



universität
wien

MAGISTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Magisterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Evaluierung des linearen Modells von Lin und Tsai zur Prognose von
Sterbewahrscheinlichkeiten“

verfasst von / submitted by

Daniel Povolny, BSc

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magister der Sozial- und Wirtschaftswissenschaften (Mag. rer. soc. oec.)

Wien, 2017 / Vienna 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 066 951

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Magisterstudium Statistik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Erhard Reschenhofer

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer ao. Univ.-Prof. Dr. Erhard Reschenhofer. Indem Sie mich immer mit Ratschlägen unterstützt haben und mir viele Freiheiten gelassen haben, konnte ich ein Thema wählen, dessen Bearbeitung mir wirklich Freude bereitet hat.

Außerdem möchte ich mich bei Joyce Su und bei meinem Vater bedanken, die beide keine Mühen gescheut haben, um Tippfehler und ungelenke Formulierungen der Erstversion aufzuspüren.

Zum Schluss sei noch allen weiteren Familienmitgliedern und Freunden gedankt. Oft waren die gemeinsamen Kaffees und Telefongespräche in den Pausen genauso wichtig für den Fortschritt der Arbeit wie das Tippen am Computer selbst.

Eidesstaatliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die Arbeit selbständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und alle aus ungedruckten Quellen, gedruckter Literatur oder aus dem Internet im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt übernommenen Formulierungen und Konzepte gemäß den Richtlinien wissenschaftlicher Arbeiten zitiert, durch Fußnoten gekennzeichnet bzw. mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Diese schriftliche Arbeit wurde noch an keiner anderen Stelle vorgelegt.

Inhalt

1.	Einleitung.....	7
2.	Die Modelle	10
2.1.	Das lineare Modell von Lin und Tsai (2015)	10
2.2.	Random Walk mit Drift.....	13
2.3.	Lee-Carter Modell.....	16
3.	Vergleich der Modelle	22
3.1.	Daten	22
3.2.	Ergebnisse.....	27
4.	Anwendungsbeispiele	43
4.1.	Lebenserwartung.....	43
4.2.	Versicherungsprämie.....	48
5.	Zusammenfassung.....	53
	Anhang	54
	Anhang 1: Zusätzliche deskriptive Statistik	54
	Anhang 2: Weitere Ergebnisse zum Vergleich im Unterkapitel 3.2	60
	Anhang 3: Vergleich mit weniger Jahren.....	66
	Anhang 4: Abstract	72
	Literaturverzeichnis.....	73
	Tabellenverzeichnis	75
	Abbildungsverzeichnis.....	75

1. Einleitung

Wird die Entwicklung von Sterbewahrscheinlichkeiten verschiedener Altersgruppen betrachtet, lassen sich über die Zeit hinweg einige erfreuliche Veränderungen erkennen. So lag beispielsweise die Säuglingssterblichkeit Österreichs 2013 mit 0,31 Prozent nur noch bei rund einem Achtel des Werts aus dem Jahr 1970 (vgl. Human Mortality Database 2017). Auch die Lebenserwartung insgesamt hat sich in diesem Zeitraum deutlich verbessert (siehe Grafik 1b). Trends dieser Art sind nicht auf Österreich begrenzt und so hat sich die durchschnittliche Lebenserwartung von 34 OECD Ländern ebenfalls merklich erhöht. Sie war 2013 mit 80,5 Jahren um über zehn Jahre höher als noch 1970 (vgl. OECD 2015, S. 46f).

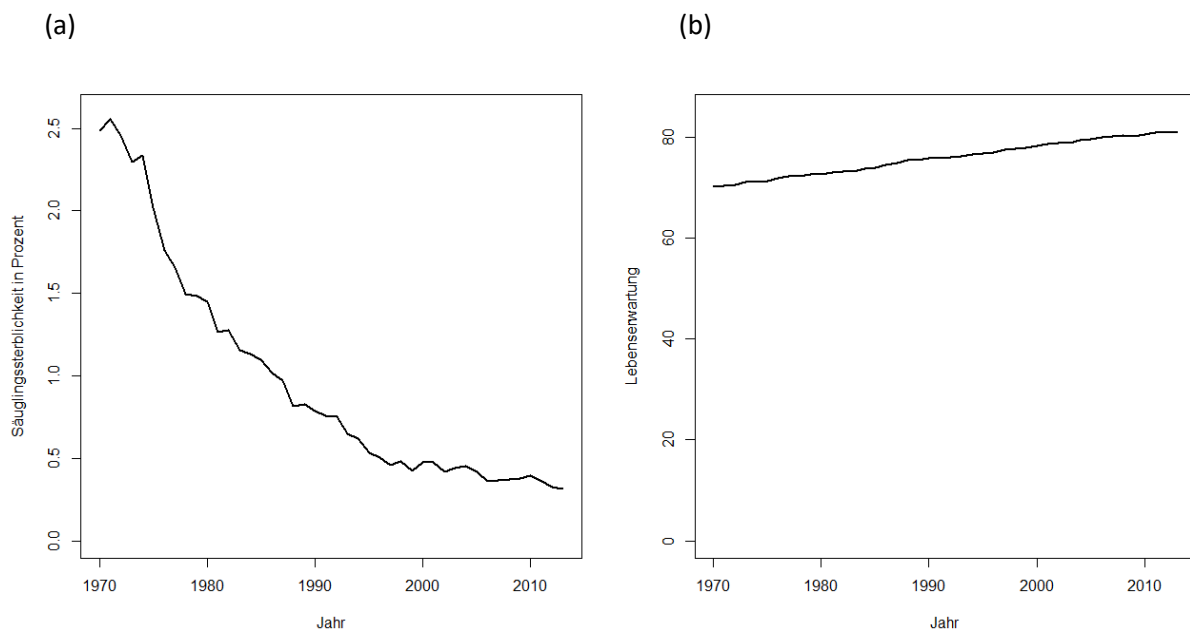


Abbildung 1 Trends in Österreich: (a) Senkung der Säuglingssterblichkeit bzw. (b) Steigerung der Lebenserwartung zwischen 1970 und 2013; Eigene Darstellung; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Die Frage, ob die Sterbewahrscheinlichkeiten der Altersgruppen zukünftig mit einer ähnlichen Geschwindigkeit weiter sinken werden, stößt vermutlich bei vielen Menschen auf persönliches Interesse und ist andererseits auch aus politischen und wirtschaftlichen Gründen relevant. Immerhin würde eine weitere (an sich wünschenswerte) Reduktion der Sterbewahrscheinlichkeiten zu einem demographischen Wandel beitragen, der oft als „Überalterung der Gesellschaft“ bezeichnet wird, und könnte die Regierungen westeuropäischer Nationen vor gewisse fiskalische Herausforderungen hinsichtlich der Sozialausgaben stellen (vergleiche zum Beispiel Bongaarts 2004 oder IMF 2012). Ein ähnliches Problem der Finanzierung kann für Unternehmen auftreten, die Lebensversicherungen

anbieten. Schätzen sie die zukünftigen Sterbewahrscheinlichkeiten niedriger ein als sie tatsächlich sein werden, verlangen sie zu hohe Versicherungsprämien und könnten Kunden dadurch abschrecken. Umgekehrt kann es zu einer Unterfinanzierung durch zu niedrig kalkulierte Prämien kommen, falls die Sterbewahrscheinlichkeiten merklich höher ausfallen, als sie vom Versicherungsunternehmen erwartet werden.

Mit diesem Hintergrund überrascht es kaum, dass es eine breite Literatur zur Modellierung und Prognose von Sterbewahrscheinlichkeiten gibt.¹ Lee und Carter haben 1992 schließlich ein Verfahren entwickelt, das Booth und Tickle (2008, S. 13) in einem Vergleich verschiedenster Modelle als die dominante Methode zur Vorhersage der Mortalität bezeichnen. Es gibt in der Tat eine Reihe an Arbeiten, in denen das Lee-Carter Modell diskutiert, erweitert und angewandt wird (vgl. Koissi et al. 2005, Lee 2000, Lundström und Qvist 2004, Tuljapurkar et al. 2000). Auch das U.S. Census Bureau verwendete im Jahr 2000 eine Variante des Lee-Carter Modells, um eine langfristige Prognose bis zum Jahr 2100 zu erstellen (vgl. Hollmann et al. 2000).

Lin und Tsai veröffentlichten 2015 jedoch einen Artikel, in dem sie zeigen, dass eine einfache lineare Regression in Japan, den USA und dem Vereinigten Königreich mitunter merklich bessere Prognosen liefert als das ursprüngliche Lee-Carter Modell. Dabei fallen aber zwei Aspekte auf, die eine weitere Untersuchung der Ergebnisse motivieren:

- 1.) Das Modell von Lin und Tsai entspricht im Wesentlichen einem AR(1)-Modell der Hazardfunktion. Bei der Berechnung der Regressionskoeffizienten erhalten sie insbesondere bei älteren Personen Werte nahe bei 1 (vgl. Lin und Tsai 2015, S. 547). Diese Beobachtung lässt die Vermutung zu, dass eine Beschreibung der Hazardfunktionen als Random Walk mit Drift in noch besseren Prognosen resultieren könnte. Die Anwendung dieses Modells wird zusätzlich durch eine Arbeit von Bell (1997) motiviert, in der das Random Walk Modell mit Drift ebenfalls zu guten Ergebnissen bei der Vorhersage der Mortalität geführt hat.
- 2.) Wird mithilfe der ursprünglich vorgeschlagenen Version des Lee-Carter Modells eine Vorhersage erstellt, kommt es für das erste Jahr im Prognosezeitraum oftmals zu einer Diskontinuität. Solch ein Knick lässt sich auch in einigen Grafiken bei Lin und Tsai (2015, S. 552) finden. Lee und Carter (1992, S. 665f) schlagen in ihrem Artikel bereits eine einfache Variante vor, mit der dieses Problem beseitigt werden kann, meinen aber, dass sie das Modell trotz Diskontinuität aus anderen Gründen bevorzugen. In einer späteren Publikation bezeichnet Lee dies (gemeinsam mit Miller) aber selbst als einen Fehler und spricht sich für eine Korrektur der Unstetigkeitsstelle aus (vgl. Lee und Miller 2001, S. 539). Es stellt sich die

¹ Ein Überblick über verschiedene Verfahren findet sich unter anderem bei Booth und Tickle (2008) und Waldron (2005).

Frage, ob das lineare Modell von Lin und Tsai (2015) auch dann noch besser als das Lee-Carter Modell funktioniert, falls die Diskontinuität eliminiert wird.

In diesem Sinne soll in der vorliegenden Arbeit überprüft werden, ob die von Lin und Tsai (2015) vorgeschlagene lineare Regression genauere Prognosen liefert als ein simpler Random Walk mit Drift bzw. zwei einfache Varianten des Lee-Carter Modells, die die genannte Diskontinuität gemäß Lee und Carter (1992, S. 665) und Bell (1997, S. 289f) korrigieren. Zu diesem Zweck werden wie bei Lin und Tsai (2015) Daten aus Japan, den USA und dem Vereinigten Königreich sowie aus fünf weiteren Ländern (Österreich, Australien, Finnland, Frankreich, Kanada) herangezogen. Der Zeitraum der Beobachtungen wird mit 1950 bis 2009 ähnlich wie bei Lin und Tsai (2015) angesetzt. Anhand der passenden Sterbetafeln der Human Mortality Database (2017) werden dann Ein-Schritt-Prognosen für die Sterbewahrscheinlichkeiten kalkuliert und den tatsächlichen, beobachteten Werten gegenübergestellt. Zusätzlich werden die Modelle im Rahmen zweier Anwendungsbeispiele getestet, die sich auf die Prognose der Lebenserwartung und der Berechnung fairer Versicherungsprämien beziehen.

Um dieses Ziel zu erreichen, wurde der weitere Aufbau der Arbeit folgendermaßen gewählt: Zuerst werden die interessierenden Modelle im nächsten Kapitel vorgestellt und ausführlich diskutiert. Das zentrale dritte Kapitel geht näher auf die Daten ein und stellt anschließend die Beobachtungen den berechneten Ein-Schritt-Prognosen gegenüber, um festzustellen wie gut die Ergebnisse der linearen Regression im Vergleich zu den anderen Methoden sind. Im vierten Kapitel wird überprüft, ob die zuvor erarbeiteten Resultate hinsichtlich der Prognosefähigkeit im Rahmen der beiden Anwendungsbeispiele bestätigt werden können. Zum Abschluss der Arbeit wird eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse bereitgestellt.

2. Die Modelle

Die lineare Regression von Lin und Tsai (2015) wird in dieser Arbeit nur mit einem Random Walk mit Drift und einigen einfachen Varianten des Lee-Carter Modells verglichen. Wie in der Einleitung angedeutet wurde, finden sich in der Literatur jedoch viele unterschiedliche Versuche, Sterbewahrscheinlichkeiten zu beschreiben. Als alternative Ansätze zu den hier besprochenen Methoden seien beispielsweise die Modelle von Heligman und Pollard (1980) und von Cairns et al. (2006) erwähnt. Wie gut das Modell von Lin und Tsai (2015) im Vergleich zu diesen beiden oder weiteren Methoden prognostiziert, wird in der vorliegenden Arbeit nicht untersucht.

2.1. Das lineare Modell von Lin und Tsai (2015)

Bevor das Modell an sich erläutert werden kann, ist es notwendig einige Definitionen durchzuführen. Hierbei sollte mit der Sterbewahrscheinlichkeit $q_{x,t}$ begonnen werden. Sie steht für den Anteil derjenigen, die sich im Kalenderjahr t im $(x + 1)$ -ten Lebensjahr befinden und innerhalb dieses Lebensjahres versterben. Die Überlebenswahrscheinlichkeit $p_{x,t}$ wird analog definiert und kann direkt aus $q_{x,t}$ berechnet werden:

$$p_{x,t} = 1 - q_{x,t}$$

Interessiert sich die Anwenderin oder der Anwender allgemeiner dafür, wie wahrscheinlich es ist, dass eine Person im Jahr t nach ihrem x -ten Geburtstag noch eine Zeitdauer von s überlebt, so wird dieser Wert als ${}_s p_{x,t}$ notiert. Die Zeitdauer s steht hierbei für eine reelle Zahl, die größer oder gleich Null ist. Mithilfe der Wahrscheinlichkeit ${}_s p_{x,t}$ kann die Hazardfunktion an der Stelle s definiert werden:

$$\mu_{x,t}(s) = -\frac{d}{ds} \log({}_s p_{x,t})$$

Eine alternative Definition der Hazardfunktion beruht darauf, dass für jedes nichtnegative s die folgende Gleichung gilt:

$${}_s p_{x,t} = \exp \left(- \int_0^s \mu_{x,t}(u) du \right) \quad (2.1)$$

Für die vorliegende Arbeit wird angenommen, dass die Hazardfunktion während des gesamten $(x + 1)$ -ten Lebensjahres konstant $\mu_{x,t}$ ist. Dieser Wert kann als augenblickliche

Sterbewahrscheinlichkeit einer x -Jährigen Person im Jahr t interpretiert werden und wird im weiteren Verlauf als Hazardrate bezeichnet. Aus der Definition (2.1) der Hazardfunktion lässt sich sehr einfach ableiten, dass die Hazardrate $\mu_{x,t}$ dem negativen Logarithmus der Überlebenswahrscheinlichkeit $p_{x,t}$ entspricht:

$$p_{x,t} = {}_1p_{x,t} = \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x,t}(u)du\right) = \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x,t}du\right) = \exp(-\mu_{x,t})$$

$$\Rightarrow \mu_{x,t} = -\log(p_{x,t}) = -\log(1 - q_{x,t}) \quad (2.2)$$

Die Hazardrate wird nun von Lin und Tsai verwendet, um ein lineares Modell für die Altersgruppe der x -Jährigen aufzustellen (vgl. Lin und Tsai 2015, S. 544ff):

$$\mu_{x,t_0+l+k-1} = \alpha + \beta \mu_{x,t_0+k-1} + \epsilon_{x,t_0+l+k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.3)$$

Die zu schätzenden Regressionskoeffizienten werden als α und β notiert, während der Fehlerterm als $\epsilon_{x,t_0+l+k-1}$ angeschrieben wird. Über das Verhalten der Störgröße $\epsilon_{x,t_0+l+k-1}$ werden keine Annahmen getroffen. Es gilt zu betonen, dass k der einzige Laufindex im Modell (2.3) ist. Das Alter x , das Basisjahr t_0 und der Lag l sind fixiert. Die Gleichung (2.3) soll demnach beschreiben, wie sich die Hazardrate der x -Jährigen zwischen den Jahren t_0 und $t_0 + l + m - 1$ über die Zeit hinweg verändert. Dies wird noch offensichtlicher, wenn das Modell (2.3) in Vektorschreibweise angeschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} \mu_{x,t_0+l} \\ \mu_{x,t_0+l+1} \\ \vdots \\ \mu_{x,t_0+l+m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu_{x,t_0} \\ 1 & \mu_{x,t_0+1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mu_{x,t_0+m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{x,t_0+l} \\ \epsilon_{x,t_0+l+1} \\ \vdots \\ \epsilon_{x,t_0+l+m-1} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Sind mehrere Altersgruppen von Interesse, so muss das Modell für jedes Alter einzeln geschätzt werden. Ob sich die Hazardfunktionen der verschiedenen Altersgruppen auch gegenseitig beeinflussen, bleibt in (2.3) bzw. (2.4) unberücksichtigt.

Welche Lagstruktur l in (2.3) gewählt werden soll, bleibt der Anwenderin bzw. dem Anwender überlassen. Der Lag l gibt an, dass die heutige Hazardrate durch die Hazardrate vor l Jahren beschrieben wird. Intuitiv erscheint die Entscheidung für $l = 1$ sinnvoll, da sich die heutige Hazardrate vermutlich wohl eher durch die Werte des Vorjahres erklären lässt als durch jene vor mehreren Jahren. Diese Annahme wird auch durch die Ergebnisse von Lin und Tsai gestützt (2015, S. 547-550).

Lin und Tsai (2015, S. 545) verwenden die Kleinste-Quadrate-Methode, um die Parameter α und β zu schätzen. Somit werden die beiden Regressionskoeffizienten in dieser Arbeit wie folgt berechnet:

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mu_{x,t_0+l+k-1}\right) - \beta \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mu_{x,t_0+k-1}\right) \quad (2.5)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{k=1}^m \left(\mu_{x,t_0+k-1} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mu_{x,t_0+k-1}\right) \left(\mu_{x,t_0+l+k-1} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mu_{x,t_0+l+k-1}\right)}{\sum_{k=1}^m \left(\mu_{x,t_0+k-1} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mu_{x,t_0+k-1}\right)^2} \quad (2.6)$$

Hierbei gilt es zu beachten, dass $\hat{\beta}$ unter einer einfachen Annahme ungefähr die Korrelation zwischen den Vektoren $\boldsymbol{\mu} := (\mu_{x,t_0+l}, \mu_{x,t_0+l+1}, \dots, \mu_{x,t_0+l+m-1})^T$ und $\boldsymbol{\mu}_{-1} := (\mu_{x,t_0}, \mu_{x,t_0+1}, \dots, \mu_{x,t_0+m-1})^T$ angibt. Gilt nämlich, dass die Standardabweichungen der beiden Vektoren sehr ähnlich sind, lässt sich die Formel (2.6) mit dem Korrelationskoeffizienten $Corr(\boldsymbol{\mu}_{-1}, \boldsymbol{\mu})$ in Verbindung bringen:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{\sum_{k=1}^m \left(\mu_{x,t_0+k-1} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mu_{x,t_0+k-1}\right) \left(\mu_{x,t_0+l+k-1} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mu_{x,t_0+l+k-1}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\mu_{x,t_0+k-1} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mu_{x,t_0+k-1}\right)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\mu_{x,t_0+l+k-1} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mu_{x,t_0+l+k-1}\right)^2}} \\ \hat{\beta} &\approx \frac{\sum_{k=1}^m \left(\mu_{x,t_0+k-1} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mu_{x,t_0+k-1}\right) \left(\mu_{x,t_0+l+k-1} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mu_{x,t_0+l+k-1}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\mu_{x,t_0+k-1} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mu_{x,t_0+k-1}\right)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\mu_{x,t_0+l+k-1} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mu_{x,t_0+l+k-1}\right)^2}} = Corr(\boldsymbol{\mu}_{-1}, \boldsymbol{\mu}) \end{aligned}$$

Um den Wert der Hazardrate des Jahres $t + l$ zu prognostizieren, können die Kleinste-Quadrate-Schätzer in Gleichung (2.3) eingesetzt werden (wobei der Fehler für die Periode $\epsilon_{x,t+l}$ aus Mangel an Information als Null festgelegt wird). Zur Notation der Prognose wird von nun an immer eine Tilde über der interessierenden Variable verwendet:

$$\tilde{\mu}_{x,t+l} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \mu_{x,t}$$

Da die zukünftigen Überlebens- und Sterbewahrscheinlichkeit aber die eigentlich vorherzusagenden Zielgrößen sind, kann die Transformation aus (2.2) nun rückgängig gemacht werden (vgl. Lin und Tsai 2015, S. 545):

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{x,t+l} &= \exp(-\hat{\alpha} + \hat{\beta} \log(p_{x,t})) = \exp(-\hat{\alpha}) p_{x,t}^{\hat{\beta}} \\ \tilde{q}_{x,t+l} &= 1 - (\exp(-\hat{\alpha}) p_{x,t}^{\hat{\beta}}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Diese Methode schränkt jedoch die Jahre ein, für die prognostiziert werden kann. So ist es beispielsweise nicht offensichtlich, wie vom Jahr t ausgehend eine Vorhersage für $t + 2$ getroffen wird, falls als Lag $l = 3$ festgelegt wurde. Um allgemein eine Prognose für das Jahr $t + n$ (wobei $n > 0$) zu finden, könnte Lagstruktur $l = 1$ verwendet und rekursiv vorgegangen werden: Hierfür wird zuerst die Prognose $\tilde{\mu}_{x,t+1}$ für das nächste Jahr $t + 1$ ermittelt, auf deren Basis dann die Vorhersage $\tilde{\mu}_{x,t+2}$ für das übernächste Jahr $t + 2$ getroffen wird usw. Diese Rekursion wird vorgenommen bis letztendlich die Prognose $\tilde{\mu}_{x,t+n}$ für die Hazardrate des Jahres $t + n$ erreicht ist:

$$\tilde{\mu}_{x,t+2} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \tilde{\mu}_{x,t+1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} (\hat{\alpha} + \hat{\beta} \mu_{x,t}) = \hat{\alpha} + \hat{\alpha} \hat{\beta} + \hat{\beta}^2 \mu_{x,t}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_{x,t+3} &= \hat{\alpha} + \hat{\beta}\tilde{\mu}_{x,t+2} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}(\hat{\alpha} + \hat{\beta}(\hat{\alpha} + \hat{\beta}\mu_{x,t})) = \hat{\alpha} + \hat{\alpha}\hat{\beta} + \hat{\alpha}\hat{\beta}^2 + \hat{\beta}^3\mu_{x,t} \\
&\vdots \\
\tilde{\mu}_{x,t+n} &= \hat{\alpha} + \hat{\beta}\tilde{\mu}_{x,t+n-1} = \hat{\beta}^n\mu_{x,t} + \hat{\alpha}\sum_{i=0}^{n-1}\hat{\beta}^i
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Wird dieses Ergebnis in die Transformation (2.2) eingesetzt, können zudem die Überlebens- und die Sterbewahrscheinlichkeit für n Jahre im Voraus prognostiziert werden:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{x,t+n} &= \exp(-\tilde{\mu}_{x,t+n}) \\
\tilde{q}_{x,t+n} &= 1 - \tilde{p}_{x,t+n}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Es sei jedoch betont, dass diese Methode im Artikel von Lin und Tsai (2015) nicht erwähnt wird. Stattdessen schätzen die beiden Autoren immer ein Modell mit Lag $l = n$, falls eine Prognose für das Jahr $t + n$ gesucht wird.

Bevor im nächsten Schritt auf den Random Walk mit Drift eingegangen wird, erscheint es sinnvoll einen Schwachpunkt des Verfahrens von Lin und Tsai zu erwähnen. Da die Hazardrate in (2.3) als abhängige Variable auf die Hazardraten der vergangenen Jahre regressiert wird, handelt es sich hierbei um ein autoregressives Modell. Bei Modellen dieser Art kann nicht davon ausgegangen werden, dass der Kleinste-Quadrate-Schätzer der beste lineare Schätzer ist. Unter Umständen lohnt es sich eine Alternative (z.B. FGLS-Schätzer) zu verwenden (vgl. zum Beispiel Hackl 2005).

2.2. Random Walk mit Drift

Der Random Walk mit Drift lässt sich für die Hazardraten folgendermaßen anschreiben:

$$\mu_{x,t_0+k} = \alpha + \mu_{x,t_0+k-1} + \epsilon_{x,t_0+k} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, m \tag{2.10}$$

Der einzige Unterschied zum Lin-Tsai Modell mit $l = 1$ besteht darin, dass $\beta = 1$ festgelegt wird. Wie bereits in der Einleitung angemerkt wurde, wird diese Annahme durch die oft hohen Werte des entsprechenden Parameters in der Arbeit von Lin und Tsai (2015) motiviert. So erhalten sie beispielweise für alle untersuchten Altersgruppen der männlichen US-Amerikaner Schätzungen über 0,9. Außerdem liegen auch die meisten Altersgruppen zwischen 40 und 85 Jahren im Vereinigten Königreich und Japan sowohl bei den Männern als auch bei den Frauen zwischen 0,9 und 1 (vgl. Lin und Tsai 2015, S. 547).

Wird in Gleichung (2.10) eine Äquivalenzumformung durchgeführt, ergibt sich ein einfaches lineares Modell für die Variable $\Delta\mu_{x,t}$, die die Differenz der Hazardraten der Jahre t und $t - 1$ beschreibt:

$$\begin{aligned}\mu_{x,t_0+k} - \mu_{x,t_0+k-1} &= \alpha + \epsilon_{x,t_0+k} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, m \\ \Delta\mu_{x,t_0+k} &= \alpha + \epsilon_{x,t_0+k} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, m\end{aligned}\tag{2.11}$$

Diese einfache Regression kann im Vergleich zum linearen Modell von Lin und Tsai (2015) aus verschiedenen Gründen vorteilhaft sein. Ist der wahre Wert des Parameters β gleich Eins, führt die Verwendung des Lin-Tsai Modells mit $l = 1$ im Gegensatz zum Random Walk Modell mit Drift zu Overfitting. Selbst im Falle $\beta \approx 1$, kann die Varianz des Kleinste-Quadrate-Schätzers $\hat{\beta}$ aus (2.6) zu ungenaueren Prognosen führen als der Bias durch das falsche Modell des Random Walks mit Drifts.²

Ein weiterer Vorteil des Modells (2.11) liegt in der Einfachheit des Schätzverfahrens. Indem die Summe der quadrierten Fehler nach α abgeleitet und gleich Null gesetzt wird, kann einfach überprüft werden, dass der Kleinste-Quadrate-Schätzer schlichtweg dem Mittelwert der Differenzen aller beobachteten Hazardraten entspricht:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{k=1}^m \epsilon_{x,t_0+k}^2 &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{k=1}^m (\Delta\mu_{x,t_0+k} - \alpha)^2 = -2 \sum_{k=1}^m (\Delta\mu_{x,t_0+k} - \alpha) \\ -2 \sum_{k=1}^m (\Delta\mu_{x,t_0+k} - \hat{\alpha}) &= 0 \\ (\sum_{k=1}^m \Delta\mu_{x,t_0+k}) - m\hat{\alpha} &= 0 \\ \hat{\alpha} &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \Delta\mu_{x,t_0+k}\end{aligned}\tag{2.12}$$

Gelten die Standardannahmen, dass die Fehler $\epsilon_{x,t}$ in (2.11) Erwartungswert Null haben und sowohl homoskedastisch als auch unkorreliert sind, kann das Gauß-Markov-Theorem angewandt werden. Das bedeutet, dass der Kleinste-Quadrate-Schätzer $\hat{\alpha}$ der beste lineare erwartungstreue Schätzer für das Random Walk Modell (2.11) ist (vgl. zum Beispiel Hackl 2005). Im Gegensatz zum autoregressiven Modell nach Lin und Tsai (2015) muss also nicht überlegt werden, ob die Anwendung eines komplexeren FGLS-Schätzers sinnvoller wäre.

Um Prognosen für das Jahr $t + 1$ zu berechnen, wird zuerst die erwartete Differenz des nächsten Jahres $\widetilde{\Delta\mu}_{x,t+1}$ und darauf aufbauend $\tilde{\mu}_{x,t+1}$ bestimmt. Im Anschluss lassen sich die Prognosen für die Überlebens- und Sterbewahrscheinlichkeit ermitteln, indem die Transformation (2.2) rückgängig gemacht wird:

² Eine genauere Diskussion über Bias und Overfitting eines Modells findet sich beispielsweise bei James et al. (2013, Kapitel 2).

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}\mu_{x,t+1} &= \hat{\alpha} \\
\tilde{\mu}_{x,t+1} &= \widetilde{\Delta}\mu_{x,t+1} + \mu_{x,t} = \hat{\alpha} + \mu_{x,t} \\
\tilde{p}_{x,t+1} &= \exp(-\hat{\alpha} - \mu_{x,t}) = \exp(-\hat{\alpha})p_{x,t} \\
\tilde{q}_{x,t+1} &= 1 - (\exp(-\hat{\alpha})p_{x,t}) \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Um eine Prognose für n Jahre im Voraus zu erstellen, kann wiederum rekursiv vorgegangen werden: Zunächst wird $\tilde{\mu}_{x,t+1}$ bestimmt, mit dessen Hilfe eine Prognose für die übernächste Periode ermittelt wird usw. bis schließlich $\tilde{\mu}_{x,t+n}$ gefunden wird. Hierbei gilt es zu beachten, dass die Prognose für die Differenz der Hazardraten unabhängig vom Prognosejahr immer gleich $\hat{\alpha}$ ist:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_{x,t+2} &= \widetilde{\Delta}\mu_{x,t+2} + \tilde{\mu}_{x,t+1} = \hat{\alpha} + (\hat{\alpha} + \mu_{x,t}) = 2\hat{\alpha} + \mu_{x,t} \\
\tilde{\mu}_{x,t+3} &= \widetilde{\Delta}\mu_{x,t+3} + \tilde{\mu}_{x,t+2} = \hat{\alpha} + (2\hat{\alpha} + \mu_{x,t}) = 3\hat{\alpha} + \mu_{x,t} \\
&\vdots \\
\tilde{\mu}_{x,t+n} &= \widetilde{\Delta}\mu_{x,t+n} + \tilde{\mu}_{x,t+n-1} = \hat{\alpha} + ((n-1)\hat{\alpha} + \mu_{x,t}) = n\hat{\alpha} + \mu_{x,t}
\end{aligned}$$

Die Prognosen für die Überlebens- und Sterbewahrscheinlichkeit für n Jahre im Voraus ergeben sich dann wiederum auf Basis der Transformation (2.2):

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{x,t+n} &= \exp(-\tilde{\mu}_{x,t+n}) \\
\tilde{q}_{x,t+n} &= 1 - \tilde{p}_{x,t+n}
\end{aligned}$$

Zum Abschluss der Analyse des Random Walk Modells sei nochmals die Einfachheit der Methode hervorgehoben. Es gibt wohl kaum eine intuitivere und simplere Prognose für die Veränderung der Hazardrate im kommenden Jahr als deren Durchschnittswert aus der Vergangenheit. Der Schätzer $\hat{\alpha}$ aus (2.12) könnte demnach auch als naiver Schätzer bezeichnet werden, der als Benchmark für die anderen Modelle fungiert und den es zu übertrumpfen gilt. Fallen die Prognosen auf Basis der Methode von Lin und Tsai deutlich schlechter aus als diejenigen des Random Walks mit Drifts, kann die Sinnhaftigkeit des Lin-Tsai Modells in Zweifel gezogen werden.

2.3. Lee-Carter Modell

Das Modell von Lee und Carter (1992) beruht auf der Modellierung einer weiteren wichtigen Variablen, nämlich der zentralen Sterberate $m_{x,t}$. Sie wird folgendermaßen definiert:

$$m_{x,t} = \frac{q_{x,t}}{\int_0^1 s p_{x,t} ds}$$

Prinzipiell wird die logarithmierte zentrale Sterberate im Lee-Carter Modell als abhängige Variable wie folgt zerlegt:

$$\log(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \epsilon_{x,t} \quad , \quad x = x_L, x_L + 1, \dots, x_U \quad \text{und} \quad t = t_L, t_L + 1, \dots, t_U$$

Bevor jedoch näher auf das Modell eingegangen wird, erscheint es sinnvoll darauf einzugehen, dass das Modell auch anders angeschrieben werden kann. Gegeben der in Unterkapitel 2.1 getroffenen Annahme, dass die Hazardfunktion während des gesamten $(x + 1)$ -ten Lebensjahres konstant ist, lässt sich nämlich zeigen, dass die zentrale Sterberate und die Hazardrate äquivalent sind. Um dies zu überprüfen, wird die zentrale Sterberate $m_{x,t}$ in einem ersten Schritt gemäß der Gleichung (2.1) mit der Hazardrate in Verbindung gebracht. Da die Hazardfunktion während eines Lebensjahres als konstant angenommen wird, können die Integrale dann sehr einfach gelöst werden:

$$\begin{aligned} m_{x,t} &= \frac{q_{x,t}}{\int_0^1 s p_{x,t} ds} = \frac{q_{x,t}}{\int_0^1 \exp(-\int_0^s \mu_{x,t} du) ds} = \frac{q_{x,t}}{\int_0^1 \exp(-s \mu_{x,t}) ds} \\ \Rightarrow m_{x,t} &= \frac{q_{x,t}}{\left. \frac{1}{-\mu_{x,t}} \exp(-s \mu_{x,t}) \right|_{s=0}^1} = \frac{q_{x,t}}{\frac{1}{-\mu_{x,t}} (\exp(-\mu_{x,t}) - 1)} = \frac{\mu_{x,t} q_{x,t}}{1 - \exp(-\mu_{x,t})} \end{aligned}$$

Nun gilt es nur noch zu erkennen, dass $1 - \exp(-\mu_{x,t})$ gemäß der Transformation (2.2) gleich der Sterbewahrscheinlichkeit $q_{x,t}$ ist, um einzusehen, dass die zentrale Sterbe- und die Hazardrate denselben Wert aufweisen müssen:

$$\Rightarrow m_{x,t} = \frac{\mu_{x,t} q_{x,t}}{1 - \exp(-\mu_{x,t})} = \frac{\mu_{x,t} q_{x,t}}{q_{x,t}} = \mu_{x,t}$$

In diesem Sinn wird in der vorliegenden Arbeit stets der Logarithmus der Hazardrate anstatt der zentralen Sterberate als abhängige Variable des Lee-Carter Modells genutzt:

$$\log(\mu_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \epsilon_{x,t} \quad , \quad x = x_L, x_L + 1, \dots, x_U \quad \text{und} \quad t = t_L, t_L + 1, \dots, t_U \quad (2.14)$$

Nachdem diese leichte Änderung des Lee-Carter Modells durchgeführt wurde, kann nun näher auf die einzelnen Größen und Indizes eingegangen werden. Der erste wichtige Unterschied zu den Methoden aus den früheren Unterkapiteln ist die Tatsache, dass es im Lee-Carter Modell zwei

Laufindizes gibt. Bei der Regression von Lin und Tsai kann durch die Schätzung ihres Modells (2.3) nur beschrieben werden, wie sich die Hazardrate einer *einzigen* Altersgruppe über die Zeit hinweg verändert hat. Durch die Anwendung des Lee-Carter Modells (2.14) sollen hingegen die logarithmierten Hazardraten *aller* Altersgruppen zwischen x_L und x_U in den Kalenderjahren von t_L bis t_U beschrieben werden. Die Matrixschreibweise des Lee-Carter Modells würde demnach deutlich komplexer ausfallen als jene des Lin-Tsai Modells in (2.4):

$$\begin{pmatrix} \mu_{x_L, t_L} & \mu_{x_L, t_{L+1}} & \dots & \mu_{x_L, t_U} \\ \mu_{x_{L+1}, t_L} & \mu_{x_{L+1}, t_{L+1}} & \dots & \mu_{x_{L+1}, t_U} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{x_U, t_L} & \mu_{x_U, t_{L+1}} & \dots & \mu_{x_U, t_U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{x_L} & \alpha_{x_L} & \dots & \alpha_{x_L} \\ \alpha_{x_{L+1}} & \alpha_{x_{L+1}} & \dots & \alpha_{x_{L+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{x_U} & \alpha_{x_U} & \dots & \alpha_{x_U} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{x_L} \\ \beta_{x_{L+1}} \\ \vdots \\ \beta_{x_U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{t_L} & k_{t_{L+1}} & \dots & k_{t_U} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{x_L, t_L} & \epsilon_{x_L, t_{L+1}} & \dots & \epsilon_{x_L, t_U} \\ \epsilon_{x_{L+1}, t_L} & \epsilon_{x_{L+1}, t_{L+1}} & \dots & \epsilon_{x_{L+1}, t_U} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{x_U, t_L} & \epsilon_{x_U, t_{L+1}} & \dots & \epsilon_{x_U, t_U} \end{pmatrix}$$

Die Idee des Lee-Carter Modells ist es, die logarithmierten Hazardraten so zu zerlegen, dass α_x die generelle Struktur für die Altersgruppe x vorgibt, während k_t ein Index für das generelle Niveau der Mortalität im Jahr t ist. Der Koeffizient β_x beschreibt, wie sich eine Veränderung von k_t auf die Mortalität auswirkt (vgl. Lee und Miller 2001, S. 538). Der Fehler, der sich bei der Beschreibung der logarithmierten Hazardrate für die Altersgruppe x im Jahr t ergibt, wird wiederum als $\epsilon_{x,t}$ bezeichnet.

Die einzigen beobachteten Werte, die in die Gleichung (2.14) eingehen, sind die logarithmierten Hazardraten. Das Lee-Carter Modell ist demnach keine einfache lineare Regression, da k_t unbekannt ist. Folglich gilt es die Größen α_x , β_x und k_t zu bestimmen. Eine eindeutige Lösung gibt es bei dieser Zerlegung allerdings nicht. Immerhin gilt für jede Zerlegung $\alpha_x = a$, $\beta_x = b$ und $k_t = k$, dass die Abänderung mithilfe einer beliebigen Konstanten c (ungleich Null) in Form von $\alpha_x = a$, $\beta_x = b/c$, $k_t = k * c$ oder $\alpha_x = a + c$, $\beta_x = b$, $k_t = k - c/b$ die gleichen Ergebnisse liefert wie die ursprüngliche Lösung (vgl. Lee und Carter 1992, S.661). In dieser Arbeit wird eine einfache Zerlegung der folgenden Art durchgeführt (vgl. Lee und Carter 1992, Appendix A):

- 1.) Setze $\sum_{t=t_L}^{t_U} \hat{k}_t = 0$, $\sum_{x=x_L}^{x_U} \hat{\beta}_x = 1$ sowie für die Fehler $\sum_{t=t_L}^{t_U} \hat{\epsilon}_{x,t} = 0$ und $\sum_{x=x_L}^{x_U} \hat{\epsilon}_{x,t} = 0$.

Daraus folgt für das Modell (2.14):

$$\sum_{t=t_L}^{t_U} \log(\mu_{x,t}) = \sum_{t=t_L}^{t_U} \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \sum_{t=t_L}^{t_U} \hat{k}_t + \sum_{t=t_L}^{t_U} \hat{\epsilon}_{x,t} \Rightarrow \hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_U - t_L + 1} \sum_{t=t_L}^{t_U} \log(\mu_{x,t})$$

$$\sum_{x=x_L}^{x_U} \log(\mu_{x,t}) = \sum_{x=x_L}^{x_U} \hat{\alpha}_x + \hat{k}_t \sum_{x=x_L}^{x_U} \hat{\beta}_x + \sum_{x=x_L}^{x_U} \hat{\epsilon}_{x,t} \Rightarrow \hat{k}_t = \sum_{x=x_L}^{x_U} (\log(\mu_{x,t}) - \hat{\alpha}_x) \quad (2.15)$$

- 2.) Berechne die folgende einfache Regression für jede Altersgruppe x um $\hat{\beta}_x$ zu erhalten:

$$\log(\mu_{x,t}) - \hat{\alpha}_x = \beta_x \hat{k}_t + \epsilon_{x,t} \quad , \quad t = t_L, t_L + 1, \dots, t_U$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_x = \frac{\sum_{t=t_L}^{t_U} \hat{k}_t * (\log(\mu_{x,t}) - \hat{\alpha}_x)}{\sum_{t=t_L}^{t_U} \hat{k}_t^2} \quad (2.16)$$

Die Berechnungsmethoden von $\hat{\alpha}_x$ und $\hat{k}_t$ machen intuitiv durchaus Sinn. So ergibt sich der Wert $\hat{\alpha}_x$, der die Struktur für die Altersgruppe der x -Jährigen vorgeben soll, nämlich als der Durchschnitt der logarithmierten Hazardraten dieser Gruppe zwischen den Jahren t_L bis t_U . Der Wert von $\hat{k}_t$, der das generelle Level der Mortalität eines Jahres widerspiegeln soll, ist ebenfalls nachvollziehbar. War die Mortalität im Kalenderjahr t für jede Altersgruppe überdurchschnittlich hoch, so ergibt sich ein positives $\hat{k}_t$. Im konträren Fall einer sehr niedrigen beobachteten Mortalität für jede Altersgruppe im Jahr t , ist $\hat{k}_t$ in diesem Jahre negativ. Da über die Zeit hinweg von einem Sinken der Sterbewahrscheinlichkeiten ausgegangen wird, überrascht es kaum, dass sich in Anwendungen des Lee-Carter Modells für die USA, Dänemark, Finnland, Norwegen und Schweden gezeigt hat, dass die durch die $\hat{k}_t$'s eines Landes gebildete Zeitreihe prinzipiell einen negativen Trend aufweist (vgl. die Ergebnisse von Lee und Carter 1992 oder Koissi et al. 2005). Für ein genaueres Verständnis der Entwicklung dieser Zeitreihe kann versucht werden die $\hat{k}_t$'s als ARIMA-Prozess darzustellen. Wie die Ordnung für einen solchen ARIMA-Prozess gewählt werden soll, lässt sich beispielsweise bei Box und Jenkins (1976) nachlesen. In der Praxis wird aber oft ein einfacher Random Walk mit Drift angewandt, um die Entwicklung von $\hat{k}_t$ zu beschreiben (vgl. z.B. Booth und Tickle 2008, Lee und Carter 1992):

$$\hat{k}_t = \theta + \hat{k}_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad t = t_L, t_L + 1, \dots, t_U \quad (2.17)$$

Die Herleitung des Schätzers für θ ist analog zu derjenigen von (2.12) im Unterkapitel zum Random Walk mit Drift. Somit ergibt sich der folgende Schätzer:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{t_U - t_L} \sum_{t=t_L+1}^{t_U} \Delta \hat{k}_t = \frac{1}{t_U - t_L} \sum_{t=t_L+1}^{t_U} (\hat{k}_t - \hat{k}_{t-1})$$

Dieser Schätzer ist essenziell für das Prognostizieren im Rahmen des Lee-Carter Modells. Um die logarithmierte Hazardrate für das Jahr $t_U + 1$ zu prognostizieren, wird im ersten Schritt nämlich eine Vorhersage für das generelle Level der Mortalität $\tilde{k}_{t_U+1}$ benötigt. Diese Prognose $\tilde{k}_{t_U+1}$ wird gemeinsam mit den zuvor kalkulierten Werten für $\hat{\alpha}_x$ und $\hat{\beta}_x$ in das Modell (2.14) eingesetzt (wobei der Fehler ϵ_{x,t_U+1} des nächsten Jahres natürlich unbekannt ist und somit vernachlässigt wird). Da die eigentliche Hazardrate für das Jahr $t_U + 1$ interessanter ist als deren logarithmierter Wert, kann nun noch die Exponentialfunktion angewandt werden:

$$\tilde{k}_{t_U+1} = \hat{\theta} + \hat{k}_{t_U}$$

$$\tilde{\mu}_{x,t_U+1} = \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \tilde{k}_{t_U+1}) = \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x (\hat{\theta} + \hat{k}_{t_U})) = \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_{t_U}) \exp(\hat{\beta}_x \hat{\theta})$$

Um das Ergebnis etwas verständlicher darzustellen, können die Größen $\hat{\mu}_{x,t_U} := \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_{t_U})$ und $r := \exp(\hat{\beta}_x \hat{\theta})$ definiert werden. Ein Vergleich mit der Gleichung (2.14) zeigt, dass $\hat{\mu}_{x,t_U}$ als

Approximation der beobachteten Hazardrate im Jahr t_U angesehen werden kann. Die Vorhersage $\tilde{\mu}_{x,t_U+1}$ wird demnach als Produkt der vorjährigen Approximation $\hat{\mu}_{x,t_U}$ und der Rate r bestimmt:

$$\tilde{\mu}_{x,t_U+1} = \hat{\mu}_{x,t_U} * r \quad (2.18)$$

Die Prognosen für die Überlebens- und Sterbewahrscheinlichkeit ergeben sich wie bei den anderen Modellen, indem die Transformationen aus (2.2) rückgängig gemacht werden:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{x,t_U+1} &= \exp(-\tilde{\mu}_{x,t_U+1}) = \exp(-\hat{\mu}_{x,t_U} * r) \\ \tilde{q}_{x,t_U+1} &= 1 - (\exp(-\hat{\mu}_{x,t_U} * r)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Wie auch beim Lin-Tsai Modell und dem Random Walk mit Drift, kann eine Prognose für n Jahre im Voraus gefunden werden, indem eine Rekursion durchgeführt wird. Mithilfe der Prognose $\tilde{\mu}_{x,t_U+1}$ wird $\tilde{\mu}_{x,t_U+2}$ berechnet, wobei dieser Wert wiederum für die Prognose für drei Jahre im Voraus genutzt wird usw. Wird die Gleichung (2.18) verwendet, dann zeigt sich, dass die Rekursion besonders einfach ist:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{x,t_U+2} &= \tilde{\mu}_{x,t_U+1} * r = (\hat{\mu}_{x,t_U} * r) * r = \hat{\mu}_{x,t_U} * r^2 \\ \tilde{\mu}_{x,t_U+3} &= \tilde{\mu}_{x,t_U+2} * r = (\hat{\mu}_{x,t_U} * r^2) * r = \hat{\mu}_{x,t_U} * r^3 \\ &\vdots \\ \tilde{\mu}_{x,t_U+n} &= \tilde{\mu}_{x,t_U+n-1} * r = (\hat{\mu}_{x,t_U} * r^{n-1}) * r = \hat{\mu}_{x,t_U} * r^n \end{aligned}$$

Die Prognosen der Überlebens- und Sterbewahrscheinlichkeiten für n Jahre im Voraus ergeben sich erneut durch Einsetzen in die Transformation (2.2):

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{x,t+n} &= \exp(-\tilde{\mu}_{x,t+n}) \\ \tilde{q}_{x,t+n} &= 1 - \tilde{p}_{x,t+n} \end{aligned}$$

Die bisherigen Erläuterungen beschreiben die Vorgangsweise, die Lin und Tsai (2015) verwenden, um Prognosen für das Lee-Carter Modell zu erstellen, die sie dann mit den Ergebnissen ihrer linearen Regression vergleichen. Wie in der Einleitung dieser Arbeit bereits erwähnt wurde, kann diese Form der Anwendung des Lee-Carter Modells aber zu einer auffallenden Differenz zwischen der letzten Beobachtung und dem ersten Jahr der Vorhersage führen. Als Ursache dieser Diskontinuität kann nochmals die Gleichung (2.18) herangezogen werden. Sie zeigt nämlich, dass die Prognose $\tilde{\mu}_{x,t_U+1}$ auf Basis der Approximation des letzten Jahres $\hat{\mu}_{x,t_U}$ berechnet wird. Stattdessen wäre es

wünschenswert, wenn sie auf der tatsächlichen Beobachtung μ_{x,t_U} beruht (vgl. Bell 1997). Um dieses Problem zu bereinigen, werden in der vorliegenden Arbeit zwei Ansätze verwendet:

- 1.) Korrektur nach Bell (1997): Ersetze die Approximation $\hat{\mu}_{x,t_U}$ in (2.18)-(2.19) einfach durch die Beobachtung μ_{x,t_U} :

$$\tilde{\mu}_{x,t_U+1} = \mu_{x,t_U} * r$$

$$\tilde{p}_{x,t_U+1} = \exp(-\mu_{x,t_U} * r)$$

$$\tilde{q}_{x,t_U+1} = 1 - (\exp(-\mu_{x,t_U} * r))$$

Bei der Herleitung für Prognosen n Jahre im Voraus gilt es ebenfalls lediglich die Approximation $\hat{\mu}_{x,t_U}$ durch die Beobachtung μ_{x,t_U} zu ersetzen:

$$\tilde{\mu}_{x,t_U+n} = \mu_{x,t_U} * r^n$$

$$\tilde{p}_{x,t+n} = \exp(-\tilde{\mu}_{x,t+n})$$

$$\tilde{q}_{x,t+n} = 1 - \tilde{p}_{x,t+n}$$

- 2.) Korrektur nach Lee-Carter (1992): Die Normierung $\sum_{t=t_L}^{t_U} \hat{k}_t = 0$ und deren Implikation

$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_U - t_L + 1} \sum_{t=t_L}^{t_U} \log(\mu_{x,t})$ werden aufgegeben. Stattdessen wird $\hat{k}_{t_U} = 0$ festgelegt und für jedes Alter x wird $\hat{\alpha}_x = \log(\mu_{x,t_U})$ gewählt. Alle weiteren Berechnungen und Prognosen erfolgen ident wie für das unkorrigierte Lee-Carter Modell beschrieben wurde. Es gilt lediglich zu beachten, dass immer $\hat{\alpha}_x = \log(\mu_{x,t_U})$ statt wie bisher $\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_U - t_L + 1} \sum_{t=t_L}^{t_U} \log(\mu_{x,t})$ verwendet werden muss. Der Grund, weshalb bei der Prognose auf diese Weise keine Probleme mehr auftreten, liegt darin, dass die Approximation $\hat{\mu}_{x,t_U}$ nun gleich der Beobachtung μ_{x,t_U} ist. Dies wird durch Wahl von $\hat{\alpha}_x = \log(\mu_{x,t_U})$ und $\hat{k}_{t_U} = 0$ garantiert:

$$\hat{\mu}_{x,t_U} := \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_{t_U}) = \exp(\hat{\alpha}_x) = \exp(\log(\mu_{x,t_U})) = \mu_{x,t_U}$$

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass sich in der wissenschaftlichen Literatur viele Varianten und Erweiterungen des Lee-Carter Modells finden lassen. Einige Beispiele sind die Arbeiten von Lee und Miller (2001), Booth et al. (2002), Hyndman und Ullah (2007) oder Renshaw und Haberman (2006). In einem Vergleich der Varianten kommen Booth et al. (2006) zu dem Ergebnis, dass alle von ihnen untersuchten Varianten bessere Vorhersagen für die logarithmierte zentrale Sterberate geliefert haben als das ursprüngliche Lee-Carter Modell.

Abgesehen von der Modellspezifikation an sich gibt es auch bei der Schätzung der Parameter des Lee-Carter Modells unterschiedliche Ansätze. Wilmoth (1993) beschreibt, wie Schätzungen auf Basis der gewichteten Kleinste-Quadrate-Anpassung oder der Maximum-Likelihood Methode berechnet werden können. Selbst Lee und Carter (1992) empfehlen eigentlich eine Singulärwertzerlegung (SVD) zur Ermittlung der Schätzungen für β_x und k_t und schlagen die Formeln (2.15) und (2.16) nur als alternative Methoden beziehungsweise Approximation vor. Außerdem schätzen sie k_t nach Durchführung der SVD neu, sodass das Modell besser zur beobachteten Anzahl der Todesfälle passt (vgl. Lee und Carter 1992, S.661).

All diese Überlegungen sollen verdeutlichen, dass die in diesem Kapitel beschriebenen Methoden sehr einfache Varianten des Lee-Carter Modells sind und womöglich nicht die besten Prognosen liefern. Dennoch werden sie für den Vergleich mit der Regression nach Lin und Tsai (2015) herangezogen. Das hat einerseits den Grund, dass Lin und Tsai (2015) auch nur das ursprüngliche Lee-Carter Modell verwenden.³ Andererseits wird vermutet, dass bereits die simplen Versionen des Lee-Carter Modells bessere Ergebnisse als das Lin-Tsai Modell liefern könnten, sobald die beschriebene Diskontinuität im ersten Prognosejahr korrigiert wird.

³ Lin und Tsai (2015) nennen sowohl die Singulärwertzerlegung als auch die Verfahren wie in (2.15) und (2.16) beschrieben zur Schätzung ihres Lee-Carter Modells. Welche der beiden Methoden sie schließlich zur Berechnung der Ergebnisse anwenden, wird nicht näher erläutert. Wie auch in der vorliegenden Arbeit wird k_t bei Lin und Tsai (2015) nicht iterativ berechnet.

3. Vergleich der Modelle

Im dritten Kapitel wird die lineare Regression von Lin und Tsai dem Random Walk mit Drift und den besprochenen Varianten des Lee-Carter Modells gegenübergestellt. Im Unterkapitel 3.1 wird der hierfür notwendige Datensatz näher beschrieben, anhand dessen in 3.2 Prognosen für die Mortalität erstellt werden. Anschließend wird überprüft, ob die Vorhersagen des Lin-Tsai Modells wirklich weniger von den tatsächlichen Beobachtungen abweichen als diejenigen der anderen Modelle.

3.1. Daten

In dieser Arbeit wird wie auch bei Lin und Tsai (2015) auf die Sterbetafeln der Human Mortality Database zurückgegriffen. Die Human Mortality Database ist ein Projekt der University of California, Berkeley und des Max-Planck-Instituts für demografische Forschung, dessen Ziel es ist, im Internet leicht zugängliche vergleichbare Daten zur Mortalität verschiedener Länder zur Verfügung zu stellen (vgl. Wilmoth et al. 2007, S. 1). Eine genaue Dokumentation über die angewandte Methodik, wie die Sterbetafeln und Wahrscheinlichkeiten geschätzt werden, stellen Wilmoth et al. (2007) auf der Homepage der Human Mortality Database bereit.

Aus den Sterbetafeln der Human Mortality Database wurden die Sterbewahrscheinlichkeiten von Frauen, Männern und der Gesamtbevölkerung in acht Ländern zusammengetragen. Unter diesen Staaten sind die drei, die Lin und Tsai (2015) untersucht haben (Japan, das Vereinigte Königreich und die USA), sowie fünf weitere Nationen (Australien, Finnland, Frankreich, Kanada und Österreich). Hierbei gilt es zu beachten, dass die Sterbewahrscheinlichkeiten der Altersgruppen an sich nicht in allen Ländern für dieselben Jahre verfügbar sind. Während der Zeitraum der Daten in Frankreich von 1816 bis 2014 reicht, beginnen die entsprechenden Tafeln in Österreich und Japan erst mit dem Jahr 1947.⁴ Um eine vergleichbare Analyse mit allen Ländern durchzuführen, werden im weiteren Verlauf nur noch die Beobachtungen von 1950 bis 2009 beachtet. Diese Jahre sind für alle Staaten verfügbar und entsprechen außerdem dem Zeitraum, den Lin und Tsai (2015) für Japan und das Vereinigte Königreich gewählt haben.

⁴ Der schwankende Zeitraum, für den Daten zur Verfügung stehen, hat auch die Wahl der Länder beeinflusst. Ursprünglich war es die Absicht mit Russland und Chile auch zwei größere Länder aus Osteuropa bzw. Südamerika in die Analyse miteinzubeziehen. Da die Daten dieser beiden Nationen in der Human Mortality Database (2017) jedoch nur für einen kürzeren Zeitraum vorhanden sind und zusätzlich mit Warnhinweisen bezüglich der Qualität einiger Jahre versehen sind, wurden Russland und Chile ausgeschlossen.

In den Sterbetafeln der Human Mortality Database (2017) sind die Sterbewahrscheinlichkeiten $q_{x,t}$ für jedes Alter x von 0 bis 109 Jahren aufgelistet. Zusätzlich wird noch eine Gruppe „110+“ für alle angeführt, die 110 Jahre und älter sind. Die entsprechende Sterbewahrscheinlichkeit „ $q_{110+,t}$ “ wird für jedes Jahr t gleich 1 gesetzt, da es nicht möglich ist diese Gruppe zu überleben. Die Gruppe „110+“ kann demnach für die weiteren Analysen vernachlässigt werden, da sie keine neuen Informationen liefert. Um einen ersten Überblick über die Mortalität aller anderen Altersgruppen zu verschaffen, sind die auf Basis der Transformation (2.2) berechneten Hazardraten aus den Jahren 1950 (in Schwarz) und 2009 (in Rot) in Abbildung 2 veranschaulicht. Die Transformation wurde durchgeführt, da die Hazardraten die abhängige Variable im linearen Modell von Lin und Tsai (2015) bilden.

Anhand von Abbildung 2 lässt sich festhalten, dass die Kurven, die durch die Raten aller Altersgruppen entstehen, trotz einiger Ausschläge in den jungen Jahren relativ glatt verlaufen. Dadurch ist es nicht allzu schwer eine generelle Form der Kurven unabhängig vom Staat und Kalenderjahr herauszulesen: Während die Mortalität in den ersten Lebensjahren fällt, gibt es tendenziell einen Anstieg für Teenager und einen Buckel bei ungefähr 20 Jahren. Ab zirka 40 Jahren scheint die Hazardrate monoton zu steigen.

Aus Grafik 2 lässt sich außerdem herauslesen, dass die Hazardraten für fast alle Altersgruppen 2009 niedriger ausfallen als im Jahr 1950. Lediglich in Österreich und in den USA finden sich bei über 100-Jährigen einige Ausnahmen. Um den fallenden Trend der Mortalität noch besser zu veranschaulichen, sind in den Abbildungen 3 und 4 die Hazardraten der 30- bzw. 60-Jährigen für den gesamten Zeitraum von 1950 bis 2009 eingezeichnet. Aus Platzgründen wurden hierbei nur vier Länder herangezogen. Im Anhang 1 dieser Arbeit finden sich noch weitere Grafiken für die Altersgruppen der 20-, 50- und 80-Jährigen aller Staaten.

Sowohl in den Abbildungen 3 und 4 als auch in den Plots des Anhangs 1 lässt sich das Sinken der Hazardraten über die Zeit hinweg erkennen. Interessanterweise scheint es aber gewisse Unterschiede zwischen den Ländern zu geben. Besondere Beachtung verdient hierbei Japan in Abbildung 3. Während die Trends in Australien und den USA tendenziell linear zu sein scheinen, gleicht die Zeitreihe Japans eher einer Exponentialfunktion. Dieser markante Unterschied zwischen Japan und den meisten anderen Ländern fällt im Anhang 1 auch bei den entsprechenden Zeitreihen der 20-Jährigen und (etwas weniger deutlich) bei den 50-Jährigen auf. In den Grafiken der älteren Gruppen wird es nicht mehr ganz so offensichtlich, ob Japans Hazardraten auf eine andere Weise sinken als in den restlichen Staaten.

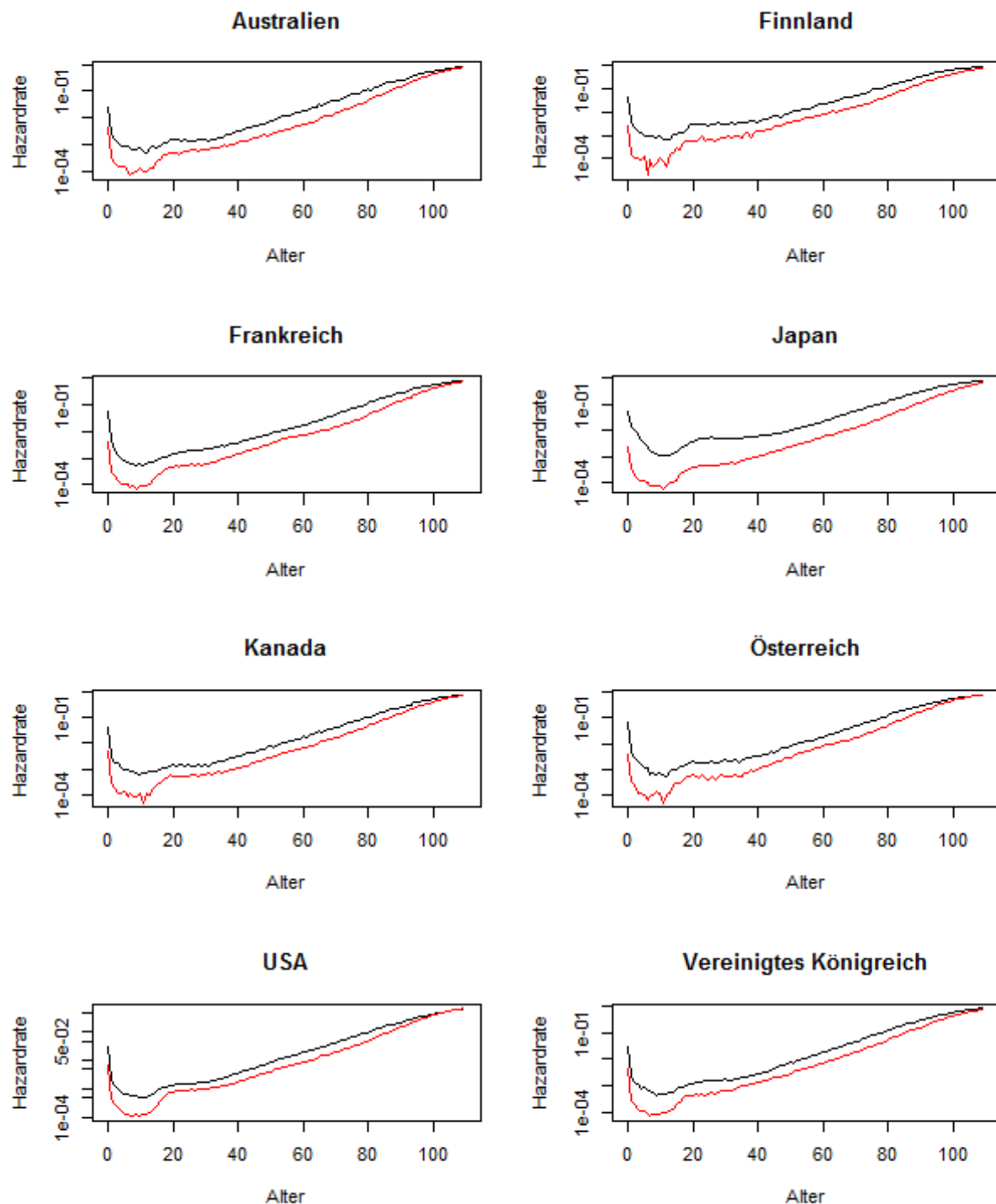


Abbildung 2 Hazardraten: Es wurden die Hazardraten für alle Altersgruppen zwischen 0 und 109 für die Jahre 1950 (in Schwarz) und 2009 (in Rot) eingezeichnet. Zur besseren Veranschaulichung wurde die y-Achse logarithmiert; Eigene Berechnungen und Darstellung; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

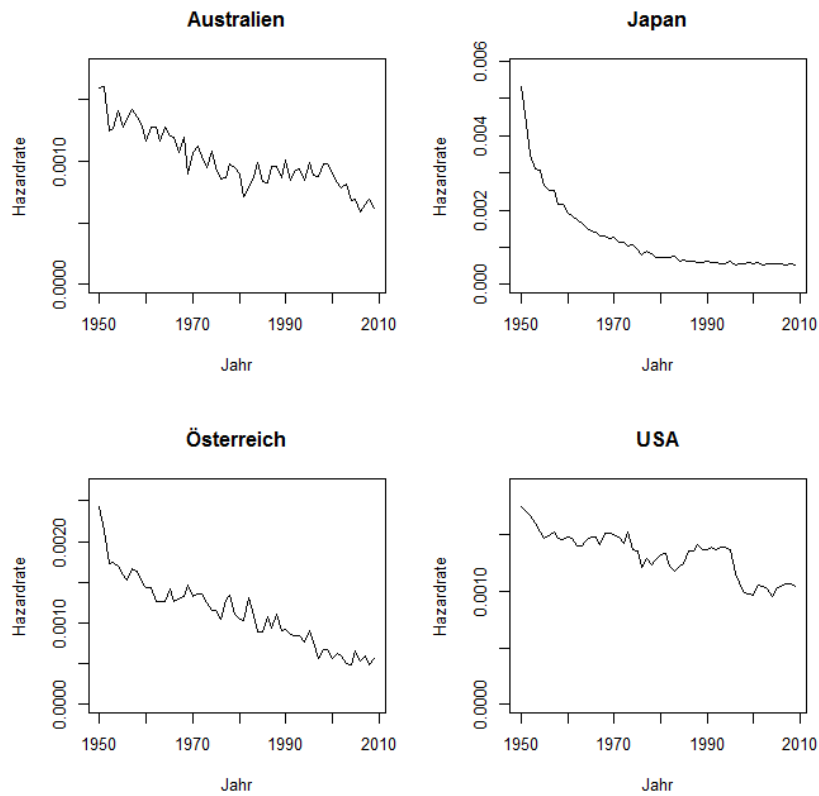


Abbildung 3 Hazardraten der 30-Jährigen: Die Zeitreihen für vier Länder von 1950 bis 2009; Eigene Berechnungen und Darstellung; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

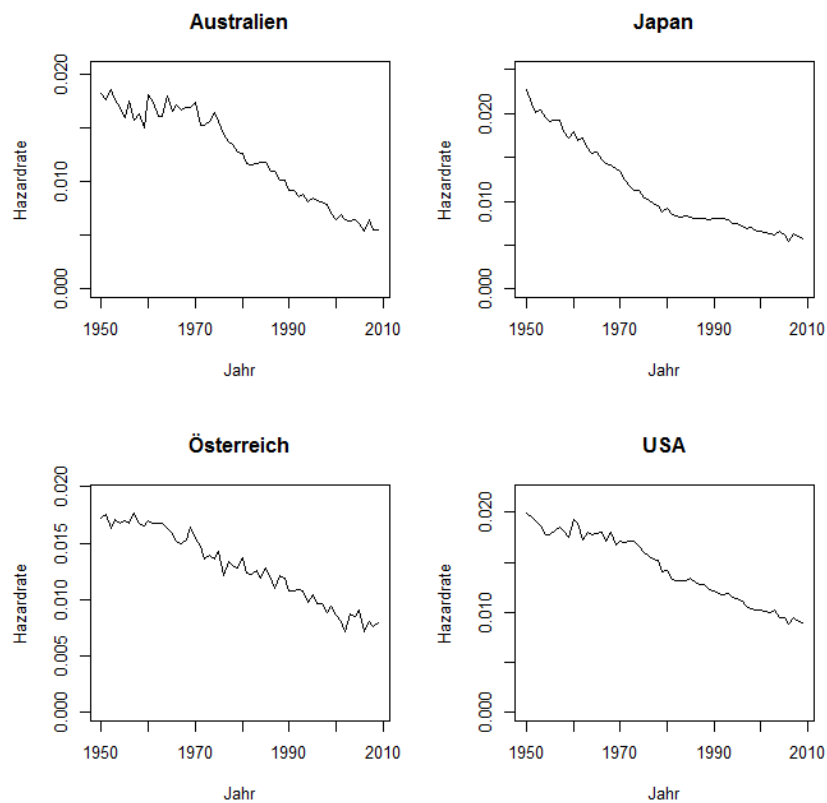


Abbildung 4 Hazardraten der 60-Jährigen: Die Zeitreihen für vier Länder von 1950 bis 2009; Eigene Berechnungen und Darstellung; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Eine mögliche Ursache für die Unterschiede zwischen den Kurven Japans und den restlichen Ländern in Grafik 3 könnte im Niveau der Mortalität im Jahr 1950 liegen. So war die Hazardrate in Japan 1950 mit einem Wert von ungefähr 0,0053 deutlich höher als in Australien oder den USA. Auch die österreichische Rate betrug 1950 mit ca. 0,0024 weniger als die Hälfte der Japanischen. Die Mortalität der 30-Jährigen hatte in Japan in den fünfziger Jahren somit ein größeres Potenzial zu sinken als diejenige in Australien oder den USA, wo die Hazardraten ohnehin schon relativ gering waren. Diese Vermutung wird unter Umständen dadurch gestützt, dass auch die Zeitreihe der 20-Jährigen in Finnland (siehe Anhang 1) von einem relativ hohen Niveau aus startet und Anfang der fünfziger Jahre sehr stark abfällt. Dadurch ergibt sich ebenfalls eine Form, die eventuell als exponentielles Abfallen interpretiert werden kann. Andererseits beginnen die Beobachtungen der japanischen und finnischen 50-Jährigen 1950 ebenfalls von einem ähnlichen Level und doch scheinen sich die Daten Japans auf den ersten Blick viel eher durch eine Exponentialfunktion beschreiben zu lassen als diejenigen Finnlands. Eine abschließende Antwort, warum Japans Zeitreihen bei den 20-, 30-, 50- und 60-Jährigen eine höhere Krümmung aufweisen als die meisten anderen Länder, kann an dieser Stelle nicht gegeben werden. Jedoch bleibt festzuhalten, dass die Eigenart der japanischen Kurve unter Umständen dazu führt, dass sie einer anderen Methode zur Prognose bedarf als die Zeitreihen der übrigen Staaten.

Die bisher durchgeführte deskriptive Analyse basierte nur auf Grafiken, die alle Bewohner eines Landes darstellen sollen. Im nächsten Unterkapitel werden aber auch Prognosen abhängig vom Geschlecht erstellt. Der Vollständigkeit halber sind im Anhang 1 die Mortalitätsraten der Jahre 1950 und 2009 für Frauen bzw. Männer eingezeichnet. Bei genauerer Betrachtung der entsprechenden Grafiken fallen gewisse Unterschiede auf. So scheinen die Kurven der Hazardraten für Frauen, die um die 20 Jahre alt sind, etwas flacher zu verlaufen als bei den Männern. Die wichtigen Aussagen dieses Unterkapitels bleiben aber auch dann gültig, wenn die beiden Geschlechter einzeln betrachtet werden. So ist die Mortalität in fast allen Altersgruppen 2009 niedriger als 1950. Die Mortalitätskurven sind für beide Geschlechter in den meisten Ländern relativ glatt. Würden außerdem erneut die Altersgruppen der 20- oder 30-Jährigen für Frauen und Männer einzeln betrachtet werden, lässt sich wiederum die positive Krümmung der japanischen Zeitreihen erkennen. Auf die Darstellung der entsprechenden Plots wurde aus Platzgründen jedoch verzichtet.

Zum Abschluss der deskriptiven Analyse sei noch eine Tabelle bereitgestellt, die die Korrelation zwischen den Hazardraten der Jahre 1950 bis 2008 und den Raten der Jahre 1951 bis 2009 für drei Altersgruppen angibt. In Tabelle 1 sind demzufolge die Korrelationskoeffizienten $\text{Corr}(\mu_{-1}, \mu)$ für die Vektoren $\mu_{-1} := (\mu_{x,1950}, \mu_{x,1951}, \dots, \mu_{x,2008})^T$ und $\mu := (\mu_{x,1951}, \mu_{x,1952}, \dots, \mu_{x,2009})^T$ aufgelistet. Die Tabelle zeigt, dass die Hazardraten sehr deutlich mit jenen des Vorjahres korreliert

sind. Mit Ausnahme der Altersgruppe der 30-Jährigen in Australien, sind alle Einträge höher als 0,92. Bei den 60- und 80-Jährigen liegen alle Werte sogar über 0,97 und sind somit bereits sehr nahe bei 1. Im Unterkapitel 2.1 wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Korrelationen eng mit den Regressionskoeffizienten des Lin-Tsai Modells verbunden sind, wenn die Standardabweichungen der beiden Vektoren μ_{-1} und μ fast identisch sind. Gilt diese Annahme, muss laut Tabelle 1 also von sehr hohen Werten für den Parameter $\hat{\beta}$ ausgegangen werden. In diesem Fall wären die Einträge der Tabelle bereits ein Indiz dafür, dass es unter Umständen Sinn macht, $\hat{\beta}$ von Beginn an als Eins festzulegen und somit das Random Walk Modell mit Drift zu verwenden. Andererseits ist nicht sofort eindeutig, ob die Standardannahmen tatsächlich ähnlich genug sind, um aus Tabelle 1 zu schließen, dass die entsprechenden Regressionskoeffizienten des Lin-Tsai Modells nahe bei Eins liegen werden. Ob das Random Walk Modell mit Drift (oder das Lee-Carter Modell mit Korrektur) wirklich bessere Prognosen liefert als die lineare Regression von Lin und Tsai wird nun im nächsten Unterkapitel näher erläutert.

Land	Altersgruppe $x = 30$	Altersgruppe $x = 60$	Altersgruppe $x = 80$
Australien	0,8790	0,9793	0,9745
Finnland	0,9214	0,9743	0,9859
Frankreich	0,9681	0,9819	0,9744
Japan	0,9932	0,9959	0,9836
Kanada	0,9216	0,9836	0,9879
Österreich	0,9493	0,9714	0,9845
USA	0,9475	0,9883	0,9907
Vereinigtes Königreich	0,9561	0,9861	0,9740

Tabelle 1 Korrelationen: Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

3.2. Ergebnisse

Anhand der Beobachtungen aus dem Zeitraum von 1950 bis 2009 werden für alle acht Länder und für jede Altersgruppe zwischen 21 und 85 Jahren Ein-Schritt-Prognosen für die Sterbewahrscheinlichkeiten $\tilde{q}_{x,t}$ der einzelnen Kalenderjahre von 1971 bis 2009 ermittelt. Alle Analysen wurden mithilfe der Statistiksoftware R durchgeführt, wobei keine zusätzlichen Pakete notwendig waren. Die Berechnungen werden jeweils für Frauen, Männer und beide Geschlechter insgesamt durchgeführt. Die Prognosen werden mittels fünf Modellen gewonnen:

- 1.) Lin-Tsai Modell mit Lag $l = 1$
- 2.) Random Walk mit Drift
- 3.) Lee-Carter Modell (ohne Korrektur)
- 4.) Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Lee und Carter (1992)
- 5.) Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Bell (1997)

Die Berechnung der Ein-Schritt-Prognosen der Altersgruppe der x -Jährigen erfolgt hierbei, indem zuerst das jeweilige Modell für die Jahre 1950 bis 1970 geschätzt wird, mit dessen Hilfe die Vorhersage $\tilde{q}_{x,1971}$ für das Jahr 1971 getroffen wird. Anschließend wird das Modell für den Zeitraum 1950 bis 1971 geschätzt, mit dem die Prognose $\tilde{q}_{x,1972}$ für 1972 ermittelt wird usw. Alle Berechnungen der fünf Modelle werden wie in Kapitel 2 beschrieben durchgeführt. Die Vorhersagen $\tilde{q}_{x,t}$ werden schließlich mit den tatsächlich beobachteten Raten $q_{x,t}$ verglichen, indem für jede Altersgruppe x der MAPE (= „Mean Absolute Percentage Error“), der MAE (= „Mean Absolute Error“) und der RMSE (= „Root Mean Squared Error“) errechnet werden:

$$MAPE_{x,m} = \frac{1}{2009-1971+1} \sum_{t=1970}^{2008} \left| \frac{\tilde{q}_{x,t+1}^m - q_{x,t+1}}{q_{x,t+1}} \right| * 100 \quad (3.1)$$

$$MAE_{x,m} = \frac{1}{2009-1971+1} \sum_{t=1970}^{2008} |\tilde{q}_{x,t+1}^m - q_{x,t+1}| \quad (3.2)$$

$$RMSE_{x,m} = \sqrt{\frac{1}{2009-1971+1} \sum_{t=1970}^{2008} (\tilde{q}_{x,t+1}^m - q_{x,t+1})^2} \quad (3.3)$$

Der Index m wurde eingeführt um anzugeben, welches Modell zur Prognose verwendet wurde. Gemäß der zuvor verwendeten Reihenfolge steht $m = 1$ für das Lin-Tsai Modell, $m = 2$ für den Random Walk mit Drift und so weiter bis zu $m = 5$ für das Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Bell. Der Wert $\tilde{q}_{x,t+1}^m$ gibt die Prognose $\tilde{q}_{x,t+1}$ des jeweiligen Modells an.

Bei der Definition des MAPE fällt auf, dass es zu einem Problem kommen könnte, falls eine der Sterbewahrscheinlichkeiten gleich Null ist. Dies ist für die acht Länder im Zeitraum 1971 bis 2009 aber für keine der Altersgruppen zwischen 21 und 85 der Fall. Weiters lässt sich folgende Aussage zu den Fehlerraten treffen: Liefert ein Modell im gegebenen Kontext für jedes Jahr perfekte Prognosen, dann gilt $MAPE_{x,m} = MAE_{x,m} = RMSE_{x,m} = 0$. Im Gegensatz dazu liefern sehr große Differenzen zwischen Prognosen und Beobachtungen laut den Definitionen (3.1)-(3.3) auch hohe Werte für den MAPE, MAE bzw. RMSE. Im Folgenden wird demnach interpretiert, dass in einem Vergleich zweier Modelle jenes das bessere ist, das den geringeren MAPE, MAE bzw. RMSE aufweist. Hierbei gilt jedoch zu beachten, dass diese Art des Vergleichs nicht perfekt und eindeutig ist. Immerhin könnte es zum Beispiel passieren, dass ein Modell für jedes Jahr zutreffende Prognosen liefert außer für ein einziges Jahr T , das als extremer Ausreißer angesehen

wird. Ist die Abweichung zwischen Prognose und Beobachtung in der Periode T groß genug, kann das ansonsten zutreffende Modell dennoch hohe Werte für den MAPE, MAE und RMSE liefern. Als weitere Schwäche kann angeführt werden, dass die unterschiedlichen Indizes MAPE, MAE und RMSE jeweils ein anderes Modell als die beste Methode auswählen können. Weitere Überlegungen zu MAPE, MAE und RMSE sowie anderen Kennzahlen dieser Art finden sich beispielsweise bei Hyndman und Koehler (2006).

Der hier beschriebene Vergleich der Modelle ist sehr ähnlich zu der Analyse von Lin und Tsai (2015), anhand derer sie zeigen, dass ihre lineare Regression in den meisten Fällen besser prognostiziert als das Lee-Carter Modell. Selbst die Wahl der Altersgruppen ist ident. Ein wichtiger Unterschied ist jedoch, dass Lin und Tsai (2015) die Modelle immer für den Zeitraum bis zum Jahr 2000 schätzen und aufbauend auf dem Basisjahr 2000 Prognosen für die Jahre 2001 bis 2009 ermitteln. Lin und Tsai (2015) berechnen somit nicht bloß Ein-Schritt-Prognosen. Bei einem Vorgehen dieser Art muss unter Umständen Heteroskedastizität (und Autokorrelation) der Prognosefehler erwartet werden (vgl. etwa Box und Jenkins 1976). Konkret wird befürchtet, dass eine Vorhersage für mehrere Jahre im Voraus eine größere Abweichung von der Beobachtung aufweisen wird als die Prognose für das unmittelbar nächste Jahr. In diesem Fall könnten der MAPE, MAE und RMSE deutlich stärker von den Mehr-Schritt-Prognosen beeinflusst werden, als von den Vorhersagen für das nächste Jahr. Um die Prognosefehler aller Jahre möglichst gleichwertig in die Kennzahlen des MAPE, MAE und RMSE einfließen zu lassen, werden in diesem Vergleich demzufolge nur Ein-Schritt-Prognosen herangezogen.

Wie auch bei Lin und Tsai (2015) werden nun die durchschnittlichen Werte des MAPE, MAE und RMSE für alle Altersgruppen angegeben:

$$\overline{MAPE}_m = \frac{1}{85-21+1} \sum_{x=21}^{85} MAPE_{x,m}$$

$$\overline{MAE}_m = \frac{1}{85-21+1} \sum_{x=21}^{85} MAE_{x,m}$$

$$\overline{RMSE}_m = \frac{1}{85-21+1} \sum_{x=21}^{85} RMSE_{x,m}$$

Die jeweiligen Größen sind in den Tabellen 2 bis 4 eingetragen. Zur leichteren Interpretation der Tabelle ist der Wert des schlechtesten Modells in jeder Zeile rot eingefärbt. Der jeweils niedrigste und somit beste Wert wurde in Fettschrift gedruckt. Beim Vergleich der drei Tabellen werden hierbei gewisse Widersprüche deutlich. So geht beispielsweise das einfache Lee-Carter Modell ohne Korrektur als bestes Modell bei der Prognose für Frauen in Finnland hinsichtlich des MAPE-Kriteriums hervor, während es laut MAE und RMSE das schlechteste Ergebnis für eben diese

Aufgabe liefert. Interessanterweise lassen sich aus den Tabellen 2 bis 4 jedoch viele Aussagen ableiten, die für alle drei Kriterien gelten. So zeigt sich zum Beispiel, dass die interessierende einfache lineare Regression von Lin und Tsai in fast allen Fällen für Japan, die USA und das Vereinigte Königreich niedrigere durchschnittliche Werte für den MAPE, MAE und RMSE liefert als das einfache Lee-Carter Modell ohne Korrektur. Die einzige Ausnahme bildet der durchschnittliche Root Mean Squared Error für Frauen im Vereinigten Königreich. Dieses Ergebnis scheint die Resultate aus dem Artikel von Lin und Tsai (2015) zu bestätigen, die ihr Modell mit dem Lee-Carter Modell in eben diesen drei Ländern verglichen haben.

Geschlecht	Land	LT	RW	MAPE		
				LC	LC (Korr.)	LC (Bell)
Männlich	Australien	8,45%	6,41	7,85	6,44	6,38
	Finnland	12,58	9,93	9,48	9,94	9,74
	Frankreich	5,31	4,04	6,74	4,06	4,03
	Japan	5,83	5,89	8,16	3,89	3,87
	Kanada	6,24	4,87	5,73	4,89	4,84
	Österreich	10,55	8,23	7,69	8,26	8,15
	USA	3,07	2,72	5,80	2,73	2,73
	UK	4,79	4,20	7,85	4,16	4,15
Weiblich	Australien	10,73	8,68	8,27	8,64	8,51
	Finnland	16,62	14,97	14,53	15,02	14,72
	Frankreich	5,87	5,35	6,63	5,14	5,06
	Japan	6,41	10,29	11,59	4,35	4,34
	Kanada	7,22	6,41	5,56	6,36	6,23
	Österreich	13,42	11,85	9,94	11,85	11,61
	USA	3,11	2,90	4,45	2,81	2,79
	UK	5,66	5,11	7,27	4,93	4,85
Total	Australien	6,90	5,51	7,16	5,52	5,47
	Finnland	9,73	8,36	8,57	8,28	8,11
	Frankreich	4,53	3,65	6,02	3,63	3,59
	Japan	5,61	7,12	9,51	3,60	3,62
	Kanada	4,72	4,01	4,70	4,03	3,98
	Österreich	8,43	6,93	6,72	6,97	6,86
	USA	2,73	2,46	4,69	2,45	2,44
	UK	4,19	3,69	7,31	3,60	3,59

Tabelle 2 Mittelwert des MAPE für alle Altersgruppen $x=21, \dots, 85$; Verwendete Abkürzungen: Lin-Tsai Modell (=LT), Random Walk mit Drift (=RW), Lee-Carter Modell ohne Korrektur (=LC), Lee-Carter Modell mit der Korrektur nach Lee und Carter (=LC (Korr.)), Lee-Carter Modell mit der Korrektur nach Bell (=LC (Bell)); Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Bei den übrigen fünf Ländern (Australien, Finnland, Frankreich, Kanada und Österreich), die im Artikel von Lin und Tsai (2015) nicht untersucht wurden, ergibt sich in den drei Tabellen jedoch ein anderes Bild. In den insgesamt 45 Zeilen zu diesen fünf Staaten ist die lineare Regression von Lin und Tsai 28-

mal *schlechter* als das einfache Lee-Carter Modell. Hierbei wird vor allem das schwache Abschneiden bei der Prognose der Sterbewahrscheinlichkeiten von Männern deutlich: In allen drei Tabellen ist das Lin-Tsai Modell jeweils in vier der fünf genannten Länder ungenauer als das einfache Lee-Carter Modell.

Geschlecht	Land	MAE ($\cdot 10^{-4}$)				
		LT	RW	LC	LC (Korr.)	LC (Bell)
Männlich	Australien	15,24	10,54	11,63	10,59	10,51
	Finnland	25,01	17,03	17,82	17,07	16,72
	Frankreich	11,09	8,38	10,56	8,41	8,31
	Japan	10,32	6,71	18,36	6,31	6,32
	Kanada	8,44	6,80	9,23	6,87	6,82
	Österreich	16,36	13,00	13,65	12,98	12,84
	USA	6,15	4,89	10,09	4,96	4,99
	UK	10,79	8,07	14,73	8,07	8,09
Weiblich	Australien	8,26	6,69	6,76	6,67	6,58
	Finnland	12,79	9,69	17,56	9,63	9,50
	Frankreich	5,59	4,88	7,29	4,76	4,69
	Japan	5,85	4,77	17,83	4,05	4,08
	Kanada	4,70	4,38	5,31	4,32	4,24
	Österreich	9,09	7,92	10,23	7,90	7,79
	USA	3,45	3,24	5,40	3,15	3,15
	UK	6,26	5,12	6,34	5,15	5,07
Total	Australien	9,34	7,04	7,72	7,10	7,03
	Finnland	13,40	9,72	13,29	9,69	9,56
	Frankreich	7,05	5,83	7,40	5,81	5,73
	Japan	7,40	5,37	18,75	4,79	4,82
	Kanada	4,81	4,22	6,44	4,29	4,23
	Österreich	9,62	8,22	9,20	8,21	8,12
	USA	4,16	3,59	7,13	3,59	3,59
	UK	7,28	5,78	8,12	5,83	5,79

Tabelle 3 Mittelwert des MAE für alle Altersgruppen $x=21,\dots,85$; Es wurden dieselben Abkürzungen wie in Tabelle 2 verwendet. Zur besseren Lesbarkeit wurden die Werte des MAE in der Tabelle mit Zehntausend multipliziert; Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Aus welchem Grund in manchen Ländern die Methode von Lin und Tsai besser zu sein scheint als das einfache Lee-Carter Modell, während es in anderen Nationen umgekehrt ist, kann an dieser Stelle nicht erläutert werden. Insgesamt gilt jedoch, dass beide Methoden ohnehin gewisse Schwächen aufweisen, wenn sie mit dem Random Walk mit Drift oder den korrigierten Versionen des Lee-Carter Modells verglichen werden. In den Tabellen 2 bis 4 gilt in jeder Zeile, dass das schlechteste Modell entweder die lineare Regression von Lin und Tsai oder das einfache Lee-Carter Modell ohne Korrektur ist. Während das einfache Lee-Carter Modell zumindest hin und

wieder beim MAPE-Kriterium (und einmal hinsichtlich des RMSE) als beste Methode hervorgeht, ist das beim Lin-Tsai Modell in keiner einzigen der insgesamt 79 Zeilen der drei Tabellen der Fall.

Geschlecht	Land	RMSE ($\cdot 10^{-4}$)				
		LT	RW	LC	LC (Korr.)	LC (Bell)
Männlich	Australien	19,41	14,21	14,13	14,21	14,07
	Finnland	30,14	21,75	21,81	21,83	21,37
	Frankreich	14,32	11,55	13,10	11,58	11,42
	Japan	13,83	8,50	19,76	8,09	8,10
	Kanada	10,64	8,62	11,32	8,71	8,60
	Österreich	20,23	16,55	17,19	16,54	16,33
	USA	8,14	6,32	12,12	6,36	6,40
	UK	13,56	10,67	16,92	10,68	10,61
Weiblich	Australien	11,13	8,99	8,55	8,99	8,86
	Finnland	17,22	12,59	20,24	12,50	12,37
	Frankreich	7,39	6,40	8,83	6,31	6,22
	Japan	8,31	6,19	18,61	5,54	5,60
	Kanada	6,02	5,62	6,64	5,56	5,44
	Österreich	11,43	10,10	12,25	10,09	9,93
	USA	4,58	4,21	6,67	4,13	4,12
	UK	7,74	6,64	7,70	6,66	6,55
Total	Australien	12,56	9,62	9,65	9,66	9,55
	Finnland	17,49	12,41	16,79	12,34	12,20
	Frankreich	9,42	8,02	9,19	8,01	7,90
	Japan	10,19	6,84	19,91	6,29	6,35
	Kanada	6,15	5,43	7,63	5,47	5,39
	Österreich	12,02	10,39	11,47	10,39	10,25
	USA	5,59	4,73	8,83	4,72	4,73
	UK	9,12	7,69	9,73	7,73	7,63

Tabelle 4 Mittelwert des RMSE für alle Altersgruppen $x=21,\dots,85$; Es wurden dieselben Abkürzungen wie in Tabelle 2 verwendet. Zur besseren Lesbarkeit wurden die Werte des RMSE in der Tabelle mit Zehntausend multipliziert; Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

In allen drei Tabellen wird das Lee-Carter Modell mit der Korrektur nach Bell am öftesten als die beste Methode ausgewählt. Selbst wenn zusätzlich nach Geschlecht unterschieden wird, ist dieses Modell immer in mindestens vier von acht Ländern besser als die anderen Methoden. Wenn es nicht das beste Modell ist, weicht die Fehlerquote des Lee-Carter Modells mit Korrektur nach Bell oft nur in sehr geringem Maß von der jeweils besseren Methode ab. Durch die Korrektur des Lee-Carter Modells dürfte demzufolge wie erwartet eine Verbesserung der Prognosefähigkeit gegenüber der unkorrigierten Version erreicht worden sein. Diese Aussage wird besonders deutlich, wenn die lineare Regression von Lin und Tsai mit den korrigierten Versionen des Lee-Carter Modells verglichen wird. Zuvor wurde bereits erwähnt, dass nicht ganz klar ist, ob das einfache Modell von Lee und Carter tatsächlich besser oder schlechter ist als die

Methode von Lin und Tsai. Wird jedoch eine Korrektur nach Lee und Carter oder nach Bell durchgeführt, ist die *Regression von Lin und Tsai kein einziges Mal besser als die verbesserte Version des Lee-Carter Modells*. Dies gilt in allen drei Tabellen unabhängig davon, ob die Korrektur nach Lee und Carter (1992) oder nach Bell (1997) durchgeführt wird.

Um die Analyse der Tabellen 2 bis 4 abzuschließen, gilt es noch auf das Random Walk Modell einzugehen. Insgesamt kann es im Vergleich zu den anderen vier Modellen als eher mittelmäßig beurteilt werden. Es liefert in den drei Tabellen zwar nie die schlechtesten Werte, aber es wird andererseits auch nur in wenigen Fällen als das beste Modell ausgewählt. Hinsichtlich der Forschungsfrage der Arbeit ist die direkte Gegenüberstellung mit den Ergebnissen der Regression von Lin und Tsai besonders wichtig: *Das Random Walk Modell mit Drift ist in praktisch allen Fällen besser als die Methode von Lin und Tsai*. Die einzigen drei Ausnahmen bilden die Zeilen zu Japan in Tabelle 2. Auch beim Vergleich zwischen dem Lin-Tsai Modell und dem Random Walk mit Drift werden insgesamt also keine besonderen Stärken des Lin-Tsai Modells ersichtlich.

Bisher wurden lediglich die Mittelwerte des MAPE, MAE bzw. RMSE über alle Altersgruppen betrachtet. Im nächsten Schritt sollen die Werte des MAPE, MAE und RMSE für die einzelnen Altersgruppen ($x = 21, \dots, 85$) näher analysiert werden. Zu diesem Zweck wird in Tabelle 5 angegeben, in wie vielen der insgesamt 65 Altersgruppen das jeweilige Modell am besten war. Eine solche Art der Gegenüberstellung findet sich auch im Artikel von Lin und Tsai (2015). Um den Vergleich etwas kompakter zu gestalten, wurden hierbei nicht alle drei Versionen des Lee-Carter Modells berücksichtigt. Stattdessen wurde nur das Lee-Carter Modell mit Biaskorrektur nach Bell ausgewählt, da es in der bisherigen Analyse in den meisten Fällen bessere Ergebnisse geliefert hat, als die beiden anderen Versionen.

Wie bereits zuvor, werden die besten und schlechtesten Ergebnisse in Tabelle 5 fett gedruckt bzw. rot eingefärbt. Auf diese Weise ist sehr einfach zu erkennen, dass das Lee-Carter Modell nach Bell am öftesten als die beste Methode hervorgeht. Lediglich bei den Männern in den USA (bzgl. MAPE, MAE und RMSE) und im Vereinigten Königreich (bzgl. MAPE) ist ein anderes Modell in mehr Altersgruppen besser als das Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Bell. Werden die einzelnen Werte der Einträge näher betrachtet, zeigt sich die Dominanz des Lee-Carter Modells nach Bell noch deutlicher. Die Methode ist nämlich fast immer in mehr Altersgruppen besser als der Random Walk mit Drift und die Regression von Lin und Tsai *zusammen*.

Auch in Tabelle 5 gibt es somit keine Indizien dafür, dass das Verfahren von Lin und Tsai besonders vorteilhaft wäre. Im Gegenteil geht es sogar am öftesten als die schlechteste Methode

hervor. Von den 72 Einträgen für das Lin-Tsai Modell sind 39 gleich Null. In all diesen Fällen ist es demnach in keiner einzigen Altersgruppe besser als die anderen beiden Methoden.

Geschlecht	Land	MAPE			MAE			RMSE		
		LT	RW	LC (Bell)	LT	RW	LC (Bell)	LT	RW	LC (Bell)
Männlich	Australien	0	21	44	0	17	48	0	7	58
	Finnland	1	4	60	3	2	60	5	0	60
	Frankreich	0	26	39	0	19	46	0	12	53
	Japan	0	3	62	1	3	61	0	0	65
	Kanada	0	26	39	0	24	41	0	17	48
	Österreich	0	9	56	0	6	59	0	0	65
	USA	0	42	23	0	43	22	0	41	24
	UK	10	29	26	10	23	32	12	4	49
Weiblich	Australien	0	7	58	1	4	60	0	2	63
	Finnland	0	9	56	12	3	50	12	0	53
	Frankreich	1	6	58	2	1	62	0	0	65
	Japan	1	1	63	0	4	61	0	6	59
	Kanada	2	3	60	3	1	61	0	0	65
	Österreich	0	6	59	3	3	59	2	0	63
	USA	2	7	56	2	6	57	0	2	63
	UK	1	22	42	2	17	46	2	3	60
Total	Australien	0	23	42	0	18	47	0	11	54
	Finnland	2	7	56	6	2	57	4	0	61
	Frankreich	0	13	52	0	8	57	0	3	62
	Japan	1	2	62	1	2	62	1	2	62
	Kanada	0	25	40	0	23	42	0	5	60
	Österreich	1	13	51	1	6	58	0	2	63
	USA	0	25	40	0	24	41	0	17	48
	UK	7	27	31	7	24	34	8	5	52

Tabelle 5 Häufigkeit des kleinsten MAPE, MAE und RMSE; Es wurden dieselben Abkürzungen wie in Tabelle 2 verwendet; Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Beim Random Walk mit Drift finden sich in Tabelle 5 ebenfalls viele relativ niedrige Einträge. Trotzdem scheint dieses Modell insgesamt doch besser zu sein als das Verfahren von Lin und Tsai. Es könnte aber sein, dass dieser Eindruck täuscht. Immerhin ist das Lee-Carter Modell nach Bell in Tabelle 5 so überlegen, dass kaum noch Altersgruppen übrig bleiben um den Random Walk mit Drift und die Regression von Lin und Tsai sinnvoll zu vergleichen. Da eine solche Gegenüberstellung dieser beiden Verfahren aber als eines der zentralen Ziele der vorliegenden Arbeit formuliert wurde, wird in Tabelle 6 noch einmal speziell auf diese beiden Methoden eingegangen. Es wurde wieder berechnet, in wie vielen der 65 Altersgruppen das jeweilige Modell den geringsten Wert für den MAPE, MAE bzw. RMSE liefert. Es bestätigt sich der Eindruck, der bereits auf Basis der vorherigen Tabelle 5 gewonnen wurde. In Japan ist das Lin-Tsai Modell

bei Frauen sowie bei der Gesamtbevölkerung zwar noch in mehr Altersgruppen am besten. In allen anderen Vergleichen der Tabelle 6 wird es vom Random Walk mit Drift allerdings in den meisten Altersgruppen geschlagen. Die Unterschiede zwischen den beiden Modellen sind hierbei oft enorm. So kommt es 23-mal vor, dass der Random Walk in *allen* 65 Altersgruppen niedrigere Fehlerquoten liefert als die Methode von Lin und Tsai. Besonders oft scheint dies bei Vergleichen auf Basis der Sterbewahrscheinlichkeiten von Männern der Fall zu sein.

Geschlecht	Land	MAPE		MAE		RMSE	
		LT	RW	LT	RW	LT	RW
Männlich	Australien	0	65	0	65	0	65
	Finnland	2	63	5	60	9	56
	Frankreich	0	65	1	64	0	65
	Japan	32	33	28	37	27	38
	Kanada	0	65	0	65	0	65
	Österreich	0	65	0	65	0	65
	USA	0	65	3	62	0	65
	UK	13	52	13	52	16	49
Weiblich	Australien	1	64	1	64	0	65
	Finnland	2	63	14	51	15	50
	Frankreich	15	50	15	50	12	53
	Japan	55	10	48	17	47	18
	Kanada	4	61	7	58	4	61
	Österreich	1	64	12	53	9	56
	USA	11	54	10	55	1	64
	UK	7	58	14	51	13	52
Total	Australien	0	65	1	64	0	65
	Finnland	5	60	8	57	11	54
	Frankreich	0	65	0	65	0	65
	Japan	49	16	45	20	42	23
	Kanada	0	65	1	64	0	65
	Österreich	1	64	1	64	0	65
	USA	1	64	2	63	0	65
	UK	11	54	13	52	14	51

Tabelle 6 Häufigkeit des kleinsten MAPE, MAE und RMSE (nur Lin-Tsai Modell und Random Walk); Es wurden dieselben Abkürzungen wie in Tabelle 2 verwendet; Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Der Vollständigkeit halber wurden im Anhang 2 noch drei weitere Tabellen dieser Art hinzugefügt, wobei alle fünf Modelle gegenübergestellt wurden. Auch hier wurde verglichen in wie vielen Altersgruppen jede Methode die niedrigsten MAPE-, MAE- bzw. RMSE-Werte hervorgebracht hat. Interessanterweise stellt sich heraus, dass auch die Resultate des einfachen Lee-Carter Modells ohne Korrektur mitunter relativ gut sind. Besonders in den Ländern Finnland und Österreich scheint es bei Vergleichen dieser Art den anderen Methoden überlegen zu sein.

Dennoch sei an dieser Stelle angemerkt, dass sich die zwei wesentlichen Erkenntnisse, die aus den Tabellen 5 und 6 gewonnen wurden, durch die Gegenüberstellungen aller fünf Modelle im Anhang bestätigen lassen: Das Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Bell wird am öftesten als das beste Verfahren empfohlen. Die Regression von Lin und Tsai hingegen geht in 49 der insgesamt 72 Vergleiche der drei Tabellen des Anhangs als die schlechteste Methode hervor. In 47 Fällen ist es in keiner einzigen Altersgruppe besser als die anderen vier Modelle.

In den Tabellen 5 und 6 wurden nun die MAPE-, MAE- und RMSE-Werte für die einzelnen Altersgruppen näher betrachtet. Dabei sollte nicht vergessen werden, dass die Fehlerquoten MAPE, MAE und RMSE für eine Altersgruppe jeweils aus den Prognosefehlern vieler Jahre berechnet werden. Aus diesem Grund könnte kritisch angemerkt werden, dass die Fehlerquoten MAPE, MAE und RMSE durch die Prognosefehler einiger weniger Jahre verzerrt werden könnten. Angenommen die Prognosefehler $\tilde{q}_{x,t_0+k} - q_{x,t_0+k}$ des Lin-Tsai Modells sind in jedem Jahr geringfügig besser als alle anderen Methoden, außer in einer einzigen Periode, in der es zu einer dramatischen Fehleinschätzung des Lin-Tsai Modells kommt. So kann es aufgrund der Definitionen (3.1)-(3.3) passieren, dass der MAPE, MAE bzw. RMSE der Regression von Lin und Tsai höher und somit schlechter ist als derjenige aller anderen Methoden. Unter Umständen könnten einzelne wenige Perioden, die als Ausreißer angesehen werden sollten, also zu Verzerrungen des MAPE, MAE bzw. RMSE führen, die das Verfahren von Lin und Tsai deutlich schlechter erscheinen lassen als es tatsächlich ist.

Aus diesem Grund werden nun auch die Prognosefehler einzelner Jahre näher untersucht, um einen Trugschluss der zuvor genannten Art zu vermeiden. Zu diesem Zweck werden in einem ersten Schritt die kumulierten (absoluten) Prognosefehler zwischen den Jahren 1971 und t^* für das Modell m ermittelt:

$$Cumsum_{x,m}^{t^*} = \sum_{t=1971}^{t^*} | \tilde{q}_{x,t}^m - q_{x,t} | \quad , t^* = 1971, \dots, 2009 \quad (3.4)$$

Um die folgende Analyse etwas übersichtlicher zu gestalten, werden wie zuvor nur drei Methoden herangezogen. Diese drei Verfahren sind $m = 1$ für das Lin-Tsai Modell, $m = 2$ für den Random Walk mit Drift und $m = 5$ für das Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Bell. Die $Cumsum_{x,m}^{t^*}$ -Werte aller drei Herangehensweisen könnten nun bereits in einer Grafik eingezeichnet werden. Steigt die Kurve, die sich aus diesen kumulierten Fehlern ergibt, für das Lin-Tsai Modell in jeder Periode stärker als die Kurven der anderen beiden Methoden, so wäre aufgrund der Definition (3.4) klar, dass das Lin-Tsai Modell in der Altersgruppe x für die prognostizierten Jahre immer schlechter ist als die anderen beiden Methoden. Um die Grafiken jedoch noch übersichtlicher darzustellen, werden von den $Cumsum_{x,m}^{t^*}$ -Werten im nächsten

Schritt noch die kumulierten Fehler des Lin-Tsai Modells subtrahiert. Das Ergebnis für das Modell m (und die Altersgruppe x im Jahr t^*) wird als $\overline{CUMSUM}_{x,m}^{t^*}$ notiert:

$$\overline{CUMSUM}_{x,m}^{t^*} = Cumsum_{x,m}^{t^*} - Cumsum_{x,1}^{t^*} \quad (3.5)$$

Für die Regression von Lin und Tsai gilt demnach für jedes t^* , dass $\overline{CUMSUM}_{x,m}^{t^*}$ gleich 0 ist. Es gilt noch eine weitere Besonderheit zu beachten. Während die kumulierten absoluten Fehler $Cumsum_{x,m}^{t^*}$ laut Definition (3.4) monoton steigen und immer größer gleich Null sind, kann die Kurve der $\overline{CUMSUM}_{x,m}^{t^*}$ -Werte fallen und sogar negativ werden. Genauer gesagt fällt die Kurve der veränderten kumulierten Fehler $\overline{CUMSUM}_{x,m}^{t^*}$ zwischen den Perioden $t^* - 1$ und t^* genau dann, wenn der Prognosefehler des Modells m im Jahr t kleiner war als derjenige des Lin-Tsai Verfahrens. Dieses Ergebnis folgt aus den Definitionen (3.5) und (3.4):

$$\begin{aligned} \overline{CUMSUM}_{x,m}^{t^*} - \overline{CUMSUM}_{x,m}^{t^*-1} &< 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Cumsum_{x,m}^{t^*} - Cumsum_{x,1}^{t^*} - (Cumsum_{x,m}^{t^*-1} - Cumsum_{x,1}^{t^*-1}) &< 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{t=1971}^{t^*} | \tilde{q}_{x,t}^m - q_{x,t} | - \sum_{t=1971}^{t^*} | \tilde{q}_{x,t}^1 - q_{x,t} | - \left(\sum_{t=1971}^{t^*-1} | \tilde{q}_{x,t}^m - q_{x,t} | - \sum_{t=1971}^{t^*-1} | \tilde{q}_{x,t}^1 - q_{x,t} | \right) &< 0 \\ \Leftrightarrow | \tilde{q}_{x,t^*}^m - q_{x,t^*} | < | \tilde{q}_{x,t^*}^1 - q_{x,t^*} | \end{aligned}$$

Analog kann gezeigt werden, dass die Kurve der $\overline{CUMSUM}_{x,m}^{t^*}$ -Werte zwischen den Jahren $t^* - 1$ und t^* genau dann steigt, wenn das Modell m in der Periode t^* ungenauer prognostiziert als die Regression von Lin und Tsai.

Als letztes Merkmal der $\overline{CUMSUM}_{x,m}^{t^*}$ -Kurven sei außerdem erwähnt, dass der Endpunkt der Kurve genau dann kleiner als Null ist, wenn der mittlere absolute Fehler des Modells m in der Altersgruppe x geringer ist als derjenige des Lin-Tsai Modells. Auch dieses Resultat kann leicht anhand der Definitionen (3.4)-(3.5) sowie der Formel (3.2) für den MAE überprüft werden:

$$\begin{aligned} \overline{CUMSUM}_{x,m}^{2009} < 0 &\Leftrightarrow \sum_{t=1971}^{2009} | \tilde{q}_{x,t}^m - q_{x,t} | - \sum_{t=1971}^{2009} | \tilde{q}_{x,t}^1 - q_{x,t} | < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2009 - 1971 + 1)(MAE_{x,m} - MAE_{x,1}) &< 0 \Leftrightarrow MAE_{x,m} < MAE_{x,1} \end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise kann gezeigt werden, dass der Endpunkt der $\overline{CUMSUM}_{x,m}^{t^*}$ -Kurve größer als Null ist, wenn der mittlere absolute Fehler der Modells m größer ist als der entsprechende MAE der Lin-Tsai Methode.

Mithilfe dieser Überlegungen sollen nun die Abbildungen 5 und 6 untersucht werden, in denen die $\overline{CUMSUM}_{x,m}^{t*}$ -Werte für das Random Walk Modell mit Drift (in Blau) und das Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Bell (in Gelb) eingezeichnet sind. Wie bereits zuvor erklärt wurde, entsprechen die Werte der linearen Regression von Lin und Tsai aufgrund der Definition (3.5) genau der Nulllinie, die in den Grafiken als unterbrochene schwarze Linie gefunden werden kann. In Abbildung 5 sind die Werte für die Altersgruppe $x = 30$ eingetragen. Abbildung 6 zeigt die Kurven für die 60-Jährigen.

Leider lässt Abbildung 5 keine einfache Interpretation zu, die für alle Nationen gilt. Stattdessen müssen die Grafiken der einzelnen Länder näher analysiert werden. In Österreich sind die Anstiege der $\overline{CUMSUM}_{x,m}^{t*}$ -Kurven des Random Walks mit Drift und des Lee-Carter Modells mit Korrektur nach Bell tendenziell negativ. Beide Modelle scheinen demzufolge in Österreich bei der Altersgruppe der 30-Jährigen bessere Prognosen zu liefern als die Regression von Lin und Tsai. Auch in Kanada scheinen die beiden Kurven insgesamt einen negativen Trend aufzuweisen. Es gilt jedoch zu beachten, dass beide Linien ungefähr im Zeitraum von 1982 bis 1994 tendenziell steigen. In diesem Intervall dürfte das Lin-Tsai Modell demnach doch etwas genauere Prognosen liefern. Interessanterweise kann ein solcher Anstieg der blauen und der gelben Kurve in einem ähnlichen Zeitraum auch in Australien, Frankreich und den USA bemerkt werden. Eine eindeutige Beurteilung, welches Modell in diesen Ländern zu genaueren Prognosen führt, wird dadurch erschwert. Diese Erkenntnis verdient speziell für die USA besondere Aufmerksamkeit. Werden in den Vereinigten Staaten von Amerika lediglich die Werte des $MAE_{30,m}$ für die genannten drei Modelle verglichen, so müssten der Random Walk mit Drift und das korrigierte Lee-Carter Modell der Methode von Lin und Tsai vorgezogen werden. Wie bereits zuvor diskutiert wurde, zeigt sich dies in den Endpunkten der blauen und der gelben $\overline{CUMSUM}_{30,m}^{t*}$ -Kurven, die in den USA negative Werte annehmen. Bei der Betrachtung der gesamten Grafik der USA in Abbildung 5 scheint das Lin-Tsai Modell allerdings nicht klar schlechter zu sein als die anderen beiden Methoden. Ein ähnlicher Trugschluss könnte sich im Vereinigten Königreich ergeben, falls nur die mittleren absoluten Fehler gegenübergestellt werden. Während der $MAE_{30,m}$ für das nach Bell korrigierte Lee-Carter Modell besser ausfällt als für die Regression nach Lin und Tsai, zeigt die Grafik für das Vereinigte Königreich, dass diese beiden Modelle hinsichtlich der Genauigkeit der Prognosen nicht wirklich zu unterscheiden sind. Als letzte Grafik in Abbildung 5 sei noch auf Japan eingegangen. Das Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Bell ist hier augenscheinlich besser als die anderen beiden eingezeichneten Methoden. Der Random Walk mit Drift ist offensichtlich das Schlechteste unter den drei Verfahren. Das extreme Auseinanderklaffen der blauen und der gelben Linie verdient besondere Beachtung. In den anderen Ländern verläuft die Kurve des

korrigierten Lee-Carter Modells zwar auch praktisch zu jedem Zeitpunkt unterhalb derjenigen des Random Walks mit Drift, was auf die Überlegenheit des korrigierten Lee-Carter Modells hindeutet. Trotzdem ähnelt sich der Verlauf der beiden Kurven in den meisten anderen Ländern recht stark.

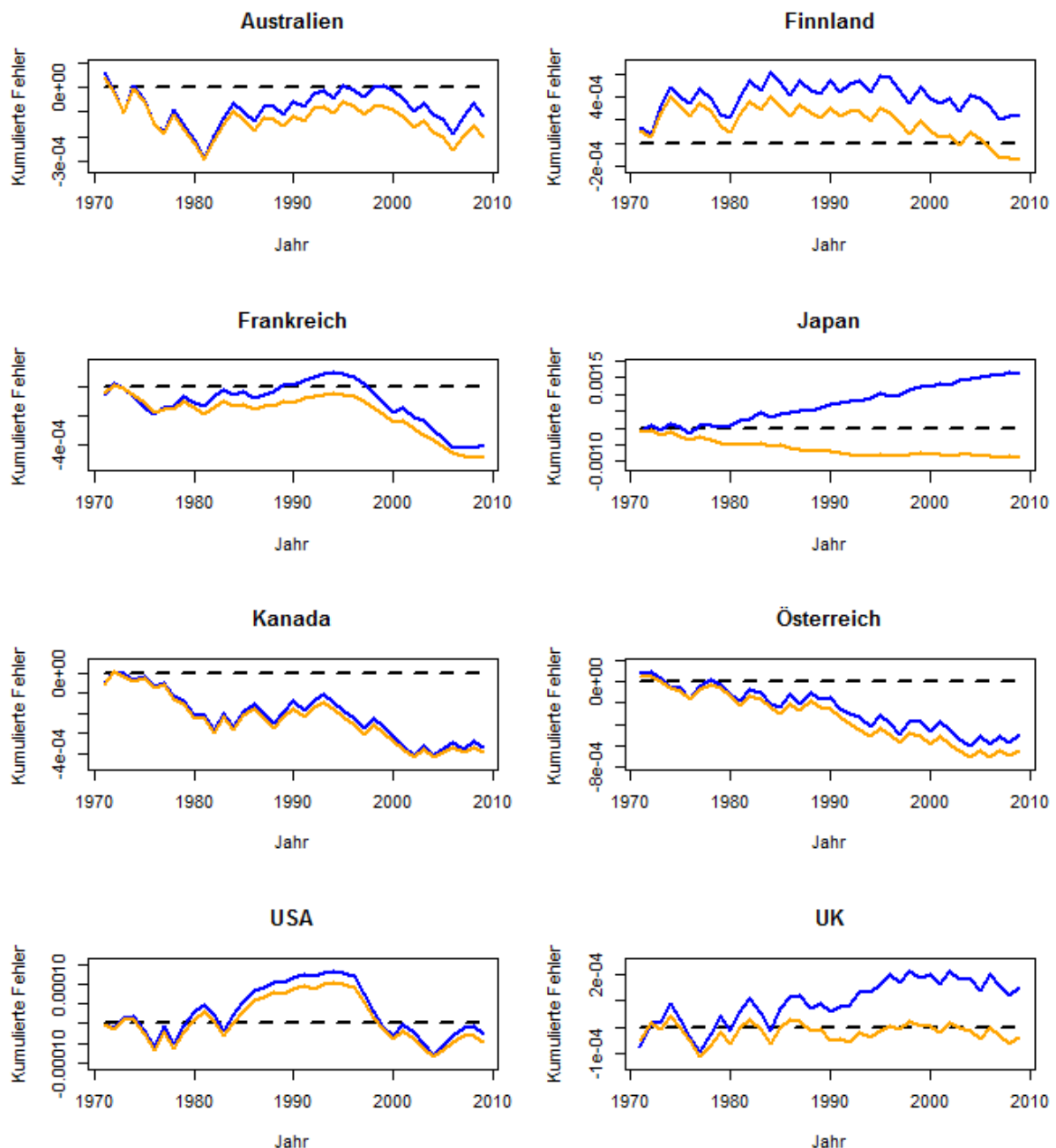


Abbildung 5 CUMSUM-Werte für 30-Jährige: Die gemäß Definition (3.5) veränderten kumulierten Fehler wurden für die Altersgruppe der 30-Jährigen für das Random Walk Modell mit Drift (in Blau), das Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Bell (in Gelb) und das Lin-Tsai Modell (als schwarze Nulllinie) eingetragen. Eigene Berechnungen und Darstellung; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

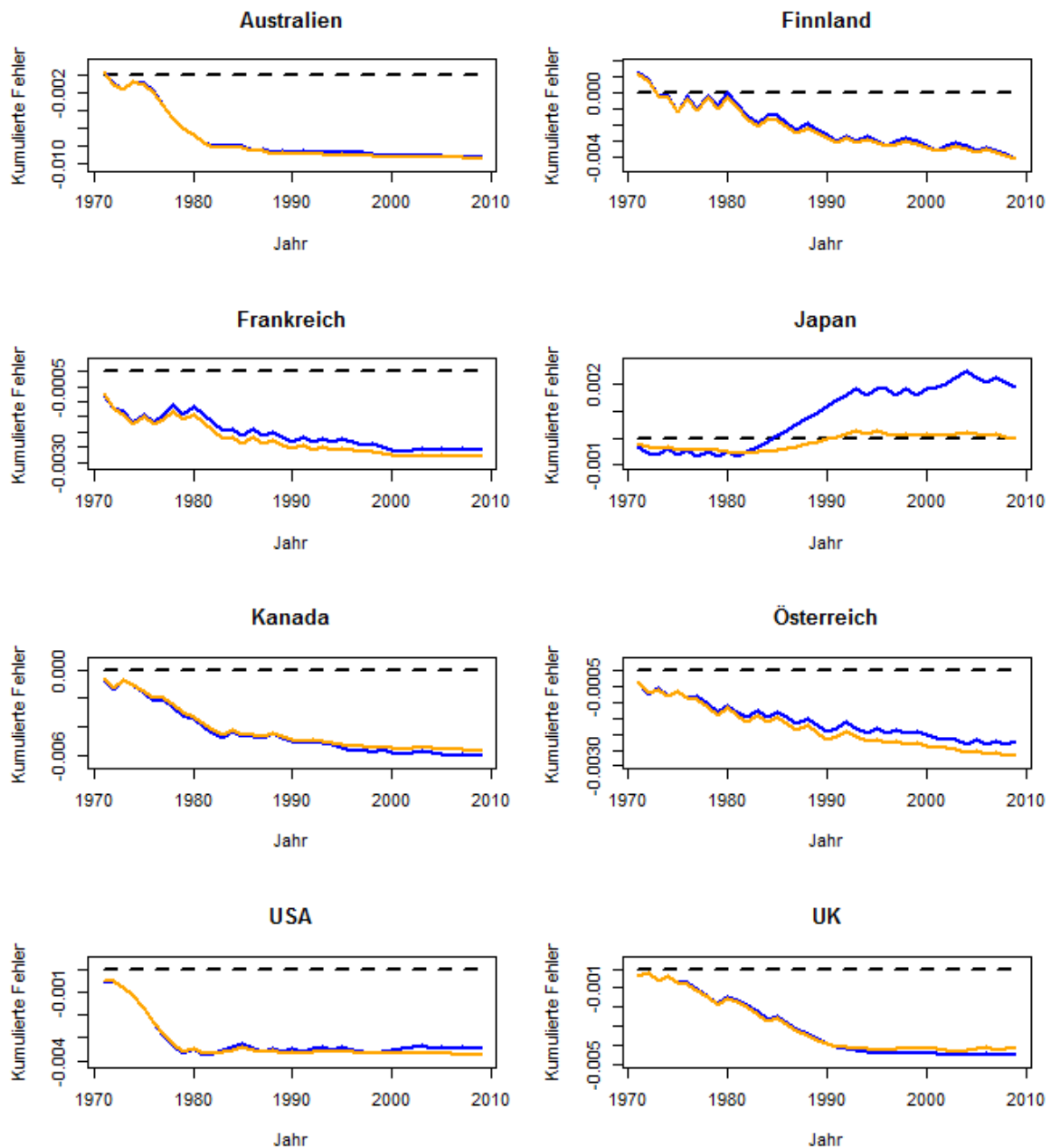


Abbildung 6 CUMSUM-Werte für 60-Jährige: Die gemäß Definition (3.5) veränderten kumulierten Fehlersummen wurden für die Altersgruppe der 60-Jährigen für das Random Walk Modell mit Drift (in Blau), das Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Bell (in Gelb) und das Lin-Tsai Modell (als schwarze Nulllinie) eingetragen. Eigene Berechnungen und Darstellung; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

In Abbildung 6 lassen sich die ähnlichen Verläufe der blauen und der gelben Kurve sogar noch deutlicher erkennen. Nur in Japan kommt es erneut zu recht unterschiedlichen Entwicklungen der beiden Linien. Die Modellierung anhand eines Random Walks mit Drift scheint auch in der Altersgruppe der 60-Jährigen in Japan insgesamt schlechter zu sein als die Verwendung der anderen beiden Methoden. Werden nur die Regression nach Lin und Tsai und das Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Bell verglichen, kann in Japan nicht darauf geschlossen werden, dass eine der beiden Methoden der anderen überlegen wäre.

In den anderen Ländern der Abbildung 6 zeigt sich jedoch ein anderes Bild als in Japan. In einigen Staaten (insbesondere in den USA und im Vereinigten Königreich) verlaufen die beiden Kurven in den späteren Jahren zwar relativ parallel zur Nulllinie, was darauf hindeutet, dass alle drei Verfahren ähnlich genaue Prognosen liefern. Trotzdem ergibt sich alles in allem der Eindruck, dass der Random Walk mit Drift und das korrigierte Lee-Carter Modell in allen Ländern außer Japan der Lin-Tsai Regression vorgezogen werden sollten. Besonders markant ist dieses Ergebnis in Österreich. Beide farblich eingezeichneten Linien weisen einen relativ gleichbleibenden negativen Trend auf.

Zusammengefasst lässt sich zur Abbildung 6 demnach sagen, dass die Grafiken (außer in Japan) hinsichtlich der Prognosegenauigkeit des Random Walks mit Drift und des korrigierten Lee-Carter Modells nur sehr geringe Unterschiede aufweisen. Außerdem kann festgehalten werden, dass auch in diesen Grafiken keine Hinweise dafür gefunden wurden, die das Lin und Tsai Modell besonders vorteilhaft erscheinen lassen würden.

Im Anhang 2 wurden noch zwei weitere Abbildungen dieser Art für die Altersgruppen der 50- und 80-Jährigen hinzugefügt. Die im vorherigen Absatz durchgeführte Zusammenfassung lässt sich im Großen und Ganzen vor allem auf die Abbildung der 80-Jährigen übertragen. Werden alle Abbildungen der $\overline{CUMSUM}_{x,m}^{t*}$ -Kurven verglichen, lässt sich unter Umständen herauslesen, dass der Random Walk mit Drift und das korrigierte Lee-Carter Modell vor allem bei den älteren Altersgruppen (die ein höheres Mortalitätsniveau vorweisen) genauere Prognosen liefern als die Methode von Lin und Tsai.

Als letzter möglicher Kritikpunkt der Vorgehensweise in diesem Unterkapitel könnte angemerkt werden, dass die Ergebnisse womöglich durch die Wahl des Zeitraums der Modellierung beeinflusst wurden. Aus diesem Grund wurde noch ein Vergleich durchgeführt, der sich nur auf die Daten zwischen 1970 und 2009 stützt und somit deutlich weniger Beobachtungen verwendet als die bisherigen Analysen. Die Ein-Schritt-Prognosen wurden hierbei nur für die Jahre 2001 bis

2009 berechnet.⁵ Hierfür wurden drei Modelle zuerst für die Jahre 1970-2000 geschätzt, mit denen die Prognosen für das Jahr 2001 ermittelt werden. Im nächsten Schritt werden die Modelle für das Zeitintervall 1970-2001 geschätzt, um eine Vorhersage für das Jahr 2002 zu treffen usw. Es wurden erneut die Werte des MAPE, MAE bzw. RMSE gegenübergestellt. Die Ergebnisse werden im Anhang 3 in drei Tabellen festgehalten. Wesentliche Erkenntnisse der bisherigen Analyse sind auch für diesen Vergleich gültig. Das Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Bell behauptet sich in den meisten Ländern weiterhin als das beste Verfahren und es gibt keine Indizien dafür, dass die Anwendung der linearen Regression von Lin und Tsai empfohlen werden sollte.

⁵ Es wird nochmals betont, dass Lin und Tsai (2015) in ihrer Arbeit ebenfalls die Perioden 2001 bis 2009 als zu prognostizierende Jahre gewählt haben.

4. Anwendungsbeispiele

In Kapitel 3 wurde verglichen, wie genau die Modelle die Sterbewahrscheinlichkeiten prognostizieren. In der Einleitung dieser Arbeit wurde jedoch bereits angedeutet, dass andere Größen, die sich aus den Sterbewahrscheinlichkeiten ableiten lassen, für viele UnternehmerInnen oder PolitikerInnen interessanter sind als die einzelnen Sterbewahrscheinlichkeiten selbst. Als Beispiele solcher Kennzahlen werden in diesem Kapitel die Lebenserwartung und die angemessene Prämienhöhe einer Lebensversicherung analysiert. Es wird nun untersucht, wie stark sich die zuvor entdeckten Unterschiede der Modelle hinsichtlich der Prognosegenauigkeit in diesen Anwendungsbeispielen auswirken.

4.1. Lebenserwartung

Angenommen eine Person wird am 1. Januar des Jahres t geboren. Dann beschreibt die durchschnittliche Lebenserwartung bei der Geburt den Erwartungswert der **noch zu lebenden Jahre** dieser Person unter der Bedingung, dass **die zukünftigen Sterbewahrscheinlichkeiten denen des Jahres t entsprechen** (vgl. zum Beispiel OECD 2015, S. 48). Die Annahme, dass es in Zukunft zu keinen Veränderungen der Sterbewahrscheinlichkeiten kommt, ist natürlich äußerst unrealistisch und wird vermutlich dazu führen, dass der tatsächliche Erwartungswert der noch zu lebenden Jahre unterschätzt wird. Die Berechnung wird allerdings deutlich erleichtert (vgl. z.B. OECD 2015, S. 48 oder Statistik Austria 2012, S. 7f). Um die weitere Analyse etwas einfacher zu gestalten, wird die durchschnittliche Lebenserwartung bei der Geburt von nun an auch kurz als durchschnittliche Lebenserwartung oder schlichtweg Lebenserwartung bezeichnet. In den Formeln wird diese Größe durch die Variable $E_{0,t}$ ausgedrückt. Das Alter, in dem die genannte Person verstirbt, wird durch die diskrete Zufallsvariable K beschrieben, die nur ganze Zahlen größer oder gleich Null annimmt. Es kann folgende Methode zur Berechnung der Lebenserwartung $E_{0,t}$ angewandt werden:

$$E_{0,t} = \sum_{x=0}^{\infty} (x + \dot{a}_x) P_t(K = x) \quad (4.1)$$

Die Variable $\dot{a}_x$ gibt an, wie viel Zeit die Personen, deren Sterbealter x ist, durchschnittlich im $(x + 1)$ -ten Lebensjahr verbringen. Wird $\dot{a}_x$ ebenfalls in Jahren gemessen, so muss demnach

$0 \leq \dot{a}_x < 1$ gelten.⁶ Der Einfachheit halber wird im weiteren Verlauf angenommen, dass $\dot{a}_x$ für jedes Alter gleich 0,5 ist. Auch die Wahrscheinlichkeit $P_t(K = x)$ verdient noch einige Erläuterungen. Wird erneut die Person herangezogen, die am 1. Januar des Jahres t geboren wurde, so gibt $P_t(K = x)$ die Wahrscheinlichkeit an, dass die Person bis zum x -ten Geburtstag überlebt und im Verlauf des $(x + 1)$ -ten Lebensjahres verstirbt. Somit gilt zwar für x gleich Null, dass $P_t(K = 0)$ einfach die Sterbewahrscheinlichkeit $q_{0,t}$ ist. Falls x jedoch mindestens 1 ist, gilt laut Definition im Allgemeinen $P_t(K = x) \neq q_{x,t}$, da sich $q_{x,t}$ nur auf die Sterbewahrscheinlichkeit im $(x + 1)$ -ten Lebensjahr einer bereits x -jährigen Person bezieht. Die Wahrscheinlichkeit $P_t(K = x)$ wird für $x \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ folgendermaßen berechnet werden:

$$P_t(K = x) = q_{x,t} \prod_{i=0}^{x-1} p_{x,t} \quad (4.2)$$

Das leere Produkt $\prod_{i=0}^{-1} p_{x,t}$ wird hierbei als Eins festgelegt, sodass $P_t(K = 0) = q_{0,t}$ gilt. Wie bereits im Kapitel 3.1 beschrieben wurde, sind in den Sterbetafeln der Human Mortality Database nur Sterbewahrscheinlichkeiten bis zum Alter 109 aufgelistet. Da die Sterbewahrscheinlichkeit „ $q_{110+,t}$ “ aller älteren Menschen gleich Eins gesetzt wird, ist die genaue Berechnung der Lebenserwartung $E_{0,t}$ gemäß Formel (4.1) nicht mehr möglich. Als Alternative könnte ein bedingter Erwartungswert $\check{E}_{0,t}$ der noch zu lebenden Jahre ermittelt werden. Die Bedingung wäre hierbei, dass das Sterbealter K der am 1. Januar im Jahre t geborenen Person höchstens 109 beträgt:

$$\check{E}_{0,t} = \sum_{x=0}^{109} (k + 0,5) P_t(K = x | K \leq 109) = \frac{\sum_{x=0}^{109} (k + 0,5) P_t(K = x)}{P_t(K \leq 109)} = \frac{\sum_{x=0}^{109} (k + 0,5) P_t(K = x)}{\sum_{k=0}^{109} P_t(K = k)} \quad (4.3)$$

Die bedingte Lebenserwartung $\check{E}_{0,t}$ wurde für die Gesamtbevölkerung jedes Landes für die Jahre 1970, 1989 und 2009 berechnet. Die erhaltenen Werte wurden anschließend in Tabelle 7 festgehalten. Die Einträge zeigen, dass die bedingte Lebenserwartung mit der Zeit prinzipiell gestiegen ist. Durchschnittlich ist die bedingte Lebenserwartung der Gesamtbevölkerung in den acht Ländern 2009 um ungefähr 4,4 Jahre höher als 1989 und um zirka 9,2 Jahre höher als 1970.

Die Einträge der Tabelle 7 sind auch dann interessant, wenn sie mit den Schätzungen zur Lebenserwartung der Human Mortality Database verglichen werden. In den Sterbetafeln der Human Mortality Database sind Schätzungen für den Erwartungswert der noch zu lebenden Jahre bei der Geburt angegeben. Die hierfür verwendete Berechnungsmethode kann im Methodenprotokoll von Wilmoth et al. (2007) nachgelesen werden. Obwohl die Human Mortality

⁶ Es wird an dieser Stelle nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Wahrscheinlichkeit $P(K = k)$ in der Formel (4.1) mit dem Faktor $(k + \dot{a}_x)$ multipliziert werden muss und nicht bloß mit k . Die Begründung liegt darin, dass die Lebenserwartung als Erwartungswert der noch zu lebenden Jahre und eben nicht als Erwartungswert des Sterbealters K definiert wurde.

Database nicht darauf bedingt, dass das Sterbealter höchstens 109 Jahre betragen soll, sind ihre Schätzungen für die Lebenserwartung für die gegebenen acht Länder in den Jahren 1989, 1999 und 2009 beinahe ident mit den Einträgen der Tabelle 7. Die höchste absolute Abweichung beträgt 0,02 Jahre. Ein Grund für diese geringe Abweichung liegt wohl auch darin, dass das Sterbealter ohnehin nur in den seltensten Fällen 110 Jahre oder mehr beträgt. Dies soll belegen, dass die Bedingung für das Sterbealter in (4.3) eigentlich kaum eine Rolle spielt.

Geschlecht	Land	Jahr=1970	Jahr=1989	Jahr=2009
Total	Australien	70,67	76,21	81,78
	Finnland	70,33	74,97	79,83
	Frankreich	72,11	76,56	81,18
	Japan	71,99	78,96	83,04
	Kanada	72,62	77,12	81,12
	Österreich	70,11	75,47	80,21
	USA	70,75	75,13	78,57
	UK	71,91	75,40	80,18

Tabelle 7 Bedingte Lebenserwartung; Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Bisher wurde die Berechnung der bedingten Lebenserwartung $\tilde{E}_{0,t}$ mithilfe der beobachteten Überlebens- und Sterbewahrscheinlichkeiten beleuchtet. Im nächsten Schritt wird gezeigt, wie im Jahr t eine Prognose für die bedingte Lebenserwartung im Jahr $t + 1$ berechnet werden kann. Angenommen t ist größer als 1950 und es sind die Sterbetafeln für die Jahre 1950 bis inklusive t bekannt, dann können zunächst alle fünf Modelle für die Altersgruppen $x = 0, 1, 2, \dots, 109$ anhand dieser Beobachtungen geschätzt werden. Anschließend werden vom Kalenderjahr t ausgehend für alle fünf Modelle Prognosen für die Überlebens- und Sterbewahrscheinlichkeiten des Jahres $t + 1$ erstellt. Im letzten Schritt werden noch die Formeln (4.2) und (4.3) angepasst, indem die Beobachtungen durch die prognostizierten Wahrscheinlichkeiten ersetzt werden:

$$\tilde{P}_{t+1}(K = x) = \tilde{q}_{x,t+1} \prod_{i=0}^{x-1} \tilde{p}_{x,t+1} \quad (\text{wobei } \prod_{i=0}^{-1} \tilde{p}_{x,t+1} = 1) \quad (4.4)$$

$$\tilde{E}_{0,t+1} = \frac{\sum_{x=0}^{109} (x+0,5) \tilde{P}_{t+1}(K=x)}{\sum_{k=0}^{109} \tilde{P}_{t+1}(K=k)} \quad (4.5)$$

Hierbei sei allerdings noch ein kleines Problem erwähnt, dass beim Schätzen der Lee-Carter Modelle auftritt. In der Human Mortality Database (2017) wurden in den Sterbetafeln der Männer Finnlands und der Frauen in Finnland und Österreich Sterbewahrscheinlichkeiten gleich Null beobachtet. Aufgrund dieser Daten ist das Schätzen der Lee-Carter Modelle nicht möglich, da die Zielvariable $\log(\mu_{x,t}) = \log(-\log(1 - q_{x,t}))$ keine reelle Zahl annimmt, wenn $q_{x,t}$ gleich Null

ist.⁷ Aus diesem Grund wurden die erwähnten vier Sterbewahrscheinlichkeiten durch den Wert $1 \cdot 10^{-7}$ ersetzt, der sehr nahe bei Null liegt, aber keine Probleme beim Schätzen der Modelle verursacht. Ob die erwähnten Sterbewahrscheinlichkeiten auch für das Schätzen des Lin-Tsai Modells oder des Random Walks mit Drift ersetzt werden, hatte keinen Einfluss auf deren Ergebnisse.

Nach diesen Änderungen können wie beschrieben Ein-Schritt-Prognosen für die bedingten Lebenserwartungen der Jahre 1971 bis 2009 berechnet werden. Hierfür werden zuerst die Modelle anhand der Sterbetafeln 1950-1970 geschätzt. Dann wird für jedes Modell die Prognose $\tilde{E}_{0,1970+1}$ erstellt. Als nächstes werden die Sterbetafeln 1950-1971 benutzt, um die Modelle zu schätzen und die Werte für $\tilde{E}_{0,1971+1}$ zu bestimmen usw. Anschließend können mithilfe der beobachteten bedingten Lebenserwartungen und der Ein-Schritt-Prognosen wiederum Werte für den MAE, MAPE oder RMSE berechnet werden. Auf diese Weise werden die Modelle hinsichtlich ihrer Prognosegenauigkeit verglichen. Um den Umfang der Arbeit zu begrenzen wurde jedoch nur eines der drei Kriterien herangezogen. Da Lin und Tsai (2015) in ihrem Artikel ebenfalls Anwendungsbeispiele beschreiben und dabei nur auf den MAPE zurückgreifen, wird der mittlere absolute prozentuelle Fehler auch hier verwendet. Er muss für jedes Modell folgendermaßen berechnet werden:

$$MAPE = \frac{1}{2009-1971+1} \sum_{t=1970}^{2008} \left| \frac{\tilde{E}_{0,t+1} - \tilde{E}_{0,t+1}}{\tilde{E}_{0,t+1}} \right| * 100$$

Die erhaltenen Ergebnisse werden in Tabelle 8 wiedergegeben. Der niedrigste (und somit beste) MAPE-Wert wurde in jeder Zeile fett gedruckt. Das Modell mit dem schlechtesten MAPE wurde wiederum rot markiert. Überraschenderweise wird das Lee-Carter Modell mit der Korrektur nach Lee-Carter am häufigsten als die beste Methode ausgewählt. Die MAPE-Werte auf Basis der Bell-Korrektur sind allerdings nur geringfügig schlechter und unterscheiden sich häufig erst bei der dritten Nachkommastelle. Ein weiteres interessantes Ergebnis ist die Tatsache, dass der Random Walk mit Drift bei der Prognose für Männer in den meisten Zeilen als die beste Methode hervorsteht.

Geht es andererseits um die schlechtesten Ergebnisse in Tabelle 8, so fallen vor allem das einfache Lee-Carter Modell und die Methode von Lin und Tsai auf. Die Regression von Lin und Tsai liefert insgesamt am öftesten die höchsten Fehlerraten. *Sie ist außerdem in keiner einzigen Zeile besser als die korrigierten Versionen des Lee-Carter Modells. Abgesehen von Japan sind die*

⁷ Beim Vergleich der Modelle im Unterkapitel 3.2 waren diese Beobachtungen kein Problem, da Sterbewahrscheinlichkeiten gleich Null nur für Altersgruppen unter 20 Jahren gefunden wurden. Diese Altersgruppen blieben im Unterkapitel 3.2 unberücksichtigt.

MAPE-Werte der Lin-Tsai Methode in allen Fällen schlechter als diejenigen des Random Walks mit Drift.

Geschlecht	Land	LT	RW	LC	LC (Korr.)	LC (Bell)
Männlich	Australien	0,813	0,325	0,679	0,348	0,354
	Finnland	1,341	0,280	0,680	0,268	0,270
	Frankreich	0,543	0,180	0,331	0,170	0,171
	Japan	0,450	0,497	0,444	0,224	0,227
	Kanada	0,531	0,154	0,516	0,201	0,207
	Österreich	0,917	0,206	0,512	0,253	0,259
	USA	0,277	0,205	0,415	0,219	0,224
	UK	0,429	0,205	0,710	0,220	0,230
Weiblich	Australien	0,656	0,304	0,448	0,302	0,305
	Finnland	0,713	0,330	0,703	0,278	0,277
	Frankreich	0,325	0,276	0,364	0,201	0,201
	Japan	0,371	0,566	1,036	0,211	0,211
	Kanada	0,345	0,184	0,291	0,131	0,133
	Österreich	0,630	0,217	0,425	0,182	0,185
	USA	0,209	0,194	0,277	0,170	0,173
	UK	0,378	0,219	0,399	0,213	0,212
Total	Australien	0,588	0,311	0,528	0,329	0,333
	Finnland	0,751	0,289	0,582	0,238	0,241
	Frankreich	0,382	0,226	0,360	0,177	0,178
	Japan	0,398	0,536	0,695	0,222	0,223
	Kanada	0,313	0,142	0,234	0,146	0,148
	Österreich	0,592	0,204	0,362	0,197	0,201
	USA	0,235	0,193	0,320	0,183	0,187
	UK	0,374	0,207	0,496	0,210	0,212

Tabelle 8 MAPE für die Prognose der bedingten Lebenserwartung; Es wurden dieselben Abkürzungen wie in Tabelle 2 verwendet; Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Bei der Berechnung der Prognosen hat sich noch ein weiteres beachtenswertes Ergebnis gezeigt: Die Regression von Lin und Tsai sagt in den meisten Fällen eine *sinkende* bedingte Lebenserwartung voraus. Diese Art der Prognose ist einerseits ziemlich kontraintuitiv. Sie ist andererseits auch schlichtweg falsch. Immerhin waren beispielsweise die berechneten bedingten Lebenserwartungen der Männer in ungefähr 90% der Fälle höher als im Vorjahr. Die Anwendung des Lin-Tsai Modells besagte im Gegensatz dazu nur zirka jedes fünfte Mal voraus, dass die bedingte Lebenserwartung der Männer steigen wird. In diesem Zusammenhang gilt also, dass in den meisten Fällen sogar die Verwendung der letzten Beobachtung ein besserer Prädiktor für die bedingte Lebenserwartung des nächsten Jahres gewesen wäre als die Prognose auf Basis der Lin-Tsai Methode.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass auch das einfache Lee-Carter Modell in den meisten Fällen sinkende bedingte Lebenserwartungen prognostizierte. Dies scheint jedoch bloß auf die erwähnte Diskontinuität im ersten Prognosejahr zurückzuführen zu sein. Die korrigierten Versionen des Lee-Carter Modells sagten (genauso wie der Random Walk mit Drift) nämlich immer steigende bedingte Lebenserwartungen voraus.

4.2. Versicherungsprämie

In diesem Unterkapitel wird versucht ein sehr einfaches Beispiel durchzurechnen und dafür auf allzu ausführliche Erläuterungen zu verzichten. Falls weitere Erklärungen bezüglich der Versicherungsmathematik benötigt werden, sei beispielsweise auf Gerber (1986) oder Promislow (2006) verwiesen. Für das Anwendungsbeispiel wird nun angenommen, dass eine Person am 1. Januar des Kalenderjahres t genau x Jahre alt wird und am selben Tag eine zehnjährige Lebensversicherung abschließt. Die diskrete Zufallsvariable T gibt an, wie viele ganze Jahre die Person nach dem Vertragsabschluss noch zu leben hat.⁸ Falls T kleiner oder gleich Neun ist, bezahlt das Versicherungsunternehmen am Ende des Kalenderjahres $t + T$ einen Euro an die Angehörigen aus. Solange die versicherte Person am Leben ist, muss sie während der Vertragslaufzeit zu Beginn jedes Jahres eine konstante Prämie $\Pi_{x,t}$ an das Unternehmen zahlen. Der erste Beitrag wird somit direkt bei Vertragsabschluss (am 1. Januar des Jahres t) fällig. Um den Barwert der jeweiligen Zahlungen zu ermitteln, wird ein Jahreszinssatz von drei Prozent angenommen. Die Zufallsvariablen Z^b und Z^c beschreiben die Auszahlungen beziehungsweise die Einzahlungen, die für das Versicherungsunternehmen bei dieser Person insgesamt anfallen werden. Der Erwartungswert der Auszahlung Z^b kann folgendermaßen berechnet werden:

$$E(Z^b) = \sum_{i=0}^9 1 * v^{i+1} * P(T = i) = \sum_{i=0}^9 v^{i+1} q_{x+i,t+i} \prod_{j=0}^{i-1} p_{x+j,t+j} \quad (4.6)$$

Das leere Produkt $\prod_{j=0}^{-1} p_{x+j,t+j}$ wird erneut als Eins festgelegt. Die Konstante v entspricht dem (jährlichen) Abzinsungsfaktor. Da für dieses Beispiel ein Zinssatz von drei Prozent verwendet wird, gilt im weiteren Verlauf immer $v = \frac{1}{1,03}$. Der Erwartungswert der Einnahmen Z^c wird mithilfe der nächsten Formel berechnet:

⁸ Mit anderen Worten bedeutet das, dass die noch zu lebenden Jahre immer auf eine ganze Zahl abgerundet werden, um T zu bestimmen. Falls der Versicherungsnehmer nach Vertragsabschluss beispielsweise noch 21 Monate (= 1,75 Jahre) lebt, ist T also gleich Eins.

$$E(Z^c) = \sum_{i=0}^9 \Pi_{x,t} * v^i * P(T \geq i) = \Pi_{x,t} \sum_{i=0}^9 v^i \prod_{j=0}^{i-1} p_{x+j,t+j} \quad (4.7)$$

Das Unternehmen will die Prämie im Beispiel nun so ansetzen, dass der Erwartungswert der Auszahlungen gleich dem Erwartungswert der Einzahlungen ist. Unter Verwendung der Formeln (4.6) und (4.7) kann die Höhe der Prämie nach einer simplen Äquivalenzumformung bestimmt werden:

$$\begin{aligned} E(Z^b) &= E(Z^c) \\ \sum_{i=0}^9 v^{i+1} q_{x+i,t+i} \prod_{j=0}^{i-1} p_{x+j,t+j} &= \Pi_{x,t} \sum_{i=0}^9 v^i \prod_{j=0}^{i-1} p_{x+j,t+j} \\ \Pi_{x,t} &= \frac{\sum_{i=0}^9 v^{i+1} q_{x+i,t+i} \prod_{j=0}^{i-1} p_{x+j,t+j}}{\sum_{i=0}^9 v^i \prod_{j=0}^{i-1} p_{x+j,t+j}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Um eine faire Prämie dieser Art genau ermitteln zu können, müsste das Unternehmen bereits die Sterbe- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten dieser Periode und der kommenden neun Jahre kennen. Da dies allerdings nicht möglich ist, muss das Unternehmen versuchen die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu prognostizieren. Hierfür werden in einem ersten Schritt die Sterbetafeln von 1950 bis $t - 1$ herangezogen, um die besprochenen Modelle zu schätzen. Anschließend werden die gesuchten Wahrscheinlichkeiten für die Jahre t bis $t + 9$ für jedes Modell extra vom Jahr $t - 1$ ausgehend prognostiziert. Wie die langfristigen Vorhersagen für den Random Walk mit Drift oder die Lee-Carter Modelle gefunden werden, ist in den Unterkapiteln 2.2 und 2.3 eindeutig beschrieben. Beim Lin-Tsai Modell stellt sich jedoch die Frage, ob nur der Lag $l = 1$ verwendet wird, anhand dessen dann rekursiv in die Zukunft prognostiziert wird, oder ob mehrere Modelle mit unterschiedlichen Lags benutzt werden sollen. Da Lin und Tsai (2015) in ihrem Artikel die letztgenannte Methode verwenden, wird diese Herangehensweise auch hier gewählt: Um vom Jahr $t - 1$ ausgehend eine Vorhersage für t zu finden wird also zuerst das Lin-Tsai Modell mit Lag $l = 1$ geschätzt und prognostiziert. Um von der Periode $t - 1$ aus das Jahr $t + 1$ zu prognostizieren, wird das Modell mit Lag $l = 2$ genutzt usw. Die Ergebnisse werden für jede Methode schließlich in eine leicht abgewandelte Form der Formel (4.8) eingesetzt, bei der die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten durch die Prognosen ersetzt werden:

$$\tilde{\Pi}_{x,t} = \frac{\sum_{i=0}^9 v^{i+1} \tilde{q}_{x+i,(t-1)+(i+1)} \prod_{j=0}^{i-1} \tilde{p}_{x+j,(t-1)+(j+1)}}{\sum_{i=0}^9 v^i \prod_{j=0}^{i-1} \tilde{p}_{x+j,(t-1)+(j+1)}} \quad (4.9)$$

Es stellt sich nun die Frage, wie stark die durch (4.9) berechnete Prämie vom tatsächlich fairen Betrag aus (4.8) abweicht. Damit die Beurteilung der Prognosegenauigkeit nicht nur von einer einzigen Altersgruppe x bzw. einer einzigen Periode t abhängt, werden die Berechnungen für alle

Altersgruppen $x = 21, \dots, 76$ und für die Kalenderjahre $t = 1981, \dots, 2000$ durchgeführt. Zum Schluss wird der MAPE für jedes Modell und jede Altersgruppe einzeln ermittelt:

$$MAPE_x = \frac{1}{2000-1981+1} \sum_{t=1981}^{2000} \left| \frac{\tilde{\pi}_{x,t} - \pi_{x,t}}{\pi_{x,t}} \right| * 100$$

Bevor die Resultate analysiert werden, sei erwähnt, dass dieses Anwendungsbeispiel in einer sehr ähnlichen Form im Artikel von Lin und Tsai (2015, S. 554ff) zu finden ist. Im Unterschied zum hier genannten Kontext, wird im Anwendungsbeispiel bei Lin und Tsai jedoch angenommen, dass die Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeit des Jahres t bereits bekannt sind. Außerdem führen die Autoren die Berechnungen nur für ein Jahr (nämlich $t = 2000$) durch.

Der durchschnittliche MAPE aller Altersgruppen $x = 21, \dots, 76$ wurde für jede Methode in Tabelle 9 eingetragen. Die höchsten und somit schlechtesten Werte wurden in jeder Zeile in Rot geschrieben. Das jeweils beste Modell wurde in Fettschrift eingetragen. Das Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Lee und Carter liefert auch in diesem Anwendungsbeispiel am öftesten den niedrigsten durchschnittlichen MAPE-Wert. Allerdings scheint die Wahl des besten Modells vom Geschlecht abzuhängen. Geht es nämlich darum faire Prämien für Männer vorherzusagen ist der Random Walk mit Drift in den meisten Fällen am genauesten. Bei der Prämienberechnung für Frauen scheint das Random Walk Modell aber keine besonders gute Wahl zu sein und bringt oft sogar sehr schlechte Werte hervor. Zusätzlich wird auch hier wieder deutlich, dass die Vorhersagen des Random Walks mit Drift im Falle Japans problematisch sind. Die Fehlerraten sind in diesem Anwendungsbeispiel extrem hoch und erreichen bei Frauen fast 56 Prozent. Eine mögliche Erklärung lässt sich durch erneutes Betrachten der Abbildung 3 (im Unterkapitel 3.1) finden. Das rasante Abfallen der Hazardraten in den 50er Jahren bewirkt, dass der Random Walk mit Drift insgesamt von einer zu starken durchschnittlichen Änderung der Hazardraten Japans ausgeht. Der Random Walk mit Drift überschätzt somit das Ausmaß, in dem sich die Hazardraten in Japan zukünftig verbessern können. Tatsächlich hat sich bei einer näheren Analyse der Berechnungen des Random Walks mit Drift gezeigt, dass dieses Verfahren in Japan mitunter sogar negative Hazardraten und Sterbewahrscheinlichkeiten vorhersagt, wenn mehrere Jahre in die Zukunft prognostiziert wird. Eine solche Prognose macht natürlich keinen Sinn und trägt dazu bei, dass es in Tabelle 9 zu den enormen Ungenauigkeiten im Falle Japans kommt.

Insgesamt zeigt die Tabelle 9 aber, dass das Lin-Tsai Modell auch in diesem Anwendungsbeispiel in den meisten Fällen als die schlechteste Methode hervorgeht. Es ist nur in einer der insgesamt 24 Zeilen besser als das Lee-Carter Modell mit Bell-Korrektur. Der durchschnittliche MAPE-Wert des Lin-Tsai Verfahrens ist außerdem kein einziges Mal niedriger als derjenige des Lee-Carter Modells mit Korrektur nach Lee und Carter. Selbst der Random Walk mit Drift und das einfache

Lee-Carter Modell gewinnen in den meisten Zeilen der Tabelle 10 den direkten Vergleich mit der Lin-Tsai Methode.

Zum Abschluss wurden noch einmal die einzelnen Altersgruppen näher untersucht. Hierbei wurde das Lin-Tsai Verfahren jeweils dem Random Walk mit Drift und den beiden korrigierten Versionen des Lee-Carter Modells gegenübergestellt. In Tabelle 10 wurde notiert, in wie vielen Altersgruppen der MAPE-Wert des Lin-Tsai Modells jeweils besser war als das Vergleichsmodell. Hierbei zeigt sich wie bereits in Tabelle 9, dass der Random Walk mit Drift gewisse Schwächen bei Vorhersagen für Frauen hat. Ansonsten gibt es aber auch hier kaum Hinweise darauf, dass die Anwendung der einfachen linearen Regression von Lin und Tsai insgesamt zu genaueren Prognosen führen könnte.

Geschlecht	Land	LT	RW	MAPE		
				LC	LC (Korr.)	LC (Bell)
Männlich	Australien	14,25	8,53	13,49	9,34	9,76
	Finnland	17,30	8,70	10,91	7,50	7,75
	Frankreich	11,75	7,76	9,90	7,94	7,95
	Japan	9,89	27,32	10,47	8,27	8,21
	Kanada	11,88	7,33	9,83	8,08	8,22
	Österreich	23,32	8,59	10,38	10,19	10,09
	USA	8,52	6,98	9,12	7,12	7,18
	UK	8,15	8,60	14,79	7,09	8,23
Weiblich	Australien	10,12	7,65	9,16	5,46	5,79
	Finnland	9,10	16,9	13,47	7,70	8,21
	Frankreich	8,31	11,55	8,04	5,75	5,75
	Japan	11,53	55,74	17,1	9,98	10,73
	Kanada	9,60	9,04	4,30	3,77	3,70
	Österreich	16,19	8,10	8,52	6,45	6,50
	USA	5,96	8,20	6,44	5,24	5,26
	UK	9,52	9,42	10,51	5,45	6,11
Total	Australien	9,69	6,72	11,76	7,22	7,71
	Finnland	9,46	8,38	8,46	5,92	5,97
	Frankreich	9,46	6,66	8,19	6,40	6,34
	Japan	11,40	37,08	13,72	9,13	9,50
	Kanada	7,50	4,73	6,41	5,01	5,06
	Österreich	17,10	5,90	8,17	7,74	7,68
	USA	6,70	5,62	6,18	5,07	4,95
	UK	7,61	8,01	12,89	5,90	6,96

Tabelle 9 Mittelwert des MAPE für alle Altersgruppen x=21,...,76; Es wurden dieselben Abkürzungen wie in Tabelle 2 verwendet; Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Geschlecht	Land	MAPE					
		LT	RW	LT	LC (Korr.)	LT	LC (Bell)
Männlich	Australien	9	47	9	47	12	44
	Finnland	0	56	0	56	0	56
	Frankreich	5	51	5	51	6	50
	Japan	38	18	18	38	18	38
	Kanada	12	44	18	38	19	37
	Österreich	0	56	0	56	0	56
	USA	13	43	18	38	21	35
	UK	31	25	28	28	31	25
Weiblich	Australien	12	44	10	46	10	46
	Finnland	42	14	23	33	23	33
	Frankreich	42	14	12	44	11	45
	Japan	46	10	29	27	31	25
	Kanada	25	31	6	50	8	48
	Österreich	0	56	0	56	3	53
	USA	40	16	20	36	20	36
	UK	17	39	5	51	6	50
Total	Australien	19	37	23	33	25	31
	Finnland	11	45	8	48	13	43
	Frankreich	2	54	5	51	6	50
	Japan	43	13	26	30	27	29
	Kanada	0	56	19	37	19	37
	Österreich	0	56	2	54	0	56
	USA	8	48	3	53	6	50
	UK	22	34	19	37	24	32

*Tabelle 10 Häufigkeit des kleinsten MAPE; Es wurden dieselben Abkürzungen wie in Tabelle 2 verwendet;
Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)*

5. Zusammenfassung

Das von Lin und Tsai vorgeschlagene einfache lineare Modell wurde mehreren Vergleichen mit alternativen Modellen unterzogen. Die Daten die hierfür verwendet wurden unterscheiden sich teilweise hinsichtlich der Altersgruppen und Jahre. In den meisten Fällen wurde versucht, ähnliche Bedingungen wie im Artikel von Lin und Tsai (2015) herzustellen. Insbesondere im Kernkapitel 3.2 und im Anwendungsbeispiel zu den Versicherungsprämien wurden die untersuchten Altersgruppen genauso gewählt wie in der Arbeit von Lin und Tsai. Auch die Auswahl der verwendeten Jahre und der Fehlerquoten (MAPE, MAE und RMSE) schafft Bedingungen, die denen aus dem Artikel von Lin und Tsai sehr nahe kommen.

Durch die ähnliche Wahl der Vergleichsszenarien konnten sich gewisse Ergebnisse bestätigen lassen. So lieferte die einfache lineare Regression nach Lin und Tsai auch in dieser Arbeit meistens bessere Ergebnisse als das ursprüngliche Lee-Carter Modell, wenn Prognosen für Japan, die USA oder das Vereinigte Königreich gesucht wurden. Bei der Gegenüberstellung mit den korrigierten Versionen des Lee-Carter Modells konnte sich die Methode von Lin und Tsai allerdings nicht mehr durchsetzen. Unabhängig davon, ob die hierfür notwendige Korrektur gemäß Lee und Carter (1992) oder Bell (1997) erfolgte, konnte auf Basis des verbesserten Lee-Carter Modells in den allermeisten Vergleichsszenarien eine höhere Prognosegenauigkeit erzielt werden als durch die Anwendung der Lin-Tsai Methode. Die Vermutung, dass die Überlegenheit des Lin-Tsai Verfahrens gegenüber dem unkorrigierten Lee-Carter Modell bei der Erstellung von Punktprognosen lediglich auf der Diskontinuität im ersten Prognosejahr beruht, scheint sich somit zu bestätigen.

Die zweite These, dass der Random Walk mit Drift genauere Prognosen hervorbringt als die Methode von Lin-Tsai, lässt sich in den meisten Fällen ebenfalls belegen. Dies ist insbesondere deshalb interessant, weil das Modell des Random Walks mit Drift sowohl in der theoretischen Analyse als auch in der praktischen Anwendung deutlich simpler ist als das Verfahren von Lin und Tsai. Immerhin basiert die Prognose mittels Random Walks mit Drift im Wesentlichen nur auf der Berechnung eines Mittelwerts. Dass die einfache lineare Regression von Lin und Tsai trotzdem Probleme hat genauere Prognosen zu liefern, lässt diese Methode nicht gerade als empfehlenswert erscheinen. Durch die kontraintuitiven Vorhersagen der linearen Regression von Lin und Tsai im Zusammenhang mit den bedingten Lebenserwartungen wurden die Zweifel an der Methode zusätzlich verstärkt. Auf Basis all dieser Ergebnisse wird von der Anwendung des Lin-Tsai Verfahrens insgesamt eher abgeraten.

Anhang

Anhang 1: Zusätzliche deskriptive Statistik

Da in dieser Arbeit sehr viele verschiedene Sterbetafeln zu den Geschlechtern, Ländern und Altersgruppen herangezogen werden, ist es sinnvoll noch einige Grafiken zur Veranschaulichung der Daten anzuführen, um einen möglichst guten Überblick zu garantieren.

Die Abbildungen 7 und 8 geben (wie auch Abbildung 2 aus dem Unterkapitel 3.1) die Hazardraten der Altersgruppen $x = 0, \dots, 109$ aus den Jahren 1950 und 2009 an. Im Gegensatz zu Abbildung 2 beziehen sich die Grafiken nun jedoch immer nur auf ein Geschlecht. Prinzipiell wirkt die generelle Form dieser Kurven ähnlich, unabhängig davon, ob die Plots der Frauen, Männer oder der Gesamtbevölkerung betrachtet werden. Allerdings scheint der „Buckel“ der Hazardraten der ungefähr 20-Jährigen bei Männern teilweise noch etwas ausgeprägter hervorzutreten als bei den Frauen.

Die Abbildungen 9 bis 11 veranschaulichen die Zeitreihen der Hazardraten für drei verschiedene Altersgruppen. Die Werte beziehen sich auf die Gesamtbevölkerung. Wie auch in den Abbildungen 3 und 4 aus Unterkapitel 3.1 zeigt sich, dass die Mortalität langfristig gesunken ist. Die Zeitreihen der 80-Jährigen scheinen sich relativ gut durch eine Gerade beschreiben zu lassen. In der Altersgruppe der 20-Jährigen ist der langfristige negative Trend ebenfalls erkennbar. Allerdings weisen die Kurven dieser Altersgruppe auch gewisse Strukturbrüche auf. So fallen die Hazardraten in Finnland, Japan und dem Vereinigten Königreich Anfang der fünfziger Jahre stärker als in den späteren Perioden. In Frankreich und den Vereinigten Staaten von Amerika kommt es in den Sechzigern gar zu einem anhaltenden Anstieg der Mortalität.

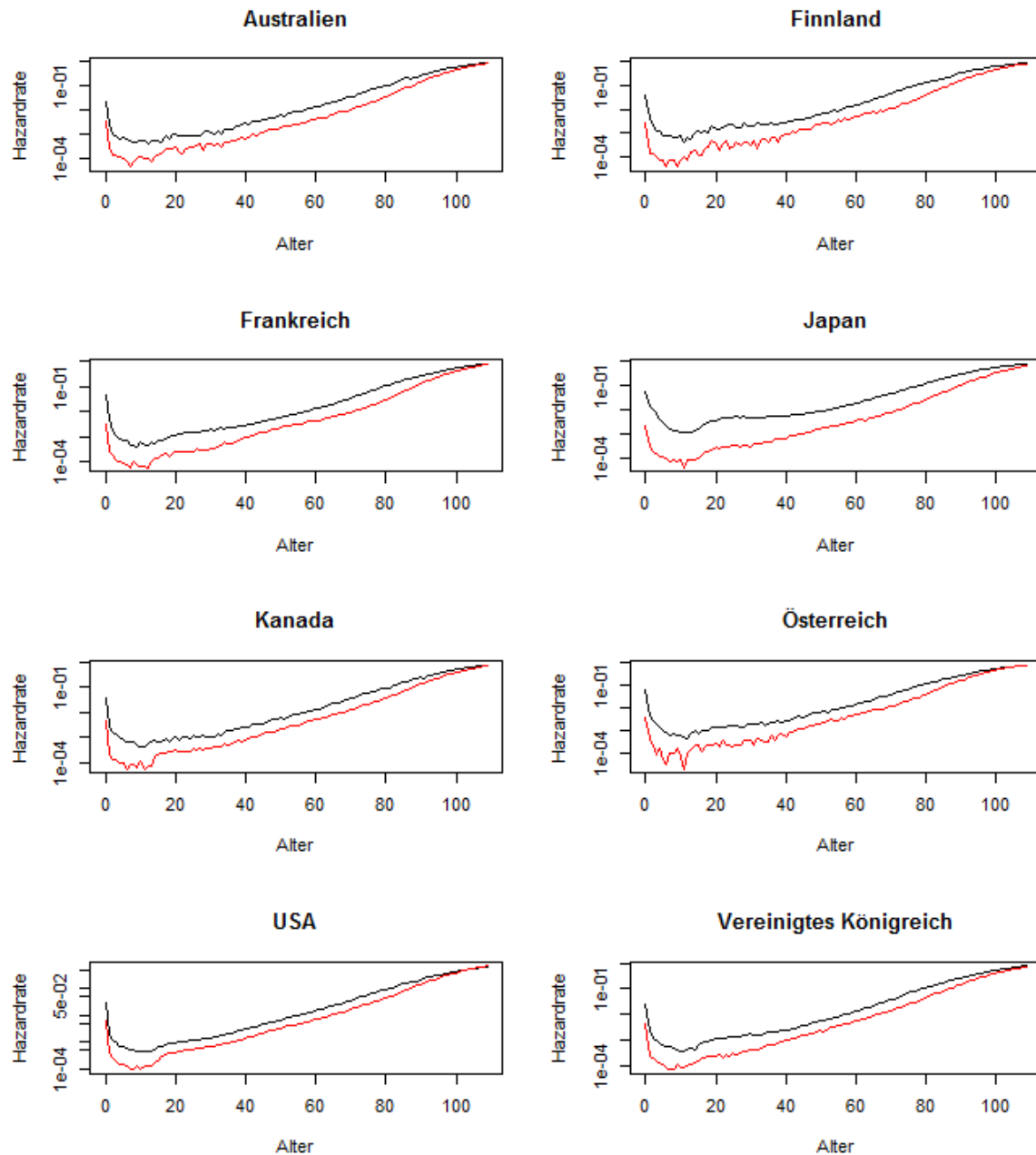


Abbildung 7 Hazardraten der Frauen: Es wurden die Hazardraten für alle Altersgruppen zwischen 0 und 109 für die Jahre 1950 (in Schwarz) und 2009 (in Rot) eingezeichnet. Zur besseren Veranschaulichung wurde die y-Achse logarithmiert; Eigene Berechnungen und Darstellung; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

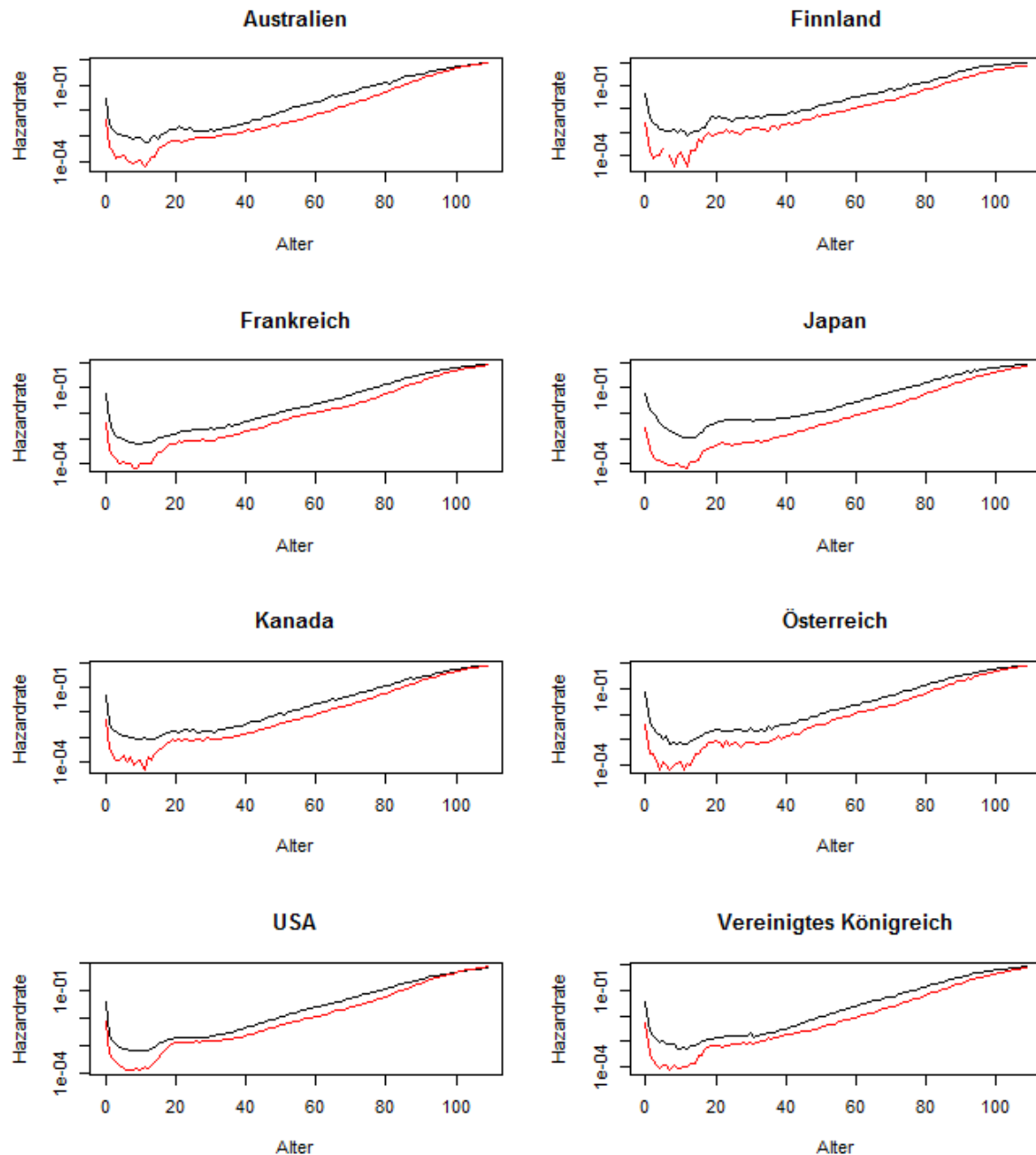


Abbildung 8 Hazardraten der Männer: Es wurden die Hazardraten für alle Altersgruppen zwischen 0 und 109 für die Jahre 1950 (in Schwarz) und 2009 (in Rot) eingezeichnet. Zur besseren Veranschaulichung wurde die y-Achse logarithmiert. Da die beobachtete Hazardrate der Sechsjährigen 2009 in Finnland gleich Null war, kann sie für die logarithmierte y-Achse nicht eingezeichnet werden; Eigene Berechnungen und Darstellung; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

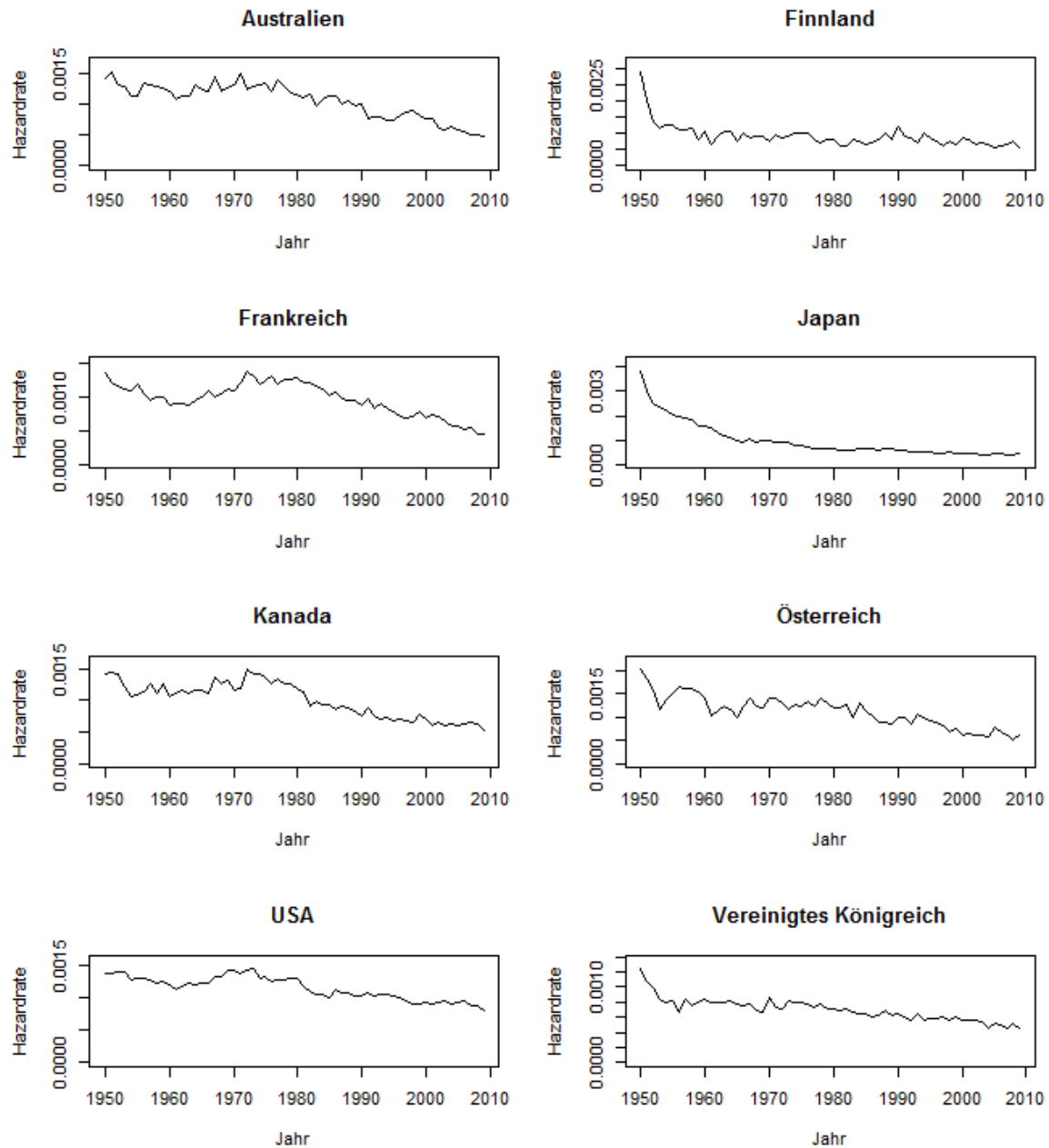


Abbildung 9 Hazardraten der 20-Jährigen: Die Zeitreihen für die Gesamtbevölkerungen aller acht Länder von 1950 bis 2009; Eigene Berechnungen und Darstellung; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

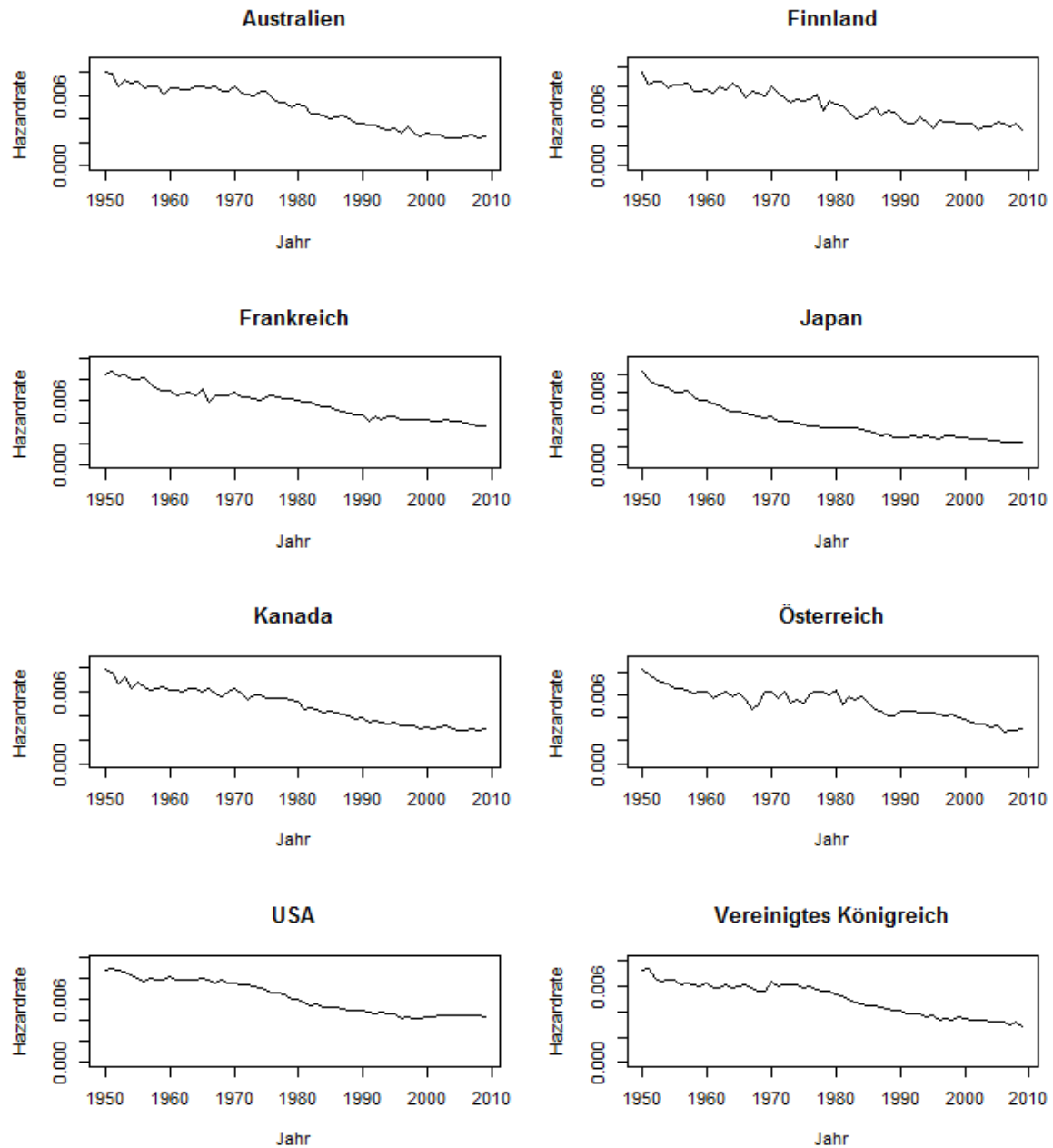


Abbildung 10 Hazardraten der 50-Jährigen: Die Zeitreihen für die Gesamtbevölkerungen aller acht Länder von 1950 bis 2009; Eigene Berechnungen und Darstellung; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

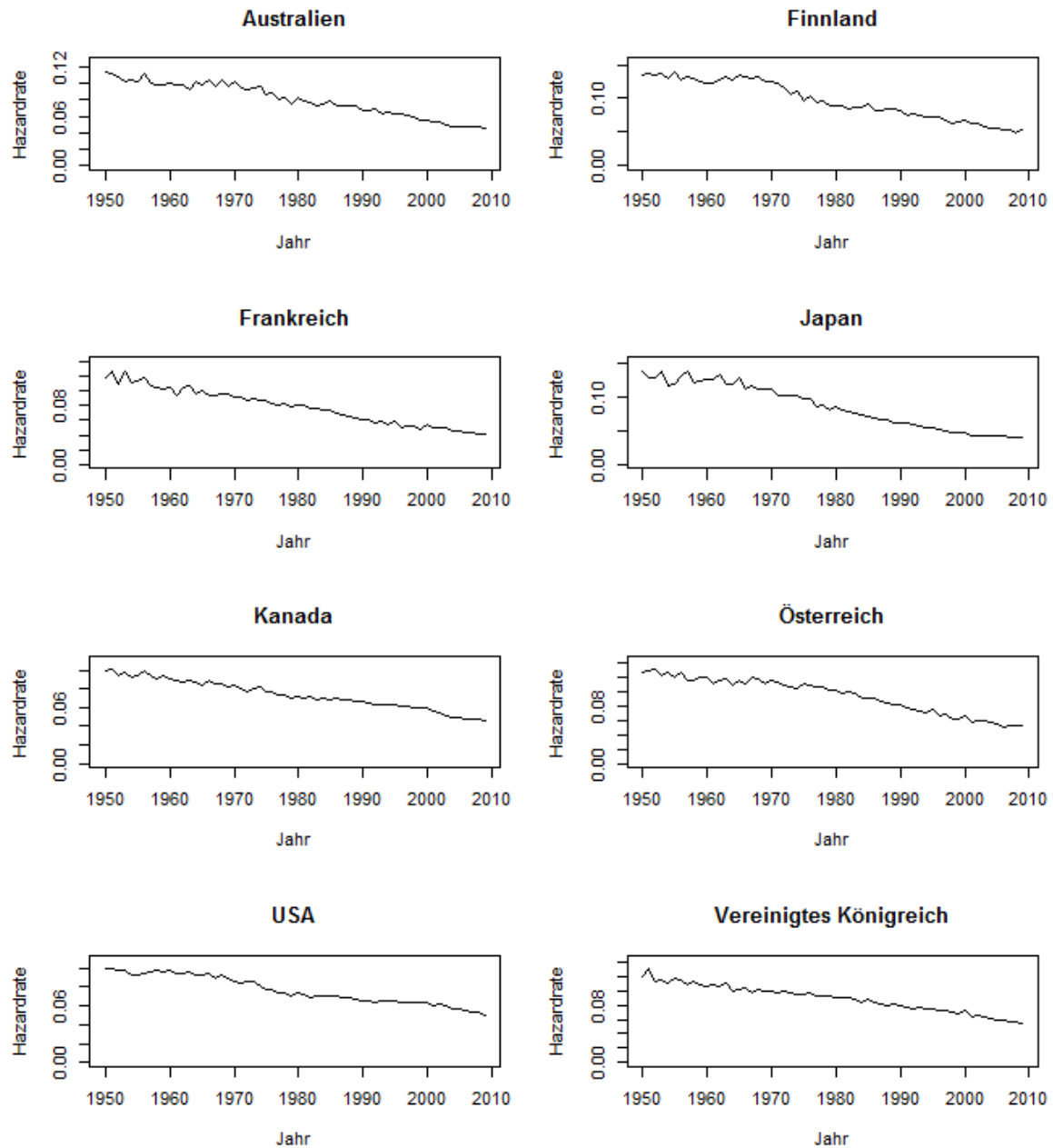


Abbildung 11 Hazardraten der 80-Jährigen: Die Zeitreihen für die Gesamtbevölkerungen aller acht Länder von 1950 bis 2009; Eigene Berechnungen und Darstellung; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Anhang 2: Weitere Ergebnisse zum Vergleich im Unterkapitel 3.2

In diesem Teil des Anhangs werden noch einige weitere Tabellen und Grafiken gezeigt, die die Resultate des Vergleichs aus Unterkapitel 3.2 zusätzlich untermauern sollen. So wurde die einfache Regression nach Lin und Tsai in den Tabellen 5 und 6 nur dem Random Walk mit Drift und dem Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Bell gegenübergestellt. In den Tabellen 11 bis 13 wird dieselbe Art des Vergleichs noch einmal für alle fünf Methoden durchgeführt. Auch hier wurde festgehalten, in wie vielen Altersgruppen jede Methode hinsichtlich MAPE, MAE bzw. RMSE am genauesten prognostiziert. Wie in den Tabellen 5 und 6 geht das gemäß Bell korrigierte Lee-Carter Modell am häufigsten als die beste Methode hervor. Das Verfahren von Lin und Tsai kann sich im Gegensatz dazu kaum gegen die anderen Verfahren behaupten. In den meisten Zeilen der Tabellen 11 bis 13 kann es sich in keiner einzigen der 65 Altersgruppen als die beste Methode durchsetzen.

In den Abbildungen 12 und 13 wurden die Zeitreihen der nach Definition (3.5) veränderten kumulierten Fehler für die 50- und 80-Jährigen eingetragen. Die Interpretation erfolgt genauso wie es im Zusammenhang mit den Abbildungen 5 und 6 beschrieben wurde. Mit Ausnahme der Altersgruppe der 50-Jährigen in Japan verlaufen die $\overline{CUMSUM}_{x,m}^{t*}$ -Werte des Random Walks mit Drift und des Lee-Carter Modells mit Korrektur nach Bell relativ ident. Die 50-Jährigen in Japan sind auch deshalb interessant, weil das korrigierte Lee-Carter Modell über alle Perioden hinweg ähnlich zum Lin-Tsai Modell verläuft. Der Vergleich der beiden Methoden liefert in diesem Fall also keinen eindeutigen Gewinner. Für den genannten Plot kann lediglich festgehalten werden, dass beide Modelle gegenüber dem Random Walk mit Drift zu bevorzugen sind. Andere interessante Grafiken ergeben sich für die 50-Jährigen in Österreich und im Vereinigten Königreich. In beiden Fällen scheint die Lin-Tsai Methode zunächst genauere Prognosen zu liefern als der Random Walk mit Drift und das korrigierte Lee-Carter Modell. In den späteren Jahren wäre diese Aussage aber nicht mehr gültig. Der Zeitraum, in dem das Lin-Tsai Verfahren im Vereinigten Königreich bevorzugt werden kann, ist außerdem sehr kurz. Alle anderen Plots der Abbildungen 12 und 13 scheinen gegen die Anwendung des linearen Modells von Lin und Tsai zu sprechen.

Geschlecht	Land	LT	RW	MAPE		
				LC	LC (Korr.)	LC (Bell)
Männlich	Australien	0	19	7	3	36
	Finnland	1	4	33	0	27
	Frankreich	0	25	3	6	31
	Japan	0	1	0	24	40
	Kanada	0	24	12	0	29
	Österreich	0	5	39	2	19
	USA	0	34	0	14	17
	UK	10	16	0	18	21
Weiblich	Australien	0	3	29	0	33
	Finnland	0	4	35	0	26
	Frankreich	1	5	8	2	49
	Japan	1	1	5	24	34
	Kanada	2	2	43	0	18
	Österreich	0	5	41	1	18
	USA	2	6	1	10	46
	UK	1	22	7	0	35
Total	Australien	0	20	5	5	35
	Finnland	0	5	30	2	28
	Frankreich	0	13	2	5	45
	Japan	0	0	0	31	34
	Kanada	0	25	10	1	29
	Österreich	0	5	32	3	25
	USA	0	23	0	14	28
	UK	7	21	6	7	24

Tabelle 11 Häufigkeit des kleinsten MAPE für den Vergleich aller Modelle; Es wurden dieselben Abkürzungen wie in Tabelle 2 verwendet; Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Geschlecht	Land	LT	RW	MAE		
				LC	LC (Korr.)	LC (Bell)
Männlich	Australien	0	15	8	2	40
	Finnland	2	2	35	0	26
	Frankreich	0	17	3	6	39
	Japan	0	1	0	27	37
	Kanada	0	23	11	0	31
	Österreich	0	4	36	2	23
	USA	0	33	0	17	15
	UK	10	12	0	21	22
Weiblich	Australien	0	3	31	0	31
	Finnland	3	3	34	2	23
	Frankreich	2	0	12	3	48
	Japan	0	1	5	27	32
	Kanada	2	1	44	1	17
	Österreich	0	3	40	1	21
	USA	2	2	1	11	49
	UK	2	17	9	0	37
Total	Australien	0	17	8	3	37
	Finnland	5	2	25	2	31
	Frankreich	0	8	2	6	49
	Japan	1	0	0	39	25
	Kanada	0	22	10	2	31
	Österreich	0	3	30	5	27
	USA	0	17	0	18	30
	UK	7	20	6	9	23

Tabelle 12 Häufigkeit des kleinsten MAE für den Vergleich aller Modelle; Es wurden dieselben Abkürzungen wie in Tabelle 2 verwendet; Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Geschlecht	Land	LT	RW	RMSE		
				LC	LC (Korr.)	LC (Bell)
Männlich	Australien	0	6	15	2	42
	Finnland	2	0	39	0	24
	Frankreich	0	12	4	0	49
	Japan	0	0	0	26	39
	Kanada	0	17	13	0	35
	Österreich	0	0	34	1	30
	USA	0	30	0	11	24
	UK	12	3	1	9	40
Weiblich	Australien	0	2	45	0	18
	Finnland	2	0	35	3	25
	Frankreich	0	0	14	0	51
	Japan	0	1	7	31	26
	Kanada	0	0	43	0	22
	Österreich	0	0	43	1	21
	USA	0	0	1	12	52
	UK	2	2	9	1	51
Total	Australien	0	10	14	2	39
	Finnland	4	0	24	7	30
	Frankreich	0	3	4	1	57
	Japan	1	0	0	42	22
	Kanada	0	5	11	0	49
	Österreich	0	1	30	1	33
	USA	0	8	0	17	40
	UK	8	5	6	1	45

Tabelle 13 Häufigkeit des kleinsten RMSE für den Vergleich aller Modelle; Es wurden dieselben Abkürzungen wie in Tabelle 2 verwendet; Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

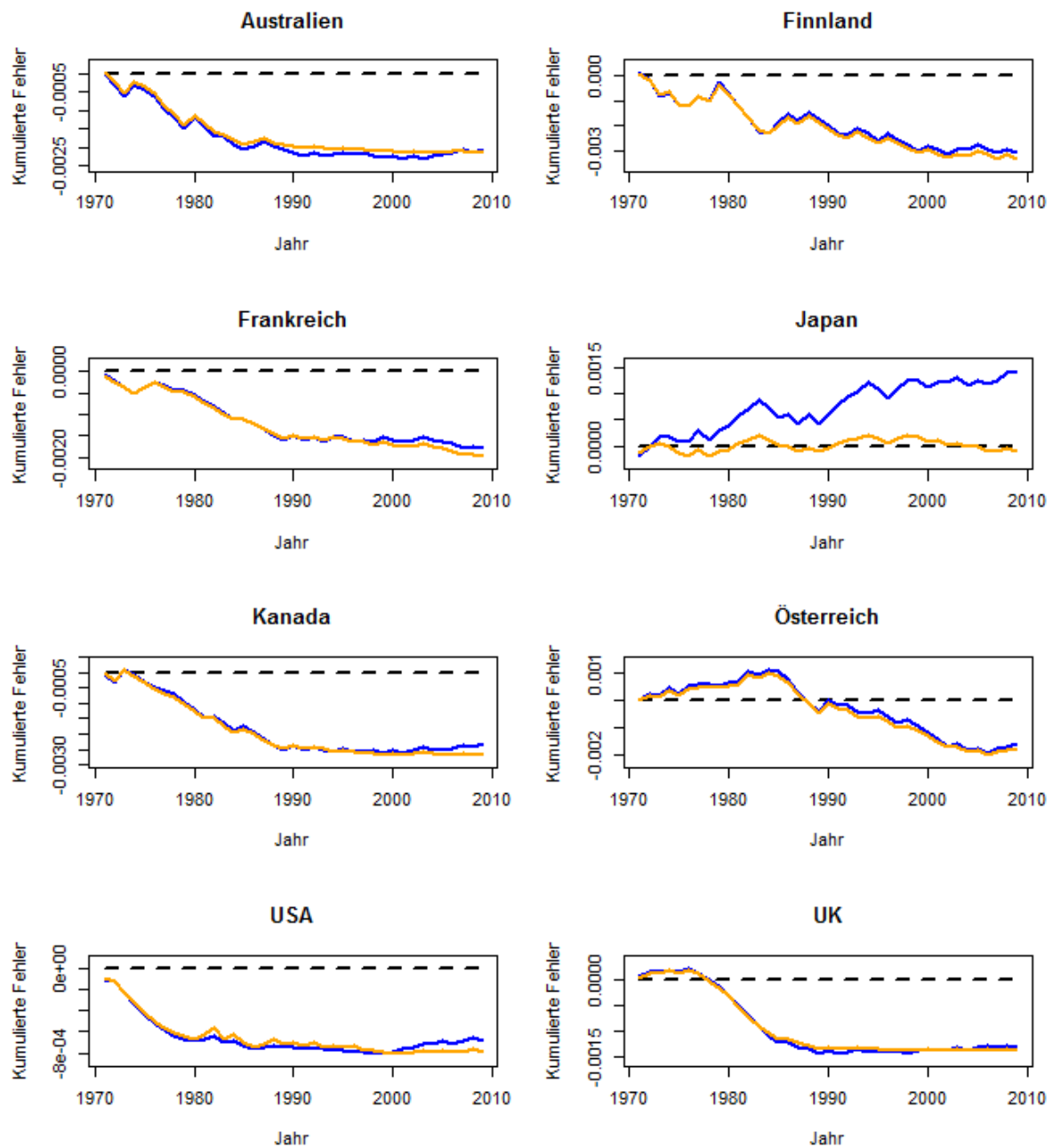


Abbildung 12 CUMSUM-Werte für 50-Jährige: Die gemäß Definition (3.5) veränderten kumulierten Fehler wurden für die Altersgruppe der 50-Jährigen für das Random Walk Modell mit Drift (in Blau), das Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Bell (in Gelb) und das Lin-Tsai Modell (als schwarze Nulllinie) eingetragen. Eigene Berechnungen und Darstellung; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

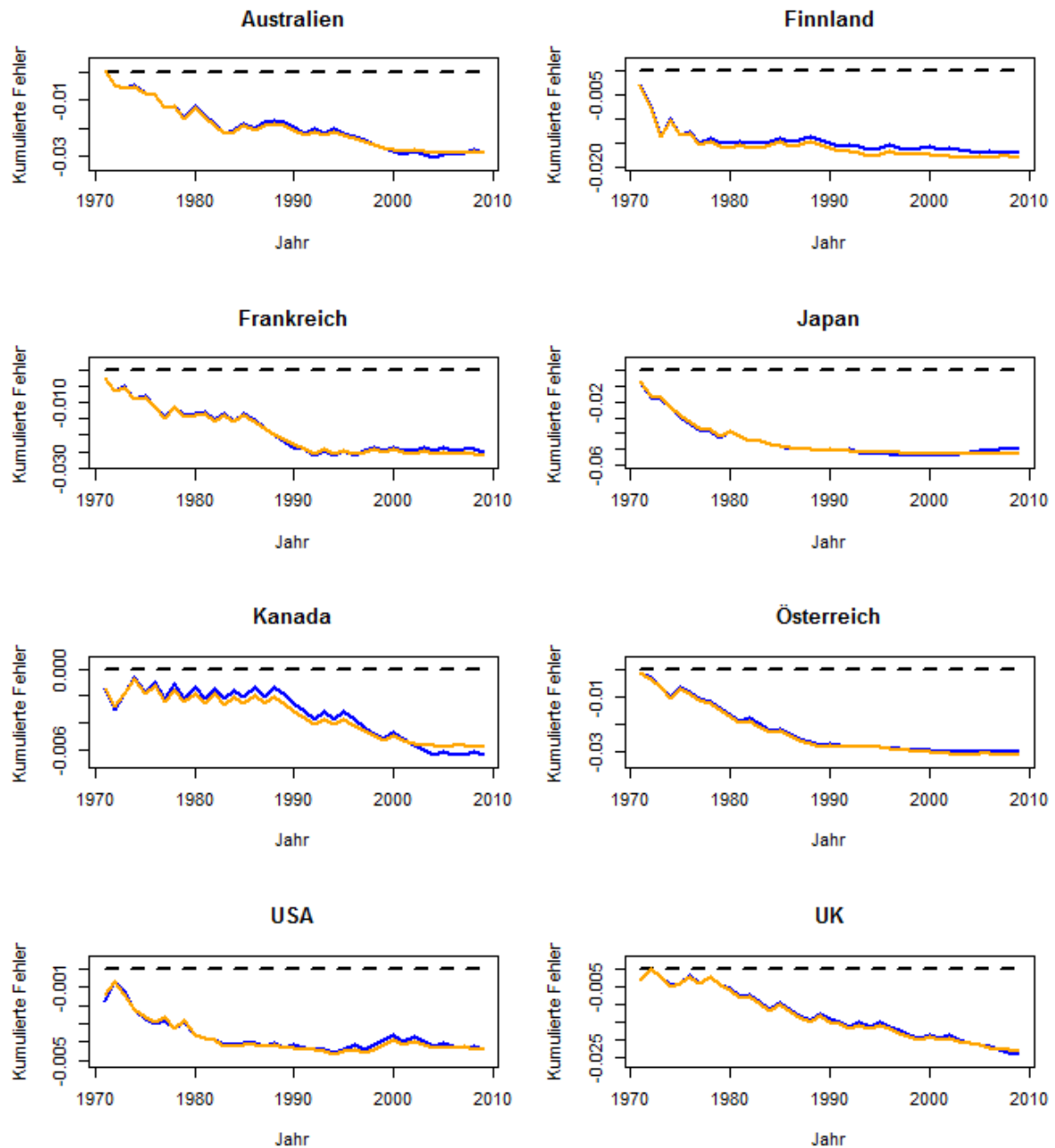


Abbildung 13 CUMSUM-Werte für 80-jährige: Die gemäß Definition (3.5) veränderten kumulierten Fehler wurden für die Altersgruppe der 80-Jährigen für das Random Walk Modell mit Drift (in Blau), das Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Bell (in Gelb) und das Lin-Tsai Modell (als schwarze Nulllinie) eingetragen. Eigene Berechnungen und Darstellung; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Anhang 3: Vergleich mit weniger Jahren

Um einer möglichen Kritik vorzugreifen, dass die Ergebnisse des Vergleichs aus Unterkapitel 3.2 durch die Auswahl der Jahre beeinflusst sein könnten, wird im letzten Teil des Anhangs noch eine Analyse durchgeführt, die die Sterbetafeln der Jahre 1950 bis 1969 unberücksichtigt lässt. Es werden erneut die Altersgruppen $x = 21, \dots, 85$ betrachtet. Die Analyse wird wiederum für Frauen, Männer und beide Geschlechter zusammen in acht Ländern durchgeführt. Der wichtige Unterschied zu Unterkapitel 3.2 ist jedoch, dass nun auf Basis der Sterbetafeln aus dem Zeitraum von 1970 bis 2000 Ein-Schritt-Prognosen für die Jahre 2001 bis 2009 gefunden werden sollen. Hierbei wird das interessierende Modell zunächst für die Jahre 1970 bis 2000 geschätzt, mit dessen Hilfe eine Vorhersage für 2001 getroffen wird. Anschließend wird das Modell an die Jahre 1970 bis 2001 angepasst, um eine Prognose für 2002 zu ermitteln und so weiter. Um die Analyse etwas kompakter zu gestalten, werden im weiteren Verlauf nur drei Modelle herangezogen:

- 1.) Lin-Tsai Modell mit Lag $l = 1$
- 2.) Random Walk Modell mit Drift
- 3.) Lee-Carter Modell mit der Korrektur nach Bell (1997)

Nachdem alle nötigen Ein-Schritt-Prognosen ermittelt wurden, gilt es für jedes Modell und jede Altersgruppe analog zu den Definitionen (3.1) bis (3.3) die Werte für den MAPE, MAE und RMSE zu berechnen. Es müssen lediglich die Jahre und die Werte der Variablen m angepasst werden (sodass $m = 3$ nun für das Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Bell steht):

$$MAPE_{x,m} = \frac{1}{2009-2001+1} \sum_{t=2000}^{2008} \left| \frac{\tilde{q}_{x,t+1}^m - q_{x,t+1}}{q_{x,t+1}} \right| * 100$$

$$MAE_{x,m} = \frac{1}{2009-2001+1} \sum_{t=2000}^{2008} \left| \tilde{q}_{x,t+1}^m - q_{x,t+1} \right|$$

$$RMSE_{x,m} = \sqrt{\frac{1}{2009-2001+1} \sum_{t=2000}^{2008} (\tilde{q}_{x,t+1}^m - q_{x,t+1})^2}$$

Der durchschnittliche MAPE, MAE bzw. RMSE über alle Altersgruppen $x = 21, \dots, 85$ wurde für jeden Fall in die Tabellen 14 bis 16 eingetragen. Die besten und schlechtesten Resultate wurden wieder mit Fettdruck bzw. roter Farbe hervorgehoben. Auch in diesem Vergleich zeigt sich, dass die Methode von Lin und Tsai insgesamt ungenauere Prognosen produziert als die anderen beiden Verfahren.

In der Tabelle 17 wird das Lin-Tsai Modell dem Random Walk mit Drift gegenübergestellt. Es wird festgehalten, in wie vielen Altersgruppe jede Methode hinsichtlich MAPE, MAE bzw. RMSE am

besten war. Für die Tabelle 18 wurde derselbe Vergleich für das Lin-Tsai Modell und das Lee-Carter Modell mit Korrektur nach Bell durchgeführt. Aus den beiden Tabellen lässt sich nicht herauslesen, dass die Herangehensweise von Lin und Tsai im Allgemeinen gegenüber den anderen beiden Methoden zu bevorzugen wäre.

Geschlecht	Land	MAPE		
		LT	RW	LC (Bell)
Männlich	Australien	8,28%	6,23	5,91
	Finnland	11,88	10,08	9,91
	Frankreich	4,41	4,00	3,98
	Japan	4,27	4,12	3,92
	Kanada	5,34	4,98	4,89
	Österreich	10,72	8,85	8,64
	USA	2,60	2,56	2,53
	UK	4,44	4,35	4,36
Weiblich	Australien	10,35	9,08	8,65
	Finnland	19,15	17,00	16,74
	Frankreich	6,32	5,82	5,60
	Japan	4,51	5,17	4,30
	Kanada	6,93	6,58	6,46
	Österreich	17,20	14,17	13,88
	USA	2,99	2,84	2,79
	UK	5,52	5,16	5,14
Total	Australien	6,63	5,47	5,11
	Finnland	9,92	8,82	8,69
	Frankreich	3,79	3,58	3,48
	Japan	3,75	3,90	3,43
	Kanada	4,24	4,05	4,00
	Österreich	8,93	7,63	7,47
	USA	2,46	2,38	2,33
	UK	3,86	3,67	3,68

Tabelle 14 Mittelwert des MAPE für alle Altersgruppen $x=21,...,85$ in den Jahren 2001-2009; Es wurden dieselben Abkürzungen wie in Tabelle 2 verwendet; Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Geschlecht	Land	MAE ($\cdot 10^{-4}$)		
		LT	RW	LC (Bell)
Männlich	Australien	6,84	5,81	5,52
	Finnland	13,87	10,99	10,87
	Frankreich	7,02	6,62	6,53
	Japan	4,69	4,69	4,26
	Kanada	6,17	5,68	5,79
	Österreich	10,52	9,92	9,62
	USA	4,22	3,88	4,04
	UK	6,03	5,79	6,08
Weiblich	Australien	4,30	3,90	3,52
	Finnland	8,16	7,45	7,24
	Frankreich	4,27	4,38	4,08
	Japan	2,11	3,13	2,02
	Kanada	3,75	3,38	3,37
	Österreich	6,93	6,63	6,39
	USA	3,34	2,62	2,67
	UK	4,73	4,36	4,42
Total	Australien	4,50	3,95	3,64
	Finnland	7,88	7,12	6,99
	Frankreich	4,89	4,82	4,63
	Japan	3,03	3,77	2,90
	Kanada	3,85	3,46	3,59
	Österreich	6,95	6,82	6,47
	USA	3,63	2,95	3,04
	UK	4,77	4,50	4,67

Tabelle 15 Mittelwert des MAE für alle Altersgruppen $x=21, \dots, 85$ in den Jahren 2001-2009; Es wurden dieselben Abkürzungen wie in Tabelle 2 verwendet. Zur besseren Lesbarkeit wurden die Werte des MAE in der Tabelle mit Zehntausend multipliziert; Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Geschlecht	Land	RMSE ($\cdot 10^{-4}$)		
		LT	RW	LC (Bell)
Männlich	Australien	8,15	6,90	6,54
	Finnland	16,96	13,62	13,45
	Frankreich	9,08	8,48	8,44
	Japan	5,75	5,77	5,16
	Kanada	7,54	6,91	7,02
	Österreich	12,68	11,76	11,45
	USA	5,17	4,76	4,94
	UK	8,00	7,67	7,94
Weiblich	Australien	5,37	4,68	4,33
	Finnland	10,14	9,20	9,00
	Frankreich	5,61	5,59	5,33
	Japan	2,59	3,77	2,48
	Kanada	4,55	4,00	4,01
	Österreich	8,56	8,18	7,85
	USA	4,07	3,19	3,28
	UK	6,04	5,52	5,62
Total	Australien	5,42	4,72	4,34
	Finnland	9,83	8,81	8,63
	Frankreich	6,51	6,24	6,11
	Japan	3,76	4,59	3,57
	Kanada	4,62	4,23	4,32
	Österreich	8,54	8,25	7,88
	USA	4,45	3,62	3,75
	UK	6,30	5,90	6,09

Tabelle 16 Mittelwert des RMSE für alle Altersgruppen $x=21, \dots, 85$ in den Jahren 2001-2009; Es wurden dieselben Abkürzungen wie in Tabelle 2 verwendet. Zur besseren Lesbarkeit wurden die Werte des RMSE in der Tabelle mit Zehntausend multipliziert; Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Geschlecht	Land	MAPE		MAE		RMSE	
		LT	RW	LT	RW	LT	RW
Männlich	Australien	25	40	25	40	30	35
	Finnland	14	51	19	46	17	48
	Frankreich	13	52	13	52	5	60
	Japan	31	34	33	32	37	28
	Kanada	19	46	21	44	20	45
	Österreich	11	54	12	53	5	60
	USA	27	38	28	37	31	34
	UK	26	39	28	37	26	39
Weiblich	Australien	26	39	30	35	25	40
	Finnland	18	47	26	39	22	43
	Frankreich	27	38	28	37	28	37
	Japan	50	15	51	14	59	6
	Kanada	17	48	21	44	20	45
	Österreich	17	48	21	44	21	44
	USA	24	41	25	40	34	31
	UK	16	49	19	46	11	54
Total	Australien	30	35	31	34	29	36
	Finnland	17	48	21	44	18	47
	Frankreich	22	43	24	41	7	58
	Japan	40	25	40	25	47	18
	Kanada	18	47	18	47	23	42
	Österreich	15	50	17	48	10	55
	USA	29	36	31	34	27	38
	UK	26	39	26	39	18	47

Tabelle 17 Vergleich des Lin-Tsai Modells und des Random Walks mit Drift; Die Einträge geben an, in wie vielen der insgesamt 65 Altersgruppen, das jeweilige Modell den besten MAPE, MAE bzw. RMSE vorweist. Es wurden dieselben Abkürzungen wie in Tabelle 2 verwendet; Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Geschlecht	Land	MAPE		MAE		RMSE	
		LT	LC (Bell)	LT	LC (Bell)	LT	LC (Bell)
Männlich	Australien	8	57	9	56	11	54
	Finnland	7	58	12	53	6	59
	Frankreich	7	58	10	55	5	60
	Japan	15	50	16	49	18	47
	Kanada	16	49	19	46	11	54
	Österreich	1	64	2	63	1	64
	USA	24	41	25	40	27	38
	UK	32	33	37	28	33	32
Weiblich	Australien	15	50	18	47	9	56
	Finnland	14	51	22	43	19	46
	Frankreich	12	53	13	52	12	53
	Japan	20	45	22	43	28	37
	Kanada	13	52	14	51	14	51
	Österreich	3	62	10	55	10	55
	USA	21	44	22	43	30	35
	UK	14	51	19	46	6	59
Total	Australien	16	49	17	48	12	53
	Finnland	7	58	11	54	8	57
	Frankreich	11	54	11	54	5	60
	Japan	23	42	27	38	28	37
	Kanada	12	53	13	52	12	53
	Österreich	2	63	3	62	2	63
	USA	23	42	23	42	24	41
	UK	29	36	31	34	24	41

Tabelle 18 Vergleich des Lin-Tsai Modells und des Lee-Carter Modells mit Korrektur nach Bell; Die Einträge geben an, in wie vielen der insgesamt 65 Altersgruppen, das jeweilige Modell den besten MAPE, MAE bzw. RMSE vorweist. Es wurden dieselben Abkürzungen wie in Tabelle 2 verwendet; Eigene Berechnungen; Datenquelle: Human Mortality Database (2017)

Anhang 4: Abstract

Abstract (Deutsch)

In einem Artikel von Lin und Tsai (2015) zeigt sich, dass eine einfache lineare Regression Sterbewahrscheinlichkeiten in vielen Fällen genauer vorhersagt als das verbreitete Lee-Carter Modell. Das ursprüngliche Lee-Carter Modell, das in diesem Vergleich verwendet wird, weist allerdings oftmals eine unplausible Diskontinuität im Prognoseintervall auf. Es stellt sich die Frage, ob die Methode von Lin und Tsai auch dann noch bessere Ergebnisse liefert, wenn diese Diskontinuität korrigiert wird. Außerdem wird vermutet, dass ein einfaches Random Walk Modell mit Drift ähnlich gute Prognosen hervorbringt wie die Regression von Lin und Tsai. Beide Fragestellungen werden bearbeitet, um die Qualität der Vorhersagen durch die Lin-Tsai Methode besser beurteilen zu können. Zu diesem Zweck werden in acht Ländern Ein-Schritt-Prognosen der verschiedenen Modelle verglichen. Dabei stellt sich heraus, dass die korrigierten Lee-Carter Modelle und selbst der simple Random Walk mit Drift im Allgemeinen bessere Vorhersagen treffen als die Regression von Lin und Tsai. Dieses Resultat lässt sich auch im Rahmen zweier Anwendungsbeispiele bezüglich Lebenserwartungen und Versicherungsprämien bestätigen. Die Qualität der Prognosen auf Basis der Lin-Tsai Regression erscheint demnach sehr zweifelhaft.

Key words: Mortalität, Sterberaten, einfache lineare Regression, Lee-Carter Modell, Random Walk mit Drift

Abstract

Lin and Tsai (2015) suggested a simple linear regression that was shown to predict the mortality rates of some countries more accurately than the widely cited Lee-Carter model. However, the Lee-Carter model they used in their article may suffer from significant bias in the early years of the forecast. It is not clear if Lin and Tsai's regression is better than the bias-corrected versions of the Lee-Carter model. Furthermore, it can be claimed that the forecasts of an even simpler random walk with drift may be very similar to the ones of the Lin-Tsai model. It is the aim of this thesis to evaluate the performance of the Lin-Tsai regression in eight countries by comparing its one-step-ahead predictions to those of the above-mentioned models. Most cases show that the random walk with drift and the adjusted Lee-Carter models are superior to the method proposed by Lin and Tsai. This result is also confirmed in two additional applications where the models are used to price insurance products and to predict life expectancy.

Key words: mortality, death rates, simple linear regression, Lee-Carter model, random walk with drift

Literaturverzeichnis

- Bell, W. R. (1997): Comparing and assessing time series methods for forecasting age-specific fertility and mortality rates. *Journal of Official Statistics*, 13(3), 279-303.
- Bongaarts, J. (2004): Population aging and the rising cost of public pensions. *Population and Development Review*, 30(1), 1-23.
- Booth, H., Hyndman, R. J., Tickle, L., & De Jong, P. (2006): Lee-Carter mortality forecasting: a multi-country comparison of variants and extensions. *Demographic Research*, 15, 289-310.
- Booth, H., Maindonald, J., & Smith, L. (2002): Applying Lee-Carter under conditions of variable mortality decline. *Population Studies*, 56(3), 325-336.
- Booth, H., & Tickle, L. (2008): Mortality modelling and forecasting: A review of methods. *Annals of Actuarial Science*, 3(1-2), 3-43.
- Box, G. E., & Jenkins, G. M. (1976): Time series analysis: forecasting and control (Rev. ed.). San Francisco: Holden-Day.
- Cairns, A. J., Blake, D., & Dowd, K. (2006): A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration. *Journal of Risk and Insurance*, 73(4), 687-718.
- Gerber, H. U. (1986): Lebensversicherungsmathematik. Berlin: Springer.
- Hackl, P. (2005): Einführung in die Ökonometrie. München: Pearson Studium.
- Heligman, L., & Pollard, J. H. (1980): The age pattern of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, 107(01), 49-80.
- Hollmann, F. W., Mulder, T. J., & Kallan, J. E. (2000): Methodology and assumptions for the population projections of the United States: 1999 to 2100. Population Division Working Paper No. 38, U.S. Bureau of the Census. Abrufbar unter: <https://www.census.gov/population/www/documentation/twps0038/twps0038.html> (letzter Abruf am 12. September 2017).
- Human Mortality Database (2017): The Human Mortality Database. Abrufbar unter: <http://www.mortality.org/> (letzter Abruf am 20. April 2017).
- Hyndman, R. J., & Koehler, A. B. (2006): Another look at measures of forecast accuracy. *International Journal of Forecasting*, 22(4), 679-688.
- Hyndman, R. J., & Ullah, M. S. (2007): Robust forecasting of mortality and fertility rates: a functional data approach. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(10), 4942-4956.
- International Monetary Fund (2012): Global financial stability report. The quest for lasting stability. Washington DC: International Monetary Fund. Abrufbar unter: <http://www.imf.org/en/publications/gfsr/issues/2016/12/31/the-quest-for-lasting-stability> (letzter Abruf am 12. September 2017).

Koissi, M. C., Shapiro, A., & Högnäs, G. (2005): Fitting and forecasting mortality rates for nordic countries using the Lee-Carter method. *Actuarial Research Clearing House*, 1, 21. Abrufbar unter: <https://www.soa.org/News-and-Publications/Publications/Proceedings/Arch/pub-arch-table-of-contents-2005-1.aspx> (letzter Abruf am 12. September 2017).

James, G., Witten, D., Hastie, T., & Tibshirani, R. (2013): An introduction to statistical learning with applications in R. 7. Auflage, New York: Springer. Abrufbar unter: <http://www-bcf.usc.edu/~gareth/ISL/> (letzter Abruf am 13. September 2017).

Lee, R. D. (2000): The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications. *North American Actuarial Journal*, 4(1), 80-91.

Lee, R. D., & Carter, L. R. (1992): Modeling and forecasting US mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87(419), 659-671.

Lee, R. D., & Miller, T. (2001): Evaluating the performance of the Lee-Carter method for forecasting mortality. *Demography*, 38(4), 537-549.

Lin, T., & Tsai, C. C. L. (2015): A simple linear regression approach to modeling and forecasting mortality rates. *Journal of Forecasting*, 34(7), 543-559.

Lundström, H., & Qvist, J. (2004): Mortality forecasting and trend shifts: an application of the Lee-Carter model to Swedish mortality data. *International Statistical Review*, 72(1), 37-50.

OECD (2015): Health at a Glance 2015: OECD Indicators. Paris: OECD Publishing. Abrufbar unter: http://dx.doi.org/10.1787/health_glance-2015-en (letzter Abruf am 13. September 2017).

Promislow, S. (2006): Fundamentals of Actuarial Mathematics. Hoboken, NJ: Wiley.

Renshaw, A. E., & Haberman, S. (2006): A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(3), 556-570.

Statistik Austria (2012): Standard-Dokumentation Metainformationen (Definitionen, Erläuterungen, Methoden, Qualität) zu Demographische Tafeln. Abrufbar unter: https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/bevoelkerung/sterbetaefeln/index.html (letzter Abruf am 13. September 2017).

Tuljapurkar, S., Li, N., & Boe, C. (2000): A universal pattern of mortality decline in the G7 countries. *Nature*, 405(6788), 789-792.

Waldron, H. (2005): Literature review of long-term mortality projections. *Social Security Bulletin*, 66(1), 16-30.

Wilmoth, J. R. (1993): Computational methods for fitting and extrapolating the Lee-Carter model of mortality change. Technical report, Department of Demography, University of California, Berkeley.

Wilmoth, J.R., Andreev, K., Jdanov, D., & Gleijer, D.A. (2007): Methods protocol for the Human Mortality Database. Abrufbar unter: <http://www.mortality.org/Public/Docs/MethodsProtocol.pdf> (letzter Abruf am 13. September 2017).

Tabellenverzeichnis

<i>Tabelle 1 Korrelationen</i>	<i>27</i>
<i>Tabelle 2 Mittelwert des MAPE für alle Altersgruppen $x=21,...,85$</i>	<i>30</i>
<i>Tabelle 3 Mittelwert des MAE für alle Altersgruppen $x=21,...,85$</i>	<i>31</i>
<i>Tabelle 4 Mittelwert des RMSE für alle Altersgruppen $x=21,...,85$</i>	<i>32</i>
<i>Tabelle 5 Häufigkeit des kleinsten MAPE, MAE und RMSE</i>	<i>34</i>
<i>Tabelle 6 Häufigkeit des kleinsten MAPE, MAE und RMSE (nur Lin-Tsai Modell und Random Walk)... ..</i>	<i>35</i>
<i>Tabelle 7 Bedingte Lebenserwartung</i>	<i>45</i>
<i>Tabelle 8 MAPE für die Prognose der bedingten Lebenserwartung</i>	<i>47</i>
<i>Tabelle 9 Mittelwert des MAPE für alle Altersgruppen $x=21,...,76$</i>	<i>51</i>
<i>Tabelle 10 Häufigkeit des kleinsten MAPE</i>	<i>52</i>
<i>Tabelle 11 Häufigkeit des kleinsten MAPE für den Vergleich aller Modelle</i>	<i>61</i>
<i>Tabelle 12 Häufigkeit des kleinsten MAE für den Vergleich aller Modelle</i>	<i>62</i>
<i>Tabelle 13 Häufigkeit des kleinsten RMSE für den Vergleich aller Modelle</i>	<i>63</i>
<i>Tabelle 14 Mittelwert des MAPE für alle Altersgruppen $x=21,...,85$ in den Jahren 2001-2009.....</i>	<i>67</i>
<i>Tabelle 15 Mittelwert des MAE für alle Altersgruppen $x=21,...,85$ in den Jahren 2001-2009.....</i>	<i>68</i>
<i>Tabelle 16 Mittelwert des RMSE für alle Altersgruppen $x=21,...,85$ in den Jahren 2001-2009</i>	<i>69</i>
<i>Tabelle 17 Vergleich des Lin-Tsai Modells und des Random Walks mit Drift</i>	<i>70</i>
<i>Tabelle 18 Vergleich des Lin-Tsai Modells und des Lee-Carter Modells mit Korrektur nach Bell</i>	<i>71</i>

Abbildungsverzeichnis

<i>Abbildung 1 Trends in Österreich</i>	<i>7</i>
<i>Abbildung 2 Hazardraten</i>	<i>24</i>
<i>Abbildung 3 Hazardraten der 30-Jährigen</i>	<i>25</i>
<i>Abbildung 4 Hazardraten der 60-Jährigen</i>	<i>25</i>
<i>Abbildung 5 CUMSUM-Werte für 30-Jährige</i>	<i>39</i>
<i>Abbildung 6 CUMSUM-Werte für 60-Jährige</i>	<i>40</i>
<i>Abbildung 7 Hazardraten der Frauen</i>	<i>55</i>
<i>Abbildung 8 Hazardraten der Männer</i>	<i>56</i>
<i>Abbildung 9 Hazardraten der 20-Jährigen</i>	<i>57</i>
<i>Abbildung 10 Hazardraten der 50-Jährigen</i>	<i>58</i>
<i>Abbildung 11 Hazardraten der 80-Jährigen</i>	<i>59</i>
<i>Abbildung 12 CUMSUM-Werte für 50-Jährige</i>	<i>64</i>
<i>Abbildung 13 CUMSUM-Werte für 80-Jährige</i>	<i>65</i>