universität wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Umkehren um größte Werte zu finden - Der Satz über die inverse Funktion und seine Anwendungen

verfasst von / submitted by
Magdalena Marchard

angestrebter akademischer Grad /
in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 347 406
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Französisch UF Mathematik
Betreut von / Supervisor:	ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Inhaltsverzeichnis

1 Danksagung **3**

2 Einleitung **4**

3 Der Banach'sche Fixpunktsatz **6**
3.1 Der Banach'sche Fixpunktsatz 7
3.2 Anwendungen des Banach'schen Fixpunktsatzes 8
3.2.1 Der Satz von Picard-Lindelöf 8
3.2.2 Die Newton-Methode 9
3.2.3 Markovketten 10

4 Der Satz über die inverse Funktion **11**
4.1 Der Satz über die inverse Funktion - eindimensionaler Fall 12
4.1.1 Beispiele 13
4.2 Der Satz über die inverse Funktion - mehrdimensionaler Fall 14
4.2.1 Beispiele 20
4.3 Anwendungen des Satzes über die inverse Funktion 22
4.3.1 Nicht-lineare Gleichungssysteme lösen 23
4.3.2 Die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen ohne die bekannte Formel zu kennen 24
4.4 Anwendung inverser Funktionen in der Schule 24

5 Der Satz über die implizite Funktion **26**
5.1 Der Satz über implizite Funktionen in zwei Variablen 26
5.1.1 Beispiele 27
5.2 Der Satz über die implizite Funktion 28
5.2.1 Beispiele 30
5.3 Anwendungen des Satzes über die implizite Funktion 33
5.3.1 Die Steigung der Tangente implizit gegebener Kurven bestimmen 33
5.3.2 Tangentialräume 34
5.4 Anwendung impliziter Funktionen in der Schule 37

6 Extremwerte unter Nebenbedingungen **38**
6.1 Die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren 41
6.1.1 Beispiele 43
6.2 Die Entropie - eine weitere Anwendung der Lagrange'schen Multiplikatoren 53

7 Mehrdimensionale Integrale **55**
7.1 Der Satz von Fubini 57
7.1.1 Beispiele 62
7.2 Die Transformationsformel 66
7.2.1 Beispiele 71
7.3 Der Satz von Stokes 75
7.4 Anwendungen der Transformationsformel 75
7.4.1 Zwischenwertsatz in höheren Dimensionen 76
7.4.2 Der Brouwersche Fixpunktsatz 78
7.4.3 Polarkoordinaten 78

7.4.4 Zylinderkoordinaten 80
7.4.5 Kugelkoordinaten 82
7.4.6 n-dimensionale Ellipsoidkoordinaten 83

8 Komplexe Differenzierbarkeit **84**

9 Abschließende Bemerkungen **87**

10 Zusammenfassung **89**

11 Abstract **91**

12 Abbildungs- und Literaturverzeichnis **93**

1 Danksagung

Im Laufe meines Studiums gab es viele Momente in denen ich dankbar war für all die großartigen Menschen die mich umgeben und stützen. Die Diplomarbeit als letzte große Hürde bietet mir nun die Gelegenheit, mich bei all diesen Personen zu bedanken.

Allen voran möchte ich mich bei euch, Mama und Papa, bedanken. Ihr habt mir den Mut und die nötige Kraft gegeben, habt mich immer unterstützt und mich wieder aufgefangen wenn ich den Boden unter den Füßen verlor.

Auch dir, Peter, möchte ich für deine großartige Betreuung, Unterstützung und Hilfsbereitschaft nicht nur bei der Diplomarbeit, sondern während des gesamten Studiums danken.

Ebenso viel Dank gebührt auch euch, Eva-Maria und Christian. Ihr habt mich stets unterstützt, habt euch geduldig meine Sorgen angehört, mir gut zugesprochen, mein Jammern ertragen und für die nötige Ablenkung in lernintensiven Phasen gesorgt.

Auch all meinen anderen Familienmitgliedern möchte ich herzlich danken. Ohne euren Rückhalt und eure aufmunternden Worte hätte ich es nicht so weit geschafft.

All meinen Freunden und Studienkollegen möchte ich dafür danken, dass ihr immer für mich da ward wenn ich Rat, Hilfe, Ablenkung oder ein offenes Ohr gebraucht habe. Besonders auf euch, Katrin und Tina, war in den letzten Jahren immer Verlass. Ich hoffe, diese Freundschaft besteht auch nach dem Studienabschluss weiter.

Auch allen anderen Freunden und Bekannten, die mich auf meinem Lebensweg begleitet und gestützt haben, möchte ich herzlich danken.

Ohne diese wunderbaren und einzigartigen Menschen hätte ich es nicht so weit und vor allem nicht so gut geschafft.

DANKE!

2 Einleitung

Umkehren in der Mathematik - wozu?

Was haben überhaupt größte Werte damit zu tun?

Und was kann man sich unter diesen größten Werten vorstellen?

All diesen Fragen werden wir auf den folgenden Seiten nachgehen - und wir werden Antworten darauf finden. Doch wie kommt eine solche Fragestellung zu Stande und wie sollen wir durch Umkehren ans Ziel gelangen? Dafür sind wohl zu Beginn ein paar klärende Ausführungen meinerseits erforderlich.

Im Laufe des Mathematikstudiums wird man ab dem ersten Semester mit einigen Definitionen, Propositionen und auch Sätzen konfrontiert. Frisch von der Schule kommend wirken diese zunächst sehr theoretisch und stellen uns Studierende vor eine große Herausforderung. Stand in der Schule doch eher das Operieren im Vordergrund, so bedarf es einer doch großen Umstellung um sich mit dem neuen Lehrstoff vertraut zu machen. Doch wie so oft im Leben macht Übung den Meister und nach einigen Monaten ist man dann mit der Sprache der Mathematik vertraut und in der Lage, auch längere Sätze und Beweise nachvollziehen zu können. Einer dieser fundamentalen Sätze mit einem doch nicht so trivialen Beweis ist der mehrdimensionale Satz über die inverse Funktion. Als Bestandteil der dritten Analysis-Vorlesung trifft er auf Studierende, die schon etwas Routine im mathematischen Arbeiten haben. Zu Beginn wirkt der Beweis komplex und nicht sehr leicht verständlich. Doch bei genauer Betrachtung kann auch dieser mit den bis dahin erarbeiteten Hilfsmitteln nachvollzogen werden. Im weiteren Verlauf der Analysis wird dann auch klar wieso das Verständnis dieses Satzes wichtig ist. Auf Grund der zahlreichen Anwendungsmöglichkeiten dieses Satzes sowohl in der mehrdimensionalen Differenzierbarkeit und auch Integrierbarkeit habe ich beschlossen, dass sich eine nähere Betrachtung dieses Satzes, so wie ich ihn kennengelernt habe, lohnen würde.

Zunächst wird es dafür nötig sein genauer auf die zuvor erwähnten „bereits bekannten“ Hilfsmittel einzugehen. Insbesondere werden wir uns also im ersten Kapitel mit dem Fixpunktsatz nach Banach befassen. Als einer der wichtigsten Fixpunktsätze der Analysis findet er Anwendung in zahlreichen Problemstellungen und verdient damit eine genauere Betrachtung.

Anschließend können wir dann den Satz über die inverse Funktion formulieren und beweisen. Um uns schrittweise dem verallgemeinerten Satz nähern zu können, werden wir uns zunächst mit dem eindimensionalen Pendant befassen. Danach werden dann Beispiele behandelt um die Anwendung des Satzes in der Praxis demonstrieren zu können. Wie zuvor erwähnt spielt dieser Satz eine tragende Rolle für andere Beweise in der Analysis. Deshalb werden wir uns im Anschluss mit den wichtigsten Korollaren des Satzes über die inverse Funktion beschäftigen.

Wir werden uns zunächst mit impliziten Funktionen befassen bevor wir die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren als wichtiges Mittel zur Lösung von Extremwertproblemen unter Nebenbedingungen behandeln werden. In all diesen Kapiteln lassen sich auch noch Bezüge zum Schulstoff herstellen auf die wir näher eingehen werden um die Verbindung zu dem uns Bekannten zu wahren. Außerdem ermöglichen es diese Exkurse auch, die Relevanz der behandelten Sätze zu verdeutlichen. Auch wenn sie in der Schule in einfacherer Form dargeboten werden, sind sie doch Teil des Schulstoffes und bieten uns eine erste Vorbereitung auf die verallgemeinerten Formen.

Im Anschluss wagen wir dann den Sprung von der mehrdimensionalen Differenzierbarkeit zu den mehrdimensionalen Integralen. Wir werden zunächst den Satz von Fubini als wichtiges Hilfsmittel zur Lösung mehrdimensionaler Integrale behandeln bevor wir die Transformationsformel mit Hilfe des Satzes über die inverse Funktion beweisen werden. Damit haben wir auch zwei der wichtigsten Sätze zur Lösung mehrdimensionaler Integrale behandelt. Im Zuge der präsentierten Anwendungsfelder der Transformationsformel werden uns aber auch wieder bekannte Dinge unterkommen die wir bereits seit der Schulzeit kennen, wie zum Beispiel die Polarkoordinaten. Auch die Transformationsformel und damit auch wieder der Satz über die inverse Funktion begleiten uns also schon länger als wir es vermuten würden.

Als Ausblick wird im letzten Kapitel noch ein kleiner Exkurs in die komplexe Analysis gemacht. Auch in diesem Bereich gibt es einen Satz über die inverse Funktion der noch kurz vorgestellt werden soll.

Damit die Theorie nicht die Überhand gewinnt werden in jedem Kapitel einige Beispiele angeführt die die Anwendungen der Sätze in der Praxis demonstrieren sollen. Auf diese Art und Weise wird die Bedeutung der behandelten Sätze nochmals untermauert und es wird ermöglicht, ihre Anwendungsfelder aufzeigen zu können.

Doch nun wollen wir uns endlich besagtem wichtigen Satz widmen und mit den Vorbereitungen beginnen. Wie bereits der Titel verrät, werden wir uns zunächst darauf vorbereiten umzukehren bevor wir wirklich vorankommen und neben anderen Ergebnissen auch größte Werte finden werden.

Um den Satz über die inverse Funktion und insbesondere dessen Beweis verstehen zu können ist es nötig davor einige Begriffe und Sätze zu behandeln. Dies wird im folgenden ersten Kapitel passieren. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Banach'schen Fixpunktsatz und den dafür nötigen Definitionen. Wie wir sehen werden wird dieser Fixpunktsatz nicht nur in Bezug auf den Satz über die inverse Funktion wichtig, sondern wird auch in vielen anderen Gebieten und Beweisführungen der Mathematik als elementares Werkzeug eingesetzt.

3 Der Banach'sche Fixpunktsatz

Im ersten Kapitel geht es darum, den Fixpunktsatz nach Banach zu beweisen. Dieser Satz ist nicht nur wesentlich für den Beweis des Satzes über die inverse Funktion, sondern ist nach [16, S.95] einer der wichtigsten und umfassendsten Sätze um Fixpunktprobleme lösen zu können. Auf Grund der Arbeit des Mathematikers Stefan Banach, die sich nach [10, S.502f.] vor allem durch die Ausformulierung wichtiger Sätze im Bereich der Funktionalanalysis auszeichnete, wurden auch die Konvergenz der Cauchyfolgen und damit die Vollständigkeit metrischer Räume wichtig. Mit Hilfe seiner Arbeit sowie der Arbeit seiner Schüler wurde die Basis der nichtlinearen Funktionalanalysis geschaffen, die dann sowohl für die Lösung nichtlinearer Differential- als auch Integralgleichungen benötigt wurde. Der Arbeit Banachs wurde zunächst auf Grund der vermeintlich geringen Anzahl an Anwendungsmöglichkeiten wenig Bedeutung geschenkt. Erst später ist man sich der wichtigen Rolle seiner Sätze bewusst geworden und begann diese zu würdigen. Immerhin leistete Banach einen wichtigen Beitrag zur Begründung der Funktionalanalysis als eigenständige Disziplin.

Bevor wir den Satz formulieren und beweisen werden wir jedoch noch jene Begriffe klären, die wie oben erwähnt für die Arbeit Banachs wichtig sind. Nach [31, S.23,37] formulieren wir daher die für diesen Satz wichtigen Definitionen der Cauchyfolge, des vollständigen metrischen Raumes und der Kontraktion.

Definition 1 (Cauchyfolge)**.** Es sei (X, d) ein metrischer Raum und (x_n) mit $n \in \mathbb{N}$ sei eine Folge in X. Diese Folge heißt Cauchyfolge, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein N gibt, sodass für alle $n, m > N \in \mathbb{N}$ gilt, dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ist.
Wenn (x_n) konvergiert, ist (x_n) eine Cauchyfolge. Die Umkehrung ist im Allgemeinen aber falsch.

Definition 2 (Vollständiger metrischer Raum)**.** Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dieser Raum ist dann vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

Definition 3 (Kontraktion)**.** Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Abbildung T, die (X, d) auf sich selbst abbildet, also $T : X \to X$, heißt eine Kontraktion, wenn es ein q mit $0 < q < 1$ gibt, sodass $\forall x, y \in X$ gilt, dass $d(Tx, Ty) \leq qd(x, y)$ ist.

Für die Anwendungen des Banach'schen Fixpunktsatzes, die wir im Anschluss an den Beweis noch behandeln werden, ist auch die Definition der Lipschitz-Stetigkeit noch wichtig. Daher werden wir auch diese nach [12, S.94] formulieren.

Definition 4 (Lipschitz-stetige Funktionen)**.** Es seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume und $f : M_1 \to M_2$ sei eine Funktion. Diese Funktion nennt man dann Lipschitz-stetig, falls eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass

$$d_2(f(x), f(y)) \leq C\, d_1(x, y)$$

gilt $\forall x, y \in M_1$.

Damit haben wir die für uns nötigen Begriffe definiert und wir können nun den Banach'schen Fixpunktsatz formulieren und beweisen.

3.1 Der Banach'sche Fixpunktsatz

Den folgenden Satz formulieren wir wieder wie in [31, S.38].

Satz 1 (Banach'scher Fixpunktsatz)**.** *Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann besitzt die Kontraktion $T : X \to X$ auf (X, d) einen eindeutig bestimmten Fixpunkt a. Außerdem gilt $\lim_{n\to\infty} T^n x = a \ \forall x \in X$, wobei man die Konvergenzgeschwindigkeit mit Hilfe der Abschätzung $d(T^n x, a) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x, Tx)$ erhält.*

Nach [31, S.38] und [20] können wir den Beweis dieses Satzes in mehrere Zwischenschritte unterteilen. Einzelne Zwischenschritte, die in [31, S.38] nicht so genau berechnet sind, werden wir mit Hilfe von [20] berechnen.

Beweis. In einem ersten Schritt wollen wir nach [31, S.38] zeigen, dass die Folge $(T^n x)$ eine Cauchyfolge ist.
Da die Abbildung T eine Kontraktion ist, gelten

$$d(T^n x, T^{n+1} x) \leq q d(T^{n-1} x, T^n x) \leq q^2 d(T^{n-2} x, T^{n-1} x) \leq \cdots \leq q^n d(x, Tx)$$

und

$$d(T^n x, T^{n+k} x) \leq d(T^n x, T^{n+1} x) + \underbrace{d(T^{n+1} x, T^{n+2} x)}_{\leq q d(T^n x, T^{n+1} x)} + \cdots + \underbrace{d(T^{n+k-1} x, T^{n+k} x)}_{\leq q^{k-1} d(T^n x, T^{n+1} x)} \leq$$

$$\leq \underbrace{d(T^n x, T^{n+1} x)}_{\leq q^n d(x, Tx)} (1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1}) \leq$$

$$\leq d(x, Tx) q^n \underbrace{(1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1})}_{\substack{= \\ \text{(endliche geometrische Reihe)}}} \underbrace{\qquad}_{\substack{\frac{1-q^k}{1-q} \leq \frac{1}{1-q} \\ \text{weil } 1-q^k < 1}} \leq$$

$$\leq d(x, Tx) q^n \frac{1}{1-q} \leq q^n \frac{d(x, Tx)}{1-q} .$$

Deshalb ist $(T^n x)$ eine Cauchyfolge, weil $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ wegen $q < 1$ gilt. Da (X, d) vollständig ist, hat diese Folge einen Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} T^n x$. Sie ist also konvergent.

Nachdem dies gezeigt wurde können wir zum zweiten Schritt weitergehen. Nun sei $x \in X$ und wir setzen $a := \lim_{n\to\infty} T^n x$. Dann gilt $Ta = a$, das heißt dass der Grenzwert Fixpunkt ist. Mit der Stetigkeit der Kontraktion können wir das folgende Ergebnis mit Hilfe von [20] nachrechnen.
Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein N sodass für alle $n \geq N$ gilt, dass $d(T^n x, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Es sei $n \geq N$. Dann folgt

$$d(Ta, a) \leq \underbrace{d(Ta, T^{n+1} x)}_{\leq \underbrace{q}_{<1} \underbrace{d(a, T^n x)}_{<\frac{\varepsilon}{2}}} + \underbrace{d(T^{n+1} x, a)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

Daher ist $d(Ta, a) = 0$ und $Ta = a$ und daher ist a ein Fixpunkt.

Nun bleibt nach [31, S.38] noch zu zeigen, dass dieser Fixpunkt auch eindeutig ist.

Das können wir nun in einem dritten Schritt nachweisen. Wären a_1 und a_2 Fixpunkte, dann folgt aus der Definition der Kontraktion, dass

$$d(a_1, a_2) = d(Ta_1, Ta_2) \leq \underbrace{q}_{<1} d(a_1, a_2)$$

wobei $q < 1$. Dies ist nur möglich, wenn $d(a_1, a_2) = 0$, also $a_1 = a_2$ ist.
Als zusätzliche Folgerung erhält man aus der Ungleichung

$$d(T^n x, \underbrace{\lim_{k\to\infty} T^k x}_{\overset{(2.\text{Schritt})}{=} a}) \leq q^n \frac{d(x, Tx)}{1-q}$$

dass

$$d(T^n x, a) \leq q^n \frac{d(x, Tx)}{1-q}$$

ist. Mit Hilfe von [20] können wir das nochmal genauer berechnen und nachweisen. Wir setzen dafür $a := \lim_{n\to\infty} T^n x$ und außerdem sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein N sodass für alle $m \geq N$ gilt dass $d(T^m x, a) < \varepsilon$.
Es sei nun $m > N, m > n$. Dann erhält man

$$d(T^n x, a) \leq \underbrace{d(T^n x, T^m x)}_{\leq q^n \frac{d(x,Tx)}{1-q}} + \underbrace{d(T^m x, a)}_{<\varepsilon} \leq q^n \frac{d(x, Tx)}{1-q} + \varepsilon\,.$$

Weil $\varepsilon \to 0$ folgt also dass

$$d(T^n x, a) \leq q^n \frac{d(x, Tx)}{1-q}\,.$$

□

Nach [16, S.96] wird mit dem Beweis des Fixpunktsatzes nach Banach mehr als nur die Existenz des Fixpunktes gezeigt. Der soeben geführte Beweis gibt uns auch ein Konstruktionsverfahren das schnell konvergiert und zusätzlich eine Fehlerabschätzung enthält. Der Beweis liefert uns also mehrere Resultate und kommt daher bei vielseitigen Fixpunktproblemen zum Einsatz.

3.2 Anwendungen des Banach'schen Fixpunktsatzes

Wie bereits zuvor erwähnt spielt dieser Satz unter anderem im Beweis des Satzes über die inverse Funktion eine wichtige Rolle. Die inverse Funktion wird hier nach [4, S.327] über die Lösung einer Fixpunktgleichung gefunden. Das werden wir dann im nächsten Kapitel genauer betrachten.

3.2.1 Der Satz von Picard-Lindelöf

Dieser Fixpunktsatz wird aber nach [4, S.327f.] auch verwendet um für gewöhnliche Differenzialgleichungen zeigen zu können, dass Lösungen existieren. Insbesondere wird

der Fixpunktsatz wichtig wenn es darum geht den Satz von Picard-Lindelöf zu beweisen. Wenn hier eine Funktion $F : U \to \mathbb{R}^n$ gegeben ist, wobei $U \subset [a,b] \times V$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ ist, dann soll eine Lösung der Differenzialgleichung $x'(t) = F(t, x(t))$ gefunden werden. Wenn ein Anfangswert gegeben ist, so genügt es wenn F lokal Lipschitz-stetig in Bezug auf x ist um die Existenz einer Lösung zu zeigen. Es existiert also zu jeder Stelle x_0 aus V eine Umgebung $V_0 \subset V$ und für diese Umgebung gibt es eine Konstante $C > 0$, sodass $\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq C \cdot \|x_1 - x_2\|$ gilt $\forall x_1, x_2 \in V_0$ und $\forall t \in [a,b]$. Mit Hilfe dieser Bezeichnungen können wir jetzt den Satz von Picard-Lindelöf formulieren:

Satz 2 (Satz von Picard-Lindelöf)**.** *Es sei die Funktion $F : U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig in Bezug auf x, wobei $U \subset [a,b] \times \mathbb{R}^n$. Dann existiert für jede Stelle (x_0, t_0) aus U ein offenes Intervall der Form $I_\delta := (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, auf dem genau eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems $x'(t) = F(t, x(t))$ mit $x(t_0) = x_0$ existiert.*

Um im Beweis dieses Satzes dann den Banach'schen Fixpunktsatz anwenden zu können wird die Suche nach einer Lösung zunächst auf einen vollständigen metrischen Raum von stetigen Funktionen reduziert. Eine Lösung der Differenzialgleichung ist dann gegeben durch jede beliebige Lösung einer konstruierten Fixpunktgleichung.

3.2.2 Die Newton-Methode

Ein weiteres wichtiges Anwendungsgebiet des Fixpunktsatzes nach Banach ist nach [31, S.41ff.] die Methode von Newton zur Bestimmung von Nullstellen. Es sei eine konvexe Funktion f mit Werten in $\mathbb{R}$ gegeben. Wenn die Ableitung dieser Funktion positiv auf dem Intervall $[a,b]$ ist und $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliches Vorzeichen haben, dann existiert ein eindeutig bestimmter Punkt α im gegebenen Intervall für den gilt, dass $f(\alpha) = 0$ ist.

Um diesen Punkt α finden zu können gibt es bereits schnelle Methoden. Eine dieser Methoden ist die sogenannte Newton-Methode. Man startet bei einem frei wählbaren Punkt $x_0 \in [a,b]$ und bildet dann die Gleichung der Tangente an den Funktionsgraphen der gegebenen Funktion f an der Stelle x_0, also im Punkt $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)\,.$$

So erhält man den Punkt $x_1 = x_0 - [f'(x_0)]^{-1} f(x_0)$. Die Tangente schneidet in diesem Punkt die erste Achse und demnach wird x_1 als bester Näherungswert für die gesuchte Nullstelle α angenommen. Der Vorgang wird fortgesetzt indem x_0 durch x_1 ersetzt wird. Dadurch erhält man dann eine Folge

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} \cdot f(x_n)$$

die monoton gegen die gesuchte Nullstelle α geht. Diese Methode, um die Folge $\{x_n\}$ aufstellen zu können, ist die Newton-Methode. Wenn statt der oben definierten Folge die rekursive Folge

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_0)]^{-1} \cdot f(x_n)$$

verwendet wird, so ist von der modifizierten Newton-Methode die Rede. Die Ableitung muss bei dieser Variante nur einmal an der Stelle x_0 berechnet werden. Es ist also die folgende Abbildung gegeben:

$$x \mapsto T(x) = x - [f'(x_0)]^{-1} \cdot f(x)\,.$$

Dem Mittelwertsatz zu Folge existiert ein $\xi \in (x_1, x_2)$ so, dass

$$|T(x_2) - T(x_1)| = |[f'(x_0)]^{-1} \cdot f'(\xi)| \cdot |x_2 - x_1| .$$

Wenn gilt dass $T(I) \subset I$, wobei I ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ ist, und gilt dass $|[f'(x_0)]^{-1} \cdot f'(x)| \leq q < 1$ ist, dann ist die Abbildung $T : I \to I$ eine Kontraktion auf dem Intervall I. Deshalb hat sie auch einen eindeutig bestimmten Fixpunkt auf dem Intervall I. Aus der Definition der Abbildung T erkennt man dass $T(\alpha) = \alpha$ genau dann gilt wenn $f(\alpha) = 0$ ist. Wenn also eine Funktion f die beiden obigen Bedingungen $T(I) \subset I$ und $|[f'(x_0)]^{-1} \cdot f'(x)| \leq q < 1$ erfüllt, dann kommen wir durch dieses Verfahren zu unserer gesuchten Lösung $x = \alpha$ für $f(x) = 0$.

Nach [28, S.148f.] wird dieses Verfahren angewendet für die Approximation von Wurzeln der Form $\sqrt[k]{a}$ wobei $a > 0$ und $k \geq 2$ sind. Bekanntestes Beispiel ist hier wohl die Näherung mit Hilfe der Newton-Methode von $\sqrt{a}$ für $a = 2$.

3.2.3 Markovketten

Auch außerhalb der Analysis findet der Banach'sche Fixpunktsatz Anwendung, nämlich in der Stochastik. Genauer geht es um Markovketten und deren Übergangsmatrizen. Bevor wir jedoch den Satz formulieren für dessen Beweis der Fixpunktsatz nach Banach verwendet wird, werden wir einige Begriffe definieren und klären. Nach [5, S.19] definieren wir zunächst eine homogene Markovkette.

Definition 5 (Homogene Markovkette)**.** Man nennt eine Markovkette $p_{i,j}(t-1, t)$ homogen, falls die einstufigen Übergangswahrscheinlichkeiten nicht abhängig sind von t. Es gilt also

$$p_{i,j}(t-1, t) = p_{i,j} \text{ wobei } t = 1, 2, \ldots .$$

Mit anderen Worten bedeutet dies nach [22], dass das Ergebnis des n-ten Versuchs nur vom $(n-1)$-sten Versuch abhängt und nicht von den Versuchen davor. Die Übergangsmatrix der Markovkette ist dann nach [5, S.19] gegeben durch

$$P = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{s,1} & p_{s,2} & \cdots & p_{s,s} \end{pmatrix}$$

wobei $p_{i,j}$ nach [22] die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass man sich beim nächsten Versuch im Zustand j befindet wenn man davor im Zustand i war. Nach [5, S.17] formulieren wir nun die Definition einer stochastischen Matrix.

Definition 6 (Stochastische Matrix)**.** Die Übergangsmatrix $P = (p_{i,j})$ nennen wir eine stochastische Matrix, falls die Elemente $(p_{i,j}) \geq 0$ sind für alle i, j und die Zeilensummen gleich Eins sind.

Nun fehlen nur noch die Definitionen eines stationären Zustandes sowie einer irreduziblen und aperiodischen Matrix um denjenigen Satz formulieren zu können für dessen Beweis der Fixpunktsatz nach Banach verwendet wird. Diese Definitionen sowie den anschließenden Satz formulieren wir nach [22].

Definition 7 (Stationärer Zustand)**.** Man nennt einen Zustand p_0 einen stationären Zustand, wenn $p_0 P = p_0$ gilt.

Definition 8 (irreduzibel und aperiodisch)**.** Es sei P eine stochastische Matrix. Dann nennt man P irreduzibel und aperiodisch, falls es ein n gibt, sodass für alle i, j gilt, dass $p_{i,j}^{(n)} > 0$ ist wobei $p_{i,j}^{(n)}$ den (i, j)-ten Eintrag von P^n bezeichnet.

Für den Beweis des folgenden Satzes wird nun der Banach'sche Fixpunktsatz verwendet. Den Beweis selbst werden wir jedoch nicht führen.

Satz 3. *Es sei die stochastische Matrix P irreduzibel und aperiodisch. Dann gibt es genau einen stationären Zustand p_0, wobei alle Eintragungen von $p_0 > 0$ sind, und es gilt für jeden Zustand p dass $\lim_{n\to\infty} pP^n = p_0$ ist.*

Das Umwandeln eines mathematischen Problems in ein Fixpunktproblem scheint also ein wichtiger Schritt in vielen Beweisen zu sein. Doch wir wollen uns nun auf den Satz über die inverse Funktion konzentrieren in dessen Beweis uns der Banach'sche Fixpunktsatz als zentrales Element noch begegnen wird.

4 Der Satz über die inverse Funktion

In diesem Kapitel wollen wir nun den Satz über die inverse Funktion formulieren und beweisen. Nach [3, S.71f.] besitzen die Funktionsgleichungen zweier Graphen, die symmetrisch bezüglich der ersten Mediane sind, einen Zusammenhang. Die Koordinaten eines Punktes P_2, der symmetrisch bezüglich der ersten Mediane zum Punkt P_1 liegt, erhält man nämlich genau durch Vertauschen der Komponenten. Das stimmt für jedes Punktepaar das symmetrisch zur ersten Mediane ist. Diesen Sachverhalt können wir in Abbildung 1 betrachten.

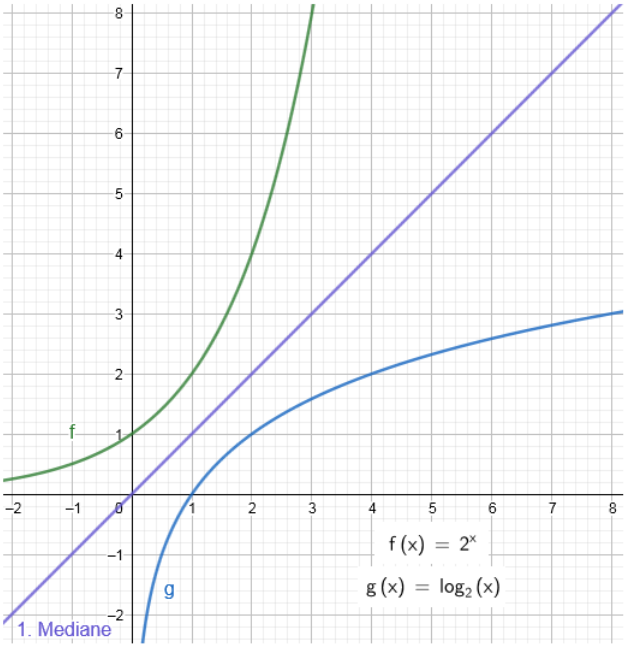

Abbildung 1: Umkehrfunktionen sind symmetrisch bezüglich der ersten Mediane (vgl. [13, Abb. 6.8]).

Der Graph der Funktion g beschreibt nach [3, S.72ff.], wenn gewisse Voraussetzungen erfüllt sind, die inverse Funktion f^{-1} zu f. Wenn sich $x = f(y)$ nach der Variable y

auflösen lässt, dann ist $y = f^{-1}(x)$ auch eine Funktionsgleichung. Allerdings muss die Existenz der sogenannten Umkehrfunktion f^{-1} von f nicht an die soeben beschriebene Eigenschaft geknüpft sein. Die Umkehrfunktion f^{-1} zu f entsteht also, simpel ausgedrückt, durch Vertauschung der Koordinaten der Punkte (x, y) von f. Daraus resultiert wieder eine Relation, die allerdings nicht unbedingt eine Funktion sein muss. Um zu überprüfen ob f^{-1} eine Funktion darstellt muss nachgeprüft werden, ob f Punkte enthält deren $x-$Koordinaten verschieden, deren $y-$Koordinaten jedoch gleich sind. Die Funktion f muss also injektiv sein damit f^{-1} wieder eine Funktion darstellt. Betrachtet man nun eine Funktion die nicht injektiv ist, so kann man die Funktion aufteilen in injektive Teilfunktionen f_i. Diese sind dann streng monoton steigend oder fallend und auch umkehrbar. Die soeben dargebrachte Schilderung soll nun auf allgemeinere und vor allem höherdimensionale Sachverhalte übertragen werden.

So wie es in [16, S.90] geschildert wird geht es im Allgemeinen darum herauszufinden, wann eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, wobei $x \mapsto u = f(x)$, invertierbar ist. Wir wollen also feststellen wann es uns möglich ist, die Gleichung $u = f(x)$ nach der Variable x aufzulösen. Wenn wir uns diese Frage im eindimensionalen Fall stellen, so hilft uns die Monotonie. Denn eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, wobei I ein Intervall ist, ist genau dann invertierbar wenn die Funktion f streng monoton ist. Dieses Kriterium können wir jedoch in höheren Dimensionen nicht mehr anwenden. Um diesen Unterschied auch verdeutlichen zu können werden wir diesen Satz sowohl im eindimensionalen als auch im mehrdimensionalen Fall behandeln.

4.1 Der Satz über die inverse Funktion - eindimensionaler Fall

Bevor wir den Satz über die inverse Funktion im Eindimensionalen behandeln, werden wir noch den Zwischenwertsatz anführen da dieser im Beweis verwendet wird. Wir formulieren den Zwischenwertsatz nach [30, S.167].

Satz 4 (Zwischenwertsatz)**.** *Es sei die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$. Falls f an den Stellen a und b Werte annimmt, die unterschiedliche Vorzeichen haben, dann gibt es auch einen Punkt x im Intervall $[a, b]$, an dem der Funktionswert 0 wird.*

Ein wichtiges Korollar zum Zwischenwertsatz führen wir noch nach [12, S.85] an.

Korollar 1. *Es sei die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$. Dann gibt es für jede Stelle x aus dem Intervall $(f(a), f(b))$ ein x_0 aus dem offenen Intervall (a, b) sodass gilt, dass $f(x_0) = x$.*

Wir formulieren nun den eindimensionalen Satz über die inverse Funktion nach [15, S.222,229] wobei wir die in diesem Werk behandelte Umkehrregel sowie den Satz über differenzierbare Umkehrfunktionen zum Satz über die inverse Funktion zusammenfassen werden. Ebenso findet sich eine ähnliche Formulierung in [18], wonach auch der Beweis geführt werden wird.

Satz 5 (Der Satz über die inverse Funktion im Eindimensionalen)**.** *Es sei die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf dem offenen Intervall I und es sei f an einer Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar und es gelte $f'(x_0) \neq 0$. Dann existieren offene Intervalle $I_1 \subseteq I$ und $J \subseteq \mathbb{R}$ wobei $x_0 \in I_1$ und $f(x_0) \in J$ sodass die Funktion $f : I_1 \to J$ invertierbar*

ist. Die Inverse f^{-1} ist dann gegeben durch $f^{-1} : J \to I_1$ und ist differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und insbesondere stetig differenzierbar auf J. Außerdem gilt

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,.$$

Beweis. Wir wissen, dass f' stetig auf dem Intervall I ist. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f'(x_0) > 0$ ist. Deshalb gibt es auch ein offenes Intervall $I_1 \subseteq I$ mit x_0 aus I_1 sodass $f'(x) > 0$ gilt für alle x aus I_1. Die Funktion f' hat also fixes Vorzeichen, ist in unserem Fall streng monoton steigend auf I_1 und verschwindet nirgendwo. Wegen der Stetigkeit folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es ein offenes Intervall J in $\mathbb{R}$ gibt, sodass $f(I_1) = J$ gilt. Die Funktion $f : I_1 \to J$ ist somit bijektiv und $f^{-1} : J \to I_1$ daher stetig. Mit Hilfe der Inversenregel erhalten wir für x aus J, dass

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,.$$

Daher ist $(f^{-1})'$ stetig und damit f^{-1} stetig differenzierbar. □

Wir sehen also, dass der Beweis dieses Satzes mit Hilfe der Monotonie und der Stetigkeit einfach zu argumentieren ist. Wie wir später sehen werden, können wir die Monotonie im mehrdimensionalen Fall nicht mehr zum Argumentieren verwenden, weshalb dieser Beweis bedeutend länger und komplexer ausfallen wird. Doch zunächst sollen noch ein paar Beispiele zum eindimensionalen Fall behandelt werden.

4.1.1 Beispiele

Nach [19] wollen wir uns zwei Anwendungsbeispiele dieses Satzes ansehen.

Beispiel 1 Es sei die Funktion $f(x) := e^{-2x} + 7\sin x - 4x$ definiert, wobei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Wir wollen nun zeigen, dass ein offenes Intervall I existiert mit 0 aus I, sodass die Funktion f invertierbar auf I ist.

Wir berechnen uns zunächst $f'(x)$ und erhalten für die Ableitung $f'(x) = -2e^{-2x} + 7\cos x - 4$. An der Stelle 0 erhalten wir $f'(0) = -2 + 7 - 4 = 1 \neq 0$. Die Funktion f ist also stetig differenzierbar und deshalb existiert ein solches offenes Intervall I mit 0 aus I sodass $f|_I$ invertierbar ist. Die inverse Funktion f^{-1} ist außerdem stetig differenzierbar.

Bei diesem Beispiel ist der zuvor bewiesene Satz problemlos anwendbar. Im nächsten Beispiel werden wir jedoch sehen, dass eine Funktion f invertierbar sein kann obwohl die Voraussetzungen des Satzes nicht erfüllt sind.

Beispiel 2 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) := x^3$. Wir wollen zeigen, dass ein offenes Intervall I mit $0 \in I$ existiert, in dem f invertierbar ist obwohl $f'(0) = 0$ ist.

Wir berechnen zunächst wieder die Ableitung der gegebenen Funktion und erhalten $f'(x) = 3x^2$. Wir sehen sofort, dass $f'(0) = 0$ gilt. Die Funktion $f(x) = x^3$ ist stetig und $f'(x) \geq 0$ für alle x aus $\mathbb{R}$ und $f'(x) > 0$ für alle x aus $\mathbb{R}$ ohne 0. Die Funktion ist also streng monoton wachsend und f ist außerdem bijektiv weil $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Daher ist f auch invertierbar, wobei $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ist, und deshalb existiert ein offenes Intervall I sodass $f|_I$ invertierbar ist.

Die Voraussetzungen des Satzes sind bei diesem Beispiel nicht gegeben und dennoch ist die Funktion in einer Umgebung von 0 lokal invertierbar und in diesem Fall sogar global invetierbar. Allerdings ist die Inverse f^{-1} an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

4.2 Der Satz über die inverse Funktion - mehrdimensionaler Fall

Der Beweis des Satzes im eindimensionalen Fall lässt sich also relativ gut argumentieren. Im mehrdimensionalen Fall wird die Beweisführung allerdings schon komplizierter. Der Beweis zum Satz wird nach [16, S.90f.] einfacher, wenn man ihn sich in Etappen vornimmt. So macht es zu Beginn durchaus Sinn die Aufgabe zu lokalisieren. Demnach suchen wir zunächst nach einer speziellen Lösung unserer Gleichung $u_0 = f(x_0)$ wobei x_0 fest ist. Anschließend können wir unser Problem dann linearisieren. Wir nähern unsere Abbildung f lokal an ihre Linearisierung an der Stelle x_0 an.

Im Beweis dieses Satzes kommt nach [16, S.95] nun auch der zuvor erwähnte Banach'sche Fixpunktsatz zu tragen. Die Umkehrfunktion, deren Existenz man zeigen will, wird dargestellt als Lösung einer Fixpunktgleichung. Das Überführen in ein Fixpunktproblem ist ein häufig verwendetes Verfahren bei der Beweisführung. Diese können dann oft mit Hilfe des Fixpunktsatzes nach Banach gelöst werden.

Schließlich bleibt nach [16, S.91] die zentrale Aussage des Satzes übrig. Denn der Satz über die inverse Funktion besagt, dass eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die stetig differenzierbar ist, mit $x \mapsto u = f(x)$ genau dann lokal um $f(x_0) = u_0$ eine stetig differenzierbare inverse Abbildung besitzt, wenn $\det df_{(x_0)} \neq 0$ ist.

Dieses Ergebnis wollen wir nun auch formal darstellen. Nach [12, S.104] formulieren wir noch den Mittelwertsatz, da auch dieser im Beweis verwendet wird.

Satz 6 (Mittelwertsatz)**.** *Es sei die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und sie sei differenzierbar auf dem offenen Intervall (a, b). Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a) \quad \Rightarrow \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Alltagstauglich formuliert bedeutet der Mittelwertsatz das Folgende: Werden $100\,m$ in $10\,s$ gelaufen, dann läuft man mit durchschnittlich $36\,km/h$. Dem Mittelwertsatz zu Folge existiert dann mindestens ein Zeitpunkt, in dem die momentane Geschwindigkeit genau $36\,km/h$ beträgt.

Nun haben wir alle nötigen Voraussetzungen behandelt und wir können zum Satz über die inverse Funktion kommen. Nach [12, S.218] und [20] formulieren wir nun den Satz.

Satz 7 (Der Satz über die inverse Funktion)**.** *Es sei $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : U_0 \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar und $df_{(x_0)}$ sei invertierbar, also* $\det df_{(x_0)} \neq 0$*, für eine Stelle $x_0 \in U_0$. Dann gibt es offene Mengen $U \subseteq U_0$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ wobei $x_0 \in U$ und $f(x_0) \in V$ so, dass durch die Funktion $f : U \to V$ die Menge U bijektiv auf die Menge V abgebildet wird. Wenn durch $f^{-1} : V \to U$ dann die inverse Abbildung gegeben ist, dann ist diese Inverse f^{-1} stetig differenzierbar. Weiters gilt dann für alle $x \in V$ dass $df^{-1}_{(x)} = (df_{(f^{-1}(x))})^{-1}$.*

Den Beweis dieses Satzes führen wir zu Beginn nach [16, S.93f.] und später werden wir uns auf [25, S.230ff.] beziehen, wobei wir ihn in fünf Schritte unterteilen und

nach [20] einige Zwischenschritte genauer betrachten werden um den Beweis leichter nachvollziehen zu können.

Beweis. 1. Schritt: Den Verlauf des ersten Schrittes werden wir ähnlich gestalten wie in [16, S.93f.] wobei wir uns auch auf Rechenschritte und vor allem auf Bezeichnungen aus [20] beziehen werden, da wir diese später brauchen werden. Wie bereits zuvor erwähnt werden wir unser Problem zunächst lokalisieren, also einen Spezialfall behandeln.

Behauptung: Wir wollen also zu dem Resultat kommen, dass es ausreicht diesen Satz für den Fall $x_0 = 0, f(x_0) = 0$ und $df_{(x_0)} = \mathrm{id}$ zu beweisen.

Beweis der Behauptung: Dafür setzen wir zunächst $A := df_{(x_0)}$ und wir definieren uns folgende Hilfsabbildungen: $\tau, \lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wobei

$$\tau(x) := x_0 + A^{-1}x \quad \text{und} \quad \lambda(x) := x - f(x_0).$$

Dann ist

$$\tau^{-1}(x) = A(x - x_0) \quad \text{und} \quad \lambda^{-1}(x) = x + f(x_0).$$

Wir sehen also dass die Abbildungen $\tau, \lambda, \tau^{-1}, \lambda^{-1}$ bijektiv sind und weiters gilt

$$d\tau_{(x)} = A^{-1}, \quad d\tau^{-1}_{(x)} = A, \quad d\lambda_{(x)} = \mathrm{id}, \quad d\lambda^{-1}_{(x)} = \mathrm{id}$$

weshalb $\tau, \tau^{-1}, \lambda, \lambda^{-1}$ auch stetig differenzierbar sind. Wir können nun eine Menge U_0^* durch $U_0^* := \tau^{-1}(U_0)$ definieren. Da τ stetig ist und U_0 nach Definition in unserem Satz offen ist, ist auch U_0^* offen und für $x_0 \in U_0$ gilt, dass $0 = \tau^{-1}(x_0)$ aus U_0^* ist. Nun definieren wir eine Funktion g als Verknüpfung unserer definierten Hilfsabbildungen. Daher ist $g : U_0^* \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $g := \lambda \circ f \circ \tau$, also ist

$$g(x) = \lambda(f(\tau(x)))$$

und die Ableitung $dg_{(x)}$ können wir mit Hilfe der Kettenregel berechnen. Wir erhalten dann, dass

$$dg_{(x)} = \underbrace{d\lambda_{(f(\tau(x)))}}_{=\mathrm{id}} \cdot df_{(\tau(x))} \cdot \underbrace{d\tau_{(x)}}_{=A^{-1}} \quad = \quad df_{(\tau(x))}A^{-1}.$$

Also ist g stetig differenzierbar, $g(0) = \underbrace{\lambda(f(\underbrace{\tau(0)}_{=x_0}))}_{=0} = 0$ und $dg_{(0)} = \underbrace{df_{(\underbrace{\tau(0)}_{=x_0})}}_{=A} A^{-1} = \mathrm{id}\,.$

Die Voraussetzungen sind also erfüllt und deshalb existieren offene Mengen U^*, V^*, wobei $0 \in U^*$, sodass die Funktion $g : U^* \to V^*$ bijektiv ist, g^{-1} stetig differenzierbar ist und gilt, dass $dg^{-1}_{(x)} = (dg_{(g^{-1}(x))})^{-1}$ ist. Weiters gilt, dass

$$\lambda^{-1} \circ g \circ \tau^{-1} \quad = \quad \lambda^{-1} \circ \lambda \circ f \circ \tau \circ \tau^{-1} \quad = \quad f.$$

Nun bestimmen wir Mengen U und V durch $U := \tau(U^*)$ und $V := \lambda^{-1}(V^*)$, wobei U und V offen sind weil U^* und V^* offen sind und τ^{-1} und λ stetig sind. Weil $0 \in U^*$ ist folgt, dass $\tau(0) = x_0$ aus U ist. Außerdem gilt für ein $x \in U$ dass $f : U \to V$ weil

$$f(x) = \underbrace{\lambda^{-1}(g(\underbrace{\tau^{-1}(x)}_{\in U^*}))}_{\in V*} \in V.$$

Wir können also nun die Inverse h definieren durch

$$h : V \to U \quad \text{mit} \quad h(x) := \underbrace{\tau(g^{-1}(\underbrace{\lambda(x)}_{\in V^*}))}_{\in U^*} = \tau \circ g^{-1} \circ \lambda \quad \in U.$$

Wenn nun $x \in U$ ist, dann gilt

$$(h \circ f)(x) = \Big((\tau \circ g^{-1} \circ \lambda) \circ (\lambda^{-1} \circ g \circ \tau^{-1})\Big)(x) = x \quad \Rightarrow \quad h \circ f \text{ ist also } \mathrm{id}_U .$$

Und wenn $x \in V$ ist, dann erhalten wir:

$$(f \circ h)(x) = \Big((\lambda^{-1} \circ g \circ \tau^{-1}) \circ (\tau \circ g^{-1} \circ \lambda)\Big)(x) = x \quad \Rightarrow \quad f \circ h \text{ ist also } \mathrm{id}_V .$$

Die Funktion f ist also bijektiv und h ist die Inverse von f, also f^{-1}. Außerdem ist f^{-1} stetig differenzierbar weil wir mit Hilfe der Kettenregel erhalten, dass

$$df^{-1}_{(x)} = dh_{(x)} = \underbrace{d\tau_{(g^{-1}(\lambda(x)))}}_{=A^{-1}} \cdot dg^{-1}_{(\lambda(x))} \cdot \underbrace{d\lambda_{(x)}}_{=\mathrm{id}} = A^{-1} dg^{-1}_{(\lambda(x))}.$$

Wir erhalten also $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ und mit Hilfe der Kettenregel können wir den Beweis der Beschränkung auf den Spezialfall abschließen.

$$\mathrm{id} = d(f \circ f^{-1})_{(x)} = df_{(f^{-1}(x))} \cdot df^{-1}_{(x)} \quad \Rightarrow \quad df^{-1}_{(x)} = (df_{(f^{-1}(x))})^{-1}.$$

Somit haben wir gezeigt, dass man den Satz nur mehr für unseren Spezialfall beweisen muss und wir können zum zweiten Schritt übergehen.

2. Schritt: Ab jetzt können wir nach [25, S.230] ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_0 = 0, f(0) = 0$ und $df_{(0)} = \mathrm{id}$ voraussetzen. Wie wir zuvor gezeigt haben, ist f stetig differenzierbar. Deshalb können wir ein $r_0 > 0$ so wählen, dass $df_{(x)}$ invertierbar ist $\forall x \in B(0, r_0)$ und nach [20] die Abschätzung $\|df_{(x)} - \mathrm{id}\| < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ gilt. Wir wählen nun ein $0 < r < r_0$ und wählen $r := \frac{r_0}{3}$. Dann gilt dass $\overline{B}(0, r) \subseteq \overline{B}(0, 2r) \subseteq B(0, r_0)$. Für ein $y \in \overline{B}(0, r)$ können wir nun eine neue Abbildung $h_y : \overline{B}(0, 2r) \to \mathbb{R}^n$ definieren wobei diese nach [20] durch $h_y(x) = x + y - f(x)$ gegeben ist. Wir wollen somit das Surjektivitätsproblem in ein Fixpunktproblem übersetzen.

Behauptung: Es gilt nach [20] dass $f(x) = y$ für ein $x \in \overline{B}(0, 2r)$ genau dann gilt wenn $h_y(x) = x$ ist.

Beweis der Behauptung: Da wir hier eine Äquivalenzrelation beweisen sollen, müssen wir beide Richtungen zeigen.

($\Rightarrow$) Um die erste Richtung zu zeigen gehen wir von der Funktion $h_y(x)$, also von $h_y(x) = x + y - f(x)$, aus. Da $y = f(x)$ ist erhalten wir $h_y(x) = x + y - y = x$ und damit ist die erste Richtung bewiesen.

($\Leftarrow$) Um die zweite Richtung zu beweisen gehen wir davon aus, dass $x = h_y(x)$. Die Abbildung $h_y(x)$ ist nach Definition gegeben durch $h_y(x) = x + y - f(x)$. Durch Gleichsetzen erhalten wir also $x = x + y - f(x)$ und durch Umformen erhalten wir daher dass $f(x) = y$.

Gemäß den nachfolgenden Behauptungen wollen wir nun noch nach [25, S.231] zeigen, dass die Abbildung h_y für jedes $y \in \overline{B}(0, r)$ eine Kontraktion ist.

Behauptung: Wenn nach [20] x, x_1, x_2 aus $\overline{B}(0, 2r)$ und y, y_1, y_2 aus $\overline{B}(0, r)$ sind, dann gelten:

(i) $|h_y(x_1) - h_y(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|\,,$

(ii) $|h_y(x)| \leq \frac{1}{2}|x| + |y|\,,$

(iii) $|h_{y_1}(x_1) - h_{y_2}(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$

Beweis der Behauptung: Anders als in [25, S.231] werden wir wie in [20] mit dem Beweis der ersten Behauptung beginnen und danach mit Hilfe dieser die anderen zeigen.

(i) $h_y(x_1) - h_y(x_2) = x_1 + y - f(x_1) - (x_2 + y - f(x_2)) = x_1 - f(x_1) - (x_2 - f(x_2))$. Um den Mittelwertsatz anwenden zu können definieren wir nun eine Funktion $g_j(t)$ durch

$$g_j(t) := \Big(x_1 + t(x_2 - x_1) - f(x_1 + t(x_2 - x_1))\Big)_j \quad , \quad \text{wobei } j \in \{1, \ldots, n\}$$

ist und

$$g_j(0) - g_j(1) = \Big(\underbrace{(x_1 - f(x_1)) - (x_2 - f(x_2))}_{=h_y(x_1) - h_y(x_2)}\Big)_j = \Big(h_y(x_1) - h_y(x_2)\Big)_j\,.$$

Mit Hilfe der Kettenregel können wir $\dot{g}_j(t)$ berechnen und wir erhalten

$$\dot{g}_j(t) = \Big((x_2 - x_1) - df_{(x_1 + t(x_2 - x_1))}(x_2 - x_1)\Big)_j\,.$$

Nachdem wir unsere Funktion nun komponentenweise betrachten können wir den Mittelwertsatz anwenden. Demnach gibt es ein ξ sodass $g_j(0) - g_j(1) = -\dot{g}_j(\xi)$. Also erhalten wir

$$\Big(h_y(x_1) - h_y(x_2)\Big)_j = g_j(0) - g_j(1) = -\dot{g}_j(\xi) =$$

$$= -\Big((x_2 - x_1) - df_{(x_1 + \xi(x_2 - x_1))}(x_2 - x_1)\Big)_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big|\Big(h_y(x_1) - h_y(x_2)\Big)_j\Big| = \Big|\Big((x_2 - x_1) - df_{(x_1 + \xi(x_2 - x_1))}(x_2 - x_1)\Big)_j\Big| \leq$$

$$\leq |(x_2 - x_1) - df_{(x_1 + \xi(x_2 - x_1))}(x_2 - x_1)| \overset{\text{Matrixnorm}}{\leq}$$

$$\leq \underbrace{\| \operatorname{id} - \underbrace{df_{(x_1 + \xi(x_2 - x_1))}}_{\in B(0, r_0)} \|}_{< \frac{1}{2\sqrt{n}}} \cdot |x_2 - x_1| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot |x_2 - x_1|\,.$$

Zurückführen auf unseren mehrdimensionalen Fall liefert nun:

$$|h_y(x_1) - h_y(x_2)| \overset{\text{Definition } |\ldots|}{=} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Big|\Big(h_y(x_1) - h_y(x_2)\Big)_j\Big|^2} \leq$$

$$\Big(\text{weil} \quad \Big|\Big(h_y(x_1) - h_y(x_2)\Big)_j\Big|^2 \leq \frac{1}{4n}|x_2 - x_1|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n} |\ldots|^2 \leq \frac{1}{4}|x_2 - x_1|^2\Big)$$

$$\leq \frac{1}{2}|x_2 - x_1|.$$

Mit Hilfe von (i) können wir nun (ii) und (iii) leicht zeigen.

(ii) $|h_y(x)| \leq |\underbrace{h_y(x) - h_y(0)}_{\overset{(1)}{\leq} \frac{1}{2}|x-0|}| + |\underbrace{h_y(0)}_{=0+y-f(0)=y}| \leq \frac{1}{2}|x| + |y|.$

(iii) $|h_{y_1}(x_1) - h_{y_2}(x_2)| \leq |\underbrace{h_{y_1}(x_1) - h_{y_1}(x_2)}_{\overset{(1)}{\leq} \frac{1}{2}|x_1-x_2|}| +$

$+ |\underbrace{h_{y_1}(x_2) - h_{y_2}(x_2)}| \leq$

$=\underbrace{x_2 + y_1 - f(x_2) - (x_2 + y_2 - f(x_2))}_{=y_1-y_2}$

$\leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$

Somit haben wir unsere Behauptungen bewiesen und können mit dem nächsten Schritt fortfahren.

3. Schritt: Bei diesem Schritt kommt nun der Banach'sche Fixpunktsatz ins Spiel. Wir wollen nach [25, S.231] für ein $y \in \overline{B}(0,r)$ das Urbild das wir suchen als Fixpunkt der zuvor definierten Abbildung h_y erhalten. Dafür benötigen wir auch die im zweiten Schritt bewiesenen Behauptungen $(i), (ii), (iii)$. Nach [25, S.231] genügt das Kontraktionsprinzip aus dem zweiten Schritt bereits um die folgende Behauptung zu erhalten. Wir wollen uns den Beweis der nächsten Behauptung jedoch nach [20] genauer ansehen.

Behauptung: Nun wollen wir zeigen, dass für alle $y \in \overline{B}(0,r)$ genau ein $x \in \overline{B}(0,2r)$ existiert sodass $f(x) = y$. Wenn außerdem $y \in B(0,r)$ ist dann gilt, dass $x \in \overline{B}(0,2r)$ mit $f(x) = y$ auch erfüllt, dass $x \in B(0,2r)$ ist.

Beweis der Behauptung: Es sei also $y \in \overline{B}(0,r)$, $h_y : \overline{B}(0,2r) \to \mathbb{R}^n$ und es sei $x \in \overline{B}(0,2r)$. Aus dem zweiten Schritt können wir folgern, dass

$$|h_y(x)| \leq \frac{1}{2}\underbrace{|x|}_{\leq 2r} + \underbrace{|y|}_{\leq r} \leq 2r$$

ist und daher erhalten wir dass

$$h_y : \overline{B}(0,2r) \to \overline{B}(0,2r),$$

wobei $\overline{B}(0,2r)$ vollständig ist da $\overline{B}(0,2r)$ abgeschlossen ist in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^n$ vollständig ist. Wenn x_1, x_2 aus $\overline{B}(0,2r)$ sind, dann ist h_y eine Kontraktion weil wir aus dem zweiten Schritt wissen, dass

$$|h_y(x_1) - h_y(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

Deshalb können wir nun den Banach'schen Fixpunktsatz anwenden. Demnach existiert ein eindeutig bestimmtes $x \in \overline{B}(0,2r)$, wobei $h_y(x) = x$. Dann folgt aus dem zweiten Schritt, dass $f(x) = y$. Wie wir nun zeigen werden, ist dieses x auch wirklich eindeutig bestimmt. Denn wenn nun auch $f(x^*) = y$ wäre für ein $x^* \in \overline{B}(0,2r)$, dann wäre nach dem zweiten Schritt auch $h_y(x^*) = x^*$ und damit ist $x^* = x$. Daraus sehen wir, dass dieses x tatsächlich eindeutig bestimmt ist. Um den letzten Teil der Behauptung zu beweisen sei $y \in B(0,r)$ und es sei $x \in \overline{B}(0,2r)$ so, dass $f(x) = y$ gilt. Es folgt wiederum aus dem zweiten Schritt, dass $h_y(x) = x$. Daher erhalten wir wieder mit Hilfe des zweiten Schrittes, dass $|x| = |h_y(x)| \leq \frac{1}{2}|x| + |y| < 2r$ und daraus folgt nun dass $x \in B(0,2r)$ ist.

4. Schritt: Wie in [25, S.232] und [20] wollen wir in diesem Schritt zeigen, dass $f : U \to V$ bijektiv ist, wobei wir $V := B(0,r)$ und $U := B(0,2r) \cap f^{-1}(V)$ setzen.

Die beiden Mengen U und V sind wiederum offen weil $B(0,r)$ und $B(0,2r)$ offen sind und f stetig ist. Außerdem gilt, dass $0 \in U, 0 \in V$ ist. Ebenso werden wir uns mit der Lipschitz-Stetigkeit und der Stetigkeit befassen. Nach [25, S.232] folgt die Bijektivität von $f|_U$ aus der Behauptung des dritten Schrittes. Wir wollen jedoch auch diesen Beweis genauer durchführen.

Behauptung: Nach [20] ist $f : U \to V$ bijektiv, f^{-1} ist stetig und für $x_1, x_2 \in V$ gilt dass $|f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)| \leq 2|x_1 - x_2|$ (Das entspricht der Lipschitz-Stetigkeit mit Konstante 2).

Beweis der Behauptung: Um die Bijektivität zu zeigen müssen wir zeigen, dass f injektiv und surjektiv ist. Es sei $f : U \to V$.

Injektivität: Wenn x_1, x_2 aus U sind und es gilt $f(x_1) = f(x_2) = y \in V$, dann folgt aus dem dritten Schritt dass $x_1 = x_2$.

Surjektivität: Wenn y aus $V = B(0,r)$ ist, dann folgt ebenfalls aus dem dritten Schritt, dass ein $x \in B(0,2r)$ mit $f(x) = y$ existiert. Weil $y \in V \Rightarrow x \in f^{-1}(V)$ und daher ist $x \in U$.

Da f also injektiv und surjektiv ist, ist f bijektiv.

Nun seien x_1, x_2 aus V und wir definieren $z_1 := f^{-1}(x_1)$ und $z_2 := f^{-1}(x_2)$. Dann ist $f(z_1) = x_1 \overset{\text{(2.Schritt)}}{\Rightarrow} h_{x_1}(z_1) = z_1$. Ebenfalls gilt $f(z_2) = x_2 \overset{\text{(2.Schritt)}}{\Rightarrow} h_{x_2}(z_2) = z_2$. Nun betrachten wir $|z_1 - z_2|$.

$$|z_1 - z_2| = |h_{x_1}(z_1) - h_{x_2}(z_2)| \overset{\text{(iii) aus 2.Schritt}}{\leq} \frac{1}{2}|z_1 - z_2| + |x_1 - x_2| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)| = |z_1 - z_2| \leq 2|x_1 - x_2|.$$

Nun bleibt noch die Stetigkeit von f^{-1} zu zeigen. Dafür wählen wir ein $\varepsilon > 0$ und wir setzen $\delta := \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Es seien x_1, x_2 aus V und es gilt $|x_1 - x_2| < \delta$. Damit erhalten wir $|f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)| \leq 2\underbrace{|x_1 - x_2|}_{<\delta = \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$. Die Abbildung f^{-1} ist also stetig.

5. Schritt: Im letzten Schritt wollen wir noch nachweisen, dass f^{-1} differenzierbar an der Stelle x ist.

Nach [20] sei $x \in V$. Wir definieren eine neue Funktion $r(y)$ für $y \in U$ durch

$$r(y) := f(y) - x - df_{(f^{-1}(x))}(y - f^{-1}(x)).$$

Nachdem f an der Stelle $f^{-1}(x)$ differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{y \to f^{-1}(x)} \frac{|r(y)|}{|y - f^{-1}(x)|} = 0.$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\eta > 0$ sodass für alle $0 < |y - f^{-1}(x)| < \eta$ gilt dass

$$\frac{|r(y)|}{|y - f^{-1}(x)|} < \frac{\varepsilon}{4\|(df_{(f^{-1}(x))})^{-1}\|}.$$

Durch Umformen erhalten wir für $|y - f^{-1}(x)| < \eta$ daher dass

$$|r(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4\|(df_{(f^{-1}(x))})^{-1}\|}|y - f^{-1}(x)|.$$

Nach dem vierten Schritt ist f^{-1} stetig und deshalb gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle y mit $|y - x| < \delta$ gilt, dass $|f^{-1}(y) - f^{-1}(x)| < \eta$. Es sei nun $y \in V$ so, dass $|y - x| < \delta$. Wir erhalten dann

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(x) - (df_{(f^{-1}(x))})^{-1}(\underbrace{y}_{=f(f^{-1}(y))} - \underbrace{x}_{=f(f^{-1}(x))})| \overset{\text{aus Definition von r}}{=}$$

$$= \Big| \underbrace{f^{-1}(y) - f^{-1}(x) - \underbrace{(df_{(f^{-1}(x))})^{-1}(df_{(f^{-1}(x))})}_{=\mathrm{id}}(f^{-1}(y) - f^{-1}(x)) +}_{=0}$$

$$-(df_{(f^{-1}(x))})^{-1}(r(f^{-1}(y)))\Big| =$$

$$= |(df_{(f^{-1}(x))})^{-1}(r(f^{-1}(y)))| \overset{\text{Matrixnorm}}{\leq} \|(df_{(f^{-1}(x))})^{-1}\| \cdot |r(f^{-1}(y))| \leq$$

$$\leq \|(df_{(f^{-1}(x))})^{-1}\| \cdot \frac{\varepsilon}{4\|(df_{(f^{-1}(x))})^{-1}\|} |\underbrace{f^{-1}(y) - f^{-1}(x)}_{\substack{(4.\text{Schritt}) \\ \leq \quad 2|y-x|}}| \leq \frac{\varepsilon}{2}|y - x|\,.$$

Wenn nun gilt, dass $0 < |y - x| < \delta$ ist, so ist

$$\frac{|f^{-1}(y) - f^{-1}(x) - (df_{(f^{-1}(x))})^{-1}(y - x)|}{|y - x|} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Daher ist f^{-1} an der Stelle x differenzierbar und es gilt

$$df^{-1}_{(x)} = (df_{(f^{-1}(x))})^{-1}.$$

Weil die Abbildung $x \mapsto f^{-1}(x)$ nach dem vierten Schritt stetig ist, $x \mapsto df_{(x)}$ und auch $A \mapsto A^{-1}$ stetig sind, ist auch $x \mapsto df^{-1}_{(x)} = (df_{(f^{-1}(x))})^{-1}$ stetig und damit ist der gesamte Satz bewiesen. □

Nachdem wir uns nun eingehend mit der Theorie hinter diesem Satz beschäftigt haben wird es Zeit für einige Beispiele um sehen zu können, wie der Satz in der Praxis angewendet werden kann.

4.2.1 Beispiele

Beispiel 1: Ein Anwendungsbeispiel Nun wollen wir den Satz an einem konkreten Beispiel anwenden.

Wir betrachten wie in [21] eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die definiert ist durch $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1x_2 + 5 \\ 7 - 3x_2 \\ 8x_1^2e^{x_2+4} + 5x_3 \end{pmatrix}$. Wir wollen nun überprüfen, ob es um $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Umgebung U gibt, sodass f invertierbar auf der Menge U ist.

Wir bilden dafür zunächst die partiellen Ableitungen:

$$df_{(x)} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 16x_1e^{x_2+4} & 8x_1^2e^{x_2+4} & 5 \end{pmatrix}.$$

Da die partiellen Ableitungen stetig sind, ist f stetig differenzierbar. Nun setzen wir $x_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$df_{(x_0)} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 16 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bildet man $\det df_{(x_0)}$, so erhält man

$$\det df_{(x_0)} = \det \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 16 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 12 = 60 \neq 0.$$

Deshalb ist $df_{(x_0)}$ invertierbar und der Satz über die inverse Funktion ist anwendbar. Daher existieren offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $x_0 \in U$ und $f(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \\ 23 \end{pmatrix} \in V$, sodass die Funktion $f : U \to V$ invertierbar ist. Weiters ist $f^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar.

Beispiel 2: Warum brauchen wir die stetige Differenzierbarkeit? Nachdem wir nun wissen wie wir den Satz über die inverse Funktion an Beispielen anwenden können, wollen wir uns auch ein Beispiel ansehen das uns Auskunft darüber gibt, warum die stetige Differenzierbarkeit hierbei eine derart wichtige Rolle spielt.

Es sei nach [20] die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Für beide Fälle können wir uns die Ableitung der Funktion f berechnen:

$$x \neq 0: \quad f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x},$$

$$x = 0: \quad f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \Big(1 + 2 \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{|\ldots| \leq 1}\Big) = 1$$

Wir erhalten also dass $df_{(0)} = (1)$ und somit f invertierbar ist.

Wenn aber f lokal invertierbar wäre, so gäbe es ein offenes Intervall I mit $0 \in I$ sodass $f|_I$ invertierbar ist. Wenn $f|_I$ invertierbar wäre, dann wäre $f|_I$ streng monoton wie in der Einleitung dieses Kapitels bereits erwähnt wurde. Da $f'(0) = 1 > 0$ ist, ist $f|_I$ streng monoton wachsend. Daraus folgt nun, dass $f'(x) \geq 0 \, \forall x \in I$.

Wenn wir nun aber $a_n := \frac{1}{2\pi n} \overset{n \to \infty}{\to} 0$ setzen, dann existiert auch ein n mit $a_n \in I$.

$$0 \leq f'(a_n) = 1 + 4a_n \underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0} - 2\underbrace{\cos(2\pi n)}_{=1} = -1 < 0.$$

Wir erhalten einen Widerspruch und daher ist f nicht lokal invertierbar.

An Hand dieses Beispiels können wir also sehen, dass die stetige Differenzierbarkeit tatsächlich eine wesentliche Rolle spielt um den Satz über die inverse Funktion anwenden zu können.

Beispiel 3: Warum sagt uns der Satz nur etwas über die lokale Invertierbarkeit? Mit Hilfe dieses Beispiels wollen wir nun noch veranschaulichen, warum uns der Satz über die inverse Funktion nur etwas über die lokale, nicht aber über die globale, Invertierbarkeit sagt.

Es sei nach [21] $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^{x_1}\cos x_2 \\ e^{x_1}\sin x_2 \end{pmatrix}.$$

Zuerst wollen wir zeigen, dass die Funktion f nicht bijektiv ist. Dafür sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und es sei $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Dann erhalten wir $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 2\pi n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ aber

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 2\pi n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_1}\cos(x_2 + 2\pi n) \\ e^{x_1}\sin(x_2 + 2\pi n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_1}\cos x_2 \\ e^{x_1}\sin x_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion f ist also nicht injektiv und deshalb auch nicht bijektiv.

Und nun wollen wir aber zeigen, dass $\forall x \in \mathbb{R}^2$ eine Umgebung U um x und eine Umgebung V um $f(x)$ existieren, sodass die Funktion $f : U \to V$ bijektiv ist. Wir berechnen uns dafür zunächst die partiellen Ableitungen.

$$df_{(x)} = \begin{pmatrix} e^{x_1}\cos x_2 & -e^{x_1}\sin x_2 \\ e^{x_1}\sin x_2 & e^{x_1}\cos x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion f ist also stetig differenzierbar da die partiellen Ableitungen stetig sind. Außerdem ist $df_{(x)}$ auch invertierbar, weil:

$$\det df_{(x)} = \det \begin{pmatrix} e^{x_1}\cos x_2 & -e^{x_1}\sin x_2 \\ e^{x_1}\sin x_2 & e^{x_1}\cos x_2 \end{pmatrix} = e^{2x_1}\underbrace{(\cos^2 x_2 + \sin^2 x_2)}_{=1} = e^{2x_1} \neq 0.$$

Dem Satz über die inverse Funktion zu Folge existieren also offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $V \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $x \in U$ und $f(x) \in V$, sodass die gegebene Funktion $f : U \to V$ invertierbar, und daher auch bijektiv, ist und die inverse Abbildung f^{-1} stetig differenzierbar ist.

Wir sehen also, dass f um jeden Punkt lokal invertierbar ist. Aber f ist - weil nicht bijektiv - nicht global invertierbar. Der Satz über die inverse Funktion sagt demnach nichts über die globale Invertierbarkeit einer Abbildung aus.

Auch der Satz über die inverse Funktion kann, ähnlich wie der Fixpunktsatz nach Banach, vielseitig angewendet werden. Mit zwei dieser Anwendungsmöglichkeiten wollen wir uns nun noch näher beschäftigen.

4.3 Anwendungen des Satzes über die inverse Funktion

Der Satz über die inverse Funktion wird nach [29, S.73f.] angewendet um die Lösbarkeit nicht linearer Gleichungssysteme zu bestimmen und auch um die Ableitung der Umkehrfunktion zu berechnen ohne die Formel für die Umkehrfunktion zu kennen. Diese beiden Anwendungen werden wir nun näher betrachten.

4.3.1 Nicht-lineare Gleichungssysteme lösen

Nach [29, S.73] formulieren wir nun das folgende Korollar zur Auflösung von nicht-linearen Gleichungssystemen.

Korollar 2 (Nicht-lineare Gleichungssysteme lösen)**.** *Die Menge U_0 aus $\mathbb{R}^n$ sei offen und x_0 sei aus U_0. Weiters sei $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ aus $C^k(U_0, \mathbb{R}^n)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, also f sei stetig differenzierbar. Wenn*

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=1,\ldots,n} \neq 0$$

gilt, dann gibt es um x_0 eine offene Umgebung U aus $\mathbb{R}^n$ und um $f(x_0)$ eine offene Umgebung V aus $\mathbb{R}^n$, sodass das System von Gleichungen $f(x) = y$, also

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= y_1 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) &= y_n \end{aligned}$$

für alle $(y_i)_{i=1,\ldots,n}$ aus V genau eine Lösung hat. Diese ist aus U und von der Form $x(y) = (x_1(y), \ldots, x_n(y))$. Weiters sind $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ aus $C^k(V, \mathbb{R})$.

Als Beispiel führt [29, S.73] das Aufsuchen von Nullstellen eines Polynoms dritten Grades mit drei voneinander verschiedenen reellen Nullstellen an. Dieses besitzt nach Definition drei reelle Nullstellen x_1, x_2, x_3. Es geht also darum, die Gleichung

$$u^3 + t_2 u^2 + t_1 u + t_0 = 0$$

auflösen zu können. Will man diese Gleichung nun lösen, so erhält man durch die Zerlegung des Polynoms in Linearfaktoren folgendes nicht-lineare Gleichungssystem:

$$u^3 + t_2 u^2 + t_1 u + t_0 = (u - x_1)(u - x_2)(u - x_3).$$

Dieses kann auch noch anders angeschrieben werden und führt dann zum nötigen Koeffizientenvergleich.

$$u^3 + t_2 u^2 + t_1 u + t_0 = u^3 - u^2 \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{=:f_1(x_1,x_2,x_3)} + u \underbrace{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}_{=:f_2(x_1,x_2,x_3)} - \underbrace{x_1x_2x_3}_{=:f_3(x_1,x_2,x_3)} .$$

Mit Hilfe dieser Darstellung erhält man leicht den nötigen Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= -t_2 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= \quad t_1 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= -t_0 \end{aligned} .$$

Wenn nach dem vorhergehenden Korollar nun $f = (f_i)_{i=1,2,3}^t$ ist, wobei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $a = (x_i)_{i=1,2,3}$ aus $\mathbb{R}^3$ ist, dann gilt dass

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1,2,3} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)\,.$$

Es existieren also genau dann drei reelle und voneinander verschiedene Nullstellen x_1, x_2, x_3 des behandelten Polynoms, wenn $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1,2,3} \neq 0$ und reell ist. Folglich gibt es dann um a eine offene Umgebung U und um $f(a) = (-t_2, t_1, -t_0)^t$ eine offene Umgebung V, sodass die Gleichung

$$u^3 + t_2^* u^2 + t_1^* u + t_0^* = 0$$

auch für alle t_2^*, t_1^*, t_0^* drei Nullstellen in $\mathbb{R}$ besitzt, wobei $(-t_2^*, t_1^*, -t_0^*)^t$ aus V ist.

4.3.2 Die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen ohne die bekannte Formel zu kennen

Eine weitere Anwendung des Satzes über die inverse Funktion besteht nach [29, S.73f.] darin, die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen zu können ohne die Formel dafür zu kennen. Sie führt das Beispiel der Abbildung der Polarkoordinaten an. Diese Abbildung f ist wie folgt definiert:

$$f : (0,\infty) \times (-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,, \quad \text{wobei} \quad f(r,\varphi) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\,.$$

Wenn $U = (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$, dann gilt auf dieser Menge, dass

$$\det\left(\frac{\partial x,y}{\partial r,\varphi} f(r,\varphi)\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{vmatrix} = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = r \neq 0\,,$$

wobei (r,φ) aus U ist. Zu diesem Ergebnis gelangt man unter Berücksichtigung der Umrechnung von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten. Man erhält die Werte für r und φ durch Betrachten der Winkelfunktionen am Einheitskreis. So kann man die Gleichungen

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin(\varphi) = \frac{y}{r} \quad \text{und} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

erhalten und daher zum Ergebnis der oben berechneten Determinante kommen. Da diese Determinante ungleich Null ist, ist die Abbildung f lokal bijektiv auf der gesamten Menge U. Wir können also die inverse Matrix bilden und erhalten

$$\left(\frac{\partial x,y}{\partial r,\varphi}(f(r,\varphi))\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{\sin(\varphi)}{r} & \frac{\cos(\varphi)}{r} \end{pmatrix}.$$

Wenn wir die zuvor erwähnte Umrechnung von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten nochmals anwenden, dann erhält man nun

$$\frac{\partial r,\varphi}{\partial x,y}(f^{-1}(x,y)) = \frac{\partial x,y}{\partial r,\varphi}\Big(f(f^{-1}(x,y))\Big)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Wir haben also zwei wichtige Anwendungen des Satzes über die inverse Funktion gesehen. Ein weiteres wichtiges Korollar dieses Satzes ist der Satz über die implizite Funktion. Dieser wird im nächsten Kapitel detailliert behandelt werden. Ebenso wichtig ist der Satz für die Herleitung der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren sowie für den Beweis der Transformationsformel. Diese Folgerungen werden wir in späteren Kapiteln noch näher behandeln. Zunächst wollen wir aber noch einen kurzen Exkurs zu schulischen Anwendungen des Satzes machen. Denn auch in der Oberstufe werden inverse Funktionen behandelt.

4.4 Anwendung inverser Funktionen in der Schule

Auch in der Schule werden inverse Funktionen behandelt. Ebenso wird eine Art Formel bereitgestellt um inverse Funktionen differenzieren zu können. Die Anwendungen in der Schule beschränken sich natürlich auf den eindimensionalen Fall, doch das Grundprinzip wird dennoch vermittelt. Ausgehend von einer reellen Funktion gibt es nach [14,

S.202] für jedes Element aus der Zielmenge auf jeden Fall ein Urelement, wenn die Zielmenge entsprechend eingeschränkt wird, und zwar auf die Wertemenge. Wenn für jedes Element der Zielmenge genau ein Urelement existiert, dann kann man die sogenannte Umkehrfunktion von f finden. Diese wird dann wie folgt definiert:

Definition 9 (Umkehrfunktion)**.** Wenn $f : I \to J$ eine reelle Funktion ist, wobei für jedes Element der Zielmenge J genau ein Urelement in I existiert, dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ von f diejenige Funktion, die jedem Element $f(x)$ aus J das ihm entsprechende Urelement x aus I zuteilt.

Wenn $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ gilt $\forall x \in I$ und $\forall y \in J$, dann sagt man, dass die Funktionen $f : I \to J$ und $f^{-1} : J \to I$ Umkehrfunktionen voneinander sind. Wenn dies der Fall ist, dann sind die Graphen von f und f^{-1} symmetrisch in Bezug auf die erste Mediane. Wenn die Funktion f streng monoton ist auf einem Intervall, dann erhält man die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} von f nach [14, S.221] durch

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,.$$

Nach [13, S.107] wird folgendes Beispiel behandelt: Es ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben durch $f(x) = x^2$ und außerdem ist die Funktion $f^{-1} = g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \sqrt{x}$. Nachdem

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = g(y)$$

gilt, wobei x aus $\mathbb{R}$ und y aus $\mathbb{R}_0^+$ sind, sind die Funktionen f und g Umkehrfunktionen voneinander. Wie zuvor erwähnt müssen in diesem Fall die Graphen der Funktionen f und g symmetrisch in Bezug auf die erste Mediane sein. Das wird in der folgenden Abbildung 2 veranschaulicht:

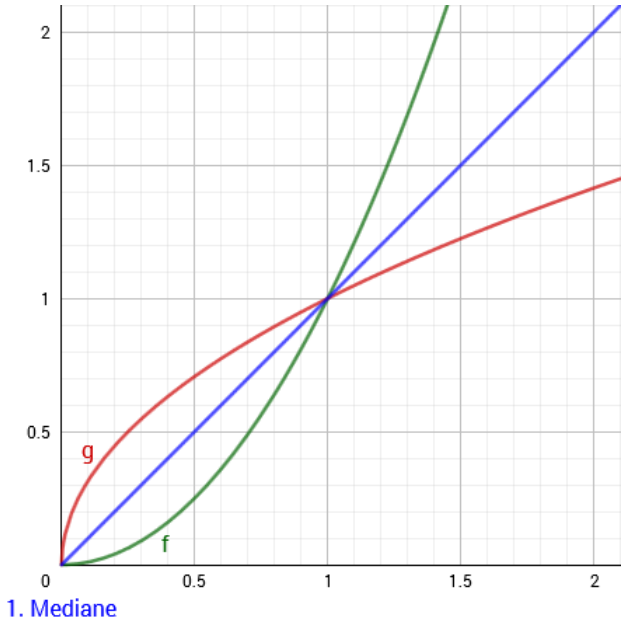

Abbildung 2: Funktion und deren symmetrische Umkehrfunktion (vgl. [13, Abb. 6.7]).

Über inverse Funktionen und deren Ableitung wissen wir nun bestens Bescheid. Deshalb können wir zu den, für die Analysis ebenso wichtigen, impliziten Funktionen weitergehen.

5 Der Satz über die implizite Funktion

Eines der wichtigsten Korollare des Satzes über die inverse Funktion ist der Satz über die implizite Funktion. Nach [8, S.334] beschäftigte sich vor allem Descartes mit impliziten Gleichungen der Form $f(x,y) = C$. Zu dieser Zeit wurde nahezu vorausgesetzt, dass derartige Gleichungen geometrische Kurven der Form $y = y(x)$ darstellen. Der Mathematiker Leibniz konnte derartige Funktionen auch schon ableiten. Doch erst einige Jahrzehnte später fanden sich Mathematiker, die einen exakten Beweis führen wollten um zu garantieren, dass die Gleichung $f(x,y) = C$ genau dann in einer Umgebung von (x_0, y_0) gilt, wobei $f(x_0, y_0) = C$ gilt, wenn $y = y(x)$. Heute sagt man, dass eine derartige Gleichung implizit nach y aufgelöst wird. Bevor wir uns mit dem allgemeinen Satz befassen werden wir uns zunächst mit dem Satz über implizite Funktionen in zwei Variablen beschäftigen.

5.1 Der Satz über implizite Funktionen in zwei Variablen

Wenn nach [1, S.41f.] eine Gleichung $F(x,y) = y^2 - 2xy + 1 = 0$ gegeben ist, wobei $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dann kann man diese nach x oder auch nach y auflösen. Wenn die Gleichung nach x aufgelöst wird, dann ist diese Auflösung stets eindeutig. Dies gilt jedoch nicht für die Auflösung nach y.

Lösen wir diese Gleichung nach x auf, so erhalten wir die Funktion

$$x = g(y) = \frac{1+y^2}{2y}\,, \quad y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Lösen wir dieselbe Gleichung nach y auf, so ist die Lösungskurve durch zwei Funktionen gegeben. Sie wird also doppelt beschrieben:

$$y = h_1(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}\,,$$

$$y = h_2(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}\,, \quad x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)\,.$$

Die Funktion $F(x,y)$ kann in der Nähe von $(1,1)$ und $(-1,-1)$ nicht einmal lokal eindeutig nach der Variable y aufgelöst werden.

Auflösen einer Gleichung $F(x,y) = 0$ nach der Variable y bringt die Frage mit sich, ob man eine Abbildung $x \mapsto h(x)$ finden kann, sodass

$$F(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = h(x)$$

gilt. Durch die Gleichung $F(x,y) = 0$ ist die Funktion $h(x)$ dann implizit gegeben.

Um einen solchen Sachverhalt lösen zu können geht man zunächst davon aus, dass es eine Lösung (x_0, y_0) der gegebenen Gleichung $F(x,y) = 0$ gibt und versucht dann in einer Umgebung dieser Lösung weitere Lösungen der Gleichung zu finden.

Wir werden den Satz über implizite Funktionen in zwei Variablen nun nach [1, S.42f.] formulieren und beweisen.

Satz 8 (Hauptsatz über implizite Funktionen in zwei Variablen)**.** *Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und es sei $F : W \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion für die gilt:*

(i) $F(x_0, y_0) = 0$, *wobei* $(x_0, y_0) \in W$,

(ii) $\frac{\partial F}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *sind in einer Umgebung von* (x_0, y_0) *stetig,*

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Wenn dies erfüllt ist, dann gibt es offene, nichtleere Intervalle I um x_0 und J um y_0 sowie eine Funktion $f : I \to J$ für die gilt, dass

(1) $f(x_0) = y_0$,

(2) $F(x, y) = 0$, $(x, y) \in I \times J \Leftrightarrow f(x) = y$, $x \in I$,

(3) f *ist stetig differenzierbar auf* I *und für die Ableitung* f' *von* f *gilt*

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}, \quad x \in I.$$

Beweis. Zunächst wird folgende Abbildung definiert: $G : W \to \mathbb{R}^2$, wobei $G(x, y) = (x, F(x, y))$.

Da $F(x_0, y_0) = 0$ gilt, ist $\underbrace{G(x_0, y_0)}_{=(x_0, F(x_0, y_0))} = (x_0, 0)$ und wegen Punkt (ii) ist G auch stetig partiell differenzierbar und es gilt

$$dG_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Da $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ ist, ist $\det(dG_{(x_0,y_0)}) \neq 0$ und daher ist $dG_{(x_0,y_0)}$ invertierbar.

Nun können wir den Satz über die inverse Funktion anwenden. Nach diesem Satz gibt es lokal eine stetig differenzierbare Inverse G^{-1} von G. Weil die erste Koordinate der Funktion $G(x)$ gleich x ist gilt die Gleichung $G^{-1}(x, y) = (x, \varphi(x, y))$, wobei die Funktion $\varphi(x, y)$ stetig differenzierbar ist für einen Punkt (x, y) in einer Umgebung $I \times J$ des Punktes $(x_0, 0)$. Nachdem $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow G(x, y) = (x, 0)$, können wir $f(x) := \varphi(x, 0)$ für $x \in I$ definieren womit unsere ersten beiden Behauptungen bewiesen sind und f stetig differenzierbar ist. Da $F(x, f(x)) = 0$ für $x \in I$ ist erhalten wir durch Differenzieren nach der Variable x und mit Hilfe der Kettenregel dass

$$0 = \frac{d}{dx}F(x, f(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))f'(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

wobei $\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$ nach (iii) ist. □

Die Art und Weise wie die Ableitung von f im letzten Schritt gebildet wurde nennt man implizites Differenzieren.

Auch für diesen Satz wollen wir uns nun ein paar Beispiele ansehen.

5.1.1 Beispiele

Einstiegsbeispiel Zunächst setzen wir das zuvor betrachtete Beispiel nach [1, S.43] fort. Es wird also die Funktion $F(x, y) = y^2 - 2xy + 1 = 0$ betrachtet. Ableiten nach x liefert

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -2y.$$

Es gilt dann

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2y = 0 \text{ genau dann wenn } y = 0.$$

Wenn aber $y = 0$ ist, dann wird die Gleichung $F(x, y) = 0$ durch diese Punkte $(x, 0)$ nicht erfüllt. Deshalb muss $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \neq 0$ für jeden Punkt der Kurve gelten. Somit kann die Gleichung $F(x, y) = 0$ dann an jeder Stelle (x, y) global nach x aufgelöst werden. Die durch $F(x, y) = 0$ gegebene Relation gibt auf implizite Weise eine glatte Kurve der Form $x = g(y)$, wobei $y \neq 0$ ist, an. Ableiten nach y liefert allerdings

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y - 2x$$

und es gilt dann

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y - 2x = 0 \text{ genau dann wenn } x = y\,.$$

Die Beziehung $x = y$ gilt aber nur für zwei Punkte (x, y) der gegebenen Kurve, nämlich für $(1, 1)$ und $(-1, -1)$. Die Gleichung $F(x, y) = 0$ kann an diesen Stellen allerdings nicht einmal lokal nach der Variable y aufgelöst werden, in allen anderen Punkten kann sie aber lokal nach y aufgelöst werden.

Beispiel 2 Wir wollen nun wie in [24, S.89] an Hand eines Beispiels die Voraussetzungen und Folgerungen des Satzes veranschaulichen. Wir betrachten die Relation $y^2 = x$, genauer die Funktion $F(x, y) = y^2 - x$ und wir wollen untersuchen, ob mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen die Gleichung $F(x, y) = 0$ lokal um den Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ nach y aufgelöst werden kann.
Zunächst überprüfen wir die Voraussetzungen des Satzes:

(i) $F(1, 1) = 1 - 1 = 0\,,$

(ii) $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -1$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y$. Die partiellen Ableitungen sind beide stetig auf $\mathbb{R}^2$ und daher auch um $(1, 1)$, und

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 2 \neq 0.$

Die Voraussetzungen sind also erfüllt, weshalb wir den Satz anwenden können.
Wir können $y^2 - x = 0$ lokal um $(1, 1)$ nach der Variable y auflösen und die Ableitung von $y(x)$ bei 1 ist

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(1, 1) = \frac{1}{2}.$$

Dasselbe Ergebnis erhält man auch durch Auflösen von $y^2 - x = 0$ durch $y = \sqrt{x}$.

5.2 Der Satz über die implizite Funktion

Wir wollen nun von impliziten Funktionen in zwei Variablen weggehen und den allgemeinen Fall betrachten. Wie zuvor erwähnt kann nach [26, S.85] eine Gleichung $f(x, y) = 0$ dann nach y aufgelöst werden, wenn man von einem Punkt (x_0, y_0) ausgeht, der auf der Kurve liegt, die die gegebene Gleichung $f(x, y) = 0$ darstellt wobei die Ableitung in diesem Punkt ungleich Null sein muss. Ausgehend von dieser Lösung versucht man dann weitere Lösungen zu finden. Aus diesem Grund hat dieser Satz auch seinen Namen erhalten. Denn durch eine gegebene Gleichung $f(x, y) = 0$ sowie einer Lösung (x_0, y_0) kann man den Lösungszweig $f(x) = y$ meist nicht explizit, also direkt, sondern nur implizit, also mittelbar, über ein geeignetes Lösungsverfahren ermitteln.

Nun wollen wir den Satz über die implizite Funktion formulieren und beweisen. Der Beweis wird einige Parallelen zum Satz über implizite Funktionen in zwei Variablen aufweisen und deshalb besser nachvollziehbar sein. Wir werden den Satz nach [23, S.266f.] formulieren und auch beweisen, wobei nach [20] einige Schritte ausführlicher behandelt beziehungsweise durchgerechnet werden und die Bezeichnungen passend gewählt werden.

Satz 9 (Der Satz über die implizite Funktion)**.** *Seien $U_0 \subseteq \mathbb{R}^s$ und $V_0 \subseteq \mathbb{R}^r$ offene Mengen und es sei $W = U_0 \times V_0$ offen. Die Funktion $F : W \to \mathbb{R}^r$ sei stetig differenzierbar und $F(x_0, y_0) = 0$ für einen Punkt $(x_0, y_0) \in W$. Weiters sei $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ invertierbar. Dann existieren offene Mengen $U \subseteq U_0$ und $V \subseteq V_0$ mit $x_0 \in U$ und $y_0 \in V$ und $f : U \to V$ stetig differenzierbar mit $f(x_0) = y_0$ sodass $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ für $(x, y) \in U \times V$ gilt. Außerdem gilt für alle $x \in U$ dass*

$$df_{(x)} = -\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\Big)^{-1} \cdot \Big(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\Big).$$

Beweis. Wir definieren zunächst die Abbildung $G : W \to \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ durch $G(x, y) := (x, F(x, y))$. Dann ist G stetig differenzierbar weil die partiellen Ableitungen stetig sind:

$$dG = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Weiters ist $dG_{(x_0,y_0)}$ invertierbar weil

$$\det dG_{(x_0,y_0)} = \det \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \Big(\underbrace{\det(\mathrm{id})}_{=1}\Big) \cdot \Big(\underbrace{\det\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\Big)}_{\substack{\text{(nach Voraussetzung des Satzes)} \\ \neq 0}} \Big) \neq 0.$$

Der Satz über die inverse Funktion ist also anwendbar und es gibt nach [20] offene Mengen $U^*, V^* \subseteq \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ wobei $(x_0, y_0) \in U^*$ und $G(x_0, y_0) = (x_0, 0) \in V^*$ sodass die Funktion $G : U^* \to V^*$ bijektiv ist und G^{-1} stetig differenzierbar ist.

Wir können also ein $\varepsilon > 0$ wählen, sodass $B_\varepsilon(x_0) \times B_\varepsilon(y_0) \subset U^*$. Weiters setzen wir nach [20] $U_1 := B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0) \times V \subseteq U^*$, wobei $G(U_1)$ offen ist weil U_1 offen ist und G^{-1} stetig ist, und $(x_0, 0) = G(x_0, y_0) \in G(U_1)$ weil $x_0 \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)$ und $y_0 \in V$. Daher existiert auch ein $\varepsilon_1 > 0$ sodass $B_{\varepsilon_1}(x_0) \times \{0\} \subseteq G(U_1)$.

Wir definieren nun offene Mengen $V := B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_0)$ und $U := B_{\varepsilon_1}(x_0)$ sowie eine Funktion $g : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ mit $g(x, y) = y$ und $dg = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}$. Die Funktion g entspricht also der Projektion auf die y-Achse und g ist außerdem stetig differenzierbar.

Für $x \in U$ können wir $f(x)$ nun folgendermaßen definieren:

$$f(x) := \underbrace{\underbrace{g(G^{-1}\underbrace{(x, 0)}_{\in G(U_1)})}_{\in U_1}}_{\in V}.$$

Also erhalten wir $f : U \to V$ und die Funktion f ist stetig differenzierbar.

Nach [23, S.267] seien nun $x_0 \in U, y_0 \in V$. Dann gilt $U \times V \subset B_\varepsilon(x_0) \times B_\varepsilon(y_0) \subset U^* \subset W$. Wir erhalten $f(x_0) = g(G^{-1}\underbrace{(x_0, 0)}_{=G(x_0,y_0)}) = y_0$ und $\forall x \in U, y \in V$ gilt, dass

$(x,y) \in G(U^*)$ und $(x,0) \in V^*$. Sei $(x,y) \in U \times V$.

$$F(x,y) = 0 \Rightarrow G(x,y) = (x, \underbrace{F(x,y)}_{=0}) = (x,0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x,y) = G^{-1}(x,0) \Rightarrow y = g(x,y) = \underbrace{g(\underbrace{G^{-1}(x,0)}_{=(x,y)})}_{=y} = f(x).$$

Nach [20] zeigen wir nun noch, dass $0 = F(x, f(x))$. Nun sei $y = f(x)$. Wir setzen $(x^*, y^*) := G^{-1}(x,0)$. Dann gilt

$$(x,0) = G(x^*, y^*) = (x^*, F(x^*, y^*)) \Rightarrow x = x^*$$

und

$$0 = F(x^*, y^*) = F(x, y^*).$$

Durch die Funktion g können wir y^* außerdem wie folgt definieren:

$$y^* := g(x^*, y^*) = g(G^{-1}(x,0)) = f(x)$$

und daher erhalten wir dass $F(x, f(x)) = 0$. Nach [23, S.267] ist die gegebene Abbildung $x \mapsto F(x, f(x))$ stetig differenzierbar weil F und f stetig differenzierbar sind und es gilt dann nach [20]:

$$0 = F(x, f(x)) \Rightarrow 0 \overset{\text{Kettenregel}}{=} \underbrace{dF_{(x,f(x))}}_{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)} \begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ df_{(x)} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \cdot df_{(x)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\Big)^{-1} \cdot \Big(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\Big) = df_{(x)}$$

□

5.2.1 Beispiele

Auch nach diesem Beweis wollen wir den Satz wieder an einigen konkreten Beispielen anwenden. Wir betrachten hierbei verschiedene Beispiele aus [21].

Beispiel 1 Wir beschäftigen uns in diesem Beispiel mit den folgenden zwei Gleichungen:

$$y_1 y_2 + y_1^2 x_2 e^{x_1 - 3} + 7 x_3 e^{y_2 - 1} + x_1 x_3^2 - x_1 = 0$$
$$y_1^2 - 9 e^{y_1 - 5} + 5 x_3 y_2 - x_1 y_2 - x_1 e^{x_2} = 0.$$

An diesen beiden Gleichungen wollen wir nun den Satz über die implizite Funktion anwenden. Wir wollen also zeigen, dass eine Umgebung U um $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ sowie eine stetig

differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^2$ existieren, für die $f \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt, sodass die Lösungen der Gleichungen lokal durch $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ angeschrieben werden können.

Wir haben also

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} y_1 y_2 + y_1^2 x_2 e^{x_1 - 3} + 7 x_3 e^{y_2 - 1} + x_1 x_3^2 - x_1 \\ y_1^2 - 9 e^{y_1 - 5} + 5 x_3 y_2 - x_1 y_2 - x_1 e^{x_2} \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten zunächst die partiellen Ableitungen der Gleichungen.

$$dF_{(x,y)} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1^2 x_2 e^{x_1 - 3} + x_3^2 - 1 & y_1^2 e^{x_1 - 3} & 7e^{y_2 - 1} + 2x_1 x_3 & y_2 + 2y_1 x_2 e^{x_1 - 3} & y_1 + 7x_3 e^{y_2 - 1} \\ -y_2 - e^{x_2} & -x_1 e^{x_2} & 5y_2 & 2y_1 - 9e^{y_1 - 5} & 5x_3 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion F ist also stetig differenzierbar, da die partiellen Ableitungen stetig sind. Für die gegebenen Werte $x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $y_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir durch Einsetzen in $F(x,y)$ dass

$$F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ebenso können wir nun durch Einsetzen $dF_{(x_0,y_0)}$ berechnen und erhalten

$$dF_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} 3 & 25 & -5 & 1 & -9 \\ -2 & -3 & 5 & 1 & -13 \end{pmatrix}.$$

Daraus können wir bereits $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 1 & -13 \end{pmatrix}$ ablesen. Da $\det \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 1 & -13 \end{pmatrix} \neq 0$ ist, ist $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ invertierbar. Wir berechnen uns nun davon auch die Inverse:

$$\begin{array}{cccc|cc} 1 & -9 & 1 & 0 & & \\ 1 & -13 & 0 & 1 & \xrightarrow[2.-1.]{} & \\ \end{array} \quad \begin{array}{cc|cc} 1 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{array} \xrightarrow[1.\cdot 4/2.\cdot(-1)]{}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cc|cc} 4 & -36 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \end{array} \xrightarrow[1.+9\cdot 2.]{} \begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 13 & -9 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \end{array}.$$

Daraus erhalten wir also dass $\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 13 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Wir können den Satz über die implizite Funktion anwenden und demnach existieren offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^3$ und $V \subseteq \mathbb{R}^2$ wobei $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in U$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to V$ für die $f \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt, sodass für $(x,y) \in U \times V$ gilt dass

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

Des weiteren gilt für $x \in U$ dass $df_{(x)} = -\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\Big)^{-1} \cdot \Big(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\Big)$. Nun können wir noch $df\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ berechnen und erhalten

$$df\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\Big)^{-1} \cdot \Big(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\Big) =$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 13 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 25 & -5 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -57 & -352 & 110 \\ -5 & -28 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14.25 & -88 & 27.5 \\ -1.75 & -7 & 2.5 \end{pmatrix}.$$

An diesem Beispiel haben wir den Satz über die implizite Funktion also ohne weitere Probleme anwenden können. In den folgenden Beispielen wollen wir uns noch ein paar Fälle ansehen an Hand derer man erkennt, warum es wichtig ist gewisse Dinge zu überprüfen um diesen Satz anwenden zu können.

Beispiel 2 In diesem Beispiel soll verdeutlicht werden, dass es wichtig ist eine Lösung (x_0, y_0) der Gleichung $F(x,y) = 0$ zu kennen um den Satz anwenden zu können.

Wir betrachten die Funktion $F(x,y) := e^y + x^2$. Wir wollen überprüfen, ob eine Umgebung U um 0 sowie eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ existieren, wobei $f(0) = 0$, sodass $f(x) = y$ gilt.

Wir berechnen uns also wieder die partiellen Ableitungen und erhalten

$$dF_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & e^y \end{pmatrix}, \quad dF_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0.$$

Da die partiellen Ableitungen stetig sind ist F stetig differenzierbar und $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$ ist invertierbar. Für $F(0,0) = e^0 + 0^2$ erhalten wir aber 1 und nicht 0. Aus diesem Grund kann keine Funktion f in einer Umgebung um 0 existieren sodass $f(0) = 0$ und $F(x, f(x)) = 0$ gelten. Weil $F(x,y) = e^y + x^2 > 0$ ist, hat die gegebene Gleichung $F(x,y) = 0$ also keine Lösung.

Wir sehen also dass es wichtig ist, die Voraussetzung $F(x_0, y_0) = 0$ zu überprüfen um den Satz auch anwenden zu können. Der Satz kann also nur etwas aussagen, wenn eine bestimmte Lösung (x_0, y_0) der Gleichung $F(x,y) = 0$ bekannt ist.

Beispiel 3 In einem dritten Beispiel wollen wir nun noch zeigen, dass es auch Fälle geben kann in denen der Satz über die implizite Funktion nicht anwendbar ist, $F(x,y) = 0$ aber dennoch lokal als $y = f(x)$ geschrieben werden kann.

Wir betrachten die Funktion $F(x,y) := y^3 - x^4$ und wollen selbiges wie in Beispiel 2 nachweisen. Wir berechnen wieder die partiellen Ableitungen und erhalten

$$dF_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -4x^3 & 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen sind stetig, weshalb F wiederum stetig differenzierbar ist. Wir können weiter $F(0,0) = 0^3 - 0^4 = 0$ und $dF_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ berechnen. Da aber $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$ ist, ist $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$ nicht invertierbar und deshalb können wir den Satz über die implizite Funktion hier nicht anwenden.

Da aber

$$0 = F(x,y) = y^3 - x^4 \quad \Leftrightarrow \quad y^3 = x^4 \quad \Leftrightarrow \quad y = x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^4}$$

gilt, werden wir nun eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^4}$ definieren. Bei dieser Funktion erhalten wir für $f(0) = 0$ und für $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dass $F(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow$ $y = f(x)$. Für die Ableitung erhalten wir dann $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. Des weiteren ist $f'(0) = 0$ und die Funktion f ist stetig differenzierbar.

Wir sehen also, dass in diesem Fall der Satz über die implizite Funktion nicht anwendbar ist. Dennoch kann $F(x,y) = 0$ lokal, und in diesem Fall sogar global, als $y = f(x)$ für eine Funktion f die stetig differenzierbar ist geschrieben werden.

5.3 Anwendungen des Satzes über die implizite Funktion

Auch der Satz über die implizite Funktion kann nach [29, S.78f.] in verschiedenen Kontexten angewendet werden. So ist es beispielsweise möglich, die Steigung der Tangente von implizit gegebenen Kurven zu bestimmen. Auch die Lagrange'schen Multiplikatoren kann man auf den Satz über die implizite Funktion zurückführen. Da dies aber komplizierter und weniger intuitiv ist wird diese Methode, wie im letzten Kapitel erwähnt, auf den Satz über die inverse Funktion zurückgeführt werden.

5.3.1 Die Steigung der Tangente implizit gegebener Kurven bestimmen

Das folgende Korollar formulieren wir wie in [29, S.78].

Korollar 3 (Steigung der Tangente implizit gegebener Kurven)**.** *Die Menge U_0 aus $\mathbb{R}^2$ sei offen, (x_0, y_0) sei aus U_0 und es gelte $F(x_0, y_0) = 0$. Weiters sei F aus $C^k(U_0, \mathbb{R})$ für ein k aus $\mathbb{N}$, also F sei stetig differenzierbar. Wenn dann*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

gilt, also

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

invertierbar ist, dann gibt es um x_0 eine offene Umgebung U aus $\mathbb{R}$ sowie eine Funktion f aus $C^k(U, \mathbb{R})$ für die gilt, dass

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \textit{wobei} \quad f(x_0) = y_0\,.$$

Wenn das erfüllt ist, dann gilt für die Ableitung $f'(x)$ die folgende Formel:

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \quad \textit{wobei} \quad x \quad \textit{aus} \quad U\,.$$

Der Beweis dieses Korollars führt auf einen Spezialfall des Satzes über die implizite Funktion der bereits zuvor bewiesen wurde zurück. Deshalb wird der Beweis hier nicht mehr separat angeführt.

Allerdings wollen wir uns so wie in [29, S.79] auch noch ein Beispiel zu dieser Anwendung ansehen. Es sei eine Funktion $F : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x,y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x}\,.$$

Da wir y mit Hilfe der Gleichung $F(x,y)=0$ nicht explizit bestimmten können, erhalten wir auch keinen Ausdruck für die implizit gegebene Funktion f, die durch dieses Auflösen definiert werden würde. Doch obwohl wir diese Funktion nicht kennen, können wir die Steigung der Tangente beispielsweise im Punkt $(1,0)$ aus $F^{-1}(\{0\})$ bestimmen. Dafür bilden wir die partiellen Ableitungen.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{2(x^2+y^2)} - \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\Big(-\frac{y}{x^2}\Big) = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{2(x^2+y^2)} - \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\Big(\frac{1}{x}\Big) = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{-x+y}{x^2+y^2}$$

Einsetzen des Punktes $(1,0)$ für (x,y) liefert nun folgendes Ergebnis:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,0) = 1\,,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = -1\,.$$

Die partiellen Ableitungen der Funktion F an der Stelle $(1,0)$ sind also ungleich Null und deshalb können wir mit Hilfe der im Korollar erwähnten Funktion f die Steigung der Tangente der Kurve, die durch die Gleichung $F(x,y)=0$ gegeben ist, im Punkt $(1,0)$ bestimmen. Für die Steigung erhalten wir unter Verwendung der Formel des Korollars also, dass

$$f'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,0)} = -\frac{1}{-1} = 1\,.$$

Dieses Korollar bezieht sich nur auf den zweidimensionalen Fall. Auch im Mehrdimensionalen findet der Satz über die implizite Funktion eine ähnliche Anwendung. Auch diesen Fall wollen wir noch genauer betrachten. Im Mehrdimensionalen sprechen wir dann von Tangentialvektoren und Tangentialräumen. Die Definitionen dieser Begriffe wollen wir uns zunächst genauer ansehen.

5.3.2 Tangentialräume

Wenn nach [23, S.273] U eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist und p aus U sei, dann nennt man einen Vektor v aus $\mathbb{R}^n$ den Tangentialvektor von U in p, falls eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ existiert, sodass $\varphi(0)=p$ und $\dot{\varphi}(0)=v$ gilt. Der Tangentialraum, also die Menge aller Tangentialvektoren ist dann gegeben durch $T := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ ist Tangentialvektor von } U \text{ in } p\}$.

Genauer kann man das in folgendem Fall beschreiben. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, es sei d aus $\mathbb{N}$ mit $1 \leq d < n$ und es sei $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ stetig differenzierbar. Außerdem sei p aus

$$M := \{x \in U : f(x) = 0\}$$

und es gelte $\operatorname{rg}(df_{(p)}) = n-d$. Dann gilt, dass

$$T := \{v \in \mathbb{R}^n : df_{(p)}(v-p) = 0\}$$

der Tangentialraum von M in p ist. Diese Definition wird nach [21] auch im folgenden Beispiel verwendet, das wir uns jetzt genauer ansehen werden.

Es sei a aus $\mathbb{R}^n$ und es sei a_0 aus $\mathbb{R}$ und A sei eine symmetrische reelle $n \times n-$ Matrix. Außerdem sei p aus $\mathbb{R}^n$ so, dass die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$p^t Ap + a^t p + a_0 = 0 \quad \text{und} \quad Ap + \frac{1}{2}a \neq 0\,.$$

Zu zeigen ist nun, dass durch die Menge

$$T := \Big\{x \in \mathbb{R}^n : p^t Ax + \frac{1}{2}a^t x + \frac{1}{2}a^t p + a_0 = 0\Big\}$$

die Tangentialebene an die Hyperfläche M zweiter Ordnung an der Stelle p gegeben ist, wobei

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : x^t Ax + a^t x + a_0 = 0\}\,.$$

Wir definieren zunächst eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die gegeben ist durch

$$f(x) := x^t Ax + a^t x + a_0\,.$$

Dann können wir die Menge M anschreiben durch

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : x^t Ax + a^t x + a_0 = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}\,.$$

Wir zeigen nun, dass die Funktion f stetig differenzierbar ist und $df_{(x)} = 2(x^t A + \frac{1}{2}a^t)$ gilt. Dafür seien x und y aus $\mathbb{R}^n$. Dann erhalten wir:

$$\Big|f(y) - f(x) - \Big(2\Big(x^t A + \frac{1}{2}a^t\Big)\Big)\Big(y - x\Big)\Big| =$$

$$= |(y^t Ay + a^t y + a_0) - (x^t Ax + a^t x + a_0) - (2x^t A + a^t)(y - x)| =$$

$$= |y^t Ay + a^t y + a_0 - x^t Ax - a^t x - a_0 - (2x^t Ay + a^t y - 2x^t Ax - a^t x)| =$$

$$= |y^t Ay + x^t Ax - 2x^t Ay| = |y^t Ay - x^t Ay + x^t Ax - x^t Ay| =$$

$$= |\underbrace{(y^t - x^t)}_{=(y-x)^t} Ay - \underbrace{x^t A(y - x)}_{=(y-x)^t Ax}| = |(y - x)^t Ay - (y - x)^t Ax| =$$

$$= |(y - x)^t A(y - x)| \leq |y - x| \cdot |A(y - x)| \leq \|A\| \cdot |y - x|^2$$

wobei im letzten Schritt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung angewendet wurde. Wenn nun $x \neq y$ ist, dann erhalten wir dass

$$\frac{|f(y) - f(x) - (2(x^t A + \frac{1}{2}a^t))(y - x)|}{|y - x|} \leq \frac{\|A\| \cdot |y - x|^2}{|y - x|} \leq \|A\| \cdot |y - x|\,.$$

Wenn $y \to x$, dann gilt dass $\|A\| \cdot |y - x| \to 0$ und deshalb ist

$$\lim_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x) - (2(x^t A + \frac{1}{2}a^t))(y - x)|}{|y - x|} = 0\,.$$

Deshalb ist f differenzierbar an der Stelle x und es gilt dass

$$df_{(x)} = 2\Big(x^t A + \frac{1}{2}a^t\Big)\,.$$

Da die Abbildung $x \mapsto 2(x^tA + \frac{1}{2}a^t)$ außerdem stetig ist, ist die Funktion f auch stetig differenzierbar. Nachdem das gezeigt wurde, können wir mit unserem Beweis fortfahren. Es sei nun p aus M und es soll $Ap + \frac{1}{2}a \neq 0$ gelten. Wenn das erfüllt ist, dann gilt auch

$$\Big(Ap + \frac{1}{2}a\Big)^t = p^tA^t + \frac{1}{2}a^t = p^tA + \frac{1}{2}a^t \neq 0$$

und daher erhalten wir dass

$$2\Big(p^tA + \frac{1}{2}a^t\Big) \neq 0$$

ist und das bedeutet dass $df_{(p)} \neq 0$ ist. Weil die Abbildung durch $df_{(p)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben ist erhalten wir $\mathrm{rg}(df_{(p)}) \leq 1$. Weil aber $df_{(p)} \neq 0$ ist, wie wir oben berechnet haben, ist $\mathrm{rg}(df_{(p)}) \geq 1$ und daher gilt nun dass $\mathrm{rg}(df_{(p)}) = 1$ ist. Aus dem Satz über die implizite Funktion und dem daraus resultierenden Korollar, das zuvor angeführt wurde, folgt nun, dass der Tangentialraum T an M an der Stelle p gegeben ist durch

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n : df_{(p)}(x - p) = 0\}\,.$$

Es gilt nun

$$0 = df_{(p)}(x - p) = 2\Big(p^tA + \frac{1}{2}a^t\Big)(x - p) = 2\Big(p^tAx + \frac{1}{2}a^tx - p^tAp - \frac{1}{2}a^tp\Big)$$

genau dann wenn

$$p^tAx + \frac{1}{2}a^tx - p^tAp - \frac{1}{2}a^tp = 0\,.$$

Weil p aus M ist, gilt wiederum

$$0 = p^tAp + a^tp + a_0 = p^tAp + \frac{1}{2}a^tp + \frac{1}{2}a^tp + a_0$$

genau dann wenn

$$-p^tAp - \frac{1}{2}a^tp = \frac{1}{2}a^tp + a_0\,.$$

Deshalb erhalten wir nun, dass x aus T ist genau dann wenn

$$0 = p^tAx + \frac{1}{2}a^tx - p^tAp - \frac{1}{2}a^tp = p^tAx + \frac{1}{2}a^tx + \frac{1}{2}a^tp + a_0$$

und daher gilt nun dass

$$T = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : p^tAx + \frac{1}{2}a^tx + \frac{1}{2}a^tp + a_0 = 0\Big\}\,.$$

Wir haben also auch eine wichtige Funktion des Satzes über die implizite Funktion kennen gelernt. Am Ende dieses Kapitels wollen wir noch die Verwendung dieses Satzes in der Schule betrachten. Auch dieser Satz wird, wenn auch nicht in allen Schulbüchern, in der Oberstufe und den höheren Schulen behandelt.

5.4 Anwendung impliziter Funktionen in der Schule

Auch implizite Funktionen werden in den Schulbüchern behandelt. Ähnlich wie die Umkehrfunktionen spielen auch implizite Funktionen keine tragende Rolle im Stoff der Oberstufe, doch die Art und Weise des Differenzierens impliziter Funktionen wird dennoch behandelt. Wenn nach [24, S.89] $y^2 = x$ gegeben ist, so ist dies für $y \geq 0$ eine Darstellung der Funktion $y = \sqrt{x}$. Wenn man nun y' berechnen will, ohne y in Abhängigkeit von x darstellen zu müssen, so kann man y^2 als $[f(x)]^2$ betrachten. Dadurch erhält man $[f(x)]^2 = x$ und von diesem Ausdruck kann man beide Seiten ableiten. Man erhält durch Ableiten der linken Seite mit Hilfe der Kettenregel dass $2 \cdot f(x) \cdot f'(x) = 2yy'$. Ableiten der rechten Seite liefert 1, weshalb man für $y' = \frac{1}{2y}$ erhält.

Es kommt also des öfteren vor, implizite Funktionen der Form $F(x, y) = 0$ ableiten zu müssen. Die Ableitung erhält man auch ohne die Funktion explizit durch $y = f(x)$ bestimmen zu müssen. In diesem Fall ist y abhängig von x und $F(x, y)$ ist dann eine verkettete Funktion von x die konstant gleich Null gesetzt wird. Wir erhalten also

$$F(x, y = f(x)) = 0 \Rightarrow F(x, f(x)) = 0.$$

Da $0' = 0$ ist, muss auch die Ableitung von $F(x, f(x))$ Null sein. Diese Ableitung kann man mit Hilfe der Kettenregel bestimmen und man erhält:

$$F(x, y) = 0 \Rightarrow F'(x, y, y') = 0.$$

Für diese Methode des impliziten Differenzierens müssen gewisse Voraussetzungen erfüllt sein. Zunächst muss y durch $F(x, y) = 0$ in Abhängigkeit von x beschrieben werden und alle vorkommenden Funktionen müssen differenzierbar sein.

Es gibt also durchaus Parallelen zum Satz über implizite Funktionen in zwei Variablen, der in diesem Kapitel behandelt wurde. Die Aussagen und Voraussetzungen sind für die Schule adäquat vereinfacht worden, die wesentlichen und für den schulischen Gebrauch nötigen Aussagen werden jedoch behandelt und die SchülerInnen erhalten einen ersten Einblick in die Welt der impliziten Funktionen.

Als Beispiel wird nach [24, S.90] $x^2 + y^2 = r^2$ betrachtet, wobei x aus dem Intervall $[-r, +r]$ und y aus dem Intervall $[0, r]$ sein soll. Es handelt sich also um den oberen Halbkreis und y' ist zu bestimmen. Der Ausdruck $x^2 + y^2$ entspricht der Summe von zwei Funktionen $v(y)$ und $u(x)$ die gegeben sind durch $u(x) = x^2$ und $v(y) = y^2$. Da $v(y) = y^2 = v(f(x))$ wegen $f(x) = y$ kann man $v'(f(x))$ mit Hilfe der Kettenregel bestimmen und man erhält für die Ableitung der Funktion v nach x den Ausdruck $2yy'$. Daher erhält man $2x + 2yy' = 0$, wobei $y > 0$ ist, und man kann y' ausdrücken durch $y' = -\frac{x}{y}$ mit $y > 0$.

Implizite Funktionen werden heutzutage in der AHS kaum noch behandelt. In den höheren Schulen wird auf implizite Funktionen und deren Differentiation aber noch eingegangen. Nach [27, S.112f.] ist eine Funktion dann implizit dargestellt, wenn sich die Variable x sowie die davon abhängige Variable y beide auf jeden Fall auf einer der zwei Seiten der gegebenen Gleichung befinden. Die Funktionsgleichung ist also nicht durch eine Form $y = f(x)$ gegeben. Implizit gegebene Funktionen können nicht immer explizit nach der gesuchten Variable aufgelöst werden. Deshalb wird dann die implizite Differentiation angewendet. Die praktische Vorgehensweise wird hier wie folgt beschrieben: Jeder Term der gegebenen Funktionsgleichung wird nach der unabhängigen Variable x abgeleitet. Diejenigen Terme, die die von x abhängige Variable y enthalten, können mit

Hilfe der Kettenregel differenziert werden weil y als Funktion in x dargestellt wird. Danach kann die daraus resultierende Gleichung nach y' umgeformt werden. Die implizite Differentiation wird hier also noch behandelt, wenn auch nur kurz und bündig.

Somit haben wir nun auch die impliziten Funktionen ausreichend behandelt und können weitere Folgerungen des Satzes über die inverse Funktion betrachten. Ein sehr wichtiges Korollar führt uns nun zu einem Thema mit dem man im Zuge der Differentialrechnung auch in der Schule konfrontiert wird, nämlich zu den Extremwertaufgaben. Diese musste jeder Schüler und jede Schülerin im Laufe der Schulzeit verstehen lernen. Wir werden im nächsten Kapitel nun sehen, dass wir solche Extremwerte unter bestimmten Nebenbedingungen auch im Mehrdimensionalen lösen können.

6 Extremwerte unter Nebenbedingungen

In diesem Kapitel geht es um die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren. Diese Methode wird verwendet um lokale Extremstellen unter bestimmten Nebenbedingungen berechnen zu können. Im Mehrdimensionalen ist es, wie wir gleich sehen werden, nicht mehr so einfach diese Extremstellen bestimmen zu können. Die Lagrange'schen Multiplikatoren bieten jedoch eine relativ einfache Möglichkeit, um auch diese Berechnungen durchführen zu können. Bevor wir uns jedoch mit dieser Methode befassen, beginnen wir mit einer allseits, vor allem aus der Schule, bekannten Problemstellung: mit den besagten Extremwertaufgaben.

Das Lösen von Extremwertaufgaben ist den meisten noch aus der Schule bekannt. Man versucht beispielsweise bei gegebenem Umfang eines rechteckigen Grundstückes dasjenige zu bestimmen, das den größten Flächeninhalt hat. Aufstellen einer Hauptbedingung und einer Nebenbedingung ist in diesem Fall leicht und die Höhe kann durch Einsetzen und Ausrechnen leicht bestimmt werden. Betrachten wir zu diesen einfachen Extremwertaufgaben ein typisches Beispiel um uns die Vorgehensweise in Erinnerung zu rufen.

Einstiegsbeispiel Betrachten wir nach [24, S.118] eine Kugel mit Radius r. Dieser soll ein Zylinder mit größtmöglichem Volumen eingeschrieben werden. Wir betrachten also den in Abbildung 3 dargestellten Sachverhalt.

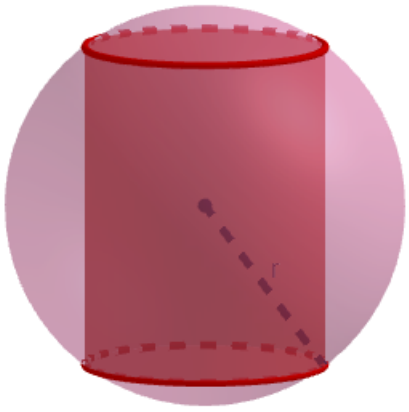

Abbildung 3: Einer Kugel eingeschriebener Zylinder.

Wie zuvor erwähnt soll das Volumen des Zylinders so groß wie möglich werden. Damit können wir bereits die Hauptbedingung aufstellen, wobei R den Radius des Zylinders und H die Höhe des Zylinders bezeichnen:

$$\text{HB:} \quad V = R^2 \pi H \,.$$

Um die Nebenbedingung aufstellen zu können ist es meistens ratsam einen Querschnitt der dreidimensionalen Figur anzufertigen um die Beziehungen zwischen den einzelnen Längen besser sehen zu können. Dieser Schritt ist auch wesentlich wenn Extremwertbeispiele in der Schule behandelt werden. Das räumliche Vorstellungsvermögen bereitet hierbei oftmals Schwierigkeiten. In unserem Fall sieht der Querschnitt so aus wie in Abbildung 4 dargestellt.

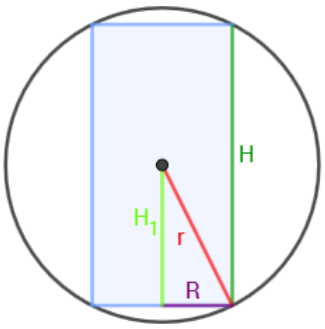

Abbildung 4: Querschnitt des Sachverhaltes.

Die im Querschnitt mit H_1 bezeichnete Länge entspricht der Hälfte der Zylinderhöhe, also $H_1 = \frac{H}{2}$. Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras können wir die Nebenbedingung aufstellen:

$$\text{NB:} \quad r^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + R^2 \,.$$

Aus dieser Nebenbedingung drückt man sich die günstigste der zwei Variablen aus. In unserem Fall drücken wir uns R^2 aus weil wir R^2 auch in die Hauptbedingung einsetzen müssen. Wir erhalten also

$$R^2 = r^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2$$

und können somit unsere Zielfunktion aufstellen. Wir setzen die Nebenbedingung in die Hauptbedingung ein und erhalten somit eine Zielfunktion, die nur noch von H abhängig ist.

$$V(H) = \pi H\left(r^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2\right) = \pi H\left(r^2 - \frac{H^2}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\left(4r^2 H - H^3\right).$$

Da wir das größtmögliche Volumen bestimmen sollen, müssen wir ein Maximum der Zielfunktion finden. Daher bilden wir die erste Ableitung und setzen diese anschließend gleich Null.

$$V'(H) = \frac{\pi}{4}(4r^2 - 3H^2)\,,$$

$$0 = 4r^2 - 3H^2 \,.$$

Wir erhalten also durch Umformen

$$H = \sqrt{\frac{4}{3}}\, r\,.$$

Mit Hilfe von H können wir nun R^2 bestimmen.

$$R^2 = r^2 - \frac{\frac{4}{3}r^2}{4} = r^2 - \frac{4r^2}{12} = \frac{2}{3}r^2 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{2}{3}}\, r\,.$$

Wir erhalten also das gesuchte Volumen V des Zylinders durch Einsetzen in die Hauptbedingung.

$$V = \frac{2}{3}r^2\pi\sqrt{\frac{4}{3}}\, r \quad \Rightarrow \quad V = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}r^3\,.$$

Ebenso kann man das Volumen ohne Berechnung von R^2 erhalten, in dem man H in die Funktion $V(H)$ einsetzt.

Um sicherzustellen, dass der gefundene Wert wirklich das Maximum ist, müssen die Randstellen noch überprüft werden. Zwei Fälle wären möglich:

$$H = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 0 \quad \text{oder}$$

$$H = 2r \quad \Rightarrow \quad R = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 0\,.$$

Wir sehen also, dass in beiden Fällen das Volumen gleich Null werden würde. Daher ist der berechnete Wert wirklich das Maximum.

Das Lösen solcher Aufgaben ist also relativ einfach und verläuft immer nach demselben Schema. Es sei nach [1, S.55] eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f = f(x, y)$ gegeben deren Extrema gesucht werden sollen. Die Paare $(x, y) \in D$ sind aber abhängig, sie erfüllen eine Nebenbedingung $g(x, y) = 0$. Die Funktion $g(x, y)$ sei hierbei gegeben durch $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Diese Nebenbedingung stellt allgemein eine glatte Kurve dar, wobei singuläre Punkte ausgenommen werden. Unter den gegebenen Voraussetzungen werden dann also Extremstellen der Funktion f eingeschränkt auf diese glatte Kurve gesucht. Diese Funktion f, die eingeschränkt werden soll, wird dann Zielfunktion genannt. So kommt man meist auf ein Extremwertproblem in einer Variablen, das durch Ableiten gelöst werden kann. Um uns diese Vorgehensweise jedoch ersparen zu können wollen wir versuchen, ein Extremum (x_0, y_0) unter den gegebenen Nebenbedingungen direkt zu bestimmen. Soweit die allgemeine Vorgehensweise in den uns bekannten eindimensionalen Beispielen.

Im Mehrdimensionalen können wir lokale Extrema unter Nebenbedingungen nicht mehr so einfach bestimmen. Wir haben nach [29, S.79] eine offene Teilmenge U aus $\mathbb{R}^s$ sowie eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ gegeben. Wir wollen für diese Funktion die lokalen Extremstellen bestimmen, wobei wir Nebenbedingungen $g_1, g_2, \ldots, g_k : U \to \mathbb{R}$ mit $k < s$ gegeben haben für die $g_1(x) = \cdots = g_k(x) = 0$ gelten soll. Wenn es möglich wäre, die gegebenen Nebenbedingungen durch explizites Auflösen nach k Variablen in der Funktion f zu eliminieren, dann könnten wir für eine in den übrigen $s-k$ Variablen definierte Funktion die lokalen Extrema leichter bestimmen. Diese Vorgehensweise lässt sich jedoch nur selten umsetzen und ist eher umständlich. Die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren liefert eine einfachere Möglichkeit um die lokalen Extremstellen der Funktion f bestimmen zu können.

6.1 Die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren

Lagrange ließ sich nach [10, S.184ff.] von zwei Quellen inspirieren um seine Methode zu entwickeln. Einerseits von Bernoulli und dessen Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit und andererseits von d'Alembert, der eine spezifischere Formulierung des Prinzips von Bernoulli vornahm. Lagrange vereinfachte die Situation allerdings noch und stellte für ein System von s Körpern eine allgemeine Gleichung der Bewegung auf. Für diese überlegte er sich dann ein geeignetes Lösungsverfahren und gelangte so zur Definition der Lagrange'schen Multiplikatoren. Die von ihm definierte Bewegungsgleichung sowie seine Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren stellen eine wichtige Grundlage für die theoretische Mechanik dar und sind bis heute wichtig um lokale Extrema unter Nebenbedingungen einfach lösen zu können.

Da diese Methode sowohl in der Mathematik als auch in der Physik und der Mechanik eine wichtige Rolle spielt, werden wir die Lagrange'schen Multiplikatoren definieren und den Satz anschließend auch beweisen.

Nach [20] formulieren und beweisen wir nun den Satz über die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren.

Satz 10 (Lagrange'sche Multiplikatoren)**.** *Die Menge $U \subseteq \mathbb{R}^s$ sei offen, wobei $s \in \mathbb{N}$ und $k < s$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt, und $(g_i)_{i=1}^k : U \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar. Für eine Stelle $a \in U$ sei außerdem $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a. Weiters sei*

$$M := \{x \in U : (g_i)_{i=1}^k(x) = 0\}$$

und die Funktion $f|_M$ habe in a ein lokales Extremum. Wenn $\{(dg_i)_{i=1}^k(a)\}$ linear unabhängig sind, dann existieren reelle Zahlen $(\lambda_i)_{i=1}^k$ sodass

$$df_{(a)} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, dg_{j(a)} \, .$$

Diese reellen Zahlen $(\lambda_i)_{i=1}^k$ bezeichnet man dann als Lagrange'sche Multiplikatoren.

Beweis. Den Beweis führen wir wie in [20] indirekt. Wir nehmen an, dass $df_{(a)}$ nicht wie im Satz geschrieben werden kann. Wir betrachten die Gleichung

$$0 = \lambda df_{(a)} + \lambda_1 dg_{1(a)} + \cdots + \lambda_k dg_{k(a)} \, .$$

Wenn $\lambda \neq 0$ wäre, dann wäre

$$df_{(a)} = -\frac{\lambda_1}{\lambda} dg_{1(a)} + \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda} dg_{k(a)} \, .$$

Das wäre dann aber eine Linearkombination, wie im Satz angegeben, und daher erhalten wir einen Widerspruch. Also muss $\lambda = 0$ sein. Weil nach Angabe im Satz $\{dg_{1(a)}, \ldots, dg_{k(a)}\}$ linear unabhängig sind, muss $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ gelten. Daher ist auch

$$\{df_{(a)}, dg_{1(a)}, \ldots, dg_{k(a)}\}$$

linear unabhängig. Deshalb gibt es auch Zeilenvektoren $v_{k+1}, \ldots, v_{s-1}$ so, dass die Menge

$$\{df_{(a)}, dg_{1(a)}, \ldots, dg_{k(a)}, v_{k+1}, \ldots, v_{s-1}\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^s$ bildet. Wenn man für ein $j \in \{k+1, \ldots, s-1\}$ eine Funktion $g_j(x)$ definiert durch $g_j(x) = v_j(x-a)$, dann ist $dg_j = v_j$ und damit ist g_j stetig differenzierbar.

Wir definieren nun wieder eine Hilfsfunktion G durch $G : U \to \mathbb{R}^s$ wobei

$$G(x) := \begin{pmatrix} df_{(a)}(x-a) \\ g_1(x) \\ \vdots \\ g_{s-1}(x) \end{pmatrix}.$$

Auch G ist stetig differenzierbar, weil

$$dG_{(x)} := \begin{pmatrix} df_{(a)} \\ dg_{1(x)} \\ \vdots \\ dg_{s-1(x)} \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$dG_{(a)} := \begin{pmatrix} df_{(a)} \\ dg_{1(a)} \\ \vdots \\ dg_{s-1(a)} \end{pmatrix}$$

invertierbar, weil die Menge $\{df_{(a)}, dg_{1(a)}, \ldots, dg_{s-1(a)}\}$ eine Basis bildet. Nun kommt der Satz über die inverse Funktion zur Anwendung. Demnach existieren offene Mengen U_1 und V_1 wobei a aus U_1 und $G(a) = 0$ aus V_1 sind, sodass die Abbildung $G : U_1 \to V_1$ bijektiv ist und die Inverse G^{-1} stetig differenzierbar ist. Es gibt ein $\delta_1 > 0$, sodass $B(0, \delta_1) \subseteq V_1$ ist. Außerdem definieren wir die Kurve

$$c(t) := G^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

für ein t aus dem Invertall $(-\delta_1, \delta_1)$. Diese Funktion ist stetig und durch Umformen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = G(c(t)) = \begin{pmatrix} df_{(a)}(c(t)-a) \\ g_1(c(t)) \\ \vdots \\ g_{s-1}(c(t)) \end{pmatrix}.$$

Für ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ ist $g_j(c(t)) = 0$, also ist $c(t)$ aus M. Durch Betrachten der ersten Komponente von $G(c(t))$ erhalten wir

$$t = df_{(a)}(c(t)-a).$$

Mit Hilfe der Kettenregel können wir diesen Ausdruck nun ableiten und wir erhalten

$$1 = df_{(a)}(\dot{c}(t)).$$

Des weiteren definieren wir eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für ein t aus dem Intervall $(-\delta_1, \delta_1)$ durch

$$h(t) := f(c(t)) \,.$$

Durch Anwenden der mehrdimensionalen Kettenregel erhalten wir nun

$$\dot{h}(0) = df_{(c(0))} \cdot \dot{c}(0) \overset{\text{weil } c(0)=G^{-1}(0)=a}{=} df_{(a)} \cdot (\dot{c}(0)) = 1 > 0 \,.$$

Daher gibt es auch ein $\delta > 0$ mit $\delta \leq \delta_1$, sodass für ein t aus dem Intervall $(-\delta, \delta)$ folgende Bedingungen gelten:

$$\text{Falls } t < 0, \text{ dann folgt dass } \underbrace{h(t)}_{=f(c(t))} < \underbrace{h(0)}_{=f(c(0))=f(a)} \text{, und}$$

$$\text{falls } t > 0, \text{ dann folgt dass } \underbrace{h(t)}_{=f(c(t))} > \underbrace{h(0)}_{=f(c(0))=f(a)} \text{ ist.}$$

Nun sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\eta > 0$ mit $\eta \leq \delta$, sodass für ein t aus dem Intervall $(-\eta, \eta)$ gilt, dass $c(t)$ aus $B(a, \varepsilon)$ ist. Wenn nun $-\eta < t < 0$, dann ist $f(\underbrace{c(t)}_{\in B(a,\varepsilon)}) < f(a)$ und wenn $0 < t < \eta$, dann ist $f(\underbrace{c(t)}_{\in B(a,\varepsilon)}) > f(a)$.

Es ist demnach a kein lokales Extremum und wir erhalten einen Widerspruch. Daher existieren reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, sodass $df_{(a)}$ geschrieben werden kann als

$$df_{(a)} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, dg_{j(a)} \,.$$

□

Nach [29, S.80] erhalten wir durch diese Methode nur mögliche Kandidaten lokaler Extremstellen der Funktion. Wenn man genauere Aussagen treffen will, ist es nötig weitere Argumente vorlegen zu können. Der Satz ermöglicht es allerdings auch, auf abgeschlossenen Definitionsbereichen Extrema zu ermitteln, vorausgesetzt man kann diese Definitionsbereiche durch Nebenbedingungen der beschriebenen Art und Weise angeben.

Nachdem wir diesen wichtigen Satz nun bewiesen haben, wollen wir die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren wieder an einigen Beispielen anwenden.

6.1.1 Beispiele

Bevor wir uns mit weiteren Beispielen zur Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren befassen, wollen wir uns nochmal die Extremwertaufgabe nach [24, S.118] ansehen, die zu Beginn dieses Kapitels angeführt wurde. Diese Aufgabe wurde zu Beginn so gelöst wie es in der Schule gelernt wird. Doch auch dieses Beispiel kann mit Hilfe der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren gelöst werden.

Einstiegsbeispiel Gegeben war eine Kugel mit Radius r der ein Zylinder mit größtem Volumen einzuschreiben ist. Unsere Hauptbedingung war also gegeben durch

$$V = R^2\pi H,$$

wobei R der Zylinderradius und H die Zylinderhöhe waren und die Nebenbedingung war gegeben durch

$$R^2 = r^2 - \frac{H^2}{4}.$$

Um die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren nun anwenden zu können benötigen wir Funktionen $V(R,H)$ und $g(R,H)$. Diese Funktionen entsprechen genau der Haupt- beziehungsweise der Nebenbedingung. So gelangen wir zu den folgenden Funktionen:

$$V(R,H) = R^2\pi H$$
$$g(R,H) = r^2 - \frac{H^2}{4} - R^2\,.$$

Diese beiden Funktionen sind stetig differenzierbar weil die partiellen Ableitungen stetig sind:

$$dV_{(R,H)} = \begin{pmatrix} 2R\pi H & R^2\pi \end{pmatrix}$$
$$dg_{(R,H)} = \begin{pmatrix} -2R & -\frac{H}{2} \end{pmatrix}\,.$$

Des weiteren gilt, dass $dg_{(R,H)} \neq 0$ ist wenn $R \neq 0$ oder $H \neq 0$ sind. Weil 0 kein Element der Kugel ist, ist $dg_{(R,H)}$ linear unabhängig für alle R und H aus dem Definitionsbereich der Kugel. Wir können also die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren anwenden und unsere Funktion F aufstellen.

$$F\begin{pmatrix} R \\ H \\ \lambda \end{pmatrix} = R^2\pi H - \lambda\Big(r^2 - \frac{H^2}{4} - R^2\Big)\,.$$

Damit gelangen wir dann zu unseren benötigten Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial R} = 2R\pi H - \lambda(-2R) \;\Rightarrow\; 0 = 2R\pi H + 2\lambda R\,,$$
$$0 = \frac{\partial F}{\partial H} = R^2\pi - \lambda\Big(-\frac{H}{2}\Big) \;\Rightarrow\; 0 = R^2\pi + \lambda\frac{H}{2}\,.$$

Aus der ersten Gleichung können wir uns nun λ ausdrücken und wir erhalten

$$2R\pi H = -2\lambda R \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{2R\pi H}{2R} = -\pi H\,.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert uns nun einen Wert für R^2, den wir dann in die Nebenbedingung einsetzen können.

$$0 = R^2\pi + (-\pi H)\frac{H}{2} = R^2\pi - \pi\frac{H^2}{2} \;\Rightarrow\; R^2 = \frac{H^2}{2}\,.$$

Nun setzen wir diesen Wert in die Nebenbedingung ein und erhalten damit den Wert für H.

$$R^2 = r^2 - \frac{H^2}{4} \quad\Rightarrow\quad \frac{H^2}{2} = r^2 - \frac{H^2}{4} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2H^2 = 4r^2 - H^2 \quad \Rightarrow \quad 3H^2 = 4r^2 \quad \Rightarrow \quad H = \sqrt{\frac{4}{3}}\, r\,.$$

Einsetzen dieses Wertes für H in die oben berechnete Gleichung $\frac{H^2}{2} = R^2$ bringt uns nun zum entsprechenden Wert für R.

$$H^2 = 2R^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}r^2 = 2R^2 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{2}{3}}\, r\,.$$

Nun haben wir die nötigen Werte berechnet und wir können uns das Volumen des Zylinders berechnen indem wir diese Werte in unsere Hauptbedingung einsetzen.

$$V(R,H) = R^2\pi H = \frac{2}{3}r^2\pi\sqrt{\frac{4}{3}}r = \pi r^3\frac{2}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} = \pi r^3\frac{4}{3\sqrt{3}}\,.$$

Wir sehen, dass dieser Wert mit dem berechneten Wert der Extremwertaufgabe übereinstimmt. Überprüfen des Randes führt uns nun auch hier zum Ergebnis, dass dieser Wert auch der maximale Wert ist. Denn wenn $\lambda = 0$ wäre, dann müssten R oder H gleich Null sein und wenn R oder H gleich Null wären, dann wäre das Volumen des Zylinders jeweils gleich Null und damit kleiner als der soeben berechnete Wert.

Beispiel 1: Ein erstes Anwendungsbeispiel Nach [29, S.81] wollen wir uns nun ein weiteres Beispiel ansehen das zeigt, wie die Lagrange'schen Multiplikatoren in der Praxis angewendet werden können: Der Kugelschale mit Radius 1 um 0 ist der volumsgrößte achsenparallele Quader einzuschreiben, wobei die Ecken des Quaders auf dieser Kugelschale liegen. Es liegt also die in Abbildung 5 dargestellte Situation vor.

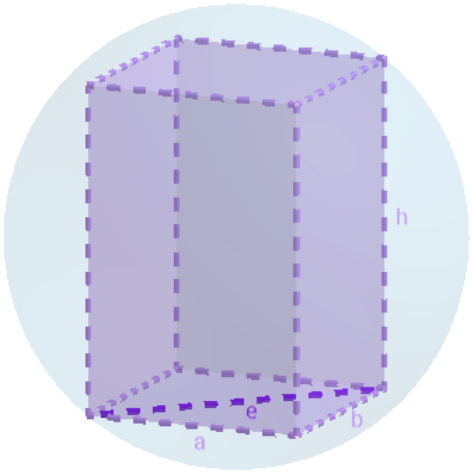

Abbildung 5: Einer Kugel eingeschriebener Quader.

In unserem Fall ist die Beschriftung des Quaders wie folgt zu verstehen: $a = 2x_1, b = 2x_2$ und $h = 2x_3$.

Wie zuvor erwähnt, kann es beim Lösen von Extremwertaufgaben in manchen Fällen wichtig sein den Querschnitt zu betrachten um erkennen zu können welche Relationen für die Nebenbedingung vorliegen. Dies wäre ein solcher Fall, da vor allem SchülerInnen oft der Fehler unterläuft, im Querschnitt die Kantenlänge a anstelle der Diagonalenlänge e einzutragen. Der Querschnitt wird in diesem Fall dargestellt in Abbildung 6.

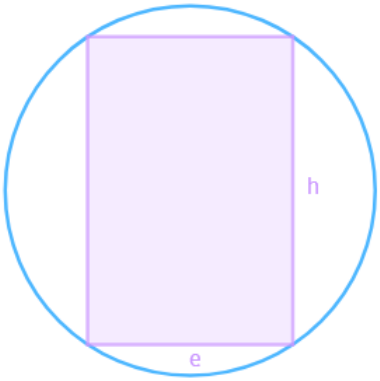

Abbildung 6: Querschnitt des gegebenen Sachverhaltes.

Nun aber zurück zu unserem Beispiel: Wir sollen also das Maximum der Funktion

$$V\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 8x_1x_2x_3$$

finden, wobei $V : [0, \infty)^3 \to \mathbb{R}$, und die Nebenbedingung gegeben ist durch

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1\,.$$

Die Funktionen V und g sind stetig differenzierbar weil

$$dg_{(x)} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$dV_{(x)} = \begin{pmatrix} 8x_2x_3 & 8x_1x_3 & 8x_1x_2 \end{pmatrix}\,.$$

Wenn $x \neq 0$, dann ist auch $dg_{(x)} \neq 0$ und $dg_{(x)}$ ist wegen $0^2 + 0^2 + 0^2 - 1 = -1 \neq 0$ linear unabhängig $\forall x$ mit $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$. Wir können also die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren anwenden und erhalten

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = 8x_1x_2x_3 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)\,.$$

Wir erhalten durch Ausführen der Methode dann folgende Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \Rightarrow \quad 8x_2x_3 = 2\lambda x_1$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_2} \quad \Rightarrow \quad 8x_1x_3 = 2\lambda x_2$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_3} \quad \Rightarrow \quad 8x_1x_2 = 2\lambda x_3\,.$$

Durch Multiplizieren der ersten Gleichung mit x_1, der zweiten Gleichung mit x_2 und der dritten Gleichung mit x_3 erhält man dann:

$$8x_1x_2x_3 = 2\lambda x_1^2$$

$$8x_1x_2x_3 = 2\lambda x_2^2$$

$$8x_1x_2x_3 = 2\lambda x_3^2\,.$$

Addieren dieser Gleichungen liefert dann das folgende Ergebnis:

$$24x_1x_2x_3 = 2\lambda(\underbrace{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}_{=1}) \quad \Rightarrow \quad 12x_1x_2x_3 = \lambda \quad \Rightarrow \quad 4x_1x_2x_3 = \frac{\lambda}{3}\,.$$

Durch Vergleichen würden wir

$$4x_1x_2x_3 = \lambda x_1^2 = \lambda x_2^2 = \lambda x_3^2 \geq 0$$

erhalten. Wenn $\lambda = 0$ wäre, dann wäre $x_1x_2x_3 = 0$, also ein $x_j = 0$ wobei $j = 1, 2, 3$. Weil V auf der Menge $[0, \infty)^3$ größer als Null ist, ist Null das Minimum der Funktion V auf der Menge $[0, \infty)^3 \cap S_1(0)$. Es ist also $\lambda \neq 0$ und Einsetzen in die Gleichungen liefert nun:

$$\frac{\lambda}{3} = 4x_1x_2x_3 = \lambda x_1^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} = x_1^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}\,,$$

$$\frac{\lambda}{3} = 4x_1x_2x_3 = \lambda x_2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} = x_2^2 \quad \Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{und}$$

$$\frac{\lambda}{3} = 4x_1x_2x_3 = \lambda x_3^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} = x_3^2 \quad \Rightarrow x_3 = \sqrt{\frac{1}{3}}\,.$$

Der volumsgrößte Quader ist also ein Würfel mit Kantenlänge $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Für das Volumen erhalten wir dann

$$V = 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 8 \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{9}\sqrt{3}\,.$$

Um sicherzustellen, dass es sich hierbei wirklich um ein Maximum handelt, müssen noch die Randstellen überprüft werden. Der Rand ist hier $\{x : x_j = 0 \text{ für ein } j \in \{1, 2, 3\}\}$. Dann ist aber $V(x_1, x_2, x_3) = 0 < \frac{8}{9}\sqrt{3} = V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Daher ist $V = \frac{8}{9}\sqrt{3}$ tatsächlich das Maximum.

Beispiel 2: Abstand eines Punktes Eine ebenfalls typische Anwendung der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren ist das Bestimmen des Abstandes eines Punktes von einer Ebene. Dazu wollen wir uns ein Beispiel aus [21] ansehen. Es soll demnach derjenige Punkt auf der Ebene

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 2$$

$$2x_1 + x_3 - 2x_4 = 18$$

bestimmt werden, der den kleinsten Abstand zum Punkt $\begin{pmatrix}2\\0\\5\\0\\0\end{pmatrix}$ hat. Hier ist A gegeben durch

$$A := \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 2, 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 18 \right\}.$$

Wir suchen nun das Minimum von

$$\left| x - \begin{pmatrix}2\\0\\5\\0\\0\end{pmatrix} \right| = \sqrt{(x_1-2)^2 + x_2^2 + (x_3-5)^2 + x_4^2 + x_5^2} \geq 0\,.$$

Auf der Menge $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ ist $x \mapsto x^2$ streng monoton steigend und deshalb hat diese Funktion dasselbe Minimum, aber nicht denselben Funktionswert an dieser Stelle, wie unsere Funktion f die gegeben ist durch

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} := \left| x - \begin{pmatrix}2\\0\\5\\0\\0\end{pmatrix} \right|^2 = (x_1-2)^2 + x_2^2 + (x_3-5)^2 + x_4^2 + x_5^2\,.$$

Wir suchen also das Minimum von f auf der Menge A. Dabei sind unsere Nebenbedingungen gegeben durch

$$g_1(x) = x_1 + x_2 + x_4 + x_5 - 2 \quad \text{und}$$

$$g_2(x) = 2x_1 + x_3 - 2x_4 - 18\,.$$

Diese sind stetig differenzierbar, weil

$$dg_{1(x)} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad dg_{2(x)} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Wir erhalten dann $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ wegen

$$0 = \lambda_1 dg_{1(x)} + \lambda_2 dg_{2(x)} = \begin{pmatrix}\lambda_1 + 2\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 - 2\lambda_2 & \lambda_1\end{pmatrix}$$

und können deshalb die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren anwenden. Wir haben also

$$F\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix} := (x_1-2)^2 + x_2^2 + (x_3-5)^2 + x_4^2 + x_5^2 +$$

$$-\lambda_1(x_1 + x_2 + x_4 + x_5 - 2) - \lambda_2(2x_1 + x_3 - 2x_4 - 18)\,.$$

Durch F gelangen wir wie zuvor zu den folgenden Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 2x_1 - 4 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = 4 + \lambda_1 + 2\lambda_2\,,$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 = \lambda_1\,,$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_3} = 2(x_3 - 5) - \lambda_2 = 2x_3 - 10 - \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad 2x_3 = 10 + \lambda_2\,,$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_4} = 2x_4 - \lambda_1 + 2\lambda_2 \quad \Rightarrow \quad 2x_4 = \lambda_1 - 2\lambda_2\,,$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_5} = 2x_5 - \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad 2x_5 = \lambda_1\,.$$

Aus der ersten Ebenengleichung erhalten wir von $x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 2$ und durch Addieren der Gleichungen dass

$$2(x_1 + x_2 + x_4 + x_5) = 4 = (4 + \lambda_1 + 2\lambda_2) + \lambda_1 + (\lambda_1 - 2\lambda_2) + \lambda_1 = 4 + 4\lambda_1,$$

also $\lambda_1 = 0$. Und aus der zweiten Ebenengleichung erhalten wir

$$2x_1 + x_3 - 2x_4 = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36 = 2(2x_1 + x_3 - 2x_4) = 2(4 + \lambda_1 + 2\lambda_2) + (10 + \lambda_2) - 2(\lambda_1 - 2\lambda_2) = 18 + 9\lambda_2\,.$$

Durch Umformen kommen wir zu dem Ergebnis, dass $\lambda_2 = 2$ ist. Diese Werte setzen wir nun in die oben aufgestellten Gleichungen für $2x_1, 2x_2, 2x_3, 2x_4, 2x_5$ ein und wir erhalten

$$2x_1 = 4 + 0 + 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4\,,$$
$$2x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0\,,$$
$$2x_3 = 10 + 2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 6\,,$$
$$2x_4 = 0 - 4 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -2\,,$$
$$2x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_5 = 0\,.$$

Eingesetzt in unsere Funktion f kommen wir zu dem Ergebnis, dass

$$f\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 + 0 + 1 + 4 + 0 = 9\,.$$

Wie im Beispiel zuvor bleibt noch zu zeigen, dass dies wirklich das gesuchte Extremum ist. Wir müssen also den Rand überprüfen. Es existiert ein $j \in \{1, \ldots, 5\}$ sodass gilt, dass $x_j \to \infty$. Dann gilt aber auch, dass

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 + (x_3 - 5)^2 + x_4^2 + x_5^2 \quad \to \quad +\infty\,.$$

Daher ist der berechnete Punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ derjenige aus der Menge A, der den kleinsten Abstand zum Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat. Dieser Abstand ist dann

$$\sqrt{(4-2)^2+0^2+(6-5)^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{9} = 3\,.$$

Wir sehen also, dass die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren hilfreich ist um Extremwerte unter Nebenbedingungen zu finden. Wie wir im nächsten Beispiel sehen werden, wird diese Methode jedoch nicht nur bei klassischen Aufgaben wie den soeben behandelten eingesetzt.

Beispiel 3: Harmonisches, geometrisches und arithmetisches Mittel Es kann mit Hilfe dieser Methode nach [29, S.81] und [21] auch gezeigt werden, dass das harmonische Mittel kleiner oder gleich dem geometrischen Mittel ist und das geometrische Mittel kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel ist. Es gilt also

$$\frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}} \leq \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j} \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n}$$

für reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n > 0$.

Wir beginnen mit der ersten Behauptung und beweisen diese nach [21]. Wir setzen zunächst $c := x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$. Nachdem $x_1, \ldots, x_n > 0$ sind, ist auch $c > 0$. Wir wollen also das Maximum von

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}}$$

unter der Nebenbedingung

$$\prod_{j=1}^{n} x_j = c$$

bestimmen. Wir überprüfen zunächst den Rand. Dieser lässt sich beschreiben indem ein j aus der Menge $\{1, \ldots, n\}$ existiert, sodass $x_j \to 0$. Dann erhalten wir

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \frac{n}{\underbrace{\frac{1}{x_j}}_{\to +\infty} + \sum_{k=1, k\neq j}^{n} \frac{1}{x_k}} \quad \to \quad 0\,.$$

Der Funktionswert den wir am Rand erhalten ist also 0. Ebenso könnte der Fall eintreten, dass es ein k aus $\{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $x_k \to +\infty$. Da dies jedoch zu einem

Widerspruch führt, falls keines der x_j gegen 0 geht, bleibt dieser Fall ausgeschlossen und wir sind mit der Untersuchung der Randstellen fertig. Somit können wir die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren anwenden um das Maximum im Inneren zu bestimmen. Wir erhalten

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda \end{pmatrix} := \frac{n}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j}} - \lambda\Big(\prod_{j=1}^n x_j - c\Big)\,.$$

Für j aus $\{1,\dots,n\}$ ist dann

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_j} = \Big(-\frac{n}{(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k})^2}\Big)\cdot\Big(-\frac{1}{x_j^2}\Big) - \lambda\prod_{k=1,k\neq j}^n x_k = \frac{n}{x_j^2}\cdot\frac{1}{(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k})^2} - \lambda\prod_{k=1,k\neq j}^n x_k\,.$$

Durch Umformen und Multiplizieren mit x_j erhält man dann

$$\frac{n}{x_j}\cdot\frac{1}{(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k})^2} = \lambda\underbrace{\prod_{k=1}^n x_k}_{=c>0} = \lambda c \quad\Rightarrow\quad x_j = \frac{n}{\lambda c}\cdot\frac{1}{(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k})^2}$$

weil $\lambda \neq 0$ ist wegen

$$\lambda = \underbrace{\frac{n}{cx_j}}_{>0}\cdot\underbrace{\frac{1}{(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k})^2}}_{>0} > 0\,.$$

Deshalb gilt $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Außerdem gilt auch dass

$$dg = \begin{pmatrix}\prod_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^n x_k & \prod_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^n x_k & \cdots & \prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^n x_k\end{pmatrix}$$

linear unabhängig ist weil all diese Einträge größer als Null sind. Wenn wir nun $u := x_1$ setzen, dann erhalten wir

$$c = \prod_{k=1}^n x_k = u^n \quad\Rightarrow\quad u = \sqrt[n]{c}\,.$$

Dann ist aber

$$f\begin{pmatrix} \sqrt[n]{c} \\ \sqrt[n]{c} \\ \vdots \\ \sqrt[n]{c} \end{pmatrix} = \frac{n}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt[n]{c}}} = \sqrt[n]{c} > 0$$

und weil der Funktionswert am Rand Null ist, gilt dann $\forall x_1,\dots,x_n > 0$ für die $\prod_{j=1}^n x_j = c$ ist, dass

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq f\begin{pmatrix} \sqrt[n]{c} \\ \vdots \\ \sqrt[n]{c} \end{pmatrix} = \sqrt[n]{c}\,.$$

Deshalb gilt also $\forall x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, dass

$$\frac{n}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j}} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j}\,.$$

Wir haben somit die harmonisch-geometrische Ungleichung bewiesen und können den zweiten Teil der Behauptung, die arithmetisch-geometrische Ungleichung, beweisen. Diese werden wir nach [29, S.81f.] beweisen. Demnach gilt diese genau dann wenn

$$a_1^2 \cdot \dots \cdot a_n^2 \leq \frac{1}{n^n}\,, \text{wobei} \quad a_i^2 := \frac{x_i}{x_1 + \dots + x_n}\,,\ i = 1, \dots, n\,.$$

Wir suchen also lokale Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(a_1, \dots, a_n) = a_1^2 \cdot \dots \cdot a_n^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(a_1, \dots, a_n) = a_1^2 + \dots + a_n^2 - 1 = 0\,,$$

also auf der abgeschlossenen Menge $S_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Weil wiederum

$$dg_{(a)} = \begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 & \dots & 2a_n \end{pmatrix} \neq 0$$

gilt, ist dg also linear unabhängig und wir können wieder die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren anwenden. Wir erhalten also

$$F \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \lambda \end{pmatrix} = (a_1^2 \cdot \dots \cdot a_n^2) - \lambda(a_1^2 + \dots + a_n^2 - 1)\,.$$

Mit Hilfe dieser Funktion gelangen wir zu den folgenden Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial a_1} = 2a_1 a_2^2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}^2 a_n^2 - 2\lambda a_1$$

$$\vdots$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial a_n} = 2a_1^2 a_2^2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}^2 a_n - 2\lambda a_n\,.$$

Durch Multiplizieren der ersten Gleichung mit a_1, der zweiten Gleichung mit a_2, ... und der n-ten Gleichung mit a_n erhalten wir durch Umformen dann:

$$2\lambda a_1^2 = 2a_1^2 a_2^2 \cdot \dots \cdot a_n^2$$

$$\vdots$$

$$2\lambda a_n^2 = 2a_1^2 a_2^2 \cdot \dots \cdot a_n^2\,.$$

Wenn wir dann durch Zwei dividieren kommen wir zum Ergebnis, dass

$$a_1^2 a_2^2 \cdot \dots \cdot a_n^2 = \lambda a_1^2 = \lambda a_2^2 = \dots = \lambda a_n^2 \geq 0.$$

Wenn $\lambda = 0$ wäre, dann wäre $a_1^2 \cdot \dots \cdot a_n^2 = 0$ und somit auch $f \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$. Weil aber f auf $\mathbb{R}^n$ größer gleich Null ist, ist Null wieder das Minimum von der Funktion f auf

der gegebenen Menge $S_1(0)$. Wenn $\lambda \neq 0$ ist, dann gilt dass $a_1^2 = a_2^2 = \cdots = a_n^2$ und wir erhalten durch Einsetzen in die Nebenbedingung, dass

$$a_1^2 = a_2^2 = \cdots = a_n^2 = \frac{1}{n}\,.$$

Dieses Ergebnis erhält man durch Addieren und Umformen der obigen Gleichungen. Addieren liefert die Gleichung

$$2\lambda(a_1^2 + \cdots + a_n^2) = 2n a_1^2 \cdot \cdots \cdot a_n^2$$

und durch Dividieren durch 2 und n erhält man dann

$$\frac{\lambda}{n}(a_1^2 + \cdots + a_n^2) = a_1^2 \cdot \cdots \cdot a_n^2\,.$$

Durch Einsetzen in die obigen Gleichungen erhält man dann die Werte für a_1 bis a_n :

$$\lambda a_1^2 = \frac{\lambda}{n}(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \quad |{:}\,\lambda$$

$$a_1^2 = \frac{1}{n}\underbrace{(a_1^2 + \cdots + a_n^2)}_{=1} \quad \Rightarrow \quad a_1^2 = \frac{1}{n}\,.$$

Äquivalent dazu erhält man die restlichen Werte und somit ist dann

$$a_1^2 \cdot \cdots \cdot a_n^2 = f\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \leq f_{max} := f\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} = \frac{1}{n^n}$$

und wir haben auch die arithmetisch-geometrische Ungleichung mit Hilfe der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren gezeigt.

Neben den eher klassischen Extremwertbeispielen findet die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren auch in anderen Bereichen der Mathematik Anwendung. Auf eine dieser Anwendungen wollen wir nun noch näher eingehen.

6.2 Die Entropie - eine weitere Anwendung der Lagrange'schen Multiplikatoren

Auch die Lagrange'schen Multiplikatoren werden, ähnlich wie der Fixpunktsatz nach Banach, außerhalb der Analysis angewendet - nämlich ebenfalls in der Stochastik. Dieses mal geht es allerdings um die Entropie. Zunächst definieren wir dafür nach [22] einen Wahrscheinlichkeitsvektor.

Definition 10 (Wahrscheinlichkeitsvektor)**.** Wir nennen $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ einen Wahrscheinlichkeitsvektor oder eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, falls

(i) $p_j \geq 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ und

(ii) $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1\,.$

Es geht nun um die Frage, welche durchschnittliche Information uns ein solcher Wahrscheinlichkeitsvektor liefert. Um diese Frage beantworten zu können, kommt nun die Entropie ins Spiel. Die Definition der Entropie formulieren wir ebenfalls nach [22].

Definition 11 (Entropie)**.** Es sei $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ ein Wahrscheinlichkeitsvektor. Man nennt dann

$$h\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = -\sum_{j=1}^{n} p_j \, \log(p_j)$$

die Entropie dieses Wahrscheinlichkeitsvektors, die der durchschnittlichen Information entspricht die er uns liefert. Es gilt außerdem $-0 \cdot \log 0 := 0$.

Nun können wir nach [22] den Satz formulieren für dessen Beweis die Lagrange'schen Multiplikatoren verwendet werden.

Satz 11. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt dann für alle Wahrscheinlichkeitsvektoren* $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, *dass*

$$h\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \leq \log(n)$$

ist. Außerdem gilt $h\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \log(n)$ *genau dann für einen Wahrscheinlichkeitsvektor* $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, *wenn für alle j aus $\{1, 2, \ldots, n\}$ gilt, dass $p_j = \frac{1}{n}$.*

Der Beweis dieses Satzes wird nach [22] durch Induktion nach n geführt. Der Fall $n = 1$ ist klar, da hierbei 1 der einzig mögliche Wahrscheinlichkeitsvektor ist: $h(1) = -1 \cdot \log 1 = 0 = \log 1\,.$ Der Induktionsschritt für $n > 1$ wird dann mit Hilfe der Lagrange'schen Multiplikatoren geführt. Die Funktion

$$F = -\sum_{k=1}^{n} p_k \, \log(p_k) - \lambda\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k - 1\Big)$$

wird behandelt und führt mit Hilfe dieser Methode zum gewünschten Resultat. Da nach Induktionsvoraussetzung

$$h\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \leq \log\,(n-1) < \log(n)$$

ist, falls eines der $p_j = 0$ ist, befindet sich das gesuchte Maximum an der Stelle $\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

Damit haben wir nun die wichtigsten Folgerungen des Satzes über die inverse Funktion im Bereich der mehrdimensionalen Differenzierbarkeit ausreichend behandelt. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, kommt dieser Satz auch in Bezug auf die mehrdimensionalen Integrale vor. Damit wollen wir uns im nächsten Kapitel noch genauer befassen.

7 Mehrdimensionale Integrale

Der Satz über die inverse Funktion wird also auch verwendet um ein wesentliches Hilfsmittel zur Berechnung mehrdimensionaler Integrale herleiten zu können. Bevor wir jedoch die Transformationsformel beweisen, beschäftigen wir uns mit der allgemeinen Problemstellung.

Das uns vertraute Integral - das Riemann-Integral - haben wir seit der Schulzeit dafür verwendet um wie nach [8, S.356] die Fläche zu berechnen, die ein Funktionsgraph mit der $x-$Achse einschließt. Dabei hatten wir es allerdings nur mit Funktionen in einer Variablen zu tun. Die nächste Steigerung wären dann Funktionen in zwei Variablen, also Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ mit M aus $\mathbb{R}^2$. Hierbei misst das Integral keine Fläche mehr, sondern das Volumen das die Oberfläche $z = f(x, y)$ mit der $(x, y)-$Ebene einschließt. Wir wollen uns im Folgenden nun die nötigen Techniken zu eigen machen um das soeben vorgestellte Konzept auf beliebig hohe Dimensionen zu verallgemeinern.

Wenn wir nach [17, S.37,50] eindimensionale Integrale berechnen wollen so steht uns eine Vielzahl von Techniken und Verfahren zur Verfügung die wir verwenden können. Viele dieser Methoden kennen wir bereits aus der Schule. Lässt sich ein Integral nicht direkt berechnen, so können wir uns helfen indem wir die Substitutionsmethode oder die partielle Integration anwenden. Auch der für die Substitutionsregel grundlegende Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wird bereits in der Schule thematisiert. Verallgemeinert wird dieser dann nach [4, S.213] wie folgt formuliert:

Satz 12 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Es sei die Funktion f, für die gilt dass $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, stetig. Dann ist f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$. Außerdem besitzt f eine Stammfunktion, also es existiert eine stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ für die gilt, dass $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in (a, b)$. Sei F irgendeine Stammfunktion von f, so gilt dass $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.*

Die Substitutionsregel bekommen wir nun direkt über diesen Hauptsatz und sie liefert uns das Ergebnis, das wir in der Differentialrechnung als Kettenregel bezeichnen würden. Auch die Partialbruchzerlegung liefert uns eine weitere Möglichkeit um Integrale relativ leicht berechnen zu können. Wir haben also eine Vielzahl von Möglichkeiten gegeben. Solange man sich im Eindimensionalen für die beste dieser Möglichkeiten entscheidet, können sehr viele Integrale leicht berechnet werden.

Im Mehrdimensionalen können Integrale nicht mehr so einfach berechnet werden. Um ein Integral in höheren Dimensionen bestimmen zu können, stehen uns nach [17, S.37] zwei wichtige Möglichkeiten zur Verfügung. Einerseits der Satz von Fubini und andererseits die Transformationsformel. Mit Hilfe des Satzes von Fubini können wir höherdimensionale Integrale auf eindimensionale Integrale zurückführen. Wollen wir ein

n-dimensionales Integral berechnen, so können wir n eindimensionale Integrale hintereinander ausführen und erhalten das gewünschte Ergebnis. Die Voraussetzungen dieses Satzes sind noch dazu sehr weit gefasst, weshalb er sich in der Praxis gut anwenden lässt. Die n-dimensionale Transformationsformel, um die es in diesem Kapitel hauptsächlich gehen wird, ermöglicht das Lösen eines Integrals unter Anwendung bestimmter Koordinaten, beispielsweise der Polarkoordinaten. Nach [17, S.37] sowie [10, S.261] gibt es noch eine dritte Möglichkeit zur Lösung mehrdimensionaler Integrale. Der Satz von Stokes kann demnach als eine verallgemeinerte Form des zuvor erwähnten Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für höherdimensionale Räume angesehen werden. Wenn nach [10, S.261] eine Funktion gegeben ist deren Integral berechnet werden soll, so verbindet der Satz von Stokes dieses Integral mit demjenigen einer anderen Funktion, die davon abhängig ist, auf einer Menge die eine geringere Dimension aufweist. Dieser Satz soll lediglich die Möglichkeiten die wir haben vervollständigen und wird daher im Anschluss an den Beweis der Transformationsformel angeführt, jedoch nicht mehr bewiesen. Wir wollen uns nun genauer mit der Transformationsformel befassen. Die Herleitung und der Beweis dieser Formel lassen sich nicht mehr so einfach unter Bezugnahme auf eindimensionale Techniken bewerkstelligen, weshalb wir die nötigen begrifflichen Voraussetzungen zunächst klären werden bevor wir den Satz formulieren und beweisen.

Für das Verständnis der folgenden Sätze und Beweise sind einige Begriffe wichtig weshalb diese zunächst angeführt werden. Insbesondere geht es um den Begriff der Jordan-Messbarkeit von Mengen. Wenn nach [7, S.208] eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt ist, dann kann ein abgeschlossener Quader Q gefunden werden, der A enthält. Durch jede mögliche Zerlegung des Quaders Q erhalten wir Teilquader Q_j des Quaders Q. In unserem Fall sind diese Quader $(Q_j)_{j=1}^n$ nach [20] achsenparallel und halboffen. Das Jordan-Maß, das in Kürze definiert wird, erhalten wir dann nach [7, S.208] als Summe dieser Teilquader. Diese Quadersumme stellt eine endliche Vereinigung dieser Quader dar, wobei die Teilquader so gewählt werden, dass jeweils zwei von ihnen maximal gemeinsame Randpunkte enthalten. Demnach definieren wir nach [20] noch das Jordanmaß eines achsenparallelen halboffenen Quaders.

Definition 12 (Jordanmaß eines achsenparallelen halboffenen Quaders)**.** Es sei $a < b$ und wir setzen $[a,b) := \{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j < b_j \quad \forall j \in \{1,\dots,n\}\}$. Dann ist $[a,b)$ ein halboffener Quader. Das Jordanmaß dieses Quaders ist dann das Produkt der Seitenlängen, also

$$\lambda([a,b)) := \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)\,.$$

Wir werden nun nach [7, S.208] und [20] das innere und das äußere Jordan-Maß sowie die Jordan-Messbarkeit einer Menge definieren.

Definition 13 (inneres Jordan-Maß)**.** Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann nennen wir

$$\underline{\lambda}(A) := \sup\Big\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda(Q_j) : \cup_{j=1}^{n} Q_j \subseteq A, Q_j \text{ paarweise disjunkt } \Big\}$$

das innere Jordan-Maß der Menge A.

Definition 14 (äußeres Jordan-Maß)**.** Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann nennen wir

$$\overline{\lambda}(A) := \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda(Q_j) : A \subseteq \cup_{j=1}^{n} Q_j \Big\}$$

das äußere Jordan-Maß der Menge A.

Mit Hilfe dieser Definitionen können wir nun ebenfalls nach [7, S.208] die Definition für die Jordan-Messbarkeit anführen.

Definition 15 (Jordan-Maß)**.** Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Die Menge A nennt man genau dann Jordan-messbar, wenn das innere gleich dem äußeren Jordan-Maß ist, wenn also $\underline{\lambda}(A) = \overline{\lambda}(A)$ gilt. Es ist dann

$$\lambda(A) = \underline{\lambda}(A) = \overline{\lambda}(A)$$

das Jordan-Maß der Menge A.

Nach [31, S.128,16] können wir nun noch das folgende Korollar zu Jordan-messbaren Mengen sowie die Definition kompakter Mengen formulieren.

Korollar 4 (Jordan-messbare Mengen)**.** *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Menge A heißt dann Jordan-messbar, wenn A beschränkt ist und wenn das Jordan-Maß des Randes von A gleich 0 ist, also wenn der Rand das Jordan-Maß 0 hat.*

Definition 16 (Kompakte Mengen)**.** Es sei (X, d) ein metrischer Raum und es sei $K \subseteq X$. Die Menge K heißt dann kompakt, wenn man von jeder offenen Überdeckung der Menge K in X endlich viele Mengen auswählen kann, die die Menge K ebenfalls überdecken.

Auch der Satz von Minimum und Maximum spielt im Beweis der Transformationsformel eine wichtige Rolle. Daher wird dieser nach [29, S.16] formuliert.

Satz 13 (Satz von Minimum und Maximum)**.** *Wenn (X, d) ein kompakter metrischer Raum ist und die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann hat diese Funktion auf X ein Minimum und auch ein Maximum. Es gibt also x_1, x_2 aus X, sodass $f(x_1) = \min\{f(x) : x \in X\}$ und $f(x_2) = \max\{f(x) : x \in X\}$. Es gilt dann also $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in X$.*

Neben dem Satz über die inverse Funktion spielt vor allem auch der Satz von Fubini eine wesentliche Rolle um die Transformationsformel beweisen zu können. Da der Satz von Fubini für das Lösen von höherdimensionalen Integralen grundlegend ist, wird dieser Satz etwas genauer behandelt.

7.1 Der Satz von Fubini

Wie bereits zuvor erwähnt, wird es uns nach [17, S.38] durch den Satz von Fubini ermöglicht, ein n-dimensionales Integral als Aneinanderreihung eindimensionaler Integrale zu berechnen. Diese Idee entspringt dem Cavalierischen Prinzip. Demnach entspricht jeder Schnitt einer abgeschlossenen Menge in der (x, y)-Ebene wieder einer abgeschlossenen Menge, allerdings einer eindimensionalen Menge, deren Maß ebenfalls eindimensional ist. Das stimmt auf jeden Fall wenn es um das Flächenmaß von Intervallen geht weil die Fläche eines 2-Intervalls als Produkt seiner Seitenlängen angegeben werden kann. Weil sich zweidimensionale Mengen als disjunkte Vereinigung von solchen 2-Intervallen angeben lassen, gilt dies auch für diese Mengen. Auf diese Art und Weise kann das

Prinzip immer weiter verallgemeinert werden und genau das leistet der Satz von Fubini: der Gedanke des Cavalierischen Prinzips wird auf Maße beliebiger Dimensionen verallgemeinert, wobei diese Maße als Produktmaße angegeben werden können.

Wenn nach [9, S.451] die Funktion f stetig auf einem Intervall I ist, wobei I definiert ist durch $I := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$, dann gilt

$$\int_I f = \int_{a_p}^{b_p} \left(\int \ldots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} dx_1 \right) dx_2 \right) \ldots \right) dx_p \,.$$

Die Reihenfolge der Integrale kann hier außerdem vertauscht werden. Da nach dieser Satz besonders wichtig für die Praxis des Integrierens ist, werden wir den Iterationssatz nach [20] nochmals genau formulieren und anschließend beweisen.

Satz 14 (Satz von Fubini - Iterationssatz)**.** *Es sei die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, wobei A definiert ist durch*

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} : a \leq x_1 \leq b, g_1^{(1)}(x_1) \leq x_2 \leq g_2^{(1)}(x_1), \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, g_1^{(p-1)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix} \leq x_p \leq g_2^{(p-1)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix} \right\}$$

und $g_1^{(j)}$ und $g_2^{(j)}$ stetig sind. Dann gilt für $\int_A f$ die folgende Formel:

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_{g_1^{(1)}(x_1)}^{g_2^{(1)}(x_1)} \left(\int_{g_1^{(2)}\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)}^{g_2^{(2)}\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)} \left(\ldots \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \ldots \left(\int_{g_1^{(p-1)}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix}}^{g_2^{(p-1)}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix}} f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} dx_p \right) \ldots \right) dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1 \,.$$

Beweis. Den Beweis werden wir durch Induktion nach p führen. Die Menge A ist kompakt und die Funktion f, wobei $f : A \to \mathbb{R}$, ist stetig. Deshalb gibt es ein $c > 0$ sodass $|f| \leq c$ ist und f gleichmäßig stetig ist. Wenn wir für den Induktionsanfang $p = 1$ setzen, dann sehen wir sofort dass wir ein eindimensionales Integral erhalten, das bereits in der gewünschten Form ist.

Nun sei $p > 1$ und x_1 sei aus dem Intervall $[a, b]$, wird also festgehalten. Wir definieren nun die Menge $A(x_1)$ durch

$$A(x_1) := \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} : g_1^{(1)}(x_1) \leq x_2 \leq g_2^{(1)}(x_1), g_1^{(2)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq x_3 \leq g_2^{(2)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, g_1^{(p-1)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix} \leq x_p \leq g_2^{(p-1)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit ist diese Menge ein Normalbereich im $\mathbb{R}^{p-1}$ und es gilt $\lambda^{(p-1)}(\partial A(x_1)) = 0$.

Wir definieren nun eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$g(x_1) := \int_{A(x_1)} f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} .$$

Nachdem x_1 fixiert wurde, handelt es sich hierbei also um ein $(p-1)-$ dimensionales Integral. Es sei nun $\varepsilon > 0$ und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\varepsilon \leq 1$ ist. Weiters sei x_1 aus dem Intervall $[a, b]$. Dann gibt es ein $\delta_0 > 0$ sodass

$$\left| \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right| < \delta_0$$

gilt. Daraus folgt nun, dass

$$\left| f \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} y \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right| < \frac{\varepsilon}{2(\lambda(A(x_1)) + 1)}$$

ist. Es gibt eine Menge P^* die gegeben ist durch $P^* = \{P_1, \ldots, P_n\}$ wobei die $P_1, \ldots, P_n$ offene Quader sind. Für diese Menge gilt, dass $\bigcup\limits_{P \in P^*} P \supseteq \partial A$ ist und $\sum\limits_{P \in P^*} \lambda(P) < \frac{\varepsilon}{4c}$ ist. Es gibt dann aber ein $\delta > 0$ mit $\delta \leq \delta_0$ für das gilt, dass für alle y aus dem Intervall $[a, b]$ die $|y - x_1| < \delta$ erfüllen, $\partial A(y) \subseteq \bigcup\limits_{P \in P^*} P$ gilt. Mit Hilfe dieser Voraussetzungen können wir nun nachweisen, dass g stetig und damit Riemann-integrierbar auf dem Intervall $[a, b]$ ist.

$$|g(y) - g(x_1)| = \left| \int_{A(y)} f \begin{pmatrix} y \\ \tilde{x} \end{pmatrix} - \int_{A(x_1)} f \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \int_{A(y) \cap A(x_1)} \left(f \begin{pmatrix} y \\ \tilde{x} \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \right) + \int_{A(y) \setminus A(x_1)} f \begin{pmatrix} y \\ \tilde{x} \end{pmatrix} - \int_{A(x_1) \setminus A(y)} f \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \right| \leq$$

$$\overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \int_{A(y) \cap A(x_1)} \underbrace{\left| f \begin{pmatrix} y \\ \tilde{x} \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2(\lambda(A(x_1))+1)}} +$$

$$+ \int_{A(y) \setminus A(x_1)} \underbrace{\left| f \begin{pmatrix} y \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \right|}_{\leq c} + \int_{A(x_1) \setminus A(y)} \underbrace{\left| f \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \right|}_{\leq c} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(\lambda(A(x_1)) + 1)} \underbrace{\lambda(A(y) \cap A(x_1))}_{\leq \lambda(A(x_1))} + c \Big(\underbrace{\lambda(\underbrace{A(y) \setminus A(x_1)}_{\subseteq \bigcup\limits_{P \in P^*} P})}_{< \frac{\varepsilon}{4c}} + \underbrace{\lambda(\underbrace{A(x_1) \setminus A(y)}_{\subseteq \bigcup\limits_{P \in P^*} P})}_{< \frac{\varepsilon}{4c}} \Big) <$$

$$< \varepsilon \underbrace{\frac{\lambda(A(x_1))}{2(\lambda(A(x_1)) + 1)}}_{\leq \frac{1}{2}} + c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon .$$

Daraus folgt nun, dass g stetig und daher auch Riemann-integrierbar auf $[a,b]$ ist.

Auch die Funktion f ist Riemann-integrierbar auf der Menge A. Es sei $\varepsilon > 0$. Außerdem existiert ein P_0^* von A, wobei für alle Verfeinerungen Q von P_0^* und für alle Zwischenwerte $\widetilde{Q}$ gilt, dass

$$\Big| \int_A f - S(f, Q, \widetilde{Q}) \Big| < \frac{\varepsilon}{4} .$$

Des weiteren gibt es auch ein P_1^* vom Intervall $[a,b]$ sodass für alle Verfeinerungen Q von P_1^* und für alle Zwischenwerte $\widetilde{Q}$ gilt, dass

$$\Big| \int_a^b g(x_1) dx_1 - S(g, Q, \widetilde{Q}) \Big| < \frac{\varepsilon}{4} .$$

Nun wählen wir eine Partition P_1 vom Intervall $[a,b]$ so, dass diese Partition P_1 eine Verfeinerung von P_1^* darstellt und gilt, dass

$$\{\pi_1(x) : x \text{ Eckpunkt von einem Element aus } P_0^* \text{ ist } \} \subseteq$$
$$\subseteq \{x : x \text{ Endpunkt von einem Element aus } P_1 \text{ ist } \} .$$

Wir setzen nun $P_1 = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ und die Zwischenwerte $\widetilde{P}_1 = (\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$. Nun sei $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist $g(\widetilde{x}_k) = \int_{A(\widetilde{x}_k)} f \begin{pmatrix} \widetilde{x}_k \\ \widetilde{x} \end{pmatrix}$ und es gibt ein $\hat{P}_k$ von $A(\widetilde{x}_k)$ so, dass für alle Verfeinerungen Q von $\hat{P}_k$ und für alle Zwischenwerte $\widetilde{Q}$ gilt, dass

$$\Big| g(\widetilde{x}_k) - S\Big(f \begin{pmatrix} \widetilde{x}_k \\ \widetilde{x} \end{pmatrix}, Q, \widetilde{Q} \Big) \Big| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} .$$

Nun wählen wir eine weitere Partition P_2 so, dass diese Partition eine Verfeinerung von $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n, \pi^{(p-1)}(P_0^*)$ darstellt. Die Partition P von A können wir dann durch $P := \{R \times S : R \in P_1, S \in P_2\}$ definieren, wobei P eine Verfeinerung von P_0^* ist. Die Zwischenwerte $\widetilde{P}$ können wir nun so wählen, dass für alle y aus $\widetilde{P}$ gilt, dass $\pi_1(y) \in \{\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n\}$. Mit Hilfe dieser Voraussetzungen können wir nun unser gewünschtes Resultat nachweisen.

$$\Big| \int_A f - \int_a^b g(x_1)\, dx_1 \Big| \leq$$

$$\leq \underbrace{\Big| \int_A f - S(f, P, \widetilde{P}) \Big|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} + \Big| S(f, P, \widetilde{P}) - S(g, P_1, \widetilde{P}_1) \Big| + \underbrace{\Big| S(g, P_1, \widetilde{P}_1) - \int_a^b g_1(x_1)\, dx_1 \Big|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \Big| \sum_{\underbrace{Q}_{=R\times S} \in P} f(\widetilde{x}_Q) \underbrace{\lambda(Q)}_{=\lambda(R)\lambda(S)} - \sum_{j=1}^{n} g(\widetilde{x}_j)\lambda(Q_j) \Big| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{n} \lambda(Q_j) \underbrace{\Big| \underbrace{\sum_{S\in P_2} f(\widetilde{x}_{R\times S})\lambda(S)}_{=S(f,P_2,\widetilde{P}_2)} - g(\widetilde{x}_j) \Big|}_{\leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)}} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \lambda(Q_j)}_{=b-a} = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon \,.$$

Daher ist $\int_A f = \int_a^b g(x_1)\,dx_1$ wobei $g(x_1) = \int_{A(x_1)} f\begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix}$. Nach der Induktionsvoraussetzung erhalten wir nun dass

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_{g_1^{(1)}(x_1)}^{g_2^{(1)}(x_1)} \left(\dots \left(\int_{g_1^{(p-1)}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix}}^{g_2^{(p-1)}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix}} f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} dx_p \right) \dots \right) dx_2 \right) dx_1 \,.$$

Wir haben unser gewünschtes Resultat erhalten und somit den Satz von Fubini bewiesen. □

Dass dieser Satz in der Praxis oft verwendet wird, werden wir an den Beispielen die noch folgen sehen. Nun werden wir nach [9, S.450] noch den verallgemeinerten Satz von Fubini und seine Folgerungen formulieren. Damit haben wir dann die nötigen theoretischen Grundlagen um uns mit der Transformationsformel zu befassen.

Satz 15 (Satz von Fubini - verallgemeinert)**.** *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}^p$ ein p-dimensionales Intervall und es sei $J \subseteq \mathbb{R}^q$ ein q-dimensionales Intervall und es seien I und J kompakt. Weiters sei $I \times J \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ das $(p+q)$-dimensionale Produktintervall. Dann ist $I \times J$ kompakt. Ist die Funktion $f : I \times J \to \mathbb{R}$ so gegeben, dass $y \mapsto f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Riemann-integrierbar auf I ist und die Abbildung $g(y) := \int_J f(x,y)\,dx$ für alle y aus J existiert, dann ist die Funktion g Riemann-integrierbar auf J und damit ist f Riemann-integrierbar auf $I \times J$ und es gilt dann*

$$\int_{I\times J} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_J \left(\int_I f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx \right) dy \,.$$

Außerdem erhalten wir daraus auch den Satz über die Vertauschung der Reihenfolge der Integrale. Denn wenn die Funktion f auf $I \times J$ Riemann-integrierbar ist und die Integrale

$$\int_I f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx \quad \forall y \in J \quad , \quad \int_J f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy \quad \forall x \in I$$

existieren, dann gilt dass

$$\int_I \left(\int_J f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy \right) dx = \int_J \left(\int_I f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx \right) dy = \int_{I\times J} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Dass diese beiden Integrale existieren folgt aus der Stetigkeit von f.

Der Satz von Fubini soll es also ermöglichen, mehrdimensionale Integrale durch eindimensionale Integrale lösen zu können. Um nachvollziehen zu können wie diese Vorgangsweise in der Praxis aussieht, werden wir den Satz an Beispielen anwenden.

7.1.1 Beispiele

Nach [21] betrachten wir die folgenden Beispiele zum Satz von Fubini. Wir werden sehen, dass wir selbst den Schwierigkeitsgrad der Integration beeinflussen können indem wir die Integrale in eine geschickte Reihenfolge bringen um den Aufwand gering zu halten. Der Satz von Fubini ermöglicht es uns also nicht nur, mehrdimensionale Integrale relativ einfach zu berechnen, sondern erlaubt es uns auch diese Integrale durch Vertauschung der Einzelintegrale möglichst einfach lösen zu können.

Beispiel 1 Wir wollen das Doppelintegral

$$\iint_A (3x_1 + 2x_2^2)$$

berechnen, wobei die Menge A gegeben ist durch

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \right\}.$$

Diese Menge entspricht einem Dreieck mit folgenden Eckpunkten:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Graphisch dargestellt kann man die Menge A also wie in Abbildung 7 betrachten.

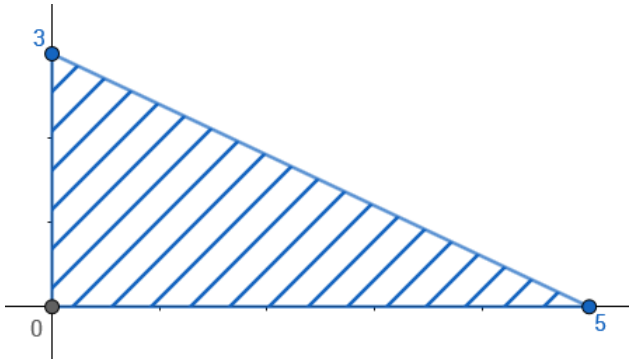

Abbildung 7: Graphische Darstellung der Menge A.

Wenn wir nun ein festes x_1 aus $[0, 5]$ annehmen, dann gilt

$$0 < x_2 < 3 - \frac{3}{5}x_1.$$

Nehmen wir ein festes x_2 aus $[0, 3]$, so gilt

$$0 < x_1 < 5 - \frac{5}{3}x_2.$$

Für das Doppelintegral, das wir berechnen wollen, gilt dann nach dem Satz von Fubini also

$$\iint_A (3x_1 + 2x_2^2) = \int_0^5 \left(\int_0^{3-\frac{3}{5}x_1} (3x_1 + 2x_2^2)\, dx_2 \right) dx_1 =$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{5-\frac{5}{3}x_2} (3x_1 + 2x_2^2)\, dx_1 \right) dx_2 \,.$$

Wir haben somit das gegebene Doppelintegral durch zwei Einzelintegrale ausgedrückt, die wir wie gewohnt berechnen können. Außerdem können wir die Reihenfolge der Integrale vertauschen und müssen lediglich auf die Integrationsgrenzen und die Reihenfolge achten. Der Wert des Integrals bleibt gleich, unabhängig von der Integrationsreihenfolge. Somit können wir den Wert des Doppelintegrals berechnen.

$$\iint_A (3x_1 + 2x_2^2) = \int_0^5 \left(\int_0^{3-\frac{3}{5}x_1} (3x_1 + 2x_2^2)\, dx_2 \right) dx_1 =$$

$$= \int_0^5 \left(\int_0^{3-\frac{3}{5}x_1} 3x_1\, dx_2 + \int_0^{3-\frac{3}{5}x_1} 2x_2^2\, dx_2 \right) dx_1 =$$

$$= \int_0^5 \left(3x_1 x_2 \Big|_0^{3-\frac{3}{5}x_1} + \frac{2}{3} x_2^3 \Big|_0^{3-\frac{3}{5}x_1} \right) dx_1 = \int_0^5 \left(3x_1 \cdot \left(3 - \frac{3}{5}x_1\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(3 - \frac{3}{5}x_1\right)^3 \right) dx_1 =$$

$$= \int_0^5 \left(-\frac{18}{125}x_1^3 + \frac{9}{25}x_1^2 - \frac{9}{5}x_1 + 18 \right) dx_1 = \left(-\frac{18}{125}\frac{x_1^4}{4} + \frac{9}{25}\frac{x_1^3}{3} - \frac{9}{5}\frac{x_1^2}{2} + 18x_1 \right) \Big|_0^5 =$$

$$= -\frac{45}{2} + 15 - \frac{45}{2} + 90 = 60 \,.$$

Beispiel 2 Dieses mal wollen wir das dreifache Integral

$$\iiint_A x_1^2 x_3$$

berechnen, wobei die Menge A wiederum gegeben ist durch

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \right\}.$$

Auch diese Menge lässt sich wie in Abbildung 8 noch gut graphisch darstellen.

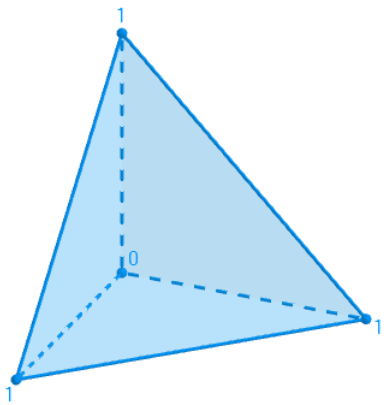

Abbildung 8: Die Menge A graphisch dargestellt.

Im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel müssen wir hier noch genauer auf die Wahl der Integrationsgrenzen achten. Es gilt $0 \leq x_1 \leq 1$ und wenn wir ein festes x_1 annehmen, dann erhalten wir für x_3 die Abschätzung

$$0 \leq x_3 \leq 1 - x_1 \,.$$

Nehmen wir nun feste Werte für x_1 und x_3 an, so erhalten wir für x_2 die Abschätzung

$$0 \leq x_2 \leq 1 - x_1 - x_3 \,.$$

Nun können wir wieder den Satz von Fubini anwenden und das dreidimensionale Integral durch drei eindimensionale Integrale darstellen.

$$\begin{aligned}
\iiint_A x_1^2 x_3 &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_1} \left(\int_0^{1-x_1-x_3} x_1^2 x_3 \, dx_2 \right) dx_3 \right) dx_1 = \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_1} \left(x_1^2 x_3 x_2 \Big|_0^{1-x_1-x_3} \right) dx_3 \right) dx_1 = \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_1} \left(x_1^2 x_3 (1 - x_1 - x_3) \right) dx_3 \right) dx_1 = \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_1} \left(x_1^2 x_3 - x_1^2 x_3^2 - x_1^3 x_3 \right) dx_3 \right) dx_1 = \\
&= \int_0^1 \left(\left(x_1^2 \frac{x_3^2}{2} - x_1^2 \frac{x_3^3}{3} - x_1^3 \frac{x_3^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x_1} \right) dx_1 = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x_1^2 (1 - x_1)^2 - \frac{1}{3} x_1^2 (1 - x_1)^3 - \frac{1}{2} x_1^3 (1 - x_1)^2 \right) dx_1 = \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{6} x_1^5 + \frac{1}{2} x_1^4 - \frac{1}{2} x_1^3 + \frac{1}{6} x_1^2 \right) dx_1 = \\
&= \left(-\frac{1}{36} x_1^6 + \frac{1}{10} x_1^5 - \frac{1}{8} x_1^4 + \frac{1}{18} x_1^3 \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{36} + \frac{1}{10} - \frac{1}{8} + \frac{1}{18} = \frac{1}{360} \,.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes von Fubini konnten wir also auch dieses dreifache Integral problemlos berechnen. Im nächsten Beispiel werden wir jedoch sehen, dass wir auch auf die Eigenschaften der Funktionen selbst achten müssen, bevor wir den Satz von Fubini anwenden können.

Beispiel zum falschen Gebrauch des Satzes von Fubini Es sei nach [11, S.87f.] die Funktion

$$f(x, y) := \frac{x - y}{(x + y)^3}$$

gegeben. Zu zeigen ist hier, dass

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dy \right) dx$$

gilt. Dafür setzen wir

$$I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := \int_{\varepsilon_2}^1 \int_{\varepsilon_1}^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx\, dy\,,$$

wobei $0 < \varepsilon_1 < 1$ und $0 < \varepsilon_2 < 1$ gelten. Dieses Integral wollen wir nun berechnen.

$$\int_{\varepsilon_2}^1 \int_{\varepsilon_1}^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx\, dy = \int_{\varepsilon_2}^1 \int_{\varepsilon_1}^1 \frac{(x+y)-2y}{(x+y)^3}\, dx\, dy =$$

$$= \int_{\varepsilon_2}^1 \int_{\varepsilon_1}^1 \left(\frac{x+y}{(x+y)^3} - \frac{2y}{(x+y)^3} \right) dx\, dy = \int_{\varepsilon_2}^1 \int_{\varepsilon_1}^1 \left(\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{2y}{(x+y)^3} \right) dx\, dy =$$

$$= \int_{\varepsilon_2}^1 \left(\int_{\varepsilon_1}^1 \left(\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{2y}{(x+y)^3} \right) dx \right) dy = \int_{\varepsilon_2}^1 \left(- \frac{1}{(x+y)} \Big|_{\varepsilon_1}^1 + \frac{y}{(x+y)^2} \Big|_{\varepsilon_1}^1 \right) dy =$$

$$= \int_{\varepsilon_2}^1 \left(- \frac{1}{(1+y)} + \frac{1}{(\varepsilon_1+y)} + \frac{y}{(1+y)^2} - \frac{y}{(\varepsilon_1+y)^2} \right) dy =$$

$$= \int_{\varepsilon_2}^1 \left(- \frac{(1+y)}{(1+y)^2} + \frac{y}{(1+y)^2} + \frac{(\varepsilon_1+y)}{(\varepsilon_1+y)^2} - \frac{y}{(\varepsilon_1+y)^2} \right) dy =$$

$$= \int_{\varepsilon_2}^1 \left(- \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1+y)^2} \right) dy = \frac{1}{1+y} \Big|_{\varepsilon_2}^1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+y} \Big|_{\varepsilon_2}^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,.$$

Mit Hilfe dieses Ergebnisses können wir nun beweisen, dass die beiden Doppelintegrale wirklich nicht gleich sind.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx\, dy = \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \lim_{\varepsilon_1 \to 0} I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\frac{1}{2}\,,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy\, dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \lim_{\varepsilon_2 \to 0} I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{2}\,.$$

Die Werte, die wir erhalten, sind also nicht gleich. Der Satz von Fubini kann in diesem Fall also nicht angewendet werden. Unsere gegebene Funktion $f(x, y)$ ist nicht integrierbar, weil an der Stelle $x = y = 0$ eine Singularität vorliegt. Die beiden Doppelintegrale existieren aber, wie wir gesehen haben, dennoch.

Wir sehen also, dass uns der Satz von Fubini die Berechnung mehrdimensionaler Integrale wesentlich erleichtert indem wir durch ihn diese Integrale auf eindimensionale Integrale zurückführen können. Allerdings muss man darauf achten, ob die Funktionen integrierbar sind um den Satz auch wirklich verwenden zu können. Wie bereits zuvor erwähnt, ist dieser Satz auch grundlegend für den Beweis der Transformationsformel. Da wir den Satz von Fubini nun formuliert und dessen Anwendungen an Beispielen gesehen haben, wollen wir uns jetzt mit der Transformationsformel beschäftigen.

7.2 Die Transformationsformel

Wie in [17, S.50] beschrieben, ist die Substitutionsregel eines der wichtigsten Verfahren um eindimensionale Integrale lösen zu können. Wenn eine auf einem Intervall $I = [a, b]$ stetig differenzierbare Funktion f gegeben ist und die Funktion g auf $f(I)$ stetig ist, dann gilt

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx = \int_a^b g(f(u))f'(u)\,du\,.$$

Das Ergebnis erhalten wir durch den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Eine so allgemein formulierte Substitutionsregel kann für mehrdimensionale Integrale nicht angegeben werden. Es muss in höheren Dimensionen vorausgesetzt werden, dass die Funktion f bijektiv ist. Wenn f bijektiv ist, dann ist die Funktion auf einem Intervall I monoton, also entweder monoton steigend oder monoton fallend. Je nachdem ob die Ableitung positiv oder negativ ist, ergeben sich zwei Fälle für die Substitutionsregel. Diese können durch die folgende Formel zusammengefasst werden:

$$\int_{f(I)} g(x)\,dx = \int_I g(f(u))|f'(u)|\,du\,.$$

Für Doppelintegrale lässt sich nach [8, S.365] analog eine Abwandlung der Substitutionsregel finden, die hier als Transformationsformel für Doppelintegrale bezeichnet wird. Die Vorgehensweise wird also auf Integrale im $\mathbb{R}^2$ übertragen und wir erhalten den folgenden Satz:

Satz 16 (Transformationsformel für Doppelintegrale)**.** *Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Weiters gilt $A = T(B)$ für eine stetig differenzierbare Funktion $T : U \to \mathbb{R}^2$. Außerdem sind die Mengen $\partial A, \partial B$ und N Nullmengen und die Abbildung $T : U \to \mathbb{R}^2$ ist injektiv auf $B \setminus N$. Wenn das erfüllt ist, dann gilt*

$$\iint_A f(x, y)\,d(x, y) = \iint_B f(T(u, v))\,|\det T'(u, v)|\,d(u, v)$$

für eine stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$.

So kann die Substitutionsregel für höhere Dimensionen verallgemeinert werden. Als Resultat dieser Verallgemeinerung erhalten wir dann die allgemeine Transformationsformel. Diese werden wir nun nach [23, S.329] formulieren.

Satz 17 (Transformationsformel)**.** *Es sei die Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $A \subset U$ sei eine kompakte und Jordan-messbare Teilmenge und $N \subset U$ sei eine Nullmenge, es gilt also $\lambda(N) = 0$. Weiters sei $T : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, es gilt $\det(dT_{(x)}) \neq 0$ für alle x aus $U \setminus N$ und die Funktion $T|_{U\setminus N} : U \setminus N \to T(U \setminus N)$ sei bijektiv. Dann ist $E := T(A)$ kompakt und Jordan-messbar und es gilt für jede stetige Funktion $f : T(A) \to \mathbb{R}$, dass*

$$\int_E f = \int_{TA} f = \int_A (f \circ T)\,|\det dT| = \int_A (f(T(x)))\,|\det dT|\,.$$

Den Beweis dieses Satzes werden wir nach [20] führen, wobei sich Ähnlichkeiten zum Beweis von [23, S.329ff.] finden lassen auf die wir im Beweis auch eingehen werden.

Beweis. Es sei nach [20] $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und die Menge V sei so gewählt, dass $A \subseteq V$ ist, $\bar{V} \subseteq U$ ist und diese Menge $\bar{V}$ kompakt ist. Die Abbildung $x \mapsto dT_{(x)}$ ist stetig auf der Menge $\bar{V}$ und deshalb folgt aus dem zuvor formulierten Satz von Minimum und Maximum, dass es ein $c > 0$ gibt, sodass für alle x aus $\bar{V}$ gilt, dass $\|dT_{(x)}\| \leq c$.

Behauptung: Wir wollen wie in [20] zunächst zeigen, dass $\lambda(TB) = 0$ gilt wenn $B \subseteq \bar{V}$ ist und gilt dass $\lambda(B) = 0$. Die Menge E ist außerdem kompakt und auch Jordan-messbar. Weiters gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung P_0 von $\partial A \cup N$, wobei diese Überdeckung aus offenen und achsenparallelen Quadern besteht und es gilt

$$\Big| \int_{T(\bigcup_{P \in P_0} P)} f - \int_{\bigcup_{P \in P_0} P} (f \circ T) \, |\det dT| \Big| < \varepsilon \, .$$

Beweis der Behauptung: Es sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Überdeckung P_1 der Menge B durch offene und achsenparallele Würfel wobei gilt, dass

$$\sum_{P \in P_1} \lambda(P) < \frac{\varepsilon}{c^n n} \, .$$

Es sei nun $P \in P_1$. Für jede Komponente von TP gilt dann, dass sie kleiner gleich $c\sqrt[n]{n}$ multipliziert mit der Seitenlänge von P ist. Es gilt dann, dass $TP \subseteq D(P)$, wobei $D(P)$ einem Würfel entspricht dessen Seitenlänge gleich $c\sqrt[n]{n}\cdot$ Seitenlänge von P ist. Es gilt dann dass

$$\lambda(TP) \leq \underbrace{\lambda(D(P))}_{=(\text{Seitenlänge von } D(P))^n} = c^n \cdot n \cdot \underbrace{\sqrt[n]{\lambda(P)}}_{=\text{Seitenlänge von } P}{}^n$$

und wir erhalten $TB \subseteq \bigcup_{P \in P_1} TP \subseteq \bigcup_{P \in P_1} D(P)$. Daraus folgt nun, dass

$$\lambda(TB) \leq \sum_{P \in P_1} \underbrace{\lambda(TP)}_{\leq c^n n \lambda(P)} \leq c^n n \underbrace{\sum_{P \in P_1} \lambda(P)}_{< \frac{\varepsilon}{c^n n}} < \varepsilon$$

und daher gilt, dass $\lambda(TB) = 0$ ist. Die Menge A ist kompakt und T ist stetig weil T stetig differenzierbar ist. Deshalb ist auch TA kompakt. Weil A außerdem Jordan-messbar ist gilt, dass $\lambda(\partial A) = 0$ und $\partial TA \subseteq T(\partial A \cup N)$ ist und weil $\lambda(N) = 0$ ist, folgt dass TA Jordan-messbar ist weil

$$\lambda(N) = 0 \Rightarrow \lambda(\partial A \cup N) = 0 \Rightarrow \lambda(\partial TA) \leq \lambda(T(\partial A \cup N)) = 0 \Rightarrow \lambda(\partial TA) = 0 \, .$$

Die Menge $\bar{V}$ ist, wie zu Beginn beschrieben, kompakt, die Funktion f ist stetig und auch $|\det dT|$ ist stetig. Deshalb gibt es nach dem Satz von Minimum und Maximum $c_1, c_2 > 0$, sodass $|f| \leq c_1$ und $|\det dT| \leq c_2$ ist. Es sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es also eine Überdeckung P_0 der Menge $\partial A \cup N$ sodass gilt, dass $\sum_{P \in P_0} \lambda(P) < \frac{\varepsilon}{c_1 c_2 + c^n n}$. Nun können wir nachrechnen, dass

$$\Big| \int_{T(\bigcup_{P \in P_0} P)} f - \int_{P \in P_0} (f \circ T) \, |\det dT| \Big| \overset{\text{Dreiecksungleichung für Integrale}}{\leq}$$

$$\leq \int_{T(\bigcup_{P\in P_0} P)} \underbrace{|f|}_{\leq c_1} + \int_{\bigcup_{P\in P_0} P} \underbrace{|f\circ T|}_{\leq c_1} \underbrace{|\det dT|}_{\leq c_2} \leq c_1 \sum_{P\in P_0} \underbrace{\lambda(TP)}_{\leq c^n n\lambda(P)} + c_1c_2 \sum_{P\in P_0} \lambda(P) \leq$$

$$\leq (c_1c^n n + c_1c_2) \underbrace{\sum_{P\in P_0} \lambda(P)}_{<\frac{\varepsilon}{c_1c_2+c^n n}} < \varepsilon$$

ist und damit ist dieser Schritt abgeschlossen.

Behauptung: Nach [20] wollen wir als nächstes zeigen, dass die im Satz angegebene Formel für $n = 1$ gilt.

Beweis der Behauptung: In diesem Fall gilt dann dass $\det dT_{(x)} = dT_{(x)}$ ist. Nun müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

Im ersten Fall ist die Funktion T streng monoton wachsend, es gilt also $dT_{(x)} > 0$. Dann ist $T([a,b]) = [Ta, Tb]$ und wir erhalten

$$\int_{T([a,b])} f = \int_{Ta}^{Tb} f(x)dx \overset{\text{Substitution}}{=} \begin{pmatrix} x = Tn \\ dx = T'n\, dn = |\det dT_{(n)}|dn \end{pmatrix} =$$

$$= \int_a^b \underbrace{f(Tn)|\det dT_{(n)}|}_{=\left((f\circ T)|\det dT|\right)_{(n)}} dn = \int_{[a,b]} (f\circ T)\,|\det dT|\,.$$

Im zweiten Fall ist T streng monoton fallend, es gilt also $dT_{(x)} < 0$. Dann ist $T([a,b]) = [Tb, Ta]$ und wir erhalten nun dass

$$\int_{T([a,b])} f = \int_{Tb}^{Ta} f = -\int_{Ta}^{Tb} f(x)dx \overset{\text{Substitution}}{=} \begin{pmatrix} x = Tn \\ dx = T'n\, dn = -|\det dT_{(n)}|dn \end{pmatrix} =$$

$$= \int_a^b \underbrace{f(Tn)|\det dT_{(n)}|}_{=\left((f\circ T)|\det dT|\right)_{(n)}} dn = \int_{[a,b]} (f\circ T)\,|\det dT|\,.$$

Somit haben wir die Formel im Fall $n = 1$ gezeigt und wir können mit dem nächsten Schritt fortfahren.

Nun wollen wir durch Induktion nach n die Formel für alle anderen Fälle zeigen. Es ist also $n > 1$ und es sei $\varepsilon > 0$. Nach dem ersten Schritt des Beweises nach [20] und nach der dritten Behauptung des Beweises nach [23, S.230] gibt es eine Überdeckung P_0 mit offenen und achsenparallelen Quadern von $\partial A \cup N$, sodass folgendes gilt:

$$\Big| \int_{T(\bigcup_{P\in P_0} P)} f - \int_{\bigcup_{P\in P_0} P} (f\circ T)|\det dT| \Big| < \varepsilon\,.$$

Wir definieren nach [20] nun die Menge A_ε durch $A_\varepsilon := A \setminus (\bigcup_{P\in P_0} P)$. Diese Menge ist kompakt, weil A kompakt ist und $\bigcup_{P\in P_0} P$ offen ist. Wir wollen nach [20] also zeigen, dass

$$\int_{TA_\varepsilon} f = \int_{A_\varepsilon} (f\circ T)|\det dT|\,.$$

Es sei x_0 aus A_ε. Wenn $\det dT_{(x_0)} \neq 0$ ist, dann gilt auch dass rg $\underbrace{dT_{(x_0)}}_{=\begin{pmatrix} dT_1(x_0) \\ \vdots \\ dT_n(x_0) \end{pmatrix}} = n$ ist

und außerdem dass rg $\begin{pmatrix} dT_1(x_0) \\ \vdots \\ dT_{n-1}(x_0) \end{pmatrix} = n-1$ ist. Daher gibt es ein j so, dass

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial x_{j-1}}(x_0) & \frac{\partial T_1}{\partial x_{j+1}}(x_0) & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_{j-1}}(x_0) & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_{j+1}}(x_0) & \dots & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} = n-1\,.$$

Wir definieren nun eine Abbildung $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$Sx = S \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 x \\ \vdots \\ T_{n-1} x \\ x_j \end{pmatrix}$$

und eine Abbildung $S^*_{(x_j)} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ durch

$$S^*_{(x_j)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ T_{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Es ist dann

$$Sx = \begin{pmatrix} S^*_{(x_j)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ x_j \end{pmatrix},$$

wobei in der ersten Komponente von Sx der $j-$te Eintrag fehlt. Die Abbildung S ist stetig differenzierbar weil die partiellen Ableitungen stetig sind:

$$dS = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_n} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch Entwickeln nach der letzten Zeile können wir die Determinante berechnen und wir erhalten:

$$\det dS_{(x_0)} = (-1)^{j+n} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial x_j}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_j}(x_0) \end{pmatrix} \neq 0\,,$$

wobei die $j-$te Spalte fehlt. Also ist $dS_{(x_0)}$ auch invertierbar. Nun können wir den Satz über die inverse Funktion anwenden. Es gibt also ein $\delta_{x_0} > 0$, sodass die zuvor definierte Funktion $S|_{B(x_0,\delta_{x_0})} : B(x_0,\delta_{x_0}) \to S(B(x_0,\delta_{x_0}))$ invertierbar ist und die inverse Funktion S^{-1} außerdem stetig differenzierbar ist. Weil $A_\varepsilon \subseteq \bigcup\limits_{x\in A_\varepsilon} B(x,\delta_x)$ ist, gibt es $\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_s$ aus A_ε, sodass $A_\varepsilon \subseteq \cup_{u=1}^{s} B(\widetilde{x}_u,\delta_{\widetilde{x}_u})$ ist. Nun ist es ausreichend zu zeigen, dass für alle Quader Q, wobei $Q \subseteq B(\widetilde{x}_u,\delta_{\widetilde{x}_u})$ für ein geeignetes u ist, gilt dass

$$\int_{TQ} f = \int_Q (f\circ T)\,|\det dT|\,.$$

Es sei nun u aus $\{1,\dots,s\}$ und wir setzen $x_0 := \widetilde{x}_u$ und $\delta_{x_0} := \delta_{\widetilde{x}_u}$. Außerdem definieren wir $R := T\circ S^{-1}$ wobei dann R stetig differenzierbar ist und $T = R\circ S$ gilt. Wir haben x durch $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ gegeben und wir setzen $y = S^{-1}x$. Also ist $x = Sy$ und daraus folgt nun dass

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 y \\ \vdots \\ T_{n-1} y \\ y_j \end{pmatrix}\,.$$

Dann ist

$$Rx = R\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T(\underbrace{S^{-1}x}_{=y}) = \begin{pmatrix} T_1 y \\ \vdots \\ T_{n-1} y \\ T_n y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ T_n y \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$R^*\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}(x_n) = R_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ wobei } R^* : \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ und } Rx = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ R^*\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}(x_n) \end{pmatrix}\,.$$

Es sei nun ein Quader Q gegeben und $Q \subseteq B(x_0,\delta_{x_0})$. Wenn $Q = [a,b]\times\widetilde{Q}$, wobei $\widetilde{Q}$ ein $(n-1)-$ dimensionaler Quader ist und $[a,b]$ die $j-$te Stelle einnimmt, dann ist

$$TQ = \underbrace{R(S(\underbrace{[a,b]}_{j}\times\widetilde{Q}))}_{=[a,b]\times S^*(\widetilde{Q})} = \underbrace{R^*([a,b])}_{n}\times S^*(\widetilde{Q})$$

und wir erhalten somit unser gewünschtes Resultat:

$$\int_Q (f\circ T)|\det d\underbrace{T}_{=R\circ S}| \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_Q (f\circ T)\Big(|\det(dR\circ S)|\,|\det dS|\Big) =$$

$$\int_{[a,b]\times\widetilde{Q}} \left(\Big((f\circ R)|\det dR|\Big)\circ S\right)|\det dS| \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_{[a,b]} \left(\underbrace{\int_{\widetilde{Q}} \Big(\Big((f\circ R)|\det dR|\Big)\circ S\Big)|\det dS|}_{\text{nach I.V. } = \int_{S^*(\widetilde{Q})}(f\circ R)|\det dR|}\right) =$$

$$= \int_{[a,b]} \left(\int_{S^*(\widetilde{Q})} (f\circ R)|\det dR|\right) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{[a,b]\times S^*(\widetilde{Q})} (f\circ R)|\det dR| \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_{S^*(\widetilde{Q})} \left(\underbrace{\int_{[a,b]} (f\circ R)\,|\det dR|}_{\overset{\text{2.Schritt}}{=}\int_{R^*([a,b])} f}\right) = \int_{S^*(\widetilde{Q})} \left(\int_{R^*([a,b])} f\right) \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_{R^*([a,b])\times S^*(\widetilde{Q})} f = \int_{TQ} f\,.$$

Somit haben wir die Transformationsformel für alle Fälle bewiesen. □

Nun wollen wir uns wieder einige Beispiele zur Verwendung der Transformationsformel ansehen. Diese spielt in der Praxis eine wichtige Rolle und hilft uns dabei komplexere Integrale lösen zu können.

7.2.1 Beispiele

Zuerst wollen wir uns ein einfaches Beispiel ansehen, welches uns zeigt wofür die Transformationsformel verwendet werden kann.

Beispiel 1: Volumen eines Ellipsoids Nach [7, S.282] wollen wir das Volumen des folgenden Ellipsoids bestimmen:

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Graphisch dargestellt wird die Menge A in Abbildung 9.

Um das Volumen berechnen zu können verwenden wir zunächst die Ellipsoidkoordinaten. Wir erhalten also

$$x = at\cos\varphi_1 \qquad , \quad 0 \leq t \leq 1\,,$$

$$y = bt\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \quad , \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \pi\,,$$

$$z = ct\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \quad , \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi\,.$$

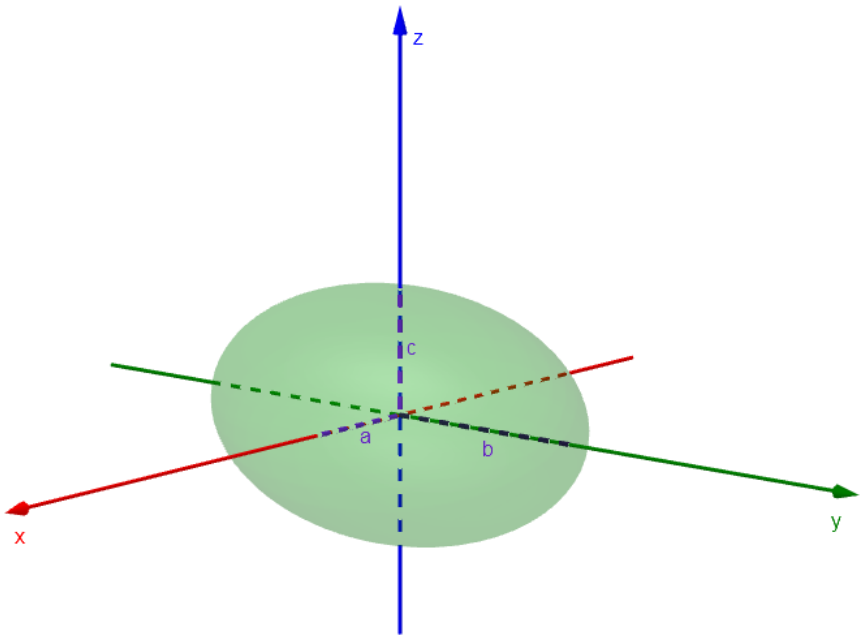

Abbildung 9: Darstellung der Menge A als Ellipsoid.

Außerdem ist $|\det dT| = abct^2 \sin\varphi_1$. Nun können wir das Volumen des Ellipsoids durch $\iiint 1$ berechnen und wir erhalten somit das folgende Ergebnis:

$$\iiint_A 1 = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} abct^2 \sin\varphi_1 \, d\varphi_2 \right) d\varphi_1 \right) dt =$$

$$= \int_0^1 \Bigg(\underbrace{\int_0^\pi 2abc\pi t^2 \sin\varphi_1 \, d\varphi_1}_{=-2abc\pi t^2 \cos\varphi_1 |_0^\pi = 4abc\pi t^2} \Bigg) dt = \int_0^1 \pi 4abct^2 \, dt = \pi 4abc \int_0^1 t^2 \, dt =$$

$$= \pi 4abc \Big(\frac{t^3}{3} \Big|_0^1 \Big) = 4\pi abc \Big(\frac{1}{3} - 0 \Big) = \frac{4}{3}\pi abc \,.$$

Wir haben somit allgemein die Formel für das Volumen eines Ellipsoids hergeleitet.

Die Transformationsformel hilft uns jedoch nicht nur bei der Berechnung derartiger Integrale, sondern sie hilft uns nach [25, S.282] gemeinsam mit dem Satz von Fubini und den Polarkoordinaten auch dabei, das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ zu berechnen. Die Stammfunktion dieser Funktion kann nämlich nicht elementar berechnet werden.

Beispiel 2: Berechnung uneigentlicher Integrale Zunächst wollen wir nach [20] die Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ zeigen. Dafür wenden wir den Majorantentest an. Denn nach dem Majorantentest existiert $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ weil $\int_1^\infty e^{-x} dx$ nach dem Hauptsatz $\frac{1}{e}$ ist. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung existiert aber auch $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ weil e^{-x^2} stetig auf $[0,1]$ ist und daher existiert auch $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Auf Grund der Symmetrie existiert also auch $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$. Nun wollen wir den Wert dieses Integrals aber berechnen. Dafür betrachten wir nach [20] und [25, S.282] zunächst $(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx)^2$.

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \Big)^2 = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \Big) \cdot \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, dy \Big) \overset{\text{Linearität}}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy \Big) e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dy \Big)\, dx \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,.$$

Nun können wir die Polarkoordinaten anwenden. Wir erhalten hier:

$$x = t\cos\varphi \quad , \quad 0 \le t < +\infty\,,$$

$$y = t\sin\varphi \quad , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,.$$

Außerdem ist $\det dT = t$ und durch Einsetzen kommen wir zum folgenden Ergebnis:

$$\iint_{[0,+\infty]\times[0,2\pi]} te^{-t^2} \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\infty} te^{-t^2}\, dt \Big)\, d\varphi \overset{\text{Substitution}}{=} \begin{pmatrix} u = -t^2 \\ du = -2t\, dt \end{pmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int -\frac{1}{2} e^u\, du \Big)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_0^{+\infty} \Big)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi\,.$$

Wir haben uns also $\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \Big)^2$ berechnet und erhalten somit auch den Wert für unser gesuchtes uneigentliches Integral. Wir kommen zu folgendem Ergebnis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Mit Hilfe des Satzes von Fubini sowie der Transformationsformel ist es uns also möglich, dieses uneigentliche Integral schnell und relativ einfach zu lösen.

Auch das nächste Beispiel führt uns zu einem Ergebnis, das wir in der Praxis oft verwenden. Sogar in der Schule wird die daraus resultierende Formel gelernt, jedoch ohne genaues Eingehen auf die Hintergründe und Herleitungen. Damit wollen wir uns jetzt genauer beschäftigen.

Beispiel 3: Volumina von Rotationskörpern Nach [21] können wir uns die bekannte Formel für das Volumen von Drehkörpern herleiten. Es sei die stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben für die $f(x) \ge 0$ gilt $\forall x \in [a, b]$. Der Körper, der durch Rotation des Graphen von f um die erste Achse entsteht, sei gegeben durch

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b, y^2 + z^2 \le f(x)^2 \right\}.$$

Durch Berechnen des Integrals $\iiint_A 1$ können wir die Formel des Volumens des Körpers A herleiten. Wir wollen also folgendes berechnen:

$$V = \iiint_A 1 \overset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \Big(\iint_{\{y^2+z^2 \le f(x)^2\}} 1 \Big)\, dx\,.$$

Verwenden der folgenden Ellipsoidkoordinaten

$$x = f(x)t\cos\varphi \quad , \quad 0 \le t \le 1\,,$$

$$y = f(x)t\sin\varphi \quad , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,,$$

wobei $|\det dT| = f(x)^2 t$ ist, liefert nun durch die Transformationsformel das gewünschte Ergebnis.

$$\iiint_A 1 \overset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \Big(\iint_{\{y^2+z^2 \le f(x)^2\}} 1 \Big)\, dx \overset{\text{Transformationsformel}}{=}$$

$$= \int_a^b \Big(\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} f(x)^2 t \Big)\, dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \Big(\int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} f(x)^2 t \, d\varphi \Big)\, dt \Big)\, dx =$$

$$= \int_a^b \Big(\underbrace{\int_0^1 2\pi f(x)^2 t \, dt}_{=2\pi f(x)^2 \frac{t^2}{2}|_0^1} \Big)\, dx = \int_a^b \Big(\pi f(x)^2 \Big)\, dx = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \,.$$

Wir sehen also, dass uns diese Berechnung zur bekannten Formel für die Berechnung von Volumina von Rotationskörpern führt, die wir seit der Schulzeit kennen. Wir erhalten für das Volumen eines Körpers bei Rotation um die erste Achse also die folgende Formel:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \,.$$

Analog dazu lernt man nach [14, S.42] in der Schule auch die Formel für die Volumina von Rotationskörpern um die $y-$Achse. Diese lautet wie folgt:

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, dy \,.$$

Die Funktionsgleichung $f(x) = y$ wird hier also auf eine Form $x = \ldots$ umgeformt. Dabei wird vorausgesetzt, dass die gegebene Funktionsgleichung $f(x) = y$ explizit nach der Variable x aufgelöst werden kann. Die Umkehrfunktion f^* von f existiert also und es gilt $x = f^*(y)$.

Die gegebenen Formeln werden hier über kreisrunde Querschnittsflächen, die bei Rotation des Graphen entstehen, hergeleitet. Im Falle der Rotation um die $x-$Achse geht man von einer beliebigen Querschnittsfläche an einer Stelle x aus. Die Fläche dieser Querschnittsfunktion ist gegeben durch $A(x) = y^2 \cdot \pi$ wobei $y = r$ ist. Will man nun das Volumen des Rotationskörpers berechnen, so erhält man

$$V = \int_a^b A(x) \, dx = \int_a^b \pi \cdot y^2 \, dx = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \,.$$

Analog wird im Falle der Herleitung der Formel für die Berechnung von Volumina von Rotationskörpern um die $y-$Achse vorgegangen. Die berechnete Formel kennen wir also schon länger, jedoch unter einer anderen Herleitung. Mit Hilfe der Transformationsformel können die Formeln für die Volumsberechnungen von Rotationskörpern allerdings mathematisch schöner hergeleitet werden.

Wir sehen also an Hand der soeben berechneten Beispiele bereits, dass die Transformationsformel sowie der Satz von Fubini in der Praxis eine große Bedeutung haben und uns die Arbeit mit mehrdimensionalen Integralen erleichtern. Daher wollen wir uns noch etwas genauer mit den Anwendungen der Transformationsformel beschäftigen. Zunächst werden wir jedoch der Vollständigkeit halber noch kurz den zuvor erwähnten Satz von Stokes anführen.

7.3 Der Satz von Stokes

Den Satz von Stokes werden wir nach [10, S.261f.] formulieren, jedoch nicht mehr beweisen. Das würde über den Rahmen dieser Diplomarbeit hinausgehen. Wir werden den allgemeinen Satz von Stokes formulieren.

Satz 18 (Satz von Stokes)**.** *Es sei S eine stückweise glatte Oberfläche die geschlossen ist und es sei C eine einfach geschlossene, stückweise glatte Raumkurve die S begrenzt. Weiters sei F ein Vektorfeld und die partiellen Ableitungen von F seien stetig auf einem Gebiet das S beinhaltet. Dann gilt, dass*

$$\int_C F dr = \iint_S \text{rot } F \, dS \,.$$

Es gibt auch einen speziellen Satz von Stokes, der präziser auf die Verwendung des Satzes im $\mathbb{R}^3$ eingeht. Dies soll nur der Ergänzung dieses Kapitels dienen. Um die Anwendung dieses Satzes zu zeigen, wollen wir noch kurz ein Beispiel betrachten. Dies kann bereits mit dem zuvor erwähnten speziellen Satz von Stokes für den $\mathbb{R}^3$ gelöst werden.

Wollen wir nach [21] $\int_{\partial A} f$ berechnen wobei

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 36 \,, x_3 \geq 0 \right\},$$

also ist A eine Halbkugel mit Radius 6, und

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 \\ x_3 + 5 \end{pmatrix}$$

ist. Der Rand ∂A ist hier also durch

$$c(t) := \begin{pmatrix} 6 \cos t \\ 6 \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq t \leq 2\pi$ gegeben. Es ist weiters

$$\text{rot } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}(x_3 + 5) - \frac{\partial}{\partial x_3}(x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1 + 2) - \frac{\partial}{\partial x_1}(x_3 + 5) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(x_3) - \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 + 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten somit unser Ergebnis:

$$\int_{\partial A} f = \iint_A \text{rot } f = 0 \,.$$

Somit haben wir noch die Anwendung dieses Satzes gesehen. Wir wollen uns aber nun mit den versprochenen Anwendungen der Transformationsformel befassen.

7.4 Anwendungen der Transformationsformel

Nach [17, S.58ff.] gibt es fünf wichtige Anwendungen der Transformationsformel mit denen wir uns nun beschäftigen werden. Der Zwischenwertsatz im $\mathbb{R}^n$, der Brouwersche Fixpunktsatz sowie die Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten sollten demnach in Zusammenhang mit der Transformationsformel genauer betrachtet werden.

7.4.1 Zwischenwertsatz in höheren Dimensionen

Um den Zwischenwertsatz im $\mathbb{R}^n$ formulieren zu können, benötigen wir nach [17, S.58] die lokale Transformationsformel. Daher werden wir diese nach [17, S.51] zunächst genauer betrachten.

Satz 19 (Lokale Transformationsformel)**.** *Es sei die Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und es gelte $T = \mathrm{id}$ überall im Äußeren eines Quaders I. Dann gilt für alle Funktionen f aus $L^n(\lambda)$ mit einem kompakten Träger die folgende Formel:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T) \det dT \, d\lambda \,.$$

Auch den Beweis dazu wollen wir uns nach [17, S.52f.] ansehen.

Beweis. Man kann davon ausgehen, dass f einmal und T zweimal stetig differenzierbar ist. Wir wollen nun durch ein Näherungsverfahren auf den allgemeinen Fall schließen. Dafür definieren wir eine Abbildung

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t, x_2, \ldots, x_n) \, dt$$

wobei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Da der Träger der Funktion f kompakt ist, ist g wohldefiniert an jeder Stelle und es ist $\frac{\partial g}{\partial x_1} = f$. Also ist die Funktion g stetig differenzierbar. Wir erhalten daher, dass

$$\operatorname{grad}(g \circ T) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ T \right) \operatorname{grad} T_j \,.$$

Die auftretenden Gradienten werden hier unter Bezugnahme auf das Standardskalarprodukt gebildet. Durch Anwenden der Antisymmetrie und der Multilinearität der Determinante erhalten wir, dass

$$\det \Big(\underbrace{\operatorname{grad}(g \circ T)}_{= \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \circ T \right) \operatorname{grad} T_1} , \operatorname{grad} T_2, \ldots, \operatorname{grad} T_n \Big) = \frac{\partial g}{\partial x_1} \circ T \det dT \,.$$

Nun können wir ein Intervall $I_n := I_r^n$, wobei $I_r = [-r, r]$, so wählen, dass $f \equiv 0$ gilt und auf dem Komplement gilt, dass $T = \mathrm{id}$. Wir erhalten damit also, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T) \det dT \, d\lambda = \int_{I_n} (\underbrace{f}_{= \frac{\partial g}{\partial x_1}} \circ T) \det dT \, d\lambda =$$

$$= \int_{I_n} \det \Big(\operatorname{grad}(g \circ T), \operatorname{grad} T_2, \ldots, \operatorname{grad} T_n \Big) \, d\lambda \,.$$

Die letzte Determinante wird nach der ersten Spalte entwickelt wobei die dabei entstehenden Unterdeterminanten durch M_j angegeben werden. Mit Hilfe des Satzes von Fubini, der partiellen Integration und $I_s = I_r^{n-1}$ kann das letzte Integral geschrieben werden als

$$\int_{I_n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} (g \circ T) M_j \, d\lambda = \sum_{j=1}^{n} \int_{I_s} \int_{I_r} \frac{\partial}{\partial x_j} (g \circ T) M_j \, d\lambda_1 \, d\lambda_{n-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big\{ \int_{I_s} (g \circ T) M_j \,|_{-r}^{r} \; d\lambda_{n-1} - \int_{I_s} \int_{I_r} (g \circ T) \frac{\partial}{\partial x_j} M_j \, d\lambda_1 \, d\lambda_{n-1} \Big\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{I_s} (g \circ T) M_j \,|_{-r}^{r} \; d\lambda_{n-1} - \int_{I_n} (g \circ T) \Big(\frac{\partial}{\partial x_1} M_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} M_n \Big) \, d\lambda \,.$$

Wenn $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar ist, dann gilt aber

$$\frac{\partial}{\partial x_1} M_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} M_n \equiv 0 \,.$$

Weil wir $I_n := I_r^n$ gewählt haben, verschwinden alle Randterme außer derjenige mit $j = 1$ und $s = r$. Allerdings ist hier $M_1 = 1$. Daher erhalten wir wieder mit Hilfe des Satzes von Fubini sowie der Definition der Abbildung g unser gewünschtes Ergebnis:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T) \det dT \, d\lambda = \int_{I_s} g(r, \cdot) \, d\lambda_{n-1} =$$

$$= \int_{I_s} \int_{I_r} f \, d\lambda_1 \, d\lambda_{n-1} = \int_{I_n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda \,.$$

□

Nach [17, S.58] ist hier hervorzuheben, dass für die Abbildung T weder deren Injektivität noch deren Surjektivität verlangt wird. Dass sie aber surjektiv ist kann leicht nachgewiesen werden. Dazu wird nach [17, S.58] folgendes Lemma verwendet:

Lemma 1. *Es sei die Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und es gelte $T|_{\mathbb{R}^n \setminus B} = \mathrm{id}$, wobei $B = B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Die Menge B ist also die abgeschlossene Einheitskugel. Dann ist T surjektiv.*

Beweis. Wir nehmen an, dass ein Punkt p existiert der kein Urbild besitzt. Es muss dann gelten, dass $\|p\| < 1$ ist, da p ansonsten ein Urbild hätte. Weil $T(B)$, also das Bild von B unter T, abgeschlossen ist und der Punkt p in $T(B)$ nicht enthalten ist, gibt es um den Punkt p eine offene Umgebung U, die im Bild von T nicht enthalten ist. Wir können nun eine stetige Funktion f wählen, deren Träger in U ist und für die gilt, dass $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda \neq 0$ ist. Nun können wir die lokale Transformationsformel anwenden. Demnach gilt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T) \, \det dT \, d\lambda \;=\; 0$$

weil nach unseren Voraussetzungen gilt, dass $f \circ T = 0$ ist. Wir stoßen mit dieser Argumentation auf einen Widerspruch, weshalb das Lemma bewiesen ist. □

Mit Hilfe dieses Lemmas kann nun nach [17, S.58] der Zwischenwertsatz im $\mathbb{R}^n$ formuliert und bewiesen werden:

Satz 20 (Zwischenwertsatz im $\mathbb{R}^n$)**.** *Es sei die Abbildung $T : B \to \mathbb{R}^n$ stetig und es gelte $T|_{\partial B} = \mathrm{id}$. Dann wird jeder Wert aus B von der Abbildung T angenommen. Es gilt somit $T(B) \supseteq B$.*

Beweis. Außerhalb der abgeschlossenen Einheitskugel B können wir die Abbildung T stetig durch die Identität fortsetzen und diese Abbildung können wir dann durch Abbildungen φ, die stetig differenzierbar sind und für die gilt dass $\varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus B} = \mathrm{id}$, approximieren. Diese Abbildungen sind dem letzten Lemma zufolge surjektiv, weshalb B durch sie überdeckt wird. Im Falle des Grenzübergangs $\varphi \to T$ bleibt diese Eigenschaft bestehen, womit der Zwischenwertsatz bewiesen ist. □

Damit haben wir nun auch den Zwischenwertsatz für höhere Dimensionen erhalten und wir können uns der nächsten Anwendung der Transformationsformel zuwenden, nämlich dem Brouwerschen Fixpunktsatz.

7.4.2 Der Brouwersche Fixpunktsatz

Nach [17, S.58] zählt dieser Fixpunktsatz neben dem Fixpunktsatz nach Banach, der bereits im ersten Kapitel bewiesen wurde, zu den wichtigsten Fixpunktsätzen die in der Analysis zur Verfügung stehen. Deshalb werden wir auch diesen Fixpunktsatz nach [17, S.59] formulieren.

Satz 21 (Brouwerscher Fixpunktsatz)**.** *Jede Abbildung, die die abgeschlossene Einheitskugel B auf sich selbst abbildet und stetig ist, besitzt auf jeden Fall einen Fixpunkt.*

Der Beweis zu diesem Satz wird dann indirekt geführt wobei dieser indirekte Beweis dann durch den zuvor formulierten Zwischenwertsatz im $\mathbb{R}^n$ auf einen Widerspruch zurückgeführt wird. Auch diesen Beweis wollen wir nach [17, S.59] noch näher betrachten.

Beweis. Angenommen, die Abbildung f, die die abgeschlossene Einheitskugel auf sich selbst abbildet, hätte keine Fixpunkte. Dann wäre es möglich eine neue Abbildung $\varphi : B \to B$ durch $p \mapsto \varphi(p)$ zu definieren. Diese Abbildung liefert zu jedem einzelnen Punkt p der Einheitskugel den Schnittpunkt mit der Einheitssphäre, der vom Halbstrahl von $f(p)$ durch p erzeugt wird. Die Abbildung f hat, wie zu Beginn des Beweises angenommen, keinen Fixpunkt. Deshalb sind der Halbstrahl und folglich auch der Bildpunkt jeder beliebigen Stelle p aus B wohldefiniert, weshalb die Abbildung f stetig ist. Es gilt dann, dass $\varphi(B) \subset \partial B$ und $\varphi|_{\partial B} = \mathrm{id}$. Diese Resultate führen aber durch den zuvor formulierten Zwischenwertsatz auf einen Widerspruch. Die Abbildung f muss folglich mindestens einen Fixpunkt besitzen. □

Damit haben wir auch den Brouwerschen Fixpunktsatz bewiesen und können zum nächsten Anwendungsgebiet weitergehen.

Für die Praxis besonders wichtig ist die nächste Anwendung der Transformationsformel. Diese haben wir bereits in den zuvor berechneten Beispielen gesehen. Nun wollen wir jedoch nochmal genauer auf die Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten eingehen.

7.4.3 Polarkoordinaten

Die Polarkoordinaten werden nach [17, S.59f.] definiert durch

$$g\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{, wobei} \quad x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi\,.$$

Die Menge $D := (0,\infty) \times (0, 2\pi)$ wird durch diese Abbildung g diffeomorph (d.h. g ist bijektiv, stetig differenzierbar und hat eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion) auf

die Ebene abgebildet, wobei von der Ebene die halbe Gerade $[0, \infty)$ abgezogen werden muss. Bei dieser Halbgeraden handelt es sich aber um eine Nullmenge wenn man sie auf das Flächenmaß bezieht. Deshalb kann diese vernachlässigt werden wenn das Integral über $\mathbb{R}^2$ bestimmt werden soll. Gleiches gilt auch in Bezug auf den Rand der Menge D. Nachdem

$$\det dg_{(r,\varphi)} = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r$$

ist, gilt für alle integrierbaren Funktionen f auf $\mathbb{R}^2$ dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi\,.$$

Auch graphisch lassen sich die Polarkoordinaten gut darstellen. Dies können wir in Abbildung 10 betrachten.

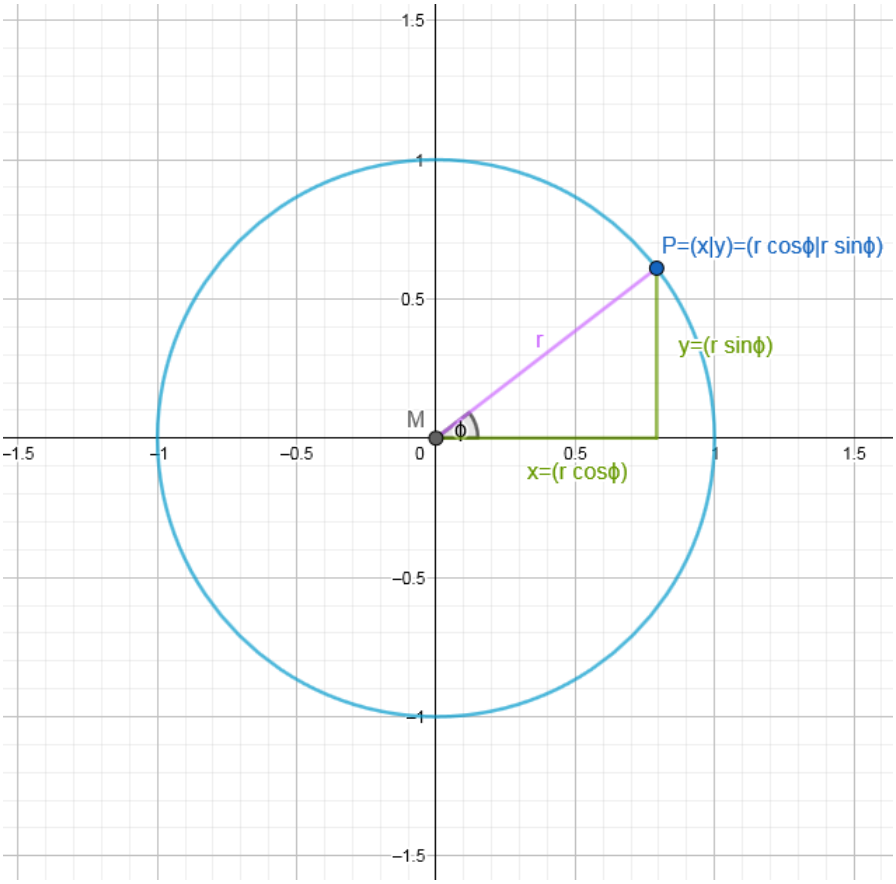

Abbildung 10: Polarkoordinaten graphisch dargestellt.

Angewendet werden die Polarkoordinaten nach [17, S.60] in der Praxis besonders in Bezug auf rotationssymmetrische Figuren. Doch auch das Volumen der Einheitskugel kann nach [17, S.60] mit den Polarkoordinaten folgenderweise berechnet werden.

$$\frac{V}{2} = \int_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,d\lambda = \int_0^1\int_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}\, r\,d\varphi\,dr =$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1}}\, r\,d\varphi\,dr = \int_0^1\int_0^{2\pi} r\sqrt{1-r^2}\,d\varphi\,dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr \overset{\text{Substitution}}{=} \begin{pmatrix} u = 1-r^2 \\ du = -2r\,dr \end{pmatrix} =$$

$$= 2\pi \int r\sqrt{u}\frac{du}{-2r} = 2\pi\Big(-\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du\Big) = 2\pi\Big(-\frac{\sqrt{u^3}}{3}\Big|\Big) =$$

$$= 2\pi\Big(-\frac{\sqrt{(1-r^2)^3}}{3}\Big|_0^1\Big) = 2\pi\Big(0+\frac{1}{3}\Big) = \frac{2\pi}{3}\,.$$

Es ist dann also das Volumen der Einheitskugel gegeben durch $V = \frac{4\pi}{3}$. Dies führt dann auch zur bekannten Formel für das Volumen einer Kugel mit Radius r, nämlich

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}\,.$$

Schulische Anwendungen: Der Umgang mit Polarkoordinaten ist den meisten noch aus der Schulzeit bekannt. Vermessungsaufgaben und auch die Darstellung von Sinus und Cosinus am Einheitskreis führen langsam an diese Koordinatendarstellung heran. Nach [14, S.156] kann jeder Punkt (x, y) einer Ebene, den Ursprung ausgenommen, durch Polarkoordinaten $[r, \varphi]$ angeschrieben werden. Der in Abbildung 10 dargestellte Radius r ist dabei der Polarabstand und der Winkel φ wird als Polarwinkelmaß bezeichnet. Dieser Polarwinkel wird immer in mathematisch positiver Richtung ausgehend vom positiven Teil der ersten Achse gemessen.

Es gibt also für jeden Punkt P einer Ebene ein $r \in \mathbb{R}^+$ sowie einen Winkel φ für den $0° \leq \varphi \leq 360°$ gilt so, dass der Punkt $P = (x, y)$ angegeben werden kann durch $P = (x, y) = [r, \varphi]$. Ebenso werden in der Schule die Formeln zur Umrechnung von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten gelernt. Diese werden auch mit Hilfe der Abbildung 10 motiviert und führen zu den folgenden Ergebnissen:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi\,, \\ y &= r \cdot \sin\varphi\,, \\ r &= \sqrt{x^2+y^2}\,, \\ \tan\varphi &= \frac{y}{x}\,. \end{aligned}$$

Zu beachten ist hierbei, dass aus den Formeln noch nicht eindeutig auf den Winkel φ geschlossen werden kann. Es kommt nämlich auch darauf an, in welchem Quadranten sich der Punkt (x, y) befindet.

7.4.4 Zylinderkoordinaten

Die Zylinderkoordinaten werden nach [17, S.61] wie folgt definiert:

$$g\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{, wobei} \quad \begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi\,. \\ z &= \zeta \end{aligned}$$

Die Menge $D := (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ wird hier diffeomorph auf den $\mathbb{R}^3$ abgebildet, wobei nun die Halbebene, gegeben durch $[0, \infty) \times \{0\} \times \mathbb{R}$, abgezogen wird. Bezogen auf das Volumenmaß handelt es sich um eine Nullmenge, weshalb diese wiederum keine

Rolle für das Integral über $\mathbb{R}^3$ spielt. Ebenso gilt die Argumentation wieder für den Rand der Menge D. Weil wieder $\det dg = r$ gilt, erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \zeta) r\,dr\,d\varphi\,d\zeta\,.$$

Nach [2, S.74] sind die Zylinderkoordinaten dadurch gekennzeichnet, dass hierbei nun in der $(x,y)-$Ebene auf die zuvor beschriebenen Polarkoordinaten (r,φ) gewechselt wird. Die $z-$Achse bleibt hierbei erhalten. Auch die Zylinderkoordinaten können gut graphisch dargestellt werden. Dies zeigt die Abbildung 11.

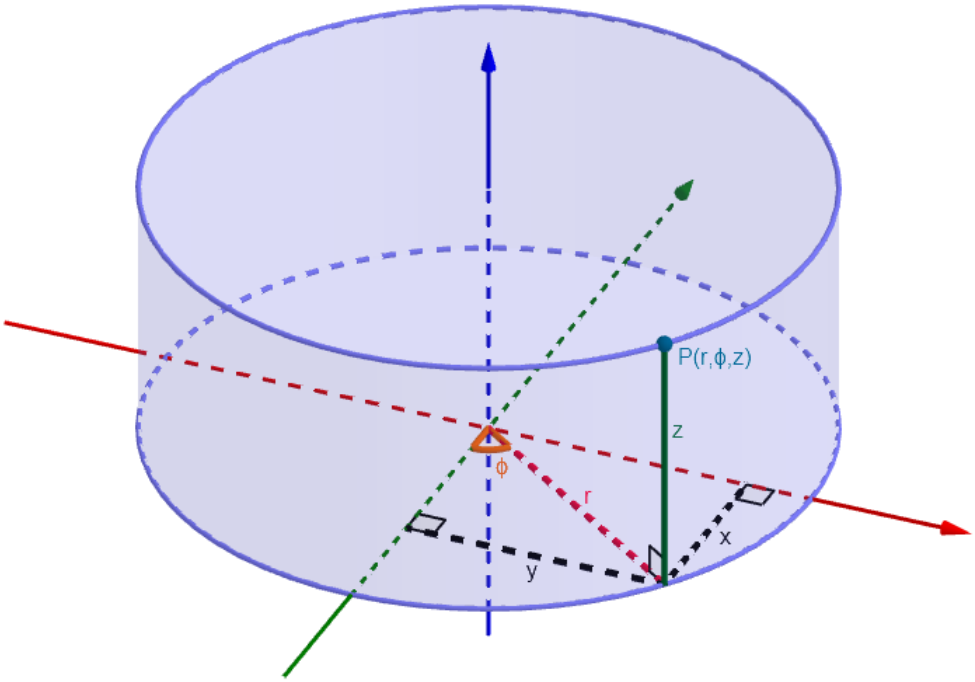

Abbildung 11: Graphische Darstellung der Zylinderkoordinaten (vgl. [2, Fig. 251.1]).

Bei genauer Betrachtung kann man feststellen, dass es sich bei den Zylinderkoordinaten eigentlich lediglich um eine Kombination des Satzes von Fubini mit den zuvor behandelten zweidimensionalen Polarkoordinaten handelt. Sogesehen sind also auch die Zylinderkoordinaten nichts Neues. Es führen uns also nur uns bekannte Sätze zu einem neuen Objekt.

Schulische Anwendungen: Zylinderkoordinaten werden in der Schule nicht behandelt. Die Anwendungsmöglichkeiten ergeben sich durch den Schulstoff nicht. Ebenso verhält es sich mit den Kugelkoordinaten. Diese können allerdings in Analogie zu den Polarkoordinaten sowie durch geographische Bezüge, wie wir gleich sehen werden, noch leichter motiviert werden.

Als eine weitere wichtige Anwendung der Transformationsformel betrachten wir noch kurz die Kugelkoordinaten.

7.4.5 Kugelkoordinaten

Die Kugelkoordinaten werden nach [17, S.61] definiert durch:

$$g\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{, wobei} \quad \begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\Theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\Theta \\ z &= r\cos\Theta \end{aligned}$$

wobei $0 < r < \infty, 0 < \varphi < 2\pi$ und $0 < \Theta < \pi$ gilt. Weil in diesem Fall

$$\det dg = r^2 \sin\Theta$$

ist, gilt für alle Funktionen f die auf $\mathbb{R}^3$ integrierbar sind, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r\cos\varphi\sin\Theta,\ldots,r\cos\Theta)r^2\sin\Theta\,dr\,d\varphi\,d\Theta\,.$$

Nach [2, S.75] lassen sich die Komponenten (r,φ,Θ) der Kugelkoordinaten geographisch auf folgende Art und Weise deuten: Die erste Komponente r bezeichnet den Abstand des Punktes P vom Ursprung. Die zweite Komponente φ beschreibt die geographische Länge in Bezug auf die $(x,y)-$Ebene, die die Äquatorebene darstellt, des Punktes P ausgehend vom positiven Teil der $x-$Achse und die dritte Komponente Θ beschreibt die geographische Breite des gewählten Punktes P.

Die Kugelkoordinaten besitzen demnach also eine eindeutige praktische und anschauliche Deutungsweise. Der geographische Zugang fördert das Verständnis und bietet einen guten Bezug zur Realität. Demnach könnten die Kugelkoordinaten auch in der Schule thematisiert werden und die Polarkoordinaten ergänzen und erweitern. Auch diesen Sachverhalt können wir nochmals graphisch darstellen. Veranschaulicht werden die Kugelkoordinaten in Abbildung 12.

Mit Hilfe der Kugelkoordinten lässt sich nach [17, S.61] auch wiederum das Volumen der Einheitskugel bestimmen. Auf der Menge $D := (0,1)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)$ wird die Einheitskugel B durch die Kugelkoordinaten parametrisiert. Das Volumen der Einheitskugel erhalten wir in diesem Fall wie folgt:

$$\begin{aligned} V = \int_B 1\,d\lambda &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} r^2\sin\Theta\,dr\,d\varphi\,d\Theta = \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{r^3}{3}\sin\Theta\Big)\Big|_0^1\,d\varphi\,d\Theta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\Theta}{3}\,d\varphi\,d\Theta = \\ &= \int_0^{\pi}\frac{2\pi}{3}\sin\Theta\,d\Theta = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\sin\Theta\,d\Theta = \frac{2\pi}{3}\Big(-\cos\Theta\Big|_0^{\pi}\Big) = \\ &= \frac{2\pi}{3}\Big(1+1\Big) = \frac{4\pi}{3}\,. \end{aligned}$$

Wir kommen also auch unter Anwendung der Kugelkoordinaten zum richtigen Ergebnis für das Volumen der Einheitskugel und könnten auch hier wieder die bereits zuvor erwähnte allgemeine Formel für das Volumen einer Kugel mit Radius r herleiten.

Schulische Anwendungen: In der Schule können die Kugelkoordinaten, wie zuvor erwähnt, noch leichter motiviert werden als die Zylinderkoordinaten. Nach [3, S.372] handelt es sich hierbei nämlich um räumliche Polarkoordinaten, also der Verallgemeinerung der Polarkoordinaten auf den $\mathbb{R}^3$. Der Einheitskreis wird zur Einheitskugel ausgebaut. Da die Kugel mit all ihren Eigenschaften und Berechnungen zum Schulstoff gehört, könnte man also auf die Kugelkoordinaten zumindest kurz Bezug nehmen und diese als eine weitere Koordinatendarstellung erwähnen.

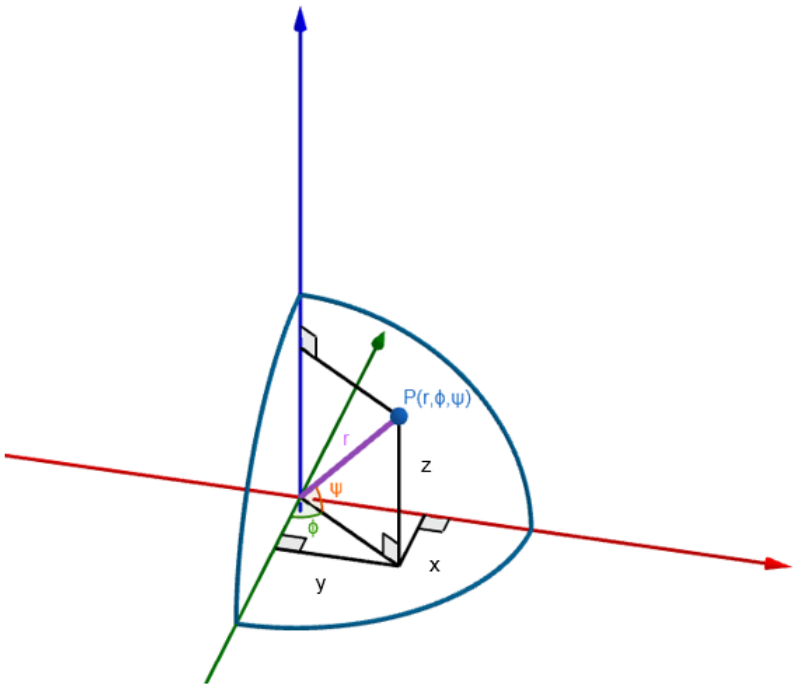

Abbildung 12: Kugelkoordinaten graphisch dargestellt (vgl. [3, Abb. 171]).

7.4.6 n-dimensionale Ellipsoidkoordinaten

Als letzte wichtige Anwendung der Transformationsformel wollen wir noch nach [20] die n-dimensionalen Ellipsoidkoordinaten betrachten. Diese Koordinaten haben wir bereits bei den zuvor behandelten Beispielen verwendet. Es sei hier ein Ellipsoid durch

$$A := \left\{ x : \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

gegeben. Dann erhalten wir die Ellipsoidkoordinaten wie folgt:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 t \cos\varphi_1 \quad , & 0 \leq t \leq 1 \\
x_2 &= a_2 t \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \quad , & 0 \leq \varphi_1 \leq \pi \\
x_3 &= a_3 t \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \quad , & 0 \leq \varphi_2 \leq \pi \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= a_{n-1} t \sin\varphi_1 \cdot \cdots \cdot \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1} \, , & 0 \leq \varphi_{n-2} \leq \pi \\
x_n &= a_n t \sin\varphi_1 \cdot \cdots \cdot \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1} \quad , & 0 \leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi \, .
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\det dT = a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n t^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \cdot \cdots \cdot \sin\varphi_{n-2} \, .$$

Im Sonderfall der zweidimensionalen Ellipsoidkoordinaten würde also bereits gelten, dass $0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi$ ist da keine weiteren Winkel mehr folgen. Außerdem würden sich die Grenzen von t ändern, wenn ganz $\mathbb{R}^n$ eingebunden wäre. Es wäre dann $0 \leq t \leq \infty$.

Damit haben wir nun auch einige Anwendungen der Transformationsformel gesehen und konnten uns wieder davon überzeugen, wie wichtig der Satz über die inverse Funktion für die mehrdimensionale Analysis ist. Im Bereich der mehrdimensionalen Analysis

haben wir nun die wesentlichen Folgerungen des Satzes über die inverse Funktion ausreichend behandelt und einen Überblick über die Vielseitigkeit dieses Satzes erhalten.

Da ein solcher Satz nicht nur im Bereich der reellen Analysis existiert, wollen wir noch einen kurzen Ausflug in die komplexe Analysis wagen und uns zum Abschluss mit der komplexen Differenzierbarkeit befassen.

8 Komplexe Differenzierbarkeit

Das Aufsuchen von Methoden zur Berechnung von Nullstellen von Polynomen war nach [6, S.95] lange ein wichtiges Forschungsgebiet der Mathematik. Um quadratische Polynome lösen zu können existiert schon seit langer Zeit die uns bekannte Lösungsmöglichkeit über die große beziehungsweise die kleine Lösungsformel. Der Fall quadratischer Polynome, die keine reellen Wurzeln haben, sowie die kubischen Polynome stellten dann den Anlass zur Erschaffung der komplexen Zahlen dar. Ähnliche Lösungsformeln wie die quadratische Lösungsformel ließen sich auch für Gleichungen vom Grad drei und vier finden. Ab Gleichungen fünften Grades existieren solche Formeln jedoch nicht mehr. Für derartige Gleichungen entstand dann die Vermutung, dass diese Wurzeln in $\mathbb{C}$ haben. Für den Beweis dieser Theorie wurden hauptsächlich topologische und funktionentheoretische Begründungen vorgelegt.

Soweit zur Idee hinter den komplexen Zahlen. So wie sich mathematische Konstrukte für den Raum der reellen Zahlen entwickelt haben, wurde auch nach Eigenschaften, Rechenregeln und äquivalenten Sätzen im Bereich der komplexen Analysis geforscht. Der Raum der komplexen Zahlen ist mittlerweile sehr gut erforscht und es existieren zahlreiche Sätze und Rechenvorschriften für das Rechnen mit diesen Zahlen. Dies erlaubt uns unter anderem Vergleiche aufstellen zu können und die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Sätze im Reellen oder Komplexen ausfindig zu machen.

Wir wollen uns im folgenden genauer mit der komplexen Differenzierbarkeit befassen, zunächst die Grundlagen der Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$ anführen und anschließend den Umkehrsatz formulieren. Bisher haben wir uns ausschließlich mit der reellen Analysis befasst. Doch auch im Bereich der komplexen Zahlen können wir dann den Satz über die inverse Funktion finden. Als kleinen Ausblick wollen wir noch kurz in die Welt der komplexen Differenzierbarkeit eintauchen und die Ergebnisse aus diesem Bereich kurz zusammenfassen.

Wir befassen uns nach [17, S.273] also nun mit komplexen Funktionen, also mit Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Weil es sich bei den komplexen Zahlen, also der Menge $\mathbb{C}$, ebenfalls um einen Körper handelt, ist die Definition der Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ - ähnlich wie im Reellen - über den Grenzwert von Differenzenquotienten gegeben. Die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann also durch

$$f'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

bestimmt werden. Hierbei sollte allerdings berücksichtigt werden, dass wir es mit einem zweidimensionalen Grenzwert zu tun haben der doch komplizierter ist als der eindimensionale den wir vom eindimensionalen reellen Fall kennen.

Anders als im Reellen bietet uns die komplexe Differenzierbarkeit nach [17, S.273] aber mehrere Folgerungen. Wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenziert werden kann, dann gelten für f beziehungsweise f' die folgenden Eigenschaften:

(i) Die Ableitungsfunktion f' ist stetig und außerdem differenzierbar.

(ii) Die Funktion f ist damit unendlich oft differenzierbar.

(iii) Die Funktion f kann an jeder Stelle durch die Potenzreihe in diesem Punkt angegeben werden.

Um genauere Betrachtungen machen zu können, werden wir nach [17, S.274f.] die Definition der Differenzierbarkeit einer komplexen Funktion in einem Punkt sowie die der allgemeinen Differenzierbarkeit anführen.

Definition 17. Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion wobei f definiert ist auf $U \subseteq \mathbb{C}$ und U offen und nichtleer ist. Diese Funktion ist an der Stelle a dann komplex differenzierbar, falls es den Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

gibt. Diesen Grenzwert bezeichnen wir dann als Ableitung der Funktion f an der Stelle a. Bezeichnet wird dieser Grenzwert wie gewohnt durch $f'(a)$.

Nach [6, S.16] führen wir auch noch die folgende Proposition an:

Proposition 1. *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion die in $a \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist. Dann ist f in a stetig.*

Ein interessantes Beispiel aus der komplexen Differenzierbarkeit liefert nach [6, S.16] die Funktion $f(z) = \bar{z}$, also die komplexe Konjugation. Diese Funktion ist zwar überall stetig in $\mathbb{C}$, jedoch nirgendwo komplex differenzierbar.

Für zwei in einem Punkt $a \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbare Funktionen gelten nach [17, S.275] dieselben Rechenregeln wie im Reellen. Ebenso gelten die Summen-, Produkt- und Quotientenregel. Auch die Kettenregel existiert für derartige Funktionen. Nun zur Definition der allgemeinen Differenzierbarkeit und deren Folgerungen nach [17, S.275].

Definition 18. Man nennt eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dann komplex differenzierbar, wenn diese Funktion an jeder Stelle des zugrundeliegenden Definitionsbereiches komplex differenzierbar ist. Die Funktion f nennt man dann holomorph, falls die Ableitung f' von f stetig an jeder Stelle ist.

Jede Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplex differenzierbar ist ist auch holomorph. Existiert also die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so ist diese Ableitung auch stetig. Diese Tatsache stellt einen großen Unterschied zur reellen Differenzierbarkeit dar.

Soweit zu den Grundlagen der komplexen Differenzierbarkeit die die reelle Differenzierbarkeit nach [17, S.277] unmittelbar zur Folge hat. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen aber nicht. Nun wollen wir zum Umkehrsatz im Komplexen weitergehen.

Es sei nach [17, S.309] $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wenn $f'(a) \neq 0$ ist für eine Stelle a aus $\mathbb{C}$, dann ist a eine einfache Stelle der Funktion f. An einer solchen einfachen Stelle verhält sich eine holomorphe Funktion lokal so wie eine reelle stetig differenzierbare Abbildung es in regulären Punkten tut. Nun können wir nach [17, S.309] den lokalen Umkehrsatz in $\mathbb{C}$ formulieren.

Satz 22 (Lokaler Umkehrsatz)**.** *Die Stelle a sei eine einfache Stelle der Funktion f. Dann gibt es eine Umgebung U von a und eine Umgebung V von $f(a)$, sodass $f : U \to V$ bijektiv ist. Außerdem ist $f^{-1} : V \to U$, die Umkehrabbildung, wieder holomorph.*

Auch diesen Beweis wollen wir uns nochmals genauer ansehen, da auch dieser auf den reellen Satz über die inverse Funktion im $\mathbb{R}^2$ zurückgeführt werden kann. Für das Verständnis führen wir nach [17, S.276f.] noch zwei Sätze über die Cauchy-Riemann-Gleichungen an.

Satz 23. *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Diese ist genau dann an der Stelle a komplex differenzierbar, falls sie in a reell differenzierbar ist und die komplexe Cauchy-Riemann-Gleichung durch die partiellen Ableitungen erfüllt werden:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\,.$$

Das stellt auch die komplexe Ableitung von f dar.

Satz 24. *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion die gegeben ist durch $f = u + iv$ wobei u und v reelle Funktionen sind. Die Funktion f ist genau dann an der Stelle a komplex differenzierbar, wenn die reellen Cauchy-Riemann-Gleichungen*

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x \quad , \text{ wobei } \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,, v_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \ldots\,,$$

an dieser Stelle erfüllt werden. An der Stelle a gilt dann, dass

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y\,.$$

Wir führen den folgenden Beweis des Umkehrsatzes ebenfalls nach [17, S.309f.].

Beweis. Der Abbildung $z \mapsto f(z)$ wird die reelle Abbildung

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = \Big(u(x, y), v(x, y)\Big)$$

zugeordnet wobei $z = x + iy$ und $f = u + iv$ sind. Auf Grund der Cauchy-Riemann-Gleichungen erhält man, dass

$$d\varphi = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}$$

und für den Wert der Determinante dieser Matrix bekommt man

$$\det d\varphi = u_x^2 + u_y^2 = |f'|^2\,.$$

Diese bleibt auch an der Stelle a bestehen. Nun können wir den Umkehrsatz anwenden. Es gibt eine Umgebung U von a und eine Umgebung V von $\varphi(a)$, sodass $\varphi : U \to V$ bijektiv ist und die Umkehrabbildung stetig differenzierbar ist. Die Abbildung $\varphi : U \to V$ ist also bijektiv, stetig differenzierbar und besitzt eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung. Es sei nun Ω die Inverse zu φ. Also entspricht Ω der Abbildung

$$(a, b) \mapsto \Omega(a, b) = \Big(s(a, b), t(a, b)\Big)\,.$$

Leitet man den Ausdruck $\Omega \circ \varphi = \mathrm{id}$ ab, so erhält man

$$(d\Omega \circ \varphi) \cdot d\varphi = \mathrm{id} \quad \text{beziehungsweise} \quad d\Omega \circ \varphi = d\varphi^{-1}\,.$$

Betrachtet man diese Ausdrücke nun wieder komponentenweise, so erhält man

$$\begin{pmatrix} s_a & s_b \\ t_a & t_b \end{pmatrix} \circ \varphi = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\, d\varphi} \begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix}\,.$$

Es gilt dann für alle Punkte des Definitionsbereiches der Abbildung Ω, dass

$$s_a = t_b \quad \text{und} \quad s_b = -t_a\,.$$

Durch die Abbildung Ω werden also ebenfalls die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt. Daher ist die der Abbildung Ω entsprechende Abbildung in $\mathbb{C}$ gegeben durch

$$\varepsilon = a + ib \mapsto g(\varepsilon) = s(a + ib) + it(a + ib)\,.$$

Die Abbildung ε ist wiederum holomorph und beschreibt die Umkehrabbildung der Funktion f. □

Der lokale Umkehrsatz macht also nach [17, S.310] folgende Aussage im Bereich der komplexen Zahlen: Eine holomorphe Funktion f ist lokal um eine einfache Stelle a biholomorph. Zum Verständnis wird demnach noch die Definition einer biholomorphen Funktion angeführt.

Definition 19. Es sei die Funktion $f : A \to A'$ holomorph. Falls f die Menge A bijektiv auf A' abbildet, wobei A' offen ist, und die Umkehrabbildung $f^{-1} : A' \to A$ holomorph ist, dann nennt man f biholomorph.

Somit haben wir auch im Komplexen den lokalen Umkehrsatz formuliert und bewiesen. Nach [4, S.376f.] kann der Umkehrsatz, anders als viele andere Rechenregeln und Differenziationsregeln, nicht analog wie im Reellen hergeleitet werden. Für den Umkehrsatz im Reellen haben wir nämlich die Monotonie verwendet. Diese Eigenschaft von Funktionen können wir allerdings nicht so leicht auf den Raum der komplexen Zahlen übertragen.

Der Umkehrsatz für den Raum $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen besitzt - ähnlich wie unser behandelte Satz über die inverse Funktion im Reellen - ebenfalls einige Anwendungsfelder und Folgerungen. Diese jetzt zu behandeln würde allerdings über das Maß hinausgehen. Daher belassen wir es bei dem Wissen, dass auch in der komplexen Analysis derartige Sätze eine wichtige Rolle spielen und manchmal wiederum mit Hilfe reeller Sätze bewiesen werden können.

9 Abschließende Bemerkungen

Bisher haben wir uns mit der mehrdimensionalen Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit befasst und die wichtige Rolle des Satzes über die inverse Funktion darin belegt. Der Satz, um den es ging, kommt jedoch auch noch in der komplexen Analysis zum Einsatz. Darauf noch genauer als bisher einzugehen würde den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen. Es wird aber nochmals klar, dass der Satz über die inverse Funktion

eine wichtige Stellung sowohl in der reellen als auch in der komplexen Analysis einnimmt und somit eine nähere Betrachtung verdient.

Wir haben mit einem der wichtigsten Fixpunktsätze der Analysis begonnen und sind nun bei mehrdimensionalen Integralen und sogar bei der komplexen Analysis gelandet. Den roten Faden hat uns dabei der Satz über die inverse Funktion geliefert. Auf unserem Weg mussten wir uns zunächst mit dem Umkehren befassen bevor wir neben der Behandlung impliziter Funktionen auch größte Werte finden konnten. Die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren als wichtiges Mittel zur Bestimmung von Extremstellen unter Nebenbedingungen liefert neben der Transformationsformel eine weitere wichtige Folgerung des Satzes über die inverse Funktion und bekräftigt nochmals seine Bedeutung für die mehrdimensionale Analysis. Am Ende konnten wir auch noch feststellen, dass ein ähnlicher Satz in der komplexen Analysis existiert und dass auch dieser wiederum mit Hilfe des reellen Satzes über die inverse Funktion bewiesen wird.

Die angeführten Beispiele haben die praktische Anwendbarkeit der Sätze gezeigt und durch die Exkurse zu den schulischen Anwendungen konnte an das bereits Bekannte angeknüpft werden. Somit haben wir nun einen umfassenden Eindruck des behandelten Satzes erhalten und konnten dessen Wirkungs- und Anwendungsfelder Schritt für Schritt erfahren.

Wir haben die wichtigsten Folgerungen des Satzes über die inverse Funktion und damit einige der bedeutendsten Sätze aus dem Bereich der mehrdimensionalen Analysis behandelt und konnten uns dadurch der wichtigen Rolle dieses Satzes bewusst werden. Sowohl im Bereich der Analysis als auch in anderen mathematischen Bereichen - wie zum Beispiel der Stochastik - lassen sich sicherlich noch weitere Verbindungen zu oder Verweise auf diesen Satz finden. Auch der Bereich der komplexen Analysis würde noch viel Spielraum für weitere Nachforschungen bieten. Bis ins kleinste Detail allen möglichen Anwendungsfeldern dieses umfassenden Satzes und dessen Korollaren nachzugehen erlaubt jedoch der Rahmen dieser Arbeit nicht. Daher belassen wir es bei den bisherigen Ergebnissen, die durchaus den Anstoß für weitere Nachforschungen liefern können und schließen unsere Überlegungen damit ab.

Wenn möglich, bitte wenden...

Zum Glück können wir diesen Befehl nun ignorieren, denn wir haben ihn schon ausgeführt und können unseren Weg von nun an direkt fortsetzen.

10 Zusammenfassung

Umkehren und die hoch geschätzte logische mathematische Vorgehensweise scheinen im ersten Moment nicht sehr gut zusammenzupassen. Doch wie so oft im Leben lohnt es sich auch, oder eigentlich vor allem in der Mathematik, die Dinge genauer zu betrachten. Denn oft kommen erst bei genauer Betrachtung die Details und Verbindungen, die von Bedeutung sein können, zum Vorschein. Ebenso verhält es sich mit dem Satz über die inverse Funktion. Erst bei genauer Auseinandersetzung mit diesem Satz wird man sich seiner Bedeutung für die mehrdimensionale Analysis sowie seiner zahlreichen Folgerungen und Anwendungsbereiche bewusst. Die Vielseitigkeit seiner Korollare rechtfertigt die genaue Auseinandersetzung mit diesem Satz und erfordert genauere Betrachtungen. Um seine Korollare mit dessen Hilfe beweisen zu können werden zunächst die nötigen Voraussetzungen für den Beweis des Satzes über die inverse Funktion selbst genauer behandelt.

Daher befasst sich das erste Kapitel mit dem Banach'schen Fixpunktsatz sowie einigen, für die Formulierung und den Beweis des Satzes, relevanten Definitionen. Im Anschluss wird durch den eindimensionalen Satz über die inverse Funktion an den für uns wichtigen und essentiellen mehrdimensionalen Satz herangeführt. Somit gelangen wir bereits im zweiten Kapitel zu unserem roten Faden. Dieser Satz wird uns in jedem Kapitel wieder begegnen und uns bis zum Schluss begleiten. Nachdem der Satz über die inverse Funktion formuliert und bewiesen wurde, können wesentliche Sätze der Analysis wie der Satz über die implizite Funktion, die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren zur Bestimmung von Extremstellen unter Nebenbedingungen oder die Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale mit Hilfe dieses Satzes verständlich und nachvollziehbar bewiesen werden. In einem letzten Kapitel wird noch ein Ausblick auf die Sachlage im Bereich der komplexen Analysis geboten. Denn auch dort existiert ein solcher Satz, abgewandelt durch die Konsequenzen die der Raum der komplexen Zahlen mit sich bringt.

In jedem der Kapitel werden auch einige Beispiele angeführt um die praktische Anwendungsweise sowie die damit verbundene Relevanz der behandelten Sätze zu verdeutlichen. Überdies bietet jedes Kapitel einen Ausblick auf weitere Anwendungsmöglichkeiten der einzelnen Sätze. Im Zuge dieser Erläuterungen kommen wir bis zur Stochastik, was die weitreichende Bedeutung der dargebotenen Sätze nochmals untermauert.

Da wir uns während der Auseinandersetzung mit all diesen Sätzen in höheren Dimensionen bewegen ist es wichtig, dass wir den Bezug zu dem uns Vertrauten nicht verlieren. Deshalb wird auch auf die eindimensionalen Entsprechungen der Sätze eingegangen. Mit Hilfe dieser eindimensionalen Versionen kann auch bei den meisten Sätzen der Bezug zum Schulstoff hergestellt werden. Denn Umkehrfunktionen, implizite Funktionen und auch Extremwertaufgaben sind uns allen ein Begriff. Bereits während der Schulzeit sind uns also die Grundbausteine mit auf den Weg gegeben worden.

All diese Zugänge verdeutlichen die wichtige Stellung des Satzes über die inverse Funktion und rechtfertigen die genaue Auseinandersetzung mit diesem Satz. Weitere Folgerungen des Satzes über die inverse Funktion sowie weitere Anwendungsmöglichkeiten der in den einzelnen Kapiteln behandelten Sätze könnten sicherlich noch gefunden werden, würden allerdings über das Maß hinausgehen. Besonders im Bereich der komplexen Analysis wird nur der Anstoß zur weiteren Auseinandersetzung mit diesem Stoffgebiet geliefert.

Zuerst umkehren, bevor unter vielen anderen Ergebnissen auch größte Werte gefunden werden können

- so lautet das Motto der Vorgangsweise, die uns letztendlich wohlbehalten und mit vollem Verständnis für die behandelten Themen ans Ziel bringt.

11 Abstract

Turning back and the valued logical mathematical procedure don't seem to belong together at first. But as is the way of world, it is often worth taking a closer look at things - especially when it comes to mathematics. All the details and connections that are of importance only turn up by meticulous consideration. And that is also the way we have to deal with the inverse function theorem. Only the exact examination of this theorem makes us realize its importance for the multidimensional analysis as well as its numerous conclusions and areas of application. The varied character of its corollaries justifies the exact examination of this theorem and requires some further considerations. To show all these corollaries using this theorem, the necessary preconditions for the theorem itself as well as for its proof will be treated.

That is why we concern ourselves with the Banach fixed-point theorem as well as with some relevant definitions for the formulation and the proof of the theorem in the first chapter.

Afterwords the one-dimensional inverse function theorem brings us up to the important and essential multidimensional theorem. We already take up the central theme in the second chapter. We will encounter this theorem in every chapter and it will accompany us until the end. After having formulated and proven the inverse function theorem, essential theorems of the analysis like the implicit function theorem, the method of the Lagrange multipliers which is used to categorize extreme values and especially constrained extrema or the transformation formula for multidimensional integrals can be proven in a comprehensible and understandable way with the help of the inverse function theorem.

The last chapter offers a prospect for the situation in the context of complex analysis because we can find a similar theorem there, adapted through the consequences the area of the complex numbers involves.

Every chapter contains some examples that explain the practical way of application as well as the involved relevance of the theorems that we deal with. Moreover every chapter offers a prospect for further possibilities of application of the separate theorems. In the course of these explanations we are not only confronted with the multidimensional analysis but also with the stochastics which supports the extensive significance of the presented theorems.

As we are in higher dimensions while dealing with all these theorems it is important not to lose the connections to things we are familiar with. That is why we also deal with the one-dimensional equivalences of the theorem. With the help of these one-dimensional versions, the connection between the theorems and the subject material of the high-school can be established. Inverse functions, implicit functions and extreme values already mean something to us. We will see that already in school we were given the basic knowhow.

All these perspectives demonstrate once again the important position of the inverse function theorem and justify the exact examination of this theorem. Further conclusions of the inverse function theorem as well as further possibilities of application of the treated theorems can be found without a doubt but would go beyond the scope of this paper. Especially when it comes to complex analysis only a first stimulus to further examination is given.

At first turn back before amongst other results even biggest figures can be found

- that's the motto of our procedure that helps us to reach our goal - save and sound and with sympathy for the treated topic.

12 Abbildungs- und Literaturverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Umkehrfunktionen sind symmetrisch bezüglich der ersten Mediane (vgl. [13, Abb. 6.8]). 11
2 Funktion und deren symmetrische Umkehrfunktion (vgl. [13, Abb. 6.7]). 25
3 Einer Kugel eingeschriebener Zylinder. 38
4 Querschnitt des Sachverhaltes. 39
5 Einer Kugel eingeschriebener Quader. 45
6 Querschnitt des gegebenen Sachverhaltes. 46
7 Graphische Darstellung der Menge A. 62
8 Die Menge A graphisch dargestellt. 63
9 Darstellung der Menge A als Ellipsoid. 72
10 Polarkoordinaten graphisch dargestellt. 79
11 Graphische Darstellung der Zylinderkoordinaten (vgl. [2, Fig. 251.1]). . 81
12 Kugelkoordinaten graphisch dargestellt (vgl. [3, Abb. 171]). 83

Literatur

[1] Auzinger, Winfried / Weinmüller, Ewa, *Analysis II für TPH*, Technische Universität Wien, Wien, 2008.

[2] Blatter, Christian, *Analysis III*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974.

[3] Böhme, Gert, *Analysis - Teil 1 : Funktionen, Differentialrechnung*, 4.Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983.

[4] Busam, Rolf / Epp, Thomas, *Prüfungstrainer Analysis*, 2.Auflage, Springer Spektrum - Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2015.

[5] Ferschl, F., *Markovketten*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1970.

[6] Fischer, Wolfgang / Lieb, Ingo, *Einführung in die Komplexe Analysis : Elemente der Funktionentheorie*, Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2010.

[7] Fritzsche, Klaus, *Grundkurs Analysis 2 : Differentiation und Integration in mehreren Veränderlichen*, 2. Auflage, Springer Spektrum - Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.

[8] Hairer, Ernst / Wanner, Gerhard, *Analysis in historischer Entwicklung*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.

[9] Heuser, Harro, *Lehrbuch der Analysis Teil 2*, 8. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart, 1993.

[10] Jahnke, Hans Niels (Hrsg.), *Geschichte der Analysis*, Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg Berlin, 1999.

[11] Kunik, Matthias / Skrzypacz, Piotr, *Höhere Analysis durch Anwendungen lernen*, Springer Spektrum - Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2014.

[12] Lasser, Rupert / Hofmaier, Frank, *Analysis 1 + 2*, Springer Spektrum - Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.

[13] Malle, Günther et al., *Mathematik verstehen 6*, 1. Auflage, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH und Co. KG, Wien, 2005.

[14] Malle, Günther et al., *Mathematik verstehen 8*, 1. Auflage, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH und Co. KG, Wien, 2007.

[15] Pöschel, Jürgen, *Etwas Analysis : Eine Einführung in die eindimensionale Analysis*, Springer Spektrum - Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2014.

[16] Pöschel, Jürgen, *Etwas mehr Analysis : Eine Einführung in die mehrdimensionale Analysis*, Springer Spektrum - Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2014.

[17] Pöschel, Jürgen, *Noch mehr Analysis : Mehrdimensionale Integration, Fouriertheorie, Funktionentheorie*, Springer Spektrum - Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2015.

[18] Raith, Peter, *Mitschrift zur Vorlesung Einführung in die Analysis*, Wien, 2014.

[19] Raith, Peter, *Proseminar zu Analysis in einer Variablen für LAK*, Wien, 2014/15.

[20] Raith, Peter, *Mitschrift zur Vorlesung Reelle Analysis in mehreren Variablen und komplexe Analysis in einer Variablen für LAK*, Wien, 2015.

[21] Raith, Peter, *Proseminar zu Reelle Analysis in mehreren Variablen und komplexe Analysis in einer Variablen für LAK*, Wien, 2015.

[22] Raith, Peter, *Mitschrift zur Vorlesung Stochastik für LAK*, Wien, 2016.

[23] Salamon, Dietmar, *Analysis I und II - Vorlesungs-Script*, Mitschrift nach Honegger Raphael, 2006, online unter:
https://people.math.ethz.ch/ salamon/PREPRINTS/ana12.pdf,
letzter Zugriff am 16.02.2018.

[24] Schärf, Julius, *Mathematik für höhere technische Lehranstalten - BAND 3*, 5. Auflage, R. Oldenbourg KG, Wien, 1988.

[25] Struwe, Michael, *Analysis I und II*, ETH Zürich, Zürich, 2011/2012, online unter:
https://people.math.ethz.ch/ struwe/Skripten/Analysis-I-II-final-6-9-2012.pdf,
letzter Zugriff am 16.02.2018.

[26] Taschner, Rudolf, *Anwendungsorientierte Mathematik für ingenieurwissenschaftliche Fachrichtungen - Band 2: Gleichungen und Differentialgleichungen*, Carl Hanser Verlag, München, 2014.

[27] Timischl, Wolfgang / Kaiser, Gerald, *Ingenieur-Mathematik 3*, 6. Auflage, Verlag E.DORNER GmbH, Wien, 2009.

[28] Tretter, Christiane, *Analysis I*, Birkhäuser - Springer Basel AG, Basel, 2013.

[29] Tretter, Christiane, *Analysis II*, Birkhäuser - Springer Basel AG, Basel, 2013.

[30] Zorich, Vladimir A., *Analysis I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.

[31] Zorich, Vladimir A., *Analysis II*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.