \cdot (1 - (-1)^k) = \frac{2}{\pi k} \cdot (1 - (-1)^k)$$

Wir bekommen daher die Fourierreihe folgender Gestalt:²⁰³

$$\left(\frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \cdot \sin((2k-1) \cdot x) \right)$$

So erhalten wir beispielsweise

für $k = 1$:

$$\frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 1 - 1} \cdot \sin((2 \cdot 1 - 1) \cdot x) \right) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin(x)$$

für $k = 2$:

$$\frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 2 - 1} \cdot \sin((2 \cdot 2 - 1) \cdot x) \right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin(3x)}{3}$$

für $k = 3$:

$$\frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 3 - 1} \cdot \sin((2 \cdot 3 - 1) \cdot x) \right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin(5x)}{5}$$

⋮

Insgesamt erhalten wir daher eine ungerade Funktion mit der konvergenten Fourier-Entwicklung:

$$F(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \dots \right) \quad (7)$$

²⁰³vgl. Arens u.a. 2012, S.1051

Die nachstehenden drei Grafiken (mit dem Programm Geogebra erstellt) zeigen das Gibbs-Phänomen für (7) mit unterschiedlichen Teilsummen:

1) Das Gibbs Phänomen betrachtet für die Sprungfunktion mit 5 Teilsummen:

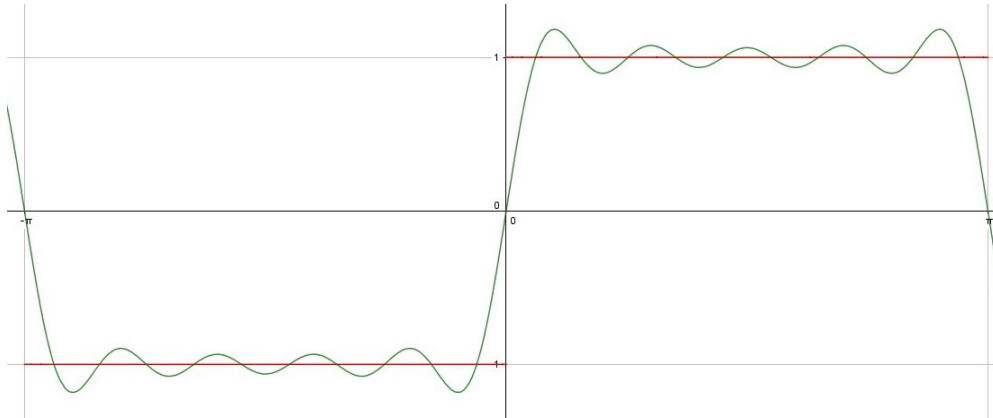


Abbildung 27: Sprungfunktion 5 Teilsummen

2) Das Gibbs Phänomen betrachtet für die Sprungfunktion mit 10 Teilsummen:

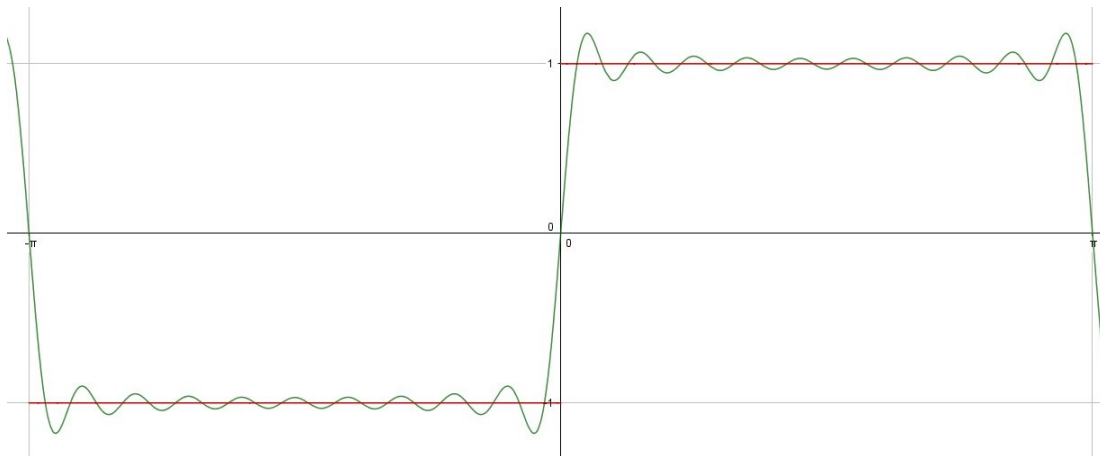


Abbildung 28: Sprungfunktion 10 Teilsummen

3) Das Gibbs Phänomen betrachtet für die Sprungfunktion mit 50 Teilsummen:

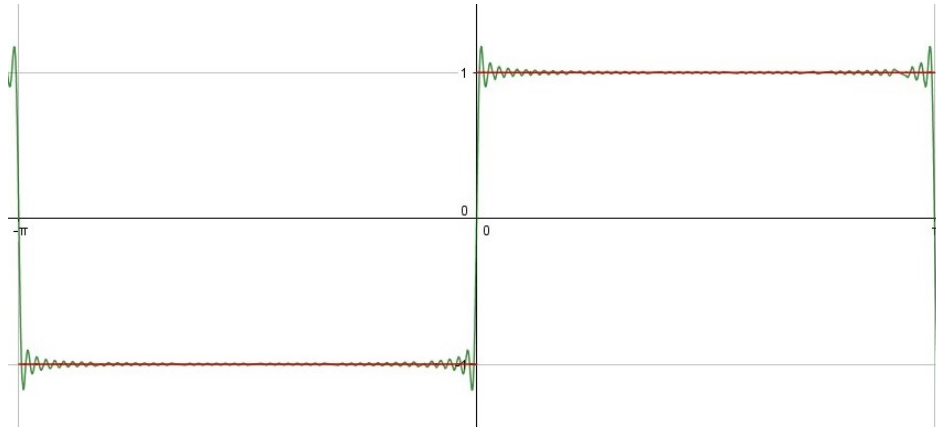


Abbildung 29: Sprungfunktion 50 Teilsummen

Je größer die Anzahl der Teilsummen, so sieht man im mittleren Bereich des Graphen fast keinen Unterschied mehr zum Graphen der dargestellten Funktion. Die 'Anläufe' der Sprungstellen, das Gibbs-Phänomen, treten jedoch sehr deutlich hervor. Dies wollen wir nun ein bisschen genauer untersuchen:²⁰⁴

Die Teilsummen der Reihe (7) sind folgendermaßen definiert:

$$F_m(x) := \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^m \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

Wir berechnen uns die Ableitung, um zu den Extremstellen zu gelangen:

$$F'_m(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^m \frac{\cos(2k-1)x \cdot (2k-1)}{2k-1} = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^m \cos(2k-1)x$$

Die Summe $\sum_{k=1}^m \cos(2k-1)x$ lässt sich sogar explizit darstellen:

$$\sum_{k=1}^m \cos(2k-1)x = \frac{\sin 2mx}{2 \sin x}$$

Über die komplexe geometrische Summenformel können wir beweisen, dass diese Darstellung gilt:

$$\sum_{k=1}^m z^{2k-1} = z \cdot \sum_{k=1}^m (z^2)^{k-1} = z \cdot \frac{1 - (z^2)^m}{1 - z^2}$$

Wir setzen nun $z := e^{ix}$. Daraus folgt auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned} z \cdot \frac{1 - (z^2)^m}{1 - z^2} &\stackrel{z:=e^{ix}}{=} e^{ix} \cdot \frac{1 - (e^{2ix})^m}{1 - (e^{ix})^2} = \frac{e^{ix} \cdot (1 - e^{2imx})}{1 - e^{2ix}} = \\ &= \frac{e^{ix} \cdot (1 - e^{i2xm})}{e^{ix} \cdot (\frac{1}{e^{ix}} - e^{ix})} = \frac{1 - e^{2imx}}{e^{-ix} - e^{ix}} \stackrel{\sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}{=} \frac{i \cdot (1 - e^{2imx})}{2 \sin x} \end{aligned}$$

²⁰⁴vgl. Rolf 2009, S.454

mit dem Realteil $\frac{\sin(2mx)}{2\sin(x)}$. Daher gilt für die Ableitung:

$$F'_m(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(2mx)}{\sin(x)}.$$

Um die Nullstellen von $F_m(x)$ im Intervall $(0, \pi)$ zu berechnen, setzen wir die erste Ableitung Null:

$$F'_m(x) = 0 : \quad \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(2mx)}{\sin(x)} = 0 \Rightarrow \text{Nullstellen: } \frac{j \cdot \pi}{2m} \text{ für } j = 1, 2, \dots, 2m - 1$$

Für $j = 1$ erhalten wir die kleinste Nullstelle, nämlich $x_m = \frac{\pi}{2m}$.

Um zu überprüfen, ob dies eine relative Maximumstelle ist, betrachten wir die 2. Ableitung nach x . Um die 2. Ableitung zu bilden verwenden wir die Quotientenregel:

$$F''_m(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(2mx) \cdot 2m \cdot \sin(x) - \sin(2mx) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

Wir setzen nun in die 2. Ableitung $x_m = \frac{\pi}{2m}$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(2m \cdot \frac{\pi}{2m}) \cdot 2m \cdot \sin(\frac{\pi}{2m}) - \sin(2m \cdot \frac{\pi}{2m}) \cdot \cos(\frac{\pi}{2m})}{\sin^2(\frac{\pi}{2m})} = \\ = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-1 \cdot 2m - 0}{\sin^2 \frac{\pi}{2m}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-2m}{\sin^2 x_m} < 0. \end{aligned}$$

Da die zweite Ableitung an der Stelle x_m kleiner Null ist, haben wir an dieser Stelle ein lokales Maximum.

Wir berechnen uns daher den Funktionswert von F_m an der Stelle x_m :²⁰⁵

$$F_m(x_m) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^m \frac{\sin(2k-1) \cdot \frac{\pi}{2m}}{2k-1}$$

4.3.5 komplexe Schreibweise

Zuerst drücken wir die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus mit Hilfe der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ aus:²⁰⁶

$$\cos(kx) = \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx})$$

$$\sin(kx) = \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx}) = -\frac{i}{2} (e^{ikx} - e^{-ikx}).$$

²⁰⁵vgl. Rolf 2009, S.455

²⁰⁶vgl. Rolf 2009, S.411

Wenn wir dies in (5) einsetzen, erhalten wir:²⁰⁷

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cdot \frac{1}{2} \left(e^{ikx} + e^{-ikx} \right) - b_k \cdot \frac{i}{2} \left(e^{ikx} - e^{-ikx} \right) \right) = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{2} \cdot e^{ikx} + \frac{a_k}{2} \cdot e^{-ikx} - \frac{i \cdot b_k}{2} \cdot e^{ikx} + \frac{i \cdot b_k}{2} \cdot e^{-ikx} \right) = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \cdot e^{ikx} \cdot (a_k - i \cdot b_k) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \cdot e^{-ikx} \cdot (a_k + i \cdot b_k)
\end{aligned}$$

Wir definieren nun

$$\begin{aligned}
c_k &:= \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & c_{-k} &:= \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \text{ für } k \geq 1 \\
c_0 &:= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}(a_0 - ib_0) \text{ mit } b_0 := 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgern wir:²⁰⁸

$$\Rightarrow F_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Im Folgenden werden wir die Koeffizienten von c_k durch Integrale, deren Integranden komplexe Zahlen sind, darstellen. Für a_k setzt man

$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx$ und für $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx$. Für $k \geq 0$ gilt:²⁰⁹

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx - i \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx
\end{aligned}$$

Für $k < 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(-k)x \, dx + i \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(-k)x \, dx \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx.
\end{aligned}$$

Gemeinsam ergibt sich:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

²⁰⁷vgl. Rolf 2009, S.411

²⁰⁸vgl. Rolf 2009, S.412

²⁰⁹vgl. Rolf 2009, S.412

„Diese c_k , wobei der Index k jetzt ganz $\mathbb{Z}$ durchläuft, heißen die **komplex geschriebenen Fourier-Koeffizienten** von f .“²¹⁰

Man schreibt dann

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \text{ bzw. } f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}.$$

Diese Relation sagt aus, dass die Funktion f die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k mit $k \in \mathbb{Z}$ hat.²¹¹

Bemerkung: falls die Reihe rechts konvergiert, dann bedeutet dies, dass alle Teilsummen $F_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ konvergieren.²¹²

Umrechnungsformeln (für $k \geq 0$):²¹³

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & c_{-k} &:= \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \\ a_k &= c_k + c_{-k}, & b_k &= i(c_k - c_{-k}). \end{aligned}$$

4.3.6 Fourierentwicklung einer Funktion beliebiger Periode p

Man kann die Fourierentwicklung auch auf eine Funktion mit beliebiger Periode p auslegen. Angenommen wir haben eine Funktion f , $f(x)$ ist periodisch und hat die Periode p , dann ist auch eine Funktion g mit $g(x) = f\left(\frac{p}{2\pi}x\right)$ periodisch und hat die Periode 2π . Diese Funktion g ist dann folgendermaßen als Fourierreihe darstellbar:²¹⁴

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Wir erhalten die Fourierkoeffizienten a_n und b_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{p}{2\pi}x\right) \cos nx \, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{p}{2\pi}x\right) \sin nx \, dx \end{aligned}$$

²¹⁰Rolf 2009, S.412

²¹¹vgl. Rolf 2009, S.412

²¹²vgl. Rolf 2009, S.412

²¹³vgl. Rolf 2009, S.412f.

²¹⁴vgl. Dietmaier 2014, S.284

Durch die Substitution $u = \frac{p}{2\pi}x \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{p}u$ erhalten wir für a_n und b_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{p}{2\pi}x\right) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^p f(u) \cos\left(n\frac{2\pi}{p}u\right) \frac{du \cdot 2\pi}{p} = \\ &= \frac{2}{p} \int_0^p f(u) \cos\left(n\frac{2\pi}{p}u\right) du = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos\left(n\frac{2\pi}{p}x\right) dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{p}{2\pi}x\right) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^p f(u) \sin\left(n\frac{2\pi}{p}u\right) \frac{du \cdot 2\pi}{p} = \\ &= \frac{2}{p} \int_0^p f(u) \sin\left(n\frac{2\pi}{p}u\right) du = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin\left(n\frac{2\pi}{p}x\right) dx \end{aligned}$$

Daher gilt für die Funktion $f(x) = g\left(\frac{2\pi}{p}x\right)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{p}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{p}x\right)$$

Für die Fourierentwicklung einer Funktion mit beliebiger Periode erhalten wir also folgende Definition:

Definition:²¹⁵ Sei $f(x)$ eine periodische Funktion mit Periode p . Sind $f(x)$ und $f'(x)$ stückweise stetig im Intervall $[0; p]$, dann gilt an allen Stetigkeitsstellen

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{p}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{p}x\right)$$

und an allen Unstetigkeitsstellen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{p}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{p}x\right) = \frac{1}{2} \left(\lim_{s \rightarrow x} f(s) + \lim_{s \rightarrow x} f(s) \right)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos\left(n\frac{2\pi}{p}x\right) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin\left(n\frac{2\pi}{p}x\right) dx \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Bemerkung: Man kann bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten auch über ein anderes Intervall, wie zum Beispiel $[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$, der Breite p integrieren. Außerdem folgt aus den Symmetrieeigenschaften der Funktion: falls $f(x)$ ungerade ist, dann ist der Fourierkoeffizient $a_n = 0$ und falls $f(x)$ gerade, dann ist der Koeffizient $b_n = 0$.²¹⁶

²¹⁵Dietmaier 2014, S.285

²¹⁶vgl. Dietmaier 2014, S.285

4.3.7 Fourierreihen aus Potenzreihen

Man kann eine einfach gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe aus einer komplexen Potenzreihe, die eine Funktion darstellt, gewinnen.²¹⁷

Satz: Es sei nun $h(z)$ mit Konvergenzradius $r > 0$ und Zentrum 0 eine Potenzreihe.

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k, \quad z \in \mathbb{C} \text{ und } |z| < r.$$

Wenn wir jetzt für $z = \xi e^{ix}$ einsetzen mit $\xi \in \mathbb{C}$ fest und $|\xi| < r$, dann erhalten wir eine gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe $f(x)$ von der Gestalt:

$$f(x) := h(\xi e^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \xi^k e^{ikx}, \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.^{218}$$

Beispiel:²¹⁹ Als Beispiel betrachten wir nun die geometrische Reihe.

Angenommen das Zentrum der Reihe sei 0 und der Konvergenzradius sei gegeben mit $r = 1$, dann lautet die geometrische Reihe $h(z)$ folgendermaßen:

$$h(z) := \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots, \quad \text{mit } |z| < r = 1.$$

Wir führen nun die Substitution $z = \xi e^{ix}$ für $\xi \in (-1, 1)$ durch und erhalten als Ergebnis:

$$f(x) = h(\xi e^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k e^{ikx} \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{1 - \xi e^{ix}} = \frac{1 - \xi e^{-ix}}{|1 - \xi e^{ix}|^2}$$

Durch die Aufspaltung in einen Real- und Imaginärteil ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \cos(kx) = \frac{1 - \xi \cos x}{1 - 2\xi \cos x + \xi^2}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi^k \sin(kx) = \frac{\xi \sin x}{1 - 2\xi \cos x + \xi^2}$$

Nach dem vorangegangenen Satz sind die Koeffizienten, welche auf der linken Seite der Gleichung stehen, bei festem $\xi \in (-1, 1)$ gleich den Fourier-Koeffizienten der rechten

²¹⁷vgl. Rolf 2009, S.413

²¹⁸vgl. Rolf 2009, S.413

²¹⁹vgl. Rolf 2009, S.413 ff.

Seite der Gleichung.

Wenn wir allerdings $\xi = 1$ setzen wollen, dann können wir diese Argumentation nicht mehr verwenden, da die geometrische Reihe für $|z| = 1$ nicht konvergent ist. Daher müssen wir auf Teilsummen zurückgreifen. Diese Teilsummen kann man von der geometrischen Reihe explizit berechnen. Wir setzen $z = e^{ix} \neq 1$ und starten mit der Teilsumme, wobei natürlich gilt $n \geq 0$ und substituieren wie zuvor, trennen den Real- und Imaginärteil und erhalten:

$$\begin{aligned}
 1 + z + z^2 + \dots + z^n &= \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \\
 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{nix} &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \quad (\text{mit } e^{-i\frac{x}{2}} \text{ erweitert}) = \frac{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i((n+1)x - \frac{x}{2})}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = \\
 &= \frac{\cos \frac{x}{2} - i \cdot \sin \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2}) \cdot x - i \cdot \sin(n + \frac{1}{2}) \cdot x}{\cos \frac{x}{2} - i \cdot \sin \frac{x}{2} - \left(\cos \frac{x}{2} + i \cdot \sin \frac{x}{2} \right)} = \\
 &= \frac{\cos \frac{x}{2} - i \cdot \sin \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2}) \cdot x - i \cdot \sin(n + \frac{1}{2}) \cdot x}{-2i \cdot \sin \frac{x}{2}}
 \end{aligned}$$

Im Folgenden vergleichen wir die Realteile und die Imaginärteile miteinander:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) \cdot x}{2 \sin \frac{x}{2}} \\
 \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx &= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2}) \cdot x}{2 \sin \frac{x}{2}}
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}2\pi$ gültig. In den Punkten $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}2\pi$ sind die linken Seiten stetig und deshalb besitzen die rechten Seiten in diesen Punkten hebbare Unstetigkeiten (die als Grenzwerte $\frac{1}{2} + n$ bzw. 0 aufgefasst werden können). Im Allgemeinen konvergieren diese Ausdrücke jedoch für $n \rightarrow \infty$ nicht. Deshalb integrieren wir den Realteil von π nach $x \in (0, 2\pi)$ und erhalten:

$$\frac{1}{2}(x - \pi) + \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx = \int_{\pi}^x \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \quad \text{partielle Integration} =$$

partielle Integration:

$$\begin{aligned}
 f &= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t & g &= \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \\
 F &= -\frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{n + \frac{1}{2}} & g' &= -1 \cdot \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^{-2} \cdot \left(2 \cos \frac{t}{2}\right) \cdot \frac{t}{2} = \frac{t \cos \frac{t}{2}}{4 \sin^2 \frac{t}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{partielle Integration} &= -\frac{\cos(n + \frac{1}{2}) \cdot x}{n + \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} - \int_{\pi}^x \left(-\frac{\cos(n + \frac{1}{2})x}{n + \frac{1}{2}} \right) \cdot \left(-\frac{t \cdot \cos \frac{t}{2}}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \right) dt \\
&= -\frac{\cos(n + \frac{1}{2}) \cdot x}{n + \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_{\pi}^x \frac{\cos(n + \frac{1}{2}) \cdot t \cos \frac{t}{2}}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt =: K_n.
\end{aligned}$$

Jetzt kann man den Nenner abschätzen, da im Nenner Sinusterme stehen, die beschränkt sind. Dadurch erhält man die Nullkonvergenz von $|K_n|$. Daraus folgt für eine fest gewählte Zahl $\alpha \in (0, \pi)$:

$$K_n \rightarrow 0 \text{ gleichmäßig auf } [\alpha, 2\pi - \alpha]$$

$$K_n \rightarrow 0 \text{ für } x \in (0, 2\pi)$$

Es folgt daher:

$$\frac{1}{2}(\pi - x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \text{ für } 0 < x < 2\pi.$$

Im Intervall $(0, 2\pi)$ erfolgt die Konvergenz punktweise und im Intervall $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ gleichmäßig. Die Reihe rechts definiert eine 2π -periodische Funktion (von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen) und konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Eine spezielle Reihe, die sogenannte **Leibniz-Reihe**, entsteht, wenn man $x = \frac{\pi}{2}$ setzt:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[0, 2\pi]$ sei definiert durch:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{für } 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{für } x = 0 \text{ oder } x = 2\pi \end{cases},$$

dann gilt in den ganzen reellen Zahlen:

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + \dots$$

Um klarzustellen, dass dies die Fourier-Reihe der Funktion f ist, berechnet man die Fourier-Koeffizienten der Funktion f . Es ergibt sich daher:

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{k}.^{220}$$

²²⁰vgl. Rolf 2009, S.413 ff.

„Es hat historisch großes Aufsehen erregt, als zum ersten Mal eine solche Reihe aus holomorphen Funktionen auftauchte, deren Summe eine unstetige Funktion ist. Dieses Phänomen hat dann den Anlass zur Schaffung des modernen Funktionsbegriff (der heute selbstverständlich ist) gegeben.“²²¹

4.3.8 Fourierentwicklung und ihre Anwendungen

Periodischen Signalen bzw. Schwingungen und daraus resultierend periodischen Funktionen finden vor allem in vielen Bereichen der Technik Anwendung. Die Variable 'Zeit' spielt dabei vor allem häufig bei akkustischen Signalen eine wesentliche Rolle und an diesem Punkt kommt die Fourierentwicklung ins Spiel. Sie ist insbesondere im Hinblick auf die Analyse, Verarbeitung und Erzeugung akkustischer Signale anwendbar, da man periodische Signale und Funktionen als Fourierreihen darstellen kann. Es seien nun t die Variable der Zeit und T die Variable für die Periode. Dann können wir eine Fourierreihe allgemein wie folgt schreiben:²²²

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right) \quad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

Wir wollen nun annehmen, dass A_n, φ_n die Polarkoordinaten eines Punktes und a_n, b_n die kartesischen Koordinaten desselben Punktes sind. Es gilt daher:²²³

$$a_n = A_n \cos \varphi_n \quad \text{und} \quad b_n = A_n \sin \varphi_n,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{und} \quad \tan \varphi_n = \frac{b_n}{a_n}$$

Nun brauchen wir die Additionstheoreme, um die obige Gleichung anders darzustellen. Die Additionstheoreme machen eine wichtige Aussage über die Beziehungen für die Sinus- und Cosinusfunktion. Sie lauten folgendermaßen (ohne Herleitung):²²⁴

$$1) \cos(x_1 \pm x_2) = \cos(x_1) \cos(x_2) \mp \sin(x_1) \sin(x_2)$$

²²¹Rolf 2009, S.415

²²²vgl. Dietmaier 2014, S.287

²²³vgl. Dietmaier 2014, S.287

²²⁴vgl. Dietmaier 2014, S.68

$$2) \sin(x_1 \pm x_2) = \sin(x_1) \cos(x_2) \pm \cos(x_1) \sin(x_2)$$

Wir benötigen das Additionstheorem 1) und können daher schreiben:²²⁵

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \varphi_n \cos(n\omega t) + A_n \sin \varphi_n \sin(n\omega t) \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \left(\cos \varphi_n \cos(n\omega t) + \sin \varphi_n \sin(n\omega t) \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t - \varphi_n) \quad \text{mit } \omega_n = n \cdot \omega = n \cdot \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

Wir haben also eine Summe für harmonische Schwingungen mit den Amplituden A_n und den Frequenzen ω_n erhalten. Für $n = 1$ ergibt sich die sogenannte Grundschiwingung. Für alle Summanden $n > 1$ erhält man Oberschwingungen. Das Signal ist durch die Amplituden A_n und Phasen φ_n charakterisiert.²²⁶ Wenn man auf einem Instrument einen gleichmäßigen Ton spielt, dann „ist der Luftdruck an einem bestimmten Ort eine periodische Funktion der Zeit. Diese besteht aus einer Grundschiwingung (Grundton) und Oberschwingungen (Obertönen). Die Amplituden A_n und Phasen φ_n charakterisieren den Klang.“²²⁷ Man kann Klänge durch Technik synthetisieren, in dem man den Grundton und die Obertöne addiert.²²⁸

Bemerkung:²²⁹

Man kann also in einer Fourier-Reihe Cosinus- und Sinusglieder zu nur einem Cosinus bzw. Sinusterm zusammenfassen, falls die Cosinus- und Sinusglieder den gleichen Index besitzen. Die Kombination zu einem Cosinusterm beruht beispielsweise auf der allgemeinen Formel für die Bestimmung der reellen Konstanten A (Amplitude) und φ (Phasenwinkel), damit die Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gültig ist:

$$a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = A \cdot \cos(x - \varphi) \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

²²⁵vgl. Dietmaier 2014, S.287

²²⁶vgl. Dietmaier 2014, S.287

²²⁷Dietmaier 2014, S.287

²²⁸vgl. Dietmaier 2014, S.287

²²⁹vgl. Rolf 2009, S.420

Wir betrachten nun den Sonderfall $a = b = 0$: in diesem Fall kann man die Amplitude $A = 0$ setzen und den Phasenwinkel φ beliebig, z.B.: ebenfalls als 0 wählen.

Im Fall $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt für der Berechnung der Variablen A und φ :

$$a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = A \cdot \cos x \cos \varphi + A \cdot \sin x \sin \varphi$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn gilt $a = A \cdot \cos \varphi$ und $b = A \cdot \sin \varphi$. Diese beiden Kriterien gelten wiederum genau dann, wenn gilt:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \text{Arg}(a, b)$$

Wenn wir diese Formeln auf die Fourier-Reihe anwenden, dann ergibt sich folgende alternative Darstellung:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(x - \varphi_k) \quad \text{mit} \quad A_k := \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{und} \quad \varphi_k := \text{Arg}(a_k, b_k)$$

und im Sonderfall $(a_k, b_k) = (0, 0)$, dass man φ_k frei wählen darf.²³⁰

4.3.9 Beispiel Zickzack-Welle

Wir wollen in diesem Kapitel die Funktion der Zickzack - Welle in eine Fourier-Reihe entwickeln. Eine Funktion f mit²³¹

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, 2\pi] \\ 2\pi - x & \text{für } x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

sei eine stückweise affine Funktion mit 2π -periodischer Fortsetzung. In Abbildung (30), die mit dem Programm Geogebra erstellt wurde, ist die Zickzack-Welle zu sehen.

Da die Funktion f gerade ist, ist der Fourier-Koeffizient $b_k = 0$. Um den Koeffizienten a_k zu erhalten rechnet man:

für $k = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \stackrel{\text{Symmetrie}}{=} \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi$$

²³⁰vgl. Rolf 2009, S.420

²³¹vgl. Rolf 2009, S.417

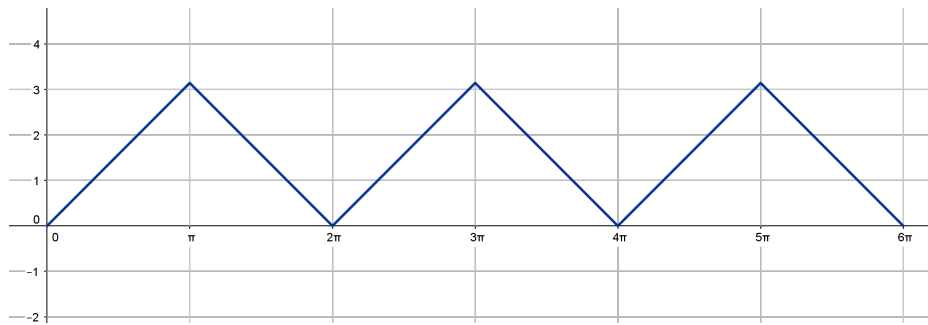


Abbildung 30: Zickzack-Welle

für a_k :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \stackrel{\text{Symmetrie}}{=} \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} x \cos(kx) \, dx \stackrel{\text{partielle Integration}}{=}$$

partielle Integration:

$$g = x$$

$$f = \cos(kx)$$

$$g' = 1$$

$$F = \frac{\sin(kx)}{k}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{partielle Integration}}{=} \frac{\sin(kx)}{k} \cdot x - \int_0^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k} \, dx = \frac{x \cdot \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2} = \\ & = \frac{kx \cdot \sin(kx) + \cos(kx)}{k^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{k\pi \cdot \sin(k\pi) + \cos(k\pi) - k \cdot 0 \sin(k \cdot 0) - \cos(k \cdot 0)}{k^2} = \\ & = \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \end{aligned}$$

Aus diesen Berechnungen ergibt sich die Fourier-Reihe der Gestalt:²³²

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{\cos(x)}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \frac{\cos(7x)}{7^2} + \dots \right)$$

Die ersten fünf Teilsummen dieser Fourier-Reihe habe ich mit dem Programm Geogebra in der Abbildung (31) sichtbar gemacht.

²³²vgl. Rolf 2009, S.417

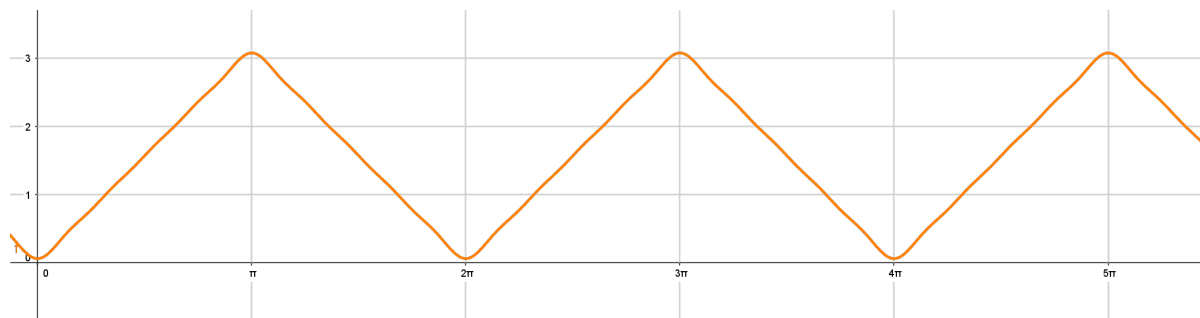


Abbildung 31: Zickzack-Welle, 5 Teilsummen

Wie in Abbildung (31) ersichtlich ist, liefert die Fourier-Reihe schon mit fünf Teilsummen eine gute Näherung an die ursprüngliche Zickzack-Welle. Jedoch erkennt man auch deutlich, dass die 'Zacken' nicht gespitzt, sondern eher als Rundungen dargestellt werden. Je mehr Teilsummen man bildet und in Geogebra eingibt, desto eher stimmt die Annäherung an die ursprüngliche Funktion der Zickzack-Welle.

4.3.10 trigonometrische Identität

Es sei die Funktion f mit

$$f(t) = \cos^2(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2\omega t)$$

gegeben.²³³ Wir wollen uns nun überlegen, wie diese Funktion graphisch zusammengesetzt werden kann. Wir zeichnen zunächst den Graphen der Funktion $\cos^2(\omega \cdot t)$.

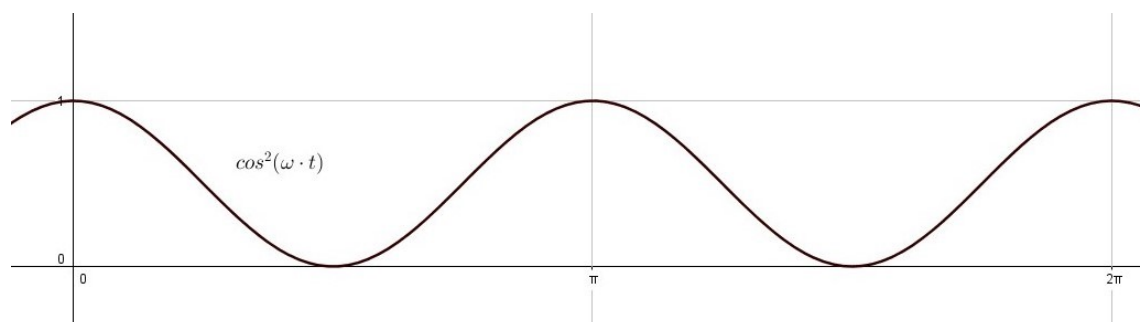


Abbildung 32: Funktion $f(t)$

Die Funktion $\cos^2(\omega \cdot t)$ ist eine gerade Funktion und daher sind keine Koeffizienten b_k vorhanden. Die Fourierkoeffizienten a_0 und a_2 können bestimmt werden und man erhält $a_0 = \frac{1}{2}$ und $a_2 = \frac{1}{2}$.²³⁴

²³³vgl. Butz 2011, S.5

²³⁴vgl. Butz 2011, S.5

Wir wollen nun auch die Funktion $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} \cos(2\omega t)$ graphisch darstellen.

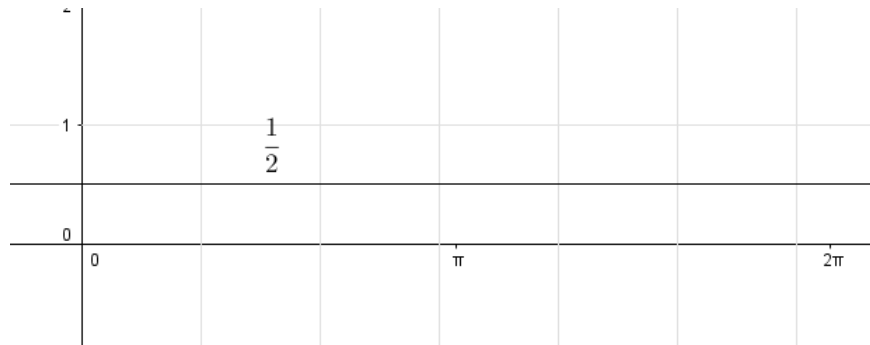


Abbildung 33: Funktion $y=0.5$

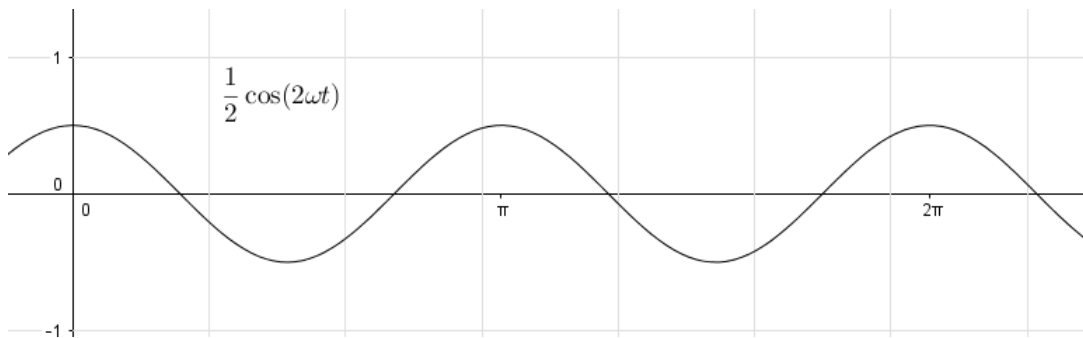


Abbildung 34: Funktion $y=0.5 \cos$

In Abbildung (33) ist der Mittelwert $\frac{1}{2}$ dargestellt und in Abbildung (34) eine Cosinusschwingung mit der Amplitude $\frac{1}{2}$ und der Frequenz 2ω . Die gegebene Funktion $f(t) = \cos^2(\omega \cdot t)$ kann also zerlegt werden.²³⁵ Addiert man beide Abbildungen (33) und (34), so erhält man die Funktion $f(t)$ wie in der Abbildung (32).

4.3.11 Beispiel Sinus-Funktion mit Spektraldarstellung

In diesem Kapitel wollen wir die Fourier-Reihe der Sinus-Funktion darstellen und ihre Amplituden mit der Spektraldarstellung sichtbar machen.²³⁶

Es sei die Funktion

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

²³⁵vgl. Butz 2011, S.5

²³⁶vgl. <https://www.youtube.com/watch?v=xiDzwiwTVW4>

gegeben, wobei der Parameter T die Periodendauer angibt.

Wir setzen nun $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und erhalten daher nach Einsetzen in die Funktionsgleichung:

$$f(t) = \sin(\omega \cdot t)$$

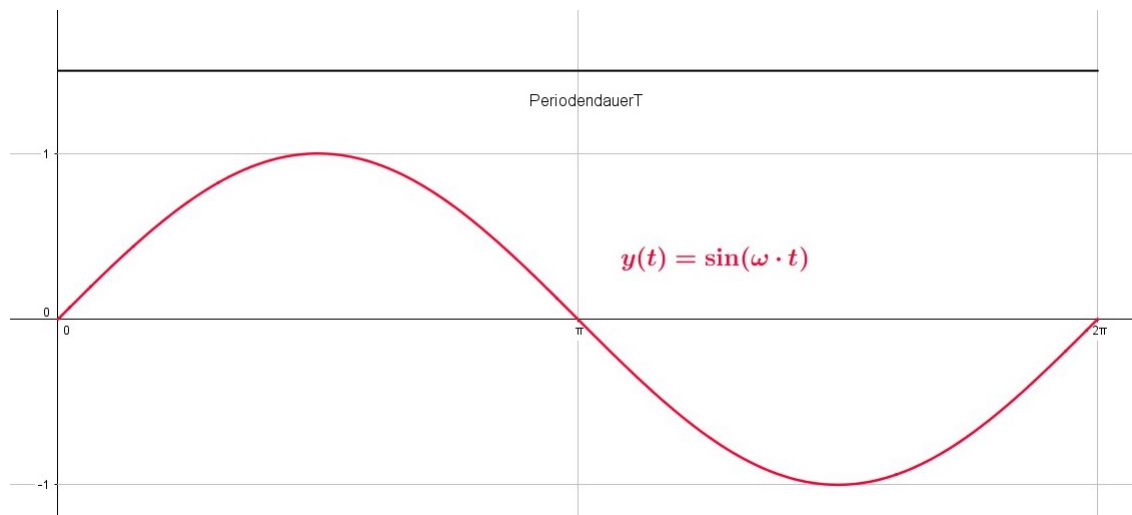


Abbildung 35: Periode Sinus

Wie man in Abbildung (35) erkennen kann, beträgt die Dauer einer Periode der Sinus-schwingung 2π und die Amplitude hat den Wert 1.

Wir wollen nun die Amplitude über die Fourierintegrale berechnen und diese dann in die Spektraldarstellung übertragen. Die gegebene Funktion $f(t)$ lässt sich allgemein darstellen als:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cdot \sin\left(\frac{1}{T} \cdot 2\pi t\right) + a_2 \cdot \sin\left(\frac{2}{T} \cdot 2\pi t\right) + a_3 \cdot \sin\left(\frac{3}{T} \cdot 2\pi t\right) + \dots$$

In diesem allgemeinen Fall ergibt sich für a_0 also:

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) dt$$

und allgemein für a_k schreiben wir:

$$a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin\left(\frac{k}{T} \cdot 2\pi \cdot t\right) dt$$

Ausgelegt auf unser Beispiel der Sinus-Funktion erhalten wir:

$$a_0 = 0$$

und

$$a_k = \frac{2}{T} \cdot \underbrace{\int_0^T \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(k\omega t) dt}_{= 0, \text{ da } \int \sin x \sin nx dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin(n-1) \cdot x}{n-1} - \frac{\sin(n+1) \cdot x}{n+1} \right)} = 0 \quad \text{für } k \neq 1$$

Für den Fall, dass $k = 1$ ist erhalten wir durch einsetzen:

$$a_1 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \sin^2(\omega t) dt$$

Um dieses Integral auszurechnen betrachten wir die Funktionen $\cos^2(x)$, $\sin^2(x)$ und $\sin(x)$ in Abbildung (36).

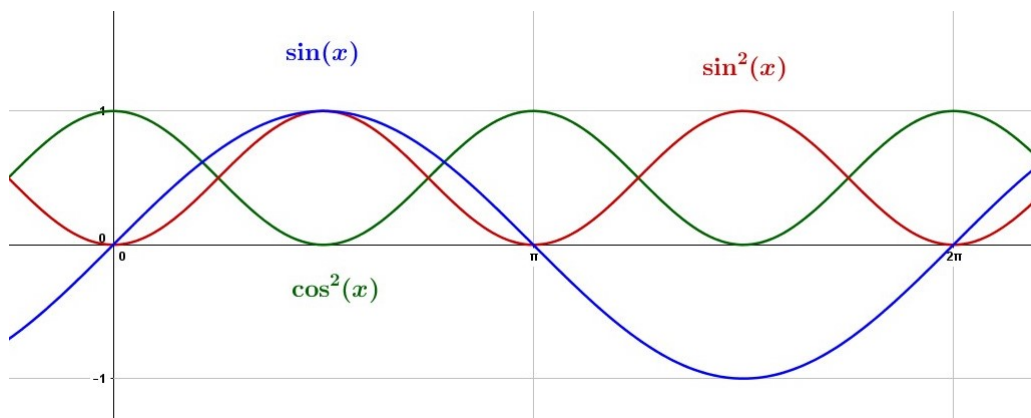


Abbildung 36: Funktionen

Wir wissen es gilt die Gleichung $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$. Die Fläche des Integrals unter der Sinuskurve ist gleich $1 \cdot T$, da wir aber das $\int \sin^2$ brauchen, kann man auf Grund der Abbildung (36) erkennen, dass das $\int \sin^2 = \frac{1}{2} \cdot T$ beträgt.

Somit erhalten wir:

$$a_1 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot T = 1.$$

Das heißt für alle Werte $k \neq 1$ wird der Wert 0 und im speziellen Fall für $k = 1$ erhalten wir $a_1 = 1$.

Wir wollen dies nun in die Spektraldarstellung übertragen: Wir erhalten für den Wert bei der Grundfrequenz $\frac{1}{T}$ das Ergebnis 1 und alle anderen Werte sind 0.²³⁷

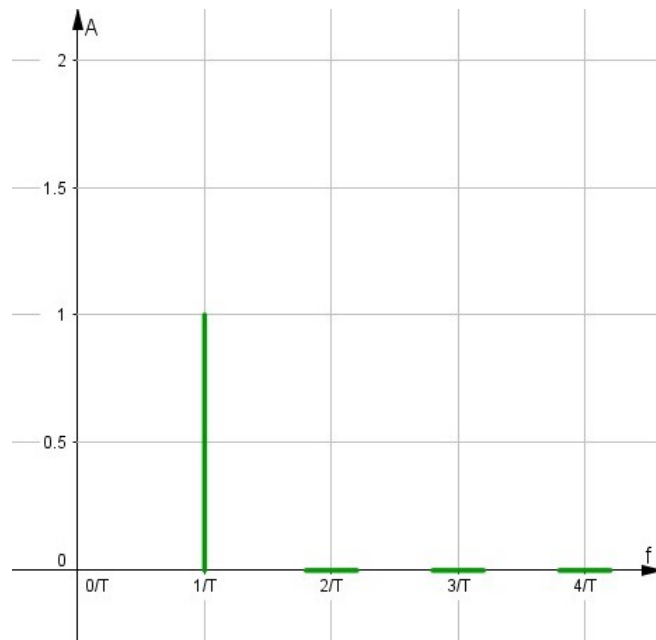


Abbildung 37: Spektraldarstellung Sinus

4.3.12 Beispiel: Spektraldarstellung einer Rechtecksfunktion

Wir betrachten in diesem Kapitel eine Rechtecksfunktion und wollen die Amplitude mit Hilfe der Spektraldarstellung sichtbar machen mit konkreten Werten für die Periodenlänge T . Danach wollen wir noch zeigen, dass man aus dem Sinus mit Hilfe entsprechender Teilsummen eine rechteckartige Schwingung erhält.²³⁸

²³⁷vgl. <https://www.youtube.com/watch?v=xiDzwiwTVW4>

²³⁸vgl. <https://www.youtube.com/watch?v=xiDzwiwTVW4>

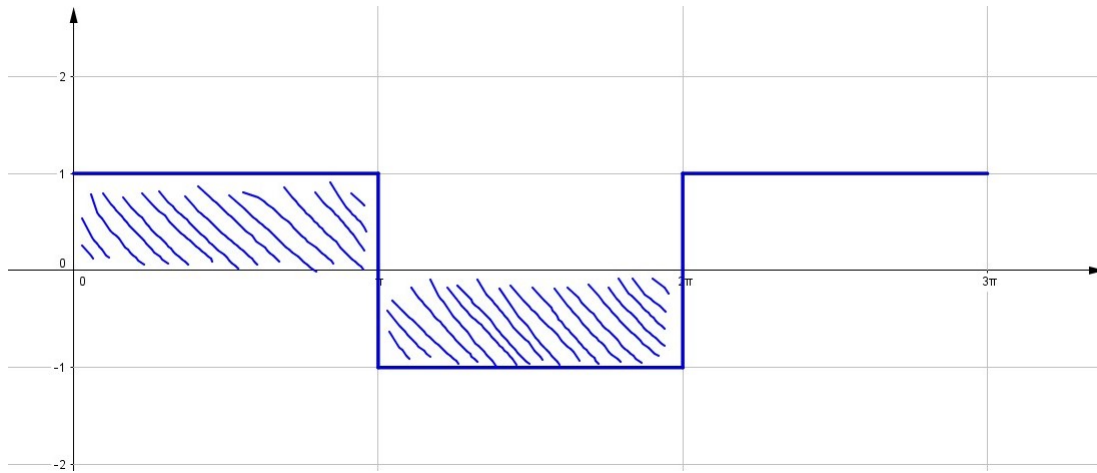


Abbildung 38: Rechtecksfunktion

Die Periodendauer dieser Funktion in Abbildung (38) ist gegeben mit $T = 2 \text{ sec.}$

Daraus ergibt sich für die Grundfrequenz f : $f = \frac{1}{2 \text{ s}} = 0,5 \text{ Hz}$

Für die Grundperiodendauer ω erhält man: $\omega = 2 \cdot \frac{1}{2} \pi = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$

Jetzt müssen wir wieder die Integrale bilden. Für das erste Integral erhält man den Wert 0, da die beiden strichlierten Flächen in der Summe Null ergeben (siehe Abbildung (38)). Das heißt also $a_0 = 0$.

Im allgemeinen Fall für a_k erhalten wir:

$$a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T y(t) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) dt$$

Wir können die Funktion nun in zwei Teilintegrale aufteilen: im ersten Teilintervall ist die Funktion 1 und im zweiten -1 . Daraus ergibt sich:

$$a_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(k \cdot \omega \cdot t) dt + \frac{2}{T} \cdot \int_{\frac{T}{2}}^T \left(-\sin(k \cdot \omega \cdot t) \right) dt$$

Wir können uns nun die Stammfunktion vom sin berechnen:

$$\int \sin(k \cdot \omega \cdot t) = -\cos(k \cdot \omega \cdot t) \cdot \frac{1}{k \cdot \omega}$$

Daraus ergibt sich dann für a_k :

$$\frac{2}{T} \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot \omega} \right) \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{k \cdot \omega} \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) \Big|_{\frac{T}{2}}^T =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{1}{k \cdot \omega} \right) \cdot \left(-\cos \left(\underbrace{k \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}}_{=\frac{k \cdot 2\pi}{2}} \right) + \underbrace{\cos 0}_{=1} + \underbrace{\cos(k \cdot \omega \cdot T)}_{=\cos(k \cdot 2\pi)=1} - \cos \left(\underbrace{k \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}}_{=\frac{k \cdot 2\pi}{2}} \right) \right) = \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{1 \cdot T}{k \cdot 2\pi} \cdot (2 - 2 \cos k \cdot \pi) = \frac{2}{k \cdot \pi} \cdot (1 - \cos k \cdot \pi) = a_k
\end{aligned}$$

Der Index $k \in \mathbb{Z}$ beeinflusst die Amplitude.

Für $k = 2$ erhalten wir:

$$a_2 = \frac{2}{2 \cdot \pi} \cdot (1 - \underbrace{\cos 2 \cdot \pi}_{=1}) = 0$$

Für $k = 4$ erhalten wir:

$$a_4 = \frac{2}{4 \cdot \pi} \cdot (1 - \underbrace{\cos 4 \cdot \pi}_{=1}) = 0$$

Das heißt wenn k gerade $\Rightarrow a_k = 0$.

Für ungerades k wird $\cos(k \cdot \pi) = -1$ und man erhält daher im Allgemeinen:

$$k \text{ ungerade} \Rightarrow a_k = \frac{4}{k \cdot \pi}$$

Wir wollen nun also einige Werte berechnen, um anschließend die Spektraldarstellung näher zu betrachten:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1,273239545 \\
a_3 &= 0,424413181 \\
a_5 &= 0,254647908 \\
a_7 &= 0,181891363 \\
a_9 &= 0,14147106 \\
a_{11} &= 0,115749049
\end{aligned}$$

Da alle Werte mit geradem $k = 0$ sind, kommen also nur ungerade Summanden vor. Die Grundfrequenz unserer Rechtecksfunktion ist $\frac{1}{2} \text{ Hz}$ und wenn wir die zuvor berechneten Werte eintragen, erhalten wir als Summanden im Spektrum folgende Darstellung, die in Abbildung (39) zu sehen ist.

Wie man in der Abbildung (39) gut erkennen kann, werden die Anteile immer kleiner und es handelt sich um eine abfallende Amplitudenreihe.²³⁹

Dies wollen wir jetzt auch noch auf das Zeitsignal umlegen.

²³⁹vgl. <https://www.youtube.com/watch?v=xiDzwiwTVW4>

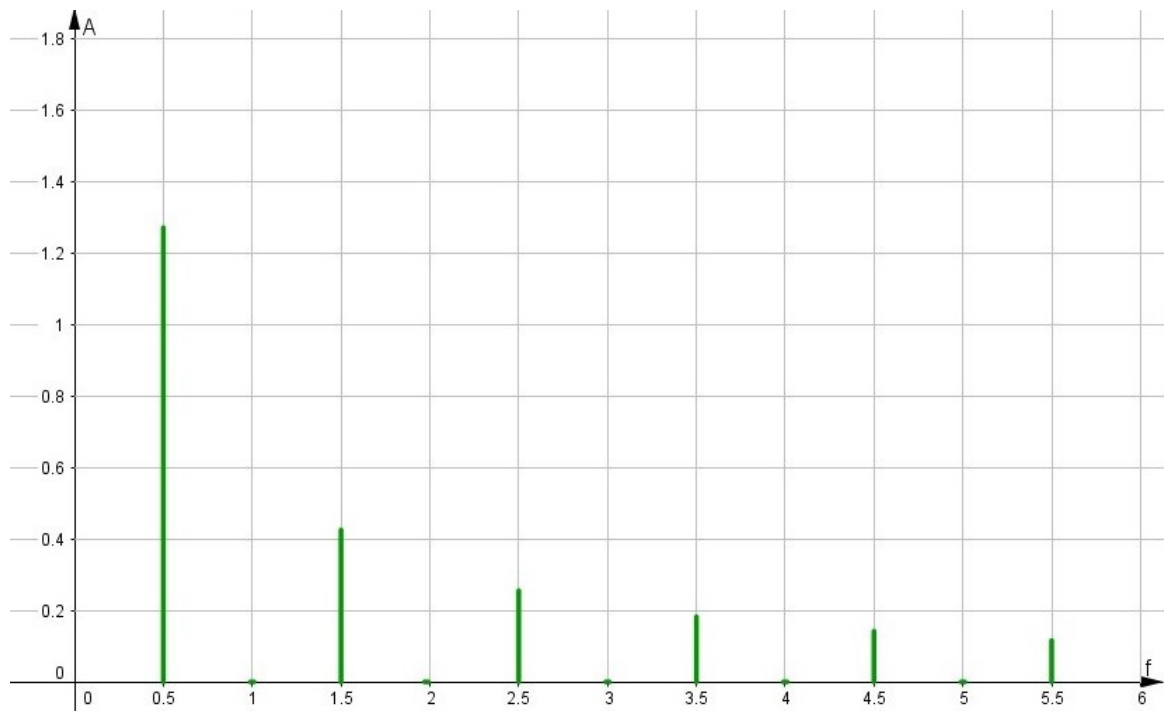


Abbildung 39: Spektraldarstellung Rechtecksfunktion

Nun wollen wir einige Summanden und ihre Teilsummen näher betrachten.

Wir betrachten zunächst den Funktionsgraphen des ersten Summanden, der die Amplitude 1,273239545 und die Frequenz 1 hat: $f_1(x) = 1,273239545 \cdot \sin(1x)$

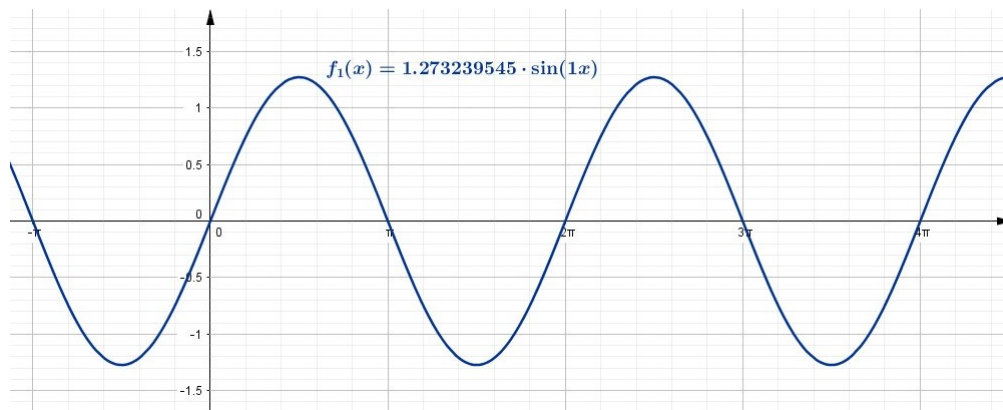


Abbildung 40: Rechtecksfunktion-1.Summand

Der zweite Summand ist gerade und daher 0.

Der dritte Summand der Rechtecksfunktion hat die Amplitude 0,424413181 und 3-fache Frequenz als die Funktion $f_1(x)$.

Wir schreiben daher $f_3(x) = 0,424413181 \cdot \sin(3x)$.

Durch Addition der beiden ungeraden Funktionen ergibt sich die Teilsumme $F_3(x) =$

$$f_1(x) + f_3(x) = 1,273239545 \cdot \sin(1x) + 0,424413181 \cdot \sin(3x).$$

Für den fünften Summanden ergibt sich $f_5(x) = 0,254647908 \cdot \sin(5x)$. Dieser Funktionsgraph ist in Abbildung (41) dargestellt. Da die Frequenz größer und die Amplitude kleiner ist als bei der Funktion $f_1(x)$ kann man einen deutlichen Unterschied erkennen.

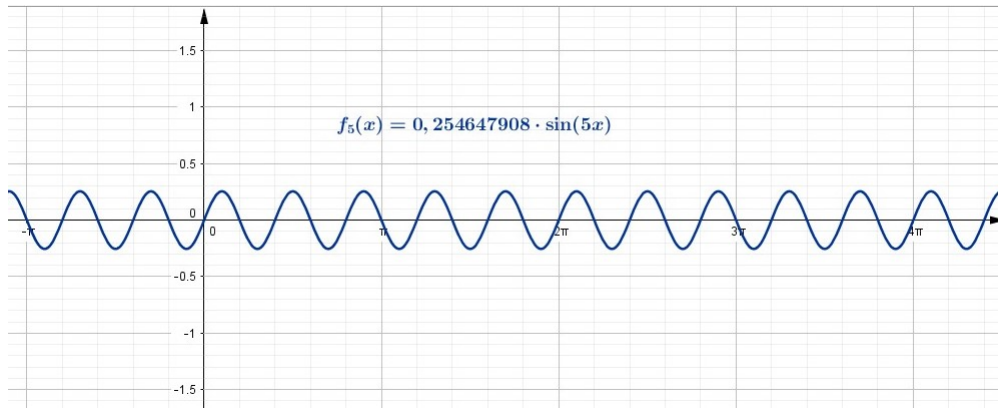


Abbildung 41: Rechtecksfunktion-5.Summand

Für die Teilsumme der Funktionen $f_1(x)$, $f_3(x)$ und $f_5(x)$ ergibt sich die Teilsumme $F_5(x) = f_1(x) + f_3(x) + f_5(x) = 1,273239545 \cdot \sin(1x) + 0,424413181 \cdot \sin(3x) + 0,254647908 \cdot \sin(5x)$. Diese wurde mit Hilfe des Programms Geogebra gezeichnet und ist in Abbildung (42) dargestellt.

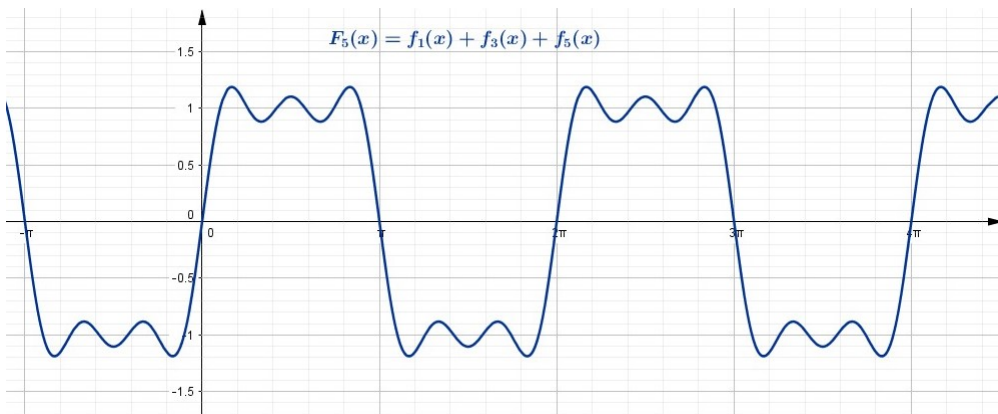


Abbildung 42: Rechtecksfunktion-5.Teilsumme

Der siebente Summand ist die Funktion $f_7(x) = 0,181891363 \cdot \sin(7x)$.

Für die Teilsumme der Funktionen $f_1(x)$, $f_3(x)$, $f_5(x)$ und $f_7(x)$ ergibt sich $F_7(x) = f_1(x) + f_3(x) + f_5(x) + f_7(x) = 1,273239545 \cdot \sin(1x) + 0,424413181 \cdot \sin(3x) + 0,254647908 \cdot \sin(5x) + 0,181891363 \cdot \sin(7x)$.

Für den neunten Summanden der Rechtecksfunktion erhalten wir:

$$f_9(x) = 0,14147106 \cdot \sin(9x).$$

Für die Teilsumme der Funktionen $f_1(x)$, $f_3(x)$, $f_5(x)$, $f_7(x)$ und $f_9(x)$ erhält man $F_9(x) = f_1(x) + f_3(x) + f_5(x) + f_7(x) + f_9(x) = 1,273239545 \cdot \sin(1x) + 0,424413181 \cdot \sin(3x) + 0,254647908 \cdot \sin(5x) + 0,181891363 \cdot \sin(7x) + 0,14147106 \cdot \sin(9x)$.

Für den elften und letzten Summanden unserer Spektraldarstellung der Rechtecksfunktion erhalten wir: $f_{11}(x) = 0,115749049 \cdot \sin(11x)$:

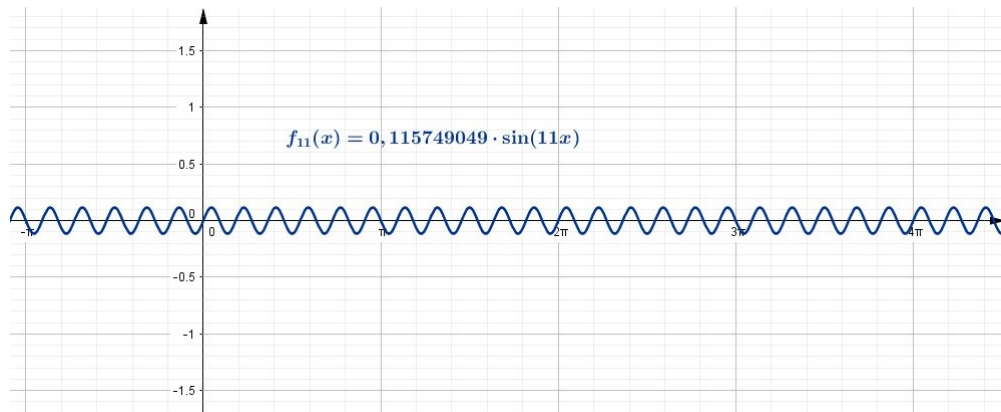


Abbildung 43: Rechtecksfunktion-11.Summand

Für die Teilsumme der Funktionen $f_1(x)$, $f_3(x)$, $f_5(x)$, $f_7(x)$, $f_9(x)$ und $f_{11}(x)$ ergibt sich $F_{11}(x) = f_1(x) + f_3(x) + f_5(x) + f_7(x) + f_9(x) + f_{11}(x) = 1,273239545 \cdot \sin(1x) + 0,424413181 \cdot \sin(3x) + 0,254647908 \cdot \sin(5x) + 0,181891363 \cdot \sin(7x) + 0,14147106 \cdot \sin(9x) + 0,115749049 \cdot \sin(11x)$. Die letzte Teilsumme ist in Abbildung (44) zu sehen.

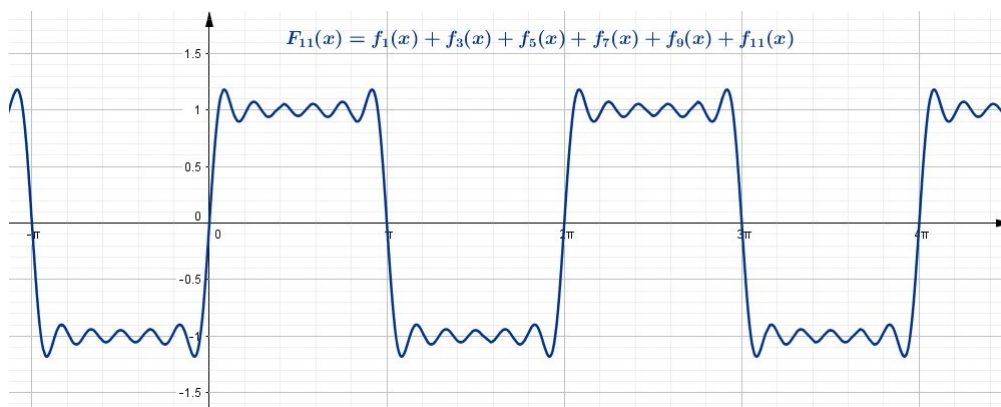


Abbildung 44: Rechtecksfunktion-11.Teilsumme

Wenn wir noch einmal unsere Rechtecksfunktion und die Funktion der 11.Teilsumme betrachten, dann ergeben sich folgende zwei Funktionsgraphen übereinander gelegt (in

blau die Rechtecksfunktion und in orange die 11. Teilsumme):

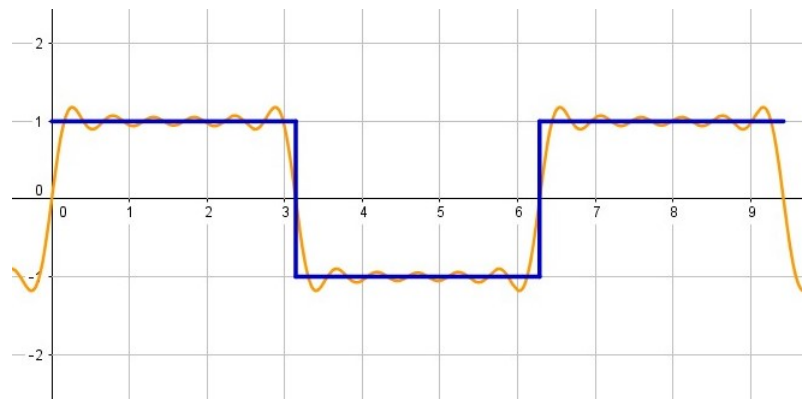


Abbildung 45: Rechtecksfunktion und 11. Teilsumme

Je mehr Teilsummen gebildet werden, desto eher nähert sich die orange Funktion der Rechtecksfunktion an, die in Abbildung (45) in blau dargestellt ist. An den Ecken sind wiederum sogenannte Überschwinger, welche als Gibbs-Phänomen bezeichnet werden, beobachtbar.

4.3.13 Lösungen einiger wichtiger Funktionen

Interessanterweise sind die Lösungen einiger Funktionen leicht zu merken, da sie recht ähnlich sind:²⁴⁰

- a) Die exakte Lösung einer Rechteckschwingung lautet (siehe auch Kapitel 4.3.12.):

$$A_R(x) = \frac{4a}{\pi} \cdot \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5x) + \frac{1}{7} \cdot \sin(7x) + \frac{1}{9} \cdot \sin(9x) + \dots \right)$$

Das heißt die Lösung enthält „alle ungeradzahlgigen Harmonischen mit reziproker Amplitudenstärke.“²⁴¹

- b) Wenn man analog zur Rechteckschwingung auch geradzahlgige Harmonische hinzufügt, erhält man die Lösung einer Sägezahnfunktion mit negativer Steigung:

$$A_R(x) = \frac{2a}{\pi} \cdot \left(\sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(4x)}{4} + \dots \right)$$

Diese Lösung enthält somit „alle Harmonischen mit reziproker Amplitudenstärke.“²⁴²

- c) Die Lösung für die Sägezahnfunktion positiver Steigung sieht ähnlich wie in b) aus, allerdings mit alternierendem Vorzeichen:

$$A_R(x) = \frac{2a}{\pi} \cdot \left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \dots \right)$$

- d) Die Dreiecksfunktion hat folgende Lösung:

$$A_R(x) = \frac{4a}{\pi} \cdot \left(\sin(x) - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sin(3x) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{7}\right)^2 \sin(7x) + \dots \right)$$

Hier treten „alle ungeradzahlgigen Harmonischen mit quadratisch-reziproken Amplitudenstärke und wechselndem Vorzeichen bzw- wechselnder Phase“²⁴³ auf.

²⁴⁰vgl. Schreier 2003, S.9 [Online]

²⁴¹Schreier 2003, S.9 [Online]

²⁴²Schreier 2003, S.9 [Online]

²⁴³Schreier 2003, S.9 [Online]

4.4 Zusammenfassung der Theorie

Dieses Kapitel soll dazu dienen, die wichtigsten Eigenschaften der Fourierpolynome zusammenzufassen.²⁴⁴

(a) **komplexe Form der Fourierpolynome:**

Für ein Fourierpolynom n -ten Grades schreiben wir

$$p_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

Die Koeffizienten c_k haben die Form:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx, \text{ mit } x \in \mathbb{Z}$$

(b) **reelle Form der Fourierpolynome:**

Für ein Fourierpolynom n -ten Grades schreiben wir

$$p_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Die Koeffizienten haben dabei die Gestalt:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx) dx$$

wobei $k = 1, 2, 3, 4, \dots$

(c) **zwischen komplexer und reeller Form umrechnen:**

$$a_0 = c_0$$

$$a_k = c_k + c_{-k}$$

$$b_k = i \cdot (c_k - c_{-k})$$

$$c_k = \frac{a_k - i \cdot b_k}{2}$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + i \cdot b_k}{2}$$

²⁴⁴vgl. Arens u.a. 2012, S.1043

wobei $k \in \mathbb{N}$

(d) **vereinfachte Formeln für gerade bzw. ungerade Funktionen:**

(i) *gerade Funktionen:*

$$b_k = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi f(x) \, dx$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi f(x) \cdot \cos(kx) \, dx \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

(ii) *ungerade Funktionen:*

$$a_k = 0 \quad \text{für } k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi f(x) \cdot \sin(kx) \, dx \quad \text{für } k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

(e) **Linearität der Fourierpolynome:**

Angenommen die Funktion f hat die Fourierkoeffizienten (c_k) , die Funktion g hat die Fourierkoeffizienten (d_k) und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

(i) $f \pm g$ hat die Fourierkoeffizienten $(c_k \pm d_k)$

(ii) $\lambda \cdot f$ hat die Koeffizienten (λc_k)

Analoges gilt für Funktionen mit reellen Koeffizienten.

(f) **Ableitung der Fourierpolynome:**

Um ein Fourierpolynom ableiten zu können, muss vorausgesetzt werden, dass die Funktion f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. Dann gilt:

(i) hat die Funktion f komplexe Fourierkoeffizienten, die wir mit (c_k) bezeichnen, dann hat die Ableitung f' die Fourierkoeffizienten (ikc_k) .

- (ii) hat die Funktion f reelle Fourierkoeffizienten (a_k) für die Cosinusterme und (b_k) für die Sinusterme, dann hat die Ableitung f' die Koeffizienten $(-kb_k)$ für die Cosinusterme und (ka_k) für die Sinusterme.
- (iii) die Konstante a_0 fällt beim Differenzieren jeweils weg.

5 Fourier - Theorie in Bezug auf Obertöne in der Musik

Nachdem wir die Fourier - Theorie mathematisch schon recht ausführlich behandelt haben, möchten wir nun den Zusammenhang zur Musik näher betrachten.

In Kapitel 3 dieser Arbeit wurde schon auf Begriffe wie Partialtöne, Klangfarbe und Schwebungen in der Musik eingegangen. Wir wollen jetzt insbesondere das Obertonspektrum der Querflöte analysieren.

Wenn alle Klappen einer Querflöte mit C-Fuß geschlossen sind, dann erklingt der tiefste Ton, nämlich das c' . Beim Spielen dieses Tones erklingt nicht nur, dass c' , sondern auch eine Vielzahl an Obertönen. Angenommen der Grundton, also das c' , hat die Frequenz f_0 , dann sind die Frequenzen der Obertöne ganzzahlige Vielfache folgender Gestalt:²⁴⁵

$$2 \cdot f_0, 3 \cdot f_0, 4 \cdot f_0, 5 \cdot f_0, 6 \cdot f_0, 7 \cdot f_0, 8 \cdot f_0, 9 \cdot f_0, 10 \cdot f_0, \dots$$

Das heißt musikalisch gesehen erklingen beim Spielen des c' auf einer Querflöte gleichzeitig auch die Töne $c'', g'', c''', e''', g''', ais''', c'''' , d'''' , e''''$,²⁴⁶ welche im folgenden Notenbild dargestellt sind:

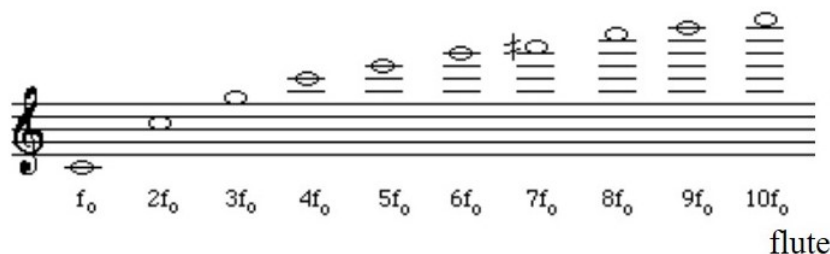


Abbildung 46: Obertoene c' ²⁴⁷

Das Spektrum des Tones c' auf einer Querflöte mit C-Fuß wurde mit digitaler Fourier-Transformation berechnet²⁴⁸ und sieht dann folgendermaßen aus:

²⁴⁵vgl. <http://newt.phys.unsw.edu.au/jw/fluteacoustics.html>

²⁴⁶vgl. <http://newt.phys.unsw.edu.au/jw/fluteacoustics.html>

²⁴⁷<http://newt.phys.unsw.edu.au/jw/fluteacoustics.html>

²⁴⁸vgl. <http://newt.phys.unsw.edu.au/jw/sound.spectrum.html>

²⁴⁹<http://newt.phys.unsw.edu.au/music/flute/modernC/C4.html>

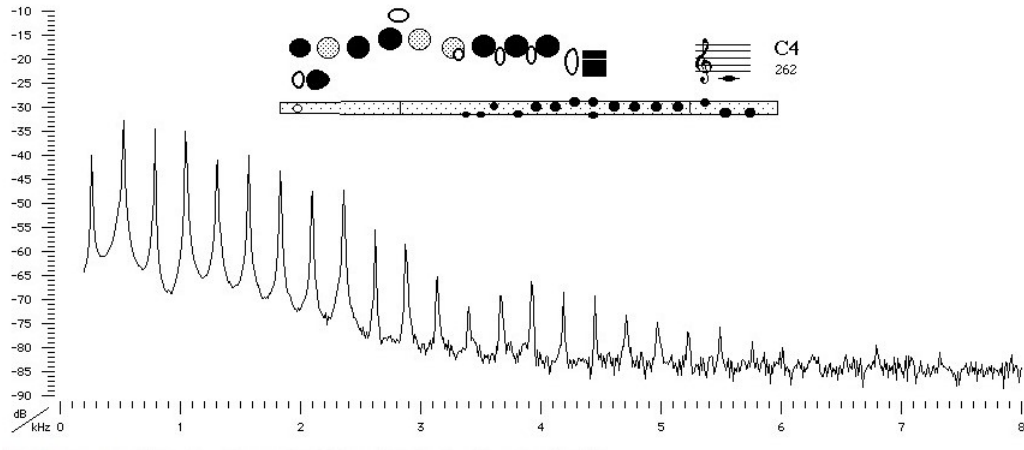


Abbildung 47: Spektrum c' ²⁴⁹

Laut unseren Berechnung von Kapitel 3.2.1 hat das c' einer Flöte mit C-Fuß eine Frequenz von ca. 260 Hz . Auf der 1.Achse des Spektrums in Abbildung (47) ist die Frequenz in kHz aufgetragen. Man kann an den sogenannten *peaks*, also an den Maxima der Funktion, die Frequenzen der einzelnen Obertöne ablesen. Wir wollen nun die Frequenzen der einzelnen Töne zuerst berechnen und die Ergebnisse danach mit dem Spektrum in Abbildung (47) vergleichen. Für die Obertöne ergeben sich also folgende Frequenzen:

$$c'' = 2 \cdot f_0 \approx 520 \text{ Hz}$$

$$g'' = 3 \cdot f_0 \approx 780 \text{ Hz}$$

$$c''' = 4 \cdot f_0 \approx 1040 \text{ Hz}$$

$$e''' = 5 \cdot f_0 \approx 1300 \text{ Hz}$$

$$g''' = 6 \cdot f_0 \approx 1560 \text{ Hz}$$

$$ais''' = 7 \cdot f_0 \approx 1820 \text{ Hz}$$

$$c'''' = 8 \cdot f_0 \approx 2080 \text{ Hz}$$

$$d'''' = 9 \cdot f_0 \approx 2340 \text{ Hz}$$

$$e'''' = 10 \cdot f_0 \approx 2600 \text{ Hz}$$

Die blauen Striche in Abbildung (48) auf der 1. Achse sollen die ungefähren Markierungen der jeweiligen Frequenzen darstellen. Vergleicht man nun die Markierungen der Maximumstellen mit den berechneten Frequenzen, so kann man feststellen, dass diese ziemlich genau übereinstimmen.

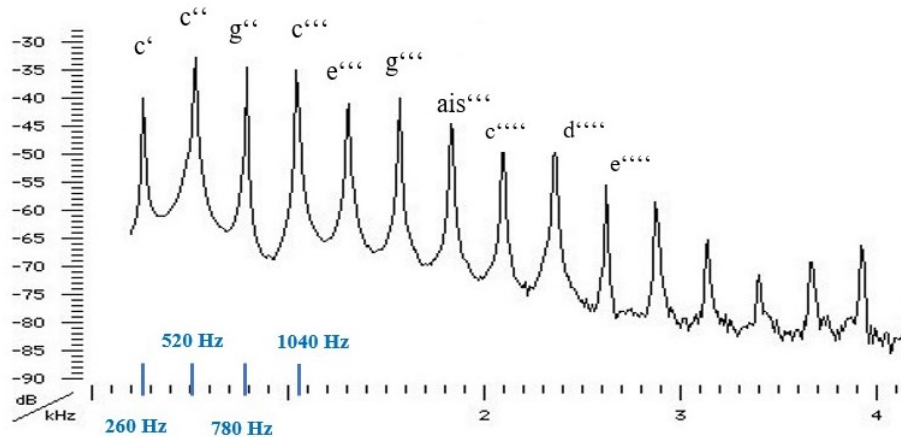


Abbildung 48: Frequenzen c' ²⁵⁰

Besonders auffällig hierbei ist, dass die ersten drei Obertöne, also die Töne c'' , g'' und c''' laut dem Spektrum in Abbildung (47) stärker ausgebildet sind als der Grundton.

Ein besonderes Merkmal der Klangerzeugung bei der Querflöte ist die Produktion von Tönen durch Überblasen des Grundtones. Primär steht natürlich der Klappenmechanismus im Vordergrund, aber die Technik des Überblasens ist sehr wichtig für die Naturtöne 1 und 2. Vom ersten Naturton, also vom Grundton, ausgehend werden auf einer Flöte mit H-Fuß die Töne $h - d''$ mit Hilfe der Flötenklappen erzeugt. Alle Töne ab dem d'' entstehen durch Überblasen in die Oktave, also zum zweiten Naturton. Dadurch entstehen die Töne $es'' - d'''$. Alle weiteren höheren Töne werden durch geeignete Griffkombinationen erzeugt.²⁵¹

Darüber hinaus kann ein Flötist / eine Flötistin die Obertöne des jeweiligen Grundtones durch Überblasen erzeugen. In unserem Beispiel entstehen daher durch das Überblasen des Tones c' die sogenannten Flageolettöne unseres Obertonspektrums. Man erhält also c'' , g'' , c''' , e''' , g''' , ais''' , c'''' , d'''' und e'''' .

²⁵⁰vgl. <http://newt.phys.unsw.edu.au/music/flute/modernC/C4.html>

²⁵¹vgl. https://www.vsl.co.at/de/Concert_flute/Sound_Production

6 Schlussworte

6.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit der Verknüpfung der Musik mit der Mathematik.

Zu Beginn wird kurz die geschichtliche Entwicklung der Querflöte dargestellt. Unter anderem wird die Tonerzeugung bei der Querflöte als physikalischer Prozess mathematisch betrachtet. Abbildungen zeigen Funktionsgraphen musikalischer Schwingungen, welche sich aus mathematischer Sicht aus periodischen Sinus- und Cosinusfunktionen zusammensetzen. Es wird darauf eingegangen, wie die Überlagerung von Wellen in der Physik mit Schwebungen zweier Töne unterschiedlicher Frequenzen zusammenhängt.

Im dritten Kapitel geht es um zylindrisch gebohrte Rohre und die darin entstehenden schwingenden Luftsäulen, welche mit Hilfe der Wellengleichung beschrieben werden. Obwohl es sich bei der Querflöte um eine offene Pfeife handelt, werden aus Gründen der Vollständigkeit auch geschlossene Pfeifen betrachtet. In den darauffolgenden Unterkapiteln wird näher auf die sogenannten Partialtöne, die Obertöne, eingegangen und es wird die faszinierende Tatsache, dass gleiche Töne auf verschiedenen Instrumenten eine andere Klangfarbe haben, näher beleuchtet. Um Obertöne und Klangspektren der einzelnen Instrumente sichtbar machen zu können wird die Methode der Fourier - Analyse benötigt.

Das vierte und umfangreichste Kapitel dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Fourier-Theorie, auf welche, vor allem aus mathematischer Sicht, ausführlich eingegangen wird. Zu Beginn wird ein Überblick über das Leben und Schaffen des französischen Mathematikers Jean Baptiste Joseph Fourier gegeben. Er hatte Anfang des 19. Jahrhunderts die großartige Erkenntnis, dass sich alle periodischen Funktionen in Sinus - und Cosinusschwingungen zerlegen lassen. Des Weiteren werden die so wichtigen Fourier Koeffizienten, mit deren Hilfe man die Phase und Amplitude der Schwingung bestimmen kann, berechnet. Das Konvergenzproblem der Fourier - Reihen wird dargestellt

und es wird näher auf die Approximation im quadratischen Mittel, gleichmäßige und punktweise Konvergenz eingegangen. Einige Beispiele wie die Sägezahnfunktion, die Rechtecksschwingung, die Zickzack-Welle und die Sprungfunktion werden vorgestellt. Im Anschluss wird das Gibbs-Phänomen untersucht, die komplexe Schreibweise des Fourierpolynoms eingeführt und es werden Fourier-Reihen aus Potenzreihen entwickelt. Der Schluss dieses Kapitels beinhaltet eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften von Fourierpolynomen.

Im letzten Kapitel dieser Arbeit wird noch einmal die Verbindung zur Musik verdeutlicht – Obertöne der Querflöte werden mittels ihres Spektrums grafisch dargestellt und die Kunst des Überblasens, die Entstehung der Flageolettöne, wird erklärt.

6.2 Abstract

This diploma thesis tries to show a link between music and mathematics.

At the beginning, this paper describes shortly the historical development of the flute. Amongst other things, the generation of sounds as a physical process is discussed. Illustrations show harmonic oscillations which are mathematically composed sinus and cosines functions. The link between physical overloads from waves and the interference of two tones with different frequencies is analysed.

Then, in the third chapter, cylindrical drilled pipes and the air-filled pipe inside, which can be described with the wave equation, are observed. Although the flute is an opened pipe, closed pipes are as well treated for the sake of completeness. In the following subsections overtones and the fascinating fact that the same tones played by different instruments produce different harmonic timbres are explained. For making overtones visible the method of the Fourier analysis is needed.

The fourth and longest chapter of this diploma thesis describes the Fourier theory in detail. First of all, the life of the mathematician Jean Baptiste Joseph Fourier is presented. At the beginning of the 19th century, he had the great understanding, that every periodic function is a combination of sinus and cosines functions. Then we will see how the Fourier coefficients, which help us to describe the phase and amplitude of an oscillation, are calculated. The convergence behaviour of Fourier series is analysed in the next subsection and some examples as a saw tooth – function, a square wave and a jump function are presented. After this, the interesting Gibbs phenomenon is described and the writing of Fourier series with complex numbers is shown. At the end of this chapter, a short abstract describes the most important qualities of Fourier polynomials.

The last chapter of this diploma thesis shows again the link between mathematics and music – overtones of the flute are analysed with the help of some illustrations of their harmonic spectra. In addition to this, the phenomenon of the over-blowing of flute tones is explained.

Literaturverzeichnis

ARENS, Tilo u.a. (2012): *Mathematik*. - Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2. Auflage 2012.

BARKOWSKY, Johannes (1996): *Das Fourier-Theorem in musikalischer Akustik und Tonpsychologie*. - Frankfurt am Main: Peter Lang GmbH.

BÄRWOLFF, Günter (2009): *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure*. - Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

BORK, Ingolf / MEYER, Jürgen (1988): *Die Tonerzeugung bei den Flöten*. In: Naturwissenschaften Vol.75(1), pp.27-34, Springer-Verlag.

BUTZ, Tilman (2011): *Fouriertransformation für Fußgänger*. - Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 7. aktualisierte Auflage.

DIETMAIER, Christopher (2014): *Mathematik für angewandte Wissenschaften*. - Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

GABATH, Gerhild (2003): *Physikalisches Schulversuchspraktikum: Akustik*.
Online im Internet: URL: http://www.exphys.jku.at/Skripten/Unterricht/Stoffgebiete/Akustik/13_Akustik_Oberstufe_Gabath.pdf [Stand 2017-10-01]

GOEBBELS, Steffen / RITTER, Stefan (2013): *Mathematik verstehen und anwenden – von den Grundlagen bis zu Fourier-Reihen und Laplace-Transformation*. - Berlin Heidelberg: Springer - Verlag, 2.Auflage.

GÖRNE, Thomas (2011): *Tontechnik*. - München: Carl Hanser Verlag.

HAFTENDORN, Dörte (2016): *Mathematik sehen und verstehen. Schlüssel zur Welt*. - Berlin Heidelberg: Springer - Verlag, 2. erweiterte Auflage.

HENZE, Norbert/ LAST, Günter (2010): *Mathematik für Wirtschaftsingenieure und naturwissenschaftlich-technische Studiengänge. Band 2: Analysis im $\mathbb{R}^n$, Lineare Algebra, Hilberträume, Fourieranalyse, Differentialgleichungen, Stochastik.* - Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2. Auflage.

KARPFINGER, Christian (2014): *Arbeitsbuch höhere Mathematik in Rezepten.* - Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

KARPFINGER, Christian (2014, 2015): *Höhere Mathematik in Rezepten. Begriffe, Sätze und zahlreiche Beispiele in kurzen Lerneinheiten.* - Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2.Auflage.

KARRENBURG, Ulrich (2010): *Signale- Prozesse- Systeme. Eine multimediale und interaktive Einführung in die Signalverarbeitung.* - Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 5.Auflage.

KEMP, Yves (2010): *Die Physik der Musikinstrumente.*

Online im Internet: [Stand 2017-10-01]

URL: <http://www.desy.de/~kemp/talks/musik/19012010/KempVorlesung.pdf>

KLOSS, Berthold (2004): *Akustik.* In: Handbuch der Musikinstrumente - Kassel: Gustav Bosse GmbH und Co. KG, neue Auflage 2004.

MEYER, Jürgen (2008) : *Zum Einfluss von Spieltechnik und Bauweise auf den Klang von Querflöten.* In: Lustig, Monika / Schmuhl, Boje E.: Geschichte, Bauweise und Spieltechnik der Querflöte : 27. Musikinstrumentenbau-Symposium Michaelstein, 6. bis 8. Oktober 2006, Michaelsteiner Konferenzberichte Band 74 - Augsburg: Wißner-Verlag, 1. Auflage.

REIMER, Manfred (2011): *Der Klang als Formel : ein mathematisch-musikalischer Streifzug.* - München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2. Auflage.

REUTER, Christoph / AUHAGEN, Wolfgang (2014): *Musikalische Akustik*. – Laaber: Laaber-Verlag.

ROLF, Walter (2009): *Einführung in die Analysis 3*. - Berlin: Walter de Gruyter GmbH und Co. KG.

SCHREIER, Ernst (2003): *Schwingungslehre in Kursstufe 12*.

Online im Internet: [Stand 2017-10-01]

URL: <http://schreier.free.fr/pages/physik/musik/papers/schwingungslehre.pdf>

STEPPAT, Michael (2014): *Grundlagen der Schwingungs- und Wellenlehre*. In: Reuter, Christoph / Auhagen, Wolfgang: *Musikalische Akustik* - Laaber: Laaber-Verlag.

TREMMELE, Erich (2004): *Blasinstrumente*. In: *Handbuch der Musikinstrumente* - Kassel: Gustav Bosse GmbH und Co. KG, neue Auflage 2004.

ZIEGENRÜCKER, Wieland (2012): *ABC Musik. Allgemeine Musiklehre*. - Wiesbaden: Breitkopf u. Härtel, 7. Auflage.

Internetquellen

(letzte Überprüfung aller Internetquellen am 1.10.2017)

<https://www.youtube.com/watch?v=xiDzwiwTVW4>

<http://newt.phys.unsw.edu.au/jw/sound.spectrum.html>

<http://newt.phys.unsw.edu.au/jw/fluteacoustics.html>

https://www.vsl.co.at/de/Concert_flute/Sound_Production

<https://www.physikerboard.de/topic,12502,-orgelpfeifen.html>

<http://gehoerbildung-musiktheorie.de/musiktheorie/obertonreihe/>

<http://www.uh.edu/engines/epi1878.htm>

<https://www.math.tugraz.at/~predota/old/history/mathematiker/fourier.html>

Abbildungsverzeichnis

1	Muramatsu EX III RBE	3
2	Tonerzeugung Querflöte	4
3	Sinusschwingung	6
4	Sinuskurve	7
5	Sinus-und Cosinuskurve	7
6	konstruktive Interferenz	11
7	destruktive Interferenz	11
8	zylindrisch gebohrtes Rohr	13
9	ersten 5 Schwingungen	17
10	offene Pfeife	18
11	Schwingungsbauch	19
12	$f(x)=\sin(2x)$	20
13	$f(x)=\sin(4x)$	21
14	$f(x)=\sin(3x)$	21
15	$f(x)=\sin(0.75x)$	21
16	$f(x)=\sin(0.5x)$	22
17	Obertonreihe für den Grundton C	23
18	Funktion $f(t)$	26
19	Funktion $g(t)$	26
20	Jean Baptiste Joseph Fourier	28
21	Funktionsgraph $f(x)$	42
22	Approximation	47
23	$f(x) = x^3$	53
24	Fourierpolynome von $f(x) = x^3$	56
25	Sägezahnfunktion	57
26	Sägezahnfunktion und Gibbs-Phänomen	59
27	Sprungfunktion 5 Teilsummen	62
28	Sprungfunktion 10 Teilsummen	62
29	Sprungfunktion 50 Teilsummen	63
30	Zickzack-Welle	74
31	Zickzack-Welle, 5 Teilsummen	75

32	Funktion f	75
33	Funktion $y=0.5$	76
34	Funktion $y=0.5 \cos$	76
35	Periode Sinus	77
36	Funktionen	78
37	Spektraldarstellung Sinus	79
38	Rechtecksfunktion	80
39	Spektraldarstellung Rechtecksfunktion	82
40	Rechtecksfunktion-1.Summand	82
41	Rechtecksfunktion-5.Summand	83
42	Rechtecksfunktion-5.Teilsumme	83
43	Rechtecksfunktion-11.Summand	84
44	Rechtecksfunktion-11.Teilsumme	84
45	Rechtecksfunktion und 11.Teilsumme	85
46	Obertoene c'	90
47	Spektrum c'	91
48	Frequenzen c'	92

Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.