



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Mathematische Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie“

verfasst von / submitted by

Dipl. Ing. Arthur Sedivy

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 120 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramstudium UniStG
UF Mathematik UniStG
UF Physik UniStG

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Roland Steinbauer

Für meine beiden Kinder Maya und Florian sowie für meinem
Großvater Otto.

Ich bedanke mich bei meiner Frau Andrea die viele Entbehrungen auf sich nahm, um mir die Möglichkeit zu geben dieses Lehramstudium neben Beruf und Familie zu absolvieren.

Außerdem bedanke ich mich bei meiner Mutter Gabi, die mich immer unterstützt und stark meine Sicht auf die Welt und meine Mitmenschen geprägt hat.

Bei meinem Vater, dass er mir die wissenschaftlich analytische Weltanschauen mitgegeben hat.

Und zu guter Letzt bedanke ich mich bei meiner Großmutter Elfriede die mich, seit ich mich erinnern kann, bei meinen Unternehmungen unterstützt und mir die (finanzielle) Möglichkeit bietet diese auch durchzuführen.

Zusammenfassung

In dieser Diplomarbeit werden die mathematischen Grundlagen zum Verständnis der Einsteingleichungen, die der Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie zugrunde liegen, dargestellt.

Dazu wird in Teil I der Begriff der glatten Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ als „Erweiterung“ des Euklidischen Raumbegriffs $\mathbb{R}^n$ eingeführt. Ein wichtiges Werkzeug dabei sind Karten $(\xi, \mathcal{U})$, die lokal Mannigfaltigkeiten beschreiben. Weiterhin werden Objekte eingeführt die auf diesen Mannigfaltigkeiten „leben“: Von den einfachen Funktionen $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ über Vektorfelder $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ und Einsformen $\theta \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ bis zu ihren Verallgemeinerungen, den Tensorfeldern $A \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$.

Im Teil II wird nun mittels dieser Objekte auf Mannigfaltigkeiten eine Geometrie definiert, die in der sogenannten Metrik g , ein $(0, 2)$ -Tensorfeld auf $\mathcal{M}$, kodiert ist. Die Metrik definiert dabei an jedem Punkt der Mannigfaltigkeit ein $(0, 2)$ -Skalarprodukt. Semi-Riemann Mannigfaltigkeiten (SRMF) werden als Mannigfaltigkeiten definiert, auf denen eine Metrik gegeben ist.

Mit Hilfe der Metrik g wird Differentialgeometrie auf SRMF betrieben und zunächst der Ableitungsbegriff in Gestalt des Levi-Civita Zusammenhangs definiert. Daraus ergeben sich sowohl die kovariante Ableitung von Tensorfeldern, sowie der Paralleltransport von Tensorfeldern längs Kurven. Die Wegabhängigkeit dieses Paralleltransports kann als intrinsische Eigenschaft von SRMF angesehen werden. Ist lokal der Paralleltransport wegunabhängig, wird die Mannigfaltigkeit dort flach genannt. Der Riemannstensor R wird definiert als ein Maß dafür, wie stark eine Mannigfaltigkeit lokal von der flachen Geometrie des $\mathbb{R}^n$ abweicht. Damit wird der Begriff der Krümmung für Mannigfaltigkeiten definiert. Weiters werden der Ricci Tensor **Ric** sowie die skalare Krümmung S als abgeleitete Größen des Riemannstensors definiert. Abschließend werden in Teil II auch noch wichtige Differentialoperatoren für SRMF definiert, die den Vektorkalkül des $\mathbb{R}^3$ verallgemeinern.

Im dritten Teil der Diplomarbeit steht die physikalische Interpretation im Vordergrund. Das Formulieren von physikalischen Gesetzen unter gewissen Invarianzen führt zu den Begriffen der speziellen bzw. allgemeinen Kovarianz, was auf die Formulierung der Speziellen bzw. Allgemeinen Relativitätstheorie führt.

In der Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie wird das Raumzeit-Kontinuum als spezielle Form der SRMF, genauer eine zeitorientierte 4-dimensionale Lorentzmannigfaltigkeit, definiert. Teilchen die sich auf dieser Raumzeit bewegen, sowie die Berechnung von Impulsen und Energien werden in Teil III diskutiert. Für eine kontinuierliche „Teilchenverteilung“ wird der Energie-Impuls Tensor T definiert, der bestimmten (empirischen) Regeln genügen muss.

Sogenannte Gezeitenkräfte sind physikalische Manifestationen der Gravitation auf frei fallende Teilchen. Der Vergleich der Formulierungen dieser Gezeitenkräfte in klassischer (Newton'scher) Gravitationstheorie, sowie in der Differentialgeometrie von SRMF wird als Motivation für die Form der Einsteingleichungen hergenommen. Dies führt auf die Definition des Einsteintensors G und damit zur abschließenden Formu-

lierung der Einsteingleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
I	Analysis auf Mannigfaltigkeiten	2
2	Mannigfaltigkeiten	2
3	Vektorfelder	6
4	Einsformen	10
5	Tensoren	12
II	Elemente der semi-Riemann Geometrie	14
6	Metrik	15
7	Semi-Riemann Mannigfaltigkeiten	18
8	Musikalischer Isomorphismus	21
9	Levi-Civita Zusammenhang	24
10	Kovariante Ableitung von Tensorfeldern	29
11	Paralleltransport	33
12	Krümmung	39
13	Differentialoperatoren auf SRMF	44
III	Die Einstein'sche Feldgleichung	48
14	Physikalische Gesetzte	48
15	Energie-Impuls Tensorfeld	52
16	Empirische Motivation der Einstein'schen Feldgleichung	53
17	Formulierung der Einsteinschen Feldgleichung	55
18	Lösungen der Einstein'schen Feldgleichung	56

19 Erklärung physikalischer Phänomene	57
IV Anhang	57
20 Notationen	57

1 Einleitung

Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART), formuliert von Albert Einstein 1915 in [1] und [2], veränderte die Vorstellung von Gravitation wie auch Raum und Zeit grundlegend. Dabei basiert die Formulierung der ART auf rein theoretischen Überlegungen, wie auch schon die Formulierung der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) 1905 in [3]. Die SRT kann man mit mathematischen Begriffen und Hilfsmitteln, die man im Grunde schon in der Schule lernt, nachvollziehen. In Schulbüchern der 8. Klasse, vor allem aber im Studium der Physik ist die SRT ein nicht wegzudenkender Bestandteil der unsere Vorstellung von Realität prägt. Die ART hat nicht im gleichen Umfang Einzug in das Physikstudium gefunden, an verschiedenen Universitäten in Österreich gibt es sogar nur alle paar Jahre ein Vorlesung zu diesem Thema. Dies liegt vor allem daran, dass für die mathematische Formulierung der ART die Geometrie des Euklidischen Raumes nicht ausreicht, sondern die sogenannte Lorentzgeometrie, ein Teilgebiet des großen mathematischen Bereichs der Differentialgeometrie, zum Tragen kommt.

Diese Diplomarbeit setzt sich es zum Ziel das notwendige mathematische Grundgerüst zum Verständnis der Einstein'schen Feldgleichungen, und damit zur Formulierung der Grundidee der ART, aufzubauen. Das Zielpublikum dieser Diplomarbeit besteht im speziellen aus LehramtstudentInnen der Physik bzw. der Mathematik, die die ART grundlegender verstehen wollen als nur anhand von „Diagrammen gekrümmter Raumzeit“, die stets zur Illustration populärwissenschaftlicher Erklärungen der ART herhalten müssen. Dabei wird angenommen, dass zu diesem Thema interessierte LeserInnen schon Kenntnisse der Speziellen Relativitätstheorie haben sowie die Grundlagen der Mathematik auf Hochschulebene besitzen, sich jedoch noch nicht mit der, weit außerhalb jedes Lehramt Curriculums liegenden, Differentialgeometrie auseinandergesetzt haben.

Die Ursprüngliche Formulierung der ART durch Albert Einstein, sowie viele Physikalische Publikationen danach, verwendet eine sehr umständliche und nicht unbedingt zum Verständnis beitragende Notation. Erst Jahrzehnte später wurde von Mathematikern der semi-Riemann Mannigfaltigkeitsbegriff verwendet, um eine elegante und über die ART hinausgehende Differentialgeometrie zu formulieren. Daher stammen auch die Standardwerke, die sich mit der umfassenden mathematischen Beschreibung dieser Semi-Riemann Geometrie befassen aus den 1980er Jahren. Besonders erwähnt sei hierbei das Werk **Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity** von **Barret O' Neill** [4].

Die mathematischen Formulierungen in dieser Diplomarbeit, die ja die Fähigkeit des wissenschaftlichen Arbeitens in der Disziplin der Mathematik demonstrieren soll, genügen dem Anspruch exakt und prägnant zu sein. Da diese Diplomarbeit allerdings nicht ausschließlich für MathematikerInnen geschrieben wurde findet man zwischendurch immer wieder anschauliche Erklärungen die eher in Alltagssprache gehalten sind. Diese haben nicht den Anspruch mathematisch exakte Texte darzustellen, sondern der/dem eher intuitiv denkenden PhysikerIn den Weg zur mathematischen Begriffsbildungen zu ebnen. Diese

Zwischentexte sind durchwegs

in serifenfreier Schrift

kenntlich gemacht.

Teil I

Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Für alle physikalischen Gesetze vor der Allgemeinen Relativitätstheorie war der Raum immer etwas von „Außen“ vorgegebenes. Erstmals in der Physik wurde mit der ART der Raum selbst variabel, konnte sich also nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten verändern. Um diese Veränderlichkeit des Raumes fassen zu können benötigt man einen verallgemeinerten Raumbegriff.

In diesem, ersten Teil der Arbeit, wird der bekannte Euklidische Raumbegriff des $\mathbb{R}^n$ auf sogenannte Mannigfaltigkeiten verallgemeinert. Grundlage dafür ist, dass Mannigfaltigkeiten lokal dem $\mathbb{R}^n$ „entsprechen“, global allerdings andere Eigenschaften besitzen können. Dieser verallgemeinerte Raumbegriff von Mannigfaltigkeiten ist die Grundlage für die Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie. Außerdem werden mit Funktionen, Vektorfeldern und Einsformen Objekte definiert, die auf diesen Mannigfaltigkeiten „leben“. Zum Abschluss dieses Teils werden diese Objekte zu Tensorfeldern zusammengefasst.

Die Einführung der Begriffe und Notationen in Teil I folgt weitgehend den ersten beiden Kapiteln von [4].

2 Mannigfaltigkeiten

Bevor wir den Begriff der glatten Mannigfaltigkeit definieren wiederholen wir wichtige Grundlagen aus der Analysis (siehe zum Beispiel [5]) und legen dabei die Notation fest.

Der **n-dimensionale Euklidische Raum** $\mathbb{R}^n$ ist die Menge der n-Tupel reeller Zahlen $x = (x^1, \dots, x^n)$. Auf $\mathbb{R}^n$ sind **Skalarprodukt**, **Norm** und **Metrik** definiert als

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (\text{Skalarprodukt})$$

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (\text{Norm})$$

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (\text{Metrik}).$$

Dabei erfüllt die Metrik die drei Bedingungen

- (M1) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (positiv definit),
- (M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetrisch) und
- (M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung).

Allgemein definiert man einen **metrischen Raum** als eine Menge $\mathcal{X}$ mit einer Abbildung $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, genannt die Metrik auf $\mathcal{X}$, die (M1) - (M3) erfüllt.

In einem metrischen Raum definiert man die **offene ε - Kugel** um einen Punkt $x \in \mathcal{X}$ als

$$\mathcal{K}_\varepsilon(x) = \{y \in \mathcal{X} : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Eine Teilmenge $O \subseteq \mathcal{X}$ heißt **offen**, falls um jeden ihrer Punkte $x \in O$ eine offene ε -Kugel $\mathcal{K}_\varepsilon(x)$ existiert, die ganz in O liegt. Wegen der Dreiecksungleichung sind die offenen ε -Kugeln tatsächlich offen.

Eine Menge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ heißt **Umgebung** von x falls es eine offene Menge O gibt, so daß $x \in O \subseteq \mathcal{U}$ gilt.

Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ heißt **stetig**, falls die Urbilder offener Mengen offen sind.

Eine stetige, bijektive Abbildung mit stetiger Umkehrabbildung heißt **Homöomorphismus**. Ist $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ein Homöomorphismus, so nennt man $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ **homöomorph**.

Definition 1 (n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit). *Ein metrischer Raum $\mathcal{X}$, in dem jeder Punkt $x \in \mathcal{X}$ eine Umgebung $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, heißt **n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit**.*

Es gilt also $\forall x \in \mathcal{X} \quad \exists \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ mit $\xi : \mathcal{U} \rightarrow \xi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ξ ein Homöomorphismus.

Die Homöomorphismen ξ der Umgebung $\mathcal{U}$ werden in den nachfolgenden Kapiteln intensiv verwendet, daher bekommen sie einen eigenen Namen.

Definition 2 (Karte oder Koordinatensystem). *Als **Karte** ($\xi = (x^1, \dots, x^n), \mathcal{U}$) oder auch **Koordinatensystem** einer Umgebung von p in einem metrischen Raum $\mathcal{X}$ definiert man einen Homöomorphismus ξ einer offenen Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ auf eine offene Teilmenge $\xi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$, also $\xi : \mathcal{U} \rightarrow \xi(\mathcal{U}), p \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$.*

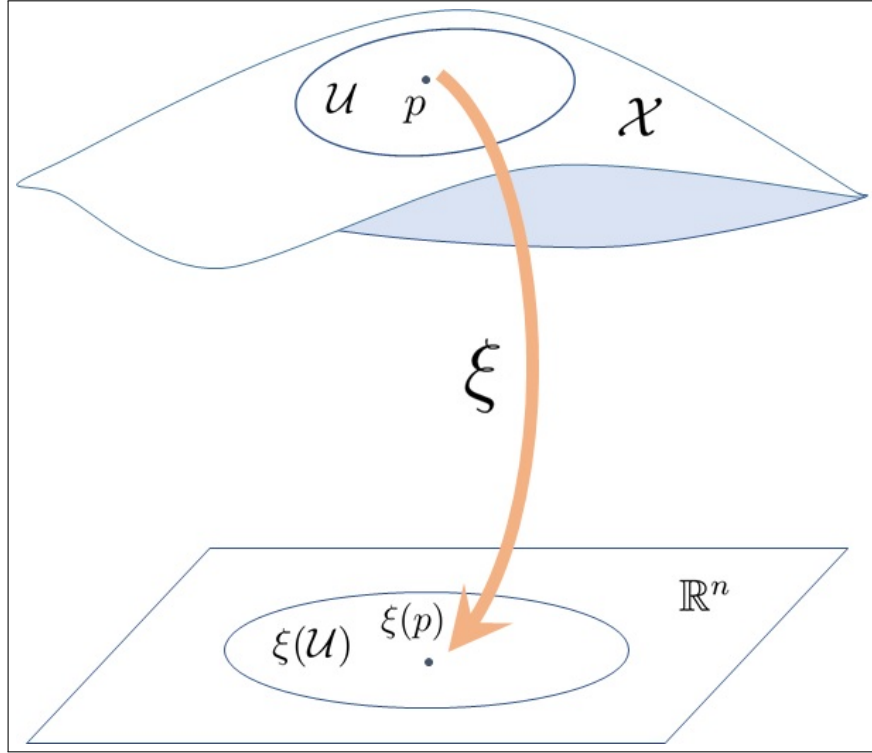


Abbildung 1: Karte

Diese Karten bilden also immer lokal den metrischen Raum ab, siehe Abbildung 1. Eine Analogie aus dem Alltag ist eine Karte von Europa, die einen Teil der Erdoberfläche abbildet.

Sei nun $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Mit $u^i : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $u = (u^1, \dots, u^n) \mapsto u^i$ für $1 \leq i \leq n$ bezeichnet man die **natürlichen Koordinatenfunktionen** auf $\mathbb{R}^n$.

Eine Abbildung $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **glatt**, falls die **partiellen Ableitungen** $\partial/\partial u^i$ jeder Ordnung von f existieren und stetig sind.

Eine Abbildung $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **glatt**, falls alle ihre **Komponentenfunktionen** $f^i := u^i \circ f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq m$) *glatt* sind.

Sei nun wieder $p \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ und $\xi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ für alle p . Man bezeichnet die Funktion x^i mit ($1 \leq i \leq n$) als **i-te Koordinatenfunktion** der Karte $(\xi, \mathcal{U})$ und $x^i(p)$ die i-te Koordinate des Punkts $p \in \mathcal{U}$. Insbesondere gilt $u^i \circ \xi = x^i$.

Man sagt zwei Karten $(\varphi, \mathcal{U})$ und $(\psi, \mathcal{V})$ **überlappen glatt**, falls gilt $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ oder $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ und die beiden Kompositionen

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \rightarrow \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}),$$

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \rightarrow \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

glatte Abbildungen offener Teilräume des $\mathbb{R}^n$ sind. Diese Abbildungskompositionen werden **Kartenwechsel** genannt und sind sogar **Diffeomorphismen**, dh. glatte Bijektionen, deren Umkehrabbildungen auch glatt sind (siehe Abbildung 2).

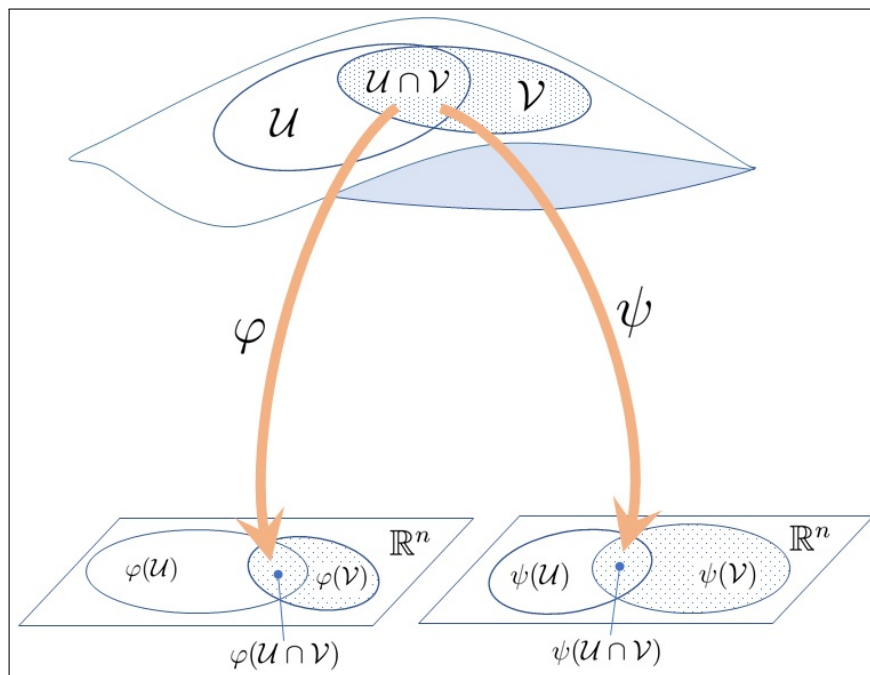


Abbildung 2: Kartenwechsel

Das bedeutet anschaulich, dass bei einem Kartenwechsel zwar die Koordinaten verändert (verzerrt) werden können, die Gebiete jedoch immer ähnlich zueinander bleiben.

Als einen n -dimensionalen glatten **Atlas** von $\mathcal{X}$ definiert man eine Familie von Karten $(\varphi_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$, mit den Eigenschaften

- (A1) jeder Punkt $x \in \mathcal{X}$ liegt in (mindestens) einer Kartenumgebung $\mathcal{U}_\alpha$,
- (A2) alle Karten überlappen glatt.

Ein Atlas ist also eine Sammlung von Karten in der der gesamte metrische Raum glatt abgebildet ist. Ein Analogie hierfür ist ein Atlas der Erde, der auf mehreren Karten die gesamte Erdoberfläche abbildet.

Jeder Atlas ist in einem eindeutig **maximalen Atlas** enthalten, das heißt einem Atlas, der bereits alle möglichen glatt überlappenden Karten enthält (Kapitel 1, Lemma 3 in [4]). Oft ist es sinnvoll, mit maximalen Atlanten zu arbeiten um technische Probleme zu vermeiden.

Mit Hilfe des bisher Definierten gelangt man schließlich zur essentiellen

Definition 3 (Glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit). Eine **glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit** $\mathcal{M}$ ist ein metrischer Raum mit einem maximalen Atlas.

Zwei Beispiele für Mannigfaltigkeiten sind der Euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ und die Kugel S^2 :

$$S^2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 | (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}.$$

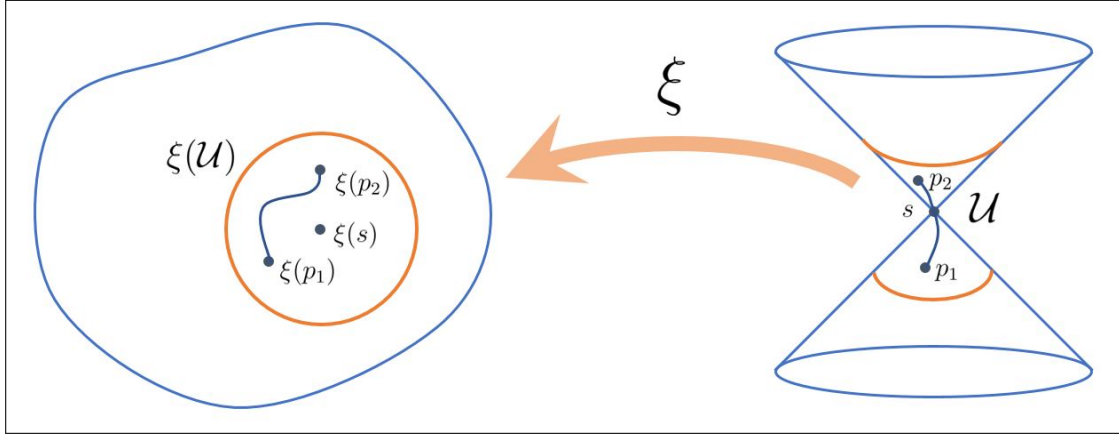


Abbildung 3: Doppelkegel

Ein Gegenbeispiel ist der Doppelkegel (Abbildung 3), der keine Mannigfaltigkeit bildet, da der Punkt s an den Spitzen keine „essentiell 2-dimensionale“ Umgebung $\mathcal{U}$ besitzt. Man kann also keinen Punkt p_1 im unteren Teil des Kegels mit einem Punkt p_2 des oberen Kegels über eine Kurve verbinden, ohne dass die Kurve durch die Spitze s verläuft, während das im Kartenbild sehr wohl möglich ist. (Vergleiche Beispiel 3.1.8 in [6]).

Die obige Definition einer glatten, n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ermöglicht es Geometrie in Räumen zu betreiben, die allgemeiner gehalten sind als $\mathbb{R}^n$. Lokal lässt sich jede Mannigfaltigkeit mittels Karten darstellen. Nachdem die Kartenabbildungen $\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ offene Teilmengen des Euklidischen $\mathbb{R}^n$ sind lässt sich die Analysis aus $\mathbb{R}^n$ mit Hilfe der Karten auf Mannigfaltigkeiten „hochziehen“. Dies wird Aufgabe der nächsten Kapitel sein.

3 Vektorfelder

In diesem und den beiden folgenden Kapiteln werden mathematische Objekte die auf Mannigfaltigkeiten „leben“ (Vektorfelder, Einsformen und Tensorfelder) eingeführt.

Sei $(\xi = (x^1, \dots, x^n), \mathcal{U})$ eine Karte in $\mathcal{M}$. Für die Funktion $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt $(f \circ \xi^{-1}) : \xi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ die **Koordinatendarstellung** der Funktion f in den Koordinaten $(x^1, \dots, x^n)$. Das bedeutet

$$f = (f \circ \xi^{-1})(x^1, \dots, x^n)$$

auf $\mathcal{U}$.

Definition 4 (glatte Funktion). Sei $\mathcal{M}$ eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Eine **Funktion** f in $\mathcal{M}$ heißt **glatt**, falls

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto f(p),$$

in einer (daher jeder) Koordinatendarstellung glatt ist.

Eine glatte Funktion f weist also jedem Punkt der Mannigfaltigkeit einen reellen Wert zu. Physikalische Beispiele hierfür sind die **Temperatur**, der **Druck**, die **Ladungsdichte** und damit verknüpft das **elektrostatische Potential** oder die **Massendichte** und damit verknüpft das **chemische Potential**, die an jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit einen bestimmten Wert annehmen. (Zum Beispiel hat der Luftdruck an jedem Punkt/Ort in Wien einen bestimmten Wert.)

Sei $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ die **Menge aller glatten Funktionen** auf $\mathcal{M}$. Mit der üblichen punktuellen Addition und Multiplikation für reelle Funktionen bildet $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ einen kommutativen Ring.

Definition 5 (Tangentialvektor). Sei $\mathcal{M}$ eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, $p \in \mathcal{M}$. Als **Tangentialvektor** v im Punkt p an $\mathcal{M}$ definiert man eine Funktion

$$v : \mathfrak{F}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto v(f),$$

die für alle $f, g \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ und $a, b \in \mathbb{R}$ die beiden Bedingungen

$$(T1) \quad v(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot v(f) + b \cdot v(g) \quad (\mathbb{R}\text{-Linearität}) \text{ und}$$

$$(T2) \quad v(f \cdot g) = f(p) \cdot v(g) + v(f) \cdot g(p) \quad (\text{Leibnitzregel})$$

erfüllt.

An jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ sei $T_p(\mathcal{M})$ die **Menge aller Tangentialvektoren** auf $\mathcal{M}$ in p . Mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation bildet $T_p(\mathcal{M})$ einen **Vektorraum** über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ der Dimension $n = \dim \mathcal{M}$. Dieser Vektorraum heißt der **Tangentialraum** von $\mathcal{M}$ bei p .

Aus einer Karte $(\xi, \mathcal{U})$ um p in $\mathcal{M}$ lässt sich in natürlicher Weise eine Basis für $T_p(\mathcal{M})$ konstruieren. Diese **natürliche Basis** wird mit $\{\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p\}^{(\xi, \mathcal{U})}$ bezeichnet. Die Bezeichnung erinnert nicht zufällig an die Schreibweise partieller Ableitungen $\partial_i f$ für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Tatsächlich ist $\partial_i|_p^{(\xi, \mathcal{U})}$ definiert als der **i-te partielle Ableitungsoperator** der Karte $(\xi, \mathcal{U})$ in $T_p(\mathcal{M})$. Um diese natürliche Basis auf Mannigfaltigkeiten explizit definieren zu können, bedient man sich der **Koordinatendarstellung** von reellen Funktionen auf $\mathcal{M}$ und der **gewöhnlichen partiellen Ableitung** $(\partial/\partial u^i)$ des Euklidischen Raumes.

Definition 6 (i-ter natürlicher Basisvektor). Sei $(\xi, \mathcal{U})$ eine Karte in $\mathcal{M}$ an p . $\partial_i|_p$ ist definiert über seine Wirkung auf $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$, mit $(u^1, \dots, u^n)$ den natürlichen Koordinatenfunktionen in $\mathbb{R}^n$:

$$\partial_i|_p f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p)) \quad (1 \leq i \leq n).$$

$\partial_i|_p$ heißt der **i-te natürliche Basisvektor** in $T_p(\mathcal{M})$ bezüglich $(\xi, \mathcal{U})$.

Dieser ist also per Definition die *gewöhnliche partielle Ableitung* der Koordinatendarstellung $(f \circ \xi^{-1})$ von f im Bild des Punktes $\xi(p)$ in Richtung u^i .

Durch explizite Rechnung zeigt man, dass der *i-te partielle Ableitungsoperator*

$$\partial_i|_p \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p : \mathfrak{F}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R},$$

der jeder glatten Funktion f ihre partielle Ableitung nach der i-ten Koordinatenrichtung der Karte $(\xi, \mathcal{U})$ zuordnet, laut Definition 5 tatsächlich ein Tangentialvektor an $\mathcal{M}$ in p ist.

Proposition 1 (Basistheorem). *Sei $(\xi, \mathcal{U})$ eine Karte in $\mathcal{M}$ bei p , dann bilden die entsprechenden natürlichen Basisvektoren $\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p$ eine Basis für den Tangentialraum $T_p(\mathcal{M})$. Jeder Tangentialvektor $v \in T_p(\mathcal{M})$ kann mit **Komponenten** $v^i \in \mathbb{R}$ bezüglich dieser Basis geschrieben werden als*

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i|_p.$$

Die hiermit definierten Tangentialvektoren entsprechen Vektoren im $\mathbb{R}^n$, allerdings mit einem signifikanten Unterschied. Im $\mathbb{R}^n$ kann man Vektoren beliebig verschieben, sie sind also ortsunabhängig, während auf Mannigfaltigkeiten jeder Tangentialvektor nur an einem bestimmten Basis-Punkt angehängt ist. Er kann **nicht** an einen anderen Basis-Punkt verschoben werden, da die Tangentialräume $T_p(\mathcal{M})$ und $T_q(\mathcal{M})$ in verschiedenen Punkten p und q a priori nichts miteinander zu tun haben. Dieser „Vektortransport“, und die damit einhergehende „Veränderung“ des Vektors wird in Teil II herangezogen um die Krümmung einer Mannigfaltigkeit (mit der Zusatzstruktur einer Metrik) zu definieren.

Definition 7 (Vektorfeld). *Eine Abbildung V , die jedem Punkt p auf der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ einen Tangentialvektor $V_p \in T_p(\mathcal{M})$ zuordnet heißt **Vektorfeld**. Für eine Funktion $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ und V definiert man eine Abbildung $V(f)$, sodass für jeden Punkt p in $\mathcal{M}$ gilt*

$$V(f)|_p := V_p(f).$$

Man nennt das *Vektorfeld* V glatt, falls für jedes $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ die Abbildung $V(f) \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$, also glatt ist. Glatte Vektorfelder sind daher Abbildungen $V : \mathfrak{F}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{M})$, $f \mapsto V(f)$.

Für glatte Vektorfelder V, W mit $V_p, W_p \in T_p(\mathcal{M})$ definiert man Addition und Multiplikation mit glatten Funktionen $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ punktweise wie folgt.

$$\begin{aligned} (V + W)_p &= V_p + W_p, \\ (fV)_p &= f(p)V_p \end{aligned}$$

für alle p in $\mathcal{M}$. Mit dieser Addition und Multiplikation bildet $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$, die **Menge aller glatten Vektorfelder** auf $\mathcal{M}$, einen $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ -Modul.

Für eine Karte $(\xi, \mathcal{U})$ heißt das Vektorfeld $\partial_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ **i-tes Koordinatenvektorfeld**. Es ordnet jedem Punkt $p \in \mathcal{U}$ den *i-ten natürlichen Basisvektor* $\partial_i|_p \in T_p(\mathcal{M})$ zu.

Aus dem Basistheorem (Proposition 1) folgt direkt

Lemma 1 (Koordinatendarstellung von Vektorfeldern). *Jedes Vektorfeld $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ kann mit Komponentenfunktionen $V^i \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ bezüglich der Karte $(\xi, \mathcal{U})$ angeschrieben werden als*

$$V = \sum V^i \partial_i.$$

Nachdem wir die Begriffe der glatten Funktionen und Vektorfeldern aus der Analysis im $\mathbb{R}^n$ auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinert haben, wenden wir uns nun dem Ableitungsbegriff zu.

Allgemein definiert man eine Derivation, als eine Abbildung mit zwei Eigenschaften die die „Essenz“ des Ableitungsbegriffs fassen, wie folgt.

Definition 8 (Derivation). *Eine **Derivation** $\mathcal{D}$ auf $\mathcal{M}$ ist eine Abbildung von $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ auf $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ welche die zwei Eigenschaften*

$$(D1) \quad \mathcal{D}(af + bg) = a\mathcal{D}(f) + b\mathcal{D}(g) \quad (\mathbb{R}\text{-Linearität}) \text{ und}$$

$$(D2) \quad \mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g + f\mathcal{D}(g) \quad (\text{Leibnitzregel})$$

für alle $f, g \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ und $a, b \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Bemerkung 1 (Identifikation von Vektorfeldern und Derivationen). *Jedem Vektorfeld entspricht in eindeutiger Weise eine Derivation mittels der Zuordnung*

$$V \mapsto \mathcal{D}_V : f \mapsto V(f) \text{ mit } V(f)(p) = V_p(f).$$

Ist V ein Vektorfeld, dann erfüllt $\mathcal{D}_V$ die Eigenschaften (D1) und (D2), wie man punktweise unter Verwendung von Definition 5 leicht nachrechnet. Umgekehrt kommt jede Derivation auf diese Weise zustande. Nämlich

sei $p \in \mathcal{M}$, dann definiert man $V_p : \mathfrak{F}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ mittels $V_p(f) := \mathcal{D}(f)(p)$. Wegen (D1) und (D2) gelten (T1) und (T2) und damit ist $V_p \in T_p(\mathcal{M})$. Damit ergibt sich das Vektorfeld V und es gilt $V(f) = \mathcal{D}(f)$ also $\mathcal{D} = \mathcal{D}_V$.

*Wann immer es sinnvoll ist werden daher **Vektorfelder** und **Derivationen** miteinander identifiziert.*

Vektorfelder können also als Richtungsableitungen auf Funktionen wirken. Die im Vektorfeld enthaltene Richtungsinformation gibt die Richtung der Richtungsableitung an. Diese Konstruktion ist in der Physik weit verbreitet wie zum Beispiel der **Wärmestrom**, der sich aus der Ableitung der *Temperatur*, das **elektrostatische Feld**, das sich aus der Ableitung des *elektrostatischen Potentials* und der diffusive **Teilchenfluss**, der sich aus der Ableitung des *chemischen Potentials* ergibt.

Definition 9 (Kommutator). Als **Kommutator** zweier Vektorfelder $V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ definieren wir das neue Vektorfeld $[V, W] \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ als

$$[V, W](f) := V(W(f)) - W(V(f)) \quad \forall f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}).$$

Verschwindet der Kommutator (d.h. $[V, W] = 0$) so sagt man, die beiden Vektorfelder V und W **vertauschen** (kommutieren).

Dies bedeutet also das es egal ist welches der beiden Vektorfelder (Derivationen) zuerst auf eine Funktion wirkt, die Derivationen sind also in einem gewissen Sinne unabhängig voneinander.

Lemma 2 (Kommutatoreigenschaften). Der Kommutator $[\cdot, \cdot] \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ erfüllt folgende Eigenschaften für $a, b \in \mathbb{R}$ und $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$:

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= a[X, Z] + b[Y, Z] && (\mathbb{R}\text{-Bilinearität}), \\ [X, Y] &= -[Y, X] && (\text{Antisymmetrie}) \text{ und} \\ [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] &= 0 && (\text{Jacobi Identität}). \end{aligned}$$

Es gilt, zwei beliebige Koordinatenvektorfelder des selben Koordinatensystems $(\xi, \mathcal{U})$ vertauschen, $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Dies entspricht dem Vertauschen der zweiten Ableitungen $\partial^2 f / \partial_i \partial_j = \partial^2 f / \partial_j \partial_i$ für glatte Funktionen $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$.

Ein Beispiel für einen Kommutator im Euklidischen $\mathbb{R}^3$ ist das, aus der Schule bekannte, Vektorprodukt (Kreuzprodukt).

4 Einsformen

In jedem Punkt p auf $\mathcal{M}$ bezeichnet $T_p^*(\mathcal{M})$ den **Dualraum** des Tangentialraums $T_p(\mathcal{M})$, auch **Kotangentialraum** genannt. Die Elemente θ_p von $T_p^*(\mathcal{M})$ heißen **Kovektoren** und sind Abbildungen von $T_p(\mathcal{M})$ nach $\mathbb{R}$. Das bedeutet Kovektoren ordnen jedem Tangentialvektor $V_p \in T_p(\mathcal{M})$ eine reelle Zahl zu, also

$$\theta_p : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad V_p \mapsto \theta_p(V_p).$$

Definition 10 (Einsform). Eine Abbildung θ , die jedem Punkt p auf der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ einen Kovektor $\theta_p \in T_p^*(\mathcal{M})$ zuordnet heißt **Einsform**.

Sei θ eine Einsform und $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ein Vektorfeld auf $\mathcal{M}$, dann definieren wir die Abbildung $\theta(V)$ als die Funktion auf $\mathcal{M}$ deren Wert in jedem Punkt p , θ_p angewandt auf V_p entspricht. Also

$$\theta(V)_p := \theta_p(V_p) \quad \forall p \in \mathcal{M}.$$

Eine Einsform heißt glatt, falls für jedes $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ die Abbildung $\theta(V) \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$, also glatt ist. Für die Menge aller glatten Einsformen $\mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ werden Addition und

Multiplikation mit glatten Funktionen $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ analog zu Vektorfeldern punktweise definiert durch

$$\begin{aligned}(\theta + \omega)_p &= \theta_p + \omega_p, \\ (f\theta)_p &= f(p)\theta_p\end{aligned}$$

für jeden Punkt $p \in \mathcal{M}$. Damit wird $\mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ der zu $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ duale $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ -Modul.

„Dual“ zur Derivation existiert eine zentrale Operation die jeder glatten Funktion $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ eine Einsform zuordnet: das Differential.

Definition 11 (Differential). *Das **Differential** von $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ ist definiert als die Einsform $df \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$, sodass punktweise gilt*

$$df(V)|_p := V_p(f) \quad \forall V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \quad \forall p \in \mathcal{M}.$$

Für eine Karte $(\xi, \mathcal{U})$ auf $\mathcal{M}$ definiert man die **natürlichen Koordinateneinsformen** $(dx^1, \dots, dx^n)$. Sie bilden in jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ die, zu den *natürlichen Koordinatenvektorfeldern* $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ duale Basis, dh. $dx^i(\partial_j) = \partial x^i / \partial x^j = \delta_{ij}$.

Aus dem Basistheorem für Tangentialvektoren (Proposition 1) folgt das Basistheorem für Kovektoren.

Lemma 3 (Koordinatendarstellung von Einsformen). *Jede Einsform $\theta \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ kann mit ihren **Komponentenfunktionen** $\theta^i \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ bezüglich der Karte $(\xi, \mathcal{U})$ angeschrieben werden als*

$$\theta = \sum \theta^i dx^i.$$

Insbesondere bedeutet dies für das Differential

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

da $df(\partial_i)|_p = \partial_i|_p(f) = \partial f / \partial x^i(p)$ für alle $p \in \mathcal{M}$.

Diese Darstellung heißt oft auch „vollständiges Differential“, da es die Summe der partiellen Ableitungen $\partial f / \partial x^i$, in Richtung der i-ten Koordinate, ist.

Einsformen sind die dualen Objekte zu Vektorfeldern. Da Vektorfelder Ableitungen (Derivationen) entsprechen ist es nur natürlich, dass Einsformen Differentialen entsprechen. Mit dem *Musikalischen Isomorphismus* (Satz 1) wird im nächsten Abschnitt dem engen Zusammenhang zwischen Vektorfeldern und Einsformen (auf Mannigfaltigkeiten mit Metrik) Rechnung getragen.

Die Verallgemeinerung von Einsformen, die sogenannten n-Formen, sind für die Definition des Integrals substantiell. Dies liegt jedoch außerhalb des Fokus dieser Arbeit, daher wird hier nicht weiter darauf eingegangen.

5 Tensoren

Der Begriff des **Tensorfeldes** auf einer Mannigfaltigkeit verallgemeinert die bisher eingeführten Begriffe der **glatten Funktion**, des **Vektorfeldes** und der **Einsform**. Ein Tensorfeld bietet damit die Möglichkeit komplexeres „Richtungsverhalten“ auf Mannigfaltigkeiten anzugeben. Ein Hauptmerkmal von Tensorfeldern ist ihre Multilinearität, die hier, wie auch in [4], zur Definition von Tensoren herangezogen wird.

Seien $V_1, \dots, V_s$ Module über dem Ring K . Das **Direkte Produkt** $V_1 \times \dots \times V_s$ ist die Menge aller s -Tupel $(v_1, \dots, v_s)$ mit $v_i \in V_i$. Die komponentenweise Definition von Addition und Multiplikation mit einem Element aus K macht das direkte Produkt $V_1 \times \dots \times V_s$ zu einem Modul über K .

Definition 12 (Multilineare Abbildung). *Sei W Modul über K so heißt eine Abbildung*

$$A : V_1 \times \dots \times V_s \rightarrow W$$

K -multilinear, wenn gilt das A in jedem Eintrag K -linear ist.

Genauer bedeutet dies, dass für alle $1 \leq i \leq s$ und jeweils fixierten $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_s)$ die Abbildung

$$v \mapsto A(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_s)$$

K -linear ist.

Entsprechendes gilt natürlich auch für den dualen Modul V^* . Sind alle Module ident, also $V_i = V$ für $1 \leq i \leq s$, so kürzt man die Notation $V_1 \times \dots \times V_s$ ab zu V^s .

Definition 13 (Tensor). *Für ganze Zahlen $r \geq 0, s \geq 0$, nicht beide 0, heißt eine K -multilineare Abbildung $A : (V^*)^r \times V^s \rightarrow K$ **Tensor** des Typs (r, s) über K .*

Sei $\mathfrak{T}_s^r(V)$ die **Menge aller Tensoren über V des Typs (r, s)** . Mit den üblichen Definitionen von Addition und Multiplikation mit einem Element von K bildet $\mathfrak{T}_s^r(V)$ einen Modul über K .

Diesen Begriff der Tensoren legen wir nun konkret auf den Fall von Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}$ um und beleuchten ihre Beschreibung und Eigenschaften.

Definition 14 (Tensorfeld). *Als Typ (r, s) -**Tensorfelder** A auf $\mathcal{M}$ werden Tensoren des $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ -Moduls $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ bezeichnet, d.h.*

$$A : \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})^r \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})^s \rightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{M})$$

multilinear.

Den $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ -Modul der (r, s) -Tensorfelder auf $\mathcal{M}$ bezeichnen wir kürzer mit $\mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$ (statt mit $\mathfrak{T}_s^r(\mathfrak{X}((\mathcal{M})))$).

Man kann sich Tensorfelder A als multilineare „Rechenmaschinen“ vorstellen, die, wenn sie mit r Einsformen und s Vektorfeldern „gefüttert“ werden, eine glatte Funktion $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ als Antwort liefern, wobei $r, s \geq 0$.

Es gilt dabei

$$f = A(\theta^1, \dots, \theta^r, V_1, \dots, V_s) \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}).$$

Beispiel 1 (Tensorfeld).

- (i) Die Funktion $E : \mathfrak{X}^*(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ definiert durch $E(\theta, X) = \theta(X)$ ist $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ -linear in beiden Einträgen, daher ist sie ein **Typ (1,1)-Tensorfeld** auf $\mathcal{M}$.
- (ii) Für eine festgehaltene Einsform $\omega \neq 0$ ist die Funktion $F : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ definiert durch $F(X, Y) = X(\omega(Y))$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. F ist $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ -linear in X , aber nur additiv in Y da gilt

$$F(X, fY) = X\omega(fY) = X(f\omega Y) = (Xf)\omega Y + fF(X, Y).$$

F ist daher **kein Tensorfeld**.

Bemerkung 2 (Spezielle Typen von Tensorfeldern). Für den bisher ausgeschlossenen Fall $r = s = 0$ (entsprechend einem Typ $(0, 0)$ -Tensorfeld) definiert man

$$\mathfrak{T}_0^0(\mathcal{M}) := \mathfrak{F}(\mathcal{M}).$$

Typ $(0, 0)$ -Tensorfelder werden also Funktionen $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ gleichgesetzt. Weiters identifiziert man Typ $(1, 0)$ -Tensorfelder mit Vektorfeldern $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ und damit

$$\mathfrak{T}_0^1(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}(\mathcal{M}),$$

sowie Typ $(0, 1)$ -Tensorfelder mit Einsformen $\theta \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ und damit

$$\mathfrak{T}_1^0(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}^*(\mathcal{M}).$$

Man kann daher **Vektorfelder** V , **Einsformen** θ und **Funktionen** f auf $\mathcal{M}$ als **Spezialfälle von Tensorfeldern** ansehen.

Während nur Tensoren des selben Typs addiert werden können, kann man das Produkt von Tensoren beliebigen Typs bilden. Dazu wird das **Tensorprodukt** wie folgt definiert.

Definition 15 (Tensorprodukt). Sei $A \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$ und $B \in \mathfrak{T}_{s'}^{r'}(\mathcal{M})$ dann ist das **Tensorprodukt**

$$A \otimes B : \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})^{r+r'} \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})^{s+s'} \rightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{M})$$

definiert durch

$$(A \otimes B)(\theta^1, \dots, \theta^{r+r'}, V_1, \dots, V_{s+s'}) := A(\theta^1, \dots, \theta^r, V_1, \dots, V_s)B(\theta^{r+1}, \dots, \theta^{r+r'}, V_{s+1}, \dots, V_{s+s'}).$$

Das Tensorfeld $A \otimes B$ ist damit ein Tensorfeld des Typs $(r + r', s + s')$.

Man kann zeigen (Kapitel 2, Proposition 2 in [4]), dass ein Tensorfeld A auf Grund seiner $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ -Multilinearität ein **punktales Objekt** ist. Das heißt es ordnet jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ einen Tensor $A_p : T_p^*(\mathcal{M})^r \times T_p(\mathcal{M})^s \rightarrow \mathbb{R}$ zu.

Die Schreibweise eines Tensorfeldes mit Hilfe seiner Komponentenfunktionen lässt sich aus der Koordinatenschreibweise für Vektorfelder $V = \sum V^i \partial_i$ und der Koordinatenschreibweise für Einsformen $\theta = \sum \theta^i dx^i$ direkt ableiten.

Definition 16 (Tensorfeldkomponenten). *Sei $(\xi, \mathcal{U})$ eine Karte auf $\mathcal{M}$. Für $A \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$ sind die **Tensorfeldkomponenten** bezüglich der Karte $(\xi, \mathcal{U})$ die $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ -Funktionen*

$$A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} := A(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}),$$

wobei jeder Index von 1 bis $n = \dim \mathcal{M}$ läuft.

Ein Typ (r, s) -Tensorfeld einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit besitzt daher $(r + s) \cdot n$ Komponentenfunktionen.

Aus den Basistheoremen von Vektorfeldern (Proposition 1) und Einsformen (Lemma 3) ergibt sich das

Lemma 4 (Basistheorem für Tensorfelder). *Sei $(\xi, \mathcal{U})$ eine Karte auf $\mathcal{M}$. Ein (r, s) -Tensorfeld A kann bezüglich der Karte $(\xi = (x^1, \dots, x^n), \mathcal{U})$ als Summe seiner Komponentenfunktionen $A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ geschrieben werden mit*

$$A = \sum A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \cdot \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s},$$

wobei über jeden Index von 1 bis $n = \dim \mathcal{M}$ summiert wird.

Mit Tensorfeldern ist nun diejenige Darstellungsform unterschiedlicher mathematischer Objekte auf Mannigfaltigkeiten definiert worden, die komplex genug ist um im Zuge dieser Arbeit die Allgemeine Relativitätstheorie mathematisch zu beleuchten. Tensorfelder vereinen nicht nur die Beschreibung von Funktionen, Vektorfeldern und Einsformen, sie bieten außerdem die Möglichkeit wichtige physikalische Eigenschaften im Raum zu beschreiben. $(0, 2)$ -Tensorfelder, die zwei Vektorfelder „fressen“ um eine Zahl als Relation auszugeben, können anisotrope physikalische Phänomene beschreiben. Zum Beispiel die Anisotropie, mit der sich Kräfte (Schallwellen) in Körpern ausbreiten (beschrieben mit dem Elastizitätsmodul E) oder die anisotrope Ausbreitung von Lichtwellen durch Kristalle (beschrieben durch die tensorielle Polarisierbarkeit α). Wirkungen vektorieller Größen in Richtung anderer Vektoren lassen sich also mit Hilfe eines $(0, 2)$ -Tensor berechnen.

Teil II

Elemente der semi-Riemann Geometrie

Die für die ART wesentlichen analytischen Objekte die auf Mannigfaltigkeiten „leben“ wurden in Teil I definiert. In diesem Teil geht es nun darum, die grundlegenden geometrischen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten zu studieren.

In einem Vektorraum wird geometrische Information in einem Skalarprodukt kodiert und damit Winkel und Längen definiert. Nun wird dieser Begriff auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinert und in jedem Tangentialraum $T_p(\mathcal{M})$ ein Skalarprodukt eingeführt, das glatt von Punkt zu Punkt variiert. Dies führt auf den Begriff einer Semi-Riemann Metrik.

Die Metrik erlaubt es auch eine „Richtungsableitung“ für Vektor- und Tensorfelder zu definieren, was zu dem Begriff der kovarianten Ableitung führt. Diese kann auch über den Paralleltransport von Vektoren entlang von Kurven verstanden werden. Dabei wird das Skalarprodukt von Vektor und Kurve konstant gehalten und die Änderung des Vektors durch den Transport kann nun als reiner Effekt der „Krümmung“ der Mannigfaltigkeit verstanden werden, was zu diesem zentralen Begriff der Krümmung führt.

Die Einführung der Geometrie auf Mannigfaltigkeiten erfolgt weiterhin in Analogie zu den Kapiteln zwei und drei aus [4].

6 Metrik

Anders als im Euklidischen Raum benötigt schon die Beschreibung der Speziellen Relativitätstheorie eine Verallgemeinerung des Begriffs des positiv definiten Skalarprodukts. Wir beginnen daher mit dem Begriff der Bilinearform.

Definition 17 (Symmetrische Bilinearform). *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Eine **symmetrische Bilinearform** auf V ist eine $\mathbb{R}$ -bilineare Abbildung $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ welche die Bedingung*

$$b(v, w) = b(w, v), \quad \forall v, w \in V$$

erfüllt.

Eine *symmetrische Bilinearform* heißt

- (i) **positiv (negativ) definit**, falls $b(v, v) > 0$ (< 0), $\forall 0 \neq v \in V$,

- (ii) **positiv (negativ) semidefinit**, falls $b(v, v) \geq 0$ (≤ 0), $\forall 0 \neq v \in V$,
- (ii) **nicht degeneriert**, falls $b(v, w) = 0, \forall w \in V \implies v = 0$.

Sei $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V , so ist

$$(b_{ij}) := (b(e_i, e_j))_{i,j=1}^n$$

die **Matrix von b** bezüglich $\mathcal{B}$ mit den **Matrixelementen** b_{ij} . Sie ist symmetrisch und vollständig durch b festgelegt, da gilt $b(\sum v_i e_i, \sum w_j e_j) = \sum b_{ij} v_i w_j$.

Außerdem gilt, dass die **Matrix (b_{ij}) genau dann invertierbar** ist, wenn b **nicht degeneriert** ist.

Die nun verwendete Terminologie „reibt“ sich ein wenig an der Linearen Algebra, jedoch verdeutlicht sie das Interesse der semi-Riemmannschen Geometrie an nicht positiv definiten Bilinearformen.

Definition 18 (Skalarprodukt). *Ein **Skalarprodukt** g über einem Vektorraum V ist eine nicht degenerierte, symmetrische Bilinearform*

$$\langle v, w \rangle := g(v, w), \quad \forall v, w \in V.$$

Hier fordert man explizit **nicht**, dass das Skalarprodukt positiv definit ist, wie es zum Beispiel für das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ (siehe vorne) der Fall ist. Einige Eigenschaften des Skalarprodukts im $\mathbb{R}^n$ finden sich auch bei diesem Skalarprodukt wieder. Andere, neue Eigenschaften, bieten die Möglichkeiten neue Arten von „Räumen“ zu definieren, wie nachfolgend gezeigt wird.

Beispiel 2 (Skalarprodukte).

- (i) *Das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, auch Inneres Produkt genannt, ist Beispiel für ein Skalarprodukt über einem Vektorraum:*

$$\langle v, w \rangle := \sum_i v_i w_i.$$

- (ii) *Ein einfaches Beispiel für ein indefinites Skalarprodukt ist der zweidimensionale Minkowski Raum $\mathbb{R}^2$ mit*

$$g = \eta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle v, w \rangle := -v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Offensichtlich ist g bilinear und symmetrisch. Setzt man $w = (1, 0)$ und danach $w = (0, 1)$ und nimmt an $g(v, w) = 0, \forall w \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich $v = 0$ und damit g ist nicht degeneriert. Also ist g Skalarprodukt, allerdings gilt

$$\langle (1, 0), (1, 0) \rangle = -1 < 0, \text{ aber } \langle (0, 1), (0, 1) \rangle = 1 > 0.$$

Außerdem gibt es sogenannte Nullvektoren (c, c) mit $c \in \mathbb{R}$ für gilt

$$\langle (c, c), (c, c) \rangle = 0.$$

Um auf einem Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Orthonormalbasis zu konstruieren, benötigt man Einheitsvektoren. Da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ allerdings auch negative Werte annehmen kann, muss dies bei der Definition der Norm berücksichtigt werden.

Definition 19 (Norm). Die **Norm** $||$ eines Vektors $v \in V$ ist definiert durch

$$|v| := \sqrt{|\langle v, v \rangle|} = |g(v, v)|^{1/2}.$$

Ein Vektor $v \in V$ heißt **Einheitsvektor**, falls $|v| = 1$, das heißt, falls $g(v, v) = \pm 1$. Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen **orthogonal** falls $\langle v, w \rangle = 0$ gilt. Eine Sammlung von paarweise orthogonalen Einheitsvektoren heißt **orthonormal**. Ein Orthonormalsystem mit $n = \dim V$ Elementen heißt **Orthonormalbasis (ONB)** von V .

Bezüglich einer beliebigen ONB $\{e_1, \dots, e_n\}$ ist die **Matrix des Skalarproduktes** (g_{ij}) diagonal, genauer sind die Matrixelemente von g gegeben durch

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) = \delta_{ij} \varepsilon_j, \text{ mit den } \mathbf{Vorzeichen} \ \varepsilon_j := g(e_j, e_j) = \pm 1.$$

Mit (g^{ij}) wird die **inverse Matrix** von g bezeichnet.

Lemma 5 (Kordinatendarstellung von Vektoren mit Hilfe des Skalarprodukts). Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine ONB von V . Jeder Vektor $v \in V$ hat die eindeutige Darstellung

$$v = \sum \varepsilon_i g(v, e_i) e_i.$$

Für den Beweis siehe Kapitel 2, Lemma 25 in [4].

Diese Darstellung entspricht den bekannten Rechenregeln der linearen Algebra, mit dem wichtigen Unterschied, das wir hier auch negative Vorzeichen ($\varepsilon_i = \pm 1$) zulassen.

Definition 20 (Index). Der **Index** r einer symmetrischen Bilinearform b über V wird definiert als:

$$r := \max\{\dim W \mid W \text{ Unterraum von } V \text{ mit } b|_W \text{ negativ definit}\}.$$

Der Index r gibt also die Anzahl der Dimensionen an, in denen die Bilinearform (oder auch das Skalarprodukt) negativ definit ist.

Laut Definition gilt $0 \leq r \leq \dim V$ und $r = 0$ falls b positiv definit ist.

Proposition 2 (Index und Vorzeichen). Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine ONB von V . Der **Index** r von V bezüglich des Skalarprodukts g entspricht der **Anzahl an negativen Vorzeichen** in $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

Im folgenden werden alle ONBs immer so geordnet, dass ihre negativen Vorzeichen in $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ zuerst kommen.

Auf Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}$ kann man nun das Skalarprodukt g_p am Punkt p für jeden Tangentialraum $T_p(\mathcal{M})$ definieren. Mit den mathematischen Begriffen aus Teil I kann man dieses glatt auf $\mathcal{M}$ variieren und ein entsprechendes $(0, 2)$ -Tensorfeld $g \in \mathfrak{T}_2^0$ definieren. Dieses Tensorfeld ist essentiell für die Beschreibung von verallgemeinerten „Räumen“ und bekommt, in Anlehnung an die Geometrie im Euklidischen Raum, den Namen Metrik.

Definition 21 (Metrik). Ein semi-Riemann metrischer Tensor (kurz **Metrik**), auf einer glatten Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist ein glattes $(0, 2)$ -Tensorfeld g , sodass $\forall p \in \mathcal{M}, g(p) \equiv g_p$ Skalarprodukt in $T_p(\mathcal{M})$ ist und der Index r von p nicht abhängt.

Da g_p Skalarprodukt ist gilt sogar das g ein nicht degeneriertes und **symmetrisches** $(0, 2)$ -Tensorfeld ist. Symmetrisch heißt, dass das Ergebnis von g bezüglich eingesetzter Vektorfelder V_1 und $V_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ invariant unter Vertauschung ist, also $g(V_1, V_2) = g(V_2, V_1) \forall p \in \mathcal{M}$. Außerdem gilt $0 \leq r \leq n = \dim(\mathcal{M})$.

Für den Fall $r = 0$, sind alle g_p positiv definit auf $T_p(\mathcal{M})$ und man nennt g eine **Riemannmetrik**. Für den Fall $r = 1$ und $n \geq 2$ nennt man g eine **Lorentzmetrik**.

Das auf diese Weise definierte Skalarprodukt muss nun einerseits nicht mehr positiv definit sein, andererseits darf sich auch die Berechnung des Skalarprodukts lokal unterscheiden. Für jeden Punkt auf der Mannigfaltigkeit gibt die Metrik nun die Berechnung des Skalarprodukts vor.

7 Semi-Riemann Mannigfaltigkeiten

Definition 22 (Semi-Riemann Mannigfaltigkeit). Eine **semi-Riemann Mannigfaltigkeit (SRMF)** ist ein Paar $(\mathcal{M}, g)$, wobei g Metrik auf der glatten Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist. Falls g Riemann- oder Lorentzmetrik ist, nennt man $(\mathcal{M}, g)$ eine **Riemann Mannigfaltigkeit (RMF)** bzw. **Lorentz Mannigfaltigkeit (LMF)**.

Beispiele für RMF sind unter anderem $(n - 1)$ -dimensionale Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$ mit der Einschränkung des Standardskalarprodukts, wie zB die Kugel S^2 im $\mathbb{R}^3$.

Eine wichtige semi-Riemann Mannigfaltigkeit ist

Beispiel 3 (Semi-Euklidischer Raum). Sei $0 \leq r \leq n$, für $V, W \in \mathbb{R}^n$ definiert

$$g(V, W) = \langle V, W \rangle := - \sum_{i=1}^r V^i W^i + \sum_{j=r+1}^n V^j W^j$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ mit Index r . Der auf diese Weise definierte Raum heißt auch **semi-Euklidischer Raum**, der abgekürzt mit $\mathbb{R}_r^n$ notiert wird. $\mathbb{R}_r^n$ ist semi-Riemann Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, g)$ mit $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, der oben gegebenen Metrik g und Index r . Die Metrik g kann in den natürlichen Koordinaten $(u^1, \dots, u^n)$ angegeben werden, mit $g_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon_j$ und den Vorzeichen $\varepsilon_j = -1$ für $1 \leq j \leq r$ und $\varepsilon_j = +1$ für $r < j \leq n$.

$\mathbb{R}_0^n$ heißt *n-dimensionaler Euklidischer Raum*. Für $n \leq 2$ heißt der Raum $\mathbb{R}_1^n$ auch *n-dimensionaler Minkowski Raum* wobei $\mathbb{R}_1^4$ der *Raumzeit* in der Speziellen Relativitätstheorie entspricht.

Für das Verständnis der Allgemeinen Relativitätstheorie ist vor allem der Fall der *Lorentz Mannigfaltigkeit* wichtig, die Verallgemeinerungen des *Minkowski Raumes* darstellen.

Definition 23 (Kausalität). Sei $(\mathcal{M}, g)$ eine SRMF, $p \in \mathcal{M}$. Man nennt $v \in T_p(\mathcal{M})$

- (i) **raumartig**, falls $g_p(v, v) > 0$ oder $v = 0$,
- (ii) **null**, falls $g_p(v, v) = 0$ und $v \neq 0$,
- (iii) **zeitartig**, falls $g_p(v, v) < 0$.

Diese Begriffe beschreibt den sogenannten *kausalen Charakter* eines Vektors v . Die Menge aller Nullvektoren in $T_p(\mathcal{M})$ heißt **Nullkegel** in p bzw. **Lichtkegel** im Fall einer **Lorentz Mannigfaltigkeit**. Nullvektoren heißen dort auch **lichtartig** und ein Vektor heißt **kausal**, falls er entweder *zeitartig* oder *lichtartig (null)* ist (siehe Abbildung 4).

Die Terminologie *raumartig* und *zeitartig* hat ihren Ursprung in der physikalischen Bedeutung von Lorentz Mannigfaltigkeiten als Raumzeiten. Vektoren in Richtung der Basisvektoren e_i der ONB mit positiven Vorzeichen $\varepsilon_i = 1$ ihres Skalarproduktes $g(e_i, e_i)$ sind also *raumartig*. Vektoren in Richtung der Basisvektoren e_j der ONB mit negativen Vorzeichen $\varepsilon_j = -1$ sind *zeitartig*. Dementsprechend kann man von „raumartigen“ bzw. „zeitartigen“ Richtungen (Dimensionen) der ONB sprechen. Riemann Mannigfaltigkeiten besitzen nur raumartige Richtungen während Lorentz Mannigfaltigkeiten genau eine zeitartige und mindestens eine raumartige Richtung besitzen. Beliebige Vektoren v in Lorentz Mannigfaltigkeiten weisen ein positives Skalarprodukt auf, wenn ihre „Ausdehnung“ entlang der räumlichen Achsen „überwiegt“ ($\langle v, v \rangle > 0$), während für Vektoren mit negativem Skalarprodukt die „Ausdehnung“ entlang der zeitartigen Achse überwiegt ($\langle v, v \rangle < 0$). Im Gegensatz zur Riemann Mannigfaltigkeit kann ein lichtartiger Vektor eine beliebige „räumliche Ausdehnung“ besitzen, solange sie durch eine entsprechende „zeitartige Ausdehnung“ kompensiert wird ($\langle v, v \rangle = 0$), siehe Abbildung 4.

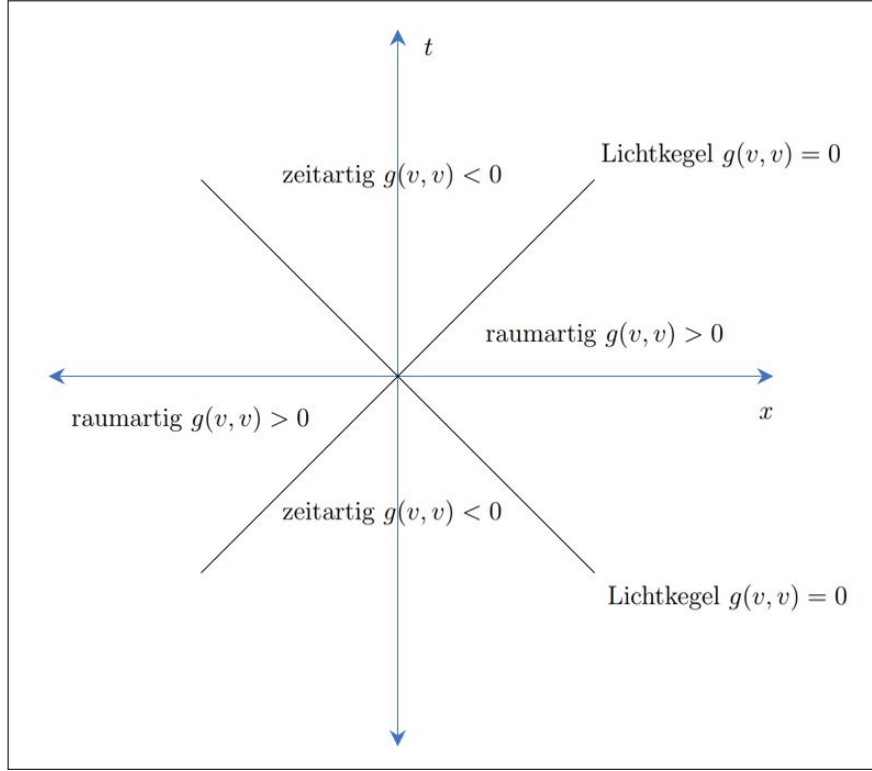


Abbildung 4: 2D-Minkowski Raum

Bemerkung 3 (Wegelement ds). *Das, in der physikalischen Literatur oft verwendete, **Wegelement** ds ergibt sich in unserer Notation für eine Karte $(\xi, \mathcal{U})$ der SRMF $(\mathcal{M}, g)$ als*

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j.$$

Die physikalische Interpretation von ds als Wegelement rührt daher, das man sich Δs als „Abstand“ zwischen zwei Punkten p und p' vorstellen kann. Für die beiden Punkte, p mit den Koordinaten $(x^1, \dots, x^n)$ und p' mit den Koordinaten $(x^1 + \Delta x^1, \dots, x^n + \Delta x^n)$, zeigt der Tangentialvektor $\Delta p = \sum \Delta x^i \partial_i$ von p in Richtung p' . Das Abstandsquadrat Δs kann daher approximiert werden durch

$$\Delta s^2 = |\Delta p|^2 = \langle \Delta p, \Delta p \rangle = \sum_{ij} g_{ij} \Delta x^i \Delta x^j.$$

In der physikalischen Literatur wird dem Wegelement eine große Bedeutung zugesprochen, da es invariant unter Wechsel von Bezugssystemen ist. Dies bedeutet, dass, obwohl die Koordinatendarstellung der Metrik in unterschiedlichen Karten unterschiedlich ist, das Wegelements ds unter Kartenwechsel unverändert bleibt.

Im Gegensatz zu dieser Arbeit wird in physikalischen Texten die sich mit der Allgemeinen Relativitätstheorie auseinandersetzen meist der umgekehrte Weg der Erklärung gegangen. Es

wird zuerst das, unter Bezugssystem-Wechsel, invariante Wegelement ds gefunden und dieses herangezogen um die Metrik g zu definieren (siehe 14.1 in [7]). Der Nachteil dieser „physikalischen“ Herangehensweise ist, dass man gezwungen ist, die gesamte Mathematik in lokalen Koordinatensystemen, und daher in relativ aufwendiger Indexnotation zu betreiben. Mit der in der Mathematik üblichen abstrakten Notation die auch in dieser Diplomarbeit verwendet wird, können die grundlegenden Zusammenhänge allerdings global (unabhängig von lokalen Koordinaten) und offensichtlicher (ohne aufwendige Indizierung der Variablen) dargestellt werden.

Mit der Definition von Semi-Riemann Mannigfaltigkeiten in diesem Kapitel legt man den Grundstein für eine allgemeine Differentialgeometrie. Nicht nur, dass der Raumbegriff auf Mannigfaltigkeiten erweitert wurde, auch das Skalarprodukt in diesem verallgemeinerten Raum muss nun nicht mehr positiv definit sein. Weiters lässt man zu, dass dieses Skalarprodukt an unterschiedlichen Punkten im verallgemeinerten Raum unterschiedlich ist, dass es also von Punkt zu Punkt unterschiedliche Skalarprodukte gibt. Die einzige Beschränkung ist, dass dieses Skalarprodukt, die Metrik, glatt variieren muss und ihr Index, die Anzahl der „negativ definiten Dimensionen“, konstant sein soll. Die Kategorisierung von Vektoren in raumartig, zeitartig und lichtartig (null) deutet schon auf ihre Interpretation in der Relativitätstheorie hin. Mit Hilfe des Skalarproduktes und des Wegelementes ds können nun auch Richtungen (Winkel) und Abstände und damit die Geometrie definiert werden (siehe Kapitel 5 in [4]).

8 Musikalischer Isomorphismus

Bevor man im nächsten Kapitel die kovariante Ableitung von Vektorfeldern in Richtung anderer Vektorfelder definiert kann, benötigt man einen wichtigen Satz, der für den Zusammenhang zwischen Vektorfeldern und Einsformen, und damit auch für die Interpretation von Tensorfeldern, essentiell ist.

Bemerkung 4 (Musikalischer Isomorphismus). *In jedem Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gibt es eine Zuordnung von Vektoren in V zu Kovektoren in V^* über*

$$V \ni v \mapsto v^\flat \in V^* \text{ mit } v^\flat(w) := \langle v, w \rangle \quad \forall w \in V.$$

Diese Zuordnung ist injektiv weil $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht degeneriert ist und daher ist sie ein **linearer Isomorphismus**, also eine lineare und bijektive Abbildung. Diese Zuordnung kann man auf semi-Riemann Mannigfaltigkeiten erweitern und damit Vektorfelder und Einsformen miteinander identifizieren.

Satz 1 (Musikalischer Isomorphismus auf SRMF). *Sei $(\mathcal{M}, g)$ eine SRMF. Die Abbildung $\Phi : V \mapsto V^\flat$ die jedem $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ein $V^\flat \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ gemäß*

$$V^\flat(W) := \langle V, W \rangle = g(V, W) \quad \forall W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

zuordnet ist ein $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ -linearer Isomorphismus von $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ nach $\mathfrak{X}^(\mathcal{M})$.*

Beweis. Da g $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ -linear ist, ist $V^\flat$ tatsächlich eine Einsform und die Abbildung Φ ebenfalls $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ -linear. Die Isomorphie folgt aus der Injektivität (i) sowie Surjektivität (ii) von Φ .

- (i) Φ ist Injektiv: Es ist zu zeigen, dass falls $\langle V, X \rangle = \langle W, X \rangle$ für alle $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ gilt schon $V = W$ folgt. Für $U = V - W$ ist das gleichbedeutend damit dass, wenn $\langle U_p, X_p \rangle = 0$ für alle $X \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ und alle $p \in \mathcal{M}$ gilt, schon $U = 0$ folgt. Jedes beliebige Element aus $T_p(\mathcal{M})$ hat die Form X_p . Da der metrische Tensor nicht degeneriert ist, ist die Bedingung erfüllt.
- (ii) Φ ist Surjektiv: Es ist zu zeigen dass, für jede Einsform $\theta \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ ein eindeutiges Vektorfeld $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ existiert, so dass gilt $\theta(X) = \langle V, X \rangle$ für alle $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Mit (i) ist automatisch die Eindeutigkeit von V erfüllt, es genügt daher so ein V auf einer beliebigen Karte $(\xi, \mathcal{U})$ der SRMF $(g, \mathcal{M})$ zu finden.
Sei $\theta = \sum_i \theta_i dx^i$ in der Karte $(\xi, \mathcal{U})$ dann sei $V = \sum_{i,j} g^{ij} \theta_i \partial_j$. Da g^{ij} und g_{ij} inverse Matrizen sind gilt

$$\langle V, \partial_k \rangle = \sum_{i,j} g^{ij} \theta_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle = \sum_{i,j} \theta_i g^{ij} g_{jk} = \sum_i \theta_i \delta_{ik} = \theta_k = \theta(\partial_k).$$

Aus der $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ -linearität folgt $\langle V, X \rangle = \theta(X)$ für alle X auf $\mathcal{U}$. □

Die Notation des Musikalischen Isomorphismus ist dem Theorem 1.3.3 aus [8] entlehnt, der Beweis wurde analog zu Kapitel 2 Proposition 10 in [4] geführt.

Der Musikalische Isomorphismus (Satz 1) bedeutet für uns, dass man in der semi-Riemann Geometrie immer Vektoren mit Kovektoren, beziehungsweise Vektorfelder mit Einsformen identifizieren kann. V und $\Phi(V) = V^\flat$ enthalten die selbe Information und heißen **metrisch equivalent**. Umgekehrt kann das auch als $\theta^\sharp = \Phi^{-1}(\theta)$, mit $\theta^\sharp \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ und $\theta \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ geschrieben werden. Der Name „Musikalischer Isomorphismus“ kommt aus der ursprünglichen Verwendung der Zeichen $\flat$ und $\sharp$, die der musikalischen Notation entlehnt wurden.

Bemerkung 5 (Indexschreibweise). Sei $V = \sum V^i \partial_i$ ein Vektorfeld in den Koordinaten der Karte $(\xi, \mathcal{U})$ der SRMF $(\mathcal{M}, g)$. Die metrisch equivalente Einsform wird geschrieben als $V^\flat = \sum V_i dx^i$ wobei gilt $V_i = \sum g_{ij} V^j$ und $V^i = \sum g^{ij} V_j$ mit den Einträgen g_{ij} der Matrix bzw. g^{ij} der inversen Matrix von g . Das Umschreiben von Einsformen in Vektorfelder und umgekehrt nennt man auch das **Hinauf-** bzw. **Herunterziehen** der Indizes. Diese Operation wird später auch für Tensorfelder definiert.

Komponentenfunktionen von Vektorfeldern werden mit oberen Indizes notiert. Ein **oberer Index** heißt **kontravarianter Index**, während ein **unterer Index**, mit der die Komponentenfunktionen von Einsformen notiert werden, **kovarianter Index** heißt. Diese Nomenklatur wird entsprechend auf die Komponentenfunktionen von Tensorfelder erweitert,

die mehrere *kontravariante* und *kovariante Indizes* besitzen können. Entsprechend werden Einformen auch oft als kovariante Vektorfelder und „echte“ Vektorfelder als kontravariante Vektorfelder titulierte.

In der physikalischen Literatur wird oft die gesamte semi-Riemman Geometrie in Koordinatenschreibweise (siehe [7]) bzw. in abstrakter Index Notation behandelt (siehe Kapitel 2.4 in [9]). Dabei ist die Position des Index, und die Möglichkeit diesen Index hinauf- bzw. herunterziehen von immenser Wichtigkeit.

Durch Identifikation von $(1, 0)$ -Tensorfeldern mit Vektorfeldern und $(0, 1)$ -Tensorfeldern mit Einsformen aus Bemerkung 2 lässt sich das *Hinauf-* bzw. *Herunterziehen des Index* auf beliebige Tensorfelder erweitern.

Seien $1 \leq a \leq r$ und $1 \leq b \leq s$ zwei fix gegebene Indizes. Für ein Tensorfeld $A \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$ ist der Wert von $\downarrow_b^a A \in \mathfrak{T}_{s+1}^{r-1}(\mathcal{M})$ angewandt auf beliebige Einsformen und Vektorfelder definiert durch

$$(\downarrow_b^a A)(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, V_1, \dots, V_{s+1}) := A(\theta^1, \dots, \overleftarrow{V_b^b}, \dots, \theta^r, V_1, \dots, V_{b-1}, V_{b+1}, \dots, V_s)$$

mit $V_b^b \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ der metrisch equivalenten Einsform zu V_b . Auf der rechten Seite wird also das b -te Vektorfeld entnommen und seine metrisch equivalente Einsform im a -ten Argument für Einsformen eingesetzt. Die Operation $\downarrow_b^a: \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{T}_{s+1}^{r-1}(\mathcal{M})$ heißt **Herunterziehen des Index**.

In Koordinaten der Karte $(\xi, \mathcal{U})$ ist die Einsform dual zu ∂_i gegeben durch $\sum g_{ij} dx^j$. Sei $A \in \mathfrak{T}_2^2$ und $B = \downarrow_2^1 A \in \mathfrak{T}_3^1$, wobei gilt $B(\theta, X, Y, Z) = A(Y^b, \theta, X, Z)$. Für das *Herunterziehen des Index* lassen sich die Tensorkomponentenfunktionen $B_{jkl}^i \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ bezüglich der Karte $(\xi, \mathcal{U})$ also schreiben als

$$\begin{aligned} B_{jkl}^i &= B(dx^i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = A\left(\sum_m g_{km} dx^m, dx^i, \partial_j, \partial_l\right) \\ &= \sum_m g_{km} A_{jl}^{mi}. \end{aligned}$$

Wie man sieht, verwendet die Operation $\downarrow_2^1$ die Matrixelemente g_{km} der Metrik, um den ersten oberen (kontravarianten) Index zum zweiten unteren (kovarianten) Index umzuwandeln.

Umgekehrt lässt sich mit

$$(\uparrow_2^1 B)_{kl}^{ij} = \sum_q g^{iq} B_{kql}^j$$

der zweite untere Index in den ersten oberen Index umwandeln. Entsprechenderweise wird die Operation $\uparrow_b^a: \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{T}_{s-1}^{r+1}(\mathcal{M})$ als **Hinaufziehen des Index** bezeichnet. Zusammenfassend nennt man die beiden Operatoren $\uparrow_b^a$ und $\downarrow_b^a$ auch **Index ziehen**.

Mit Hilfe des Musikalischen Isomorphismus lässt sich also jedes Typ (r, s) -Tensorfeld als Typ $(0, k)$ -Tensorfeld mit $k = r + s$ anschreiben, das rein kontravariant ist. Eine Typ $(0, k)$ -Tensorfeld kann man sich als eine „Rechenmaschine“ vorstellen, die k Vektorfelder „frisst“ und eine skalare Antwort liefert. Dieses Tensorfeld gibt also Zusammenhänge unterschiedlicher Eingabevektorfelder an (wie zum Beispiel der Elastizitätsmodul E oder die Polarisierbarkeit α).

Man kann ein Typ (r, s) -Tensorfeld jedoch auch in ein Typ $(k, 0)$ -Tensorfeld umschreiben, welches rein kontravariant ist. Dieses Typ $(k, 0)$ -Tensorfeld kann man nun als eine „Sammlung“ von (unabhängigen) Vektorfeldern ansehen.

Das *Index ziehen* wird später bei der expliziten Darstellung von Richtungsableitungen und der Beschreibung von Krümmung auf Mannigfaltigkeiten benötigt werden.

9 Levi-Civita Zusammenhang

Ziel dieses Kapitels ist es ein neues Vektorfeld zu definiert, dessen Wert an jedem Punkt der „Richtungsableitung“ eines ersten Vektorfeldes in Richtung eines zweiten Vektorfeldes entspricht. Für den *semi-Euklidischen Raum* $\mathbb{R}_r^n$ gibt es eine natürliche Beschreibung dafür.

Definition 24 (natürliche kovariante Ableitung auf $\mathbb{R}_r^n$). *Seien $(u^1, \dots, u^n)$ die natürlichen Koordinaten, V und $W = \sum W^i \partial_i$ Vektorfelder auf dem semi-Euklidischen Raum $\mathbb{R}_r^n$. Das Vektorfeld*

$$D_V W := \sum V(W^i) \partial_i$$

*heißt **natürliche kovariante Ableitung** von W bezüglich V .*

Dabei wird also, analog zur Definition 8 und Bemerkung 1, die Derivation die dem Vektorfeld V entspricht auf jede Komponentenfunktion $W^i \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ angewandt.

Um diese *natürliche kovariante Ableitung* auf beliebige semi-Riemann Mannigfaltigkeiten erweitern zu können werden nachfolgend ihre drei Haupteigenschaften axiomatisiert. Diese sind die $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ -linearität in V , die $\mathbb{R}$ -linearität in W und das Erfüllen der Leibnitzregel.

Definition 25 (Zusammenhang). *Ein **Zusammenhang** D auf einer SRMF $(\mathcal{M}, g)$ ist eine Abbildung $D : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, $(V, W) \mapsto D_V W$ für alle $V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ mit den Eigenschaften*

$$(\nabla 1) \quad D_V W \text{ ist } \mathfrak{F}(\mathcal{M})\text{-linear in } V,$$

$$(\nabla 2) \quad D_V W \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear in } W,$$

$$(\nabla 3) \quad D_V(fW) = (Vf)W + fD_V W \quad \forall f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}) \quad (\text{Leibnitzregel}).$$

$D_V W$ heißt **kovariante Ableitung** von W bezüglich V für den Zusammenhang D .

Die Eigenschaft $(\nabla 1)$ impliziert, dass die Abbildung $V \mapsto D_V W$ für fixierte W ein Tensorfeld ist. Für jeden Tangentialvektor $v \in T_p(\mathcal{M})$ existiert daher ein wohldefinierter Tangentialvektor $D_v W \in T_p(\mathcal{M})$, nämlich $(D_V W)_p$, mit V ein beliebiges Vektorfeld für das gilt $V_p = v$. Andererseits ist die Abbildung $W \mapsto D_V W$ für fixierte V kein Tensorfeld, da $(\nabla 2)$ nur $\mathbb{R}$ -linearität garantiert. Dies bedeutet weiterhin, dass im Allgemeinen *Zusammenhänge* keine punktuellen Objekte sind, also nicht nur von W_p abhängen, sondern von einer (beliebig) kleinen Umgebung $\mathcal{U}$ von p .

Man kann auf diese Weise beliebige *Zusammenhänge* auf $(\mathcal{M}, g)$ definieren. Es existiert allerdings ein eindeutiger Zusammenhang, der zwei weitere Eigenschaften mit dem **natürlichen Zusammenhang** D aus Definition 24 im $\mathbb{R}_r^n$ teilt. Die eindeutige Existenz dieses *Levi-Civita Zusammenhangs* (oft auch das **Fundamentallemma der semi-Riemann Geometrie** genannt) ist von zentraler Bedeutung für die Analysis auf semi-Riemann Mannigfaltigkeiten und wird durch folgenden Satz garantiert.

Satz 2 (Levi-Civita Zusammenhang). *Auf einer semi-Riemann Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, g)$ existiert ein eindeutiger Zusammenhang D , der zwei zusätzlichen Eigenschaften erfüllt*

$$(\nabla 4) \quad [V, W] = D_V W - D_W V \quad (\text{Torsionsfreiheit}), \text{ und}$$

$$(\nabla 5) \quad X\langle V, W \rangle = \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle, \quad \forall X, V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \quad (\text{Metrizität}).$$

D heißt **Levi-Civita Zusammenhang** auf $\mathcal{M}$, und wird eindeutig durch die **Koszul Formel**

$$\begin{aligned} 2\langle D_V W, X \rangle &= V\langle W, X \rangle + W\langle X, V \rangle - X\langle V, W \rangle \\ &\quad - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

beschrieben. $D_V W$ heißt (**Levi-Civita**) **kovariante Ableitung** von W bezüglich V .

Der zentralen Bedeutung des *Levi-Civita Zusammenhangs* auf semi-Riemann Mannigfaltigkeiten wird mit einem vollständigen Beweis Rechenschaft getragen.

Eindeutigkeit und Existenz des Levi-Civita Zusammenhangs sind zu zeigen, wir folgen im Wesentlichen dem Beweis von Theorem 1.3.4 in [8].

Beweis.

Sei die rechte Seite der Koszul Formel (1) gleich $F(V, W, X)$. Mit $(\nabla 4)$ und $(\nabla 5)$ ist

$$\begin{aligned} F(V, W, X) &= \langle D_V W, X \rangle + \cancel{\langle W, D_V X \rangle} + \cancel{\langle D_W X, V \rangle} + \cancel{\langle X, D_W V \rangle} - \cancel{\langle D_X V, W \rangle} - \cancel{\langle V, D_X W \rangle} \\ &\quad - \cancel{\langle V, D_W X \rangle} + \cancel{\langle V, D_X W \rangle} + \cancel{\langle W, D_X V \rangle} - \cancel{\langle W, D_V X \rangle} + \langle X, D_V W \rangle - \cancel{\langle X, D_W V \rangle} \\ &= 2\langle D_V W, X \rangle \end{aligned}$$

Durch die Injektivität des musikalischen Isomorphismus auf SRMF (Satz 1) ist $D_V W$ *eindeutig* bestimmt.

Um die Existenz von $F(V, W, X)$ zu zeigen seien $V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ fixiert. Die Abbildung $X \mapsto F(V, W, X)$ ist $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ -linear, wie sich leicht nachrechnen lässt, und daher eine Einsform. Mit Satz 1 existiert daher ein eindeutiges, metrisch equivalentes, Vektorfeld das man $D_V W$ nennt und für das gilt: $2\langle D_V W, X \rangle = F(V, W, X)$ für alle $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Per definitionem erfüllt $D_V W$ die Koszul Formel und es bleibt nur noch zu zeigen, dass $D_V W$ die Eigenschaften (∇1) bis (∇5) besitzt. Funktionen kann man als Faktor aus dem Tensor $\langle \cdot, \cdot \rangle$ herausziehen. Für den Kommutator ergibt sich Beispielsweise

$$[fW, X] = fW(X) - X(fW) = fW(X) - X(f)W - fX(W) = -X(f)W + f[W, X]. \quad (2)$$

Damit lassen sich nun die fünf Eigenschaften zeigen.

(∇1) $D_{V_1+V_2} W = D_{V_1} W + D_{V_2} W$ folgt aus $F(V_1 + V_2, W, X) = F(V_1, W, X) + F(V_2, W, X)$.
Für $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ bekommt man

$$2\langle D_{fV} W - fD_V W, X \rangle = F(fV, W, X) - fF(V, W, X) = \dots = 0$$

wie sich durch ausrechnen leicht zeigen lässt.

(∇2) ist offensichtlich, da $W \mapsto F(V, W, X)$, $\mathbb{R}$ -linear ist.

(∇3): Mittels Einsetzen in (1) findet man mit (2)

$$\begin{aligned} 2\langle D_V fW, X \rangle &= F(V, fW, X) \\ &= V(f)\langle W, X \rangle - \cancel{X(f)\langle V, W \rangle} + \cancel{X(f)\langle V, W \rangle} + V(f)\langle X, W \rangle + fF(V, W, X) \\ &= 2\langle V(f)W + fD_V W, X \rangle. \end{aligned}$$

(∇4): Einsetzen in (1) ergibt

$$\begin{aligned} 2\langle D_V W - D_W V, X \rangle &= F(V, W, X) - F(W, V, X) = \dots = \langle X, [V, W] \rangle - \langle X, [W, V] \rangle \\ &= 2\langle [V, W], X \rangle. \end{aligned}$$

(∇5): Ausrechnen mit (1) ergibt

$$2(\langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle) = F(X, V, W) + F(X, W, V) = \dots = 2(X\langle V, W \rangle),$$

wobei sich die restlichen Terme kürzen. □

Um den Levi-Civita Zusammenhang nun explizit angeben zu können bedient man sich der Koordinatendarstellung in einer Karte. Für die Basis einer konkreten Karte definiert man dafür die sogenannten Christoffel Symbole.

Definition 26 (Christoffel Symbole). Sei $(\xi, \mathcal{U})$ eine Karte auf einer semi-Riemann Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, g)$. Die Christoffel Symbole für diese Karte sind die Funktionen $\Gamma_{ij}^k \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$, so dass für den Levi-Civita Zusammenhang D gilt

$$D_{\partial_i}(\partial_j) =: \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Da die Koordinatenvektorfelder vertauschen ($[\partial_i, \partial_j] = 0$) folgt aus $(\nabla 4)$, dass $D_{\partial_i}(\partial_j) = D_{\partial_j}(\partial_i)$ und daher die Symmetrie der Christoffel Symbole in den **kovarianten** (unteren) Indizes, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Beachte, dass wie oben erklärt der Zusammenhang D **kein** Tensorfeld auf $\mathcal{M}$ ist, daher transformieren die Christoffel Symbole **nicht** nach den üblichen Transformationsregeln für Tensoren.

Proposition 3 (Explizite Christoffel Symbole). Für eine Karte $(\xi, \mathcal{U})$ auf einer SRMF $(\mathcal{M}, g)$ gilt mit den Einträgen $g_{ij} \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ der Matrix der Metrik

(i) $D_{\partial_i}(W) = \sum_k \left\{ \frac{\partial W^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k W^j \right\} \partial_k$, mit den Christoffel Symbolen gegeben durch

$$(ii) \Gamma_{ij}^k =: \sum_m g^{km} \Gamma_{mij} = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right\}.$$

Γ_{mij} heißen oft *Christoffel Symbole erster Art* und Γ_{ij}^k *Christoffel Symbole zweiter Art*.

Beweis.

(i) Schreibt man das Vektorfeld W in seiner Koordinatendarstellung und verwendet $(\nabla 3)$, so folgt

$$D_{\partial_i} \left(\sum_j W^j \partial_j \right) = \sum_j \left\{ \frac{\partial W^j}{\partial x^i} \partial_j + W^j \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \right\}.$$

Umbenennen des Index im ersten Term und umordnen gibt (i).

(ii) Wir setzen in der Koszul Formel (1) die Koordinatenvektorfelder ein, also $V = \partial_i$, $W = \partial_j$ und $X = \partial_m$. Da alle Koordinatenvektorfelder vertauschen bleibt

$$2\langle D_{\partial_i} \partial_j, \partial_m \rangle = \partial_i \langle \partial_j, \partial_m \rangle + \partial_j \langle \partial_i, \partial_m \rangle - \partial_m \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}.$$

Multiplikation mit g^{km} (*Index ziehen*, siehe Musikalischer Isomorphismus Satz 1) und Summieren über den Index m liefert das Ergebnis. $\square$

Die *Christoffelsymbole* kodieren laut Proposition 3 also die **Abweichung der kovarianten Ableitungen** $D_{\partial_i}(W)$ von der **Kartenableitung** $\sum_k \frac{\partial W^k}{\partial x^i} \partial_k$. In den Christoffelsymbolen für beliebige Karten ist daher die „Krümmungsinformation“ von Mannigfaltigkeiten, ausgedrückt in Koordinaten dieser Karte, kodiert. Dies wird in Kapitel 12 über

Krümmung genauer beleuchtet.

Will man nun die *kovariante Ableitung* $D_V W$ in lokalen Koordinaten der Karte $(\xi, \mathcal{U})$ einer beliebigen SRMF $(\mathcal{M}, g)$ berechnen, so müssen für die Vektorfelder V, W ihre Koordinatendarstellungen (Lemma 1) und für die Christoffel Symbole Γ_{ij}^k ihre explizite Darstellung (Proposition 3) eingesetzt werden. Auf diese Weise ergibt sich

$$D_V W = \sum_{i,k} V^i \frac{\partial W^k}{\partial x^i} \partial_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,m} V^i W^j g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right\} \partial_k. \quad (3)$$

Exemplarisch wird der Levi-Civita Zusammenhang des flachen Raums behandelt.

Lemma 6 (Der Zusammenhang des flachen Raumes). *Der natürliche Zusammenhang D aus Definition 24 ist der Levi-Civita Zusammenhang D des semi-Euklidischen Raumes $\mathbb{R}_r^n$ für jedes $r = 0, 1, \dots, n$. Seien $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_r^n)$ mit $W = \sum W^i \partial_i$ und $D_V W = \sum V(W^i) \partial_i$. In den natürlichen Koordinaten von $\mathbb{R}_r^n$ gilt*

- (i) $g_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon_j$ (mit $\varepsilon_j = -1$ für $1 \leq i \leq r$ und $\varepsilon_j = +1$ für $r < i \leq n$),
- (ii) $\Gamma_{jk}^i = 0$ für alle $1 \leq i, j, k \leq n$.

Beweis. Das D tatsächlich Levi-Civita Zusammenhang D ist zeigt man, indem man $(\nabla 1)$ bis $(\nabla 5)$ nachrechnet. Für den semi-Euklidischen Raum $\mathbb{R}_r^n$ in natürlichen Koordinaten ist das Skalarprodukt definiert durch die konstanten

- (i) $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j$ und
- (ii) $\Gamma_{jk}^i = 0$ folgt durch Ausrechnen wegen (i) und Satz 1. □

Allgemein kann man sagen, verschwinden auf einer Umgebung $\mathcal{U}$ die Christoffel Symbole so entspricht die Mannigfaltigkeit dort lokal dem flachen Raum $\mathbb{R}_r^n$. Nicht verschwindende Christoffel Symbole geben an wie „stark“ sich die Mannigfaltigkeit vom flachen Raum unterscheidet.

Mit dem Einführen von Richtungsableitungen über die (*Levi-Civita*) *kovariante Ableitung* können nun Vektorfelder auf Änderungen untersucht werden. Außerdem ist konkret der Fall von „unveränderlichen“ Vektorfeldern, also Vektorfelder deren Ableitung verschwindet, interessant.

Definition 27 (Paralleles Vektorfeld). *Ein Vektorfeld $W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ auf einer SRMF $(\mathcal{M}, g)$ heißt **parallel**, wenn gilt*

$$D_V W = 0 \quad \forall V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

Parallele Vektorfelder verallgemeinern den Begriff von konstanten Vektorfeldern, wie man an folgendem Beispiel sieht.

Beispiel 4 (Natürliche Koordinatenvektorfelder). *Die natürlichen Koordinatenvektorfelder ∂_i in $\mathbb{R}_r^n$ sind parallel: Sei $V = \sum V^j \partial_j$ dann gilt nach Lemma 6 das $D_V \partial_i = \sum_j V^j D_{\partial_j} \partial_i = 0$, da die Christoffelsymbole verschwinden.*

Allgemeiner sind auf $\mathbb{R}_r^n$ die konstanten Vektorfelder genau die parallelen Vektorfelder, da

$$D_V W = 0 \quad \forall V \Leftrightarrow D(W(p), V(p)) = 0 \quad \forall V, p \Leftrightarrow DW = D \begin{pmatrix} W^1 \\ \vdots \\ W^n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow W = \text{const.}$$

Wird der $\mathbb{R}^3$ allerdings zum Beispiel in Zylinderkoordinaten beschrieben, so verschwinden nicht alle Christoffelsymbole (siehe Kapitel 3, Beispiel 15 in [4]).

Der, in diesem Kapitel eingeführte, *Levi-Civita Zusammenhang* verallgemeinert die Richtungsableitung von Vektorfeldern auf semi-Riemann Mannigfaltigkeiten. Damit kann eine „Änderungsrate“ des Vektorfeldes W in Richtung des Vektorfeldes V , die selbst wieder ein Vektorfeld ist, definiert werden. Verschwindet diese Änderungsrate ($D_V W = 0$) für jedes beliebige Vektorfeld V , so ist das Vektorfeld W konstant (parallel). Parallele Vektorfelder verändern sich also nicht während der Punkt über die Mannigfaltigkeit variiert wird.

10 Kovariante Ableitung von Tensorfeldern

Die (*Levi-Civita*) *kovariante Ableitung* von Vektorfeldern entspricht laut vorherigem Kapitel einer Richtungsableitung von Vektorfeldern. Diese Richtungsableitung lässt sich auch auf Tensorfelder verallgemeinern, was in diesem Kapitel gezeigt wird. Bevor man diese Richtungsableitung definieren kann, muss man jedoch noch eine wichtige Rechenoperation an Tensorfeldern einführen, die **Kontraktion**. Dabei wird aus einem Typ (r, s) -Tensor ein Typ $(r - 1, s - 1)$ -Tensor, man *reduziert* also den Tensorgrad um je einen oberen und einen unteren Index.

Wir beginnen mit dem Spezialfall der $(1, 1)$ -Kontraktion und erweitern darauf aufbauend den Begriff der (allgemeinen) Kontraktionen.

Lemma 7 ($(1, 1)$ -Kontraktion). *Sei $(\mathcal{M}, g)$ eine SRMF. Es gibt eine eindeutige $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ -lineare Abbildung $\mathcal{C} : \mathfrak{T}_1^1(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{M})$, sodass für $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ und $\theta \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ gilt*

$$\mathcal{C}(V \otimes \theta) = \theta(V).$$

*($V \otimes \theta$) ist dabei eine $(1, 1)$ -Tensorfeld, siehe Definition 15 und heißt $(1, 1)$ -**Kontraktion**.*

Das bedeutet, für die (1,1)-Kontraktion der *Koordinatenvektorfelder* und *Koordinateneinsformen* $\mathcal{C}(\partial_i \otimes dx^j)$ bezüglich einer Karte $(\xi, \mathcal{U})$ ergibt sich $dx^j(\partial_i) = \delta_{ij}$.

Sei $A \in \mathfrak{T}_1^1(\mathcal{M})$ ein beliebiges Tensorfeld auf $(\mathcal{M}, g)$, mit den Komponentenfunktionen $A_j^i \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ bezüglich der Karte $(\xi, \mathcal{U})$, also $A = \sum A_j^i \partial_i \otimes dx^j$ (siehe Lemma 4). Für die (1,1)-Kontraktion von A ergibt sich damit

$$\mathcal{C}(A) = \sum_{i,j} A_j^i \mathcal{C}(\partial_i \otimes dx^j) = \sum_{i,j} A_j^i \delta_{ij} = \sum_i A_i^i = \sum_i A(dx^i, \partial_i).$$

Daraus lässt sich leicht Existenz und Eindeutigkeit zeigen (siehe Kapitel 2, Lemma 6 in [4]). Außerdem sieht man, dass die (1,1)-Kontraktion mit der Spurbildung bei Matrizen verwandt ist.

Die (1,1)-Kontraktion kann auf beliebige Typ (r, s) -Tensoren verallgemeinert werden, indem man spezifiziert welcher obere und welcher untere Index des Tensorfeldes kontrahiert werden soll.

Definition 28 (Kontraktion). *Sei $(\mathcal{M}, g)$ eine SRMF. Für eine Karte $(\xi, \mathcal{U})$ sei der Tensor $A \in \mathfrak{T}(\mathcal{M})_s^r$ durch seine Komponentenfunktionen $A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ mit $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq j \leq s$ beschrieben. Dann hat die **Kontraktion** $\mathcal{C}_j^i A$ die Komponentenfunktionen*

$$\sum_a A_{j_1 \dots a \dots j_s}^{i_1 \dots a \dots i_r}$$

wobei a oben an der i -ten und unten an der j -ten Stelle steht.

Mit Hilfe des *Index ziehens* (Satz 1) kann man auf SRMF nun auch die Kontraktionen zweier kovarianter Indizes definieren, die sogenannte metrische Kontraktion. Dabei wird einer der beiden kovarianten Indizes zuerst durch das *Hinaufziehen des Index* in einen kontravarianten Index umgewandelt. Die metrische Kontraktion entspricht also $\mathcal{C}_{ab} = (\mathcal{C}_b^c \uparrow_a^c)$. Dabei kann c beliebig gewählt werden mit $1 \leq c \leq r+1$.

Definition 29 (Metrische Kontraktion). *Die **metrische Kontraktion** $\mathcal{C}_{ab} : \mathfrak{T}_s^r \rightarrow \mathfrak{T}_{s-2}^r$ ist durch die Tensorkomponentenfunktionen bezüglich der Karte $(\xi, \mathcal{U})$ gegeben mit*

$$(\mathcal{C}_{ab} A)_{j_1 \dots j_{s-2}}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{p,q} g^{pq} A_{j_1 \dots p \dots q \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \quad (4)$$

wobei p und q untere Indizes an der a -ten bzw. b -ten Position sind.

Entsprechendes kann man auch für den kontravarianten Fall definieren. Für $1 \leq a, b \leq r$ und beliebiges s gilt

$$\mathcal{C}^{ab} : \mathfrak{T}_s^r \rightarrow \mathfrak{T}_s^{r-2}$$

mit einer Koordinatenformel in der, bezüglich Gleichung (4), kovariante und kontravariante Indizes vertauscht sind.

Mit der Einführung der Kontraktion von Tensorfeldern kann man nun den Begriff Tensororderivation definieren. Diese wird benötigt um den Levi-Civita Zusammenhang auf beliebige Tensorfelder verallgemeinern zu können.

Definition 30 (Tensororderivation). *Eine **Tensororderivation** $\mathcal{D}$ auf einer SRMF $(\mathcal{M}, g)$ ist eine $\mathbb{R}$ -lineare Funktion*

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_s^r : \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M}) \quad (r, s \geq 0),$$

so, dass für jedes Tensorfeldpaar $A, B \in \mathfrak{T}(\mathcal{M})$ gilt

$$(i) \quad \mathcal{D}(A \otimes B) = \mathcal{D}A \otimes B + A \otimes \mathcal{D}B \quad (\text{Leibnitzregel})$$

$$(ii) \quad \mathcal{D}(\mathcal{C}A) = \mathcal{C}(\mathcal{D}A) \text{ für jede Kontraktion } \mathcal{C} \quad (\text{Vertauschung mit Kontraktionen}).$$

Es gilt also $\mathcal{D}$ ist $\mathbb{R}$ -linear, erhält den Tensorgrad, erfüllt die Leibnitzregel und vertauscht mit allen Kontraktionen.

Für jede Funktion $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ gilt $(fA) = f \otimes A$ woraus folgt, dass $\mathcal{D}(fA) = (\mathcal{D}f)A + f\mathcal{D}A$.

Für $r = s = 0$ ist die Tensororderivation $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0^0$ eine Derivation auf $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ (entsprechend Definition 8), daher existiert wegen Bemerkung 1 ein eindeutiges Vektorfeld $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, so dass

$$\mathcal{D}f = Vf \quad \forall f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}).$$

Da Tensororderivationen im Allgemeinen nicht $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ linear sind ist der Wert von $\mathcal{D}A$ im Punkt $p \in \mathcal{M}$ normalerweise nicht nur von A_p abhängig, sondern von A auf einer (beliebig) kleinen Umgebung $\mathcal{U}$ von p . Man kann jedoch zeigen (Kapitel, 2 Proposition 12 in [4]), dass auf dieser Umgebung $\mathcal{U}$ die Tensororderivation lokal eindeutig ist.

Proposition 4 (Produktregel für Tensororderivationen). *Sei $\mathcal{D}$ eine Tensororderivation auf der SRMF $(\mathcal{M}, g)$. Für das Tensorfeld $A \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$, die Einsformen $\theta^1, \dots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ und die Vektorfelder $V_1, \dots, V_s \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ gilt*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A(\theta^1, \dots, \theta^r, V_1, \dots, V_s)) &= (\mathcal{D}A)(\theta^1, \dots, \theta^r, V_1, \dots, V_s) \\ &+ \sum_{i=1}^r A(\theta^1, \dots, (\mathcal{D}\theta^i), \dots, \theta^r, V_1, \dots, V_s) \\ &+ \sum_{i=1}^s A(\theta^1, \dots, \theta^r, V_1, \dots, (\mathcal{D}V_i), \dots, V_s). \end{aligned}$$

Für einen Beweis siehe Kapitel 2, Proposition 13 in [4].

Die Klammern verdeutlichen, dass die Tensororderivation $\mathcal{D}$ hier unterschiedlich auftritt. Auf der linken Seite der Gleichung handelt es sich um die Derivation $\mathcal{D}_0^0$ der Funktion $A(\theta^1, \dots, \theta^r, V_1, \dots, V_s) \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$. Auf der rechten Seite handelt es sich um die Tensororderivationen $\mathcal{D}_s^r$ des Tensorfelds A , $\mathcal{D}_1^0$ der Einsformen θ^i und $\mathcal{D}_0^1$ der Vektorfeldern V_i .

Satz 3 (Konstruktion von Tensororderivationen). *Auf einer SRMF $(\mathcal{M}, g)$ seien ein Vektorfeld $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ und eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\delta : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ gegeben, für welche die Produktregel*

$$\delta(fX) = V(f)X + f\delta(X) \quad \forall f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}), \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

gilt. Dann existiert eine eindeutige Tensororderivation $\mathcal{D}$ auf $\mathcal{M}$, so dass $\mathcal{D}_0^0 = V : \mathfrak{F}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ und $\mathcal{D}_0^1 = \delta : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Diese Konstruktion funktioniert, da für höhere Ränge $r + s \geq 2$ man $\mathcal{D}_s^r$ mittels Produktregel (Proposition 4) konstruieren kann, siehe Kapitel 2, Theorem 15 in [4]. So erzeugt man Tensororderivationen mit beliebigem Rang aus δ und V .

Ein wichtiges Beispiel einer Tensororderivation ist die Lie-Ableitung.

Definition 31 (Lie Ableitung). *Auf einer SRMF $(\mathcal{M}, g)$ sei für ein Vektorfeld $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ die Tensororderivation L_V , genannt **Lie Ableitung**, definiert durch*

$$\begin{aligned} L_V(f) &:= V(f) \quad \forall f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}) \\ L_V(X) &:= [V, X] \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

L_V ist tatsächlich Tensororderivation, da gilt

$$L_V(fX) = [V, fX] = V(fX) - fXV = V(f)X + f[V, X] = L_V(f)X + fL_V(X)$$

und L_V damit die Voraussetzungen von Satz 3 für $\delta = L_V$ erfüllt.

Der *Levi-Civita Zusammenhang* (Satz 2) lässt sich als Tensororderivation auf beliebige Tensorfelder zur *kovarianten Ableitung von Tensorfeldern* verallgemeinern, da Satz 3 mit nachfolgender Definition erfüllt ist.

Definition 32 (Kovariante Ableitung von Tensorfeldern). *Sei $(\mathcal{M}, g)$ eine SRMF und V Vektorfeld $\in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Die **(Levi-Civita) kovariante Ableitung** D_V ist die eindeutige Tensororderivation auf $\mathcal{M}$, so dass $\forall f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ und $\forall W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ gilt*

$$(i) \quad D_V f = V(f), \text{ und}$$

$$(ii) \quad D_V W \text{ ist Levi-Civita kovariante Ableitung von } W \text{ bezüglich } V.$$

Mit dieser Definition der **kovarianten Ableitung** lassen sich nun Richtungsableitungen in Richtung des Vektorfelds V an Objekten ungeachtet deren Typs (Funktionen, Vektorfelder, Einsformen oder Tensorfelder) auf Mannigfaltigkeiten durchführen. Dies ist ein essentieller Schritt in Richtung Paralleltransport von Tensorfeldern entlang einer Kurve und damit zum Krümmungsbegriff.

Analog zum Kalkül in $\mathbb{R}^n$ kann man alle *kovarianten Ableitungen* eines Tensorfeldes in einem *Differential* sammeln.

Definition 33 (Kovariantes Differential). Für ein Tensorfeld $A \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$ auf der SRMF $(\mathcal{M}, g)$ definiert man das **kovariante Differential** $DA \in \mathfrak{T}_{s+1}^r$ von A als

$$DA(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s, V) := (D_V A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)$$

für alle $\theta^1, \dots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ und $X_1, \dots, X_s, V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Bemerkung 6 (zum kovarianten Differential).

- (i) Im Sonderfall $r = s = 0$ ist das kovariante Differential einer glatten Funktion $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ das normale Differential $df \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ aus Definition 11, da für alle $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ gilt

$$Df(V) = D_V f = V(f) = df(V).$$

- (ii) DA ist eine praktische Art alle kovarianten Ableitungen von A in einem Objekt zu „sammeln“. Die Tatsache, dass der kovariante Typ von DA um eine Ordnung höher ist als von A , nämlich $(s+1)$, schlägt sich im Namen kovariantes Differential bzw. kovariante Ableitung nieder.

- (iii) In Analogie zu parallelen Vektorfeldern (Definition 27) heißt ein Tensorfeld **parallel** wenn sein kovariantes Differential verschwindet, wenn also gilt $DA = 0$ bzw. $D_V A = 0, \forall V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Die Eigenschaft $(\nabla 5)$ des Levi-Civita Zusammenhangs ist gleichbedeutend mit der Parallelität des metrischen Tensors g da mit der Produktregel für Tensororderivationen (Proposition 4) gilt

$$\begin{aligned} \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle &\stackrel{\nabla 5}{=} X \langle V, W \rangle = D_X g(V, W) \\ &\stackrel{\text{Prop 4}}{=} (D_X g)(V, W) + g(D_X V, W) + g(V, D_X W) \\ &= (D_X g)(V, W) + \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle. \end{aligned}$$

$(\nabla 5)$ fordert also, dass $(D_X g) = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ und damit dass g parallel ist.

- (iv) Für eine Karte $(\xi, \mathcal{U})$ der SRMF $(\mathcal{M}, g)$, in der das Tensorfeld $A \in \mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$ durch seine Komponentenfunktionen $A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ beschrieben werden kann, werden die Komponentenfunktionen des kovarianten Differentials $DA \in \mathfrak{T}_{s+1}^r(\mathcal{M})$ als $A_{j_1 \dots j_s; k}^{i_1 \dots i_r} \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ notiert. Dabei gilt

$$A_{j_1 \dots j_s; k}^{i_1 \dots i_r} := \frac{\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^r \sum_m \Gamma_{km}^{i_l} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots m \dots i_r} - \sum_{l=1}^s \sum_m \Gamma_{kj_l}^m A_{j_1 \dots m \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}.$$

11 Paralleltransport

Als nächstes wollen wir die soeben eingeführte kovariante Ableitung für eingeschränkte Vektorfeldern betrachten, genauer für Vektorfelder, die nicht auf ganz $\mathcal{M}$ definiert sind, sondern nur eingeschränkt auf dem Abbild einer Kurve existieren. Intuitiv entspricht dies der Änderung

eines Vektorfeldes entlang der Kurve, im nachfolgenden wird dies genauer beleuchtet.

Zuerst benötigt man die Definition für den Begriff einer *Kurve* auf Mannigfaltigkeiten.

Definition 34 (Kurve). Eine **Kurve** auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist eine glatte Abbildung $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$ eines offenen Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ in die Mannigfaltigkeit.

Dabei heißt $t \in I$ auch der Parameter der Kurve $\alpha(t) \in \mathcal{M}$, $t \mapsto \alpha(t)$.

Als offener Unterraum von $\mathbb{R}$ hat I ein Koordinatensystem mit der Identitätsabbildung u von I . Bei jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ ist der Koordinatenvektor $(d/du)(t) \in T_t(\mathbb{R})$ der Einheitsvektor in t der in die positive Richtung u zeigt. Mit diesem Richtungsvektor entlang der Kurve kann man nun die **Geschwindigkeit** einer Kurve definieren.

Definition 35 (Geschwindigkeit einer Kurve). Sei $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$ eine Kurve. Der **Geschwindigkeitsvektor** von α bei $t \in I$ ist definiert als:

$$\alpha'(t) = d\alpha \left(\frac{d}{du} \Big|_t \right) \in T_{\alpha(t)}(\mathcal{M}).$$

In lokalen Koordinaten einer Karte $(\xi = (x^1, \dots, x^n), \mathcal{U})$ lässt sich die *Geschwindigkeit* einer Kurve im Punkt $\alpha(t)$ anschreiben als

$$\alpha'(t) = \sum_i \frac{d(x^i \circ \alpha)}{du}(t) \partial_i \Big|_{\alpha(t)}.$$

Für weitere Eigenschaften von Kurven siehe Kapitel 1 in [4].

Man betrachtet nun ein beliebiges Vektorfeld Z auf einer Kurve $\alpha(t) : I \rightarrow \mathcal{M}$. Z weist jedem $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ glatt einen Tangentialvektor in $\alpha(t) \in \mathcal{M}$ zu. Zum Beispiel ist die *Geschwindigkeit* α' ein Vektorfeld auf α , so wie auch die *Einschränkung* V_α eines beliebigen Vektorfeldes $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ auf das Bild $\alpha(I)$ von α . Die Menge $\mathfrak{X}(\alpha)$ aller glatten Vektorfelder über α ist ein Modul über $\mathfrak{F}(I)$.

Auf einer semi-Riemann Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, g)$ existiert eine natürliche Beschreibung für die Änderungsrate Z' eines Vektorfeldes $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ entlang der Kurve α , die **induzierte kovariante Ableitung**.

Proposition 5 (Induzierte kovariante Ableitung). Sei $\alpha(t) : I \rightarrow \mathcal{M}$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ eine Kurve und D Levi-Civita Zusammenhang auf der semi-Riemann Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, g)$. Dann existiert eine eindeutige Abbildung $\mathfrak{X}(\alpha) \rightarrow \mathfrak{X}(\alpha)$, $Z \mapsto Z' := DZ/dt$, genannt **induzierte kovariante Ableitung**, für die gilt

$$(i) \quad (aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2' \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

- (ii) $(hZ)' = (dh/dt)Z + hZ' \quad \forall h \in \mathfrak{F}(I)$
- (iii) $(V_\alpha)'(t) = D_{\alpha'(t)}(V) \quad \forall t \in I, \forall V \in \mathfrak{X}(I)$
- (iv) $(d/dt)\langle Z_1, Z_2 \rangle = \langle Z'_1, Z_2 \rangle + \langle Z_1, Z'_2 \rangle.$

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit sind zu zeigen.

- (I) *Eindeutigkeit:* Angenommen es existiert eine induzierte kovariante Ableitung die nur die Bedingungen (i) bis (iii) erfüllt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass α vollständig in einer Kartenumgebung $(\xi, \mathcal{U})$ liegt. Mit dem Basistheorem (Proposition 1) gilt für $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ im Punkt $\alpha(t)$ in den Koordinaten $(\xi, \mathcal{U})$

$$Z(t) = \sum_i Z(t)x^i \partial_i = \sum_i Z^i(t) \partial_i,$$

mit den Komponentenfunktionen $Z^i(t) := Z(t)x^i$, $I \rightarrow \mathbb{R}$. Mit (i) und (ii) gilt

$$Z'(t) = \sum_i \frac{dZ^i(t)}{dt} \partial_i|_\alpha + \sum_i Z^i(t) (\partial_i|_\alpha)'.$$

Mit (iii) gilt jedoch $(\partial_i|_\alpha)' = D_{\alpha'} \partial_i$ und damit

$$Z'(t) = \sum_i \frac{dZ^i(t)}{dt} \partial_i + \sum_i Z^i(t) D_{\alpha'} \partial_i.$$

Z' ist daher eindeutig durch den Levi-Civita Zusammenhang D bestimmt.

- (II) *Existenz:* Auf einem Subintervall $J \subset I$ für das $\alpha(J)$ vollständig in einer Kartenumgebung $(\xi, \mathcal{U})$ liegt, sei Z' mit der obigen Formel definiert. Ähnlich zur oberen Rechnung zeigt man, dass damit die Bedingungen (i) bis (iv) erfüllt sind. Durch die Eindeutigkeit wird das lokal definierte Z' zu einem globalen Vektorfeld auf $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

□

Man kann Z' in lokalen Koordinaten $(\xi, \mathcal{U})$ mit Hilfe der Christoffelsymbole darstellen, dabei gilt

$$D_{\alpha'(t)} \partial_i = D_{\sum_j \frac{d(x^j \circ \alpha)}{dt} \partial_j} \partial_i = \sum_j \frac{d(x^j \circ \alpha)}{dt} D_{\partial_j} \partial_i = \sum_{j,k} \frac{d(x^j \circ \alpha)}{dt} \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

und daher

$$Z'(t) = \sum_k \left(\frac{dZ^k(t)}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\alpha(t)) \frac{d(x^j \circ \alpha)(t)}{dt} Z^i(t) \right) \partial_k|_\alpha(t). \quad (5)$$

Für $Z' = 0$ sagt man, Z ist **parallel**, in Anlehnung an Definition 27. Diese Bedingung entspricht laut Gleichung (5) in lokalen Koordinaten einem System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Für den speziellen Fall $Z = \alpha'$ heißt $Z' = \alpha''$ die **Beschleunigung** von α .

Proposition 6 (Paralleles Vektorfeld einer Kurve). *Sei $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ eine Kurve auf der semi-Riemann Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, g)$ und sei $a \in I$ und $z \in T_{\alpha(a)}(\mathcal{M})$. Dann existiert ein eindeutiges paralleles Vektorfeld $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$, so dass $Z(a) = z$.*

Beweis. Z genügt Gleichung (5), die ein System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung ist. Für gegebene Anfangsbedingungen existiert eine eindeutige Lösung auf dem gesamten Intervall I , auf dem die Koordinatenfunktionen Z^i definiert sind. Da jede Kurve auf $\mathcal{M}$ vollständig von lokalen Karten überdeckt werden kann, ist damit die Proposition bewiesen. $\square$

Für jede Kurve α existieren *parallele Vektorfelder*, also Vektorfelder deren Tangentialvektoren sich entlang der Kurve nicht „ändern“. Findet man ein paralleles Vektorfeld dessen Tangentialvektor im Punkt p gleich einem gewünschten Vektor z ist, so „entspricht“ es in jedem Punkt auf der Kurve $\alpha(t)$ diesem Tangentialvektor. Dies kann für die Definition des *Paralleltransports* von Vektoren herangezogen werden.

Definition 36 (Paralleltransport). *Sei $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ eine Kurve auf der semi-Riemann Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, g)$ und seien $a, b \in I$, $p = \alpha(a)$, $q = \alpha(b) \in \mathcal{M}$ und sei Z ein paralleles Vektorfeld entlang α mit $Z(a) = z$. Die Abbildung*

$$P = P_a^b(\alpha) : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow T_q(\mathcal{M}),$$

*die den Tangentialvektor $z = Z(a) \in T_p(\mathcal{M})$ auf $Z(b)$ abbildet heißt **Paralleltransport** entlang α von $p = \alpha(a)$ nach $q = \alpha(b)$.*

Proposition 7 (Paralleltransport ist eine lineare Isometrie). *Der Paralleltransport längs Kurven ist eine lineare Isometrie, also linear und bijektiv. Er erhält das Skalarprodukt von Vektoren.*

Beweis. Sei $y, z \in T_p(\mathcal{M})$ mit parallelen Vektorfeldern Z_y, Z_z . Da damit auch $Z_y + Z_z$ sowie λZ_z (für $\lambda \in \mathbb{R}$) parallel sind gilt $P(y + z) = Z_y(b) + Z_z(b) = P(y) + P(z)$ sowie $P(\lambda z) = \lambda P(z)$. Die Abbildung P ist also linear.

Sei $P(z) = 0$ dann ist durch die Eindeutigkeit $Z_z = 0$ und damit auch $z = 0$. P ist daher injektiv und aus Dimensionsgründen schon bijektiv.

Außerdem ist $\langle Z_y, Z_z \rangle$ konstant längs α , da gilt

$$\frac{d}{dt} \langle Z_y, Z_z \rangle = \langle Z'_y, Z_z \rangle + \langle Z_y, Z'_z \rangle = 0$$

und damit auch

$$\langle P(y), P(z) \rangle = \langle Z_y(b), Z_z(b) \rangle = \langle Z_y(a), Z_z(a) \rangle = \langle y, z \rangle.$$

□

Mit Hilfe dieser Definition kann man Tangentialvektoren entlang einer Kurve α transportieren und es ist möglich Tangentialvektoren aus $T_p(\mathcal{M})$ im Punkt p mit Tangentialvektoren aus $T_q(\mathcal{M})$ in Punkt q zu vergleichen. Im Allgemeinen hängt der *Paralleltransport* allerdings von der gewählten Kurve α ab, die die beiden Punkte p und q verbindet. Es gibt also *keine allgemeine oder ausgezeichnete Zuordnung* der Tangentialvektoren zwischen $T_p(\mathcal{M})$ und $T_q(\mathcal{M})$.

Bemerkung 7 (Eigenschaften des Paralleltransports). *Ist ein Vektor $v \in T_p(\mathcal{M})$ im Punkt $p \in \mathcal{M}$ der Lorentzmannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, g)$ zeitartig, also $\langle v, v \rangle > 0$, so ist der paralleltransportierte Vektor $w = P(v) \in T_q(\mathcal{M})$ im Punkt $q \in \mathcal{M}$ ebenfalls zeitartig, da das Skalarprodukt erhalten wird. Das selbe gilt daher für raumartig und null (lichtartig). Für Lorentzmannigfaltigkeiten erhält also der Paralleltransport den kausalen Charakter eines Vektors.*

Vektoren können entlang verschiedener Kurven α paralleltransportiert werden. Wir betrachten nun speziell jene Kurven γ , die durch Paralleltransport in Richtung ihres Tangentialvektors „erzeugt“ werden d.h. deren *Geschwindigkeitsvektorfeld* γ' parallel ist. Das bedeutet die Änderung von γ' ist „nur“ der Geometrie von $\mathcal{M}$ geschuldet. Diese Kurven γ haben in der Geometrie von semi-Riemann Mannigfaltigkeiten einen besonderen Stellenwert und heißen *Geodäten*. Geodäten sind die Verallgemeinerung von *Geraden* im Euklidischen Raum.

Definition 37 (Geodäte). *Sei $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ eine Kurve auf einer semi-Riemann Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, g)$. γ heißt **Geodäte**, wenn ihr Geschwindigkeitsvektorfeld γ' parallel ist.*

Proposition 8 (Geodätengleichung). *Die Kurve γ ist Geodäte genau dann, wenn ihre Komponentenfunktionen in einer Karte $(\xi, \mathcal{U})$ die Geodätengleichung*

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k(\gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0 \quad \text{für } 1 \leq k \leq n$$

erfüllen.

Diese Gleichung ergibt sich aus Gleichung (5) durch Einsetzen von $Z = \gamma'$. Damit lautet die Geodätengleichung also $\gamma'' = 0$, das heißt die Beschleunigung der Kurve γ verschwindet.

Das Existenz- und Eindeigkeitstheorem für gewöhnliche Differentialgleichungen hat folgende Bedeutungen für Geodäten γ .

Proposition 9 (Geodäteneigenschaften). *Die Geodätengleichung kann immer lokal eindeutig gelöst werden. Genauer, für jeden Punkt $p \in \mathcal{M}$ und jede Richtung $v \in T_p(\mathcal{M})$ gibt es genau eine Geodäte γ_v die in p in Richtung von v verläuft, d.h. es gilt also (bei geeigneter Parametrisierung)*

$$\gamma_v(0) = p \quad \gamma'_v(0) = v.$$

Darüber hinaus ist γ_v auf einem maximal offenen Interval I_{γ_v} definiert.

Für einen Beweis siehe Kapitel 3, Proposition 24 [4].

Beachte, dass im Allgemeinen $I_{\gamma_v} \neq \mathbb{R}$ gilt. Ein einfaches Beispiel dafür ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit der Euklidischen Metrik. Gilt $I_{\gamma_v} = \mathbb{R}$ dann heißt γ_v **vollständig**.

Beispiel 5 (Geodäten des semi-Euklidischen Raumes $\mathbb{R}_r^n$). *In den natürlichen Koordinaten für den semi-Euklidischen Raum $\mathbb{R}_r^n$ verschwinden die Christoffel Symbole. Die Geodätengleichung für γ in den natürlichen Koordinaten wird daher zu*

$$\frac{d^2(u^i \circ \gamma)}{dt^2} = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq n.$$

Diese Gleichung wird von den Koordinatenfunktionen $u^i(\gamma(t)) = p^i + tv^i$ für alle $t \in I$, mit den willkürlichen Konstanten p^i und v^i gelöst. In Vektornotation kann man schreiben $\gamma(t) = p + tv$. Die Geodäten in $\mathbb{R}_r^n$ sind also gerade Linien, außerdem sind sie vollständig, da gilt $t \in I = \mathbb{R}$.

Da ihr Geschwindigkeitsvektorfeld parallel ist, also $\gamma' = v = \text{const}$, hat eine Geodäte γ ein relativ „einförmiges“ Verhalten. Jede konstante Kurve (=Punkt) in $\mathcal{M}$ ist trivialerweise Geodäte. Falls jedoch für ein einziges t gilt $\gamma'(t) \neq 0$, so verschwindet γ' nie. Geodäten können daher nie „langsamer werden“ oder „stehenbleiben“, da ihre Beschleunigung γ'' konstant 0 ist.

Für das Beispiel der Kugel S^2 eingebettet im $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt als Metrik entsprechen die *Geodäten* den *Großkreisen*. Für den Paralleltransport eines Vektors Z_p entlang einer geschlossenen Kurve von Großkreisfragmenten ändert sich offensichtlich die Richtung des transportierten Vektors $\tilde{Z}_p$ (siehe Abbildung 5).

Bemerkung 8 (Kausaler Charakter von Geodäten). *Eine Kurve α auf der SRMF $(\mathcal{M}, g)$ heißt raumartig, falls alle ihre Geschwindigkeitsvektoren $\alpha'(t)$ raumartig sind, entsprechend gilt für zeitartig und null. Beliebige Kurven müssen nicht global einen dieser kausalen Charaktere besitzen, Geodäten γ allerdings schon, da γ' parallel ist und Paralleltransport den kausalen Charakter eines Vektors erhält (siehe Bemerkung 7).*

Geodäten sind also jene Kurven, die „gleichförmige“ Bewegungen auf Mannigfaltigkeiten beschreiben. Dies ist speziell im Bezug auf die physikalische Beschreibung von „frei fallenden“ Objekten im Teil III relevant. Außerdem wird im nächsten Kapitel der Transport von Vektoren entlang von Geodäten (also Paralleltransport) verwendet um den Krümmungsbegriff zu illustrieren.

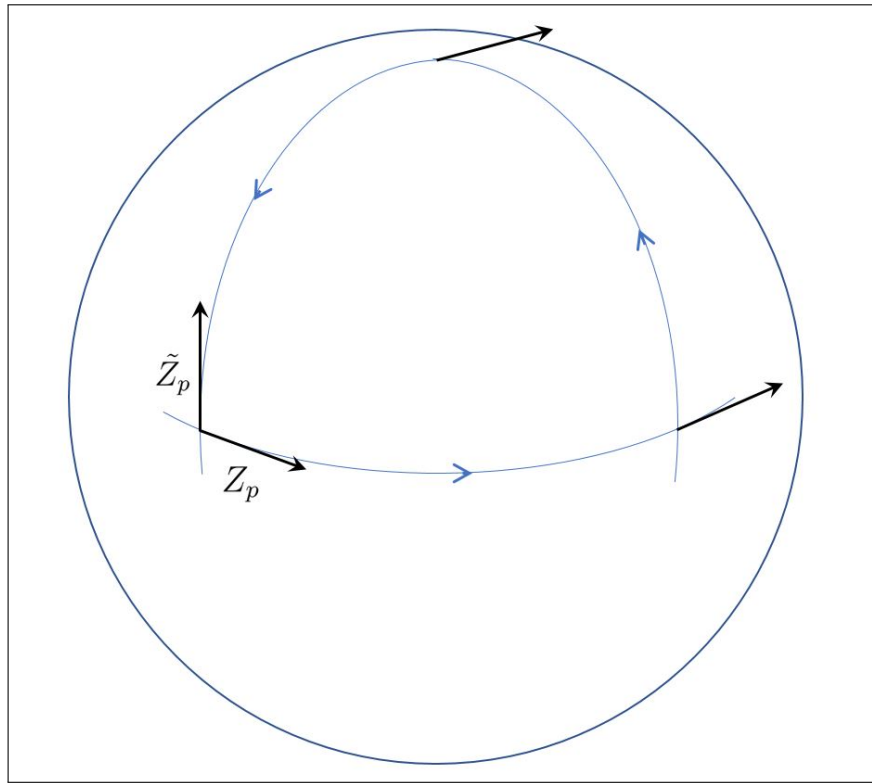


Abbildung 5: Paralleltransport auf der Kugeloberfläche

12 Krümmung

Eine intuitive Vorstellung von Krümmung gewinnt man am einfachsten beim Betrachten einer 2-dimensionalen „gekrümmten“ Fläche im $\mathbb{R}^3$. Offensichtlich „krümmt“ sich eine solche Fläche im umgebenden Raum. Gauss zeigte allerdings in seinem Theorema Egregium, dass die *Gauss Krümmung* eine isometrische Invariante der Fläche selbst ist, man also keinen umgebenden Raum $\mathbb{R}^3$ benötigt um diese Eigenschaft von Flächen zu definieren (siehe Satz 4.3.8 in [6]). Dies führte Riemann zur Entwicklung der Riemanngeometrie, welche den Krümmungsbegriff auf beliebige Riemann Mannigfaltigkeiten erweiterte. Die Erweiterung des Krümmungsbegriffes auf semi-Riemann Mannigfaltigkeiten erfolgt entsprechend, indem man die Einschränkung des Index des Skalarprodukts auf $r = 0$ fallen lässt.

Der Begriff der Krümmung wird auf den stückweise Paralleltransport von Vektoren entlang mehrerer Geodäten zurückgeführt, die den Vektor, entlang einer geschlossenen Kurve zum Anfangspunkt zurückführt. Hat der transportierte Vektor immer noch die selbe Richtung, so heißt die Mannigfaltigkeit lokal flach. Dies ist zum Beispiel für eine Kugeloberfläche nicht der Fall (siehe Abbildung 5).

Der Paralleltransport von Vektoren auf SRMF wurde im vorherigen Kapitel definiert.

Die Differenz des transportierten Vektors zum ursprünglichen Vektor wird mit Hilfe der nicht-Kommutativität der kovarianten Ableitung von Vektorfeldern berechnet, wie in diesem Kapitel gezeigt wird.

Die *Tensororderivation eines Kommutators* $D_{[X,Y]}$ entspricht der Derivation in Richtung des neuen Vektorfelds $[X,Y] = XY - YX$. Der *Kommutator der Tensorvariation* $[D_X, D_Y] = D_X D_Y - D_Y D_X$ entspricht dem hintereinander ausführen der Derivation in unterschiedliche Richtungen X und Y .

Für Lie Ableitungen ist die Identität $L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$ erfüllt, wie sich mit Definition 31 leicht nachrechnen lässt. Falls $[X,Y] = 0$ gilt (wie zum Beispiel für Koordinatenvektorfelder, siehe Lemma 2), so gilt daher auch dass die Lie Ableitungen L_X und L_Y kommutieren.

Im Allgemeinen gilt jedoch *nicht*, dass **kovariante Ableitung** von Tensorfeldern D_X kommutieren falls die Vektorfelder kommutieren. Die Abweichung des Kommutators der kovarianten Ableitungen von der kovarianten Ableitung des Kommutators wird von einem Tensorfeld „gemessen“, dass eine zentrale Rolle in der Differentialgeometrie auf semi-Riemann Mannigfaltigkeiten spielt. Dieses Tensorfeld wird bezeichnet als

Definition 38 (Riemann Krümmungstensor). Sei $(\mathcal{M}, g)$ eine SRMF mit Levi-Civita Zusammenhang D . Die Abbildung $R : \mathfrak{X}(\mathcal{M})^3 \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ gegeben durch

$$R_{XY}Z := D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

ist ein Typ $(1,3)$ -Tensorfeld auf $\mathcal{M}$ und heißt **Riemann Krümmungstensor** oder kurz **Riemannntensor**.

Wir zeigen, dass $R_{XY}Z$ tatsächlich Tensorfeld auf $\mathcal{M}$ ist. Laut Definition 13 kann R als Element von $\mathfrak{T}_3^1(\mathcal{M})$ aufgefasst werden falls es $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ -linear ist. $\mathbb{R}$ -linearität ist offensichtlich, daher muss man zeigen, dass man auch Funktionen „herausziehen“ kann. Für den Kommutator gilt $[X, fY] = Xf \cdot Y + f[X, Y]$ (siehe Gleichung (2)). Für den Riemann Krümmungstensor erhält man damit

$$\begin{aligned} R_{X,fY}Z &= D_{[X,fY]}Z - D_X D_{fY}Z + D_{fY} D_X Z \\ &= Xf \cdot D_Y Z + f D_{[X,Y]}Z - D_X (f D_Y Z) + f D_Y D_X Z \\ &= Xf \cdot D_Y Z - Xf \cdot D_Y Z + f R_{XY}Z = f R_{XY}Z. \end{aligned}$$

Laut Definition gilt $R_{XY}Z = -R_{YX}Z$ und daher $R_{fX,Y}Z = f R_{XY}Z$. Ausrechnen gibt außerdem dass $R_{XY}fZ = f R_{XY}Z$.

Oft schreibt man statt $R_{XY}Z$ auch $R(X, Y)Z$.

Nachfolgend werden nun ein paar Eigenschaften des Krümmungstensors sowie aus ihm abgeleitete Größen und deren Eigenschaften aufgezeigt.

Das Tensorfeld R kann punktuell als $\mathbb{R}$ -multilineare Funktion für individuelle Tangentialvektoren aufgefasst werden. Für die Tangentialvektoren $x, y, z \in T_p(\mathcal{M})$, $p \in \mathcal{M}$ heißt der $\mathbb{R}$ -lineare Operator

$$R_{xy} : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow T_p(\mathcal{M}), z \mapsto R_{xy}z$$

Krümmungsoperator. Der *Krümmungsoperator* erfüllt folgende Symmetrien.

Proposition 10 (Symmetrien der Krümmung). *Für $x, y, z, v, w \in T_p(\mathcal{M})$ gilt*

- (i) $R_{xy} = -R_{yx}$ (*Schiefsymmetrisch = Antisymmetrisch*),
- (ii) $\langle R_{xy}v, w \rangle = -\langle R_{xy}w, v \rangle$ (*Anti-Selbstadjungiert*),
- (iii) $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$ (*erste Bianchi Identität*),
- (iv) $\langle R_{xy}v, w \rangle = \langle R_{vw}x, y \rangle$ (*Paarsymmetrisch*).

Für einen Beweis siehe zB Kapitel 3, Proposition 36 in [4].

Die Symmetrien des Krümmungstensors R ziehen eine weniger offensichtliche Symmetrie ihres *kovarianten Differentials* DR nach sich, die *zweite Bianchi Identität* heißt. Per Definition ist DR ein $(1, 4)$ -Tensorfeld, welches man interpretieren kann als einen Operator, der vier Vektorfeldern V, X, Y und Z das Vektorfeld $(D_Z R)_{XY}V = (D_Z R)(X, Y)V$ zuweist. Diese Operation ist ebenso wie $R(X, Y)V$ auch punktweise, dh für individuelle Tangentialvektoren, sinnvoll, daher sind die Summanden in der nachfolgenden Proposition lineare Operatoren auf $T_p(\mathcal{M})$.

Proposition 11 (Zweite Bianchi Identität). *Für $x, y, z \in T_p(\mathcal{M})$ gilt*

$$(D_z R)(x, y) + (D_x R)(y, z) + (D_y R)(z, x) = 0.$$

Für einen Beweis siehe zB Kapitel 3, Proposition 37 in [4].

Die vielen Symmetrien reduziert die Anzahl der unabhängigen Komponenten des Krümmungstensors. Dies sieht man, wenn man R in Koordinaten einer konkreten Karte anschreibt.

Lemma 8 (R in lokalen Koordinaten). *Sei $(\xi, \mathcal{U})$ eine Karte der SRMF $(\mathcal{M}, g)$. Dann ist der Riemann Krümmungstensor R in Koordinaten gegeben durch*

$$R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = \sum_i R_{jkl}^i \partial_i,$$

wobei die Komponentenfunktionen $R_{jkl}^i \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ gegeben sind durch

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{kj}^i - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{lj}^i + \sum_m \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m - \sum_m \Gamma_{km}^i \Gamma_{lj}^m.$$

Beweis. Für Koordinatenvektorfelder gilt

$$R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = D_{\partial_l}(D_{\partial_k} \partial_j) - D_{\partial_k}(D_{\partial_l} \partial_j),$$

da $[\partial_k, \partial_l] = 0$ (siehe Lemma 2). Mit Definition 26 lautet der erste Term dargestellt in Christoffel Symbolen der Karte $(\xi, \mathcal{U})$

$$\begin{aligned} D_{\partial_l} \left(\sum_m \Gamma_{kj}^m \partial_m \right) &= \sum_m \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{kj}^m \partial_m + \sum_{m,r} \Gamma_{kj}^m \Gamma_{lm}^r \partial_r \\ &= \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{kj}^i + \sum_m \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m \right\} \partial_i. \end{aligned}$$

Subtraktion der entsprechenden Ausdrücke mit vertauschtem k und l führt auf den Ausdruck im Lemma. $\square$

Setzt man hier noch die, durch Proposition 3 gegebenen, Christoffel Symbole ein, so bekommt man eine explizite Beschreibung des Riemann Krümmungstensors durch die Metrik g . Selbst in einfachen Fällen ist es jedoch mit erheblichem Rechenaufwand verbunden R gemäß dieser Darstellung zu berechnen.

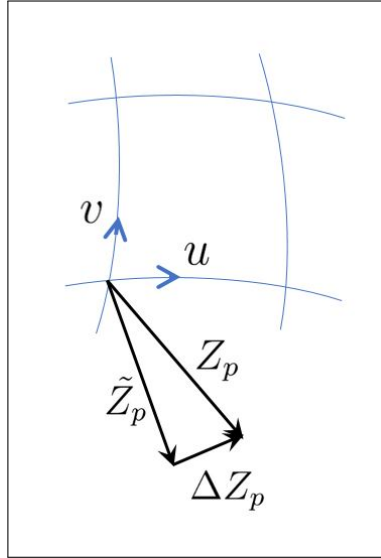


Abbildung 6: Paralleltransport und Krümmung

Bemerkung 9 (Riemannstensor und Paralleltransport entlang geschlossener Kurven). *Der auf diese Weise definierte Krümmungstensor R enthält die Information wie sehr sich ein, entlang eines infinitesimalen Parallelogramms, paralleltransportierter Vektor verändert. Genauer, für die Differenz ΔZ_p , zwischen dem transportierten Vektor $\tilde{Z}_p = P(Z_p) \in$*

$T_p(\mathcal{M})$ und dem ursprünglichen Vektor $Z_p \in T_p(\mathcal{M})$ im Punkt $p \in \mathcal{M}$, und dem Riemannntensor R bekommt man die Identität der Komponentenfunktionen

$$R^i\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u}\right)(Z)|_p = -\lim_{u,v} \frac{1}{uv} \Delta Z_p^i \quad (6)$$

mit $u, v \in T_p(\mathcal{M})$ den „Transportrichtungen“ des Parallelogramms (siehe Abbildung 6).

Ursprünglich wurde der Riemannntensor auf diese Weise definiert. Die in dieser Arbeit verwendete Definition 38 ist einfacher und weiter verbreitet. Für den Beweis der Identität (6) siehe Bemerkung 3.1.8 in [8].

Der Riemannntensor kodiert also die Information, wie sehr sich lokal der Paralleltransport eines Vektors auswirkt. Eine weitere Beschreibung des Riemannntensors gibt der folgende

Satz 4 (Lokal flache SRMF). *Für jede SRMF $(\mathcal{M}, g)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) $\mathcal{M}$ ist lokal flach, das heißt für alle Punkte $p \in \mathcal{M}$ existiert eine Karte $(\xi, \mathcal{U})$ um p in der die Metrik flach ist dh. die Komponenten der Matrix in Koordinaten lauten

$$(g)_{ij} = \varepsilon_j \delta_{ij} \text{ auf } \xi(\mathcal{U}).$$

- (ii) Der Riemannntensor R verschwindet.

Für den Beweis siehe Theorem 3.1.7 in [8].

Der Riemann Krümmungstensor R trägt die vollständige Information über die Krümmung der Mannigfaltigkeit. Die Symmetrien von R machen einiger seiner Komponenten redundant, daher macht es Sinn die Information, die in R steckt zu kompaktifizieren. Dies kann durch (mehrmalige) Kontraktion von R geschehen, die weiterhin wichtige Information über die Krümmung enthält. Interessant sind konkret zwei bestimmte Kontraktionen von R , die nachfolgend erläutert werden.

Definition 39 (Ricci Tensor). *Der **Ricci Tensor** $\mathbf{Ric}$ einer SRMF $(\mathcal{M}, g)$ ist die Kontraktion $\mathbf{Ric} := \mathcal{C}_3^1(R) \in \mathfrak{T}_2^0(\mathcal{M})$ ihres Riemann Krümmungstensors R . Seine Komponentenfunktionen $R_{ij} \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ bezüglich der Karte $(\xi, \mathcal{U})$ sind*

$$R_{ij} = \sum_k R_{ijk}^k.$$

Aufgrund der Symmetrien des Riemann Krümmungstensors R (Proposition 10), sind die einzigen nichtverschwindenden Kontraktionen des Riemann Krümmungstensors $\pm \mathbf{Ric}$.

Der Ricci Tensor ist ein $(0, 2)$ -Tensorfeld, „frisst“ also zwei Vektorfelder und generiert eine reelle Funktion. Wie schon bei der Einführung von Tensorfeldern erwähnt, sind $(0, 2)$ -Tensorfelder für die Beschreibung von anisotropen Phänomenen in der Physik relevant. Dem Ricci Tensor $\mathbf{Ric}$ wird auch in Teil III bei der Darstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie eine wichtige Bedeutung zukommen.

Lemma 9 (Symmetrien von Ricci). **Ric** ist symmetrisch und in den natürlichen Basisvektoren $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ des Tangentialraums $T_p(\mathcal{M})$ für jeden Punkt p gegeben durch

$$\mathbf{Ric}(X, Y) = \sum_i \varepsilon_i \langle R_{X\partial_i} Y, \partial_i \rangle,$$

wobei ε_i wie üblich die Vorzeichen $\varepsilon_i = \langle \partial_i, \partial_i \rangle = \pm 1$ sind.

Beweis. Mit der Definition des Ricci Tensors bekommt man

$$\begin{aligned} \mathbf{Ric}(X, Y) &= (\mathcal{C}_3^1 R)(X, Y) = \sum_i R(dx^i, X, Y, \partial_i) = \sum_i dx^i(R(X, Y, \partial_i)) \\ &= \sum_i \varepsilon_i \langle R_{Y\partial_i} X, \partial_i \rangle = \sum_i \varepsilon_i \langle R_{X\partial_i} Y, \partial_i \rangle. \end{aligned}$$

Dabei verwendet man in der letzten Gleichung die Paarsymmetrie des Krümmungstensors, aus Proposition 10 (iv). $\square$

Eine SRMF mit $\mathbf{Ric} = 0$ heißt **Ricci Flach**. *Flache* Mannigfaltigkeiten ($R = 0$) sind notwendigerweise *Ricci Flach*, die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Die zweite, wichtige Kontraktion des Riemann Krümmungstensors ist die Kontraktion von **Ric**, genannt

Definition 40 (Skalare Krümmung). Die **skalare Krümmung** S der SRMF $(\mathcal{M}, g)$ ist die metrische Kontraktion $S := \mathcal{C}(\mathbf{Ric}) \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ ihres Ricci Tensors **Ric**.

In lokalen Koordinaten der Karte $(\xi, \mathcal{U})$ gilt

$$S = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j,k} g^{ij} R_{ijk}^k.$$

Die skalare Krümmung ist also die zweifache Kontraktion des Riemannstensors R und damit eine glatte Funktion. Sie enthält nur noch isotrope (also richtungsunabhängige) Information über die Krümmung des Raumes.

Mit der Definition des *Riemann Krümmungstensors* R , des *Ricci Tensors* **Ric** und der *Skalaren Krümmung* S wurde in diesem Kapitel der Krümmungsbegriff für semi-Riemman Mannigfaltigkeiten festgelegt.

13 Differentialoperatoren auf SRMF

Zur Beschreibung physikalischer Phänomene werden oft Differentialgleichungen verwendet, welche die zu beschreibenden Größen in Beziehung setzen. Um diese physikalischen Gesetze für

Größen die auf Mannigfaltigkeiten definiert sind aufstellen zu können, benötigt man entsprechende Differentialoperatoren.

Auf semi-Riemann Mannigfaltigkeiten $(\mathcal{M}, g)$ gibt es eine natürliche Verallgemeinerung der bekannten Differentialoperatoren des Vektorkalküls auf $\mathbb{R}^3$, Gradient, Divergenz und Laplaceoperator.

Definition 41 (Gradient). *Der **Gradient** $\mathbf{grad}f$ einer Funktion $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ ist das metrisch äquivalente Vektorfeld zum Differential $df \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$. Das heißt*

$$\langle \mathbf{grad}f, X \rangle := df(X) = X(f) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

Bezüglich einer Karte $(\xi, \mathcal{U})$ kann man das Differential schreiben als $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ (siehe Lemma 3), und damit den Gradient als

$$\mathbf{grad}f = \sum g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j.$$

Speziell für den semi-Euklidischen Raum $\mathbb{R}_r^n$ in natürlichen Koordinaten $(u^1, \dots, u^n)$ gilt daher $\mathbf{grad}f = \sum \varepsilon_i (\partial f / \partial u^i) \partial_i$, was sich zur üblichen Formel auf $\mathbb{R}^3$ reduziert.

Bemerke, dass das *Differential* auf jeder glatten Mannigfaltigkeit definiert ist, es benötigt jedoch eine *Metrik*, um den *Gradienten* zu definieren.

Definition 42 (Divergenz). *Jede (eventuell metrische) Kontraktion $\mathcal{C}$ des neuen kovarianten Eintrages von DA mit einem ursprünglichen Eintrag des Tensorfeldes A heißt (eine) **Divergenz**.*

Als erläuterndes Beispiel dazu seien das Tensorfeld $A \in \mathfrak{T}_2^1(\mathcal{M})$, die Einsform $\theta^1 \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ und die Vektorfelder $V_2, V_3, X_4 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ gegeben. A angewandt auf die Einsform und Vektorfelder gibt die Funktion $A(\theta^1, V_2, V_3) \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$. Das kovariante Differential des Vektorfeldes A ist $DA \in \mathfrak{T}_3^1(\mathcal{M})$. Angewandt auf die Einsform und Vektorfelder gibt es die Funktion $DA(\theta^1, V_2, V_3, X_4) \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$. Jede Kontraktion einer der ersten drei Einträge von DA mit dem vierten Eintrag ist also eine Divergenz von A . Die drei möglichen Divergenzen für A sind daher $\mathbf{div}_1(A) = \mathcal{C}_4^1(DA)$, $\mathbf{div}_2(A) = \mathcal{C}_{24}(DA)$ und $\mathbf{div}_3(A) = \mathcal{C}_{34}(DA)$.

In den folgenden zwei Spezialfällen gibt es nur eine Möglichkeit der Kontraktion und daher nur *eine Möglichkeit* der *Divergenz*:

- (i) Sei $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ dann ist die *Divergenz des Vektorfeldes* $\mathbf{div}V = \mathcal{C}(DV) \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$. Für eine Karte $(\xi, \mathcal{U})$ gilt

$$\mathbf{div}V = \sum_i \left\{ \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^i V^j \right\}.$$

Für $\mathbb{R}_r^n$ in natürlichen Koordinaten gilt daher $\mathbf{div}V = \sum \partial V^i / \partial u^i$.

- (ii) Sei $A \in \mathfrak{T}_2^0(\mathcal{M})$, A symmetrisch. Die *Divergenz für symmetrische Typ $(0, 2)$ -Tensorfelder* ist eindeutig gegeben, mit $\mathbf{div} A = \mathcal{C}_{13}(DA) = \mathcal{C}_{23}(DA) \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$. Für eine Karte $(\xi, \mathcal{U})$ gilt

$$(\mathbf{div} A)_i = \sum_{r,s} g^{rs} A_{ri;s} = \sum_s A_{i;s}^s = \sum_s \left\{ \frac{\partial A_i^s}{\partial x^s} + \sum_j \left(\Gamma_{sj}^s A_i^j - \Gamma_{si}^j A_j^s \right) \right\}.$$

$A_{ri;s}$ entspricht dabei den Komponentenfunktionen des kovarianten Differentials aus Bemerkung 6 (iv).

Bemerkung 10 (Hesse Tensor). *Der Hesse Tensor einer Funktion $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ ist das zweite kovariante Differential $H^f = D(Df) \in \mathfrak{T}_2^0(\mathcal{M})$.*

Lemma 10 (Hesse Tensor explizit). *Der Hesse Tensor H^f ist ein symmetrisches $(0, 2)$ -Tensorfeld und es gilt*

$$H^f(X, Y) = XYf - (D_X Y)f = \langle D_X(\mathbf{grad} f), Y \rangle.$$

Für einen Beweis siehe Kapitel 3, Lemma 49 in [4].

Definition 43 (Laplace Operator). *Der Laplace Operator Δf einer Funktion $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ ist die Divergenz seines Gradienten: $\Delta f := \mathbf{div}(\mathbf{grad} f) \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$.*

Da die kovariante Ableitung mit dem *Indexziehen* vertauscht folgt außerdem, dass der *Laplace Operator* von f die *metrische Kontraktion* des *Hesse Tensors* ist. Also $\Delta f = \mathcal{C}_{12}(H^f)$.

In lokalen Koordinaten der Karte $(\xi, \mathcal{U})$ gilt

$$\Delta f = \sum g^{ij} H_{ij} = \sum_{ij} g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right\}.$$

Für $\mathbb{R}_r^n$ in natürlichen Koordinaten sind die Komponenten des Hesse Tensors die zweiten partiellen Ableitungen $\partial^2 f / \partial u^i \partial u^j$, und der Laplace Operator $\Delta f = \sum \varepsilon_i \partial^2 / \partial (u^i)^2$.

Folgende Konsequenz aus der zweiten Bianchi Identität (Satz 11) ist von besonderer Relevanz für die Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Satz 5 (Divergenz von Ricci). *Sei S die skalare Krümmung, $\mathbf{Ric}$ Ricci Tensor und D kovariante Ableitung einer SRMF $(\mathcal{M}, g)$, dann gilt*

$$dS = 2 \mathbf{div}(\mathbf{Ric}).$$

Beweis. Um die zweite Bianchi Identität (Proposition 11) in Koordinaten einer Karte $(\xi, \mathcal{U})$ auszudrücken verwendet man die Gleichheit

$$(DR)(\partial_j, \partial_k, \partial_l, \partial_r) = (D_{\partial_r} R)_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = \sum_i R_{jkl;r}^i \partial_i$$

und man bekommt

$$R_{jkl;r}^i + R_{jlr;k}^i + R_{jrk;l}^i = 0.$$

Vertauschen von r und k und Vorzeichenwechsel im dritten Term (Antisymmetrie von R , (i) in Proposition 10), sowie Kontraktion über i und r führt zu

$$\sum_r (R_{jkl;r}^r + R_{jlr;k}^r - R_{jkr;l}^r) = 0.$$

Dies vereinfacht sich zu

$$\sum_r R_{jkl;r}^r + R_{jl;k} - R_{jk;l} = 0.$$

Metrische Kontraktion von j und k gibt

$$\sum_{r,j,k} g^{jk} R_{jkl;r}^r + \sum_{j,k} g^{jk} R_{jl;k} - S_{;l} = 0. \quad (7)$$

Mit der Symmetrie von R (Proposition 10) und Lemma 8 bekommt man

$$\begin{aligned} R_{jmlk} &= \sum_r g_{rj} R_{mlk}^r = \sum_r \langle \partial_j, \partial_r \rangle R_{mlk}^r = \sum_r \langle \partial_j, R_{mlk}^r \partial_r \rangle = \langle R_{\partial_l \partial_k}(\partial_m), \partial_j \rangle \\ &= -\langle R_{\partial_k \partial_l}(\partial_m), \partial_j \rangle = \langle R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j), \partial_m \rangle = R_{mjkl}. \end{aligned}$$

R_{jkl}^r kan man umschreiben zu $\sum g^{rm} R_{mjkl}$. Einsetzten dieser beiden Identitäten in den ersten Term von (7) gibt

$$\begin{aligned} \sum_{r,j,k} g^{jk} R_{jkl;r}^r &= \sum_{r,j,k,m} g^{jk} g^{rm} R_{mjkl;r} = \sum_{r,j,k,m} g^{jk} g^{rm} R_{jmlk;r} = \sum_{r,k,m} g^{rm} R_{mlk;r}^k = \sum_{r,m} g^{rm} R_{ml;r} \\ &= \sum_r R_{l;r}^r. \end{aligned}$$

Einsetzen und Umbenennen der Indizes in Gleichung (7) führt damit zu

$$2 \sum_m R_{l;m}^m = S_{;l}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist der Koordinatenausdruck für $2 \mathbf{div}(\mathbf{Ric})$ (siehe Bemerkung 6 (iv), Definition 39 und Definition 42). Die rechte Seite entspricht dem kovarianten Differential DS und damit dS (siehe Bemerkung 6 (i) und (iv)). $\square$

Dieser Satz zur Divergenz von Ricci ist von zentraler Bedeutung für die endgültige Form des Einsteintensors und damit der Einsteinschen Feldgleichung, die wir im folgenden Teil III der Diplomarbeit diskutieren werden.

In Teil II wurde nun die Differentialgeometrie auf semi-Riemann Mannigfaltigkeiten so weit erläutert, wie sie zum grundlegenden Verständnis der Allgemeinen Relativitätstheorie notwendig ist. Die zentralen Begriffe der *Metrik*, der *Lorentzmannigfaltigkeit* sowie der *Krümmungsbegriff* wurden ebenso eingeführt wie die grundlegenden Differentialoperatoren wie *Gradient* und *Divergenz*. Außerdem wurden *Geodäten* als Kurven gleichförmiger Bewegung, die nur der Krümmung der Mannigfaltigkeit folgt, eingeführt. All diese Begriffe sind nötig um im abschließenden Teil III dieser Diplomarbeit die *Einsteinsche Feldgleichung* anschreiben zu können, und damit die *Allgemeine Relativitätstheorie* zu formulieren.

Teil III

Die Einstein'sche Feldgleichung

14 Physikalische Gesetzte

Die meisten physikalische Gesetze sind ursprünglich für den dreidimensionalen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ aufgestellt worden. Nach der Formulierung der Speziellen Relativitätstheorie von Albert Einstein im Jahre 1905 wurden diese in eine relativistische Form gebracht, bei der die Gesetze für alle **Inertialsysteme** gelten. Als Inertialsystem gilt jedes globale Koordinatensystem $(x^1, \dots, x^n)$ in der die Metrik die (standard-) Form des Minkowski Raums $\eta_{ij} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ annimmt. Diese Unabhängigkeit von Inertialsystemen heißt auch **spezielle Kovarianz**.

Der Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen erfolgt mittels sogenannter **Lorentz Transformation**. In diesen Inertialsystemen können nun Kräfte, die auf „Testpartikel“ wirken, verwendet werden, um zum Begriff von Kraftfeldern (wie zum Beispiel das Elektromagnetische Feld) zu kommen. Eine gute Einführung in die Spezielle Relativitätstheorie für LehramtstudentInnen ist Kapitel 2 in [10].

Das Ziel von Albert Einstein um 1915 war nun, diese Gesetze so zu verallgemeinern, dass die Gravitation auch mit dieser Methode beschrieben werden kann.

Zentral dabei war die Erfüllung des **Äquivalenzprinzips** das besagt, dass ein Beobachter in Schwerelosigkeit nicht unterscheiden kann, ob er in einem Gravitationsfeld *frei fällt* oder sich in einem *Inertialsystem* befindet. Gleichbedeutend dazu ist, dass **schwere Masse** und **Träge Masse äquivalent** sind. Physikalische Gesetzte so zu formulieren, dass sie *Darstellungsunabhängig* von diesen „äquivalenten“ Systemen sind entspricht dabei der Forderung nach *Invarianz unter Diffeomorphismen*, die sogenannte **allgemeine Kovarianz**.

Ist man nun Beobachter in einem Inertialsystem und will die Wirkung der Gravitationskräfte auf Testpartikel beschreiben bekommt man durch das Äquivalenzprinzip ein Problem. Es ist nämlich nicht möglich ein „neutrales“ Inertialsystem zu finden in der sich die Gravitationskräfte über Felder beschreiben lassen, da jeder Beobachter sich im Gravitationsfeld genauso bewegen würde wie das „Testpartikel“.

Dies führte Albert Einstein zu einer kühnen Hypothese: Die Raumzeit ist nicht flach, wie in der SRT angenommen, sondern gekrümmt und die Bewegung eines frei im Gravitationsfeld fallenden Objektes entspricht einer Geodäte der Raumzeit-Metrik. In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird daher keine a-priori Annahme an die Struktur der Raumzeit gestellt. Mit dem Aufstellen der *Einsteingleichung*, die die Krümmung der Raumzeit mit der Massenverteilung verknüpft, finalisiert Einstein seine Hypothese über die Natur der Gravitation und damit entsprechend dem Übergang vom *Minkowski Raum* in der SRT zu *Lorentzmannigfaltigkeiten* in der ART.

Für eine detaillierte Diskussion und mathematische Ableitung dieser physikalischen Gesetze sei auf Kapitel 6 in [4], Kapitel 4 in [9] oder Kapitel 2 in [7] verwiesen.

Um die Bedingung der *allgemeinen Kovarianz* zu erfüllen darf nur die Metrik g und aus ihr abgeleitete Werte in den physikalischen Gesetzen, die die Gravitation beschreiben, vorkommen. Außerdem müssen sich die Gesetze für den Fall der „flachen Metrik“ zu denen der speziellen Relativitätstheorie vereinfachen.

Konkret verwendet man dabei **zeitorientierbare Lorentz Mannigfaltigkeiten** der **Dimension 4**. Das bedeutet es existieren **drei Raumrichtungen**, eine **Zeitrichtung** und es kann **global eine Zukunftsrichtung** festgelegt werden. Genauer ist es möglich in stetiger Weise in jedem $T_p(\mathcal{M})$ den *Zukunftslichtkegel* (Definition 23) auszuwählen. Für solche Lorentz Mannigfaltigkeiten mit festgelegter Zukunftsrichtung $(\mathcal{M}, g)$ wird der Begriff **Raumzeit** verwendet. Ein Punkt p in dieser Raumzeit heißt **Ereignis**, da damit ein bestimmter *Ort* zu einem bestimmten *Zeitpunkt* festgelegt ist.

Man betrachtet nun die grundlegenden physikalischen Beziehungen wie *Energie- und Impulserhaltung* von *massiven Teilchen* auf einer Raumzeit $(\mathcal{M}, g)$. Wir schränken uns dabei auf den Fall einer *flachen Raumzeit* ein, in der **Beobachter** existieren, denen man ein (für sie stationäres) *Inertialsystem* zuordnen kann.

Definition 44 (Massives Teilchen). *Ein **massives Teilchen** in einer Raumzeit $(\mathcal{M}, g)$ ist eine zeitartige, in die Zukunft gerichtete Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$ so dass, $|\alpha'(\tau)| = 1$ für alle $\tau \in I$. Der Parameter τ heißt die Eigenzeit des Teilchens.*

Massive Teilchen modellieren die „Geschichte“ eines physikalischen Objekts, das sich durch die Raumzeit bewegt. Bei diesen Objekten kann es sich um einen Stern, ein Raumschiff oder auch um ein physikalisches (Elementar-)Teilchen handeln. Daher ist es sinnvoll einem massiven Teilchen eine Masse bzw. einen Massenparameter m zuzuordnen. Denken wir an eine Rakete,

die ja Treibstoff verbraucht, so ist es sinnvoll, dass m von der Zeit abhängen kann. Für unsere Zwecke reicht es aber m als positive Konstante anzunehmen.

Ein *massives Teilchen* α heisst **frei**, falls $\alpha'' = 0$ gilt, es also eine Geodäte ist (Proposition 37).

Physikalisch gesprochen ist also ein freies massives Teilchen ein Objekt mit positiver Masse m , das sich auf einer Geodäte der Raumzeit also kräftefrei bewegt.

Ein **Beobachter** ist ein freies, massives Teilchen ω mit Eigenzeit t (siehe Kapitel 6, Particles Observed in [4]). Da wir uns in einer flachen Raumzeit befinden (also dem Minkowski Raum) kann man für einen so definierten Beobachter automatisch Inertialsysteme $(\xi, \mathcal{U})$ definieren. Dabei gilt für diese Inertialsysteme dass die Metrik $g_{ij} = \eta_{ij}$ und $\mathcal{U} = \mathbb{R}_1^4$ (siehe Kapitel 6, Definition 8 in [4]).

Definition 45 (Energie-Impuls Vektorfeld). *Sei $\alpha : I \rightarrow \mathcal{M}$ ein massives Teilchen mit dem **Massenparameter** m dann heißt*

$$P = m \frac{d\alpha}{d\tau}$$

*sein **Energie-Impuls Vektorfeld**.*

In einem Inertialsystem $(\xi, \mathcal{U})$ sind die Komponenten des *Energie-Impuls Vektorfeldes* gegeben durch

$$P^i = m \frac{d(x^i \circ \alpha)}{d\tau} \quad (0 \leq i \leq 3)$$

mit der Eigenzeit τ von α . Wir verwenden hier die, in der physikalischen Literatur übliche, Konvention der Indizes von 0 bis 3, wobei der Index 0 für die Zeitkomponente und die Indizes 1 bis 3 für die Raumkomponenten der Tensoren steht.

Für einen Beobachter ω mit Eigenzeit t , der sich am selben Ereignis p befindet, werden die Komponenten des Energie-Impuls Vektorfeldes zu

$$P^i = m \frac{d(x^i \circ \alpha)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \quad \text{mit} \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Dabei entspricht v dem *Betrag der Relativgeschwindigkeit* zwischen Beobachter ω und Teilchen α . $d\tau/dt$ entspricht der Lorentztransformation für Eigenzeiten, siehe Gleichung (2.25) in [10]. Unter Verwendung der in physikalischen Texten üblichen Vektornotation in drei Dimensionen $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ können die drei Raumkomponenten des Energie-Impuls Vektorfeldes zum Vektorfeld $\vec{P} = (P^1, P^2, P^3)$ zusammengefasst werden, das dem Impuls eines Teilchen in der klassischen, Newton'schen, Gravitationstheorie entspricht

$$\vec{P} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \frac{d\vec{\alpha}}{dt}.$$

Hierbei steht $\frac{d\vec{\alpha}}{dt}$ für den 3-Dimensionalen Geschwindigkeitsvektor der klassischen Theorie. Die Zeitkomponente P^0 von P entspricht jedoch etwas Neuem,

$$P^0 = m \frac{d(x^0 \circ \alpha)}{d\tau} = m \frac{dt}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Einstein identifizierte P^0 , im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie, mit der *Gesamtenergie* E des Teilchens α gemessen vom Beobachter ω . Entwickeln von P^0 in eine Taylorreihe um $v = 0$ ergibt

$$P^0 = m + \frac{1}{2}mv^2 + O(v^4).$$

Der zweite Term entspricht dabei der *Newton'schen Kinetischen Energie* von $\vec{\alpha}$. Der in Definition 44 eingeführte Massenparameter m im ersten Term wird hierbei als eine *eigenständige Form von Energie* aufgefasst, speziell ist m die sogenannte *Ruheenergie* E_{Ruhe} des Teilchens, da $P^0 = m$ für $v = 0$ gilt.

Bei unserer Notation haben wir stillschweigend die in der Theoretischen Physik weit verbreiteten sogenannten geometrischen Einheiten verwendet. Dabei wird $c = h = \mathbf{G} = 1$ gesetzt, siehe (siehe Kapitel 6, Bemerkung 7 in [4]). In physikalischen Einheiten (also bei Einsetzen der Lichtgeschwindigkeit $c = 299.792.458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) ergibt sich für die *Ruheenergie* eines Teilchens die berühmte Formel

$$E_{\text{Ruhe}} = mc^2,$$

die die Äquivalenz von Masse und Energie aufzeigt.

Definition 46 (Euklidische Interpretation des Energie-Impuls Vektorfeld). *Sei α ein massives Teilchen mit Eigenzeit τ in einer flachen Raumzeit $(\mathcal{M}, g)$. Sei ω ein Beobachter mit Eigenzeit t am selben Ereignis, dann heißt die Zeitkomponente von $P = m \frac{d\alpha}{d\tau}$*

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$$

die Energie von α relativ zu ω . Das Euklidische Vektorfeld

$$\vec{P} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \frac{d\vec{\alpha}}{dt}$$

wird als der Impuls von α relativ zu ω bezeichnet.

Mit diesen Definitionen von Impuls und Energie können viele physikalische Prozesse wie zB Stöße von einzelnen massiven Teilchen beschrieben werden (siehe Kapitel 6, Collisions in [4]).

Entsprechend der Verknüpfung von Raum und Zeit in der Allgemeinen Relativitätstheorie können Energie und Impuls nur als Teil einer Einheit aufgefasst werden. Im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie kann diese durch einen Beobachter „künstlich“ getrennt werden.

Für detailliertere Eigenschaften von massiven Teilchen siehe Kapitel 6, Korollar 28 in [4]. Da die Raumzeit im Allgemeinen gekrümmt ist und der Paralleltransport von Vektoren von der gewählten Kurve abhängt, kann in allgemeinen Raumzeiten ein Beobachter laut vorheriger Definition die Energie eines „entfernten“ Teilchens **nicht** bestimmen. Mehr noch, in gekrümmten Raumzeiten kann man **nicht** global einen Beobachter wie oben definieren.

Stattdessen definiert man für die ART einen **instantanen** oder **infinitesimalen Beobachter** als ein **zeitartiges, zukunftsgerichtetes Einheitsvektorfeld** u (siehe Kapitel 12, B in [4]). Die orthogonale Zerlegung $T_p(\mathcal{M}) = \mathbb{R}u_p + u_p^\perp$ teilt den Tangentialraum in die *Zeitachse* $\mathbb{R}u$ sowie den, durch seine Raumachsen aufgespannten, *stationären Raum* $u^\perp$ des *infinitesimalen Beobachters*.

15 Energie-Impuls Tensorfeld

Der Fluss einer Flüssigkeit kann als Summe der Bewegungen einzelner massiver Teilchen in $(\mathcal{M}, g)$ beschrieben werden. Anstelle dieses diskreten Modells kann man aber auch, einfacher, ein kontinuierliches Modell annehmen, in dem die Geschwindigkeit des Flusses durch ein *zeitartiges Einheitsvektorfeld* $U \in \mathcal{M}$ gegeben ist. Interessant ist dieser Fall einer (kontinuierlichen) Massenverteilung in der Raumzeit und deren Verhalten unter dem Einfluss der Gravitation. Diese kontinuierliche Massenverteilungen werden in der ART durch ein **Energie-Impuls Tensorfeld** $T \in \mathfrak{T}_2^0(\mathcal{L})$ beschrieben.

Die Konstruktion eines Energie-Impuls Tensorfeldes T_{IF} für das Modells der idealen Flüssigkeit wird als Motivation exemplarisch behandelt.

Entsprechend den Gleichungen (1) bis (3) aus Kapitel 12, Perfect Fluids in [4] gilt:

- (1) Ein *infinitesimaler Beobachter* u der mit dem Fluss des Einheitsvektorfeldes U „fließt“, also $u = U$, misst zum Ereignis q in der Raumzeit $(\mathcal{M}, g)$ die *Energiedichte* der Massenverteilung $\rho(q) = T_{IF}(u, u)$.
- (2) Für $x, y \in u^\perp$ ist $T_{IF}(x, y) = \mathbf{p}(q)\langle x, y \rangle$, mit $\mathbf{p}(q)$ dem Druck auf die Fläche, aufgespannt durch x, y zum Ereignis q . Dies korrespondiert zum *nicht Auftreten von Scherkräften*.
- (3) Für $x \in u^\perp$ ist $T_{IF}(x, u) = T_{IF}(u, x) = 0$, dies entspricht der *Erhaltung* des *Energieflusses* und des *Impulses* in x -Richtung.

Diese Motivation verwendet man für:

Definition 47 (Ideale Flüssigkeit auf einer Raumzeit). *Eine **ideale Flüssigkeit** auf einer Raumzeit $(\mathcal{M}, g)$ ist ein Tripel $(U, \rho, \mathbf{p})$ wobei gilt:*

- (i) U ist ein zeitartiges, zukunftsorientiertes Einheitsvektorfeld auf $(\mathcal{M}, g)$ und heißt **Fluss-Vektorfeld**.
- (ii) $\rho \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ heißt Energiedichtefunktion, $\mathbf{p} \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ heißt Druckfunktion.
- (iii) Das Energie-Impuls Tensorfeld der idealen Flüssigkeit T_{IF} ist gegeben durch

$$T_{IF} = (\rho + \mathbf{p})U^\flat \otimes U^\flat + \mathbf{p}g, \quad (8)$$

wobei $U^\flat$ die metrisch äquivalente Einsform zu U ist (siehe Bemerkung 1).

Um allgemeiner einen Energie-Impuls Tensor T zu bekommen, der nicht nur Anteile einer idealen Flüssigkeit, Gleichung (8), enthält, kann man weitere Terme, zum Beispiel entsprechend den Elektrodynamischen- oder den Kernkräften, hinzufügen (Vergleiche 20.30 in [7]),

$$T = T_{IF} + T_{Edyn} + T_{Kern} + \dots$$

In der klassischen Gravitationstheorie wird alleinig die Masse m , also die Ruheenergie, als Ursprung der Gravitationskräfte angenommen während in der ART der Energie-Impuls Tensor T als Ursprung der Gravitation angenommen wird. Es werden also alle möglichen Formen von Energie als Ursprung zugelassen, da ja im Energie-Impuls Tensor T alle möglichen Energieformen auftreten können.

Da es keine allgemeine Definition von Materie in der Allgemeinen Relativitätstheorie gibt, gibt es auch kein allgemeines Konzept für die Konstruktion von T , nur einige *empirische Regeln*, denen T genügen muss. Explizit sind diese Regeln:

- (i) T ist ein *symmetrisches* $(0,2)$ -Tensorfeld.
- (ii) Für einen beliebigen infinitesimalen Beobachter u ist die *gemessene Energiedichte* $\rho = T(u, u)$ *nicht negativ*.
- (iii) Außerdem gilt *Energie und Impulserhaltung* d.h. $\mathbf{div}T = 0$.

Siehe dazu Kapitel 12, F in [4].

16 Empirische Motivation der Einstein'schen Feldgleichung

Die nachfolgende Motivation zu Herleitung der Einstein'schen Feldgleichung folgt Kapitel 4.3, S.71-73 in [9].

Frei fallende Beobachter, also massive Teilchen die sich entlang von Geodäten bewegen, sind kräftefrei. Ausgedehnte Objekte, bzw zwei Objekte mit „Ereignisabstand“ $\Delta x = q - p$,

$q, p \in \mathcal{M}$ können sich entlang Geodäten auf gekrümmter Raumzeit bewegen und dabei eine *Relativbeschleunigung* beobachten, die auf sogenannte *Gezeitenkräfte* zurückzuführen ist. Die Gezeitenkräfte sind die physikalische Manifestation der Krümmung der Raumzeit.

In der Newton'schen Gravitationstheorie wird das Gravitationsfeld durch das Potential $\Phi \in \mathfrak{F}((\mathbb{R})^3)$ beschrieben. Die *Gravitationsgezeitenkraft* zweier Teilchen kann durch $-(\vec{x}\vec{\nabla})\vec{\nabla}\Phi$ beschreiben werden, wobei $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ der Abstandsvektor der beiden Teilchen ist und $\vec{\nabla} = (\partial_1, \partial_2, \partial_2)$ den Gradienten bezeichnet. Man kann die *Gezeitenbeschleunigung* zweier Teilchen im Formalismus der SRMF herleiten (Kapitel 8, Lemma 9 in [4]) und bekommt dafür in lokalen Koordinaten $(\xi, \mathcal{U})$ den Ausdruck $F_v(x) = R_{xv}v$ (Kapitel 8, Definition 8 in [4] S.219) oder als Komponentenfunktionen in der Koordinatendarstellung $R_{cbd}{}^a v^c x^b v^d$ (S.72 in [9]), wobei $v = \sum_a v^a \partial_a$ das Geschwindigkeitsvektorfeld der Teilchen und $x = \sum_a x^a \partial_a$ deren Ereignisabstandsvektor sind. Dies suggeriert die Entsprechung

$$R_{cbd}{}^a v^c v^d \longleftrightarrow \partial_b \partial^a \Phi. \quad (9)$$

Die Feldgleichung der Newton'schen Gravitationstheorie ist die Poissongleichung für das Potential, genauer

$$\nabla^2 \Phi = \mathbf{div}(\mathbf{grad} \Phi) = 4\pi\rho.$$

Hier ist $\rho \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^3)$ die sogenannte Massen- bzw. Energiedichte. Wie für die ideale Flüssigkeit diskutiert wurde (Definition 47 und davor) sind diese Eigenschaften von Massenverteilungen im *Energie-Impuls Tensor* kodiert und wir bekommen die Entsprechung der Energiedichte

$$T(v, v) \longleftrightarrow \rho, \quad (10)$$

für einen infinitesimalen Beobachter v .

Die Entsprechungen in (9) und (10) suggerieren das $R_{cad}{}^a v^c v^d \longrightarrow 4\pi T(v, v)$, was wiederum die Feldgleichung

$$\mathbf{Ric} = 4\pi T \quad (11)$$

für die Beschreibung der ART nahelegt.

Dies war auch die Gleichung, die Albert Einstein ursprünglich in einer Vorlesung in Göttingen postulierte, allerdings hat sie ein schwerwiegendes Problem. Da $\mathbf{div}(T) = 0$ gelten muss (lokale Energie und Impulserhaltung, (iii) oben) bedeutet das für Gleichung (11) dass auch $\mathbf{div}(\mathbf{Ric})$ verschwinden muss. Mit Satz 5 zur Divergenz von Ricci impliziert das weiterhin, dass $dS = 0$, und damit $S = \text{const}$ in der gesamten Raumzeit, was zu einer zu starken Einschränkung der Krümmung führt.

Satz 5 weist aber auch gleichzeitig auf die Lösung des Problems hin, nämlich den Ricci Tensor $\mathbf{Ric}$ durch den geeigneten divergenzfreien **Einsteinensor** G zu ersetzen, der im nächsten Kapitel eingeführt wird.

17 Formulierung der Einsteinschen Feldgleichung

Definition 48 (Einstein Tensor). *Sei $(\mathcal{M}, g)$ eine Raumzeit mit skalarer Krümmung S . Der **Einstein Tensor** G ist definiert als*

$$G := \mathbf{Ric} - \frac{1}{2}Sg.$$

Lemma 11 (Eigenschaften des Einsteintensors). *Der Einstein Tensor einer Raumzeit hat folgende Eigenschaften:*

- (i) G ist ein symmetrisches und divergenzfreies $(0, 2)$ -Tensorfeld.
- (ii) $\mathbf{Ric} = G - \frac{1}{2}\mathcal{C}(G)g$.

Beweis.

- (i) Die Symmetrie von G folgt direkt aus der Symmetrie von $\mathbf{Ric}$ und g . Für die Divergenz $\mathbf{div}(Sg) = \mathcal{C}_{13}(D(Sg))$ berechnet man

$$\begin{aligned} D(Sg)(X, Y, Z) &= D_Z(Sg)(X, Y) = D_Z(Sg(X, Y)) - S\langle D_Z X, Y \rangle - S\langle X, D_Z Y \rangle = \\ &= (D_Z S)\langle X, Y \rangle + S D_Z \langle X, Y \rangle - S\langle D_Z X, Y \rangle - S\langle X, D_Z Y \rangle. \end{aligned}$$

mit Eigenschaft $(\nabla 5)$ ergibt sich $D_Z \langle X, Y \rangle - \langle D_Z X, Y \rangle - \langle X, D_Z Y \rangle = 0$ und damit

$$D(Sg)(X, Y, Z) = (D_Z S)\langle X, Y \rangle = dS(Z)g(X, Y) = g \otimes dS(X, Y, Z).$$

In lokalen Koordinaten der Karte $(\xi, \mathcal{U})$ lässt sich diese Gleichung schreiben als

$$(D(Sg))_{ijk} = g_{ij}(dS)_k = g_{ij}\partial_k S,$$

und daher

$$\mathbf{div}(Sg)_j = \mathcal{C}_{13}(D(Sg))_j = \sum_{i,k} g^{ki} g_{ij} \frac{\partial S}{\partial x^k} = \frac{\partial S}{\partial x^j} = (dS)_j.$$

Man bekommt also $\mathbf{div}(Sg) = dS$ und mit Satz 5 ergibt sich

$$\mathbf{div}(G) = \mathbf{div}(\mathbf{Ric} - \frac{1}{2}Sg) = \frac{1}{2}(dS - dS) = 0.$$

- (ii) Da für eine 4-dimensionale Raumzeit $\mathcal{C}(g) = 4$ gilt, gibt die Kontraktion von G , $\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}(\mathbf{Ric}) - \frac{1}{2}S\mathcal{C}(g) = -S$. Mit der Definition von G gilt

$$\mathbf{Ric} = G + \frac{1}{2}Sg = G - \frac{1}{2}\mathcal{C}(G)g.$$

□

Mit dem so definierten *Einsteintensor* kann man nun die *Einsteingleichung*, die Grundgleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie, formulieren.

Definition 49 (Einstein'sche Feldgleichung). *Sei $(\mathcal{M}, g)$ eine Raumzeit mit Energie-Impuls Tensor T , dann gilt*

$$G = 8\pi T. \quad (12)$$

In physikalischen Einheiten (vergleiche oben, also Einsetzten der Lichtgeschwindigkeit c und Newton'schen Gravitationskonstante $\mathbf{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$) ergibt sich:

$$G = \frac{8\pi \mathbf{G}}{c^4} T.$$

Vermutlich wurde diese Gleichung interessanterweise zuerst von David Hilbert formuliert, der schneller als Albert Einstein das zuvor angemerkte Problem der Divergenz des Ricci Tensors erkannte und löste. Wer die Einsteingleichung als erster formulierte, der sogenannte „Einstein-Hilbert Prioritätsstreit“, ist noch immer aktuelles Thema der Wissenschaftshistorik, siehe eventuell [13].

Die gesamte Grundlage der Allgemeine Relativitätstheorie lässt sich damit zusammenfassen zu:

Eine Raumzeit ist eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ auf der eine zeitorientierbare Lorentz-Metrik g definiert ist. Die Krümmung von g hängt mit der Materieverteilung der Raumzeit über die Einstein'sche Feldgleichung (12) zusammen.

18 Lösungen der Einstein'schen Feldgleichung

In einem lokalen Koordinatensystem $(\xi, \mathcal{U})$ wird $\mathbf{Ric}$ durch die Metrik g ausgedrückt. $\mathbf{Ric}$ hängt dabei von Ableitungen von g bis zur zweiten Ordnung ab (siehe Lemma 8 und Proposition 3). Die Einstein'sche Feldgleichung ist also ein System nichtlinearer gekoppelter partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Metrikkomponenten g_{ij} .

Dabei ähnelt die Einstein'sche Feldgleichung den *Maxwellgleichungen*. Der Energie-Impuls Tensor T kann als „Quelle“ des *Gravitationsfeldes* gesehen werden, ähnlich wie der Strom j als Quelle des *Elektromagnetischen Feldes* gesehen wird. Für die Lösung der Maxwellgleichungen macht dieses „Quellenbild“ auch Sinn, in der ART allerdings nicht: solange man die Metrik g nicht kennt kann man T physikalisch nicht interpretieren. Man muss in der ART daher die Einsteingleichung für den Energie-Impuls Tensor T und die Metrik g *gleichzeitig* lösen. Diese Eigenschaft erschwert die Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen gegenüber den Maxwellgleichungen.

Das explizite analytische Lösen der Einsteingleichung ist schwierig und nur unter Annahme von Symmetrien möglich. Über die Jahrzehnte hinweg wurde eine Vielzahl sogenannter exakter Lösungen gefunden (siehe z.B. [11]). Obwohl in vielen Zusammenhängen sehr nützlich ergeben diese Lösungen kein adäquates Bild über „generische“ Lösungen der Einsteingleichung.

19 Erklärung physikalischer Phänomene

Mit Hilfe der Einstein'schen Feldgleichung lassen sich etliche bereits früher bekannte physikalische Phänomene beschreiben. Einige Beispiele dafür sind die Periheldrehung des Merkur (Korollar 14, Kapitel 13 in [4]), die Ablenkung von Lichtstrahlen durch die Sonne (Korollar 16, Kapitel 13 in [4]) und die Gravitationsrotverschiebung von Licht (Korollar 24, Kapitel 12 in [4]). Darüber hinaus macht die ART Voraussagen über „neue“ Phänomene, wie z.B. Schwarze Löcher (Proposition 30, Kapitel 13 in [4]).

Vor allem kosmologische Phänomene werden durch die ART beschrieben. So kann die Galaktische Rotverschiebung (Kapitel 12, Geodesics and Redshift auf S.353 in [4]) auf die Ausdehnung des Universums unter Erfüllung der Einstein'schen Feldgleichung zurückgeführt werden und führt damit auf die Vorstellung vom Urknall. Außerdem sagt die ART auch Gravitationswellen voraus, die am 14. September 2015 zum ersten mal gemessen wurden (siehe [12]).

Teil IV

Anhang

20 Notationen

$\mathcal{U}$ Umgebung von x

$(u^1, \dots, u^n)$ natürliche (Euklidische) Koordinaten

$(\xi, \mathcal{U})$ Karte oder Koordinatensystem $\xi = (x^1, \dots, x^n)$

$\mathcal{M}$ glatte, n -dimensionale Mannigfaltigkeit

$\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ Menge aller glatten Funktionen auf $\mathcal{M}$

$T_p(\mathcal{M})$ Tangentialraum von $\mathcal{M}$ in p

$T_p^*(\mathcal{M})$ Kotangentialraum von $\mathcal{M}$ in p

- $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ Menge aller glatten Vektorfelder auf $\mathcal{M}$
- $\mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$ Menge aller glatten Einsformen auf $\mathcal{M}$
- $\mathfrak{T}_s^r(\mathcal{M})$ Menge aller glatten Typ (r,s) -Tensorfelder auf $\mathcal{M}$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle = g(\cdot, \cdot)$ Skalarprodukt auf $\mathcal{M}$
- $g \in \mathfrak{T}_2^0$ Metrik auf einer glatten Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$
- $(\mathcal{M}, g)$ Semi Riemann Mannigfaltigkeit (SRMF) $\mathcal{M}$ mit der Metrik g
- r Index einer SRMF
- D Tensorfeldderivation
- $D_V A$ Kovariante Ableitung bezüglich V von Typ (r, s) -Tensorfeldern A
- DA Kovariantes Differential von Typ (r, s) -Tensorfeldern A
- $\uparrow_b^a$ und $\downarrow_b^a$ Index ziehen.
- Γ_{ij}^k Christoffel Symbole $\in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$
- $\mathcal{C}_a^b$ Kontraktion eines Tensors bezüglich des a -ten unteren und b -ten oberen Index
- $\alpha(t)$ Kurve mit Parameter t in einer SRMF
- $(\cdot)'$ induzierte kovariante Ableitung entlang einer Kurve $\alpha(t)$
- R Riemann Krümmungstensor von $(\mathcal{M}, g)$
- Ric** Ricci Krümmungstensor von $(\mathcal{M}, g)$
- S Skalare Krümmung von $(\mathcal{M}, g)$
- T Energie-Impuls Tensor
- G Einstein Tensor

Literatur

- [1] Albert Einstein. *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften ,Berlin , Seite 778-786, 1915.
- [2] Albert Einstein. *Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag)*. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften ,Berlin , Seite 799-801, 1915.

- [3] Albert Einstein. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Annalen der Physik, Band 17, Seite 891-921, 1905.
- [4] Barret O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press, San Diego California, 1983.
- [5] Klaus Jänich. *Vektoranalysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage 1992/1993.
- [6] Christian Bär. *Elementare Differentialgeometrie*. De Gruyter, Berlin/New York, 2. Auflage 2010.
- [7] Thorsten Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 6. Auflage, 2012.
- [8] Michael Kunzinger und Roland Steinbauer. *Riemannian Geometry*. Vorlesungsskript Wintersemester 2016, Version 0.98, 6.3.2017.
- [9] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.
- [10] Franz Embacher. *Elemente der theoretischen Physik - Band 1: Klassische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie - Eine Einführung für das Lehramts- und Bachelorstudium*. Vieweg+Teubner Verlag Springer Fachmedien, Wiesbaden GmbH, 2010.
- [11] J. B. Griffiths and J. Podolský. *Exact space-times in Einstein's general relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [12] Abbott et al. *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*. Physical Review Letters **116** 061102, 2016.
- [13] *Literatur zum Einstein-Hilbert Prioritätsstreit im Netz*.
<http://www.s-edition.de/LinksEinsteinHilbertdispute.htm>, 17.11.2017.