



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Die Geschichte der modernen Mathematik mithilfe von
islamischen und christlichen Wissenschaftlern“

verfasst von / submitted by

Nurunnisa ERKMEN

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 350

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium
UF Mathematik UF Italienisch

Betreut von / Supervisor:

Mag. Dr. Andreas Ulovec

Inhalt

1	Einleitung (Vorwort)	2
1.1	Islam und Wissenschaft.....	4
2	Muslimische Gelehrte	7
2.1	Einführung	7
2.2	Al-Khwarizmi	8
2.3	Al-Kushyar b. Labban	17
2.4	Al-Buzgani	19
2.5	Al- Karagi.....	30
2.6	Ibn al-Mili	32
3	Arithmetik	35
3.1	Addition	37
3.2	Subtraktion	38
3.3	Multiplikation.....	40
3.4	Division.....	42
4	Die Dezimalbrüche.....	45
5	Sexagesimalarithmetik.....	51
5.1	Sexagesimale Addition und Subtraktion	57
5.2	Sexagesimale Multiplikation	58
5.3	Sexagesimale Division	64
6	Quadratwurzeln.....	66
7	Der wissenschaftliche Austausch zwischen dem Orient und dem Okzident	70
8	Conclusio	83
9	Literaturverzeichnis	84

1 Einleitung (Vorwort)

Zu Beginn möchte ich zu meiner Biografie ein paar Worte sagen, damit man verstehen kann, wieso ich überhaupt dieses Thema für meine Diplomarbeit gewählt habe. Ich bin eine gebürtige Wienerin mit türkischen Wurzeln. Meine Eltern, Ali Erkmen und Ehlinaz Erkmen, sind im Jahre 1985 nach Österreich gezogen, nicht weil sie in der Türkei keine Arbeit hatten, sondern weil hier in Österreich Religionslehrer in Schulen bzw. Imame in den Moscheen, gesucht wurden. Sie waren also keine Wirtschaftsflüchtlinge, sondern wurden eingeladen, hier zu arbeiten. Ich bin in Wien geboren und habe hier sowohl einen öffentlichen Kindergarten als auch eine öffentliche Volksschule absolviert. 2005 habe ich meine Schulausbildung in der AHS Ettenreichgasse abgeschlossen.

Aufgewachsen bin ich mit einer Vielzahl von Kulturen, da meine MitschülerInnen aus „aller Herren Länder“ stammten: so habe ich kroatische, chinesische, türkische und natürlich auch österreichische Freundinnen und Freunde.

Dieses „Multikulti“ war nie für mich ein Problem, - im Gegenteil, ich empfand andere Kulturkreise und Sprachen immer als große Bereicherung. Meine eigene Muttersprache, türkisch, genauso wie mein Kopftuch waren umgekehrt auch nie ein Problem für mein Umfeld. Vor allem die Mehrsprachigkeit hat mich sehr geprägt: zu Hause wuchs ich mit türkisch auf, im Kindergarten lernte ich Deutsch, im Gymnasium kam Englisch, Latein und in der Oberstufe auch noch Italienisch dazu. So habe ich gelernt, die Welt „mit verschiedenen Augen zu betrachten“. Für das Lehramtsstudium Mathematik und Italienisch entschied ich mich, da das Lösen und Erklären

von Problemen war immer schon „meine Sache“ war, es macht mir Freude, meine Erfahrungen und meine Begeisterung weiterzugeben und andere in Lernprozessen zu unterstützen.

Ich habe allerdings in den letzten Jahren entdeckt, dass sich in der österreichischen Gesellschaft ein sehr falsches Bild über meine Religion, den Islam und über Muslime, in den Köpfen der Menschen eingeprägt hat, das von den Medien oft sehr unreflektiert übernommen wird.

Daher habe ich mich entschlossen im Rahmen meiner Diplomarbeit über die islamische Mathematiker zu schreiben: genauer gesagt, darüber, was sie für unsere heutige moderne Gesellschaft und zu unserer heutigen Wissenschaft beigetragen haben.

Ich möchte mit dieser Diplomarbeit ein wenig dazu beitragen, dass Islam in erster Linie keine Religion des Terrorismus ist, sondern, eine Religion der Wissenschaft. Der Prophet Mohammed hat die Menschen stets dazu aufgefordert zu lesen, zu schreiben, zu forschen.

Das vieles, was in der modernen Mathematik selbstverständlich betrachtet wird, nicht nur der griechischen sondern auch muslimischen Mathematikern zu verdanken ist, ist in unserem Denken nicht vorhanden.

Nur durch das gemeinsame solidarische Zusammenspiel von Christentum und Islam konnten die moderne Mathematik entstehen.

„Algebra“ ist zum Beispiel ein arabisches Wort, wir verwenden auch ganz selbstverständlich die arabischen Ziffern. Was aber für mich sehr bedauernswert ist, dass es in fast keinem der Lehrbücher diese Tatsache erwähnt wird. Ich wünsche mir, dass es sich im Laufe der Zeit dieses ändern wird.

Ganz besonders herzlich möchte ich mich bei meinem Professor Andreas Ulovec für seine Offenheit und Aufgeschlossenheit bedanken, der mir nicht nur die Möglichkeit gegeben hat, dieses Thema zu bearbeiten sondern mich auch rege unterstützt hat.

Ein großes Dankeschön an meine Eltern, die in allen Belangen immer für mich da sind.

1.1 Islam und Wissenschaft

Der Vers „Iqra“ („Lies“) [Koran 610 n. Chr] ist der erstoffenbarte Vers im heiligen Engel Gabriel. Als der Prophet Mohammed (Friede sei mit ihm) mit 40 Jahren zur Höhle Hira in Mekka hinaufkletterte um sich auszuruhen wurde ihm dieser Vers ge-flüstert. Obwohl er Analphabet war, konnte er die Worte Gabriels wiedergeben. „Iqra“ wird von den islamischen Gelehrten unterschiedlich interpretiert. Man kann es aus zweierlei Hinsicht betrachten: Der erste Aspekt ist das Lesen des Koran auf arabisch, wobei die Muslime daran glauben, dass sie im Jenseits dafür reichlich belohnt werden. Andererseits bedeutet „Iqra“ aber auch das Lesen der Natur, des ganzen Universums, also inklusive der Mathematik.

Die Anfänge der wissenschaftlichen Aktivitäten der islamischen Kultur finden sich schon in der Umayyadenzeit, in den 30er-Jahren des 8. Jahrhunderts.

In Sind (heute Pakistan) und in Afghanistan wurden astronomische Abhandlungen in arabischer Sprache verfasst, die indische und persische Quellen hatten. Zu der Zeit des abbasidischen Kalifen al-Mansur war ein Inder zu einer Delegation aus Sind zu gehörig, der sich in der Astronomie sehr gut auskannte und al-Fazari half, einen in Sanskrit abgefassten astronomischen Text zu übersetzen. Das daraus resultierende Werk, das Zij al-Sind-hind, umfasst Elemente zahlreicher astronomischer Überlieferungen, inklusive mathematischer Methoden, die den Sinus anwandten.

Es wurde vom Kalif al-Mansur befohlen Bagdad als seine neue Hauptstadt erbauen zu lassen. Seine Astrologen hielten das Datum 30. Juli 762 für günstig, unter diesen Astrologen war auch der oben genannte al-Fazari dabei. Tatsächlich war das auch der Fall, Bagdad blühte in kommerzieller und geistiger Hinsicht auf. Während der Herrschaftszeit Harun al-Rashids (786-809) wurde eine Bibliothek erbaut, in der man sowohl Originale als auch Übersetzungen wissenschaftlicher Werke in Sanskrit, Persisch und Griechisch zu finden war, deren Inhalte von den islamischen Wissenschaftlern angeregt und angeleitet war. Noch eine sehr große Unterstützung zu wissenschaftlichen Tätigkeiten kam vom Kalifen al-Ma'mun in seiner Regierungszeit 813-833, welche die antiken Wissenschaften der islamischen Kultur näher brachte. Weiters förderte er einen der wichtigsten muslimischen Mathematiker, al-Khwarizmi, der sich mit Algebra beschäftigte und eine Landvermessung durchführte, um die Länge eines Grads auf dem Meridian zu bestimmen, somit den Umfang der Erde zu berechnen. Zusätzlich förderte er auch die Herstellung der neuen Karte der bekannten Welt. Die Übersetzertätigkeiten bei der islamischen Übernahme der antiken Wissenschaft wurden durch wichtige und reiche Familien wie die Banu Musa und die Familie der Barmakiden gefördert. Die Übersetzer wurden sogar in fremde Länder geschickt um Abschriften von bedeutenden Büchern zu produzieren:

„Ein sehr gutes Beispiel für die aufwendige Suche nach fremden Büchern sind die Schwierigkeiten, die einer der Übersetzer des 9. Jahrhunderts, Hunayn ibn Ishaq, hatte als er eine Abschrift eines Buches des griechischen Medizinschriftstellers namens Galen finden wollte....Hunayn erzählt zunächst, dass sein Kollege Gabriel große Schwierigkeiten hatte, das Buch zu finden, und dann, gemäß der Übersetzung von Rosenthal, ‘‘suchte ich selbst mit großem Eifer überall in Mesopotamien, in Syrien, in Palästina und in Ägypten, bis ich nach Alexandria kam. Ich fand nichts, nur in Damaskus fand ich die Hälfte (von Galens Buch). Was ich aber gefunden hatte, waren weder aufeinander folgende Kapitel noch waren sie vollständig. Gabriel fand ebenfalls einige Abschnitte des Buches, die nicht die gleichen waren, die ich gefunden hatte‘‘. (Vier Jahre später wiederholte sich diese Suche nach fremdem Wissen. Aber dieses Mal waren es die Europäer, die in islamischen Ländern unterwegs waren, um wertvolle, wissenschaftliche Handschriften aufzuspüren). „ [Berggren 2011]

Somit fasst man einen Entschluss, dass sowohl die islamische Wissenschaft als auch die europäische sich gegenseitig beeinflusst haben, die Suggestion war unumstritten.

Wie schon oben erwähnt gab es in Bagdad sehr wohlhabende BürgerInnen, die sich für wissenschaftliche Aktivitäten eingesetzt haben. Dafür ein sehr gutes Beispiel die drei Brüder genannt Banu Musa (die Söhne des Moses). Diese Gelehrten des 9. Jahrhunderts sind nicht nur durch die Welt gereist um Bücher zu kaufen und ihre eigenen Forschungen in der Mathematik durchzuführen, sondern sie waren auch die Unterstützer von Thabit b. Qurra aus Harran (das heutige Diyarbakir in der Türkei) im nördlichen Mesopotamien. Thabit lebte 836-901 und war bekannt für seine Sprachbegabung, lieferte die besten Übersetzungen aus dem Griechischen ins Arabische.

Als die Banu Musa auf einer Reise waren begegneten sie Thabits zufällig als Geldwechsler, wobei sie bemerkt haben, dass er ein Sprachtalent hat, nahmen sie ihn mit nach Bagdad, damit er mit ihnen an der Forschung teilnimmt. Nicht nur sprachlich, sondern auch im Bereich Mathematik brachte er wichtige Erkenntnisse hervor.

2 Muslimische Gelehrte

2.1 Einführung

Während im 9. Jahrhundert die Menschen die sich für Mathematiker hielten umgebracht worden waren, schaute die Situation unter Muslimen ganz anders aus. Ein sehr gutes Beispiel für die Förderung der Wissenschaft in der islamischen Geografie, ist eine Bibliothek namens Dar al-Hikma, welche im Jahre 1005 der ägyptische Herrscher gründete. Bezahlt wurden nicht nur die Gelehrten, welche auch durch die finanzielle Unterstützung ihren Studien nachgehen konnten, sondern auch die Bibliothekare genannt al-Hakim, die im Lesesaal angestellt waren. Daher kann man sagen, dass die Blütezeit der islamischen Kultur in der Zeit von 750-1450 war.

„Daher brachte die islamische Kultur in der Zeit von ungefähr 750-1450 eine Reihe von Mathematikern hervor, zu deren Verdiensten die Vervollständigung der Arithmetik des Dezimalsystems einschließlich der Dezimalbrüche gehörte, die Erfindung der Algebra, wichtige Entdeckungen in der ebenen und sphärischen Trigonometrie sowie eine Systematisierung dieser Wissenschaften und die Erfindung raffinierter Verfahren zur Bestimmung numerischer Lösungen von Gleichungen.“ [Berggren 2011]

Einige dieser Mathematiker, die sehr viel zur Wissenschaft beitrugen hießen Mohammed b. Musa al-Khwarizmi, wie schon vorher erwähnt, der zweite Abu al-Rayhan al-Biruni, der ziemlich lang lebte und eine Brücke vom 10. ins 11. Jahrhundert baute. Kurz bevor al-Biruni starb kam der dritte große Gelehrter auf die Welt namens Umar al-Khayyami und der vierte, den man „die Perle des Ruhmes seines Zeitalters“ nannte, ist Jamshid al-Kashi, der in Samarkand einen großen Beitrag zu mathematischen Berechnungen leistete.

2.2 Al-Khwarizmi

Der zentralasiatische Gelehrte Mohammed b. Musa al Khwarizmi kam vermutlich in Usbekistan zur Welt, da dieser der alte Name für die Region um das heutige Urgentsch nahe dem Flussdelta des Amu Dar'ya am Aralsee in Usbekistan ist. [vgl. Wußing 2008].

In seiner Jugend könnte Al-Hwarizmi Anhänger der Religion des Zarathustra gewesen sein. Wenn man seine Werke liest, kann man feststellen, dass er später zum Islam konvertiert ist, da er in seiner Schrift Allah lobpreist, - nach muslimischer Sitte.

Er spezialisierte sich in den vier Gebieten: Algebra, Arithmetik, Geografie und Astronomie. In der Arithmetik und der Astronomie führte er indische Methoden in die islamische Welt ein [vgl. Berggren 2011]. Sein sehr bedeutendes Werk war al Kitab al muhtasar fi hisab al- jabr wa-l-muqabala (übersetzt in etwa: Das Buch über die Rechenverfahren, das Ergänzen und Ausgleichen), was auch später für die europäische Wissenschaft nützlich war. Wichtig ist auch zu erwähnen, dass dieses Buch der Ausgangspunkt des Fachgebiets Algebra für die islamischen Mathematiker war.

Der Name der Algebra wurde von den westlichen Wissenschaftlern vom arabischen al-jabr hergeleitet [vgl. Berggren 2011]. Daraus kann man schließen, dass der Westen durchaus von der islamischen Wissenschaft beeinflusst wurde.

Das Buch wurde auf Wunsch des Kalifen al-Mamun niedergeschrieben, um die Probleme des täglichen Lebens zu lösen, wie zum Beispiel das komplizierte islamische Erbrecht zu berechnen.

„In diesem Buch sind zahlreiche Einflüsse erkennbar, darunter babylonische und indische Methoden, die zur Lösung von- wie wir heute sagen würden-quadratischen Gleichungen führen.“ [Berggren 2011]

Nehmen wir als Beispiel (in heutiger Formelschreibweise) die quadratische Gleichung:

$$2x^2 + 100 - 20x = 58$$

Der erste Schritt zur Lösung der Gleichung hat das Ziel, negative Terme zu beseitigen. Also werden $20x$ „ergänzt“ oder „aufgefüllt“. Man erhält:

$$2x^2 + 100 - 20x + 20x = 58 + 20x$$

Noch einmal wird „aufgefüllt“:

$$2x^2 + 100 - 58 = 58 - 58 + 20x$$

Dann wird „gegenübergestellt“:

$$2x^2 + 42 = 20x$$

Das führt auf die Normalform:

$$x^2 + 21 = 10x$$

Al- Khwarizmi stellt (verbal formuliert) sechs Typen von quadratischen Gleichungen auf:

$$(1) \quad ax^2 = bx$$

$$(2) \quad ax^2 = c$$

$$(3) \quad bx = c$$

$$(4) \quad ax^2 + bx = c$$

$$(5) \quad ax^2 + c = bx$$

$$(6) \quad bx + c = ax^2$$

Jeweils mit positiven Koeffizienten. Beim Typ (1) wird die Lösung Null nicht berücksichtigt. Nur positive Lösungen werden zugelassen. Anders als bei den Indern kann der Gleichungstyp $ax^2 + bx + c = 0$ nicht behandelt werden, weil diese Gleichung keine positiven Wurzel hat, wenn die Koeffizienten positiv sind. [Wußing 2008]

Für den Gleichungstyp (4) in der reduzierten Form $x^2 + px = q$ gibt Khwarizmi (in der heutiger Formelschreibweise):

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

an. [vgl. Alten et al. 2003, S.167]

Nehmen wir Typ (5) das Zahlenbeispiel $x^2 + 21 = 10x$, natürlich verbal formuliert.

Dazu gibt al-Hwarizmi folgende Rechenregel, die geometrisch bewiesen wird

[vgl. Wußing 2008]:

„Halbiere die Wurzeln; das ergibt fünf; multipliziere dies mit sich selbst, und du erhältst fünfundzwanzig; ziehe davon die einundzwanzig ab, die dem Quadrat hinzugefügt sind; es verbleiben vier; ziehe hieraus die Wurzel – das ergibt zwei, und ziehe dies von der Hälfte der Wurzel ab, d.h. von fünf, es verbleiben drei; dies ist die Wurzel des Quadrats, das du suchst, und das Quadrat ist neun.“

(Zitiert bei [Juschkevitsch 1964, S.207])

Zwei wichtige Punkte sind zu erwähnen: Die Gleichungen werden wie schon oben erwähnt verbal formuliert und nicht in Formelschreibweise geschrieben. Damit wird für das Quadrat der Ausdruck „Vermögen“, für die Unbekannte „Wurzel“ verwendet. So würde der Typ (4) heißen:

Was das Vermögen und die Wurzel anlangt, ist gleich einer Zahl.

Erwähnenswert ist, dass al-Khwarizmi auf mesopotamische Quellen zurückgriff, höchstwahrscheinlich auch auf Schriften von Diophant und übernahm von den Griechen die Forderung nach Beweisen. Jedoch muss man dazu sagen, dass die Beweise nicht rechnerisch, sondern geometrisch durchgeführt wurden.

Die muslimischen Mathematiker begannen im 15. Jahrhundert Symbole zu verwenden, ein Beispiel dafür al-Qalasadi (c.a. 1400-1486). Er stammt ursprünglich aus Spanien und starb in Tunesien. In seinem Werk „Entschleierung der Wissenschaft der Arithmetik“ schrieb er die „Symbolik“: Um die Quadratwurzel zu bezeichnen, setzte er den Anfangsbuchstaben von gidr (Wurzel) über die Zahl. Bei quadratischen Gliedern setzte er die Anfangsbuchstaben von say (Ding) bzw. mal (Vermögen) über die Koeffizienten. [vgl. Wußling 2008]

In Europa begann man erst in der Renaissance die Gleichungen und

die Lösungswege unter Verwendung von Symbolen zu formulieren, berichtete Al-Khwarizmi.

Das selbsterfasste Buch „Algebra“ von Khwarizmi ist in der Bodleian Library in Oxford zu finden. Der Text wurde gemeinsam mit einer Übersetzung ins Englische im Jahre 1831 herausgegeben. Die lateinische Versionen davon stammen vom Engländer Robert von Chester oder vom Italiener Gerhard von Cremona (c.a. 1114-1187). Niedergeschrieben wurden sie in Toledo. Wie schon vorher erwähnt, stammt das mathematische Fachwort „Algorithmus“ vom Namen Al-Khwarizmi.

Nicht nur indische und babylonische, auch griechische Spuren sind erkennbar: wie Probleme nach unterschiedlichen Typen klassifiziert und geometrische Nachweise für die Gültigkeit der verwendeten Methoden verwendet werden [vgl. Berggren 2011].

Ein anderes wichtiges Werk von Khwarizmi war 'Das Buch der Addition und Subtraktion' gemäß der indischen Rechnung. In diesem arithmetischen Werk führte er das äußerst nützliche dezimale Stellenwertsystem ein, das die Inder im 6. Jahrhundert n. Chr. entwickelt hatten, -zusammen mit den 10 Ziffern, die dieses System so bequem machen, das wir sie heute noch immer benutzen [vgl. Berggren 2011].

Dieses war das erste Arithmetikbuch, das ins lateinische übersetzt worden war.

Wichtig ist auch zu erwähnen, dass man aus der Herkunft des Wortes Algorithmus den Einfluss auf die westliche Mathematik wieder nachvollziehen kann. Da der Name durch die Verballhornung des Namens al- Khwarizmi zu der lateinischen Form algorismi entstand. Heute noch wird das Wort Algorithmus ständig in den

Computerwissenschaften und in der Mathematik benutzt, um irgendwelche Verfahren zu bezeichnen, nach denen etwas berechnet wird.

Al- Khwarizmis Buch war auch sehr bedeutsam für die islamische Mathematik damals, da er mit seinem Werk den islamischen Mathematikern ein Werkzeug zur Verfügung stellte, das vom frühen 9. Jahrhundert an immer wieder – wenn auch nicht überall- verwendet wurde. Sehr nützlich war die dezimale Arithmetik auch für ' das Buch der Kapitel' verfasst vom Ahmad al-Uqlidisi um 950 n. Chr. bis zu Jamshid al-Kashis enzyklopädischer Abhandlung 'Der Schlüssel des Rechnens'.

Zum Beispiel löste Ahmad b. Ibrahim al Uqlidisi auch einige Probleme in seinem Buch über indische Arithmetik durch die Verwendung von Dezimalbrüchen. Nach kurzer Zeit, weniger als einem Jahrhundert führte Al Khwarizmis Werk zu Erfindung

der Dezimalbrüche, was von islamischen Mathematikern verwendet wurde. Ein Beispiel dafür war, im 12. Jahrhundert, al-Samawal b. Yahya a-Maghribi verwendete dieses zur Wurzelberechnung. Weiters war es auch nützlich für al Kashi im 15. Jahrhundert um das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Radius mit 6,283185307195865 darzustellen – ein bis zur 16. Dezimalstelle korrektes Ergebnis. [vgl. Berggren 2011].

Zum Schluss ist es zusätzlich erwähnenswert, dass al- Khwarizmi im Bereich Astronomie auch aktiv mitmachte. Er war ein Mitglied einer Gruppe von Astronomen, die von al-Mamun angestellt worden waren, um die Länge eines Grades entlang des Meridians zu berechnen. „Seit der Zeit von Aristoteles(der im mittleren Drittel des 4. Jahrhunderts v.Chr. wirkte), wussten die Menschen, dass die Erde kugelförmig ist und daher, dass die Multiplikation eines genauen Wertes für die Länge eines Grades mit 360 zu einer guten Schätzung der Größe der Erde führen würde. Im Jahrhundert nach Aristoteles hatte Eratosthenes von Alexandria, der erste Wissenschaftler, der zum Bibliothekar der berühmten Bibliothek dieser Stadt ernannt worden war, diese Idee mit seinen Kenntnissen der mathematischen Astronomie verknüpft, um auf einen Betrag von 250.000 Stadien für Erdumfang zu kommen. Dies wurde von einem späteren, unbekannten Autor auf 180.000 Stadien reduziert, ein viel zu kleiner Wert, der jedoch von dem Astronomen Klaudios Ptolemaios (Ptolemäus) in seine Geografie übernommen wurde.“ [Berggren 2011]

Der Kalif al-Mamun wusste damals nicht, dass das hellenistische Stadium etwa 600 Fuß beträgt. „Während al-Biruni in seiner Bestimmung der Koordinaten von Städten angibt, erfuhr al-Mamun beim Lesen von griechischen Büchern, dass ein Grad eines

Meridians 500 Stadien entspräche. Jedoch kam er drauf, dass den Übersetzern die tatsächliche Länge (eines Stadiums) nicht so sehr bekannt war, damit er in der Lage gewesen wären, sie mit ortsüblichen Maßeinheiten zu vergleichen.“ [vgl. Berggren 2011]

Somit gab al-Mamun den Auftrag, dass eine neue Vermessung auf der großen Fläche von Sinjar, circa 70 Meilen westlich von Mosul, durchgeführt werden sollte. Es sollten zwei Gruppen von Landvermessern teilnehmen. Von einem Ort aus gehend, ging die eine Gruppe nach Norden und die andere nach Süden. Al-Biruni selbst berichtete wie sie dieses gemacht haben:

„Jede Gruppe beobachtete die Mittagshöhe der Sonne, bis sie feststellten, dass der Unterschied in der Mittagshöhe auf 1 Grad angewachsen war – abgesehen von den

Änderungen, die sich aus der Variation der Deklination ergaben. Während sie ihren Weg fortsetzten, maßen sie die Entfernungen, die sie zurückgelegt hatten und setzten Pfeile an verschiedenen Orten ihres Weges (um ihre Strecken zu markieren).

Während ihres Rückwegs überprüften sie in einer zweiten Messung ihre früheren Schätzungen der Länge des zurückgelegten Weges, bis sich beide Gruppen wieder an dem Ort einfanden, an dem sie gemeinsam gestartet waren. Sie fanden heraus, dass ein Grad eines Erdmeridians 56 Meilen entsprach. Er (Habash) behauptete, dass er gehört hat, wie Khalid diese Zahl dem Richter Yahya b. Akhtam diktierete. So hat er von dieser Leistung von Khalid selbst gehört.“ [Berggren 2011]

Daraus hinaus erzielten die Gruppen ein weiteres Ergebnis, die mit dieser Art Vermessung erzielt wurde, nämlich $56 \frac{2}{3}$ Meilen/ Grad.

Al-Biruni verwendete später diesen Wert auch für seine Berechnungen.

Nicht nur in der Mathematik und Astronomie bewirkte der berühmte Gelehrter Khwarizmi, sondern er beteiligte sich auch an einem Projekt, was die Herstellung einer Karte der bekannten Welt ermöglichen sollte. Seine Aufgabe dabei war drei Probleme zu lösen bei denen Theorie und Praxis miteinander verbunden sind. Das erste Problem war hauptsächlich theoretischer Natur, man musste die Methoden von Ptolemaios beherrschen, die er in der Mitte des 2. Jahrhunderts n. Chr. bezüglich der Abbildung eines Teils der Kugeloberfläche (der Erde) in eine Ebene erläuterte. Zweitens sollte der Gelehrte mit seinem Wissen astronomische Beobachtungen und Berechnungen nutzen können, um die geografische Länge und Breite wichtiger Orte auf der Erdoberfläche zu bestimmen. Wie schon oben erwähnt, sind die Probleme, die hier auftraten sowohl praktischer als auch theoretischer Natur. Die dritte Aufgabe war die Beobachtungen durch Berichte von Reisenden über Reisezeiten von einem

Ort zum nächsten zu ergänzen. Einige der wichtigsten Leistungen, die Al-Khwarizmi in seinem geografischen Werk 'Das Bild der Erde' hervorbrachte, war erstens die Korrektur des von Ptolemäus zu groß angegebenen Werts für die Länge des Mittelmeers und seine deutlich besseren Beschreibungen der Geografie Asiens und Afrikas. Der Kalif war sehr zufrieden mit dieser Karte, da er auf einen Blick Ausdehnung und Form seines Reiches, das er beherrschte, sehen konnte. Wichtiger war natürlich, dass er allen die die Karte sahen, die Größe seines Machtbereiches vor Augen führen. Kurz zusammengefasst, hat die islamische Gesellschaft, erstens die Schreibweise für Zahlen, die zu einfachen Rechenregeln führte – sogar mit Brüchen-, zweitens die Wissenschaft der Algebra, die sehr hilfreich war Erbschaftsprobleme zu lösen und drittens, eine Karte, welche die Verteilung der Städte, Meere und Inseln auf der Erdoberfläche zeigte, dem großen Gelehrten Al- Khwarizmi zu verdanken.

In seiner Arithmetik lehrt al-Hwarizmi die Zahlendarstellung nach indischer Weise im dezimalen Positionssystem und die Grundrechenarten in dieser Zahlenschreibweise. Behandelt werden das Rechnen mit ganzen Zahlen: Addition, Subtraktion, Halbierung, Verdoppelung, Multiplikation, Neunerprobe; sodann die Division: Sexigesimalbrüche und gewöhnliche Brüche und Grundrechenarten mit ihnen; schließlich die Bestimmung der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen und Brüchen.

Im weiteren Verlauf hat sich die arabische Ziffernschreibweise differenziert. Aus den indischen Ziffern entwickelten sich die ostarabischen und die westarabischen oder Gubar-Ziffern. Während heutzutage die ostarabischen Ziffern bei den die arabische Schrift benutzenden Völkern bis hin zum äußersten Westen der arabisch-islamischen Welt in Marokko verwendet und dort westarabischen Ziffern im 15. Und 16. Jahrhundert die bei und gebräuchlichen „arabischen“ Ziffern entwickelt (vgl. [Kunitzsch 1997]).

2.3 Al-Kushyar b. Labban

Wie wir schon wissen, ist al-Khwarizmi's Buch über die Arithmetik nicht erhalten. Jedoch verfasste, ein Mann der südlich des kaspischen Meeres geboren wurde namens Kushyar b. Labban, ungefähr 150 Jahre nach dem Al-Khwarizmi sein Buch über die Arithmetik geschrieben hatte, ein anderes Werk über das indische Zahlensystem, das noch im arabischen Originaltext heute noch existiert. Über sein Leben weiß man leider nur wenig, obwohl er ein Astronom war. Trotzdem ist es eindeutig, dass er mit seinen Werken einen wesentlichen Beitrag zur Wissenschaft leistete.

Einer seiner Bücher hatte den Titel „Grundlagen des indischen Rechnens“ und wurde eines der wichtigsten Lehrwerke der islamischen Welt. Kushyar schrieb in seiner Abhandlung eine zweiteilige Einführung in die Arithmetik. Im ersten Teil gibt es eine kurze Einleitung, neun Abschnitte zur dezimalen Arithmetik und fängt mit „Über das Verständnis der Formen der neun Ziffern“ an. In diesem Teil werden die neun Ziffern in der Form, wie sie heute im Osten auch geschrieben werden, angegeben:

١٢٣٤٥٦٧٨٩

Danach erklärte Kushyar das Stellenwertsystem und führte die Null als Zeichen ein, das an einer Stelle stehen soll, „wo es keine Zahl gibt“. Das Wort Null bedeutet auf arabisch „sifr“, was genauso heißt wie „leer“. Wichtig zu erwähnen, dass dieses der Ursprung unseres Wortes „Ziffer“ ist, das über das Französische und Spanisch zu uns ankam. Sogar das Wort „zero“ stammt ursprünglich aus dem Italienischen. Das deutsche Wort „Null“ leitet sich vom Italienischen bzw. Lateinischen „nulla“ (nichts)

bzw. nulla figura (kein Zeichen) her. [vgl. Luckey 1951]

Die weiteren Kapiteln im Buch heißen: „Über die Addition“, „Über die Subtraktion“- mit einem Halbierungsverfahren in einem eigenen Unterabschnitt-, „Über die Multiplikation“, „Über die Ergebnisse der Multiplikation“, „Über die Division“, „Über die Ergebnisse der Division“, „Über die Quadratwurzel“ und „Über die Neunerprobe“.

Der zweite Teil der 16 Abschnitte umfasst, enthält eine Erläuterung der Arithmetik eines Stellenwertsystems zur Basis 60. Im letzten Abschnitt des Buches findet man

die Beschreibung vom: Ziehen der Kubikwurzel einer Zahl im Dezimalsystem. Das System mit Basis 60 genannt Sexagesimalsystem, war für die Astronomen sehr wichtig, da in diesem System Winkel gemessen und trigonometrische Funktionen tabelliert wurden. Natürlich wurde das Rechnen mit einem einheitlichen Umgang mit ganzen Zahlen und Brüchen viel einfacher. Zu Bedenken ist auch, dass Kushyar das Dezimalsystem, die Arithmetik nicht den Menschen erklärt, die mit Stift und Papier rechnen, sondern mit einem Stock (oder einem Finger) auf einem flachen, mit feinem Sand bedeckten Tablett (genannt „Staubtafel“). Der Grund dafür war, dass sich Staubtafeln viel einfacher transportieren lassen als große. Kushyar schrieb in seinem Buch alle Zahlen als Wörter. Er verwendet die indo-arabischen Ziffern nur, wenn er zeigen will was gerade auf der Staubtafel geschrieben steht. Vermutlich möchte er, dass Erklärungen als Text verstanden werden und dementsprechend die Zahlen, wie jeder andere Text auch, als Wörter geschrieben wurden. Er schrieb Beispiele auf die Staubtafeln um diese zu veranschaulichen zum Beispiel eine Figur in einem geometrischen Beweis. Diese wurden hinzugefügt, um zu zeigen, was ein Rechner gerade auf der Staubtafel sehen würde.

2.4 Al-Buzgani

In der 2. Hälfte des 10. Jahrhunderts verfasste Abu l-Wafa al-Buzgani sein Werk namens *K. fima yahtag ilahi l-kuttab wa l-ummal wa-gairuhum min ilm al-hisab*, schon im Titel schrieb er seine Bestimmung. Hauptsächlich interessiert er sich für angewandte Mathematik und verbreitet sie auch gleichzeitig wie man es auch in seinen weiteren Schriften wie: *Kitab fima yahtag ilahi as-sani mi a'mal al-handasiya*, *al-Madhal al-hifzi ila sina'at al-aritmatiqi* und *ar-Risala as-samsiya fi l-fawa'id al-hisabiya* (=RS) sieht. Die Risala besteht aus einer Einführung (*muqaddima*) mit

Haditen zur Berechtigung der Beschäftigung mit dem hisab und aus fünf Hauptkapiteln (maqalat). Das erste beinhaltet die Darstellung der arithmetischen Grundoperationen: Multiplikation (darb), Division (qisma) und Proportion (nisba), sowie die Anwendung sexagesimaler Umrechnungen bei der Bestimmung von Dirham und Dinar-Werten. Im zweiten Kapitel beschreibt er das Rechnen mit Wurzeln (gudur), welches auch über die Grundlagen der mu'amalat und der Verkaufsbestimmungen (fi usul al-mu'amalat wa-qawanin al-buyuat) behandelt. Eingeleitet wird es mit einigen Listen von Maßeinheiten, wie zum Beispiel 1Dinar= 6 daniq = 20 qirat =24 tassug = 240 aruzza und 1 kurr = 30 kara = 60 qafiz = 480 makkuk = 600 asir =7680 r hinta = 6000 r sar ir und deren Verhältnis zueinander. „(dieses selten, in Rechenbüchern nirgend wo erwähnte irakische Hohlmaß entspricht; Nach al-Umari war 1 kara bei Weizen = 240r= 97,5 kg)“ [Rebstock 1992]

Al-Buzgani schreibt in seiner Einleitung zum dritten Buch des „Rechenleitfadens für Sekretäre und Beamte viele seiner Überlegungen zusammen, nämlich:

„Wir beschreiten in diesem Buch denselben Weg, wie in den beiden vorausgegangenen: kurz und bündig zu bleiben, das Einfache dem Schwierigen voranzuschicken und das Entferntliegende dem Näherliegenden hintanzustellen (...) Den Anfang bildet die Erklärung der Begriffe, der Namen und der (verschiedenen) Ellen, die die Sekretäre, Beamten und Geodäten und die Wechsler zu unserer Zeit bei ihren Geschäftsbeziehungen (mu'amalatihim) mit dem Staat verwenden (...) Danach werde ich die Grundlagen erwähnen, auf die man sich bei der Vermessung von den Dreiecken stützt, welcher Art und Form sie auch sein mögen, und das, was die

‘Ellenmesser’ (durra) und Teiler (qussam) bei der Ausmessung von Ländereien und der Verteilung von Grundstücken anwenden müssen. (Dies geschieht) um dadurch das Übel, das sich die Geometer unserer Zeit in ihren Regierungsbüchern zuschulden (SIC!) kommen lassen, und ihre Methode der Teilung von Liegenschaften bei den Verkäufen und Käufen, zu verdeutlichen (...) Denn ich meine, dass sie dabei allesamt vom richtigen und wahren Weg weit entfernt sind. Häufig wenden sie bei ihren Berechnungen und Messungen Dinge zum Nachteil des Staates oder unter Schädigung seiner Partner an. Sie sind nachlässig bei ihrer Arbeit und durchdringen sie nicht wegen ihrer Unkenntnis des Grundlagen des Verfahrens (...) So meine ich, dass sie beim Ausmessen von Dreiecken, Fünfecken oder Kreisen einfach die vier Seiten miteinander multiplizieren und behaupten, das Ergebnis sei die Fläche dieses Landstückes. Das ist weit entfernt davon, richtig zu sein. Gott möge Fehler vermeiden helfen! Dabei entsteht bei dieser Methode der Ausmessung des Fünfeckes und des Kreises dem Staat und dem, der ein Landstück verkaufen möchte, ein Nachteil, denn die Fläche ist größer, als sie angeben (bezogen auf das Dreieck) bereitet sie aber dem Partner (=Bürger) und dem Käufer einen Nachteil, denn seine Fläche ist kleiner, als die auf diesem Weg berechnete.“ [Rebstock 1992]

Zu Beginn des ersten Kapitels definierte al-Buzgani das Verhältnis zweier Zahlen als vier verschiedene Arten von Brüchen. Durch verschiedene Erklärungen und mehrere Tabellen werden diese Brüche ins 60er System übertragen. Weiterhin, in den nächsten Kapiteln (fusul) wird beschrieben wie beliebige Verhältnisse- ob einfache oder zusammengesetzte – genaue oder näherungsweise in Form von Summen möglichst ‘schöner’ ($\frac{m}{n}$, $n < 11$) gebracht werden können. Interessant ist dabei die Zahl 60 als

Nenner für die Basis der meisten Maß- und Wertsysteme in der islamischen Mathematik.

Er führt ein Beispiel vor:

„Zum Beispiele 3 Teile von 17: wir wollen sie näherungsweise ins Verhältnis (zu 60) setzen. Wir multiplizieren 3 mit 60 und teilen das, was herauskommt, durch 17. Die Teilung ergibt 10. Doch 10 Teile lassen sich nicht zu 17 ins Verhältnis setzen, es sei denn, wir gleichen, wie in der Arithmetik üblich, 10 so aus, dass sie 1 ergeben, denn (die 10) sind mehr als die Hälfte von 17. Die Summe ist 11; ins Verhältnis zu 60 gesetzt ergibt das 1 Sechstel und 1 Sechstel-Zehntel. Dies ist das Näherungsverhältnis von 3Teilen zu 17.“

Zum Beispiel:

$$\frac{3}{17} = \frac{180}{17 \times 60} = \frac{10}{60} + \frac{10}{17 \times 60}$$

$$\neq \frac{10}{60} + \frac{10+7}{17 \times 60} = \frac{10}{60} + \frac{1}{60} = \frac{11}{60}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6 \times 10}$$

„Wenn wir es genauer haben wollen, multiplizieren wir die restlichen 10 mit 60 und teilen das Produkt durch 17. Die Teilung ergibt 35 und übrig bleiben 5 Teile, die sich nicht zu 17 ins Verhältnis setzen lassen. Wir vernachlässigen sie, da sie weniger als die Hälfte von 17 sind, fügen die 35 zu den 10 und lösen sie als Brüche von 1 von ihnen (=60) auf. Das sind dann Zehntel- Zehntel, d.h. dawaniq (=da). Es ergeben sich 10 und ein Viertel (un ein Drittel). Bezogen auf 60 sind es 1 Zehntel und ein halbes Neuntel und ein Sechstel-Achtel. Das ist das Näherungsverhältnis von 3 Teilen zu 17.“ [Rebstock 1992]

$$\frac{3}{17} = \frac{10}{60} + \frac{600}{17 \times 60 \times 60}$$

$$\frac{10}{60} = \frac{35}{60 \times 60} + \frac{5}{17 \times 60 \times 60 \times 60}$$

$$\neq \frac{10}{60} + \frac{35}{60 \times 60} = \frac{10}{60} + \frac{1}{3 \times 60} + \frac{1}{4 \times 60}$$

$$= \left[\frac{1}{10} + \frac{1}{2 \times 9} + \frac{1}{6 \times 8} \right] + \frac{1}{2 \times 6 \times 10 \times 10 \times 10}$$

Buzgani schließt das erste Kapitel mit 23 Umrechnungen von $a \times E (=Dir) + \frac{m}{n} da +$

$\frac{p}{q} ha$ ($1ha = \frac{1}{60} E$) in Einheiten auf der Basis von 60.

Zum Beispiel:

$$38 Dir + 3 da + 2 ha \quad (\text{da } 3 da + 2 ha = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} Dir)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4 \times 8} \right) \times 60$$

$$= 30 + 6\frac{2}{3} + 1\frac{7}{8}$$

Anhand simpler, gemischter und Summen von Brüchen wird das Verfahren erklärt

und an *daniq* ($= \frac{1}{6} Di$) und *habba* ($= \frac{1}{6 \div 8} Di$) und *asir* ($= \frac{1}{6 \times 8} Dir$), sowie an Graden, Sekunden, Tertien,..., Undecimen ($60^1 \dots 60^{-10}$) konkretisiert.

Zum Beispiel: ergeben $1 da + 3\frac{3}{7} ha$ bezogen auf 60 Di ($= 1 E$):

$$1 da + 3\frac{3}{7} ha = \frac{(8 \times 7 + 24)}{7 ha}$$

$$= \left(\frac{4}{3} \times 60 \right) \div (60 \times 48) E \left[\times \frac{1}{7} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{6 \times 8} + \frac{1}{3 \times 6 \times 8} \right) \times E = \frac{1}{4 \times 7 \times 9} E$$

Die Multiplikations- und Divisionsregeln sind sowohl für Ganze, gemischte dezimale und für sexagesimale Ausdrücke eingeführt.

Im zweiten Kapitel des Werkes von Buzgani gibt es, nach steigender Schwierigkeit, die Regeln der Multiplikation und Division von Ganzen, Brüchen und gemischten Zahlen. Besonders werden die zwei Verhältnisse von Zahlen zueinander, 'mustarika' (= mit gemeinsamen Teiler) und 'mutabayina' (= ohne gemeinsamen Teiler) im Hinblick auf die Kürz- und Zerlegbarkeit von Brüchen hervorgehoben.

Das dritte Kapitel befasst sich mit der Geometrie, nämlich Flächen- und Volumenberechnungen. Die unterschiedlichen Längen- und Flächenberechnungen im Kreis gehen alle aus von einer 'richtigen' Methode

$$A = \frac{d}{2} \times \frac{u}{2}$$

Und von einer konventionellen Methode

$$A = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2 \times 7}\right) \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \left[\pi = \frac{22}{7}\right]$$

Al- Buzgani formulierte diese Methode so:

„Da (die Definitionen) nun klar sind, so sagen wir: Die Kreisfläche errechnet man auf zwei Arten. Eine von beiden (besteht darin), dass wir den halben Durchmesser mit

dem halben Umkreis multiplizieren; die andere (besteht darin), dass wir den Durchmesser mit sich selbst multiplizieren und (vom Quadrat) ein Siebtel und ein halbes Siebtel abziehen. Die erste Methode ist die richtige, denn sie stützt ein Beweis. Die zweite Methode ist eine Übereinkunft und Näherung.“ [Rebstock 1992]

Man gelangt über den Durchmesser zur Sehnenlänge des Kreisabschnittes:

$$d = \left(\frac{s}{2}\right)^2 \div h + h \rightarrow s = 2\sqrt{(a-h)xh}$$

Man kann näherungsweise durch das Verhältnis des Kreisbogens b zur Sehne s , die die Kreisabschnittsfläche A berechnen. Eine Tabelle nachgerechnet von Saidan, von denen auch eine Gebrauchsanweisung dabei ist, ermöglicht die rasche Berechnung von s aus gegebenem b und umgekehrt woraus sich:

$$A' = \frac{1}{2} \times \left[\frac{d}{2} \times b - s \times \left(\frac{d}{2} - h \right) \right]$$

ergibt. Zum Schluss fügt er noch zu den ausführlichen Darstellungen zur Berechnungen von Fläche, Seiten und Höhen regelmäßiger Dreiecke, zwei auf alle Dreiecke anwendbare Regeln hinzu, die keiner der Vorgänger bis jetzt erwähnte:

1. bei $a < b < c$ folgt aus der Projektion:

$$q = \frac{1}{2} x \left[c - \left(\frac{b^2 - a^2}{c} \right) \right] \rightarrow h_{[c]} = \sqrt{b^2 - q^2}$$

2. bei $c < a$ ergibt sich (über die Heronische Formel)

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\left[\left(\frac{a+c}{2} \right)^2 - \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right] x \left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a+c}{2} - c \right)^2 \right]} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 x c^2 - \left[\frac{1}{2} x (a^2 + c^2 - b^2) \right]^2} \end{aligned}$$

Er erwähnt noch im planimetrischen Teil die regel- und unregelmäßigen Vierecke und Vielecke und daraus zusammengesetzte Formen. Bei den Vierecken ist speziell die Höhenberechnung des Trapezes hervorgehoben. Da sich die Fläche der regelmäßigen Vielecke nur über den Inkreisradius ρ_n finden lässt, demonstriert er zwei Wege, darunter einen indischen um dieses herauszubekommen. Unterschieden wird es bei den Formen zwischen aus gleichen (baidi = Ellipse; sakl mubattal = zwei aneinander-gesetzte überhöftige Kreisflächen) und ungleichen Kreisbögen (sakl hilali: al-ahmas = konkav, al-abtal = konvex) und aus gleichen Kreisabschnitten und Trapez (sakl tanawwuri/ tanuri). [vgl. Rebstock 1992]

Es befindet sich im Buch auch ein stereometrischer Teil, der sich mit der Volumen- und Oberflächenberechnung des Würfels (mukab), des Quaders (sakllabani oder tiri), des geraden dreiseitigen Prismas (mansur), des Zylinders mit und ohne parallele Grundseiten (ustuwana, qitat al-ustuwana), des Kegels (mahrut) und des Kegelstumpfes (qitat al-mahrut) und der Kugel (kura) bzw. des Kugelsegments (qitat al-kura).

Die geometrischen Ausführungen Al-Buzganis sind denen Al-Karagis was die Methode und Umfang angeht, sehr ähnlich. Jedoch macht Al-Karagi eine Randbemerkung, von der Berechnung des Bogens aus der Sehne und vice versa im Kreissegment macht er nicht viel Aufhebens und schließt mit der Empfehlung an denjenigen, der die Ausmessung tatsächlich vornehmen will, die Länge des Bogens einfach (per Faden) zu messen und auf das hier Gesagte zu verzichten. [vgl. Rebstock 1992]

Nach den regel- und unregelmäßigen Vielecken und den mondförmigen (hilali) Flächen schließen sich die gängigen stereometrischen Formeln an, wie: Volumenbestimmung der Pyramide, der Halbkugel, der konischen Figuren, des Würfels und Quaders, der Säulen mit Kreis- und eckförmiger Grundfläche (asatin = Zylinder) und die ähnlicher Körper wie addahhal und der Dämme (al-musayyanat) [vgl. Rebstock 1992]

Die Formeln für die Pyramide $V = \frac{1}{3} \times A_G \times h$ und das Prisma $V = A_G \times h$

wurden von den Vorschriften für die Beamten schon vorweggenommen. Der Schluss des Kapitels erfolgt durch eine ausführlich kommentierte Wiedergabe Al-Buzgani über die Darstellung der Herstellung und Benutzung von Instrumenten zur Messung von Distanzen.

Die Proportion (nisba)

Während man die Grundlagen des muamalat-Rechnen liest kommt man an eine Stelle an, wo Al-Buzgani eine allgemein gültige Formel angibt. Diese ist das Verfahren der Vertauschbarkeit von vier in Proportion stehenden Zahlen, die gleichzeitig die Arbeit der Sekretäre sehr erleichtern. Als Beweis ist der Hinweis auf das VII. und VIII. Buch vom Euklid total ausreichend.

Um den ersten Typ seiner nawadir-Probleme zu lösen benutze er die algebraische Gleichung $(a + b) \times x = c$ mit vier ähnlichen Textaufgaben:

1. Über welches Ausgangskapital verfügt ein Mann, dem noch zwanzig Dir bleiben, nachdem er $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ davon ausgegeben hat?
2. Wie schwer ist ein Fisch, der ohne Schwanz ($=\frac{1}{3}$) und Kopf ($=\frac{1}{4}$) noch 20 r wiegt?
3. Wie hoch ist eine Dattelpalme, die zu $\frac{1}{3}$ im Wasser und zu $\frac{1}{4}$ im Lehm Boden

steckt und noch 20 d in die Höhe ragt?

4. Wie groß ist ein Tuch, welches noch 20 d misst, nachdem $\frac{1}{3}$ zu einem Hemd und $\frac{1}{4}$ zu einem Sirwal verarbeitet wurde?

2.5 Al- Karagi

Al Karagi trägt der Mathematik auch einen großen Beitrag mit seinem Buch al-Kafi-film al-hisab, geschrieben zwischen den Jahren 401/1010-407/1016 in Bagdad. In weiteren Werken dokumentierte er seine Neigung zur Anwendung und Lehre der Mathematik und Astronomie, von denen aber leider viele verloren gingen und die wenigsten heute noch zugänglich sind. Die Bücher umfassen Themen wie Hoch- und Tiefbautechnik, Legat und Erbschaftsrechnen bis zu Arbeiten über die Anwendung der Algebra und das indischen und Fingerrechnen. Weiters befasste er sich auch mit der Arithmetik, seine arithmetischen Hauptwerke sind al-Badi und al-Fahri. In seinem Buch Kafi stellt er die einzelnen Rechenoperationen gezielt auf die jeweilige Anwendung bei der Lösung rechnerischer Verwaltungsprobleme dar. Er war den Buyiden als hoher Verwaltungsbeamter zu Diensten, genauso wie etwa Sanad b. Ali als Hofastronom für al-Mamun oder Abu Kamil Suga b.Aslam als Hofingenieur für Ibn Tulun.

Al- Karagi benutzte eine allgemeine Regel für die Verwandlung der Maßzahl einer Maßeinheit in die entsprechende einer beliebig anderen, die grundlegende Operation kaufmännischen Rechnens.

Der letzte theoretische Teil des Kafi ist al-gabr wa l-muqabala:

„es sei zwar alles aufgenommen worden, was für die Bewältigung der Verwaltungsformalitäten und Rechtsbestimmungen (ahkam al-adyan) genüge,...,doch habe ich dafür eine hilfreichere und passendere Sache gefunden: die Verwendung der Methode von al-gabr und al-muqabala.“ [Rebstock 1992]

Er erklärt die sechs klassischen linearen und gemischtquadratischen algebraischen Gleichungen. Sehr detailliert stellt al-Karagi die Multiplikation, die Division, Addition und Subtraktion und Radizierung gleich- und ungleichnamiger Ausdrücke. Für die Lösungswege bzw. Lösungen verwendet er den binomischen Lehrsatz, wobei n immer < 3 bleibt. Weiters erwähnt er drei Summenformeln für arithmetische Reihen erster Ordnung.

Das Werk umfasste folgendes:

„-was bei den Regierungsgeschäften (a'mal sultaniya) und den Praktiken der Rechner im diwan benötigt wird,

-was Sekretär des Hofes (hadra) und des Sawad als auch die Wechsler an einschlägigem Wissen brauchen,

-die Erwähnung dessen, womit die Leute bei ihren mannigfaltigen Lebensführungen und Alltagsgeschäften umgehen (funun al-ma'ayis wa l-mu'amalat),

-die Erwähnung der diesbezüglichen Methoden und Kurzverfahren, die wir ja ausführlich behandelt haben, sind wir der Meinung, dass auf die Erwähnung der Algebra (al-gabr wa l-muqabala) nicht verzichtet werden sollte, wegen ihres Nutzens für das Herausfinden von Unbekannten, obwohl die Sekretäre ihrer eigentlich nicht bedürften und nur die Rechner sich bei den meisten ihrer Tätigkeiten auf sie stützen.“ [Rebstock 1992]

Somit können wir daraus schließen, dass al-Karagi die Erstellung und Lösung der algebraischen Gleichung beschreibt. Den ersten Schritt, al-gabr, ist die Bestimmung der Aufgabenbedingungen über Festlegung der Gegebenen und Unbekannten zum Ausgleich der beiden Seiten (=al-gabr). Die Schritte bzw. die Regeln, die dafür gebraucht werden, wurden schon vorher erklärt, wie die Multiplikation und

Division verschiedennamiger Ausdrücke, Klammer- und Wurzelregeln. Im zweiten Schritt, almuqabala, werden die Gemeinsamkeiten 'herausgeworfen' über eine der sechs Formen, von denen fünf mit Beispielen belegt werden. Ob diese Gleichung dann lösbar ist, erkennt man sofort an der Diskriminante.

2.6 Ibn al-Mili

An dieser Stelle möchte ich noch ein fast unbekanntes Rechenbuch des alexandrinschen Zollbeamten Abu Hafs Umar b. Hassan b. Abbad genannt Ibn Al-Mili al-Hasib erwähnen: In seinem Werk Munqid al-halik wa- umdat as- salik sind in dem 'Untergehenden' und 'Wanderer' seine Kollegen unter den Zollbeamten und Steuerbeamten zu finden. Das Werk beinhaltet einen sehr großen Teil mit verschiedenen Fachproblemen. Wann es verfasst wurde, darüber gibt es leider keine einheitliche

Meinung. S.Labib meint in seiner jüngst veröffentlichten Teilübersetzung des Munqid, dass B. al-Mili nicht im 7./13. Jahrhundert schrieb, sondern in der früheren Fatimiden-Zeit. Dazu unterstreicht er seine Vermutung mit folgenden vier Argumenten:

1. Neben Euklid, Ptolemaios, Nikomachos und Al-Karagi ist noch ein gewisser M.B.M.B. Al-Muya zitiert. Sein Multiplikationsverfahren sollte mehrfach geprüft und verwendet sein; vor 1255 schon verbreitet haben.

Argument: Die griechischen Werke waren schon im 6./12.Jahrhundert geschrieben. Aus der gesamten mathematischen Literatur ist weder ein M.B.M.B. Al-Muya noch ein Multiplikationsverfahren unter diesen Namen bekannt. Das Verfahren selbst (Erweiterung der Summanden der miteinander zu multiplizierenden Summen auf ihre jeweiligen Hauptnenner; → Multiplikation

$(z_1 \times Z_2) \div (N_1 \times n_2); \rightarrow Division Z \div N$) ist ja schon bereits von al-Uqlidisi ausführlich erklärt worden.[vgl. Rebstock 1992]

2. Das Halabi- ratl wog zur Zeit B. Al-Milis 720 Dirham. Da es As-Sazari mit 724 Dirham angibt musste sein Gewicht bald danach (das heißt nach der Festsetzung des Halabi-ratl auf 480 Dirham durch den Fatimidenkalifen az-Zahir) um 720 Dirham geschwankt haben.

Argument: Al-Mahzumi rechnet noch um 1185 mit einem Halabi-ratl von 480 Dirham. [vgl. Rebstock 1992]

3. Ibn al-Mili benutzte sowohl klassische als auch gesetzliche Verhältnis der Gold- zur Silbergewichtseinheit 7:10, als auch die zeitgenössischen realen Wechselkurse von Dinar zu Dirham 1:15, 1:19 und 1:20, genau jene, die im 10.Jahrhundert im 'Iraq und Ägypten dominierten.

Argument: Die Gewichtsverhältnisse von Gold und Silber war bis 10./16. Jahrhundert Standardrüstzeug des Währungsrechnens. Dabei werden häufig auch verschiedene Wechselkurse eingeübt.[vgl. Rebstock 1992]

4. Ibn al-Mili berichtet auch von unterschiedlichen ratl-Einheiten, deren Gewichte dem alexandrinischen Zollamt geläufig sein mussten, darunter auch vom byzantinischen 'rumi-ratl', nicht aber über das gleichwertige fränkische/ abendländische Gewicht.

Argument: Da Al-Mahzumi auch nur ein 'rumi-katl' kennt, gehen wir davon aus, dass Ibn al-Mili sich in derselben Gesellschaft mit Al-Mahzuni befindet.

Aus diesen vier Argumenten kommen wir zum Punkt den zeitlichen Hintergrund des Munqid ins 5./11. Jahrhundert vorzuverlegen. [vgl. Rebstock 1992]

Zur Algebra:

Es kommen in seinem Buch sehr viele Anwendungsbeispiele vor, die meistens entweder als eine der Formen:

$$b \times x = a \quad c \times x^2 = a \quad c \times x^2 = b \times x$$

Darstellen lassen oder Teilungsaufgaben der Form:

$$x \div (10 - x) = a \quad \text{bzw.} \quad a + n \times b = b + n \times a = x$$

Wobei für den gesuchten x immer die kleinstmöglichen ganzen Werte von a, b gewählt werden.

3 Arithmetik

Die ersten Menschen, die die Zahlen so schrieben, wie wir es auch heute tun, waren die Muslime. Während die Griechen Vorreiter in der Geometrie waren, haben wir ein Teil der Arithmetik von den muslimischen Mathematikern geerbt. Einige Jahrhunderte vor dem Aufstieg der islamischen Kultur verwendeten die indischen Mathematiker ein Zahlensystem mit folgenden Eigenschaften:

1. „Die Zahlen von eins bis neun werden durch neun Ziffern dargestellt, die sich leicht mit ein oder zwei Strichen schreiben lassen.
2. Die Ziffer ganz rechts in einer Zahl zählt die Einer und ein Eintrag an einer beliebigen Stelle hat den zehnfachen Wert der rechts daneben liegenden Stelle. So zählt die Ziffer an zweiter Stelle die Zehner, die an der dritten Stelle die Hunderter (das entspricht zehn Zehnern) und so weiter. Ein besonderes Zeichen, die Null wird dazu benutzt, anzuzeigen, dass eine Stelle nicht besetzt ist.“
[Berggren 2011]

Wie wir schon wissen, stellten die Ägypter und Babylonier die ersten neun Zahlen durch die Häufung von Strichen dar. Hingegen waren die Inder die ersten, die ein zifferngestütztes dezimales Stellenwertsystem verwendeten. Dieses bedeutet, dass die ersten Zahlen durch neun Ziffern dargestellt werden. Dezimal heißt, dass die Basis zehn ist. Jedoch erweiterten die Hindus dieses System nicht, um Teile eines Ganzen durch Dezimalbrüche darzustellen. Da es die Muslime dieses taten, zwar waren sie die ersten Menschen, die die Zahlen so darstellten wie wir sie heute noch tun. Deswegen heißt auch dieses System indo-arabisch.

Wie auch schon vorher erwähnt, bewirkte der islamische Gelehrte Al-Khwarizmi in der Forschung der Mathematik viel: er schrieb das Buch, dessen Titel ins Deutsche übersetzt heißt: „Das Buch der Addition und Subtraktion mittels indischen Rechnens“. Wie schon bekannt kam Al-Khwarizmi aus Zentralasien und war kein Araber, was allerdings kein Problem war, da in der islamischen Kultur nicht die Herkunft oder die Muttersprache ausschlaggebend war, sondern vielmehr wieviel Wissen und Leistung. Jedoch ist fraglich wie er von der indischen Arithmetik erfahren konnte, da er weit weg von dem Ort lebte, an dem Bischof Sebokht 150 Jahre zuvor von den indischen Zahlen erfahren hatte. Wenn man bedenkt, dass es damals keine gedruckten Bücher und moderne Kommunikationsmittel gab, war es nicht so selbstverständlich, dass sich das neue Wissen auch in benachbarten Regionen verbreitete. Somit können wir feststellen, dass Al-Khwarizmi nicht in seiner Heimatstadt sondern in Bagdad vom indischen Rechnen erfuhr. Zur Zeit des Kalifen al-Mansur fand um 780 die wissenschaftliche Delegation aus Sind zur Übersetzung astronomischer Werke aus dem Sanskrit statt.

Al-Khwarizmis erhalten gebliebene Bücher zeigen, dass er sich sehr stark mit der Astronomie befasste, gleichzeitig wurde von der indischen Astronomie beeinflusst wurde. Davon kann man ausgehen, dass er durch seine Forschungen der indischen Astronomie von den indischen Zahlzeichen erfuhr.

Sein Werk half sowohl der islamischen Welt als auch dem lateinischen Okzident, das indische Zahlensystem zu verbreiten. Leider ist seine Abhandlung nicht im arabischen Original erhalten geblieben (da ja später bessere Werke erfasst und ersetzt wurden) gibt es noch eine lateinische Übersetzung, die im 12. Jahrhundert n. Chr. angefertigt wurde. Aus dem Titel des Werkes wird es klar, dass im Buch alle arith-

metischen Verfahren behandelt werden.

Interessant ist der Aspekt der Rechenarten:

Die arabischen Autoren unterscheiden zwischen zwei Rechenarten. Man kann vom traditionellen arabischen Rechnen sprechen, bei dem man nur „die Luft“ (hisab hawai) das heißt nur „die Hände“ (hisab al-yad) braucht. Wird aber auch griechisches Rechnen genannt (hisab rumi). Später kam das indische Rechnen

(hisab al –hindi) dazu, da es ökonomischere Methoden und einfach kommunizierbare Notation beinhaltet. Dieses Verfahren war ab dem 5./11. Jahrhundert ziemlich verbreitet.

Berühmt waren auch Brettrechnen (hisab at-taht), Staubrechnen (hisab at-turab/ al-gubar) oder Griffelrechnen (hisab bi l-qalam). Es gibt sogar eine Behauptung, dass das muamalat- Rechnen in der traditionellen Rechenweise gelehrt und besorgt wurde somit das indische Rechnen mangelnd verbreitet war. [vgl. Rebstock 1992]

3.1 Addition

Kushyar erklärt es so, dass die zu addierenden Zahlen in zwei Reihen so untereinander zu schreiben sind, dass Stellen gleicher Wertigkeit in einer Spalte untereinander stehen. Als Beispiel nimmt er die Addition von 839 und 5625 und beginnt, entgegen dem heutigen Verfahren, mit der höchsten Stelle, die in beiden Zahlen vorkommt, in diesem Fall mit den Hundertern. Bei jedem Rechenschritt ersetzt das erhaltene Ergebnis den entsprechenden Teil der oberen Zahl. Abbildung 2.1. zeigt die einzelnen Schritte und beginnt mit $56 + 8 = 64$. Ein Pfeil ($\rightarrow$) verdeutlicht, dass auf

der Staubtafel das Kästchen rechts das Kästchen links ersetzt. So stehen auf der Staubtafel immer nur zwei Zahlen in einer Spalte untereinander und schließlich hat dann das Ergebnis die obere Zahl ersetzt. Entgegen der heute üblichen Methode erhält man mit dem Verfahren, das Kushyar erklärt, das Ergebnis der ganz links stehenden Ziffer als erstes. [Berggren 2011]

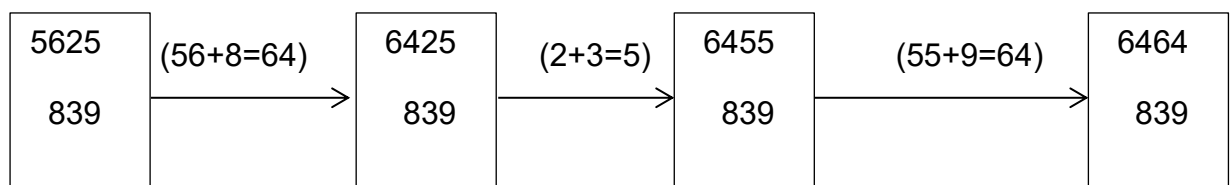


Abb.2.1.

3.2 Subtraktion

Kashyar erklärt dieses Verfahren mit denselben Zahlen und subtrahiert 839 von 5625. Wiederum geht er von links nach rechts vor. Er erklärt, dass, da 8 nicht von 6 subtrahiert werden kann, sie von 56 werden muss. Das ergibt 48. Die 56 in 5625 wird ausgewischt und durch die 48 ersetzt. So erhält Kushyar, indem er sich Stelle um Stelle vorarbeitet, das Ergebnis 4786 (Abb. 2.2.). Es gibt kein „Ausleihen“ in Kushyars Verfahren. Er merkt einfach nur an, dass beispielsweise beim letzten Schritt 9 nicht von 5 subtrahiert werden kann, und deswegen von 95 subtrahiert werden muss. Wie auch bei der Addition arbeitet sich Kushyar von den höheren Stellen zu den niedrigeren vor und bei jedem Schritt erscheint das Teilergebnis als Teil der oberen Zahl.

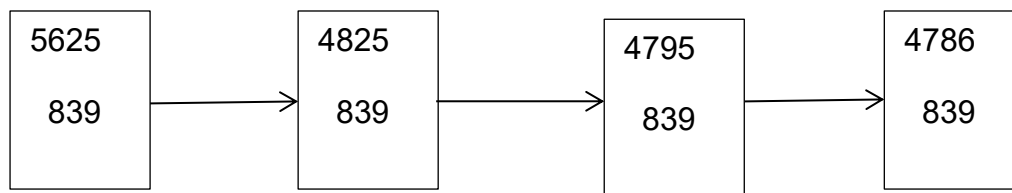


Abb.2.2.

Kushyars Verfahren des Halbierens, das er als eine abgewandelte Form der Subtraktion ansieht, gibt Aufschluss über seinen Umgang mit Brüchen. Er beginnt mit 5625 (wie zuvor), diesmal aber rechts (Abb.2.3.). Zunächst ist 5625 niederzuschreiben, dann die Hälfte von 5 zu nehmen, was zweieinhalb ergibt. „Schreibe 2 anstelle der 5 und schreibe darunter $\frac{1}{2}$, was 30 entspricht.“ [Berggren 2011]

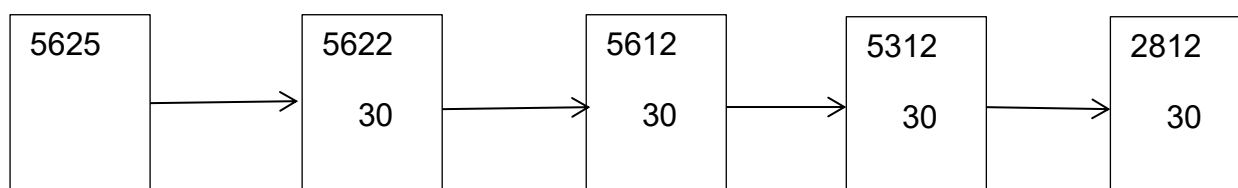


Abb.2.3.

Um Brüche als Vielfache der Untereinheit $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{60^2} = \frac{1}{3600}$ usw. darzustellen benutzte er das Sexagesimalsystem und das Stellenwertprinzip, die auf die Babylonier zurückgehen. Im zweiten Teil seiner Abhandlung wird dieses System sehr ausführlich erklärt. Bei seinen Beschreibungen geht er davon aus, dass der Leser sowohl mit den örtlichen Zahlungsmitteln vertraut ist, zwar entspricht 1 dirham 60 fulus, als auch

Gradmaß, bei denen 1 Grad 60 Minuten umfasst. Damit versteht man: „Wenn man sich 5625 als dirhams vorstellen mag, dann stellt man sich $\frac{5}{2}$ dirhams als 2 dihams und 30 fulus (oder 2 Grad und 30 Minuten) vor.“ Die letzten Rechenschritte sind dazu da um, wie in Abb 2.3., die 2 bei den Zehnern und dann die 6 bei den Hundertern zu halbieren. Als letztes muss man die 5 bei den Tausendern halbieren. Kushyar wertet die 5, als stünde sie an der nächst niedrigeren Stelle und betrachtet sie als 50 Hunderter.

Die Hälfte sind dann folglich 25 Hunderter. Daher addiert er im letzten Schritt 2500 zur Hälfte von 625 und erhält das Ergebnis, das in Abb. 2.3. dargestellt ist.
[vgl. Berggren 2011]

3.3 Multiplikation

Der Algorithmus für die Multiplikation Um 243 mit 325 zu multiplizieren, ordnet er die Zahlen so, dass die 3 von 325 direkt über der 3 von 243 steht wie im Abb. 2.4. zu sehen ist. Man braucht 5 Spalten für die Anordnung, weil Hunderter mit Hundertern multipliziert Zehntausender ergeben ($(N \times 100) \times (M \times 100) = (N \times M \times 10.000)$). Da $3 \times 2 = 6$ ergibt, platziert er die 6 über der 2, d.h. an der Stelle für die Zehntausender. Er merkt zudem an, dass, wäre das erhaltene Produkt weistellig gewesen

(z.B.: $3 \times 4 = 12$), die Zehnerstelle des Produkts in die Spalte links von der 2 hätte eingetragen werden müssen, was im nächsten Schritt gezeigt wird, wo er, da $3 \times 4 = 12$ ergibt, die 2 der 12 direkt über der 4 schreibt und die 1 zur 6 addiert und somit 72 enthält. Zuletzt wird die obere 3 durch eine $9 = 3 \times 3$ ersetzt, weil er nicht weiter mit der 3 zu multiplizieren braucht.

Jetzt wird 243 mit der oberen 2 multipliziert. Da dies aber „Zehner“ und keine „Hunderter“ sind, müssen wir, wenn wir damit fortfahren wollen, die Ergebnisse zur oberen Zeile addieren- jeweils in den Spalten oberhalb der unten stehenden Zahl 243 also eine Stelle nach rechts verschieben. Denn die Potenzen von zehn, die als Ergebnisse herauskommen, sind um eins niedriger. Wir beginnen also mit der zweiten Zeile von Abb. 2.4. und wie zuvor steht die letzte Ziffer der unteren Zahl (3) unter dem aktuellen Multiplikand (2).

Da $2 \times 2 = 4$, ist dann 4 zu 72 zu addieren und wir erhalten 76. Die verbleibenden Schritte in der ersten Zeile wird uns klar sein, wenn wir die Schritte in der ersten Reihe verfolgt haben. Wiederum bringt eine Verschiebung nach rechts die richtigen Stellen so untereinander dass die Ergebnisse an der richtigen Stelle eingetragen werden können. Dies ergibt Reihe 3 in Abb. 2.4. Nur muss man beim letzten Multiplikationsschritt vorsichtig sein: Man addiert nicht die letzte Stelle des Produkts zum letzten Multiplikanden (in diesem Fall 5), sondern verwendet es, um den Multiplikanden zu ersetzen. [vgl. Berggren 2011]

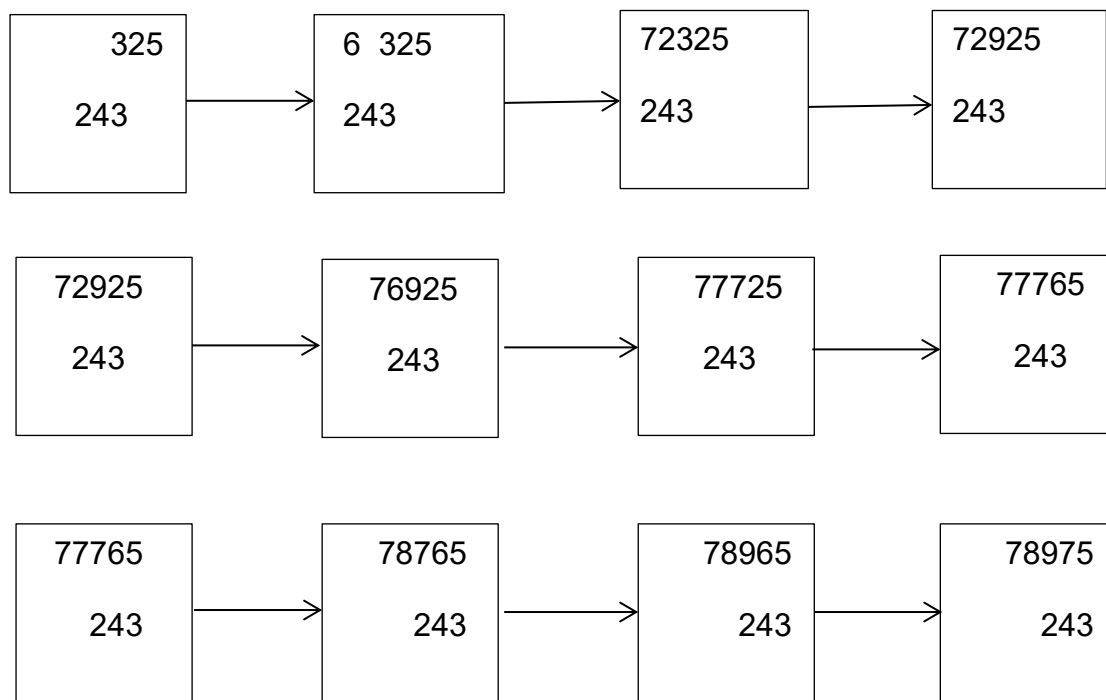


Abb. 2.4.

3.4 Division

Bei dieser Rechenoperation nimmt Kushyar nochmals die Zahlen 5625 und 243. Er dividiert 5625 durch 243, wie man es auch in Abb. 2.5. mitverfolgen kann, zeigen die ersten Schritte, wie $2 \times 43 = 486$ von 562 subtrahiert wird. Dabei erhält man die erste Ziffer des Quotienten (2) durch Abschätzen, indem man sie oberhalb der Spalte mit der letzten Ziffer des Divisors notiert. In diesem Fall hat „2“ die Bedeutung von „20“. Die Positionierung setzt sie automatisch in die richtige Spalte. Der letzte Eintrag ist als $5625 - 20 \times 243 = 765$ zu lesen. Danach verschiebt Kushyar den Divisor zur nächsten Spalte, sodass die nächste Spalte des Quotienten richtig ausgerichtet ist. In der zweiten Reihe wird berechnet: $765 - 3 \times 243 = 36$. So erhält Kushyar, indem er

-beginnend mit der vordersten Stelle- Ziffer für Ziffer ausrechnet den Quotienten (23) und den Rest (36).

Dieses Ergebnis $23 + \frac{36}{243}$ ist korrekt, es stellt sich aber die Frage: „Wie groß ist der Bruch $\frac{36}{243}$?“ Letztendlich braucht ein Astronom, der Winkel berechnen will oder ein/e Richter/in, der/die den Geldbetrag einer Erbschaft aufteilen will, das Ergebnis in einer brauchbaren Form. Deswegen wird es in vielen Arithmetikbüchern immer erklärt, wie ein Bruch $\frac{a}{b}$ in der Form eines Vielfachen von $\frac{1}{c}$ ausgedrückt werden kann, wobei die Zahl c so gewählt wird, dass sie für das geeignet ist, was zu messen ist. Wenn wir beispielsweise Längen in Fuß und Zoll messen, würden wir $c = 12$ wählen; Kusrhyar beschäftigt sich weiter damit, dieses Problem für $c = 60$ zu lösen.

Wenn $\frac{36}{243} = \frac{n}{60}$ sein soll, dann muss natürlich $n = 36 \times \frac{60}{243}$ sein. Diese Division ergibt einen Quotienten von 8 und einen Rest von 216. Stellt man sich also den ersten Rest

als die dirhams vor, die nach einer Aufteilung von 5625 dirhams auf 243 Menschen übrig bleiben, dann wäre der Anteil jeder Person 23 dirhams und 8 fulus, und 216 fulus bleiben übrig. Oder wir könnten uns die Unterteilung eines Winkels in 243 gleiche Teile vorstellen, dann wäre jeder Teil $23^\circ 8'$, übrig bleiben $216'$. Dieses Verfahren, einen Bruch wie $\frac{36}{243}$ mit 60 zu multiplizieren, nannten die islamischen Gelehrten „anheben“. Es wurde verwendet, um die Entwicklungen zur Basis 60 der nicht ganzzahligen Teile einer Division zu erhalten. Dies ist so ähnlich, wie wenn man einen Bruch in Prozent umwandelt. [vgl. Berggren 2011]

„Bei den Arabern- oder besser gesagt bei den Muslimen oder besser gesagt bei den Muslimen hat, im Einzelnen oft schwer kontrollierbar, die babylonische Mathematik weitergelebt. Stand ihnen jedoch das gesamte Wissen aus den unterworfenen Ländern zur Verfügung. In der Algebra al-Hwarizmis (1.Hälfte Jahrhunderts des 9.Jahrhunderts) erkennen wir wieder die alten Lösungsmethoden der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten, und das babylonische Positionssystem, das verstümmelt von den Griechen nur für die Brüche übernommen wurde, lebt in seiner auch die Ganzen umfassenden Vollständigkeit und ergänzt durch eine klare

Unterscheidung der Ganzen von den Brüchen spätestens bei Abu I-Wafa (940-998) erneut auf. Bei ihm finden sich auch wieder die sexigesimalen Reziprokentabellen, mit denen er wie die Babylonier die Divisionen durch Multiplikationen ersetzt.“

[Vogel 1978]

Einer der Bildungszentren seit dem 6. Jahrhundert war auch die Akademie, die von Chosrau I. in Gundai-Sabur gegründet wurde, wo neben der Medizin wohl auch andere Wissenschaften in aramäischer Sprache gelehrt wurden. Nun stellt man sich aber die Frage, ob in der um 250 gegründeten, vom Zweitstromland nicht allzu weit entfernten Stadt nicht schon immer babylonische Wissenschaft weitergelebt habe.

Auch Harran kommt als Bildungstätte in Betracht, wo bei den Sabiern noch chaldäischer Stern Glaube lebendig war und wo nach dem Niedergang von Alexandria- vielleicht über die Zwischenstation Antiochia-mathematische Studien ihre Heimstätte gefunden haben. Ob die von dort kommenden Mathematiker Tabit b. Qurra und al-Battani auch altes babylonisches Wissen nach Bagdad verpflanzt haben, wissen wir nicht. Sie wirkten an der dortigen Akademie, dem „Haus der Weisheit“, die vom Kalifen al-Mamun (813-833) gegründet wurde, der auch eine umfangreiche Überset-

zertätigkeit aus dem Griechischen, Syrischen, und Indischen ins Leben rief. Tabit b. Qurra war einer der bedeutendsten Übersetzer desgleichen der Nestorianer Hunain ibn Ishaq, der vorher in Gundai-Sabur tätig war. Gerade den Nestorianern, die man noch oder wieder Assyrer nennt, kommt eine besondere Rolle zu, als sie nach ihrer Vertreibung aus Edessa . Ein nestorianischer Wissenschaftler namens Job von Edessa stammte auch aus Edessa, war gleichzeitig ein Zeitgenosse von Al-Hwarizmi und seine Enzyklopädie enthält auch mathematisches Wissen (z.B.: über die Null); im Jahre 489 im Sassanidenreich Zuflucht fanden, so in Nisibis und Ktesiphon Seleukia. Ihre gut organisierte Missionstätigkeit verbunden mit der Gründung von Klöstern und Schulen führte sie bald auch weit nach dem Osten, nach Zentralasien und China. [vgl. Vogel 1978]

4 Die Dezimalbrüche

Die Muslime haben der heutigen Wissenschaft die Dezimalbrüche hinterlassen, also es muss uns bewusst sein, dass wir heute, durch die islamische Welt, nicht sexagesimale sondern dezimale Brüche verwenden können. Dafür gibt es im „Buch der Kapitel über die indische Arithmetik“ auch Beweise, das Abu al-Hasan al-Uqlisi 952-953 n.Chr. in Damaskus verfasste. Al-Uqlisi verbrachte Großteil seines Lebens mit dem Abschreiben der Werke des Euklids, die Araber nannten ihn Uqlidis. Außer, dass er als Erster Dezimalbrüche und des Dezimalpunkts verwendete und somit auch gleichzeitig, der Erste war, der Zahlen so schrieb, wie wir sie heute machen, wissen wir leider wenig über ihn. In seinem Buch erwähnt er mehrmals dass er sich sehr anstrenge die besten Verfahren aller früheren Verfasser miteinbezog, weiß man

nicht genau ob er die Dezimalbrüche selber entdeckte. Jedoch, eines ist klar, dass sie eine Entdeckung islamischer Gelehrter sind. Dazu ist al-Uqlidisi auch total stolz, dass er seine Algorithmen, welche die Arithmetiker üblicherweise auf die Staubtafel schreiben, nicht dieselbe Methode verwendete, sondern er notierte mit Tinte auf Papier. Die Gründe zählt er in seinem Buch auf, wieso er keine Staubtafel mehr benutzte:

„Mancher Mann hasst es, sich mit der Staubtafel in seinen Händen zu zeigen, wenn er diese Rechenkunst (indische Arithmetik) anwenden muss, da er zu befürchten hat, von denen missverstanden zu werden die sie (die Staubtafel) in seinen Händen sehen. Es schickt sich nicht für ihn, da man sie sonst nur in den Händen von Taugenichtsein sieht, die in den Straßen ihren Lebensunterhalt mit Astrologie bestreiten.“
[Berggren 2011]

Sein Werk besteht aus vier Teilen, von denen sich die ersten zwei Teile hauptsächlich mit fortgeschrittener Arithmetik befassen. Die Dezimalbrüche schrieb er aber erst im zweiten Teil, und zwar im Abschnitt über das Verdoppeln und Halbieren von Zahlen. Da erklärt er einer von drei Möglichkeiten, eine ungerade Zahl zu halbieren. Die erste Methode, die er verwendet, gehört dem Kushyar, was er wie in Abb.2.3. die Zahl 5625 zu halbieren angenommen hat, es seien (Winkel-) Grade oder dirhams und das Ergebnis wie in Abb. 2.3. herausbekam. Dort kann die 30 am Ende als fulus oder Minuten verstanden werden. Das zweite Verfahren erklärt er folgendermaßen: „...eins- egal an welcher Stelle- zu halbieren, bedeutet, fünf (an der Stelle) davor. Dies erfordert, dass, wenn wir eine ungerade Zahl halbieren, die „Einheit“ (d.h. die betref-

fende Zahl) halbieren und seine fünf an die Stelle davor stellen. Wir setzen über die Stelle für die Einheit ein Zeichen, um diese Stelle hervorzuheben. Der Wert der Stelle, an der die Einheit steht, ist also das Zehnfache des Werts der Stelle davor. Nun kann die fünf halbiert werden, so wie ganze Zahlen halbiert werden. Der Wert der Stelle, an der die Einheit steht, wird beim zweiten Halbieren zum Hundertfachen (der Stelle, die zwei Stellen vor der Einheit steht). So könnte man unendlich fortfahren.“

[Berggren 2011]

Zu erwähnen ist auch die Schreibrichtung des Arabischen, die von rechts nach links läuft als wie im Lateinischen, da Uqlidisi von den Stellen innerhalb einer Zahl von „vor“ einer anderen Stelle spricht. Folglich steht in der Zahl 175 die 5 vor der 7.

Er erklärt mit einem Beispiel das Ergebnis für das 5-malige Halbieren von 19 mit 059375³, wobei er sagt:“ die Stelle der Einheit ist das Hunderttausendfache von dem, was ganz vorne steht.“ [Berggren 2011]

Im Abbildung 2.6. ist ein arabischer Text zu sehen, wie Uqlidisi Dezimalkommas (in Form eines kurzen, senkrechten Strichs, der die Stelle für die Einer markiert). Wenn man die Darstellung der Ziffern zu Hilfe nimmt, kann man die unterschiedlichen Zahlen im Text ohne Probleme identifizieren.

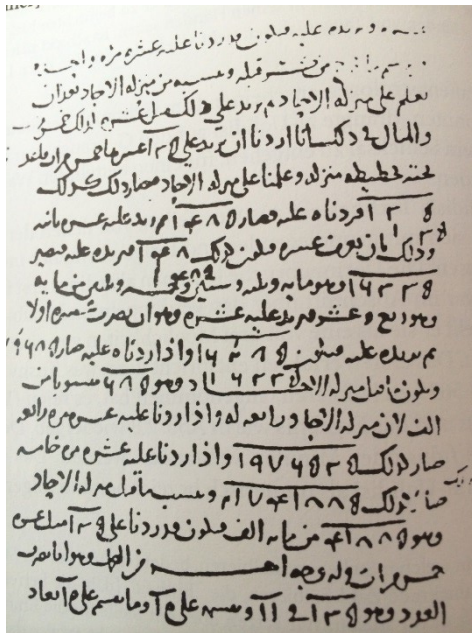


Abb.2.6.

Die Dezimalbrüche können durch analoge Überlegungen zu den bekannten Methoden erklärt werden. So halbierte man eine gerade Zahl wie zum Beispiel 34, man machte Folgendes: $34 \rightarrow 32 \rightarrow 17$, wobei $(\frac{1}{2}) \times 3$ gerechnet wurde wie 1 und 5 bei der Stelle davor. Da, wie Kushyar ausdrücken würde, „die 3 die Zehner der vorangehende 2 darstellt (in der arabischen Schreibrichtung), ist ihre (der drei Zehner) Hälfte 15. Addiert man die zur 2, was Einer sind, erhält man 7. Das Ergebnis ist 17“. Dieses Prinzip was Uqlidisi anwendet, besagt, dass man bei der Halbierung einer 1 an einer Stelle- wie Zehner, Hunderter usw.- 5 an der vorangehenden Stelle erhält.

Dabei bemerkt al- Uqlidisi, dass er das gleiche Verfahren auch auf die Halbierung einer ungeraden Ziffer an der Einerstelle anwenden kann und aus dieser Beobachtung entwickelt sich ein sehr nützliches mathematisches Verfahren.

Später benutzte al-Uqlidisi auch Dezimalbrüche, diesmal um 135 um ein Zehntel sei-

nes Werts zu vergrößern, danach das Ergebnis wieder um ein Zehntel usw. und das ganze fünfmal. Genauso beginnt er $135 \times \left(1 + \frac{1}{10}\right)^5$ zu rechnen, wie in Abb. 2.7. abgebildet. Uqlidisi schreibt 135 und darunter noch einmal 135, aber um eine Stelle nach rechts verschoben. Das wäre $\left(\frac{1}{10}\right) \times 135$, deswegen addiert er es zu 135. In der Summe $135 + \frac{1}{10} \times 135$ markiert er die Stelle der Einer mit einem kleinen, senkrechten Strich oberhalb der Ziffer. Durch mehrmaliges Verschieben und Addieren, erhält er das gewünschte Ergebnis.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 | & & | & & | & & | & & | \\
 135 & \longrightarrow & 1485 & \longrightarrow & 16335 & \longrightarrow & 179685 & \longrightarrow & 1976535 & \longrightarrow & 21741885 \\
 135 & & 1485 & & 16335 & & 179685 & & 1976535 & &
 \end{array}$$

Abb.2.7.

Interessanter ist, dass er eine andere Alternative zu diesem Verfahren erwähnt: (wir verwenden statt dem Strich was Uqlidisi verwendet das Dezimalkomma)

$$135 \times \left(1 + \frac{1}{10}\right) = \frac{(135 \times 11)}{10} = 148,5$$

Und:

$$\begin{aligned}
 148,5 \times \left(1 + \frac{1}{10}\right) &= \frac{(148,5 \times 11)}{10} = 148,5 \times \left(\frac{1}{10}\right) + 0,5 \left(\frac{1}{10}\right) \\
 162,8 + 0,55 &= 163,35.
 \end{aligned}$$

Wie man es oben sieht, konnte al-Uqlidisi nicht nur Dezimalbrüche addieren, sondern sie auch mit ganzen Zahlen multiplizieren, obwohl es bei diesem Multiplikationsverfahren unnötigerweise die Zahl in Ganze und Bruchteile aufgeteilt wird. Abu Mansur al-Baghdadi heißt: „Der Mann aus Bagdad“ benutzte auch Dezimalbrüche bei einem Problem zur Berechnung der Zehntel. Er schreibt 08 02 17, wofür al-Uqlidisi 17 28 notiert hätte. Jedoch notiert er jedes Paar über das vorangehende- in strenger Analogie zu Kushyars Notation der Sexagesimalbrüche. Al-Uqlidisi hatte für die Verwendung der Dezimalbrüche eine unsystematische Methode, ohne besondere Bezeichnung. Später, nach etwa zwei Jahrhunderte später stellt man fest, dass im Werk von al-Samawal im Kapitel „Algebra“, Dezimalbrüche im Zusammenhang mit der Division und dem Wurzelziehen verwendet wurde. Er führt sie in seiner Abhandlung aus dem Jahr 1172 als Teil einer allgemeinen Methode ein, um die Zahlen mit beliebiger Genauigkeit zu approximieren. Somit benutzte al-Samawal die Dezimalbrüche schon theoretisch, obwohl er noch keinen Namen für sie hatte und seine Schreibweise der von al-Uqlidisi unterlegen ist.

Erst im 15. Jahrhundert bekamen die Dezimalbrüche einen Namen und eine systematische Darstellung. Jamshid al-Kashi ist einer der Mathematiker, der die Arithmetik der Dezimalbrüche so gut beherrschte, dass er sie so multiplizierte, wie wir es noch

heute tun. Außer diesem Wissenschaftler, wird im 15. Jahrhundert in einem byzantinischen Lehrbuch die Arithmetik eine Darstellungsform als „türkisch“ beschrieben, d.h. für uns aus einer islamischen Welt stammend, bei der $153 \frac{1}{2}$ und $164 \frac{1}{4}$ als 153 5 und 164 25 geschrieben werden und ihr Produkt $2492 \frac{3}{4}$ [vgl. Vogel 1978].

Ein Jahrhundert später begannen die europäischen Autoren die Dezimalbrüche zu verwenden. Einer davon war der flämische Ingenieur Simon Stevin, dessen Buch „La Theinde“ (Das Zehntel) im Jahr 1585 erschien. [vgl. Berggren 2011]

5 Sexagesimalarithmetik

Fast 500 Jahre dauert es, vom 10. Bis zum 15. Jahrhundert, die Dezimalbrüche zu entwickeln. Den muslimischen Gelehrten stand jedoch schon seit dem 9. Jahrhundert ein

vollständiges und zufriedenstellendes Stellenwertsystem zur Verfügung, um sowohl ganze Zahlen als auch Brüche darzustellen, jedoch nicht dezimal. Sie verwendeten das Sexagesimalsystem, bei dem die Basis 60 ist [vgl. Berggren 2011].

So fand eine Art Verschmelzung zweier alter Zahlensysteme statt.

Das erste wurde vor ungefähr 2000 v. Chr. von den Babyloniern in Mesopotamien verwendet. Aus den erhaltenen Keilschriften, ist bekannt, dass ein Stellensystem, in dem die aufeinanderfolgenden Stellen einer Zahl die aufeinanderfolgenden Potenzen (mit positiver und mit negativer Hochzahl) zur Basis 60 dargestellt wird. Auf diese Art wurden ganze Zahlen und Brüche auf einheitliche Weise behandelt. Nur benutzten die Babylonier nicht eigene Ziffer für die Zahlen 1 bis 59, sondern bildeten sie, indem

sie den Keil für 1 und 10 wiederholten. Zum Beispiel würden die Babylonier, wie unten in der Abbildung 2.8. zu sehen ist, die ganzen Zahlen 3, 25, 133 und 3752 so darstellen:

$$\text{III}, \text{IIII}, \text{IIII} (2 \times 60 + 13), \quad \text{I} \text{IIIIIIII} (1 \times 60^2 + 2 \times 60 + 3) .$$

Abb. 2.8.

Das System wurde später auf die Brüche erweitert. Da $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$ ist, schrieben sie $\frac{1}{2}$ auch als 30. Also:

$$\frac{7}{360} = \frac{70}{3600} = \frac{60}{3600} + \frac{10}{3600} = \frac{1}{60} + \frac{10}{60^2}$$

Da es kein besonderes Zeichen, um die Einer zu kennzeichnen, tauchten bei diesem Verfahren immer wieder Missverständnisse auf. Besser gesagt, es gibt kein Zeichen wie unsere heutige Dezimalkomma. Es war auch nicht üblich, Nullen am einer ganzen Zahl zu schreiben. Deshalb war die Größe einer Zahl nur bis einen Faktor mit einer Potenz von 60 festgelegt. Somit kann man $1\frac{1}{3}$ auch 80 darstellen. Dieses System wurde später, in der Regierungszeit vom Nachfolger Alexanders in Babylon im 4. Jahrhundert, geklärt. Zu dieser Zeit fingen die Schreiber an die Zahlen mit einem besonderen Symbol zu kennzeichnen, um Nullen innerhalb einer Zahl zu hervorheben. Somit war es möglich die Zahl 71 so zu schreiben, dass es sich eindeutig von 3611 unterschied.

Schon 2000 Jahre vor Beginn unserer Zeitrechnung gab es ein Zahlensystem, was wirklich sehr gut waren, sogar bei komplexen Berechnungen funktionierte. Dieses

System verwendeten sogar die griechischen Astronomen während oder nach dem 2. Jahrhundert für ihre Berechnungen. Darunter war auch der Name Ptolemaios, der

es in der Mitte des 2. Jahrhunderts n. Chr. in seinem Buch der Astronomie „Der Almagest“ auch benutzte.

Die hellenistischen Griechen nahmen das System teilweise auf, nämlich, sie übernahmen bei der Notation des Bruchanteils einer Zahl, änderten sie ihre eigene Methode bei der Darstellung des ganzzahligen Anteils der Zahlen, nicht. Dieses Verfahren ist ein Beispiel für das zweite alte System, auf das wir uns bezogen. In diesem werden die 27 Buchstaben des Alphabets benutzt, um die Zahlen 1, ..., 9; 20, ..., 90; 100, ..., 900 darzustellen.

Die Griechen verwendeten die 27 Buchstaben einer archaischen Form des griechischen Alphabets wie unten in der Abbildung 2.9. zu sehen ist:

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϛ	Ζ	Η	Θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ϟ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Abb.2.9.

Dieses Alphabet was oben abgezeichnet ist, stammt von den Phöniziern. Diesem semitischen Volk haben wir auch das Geld und die Einführung des Alphabets zu ver-

danken.

Dieses System mit dem Nummerieren vom Alphabet war im Mittelmeer sehr verbreitet. Es wurde nicht nur von den Griechen und den Arabern verwendet, sondern auch von den Hebräern und anderen.

„In diesem System wurden Zahlen bis 999 durch eine Buchstabenfolge dargestellt, sodass bei den Griechen 48 und 377 als MH und TOZ geschrieben würden.“ [Berggren 2011] Sie entwickelten eine Methode, um die Zahlen größer als 999 darzustellen, jedoch ist es für uns viel interessanter: die Brüche. Ein griechischer Astronom, der sich mit dem babylonischen System auskannte, erkannte offensichtlich die Möglichkeit der Keilgruppen, welche die Babylonier als Zahlzeichen verwendeten, durch die Buchstaben des Alphabets zu ersetzen. Demzufolge wäre $12\frac{1}{3}$ als IB K geschrieben worden, um damit $(10 + 2) + \frac{20}{60}$ auszudrücken (vgl. Berggren 2011).

Das babylonische Stellenwertsystem wurde von den Griechen übernommen, um Brüche zu schreiben. Zum Beispiel schrieben sie PMB IB für $142\frac{1}{5}$ anstatt des folgerichtigen B KB IB ($= 2 \times 60 + 22 + \frac{12}{60}$).

Die eigentliche Übernahme des babylonischen Systems erfolgte von den islamischen Mathematikern, es wurde ein System entwickelt, was von den Astronomen so oft verwendet wurde, dass es später „Arithmetik der Astronomen“ bekannt wurde. In dem System werden 28 Buchstaben des arabischen Alphabets in einer Reihenfolge benutzt, die sich nicht der Ordnung des Alphabets gleicht. Transkribiert nach dem System Haywood und Nahmad, entsprechen die Buchstaben des arabischen Alphabets mit den Zahlen so, wie es in Abb.2.9 abgebildet sind. Auch wenn das System bis 1000 geht, braucht man in der Arithmetik der Astronomen keinen der Buchstaben

jenseits dem nun (50), da keine Zahl größer als 59 werden kann. Wie in der Abbildung 2.9. zu sehen ist, würde die Zahl 84 als a kd ($= 1 \times 60 + 24$) geschrieben werden, wenn man die arabischen Buchstaben durch die Lateinischen ersetzen würden und lb n stünde für $32 \frac{50}{60}$. Durch diese beiden Beispiele wird es uns klar, wie die Muslime das babylonische System an ihre eigene Schreibweise angepasst haben somit auch viel zur zifferngestützten Schreibweise leisteten.

ا	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ط
A	B	G	D	H	W	Z	H	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ی	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص
I	K	L	M	N	S	C	F	S
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ
Q	R	Sh	T	Th	Kh	Dh	D	Z
100	200	300	400	500	600	700	800	900
غ								
Gh								
1000								

Abb. 2.10

Jedoch existierte noch immer die Mehrdeutigkeit eines Zahlenwerts, wie zum Beispiel b mh kann 165 bedeuten ($= 2 \times 60 + 45$), aber genauso auch $2 \frac{45}{60}$. Nötig war in dem Fall mangels eines Sexagesimalkommas ein anderer Begriff, um solche Mehrdeutigkeiten zu vermeiden. Eine Lösung war für dieses Problem: jede Stelle zu benennen, sodass die Potenzen von 60 mit nichtnegativer Hochzahl (1, 60, 60^2 , ...) „Grad“, „erste Erhöhung“, „zweite Erhöhung“, ..., genannt wurden, während die Potenzen von 60 mit negativer Hochzahl ($\frac{1}{60}$, $\frac{1}{60}^2$, $\frac{1}{60}^3$, ...) als „Minuten“, „Sekunden“, „Tertien“, ... bezeichnet wurden.

Man kann sagen, dass der Ursprung des Wortes „Grad“ in der Astronomie liegt, es bezieht sich auf die 360 Teile, in die der Tierkreis unterteilt wird. Ursprünglich stammt der Begriff „Minuten“ aus dem Arabischen „daqa’iq, heißt so viel wie „fein, klein“. In diesem Fall sind die feinen Teile natürlich „die zweiten, dritten, usw. feinen Teile“.

Die zweite Lösung wäre nur die letzte Stelle zu nennen, sodass „b mh Minuten“ bedeutet, dass der Wert $2 \frac{45}{60}$ gemeint ist.

Kushyar verwendet nicht die Buchstaben des Alphabets, sondern die Formen der indischen Ziffern, wie sie im östlichen Kalifat verwendet wurden. Zum Beispiel drückt Kushyar wie in der Abbildung 2.11. zu sehen ist, das was die anderen Gelehrten als ka h mb darstellen würden, anders aus.

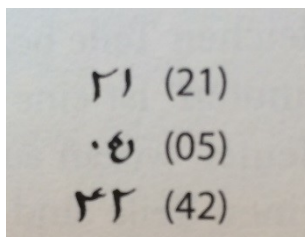


Abb. 2.11

[vgl. Berggren 2011]

5.1 Sexagesimale Addition und Subtraktion

Kushyar versucht die Addition durch folgendes Beispiel zu veranschaulichen: „Wir möchten fünfundzwanzig Grad, dreiunddreißig Minuten und vierundzwanzig Sekunden zu achtundvierzig Grad, fünfunddreißig Minuten und fünfzehn Sekunden addieren.“ Zuerst schreibt er die beiden Zahlen in zwei Spalten, die durch eine leere Spalte voneinander getrennt sind.

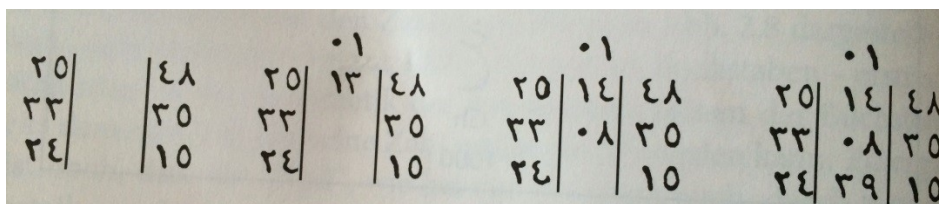


Abb.2.12.

Wie oben in der Abbildung zu sehen ist, steht Grad und Grad einander gegenüber, Minuten und Minuten sowie Sekunden und Sekunden. Danach addiert er fünfundzwanzig zu achtundvierzig, Zehner zu Zehner und Einer zu Einer. Nachher addiert er dreiunddreißig zu fünfunddreißig und vierundzwanzig zu fünfzehn. Immer wenn eine Summe größer als 60 wird, zieht er 60 davon ab, trägt das Ergebnis ein und addiert eines zur Stelle oberhalb. Das ist eben der Grund wieso, in der nächsten Abbildung 2.13. sichtbar, eine „Eins“ darüber steht.

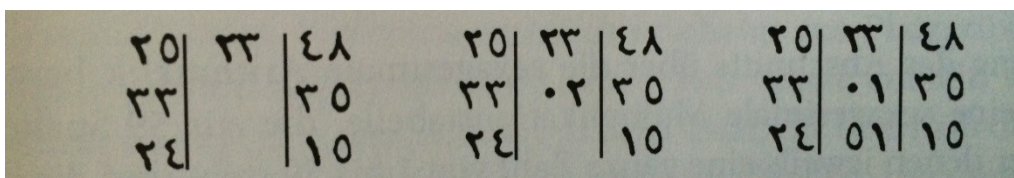


Abb.2.13.

Wenn diese Rechenoperationen auf einer Staubtafel durchgeführt würden, wie es

sich Kushyar auch vorstellt, würde nacheinander, die aufeinander folgenden Teile von Abb. 2.12. zeigen.

Jedoch wäre zum Schluss die letzte Zusammenstellung von Zahlen zu sehen.

Die Subtraktion ist auch sehr leicht. Sie funktioniert von oben nach unten und bei Bedarf leiht man sich eine Eins. Wie auch in der Abbildung 2.13. zu sehen ist, führt er das Subtraktionsverfahren mit den Zahlen aus dem darüber stehendem Beispiel, anstatt er die Zahlen addiert, subtrahiert er sie.

5.2 Sexagesimale Multiplikation

Multiplikation mittels Ausgleichen

Im Gegensatz zur Addition und Subtraktion, unterscheidet sich die Multiplikation extrem von der Division. Sogar sehr gute Mathematiker wie al-Biruni bevorzugten die Sexagesimalzahlen zuerst in einer Dezimalzahl umzuwandeln. Dann die Regeln der indischen Mathematik anzuwenden und danach das Ergebnis in die Sexagesimalform zurückzuwandeln. Diese Rechenmethode war so weit verbreitet, dass es später einen Namen bekam, und zwar „Ausgleichen“. Al-Biruni's Zeitgenosse al-Nasawi löste das Beispiel der Multiplikation der beiden Sexagesimalzahlen $4^{\circ} 15' 20''$ und $6^{\circ} 20' 13''$ auf folgender Weise:

Zuerst wandelte er beide Faktoren in die kleinste Einheit um:

$$4^{\circ} 15' = (4 \times 60)' + 15' = 225'$$

Und

$$255' 20'' = (255 \times 60)'' + 20'' = 15.320''$$

Auf dieser Art und Weise berechnet er den anderen Faktor zu $22.813''$. Al-Nasawi weiß aus den Büchern, in denen dieses Verfahren erklärt wird wie man Produkte von Zahlen mit verschiedenen Einheiten berechnet, dass das Produkt aus Sekunden mal Sekunden die Größenordnung „Quarten“ ergibt. Durch reines Dezimalrechnen erhält er als Produkt 349.495.160 Quarten. Um inverse Operationen durchführen zu

können und die Zahl zu einer Sexagesimalzahl „anzuheben“, muss man sie durch 60 teilen. Somit erhalten wir:

$$349.495.160'''' = (5.824.915 \times 60 + 20)'''' = 5.824.915''' + 20''''.$$

Auf dieselbe Art und Weise rechnet al-Nasawi mit den Tertien, dann mit den Sekunden und schließlich mit den Minuten weiter und erhält $26^{\circ}58'1''59'''20''''$. Dieses Verfahren war zwar ziemlich bekannt und überall verbreitet, jedoch wurde keineswegs ausschließlich verwendet. Außer dieser Methode, erklärt Kushyar auch, wie er zwei sexagesimale Zahlen ohne solch eine Umwandlung miteinander multipliziert werden können.

Multiplikationstabellen

The image shows a fragment of a historical multiplication table. It is a grid with 6 columns and 6 rows of cells. The top row contains the Arabic numerals 1, 2, 3, 4, 5, and 6. The leftmost column contains the Arabic numerals 1, 2, 3, 4, 5, and 6. Each cell in the grid contains a product, written in Arabic script. For example, the cell at the intersection of the first row and first column contains '1', the cell at the intersection of the second row and second column contains '4', and the cell at the intersection of the third row and third column contains '9'. The script is a historical form of Arabic, likely from the 10th or 11th century.

Abb. 2.14.

Die oben abgebildete Multiplikationstabelle Abb. 2.14 besteht aus 59 Spalten, über denen jeweils eine ganze Zahl von 1 bis 59 steht und die jeweils 60 Zeilen umfassen.

So enthält zum Beispiel, die mit 39 überschriebene Spalte in ihren Zeilen die Vielfachen von 39, von 1×39 bis zu 60×39 . So eine Tabelle befindet sich im Buch Kusr's nicht, wurde nur beschrieben. Jedoch sind solche Tabellen in anderen Abhandlungen zu finden. Die Spalte ganz rechts auf jeder Seite mit „die Zahl“ überschrieben und enthält die Buchstaben der Zahlen, normalerweise von 1 bis 30 auf der rechten und von 31 bis 60 auf der linken Seite. Die darauf folgenden Spalten (von rechts nach links, so, wie auch die arabische Schrift läuft) sind mit den Buchstaben der Zahlen von 1 bis 60 überschrieben. (Natürlich gibt es aus Platzgründen nur

eine gewisse Anzahl davon auf einer Seite). Jede Spalte enthält, wie oben erwähnt, die ersten 60 Vielfachen der ganzen Zahlen, die oberhalb der Spalte steht. Allgemein benötigt man zwei sexagesimale Stellen, um diese Vielfachen darzustellen. Zum Beispiel würde das Produkt von 13 (ig) und 8 (h) mit der zweistelligen Zahl geschrieben, die wir mit a md transkribieren würden. Die ersten zwölf Zeilen der drei Spalten ganz rechts in Tafel 2.14. sind in 2.15. transliteriert und übersetzt.

ID	IG	Al'-adad	14	13	die Zahl
ID-	IG-	A	14 0	13 0	1
KH-	KW-	B	28 0	26 0	2
MB-	LT-	G	42 0	39 0	3
NW-	NB-	D	56 0	52 0	4
A I	A H	H	1 10	1 5	5
A KD	A IH	W	1 24	1 18	6
A LH	A LA	Z	1 38	1 31	7
A TB*	A MD	H	1 52	1 44	8
B W	A NZ	T	2 6	1 57	9
B K	B I	I	2 20	2 10	10
B LD	B KG	IA	2 34	2 23	11
B MH	B LW	IB	2 48	2 36	12

* Kopistenfehler für NB

Abb. 2.15.

Die achte Zeile unterhalb der Überschrift steht für $8 \times 13 = 144$ (104) und $8 \times 14 = 152$ (112). (Dabei verwenden wir die Konventionen: n m; r s steht für $n \times 60 + m + \frac{r}{60} + \frac{s}{60^2}$. Eine andere ebenfalls nützliche Schreibweise trennt die sexagesimalen Stellen mittels Kommata n,m; r,s).

Um das Jahr 1600 wurde ein Beispiel einer Multiplikationstabelle entwickelt, höchstwahrscheinlich von einem türkischen Astronomen. Es wird die ersten 60 Vielfachen für jede zweistellige sexagesimale Zahl von 00 01 bis 59 59 angegeben, sodass man in der Tabelle direkt Produkte wie $14\ 34 \times 19 = 4\ 36\ 46$ finden kann. In der Tabelle sind es 212.400 Einträge zu finden und füllt ein Buch mit 90 Seiten. Nicht alle

Astronomen benutzten Tabellen, sondern berechneten ihre Beispiele mit anderen Algorithmen, die ich in den weiteren Seiten beschreiben werde. [vgl. Berggren 2011]

Der erste Algorithmus ist sehr ähnlich zu der Methode, was Kushyar verwendete um zwei Dezimalzahlen zu multiplizieren. Jedoch diesmal schreibt man die Zahlen nicht waagrecht sondern senkrecht geschrieben. Es wird dazwischen auch eine leere Spalte gelassen, die das Produkt aufnehmen soll. In der Abbildung 2.16. ist zu sehen wie Kushyar $25^{\circ}42'$ und $18^{\circ}36'$ multiplizierte.

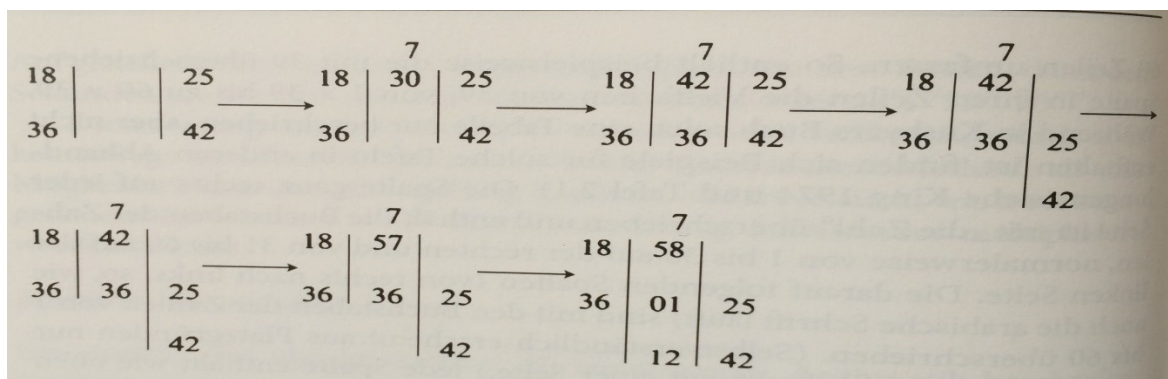


Abb.2.16.

Verfahren der sexagesimalen Multiplikation

Kushyar führt die ersten beiden Schritte für 18 mithilfe der Multiplikationstabelle aus, 30 aus dem ersten Schritt und 12 aus dem zweiten von gleicher Größenordnung, müssen sie im Produkt addiert werden, sodass 30 durch 42 ersetzt wird. In den letzten beiden Schritten, in denen 36 mit 25, danach mit 42 multipliziert wird, muss das Ergebnis zu der Spalte mit dem Endergebnis addiert werden, aber um eine Stelle

nach unten verschoben, da 36 eine Stelle niedriger als 18 ist. Wie auch zu sehen ist das Produkt aus Minuten mal Minuten ergibt Sekunden, deswegen ist das Endprodukt $7^1 58^\circ 1' 12''$ (das heißt: „7erste Erhöhung, 58 Grad, ,1 Minute und 12 Sekunden“)

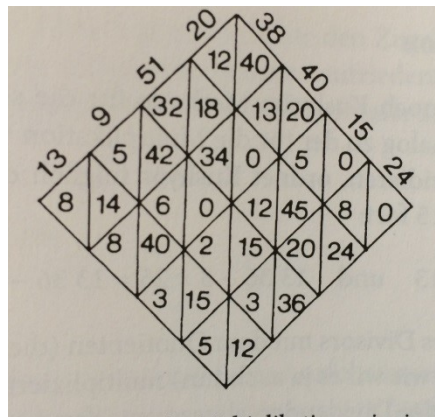


Abb.2.17.

Die in Abb.2.17. zu sehende Multiplikationsmethode nennt al-Kashi die Gelosia-Methode. Sie wird sowohl für die Multiplikation von Dezimalzahlen als auch von Sexagesimalzahlen verwendet, hier ist ein Beispiel für die sexagesimale Multiplikation. Diese Methode für die Multiplikation von Dezimalzahlen war sowohl in der islamischen Welt als auch im Westen sehr verbreitet. In dem Beispiel aus dem Buch „Der Schlüssel des Rechnens“ von Jamshid al-Kashis (in Abb.2.17 abgebildet) wird 13 09 51 20 Minuten mit 38 40 15 24 Tertien multipliziert.

“Da die maximale Anzahl der Stellen vier ist, wird ein Quadrat in ein Gitter von 16 Unterquadraten unterteilt und diese wiederum sind jeweils in zwei gleich große Dreiecke unterteilt. An die beiden Seiten, die sich an der Ecke oben schneiden, werden die beiden Faktoren geschrieben, und zwar so, dass die höchste Stelle des einen und die niedrigste Stelle des anderen Faktors an der oberen Ecke steht. Dann wird in jedes Quadrat das Produkt aus derjenigen beiden Zahlen eingetragen, die an den

zugehörigen äußeren Quadratseiten stehen, und zwar so, dass wenn das Produkt aus zwei Ziffern besteht, die Ziffer der höheren Stelle links, die der niedrigeren Stelle rechts in das Quadrat eingetragen werden. Da zum Beispiel $38 \times 13 = 814$ ergibt, wird die 8 in die linke Hälfte des Quadrats ganz links und die 14 in die rechte Hälfte eingetragen. Sind alle 16 Produkte ausgerechnet, kommt man zum Endergebnis, indem man alle Zahlen in jeder der acht Spalten addiert und die Summen darunter schreibt. Da Minuten mal Tertien die Größenordnung von Quarten haben, ist die niedrigste Größenordnung des Produkts die Quarte.“ [Berggren 2011]

Es ist schwer das Gitter vorzubereiten, jedoch wird es dann mithilfe einer Multiplikationstabelle leichter ausgefüllt. Ein wenig mühsam ist das Addieren der Einträge in den Spalten. Natürlich können die Quadrate in jeder beliebigen Reihenfolge ausgefüllt werden und durch das Gitter wird dann die Unordnung der Zahlen verhindert. Wie schon vorher erwähnt, ist dieses Beispiel ein Teil aus dem Buch al-Kashis „Der Schlüssel des Rechnens“. Jedoch ist es in der Quelle nicht einen Beweis für dieses Verfahren zu finden. Es ist aber einfach draufzukommen, dass das, was in der linken Hälfte eines Quadrats eingetragen wird, genau dem entspricht, was im heute üblichen Verfahren umgesetzt und zum nächsten Produkt addiert wird. Man kann sagen, dass das Raster von selbst für das Übertragen sorgt. Der einzige Unterschied, wie wir es eben nicht machen, ist, dass die Überträge erst zum Schluss, nachdem alle Multiplikationen gemacht sind, addiert werden, die wir eigentlich während dem Rechnen tun.

5.3 Sexagesimale Division

Kushyar verwendet die Methode für die sexagesimale Division, analog zu der für die

Multiplikation, aus. Zuerst stellt er drei Spalten auf, um $49^\circ 36'$ durch $12^\circ 25'$ zu dividieren. und rechnet so wie in Abb.2.18. weiter:

$$49 - 3 \times 12 = 13 \text{ und } 13 \ 36 - 3 \times 25 = 13 \ 36 - 115 = 1221$$

Jede Ziffer des Divisors wird mit dem Quotienten multipliziert, der durch das Ausprobieren herausgefunden wird, wie wir es ja auch machen. Die Lösung wird von einem Teil des Dividenden abgezogen, der darüber steht. Danach wird der Divisor um eins nach unten verschoben, damit die nächste Ziffer des Quotienten, wenn sie in gleicher Höhe wie die oberste Stelle des Divisors eingetragen wird, die richtige Größenordnung hat(in diesem Fall „Minuten“). Nach dem dritten Schritt kommt man zu der Frage „ $12^\circ 25'$ mal wie viele Minuten ergibt etwas, das nicht größer ist als $12^\circ 21'$?“ Die Antwort lautet „59 Minuten“. Die letzten beiden Schritte in Abb.2.18. zeigen die abschließende Ausarbeitung. Schon wieder wendet man die Regel an, dass das Produkt einer Ziffer des Quotienten mit einer Ziffer des Divisors von der Ziffer des Dividenden abgezogen wird, die rechts und oberhalb steht.

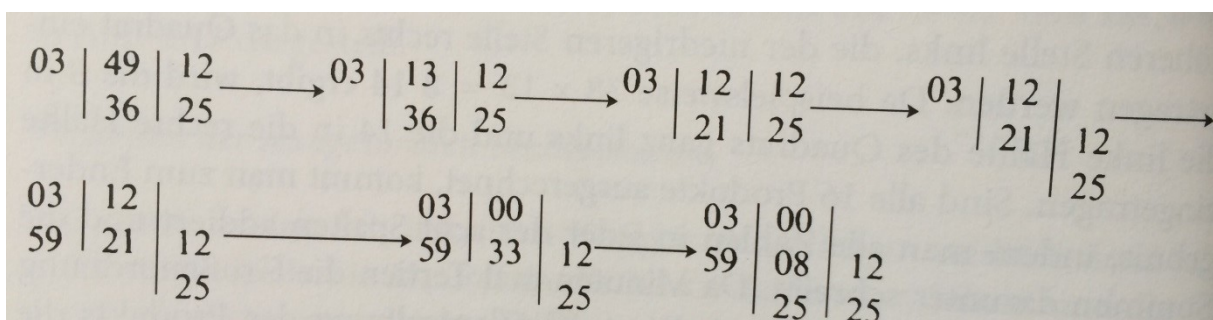


Abb.2.18.

So kommt Kushyar auf die Lösung $3^\circ 59'$ und meint, dass wenn man sich eine größere Genauigkeit wünscht, setzt man den Divisor eine weitere Stelle nach unten. Diese Methode kann so oft benutzt werden bis die gewünschte Anzahl der sexagesimalen

Stellen erreicht ist. Im weiteren Folge sagt Kushyar, dass er in seinem Buch eine Tabelle mit „den Lösungen der Division“ hinzugefügt hat, was genau bedeutet, dass er

Angaben zu der Größenordnung, die man erhält, wenn eine Zahl einer Größenordnung (z.B.: erste Erhöhung) durch eine Zahl einer anderen Größenordnung (z.B. Terten) dividiert wird. Sein Buch schließt Kushyar mit den Überlegungen ab, wie man Quadratwurzeln im sexagesimalen System berechnen kann. Dies ist natürlich eher für die Astronomen sehr bedeutend. Das sexagesimale System war in der islamischen Welt ziemlich weit verbreitet, das eine einheitliche Behandlung sowohl der ganzen Zahlen als auch der Brüche ermöglichte. Es wurden auch für das System spezielle Tafeln verwendet und war somit auch zu allen arithmetischen Verfahren zugänglich, womit man mehr anfangen konnte, als das weniger entwickelte System der Dezimalbrüche.

6 Quadratwurzeln

Nun wenden wir uns an das Buch „Der Schlüssel des Rechnens“, was von Jamshid al-Kashis zwei Jahre vor seinem Tod im Jahre 1429 in Semerkand verfasste. Dieses Werk beinhaltet die elementare Mathematik somit Arithmetik, Algebra und die Vermessungsgeometrie und unterscheidet sich vom Buch des Kushyars einwenig. Wenn wir uns die Kapiteln anschauen, merken wir auch sofort den Unterschied zwischen dem Werk von al-Kashi und al-Kushyars.

Zum Inhalt des Werks: es enthält das Buch auch eine umfassende Behandlung der Dezimalbrüche, eine Tabelle mit Binomialkoeffizienten sowie Algorithmen für

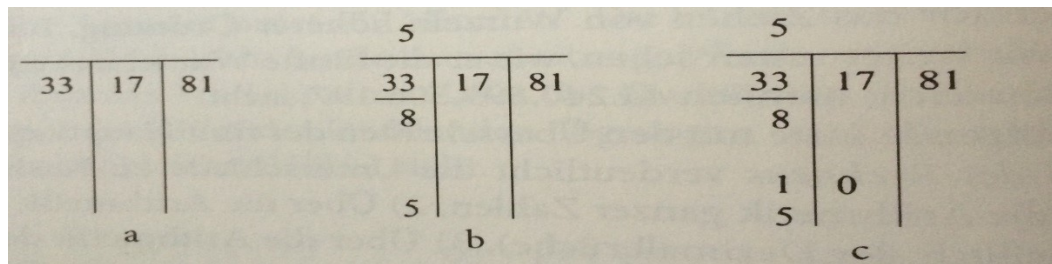
das Ziehen von Wurzeln höherer Ordnung. Zum Beispiel zieht Jamshid al-Kashi die fünfte Wurzel aus einer Zahl im Billionenbereich, nämlich 44.240.899.506.197.

Die Kapiteln im Werk heißen folgend: 1) Über die Arithmetik der ganzen Zahlen; 2) Über die Arithmetik der Brüche (inklusive der Dezimalbrüche); 3) Über die Arithmetik der Astronomen (sexagesimal); 4) Über die Vermessung von ebenen und räumlichen Figuren und zuletzt 5) Über die Lösung von Problemen durch Algebra.

Näherungsweise Bestimmung von Quadratwurzeln

Wir beobachten zunächst wie al-Kashi die Quadratwurzel aus 331.781 zieht. Die Methode was Kashi anwendet, unterscheidet sich eigentlich nicht von der Kushyar's. Der einzige Unterschied ist, dass Kashi mit Papier und Feder arbeitete. In Semerkand gegen Ende des 8. Jahrhunderts erfuhren die Araber zum ersten Mal durch die chinesischen Kriegsgefangenen über die Papierherstellung. Da Semerkand sehr reich an Frischwasser war, blieb sie jahrelang das Zentrum der Papierherstellung. Bei dieser Methode wird keiner der Zwischenschritte weggelassen, meint al-Kashi. Als erstes unterteilt al-Kashi die Ziffern des Radikanten 331.781, von rechts beginnend in Zweiergruppen. Er bezeichnet sie als Zyklen, so wird 331.781 in 33 17 81 unterteilt. Im Gegensatz zu denen von 10, 1000,..., erklärt al-Kashi sind die Zweiergruppen deshalb wichtig, weil die Quadratwurzeln der Zahlen 1, 100, 10.000... ganzzahlig sind. Denn die erste Zweiergruppe (81) gibt die Anzahl der Einer an, die zweite (17) die Anzahl der Hunderter, die dritte (33) die Anzahl der Zehntausender usw. Dann zieht er Linien, eine oberhalb des Radikanten und jeweils eine, um die Zweiergruppe voneinander zu trennen. Am Anfang schaut seine Arbeit wie in Abb. 2.19a

aus. (vgl. Berrgren 2011)



2.19.a-c

Er sucht zuerst die größte Zahl n , sodass n^2 kleiner als 33 ist, damit er die erste der drei Ziffern für die Wurzel heraus bekommt. Da $5^2 = 25$ und $6^2 = 36$ ergibt, wählt er $n = 5$, was sowohl oberhalb als auch unterhalb der 33 geschrieben wird, siehe Abb.2.19.b.

Danach zieht er 25 von 33 ab und erhält 8, was er unterhalb der 33 notiert. Er zeichnet eine Linie unter die 33 um anzuzeigen, dass er mit diesem Vorgang fertig ist.

Hingegen auf der Staubtafel würde die 33 weglöscht und durch die 8 ersetzt. Jetzt verdoppelt er den Teil der Wurzel, den er berechnet hat (5) und schreibt das Ergebnis (10) über die untere 5, aber um eine Stelle nach rechts verschoben, in Abb.2.19.c zu sehen ist. Auf der Staubtafel wäre nur die obere 5, die mittleren 8 17 81 und die untere 10, wie in der Abb.2.19.c. Hier hat al-Kashi eine Lösung gefunden nämlich: (5) ganz oben und eine verdoppelte vorläufige Lösung (10) unten.

Dann versucht al-Kashi den größten Wert für x zu finden, sodass gilt

$$(10 + x) \times x \leq 817$$

$100 + 7 = 749$

und subtrahiert die Lösung von 817, um so zu Abb. 2.20.a zu kommen.

(vgl. Berggren 2011)

$$100 + 7 = 749$$

und subtrahiert die Lösung von 817, um so zu Abb. 2.20.a zu kommen.

(vgl. Berggren 2011)

Figure 1 illustrates the construction of a 3x3 magic square using three diagrams (a, b, c). Each diagram shows a 3x3 grid with numbers and lines indicating the construction process.

Diagram (a) shows the initial numbers: 33, 17, 81 in the top row; 8, 68 in the middle row; and 1, 07 in the bottom row. The columns are labeled 5, 7, and 6 from left to right.

Diagram (b) shows the same numbers, but with 11 and 07 added to the middle row, and 4 added to the bottom row. The columns are labeled 5, 7, and 6 from left to right.

Diagram (c) shows the same numbers, but with 68 and 76 added to the middle row, and 5 added to the bottom row. The columns are labeled 5, 7, and 6 from left to right.

Abb.2.20.a-c

Das Vorgang fängt wieder von vorne an: Er verdoppelt die letzte Stelle von 17 und erhält 114. Dieses schreibt er oberhalb der 107 auf, aber um eine Stelle nach rechts verschoben, wie es in Abb.2.20.b zu sehen ist. Wiederum hat er eine vorläufige Lösung (57) ganz oben und eine verdoppelte vorläufigen Lösung (114) unten. Diesmal sucht er auch den größten Wert für x , sodass $(114 + x) \times x \leq 6881$ ist. Wie wir es heute auch machen, kommt er, durch das Ausprobieren, der Division von 688 durch 114, auf $x = 6$. Da es funktioniert, wird, nachdem 1146×6 von 6881 subtrahiert wurde, die letzte Stelle von 1146 verdoppelt, um wie in Abb.2.20.c. 1146 zu 1152 (= $1146 + 6$) zu verändern.

Wiederum, auf der Staubtafel wäre oben 576 zu sehen, in der Mitte 5 und unten 1152). Somit erhält al-Kashi die Quadratwurzel (576) als vorläufige Lösung und verdoppelt diese unten (1152). Zum Schluss zählt er zu 1152 eins dazu und bekommt 1153 heraus. Am Ende führt er die Division vom Rest, die in der Mitte stehende 5, durch die 1153 durch und erhält als Näherungswert für die Quadratwurzel aus 331.781 die Zahl $576\frac{5}{1153}$ ($\approx 576,00434$). Wenn man eine Kontrollrechnung ausführt, sieht man, dass das Quadrat der letztgenannten Zahl 331.780,996 ist somit al-Kashis Ergebnis dem exakten Wert ziemlich nahe kommt.

(vgl. Berggren 2011)

7 Der wissenschaftliche Austausch zwischen dem Orient und dem Okzident

Damals erfolgte die Vermittlung und Weiterentwicklung wissenschaftlichen Wissens zwischen benachbarten Völkern erstens durch Kaufleute, durch Gesandtschaften oder auch durch Reisende, welche die fremden Länder erkunden wollten. Das Geben und Nehmen, also man gab das eigene Wissen weiter und war auch bereit vom Wissen des Nachbarn aufzunehmen. So kam es stets zu einem Austausch.

Ein gutes Beispiel für die Übernahme fremden Gedankengutes bietet die Entstehung griechischer Wissenschaften in Ionien, wo durch Berührung mit den Nachbarn babylonisches und ägyptisches Wissen bekannt wurde, aus dem dann die Griechen erst eine Wissenschaft gemacht haben, die forschen muss, um die Wahr-

heit zu finden. Sie gaben mehr als sie empfangen. [vgl. Vogel 1978]

Es war bei Byzanz eigentlich auch nicht anders: lange Zeit beschäftigte man sich mit Kenntnissen aus römischer Tradition. Die astronomischen und mathematischen Probleme wurde erst im 12. Jahrhundert bekannt und zwar nicht aus byzantinischen, sondern aus arabischen Quellen. Diese waren sowohl eigene Schriften der Araber, später aber auch griechische Werke, die von den Arabern studiert und in ihre Sprache übersetzt wurden. Später kamen sie nach Italien und Spanien, wo die Gelehrten dann mit lateinischen und hebräischen Übersetzungen ihre Wissensausbreitung fortsetzten.

„Die Ansicht, dass der Westen auf dem Gebiet der Mathematik nur von den Muslimen abhängig gewesen sei, ist in dieser, den Beitrag von Byzanz ausschließenden Formulierung nicht richtig.“ [Vogel 1978]. Da die Originalwerke nur von dort kamen.

Schon zur Zeit von Justinian, wo das Studium der Mathematik zurückging, wurde als Grund zur Erhaltung der Werke der großen hellenistischen Mathematiker gesehen. Es ist eindeutig, dass Euklid, Archimedes, Apollonios und Heron dort studiert und kommtiert wurden. Für Diophant kann man auch das Selbe annehmen: die Aufgaben der arithmetischen Epigramme seien nach Konstantinopel gekommen. In den darauffolgenden drei Jahren kam es zu Unruhen, Drohungen von äußeren Feinden.

Die Tochter Karls des Großen, Rotrud, die gleichzeitig als Gattin des elfjährigen Konstantin vorgesehen war, sollte von einer Gesandtschaft an Karl den Großen im Jahre 781 der Grieche Elissaios in Griechisch unterrichten. Während dem Unterricht mag es auch sein, dass siebyzantinische Rechenverfahren gelehrt wurde, die im „Proposi-

tiones adacuendos iuvenes“ zu finden sind.

Die Sammlung enthält griechische Inhalte, wie es ein Vergleich mit den arithmetischen Epigrammen, bei den Brunnenaufgaben und den „Hau“-Rechnungen zeigt. Ein Problem („Geben und Nehmen“) ist auch dabei, mit dem sich später von Leonardo von Pisa beschäftigte. Es gibt auch Aufgaben orientalischen Ursprungs wie „Problem der hundert Vögel“ oder die „Vom Hund und dem Hasen“, die deutlich von den Arabern beeinflusst wurden, die aber nicht über Spanien gegangen sein können. Interessant ist, dass man in den Aufgaben Tiere des Osten findet, wie z.B.: Kamele, die von einem orientalischen Händler gekauft werden und da man zu dem weiß, dass Beziehungen zwischen den Höfen der Kalifen und Karoliner bestanden haben, wird man hier einen Weg, der von den Arabern direkt und nicht über Spanien ging, in Betracht ziehen.

[vgl. Vogel 1978]

Durch die Studien vom Mathematiker und Philosophen Leon beginnt in Konstantinopel eine zweite Blütezeit. Wichtig ist auch zu erwähnen, dass durch Leon sehr viele griechische Texte bekannt geworden sind. Er hatte auf der Insel Andros, außerhalb der Hauptstadt, einen Lehrer für Mathematik und gleichzeitig auch halbvergessene

Bücher in einer dortigen Klosterbibliothek gefunden.

Der Kalif al-Mamun erfuhr von Leon durch einen Kriegsgefangenen, der ihn auf Leon aufmerksam machte. Somit wollte der Kalif natürlicherweise ihn für seinen Hof gewinnen, denn unter seiner Herrschaft wurden schon vorher viele mathematische Werke übersetzt und studiert. Jedoch nahm der Kaiser Theophilos Leon in den Staatsdienst auf, als er von ihm hörte. Nachher wurde er der „Erster der Philoso-

phen“ und Rektor der neuen Universität am Magnaura-Palast.

Dadurch versammelte er auch Schüler um sich, unter denen auch Slawenapostel Konstantin Kyrillos war, der auch in Mähren das Christentum verbreitete.

Ein anderes Beispiel der Bischof von Kaiserea Arethas, der, wichtige Notizen zu einer Euklid-Vorlesung Leons hinterlassen hat. Man kann behaupten, dass der Westen ihm zu verdanken haben, dass durch seine Bemühungen vieler klassischen mathematischen Literatur erhalten geblieben sind. Er ließ von den Werken Archimedes alles sammeln was aufzufinden war, somit entstand das berühmte Stammhandschrift, die aber leider verloren gegangen ist, die einst dem Goergios Valla gehörte. In dieser Zeit sind weitere Handschriften entwickelte, wie Archetypus von Diophants Arithme-

tik, die aber leider auch verloren gingen. Weiters zwei Almagest-Handschriften sowie die Kommentare von Theon und Pappos, die verlorene Stammhandschrift zu Apollonius und die im Jahre 888 geschriebenen Elemente Euklids, die Arethas für 14 Nomismata erworben hatte.

Inzwischen dehnten die Araber ihre Herrschaft schon bis an den Indus und Ebro aus, wobei sie auch begannen wissenschaftlich aktiv zu werden. Man fing an aus den Quellen zu forschen, die in den eroberten Gebieten: in Ägypten, Syrien, im Iran zu

Verfügung standen. Die westliche und östliche wissenschaftliche Berührung kam erstmals in Syrien. Dort waren in Klöstern schon vieles griechische Werke ins Syrische übersetzt worden. Die Abassidenkalifen ließen in Bagdad neue Bildungszentren

bauen, wo die Übersetzungen indischer und griechischer Schriften stattfanden.

„Bis zum 10. Jahrhundert war auf diese Weise das gesamte griechische Wissen auch auf dem Gebiet der Mathematik und Astronomie den Muslimen zugänglich geworden und auch Werke, deren griechische Fassung verloren ging, sind auf diese Weise erhalten geblieben.“ [Vogel 1978]

Dabei waren die Araber so sehr beschäftigt mit den Werken, dass sie auch begannen von sich aus hervorragende Leistungen abzugeben. In den Bereichen wie Erweiterung des Zahlenbegriffs durch numerische Betrachtung der geometrischen Irrationalitäten, Ausbau der Parallelentheorie, Systematisierung der Kegelschnitte und deren Verwendung zur Lösung höherer Probleme, dann vor allem die Algebra und Trigonometrie. Die arabische Wissenschaft erreichte im 12. Jahrhundert seinen

Höhepunkt, wobei der Westen die arabischen Leistungen bewunderte und begann sich das Wissen anzueignen.

Das Land Spanien ist ein wichtiger Ort für die islamische Wissenschaft gewesen. Erst in Spanien kamen die westlichen Wissenschaftler mit der islamischen Wissenschaft in Berührung. Ein größter Übersetzer war zum Beispiel Gerard von Cremona (1143-1187). Er reiste nach Toledo, um dort Arabisch zu lernen, weil er den Ptolemaios studieren wollte. Mit seinen Kollegen konnte er mindestens 87 Werke aus dem Arabischen übersetzen. Von den griechischen Autoren, die er nach Übersetzungen von Tabit ibn Qurra, Ishaq ben Hunain und Qusta ben Luqa ins Lateinische übertrug, sind besonders zu nennen: Euklid („Elemente“ und „Data“), Ptolemaios

(„Liber Almagesti“), Hypsikles („De ascensionibus“), Thodosios („De sphaeris“ und „De locis habitabilibus“), Geminos („Liber introduotorius ad artem sphaericam“), Menelaos („De figuris sphaericis“), Archimedes („De mensura circuli“) und wahrscheinlich auch des Apollonios „Konika“, von denen ein Fragment in mehreren Handschriften des 14. Jahrhunderts vorliegt. [vgl. Vogel 1978]

Während in Spanien sehr viele Gelehrte tätig waren bereiste der größte englische Gelehrte der Zeit vor Grosseteste Adelhard von Bath (1116-1142), neben Spanien auch Syrien und den Osten. Dabei übersetzte er Werke al-Hwarizmis sowie die älteste lateinische Übersetzung der Elemente Euklids aus dem Arabischen. Adelhard verbrachte seine Zeit auch in Sizilien, wo die wie in ganz Süditalien die Lateiner, die Araber und Juden friedlich lebten. Dort war auch die griechische Sprache und Kultur seit den Zeiten von Archytas und Archimedes lebendig und er lebte unter Sarazenen und Normannenherrschaft weiter. Durch den Auftrag beider sizilianischen Könige Roger II. und Wilhelm I., schaffte man den zweiten Weg, auf dem griechische Mathematik durch die Muslime den Westen erreichte. Auch hier wird sichtbar, dass die Wissenschaft nur durch beider Bemühungen, nämlich der islamischen und christlicher bzw. jüdischer Kulturen, unsere heutige Wissenschaft entstehen konnte.

Aus historischer Sicht sind außerdem folgende Fakten erwähnenswert:

Kaiser Manuel I. Komnenos schloss im Jahre 1158 Frieden mit den Normannen, Kalabrien und Apulien waren für immer verloren. In dieser Zeit wurden griechische Handschriften durch einen griechisch sprechender Sizilianer als Geschenk des Kaisers an Wilhelm I. nach Konstantinopel geschickt. Unter denen es auch der um 1160

in Sizilien übersetzte Almagest gab. Der Übersetzer dieses Werkes ist zwar unbekannt, jedoch wird es vermutet, dass Adelhard von Barth könnte es gewesen sein.

In der Vorrede kommt vor, dass der Autor in Salerno von Aristippus und der Almagest-Handschrift gehört habe. Er hat sich auf den Weg nach Aristippus gemacht, offenbar nach Katania, wo dieser Bischof war. Obwohl er dem Griechischen mächtig war erst noch als Vorübung von Euklid die Data, Optik und Katoptrik sowie von Proclus „De motu“ übersetzt, wobei ihm Eugenius netterweise geholfen habe.

„Dieser „Emir“ Eugenio war ein hoher Beamter am Normannenhof, ein Sizilianer, der Griechisch, Arabisch und Latein beherrschte, hatte schon vorher die nur arabisch erhalten „Optik“ des Ptolemaios ins Lateinische übersetzt. Aristippus war mehr mit philosophischen als mit mathematischen Schriften beschäftigt. Er übertrug aus dem Griechischen einige Werke Platos sowie das vierte Buch der aristotelischen Meteorologie. In der Bibliothek der Normannenherrscher waren um diese Zeit auch zwei Archimedes-Handschriften, darunter die genannte von Leon, die später in die Hände der Hohenstaufen kam und dann nach der Schlacht bei Benevent im Jahre 1266 zum Bestand der ersten päpstlichen Bibliothek gehörte.“ [Vogel 1978]

Nach Konstantinopel kamen nicht nur Gelehrte aus Süditalien, sondern auch aus Norditalien für Besprechungen und Disputationen mit griechischen Theologen. Jakob von Venedig (1136) übersetzte aristotelische Organos, die „Neue Logik“ („Topica“ und die beiden „Analytica“) ins Lateinische. Moses von Pergamos ist ein anderer wichtiger Gelehrter dessen Sammlung griechischer, in Konstantinopel erworbener Manuskripte im Jahre 1136 durch Brand verloren ging. Er selber eine sehr lange Zeit in Venedig. Es gab auch Pisaner, die mehrmals Konstantinopel besuchten und wissenschaftliche Werke übersetzten wie zum Beispiel Burgundio von Pisa. Auch Le-

Leonardo Fibonacci besuchte Konstantinopel vor 1202, in diesem Jahr kam die erste Bearbeitung seines „Liber abaci“ heraus.

Er schrieb all sein mathematisches Wissen in dem oben genannten aber auch in seinem späteren Werk „De Geometria“ nieder, das er bei seinen Reisen um das Mittelmeer gesammelt hatte. Somit kennt er die neuen indisch-arabischen Ziffern und Methoden, die er allen anderen vorzieht. Es ist deutlich, dass er Euklid kannte, da das 10. Buch Irrationalitäten beinhaltet. Man erkennt schon von den Fachwörtern, die er verwendet wie „riti“ oder „apotomi“, dass er diese Kenntnisse dort erworben haben muss, wo man Griechisch sprach.

„Er schreibt auch selbst an manchen Stellen, dass er bei den dortigen Magistern (einen, nämlich, Muscus, nennt er bei Namen) gelernt habe. Ob diese Magister vielleicht ihrerseits von dem weitgereisten Leonardo manches für sie Neues erfahren haben, darüber kann nichts Bestimmtes gesagt werden.“ [Vogel 1978]

Jedoch ist natürlich klar, dass ein westlicher Einfluss, der von dem jüngeren Zeitgenossen Leonardos, Abraham ibn Ezra, ausgeht. Im 15. Jahrhundert war sein Rechenbuch dem Theologen Mordecai Comtino und dem Oberrabbiner Elia Misrachi

bekannt. Leonardo war mit den Gelehrten immer mit dem Kaiser Friedrich II. in Kontakt, da die Normannenkönige ein großer Mittler zwischen dem Abend- und Morgenland waren und dadurch natürlicherweise die friedliche Zusammenarbeit mit den Arabern sehr gut funktionierte. Der englische Philosoph und Astrolog namens Michael Scotus lebte auch am dortigen Hof, der seine Schriften dem Kaiser widmete. Es war in dieser Zeit auch in England ziemlich klar geworden, dass man den griechischen Werken bzw. Quellen nachgehen müsse, damit man in der Wissenschaft vor-

ankommen wollte. Schon Aristippus schickte Übersetzungen an seine englischen Freunde. Genauso wie Johann Basynstoke, der in Athen studierte, schickte von dort Handschriften nach Paris und an seinem Freund Robert Grosseteste. Ohne Kenntnis der Sprache gäbe es keinen Zugang zur Mathematik, die selbst wieder eine Voraussetzung für alle Wissenschaften so sei, meinte der erste Kanzler der Universität Oxford, der gleichzeitig die griechische Kultur begeisterte. [vgl. Vogel 1978]

Während der Kreuzzüge konnten leider wissenschaftliche Gedanken zwischen Ost und West nicht ausgetauscht werden. Wie immer sorgten die Kriege dafür, dass die Kommunikation zwischen den Muslimen und Christen brachen. Was auf die Wissenschaft sehr negativ wirkte. Während des 4. Kreuzzuges im Jahre 1204 wurde sehr viel verstreut und vernichtet und somit ziemlich viele wissenschaftliche Werke verloren gingen. Erst nach der Restauration im Jahre 1261 ist von höheren Studien in Byzanz wieder etwas zu finden. Die Situation war ähnlich wie seinerzeit von Leon, der auch einen neuen Anfang machen musste. Theodoros Metochites (ca. 1260-1332) berichtet, dass er schon in seiner Jugend mit der Mathematik beschäftigte. Es gab aber damals weder Lehrer noch Schüler, nur von Euklid und Nikomachos als

Philosophen konnte man was hören aber nicht zum Beispiel deren Stereometrie oder von den Kegelschnitten des Serenos oder denen des „wunderbarsten Mannes“ Apollonios. Jedoch fand er in Manuel Bryennios einen Lehrer für die Astronomie des Ptolemaios und studierte dann selbst den ganzen Euklid (Stereometrie, Data, Optica, und Katoptrica, Phainomena) und auch mit viel Geduld und Mühe Apollonios.

Also gab es damals doch Handschriften und im 13. Und 14. Jahrhundert kamen noch

ein paar dazu. Zum Beispiel kommentierte Maximos Planudes die Arithmetik Diophants und in einem anderen Buch führte er auch indische Ziffern und Methoden ein.

Dabei fällt auf, dass für die Ziffern die östlichen Formen verwendet wurden. Hin- gegen die frühere Bearbeitung von diesem Werk aus dem Jahre 1253 zeigt, dass westliche Grobarformen vorkommen.

„Haben vielleicht italienische Kaufleute- so berichtet es eine spätere byzantinische Handschrift- oder Leonardo von Pisa, die Lateiner oder Planudes selbst, der Gesand- ter in Venedig war, die westlichen Formen mitgebracht, die dann von ihm- vielleicht von Trapezunt her beeinflusst- durch die östlichen Formen ersetzt wurden? Man sieht hier wohl, dass jetzt vom Osten her ein kleiner Teil der Dankesschuld an By- zanz zurückerstattet wurde.“ [Vogel 1978]

Weiters blieben auch die indischen Ziffern und Methoden bekannt. So arbeitete Niko- laos Rhabdas an dem Rechenbuch von Planudes, das auch herausgegeben wurde. Besonders hob er die Durchführung der Multiplikation und Division hervor.

Noch ein Rechenbuch über die Dezimalbrüche brachten die Türken, die in dieser Zeit dort regierten, heraus. Der persische Direktor der Sternwarte Uluq Begs in

Semerikand namens Al-Kasi führte die aufsteigende Reihe der Zehnerpotenzen ein. Seine Methode wurde natürlich auch von seinen Mitarbeitern verwendet und verbrei- tet. Wie zum Beispiel Qadi Zade al-Rumi und Ali al Qusqi, der im Jahre 1474 in Kon- stantinopel starb. Trapezunt war das Zentrum für die Weiterentwicklung astronomi- scher Studien im 14. Jahrhundert. Dort endete auch die Handelsstraße, die aus Per- sien heranführte. Trapezunt war mit dem Byzanz in kultureller und politischer Hin-

sicht verbunden, als Beispiel können wir den Astronom Gregorios Chionades nennen. Im Auftrag des Kaisers Alexios II. (1297-1330) reiste er dorthin.

Er lernte die Sprache, nahm Bücher besonders mit astronomischen Inhalt und brachte sie nach Trapezunt. Dort gründete er auch eine Akademie, wo sehr viel übersetzt wurde. Ein Beispiel dafür die Übersetzung einer astronomischen Schrift vom Perser Sams- al- Buhari aus dem Jahre 1323, die aus dem arabischen übersetzt wurde.

Ein Kleriker namens Manuel aus Trapezunt konnte anhand dieser Bücher, die Chionades brachte, den Astronomen und Arzt Georgios Chrysokokkes, der selbst ein Buch über Astronomie der Perser schrieb, unterrichten. Isaak Argyros (c.a. 1310-1371) schrieb unter Einfluss der Perser, die Einführung in die handliche astronomische Tafeln. Auch Theodoros Meliteniotes, Großschatzmeister, Archidiakon und „Lehrer der Lehrer“ an der Patriarchenschule in Konstantinopel schrieb im Jahre 1361 eine Astronomie in drei Büchern, das umfangreichste Werk dieser Art.

Er hatte die Werke aus Trapezunt studiert, im Original auch Ptolemaios und Theon. Somit kam die griechische Wissenschaft besonders Astronomie wieder langsam nach Byzanz. In den Jahren 1260-1281 strengte sich der Dominikaner Wilhelm im Westen sehr an, um Übersetzungen wie griechischer, mathematischer, und philosophischer Texte zu bearbeiten. Sogar lebte er selbst in Griechenland, einmal vor 1266, dann

als Erzbischof von Korinth von 1278 bis circa 1281. In der Zwischenzeit hielt er sich am päpstlichen Hof in Viterbo auf, wo ihm die Bibliothek zur Verfügung stand, in der die Bücher der Hohenstaufen waren.

„Seine eigenhändige Übersetzung der Werke von Archimedes ist einem Codex des

Vatikan erhalten, in dem zwei ursprünglich getrennte Werke vereinigt sind.

Dieser enthält fast alles von Archimedes und Eutokios, dann die Katoptrik Herons, das „Analemma“ von Ptomemaios und andere mathematische Schriften.“ [Vogel 1978]

Die Übersetzungen, die von den Gelehrten geleistet wurden, hatten vor dem 15. Jahrhundert auf die Bildungszentren bzw. Universitäten kaum einen Einfluss. Da, dort, im Mittelpunkt immer noch Euklid und Nikomachos, Boetius und das elementare Quadrivium, das im 13. Jahrhundert auch in Byzanz wieder eine – die beste von allen – Bearbeitung durch den Polyhistor Pachymeres (1242-1310) erfuhr. [vgl. Vogel 1978] Noch ein wichtiger Gelehrter, der Mönch Barlaam aus Kalabrien, der auch griechisch sprechen konnte, schrieb eine Abhandlung zur Bereicherung der Sonnenfinsternisse und hinterließ eine griechische Bruch-Proportionenlehre, durch die alte griechische Logik bekannt wurde.

Es gab in den staatlichen, kirchlichen und privaten Bibliotheken von Byzanz Bücher, die von den Lateinern erlernt wurden. Aurispa und Filelfo (der im Jahre 1427 griechi-

sche Vorlesungen in Florenz hielt) brachten Handschriften mit, in denen sich erstmals eine der Kegelschnitte von Apollonios zu finden war. Georg von Trapezunt, einer der bedeutenden Gelehrten, übersetzte mathematische Handschriften, die für den Westen sehr bedeutsam war. Ebenfalls der Kardinal Bessarion schenkte der

Kirche San Marco in Venedig mehr als 776 Werke, darunter auch 482 griechische Handschriften, die fast alle griechische Mathematiker beinhaltete außer vielleicht Diophant. Erst im Jahre 1463 entdeckte Regiomontan, der mit dem Kardinal im Jahre

1461 nach Italien gekommen war, die Handschrift Arithmetica.

Er reiste immer wieder dahin, wo es mathematische und astronomische Werke gab mit der Absicht alle griechischen Mathematiker zu übersetzen und herauszugeben. Die Vorbereitungen und Vorarbeiten von den Handschriften waren schon fertig, die er von Bessarion als Geschenk bekam oder auch selbst sammelte. Jedoch konnte er seine Arbeit nicht vollenden, er starb mit 40 Jahren im Jahr 1476. Später übernahm man die Arbeit durch Gutenbergs Kunst. Das erste griechisch gedruckte mathematische Werk ist das Buch Vallas: „De expetendis et fugiendis rebus“, aus dem Jahr 1501, in dem es auch Auszüge aus den Schriften vieler griechischer Mathematiker gibt. Danach im 16. Jahrhundert werden folgende Werke herausgegeben: Euklids Elemente (von Gynaeus, Basel 1533), der „Almagest“ (von demselben 1538), Archimedes (von Geschauff, Basel 1544).

8 Conclusio

Durch diese Arbeit wollte ich die Geschichte der Mathematik aus unterschiedlichen Perspektiven betrachten. Sowohl die islamischen Gelehrten als auch die christlichen Wissenschaftler wie Euklid, Al-Hwarizmi, Al-Kashi und weitere wichtige Persönlichkeiten leisteten der Mathematik viele wertvolle Beiträge. Nur durch ihre gute Kooperation konnte die heutige moderne Gesellschaft aufgebaut werden. Ein großes Dankeschön an alle Forscher der gestrigen und heutigen Zeit.

9 Literaturverzeichnis

Koran. (610 n.Chr.). Mekka.

Alten. (2003). *4000 Jahre Algebra. Geschichte, Kultur, Menschen.* Berlin: Springer.

Berggren, J. L. (2011). *Mathematik im mittelalterlichen Islam.* Berlin Heidelberg: Springer.

Folkerts/Kunitzsch. (1997). *Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al-Hwarizmi.* München.

Ibn Labban, K. (1965). *Principles of Hindu Reckoning (trans. and comm. M. Levey and M. Petrucci).* Wisconsin: University of Wisconsin Press: Madison and Milwaukee.

Juschkevitich, A. (1964). *Geschichte der Mathematik im Mittelalter.* Basel.

Luckey, P. (1951). *Die Rechenkunst bei Gamsid b. Masud Al-Kasi.* Wiesbaden: Kommissionsverlag Franz Steiner GmbH.

Rebstock, U. (1992). *Rechnen im islamischen Orient: die literarischen Spuren der praktischen Rechenunst.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Vogel, K. (1978). *Beiträge zur Geschichte der Mathematik.* München: Minerva Publikation Saur GmbH.

Wußing, H. (2008). *6000 Jahre Mathematik*. Berlin Heidelberg: Springer.