



universität
wien

DISSERTATION / DOCTORAL THESIS

Titel der Dissertation / Title of the Doctoral Thesis

„Schulrelevante Aspekte der Finanzmathematik“

verfasst von / submitted by

Mag. rer. nat. Christian Dorner BSc

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

Wien, 2017 / Vienna 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on the student
record sheet:

A 796 605 405

Dissertationsgebiet lt. Studienblatt /
field of study as it appears on the student record sheet:

Mathematik

Betreut von / Supervisor:

Univ.-Prof. Dr. Hans Humenberger

Univ.-Prof. Dr. Mathias Beiglböck

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	7
I Einleitung	9
1 Legitimation für Finanzmathematik im Mathematikunterricht	9
2 Forschungsstand	12
2.1 Bisherige Publikationen	12
2.2 Literaturanalyse	13
2.2.1 Zur Mathematik derivativer Finanzinstrumente – Dietmar Pfeifer . .	13
2.2.2 Optionen im Mathematikunterricht – eine Mode oder mehr? – Elke Warmuth	15
2.2.3 Die Rolle der Simulation im Finanzmanagement – Siegfried Zseby . .	16
2.2.4 Mathematik bei Finanz- und Wirtschaftsproblemen – Reichel, Kubelik	16
2.2.5 Nuancen der Nichtbeliebigkeit von Aktienkurs-Modellierungen – Wolfgang Stummer	17
2.2.6 Vom Aktienkurs zum Random Walk – Martina Döhrmann	18
2.2.7 Zufall, Aktien und Mathematik – Martina Döhrmann	18
2.2.8 Stochastische Finanzmathematik für die Schule – Peggy Daume . . .	21
2.2.9 Statistik der Aktienmärkte: Eine anwendungsorientierte Einführung in die beschreibende Statistik – Peggy Daume	21
2.2.10 Aktien auf der Spur – Peggy Daume	22
2.2.11 Finanzmathematik im Unterricht – Peggy Daume	22
2.2.12 Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht – Band 1: Zinsen, Steuern und Aktien	26
2.2.13 Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht – Band 2: Optionen und Ökonomische Funktionen	27
2.2.14 Finanzmathematik für Einsteiger – Moritz Adelmeyer und Elke Warmuth	28
2.2.15 Aktien und ihre Kurse – Moritz Adelmeyer	29
2.2.16 Mathematik-Lehrbuch Wirtschaft – Rechnen mit Rendite und Risiko – Götz (Hrsg.), Schweiger und Diboky	30
2.2.17 Money out of nothing? – Prinzipien und Grundlagen der Finanzmathematik – Francesca Biagini und Daniel Rost	31
2.2.18 Portfolioselektion mit GeoGebra – in welche Aktien soll ich investieren? – Lucia Del Chicca und Markus Hohenwarter	31
2.2.19 Einblick in Optionen – Jörg Meyer	33
2.2.20 Abschätzen von Verlustrisiken – Norbert Brunner und Manfred Kühleitner	34
2.3 Erkenntnisse	34
3 Verankerung im Schulsystem	36
3.1 Allgemeinbildende höhere Schulen – AHS	36
3.1.1 Standardisierte Reifeprüfung AHS	36

3.1.2	Schulbücher AHS	37
3.2	Berufsbildende Schulen	37
3.2.1	sDP – Teil A	37
3.2.2	Kaufmännische Schulen – HAK	37
3.2.3	Kindergartenpädagogik bzw. Elementarpädagogik und Sozialpädagogik - BAKIP bzw. BAfEP und BASOP	40
3.2.4	Land- und forstwirtschaftliche Schulen – HLFS	40
3.2.5	Schulen für Mode, Tourismus und wirtschaftliche Berufe – HUM . . .	42
3.2.6	Technische und (kunst)gewerbliche Schulen – HTL	45
3.3	Grundsatzerlass zur Wirtschafts- und Verbraucher/innenbildung BMBF, 2015	46
3.4	Fazit	48
4	Beschreibung der Forschungsmethode	51
II	Zentrale Ideen der Finanzmathematik – eine empirische Un- tersuchung	54
5	Zentrale Ideen – eine alte Idee	54
6	Operationalisierung der Begriffe	63
6.1	Finanzmathematik	63
6.2	Zentrale Idee	63
7	Begründung der Methode zur Beantwortung der ersten Forschungsfrage	64
8	Interviewleitfaden	69
9	Das Analysematerial	71
9.1	Die Probanden (Interviewpartner/innen)	71
9.2	Rahmenbedingung der Interviews und Art der Transkription	71
10	Beschreibung der zentralen Ideen	73
10.1	Ergebnisse	73
10.2	Verwenden von Stochastik im Kontext von Finanzmathematik	74
10.2.1	Zeitkriterium	75
10.2.2	Horizontalkriterium	76
10.2.3	Sinnkriterium	77
10.2.4	Vertikalkriterium	79
10.3	Handhabung von Risiko	85
10.3.1	Zeitkriterium	85
10.3.2	Horizontalkriterium	92
10.3.3	Sinnkriterium	102
10.3.4	Vertikalkriterium	106
10.4	No-Arbitrage-Prinzip	114
10.4.1	Zeitkriterium	115
10.4.2	Horizontalkriterium	118

10.4.3	Sinnkriterium	120
10.4.4	Vertikalkriterium	121
10.5	Replikation	124
10.5.1	Zeitkriterium	124
10.5.2	Horizontalkriterium	125
10.5.3	Sinnkriterium	127
10.5.4	Vertikalkriterium	127
10.6	Zeitwert des Geldes	132
10.6.1	Zeitkriterium	132
10.6.2	Horizontalkriterium	134
10.6.3	Sinnkriterium	138
10.6.4	Vertikalkriterium	144
10.7	Die aufgelisteten zentralen Ideen erfüllen die Kriterien nach SCHWILL – weitere elaborierte Beispiele	154
10.7.1	Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik	154
10.7.2	Handhabung von Risiko	157
10.7.3	No-Arbitrage-Prinzip	159
10.7.4	Replikation	161
10.8	Auswahlkriterien schulrelevanter Themen der Finanzmathematik	165

III Unterrichtsmaterialien 171

11	Unterrichtsvorschläge zu schulrelevanten Aspekten der Finanzmathematik	171
11.1	Fokusbegriffe	171
11.1.1	Zufall	171
11.1.2	Wahrscheinlichkeit	173
11.2	Unterrichtsvorschlag – Der Zufall und Kurse an der Börse	178
11.2.1	Zusammenfassung	178
11.2.2	Besonderheiten	178
11.2.3	Beitrag zu den zentralen Ideen	178
11.2.4	Erfüllen der Kriterien guter Anwendung im Mathematikunterricht . .	179
11.2.5	Fokusbegriffe	180
11.2.6	Einbettung in bestehende Unterrichtsvorschläge	180
11.2.7	Zeitbedarf	181
11.2.8	Vorkenntnisse	181
11.2.9	Lehrplanbezug (AHS)	181
11.2.10	Lernziele	181
11.2.11	Anmerkungen	181
11.2.12	Musterlösungen	191
11.3	Unterrichtsvorschlag – Diversifikation	193
11.3.1	Zusammenfassung	193
11.3.2	Beitrag zu den zentralen Ideen	193
11.3.3	Erfüllen der Kriterien guter Anwendung im Mathematikunterricht . .	193

11.3.4	Fokusbegriffe	194
11.3.5	Einbettung in bestehende Materialien	195
11.3.6	Zeitbedarf	195
11.3.7	Vorkenntnisse	195
11.3.8	Lehrplanbezug (AHS)	195
11.3.9	Lernziele	196
11.3.10	Musterlösung	212
11.4	Unterrichtsvorschlag – Kredite und Risiko	221
11.4.1	Zusammenfassung	221
11.4.2	Besonderheiten	221
11.4.3	Beitrag zu den zentralen Ideen	221
11.4.4	Erfüllen der Kriterien von guter Anwendung im Mathematikunterricht	222
11.4.5	Fokusbegriffe	223
11.4.6	Einbettung in bestehende Unterrichtsvorschläge	224
11.4.7	Vorkenntnisse	224
11.4.8	Zeitbedarf	224
11.4.9	Lehrplanbezug (AHS)	224
11.4.10	Lernziele	225
11.4.11	Unterrichtsvorschlag 1	226
11.4.12	Musterlösung	232
11.4.13	Unterrichtsvorschlag 2	251
11.4.14	Musterlösung	251
11.4.15	Unterrichtsvorschlag 3	251
11.4.16	Musterlösung	252
11.5	Unterrichtsvorschlag – No-Arbitrage und Replikation	253
11.5.1	Zusammenfassung	253
11.5.2	Besonderheiten	253
11.5.3	Beitrag zu den zentralen Ideen der Finanzmathematik	253
11.5.4	Erfüllen der Kriterien guter Anwendung im Mathematikunterricht	254
11.5.5	Fokusbegriffe	254
11.5.6	Einbettung in bereits bestehende Unterrichtsmaterialien	255
11.5.7	Vorkenntnisse	255
11.5.8	Zeitbedarf	255
11.5.9	Lehrplanbezug	255
11.5.10	Lernziele	255
11.5.11	Unterrichtsvorschlag 1	257
11.5.12	Musterlösung No-Arbitrage und Replikation	264

IV Empirische Erprobungen der Unterrichtsvorschläge 268

12 Begründung der Methode zur Beantwortung der dritten Forschungsfrage 268

13 Einleitung 269

14 Erste Erprobung	270
14.1 Eigene Aufzeichnungen	270
14.2 Schülerantworten	272
14.3 Erfahrungsbericht der Lehrperson	280
14.4 Fazit	282
15 Zweite Erprobung	285
15.1 Eigene Aufzeichnungen	285
15.2 Schülerantworten	287
15.3 Erfahrungsbericht der Lehrperson	293
15.4 Fazit	294
16 Dritte Erprobung	296
16.1 Eigene Aufzeichnungen	296
16.2 Schülerantworten	297
16.3 Erfahrungsbericht der Lehrperson	300
16.4 Fazit	301
V Resümee	303
17 Einordnung bestehender Materialien	303
17.1 Zur Mathematik derivativer Finanzinstrumente – Dietmar Pfeifer	303
17.2 Optionen im Mathematikunterricht – eine Mode oder mehr? – Elke Warmuth	304
17.3 Die Rolle der Simulation im Finanzmanagement – Siegfried Zseby	305
17.4 Mathematik bei Finanz- und Wirtschaftsproblemen – Reichel, Kubelik	305
17.5 Nuancen der Nichtbeliebigkeit von Aktienkurs- Modellierungen – Wolfgang Stummer	305
17.6 Vom Aktienkurs zum Random Walk – Martina Döhrmann	306
17.7 Zufall, Aktien und Mathematik – Martina Döhrmann	306
17.8 Stochastische Finanzmathematik für die Schule – Peggy Daume	306
17.9 Statistik der Aktienmärkte: Eine anwendungsorientierte Einführung in die beschreibende Statistik – Peggy Daume	306
17.10 Aktien auf der Spur – Peggy Daume	306
17.11 Finanzmathematik im Unterricht – Peggy Daume	307
17.12 Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht Band 1: Zinsen, Steuern und Aktien – Peggy Daume	307
17.13 Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht Band 2: Optionen und Ökonomische Funktionen – Peggy Daume und Jens Dennhard	307
17.14 Finanzmathematik für Einsteiger – Moritz Adelmeyer und Elke Warmuth . .	308
17.15 Aktien und ihre Kurse – Moritz Adelmeyer	308
17.16 Mathematik-Lehrbuch Wirtschaft – Rechnen mit Rendite und Risiko – Götz (Hrsg.), Schweiger und Diboky	309
17.17 Money out of nothing? – Prinzipien und Grundlagen der Finanzmathematik – Francesca Biagini und Daniel Rost	309

17.18	Portfolioselektion mit GeoGebra – in welche Aktien soll ich investieren? – Lucia Del Chicca und Markus Hohenwarter	309
17.19	Einblick in Optionen – Jörg Meyer	309
17.20	Abschätzen von Verlustrisiken – Norbert Brunner und Manfred Kühleitner .	310
18	Welche finanzmathematischen Themen sollen im Fach Mathematik unterrichtet werden? – Empfehlungen	310
18.1	Schulen mit wirtschaftlichem Schwerpunkt	310
18.2	Inhalte für alle Schulen	312
19	Verifizierung der Forschungshypothese	313
VI	Anhang-Transkripte	318
19.1	FM1	318
19.2	FM2	325
19.3	FM3	330
19.4	FM4	334
19.5	FM5	342
19.6	FM6	350
20	Kurzfassung	369
21	Abstract	371

Vorwort

Optionspreisberechnung im Binomialmodell, Rentenrechnung, Kosten- und Preistheorie, Aktienkursmodellierung, Black-Scholes-Formel, einfache und logarithmische Rendite bzw. statistische Betrachtungen von Aktienkursen werden sehr oft als Unterrichtsvorschläge aus der Finanzmathematik für den Mathematikunterricht genannt. Sind das alle passablen Themenvorschläge? Sind die genannten überhaupt für einen Einsatz in der Schule geeignet?

Das Ziel der Arbeit ist es im Rahmen einer Entwicklungsforschung neue qualitativ hochwertige Materialien für den Mathematikunterricht hervorzubringen. Gleich zu Beginn der Forschung stellte sich die Frage: „Welche finanzmathematischen Themen kommen für den Mathematikunterricht überhaupt in Frage?“ Für die Beantwortung dieser Frage ist es wichtig nicht in allgemeine Argumentationsmuster zu fallen, wie „Finanzwissen ist heutzutage wichtig und gehört zur Allgemeinbildung“. Diesem Satz ist natürlich beizupflichten, eine Rechtfertigung für ein bestimmtes Thema für den Mathematikunterricht stellt er aber nicht dar. Es bedarf eines theoriegeleiteten Vorgehens. In Anbetracht der bereits existierenden Unterrichtsvorschläge erwies sich das Konzept der fundamentalen Ideen, respektive in dieser Arbeit zentrale Ideen genannt, als passend.

Der erste große Teil der Arbeit widmet sich den zentralen Ideen der Finanzmathematik. Nach einem geschichtlichen Abriss über fundamentale Ideen bzw. zentrale Ideen wird die empirische Studie zum Auffinden zentraler Ideen der Finanzmathematik erläutert und begründet. Im Anschluss daran werden die fünf zentralen Ideen: Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik, Handhabung von Risiko, No-Arbitrage-Prinzip, Replikation und Zeitwert von Geld vorgestellt. Eine zentrale Idee kann als Ganzes, das ist auch nicht intendiert, nicht im Unterricht durchgenommen werden. Aus diesem Grund werden in einem nächsten Kapitel Kriterien für einen (guten) anwendungsorientierten Mathematikunterricht vorgestellt.

Der zweite große Teil der Arbeit beschäftigt sich mit dem Vorstellen der geplanten Unterrichtssequenzen auf Basis der zentralen Ideen und der Kriterien für einen (guten) anwendungsorientierten Mathematikunterricht. Insgesamt sind in dieser Arbeit vier Sequenzen präsentiert: „Zufall und Aktienmärkte“, „Diversifikation“, „Kredite und Risiko“ und „No-Arbitrage und Replikation“. Diese werden umfangreich erklärt, wobei unter anderem der Fokus auf dem Zufallsbegriff und dem Wahrscheinlichkeitsbegriff gelegt wird. Im Anschluss einer jeder Sequenz findet man die zugehörigen Musterlösungen.

Im dritten großen Teil der Arbeit sind die Ergebnisse der empirischen Überprüfung dokumentiert worden. Zu Beginn des Abschnitts steht die Erklärung der Untersuchungsmethode, dem Drei-Perspektiven-Modell. Anschließend werden die Hospitationsberichte des Forschers, ausgewählte Antworten auf Fragen von Schüler/innen und Erfahrungsberichte der Lehrpersonen, die die erstellten Materialien unterrichtet haben, dazu verwendet, um die Praxistauglichkeit des erstellten Unterrichtsmaterials zu testen und gegebenenfalls zu überarbeiten.

Die Ergebnisse der Arbeit werden in einem abschließenden Resümee dargestellt. Es wer-

den die in der Einleitung erwähnten Publikationen zu Finanzmathematik und Mathematikunterricht aufgrund der in der Arbeit erstellten Theorie klassifiziert, anschließend werden Vorschläge für eine Implementierung geeigneter Inhalte in bestehende Lehrpläne gegeben und zu guter Letzt findet man eine umfangreiche Zusammenfassung der ganzen Arbeit.

Danksagung

Ein großer Dank gilt meinen beiden Kindern Paulina und Luis sowie Isabella für die mentale Unterstützung und tägliche Abwechslung zum Schreiben der Arbeit.

Ein weiterer Dank gilt meinen Eltern, die mich während meiner Ausbildung sowohl finanziell als auch mental unterstützten und immer nur das Beste für mich wollten.

Des Weiteren bedanke ich mich bei meinem Betreuer Hans, du warst zu jederzeit für ein Gespräch über meine Arbeit bereit, hast mir dabei immer gute Ratschläge und Hinweise gegeben. Danke für die Anstellung an der Uni, für die abwechslungsreichen Gespräche beim Mittagessen und all die Erfahrung, die ich dank dir sammeln konnte.

Der nächste Dank gilt meinem Betreuer Mathias, du hast die Arbeit vor allem zu Beginn in die richtigen Wege geleitet. Vielen Dank für deine wertvollen Ratschläge, kritischen Anmerkungen und Kontakte, die ich dank dir knüpfen konnte.

Ich bedanke mich auch bei meinen Kollegen Christoph, Franz und Stefan für die gute Zusammenarbeit und erheiternden Gespräche, die ich mit euch führen durfte.

Abschließend bedanke ich mich besonders bei meinen Freunden bzw. Studienkolleginnen Michi P., Peter, Michi G., Robert und bei allen die mich auf diesem Weg in irgendeiner Form unterstützt haben.

Teil I

Einleitung

Der erste Teil beschreibt den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit. Zuerst wird die wichtigste Frage nach der Legitimation von Finanzmathematik im Mathematikunterricht geklärt. Anschließend wird ein fokussierter Überblick über die bisherigen Publikationen im Bereich Finanzmathematik und Mathematikdidaktik gegeben und die Stoffauswahl der Autoren/innen genau analysiert. Die Dissertation beleuchtet nachfolgend die Lehrpläne und die Kompetenzkataloge der zentralen Reifeprüfung der oberen Sekundarschulen. Die Formulierung der Forschungshypothese respektive Forschungsfragen und die Beschreibung der umfassenden Methode der Arbeit runden die Einleitung ab. Die genauere Darlegung der Feinmethoden zur Beantwortung der Forschungsfragen ist in den Kapiteln 4, 7 und 12 nachzulesen.

1 Legitimation für Finanzmathematik im Mathematikunterricht

Zuerst gilt es zu klären, ob der Mathematikunterricht im Sinne seiner Aufgabe einen Beitrag zur Allgemeinbildung zu liefern, finanzmathematische Inhalte überhaupt verträgt.

Ein prominenter Unterstützer für Finanzmathematik im Mathematikunterricht ist WINTER. Er führt in seinem Aufsatz „Mathematik und Allgemeinbildung“ explizit aus, in welcher Weise der Mathematikunterricht unersetzbar für die Allgemeinbildung ist und listet gleich zu Beginn seine bekannten drei Grunderfahrungen auf. In der ersten seiner drei Grunderfahrungen:

„Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen, ...“ (WINTER, 1995, S. 35)

nennt er die Zinsrechnung und schreibt:

„So ist z.B. der Kern der vielzitierten Zinsrechnung die Einsicht, daß es in unserer Gesellschaft üblich ist, für ein geliehenes Kapital Zinsen als Miete nach bestimmten überkommenen oder ad hoc vereinbarten Regeln (Formeln) einzufordern.“ (WINTER, 1995, S. 36)

Er fordert ein umsichtiges Verständnis aller Bürger diesbezüglich und betont die menschliche, mathematische und modellhafte Konstruktion dieser Zinsrechnung. Für ihn ist es Teil der Allgemeinbildung, (mathematische) Modellbildung unter anderem auch in ökonomischen Bereichen verstehen und nachvollziehen zu können (vgl. WINTER, 1995, S. 36 und 39).

In der heutigen Zeit hat die Mathematik jedoch oft ein Problem ihre Wichtigkeit darzustellen. Das viel zitierte Relevanzparadoxon von NISS bringt diese Krux auf den Punkt. Es besagt, dass die Mathematik auf der einen Seite für viele Bereiche (Technik, Wirtschaft, ...) immer wichtiger wird und immer weiter vordringt, auf der anderen Seite wird die Mathematik für den Alltag eines Menschen immer weniger relevant (vgl. KAISER, 2015 B, S. 204 f.).

Gerade in dieser heutigen global vernetzten (Wirtschafts-)Welt wird Finanzbildung (engl. financial literacy) immer wichtiger. Der Meinung sind nicht nur große Institutionen, wie die OECD, sondern auch einzelne Schüler/innen, deren Meldungen immer wieder in den Medien aufflackern. „Ich bin fast 18 und hab keine Ahnung von Steuern, Miete oder Versicherungen. Aber ich kann'ne Gedichtsanalyse schreiben. In 4 Sprachen.“, lautete der Tweet einer 17-jährigen Schülerin namens Naina aus Köln (Quelle: <http://derstandard.at/2000010448802/Keine-Ahnung-von-Steuern-aber-ich-kann-Gedichte-analysieren>). Dieser Eintrag in Twitter schaffte es, wenn auch nur für kurze Zeit, eine Bildungsdebatte in Deutschland auszulösen. Das führte sogar dazu, dass die deutsche Bildungsministerin Johanna Wanka höchstpersönlich dazu Stellung nahm. „Ich finde es sehr positiv, dass Naina diese Debatte angestoßen hat. Ich bin dafür, in der Schule stärker Alltagsfähigkeiten zu vermitteln. Es bleibt aber wichtig, Gedichte zu lernen und zu interpretieren“, so antwortete die Ministerin. Auch Österreich blieb nicht verschont, so meldete sich prompt die Schülerunion zu Wort und stellte fest: „Besucht man beispielsweise eine AHS-Oberstufe, so hat man nach der Matura praktisch keine Ahnung von Buchhaltung, Finanzwesen und Ähnlichem.“ Sie fordern explizit Wirtschaftskompetenz im Lehrplan (vgl. <http://derstandard.at/2000010448802/Keine-Ahnung-von-Steuern-aber-ich-kann-Gedichte-analysieren>).

Die OECD hat in ihrem „Financial Literacy Framework“ von PISA 2012 die Wichtigkeit von Finanzbildung herausgearbeitet: Es findet ein Übertrag von Risiko, welches früher der Staat inne hatte, zu den einzelnen Bürger/innen statt, welche mit finanziellen Risiken vielfältigster Art konfrontiert sind. Diese werden erkennbar z.B. bei Pension, Gesundheitsversorgung, Kredit. Dadurch steigt auch die Anzahl an finanziellen Entscheidungen, die ein Individuum treffen muss. Die dadurch hervorgerufene steigende Nachfrage, sowie das gleichzeitig steigende Angebot an Finanzprodukten macht das Entscheiden nicht leichter (vgl. OECD, 2013, S. 140). Unter Finanzbildung für 15-jährige Schüler/innen versteht die OCED:

„Financial literacy is knowledge and understanding of financial concepts and risks, and the skills, motivation and confidence to apply such knowledge and understanding in order to make effective decisions across a range of financial contexts, to improve the financial well-being of individuals and society, and to enable participation in economic life.“ (OECD, 2013, S. 144)

Die OECD ist der Meinung, dass in der Schnittmenge von Financial Literacy und Mathematical Literacy nur einfache arithmetische Kompetenzen in einem alltäglichen aber finanzwirtschaftlichen Kontext liegen (vgl. OECD, 2013, S. 161).

Das bezieht sich alles auf Schüler/innen der Sekundarstufe I. In der Sekundarstufe II offenbart sich eine größere Schnittmenge. Man denke, dass gerade ein Finanzprodukt, ja die Finanzwelt an sich, ein mathematisches Konstrukt ist bzw. mathematischen Konstrukten unterliegt. Die dahinterliegenden Dynamiken lassen sich nur durch mathematische Kenntnisse bzw. Sichtweisen erfahrbar machen. Bei Krediten benötigt man Wissen über Folgen und Reihen, um gewisse Aussagen tätigen zu können. Um Risiken abschätzen bzw. einschätzen zu können, bedarf es Kenntnissen aus der Stochastik.

Diese sind momentan mehr denn je gefragt, gerade durch den Risikoübertrag, die gestiegene Eigenverantwortung, die gestiegene Nachfrage nach und das gestiegene Angebot an Finanzprodukten. Diese Ausbildung darf nicht Firmen oder Banken mit wirtschaftlichen Interessen überlassen werden, viel mehr bedarf es einer unabhängigen Ausbildung in diesem Bereich,

welche nur in einem öffentlichen Schulsystem ermöglicht werden kann.

Der für alle Schulen gültige Grundsatzterlass zur Wirtschaft- und Verbraucher/innenbildung fordert explizit nach mathematischen Kompetenzen im Bereich des persönlichen Finanzmanagements, welche im Mathematikunterricht vermittelt werden sollen, siehe Kapitel 3.3.

Studien wie von LUSARDI und MITCHELL bestätigen jedoch, dass diese Kompetenzen nicht von selbst durch die traditionellen Inhalte mitgeliefert werden. Sie stellten drei Fragen, eine nach der Größe des Kontostands nach einem Jahr bei einem Zinssatz von zwei Prozent, eine zur Verzinsung und Inflation und eine, ob es in der Regel riskanter ist eine Aktie oder einen Aktienfond zu kaufen. Die Ergebnisse sind frappierend: in den USA waren nur 34 Prozent aller Befragten in der Lage, alle drei Fragen richtig zu beantworten, in Deutschland lag die Rate bei immerhin 50 Prozent der Befragten (vgl. LUSARDI/MITCHELL, 2014). Dabei handelt es sich eindeutig auch um mathematische Fähigkeiten.

In Anbetracht der damit verbundenen mathematischen Kenntnisse ist eine Legitimation für finanzmathematische Inhalte im Mathematikunterricht mehr als gegeben. Finanzmathematik liefert einen Beitrag zur Allgemeinbildung. Finanzmathematische Kompetenzen sind wichtige Fähig- und Fertigkeiten in einer global vernetzten Welt. Finanzmathematik ist ein geforderter Inhalt von Schülern/innen, Schulaufsicht und global wirkenden Organisationen. Finanzmathematik im Mathematikunterricht schließt Bildungslücken.

Die Frage bleibt nur: „In welcher Weise kann und soll der Mathematikunterricht das leisten?“

2 Forschungsstand

In diesem Abschnitt wird der Forschungsstand in diesem Bereich der Mathematikdidaktik beschrieben. Zu Beginn wird ein kurzer fokussierter Überblick über bereits vorhandene Literatur zu Finanzmathematik und Schule gegeben. Im Anschluss erfolgt eine detaillierte Analyse der Lehrpläne. Seit den letzten 15 Jahren haben sich um die 17 Publikationen in diesem Bereich gesammelt. Es gibt also bereits einige Vorschläge an zu behandelnden Stoffgebieten für die Schule und auch an konkreten Unterrichtssequenzen. In vielen Fällen geben die einzelnen Autoren eine Begründung für die Behandlung finanzmathematischer Themen im Unterricht, nie wird ihre Auswahl der Themen aus der Finanzmathematik für die Schule fundiert argumentiert. Die Analyse zeigt diese Lücke auf, welche in einem zusammenfassenden Kapitel ausführlicher beschrieben wird. Die Untersuchung der Lehrpläne zeigt den Einfluss der Zentralmatura in Bezug auf die Lehrpläne auf. Dabei wird die Veränderung von den alten zu den neuen semestrierten Lehrplänen dargestellt.

2.1 Bisherige Publikationen

Die bedeutendste Bezugswissenschaft für die Mathematikdidaktik ist natürlich die Mathematik selbst (vgl. LEUDERS, 2003, S. 9 ff.). Sie liefert wichtige Erkenntnisse und Ergebnisse. Aus Sicht der Fachwissenschaft liefert diese Arbeit keine neuen Resultate. Im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen didaktische Überlegungen, die es in dieser Art und Weise noch nicht gibt.

Die zu behandelnden Themen wurden in der Fachwissenschaft bereits erarbeitet und sind in der wissenschaftlichen Community anerkannt. Die Finanzmathematik hat sich vor allem in den letzten 40 bis 50 Jahren maßgeblich verändert. Eine große Anzahl mathematischer Methoden haben in dieser Zeitspanne im Finanzsektor Einzug gefunden. In diesem Zusammenhang sind die Begriffe wie „Arbitrage“, „Portfoliotheorie“ von MARKOWITZ und die „Black-Scholes-Formel“ zur Berechnung des Optionspreises, die von BLACK, SCHOLES und MERTON entwickelt wurde, zu erwähnen. MARKOWITZ, MILLER und SHARPE 1990 und auch SCHOLES und MERTON 1997 bekamen für ihre Leistungen den Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften verliehen. BLACK ist bereits 1995 verstorben und wurde im Rahmen der Preisverleihung gewürdigt.

Von entscheidender Bedeutung für diese Arbeit sind die bereits bestehenden fachdidaktischen Werke, die Themen der Finanzmathematik behandeln. DIETMAR PFEIFER steht mit seiner Arbeit „Zur Mathematik derivativer Finanzinstrumente: Anregungen für den Stochastik-Unterricht“ im Jahre 2000 am Beginn einer Liste fachdidaktischer Arbeiten zu diesem Thema (PFEIFER, 2000). ELKE WARMUTH (WARMUTH, 2001) hat sich in den „Beiträgen zum Mathematikunterricht“¹ 2001 gefragt, ob Optionen im Mathematikunterricht eine Mode oder mehr sind. Am Beginn dieser Abhandlung gilt es nun auszuarbeiten, was in den letzten Jahren daraus geworden ist. Bis in die ersten Monate des Jahres 2007 findet man zwölf Werke, beziehungsweise Artikel in einschlägigen Journalen. Die folgenden Arbeiten scheinen mir daraus erwähnenswert: Das Werk „Finanzmathematik für Einsteiger“ MORITZ ADELMAYER und ELKE WARMUTH im Jahre 2003 ist zwar nicht primär für die Schule ge-

¹Das sind vierseitige Zusammenfassungen von Vorträgen, die auf der GDM-Jahrestagung gehalten wurden.

dacht, es stellt aber schon ein Lehrbuch mit für meine Arbeit interessanten Inhalten dar (ADELMEYER/WARMUTH, 2009). Es befinden sich darin einige didaktische Überlegungen. Die Dissertation von MARTINA DÖHRMANN mit dem Titel „Zufall, Aktien und Mathematik: Vorschläge für einen aktuellen und realitätsbezogenen Stochastikunterricht“ aus dem Jahr 2004 repräsentiert das erste größere Werk im didaktischen Bereich (DÖHRMANN, 2004). Weiters sind die Beiträge von PEGGY DAUME wichtige Arbeiten. Sie hat in verschiedenen Journalen publiziert und im Jahre 2008 ihre Dissertation mit dem Titel „Aktien und Optionen: Zur Integration von Inhalten der stochastischen Finanzmathematik in einen allgemeinbildenden und anwendungsorientierten Stochastikunterricht“ vollendet. Das Jahr 2007 hebe ich deswegen so hervor, da der Beginn der Finanzkrise mit dem 9.8.2007 datiert wird und gleichzeitig die fachdidaktischen Publikationen zum Thema Finanzmathematik ab diesem Zeitpunkt nachlassen. Ich bin jedoch überzeugt, dass es sich dabei eher um einen Zufall handelt. Nach dem Jahr 2007 bleiben die Dissertation von DAUME und das daraus entstandene Buch „Finanzmathematik im Unterricht“ bemerkenswert (DAUME, 2009). Der Inhalt der oben erwähnten Arbeiten handelt vom Modellieren eines Aktienkurses („Random Walk“), beginnend bei dem bekannten diskreten Modell, das Binomialmodell, bis hin zum Black-Scholes-Modell. Zum Teil werden Aktienkurse statistisch untersucht und ausgewertet. Das Bewerten von Optionen wird auch in sehr vielen Arbeiten behandelt.

2.2 Literaturanalyse

In dieser Untersuchung werden die einzelnen Veröffentlichungen vorrangig chronologisch angeführt, wenn der/die Autor/in das erste Mal erwähnt wird, werden alle weiteren Veröffentlichungen dieses/dieser angehängt. Dabei wird jedes Werk zuerst kurz zusammengefasst. Anschließend erfolgt eine Beschreibung nach Fokuspunkten. Diese richten sich auf die Stoffauswahl und die Begründung für die Verwendung finanzmathematischer Inhalte im Mathematikunterricht. Des Weiteren werden eventuelle Schwierigkeiten bei einer Durchführung im Unterricht, die durch Überlegungen des/der Verfassers/in herrühren oder die durch empirische Erprobungen gemacht wurden, aufgelistet. Es entsteht ein auf die Stoffauswahl gewichteter Überblick über die Unterrichtsvorschläge für Finanzmathematik im Mathematikunterricht.

2.2.1 Zur Mathematik derivativer Finanzinstrumente – Dietmar Pfeifer

Hierbei handelt es sich um eine der ersten Arbeiten zur stochastischen Finanzmathematik und Mathematikunterricht. Der gewählte Duktus von PFEIFER scheint maßgebend für einige folgende Arbeiten zu sein. Der Autor erklärt zu Beginn, was eine Option ist: „Unter einer Option versteht man das Recht, eine bestimmte Menge eines bestimmten Wirtschaftsguts zu einem im voraus festgesetzten Preis zu kaufen (Call-Option) oder zu verkaufen (Put-Option)“.

Überlegungen aus der verbalen (wirtschaftlichen) Definition über den Wert einer European-Call-Option bzw. European-Put-Option am Verfalltag T führen zur der Formel $C_T = \max\{S_T - K; 0\}$ bzw. $P_T = \max\{K - S_T; 0\}$, wobei S_T der Kurswert der Aktie und K der oben angesprochene festgesetzte Preis sind. Nachfolgend führt er die Put-Call-Parity-Relation $C_T - P_T = S_T - K$ am Verfalltag ein. Anschließend wird das Ein-Stufen-Ein-Perioden-Modell vorgestellt. Es wird davon ausgegangen, dass der ursprüngliche Kurswert

der Aktie S_0 bis zum Tag T entweder auf $S_T^+ > S_0$ mit einer Wahrscheinlichkeit von $p \in (0, 1)$ steigt oder auf $S_T^- < S_0$ mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - p$ fällt. Die Call-Option mit Ausübungspreis 110 ist dann im Fall eines Anstiegs des Aktienkurses 20 und im Falle eines Falls 0 Geldeinheiten wert. Der Autor führt untenstehendes Beispiel an:

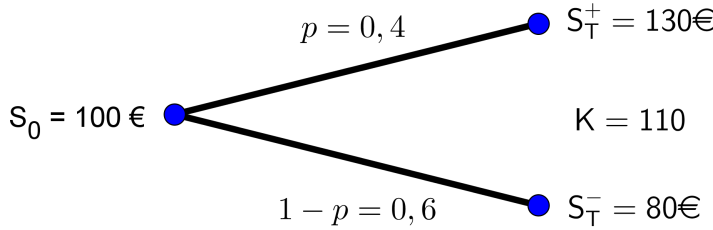


Abb. 1 Aktienkursmodell - entnommen aus (PFEIFER, 2000, S. 26)

Des Weiteren geht der Verfasser von einem Zinssatz i in dieser Periode von 5% aus, sei $r := 1 + i$. Er bepreist nun die Option zum Zeitpunkt 0 in diesem Modell, allerdings zuerst mit dem naheliegenden Erwartungswertansatz $C_0 = \mathbb{E}(v \cdot C_T^+) = p \cdot v \cdot C_T^+ \approx 7,62$, wobei $v := \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i}$ der Diskontfaktor ist. Dieser Weg stellt sich sofort als falsch heraus, da eine Arbitragemöglichkeit gefunden werden kann: Zum Zeitpunkt 0 tätigt man folgende Geschäfte. Man verkauft zwei Aktien leer und erhält 200 €, anschließend kauft man fünf Optionen und gibt $5 \cdot 7,62 = 38,10 \text{ €}$ aus, den Rest $161,9 \text{ €}$ legt man auf ein Bankkonto. Egal ob der Kurs der Aktie zum Zeitpunkt 1 hin steigt oder fällt, es verbleiben immer 10 € als risikoloser Gewinn (siehe Tabelle).

	$S_1^+ > K$	$S_1^- < K$
Leerverkauf	-260	-160
5 Call-Optionen	+100	0
Bankkonto	+170	+170
Saldo	10	10

Tab. 1 Saldo – entnommen aus (PFEIFER, 2000, S. 26)

Mit Hilfe eines Hedgingarguments gelingt nun eine arbitragefreie Bepreisung. PFEIFER leitet eine Formel her, indem er einen allgemeinen Ansatz betrachtet. Er verwendet dafür dieselbe Tabelle wie zuvor und füllt diese mit Variablen aus. Am Ende soll jeweils ein Saldo von 0 stehen. Sei n die Anzahl an leerverkauften Aktien und m die Anzahl an gekauften Optionen. Da die beiden Spalten in Summe 0 ergeben, erhält man durch Gleichsetzen der Summen eine Formel $-n \cdot S_T^+ + m \cdot (S_T^+ - K) = -n \cdot S_T^-$. Aus $h = \frac{n}{m} = \frac{S_T^+ - K}{S_T^+ - S_T^-}$ erhält man aus der Gleichung $-n \cdot S_T^- + r \cdot (n \cdot S_0 - m \cdot C_0) = 0$ für den Optionspreis $C_0 = h \cdot (S_0 - v \cdot S_T^-)$. Wenn man die Werte des obigen Beispiels einsetzt, erhält man nun einen Preis $C_0 \approx 9,52 \text{ €}$. Der Autor geht dabei auch auf das zum originalen Maß äquivalente Martingalmaß ein. Unter diesem Maß lässt sich der Optionspreis wieder mit dem Erwartungswertprinzip bestimmen. Die Wahrscheinlichkeit p muss dann durch $p^* = \frac{r \cdot S_0 - S_T^-}{S_T^+ - S_T^-}$ ersetzt werden (man erhält p^* aus der Formel $C_0 = h \cdot (S_0 - v \cdot S_T^-) = p^* \cdot v \cdot C_T^+$). Nach einem kurzen Ausflug über den Hebeleffekt von Optionen werden Gewinn-Verlust-Diagramme von Kombinationen von Optionen betrachtet. Anschließend betrachtet der Autor ein Binomialmodell für den Aktienkurs in

mehreren Perioden. Die Bepreisung gestaltet sich hier schon komplexer. Den Abschluss bildet die berühmte Black-Scholes-Formel zu Bepreisung von Derivaten in dem kontinuierlichen Modell.

Stoffauswahl

Einperioden Modell für eine europäische Option (Call und Put) und einer Aktie ohne Dividendenzahlung (zwei Varianten eines fairen Spiels), Call-Put-Parity, Hebelwirkung von Optionsgeschäften, Kombinationen von Optionsgeschäften (Spread, Butterfly, Straddle, Strangel, Strip, Strap), Binomialmodell (Cox-Ross-Rubinstein), die Formel von Black-Scholes.

Begründung

PFEIFER meint die wesentlichen Begriffe lassen sich mit elementaren stochastischen Methoden leicht vermitteln. Die Grundlagen gehen nicht über den Erwartungswert diskreter Zufallsvariablen hinaus. Das Einperiodenmodell liefert schon die wesentlichsten Aussagen. Auch beim Übergang vom Binomialmodell zum Black-Scholes-Modell sieht er kein Problem und behauptet: „Es liegt daher nahe, in diesem Fall die Normal-Approximation für die Binomialverteilung zu verwenden, wie sie in praktisch allen Lehrbüchern zur Schulmathematik behandelt wird“. Des Weiteren betont er, dass die Finanzmathematik die Stochastik in der Schule vom äußerst unseriösen Glücksspielcharakter befreit und eine Wirklichkeitsrelevanz besitzt.

Schwierigkeiten

Der Verfasser ist der Ansicht, dass die allgemeine finanzmathematische Theorie sehr anspruchsvoll und im Allgemeinen sicher zu schwierig ist. Die Herleitung und Behandlung der Black-Scholes-Formel hält er für einen Leistungskurs machbar, aber für den Regelunterricht nicht geeignet.

2.2.2 Optionen im Mathematikunterricht – eine Mode oder mehr? – Elke Warmuth

In den „Beiträgen zum Mathematikunterricht“ erklärt sie zuerst, was überhaupt Optionen sind und begründet anschließend, warum Optionen im Mathematikunterricht behandelt werden sollen. Sie beginnt mit einem Beispiel aus der Lebensversicherung, wo sie das Erwartungswertprinzip für die Preisbildung verwendet. Im Anschluss werden Optionen bewertet. Sie nennt das einperiodische Binomialmodell für den Aktienkurs „Zweiphasenmodell“, da nur zu zwei Zeitpunkten etwas passiert. Mit Hilfe eines Hedgingargumentes wird der Preis einer Call-Option bestimmt. Abschließend führt ein Ausblick zu „Mehrphasenmodellen“ (in ihren Worten sind diese eine Zusammensetzung aus „Zweiphasenmodellen“) und zur Brown’schen Bewegung.

Stoffauswahl

Lebensversicherung Preisbildung (Hintergrund: Gesetz der großen Zahlen), Zweiphasenmodell (neues Wort bis jetzt Einperiodenmodell bzw. Binomialmodell genannt) zwei Varianten der Berechnung des Optionspreises, Mehrphasenmodell (n -Perioden-Modell), Mehrphasenmodell zur geometrischen Brown’schen Bewegung

Begründung

Sie ist der Meinung, dass es sich um ein hochaktuelles Gebiet handelt. Es werden Entscheidungen im Rahmen von Modellen getroffen, wo der Modellierungsaspekt ganz stark erscheint. Die Grundlagen zur Behandlung von Optionen sind durch die üblichen Grundkurse in Li-

nearer Algebra und Wahrscheinlichkeitsrechnung gedeckt. Sie behauptet, das Thema wird sicher lange aktuell und für Schüler/innen motivierend sein und betont, dass es nicht darum geht, dass die Schüler/innen mit Hilfe der Black-Scholes-Formel Optionspreise ausrechnen, sondern darum, dass sie wesentliche Modellierungsschritte verstehen, die dahinter stecken.

Schwierigkeiten

Die Autorin macht auf keine Schwierigkeiten aufmerksam.

2.2.3 Die Rolle der Simulation im Finanzmanagement - Siegfried Zseby

Hierbei handelt es sich um einen Artikel aus der Zeitschrift „Stochastik in der Schule“. ZSEBY wählt einen sehr allgemeinen Zugang über ein sogenanntes DKR-Modell (Dynamik, Risiko und Korrelation), welches auf einer Metaebene Vorgänge auf dem Finanzmarkt betrachtet. Er widmet sich dann sehr ausführlich der Aktienkurssimulation, angefangen mit einem Binomialmodell in einer Periode, hin zu einem mehrstufigen Modell dieser Art, bis zu einem kontinuierlichen Modell (Black-Scholes-Modell). Die Berechnung von Optionspreisen in dem zuvor erwähnten diskreten Modell als auch im kontinuierlichen Modell folgen im Anschluss. Die Formeln und theoretischen Überlegungen werden immer wieder mit Zufallssimulationen in Excel unterlegt. Im letzten Abschnitt geht er noch auf partielle Ableitungen ein, genauer bezieht er sich auf die sogenannten „Greeks“ der Black-Scholes-Formel. In einer Schlussbemerkung betont er den „Zauber der Simulation“ und appelliert gleichzeitig an eine stärkere Verankerung im Stochastikunterricht.

Stoffauswahl

DRK-Modell, Verzinsung, Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik (Äquivalenz von Zahlungsfolgen), Korrelationskoeffizient, Binomialmodell (einstufig, mehrstufig), kontinuierliches Modell (Black-Scholes-Modell), Volatilität, Lognormalverteilung, Option, Bewertungsmethoden einer Option (Binomialmodell, kontinuierliches Modell), Simulationen und Implementierung in Excel, Greeks (partielle Ableitungen).

Begründung

Finanzmathematik sollte sich nicht auf die klassische Zinsrechnung beschränken, durch Chance und Risiko werden häufig Interessen angesprochen. Der Autor ist der Meinung, Finanzmathematik bietet Anschauungsmaterial für Simulationen im Stochastikunterricht. Die Simulation tritt in Konkurrenz zum analytischen Vorgehen, da sie als spielerische Variante einen besseren Zugang bietet, sie ist anschaulich und motivierend.

Schwierigkeiten

ZSEBY führt in seinem Artikel keine Schwierigkeiten für eine Umsetzung in der Schule an.

2.2.4 Mathematik bei Finanz- und Wirtschaftsproblemen – Reichel, Kubelik

In dieser Abhandlung nehmen die Autoren zu den verschiedensten Anwendungsgebieten der Mathematik Stellung. Eine Seite des Überblicks wird der Mathematik bei Finanz- und Wirtschaftsproblemen gewidmet.

Stoffauswahl

Binomialmodell zur Berechnung von Optionspreisen.

Begründung

Die Autoren argumentieren über die Aktualität. Das Thema Spekulationen ist motivierend. Des Weiteren ergibt sich eine Verknüpfung mit anderen Gebieten, wie stochastische Modelle, sowie Differenzen- und Differentialgleichungen.

Schwierigkeiten

Es werden keine aufgelistet.

2.2.5 Nuancen der Nichtbeliebigkeit von Aktienkurs-Modellierungen – Wolfgang Stummer

STUMMER schreibt in einer elementaren Form über den Begriff Arbitrage. Dieser wird in einem einfachen Binomialmodell in einer Periode genauer erläutert, dies geschieht in einer sehr formalen mathematischen Natur, so erwähnt er Fachausdrücke wie die σ -Algebra. In der Einleitung beginnt der Autor das Binomialmodell für einen Aktienkurs zu erklären, inklusive Bankguthaben und einer Handelsstrategie. Auffällig ist, dass der Verfasser des Artikels eine eigene Bezeichnung kreiert. Leerverkäufe bezeichnet er mit „Verschuldungen in Aktien“. Er führt drei verschiedene Arten von „Arbitrage“ an, in der einschlägigen Fachliteratur wird nur eine als Arbitrage bezeichnet und zwar die „risikolose Gewinnchance-Strategie“, alle anderen sind Abwandlungen davon. Eine Handelsstrategie heißt gewinninduzierende Verschuldungs-Strategie, wenn man zum Zeitpunkt 0 mit einem negativen Portfoliogesamtwert und zum Zeitpunkt 1 einen nicht negativen Gesamtwert hat. Als sichere Gewinn-Strategie bezeichnet er eine Handelsstrategie, die zum Zeitpunkt 0 den Gesamtwert null hat und zum Zeitpunkt 1 einen positiven Gesamtwert des Portfolios aufweist.

Er manifestiert nach jeder Handelsstrategie ein Grundprinzip, welches jeweils besagt, dass solche Strategien im Marktmodell nicht existieren. Jeweils im Anschluss stellt STUMMER die Beziehung zwischen dem „Up-Faktor“, „Down-Faktor“ und dem Zinssatz dar.

Daraus schließt er, dass der Aktienkurs nicht beliebig modelliert werden darf, und spricht in diesem Zusammenhang von einer *fundamentalen* ökonomischen Betrachtung.

Stoffauswahl

Binomialmodell (mit Verweis auf Cox-Ross-Rubinstein), Arbitrage (gewinninduzierende Verschuldungs-Strategie, Gewinn-Strategie, risikolose Gewinnchance-Strategie), Handelsstrategien

Begründung

STUMMER führt vier mathematische Fertigkeiten an, die Schülern/innen bei der Festigung ebendieser helfen sollen. Diese sind: Erstellung abstrahierender Problembeschreibungen, Beachtung geringfügiger Formulierungsunterschiede, die Kunst der einfachen Beweisführung und Logik, Umgang mit Ungleichungen und Ungleichungsketten.

Schwierigkeiten

Es werden vom Autor keine Schwierigkeiten für eine Umsetzung in der Schule beschrieben. Er behauptet zu Beginn, dass seine Aufbereitung fast direkt für den fortgeschrittenen Mathematikunterricht einsetzbar ist.

2.2.6 Vom Aktienkurs zum Random Walk – Martina Döhrmann

DÖHRMANN gibt in einem kurzen Artikel in den „Beiträgen zum Mathematikunterricht“ einen Überblick über ihre damals noch nicht veröffentlichte Dissertation. Ihren Fokus legt sie dabei auf die Modellierung von Aktienkursen. Zu Beginn führt sie an, warum eine probabilistische Modellierung derer Sinn hat.

Etwas detaillierter wird die Modellierung eines 1-dimensionalen Random Walk der Länge n beschrieben. Sie verwendet dabei normalverteilte, unabhängige Zufallsvariablen. DÖHRMANN listet im Anschluss Begründungen für die Behandlung eines solchen Themas auf und führt abschließend einen Erfahrungsbericht über ihre empirischen Erprobungen an. Die Reaktionen der Schüler/innen bezeichnet sie als durchwegs positiv, die Leistungen bei Klausuren wurden durch die Behandlung des Themas im Unterricht weder verbessert noch verschlechtert.

Stoffauswahl

Prognose von Aktienkursen aus empirischen Daten, Intervall für den morgigen Kurs, Begründungen einer probabilistischen Betrachtung von Aktienkursen, Random Walk, Bildungsgesetz

Begründung

DÖHRMANN führt fünf Punkte an, die für eine Behandlung von Finanzmathematik im Unterricht gelten.

1. Aktualisiertes Bild der Aufgaben der Stochastik, sowie eine Aufhebung der Trennung deterministischer und stochastischer Phänomene.
2. kritischer Umgang mit Aktienkursprognosen.
3. Realitätsnähe und Demonstration von Anwendbarkeit der Mathematik, zum Teil verwenden Banken und Finanzmathematiker/innen die vorgestellten Methoden.
4. Arbeiten mit realen Daten bzw. Kursdaten unter Einbeziehung von Technologie.
5. Realisieren von Lehrzielen des Lehrplans durch die Behandlung finanzmathematischer Themen.

Schwierigkeiten

Im Rahmen der empirischen Erprobung befürchtete ein Lehrer, dass den Schülern/innen das Thema Aktien bald zu viel sein würde. Diese Befürchtung stellte sich im Nachhinein als unbegründet heraus.

2.2.7 Zufall, Aktien und Mathematik – Martina Döhrmann

Die Autorin arbeitet zu Beginn ihrer Dissertation die Geschichte des Zufalls auf. Sie beginnt bei der Bedeutung des Wortes *Zufall*, welches ursprünglich von dem lateinischen Wort *accidens* herrührt. Obwohl der Determinismus, der seine Blütezeit im 19. Jahrhundert erfuhr, bis in das 20. Jahrhundert stark verbreitet war, gab es schon unter den Griechen Philosophen, die den strengen Determinismus ablehnten. EPIKUR, LUKREZ und auch ARISTOTELES behandelten in einer gewissen Form den Zufall. Erst im letzten Jahrhundert rückte der Zufall

so richtig in den Fokus wissenschaftlicher Abhandlungen.

In der Zwischenzeit gab es immer wieder Personen, die den Zufall berücksichtigten, wie PASCAL im berühmten Briefwechsel mit CHEVALIER DE MÉRÉ oder JAKOB BERNOULLI, die den Beginn der Wahrscheinlichkeitstheorie prägten und dabei Äußerungen zum Zufall tätigten, vor allem BERNOULLI.

Interessanterweise erwähnte KOLOMOGOROV in seiner berühmten Abhandlung über die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie den Zufall gar nicht. Es gibt keine einheitliche Definition des Zufalls, dieser Begriff mit seinen unterschiedlichen Assoziationen ermöglicht keine eindeutige Festmachung. Es gilt dabei zu beachten, dass der Begriff in der Alltagssprache in einem anderen Sinn verwendet wird als in den Naturwissenschaften oder in der Mathematik. Des Weiteren schließen Zufall und Determinismus einander nicht aus. Die meisten Phänomene sind bei näherer Betrachtung subjektiv unvorhersehbar. Es ist aber nicht möglich die Existenz des objektiven Zufalls zu zeigen.

DÖHRMANN wies in einer Schulbuchanalyse nach, dass sich der Begriff Zufall in den Schulbüchern im Laufe der Zeit verändert hat. So sind ältere Werke geprägt von der Kolomogorov'schen Wahrscheinlichkeitslehre, die diesen Begriff kaum behandelt. Erst in neueren Werken wird darauf eingegangen, allerdings wird er in den unterschiedlichsten Bedeutungen ohne genauere Erklärung verwendet. Nach der Autorin kann diese Vernachlässigung zu Missverständnissen, Fehlvorstellungen und Schwierigkeiten beim Erkennen stochastischer Situationen führen.

In einer Untersuchung zum Vorverständnis von Schülern/innen aus den Schulstufen 11 und 12 zum Begriff Zufall konnte die Vielfalt der Assoziationen bestätigt werden. Andere Untersuchungen fordern die Thematisierung des Begriffs Zufall im Unterricht und pochen dabei auf die Behandlung der Bedeutungsvielfalt des Begriffs. Des Weiteren soll die strikte Trennung zwischen deterministischen und probabilistischen Phänomenen aufgehoben werden. Anhand von Simulationen soll die Nützlichkeit des Zufalls aufgezeigt werden. Vor allem soll den Schülern/innen vermittelt werden, dass die Stochastik ein Modellierungswerkzeug ist und es lediglich eine Herangehensweise zu einer speziellen Situation ist.

Die Verfasserin befragte auch Schüler/innen zum Thema Aktien. Das Thema „Aktien“ stößt auf Interesse bei den Schülern/innen. Aktienkurse werden von der Mehrheit der Schüler/innen als nicht zufällig charakterisiert. Fast alle Schüler/innen halten es für möglich, Aussagen über zukünftige Entwicklungen des Kurses zu tätigen. In diesem Zusammenhang liefert DÖHRMANN Begründungen für die Behandlung des Themas „Aktien“ im Unterricht: Schülerrelevanz, realitätsnahe Modellierungsfähigkeiten können trainiert werden, möglicher Computereinsatz, kritisches Denken, passend zu den Lehrplänen.

In dem zweiten Kapitel erläutert die Wissenschaftlerin mathematische Aspekte des Aktienkurses. Dabei werden zuerst Aktienkurse statistisch untersucht, daraufhin entwickelt sie Random Walks zur Modellierung dieser Kurse, von der Binomialverteilung bis hin zur Brown'schen Bewegung. Beim Unterkapitel „Zufallszahlen“ geht sie auf die Erzeugung von Zufallszahlen sowie auf die Qualitätsüberprüfung eines Zufallszahlengenerators genauer ein. In „Die zufällige Aktie“ wird die Random Walk Hypothese genauer untersucht. Abschließend betrachtet sie noch das HURST-Phänomen und untersucht damit das Skalierungsverhalten von Aktienzeitreihen.

Im dritten Kapitel stellt DÖHRMANN ihre Unterrichtsvorschläge zum Thema „Stochastische Modellierung von Aktienkursen“ vor. Der geplante Unterrichtskurs enthält fünf Abschnitte

und vier Erweiterungsmöglichkeiten. Im ersten Abschnitt sollen die Schüler/innen erkennen, dass es unterschiedliche Assoziationen zu dem Begriff *Zufall* gibt, sowie erfahren, dass es möglich ist Prognosen und Schätzungen über zukünftige Aktienkurse zu machen, des Weiteren sollen einige Aktienanalysemethoden gelernt werden. In diesem Abschnitt bereitere sie 6 Fragen zum Thema Zufall und Aktien auf. Anschließend soll den Schülern/innen ein Artikel ausgehändigt werden, in dem ein fünfjähriges Mädchen, ein Börsenspezialist und eine Wahrsagerin jeweils vier Aktien auswählen. Nach einem Jahr schnitt das Mädchen am besten ab, sie hat ihre Aktien via herunter fliegenden Papierschnipsel ausgewählt.

Im zweiten Abschnitt sollen sie ein Schätzintervall für den morgigen Kurs einer Aktie bestimmen können, Wahrscheinlichkeiten für den morgigen Kursanstieg bestimmen und Erfahrungen in Excel sammeln. Aus empirischen Daten sollen zuerst simple Schätzungen mit Hilfe des kleinsten und des größten Kurssprungs in dem betrachteten Zeitraum gemacht werden. Im dritten Abschnitt erweitert man die vorige Methode und sucht ein 95%-Schätzintervall mit Hilfe der Normalverteilung. Sie betrachtet aus Gründen der Einfachheit nicht die 1-Tages-Renditen, sondern die 1-Tages-Differenzen. Im vierten Abschnitt soll ein Kursmodell für eine Aktie entwickelt werden. Dabei sollen die Schüler/innen den Nutzen eines solchen Modells erkennen. Schüler/innen sollen die Begriffe Zufallsexperiment, Laplace-Experiment, Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette, Zufallsvariable und Random Walk kennen, sowie Unabhängigkeit und identische verteilte Zufallsvariablen sinngemäß erfassen können. Zuerst wird ein Binomialmodell entwickelt. Im Anschluss werden auch normalverteilte Zufallsvariablen zur Modellierung von Kursen thematisiert. Im fünften Abschnitt untersuchen die Schüler/innen den Random Walk genauer. Grundlegende Begriffe und Zusammenhänge der Stochastik sollen anwendungsorientiert von den Schülern/innen erarbeitet, sowie das Wurzelgesetz angewendet und auch Zufallszahlen für Simulationen verwendet werden. In den Erweiterungsmöglichkeiten werden die Volatilität, weitere Methoden zur Untersuchung, die Verteilung der 1-Tages-Differenzen, die Selbstähnlichkeit von Random Walks und das Hurst-Phänomen thematisiert.

Abschließend findet man einen kurzen Erfahrungsbericht über die empirischen Erprobungen der Unterrichtsmaterialien. Die Durchführung erfolgte jeweils im 13. Jahrgang an zwei Schulen einmal im Rahmen eines Grundkurses an einer Schule in Hamburg und das andere Mal in einem Leistungskurs an einer Schule in Schleswig-Holstein. Es konnte dadurch gezeigt werden, dass die Unterrichtsvorschläge realisierbar sind und sich gut in bestehende Lehrpläne einbetten lassen. Das Thema kam bei den Schülern/innen erstaunlich gut an, insbesondere die Computerarbeit. Die Schüler/innen hatten keinerlei Probleme mit dem Erreichen der angestrebten Lehrziele. Es muss aber erwähnt werden, dass die beiden Lehrpersonen bereits zuvor einen stark anwendungsorientierten Unterricht den Schülern/innen geboten haben.

Stoffauswahl

Aktie, Aktienindex, Häufigkeitsverteilung, 1-Tages-Differenzen, 1-Tages-Renditen, Random Walk, Binomialmodell, Brown'sche Bewegung, Skalierungseigenschaft, Selbstähnlichkeit, Random Walk Hypothese, Unabhängigkeit des Aktienkurses, Volatilität, Hurst-Phänomen.

Begründung

DÖHRMANN legitimiert die Verwendung von Aktien über die wichtige Thematisierung des Begriffs *Zufall* in der Schule. Durch ein äußerst umfangreiches erstes Kapitel zum Zufall begründet sie die Behandlung von Aktien im Mathematikunterricht. Der Begriff *Zufall* ist essentiell für das Verständnis von Stochastik, insbesondere der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Eine mögliche unterrichtliche Auseinandersetzung führt ihrer Meinung nach über Aktien.

Schwierigkeiten

Die Autorin äußert keinerlei Bedenken, weder zur generellen Einsetzbarkeit eines solchen Themas im Unterricht noch bei der Durchführung (welche in einem geringen Umfang empirisch bestätigt sind).

2.2.8 Stochastische Finanzmathematik für die Schule – Peggy Daume

DAUME beschreibt in den „Beträgen zum Mathematikunterricht“ ihr Promotionsvorhaben, sie konzentriert sich dabei auf die Entwicklung, die Erprobung und die Evaluation von Unterrichtseinheiten zu finanzmathematischen Themen. Zu Beginn begründet sie die schulische Behandlung finanzmathematischer Themen. Im Anschluss wird eine geplante Unterrichtssequenz exemplarisch besprochen. Diese Einheit zum Thema „Statistik der Aktienmärkte“ behandelt das Ermitteln statistischer Kennzahlen aus realen Daten, sowie das Erstellen eines Histogramms, um daraus eine annähernde Normalverteilung der Renditen ablesen zu können. Aus diesen Daten werden die typischen Werte u („Up-factor“) und d („down-factor“) eines Binomialmodells gewonnen. In einem Ausblick führt sie das weitere Vorgehen ihres Vorhabens an.

Stoffauswahl

Arbeiten mit Kursdaten, Berechnung statistischer Kennzahlen, Rendite, Verteilung der Renditen und in diesem Zusammenhang die Normalverteilung, Binomialmodell

Begründung

Die Autorin gibt gleich zu Beginn an, dass es sich dabei um moderne und anwendungsorientierte Inhalte handelt, die sich mit den klassischen Zweigen der Schulmathematik verbinden lassen. In diesem Punkt hebt DAUME den Modellbildungsprozess hervor. Die sinnvolle Verwendung von Technologie im Mathematikunterricht sowie die sinnvolle Kooperation mit anderen wirtschaftsorientierten Schulfächern wird angesprochen.

Schwierigkeiten

Die Autorin führt keine Schwierigkeiten an, die bei der Behandlung von Finanzmathematik im Unterricht entstehen.

2.2.9 Statistik der Aktienmärkte: Eine anwendungsorientierte Einführung in die beschreibende Statistik – Peggy Daume

Der Artikel erstattet Bericht über eine erfolgreiche Erprobung einer finanzmathematischen Unterrichtsequenz in einem Wahlpflichtfach an einem Berliner Gymnasium. Genauer gesagt handelt es dabei um die Unterrichtssequenz „Statistik der Aktienmärkte“, die auch in ihrer Dissertation wiederzufinden ist, und ähnelt auch dem Artikel in der Zeitschrift „mathematik lehren“.

Vor der Auseinandersetzung mit Renditen beschreibt die Autorin das Prinzip der Aktienkursfestsetzung. Der Beitrag thematisiert graphische Darstellungen von Aktienkursen, bis hin zum Histogramm, welches die Verteilung der Renditen einer bestimmten Aktie beschreibt. Im Anschluss stellt sie das Binomialmodell vor, welches in einer Reflexionsphase kritisch beleuchtet wird.

In einem Resümee liest man Meldungen von Schülern/innen, die die Anwendungsorientierung im Unterricht loben. DAUME appelliert, Schüler/innen zu einem vernünftigen Umgang mit Finanzprodukten anzuregen und nicht eine materialistische Denkweise, die ohnehin in unserer Gesellschaft vorhanden ist, weiter zu verstärken.

Stoffauswahl

Kursfestsetzung einer Aktie, Aktienindex, Rendite, Drift, Volatilität, Häufigkeitsanalyse der Renditen, Random Walk (Binomialmodell)

Begründung

DAUME findet es naheliegend, den Stochastikunterricht mit Finanzmathematik anwendungsorientiert zu gestalten.

Schwierigkeiten

Die Schüler/innen hatten geringe Kenntnisse im Bereich der Ökonomie und der beschreibenden Statistik.

2.2.10 Aktien auf der Spur – Peggy Daume

In einem Artikel in „mathematik lehren“ beschreibt DAUME einen Vorschlag für eine Unterrichtssequenz. Im Wesentlichen handelt es sich dabei um einen Teil ihrer Dissertation bzw. ihres Buches „Finanzmathematik im Unterricht“, welcher vorab veröffentlicht wurde. Im Letzteren trägt diese Sequenz den Namen „Statistik der Aktienmärkte“. Zu einem entworfenen Arbeitsblatt für den Unterricht motiviert sie im Text die Fragestellungen und formuliert teilweise die Lösungen. Angefangen bei einem Vergleich zweier Aktienkörbe, über die Verwendung der einfachen relativen Rendite, hinzu annähernden Glockenkurve bei der Häufigkeitsanalyse der Rendite endet sie bei einem Aktienkursprognosemodell, dem Random Walk im Binomialmodell. Abschließend erwähnt sie kurz die erfolgreiche, empirische Erprobung in einem Wahlpflichtfachkurs und einer Arbeitsgemeinschaft.

Stoffauswahl

Ökonomische Grundlagen (Was sind Aktien? Wie ist eine AG aufgebaut?), Aktienindex, Rendite, Drift, Volatilität, Häufigkeitsanalyse der Renditen, Random Walk (Binomialmodell)

Begründung

Schüler/innen sollen nicht zu Anlegern/innen erzogen werden, sondern zu mündigen Bürgern/innen. Der Finanzmarkt ist zum größten Teil über Mathematik zu verstehen.

Schwierigkeiten

DAUME erwähnt bei der kritischen Beleuchtung des Random Walk im Binomialmodell, dass es mittlerweile viele neue komplexere Modelle gibt, die besser als das hier betrachtete Modell sind. Diese eignen sich aufgrund der dort verwendeten Mathematik nicht für den Mathematikunterricht in der Schule.

2.2.11 Finanzmathematik im Unterricht – Peggy Daume

Dieses Werk ist aus der Dissertation mit dem Titel „Aktien und Optionen: Zur Integration von Inhalten der stochastischen Finanzmathematik in einen allgemeinbildenden und anwendungsorientierten Unterricht“ von DAUME entstanden. Die Entwicklung von Unterrichtsvorschlägen zur stochastischen Finanzmathematik und deren schulpraktische Erprobung waren

die Ziele der Arbeit. Das Buch gliedert sich in vier große Teile: Finanzmathematik als Teil einer Fachwissenschaft, Finanzmathematik als Unterrichtsgegenstand, Vorstellung der Unterrichtseinheiten und praktische Erprobung. Die fachwissenschaftliche Ausrichtung des ersten Teils dient der Vorstellung in mathematischer Skriptnatur ausgewählter finanzmathematischer Themen. Dabei bekommt man auch umfangreiche Erläuterungen über eine Aktiengesellschaft und deren wichtigste Funktionäre, sowie die Arten von Aktien und Aktiencharts. Die Autorin thematisiert einen Prozess zur Preisbildung eines Aktienkurses. Wie wird eigentlich wirklich der Wert einer Aktie festgelegt? Der Makler listet in seinem Orderbuch alle Kaufs- und Verkaufsanträge auf. Er setzt den Preis der Aktie so fest, dass die meisten Anträge durchgeführt werden können. In Formeln ergibt sich:

($AK = \max_x \{ \min \{ k(x), v(x) \} \}$, wobei AK der Aktienkurs, $k(x)$ die Summe aller Käufer zu einem bestimmten Preis x und $v(x)$ die Summe aller Verkäufer zu einem bestimmten Preis x ist.).

Die Symmetrieeigenschaft, die Additivitätseigenschaft und der mathematisch korrekte Umgang mit der logarithmischen Rendite werden als die entscheidenden Vorteile gegenüber der einfachen Rendite gesehen. Die Begriffe Drift und Volatilität folgen aufbauend. Statistische Verteilungen werden anhand von Säulendiagrammen untersucht. Für die Berechnung von Optionspreisen führt die Autorin in klassischer Art und Weise das Binomialmodell für die Modellierung des Aktienkurses ein.

Weiterführend erfolgt eine Betrachtung des Black-Scholes-Modells. Die dafür benötigten Begriffe werden zum Teil motiviert bzw. erklärt und zum anderen Teil bloß eingeführt (vgl. Wiener Prozess, stochastischer Prozess der Renditenentwicklung bei dem Black-Scholes-Modell). Das in einer naiven Art naheliegende Erwartungswertprinzip bei der Bepreisung von Optionen erweist sich durch Aufzeigen einer Arbitragemöglichkeit als unpassend. Eine Bepreisung durch ein Äquivalenzportfolio stellt sich als die Möglichkeit zur Findung eines passenden Preises heraus.

Der zweite Teil Finanzmathematik als Unterrichtsgegenstand stellt eine didaktische Abhandlung dar. Genauer gesagt, handelt es sich um die Begründung für die entwickelten Unterrichtssequenzen. Ein anfänglicher Diskurs über Mathematik und Allgemeinbildung berechtigt die Behandlung finanzmathematischer Themen.

Empirische Studien decken große Wissenslücken der Bevölkerung in der finanziellen Allgemeinbildung auf, DAUME zitiert diese Studien. Sie fordert eine anbieterunabhängige Finanzbildung, die nur im Rahmen der Institution Schule durchgeführt werden kann. Die Autorin plädiert des Weiteren für eine Integration finanzieller Grundfragen in bereits bestehende Fächer, da der bestehende Fächerkanon bereits umfangreich ist. Eine Zuordnung finanzmathematischer Themen zu bestehenden traditionellen Unterrichtsinhalten, wie Arithmetik, Prozentrechnung, Funktionen, exponentielles Wachstum und Stochastik, soll endgültig die Verwendbarkeit der Finanzmathematik im Mathematikunterricht begründen. Um ein nachhaltiges Lernen finanzmathematischer Inhalte zu sichern, erstellt sie für ihre drei entwickelten Unterrichtssequenzen ein Spiralcurriculum.

Aus einer umfangreichen Auseinandersetzung mit einem anwendungsbezogenen Mathematikunterricht folgert die Autorin den Nutzen einer Anwendungsorientierung im Unterricht, konkret schließt sie aus der Literatur, dass auf eine Trennung zwischen Realmodell und mathematischen Modell nicht verzichtet werden darf. Ein verständiges Umgehen mit Modellannahmen ermöglicht erst ein Bewusstmachen dieser oben beschriebenen Trennung. Die

fehlende Sachkenntnis bereitet bei Anwendungen immer wieder Probleme, so weist die Verfasserin auf eine einführende Behandlung ökonomischer Grundlagen hin, die in ihren Sequenzen berücksichtigt wird.

In einer zur stochastischen Finanzmathematik passenden Auseinandersetzung mit der Didaktik der Stochastik folgert DAUME, dass ihre Sequenzen stochastisches Denken unterstützen und fördern. Aktien und Optionen helfen bei der Fähigkeit stochastische Situationen zu erkennen. Simulationen im Mathematikunterricht sind empirisch noch nicht umfangreich untersucht worden, sie fordert aus Überlegungen eine Abkehr von Black-Box-Simulationen, die durchzuführenden Simulationen sollen weitestgehend selbstständig von Schülern/innen erstellt werden. In diesem Zusammenhang spielt der Computereinsatz eine wichtige Rolle. In den von ihr vorgestellten Unterrichtseinheiten zeigt sich der Computer überwiegend als Werkzeug, eine Verwendung als Rechner, Datenverwalter, Zeichner oder Simulator findet statt.

Der dritte Teil des Buches stellt die Unterrichtseinheiten zu den Themen Aktien und Optionen vor. Der erste der drei Unterrichtsvorschläge „Statistik der Aktienmärkte“ ist für eine Verwendung im Unterricht am Ende der Sekundarstufe I vorgesehen. In allen Aufbereitungen finden sich thematisch passende Texte/Zeitungsartikel und Aufgaben. Die Vorschläge beinhalten ein Basismodul und zwei Ergänzungsmodule. In ersterem werden ökonomische Grundlagen behandelt, wie: Was sind Aktien? Wie berechnet man einen Aktienindex? Wie lassen sich Aktien grafisch darstellen? Welche Anlage ist besser? Wie lässt sich die Verteilung der Renditen beschreiben? Die Ergänzungsmodule thematisieren die Kursfestsetzung einer Aktie sowie einen Random Walk.

In der zweiten Unterrichtssequenz müssen die Lernenden in einem sechsteiligen Basismodul und drei Ergänzungsmodulen die zufällige Irrfahrt einer Aktie bearbeiten. Dabei ist ein Aktienfond zu untersuchen. Die Berechnung von Drift und Volatilität einer Aktie stellen den Anschluss dar, der Fokus richtet sich auf die Zusammenhänge bei den Berechnungen in unterschiedlichen Zeiträumen. Die Visualisierungen von Häufigkeitsverteilungen bestimmter Renditen ebnen den Weg zu einer Betrachtung einer Normalverteilung. Die dadurch motivierten Eigenschaften der Normalverteilung sollen von den Schülern/innen bearbeitet werden. Ausgerüstet mit dem Zugang der Normalverteilung wird der ursprünglich betrachtete Aktienkorb bewertet. Die Vor- und Nachteile einer Modellierung von Aktienkursen mittels Normalverteilung werden ebenso betont wie der Modellierungsprozess. Eine Korrelationsanalyse und ein Random-Walk im Binomialmodell stellen den Abschluss der Sequenz dar.

In der dritten Unterrichtssequenz dreht sich alles um Optionen. Zuerst steht die grundlegende ökonomische Bedeutung von Optionen im Mittelpunkt dann die Betrachtung von Pay-Off-Diagrammen bzw. Gewinn-Verlust-Diagrammen. In einer Aufgabe sollen die Schüler/innen mehrere Optionen miteinander kombinieren und anschließend die oben genannten Diagramme zeichnen. Die Bepreisung im Binomialmodell stellt den Höhepunkt der Unterrichtseinheit dar, dabei wird zuerst der naheliegende Zugang über den Erwartungswert gewählt, ehe anschließend ein Äquivalenzportfolio bestimmt wird. In den Ergänzungsmodulen wird einerseits eine leichtere Formel zur Bewertung gefunden und andererseits ein Ausblick auf das Black-Scholes-Modell gegeben.

Den vierten und letzten Teil des Werks widmet die Autorin den schulpraktischen Erprobungen, die wie DAUME selbst sagt, aufgrund der geringen Stichprobe nicht als repräsentativ anzusehen sind. In fünf Unterrichtsversuchen und zwei außerunterrichtlichen Projekten wur-

den die erarbeiteten Unterrichtssequenzen erprobt. Die Verfasserin kommt in einer Zusammenfassung zu dem Urteil, dass die vorgestellten Unterrichtseinheiten gut realisierbar sind. Es bestand durchaus Interesse der Schüler/innen bzw. der Lehrkräfte für dieses Thema. Die Praxisnähe und Anwendungsorientierung gefiel vielen Schülern/innen, diese plädierten sogar für eine Aufnahme in den Regelunterricht. Die vielen Formeln und die Häufigkeitsanalyse empfanden jedoch einige als überflüssig. Schüler/innen bemerkten auch, dass Uninteressierte schnell aufgeben werden.

DAUME hofft abschließend, dass Finanzmathematik im Regelunterricht Einzug findet.

Stoffauswahl

Aktie, Preisbildung einer Aktie, Aktienindex, Rendite (einfach, logarithmisch), Drift, Volatilität, statistische Verteilung von Aktienrenditen, Korrelationskoeffizient, Random-Walk-Modell (Binomialmodell, Black-Scholes-Modell), Optionen (Betrachtung von Pay-Off-Diagrammen, Bepreisung in den beiden zuvor erwähnten Modellen)

Begründung

DAUME begründet die Verwendung aus einem didaktischen Diskurs. Hierbei geht sie auf die WINTER'schen Grunderfahrungen ein und seine Forderung nach bürgerlichem Rechnen. Sie zeigt die äußerst schlechte, durch empirische Studien belegte Wissenslage der deutschen Bevölkerung in Sachen Finanzbildung auf. Finanzmathematische Inhalte lassen sich außerdem gut mit traditionellem Unterrichtsinhalten verbinden:

1. Arithmetik und Algebra: Angefangen bei der Berechnung der Kosten einer Klassenfahrt bis hin zur Kursfestsetzung einer Aktie und der Bestimmung des Aktienindex nennt sie einige interessante Anwendungsfelder in diesem Zusammenhang.
2. Prozentrechnung: Ein Schwerpunkt in der Sekundarstufe I ist die Prozentrechnung. Dieses Stoffgebiet lässt eine Vielzahl finanzmathematischer Anwendungen und Fragestellungen zu, wie zum Beispiel: lineare Verzinsung, Sparpläne, Zinseszins, Brutto- und Nettogehalt, Mehrwertsteuer.
3. Funktionale Abhängigkeiten: Das Verstehen des Funktionsbegriffs und das Analysieren funktionaler Abhängigkeiten kann im Kontext der Finanz- und Versicherungsmathematik vertieft werden. In der Sekundarstufe I bietet sich der Vergleich verschiedener Handytarife an. Das Arbeiten mit abschnittsweisen definierten Funktionen eignet sich bei der Problematik des Nettogehalts im Zusammenhang mit der Einkommensteuer in der Sekundarstufe II. Pay-off-diagramme und Gewinn-Verlust-Diagramme stellen ein weiteres Beispiel in diesem Bereich dar.
4. Exponentielles Wachstum: Die Zinsrechnung kann um den Begriff der exponentiellen Verzinsung erweitert werden. Dabei nennt sie Themen wie: Spar- und Tilgungspläne, Ratenkauf, die Problematik des Effektivzinssatzes.
5. Stochastik: Die Finanzmathematik liefert einen großen Beitrag zu diesem Inhaltsbereich. Wirtschaftswissenschaftler/innen vertreten die Ansicht, dass Aktienkurse jederzeit das wirtschaftliche, politische und gesellschaftliche Geschehen in den Aktiengesellschaften widerspiegeln. Im Wesentlichen sind solche Ereignisse nicht vorhersehbar, damit ist eine stochastische Modellierung des Aktienkurses legitim. Alleine dieser Punkt

trägt zum Verständnis stochastischer Modelle und des Begriffes *Zufall* bei. Das Arbeiten in den verschiedensten Modellen vertieft das oben genannte Verständnis zusätzlich, wie Aktienanalyse (mit einfachen statistischen Methoden), Random-Walk-Modelle, Schätzintervalle, Optionspreise (im Binomialmodell, im Black-Scholes-Modell).

Eine Verwendung finanzmathematischer Themen im Mathematikunterricht kann sich besonders gut zur Umsetzung eines realitätsbezogenen Unterrichts eignen.

In einer abschließenden Zusammenfassung führt die Autorin noch fünf Gründe für eine Beschäftigung mit Finanzmathematik im Unterricht an:

1. Ihre Unterrichtsvorschläge, und damit generell finanzmathematische Unterrichtssequenzen, lassen sich in den Regelunterricht integrieren.
2. Die Kenntnisse über Finanzprodukte verschiedenster Art werden immer wichtiger.
3. Eine Verbindung von klassischem, datenorientiertem und anwendungsorientiertem Unterricht ist möglich.
4. Finanzmathematische Unterrichtsstunden eignen sich für den Einsatz von Technologie.
5. Die stochastische Finanzmathematik ist ein neues Gebiet.

Schwierigkeiten

DAUME erhob qualitative empirische Daten von sieben Schulversuchen, zwei davon in außerunterrichtlicher Form. In einer Schule meinten einige der Befragten, dass das Thema (Finanzmathematik) nur für Interessierte verständlich sei. Das nette Verpacken von Mathematik in Anwendungen hilft trotzdem nicht, unmotivierte Mitschüler/innen zum Mitarbeiten zu animieren. Alle anderen würden auch schnell aufgeben. Auch die komplizierten Rechnungen quitierten einige Schüler/innen als nicht machbar im Regelunterricht. Vielen Schülern/innen fiel es schwer zu akzeptieren, dass bei gewissen Modellierungen mehrere Lösungen richtig seien.

2.2.12 Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht – Band 1: Zinsen, Steuern und Aktien

Der erste Band besteht aus drei großen Teilen: Finanzmathematik als Teil einer Fachwissenschaft, Finanzmathematik als Unterrichtsgegenstand und Vorstellung der Unterrichtseinheiten. Der/die aufmerksame Leser/in fällt die Ähnlichkeit gewisser Abschnitte mit DAUME 2009 „Finanzmathematik im Unterricht“ auf. Im ersten erwähnten Abschnitt fasst die Autorin die für die Unterrichtseinheiten relevanten ökonomischen und finanzmathematischen Inhalte zusammen.

Inhaltlich beginnt dieser Teil bei der Zinsrechnung und behandelt zuerst die lineare Verzinsung und anschließend die exponentielle Verzinsung, sowie die gemischte Verzinsung und Ausschnitte der Rentenrechnung.

Direkt danach wird die Tilgungsrechnung erläutert. Im Fokus stehen Tilgungsdarlehen und Annuitätendarlehen. Abschließend thematisiert die Autorin zwar den Effektivzinssatz, sie gibt aber nur eine einfache Berechnung dessen an.

Das darauffolgende Kapitel „Steuern“ beginnt mit einer allgemeinen und recht umfangreichen Einführung und behandelt dann die Mehrwertsteuer und vor allem die Einkommensteuer genauer, dabei thematisiert DAUME den Durchschnittssteuersatz und den Grenzsteuersatz. Anschließend werden Aktien erläutert. Das Kapitel beginnt mit der Preisfindung einer Aktie und wird mit der Unterscheidung zwischen einfacher und logarithmischer Rendite fortgeführt. In diesem Zusammenhang werden auch Standardabweichung und Volatilität erklärt. Nach einer Korrelationsanalyse zwischen den Aktienrenditen folgen eine diskrete und eine stetige Modellierung des Aktienkurses.

Der zweite große Abschnitt widmet sich der Rechtfertigung des Behandeln von wirtschafts- und finanzmathematischen Themen im Mathematikunterricht. Ausgehend von den drei Winter’schen Grunderfahrungen plädiert die Autorin für eine Integration finanzieller Grundfragen in bereits bestehende Unterrichtsfächer und insbesondere in den Mathematikunterricht. Die Notwendigkeit Finanzwissen zu vermitteln, stützt DAUME auf diverse Studien. Vor allem mit dem Ziel eine unabhängige Finanzbildung in der Schule anzubieten. Immer mehr Banken und Finanzinstitute bieten Bildungsmaterialien an. Des Weiteren zeigt sie auf, dass sich Themen aus der Wirtschafts- und Finanzmathematik mit traditionellen Inhalten des Mathematikunterrichts verbinden lassen, siehe auch Kapitel 2.2.11. In einem weiteren Kapitel betont die Autorin den Beitrag der Finanz- und Wirtschaftsmathematik zu einem anwendungsbezogenen Mathematikunterricht mit Fokus auf Modellierungsprozesse.

Im dritten und letzten Abschnitt expliziert die Autorin Unterrichtseinheiten. Es werden folgende vorgestellt: Sparen für den Führerschein, Leben auf Pump, Steuern – mathematische betrachtet, Statistik der Aktienmärkte, die zufällige Irrfahrt einer Aktie. Alle im ersten Abschnitt erwähnten Inhalte sind hier in Unterrichtseinheiten verpackt worden.

Stoffauswahl

Zinsrechnung, Sparen, Tilgungsrechnung, Kredite, Steuern, Aktien, Preis einer Aktie, Aktienindex, Rendite einer Aktie, Drift, Volatilität, Modellierung eines Aktienkurses, Wiener-Prozess, Black-Scholes-Modell.

Begründung

Die Begründung ist im Wesentlichen dieselbe, wie im Werk „Finanzmathematik im Unterricht“, siehe Kapitel 2.2.11.

Schwierigkeiten

Von Schwierigkeiten bei der Umsetzung im Mathematikunterricht wird nicht berichtet.

2.2.13 Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht – Band 2: Optionen und Ökonomische Funktionen²

Dieses Werk ist ebenfalls in drei große Teile geteilt. Der erste Teil betrachtet die für die Unterrichtsvorschläge wichtige Mathematik. Am Beginn stehen Optionen. Nach einer allgemeinen Einführung werden zu Beginn die Graphen der Auszahlungsfunktion verschiedener Optionen untersucht. Auch das Verhalten des Optionspreises bei Veränderung bestimmter Parameter wird in einfacher Form untersucht. Im Anschluss wird das Prinzip der Preisfindung über das No-Arbitrage-Prinzip erläutert. Als Modell für den Aktienkurs verwenden die Autoren zunächst das Binomialmodell und anschließend das Black-Scholes-Modell. Auch hier findet

²Das Werk ist kurz vor der Fertigstellung der Dissertation erschienen. In den Betrachtungen wird nur auf die für die Arbeit relevanten Teile eingegangen.

der/die aufmerksame Leser/in Ähnlichkeiten zu dem Werk „Finanzmathematik im Unterricht“. Anschließend werden ökonomische Funktionen und ihre Ableitungen erläutert.

Im zweiten Teil wird die Didaktik der Analysis und der Computereinsatz im Mathematikunterricht thematisiert. Diese richten sich vor allem auf die auf die ökonomischen Funktionen. Der dritte Teil umfasst drei Unterrichtsvorschläge: Optionen mathematisch bewertet, von Märkten und Unternehmen und Änderungen der ökonomischen Funktionen. Beim ersten Unterrichtsvorschlag steht die Preisfindung einer Option im Mittelpunkt. Dies geschieht sowohl im Binomialmodell als auch im Black-Scholes-Modell.

Stoffauswahl

Optionen, Pay-Off-Diagramme, Gewinn-und-Verlust-Diagramme, Erwartungswert- und No-Arbitrage-Prinzip, Binomialmodell (in einer Periode und n Perioden), Optionspreisbestimmung (Call- und Put-Optionen), Black-Scholes-Modell, Nachfragefunktion, Angebotsfunktion, Marktgleichgewicht, Preis-Absatz-Funktion, Erlösfunktion, Kostenfunktion, Gewinnfunktion, Cournotscher Punkt, Ableitungen der ökonomischen Funktionen („Grenzfunktionen“), Betriebsminimum, Betriebsoptimum, Elastizität.

Begründung

Es werden kaum Begründungen angegeben. Im zweiten Teil erwähnen die Autoren, dass sich für die Optionspreisberechnung der Einsatz eines Computers eignet.

Schwierigkeiten

In diesem Werk werden keine Schwierigkeiten für die Durchführung im Unterricht angegeben.

2.2.14 Finanzmathematik für Einsteiger – Moritz Adelmeyer und Elke Warmuth

Bei dem vorliegenden Buch handelt es sich um eine fachliche Einführung in die Finanzmathematik, es richtet sich ausdrücklich an Studienanfänger, Praktiker aus Bank- und Versicherungswesen, sowie interessierte Lehrer/innen und Schüler/innen. Die Autoren stellen in jedem Kapitel ein Finanzinstrument vor, welches anhand theoretischer Abschnitte und Musteraufgaben erklärt wird.

Im ersten Kapitel werden Anleihen näher vorgestellt, dabei wird das Prinzip „Ein Dollar heute, ist nicht gleich ein Dollar morgen“ näher erläutert. Das Auf- und Abzinsen wird ausführlich erklärt, ehe über einen didaktischen Umweg die Rendite auf Verfall einer Anleihe berechnet wird. Das Kapitel schließt mit Risikobetrachtungen einer Anleihe.

Im nächsten Kapitel widmen sich die Autoren der Versicherungsmathematik, vor allem der Lebensversicherung. Dabei werden Überlebens- und Sterbewahrscheinlichkeiten eingeführt, um anschließend über das Äquivalenzprinzip eine faire Prämie zu berechnen.

Das dritte Kapitel beginnt mit einer wirtschaftlichen Einführung über Aktiengesellschaften. Ausgehend vom Berechnen der Rendite (einfach und logarithmisch) betrachtet man Verteilungen von Renditen in einem beschreibenden statistischen Sinn. Anschließend führen einen die Autoren über ein einfaches Binomialmodell eines Aktienkurses hin zu dem Wiener Prozess und dem Black-Scholes-Modell.

Im vierten Kapitel werden Portfolios untersucht und es wird versucht diese nach der klassischen Theorie nach MARKOWITZ zu optimieren.

Das abschließende fünfte Kapitel handelt von Optionen, wobei zu Beginn wieder eine wirtschaftliche Einführung steht. Anschließend wird dargestellt, dass Optionspreise im Allgemei-

nen nicht über das Erwartungswertprinzip bestimmt werden können bzw. dass unter dem originalen Maß im Allgemeinen eine Arbitragemöglichkeit besteht. Optionspreise (sowohl European-Call als auch Put) werden dann noch im Binomialmodell bestimmt. Durch einen Grenzwertübergang erhält man ausgehend von einer Formel für den Optionspreis im Binomialmodell die berühmte Black-Scholes-Formel.

ADELMEYER und WARMUTH empfehlen ausdrücklich die Verwendung von Technologie, vor allem von Tabellenkalkulationsprogrammen. Die Berechnungen sind meist einfach, jedoch durchaus umfangreich. Dieses Werk erweist sich als Quelle für schulrelevante Stoffgebiete der Finanzmathematik recht nützlich und wird auch von vielen anderen Autoren aus der Mathematikdidaktik zitiert. Für die direkte Verwendung in der Schule eignet sich das Buch nur bedingt.

Stoffauswahl

Anleihen (wobei genauer auf Zinsen und Renditen eingegangen wird), Lebensversicherungen (Äquivalenzprinzip, Arbeiten mit Sterbetafeln, Risikoversicherung, Versicherungen im Erlebensfall, Kapitalversicherung), Aktien (einfache und logarithmische Rendite, statistische Verteilung der Renditen, Korrelation, Random-Walk-Theorie, Binomialmodell, Wiener-Prozess, Black-Scholes-Modell), Portfoliotheorie, Optionen (Preisbildung, No-Arbitrage-Prinzip, Binomialmodell, Black-Scholes-Modell)

Begründung

Eine direkte Begründung für einzelne Stoffgebiete wird nicht gegeben, allerdings weisen die Autoren ausdrücklich darauf hin, dass es sich um finanzwirtschaftliche und finanzmathematische Grundlagen handelt.

Schwierigkeiten

Aufgrund der fachlichen Ausrichtung des Buches führen die Autoren keine schulrelevanten Probleme an.

2.2.15 Aktien und ihre Kurse – Moritz Adelmeyer

ADELMEYER schildert in einem Artikel in „mathematik lehren“ eine gangbare Unterrichtssequenz über Aktienkurse und beschreibende Statistik. Der Autor empfiehlt vor dem Rechnen mit Aktien eine wirtschaftliche Auseinandersetzung mit Aktien. Der diesbezügliche entworfene Arbeitsauftrag beinhaltet das exemplarische Sammeln von Informationen zu einer Aktiengesellschaft. Der Artikel thematisiert die Begriffe Rendite und Risiko. Für Ersteren bieten sich zwei Berechnungsweisen an: das in diesem Fall mathematisch nicht korrekte arithmetische Mittel der relativen Änderungen des Aktienkurses und die Betrachtung logarithmischer Kursänderungen. ADELMEYER schlägt für die Schule die erste Berechnungsvariante vor, da diese zweckmäßig und angemessen für eine Behandlung im Unterricht erscheint. Das dafür entwickelte Unterrichtsmaterial handelt über eine konkrete AG, deren Renditen und deren Standardabweichung berechnet werden sollen. Im Anschluss findet eine kurze Einführung in Korrelationen und Aktien statt. Im Wesentlichen bespricht er ganz elementare Grundzüge der Portfoliotheorie von MARKOWITZ, das Unterrichtsmaterial legt den Fokus auf Berechnungen und graphische Darstellungen von Korrelationen zweier Aktienkurse. Abschließend stellt er noch ein Modell für die Entwicklung von Aktienkursen auf, das Binomialmodell. Anhand einer Aktie führt er die Entwicklung des Kurses vor.

Stoffauswahl

Renditen (arithmetische und logarithmische), Risiko (Standardabweichung), Korrelationskoeffizient, Entwicklung eines Aktienkurses (Binomialmodell)

Begründung

Die von HARRY MARKOWITZ begründete Portfoliotheorie liefert heute noch die Grundlage bei der Anlageberatung.

Schwierigkeiten

ADELMEYER erachtet das Betrachten logarithmischer Renditen für die Schule als schwierig, er verwendet daher die normale Rendite, relative Kursänderungen, obwohl dabei die Verwendung des arithmetischen Mittels unkorrekt ist. Das wird nach dem Autor auch in der Praxis so gehandhabt.

2.2.16 Mathematik-Lehrbuch Wirtschaft – Rechnen mit Rendite und Risiko – Götz (Hrsg.), Schweiger und Diboky

Bei diesem Werk handelt es sich um ein Begleitband zu einer Schulbuchreihe für die Sekundarstufe II. Obwohl im Titel Wirtschaft steht, wird nach dem Inhaltsverzeichnis und dem Vorwort schnell klar, dass es sich dabei nur um einen speziellen Teil des Wirtschaftswesens handelt, die Finanzmathematik. Der Begleitband gliedert sich in drei Kapitel: „Das magische Dreieck der Geldanlage“, „Kapitalmarkttheorie“ und „derivative Wertpapiere“.

Zu Beginn eines jeden Abschnitts steht ein theoretischer Teil, Musteraufgaben erleichtern das Verständnis. Anschließende Aufgaben sollen den Schülern/innen helfen den Stoff zu durchdringen. Das Spannungsfeld zwischen Rentabilität, Liquidität und Sicherheit wird im ersten Kapitel thematisiert. Im Anschluss stehen Wertpapiere im Fokus. Allerdings beschränkt man sich auf die Begriffe: Rendite, Drift und Volatilität. Im zweiten Kapitel führen die Autoren das Black-Scholes-Modell über die statistische Betrachtung der historischen Renditen ein. Die Portfolio-Optimierung stellt den zweiten großen Themenblock des Kapitels dar. Im dritten Kapitel werden Optionen umfangreich behandelt, man gelangt von der Betrachtung der Pay-off-Diagramme über Investmentstrategien mit Optionen zur Bepreisung von Optionen im Binomialmodell.

Stoffauswahl

Magisches Dreieck der Geldanlage, Anleihen (Nominale, Emissionskurs, Tilgungskurs, Nominalzinssatz), Rendite (einfache und logarithmische), Barwertkonzept, Risiko (Standardabweichung), Drift, Volatilität, Black-Scholes-Modell, Portfolio-Optimierung (Kovarianz und Korrelationskoeffizient), Diversifikationseffekt, Derivate: Optionen (Call und Put), Investmentstrategien mit Optionen (Protective Put, Covered Call, Straddle), Bewertung von Optionen im Binomialmodell, Futures, Spot-Futures-Parität, Zinsparität

Begründung

Im Vorwort führt der Herausgeber einige Gründe für eine Behandlung dieses Themas an: „Geld anlegen“ ist in unserer Welt mit wachsendem Wohlstand ein wichtiges gesellschaftliches Anliegen geworden, wobei hierbei traditionelle Sparformen nicht reichen.

Es handelt sich hierbei um ein modernes anwendungsorientiertes Thema. Alle mathematischen Methoden in diesem Band werden vom AHS-Lehrplan verlangt und diese Thematik eignet sich für einen Technologieeinsatz. Dieser wird an manchen Stellen exemplarisch mit der Software Excel vorgeführt bzw. gefordert. Der fächerübergreifende Unterricht soll durch

das Werk erleichtert werden.

Schwierigkeiten

GÖTZ bezeichnet die ersten beiden Kapitel mathematisch anspruchsvoller als das dritte Kapitel. Bei Letzterem merkt der Herausgeber an, dass eine Fülle an neuen Begriffen zu erlernen ist.

2.2.17 Money out of nothing? – Prinzipien und Grundlagen der Finanzmathematik – Francesca Biagini und Daniel Rost

BIAGINI und ROST haben im Rahmen der 44. GDM-Tagung in München einen Hauptvortrag zum Thema Finanzmathematik gehalten. Aus den dazugehörigen „Beiträgen zum Mathematikunterricht“ entstammt der Artikel. Zu Beginn beschreiben sie eine European-call-option und werfen im Anschluss die typische Frage auf: „Wie viel ist eine solche Option heute wert?“ Ausgehend von dieser Fragestellung wird das Binomialmodell eingeführt, da der Aktienkurs bzw. das Underlying modelliert werden muss. Dabei zeigen die Autoren, dass der Erwartungswert in der üblichen Form nicht die richtige Antwort liefert. Aus diesem Grund führen die Verfasser selbstfinanzierende Handelsstrategien ein, um mit Hilfe eines Hedging-Arguments den Preis der Option im Sinne des No-Arbitrage-Prinzips zu bestimmen. Eine Betrachtung des Bepreisungsprozesses unter einem Martingalmaß wird ebenso kurz thematisiert wie ein Ausblick auf die Black-Scholes Formel. In einer kurzen Schlussbemerkung nehmen die Autoren zu aktuellen Modellierungsprozessen in der Finanzmathematik, sowie über die Verwendung in der Schule Stellung.

Stoffauswahl

Option, Binomialmodell, Bepreisung durch Hedging mit Rückwärtsinduktion, No-Arbitrage-Prinzip, Bepreisung mit dem Martingalmaß, Ausblick auf das Black-Scholes-Modell (Drift, Volatilität, Brown'sche Bewegung)

Begründung

In den letzten 20 Jahren hat sich im Bereich der Finanzmathematik einiges getan, diese Entwicklungen haben in der Schule keinen Einzug gefunden. Die im Artikel behandelten Konzepte lassen sich gut in den Unterricht integrieren.

Schwierigkeiten

Es werden keine genannt.

2.2.18 Portfolioselektion mit GeoGebra – in welche Aktien soll ich investieren? – Lucia Del Chicca und Markus Hohenwarter

Der genannte Artikel wurde zweimal publiziert einmal in „Mit GeoGebra mehr verstehen“ und das andere Mal in „Schriftreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG“. Zu Beginn werden die Begriffe erwartete Rendite und Volatilität erläutert.

Erwartete Rendite: „Sie entspricht dem geschätztem Wert, den das Finanzprodukt zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft, z.B. in einem Jahr, mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit haben wird. Volatilität: „...stellt das Risikomaß dar“. Des Weiteren wird noch die Information gegeben, dass diese Kennzahlen von Statistikern oder Finanzanalysten aus historischen Daten berechnet oder geschätzt werden. Nachfolgend werden vier Aktien mit den beiden Kennzahlen angegeben und in einem Trend-Volatilitäts-Diagramm dargestellt. Welche Aktie von den vier nun am besten ist, lässt sich nicht eindeutig sagen, da das Ergebnis

von der Risikofreudigkeit des Investors abhängt. Nun betrachten die beiden Autoren Kombinationen aus Aktien. Sie geben die Definition der erwarteten Rendite $\mu = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mu_i$, wobei x_i der in die Aktie A_i investierte Anteil ist und μ_i die erwartete Rendite der Aktie A_i ist. Für die Volatilität schreiben sie $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n x_i \cdot x_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j}$, wobei σ_i die Volatilität der Aktie A_i ist und ρ_{ij} die Korrelation der Rendite der Aktienkurse A_i und A_j angibt. Die Visualisierung im Trend-Volatilitäts-Diagramm aller möglichen Kombinationen zwischen (zuerst) zwei Aktien erfolgt experimentell in GeoGebra. Dabei wird der Punkt

$$Y = \left(\sqrt{t^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-t)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot t \cdot (1-t) \cdot \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}, t \cdot \mu_1 + (1-t) \cdot \mu_2 \right)$$

in GeoGebra eingegeben, wobei t zuvor als Zufallszahl definiert wird. Wenn man die Spur bei Y einschaltet und sehr oft t berechnet, dann erhält man das Bild von Abb. 2.

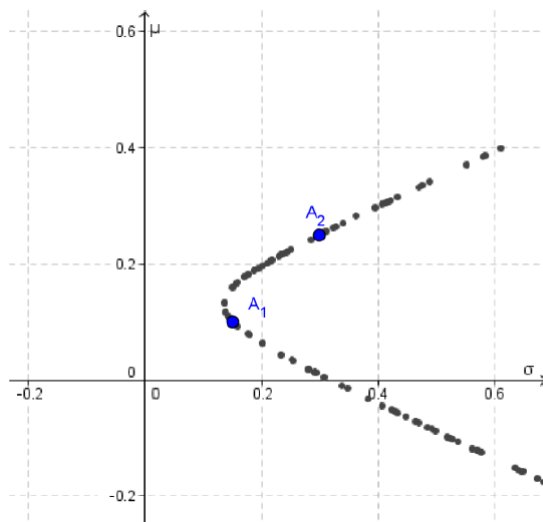


Abb. 2 Zufälliggenerierte Portfolios von A_1 und A_2 mit Short-Selling – entnommen aus (DEL CHICCA/HOHENWARTER, 2014, S. 23)

Anschließend wird dasselbe noch mit 5 Aktien dargestellt. Hier füllen alle möglichen Kombinationen die Fläche einer Parabel aus. Der Abschluss des Aufsatzes bildet die Tangentenlegung an die Parabel, um das supereffiziente Portfolio zu finden, welches aus mehreren Aktien (hier wieder fünf) und einem Sparbuch besteht.

Stoffauswahl

Portfoliooptimierung nach MARKOWITZ (zuerst zwei Aktien, dann mehrere Aktien und abschließend mehrere Aktien und ein Sparbuch)

Begründung

Der Fall für zwei Aktien lässt sich mit Mitteln der Schulmathematik nachvollziehen. Es handelt sich dabei um ein interessantes und anwendungsorientiertes Beispiel. Den Lernenden ist oft gar nicht bewusst, wie viel Mathematik in den Finanzmärkten steckt. Der ausgewählte Stoff eignet sich für einen Technologieeinsatz und fächerübergreifende Projekte.

Schwierigkeiten

Die beiden Autoren sind der Meinung, dass die Betrachtungen mit mehreren Aktien für Schüler/innen zu schwierig sind. Ansonsten nennen die beiden keine möglichen Schwierigkeiten.

2.2.19 Einblick in Optionen – Jörg Meyer

MEYER liefert in einem ISTRON-Artikel einen Einblick in Optionen. Gleich zu Beginn rechtfertigt er sich, warum er noch einen Aufsatz zu diesem Thema liefert. Die Begründung dafür sind andere Zugänge in manchen Details. Zu Beginn werden dem/der Leser/in Leerverkäufe näher gebracht und anhand eines Binomialmodells in einer Periode erläutert. Anschließend führt der Autor Optionen unter dem Namen Garantien ein. Eine erste naive Betrachtung einer Bepreisung durch den Erwartungswert stellt sich als falsch heraus. Die richtige Bepreisung in diesem Modell gestaltet MEYER äußerst interessant, er führt diese beispielhaft und allgemein vor. Zum Zeitpunkt 0 halten wir x Aktien zum Preis 100 und y Optionen zum Preis β . Wenn die Aktie zum Zeitpunkt 1 hin steigt, dann ist die Aktie 120 und die Option 30 Wert. Im anderen Fall bei einem Sinken des Aktienpreises zum Zeitpunkt 1 hin ergibt sich ein Wert von 70 für die Aktie und von 0 für die Option. Die Gewinnmöglichkeiten zum Zeitpunkt 1 lauten einerseits $x \cdot (120 - 100) + y \cdot (30 - \beta)$ und andererseits $x \cdot (70 - 100) + y \cdot (-\beta)$. Er fasst die Gewinnmöglichkeiten als Skalarprodukte auf $V_1 \cdot P$ und $V_2 \cdot P$ und argumentiert, dass diese nicht beide positiv sein dürfen, ansonsten gäbe es eine Arbitragemöglichkeit. Also darf der Vektor der Handelsstrategie $P = (x, y)$ keinen spitzen Winkel mit V_1 bzw. V_2 einnehmen. Dies ist nur garantiert, wenn $V_1 = (20, 30 - \beta)$ und $V_2 = (-30, -\beta)$ einen Winkel von 180° bilden, denn dann gibt es keinen Vektor $P = (x, y)$ der mit V_1 und V_2 einen spitzen Winkel einnimmt. Dadurch erhält man ein Gleichungssystem, in dem der eindeutige Optionspreis im vorliegenden Modell bestimmbar ist. Der Optionspreis beträgt demnach 18 Euro.

Der Verfasser betrachtet anschließend European-Put-Optionen, das Vorgehen gestaltet sich analog zu der besprochenen Call-Option. Der Leverage-Effekt wird für den Call und den Put thematisiert. Im Anschluss erweitert der Autor das Binomialmodell, er fügt mehrere Perioden hinzu. Ebenfalls werden eine Call- und eine Put-Option in diesem Modell betrachtet. Zwischendurch werden die Berechnungen durch kritische Bemerkungen zur Finanzkrise, zur Rolle der Normalverteilung und zu Derivaten aufgelockert. In einer abschließenden didaktischen Bemerkung thematisiert er die zeitliche Schwierigkeit zur Durchführung der von ihm vorgeschlagenen Unterrichtssequenz, motiviert aber im Gegenzug zum Einsatz dieser Thematik im Mathematikunterricht.

Stoffauswahl

Leerverkäufe, European-Call-Option, European-Put-Option, Bepreisung mittels Vektorrechnung, Binomialmodell, Modellierung von Aktienkursmodellen, Leverage, Arbitrage, Rolle von Derivaten, Rolle der Normalverteilung

Begründung

Als Argument für eine Behandlung führt MEYER die Verknüpfbarkeit zu anderen Bereichen der Schulmathematik, den exemplarischen Einblick in die Welt der Derivate, die Aktualität, weiters hervorgerufen durch Krisen und Zeitungsartikel und den fächerübergreifenden Unterricht an.

Schwierigkeit

MEYER erwähnt selbst, dass in der heutigen Zeit kaum noch Zeit für die Optionspreisberechnung bleibt, und fügt hinzu, dass die Zukunftsbedeutung für Schüler/innen eher gering ist. Auch der formale Aufwand bei diesem Thema ist nicht zu vernachlässigen.

2.2.20 Abschätzen von Verlustrisiken – Norbert Brunner und Manfred Kühleitner

Die beiden Autoren beginnen den Artikel mit dem prägenden Satz: „Wer an der Börse spekuliert, geht ein Risiko ein.“ und behandeln mehrere Risikomaße. Bevor sie sich der Berechnung dieser widmen, ermitteln sie exemplarisch von Gold die Rendite pro Handelstag. Alle Berechnungen werden in Excel durchgeführt und die Autoren geben jeweils die nötigen Befehle an. Verlustserien werden als erstes Risikomaß besprochen, dabei werden die absoluten und relativen Häufigkeiten von Verlusttagen geführt. Anschließend wird die Standardabweichung als Maß verwendet und zu guter Letzt der Value-at-Risk. Am Ende des Aufsatzes prüfen die Autoren, ob es überhaupt vernünftig ist, der Rendite pro Handelstag von Gold eine Normalverteilung zu unterstellen.

Stoffauswahl

Rendite, Risikomaß, Verlustserien, Volatilität, Value-at-Risk

Begründung

Aktualität, Verwenden großer Datenmengen

Schwierigkeit

Die Autoren führen keine an.

2.3 Erkenntnisse

Die einzelnen Abhandlungen haben alle ihre eigenen feinen Spezialisierungen und Akzentuierungen. Im Wesentlichen lässt sich die Stoffauswahl allerdings rasch abstecken: Berechnungen statistischer Kennzahlen von Aktienkursen (Renditen, Mittelwerte, Standardabweichungen, Drift, Volatilität), Modellierung von Aktienkursen (diskret und kontinuierlich), Bepreisung von Optionen (mittels Replikation und No-Arbitrag-Prinzip, hin und wieder gibt es eine Erwähnung von Risk-neutral-Pricing/Martingalmaß), No-Arbitrag-Prinzip (und diverse Abänderungen), Übergang vom Binomialmodell zum Black-Scholes-Modell, Black-Scholes-Formel zur Bepreisung von Optionen, Leverage-Effekt/Hebeleffekt von Optionen, Portfoliooptimierung.

Einige der Arbeiten behandeln das Bepreisen einer Option. Der Duktus ist dabei meist sehr ähnlich. Sie beginnen bei dem bekannten diskreten Modell für den Aktienkurs, das Ein-Perioden-Binomialmodell. Darauf folgt das Aufzeigen, dass das Erwartungswertprinzip bei der Bepreisung im Allgemeinen nicht zum Ziel führt, da eine Arbitragemöglichkeit gefunden werden kann. Anschließend werden mehrere Perioden in dem zugrundeliegenden Aktienkursmodell betrachtet. Zum Abschluss erfolgt ein Übergang zum kontinuierlichen Black-Scholes-Modell, meistens in Form eines Ausblicks.

Begründungen für eine Verwendung finanzmathematischer Themen im Mathematikunterricht werden zahlreich gegeben. Im Vordergrund steht dabei die Anwendungsorientierung, das Arbeiten mit Realitätsbezug bzw. mit realen Daten. Die oft erwähnte Aktualität wird durch die Weltwirtschaftskrise noch empirisch belegt. Der wachsende Wohlstand führt auch dazu, dass Geldanlageprodukte abseits des Sparbuchs gefragt werden. Die Erziehung eines/r mündigen Bürgers/in steht im Vordergrund und nicht die Ausbildung eines Börsenprofis. Einige Autoren/innen betonen die Möglichkeit des Vernetzens unter den verschiedenen Gebieten der Mathematik, diese reichen von der Statistik zur Analysis bis hin zur viel erwähnten Wahrscheinlichkeitsrechnung. Des Weiteren meinen einige der Autoren/innen, dass die we-

sentlichen Züge der modernen Finanzmathematik schon an dem einfachen Ein-Perioden-Modell aufzeigbar sind, und dafür ist keine komplexe Mathematik nötig.

Die Schwierigkeiten bei der Behandlung der vorgeschlagenen Themen werden von manchen unter den Tisch gekehrt, andere erwähnen sie ganz offen. Voran liegt die Fülle an neuen Begriffen, die auf die Lernenden zukommen. Das (wirtschaftliche) Einarbeiten in das Thema erfordert noch mehr Zeit. Hier stößt man durchaus auf geringe Kenntnisse der Schüler/innen. Einige Lernende sind der Meinung, dass dieser Kontext nur für Interessierte verständlich sei, andere würden schnell abschalten.

Keine/r der Verfasser/innen der untersuchten Werke argumentiert die Themenauswahl aus der Finanzmathematik. Es wird zwar begründet (siehe oben), warum man Finanzmathematik im Unterricht behandeln soll, aber nicht warum man genau diese Themen wählt. Es könnte ja durchaus sein, dass andere Themen aus der Finanzmathematik viel nützlicher für den/die Schüler/in sind.

3 Verankerung im Schulsystem

Dieser Abschnitt stellt die Verankerung finanzmathematischer Themen im österreichischen Schulwesen dar. Einen wesentlichen Einblick geben dabei die aktuellen Lehrpläne österreichischer Schulen, die Kompetenzkataloge der standardisierten Reifeprüfung (sRP) bzw. der standardisierten Diplomprüfung (sDP) und die Schulbücher. Die Untersuchung gliedert sich zuerst grob in allgemeinbildende Schulen (AHS) und berufsbildende Schulen (BHS). Während der Bereich der allgemeinbildenden Schulen einfach strukturiert ist, ergibt sich ein anderes Bild für die berufsbildenden Schulen. Österreich besitzt ein hoch differenziertes Bildungssystem, das sich vor allem im Bereich der berufsbildenden Schulen zeigt. Aus diesem Grund ergibt sich eine weitere Untergliederung je nach Schulform, diese richtet sich nach der Gliederung des Bundesministeriums für Bildung, es ergeben sich die Bereiche: Berufsbildende Schulen, Kindergartenpädagogik und Sozialpädagogik, land- und forstwirtschaftliche Schulen, Mode, Sozialberufe, technische und (kunst)gewerbliche Schulen, Tourismus und wirtschaftliche Berufe. Die sDP unterscheidet sich von der sRP in einigen Punkten. Aufgrund der Differenzierung im BHS-Bereich gibt es einen schulübergreifenden Teil A, so genannte Grundkompetenzen, und einen Teil B, dieser enthält zwei bis drei komplexe Aufgabenstellungen, die sich an der Ausrichtung der jeweiligen Schule orientieren. Für den Teil B wurden elf Cluster mit spezifischen Kompetenzen eingerichtet, sechs der zehn Cluster für die HTL, je einen für kaufmännische Schulen, humanberufliche Schulen, land- und forstwirtschaftliche Schulen, Bildungsanstalten und einen weiteren für die Berufsreifeprüfung (vgl. SCHODL, 2013).

Die Analyse bezieht sich hier auf explizite Erwähnungen und deren Formulierungen in den einzelnen Schriftstücken. Mathematische Begriffe, die Anwendung im Finanzwesen finden, bleiben unberücksichtigt. Als Beispiel sei hier die empirische Standardabweichung angeführt, sie wird im Lehrstoff erwähnt und sie stellt eine wichtige Kennzahl im Finanzwesen dar. In Anbetracht solcher Angaben im Lehrstoff würde die Untersuchung nahezu kein Ende finden, überspitzt formuliert, benötigt man auch die natürlichen Zahlen im Finanzwesen, dann verliert diese Analyse jegliche Aussagekraft. Aus diesem Grund beschränkt sich der Autor nur auf explizite Formulierungen.

3.1 Allgemeinbildende höhere Schulen – AHS

Im gesamten Mathematiklehrplan für die Oberstufe kommt das Wort *Finanzmathematik* nicht vor. Einzig und alleine wird der Begriff *Finanzwirtschaft* einmal erwähnt und zwar in den „Beiträgen zu den Bildungsbereichen“ unter dem Punkt „Mensch und Gesellschaft“. Dieser Punkt trägt die Aufforderung, dass die Lehrperson im Unterricht aufzuzeigen hat, dass Mathematik in vielen Bereichen des Lebens eine wichtige Rolle spielt. Im Abschnitt des Lehrstoffs gibt es zwar Bereiche, die in finanzmathematischen Konzepten verwendet werden, jedoch, wie oben erwähnt, werden diese nicht explizit angeführt (vgl. Lehrplan AHS-Oberstufe, 2004).

3.1.1 Standardisierte Reifeprüfung AHS

Die neue standardisierte Reifeprüfung geht mit dem Punkt *Finanzmathematische Grundlagen* im Kontextkatalog einen Schritt in Richtung Anwendbarkeit für die Sekundarstufe II.

Wenn man diesen Punkt nun genauer betrachtet, so stellt man fest, dass der vorgeschriebene Stoff, den die Schüler/innen bei der Matura können müssen, mit *Zinseszinsrechnung* und der *Kosten-Preis-Theorie* nur an der Oberfläche der Finanzmathematik kratzt bzw. bei letzterem eigentlich kaum der Finanzmathematik zuzuordnen ist (vgl. BIFIE, 2013, S. 21 f. und siehe Kapitel 6.1).

3.1.2 Schulbücher AHS

Einige Schulbuchreihen reagieren auf die Vorgabe der standardisierten Reifeprüfung und haben Kapitel zur Kosten-Preis-Theorie eingebaut (vgl. GÖTZ/REICHEL, 2013, S. 229 ff. und MALLE/WOSCHITZ/KOTH/SALZGER, 2010, S. 62 ff.). In den Schulbüchern der 6. Klasse findet man ein Kapitel zur Zins- und Rentenrechnung, welches als Anwendung des Kapitels Folgen und Reihen präsentiert wird (vgl. MALLE/WOSCHITZ/KOTH/SALZGER, 2010 S. 142 ff. und BLEIER/LINDENBERG/LINDNER/SÜSS-STEPANCIK, 2015, S. 220 ff.). Erwähnenswert bleibt noch der Zusatzband „Rechnen mit Rendite und Risiko“, in dem unter anderem das Binomialmodell und das Black-Scholes-Modell zur Modellierung eines Aktienkurses für die Sekundarstufe II behandelt wird (GÖTZ/SCHWEIGER/DIBOKY, 2007), für eine ausführliche Beschreibung siehe Kapitel 2.2.16.

3.2 Berufsbildende Schulen

Anschließend spezialisiert sich die Untersuchung auf die einzelnen berufsbildenden Schulen. Die Analyse erfolgt gebündelt gemäß den Clustern der sDP, zuerst wird der Lehrplan und dann die jeweilige Kompetenzliste der sDP angeführt, wobei die Reihenfolge geändert wurde. In diesem Abschnitt werden die Lehrpläne des Faches *Angewandte Mathematik* der berufsbildenden Schulen in Österreich betrachtet. Der Abhandlung beginnt mit der Untersuchung des Schriftstücks über den Teil A der sDP, der für alle berufsbildenden Schulen gilt.

3.2.1 sDP – Teil A

Die angeführten Grundkompetenzen im Teil A enthalten keine Erwähnung in Richtung Finanzmathematik. Es gibt einen Begriffekatalog zum Teil A, analog zum Kontextkatalog aus dem AHS-Bereich. In diesem werden unter dem Punkt Wirtschaft und Finanzen die Begriffe: *variable Kosten*, *Fixkosten*, *Gewinnbereich*, *Gewinngrenze*, *Zinssatz*, *Laufzeit*, *Anfangskapital* und *Endkapital* angeführt. Eine Erklärung der zuvor angeführten Wörter bleibt bei einer Anführung in der Angabe bei einer Reifeprüfung aus. Man geht offenbar von einem Üben in den Klassen zuvor aus. (vgl. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, 2014, Kompetenzkatalog Teil A bzw. Begriffekatalog)

3.2.2 Kaufmännische Schulen – HAK

Lehrplan HAK, 2004 bzw. Lehrplan HAK, 2014

Im auslaufenden und im neuen Mathematiklehrplan der Handelsakademie trifft man häufiger auf Lehrstoffinhalte, die der Finanzmathematik zuzuordnen sind. Im Lehrstoff der älteren Version werden folgende Punkte schlicht aufgelistet: *Zinseszinsrechnung*, *Rentenrechnung*,

Schuldentilgung, Finanzmathematik, Kosten- und Preistheorie, Aktienanalyse und Investitionsrechnung. Die Punkte *Finanzmathematik, Aktienanalyse* und *Investitionsrechnung* gehören zu den Bereichen *Übungsfirmen-Konnex* bzw. zum *Erweiterungslehrstoff* (vgl. Lehrplan HAK, 2004, S. 31 f.).

Der neue Lehrplan der Handelsakademie weist eine sorgfältige Erläuterung zu den Themenbereichen auf. Für jedes Semester wird eigens eine Bildungs- und Lehraufgabe ausgewiesen, in der die Lernziele detailliert niedergeschrieben werden. Erst anschließend wird der Lehrstoff recht kurz angeführt. Vom Lehrstoff ändert sich kaum etwas, es fallen die Großthemen Finanzmathematik und Aktienanalyse in den Konnexen bzw. Erweiterungen weg (vgl. Lehrplan HAK, 2014, S. 84 ff.). Die Bildungs- und Lehraufgabe beschreibt sehr konkret, welcher Stoff wie gekonnt werden muss. Im 6. Semester schreibt der Lehrplan aus dem Bereich *Funktionale Zusammenhänge – Rentenrechnung und Schuldentilgung* das Folgende vor:

- „- den Zusammenhang zwischen geometrischen Reihen und der Rentenrechnung beschreiben,
- die charakteristischen Größen der Rentenrechnung berechnen, interpretieren und im Kontext deuten,
- den Begriff des Effektivzinssatzes erklären, mittels Technologie berechnen und das Ergebnis interpretieren,
- Zahlungsströme grafisch darstellen und gegebene grafische Darstellungen des Zahlungsstroms interpretieren,
- die Annuitätenschuld als eine Möglichkeit der Schuldtilgung beschreiben und diese auf wirtschaftliche Aufgabenstellungen anwenden,
- Rentenumwandlungen und Schuldkonvertierungen durchführen und deren Ergebnisse interpretieren, . . . “ (Lehrplan HAK, 2014, S. 89)

aus dem Bereich *Funktionale Zusammenhänge – Investitionsrechnung*:

- „- verschiedene Methoden der dynamischen Investitionsrechnung, zumindest Kapitalwertmethode, Methode des internen Zinssatzes und Methode des modifizierten internen Zinssatzes beschreiben,
- mit diesen Methoden Investitionsanalysen durchführen und Investitionen bewerten, . . . “ (Lehrplan HAK, 2014, S. 89)

aus dem Bereich *Funktionale Zusammenhänge – Kurs- und Rentabilitätsrechnung*:

- „- die Begriffe der Kurs- und Rentabilitätsrechnung erklären und damit argumentieren,
- Rendite, Barwert, Kauf- und Verkaufspreis (am Tag der Kuponzahlung), zumindest bei jährlicher Kuponzahlung, auf Basis festverzinslicher Wertpapiere berechnen, interpretieren und im Kontext deuten.“ (Lehrplan HAK, 2014, S. 89)

Des Weiteren finden sich relevante Themen im 7. Semester aus dem Bereich der *Analysis – Kosten- und Preistheorie*

- „- Nachfrage- und Angebotsfunktionen bestimmen, deren Eigenschaften erklären und markante Punkte (Mindestpreis, Höchstpreis, Sättigungsmenge, Marktgleichgewicht) ermitteln, grafisch darstellen und interpretieren,
- die Begriffe der (Punkt-)Elastizität und Bogenelastizität im wirtschaftlichen Kontext erklären,
- Elastizitäten berechnen und die Ergebnisse interpretieren,
- den Begriff und die Eigenschaften der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion beschreiben und diese als Polynomfunktion 3. Grades berechnen,
- die typischen Kostenverläufe (degressiv, progressiv) beschreiben und interpretieren,
- typische Begriffe der Kosten- und Preistheorie (insbesondere Kostenkehre, Betriebsoptimum, langfristige Preisuntergrenze, Betriebsminimum, kurzfristige Preisuntergrenze, Break Even Point, Gewinnzone, Cournot'scher Punkt, Deckungsbeitrag, Erlösmaximum) berechnen und interpretieren,
- den Begriff der Grenzfunktion beschreiben, diese im wirtschaftlichen Kontext erklären und anwenden.“ (Lehrplan HAK, 2014, S. 90)

Der neue Lehrplan führt weiters konkret schulautonome Erweiterungsbereiche an. Das darin erwähnte Seminar „Private Banking“ führt folgenden interessanten Lehrstoff an: *Wertpapieraufsichtsgesetz, Zertifikate, Optionen, Termingeschäfte, Steuerrecht in der Veranlagung, Einflüsse der Volkswirtschaft auf die Finanzwelt, Portfoliomanagement, Finanzmathematik, Risikomanagement, fundamentale und technische Analyse, Immobilien, Rohstoffe und Edelmetalle*. Nach der Bildungs- und Lehraufgabe des Seminars geht es dabei vor allem um ein Produktwissen und um das Aufzeigen und Absichern von Risiken in einem Portfolio. Die Grundzüge des Portfoliomanagements sollen verstanden werden (vgl. Lehrplan HAK, 2014, S. 138 f.).

sDP – Cluster 8

Die Kompetenzliste zu Cluster 8 erweist sich als reichhaltig in Hinblick auf Begriffe zur *Finanzmathematik*. Der Inhaltsbereich *Algebra und Geometrie* wird durch das Darstellen wirtschaftlicher Sachverhalte in Matrizenschreibweisen erweitert, dazu gehört auch das Interpretieren von *Gozinto-Graphen*. Im Abschnitt *funktionale Zusammenhänge* werden verschiedene Verzinsungsmethoden, sowie das Lösen und Beurteilen von Finanzierungsfragen gefordert. Die *Rentenrechnung* und ihre charakteristischen Größen spielen erwartungsgemäß eine wichtige Rolle. Des Weiteren gehören das Berechnen von *Effektivzinssätzen* auf Basis des BWG (Bankwesengesetz), *Rentenumwandlung* und *Schuldkonvertierungen*, *Tilgungspläne*, *Kapitalwert*, sowie das Skizzieren und Interpretieren von Zahlungsströmen zum besagten Inhaltsbereich. Die Forderungen im Bereich *Analysis* betreffen *Nachfrage-, Angebots-, Erlös- und Gewinnfunktion* und die damit verbundenen Fachtermini sind zu ermitteln bzw. zu interpretieren wie: *Höchstpreis, Sättigungsmenge, Marktgleichgewicht, Kostenkehre, Kostenverläufe, Betriebsoptimum, langfristige Preisuntergrenze, kurzfristige Preisuntergrenze, Betriebsminimum, Gewinngrenzen, Break-Even-Point, Cournot'scher Punkt*, sowie die Ableitungsfunktionen der oben angeführten Funktionen. Ebenda fordert man das Kennen der

Begriffe *Bogen- und Punktelastizität*. (vgl. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, 2014, Kompetenzkatalog – Teil B – Cluster 8)

3.2.3 Kindergartenpädagogik bzw. Elementarpädagogik und Sozialpädagogik - BAKIP bzw. BAfEP und BASOP

Lehrplan BAKIP, 2004 bzw. Lehrplan BAfEP, 2016 und Lehrplan BISOP, 1993 bzw. Lehrplan BISOP, 2016

Weder in den alten noch in den neuen Lehrplänen der BAKIP bzw. BAfEP und BASOP findet sich das Wort *Finanzmathematik* wieder. Die alten Lehrpläne führen auch nicht etwas breiter gefächerte Begriffe, wie Wirtschaft und Ökonomie an. Lediglich in den beiden neuen Lehrplänen kommt das Wort Wirtschaft im dritten Semester im Lehrstoff unter dem Bereich Algebra und Geometrie vor. Es gibt somit in den vier Verordnungen keine explizite Anforderung für die Erwähnung finanzmathematischer Themen. (vgl. Lehrplan BAKIP, 2004 bzw. Lehrplan BAfEP, 2016 und Lehrplan BISOP, 1993 bzw. Lehrplan BISOP, 2016)

sDP – Cluster 9

In den Papieren zu sDP zeigt sich dasselbe Bild. Weder der Teil A (Grundkompetenzen), noch der schulformspezifische Teil B enthalten explizite Erwähnungen. Im Begriffekatalog des ersten Teils, Teil A, kommt die Überschrift *Wirtschaft und Finanzen* vor, siehe dazu Kapitel 3.2.1 auf Seite 37. Dieser Begriffekatalog stellt somit die einzigen Verpflichtungen der Lehrperson in Richtung *Finanzmathematik*. (vgl. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, 2014, Kompetenzkatalog – Teil B – Cluster 9 bzw. Begriffekatalog)

3.2.4 Land- und forstwirtschaftliche Schulen – HLFS

Lehrplan HLFS, 2004 und Lehrplan HLFS, 2016

Der alte Lehrplan höherer land- und forstwirtschaftlicher Schulen führt in den Punkten *Funktionen*, *Finanzmathematik* und *Differential- und Integralrechnung* für diese Analyse interessante Termini an. Die Begriffe *einfache Verzinsung*, *lineare Kostenfunktion*, *lineare Angebots- und Nachfragefunktion* stehen unter *Funktionen*. Der für sich sprechende Themenbereich *Finanzmathematik* enthält *dekursive Zinseszins- und Rentenrechnung*, *Schuldentilgung* und *Anwendungen aus der Wirtschaftsmathematik*. Der Lehrplan verlangt im Absatz *Differential- und Integralrechnung* die *Kosten- und Preistheorie* (vgl. Lehrplan HLFS, 2004, S. 15).

Im neuen Lehrplan der höheren land- und forstwirtschaftlichen Schulen gibt es unter der angewandten Mathematik einen eigenen Bereich *Wirtschafts- und Finanzmathematik*. Der Lehrstoff deckt sich mit dem alten Lehrplan. Nur wird dieser mittels der Semestrierung in einem schönen Spiralcurriculum dargestellt, z.B. bei der Kosten- und Preistheorie (vgl. Lehrplan HLFS, 2016, S. 6 ff.). In der Bildungs- und Lehraufgabe sind die Lernziele formuliert.

Im ersten Semester:

- „- Aufgaben der Zinsrechnung modellieren, berechnen und anhand von Beispielen erklären;

- lineare Funktionen als Modell für Aufgabenstellungen aus der Wirtschaft aus verschiedenen Angaben aufstellen und interpretieren.“ (Lehrplan HLFS, 2016, S. 7 f.)

Im vierten Semester:

- „- von vorgegebenen Funktionseigenschaften auf die Funktion schließen und Polynomfunktionen als Modell für Aufgabenstellungen aus der Wirtschaft aufstellen und interpretieren;
- mit den Modellen der Kosten- und Preistheorie umgehen, sie erklären und Berechnungen zu Nachfrage, Erlös, Gewinnanalyse durchführen, sowie die Ergebnisse interpretieren und dokumentieren.“ (Lehrplan HLFS, 2016, S. 9)

Im fünften Semester:

- „- Zinseszinsaufgaben mit ganz- und unterjähriger Verzinsungsperiode auf Grundlage der geometrischen Folgen modellieren und interpretieren sowie Berechnungen durchführen;
- Rentenrechnungen und Schuldtilgung auf der Grundlage geometrischer Reihen modellieren, ausführen und interpretieren sowie Berechnungen mit Technologieeinsatz durchführen.“ (Lehrplan HLFS, 2016, S. 10)

Im sechsten Semester:

- „- von vorgegebenen Funktionseigenschaften auf die Funktion schließen und Polynomfunktionen als Modell für Aufgabenstellungen aus der Wirtschaft aufstellen und interpretieren;
- mit den Modellen der Kosten- und Preistheorie umgehen, sie erklären und Berechnungen zu Nachfrage, Erlös, Gewinnanalyse, Betriebsoptimum, Kostenkehre, Grenzkosten und Stückkosten durchführen sowie die Ergebnisse interpretieren und dokumentieren.“ (Lehrplan HLFS, 2016, S. 11)

Im siebten Semester:

- „- Integrale für Aufgabenstellungen aus der Wirtschaft mit Grundfunktionen interpretieren sowie numerisch oder mit Technologieeinsatz berechnen;
- mit den Modellen der Kosten- und Preistheorie umgehen, sie erklären und Berechnungen durchführen sowie die Ergebnisse interpretieren und dokumentieren.“ (Lehrplan HLFS, 2016, S. 11)

Im neunten Semester:

- „- für Aufgabenstellungen in fachlicher Vernetzung systematisch Modelle erstellen, mit diesen Modellen Berechnungen durchführen und die Ergebnisse interpretieren;
- verschiedene Rechenwege argumentieren;
- mit den Modellen der Kosten- und Preistheorie umgehen, sie erklären und Berechnungen durchführen sowie die Ergebnisse interpretieren und dokumentieren.“ (Lehrplan HLFS, 2016, S. 13)

sDP – Cluster 7

In der spezifischen Kompetenzliste des Clusters 7 sind die Inhaltsbereiche *funktionale Zusammenhänge* und *Analysis* von Bedeutung. Ersterer führt unter der Abkürzung B7.3.6 die *Rentenrechnung* auf der Grundlage *geometrischer Reihen* an. Zweiterer listet unter der Kompetenz B7.4.2: *Modelle der Preis- und Kostentheorie erklären, sowie das Berechnen und Interpretieren der Nachfrage, des Erlös, der Gewinnanalyse, des Betriebsoptimums, der Kostenkehre, der Grenzkosten und der Stückkosten* und unter B7.4.3 eine etwas weiter gefasste Fähigkeit auf: *Integrale für Aufgabenstellungen aus der Wirtschaft mit Grundfunktionen interpretieren, sowie numerisch und mit Technologie berechnen*. Der spezifische Begriffekatalog weist einige der Finanzmathematik zuzuordnende Abschnitte auf. Gleich der erste Absatz listet die Begriffe *Zinssatz (i), einfacher Zins, Zinseszins, Aufzinsungsfaktor $(1 + i)$, Abzinsungsfaktor $\frac{1}{1+i}$, vorschüssige, nachschüssige Zahlung, Annuität, Rate, Rente, Zeitlinie, Barwert, Endwert, Zeitwert der Rente, Restwert* auf. Es werden *Produktionsmatrix, Verflechtungsdiagramm=Zuordnungsdiagramm, Bedarfsvektor, Preisvektor* im Absatz *Planungsmathematik* angeführt. Der Abschnitt *Funktionale Zusammenhänge und Analysis* führt den Punkt *Kosten- und Preistheorie* an. Die Liste besteht aus *lineare Beschreibung, Preisfunktion der Nachfrage, Preis-Absatz-Funktion ($p(x)$), Nachfragefunktion ($x(p)$), Höchstpreis, Sättigungsmenge, degressiver/progressiver Kostenverlauf, Kostenkehre, Stückkostenfunktion = Durchschnittskosten, Betriebsoptimum, langfristige Preisuntergrenze, variable Stückkostenfunktion, Betriebsminimum, kurzfristige Preisuntergrenze, Grenzkostenfunktion, Gewinn Grenzen: Nullstellen der Gewinnfunktion, untere Gewinn Grenze = Break-even-Point = Gewinnschwelle, Cournot'scher Punkt*. (vgl. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, 2014, Kompetenzkatalog – Teil B – Cluster 7)

3.2.5 Schulen für Mode, Tourismus und wirtschaftliche Berufe – HUM

Die Homepage der berufsbildenden Schulen (vgl. <http://www.abc.berufsbildendeschulen.at>) führt die in der Überschrift angeführten Schulen alle einzeln an. Aufgrund der in der Mathematik ähnlichen Ausrichtung werden die zugehörigen Lehrpläne gemeinsam analysiert. Das Argument stützt die sDP, da alle drei Ausrichtungen einen gemeinsamen Cluster zugeordnet wurden und vor allem die neuen Lehrpläne, die im Fach „Angewandte Mathematik“ wortgleich sind.

Lehrplan HLA-Mode, 2009, Lehrplan HLA-KG, 2011, Lehrplan HLW-Umwelt, 2008, Lehrplan HLW-Sozm., 2015 bzw. Lehrplan HLA-KG, 2015

In Anbetracht des gemeinsamen Clusters, wie oben beschrieben und unten erläutert, erstreckten sich die Anforderung des Lehrplans der einzelnen Ausrichtungen über eine große Bandbreite. Das kleinste Ausmaß an Vorschriften innerhalb dieser Gruppe an Schulen setzten die alten Lehrpläne der Schulen für Mode, so führt das untersuchte Schriftstück der höheren Lehranstalt für künstlerische Gestaltung zwei Punkte im Lehrstoff an, die der Finanzmathematik unterzuordnen sind bzw. beinhalten können. Im ersten Jahrgang steht *lineare Optimierung mit zwei Variablen bei relevanten Problemstellungen aus Wirtschaft und Alltag*. Im dritten Jahrgang werden unter dem Absatz *endliche Folgen und Reihen* folgende Begriffe angeführt *Anwendungsbeispiele (Zinseszinsrechnung, Rentenrechnung, Spareinlagen, Leasing, Kredit)*. In der Bildungs- und Lehraufgabe wird für den Unterricht gefordert, dass Beispiele und Projekte aus dem Wirtschaftsbereich zu behandeln sind, und die Schüler/innen

sollen sich der wechselseitigen Abhängigkeit von Wirtschafts- und Umweltentwicklung bewusst werden (vgl. Lehrplan HLA-KG, 2011, S. 15 f.)

Der alte Lehrplan der höheren Lehranstalt für Mode verweist bei Untersuchungen von *Wachstumsprozessen* auf den Anwendungsbereich Wirtschaft und fordert im vierten Jahrgang *Anwendungsbeispiele aus Wirtschaft und Naturwissenschaft unter Einsatz moderner Technologien*. In diesem Jahrgang werden die Begriffe *Kosten- und Preistheorie*, *Zinseszins*, *Renten*, *Schuldentilgung*, *Kredite* und *Leasing* angeführt. Im fünften Jahrgang werden *Trendberechnungen in Wirtschaft* gefordert. Im untersuchten Schriftstück der höheren Lehranstalt für Mode und Bekleidungstechnik steht in der Bildungs- und Lehraufgabe *Vorgänge in Wirtschaft mit Hilfe von geeigneten Modellen beschreiben können und Einsicht in die Wichtigkeit dieser Vorgangsweise für den außermathematischen Bereich haben*. Der Lehrstoff bleibt bis auf den vierten Jahrgang weitgehend von expliziten Formulierungen frei. Diese besagte Stufe hat es aber diesbezüglich in sich, denn es gibt einen Punkt *Wirtschaftsmathematik* unter dem die Punkte *Finanzmathematik*, *Kosten- und Preistheorie* und *lineare Optimierung* angeführt sind (vgl. Lehrplan HLA-Mode, 2009, S. 16 f.).

Der alte Lehrplan höherer Lehranstalten für Tourismus beinhaltet interessante, sehr allgemein gehaltene Vorschriften, so wird in der Bildungs- und Lehraufgabe gefordert *unter Einsatz moderner Technologien praxisbezogene Beispiele und Themenstellungen aus der Wirtschaft, dem Finanzwesen und den Naturwissenschaften numerisch lösen und grafisch darstellen können*. Im vierten Jahrgang wird nach Folgen und Reihen der Begriff *Finanzmathematik* angeführt. Der Punkt *Differenzialrechnung* steht vor *Kosten- und Preistheorie*. In jedem Jahrgang werden am Ende des Abschnitts explizit *Anwendungsbeispiele und Projekte in funktionalen Zusammenhängen mit Wirtschaft und Naturwissenschaft (unter Einsatz moderner Technologien)* gefordert.

Die Lehrpläne höherer Schulen für wirtschaftliche Berufe unterscheiden sich je nach Ausrichtung. Aber alle führen in ihrer Bildungs- und Lehraufgabe nahezu dieselbe Formulierung an und zwar *mit modernen Technologien praxisbezogene Beispiele und Projekte aus dem Wirtschaftsbereich oder aus den Naturwissenschaften numerisch lösen können und mathematische Zusammenhänge grafisch visualisieren können* (vgl. Lehrplan HLW-Umwelt, 2008, S. 25 f.). Der Plan der höheren Lehranstalt für Umwelt und Wirtschaft, bis auf die Jahrgangsaufteilung identisch mit dem Lehrplan der höheren Lehranstalten für Kultur- und Kongressmanagement, listet folgende Punkte auf: II. Jahrgang: *Untersuchung von Wachstumsprozessen in Wirtschaft und Natur*; III. Jahrgang: *Zinseszins, Renten, Schuldtilgung, Kredite, Leasing, Kurse und Rentabilität, Investitionen*; IV. Jahrgang: *Trendberechnungen in Wirtschaft und Naturwissenschaft*; V. Jahrgang: *Kosten- und Preistheorie* (vgl. Lehrplan HLW-Umwelt, 2008, S. 25 f.).

Der Lehrplan der höheren Lehranstalt für Kommunikation und Mediendesign in Mathematik ist wortgleich mit dem Lehrplan der höheren Lehranstalt für Sozialmanagement, listet in einer jahrgangslosen Form, geschuldet der schulautonomen Einteilung der Mathematikjahrgangsstunden, die Begriffe *Zinseszins, Renten, Schuldtilgung, Kredite, Leasing, Kurse und Rentabilität, Investitionen, Kosten- und Preistheorie, Untersuchen von Wachstumsprozessen in Wirtschaft, sowie Trendberechnungen in Wirtschaft und Naturwissenschaften* auf (vgl. Lehrplan HLW-Sozm., 2015, S. 18 f.).

Der Lehrplan der höheren Schulen für Produktmanagement und Präsentation gleicht jenem der höheren Lehranstalten für Tourismus.

Die neuen Lehrpläne der höheren Lehranstalten für Mode, Tourismus und wirtschaftliche Berufe sind im Fach „Angewandte Mathematik“ wortgleich. Die Zitationen beziehen sich auf den Lehrplan der höheren Lehranstalt für Kunst und Gestaltung. Im fünften und sechsten sowie im achten und zehnten Semester werden unter den Punkten *Funktionale Zusammenhänge* und *Analysis* einige Begriffe formuliert. Der Lehrstoff umfasst: *Zinseszinsrechnung, Rentenrechnung, Kosten- und Preistheorie* (vgl. Lehrplan HLA-KG, 2015, S. 47 ff.).

In der Bildungs- und Lehraufgabe findet man fein formulierte Lernziele zu dem angeführten Lehrstoff.

Im fünften Semester:

- „- mit Folgen und Reihen Berechnungen in finanzmathematischen Problemstellungen durchführen;
- Zinseszinsaufgaben auf Grundlage der geometrischen Folgen modellieren;
- Zinseszinsrechnungen durchführen, Lösungswege dokumentieren und die Ergebnisse interpretieren;
- Rentenrechnungen auf Grundlage geometrischer Reihen modellieren;
- das Grundvokabular der Finanzmathematik (Kapital, Zinssatz, Zinseszins, Raten, Endwert, Barwert, ganz- und unterjährige Verzinsungsperiode, Annuität, auf- und abzinsen) anwenden.“ (Lehrplan HLA-KG, 2015, S. 50)

Im sechsten Semester:

- „- Geldflüsse bei unterschiedlichen Sparformen berechnen, beurteilen und vergleichen;
- Rückzahlungen sowie die unterschiedlichen Konditionen bei Krediten berechnen, beurteilen und vergleichen;
- einen Schuldtilgungsplan aufstellen und erklären;
- Technologie für Berechnungen in der Finanzmathematik kompetent einsetzen und die Ergebnisse interpretieren.“ (Lehrplan HLA-KG, 2015, S. 51)

Im achten Semester:

- „- das Modell der Kostentheorie erklären;
- Aufgaben in wirtschaftlichem Kontext mit Kosten-, Nachfrage-, Erlös- und Gewinnfunktionen modellieren;
- Berechnungen und grafische Darstellungen in der Kostentheorie durchführen;
- die Modelle der Preistheorie erklären;
- die Ableitungsfunktion in der Kosten- und Preistheorie anwenden, die Ergebnisse interpretieren, die Lösungswege erklären und dokumentieren;

- Aufgabenstellungen aus der Wirtschaft mit Nachfrage-, Erlös- und Gewinnfunktion modellieren;
- Berechnungen und grafische Darstellungen in der Preistheorie durchführen;...“ (Lehrplan HLA-KG, 2015, S. 52)

Im zehnten Semester:

- „- Differenzial- und Integralrechnung sowie funktionale Zusammenhänge bei wirtschaftsmathematischen Aufgabenstellungen gezielt und sicher einsetzen, in der Kosten- sowie in der Preistheorie Lösungswege und Lösungen dokumentieren, interpretieren und erklären;...“ (Lehrplan HLA-KG, 2015, S. 54)

sDP – Cluster 6

Die relevanten Auflistungen im Cluster 6 betreffen die Absätze *Funktionale Zusammenhänge: Finanzmathematik* und *Analysis: Kosten- und Preistheorie*. Ersterer führt die Begriffe *einfache Zinsen, ganzjährige Verzinsung, unterjährige Verzinsung, p. a., p. s., p. q., p. m., Verzinsungsperiode, Zeitlinie, Zeitachse, Rente, vorschüssig, nachschüssig, Barwert, Endwert, Rate, Annuität, effektiver Jahreszinssatz, Aufzinsungsfaktor, Abzinsungsfaktor, aufzinsen, abzinsen, Vollrate, Restrate, Restschuld, Bearbeitungsgebühr, Tilgungsplan* an. Zweiterer listet auf: *Preisfunktion der Nachfrage, Preis-Absatz-Funktion, Umsatz(funktion), ertragsgesetzliche Kostenfunktion, Stückkosten, Durchschnittskosten, variable Stückkosten, variable Durchschnittskosten langfristige Preisuntergrenze, kostendeckender Preis, Gewinnzone, monopolistischer Anbieter, Monopolbetrieb, Grenzfunktionen: Grenzkosten(funktion), Grenz Erlös(funktion), Grenzgewinn(funktion), Gewinn Grenzen: Nullstellen der Gewinnfunktion, untere Gewinn Grenze = Break-even-Point = Gewinnschwelle*. (vgl. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, 2014, Kompetenzkatalog – Teil B – Cluster 6)

3.2.6 Technische und (kunst)gewerbliche Schulen – HTL

Lehrplan HTL

Der Lehrplan gliedert sich hier in zwei Teile, einerseits gibt es ein allgemein gültiges Schriftstück (*Anlage 1*) und andererseits existiert je nach Ausrichtung ein ergänzender Teil des Lehrplans, der spezifische Anforderungen enthält. Zum Zeitpunkt der Untersuchungen muss noch zwischen einem älteren (1997) und einem neueren (2011) Lehrplan unterschieden werden. Ganz neue Lehrpläne (2015) waren nur für die „Höhere Lehranstalt für Art und Design, sowie für Bautechnik zur Verfügung. Die einzelnen Ausrichtungen lassen sich jeweils einem der dreien zuordnen. Schulversuche bleiben unberücksichtigt. Der ältere Lehrplan führt in der Bildungs- und Lehraufgabe *einfache Sachverhalte in Natur, Technik und Wirtschaft mit mathematischen Modellen beschreiben und analysieren sowie Modelllösungen gewinnen und interpretieren können* an. Der Lehrstoff schreibt im zweiten Jahrgang unter dem Punkt *Wirtschaftsmathematik* die Begriffe *Zinseszinsrechnung* und *lineare Optimierung* als zu behandelnde Themen vor. In der neuen Version, welche sich an Kompetenzbereichen orientiert, findet man nur im Bereich *Funktionale Zusammenhänge* zwei interessante Absätze. Einerseits schreibt die Bildungs- und Lehraufgabe vor: *Die Schülerinnen und Schüler kennen die Bildungsgesetze von arithmetischen und geometrischen Folgen und können damit einfache finanzmathematische Berechnungen durchführen* und andererseits listet der Lehrstoff im

zweiten Jahrgang die *Zinseszinsrechnung* auf. In der ganz neuen Version steht im Bereich Differentialrechnung, dass finanzmathematische Berechnungen im Bereich der Folgen und Reihen durchgeführt werden sollen.

Die Papiere der einzelnen Ausrichtungen beinhalten, bis auf eine Ausnahme, *HTL für Kunst und Design*, nicht einmal das Wort Wirtschaft. In der besagten HTL sollen die Schüler/innen *einfache Sachverhalte in Natur, Technik und Wirtschaft mit mathematischen Modellen beschreiben, analysieren, Modelllösungen gewinnen und interpretieren können* (vgl. Lehrplan HTL).

sDP – Cluster 1-5

Ein ähnliches Bild zeigt sich in den Kompetenzlisten des BIFIE. Alle sechs³ den technischen und (kunst)gewerblichen Schulen zugeordneten Cluster führen kein einziges Signalwort an. Bei der Betrachtung des Begriffekatalogs tauchen Termini der Kosten- und Preistheorie vorrangig im Bereich *Funktionale Zusammenhänge* auf. In Reihenfolge der Cluster:

1. Cluster 1a und 1b: *Erlös, Gewinn, Stückpreis*
2. Cluster 3: *Preisfunktion der Nachfrage, Umsatzfunktion, Gewinnbereich, Gewinnschwelle, Gewinngrenze, Stückkostenfunktion, Durchschnittskostenfunktion* sowie *Grenzkostenfunktion* im Bereich *Analysis*
3. Cluster 4: *Betriebsoptimum, Preisfunktion der Nachfrage, Maximalpreis, Sättigungsmenge, Gewinnfunktion, Gewinnschwelle (Break-Even-Point), Gewinngrenze, Kostenkehre*.

(vgl. BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, 2014, Kompetenzkatalog – Teil B – Cluster 1 - 5 bzw. Begriffekatalog)

3.3 Grundsatzерlass zur Wirtschafts- und Verbraucher/innenbildung BMBF, 2015

Dieser Grundsatzерlass gilt für alle Schulstufen und alle Schularten. Im engeren Sinne ergeben sich thematische Anknüpfungspunkte vor allem für die Trägerfächer Geographie und Wirtschaftskunde, Volkswirtschaftslehre und Betriebswirtschaftslehre, aber auch das Unterrichtsfach Mathematik wird im Dokument *expressis verbis* erwähnt. Der Grundsatzерlass schreibt in einer der aufgelisteten Kompetenzen explizit den Einsatz mathematischer Grundkompetenzen im Bereich des Finanzmanagements vor.

„Die Schüler/innen ... können, ausgestattet mit ausreichenden mathematischen Grundkompetenzen, das persönliche Finanzmanagement gestalten, den eigenen wirtschaftlichen Verhältnissen angepasste Entscheidungen treffen und Daseinsvorsorge betreiben; ...“ (BMBF, 2015, S. 3)

Das Angebot an Produkten im Finanzsektor ist größer als je zuvor. Erschwerend wird hinzugefügt, dass die österreichische Bevölkerung gemäß empirischer Studien Defizite in der ökonomischen Bildung aufweist. Der Erlass forciert eine schulische Auseinandersetzung

³Cluster 1 ist in 1a und 1b unterteilt.

in den einzelnen Fächern, die dazu formulierten Kompetenzen sollen die Schulabsolventen/innen aufweisen können. In der Präambel des Erlasses fordert die Unterrichtsministerin ausdrücklich wirtschaftliche Kompetenzen zur Bewältigung der Rollen als Geldanleger/innen, Kredit- oder Versicherungsnehmer/innen. Diese Kompetenzen und Forderungen lassen sich nicht immer eindeutig dem Unterrichtsfach Mathematik zuordnen, aber geben Teilen dieser Arbeit neben dem Lehrplan eine rechtliche Legitimierung (BMBF, 2015, S. 1 ff.).

3.4 Fazit

Die folgende Tabelle dient der Übersicht über die geforderten Stoffbereiche der einzelnen Schultypen der Sekundarstufe II.

AHS	HTL Cluster 1-5		HUM Cluster 6		HLFS Cluster 7		HAK Cluster 8		BAfEP - BASOP Cluster 9		
	LP	SRP	LP	SDP	LP	SDP	LP	SDP	LP	SDP	
		KK	X	BKA Teil A	X	BKA BKB Teil A	X	BKA BKB Teil A Teil B		BKA Teil A	Zinsrechnung
					X	BKB Teil B	X	BKB Teil B			Rentenrechnung
					X	BKB Teil B	X	BKB Teil B			Schuldentilgung
							X	BKB Teil B			Investitionsrechnung
		KK		BKA Teil A Teil B (1, 3, 4, 5)	X	BKA BKB Teil A Teil B	X	BKA BKB Teil A Teil B		BKA Teil A	Kosten- und Preistheorie

x ... wird im Lehrplan erwähnt

KK ... wird im Kontextkatalog erwähnt

BKA bzw. BKB ... wird im Begriffekatalog Teil A bzw. Teil B erwähnt

Teil A bzw. Teil B ... wird im Kompetenzkatalog Teil A bzw. Teil B erwähnt

Tab. 2 Übersicht über die Anforderungen

An sich bringen die Lehrpläne und Kompetenzkataloge der sRP und der sDP Folgendes mit sich. Schulen mit wirtschaftlicher bzw. kaufmännischer Ausbildung haben mehr Verordnungen zum Thema Finanzmathematik stehen als Schulen anderer Ausrichtungen. In nahezu allen Lehrplänen steht ein Satz, der besagt, dass Beispiele, Projekte bzw. Modelle aus dem Bereich des Finanzwesens bzw. der Wirtschaft im Mathematikunterricht behandelt werden sollen. Im Überblick über alle Schriftstücke kristallisieren sich drei Stoffgebiete, welche nach Lehrplan bzw. Veröffentlichungen des BIFIE der Finanzmathematik zuzuordnen sind, heraus. Es handelt sich dabei um die Zinseszinsrechnung, Rentenrechnung und die Kosten- und Preistheorie. Die ersten beiden kommen vor allem in den Lehrplänen vor, während letzteres Gebiet vor allem durch die standardisierte Reifeprüfung forciert wird.

Die alten Lehrpläne der berufsbildenden Schulen führen in einigen Fällen recht allgemeine bzw. allumfassende Begriffe zur Finanzmathematik an, wie zum Beispiel Wirtschaftsmathematik, Finanzmathematik, Aktienanalyse (vgl. Lehrplan HAK, HL für Mode und Bekleidungstechnik, HL Tourismus, HL Produktmanagement und Präsentation). Diese allumfassenden Stoffgebiete sind zu groß gefasst.

Die Wirtschaftsmathematik stellt den Überbegriff für die Finanzmathematik, der Zweig Finanzmathematik an sich ist nicht einfach zu definieren (siehe Kapitel 6.1). Unter der naiven Ansicht, „Finanzmathematik ist das, was Finanzmathematiker/innen machen“, müsste auch jede Menge stochastische Finanzmathematik unterrichtet werden. Auch der schon konkrete Punkt Aktienanalyse, der zwar nur im Erweiterungslehrstoff des alten Lehrplans der HAK vorkommt, umfasst ein riesiges Gebiet. Überspitzt lässt sich sagen, dass die Lehrperson unter den eben erwähnten Wörtern alles und nichts machen kann. Es stellt sich die Frage, wie man Finanzmathematik tatsächlich in der Schule unterrichtet. Als gute Indikatoren erweisen sich die Schulbücher, der darin beschriebene Stoff wird sicherlich am häufigsten im Unterricht umgesetzt. In den gängigsten österreichischen Schulbüchern „verkauft“ man die Zinseszins-, die Rentenrechnung und die Kosten- und Preistheorie als Finanzmathematik. Selbst bei der Behandlung aller drei Gebiete in einem Jahrgang lässt sich der Punkt Finanzmathematik nicht abdecken. In diesen Punkten bedarf es einer Konkretisierung des Lehrplans.

Das BIFIE hat im Rahmen der sRP bzw. sDP für die AHS bzw. BHS jeweils ein Schriftstück, Kontextkatalog bzw. Begriffekatalog, veröffentlicht. Bei genauerer Betrachtung fällt die unterschiedliche Intensität in der Angabe des Break-Even-Points auf, alle aufgelisteten Fachwörter können ohne detailreicher Erklärung in der Prüfungsangabe stehen. Bleiben wir vorerst bei der AHS, so steht im Kontextkatalog unter Kosten- und Preistheorie der Begriff *Break-even-Point*. Nehmen wir nun an, bei der Reifeprüfung bei einer Typ II-Aufgabe wird Folgendes gefordert: „Berechne den Break-Even-Point!“ Der Begriff wird im Kontextkatalog nicht näher spezifiziert, es findet sich eine Definition in zwei Schulbüchern. In Mathematik verstehen 8 lautet die Definition:

Die Schnittpunkte der Graphen von Kosten- und Erlösfunktion an den Gewinn-
grenzen heißen Break-even-Punkte (MALLE/WOSCHITZ/KOTH/SALZGER, 2012,
S. 69).

Im Vergleich dazu lesen wir in Mathematik 8:

Als Gewinnschwellen (BEP...Break-even-Point) bezeichnet man die Nullstellen
der Gewinnfunktion $G = E - K$; ... (GÖTZ/REICHEL, 2013, S. 230).

Die Angabe eines Punktes erfordert die Angabe zweier Koordinaten, die erste Koordinate des Punktes entspricht zwar der Stelle, die Stelle ist aber kein Punkt.

Im Begriffekatalog finden sich unterschiedliche Definitionsweisen: im Cluster 4 *Gewinnschwelle* (*Break-even-Point*), im Cluster 6, 7 und 8 *untere Gewinnngrenze=Break-even-Point=Gewinnschwelle*. im Cluster 3 werden die Begriffe *Gewinnbereich*, *Gewinnschwelle* und *Gewinnngrenze* verlangt, jedoch nicht *Break-even-Point*. Wie lautet also nun die richtige Definition?

Die Vorgaben zur Finanzmathematik der neuen Reifeprüfung im AHS- und im BHS-Bereich haben auch die Lehrpläne beeinflusst. Interessanterweise waren zuerst die Kompetenzlisten des BIFIE publiziert und erst dann wurden die Lehrpläne geändert.

Im AHS-Bereich sei erwähnt, dass durch die sRP ein Abschnitt *Finanzmathematische Grundlagen* im Kontextkatalog hinzugekommen ist. Im Lehrplan gibt es keinen eigenen Abschnitt zum Thema Finanzmathematik.

Im BHS-Bereich wurde durchaus etwas geändert. Die ausführlich formulierten Lernziele in der Bildungs- und Lehraufgabe der einzelnen Semester oder auch der eigene Bereich Wirtschafts- und Finanzmathematik in der höheren Lehranstalt für Forstwirtschaft.

Die Lehrpläne wurden nach den vorgegebenen Clustern des BIFIE vereinheitlicht. Die schriftliche Reifeprüfung hatte einen sehr großen Einfluss auf die neuen Lehrpläne, vor allem im Bereich der Finanzmathematik. Es lässt sich also ein kleiner Schritt in Richtung mehr Finanzmathematik für die Schule erkennen, dieser zielt jedoch nur auf die Zinseszinsrechnung und die Kosten- und Preistheorie ab.

4 Beschreibung der Forschungsmethode

Die vorliegende Arbeit ist eine didaktische Monographie im Fach Mathematikdidaktik. Didaktik der Mathematik ist nach GRIESEL:

„...die Wissenschaft von der Entwicklung praktikabler Kurse für das Lernen im Bereich Mathematik sowie der praktischen Durchführung und empirischen Überprüfung der Kurse einschließlich der Überlegung zur Zielsetzung der Kurse und der Stoffauswahl.“ (WITTMANN, 1974, S. 1)

In diesem Sinne formulieren wir die Forschungshypothese:

Finanzmathematische Themen eignen sich für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II.

Um die Untersuchung der zuvor genannten Hypothese sinnvoll durchzuführen, stellen wir ausgehend von der Hypothese relevante Forschungsfragen. Es bietet sich eine übliche Dreiteilung an.

- Welche finanzmathematischen Themen kommen für den Unterricht in Frage?
- Wie sehen konkrete Unterrichtsmaterialien bzw. -sequenzen aus?
- Wie nehmen die Schüler/innen dieses Thema auf?

Die zugrundeliegende zentrale Methode ist die Entwicklungsforschung nach WITTMANN (WITTMANN, 1995) bzw. PREDIGER et al. (PREDIGER et al., 2012), im englischen Sprachraum unter „Design Research“ bekannt. Ein mögliches Ergebnis des „Design Research“ im wissenschaftlichen Sinne ist die fundierte Erstellung von

„...konkreten, qualitativ hochwertigen und funktionalen Produkten für den Einsatz im Unterricht ...“ (PREDIGER et al., 2012, S. 452).

Diese Dissertation führt Entwicklungsforschung im Kleinen aus, damit sei ein partielles Durchlaufen des „Entwicklungsforschungskreislaufes“ gemeint.

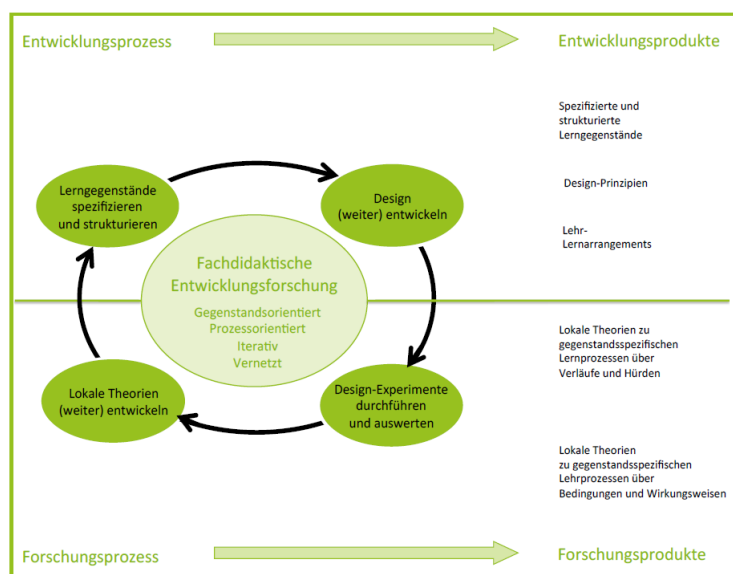


Abb. 3 Zyklus der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell entnommen aus (PREDIGER et al., 2012, S. 453)

In der ersten Forschungsfrage beleuchten wir die Stoffauswahl oder was gelernt bzw. gelehrt werden soll. Wir beginnen damit im Kreislauf bei *Lerngegenstände spezifizieren und strukturieren*. Die Operationalisierung dieser erfolgt über einen Zugang über *fundamentale Ideen*, welche im Anschluss *zentrale Ideen* genannt werden, da wir ein Teilgebiet der Mathematik betrachten und uns der Begriff *fundamentale Idee* in diesem Zusammenhang nicht passend erscheint. Das Auffinden *zentraler Ideen* der Finanzmathematik passiert in qualitativer Weise. Anhand einer Interviewreihe werden diese Ideen eruiert. Die befragten Personen sind Finanzmathematiker/innen aus unterschiedlichen Bereichen. Wir folgen einem systematischen, regelgeleiteten Auswertungsverfahren, der qualitativen Inhaltsanalyse. Die daraus gewonnenen *zentralen Ideen* der Finanzmathematik stellen den Grundstein des weiteren Vorgehens dar, aus diesen werden Themen für den Unterricht in der Sekundarstufe II abgeleitet.

Der nächste große Abschnitt dieser Arbeit widmet sich der konkreten Gestaltung von Unterrichtsmaterialien bzw. Sequenzen aus dem Themenbereich Finanzmathematik. Die Erarbeitung dieser Sequenzen orientiert sich thematisch nach den im Abschnitt II der Arbeit gewonnenen Ideen und methodisch an anerkannten Prinzipien der Lernsequenzgestaltung aus der Mathematikdidaktik. Das Verknüpfen der Sequenzen über verschiedene Schulstufen erfolgt mit Hilfe des Spiralprinzips und zeigt eine Verwendbarkeit bis in die Abschlussklasse auf. Es sei jedoch angemerkt, dass die Erstellung solcher Materialien stets ein kreativer Akt bleibt, eine reine Deduktion aus Theorien ist hier nicht möglich (vgl. PREDIGER et al., 2012, S. 454).

Die dritte Frage behandelt die konkrete empirische Erprobung der erstellten Lernsequenzen. Diese Lernsequenzen sind von ausgewählten Lehrpersonen im Unterricht gehalten und erprobt worden. Wir betreten hier nur Sphären der ersten Erprobungen, in denen es nach PREDIGER et al. darum geht, ob die Strukturierung tragfähig ist, ob die Aufgabenstellungen

von den Lernenden verstanden werden, ob die Materialien wie intendiert bearbeitet werden, ... (vgl. PREDIGER et al., 2012, S. 455). Diese unterrichtspraktischen Erfahrungen werden mit einem Drei-Perspektiven-Modell ausgewertet.

Lokale Theorien zu Lehr- und Lernprozessen lassen sich nur in rudimentären Ansätzen gewinnen. Hier würde es noch umfangreicherer Erprobungen bedürfen, die den Rahmen dieser Arbeit aber sprengen würden. Als Output dieser Arbeit lassen sich eine theoriebasierende Argumentationsbasis für finanzmathematische Inhalte im Unterricht, sowie empirisch erprobte Unterrichtsmaterialien bzw. -sequenzen nennen.

Eine ausführliche Beschreibung und Begründung des Vorgehens findet man in den einzelnen Abschnitten.

Teil II

Zentrale Ideen der Finanzmathematik – eine empirische Untersuchung

5 Zentrale Ideen – eine alte Idee

Der Begriff *zentrale Idee* ist eng verbunden mit dem der *fundamentalen Idee*. Letzterer weist mittlerweile eine lange Geschichte in der Mathematikdidaktik auf und wird immer wieder im Zusammenhang mit der Curriculum Diskussion verwendet. Wir geben im folgenden Abschnitt einen kurzen geschichtlichen Abriss über die für die Arbeit relevanten Protagonisten zum Thema *fundamentale* bzw. *zentrale Ideen*.

Grundlegende Ideen, fundamentale Ideen, universelle Ideen, zentrale Ideen, Leitideen und zentrale Aspekte, all diese Begriffe haben in der fachdidaktischen Literatur ihre feinen Eigenheiten. Der Ursprung dieser Ideen bzw. Aspekte ist jedoch derselbe. Allerdings ist es in der einschlägigen Literatur nicht klar, wo dieser anzusetzen ist. Viele sehen den Beginn *fundamentaler Ideen* in der Mathematik zur Lösung von Curriculumproblemen bei JEROME BRUNER und seinem Werk „The process of education“ (BRUNER, 1960).

VOHNS sieht den Beginn schon wesentlich früher und zwar bei FELIX KLEIN im Zusammenhang mit der berühmten „Meraner Reform“ (VOHNS, 2007). Um 1900 wurden das erste Mal im Zuge der Meraner Reform Curriculumprobleme im großen Stil diskutiert. Viele der damals angesprochenen Punkte wurden rund 60 Jahre später bei BRUNER unter dem Titel *fundamentale Ideen* angeführt. Das kann auf ähnliche Ausgangslagen bzw. Probleme der zeitlich weit auseinanderliegenden Diskurse zurückgeführt werden (VOHNS, 2007, S. 4). In Sachen mathematischer Bildung, Mathematikunterricht bzw. Schulbildung zeigte sich ein Wendepunkt am Anfang des 20. Jahrhunderts in der Geschichte. Der Unterricht unterlag zuvor einer strikten Wissenschaftsorientierung, aus der heutigen Sicht war dieser Weg am Beginn der Wissensexplosion zum Scheitern verurteilt. Immer schneller ging der Prozess und immer mehr Wissen wurde geschaffen. Es benötigte also ein Kriterium zur Auswahl des Stoffes. Dieses sollte neue Inhalte berücksichtigen und bewährte Inhalte raffen bzw. akzentuieren. Die Meraner Reform bedeutet eine Ablösung des Mathematikunterrichts als Schule des logischen Denkens. GUTZMER formuliert in diesem Zusammenhang zwei spezifische Sonderaufgaben des Mathematikunterrichts:

1. die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens
2. die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens

VOHNS nennt diese zwei Sonderaufgaben zwei grundlegende Ideen. Hervorzuheben bleibt die zweite dieser beiden spezifischen Sonderaufgaben „die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“, welche mehr oder minder das Herzstück der Meraner Reform darstellt. Hier ist speziell FELIX KLEIN zu erwähnen, der sich aktiv für eine Stärkung des funktionalen Denkens einsetzte. Als Unterrichtsprinzip schlug er ein genetisches Vorgehen vor. KLEIN forderte, dass das ganze Lehrgebäude auf bekannten Dingen langsam aufgebaut wird. Das stand

im Gegensatz zu dem bisherigen streng logischen und systematischen Vorgehen (vgl. VOHNS, 2007, S. 4 ff und WITTMANN, 1974, S. 131).

WHITEHEAD beklagt in einem seiner Werke: „The reason for this failure of the science to live up to its reputation is that its fundamental ideas are not explained to the student ...“ (WHITEHEAD, 1911 zitiert nach SCHWEIGER, 2010, S. 3). Zusätzlich sagte er in einer Ansprache, dass die Schüler vor einer Menge von Einzelheiten stehen, die keine Beziehung zu alltäglichem Denken erkennen lässt. Dieses angesprochene Problem hat auch heute noch nichts an Aktualität eingebüßt. Bei WHITEHEAD ist interessant, dass er zwischen zwei Arten von Ideen unterscheidet. Einerseits „inert ideas“, das sind theoretische Ideen, die in der Praxis nicht angewendet werden können. Andererseits nennt er Ideen, die eben in der Praxis angewendet werden können. WHITEHEAD fordert ähnlich zur Meraner Reform eine Besinnung auf grundlegende Ideen und bedient sich dabei einer Bäume-Wald-Metapher „...The problem of education is to make pupil see the wood by means of trees“ (WHITEHEAD, 1962 zitiert nach VOHNS, 2007, S. 12). WHITEHEAD meint, dass es nicht alleine auf die Auswahl der Inhalte ankommt, sondern dass auch die Inhalte nur durch eine angemessene Präsentation sichtbar werden. Der Mathematikunterricht soll nach ihm als Entdeckungslernen ablaufen, vor allem hebt er die Prozesshaftigkeit des mathematischen Wissens hervor (vgl. VOHNS, 2007 S. 9 ff.).

Die berühmte Zusammenschrift der Woods Hole Conference „The process of education“ von JEROME BRUNER benützt nun zum ersten Mal den Begriff *fundamentale Idee*. Er selbst verwendet in seinem Werk auch andere Bezeichnungen. Der zuvor erwähnte Begriff hat sich aber offensichtlich in der Literatur durchgesetzt. BRUNER stellte zu Beginn die Frage: „What shall be taught, when and how?“ (BRUNER, 1960, S. 2 f.) Auf die Frage, warum *fundamentale Ideen* so erfolgversprechend sind, sagt er: „The more fundamental or basic is the idea he has learned, almost by definition, the greater will be its breadth of applicability to new problems.“ (BRUNER, 1960, S. 18) Nach HUMENBERGER und REICHEL gibt er explizit vier Gründe an, warum das an *fundamentalen Ideen* orientierte Lehren so wichtig ist (vgl. HUMENBERGER/REICHEL, 1995, S. 2).

1. Der Lehrgegenstand wird fasslicher. „...fundamentals make a subject more comprehensible (BRUNER, 1960, S. 23).“
2. Der Mensch ist vergesslich und alles was nicht in strukturierte Muster gebracht worden ist, merkt man sich nicht. „..., is that unless detail is placed into a structured pattern, it is rapidly forgotten (BRUNER, 1960, S. 24).“
3. Der Transfereffekt wird ermöglicht. „Third an understanding of fundamental principles and ideas, as noted earlier, appears to be the main road to adequate 'transfer of training' (BRUNER, 1960, S. 25).“
4. Der Abstand zwischen fortgeschrittenem Wissen und elementarem Wissen wird geringer. Die Idee bleibt die gleiche, aber der Schwierigkeitsgrad ändert sich. Übergänge von Grundschule zur Hochschule werden dadurch erleichtert. „...one is able to narrow the gap between „advanced“ knowledge and „elementary“ knowledge (BRUNER, 1960, S. 26).“

Nach BRUNER, sollen die führenden Wissenschaftler jedes Fachgebiets diese Ideen herausarbeiten: „The decision as to what ... should be taught in arithmetic is a decision that can

best be reached with the aid of those with a high degree of vision and competence in each of these fields.“, und er fügt hinzu „To decide that the elementary ideas of algebra depend upon the fundamentals of the commutative, distributive, and associative laws, one must be a mathematician in a position to appreciate and understand the fundamentals of mathematics.“ (BRUNER, 1960, S. 19). BRUNER nennt für die Mathematik keinen Ideenkatalog und gibt nicht einmal einen Definitionsversuch. Nichtsdestotrotz ist im Mathematikunterricht die Idee der Orientierung an *fundamentalen Ideen* wichtig (vgl. HUMENBERGER/REICHEL, 1995, S. 1 f. und vgl. SCHWEIGER, 2010, S. 3 ff.). Es folgt nun die Nennung einiger für die Arbeit wichtiger Autoren. Viele dieser geben nun explizite Listen von fundamentalen Ideen an. Wir beginnen chronologisch.

WITTMANN erläutert die Ideen von BRUNER als einer der ersten in einem mathematikdidaktischen Umfeld in seinem berühmten Werk „Grundfragen des Mathematikunterrichts“. Der Autor des Werks weist darauf hin, dass die Hypothese nach BRUNER:

„...any subject can be taught effectively in some intellectually honest form to any child at any stage of development.“ (BRUNER, 1960, S. 33)

mit der Stufentheorie nach PIAGET in Einklang zu bringen ist. Genauer nimmt WITTMANN Bezug auf das von BRUNER entwickelte Spiralprinzip und auf die davon abgeleiteten Prinzipien, wie das „Prinzip des Vorwegnehmens“ und das „Prinzip der Fortsetzbarkeit“. Weiters widmet er sich bei Methoden zur Konstruktion mathematischer Lernsequenzen ausführlich der „genetischen Methode“ (vgl. WITTMANN, 1974, S. 83 ff. und S. 130 ff.). Es schließt sich ein Kreis zu den Forderungen KLEINS, der schon um die Jahrhundertwende eine Ausrichtung des Mathematikunterrichts auf grundlegende Ideen gefordert hat und das „genetische Prinzip“ als geeignete Vorgehensweise empfand.

Eine erste Liste von *fundamentalen Ideen* für ein Teilgebiet der Mathematik wurde von HEITELE im Jahr 1975 erstellt. Er war es auch, der als Erster fundamentale Fehler“, in seinen Überlegungen über *fundamentale Ideen* betrachtete (siehe in der unten angeführten Auflistung unter 3). HEITELE ist auch einer der ersten, der explizit sagt, was er unter einer *fundamentalen Idee* versteht: „by fundamental ideas I will understand those ideas which provide the individual on each level of his development with explanatory models which are as efficient as possible and which differ on the various cognitive levels, not in a structural way, but only by their linguistic form and their levels of elaboration.“ (HEITELE, 1975, S. 188) Für die Erstellung seiner Liste verwendet er vier Blickwinkel, „I have arrived at my list from four angles“ (HEITELE, 1975, S. 190), um eine fundamentale Idee auszuweisen:

- „1. in the frame of Bruner’s conception,
2. by studying the results of developmental psychology with respect to stochastic ideas,
3. by studying the multifarious failures of adults in stochastic situations,
4. by studying the history of probability.“ (HEITELE, 1975, S. 190)

Er erhält für die Stochastik zehn „fundamentale Ideen“: Norming the expression of our belief, the probability field, combining probabilities – the addition rule, combining probabilities – independence, equidistribution and symmetry, combinatorics, urn model and simulation, the idea of stochastic variable, the laws of the large numbers, the idea of sample. (vgl. HEITELE,

1975, S. 193 ff. und vgl. HUMENBERGER/REICHEL, 1995, S. 3 f.)

FISCHER nimmt ebenfalls Bezug auf die BRUNER'schen Ideen. Er erstellt einen Katalog über Ideen, Begriffe und Tatsachen zu „fundamentalen Ideen bei den reellen Funktionen“, der allgemeinbildungsrelevant ist. Die Ideen ähneln nach SCHWEIGER sehr den Kapitelüberschriften eines Lehrbuches, für die Didaktik relevant bleibt seine Idee des „Exaktifizierens“ (vgl. SCHWEIGER, 2010, S. 8).

SCHREIBER gehört mit Sicherheit zu den wichtigsten Akteuren im Bereich *fundamentale Ideen* und Fachdidaktik. Er bezieht sich nicht nur auf BRUNER, sondern auch auf WHITEHEAD. Mit dem Begriff *fundamentale Ideen* ist er ganz und gar unzufrieden, da das Wort „fundamental“ für ihn unpassend ist. „Fundamental“ im Sinne von grundlegend bezieht sich weder auf Grundlagen in der Mathematik, noch auf frühe Phasen im Sinne der PIAGET'schen kognitiven Entwicklung, aus diesem Grund präferiert er den Begriff „universelle Ideen“. SCHREIBER gibt Anforderungen an eine didaktisch ausgerichtete Untersuchung „universeller Ideen“:

- „1. Das Konzept des universellen Schemas (der universellen Idee) ist zu präzisieren. Wünschenswert wäre dabei eine Art Kriterium der Universalität.
2. Ein Katalog geeigneter Ideen ist aufzustellen und auf seine internen und externen Beziehungen hin zu studieren.
3. Die Rolle muß geklärt werden, die universelle Ideen beim Aufbau eines adäquaten Bildes von der Mathematik spielen können ...
4. Der Einsatz universeller Ideen im Unterricht ist zu untersuchen, sowie damit verbunden die Frage zu beantworten, durch welche Stoffe bestimmte Ideen am geeignetsten repräsentiert werden.
5. Die Repräsentation und Kombination universeller Ideen in bestimmten Teilgebieten führt auf (gebietsspezifische) zentrale Ideen, die für möglichst viele Bereiche der Mathematik herauszuarbeiten und zu analysieren sind.“ (SCHREIBER, 1979 zitiert nach SCHWEIGER, 2010, S. 9 f.)

Für diese Arbeit ist der Begriff *zentrale Idee* wichtig, SCHREIBER unterscheidet also zwischen universellen und zentralen Ideen. Erstere betreffen die gesamte Mathematik und letztere einzelne Teilgebiete. Diese Bezeichnung wird in Anlehnung an ihn übernommen⁴. Er nennt einen Ideenkatalog für die Mathematik, selbst für ihn ist dieser von provisorischer und unvollständiger Natur:

1. Algorithmus
2. Exhaustion
3. Invarianz
4. Optimalität
5. Funktion

⁴Die Begründung dafür findet man in Kapitel 7 auf Seite 64.

6. Charakterisierung (vgl. SCHREIBER, 1979, S. 167 zitiert nach HUMENBERGER/REICHEL, 1995, S. 5)

SCHREIBER unterteilt seine Ideen weiters noch in Leitideen und Verfahren, wobei er letztere noch einmal in „Findungsverfahren“ und in „Begriffsbildungsverfahren“ unterteilt (vgl. HUMENBERGER/REICHEL, 1995, S. 4 f und SCHWEIGER, 2010, S. 9 ff.).

TIETZE, KILKA und WOLPERS formulieren ihre eigenen Gedanken zum Curriculumproblem, die sie in ihrem dreibändigen Werk „Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II“ niederschreiben. Die drei oben genannten zählen durch ihre eigenen Sichtweisen zu wichtigen Vertretern des Prinzips der *fundamentalen Ideen* in der Mathematikdidaktik. Die Autoren beschreiben in ihrem Buch Verfahren zur Gewinnung *fundamentaler Ideen*. Sie gehen von konkreten Inhalten aus und zeigen Beziehungsnetze auf. TIETZE erwähnt in einer Vorarbeit zu dem oben genannten Werk, dass „das Herausarbeiten fundamentaler Ideen als eine didaktische Antwort auf das Problem der Stoffhülle und Stoffisolation“ (TIETZE, 1979, zitiert nach SCHWEIGER, 2010, S. 16) gesehen werden kann. Allerdings wird etwas später im Werk darauf hingewiesen: „Die Auseinandersetzung mit fundamentalen Ideen ist kontrovers.“ (TIETZE/KLIKA/WOLPERS, 1982, S. 41) Diese Aussage ist darauf zurückzuführen, dass der Begriff *fundamentale Idee* schon etwas Vages ist, hinzu kommen die unterschiedliche Auffassung von Mathematik und unterschiedlichen pädagogischen Positionen. Das Bewusstsein über die Probleme beim Aufstellen eines Katalogs *fundamentaler Ideen*, z.B. wie weit abstrahiert werden soll, weist auf eine umfangreiche und tiefgehende Auseinandersetzung mit dem Thema hin. Das Ergebnis führt in einem Extremfall zu einem Katalog mit wenigen, grundlegenden Ideen, die zwar einprägsam, aber eben sehr abstrakt sind und im anderen Extremfall hat man sehr viele Ideen, diese sind dann nicht mehr einprägsam und auch nicht mehr so fundamental. Die oben genannten Autoren meinen, dass ersterer wenig für die Schule geeignet ist, da der Abstraktionsgrad so hoch ist, zweiten bewerten sie für den Mathematikunterricht besser. Die drei Didaktiker geben zu bedenken, dass es nicht reicht nur Fachmathematiker in die Curriculumsdiskussion einzubinden, sondern es bedarf auch der Zusammenarbeit mit Lehrpersonen und Entwicklungspsychologen (vgl. TIETZE/KLIKA/WOLPERS, 1982, S. 41). Wir nehmen später nochmals darauf Bezug. Deren resultierende Katalog an *fundamentalen Ideen* erstreckt sich über drei verschiedene Arten von Ideen:

1. *Leitideen*: sind mathematische Begriffe und Sätze, die in einer Theorie eine zentrale Bedeutung haben. Sie beziehen sich in erster Linie auf den theoretischen Aspekt der Mathematik.
2. *bereichsspezifische Strategien*: sind zentrale Strategien des Problemlösens, insbesondere des Beweisens, des Auffindens von Zusammenhängen und der Begriffsbildung in einem Teilgebiet. Sie zeichnet die Anwendbarkeit auf viele unterschiedliche Probleme innerhalb eines Gebiets aus.
3. *zentrale Mathematisierungsmuster*: sind mathematische Ideen (Begriffe, Sätze, Theorien, Kalküle), die als Erklärungsmodell dienen können oder ein begriffliches Raster für die mathematische Erfassung außermathematischer Situationen abgeben.

Eine *fundamentale Idee* kann durchaus mehrere Aspekte abdecken. Sie gewinnen ihre Ideen über die Ausgangsfrage: „Welche Begriffe, Sätze oder Ideen sind für den Bereich wichtig, zentral und charakteristisch?“ und sehen Mathematik als Produkt und als Prozess. In diesem

oben erwähnten dreibändigen Werk gewinnen TIETZE, KILKA und WOLPERS einen engmaschigen Katalog an fundamentalen Ideen für die Bereiche: Analysis, analytische Geometrie und lineare Algebra und Stochastik (vgl. SCHWEIGER, 2010, S. 17 und HUMENBERGER/-REICHEL, 1995, S. 7).

In Anbetracht der Ergebnisse der Interviewreihe in dieser Arbeit führen wir diese Leitideen, bereichsspezifische Ideen und Mathematisierungsmuster für den letztgenannten Bereich (Stochastik) genauer aus. Wir beginnen mit der Aufzählung der Leitideen: Ereignisalgebra, das Wahrscheinlichkeitsmaß, der Wahrscheinlichkeitsraum, die Kombinatorik, Zufallsvariablen und ihre Verteilungen, Grenzwertsätze, Schätzen und Testen.

Bereichsspezifische Ideen müssen in der Stochastik unter einem anderen Licht betrachtet werden als beispielsweise solche Ideen in der Analysis. Sie liefern hier keinen Nutzen für die Entwicklung der Mathematik, sondern dienen zur Modellierung stochastischer Situationen. Im Folgenden werden vier für diese Arbeit relevante Ideen genauer ausgeführt.

- Visualisierungen
Diese haben nicht nur einen beschreibenden Charakter, sondern lassen auch Folgerungen zu. Die Autoren TIETZE, WOLPERS und KLIKA denken hier an das Baumdiagramm, das Einheitsquadrat in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die verschiedenen Darstellungen für einen Überblick in der beschreibenden Statistik dürften klar sein.
- Messen (Schätzen) von Wahrscheinlichkeiten
Das Messen bzw. Schätzen von Wahrscheinlichkeiten ist der zentrale Punkt in der Stochastik. Relative Häufigkeiten liefern die Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten, die Grundlage dafür liegt im Gesetz der großen Zahlen.
- Approximationen
Jegliche Aussagen haben einen Modellcharakter, das bedeutet alle Ergebnisse sind Näherungen. Ein „absolut richtig“ gibt hier nicht. Man spricht von „brauchbaren“ Modellen, die eben „brauchbare“ Beschreibungen, Analysen und Prognosen ermöglichen.
- Simulationen
Wenn theoretische Überlegungen zu komplex sind, stellen Simulationen einen gangbaren Weg dar, trotzdem einen Einblick in die Dynamik des probabilistischen Prozesses zu gewinnen. „Zu komplex“ gilt bei wissenschaftlichen Analysen sowie bei schulischen Experimenten. In der Schule liefern sie Erfahrungen mit dem Zufall.

Des Weiteren liest man noch von den Ideen Symmetrieüberlegungen, Verknüpfungen und Schätzen, Testen.

Mit Mathematisierungsmuster meint man mathematische Konzepte, die man zur Erklärung außermathematischer Situationen verwendet. Nach TIETZE, WOLPERS und KLIKA sind das in der Stochastik die Verteilungen. Diese treten zu Tage als graphische und halbgraphische Muster und Verteilungen (vgl. TIETZE/KLIKA/WOLPERS, 2002, S. 91 ff.).

SCHWEIGER zeigt eine interessante Zugangsweise zu *fundamentalen Ideen* auf. Er erstellt als einer der ersten einen Katalog mit fünf Kriterien, die eine *fundamentale Idee* erfüllen muss. Dieses Vorgehen ist für diese Arbeit insofern von Bedeutung, da ein solches, wenn auch nicht genau dieses, verwendet wird. Die Definition einer *fundamentalen Idee* lautet

nach ihm folgendermaßen: „Damit meine ich ein Bündel von Handlungen, Strategien oder Techniken, sei es durch lose Analogien oder durch Transfer verbunden,

1. die in der historischen Entwicklung der Mathematik aufzeigbar sind,
2. die tragfähig erscheinen, curriculare Entwürfe vertikal zu gliedern,
3. die als Ideen zur Frage, was ist Mathematik überhaupt, zum Sprechen über Mathematik, geeignet erscheinen,
4. die den mathematischen Unterricht beweglicher und zugleich durchsichtiger machen könnten.
5. Weiters erscheint mir eine Verankerung in Sprache und Denken des Alltags, gewissermaßen ein korrespondierender, denkerisch sprachlicher oder handlungsmäßiger Archetyp notwendig zu sein.“ (SCHWEIGER, 1982, zitiert nach HUMENBERGER/REICHEL, 1995, S. 7 f.).

Er nennt in seinem Katalog folgende *fundamentalen Ideen*: Linearisierung, Bifurkation, Kraft des Formalen, diesen erweitert er 1983 um die Begriffe: Erweiterndes Umdefinieren und Dualität.

SCHUPP schreibt im Jahr 1984 einen Aufsatz mit dem Titel „Optimieren als Leitlinie im Mathematikunterricht“. In diesem sieht er Optimieren als *fundamentale Idee* an, da sie die drei wesentlichsten Kriterien einer *fundamentalen Idee* erfüllt: aufzeigbar in der historischen Entwicklung, gibt Aufschluss über deren Wesen und ist auch außerhalb der Mathematik auffindbar (vgl. SCHWEIGER, 2010, S. 13 und vgl. HUMENBERGER/REICHEL, 1995, S. 8).

BENDER und SCHREIBER nennen in ihrem Katalog an *fundamentalen Ideen* keine neuen, im Wesentlichen stammen sie aus früheren Werken. In ihrem Werk formulieren sie ihre Auffassung der Begriffe „universelle Idee“ und *zentrale Idee*. Erstere ist von vorwissenschaftlicher, aber nicht unwissenschaftlicher Natur. Man darf diese Art von Ideen nicht als Fundament für die Mathematik ansehen, deswegen benennen die beiden Autoren diese Ideen nicht mit *fundamentalen Ideen*, sondern sie stiften Ordnung in der internen Struktur des Faches und seinen Beziehungen zur Umwelt. Sie verstehen darunter allgemeine Schemata, die den Prozess der Mathematik ins Rollen bringen oder weiterführen. „Zentrale Ideen“ sind Repräsentationen oder Kombinationen universeller Ideen, sie weisen aber darauf hin, dass die Entstehung genau umgekehrt ist. Der Lernende erreicht die universellen Ideen über zentrale Ideen aus den jeweiligen Teildisziplinen.

ANDREAS SCHWILL benützt im Prinzip den gleichen Ansatz wie SCHWEIGER. SCHWILL kommt eigentlich aus dem Bereich der Informatik, er hat aber in seinem Aufsatz „Fundamentale Ideen der Informatik“ recht allgemein, also nicht spezifisch zur Informatik, „fundamentale Ideen“ beschrieben und verweist auch explizit auf Arbeiten aus der Mathematikdidaktik. „Eine **fundamentale Idee** (bzgl. einer Wissenschaft) ist ein Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema, das

1. in verschiedenen Gebieten des Bereichs vielfältig anwendbar und erkennbar ist (**Horizontalkriterium**),
2. auf jedem intellektuellen Niveau aufgezeigt und vermittelt werden kann (**Vertikalkriterium**),

3. in der historischen Entwicklung (der Wissenschaft) deutlich wahrnehmbar ist und längerfristig relevant bleibt (**Zeitkriterium**),
4. einen Bezug zu Sprache und Denken des Alltags und der Lebenswelt besitzt (**Sinnkriterium**).“ (SCHWILL, 1993, S. 23)

SCHWILL begründet seine Auswahl der Kriterien ausführlich. Die ersten beiden Kriterien werden direkt auf BRUNER zurückgeführt, welcher ja selbst keine explizite Definition einer *fundamentalen Idee* gibt, sondern im besten Fall nur Hinweise. Diese im Werk spärlich verteilten Artefakte sammelt SCHWILL. *Fundamentale Ideen* besitzen nach BRUNER eine umfassende Anwendbarkeit in vielen Bereichen, ordnen und integrieren viele Phänomene. Das ist das *Horizontalkriterium*. Die berühmte Hypothese von BRUNER: „We begin with the hypothesis that any subject can be thought effectively in some intellectually honest form to any child at any stage of development“ (vgl. BRUNER, 1960, S. 33). Also kann eine solche Idee, jedem Menschen auf nahezu jeder beliebigen geistigen Entwicklungsstufe nähergebracht werden. Hier handelt es sich um das *Vertikalkriterium*. Nun beginnt die Orientierung an Autoren aus Mathematikdidaktik, von SCHREIBER übernimmt er die Verbindung zum Alltag, also die Verankerung im Alltagsdenken und die lebensweltliche Bedeutung, das *Sinnkriterium*. SCHREIBER geht in diesem Punkt eindeutig über die BRUNER’SCHEN Ideen hinaus. Von SCHWEIGER übernimmt SCHWILL den Bezug zur historischen Entwicklung, der diesen neu anführt. Das *Zeitkriterium* ist für ihn in zweifacher Hinsicht bedeutsam, einerseits wird damit die längerfristige Gültigkeit einer *fundamentalen Idee* in einer Wissenschaft aufgezeigt und andererseits liefert dieses Kriterium eine Hilfestellung solche Ideen zu finden: durch historische Beobachtung fachwissenschaftlicher Begriffe (vgl. SCHWILL, 1993, S. 2 ff.).

HUMENBERGER und REICHEL behandeln eine Teildisziplin der Mathematik, die angewandte Mathematik und benennen ihre Ideen mit *fundamentalen Ideen*. In diesem Zusammenhang muss man aber auch darauf hinweisen, wie sie die „angewandte Mathematik“ verstehen. Für sie ist es eine eigene Art Mathematik zu betreiben: „Die angewandte Mathematik stellt für uns eine 'Art' dar, an Probleme heranzugehen, ...“ (HUMENBERGER/REICHEL, 1995, S. 16). In „Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht“ wird ein engmaschiger Ideenkatalog präsentiert:

1. Modelle, Sprache und Übersetzungsvorgänge
2. Näherungsverfahren, Näherungswerte und Fehlerkontrolle
3. Stochastik
4. Optimieren
5. Algorithmen
6. Darstellen unter „mathematischer Brille“ – Heuristik
7. Vernetzen mathematischer Sichtweisen

Die Autoren erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit, Endgültigkeit und Eindeutigkeit. SCHUBERT und SCHWILL setzten im Jahr 2004 bei der Definition einer *fundamentalen Idee* bei der Arbeit 1993 von SCHWILL fort. Sie fügten ein Kriterium hinzu, das „Zielkriterium“,

ausformuliert: „... [das] zur Annäherung an eine gewisse idealisierte Zielvorstellung dient, die jedoch faktisch möglicherweise unerreichbar ist“ (SCHUBERT/SCHWILL, 2011, S. 41). Diese Bedingung wirkt auf den ersten Blick etwas seltsam. Mit dem Wissen, dass beide aus der Informatikdidaktik kommen, kann man das Hinzufügen des fünften Kriteriums besser verstehen. Ein Ziel der Informatik ist es alle Probleme durch maschinell nachvollziehbare Verfahren effizient lösen zu lassen. SCHWEIGER gibt in „Fundamentale Ideen“ weitere Beispiele auch für die Mathematik, z.B. hat die Axiomatisierung in der Wahrscheinlichkeitstheorie das Ziel den Zufall in den Griff zu bekommen. Nach SCHUBERT und SCHWILL sind *Zielkriterium*, *Zeitkriterium* und *Sinnkriterium* Bedingungen, um überhaupt von einer Idee sprechen zu können und *Horizontalkriterium* und *Vertikalkriterium* sind für die Fundamentalität einer Idee notwendig (vgl. SCHWEIGER, 2010, S. 14).

In neuer Zeit müssen vor allem die Beiträge von VOHNS erwähnt werden. Im Jahr 2005 publiziert er im „Journal für Mathematikdidaktik“ über eine konstruktive Zusammenführung *fundamentaler Ideen* und *Grundvorstellungen*, welche er am Beispiel der Addition von Brüchen explizit ausführt. Bei dem Begriff der *fundamentalen Idee* streicht er das Sinnkriterium heraus, welches in Form der Beziehung zwischen alltäglichem und mathematischem Denken ein Kernpunkt in der Diskussion *fundamentaler Ideen* ist. Auch die Beziehung zwischen Produkt und Prozess erwähnt der Autor. Hierbei geht VOHNS vor allem auf SCHWEIGER ein, der darunter ein „Bündel von Handlungen, Strategien oder Techniken versteht“. VOHNS hebt auch die Unterscheidung nach SCHREIBER von *universellen* und *zentralen Ideen* hervor. VOHNS verbindet das Konzept der *Kernideen* nach GALLIN und RUF mit dem der *fundamentalen Idee*. In diesem Fall steht die Vorschau-Rückschau-Perspektive im Fokus, also „Perspektive des Lernenden“ und „Perspektive des Lehrenden“. Das Zusammenspiel von *zentralen Ideen* und *fundamentalen Ideen* verwendet er als orientierenden Analyserahmen, um zwei Unterrichtseinstiege zum Thema „Addition von Brüchen“ zu untersuchen (vgl. VOHNS, 2005).

Im Jahr 2007 hat VOHNS in seiner Dissertation das Konzept „Orientierung an grundlegenden Ideen“ auf Spannungsfelder hin analysiert und weiterentwickelt. Das exemplarische Aufzeigen des Potentials „grundlegender Ideen“ für konkrete Lehr- und Lernprozesse wird zum Abschluss bestimmt (vgl. VOHNS, 2007).

Im Jahr 2010 veröffentlichte Schweiger einen Katalog *fundamentaler Ideen* zur Mathematik, darunter finden sich die Ideen: „Sprache und Muster“, „Testen und bestätigen“, „erweiterndes Umdefinieren“, „Ordnen“, „Reparieren“, „Iteration und Rekursion“, „Funktionen“, „Abbildungen“, „Modelle“ und „Optimieren“. Er schließt seine Publikation mit *fundamentalen Fehlern* ab (vgl. SCHWEIGER, 2010).

Den bislang letzten relevanten Artikel verfasste ebenfalls VOHNS, dieser erschien im Jahr 2016 im „Journal für Mathematikdidaktik“. In diesem erläutert er das Problem, ob Lernende durch den Mathematikunterricht „ein Bild vom Ganzen“ bekommen. *Fundamentale Ideen* eignen sich seiner Meinung nach sowohl für die Lehrenden als auch für die Lernenden, sie werden mit „roten Fäden“ versorgt. Diese Ideen dienen der Auswahl, der Präsentation (Akzentuierung) und der Organisation für den Mathematikunterricht (vgl. VOHNS, 2016).

6 Operationalisierung der Begriffe

6.1 Finanzmathematik

In dieser Arbeit spielt der Begriff Finanzmathematik eine wichtige Rolle. Aus diesem Grund sollten wir auch sagen, was wir darunter verstehen. Die Leser/innen würden nun eine formale Definition erwarten, dem müssen wir entgegenen, dass wir im Laufe dieser Arbeit in einige Finanzmathematiklehrbücher hineingeschaut, aber vergebens nach einer Definition gesucht haben. Die Autoren geben nie an, was sie unter Finanzmathematik verstehen. Daraus könnte man folgern, dass jede/r, der/die so ein Buch liest, schon weiß, was Finanzmathematik ist. Nun ja, es lässt sich nicht abstreiten, dass wir alle irgendeine Vorstellung von Finanzmathematik haben. Diese divergiert aber sehr. Man bedenke an dieser Stelle den entsprechenden Abschnitt im Kontextkatalog des BIFIE für die zentrale Reifeprüfung, dessen Überschrift „Finanzmathematische Grundlagen“ heißt (vgl. BIFIE, 2013, S. 21). Dabei würden viele die darunter stehende Kosten- und Preistheorie nicht der Finanzmathematik zuordnen, sondern allgemeiner dem Überbegriff der Wirtschaftsmathematik. In dieser Arbeit wird die Finanzmathematik als Teilmenge der Wirtschaftsmathematik betrachtet, siehe unten. Es drängt sich die Frage auf, was verstehen wir unter Wirtschaftsmathematik. Im Internet finden wir recht schnell einige Definitionen von Finanzmathematik, wie z.B. Teilgebiet der angewandten Mathematik, das auf den mathematischen Grundlagen von Folgen und Reihen basiert. Sie wird genutzt zu Berechnungen in der Zinsrechnung, Rentenrechnung, Tilgungsrechnung und Investitionsrechnung (siehe <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/finanzmathematik.html#definition>). Unseres Erachtens fehlt hier ein wesentlicher Teil der Finanzmathematik, die stochastische Finanzmathematik.

Wir wollen die beiden oben genannten Begriffe definieren. Unter Wirtschaftsmathematik verstehen wir ein Teilgebiet der angewandten Mathematik, welches Mathematik auf wirtschaftliche Fragestellungen anwendet. Nahezu analog Finanzmathematik: Finanzmathematik ist ein Teilgebiet der Wirtschaftsmathematik, welches Mathematik auf Fragestellungen des Finanzmarkts anwendet. Der Finanzmarkt ist jener fiktive Ort, an dem ein Handel mit Kapital stattfindet. (vgl. FISCHER/LOMBINO, 2010, S. 89)

6.2 Zentrale Idee

Die Geschichte der fundamentalen Ideen liefert keine eindeutige Antwort, was denn eine fundamentale Idee sei bzw. wie denn eine fundamentale Idee zu definieren sei. Gleiches gilt für den Begriff der *zentralen Idee*. Es bedarf für das weitere Vorgehen eines Festmachens, wie wir den Begriff verstehen. Dabei bedienen wir uns ein wenig an der historischen Genese. Wir verwenden die frühe Definition von SCHWILL und benennen diese mit dem Ausdruck *zentrale Idee*, welcher von SCHREIBER stammt. Im Folgenden wollen wir unter einer *zentralen Idee* das unten Angeführte verstehen.

„Eine zentrale Idee ist ein Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema, das

1. in verschiedenen Gebieten des Bereichs vielfältig anwendbar und erkennbar ist (Horizontalkriterium),

2. auf jedem intellektuellen Niveau aufgezeigt und vermittelt werden kann (Vertikalkriterium),
3. in der historischen Entwicklung (der Wissenschaft) deutlich wahrnehmbar ist und längerfristig relevant bleibt (Zeitkriterium),
4. einen Bezug zu Sprache und Denken des Alltags und der Lebenswelt besitzt (Sinnkriterium).“ (SCHWILL, 1993, S. 23, verändert)

7 Begründung der Methode zur Beantwortung der ersten Forschungsfrage

Die beiden oben angeführten **Definitionen** wurden bewusst so gewählt. Es war uns wichtig, dass der Begriff eben die „klassische“, also auch die „moderne“ Finanzmathematik umfasst. Viele Personen denken bei Finanzmathematik nur an die Zinsrechnung und Tilgungspläne. Weiters konnte in einigen Gesprächen mit Studenten/innen mit Schwerpunkt Finanzmathematik und Professoren der Mathematik in Erfahrung gebracht werden, dass diese nur die „stochastische Finanzmathematik“ als die Finanzmathematik sehen. Dabei versteht man die Verwendung von Methoden aus der Wahrscheinlichkeitstheorie angewendet auf Fragen des Finanzmarkts. Hier werden Gebiete der beschreibenden Statistik und die Anwendung von Folgen und Reihen ausgeblendet. Um diese Trennung zu vermeiden, verwenden wir die oben genannte Definition, siehe Kapitel 6.1. Also ein Festmachen des Begriffs, so breit wie möglich aber mit der klaren Anwendung auf den Finanzmarkt, welcher sich vom Gütermarkt dadurch unterscheidet, dass vor allem Rechtsansprüche für die Zukunft erworben werden (vgl. FISCHER/LOMBINO, 2010, S. 89). Die Kosten- und Preistheorie ist also der Wirtschaftsmathematik unterzuordnen, aber sie ist nicht als Teil der Finanzmathematik zu sehen.

Bei Fragen der Probanden, was denn unter Finanzmathematik zu verstehen sei, wurde stets die obige Erklärung gegeben und gesagt, dass der Begriff so breit wie für sie möglich gefasst werden darf. Die Interviewteilnehmer/innen sollten in ihren Gedanken nicht eingeschränkt werden. Außerdem hätte es passieren können, dass ein wichtiger Aspekt nicht bedacht wurde, der dann von dem Probanden nicht erwähnt worden wäre.

Bei der Namenswahl *zentrale Idee* richten wir uns, wie schon erwähnt, nach SCHREIBER. Er kann dem Begriff *fundamentale Idee* nichts abgewinnen, da sich der Begriff weder im Sinne PIAGETS auf die psychogenetische Frühe, noch auf Grundlagen der Mathematik bezieht (vgl. SCHREIBER, 1979, S. 4). Er kreierte den Begriff der *zentralen Idee*, diesen formuliert er für Ideen aus den einzelnen Teilgebieten der Mathematik. In diesem Fall sollen solche Ideen eben für die Finanzmathematik identifiziert werden. Nach SCHREIBER wird in dieser Arbeit der Begriff *zentrale Ideen* verwendet.

Bei der Definition erscheint vor allem jene von SCHWILL am besten für die Untersuchung geeignet. Diese listet vier normative Kriterien auf, die sich für Interviews am besten eignen. Die Abstammung aus der Informatik wird als kein großes Problem gesehen. Einerseits beschreibt SCHWILL sehr allgemein, nicht informatikspezifisch, wie er zu diesen Kriterien kommt (vgl. SCHWILL, 1993, S. 20 ff.). Andererseits zitieren viele Mathematikdidaktiker dieses Werk (vgl. HUMENBERGER/REICHEL, 1995, S. 11, SCHWEIGER, 2010, S. 14

und VOHNS, 2007, S. 34). Vor allem die Kriterien *Vertikalkriterium* und *Sinnkriterium* haben für die spätere Ausrichtung auf die Schule ihre Wichtigkeit. Immerhin sollen diese Ideen für Schüler/innen auf einem gewissen Niveau begreifbar sein, aber eben auch in der Wissenschaft ihre Wichtigkeit besitzen. Die Möglichkeit der didaktischen Reduktion soll gegeben sein. Des Weiteren ist auf eine Anwendbarkeit im Alltag, sei es privater oder beruflicher Natur, zu achten. Die beiden anderen Kriterien sorgen dafür, dass eine zentrale Idee einerseits auch in der Wissenschaft von Bedeutung ist, *Horizontalkriterium*. Das *Zeitkriterium* trägt andererseits dazu bei, dass diese Ideen nicht nur für die Gegenwart gelten, sondern mit einiger Voraussicht auch in Zukunft ihre Wichtigkeit beibehalten. Es bleibt zu erwähnen, dass wir nicht die Definition aus dem Jahr 2004 gewählt haben, diese enthält ein Kriterium mehr, das *Zielkriterium*. SCHWILL beschreibt in seinem Werk *Didaktik der Informatik* nicht, wie er zu diesem kommt. Unseres Erachtens ist es für diese Arbeit nicht von Bedeutung.

Warum wurde bei dieser Arbeit ein Zugang über *zentrale Ideen* gewählt? Der Ursprung entstammt den *fundamentalen Ideen*, die ja zur Lösung des Curriculumproblems entwickelt bzw. erfunden wurden. Bevor wir mit der Argumentation beginnen, betrachten wir zunächst die Ausgangslage, siehe Kapitel 2.1. Es gibt bereits eine Fülle an Veröffentlichungen in diversen Journalen, zwei Dissertationen und das aus einer Dissertation entstandene Buch *Finanzmathematik im Unterricht* von DAUME. Nahezu alle Autoren stürzen sich auf Gebiete der stochastischen Finanzmathematik mit Betonung des Binomialmodells bis hin zum Black-Scholes-Modell. Meistens wird die Bepreisung von Optionen im Binomialmodell behandelt. Wir sind der Meinung, Finanzmathematik bietet mehr bzw. anderes für die Schule.

Dass Finanzmathematik bzw. Finanzbildung ein Teil der Allgemeinbildung ist und mittlerweile jede/r Schulabsolvent/in grundlegende Zusammenhänge in diesem Bereich kennen sollten, ist nicht mehr abzustreiten. Das zeigt sich an der *Financial Literacy*-Überprüfung der OECD im Rahmen der PISA-Studie (vgl. OECD, 2013, S. 1 ff.) und an der neuen standardisierten Reifeprüfung in Österreich, welche unter dem Punkt *finanzmathematische Grundlagen* wirtschaftliche (sic!) Belange fordert (vgl. BIFIE, 2013, S. 21).

Das Interesse der Öffentlichkeit gegenüber diesem Thema besteht. Autoren/innen geben verschiedene Aspekte der Finanzmathematik vor. Wir stehen also vor einer Stofffülle an finanzmathematischen Themen, die völlig isoliert und unzusammenhängend sind. Ausgenommen davon ist DAUME, die für ihre ausgewählten Themen ein Spiralprinzip entwirft. Das Problem besteht u.E. darin, dass sie und andere Autoren die Themen aus der Finanzmathematik in einer gewissen Weise beliebig wählen. Eine Begründung der Auswahl führen die Autoren aus der Mathematikdidaktik kaum an.

Was soll nun aus der Finanzmathematik vermittelt werden? Der Zugang über *zentrale Ideen* respektive *fundamentale Ideen* der Finanzmathematik begründet die ausgewählten Stoffgebiete. Die Geschichte (siehe Kapitel 5) zeigt, dass dieser Ansatz immer wieder zur Lösung eines Curriculumproblems herangezogen wurde. Wir stehen auch hier vor einer immensen Stofffülle an finanzmathematischen Themen. Der Platz im Curriculum und die Unterrichtszeit sind begrenzt. Welche Themen haben nun eine Berechtigung auf eine Behandlung im Unterricht, alle, wenige oder gar keine? Man braucht Kriterien. Die Mathematikdidaktik liefert mit dem Begriff *fundamentale Ideen*, hier *zentrale Ideen*, einen gangbaren Weg, um dieses Problem der Stoffauswahl aus dem Fach heraus, der Finanzmathematik, in den Griff zu bekommen.

Des Weiteren eignen sich *fundamentale Ideen*, respektive *zentrale Ideen* auch für den Unterricht bzw. die Unterrichtsplanung. Sie bilden eine Art Leitkategorie, eine geeignete Akzentuierung im Unterricht ermöglicht eine Vermittlung „vom Ganzen“ bzw. „roten Fäden“ (vgl. VOHNS, 2005 und VOHNS, 2016).

Die Gründe für einen **qualitativen Zugang** sind vielfältigster Art. Es gibt unseres Wissens keine Werke, die *zentrale Ideen* der Finanzmathematik behandeln. Das Stützen auf andere Werke ist also nicht möglich. Das erfordert ein exploratives Vorgehen. Dazu eignet sich ein qualitatives Vorgehen gut (vgl. SCHECKER, 2014, S. 11). Wir sind uns hier natürlich im Klaren, dass die Vorteile und Nachteile eines qualitativen Zugangs auch hier sichtbar werden. Im Rahmen der Dissertation befragen wir sechs Finanzmathematiker/innen. Die aus diesen Interviews kreierten *zentralen Ideen* hängen stark von der Auswahl der Befragten ab. Es kommt erschwerend hinzu, dass die individuellen Antworten der Interviewpartner/innen stark von ihrer momentanen Forschungsarbeit abhängen. Wir verlangten eine mehrjährige Forschungstätigkeit im Bereich der Finanzmathematik. Dabei wurden einerseits Wissenschaftler/innen und andererseits Leute, die in der Finanzbranche arbeiten und früher wissenschaftlich tätig waren, befragt. Das sind unseres Erachtens Menschen, die einen großen Überblick über das Gebiet Finanzmathematik haben.

Das Setting der Interviewreihe, Experteninterview, wirft aber gleich die nächste Frage auf. Wieso befragten wir in diesem Zusammenhang Experten? Wir halten uns hier an BRUNER: „The decision as to what should be taught ... in arithmetic is a decision that can best be reached with the aid of those with a high degree of vision and competence in each of these fields. To decide that the elementary ideas of algebra depend upon the fundamentals of the commutative, distributive, and associative laws, one must be a mathematician in a position to appreciate and understand the fundamentals of mathematics.“ bzw. „Only by the use of our best minds in devising curricula will we bring the fruits of scholarship and wisdom to the student just beginning his studies“ (BRUNER, 1960, S. 19) oder „It (= designing curricula) is a task that cannot be carried out without the active participation of the ablest scholars and scientists“ (BRUNER, 1960, S. 32). Dem entgegen KILKA, WOLPERS und TIETZE: „Das Problem der Auswahl solcher fundamentaler Ideen will Bruner den 'besten Fachleuten' der jeweiligen Disziplin überlassen. Dieser Ansatz krankt daran, dass es zumindest in der Mathematik unter den Fachleuten keinen Konsens über die zentralen Gedanken gibt“ (TIETZE/KLIKA/WOLPERS, 1982, S. 41). Das Gesagte der drei Autoren klingt plausibel, in der Tat soll der Mathematikunterricht nicht nur von reinen Fachmathematikern/innen bestimmt werden. Wenn man BRUNERS letzte Aussage genauer betrachtet, dann fordert dieser ja auch nur die Mitwirkung von Fachleuten. Genau das wollen wir in dieser Untersuchung erreichen. Es geht uns darum **einen** Katalog *zentraler Ideen* zu finden und nicht **den** Katalog *zentraler Ideen*. Daraus sollen Ideen für eine Umsetzung in der Schule gewonnen werden. Das Ziel ist es, eine Vielzahl an Ideen durch einen Zugang aus dem Fach zu gewinnen. Der Ablauf dieser qualitativen Untersuchung in Form der Interviewreihe läuft so lange, bis keine weiteren neuen Ideen von den Probanden ergänzt werden. Dieser Zustand war nach sechs Interviews erreicht.

Ein quantitatives Vorgehen wäre unseres Erachtens kaum durchführbar und auch methodisch nicht ausreichend begründbar. Man könnte nie alle Finanzmathematiker/innen befragen, sofern sich diese überhaupt dazu bereiterklären einen Fragebogen auszufüllen. Auch bei einer Reduktion auf eine repräsentative Stichprobe ist nicht klar, wie viele Personen diese umfas-

sen soll. Es gibt hier keine durch vorhandene Quellen gerechtfertigte Anzahl. Der für diese quantitative Umfrage gestaltet Fragebogen müsste trotzdem offen sein, da es bis dato keine relevante Literatur zu *zentralen Ideen* der Finanzmathematik gibt. Die Auswertung des angehäuften Datenbergs wäre im Rahmen dieser Arbeit kaum bewältigbar und müsste eben qualitativ erfolgen. Die Möglichkeit des Nachfragens, Nachhakens fiel hier weg, genau so wie das Zurückholen auf den Boden bei zu hochtrabenden Antworten.

Als **Auswertungsmethode** verwenden wir hier eine der Hermeneutik zugeordnete Auswertungsmethode, die Inhaltsanalyse nach MAYRING (vgl. MAYRING, 2007). In den Sozialwissenschaften findet diese Methode ihre Anwendung, sie lässt sich auch für die mathematikdidaktische Forschung benützen. Unsere Auswertung soll auf einer Theorie basieren, systematisch vollzogen werden und für Dritte nachvollziehbar sein. Das liefert die qualitative Inhaltsanalyse (vgl. KRÜGER/RIEMEIER, 2014, S. 133 f.). Andere Textanalysemethoden, wie Grounded Theory (datengestützte Theoriebildung), Metaphernanalyse oder dokumentarische Methoden eignen sich nicht für diese Untersuchung.

Bei Grounded Theory geht es vor allem um eine Theoriebildung aus den gesammelten Daten. Bei *zentralen Ideen* der Finanzmathematik handelt es sich nicht um eine Theorie, die aufgestellt werden muss. Im Sinne der Arbeit sind *zentrale Ideen* Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschemata. Es geht uns in dieser Arbeit nicht darum eine Theorie über *zentrale Ideen* zu erfassen, sondern primär diese zu identifizieren (vgl. KRÜGER/RIEMEIER, 2014, S. 134).

Eine Metaphernanalyse deckt aufgrund einer Analyse der metaphorischen Wendungen in der Sprache kognitive Strukturen auf. Diese Untersuchung zieht aufgrund des Designs eine genauere Betrachtung sprachlicher Wendungen, Besonderheiten nicht in Betracht (vgl. KRÜGER/RIEMEIER, 2014, S. 134).

Die dokumentarische Methode versucht Orientierungen von Personen oder Gruppen freizulegen. Hier geht es vor allem darum, dass Muster der Interaktionen von Personen oder Gruppen dargestellt werden. Unsere Untersuchung zielt nicht darauf ab, rein die Beweggründe der Antworten der Probanden zu rekonstruieren (vgl. KRÜGER/RIEMEIER, 2014, S. 134).

Das durchgeführte Experteninterview ist das **Erhebungsverfahren**. Für eine optimale Aufbereitung der Daten in schriftlicher Form wurden alle Interviews mit Hilfe eines Diktiergeräts aufgenommen. Dabei wurde stets auf Wahrung der Anonymität geachtet.

Die durchgeführte Interviewreihe ist eine offene, strukturierte bzw. standardisierte, qualitative Erhebung. Um die Vergleichbarkeit der Daten zu wahren, wurde ein Interviewleitfaden, siehe Kapitel 8 erstellt. Dieser zielt auf die einzelnen Kriterien einer *zentralen Idee* ab. Die erste Frage bezieht sich auf das Zeitkriterium, wir möchten hierbei Ideen in Erfahrung bringen, die bereits über einen längeren Zeitraum wichtig gewesen sind. Dabei stützen wir uns auf die Tatsache, dass alle Ideen irgendwann ihren Ursprung haben und großteils auf eine Person bzw. auf eine Gruppe von Personen zurückgehen. Die Frage wurde so gestellt, dass sie nicht reines Geschichtswissen erfragt, sondern persönliche Hervorhebungen. Sie bekommt dadurch den Charakter einer Einstiegsfrage. Die zweite Frage zielt auf das Horizontalkriterium ab, hier sollen Ideen genannt werden, die in den unterschiedlichsten Lehrbüchern und

Forschungsarbeiten immer wieder vorkommen. Die dritte Frage stellt den Bezug zum Alltag her. Hier fragen wir einerseits nach Ideen aus der Finanzmathematik, die auch im Leben „normaler“ Menschen eine Rolle spielen, und andererseits nach typischen Fehlern aus dem Bereich der Finanzmathematik, die von Menschen begangen werden. So soll das Sinnkriterium abgedeckt werden. Abschließend sollten die Probanden die zuvor genannten Ideen auf zwei bis drei unterschiedlichen intellektuellen Niveaus ausführen, somit kann das Vertikalkriterium der genannten Ideen gesichert werden.

Die Reihenfolge ist nicht zufällig, mit Absicht bezieht sich die letzte Frage auf das Vertikalkriterium, damit die Befragten alle zuvor erwähnten Ideen auf unterschiedlichen Niveaus ausführen können. Die erste Frage dient als Einleitungsfrage. An zweiter Stelle befindet sich eine Frage theoretischer Natur. Für die dritte Frage sollten schon einige Ideen genannt worden sein, damit sich die Interviewpartner/innen gegebenenfalls auf diese beziehen kann.

Die **Transkription** erfolgte nach einheitlichen Regeln, siehe Kapitel 9.2. Die einzelnen sechs Transkripte befinden sich im Anhang der Arbeit, siehe Teil VI .

8 Interviewleitfaden

Im Rahmen einer kleinen Vorstudie fand eine Befragung einer Person statt, welche einige mathematische Kenntnisse aufweisen kann, aber über keine langjährigen finanzmathematischen Erfahrungen verfügt. Bei den Antworten durfte sie daher auf die allgemeine Mathematik zurückkehren. Dabei fiel auf, dass die ursprüngliche Fassung der zweiten Frage: „Welche dieser Begriffe, Sätze und Ideen sind in verschiedenen Gebieten der Finanzmathematik anwendbar?“ nicht passend gestellt wurde. Es erfolgte eine Änderung auf zwei Fragen: „Welche Ideen bzw. Prinzipien werden Ihrer Meinung nach in verschiedenen Teilbereichen der Finanzmathematik immer wieder sichtbar?“ als erste Frage, sollte demnach nichts genannt werden, bzw. wurde das meiste schon zuvor genannt, dann erfolgte die zweite Frage: „In der Literatur wird ein induktiver Vorgang zum Auffinden solcher Ideen und Prinzipien vorgeschlagen: Es sollen zuerst wichtige Definitionen, Begriffe und Sätze ausfindig gemacht werden, um anschließend die dahinterliegende Idee zu nennen, warum diese Definitionen, Begriffe und Sätze so wichtig sind.“ Dieser Vorschlag ist in SCHWEIGER, 2010 auf S. 17 nachzulesen.

Einleitung:

Herzlich willkommen zum Interview: Mein Name ist Christian Dorner und ich schreibe an einer Dissertation im Bereich Fachdidaktik der Mathematik. Mein Ziel ist es geeignete Themen aus der Finanzmathematik für den Unterricht zu identifizieren und aufzubereiten. Im Rahmen dieser Arbeit befrage ich Expertinnen und Experten zum Thema „Welche finanzmathematischen Themen eignen sich für den Mathematikunterricht?“. Ich möchte mich nun schon jetzt bei Ihnen bedanken, dass Sie sich dafür Zeit genommen haben. Zur besseren Auswertung der einzelnen Interviews wird eine Tonbandaufnahme gemacht. „Sind Sie damit einverstanden, dass das Gespräch aufgezeichnet wird?“

Vorerst ist es mein Ziel, zentrale Ideen der Finanzmathematik herauszufinden. Ich bitte Sie aus diesem Grund, Ihre Antworten nicht ausschließlich nach der Durchführbarkeit in der Schule zu richten. Bevor ich mit der ersten Frage beginne, möchte ich Ihnen ein prototypisches Beispiel einer zentralen Idee aus der Disziplin Mathematik nennen. In vielen Auflistungen zentraler Ideen der Mathematik findet sich die Optimierung wieder. Sie findet im Lauf der mathematischen Geschichte und in unterschiedlichen Disziplinen der Mathematik immer wieder ihre Verwendung. Des Weiteren ist der Grundsatz des Optimierens auch außerhalb der Mathematik, im Alltag, zu finden. Diese Idee lässt sich auf vielen unterschiedlichen intellektuellen Niveaus von der Sekundarstufe bis in die Forschung behandeln.

Ich möchte nun zur Befragung zurückkehren:

Zeitkriterium

„Welche Entwicklungen bzw. Personen würden Sie besonders in der Geschichte der Finanzmathematik hervorheben?“

Horizontalkriterium

Zentrale Ideen spielen nicht nur in der Geschichte eine Rolle, sondern auch in den einzelnen Teilbereichen der Finanzmathematik.

„Welche Ideen bzw. Prinzipien werden Ihrer Meinung nach in verschiedenen Teilbereichen der Finanzmathematik immer wieder sichtbar?“

„In der Literatur wird ein induktiver Vorgang zum Auffinden solcher Ideen und Prinzipien vorgeschlagen: Es sollen zuerst wichtige Definitionen, Begriffe und Sätze ausfindig gemacht werden, um anschließend die dahinterliegende Idee zu nennen, warum diese Definitionen, Be-

griffe und Sätze so wichtig sind. Welche wichtigen Definitionen, Begriffe und Sätze kommen in der Finanzmathematik Ihrer Meinung nach immer wieder vor?“

Sinnkriterium

Zentrale Ideen sollten in irgendeiner Form auch einen Bezug zum alltäglichen Leben eines Menschen haben.

„Haben für Sie bestimmte finanzmathematische Ideen eine Entsprechung im Alltag (und sind in einer gewissen Art und Weise außerhalb der Mathematik auffindbar)?“

„Gibt es Ihrer Meinung nach typische Fehler von Menschen, die auf einen Mangel an finanzmathematischer Bildung zurückzuführen sind?“

Vertikalkriterium

In der nächsten Frage interessiere ich mich für finanzmathematische Ideen und Prinzipien, bei denen mindestens dessen Kern auf verschiedenen intellektuellen Niveaus erfolgreich gelehrt werden kann bzw. eine Rolle spielt, zum Beispiel Unterstufe, Oberstufe, Einführungsvorlesung, Diplomand, Dissertant, Forscher.

„Gibt es für Sie Ideen und Prinzipien aus der Finanzmathematik, die auf mindestens zwei bis drei unterschiedlichen intellektuellen Niveaus aufgezeigt werden können?“

„Welche dieser zuvor genannten Ideen und Prinzipien sind ihrer Meinung nach in einer intellektuell ehrlichen Form auch in der Schule vermittelbar?“

Danke für das Interview!

9 Das Analysematerial

9.1 Die Probanden (Interviewpartner/innen)

Der Untersuchung umfasst sieben digitale Audiodateien, die Aufzeichnungen gehaltener Interviews sind. Für eine Erprobung des Interviewleitfadens wurde eine Person befragt. Basierend auf dieser Vorstudie liegen sechs Audioaufzeichnungen in digitaler Form für die Arbeit vor. Es konnten folgende sechs Interviewpartner für die Befragung gewonnen werden, die auch den oben genannten Kriterien entsprechen, siehe Kapitel 7. Es handelt sich dabei um Finanzmathematiker/innen in unterschiedlichen Positionen. Unten stehend sieht man eine Auflistung der Probanden, welche mit dem jeweiligen Kürzel bei den Transkripten und den beruflichen Positionen dieser versehen ist.

- FM1: Finanzmathematikprofessor
- FM2: Post-Doc im Bereich Finanzmathematik
- FM3: Finanzmathematikprofessor
- FM4: ehemaliger Universitätsassistent im Bereich Finanzmathematik, Vorstand
- FM5: Dissertation im Bereich Finanzmathematik, Forschungsassistent, Angestellter in der Finanzbranche
- FM6: Dissertation im Bereich Finanzmathematik, Forschungsassistent, Angestellter in der Finanzbranche

Die Interviewpartner/innen wurden durch direktes Ansprechen des Verfassers gewonnen, einige der Probanden wurden vorab von einem der beiden Dissertationsbetreuer befragt, ob sie sich bereit erklären an dieser Studie teilzunehmen.

9.2 Rahmenbedingung der Interviews und Art der Transkription

Die Teilnahme an dieser qualitativen Erhebung war stets freiwillig. Viele der Teilnehmer/-innen boten vor dem Interview von sich selbst aus das Du an. Das wurde in diesen Fällen auch angenommen, da unseres Erachtens dadurch keine anderen Antworten zu erwarten gewesen sind. Die Interviews wurden im Rahmen des vorliegenden Dissertationsprojekts durchgeführt, der Ort variiert mit den Befragten. Bis auf zwei Interviews wurden alle im jeweiligen Büro der Probanden/innen getätigt. Eines wurde beim Interviewten zu Hause durchgeführt und eines fand an einem öffentlichen Ort an der Universität statt.

Alle Interviews wurden mit einem „Handy Recorder“ aufgenommen, eine Art Diktiergerät, und im Anschluss transkribiert. Die Art der Transkription wurde nach (MAYRING, 2007, S. 49) ausgewählt, dabei sind folgende Eckpunkte auszuweisen:

1. Es handelt sich um eine vollständige und wörtliche Transkription.
2. Der Inhalt steht im Vordergrund, Dialektfärbungen werden eingedeutscht, sofern echte Dialektausdrücke vorkommen, werden diese nach Gehör geschrieben.

3. Bei Unklarheiten bzw. nicht verständlichen Stellen werden Punkte gemacht (...).⁵
4. Bei Pausen wird ein Gedankenstrich verwendet, bei längeren Pausen mehrere Gedankenstriche (- bzw. - - -).
5. Auffälligkeiten wie ein Lachen werden in Klammern angegeben (z.B. lacht).
6. Alle nonverbalen Merkmale werden nur dann in der Transkription vermerkt, wenn sie zum Verständnis beitragen.
7. Wenn der Interviewer eine Frage stellt, wird dies mit CD (für Christian Dorner) abgekürzt.
8. Wenn der/die Interviewte spricht, wird die Abkürzung FM1 (für Finanzmathematiker/in, Nummer variiert nach Reihenfolge der Interviews) verwendet.

Es handelt sich bei den im Anhang befindlichen Transkripten um Teiltranskripte. Die Einleitung und Begrüßung der Probanden wurden nicht in das jeweilige Transkript aufgenommen. In einem Fall wurde das Interview an einem öffentlichen Ort gehalten, Störungen durch Passanten wurden ebenfalls nicht in das Transkript aufgenommen.

⁵Bei Auszügen aus dem Transkript in der Arbeit werden, sofern diese nicht mit dem Beginn und dem Ende der Aussage des Probanden übereinstimmen, ebenfalls Punkte gemacht. Diese sind im Sinne eines Auslassungszeichen zu verstehen.

10 Beschreibung der zentralen Ideen

10.1 Ergebnisse

Die qualitative Auswertung der Interviews führt zu fünf *zentralen Ideen*: *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik*, *Handhabung von Risiko*, *No-Arbitrage-Prinzip*, *Replikation*, *Zeitwert des Geldes*. Nutzen und Diversifikation konnten nicht vollständig als eigene Kategorie begründet werden, sie konnten jedoch in einer größeren Kategorie *Handhabung von Risiko* zusammengefasst werden. Diese Ideen sind größeren Ideen der Mathematik untergeordnet. Die Finanzmathematik als Subdisziplin der angewandten Mathematik verwendet fundamentale Ideen wie die Modellierung und die Optimierung. Die einzelnen gewonnenen *zentralen Ideen* lassen sich mehr oder weniger beiden genannten *fundamentalen Ideen* zuordnen.

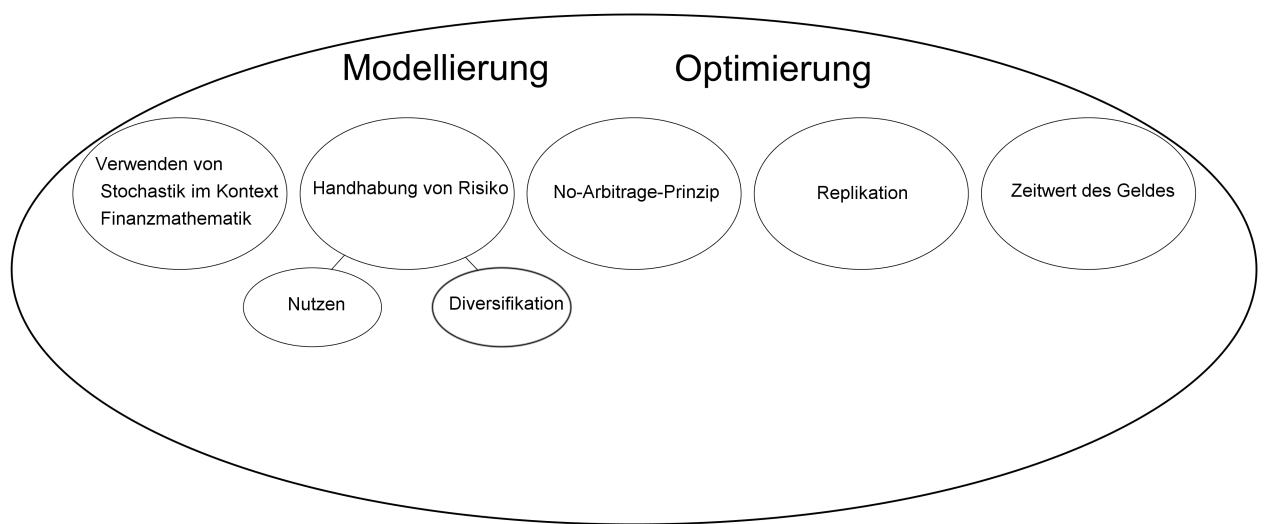


Abb. 4 Zentrale Ideen der Finanzmathematik

Die ausführliche Begründung und Ausarbeitung erfolgt in den anschließenden Kapiteln. Die Ernennung (bzw. Begründung) einer der oben genannten Ideen zu einer *zentralen Idee* ergibt sich durch die Ausarbeitung der zuvor festgelegten Kriterien einer *zentralen Idee* (siehe Kapitel 6.2). Die Argumentationen stützen sich auf Interviewausschnitte, Aussagen der Experten/innen und auf exemplarische Ausarbeitungen. Im Zeitkriterium wird die deutliche Wahrnehmbarkeit in der historischen Genese der Finanzmathematik sowie die längerfristige Relevanz aufgezeigt. Um das Horizontalkriterium zu erfüllen, wird auf eine vielfältige Anwendbarkeit innerhalb der Finanzmathematik verwiesen. Der Bezug zum Alltag sowohl für den Durchschnittsmenschen als auch hin und wieder für Praktiker/innen wird im Sinnkriterium beschrieben. Eine explizite, wenn auch exemplarische, Ausarbeitung auf unterschiedlichen intellektuellen Niveaus der betrachteten Idee erfolgt jeweils im Vertikalkriterium.

10.2 Verwenden von Stochastik im Kontext von Finanzmathematik

Der letzte Satz in der Dissertation von LOUIS BACHELIER lautet:

„Une dernière remarque ne sera peut-être pas inutile. Si, à l'égard de plusieurs questions traitées dans cette étude, j'ai comparé les résultats de l'observation à ceux de la théorie, ce n'était pas pour vérifier des formules établies par les méthodes mathématiques, mais pour montrer seulement que le marché, à son insu, obéit à une loi qui le domine: la loi de la probabilité.“ (BACHELIER, 1900, S. 86)

Eine schöne Übersetzung der obigen Aussage gibt FM3 in dem geführten Interview. (vgl. den ersten untenstehenden Auszug). BACHELIER gilt mit seiner Arbeit als Begründer der modernen Finanzmathematik (siehe <http://www.bachelierfinance.org/louis-bachelier.html>). Ein wichtiges Denkschema ist das probabilistische Denken. Uns ist allen klar, dass wir nicht in die Zukunft schauen können. Viele Instrumente der Finanzmathematik sind als Instrumente stochastischer Natur anzusehen. Die Tatsache, dass um die Jahrhundertwende 19./20. Jahrhundert der Grundstein für die Disziplin „Stochastische Finanzmathematik“ gelegt wurde, bringt diese Idee eigentlich von selbst ins Gespräch für eine *zentrale Idee*. Das explizite Erwähnen des Verwendens von Stochastik im Kontext Finanzmathematik, sei es auch in anderen Formulierungen aller Interviewpartner, unterstreicht die Verwendung als *zentrale Idee*. Der Zinssatz eines Kredites hängt von so vielen unvorhersehbaren (stochastischen) Faktoren ab. Die meisten Kredite sind an einen bestimmten Leitindex gebunden, z.B. 3M-Euribor, die Höhe des Index bestimmt die EZB. Die Zentralbank trifft ihre Entscheidungen aufgrund politischer und wirtschaftlicher Überlegungen, die auch nicht über lange Zeiträume vorhersehbar sind. Die wirtschaftliche Konjunktur und auch das Wählerverhalten, welches sich in politischen Entscheidungen der Verantwortungsträger niederschlägt, hängt von so vielen Faktoren ab, die wir nicht nachvollziehen können. Hinzu kommen Events wie Naturkatastrophen, Anschläge, etc., die bei einer Kreditlaufzeit von 20-30 Jahren kaum vorherzusehen sind. Ähnliches gilt für Kurse von Wertpapieren und Preise von Derivaten. Sehr schön wird diese Idee des Einbeziehens stochastischer Elemente von FM3 beschrieben:

FM3: „Die erste zentrale Idee ist das Verwenden von Wahrscheinlichkeitstheorie im Kontext von Finanzmathematik. Das geht zumindest auf Bachelier zurück, der eben einen geradezu mythischen Glauben an die Wahrscheinlichkeit hatte. Nachzulesen in seiner Dissertation, wo der letzte Satz lautet, dass die Finanzmärkte einem Gesetz gehorchen, ohne dass sie es wissen, dem Gesetz der Wahrscheinlichkeit. Da sind wir heute sicher - - weniger, wie soll ich sagen, begeistert oder weniger enthusiastischer unterwegs, sondern sind durchaus etwas kritischer und sehen aber auch die Beschränkungen - , die Limitationen der Verwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie. Aber diesen Aspekt überhaupt einzubauen ist eine grundlegende Idee.“

Es erscheint durchwegs klar, dass diese Idee „das Verwenden von Stochastik“ nicht ihren Ursprung in der Finanzmathematik hat. Generell könnte man sie als *fundamentale Idee* der angewandten Mathematik sehen. Die Physik verwendet die Idee in ihrem Kontext. Das bemerkt auch der Interviewpartner FM6:

FM6: „...ich mein der Zufall ist keine Idee der Finanzmathematik, den benutzt man zum Modellieren. Das ist, weil man es eben in der Regel stochastisch macht. Das würde ich jetzt nicht so genuin finanzmathematisch sehen.“

Wir möchten diese Idee trotzdem als *zentrale Idee* ansehen, da sie zwar nicht aus der Finanzmathematik entstanden ist, aber mittlerweile eine derart wichtige Denkart ist, die aus dieser Wissenschaftsdisziplin nicht mehr wegzudenken ist. Das wird auch von der Wissenschafts-Community so akzeptiert, das unterstreicht FM3:

FM3: „Ja, ich glaube das habe ich eh schon gesagt, ja aber ich meine die Grundidee, dass man überhaupt das ganze wahrscheinlichkeits-theoretisch betrachtet, naja das zieht sich natürlich vollkommen durch und ist also die allgemein akzeptierte Methode.“

Das Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik erfüllt alle vier Kriterien einer *zentralen Idee*:

10.2.1 Zeitkriterium

Die Idee *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik* stellt einen wichtigen Punkt in der Geschichte dar (vgl. erstes Zitat von FM3). Den Beginn dieser Denkweise stellt die Dissertation „Théorie de la spéculation“ von LOUIS BACHELIER dar. Diese wurde zu Lebzeiten von BACHELIER nicht so gewürdigt, wie jetzt (vgl. MANDELBROT/HUDSON, 2009, S. 79 ff.).

FM2: „Na, die erste wichtige Entwicklung geht auf Bachelier zurück. Das war diese Dissertation, glaube ich, Théorie de la spéculation, wo es eben schon darum gegangen ist, eben den Zufall hineinzubringen. Das war sicher die erste wichtigste Entwicklung, glaube ich.“

Es besteht kein Zweifel, dass der Einzug des probabilistischen Denkens in die Finanzmathematik bei BACHELIER ansetzt. Literatur (vgl. SIAM Journal on Financial Mathematics und Lehrbücher wie SHREVE, 2003) und Interviewpartner (siehe unten) bestätigen die Aussage:

FM6: „Ja, ich mein die üblichen kennt man ja eh, oder halt mit Bachelier, ich mein also das Akademische fangt halt mit Bachelier an, ...“

Diese Idee ist also in der Geschichte der Wissenschaft deutlich wahrnehmbar. Die Wichtigkeit dieser Idee zeigt sich auch darin, dass es die Organisation namens „Bachelier finance society“ gibt, die somit LOUIS BACHELIER alle Ehre erweist. Wissenschaftler und Praktiker haben hier die Chance sich über Finanzmathematik auszutauschen (siehe <https://www.bachelierfinance.org/>). Dass es sich dabei nicht um irgendeine Organisation handelt, wird klar, wenn man sich die Vortragenden bei den von ihnen veranstalteten Kongressen anschaut. Namen wie DELBEAN, HULL, KARATZAS, MERTON, SAMUELSON, SCHACHERMAYER sprechen für sich.

Die längerfristige Relevanz dieser Idee begründet sich allein dadurch, dass mit der stochastischen Finanzmathematik ein eigener Wissenschaftszweig etabliert wurde. Aktuelle Forschungsarbeiten der interviewten Personen bestätigen die vorige Aussage:

FM6: „Ausschließlich, also wie ich meine Dissertation angefangen habe, ... – ... war dann quasi dieses optimal transport und finance, ja das war quasi der Beginn und dann habe ich nur in diesem Setting die ganzen drei Jahre gearbeitet.“

Denjenigen Leser/innen, die glauben, es handle sich dabei nicht um stochastische Themen, ist eine Suche zu „Optimal transport and finance“ in einer Internetsuchmaschine zu empfehlen. Ein allgemeiner Blick auf die Forschungsprojekte und Dissertationen der einzelnen Fakultäten, Institute und Arbeitsgruppen zeigt, dass diese Idee auch in Zukunft ihre Bedeutung haben wird. Zur Zeit beschäftigt man sich mit:

FM3: „...ja dann gibt es darüber hinaus, also zur Zeit aktuelle Dinge, wie dass man Transaktionskosten ernst nimmt, wie zum Beispiel eine Tobin-Tax und sich überlegt, was passiert in deren Präsenz. Oder dass man sich fragt, in wie weit sind Ergebnisse robust, hängen also nicht von der Wahl des Modells ab und so weiter und so fort.“

Viele Modelle haben auch für die Praxis ihre Relevanz und werden von großen Banken verwendet, vor allem die Statistik.

CD: „Sie wird sozusagen in der Praxis angewendet?“

FM5: „Statistik oder was?“

CD: „Ja.“

FM5: „Ja, ja genau, statistische Modelle einfach.“

CD: „Sie spielt eine große und wesentliche Rolle?“

FM5: „Ja sowas, wie man von Daten auf irgendwelche Implikationen kommt.“

10.2.2 Horizontalkriterium

Eine *zentrale Idee* in unserem Sinne besitzt eine umfassende Anwendbarkeit in vielen Gebieten in der von uns betrachteten Wissenschaftsdisziplin. Das stochastische Element spielt in der Finanzmathematik eine wesentliche Rolle, wie ein Interviewpartner herausstreicht:

FM4: „(Lacht) Stochastische Prozesse, das ist sozusagen ein ganz wesentliches Element, mit dem man sozusagen vertraut sein muss, wenn man Finanzmathematik machen will.“

Die Wahrscheinlichkeitstheorie liefert viele wichtige Resultate für die Finanzmathematik (in diesem Sinne ist die Finanzmathematik eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie).

FM1: „Ja, aus mathematischer Sicht glaube ich halt, - - dass Grenzwertsätze et-
was ganz Wichtiges sind. Also ich meine, . . . Wahrscheinlichkeitstheorie wird halt
dort spannend - , wo du viele kleine zufällige Ereignisse zusammenfassen kannst
und irgendwie mehr Struktur im Verhalten erkennen kannst, also mehr Struktur
im Verhalten erkennen kannst - -, weil sich viele kleine Sachen zusammengefasst,
dann doch mit mehr Gesetzmäßigkeiten verhalten als die einzelnen, und das ist
eine sehr philosophische Antwort.“

Das Verhältnis von Finanzmathematik und Wahrscheinlichkeitstheorie ist aber in der Tat
kein einseitiges. Aufgrund finanzmathematischer Überlegungen erfolgt durchaus eine „Ver-
sorgung“ von Erkenntnissen von der anderen Seite. Durch die Anwendungen entstehen eben
auch theoretische Ergebnisse oder auch Sätze, die beides verbinden. Vielmehr entsteht eine
Art Beziehungsgeflecht.

FM3: „Naja, wichtige Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie sind sicher der
Satz von Girsanov oder der Martingal-Darstellungssatz etc. Aber es ist auch
umgekehrt: Also ich finde wirklich auch einen konzeptuell schönen Satz, finde ich
das Fundamental Theorem of Asset Pricing, das ganz klar die Beziehung zwischen
Martingalen auf der einen Seite und Arbitrage auf der anderen Seite herstellt.“

Kurze Gespräche mit Studenten und Professoren unterstreichen, dass die betrachtete Idee
viele Wirkungsbereiche der Finanzmathematik durchdringt, diese sehen die Finanzmathe-
matik als eine Disziplin an, die praktisch nur durch und mit Stochastik existiert.

10.2.3 Sinnkriterium

Der Bezug zum Alltagsdenken bzw. zur lebensweltlichen Bedeutung stellt ein wichtiges Kri-
terium für eine *zentrale Idee* dar. Die gedankliche Abkehr vom Determinismus hin zu sto-
chastischen Modellen bzw. einem probabilistischen Denken beginnt im akademischen Bereich
bei BACHELIER. In den Köpfen einiger Menschen dürfte diese Idee noch keinen Niederschlag
gefunden haben. Hierzu denke man an: In Fernsehwerbungen und im Internet gibt es tau-
sende Anbieter, die behaupten, sie kennten die optimale Geldanlage am Finanzmarkt. Auf
der einen Seite sind es seriös wirkende Herrn im Anzug, auf der anderen Seite Handyapps,
die die optimale Investmentstrategie kennen. Allein wegen deren Existenz dürften Menschen
darauf hineinfallen (zu Krisenzeiten hört man sie meist weniger). „Wenn alle Aktien steigen,
triffst du viele Leute, die glauben sie seien begnadete Börsenexperten“ (nach dem deutschen
Journalisten PETER HOHL).“ In diesem Sinne der folgende Ausschnitt aus einem Interview:

FM6: „... einfahren kann man, wenn man als Ottonormalmensch glaubt, man
kann irgendwie selber mitspielen und schlauer sein als so High-Frequency-Trader,
und auf einer Daily-Basis Gewinn machen, ja - da - weil da völlig andere Mecha-
anismen am Werk sind, Algorithmenhandel und das kapieren die Leute nicht ganz.
Beziehungsweise, wenn, da gibt es, was Aktienhandel anbelangt, den Kahneman
mit Thinking Fast and Slow und da gibt es ein recht gutes Kapitel und ein recht
lustiges Kapitel, wo sie Experimente gemacht haben, sozusagen Aktienhandel
per Zufallsgenerator, in dem Fall hat es halt, wie so oft ein Affe gemacht (lacht),
und wo sich zum Teil sogar und wirklich rausgekommen ist, im Durchschnitt ist

der Erfolg von diesem Zufallshandel genau gleich wie die Investmentbanker, die mit ausgeklügeltsten Strategien und hochbezahlten Posten und Boni und allem Drum und Dran nach irgendwas handeln, steigen eben um keinen Deut besser aus, weil eben diese Zufallskomponente von Preis- und Aktienentwicklung wahn-sinnig unterschätzt wird.“

Die Zukunft ist nicht vorhersehbar, trotzdem ist das deterministische Denken, vor allem auch im Bereich des Finanzwesens, verankert. Vor allem in diesem Bereich ist ein Bewusstmachen über das Vorhandensein von probabilistischen Prozessen von größter Wichtigkeit sowohl bei Schülern/innen als auch bei allen Menschen.

FM1: „Ich finde eine coole Erkenntnis aus der Finanzmathematik ist schon, dass, also aus Finanzmathematik und von Fama, dass wenn die letzten fünf Tage der Aktienkurs gestiegen ist, dass das dann überhaupt keine Aussage darüber ermöglicht, ob der Kurs am sechsten Tag auch wieder steigen wird oder nicht steigen wird. Das ist etwas, was man nicht glaubt, oder?“

FM1: „Der Aktienkurs heute ist der beste Schätzwert für den Aktienkurs morgen. Wenn etwas anders wahr wäre, wenn der Bankberater oder der Analyst im Fernsehen wirklich mehr wüsste. Was der machen würde, ist, er würde die Aktie heute kaufen und morgen verkaufen und würde damit reich werden.“

Das betrifft nicht nur Menschen, die ein Aktienportfolio halten. Der Zufall spielt in der Finanzbranche eine große Rolle und affiziert wesentlich mehr Menschen. Mit dem wachsenden Wohlstand besitzen die meisten Menschen zumindest ein Sprachbuch, dessen Zinssätze sich in den meisten Fällen ändern (Ausnahme: gebundene Sparbücher mit vereinbartem Zinssatz). Während man sich in diesem Fall höchstens über zu niedrige Zinssätze ärgert, führt das in Fällen des Ausborgens von Geld zu gravierenderen Auswirkungen. Man denke an die völlig unerwartete Aufhebung des Euro-Mindestkurses von 1,2 der Schweizer Nationalbank. Die Aufwertung des Frankens ergab unter Umständen ein Drittel mehr Schulden und das von einem Moment auf den anderen (vgl. <http://orf.at/stories/2261342/2261341/>), wie ein Interviewpartner bemerkt:

FM5: „... , dass das einfach deterministisch ist, obwohl es nicht deterministisch sein wird, ... wenn man halt irgendwelche Skizzen bekommt ... und man glaubt, das sind alle drei Szenarien, die es gibt ... und von mir aus wird nur ein Szenario angegeben, das vielleicht noch sehr gut ist, aber im Endeffekt wird es dann ziemlich falsch laufen, also das ist, glaube ich ein Punkt, den man auch bei Fremdwährungskrediten ganz stark gesehen hat, da ist Österreich ganz stark betroffen. ...“

Das *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik* berührt auch die Banken:

FM3: „Dann natürlich auch im Denken der Banken insgesamt, also auch die Idee, dass man in der Bilanzierung und in den Finanzierungsvorschriften wahr-scheinlichkeitstheoretische Konzepte nimmt, ist jedenfalls eine große Änderung, die ich

mit großen Gefahren verbunden sehe und was wirklich außerordentlich heikel ist. Aber natürlich in den, wo sie von Value at Risk oder irgendwas in der Richtung sprechen, ist das etwas, was ohne mathematische Begriffsbildung einfach nicht möglich ist. Ob es gut oder schlecht ist, ist wieder eine andere Frage, die man länger erörtern müsste.“

Ein wesentlicher Aspekt betrifft die mathematische, genauer wahrscheinlichkeitstheoretische Modellierung.

FM3: „Naja, es ist sicher die unkritische Verwendung, von, jetzt innerhalb der Bank, unkritische Verwendung von - - - mathematischen Modellen oder mathematischen Begriffen wie Value at Risk, ist - sicher gefährlich, wenn man nicht gut weiß, was hinter den Modellen steckt und welche Annahmen hier - getroffen werden. Also zum Beispiel in der Praxis wird sehr sehr viel mit Gaußverteilung modelliert und die - Restriktionen die sich ergeben, dadurch, dass im Finanzbereich der zentrale Grenzwertsatz nicht so ohne weiteres so einfach anzuwenden ist, dass das weitgehend so nicht verstanden wird, aus dem sehe ich große Gefahren, wenn Leute in einem etwas naiven Glauben an die Exaktheit der Mathematik solche Modelle unkritisch verwenden.“

Vor allem das Wissen über die Annahmen stellt die eigentliche Schwierigkeit dar. Dabei meint man nicht nur, dass man weiß, welche Annahmen es gibt, sondern auch, dass man weiß, was diese bewirken.

FM3: „Außerordentlich stark (lacht) trifft das zu, aber dass man auf die Annahmen schaut, impliziert insbesondere (lacht), dass man versteht, was da eigentlich passiert und was diese Annahmen bedeuten.“

Der Finanzmarkt hat sich in den letzten Jahren enorm verändert, mittlerweile gibt es eine Fülle an Derivaten. Die Gretchenfrage dabei lautet immer wieder: „Wie viel ist ein solches Derivat bei der Emission wert?“ Bei der Bewertung von Wertpapieren muss die Unkenntnis über die zukünftigen Modelle natürlich berücksichtigt werden, ein Verwenden von Wahrscheinlichkeitstheorie ist unumgänglich. Es ergeben sich dadurch auch auf den ersten Blick verblüffende Resultate:

FM4: „Ein Gedanke, ich muss nicht unbedingt den Aktienkurs von morgen kennen, auch wenn ich sage, der heutige Preis ist die beste Schätzung von morgen bzw. für den morgen abdiskontierten (lacht). Also ich muss den Kurs morgen nicht kennen, trotzdem kann ich heute schon Aussagen über den Optionspreis zum Beispiel treffen.“

10.2.4 Vertikalkriterium

Dieses Kriterium ist für den Schulunterricht von besonderer Bedeutung (vgl. SCHWILL, 1993, S. 6). Auf verschiedenen intellektuellen Niveaus lässt sich diese Idee verwirklichen. Das Herunterbrechen der Idee auf „(Es lässt sich nicht in die Zukunft schauen,) Man kann keinen Kurs vorhersagen“ und Weiterführen bis hin zu komplexen, tiefliegenden mathematischen

Aussagen, wie dem „Fundamental Theorem of Asset Pricing“, zeigt, dass die Idee auf unterschiedlichen intellektuellen Niveaus durchführbar ist. Das unten stehende Zitat schließt an die vorige Aussage an:

FM1: „Du kannst es eben auf dem Niveau, auf dem wir gerade reden, traue ich das einem Unterstufenschüler zu, dass man das ausführlicher bespricht und auf das kommt. Und dann auf einem sehr sehr viel höheren Niveau ist das halt, das Fundamental Theorem of Asset Pricing, Das ist ein mathematisch unglaublich tiefliegender Sachverhalt, der auch wieder nur sagt: Was du heute weißt, ist der beste Schätzwert von dem, was er morgen sein wird, du kannst keine systematischen Überlegungen treffen.“

Im Folgenden werden am Beispiel der Modellierung eines Aktienkurses unterschiedliche intellektuelle Niveaus der Idee *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik* aufgezeigt.

Auf einem niedrigen intellektuellen Niveau spielt das Identifizieren probabilistischer Vorgänge auf dem Finanzmarkt eine wichtige Rolle. Zinssätze, Finanzprodukte, etc., wie kommen deren Preise bzw. Werte zustande? Sind die Ereignisse durch Vorbedingungen eindeutig festgelegt? Die Modellierung von Vorgängen auf dem Finanzmarkt steht auf einer höheren intellektuellen Stufe, sie benötigt auch mehr an mathematischem Wissen. Bei der Aktienpreismodellierung geht man auf einem einfachen Level von einem Binomialmodell aus. Dafür müssen gewisse Annahmen getätigt werden. Wir nehmen an, dass wir den Aktienkurs für eine Dauer T modellieren möchten. Dabei betrachten wir n Perioden der Länge $\frac{T}{n}$, wobei sich der Aktienkurs nur am Ende der jeweiligen Periode ändert. Nach jeder Periode kann der Kurs nur jeweils zwei Werte annehmen. Entweder der Wert der Aktie S sinkt auf dS oder er steigt auf uS . Die Änderungsfaktoren u und d werden als konstant angenommen. Die Aufwärtsbewegung tritt mit einer Wahrscheinlichkeit p und die Abwärtsbewegung mit einer Wahrscheinlichkeit $1 - p$ ein. In jedem Teilintervall ist das Sinken bzw. Steigen unabhängig vom vorigen Ausgang. Der Wahrscheinlichkeitsbaum für vier Perioden kann in Abbildung 5 betrachtet werden.

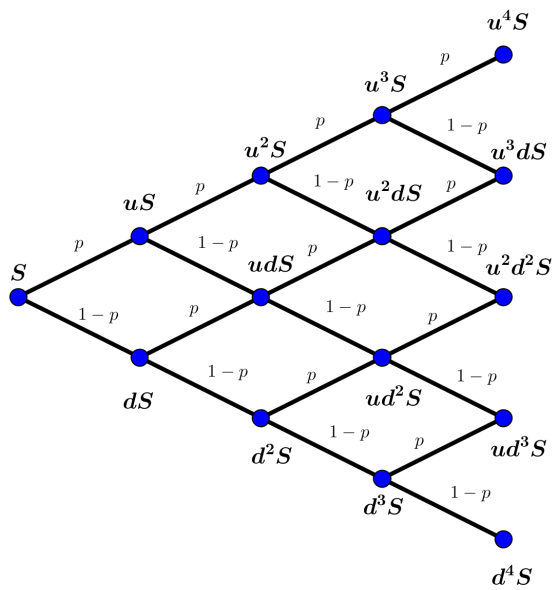


Abb. 5 Wahrscheinlichkeitsbaum für die Kursentwicklung einer Aktie im Binomialmodell für 4 Perioden

Es wird schnell klar, dass es sich hierbei wirklich nur um ein sehr einfaches Modell der Aktienpreisentwicklung handelt. Die Modellparameter verändern sich in Wirklichkeit im Laufe der Zeit, sowohl die Wahrscheinlichkeit p , als auch u und d . Des Weiteren stellt sich die Frage, wie man diese Parameter bestimmt? In den meisten Fällen werden Werte aus der Vergangenheit herangezogen, neue Informationen und unvorhersehbare Ereignisse werden nicht berücksichtigt. Die Annahme, dass der Aktienkurs nur zwei mögliche Ausprägungen nach jeder Periode hat, ist ebenfalls unrealistisch. Die Veränderbarkeit nur am Ende einer Periode ist als Näherung zwar zulässig, aber ein Aktienkurs ändert sich in nahezu jedem Moment.

Nichtsdestotrotz wird die Entwicklung eines Aktienkurs mit Hilfe des Binomialmodells prognostiziert.

Beispiel 1. Wir betrachten die folgenden Kurse der Facebook-Aktie im Zeitraum von 20.8.2015-5.11.2015 und fügen die logarithmischen Renditen hinzu.

Tag	Kurs	log-Rendite
20.08.2015	80,58	
27.08.2015	77,85	-0,034
03.09.2015	78,90	0,013
10.09.2015	81,10	0,028
17.09.2015	82,96	0,023
24.09.2015	82,60	-0,004
01.10.2015	79,34	-0,040
08.10.2015	80,81	0,018
15.10.2015	83,73	0,035
22.10.2015	89,24	0,064
29.10.2015	95,86	0,072
05.11.2015	100,54	0,048

Tab. 3 Kurs der Facebook-Aktie

Was sind eigentlich logarithmische Renditen und wie berechnet man diese?

Definition 1. (logarithmische Rendite) Zum Zeitpunkt t_a ist der Preis der Aktie S_a und zum Zeitpunkt $t_b > t_a$ beläuft sich der Preis der Aktie auf S_b . Die logarithmische Rendite R_l im Zeitraum $[t_a; t_b]$ berechnet man durch $R_l = \ln \left(\frac{S_b}{S_a} \right)$.

Auf den ersten Blick scheint die einfache Rendite $R_e = \frac{S_b - S_a}{S_a}$ anschaulicher. Jedoch erfüllt die zuletzt genannte Rendite nicht die Additivitätseigenschaft. Die Summe der logarithmischen Renditen über Teilzeiträume ist nämlich die logarithmische Rendite über den Gesamtzeitraum, also

$$\ln \left(\frac{S_2}{S_1} \right) + \dots + \ln \left(\frac{S_n}{S_{n-1}} \right) = \ln \left(\frac{S_n}{S_1} \right)$$

In diesem Fall wird der Preis der Aktie zum Zeitpunkt t_i mit S_i bezeichnet ($i \in \{1, \dots, n\}$). Die logarithmische und die einfache Rendite stimmen für kleine Werte annähernd überein. Des Weiteren sei an dieser Stelle erwähnt, dass die logarithmischen Renditen im Black-Scholes-Modell normalverteilt sind.

Der Mittelwert der logarithmischen Wochenrenditen der Facebook-Aktie im oben angegebenen Zeitraum beträgt ca. 0,02 und die Standardabweichung ca. 0,034. Wenn der Aktienkurs von einer Woche auf die nächste sinkt, dann beträgt die charakteristische Rendite $0,02 - 0,034 = -0,014$. Im anderen Fall berechnet man einen Wert von 0,054. Es ergibt sich ein d -Faktor von $d = e^{-0,014} \approx 0,9861$ und ein u -Faktor $u = e^{0,054} \approx 1,0555$. Der Aktienkurs entwickelt sich ausgehend von 100,54 am 5.11.2015 über die Tage 12.11.2015, 19.11.2015 und 26.11.2016 wie in Abb. 6.

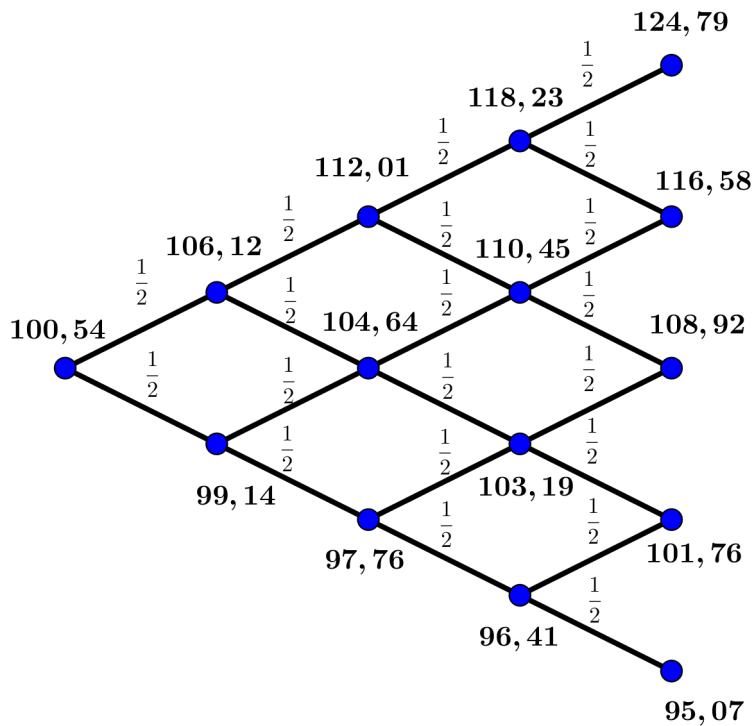


Abb. 6 prognostizierte Kursentwicklung mit dem Binomialmodell

Über die Binomialverteilung ist es auch möglich, die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Kurs bei dieser Modellierung zu bestimmen. Es gilt die allgemeine Formel:

$$P(S_n = S_0 u^k d^{n-k}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

In diesem konkreten Beispiel berechnet man die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktie über die vier Perioden nur steigt, folgendermaßen:

$$P(S_4 = 124, 79) = \binom{4}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,0625$$

Wiederum eine Stufe höher, in kontinuierlicher Zeit, modelliert man eine Aktienkursentwicklung zum Beispiel im simpelsten Fall (Black-Scholes-Modell) mit Hilfe der Brown'schen Bewegung $W(t)$, hier angeschrieben als stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (1)$$

Dabei ist $\alpha S(t)dt$ der Driftterm und $\sigma S(t)dW(t)$ der Volatilitätsterm bzw. Martingalteil. In diesem Modell kann der Aktienkurs zu jedem Zeitpunkt beliebige Werte in $\mathbb{R}^+$ annehmen. Allerdings sind die Modellparameter α und σ konstant. In einem weiter entwickelten Ansatz hängen die beide Werte von der Zeit ab, also $\alpha(t)$ und $\sigma(t)$. Im Allgemeinen nimmt man an, dass sie von weiteren zufälligen Einflüssen abhängen.

Auf einer sehr hohen Stufe, mathematisch tief liegend, befindet sich das „Fundamental Theorem of Asset Pricing“. Eine mögliche Formulierung nach (SCHACHERMAYER, 2008, S. 5) lautet:

Satz 10.1. Ein Finanzmarktmodell ist genau dann frei von Arbitrage, wenn ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q existiert, welches äquivalent zu dem originalen Maß P und der diskontierte Aktienpreisprozess ein Martingal unter Q ist.

Diese Aussage liefert eine einfache Bedingung, um nachzuweisen, dass ein vorliegendes Modell frei von Arbitrage ist. Dies lässt sich am Binomialmodell nachweisen, siehe Beispiel 26 auf Seite 155.

Es existieren auch Modelle, wo es kein eindeutiges risiko-neutrales Maß gibt. Wider Erwarten handelt es sich dabei unter Umständen gar nicht um höchst komplizierte Modelle. Durch eine leichte Modifikation des Binomialmodells erreicht man ein solches. Bei dem angesprochenen Modell, das Trinomialmodell, steigt der Kurs mit konstantem Faktor, bleibt gleich oder fällt mit konstantem Faktor. Dieses Modell hat kein eindeutiges Risikomaß, siehe Beispiel 27 auf Seite 155.

Die Beispiele 26 und 27 zeigen, dass diese Idee auf einer sehr hohen intellektuellen Stufe ausgeführt wird, indem sie Methoden der höheren Wahrscheinlichkeitstheorie verwenden. Es wird in beiden Fällen nachgewiesen, dass das jeweilige Modell frei von Arbitrage ist. Das erfolgt mit Überlegungen aus der höheren Wahrscheinlichkeitstheorie. Sie tragen so zur Erfüllung des Vertikalkriteriums der betrachteten Idee bei.

Mit Hilfe des risiko-neutralen Maßes lassen sich arbitragefreie Preise für abgeleitete Wertpapiere angeben. Diese Art der Bepreisung bedarf vieler Methoden der höheren Wahrscheinlichkeitstheorie und ist so auch auf einfache Modelle anwendbar, siehe Beispiel 28 auf Seite 156. Erneut wird ein Nachweis für das Erfüllen des Vertikalkriteriums erbracht, da mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsmaßen und Martingalen ein Preis für ein Derivat bestimmt wird.

KREPS generalisierte das „Fundamental theorem of asset pricing“ Satz 10.1, siehe oben, dabei benötigte er eine Verallgemeinerung des Begriffs *No-Arbitrage*. Der Komplexitätsgrad ist in der Forschung (nahezu?) unbegrenzt.

10.3 Handhabung von Risiko

Was verstehen wir unter *Handhabung von Risiko*? Darunter sollen nun alle Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- und Erklärungsschemata verstanden werden, die die Finanzmathematik bereitstellt, um Risiko zu messen, Risiko zu minimieren und risikobehaftete Prozesse zu erklären (klarerweise ist das Risiko vor Verlusten am Finanzmarkt gemeint). Es handelt sich hier um eine breit gefächerte Idee, da es viele Definitionen und Auffassungen von Risiko gibt

FM5: „...ein für mich ganz zentrales Thema ist die Definition des Risikos, was man als Risiko erfasst ... , in dem Sinne auch, ...die Optimierung, also man will Beträge optimieren unter gegebenem Risiko, ...zum Beispiel Portfoliooptimierung, ...ein zentraler Punkt ist, wie man Risiko überhaupt definiert und erfasst, weil es sehr unterschiedlich ist, wie man jetzt Risiko definieren kann, ob es jetzt darum geht, dass du Varianzen hast, ...dass du Quantile einer Verteilung anschaut, Expected short fall von einer Verteilung anschaut, also das sind jetzt ganz unterschiedliche Aspekte eigentlich, da sind auch Risikomaße sehr relevant, also das Risiko ist eine ganz wesentliche Entwicklung in der Finanzmathematik, ...“

Im Laufe der Untersuchungen kristallisierten sich auch Subideen heraus, wie Diversifikation und Nutzen. Erstere ist eine Strategie zur Risikominimierung. Zweitere erklärt Phänomene des Agierens von Individuen auf dem Finanzmarkt. Auch der Begriff des „Hedgen“ fällt zum Teil in diese *zentrale Idee*. Hedgen beinhaltet zwei Aspekte, den der *Replikation* zum Bewerten von Derivaten und den des Absicherns von Risiko. Zweiteren sehen wir in dieser Idee beheimatet.

10.3.1 Zeitkriterium

Im Folgenden werden einige wichtige Ereignisse dieser Idee in der Geschichte beschrieben. Wo soll der Beginn der Idee angesiedelt werden?

Das Absichern (Hedgen) hat eine lange Geschichte und markiert in diesem Kriterium die zeitlich früheste Erwähnung. Im Wesentlichen datiert man den Beginn des Derivathandels (im ursprünglichsten Sinne zum Absichern vor Risiken z.B. durch Naturgewalten) in das zweite Jahrtausend v. Chr. und verortet ihn im damaligen Mesopotamien. Im Falle einer Missernte (z.B. durch Wetterkapriolen) erließ man den Bauern die Zinszahlungen (vgl. GABATH, 2011, S. 185).

„If anyone owe a debt for a loan, and a storm prostrates the grain, or the harvest fall, or the grain does not grow for lack of water; in that year he need not give his creditor any grain, he washes his debt-tablet in water and pays no rent for this year.“ (HOOKER, 1910, zitiert nach GABATH, 2011, S. 185)

Wie viele (finanz)mathematische Überlegungen zu dieser Zeit getätigt wurden, bleibt allerdings fragwürdig. So blicken wir zu einem anderen Aspekt der Idee *Handhabung von Risiko*, nämlich zur **Nutzentheorie**. Ein gewaltiger zeitlicher Sprung hin zur Familie der BERNOULLIS steht bevor.

FM1: „Ich möchte mit Bernoulli anfangen, wegen Nutzentheorie“

Ursprünglich war es NICOLAUS (I.) BERNOULLI im Jahre 1713, der das „St. Petersburg Paradoxon“ in einem Briefwechsel mit MONTMORT erwähnte.

„Peter tosses a coin in the air repeatedly until it falls heads up. If this occurs on the first throw, he pays Paul \$1.00; if this occurs first on the second throw, he pays \$2.00; on the third throw, \$4.00; on the fourth throw, \$8.00; and on the n th throw, $\$2.00^{n-1}$. What is the maximum amount Paul should pay for this game?“
(STIGLER, 1950, S. 373)

DANIEL BERNOULLI lieferte 25 Jahre später eine interessante Antwort über den Nutzenbegriff, durch ihn erlangte das Problem auch den Namen „St. Petersburg Paradoxon“. Das Paradoxe liegt an der Findung eines fairen Preises für die Teilnahme am Spiel. Das übliche Vorgehen über die Berechnung des Erwartungswerts, der in diesem Fall unendlich ist, widerspricht der menschlichen Intuition. Sei nun X die Zufallsvariable, die den Wert des Gewinns bei Spielende angibt.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Ein Spieler sollte also bereit sein, einen beliebig großen Betrag für die Teilnahme an dem Spiel zu bezahlen. Wenn man bedenkt, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn von $1024 = 2^{10}$ kleiner als Eintausendstel ist, dann versteht man, warum nur wenige Personen bereit sind einen Betrag von mehr als 5 \$ zu zahlen (vgl. HENS/RIEGER, 2010, S. 24). DANIEL BERNOULLI bezieht den verschwindenden Grenznutzen mit ein. Für ihn erschien es sehr vernünftig, dass zusätzliches Vermögen zu zusätzlichem Nutzen führt und dass der Grenznutzen indirekt proportional zum aktuellen Vermögen ist. Seien u der Nutzen, x das aktuelle Vermögen und k eine Konstante, dann gilt:

$$\begin{aligned} u'(x) &= k \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{du}{dx} &= k \cdot \frac{1}{x} \\ du &= \frac{k}{x} \cdot dx \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich lösen, man erhält:

$$u(x) = k \cdot \log(x)$$

Sei für die folgende Betrachtung $k = 1$. Der Erwartungsnutzen U , also der Erwartungswert des Nutzens, ergibt:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \log(2^{i-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot (i-1) \cdot \log(2) \\ &= \log(2) \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \right) = \log(2) \end{aligned}$$

Der Wert $\log(2)$ repräsentiert einen Nutzenwert. Ein nach der hier verwendeten Nutzenfunktion fairer Preis für die Teilnahme an dem Spiel ist $\log(2)$ \$. Dieser hat denselben Nutzenwert wie der Erwartungsnutzen. Das Paradoxon ist dabei aber nicht im Allgemeinen gelöst. Bei einer Auszahlungsfunktion von e^{2^k} hat man bei dieser Nutzenfunktion wieder dasselbe Problem wie zuvor. Allgemeiner lässt sich zur jeder stetigen Nutzenfunktion eine Auszahlungsfunktion finden, sodass das Paradoxon wieder zutrifft. Personen wie BENTHAM, VON NEUMANN und MORGENSTERN prägten und entwickelten diese Theorie weiter. Ersterer, BENTHAM, der im 18. Jh. wirkte, betrachtete die Messung von Freude („pleasure“) und Qual („pain“). Er unterschied dabei vier Dimensionen: Intensität, Dauer, Sicherheit und Nähe („propinquity“). Unter dem Begriff Nutzen verstand er:

„By utility is meant that property in any object, whereby it tends to produce benefit, advantage, pleasure, good, or happiness, (all this in the present case comes to the same thing) or (what comes again to the same thing) to prevent the happening of mischief, pain, evil, or unhappiness to the party whose interest is considered: if that party be the community in general, then the happiness of the community: if a particular individual, then the happiness of that individual.“
(BENTHAM, 1781, S. 1 f.)

MORGENSTERN und VON NEUMANN bearbeiteten das Thema umfassend. Sie bestimmten den Ausdruck Erwartungsnutzen (vgl. Definition 4 auf S. 95) und arbeiteten damit vor allem im Bereich der Spieltheorie. An dieser Stelle sei das berühmte Werk aus dem Jahr 1944 erwähnt „Theory of Games and Economic Behavior“.

Wenn man mit dem Begriff „Nutzen“ arbeitet, dann bedarf es eines Klarmachens des Begriffes, denn es schwingt eine gewisse Unklarheit mit. Steckt im Nutzen Wert und Risiko drin? Ist der erwartete Nutzen eine Funktion des Erwartungswerts und des Risikos? Die Idee des Grenznutzens drückt lediglich eine Höhenpräferenz des Entscheidungsträgers aus. Es gehen auch Risikopräferenzen des Entscheidungsträgers mit ein.

MORGENSTERN und VON NEUMANN erarbeiteten einen axiomatischen Zugang für rationales Verhalten.

Seien $L1$, $L2$ und $L3$ Lotterien. Eine Lotterie ist ein abstraktes Konstrukt, welches unsichere Auszahlungen modelliert. Man schreibt z.B. $L1 = (x_1; p_1 \mid \dots \mid x_n; p_n)$ wobei x_i die Höhe der Auszahlung und p_i die Wahrscheinlichkeit dieser Auszahlung angibt.

- Ordinalprinzip: hier verlangt man die Vergleichbarkeit $L1 < L2$, $L1 = L2$ und $L2 > L1$, sowie die Transitivität $L1 > L2 \wedge L2 > L3 \Rightarrow L1 > L3$
- Stetigkeitsaxiom: Wenn die Lotterien $L1 = (e; 1)$, $L2 = (e_1; p \mid e_2; (1-p))$ zur Auswahl stehen mit $e_1 > e > e_2$, dann gibt es ein p , für das beide Alternativen bzw. Lotterien als gleichwertig betrachtet werden.
- Unabhängigkeitsaxiom: Wenn für zwei Lotterien $L1 > L2$ gilt, so muss auch für alle Lotterien $L3$ und alle $p \in (0, 1)$ gelten:⁶

$$L1' = p \cdot L1 + (1-p) \cdot L3 > p \cdot L2 + (1-p) \cdot L3 = L2'$$

⁶Die Zahl p wird nur mit den Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen Lotterie multipliziert. Unter der Addition ist ein Hinzukommen einer neuen Alternative zu verstehen, z.B. $0,75(6000; 1) + 0,25(8000; 0,8 \mid 0; 0,2) = (6000; 0,75) + (8000; 0,2 \mid 0; 0,05) = (8000; 0,2 \mid 6000; 0,75 \mid 0; 0,05)$

- Dominanzprinzip: Es seien zwei einfache Chancen gegeben, die sich nur nach der Wahrscheinlichkeit unterscheiden, nach dem Dominanzprinzip wird diejenige Alternative gewählt, bei der der höhere Wert mit der größeren Wahrscheinlichkeit auftritt.

MORGENSTERN und VAN NEUMANN konnten die Existenz einer Erwartungsnutzenfunktion V für eine, sich nach den oben aufgelisteten Axiomen rational verhaltende, Person nachweisen, mit der Eigenschaft: $L1 < L2 \Leftrightarrow V(L2) < V(L3)$. Unter einer Erwartungsnutzenfunktion versteht man eine Funktion V mit $V(X) = \mathbb{E}[u(X)]$, wobei X eine Zufallsvariable ist. Diese benötigt man für Entscheidungen unter Unsicherheit, da der Nutzen einer getroffenen Entscheidung nicht a priori bekannt ist.

Diese Axiome sind aber nicht unumstritten. In empirischen Versuchen wurde festgestellt, dass Menschen diese Axiome nicht einhalten. Das Allais-Paradoxon, geht auf MAURICE ALLAIS zurück, zeigt auf, dass Menschen das Unabhängigkeitsaxiom verletzen.

Beispiel 2. Den Probanden werden hintereinander jeweils zwei Lotterien zur Wahl gestellt. Bei der ersten Auswahlmöglichkeit müssen sie zwischen $L1$ und $L2$ wählen

$$\begin{aligned} L1 &: (6000; 1) \\ L2 &: (8000; 0, 8 \mid 0; 0, 2) \end{aligned}$$

Bei der zweiten Auswahlmöglichkeit steht eine Wahl zwischen $L3$ und $L4$ an:

$$\begin{aligned} L1' &: (6000; 0, 25 \mid 0; 0, 75) \\ L2' &: (8000; 0, 2 \mid 0; 0, 8) \end{aligned}$$

Der/die Leser/in sei dazu aufgefordert, ebenfalls eine Entscheidung zu treffen.

Die meisten Menschen wählen bei der ersten Auswahlmöglichkeit $L1$ und bei der zweiten $L2'$. Es gilt also $L1 > L2$ und $L2' > L1'$. Wenn $L3 = (0; 1)$ ist, dann gilt

$$\begin{aligned} L1' &= \frac{1}{4}L1 + \frac{3}{4}L3 \\ L2' &= \frac{1}{4}L2 + \frac{3}{4}L3 \end{aligned}$$

Aus dem Unabhängigkeitsaxiom folgt für $L1 > L2$ und $p = 0, 25$

$$L1' = \frac{1}{4}L1 + \frac{3}{4}L3 > \frac{1}{4}L2 + \frac{3}{4}L3 = L2'$$

Das führt offensichtlich zu einem Widerspruch zum Unabhängigkeitsaxiom. Menschen entscheiden nicht gemäß den Axiomen rational (wahrscheinlich tun sie das generell eher nicht).

Zur Zeit spielt die Nutzentheorie noch immer eine wichtige Rolle. Es werden, vor allem durch empirische Experimente, immer wieder die Limitationen dieser Theorie aufgezeigt. Wenn man meint, dass diese Theorie daher keine Relevanz hat, kann man Folgendes entgegenbringen:

FM1: „Nutzentheorie ist sehr unvollständig, hat viele Fehler und eh, also sie ist sehr problematisch und das einzige was vielleicht noch problematischer ist, ist sie überhaupt beiseite zu lassen.“

Der nächste wichtige Strang ist die **Diversifikation**. Die Assoziierung mit HARRY MARKOWITZ und der Portfoliotheorie ist unvermeidbar. Dieser war es, der 1952 einen Meilenstein mit dem Artikel „Portfolio Selection“ im Journal of Finance setzte.

FM3: „Die nächste fundamentale Idee scheint mir von Markowitz, die Portfolio-Theorie. Also die Idee, dass - man mit Begriffen hantiert, die auf wahrscheinlichkeits-theoretischen Konzepten basieren, eben Varianz- und Erwartungswert, und dass man hier eine Optimierung durchführt, das erscheint mir außerordentlich wichtig und konzeptionell neu. Auch wenn die involvierte Mathematik sich auf lineare Algebra in endlich dimensionalen Räumen beschränkt, aber nichts desto weniger sind die Ideen hier ganz grundlegend.“

In der Praxis kannte man Diversifikation schon lange, selbst zu Zeiten SHAKESPEARS hatte man ein intuitives Verständnis davon. Der Kaufmann Antonio aus der „Kaufmann von Venedig“ von SHAKESPEARE sagt:

„Glaubt mir, das nicht; ich dank es meinem Glück:
Mein Vorschuß ist nicht **einem** Schiff vertraut,
Noch **einem** Ort; noch hängt mein ganz Vermögen
Am Glücke **dieses** gegenwärtigen Jahrs;
Deswegen macht mein Handel mich nicht traurig.“
(SHAKESPEARE zitiert nach MARKOWITZ, 1999, S. 5, Hervorhebungen von CD)

Diversifikation kannte man also schon vor MARKOWITZ, wie er auch selbst schreibt (vgl. MARKOWITZ, 1999, S. 5). Die Betrachtung von Varianz und erwarteter Rendite bei der Auswahl von Finanztiteln stellen die Grundidee der Portfoliotheorie dar. Die Unterscheidung zwischen effizienten und ineffizienten Portfolios zeichnet die Arbeit von MARKOWITZ aus. Er gilt als Vater der modernen Portfoliotheorie und bekam dafür im Jahr 1990 den Alfred-Nobel-Gedächtnispreis. WILLIAM SHARPE, der ebenfalls im Jahr 1990 den Alfred-Nobel-Gedächtnispreis verliehen bekam, entwickelte die Idee von MARKOWITZ weiter.

FM5: „... Ah, das CAPM⁷ ist die Weiterentwicklung der Portfoliooptimierung, ahm ja es kommt ganz darauf an, wo man den Anfang setzt, genau, ja, ja! ...“

SHARPE ging der Frage nach: „Was passiert, wenn alle die Portfoliotheorie von MARKOWITZ anwenden?“ Verblüffenderweise gibt es dann gar nicht so viele effiziente Portfolios, sondern nur mehr ein effizientes Portfolio, das Marktportfolio. Man bedenke, wenn der Markt eine zweite, bessere Sammlung an Assets nahelegt, dann würden alle Anbieter in diese investieren. Manche Aktien entwickeln sich besser als dieses Portfolio und manche eben schlechter. Jener Wert, der kennzeichnet, wie die Aktie auf den Markt reagiert, heißt Beta (β). Das „Capital Asset Pricing Modell“ (CAPM) von SHARPE reduziert zusätzlich den Berechnungsaufwand (vgl. MANDELBROT/HUDSON, 2009, S. 106 ff.). Das CAPM und die Portfoliotheorie fanden ihre Anwendungen vor allem in der Praxis. Finanzunternehmen verwenden diese und erweiterte Modelle bis heute (vgl. MANDELBROT/HUDSON, 2009, S. 97 f.).

Das Messen und Minimieren von Risiko, das Erklären risikobehafteter Handlungen am Finanzmarkt durch Individuen hat **heutzutage** äußerst viel Gewicht. Globale Wirtschaftskrisen wie die Finanzkrise 2007 tragen dazu bei, dass die oben genannten Taten mehr denn je

⁷Capital Asset Pricing Model

ihre Wichtigkeit in der Wissenschaft und Praxis haben.

Die angesprochene Krise lässt sich als Paradebeispiel für die Wichtigkeit der richtigen Verwendung von Kennzahlen und für das Messen von Risiko nennen. Zu ersteren: Der Vorstandsvorsitzende (engl. CEO) der J.P. Morgan Bank, DENNIS WEATHERSTONE, forderte im Jahr 1987 von seinen Angestellten, dass sie ihm täglich um 16:15 Uhr eine Kennzahl liefern, welche das Marktrisiko der Bank beschreibt (die sogenannte „4:15 p.m. number“). Die Analysten der Bank berechneten die Verteilung des gesamten Gewinns bzw. Verlusts der Bank. Die geforderte Kennzahl definierten sie als das 1%-Quantil dieser Verteilung. Allgemeiner versteht man darunter den kleinsten Wert W , sodass die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes beschränkt durch W einem Wert von 99% entspricht, siehe auch Definition 5 auf S. 99. Heutzutage spricht man in diesem Zusammenhang vom „Value at Risk“. In Anbetracht zu den Eigenkapitalvorschriften von Basel II verwendet man diese Zahl zur Berechnung des notwendigen Eigenkapitalwerts der Bank. Das Problem an dieser Kennzahl ist, dass sie nicht Subadditiv ist (siehe Definition 6 auf S. 99, für ein Gegenbeispiel siehe Beispiel 30 auf S. 158). Banken ist es nun möglich, dass sie ein risikobehaftetes Portfolio mit einem hohen „Value at Risk“ in viele kleine zerlegen, wo der Value at Risk Null ist. Diversifikationsaspekte werden also nicht berücksichtigt (vgl. SCHACHERMAYER, 2016, S. 10 ff.).

Ein Finanzprodukt, das durch falsche Bewertung der Ratingagenturen großen Schaden angerichtet hat, ist die „Collateralized debt obligation“, kurz CDO. Im folgenden Abschnitt soll aufgezeigt werden, wie wichtige die Finanzmathematik zum Messen von Risiko ist. Aus diesem Grund unterstreicht das Folgende auch die Aktualität der Idee *Handhabung von Risiko*. In einer simplen Erklärung geht es dabei um das Teilen des Risikos, beispielsweise bei Krediten. Die Banken teilen das Risiko ihrer Kredite untereinander auf. Um das Defizit der Informationsasymmetrie (die Bank die mit der Kreditnehmerin den Kreditvertrag verhandelt hat, weiß mehr als die anderen) zu beseitigen, entwickelte man die oben genannten strukturierten Produkte.

Wir betrachten an dieser Stelle das Beispiel aus SCHACHERMAYER, 2016: Wir nehmen an, dass eine Bank 1000 Kredite hat und einen Teil des Risikos los werden möchte. Man „wirft“ also alle Kredite zusammen und zerteilt sie in sogenannte „Tranchen“. Es gibt dann einen „Senior-Teil/Tranche“ einen „Mezzanine-Teil/Tranche“ und einen „Equity-Teil/Tranche“. Der/die Käufer/in, eine Bank, bekommt als Ausgleich für die Übernahme von Risiko Zinsen. Dabei ist das Risiko (beispielsweise) folgendermaßen aufgeteilt: Die „Mezzanine-Tranche“ muss einspringen, wenn mehr als 10% der Kredite ausfallen und die „Senior-Tranche“ muss einspringen, wenn mehr als 30% der Kredite ausfallen. Dabei verkauft die Bank meistens die „Senior-“ und die „Mezzanine-Tranche“ und behaltet die „Equity-Tranche“, jene Tranche die unmittelbar von Zahlungsfällen betroffen ist. Die Schwierigkeit liegt nun in der Preisbestimmung dieser Tranchen.

Es gilt also nun die Verteilung der Verluste dieser 1000 Kredite zu modellieren. Ein einfacher Zugang diese Verteilung zu modellieren, wäre eine multivariate Verteilungsfunktion zu bekommen, wenn diese Kredite als unabhängig angenommen werden würden. Das wäre verlockend, aber keine gute Idee, da die Ausfälle schlicht und einfach nicht unabhängig sind. LI schlug vor diese Verteilungen mit „Gaussian Copulas“ zu modellieren. Siehe Definition 17 auf Seite 157. Das Wort „Copula“ wurde 1959 von SKLAR das erste Mal benutzt und durch die Verwendung von LI zur Modellierung in der Finanzwelt weltberühmt. Die Angegebene Definition unterstreicht die noch immer bestehende Wichtigkeit des Messens von Risiko bzw.

des Messens der Ausfallwahrscheinlichkeit. Im „Wall Street Journal“ vom 12.9.2005 gelangte diese zur folgender Überschrift „How a formula ignited market that burned some big investors“.

Die Frage mit welcher Wahrscheinlichkeit die „Senior-Tranche“ von Verlusten betroffen ist, wird mathematisch wie folgt beantwortet. Die Banken kennen sehr gut die Wahrscheinlichkeit p_i für den Ausfall eines einzelnen Kredits und können dadurch die Kovarianzmatrix bestimmen. Sei nun $\mathbb{P}_\rho$ das passende Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega = \mathbb{R}^{1000}$:

$$\mathbb{P}_\rho [\#\{i : \text{Kredit } A_i \text{ ist zahlungsunfähig}\} > 300]$$

Eine Normalverteilung eignet sich jedoch nicht gut für extreme Ereignisse, die aber genau in diesem Fall eine wichtige Rolle spielen. EMBRECHT, NEIL und STRAUMANN haben darauf schon im Jahr 1998 hingewiesen (vgl. SCHACHERMAYER, 2016, S. 12 ff.).

Vorschriften für Banken, wie Basel I, II, III, sorgen dafür, dass die Domäne Finanzmathematik aktuell sehr mit den verschiedenen Aspekten des Messens von Risiko beschäftigt ist und sein wird.

Alles begann im Jahre 1988 als vom „Basler Ausschuss“ die „Basler Eigenkapitalempfehlung“ formuliert wurden. Im Zuge einer Bankenrechtskoordinierungsrichtlinie wurde diese Empfehlung zu europäischem Recht und in weiterer Folge auch zu nationalem Recht einiger Staaten. Diese erste Empfehlung war in ihren mathematischen Grundzügen recht einfach gestrickt: „Eine Bank muss eine Mindesteigenkapitalausstattung in Höhe von mindestens 8% der risikogewichteten Aktiva aufweisen.“ Es gab vier unterschiedliche Risikoklassen: 0% für OECD-Staaten, 20% für Kredite und Banken mit Sitz in den OECD-Staaten,⁸ 50% für grundpfandrechtliche gesicherte Realkredite und 100% für alle anderen Kredite z.B. für Unternehmen.

Für eine Hypothekarkredit in der Höhe von 100 000 € ergibt eine Eigenkapitalunterlegung von $100\,000 \cdot 0,05 \cdot 0,08 = 4000$ €.

Damals konnte auch noch vielmehr unter dem Eigenkapital geführt werden als heute.⁹ Der wachsende Derivatehandel führte zur weiteren Empfehlungen des „Basler Ausschusses“ für die Zins-, Kurs-, Fremdwährungs- und Rohstoffrisiken. Das war der Startschuss für mathematische Modellierungen im Rahmen dieser Vorschriften, denn Banken konnten sich aussuchen, ob sie ein Standardmodell oder ein bankinternes Modell, welches einer Aufsichtsbehörde vorgelegt werden muss, verwenden. Zweiteres ergibt meist eine geringere Eigenkapitalforderung, da die eignen Risiken in der Regel besser abgeschätzt werden können.

Basel II veränderte einiges, so wurde die Definition des Eigenkapitals überarbeitet, wobei an der Forderung nach 8% beibehalten wurde. Anforderungen an das Mindesteigenkapital wurden für das Kredit-, Markt- und das operationelle¹⁰ Risiko gestellt. Bei der Messung dieser Risiken hat die Bank wieder die Wahl zwischen Standardmethoden und bankinternen Methoden, die wieder extern überprüft werden müssen. Für Kredite ergab sich eine Unterlegung in der Höhe von „Kreditsumme · Risikogewicht · 0,08“. Das Risikogewicht wird entweder

⁸Griechische Staatsanleihen waren nach dieser Systematik mit 0% zu unterlegen. Das gilt auch noch weiter, da nach europäischen Recht beschlossen wurde, dass Staaten des europäischen Wirtschaftsraumes mit 0% zu unterlegen sind.

⁹Beispielsweise konnten Nachrangverbindlichkeiten als Eigenkapital unterlegt werden. Im Falle einer Insolvenz werden zuerst alle vorrangigen Gläubiger bedient.

¹⁰Darunter versteht man die Gefahr von Verlusten, verursacht durch bankinterne Systeme, Verfahren und Mitarbeiter.

intern modelliert oder im Sinne des Standardansatz nach der Einschätzung anerkannter Ratingagenturen¹¹ bestimmt.

Aufgrund der letzten Finanzkrise wurden die Richtlinien abermals verschärft und Basel III löst seit 2013 schrittweise Basel II ab¹². Die qualitative Zusammensetzung des Eigenkapitals wurde abermals verändert. Ein verpflichtender Kapitalpuffer ist nun vorgesehen, denn das zurückgelegte Eigenkapital darf nicht zur Deckung etwaiger Verluste verwendet werden, das würde im schlimmsten Fall mit dem Entzug der Bankerlaubnis enden.¹³ Der angesprochene Puffer soll eben solche Verluste decken können. Die bankinternen mathematischen Modellierung bleiben fakultativ aufrecht. (vgl. LESSENICH, 2014, S. 15 ff.)

Auch auf universitärer Seite sind die Auswirkungen der Forderungen ein Forschungsobjekt.

FM1: „Ich habe gerade die ... von der LSE und den ... aus Florenz da, und mit denen überlege ich, wie man da halt zeigen kann, dass da ein gewisser Algorithmus konvergiert. Es wäre eine Hoffnung, dass es in Basel 4 Eingang findet. Ich meine, da sind wir wirklich halt bei der ganz aktuellen Forschung.“

Die Risikomessung ist im Bereich der Finanzmathematik vor allem durch die angesprochenen Abkommen ein höchst aktuelles Thema

10.3.2 Horizontalkriterium

Risiko spielt in den verschiedensten Gebieten der Finanzmathematik eine Rolle, wiederum möchten wir insbesondere die (Sub)Ideen Diversifikation (im Rahmen der Portfoliooptimierung) und die Nutzentheorie behandeln.

FM2: „Was eben wichtig ist, sind eben die Begriffe des Hedging und Bepreisung. Ich meine, das ist genau in diesem Bereich wieder. Natürlich gibt es eben auch Portfoliooptimierung. Das sind wahrscheinlich die drei größten Gebiete, also Hedging und Bepreisung und dann eben Utility Maximization ...“

Dass diese Ideen funktionieren, liegt meist tief in der Mathematik.

FM1: „Ich mein Diversifizierung, also ich mein die meisten Grenzwertsätze - - - stimmen halt, weil - - ja, ah, wenn man - - orthogonale Sachen zusammenzählt, dann sagt einem der Pythagoras - -, dass es auf eine ganz bestimmte Art und Weise wächst. Also im Grunde ist Pythagoras dafür verantwortlich, dass sich Risiko diversifiziert und genauso wie er für einen zentralen Grenzwertsatz verantwortlich ist.“

Die Idee *Handhabung von Risiko* spielt in verschiedenen Bereichen der Finanzmathematik eine wichtige Rolle. In der Portfoliooptimierung versucht man bei gegebenen Anlagen, die beste Aufteilung seines zur Verfügung stehenden Vermögens auf diese Anlagen zu finden. Diese Betrachtung berücksichtigt nicht nur den zu erwarteten Gewinn einer Aktie, sondern auch ihr Risiko. Die kombinierte Betrachtung von Rendite und Risiko, nach MARKOWITZ

¹¹„Moody’s“, „Fitch“, „Standard & Poor’s“

¹²Das passiert, um den Banken mehr Zeit für die Umstellung auf die neuen Richtlinien zu geben.

¹³Diese widersprüchliche Situation nennt man „regulatorisches Paradoxon“.

Erwartungswert und Varianz, führt zur Portfoliooptimierung. Dieser Ansatz der Diversifikationsaspekte ermöglicht auch eine Verbindung mit der Nutzentheorie. Im Folgenden wollen wir die Portfoliooptimierung darstellen.

Seien $A_1, \dots, A_n$ risikoreiche Finanztitel, die Abkürzung suggeriert die Betrachtung von Aktien, es sind aber auch andere Wertpapiere denkbar. Von diesen Papieren kennt man zumindest die Erwartungswerte μ_i und Kovarianzen σ_{ij} (bzw. eben die Varianzen σ_{ii})¹⁴ der Renditen, bzw. Erträge für $i, j \in \{1, \dots, n\}$, sowie deren Preise $p_1, \dots, p_n$ beim Kauf. Wir nehmen nun an, dass wir ein zur Verfügung stehendes Kapital von $K > 0$ haben. Nun möchten wir im Sinne einer uns innewohnenden Risiko-Aversität, bei vorgegebenem Ertrag das Risiko minimieren, indem wir die beste Aufteilung $x_1, \dots, x_n$ auf die zur Auswahl stehenden Finanztitel finden (Das Problem lässt sich auch umgekehrt formulieren: wir suchen bei gegebenem Risiko, diejenige Aufteilung $x_1, \dots, x_n$, die uns den maximalen erwarteten Ertrag liefert). Das erhaltene Optimierungsproblem lautet:

$$f(x) = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j$$

$$n_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \leq K \quad (2)$$

$$n_2(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \geq \mu_o \quad (3)$$

$$x_i \geq 0 \quad (4)$$

Die erste Nebenbedingung (2) ist durch unser zur Verfügung stehendes Kapital K vorgegeben, es kann nicht mehr Geld als K ausgegeben werden. Die zweite Bedingung (3) drückt unseren vorgegebenen erwarteten Ertrag μ_o aus, wobei wir selbstverständlich nichts dagegen haben, wenn der erwartete Ertrag größer ist als unsere Vorgabe. Die dritte Nebenbedingung (4) thematisiert Leerverkäufe, welche in diesem Fall verboten sind. Unter einem Leerverkauf versteht man das Ausborgen eines Wertpapiers, welches, ohne es wirklich zu besitzen, verkauft wird und zu einem späteren Zeitpunkt gekauft wird, um es dem Käufer zu geben.

Bei diesem Optimierungsproblem handelt sich um eine konvexe Programm, mit Hilfe des Satzes von KUHN-TUCKER lassen sich Gleichungen finden, sodass das Problem gelöst werden kann.

Eine Visualisierung des Problems erfolgt mit dem μ - σ -Diagramm, siehe Abb. 7. Dabei werden für jede Aufteilung $x_1, \dots, x_n$ die Werte σ und μ berechnet. Anschließend wird der Punkt mit den Koordinaten $(\sigma \mid \mu)$ in das Diagramm eingetragen. Es ergibt sich bei zwei Aktien ein Parabelstück, wenn Leerverkäufe nicht erlaubt sind, und eine Parabel, wenn Leerverkäufe erlaubt sind. Die wirklich interessanten Kombinationen liegen auf der sogenannten Effizienzlinie (grün), da es hier für jedes vorgegebene Risiko σ keine bessere erwartete Rendite μ gibt.

¹⁴Gewöhnlich wird eine Varianz mit σ^2 bezeichnet. Wenn man die Schreibweise der Kovarianzen σ_{ij} verwendet, dann ergibt sich für σ_{ii} eine Varianz der Rendite des Finanztitels A_i . Auf den folgenden Seiten, siehe zum Exempel Beispiel 3 auf Seite 94, sind in dieser Arbeit Standardabweichungen wie üblich mit σ und Varianzen mit σ^2 notiert.

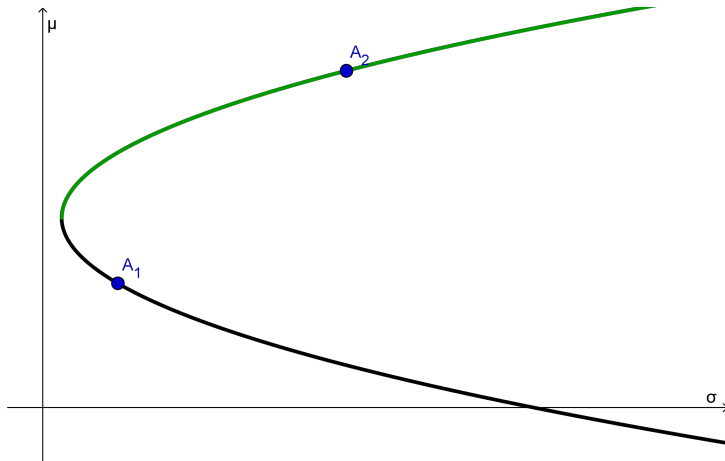


Abb. 7 Kombinationsmöglichkeiten bei zwei Finanztitel A_1 und A_2

An einem Spezialfall des obigen Optimierungsproblems lässt sich zeigen, dass Diversifikation im Sinne der obigen Problemstellung ein optimales Ergebnis liefert.

Beispiel 3. Wir betrachten zwei Finanztitel A_1 und A_2 und nehmen eine „kuriose“ Situation an, in der wir nur eine Geldeinheit zur Investition zur Verfügung haben: beide Titel kosten gleich viel $p_1 = p_2 = 1$, die Erwartungswerte der Rendite sind gleich $\mu_1 = \mu_2 = 1$, die Standardabweichungen σ_1 und σ_2 sind bei beiden gleich 1 und die Kovarianz ist identisch 0. Es handelt sich also um zwei Finanztitel die nach unseren Parametern gleich gut sind. Wie soll nun das Vermögen aufgeteilt werden? Hat eine Aufteilung seines verfügbaren Vermögens in so einem Fall überhaupt Sinn? Dazu erstellen wir folgendes Optimierungsprogramm:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= x_1^2 + x_2^2 \text{ da } \sigma_1 = \sigma_2 = 1 \text{ ist} \\ \mu_p &\leq x_1 + x_2 \text{ da } \mu_1 = \mu_2 = 1 \text{ ist} \end{aligned} \quad (5)$$

$$1 \geq x_1 + x_2 \quad (6)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Die ersten beiden Nebenbedingungen (5) und (6) reduzieren sich zu der Gleichung $x_1 + x_2 = 1$ und somit kann dieses Optimierungsproblem einfach gelöst werden. Wir betrachten die Zielfunktion $\sigma_p(x) = x_1^2 + (1 - x_1)^2 = 2x_1^2 - 2x_1 + 1$, deren Graph eine nach oben offene Parabel ist. Die erste Koordinate des Scheitelpunkts ist $x_{1\min} = \frac{1}{2}$. Das Abgleichen der Randwerte mit dem Funktionswert an der verdächtigen Stelle $x_{1\min}$ für ein globales Minimum liefert die endgültige Bestätigung $\sigma_p^2(0) = \sigma_p^2(1) = 1 > \frac{1}{2} = \sigma_p^2(\frac{1}{2})$. Man berechnet leicht $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

Das Ergebnis dieses Beispiels begründet, dass Diversifikation eine Art von Risikominimierung ist. Obwohl die beiden Finanztitel A_1 und A_2 gleich gut sind, ist es besser im Sinne eines niedrigeren Risikos sein zur Verfügung stehendes Vermögen auf beide aufzuteilen. Alles auf eine Karte, einen Finanztitel, zu setzen, minimiert das Risiko nicht. Eine Verallgemeinerung dieser Aufgabe liest man unter Beispiel 29 auf S. 158. Diese Aufgabe lässt sich analog auf n Finanztitel erweitern, das Ergebnis, am besten ist eine bestimmte Aufteilung seines Vermögens auf alle A_i , bestätigt den Nutzen der Diversifizierung.

Wir betrachten nun die **Nutzentheorie** und wollen ihre für die Finanzmathematik relevanten Grundlagen in Kürze darstellen. Dazu holen wir etwas weiter aus. Zuallererst bedarf

es einer Funktion, die jedem Vermögenswert einen Nutzen zuordnet. Nach BERNOULLI haben wir zwei Anforderungen an eine Nutzenfunktion, siehe Kapitel 10.3.1. Erstens: Mehr Vermögen ist besser als weniger Vermögen, das entspricht einer streng monoton steigenden Funktion. Zweitens: Der relative Nutzenzuwachs nimmt mit steigendem Vermögen ab, das entspricht einer konkaven Funktion.

Definition 2. (Nutzenfunktion) Eine Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $u : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Nutzenfunktion, wenn sie streng monoton steigend und konkav ist.

Der Begriff Nutzen ist von schwieriger Natur. Je nach Individuum und Gut sieht die Nutzenfunktion anders aus. Des Weiteren kann eine Nutzenfunktion auch als Risikonutzenfunktion betrachtet werden. In so eine Funktion gehen auch die Risikopräferenzen des Individuums mit ein. Unter recht speziellen Umständen berücksichtigt man auch risikoaffine Investoren am Finanzmarkt. Diese besitzen dann nicht mehr eine konkave, sondern eine konvexe Nutzenfunktion, solche Betrachtungen sind aber recht selten. Allerdings drückt der reine Nutzen lediglich eine Höhenpräferenz aus, in einer Risiko-Nutzen-Betrachtung steckt in der Krümmung der Nutzenfunktion der Grad der Risikoaversität. Es hängt also davon ab, ob es sich um einen risikoaversen oder einen risikoaffinen Investor handelt. Es gibt Maße, die die Risikoeinstellung der Investoren messen. Zum Beispiel das Arrow-Pratt-Maß:

Definition 3. (Arrow-Pratt-Maß) Sei u eine Nutzenfunktion, dann heißt

$$ARA(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

das Arrow-Pratt-Maß der absoluten Risikoaversion (Arrow-Prattsches-Risikoeinstellungsmaß).

Für eine konkrete Nutzenfunktion berechnet sich die besagte Maßzahl folgendermaßen:

Beispiel 4. Sei u mit $u(x) = \sqrt{x}$ eine Nutzenfunktion, dann gilt $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und $u''(x) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$. Das Arrow-Pratt-Maß ergibt

$$ARA(x) = \frac{1}{2x}.$$

Man bemerkt sofort, dass positive lineare Transformationen keinen Einfluss auf den Nutzen haben. Eng damit verbunden ist der Erwartungsnutzen, er dient vielmals als Entscheidungsregel.

Definition 4. (Erwarteter Nutzen) Unter dem erwarteten Nutzen U einer Zufallsvariable X versteht man

$$U = \mathbb{E}[u(X)].$$

Mit Hilfe des Erwartungsnutzens erklärt man, oder besser versucht man, mathematisch das Verhalten von Menschen zu modellieren. Angenommen eine Person wird vor die Wahl gestellt: Entweder sie bekommt 6,6€ sicher oder sie hat die Chance 1€ mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% zu gewinnen oder 15€ mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% zu gewinnen. Obwohl der Erwartungswert der Chance der beiden Fällen 6,6€ beträgt, entscheidet sich jede risikoscheue Person für die sicheren 6,6€. Woran liegt das? Die Nutzentheorie erklärt

dieses Phänomen mit dem Erwartungsnutzen. Dabei berechnet man den Erwartungswert der Nutzenwerte. Wir unterstellen der Person eine risikoaverse Nutzenfunktion u mit $u(x) = \sqrt{x}$. Sei X die Höhe des Gewinns. Es gilt:

$$\mathbb{E}[u(X)] = u(1) \cdot 0,6 + u(15) \cdot 0,4 \approx 2,15 < 2,57 \approx u(6,6)$$

Der Nutzen $2,57^{15}$ von $6,6\text{€}$ ist größer als der erwartete Nutzen der Chance mit $2,15$ (siehe die zweite Achse in Abb. 8). Das Urbild des Erwartungsnutzens wird Sicherheitsäquivalent genannt (siehe SÄ in der Zeichnung). Das ist jener sichere Betrag, zwischen dem die Person mit der unterstellten Nutzenfunktion u und der betrachteten Chance (Alternative) indifferent ist.

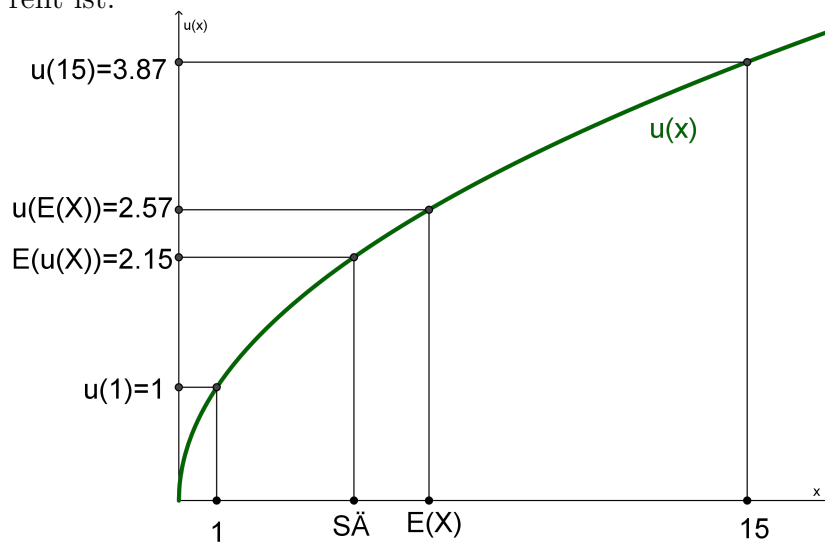


Abb. 8 Graph einer Nutzenfunktion

Ausgestattet mit diesen Begriffen lässt sich diese Theorie im Rahmen eines Binomialmodells für Aktienkurse und der Portfoliooptimierung einsetzen.

Beispiel 5. Wir betrachten ein diskretes Finanzmarktmodell in einer Periode mit einer Aktie, dessen Kurs einem Binomialmodell folgt, und einer sicheren Anlagemöglichkeit (Bankkonto) mit 25% Zinssatz für die betrachtete Periode. Zum Zeitpunkt 0 ist die Aktie 4€ Wert und zum Zeitpunkt 1 beträgt ihr Wert je nachdem 8€ oder 2€ . Des Weiteren seien auch die Wahrscheinlichkeiten bekannt, mit denen der Kurs der Aktie steigt ($p = \frac{2}{3}$) bzw. fällt ($1 - p = \frac{1}{3}$).

¹⁵Es handelt sich hierbei wirklich um eine dimensionslose Größe.

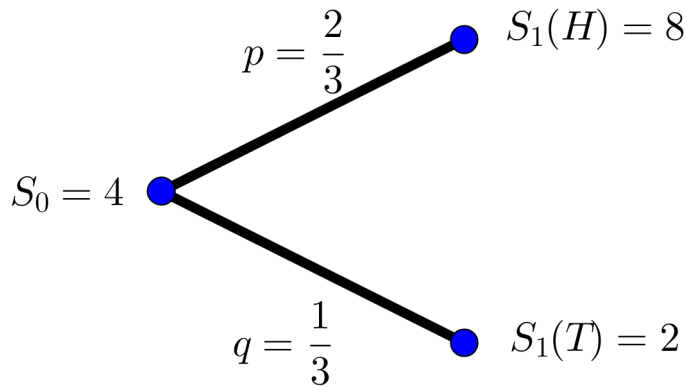


Abb. 9 Binomialmodell eines Aktienkurses

Die Frage, die sich nun für einen Investor stellt, lautet, welchen Anteil seines Vermögens von 4 € soll er in die Aktie investieren und welchen Anteil in die sichere Anlage? Der erwartete Nutzen soll dabei maximal sein. Bei dem Investor gehen wir von einer Nutzenfunktion u mit $u(x) = \ln(x)$ für $x > 0$ aus, an Stelle $x = 0$ gilt Folgendes $u(0) = -\infty$. Sei δ_0 der Anteil des Vermögens, der in die Aktie investiert wird.

In diesem Modell kaufen wir zu Beginn Aktien vom Anteil δ_0 . Sei X_1 jene Zufallsvariable, die den Wert des Portfolios zum Zeitpunkt 1 angibt. Im Fall eines Anstiegs des Aktienkurses haben wir ein Vermögen von

$$X_1(H) = 8 \cdot \delta_0 + \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot (4 - 4 \cdot \delta_0) = 3 \cdot \delta_0 + 5$$

Im Fall eines Fallens ergibt sich:

$$X_1(T) = 2 \cdot \delta_0 + \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot (4 - 4 \cdot \delta_0) = -3 \cdot \delta_0 + 5$$

Es ergibt sich ein erwarteter Nutzen von

$$E[\ln(X_1)] = \frac{2}{3} \cdot \ln(3 \cdot \delta_0 + 5) + \frac{1}{3} \cdot \ln(-3 \cdot \delta_0 + 5)$$

Durch Ableiten und Nullsetzen erhalten wir einen Kandidaten für einen maximalen erwarteten Nutzen.

$$\begin{aligned} (E[\ln(X_1)])' &= \frac{2}{3 \cdot \delta_0 + 5} + \frac{1}{3 \cdot \delta_0 - 5} \\ \frac{2}{3 \cdot \delta_0 + 5} + \frac{1}{3 \cdot \delta_0 - 5} &= 0 \\ \delta_0 &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Da der Investor nicht weniger als nichts und nicht mehr als alles in sein Vermögen stecken kann, überprüft man die Funktionswerte der Ränder 0 und 1, sowie $\frac{5}{9}$.

0	$\frac{5}{9}$	1
$\ln(5) \approx 1,61$	$\frac{\ln(\frac{4000}{27})}{3} \approx 1,67$	$\frac{7}{2} \cdot \ln(2) \approx 1,62$

Tab. 4 Funktionswertevergleich

Den größten Nutzen hat der Anleger, wenn er $\frac{5}{9}$ seines Vermögens in die Aktie investiert. Das sind in diesem Fall ca. 2,22€.

Die **Risikomessung** ist vor allem in der Praxis, also bei Banken und Investmenthäusern von großer Bedeutung. Die berühmten Basler Abkommen (Basel I, Basel II und Basel III) stellen Forderungen an Banken, die sich im Risikomanagement niederschlagen. Eine Art das Risiko von Vermögenspositionen (Portfolios) zu messen, ist der Value at Risk (*VaR*), siehe Kapitel 10.3.1, wo es heißt der *VaR* ist der kleinste Wert W , sodass die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes beschränkt durch W einem Wert von 99% entspricht. Eine Verlust-Gewinn-Zufallsvariable nimmt negative und nicht-negative Werte an. In einem einfachen Fall entspricht die Situation dem Bild von Abb. 10.

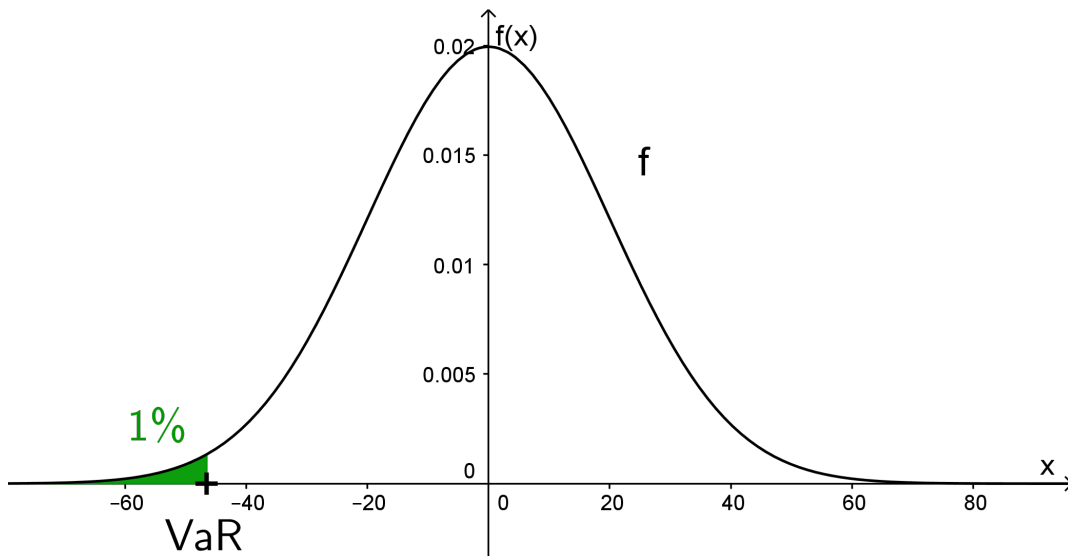


Abb. 10 Value at Risk einer normalverteilten Verlust-Gewinn-Zufallsvariable

Der Erwartungswert der Gewinn-Zufalls-Variable muss nicht immer 0 sein. Im zweiten Fall entspricht die Situation dem Bild von Abb. 11.

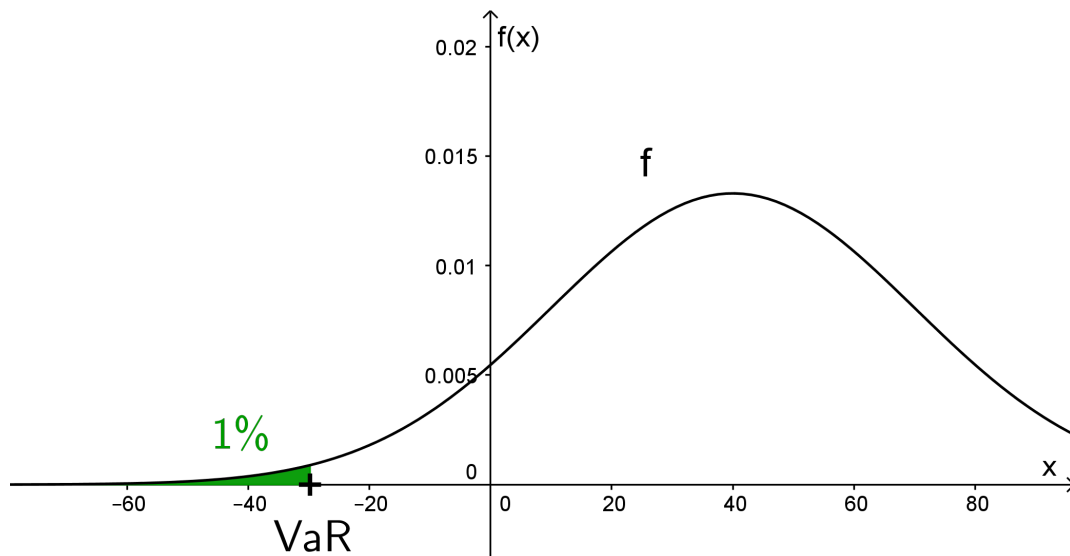


Abb. 11 Value at Risk einer normalverteilten Verlust-Gewinn-Zufallsvariable

Der VaR ist also die Lösung der Gleichung $F(x) = 0,01$, wenn F die Verteilungsfunktion der betrachtenden Verlust-Gewinn-Zufallsvariable ist. Wir definieren den VaR entsprechend der Herangehensweise.

Definition 5. (Value at Risk – VaR) Sei $\alpha \in (0, 1)$. Der α Value at Risk der Verlust-Gewinn-Zufallsvariable X ist genau das α Quantil von X und wird mit $VaR_\alpha(X)$ bezeichnet.

Um den VaR_α einer Verlust-Gewinn-Zufallsvariable zu berechnen, muss, wie schon oben exemplarisch erwähnt, die Gleichung $F(x) = \alpha$ gelöst werden. Diese ist im allgemeinen nicht eindeutig lösbar, man benötigt die verallgemeinerte links-stetige Umkehrfunktion $F^{(-1)}$. Es gilt dann

$$F^{(-1)}(\alpha) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq F(x)\} \quad \forall \alpha \in (0, 1)$$

Das ist nichts anderes als die Definition des α -Quantils. Der gesuchte Value at Risk berechnet sich durch $VaR_\alpha(X) = G(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq F(x)\}$. Sofern die Verteilungsfunktion bekannt ist, stellt die Berechnung des VaR keine große Schwierigkeit dar. Meistens muss diese Verteilungsfunktion mit Hilfe statistischer Methoden berechnet werden.

Der Value at Risk stellt per se kein eigenes Forschungsgebiet der Finanzmathematik dar, Risikomaße hingegen schon. Der Value at Risk ist ein Maß für das Risiko einer Vermögensposition. Allerdings handelt es sich bei diesem Maß um kein kohärentes Risikomaß.

FM5: „...wesentlicher Punkt jetzt, ich denke jetzt immer an Risikomessung, ist mir jetzt eingefallen, Value at Risk, also die Probleme der Value at Risk-Messung, das es kein kohärentes Risikomaß ist ...“

Was versteht man unter einem kohärenten Risikomaß?

Definition 6. (kohärentes Risikomaß) Seien die Verlust-Gewinn-Zufallsvariablen $X, Y \in \mathcal{L}_1(\Omega)$. Ein Risikomaß $\rho : \mathcal{L}_1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist kohärent, wenn es die vier folgenden Eigenschaften erfüllt.

- Subadditivität $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

- Monotonie $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$
- positive Homogenität für $c > 0$ folgt $\rho(c \cdot X) = c \cdot \rho(X)$
- Translationsinvarianz für $c > 0$ folgt $\rho(X + c) = c + \rho(X)$

Warum eignen sich gerade solche Maße für die Risikomessung. Die Subadditivität berücksichtigt Diversifikationseffekte, die Summe der Einzelrisiken soll größer oder gleich dem Risiko der Summe sein. Im zweiten Punkt muss ein immer höherer Verlust auch ein immer höheres Risiko aufweisen. Die positive Homogenität berücksichtigt, dass die Vervielfachung des Verlustes einher geht mit einer Vervielfachung des Risikos. Die Einnahme eines bereits bekannten Verlustes ändert das Risiko entsprechend.

Die Problematik am *VaR* ist, dass er nicht subadditiv ist, wie im vorigen Kapitel 10.3.1 erwähnt. Ein Gegenbeispiel findet man unter Beispiel 30 auf Seite 158.

In der Portfoliooptimierung wird die Standardabweichung bzw. Varianz als Risikomaß verwendet. Dieses Maß erfüllt zwar die Subadditivität, da es bei der Portfoliooptimierung gerade um Diversifikation geht, scheint das klar, aber nicht die Monotonie.

Beispiel 6. Wir betrachten einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum mit

$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{A}$ ist die Potenzmenge und das Wahrscheinlichkeitsmaß hat die Form $P(\omega_i) = \frac{1}{3}$ mit $i \in \{0, 1, 2\}$. Wir definieren zwei Gewinn-Verlust-Zufallsvariablen X und Y .

$$X = \begin{cases} 0 & \omega = \omega_0 \\ 5 & \omega = \omega_1 \\ 10 & \omega = \omega_2 \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 14 & \omega = \omega_0 \\ 15 & \omega = \omega_1 \\ 16 & \omega = \omega_2 \end{cases}$$

Es gilt $X < Y$, aber $\sigma^2(X) = \frac{50}{3} > \frac{2}{3} = \sigma^2(Y)$.

Für ein Beispiel eines kohärenten Risikomaßes, siehe Definition 7 Seite 107.

Das **Hedging** ist in der Finanzmathematik äußerst wichtig, einerseits zur Absicherung für riskante Finanzgeschäfte, andererseits hilft dieses Prinzip bei der Ermittlung von Optionspreisen, siehe Kapitel 10.5. In diesem Fall möchten wir bei der Idee *Handhabung von Risiko* bleiben, also beim Absicherungsgedanken. Die folgende Aufgabe zielt auf diesen Aspekt ab und gibt einen Einblick in die Kunst eines perfekten Hedges, der in der Realität wesentlich schwieriger ist als im hier angenommenen Marktmodell.

Beispiel 7. Eine Traderin einer Bank bemerkt, dass sie ein „Ramschderivat“ im Wert von 1,20 Euro gekauft hat. Die Bank möchte den höchstwahrscheinlichen Totalverlust verhindern und noch die 25% der Zinsrate verdienen. Wie muss die Traderin agieren, so dass sie unabhängig davon, ob der Kurs steigt oder fällt, nach einer Periode 1,5 Euro erhält?

Der Kurs der Aktie S folgt einem Binomialmodell, entweder der Kurs steigt von $S_0 = 4$ Euro auf $S_1(H) = 8$ Euro oder er fällt von $S_0 = 4$ Euro auf $S_1(T) = 2$ Euro. Des Weiteren gibt es die Möglichkeit das Geld auf ein Konto zu legen und von Zeitpunkt 0 zu Zeitpunkt 1 Zinsen bei einem fixen Zinssatz von $i = \frac{1}{4}$ zu bekommen.

Das „Ramschderivat“ hat zum Zeitpunkt $t = 0$ den Wert $D_0 = 1,2$ Euro. Wenn der Kurs der Aktie steigt, ist der Wert des Derivats $D_1(H) = 3$ Euro, wenn jedoch der Kurs der Aktie fällt, dann wird das Derivat wertlos $D_1(T) = 0$ Euro.

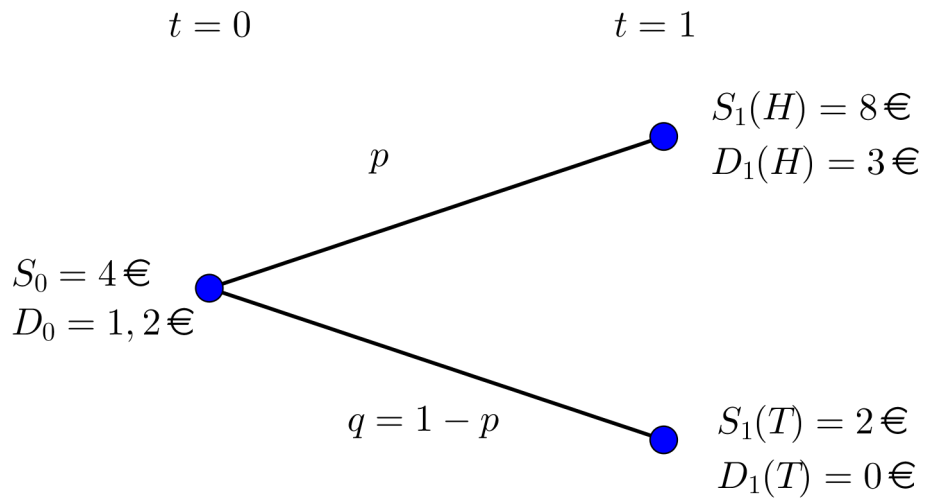


Abb. 12 Binomialmodell des Aktienkurses

Die Traderin muss folgende Schritte zum Zeitpunkt $t = 0$ tätigen, damit sie das gewünschte Ziel erreichen kann.

Zeitpunkt $t = 0$		Bar	Konto	Wertpapiere
1. Schritt	Leerverkauf einer halben Aktie	2	0	1,2
2. Schritt	Lege die 2 Euro auf ein Sparbuch	0	2	1,2

Tab. 5 Käufe und Verkäufe zum Zeitpunkt 0

Zum Zeitpunkt $t = 1$ sollte sie folgendermaßen handeln. Wir unterscheiden hier zwei Fälle, erstens der Kurs der Aktie steigt, zweitens der Kurs der Aktie fällt. Zuerst nehmen wir an, dass der Kurs gestiegen ist.

Zeitpunkt $t = 1 (H)$		Bar	Konto	Wertpapiere
0. Schritt	Entwicklungen vom Zeitpunkt 0 zu 1	0	$2 \cdot 1,25$	3
1. Schritt	Verkaufe das Derivat	3	2,5	0
2. Schritt	Hebe das Geld vom Konto ab	5,5	0	0
3. Schritt	Kaufe eine halbe Aktie zurück	$5,5 - 4 = 1,5$	0	0
	Gesamt: 1,5			

Tab. 6 Käufe und Verkäufe zum Zeitpunkt 1, wenn der Kurs gestiegen ist

Im anderen Fall, der Kurs fällt, sind folgende Schritte zu tätigen.

Zeitpunkt $t = 1$ (T)		Bar	Konto	Wertpapiere
0. Schritt	Entwicklungen vom Zeitpunkt 0 zu 1	0	$2 \cdot 1,25$	0
1. Schritt	Hebe das Geld vom Konto ab	2,5	0	0
2. Schritt	Kaufe eine halbe Aktie zurück	$2,5 - 1 = 1,5$	0	0
	Gesamt: 1,5			

Tab. 7 Käufe und Verkäufe zum Zeitpunkt 1, wenn der Kurs gefallen ist

Die Traderin erhält in jedem Fall, unabhängig davon, ob der Aktienkurs hinauf oder hinunter geht, 1,5 Euro. Auch die Wahrscheinlichkeiten für einen Anstieg bzw. Fall des Kurses fließen nicht in die Berechnung ein.

Handhabung von Risiko kommt also in vielen unterschiedlichen Bereichen der Finanzmathematik vor.

10.3.3 Sinnkriterium

Jeder Mensch überlegt, ob er gewisse risikobehaftete Handlungen tätigen soll, oder ob er das Risiko minimieren kann. Während die Menschen bei alltäglichen Situationen eine gewisse Intuition bzw. Erfahrung über das eingegangene Risiko haben, so haben sie bei Finanzprodukten meist keine. Eine Person mit Höhenangst steigt beispielsweise nicht auf eine hohe Leiter.

Vielen Menschen ist eben gar nicht bewusst (im Gegensatz zur Leiter), dass sie beim Kauf von Finanzprodukten ein Risiko eingehen. Die fatalen Folgen eines risikobehafteten Erwerbs äußern sich meist nicht sofort, sondern erst nach einiger Zeit. In einigen Fällen sind die Käufer davon überzeugt, sogar das Gegenteil zu tun, das eigene Risiko zu verkaufen bzw. abzugeben oder zu verringern. Der Begriff Spekulation lässt sich in der breiten Bevölkerung durchaus als Dysphemismus¹⁶ bezeichnen. Zu bedenken gibt wiederum, dass viele gar nicht wissen, wann sie spekulativ am Finanzmarkt partizipieren.

FM1: „... Meine Tante möchte auf Nummer sicher gehen, und deswegen hat sie Gold gekauft.“

CD: „richtiges Gold oder Papiergold?“

FM1: „Papiergold natürlich, und ja, auch ein Freund von mir hat Gold und Öl gekauft, um sich abzusichern und beide sind ganz stark gegen Spekulationen. Natürlich ist das genau Spekulation, wenn man Gold und Öl kauft.“

Der Alltagsspruch „Man legt nicht alle Eier in einem Korb!“ hat gerade am Finanzmarkt seine Berechtigung. Wer am Aktienmarkt als Normalbürger vernünftig partizipieren möchte, der soll die Idee der Diversifikation aus der Portfoliotheorie mitnehmen. Wer nur eine Aktie

¹⁶Ein mit negativen Assoziationen besetztes Wort, das eigentlich neutral ist.

kauft, legt alle Eier in einem Korb. Der Kauf vieler Wertpapiere, die alle unterschiedlich miteinander korrelieren, entspricht dem Aufteilen der Eier auf mehrere Körbe. Wenn ein Korb hinunterfällt, ein Wertpapier einen Verlust verzeichnet, dann ist das zu verkraften.

FM1: „... dass mit ihm das anfängt, dass man sich überlegt, wie wichtig Diversifizierung ist, wenn man am Aktienmarkt vernünftigerweise partizipieren möchte.“

Wer sein Vermögen auf viele unterschiedliche Finanztitel aufteilt, der kann durch eine geschickte Aufteilung sein Risiko minimieren.

FM1: „... Ein anderer Bezug zum Alltag, den man aus der Portfoliooptimierungstheorie mitnehmen muss, ist es, dass es für Privatpersonen ein großer Unfug ist, sich einzelne Aktien zu kaufen. Das ist schon ein bisschen subtiler und hört man weniger und das ist trotzdem eine wichtige Lehre, finde ich.“

Das Erwerben einer einzigen oder zweier Positionen am Finanzmarkt sichert einen selbst wenig ab. Im Vergleich dazu stelle man sich vor, man setzt alles nur auf eine Karte. Nach kurzem Überlegen sollte nun klar werden, dass sein gesetztes Vermögen nur von dieser einen Position abhängt.

Mann kann jetzt der Meinung sein, ich kaufe keine Aktien, also trifft mich das Risiko des Finanzmarkts nicht. Es gibt allerdings Finanzprodukte, mit denen viele Menschen im Laufe ihres Lebens in Berührung kommen bzw. kommen müssen, wie Sparbücher oder Kredite. Bei ersteren äußert sich der Verlust nicht so gravierend wie bei zweiteren.

Viele Menschen müssen eben im Laufe ihres Lebens einen Kredit aufnehmen. Das ist auch durchaus sinnvoll, jedoch vergessen viele darauf, dass sie auch ein gewisses Risiko eingehen. Die Raten eines Kredits hängen meist von einem Leitzinssatz ab, welcher sich während der Kreditlaufzeit verändert. Das monatlich zur Verfügung stehende Geld wird also unterschiedlich belastet. Die Belastung kann zu einer Zahlungsunfähigkeit führen, und im schlimmsten Fall kommt es zur Pfändung bzw. die Bank bekommt die Sicherheiten, wie beispielsweise das Haus bei einem Hypothekarkredit. Wie viel Risiko man dabei eingeht, ist den Kreditnehmenden oft nicht klar (teilweise auch denen nicht, die das Produkt verkaufen). Viele Finanzdienstleister verkauften Mitte der 90er Jahre Fremdwährungskredite zur Immobilienfinanzierung. Im Vergleich zu einem normalen Kredit kommt zum Zinssatzrisiko noch das Wechselkursrisiko hinzu.

FM6: „... aber wieder ein Alltagsbeispiel, ... was vor 15 bis 20 Jahren den Hausbauer von den Banken eingeredet worden ist, dass sie Fremdwährungskredite aufnehmen und dass kein Mensch von denen, also auch nicht einmal von den Verkäufern in den Banken, gewusst haben, dass die da eigentliche hochspekulative, völlig risikoffene Dinge verdrehen, also dass in manchen Varianten der Verlust potenziell unbegrenzt ist, ... wie man einfahren kann sieht man an der Stadt Linz, die die Sachen ein bisschen gröber gemacht hat, ... vielleicht braucht es ein bisschen finanzmathematische Bildung, dass man sich einmal so ein Diagramm zeichnet, ok was passiert mit meinem Kredit jetzt wirklich, wenn der Kurs da abstürzt ... dann zeichnet man sich ein Diagramm, wenn da vielleicht irgendein Hebelfaktor auch drin ist, - - also da sind eh viel reingefallen“

Sogenannte Tilgungsträger zeichnen den Gipfel bei Krediten in Sachen Risiko auf. Bei einer benötigten Summe von angenommen 100 000 € zur Finanzierung eines Hauses nahm man stattdessen eine Summe von 300 000 € auf, wobei davon 100 000 € für den eigentlichen Zweck verwendet wurden und die restlichen 200 000 € an einen Tilgungsträger gehen, eine Art Aktienportfolio, mit dem ein Teil des Kredits gedeckt wurde, zusätzlich, so das Versprechen der Finanzberater, werfe dieses Konstrukt schlussendlich auch noch einen Gewinn ab. Viele Käufer übersahen, dass sich in so einem Fall gleich drei Risiken ansammelten: Zinssatzrisiko, Wechselkursrisiko und das Risiko der Performance des Tilgungsträgers (vgl. <http://orf.at/stories/2172508/2172532/>).

Obwohl zu hoffen bleibt, dass die tatsächliche Alltagsrelevanz bei Krediten für Schüler/innen ausbleibt, so ist dieses Thema trotzdem hoch relevant für Jugendliche. Österreichs Jugend hat so ihre großen Probleme im Umgang mit Geld. Viele sind bereits mit 25 so stark verschuldet, dass ihnen nur mehr der Gang zu Schuldenberatung bleibt. Die Dunkelziffer liegt noch viel höher. Der Autokauf oder der Kauf eines Smartphones stellt häufig den Beginn einer Verschuldung dar (vgl. <http://orf.at/stories/2208386/2208367/>).

Oft liest man in diversen Medien von den Veränderungen des Leitzinssatzes, da gehört es eigentlich zur Allgemeinbildung zu verstehen, welche Veränderungen welche Auswirkungen für mich haben.

FM3: „Das meine ich auch bei Risikobetrachtung. Man sollte sich Gedanken machen, wie ändert sich die Risikoposition, wenn ich Schuldner oder Gläubiger bin. Habe ich ein Sparbuch oder einen Kredit. Der Schüler sollte drüber nachdenken, der Karl hat das Sparbuch, die Maria hat den Kredit. Wie wirkt es sich aus, wenn die Zinsen fallen? Für den einen ist es gut, für den anderen schlecht. Was passiert momentan, mit den andauernd fallenden Zinsen in unserer Volkswirtschaft?“

Das Alltagsrelevante der Nutzentheorie liegt u.E. in der aus der Wirtschaft kommenden Eigenschaft des Nutzens, auf der die Nutzenfunktion fußt. Mehr Vermögen führt zu mehr Nutzen und der Grenznutzen ist indirekt proportional zum aktuellen Vermögen. Der Nutzen einer zusätzlichen Einheit Vermögen nimmt mit steigendem Vermögen ab. Das betrifft die nahezu banale Eigenschaft: Der Nutzen des ersten Laptops ist um einiges höher als der Nutzen des hundertsten.

Obwohl die Nutzentheorie Anwendungen in der Praxis findet, Schadensversicherung, Risiko-selektion, Investitionen (Portfoliotheorie), Erklärung menschlichen Verhaltens, liefert sie für den Durchschnittsbürger wenig Brauchbares.

Eine interessante Sichtweise der Nutzentheorie auf die Frage, wann es einer Bevölkerung gut geht, die man sich durchaus im Alltag stellen kann, erläutert der Proband FM1 im folgenden Zitat.

FM1: „Ich meine oft, ein Beispiel was mir wichtig ist, wenn man davon spricht: Geht es einer Bevölkerung gut, geht es einer Volkswirtschaft gut, also eine Kennzahl, die da vielleicht hergenommen wird, ist das Wachstum des BIP. ... die Kennzahl drückt ungefähr aus, was alle zusammen erwirtschaften und korreliert vielleicht gut damit, was alle zusammen verdienen. Was da passiert ist, im Endeffekt misst man den Gesamtnutzen, indem man halt jedem einzelnen eine lineare Nutzenfunktion zuschreibt und die dann einfach aufaddiert. Also wenn du nicht den Gesamtnutzen optimierst, sondern zum Beispiel jedem einen logarithmischen

Nutzen gibst und das aufoptimierst, dann kommst du halt drauf, dass damit es der Gesamtbevölkerung besser gehen soll, dann brauchst du dich überhaupt nicht darum kümmern, dass das BIP wächst, dann müsstest du dich darum kümmern, dass das irgendwie ausgeglichener wird. Dann kommst du nicht auf so Sachen, wie, obwohl das BIP wächst, geht es der Gesamtbevölkerung immer schlechter, weil halt die Ungleichverteilung der Gesellschaft größer wird. Ich finde halt, das ist ein Problem, wir können uns gar nicht auf eine Nutzenfunktion einigen und im Prinzip verwenden wir deswegen die vollkommen lineare Nutzenfunktion, wo wir uns in Wirklichkeit alle einig sind, dass das der größte Unfug überhaupt ist, aber wenn wir uns nicht auf die Nutzentheorie einlassen und sie komplett vermeiden, verwenden wir sie in ihrem ungeschicktesten Spezialfall.“

Auf eines darf nicht vergessen werden. Im Alltag der verschiedenen Firmen und Institutionen spielt das *Handhaben von Risiko* eine wesentliche Rolle. Aus der Sicht von Firmen (ab ca. mittelgroßen Betrieben) spielt Hedgen im Sinne der Risikominimierung eine wichtige Rolle. Finanzderivate dienen in diesem Fall dem eigentlichen Ursprung, zur Absicherung.

FM6: „Aktien sind einfach Eigenkapital, Punkt, die werden nur von einem bilanziellen Standpunkt aus betrachtet. Also eine andere Perspektive gibt es da fast nicht, die und - - das ganze restliche Zeug, das sich unter Finanzmathematik abspielt, sind Anleihen, strukturierte Anleihen, Zinsswaps, ... vielleicht irgendwelche Caps, Floors, oder irgendwelche Lock-In, ... Das Basiskonzept ist Anleihe, Swap und dann vielleicht noch irgendetwas wie ein Collar oder eben FX-Derivate oder FX-Tauschgeschäfte weil - was Firmen schon konkret an Hedging machen, ist, dass sie mittels Swaps versuchen, also dass sie sich irgendeinen Preis einlocken. Das geht bis hin zu Ölswaps, wo Energiebetriebe, wie die EVN Gas- und Ölswaps abschließen, weil sie ihre Langfristbeträge hedgen wollen, das läuft dann über Hedgeaccounting oder über Corporates, wie die Andritz, - die Kupfer, also das ganze Commodities-Zeug, da wird viel Hedging betrieben, sehr kurzfristig auch, das sind zum Teil irgendwelche Swaps überlagert auch mit FX-Tauschgeschichten, zum Beispiel wenn das Kraftwerk in China gebaut wird, dass dann die eventuell auch das Währungsrisiko auch noch ausschalten. Also die Perspektive, die ich in der Wirtschaft gesehen habe, also von den zentralen Konzept von Hedging, hat weniger von dem Dualitätsprinzip zu tun, sondern - - - ist wesentlich eine Planbarkeit, also man macht irgendwelche Zinsen planbar, Rohstoffpreise planbar etc. - und, oder sichert sich halt ein Risiko in diesem Setting ab, ...“

Eine weiterer Interviewpartner erläutert Hedgen in dieser Sichtweise anhand von Wechselkursen.

FM4: „Genau und wie er mit dem Risiko umgeht. Hedgen heißt ja genau das Gegenteil, ich habe ein Risiko, Ich bin mit meiner Exportwirtschaft in meiner Industrie beschäftigt, da ist es ganz natürlich, dass ich Risiko habe. Vielleicht

will ich aber dieses Risiko nicht haben, weil ich lieber abhängig bin von meinem Geschäftsmodell und nicht von dem Dollarkurs oder vom Kronenkurs, Deshalb versuche ich das Risiko, das eigentlich nicht meinem Geschäftsmodell innewohnt, rauszubekommen und dafür kaufe ich mir einen Hedge. Das ist ja sozusagen was Risikominimierendes. Einstieg in diesen Finanzderivatemarkt ist Reduktion von Risiko.“

Finanzderivate können auch ohne das Grundgeschäft erworben werden. Es ist möglich, einen Ölswap zu kaufen, ohne Öl zu besitzen. Optionen und ähnlichen Wertpapieren wohnt im Fall des Erwerbs, ohne den Basiswert („Underlying“) zu besitzen, ein spekulativer Charakter inne. Diese Art der Verwendung deklarieren manche Systemkritiker als den Ursprung der Finanzkrise.

FM4: „Das zu verstehen, Risiko, was bedeutet das, kann vielleicht sozusagen ein Derivat, eine Reduktion, genau dazu ist es ja eigentlich da, eine Reduktion von Risiko sein, und dann sagen wir vielleicht, die bissl kritischere Sicht, natürlich kann ich das auch ... ohne das Grundgeschäft kaufen und dann hab ich kein Risiko. Kauf mir aber durch das Derivat ... ein Risiko ein. Das zu verstehen, wie wirken die Dinge ..., das ist vielleicht auch dann nicht eine direkt finanzmathematische Frage, aber sozusagen das ist wichtig, dass man es fürs Leben lernt.“

Seit der Finanzkrise ist das Thema Risiko am Finanzmarkt omnipräsent und nimmt in den vielfältigsten Formen einen Platz in den Medien ein, meist sind es jedoch negative Schlagzeilen. Hier werden in vielen Fällen die Folgen von Ereignissen beschrieben, manchmal Prognosen aufgestellt, selten wird vor einem riskanten Finanzprodukt schon im Vorhinein gewarnt.

Das Schema *Handhabung von Risiko* hat aufgrund der zuvor aufgezeigten Argumente einen Bezug zur Sprache, zum Denken des Alltags und zur Lebenswelt.

10.3.4 Vertikalkriterium

Handhabung von Risiko ist auf mehreren intellektuellen Niveaus darstellbar, was im Folgenden exemplarisch aufgezeigt wird. Wir betrachten dabei das Messen von Risiko, Diversifikation und den Nutzen auf verschiedenen Niveaus.

Zunächst die elementarste Stufe dieses Aspekts: Ein äußerst wichtiger Punkt ist das Erkennen riskanter Geschäfte am Finanzmarkt. Wann gehe ich überhaupt ein Risiko ein? Wie äußert sich das Risiko? In einer beispielhaften Auflistung seien das Abschließen eines Sparbuchs mit Bindung auf eine bestimmte Zeit, die Aufnahme eines Kredites, die Aufnahme eines Fremdwährungskredits, der Kauf von Wertpapieren oder Kauf von Derivaten genannt. Während bei einem Sparbuch mit Bindung auf eine bestimmte Zeit kein Verlust entstehen kann, hier entgehen einem im schlimmsten Fall bessere variable Zinsen auf einem ungebundenen Sparbuch, äußert sich der Anstieg des Leitzinssatzes bei einem Kredit ganz anders. Der Kauf und Verkauf von Derivaten (für einzelne Personen wenig sinnvoll) besitzt einen größeren Hebeleffekt. Vom totalen Verlust bis hin zum großen Gewinn ist hier alles möglich. Das Erkennen risikobehafteter Situationen und das quantitative Abschätzen der Auswirkungen bei Handlungen auf dem Finanzmarkt stellen die erste Ebene, aber zugleich auch die

wichtigste dar.

Auf einer höheren Stufe beginnt man Risiko quantitativ zu messen. Als einfachstes Risikomaß bietet sich die Standardabweichung an. Bei einer unsicheren Zahlung X erfasst die Standardabweichung $\sigma(X)$ die positiven und negativen Abweichungen vom Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ gleichermaßen. Je größer die Standardabweichung ist, desto größer ist das Risiko. Die betrachtete Kennzahl wertet die Chance von Verlust und Gewinn gleichermaßen, das widerspricht allerdings der Intuition des Menschen. Dieser bewertet eine Gefahr von Verlust wesentlich höher.

Unter Berücksichtigung des zuvor Erwähnten wurden weitere Risikomaße kreiert. Man spricht von sogenannten einseitigen Risikomaßen, genauer Downside-Risikomaße (vgl. SARTOR/-BOURAUDEL, 2013, S. 68 f.). Eines dieser Maße ist bereits erwähnt worden, der „Value at Risk“, siehe Kapitel 10.3.1 und Kapitel 10.3.2. Dieses Downside-Maß ist kein kohärentes Risikomaß, da es Diversifikationseffekte nicht stringent berücksichtigt. Es erfüllt im Allgemeinen die Subadditivität nicht, siehe Beispiel 30 auf Seite 158. In diesem wird aufgezeigt, wie der moderne Zugang der Mathematik auch bei der Idee *Handhabung von Risiko* sichtbar wird. Zuerst werden sinnvolle Eigenschaften definiert, wie des kohärenten Risikomaß, und dann überprüft man, ob bestehende Maße diese Eigenschaften erfüllen. Ein weiterer Nachteil des VaR ist, dass er keine Angaben macht, wie groß der mögliche Verlust sein könnte. Es bedarf ein neues Risikomaß

Der VaR wurde zu dem Expected Shortfall ES bzw. Tail-Value-at-Risk $TVaR$ ¹⁷ verbessert, diese Kennzahlen sind eine Erweiterung und erfüllen alle Anforderungen eines kohärenten Risikomaßes (vgl. KREMER, 2011, S. 366 ff.).

Definition 7. (Tail-Value-at-Risk – $TVaR$) Sei X eine integrierbare Verlust-Gewinn-Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F , dann heißt

$$TVaR_\alpha(X) = \mathbb{E}[X \mid X \leq VaR_\alpha(X)]$$

der Tail-Value-at-Risk zum Risikoniveau $\alpha \in (0, 1)$.

Dabei handelt es sich hier schon um eine höhere intellektuelle Stufe, da Konzepte der höheren Wahrscheinlichkeitstheorie verwendet werden müssen. Für die Berechnung eines Tail-Value-at-Risk benötigt man nach der Definition 7 Kenntnisse über den bedingten Erwartungswert, welcher rigoros nur mit Ergebnissen der Maßtheorie eingeführt werden kann. Das Beispiel 31 auf Seite 159 führt exemplarisch eine Berechnung vor, um aufzuzeigen, dass die Idee *Handhabung von Risiko* auf einer hohen intellektuellen Stufe durchgeführt wird. Die Schwierigkeit in der Praxis liegt, wie schon beim VaR , in der Auffindung der Verteilung der Verlust-Gewinn-Zufallsvariable. Diese muss mit statistischen Methoden gefunden werden. Der Komplexität sind im Bereich der Risikomessung keine Grenzen gesetzt, wie ein Proband beschreibt.

FM1: „Auf unterem Niveau halt. Versicherung macht wirklich viel Sinn für eine Einzelperson, also wenn jemand anderer das Risiko übernimmt, weil er will sich

¹⁷Im Falle, dass die betrachtete Zufallsvariable eine stetige Verteilungsfunktion besitzt, sind ES und $TVaR$ gleich. Im Allgemeinen unterscheiden sich aber der Conditional Expectation und der Tail-Value-at-Risk. In der Praxis werden meist stetige Verteilungsfunktionen geschätzt, aus diesem Grund ist es in vielen Fällen nicht nötig zwischen den beiden Begriffen zu unterscheiden.

etwas ausmitteln. Dann kannst du das sehr weit hochziehen, ... in welcher Weise funktioniert da wirklich Diversifizierung, was ist der Value at Risk, gegeben eine gewisse Abhängigkeitsstruktur, ... welche Abhängigkeitsstruktur führt zum schwierigsten Value of Risk, dann bist du halt auf einem Niveau, wo man sich denkt, das muss jetzt endlich ins Aktuelle, - - also wo sich Leute vom Baselkomitee interessieren. Ich habe gerade die ... von der LSE und den ... aus Florenz da, und mit denen überlege ich, wie man da halt zeigen kann, dass da ein gewisser Algorithmus konvergiert. Es wäre eine Hoffnung, dass es in Basel 4 Eingang findet. Ich meine, da sind wir wirklich halt bei der ganz aktuellen Forschung.“

Ein Aspekt von *Handhabung von Risiko*, die Diversifikation, lässt sich auch auf unterschiedlichen kognitiven Ebenen ausführen. Wir beginnen mit der untersten Stufe: Formulierungen, wie „Man soll nicht alle Eier in einen Korb legen“ oder aus dem Glücksspiel-Jargon kommend „Man soll nicht alles auf eine Karte setzen“, bringen das Wesen der Diversifikation auf den Punkt. Bei einer Aufteilung der Eier auf mehrere Körbe, einer Diversifikation, ist der Verlust eines Korbes zu verkraften. Wenn alle Eier in einem Korb gelassen werden, dann riskiert man den totalen Verlust aller Eier. Dieses Beispiel erläutert nur eine Strategie, seinen Verlust zu minimieren. Im zweiten Exempel besteht die Möglichkeit eines Gewinns. Wer beispielsweise im Casino sein ganzes Vermögen auf rot setzt, bei dem hängt alles von der einen Runde ab. Eine Aufteilung seines Vermögens auf mehrere Runden, auf andere Felder oder gar auf andere Glücksspiele, wenn man schon spielen muss, entlastet sein Risiko.

Vergleichsweise finden sich auch Situationen aus dem Alltag „aus Faulheit riskiert man, alles fallen zu lassen, anstatt zweimal zu gehen“. Unter Risiken versteht man hier, dass ein Objekt auf den Boden fällt und kaputt geht.

Auf dem nächsten intellektuellen Niveau, in unserem Sinne einer finanzmathematischen Betrachtung, bezieht man sich beispielsweise auf konkrete Anwendungen der Portfoliooptimierung, auf die auch ein Proband hinweist:

CD: „Sie haben vorher auch diesen Aspekt von Markowitz genannt mit Portfoliooptimierung. Könnten Sie sich vorstellen, dass das auch auf unterschiedlichen Niveaus durchführbar ist? Diese Idee, die er eingeführt hat bzw. diese große Idee, die da dahinter steckt.“

FM3: „Naja, also, wie weit das in der Schule, also in der Sekundarstufe zu machen ist, - weiß ich nicht. Aber in dem Moment, in dem man Begriffe wie Kovarianz verwendet -“

CD: „Kommen durchaus schon vor, in der Sekundarstufe 2 -“

FM3: „Freut mich! Dann kann man das schon machen. ... ist das explizit ausgerechnet für ein Beispiel von zwei Stocks, wo eben die auf den ersten Blick verblüffende Tatsache illustriert wird, dass es durchaus möglich ist, dass man bei zwei Stocks, wo der eine, der Stock Nummer 1, in jeder Beziehung besser ist als der Stock Nummer 2, dass es trotzdem einen Sinn machen kann, den Stock Nr. 2 dazu zu erwerben.“

Es wurde bereits im Kapitel 10.3.2 ein Beispiel von zwei gleich guten Finanztiteln gegeben. An dieser Stelle sei eine Version des im obigen Interviewausschnitt erwähnten Beispiels angegeben.

Beispiel 8. Seien A_1 und A_2 zwei risikobehaftete Wertpapiere. Eine Managerin möchte ihr verfügbares Vermögen von 1 Geldeinheit für eine feste Zeitperiode (z.B. ein Jahr) in diese beiden Finanztitel investieren, dabei bezeichnet x_A jenen Anteil des Vermögens, der in A_1 gesteckt wird und x_B entsprechend. Der Wert der Papiere ist am Ende der Periode unbekannt, es steht also fest, die Investorin geht ein Risiko ein. In dieser Aufgabe seien die Erwartungswerte, die Standardabweichungen und Kovarianzen der Renditen bekannt. Der Finanztitel A_1 hat einen Erwartungswert von $\mu_1 = 4$ und eine Standardabweichung $\sigma_1 = 1$, während A_2 mit $\mu_2 = 2$ und $\sigma_2 = 3$ in allen Belangen schlechter ist, und das, obwohl beide gleich viel kosten $p_1 = p_2 = 1$. Die Korrelation zwischen beiden Titeln beträgt 0. Unter solchen Umständen scheint es a priori vernünftig, ihr gesamtes Vermögen in A_1 zu investieren. Im Rahmen der Portfoliotheorie minimiert man bei vorgegebenem Mindestertrag (Erwartungswert der Rendite des Portfolios) μ_p die Varianz σ_p^2 des Portfolios. Die Investorin möchte wissen, bei welchem Mindestertrag und welcher Vermögensaufteilung x_A und x_B das Risiko σ_p minimal wird.

Um diese Aufgabe zu lösen, geben wir zunächst den zu minimierenden Term an:

$$\sigma_p^2(x_A, x_B) = x_A^2 + 3^2 x_B^2,$$

und dann die Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= 1 \\ 4x_A + 2x_B &= \mu_p \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{\mu_p - 2}{2} \\ x_B &= \frac{-(\mu_p - 4)}{2} \end{aligned}$$

Das Einsetzen in die Portfoliovarianz liefert:

$$\sigma_p^2(\mu_p) = \frac{5}{2}\mu_p^2 - 19\mu_p + 37$$

Der Mindestertrag μ_p muss im Intervall $[0; 4]$ liegen. Der Scheitel der zugehörigen Parabel liegt bei $\mu_p = \frac{19}{5}$. Die Anteile ergeben $x_A = \frac{9}{10}$ und $x_B = \frac{1}{10}$. Dieses Ergebnis mag auf den ersten Blick nun tatsächlich verblüffen, jedoch zeigt es ganz deutlich, dass Diversifikation sinnvoll ist. Der Finanztitel A_1 ist ganz klar besser als der Finanztitel A_2 , trotzdem ist das Risiko geringer, wenn die Investorin einen Teil ihres Vermögens, wenn auch wesentlich kleiner, in A_2 investiert.

Die Verallgemeinerung dieses Beispiels erfolgt in zwei weiteren Schritten. Es generalisiert sich, indem man mit Variablen statt mit konkreten Zahlen rechnet, siehe Beispiel 29. Darin

wird überschaubar und elementar nachvollziehbar gezeigt, was bei einer Portfoliooptimierung passiert. Es stellt einen Beitrag dar, um die Breite dieser Idee aufzuzeigen, die für das Erfüllen des Horizontalkriteriums notwendig ist.

In einem weiteren Schritt erhöht man die Zahl der Finanztitel auf n und minimiert mit Methoden der nichtlinearen Optimierung (Satz von KUHN-TUCKER) die Varianz, dieser Nachweis ist nicht mehr so einfach nachvollziehbar, aus diesem Grund wird auf die Ausführung verzichtet. Die wesentlichen Aussagen lassen sich auch an den einfacheren Beispielen ablesen. In der Forschung kommt die Grundidee der Portfoliooptimierung, der Diversifikation, bis zu einem gewissen Grad noch vor:

CD: „Und auf höherem Niveau, also in der Forschung spielt diese Idee auch noch eine Rolle?“

FM3: „Naja -, die Idee, dass man versucht eine Varianz zu minimieren, die kommt bis zu einem gewissen Grade noch vor. Aber da wird es auch von den Fragestellungen schon anspruchsvoller.“

CD: „Also der Grundaspekt kommt noch vor?“

FM3: „Ja.“

Wir blicken nun auf den **Nutzen** und zeigen die Ausführbarkeit auf verschiedenen intellektuellen Niveaus.

Auf eine gewisse intuitive Art erweist sich Nutzentheorie schnell als sinnvoll, vor allem in Bezug auf Geld. Je mehr Geld ich besitze, desto mehr Nutzen habe ich. Allerdings nimmt der zusätzliche Nutzen einer weiteren Vermögenseinheit bei steigendem Vermögen ab. In anderen Worten der Nutzenzuwachs des ersten Autos ist wesentlich größer als der zusätzliche Nutzen des zehnten Autos, aber der Nutzen von zehn Autos ist größer als der Nutzen von neun Autos.

In einem nächsten Schritt können Nutzenfunktionen auf die Risikoeinstellung der Investorin untersucht werden. Was bedeuten konkave, konvexe oder lineare Nutzenfunktionen? Eine Person mit einer konkaven Funktion ist risikoscheu, bei konvexen ist sie risikofreudig und bei einer linearen Funktion ist die Entscheidungsträgerin risikoneutral. Mit Hilfe des Arrow-Pratt-Maß, siehe Definition 3 auf Seite 95, kann die Risikoeinstellung der Investorin untersucht werden.

In einem nächsten Schritt ermittelt man konkrete Nutzenfunktionen, diese ordnen jedem Gut, jedem Vermögenswert einen Nutzen zu. Jeder Mensch besitzt seine eigene Nutzenfunktion zu einem Gut bzw. Vermögen.

Das im Kapitel 10.3.1 besprochene St. Petersburg-Paradoxon eignet sich als Einführung in das Thema, siehe die folgende Antwort des Probanden. Die Diskussion über den zu bietenden Betrag stellt nach Durchblick der einschlägigen Lehrbücher den nahezu „klassischen“ Zugang zu Nutzentheorie dar.

FM1: „...ich mein zum tausendstem Mal diese Nutzentheorie, also ich glaube wieder, dass man ein St. Petersburg Problem recht leicht erklären kann.“

Nutzentheorie hört aber mit der Lösung des Paradoxons noch lange nicht auf. Das war nur der geschichtliche Startschuss. Das angewendete Prinzip des Betrachtens von Nutzenwerten anstatt von Geldbeträgen findet zahlreiche Anwendungen in der Finanzmathematik unter anderem bei der Portfoliotheorie:

FM5: „Ja, also Portfoliooptimierung ist ...viel mit der Nutzenmaximierung, ...dass man eine Nutzenfunktion hat und dass sozusagen der Nutzen oder die Nutzenfunktion die Präferenzen des Investors abbildet, in dem Sinn, das kann man auf jeden Fall auf mittlerem Niveau darlegen.“

Auf dieser mittleren intellektuellen Ebene lässt sich die Nutzentheorie mit anderen Aspekten der Finanzmathematik verbinden, wie angesprochen mit der Portfoliooptimierung.

Beispiel 9. Angenommen eine Investorin möchte ihr Vermögen von 1 auf zwei Wertpapiere A und B mit den Parametern $\mu_A = 5$ und $\mu_B = 8$, sowie $\sigma_A = 6$ und $\sigma_B = 3$ und einer Kovarianz von $\sigma_{AB} = -7,2$ aufteilen. Beide Finanztitel seien gleich teuer $p_1 = p_2 = 1$. Wir unterstellen der Person eine Nutzenfunktion von $u(\mu_p, \sigma_p) = \mu_p - \sigma_p^2$. Bei welcher Vermögensaufteilung x_A und x_B auf die beiden Wertpapiere hat die Investorin den höchsten Nutzen? Wir berechnen diesmal keine exakte Lösung, sondern fertigen eine Tabelle an und lösen die Aufgabe näherungsweise. Die erste Spalte listet die Anteile des in A investierten Vermögens in Prozent auf, die zweite Spalte analog für B , die dritte die erwarteten Erträge des Portfolios, die vierte das Risiko des Portfolios (gerundet) und die letzte Spalte gibt den Nutzen (gerundet) der Kombination an.

A	B	erw. Ertrag	Risiko	Nutzen
100	0	5	6,00	-31,00
95	5	5,15	5,64	-26,68
90	10	5,3	5,29	-22,65
85	15	5,45	4,94	-18,93
80	20	5,6	4,59	-15,50
75	25	5,75	4,26	-12,36
70	30	5,9	3,93	-9,53
65	35	6,05	3,61	-6,99
60	40	6,2	3,31	-4,74
55	45	6,35	3,02	-2,80
50	50	6,5	2,77	-1,15
45	55	6,65	2,54	0,20
40	60	6,8	2,35	1,26
35	65	6,95	2,22	2,01
30	70	7,1	2,15	2,47
25	75	7,25	2,15	2,64
20	80	7,4	2,21	2,50
15	85	7,55	2,34	2,07
10	90	7,7	2,52	1,35
5	95	7,85	2,74	0,32
0	100	8	3,00	-1,00

Tab. 8 Risikowerte und erwarteter Nutzen ausgewählter Kombinationsmöglichkeiten

Wenn 25% des Vermögens in das Wertpapier A und 75% des Vermögens in das Wertpapier B gesteckt werden, dann ergibt das den höchsten Nutzenwert in der Tabelle.

Gebiete, die mit der Finanzmathematik eng verbunden sind, wie die Versicherungsmathematik verwenden die Nutzentheorie für Berechnungen und Erklärungen. Schadensversicherungen bedienen sich dieser Theorie bei Immobilienversicherungen oder bei Kaskoversicherungen. Die Risikoselektion thematisiert die Informationsasymmetrie beim Abschluss einer Versicherung, mit Hilfe der Nutzentheorie wird die Notwendigkeit des Bonus-Malusystems bzw. der Haftpflicht für alle Verkehrsteilnehmer/innen erklärt. Das Versicherungsunternehmen hat in der Regel keine Information über den Risikotyp des Versicherungsnehmers. Eine Einstufung der Verträge nach Risikoklasse wäre für die Versicherung wünschenswert, denn daraus ließe sich eine individuelle Prämie berechnen. Die Informationen bleiben zum Zeitpunkt des Abschlusses im Verborgenen. Aus diesem Grund müssen Versicherungen durchschnittliche Prämien verrechnen. Bei rationalem Verhalten würden jene, die schlecht aussteigen, keine Versicherung mehr abschließen. Die Versicherung hätte somit ein erhöhtes Verlustrisiko.

Beispiel 10. Angenommen es gibt nur zwei Gruppen von Autofahrern/innen, die Hochrisikogruppe und die Niedrigrisikogruppe. In beiden Gruppen haben die Autofahrer/innen ein Vermögen von 125 €. Die erste Gruppe hat zu 75% einen Schaden von 100 € und zu 25% keinen Schaden, kurz:

$$HRG \begin{cases} 100 & 75\% \\ 0 & 25\% \end{cases}$$

Für die Niedrigrisikogruppe gilt Folgendes:

$$NRG \begin{cases} 100 & 25\% \\ 0 & 75\% \end{cases}$$

Die Versicherungsprämie beträgt als Einheitspreis 50 € für beide Gruppen. Wir nehmen eine Nutzenfunktion u mit $u(x) = \sqrt{x}$ an. Die Hochrisikogruppe hat einen erwarteten Nutzen ohne Versicherung von $\sqrt{25} \cdot 0,75 + \sqrt{125} \cdot 0,25 \approx 6,545$. Analog berechnet man den erwarteten Nutzen der Niedrigrisikogruppe und erhält einen Wert von 9,635. Der Nutzen mit Versicherung ergibt für die erste Gruppe $\sqrt{125 - 50} \cdot 0,75 + \sqrt{125 - 50} \cdot 0,25 \approx 8,66$. Die andere Gruppe hat ebenfalls einen Nutzen von 8,66. Das bedeutet, dass Autofahrer der Niedrigrisikogruppe einen höheren Nutzen haben, wenn sie keine Versicherung abschließen. Der Anteil der Hochrisikogruppe nimmt zu, das ist wiederum schlecht für die Versicherung bzw. die Prämie muss erhöht werden.

Nutzentheorie ist aber durchaus eine sehr komplexe Theorie. Eine Richtung der Forschung untersucht die Basis der Nutzentheorie, in dem Sinne von MORGENSTERN und VON NEUMANN. Aus einem System von Axiomen über rationales Verhalten einer Person versucht man die Nutzentheorie auf ein mathematisches Fundament zu stellen, siehe Zeitkriterium im Kapitel 10.3.1. Nutzentheorie wird des Weiteren in komplexe finanzmathematische Modelle eingebaut und dort beliebig diffizil behandelt.

FM1: „...Nutzentheorie wird auch beliebig kompliziert in der Finanzmathematik. Was schon auch ziemlich interessant ist, ist diese Schnittstelle von Nutzentheorie und Verhaltensforschung. Wo man untersucht, wie sehr die Nutzentheorie halt

das tatsächliche menschliche Verhalten überhaupt nicht richtig abbildet.“

Das bestätigt auch der Interviewpartner FM5.

CD: „Aber hat dieser Nutzenansatz auch in der Forschung noch Bedeutung?“

FM5: „Ich glaub, auf jeden Fall, also Nutzenmaximierung - - das heißt in der Forschung wird es auch weiter behandelt!“

Es gibt auch eine kritische Stimme für die Ausführbarkeit der Nutzentheorie auf einfachem Niveau.

FM5: „...genau, einfachen Niveau ist diese Nutzenmaximierung etwas zu weit fortgeschritten.“

Der Proband führt seine Aussage aber nicht genauer aus, sondern wechselt über zur Behandlung von Risiko mit der Standardabweichung, welche sich auch für die Schule eignen soll.

FM5: „...Ich glaube, dort ein Risiko im Sinne einer, ganz einfach mit der Standardabweichung anzuschauen, würde ich zum Beispiel eine Möglichkeit finden, einen Einstieg ins Thema anzubieten.“

CD: „Also Standardabweichung gibt es schon in der Schule, somit auch in der Schule durchführbar deiner Meinung nach?“

FM5: „Durchaus, also hätte ich jetzt mal gedacht. Natürlich kann man auch immer damit aussagen, welche Probleme es dadurch gibt und dass es ... nicht der Weisheit letzter Schluss ist.“

Aus den vorangegangenen Ausführung erfüllt *Handhabung von Risiko* das Vertikalkriterium.

10.4 No-Arbitrage-Prinzip

Dieses Kapitel lässt sich am besten mit der folgenden Aussage einer Interviewpartnerin beginnen.

FM2: „Arbitrage würde ich als **das** Prinzip in der Finanzmathematik sehen.“

Bevor wir uns der Ausführung der Idee in den einzelnen Kriterien widmen, wenden wir uns der Bedeutung des Begriffs „Arbitrage“ zu. Vorerst möchten wir dabei den Fokus auf verbale Beschreibungen bzw. Definitionen des Begriffes legen, eine formale mathematische Formulierung wird im Horizontalkriterium, siehe Kapitel 10.4.2 angeführt. In den vielen Lehrbüchern zu Makroökonomie, zu Finanzwissenschaften und eben zur Finanzmathematik (und auch zu anderen Themenbereichen) finden sich die unterschiedlichsten Definitionen. Der Duden gibt folgende Erklärung:

„Ausnutzung von Kurs- oder Preisunterschieden an verschiedenen Börsen bzw. Märkten“ (www.duden.de)

Ein Standardlehrwerk zur Makroökonomie beschreibt Arbitrage in den Worten:

„Die Forderung, dass die erwartete Rendite zweier Finanzanlagen gleich sein muss. (Diese Forderung geht von risikoneutralen Anlegern aus. Bei Risikoaversion gilt die um eine Risikoprämie modifizierte Arbitrage-Bedingung.)“ (BLANCHARD/ILLING, 2011, S. 872)

In „Derivatives Markets“ liest man im Glossar:

„Arbitrage: A transaction generating a positive cash flow either today or in the future by simultaneously buying and selling related assets, with no net investment of funds, and with no risk.“ (MCDONALD, 2006, S. 907)

In dem Lehrbuch „Finanzmathematik für Einsteiger“ schreiben die Autoren:

„Als Arbitrage wird ganz allgemein ein risikoloser Gewinn ohne eigenen Kapitaleinsatz beim Handel mit Finanzgütern bezeichnet.“ (ADELMEYER/WARMUTH, 2009, S. 121)

In „Stochastic Calculus for Finance I“ definiert STEVE SHREVE Arbitrage:

„..., we define arbitrage as a trading strategy that begins with no money, has zero probability of losing money, and has positive probability of making money.“ (SHREVE, 2003, S. 2)

DELBAN und SCHACHERMAYER geben in ihrem Werk „The mathematics of arbitrage“ zu Beginn eine informelle Definition des Arbitragebegriffs und des *No-Arbitrage-Prinzips*:

„... an arbitrage opportunity is the possibility to make a profit in a financial market *without risk* and *without net investment of capital*. The principle of no-arbitrage states that a mathematical model of a financial market should not allow for arbitrage possibilities.“ (DELBAN/SCHACHERMAYER, 2006, S. 4)

Tatsächlich existieren verschiedene Arten von Arbitrage. Als bekannt gilt die geographische Arbitrage, darunter versteht man das Ausnützen unterschiedlicher Preise auf unterschiedlichen Märkten (vgl. STOBBE, 1991, S.431). In dieser Arbeit liegt der Fokus auf den finanzmathematischen Definitionen, wie sie in den letzten beiden zitierten Werken gegeben werden. Die finanzmathematische Modellierung verwendet in vielen Modellen das *No-Arbitrage-Prinzip*.

Dieser Ansatz beruht auf einem gut funktionierenden Markt, welcher keine Möglichkeiten zur Arbitrage bietet. In der Realität existieren zwar Arbitragemöglichkeiten, diese bestehen aber nur für kurze Zeit. In einer wirtschaftlichen Sichtweise hat dieses Prinzip Sinn. Wenn ein (Finanz)Gut an einem Ort zu billig angeboten wird, dann steigt dort die Nachfrage und das Angebot sinkt. Andererseits, wenn ein (Finanz)Gut an einem Ort zu teuer angeboten wird, dann sinkt die Nachfrage und das Angebot steigt. Nach den Gesetzen von Angebot und Nachfrage steigt im ersten Fall der Preis des Gutes und im zweiten Fall sinkt der Preis des Gutes. Die Arbitragemöglichkeit verschwindet (vgl. ADELMEYER/WARMUTH, 2009, S. 121).

Das *No-Arbitrage-Prinzip* hat auch aus einem weiteren Grund Sinn. Wenn man ein (Finanz)Gut anbietet, dessen Preis in einem Modell bestimmt wurde, das Arbitrage zulässt, dann kann das schlechte Auswirkungen für die Käufer/innen oder Verkäufer/innen haben. Da es in diesem Modell eine Arbitragemöglichkeit gibt, können unbegrenzt hohe Gewinne gemacht werden. Wenn jemand unbegrenzt viel gewinnt, dann verliert jemand anders unbegrenzt viel Geld. Das *No-Arbitrage-Prinzip* ist also auch eine Art Fairness-Bedingung.

10.4.1 Zeitkriterium

Quellen zu geschichtlichen Aspekten des *No-Arbitrage-Prinzips* sind relativ rar gesät. Wir beginnen deshalb die Geschichte der Arbitrage zu betrachten. Aber auch hier zeigt sich kein besseres Bild, lediglich eine Dissertation beschreibt die Geschichte der Arbitrage näher. Diese stammt aus dem Jahr 1914, in welcher Arbitrage als geographische Arbitrage folgendermaßen definiert ist:

„Man kann daher die Arbitrage definieren als „diejenige Handelstätigkeit, welche der Ausnutzung gleichzeitiger Preisunterschiede zwischen zwei Börsenplätzen gewidmet ist.“ (WINKLER, 1914, S. 2)

WINKLER beschreibt in seiner Arbeit, dass Material über die ältesten Kulturvölker zu diesem Thema nur relativ spärlich vorhanden ist. Drei Punkte sind für Arbitrage erforderlich: eine hochentwickelte Geld- und Kreditwirtschaft inklusive kaufmännischer Rechenkunst, möglichst große Vollkommenheit des Verkehrswesens, besonders des Nachrichtenverkehrs und geregelte nationale und internationale Rechtsverhältnisse (WINKLER, 1914, S. 5). WINKLER benennt den folgenden Handel aus dem 13. Jh als eines der ersten arbitrageähnlichen Geschäfte:

„Im Jahre 1260 schreibt die Sieneser Handelsgesellschaft der Tolomei an ihren auf den Champagnermessen weilenden Faktor, sie habe in Siena Wechsel auf die nächste Messe verkauft, weil sie hierdurch sich am billigsten Geld verschaffen könnte, das sie zur Führung des Krieges gegen Florenz aufzubringen habe; sie fügt hinzu, Darlehen in Siena aufzunehmen, sei nicht so vorteilhaft, denn der Zinsfuß

betrage augenblicklich zwischen Kaufleuten 5 – 6 Pfg. pro Pfund (vermutlich pro Monat 2, was etwa $12\frac{1}{2}$ bis 15% jährlich bedeuten würde), für Nichtkaufleute das Doppelte; auch der Verkauf von Wechsell auf England komme nicht so günstig aus, wie die Trassierung auf die Messen der Champagne.“ (EHRENBERGER, 1896 zitiert nach WINKLER, 1914, S. 8 f.)

Aufgrund des gering ausgebildeten Verkehrswesens im Mittelalter war das Vollziehen eines Arbitragegeschäftes nur sehr schwer möglich. Hinzu kommt das auf ARISTOTELES und THOMAS VON AQUIN gestützte kirchliche Verbot, in diesem Zusammenhang ist der Ausdruck Wucherlehre bekannt, „pecunia pecuniam parere non potest“, was soviel bedeutet wie, „Geld kann nicht Geld hervorbringen“ (vgl. WINKLER, 1914, S. 12 f.). Erst zu Beginn des 18. Jahrhunderts verdichten sich Geschäfte dieser Art, dies geschieht in enger Verbindung mit der Mathematik. Eine neue mathematische Methode des kaufmännischen Rechnens, der sogenannte Kettensatz, la règle conjointe, trug zum schnelleren Rechnen bei (vgl. WINKLER, 1914, S. 20 und SCHELLENBERG, 1825, S. 379). Die Anzahl an Arbitragegeschäften gipfelte in einem ersten Höhepunkt im 19. Jahrhundert. Eine der ersten Steuergesetzgebungen im selben Jahrhundert hinderten das weitere Wachsen der Arbitragegeschäften (vgl. WINKLER, 1914, S. 29 ff.).

Die Erfindung des Telefons im Jahre 1879 ermöglichte einen schnellen Austausch von Informationen, welcher für ein Arbitragegeschäft notwendig ist. Arbitragegeschäfte bezwecken in einer gewissen Art und Weise eine Preisregulation (WINKLER, 1914, S. 3). Plätze, wo die Ware weniger kostet, erhöhen den Preis und Plätze, wo die Ware teurer ist, senken den Preis. Es entsteht eine Art Durchschnittspreis.

Als normaler Mensch findet man an den heutigen global vernetzten Finanzmärkten kaum noch eine Arbitragemöglichkeit. Hochleistungsrechner übernehmen das Aufspüren und führen automatisiert den Handel durch. Auf Märkten existiert nach wie vor die Möglichkeit zur Arbitrage, sobald diese entdeckt wird, verschwindet sie. In finanzmathematischen Modellen scheint es daher auch aus diesem Grund vernünftig, No-Arbitrage von vornherein anzunehmen.

Nichtsdestotrotz vertiefen wir nun die Betrachtungen von Arbitrage auf die Verwendung in der Finanzmathematik. STEVE SHREVE führt in seinem Lehrbuch „Stochastic Calculus for Finance I“ an, dass der Beginn der Verwendung des *No-Arbitrage-Prinzips* zur Bepreisung auf BLACK und SCHOLES zurückgeht. Der erste, der das ausführlicher beschrieben hat, war allerdings MERTON (vgl. SHREVE, 2003, S. 20). Bei No-Arbitrage-Bepreisungen betrachtet man ein Modell mit unterschiedlichen Assets und einem Geldmarkt, möchte man nun ein neues Asset bewerten, so muss man unter der No-Arbitrage-Bedingung einen Preis finden, sodass es keine Möglichkeiten gibt, eine Arbitrage zu formen. Eine andere Sichtweise besagt, dass man das neue Asset um jenen Preis verkaufen muss, um den man sich ein Portfolio aus den anderen Assets bastelt, welches zur jeder Zeit denselben Wert wie das zu bepreisende Asset hat.

Dass der Anfang des *No-Arbitrage-Prinzips* in Finanzmathematik anzusetzen ist, sieht auch eine Probandin so:

FM2: „Also, ich glaube Entwicklungen ist sicher, also diese Arbitragetheorie, die wahrscheinlich, die wichtigste und das heißt auch, es gibt das erste Fundamental Theorem und das zweite Fundamental Theorem, wo es eben darum geht, dass

man dieses Replikationsargument mit risikoneutraler Bewertung verbindet und also, ausgehend ist das eben von Black, Scholes, die haben eben 73 (sic!) den Wirtschaftsnobelpreis bekommen für das Black-Scholes-Modell.“

HARRISON und PLISKA bewiesen im Jahr 1981 das „Fundamental Theorem of Asset Pricing“, welches Arbitrage und Martingalmaße verbindet (vgl. SCHACHERMAYER, 2008, S. 19).

FM3: „... einen konzeptuell schönen Satz, finde ich das Fundamental Theorem of Asset Pricing, das ganz klar die Beziehung zwischen Martingalen auf der einen Seite und Arbitrage auf der anderen Seite herstellt.“

Dieses Theorem wurde noch im selben Jahr von KREPS erweitert und dazu wurde auch das *No-Arbitrage-Prinzip* erweitert. Es handelt sich aber um ein hoch theoretisches Konstrukt, wo wir nur die Definition geben möchten, um den theoretischen Charakter hervorzuheben. In einer strengen mathematischen Formulierung liest sich die Definition von „Free Lunch“ so:

Definition 8. (free lunch) The process S admits a free lunch, if there is a random variable $f \in L_+^\infty(\Sigma, F, \mathbf{P})$ with $P[f > 0] > 0$ and a net $(f_\alpha)_{\alpha \in I} = (g_\alpha - h_\alpha)_{\alpha \in I}$ such $g_\alpha = \int_0^T H_T^\alpha dS_t$, for some admissible trading strategy H^α , $h_\alpha \geq 0$ and $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ converges to f in the weak-star topology of $L^\infty(\Sigma, F, \mathbf{P})$. (KREPS, 1981 zitiert nach SCHACHERMAYER, 2008, S. 20)

Also „free lunch“ ist eine Art von Arbitrage, bei der man eine Aktie S nach der Strategie $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ kauft und verkauft, man hält also folgenden Wert $\int_0^T H_T^\alpha dS_t$, man darf inzwischen Geld wegschmeißen und erreicht letztlich durch Konvergenz (in der Weak-Star-Topologie) eine Art Arbitrage.

Die „Weak-Star-Topologie“ erlaubt keine klare wirtschaftliche Interpretation, so wurde diese Topologie von DELBEAN und SCHACHERMAYER durch eine feinere und besser interpretierbare Topologie ersetzt. Um den Anforderungen der Praxis zu genügen erweiterten CHOU und EMERY das Setting erneut (local martingales und sigma martingales). Worauf DELBEAN und SCHACHERMAYER das „Fundamental Theorem of Asset Pricing“ neu formulierten (vgl. SCHACHERMAYER, 2008, S. 21).

Dieser Ansatz der Idee *No-Arbitrage* spielt nach wie vor in der Finanzmathematik eine wichtige Rolle, wenn auch die Betrachtungen zur Zeit etwas weiter gehen. Ansätze der modellfreien Finanzmathematik und Erweiterungen wie Good Deals kommen ins Spiel.

FM2: „... früher ist man davon ausgegangen, man hat einen Wahrscheinlichkeitsraum, man hat ein Maß darauf und modelliert in diesem Wahrscheinlichkeitsraum. Jetzt sagt man eben, man hat nun viele Maße, das ist eben eine neuere Entwicklung. Trotzdem geht es nach wie vor darum, Arbitragefreiheit in diesem erweiterten Setting zu formulieren. Man hat jetzt robuste Arbitrage und so weiter...“

CD: „Also das findet in verschiedenen Modellen seine Anwendung?“

FM2: „Genau, also ich glaube, dieses Prinzip der Arbitragefreiheit ist nach wie vor sehr wichtig. ... es gibt diese Entwicklung von stochastischer Portfoliotheorie, wo man sagt ... auf langen Zeithorizonten kann es zu Arbitrage kommen,

aber es gibt eben dann andere Begriffe. Also es gibt eben dann sehr viele Begriffe in einem gewissen Sinn Arbitragefreiheit. Dass man halt sagt, Arbitrage gibt es, aber Good Deals sollte man ausschließen. Dass man eben mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit sehr hohe Gewinne macht, solche Dinge. Diese Prinzipien kommen eben hauptsächlich vor, und dann versucht man das eben mathematisch zu formulieren,...

Die betrachtete Idee ist, wie SCHWILL fordert, in der historischen Entwicklung deutlich wahrnehmbar, da die Arbeit „The pricing of options and corporate liabilities“ im Jahr 1973 von BLACK und SCHOLES aus mehreren Gründen ein wichtiges Ereignis in der finanzmathematischen Geschichte ist.

FM6: „...Black, Scholes ist halt die Zäsur schlechthin...“

Aufgrund der neueren Entwicklungen wird dieses Idee auch noch längerfristig relevant bleiben.

10.4.2 Horizontalkriterium

Die Idee der No-Arbitrage findet man in den unterschiedlichsten finanzmathematischen Anwendungen wieder. Beeindruckend und gleichzeitig verblüffend ist es, wie schön dieses *No-Arbitrage-Prinzip* mit den mathematischen Methoden (des Beweisens) harmoniert. Dazu betrachten wir folgendes simple, aber auf den ersten Blick durchaus überraschende Resultat.

Satz 10.2. Das betrachtete Marktmodell erfüllt die No-Arbitrage-Bedingung. Wenn zwei Portfolios morgen den gleichen Wert aufweisen, dann haben diese Portfolios auch heute den gleichen Wert.

Beweis. Angenommen die beiden Portfolios haben heute nicht den gleichen Wert, dann ist eines der beiden mehr Wert als das andere. In diesem Fall kann man heute das teurere Portfolio verkaufen, während man mit diesem Geld das billigere kauft. Es verbleibt eine Differenz. Am nächsten Tag verkauft man das ursprünglich billigere Portfolio und kauft mit diesem Geld das ursprünglich teurere zurück, beide sind nun gleich viel wert. Die gestern erhaltene Differenz verbleibt als risikoloser Gewinn, es wurde eine Arbitragemöglichkeit gefunden, Widerspruch. $\square$

Die Methode des indirekten Beweises offenbart die Nützlichkeit des betrachteten Prinzips beim mathematischen Argumentieren. Auch beim berühmten Binomialmodell des Aktienkurses zeigt sich die angesprochene Harmonie.

Satz 10.3. Ein Marktmodell mit einer Aktie, dessen Kurs einem Binomialmodell folgt, und einem Bankguthaben ist frei von Arbitrage, wenn $0 < d < 1 + r < u$ ist. Der Faktor u bezeichnet die Anzahl, um wie viele Male der Aktienkurs von einem Zeitpunkt auf den nächsten ansteigt, analog dazu der Faktor d für das Fallen des Aktienkurses. Unter r verstehen wir den Zinssatz.

Beweis. Indirekt. Angenommen:

- $1 + r \leq d$: Zum Zeitpunkt 0 borgt man sich Geld von der Bank aus und investiert dieses in die Aktie. Egal wie der Kurs verläuft, selbst im schlimmsten Fall kann man die Schulden auf der Bank mit dem Wert der Aktie zum Zeitpunkt 1 begleichen.
- $u \leq 1 + r$: In diesem Fall verkauft man eine Aktie, ohne diese zu besitzen (Leerverkauf, siehe Kapitel 10.3.2 auf S. 93) und legt das damit eingenommene Geld auf die Bank. Zum Zeitpunkt 1 kann man auf alle Fälle die Aktie mit dem Geld auf der Bank zurückkaufen.

□

Mit Hilfe des *No-Arbitrage-Prinzips* und der **Idee der Replikation** bepreist man unterschiedliche Wertpapiere.

Zu Beginn haben wir bereits einige verbale Definitionen von Arbitrage gegeben. Eine strenge mathematische Formulierung fehlt noch.

Definition 9. (Arbitrage) Eine Arbitrage ist eine Handelsstrategie $X(t)$, für die gilt $X(0) = 0$ und für eine bestimmte Zeit $T > 0$

$$P(X(T) < 0) = 0, \quad P(X(T) > 0) > 0$$

erfüllt.

In Worten liest sich die Definition so: Arbitrage ist eine Handelsstrategie, die ohne Nettoinvestition von Kapital beginnt, die nach einer Zeit T mit Sicherheit kein Geld verliert und zusätzlich eine positive Wahrscheinlichkeit aufweist, Geld zu gewinnen.

Ausgestattet mit so einer präzisen Definition lassen sich auch finanzmathematisch tief liegende Aussagen machen. Nochmals sei an dieser Stelle eine Version des „Fundamental Theorem of Asset Pricing“ erwähnt, siehe auch Satz 10.1 auf Seite 84.

Satz 10.4. (First fundamental theorem of asset pricing) Wenn ein Modell ein risikoneutrales Maß hat, dann ist es frei von Arbitrage.

Der Satz 10.4 bietet eine Bedingung mit der man zeigen kann, dass das verwendete Modell frei von Arbitrage ist.

FM5: „... Das Herausarbeiten wie Arbitragefreiheit in Märkten gesichert ist, ..., also das ist auch ein ganz wesentlicher Punkt, ... wenn man die Arbitragefreiheit voraussetzt, Bewertungsmethoden von komplizierten Produkten aufgrund der Arbitragefreiheit, das geht von ganz einfachen Sachen, wie ich weiß nicht Forward-Rate-Agreements bis zu Bewertungsmethoden von komplizierten Optionen.“

Die Wichtigkeit und Schönheit dieses Theorems bestätigen auch die anderen Befragten. An dieser Stelle sei nochmals das Zitat von Seite 123 erwähnt.

FM3: „... Also ich finde wirklich auch einen konzeptuell schönen Satz, finde ich das Fundamental Theorem of Asset Pricing, das ganz klar die Beziehung zwischen Martingalen auf der einen Seite und Arbitrage auf der anderen Seite herstellt.“

FM2: „Die wichtigste Idee oder eine der wichtigsten Ideen ist sicher das Fundamental Theorem of Asset Pricing, wo man halt mit arbitragefreien Modellen arbeitet und die eben charakterisieren kann, dass es eben risiko-neutrales Maß gibt. Also ein Maß, das äquivalent dazu ist. In sämtlicher Modellierung ist das das Hauptding, dass man mit solchen Modellen arbeitet. Arbitragefreiheit ist wahrscheinlich das wichtigste Prinzip. ...“

Auch in Bereichen der Zinssatzmodellierung, bei Term-Structure-Modellen, ist *No-Arbitrage* von Bedeutung. Neuere, aktuellere Entwicklungen in der finanzmathematischen Modellierung versuchen nach wie vor mit Arbitrage zu arbeiten, wenn auch in einem etwas erweiterten Setting (vgl. Aussage von FM2 auf Seite 117).

10.4.3 Sinnkriterium

Der Kern von *No-Arbitrage* übertragen auf eine sehr banale Ebene liefert die Weisheit, „Nichts ist umsonst“. Es existiert kein gratis Mittagessen. Das besagte Mahl ist bei einem Hotelaufenthalt eben nicht gratis, der Preis des Zimmers inkludiert es. Einer der Befragten weist auf diesen Aspekt hin:

FM5: „...wenn man das versteht, es gibt keine Arbitrage, man kann nicht ohne Risiko immer hundertprozentig einen Gewinn einfahren, oder keinen Verlust einfahren, glaube wäre das eine Idee, ...“

Im Alltag ist der Ausspruch „Von Nichts kommt Nichts“ wohlbekannt. Er bedeutet so viel, wie: „Nur mit einem gewissen Aufwand kommt man zu etwas“. Der Spruch geht auf den römischen Dichter LUKREZ zurück. Er formulierte es in seinem Werk „De rerum natura“ mit „de nihilo quoniam fieri nihil posse videmus“, was übersetzt „wir sehen, dass nichts von nichts entstehen kann“. Auch der bekannte Spruch „Ohne Fleiß kein Preis“ rührt daher und drückt eine Facette des *No-Arbitrage-Prinzips* aus. Dieser verbindet in einer gewissen Art und Weise das theoretische Prinzip und einen alltäglichen Ansporn.

In der Tat scheint es in der Finanzmathematik eine sehr theoretische Idee der Modellierung zu sein. Ein bekannter Witz, der auch in der einen oder anderen Anfängervorlesung der Finanzmathematik erzählt wird, zeichnet das mitunter paradoxe Bild der *No-Arbitrage*-Idee.

„A professor working in Mathematical Finance and a normal person go on a walk and the normal person sees a 100 € bill lying on the street. When the normal person wants to pick it up, the professor says: don't try to do that. It's absolutely impossible that there is a 100 € bill lying on the street. Indeed, if it were lying on the street, somebody else would have picked it up before. (end of joke)“
(DELBEAN/SCHACHERMAYER, 2006, S. 3)

Arbitrage darf nicht mit dem Vorgehen einer Autoverkäuferin verwechselt werden. Sie kauft ein Auto zu einem bestimmten Preis und verkauft dieses Auto zu einem höheren Preis. Diese verrichtet aber Arbeit, sie muss sich nach den Angeboten umsehen, das Auto lagern, Verkaufsgespräche führen, etc. . . . Hier kommt das „etwas“ nicht von „nichts“.

Auf der anderen Seite existieren Arbitragegeschäfte, es gibt ja auch den Beruf des Arbitrageurs¹⁸, diese Möglichkeiten existieren auf funktionierenden Märkten nur kurz.

¹⁸Er/Sie nutzt ohne ein Risiko einzugehen Preisunterschiede aus.

10.4.4 Vertikalkriterium

An den zu Beginn angeführten Formulierungen von Arbitrage, in weiterer Hinsicht auch von No-Arbitrage, erkennt man die Chance der Vermittlung auf relativ einfachen Niveau. Auf einem solchen Niveau lässt sich das *No-Arbitrage-Prinzip* mit dem Ausspruch „Von Nichts kommt Nichts“ erklären.

Auf einer Ebene höher formulieren wir Arbitrage als eine Strategie, bei der man ohne Kapital beginnt, aber eine Möglichkeit, Geld zu erwirtschaften, hat, ohne am Ende mit Schulden dazustehen. Ein einfaches Beispiel aus DELBEAN/SCHACHERMAYER, 2006 illustriert die Idee von No-Arbitrage.

Beispiel 11. Wir betrachten Wechselkurse zwischen den Währungen \$ und €. Des Weiteren nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass der \$/€ in New York 1 : 1 ist. In Frankfurt muss derselbe Wechselkurs, zur selben Zeit, auch 1 : 1 sein. Angenommen das ist nicht der Fall und in Frankfurt bekommt man einen Dollar schon für 0,999€. In so einem Fall kommen Arbitrageure ins Spiel. Sie kaufen einen gewissen Betrag in Dollar in Frankfurt und verkaufen zur selben Zeit den gleichen Betrag von Dollar in New York. Die Rest verbleibt in den Händen der Arbitrageure. In Zahlen: Angenommen wir kaufen 1000 \$ um 999 € in Frankfurt und verkaufen zur selben Zeit die 1000 \$ in New York, wofür wir 1000 € erhalten. Es verbleibt uns ein Gewinn von 1 €. Auch wenn der eine Euro nicht viel erscheint, so muss bedacht werden, dass große Institutionen am Markt nicht mit so kleinen Beträgen arbeiten, sondern mit Milliarden (bzw. größtmöglichen Beträgen). Arbitrage verschwindet nur dann, wenn die beiden Kurse gleich sind (in der Realität ungefähr gleich).

In einem funktionierenden Markt muss bei so einer Ausgangssituation der Preis für Dollar in Frankfurt steigen, da die Nachfrage aufgrund des zu niedrigen Preises steigt und in New York muss der Preis für Dollar fallen, da das Angebot aufgrund des zu hohen Preises steigt. In solchen funktionierenden Märkten erlischt die Möglichkeit vom risikolosen Gewinn (vgl. DELBEAN/SCHACHERMAYER, 2006, S. 3 f.).

Ein wesentlicher Punkt der Idee von *No-Arbitrage* in mathematischen Modellen ist das Bepreisen von Finanztiteln. Angefangen bei einfachen bis hin zu komplexen Derivaten.

FM5: „...wenn man die Arbitragefreiheit voraussetzt, Bewertungsmethoden von komplizierten Produkten aufgrund der Arbitragefreiheit, das geht von ganz einfachen Sachen, wie ich weiß nicht Forward-Rate-Agreements bis zu Bewertungsmethoden von komplizierten Optionen. ...“

An dieser Stelle geben wir ein Beispiel für eine Bepreisung eines Forward-Kontrakts über die *No-Arbitrage-Idee*.

Beispiel 12. Es ist möglich ein Termingeschäft (in diesem Fall Forward-Kontrakt) abzuschließen, bei dem man das Recht und die Pflicht erwirbt zu einem fixen Zeitpunkt (z.B. in einem Jahr) einen bestimmten Betrag in einer Währung (z.B. Euro) zu einem heute vereinbarten Kurs (Forward-Kurs) in eine andere Währung zu Wechseln (z.B. Dollar). Ein Abschluss eines solchen Vertrags benötigt einen anderen Marktteilnehmer, der bereit ist, diesen Vertrag auch in die andere Richtung abzuschließen. Das verblüffende daran ist, dass das Verhältnis zwischen dem Kassakurs und dem Forward-Kurs nur von dem Verhältnis der

Zinsniveaus der beiden betrachteten Währungen abhängt.

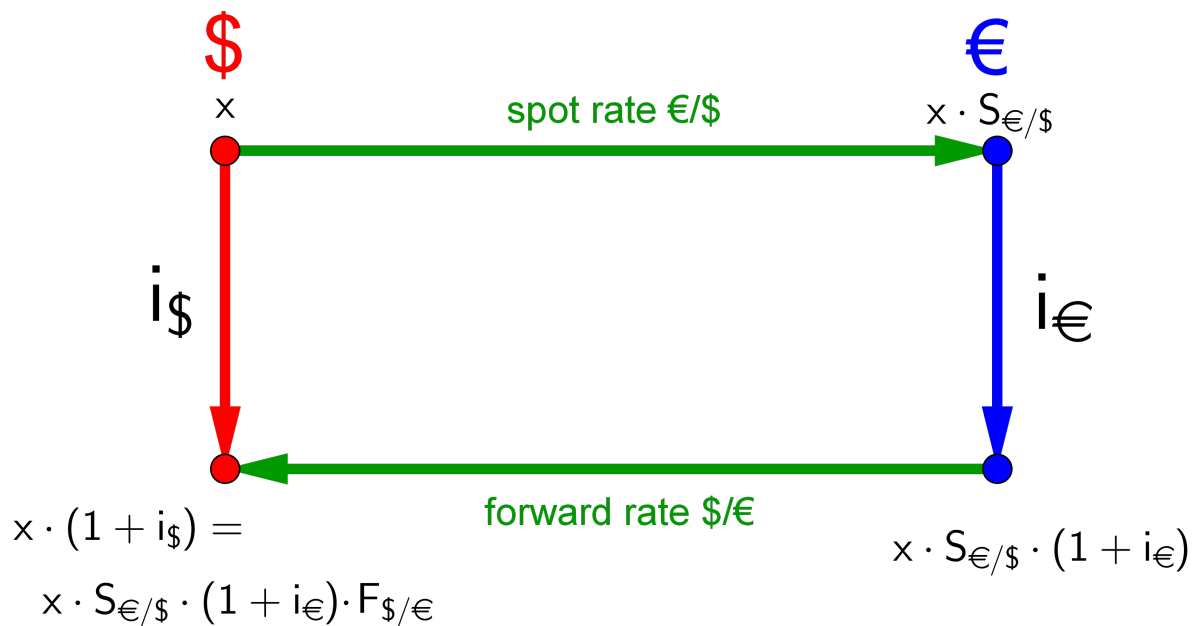


Abb. 13 Berechnung eines Forwardkurses

Für die Erklärung des Phänomens betrachten wir zwei Staaten, ein Staat mit der Währung Dollar, siehe links in Abbildung 13 und ein Staat mit der Währung Euro, siehe rechts in Abbildung 13. Das Zinsniveau (für ein Jahr) im ersten Staat beträgt $i_€$ und im zweiten Staat $i_€$. Wenn wir mit einem Betrag x in Dollar beginnen, siehe Abbildung 13 links oben, dann gibt es zwei Möglichkeiten. Einerseits können wir den Betrag x in Dollar belassen und auf ein Sparkonto für ein Jahr legen, welches mit einem Zinssatz von $i_€$ verzinst wird. Das Sparkonto wirft Zinsen ab und unser Stand erreicht eine Höhe von $x \cdot (1 + i_€)$, siehe Abbildung links unten. Andererseits können wir den oben erwähnten Vertrag mit einem Marktteilnehmer abschließen, der uns ermächtigt, in einem Jahr zur Rate $F_{\$/€}$ Dollar in Euro zu wechseln. Abermals beginnen wir mit dem Betrag x Dollar und wechseln diesen in Euro. Bei einem Kassakurs von $S_{€/€}$ hält man nach dem Wechsel $x \cdot S_{€/€}$ Euro in Händen. Auf einem Sparbuch in dem betrachteten Eurostaat bringt der Betrag nach einem Jahr $x \cdot S_{€/€} \cdot (1 + i_€)$ Euro, siehe rechts unten in Abbildung 13. Nach einem Jahr lösen wir den Vertrag ein und erhalten $x \cdot S_{€/€} \cdot (1 + i_€) \cdot F_{\$/€}$ Euro. Aus Gründen der No-Arbitrage müssen beide Beträge links unten gleich groß sein, daraus ergibt sich für das Verhältnis Kassakurs zu Forwardkurs (beide von Euro in Dollar, man bedenke $\frac{1}{F_{€/€}} = F_{\$/€}$):

$$\frac{S_{€/€}}{F_{€/€}} = \frac{1 + i_€}{1 + i_€}$$

Wenn diese Gleichheit nicht gilt, dann existiert eine Möglichkeit zur Arbitrage. Nehmen wir an, wir haben einen Jahreszinssatz von 3% in beiden Staaten. Der Kassakurs sei 1,04 für Euro in Dollar und der Forward-Kurs sei 1,05 für Euro in Dollar. Wir borgen uns 100 \$ von der Bank aus und wechseln diese in Euro um, wir erhalten ungefähr 96,15 €. In

einem Jahr wachsen unsere Schulden auf 103 \$. Unser Guthaben in Euro wächst auf 99,04 €. Anschließendes Wechseln mit dem Forward-Kurs von 1,05 ergibt 103,99 \$. Es verbleibt ein Rest von 0,99 \$. Wir verbuchen einen risikolosen Gewinn ohne Nettoeinsatz von Kapital.

In den vorhergehenden Kapiteln wurden unterschiedliche Definitionen der *Arbitrage* bzw. des *No-Arbitrage-Prinzips* angeführt. Mit Werkzeugen der höheren Wahrscheinlichkeitstheorie respektive Maßtheorie (beispielsweise: stochastische Prozesse, L_p -Räume, Filtrationen, ...) lässt sich ein Finanzmarktmodell auf ein mathematisch sicheres Fundament stellen. Im Kapitel 10.7.3 auf Seite 159 kann eine Definition der *No-Arbitrage-Bedingung* nachgelesen werden. Hier wird aufgezeigt, dass sich die Idee der *No-Arbitrage* auf einer intellektuell sehr hohen Stufe durchführen lässt.

Eng verbunden mit der Idee von *No-Arbitrage* ist die der *Replikation*, siehe Kapitel 10.5. Die Kombinationen von beiden Ideen ermöglicht ein Bepreisen von Forward-Kontrakten, Optionen,

FM3: „... den Aspekt von Arbitrage und Replikation kann man hier mit Hilfe von Beispielen von statischer Replikation, also Buy-and-Hold-Portfolios, kann man hier meines Erachtens gut darstellen. Man kann Begriffe wie einen Forward-Kontrakt mit - Zinsen in zwei verschiedenen Währungen beispielsweise kann man gut illustrieren und hier - ohne - fortgeschrittenen mathematischen Kalkül, also nur unter Benützung von elementaren Rechnungen, eben Begriffe wie Arbitrage oder eindeutige Bewertungen eines Kontrakts einführen. ...“

Die Bepreisung von Derivaten mittels *No-Arbitrage-Prinzip* und *Replikation* wird im Kapitel 10.5 näher ausgeführt. Die Formulierungen zu No-Arbitrage im mathematischen Rahmen werden Schritt für Schritt ausgeklügelter und komplexer. Wir verweisen an dieser Stelle an die Definition 9 auf Seite 119 und an die geschichtlichen Entwicklungen die zur Free Lunch, Definition 8 auf Seite 117, geführt haben.

Neuere Entwicklungen nähern sich mehr der Praxis an. Nun arbeitet man in unvollständigen Märkten, wo mehrere No-Arbitrage-Preise existieren, da es auch mehrere äquivalente Martingalmaße gibt. Über den No-Arbitrage-Ansatz erhält man nur noch eine Preisschranke. In der Praxis möchte man aber schärfere Grenzen und bezieht sogenannte Good Deals mit ein (vgl. Kapitel 10.4.2).

Die Idee von *No-Arbitrage* lässt sich auf unterschiedlichen intellektuellen Niveaus vermitteln. Die Spannweite reicht von einer banalen Ebene bis hin zu einem Level auf universitärer Forschung. Aus diesem Grund wird das Vertikalkriterium erfüllt.

10.5 Replikation

Unter *Replikation* versteht man das Nachbauen eines Finanzprodukts (im Allgemeinen Derivate) durch andere am Finanzmarkt erhältliche Produkte. Es dient vor allem der Preisfindung von Derivaten und wird in der finanzmathematischen Modellierung verwendet. In einer etwas formaleren Version lässt sich *Replikation* folgendermaßen definieren.

Definition 10. (Replikation) Sei $V(T)$ der Wert des Derivats zum Zeitpunkt T . Unter einer Replikation versteht man eine Kaufs- und Verkaufsstrategie $X(t)$ für $0 \leq t \leq T$, die ausschließlich in den Geldmarkt und in die im Modell vorkommenden Aktien investiert, sodass $X(T) = V(T)$ fast sicher gilt.

Eng verknüpft mit der Idee der *Replikation* ist die *No-Arbitrage-Idee*, siehe Kapitel 10.4. Nur in Verbindung lässt sich das Bepreisen abgeleiteter Wertpapiere durchführen. Unter diesen Umständen klingt es vernünftig diese beiden Ideen zu einer zentralen zusammenzufassen. Wenn Marktmodelle frei von Arbitrage sind, dann heißt das noch nicht, dass jedes Derivat replizierbar ist (siehe Beispiel 27). Im umgekehrten Fall, wenn jedes Derivat replizierbar ist, dann existiert höchstens ein Martingalmaß und im Falle der Existenz des angesprochenen Maßes auch frei von Arbitrage (vgl. Fundamental Theorems of Asset Pricing). Diese beiden Ideen sind eng miteinander verwoben, aber nicht ganz dieselben. Aus diesem Grund betrachten wir sie getrennt.

FM2: „... also diese Arbitragetheorie, die wahrscheinlich, die wichtigste und das heißt auch, es gibt das erste Fundamental Theorem und das zweite Fundamental Theorem, wo es eben darum geht, dass man dieses Replikationsargument mit risikoneutraler Bewertung verbindet ...“

Am Beginn dieser Idee ist ein genaueres Eingehen auf den Begriff „Hedging“ unabdingbar. Die doppelgleisige Verwendung des Ausdrucks in unserem System gehört klar erläutert. Auf der einen Seite verstehen wir unter Hedging das Replizieren, also das Nachbilden eines Finanztitels über andere am Markt erhältliche Assets mit dem Ziel, ein abgeleitetes Wertpapier zu bepreisen. Unter dieser Bedeutung behandeln wir den Begriff in diesem Kapitel. Die Idee *Replikation* umfasst eine Strategie der theoretischen Preisfindung von Derivaten. Auf der anderen Seite kann „Hedging“ im Sinne „weg mit dem Risiko“ aufgefasst werden, dann subsumieren wir es unter der Idee *Handhabung von Risiko*. Zum Beispiel eine Bank möchte sich von Wechselkursschwankungen absichern und tätigt dazu Geschäfte am Finanzmarkt, dann ist diese Strategie, als Risikominimierung zu verstehen. Eine ähnliche Situation wird in Beispiel 7 auf Seite 100 beschrieben.

10.5.1 Zeitkriterium

Die Idee *Replikation* zum Bewerten von Derivaten einzusetzen, stammt von BLACK und SCHOLES. In ihrer Arbeit aus dem Jahr 1973 „The pricing of options and corporate liabilities“ (BLACK/SCHOLES, 1973) benutzen sie diese zur Bepreisung von Optionen. Die Idee findet einen merkbaren Einzug in die finanzmathematische Modellierung.

FM3: „... als dritten Strang würde ich schon die Black, Merton, Scholes, die Idee der Replikation von Derivaten, also dass man im Kontext einer Brown’schen

Bewegung, unter gewissen Voraussetzungen, jedes beliebige Derivat perfekt replizieren kann. Das ist mathematisch schon eine verblüffende und anspruchsvolle Idee und es hat enorme Konsequenzen gehabt.“

Die Verbindung zu der Idee von *No-Arbitrage*, Martingalmaßen bzw. risikoneutraler Bewertung ist in der Mathematik sehr tief liegend, dahinter steht das Fundamental Theorem of Asset Pricing.

FM2: „...ausgehend ist das eben von Black, Scholes, ... aber insofern ist sicher, was die Personen betrifft, sind diese zwei sicher Ausgangspunkt ... den Zusammenhang zwischen Replikation und risikoneutraler Bewertung. Das war eben der Ausgangspunkt der Finanzmathematik und hat dann eben zu diesem Fundamental Theorem geführt. Das ist der Hauptpfeiler der Finanzmathematik.“

Neuere Marktmodellierungen fokussieren auf unvollständige Märkte, das sind Finanzmarktmodelle, in denen nicht jedes abgeleitete Wertpapier replizierbar ist.

FM3: „Das sind schon mal die großen Eckpfeiler. Aber natürlich geht es hurtig weiter. Auf der einen Seite ist die Betonung der unvollständigen Märkte ebenso schön und verführerisch, wie die Idee der Replikationen ist, so sehr muss man darauf hinweisen (lacht), dass diese Idee eben zum Teil eine Illusion darstellt.“

In solchen Märkten lässt sich ein Derivat im Allgemeinen nicht mehr über ein Replikationsargument bewerten. Die Erweiterung der ursprünglichen Idee der *Replizierbarkeit* führt zu Begriffen der Subreplikation und der Superreplikation, siehe Definition 21 auf Seite 161. Nach wie vor gilt es Preise von Derivaten zu bestimmen, die keine Möglichkeit zur Arbitrage bieten. Es lassen sich Schranken angeben, zwischen denen ein arbitragefreier Preis des zu bewertenden Derivats liegt. Eine Verbindung der Bewertung mittels Superreplikation zu der arbitragefreien Bewertung mittels Verwendung aller äquivalenten Martingalmaße zeigt erneut die enge Verbindung zur Idee *No-Arbitrage* (vgl. MOHN, 2004, S. 83 ff.).

Die Idee der *Replikation* ist in der historischen Entwicklung der Wissenschaftsdisziplin Finanzmathematik deutlich wahrnehmbar und wird in dieser auch noch längerfristig relevant bleiben.

10.5.2 Horizontalkriterium

Bei der Erstellung von Finanzmarktmodellen gibt es bezüglich der Bepreisung von Derivaten via eines Replikationsarguments drei Fälle. Am schönsten sind Modelle, in denen jedes Derivat eindeutig repliziert werden kann, sodass man einen arbitragefreien Preis erhält. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, dass in dem modellierten Finanzmarkt das Derivat nicht mehr repliziert werden kann. Hier lässt sich im Allgemeinen ein Intervall für den Derivatpreis finden, wo für alle Preise aus dem Intervall Arbitragefreiheit garantiert ist. Im denkbar schlechtesten Fall erlaubt das Marktmodell Arbitrage, solche Modelle sollten nicht für die Bepreisung von Derivaten herangezogen werden.

Klarheit über den vorliegenden Fall schafft das zweite „Fundamental Theorem of Asset Pricing“, das ganz klar den Zusammenhang zwischen der Arbitrage und *Replikation* herstellt.

Satz 10.5. (Second¹⁹ fundamental theorem of asset pricing) In einem arbitragefreien Marktmodell mit einem risikoneutralen Maß sind genau dann alle Derivate replizierbar, wenn das risiko-neutrale Maß eindeutig ist.

Dieser Zusammenhang, Dualität, ist in der Finanzmathematik äußerst wichtig und kommt immer wieder vor.

FM5: „Ich mein was immer wieder vorkommt, ... eines von den zentralen Konzepten schlechthin, Hedging und Replikation mit dem steht und fällt seit Black-Scholes alles, weil die Black-Scholes Formel über ein Replikationsargument zustande kommt, ... also selbstfinanzierende Strategie, Replikation oder Superreplikation oder Subreplikation und Superhedging und Subhedging, ist dann eh mehr oder minder dasselbe und diese Dualität ist so was von zentral wie nur irgendwas, also einerseits man hat dieses Pricing über ein Martingalmaß ... über ein Pricingmeasure und das duale Konzept über eine Handelsstrategie des in der, also in der akademischen Finanzmathematik ist diese Dualität, also ohne diese Dualität kann man alles wegschmeißen. Also sind immer wieder Dualitätsargumente, die da immer wieder kommen, also das, was wir da gemacht haben, das ist eine einzige, von Black-Scholes weg bis zu dem, was der Walter Schachermayer da gemacht hat, es ist immer Dualitätstheorie.“

Diese angesprochene Dualität illustriert das folgende Beispiel.

Beispiel 13. Wir betrachten ein Marktmodell, in dem es eine Aktie gibt, deren Kurs einem Binomialmodell in einer Periode folgt. Der Kurs beginnend bei dem Wert S_0 steigt mit dem Faktor u und fällt mit Faktor d . Des Weiteren besteht die Möglichkeit in den Geldmarkt zu investieren, hier erhält man einen sicheren Zinssatz von r . Für die gegebenen Parameter gilt $d < 1 + r < u$. Auf diesem Markt führen wir noch ein Derivat V ein, dessen Auszahlung vom Kurs der Aktie zum Zeitpunkt 1 abhängt. Wenn der Aktienkurs steigt, dann ist das Derivat $V_1(H)$ wert, ansonsten $V_1(T)$.

Nur diesmal soll der Preis des Derivats zum Zeitpunkt 0 mittels eines Replikationsargument bestimmt werden. Die Handelsstrategie beginnt mit einem Startkapital von X_0 , gleichzeitig werden δ_0 Aktien gekauft. Es verbleibt ein Kapital von $X_0 - \delta_0 \cdot S_0$. Schlussendlich soll $X_1 = V_1$ gelten, dann folgt nach Satz 10.2, dass $X_0 = V_0$ ist, da es ansonsten eine Arbitragemöglichkeit gibt. Zum Zeitpunkt 1 lautet unser Vermögensstand $X_1 = \delta_0 \cdot S_1 + (1 + r) \cdot (X_0 - \delta_0 \cdot S_0)$, das entsprechende Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} I : V_1(H) &= \delta_0 \cdot u \cdot S_0 + (1 + r) \cdot (X_0 - \delta_0 \cdot S_0) \\ II : V_1(T) &= \delta_0 \cdot d \cdot S_0 + (1 + r) \cdot (X_0 - \delta_0 \cdot S_0) \end{aligned}$$

Die Lösungen lauten: $X_0 = V_0 = \frac{1}{1+r} \left(\frac{1+r-d}{u-d} V_1(H) + \frac{u-1-r}{u-d} V_1(T) \right)$ und $\delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)}$. Um das angegebene Derivat in diesem Modell zu replizieren, benötigt man ein Anfangskapital von $X_0 = V_0$ und muss δ_0 Aktien kaufen. Der Preis V_0 ist genauso groß wie bei der risikoneutralen Bewertung in Beispiel 28 auf Seite 156.

¹⁹In der Literatur gibt es viele Versionen des Theorems. SHREVE, 2004 bezeichnet diese als das zweite fundamentale Theorem.

Dieser Zusammenhang zeigt sich auch bei kontinuierlichen Modellen, wie den Black-Scholes-Modellen. Bei unvollständigen aber arbitragefreien Modellen sucht man Schranken für arbitragefreie Preise von Derivaten, und auch hier erhält man den Zusammenhang zwischen risiko-neutraler Bewertung und (Super)Replikation, siehe Beispiel 33 auf S. 164.

10.5.3 Sinnkriterium

In einem weiteren Sinne stellt das Replizieren eine typische menschliche Tätigkeit dar. Beim Replizieren am Finanzmarkt geht es in erster Linie um das Nachbilden, in anderen Worten das Nachahmen, der Preisentwicklung eines Derivats durch andere Finanzprodukte. Der Mensch ahmt im Alltag ständig nach. Nach unterschiedlichen Theorien in der Psychologie lernen Menschen durch Imitation. Nach einer Theorie ist *Lernen durch Imitation* ein Instinkt, denn schon Babys ahmen die Gesten der Eltern nach (vgl. McDOUGALL, 1951). Weitere Theorien bestätigen, dass Menschen durch Nachahmen lernen, vor allem wenn nach der Imitation noch eine Verstärkung stattfindet, z.B. Lob oder nette Geste wie ein Lächeln (vgl. MILLER/DALLARD, 1941).

Am wirklichen Finanzmarkt muss man sich im klaren sein, dass *Replikation* im Allgemeinen nicht funktioniert.

FM3: „...wie die Idee der Replikationen ist, so sehr muss man darauf hinweisen (lacht), dass diese Idee eben zum Teil eine Illusion darstellt. Und das kann ich sagen, das wurde von akademischer Seite eben schon seit mindestens 30 Jahren sehr stark betont. Aber bei den Praktikern ist das erst ab 2008, also ab der Krise, wirklich angekommen.“

10.5.4 Vertikalkriterium

Diese Kapitel führt das Schema *Replikation* auf unterschiedlichen intellektuellen Stufen aus. Einer der Befragten erklärt explizit, wie diese Stufen zusammengesetzt sind und erwähnt zusätzlich passende Beispiele. An dieser Stelle wird das Zitat von FM3 auf Seite 123 nochmals ausführlicher angegeben.

FM3: „... da könnte man den Aspekt von Arbitrage und Replikation ... mit Hilfe von Beispielen von statischer Replikation, also Buy-and-Hold-Portfolios, kann man hier meines Erachtens gut darstellen. Man kann Begriffe wie einen Forward-Kontrakt mit - Zinsen in zwei verschiedenen Währungen beispielsweise kann man gut illustrieren und hier - ohne - fortgeschrittenen mathematischen Kalkül, also nur unter Benützung von elementaren Rechnungen, eben Begriffe wie Arbitrage oder eindeutige Bewertungen eines Kontrakts einführen. Naja das kann man dann natürlich eben weiterführen, dann kann man eben zu einem Binomialmodell übergehen, wo eben dynamische Replikationsstrategien sind und dann kann man wieder einen Tick weitergehen, dann kann man es in stetiger Zeit machen. Jetzt sind wir irgendwo beim Bachelorniveau. Dann kann man in der Forschung beliebig weitergehen.“

Die Erläuterung, der oben genannten Anführungen, erfolgt anhand von Beispielen. Die Höhe eines Forward-Kontraktes wurde schon in Beispiel 12 dargelegt. An dieser Stelle geben wir

ein Beispiel für die Bepreisung eines Forward-Kontrakts über die *No-Arbitrage-Idee* mit einer statischen *Replikation*.

Beispiel 14. Der ursprüngliche Gedanke eines Forward-Kontrakts beinhaltet das Festhalten eines Preises für ein Gut. Angenommen wir kaufen Kakao aus Ghana in großen Mengen. Der Preis für eine Tonne Kakao beträgt momentan 2952,76 €. Der Preis für diese Menge ändert sich abhängig von Naturkatastrophen, der Ernte, der politischen Lage in Ghana und anderen unvorhersehbaren Ereignissen. Um besser kalkulieren zu können, möchten wir auch in einem Jahr für eine Tonne 2952,76 € zahlen. Ein Forward-Kontrakt garantiert solche Geschäfte. Die große Frage ist nun, wie viel so ein Forward-Kontrakt kostet?

Wir begeben uns in einen (ein wenig) abstrakteren Rahmen. Ein Forward-Kontrakt verpflichtet den Käufer ein bestimmtes Gut zum Zeitpunkt T zum Preis K zu kaufen. Wir nehmen an, dass der Preis des Gutes zum Zeitpunkt t durch $S(t)$ gegeben ist. Der Kontrakt hat zum Zeitpunkt T den Wert $S(T) - K$. Der Preis zum Zeitpunkt 0 ist $S(0) - (1 + r)^{-T}K$, denn: Wir verkaufen zum Zeitpunkt 0 einen Forward-Kontrakt und haben dadurch Einnahmen von $S(0) - (1 + r)^{-T}K$, dann kaufen wir das Gut zum Zeitpunkt 0 und müssen uns dazu $(1 + r)^{-T}K$ von der Bank ausborgen. Das Portfolio zum Zeitpunkt 0 hat den Wert $S(0) - (1 + r)^{-T}K - S(0) + (1 + r)^{-T}K = 0$. Zum Zeitpunkt T sind unsere Schulden auf K angewachsen und das Gut ist $S(T)$ wert. Allerdings müssen wir den Forward-Kontrakt erfüllen, dieser hat nun den Wert von $S(T) - K$, der verbleibende Geldbetrag ist 0. Wir haben den Forward-Kontrakt perfekt repliziert. Aus Gründen von No-Arbitrage ist $S(0) - (1 + r)^{-T}K$ der Preis des Kontrakts, siehe Satz 10.2.

Diese *Replikation* trägt den Namen statische Replikation, da außer zu Beginn nicht gehandelt werden muss. Die nächste und schwierigere Stufe stellen Replikationen dar, bei denen an mehreren Zeitpunkten ein Handeln vollzogen wird, das sind die so genannten dynamischen Replikationen.

FM3: „... Naja das kann man dann natürlich eben weiterführen, dann kann man eben zu einem Binomialmodell übergehen, wo eben dynamische Replikationsstrategien sind ...“

Diesen Aspekt der dynamischen Replikation führen wir anhand eines Beispiels aus.

Beispiel 15. Wir betrachten abermals ein Finanzmarktmodell mit einer Aktie, die einem Binomialmodell in zwei Schritten folgt. Des Weiteren besteht die Möglichkeit in ein Bankkonto mit einer Verzinsung von 5% zu investieren. Der Kauf der folgenden europäischen Call-Option auf diese Aktie mit Auszahlungsfunktion f mit $f(S) = (S - 6)^+$ ist ebenfalls möglich. In diesem Binomialmodell beginnt die Aktie mit einem Wert von 4 und dieser Wert verdoppelt bzw. halbiert sich anschließend in jedem Zeitschritt, siehe Abbildung 14. Die Werte der Option C_2 zum Auszahlungszeitpunkt findet man in der Abbildung 14 ganz rechts.

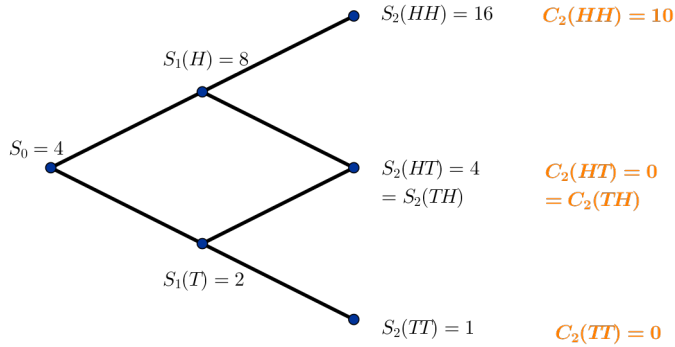


Abb. 14 Binomiales Aktienkursmodell in zwei Schritten

Um den Preis der Option zum Zeitpunkt 0 zu bestimmen, bedient man sich der Rückwärtsinduktion. Wir berechnen nun zuerst den Wert der Option zum Zeitpunkt 1 im Fall von H . Die Replikation zeigt sich durch eine Nachbildung des Wertes der Option über eine Investition in die Aktie und auf das Bankkonto. Es bleibt die Frage, wie viel in die Aktie und in das Bankkonto investiert werden muss, um die Replikation zu erfüllen. Dazu bedienen wir uns zweier Gleichungen. Wir halten einen Wert von $X_1(H)$ und kaufen uns $\delta_1(H)$ Aktien, sodass gilt:

$$\begin{aligned} HH : C_2(HH) &= \delta_1(H) \cdot S_2(HH) + (1+r) \cdot (X_1(H) - \delta_1(H) \cdot S_1(H)) \\ TT : C_2(TT) &= \delta_1(H) \cdot S_2(HT) + (1+r) \cdot (X_1(H) - \delta_1(H) \cdot S_1(H)) \end{aligned}$$

In unserem Fall ergibt das eingesetzt:

$$\begin{aligned} HH : 10 &= \delta_1(H) \cdot 16 + 1.05 \cdot (X_1(H) - \delta_1(H) \cdot 8) \\ TT : 0 &= \delta_1(H) \cdot 4 + 1.05 \cdot (X_1(H) - \delta_1(H) \cdot 8) \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich einfach lösen, die Lösungen sind $X_1(H) = \frac{220}{63}$ und $\delta_1(H) = \frac{5}{6}$. Analog berechnet/sieht man $X_1(T) = 0$ und $\delta_1(T) = 0$. Der Wert der Option zum Zeitpunkt 1 beträgt $C_1(H) = \frac{220}{63}$ bzw. $C_1(T) = 0$. Wir gehen erneut einen Schritt zurück und berechnen nun den Preis der Option zum Zeitpunkt 0. Erneut stellen sich die gleichen Fragen wie zuvor. Wie viel wird zum Zeitpunkt 0 in die Aktien investiert und wie viel wird auf das Bankkonto gelegt? Wir erhalten jeweils einen Wert für X_0 und einen für δ_0 , sodass die beiden Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} H : C_2(H) &= \delta_0 \cdot S_1(H) + (1+r) \cdot (X_0 - \delta_0 \cdot S_0) \\ T : C_2(T) &= \delta_0 \cdot S_1(T) + (1+r) \cdot (X_0 - \delta_0 \cdot S_0) \end{aligned}$$

Durch Einfügen der Werte ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} H : \frac{220}{63} &= \delta_1(H) \cdot 8 + 1.05 \cdot (X_1(H) - \delta_1(H) \cdot 4) \\ T : 0 &= \delta_1(H) \cdot 2 + 1.05 \cdot (X_1(H) - \delta_1(H) \cdot 4) \end{aligned}$$

Als Lösung für X_1 und somit für C_0 bekommt man $\frac{4840}{3969} \approx 1,22$ und für δ_0 den Wert $\frac{110}{189} \approx 0,58$.

Es wurde soeben ein Portfolio erstellt, das zum Zeitpunkt T_2 den gleichen Wert wie die Call-Option hat. Nach dem Satz 10.2 stimmt der Wert des Portfolios auch in den vorigen Zeitpunkten mit dem Optionspreis überein, ansonsten gebe es in diesem Modell eine Arbitragemöglichkeit. Auch in diesem Moment zeigt sich die enge Verbindung zur *No-Arbitrage-Idee*. Der dynamische Aspekt kommt zum Zeitpunkt 1 zum Vorschein, je nachdem wie der Aktienkurs verläuft, muss nachjustiert werden. Im Fall H benötigt man für eine perfekte Replikation $\delta_1(H)$ Aktien und im Fall T benötigt man $\delta(T)$ Aktien. Es muss also auch noch nach dem Zeitpunkt 0 gehandelt werden.

Auf einem höheren intellektuellen Niveau, in stetiger Zeit, erweist sich eine dynamische Replikation wiederum ein Stück schwieriger. Hierbei findet eine Nachjustierung des Portfolios in jedem Augenblick statt.

FM3: „... und dann kann man wieder einen Tick weitergehen, dann kann man es in stetiger Zeit machen. ...“

Im Beispiel 32 auf Seite 162 wird vorgeführt, wie man mit den Konzepten *Replikation* und *No-Arbitrage* auf die berühmte Black-Scholes-Formel zur Bepreisung einer europäischen Call-Optionen kommt. Das angesprochene Beispiel versteht sich einerseits als Ausführung des obigen Interviewausschnitts und andererseits dient es als Nachweis für die Durchführbarkeit der Idee der *Replikation* auf einem sehr hohen intellektuellen Niveau. Aus Gründen der Vollständigkeit geben wir an dieser Stelle die Formel an, eine Herleitung kann man ab Seite 161 nachlesen. Die vorkommenden Symbole werden untenstehend erklärt.

$$c(t, S(t)) = S(t) \cdot N \left(\frac{\log \left(\frac{S(t)}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T - t)}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}} \right) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N \left(\frac{\log \left(\frac{S(t)}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T - t)}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}} \right) \quad (7)$$

Die Variable t repräsentiert die Zeit und $S(t)$ gibt den Aktienpreis zum Zeitpunkt t an. Die Volatilität wird mit σ und der risikolose Zinssatz pro Zeiteinheit wird mit r bezeichnet. Bei einer europäischen Call-Option erwirbt man das Recht aber nicht die Pflicht, die Aktie S am Ausübungszeitpunkt T zum Ausübungspreis K zu kaufen. Der Term $T - t$ steht also für die verbleibende Laufzeit der betrachteten Option. N stellt die kumulative Normalverteilung dar:

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Mit Hilfe dieser Formel lässt sich zu jeder Zeit t der Optionspreis c bestimmen, vorausgesetzt man kennt alle benötigten Werte. Die dynamische *Replikation* liefert unter Verwendung stochastischer Differentialgleichungen eine Funktion c des Optionspreis in Abhängigkeit von t und $S(t)$. Mit Hilfe dieser Formel wurden(/werden) Optionspreise berechnet. Immer noch einige Banken/Institutionen verwenden exakt diese Formel zur Bepreisung von Optionen,

obwohl die Nachteile des Modells schon lange bekannt sind. Es wird oft erwähnt, dass die darin enthaltene Normalverteilung extreme Ereignisse unterschätzt, denn solche Ereignisse kommen häufiger vor als in diesem Modell angenommen. Im Allgemeinen ist die Annahme der Vollständigkeit, jedes Derivat ist replizierbar, viel öfter die Annahme, warum diese Formel zu unpassenden Werten führt (vgl. HAUSMANN/DIENER/KÄSLER, 2002, S. 202).

Neue Finanzmarktmodelle sind, wie schon erwähnt, **nicht vollständig**. In diesem kommen dann allgemeinere Konzepte der *Replikation* zur Anwendung, die *Superreplikation*. Im Beispiel 33 auf Seite 164 wird eine Superreplikation explizit vorgeführt, diese findet aus Gründen der Nachvollziehbarkeit in einem einfachen Modell statt. Die nötigen Werkzeuge benötigen Ergebnisse aus der Maßtheorie. Man sieht, dass auch Konzepte wie die *Superreplikation* auf höherer Mathematik basieren, das Vertikalkriterium für die Idee *Superreplikation* ist somit erfüllt. Wir verbleiben mit einem Zitat, das der Proband FM3 zu dieser Idee genannt hat.

FM3: „... Dann kann man in der Forschung beliebig weitergehen.“

10.6 Zeitwert des Geldes

Vereinfacht ausgedrückt: „Ein Euro heute ist nicht gleich ein Euro morgen“. Warum ist das so? Für (nahezu alle) Menschen ist Zeit etwas Wertvolles, da sie wie für jeden beschränkt ist. Wenn ein Mensch über einen gewissen Zeitraum über ein Gut, das dieser besitzt, nicht verfügen kann, dann möchte dieser einen Ausgleich haben. Bei Geld findet dieser Ausgleich in Form von Zinsen statt.

Man bedenke, wenn mir schon heute ein Euro zur Verfügung steht, dann kann ich diesen bereits heute (gewinnbringend) anlegen. Bei einer Verzinsung von 1% p.a. ist dieser ursprüngliche Euro in einem Jahr 1,01 Euro wert. Wenn mir ein Euro erst in einem Jahr zur Verfügung steht, dann ist dieser bei gleicher Verzinsung wie zuvor heute $\frac{1}{1,01} \approx 0,99$ Euro wert. Die Möglichkeit einer Anlage fällt hier weg. Wir folgern daraus, Zahlungen können nur dann miteinander verglichen werden, wenn sie zum selben Zeitpunkt geschehen. Bei Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten muss eben zum entsprechenden Datum auf- bzw. abgezinst werden (vgl. ADELMEYER/WARMUTH, 2009, S. 7 f.).

10.6.1 Zeitkriterium

Wo ist also der Beginn dieses Schemas anzusetzen? Im Namen dieser Idee steckt das Wort Geld drinnen. Es stellt sich für die folgenden historischen Betrachtungen die Frage, ob die Grundzüge der Idee nicht schon vor der Erfindung des Geldes zu sehen sind? Historische Abhandlungen behaupten, dass Kredite (natürlich in Sachleistungen) bereits in prähistorischen Zeiten existierten (vgl. HOMER/SYLLA, 1991, S. 17). Man bedenke, dass das einfache Verborgen eines Tieres (in welcher Form auch immer), Werkzeugs und das anschließende Zurückfordern eines größeren Tieres, besseren Werkzeugs im Wesentlichen schon einen Kredit mit Zinsen darstellt. Meistens übernimmt Geld die Funktion des in der Volkswirtschaft „Numéraire“ genannten Gutes, das Standardgut, in dem gezählt wird, und alle anderen Güter werden in diesem Gut ausgedrückt. Es eignen sich dazu aber auch andere Güter (vgl. McDONALD, 2006, S. 693 f.).

Die drei Formen des Transfers, wo nicht ein unmittelbarer Ausgleich stattfindet, sind: Geschenke, Kredite und Diebstähle. Die Übergänge dazwischen sind durchaus fließend und es gibt sie schon seit jeher. Das macht die Überlieferung und historische Beweisbarkeit der Existenz noch schwieriger (vgl. HOMER/SYLLA, 1991, S. 17).

Das erste systematische, historisch dokumentierte Kreditwesen, basierend auf Getreide und Metall, lässt sich auf 3000 B.C. in Mesopotamien datieren (vgl. HOMER/SYLLA, 1991, S. 17). Im ältesten Gesetzbuch der Welt „Codex Hammurabi“ findet man die Höchstgrenzen für Zinssätze für die Zeit von 1900 - 732 B.C. in Mesopotamien. Für Getreide betrug sie $33\frac{1}{3}\%$ für ein Jahr und für Silber 20% per Anno. Die hohen Raten erschrecken bei der ersten Betrachtung. Eine mathematisch interessante Erklärung für diese Zinssätze liefert HUDSON, der eine Verbindung zwischen der Höhe des Zinssatzes und des damals vorherrschenden Zahlensystems sieht.

Die Kreditzinssätze standen in alten Zeiten in engster Verbindung zu der Bruchrechnung. Die Sumerer verwendeten den Bruch $\frac{1}{60}$. Bei einer Schuld von 1 Schekel (babylonische Größeneinheit) fiel ein Zinssatz von $\frac{1}{60} = 1\frac{2}{3}\%$ an, das sind in einem Jahr $12 \cdot \frac{1}{60} = 20\%$ (vgl. HUDSON, 2000, S. 133 ff.).

Die Griechen verwendeten zwei Zahlensysteme, das attische und das milesische System. Ersteres verwendete man hauptsächlich im kaufmännischen Leben und war ein durch ein Fünfersystem überlagertes Dezimalsystem. Zweiteres verlieh jedem Buchstaben im griechischen Alphabet einen Wert (1,...,9,10,...90, 100, ...900), zusätzlich zog man noch drei semitische Buchstaben heran, da es sich sonst mit den 24 üblichen Buchstaben nicht ausging. Das milesische System überzeugt durch kalkülmäßige Verwendung auch in der wissenschaftlichen Mathematik. Das für diese Betrachtungen wichtigere attische System trug wahrscheinlich zu dem häufig verwendeten Zinsniveau von 10% bei (vgl. WUSSING, 2013, S. 150 ff.).

Die römische Bruchrechnung wurzelt darauf, dass ein Ganzes in 12 Unzen, Uncia, geteilt wird. Die Unze wurde noch weiter geteilt,

- semuncia = $\frac{1}{2}$ uncia = $\frac{1}{24}$
- sicilicus = $\frac{1}{4}$ uncia = $\frac{1}{48}$
- sextula = $\frac{1}{6}$ uncia = $\frac{1}{72}$
- dimidia sextula = $\frac{1}{12}$ uncia = $\frac{1}{144}$
- scripulum = $\frac{1}{24}$ uncia = $\frac{1}{288}$

Die Römer hatten also eine Art 12-er-System (vgl. GERICKE, 1984, S. 166). Interessanterweise betrug eben der Zinssatz lange Zeit in Rom $8\frac{1}{3}\%$ (vgl. HOMER/SYLLA, 1991, S. 52 f.). HUDSON konnte weiteres beobachten, dass die Zinssätze über die Generationen/Zivilisationen sanken (vgl. HUDSON, 2000, S. 134).

Die Einstellungen gegenüber Kredite äußerten sich im Laufe der Geschichte unterschiedlich. ARISTOTELES lehnte es vehement ab, aus Geld Geld zu machen.

„Das Geborene ist gleicher Art wie das Gebärende – durch den Zins entsteht Geld aus Geld. Diese Art des Gelderwerbs ist am meisten gegen die Natur.“

ARISTOTELES

Religionen prägten Meinungen der Menschen gegenüber Zinsen. Sie verfassten ihre eignen Gesetze, in einigen galten Kredite als moralisch verwerflich, z.B. im Christentum oder im Islam. Juden durften beispielsweise Kredite nur Menschen anderer Religion vergeben. In diesem Zusammenhang muss LUTHER erwähnt und seine Aussage angeführt werden:

„pecunia pecuniam non parere potest“

LUTHER

Zu dieser Zeit sah man Zinsen als einen Verstoß gegen das Naturrecht an (vgl. KRAMER, 1990, S. 31).

Wo ist nun der Beginn dieses Schemas in der betrachteten wissenschaftlichen Disziplin anzusiedeln? Eigentlich müsste man sich Fragen, ob der Beginn des Zeitwertes nicht der Beginn der (Finanz-)Mathematik ist. Die Geschichte suggeriert, dass der Mensch aus dem Verborgenen einen Nutzen ziehen möchte. Vielleicht ist die Idee des Zeitwertes tief in den Menschen verwurzelt. Diese Idee, wo auch immer sie wirklich begonnen hat, liegt auf alle Fälle weit in der Vergangenheit und trägt eine lange Geschichte mit sich. Alle Interviewpartner äußerten

sich bei der ersten Frage kaum zum *Zeitwert des Geldes*. Aufgrund der oben aufgezeigten und durchwegs spannenden Geschichte verwundert es doch, dass diesbezüglich keine Nennungen fallen. Das kann mehrere Gründe haben.

1. Der historische Verlauf zu Zinsen, Krediten (bzw. alles, was eben unter dem *Zeitwert des Geldes* zu subsumieren ist) ist den Interviewpartnern nicht genau bekannt (da auch wissenschaftlich nicht klar) und sie möchten sich aus diesem Grund nicht dazu äußern.
2. Die historischen Entwicklungen im 20. Jahrhundert sind gedanklich mehr präsent und verdrängen diese Idee beim Erzählen.
3. Es handelt sich den Probanden nach schlicht und einfach um keine *zentrale Idee*. Man kann aufgrund späterer Aussagen der Befragten aber diese Erklärung nicht gelten lassen. Vor allem beim Vertikalkriterium, welches nach SCHWILL bei schulischen Betrachtungen von größter Bedeutung ist (und auch für diese Arbeit), häufen sich umfangreiche Aussagen zum *Zeitwert des Geldes* (vgl. SCHREIBER, 1979, S. 6).
4. Es besteht auch die Möglichkeit, dass der eine oder andere Interviewpartner die Zinsseszinsrechnung nicht der Finanzmathematik zuordnet:

FM4: „Alle anderen Dinge, die sozusagen kaufmännisches Denken und mathematisches Denken verbunden haben, waren eher kaufmännischer und nicht so sehr finanzmathematischer Natur.“

10.6.2 Horizontalkriterium

Das Prinzip des Auf- und Abzinsens kommt in der Finanzmathematik so gut wie überall vor. Nahezu alle Modelle in der Finanzmathematik berücksichtigen den *Zeitwert des Geldes* und unterstreichen damit die Wichtigkeit des Prinzips.

Wir unterscheiden zwischen Modellen mit einem direkten Fokus auf den Zeitwert und Modellen, die die Idee berücksichtigen bzw. verwenden, aber deren primärer Fokus nicht die Modellierung des *Zeitwertes des Geldes* betrifft.

Der tschechische Mathematiker OLDŘICH ALFONS VASICEK veröffentlichte im Jahre 1977 ein Modell zur Beschreibung der Entwicklung des Zinssatzes, welches später auch nach ihm benannt wurde. Das *Vasicek-Modell* lässt sich als stochastische Differentialgleichung formulieren. Sei $W(t)$ eine Brown'sche Bewegung und a , b und σ positive Konstanten, dann gilt in diesem Modell für den Zinssatz $R(t)$:

$$dR(t) = (a - bR(t))dt + \sigma dW(t)$$

Dieses Modell hat eine wünschenswerte Eigenschaft, und zwar die Rückkehr zum Mittelwert. Wir betrachten drei Fälle:

1. Wenn $R(t) = \frac{a}{b}$ ist, dann ist der Driftterm 0.
2. Wenn $R(t) > \frac{a}{b}$ ist, dann ist der Driftterm negativ. Das führt den Zinssatz $R(t)$ wieder zurück auf das Niveau $\frac{a}{b}$.

3. Wenn $R(t) < \frac{a}{b}$ ist, dann ist der Driftterm positiv. Das führt ebenfalls den Zinssatz $R(t)$ zurück auf $\frac{a}{b}$.

Das eben vorgestellte Modell ist ein sogenanntes „One factor short-rate model“. Die Bezeichnung folgt aufgrund des Fokus auf eine kurzfristige Verschuldung (short-term borrowing) und der Tatsache, dass es nur von einer stochastischen Differentialgleichung beschrieben wird (vgl. SHREVE, 2004, S. 150 f und S. 272). In Lehrbüchern liest man, dass der Nachteil des angesprochenen Modells jener ist, dass der Zinssatz negativ werden kann (vgl. SHREVE, 2004, S. 151 f.). Aufgrund der Ereignisse im Jahr 2016, in dem die EZB die Zinsen für Bankeinlagen auf $-0,4\%$ gesetzt hat, ist der angesprochene Nachteil eigentlich keiner mehr. Tatsächlich handelt es sich bei der Modellierung von Zinssätzen gerade um ein schwieriges Forschungsfeld. Es gibt andere Modelle, wie zum Beispiel das *Cox-Ingersoll-Ross-Modell*, die keine negativen Zinssätze zulassen. Die Variablenbezeichnungen bleiben gleich:

$$dR(t) = (a - bR(t))dt + \sigma U(t)dW(t) \quad \text{wobei } U(t) = \begin{cases} \sqrt{R(t)} & R(t) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wenn $R(t)$ den Wert 0 erreicht, dann verschwindet der Volatilitätsterm und der Driftterm sorgt dafür, dass der Zinssatz wieder in den positiven Bereich kommt (vgl. SHREVE, 2004, S. 151 ff.).

Andere Modelle, wo z.B. die Bewertung einer europäischen Put Option im Mittelpunkt steht, berücksichtigen den Zinssatz, richten aber nicht das Hauptgewicht auf dessen Modellierung. Im einfachen Modell, wo der Aktienkurs einem Binomialmodell folgt für eine Periode (H: Up-factor u , T: Down-Factor d und Zinssatz r), erhält man für die oben genannte Art von Option mit Auszahlungsfunktion $V_1(S_1) = (K - S_1)^+$ die folgende Bewertungsformel:

$$V_0 = \frac{1}{1+r} \left[\frac{1+r-d}{u-d} V_1(H) + \frac{u-1-r}{u-d} V_1(T) \right]$$

Die Herleitung der oben genannten Formel passiert über ein Replikationsargument, das für beliebige Auszahlungsfunktionen gleich bleibt, sofern definiert oder mit Hilfe des risikoneutralen Maßes, siehe Beispiel 13 auf S. 126 bzw. 28 auf S. 156.

Wir betrachten erneut die Option der oben genannten Form, welche $(K - S(T))^+$ zum Zeitpunkt T ausbezahlt, diesmal aber in einem Black-Scholes-Modell. In diesem Modell wird der Aktienkurs $S(t)$ durch eine stochastische Differentialgleichung beschrieben, siehe Gleichung (1). Es sei wieder K der Ausübungspreis, $S(t)$ der Wert der zugrundeliegenden Aktie zum Zeitpunkt t , r der Zinssatz, der als konstant über die Laufzeit angenommen wird, σ die Volatilität und $t \in [0, T]$ die Zeit. Für den Put erhalten wir im Black-Scholes-Modell die Formel:

$$p(t, S(t)) = Ke^{-r\tau} N \left(\frac{-\log \left(\frac{S(t)}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) - S(t) N \left(\frac{-\log \left(\frac{S(t)}{K} \right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \right)$$

wobei $\tau = T - t$ und N die kumulative Normalverteilung darstellt:

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Die Portfoliotheorie thematisiert auch das Miteinbeziehen risikoloser Anlagen. In den meisten Fällen handelt es sich dabei um kurzfristige Anleihen aus Staaten mit stabiler wirtschaftlicher und politischer Lage (vgl. ADELMEYER/WARMUTH, 2009, S. 100). Diese Wertpapiere werfen ebenfalls eine Rendite ab. Im Wesentlichen kann man sich unter einer risikolosen Anlage auch eine Sparform, ähnlich zum Sparbuch, mit einem (fixen) Zinssatz r vorstellen. Bei einem Portfolio mit zwei Aktien A , B und einer risikolosen Anlage C erhält man für die Portfoliorendite das Folgende: Wir bezeichnen wiederum mit α , β und γ die festen prozentualen Anteile der Anlagen A , B und C , wobei $\alpha + \beta + \gamma = 1$ gilt. Unter μ_α , μ_β und $\mu_\gamma = r$ verstehen wir die Renditen der drei Anlagen und unter σ_α , σ_β und $\sigma_\gamma = 0$ das Risiko der Anlagen. Den einzig relevanten Korrelationskoeffizienten bezeichnen wir mit $\rho_{\alpha\beta}$, denn die Korrelationen zwischen C und A bzw. B betragen nach Annahme null ($\rho_{\alpha\gamma} = \rho_{\beta\gamma} = 0$). Für das gesamte Portfolio erhält man eine Rendite:

$$\mu_g = \alpha\mu_\alpha + \beta\mu_\beta + \gamma r = \mu_p + \gamma r$$

und ein Risiko von:

$$\sigma_g = \sqrt{\alpha^2\sigma_\alpha^2 + \beta^2\sigma_\beta^2 + 2\alpha\beta\sigma_\alpha\sigma_\beta\rho_{\alpha\beta}}.$$

Angenommen man investiert einen Anteil von $1 - m$ in den risikolosen Finanztitel und m in das risikobehaftete Portfolio P mit erwarteter Rendite μ_p , bestehend aus den beiden Aktien A und B . Das gesamte Portfolio hat also eine Rendite von $\mu_g = m \cdot \mu_p + (1 - m) \cdot r$ und ein Risiko von $\sigma_g = m \cdot \sigma_p$, wobei σ_p das Risiko des Portfolios P ist. Die Rendite kann man sich in Abhängigkeit des Risikos ausdrücken und man erhält:

$$\mu_g = \frac{\mu_p - r}{\sigma_p} \cdot \sigma_g + r$$

Es können also alle Kombinationen zwischen risikolosen und risikobehafteten Finanztiteln als Gerade im Rendite-Risiko-Diagramm abgebildet werden. Diese nennt man Kapitalzuteilungsgerade. Das Verblüffende an dieser Tatsache ist, dass es dann nur eine rationale Wahl für das Portfolio P bzw. α und β gibt. Angenommen wir wählen das Portfolio P_f als risikobehaftetes Portfolio, das Portfolio P_f ist als Punkt mit den Koordinaten (μ_p, σ_p) in der Abb. 15 zu sehen. Die Kapitalzuteilungsgerade muss durch den Punkt P_f gehen, da man ja $m = 1$ wählen könnte. Es erweist sich aber jedes Portfolio im grünen Bereich als bessere Kombination. Besser in dem Sinne, dass man bei gleichem Risiko eine höhere Rendite erzielen kann.

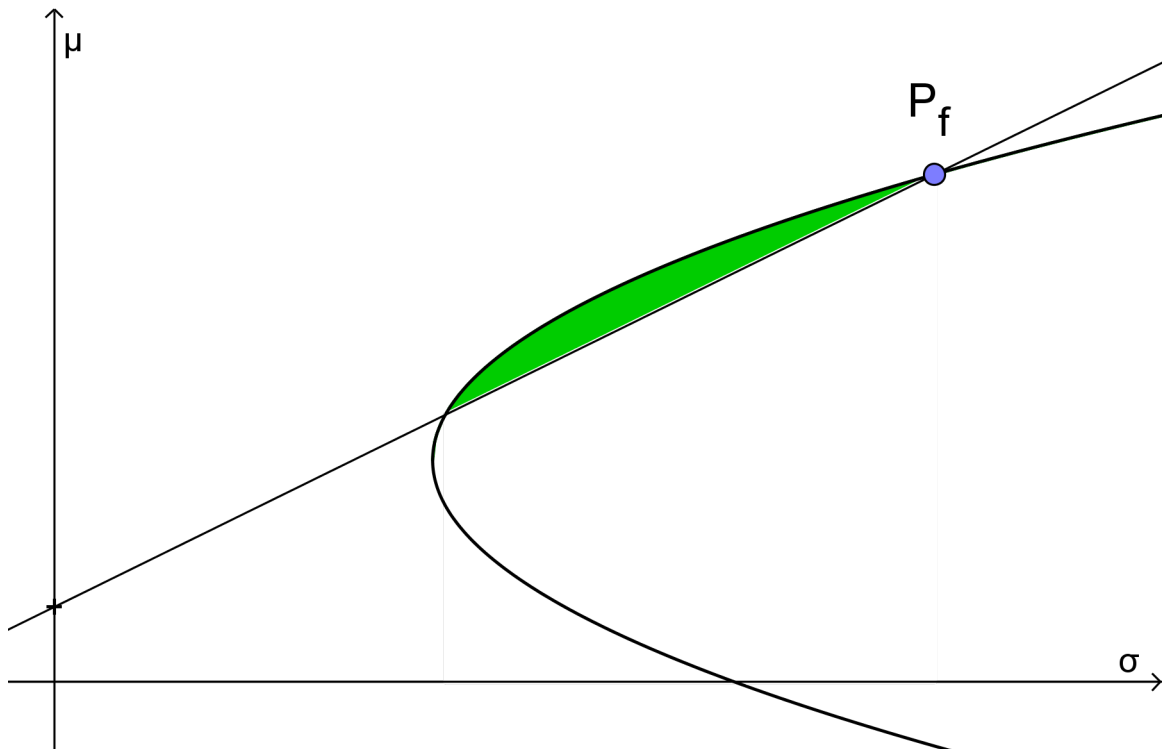


Abb. 15 schlechte Kombination

Man findet nur dann kein besseres Gesamtportfolio P , wenn die Kapitalzuteilungsgerade eben die Tangente an die Effizienzkurve ist, siehe Abb. 16.

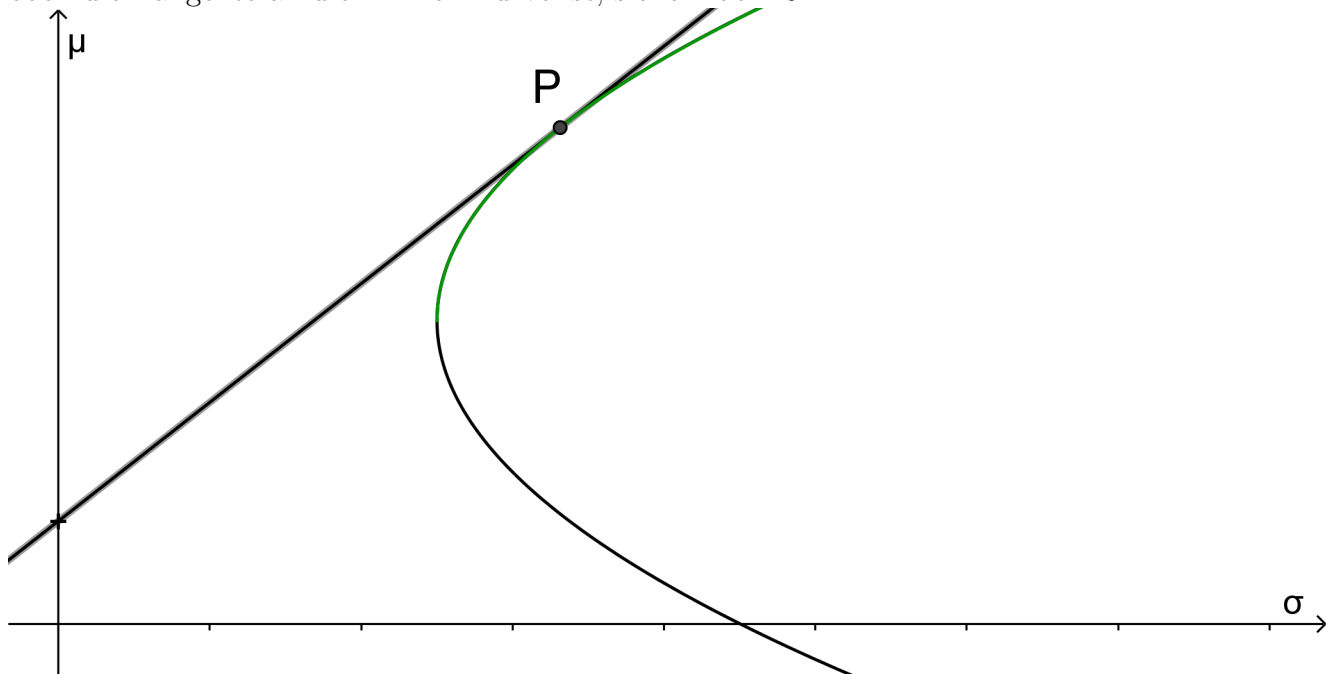


Abb. 16 Rendite-Risiko-Diagramm mit einem risikolosen Finanztitel

Dieses risikobehaftete Portfolio nennt man supereffizientes Portfolio bzw. Marktportfolio. Wir sehen, dass auch in diesem Modell die Idee *Zeitwert des Geldes* eine Rolle spielt

Im akademischen Diskurs ist es durchaus üblich den Zinssatz auf 0 zu setzen, um sich auf die wesentlichen Fragestellungen zu konzentrieren. Es sei denn, es geht gerade um die Modellierung des Zinssatzes. Dass in der Praxis die Zinsen, respektive der *Zeitwert des Geldes*, eine wesentliche Rolle spielt, dokumentiert der folgende Interviewausschnitt:

FM6: „Das ist eben das Absurde in der akademischen Finanzmathematik werden Zinsen immer auf 0 gesetzt, in jedem Paper, weil es einfach nur mühsame Schreibarbeit ist, außer es geht um die Modellierung von Short-Track-Modells, also wenn es nicht explizit um die Zinsmodellierung selber geht, werden die Zinsen immer 0 gesetzt, weil es mühsam ist. Das war eigentlich der größte Kulturschock beim Austritt aus der Uni, dass es da eigentlich nur um Zinsen geht, wirklich die ganze Zeit nur um Zinsen. ...“

Sei es in der akademischen Welt oder in der Praxis, die Idee *Zeitwert des Geldes* wird berücksichtigt, das unterstreicht der Befragte nochmals:

FM6: „...im echten Leben, wie auch im akademischen Leben, das ist nach wie vor ein großes Topic. Also sagen wir so, das ist weniger eine zentrale Idee, aber ich meine, die Idee von Zinsen an sich, ist schon mal eine Angelegenheit, aber einfach auch, dass es ein ganzes Spektrum von viel verschiedenen Arten von Zinsen gibt und wie man es rechnet und anschaut. Also wie gesagt, normale Spot-Rates, Forward-Rates ... und ja, da - - - dass es eben so etwas wie ein Termstructure gibt. ... dass ... das Universum ein bisschen größer ist, als die vier Prozent die im Sparbuch sind, also jetzt eh nicht mehr, aber die zwei Prozent die im Sprachbuch stehen.“

Zinsen an sich stellen einen sehr wichtigen Aspekt der zentralen Idee *Zeitwert des Geldes* dar. Der Proband meint, dass es sich bei Zinsen nicht um eine zentrale Idee handelt. Ob er sich dabei eigentlich auf die Idee *Zeitwert des Geldes* bezieht ist nicht ganz klar. Wir betrachten diese Idee aufgrund der Ausführungen zuvor und den folgenden in den einzelnen Kriterien sehr wohl als *zentrale Idee*.

10.6.3 Sinnkriterium

Der Aspekt der Zinseszinsrechnung bei der Idee *Zeitwert des Geldes* betrifft nahezu alle Menschen der Gesellschaft. Über traditionelle Sparformen, wie eben ein Sparbuch, verfügen fast alle Menschen in Österreich, hierzulande existieren um die 24 Millionen Sparbücher (siehe: <http://diepresse.com/home/wirtschaft/economist/419716/143-Milliarden-Euro-liegen-auf-Sparbuchern-in-Osterreich>). Jede/r Arbeitnehmer/in benötigt für die monatliche Gehaltsüberweisung ein Girokonto bei einer Bank, auch hier bekommt man Zinsen, wenn auch nur sehr niedrige. Empirische Studien bestätigen, dass das Verständnis über die Dynamiken von Zinsen in der Bevölkerung nicht ausreichend vorhanden ist (vgl. <http://orf.at/stories/2208386/2208367/>). Finanz-Analphabetismus betrifft aber nicht nur Österreich, sondern es handelt sich um ein weltweites Problem (vgl. LUSARDI/MITCHELL, 2014). Die Probanden sehen die Idee *Zeitwert des Geldes* als absolut praxisrelevant:

FM5: „... wesentliche Punkte, ... wenn man es anwendet als Durchschnittsbürger, ist das Verständnis von Zinsen, ... Zinsrechnung ... , also eigentlich ganz unter Anführungszeichen einfache Grundsteine, in dem Sinne aber auch Bewertung von Rückflüssen, Cash flows, Zahlungsrückflüsse, Anleihen zum Beispiel, Anleihenbewertung, die ja ganz einfach zur Zinsrechnung dazugehört. ... „

Das Barwertkonzept bzw. das Auf- oder Abzinsen von Zahlungsflüssen wird von dem Befragten als sehr relevant eingestuft:

FM5: „...Das Einfachste glaube ich, das viele Leute auch einfach betrifft, ist diese Cash Flow Berechnung, Geldrückflüsse, Abzinsung in dem Sinn, und auch das Verständnis, dass man damit auch Sachen optimieren kann oder bewerten kann. Also nur das Grundverständnis, man muss ja nicht irgendwelche Sachen selbst bewerten, sondern nur das Grundverständnis. Also zum Beispiel, dass man auch Projekte bewerten kann, das ist außerhalb der Finanzmathematik, Projekte mit solchen Rückflüssen bewerten kann.“

Das Schema *Zeitwert des Geldes* findet sich auch im Bewerten von Investitionen wieder. Die Rendite wird in Form eines Zinssatzes ausgedrückt und mit dem vorherrschenden Zinssatz verglichen.

Definition 11. (interner Zinssatz) Gegeben sei eine Zahlungsreihe $R_0, R_1, \dots, R_n$, wobei der zeitliche Abstand zwischen den Zahlungen jeweils gleich ist. Derjenige Zinssatz i , bei dem die Leistungen und Gegenleistungen finanzmathematisch äquivalent sind (bei dem die Kapitalwertfunktion null ist, siehe Gleichung (8)), heißt interner Zinssatz.

$$C_0(i) = R_0 + \frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{R_n}{(1+i)^n} = 0 \quad (8)$$

An einem Beispiel wird das konkrete Vorgehen illustriert.

Beispiel 16. Ein Unternehmen verspricht für eine Investition von 20 000 € eine Auszahlung von 10 000 € nach dem ersten Jahr, eine weitere Auszahlung von 5 000 € nach zwei Jahren und nach drei Jahren werden schlussendlich 10 000 € ausbezahlt.

Die Kapitalwertfunktion C_0 hat in diesem Beispiel die konkrete Form:

$$C_0(i) = -20000 + \frac{10000}{1+i} + \frac{5000}{(1+i)^2} + \frac{10000}{(1+i)^3}$$

Der Graph der oben angeführten Funktion sieht folgendermaßen aus:

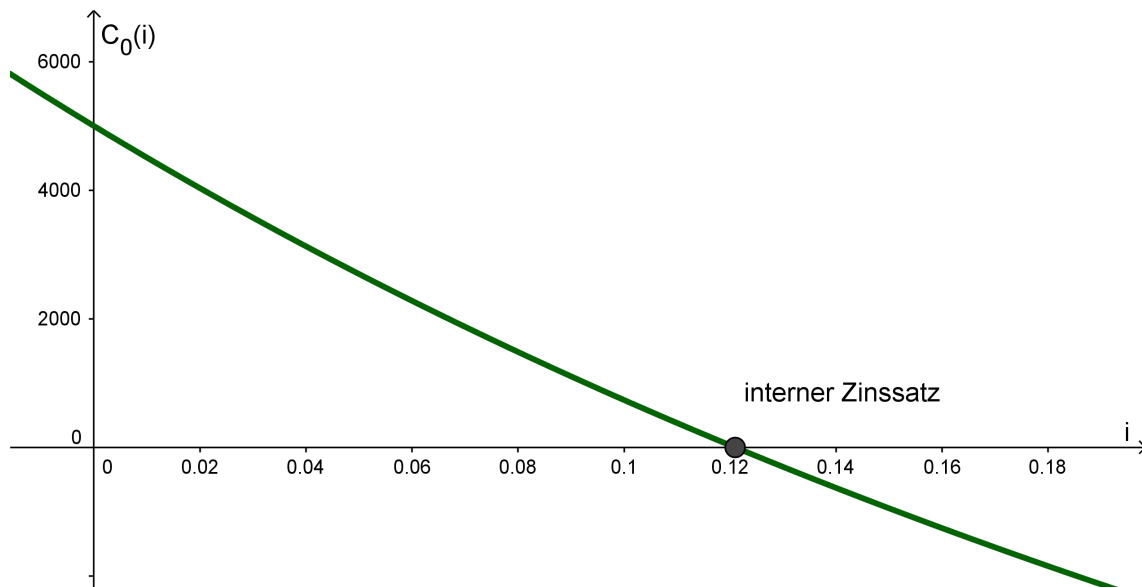


Abb. 17 Graph der Kapitalwertfunktion

Die Nullstelle der Funktion C_0 ist bei $r \approx 12\%$. Geht man nun von einem (kalkulatorischen) Zinssatz $i < r$ aus, dann zahlt sich die Investition aus, bei einem (kalkulatorischen) Zinssatz $i > r$ eben nicht. Bei Gleichheit ist der/die Investorin indifferent, er/sie erhält denselben Betrag, wenn dieser auf ein Konto mit einem Zinssatz in der Höhe des internen Zinssatzes $r \approx 12\%$ gelegt wird.

Man kann den internen Zinssatz als jenen Kreditzinssatz des Unternehmens sehen, bei dem die Schulden von 20 000 € über die Rückzahlungen 10 000 €, 5 000 € und 10 000 € zu einem Zinssatz von 12% pro Periode getilgt werden, siehe Tabelle 9:

Zinsperiode	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Rückzahlungen
0	20 000			
1	12 418,97	2 418,96	7 581,03	10 000
2	8 921,02	1 502,05	3 497,95	5 000
3	0	1 078,98	8 921,02	10 000

Tab. 9 Die Investition als Kredit

Der Kredit ist nach 3 Jahren komplett abbezahlt.

Der/die Investor/in sieht so seinen/ihren Verhandlungsspielraum mit einer Kreditbank. Erst wenn der Zinssatz der Bank den internen Zinssatz r übersteigt, widerfährt der/die Investor/in ein Verlust. Lassen sich mit Hilfe des internen Zinssatzes auch Investitionen vergleichen? Bedingt, man muss aufpassen!

Beispiel 17. Wir betrachten die beiden Investitionen (Beträge in Euro):

I_1 : -20 000, 4 000, 9 000, 12 000

I_2 : -20 000, 10 000, 9 000, 5 500

Welche der Investitionen ist zu bevorzugen? Die Kapitalwertfunktionen lauten

$$I_1 : \quad C_{0,1} = -20000 + \frac{4000}{1+i} + \frac{9000}{(1+i)^2} + \frac{12000}{(1+i)^3}$$

$$I_2 : \quad C_{0,2} = -20000 + \frac{10000}{1+i} + \frac{9000}{(1+i)^2} + \frac{5500}{(1+i)^3}$$

Man berechnet die folgenden Werte $r_1 \approx 10\%$ und $r_2 \approx 12\%$. Wenn man die Funktionswerte der beiden Kapitalwertfunktionen für einen kalkulatorischen Zinssatz von 2% berechnet, dann erhält man die Werte $C_{0,1}(0,02) = 3879,95$ und $C_{0,2}(0,02) = 3637,21$. Dieser Widerspruch klärt sich auf, wenn man die Graphen der beiden Funktionen betrachtet.

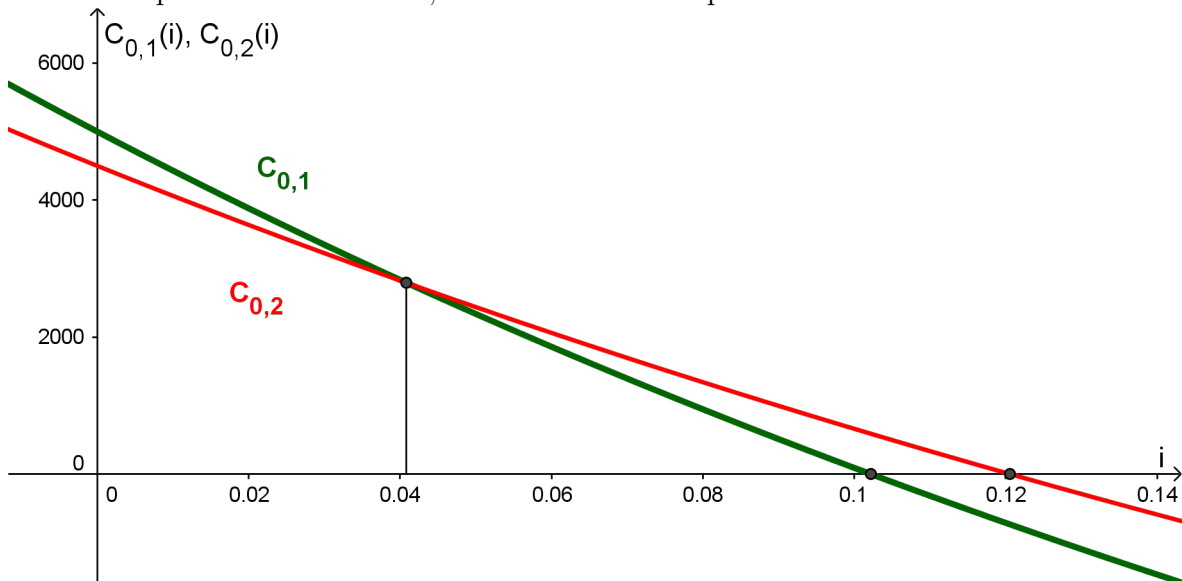


Abb. 18 Graphen der Kapitalwertfunktionen

Ab einem kalkulatorischen Zinssatz von ca. 4% ist die Investition I_2 zu bevorzugen, darunter I_1 .

Auf diese Art und Weise wird auch die Rendite einer Anleihe bestimmt.

Beispiel 18. Der österreichische Staat emittiert folgende Anleihe: Die Laufzeit beträgt fünf Jahre. Die Verzinsung beträgt 2% pro Jahr, wobei die erste Zahlung ein Jahr nach dem Kauf erfolgt. Der Ausgabekurs beträgt 95%. Es wird der kleinst mögliche Anteil gekauft, in diesem Fall sei es einer von 1 000 Euro. Wie groß ist die Rendite der Anleihe?

Im Wesentlichen kann man die Anleihe als eine Investition im obigen Sinne verstehen. Es handelt sich um eine Zahlungsfolge: -950, 20, 20, 20, 20, 1 020. Die Rendite der Anleihe ist nichts anderes als der interne Zinssatz der Zahlungsfolge, also Lösung der Gleichung:

$$0 = -950 + \frac{20}{1+i} + \frac{20}{(1+i)^2} + \frac{20}{(1+i)^3} + \frac{20}{(1+i)^4} + \frac{1020}{(1+i)^5} \quad (9)$$

Die Rendite beträgt $i \approx 3,1\%$.

Die Zinssätze verändern sich im Laufe der Zeit. Im Euro-Raum verändern sich die Zinssätze gemäß dem EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate), der eben als Gradmesser bzw. Referenz für gewisse Zinsprodukte gilt. Es gibt 24 EURIBOR-Panel-Banken, die maßgebend für die Bestimmung des Wertes sind. Diese Banken melden bis 10:45 (Brüsseler Zeit) ihre Angebotssätze, anschließend werden 15% der höchsten und 15% der niedrigsten aus der weiteren Berechnung ausgeschlossen. Mit den verbleibenden Daten ermittelt man den Durchschnitt. Pünktlich um 11:00 veröffentlicht Reuters den Wert auf drei Nachkommastellen. Genauer handelt es sich dabei um 8 Werte (1 Woche, 2 Wochen, 1 Monat, 2, 3, 6, 9 und 12 Monate). Der Zinssatz ist von der Laufzeit abhängig, das nennt man auch Zinsstruktur („Termstructure of the interest rate“). Die Zinsen werden umso höher, je höher die Laufzeit ist, das dürfte allgemein bekannt sein, wie auch ein Proband schildert:

FM6: „Also wieder das banale Beispiel Zinsen, ... also ein zentrales Konzept an der ganzen Zinsmodellierung ist einfach, dass es eine Termstructure gibt von Zinsen. Und dass mit der Laufzeit Zinsen verschieden sind. Das weiß jeder Hausbauer, das weiß jeder, der irgendwie jetzt gerade sein Geld für einen Bausparer anlegen will und sein Geld für acht Jahre binden muss, damit er vielleicht gerade ein Prozent Zinsen bekommt, das ist real gerade. - Zinsen sind ja allgegenwärtig, vom normalen Konto bis zum Sparbuch, das jedes Kind schon hat und vor allem, interessant ist eben aber der Zeitpunkt - Bindungen oder Bindungsfristen ... also das kennt jeder Erwachsene und vielleicht auch schon Schüler, dass sich da eben eine Zinstermstructure ergibt, die man halt auch modellieren kann. Das ist eigentlich, das ist von der Modellierung her auch alles andere als trivial und hat auch alltägliche Entsprechungen. Weil man weiß auch von einem Konto, wo man abheben kann mit overnight, da kriegt man einfach keine Zinsen, - - bei zehn Jahren aber schon. Das wäre ein Ding, das sehr nahe am Alltag ist ...“

In anderen Währungsräumen erfolgt der Bezug auf andere Leitzinssätze (z.B. in den USA Federal Funds Rate). Die oben geschilderte Veränderung des Leitzinssatzes EURIBOR lässt sich am unten stehenden Diagramm verfolgen.

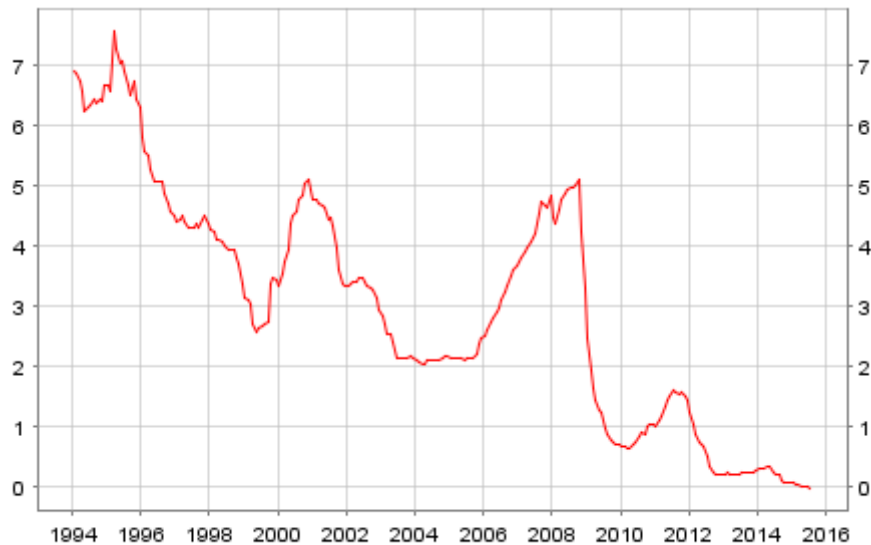


Abb. 19 Verlauf des 3-Monats-Euribor

(Quelle: http://sdw.ecb.europa.eu/quickview.do?SERIES_KEY=143.FM.M.U2.EUR.RT.MM.EURIBOR3MD..HSTA)

Das Verständnis über die Auswirkungen auf Sparformen und Kredite ist für die Besitzer dieser Finanztitel von Relevanz.

FM3: „Habe ich ein Sparbuch oder einen Kredit. Der Schüler sollte drüber nachdenken, der Karl hat das Sparbuch, die Maria hat den Kredit. Wie wirkt es sich aus, wenn die Zinsen fallen? Für den einen ist es gut, für den anderen schlecht.“

Das Denken in diesem Schema *Zeitwert des Geldes* ist unter anderem gar nicht so intuitiv, wie man vielleicht glauben möchte. Hier passieren eine Menge an Denkfehler, mehr als man vielleicht glauben möchte. Ein Proband zeigt exemplarisch einen Denkfehler auf:

FM1: „Meine Eltern haben einerseits Geld auf der Bank und andererseits einen Kredit laufen. Ja ... das ist hochgradig irrational und trotzdem ist es schwierig sie davon zu überzeugen, das bleiben zu lassen.“

Die Österreichische Nationalbank tätigt Umfragen über wirtschaftliche Bildung in der österreichischen Bevölkerung, einer der Befragten weist auf ein fehlendes Konzept über Anleihen in der österreichischen Gesellschaft hin:

FM5: „... Die ÖNB führt in jährlichen Abschnitten immer eine Umfragen zum wirtschaftlichen Verständnis innerhalb der Bevölkerung durch, und das ist auch immer eine Standardfrage, und wenn der Marktzins steigt, fallen oder steigen dann die Marktpreise der Anleihen, die bereits verkauft wurden. Also das ist ein indirektes Verhältnis einfach, diese Frage wird regelmäßig zu 80% falsch beantwortet (lacht). Mathematisch gesehen ist ja nur eine Zinseszinsrechnung dahinter, und dass du halt richtig abzinst und dann weißt du halt es steht im Kehrwert drin und das ist ein indirekte, ...“

Zinssätze, Zinsen sind omnipräsent, kein Mensch kommt daran vorbei. Die Idee des Ausgleichs in Form von Zinsen liegt tief in uns Menschen und erscheint gerecht (und das, obwohl Religionen anderer Meinung waren/sind, siehe S. 133).

10.6.4 Vertikalkriterium

Nach der gewählten Definition einer *zentralen Idee* muss eine solche auf unterschiedlichen intellektuellen Niveaus darstellbar sein.

Die erste mathematische Begegnung mit dem Schema *Zeitwert des Geldes* erfolgt im österreichischen Schulsystem spätestens in der Sekundarstufe I, die Zinsenrechnung und die Zinseszinsrechnung. Die überhaupt erste Begegnung dürfte in Österreich wesentlich früher passieren. Hierzulande ist es gang und gäbe, dass Volksschulkinder am Weltspartag eine Bank besuchen und das Ersparte aus dem Sparschwein auf ihr Sparbuch legen. Das Thematisieren von Zinsen gegenüber den Kindern erweist sich in weiterer Folge als unumgänglich. Das (mathematische) Erlernen dürfte allen in Erinnerung bleiben, wie auch die Probanden bestätigen:

FM6: „Ja, ich mein Zinsen lernt man sowieso, also das lernt jedes Kind, das ist glaube ich sogar Unterstufenstoff. ...“

Wir nehmen im folgenden Zitat an, dass mit „kommt ja vor“ die Schule gemeint ist:

FM2: „..., also Zinsrechnung kommt ja vor, glaube ich,...“

Die Zinsen- und Zinseszinsrechnung basieren auf der Prozentrechnung, eine Einführung erfolgt in der Schule dementsprechend. Im kommenden Abschnitt wollen wir kurz die grundlegende Zinsenrechnung anführen.

Der Duktus geschieht zu Beginn in der Reihenfolge zuerst Theorie, dann eine prototypische Aufgabe aus einem österreichischen Schulbuch.

Wir bezeichnen jenen Geldbetrag, der zu Beginn eingezahlt wird, mit K_0 und nennen ihn Anfangskapital. Der Zinssatz pro Jahr wird mit $p\%$ angegeben und unter Z verstehen wir jenen Betrag, den der/die Sparer/in als Vergütung für den eingezahlten Geldbetrag erhält, die Zinsen. Die Jahreszinsen hängen mit dem Zinssatz zusammen, sie betragen $p\%$ des Anfangskapitals, man erhält sie durch

$$Z = K_0 \cdot \frac{p}{100}. \quad (10)$$

Eine einfache Aufgabe aus der Unterstufen lautet z.B.:

Beispiel 19. Wie groß sind die Jahreszinsen für 3 000 Euro, die zu 2% p.a. verzinst werden? 2% von 3 000 Euro erhält man durch $3000 \cdot 0,02 = 60$ Euro (vgl. REICHEL/HUMENBERGER, 2012, S. 145).

Die Berechnung der Zinsen für Teile eines Jahres, z.B. Monate, verwendet die Bruchrechnung und wird in der Unterstufe folgendermaßen argumentiert. Ein Bankjahr besteht aus 360 Tagen, ein Monat wird mit 30 Tagen gerechnet, pro Monat fallen also $\frac{1}{12}$ der Jahreszinsen an. Eine passende Aufgabe wird angeführt:

Beispiel 20. Berechne die Zinsen für ein Kapital von 2 200 Euro bei einem Zinssatz von 4,5% p.a. für 2 Monate!

Es gilt für die Zinsen Z , dass $Z = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{m}{12}$. Nach Einsetzen der Werte aus der Angabe ergeben sich Zinsen von 16,5 Euro (vgl. REICHEL/HUMENBERGER, 2012, S. 145 f.).

Die Zinsenrechnung gipfelt in der Sekundarstufe I in der Zinseszinsrechnung, von Interesse hierbei ist der Kontostand des Sparbuchs mit fixem Zinssatz nach n Jahren. Mit einer rekursiven Überlegung erlangt man die allseits bekannte Formel:

$$\begin{aligned} \text{Nach einem Jahr: } K_1 &= K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \\ \text{Nach zwei Jahren: } K_2 &= K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \\ &= K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2. \end{aligned}$$

In diesem Schema fortfahrend deduziert man die bekannte Zinseszinsformel nach n Jahren.

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad (11)$$

Als passende Aufgabe steht die folgende:

Beispiel 21. Irenes Vater legt Anfang Jänner 8 000 Euro auf ein Sparbuch mit 1,5% p.a. vereinbarter Verzinsung. Welchen Guthabenstand hat er nach 4 Jahren unter Berücksichtigung der KESt? Wie viel Euro betragen die in dieser Zeit tatsächlich anfallenden Zinsen?

Das Berücksichtigen der KESt ergibt einen Nettozinssatz von $p_{\text{netto}} = 1,5 \cdot 0,75 = 1,125$. Unsere Überlegungen, und daher auch die Formel (11), behalten ihre Gültigkeit für den Nettozinssatz. Es errechnet sich ein Kapital nach vier Jahren von $K_4 \approx 8366,12$ Euro (vgl. REICHEL/HUMENBERGER, 2012, S. 151).

In der Unterstufe darf nicht auf Aufgaben der folgenden Art vergessen werden.

FM6: „... banales Beispiel ... bei Anleihen, Coupons, man hat Fixbeträge, irgendwelche laufenden Zahlungen und so, bestes Beispiel sind Handyverträge, iPhone um 0 Euro, dafür 40 Euro im Monat und das ist eine banale, also finanzmathematisch, höchst banale Rechnung, aber trotzdem eine, dass ich mir irgendwie ausrechne, was zahle ich bei zwei Jahre Bindung, alleine über diese 40 Euro Beiträge und was kostet mir das Ding, wenn ich es mir kaufe und dafür einen super billigen Tarif nehme. Also das wäre ein extrem banaler Fall, wo man sagt ok man hat laufende Cashflows oder irgendeinen Fixbetrag, da könnte man noch eine Verzinsung einbauen, aber das muss man nicht, ...“

Die einfache Zinsrechnung, wo die Zinsen in jeder Periode vom Anfangskapital K_0 berechnet werden, erscheint kaum in Schulbüchern der Unterstufe. Unter diesen Voraussetzungen beträgt der Kontostand nach n Jahren:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right) \quad (12)$$

Der weitere Weg der Idee *Zeitwert des Geldes* in der Schule unterscheidet sich je nach gewählter Schulform an Intensität. Einschlägige Schulen, wie Handelsakademien, vertiefen

in Mathematik die Zinseszinsrechnung. In einer allgemeinbildenden Schule erfährt man entsprechend weniger, siehe Kapitel 3.

Die unterjährige Verzinsung ist aufgrund der in der Praxis gehandhabten Methode etwas problematisch.

Definition 12. (nomineller Zinssatz) Das Jahr sei in $m \in \mathbb{N}$ gleichlange Zinsperioden unterteilt, der Zinszuschlag wird jeweils nach $\frac{1}{m}$ Jahren erteilt. Wenn der unterjährige Periodenzinssatz i_p zeitproportional als m -ter Teil des Jahreszinssatzes i ermittelt wird, dann nennt man i den nominellen Jahreszinssatz und i_p den relativen unterjährigen Periodenzinssatz. Es gilt $i_p = \frac{i}{m}$.

Diese Art von linearer Verzinsung ist in der Finanzbranche üblich, obwohl sie zu Widersprüchen führt. Anscheinend hat der Mensch vor allem im Geldwesen eine Liebe zur Linearisierung bzw. zum proportionalen Denken, welche er auch bei Unsinnigkeit nicht aufgeben möchte (vgl. TIETZE, 2015, S. 77).

Beispiel 22. Ein Kapital von 1000 Euro wird bei einer Bank mit einem Zinssatz von 16% p.a. verzinst. Der Zinszuschlag erfolgt vierteljährlich. Wie groß ist das Kapital bei gleichbleibendem Zinssatz nach 5 Jahren?

Der relative unterjährige Zinssatz beträgt $i_p = \frac{0,16}{4} = 4\%$. Das Endkapital beläuft sich auf $K_5 = 1000 \cdot 1,04^{20} \approx 2191,12 \text{ €}$.

Wenn der Zinszuschlag jährlich erfolgen würde, dann berechnet man ein Endkapital von $K_5 = 1000 \cdot 1,16^5 \approx 2100,34 \text{ €}$. Dieser Betrag ist deutlich geringer.

Wenn man hier eine widerspruchsfreie Theorie verwenden möchte, dann muss man auf den konformen unterjährigen Zinssatz umsteigen.

Definition 13. (konformer Jahreszinssatz) Das Jahr sei in $m \in \mathbb{N}$ gleichlange Zinsperioden unterteilt, der Zinszuschlag wird jeweils nach $\frac{1}{m}$ Jahren erteilt. Wenn der unterjährige Periodenzinssatz i_p so bestimmt wird, dass die Endwerte der Kapitalien K_t unabhängig vom Verzinsungsvorgang äquivalent sind, dann heißt i effektiver Jahreszinssatz und i_p konformer unterjähriger Zinssatz. Es gilt die folgende Beziehung $(1 + i_p)^m = 1 + i$.

Beispiel 23. Wie lautet der konforme Jahreszinssatz im Beispiel 22?

Die Berechnung $1,16^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 0,0378$ liefert den gesuchten Zinssatz.

Diese dargestellte Problematik zieht sich weiter. Die gemischte Verzinsung ist die in der Praxis bei Banken verwendete Methode, wenn der Termin der Einzahlung oder der Auszahlung nicht mit dem Zinszuschlagtermin übereinstimmen. Die Endwertberechnung eines Kapitals erfolgt hier so, dass das eingezahlte Kapital für die Dauer t_1 bis zum nächsten Zinszuschlag linear aufgezinst wird, dann erfolgt eine Aufzinsung per Zinseszins nach Dauer t_2 an Anzahl voller Jahre, schlussendlich wird dann noch der verbliebene Jahresbruchteil t_3 abermals linear aufgezinst. Es gilt also

$$K_E = K_0 \cdot (1 + i \cdot t_1) \cdot (1 + i)^{t_2} \cdot (1 + i \cdot t_3) \quad (13)$$

Bei dieser Formel gilt zu bedenken, dass die Höhe der Zinsen vom Einzahlungsdatum abhängt. Wenn man bei der Zinseszinsformel (11) für n auch nichtganzzahlige Werte zulässt, erhält

man die theoretische Verzinsung. Der Unterschied zwischen dieser und der gemischten Verzinsung zeigt sich in der unten stehenden Grafik, der stückweise lineare Verlauf beschreibt die gemischte Verzinsung:

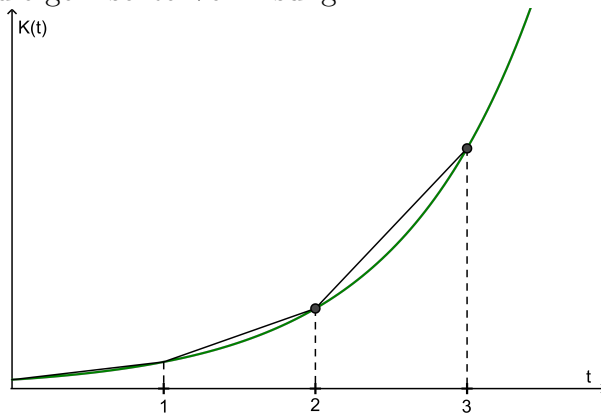


Abb. 20 theoretische und gemischte Verzinsung

Den Unterschied dieser beiden Arten gilt es auch in Schulbuchaufgaben zu berechnen:

Beispiel 24. Jemand eröffnet am Donnerstag, dem 14. April 2011 ein mit 1,75% p.a. verzinstes Sparbuch, das einem KEST-Abzug von 25% unterliegt, und zahlt 12 000 Euro ein. Am 6. Mai 2014 löst er dieses Sparbuch wieder auf. Rechne mit 1) gemischter und 2) theoretische Verzinsung! (siehe MALLE/WOSCHITZ/KOTH/SALZGER, 2010, S. 144 verändert)
Nach dem § 32 Abs. 7 des österreichischen Bankwesengesetzes (BWG) gilt folgendes:

„Die Verzinsung der Einzahlungen auf Spareinlagen beginnt mit dem Wertstellungstag (§ 37), wobei der Monat zu 30 und das Jahr zu 360 Tagen zu rechnen ist. Beträge, die innerhalb von 14 Tagen nach Einzahlung wieder abgehoben werden, sind nicht zu verzinsen, wobei Auszahlungen aus Spareinlagen stets zu Lasten der zuletzt einbezahlten Beträge zu erfolgen haben. Bei Auszahlungen aus Spareinlagen sind die Zinsen für den ausbezahlten Betrag bis einschließlich dem der Auszahlung vorangegangenen Kalendertag zu berechnen.“ (BWG)

Nach gemischter Verzinsung erhält man für

$$K_n = 12000 \left(1 + \frac{257}{360} \cdot \frac{1,3125}{100} \right) \cdot \left(1 + \frac{1,3125}{100} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{125}{360} \cdot \frac{1,3125}{100} \right) \approx 12489,13 \text{ €}.$$

Im Falle der theoretischen Verzinsung erhält man für 1 102 Tage, das sind 3,0611 Jahre, an denen das Kapital auf der Bank verzinst wird ein Endkapital von $12000 \cdot \left(1 + \frac{1,3125}{100} \right)^{3,0611} \approx 12488,68 \text{ €}$.

Eine weitere Verzinsungsart ist die stetige Verzinsung. Bei der die Formel für einen Kontostand nach $t \in \mathbb{R}$ Zeiteinheiten lautet:

$$K_t = K_0 \cdot e^{i \cdot t}$$

Wir betrachten hier einen nominellen Jahreszinssatz i , in einem Jahr erfolgen m Zinszuschläge zum relativen Zinssatz $\frac{i}{m}$, nach t Jahren wächst ein Kapital von K_0 auf $K_t = K_0 \cdot (1 + \frac{i}{m})^{m \cdot t}$. Wir betrachten nun die Entwicklung des Kapitals für ein Jahr, wenn die Anzahl m der Zinsperioden immer größer wird.

jährlicher Zinszuschlag $m = 1$	$K_1 = K_0 \cdot (1 + i)^1$
halbjährlicher Zinszuschlag $m = 2$	$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^2$
vierteljährlicher Zinszuschlag $m = 4$	$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^4$
täglicher Zinszuschlag $m = 365$	$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{365}\right)^{365}$
$m \rightarrow \infty$	$K_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = K_0 \cdot e^i$

Anwendung findet diese Art von Verzinsung z.B. im Black-Scholes-Modell (vgl. SHREVE, 2004, S. 154) und diese angeführten Unterscheidungen sind auch in der Praxis von Belang:

FM6: „Also weiß ich nicht, so etwas wie das Konzept von stetiger Verzinsung, aber so was ist, glaube ich eh Standard.“

CD: „Es kommt zwar nicht üppig in den Schulbüchern vor, aber in dem einen oder anderen kommt es vor.“

FM6: „Ja oder so einen Übergang, also so ein hin und herschalten zwischen stetigen und diskreten Zinsen, das ist auch alles andere als irrelevant. Das ist schon etwas, das in der Wirtschaft immer wieder vorkommt. Zum Teil von irgendwelchen Aufsichten, wie der EIOPA, weil von der irgendetwas mit stetigen Modellen gerechnet wird und trotzdem wieder umgerechnet wird, weil jedes Unternehmen mit diskreten Zinsen rechnet.“

Auch in Schulbüchern liest man über stetige Verzinsung (vgl. GÖTZ/REICHEL, 2010, S. 204 und S. 206).

Rentenrechnung und Tilgungspläne stellen zwei große Lehrstoffgebiete dar, die vor allem in Schulen mit wirtschaftlichen Schwerpunkt unterrichtet werden. Die Behandlung regelmäßiger Einzahlungen auf ein Sparkonto und Auszahlungen aus einem Sparkonto stehen im Vordergrund. Als mathematisches Werkzeug benötigt man die Summenformel einer endlichen geometrischen Reihe.

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ mit } q \neq 1$$

Unter einer Rente R versteht man im Allgemeinen eine Folge von gleichbleibenden Ein- oder Auszahlungen. Die klassische Unterscheidung richtet sich danach, ob am Beginn einer Verzinsungsperiode eingezahlt wird oder am Ende einer solchen Periode. In diesem Zusammenhang

spricht man von vorschüssigen bzw. nachschüssigen Renten. Um zwei verschiedene Renten finanzmathematisch vergleichen zu können, müssen sich die Zahlungen auf dasselbe Datum beziehen, es muss auf- bzw. abgezinst werden. Üblicherweise bezieht man sich auf den Beginn der Zahlungen, der sogenannte Barwert, oder auf das Ende der Zahlungen, der sogenannte Endwert. Je nach Betrachtung, Barwert oder Endwert, ergeben sich vier Fälle. Wir nehmen regelmäßige Einzahlungen eines konstanten Werts R über n Perioden bei einem Zinssatz i für die Periode an. Für die Berechnung des Endwerts bei einer nachschüssigen Rente, die Raten werden jeweils am Ende einer (Verzinsungs)Periode eingezahlt, mit $q := 1 + i$, wobei für die folgenden Betrachtungen $i \neq 0$ sein soll, erhält man:

$$R \cdot q^{n-1} + R \cdot q^{n-2} + \dots + R \cdot q + R = R \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Der Endwert in einem Fall der vorschüssigen Rente, die Raten werden jeweils zu Beginn einer Periode eingezahlt, ergibt

$$\begin{aligned} R \cdot q^n + R \cdot q^{n-1} + \dots + R \cdot q &= R \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - R \\ R \cdot \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - 1 \right) &= R \cdot \left(\frac{1 - q^{n+1} - 1 + q}{1 - q} \right) \\ R \cdot \left(\frac{q - q^{n+1}}{1 - q} \right) &= R \cdot q \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \end{aligned}$$

Bei einer Barwertberechnung betrachtet man den Wert aller Einzahlungen zu Beginn, bei einer nachschüssigen Rente ergibt sich durch Abzinsen:

$$\begin{aligned} R \cdot q^{-1} + R \cdot q^{-2} + \dots + R \cdot q^{-n} &= \frac{R}{q^n} \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1) \\ &= \frac{R}{q^n} \cdot \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) \end{aligned}$$

Analog dazu wird die vorschüssige Barwertberechnung behandelt.

$$\begin{aligned} R + R \cdot q^{-1} + \dots + R \cdot q^{-(n-2)} + R \cdot q^{-(n-1)} &= \frac{R}{q^{n-1}} \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1) \\ &= \frac{R}{q^{n-1}} \cdot \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) \end{aligned}$$

Einfaches Abzinsen der Endwertformeln ergibt jeweils die entsprechenden Barwertformeln und umgekehrt durch Aufzinsen.

Eine weiterer schulischer Aspekt des Schemas *Zeitwert des Geldes* thematisiert Kredite. Ein Schuldner benötigt einen bestimmten Geldbetrag S , die Bank (bzw. ein Gläubiger) stellt das Geld dem Schuldner zur Verfügung. Im Gegenzug verpflichtet sich der Schuldner innerhalb einer bestimmten Zeitspanne den ausgeborgten Betrag inklusive der anfallenden Zinsen zurückzubezahlen. Üblicherweise wird die Schuld eben in mehreren kleineren Beträgen zurückbezahlt, sogenannte Raten R , die sich in der Realität aufgrund des Zinssatzes auch

verändern können. In den Schulbuchaufgaben bleibt der Zinssatz i konstant. Die bekannte rekursive Tilgungsgleichung, welche den Schuldenstand nach n Zinsperioden angibt, lautet:

$$S_n = S_{n-1} \cdot q - R$$

In der expliziten Form erhalten wir:

$$S_n = S \cdot q^n - R \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (14)$$

Die befragten Personen sind der Meinung, dass das Denkschema *Zeitwert des Geldes* unbedingt in der Schule gelehrt und gelernt werden soll, mehr als andere Themen der Finanzmathematik. Der folgende Interviewausschnitt ist auch aus dem Grund interessant, da man erfährt, was der Befragte unter Finanzmathematik versteht.

FM4: „Meine Privatmeinung, unabhängig von Finanzmathematik. Ich finde es gut, wenn man sich in der Schule mit Finanzmathematik auseinandersetzt. Man sollte es aber sozusagen nicht übertreiben, in dem Sinne was ich vorher gesagt habe. Ein bisschen kaufmännisches Rechnen ist auch nicht schlecht, das ist zwar jetzt nicht echte Finanzmathematik, aber wenn das auch vorkommt, dann ist das durchaus vernünftig, weil es wahrscheinlich die Probleme von viel mehr Menschen sind, nicht wie bewerte ich so eine Option richtig. Aber ... was bedeutet der Zinssatz von meinem Kredit, den ich vielleicht einmal habe, wenn ich Student bin oder was. Wie gehe sozusagen damit um, ... das kann auch Finanzmathematik ... sein, nicht in dem Sinn, wie wir jetzt darüber geredet haben, aber zum Beispiel, was bedeutet das für mich, ich habe Schulden bei der Bank und dann sinkt oder steigt das Zinsniveau. Was hat das für Auswirkungen auf mich, habe ich dort eine fixe oder eine variable Verzinsung bei der Bank, welche Konsequenzen hat das für meine Verschuldung. Das ist unabhängig von No-Arbitrage-Finanz, was wir und ich wahrscheinlich unter Finanzmathematik verstehen.“

Das Konzept von Forward-Rates, also zukünftigen Zinssätzen, lässt sich nach der Meinung eines Befragten schon in der Oberstufe umsetzen.

FM5: „...in der Oberstufe könnte man auch sicher so etwas machen, wie das Konzept von Forward-Rates. Also das wäre auch, also das ist auch alles andere als trivial, dass man sich jetzt von der Zeitstruktur überlegt, ok was passiert, habe ich nur von jetzt bis in zwei Jahren, habe ich von jetzt bis in einem Jahr, von einem Jahr bis in zwei Jahre, und dass man sich überlegt, wie müssen die Forward-Rates ausschauen.“

Ein Beispiel zum Konzept von Forward-Rates liest man unten.

Beispiel 25. Der jährliche Zinssatz, Spot Rate, für eine Geldveranlagung von vier Jahren beträgt i_4 . Des Weiteren ist der jährliche Zinssatz für eine Geldveranlagung von drei Jahren bekannt, dieser wird mit i_3 bezeichnet. Wie groß soll der heute vereinbarte jährliche Zinssatz $f_{3,4}$, die Forward Rate, für den in der Zukunft liegenden Zeitraum vom Ende des dritten bis zum Ende des vierten Jahres sein?

Aus Gründen von No-Arbitrage darf es keine Rolle spielen, ob ich mein Geld für vier Jahre veranlasse oder zuerst für drei Jahre und dann mit der Forward Rate ein Jahr. Es gilt also die Gleichung $(1 + i_4)^4 = (1 + i_3)^3 \cdot (1 + f_{3,4})$. Man erhält die Formel

$$f_{3,4} = \frac{(1 + i_4)^4}{(1 + i_3)^3} - 1$$

Dieses Konzept lässt sich verallgemeinern. Die Spot Rate für k Jahre wird mit i_{s_k} bezeichnet. Die Forward Rate für den Zeitraum $[m, m + s]$ wird mit $f_{m,m+s}$ geschrieben. Es gilt wiederum $(1 + i_{s_{m+s}})^{m+s} = (1 + i_{s_m})^m \cdot (1 + f_{m,m+s})^s$. Daraus erhält man wiederum die Formel

$$f_{m,m+s} = \frac{(1 + i_{s_{m+s}})^{m+s}}{(1 + i_{s_m})^m} - 1$$

Auf allzu viel Pedanterie sollte in der Schule bei der Zinsrechnung verzichtet werden.

FM3: „Naja, - also, ausgehend vom elementaren Niveau, das sozusagen grundsätzlich das Auf- und Abzinsen sich überlegt, ohne dass man die Schüler allzu sehr quälen sollte damit.“

An diesem Punkt angelangt, erhebt sich der Eindruck, dass alles Relevante über die Idee *Zeitwert des Geldes* bereits in der Schule vorkommt.

Doch schon ein Blick in diverse Medien verrät, dass die statische Behandlung von Zinsraten in der Schule nicht stimmen kann. Sie verändern sich im Laufe der Zeit.

Der Beginn auf universitärem Niveau beschreibt die Veränderung des Zinssatzes in einem diskreten Setting. Die Modellierung behilft sich mit einem Binomialmodell mit n Münzwürfen. Sei nun $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ eine Folge von Zufallsvariablen. Wenn man einen Euro zum Zeitpunkt i in den Geldmarkt investiert, dann hält man zum Zeitpunkt $i + 1$ ein Vermögen von $1 + R_i$. Die Zufallsvariable R_i für $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ hängt von den ersten i Münzwürfen ab, also R_0 hängt nicht vom Zufall, den Münzwürfen ab. An dieser Stelle vergleichen wir die Zufallsvariablen des Zinssatzes mit einer Aktie in diesem Modell. Bei Investition in eine Aktie zum Zeitpunkt i , weiß man nicht, wie viel die Aktie zum Zeitpunkt $i + 1$ Wert ist. Bei einer Investition in den Geldmarkt weiß man zum Zeitpunkt i schon den „darauf folgenden“ Wert, dieser hat den Wert $1 + R_i$ zum Zeitpunkt $i + 1$. Interessanterweise geht man bei so einer Modellierung von einem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß aus, das passiert, um einen diskontierten Portfolioprozess als Martingal zu bekommen, um Arbitrage zu verhindern.

In weiterer Folge lassen sich in diesem Setting Derivate, die von dem Zinssatz abhängen, bestimmen. Prominente Beispiele sind Swaps, Caps und Floors.

Ein Swap für m Perioden ist ein Vertrag, der Zahlungen $SW_1, \dots, SW_m$ tätigt, wobei $SW_i = K - R_{i-1}$ ist. Mit Hilfe eines Swaps lässt sich der Zinssatz auf einen bestimmten Wert K fixieren. Die Käuferin eines solchen Produkts erhält regelmäßige Zahlungen der Größe $SW_i = K - R_{i-1}$, diese lassen sich eben als fixierte Zinsrate sehen. Wenn der Wert des Zinssatzes unterhalb von K liegt, dann tätigt der Swap den Ausgleich, im anderen Fall muss etwas gezahlt werden. Ein Swap führt eine variable Verzinsung in eine fixe über.

Wenn man einen Kredit hat, möchte man eine obere Grenze K für den Zinssatz haben, um zu hohe Raten zu verhindern. Der Vertrag Cap tätigt für m Perioden Zahlungen der Form

$CAP_n = (R_{i-1} - K)^+$. Bei einem Sparkonto mit variabler Verzinsung möchte man eine untere Grenze für den Zinssatz haben. Ein Floor ist ein Vertrag, der für m Perioden Zahlungen der Form $Floor_n = (K - R_{i-1})^+$ macht.

Der Glaube an die Existenz einer einzigen Zinsrate am Markt stellt eine Illusion dar. Die Renditen der Bonds, bzw. Anleihen, mit unterschiedlichen Laufzeiten implizieren die unterschiedlichen Zinssätze in Abhängigkeit der Laufzeit. Daraus leitet sich die Zinskurve ab. Diese Kurve lässt sich als Funktion auffassen, sie bildet die Zinsen in Abhängigkeit der Laufzeiten ab, siehe Abb. 21.

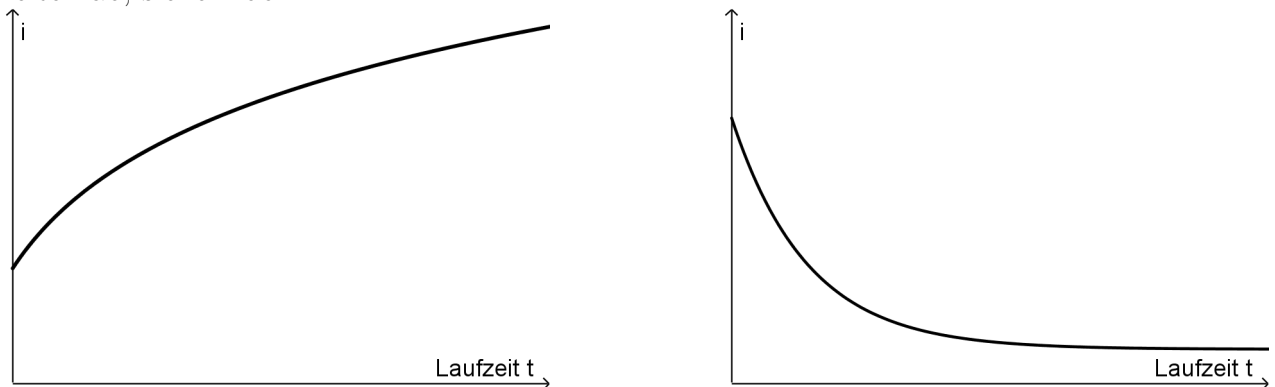


Abb. 21 normale und inverse Zinsstrukturkurve

Normalerweise ist es eben so: Je länger das Geld veranlagt wird, umso höhere Zinssätze bekommt man, siehe Abb. 21 links. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, dass für kurzfristig und dringend benötigtes Geld ein höherer Zinssatz verlangt wird, siehe Abb. 21 rechts. Das Hauptinteresse gilt jenen Modellen, die eine Methode für die zufällige Entwicklung dieser Kurve liefern. Diese heißen Term-Structure Models. Im Sinne des Vertikalkriteriums lassen sich gewisse Aspekte auf unterschiedlichen intellektuellen Niveaus darstellen.

FM2: „Man beginnt mit einer Definition von verschiedenen Zinssätzen und dann eigentlich schon relativ schnell, wie bekommt man das aus Daten? Was gibt es am Markt? Dann kann man eben besprechen, es gibt so Libor-Raten. Das ist, glaube ich auch für die Allgemeinbildung nicht ganz irrelevant. Was ist eine Libor-Rate? Und es gab ja auch einige Skandale, und man liest davon in der Zeitung und so. Dann eben Ansätze, wie man das Ganze modellieren kann. - Dass man eben sagt, man möchte eben eine Verteilung haben, die positiv ist.“

Die Vorlesungen darüber siedeln sich aber erst in späteren Studienabschnitten an. Es handelt sich hierbei um keineswegs leichte Kost, wie der folgende Kommentar belegt.

FM6: „Also ja in den Einführungen sind diese Zinsdinger ... ganz ... ok für die Modellierung brauchst du, also da kannst du nicht mit Binomialbäumen und so Scherze werken und deswegen sind diese ganzen Zinsmodelle relativ fortgeschritten. Das ist immer erst stetige Finanzmathematik 2. Also zumindest bei uns war es immer so. Das ist, diese ganze Zinsmodellierung Short-Ratemarkodells, das ist auch, also ich habe da auch selber am Anfang eine Zeitlang geknabbert, bis ... das, - - - irgendwie in mich hineingegangen ist. Ah - also dass zum Beispiel diese ganze stetige Zinsmodellierung eher sozusagen auf einem fortgeschritten

Level. Also einfach Beispiele und viele Sachen kann man auch diskret einfach machen, ahm Forward-Rates kann man natürlich auch diskret anschauen ...“

Die Modellierung im Bereich der Zinsen stellt ein schwieriges Gebiet dar und ist hoch relevant in der aktuellen Forschung.

CD: „Aber es findet auf alle Fälle auch definitiv in der Forschung - seine Anwendung?“

FM2: „Auf jeden Fall, also die Zinsen sind momentan ein schwierig modellierbares Feld, weil es gibt jetzt eben, so multiple Zinskurven, also eine Zinskurve ist eben, man schaut sich an, es gibt eben Bonds, Anleihen, und die gibt es für sehr viele Laufzeiten. Man schaut sich eben an, eine Zinskurve ist eben eine Abbildung von den Laufzeiten nach $\mathbb{R}^+$, und die muss man eben stochastisch modellieren, da kann zum Beispiel, also das könnte man zum Beispiel auch machen, dass man auf der Internetseite der EZB, kann man sich die Forwardkurve anschauen und dann sieht man, wie sich die jeden Tag bewegt, das ist ein schwieriges Modell, man muss eben einen Prozess von Kurven - hinschreiben. Das ist wahrscheinlich nicht auf dem Niveau der Schulmathematik. Als Ausblick sozusagen, dass man den Schülern zeigt, ok das ist wirklich was ...“

In stetiger Zeit funktioniert die Modellierung eben nicht mehr so einfach. Zinssatzmodelle werden als stochastische Differentialgleichungen beschrieben, siehe Gleichung 10.6.2 auf S. 134. Eine Weiterentwicklung des VASICEK-Modells ist das two-Factor VASICEK-Modell, wo $\tilde{B}_1$ und $\tilde{B}_2$ Brown'sche Bewegungen unter dem risikoneutralen Maß sind. Die Konstanten σ_1 und σ_2 seien positive reelle Werte und die Matrix $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ habe zwei positive Eigenwerte.

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= (a_1 - b_{11}X_1(t) - b_{12}X_2(t))dt + \sigma_1(t)d\tilde{B}_1 \\ dX_2(t) &= (a_2 - b_{21}X_1(t) - b_{22}X_2(t))dt + \sigma_2(t)d\tilde{B}_2 \end{aligned}$$

dann modelliert man den Zinssatz so:

$$R(t) = c_0 + c_1 \cdot X_1(t) + c_2 \cdot X_2(t)$$

Zwei-Faktor-Modelle sind ein guter Kompromiss zwischen Flexibilität und Komplexität. Drei-Faktor-Modell sind im Allgemeinen schwierig zu lösen und Ein-Faktor-Modelle beschreiben kaum das Verhalten von Zinssätzen mit längeren Laufzeiten (vgl. CUCHIERO, 2006, S. 41). Die Darstellbarkeit des *Zeitwertes von Geld* lässt sich aufgrund des Gezeigten auf verschiedenen intellektuellen Niveaus durchführen.

10.7 Die aufgelisteten zentralen Ideen erfüllen die Kriterien nach Schwill – weitere elaborierte Beispiele

In diesem Kapitel werden zu vier *zentralen Ideen* weiterführende Definitionen und Beispiele angeführt. In vielen Fällen sind Kenntnisse aus der höheren Wahrscheinlichkeitstheorie bzw. stochastischen Analysis notwendig.

10.7.1 Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik

Zu Beginn wird der Begriff Martingal umfangreich definiert, er spielt in der Finanzmathematik eine große Rolle und repräsentiert die mathematische Formulierung der Idee eines fairen Spiels, bei dem eben das Wissen über vergangene Ereignisse keine Hilfe für die Schätzung eines zukünftigen Ausgang bietet. In anderen Worten: Der Erwartungswert eines zukünftigen Ereignisses unter Berücksichtigung der gesamten Information aller vorhergehenden Ausfälle entspricht dem aktuellen Ausfall. Die exakte Formulierung bedarf Werkzeuge der höheren Wahrscheinlichkeitstheorie, wie bedingter Erwartungswert, Filtration und adaptierter Prozess.

Definition 14. (Filtration) Sei $I \subset \mathbb{R}_0^+$ eine beliebige Indexmenge, dann ist eine Filtration $\mathbb{F}$ eine Familie von σ -Algebren $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ für die gilt:

$$\forall s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$$

Eine Filtration verwendet man, um den Wissensstand zu einem Zeitpunkt zu modellieren. Die σ -Algebra $\mathcal{F}_t$ steht für die gesamte Information zum Zeitpunkt t , diese beinhaltet auch die Information aller vorigen Zeitpunkte.

Definition 15. (adaptierter Prozess) Seien I eine Indexmenge, $X = (X)_{t \in I}$ ein stochastischer Prozess und $\mathbb{F}$ eine Filtration, dann heißt der Prozess X adaptiert bezüglich $\mathbb{F}$, wenn für alle $t \in I$ gilt, X_t ist $\mathcal{F}_t$ -messbar.

In der Finanzmathematik betrachtet man meist Kurse als adaptierten Prozess zu einer Filtration, die die Information repräsentiert.

Definition 16. (Martingal) Sei $X = (X)_{t \in I}$ ein adaptierter Prozess bezüglich einer Filtration $\mathbb{F}$, man nennt X ein Martingal bezüglich $\mathbb{F}$, wenn die folgende Bedingung für alle $s < t$ erfüllt ist:

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$$

Die Idee des fairen Spiels möchte man auf die Finanzmathematik übertragen, man denke an die Preisfindung eines Derivats in einem finanzmathematischen Modell. Der Preis soll sowohl für den/die Verkäufer/in als auch für den/die Käufer/in fair sein. Unter fair soll das Vermeiden von risikolosen Gewinnen für beide Seiten zu verstehen sein. Mathematisch untermauert wird diese Beziehung zwischen Martingalen und Arbitrage durch das „Fundamental Theorem of Asset Pricing“, siehe 10.1 auf Seite 84 bzw. 10.4 auf Seite 119. Es werden nun finanzmathematische Modelle in einem mathematisch höheren Setting betrachtet. Unter Verwendung des erwähnten Theorems wird gezeigt, dass in zwei einfach gestrickten Modellen Arbitragefreiheit herrscht.

Beispiel 26. Wir betrachten ein Marktmodell, in dem es eine Aktie gibt, deren Kurs einem Binomialmodell mit t Perioden folgt. Die Indexmenge I hat die Form $I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Der Kurs beginnend bei dem Wert S_0 steigt in jeder Periode mit dem konstant bleibenden Faktor u bzw. fällt mit dem konstant bleibenden Faktor d . Des Weiteren besteht die Möglichkeit in den Geldmarkt zu investieren, hier erhält man einen sicheren Zinssatz von r . Für die gegebenen Parameter gilt $0 < d < 1 + r < u$. Auf diesem Markt führen wir noch ein Derivat V ein, dessen Auszahlung vom Kurs der Aktie zum Zeitpunkt t abhängt.

Ist dieses Modell frei von Arbitrage?

Wir weisen die Existenz eines Maßes, wie im Satz 10.4 auf Seite 119 gefordert, nach. Ein solches Maß nennt man auch *risiko-neutrales Maß*.²⁰ Wir möchten, dass der diskontierte Aktienpreisprozess ein Martingal ist. Es genügt für ein Martingal, die folgende Bedingung zu fordern:

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{1}{(1+r)^n} S_n \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] = \frac{1}{(1+r)^{n-1}} S_{n-1} \quad (15)$$

wobei $\mathcal{F}_l = \sigma(S_k : k \leq l)$. Aus der Gleichung (15) lässt sich die Wahrscheinlichkeit p^* des risiko-neutralen Maßes berechnen:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{1}{(1+r)^n} S_n \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] &= \frac{1}{(1+r)^{n-1}} S_{n-1} \\ p^* \frac{1}{(1+r)^n} u S_{n-1} + (1-p^*) \frac{1}{(1+r)^n} d S_{n-1} &= \frac{1}{(1+r)^{n-1}} S_{n-1} \\ p^* \frac{1}{1+r} u + (1-p^*) \frac{1}{1+r} d &= 1 \\ p^* u + d - p^* d &= 1 + r \\ p^* &= \frac{1+r-d}{u-d} \end{aligned}$$

Man berechnet weiter $1-p^* = \frac{u-1-r}{u-d}$. Die obige Gleichung ist eindeutig lösbar, also ist auch das risiko-neutrale Maß in diesem Modell eindeutig. Das Marktmodell ist also arbitragefrei und sogar vollständig. Unter der Vollständigkeit versteht man in diesem Fall, dass jedes Derivat repliziert werden kann. Das garantiert das zweite „Fundamental Theorem of Asset Pricing“, siehe Satz 10.5 auf S. 126. Diese Aufgabe dient dem Nachweis der Erfüllung des Vertikalkriteriums der Idee *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik*, siehe Seite 84.

Auch das Black-Scholes-Modell ist arbitragefrei und sogar vollständig, nachzulesen beispielsweise in SHREVE, 2004. Aber: Wenn das Modell frei von Arbitrage ist, dann muss es nicht vollständig sein. Ein Beispiel für so einen Fall findet man in einem recht einfachen Modell, siehe Beispiel 27.

Beispiel 27. Wir betrachten ein Marktmodell, in dem es eine Aktie gibt, deren Kurs einem Trinomialmodell in einer Periode folgt. Der Kurs beginnend bei dem Wert 4 steigt mit dem Faktor 2, fällt mit Faktor $\frac{1}{2}$ oder bleibt gleich. Des Weiteren besteht wieder die Möglichkeit in den Geldmarkt zu investieren, hier erhält man einen sicheren Zinssatz von $\frac{1}{4}$.

²⁰Der Erwartungswert im risikoneutralen Maß wird mit $\tilde{\mathbb{E}}$ gekennzeichnet.

Das Marktmodell ist aber sehr wohl frei von Arbitrage, da ein risiko-neutrales Maß existiert. Es genügt für ein Martingal, wieder eine analoge Bedingung zur Gleichung (15) zu fordern:

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{1}{1+r} S_1 \mid \mathcal{F}_0 \right] = S_0 \quad (16)$$

Daraus ergibt sich eine Gleichung, alle Wahrscheinlichkeitsmaße (bzw. p^*, q^*, r^*), die die Gleichung (16) und $p^* + q^* + r^* = 1$ erfüllen, sind risiko-neutrale Maße.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{1}{1+r} S_1 \mid \mathcal{F}_0 \right] &= S_0 \\ p^* \frac{1}{1+r} u S_0 + q^* \frac{1}{1+r} S_0 + r^* \frac{1}{1+r} d S_0 &= S_0 \\ p^* \frac{1}{1+r} u S_0 + q^* \frac{1}{1+r} S_0 + (1-p^*-q^*) \frac{1}{1+r} d S_0 &= S_0 \\ \frac{8}{5} p^* + \frac{4}{5} q^* + (1-p^*-q^*) \frac{2}{5} &= 1 \\ 6p^* + 2q^* &= 3 \\ q^* &= \frac{3}{2} - 3p^* \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{daher ist } r^* = 2p^* - \frac{1}{2} \quad (18)$$

Alle $p^* \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$ bestimmen ein risiko-neutrales Maß für das angegebenen Marktmodell, die anderen Wahrscheinlichkeiten berechnet man über die Gleichungen (17) und (18).

Diese Aufgabe dient dem Nachweis der Erfüllung des Vertikalkriteriums der Idee *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik*, siehe Seite 84.

Mit Hilfe des risiko-neutralen Maßes lassen sich arbitragefreie Preise angeben. Beim Replizieren (Nachbauen des Derivats über andere Produkte am Finanzmarkt, siehe Kapitel 10.5) eines Derivats geht es darum einen Portfolio-Prozess $X(t)$ für $0 \leq t \leq T$ zu finden, sodass $X(T) = V(T)$ (fast sicher) gilt, also dass das Portfolio X zum Zeitpunkt T den gleichen Wert wie das Derivat V hat. Wenn man in seinem Marktmodell zeigen kann, dass der diskontierte Portfolio-Prozess $D(t)X(t)$ ein Martingal im risiko-neutralen Maß für $0 \leq t \leq T$ ist, dann gilt folgende Gleichung.

$$D(t)X(t) = \tilde{\mathbb{E}} [D(T)X(T) \mid \mathcal{F}_t] = \tilde{\mathbb{E}} [D(T)V(T) \mid \mathcal{F}_t]$$

Man erhält die folgende Bepreisungsformel für Derivate, da man die Auszahlungsfunktion des Derivats V zum Zeitpunkt T kennt.

$$D(t)V(t) = \tilde{\mathbb{E}} [D(T)V(T) \mid \mathcal{F}_t] \text{ für } 0 \leq t \leq T$$

Das ist am Beispiel 28 ausgeführt.

Beispiel 28. Wir betrachten ein Marktmodell, in dem es eine Aktie gibt, deren Kurs einem Binomialmodell in einer Periode folgt. Der Kurs beginnend bei dem Wert S_0 steigt mit dem Faktor u und fällt mit Faktor d . Des Weiteren besteht die Möglichkeit in den Geldmarkt zu

investieren, hier erhält man einen sicheren Zinssatz von r . Für die gegebenen Parameter gilt $0 < d < 1 + r < u$. Auf diesem Markt führen wir noch ein Derivat V ein, dessen Auszahlung vom Kurs der Aktie zum Zeitpunkt 1 abhängt. Wenn der Aktienkurs steigt, dann ist das Derivat $V_1(H)$ wert, ansonsten $V_1(T)$.

Die Wahrscheinlichkeit p^* des risiko-neutralen Maßes bleibt gleich, wie in Beispiel 26. Das Derivat lässt sich also folgendermaßen bepreisen:

$$\begin{aligned} V_0 &= \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{1}{1+r} V_1 \mid \mathcal{F}_0 \right] \\ V_0 &= p^* \frac{1}{1+r} V_1(H) + (1-p^*) \frac{1}{1+r} V_1(T) \\ V_0 &= \frac{1}{1+r} \left[\frac{1+r-d}{u-d} V_1(H) + \frac{u-1-r}{u-d} V_1(T) \right] \end{aligned}$$

Dieses Beispiel dient dem Nachweis der Erfüllung des Vertikalkriteriums der Idee *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik*, siehe Seite 84.

10.7.2 Handhabung von Risiko

In diesem Kapitel findet man unterschiedliche Aspekte der Idee *Handhabung von Risiko*. Zu Beginn kann man nachlesen, welche mathematischen Konstrukte für die Bewertung eines CDO²¹ notwendig sind.

Definition 17. (Copula) Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ ein n -dimensionaler Zufallsvektor. Die Funktion $C : [0; 1]^n \rightarrow [0, 1]$ heißt n -dimensionale Copula, wenn C die multivariate Verteilungsfunktion von X am Einheitswürfel $[0; 1]^n$ mit gleichverteilten Randverteilungen ist.

Die Anführung dieser Definition dient zum Nachweis des Erfüllens des Zeitkriteriums, mehr liest man dazu auf Seite 90. Der Satz von SKLAR garantiert die Existenz der Copulas.

Satz 10.6. Seien F eine Verteilungsfunktion und $F_1, \dots, F_n$ die zugehörigen Randverteilungen, dann gibt es eine Copula, so dass für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n$ gilt:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (19)$$

Um wieder zurück zu der Bewertung der CDOs von Seite 90 zu kommen, man möchte die Abhängigkeitsstruktur der Kredite herausfinden. Die Randverteilungen sind bekannt, die Ausfallswahrscheinlichkeiten für einen Kredit kann eine Bank gut modellieren. Wenn man nun die Wahl der Copula mit gewissen Methoden einschränkt, dann bekommt Informationen über die Abhängigkeitsstruktur.

Im folgenden Beispiel wird ein Portfolio mit zwei Aktien optimiert, wobei die Renditen und die Standardabweichungen als Variablen geführt werden.

²¹siehe S. 90

Beispiel 29. Wir betrachten ein Portfolio mit zwei Aktien A und B mit den Renditen r_A und r_B und den Standardabweichungen $\sigma(r_A)$ und $\sigma(r_B)$. Die Anteile des zur Verfügung stehenden Vermögens notieren wir mit x_A und x_B , klarerweise gilt $x_A + x_B = 1$. Die Portfoliorendite und die Portfoliovarianz haben die Form $\mathbb{E}(r_p) = \mathbb{E}(r_A) \cdot x_A + \mathbb{E}(r_B) \cdot x_B$ und $\sigma^2(r_p) = \sigma^2(r_A) \cdot x_A^2 + \sigma^2(r_B) \cdot x_B^2 + 2 \cdot x_A \cdot x_B \cdot \text{cov}(r_A, r_B)$. Wir berechnen das Minimum-Varianz-Portfolio und bemerken, dass $x_A = 1 - x_B$. Es gilt zuerst:

$$\sigma^2(r_p) = \sigma^2(r_A) \cdot (1 - x_B)^2 + \sigma^2(r_B) \cdot x_B^2 + 2 \cdot (1 - x_B)x_B \cdot \text{cov}(r_A, r_B)$$

Es handelt sich hierbei um eine Polynomfunktion zweiten Grades in x_B , für eine schönere Darstellung schreiben wir:

$$\sigma^2(r_p) = (\sigma^2(r_A) - 2 \cdot \text{cov}(r_A, r_B) + \sigma^2(r_B)) \cdot x_B^2 + (2 \cdot \text{cov}(r_A, r_B) - 2 \cdot \sigma^2(r_A)) \cdot x_B + \sigma^2(r_A) \quad (20)$$

Aus der obigen Darstellung lässt sich die Stelle des Scheitelpunkts angeben:

$$x_{B_{\min}} = \frac{\sigma^2(r_A) - \text{cov}(r_A, r_B)}{\sigma^2(r_A) + \sigma^2(r_B) - 2 \cdot \text{cov}(r_A, r_B)} \quad \text{für} \quad \sigma^2(r_A) + \sigma^2(r_B) \neq 2 \cdot \text{cov}(r_A, r_B) \quad (21)$$

Es bleibt zu untersuchen, ob der Graph der zugehörigen Polynomfunktion der Gleichung (20) eine nach oben offene Parabel oder eine nach unten offene Parabel ist. Wir zeigen, dass $\sigma^2(r_A) - 2 \cdot \text{cov}(r_A, r_B) + \sigma^2(r_B) > 0$, denn die Kovarianz erfüllt (als positive semidefinite symmetrische Bilinearform) die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in diesem Fall gilt $\sigma(r_A)\sigma(r_B) \geq |\text{cov}(r_A, r_B)|$. Aufgrund der zuvor erwähnten Ungleichung erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &< (\sigma(r_A) - \sigma(r_B))^2 \\ &= \sigma^2(r_A) - 2 \cdot \sigma(r_A)\sigma(r_B) + \sigma^2(r_B) \\ &\leq \sigma^2(r_A) - 2 \cdot \text{cov}(r_A, r_B) + \sigma^2(r_B) \end{aligned}$$

Je nachdem, ob Leerverkäufe zugelassen sind oder nicht, verändern sich die Grenzen in der obigen Optimierungsaufgabe. Wenn Leerverkäufe verboten sind, dann bekommt diese Aufgabe eine weitere Nebenbedingung $x_A, x_B > 0$. Die Überprüfung der Ungleichungskette $0 \leq x_{B_{\min}} \leq 1$ ist notwendig, im Falle der Ungültigkeit der Ungleichungskette liegt ein Randminimum vor. Wenn hingegen Leerverkäufe erlaubt sind, dann ist aufgrund der obigen Argumente $x_{B_{\min}}$ wirklich das Minimum der betrachteten Aufgabe.

Diese Aufgabe trägt zum Erfüllen des Horizontalkriteriums der Idee *Handhabung von Risiko* bei, siehe Seite 109.

Die Risikokennzahl VaR gehört nicht zu den kohärenten Risikomaßen, da er diese Eigenschaft der Subadditivität nicht erfüllt. Ein Gegenispiel dafür liest man in Beispiel 30.

Beispiel 30. Wir betrachten einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum mit

$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathcal{A}$ ist die Potenzmenge und das Wahrscheinlichkeitsmaß hat die Form $P(\omega_i) = 0,25$ mit $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Wir definieren drei Verlust-Gewinn-Zufallsvariablen X, Y, Z .

$$Z = \begin{cases} 0 & \omega = \omega_0 \\ 1 & \omega = \omega_1 \\ 2 & \omega = \omega_2 \\ 3 & \omega = \omega_3 \end{cases} \quad X = \begin{cases} Z & Z \geq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} Z & Z < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir berechnen nun den Value of Risk zum Konfidenzniveau $\alpha = 0,75$. Für die Variable Z berechnet man den $VaR_{0,75}(Z)$ über die Gleichung $P(Z \leq VaR_{0,75}(Z)) = 0,75$, es ergibt sich $VaR_{0,75}(Z) = 2$. Die analoge Vorgehensweise liefert $VaR_{0,75}(X) = 0$ und $VaR_{0,75}(Y) = 1$. Die Definition der Zufallsvariablen wurde so gewählt, dass $X + Y = Z$ ist. Das führt zur folgender Ungleichung $VaR_{0,75}(Z) = VaR_{0,75}(X + Y) = 2 > 1 = 1 + 0 = VaR_{0,75}(0) + VaR_{0,75}(Y)$. Das widerspricht der geforderten Subadditivität $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$. Der Value of Risk ist somit im Allgemeinen kein kohärentes Risikomaß. Dieses Beispiel liefert einen Beitrag dazu, dass die *Handhabung von Risiko* auf unterschiedlichen intellektuellen Niveaus durchführbar ist. An dieser Stelle sei auf die Seite 107 verwiesen.

Die Risikomaße haben sich weiterentwickelt. So interessiert man sich beispielsweise für den durchschnittlichen Verlust, wenn der VaR überschritten wird. Diese Kennzahl nennt man dann „Tail-Value-at-Risk“. Sie ist ein Beispiel für ein kohärentes Risikomaß. Im Beispiel 31 wird diese Kennzahl mit dem bedingten Erwartungswert berechnet.

Beispiel 31. Wir nehmen eine $N(3, 2^2)$ -verteilte Verlust-Gewinn-Zufallsvariable X an. Zu berechnen ist der 0,05 Tail-Value-at-Risk. Wir bezeichnen die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung mit φ . In diesem Fall berechnet sich der $ES_{0,05}(X)$ bzw. der $TVaR_{0,05}(X)$ folgendermaßen:

$$TVaR_{\alpha}(X) = \frac{\int_{-\infty}^{q_{\alpha}} x dF(x)}{F(q_{\alpha})} = \frac{\int_{-\infty}^{q_{\alpha}} x dF(x)}{\alpha}$$

Die Berechnung des 0,05-Quantils der Verteilung von X erfolgt untenstehend:

$$q_{0,05} = 3 + 2 \cdot \Phi^{-1}(0,05) = 3 + 2 \cdot -1,6449 = -0,2898$$

Es gilt:

$$TVaR_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 2^2}} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{-0,2898} x \cdot e^{-\left(\frac{(x-3)^2}{2 \cdot 2^2}\right)} dx}{0,05} = \frac{-0,05627}{0,05} = -1,1254$$

Diese Aufgabe dient dem Nachweis der Erfüllung des Vertikalkriteriums der Idee *Handhabung von Risiko*, siehe Seite 107.

10.7.3 No-Arbitrage-Prinzip

In diesem Kapitel wird eine mögliche Definition der *No-Arbitrage-Bedingung* in einem mathematische höheren Setting gegeben. Dazu benötigt man einen strengen, formalen Rahmen, der im Folgenden ausgeführt wird, vom Zugang folgen wir dem zweiten Kapitel aus SCHACHERMAYER, 2008.

Zuerst muss ein Finanzmarktmodell auf eine abstraktere Stufe gestellt werden. Wir gehen davon aus, dass sich in dem betrachteten Modell der Aktienkurs nur zwischen T Zeitpunkten ändert. Die Kurswerte können zu den Zeitpunkten $0, 1, 2, \dots, T$ betrachtet werden. Im Allgemeinen geht man davon aus, dass in einem Modell für einen Finanzmarkt n risikoreiche (z.B. Aktien) Veranlagungsmöglichkeiten und eine risikolose (z.B. Bankkonto) Veranlagungsmöglichkeit existieren.

In Begriffen der höheren Wahrscheinlichkeitstheorie handelt es sich dabei um einen $\mathbb{R}^{n+1}$ -wertigen adaptierten stochastischen Prozess²² $\hat{S} = (\hat{S}^0, \hat{S}^1, \hat{S}^2, \dots, \hat{S}^n)$ auf einem mit einer Filtration²³ ausgestatteten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$. In dieser Arbeit kommen aber nur Modelle vor, in denen es nur eine risikoreiche Veranlagungsmöglichkeit $\hat{S}^1$ und nur eine risikolose Veranlagungsmöglichkeit $\hat{B}$ gibt, die Allgemeinheit reduziert sich zu $\hat{S} = (\hat{B}, \hat{S}^1)$. Unter $\hat{B}_t$ bzw. $\hat{S}_t^0$ kann man sich einen konstanten Verzinsungsvorgang vorstellen, also $\hat{B}_t = (1+r)^t$ bzw. $\hat{S}_t^0 = (1+r)^t$.

In diesem Modell soll es möglich sein, einzelne Aktien zu kaufen und verkaufen bzw. zu sparen und sich zu verschulden. Mathematisch wird das über eine Handelsstrategie H ausgedrückt, die angibt, wie viel in jede Veranlagungsmöglichkeit investiert wird bzw. wie viel verkauft wird.

Definition 18. (Handelsstrategie) Eine Handelsstrategie ist ein $\mathbb{R}^{n+1}$ -wertiger vorhersehbarer²⁴ Prozess $(H)_{t=1}^T = (H_t^0, H_t^1, H_t^2, \dots, H_t^n)_{t=1}^T$ auf dem mit einer Filtration ausgestatteten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$.

Der Wert des gehaltenen Vermögens V_t zum Zeitpunkt t drückt man im Fall von nur einer risikolosen und nur einer risikoreichen Veranlagungsmöglichkeit dann durch die Gleichung $V_t = H_t^B \cdot \hat{B}_t + H_t^1 \cdot \hat{S}_t^1$ aus. Das Vermögen setzt sich aus dem Guthaben auf der Bank und dem Wert der gehaltenen Aktie zusammen. Analog dazu verwendet man bei n risikoreichen Anlagen das innere Produkt: $V_t = \langle H; \hat{S} \rangle = \sum_{i=0}^n H_t^i \cdot \hat{S}_t^i$.

In diesem Setting wird ein Derivat bzw. eine Option etwas anders definiert als bisher.

Definition 19. Ein/e europäische/s Option/Derivat f ist ein Element von $L(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ²⁵.

Als Beispiel kann man sich eine Put-Option, die einem das Recht zum Verkauf einer bestimmten Aktie $\hat{S}^n$ zu einem bestimmten Zeitpunkt T einräumt, vorstellen. Die Funktion f hat dann die Form $f = \frac{(K - \hat{S}_T^n)^+}{(1+r)^T}$.

Sei ab nun $S_t^i = \frac{\hat{S}_t^i}{\hat{S}_t^0}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ der diskontierte Aktienpreis der Aktie i zum Zeitpunkt t . Es reicht dann, wenn man den $\mathbb{R}^n$ -wertigen diskontierten Aktienpreisprozess S betrachtet, nur $S = (S^1, S^2, \dots, S^n)$ anzugeben, da S^0 konstant 1 ist. Um in diesem erweiterten Setting die No-Arbitrage-Bedingung zu formulieren, müssen zuvor noch der diskontierte Gewinnprozess G_t und die Menge R aller replizierbaren Optionen/Derivate definiert werden. Ersterer gibt an, wie viel, kumuliert betrachtet, bei den Investitionen am Finanzmarkt gewonnen oder verloren wurde.

Definition 20. (diskontierter Gewinnprozess) Seien S der diskontierte Veranlagungsmöglichkeiten-Prozess und H eine Handlungsstrategie, dann ist der diskontierte Gewinnprozess G_t definiert durch

$$G_t = (H \bullet S)_t := \sum_{j=1}^t \langle H_j; S_j - S_{j-1} \rangle \quad (22)$$

²²siehe Definition 15 auf Seite 154

²³siehe Definition 14 auf Seite 154

²⁴Das bedeutet so viel, wie: „Investitionen können nur ohne zukünftiges Wissen getätigt werden.“ Mathematisch ausgedrückt H_t ist $\mathcal{F}_{t-1}$ -messbar.

²⁵Bei der Annahme eines endlichen diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes mit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ ist für $p \in [0; \infty]$ der Erwartungswert $\mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}}$ immer endlich, daraus folgt, dass alle L^p -Räume dieselben Vektoren beinhalten. In der Fachliteratur schreibt man daher L , wenn man sich nicht auf eine spezielle Norm beruft.

Bei nur einer Aktie reduziert sich der Begriff zu $G_t = (H \bullet S)_t := \sum_{j=1}^t H_j \cdot (S_j - S_{j-1})$. Die Differenzen der Aktienpreise werden gewichtet aufsummiert. Das Gewicht gibt an, wie viele Aktien im Laufe der entsprechenden Periode gehalten wurden.

Welche Optionen bzw. Derivate gibt es, die man ohne Startkapital, also nur durch geschicktes Handeln, risikolos replizieren kann. Diese Optionen/Derivate bzw. Funktionen fassen wir in der Menge R zusammen.

Definition 21. (Menge aller superreplizierbaren Derivate/Optionen) Sei H eine Handelsstrategie. Die Menge $SR \in L(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit

$$SR = \{g \in L(\Omega, \mathcal{F}, P) \mid \exists f \in R \text{ mit } f \geq g\}$$

heißt die Menge aller superreplizierbaren Derivate/Optionen zum Preis 0. Die Menge R mit $R = \{(H \bullet S)_T \mid H \in \mathcal{H}\}$ ist die Menge aller replizierbaren Derivate/Optionen zum Preis 0. Dementsprechend ist $SR_a = a + SR$ die Menge aller superreplizierbaren Derivate/Optionen zum Preis a .

In diesem Setting definiert man Arbitrage sehr abstrakt.

Definition 22. (No-Arbitrage-Bedingung) Ein Finanzmarkt $S = (S^1, S^2, \dots, S^n)$ erfüllt die No-Arbitrage-Bedingung, wenn $SR \cap L_+(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{0\}$

Unter $L_+(\Omega, \mathcal{F}, P)$ versteht man die Menge aller positiven Funktion f von Ω nach $\mathbb{R}$ bzw. eben $\mathbb{R}^+$.

Erst durch dieses formale Gerüst können viele Sätze im Bereich der Finanzmathematik angewendet werden. Diese Formulierung des *No-Arbitrage-Prinzips* liegt auf einer sehr hohen intellektuellen Stufe.

10.7.4 Replikation

Auf einer sehr hohen intellektuellen Stufe im Sinne des Vertikalkriteriums liegt die Replikation in einem stetigen Modell, dafür ist einiges an Kalkül notwendig. Seien die Rentabilität a und die Volatilität σ für die Aktie S im Folgenden konstant und W ein Wiener-Prozess. Im Black-Scholes-Modell wird eine Aktie modelliert durch

$$S(t) = S(0) \cdot e^{\int_0^t \sigma(s) dW(s) + \int_0^t (\alpha(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s)) ds}$$

Nach der Itô-Doeblin-Formel, nachzulesen in SHREVE, 2004 auf Seite 146, erhält man

$$dS(t) = aS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

Wir bedienen uns hierbei einer informellen Schreibweise, die dennoch für Verständnis sorgt. Sei W eine Brown'sche Bewegung, dann ist die quadratische Variation von W gleich $[W, W](t) = t$. Unter der quadratischen Variation einer im Intervall $I = [0; T]$ definierten Funktion f mit einer beliebigen Partition Π von I verstehen wir:

$$[f, f] = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (f(t_{j+1}) - f(t_j))^2$$

In einer informellen, unexakten Weise schreiben wir die obige Eigenschaft als $dW dW = dt$.

Beispiel 32. In unserem betrachtenden Modell gibt es wiederum eine Aktie S , ein Bankkonto mit einer Verzinsung von r und eine europäische Call-Option c mit der Auszahlungsfunktion $c(T, S(T)) = (S(T) - K)^+$. Die Modellierung der Aktie erfolgt über die Brown'sche Bewegung bzw. den Wiener Prozess W .

$$dS(t) = aS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

Das Portfolio hat das Differential, analog zum diskreten Fall:

$$dX(t) = \delta(t)dS(t) + r(X(t) - \delta(t)S(t))dt$$

Für das diskontierte Portfolio $e^{-rt}X(t)$ bekommt man mit Hilfe der Itô-Doeblin-Formel folgendes Differential:

$$d(e^{-rt}X(t)) = \delta(t)(a - r)e^{-rt}S(t)dt + \delta(t)\sigma e^{-rt}S(t)dW(t) = \delta(t)d(e^{-rt}S(t)) \quad (23)$$

Änderungen im Wert des abgezinseten Portfolios rühren einzig und alleine von Änderungen des abgezinseten Aktienpreises her. Es fehlt das Differential des diskontierten Optionspreis, der europäischen Call-Option mit einer Auszahlung $(S(T) - K)^+$. Erneut erhält man einen Ausdruck für das Differential, diesmal eben für $d(e^{-rt}c(t, S(t)))$, über die Itô-Doeblin-Formel.

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}c(t, S(t))) = \\ e^{-rt} \left[-rc(t, S(t)) + c_t(t, S(t)) + aS(t)c_x(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)c_{xx}(t, S(t)) \right] dt + \\ e^{-rt}\sigma S(t)c_x(t, S(t))dW(t) \end{aligned} \quad (24)$$

Das Ziel der folgenden *Replikation* soll die für jede Zeit $t \in [0, T]$ geltende Wertegleichheit des Portfolios mit der unterliegenden Aktie und einem Sparbuch und der Option sein. Aus diesem Grund setzen wir die beiden Differentiale gleich:

$$d(e^{-rt}X(t)) = d(e^{-rt}c(t, S(t)))$$

Eine Integration von 0 bis t beider Seiten führt zu:

$$e^{-rt}X(t) - X(0) = e^{-rt}c(t, S(t)) - c(0, S(0)) \quad (25)$$

Wie zuvor erwähnt ist $X(0) = c(0, S(0))$ und somit verschwinden diese beiden Terme aus der Gleichung (25). Wir verwenden die entsprechenden Terme aus (23) und (24).

$$\begin{aligned} e^{-rt}\delta(t)(a - r)S(t)dt + \delta(t)\sigma S(t)dW(t) = \\ e^{-rt} \left[-rc(t, S(t)) + c_t(t, S(t)) + aS(t)c_x(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)c_{xx}(t, S(t)) \right] dt + \\ e^{-rt}\sigma S(t)c_x(t, S(t))dW(t) \end{aligned}$$

Eine Gleichheit bedingt auch eine Gleichheit der Drift und Volatilitätsterme, ersichtlicher-weise gilt im Falle der Volatilitätsterme:

$$\delta(t) = c_x(t, S(t))$$

Ein Gleichsetzen der „dt-Terme“ und Einsetzen von $\delta(t) = c_x(t, S(t))$ führt uns zu der berühmten partiellen Differentialgleichung von BLACK, SCHOLES und MERTON.

$$\begin{aligned} \delta(t)(a - r)S(t) &= c_x(t, S(t))(a - r)S(t) = \\ &= -rc(t, S(t)) + c_t(t, S(t)) + aS(t)c_x(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)c_{xx}(t, S(t)) \end{aligned}$$

Nach ein paar Umformungen erkennt man die oben angeführt Differentialgleichung mit der Endbedingung $c(T, S(T)) = (S(T) - K)^+$.

$$rc(t, S(t)) = c_t(t, S(t)) + rS(t)c_x(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)c_{xx}(t, S(t))$$

Die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung ist mit $\tau = T - t$:

$$c(t, S(t)) = S(t) \cdot N\left(\frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}\right) - K \cdot e^{-r\tau} N\left(\frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}\right)$$

N steht wieder für die kumulative Normalverteilung:

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

So gelangt man zur Formel (7) von Seite 130. Diese Aufgabe dient dem Nachweis, dass die Idee *Replikation* das Vertikalkriterium erfüllt, siehe Seite 130.

In Modellen, in denen **kein eindeutiges risikoneutrales Maß** existiert, gibt es auch keinen eindeutigen arbitragefreien Preis. In diesem Abschnitt wird die *Superreplikation* behandelt. In der Theorie stellt sich heraus, dass das minimale Startvermögen $K_{\min}$ einer Superreplikation einer Option V (in einem einperiodigen Modell) geben ist durch $K_{\min} = \sup \left\{ \frac{1}{1+r} \tilde{\mathbb{E}}[V] : \text{Erwartungswert in einem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß} \right\}$. Vollständig lautet dieser Satz folgendermaßen²⁶:

Satz 10.7. Wenn $S = (S^0, S^1, \dots, S^n)$ die No-Arbitrage-Bedingung erfüllt, dann gilt für alle $f \in L(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\begin{aligned} &\sup \left\{ \frac{1}{1+r} \tilde{\mathbb{E}}[V] : \text{Erwartungswert in einem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß} \right\} = \\ &\min \{ a \in \mathbb{R} \mid \text{es existiert ein } H \in \mathcal{H} \text{ mit } f \leq a + (H \bullet S)_T \} \end{aligned}$$

Wir berechnen das minimale Startvermögen für eine Superreplikation mit Hilfe des Satzes 10.7 im folgenden Beispiel 33. Es soll damit bestätigt werden, dass die Idee *Replikation* das Vertikalkriterium erfüllt, siehe Seite 131.

²⁶Der formale Aufbau im Sinne einer höheren Wahrscheinlichkeitstheorie kann auf Seite 159 nachgelesen werden.

Beispiel 33. Wir übernehmen alle Annahmen aus Aufgabe 27 auf S. 155 und fügen auf diesem Markt noch ein Produkt hinzu: eine europäische Call-Option auf die Aktie mit dem Ausübungskurs 4. Beim Kauf dieser Option erwirbt man das Recht aber nicht die Pflicht, die Aktie zum Preis von 4 zu kaufen.

Wenn man diese Option replizieren möchte, dann erhält man ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Variablen, das nicht eindeutig lösbar ist.

$$\begin{aligned} I : 4 &= a \cdot 8 + \frac{5}{4} \cdot (x - a \cdot 4) \\ II : 0 &= a \cdot 4 + \frac{5}{4} \cdot (x - a \cdot 4) \\ III : 0 &= a \cdot 2 + \frac{5}{4} \cdot (x - a \cdot 4) \end{aligned}$$

Die obere Preisschranke für das Derivat errechnet sich durch das Bestimmen des Supremums des Erwartungswerts über alle risikoneutralen Maße in diesem Modell.

$$K_{\min} = \sup \left\{ \frac{4}{5} \cdot p^* \cdot 4 + \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3 \cdot p^* \right) \cdot 0 + \frac{4}{5} \cdot \left(2 \cdot p^* - \frac{1}{2} \right) \cdot 0 \mid p^* \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right) \right\} = \frac{8}{5}$$

Das Modell im Beispiel 33 ist vom mathematischen Standpunkt nicht so anspruchsvoll wie jenes aus Beispiel 32, dennoch handelt es sich aufgrund der Unvollständigkeit des Finanzmarktmodells und der verwendeten Superreplikation um eine Erweiterung des Konzeptes *Replikation*.

Der Komplexität sind in diesem Zusammenhang keine Grenzen gesetzt.

10.8 Auswahlkriterien schulrelevanter Themen der Finanzmathematik

Ausgehend von den oben begründeten *zentralen Ideen* sollen nun Inhalte und Stoffgebiete der Finanzmathematik für den Mathematikunterricht ausgewählt werden. Diese nähere Auswahl fungiert als Grundlage für die Schulaufgaben im nächsten Teil. Dem Argument, die extrahierten zentralen Ideen sind schon die perfekte Auswahl für die Schule, entgegen wir, ein vollständiges Durchdringen einer zentralen Idee ist per Definition einer solchen, man berücksichtige das Vertikalkriterium, in der Schule nicht möglich. Auch die Behandlung aller Ideen in einer gewissen Form im Unterricht scheint unrealistisch. Hindernisse vielfältigster Art tun sich auf. Alleine schon formale Gründe (die Unterrichtszeit ist begrenzt, Themen sollten lehrplanadäquat sein, etc.) erfordern eine weitere Auswahl. Pädagogische Sichtweisen erzwingen durch das Postulat der Schüler/innenorientierung, die unmittelbar oder im späteren Leben erfahrbar wird, eine weitere Einengung (WINTER, 2016, S. 263). Ebenso die Limitation an mathematischen Werkzeugen und Fähigkeiten schränkt die Auswahl ein.

Um nicht einer willkürliche Auslese zu verfallen, bedarf es fundierter, begründeter Auswahlkriterien für zu unterrichtende Inhalte aus der Finanzmathematik. Was ist nun möglicher bzw. erstrebenswerter (anwendungsorientierter) Mathematikunterricht im Bereich Finanzmathematik?

An sich hat das Durchnehmen finanzmathematischer Inhalte aus didaktischer Sicht gute Karten. Anwendungsorientierung und Realitätsbezüge werden schon seit langer Zeit immer wieder gefordert und gut geheißen, so insistierte WITTMANN schon in den *Grundfragen des Mathematikunterrichts* im Jahre 1974 auf eine Behandlung von Anwendungen in der Mathematik.

„Dementsprechend sollen im modernen Unterricht der reine und der angewandte Aspekt der Mathematik ausgewogen aufeinander bezogen werden. Echte Anwendungen der Mathematik sollen unverfälscht stärker in den Vordergrund rücken ...“ (WITTMANN, 1974, S. 28)

In dieser Diskussion darf auf BLUM nicht vergessen werden, auch dieser fordert Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht seit langem.

„Deshalb müssen Anwendungsprobleme integraler Bestandteil des Mathematikunterrichts sein, ...“ (BLUM, 1978, S. 647)

Dass dieses Thema nicht an Aktualität verloren hat, bestätigen GREEFRATH, KAISER, BLUM und BORROMEO FERRI. Die Kompetenz des Modellierens, einer Spielwiese der Anwendungsorientierung aber nicht die einzige, wurde in Deutschland in die entsprechenden Lehrpläne aufgenommen. In vielerlei Hinsicht wurde aber noch nicht alles erreicht (vgl. GREEFRATH, 2013, S. 33 f.).

„...so dass das Forschungsfeld 'Modellieren im Mathematikunterricht' als ein sich stark entwickelnder didaktischer Ansatz zur Veränderung des Mathematikunterrichts angesehen werden kann.“ (GREEFRATH, 2013, S. 34)

Die Forderungen nach verstärkter Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht bestehen, aber warum soll diesen nachgegangen werden? Die Gründe für eine Anwendungsorientierung bzw. einen Realitätsbezug im Mathematikunterricht sind vielfältig. BLUM formuliert vier Gründe und bezieht sich dabei teilweise auf WINTER (WINTER, 1995):

- „1. Nur mit Realitätsbezügen kann der Mathematikunterricht zum Umweltverstehen, zur Alltagsbewältigung und zur Berufsvorbereitung beitragen ('pragmatische' Gründe).
2. Realitätsbezüge sind ein Vehikel zur Kompetenzentwicklung und sind insbesondere für die Förderung der Kompetenz Modellieren unentbehrlich ('formale' Gründe).
3. Realitätsbezüge helfen Schülern beim Mathematiklernen, sie dienen zum bessern Verstehen und Behalten von mathematischen Inhalten und können diese motivieren ('lernpsychologische' Gründe).
4. Nur mit Realitätsbezügen lässt sich ein adäquates Mathematikbild bei Schülern aufbauen ('kulturbezogene' Gründe).“ (BLUM, 2006, S. 11).

Empirische Studien bestätigen zwar nicht uneingeschränkt aber durchaus eine positive Wirkung eines anwendungsorientierten Unterrichts. Auch die Geschichte solcher Studien in diesem Bereich reicht einige Jahre zurück. KAISER-MESSMER führt als eine der ersten eine große empirische Untersuchung zum Thema Modellieren durch (BLUM, 2012, S. 6). Außermathematische Situationen werden von Schülern/innen besser verstanden, ebenfalls wird durch Anwendungsorientierung die Motivation und das Interesse an der Mathematik erhöht. Die Reformbewegung *Realistic Mathematics Education (RME)*, welche vor allem auf Aussagen von FREUDENTHAL gründet, steht für eine größere Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht in den Niederlanden. Seit den 70er Jahren des 20. Jahrhunderts wurden umfassend die Lehrbücher und Lehrpläne in Richtung Realitätsbezüge geändert. Der Unterricht wurde dementsprechend analysiert: Die Schüler/innen sind mit neuen Aufgaben sehr unbefangen. Das bekannte Argument von Schülern/innen bei der Konfrontation mit neuen Aufgaben „Die kenn ich nicht, die kann ich nicht“ wurde in den Niederlanden durch das Projekt zu „Lass es mal probieren“ (VOS/BOS zitiert nach WESTERMANN, 2003, S. 155). Die niederländischen Schüler/innen schnitten bei TIMSS 1995 und 1999 hervorragend ab, vor allem konnten Aufgaben in Kontexten gut gelöst werden (vgl. WESTERMANN, 2003, S. 151 ff.).

MAASS untersuchte die Einstellung zum Mathematikunterricht nach anwendungsorientierten Einheiten im Mathematikunterricht. Sie konnte eine positivere Einstellung feststellen (vgl. MAASS, 2004).

Anwendungsorientierung im Unterricht schafft bei den Schülern/innen erst das Bewusstsein, dass Mathematik auch ein nützliches Werkzeug sein kann, nachzulesen in der Arbeit von VORHÖLTER (VORHÖLTER, 2009).

Anwendungen im Mathematikunterricht verkörpern nicht per se eine positive pädagogische Funktion (vgl. WINTER, 2016, S. 262 f.). Was ist nun guter „anwendungsorientierter Unterricht“? BLUM, WINTER und JABLONKA konzipierten jeweils Kriterien für gute „Anwendungen“.

- „1. Ist die Anwendung geeignet, Schülerinnen und Schülern in ihrer **heutigen Existenz** zu helfen, zu begründbaren Urteilen über Verhältnisse ihrer Lebenswelt und zu besserem (menschlichem) Handeln in dieser Lebenswelt zu gelangen? Kann womöglich das Ergebnis der Bemühung unmittelbar benutzt werden?
2. Ist die Anwendung geeignet, Schülerinnen und Schülern in ihrer mutmaßlichen **späteren Existenz** zu helfen, Problemsituationen im Sinne einer Vermehrung des eignen Glücks und des Gemeinwohls zu lösen?“ (WINTER, 2016, S. 263)

Anschließend führt WINTER noch Punkte an, die das Problem der didaktischen Strukturierung von Anwendungen thematisieren, an:

- „1. Wie *authentisch* ist das die Anwendung repräsentierende Material? Können die Schülerinnen und Schüler mit unmittelbaren, dokumentarischen Quellen arbeiten oder werden frisierte/fingierte Daten vorgelegt?
2. Wie *zugänglich* ist die Anwendungssituation für die Schülerinnen und Schüler hier und jetzt? Sind primäre sinnliche Erfahrungen möglich oder gibt es eine Vermittlung über Medien (z.B. Texte)?
3. Wie *reichhaltig* ist eine vorgegebene Sachsituation an möglichen sachkundlich-mathematischen Problemstellungen? Lassen sich ohne Krampf mehrere wesentlich verschiedene mathematisierbare Aspekte unterscheiden, oder ist die Situation autark auf einen einzigen Problemtyp eingeengt?
4. Wie *schwierig* ist – im Angesicht von Vorwissen und situativen Barrieren – der Modellbildungsprozess und wie anspruchsvoll sind die einhergehenden mathematischen Begriffsbildungen? Erfordert die Analyse der Anwendungssituation mehr oder weniger kühne Idealisierungen, Umstrukturierungen bisheriger Vorstellungen und neuartiger Konstruktion oder lässt sie sich eher routinemäßig vollziehen?“ (WINTER, 2016, S. 263)

Die Punkte zur didaktischen Strukturierung von WINTER sind streng genommen nicht als Kriterien ausgewiesen. Unseres Erachtens eignet sich der Inhalt jeder einzelnen Anführung, vergleiche dazu die BLUM'schen Kriterien, in einer veränderten Formulierung durchaus als Kriterium für „gute Anwendungen“ im (Mathematik)Unterricht.

BLUM zählt in einem Artikel zur *Einkommensteuer als Thema des Analysisunterrichts in der beruflichen Oberstufe* sogar noch zwei Jahre vor WINTER Kriterien für „gute“ Anwendungsprobleme auf:

„Ein solches Problem sollte real, relevant, vom außermathematischen Aufwand her fasslich und innermathematisch zugänglich sein; zudem sollte es mit den Lehrplänen für den Mathematikunterricht verträglich sein, mehr noch, es sollte eine 'tragende Funktion' im Mathematikunterricht übernehmen können.“ (BLUM, 1978, S. 647 f.)

Die erstmalige Formulierung dieser Kriterien liegt mittlerweile 30 Jahre zurück. Die aufrechte Aktualität dieser bestätigt KAISER in der Aussage:

„Abschließend sei noch bemerkt, dass Werner Blum auch Kriterien für 'gute' Anwendungsprobleme für den Mathematikunterricht formuliert, die bis dato noch nichts an ihrer Aktualität und Bedeutung verloren haben...“ (KAISER, 2015 B, S. 5)

Zu Anwendungsorientierung und Realitätsbezügen im Mathematikunterricht gibt es einen riesigen Kanon an Literatur, allerdings behandeln nur die wenigsten Autoren explizit die Frage: „Was ist gute Anwendungsorientierung?“ JABLONKA widmet sich in der Einleitung

von *Was sind „gute“ Anwendungsbeispiele?* der Beantwortung unserer Ausgangsfrage (JABLONKA, 1999). Die Verfasserin bedient sich der „Kopfstandmethode“, negative Eindrücke können Menschen schneller formulieren als positive, und nennt, was nicht gut ist. Wir führen die Nennungen in **neutraler**, kriterienorientierter Form an.

1. Mathematische Reichhaltigkeit: Die Probleme sollen auf unterschiedlichen mathematischen Niveaus lösbar sein.
2. Authentizität: Die Problemstellung soll nicht gekünstelt sein.
3. Schwierigkeit: Es sollen weder zu viele mathematische Werkzeuge gebraucht werden, noch soll die Problemstellung zu simpel sein.
4. Zeit: Das Erlernen der benötigten Mathematik oder das Einarbeiten in die Thematik nimmt zu viel Zeit in Anspruch.
5. Interesse: Die Aufgabe muss Interesse wecken.
6. Aktualität: Die verwendeten Daten sollen nicht veraltet sein.
7. Zweck: Beispiele sind nur im Hinblick auf das anzustrebende Ziel als besser oder schlechter bewertbar. (vgl. JABLONKA, 1999, S. 65)

Die drei betrachteten Kataloge weisen durchaus Ähnlichkeiten auf, wobei WINTER nicht auf BLUM verweist und JABLONKA, deren Artikel wesentlich später erschienen sind, weder auf WINTER noch auf BLUM. Diese inhaltlich durchaus noch aktuellen Ausarbeitungen für gute Anwendungen (bzw. Anwendungsprobleme) verwenden wir für die gesuchten Auswahlkriterien für Aufgaben aus den *zentralen Ideen* heraus. Wir beginnen mit den „Formalen Aspekten“. Diese sind maßgebend für eine aktive Verwendung im Schulunterricht. Bei einer Vernachlässigung dieser Aspekte, kann es sich durchaus noch um eine tolle Aufgabe handeln, aber ein Einsatz dieser findet im Schulunterricht nur selten statt.

1. Formale Aspekte

Hier fließt die Sichtweise „... zudem sollte es mit den Lehrplänen für den Mathematikunterricht verträglich sein, ...“ von BLUM ein. In diesem Zusammenhang fordern wir eine Verträglichkeit mit dem gültigen Lehrplan. Das erleichtert den Lehrkräften das Begründen für ein Behandeln der Probleme bzw. Aufgaben im Unterricht. Im Rahmen eines ordentlichen Unterrichts bleibt nur begrenzt Zeit für Lehrinhalte, das fußt auf den Kriterien von JABLONKA. Anwendungsorientierte Probleme, die einige Wochen an Erarbeitungszeit benötigen, können im Regelunterricht nicht durchgenommen werden. Leitfragen: Ist die für die Unterrichtssequenz veranschlagte Zeit angemessen? Findet man die mathematischen Inhalte im Lehrplan?

2. Eignung

Dieses Kriterium erscheint uns in der Ausführung von WINTER äußerst wichtig. Er formuliert es ursprünglich in zwei Punkten. Wir fassen diese hier zusammen. Die Anwendung soll entweder unmittelbar für den/die Schüler/in zum Gebrauch oder in ihrem mutmaßlich späteren Leben von Nutzen sein. Dabei umfasst der Nutzen den eigenen als auch den des Gemeinwohls. Diese Forderung ist auch verträglich mit der

Orientierung an einem Allgemeinbildungskonzept. HEYMANN führt in *Was ist guter Mathematikunterricht* die Lebensvorbereitung an, welche im Einklang mit diesem Kriterium schwebt. Er bündelt seine Vorstellungen in fünf Leitgedanken. Einer davon lautet *Lebensnützliche Mathematik ernst nehmen*, gerade solche gehören seiner Meinung nach verstärkt vermittelt. In seinen Ausführungen bestätigt HEYMANN die Wichtigkeit dieses Kriteriums (vgl. HEYMANN, 2000, S. 90). Auch KAISER bestärkt uns in der Aufnahme des vorliegenden Kriteriums. Nach ihr haben Realitätsbezüge im Mathematikunterricht verschiedene Ziele, unter anderem eben pädagogische Ziele, wo die Lebensvorbereitung im Fokus steht (vgl. KAISER, 1995, S. 69 f.).

Leitfragen: Kommt der/die Schüler/in im alltäglichen Leben damit in Berührung? Gibt es Erfahrungsmöglichkeiten über die Medien? Liefern die anwendungsorientierten Aufgaben einen Beitrag, den/die Schüler/in für die Entwicklung zu einem/r selbstständigen denkenden Bürger/in benötigt?

3. Authentizität

BLUM, WINTER und JABLONKA führen diesen Punkt an. Hier geht es darum, wie real die Probleme im Unterricht behandelt werden können. Vereinfachungen sind durchaus zugelassen, in vielen Fällen sicher notwendig. Es muss in intellektuell ehrlicher Form darstellbar sein, darf keinen verfälschenden Charakter bekommen. Unterstützend kommt hinzu, dass BÜCHTER und LEUDERS in *Mathematikaufgaben selbst entwickeln* in einem allgemeineren Kontext, also nicht nur anwendungsorientiert, Authentizität als wesentlichen Punkt für eine gute Aufgabe behandeln (vgl. BÜCHTER/LEUDERS, 2005, S. 73 ff.).

Leitfragen: Ist es möglich mit originalen Daten zu hantieren? Sind die unterrichteten Konzepte abwärtskompatibel?

4. Mathematische Aspekte

Im Mathematikunterricht spielen klarerweise mathematische Kriterien eine wichtige Rolle. Dieser Meinung sind auch BLUM, WINTER und JABLONKA. Ein Punkt ist die mathematische Reichhaltigkeit, es sollen ohne große Kunststücke verschiedene mathematische Aspekte bei der Aufgabe aufzeigbar sein. Einen weiteren Punkt offenbart die mathematische Schwierigkeit, die Probleme müssen mit den zur Verfügung stehenden mathematischen Werkzeugen machbar sein, durch die Lehrplanverträglichkeit im ersten Kriterium wird einiges abgefangen, aber es gibt genug Probleme, die mit Schulmathematik lösbar, aber trotzdem äußerst schwierig sind. Solche Aufgaben eignen sich für den Unterricht nicht. Auf der anderen Seite erweisen sich zu triviale Aufgaben ebenfalls als unzulänglich. Eine Reichhaltigkeit an unterschiedlichen mathematischen Niveaus muss vorhanden sein.

Leitfragen: Können die Aufgaben mit den mathematischen Kenntnissen der Schüler/-innen gelöst werden? Ist eine Vernetzung zu anderen mathematischen Gebieten möglich?

Können wesentliche Aussagen noch getätigt werden?

JABLONKA führt an, dass „die Aufgabe Interesse wecken muss“. Wir führen „Interesse“ bewusst nicht als Kriterium für eine gute Aufgabe an. Die objektive Überprüfbarkeit dieses Kriteriums stellt normativ ein Problem dar. Das kann erst im Nachhinein empirisch überprüft werden. Dabei halten wir uns ganz an BLUM und sehen *Interesse wecken* oder auch die *Motivation* als positiven Nebeneffekt:

Es ist wohl klar geworden, daß Anwendungsprobleme nach unseren Intentionen nicht einfach nur dazu dienen sollen, die Mathematik zu motivieren, d. h. für den Schüler schmackhaft zu machen; diese motivierende Funktion geeigneter Anwendungsbeispiele ist jedoch ein positiv zu vermerkender Nebeneffekt. (BLUM, 1976, S. 645)

JABLONKA behauptet, ohne Berücksichtigung des Zwecks der Aufgabe kann diese nicht bewertet werden. Bestärkt wird diese Behauptung von BÜCHTER und LEUDERS, die auf die Frage „Was ist eine gute Aufgabe?“ Folgendes antworten:

„’Das kommt darauf an!’ – und zwar darauf, welche Funktion diese Aufgabe erfüllen soll.“ (BÜCHTER/LEUDERS, 2005, S. 9)

Natürlich stimmen diese Argumente, jedoch bedarf dieses Kriterium keiner Aufnahme in unseren Katalog aus zweierlei Gründen. Einerseits ist die Absicht, Finanzmathematik in den Unterricht zu bringen, hier klar und bleibt gleich, obwohl die einzelnen Aufgaben unterschiedliche Ziele verfolgen. Zweitens bleiben die oben erwähnten Kriterien für eine anwendungsorientierte Aufgabe im Bereich der Finanzmathematik aufrecht. Eine Berücksichtigung des Zwecks bewirkt also lediglich eine unterschiedliche Gewichtung der Kriterien.

Teil III

Unterrichtsmaterialien

11 Unterrichtsvorschläge zu schulrelevanten Aspekten der Finanzmathematik

11.1 Fokusbegriffe

11.1.1 Zufall

Der *Zufall* ist ein schwierig zu fassender Begriff. Das zeigt ein Blick in die historische Genese. Der Umgang der Menschen und insbesondere der Wissenschaftstreibenden mit dem *Zufall* beweist den ihm innewohnenden Facettenreichtum

Obwohl im antiken Griechenland der Determinismus das Naturverständnis, ja die Philosophie prägte, gab es schon damals Vertreter, die dem *Zufall* einen Platz einräumten. EPIKUR und LUKREZ lehnten diesen strengen Determinismus im Sinne von DEMOKRIT kategorisch ab. ARISTOTELES bietet eine interessante Untersuchung des Begriffs, für ihn entstehen zufällige Ereignisse nicht aus dem nichts, sondern haben Ursachen. Er wertete das Eintreten solcher zufälligen Ereignisse mit „nicht wahrscheinlich“ (vgl. HERGET, 2005, S. 5 f und DÖHRMANN, 2004, S. 12 f.).

Bis in das 17. Jahrhundert herrschte ein deterministischer Grundgedanke, man war fest davon überzeugt, alles beschreiben zu können. NEWTON verstärkte diesen Gedanken mit seinen Werken, z.B. mit „Philosophiae naturalis principia mathematica“. Der Determinismus überzeugt durch die Entwicklungen in der Physik. Dem Verwenden von Differentialgleichungen zur Beschreibung natürlicher Abläufe schlossen sich immer mehr Wissenschaftstreibende an. Selbst LAPLACE und J. BERNOULLI, die nahezu als die „Väter“ der Wahrscheinlichkeitstheorie gelten, weisen in ihren Aussagen ein deterministisches Grundverständnis auf (vgl. HERGET, 2005, S. 6 und DÖHRMANN, 2004, S. 14 f.).

„... , er [der Zufall] ist nichts anderes als ein Begriff zur Beschreibung unserer Unwissenheit über die Art und Weise, in der sich die verschiedenen Teile einer Erscheinung miteinander und mit dem Rest des Kosmos verbinden. ... “ (LAPLACE übersetzt von SCHNEIDER, 1988 zitiert nach DÖHRMANN, 2004, S. 19)

Historisch betrachtet scheint die Physik die Trends zwischen Determinismus und Indeterminismus vorzugeben. Ende des 19. Jahrhunderts kam durch statistische Methoden in der Thermodynamik der Determinismus erstmals ins Wanken. Die Beschreibung von Quantenprozessen und dabei das Versagen der klassischen Mechanik popularisierten den *Zufall*. Das Versagen der objektiven Messung im Quantenbereich (Stichwort: HEISENBERG'schen Unschärferelation) führte zu einer Beschreibung der Prozesse mit Hilfe der Stochastik (vgl. DÖHRMANN, 2004, S. 20 f.).

In der Mathematik selbst wird dieser Begriff nicht sehr breitgetreten. KOLOMOGOROV erörtert in seinem axiomatischen Zugang den *Zufall* in keiner Weise. HERGET et al. analysierten Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitstheorie auf den Zufallsbegriff, der in den einzelnen Werken zumeist erwähnt wird.

Der Schritt vom 'realen zufälligen' (eigentlich: als zufällig im umgangssprachlichen Sinne erkannten oder eingestuft) Phänomen zur mathematisch korrekten Beschreibung stellt auch in der neuen mathematischen Literatur ein *sprachlich-inhaltliches* Problem dar – ein Problem, das zwar unmittelbar vor dem mathematischen Untersuchungsgegenstand liegt (sowohl im räumlichen als auch im zeitlichen Sinne gemeint und interpretierbar!), das aber nicht immanent in der mathematischen Theorie selbst liegt. (HERGET, 2005, S. 9)

Der Zufallsbegriff ist also ein schwierig handhabbarer Begriff. Nach DÖHRMANN verwenden die Naturwissenschaften und die Mathematik den *Zufall* in einem anderen Sinne, als er in der Alltagssprache verwendet wird. Des Weiteren meint sie, dass *Zufall* und Determinismus nicht einander ausschließen. Es gibt Phänomene, die sind für ein Individuum unvorhersehbar, subjektiv unvorhersehbar, aber sie sind trotzdem determiniert. Beispiel: Wie viele Münzen hat Frau Y in ihrer Geldbörse? Für Frau Y nicht zufällig, für einen fremden Interviewer schon. Viele Phänomene sind bei näherer Betrachtung subjektiv unvorhersehbar. Die Existenz eines *objektiven Zufalls* kann nicht bewiesen werden. Das völlige gesetzlose Verhalten eines Phänomens ist unmöglich aufzuzeigen (vgl. DÖHRMANN, 2004, S. 28).

Die Frage, die sich nun stellt, ist, wie soll mit dem Begriff in der Schule umgegangen werden? Die Antwort der einschlägigen Literatur ist durchwegs ambivalent. HERGET et al. sind der Meinung:

„Ein Abenteuer, auf das man sich einlassen sollte. Auch und gerade im Mathematikunterricht“ (HERGET, 2005, S. 23)

DÖHRMANN empfiehlt ebenfalls in ihrem Fazit zu ihren Untersuchungen zum Thema „Zufall und Schule“ die Auseinandersetzung mit dem Begriff:

„Der Begriff 'Zufall' soll im Unterricht thematisiert werden. Dabei soll das Vorverständnis der Schülerinnen und Schüler und die Bedeutungsvielfalt des Begriffes berücksichtigt werden.“ (DÖHRMANN, 2004, S. 60)

Diese Empfehlungen scheinen auch auf dem ersten Blick plausibel. Ein vernünftiger Stochastikunterricht soll mit dem *Zufall* beginnen. TIETZE, KLIKA und WOLPERS beschreiben die Probleme, die dabei auftreten können, wie folgt:

„Im ganzen lässt sich feststellen, dass die didaktisch-methodische Aufgabe der Vermittlung einer adäquaten Vorstellung vom *Zufall* noch schwieriger ist als die Aufgabe der Vermittlung von anderen nicht definierbaren Grundbegriffen der Mathematik wie z. B. dem der 'Geraden' in der Geometrie. Ein Aufbau von Vorstellungen zum *Zufall*, die für die weitere Entwicklung der Stochastik tragfähig sind, scheint nur möglich zu sein, wenn der Lerner selbst operative Erfahrungen mit zufälligen Ereignissen anhand von Zufallsexperimenten macht und diese reflektiert.“ (TIETZE/KLIKA/WOLPERS, 2002, S. 149)

KRÜGER et al. raten von einer Thematisierung des Zufallsbegriffs im Stochastikunterricht ab. Obwohl sie eingestehen, dass Diskussionen im Interesse der Allgemeinbildung bedeutsam sind. Diese sind aber für einen Stochastikunterricht nicht notwendig (vgl. KRÜGER/SILL/-SIKORA, 2015, S. 218).

Der Begriff des *Zufalls* als umfassend vor dem Stochastikunterricht zu behandeln, scheint zum Scheitern verurteilt. Es schwirren zu viele Assoziationen herum, jedes Individuum, jede Wissenschaft sieht etwas anderes hinter diesem Begriff. Ein „Unter den Tisch kehren“ und so tun als gäbe es diesen Begriff nicht, ist ebenfalls der falsche Weg. Der Stochastikunterricht ist voll von Begriffen, die „Zufall“ enthalten: Zufallsvariable, Zufallsexperiment, zufälliges Ereignis, Die Vorstellungen der Schüler/innen sind vielfältig (vgl. DÖHRMANN, 2004, S. 43 ff.). Diskussionen und Simulationen über verschiedene Situationen zum Begriff *Zufall* stellen durchaus einen fundierten Weg im Umgang mit *Zufall* dar (vgl. HAUER-TYPPELT, 2010, S. 79). Die Gedanken bezüglich des *Zufalls* sollen strukturiert und geschärft werden, vor allem auf Phänomene, die auf den ersten, naiven Blick determiniert erscheinen, aber subjektiv unvorhersehbar sind. Kurse an der Börse eignen sich als Spielwiese für Diskussion über den *subjektiven Zufall*, insbesondere bei Aktienkursen, wie schon DÖHRMANN in ihrer Arbeit aufgezeigt hat (vgl. DÖHRMANN, 2004, S. 200 ff.).

11.1.2 Wahrscheinlichkeit

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff spielt in folgenden Aufgaben eine wesentliche Rolle. Die Fachmathematik fand nach jahrhundertelangem Ringen mit dem axiomatischen Aufbau des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ein tragfähiges Fundament. Aus fachdidaktischer Perspektive lässt sich das für den Unterricht nicht bestätigen. Eine ausschließlich axiomatische Behandlung im Unterricht vermittelt zu wenige Vorstellungen, die mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff verbunden sind. So soll in der Schule höchstens eine Vorbereitung auf den axiomatischen Zugang passieren (vgl. KÜTTING, 1994, S. 29).

Um ein ausgewogenes Bild des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu vermitteln, müssen im Unterricht verschieden Zugänge thematisiert werden. In berühmter Art und Weise sind es drei Wahrscheinlichkeitsbegriffe, der LAPLACE'sche bzw. geometrische Wahrscheinlichkeitsbegriff, der frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff und der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff, deren Ursprünge in der historischen Genese des im Fokus stehenden Begriffs zu finden sind (vgl. TIETZE/KLIKA/WOLPERS, 2002, S. 77 ff.).

Diese Wahrscheinlichkeitsbegriffe beschreiben auf der einen Seite Methoden zur Gewinnung einer Wahrscheinlichkeit und auf der anderen Seite liefern sie eine Möglichkeit zur Interpretation einer gegebenen Wahrscheinlichkeit.

Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsbegriff

Dieser Zugang steht am Beginn der Exaktifizierungen der Wahrscheinlichkeit. Die Definition geht ursprünglich aus der berühmten Abhandlung „ars conjectandi“ von JACOB BERNOULLI hervor, welche erst nach seinem Tod veröffentlicht wurde. LAPLACE übernahm diese Definition in sein Werk „Théorie analytique de la probabilité“. Die Methode, die in manchen Werken auch unter einer Definition geführt wird, lautet: Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A ist gleich dem Quotienten aus der Anzahl $g(A)$ der für das Ereignis A günstigen Fälle und der Anzahl m aller möglichen Fälle, wobei vorausgesetzt wird, dass die verschiedenen Fälle alle gleichmöglich sind. Also:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl } g(A) \text{ der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl } m \text{ der möglichen Fälle}}$$

(KÜTTING, 1994, S. 37)

Diese Methode lässt sich erweitern. Im Sinne des oben Gesagten können Längen, Flächen, Volumina, ... in Beziehung gesetzt werden. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem geometrischen Wahrscheinlichkeitsbegriff. Siehe folgende Aufgabe aus „Mathematik verstehen 6“:

Bei einem Glücksrad kann man als Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zeiger in einem bestimmten Sektor stehenbleibt, den relativen Anteil dieser Sektorfläche an der gesamten Kreisfläche nehmen. Gib diese Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Sektoren im folgenden Glücksrad an!

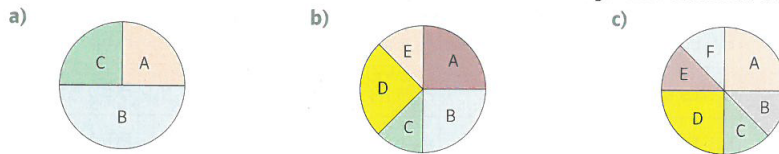


Abb. 22 Aufgabe 13.08 aus (MALLE/WOSCHITZ/KOTH/SALZGER, 2010, S. 238)

Die Wahrscheinlichkeiten können hier als Verhältnisse von Flächeninhalten oder Streckenlängen ermittelt werden. In der Teilaufgabe a) ergibt sich durch das Ummünzen der obigen Definition:

$$P(A) = \frac{\text{günstiger Flächeninhalt}}{\text{gesamter Flächeninhalt}}$$

eine Wahrscheinlichkeit für C von $P(C) = \frac{\frac{1}{4}r^2\pi}{r^2\pi} = \frac{1}{4}$.

Umgekehrt kann man die Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ so deuten, dass bei vier gleichmöglichen Ausfällen ein günstiger Ausfall vorliegt. Das beschreibt eine Interpretation der angegebenen Wahrscheinlichkeit im Sinne des LAPLACE'schen Wahrscheinlichkeitsbegriffs.

Dieser Begriff hat seine Grenzen. Es gibt Situationen, die lassen eine Verwendung der Methode nicht zu. Man denke an asymmetrische Objekte, wie reale Würfel, Reißzwecken, ...

Frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Im Sinne dieses Wahrscheinlichkeitsbegriffes gewinnt man eine Wahrscheinlichkeit durch relative Häufigkeiten, die durch das oftmalige Wiederholen des Zufallsversuchs ermittelt werden. RICHARD VON MISES formulierte eine Definition über den Grenzwert relativer Häufigkeiten: Die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses A ist definiert durch den Zahlenwert, dem sich die relativen Häufigkeiten $h_n(A)$ beliebig nähern, wenn nur n genügend groß ist. Dieser Zahlenwert heißt Grenzwert der Folge $h_n(A)$. Man bezeichnet ihn mit

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(A).$$

(BOSCH, 2011, S. 7)

Bei der Definition in dieser Form taucht das Problem auf, dass die Strenge der Analysis hier nicht mitspielt. So muss hier gelten: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt, $h_n(A)$ liegt in einer ε -Umgebung von $P(A)$. Genau das kann aber nicht garantiert werden. Nach dem Gesetz der großen Zahlen ist es nur sehr wahrscheinlich, dass das zutrifft. Dieser Wahrscheinlichkeitsbegriff (Definitionsversuch) liefert trotz seiner Mängel

wichtige Einsichten. Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ kann die relative Häufigkeit $h_n(A)$ vorher-sagen und die relativen Häufigkeiten $h_n(A)$ können die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ schätzen. Hier BOSCH, aber auch einige andere Autoren verschweigen aber, dass sich VON MISES bei seiner Limesdefinition auf „Kollektive“ bezieht. Er fordert eine Menge von Objekten, die sich durch ein beobachtbares Merkmal unterscheiden. Als Beispiel gibt er rot- und weißblühende Erbsenpflanzen an. Zusätzlich fordert er die „Regellosigkeit“ eines „Kollektivs“. Als Beispiel führt er einen Spaziergang entlang eines Weges an, bei dem alle hundert Meter ein kleiner Markstein und alle tausend Meter ein großer Markstein steht. Wenn man nun lang genug geht, dann ist die relative Häufigkeit für einen großen Markstein sehr nahe an der Zahl 0,1. Hier ist aber eine Gesetzmäßigkeit enthalten, wenn man gerade bei einem großen Stein vorbeigegangen ist, dann ist ganz klar, dass als nächstes kein großer Stein kommt. VON MISES fordert für seine Definition die Gesetzlosigkeit des betrachteten Kollektivs (vgl. VON MISES, 1972, S. 12 bzw. S. 27).

Nach TIETZE, KLIKA und WOLPERS 2002, die auf SCHNORR 1971 verweisen, ist eine Begründung des frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs möglich (vgl. TIETZE/KLIKA/-WOLPERS, 2000, S. 84).

Betrachten wir nochmals die obige Glücksspielaufgabe. Eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$, im Sinne des frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs interpretiert, bedeutet, dass bei oftmaligem Wiederholen des Zufallsversuchs in einem von vier Fällen der Zeiger im gewünschten Sektor stehenbleibt.

In einer endlichen Welt lassen sich nicht unendliche lange Versuchsreihen durchführen, bei manchen kommt man nicht einmal in eine vernünftige Nähe. Das ist auch gut so, man denke an die Wahrscheinlichkeit für eine Kernschmelze in einem Atomkraftwerk.

Subjektivistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Der Begriff ist den Grenzen des *frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff* entsprungen. Ein/e Subjektivist/in kommt über theoretische Überlegungen zu einer Wahrscheinlichkeit, erhält diese/r neue Informationen, die seine/ihre Einschätzungen über das Phänomen ändern, dann ändert er/sie auch die Wahrscheinlichkeit für dieses Phänomen (vgl. TIETZE/KLIKA/-WOLPERS, 2002, S. 86). Die Anwendungen dieses Wahrscheinlichkeitsbegriffs sind vielfältig und dementsprechend wichtig. Die Wahrscheinlichkeit für einen Ausfall bei der Vergabe eines Kredits, Prognosen für wirtschaftliche Kennzahlen, Wahrscheinlichkeiten für einen Supergau, ... benötigen einen *subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff* (vgl. HAUER-TYPPELT, 2010, S. 81).

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

KOLMOGOROFF war der erste, der die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf ein axiomatisches und eben mathematisch haltbares Fundament stellt. Nach BOSCH, 2011 lautet die Definition für eine Wahrscheinlichkeit folgendermaßen:

Definition 23. Eine auf einem System von Ereignissen definierte Funktion P heißt Wahrscheinlichkeit, wenn sie folgende Axiome erfüllt:

- I Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A ist eine eindeutig bestimmte, nicht-negative reelle Zahl, die höchstens gleich Eins sein kann, d.h. es gilt

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

II Das sichere Ereignis besitzt die Wahrscheinlichkeit Eins,

$$P(\Omega) = 1$$

III Für zwei unverträgliche Ereignisse A, B (also mit $A \cap B = \emptyset$) gilt

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

(BOSCH, 2011, S. 8 f.)

Heutzutage verwendet man Maßräume. Sie bieten die beste Grundlage, um Fragen der Wahrscheinlichkeitstheorie zu behandeln, das fußt auf jahrhundertelangen Überlegungen. Im Grunde definiert sich ein Wahrscheinlichkeitsraum recht einfach:

Definition 24. Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P(\Omega) = 1$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum.

Ein Maßraum ist immer ein Tripel aus einer Grundmenge Ω , einer σ -Algebra und einem Maß. Da die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ im Allgemeinen viel zu wilde Mengen liefert, schränkt man sich auf σ -Algebren ein, welche unter abzählbaren Mengenoperationen abgeschlossen sind. Das sind die Grundvoraussetzungen, um vernünftig Analysis betreiben zu können. Ein Maß, hier ein Wahrscheinlichkeitsmaß, generell eine Abbildung auf der σ -Algebra, wird passend zu den uns innewohnenden Intuitionen definiert. Kurz gefasst für Wahrscheinlichkeitsmaße: Die leere Menge soll die Wahrscheinlichkeit 0 haben und der ganze Raum Ω die Wahrscheinlichkeit 1. Der in einem elementaren Setting verwendete Additionssatz wird für Maße vorausgesetzt bzw. fordert man diese Eigenschaft von einem Maß. Das Maß muss für disjunkte Mengen $A_1, A_2, A_3, \dots$ die Eigenschaft $P\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} P(A_i)$ erfüllen.

Fazit in Hinblick auf die zu entwickelnden Unterrichtsmaterialien

Im Schulunterricht gibt es nahezu keine Begriffe, bei denen die Primärintuition bei den Schülern/innen so stark abweicht wie bei *Zufall* und *Wahrscheinlichkeit*. HAUER-TYPPELT betont die Wichtigkeit einer Konfrontation der Lernenden mit verschiedenen Facetten des Zufallsbegriffs (vgl. HAUER-TYPPELT, 2010, S. 77). Vor allem bei realitätsnahen Beispielen dieser Art ist eine diesbezügliche Thematisierung der Zufälligkeit der Aktienkurse eine vielversprechende Möglichkeit (vgl. DÖHRMANN, 2004, S. 200 ff.). In diesem Sinne soll Materialien für Unterrichtssequenzen gestaltet werden.

In der Schule ist von einer exakten Definition der *Wahrscheinlichkeit* abzuraten, generell wäre streng deduktives Vorgehen fatal.

„Die axiomatische Festlegung ist für den Schulunterricht, in dem es vordergründig immer um das Erfassen der Kernideen gehen muss, entbehrlich.“ (HAUER-TYPPELT, 2010, S. 79)

Auch ein übertriebener Formalismus am Beginn der Behandlung von Wahrscheinlichkeiten bzw. des Wahrscheinlichkeitsbegriffs verstellt den Blick auf das Wesentliche und trägt zu einem sinnentleerten Streben nach der korrekten Darstellung und Sprechweise bei. Das eigentlich im Fokus stehende Phänomen wird vom Formalismus verdrängt (vgl. EICHLER/VOGEL, 2009, S. 171). Es liegt ein intuitives Verständnis für Wahrscheinlichkeit bei den Lernenden vor, gemäß einer biokybernetischen Lerntheorie müssen diese dort abgeholt werden, wo sie stehen. Ein Einstieg mit Versuchen, Simulationen, Experimenten etc... ist zu forcieren, damit wichtige Grundvorstellungen vermittelt werden können (vgl. HAUER-TYPPELT, 2010).

„Wir plädieren für eine phänomenologische und genetische Zugangsweise: Die Schülerinnen und Schüler sollen Gelegenheit erhalten, den Wahrscheinlichkeitsbegriff in seinen verschiedenen Facetten kennenzulernen.“ (EICHLER/VOGEL, 2009, S. 173 f.)

In der Sekundarstufe II sind der frequentistische, der LAPLACE'sche und der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff unabdingbar, durch sie können stochastische Kernideen ausreichend vermittelt werden (vgl. HAUER-TYPPELT, 2010, S. 79). Aus diesen Gründen werden diese Begriffe in den Unterrichtsmaterialien immer wieder vorkommen.

11.2 Unterrichtsvorschlag – Der Zufall und Kurse an der Börse

11.2.1 Zusammenfassung

Es handelt sich um einen Diskurs um den Begriff *Zufall* mit finanzmathematischer Vertiefung. Ausgehend von der Frage: „Wie wird der Kurs einer Aktie bestimmt?“ beschäftigen sich die Lernenden mit dem Begriff des *Zufalls*. Nach einer verlockenden deterministischen Berechnung des Aktienkurses, versuchen sie Fragen zu beantworten, ob der Aktienkurs vorhergesehen werden kann. Dabei werden verschiedene Aspekte des Zufallsbegriffs thematisiert und einzelne Faktoren, die den Aktienkurs beeinflussen, auf ihre Vorhersagbarkeit untersucht. Im Anschluss an eine Gruppenarbeit, die das zufällige Auswählen in Beziehung zur überlegten Auswahl von Aktien beleuchtet („Trader vs. Affe“), werden die Lernenden mit unterschiedlichen Situationen konfrontiert, die auf ihren *zufälligen* Gehalt hin untersucht werden sollen.

11.2.2 Besonderheiten

Diese Unterrichtssequenz widmet sich ganz dem Zufallsbegriff. Dieser hat viele Aspekte und wird im Alltag, in den Naturwissenschaften und in der Philosophie unterschiedlich verwendet. Die Schüler/innen verbinden eine Vielzahl unterschiedlicher Vorstellungen mit dem Begriff *Zufall* (vgl. DÖHRMANN, 2004, S. 72 ff.). Dieser Unterrichtsvorschlag thematisiert unterschiedliche Interpretationen des *Zufalls* und spezialisiert sich auf börsennotierte Aktien und das subjektiv Unvorhersehbare im Zufallsbegriff. Zwar kennt man viele Faktoren, die den Kurs verändern, jedoch ist deren Intensität der Einflussnahme unbekannt, außerdem sind gewisse beeinflussende Ereignisse generell unmöglich vorherzusehen.

11.2.3 Beitrag zu den zentralen Ideen

Diese Unterrichtssequenz liefert in vollem Umfang einen Beitrag zu der zentralen Idee *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik*. Nach DÖHRMANN sehen die meisten Schüler/innen Aktienkurse als deterministisch an (vgl. DÖHRMANN, 2004, S. 72 ff.). Ein wesentlicher Punkt in der Finanzwelt ist jedoch, dass kein Kurs exakt vorausgesagt werden kann. Das zieht sich durch die stochastische Finanzmathematik, in der die Kurse mit Hilfe wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen modelliert werden. Diese Modelle sind in der Tat höchst komplex. Sie dienen in erster Linie nicht dazu den Kurs vorherzusagen, sondern einen Modellrahmen zu schaffen, in dem Derivate bepreist werden können. Wir sehen es daher nicht als vorrangig, Schülern/innen solche Modelle vorzustellen, auch nicht im Rahmen einer didaktischen Reduktion, sondern zuerst auf die Unvorhersehbarkeit abzuzeigen. Das erste Arbeitsblatt thematisiert auf deterministische Art und Weise die Frage der Preisfindung einer Aktie. Bisher hat man in der Schule immer nur die Antwort bekommen: „durch Angebot und Nachfrage“. Hier sehen die Lernenden, wie der Preis durch das „Meistausführungsprinzip“ bestimmt wird, siehe Seite 183. Das zweite Blatt soll aufzeigen, dass aus „Charts“ nicht viel herauslesbar ist, Kurse steigen und fallen, selbst mit der dazugehörigen Historie wäre dieses Kursverhalten nicht vorhersagbar gewesen, wie schon FM1 gesagt hat:

FM1: „Ich finde eine coole Erkenntnis aus der Finanzmathematik ist schon, dass, also aus Finanzmathematik und von Fama, dass wenn die letzten fünf Tage

der Aktienkurs gestiegen ist, dass das dann überhaupt keine Aussage darüber ermöglicht, ob der Kurs am sechsten Tag auch wieder steigen wird oder nicht steigen wird. Das ist etwas, was man nicht glaubt, oder?“

Der *Zufall* ist klarerweise kein genuin finanzmathematischer Begriff. Aber es ist eine spezielle Sichtweise, die Kurse in der Finanzwelt als zufällig zu betrachten, auf diesen Aspekt konzentriert sich sowohl das zweite also auch das dritte Blatt.

Die in einer Gruppenarbeit eingebettet Partnerarbeit behandelt das in Kreisen der Finanzwelt bekannte Beispiel: „Wer ist ein besserer Trader, ein Banker oder ein Affe?“. Diese Aufgabe soll eine Art Aufklärung über seriös wirkende Herrn in Anzug bieten, die einem allerhand an Wertpapieren, Anlagestrategien, etc. einreden wollen, man kann einfach nicht in die Zukunft sehen. Hierzu das Zitat von FM6:

FM6: „da gibt es den Kahneman mit Thinking Fast and Slow und da gibt es ein recht gutes Kapitel und ein recht lustiges Kapitel, wo sie Experimente gemacht haben, sozusagen Aktienhandel per Zufallsgenerator, in dem Fall hat es halt, wie so oft ein Affe gemacht (lacht), und wo zum Teil rausgekommen ist, im Durchschnitt ist der Erfolg von diesem Zufallshandel genau gleich wie die Investmentbanker, die mit ausgeklügelten Strategien und hochbezahlten Posten und Boni und allem Drum und Dran nach irgendwas handeln, steigen eben um keinen Deut besser aus, weil eben diese Zufallskomponente von Preis- und Aktienentwicklung wahnsinnig unterschätzt wird.“

Zum Teil wird bei der Gruppenarbeit der Aspekt der Diversifikation behandelt. Denn Zufallsportfolios sind in der Regel (wenn man viele Portfolios betrachtet, Gesetz der großen Zahlen) besser diversifiziert als andere. Das muss von der Lehrperson bei der Diskussion im Plenum aber nicht breit getreten werden.

Das letzte Arbeitsblatt soll den *Zufall* nicht nur in der Finanzwelt, sondern auch in anderen Situationen thematisieren.

11.2.4 Erfüllen der Kriterien guter Anwendung im Mathematikunterricht

- Formale Aspekte

Dieser Unterrichtsvorschlag wurde für 4-5 Unterrichtsstunden konzipiert. Bei Zeitmangel kann auf die Gruppenarbeit verzichtet werden. Die verbleibenden Arbeitsblätter nehmen mit Sicherheit nicht mehr als zwei Einheiten in Anspruch und dienen als Einstieg in die Stochastik, als eine Art philosophische Diskussion mit Vertiefung in die Finanzmathematik.

- Eignung

Aktienkurse an sich sind nicht explizite Dinge des alltäglichen Lebens von Schülern/-innen. Jedoch nehmen Schüler/-innen diese implizit wahr, meistens geschieht dies über die diversen Medien. Viele Jugendliche charakterisieren Aktienkurse, wie bereits erwähnt, als nicht zufällig (vgl. DÖHRMANN, 2004, S. 72 ff.). Immer wieder treten in dubiosen Werbungen seriös wirkende Herrn im Anzug auf, die meinen, jegliche Kursentwicklungen zu kennen. So dient diese Einheit auch als Vorbereitung auf das spätere Leben, wo mit Sicherheit die eine oder der andere Geld in einer gewissen Form anlegen will. Das

müssen nicht unbedingt Aktien sein, es gibt viele „harmlos“ wirkende Sparformen, die an Aktien gebunden sind.

- Authentizität

Diese Unterrichtssequenz dient dazu, einen Blick auf die Zufälligkeit von börsennotierten Kursen zulegen. In weiterer Form wird auch die „Random-Walk-Hypothese“, der Aktienkurs bewegt sich wie eine Zufallsbewegung, thematisiert. Die durch die Fragestellungen der Einheit forcierten Überlegungen stehen am Beginn jeder stochastischen bzw. finanzmathematischen Modellierung.

- Mathematische Aspekte

Von einem rein mathematisch-operativen Zugang handelt es sich hierbei um einfache Aussagen. Das dahinterstehende Konzept des *Zufalls*, sei es auch in einer philosophischen Betrachtung, ist durchaus kognitiv Anspruchsvoll und ist in diesem Sinne auch im Mathematikunterricht zu verankern (vgl. DÖHRMANN, 2004, S. 78 f. und HERGET, 2005, S. 23). Nach HERGET:

„Ein Abenteuer, auf das man sich einlassen sollte. Auch gerade im Mathematikunterricht ...“ (HERGET, 2005, S. 23)

11.2.5 Fokusbegriffe

Wahrscheinlichkeiten spielen in dieser Unterrichtssequenz keine Rolle. Diese widmet sich voll und ganz dem *Zufall*. Determinismus und *Zufall* schließen einander nicht aus, dieses Spannungsfeld durchlaufen die Lernenden bei diesen Arbeitsblättern. Die Kursfestsetzung lässt sich nach DAUME bzw. BEIKE und SCHLÜTZ anhand einer Formel bestimmen (vgl. DAUME, 2009, S. 11 f. bzw. BEIKE/SCHLÜTZ, 2015, S. 40 ff.):

$$AK = \max \{ \min \{ k(x), v(x) \} \} \quad (26)$$

Dabei ist $k(x)$ die Summe aller Käufer zu einem bestimmten Preis x und $v(x)$ die Summe aller Verkäufer zu einem bestimmten Preis x . Diese ersten Berechnungen verführen zu einer deterministischen Sicht der Preisbildung bei Aktien. In den folgenden Arbeitsblättern erfahren die Lernenden, dass diese Bestimmung nur oberflächlich betrachtet deterministisch erscheint. Denn wann, wo und wie viele Käufer eine Aktie zu einem bestimmten Preis kaufen, lässt sich im Vorhinein nicht sagen.

Den Aspekt des subjektiven *Zufalls* bearbeiten die Lernenden ebenfalls in dieser Sequenz. Beispielsweise lässt sich für einen Außenstehenden im Vorhinein nicht sagen, dass der Kurs der VW-Aktie aufgrund des Abgasskandals fällt. Ein im Konzern arbeitender Konstrukteur weiß mehr und kann aufgrund seiner Informationen Schlüsse ziehen.

Diese Sequenz dient der Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zu Beginn sollte der Begriff *Zufall* diskutiert werden, der Aktienkurs eignet sich dazu, wie auch schon DÖHRMANN betont hat, hervorragend.

11.2.6 Einbettung in bestehende Unterrichtsvorschläge

Die für diesen Unterrichtsvorschlag entwickelten Arbeitsblätter liegen zum Teil nahe an den Materialien von DAUME und DÖHRMANN. So findet man bei DAUME 2009 auf S. 137

bzw. DAUME 2016 auf S. 219 jeweils das Ergänzungsmodul „Kurs einer Aktie“. Bei dem ebenfalls die deterministische Preisfindung aufbereitet wird. DÖHRMANN 2004 beschreibt auf S. 200 einen probabilistischen Unterrichtsentwurf zum Thema Zufall und Aktien. Der folgende Unterrichtsvorschlag verbindet beide Ideen und ist vor allem für das erstmalige Thematisieren des *Zufalls* im Unterricht gedacht.

Die hier präsentierten Arbeitsmaterialien lassen sich bei genügend Zeit fortsetzen, siehe dazu die Materialien von DÖHRMANN, 2004, S. 200 ff.

11.2.7 Zeitbedarf

4-5 Stunden

11.2.8 Vorkenntnisse

- Die Schüler/innen benötigen für diese Unterrichtssequenz keinerlei mathematische Vorkenntnisse, lediglich die Grundrechnungsarten für die Berechnung der Rendite.
- Allerdings sollten die Schüler/innen ein bestimmtes geistiges Niveau aufweisen, damit der Begriff *Zufall* sinnvoll reflektiert werden kann. Es empfiehlt sich aus Gründen des Lehrplans, diese Sequenz in der 6. Klasse (10. Schulstufe) als Einstieg zur Wahrscheinlichkeitsrechnung durchzuführen.

11.2.9 Lehrplanbezug (AHS)

Lehrstoff:

6. Klasse: Stochastik

- Arbeiten mit Darstellungsformen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik,
- Kennen des Begriffes Zufallsversuch, Beschreiben von Ereignissen durch Mengen, Kennen der Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs;

11.2.10 Lernziele

1. Die Schüler/innen sind in der Lage, zu erklären, wie Aktienkurse bestimmt werden.
2. Die Schüler/innen können Faktoren nennen, die den Aktienkurs beeinflussen.
3. Die Schüler/innen können aufgrund der Auseinandersetzung mit den Arbeitsblättern erklären, dass die exakte Voraussage eines Aktienkurses unmöglich ist.

11.2.11 Anmerkungen

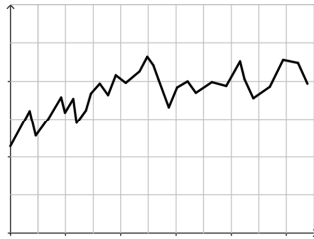
Bei Arbeitsblatt 1 ist es vorgesehen, dass man es bei der Markierung zerschneidet, damit sich die Lernenden zuerst ihre eigenen Gedanken machen können. Sie werden so von den weiteren Aufgabenstellungen nicht beeinflusst.

Das Blatt mit den ISIN-Nummern (International Securities Identification Number) für den Arbeitsauftrag der „Zufallsexperten/innen“ auf Arbeitsblatt 5 findet man auf Seite 190.

Darauf sind viele ISIN-Nummern von Aktien angegeben, die an der Frankfurter Börse gehandelt werden. Es kann sein, dass in Zukunft manche nicht mehr existieren werden. Es empfiehlt sich, vor der Unterrichtserprobung ein neues anzufertigen. ISIN-Nummern von Aktien der Frankfurter Börse bekommt man auf der zugehörigen Homepage <http://www.boerse-frankfurt.de> unter dem Punkt „Statistiken“.

Wie wird der Kurs einer Aktie bestimmt?

1



Der Kurs einer Aktie wird durch Angebot und Nachfrage bestimmt. Der Satz klingt an sich sehr schön, jedoch kann man, wenn man ehrlich ist, sich nichts Konkretes darunter vorstellen. Also kurz gesagt, der Satz hilft bei der Kursfestlegung nicht weiter.

An der Börse ist es so: der Kursmakler („Broker“) einer Aktie bestimmt den Preis dieser. Das bedeutet, er sammelt alle eingehenden Aufträge zum Kauf und Verkauf seiner zu betreuenden Aktie (in einem sogenannten „Skontrobuch“). Zu gewissen Zeitpunkten (bei regem Handel alle paar Sekunden) zieht er einen

Strich und steht vor folgenden Aufzeichnungen (hier vereinfacht):

1. Wie würdest du aufgrund der Aufzeichnungen den Preis der Aktie festlegen? Wie bist du vorgegangen?

Käufer		Verkäufer	
Kurs	Anzahl	Anzahl	
59,00	250	120	
59,50	300	160	
60,00	400	200	
60,50	250	400	
61,00	210	250	
61,50	180	200	
62,00	120	180	
62,50	70	50	
63,00	50	20	



2. Zuvor wurde noch verschwiegen, dass der Makler dem „Meistausführungsprinzip“ unterliegt, d.h. der Makler legt jenen Preis als Kurs fest, bei dem der größte Umsatz möglich ist. Würdest du deine vorige Aussage zurücknehmen und einen anderen Preis festlegen? BEACHT: Jemand, der bereit ist eine Aktie um 153 € zu kaufen, kauft sie erst recht um 152 €. Analoges gilt für die Verkäufe. Die Spalte „Summe“ ist äußerst nützlich. Überlege selbst, wie diese zu interpretieren ist!

Käufer			Verkäufer	
Kurs	Anzahl	Summe	Anzahl	Summe
59,00	250	1830	120	120
59,50	300	1580	160	280
60,00	400	1280	200	480
60,50	250	880	400	880
61,00	210	630	250	1130
61,50	180	420	200	1330
62,00	120	240	180	1510
62,50	70	120	50	1560
63,00	50	50	20	1580

3. In der Realität sind die Aufzeichnungen nicht so schön, dass die Anzahl der Personen, die bereit sind die Aktie zu einem bestimmten Preis zu kaufen, genau gleich der Anzahl der Personen, die bereit sind die Aktie zu einem bestimmten Preis zu verkaufen, ist. Wie würdest du in so einem Fall den Preis festlegen?

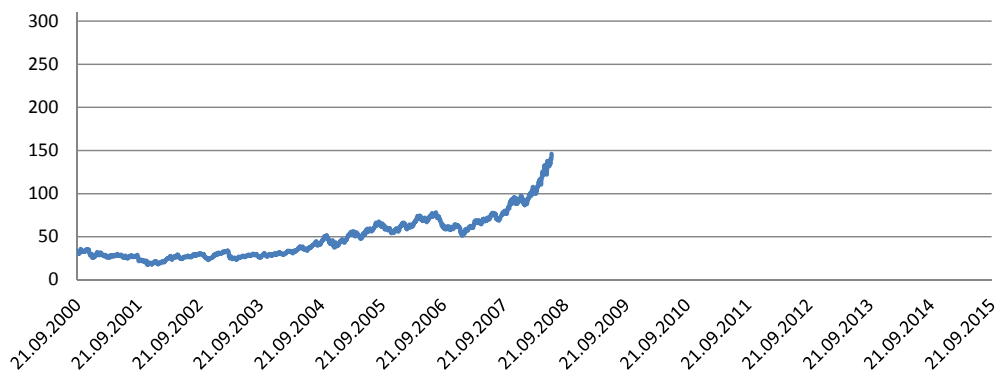
Käufer			Verkäufer	
Kurs	Anzahl	Summe	Anzahl	Summe
160,00	40	1270	130	130
160,50	140	1230	180	310
161,00	170	1090	200	510
161,50	280	920	380	890
162,00	250	640	260	1150
162,50	160	390	240	1390
163,00	100	230	200	1590
163,50	80	130	50	1640
164,00	50	50	30	1670

Sind Kurse an der Börse vorhersagbar?

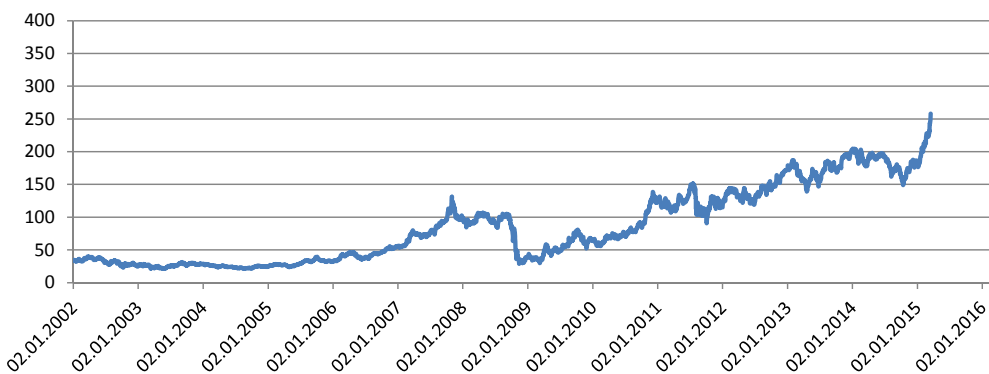
2

Unten stehend befinden sich die Kurse von drei verschiedenen Unternehmen bzw. Rohstoffen. Versuche aufgrund des Kursverlaufs den Kurs bis zum Ende des Diagramms zu schätzen und recherchiere anschließend den Kursverlauf!

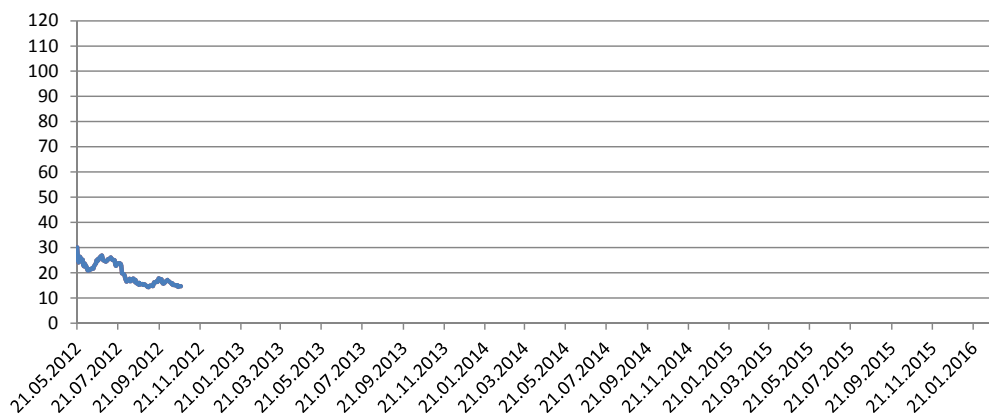
Ölpreis (Brent) in USD



Volkswagen in Euro



Facebook in Euro



Sind Kurse an der Börse vorhersagbar?

3

Bewerte deiner Meinung nach, ob die folgenden Aussagen stimmen und ob diese für oder gegen eine Vorhersehbarkeit des Aktienkurses sprechen.

Aussage 1:	Der Aktienkurs ist von sehr vielen Faktoren abhängig.
Bewertung:	
Aussage 2:	Betriebswirtschaftliche Kennzahlen des Unternehmens sind maßgebend für den Aktienkurs.
Bewertung:	
Aussage 3:	Die weltwirtschaftliche Konjunkturlage bestimmt den Aktienkurs mit.
Bewertung:	
Aussage 4:	Die Anzahl an Käufern/innen und Verkäufern/innen bestimmt den Preis.
Bewertung:	
Aussage 5:	Ereignisse von globalem Interesse, wie Naturkatastrophen, Terroranschläge, beeinflussen den Aktienkurs.
Bewertung:	
Aussage 6:	Kein Mensch kennt alle kursrelevanten Informationen.
Bewertung:	
Aussage 7:	Politische Entscheidungen führen zur Kursänderungen.
Bewertung:	

War es Zufall?

4

Aufgabenstellung: Bewerte, ob die folgenden Ereignisse zufällig waren, und begründe deine Antwort.	Zufällig	Nicht zufällig	Kann ich nicht sagen
Ereignis 1: Peter hat die Prüfung bestanden. Begründung:	☐	☐	☐
Ereignis 2: Aus einer Box wurde eine rote Kugel gezogen. Begründung:	☐	☐	☐
Ereignis 3: Alice hat gleich beim ersten Versuch eine 6 gewürfelt. Begründung:	☐	☐	☐
Ereignis 4: Zwei Eier in einem Eierkarton für 100 Eier waren beschädigt. Begründung:	☐	☐	☐
Ereignis 5: Ich habe einen Freund im Zug getroffen. Begründung:	☐	☐	☐
Ereignis 6: Das Los entscheidet, wer den ersten Zug machen darf. Begründung:	☐	☐	☐
Ereignis 7: Der Ölpreis ist gestiegen. Begründung:	☐	☐	☐
Ereignis 8: Der Kurs der Apple-Aktie ist gestiegen. Begründung:	☐	☐	☐
Ereignis 9: Die Europäische Zentralbank hat den Leitzinssatz gesenkt. Begründung:	☐	☐	☐

Was verstehst du unter „Zufall“? Was muss erfüllt sein, dass du ein Ereignis / eine Situation als zufällig bezeichnest?

Aufgabenstellung: In der heutigen Einheit sollst du mit deiner Partnerin bzw. deinem Partner 10 Aktien so auswählen, dass innerhalb von einem Monat der größte Gewinn gemacht wird.

Ablauf

Was ist heute am _____ zu tun? (Heutiges Datum eintragen!)

1. Bildet Vierergruppen und lest euch in Ruhe die Arbeitsaufträge komplett durch!
2. Bestimmt innerhalb der Gruppe 2 Börsenprofis und 2 Zufallsexperten/innen!

Auswahl der 10 Aktien:

 - i. Börsenprofis: Wählt 10 Aktien aus, die an der Frankfurter Börse gehandelt werden. Um einen Überblick über die gehandelten Aktien zu bekommen, besucht die Homepage <http://www.boerse-frankfurt.de/>. Zusätzlich dürft ihr Informationen über Kursentwicklungen aus den Medien verwenden. Wenn ihr eure Auswahl getroffen habt, dann notiert euch jeweils die Eröffnungskurse des heutigen Tages auf das Blatt (35 min). Hebt euch dieses Blatt gut auf, ihr braucht es in einem Monat wieder.
 - ii. Zufallsexperten/innen: Formt 10 winzige Papierkügelchen! Nehmt euch die Beilage, auf der alle ISIN-Nummern (International Securities Identification Number) der in Frankfurt gehandelten Aktien abgedruckt sind, und lasst die Kügelchen aus ca. einem halben Meter auf das Blatt fallen. Wenn ein paar Kügelchen über den Rand hinausgerollt sind, dann werft diese nochmals oder ihr legt sie jeweils auf das nächste Feld. Notiert euch nun die 10 ISIN-Nummern und recherchiert den Eröffnungskurs dieser Aktien an der Frankfurter Börse <http://www.boerse-frankfurt.de/>. (35 min) Hebt euch das Blatt gut auf, ihr braucht es in einem Monat wieder.
3. Formuliert eure Erwartungen: Welches Team wird besser abschneiden? Wieso?

Was ist in einem Monat am _____ zu tun? (Datum entsprechend eintragen!)

1. Recherchiert die Schlusskurse des Vortags (bezogen auf das zuvor eingetragene Datum) eurer ausgewählten Aktien und tragt sie in die Tabelle auf das Blatt ein!
2. Berechnet nun die Renditen in % der einzelnen Aktien und anschließend die Gesamtrendite in % gemäß der Vorschrift (siehe am Blatt unten).
3. Geht nun in die ursprüngliche Vierergruppe zusammen und vergleicht eure Ergebnisse! Welches Team war besser, die Börsenprofis oder die Zufallsexperten/innen? Welche Aktien hat das andere Team gewählt? Hättet ihr das so erwartet?
4. Lest den Presse-Artikel!
5. Diskussion im Plenum:
 - a. Vergleich der Renditen in der Klasse! Welches Zweierteam war jeweils das beste Team?
 - b. Was waren eure Erwartungen? Wurden diese erfüllt?
 - c. Konnte die Hauptaussage des Artikels auch hier gezeigt werden?

Name	ISIN- Nummer	Eröffnungskurs am _____	Schlusskurs am _____	Rendite in %
Gesamtrendite in %				

Berechnung der Einzelrendite: $\text{Rendite in \%} = \frac{\text{Schlusskurs} - \text{Eröffnungskurs}}{\text{Eröffnungskurs}} \cdot 100$

Berechnung der Gesamtrendite:

$\text{Gesamtrendite in \%} = 0,1 \cdot \text{Rendite 1} + 0,1 \cdot \text{Rendite 2} + 0,1 \cdot \text{Rendite 3} + 0,1 \cdot \text{Rendite 4} + 0,1 \cdot \text{Rendite 5} + 0,1 \cdot \text{Rendite 6} + 0,1 \cdot \text{Rendite 7} + 0,1 \cdot \text{Rendite 8} + 0,1 \cdot \text{Rendite 9} + 0,1 \cdot \text{Rendite 10}$
(beispielsweise bedeutet Rendite 4 die Rendite in % aus Zeile 4.)

Börse: Sind Affen wirklich die besseren Trader?

Eine neue Studie lässt aufhorchen: Demnach haben von Menschen erstellte Indizes keinen Chance gegen zufällig zusammengewürfelte Aktientitel.

Eigentlich ist die Geschichte mit dem Affen und der Börse ein alter Hut. Bereits im Jahr 1973 stellte der Princeton-Professor Burton Malkiel in seinem Buch "A Random Walk Down Wall Street" die These auf, es sei besser, einen Affen Dartpfeile auf Aktientitel werfen zu lassen, als einen professionellen Händler zu beschäftigen. Schon bald wurde der Affe zum geflügelten Wort. In unzähligen Experimenten versuchten Forscher und Wirtschaftsjournalisten, die Behauptung zu überprüfen. Viele kamen zum Fazit, dass der Affe mit seinem Dartpfeil die Finanzprofis schlägt. Dafür gibt es eine relativ einfache Erklärung, wie "Spiegel.de" schreibt: Anlageprofis haben viele Nachahmer, die den Kurs wiederum stark beeinflussen können. Oder anders gesagt: Der Markt ist sehr schwer zu "überlisten", wenn man selbst Teil davon ist.

Affenarmee vs. Index

Eine aktuelle Studie wirft nun aber neue Fragen auf: Forscher der Londoner "Cass Business School" ließen im Auftrag der Unternehmensberatung "Aon Hewitt" eine ganze Armee von Dart-Affen gegen Aktien-Indizes antreten. Das überraschende Ergebnis: Auch hier liegen die Affen klar in Führung. Für die groß angelegte Studie ließen die Forscher ein Computerprogramm, das ein Affenhirn simulieren sollte, einen Korb aus tausend US-Aktien zusammenstellen. Das Ganze wiederholten die Forscher zehn Millionen Mal pro Jahr, zwischen 1968 und 2011.

Daneben stellten die Wissenschaftler einen Index aus den tausend größten US-Aktien des jeweiligen Jahres zusammen. Wie bei realen Indizes wurde nach Marktkapitalisierung gewichtet, während im "Affen-Index" jedes Unternehmen gleich viel Wert war. Wenn man nun berechnet, was in den 43 Jahren aus 1000 Dollar geworden wäre, kommt man auf ein erstaunliches Ergebnis:

- Hätte man in den von Menschen zusammengestellten Index investiert, wäre man auf rund 48.000 Dollar gekommen.
- Mehr als 75 Prozent der Affen erwirtschafteten dagegen 87.000 Dollar oder mehr - und zehn Prozent der virtuellen Affenarmee kamen sogar auf über 95.000 Dollar.

"Die Resultate sind schockierend", fasst Studienautor Andrew Clare zusammen: "Fast jeder einzelne Affe schlug die durch Marktkapitalisierung gewichteten Indizes", so der Professor. "Wir sollten den Erfolg von Fondsmanagern vielleicht künftig an Affen messen, anstatt an gewichteten Aktien-Indizes".

Gegen den Strom statt mit der Herde

Was sind nun die Gründe dafür? Womöglich hatte Börsen-Altmeister Gottfried Heller recht, als er gesagt hat: "Nicht mit der Masse gehen. Wer in die Fußstapfen anderer tritt, kann diese nicht überholen. Das können Sie nur, wenn Sie eigene Wege gehen. Kaufen Sie, wenn die Mehrheit verkauft, und umgekehrt."

Die "Affen-Indizes" waren viel stärker diversifiziert als jene, die von Menschen zusammengestellt wurden. Affen verlassen sich auf den Zufall und kaufen damit auch schlecht gehende Aktien. Titel in Indizes sind dagegen umso stärker gewichtet, je besser sie abschneiden. Sie lassen sich mit der "Herde" treiben, während Affen auch gegen den Strom schwimmen und stärker in Nebentitel investieren.

Leicht in die Praxis umzusetzen ist das Experiment jedenfalls nicht, wie die "Welt" erklärt: Ein Depot mit tausend Titeln, wie es die virtuellen Affen zusammenstellten, müsste mindestens eine Million Euro schwer sein, da Transaktionen unterhalb von 1000 Euro pro Aktie sich nicht rentieren. Ein so hohes Investment können sich viele nicht leisten.

Equal Weight Index als Alternative?

Dennoch wirft die Studie die Frage auf, ob es sinnvoll ist, in Indexfonds zu investieren. Eine Alternative könnte ein Equal Weight Index sein. Wie der Name schon sagt, wird dabei nicht nach Marktkapitalisierung gewichtet, also nicht zwischen kleineren und größeren Unternehmen unterschieden. Das bekannteste Beispiel ist der "S&P 500 Equal Weight Index", den es seit 2003 gibt. Wie der Name schon sagt, handelt es sich dabei um die nicht-gewichtete Version des "S&P 500", der die größten börsennotierten US-Firmen umfasst. Der Equal Weight Index hat seit seinem Start 137 Prozent an Wert gewonnen, das sind immerhin 28 Prozentpunkte mehr als beim "S&P 500".

Die Presse vom 07.05.2013

LU1072810919	DE000A1EBH7	DE0005070908	DE0006208408	DE0006855005	DE0007756009	DE0005557508	DE000AQLD6E6	DE0005158703	DE0006464506	DE0005936124	DE000SKWM021	DE000A1ML7J1
DE000A11QW68	CH0132106482	DE0006201106	DE000A1X3WW8	DE0007016008	DE0007076008	DE0005565204	DE0003304101	DE000505220000	DE0005408884	DE000A111338	DE000A111338	DE0007667107
DE0007228001	DE000A1K0227	DE00050790307	CH002237009	DE0008103102	DE0008103102	DE00056232805	DE000A1K0201	DE0005232805	DE0006286500	DE000A1K0201	DE000A1K0201	DE0007CG9999
DE0006492903	LU0251710041	DE0005790331	DE0007857476	DE0005228779	DE000A1EMG56	DE0005659700	DE0005875306	DE0005909006	LU0106198319	DE000A0B85S3	DE0005751986	DE000CHEN993
DE0005291405	DE0005494538	DE0007760001	DE000A1A6V48	DE000A1TNNL9	DE000A13S3X8	DE0005800601	DE0005800601	DE000646113	DE000LT0243	DE000A1PH8L8	DE000A1PH8L8	DE000WCKH881
DE000A023035	DE000A0XF5F0	DE0005801807	DE000A1TNNL9	LU010830706	CH0303692447	DE0005156004	DE0005156004	DE0005227201	DE000PA11A33	DE000PA11A33	DE0007203705	DE000WACK012
DE000A14BX44	DE0005580005	DE000G5W1111	DE0006292030	DE000A0A4GF53	DE0007847303	DE0005654933	DE0007571424	DE0005227235	DE0005199905	DE0006916604	DE0005178008	DE0007507501
DE0006569403	DE000A0BVKY7	DE0006574402	DE0006574402	DE000A1KRLR0	DE0005657108	DE0005657108	DE0005895403	DE0005304200	DE000A0BVL93	DE000A0BVL93	DE0003304002	DE000A1X3X33
DE0005085300	DE0006299001	DE0005250005	DE000A1MMCY2	DE0006082001	DE0005167902	DE000A1Q059	DE0007757007	DE0005167902	DE000A161N30	DE000A0JBP32	DE000A1YCMW2	DE000775207
DE0007789408	DE000A0KFM8	DE0006617400	DE000A1K0409	DE000A161N14	DE0007866023	DE000A161N30	DE0005895403	DE0005304200	DE0005895403	DE000A0JBP32	DE000A1YCMW2	DE000775207
DE0005192801	DE0005634000	DE0006224520	DE000A1K0409	DE000A161N14	DE0007866023	DE000A161N30	DE0005895403	DE0005304200	DE0005895403	DE000A0JBP32	DE000A1YCMW2	DE000775207
DE0006275001	DE000A0WMLQ4	DE0006131204	DE000A1MMCY2	DE0006082001	DE0005167902	DE000A1Q059	DE0007757007	DE0005167902	DE000A161N30	DE000A0JBP32	DE000A1YCMW2	DE000775207
DE000A0MMW79	DE0005658009	DE0006222605	DE000A0F6MD6	DE000505097108	DE000A0F6MD6	DE000505097108	DE000A0F6MD6	DE000505097108	DE000A0F6MD6	DE000505097108	DE000A0F6MD6	DE000505097108
DE0006757008	LU0339936351	DE0006222605	DE000A0F6MD6	DE000505097108	DE000A0F6MD6	DE000505097108	DE000A0F6MD6	DE000505097108	DE000A0F6MD6	DE000505097108	DE000A0F6MD6	DE000505097108
DE0001282152	DE000A0JL461	DE000A12UP29	DE0007008906	DE000A0KFRB3	AT000785407	DE000A0KFRB3	AT000785407	DE000A0KFRB3	AT000785407	DE000A0KFRB3	AT000785407	DE000A0KFRB3
DE0005284004	DE000A1TNS70	DE000A0MSN11	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04
DE0005192832	DE0006313506	DE000A0WMLD8	DE000A0WMLD8	DE000505097108	DE000A0WMLD8	DE000505097108	DE000A0WMLD8	DE000505097108	DE000A0WMLD8	DE000505097108	DE000A0WMLD8	DE000505097108
AT000A021777	DE000A1EB955	LU0002231915	DE000A0MSN11	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04
DE0007551400	DE000A0V9L94	DE0006269103	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04	DE000A0HND04
DE0005201602	DE000A1YCN83	DE0006842808	DE000A0JL461	DE000A0JL461	DE000A0JL461	DE000A0JL461	DE000A0JL461	DE000A0JL461	DE000A0JL461	DE000A0JL461	DE000A0JL461	DE000A0JL461
DE0006102007	DE000A13S3X8	DE0007218901	DE000A0D8819	DE0007218901	DE000A0D8819	DE0007218901	DE000A0D8819	DE0007218901	DE000A0D8819	DE0007218901	DE000A0D8819	DE0007218901
DE0005232701	DE0006775803	DE000A168205	DE000A0C2A75	DE000A0C2A75	DE000A0C2A75	DE000A0C2A75	DE000A0C2A75	DE000A0C2A75	DE000A0C2A75	DE000A0C2A75	DE000A0C2A75	DE000A0C2A75
DE0006064001	DE000A161019	DE000A0KPNZ7	DE000A0KPNZ7	DE000A0KPNZ7	DE000A0KPNZ7	DE000A0KPNZ7	DE000A0KPNZ7	DE000A0KPNZ7	DE000A0KPNZ7	DE000A0KPNZ7	DE000A0KPNZ7	DE000A0KPNZ7
DE0005854989	DE000A1RFMZ1	DE000A1RFMZ1	DE000A1RFMZ1	DE000A1RFMZ1	DE000A1RFMZ1	DE000A1RFMZ1	DE000A1RFMZ1	DE000A1RFMZ1	DE000A1RFMZ1	DE000A1RFMZ1	DE000A1RFMZ1	DE000A1RFMZ1
DE0005492540	DE0006190705	DE0005758304	DE000A0H1472	DE000A0H1472	DE000A0H1472	DE000A0H1472	DE000A0H1472	DE000A0H1472	DE000A0H1472	DE000A0H1472	DE000A0H1472	DE000A0H1472
DE000A1TMBE8	DE000A0LR510	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4
DE000585183	DE000A0LR510	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4	DE000A0KNSW4
DE0006628100	DE000A0EC078	DE0007318008	DE000A0LR510	DE000A0LR510	DE000A0LR510	DE000A0LR510	DE000A0LR510	DE000A0LR510	DE000A0LR510	DE000A0LR510	DE000A0LR510	DE000A0LR510
DE000A11QWY6	DE0006214687	DE0007499303	US87260H1041	US87260H1041	US87260H1041	US87260H1041	US87260H1041	US87260H1041	US87260H1041	US87260H1041	US87260H1041	US87260H1041
DE00051021307	DE000A0LR4P1	DE0007499303	DE000A0LR4P1	DE000A0LR4P1	DE000A0LR4P1	DE000A0LR4P1	DE000A0LR4P1	DE000A0LR4P1	DE000A0LR4P1	DE000A0LR4P1	DE000A0LR4P1	DE000A0LR4P1
DE000A12UP37	LU0010222007	DE000A0L5AT7	DE000A0L5AT7	DE000A0L5AT7	DE000A0L5AT7	DE000A0L5AT7	DE000A0L5AT7	DE000A0L5AT7	DE000A0L5AT7	DE000A0L5AT7	DE000A0L5AT7	DE000A0L5AT7
DE0006775505	DE0007830788	DE000A0LBKW6	DE000A0LBKW6	DE000A0LBKW6	DE000A0LBKW6	DE000A0LBKW6	DE000A0LBKW6	DE000A0LBKW6	DE000A0LBKW6	DE000A0LBKW6	DE000A0LBKW6	DE000A0LBKW6
SE0000722365	DE0005286108	DE0005286108	DE0005286108	DE0005286108	DE0005286108	DE0005286108	DE0005286108	DE0005286108	DE0005286108	DE0005286108	DE0005286108	DE0005286108
DE0005202203	DE000A0HNF96	GB00BDF44022	GB00BDF44022	GB00BDF44022	GB00BDF44022	GB00BDF44022	GB00BDF44022	GB00BDF44022	GB00BDF44022	GB00BDF44022	GB00BDF44022	GB00BDF44022
GB00BL32TX24	DE000A0JC0V8	IT0003463772	DE000A0JC0V8	DE000A0JC0V8	DE000A0JC0V8	DE000A0JC0V8	DE000A0JC0V8	DE000A0JC0V8	DE000A0JC0V8	DE000A0JC0V8	DE000A0JC0V8	DE000A0JC0V8
DE000A1RFMY4	CH024733161	DE0005479307	DE000A1KREX3	DE0005168108	DE000A1KREX3	DE0005168108	DE000A1KREX3	DE0005168108	DE000A1KREX3	DE0005168108	DE000A1KREX3	DE0005168108
DE0008009564	LU0006128074	DE000A0KEXC7	DE000A0KEXC7	DE000A0KEXC7	DE000A0KEXC7	DE000A0KEXC7	DE000A0KEXC7	DE000A0KEXC7	DE000A0KEXC7	DE000A0KEXC7	DE000A0KEXC7	DE000A0KEXC7
DE0006001902	DE000A0B8N37	DE000A0Z2Y48	DE000A0Z2Y48	DE000A0Z2Y48	DE000A0Z2Y48	DE000A0Z2Y48	DE000A0Z2Y48	DE000A0Z2Y48	DE000A0Z2Y48	DE000A0Z2Y48	DE000A0Z2Y48	DE000A0Z2Y48
DE000A12UKJ6	DE000A161140	DE0006911605	DE000A0B8N37	DE000A0B8N37	DE000A0B8N37	DE000A0B8N37	DE000A0B8N37	DE000A0B8N37	DE000A0B8N37	DE000A0B8N37	DE000A0B8N37	DE000A0B8N37
DE000A1MBG84	DE000A161509	CH0149557099	DE000A161509	DE000A161509	DE000A161509	DE000A161509	DE000A161509	DE000A161509	DE000A161509	DE000A161509	DE000A161509	DE000A161509
DE0007163131	DE000A0ADN1J4	DE000A161010	DE000A161010	DE000A161010	DE000A161010	DE000A161010	DE000A161010	DE000A161010	DE000A161010	DE000A161010	DE000A161010	DE000A161010
AT0000776307	DE000A0HNG53	DE0005181606	DE0007474041	DE000A0HNG53	DE0007474041	DE000A0HNG53	DE0007474041	DE000A0HNG53	DE0007474041	DE000A0HNG53	DE0007474041	DE000A0HNG53
US058573080	DE000A0HNG53	DE0005181606	DE0007474041	DE000A0HNG53	DE0007474041	DE000A0HNG53	DE0007474041	DE000A0HNG53	DE0007474041	DE000A0HNG53	DE0007474041	DE000A0HNG53
DE000LEG1110	DE000A0N3EU3	CH039402646	DE0007477507	DE0007477507	DE0007477507	DE0007477507	DE0007477507	DE0007477507	DE0007477507	DE0007477507	DE0007477507	DE0007477507

11.2.12 Musterlösungen

Arbeitsblatt 1

1) Individuell beantwortbar. 2) Der Preis der Aktie beträgt 60,50. 3) Nach der Formel (26) auf Seite 180 ist der Kurs auf 161,50 festzulegen.

Arbeitsblatt 2

Die vervollständigten Kurse haben aufgrund einer Recherche die Form:



Abb. 23 Öl (Brent) in USD 21.09.2000-16.02.2016

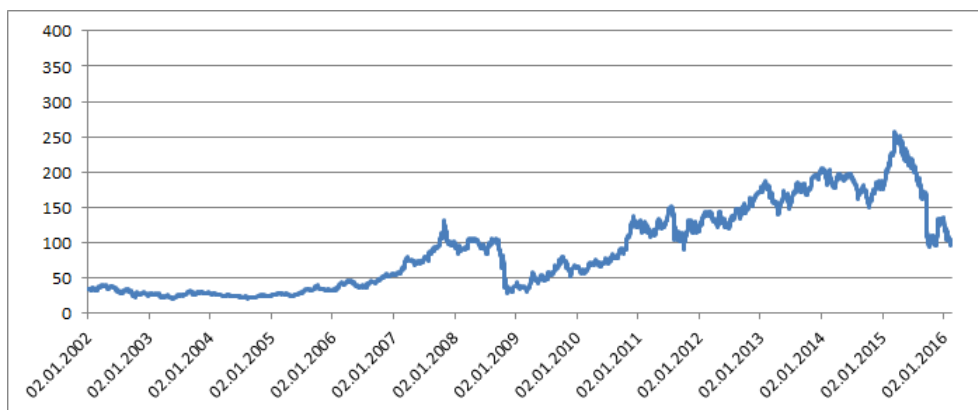


Abb. 24 Kurs der VW-Aktie in Euro 01.02.2002-02.01.2016

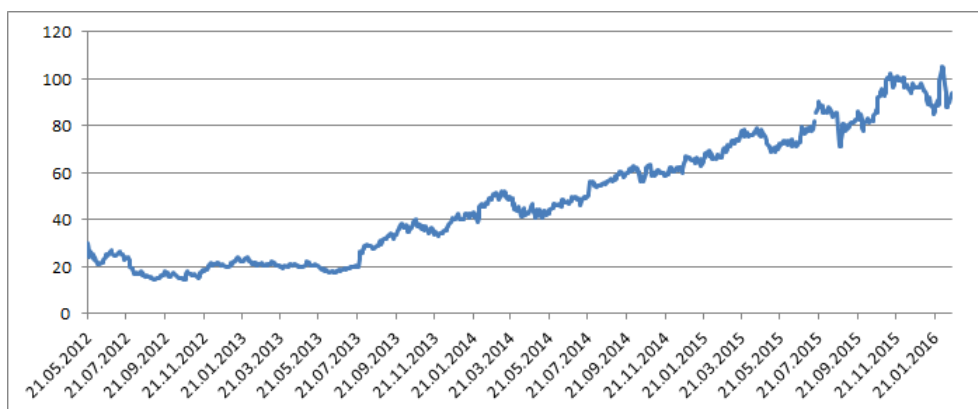


Abb. 25 Kurs der Facebook-Aktie in Euro 21.05.2012-16.02.2016

Arbeitsblatt 3

individuell beantwortbar

Arbeitsblatt 4

- 1) Bei guter Vorbereitung ist die Aussage unter nicht zufällig einzuordnen. Wenn Peter nicht alles lernt, dann ist aufgrund des subjektiven Zufalls, er weiß nicht, welche Fragen die Lehrperson auswählt, die Aussage unter zufällig einzuordnen. Richtig ist: „Kann ich nicht sagen“.
- 2) Zufällig, wenn das Ziehen nicht manipuliert ist.
- 3) Zufällig, wenn der Würfel nicht manipuliert ist.
- 4) Zufällig
- 5) „Kann ich nicht sagen“
- 6) Zufällig
- 7) subjektiv zufällig
- 8) subjektiv zufällig
- 9) subjektiv zufällig, sie entscheidet aufgrund der wirtschaftlichen Lage, deren Entwicklung nicht vorherzusehen ist.

Die untenstehende Frage ohne Nummer ist individuell beantwortbar.

Arbeitsblatt 5

individuell beantwortbar

11.3 Unterrichtsvorschlag – Diversifikation

11.3.1 Zusammenfassung

Die Unterrichtssequenz beginnt mit einem spielerischen Experiment, ein Würfelspiel, wo es um die Aufteilung des Einsatzes auf zwei Würfel geht. Bei gewissen Aufteilungen minimiert man das Risiko. Dieser Grundgedanke soll bei dem angeleiteten Experiment im Vordergrund stehen. Für den Beginn wurden drei verschiedene Varianten des Experiments erarbeitet. Dabei handelt es sich um eine computergestützte Version (in der die Würfel modelliert werden), eine haptische Version (in der mit zwei realen Würfeln das Spiel durchgeführt wird) und eine methodisch anders verpackte Fassung, eine Gruppenexploration (bei der einzelne Aufteilungen unterschiedlicher Lernender untersucht werden). Auf den folgenden beiden Arbeitsblättern sollen die Begriffe **Rendite**, **Risiko** und **Korrelation** im Kontext des Finanzmarkts erarbeitet werden. Im Anschluss soll in Analogie zum Würfelspiel die Portfoliooptimierung betrachtet werden. In einer offenen Modellierungsaufgabe werden die Lernenden aufgefordert ein Gutachten für eine Versicherung zu schreiben, in dem argumentiert wird, ob es besser ist, einen Jumbo-Jet voll zu versichern oder von 100 Jumbo-Jets jeweils ein Hundertstel. In einer weiteren Vertiefung werden theoretische Fragestellungen und zusätzliche Aufgaben zur Portfoliooptimierung gestellt. Der Abschluss verlässt den engen Rahmen der Finanzmathematik und thematisiert Diversifikation in verschiedenen (Alltags-)Situationen.

11.3.2 Beitrag zu den zentralen Ideen

Diese Unterrichtssequenz trägt im vollen Umfang zu den beiden zentralen Ideen *Stochastik im Kontext Finanzmathematik* und *Handhabung von Risiko* bei. Ihre Gestaltung richtet sich primär auf *Handhabung von Risiko*. Vor allem steht der Aspekt der *Diversifikation* im Mittelpunkt. Das Prinzip „Setze nicht alles auf eine Karte“ soll in den verschiedensten Facetten sichtbar werden, beginnend bei dem Würfelspiel über den Finanzmarkt bis hin zu Alltagssituationen. Die zentrale Idee *Handhabung von Risiko* lässt sich nicht disjunkt von der Idee *Stochastik im Kontext Finanzmathematik* betrachten. Ein Risiko gibt es nur, wenn eine Unsicherheit besteht. Für die Einführung bzw. die Thematisierung der Begriffe Rendite, Risiko und Korrelation wird ein Weg über die beschreibende Statistik gewählt. Der Aspekt der Diversifikation wird nun am Beispiel der Portfoliooptimierung durchgeführt. Die beiden anschließenden Arbeitsblätter richten sich auf theoretische Überlegungen zur Portfoliooptimierung und zur Anwendung der Diversifikation bei Versicherungen. Durch diese Arbeitsblätter soll jenes Prinzip klar werden, welches ein Interviewpartner erwähnt:

FM1: „Ein anderer Bezug zum Alltag, den man aus der Portfoliooptimierungstheorie mitnehmen muss, ist es, dass es für Privatpersonen ein großer Unfug ist, sich einzelne Aktien zu kaufen. Das ist schon ein bisschen subtiler und hört man weniger und das ist trotzdem eine wichtige Lehre, finde ich.“

11.3.3 Erfüllen der Kriterien guter Anwendung im Mathematikunterricht

1. Formale Aspekte

Diese Unterrichtssequenz ist für 6-8 Unterrichtseinheiten ausgelegt. In ihr sind gleich mehrere Gebiete des Lehrplans zu finden. Ein Großteil handelt von Stochastik, wie

diskrete Zufallsvariable und deren Verteilung, sowie Erwartungswert und Varianz. Um das Minimum der Varianz zu finden, bedient man sich der Schulanalysis und untersucht eine Funktion. Bei Zeitknappheit kann zum Beispiel das spielerische Experiment und das Blatt Diversifikation im Alltag durchgenommen werden. Das beansprucht in diesem Fall einen Umfang von höchstens zwei Unterrichtsstunden.

2. Eignung

Aktien existieren nicht unmittelbar in der Erlebniswelt der Schüler/innen. Sie werden zwar wahrgenommen über diverse Medien, aber eine nähere Auseinandersetzung weist nahezu keine Schülerin bzw. kein Schüler auf (vgl. DÖHRMANN, 2004, S. 72 ff.). Würfelspiele sind zumindest noch aus der Kindheit der Jugendlichen bekannt. Diese Unterrichtssequenz soll die Lernenden genau da abholen, um den Aspekt der Diversifikation in den verschiedensten Bereichen aufzuzeigen, welche in der ein oder anderen Form für alle relevant sind bzw. werden.

3. Authentizität

Das Konzept der Diversifikation spielt vor allem bei Geldanlagen noch immer eine wichtige Rolle. Für Versicherungen ist das alt bekannte Phänomen nach wie vor relevant. Das Prinzip der Rückversicherungen baut darauf auf. Die Standardabweichung ist eben subadditiv und wächst bei n unabhängigen Zufallsvariablen proportional zu $\sqrt{n}$. Aber auch in der Finanzmathematik kommt diese Idee auf einem höheren Niveau durchaus noch vor, wie ein Interviewpartner bestätigt:

FM3: „... die Idee, dass man versucht eine Varianz zu minimieren, die kommt bis zu einem gewissen Grade noch vor. Aber da wird es auch von den Fragestellungen schon anspruchsvoller.“

4. Mathematische Aspekte

Die in dem Unterrichtsszenario verwendete Mathematik ist auf keinen Fall zu trivial. Einzelne Gebiete der Schulmathematik, wie Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Analysis, kommen in vernetzter Form vor und sorgen aufgrund der Lehrplankonformität für eine altersadäquate Verwendung.

11.3.4 Fokusbegriffe

Bei diesen Unterrichtsmaterialien kommen drei Wahrscheinlichkeitsbegriffe vor. Das Einstiegsspiel „Ein seltsames Spiel“ thematisiert durch seine Konstruktion zwei der erwähnten Begriffe. In trivialster Form erscheint der *Lapacesche Wahrscheinlichkeitsbegriff*, welcher durch Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass 1, 2 oder 3 gewürfelt wird, benötigt wird. Der frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff kommt bei der Schätzung des Erwartungswerts ins Gespräch, so liefern die langen Versuchsreihen eine Schätzung für den zu bestimmenden Erwartungswert, dahinter steht das „Gesetz der großen Zahlen“. Dasselbe gilt für die Bestimmung der Standardabweichung. Die subjektivistische Sichtweise erscheint bei den Überlegungen, wie man zu den für die Portfoliooptimierung notwendigen Kennzahlen kommt. Die Gewinnung der Kennzahlen aus historischen Daten trägt zur Entwicklung eines *subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs* bei. Wie viele Daten werden herangezogen (minütlich, stündlich, täglich, wöchentlich, ...), wie lange zurück gehen die Daten (ein Monat, ein Jahr,

..., bis zum Beginn der Aktie), welche Aussage haben historische Daten überhaupt für die Zukunft?

11.3.5 Einbettung in bestehende Materialien

Arbeitsblatt 3 und 4 versuchen in recht kurzer Art und Weise die für die Portfoliotheorie wichtigen Begriffe: Rendite, Standardabweichung und Korrelationskoeffizient einzuführen. Bei genügend Zeit kann das auch ausführlicher behandelt werden. Es empfiehlt sich dafür der Unterrichtsvorschlag „Statistik der Aktienmärkte, siehe (DAUME, 2009, S. 113 ff.) und (DAUME, 2016, S. 195 ff.). Dort werden einfache Rendite, Standardabweichung bzw. logarithmische Rendite, Volatilität und Korrelation der Renditen umfangreich erläutert.

11.3.6 Zeitbedarf

6-8 Einheiten (individuell verkürzbar durch das Weglassen von Arbeitsblättern)

11.3.7 Vorkenntnisse

Die Lernenden benötigen Kenntnisse aus der beschreiben Statistik. Sie sollen Mittelwerte, empirische Standardabweichungen, sowie Korrelationskoeffizienten berechnen können. Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung müssen sie mit diskreten Zufallsvariablen und deren Verteilungen umgehen können. Für die Berechnung des globalen Minimums des Risikos, respektive Standardabweichung, werden Kenntnisse der Differentialrechnung vorausgesetzt. Es bietet sich ein Einsatz in der 7. Klasse (11. Schulstufe) an.

11.3.8 Lehrplanbezug (AHS)

Lehrstoff:

7. Klasse: Stochastik

- Kennen der Begriffe diskrete Zufallsvariable und diskrete Verteilung
- Kennen der Zusammenhänge von relativen Häufigkeitsverteilungen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen; von Mittelwert und Erwartungswert sowie von empirischer Varianz und Varianz
- Arbeiten mit diskreten Verteilungen (insbesondere mit der Binomialverteilung) in anwendungsorientierten Bereichen

Differentialrechnung

- Untersuchen einfacher und im Hinblick auf Anwendungen sinnvoller Funktionen bezüglich Monotonie und Krümmungsverhalten, Ermitteln von Extrem- und Wendestellen
- Lösen von Extremwertaufgaben

11.3.9 Lernziele

1. Die Schüler/innen sind aufgrund der Auseinandersetzung mit den Arbeitsblättern in der Lage, zu erläutern, dass Investitionen am Finanzmarkt mit einem gewissen Risiko verbunden sind.
2. Die Schüler/innen können eine Strategie zur Minimierung des Risikos bei Investitionen am Finanzmarkt nennen.
3. Die Schüler/innen können in einfachen Fällen mit Methoden aus der Analysis und der Stochastik Risikominimierungen durchführen.
4. Die Schüler/innen sind in der Lage, das Prinzip der Diversifikation auf Situationen außerhalb des Finanzmarkts anzuwenden.

Ein seltsames Spiel (GeoGebra)

1

Spielregeln: Die Teilnahmegebühr beträgt 100 €. Es gibt einen roten und einen blauen Würfel. Wenn der rote Würfel die Augenzahl 1, 2 oder 3 anzeigt, dann gewinnt man 300 €, im anderen Fall, also wenn der rote Würfel die Augenzahl 4, 5 oder 6 anzeigt, dann gewinnt man nichts und verliert die gesetzten 100 €. Für den blauen Würfel gilt genau dasselbe. Wenn der blaue Würfel die Augenzahl 1, 2, oder 3 anzeigt, dann gewinnt man 300 €, im anderen Fall nichts. Jede Teilnehmerin und jeder Teilnehmer darf sich aussuchen, wie man die 100 € auf die beiden Würfel aufteilt. Es können zum Beispiel 15 € auf den roten Würfel und 85 € auf den blauen Würfel gesetzt werden, oder auch 65 € auf den roten Würfel und 35 € auf den blauen Würfel. Die Gewinne werden dann gemäß dem gesetzten Anteil an den hundert Euro ausbezahlt. Bei 65 € auf den roten Würfel erhält man bei einer der Augenzahlen 1, 2 oder 3 einer Auszahlung von $0,65 \cdot 300 = 195$ €, das entspricht einem Gewinn von $195 - 65 = 130$ €. Zeigt der blaue Würfel die Augenzahl 4, 5 oder 6, dann verliert man die gesetzten 35 € und man gewinnt insgesamt einen Betrag von $130 - 35 = 95$ €, die Teilnahmegebühren wurden in zwei Schritten abgezogen.

Fragen

- Würdest du an diesem Spiel teilnehmen? Begründe deine Antwort!
- Nehmen wir unabhängig von deiner vorigen Antwort an, du nimmst an diesem Spiel teil. Wie würdest du die 100 Euro aufteilen? Begründe!
- Simuliere zu diesem Zweck das Spiel hundertmal! Entwickle dazu ein GeoGebra-Arbeitsblatt, welches das obige Spiel modelliert und probiere verschiedene Strategien aus! Folge den Anweisungen!

1) Tabelle: Öffne die Tabellenansicht und schreibe die Überschriften der einzelnen Spalten nach dem unten stehenden Vorbild in die Tabelle!

5) Tabelle: Berechne den Gewinn und gib in die Zelle E2 die Anweisung C2+D2 ein! Kopiere die Zellen A2, B2, C2 und D2 entsprechend bis zur Zeile 101!

3) Tabelle: Gib in Zelle F2 jenen Eurobetrag ein, der auf den roten Würfel gesetzt werden soll!

	A	B	C	D	E		G
1	Würfel rot	Würfel blau	Auszahlung rot	Auszahlung blau	Auszahlung gesamt	Anteil rot	
2	2	3	100	100	200	50	
3	4	3	-50	100	50		
4	3	4	100	-50	50		
5	3	4	100	-50	50	Mittelwert	59
6	3	3	100	100	200		
7	1	6	100	-50	50		

2) Tabelle: Schreibe in die Zelle A2 den Befehl Zufallszahl(1,6), um einen Wurf mit einem Würfel zu simulieren! Verfahre in der Zelle B2 ebenso!

4) Tabelle: Gib Wenn[A2 == 1 || A2 == 2 || A2 == 3, 300\$F\$2 / 100 - \$F\$2, 0 - \$F\$2] in die Zelle C2 ein, damit die Auszahlung gemäß der Spielregel berechnet wird! Verfahre bei Zelle D2 analog!

6) Tabelle: Berechne das arithmetische Mittel der Auszahlung in Zelle G5, tippe dazu Mittelwert(E2:E101) ein!

- Simuliere jede Strategie, die du ausprobieren möchtest mehrere Male (drücke dazu die F9-Taste, dabei werden die Zufallszahlen neu berechnet)!
 - Wie viel Geld gewinnst du im Mittel pro Spiel bei deinen Strategien? Um welchen Wert schwankt das arithmetische Mittel pro Spiel bei deinen Strategien?
 - Was fällt dir auf?
- Wie groß ist der zu erwartende Gewinn des Spiels?
 - Berechne den Erwartungswert des Gewinns für folgende Strategien!
 - 100 € auf den roten Würfel und 0 € auf den blauen Würfel
 - 70 € auf den roten Würfel und 30 € auf den blauen Würfel
 - 50 € auf den roten Würfel und 50 € auf den blauen Würfel
 - Hast du eine Vermutung?
 - Zeige für einen allgemeinen Betrag von a € auf den roten Würfel und 100-a € auf den blauen Würfel, dass deine Vermutung stimmt!

Ein seltsames Spiel (haptisch)

1

Spielregeln: Die Teilnahmegebühr beträgt 100 €. Es gibt einen roten und einen blauen Würfel. Wenn der rote Würfel die Augenzahl 1, 2 oder 3 anzeigt, dann gewinnt man 300 €, im anderen Fall, also wenn der rote Würfel die Augenzahl 4, 5 oder 6 anzeigt, dann gewinnt man nichts und verliert die gesetzten 100 €. Für den blauen Würfel gilt genau dasselbe. Wenn der blaue Würfel die Augenzahl 1, 2, oder 3 anzeigt, dann gewinnt man 300 €, im anderen Fall nichts. Jede Teilnehmerin und jeder Teilnehmer darf sich aussuchen, wie man die 100 € auf die beiden Würfel aufteilt. Es können zum Beispiel 15 € auf den roten Würfel und 85 € auf den blauen Würfel gesetzt werden, oder auch 65 € auf den roten Würfel und 35 € auf den blauen Würfel. Die Gewinne werden dann gemäß dem gesetzten Anteil an den hundert Euro ausbezahlt. Bei 65 € auf den roten Würfel erhält man bei einer der Augenzahlen 1, 2 oder 3 einer Auszahlung von $0,65 \cdot 300 = 195$ €, das entspricht einem Gewinn von $195 - 65 = 130$ €. Zeigt der blaue Würfel die Augenzahl 4, 5 oder 6, dann verliert man die gesetzten 35 € und man gewinnt insgesamt einen Betrag von $130 - 35 = 95$ €, die Teilnahmegebühren wurden in zwei Schritten abgezogen.

Fragen

- Würdest du an diesem Spiel teilnehmen? Begründe deine Antwort!
- Nehmen wir unabhängig von deiner vorigen Antwort an, du nimmst an diesem Spiel teil. Wie würdest du die 100 € aufteilen? Begründe!
- Simuliere zu diesem Zweck das Spiel dreißig Mal! Würfle dreißig Mal zwei Würfel (falls du keine roten und blauen Würfel besitzt, bezeichne einfach einen als roten und den anderen als blauen Würfel) und notiere die Ergebnisse in die Tabelle. Berechne anschließend die Auszahlungen mit drei verschiedenen Aufteilungsstrategien! Simuliere zu diesem Zweck das Spiel dreißig Mal! Probiere drei verschiedene Strategien aus! Folge den Anweisungen!

1) Tabelle: Entscheide dich für einen Betrag, den du auf den roten Würfel setzen möchtest. Hier sind zuerst 90 € auf rot gesetzt worden und daher 10 € auf blau. Es können auch andere Werte gewählt werden.

Nr.	Augenzahl		Auszahlung gemäß Anteil								
	rot	blau	A= 90			A= 20			A=		
			rot	blau	gesamt	rot	blau	gesamt	rot	blau	gesamt
1	1	4	180	-10	170	40	-80	-40			
2											

2) Tabelle: Wirf die Würfel und trage das Ergebnis in die entsprechende Spalte ein!

3) Tabelle: Berechne die jeweilige Auszahlung! In diesem Fall gilt: $300 - 0,9 \cdot 90 = 180$ € und -10 € das ergibt $180 - 10 = 170$ €. Bei einem Anteil von 20 € auf rot erhält man: $300 - 0,2 \cdot 20 = 40$ € und -80 € das ergibt $40 - 80 = -40$ €.

4) Tabelle: Vervollständige die Tabelle!

Beantworte die folgenden Fragen nach dem Ausfüllen der Tabelle!

- Simuliere jede Strategie, die du ausprobieren möchtest, mehrere Male!
 - Wie viel Geld gewinnst du im Mittel pro Spiel bei deinen Strategien?
 - Was fällt dir auf?
- Wie groß ist der zu erwartende Gewinn des Spiels?
 - Berechne den Erwartungswert des Gewinns für folgende Strategien!
 - 100 € auf den roten Würfel und 0 € auf den blauen Würfel
 - 70 € auf den roten Würfel und 30 € auf den blauen Würfel
 - 50 € auf den roten Würfel und 50 € auf den blauen Würfel
 - Hast du eine Vermutung?
 - Zeige für einen allgemeinen Betrag von a € auf den roten Würfel und $100 - a$ € auf den blauen Würfel, dass deine Vermutung stimmt!

Nr.	Augenzahl		Auszahlung gemäß Anteil								
			A= _____			A= _____			A= _____		
	rot	blau	rot	blau	gesamt	rot	blau	gesamt	rot	blau	gesamt
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											
26											
27											
28											
29											
30											

Ein seltsames Spiel (Gruppenexploration)

1

Spielregeln: Die Teilnahmegebühr beträgt 100 €. Es gibt einen roten und einen blauen Würfel. Wenn der rote Würfel die Augenzahl 1, 2 oder 3 anzeigt, dann gewinnt man 300 €, im anderen Fall, also wenn der rote Würfel die Augenzahl 4, 5 oder 6 anzeigt, dann gewinnt man nichts und verliert die gesetzten 100 €. Für den blauen Würfel gilt genau dasselbe. Wenn der blaue Würfel die Augenzahl 1, 2, oder 3 anzeigt, dann gewinnt man 300 €, im anderen Fall nichts. Jede Teilnehmerin und jeder Teilnehmer darf sich aussuchen, wie man die 100 € auf die beiden Würfel aufteilt. Es können zum Beispiel 15 € auf den roten Würfel und 85 € auf den blauen Würfel gesetzt werden, oder auch 65 € auf den roten Würfel und 35 € auf den blauen Würfel. Die Gewinne werden dann gemäß dem gesetzten Anteil an den hundert Euro ausbezahlt. Bei 65 € auf den roten Würfel erhält man bei einer der Augenzahlen 1, 2 oder 3 einer Auszahlung von $0,65 \cdot 300 = 195$ €, das entspricht einem Gewinn von $195 - 65 = 130$ €. Zeigt der blaue Würfel die Augenzahl 4, 5 oder 6, dann verliert man die gesetzten 35 € und man gewinnt insgesamt einen Betrag von $130 - 35 = 95$ €, die Teilnahmegebühren wurden in zwei Schritten abgezogen.

1. **Vorbereitung:** Wenn man an diesem Spiel teilnehmen möchte, wie soll man am besten die Aufteilung gestalten? Macht die Aufteilung überhaupt einen Unterschied? Suche dir eine Partnerin oder einen Partner und analysiert zu zweit eine spezielle Strategie!
2. **Analyse:** Auf der Tafel hängen verschiedene Strategien für das Würfelspiel. Sucht euch eine Strategie aus und simuliert dieses Spiel sechzigmal! Tragt eure Ergebnisse folgendermaßen in die Tabelle ein (hier am Beispiel der Aufteilung 90€ auf den roten Würfel)! Folge den Anweisungen!

1) Würfelt sechzigmal mit beiden Würfeln und tragt eure Ergebnisse ein! Am besten eine Person würfelt und die andere schreibt die Ergebnisse auf!

3) Berechnet den Gesamtgewinn bzw. -verlust des ersten Wurfs! Dazu müssen bloß die einzelnen Auszahlungen addiert werden.

Aufteilung: roter Würfel 90 €, blauer Würfel 10 €											
Nr.	Ergebnis		Auszahlung rot	Auszahlung blau	Gesamt	Nr.	Ergebnis		Auszahlung rot	Auszahlung blau	Gesamt
	rot	blau					rot	blau			
1	1	4	$300 - 0,9 \cdot 90 = 180$	-10	170	31	2	3	$300 - 0,9 \cdot 90 = 180$	$300 - 0,1 \cdot 10 = 20$	200
2	5	2	-90	$300 - 0,1 \cdot 10 = 20$	-70	32	6	5	-90	-10	-100

2) Berechnet gemäß der Aufteilung den Gewinn des roten Würfels und des blauen Würfels! Die Rechnung kann weggelassen werden! Die angeführten Berechnungen gelten hier für eine Aufteilung von 90 auf rot und 10 auf blau (siehe Überschrift in der Tabelle). Führt die Berechnungen bei eurer Aufteilung analog durch!

4) Vervollständigt die Tabelle!

Nach dem Ausfüllen der Tabelle beantworte die folgenden Fragen!

- a. Wie viel Geld gewinnt ihr bei eurer Strategie im Mittel pro Spiel?
 - b. Berechnet für eure Strategie den Erwartungswert des Gewinns!
 - c. Wie erklärt ihr euch ein Abweichen des Mittelwerts (a.) vom Erwartungswert (b.)?
3. **Vergleich:** Die Analysen der einzelnen Strategien werden nun im Plenum verglichen.
 4. **Ergebnis:** Wie würdest du einer Person, die an dem Spiel teilnehmen möchte, raten die Aufteilung vorzunehmen?

Aufteilung: roter Würfel ____ €, blauer Würfel ____ €											
Nr.	Ergebnis		Auszahlung rot	Auszahlung blau	Gesamt	Nr.	Ergebnis		Auszahlung rot	Auszahlung blau	Gesamt
	rot	blau					rot	blau			
1						31					
2						32					
3						33					
4						34					
5						35					
6						36					
7						37					
8						38					
9						39					
10						40					
11						41					
12						42					
13						43					
14						44					
15						45					
16						46					
17						47					
18						48					
19						49					
20						50					
21						51					
22						52					
23						53					
24						54					
25						55					
26						56					
27						57					
28						58					
29						59					
30						60					

Kommt es doch auf die Aufteilung an? (GeoGebra)

2

Aufgaben

1. Bereite die GeoGebra-Datei über die Würfelergebnisse des letzten Arbeitsblatts vor!
2. Wie viele von den hundert Spielen hast du verloren? Füge in deinem GeoGebra-Arbeitsblatt eine zusätzliche Funktion hinzu, folge der Anweisung!

	A	B	C	D	E	F	G
1	Würfel rot	Würfel blau	Auszahlung rot	Auszahlung blau	Auszahlung gesamt	Anteil rot	
2	2	3	100	100	200	50	
3	4	3	-50	100	50		
4	3	4	100	-50	50		
5	3	4	100	-50	50	Mittelwert	59
6	3	3	100	100	200		
7	1	6	100	-50	50	Häufigkeiten	Verlust
8	2	2	100	100	200	absolute	20
9	6	1	-50	100	50	relative	0.2

1) **Tabelle:** Schreibe `ZähleWenn[x<0, E2:E101]` in die Zelle G8 ein und berechne anschließend den relativen Wert in der Zelle G9!

3. Probiere verschiedene Strategien aus! Gibt es einen Unterschied zwischen den einzelnen Strategien?
4. Berechne die Standardabweichung des Spiels auf Blatt 1 für folgende Strategien:
 - a. 100 € auf den roten Würfel
 - b. 0 € auf den roten Würfel
 - c. 50 € auf den roten Würfel
 - d. Zeige, dass bei der Strategie 50 € auf den roten Würfel die Varianz des Gewinns minimal wird!
5. Wie würdest du einem Feigling, also einem sehr risikoscheuen Menschen, raten, die Aufteilung vorzunehmen?

Kommt es doch auf die Aufteilung an? (haptisch)

2

Aufgaben

1. Nimm das Arbeitsblatt der Würfelergebnisse des letzten Arbeitsblatts zur Hand!
2. Wie viele von den dreißig Spielen bei einer Strategie hast du verloren? Notiere die absolute und die relative Häufigkeit der Verluste für alle drei Strategien!
3. Vergleiche die drei gewählten Strategien! Gibt es einen Unterschied zwischen den einzelnen Strategien?
4. Berechne die Standardabweichung des Spiels auf Blatt 1 für folgende Strategien:
 - a. 100 € auf den roten Würfel
 - b. 0 € auf den roten Würfel
 - c. 50 € auf den roten Würfel
 - d. Zeige, dass bei der Strategie 50 € auf den roten Würfel die Varianz des Gewinns minimal wird!
5. Wie würdest du einem Feigling, also einem sehr risikoscheuen Menschen, raten, die Aufteilung vorzunehmen?

Kommt es doch auf die Aufteilung an? (Gruppenexploration)

2

Ablauf:

1. Vorbereitung: Suche dir die Partnerin bzw. den Partner, mit der/dem du das Arbeitsblatt 1 beantwortete hast! Bereite nun die Aufzeichnungen über die Würfelergebnisse des letzten Arbeitsblatts vor!
2. Analyse: Untersucht die aufgezeichneten Daten nach den folgenden Aspekten!
 - a. Wie oft von den sechzig Spielen habt ihr Geld verloren?
 - b. Gebt eine Näherung für die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes bei eurer Strategie an!
 - c. Berechne weitere statistische Kennzahlen wie die Spannweite und die empirische Standardabweichung! Was sagen diese Zahlen aus?
3. Vergleich: Die Analysen der einzelnen Strategien werden nun im Plenum verglichen.
4. Nachweis: Zeigt, dass bei der Strategie mit 50 € auf den roten Würfel die Varianz (und daher auch die Standardabweichung) des Gewinns minimal ist!
5. Ergebnis: Wie würdest du einer Person, die möglichst wenig Geld verlieren, aber trotzdem an dem Spiel teilnehmen möchte, raten die Aufteilung vorzunehmen?

Risiko am Finanzmarkt

3

Die unten stehenden vier Diagramme auf der linken Seite zeigen jeweils den Verlauf der Schlusskurse einer bestimmten Aktie in 12 aufeinanderfolgenden Wochen (es handelt sich um unterschiedliche Zeitabschnitte bei den vier Aktien). Die unten stehenden vier Diagramme auf der rechten Seite zeigen den Verlauf der Rendite der jeweiligen Aktie. Betrachte die Diagramme genau und beantworte anschließend die Fragen!

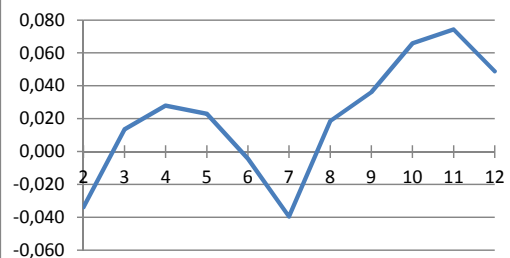
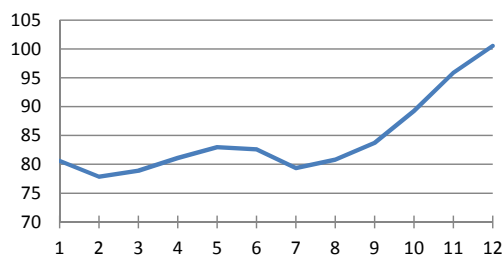
Infobox

Was versteht man unter der Rendite einer Aktie? Eine Rendite entspricht den relativen Kursänderungen einer Aktie. Wenn der Kurs einer Aktie am 1. Jänner 2012 ein Betrag von 100 € aufweist und am 1. Jänner 2013 auf 125 € gestiegen ist, dann berechnet man daraus die Jahresrendite durch $(125-100)/100=25\%$. Es können mit passenden Daten auch Tages-, Wochen-, oder Monatsrenditen berechnet werden. Diese Art von Rendite heißt einfache Rendite. Aufgrund der Daten in der nebenstehenden Tabelle ergibt sich ein arithmetisches Mittel der Rendite von 5,07%.¹

Jahr	Schlusskurs	Rendite
2012	100	
2013	125	25%
2014	120	-4%
2015	108	-10%
2016	118	9,26%
Arith. Mittel		5,07%

¹ Streng genommen ist die Verwendung des arithmetischen Mittels bei Renditen falsch, da es sich um relative Änderungen handelt. Korrekt wäre es, das geometrische Mittel zu verwenden. Finanzmathematiker/innen wissen sehr wohl über diese Problematik Bescheid. Sie verwenden entweder logarithmische Renditen oder trotzdem das arithmetische Mittel, da es bei kleinen Kursänderungen, die häufiger vorkommen, keinen großen Unterschied macht.

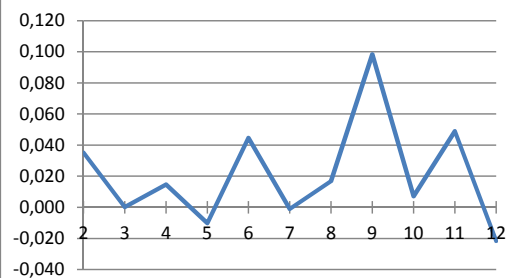
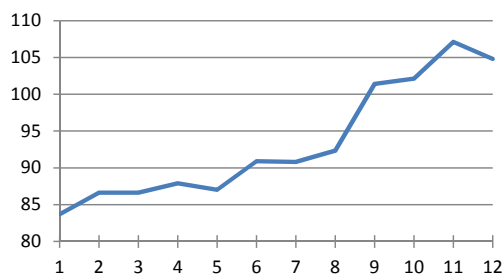
Facebook



Woche	Kurs €	Woche	Kurs €	Woche	Kurs €
1	80,58	5	82,96	9	83,73
2	77,85	6	82,60	10	89,24
3	78,90	7	79,34	11	95,86
4	81,10	8	80,81	12	100,54

Woche	Rendite	Woche	Rendite	Woche	Rendite
5	0,023	9	0,036		
2	-0,034	6	-0,004	10	0,066
3	0,013	7	-0,039	11	0,074
4	0,028	8	0,019	12	0,049

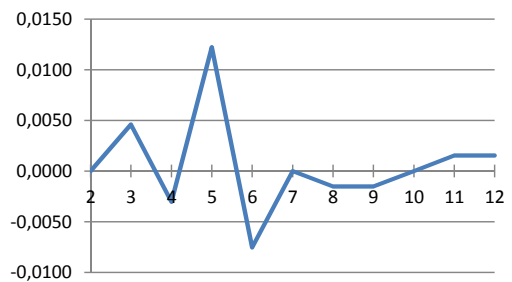
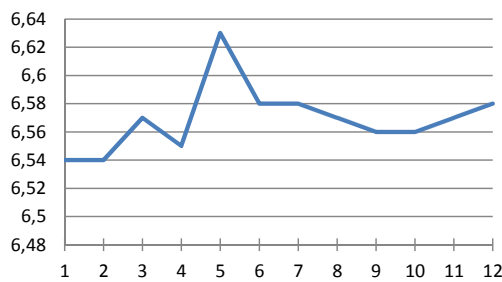
McDonald's



Woche	Kurs €	Woche	Kurs €	Woche	Kurs €
1	83,68	5	87,01	9	101,40
2	86,62	6	90,89	10	102,12
3	86,63	7	90,79	11	107,12
4	87,90	8	92,32	12	104,81

Woche	Rendite	Woche	Rendite	Woche	Rendite
5	-0,010	9	0,098		
2	0,035	6	0,045	10	0,007
3	0,000	7	-0,001	11	0,049
4	0,015	8	0,017	12	-0,022

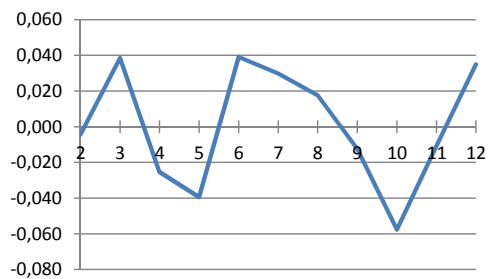
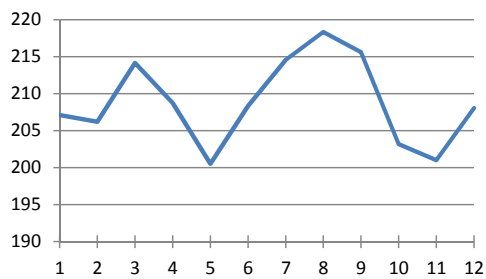
Telekom



Woche	Kurs €	Woche	Kurs €	Woche	Kurs €
1	6,54	5	6,63	9	6,56
2	6,54	6	6,58	10	6,56
3	6,57	7	6,58	11	6,57
4	6,55	8	6,57	12	6,58

Woche	Rendite	Woche	Rendite	Woche	Rendite
		5	0,012	9	-0,002
2	0,000	6	-0,008	10	0,000
3	0,005	7	0,000	11	0,002
4	-0,003	8	-0,002	12	0,002

Tesla



Woche	Kurs €	Woche	Kurs €	Woche	Kurs €
1	207,11	5	200,50	9	215,62
2	206,20	6	208,35	10	203,19
3	214,16	7	214,55	11	201,01
4	208,73	8	218,32	12	208,04

Woche	Rendite	Woche	Rendite	Woche	Rendite
		5	-0,039	9	-0,012
2	-0,004	6	0,039	10	-0,058
3	0,039	7	0,030	11	-0,011
4	-0,025	8	0,018	12	0,035

Fragen:

1. In welche der angeführten Aktien würdest du am ehesten investieren?
2. Welche Zahlen sind für Investitionen aussagekräftiger, die Kurse in Euro oder die Renditen?
3. Welche der vier Aktien erscheint dir am riskantesten? Überlege dir, wie man das Risiko aus den Daten berechnen könnte? Berechne aufgrund deiner Überlegungen diese Zahl/en bei den vier Aktien!
4. In welche der angeführten Aktien würdest du nun am ehesten investieren?
5. Inwiefern ist die Aussagekraft dieser oben berechneten Zahl für eine Investitionsentscheidung beschränkt?

Zusammenhängende Werte

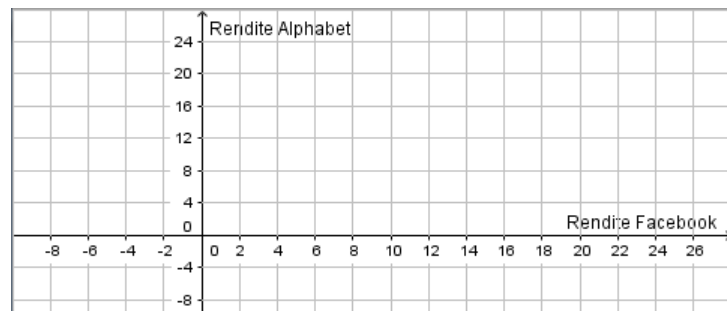
4

Wie verhalten sich die Renditen von Unternehmen aus der gleichen Branche? Wie sieht es bei Aktien unterschiedlicher Branchen aus? Steigen die Renditen gleichzeitig, fallen sie gleichzeitig, weisen sie ein gegenläufiges Verhalten auf oder lässt sich gar kein Zusammenhang erkennen? In der folgenden Aufgabe untersuchen wir die Verläufe der Renditen zweier Aktien auf Gemeinsamkeiten.

Zeichne die Punkte mit den Koordinaten (einf. Rendite 1. Aktie | einf. Rendite 2. Aktie) in das Koordinatensystem ein!

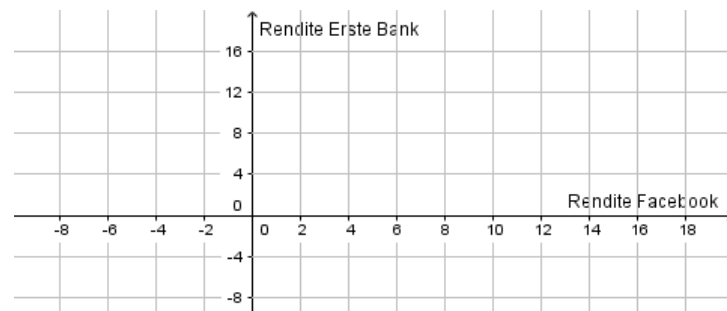
Facebook – Alphabet (ehemals Google)

Monat	Einf. Monatsrendite	
	Facebook	Alphabet
Jan 15	-1%	1%
Feb 15	6%	7%
Mrz 15	17%	18%
Apr 15	-1%	-4%
Mai 15	-7%	-1%
Jun 15	11%	23%
Jul 15	7%	-2%
Aug 15	2%	1%
Sep 15	-8%	-6%
Okt 15	10%	3%
Nov 15	4%	6%
Dez 15	5%	8%



Facebook – Erste Bank

Monat	Einf. Monatsrendite	
	Facebook	Erste Bank
Jan 15	-1%	0%
Feb 15	6%	8%
Mrz 15	17%	2%
Apr 15	-1%	0%
Mai 15	-7%	-4%
Jun 15	11%	6%
Jul 15	7%	-3%
Aug 15	2%	4%
Sep 15	-8%	1%
Okt 15	10%	-1%
Nov 15	4%	20%
Dez 15	5%	1%



Aufgaben:

1. Besteht ein statistischer Zusammenhang zwischen den monatlichen Renditen der 1. Aktie und den monatlichen Renditen der 2. Aktie?
2. Berechne den Korrelationskoeffizienten als Maßzahl für den linearen Zusammenhang der beiden monatlichen Renditen!
3. Welche Aussagen lassen sich aufgrund der statistischen Beobachtungen/Berechnungen tätigen?
4. Inwiefern ist die Aussagekraft dieser Maßzahlen begrenzt?

Würfelspiel auch in der Finanzwelt?

5

Wenn ich mein Vermögen in Aktien anlegen möchte, dann muss ich überlegen, wie viel ich in welche Aktie investiere. Drei Punkte sind für alle Anleger/innen zentral: Wie groß ist die zu erwartende Rendite einer Aktie und wie groß ist das zu erwartende Risiko einer Aktie und wie stark werden diese Aktien miteinander korrelieren? Wenn man sein Vermögen in mehr als ein Wertpapier investiert, dann fasst die Finanzwelt alle Anlagen, die ein/e Investor/in hält, unter dem Begriff Portfolio zusammen. Ähnlich wie beim Würfelspiel (auf Blatt 1) stellt sich die Frage, welcher Anteil des zur Verfügung stehenden Vermögens in welche Wertpapiere fließen soll? Wünschenswert wäre, dass das Risiko Geld zu verlieren möglichst klein und die zu erwartende Rendite möglichst groß werden. Angenommen, wir möchten 10 000 € in ein Portfolio investieren, das aus der Facebook-Aktie und der Erste-Bank-Aktie besteht. Die zu erwartenden Monatsrenditen μ_a und μ_b betragen jeweils 4%, während sich die zu erwartenden Risiken σ_a und σ_b jeweils auf 7% belaufen, wobei die beiden Kurse keine Korrelation aufweisen. Die beiden Aktien sind nach den beiden Kennzahlen genau gleich. **Rechne nach auf Blatt 3!**

Infobox

Was versteht man unter dem zu erwartenden Risiko einer Aktie?

Das zu erwartende Risiko ist eine Zahl, die lässt sich durch die empirische Streuung der Renditen der vergangenen Perioden schätzen. Die Standardabweichung der Renditen eignet sich als Maßzahl dafür. Für

die Daten rechts berechnet sie sich durch $\sigma = \sqrt{\frac{(25-5,07)^2 + (-4-5,07)^2 + (-10-5,07)^2 + (9,26-5,07)^2}{4}} = 13,45\%$.

Was versteht man unter der zu erwartenden Rendite eines Portfolios aus zwei Aktien?

Die zu erwartende Rendite des Portfolios ist das mit den Portfolioanteilen gewichtete Mittel der zu erwartenden Renditen der beiden Anlagen: $\mu_p = a \cdot \mu_a + b \cdot \mu_b$

a, b prozentuale Anteile der Anlagen ($a + b = 1$)

μ_a, μ_b zu erwartende Renditen der Anlagen

Was versteht man unter dem zu erwartenden Risiko eines Portfolios aus zwei Aktien?

Alle Aktien und andere Wertpapiere, die jemand besitzt, bilden zusammen ein sogenanntes Portfolio.

Das Risiko eines Portfolios mit zwei Aktien berechnet sich durch $\sigma_p = \sqrt{a^2\sigma_a^2 + b^2\sigma_b^2 + 2ab\sigma_a\sigma_b\rho_{ab}}$

Bezeichnungen:

a, b prozentuale Anteile der Anlagen ($a + b = 1$)

σ_a, σ_b Risiko der Anlagen

ρ_{ab} Korrelationskoeffizient

Jahr	Schlusskurs	Einfache Rendite
2012	100	
2013	125	25%
2014	120	-4%
2015	108	-10%
2016	118	9,26%
Arith. Mittel		5,07%
Standardabw.		13,45%

Berechne das Risiko und die Rendite des Portfolios nach den obigen Formeln! Trage die Werte entsprechend in die unten stehende Tabelle ein! Was fällt dir auf?

Welche Aufteilung muss vorgenommen werden, damit das zu erwartende Risiko am kleinsten ist?

Anteil		zu erwartende	zu erwartendes
Aktie A	Aktie B	Portfoliorendite	Portfoliorisiko
100%	0%		
80%	20%		
60%	40%		
40%	60%		
20%	80%		
0%	100%		

Das Aufteilen seines Geldes auf mehrere verschiedene Anlagen nennt man Diversifikation. **Inwiefern zahlt sich Diversifikation bei den beiden betrachteten Aktien aus?**

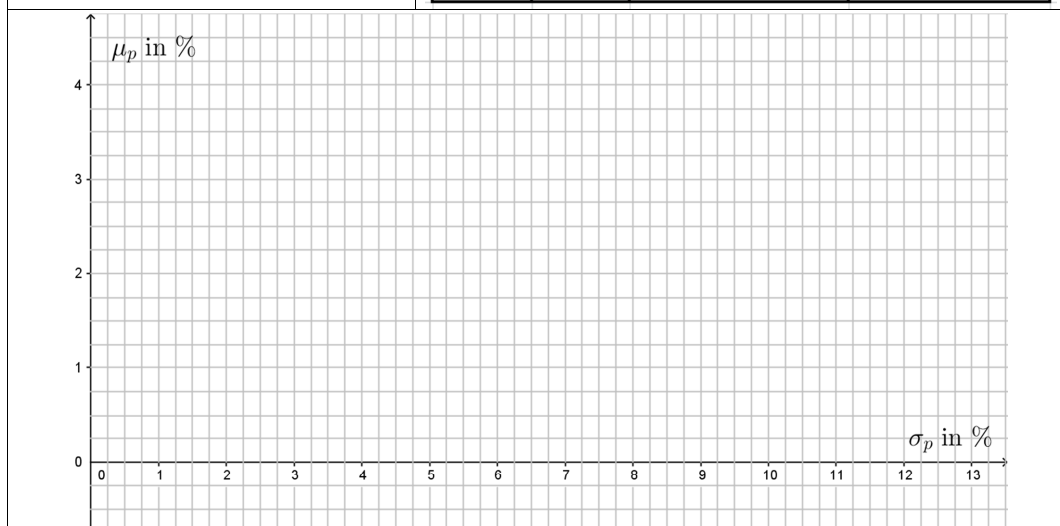
Würfelspiel auch in der Finanzwelt?

6

Zuvor haben wir zwei „gleich gute“ Aktien betrachtet. Wie soll eine Aufteilung bei ungleich guten Aktien wie zum Beispiel der Facebook-Aktie und der Lufthansa-Aktie vorgenommen werden? Die Facebook-Aktie ist nach den beiden Kennzahlen besser, soll auch hier ein Teil des Vermögens in die Lufthansa-Aktie investiert werden?

1. Berechne die zu erwartenden Monatsrenditen und das dazugehörige Risiko der Facebook-Aktie und der Lufthansa-Aktie aus den historischen Daten und fülle die Tabelle aus!
2. Trage Punkte mit den Koordinaten (zu erwartende Portfoliorendite | zu erwartendes Portfoliorisiko) in das unten stehende Risiko-Rendite-Diagramm ein! Beschreibe die entstandene Punktwolke!
3. Vergleiche die Ergebnisse mit dem Portfolio auf Blatt 3! Findest du die Ergebnisse überraschend?
4. Inwiefern zählt sich Diversifikation bei diesen beiden Aktien aus?
5. Welche Problematik ergibt sich eigentlich durch die Berechnung der Kennzahlen aus historischen Daten?

Facebook – Lufthansa						
Monat	Einf. Monatsrendite		Anteil		zu erwartende Portfoliorendite	zu erwartendes Portfoliorisiko
	Facebook	Lufthansa	Aktie A	Aktie B		
Jan 15	-1%	7%	100%	0%		
Feb 15	6%	2%	90%	10%		
Mrz 15	17%	8%	80%	20%		
Apr 15	-1%	14%	70%	30%		
Mai 15	-7%	-12%	60%	40%		
Jun 15	11%	6%	50%	50%		
Jul 15	7%	-9%	40%	60%		
Aug 15	2%	3%	30%	70%		
Sep 15	-8%	-5%	20%	80%		
Okt 15	10%	0%	10%	90%		
Nov 15	4%	-13%	0%	100%		
Dez 15	5%	7%				



1. Berechnung des Portfoliorisikos: Das Risiko eines Portfolios ist eine nichtlineare Kenngröße, deswegen hat die Formel eine komplexere Struktur als die zu erwartende Rendite des Portfolios.

Leite die Formel für das Risiko eines Portfolios mit zwei Aktien her, d.h. berechne die Standardabweichung allgemein, wobei a_i der Wert der Aktie A zum Zeitpunkt i und b_i der Wert der Aktie B zum Zeitpunkt i ist und $p_i = a \cdot a_i + b \cdot b_i$ der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt i ist. Die Variablen a und b bezeichnen den Anteil der Aktien A und B am Portfolio und μ_p die zu erwartende Rendite des Portfolios.

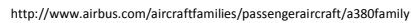
$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (p_i - \mu_p)^2$$

- i. Schreibe statt p_i den Ausdruck $a \cdot a_i + b \cdot b_i$ in die Formel!
- ii. Setze für $\mu_p = a \cdot \mu_a + b \cdot \mu_b$ ein!
- iii. Beachte, dass $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - \mu_a)^2 = \sigma_a^2$ gilt (analog für σ_b^2)!
- iv. Der Korrelationskoeffizient berechnet sich durch $\rho_{ab} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i - \mu_a}{\sigma_a} \right) \cdot \left(\frac{b_i - \mu_b}{\sigma_b} \right)$.

2. Nebstehend findest du 12 Monatsrenditen der Coca-Cola-Aktie und der Alphabet-Aktie aus dem Jahr 2015. Berechne jene Aufteilung deines Investitionsvermögens, bei der das zu erwartende Risiko minimal wird!

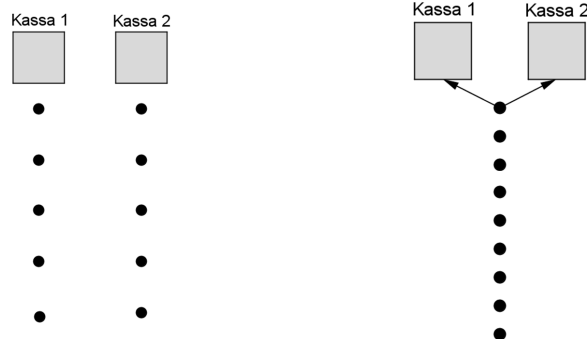
Monat	Einf. Monatsrendite	
	Coca-Cola	Alphabet
Jan 15	-1%	1%
Feb 15	5%	7%
Mrz 15	8%	18%
Apr 15	2%	-4%
Mai 15	-6%	-1%
Jun 15	-6%	23%
Jul 15	-5%	-2%
Aug 15	3%	1%
Sep 15	-5%	-6%
Okt 15	-3%	3%
Nov 15	6%	6%
Dez 15	6%	8%

3. Du möchtest 10 000 € in den Finanzmarkt investieren, suche dir nach deinem Belieben zwei auf einer Börse gehandelte Aktien aus! Recherchiere die Kursdaten im Internet! Berechne die benötigten Kennzahlen und die optimale Aufteilung der 10 000 € auf deine Wunschk Aktien! Kursdaten findet man unter anderem auf www.finanzen.at unter dem Punkt „Historische Kurse“.
4. Jeder Mensch hat eine unterschiedliche Einstellung, wie risikofreudig sie/er in den Finanzmarkt investiert. In der Mathematik modelliert man dieses Verhalten mit Hilfe einer Nutzenfunktion U , das U kommt aus dem Englischen von „utility functions“. Eine solche Nutzenfunktion U für Portfolios kann die Gestalt $U_p = \mu_p - l \cdot \sigma_p^2$ haben. Der Parameter l bestimmt die Risikobereitschaft des/der Inverstors/in.
 - i. Unter welchen Umständen gibt die Funktion U hohe Werte aus?
 - ii. Modelliert ein niedriger Wert für l eine risikoscheue oder eine risikofreudige Person?
 - iii. Berechne den Nutzen der einzelnen Portfolios der jeweiligen Tabelle von Blatt 5 und Blatt 6! Welche Aufteilung hat nun den größten Nutzen?



Diskutiere die folgenden Situationen unter dem Aspekt der Diversifikation, unter Umständen auch in einem weiteren Sinne als nur auf den Finanzmarkt bezogen. Ist Diversifikation in den folgenden Kontexten überhaupt sinnvoll?

- **Situation 1:** Bob behauptet: Der Kauf einer Aktie ist weniger riskant als der Kauf eines Aktienfonds, da bei vielen verschiedenen Anlagen sicher eine Position Verluste schreibt.
- **Situation 2:** Alice hasst das Anstellen im Supermarkt. Es sind zwei Kassen geöffnet und vor jeder Kassa befindet sich eine eigene Warteschlange (linke Abbildung). Sie ist der Überzeugung, dass eine Warteschlange (rechte Abbildung) effizienter ist.



- **Situation 3:** Marie hat ihr ganzes Geld auf einem Sparbuch bei einer Bank liegen.
- **Situation 4:** Franz setzt beim Roulette im Casino 100 € auf die 18, da er am 18.6.1998 Geburtstag hat.
- **Situation 5:** Peter hat mehrere Prüfungen an einem Tag. Er überlegt entweder nur für eine Prüfung zu lernen oder für alle Prüfungen zu lernen.
- **Situation 6:** Frau Steiner hat ein Bauunternehmen. Sie überlegt, ob sie einen großen Auftrag von nur einer Firma annehmen soll oder ob sie mehrere kleinere Aufträge von verschiedenen Firmen annehmen soll.

11.3.10 Musterlösung

Arbeitsblatt 1 – alle Versionen

Eine Berechnung des Erwartungswerts des Gewinns bei diesem Spiel, wenn a Euro auf den roten Würfel und $100 - a$ Euro auf den blauen Würfel gesetzt werden, erläutert nahezu alle Fragestellungen auf dem ersten Arbeitsblatt.

Ein Baumdiagramm ist für die Ermittlung hilfreich, siehe Abbildung 26. Die eingetragenen Werte geben den Gewinn an.

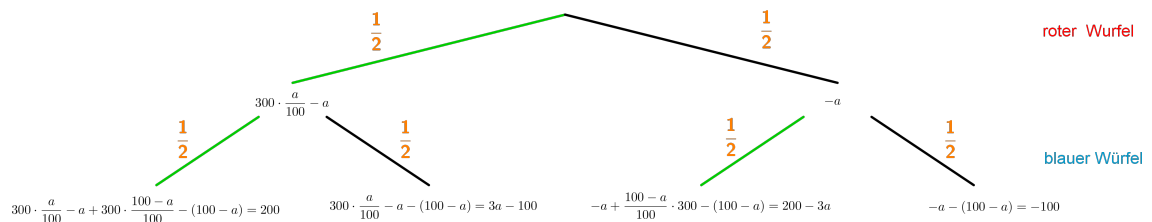


Abb. 26 Wahrscheinlichkeitsbaum

Die eigentliche Rechnung ergibt

$$\mu = \frac{1}{4} \cdot 200 + \frac{1}{4} \cdot (3a - 100) + \frac{1}{4} \cdot (200 - 3a) + \frac{1}{4} \cdot (-100) = 50$$

Im Ergebnis ist die Variable a nicht mehr zu sehen, das bedeutet, der Erwartungswert ist unabhängig vom gesetzten Betrag. Es ist also bezüglich des Erwartungswerts ganz egal, welchen Betrag man auf den blauen Würfel und welchen Betrag man auf den roten Würfel setzt. Das arithmetische Mittel des Gewinns schätzt den gesuchten Erwartungswert. Abweichungen bedingt der Zufall, diese können kleiner und größer ausfallen. Dahinter steht die stochastische Konvergenz, die nicht die Strenge der analytischen Konvergenz aufweist.

Arbeitsblatt 2 – alle Versionen

1. Bei diesem Arbeitsblatt wird nun aufgezeigt, dass die Aufteilung auf einen roten und einen blauen Würfel bezüglich der empirischen Standardabweichung nicht egal ist. Die unten stehende Tabelle listet den Wert der Standardabweichungen (auf ganze Zahlen gerundet) in Abhängigkeit von der Aufteilung, wobei a eben jenen Eurobetrag meint, der auf den roten Würfel gesetzt wurde.

a	$\sigma(a)$
100	150
90	136
80	124
70	114
60	108
50	106
40	108
30	114
20	124
10	136
0	150

Tab. 10 Werte der Standardabweichung in Abhängigkeit von a (gerundet)

2. Die Varianz respektive die Standardabweichung ist bei $a = 50$ am kleinsten.

Beweis. Es genügt die Varianz zu betrachten, da die Wurfelfunktion monoton ist. Die Varianz hat folgende Form

$$\sigma^2(a) = \frac{1}{4} \cdot (200 - 50)^2 + \frac{1}{4} \cdot (3a - 100 - 50)^2 + \frac{1}{4} \cdot (200 - 3a - 50)^2 + \frac{1}{4} \cdot (-100 - 50)^2 \quad (27)$$

$$= \frac{150^2}{4} + \frac{9a^2 - 900a + 150^2}{4} + \frac{150^2 - 900a + 9a^2}{4} + \frac{150^2}{4} \quad (28)$$

$$= 150^2 - 450a + \frac{9}{2}a^2 \quad (29)$$

Wenn man σ^2 als Funktion von a auffasst, dann ist ihr Graph eine nach oben offene Parabel (siehe Vorzeichen). Ihr Minimum befindet sich also im Scheitel dieser und hat die Koordinaten $(50 \mid 11250)$. Das ergibt eine Standardabweichung bei einer Aufteilung von 50 Euro auf den roten Würfel und 50 Euro auf den blauen Würfel von $\sqrt{11250} \approx 106$ Euro. $\square$

Arbeitsblatt 3

1. Individuell beantwortbar.
2. Die Rendite ist die aussagekräftigere Kennzahl für Vergleiche und daher auch für Investitionen, sofern man sich auf den gleichen Zeitraum bezieht. Es ist genau so gut möglich anstatt der Wochenrendite, die Tagesrendite, die Monatsrendite oder die Jahresrendite zu berechnen. Beim Handel interessiert man sich für das Verhältnis zwischen Einsatz und Gewinn bzw. Verlust. Eine Aktie muss zu einem bestimmten Kurs zu einem bestimmten Zeitpunkt gekauft werden und kann zu einem bestimmten Kurs zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt wieder verkauft werden (sofern sich ein Käufer findet).

3. Am besten ist es, wenn man einen Mix aus mehreren Kennzahlen betrachtet. Nach den Erkenntnissen der Portfoliotheorie wäre es gut, Kennzahlen zu Ertrag und Risiko zu betrachten. In diesem Rahmen reicht es, das arithmetische Mittel der 11 Wochenrenditen, sowie die Standardabweichungen der 11 Wochenrenditen zu betrachten bzw. zu berechnen.²⁷ Die Ergebnisse sind in tabellarischer Form angeführt:

	Facebook	McDonald's	Telekom	Tesla
arithmetisches Mittel Wochenrenditen	2,1%	2,1%	0,1%	0,1%
Standardabweichung Wochenrenditen	3,5%	3,2%	0,5%	3,2%

Tab. 11 arithmetisches Mittel und Standardabweichungen der Aktien

4. Wenn man als erstes Kriterium die durchschnittliche Rendite nimmt, dann wären diese Kennzahlen bei der Facebook-Aktie und bei der McDonald's-Aktie gleich 2,1%. Wenn man nun die Auswahl zwischen zwei Aktien hat, wo der erwartete Ertrag gleich ist, dann nimmt man jene, wo das Risiko geringer ist. Als Maß für das Schwanken, das Auf-und-Ab einer Aktie, eignet sich die Standardabweichung. In diesem Fall hat die McDonald's-Aktie eine bessere, kleinere Standardabweichung. Nach diesem Entscheidungskriterium sind die Aktien wie folgt abzustufen:
McDonald's > Facebook > Telekom > Tesla.
5. Die Aussage dieser errechneten Kennzahlen ist äußerst begrenzt. Bei einem so kleinen Datensatz eignet sich auch im frequentistischen Sinne das arithmetische Mittel nicht wirklich als Schätzer für den Erwartungswert, analog bei der empirischen Standardabweichung. Aber auch bei einem sehr großen Datensatz ist man nicht vor unerwarteten Entwicklungen am Finanzmarkt gefeit.

Arbeitsblatt 4

Die Punktwolken haben folgende Formen:

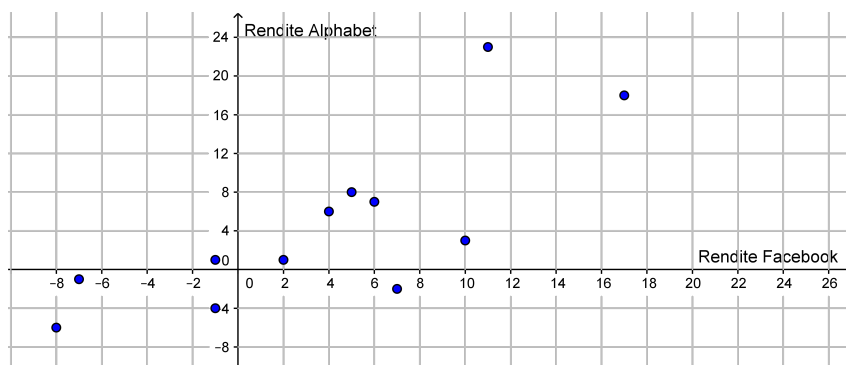


Abb. 27 Punktwolke 1 zu Aufgabenblatt 4

²⁷Wenn ein entsprechendes Computerprogramm zur Verfügung steht, dann können auch größere Datenmengen betrachtet werden.

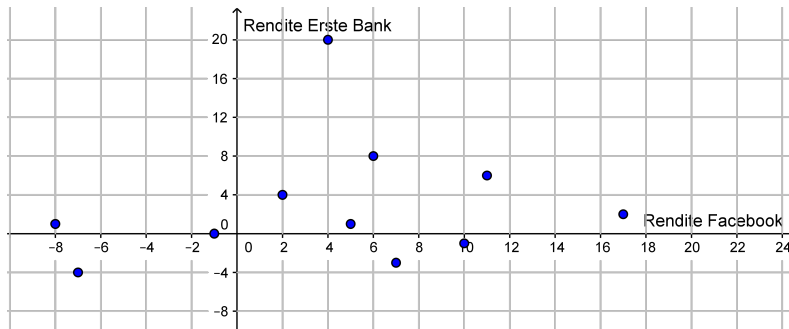


Abb. 28 Punktwolke 2 zu Aufgabenblatt 4

1. Aufgrund der Punktwolken lässt sich bei den monatlichen Renditen der Facebook-Aktie und der Alphabet-Aktie ein linearer Zusammenhang vermuten, bei der zweiten Betrachtung ist das nicht der Fall.
2. Die monatlichen Renditen der Facebook-Aktie und der Alphabet-Aktie weisen einen Korrelationskoeffizient von 0,77 auf. Die monatlichen Renditen der Facebook-Aktie und der Erste-Bank-Aktie weisen einen Korrelationskoeffizient von 0,2 auf. Während sich bei dem ersten Vergleich ein statistischer, linearer Zusammenhang nachweisen lässt, trifft das beim zweiten nicht zu. Hier herrscht im beobachteten Zeitraum kein linearer Zusammenhang.
In einer ersten, aber mit Vorsicht zu genießenden Formulierung, kann gesagt werden: Wenn die Rendite der Alphabet-Aktie stieg, dann stieg auch die Rendite der Facebook-Aktie und umgekehrt. Eine wirtschaftliche Erklärung: Die beiden Unternehmen sind in der gleichen Branche tätig, gewisse Ereignisse wirken sich ähnlich auf das Verhalten der Aktien aus, z.B. eine technische Revolution in der Datenübertragung wirkt sich auch auf beide Aktienkurse ähnlich aus. Wenn die Rendite der Facebook-Aktie stieg, dann kann keine Aussage über das Verhalten der Erste-Bank-Aktie getätigt werden. Eine wirtschaftliche Interpretation: Diese Unternehmen sind nicht in der gleichen Branche tätig, sie reagieren sehr unterschiedlich auf Ereignisse.
3. Der Korrelationskoeffizient bestätigt weder, noch widerlegt er einen kausalen Zusammenhang. Es darf aufgrund der Kennzahl nicht auf einen Ursache-Wirkung-Zusammenhang geschlossen werden. Im besten Fall erhält man einen Hinweis, der näher untersucht werden muss.
4. Des Weiteren sind das Werte aus der Vergangenheit, die nur eine begrenzte Aussage über die Zukunft ermöglichen. Nichtsdestotrotz werden wir diese Werte als Näherungen für zukünftige Werte nehmen und mit ihnen Rechnungen durchführen.

Arbeitsblatt 5

1. Die ausgefüllte Tabelle hat die Form:

Anteil		zu erwartende Portfoliorendite	zu erwartendes Portfoliorisiko
Aktie A	Aktie B		
100%	0%	4%	7%
80%	20%	4%	5,77%
60%	40%	4%	5,05%
40%	60%	4%	5,05%
20%	80%	4%	5,77%
0%	100%	4%	7%

Tab. 12 zu erwartende Portfoliorendite und zu erwartendes Portfoliorisiko

2. Um die perfekte Aufteilung zu finden, muss die Standardabweichung unter der Nebenbedingung $a + b = 1$ minimiert werden, wobei wir annehmen, dass $0 \leq a \leq 1$ und $0 \leq b \leq 1$ gilt. Aus der ersten Nebenbedingung erhält man $a = 1 - b$. Der Term der Zielfunktion σ_p in Abhängigkeit von b hat in diesem Fall die Form

$$\sigma_p(b) = \sqrt{(1-b)^2 \cdot 0,07^2 + b^2 \cdot 0,07^2}$$

Es reicht das Quadrat von σ , die Varianz zu minimieren:

$$\sigma_p^2(b) = 0,0098 \cdot b^2 - 0,0098 \cdot b + 0,0049$$

Es handelt sich dabei um eine quadratische Funktion, dessen Graph eine nach oben offene Parabel ist. Man berechnet die erste Koordinate des Scheitelpunkts und erhält $b = 0,5$. Das Risiko beträgt 0,0495.

3. Durch das Aufteilen des Investitionsvermögens auf beide Finanztitel verringert sich das Risiko, und das obwohl beide Aktien nach den Kennzahlen gleich gut sind. Das geringste Risiko erhält man bei einer gleichmäßigen Aufteilung.

Arbeitsblatt 6

1. Die berechneten Werte sind in der unten stehenden Tabelle abzulesen:

Anteil		zu erwartende Portfoliorendite	zu erwartendes Portfoliorisiko
Aktie A	Aktie B		
100%	0%	3,75%	6,99%
90%	10%	3,44%	6,59%
80%	20%	3,13%	6,30%
70%	30%	2,83%	6,13%
60%	40%	2,52%	6,09%
50%	50%	2,21%	6,18%
40%	60%	1,90%	6,40%
30%	70%	1,59%	6,74%
20%	80%	1,28%	7,17%
10%	90%	0,98%	7,69%
0%	100%	0,67%	8,27%

Tab. 13 zu erwartende Rendite und zu erwartendes Risiko

2. Wenn die Punkte entsprechend eingezeichnet werden, entsteht das typische Bild:

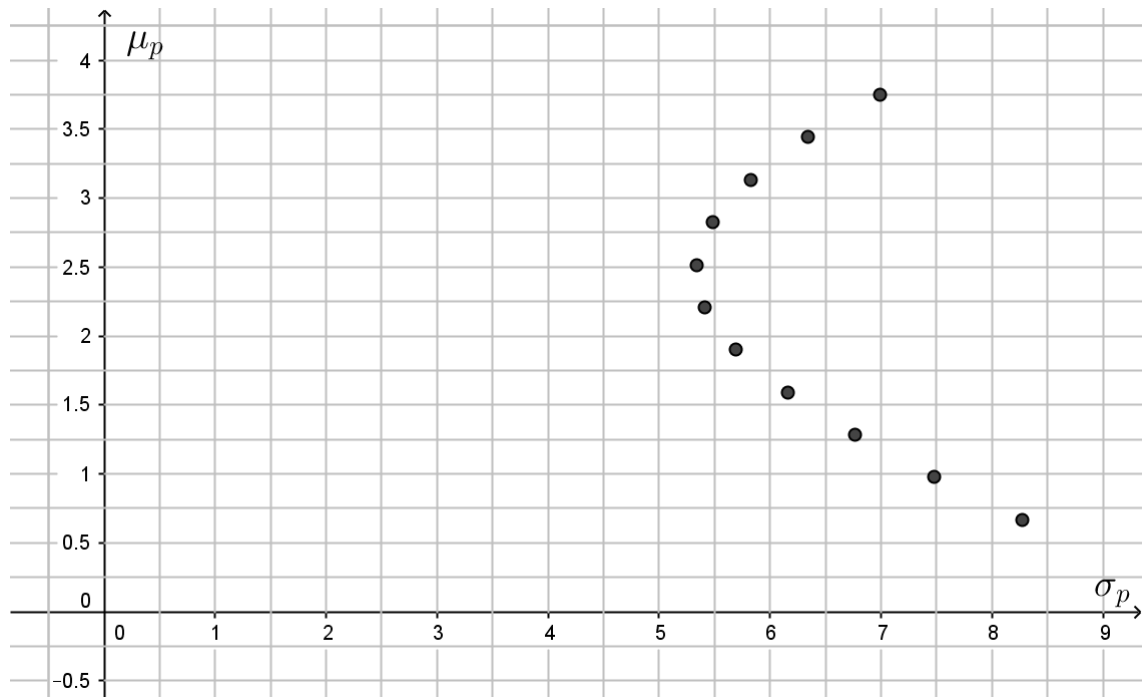


Abb. 29 Eingezeichnete Punkte in das Rendite-Risiko-Diagramm

Zu sehen ist eine Art Parabel. Würde man jede beliebige Aufteilung von a, b mit $0 \leq a, b \leq 1$ einzeichnen, dann würde ein durchgezogener Abschnitt einer Parabel entstehen. Wenn man eine Aufteilung seines Vermögens auf die beiden gegebenen Aktien wählt, dann sollte man eine Aufteilung wählen, dessen Punkt auf dem oberen Ast der Parabel liegt. Würde man umgekehrt eine Aufteilung wählen, dessen Punkt auf dem unteren Ast der Parabel liegt, dann gibt es eine Aufteilung, die für das gleiche Risiko eine höhere Rendite bringt. Diese Entscheidung wäre rational nicht nachvollziehbar. Nur die Punkte, respektive die dahinterstehenden Aufteilungen auf dem oberen Ast der gedachten Parabel sind für eine Investition relevant.

Es gibt einen besonderen Punkt auf der gedachten Parabel und zwar den Scheitelpunkt. Die dahinterstehende Aufteilung hat das geringste Risiko. Bei den zehn ausgerechneten Aufteilungen ist die Aufteilung mit 60% seines Vermögens auf die Facebook-Aktie und 40% auf die Lufthansa-Aktie jene mit dem geringsten Risiko. Die perfekte Aufteilung wäre eine Investition, wo 61,99% seines zu setzenden Vermögens in die Facebook-Aktie investiert werden und 38,01% in die Lufthansa-Aktie.

- Bei einem naiven Zugang könnte man meinen, dass es nicht klug ist, einen Teil seines Vermögens in die klar schlechtere Aktie (hier: Lufthansa) zu investieren. Man sieht aber, dass sich das Risiko bei einer Diversifikation seines Vermögens auch hier verringert.
- Die berechneten Kennzahlen (Rendite, Standardabweichung der Aktien) stammen aus der Vergangenheit und haben nur eine begrenzte Aussage für eine zukünftige Investitionsentscheidung. Mit Hilfe komplexerer Methoden aus der Statistik bekommt man

bessere Kennzahlen.

Arbeitsblatt 7

1. Die Formel für die Standardabweichung des Portfolios erscheint auf den ersten Blick weit hergeholt. Wenn die Hinweise in der Angabe befolgt werden, dann ist die Herleitung nicht schwierig:

$$\begin{aligned}
 \sigma_p^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (p_i - \mu_p)^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a \cdot a_i + b \cdot b_i - \mu_p)^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a \cdot a_i + b \cdot b_i - (a \cdot \mu_a + b \cdot \mu_b))^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a \cdot (a_i - \mu_a) + b \cdot (b_i - \mu_b))^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a^2 \cdot (a_i - \mu_a)^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot (a_i - \mu_a) \cdot (b_i - \mu_b) + b^2 \cdot (b_i - \mu_b)^2) \\
 &= a^2 \cdot \sigma_a^2 + b^2 \sigma_b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \rho_{ab}
 \end{aligned}$$

2. Man berechnet folgende Kennzahlen:

	Coca-Cola	Alphabet
μ	$\frac{1}{3}\%$	4,5%
σ	5,04%	8,302%

Tab. 14 zu erwartende Rendite und zu erwartendes Risiko beider Aktien

Der Korrelationskoeffizient beträgt 0,27. Die Varianz $\sigma_p^2 = 0,0504^2 \cdot a^2 + 0,08302^2 \cdot b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot 0,0504 \cdot 0,08302 \cdot 0,27$ wird unter der Nebenbedingung $a + b = 1$ minimiert. Durch Einsetzen erhält man σ_p in Abhängigkeit von b :

$$\begin{aligned}
 \sigma_p^2(b) &= 0,0504^2 \cdot (1 - b)^2 + 0,08302^2 \cdot b^2 + 2 \cdot (1 - b) \cdot b \cdot 0,0504 \cdot 0,08302 \cdot 0,27 \\
 &= 0,007173 \cdot b^2 - 0,002821 \cdot b + 0,00254
 \end{aligned}$$

Es handelt sich abermals um eine quadratische Funktion. Die Minimumstelle liegt bei $b \approx 0,196$, für a erhält man daher $a \approx 0,804$.

3. Individuell unterschiedlich
4. Bei dieser Aufgabe wird für l der Wert 7 gewählt, denkbar sind auch andere Werte für l . Der Nutzen ist umso größer, je größer die zu erwartende Rendite und je kleiner das zu erwartende Risiko ist. Je größer der Wert l ist, desto größer wird das Risiko gewichtet und daher sinkt der Nutzen des Portfolios. Auf Blatt 5 hat das 50%-50%-Portfolio den größten Nutzen, die Wahl der Aufteilung bleibt also gleich. Bei Arbeitsblatt 6 hat das

90%-10%-Portfolio den größten Nutzen. In den beiden unten stehenden Tabellen kann man die Nutzenwerte für alle berechneten Portfolios nachrechnen.

Anteil		zu erwartende Portfoliorendite	zu erwartendes Portfoliorisiko	Nutzen
Aktie A	Aktie B			
100%	0%	4%	7%	0,0057
80%	20%	4%	5,77%	0,0167
60%	40%	4%	5,05%	0,0221
50%	50%	4%	4,95%	0,0228
40%	60%	4%	5,05%	0,0221
20%	80%	4%	5,77%	0,0167
0%	100%	4%	7%	0,0057

Tab. 15 Nutzenwerte zu Aufgabenblatt 5

Anteil		zu erwartende Portfoliorendite	zu erwartendes Portfoliorisiko	Nutzen
Aktie A	Aktie B			
100%	0%	3,75%	6,99%	0,0033
90%	10%	3,44%	6,59%	0,0040
80%	20%	3,13%	6,30%	0,0035
70%	30%	2,83%	6,13%	0,0020
60%	40%	2,52%	6,09%	-0,0008
50%	50%	2,21%	6,18%	-0,0046
40%	60%	1,90%	6,40%	-0,0097
30%	70%	1,59%	6,74%	-0,0159
20%	80%	1,28%	7,17%	-0,0232
10%	90%	0,98%	7,69%	-0,0316
0%	100%	0,67%	8,27%	-0,0412

Tab. 16 Nutzenwerte zu Aufgabenblatt 6

Arbeitsblatt 8

Zuerst recherchiert man im Internet nach den Kosten eines solchen Jumbo Jets. Ein A380 kostet 432 000 000 \$. Das sind ungefähr 358 560 000 €. Im Internet liest man die ungefähre Wahrscheinlichkeit für einen Flugzeugabsturz nach. Sie beläuft sich laut der Internetseite (www.flugzeug-absturz.de/allgemein/wahrscheinlichkeit-eines-flugzeugabsturzes.html) auf $0,00000007\% = 7 \cdot 10^{-10}$. Eine sehr faire Versicherungsprämie ist jener Betrag, bei dem die erwarteten Leistungen gleich den erwarteten Prämien sind, dieses Prinzip heißt versicherungsmathematisches Äquivalenzprinzip. Aus einem anderen Blickwinkel könnte man auch sagen, dass der Erwartungsgewinn der Versicherung null sein muss. Man bezeichnet mit x die Versicherungsprämie und berechnet x aus der Gewinnerwartung der Versicherung:

$$-(358560000 - x) \cdot 7 \cdot 10^{-10} + x \cdot (1 - 7 \cdot 10^{-10}) = 0$$

Es ergibt sich ein Betrag für die Prämie von 0,25 Euro. Die Standardabweichung beläuft sich jedoch auf:

$$\sqrt{-(358560000 - 0,25)^2 \cdot 7 \cdot 10^{-10} + 0,25^2 \cdot (1 - 7 \cdot 10^{-10})} = \sqrt{89995691,46} = 9486,61$$

Wir rechnen nun die Standardabweichung für den zweiten Fall nach. Die Varianz des Gewinns für die Versicherung eines A380 zur Deckung eines Hundertstels beträgt:

$$\left(-\frac{1}{100} \cdot (358560000 - 0,25)\right)^2 \cdot 7 \cdot 10^{-10} + \left(\frac{1}{100} \cdot 0,25\right)^2 \cdot (1 - 7 \cdot 10^{-10}) = 8999,5691$$

Es werden 100 Flugzeuge des Typs A380 versichert, also haben wir aufgrund der nun unterstellten Unabhängigkeit von Flugzeugabstürzen insgesamt die 100-fache Varianz, also 899956,91. Die Standardabweichung beläuft sich auf 948,66 Euro. Das Risiko von 100 Jumbo Jets ein Hundertstel zu decken, ist wesentlich geringer, als das ganze Risiko bei einem Jumbo Jet zu tragen. Bei unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{100}$, die alle gleich verteilt sind, gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{V\left(\frac{1}{100} \cdot X_1 + \dots + \frac{1}{100} \cdot X_{100}\right)} &= \sqrt{\frac{1}{10000} \cdot V(X_1) + \dots + \frac{1}{10000} \cdot V(X_{100})} \\ &= \sqrt{100 \cdot \left(\frac{1}{10000} \cdot V(X_1)\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{100}} \cdot \sigma(X_1) \\ &= \frac{1}{10} \cdot \sigma(X_1) \end{aligned}$$

Dahinter steckt die Subadditivität der Standardabweichung, bei unabhängigen Zufallsvariablen wächst die Standardabweichung eben proportional zu $\sqrt{n}$.

Arbeitsblatt 9

1. Situation 1: Diese Aussage ist falsch, wie man bei den vorigen Arbeitsblättern gesehen hat.
2. Situation 2: Ihre Überzeugung ist richtig. Bei dem linken System „setzt man alles auf eine Kassa“, wenn es hier Komplikationen gibt, steht man sehr lange. Diversifikation zahlt sich im Sinne einer kleineren Schwankung der Wartezeit aus.
3. Situation 3: Hier wird nicht diversifiziert. Besser wäre es, sein Geld auf mehrere Banken zu verteilen. Die Einlagensicherung in Österreich garantiert aber eine Auszahlungsentschädigung bis zu einer Höhe von 100 000 Euro pro Kreditinstitut und legitimiertem Einleger. Erst ab einem höheren Betrag verringert man mit Diversifikation in Österreich das Risiko aufgrund der Rechtslage.
4. Situation 4: Besser wäre es nicht alles auf eine Zahl zu setzen, sondern sein Spielguthaben auf mehrere Zahlen zu verteilen, wenn man schon an einem Glücksspiel teilnimmt.
5. Situation 5: Hier macht Diversifikation keinen Sinn, dieses Prinzip lässt sich nicht blind in allen Alltagssituationen anwenden.
6. Situation 6: Diversifikation auf mehrere kleine Firmen verringert das Risiko vor einem Zahlungsausfall einer Firma.

11.4 Unterrichtsvorschlag – Kredite und Risiko²⁸

11.4.1 Zusammenfassung

Es handelt sich um einen Unterrichtsvorschlag für die Sekundarstufe II, in diesem wird aufgezeigt, wie sich verschiedene Kredite über einen längeren Zeitraum verhalten. Wir geben zwei Unterrichtsvorschläge zu dieser Thematik. Der erste Zugang ist geführt, die Schülerin bzw. der Schüler wird mit Hilfe von Arbeitsblättern zu den Erkenntnissen geleitet. Ein wesentlicher Bestandteil dieses Vorschlags ist das Verwenden von GeoGebra. Mit Hilfe der Software und den in ihr enthaltenen Schieberegler werden die Dynamiken eines Kredites aufgezeigt. In einem weiteren Schritt, wenn man so will Modellierungsschleife, vermitteln wir mit Hilfe von Zufallszahlen eine probabilistische Sichtweise, wodurch die Risiken eines Kredites sichtbar werden, und führen Simulationen einiger Szenarien durch. Im Anschluss sollen die Lernenden die Risiken eines Fremdwährungskredites kennenlernen.

Der zweite Zugang verläuft im Sinne einer Modellierungsaufgabe. Dem/der Kreditnehmer/in stehen drei Kredite zu Verfügung und die Lernenden müssen den besten der drei finden. Es ist a priori für die Schüler/innen nicht klar, was das Kriterium für den besten Kredit ist. In einem ersten Schritt gilt es also, dieses zu finden und anschließend passende Berechnungen durchzuführen. In klassischen Modellierungsschleifen können Gegebenheiten aus der Realität berücksichtigt werden.

11.4.2 Besonderheiten

Kredite und Tilgungspläne kommen in den österreichischen Schulbüchern (vgl. MALLE/-WOSCHITZ/KOTH/SALZGER, 2010, S. 151 ff. und GÖTZ/REICHEL, 2013, S. 14 und BLEIER/-LINDENBERG/LINDNER/SÜSS-STEPANCIK, 2015, S. 220 ff.) und in den Lehrplänen (vgl. Lehrplan HAK, 2004 bzw. Lehrplan HAK, 2014, Lehrplan HLFS, 2004 und Lehrplan HLFS, 2016, Lehrplan HLA-Mode, 2009, Lehrplan HLA-KG, 2011, Lehrplan HLW-Umwelt, 2008, Lehrplan HLW-Sozm., 2015 bzw. Lehrplan HLA-KG, 2015) und daher auch im Unterricht mit Sicherheit vor. Die Aufgaben vermitteln aber oft einen recht statischen Eindruck, und Risiken, wie Schwankungen des Zinssatzes oder des Wechselkurses werden nicht thematisiert.

11.4.3 Beitrag zu den zentralen Ideen

Dieser Unterrichtsvorschlag liefert einen Beitrag zu den zentralen Ideen *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik, Handhabung von Risiko und Zeitwert von Geld*.

Bisher wurden im Mathematikunterricht, wie zuvor erwähnt, meist nur Kredite betrachtet, deren Zinssätze deterministischer Natur sind. In der Schule bearbeitet man Aufgaben zu Krediten, deren Zinssätze über die gesamte Laufzeit vorgegeben sind. Erst die Betrachtung auf Arbeitsblatt 1, der Zinssatz ist über die Laufzeit fix, aber veränderlich, lässt grundsätzliche Dynamiken bei einem Kredit sichtbar werden.

Die Berechnungen des Schuldenstandes tragen im vollen Umfang zur zentralen Idee *Zeitwert des Geldes* bei. Alle verwendeten Formeln unterliegen dem Grundsatz der Finanzmathematik „Ein Euro heute ist mehr wert als ein Euro morgen“ bei.

Erst eine probabilistische Sichtweise ermöglicht einen Blick auf die Risiken eines Kredites.

²⁸Teile des folgenden Unterrichtsvorschlags wurden in DORNER, 2017 publiziert.

Wenn bei der Aufnahme der Zinssatz über die gesamte Laufzeit bekannt ist, dann haben wir kein Risiko (bis auf den Verlust des Einkommens durch Kündigung, Unfall bzw. Tod eines erwerbstätigen Familienmitglieds und die daraus resultierende Möglichkeit der Begleichung der Raten). Entweder ich kann mir die jährlichen bzw. monatlichen Raten leisten oder nicht. Wenn sich der Zinssatz ändert, dann ändern sich auch die Raten bzw. die Rückzahlungsdauer.²⁹ Die Modellierung des Zinssatzes mit Hilfe von Zufallszahlen *verwendet Stochastik im Kontext Finanzmathematik*. Basierend auf der Annahme, analog zum Aktienkurs, die Veränderungen des Zinssatzes sind nicht vorhersehbar.

Bei dieser Aufgabe steht auch das Identifizieren des Risikos bei einem normalen Kredit bzw. einem Fremdwährungskredit aus der Sicht des Kreditnehmers im Vordergrund. In basalen Grundzügen werden Maßnahmen zur Absicherung behandelt. Dabei fokussieren wir auf das Vermeiden von zusätzlichen Risiken wie bei einem Fremdwährungskredit das Wechselkursrisiko. Also das explizite Abraten der Aufnahme eines solchen Kredits. Des Weiteren thematisieren wir verschiedene Kreditarten, die der Realität entsprechen und unter Umständen eine Absicherung darstellen. Diese Betrachtungen rund um das Risiko eines Kredites liefern einen Beitrag zur *zentralen Idee Handhabung von Risiko*.

11.4.4 Erfüllen der Kriterien von guter Anwendung im Mathematikunterricht

1. Formale Aspekte

Dieser Unterrichtsvorschlag ist an sich für die zehnte Schulstufe für 6-8 Unterrichtsstunden konzipiert. Die Voraussetzungen der Schüler/innen sind bei geeigneter Einplanung der Aufgabe im Schuljahr erfüllt. Wenn eine Lehrperson nicht so viele Unterrichtsstunden zur Verfügung hat, dann kann individuell gekürzt werden. Es ist möglich nur das Arbeitsblatt 1 oder Arbeitsblatt 1 und 2 oder alle Arbeitsblätter ohne die Vertiefung im Unterricht durchzunehmen.

2. Eignung

Bankkredite sind kein Objekt des alltäglichen Lebens eines/r Schüler/in. Hingegen ist das Ausborgen von Geld, sei es von den Eltern oder Freunden, aber gang und gäbe für Schüler/innen. Sie sind also mit einer Art von Krediten unmittelbar betroffen. Viele trifft es aber mit Sicherheit im späteren Leben, z.B. beim Erwerb eines Eigenheims muss meistens ein Kredit aufgenommen werden. Nach einer Studie (vgl. <http://orf.at/stories/2208386/2208367/>) verschulden sich viele junge Erwachsene durch den Kauf eines Smartphones oder den Kauf eines Autos. Des Weiteren sind 14% aller Klienten bei der Erstkonsultation bei der Schuldenberatung 25 Jahre alt oder sogar jünger. Hinzu kommt, dass sich Studentenkredite immer größerer Beliebtheit erfreuen. Ein Trend der aus den Vereinigten Staaten kommt, vor allem um die Studiengebühren bezahlen zu können. Das Thema ist also für die mutmaßliche spätere Existenz bzw. für unmittelbar auf die Schule folgende Existenz äußerst relevant.

3. Authentizität

Diese Betrachtungen liefern das erste Mal einen Blick in die Richtung eines sich verändernden Zinssatzes und sind in dieser Hinsicht als authentisch anzusehen. Die Modellierung des Zinssatzes ist eine typische Tätigkeit eines/r Finanzmathematikers/in. Die in

²⁹Je nachdem was vereinbart wurde.

den Arbeitsblättern vorgeschlagene Modellierung des Zinssatzes mit einfachen gleichverteilten Zufallszahlen muss klarerweise als geschönt betrachtet werden. Diese Vereinfachung ist aber in diesem Zusammenhang zulässig.

4. Mathematische Aspekte

Die dahinterstehende Mathematik umfasst Zinseszinsrechnungen, einfache Differenzgleichungen erster Ordnung, die geometrische Reihe bei der Tilgungsgleichung und Begriffe wie Zufallszahl und Gleichverteilung. Differenzgleichungen kommen im AHS-Lehrplan erst in der 12. Schulstufe vor, das sollte aber kein Grund sein, diese Aufgabe nicht schon in der 6. Klasse (10. Schulstufe) zu verwenden, denn der Lehrplan, beispielsweise der AHS, schreibt ohnehin Folgen und Reihen vor. Die Überlegungen und Berechnungen mit der Tilgungsgleichung sind keineswegs als trivial für eine/n Schüler/in abzutun, jedoch überschreiten sie mit Technologieeinsatz auch nicht den Horizont eines/r Schüler/in.

11.4.5 Fokusbegriffe

Die Gedankenverknüpfungen zu dem Fokusbegriff *Zufall* sind vielfältig. Dieser Unterrichtsvorschlag reiht sich unter dem Aspekt des subjektiv unvorhersehbaren Zufalls ein (vgl. DÖHRMANN, 2004, S. 27 f.). Es wird die Änderung des Zinssatzes thematisiert. Den Leitzinssatz im Euroraum legt die Europäische Zentralbank (EZB) fest, dabei melden die sogenannten 24 EURIBOR-PANEL-Banken ihre Zinssätze an eine spezielle Firma. Anschließend bestimmt man den Durchschnitt der gemeldeten Zinssätze, wobei die 15% niedrigsten und die 15% höchsten Zinssätze bei der Berechnung nicht berücksichtigt werden. Der Kurs hängt einerseits von wirtschaftlichen Entscheidungen der Geschäftsbanken und der Europäischen Zentralbank, andererseits auch von politischen bzw. politisch-regulatorischen Maßnahmen ab. Wann Ereignisse, die den Kurs beeinflussen, passieren, kann nicht vorhergesagt werden. Im Nachhinein lässt sich in nahezu allen Fällen die Kursveränderung nachvollziehen und die Änderung erscheint deterministisch. Jede einzelne Person hat, ausgenommen Mitglieder krimineller Machenschaften, die Insiderwissen besitzen oder bewusst manipulieren, nicht genügend Informationen, um ausreichend alle änderungsrelevanten Ereignisse zu überblicken. In diesem Fall spricht man von subjektiv unvorhersehbaren Phänomenen (vgl. DÖHRMANN, 2004, S. 28). Eine Art subjektiver Zufall.

Die folgenden Arbeitsblätter erfordern ein Modellieren des Zinssatzes. Dieses soll unter anderem auf verschiedene Arten mit Zufallszahlen geschehen. Die vorzugebende Verteilung dieser Zufallszahlen bedingt einen Umgang mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff. Hier tritt genau jener Fall ein, in dem man die Wahrscheinlichkeit weder als relativen Anteil (*Laplacescher Wahrscheinlichkeitsbegriff*) noch als relative Häufigkeit (*frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff*) ermitteln kann. Logische Überlegungen führen zu einer ersten Annäherung einer vertretbaren Modellierung des Zinssatzes. Es findet eine Konfrontation, wenn auch zum Teil nur implizit, mit dem *subjektivistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff* statt.

11.4.6 Einbettung in bestehende Unterrichtsvorschläge

Der hier vorgestellte probabilistische Unterrichtsvorschlag zu Krediten muss nicht den Beginn im Unterricht mit diesem Thema darstellen. Es empfiehlt sich durchaus ein deterministischer Start in der gewohnten Weise bei der Tilgungsrechnung. Dazu gibt es unzählige Vorschläge in Schulbüchern, in diesem Zusammenhang sei auch auf die Unterrichtseinheit „Leben auf Pump“ (siehe DAUME, 2016, S. 145 ff.) verwiesen.

11.4.7 Vorkenntnisse

1. Summenformeln endlicher geometrischer Reihen kennen
2. Begriffe „Zufallsversuch“, „Versuchsausfall“ und „Ereignis“ kennen.
3. Umgang mit GeoGebra: Arbeiten in der Algebra-, Grafik- und Tabellenansicht

11.4.8 Zeitbedarf

6-8 Unterrichtsstunden (individuell verkürzbar, durch Weglassen von Arbeitsblättern)

11.4.9 Lehrplanbezug (AHS)

- Kritisch-argumentatives Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, Hinterfragen, Ausloten von Grenzen und Begründen zu tun haben; das Beweisen heuristisch gewonnener Vermutungen ist ein Schwerpunkt dieses Tätigkeitsbereichs

Lehrstoff:

6. Klasse:

- Arbeiten mit arithmetischen und geometrischen Folgen und Reihen, Erkennen des Zusammenhangs zwischen arithmetischen Folgen und linearen Funktionen sowie zwischen geometrischen Folgen und Exponentialfunktionen
- Verwenden von Folgen zur Beschreibung diskreter Prozesse in anwendungsorientierten Bereichen (**insbesondere Geldwesen**)
- Kennen des Begriffes Zufallsversuch, Beschreiben von Ereignissen durch Mengen
- Kennen der Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs; Auffassen von Wahrscheinlichkeiten als relative Anteile, als relative Häufigkeiten und als subjektives Vertrauen

7. Klasse:

- Kennen der Begriffe diskrete Zufallsvariable und diskrete Verteilung

8. Klasse:

- Beschreiben von Systemen mit Hilfe von Wirkungsdiagrammen, Flussdiagrammen, Differenzgleichungen oder Differentialgleichungen
- Untersuchen des dynamischen Verhaltens von Systemen
- Kennen der Begriffe stetige Zufallsvariable und stetige Verteilung
- Arbeiten mit der Normalverteilung in anwendungsorientierten Bereichen

11.4.10 Lernziele

1. Die Schüler/innen können Risikoquellen eines Kredites und insbesondere eines Fremdwährungskredites aus der Sicht der Kreditnehmenden nennen.
2. Die Schüler/innen sind in der Lage, günstige und ungünstige Verläufe bzw. Änderungen des Zinssatzes oder des Wechselkurses aus der Sicht von Kreditnehmenden zu erkennen.
3. Die Schüler/innen können in GeoGebra eine Kreditrückzahlung deterministisch und stochastisch simulieren.
4. Die Schüler/innen verwenden Folgen (Tilgungsgleichungen) und Reihen (geometrische Reihe) zur Programmierung der Simulationen.
5. Die Schüler/innen sind fähig, bei der vorgegebenen Modellierung Schwächen zu erkennen und Verbesserungen durchzuführen.

11.4.11 Unterrichtsvorschlag 1

Tilgungsdauer eines Kredits

1

Versetze dich in die Lage, du benötigst 100 000 € und dir bleibt nichts anderes übrig, als einen Kredit aufzunehmen. Bei der Bank erhältst du das links stehende Angebot.

Kreditangebot:

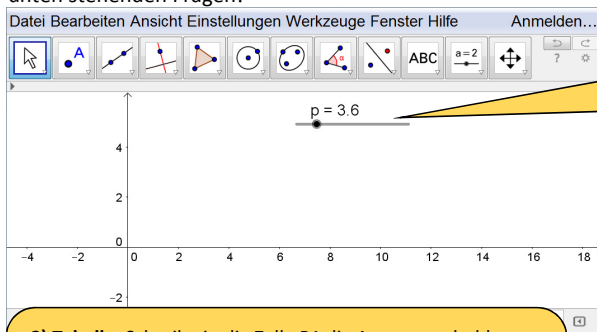
Ausgangsschuld: 100 000 €

jährliche Rate: 8 400 €

Zinssatz (jährlich): p%

Für die Berechnung des jährlichen Schuldenstandes werden zuerst die Zinsen dazugerechnet und dann wird die Rate abgezogen. Das heißt der Schuldenstand nach dem ersten Jahr S_1 berechnet sich durch: $S_1 = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 8\,400$. Der Schuldenstand im zweiten Jahr beträgt dann $S_2 = S_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 8\,400$ usw.

Visualisiere die Rückzahlung in einem GeoGebra-Arbeitsblatt, siehe Screenshots und beantworte anschließend die unten stehenden Fragen!

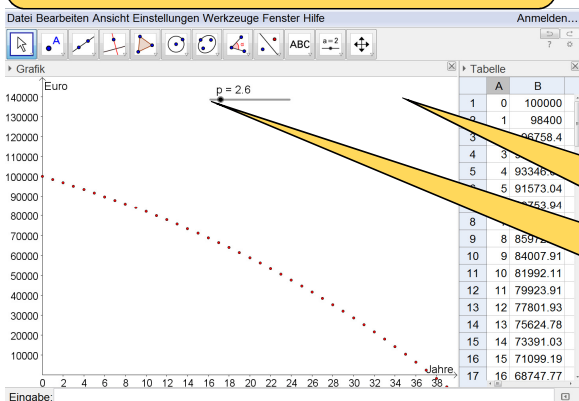


1) Werkzeugleiste/Grafik: Erstelle einen Schieberegler namens p (setze min auf 0, max auf 20 und Schrittweite auf 0.1)! Dessen Wert gibt den Jahreszinssatz in Prozent an.

2) Tabelle: Öffne die Tabellenansicht! Trage in die erste Spalte die Zahlen von 0 bis 40 für die jeweilige Jahreszahl ein!

3) Tabelle: Schreibe in die Zelle B1 die Ausgangsschuld 100000 Euro! Berechne den Schuldenstand in jedem Jahr, schreibe dazu in die Zelle B2 den Term $B1 \cdot (1 + p/100) - 8400$! Verfahre dazu analog für die restlichen Zeilen, kopiere dazu die Zelle B2 („herunterziehen“)!

4) Tabelle/Werkzeugleiste: Markiere den Bereich von A1 bis B41 und verwende anschließend das Werkzeug „Liste von Punkten“!



5) Eigenschaften: Stelle die Dimensionen des Grafikfensters in den Eigenschaften so ein, dass der interessante Bereich sichtbar ist, wähle dazu xMin: -2, xMax: 40, yMin: -2 500, yMax: 150 000!

6) Grafik: Verändere den Wert des Schiebereglers so, dass die unten stehenden Fragen beantwortet werden können!

- Wie lange dauert die Tilgung (gesamte Rückzahlung) des Kredits, wenn der jährliche Zinssatz p% a) 0,1%, b) 2,6% c) 8,4% bzw. d) 12,6% beträgt?
- Beschreibe die Situation bei c) und d) im Kontext!
- Wie hoch muss der Zinssatz sein, damit der Kredit in 30 Jahren getilgt ist?
- Wie verändert sich die Tilgungsdauer des Kredits, wenn sich der Zinssatz ändert? Antworte zuerst intuitiv und überprüfe dann deine Vermutung in deinem GeoGebra-Arbeitsblatt!
- Welche Annahmen sind nicht realistisch?

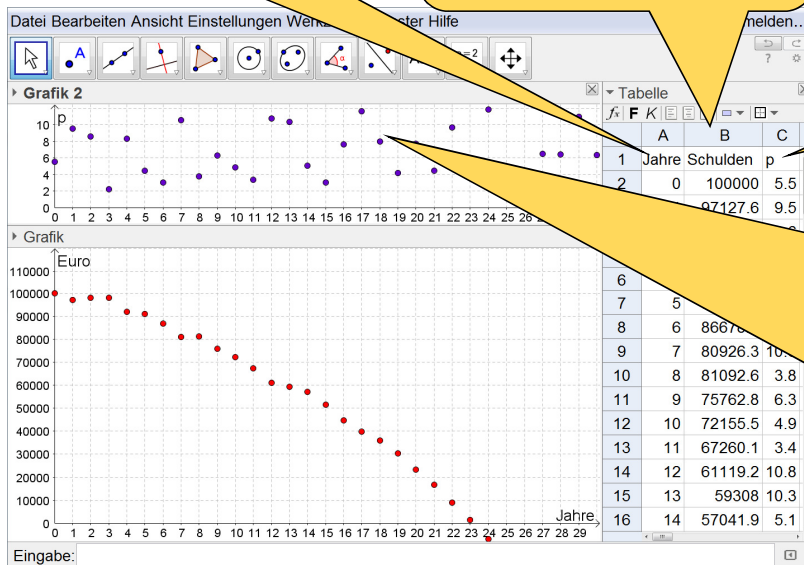
Das vorige Modell geht davon aus, dass der Jahreszinssatz über die Laufzeit konstant bleibt, das stimmt nicht mit der Realität überein. Schwankende Zinssätze stellen das Risiko eines Kredits dar. Diese Gefahr übersehen viele Kreditnehmer/innen. Bei der Aufnahme eines Kredits muss ein Gespräch mit einer/m Bankberater/in geführt werden, dabei werden solche Rückzahlungsszenarien, wie bei der vorigen Aufgabe aufgezeichnet. Der/Die Berater/in zeigt in den meisten Fällen nur einen möglichen Tilgungsplan. Das ist in der Regel ein Diagramm, das für Kreditnehmende günstig ist. Für die Kreditnehmenden schlecht verlaufende Tilgungspläne werden in der Regel nicht gezeigt. Die Bank möchte eben ihre Produkte verkaufen, da ist diese Strategie ganz klar.

Erstelle ein neues GeoGebra-Arbeitsblatt, in dem sich der Jahreszinssatz von Jahr zu Jahr verändert! Modelliere den sich verändernden Zinssatz als Zufallszahl! Öffne ein neues GeoGebra-Arbeitsblatt und folge den Schritten!

1) Tabelle: Öffne die Tabellenansicht! Schreibe in die Zelle A1 **Jahre**! Trage in die erste Spalte die Zahlen von 0 bis 40 ein!

3) Tabelle/Grafik: Schreibe in die Zelle B1 **Schulden**! Berechne den jährlichen Schuldenstand und erzeuge wieder eine Liste von Punkten, um diesen zu visualisieren, wie bei Blatt 1!

2) Tabelle: Trage in die Spalte C den Zinssatz ein! Tippe dazu in die Zelle C1 **p** ein! Gib in die Zellen C2 bis C40 den Befehl **ZufallszahlGleichverteilt(2,6)** ein, um eine zufällig erzeugte rationale Zahl zwischen 2 und 6 zu bekommen!



4) Tabelle/Grafik: Visualisiere den Verlauf des Zinssatzes ebenfalls durch Punkte! Hinweis: Das Unterlegen zweier Spalten, die nicht nebeneinander liegen, funktioniert durch das Unterlegen der ersten Spalte, dann hält man die Taste STRG gedrückt und unterlegt die zweite Spalte. Nun kann man das Werkzeug "Liste von Punkten" verwenden. Damit die Punkte nur im Grafikenster 2 angezeigt werden, darf im Eigenschaften-Dialog des Objekts Punkt unter „Erweitert“ nur Grafik2 angehakt sein (Bei dem Objekt Liste funktioniert das nicht).

1. Das Drücken der F9-Taste veranlasst eine neue Berechnung der Zufallszahlen. Simuliere durch Drücken der Taste mehrere Rückzahlungsszenarien! Beschreibe die Vorkommnisse!
2. Welche Werte/Verläufe des Zinssatzes sind für den/die Kreditnehmer/in günstig und welche nicht?
3. Vergrößere den Bereich, in dem der zufällige Zinssatz liegen darf, auf das Intervall $]0,1 ; 12[$! Was passiert? Beschreibe die Vorkommnisse!
4. Eine bessere Modellierung: Der Zinssatz des nächsten Jahres soll in einem kleinen Intervall (Wie klein?) um den Zinssatz des aktuellen Jahres liegen (Zufallszahl). Ändere die Spalte C dementsprechend ab und simuliere anschließend mehrere Szenarien! Was fällt dir auf?
5. Ist es überhaupt sinnvoll, den Kreditzinssatz mit Zufallszahlen zu simulieren?

Fremdwährungskredit

3

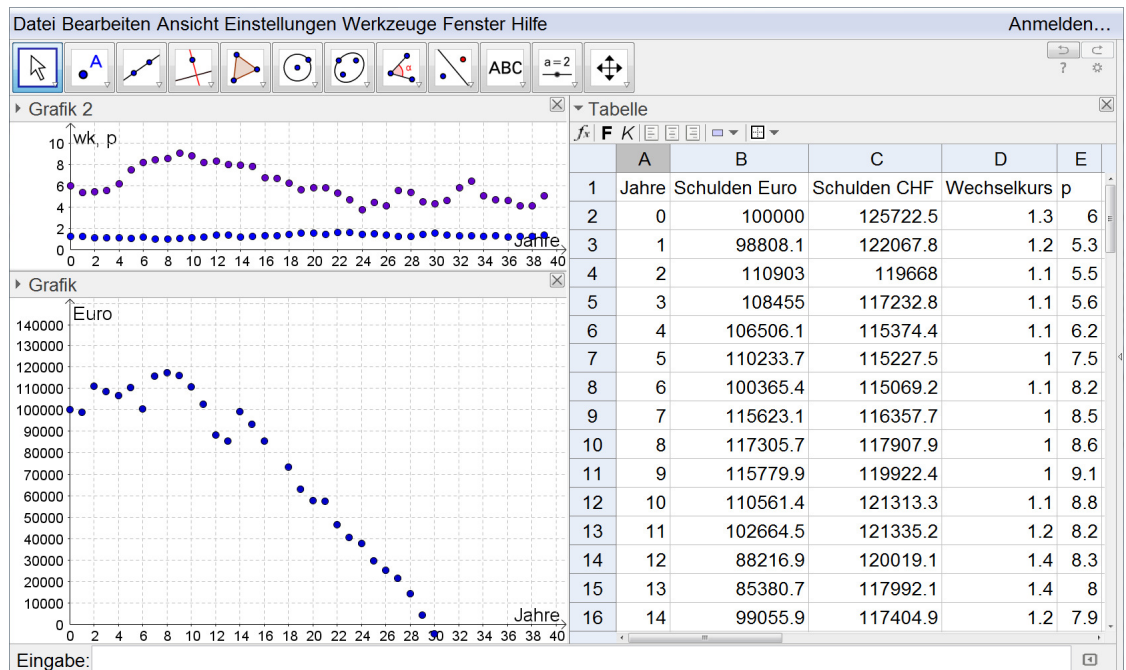
Lies den Artikel „Der Sündenfall der Banken“ (aus „Die Presse“ 17.5.2015)!

Wo liegen die Risiken eines Fremdwährungskredits?

Modelliere im Stil der obigen Arbeitsblätter einen Fremdwährungskredit in GeoGebra, wobei sich die Ausgangsschuld auf 100 000 € beläuft! Der Zinssatz und der Wechselkurs sollen sinnvoll mit Zufallszahlen modelliert werden!

Erläuterung zum Fremdwährungskredit: Wir nehmen den Kredit nicht in Euro auf, sondern in Schweizer Franken, also haben wir $100\,000 \cdot wk_0$ Schweizer Franken als Ausgangsschuld (Die Abkürzung wk_n , steht für den Wechselkurs zum Zeitpunkt n , er gibt an wie viele Franken man für einen Euro bekommt.). Das ergibt beispielsweise bei einem Wechselkurs von 1,2 zum Zeitpunkt 0 einen Wert von 120 000 CHF. Nun kommt die Tilgungsgleichung ins Spiel. Die Ausgangsschuld wird verzinst, also $120\,000 \cdot (1 + p/100)$. Zum Zeitpunkt 1 erfolgt ein Abzug der Rate von 8 400 Euro. Die Umrechnung der Rate in Schweizer Franken darf nicht vergessen werden. Nach der ersten Zinsperiode ergibt sich ein Schuldenstand von $100\,000 \cdot wk_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - wk_1 \cdot 8\,400$ in Schweizer Franken. Um die einzelnen Kredite untereinander vergleichen zu können, muss der jeweilige Schuldenstand wieder in Euro umgerechnet werden. Für den Schuldenstand zum Zeitpunkt 1 erhält

$$\text{man } S_1 = \frac{100\,000 \cdot wk_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - wk_1 \cdot 8\,400}{wk_1}.$$



1. Erkläre, warum bei der Berechnung für S_1 durch wk_1 dividiert wird!
2. Welche Werte/Verläufe des Zinssatzes sind für den/die Kreditnehmer/in günstig und welche nicht?
3. Wie hast du den Wechselkurs simuliert?
4. Welche Verläufe des Wechselkurses sind für den/die Kreditnehmer/in günstig und welche nicht?
5. Welche Szenarien sind für den/die Kreditnehmer/in günstig?
6. Ist es sinnvoll, den Wechselkurs mit Zufallszahlen zu simulieren?
7. Woran sieht man in deiner Modellierung, dass ein Fremdwährungskredit risikoreicher als ein Kredit wie bei Arbeitsblatt 2 ist?

1) Tilfungsgleichung

Seien im Folgenden S die Ausgangsschuld (zB 100 000 €), S_n der verbliebene Schuldenstand nach n Zinsperioden (die Restschuld), R die Rückzahlungsbeiträge (kurz Rate) und $p\%$ der jährliche Leitzinssatz. Für den Schuldenstand nach einem Jahr gilt:

$$S_1 = S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - R$$

Es ergibt sich für den Schuldenstand nach 2 Jahren die folgende Tilfungsgleichung:

$$S_2 = S_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - R = S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - R \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - R$$

Den Schuldenstand nach 3 Jahren ermittelt man abermals durch Einsetzen:

$$S_3 = S_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - R = S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 - R \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - R \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - R$$

Mit Hilfe der Summenformel für die endliche geometrische Reihe $\left(\sum_{i=0}^n q^i = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$ erhält man eine explizite Formel für den Schuldenstand nach n Jahren:

$$S_n = S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - R \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}{\frac{p}{100}}$$

Setze in der letzten Gleichung $S_n = 0$ und drücke in der letzten Formel a) die Variable n b) die Variable R durch die übrigen Variablen aus! Was geben diese Formeln jeweils an?

2) Kreditvergleich I

Vor jeder Kreditvertragsunterzeichnung muss das passende Angebot gefunden werden. Das Standardangebot umfasst verschiedene Kreditarten, aber welche wählst du aus?

Die Bank bietet dir folgende drei Kreditarten an. Diese unterscheiden sich nur durch den Kreditzinssatz, welcher auf unterschiedliche Art und Weise an den Leitzinssatz $p\%$ gebunden ist. Der Leitzinssatz wird von der Zentralbank des jeweiligen Währungsraumes aufgrund politischer, wirtschaftlicher Überlegungen bestimmt. Für den Euroraum ist das die Europäische Zentralbank (EZB).

Kreditangebot 1:

Ausgangsschuld: 100 000 €
Jährliche Rate: 8 400 €
Zinssatz (jährlich): gleich dem Leitzinssatz

Kreditangebot 2:

Ausgangsschuld: 100 000 €
Jährliche Rate: 8 400 €
Zinssatz (jährlich): im ersten Jahr 1%, im zweiten Jahr 2% und für alle folgenden Jahre gleich $p\%$.

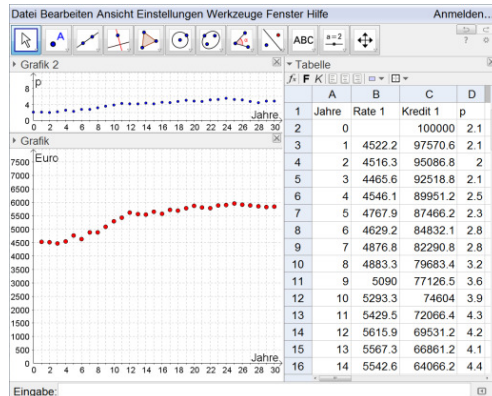
Kreditangebot 3:

Ausgangsschuld: 100 000 €
Jährliche Rate: 8 400 €
Zinssatz (jährlich): gleich dem Leitzinssatz, außer wenn der Zinssatz unter einen Wert von 2% fällt, dann bleibt der Kreditzinssatz auf 2%, und wenn der Leitzinssatz über den Wert 7% steigt, dann bleibt der Kreditzinssatz auf 7%.

Fragen

- Welche Ereignisse können dich in deinem zukünftigen Leben in so eine Lage bringen?
- Nimm an, dass sich der Leitzinssatz $p\%$ während der Kreditlaufzeit nicht verändert!
Bei welchem Zinssatz ist welcher Kredit am besten?
- Was kann man noch aussagen, wenn sich der Kreditzinssatz wie in der Wirklichkeit verändert?

3) Wechsel des Standpunktes



Wie groß muss die jährliche Rückzahlungsrate R sein, damit die Schuld innerhalb von 30 Jahren abbezahlt ist? Bei den vorigen Betrachtungen waren die Raten stets vorgegeben und die Tilgungsdauer variabel, nun ist die Tilgungsdauer vorgegeben und die Höhe der Rate variabel. Das stimmt auch mit der Realität überein, denn man vereinbart mit der Bank eine Kreditlaufzeit und berechnet daraus die jährlichen Raten. Die Ratenhöhe wird aufgrund des sich verändernden Zinssatzes jedes Jahr neu berechnet. Das bedeutet, dass die Ratenhöhe nach dem ersten Jahr so berechnet werden muss, dass der Kredit unter dem

momentanen Zinssatz nach 29 Jahren abbezahlt ist, nach dem zweiten Jahr muss die Ratenhöhe so berechnet werden, dass unter dem aktuellen Zinssatz der Kredit nach 28 Jahren abbezahlt ist, usw.

Modelliere einen Kredit, dessen Zinssatz mit Zufallszahlen modelliert wird, im Stil des oben stehenden Screenshots in GeoGebra, so dass man den Verlauf der Ratenhöhe sehen kann.

Fragen

- Wie wirkt sich ein Steigen oder ein Sinken des Zinssatzes auf die Ratenhöhe aus?
- Welche Werte/Verläufe des Zinssatzes sind für den/die Kreditnehmer/in günstig?

4) Kreditvergleich II

Versetze dich abermals in die Lage, du benötigst 100 000 € und es bleibt dir nichts anderes übrig, als einen Kredit aufzunehmen. Vor der Kreditvertragsunterzeichnung muss das passende Angebot gefunden werden. Das Standardangebot umfasst verschiedene Kreditarten, aber welche wählst du aus?

Die Bank bietet dir folgende drei Kreditarten an. Diese unterscheiden sich nur durch den Kreditzinssatz, welcher auf unterschiedliche Art und Weise an den Leitzinssatz $p\%$ gebunden ist. Der Leitzinssatz wird von der Zentralbank des jeweiligen Währungsraumes aufgrund politischer und wirtschaftlicher Überlegungen bestimmt. Für den Euroraum ist das die Europäische Zentralbank (EZB).

Kredit 1:
Ausgangsschuld: 100 000 €
Laufzeit: 30 Jahre
Zinssatz (jährlich): gleich dem Leitzinssatz

Kredit 2:
Ausgangsschuld: 100 000 €
Laufzeit: 30 Jahre
Zinssatz (jährlich): im ersten Jahr 1%, im zweiten Jahr 2% und für alle folgenden Jahre gleich $p\%$.

Kredit 3:
Ausgangsschuld: 100 000 €
Laufzeit: 30 Jahre
Zinssatz (jährlich): gleich dem Leitzinssatz, außer wenn der Zinssatz unter einem Wert von 2% fällt, dann bleibt der Kreditzinssatz auf 2%, und wenn der Leitzinssatz über den Wert 7% steigt, dann bleibt der Kreditzinssatz auf 7%.

Fragen

- Nimm an, dass sich der Leitzinssatz $p\%$ während der Kreditlaufzeit nicht verändert!
Bei welchem Zinssatz ist welcher Kredit am besten?
- Was kann man noch aussagen, wenn sich der Zinssatz verändert?

5) Begründung

- Zeige, dass bei einem Kredit wie auf Arbeitsblatt 1 gilt: Wenn der Zinssatz steigt, dann dauert die Rückzahlung des Kredits bei gleichbleibender Rate länger.
- Zeige, dass ein Ansteigen des Wechselkurses w_k (gibt an, wie viele Franken man für einen Euro bekommt) von einer Periode auf die nächste für den/die Kreditnehmer/in im Euroraum günstig ist!

6) Eine weitere Verteilung (8. Klasse)

Der Zinssatz wird mit Zufallszahlen modelliert. Es scheint plausibel, dass kleinere Abweichungen wahrscheinlicher als größere sind. Welche Verteilungen erfüllen diese Gegebenheit?

- Modelliere einen Kredit wie auf Aufgabenblatt 2, wobei der Zinssatz diese gesuchte Verteilung haben soll! Erstelle ein neues GeoGebra-Arbeitsblatt!
- Modelliere einen Fremdwährungskredit wie auf Aufgabenblatt 3, wobei der Wechselkurs ebenfalls diese gesuchte Verteilung haben soll! Erstelle ein neues GeoGebra-Arbeitsblatt!

11.4.12 Musterlösung

Arbeitsblatt 1

1. Die Rückzahlung dauert bei a) ca. 12 Jahre b) ca. 14 Jahre. Für c) und d) gilt: Bei Zinssätzen von mindestens 8,4% kann der Kredit bei einer jährlichen Rückzahlung von 8 400 Euro nicht mehr in endlicher Zeit zurückbezahlt werden.
2. Bei c): Die Raten decken genau die anfallenden Zinsen, tragen aber nicht zur Reduktion der Schulden bei. Bei d): Die Schulden wachsen von Jahr zu Jahr, obwohl Raten in der Höhe von 8 400 Euro bezahlt werden. Das liegt daran, dass die Zinsen mehr ausmachen als die Raten.
3. Über das GeoGebra-Arbeitsblatt ermittelt man einen Wert von ca. 7,4%.
4. Wenn der Zinssatz steigt, verlängert sich bei gleichbleibender Rate von 8 400 Euro die Tilgungsdauer. Wenn der Zinssatz fällt, dann verkürzt sich bei gleichbleibender Rate die Tilgungsdauer.
5. Die Annahme des gleichbleibenden Zinssatzes ist unrealistisch. Dieser verändert sich in der Regel. Der Zinssatz ändert sich aufgrund politischer und wirtschaftlicher Ereignisse, wann ein Ereignis eintritt, welchen Einfluss dieses auf den Zinssatz nimmt, kann nicht vorhergesagt werden.

Des Weiteren würde ein Kredit anders verzinst. Die Sollzinsen bei Krediten werden üblicherweise tageweise verzinst $Z = K \cdot p/100 \cdot t/365$. Diese Zinsen werden dann vierteljährlich zum Schuldenstand addiert und in weiterer Folge verzinst. Das Bankjahr hat in diesem Fall nicht wie üblich 360 Tage, sondern zählt 365 bzw. in einem Schaltjahr 366 Tage (dementsprechend müsste die obige Formel abgeändert werden). Zusätzlich fallen bei jeder Kreditaufnahme zusätzliche Kosten an, wie z.B die Bearbeitungsgebühr, die von der Höhe der Verschuldung bestimmt werden.

Arbeitsblatt 2

1. Individuell beantwortbar. Die Rückzahlung verläuft nicht mehr so „glatt“ wie bei Arbeitsblatt 1.
2. Niedrige Werte des Zinssatzes sind für Kreditnehmende von Vorteil. In diesem Sinne ist ein Verlauf des Zinssatz mit möglichst niedrigen Werten am besten.
3. Der Zinssatz springt noch wilder hin und her als zuvor. Ein Blick auf das Diagramm des Tilgungsplans im GeoGebra-Arbeitsblatt lässt aufgrund der Werte des Zinssatzes gewisse Perioden erkennen, wo der Schuldenstand nahezu gleich bleibt bzw. sogar steigt.
4. Eine mögliche Umsetzung der Vorschrift ist die folgende: Schreibe in die Zelle C2 den Befehl `ZufallszahlGleichverteilt(0.1,12)` und in die Zelle C3 `ZufallszahlGleichverteilt(0.4 - C2, C2 + 0.4)`. Wenn man in Spalte C so bis zur Zeile 41 verfährt, dann erhält man eine bessere Modellierung des Zinssatzes als zuvor. Die Abweichung von 0.4 ist nicht zwingend, es können auch andere Abweichungen gewählt werden.

Es wären auch kompliziertere Modelle vorstellbar. Interessierte (Lehrer/innen bzw. Schüler/innen) steht es offen eine schwierigere, komplexere Modellierung vorzunehmen. In Kapitel 10.6 wurde das *Vasicek-Modell* auf Seite 134 vorgestellt. Die sogenannte „Rückkehr zum Mittelwert“ wird bei dieser Modellierung berücksichtigt. Allerdings kann der Zinssatz bei beiden erwähnten Methoden negative Werte annehmen. Beispielsweise kann auch eine Modellierung versucht werden, wo das nicht der Fall ist.

5. Die Modellierung des Zinssatzes mit Zufallszahlen erweist sich als realitätsnahe, da sie die Änderung des Zinssatzes berücksichtigt. Die erste Näherung mit gleichverteilten Zufallsvariablen berücksichtigt nicht, dass der Zinssatz des nächsten Jahres vom Zinssatz des vorigen Jahres abhängt und sich meist nur wenig ändert. Die zweite Modellierung lässt aber auch beliebige negative Werte zu. Negative Zinssätze kommen zwar in der Realität immer wieder vor, doch eine entsprechende Umsetzung bei Krediten, man bekommt Geld für die Aufnahme eines Kredites, die Zinsen werden aufgrund des negativen Zinssatzes abgezogen, fand bis jetzt noch nicht statt.

Arbeitsblatt 3

1. Der Schuldenstand nach einem Jahr beträgt in Schweizer Franken $S_1 = 100\,000 \cdot wk_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - wk_1 \cdot 8\,400$. Zu diesem Zeitpunkt ist der aktuelle Wert des Wechselkurses wk_1 , dieser gibt an, wie viele Franken man für einen Euro bekommt. Dementsprechend gibt der Wert $\frac{1}{wk_1}$ an, wie viele Euro man für einen Franken bekommt³⁰. Der Schuldenstand nach einem Jahr in Euro berechnet sich dann durch $S_1 = (100\,000 \cdot wk_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - wk_1 \cdot 8\,400) \cdot \frac{1}{wk_1}$.
2. Wie bei Arbeitsblatt 2 (Aufgabe 2): Niedrige Werte des Zinssatzes sind für Kreditnehmende von Vorteil.
3. Individuell beantwortbar. Vorschlag: Der Wechselkurs wurde mit dem Befehl *Zufallszahl* modelliert, am besten eignet sich hier ein Wert im Intervall $[0, 2; 1, 8]$. Es kann auch, wie bei Arbeitsblatt 2 (Aufgabe 4) mit Intervallen um den vorigen Wert gearbeitet werden.
4. Wenn $wk_n > 1$ ist, dann ist der Euro mehr Wert als der Franken. Die einfache Regel „Der Wechselkurs muss größer als eins sein“ sagt für einen günstigen Verlauf der Kreditnehmenden nichts aus. Ein günstiger Verlauf aus der Sicht der Kreditnehmenden ist ein Steigen des Wechselkurses von Periode zu Periode.

Erläuterungen für die Lehrperson:

Wir betrachten nun zwei beliebige aufeinanderfolgende Zeitpunkte n und $n + 1$. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle,

- Wenn der Wechselkurs wk (Euro-Schweizer Franken) sinkt, dann verschlechtert sich die Situation des/der Kreditnehmers/in. Das heißt, der Tilgungsbeitrag ist kleiner als zuvor oder es steigt sogar der Schuldenstand.

³⁰Auf die Unterscheidung von Geld- und Briefkurs wird hier verzichtet.

- Wenn der Wechselkurs wk steigt, dann verbessert sich die Situation des/der Kreditnehmers/in. Das heißt, der Tilgungsbeitrag wird größer.

Es folgt die Begründung:

(a) $wk_n > wk_{n+1}$

Wir untersuchen den Sachverhalt mit Hilfe einer adaptierten Tilgungsgleichung für Fremdwährungskredite genauer. Zum Zeitpunkt n beträgt der Schuldenstand in Schweizer Franken S_n^{SF} und in Euro $S_n^E = \frac{S_n^{SF}}{wk_n}$, die Variable R steht für die Raten und $q := 1 + \frac{p}{100}$. Einen Zeitschritt später erhält man in Schweizer Franken einen Schuldenstand von $S_{n+1}^{SF} = S_n^{SF} \cdot q - R \cdot wk_{n+1}$, das ergibt in Euro $S_{n+1}^E = \frac{S_n^{SF} \cdot q - R \cdot wk_{n+1}}{wk_{n+1}}$. Aufgrund der Voraussetzung gilt $\frac{S_n^{SF} \cdot q}{wk_n} < \frac{S_n^{SF} \cdot q}{wk_{n+1}}$. Der Unterschied des Schuldenstands zu einem gleich bleibenden Wechselkurs beträgt $\frac{S_n^{SF} \cdot q}{wk_{n+1}} - \frac{S_n^{SF} \cdot q}{wk_n}$. Es kann also gesagt werden, dass eine Veränderung des Wechselkurses in diesem Sinne keinen Vorteil dem/der Kreditnehmer/in bringt.

(b) $wk_n < wk_{n+1}$

Aufgrund der zuvor gemachten Überlegungen erhält man, dass $\frac{S_n^{SF} \cdot q}{wk_{n+1}} - \frac{S_n^{SF} \cdot q}{wk_n} < 0$ ist. Hier kann man von einer Verbesserung für den/die Kreditnehmer/in sprechen.

5. Damit ein Fremdwährungskredit einen günstigen Verlauf für den/die Kreditnehmer/in aufweist, müssen der Zinssatz und der Wechselkurs einen günstigen Verlauf aufweisen.
6. Ja, da sich auch der Wechselkurs in diesem Modell von Jahr zu Jahr, in der Realität zu jeder Zeit ändern kann.
7. Man hat bei einem Fremdwährungskredit zusätzlich zum Zinssatzrisiko auch noch das Wechselkursrisiko.

Arbeitsblatt 4 und 5 Vertiefung

1. Tilgungsgleichung

Seien im Folgenden S die Ausgangsschuld, S_n der verbliebene Schuldenstand nach n Zinsperioden (die Restschuld), R die Rückzahlungsbeiträge, oder auch kurz Rate und $p\%$ der jährliche Leitzinssatz in Prozent. Für S_1 gilt:

$$S_1 = S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - R.$$

Es ergibt sich für S_n eine Differenzengleichung erster Ordnung, die Tilgungsgleichung:

$$S_n = S_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - R.$$

Daraus folgt die explizite Darstellung bzw. die Lösung der Differenzengleichung:

$$S_n = S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - R \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2} + \dots + \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1 \right]. \quad (30)$$

Die Summenformel der geometrischen Reihe liefert:

$$S_n = S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - R \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}{\frac{p}{100}}. \quad (31)$$

Wir setzen S_n in der Tilgungsgleichung (31) gleich 0 und drücken uns die Variable n , also die Anzahl der Jahre explizit aus.

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{p}{100} \cdot \frac{S}{R}\right)}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)} \quad p \neq 0 \quad (32)$$

Die Formel (32) gibt die Tilgungsdauer bei gleichbleibenden Zinssatz $p\%$ und gleichbleibender Rate R an.

Wenn die Gleichung (31) mit $S_n = 0$ nach R umgeformt wird, dann erhält man Folgendes.

$$R = S \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot \frac{p}{100}}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1} \quad p \neq 0 \quad (33)$$

Die Formel (33) gibt an, wie hoch die Rate sein muss, damit bei gleichbleibenden Zinssatz $p\%$ der Kredit nach n Jahren abbezahlt ist.

2. Kreditvergleich I

- (a) Individuell beantwortbar. Vorschläge: Hauskauf, Schicksalsschläge: Tod von Familienmitgliedern, Naturkatastrophen, die nicht durch eine Versicherung gedeckt sind. Die Schüler/innen sollen begreifen, dass es sich hier um eine Situation handelt, die auch sie im späteren Leben treffen kann.
- (b) Die Beantwortung bedarf nun einer genaueren Analyse. Das vorgestellte Angebot an drei Krediten deckt einige gängige am Markt vorkommende Kreditarten (in vereinfachter Form) ab und stellt daher eine reale Situation für Kreditnehmer/innen dar, welche sich für eine Kreditart entscheiden müssen.

Die Beantwortung der Frage erlaubt zwei Zugänge. Der erste, der vorgestellt wird, erfolgt über Visualisierungen mit GeoGebra, analog zu den von den Schülern/innen zuvor bearbeitenden Arbeitsblättern, und der zweite verwendet Überlegungen mit Tilgungsgleichungen, ein CAS ist hier von Vorteil.

1. Zugang

Eine Verwendung von GeoGebra erleichtert das Vorgehen. Für die Erstellung des Arbeitsblattes: Es wird ein Schieberegler p erstellt, dieser nimmt Werte von 0,001 bis 20 an. Die Werte in den folgenden Tabellen erhält man, wenn der Wert für p auf 7,2 eingestellt wird. Die unten angeführten Tabellen sollen jeweils bis zur Zeile 40 entsprechend fortgesetzt werden. Die Berechnung des Schuldenstands von Kredit 1 ist bereits bekannt, siehe Arbeitsblatt 1:

	A	B
1	Jahre	Kredit 1
2	0	100 000
3	1	98 800
4	2	97 513,6
	$\vdots$	

Tab. 17 Schuldenstand Kredit 1

Die Werte für Kredit 2 bedürfen einer kleinen Modifikation, da im ersten Jahr mit 1% und im zweiten Jahr mit 2% verzinst wird.

	A	C
1	Jahre	Kredit 2
2	0	100 000
3	1	92 600
4	2	86 052
5	3	83 847,74
	$\vdots$	

Tab. 18 Schuldenstand Kredit 2

In der Zelle C3 steht „=C2*1,01-8 400“, in Zelle C4 folgt „=C3*1,02-8 400“ und in Zelle C5 befindet sich „=C4*(1+p/100)-8 400“. Die Zelle C5 kann anschließend kopiert werden.

Die Berechnungen für Kredit 3 bedürfen nun elementarer Programmierkenntnisse. Den oben beschriebenen Zinssatz für Kredit 3 erhält man durch zwei Wenn-Verzweigungen: „ $p_3 = \text{Wenn}[p < 2, 2, \text{Wenn}[p > 7, 7, p]]$ “. Das ermöglicht uns ein einfaches Vorgehen mit Hilfe der Tilgungsgleichung, denn die Wenn-Verzweigungen sorgen dafür, dass p_3 in $[2; 7]$ bleibt. Es ergibt sich folgende Tabelle:

	A	D
1	Jahre	Kredit 3
2	0	100 000
3	1	98 600
4	2	97 102
	$\vdots$	

Tab. 19 Schuldenstand Kredit 3

Es erfolgt die Zeichnung der Punkte wie zuvor mit den Koordinaten (*Jahre* | *Kredit 1*), (*Jahre* | *Kredit 2*) und (*Jahre* | *Kredit 3*). Ein Abändern und Einfärben der Form der einzelnen Punkte passend zur Kreditart liefert ein schönes Bild. Der Verlauf des Schuldenstandes wird bei Kredit 1 in Punkten (rot), bei Kredit 2 in Kreise (gelb) und bei Kredit 3 in Kreuzen (grün) dargestellt.

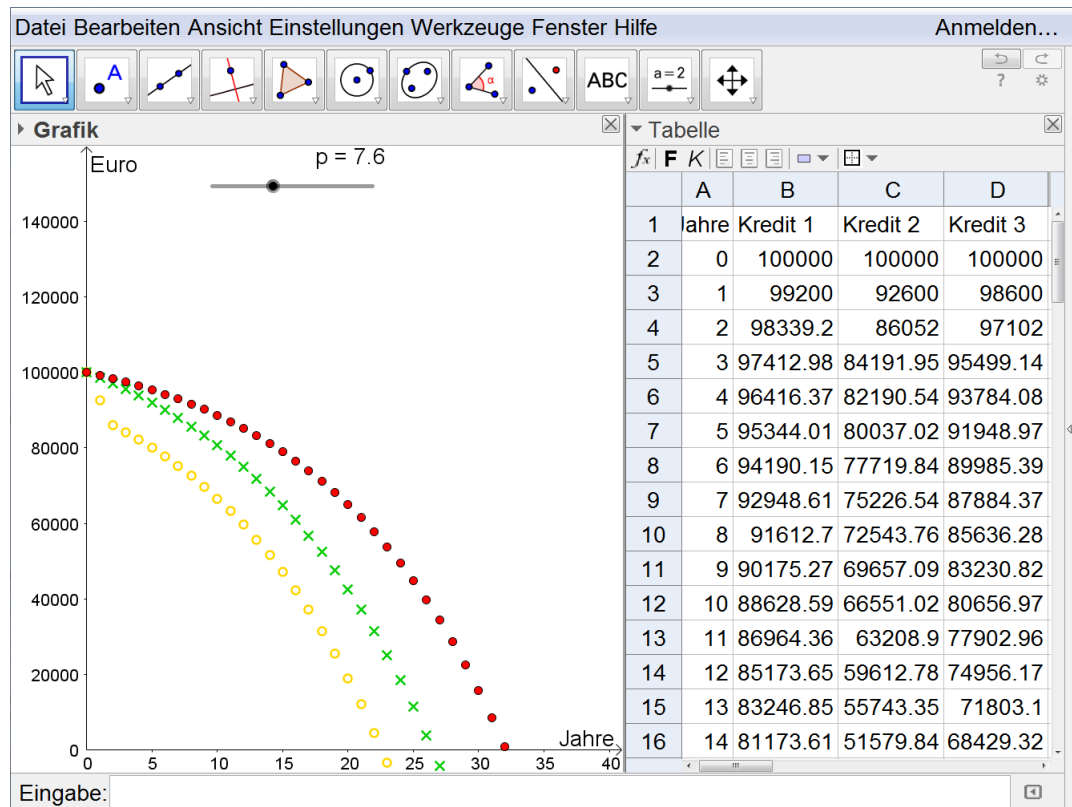


Abb. 30 Verläufe der Schuldenstände der vier Kredite

Es bietet sich nun eine Experimentierphase mit den erstellten Schieberegler an.

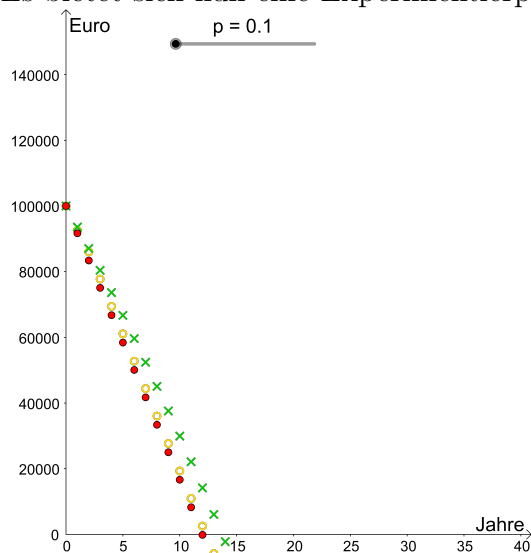


Abb. 31 Schuldenstände Szenario für $p = 0,1$ und $wk = 1,2$

Bei einem sehr niedrigen Wert des Leitzinssatzes unterscheiden sich die Kredite kaum. Es fällt auf, dass der Kredit in Kreuzen, Kredit 3, etwas länger zum Zurückzahlen braucht. Der kleinstmögliche Zinssatz bei Kredit 3 liegt bei 2%, während die anderen Kredite alle einen niedrigeren Zinssatz von 0,1%, entsprechend dem Wert des Schiebereglers, aufweisen, bei Kredit 2 bis auf die ersten

beiden Zinsperioden.

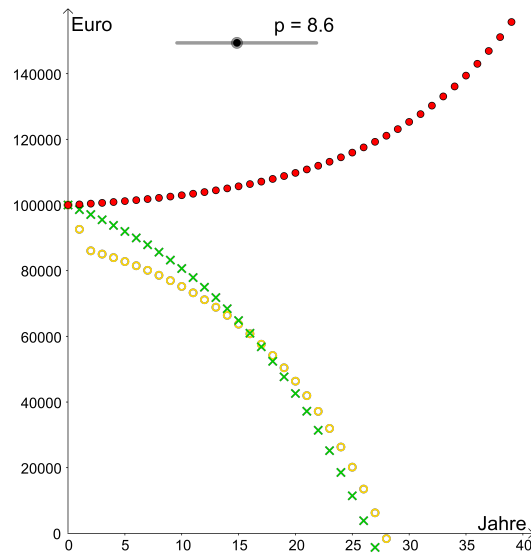


Abb. 32 Szenario 1: Schuldenstände für $p = 8,6$ und $wk = 1,2$

In diesem Fall (Abb. 32) sieht man den Vorteil von Kredit 3, da dieser am schnellsten abbezahlt ist.

Es zeigt sich, dass der fixierte, niedrige Zinssatz in den ersten beiden Zinsperioden bei Kredit 2 einen großen Einfluss auf die Rückzahlungsdauer hat. Im Vergleich dazu müsste beim Kredit 1 nämlich die Rate erhöht werden, damit der Kredit überhaupt zurückbezahlt werden kann. Wenn der Wert von p noch größer wird, dann schafft man es auch nicht den Kredit 2 zu tilgen.

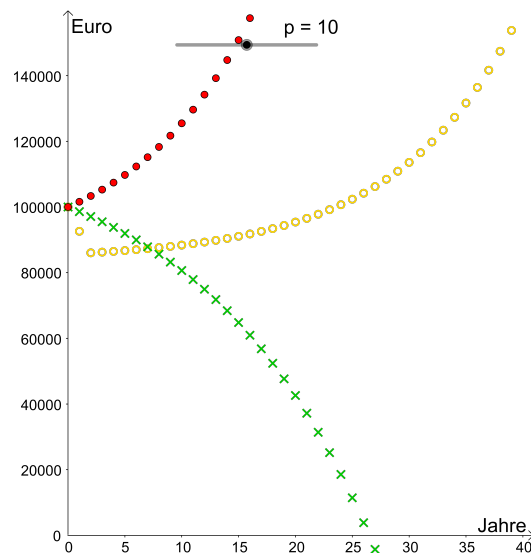


Abb. 33 Szenario 2: Schuldenstände für $p = 10$ und $wk = 1,2$

Bei Abb. 33 sieht man, wie sehr sich die Beschränkung des Zinssatzes p_3 nach oben bei Kredit 3 auswirkt.

Nur noch eine Erhöhung der Raten würde helfen die aufgenommene Schuld der

Kredite 1 und 2 wieder zu verringern, sodass die Kredite in endlicher Zeit beglichen werden können.

Fazit – auf Grundlage der Beobachtungen

Die einzelnen Kreditarten werden untereinander immer unter der Prämisse, dass die Rückzahlungsrate gleich bleibt, verglichen. Wir vergleichen zuerst Kredit 1 und Kredit 2. Bei einem sehr kleinen Wert des Leitzinssatzes wird der Kredit 1 bei gleicher Rate vorher zurückbezahlt. Bei größeren Werten von p tilgt man den Kredit 2 früher, das liegt an der speziellen Verzinsung zu Beginn bei Kredit 2. Durch Hinsehen sieht man, wenn p ungefähr größer 1,5 ist, dann ist Kredit 2 zu bevorzugen.

Als nächstes steht ein Vergleich von Kredit 1 und Kredit 3 an. Schon aus der Konstruktion des Kredites, genauer der jeweiligen Zinssätze, folgt, dass Kredit 1 bei niedrigen Werten früher zurückbezahlt wird. In einem gewissen Bereich, wenn p Werte von 2 bis 7 annimmt, dauern beide Rückzahlungen gleich lang. Erst bei größeren Werten von p wird die Schuld mit Kredit 3 früher beglichen.

Es fehlt der Vergleich von Kredit 2 und Kredit 3. Bei niedrigen Werten des Leitzinssatzes liegt klarerweise Kredit 2 besser im Rennen, die Rückzahlung erfolgt früher. Bei mittelgroßen Werten des Leitzinssatzes, z.B. bis zu $p = 6,9$ erfolgt eine schnellere Rückzahlung der Schuld bei Kredit 2. Bei großen Werten erweist sich eine Aufnahme des Kredites 3 als günstig. Durch Beobachtungen am GeoGebra-Arbeitsblatt sieht man, dass bis $p \approx 8,4$ Kredit 2 früher getilgt ist.

Aufgrund der Beobachtungen ergibt sich folgende Entscheidungsregel:

- i. $0 \leq p \leq 1,5 \Rightarrow$ wähle Kredit 1!
- ii. $1,5 \leq p \leq 8,4 \Rightarrow$ wähle Kredit 2!
- iii. $8,4 \leq p \Rightarrow$ wähle Kredit 3!

Zweiter Zugang

Für exakte Werte müssen umfangreiche Berechnungen durchgeführt werden. Diese sind für interessierte Lehrer/innen bzw. Schüler/innen explizit ausgeführt: Wir analysieren nun die zuvor gemachten Vergleiche, erinnern an $q := 1 + \frac{p}{100}$ und wiederholen an dieser Stelle die Formel (32):

$$n = \frac{-\ln(1 - \frac{p}{100} \cdot \frac{S}{R})}{\ln(1 + \frac{p}{100})} \quad p \neq 0. \quad (32)$$

Es eröffnet sich ein sinnvolles Anwendungsfeld für das GeoGebra-CAS. Die einzelnen Kredite werden der Reihe nach verglichen. Innerhalb dieser Vergleiche werden Fallunterscheidungen vorgenommen.

Kredit 1 vs. Kredit 2

Wir unterscheiden vier Fälle.

- $p = 0$

Bei Kredit 1 ergibt sich eine Tilgungsdauer von ca. 11,9 Jahren. Für die Berechnung bei Kredit 2 verwenden wir die entsprechende Tilgungsgleichung $S_n = S \cdot 1,01 \cdot 1,02 - R \cdot 1,02 - R \cdot (n-1) = 0$. Es ergibt sich eine Tilgungsdauer

bei Kredit 2 von $n = \frac{S \cdot 1,01 \cdot 1,02 - 0,02 \cdot R}{R}$ Jahren, in diesem Fall ist $n \approx 12,24$. In diesem Sonderfall wäre Kredit 1 zu bevorzugen.

- $0 < p < 1,48$

Wie kommt man auf die obere Grenze? Aus der Tilgungsgleichung des Kredites 2

$$0 = S_n = S \cdot 1,01 \cdot 1,02 \cdot q^{n-2} - R \cdot 1,02 \cdot q^{n-2} - R \cdot \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} \quad q \neq 1.$$

erhält man nach kurzer Rechnung (Cas oder per Hand):

$$n = \frac{\ln \left(\frac{q^2 \cdot R}{(1,02 \cdot (q-1) + q) \cdot R - 1,01 \cdot 1,02 \cdot (q-1) \cdot S} \right)}{\ln(q)}. \quad (34)$$

setzt man hier $S = 100\,000$ und $R = 8\,400$ ein, so erhält man n in Abhängigkeit von p . Die Anzahl der Jahre versehen wir mit einem Index, und schreiben nun $n_2(p)$ für den Kredit 2. Analog $n_1(p)$ für den Kredit 1, dessen Tilgungsgleichung erhält man aus der Gleichung (32). Wenn man die Graphen der Funktionen n_1 und n_2 (in Abhängigkeit von p) zeichnet, so ergibt sich:

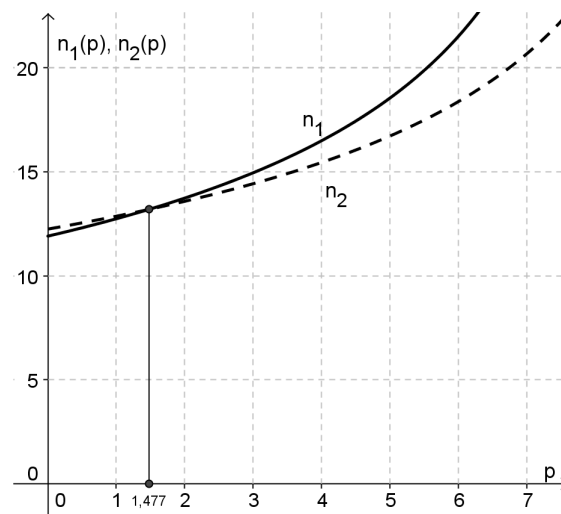


Abb. 34 Funktionsgraphen von n_1 und n_2

Man sieht:

- Schnittpunkt liegt bei $p_s \approx 1,48$
- für $p < p_s$ ist Kredit 1 besser
- für $p > p_s$ ist Kredit 2 besser

Bemerkung: Das Gleichsetzen von $n_1(q)$ und $n_2(q)$ führt auf eine quadratische Gleichung in q , die man (CAS oder per Hand) sogar exakt lösen könnte.

- $p \approx 1,48$

Die Dauer der Tilgung ist bei beiden Krediten gleich.

- $1,48 < p$

Kredit 2 erweist sich als besser, dieser wird früher abbezahlt.

Kredit 1 vs Kredit 3

Der Vergleich bedarf eines Blickes auf die Zusammensetzung des Kredites. Der Zinssatz p_3 bei Kredit 3 liegt immer im Intervall $[2; 7]$. Es ergeben sich die Schlussfolgerungen: Bei allen Werten darunter, also $p \in [0; 2]$, erfolgt eine Tilgung der Schuld bei Kredit 1 schneller. Nimmt der Leitzinssatz Werte größer 7 an, dann erfolgt eine Begleichung der Schuld schneller bei Kredit 3. Ansonsten dauert das Abbezahlen gleich lang.

Kredit 2 vs Kredit 3

- $p = 0$

Der Fall ist klar, der Zinssatz bei Kredit 2 ist in jeder Zinsperiode kleiner oder gleich dem Zinssatz bei Kredit 3.

- $0 < p < 8,4$

Bei einem Leitzinssatz unter oder gleich 7% ist der Kredit 2 früher abbezahlt als bei Kredit 3. Für die Berechnung jenes Leitzinssatzes, bei dem beide Laufzeiten gleich lang sind, kann p_3 mit 7% angenommen werden. Das heißt, die nun relevante Tilgungsgleichung bei Kredit 3 hat die Form $S_n = S \cdot 1,07^n - R \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 0$. Daraus ergibt sich die bekannte Tilgungsdauer von

$$n = \frac{\ln\left(\frac{R}{R-0,07 \cdot S}\right)}{\ln(1,07)}. \quad (35)$$

Für den Kredit 2 gilt bekanntlich eine Tilgungsdauer von (vgl. (34))

$$n = \frac{\ln\left(\frac{q^2 \cdot R}{(1,02 \cdot (q-1) + q) \cdot R - 1,01 \cdot 1,02 \cdot (q-1) \cdot S}\right)}{\ln(q)}. \quad (36)$$

Das Gleichsetzen der jeweiligen Terme aus den Gleichungen (35) und (36) und Lösen nach q ist mit allgemeinem S und R nicht möglich. Wir lösen numerisch, setzen $S = 100\,000$ und $R = 8\,400$ und berechnen den Zinssatz: $q \approx 1,084$. Das heißt, so lange der Wert des Leitzinssatzes unter 8,4 bleibt, zahlt man den Kredit 2 früher zurück als den Kredit 3.

- $p > 8,4$

Analog zu den obigen Überlegungen folgt, dass in diesem Zinsbereich Kredit 3 früher beglichen werden kann als Kredit 2.

Fazit – auf Grundlage der Berechnungen

Dieses deterministische Modell beinhaltet klare Regelungen bei der Kreditwahl. Der Wert des Leitzinssatzes bei der Kreditaufnahme impliziert die Wahl. Die Kreditvergleiche liefern die Entscheidungsregelung:

- $0 \leq p \leq 1,48 \Rightarrow$ wähle Kredit 1!
- $1,48 \leq p \leq 8,4 \Rightarrow$ wähle Kredit 2!
- $8,4 \leq p \Rightarrow$ wähle Kredit 3!

3. Wechsel des Standpunktes

Die Erstellung des Applets erfolgt folgendermaßen: Zuerst wird eine explizite Formel für die Berechnung der Ratenhöhe benötigt. Der Schuldenstand S_n kann explizit aus der Tilgungsgleichung ausgedrückt werden.

$$S_n = S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - R \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}{\frac{p}{100}}. \quad (37)$$

Eine Umformung nach R ergibt:

$$R = S \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot \frac{p}{100}}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1} \quad p \neq 0. \quad (38)$$

In der Tabellenkalkulation des GeoGebra-Arbeitsblattes sind in dieser Musterlösung vier Spalten vorgesehen. In der Spalte A steht entsprechend für jedes Jahr eine Zahl, beginnend bei 0 in der Zelle A2 und endend bei 30 in der Zelle A32. In der Spalte D steht der jährliche Zinssatz mit einer Zufallszahl modelliert. Das heißt in den Zellen von D2 bis D32 verwendet man den Befehl *ZufallszahlGleichverteilt*(0.1, 12), schwierigere Modellierungen wie auf Arbeitsblatt 2 (Aufgabe 4) sind erlaubt. In der Spalte C wird der jährliche Schuldenstand aufgelistet. Man beginnt zuerst nur in Zelle C2 die Ausgangsschuld von 100 000 einzutragen. Im nächsten Schritt berechnet man die erste Rate mit der oben stehenden Formel 38. In Zelle B3 steht also „=C2*(1+D2/100)^(30-A2)*D2/100/((1+D2/100)^(30-A2)-1)“. Erst mit diesem Ergebnis kann der Wert in Zelle C3 durch „=C2*(1+D2/100)-B3“ berechnet werden. Entsprechendes Kopieren der Zellen B3 und C3 bis zur Zeile 32 liefert die restlichen Werte. Eine Übertragung mit Punkten in das Diagramm für die Ratenhöhe und für den Wert p erfolgt wie bei den vorigen Arbeitsblättern beschrieben.

	A	B	C	D
1	Jahre	Rate	Schuldenstand	p
2	0		100 000	7
3	1	8 058,64	98 941,36	6,2
4	2	7 433,24	97 642,49	3,1
	⋮	⋮	⋮	⋮

Tab. 20 Raten

Die Antworten können dann über Beobachtung innerhalb des GeoGebra-Arbeitsblattes getätigt werden.

- (a) Wenn der Zinssatz steigt, dann steigt auch die Rate, und wenn der Zinssatz sinkt, dann sinkt analog dazu auch die Rate.
- (b) Ein niedrig verlaufender Zinssatz ist für den/die Kreditnehmer/in günstig.

4. Kreditvergleich II

Die Beobachtung richtet sich auf die Veränderungen des Ratenbetrags, während der

Leitzinssatz verändert wird. Auch in diesem Fall werden zwei Zugänge zur Beantwortung der Fragestellung gegeben. Ersterer erfolgt erneut über eine Visualisierung in GeoGebra. Zweiterer stützt sich auf Überlegungen, die auf der Tilfungsgleichung beruhen.

Erster Zugang

Ein Schieberegler für den Leitzinssatz soll Beobachtungen der Abhängigkeit der Ratenhöhe R von p ermöglichen. Die Berechnung des Wertes der Rate für den Kredit 1 ist bereits bekannt, ebenso das Erstellen der Tabelle, siehe Arbeitsblatt 5 Aufgabe 3 (nur ohne Zufallszahlen).

Bei Kredit 2 benötigen wir eine adaptierte Formel, damit wir eine Tabelle wie zuvor erstellen können. Wir möchten nun die Höhe einer Rate, die über die 30 Jahre gleich hoch ist. Wir formulieren erneut die Tilfungsgleichung für diesen Kredit:

$$S_{30} = 100\,000 \cdot 1,01 \cdot 1,02 \cdot q^{28} - R \cdot 1,02 \cdot q^{28} - R \cdot \frac{1 - q^{29}}{1 - q} = 0 \quad q \neq 1.$$

Daraus lässt sich die Ratenhöhe berechnen, es ergibt sich:

$$R = \frac{100\,000 \cdot 1,01 \cdot 1,02 \cdot q^{28}}{1,02 \cdot q^{28} + \frac{1 - q^{29}}{1 - q}} \quad q \neq 1.$$

Wir verwenden die beiden Gleichungen, um die benötigten Werte in der Tabelle zu bestimmen. Die Formel für die Ratenhöhe geben wir nun direkt ein. Mit Hilfe der Tilfungsgleichung berechnen wir den Schuldenstand. Die in Tab. 21 angegebenen Werte erhält man für $p\% = 7,5\%$ der einzelnen Jahre.

	A	C	G
1	Jahre	Rate 2	Kredit 2
2	0		100 000
3	1	7 578,69	93 421,31
4	2	7 578,69	87 711,05
	$\vdots$	$\vdots$	

Tab. 21 Raten Kredit 2

Das Erstellen von p_3 benötigt bekannterweise eine doppelte Wenn-Verzweigung, siehe Arbeitsblatt 4 (Aufgabe 3a). Das Erstellen der Tabelle funktioniert genauso wie bei Kredit 1, es wird nur ein anderer Zinssatz verwendet. Die angegebenen Werte in Tab. 22 erhält man z.B. bei einem Zinssatz $p\% = 7,5\%$.

	A	D	H
1	Jahre	Rate 3	Kredit 3
2	0		100 000
3	1	8 058,64	98 941,36
4	2	8 058,64	97 808,614
⋮	⋮	⋮	⋮

Tab. 22 Raten Kredit 3

Die Visualisierung der Raten erfolgt wie zuvor mit verschiedenen Symbolen, siehe Abb. 35.

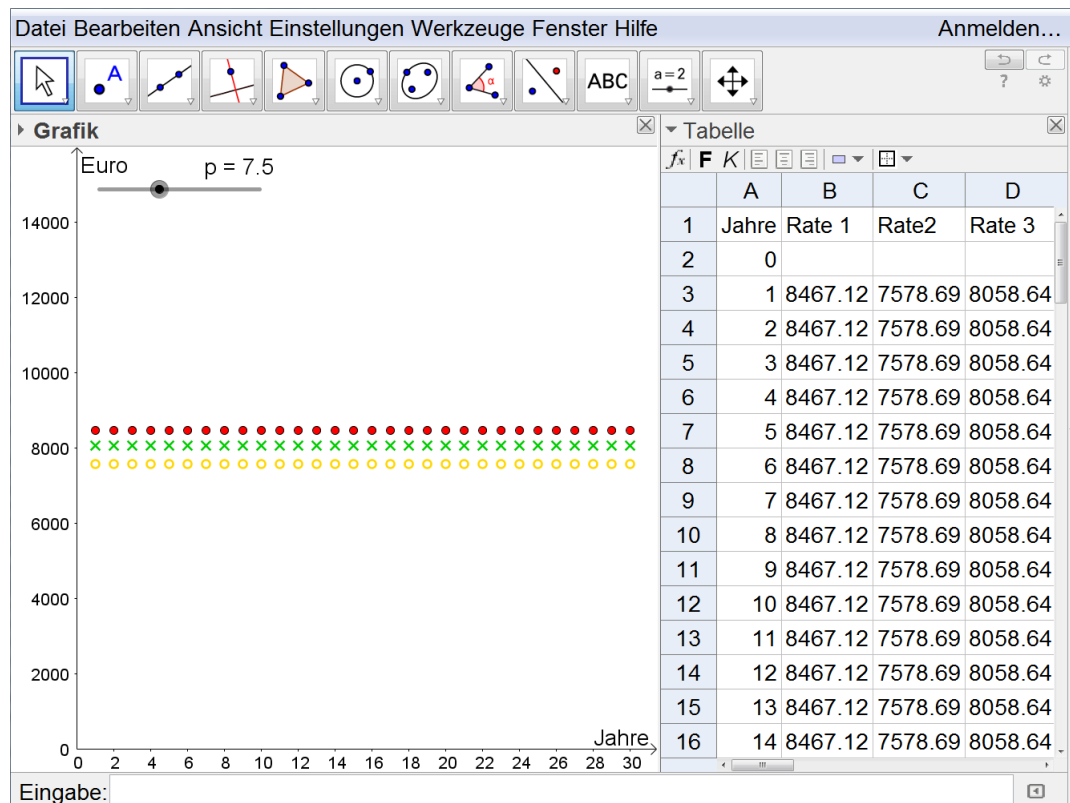


Abb. 35 Höhen der Raten

Ein Experimentieren mit den Schieberegler führt zur Aussage: „Wenn der Leitzinssatz einen niedrigeren Wert annimmt, dann nehmen die Höhen der Raten der einzelnen Kreditarten auch einen niedrigen Wert an“.

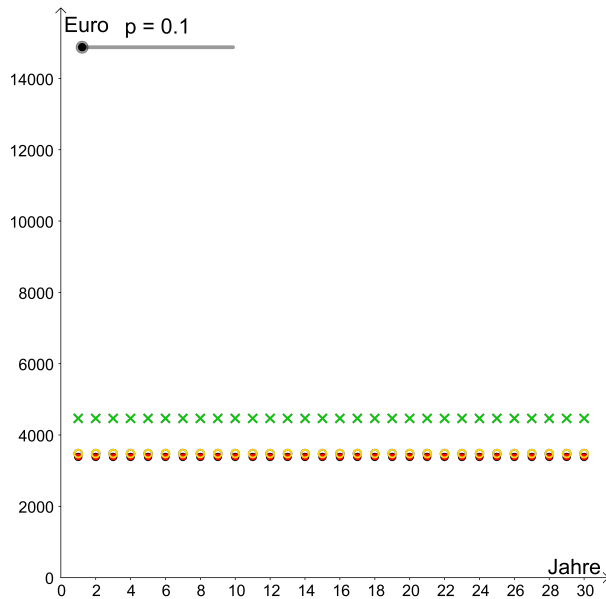


Abb. 36 Szenario für $p = 0,1$

Im Fall $p = 0,1$ (vgl. Abb. 36) zeigt sich, dass die Aufnahme von Kredit 3 eine schlechte Wahl ist. Der Zinssatz p_3 von Kredit 3 ist in so einem Fall konstant 2. Die niedrigsten Raten bietet Kredit 1. Kredit 2 liefert aufgrund seiner speziellen Konstruktion, im ersten Jahr 1% und im zweiten Jahr 2%, ein schlechteres Ergebnis, es muss also mehr zurückbezahlt werden als bei Kredit 1. Bei anderen Werten des Leitzinssatzes ergeben sich andere Ausgänge. Ein weiteres mögliches Szenario $p = 7,6$. Die niedrigste Rate liefert bei so einem Zinssatz Kredit 2. Es ist auch möglich, dass bei Kredit 3 die niedrigsten Raten bezahlt werden müssen (vgl. Abb. 37).

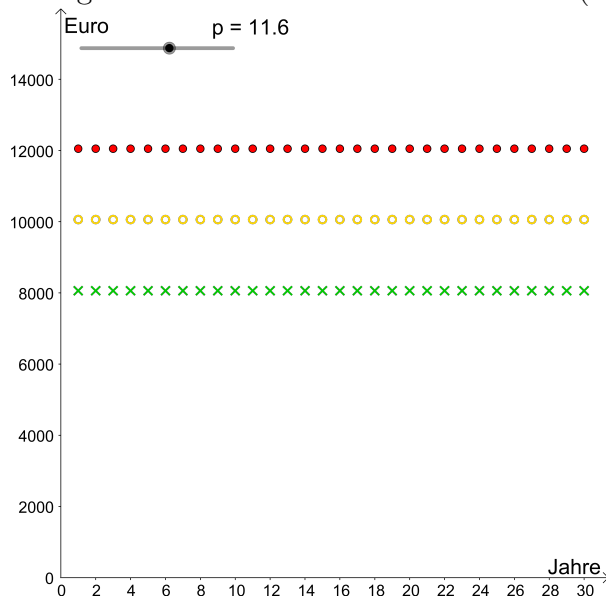


Abb. 37 Szenario für $p = 11,6$

In Fällen von sehr hohen Werten des Leitzinssatzes zeigt sich eben wieder die Stärke von Kredit 3. Es stellt sich nun die Frage, welcher Kredit bei welchem Leitzinssatz am

besten ist.

Fazit – auf Grundlage der Beobachtungen

Es zeigt sich durch Beobachtung, dass die Raten bei Kredit 1 bis zu einem Wert bei p von ungefähr 1,5 niedriger als die Raten bei Kredit 2 sind. Bei allen Werten größer als 1,5 für p weisen die Raten von Kredit 1 einen höheren Wert als die von Kredit 2 auf. Ein Vergleich der Raten von Kredit 1 und Kredit 3 bestätigt die Vermutung, so lange der Wert von p kleiner als 2 ist, sind die Raten von Kredit 1 niedriger als jene von Kredit 3. Die Raten der beiden Kredit sind genau gleich, wenn p Werte von 2 bis 7 annimmt. Bei allen größeren Werten erkennt man niedrigere Raten bei Kredit 3. Bis zu einem Wert von p von ungefähr 8,5 beobachtet man niedrigere Werte der Raten bei Kredit 2, bei allen größeren Werten als 8,5 für p gilt das Umgekehrte. Es ergibt sich die Entscheidungsregel:

- (a) $0 \leq p \leq 1,5 \Rightarrow$ wähle Kredit 1!
- (b) $1,5 \leq p \leq 8,5 \Rightarrow$ wähle Kredit 2!
- (c) $p \geq 8,5 \Rightarrow$ wähle Kredit 3!

Zweiter Zugang

Wir untersuchen die oben beobachteten Ausfälle wieder genauer. Dabei vergleichen wir nun die Höhe der einzelnen Raten.

Kredit 1 vs Kredit 2

- (a) $p = 0$

Für den ersten Kredit ergibt in diesem Fall eine Rate in der Höhe von $R_1 = \frac{100\,000}{30} \approx 3\,333,34$. Die Höhe der Rate für den zweiten Kredit erhalten wir aus der modifizierten Tilgungsgleichung $S_n = S \cdot 1,01 \cdot 1,02 - R \cdot 1,02 - R \cdot (n-1) = 0$ für $p = 0$. Man erhält $R_2 = \frac{1,01 \cdot 1,02 \cdot 100\,000}{30 + 0,02} \approx 3\,431,71$. In diesem Fall ist Kredit 1 besser als Kredit 2.

- (b) $0 < p < 1,488$

Wenn der Leitzinssatz $p\%$ steigt, dann steigen auch die Raten beider Kredite. Es ist nur die Frage, ab welchem p übersteigt die Höhe der Raten von Kredit 1 die Höhe der Raten von Kredit 2. Das Erhalten der oberen Grenze führen wir im nächsten Fall vor.

- (c) $p \approx 1,488$

Die einzelnen Tilgungsgleichungen führen hier weiter. Die folgende Formel gibt die Ratenhöhe für Kredit 1 mit $q := 1 + \frac{p}{100}$ an, vgl. Formel (33) auf Seite 235:

$$R_1 = 100\,000 \cdot \frac{q^{30} \cdot (q - 1)}{q^{30} - 1} \quad q \neq 1.$$

Eine entsprechende Formel für R_2 bei Kredit 2 erhält man aus

$$S_{30} = 100\,000 \cdot 1,01 \cdot 1,02 \cdot q^{28} - R \cdot 1,02 \cdot q^{28} - R \frac{q^{29}-1}{q-1} = 0, \text{ also:}$$

$$R_2 = \frac{100\,000 \cdot 1,01 \cdot 1,02 \cdot q^{28}}{1,02 \cdot q^{28} + \frac{1-q^{29}}{1-q}} \quad q \neq 1.$$

Gleichsetzen liefert jenen Wert q , bei dem beide betrachteten Raten gleich hoch sind. Es empfiehlt sich ein CAS-Einsatz, der einiges an Zeit beanspruchen kann. Das CAS liefert drei Lösungen: $q_1 \approx 1,01488$, $q_2 = 0$ und $q_3 \approx -0,90698$. Die einzige brauchbare Lösung ist q_1 . Das heißt bei einem Zinssatz von $p\% \approx 1,488\%$ sind die Raten beider Kredite gleich hoch.

(d) $p > 1,488$

In diesem Fall ist Kredit 2 besser als Kredit 1, da die Raten R_2 niedriger als R_1 sind.

Kredit 1 vs Kredit 3

(a) $p = 0$

Die Höhe der Rate von Kredit 1 ist uns bereits bekannt $R_1 \approx 3\,333,34$. Bei Kredit 3 bleibt zu bedenken, dass der Zinssatz $p_3\%$, der ja von p abhängt, nicht kleiner als 2 wird. Wir erhalten also eine Ratenhöhe $R_3 = 100\,000 \cdot \frac{1,02^{30} \cdot (1,02-1)}{1,02^{30}-1} \approx 4\,464,99$. In diesem Fall ist Kredit 1 besser.

(b) $0 < p < 2$

Aufgrund der Konstruktion des Zinssatzes $p_3\%$ und der Überlegungen aus dem ersten Teil folgt, dass für ein p zwischen den angegebenen Schranken die Raten des Kredites 1 kleiner sind als die des Kredites 3.

(c) $2 \leq p \leq 7$

Für ein p in diesem Intervall sind die Zinssätze beider Kredite gleich, also müssen auch die Höhen der Raten gleich sein.

(d) $7 < p$

Der Zinssatz $p_3\%$ des Kredites 3 ist unter diesen Vorgaben konstant 7, also kleiner als der Zinssatz $p\%$ des Kredites 1. In diesem Fall ist Kredit 3 besser als Kredit 1.

Kredit 2 vs Kredit 3

(a) $p = 0$

Wir haben die Werte R_2 und R_3 in diesem Fall schon berechnet. Es gilt $R_2 = 3\,431,71 < 4\,464,99 = R_3$.

(b) $0 < p < 8,292$

Wenn wir einen Blick auf „Kredit 1 vs Kredit 2“ zurückwerfen, dann sehen wir, dass für ein p mit $1,488 < p$ die Raten von Kredit 2 niedriger als die von Kredit 1 sind. Diese Tatsache verwenden wir, denn so lange $p_3 \geq p$ ist, so lange ist $R_3 \geq R_2$. Der Zinssatz $p_3\%$ bleibt für $p > 7$ konstant 7. Das verwenden wir, um jenen Leitzinssatz $p\%$ auszurechnen, bei dem $R_2 = R_3$ ist. Zusammenfassend für diesen Fall, Kredit 2 ist besser als Kredit 3.

(c) $p \approx 8,292$

Um diesen Zinssatz zu berechnen, geben wir wieder die beiden Formeln für die Ratenhöhe an. Für Kredit 2 gilt:

$$R_2 = \frac{100\,000 \cdot 1,01 \cdot 1,02 \cdot q^{28}}{1,02 \cdot q^{28} + \frac{1-q^{29}}{1-q}} \quad q \neq 1.$$

Aufgrund der obigen Überlegungen können wir mit einem Zinssatz $p_3\% = 7\%$ rechnen. Es ergibt sich:

$$R_3 = 100\,000 \cdot \frac{1,07^{30} \cdot (1,07 - 1)}{1,07^{30} - 1} \approx 8\,058,64.$$

Wir erhalten den gesuchten Wert $p = (q - 1) \cdot 100$ durch Gleichsetzen. Es ergibt sich der oben stehende Wert von $p \approx 8,292$.

Fazit – auf Grundlage der Berechnungen

Es ergibt sich folgende Entscheidungsregel:

- (a) $0 \leq p \leq 1,488 \Rightarrow$ wähle Kredit 1!
- (b) $1,488 \leq p \leq 8,292 \Rightarrow$ wähle Kredit 2!
- (c) $p \geq 8,292 \Rightarrow$ wähle Kredit 3!

5. Begründung

- (a) Wir setzen S_n in der Tilgungsgleichung (31) auf Seite 235 gleich 0 und drücken uns die Variable n , also die Anzahl der Jahre, explizit aus.

$$n = \frac{-\ln(1 - \frac{p}{100} \cdot \frac{S}{R})}{\ln(1 + \frac{p}{100})} \quad p \neq 0 \quad (32)$$

Wir analysieren nun die Veränderung von n in Abhängigkeit von p und unterscheiden dabei vier Fälle:

- $p = 0$

In diesem einfachen Fall gibt es keine Verzinsung und man erhält $n = \frac{S}{R}$ für die Dauer der Rückzahlung. Mit den vereinbarten Werten erhält man $n \approx 11,9$.

- $0 < p < \frac{100 \cdot R}{S}$

Für Werte von p in dem angegebenen Bereich liefert die Formel (32) konkrete Werte, da alle Ausdrücke definiert sind. Das bedeutet, dass bei so einem Leitzinssatz $p\%$ die Schuld in endlicher Zeit zurückgezahlt werden kann.

Um nachzuweisen, dass n mit steigendem Zinssatz $p\%$ ebenfalls steigt, betrachten wir n in Abhängigkeit von p . Am besten eignet sich die Betrachtung des Funktionsgraphen (siehe Abb. 38) von n , wobei $R = 8\,400$ und $S = 100\,000$ ist. Eine formale Begründung an dieser Stelle scheint uns für die Schule zu schwierig, da es selbst mit Hilfe von Differentialrechnung nicht einfach wird.

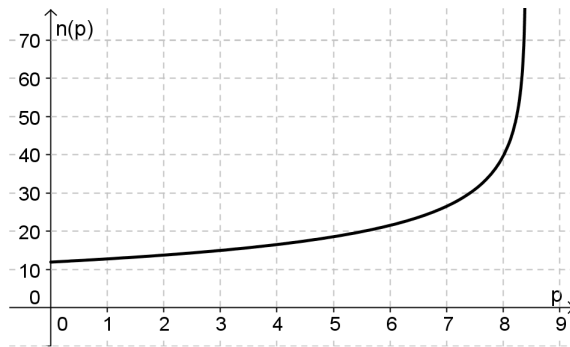


Abb. 38 Graph der Funktion n

An dieser Stelle empfiehlt es sich die Argumentationsebenen zu wechseln, denn inhaltlich erscheint die Argumentation völlig klar: Wenn der Leitzinssatz $p\%$ steigt, dann muss ein höherer Betrag an Zinsen gezahlt werden, bei gleicher Rate dauert die Rückzahlung länger.

Eine formale Begründung gestaltet sich ein wenig trickreicher. Sei im folgenden $q := 1 + \frac{p}{100}$, dann ist nach Voraussetzung in diesem Fall $1 < q < \frac{100 \cdot R}{S} + 1$. Es gilt nach Gleichung (30) auf Seite 234, wobei $S_n = 0$ gesetzt wurde, die Gleichung (39)

$$S \cdot q^n = R \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1). \quad (39)$$

Diese Gleichung ist unter Berücksichtigung aller Voraussetzungen äquivalent zur Gleichung (40)

$$\frac{S}{R} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^n}. \quad (40)$$

Wenn nun q größer wird, wird $\frac{1}{q^i}$ kleiner für $i \in \{1, \dots, n\}$. Der Wert $\frac{S}{R} > 0$ bleibt aber konstant, also müssen zusätzliche Summanden hinzukommen. Die Anzahl n wächst.

- $\frac{100 \cdot R}{S} = p$

Der Spezialfall $p = \frac{100 \cdot R}{S}$ ergibt für den Ausdruck $1 - \frac{p}{100} \cdot \frac{S}{R}$ den Wert 0. Für ein solches p ist $n(p)$ gar nicht mehr definiert. Die Dauer des Abbezahlens ist unendlich, da sich $\lim_{x \rightarrow 0} (-\ln(x)) = \infty$ ergibt. In anderen Worten, die Raten decken genau die anfallenden Zinsen, tragen aber nicht zur Reduzierung der Schulden bei.

Eine Rate R besteht in einer gewissen Sichtweise aus zwei Teilen $R = Z + T$, wobei Z die anfallenden Zinsen sind und T der Tilgungsbetrag, also jener Betrag, der den Schuldenstand wirklich verringert. Bei dieser speziellen Wahl von p gilt $R = Z$, das bedeutet, wir zahlen „schön brav“ die Zinsen der Ausgangsschuld, aber wir schaffen es nicht die Schuld zu verringern, bis in alle Ewigkeit. Einen besseren Eindruck liefert ein Blick auf die Rekursionsgleichung:

$$\begin{aligned} S_1 &= S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - R \\ S_1 &= S + S \cdot \frac{p}{100} - R. \end{aligned}$$

Wir setzen nun für p ein:

$$\begin{aligned} S_1 &= S + S \cdot \frac{\frac{100 \cdot R}{S}}{100} - R \\ S_1 &= S \\ S_2 &= S_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- $\frac{100 \cdot R}{S} < p$

Wie im vorigen Fall gilt, dass $n(p)$ gar nicht mehr definiert ist. Die Rekursionsgleichung liefert wieder die Erklärung:

$$\begin{aligned} S_1 &= S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - R \\ S_1 &= S + S \cdot \frac{p}{100} - R \end{aligned}$$

Es ist $S \cdot \frac{p}{100} > R$ und daher

$$\begin{aligned} S_1 &> S \\ S_2 &> S_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Schulden wachsen von Zeitschritt zu Zeitschritt, obwohl Raten in der Höhe von 8 400 Euro bezahlt werden.

Es zeigt sich also, dass für ein p im Intervall $\left[0; \frac{100 \cdot R}{S}\right]$, in unserem konkreten Fall $[0; 8,4[$ die folgende Aussage gilt: Wenn p wächst, dann wächst auch die Anzahl der für die Tilgung benötigten Jahre.

- (b) Siehe Erläuterungen für die Lehrperson bei Arbeitsblatt 3 (Aufgabe 4) auf Seite 233 f.!

(c) **Eine weitere Verteilung**

Hier kann für die Modellierung des Zinsfußes p der Befehl *ZufallszahlNormalverteilt* zu verwenden.

11.4.13 Unterrichtsvorschlag 2

Dieser Unterrichtsvorschlag ist eine Alternative zu den strukturierten Arbeitsblättern. Es handelt sich dabei um eine Auskopplung der Aufgabe 2 des Arbeitsblattes 4. Die unten angeführten Aufträge verstehen sich als eine offene Modellierungsaufgabe.

Kreditvergleich (a)

Versetze dich in die Lage, du benötigst 100 000 € und es bleibt dir nichts anderes übrig, als einen Kredit aufzunehmen. Vor der Kreditvertragsunterzeichnung muss das passende Angebot gefunden werden. Das Standardangebot umfasst verschiedene Kreditarten, aber welche wählst du aus?

Die Bank bietet dir folgende drei Kreditarten an. Diese unterscheiden sich nur durch den Kreditzinssatz, welcher auf unterschiedliche Art und Weise an den Leitzinssatz $p\%$ gebunden ist. Der Leitzinssatz wird von der Zentralbank des jeweiligen Währungsraumes aufgrund politischer und wirtschaftlicher Überlegungen bestimmt. Für den Euroraum ist das die Europäische Zentralbank (EZB).

Kredit 1: Ausgangsschuld: 100 000 € Jährliche Rate: 8 400 € Zinssatz (jährlich): gleich dem Leitzinssatz	Kredit 2: Ausgangsschuld: 100 000 € Jährliche Rate: 8 400 € Zinssatz (jährlich): im ersten Jahr 1%, im zweiten Jahr 2% und für alle folgenden Jahre gleich $p\%$.	Kredit 3: Ausgangsschuld: 100 000 € Jährliche Rate: 8 400 € Zinssatz (jährlich): gleich dem Leitzinssatz, außer wenn der Zinssatz unter einen Wert von 2% fällt, dann bleibt der Kreditzinssatz auf 2%, und wenn der Leitzinssatz über den Wert 7% steigt, dann bleibt der Kreditzinssatz auf 7%.
--	--	---

Fragen

1. Welche Ereignisse können dich in deinem zukünftigen Leben in so eine Lage bringen?
2. Nimm an, dass sich der Leitzinssatz $p\%$ während der Kreditlaufzeit nicht verändert!
Bei welchem Zinssatz ist welcher Kredit am besten?
3. Was kann man noch aussagen, wenn sich der Zinssatz verändert?

11.4.14 Musterlösung

Siehe Musterlösung zu Arbeitsblatt 4 (Aufgabe 2) auf Seite 235!

11.4.15 Unterrichtsvorschlag 3

Analog zu dem obigen Arbeitsblatt handelt es sich auch hier um eine Auskopplung, diesmal von der Aufgabe 4 auf Arbeitsblatt 5. Es soll sich wieder um ein offenes Gegenstück zu der sehr eng geführten angegebenen Unterrichtssequenz handeln.

Kreditvergleich (b)

Versetze dich in die Lage, du benötigst 100 000 € und es bleibt dir nichts anderes übrig, als einen Kredit aufzunehmen. Vor der Kreditvertragsunterzeichnung muss das passende Angebot gefunden werden. Das Standardangebot umfasst verschiedene Kreditarten, aber welche wählst du aus?

Die Bank bietet dir folgende drei Kreditarten an. Diese unterscheiden sich nur durch den Kreditzinssatz, welcher auf unterschiedliche Art und Weise an den Leitzinssatz $p\%$ gebunden ist. Der Leitzinssatz wird von der Zentralbank des jeweiligen Währungsraumes aufgrund politischer und wirtschaftlicher Überlegungen bestimmt. Für den Euroraum ist das die Europäische Zentralbank (EZB).

Kredit 1:

Ausgangsschuld: 100 000 €
Laufzeit: 30 Jahre
Zinssatz (jährlich): gleich dem Leitzinssatz

Kredit 2:

Ausgangsschuld: 100 000 €
Laufzeit: 30 Jahre
Zinssatz (jährlich): im ersten Jahr 1%, im zweiten Jahr 2% und für alle folgenden Jahre gleich $p\%$.

Kredit 3:

Ausgangsschuld: 100 000 €
Laufzeit: 30 Jahre
Zinssatz (jährlich): gleich dem Leitzinssatz, außer wenn der Zinssatz unter einem Wert von 2% fällt, dann bleibt der Kreditzinssatz auf 2%, und wenn der Leitzinssatz über den Wert 7% steigt, dann bleibt der Kreditzinssatz auf 7%.

Fragen

1. Welche Ereignisse können dich in deinem zukünftigen Leben in so eine Lage bringen?
2. Nimm an, dass sich der Leitzinssatz $p\%$ während der Kreditlaufzeit nicht verändert!
Bei welchem Zinssatz ist welcher Kredit am besten?
3. Was kann man noch aussagen, wenn sich der Zinssatz verändert?

11.4.16 Musterlösung

Siehe Musterlösung zu Arbeitsblatt 5 (Aufgabe 4) auf Seite 242!

11.5 Unterrichtsvorschlag – No-Arbitrage und Replikation

11.5.1 Zusammenfassung

Diese Unterrichtsmaterialien wurden speziell für Schulen mit wirtschaftlichen Schwerpunkten entwickelt und sind auf die zentralen Ideen *No-Arbitrage* und *Replikation* zugeschnitten. Der Beginn behandelt die Einführung des Begriffs Arbitrage anhand von Wechselkursen. Anschließend werden Forward Rates bestimmt und Preise für Terminkontrakte berechnet. Den Abschluss stellen Betrachtungen über den Optionspreis im Binomial- und Trinomialmodell dar. Das Material umfasst sieben Arbeitsblätter, wovon drei für Vertiefungen gedacht sind.

11.5.2 Besonderheiten

Diese Unterrichtssequenz ist für Handelsakademien und humanberufliche Schulen in Österreich gedacht. Der Fokus liegt hierbei auf zwei *zentralen Ideen* der Finanzmathematik *No-Arbitrage-Prinzip* und *Replikation* die a priori für die Schule von geringer Bedeutung sind, da sie schon sehr spezielle Techniken aus der Finanzmathematik repräsentieren. Im Sinne einer allgemeinbildenden Schule wäre die Verwendung dieser Materialien als Vertiefung anzusehen. Bei Schulen mit wirtschaftlichem Schwerpunkt lässt sich eine Behandlung der vorkommenden Produkte und finanzmathematischen Methoden als Beitrag zum gewählten Schulschwerpunkt sehen.

11.5.3 Beitrag zu den zentralen Ideen der Finanzmathematik

Die *zentrale Idee No-Arbitrage-Prinzip* wird genetisch, d.h. anhand eines Problems behutsam eingeführt und in verschiedenen Facetten analysiert. Zu Beginn stehen Überlegungen bei Währungstauschen, gefolgt von der Berechnung einer Forward Rate, über Futures, bis hin zu Optionen in einfachen Modellen (Binomialmodell, Trinomialmodell). Die Lernenden müssen zuerst nach Arbitragemöglichkeiten suchen und dann lernen gewisse Preise so festzusetzen, dass eine Arbitrage nicht mehr möglich ist.

In enger Verbindung zum *No-Arbitrage-Prinzip* steht beim Bepreisen von Derivaten eben die Idee der *Replikation*. In dieser Einheit wird der Begriff nicht explizit eingeführt, da er an sich nicht nötig ist. Replikation passiert beim Festlegen eines arbitragefreien Preises. Wir verzichten hier auf komplizierte dynamische Replikationen und konzentrieren uns auf einfache statische Replikationen via Buy-and-Hold-Strategien, ganz nach der Aussage von FM3.

FM3: „...den Aspekt von Arbitrage und Replikation kann man hier mit Hilfe von Beispielen von statischer Replikation, also Buy-and-Hold-Portfolios ... gut darstellen. Man kann Begriffe wie einen Forward-Kontrakt mit - Zinsen in zwei verschiedenen Währungen beispielsweise ... gut illustrieren und hier - ohne - - fortgeschrittenen mathematischen Kalkül, also nur unter Benützung von elementaren Rechnungen ... einführen.“

Abschließend erfährt der Lernende, dass der Preis einer Option abhängig vom gewählten Modell ist. So gibt es im Binomialmodell einen eindeutigen arbitragefreien Preis, während es im Trinomialmodell keinen eindeutigen arbitragefreien Preis gibt. Es gibt im Allgemeinen mehrere mögliche arbitragefreie Preise. Das ist ein erstes Schnuppern am „Fundamental Theorem of Asset Pricing“. Das Trinomialmodell ist im Allgemeinen frei von Arbitrage, hat

aber kein eindeutiges Martingalmaß.

Zu Beginn der Arbeitsmaterialien wird noch kein Wert auf die Modellvoraussetzungen gelegt, da zu Beginn der einfache mathematische Kalkül der Bepreisung über *No-Arbitrage* und *Replikation* stehen soll. Erst am Ende wird die Wichtigkeit der Wahl des Modells thematisiert.

11.5.4 Erfüllen der Kriterien guter Anwendung im Mathematikunterricht

1. Formale Aspekte:

Im Lehrstoff werden keine relevanten Themen genannt, in denen sich die Arbeitsmaterialien unterordnen ließen. Im Lehrplan der Handelsakademien findet man bei schulautonomen Vertiefungsmöglichkeiten ein „Seminar“ mit dem Titel „Private Banking“, welches im Lehrstoff ausdrücklich Finanzmathematik, sowie Optionen und Termingeschäfte erwähnt. So gesehen, müssen diese Arbeitsmaterialien als Vorschlag für den Regelunterricht in Mathematik für Schulen mit wirtschaftlichen Schwerpunkt gesehen werden.

2. Eignung:

Dieses Thema kommt explizit in der Alltagswelt der durchschnittlichen Schüler/innen kaum vor. Zwar kommt man in Kontakt mit Wechselkursen und hört unter Umständen von Derivaten, wie Futures und Optionen, allerdings nur am Rande durch die Medien. Auch für das spätere Leben sind diese Themen mutmaßlich nur für die wenigsten Lernenden relevant. Einen vermutlich höheren Anteil an Schülern/innen, die das betrifft, findet man in Schulen mit einem wirtschaftlichem Schwerpunkt. Aus diesem Grund wird die Empfehlung zur Verwendung für einen Schultyp am Beginn des Kapitels gegeben.

3. Authentizität:

Die Prinzipien von *Arbitrage* und *Replikation* werden zwar in einem einfachen mathematischen Setting präsentiert. Aber an sich lassen sich diese eins zu eins auf komplexere stetige Modelle übertragen.

4. Mathematische Aspekte:

Wenn man die Arbeitsblätter von einem rein mathematisch operativen Zugang betrachtet, dann stellt das Lösen eines Gleichungssystems mit zwei Gleichungen in zwei Variablen den Höhepunkt dar. Die zugehörigen Sachverhalte zu verstehen, gestaltet sich weit schwieriger. Das Lesen der Texte und anschließende Übersetzen in eine mathematische Operation ist die eigentliche Schwierigkeit.

11.5.5 Fokusbegriffe

Der *Zufall* wird explizit kaum thematisiert. Implizit stecken in den Arbeitsblättern zu den Terminkontrakten sowie zu den Optionen Überlegungen zur zufälligen Änderung des Weizenpreises sowie des Aktienkurses, die unter den subjektiven Zufallsbegriff fallen.

Ähnlich verhält es sich mit den Wahrscheinlichkeitsbegriffen, welche bei der Gewichtung der Wege des Aktienkurses kurz eine Rolle spielen. Das Wesentliche bei diesem Unterrichtsszenario ist jedoch die Unbedeutsamkeit der Wahrscheinlichkeiten für die Bestimmung des

Optionspreises. Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten passiert am ehesten über historische Daten, dahinter steckt also der frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff, der aber keine Rolle spielt, da die Genese der Wahrscheinlichkeiten nicht thematisiert wird.

11.5.6 Einbettung in bereits bestehende Unterrichtsmaterialien

Die hier vorgestellten Arbeitsmaterialien fokussieren auf das *No-Arbitrage-Prinzip* und die *Replikation*. Der Beginn über die ersten vier Arbeitsblätter stellt einen gänzlich neuen Zugang dar. Die Optionspreisberechnung wurde schon als Unterrichtsvorschlag publiziert (siehe DAUME, 2009, S. 191 ff. bzw. DAUME, 2017, S. 121 ff.), dieser dort veröffentlichte Zugang eignet sich ebenfalls für eine Durchführung im Unterricht. Die Arbeitsblätter 5 und 6 können dadurch ersetzt werden. Des Weiteren wird bei den hier folgenden Arbeitsmaterialien nicht umfangreich auf die Modellierung des Aktienkurses eingegangen. Wer in diesem Bereich eine Vertiefung vorsieht, kann die Unterrichtsvorschläge „Entwicklung eines Modells für die Kursbewegung einer Aktie“ (siehe DÖHRMANN, 2004, S. 218 ff.) oder „Die zufällige Irrfahrt einer Aktie“ (siehe DAUME, 2009, S. 149 ff. bzw. DAUME, 2016, S. 231 ff.). Nicht verzichtet werden sollte bei allen Ausflügen auf andere Materialien auf das Arbeitsblatt 7. Hier wird der Modellierungsaspekt explizit gemacht. Bei einer leichten Änderung des zugrundeliegenden Aktienkursmodells in diesem Fall von Binomialmodell auf Trinomialmodell gibt es keinen eindeutigen Optionspreis mehr. Das erwähnen andere Unterrichtsvorschläge nicht.

11.5.7 Vorkenntnisse

Kenntnisse aus der elementaren Algebra, die üblicherweise in der Sekundarstufe I erworben werden, sind hier vorausgesetzt. Das Lösen eines Gleichungssystems mit zwei Gleichungen in zwei Variablen steht auch im Lehrstoff der 9. Schulstufe. Des Weiteren kommen Wahrscheinlichkeiten vor, die zwar rechnerisch keine Bedeutung haben, aber zu Verständnisschwierigkeiten führen könnten, wenn man damit keinerlei Erfahrungen gemacht hat. Teile der Materialien können schon in der 9. Schulstufe behandelt werden, zur Gänze aber erst nach Einführung von Wahrscheinlichkeiten in der 10. Schulstufe.

11.5.8 Zeitbedarf

4-6 Unterrichtseinheiten (individuell verkürzbar, durch Weglassen von Vertiefungen)

11.5.9 Lehrplanbezug

Sowohl im Lehrplan der AHS als auch in den Lehrplänen der BHS findet sich keine explizite Erwähnung der angesprochenen Thematik.

11.5.10 Lernziele

1. Die Schüler/innen können Arbitragemöglichkeiten in einfachen Situationen auffinden.
2. Die Schüler/innen sind der Lage, mittels des *No-Arbitrage-Prinzips* und einer *Replikation* bestimmte Finanzprodukte bepreisen zu können.

3. Die Schüler/innen können die Abhängigkeit des Optionspreises vom gewählten Modell erläutern.

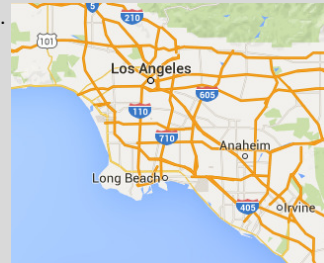
11.5.11 Unterrichtsvorschlag 1

Risikolose Gewinne

1

1. Urlaub

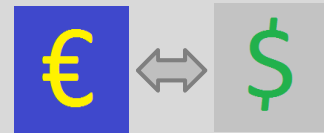
- In den Sommerferien fliegst du mit deinen Eltern nach Los Angeles. Für diesen Urlaub benötigt ihr Dollar (US \$), zu diesem Zweck möchtet ihr 2000 € in Dollar wechseln. In einer Bank in Wien bekommt man für einen Euro 1,04 Dollar (Wechselkurs). Wie viele Dollar bekommt man nun für 2000 €?
- In den USA möchtest du dir das neue Mobiltelefon der bekannten Firma „Banana“ kaufen, dieses Produkt kostet 312 \$. Wie viele Euro musst du zuvor wechseln lassen, damit du dir das Handy kaufen kannst?
- Wie viele Euro bekommt man (bei obigem Wechselkurs) für einen Dollar?



<https://maps.google.at/>

2. Geld wechseln und vermehren

- In Los Angeles fällt dir auf, dass man dort für einen Dollar 0,99 Euro bekommt. Angenommen du könntest in Wien und Los Angeles zur gleichen Zeit sein (und der Wechselkurs in Wien ist noch immer derselbe, also für einen Euro bekommt man 1,04 Dollar), wie müsstest du wechseln, damit du in kürzester Zeit eine Menge Geld machen könntest?
- Ist so etwas in der Realität möglich?
- Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit wir unbegrenzt viel Geld durch Wechseln verdienen können? Probiere dazu andere Wechselkurse für Los Angeles aus!



http://de.123rf.com/photo_3026833_euro-geld-regen.html

Eine solche Art von Tausch nennt man **Arbitrage**.

Arbitrage ist eine Kombination von Geschäften ohne (Netto)-Einsatz von Kapital, wobei jedes dieser Geschäfte riskant ist, jedoch im Gesamten heben sich die einzelnen Risiken gegenseitig auf und es verbleibt ein risikoloser Gewinn. Kurz gesagt: es wird aus nichts (Guthaben von 0 €) ohne Risiko Geld gemacht. Auf Aktienmärkten existiert Arbitrage, sobald diese entdeckt und ausgenutzt wird, verschwindet diese Möglichkeit aber wieder durch die Marktkräfte von Angebot und Nachfrage. In der Praxis sollte nie ein Preis angeboten werden, bei dem sich in einem Modell eine Arbitragemöglichkeit ergibt, denn: Wenn jemand sehr viel Geld gewinnt, dann verliert ein/e andere/r sehr viel Geld. Letztere/r will niemand sein.

3. Trianguläre Arbitrage

- Im Internet siehst du folgende Wechselkurse 0,7 €/£ (d.h. für ein Pfund bekommt man 0,7 Euro) bzw. 1,43 £/€ (d.h. für einen Euro bekommt man 1,43 Pfund), 0,9 \$/€ bzw. 1,11 €/£ und 0,68 \$/£ bzw. 1,47 £/\$. Bestimme eine Ausgangswährung, wechsle von dieser in eine zweite und daraufhin in eine dritte Währung und abschließend in die Ausgangswährung zurück. Wie muss getauscht werden, um einen risikolosen Gewinn zu erwirtschaften?
- Wie kann man überprüfen, ob eine trianguläre Arbitrage möglich ist? Gib eine mathematische Bedingung an, damit keine solche Arbitrage möglich ist!

Zukünftiger Wechselkurs (Forward Rate)

2

Problemstellung: Eine europäische Bank möchte genau heute in einem Jahr einen Betrag von 100 000 Euro in Dollar wechseln. Das Ziel der Bank ist es, den Wechselkurs schon heute zu vereinbaren, um sich vor Wechselkursschwankungen abzusichern. Bei welchem Wechselkurs wird sich eine andere Bank finden, die den Betrag wechselt? Gibt es so etwas wie einen fairen Wechselkurs?

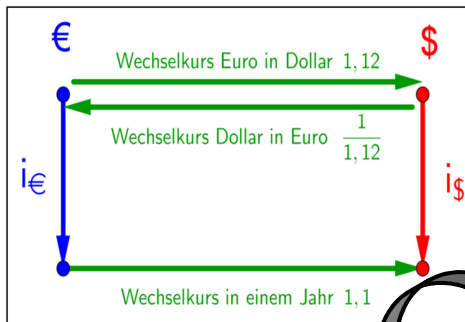
- I. Eine amerikanische Bank bietet der europäischen Bank den Wechselkurs von 1,1 in einem Jahr an (ein Euro entspricht in einem Jahr 1,1 Dollar). Der heutige Wechselkurs von Euro in Dollar beträgt 1,12 (ein Euro entspricht 1,12 Dollar). Wir nehmen an, im umgekehrten Fall gilt ein Wechselkurs von $\frac{1}{1,12}$ (ein Dollar entspricht $\frac{1}{1,12}$ Euro). Wer einen Euro heute auf ein Sparbuch legt, bekommt in einem Jahr 1,01 Euro, der Ein-Jahres-Zinssatz im Euroraum beträgt also 1%, währenddessen der Ein-Jahres-Zinssatz in den USA 2% beträgt (Soll- und Habenzinssätze sind jeweils gleich hoch.). Soll die europäische Bank den Deal eingehen? Die Strategen der amerikanischen Bank haben folgenden Plan:

Heute:

1. Sie nehmen einen Kredit von $100\,000 \cdot \frac{1}{1,01}$ Euro bei einer anderen europäischen Bank auf.
2. Sie wechseln den Betrag sofort in Dollar um.
3. Dieser Betrag wird in Amerika bei einer anderen Bank veranlagt, sodass sie in einem Jahr Zinsen bekommen.

In einem Jahr:

1. Sie heben das gesamte Geld von der anderen amerikanischen Bank ab.
2. Sie müssen nun den vereinbarten Betrag zum vereinbarten Wechselkurs tauschen und erhalten 100 000 Euro und zahlen gleichzeitig 110 000 Dollar.
3. Sie begleichen ihren Kredit von mittlerweile 100 000 Euro.
4. Sie freuen sich über einen risikolosen Gewinn und dabei ist es ganz egal, ob der Kurs des Euro in Dollar gestiegen oder gefallen ist.



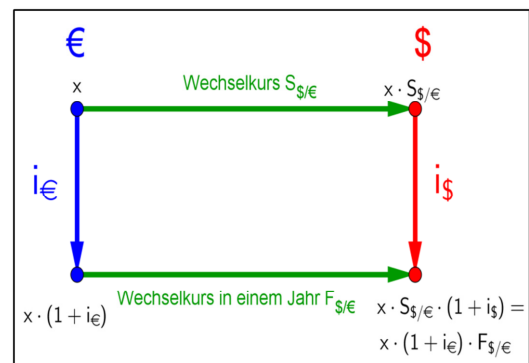
Fragen (verwende die Abbildung, sie soll das Rechnen erleichtern!):

- a. Wie groß ist der risikolose Gewinn der amerikanischen Bank?
- b. Sollte nun die europäische Bank auf das Angebot eingehen?
- c. Was wäre nun ein fairer Wechselkurs?

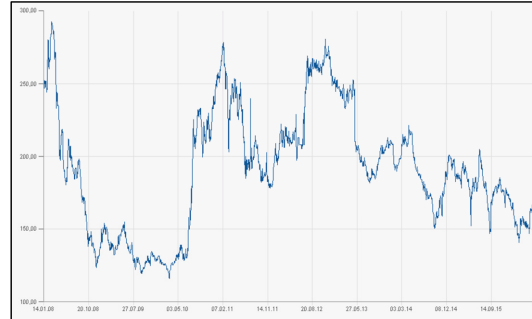
- II. Gibt es für diesen zukünftigen Wechselkurs (in der Fachsprache „Forward rate“ genannt) eine Formel, um ihn zu bestimmen?

Hinweis: Verwende die Abbildung! Egal welchen Weg du von links oben nach rechts unten verfolgst, am Ende muss der Betrag derselbe sein!

- III. Was ermöglicht eine „Ungleichheit“ am Ende der beiden Wege?



Bauer Jansen ist Getreidebauer. Er baut die Getreidesorten Weizen an, welche vor allem zur Herstellung von Brot benötigt werden. Je nach Wetter fällt seine Ernte unterschiedlich groß aus. Bis jetzt konnte er aber im schlimmsten Fall immer noch 90 Tonnen an Weizen ernten. Das Problem ist nur, dass er kaum kalkulieren kann, wie viel er für eine Tonne Weizen im nächsten Jahr bekommen wird. In der nebenstehenden Abbildung sieht man, wie stark der Preis für eine Tonne Weizen schwankt. Von Höchstwerten von fast 300 Euro pro Tonne Weizen bis zu Tiefstwerten von nur mehr 100 Euro pro



<http://www.finanzen.at/rohstoffe/chart/weizenpreis>

Tonne ist jeder Wert in den letzten Jahren schon vorgekommen. Der Bauer möchte schon dieses Jahr den Preis für eine Tonne Weizen, die er erst nächstes Jahr liefern muss, vereinbaren. Der momentane Preis für eine Tonne Weizen beträgt 167,50 Euro. Herr Jansen vereinbart mit einem Großabnehmer einen Preis von 200 Euro für eine Tonne Weizen, die genau in einem Jahr geliefert werden muss und bekommt für jede Tonne einen Schein („Terminkontrakt“). Dieser vereinbarte Preis ist höher und er hat für eine Tonne Weizen schon einen sicheren Abnehmer gefunden. Der Großabnehmer verlangt allerdings einen Preis von 40 Euro pro Schein. Der Bauer möchte in einem Jahr 60 Tonnen verkaufen und deshalb 60 Scheine kaufen. Herr Jansen, der keine Erfahrung bei diesen Geschäften hat, weiß nicht, ob das ein fairer Preis ist? Soll er dieses Geschäft eingehen, wenn der Zinssatz auf der Bank 2% beträgt?

Wie bei den vorigen Arbeitsblättern empfiehlt es sich zu schauen, ob der Großabnehmer oder Herr Jansen einen risikolosen Gewinn machen können. Betrachte folgendes Vorhaben des Großabnehmers:

Der Großabnehmer absolviert heute folgende Geschäfte:

- Er verkauft 60 Scheine,
- verkauft 60 Tonnen Weizen zum jetzigen Preis (die hat der Großabnehmer noch in seinem Silo lagernd),
- legt $60 \cdot 200 \cdot \frac{1}{1,02}$ Euro auf ein Geschäftskonto bei der Bank.
- Den Rest des Geldes legt er auf sein privates Konto bei der Bank.

Der Großabnehmer vollführt folgende Geschäfte in einem Jahr:

- Er hebt das Geld von seinem Geschäftskonto ab,
- kauft die 60 Tonnen Weizen von Bauer Jansen zum Preis von 200 Euro pro Tonne,
- füllt sein Lager mit den 60 Tonnen Weizen wieder auf,
- freut sich über einen risikolosen Gewinn auf seinem privaten Konto.

Fragen

1. Wie viel Geld hat der Großabnehmer nach einem Jahr auf seinem privaten Konto? Soll Bauer Jansen diese Scheine kaufen?
2. Was wäre ein fairer Preis für einen Schein?
3. Kannst du eine Formel für den fairen Preis eines solchen Scheins angeben? Schreibe W für den heutigen Weizenpreis und $p\%$ für den Zinssatz!
4. Ist ein Terminkontrakt etwas Sinnvolles?

1. Der Großabnehmer an Weizen möchte diesmal keine Scheine verkaufen, sondern einen Schein selbst erwerben. Allerdings soll dieser ihm das Recht geben, eine Tonne Weizen um 160 Euro genau heute in einem Jahr zu erwerben. Der momentane Preis für eine Tonne Weizen beträgt 167,50 Euro. Der Großabnehmer bekommt so einen Schein von Bäuerin Hansen um 20 Euro angeboten. Der Zinssatz bei der Bank beträgt sowohl für Sparbuch als auch Kredit 2% p. a. Soll der Großabnehmer diesen Schein kaufen?
 - a. Betrachte die folgende Handelsstrategie der Bäuerin, wie viel Geld gewinnt die Bäuerin?

Die Bäuerin handelt heute folgendermaßen:

- Sie verkauft dem Großabnehmer einen Schein,
- borgt sich $1/1,02 \cdot 160$ Euro von der Bank,
- kauft eine Tonne Weizen und lagert sie in ihrem Silo,
- den Rest legt sie auf ihr Bankkonto.

In einem Jahr tätigt sie folgende Geschäfte:

- Sie verkauft eine Tonne Weizen und bekommt e Euro,
- sie muss/kann den Differenzbetrag zwischen aktuellem Weizenpreis und 160 Euro decken/einnehmen,
- sie zahlt das ausgeborgte Geld bei der Bank zurück,
- sie freut sich über die Zinsen auf ihrem Sparbuch.

- b. Wie kann die Bäuerin noch mehr Geld gewinnen?
 - c. Was wäre ein fairer Preis für diesen Schein?
 - d. Kannst du eine Formel für den fairen Preis eines solchen Scheins angeben? Schreibe W für den heutigen Weizenpreis und $p\%$ für den Zinssatz!
2. Es kann auch ein Terminkontrakt über eine bestimmte Aktie erworben werden. Dieser Schein ermächtigt den Besitzer, zu einem bestimmten Zeitpunkt T die Aktie zu einem zuvor vereinbarten Preis K zu kaufen. Nimm einen Jahreszinssatz $i = p\%$ an und eine Laufzeit von einem Jahr ($T = 1$) an! Bezeichne den Wert einer Aktie zum Zeitpunkt t mit $S(t)$.
 - a. Wie viel ist dieser Kontrakt am Ende seiner Laufzeit wert?
 - b. Wie viel ist dieser Kontrakt am Beginn wert?

3. Lies dir die graue Box (siehe unten) durch!

In einer arbitragefreien Welt gilt:

Wenn zwei Portfolios morgen den gleichen Wert haben, dann haben sie auch heute den gleichen Wert.

Beweis:

Angenommen die beiden Portfolios haben heute nicht den gleichen Wert, dann ist eines der beiden mehr wert als das andere. In diesem Fall kann man heute das morgen teurere Portfolio verkaufen (ohne es zu besitzen, das ist in der Finanzwelt möglich und heißt Leerverkauf, man muss es nur zu einem bestimmten späteren Zeitpunkt selbst erwerben und dem Käufer physisch geben), während man mit diesem Geld das morgen billigere kauft. Es verbleibt eine Differenz. Am nächsten Tag verkauft man das ursprünglich billigere Portfolio und kauft mit diesem Geld das ursprünglich teurere zurück, beide sind ja nun gleich viel wert. Die gestern erhaltene Differenz verbleibt als risikoloser Gewinn. Es wurde eine Arbitragemöglichkeit gefunden. Widerspruch zur Annahme, dass wir uns in einer arbitragefreien Welt befinden!

Optionen im Binomialmodell

5

An der Börse gibt es auch Produkte, deren Verkaufspreis eine Modellierung des Aktienkurses (bzw. des Preises, von dem das gekaufte Produkt abhängt, wie zuvor zum Beispiel der Preis des Weizens) erfordert. Bei solchen Modellierungen muss man sich stets im Klaren sein, dass der Preis im Wesentlichen vom gewählten Modell abhängt. Auf diesem Arbeitsblatt erfährst du etwas über das denkbar einfachste arbitragefreie Modell eines Finanzmarktes, dabei trifft man zunächst folgende Annahmen über den Aktienkurs:

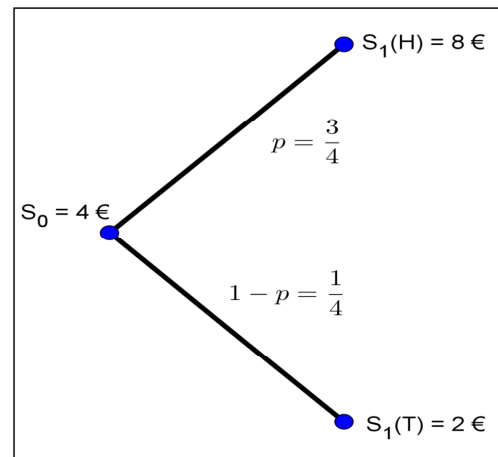
Annahmen über den Aktienkurs (siehe Abb.):

- Es wird nur der Wert der Aktie zu zwei Zeitpunkten betrachtet: Heute ($S_0 = 4 \text{ €}$) und in einem Jahr S_1 (entweder 8 € oder 2 €),
- innerhalb dieses Zeitintervalls kann die Aktien nur fallen (von 4 € auf 2 €) oder steigen (von 4 € auf 8 €),
- sie fällt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ und steigt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ mit dem Faktor 2.

Weitere Annahmen über den Finanzmarkt

Neben der Aktie gibt es auch weitere Anlagemöglichkeiten auf diesem einfachen Finanzmarktmodell:

- man kann sein Geld zu einem risikolosen Zinssatz $i = 1\%$ p. a. veranlagen (Sparbuch) und ausborgen (Kredit),
- es gibt eine Option. Der/die Käufer/in dieser erwirbt das Recht, aber nicht die Pflicht diese Aktie heute in einem Jahr zu einem Preis von 5 € zu kaufen.



Allgemeine Fragen zur Option:

Wie muss sich die Aktie entwickeln (steigen oder fallen), damit der/die Käufer/in die Option überhaupt einlöst? Begründe! Wie viel ist die Option aus Käufersicht wert, wenn der Kurs gefallen ist?

Berechnung des Optionspreises:

Wie viel soll eine Option heute kosten? Wenn jemand so ein Produkt anbietet, dann verliert er/sie eventuell Geld, das heißt man wird auch für eine Option einen bestimmten Preis verlangen. Preisbestimmung (ähnlich zu den vorigen Arbeitsblättern): man erstellt ein Portfolio, welches nicht die Option beinhaltet, aber in einem Jahr genau den Preis der Option hat, dann hat das Portfolio nämlich auch heute den gleichen Preis wie die Option (siehe Blatt 4 Aufgabe 3). Man borgt sich Geld von der Bank aus und kauft die Aktie, aber wie viel jeweils?

- Man beginnt mit einem Grundkapital von $x \text{ €}$,
- und kauft darum a Aktien zum Preis von $S_0 = 4 \text{ €}$,
- es verbleibt ein Vermögen von $x - a \cdot 4$ (wenn dieses negativ ist, muss man sich zuvor diesen Betrag von der Bank zum Zinssatz i ausborgen, ansonsten legt man das Geld auf ein Bankkonto mit dem Zinssatz i).

Heute in einem Jahr hat man folgendes Vermögen:

$$a \cdot S_1 + (1 + i) \cdot (x - a \cdot 4)$$

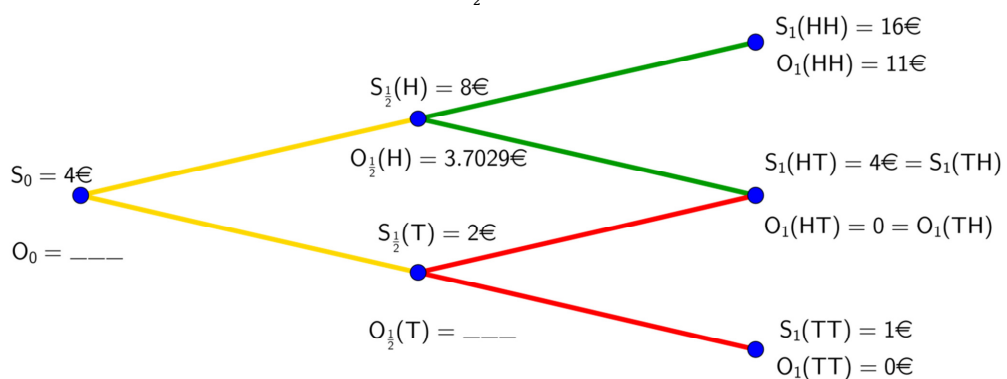
Man möchte nun a und x so wählen, dass bei einem Steigen des Aktienkurses der Wert des Portfolios gleich dem Wert der Option sein soll, nämlich 3 und bei einem Fallen soll das Vermögen ebenfalls gleich der Option sein, nämlich 0.

$$I: 3 = a \cdot S_1(H) + (1 + i) \cdot (x - a \cdot S_0)$$

$$II: 0 = a \cdot S_1(T) + (1 + i) \cdot (x - a \cdot S_0)$$

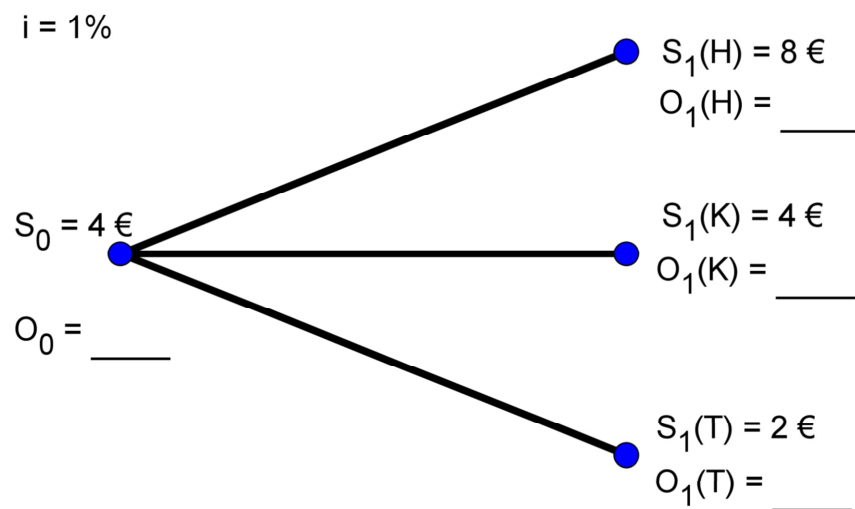
Löse das Gleichungssystem nach a und x ! Da wir mit $x \text{ €}$ begonnen haben, kostet die Option heute ebenfalls $x \text{ €}$. Die Werte S_0 , $S_1(H)$, $S_1(T)$ und i sind bekannt.

- Berechne den heutigen Preis der Option von Arbeitsblatt 5,
 - wenn einem die Option das Recht aber nicht die Pflicht verleiht, die Aktie zum Preis von 4 € anstatt wie bisher angenommen um 5 € zu kaufen!
 - wenn der Jahreszinssatz $i = 10\%$ beträgt statt $i = 1\%$!
 - wenn die Wahrscheinlichkeit für das Steigen des Aktienpreises von $\frac{3}{4}$ auf $\frac{1}{5}$ schrumpft (die Wahrscheinlichkeit für das Fallen beträgt dann $\frac{4}{5}$)!
- Welche Angaben aus Aufgabe 1 beeinflussen den Preis der Option?
- Welche Annahmen sind in diesem Modell unrealistisch?
- Wenn man die Wahrscheinlichkeiten für ein Steigen oder ein Fallen des Aktienpreises kennt, dann kann man auch den Erwartungswert des Optionspreises bestimmen. Berechne diesen für die Option auf Arbeitsblatt 5! Warum eignet sich dieser Preis nicht für den Optionspreis heute? (Hinweis: Arbitragemöglichkeit)
- Auf dem Finanzmarkt gibt es eine ganze Menge von Finanzprodukten. In dem Modell auf Arbeitsblatt 5 wird eine europäische Call-Option untersucht. Betrachte nun in diesem Modell eine europäische Put-Option, diese verleiht dem/der Käufer/in das Recht, die Aktie zu einem bestimmten Preis 5 € zu verkaufen. Berechne den Wert der Put-Option heute!
- Das Einperiodenmodell lässt sich beliebig verfeinern. Wir fügen nun eine weitere Periode hinzu, es handelt sich also um ein Zweiperiodenmodell. Jetzt kennt man den Preis der Aktie nicht nur nach einem Jahr, sondern auch nach einem halben Jahr (siehe Abbildung). Wir belassen die Option und den Zinssatz so, wie sie ursprünglich auf Blatt 5 angegeben waren. An sich ist dieses neue Modell nur ein Binomialbaum, der aus drei Einperiodenmodellen zusammengesetzt wurde. Mit der bereits bekannten Berechnung des Optionspreises im Einperiodenmodell lassen sich Zwischenpreise der Option in einem halben Jahr bestimmen. Anschließend kann man wieder den heutigen Preis der Option berechnen. S_t ist der Preis der Aktie und O_t ist der Preis der Option zum Zeitpunkt t . Berechne die noch fehlenden Werte O_0 und $O_{\frac{1}{2}}(T)$!



Was passiert, wenn man ein anderes Modell als das Binomialmodell wählt? Angenommen man verändert das Modell ganz leicht und gibt eine dritte Möglichkeit für das Verhalten des Aktienkurses hinzu. Also der Aktienkurs kann in diesem neuen Modell von 4 € auf 8 € steigen, gleichbleiben oder von 4 € auf 2 € sinken. Ansonsten bleibt alles gleich, in diesem Modell gibt es eine Aktie, eine Option und die Möglichkeit Geld zum risikolosen Jahreszinssatz $i = 1\%$ anzulegen oder auszuborgen.

Zur Bepreisung haben wir wieder eine European-Call-Option (wie zuvor), die dem/der Käufer/in das Recht (aber nicht die Pflicht) verleiht, die Option zum Preis von 5 € zu kaufen. Im Folgenden wird der Preis der Option wieder in einem Einperiodenmodell betrachtet. Baue die Option über die Aktie und den Geldmarkt (Geld bei der Bank anlegen oder ausborgen) nach und bestimme einen arbitragefreien Preis! Hinweis: Stelle analog zu Blatt 5 Gleichungen auf, diesmal sind es drei Gleichungen anstatt zwei!



Weitere Fragen:

- Berechne $O_1(H)$, $O_1(K)$ und $O_1(T)$! Schreibe diese Werte in die Abbildung!
- Wie wirkt sich die Veränderung in der Modellierung des Aktienkurses in der Berechnung des Optionspreises aus?
- Stelle die erhaltenen Gleichungen als Geraden in einem Koordinatensystem (erste Achse O_0 bzw. x , zweite Achse a) dar und kennzeichne jenen Bereich auf der ersten Achse, der als arbitragefreie Lösung in Frage kommt! Begründe deine Wahl des Bereichs über ein No-Arbitrage-Argument!

11.5.12 Musterlösung No-Arbitrage und Replikation

Arbeitsblatt 1

1.
 - a) $2000 \cdot 1,04 = 2080$ Euro
 - b) $\frac{312}{1,04} = 300$ Euro
 - c) Man bekommt $\frac{1}{1,04} \approx 0,96$ Euro für einen Dollar.
2.
 - a) 1 Euro $\rightarrow$ 1,04 Dollar $\rightarrow$ 1,0296 Euro; Es verbleibt ein Nettogewinn von 0,0296 Euro.
 - b) Nein, mittlerweile könnte man auch über das Internet Geld wechseln, jedoch hat jedes Institut (das einen Wechsel anbietet) eine gewisse Spanne zwischen Kauf und Verkauf von Geld.
 - c) Der Wechselkurs in LA muss verschieden von $\frac{1}{1,04} \approx 0,96$ sein: Wenn der Wechselkurs in LA größer als 0,96 ist, dann kann man (wie zuvor) einen Gewinn erzielen. Wenn der Wechselkurs in LA kleiner 0,96 ist, z.B. 0,94, dann wechselt man folgendermaßen: Man beginnt in LA und tauscht einen 1 Euro in Dollar, man erhält ca. 1,064 Dollar, dann wechselt man im Euroraum von Dollar in Euro und erhält 1,0229 Euro. Schlussendlich erhält man einen Gewinn von 0,0229 Euro.
3.
 - a) z.B. 1 Euro $\rightarrow$ 1,43 Pfund $\rightarrow$ 0,9724 Dollar $\rightarrow$ 1,079364 Euro.
 - b) Sei U der Wechselkurs, der angibt, wie viele Euro man für ein Pfund bekommt. Sei V der Wechselkurs, der angibt, wie viele Euro man für einen Dollar bekommt und sei W der Wechselkurs, der angibt, wie viele Dollar man für ein Pfund bekommt. Wenn $U = V \cdot W$ gilt, dann ist keine Arbitrage möglich (analoge Erklärungen möglich).

Arbeitsblatt 2

I. a) Heute

Sie haben $100\,000 \cdot \frac{1}{1,01} \approx 99\,009,90$ Euro Schulden.

Sie haben $100\,000 \cdot \frac{1,12}{1,01} \approx 110\,891,09$ Dollar Guthaben.

In einem Jahr

Das Guthaben wächst aufgrund des Zinssatzes von 2% auf $100\,000 \cdot \frac{1,12}{1,01} \cdot 1,02 \approx 113\,108,91$ Dollar.

Sie führen den vereinbarten Deal durch: Sie erhalten 100 000 Euro und geben 110 000 Dollar her.

Sie haben $100\,000 \cdot \frac{1,01}{1,01} = 100\,000$ Euro Schulden. Diese tilgen sie mit den 100 000 Euro, die sie zuvor erhalten haben.

Es verbleibt also eine Differenz von $113\,108,91 - 110\,000 = 3\,108,91$ Dollar als risikoloser Gewinn.

- b) Nein, sie würde Geld verlieren.

c) $\frac{1,12 \cdot 1,02}{1,01} = 1,131089 \dots$

II. $F_{\$/\epsilon} = \frac{S_{\$/\epsilon} \cdot (1+i_{\$/})}{1+i_{\epsilon}}$

III. Arbitrage

Arbeitsblatt 3

1. Heute

$$+60 \cdot 40 = 2400$$

$$+60 \cdot 167,5 = 10050$$

$$-60 \cdot 200 \cdot \frac{1}{1,02} = -11764,7$$

Er legt 685,29 Euro auf sein Privatkonto.

In einem Jahr

$$+60 \cdot 200 \cdot \frac{1,02}{1,02} = 12000$$

$$-60 \cdot 200 = -12000$$

Es verbleibt ein risikoloser Gewinn von $685,29 \cdot 1,02 = 699$ Euro.

2. 28,58 Euro, dafür muss die Gleichung $(60 \cdot T + 10050 - 60 \cdot 200 \cdot \frac{1}{1,02}) \cdot 1,02 = 0$ nach T gelöst werden.

3. $T = \frac{200}{1 + \frac{p}{100}} - W$ (wobei W den heutigen Preis einer Tonne Weizen bezeichnet)

Arbeitsblatt 4

1. (a) Heute

$$+20 \text{ Euro}$$

$$+160 \cdot \frac{1}{1,02} \approx 156,86 \text{ Euro}$$

$$-167,5$$

$$-9,36 \text{ Euro (Sie legt 9,36 Euro auf ihr Konto)}$$

In einem Jahr

$$+e \text{ Euro}$$

$$-(e - 160) \text{ Euro, diese und die vorige Zeile ergeben zusammen 160 Euro.}$$

$$-160 \text{ Euro}$$

$$9,55 \text{ Euro (Den Wert erhält man aus der Rechnung } 9,36 \cdot 1,02.)$$

(b) Sie muss einfach mehrere Scheine verkaufen, das ist allerdings durch ihren Lagerplatz für Weizen begrenzt.

(c) $167,5 - 160 \cdot \frac{1}{1,02} = 10,6373 \dots$ bzw. die Lösung der Gleichung $(T + 160 \cdot \frac{1}{1,02} - 167,5) \cdot 1,02 = 0$

(d) $T = W - 160 \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$ (wobei W den heutigen Preis einer Tonne Weizen bezeichnet)

2. (a) $S(1) - K$

$$(b) S(0) - k \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}$$

3. Lesen!

Arbeitsblatt 5

1. Bei einem Steigen des Aktienkurses ist die Option nach einem Jahr $8 - 5 = 3$ Euro wert. Bei einem Fallen des Kurses ist die Option nach einem Jahr 0 Euro wert, da sie ja nicht eingelöst werden muss, würde man die Option einlösen, dann würde man einen (zusätzlichen)³¹ Verlust schreiben, da $2 - 5 = -3$ Euro sind.
2. Berechnung: $x = 1,0099$ und $a = 0,5$, der Optionspreis O_0 zum Zeitpunkt 0 beläuft sich auf 1,0099 Euro.

Arbeitsblatt 6

1. a) $O_0 = 1,34653 \dots$
 b) $O_0 = 1,09 \dots$
 c) keine Änderung zu Arbeitsblatt 5, diese Werte gehen in die Berechnung nicht mit ein.
2. Der Aktienkurs, K und der Zinssatz.
3. Jeder Bruchteil kann gekauft werden.
 Der Zinssatz zum Ausborgen und Veranlagen ist derselbe.
 Die Aktie wird zum selben Preis gekauft wie verkauft.
 Die Aktie kann nur zwei Werte annehmen.
4. Der Erwartungswert des Optionspreises berechnet sich: $E(O_0) = \frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{9}{4} = 2,25$ Euro. Der Erwartungswertpreis liegt über dem des arbitragefreien Preis von 1,0099 Euro. Wenn man die Option mit dem Erwartungswertpreis verkauft, dann kann man einen risikolosen Gewinn machen. Man kann die Option nachbauen und die positive Differenz der beiden Optionspreise als Gewinn verbuchen.
5. Man erhält folgendes Gleichungssystem.

$$0 = a \cdot 8 + (1 + 0,01) \cdot (x - a \cdot 4)$$

$$3 = a \cdot 2 + (1 + 0,01) \cdot (x - a \cdot 4)$$

Die Lösung für x ist der Put-Optionspreis zum Zeitpunkt 0, er beträgt $O_0 \approx 1,96$.

6. Man erstellt wieder lineare Gleichungssysteme, wobei für $O_{\frac{1}{2}}(T)$ sieht man, dass es gleich 0 ist. Das Gleichungssystem für O_0 hat die Form:

$$3,7 = a \cdot 8 + 1,01 \cdot (x - a \cdot 4)$$

$$0 = a \cdot 2 + 1,01 \cdot (x - a \cdot 4)$$

³¹Die Option muss man kaufen, dieser Betrag geht auch verloren.

Die Lösung für den Optionspreis ist ca. 1,25 Euro. Das Gleichungssystem für den errechneten Wert $O_{\frac{1}{2}}(H)$ hat die Form:

$$\begin{aligned} 11 &= a \cdot 16 + 1,01 \cdot (x - a \cdot 8) \\ 0 &= a \cdot 4 + 1,01 \cdot (x - a \cdot 8) \end{aligned}$$

Arbeitsblatt 7

1. Die Werte sind: $O_1(H) = 3$, $O_1(K) = 0$ und $O_1(T) = 0$.
2. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3 &= a \cdot 8 + 1,01 \cdot (x - a \cdot 4) \\ 0 &= a \cdot 4 + 1,01 \cdot (x - a \cdot 4) \\ 0 &= a \cdot 2 + 1,01 \cdot (x - a \cdot 4) \end{aligned}$$

ist nicht mehr eindeutig lösbar. Es gibt also keinen eindeutigen arbitragefreien Optionspreis.

3. In der Abbildung sieht man den Bereich in rot.

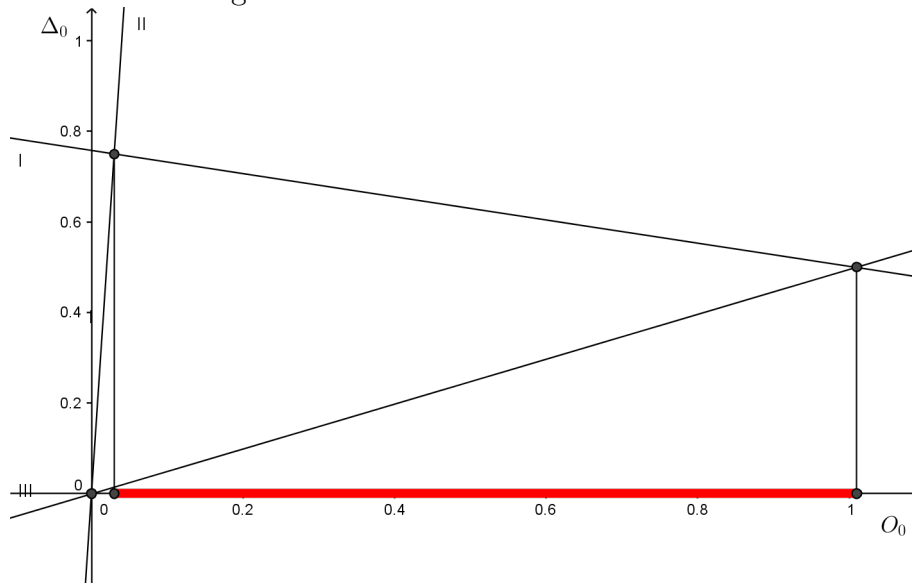


Abb. 39 Visualisierung des No-Arbitrage-Preises

Ein Wert aus dem offenen Intervall $I = (0,0297; 1,0099)$ eignet sich für einen arbitragefreien Preis. Wenn $O_0 \in I$, dann findet sich kein a , sodass in allen drei Fällen ein Gewinn gemacht wird. Es gibt also keine Arbitragemöglichkeit.

Teil IV

Empirische Erprobungen der Unterrichtsvorschläge

12 Begründung der Methode zur Beantwortung der dritten Forschungsfrage

Ganz im Sinne einer fachdidaktischen Entwicklungsforschung (engl. „Design-Research“) folgt auf die theoretische Erstellung der Unterrichtsmaterialien die praktische Erprobung und Auswertung dieser (vgl. PREDIGER et al., 2012, S. 453). Hier lehnen wir uns an die beiden Dissertation zu Finanzmathematik und Mathematikunterricht von DAUME und DÖHRMANN als auch an Arbeiten aus anderen Bereichen wie zum Beispiel „Biomathematik und Mathematikunterricht“ von ABLEITINGER, welche ihre entwickelten Materialien ebenfalls erprobten. Das Ziel bei der angesprochenen Analyse ist es, Rückmeldungen zu den gestalteten Arbeitsmaterialien zu bekommen. Die Materialien sind im Wesentlichen zur eigenverantwortlichen Arbeit erstellt worden, sodass die Schüler/innen selbstständig die Arbeitsaufträge durchführen können. Diese schulpraktische Phase soll Aufschluss über den Schwierigkeitsgrad, die Nachvollziehbarkeit, die Eigenständigkeit, die Schüleradäquatheit, Verständlichkeit der Fragestellungen, etc. ... bringen. Um diese erwünschten Rückmeldungen zu erhalten, wird ein qualitatives **Drei-Perspektiven-Modell** verwendet, dabei sollen alle am Prozess der Erprobung Beteiligten teilhaben. Die Wahl für einen qualitativen Zugang begründet sich auf das fehlende Stützen auf bereits absolvierte Erprobungen, außerdem kann durch eine qualitative Erprobung das Material genauer analysiert werden als in einer quantitativen Untersuchung. Die am Prozess Teilhabenden sind der Forscher, die Schüler/innen und die Lehrperson. Diese Auswahl der Perspektiven wird durch folgende Aspekte begründet:

1. Der Forscher: Er kennt die Materialien am besten, da er sie selbst erstellt hat und kann dadurch Fragen, Probleme bzw. alle vorkommenden Ereignisse gleich einordnen. Klarerweise ist der Forscher von seinen Materialien überzeugt und seine Wahrnehmung ist gefärbt. Das soll durch die anderen Perspektiven korrigiert werden. Der Bericht der Beobachtungen wird in Reinform angegeben.
2. Die Schüler/innen: Es wird hier von einer Abschlussbefragung nach Interesse gegenüber der Thematik, Schwierigkeitsgrad, Aufbau der Arbeitsblätter, Realitätsbezug, Technologieeinsatz etc. wie beispielsweise bei DAUME und DÖHRMANN verzichtet. Im Fokus sollen nicht die persönlichen Befindlichkeiten der Lernenden gegenüber der Thematik oder des Technologieeinsatzes stehen, sondern die Arbeitsmaterialien. Vor Beginn der Erprobung wird auf nahezu jedem Arbeitsblatt eine Frage ausgewählt, deren schriftliche Antworten eingesammelt, eingescannt und analysiert werden. Dabei wird geachtet, dass es sich um eine offene Fragestellung handelt, die viele Aspekte des aktuellen Arbeitsblattes abdeckt. Dadurch kann überprüft werden, ob der Text verständlich, der Schwierigkeitsgrad adäquat und die Nachvollziehbarkeit gegeben ist, sowie was Lernende verstanden haben. Diese Analyse wird mit Hilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse

durchgeführt, damit die Antworten kategorisiert und beschrieben werden können. Exemplarisch wird jeweils eine Antwort aus jeder Kategorie angeführt. Die Wahl fällt abermals auf eine qualitative Inhaltsanalyse. Grounded Theory passt nicht, da hier keine Theorie aus dem Boden gestampft werden soll, sondern lediglich die Materialien analysiert werden. Sprachliche und gruppendynamische Besonderheiten sind hier ebenfalls nicht von Interesse, so kommen auch eine Metaphernanalyse bzw. eine dokumentarische Methode nicht in Frage.

3. Die Lehrperson: Hier richten wir uns nach DÖHRMANN, welche eine Beurteilung der involvierten Lehrpersonen eingeholt hat. Jede Lehrperson wird nach Abhalten des Unterrichtsszenarios gebeten, einen Erfahrungsbericht zu verfassen, der folgende Punkte beinhaltet

- Durchführbarkeit im Unterricht
 - Lehrplanadäquatheit
 - Schüler/innenorientierung
- Interesse der Schüler/innen gegenüber der Thematik
- Haben die Schüler/innen die Aufträge verstanden?
- Weitere Verwendung der Arbeitsblätter im Unterricht
- Sonstiges

Es bleibt zu bemerken, dass die Lehrperson, die sich bereiterklärt bei einem solchen Experiment teilzunehmen, grundsätzlich positiv der Sache gegenüber steht. Nichtsdestotrotz müssen gerade negative Anmerkungen umso kritischer betrachtet werden. Der Erfahrungsbericht wird zusammengefasst dargestellt.

13 Einleitung

Die theoretische Fundierung der entworfenen Unterrichtsmaterialien wurde im vorhergehenden Kapitel aufgezeigt. Es fehlt nun ein Blick von außen, von den Personen die es wirklich betrifft, den Schülern/innen und den Lehrpersonen, auf diese Unterrichtsvorschläge. Die aufbereiteten Materialien wurden von drei engagierten Lehrern/innen erprobt. Diese Unterrichtseinheiten und deren Analyse liefern die Grundlage für die Beantwortung der dritten Forschungshypothese: „Wie nehmen die Schüler/innen diese Thematik auf?“ An drei Wiener Gymnasien wurde die Erprobungen durchgeführt.

1. Kredite und Risiko: Gymnasium im 4. Bezirk
2. Diversifikation: Gymnasium im 15. Bezirk
3. Arbitrage und Risiko: Gymnasium im 1. Bezirk

Bei einer Untersuchung in diesem Umfang lassen sich die Ergebnisse nicht als repräsentativ bezeichnen, dennoch ermöglichen die Daten erste Aufschlüsse über die Arbeitsweise der Schüler/innen mit diesen Materialien und geben eine erste Möglichkeit zur Adaptierung

dieser. Für die Analysen stehen die Antworten der Schüler/innen, eigene Aufzeichnungen der beobachteten Einheiten des Autors, sowie Erfahrungsberichte der durchführenden Lehrpersonen zur Verfügung. Die Antworten wurden anonym abgesammelt und mit einem dem Autor nicht bekannten Kürzel versehen, diese wurden im Anschluss eingescannt und in der nächsten Einheit an die Schüler/innen retourniert. Für jedes Arbeitsblatt wurde ein leeres Blatt Papier ausgegeben, auf dem die Antworten geschrieben werden mussten. Bei jedem Arbeitsblatt wurden spezielle Fragen ausgewählt, die so beantwortet werden mussten, dass ein Außenstehender die Antwort nachvollziehen kann. Die anderen Fragen durften so beantwortet werden, dass sie nur für den Lernenden selbst nachvollziehbar sind. Alle Unterrichtsszenarien wurden von der für die Schüler/innen gewohnten Lehrperson durchgeführt. Der Autor führte die Lehrperson in Vorbesprechungen in die Thematik ein und nahm während der Unterrichtszeit die Beobachterposition ein.

14 Erste Erprobung

Die Unterrichtseinheit „Kredite und Risiko“ wurde in einem Gymnasium im 4. Bezirk in einer modularen Oberstufe durchgeführt. Diese wurden im Modul „GeoGebra“ im Zeitraum von 4.4.2016 – 25.4.2016 verwirklicht. In der ersten Einheit waren 10 von 13 Schüler/innen anwesend. Die Schüler/innen besuchten überwiegend die 10., 11. Schulstufe, nur eine Person besuchte die 12. Schulstufe. Die Vorkenntnisse waren aufgrund der zuvor angeführten Zusammensetzung unterschiedlich. Den Stoffbereich „Folgen und Reihen“ haben alle Schülern/innen im Unterricht bereits bearbeitet.

14.1 Eigene Aufzeichnungen

Der Lehrer teilte um 15:27 Uhr das Arbeitsblatt 1 aus und gab allgemeine Erklärungen über den Ablauf und das Beantworten bzw. Absammeln der geschriebenen Antworten. Nach dem Austeilen herrschte absolute Stille und die Schüler/innen bearbeiteten selbstständig das Arbeitsblatt 1.

Probleme waren vor allem technischer Natur, so hatte ein Schüler Probleme beim Kopieren der Formel in die darunterliegenden Zellen. Andere wiederum machte die Formatierung zu schaffen. Mehrere Schüler/innen hatten Probleme die Punkte, die den Verlauf des Zinssatzes darstellen, im Grafikfenster 2 anzuzeigen.

Unklarheiten der Schüler/innen ergaben sich bei der Frage 2 auf Arbeitsblatt 1. Hier konnte das Wort „Kontext“ nicht eingeordnet werden. Des Weiteren war einigen Schülern/innen nicht ganz klar, welche Annahmen getätigt wurden und fragten die Lehrperson, was denn damit gemeint sei.

Erwähnenswert bleibt, dass alle Schüler/innen mit dem Arbeitsblatt 1 bereits um 16:08 Uhr fertig waren. Ein Schüler hatte bei Frage 4 auf Arbeitsblatt 2 das Problem, ein passendes Intervall zu finden und fragte diesbezüglich auch die Lehrperson, welche dem Schüler eine weitere Frage stellte. Innerhalb weniger Minuten konnte der Schüler die Frage 4, wie in der Musterlösung vorgesehen, beantworten. Er argumentierte, dass eine Abweichung von 0,2 Prozent realistisch ist, da sich der Zinssatz ja in Wirklichkeit nur sehr wenig ändert. Ein anderer Schüler entdeckte durch „Zufall“ den Befehl *ZufallszahlNormalverteilt* und informierte sich selbstständig im Internet, was denn dieser bewirkt. Er modellierte den Zinssatz mit Hilfe

normalverteilter Zufallszahlen.

Um 16:35 Uhr war der erste Schüler bereits mit Arbeitsblatt 2 fertig.

Zu Beginn der zweiten Doppeleinheit schreibt die Lehrperson die Nummern, der ausführlich zu beantwortenden Fragen, an die Tafel. Eine Schülerin, die das letzte Mal anwesend war, fehlte, dafür war nun ein Schüler anwesend, der das letzte Mal gefehlt hatte. Dieses Modul findet immer am Montag von 15:25 Uhr bis 17:05 Uhr statt. Für die Lernenden ist wahrscheinlich eine Woche vergangen, seitdem sie sich das letzte Mal mit den Arbeitsblättern beschäftigt haben. Das ist auch in dieser Einheit merkbar, man konnte beobachten, dass die Schüler/innen eine gewisse Zeit benötigten, bis sie noch nicht bearbeitete Fragen beantworten konnten. Nachdem die ersten formalen Unklarheiten beseitigt waren, herrschte acht Minuten nach Beginn komplette Ruhe im Klassenzimmer. Ein paar Schüler/innen fragten, ob der Wechselkurs auch mit Zufallszahlen zu modellieren sei. Drei erkundigten sich genauer und wollten wissen, wie sie denn den Wechselkurs modellieren sollen. Konkret wurde nach dem Intervall gefragt. Der Lehrer antwortete stets mit: „Was du für sinnvoll hältst.“ Um 15:45 Uhr haben alle, die das letzte Mal anwesend waren, die Antworten zu Arbeitsblatt 2 abgegeben.

Um 15:50 Uhr starten die ersten beiden Schüler bereits mit der Vertiefung, Arbeitsblatt 4. Bei ein paar Schülern/innen entstanden technische Probleme, wie das Markieren einzelner Zellen sowie das Zeichnen der Verläufe im Grafikfenster 2 und das, obwohl Arbeitsblatt 2 schon abgeschlossen war. Anscheinend wurde der Vorgang von der einen Person vergessen. Zwei Schüler staunten über die Verläufe des Schuldenstands, bei dem zu modellierenden Fremdwährungskredit. Sie probierten verschiedene Intervalle für die Zufallszahlen aus, des Öfteren waren Aussagen, wie die folgende zu hören: „Schau dir das an!“

Dieselben beiden Schüler hatten Probleme bei Aufgabe 2 von Arbeitsblatt 4. Für sie war es nur schwierig einzusehen, dass der Zinssatz nun wieder deterministisch festgelegt wird. Zwei weitere Schüler konnten die Fragen bei Arbeitsblatt 4 Aufgabe 2 ohne die Modellierung beantworten. Sie sagten aber, dass sie trotzdem die Modellierung versuchen werden. 10 Minuten vor Ende der zweiten Doppeleinheit hatten bereits 9 Schüler/innen ihre Antworten zu Arbeitsblatt 3 abgegeben.

Für die dritte Doppelstunde wurde ein weiteres Arbeitsblatt, Nummer 5, zur Vertiefung gestaltet. Das Arbeitsblatt beinhaltet ursprünglich zwei Aufgaben. Eine Aufgabe beschäftigt die Schüler/innen mit der Herleitung der expliziten Tilgungsgleichung, sowie dem Umformen nach einzelnen Variablen wie R , die Rate oder n , die Jahre. Des Weiteren wurde nach einer Interpretation der Formeln gefragt. Die zweite Aufgabe war der Kreditvergleich (b) aus dem Kapitel 11.4.15 auf Seite 251. Dieses Arbeitsblatt wurde aufgrund einiger sehr flotter Schüler/innen gestaltet. Im Nachhinein wurden die Aufgaben von Blatt 4 und 5 neu geordnet. Alle Aufgabenbezeichnungen beziehen sich auf die in dieser Arbeit abgebildeten Arbeitsblätter.

Zu Beginn der dritten Einheit waren nur 6 Schüler/innen anwesend, diese Anzahl wuchs im Laufe der ersten halben Stunde auf 10 an. Nach einer Viertel Stunde gab auch die letzte Schülerin das Antwortblatt zu Arbeitsblatt 3 ab. Einige Schüler/innen waren eine so starke Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht nicht gewöhnt. Sie hatten ein richtiges Aha-Erlebnis beim Durcharbeiten der Vertiefungsaufgaben 2 und 3 auf Arbeitsblatt 4 bzw. 5. Die Frage „a) Welche Ereignisse können dich in deinem zukünftigen Leben in so eine Lage bringen?“ auf Arbeitsblatt 4 wurde von einer Schülerin und einem Schüler nicht verstanden.

Sie überlegten, was dabei gerechnet werden sollte. Bis sie durch Nachfragen bei der Lehrperson aufgeklärt wurden.

Die Aufgabe 2 auf Arbeitsblatt 4 stellt einen gedanklichen Rückschritt dar, da die Lernenden durch die Arbeitsblätter 2 und 3 auf einen zufälligen Zinssatz eingestellt werden, und nun wird wieder ein deterministischer Zinssatz angedacht. Das verwirrte vier der Anwesenden.

Als sehr schwer stellte sich die Zusatzaufgabe mit der Tilgungsgleichung heraus. Zwei Schüler entwickelten einen Ehrgeiz und wollten diese Gleichungen mit der Hand umformen, die Aufgabenstellung ließ auch eine Bearbeitung mit CAS zu. Erst nach längerer Hilfe durch die Lehrperson, die vor allem Rechenfehler ausbesserte, konnten sie ein richtiges Umformungsergebnis vorweisen.

Auch die dritte Einheit weckte das Interesse einiger Schüler/innen über das Thema nachzudenken, so entstanden schon während der Stunde und darüber hinaus interessante Diskussionen über negative Zinssätze. Einige informierten sich auch zusätzlich im Internet.

14.2 Schülerantworten

Bei Arbeitsblatt 1 wurden die Antworten der Schüler/innen auf die Fragen 2 und 4 genauer untersucht. Die Frage 2 lautet: „Beschreibe die Situation bei c) und d) im Kontext!“. Diese Frage nimmt Bezug auf die erste Frage, wo die Dauer der Rückzahlung des vorgegebenen Kredites mit Hilfe des Applets ermittelt werden muss. Die Zinssätze bei c) und d) sind so gewählt, dass bei c) nur die anfallenden Zinsen mit der vorgegebenen Ratenhöhe getilgt werden können. Bei d) sind die anfallenden Jahreszinsen sogar so groß, dass die Schuld wächst, obwohl Raten bezahlt werden. Das folgende Beispiel dokumentiert die Antwort eines Schülers, der nicht nur die Situation beschreibt, sondern diese auch ausführlich begründet.

2) c) Der Schuldenstand bleibt immer 100 000 da:

$$S_1 = 100.000 \cdot \left(1 + \frac{8,4}{100}\right) - 8.400 = \dots$$

$$108.400 - 8.400 = \underline{100.000}$$

und dieser Schuldenstand in die nächsten Jahre auch mitgetragen wird

d) Der Schuldenstand wird immer höher da:

$$S_1 = 100.000 \cdot \left(1 + \frac{12,6}{100}\right) - 8.400 = \dots$$

$$112.600 - 8.400 = \underline{104.200}$$

und dieser Schuldenstand auch in die nächsten Jahre mitgetragen wird also:

$$S_2 = 104.200 \cdot \left(1 + \frac{12,6}{100}\right) - 8.400 =$$

$$117.329,2 - 8.400 = \underline{108.929,2} \text{ usw.}$$

Abb. 40 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Aufgabe 2

Der Schüler benutzt mathematische Methoden zur Validierung seiner Beobachtungen. Diese vollzieht er korrekt. Einige andere Schüler/innen beschreiben die Situation in einer mehr kontextgebundenen Art und Weise und untermauern diese nicht mit rein symbolischen Argumenten, sondern verbalisieren diese in ebenfalls korrekter Form.

2) c) die Schulden durch die Zinsen betragen pro Jahr 8.400, also exakt so viel, wie man pro Jahr zurückzahlt. Bleiben die Bedingungen bestehend, bleibt der Schuldenberg konstant bei 100.000.

d) Die Verzinsung ergibt pro Jahr mehr, als die jährliche Rate beträgt. Der Schuldenberg wächst somit unaufhaltsam. (unter den vorausgesetzten Bedingungen)

Abb. 41 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Aufgabe 2

Des Weiteren gab es Schüler/innen, die zwar von der Art und Weise genauso wie beim vorigen Beispiel argumentiert haben, jedoch in einer weniger exakten Art. Konkrete Zahlen

werden weggelassen.

- 2.) c) Der Zinssatz ~~ist~~ zwingt einen dazu, genau soviel zu zahlen, wie man ~~möglichst~~ ^{jährlich} kann $\Rightarrow$ die Schulden können nicht zurückgezahlt werden.
d) durch den Zinssatz muss man jährlich mehr zahlen als man zur Verfügung hat $\Rightarrow$ Die Schulden steigen.

Abb. 42 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Aufgabe 2

Eine einzige Schülerin beschreibt die Situation sehr dürftig.

- 2) Beide würden sehr lange dauern

Abb. 43 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Aufgabe 2

Es ist zwar richtig, dass nichts ewig dauert, ja selbst die Erde hat ein Ablaufdatum. Unter den vorausgesetzten Bedingungen dauern diese beiden Zinssatzszenarien nicht nur sehr lange, sondern unendlich lange. Trotz der expliziten Aufforderung der Lehrperson diese Frage ausführlich zu formulieren, findet man hier nur eine karge Antwort. Ob sie diesen Realitätsbezug der endlichen Dauer berücksichtigte, kann aufgrund der knappen Antwort nur gemutmaßt werden.

Die Frage 4 auf Arbeitsblatt 1 liest sich: „Wie verändert sich die Tilgungsdauer des Kredits, wenn sich der Zinssatz ändert? Antworte zuerst intuitiv und überprüfe dann deine Vermutung in deinem GeoGebra-Arbeitsblatt!“. Viele Schüler/innen formulierten zuerst, wie gefordert, ihre intuitive Vermutung und schilderten anschließend ihre Überprüfung. Exemplarisch für diese Gruppe wird das folgende Beispiel angeführt:

- 4) intuitiv: Je höher der Zinssatz, desto länger die Tilgungsdauer, weil der Zinssatz den, was abbezahlt, vergrößert.
Überprüfung: Meine Vermutung hat sich bestätigt, weil die kürzeste Tilgungsdauer bei $p=0$ ist. Die Funktion ist konstant, da jährlich die gleiche Rate ohne zusätzlichem Zinssatz abbezahlt wird.

Abb. 44 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Aufgabe 4

Der Schüler verbalisiert seine Intuition korrekt, doch seine Formulierung der Überprüfung konzentriert sich nur auf den Fall $p = 0$ und muss so als unzureichend angesehen werden.

Interessanterweise gibt es in diesem Fall zwei Gruppen von Schülern/innen, die eine, die eine Fallunterscheidung vornimmt und die andere, die diese nicht erwähnt. Korrekterweise stimmt die Formulierung: „Je höher der Zinssatz, desto länger die Tilgungsdauer.“ nicht für alle Zinssätze. Ab einem Zinssatz von 8,4% gibt es keine Tilgungsdauer bzw. die Tilgungsdauer ist unendlich.

*Lt., intuitiv: Je höher der Zinssatz, desto länger die Tilgungsdauer
 Je niedriger der Zinssatz, desto kürzer die Tilgungsdauer
 Meine intuitive Vermutung stimmt, vorausgesetzt der Zinssatz
 ist nicht 8,4 Prozent oder höher.*

Abb. 45 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Aufgabe 4

Zwei Schüler/innen formulierten recht kurze Antworten, wobei eine mit einem Fragezeichen am Ende versehen wurde. Daraus lässt sich nur schließen, dass sich die Schülerin über ihre Antwort nicht sicher ist.

*4) Je niedriger der Zinssatz wird,
 desto geringer ist die Tilgungsdauer?*

Abb. 46 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Aufgabe 4

Bei Arbeitsblatt 2 liegt der Fokus auf den Fragen 2 und 4. Aufgrund interessanter Antworten zu Frage 5 wurde diese ebenfalls genauer analysiert. Bei Frage 2 sollten die günstigen Verläufe der Kreditnehmer/innen genauer beschrieben werden. Alle Schüler/innen erkannten, dass ein niedriger Verlauf des Zinssatzes von Vorteil für die Kreditnehmer/innen ist. Manche beantworteten diese Frage sehr kurz.

*2.) Je niedriger der Zinssatz, desto besser.
 Je höher, desto schlechter*

Abb. 47 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 2 Aufgabe 2

Andere formulierten umfangreicher und beschrieben ungünstige Situationen.

2) Am besten wären konstante niedrige Zinssätze, um die Tilgdauer gering zu halten. Am ungünstigsten wären springende also stark verändernde Zinssätze, da die Tilgdauer länger sein könnte und vielleicht noch mehr Schulden (wegen hohen Zinssatzes) vorhanden sein könnten.

Abb. 48 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 2 Aufgabe 2

Eine weitere Gruppe von Schülern/innen thematisierte die zeitliche Komponente. Höhere Zinsen zu Beginn der Kreditlaufzeit verursachen einen höheren Zins, da der Schuldenstand größer ist, der Tilgungsbeitrag der Rate wird geringer. Höhere Zinsen am Ende der Kreditlaufzeit sind stets eine schlechte Entwicklung für den/die KreditnehmerIn, jedoch besser als zu Beginn.

2) Zu Beginn hohe Zinssätze $\Rightarrow$ mehr Geld, welches zurückzahlen ist.
 — n — niedrige — n — $\Rightarrow$ weniger Geld, — n —

Abb. 49 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 2 Aufgabe 2

Ein paar Schüler/innen verstörte die Tatsache, dass mit der neuen Modellierung auch negative Zinssätze möglich sind. Bei Frage 4 äußerte das explizit nur eine Schülerin. Ein kurzer Blick auf die Antworten zu Frage 5 zeigt aber, dass es mehrere Schüler/innen gibt, die so denken.

4) Der Zinssatz kann dadurch negativ werden!

Befehl: Zufallszahl Gleichverteilung $[-1; 1]$ + Zahl davor

Abb. 50 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 2 Aufgabe 4

Eine Modellierung entsprechend der Voraussetzungen führt zu einem weniger „zackigen“ Verlauf, siehe hierzu in exemplarischer Weise die folgende Schülerantwort.

④ weniger zackiger Verlauf

Abb. 51 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 2 Aufgabe 4

Ein Schüler entdeckt bei der Eingabe in GeoGebra von selbst den Befehl `ZufallszahlNormalverteilt()`. Nach einer kurzen Internetrecherche und Hilfe durch den Lehrer modellierte der Schüler den Kurs mit der Normalverteilung und begründet diese Verwendung in knapper Form.

4) Verwendung der Normalverteilung $\Rightarrow$ realistisch (Sprünge werden kleiner)

Abb. 52 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 2 Aufgabe 4

Eine Schülerin und ein Schüler beobachteten, dass sich die Tilgungsdauer des Kredites nur wenig verändert, wenn die Zufallszahlen für den Zinssatz in dem Intervall $[0, 1; 1]$ gewählt wurden. Diese Modellierung würde nicht den geforderten Vorgaben entsprechen. Die Tilgungsdauer beläuft sich ihren Erkenntnissen nach auf 15 Jahre. Hier ist nicht ganz klar, was die beiden meinen. Man berechnet eine Tilgungsdauer von ca. 12 Jahren, wenn der Zinssatz 0,1% beträgt. Bei $p = 1$ erhält man eine Tilgungsdauer von 12,7 Jahren. Bei Zufallszahlen für den Zinssatz in den angegebenen Intervall müsste die Tilgungsdauer zwischen den beiden zuvor berechneten Werten liegen. Es lässt sich also schließen, dass die beiden Schüler/innen vielleicht doch nach den Vorgaben modelliert haben.

4) Mir fällt auf, dass in einem Intervall von 0,1 bis 1 die Tilgungsdauer IMMER ungefähr 15 Jahre beträgt.

Abb. 53 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 2 Aufgabe 4

Die Frage 5 spaltet die Klasse. Die eine Hälfte sagt, dass eine Modellierung des Zinssatzes mit Zufallszahlen sinnvoll ist, während die andere Hälfte diese Aussage verneint. Exemplarisch wird eine Schülerantwort der Gruppe, die der Modellierung zustimmen, angegeben.

5) Ja, weil man den Zinssatz nie wirklich vorhersehen kann. So kann man als Kreditnehmer verschiedenste Szenarien durchnehmen, um vorbereitet zu sein.

Abb. 54 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 2 Aufgabe 5

Zwei Schüler/innen sind der Meinung, dass man auf der Bank einen fixen Rückzahlungszinssatz vereinbart und daher muss man sich als Kreditnehmer/in keine Gedanken über Zinssatzschwankungen machen.

5) Nein, da man sich meistens bei der Aufnahme des Kredits auf einen festen Zinssatz einigt.

Abb. 55 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 2 Aufgabe 5

Andere Schüler/innen wiederum halten negative Zinssätze für unrealistisch, das kann bei der zweiten Modellierung vorkommen, und lehnen deswegen diese Art ab.

5) Nein, ist es nicht da laut dem Modell, theoretisch die Chance besteht, dass der Zinssatz negativ ist $\Rightarrow$ die Bank muss einem Geld bezahlen.

Abb. 56 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 2 Aufgabe 5

Einer dieser Schüler differenziert genauer und meint nur, dass negative Kreditzinsen un-

realistisch sind. Generell ist er aber für eine solche Modellierung.

5.) Nein vor allem mit dem Modell von G. weil theoretisch können die Zinssätze ins Negative gehen.
Generell bei dem richtigen Interesse, aber ist es realistischer als ein immer gleichbleibender Zinssatz.

Abb. 57 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 2 Aufgabe 5

Ein Schüler verwechselt die anzustellende Bewertung der Modellierung mit dem Interesse des/der Kreditnehmers/in. Dieser meint, dass es besser ist, wenn der Zinssatz gleich bleibt.

5.) Naja es ist nicht empfehlenswert, da man nie weiß, wie hoch/niedrig der Zinssatz ist.
Besser ist es wenn dieser immer gleich bleibt.

Abb. 58 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 2 Aufgabe 4

Die Auswertung der Fragen von Arbeitsblatt 3 fokussiert sich auf die Antworten auf die Fragen 4 und 7. Die Frage 4 lautet: „Welche Verläufe des Wechselkurses sind für den Kreditnehmer günstig und welche nicht?“ Dabei antwortet ein Schüler gänzlich falsch.

④ Niedriger Wechselkurs.

Abb. 59 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 3 Aufgabe 4

Einerseits, der Wechselkurs wirkt sich überhaupt erst auf den Schuldenstand aus, wenn er sich während der Laufzeit verändert und andererseits sind niedrige Verläufe im Sinne der Aufgabenstellung schlechte Wechselkurse, weil in diesem Fall der Schweizer Franken mehr Wert als der Euro ist. Drei weitere Lernende haben lediglich einen hohen Verlauf als Antwort geschrieben. Ein konstanter hoher Wechselkurs hat aber keinen Einfluss auf den Fremdwährungskredit. Exemplarische für diese Kategorie sei die folgende Antwort:

4) Hoher Wechselkursverlauf. Wenn der Wechselkurs „hoch“ ist; muss weniger zurückgezahlt werden, weil man die Schulden durch den Wechselkurs dividieren muss.

Abb. 60 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 3 Aufgabe 4

Unter den richtigen Antworten gab es Schüler/innen, die einen kurzen Aufsatz verfassten und welche, die kurz und prägnant die Antwort gaben. Als Beispiel für die Kategorie der kurzen Antworten wird die folgende angegeben.

4, Günstig für den Kreditnehmer ist es, wenn der Wechselkurs ^{steigt} hoch ~~ist~~ und daher ist es ungünstig, wenn der Wechselkurs ^{sinkt} niedrig ~~ist~~.

Abb. 61 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 3 Aufgabe 4

Der Schüler bessert seiner Antwort von einer statischen Betrachtung, die hier falsch wäre, auf eine richtige, dynamische aus. Eine interessante Schülerantwort gibt es noch, dieser Schüler fügt eine explizite Rechnung an, um sein Argument zu unterstützen. Das genügt zwar nicht der formal mathematischen Strenge, aber das angeführte Rechenbeispiel ist einzigartig unter allen Antworten.

4. Einen Vorteil für den Kreditnehmer gibt es nur wenn der Wk steigt da: Bsp.: $W_{k0} = 1,5$ $W_{k1} = 2$ $P = \begin{pmatrix} \text{invariant} \\ 5,3 \end{pmatrix}$

$$\frac{(100\,000 \cdot 1,5 (1 + 0,053) - 8400 \cdot 2) : 2}{(150\,000 \cdot 1,053 - 16\,800) : 2} = \underline{\underline{70.575 \text{ €}}}$$

sehr niedrig

Abb. 62 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 3 Aufgabe 4

Die Frage 7 beschäftigt sich mit den Risikoquellen des Fremdwährungskredits. Dass ein günstiger Verlauf eines solchen Kredites vom günstigen Verlauf des Wechselkurses und vom günstigen Verlauf des Zinssatzes abhängen, erkannten viele der Schüler/innen. Ein Schüler argumentiert mit Wahrscheinlichkeiten.

7) Fremdwährungskredite sind risikoreicher, weil das, was zurückgezahlt werden muss, nicht nur vom Zinssatz, sondern auch vom Wechselkurs abhängt. Dadurch ist es nicht wichtig wie „gut“ der Wechselkurs/Zinssatz ist, weil es dennoch einen anderen beeinflussenden Wert gibt. So ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Werte gut miteinander „arbeiten“ und dadurch ist auch die Tilgungsdauer schwieriger berechenbar und nicht wirklich konstant gehalten (also kann sie von einem auf den anderen Tag um Monate ~~variieren~~ variieren).

Abb. 63 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 3 Aufgabe 7

Die Lernenden erfassen zum Teil explizit die für den Kreditnehmenden schlechten Szenarien. Hier die exemplarische Schülerantwort:

7.) Der Kredit ist riskanter, da der Betrag an Geld welchen man zurückzahlen muss in das unermessene steigen kann, wenn gleichzeitig der Wechselkurs sinkt und auch der Zinssatz steigt. Wenn sich der Wechselkurs dann normalisiert, dann werden die Schulden unvorstellbar hoch.

Abb. 64 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 3 Aufgabe 7

Lediglich einer führt bei der Antwort auf Frage 7 nur die Abhängigkeit vom Zinssatz an. Zwei weitere Schülerinnen geben an, dass die Schwankungen größer werden. Risikoquellen werden nicht genannt.

7, Man sieht es daran, dass es eine höhere Schwankungsbreite gibt, ~~man~~ bei Jahren, in denen der Kredit getilgt werden muss

Abb. 65 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 3 Aufgabe 7

14.3 Erfahrungsbericht der Lehrperson

Der Lehrer hält die Arbeitsblätter für durchführbar im Unterricht. Er spricht zwei Punkte genau an, einerseits die fachliche Komponente, sowohl mathematische Kompetenzen als auch Kompetenzen aus dem Bereich des Finanzwissens, andererseits die technische Komponente, da die Aufgaben sehr technologielaastig waren.

„Die Arbeitsaufträge zur Kredittilgung sind derart gestaltet, dass sie prinzipiell kein spezifisches Wissen über Kredite voraussetzen. Somit waren alle Schüler/innen in der Lage, an den Einheiten teilzunehmen und die Arbeitsaufträge zu erledigen. Die ausführlichen Handlungsanweisungen innerhalb der Arbeitsaufträge ermöglichten es, dass sich die Schüler/innen ohne frontalen Input von Lehrerseite mit der Thematik auseinandersetzen konnten.“

In der vorgesehenen Zeit konnten alle Schüler/innen die Pflichtaufgaben lösen und sich mit der einen oder anderen Aufgabe zur Vertiefung beschäftigen. Allerdings bemerkte die Lehrperson Folgendes:

„Da es sich bei den anwesenden Schüler/innen durchwegs um sehr leistungsstarke und mathematisch interessierte Schüler/innen handelt, ist es möglich, dass das Arbeitstempo in anderen Klassen geringer ist.“

Die Arbeitsblätter eignen sich seiner Meinung nach sowohl für den Einsatz im Regelunterricht als auch im Wahlfach. Der Lehrer verweist bei Ersterem auf:

„Im Regelunterricht kann die Lernsequenz zur Kredittilgung in der 6. Klasse im Rahmen des Themengebiets Folgen umgesetzt werden. Im Mathematik-Lehrplan wird explizit auf finanzmathematische Inhalte verwiesen: *Verwenden von Folgen zur Beschreibung diskreter Prozesse in anwendungsorientierten Bereichen (insbesondere Geldwesen).*“

Bei der Schüler/innenorientierung merkt die Lehrperson an, dass Kredite in der Alltagswelt der Schüler/innen keine Rolle spielen.

„Auch wenn Kredite bzw. Kredittilgung für Schüler/innen meist keine akute Relevanz haben, ...“

Er fügt aber sofort hinzu

„..., so ist den Schüler/innen dennoch bewusst, dass dieses Thema für sie in Zukunft bedeutsam werden könnte.“

und ist der Meinung, dass die Auseinandersetzung mit verschiedenen Aspekten der Kredittilgung einen wichtigen Beitrag zur Bewusstseinsbildung schafft.

Die Arbeitsaufträge sind seiner Aussage nach ansprechend gestaltet und durchwegs verständlich.

„Die Schüler/innen verbrachten im Unterricht die meiste Zeit mit der Bearbeitung der Aufgaben und stellten nur vereinzelt Verständnisfragen. Dies deutet auf eine gute Verständlichkeit der Aufgabenstellungen hin.“

Die meisten Fragen von Seiten der Lernenden bezogen sich auf technische Fragen, die Befehle in GeoGebra oder Formatierungen betreffen. Die Lehrperson empfand, dass zu offene Fragen, wie „Welche Annahmen sind nicht realistisch?“ zu Unsicherheiten bei den Lernenden geführt hatten. Er meinte jedoch, dass das individuell von dem/der Schüler/in abhängt, während manche mit sehr konkreten eng gestellten Anweisungen bzw. Fragen mehr Freude haben, sehnen sich andere nach offeneren Fragestellungen und weniger konkrete Anweisungen. Des Weiteren schätzte er aufgrund einiger Schülerrückmeldungen die Frage „Welche Werte/Verläufe des Zinssatzes sind für den/die Kreditnehmer/in günstig und welche nicht?“ als zu oft gestellt ein.

„Meine persönliche Einschätzung hierzu ist, dass diese Instruktionen jedenfalls sehr hilfreich sind, da sie dabei helfen, technische Probleme so gering wie möglich zu halten. Der Fokus des Lernprozesses liegt dadurch weniger auf der technischen Umsetzung, sondern liegt viel stärker auf der inhaltlichen Auseinandersetzung mit der Thematik.“

Der Lehrer schätzte auch die großen Individualisierungsmöglichkeiten bei den Lehrmaterialien.

„Die Schüler/innen variierten deutlich in der Geschwindigkeit in der sie die Aufgabenstellungen erfüllen konnten. Durch die zusätzlichen Wahlaufgaben konnten die „schnellen“ Schüler/innen sich noch weiter vertiefen, während Schüler/innen, die mehr Zeit für die Bearbeitung brauchten, hierzu genügend Zeit vorfanden.“

Die Lehrperson erprobte auf „eigene Faust“ die ersten drei Arbeitsblätter noch im Regelunterricht in einer 6. Klasse. Ursprünglich waren nur zwei Arbeitsblätter für eine Doppelstunde geplant gewesen, aber aufgrund der positiven Rückmeldungen der Lernenden wurde in einer weiteren Schulstunde das dritte Arbeitsblatt durchgenommen. Als abschließendes Fazit formulierte die Lehrperson:

„Aus meiner Sicht als Lehrperson sind die entwickelten Anwendungsaufgaben zur Kredittilgung sehr empfehlenswert, da sie eine effiziente und praxisnahe Auseinandersetzung mit diesem Themengebiet darstellen. Die Schüler/innen eignen sich einen Großteil des Wissens eigenständig an und können in ihrem Lernprozess individuell unterstützt werden. Zusätzlich zu den fachlichen Inhalten der Kreditrechnung gewinnen die Schüler/innen auch wertvolle Erfahrungen im Umgang mit GeoGebra und der Tätigkeit des Modellierens. Die Schüler/innen müssen bei der Beantwortung der Aufgabestellungen auch vielfach begründen und interpretieren, was im herkömmlichen Mathematikunterricht häufig zu wenig geübt wird. Die entwickelten Lernaufgaben zur Kredittilgung können somit zu Lernprozessen auf verschiedensten Ebenen führen.“

14.4 Fazit

Die Verwendung von Technologie, in diesem Fall GeoGebra, ist für das Durchführen dieser Unterrichtssequenz unerlässlich. Sowohl aus den eigenen Aufzeichnungen als auch aus denen der Lehrperson geht hervor, dass es einige rein technische Fragen seitens der Schüler/innen gegeben hat. Sie betreffen das Eingeben von Formeln in die Tabellenkalkulation und die Ansicht bzw. die schöne Darstellung wie auf den Screenshots der Arbeitsblätter. Die Methodik, die Instruktionen via Sprechblasen zu stellen, geht aus dem Begleitband „Technologietraining“ zu der Schulbuchreihe „Mathematik verstehen“ hervor (vgl. ABLEITINGER/DORNER-/EMBACHER/ULOVEC, 2014). Ziel dieser Zusatzbandreihe ist es Fertigkeiten in GeoGebra zu erwerben, die das Verständnis mathematischer Inhalte unterstützt und die Bearbeitung von Aufgaben erleichtert. Auch durch diese Zugangsweise lassen sich nicht alle technischen Fragen verhindern, es wurde versucht, wie auch die Lehrperson bemerkte, die Anzahl an Fragen dieser Art so gering wie möglich zu halten. Eine Lehrperson, die diese Materialien im Unterricht verwendet, muss damit rechnen, dass technische Fragen auf sie zukommen werden.

Die Schüler/innen bearbeiteten nahezu alle Fragestellungen wie intendiert. Das zeigen die Ergebnisse aller drei Perspektiven. Nach Aufzeichnungen des Forschers war ein Schüler auf Anhieb nicht in der Lage, ein passendes Intervall bei Arbeitsblatt 4 Frage 2 zu finden. Betrachtet man die eingesammelten Antworten der Schüler/innen, dann lässt sich erkennen, dass zwar nicht alle richtig beantwortet, aber im Sinne der Fragestellung bearbeitet wurden. Auch die Lehrperson erwähnte, dass die Lernenden nur vereinzelt Verständnisfragen stellten. Aus Sicht der Schüler/innen wurde zu oft nach günstigen Verläufen des Zinssatzes gefragt. Diese Kritik fiel während der Unterrichtsstunden nicht auf, sie wurde am Ende der sechs Einheiten gemeldet. Es ist durchaus möglich, diese Frage das ein oder andere Mal wegzulassen, wie auf Arbeitsblatt 3, wo eigentlich der Wechselkurs im Fokus steht, oder auf Arbeitsblatt 5 bei Aufgabe 3. Auf der anderen Seite kann man diese Kritik in dem Sinne interpretieren, dass die Schüler/innen die Quintessenz der Unterrichtssequenz verstanden haben. Aus diesem Grund wurde an den Arbeitsblättern diesbezüglich nichts geändert.

Des Weiteren bleibt die Voraussetzungsarmut dieser Materialien hervorzuheben. Das Weglassen eines spezifischen Vorwissens ermöglichte das eigenständige Durcharbeiten der Arbeitsaufträge. Dies bestätigt die Lehrperson und auch die Tatsache, dass die Schüler/innen alle Aufgaben beantwortet haben.

Wie ist die Qualität der Antworten der Lernenden einzuschätzen?

Zuerst wird das Verstehen der deterministischen Dynamik eines Kredits beleuchtet. Die Lernenden beantworteten die Frage unterschiedlich, mit Hilfe mathematischer Berechnungen oder verbaler Beschreibungen. Lediglich eine Schülerin formulierte eine etwas unzureichende Antwort (siehe Abb. 43). Im Großen und Ganzen lässt sich sagen, dass die Schüler/innen Fragen zur Dynamik richtig beantwortet haben.

Bei einer probabilistischen Sicht der Dinge war es für die Schüler/innen einleuchtend, dass niedrigere Zinssätze besser für Kreditnehmende sind (siehe Abb. 47 - 49).

Bei Fremdwährungskrediten, wo der Verlauf des Wechselkurses von Bedeutung ist, zeigten sich auch ein paar Verständnisschwierigkeiten (siehe Abb. 59). Die Tatsache, dass ein Fremdwährungskredit risikoreicher ist als ein normaler Kredit, verstanden alle Schüler/innen (siehe Abb. 63 - 65).

Abschließend ist der Modellierungsaspekt in den Aufgabenstellungen zu erwähnen. Einige Lernende wussten bei Frage 5 auf Arbeitsblatt 1 nicht, was sie antworten sollten. Analog dazu steht die Frage 5 auf Arbeitsblatt 2. Bei beiden wird ein Anstoß gegeben, im Bereich des Modellierungskreislaufs die mathematischen Resultate mit der realen Situation zu überprüfen und eine weitere „Runde“ im Modellierungskreislauf zu „drehen“. Bei Arbeitsblatt 1 antwortete niemand, dass der Zinssatz als konstant über die Laufzeit angenommen wird. Die meisten meinten, dass zu hohe Zinssätze unrealistisch seien, wie bei Aufgabe 2 c) und d). Auf Arbeitsblatt 2 funktionierte das schon besser, einige bemängelten, dass bei diesem Modell der Zinssatz negativ werden kann. Zurückzuführen ist das auf die geringe Erfahrung der Lernenden mit Modellierungsaufgaben im Regelunterricht.

Insgesamt lässt sich erkennen, dass diese Arbeitsblätter, im Unterricht gut durchführbar sind.

Bezug zu den Lernzielen

Die Formulierungen der angesprochenen Lernziele findet man auf im Kapitel 11.4.10 Seite 225.

1. Die Schüler/innen erkennen, siehe exemplarisch Abb. 63 - 65, dass Fremdwährungskredite risikoreicher sind als normale Kredite. Sie nennen zum Teil auch explizit die Risikoquellen. Bei Antwort auf Abb. 63 schreibt der Schüler: „...Fremdwährungskredite sind risikoreicher, weil das, was zurückgezahlt werden muss, nicht nur vom Zinssatz, sondern auch vom Wechselkurs abhängt.“ Alle bis auf zwei Schüler/innen führten bei der Antwort zu Frage 7 auf Arbeitsblatt 3 den Zinssatz als Risikoquelle an.
2. Auf den Arbeitsblättern wurden immer wieder Fragen gestellt, die dieses Lernziel überprüfen. Am Ende der Erprobung meinten einige Schüler/innen, dass die Frage nach günstigen und ungünstigen Verläufen zu oft gestellt worden wäre. Die Antworten waren dementsprechend gut, siehe Abb. 44 - 49.
3. Zu Beginn hatten einige Schüler/innen Probleme, eine schöne Darstellung in GeoGebra zu bekommen. Die Simulation funktionierte mit der gegebenen Anleitung ohne große Schwierigkeiten. Spätestens nach dem zweiten Arbeitsblatt konnten alle Schüler/innen die Simulation zur Gänze selbstständig durchführen.
4. Die Auseinandersetzung mit Folgen und Reihen insbesondere mit der Tilungsgleichung

und der geometrischen Reihe war bei dieser Unterrichtssequenz unabdingbar. Diesbezüglich stellten die Schüler/innen kaum eine Frage. Sie arbeiteten mit Hilfe der Anleitung die Aufgabenstellungen in Eigenregie ab. Die Vertiefungsaufgabe 1 auf Arbeitsblatt 4, diese thematisiert algebraische Umformungen der Tilgungsgleichung und die Interpretation der Ergebnisse, stellte für zwei Schüler, die diese Umformungen mit „Papier und Bleistift“ durchführen wollten, eine große Herausforderung dar, da sie in ihren Rechnungen mehrere Fehler machten. Mit Hilfe der Lehrperson schafften sie es, auf die richtigen Ergebnisse zu kommen, die Interpretation war für die beiden kein Problem. Die Programmierung der Schuldenstände und der Ratenhöhen in GeoGebra erledigten alle, wie gefordert.

5. Aufgrund der geringen Erfahrung mit Modellierungsaufgaben war es für die Schüler/-innen zu Beginn schwierig Schwächen an einem Modell zu erkennen. Im Laufe der Arbeitsblätter verbesserte sich diese Fähigkeit. Siehe dazu exemplarisch Abb. 55 - 57.

15 Zweite Erprobung

Die Unterrichtssequenz „Diversifikation“ wurde an einer Schule im 15. Bezirk in Wien erprobt. Im Zeitraum vom 25.5.2016-1.6.2016 arbeiteten elf Schüler/innen der elften Schulstufe an insgesamt sechs Arbeitsblättern zu diesem Thema. In der ersten Einheit waren sieben Schülerinnen und drei Schüler anwesend. Die Vorkenntnisse der Schüler/innen umfassten nahezu den gesamten Lehrstoff der elften Schulstufe AHS.

15.1 Eigene Aufzeichnungen

Zu Beginn der Stunde um 11:55 Uhr waren 10 Schüler/innen anwesend. Die Lehrerin bettet die kreierten Unterrichtsmaterialien in ihren Unterricht ein, sie behandelte zuvor die Berechnung statistischer Kennzahlen mit dem Taschenrechner. Das benötigte man auch für die beiden kommenden Einheiten. Nach einer ganz kurzen Besprechung der Hausaufgabe begann die eigentliche Einheit. Die Lernenden lasen aufmerksam die Spielregeln des Spiels. Anschließend erklärte die Lehrperson die Berechnung mit der Tabelle anhand der Strategie 100/0 (100 Euro auf den roten Würfel und 0 Euro auf den blauen Würfel).

Erst jetzt konnten die Schüler/innen nach dem „first come, first serve“-Prinzip eine Strategie wählen. Es standen 50/50, 90/10, 80/20, 70/30 und 60/40 zur Wahl. Die Lernenden bildeten Zweiergruppen und untersuchten eine Strategie. Ein paar Schüler/innen hatten Probleme die Tabelle auszufüllen, sie vergaßen den Einsatz von der Auszahlung abzuziehen und hatten bei den ersten Zeilen nie einen Verlust. Es bleibt festzuhalten, dass das Tempo des Ausfüllens der Tabelle sehr stark variierte. Manche Lernenden erfassten sofort (50/50-Strategie ausgenommen), dass es nur vier mögliche Fälle gibt (bei der 50/50-Strategie nur zwei Fälle). Diejenigen, die das System rascher durchschauten, arbeiteten die 60 Würfe und das dazugehörige Eintragen schneller ab. Die schnellen Schüler/innen sollten einstweilen die Datenliste in den Taschenrechner übertragen und ein paar Kennzahlen wie das arithmetische Mittel berechnen.

Um 12:32 Uhr wurden dann alle Ergebnisse im Plenum verglichen. Jeweils ein/e Vertreter/in der Gruppe präsentierte die vier bzw. zwei verschiedenen Fälle des Nettogewinns der Gruppe. Auch hier erkannten die Lernenden rasch, dass man unabhängig von der Strategie höchstens 200 Euro gewinnen und im schlechtesten Fall 100 Euro verlieren kann.

In der ersten Einheit konnte von zwei Strategien noch der Erwartungswert des Gewinns berechnet werden. Einige Schüler/innen hegten bereits die Vermutung, dass er sich nicht verändert. Ein Schüler merkte noch nach Ende der Stunde an, dass das arithmetische Mittel des Gewinns seiner Strategie bei 57 liegt. Die Lehrerin fragte ihn, wie das denn sein könnte. Er antwortete: „Durch Zufall“. Die Lehrperson fügt noch hinzu, dass das ein günstiger Zufall für seine Zweiergruppe sei.

Die zweite Einheit der Erprobung des Materials zu Diversifikation begann um 8:55 Uhr und endet um 9:45 Uhr. Da es Probleme mit den öffentlichen Verkehrsmitteln gab, konnte ich erst später der zweiten Stunde beiwohnen. Während meiner Abwesenheit wurden die Spielregeln des Spiels wiederholt, so konnte die eine Person, die in der vorigen Einheit gefehlt hatte, leicht in die Stunde finden. Das erwies sich aber nicht nur für diese eine Schülerin vorteilhaft, denn das verlängerte Wochenende trug zu einem langen zeitlichen Abstand zur letzten Einheit bei. Im Anschluss wurden die restlichen Strategien besprochen. Für die Schüler/innen

war sofort klar, dass sich der Erwartungswert nicht ändert, daraufhin fragte die Lehrperson nach einer Begründung. Die Schüler/innen hatten aber keine Idee, wie man das begründen könnte. Die Lehrerin gab den Schülern/innen eine Hausübung auf, den Erwartungswert für die Strategie $a/100 - a$ zu berechnen. Danach beantworteten die Schüler/innen die letzte Frage auf Arbeitsblatt 1, diese Antworten wurden abgesammelt.

Für das zweite Arbeitsblatt wurden zuerst Streuungsmaße wiederholt und besprochen. Die Schüler/innen sollten nun die Spannweite und die empirische³² Standardabweichung aus ihren Daten berechnen. Die Lehrerin forderte zusätzlich die Berechnung der theoretischen³³ Standardabweichung durch die Schüler/innen ein. Bei einigen Lernenden stellte sich heraus, dass der Unterschied zwischen empirischer und theoretischer Standardabweichung nicht klar war. Die Lehrerin thematisierte diesen Unterschied, was anscheinend fruchtbar für die ganze Klasse gewesen sein dürfte.

Im Plenum wurden die einzelnen Strategien weiter besprochen. Das untenstehende Bild beschreibt das Ergebnis recht gut.

Strategie

100 : 0

rot blau

Gesamtgewinn

GG 300 - 100 = 200

GV 200

VG -100

VV -100

$E(X) = 50€$

Spannweite = 300

$\sigma(X) \approx 150€$

Strategie

70 : 30

rot blau

Gesamtgewinn

GG 200€

GV 110€

VG -10€

VV -100€

$E(X) = 50€$

Spannweite = 300

$\sigma(X) \approx 114€$

Strategie

90 : 10

rot blau

Gesamtgewinn

GG 200€

GV 170€

VG -70€

VV -100€

$E(X) = 50€$

Spannweite = 300

$\sigma(X) \approx 136€$

Strategie

60 : 40

rot blau

Gesamtgewinn

GG 200€

GV 80€

VG 20€

VV -100€

$E(X) = 50€$

Spannweite = 300

$\sigma(X) \approx 108€$

Strategie

80 : 20

rot blau

Gesamtgewinn

GG 200€

GV 140€

VG -40€

VV -100€

$E(X) = 50€$

Spannweite = 300

$\sigma(X) \approx 124€$

Strategie

50 : 50

rot blau

Gesamtgewinn

GG 200€

GV 50€

VG 50€

VV -100€

$E(X) = 50€$

Spannweite = 300

$\sigma(X) \approx 106€$

Abb. 66 Tafelbild der Strategien und der zugehörigen Kennzahlen

Auf den allgemeinen Beweis, dass die Varianz bei der 50/50-Strategie am geringsten ist, wurde aus Zeitgründen verzichtet. Im Anschluss mussten die Lernenden die Antworten zur letzten Frage auf Arbeitsblatt 2 schreiben, welche abermals abgesammelt wurden.

Zum Abschluss der Stunde wurde der Beginn des dritten Arbeitsblattes besprochen, also das Berechnen der Rendite.

Die dritte Einheit der Unterrichtserprobung umfasste die Arbeitsblätter 3, 5 und 6. Das Arbeitsblatt 4 wurde ausgelassen, da die Lehrerin der Korrelationskoeffizient nicht unterrichtet hat. Zu Beginn der Stunde wiederholte die Lehrerin das Würfelspiel und bearbeitete in fragend- entwickelnder Art die ersten Fragen auf Arbeitsblatt 3. Die Lehrperson fragte nach

³²Die Standardabweichung einer Datenliste

³³Die Standardabweichung einer Zufallsvariablen

dem besten Verlauf eines Aktienkurses, woraufhin eine Schülerin mit dem Wort „steigend“ antwortete. Als nächstes fragte sie, wie sich ein positiver Verlauf bei den Renditen äußert. Eine Schülerin antwortete: „Etwas Positives und kein Auf und Ab!“ Die Lehrerin wollte nun von den Schülern/innen wissen, in welche Aktie sie aufgrund der beiden Diagramme investieren würden. Ein Schüler meldete sich aufgebracht: „Muss ich da nicht auf mehr schauen?“ In der Klasse wurde dann kurz diskutiert, was denn alles für eine Investitionsentscheidung wichtig sei. Man einigte sich schlussendlich, sich nur auf diese beiden Informationsquellen zu beziehen. Eine Schülerin sagte laut: „Nicht in Tesla, da es da extrem schwankt.“

Die Lehrperson teilte die Lernenden in Gruppen ein, jeweils eine Gruppe berechnete das arithmetische Mittel und die Standardabweichung einer Aktie. Es gab zu jeder Aktie genau eine Gruppe, außer zur Behandlung der Mc Donald's-Aktie wurden zwei Gruppen eingeteilt. In eine Tabelle an der Tafel trugen die Schüler/innen ihre errechneten Werte ein. Nun wurde erneut diskutiert, in welche Aktie man aufgrund welcher Kennzahlen investiert. Man entschied sich auf Basis der Kennzahlen schlussendlich für die Mc Donald's-Aktie, da diese mit der Facebook-Aktie die größte Rendite aufweist, aber eine kleinere Standardabweichung als Facebook in der abgebildeten Periode hat. Abschließend wurden zwölf Wochen als zu kurz für eine verlässliche Aussagekraft für die Zukunft befunden.

Bei Arbeitsblatt 5 wurde bei dieser Erprobung der Korrelationskoeffizient weggelassen, da diese Kennzahl, wie zuvor erwähnt, nicht im Unterricht besprochen wurde, so lautet das Portfoliorisiko vereinfacht $\sigma_p = \sqrt{a^2 \cdot \sigma_a^2 + b^2 \cdot \sigma_b^2}$. Der Korrelationskoeffizient betrug in dieser gestellten Aufgabe ohnehin null. Die Lehrerin rechnete die erste Zeile der Tabelle auf Blatt 5 mit den Lernenden gemeinsam, anschließend mussten diese die restlichen Werte selbst berechnen. Nach dem Vergleichen der Werte meinte eine Schülerin, dass ja die Aufteilung 50% zu 50% fehle. Darauf schrie ein Schüler laut heraus, dass das jene Aufteilung mit der geringsten Standardabweichung sei, also ist das in diesem Fall die beste Aufteilung.

Die Lehrerin appellierte zum genaueren Nachdenken, dass die 50%-50%-Aufteilung eine Analogie zum Würfelspiel darstellt, aber nicht in jedem Fall ist das die beste Aufteilung aufgrund der beiden Kennzahlen. Daraufhin gab sie das Arbeitsblatt 6 als Hausübung auf, wo genau das thematisiert wird. Zum Abschluss mussten die Schüler/innen drei Situationen von Arbeitsblatt 9 schriftlich diskutieren und abgeben. Die Ergebnisse sind unten angeführt.

15.2 Schülerantworten

Bei Arbeitsblatt 1 sollten die Schüler/innen folgende Frage beantworten: „Wie würdest du einer Person, die an dem Spiel teilnehmen möchte, raten die Aufteilung vorzunehmen?“ Diese dient zum Überprüfen, ob die Lernenden das Arbeitsblatt 1 verstanden haben. In diesem Fall muss man sagen, dass die Lernenden das Blatt über dem zu erwartenden Maße hinaus verstanden haben. Eine typische Antwort ist, dass die Lernenden die 50/50-Strategie bevorzugen und auch explizit nennen, diese aber im nächsten Schritt sofort wieder relativieren, da der Erwartungswert gleich bleibt.

Ich würde der Person raten die Strategie 50:50 zu wählen,
weil die Wahrscheinlichkeit etwas zu gewinnen größer ist,
(jedoch wäre es egal, weil der Erwartungswert gleich ist.)

Abb. 67 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Punkt 4

Ein weiterer Antwortentyp empfiehlt die 50/50-Strategie, da man hier in drei von vier Fällen gewinnt. Hier wird erkannt, dass die Wahrscheinlichkeit das Spiel zu verlieren, geringer ist, als bei anderen Strategien. Einige führten explizit auch noch jene Strategien an, wo diese zuvor erwähnte Wahrscheinlichkeit zwischen gewinnen und verlieren gleich ist, allerdings gibt es dann andere Werte zum Gewinnen bzw. zum Verlieren. Eine exemplarische Schülerantwort findet man darunter:

Ergebnis: Da der Erwartungswert überall gleich ist, kann man die Strategie eigentlich vernachlässigen. Jedoch würde ich zu der Strategie 50:50 tendieren, da sie erstens, aus psychologischer Sicht Sicherheit gibt und zweitens, man in $\frac{3}{4}$ der Fälle keinen Verlust machen würde. Dies ist nicht immer gegeben.

Abb. 68 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Punkt 4

Hier noch eine Antwort, wo eine weitere Strategie erwähnt wird, dass die 60:40-Strategie vor der 50/50-Strategie erwähnt wird, dürfte aus den vorangegangenen Überlegungen der Schülerin herrühren und nicht aufgrund einer Präferenz der Schülerin. Die 50/50-Strategie wurde nämlich als letzte besprochen.

1. Runde:
Ich würde die Strategie 60:40 od. 50:50 wählen, da man bei beiden eine $\frac{3}{4}$ Gewinnchance hat. Jedoch ist es egal welche Strategie ich wähle, da sie sich nur gering voneinander unterscheiden und der Erwartungswert immer 50€ ist.

Abb. 69 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Punkt 4

Zwei Schüler/innen gaben schon Antworten mit einem Argument, das sich auf die Standardabweichung bezieht. Einer der beiden umschreibt das sehr schön.

- Wir würden die Strategie 50:50 nehmen,
da hierbei der Gewinn im Durchschnitt
am nächsten ~~von~~ ^{unten} Erwartungswert liegt.
Somit ist die Wahrscheinlichkeit
geringer, dass ein Minus gemacht wird.

Abb. 70 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Punkt 4

Die zweite Frage zielt nun erst wirklich auf die Standardabweichung ab. Zwei Schüler und eine Schülerin meinten, dass sich zur vorigen Antwort nichts geändert hat. Darunter waren, wie zu erwarten, die beiden, die schon bei Arbeitsblatt 1 mit der Standardabweichung argumentiert haben. Insgesamt antworteten 9 Lernende in diesem Stil, manche recht kurz und andere wiederum ausführlicher.

2. Runde: Ich bin der selben Meinung wie vorher.

Abb. 71 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 2 Punkt 5

Untenstehend befindet sich eine ausführlichere Version.

2. Runde

Ich würde wieder 50:50 wählen, da die
Standardabweichung am geringsten (106 €)
ist.
60:40 würde auch gut sein ($\Rightarrow$ Standardab-
weichung ist um 2 € größer $\rightarrow$ 108 €)
 $\rightarrow$ meine Meinung hat sich bestätigt.

Abb. 72 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 2 Punkt 5

Zwei interessante Antworten gab es noch. Ein Schüler unterschied zwischen persönlichem Empfinden und Empfehlung, vielleicht handelt es sich hierbei um eine sehr risikofreudige Person.

~~Ich~~ Persönlich würde ich die 100:0 Strategie wählen, aber
durch die Ausrechnung der Standardabweichung ist die
50:50 Verteilung zu ~~empfehlen~~ empfehlen.

Abb. 73 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 2 Punkt 5

Lediglich eine der Befragten hat das Arbeitsblatt 2 nicht verstanden. Einem Feigling sollte man nicht die 100/0-Strategie empfehlen.

2. Runde:

Strategie 100:0 da die Standardabweichung am größten ist.

Abb. 74 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 2 Punkt 5

Die Diskussion des Begriffs Diversifikation im Kontext von Alltagssituationen erwies sich als äußerst interessant. Die Situation 1 handelt von der Entscheidung einer Investition in einen Aktienfonds oder in eine einzelne Aktie. Ein Schüler antwortete korrekt:

1) Nein, der Kauf mehrerer Aktien senkt das Risiko Verlust zu machen, da aus mehreren Aktien Gewinn geschöpft werden kann, σ ist kleiner

Abb. 75 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 9 Situation 1

Interessanterweise antworteten zwei der Lernenden mit einer Umkehrung der Angabe. Sie formulierten die Angabe, „..., da bei vielen verschiedenen Anlagen sicher eine Verlust schreibt.“ in „..., da bei vielen Anlagen sicher eine Gewinn macht.“

Situation 1:

Es ist weniger riskant einen Aktienfond zu kaufen da man eine größere Wahrscheinlichkeit hat dass wenigstens eine Aktie gewinnt.

Abb. 76 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 9 Situation 1

Es stimmt zwar, dass es weniger riskant ist, in einen Aktienfond zu investieren, als in eine einzelne Aktie, aber die Begründung ist falsch. Das Argument der Diversifikation bleibt aus. Es gab auch eine gänzlich falsche Einschätzung einer Schülerin.

1.) Ich denke das stimmt, da bei einem Aktienpool mit großer Wahrscheinlichkeit Aktien dabei sind, die Verlust machen

Abb. 77 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 9 Situation 1

Die Situation 2 thematisierte Warteschlangen, diese sollten in Bezug auf Diversifikation analysiert werden. Die Argumentationen lassen alle auf einen realitätsgebundenen Typ nach BUSSE schließen. Alle Lernenden, die diese Situation behandelten, sagten richtig, dass Alice Recht hat. Es kam jedoch nie ein Argument über die Standardabweichung. Zum Teil wurde es aber verbal umschrieben.

Situation 2:

sie hat recht, weil nicht jede Kassiererin bzw. jeder Kassierer gleich schnell arbeitet und die Leute in der Schlange einfach die freie Kassa benutzen ~~können~~ können.

Abb. 78 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 9 Situation 2

Es wurde teilweise fernab der Mathematik begründet, ja sogar Fernsehsendungen („Galileo“) führte einer als Argument an.

Situation 2: rechte Abrisiedung:
ich habs bei Galileo gehört

Abb. 79 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 9 Situation 2

Die Situation 3 leitete einige Schüler/innen in die Irre. Viele der Lernenden sprachen davon das Geld nicht auf mehrere Banken aufzuteilen, da man sonst weniger Zinsen bekommt. Hier liegen sie aber einem Irrtum auf. Wenn ich mein gesamtes Kapital K auf n Banken aufteile, wobei auf der i -ten Bank ein Betrag von K_i veranlagt wird und alle Banken die gleichen Zinssätze von $p\%$ anbieten (Die Unterschiede zwischen den Zinssätzen der einzelnen Banken sind äußerst gering, da sich alle Banken am Leitzinssatz orientieren, somit ist die Annahme des gleichen Zinssatzes gerechtfertigt), dann gilt:

$$K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + \dots + K_n \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Auf Sparbücher gibt es im Allgemeinen keine Kontoführungsgebühren. Einzig und alleine müsste man beim Aufteilen seines Geldes auf mehrere Banken öfter eine Auflösungsgebühr zahlen. Das Argument des Nicht-Aufteilens, da mehr Geld auf einer Bank zu mehr Zinsen führt, ist falsch.

Situation 3:

Es ist klug, da sie bei mehr auf der Bank mehr ~~se~~ Geld bekommt.

Abb. 80 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 9 Situation 3

Lernende, die das Aufteilen befürworteten, argumentieren nicht durchwegs richtig, dass das Risiko eines Totalausfalls sinkt, wenn eine Bank bankrott geht. In Österreich ist das durch die Einlagensicherung bis zu einem Betrag von 100 000 Euro wirklich egal.

Situation 3

Es wäre besser, es zu teilen $\Rightarrow$ wenn die Bank wenige Zinsen gibt, weil es finanziell ~~es~~ nicht gut geht $\rightarrow$ dann hat man keine Chance, mehr Geld zu bekommen.
Wenn sie aber es teilt, hat Marie eine höhere Chance, Zinsen zu bekommen $\rightarrow$ wenn es nur einer Bank schlecht geht, dann bekommt sie mindestens das Geld von der 2. Bank.

Abb. 81 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 9 Situation 3

Die Bandbreite bei Situation 4 war sehr groß, auf der einen Seite gab es Schüler/innen, die zwar meinten, dass das eine dumme Idee sei, aber nicht in Bezug auf Diversifikation antworteten.

Situation 4:

Dumme Idee, da die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen nur $\frac{1}{37}$ ist.

Abb. 82 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 9 Situation 4

Auf der anderen Seite stimmten Lernende der Aussage zu und formulierten zum Teil amüsante Begründungen. Es ist nicht sicher, ob diese wirklich ernst zu nehmen sind.

Situation 4 : Wird ihr aus machen. Geburtstags-
daten sind eindeutig Glückssache.

Abb. 83 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 9 Situation 4

Bei Situation 5 waren sich alle Schüler/innen einig. Peter soll für beide Prüfungen lernen, manche fügten auch hinzu, er muss aber früher zu lernen beginnen.

Situation 5 : da man fürs Leben lernt (und
nicht für die Schule) sollte
er früher beginnen (das nächste mal)

Abb. 84 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 9 Situation 5

Bei Situation 6 waren ebenfalls alle Lernenden einer Meinung. Die Bauunternehmerin soll mehrere kleinere Aufträge von verschiedenen Firmen annehmen. Zum Teil wurde auch richtig argumentiert.

6.) lieber mehrere kleinere Aufträge,
da sie somit das Risiko der
„Niederlage“ verringert und sich
von einem möglichen Minus leichter
erholen kann.

Abb. 85 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 9 Situation 6

15.3 Erfahrungsbericht der Lehrperson

Die Lehrerin hält die Arbeitsblätter für durchführbar im Mathematikunterricht. Für Sie eignen sich die erstellten Materialien vor allem für das Wiederholen von Begriffen und Themen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Sie lobt dabei vor allem die Art der Fragestellungen, da diese nicht den üblichen Aufgaben aus dem Schulbuch entsprechen:

„Positiv hervorzuheben ist dabei, dass sich die Aufgaben von „typischen Schulbuchaufgaben“ unterscheiden. Dies erlaubt den Schülerinnen und Schülern, die Perspektive zu wechseln und dadurch neue Erkenntnisse zu gewinnen. Neue Querverbindungen konnten hergestellt werden - ich denke hier etwa an die Berechnung der Standardabweichung, die sowohl empirisch anhand der Daten, als auch theoretisch durchgeführt wurde.“

Sie hält fest, dass es sich durchaus um Themen handelt, die im alltäglichen Leben eines/r Schülers/in eine Rolle spielen. Die Anwendungen in der Finanzwelt sind ihrer Meinung nach nicht Teil der unmittelbaren Erlebniswelt der Lernenden, auch wenn sie später durchaus damit konfrontiert werden. Die Lehrperson empfindet, dass diese alltäglichen Anwendungen erst sehr spät erscheinen und meint, dass die Einstiegsaufgabe aufgrund der Realitätsferne nicht die Motivation bei den Lernenden fördert.

„Mir persönlich hätte es gefallen, wenn wir gleich am Beginn in die Finanzwelt eingestiegen wären. Das „Würfelspiel“ ist konstruiert; möglicherweise ist die Motivation der Schülerinnen und Schüler (noch) höher, wenn man sofort einen Bezug zur Realität erkennt. Mit einem kreativen Einstieg – seien es nur nette Anekdoten aus der Welt der Aktien – hätte man bestimmt schnell Interesse geweckt.“

Nach Meinung der Lehrerin war der Zeitpunkt der Erprobung nicht optimal gewählt, da dieser vor einer Klausur stattgefunden hat. Die Schüler/innen hatten mehrmals während Erprobungen den Fokus auf die Schularbeit anstatt auf die Arbeitsblätter, dennoch zeigten die Lernenden ihrer Meinung nach Interesse an der Thematik.

Die Lehrperson sieht die Aufgaben als verständlich, hätte gerne aber ein anderes methodisches Vorgehen. Sie plädiert für weniger Text auf den Arbeitsblättern, dieser solle von der jeweiligen Lehrperson übernommen werden.

„Zu den Arbeitsblättern sei angemerkt, dass es sich hierbei in erster Linie um Informationsblätter handelte. Man könnte andedenken, Teile der Texte zu ersetzen

und nur dem Lehrer oder der Lehrerin zur Verfügung zu stellen. Die Aufgaben waren im Großen und Ganzen zwar verständlich, das Material bedarf aber auf jeden Fall einer zusätzlichen Erklärung durch die Lehrperson.“

Dieses Schuljahr konnte die Lehrerin keine der Materialien wiederverwenden, da die Materialien nur in der 7. Klasse (11. Schulstufe) passend waren und sie nur eine 7. Klasse in Mathematik unterrichtete, in der die Erprobungen durchgeführt wurden.

15.4 Fazit

Am Beginn des Fazits sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass es sich hierbei um eine Unterrichtssequenz handelt, die rote und blaue Spielwürfel benötigt. Meistens besitzt man so viele nicht in Klassenstärke. In diesem Fall ist es ohne Probleme möglich auf normale (weiße) Würfel umzusteigen und von einem ersten und einem zweiten Würfel zu sprechen. Die Angabe muss dementsprechend geändert werden.

Die Fragestellungen wurden von den Lernenden wie intendiert behandelt, das lässt sich aus den abgesammelten Antworten schließen.

Die Qualität dieser Antworten muss genauer betrachtet werden. Wir beginnen mit Arbeitsblatt 1 (Gruppenexploration), Punkt 4. Gesamt betrachtet konnten die Schüler/innen die dort gestellten Fragen richtig beantworten. Alle Lernenden erkannten bzw. verstanden, dass der Erwartungswert gleich bleibt, siehe Abb. 67, 68, 69 und 70. Sie argumentierten aber schon bei dieser Frage, dass die Wahrscheinlichkeit einen Verlust einzufahren, bei der Strategie 50:50 am kleinsten ist, siehe Abb. 67, 68, 69 und 70, zum Nachlesen siehe die Musterlösung in Abb. 26.

Die zweite Frage wurde vom Großteil der Klasse richtig beantwortet. Lediglich eine falsch zu wertende Antwort findet man, siehe Abb. 74. Die anderen Antworten fielen zum Teil sehr kurz aus, da sich die Empfehlung für eine 50:50 Strategie nicht änderte, siehe Abb. 71. Ein Schüler erläuterte in seiner Antwort sein Verhältnis zwischen der eigenen Intuition und der Mathematik. Er persönlich würde die 100:0 Strategie wählen, aber eine Empfehlung würde er aufgrund der berechneten Ergebnisse für die 50:50 Strategie geben. Es bleibt festzuhalten, dass die Wahrscheinlichkeit bei der 100:0 Strategie für einen hohen Gewinn am größten ist, allerdings ist die Wahrscheinlichkeit für den maximalen Verlust genauso groß. Vielleicht handelt es sich bei diesem Schüler um eine risikofreudige Person.

Des Weiteren wurden noch Antworten zu Fragen auf dem Arbeitsblatt 9 abgesammelt. In diesem Zusammenhang muss erwähnt werden, dass gerade Situation 1 „Bob sagt: Der Kauf einer Aktie ist weniger riskant als der Kauf eines Aktienfonds, da bei vielen verschiedenen Anlagen sicher eine Position Verluste schreibt.“ nicht im Sinne der Diversifikation beantwortet wurde. Eine Schülerin pflichtete der Aussage sogar bei. Das ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, dass nach Arbeitsblatt 5 kaum Zeit blieb, die Wichtigkeit der Diversifikation zu betonen. Ansonsten zeigt sich die ganze Palette an Antworten von richtigen bis falschen Begründungen bis hin zu Fernsehsendungen, die als Argument angeführt worden sind. Diese Antworten fielen im Ganzen leider etwas durchwachsen aus und gehören auf alle Fälle besprochen. Die Intention, die vorangegangenen Fragestellungen mit Alltäglichem der Lernenden zu vernetzen, ist auf alle Fälle gelungen.

Auf zwei Kritikpunkte der Lehrperson muss noch genauer eingegangen werden.

Erstens: Sie findet das Würfelspiel konstruiert und ist der Meinung, dass ein Bezug zur Fi-

nanzwelt unter Umständen die Motivation erhöht. Es ist durchaus möglich dieses Spiel, in einen Kontext zur Finanzwelt zu setzen. Das wurde bei der Erstellung der Sequenz bewusst vermieden. Dabei würde es sich auf alle Fälle um eine Einkleidung handeln und ist in der rohen Form ehrlicher. Des Weiteren benötigt man Begriffe aus der Finanzwelt, die wahrscheinlich eher Verwirrung als Motivation schaffen würden. Aktien sind mit Sicherheit nicht Objekte der alltäglichen Erfahrungswelt der Schüler/innen, Würfelspiele hingegen kennt jede/r Schüler/in und diese/r hat mit Sicherheit selbst schon ein Würfelspiel gespielt. Hier bedürfte es weiterer Erprobungen, um die Aussage der Lehrperson zu überprüfen.

Zweitens: Sie ist der Meinung, dass die Arbeitsblätter sehr textlastig sind. In erster Linie waren die Arbeitsblätter zur selbstständigen Arbeit gedacht. Die Lehrperson, vermutlich aufgrund der wenigen Zeit für die Erprobung, hat Teile im Plenum erklärt, dadurch wurden Textteile der Arbeitsblätter redundant. Allgemein hielt sie einen auf die Lehrperson zentrierten Unterricht. Das steht eher im Gegensatz zu den Arbeitsblättern, welche individuell bearbeitet werden können und Möglichkeiten zur Vertiefung bieten. Auch zur Verifikation dieser Aussage bedürfte es weiterer Erprobungen.

Bezug zu den Lernzielen

Aufgrund der erhobenen Daten wird nur auf die Lernziele 1, 2 und 4 aus Kapitel 11.3.9 auf Seite 196 Bezug genommen.

1. An den Erläuterungen zur Situation 1 von Arbeitsblatt 9, siehe Abb. 74 - 76, erkennt man, dass die Schüler/innen Investitionen am Finanzmarkt probabilistisch betrachten und sie auch mit Risiko verbinden. Die Beobachtungen des Forschers (zum Beispiel die Aussage einer Schülerin: „Nicht in Tesla, da es da extrem schwankt.“) lassen erkennen, dass sie ein Maß für das Risiko nahezu selbst entdecken. Daraus kann man schließen, dass sich einige der Schüler/innen im Klaren sind, dass eine Investition am Finanzmarkt mit einem Risiko verbunden ist.
2. Vielen Lernenden war schon vor Arbeitsblatt 5 klar, dass eine Strategie zur Minimierung des Risikos die Minimierung der betrachteten Standardabweichung ist. Beispielsweise schrieb ein Schüler lauthals heraus, dass die beste Aufteilung die 50%-50%-Aufteilung sei, da sie jene mit der geringsten Standardabweichung sei.
4. Die Antworten der Schüler/innen zu Arbeitsblatt 9, siehe Abb. 74 - 84, zeigen, dass dieses Lernziel von manchen Schüler/innen nicht erfüllt wurde. Das Prinzip der Diversifikation konnte zwar in einigen Fällen übertragen werden, siehe zum Beispiel Abb. 74 und Abb. 84, dennoch erkennt man an manchen Antworten, dass das Übertragen nicht von allen Schüler/innen durchgeführt werden kann, siehe zum Beispiel Abb. 76.

16 Dritte Erprobung

Die Unterrichtssequenz „No-Arbitrage und Replikation“ wurde am 20.6. und 21.6.2016 an einem Gymnasium im 1. Bezirk in Wien erprobt. An dieser kurzen Testung der Arbeitsmaterialien beteiligten sich 24 Schüler/innen einer 11. Schulstufe. Der relativ späte Zeitpunkt im Schuljahr hatte zur Folge, dass den Lernenden der gesamte Stoff bis inklusive der 7. Klasse AHS bekannt war.

16.1 Eigene Aufzeichnungen

Die erste Einheit begann an einem Montag um 12:50 Uhr von den 24 Schüler/innen waren 20 anwesend. Der Lehrer teilte das erste Arbeitsblatt aus und führte kurz in die Thematik ein. Anschließend betonte er, dass die Arbeitsmaterialien zum eigenverantwortlichen Arbeiten gedacht sind. Arbeitstempo war frei wählbar.

Der Arbeitsbeginn bei den Lernenden gestaltete sich ruhig und die ersten zehn Minuten gab es keine Fragen. Die erste Schwierigkeit ergab sich für einen Schüler durch eine falsche Berechnung des Wechselkurses beim dritten Punkt der ersten Frage auf Arbeitsblatt 1. Bei Frage 2 auf Arbeitsblatt 1 konnte eine Schülerin mit den Wörtern „viel Geld“ nichts anfangen. Sie forderte hier eine konkrete Quantifizierung. Eine weitere Schülerin hatte Schwierigkeiten beim dritten Punkt der ersten Frage.

Zwei Schülerinnen war unklar, wie das „Nichts“ bei der Erklärung der Arbitrage auf Arbeitsblatt 1 gemeint ist, nach ihrer Ansicht „kann das ja nicht 0 im mathematischen Sinne sein“. Bei der dritten Frage auf Arbeitsblatt 1 führten mehrere Schüler/innen eine Arbitrage durch ohne in alle drei Währungen zu wechseln³⁴. Eine Schülerin war bei dieser Frage ganz verzweifelt, da sie durch ihre getätigten Tausche einen Verlust machte und nicht einen Gewinn. Der Lehrer riet, die Schritte in die umgekehrte Richtung zu tätigen.

Einer Schülerin fiel bei der Beobachtung durch ihre Untätigkeit auf, und auch nach Aufforderung der Lehrperson zu arbeiten, rechnete sie kaum.

Um 13:31 Uhr war der erste Schüler mit dem Arbeitsblatt 1 fertig und bearbeitete sofort das nächste Blatt.

Gleich zu Beginn fragte der Schüler, ob die Zinsen zum Sparen und Ausborgen in diesem Fall gleich sind. Der Lehrer bejahte.

Die zweite Einheit startete äußerst ungünstig. In der vorangegangenen Unterrichtsstunde wurde ein Frühstück veranstaltet, dadurch musste noch aufgeräumt werden. Die zweite Einheit begann somit fünf Minuten verspätet. Da nun alle mit dem Arbeitsblatt 1 fertig waren, verglich der Lehrer die Ergebnisse und betonte anschließend noch, dass auf Arbeitsblatt 2 der Sollzinssatz gleich dem Habenzinssatz ist.

Manche Schüler/innen arbeiteten nun in Kleingruppen. Vermehrt trat folgendes Problem auf: Einigen Schülern/innen war nicht klar, was der Faktor $\frac{1}{1,01}$ bewirkt. Darauf folgend ergaben sich bei ca. 7 Schülern/innen Fragen nach der Berechnung des Endkapitals bei der Zinsrechnung. Generell stellte sich bei diesen Lernenden heraus, dass diese Schüler/innen Probleme beim Auf- und Abzinsen hatten.

Einige Schüler/innen konnten mit dem Begriff „fair“ nichts anfangen. Die Lehrperson half

³⁴Durch Rundungsungenauigkeiten bei den Kehrwerten der Wechselkurse kann eine Arbitrage durch Hin- und Rücktausch vollzogen werden.

ihnen weiter, indem sie sagte, dass keiner einen Gewinn machen darf. Gegen Ende der Einheit waren die ersten Schüler/innen mit Blatt 2 fertig und sie begannen, am dritten Arbeitsblatt zu arbeiten.

Eine dritte Einheit konnte aufgrund eines kurzfristig festgesetzten Einsatz der Lehrkraft bei der mündlichen Matura nicht mehr stattfinden.

16.2 Schülerantworten

Zu Beginn werden Schüler/innenantworten zur Frage 3 vom Arbeitsblatt 1 betrachtet. Die Antworten zu 3a lassen sich grob in drei Gruppen zusammenfassen: die erste Gruppe, die eine trianguläre Arbitrage richtig durchführt, die zweite Gruppe, die eine falsche trianguläre Arbitrage durchführt und die dritte Gruppe, die eine richtige binäre Arbitrage durchführt. Die erste Gruppe lässt sich etwas feiner untergliedern. Fünf Schüler/innen geben sowohl ein Beispiel an, bei dem durch die Währungstäusche ein Verlust entsteht, und ein weiteres, bei dem ein Gewinn ertauscht wird.

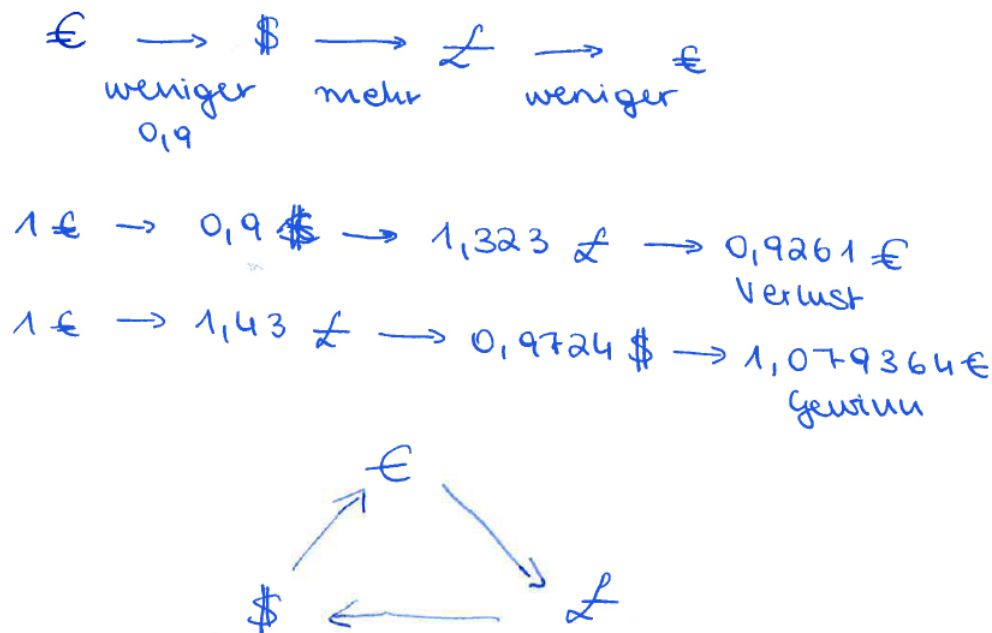


Abb. 86 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Frage 3

Vier weitere Schüler/innen hatten Probleme mit der Schreibweise. Vor allem die Wechselkurse wurden nicht richtig angeführt (z.B. Dollar/Pfund).

$$\begin{array}{l}
 \times 23.000^{\text{€}} \times 1,143 \text{ £} = 32.890 \text{ £} \\
 \quad \rightarrow 32.890 \text{ £} \times 0,68 \$ = 22.365,2 \$ \\
 \quad \quad \rightarrow 22.365,2 \$ \times 0,7 \text{ €} = \\
 \quad \quad \quad 15.655,64 \text{ €} \\
 \quad \quad \quad - 7344,36 \text{ €} \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad 8.311,28 \text{ €} \\
 \checkmark 23.000 \$ \times 1,1 \text{ €} = 25.300 \text{ €} \\
 \quad \rightarrow 25.300 \text{ €} \times 1,143 \text{ £} = 36.507,9 \text{ £} \\
 \quad \rightarrow 36.507,9 \text{ £} \times 0,68 \$ = \\
 \quad \quad 24.825,372 \$ \\
 \quad \quad + 1825,372 \$ \\
 \quad \quad \hline
 \quad \quad 26.650,744 \$
 \end{array}$$

Abb. 87 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Frage 3

Man merkt, dass die Schülerin im Gedanken richtig vorgeht, aber den Wechselkurs einmal mit Pfund und einmal mit Euro bezeichnet. Von einer streng formalen Sichtweise ist diese Antwort falsch, da bei einer Multiplikation von Euro mit Pfund nicht Pfund herauskommen. Dies konnte bei drei weiteren Schülern beobachtet werden.

Zwei Schüler/innen verbalisierten die Antwort, siehe folgendes Zitat.

einen bestimmten Betrag
Wir wechseln Dollar in Euro, dann diese Euro in Pfund
und zum Schluss Pfund in Dollar und somit haben
wir Gewinn gemacht.

Abb. 88 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Frage 3

Wenn man für den bestimmten Betrag einen Wert einsetzt, dann sieht man, dass die Überlegungen der Schülerinnen stimmen.

Die zweite Gruppe besteht aus zwei Schülern, die den Wechselkurs Pfund pro Dollar und Dollar pro Pfund verwechselt haben. Exemplarisch wird eine Antwort angegeben.

3.) Um einen risikolosen Gewinn zu erwirtschaften,
kann man beispielsweise 1000€ in £ wechseln
und erhält 1430£. Wenn man das dann in \$
wechselt erhält man 1287\$. Das ergibt in €
wiederum 1428,57€ also beträgt der Gewinn 428,57€.

Abb. 89 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Frage 3

An sich ist dieser Fehler nicht so schwer zu werten, da die beiden Schüler den Wechselkurs zweimal richtig verwendet haben. Es liegt die Vermutung eines Abschreibefehlers nahe. Interessant ist die dritte Gruppe. Diese führten eine binäre Arbitrage durch. Ursprünglich war auf der Angabe nicht angegeben, dass man in alle drei Währungen wechseln muss. Also führten die restlichen 7 Schüler/innen einen Hin- und einen Rücktausch durch. Das gelingt, da die Wechselkurse teils gerundet wurden. Beispielhaft wird die folgende Antwort betrachtet.

③ Trianguläre Arbitrage

- $200 \text{ €} \xrightarrow{\cdot 0,9} 180 \$ \xrightarrow{\cdot 1,11} 99,8 \text{ € (Verlust)}$
 $200 \text{ £} \xrightarrow{\cdot 0,68} 136 \$ \xrightarrow{\cdot 1,57} 199,92 \text{ £ (Verlust)}$
 $200 \$ \xrightarrow{\cdot 0,7} 140 \text{ €} \xrightarrow{\cdot 1,43} 200,2 \$ \text{ (Gewinn)}$ ← man sollte diesen Wechselkurs wählen

Abb. 90 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Frage 3

Die zweite Frage bei Punkt 3 lautet ursprünglich: „Wie kann man ganz leicht überprüfen, ob eine trianguläre Arbitrage möglich ist? Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit keine solche Arbitrage möglich ist?“ Diese konnte niemand der Lernenden richtig beantworten bzw. wie intendiert beantworten. Nahezu alle verbalisierten ihre Antworten. Viele der Schüler/innen argumentierten mit dem Wert einer Währung. An sich spiegelt der Wechselkurs den Wert einer Währung gegenüber einer anderen Währung wider. Bei einer korrekten Bewertung von Währungen bzw. bei korrekten Wechselkursen gibt es keine Arbitrage. Die Schlussfolgerung des Schülers stimmt nicht, denn auch bei unterschiedlichen Werten ist bei korrekter Wechselkurssetzung Arbitrage unmöglich.

- Die Währungen sollten immer den selben Wert haben. Oder man sollte sich auf einen Wert einigen, und ihn ~~nur~~ immer dabei belassen.
Sobald dies 3 Währungen mit einem unterschiedlichen Wert gibt, kann Arbitrage unmöglich sein.

Abb. 91 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Frage 3

Eine interessante Antwort ist die folgende.

- Man kann es überprüfen indem man sich die Wechselkurse anschaut.
Arbitrage ist nicht möglich, wenn erstens die Wechselkurse überall gleich sind und zweitens der Wechselkurs von Währung 1 in Währung 2 mal dem Wechselkurs von Währung 2 in Währung 1 entweder gleich oder kleiner 1 ist.
- Bsp. $10 \text{ €} \xrightarrow{\cdot 0,9} 9 \$$
 $9 \$ \xrightarrow{\cdot 1,11} 9,99 \text{ €}$
 $\cdot 0,999 < 1$ } keine Arbitrage!

Abb. 92 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Frage 3

Konzentrieren wir uns zuerst auf den ersten Teil der Antwort: „Arbitrage ist nicht möglich, wenn alle Wechselkurse gleich sind.“ Hier ist nicht ganz klar, worauf der Schüler wirklich abzielt. Meint er Folgendes: Der Wechselkurs von Dollar auf Euro beträgt 1,2 und der Wechselkurs von Euro auf Dollar ist ebenfalls so groß. Das kann er eigentlich nicht gemeint haben,

denn bei seiner zweiten Antwort behandelt er gerade so einen Fall. Oder meint er beispielsweise, dass der Wechselkurs von Dollar auf Euro 1,2, der Wechselkurs von Pfund auf Euro 1,2 und der Wechselkurs von Dollar auf Pfund 1,2 ist und für die umgekehrten Wechselkurse werden die Kehrwerte entsprechend gebildet. Aber auch hier entsteht im Allgemeinen eine Arbitragemöglichkeit.

Der zweite Teil der Antwort ist nur richtig, wenn die angesprochene Multiplikation 1 ergibt. Im anderen Fall, wenn das Ergebnis kleiner 1 ist, muss nur ein Tausch in die „umgekehrte“ Richtung getätigt werden, um ein Arbitragegeschäft zu erhalten.

Einige der Schüler/innen, die bei der ersten Teilfrage eine binäre Arbitrage vollführt haben, gaben auch hier eine Antwort, die nur binäre Arbitrage behandelt. Exemplarisch dafür betrachten wird die folgende Antwort.

*.) Damit Arbitrage möglich ist, müssen sich die Wechselkurse unterscheiden.
Um Arbitrage zu verhindern, müssen die Wechselkurse so sein, dass
der Betrag der Ursprungswährung nach dem Wechsel in eine andere
Währung und wieder zurück gleich ist.*

Abb. 93 Schüler/innenantwort Arbeitsblatt 1 Frage 3

Der Schüler verbalisiert den Sachverhalt richtig, eine Mathematisierung bleibt aber aus.

16.3 Erfahrungsbericht der Lehrperson

Der Lehrer hält die Unterrichtssequenz für realisierbar und hebt vor allem die Individualisierbarkeit hervor, die Berücksichtigung der unterschiedlichen Tempi wurde seiner Meinung nach durch die Pflicht- und Wahlaufgaben umgesetzt. Vermisst hat er die Möglichkeit zur Selbstkontrolle, das hätte ihm einige kurze und unwichtige Gespräche erspart, wo es nur um die Richtigkeit des errechneten Wertes ging.

Es handelt sich seiner Ansicht nach nicht um den „Kernstoff“ der AHS, die Lehrperson ist aber der Meinung, dass die Aufgaben

„... in einer AHS als Anwendungs-/Transferbeispiele bestimmt geeignet sind. Vor allem gegen Ende eines Lehrstoff-Themas oder des Schuljahres, um mathematische Theorie mit Leben zu füllen und eine andere Perspektive auch einnehmen zu müssen.“

Zu der Verständlichkeit der Aufgabenstellung meinte er:

„Sehr hoch, da die Lehrperson nur dann eingreift, wenn Probleme entstehen – unterschiedliche Lernwege/-geschwindigkeiten können von den Schülern/innen gewählt werden. Aufgaben sind m.E. so konstruiert, dass es eine Vielzahl an Lösungswegen gibt.“

Das Interesse gegenüber der Thematik durchläuft seiner Beobachtung nach die ganze Bandbreite von „voll begeistert“ bis „langweilig wie immer“ (sic!).

Aus der Sicht des Lehrers haben die Schüler/innen die Aufträge im Großen und Ganzen verstanden. Lediglich eine Schülerin hebt der Lehrer hervor, diese konnte mit den Angaben

nichts anfangen. Es handelt sich dabei, wie er selbst schreibt um einen „Spezialfall“, wo es größere Problem gibt.

Die Erprobung fand in der vorletzten Schulwoche statt, in Österreich ist das die letzte Schulwoche, in der noch nach Stundenplan unterrichtet wird. Aus diesem Grund verwendet die Lehrperson keine Arbeitsblätter in diesem Jahr. Für das kommende Schuljahr stellte er folgende Prognose.

„... werde aber im kommenden Jahr mit meiner kommenden Klasse hierauf zurückgreifen – nicht taxativ aber bestimmt einige Aspekte herausnehmen.“

16.4 Fazit

Aufgrund des kurzfristigen Ausfalls einer Einheit konnten nur die ersten beiden Arbeitsblätter (bei manchen Schülern/innen auch das dritte Arbeitsblatt) erprobt werden. Vorweg ist zu erwähnen, dass bei diesen Materialien auf die unterrichtende Lehrperson durchaus (volks)wirtschaftliche Fragen zukommen können. Vereinzelt können auch noch Fragen zum Begriff „Arbitrage“ gestellt werden.

Die Schüler/innen haben die Fragestellungen verstanden, dass lässt sich aus allen drei Perspektiven erschließen. Jedoch wurden nicht alle Antworten wie intendiert beantwortet. Vor allem bei Frage 3 auf dem ersten Arbeitsblatt kam es zu Antworten, die so nicht beabsichtigt waren.

Bei Frage 3 a) führten einige Schüler/innen eine binäre Arbitrage durch. Ursprünglich war jedoch gewollt, dass die Lernenden in alle drei Währungen wechseln. In der anfänglichen Version des Arbeitsblatts lautete die Fragestellung: „Im Internet siehst folgende Wechselkurse Wie muss getauscht werden, um einen Gewinn zu erwirtschaften?“ Diese Frage schließt eine binäre Arbitrage nicht aus. Eine binäre Arbitrage war aber schon bei den ersten beiden Fragen zu vollführen, der Fokus soll bei dieser Frage wirklich auf einer trinären Arbitrage liegen. Die Fragestellung wurde dahingehend geändert: „a) Im Internet siehst du folgende Wechselkurse Bestimme eine Ausgangswährung, wechsele von dieser in eine zweite und daraufhin in eine dritte Währung und abschließend in die Ausgangswährung zurück. Wie muss getauscht werden, um einen risikolosen Gewinn zu erwirtschaften?“ So wird in der Fragestellung vorgeschrieben, dass man in alle drei Währungen zu wechseln hat.

Beim zweiten Teil der Frage 3 sollten die Lernenden eine mathematische Bedingung angeben. Fast alle formulierten aber eine Antwort, die nach der ursprünglichen Formulierung erlaubt war: „Wie kann man ganz leicht überprüfen, ob eine trianguläre Arbitrage möglich ist? Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit keine solche Arbitrage möglich ist?“. In der überarbeiteten Version wurde erstens das Wörtchen „leicht“ gestrichen und die Aufforderung „Gib eine mathematische Bedingung an!“ hinzugefügt.

Bei dieser Stichprobe wurde festgestellt, dass das Rechnen mit Wechselkursen und das Auf- und Abzinsen den Lernenden Schwierigkeiten bereitet hat. Dieser Lehrstoff sollte unbedingt schon durchgenommen worden sein. Damit die kognitive Belastung nicht auf diesen Konzepten liegt.

Bei Arbeitsblatt 2 fragten einige Schüler/innen, ob der Haben- und der Sollzinssatz gleich sind. Die Lernenden merkten dabei meist an, in der Realität ist das nicht der Fall. Damit diesbezüglich keine Fragen gestellt werden, wurde dieser Aspekt als Bemerkung auf dem Arbeitsblatt hinzugefügt.

Aufgrund der unterschiedlichen Perspektiven und der Überarbeitung sind die erprobten Materialien für den Unterricht geeignet. Stofflich besser passt es aber zu einer Schule mit wirtschaftlichem Schwerpunkt!

Bezug zu den Lernzielen

Aufgrund der erhobenen Daten wird nur auf das Lernziel 1 aus Kapitel 11.5.10 auf Seite 255 Bezug genommen.

1. Alle bis auf zwei Schüler/innen fanden eine korrekte Arbitragemöglichkeit in dem vorgegebenen Szenario, wenn sie auch, wie zwar nicht intendiert, eine binäre Arbitrage durchführten. Die zwei angesprochenen Schüler/innen verwendeten einmal einen falschen Wechselkurs, abgesehen von diesem Fehler fanden auch die beiden eine Arbitragemöglichkeit.

Teil V

Resümee

Der abschließende Teil der Arbeit gliedert sich in drei Kapitel. Zuerst erfolgt die Klassifikation bestehender Unterrichtsvorschläge aufgrund des in dieser Arbeit entwickelten theoretischen Grundstocks der *zentralen Ideen* und der Kriterien für einen guten (anwendungsorientierten) Mathematikunterricht. Im Anschluss werden zwei Empfehlungen zur Implementierung der Unterrichtsvorschläge in die bestehenden österreichischen Lehrpläne gegeben. Das letzte Kapitel beantwortet die Forschungsfragen und verifiziert die Forschungshypothese.

17 Einordnung bestehender Materialien

Die Ergebnisse dieser Arbeit können einerseits für die fundierte Entwicklung neuer Unterrichtsvorschläge verwendet und andererseits können bestehende Unterrichtsvorschläge begründet eingeordnet werden. Die Arbeit liefert Kriterien zur inhaltlichen Überprüfung von Unterrichtsvorschlägen im Bereich Finanzmathematik für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Auf deren Basis ist es möglich Unterrichtsvorschläge als „geeignet“, „bedingt geeignet“ und „nicht geeignet“ zu klassifizieren. Unter „bedingt geeignet“ soll die Eignung für den Mathematikunterricht in bestimmten Schulen gemeint sein, beispielsweise eine Schule mit einem Finanzbildungsschwerpunkt. Dementsprechend versteht man unter „geeignet“ eine Tauglichkeit für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II in allen Schulen, „nicht geeignet“ erklärt sich von selbst. Über eine Unterrichtsmethode wird hier keine Aussage getroffen.

Wie sehen diese Kriterien aus?

Aus der Disziplin Finanzmathematik heraus kann eine inhaltliche Einschränkung auf die, in dieser Arbeit kreierten, fünf *zentralen Ideen* gegeben werden: *Stochastik im Kontext Finanzmathematik*, *Handhabung von Risiko*, *No-Arbitrage-Prinzip*, *Replikation* und *Zeitwert des Geldes*. Die Kriterien für einen guten anwendungsorientierten Mathematikunterricht reduzieren die Auswahl abermals: „Formale Aspekte“, „Eignung“, „Authentizität“ und „Mathematische Aspekte“.

Die zu Beginn angeführte bestehende Literatur wird nun in derselben Reihenfolge wie in Kapitel 2.2 entsprechend klassifiziert.

17.1 Zur Mathematik derivativer Finanzinstrumente – Dietmar Pfeifer

Klassifikation bedingt geeignet

Begründung Inhaltlich befasst sich PFEIFER in diesem Artikel im Wesentlichen mit der Bepreisung von Optionen. Stofflich gesehen passt der Unterrichtsvorschlag zu den *zentralen Ideen Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik*, *No-Arbitrage* und *Replikation*. Zur Preisfindung verwendet der Autor einen Zugang (am Anfang in einem Binomialmodell am Ende im Black-Scholes-Modell) über das risikoneutrale Maß, wie er es nennt, die „richtigen Wahrscheinlichkeiten“. Zu Beginn wird bei einer falschen Bewertung über eine

Replikation eine Arbitragemöglichkeit aufgezeigt. In diesem Sinne begründet er die Verwendung dieser neuen Wahrscheinlichkeiten. Aus diesem Grund richtet sich der inhaltliche Hauptbeitrag zur *zentralen Idee Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik*. Die anderen beiden spielen hier eine untergeordnete Rolle. Die inhaltliche Auswahl des Autors scheint nach den *zentralen Ideen* plausibel, dennoch eignet sie sich nicht ohne Weiteres für alle Schulen.

Finanzmathematiker/innen bepreisen Derivate in verschiedenen Modellen. Das Kriterium „Authentizität“ ist durch die Ausrichtung gegeben.

Die „mathematischen Aspekte“ sind erfüllt, da die verwendete Mathematik keineswegs als trivial bezeichnet werden kann, ein/e Sekundarstufenschüler/in kann mit einigem Aufwand aber sicher folgen. Optionen sind mit Sicherheit keine Objekte des alltäglichen Lebens der Sekundarstufenschüler/innen. Viele werden damit auch im späteren Leben nicht in Berührung kommen. Hinzu kommt, dass ein Wissen über die Bepreisung als „normale/r“ Bürger/in keine Relevanz hat, wie schon der Interviewpartner FM4 angemerkt hat. Das angesprochene Zitat von Seite 150 wird hier nochmals angeführt.

FM4: „Ich finde es gut, wenn man sich in der Schule mit Finanzmathematik auseinandersetzt. Man sollte es aber sozusagen nicht übertreiben, in dem Sinne was ich vorher gesagt habe. Ein bisschen kaufmännisches Rechnen ist auch nicht schlecht, das ist zwar jetzt nicht echte Finanzmathematik, aber wenn das auch vorkommt, dann ist das durchaus vernünftig, weil es wahrscheinlich die Probleme von viel mehr Menschen sind, nicht wie bewerte ich so eine Option richtig.“

Ein anderer Blick eröffnet sich, wenn man nur Schulen mit wirtschaftlichem Schwerpunkt betrachtet. In diesem Fall werden sicher nicht alle, aber viele im späteren Leben in der Finanzbranche tätig sein. Für diese Menschen hat es durchaus Sinn, sich mit Optionen zu beschäftigen. Kurz gesagt: Ein/e Bankmitarbeiter/in sollte mehr Ahnung von einer Option haben als ein/e „normale/r“ Bürger/in.

Die „Formalen Aspekte“ sind ebenfalls zu überdenken, denn den Schwerpunkt der Bepreisung auf ein anderes Wahrscheinlichkeitsmaß zu legen, ist nicht unbedingt lehrplanadäquat. Der übliche Zugang zur Wahrscheinlichkeitstheorie in der Schule kommt ohne Maßtheorie aus.

17.2 Optionen im Mathematikunterricht – eine Mode oder mehr? – Elke Warmuth

Klassifikation bedingt geeignet

Begründung WARMUTH präsentiert das versicherungsmathematische Erwartungswertkonzept und die Preisfindung einer Option in einem Binomialmodell in einer Periode. Ersteres lässt sich klarerweise keiner *zentralen Idee* der Finanzmathematik zuordnen. Zweiteres trifft ganz klar die Ideen *No-Arbitrage* und *Replikation*. Bezüglich der Verwendung in der Schule ist aufgrund der Behandlung von Optionen dasselbe Argument wie zuvor zu nennen.

17.3 Die Rolle der Simulation im Finanzmanagement – Siegfried Zseby

Klassifikation geeignet bis bedingt geeignet

Begründung Im überwiegenden Teil des Artikels setzt der Autor auf die Modellierung eines Aktienkurses, welche in Excel exemplarisch vorgeführt wird. Das betrifft voll und ganz die *zentrale Idee Verwenden von Stochastik im Kontext Wahrscheinlichkeitsrechnung*. In diesem Fall sind auch die Kriterien für einen guten anwendungsorientierten Unterricht erfüllt. Jegliche verwendete Mathematik ist für die Sekundarstufe II passend, es ist kein konkreter Unterrichtsvorschlag, also lässt sich keine Aussage über dessen zeitliche Inanspruchnahme tätigen. Die „formalen Aspekte“ sind somit, soweit beurteilbar, erfüllt. Die für zumindest das spätere Leben wichtige Botschaft: „Aktienkurse sind nicht vorhersehbar“ wird vermittelt. Jede/r kommt irgendwann in die Lage, wo ihr/ihm risikobehaftete Wertpapiere angeboten werden. Das Kriterium „Eignung“ ist erfüllt. Finanzmathematiker/innen modellieren Aktienkurse, erstellen verschiedene Modelle, etc. . . . , die „Authentizität“ ist also gegeben. Die verwendete Mathematik umfasst Wahrscheinlichkeitsrechnung verknüpft mit analytischen Überlegungen, die nicht trivial sind, aber für Sekundarstufe passend erscheinen.

In einem Kapitel beschäftigt sich ZSEBY mit der Bepreisung von Optionen, dieses Thema wird mit derselben Begründung wie in Kapitel 17.1 mit „bedingt geeignet“ klassifiziert.

17.4 Mathematik bei Finanz- und Wirtschaftsproblemen – Reichel, Kubelik

Klassifikation bedingt geeignet

Begründung Die Autoren schlagen vor Optionen im Mathematikunterricht zu behandeln, die Begründung für die bedingte Eignung wurde bereits gegeben, siehe Kapitel 17.1.

17.5 Nuancen der Nichtbeliebigkeit von Aktienkurs-Modellierungen – Wolfgang Stummer

Klassifikation ungeeignet

Begründung Der Autor zeigt in elementarmathematischer Form, dass der Aktienkurs nicht beliebig modelliert werden kann. Er führt dazu viele Begrifflichkeiten ähnlich zu dem der Arbitrage bzw. der No-Arbitrage ein. Inhaltlich passt dieser Vorschlag zu den *zentralen Ideen Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik und No-Arbitrage*. Eine Verwendung des Vorschlags in der Schule ist aber nicht anzuraten, da diese Vielzahl an Begriffen den ohnehin schon üppigen Begriffekanon nur unnötig erweitern würde. Des Weiteren ist und wird kaum ein/e Jugendliche/r mit so vielen Arten der Arbitrage konfrontiert werden. Das Führen und Nachvollziehen von direkten und indirekten Beweisen ist wahrscheinlich für die meisten Schüler/innen sehr schwierig. Des Weiteren wird kein Beispiel angeführt, man bewegt sich stets auf einer abstrakten Ebene. Die Authentizität ist aufgrund der Behandlung finanzmathematischer Modelle gegeben, die intellektuelle Stufe ist jedoch zu hoch. Die Kriterien „formale Aspekte“, „Eignung“ und „mathematische Aspekte“ können nicht gestützt werden.

17.6 Vom Aktienkurs zum Random Walk – Martina Döhrmann

Klassifikation Vorarbeit zur Dissertation

Begründung Siehe darunter Kapitel 17.7.

17.7 Zufall, Aktien und Mathematik – Martina Döhrmann

Klassifikation geeignet

Begründung Die Autorin schlägt Aktien bzw. Aktienkurse für die Auseinandersetzung zum besseren Verstehen des in der Schule wichtigen Begriffes *Zufall* vor. Diese Arbeit lässt sich somit der *zentralen Idee Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik* zuordnen. Die Unterrichtsvorschläge von DÖHRMANN reichen von Diskussionen über den Zufallsbegriff über Häufigkeitsverteilungen und Modellierungen des Aktienkurses mit der Binomialverteilung und der Normalverteilung und einem 95%-Intervall für den morgigen Aktienkurs bis hin zum Testen auf Normalverteilung der 1-Tages-Rendite. Die verwendete Mathematik ist lehrplanadäquat. Die Verfasserin entwarf mehrere Sequenzen mit Anteilen zum Vertiefen mit unterschiedlichen Umfängen von 4 bis 10 Unterrichtseinheiten. Die Eignung ist wie bei Kapitel 17.3 durch die Unvorhersehbarkeit des Aktienkurses gegeben. Die Berechnung eines 95%-Intervalls für den morgigen Aktienkurs vermittelt aber eine gewisse Kontrolle. Des Weiteren muss jedoch angemerkt werden, dass Finanzmathematiker/innen kaum solche Intervalle berechnen. Authentisch ist aber der Nachweis, dass die Normalverteilung die Verteilung der z.B. Tagesrenditen nicht perfekt trifft. Vor allem werden kleine Abweichungen und große unterschätzt. Das ist fatal, da es gerade bei den großen Abweichungen zu immensen Verlusten kommen kann. Diese Aufgabe bekommt somit auch einen aufklärerischen Aspekt. Die mathematischen Anforderungen reichen von schwierigen Begriffen wie dem Zufall bis hin zu komplexen Berechnungen.

17.8 Stochastische Finanzmathematik für die Schule – Peggy Daume

Klassifikation Vorarbeit zur Dissertation bzw. zum Buch

Begründung Siehe Kapitel 17.11.

17.9 Statistik der Aktienmärkte: Eine anwendungsorientierte Einführung in die beschreibende Statistik – Peggy Daume

Klassifikation Vorarbeit zur Dissertation bzw. zum Buch

Begründung Siehe Kapitel 17.11.

17.10 Aktien auf der Spur – Peggy Daume

Klassifikation Vorarbeit zur Dissertation bzw. zum Buch

Begründung Siehe Kapitel 17.11.

17.11 Finanzmathematik im Unterricht – Peggy Daume

Klassifikation geeignet bis bedingt geeignet

Begründung Die Autorin kreierte drei Unterrichtsvorschläge „Statistik der Aktienmärkte“, „Die zufällige Irrfahrt einer Aktie“ und „Optionen mathematisch bewertet“. Die ersten beiden beziehen sich inhaltlich auf die *zentrale Idee Verwenden von Stochastik im Kontext Wahrscheinlichkeitsrechnung*, die dritte kann zusätzlich den Ideen *No-Arbitrage* und *Replikation* zugeordnet werden. Von Häufigkeitsanalysen bis hin zu Verteilung und Diskussionen, ob eine Normalverteilung vorliegt, sowie die stochastische Modellierung eines Aktienkurses wurden schon in den Kapiteln 17.3 und 17.7 als geeignet klassifiziert. Umgekehrt wurden Optionen für eine Behandlung im Unterricht nur für Schulen mit wirtschaftlichen Schwerpunkt als passend empfunden, siehe Kapitel 17.1.

17.12 Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht Band 1: Zinsen, Steuern und Aktien – Peggy Daume

Klassifikation geeignet bis bedingt geeignet

Begründung Es muss gleich zu Beginn erwähnt werden, dass das Werk als Ganzes für den Mathematikunterricht zu gebrauchen ist. Lediglich bei den Steuern handelt es sich um ein wirtschaftsmathematisches Thema, welches nicht in die Finanzmathematik fällt. Dieses lässt sich keiner *zentralen Idee* der Finanzmathematik zuordnen. Die Unterrichtsvorschläge „Sparen für den Führerschein“ und „Leben auf Pump“ beziehen sich voll und ganz auf die Idee *Zeitwert des Geldes*. Diese beiden Vorschläge erfüllen die Kriterien für einen guten anwendungsorientierten Mathematikunterricht. Sie sind Teil des Lehrplans und lassen sich in angemessener Zeit im Unterricht durchführen. Jede/r Schüler/in ist bereits in Kontakt mit Zinsen gekommen, mit Krediten werden einige im späteren Leben zu tun haben. Das Thema ist also relevant für das momentane und spätere Leben. Zinsen sind omnipräsent, das gilt sowohl für die Bürger/innen als auch für die Finanzmathematiker/innen. Die verwendete Mathematik ist nicht zu einfach aber auch nicht zu schwierig. Die beiden anderen Unterrichtsvorschläge „Statistik der Aktienmärkte“ und „Die zufällige Irrfahrt einer Aktie“ wurden bereits in Kapitel 17.11 beurteilt.

17.13 Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht Band 2: Optionen und Ökonomische Funktionen – Peggy Daume und Jens Dennhard

Klassifikation bedingt geeignet

Begründung Der Unterrichtsvorschlag „Optionen mathematisch bewertet“ wird mit bedingt geeignet klassifiziert, für die Argumentation siehe Kapitel 17.1. Die Vorschläge „Von Märkten und Unternehmen“ und „Änderungen ökonomischer Funktionen“ können keiner *zentralen Idee* der Finanzmathematik zugeordnet werden. Sie sind reine wirtschaftsmathematische Themen, sie fallen nicht in die Finanzmathematik.

17.14 Finanzmathematik für Einsteiger – Moritz Adelmeyer und Elke Warmuth

Klassifikation geeignet bis bedingt geeignet

Begründung In dem Werk „Finanzmathematik für Einsteiger“ werden viele unterschiedliche finanzmathematische und versicherungsmathematische Themen in nachvollziehbarer Form dargestellt. Die Vorschläge reichen von Anleihen über das Äquivalenzprinzip bei Lebensversicherungen und das Modellieren von Kursdaten und der Portfoliorendite bis hin zur Preisbildung bei Optionen. Bis auf das versicherungsmathematische Thema können alle anderen den folgenden *zentralen Ideen* zugeordnet werden: *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik*, *Handhabung von Risiko*, *No-Arbitrage*, *Replikation* und *Zeitwert des Geldes*. Das ausgewiesene Lehrbuch für Einsteiger führt entsprechend seiner Art keine konkreten Unterrichtsvorschläge an, dennoch sind Lehrer/innen und Schüler/innen in der Zielgruppe des Buches.

Die Themen „Anleihen“ und insbesondere „Risiko von Anleihen“ beziehen sich auf die *zentralen Ideen Handhabung von Risiko* und *Zeitwert des Geldes*. Zwar ist ein Wissen über Anleihen nicht unmittelbar für den/die Schüler/in zu gebrauchen und auch im mutmaßlich späteren Leben werden wahrscheinlich nur wenige mit Anleihen direkt in Berührung kommen. Jedoch muss hier angemerkt sein, dass Anleihen das Instrument zur Finanzierung eines Staates sind, Veränderungen des Leitzinssatzes sowie Veränderungen der Ausfallsbewertung einer Ratingagentur über einen Staat haben Auswirkungen auf die Rückzahlungen und somit das Staatsbudget. Das betrifft jede/n Bürger/in! Die dahinterliegende Mathematik betrifft im Wesentlichen die Zinseszinsrechnung, welche beispielsweise bei der Berechnung der Rendite einer Anleihe keineswegs trivial ist. Zinsen sind bei einer/m in der Praxis tätigen Finanzmathematiker/in von größter Wichtigkeit, vgl. das Zitat von FM6 auf Seite 138. Es handelt sich also um ein authentisches Tätigkeitsfeld.

Das Modellieren von Aktien wurde bereits mehrere Male für geeignet empfunden, siehe Kapitel 17.3.

Die „Portfoliotheorie“ und hier vor allem der Aspekt der Diversifikation reiht sich inhaltlich zu den *zentralen Ideen Verwenden von Wahrscheinlichkeiten im Kontext Finanzmathematik* und *Handhabung von Risiko* ein. Die verwendete Mathematik ist für eine/n Schüler/in der Sekundarstufe II adäquat. Das Zusammenstellen eines optimalen Portfolios spielt für Schüler/innen keine Rolle und auch im späteren Leben werden nur wenige ein optimales Portfolio zusammenstellen. Aspekten der Diversifikation begegnet man aber auch im alltäglichen Leben, siehe den Unterrichtsvorschlag im Kapitel 11.3. Eine Beschränkung dieses Aspekts ist für eine Umsetzung im Mathematikunterricht notwendig oder man schränkt die Zielgruppe auf Schulen mit wirtschaftlichem Schwerpunkt ein.

Optionen im Mathematikunterricht wurden bereits als bedingt geeignet klassifiziert, siehe Kapitel 17.1.

17.15 Aktien und ihre Kurse – Moritz Adelmeyer

Klassifikation geeignet bis bedingt geeignet

Begründung Der Autor präsentiert einen möglichen Unterrichtsvorschlag zu der angeführten Theorie aus seinem Buch „Finanzmathematik für Einsteiger“. Von einem allgemeinen Ein-

stieg über „Was sind Aktien“ bis hin zu Statistiken und Risiken von Aktienkursen liefert er Materialien für den Mathematikunterricht. Stofflich kann der Artikel der *zentralen Idee Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik* zugeordnet werden. Die vorgeschlagene Unterrichtssequenz umfasst drei Arbeitsblätter und lässt sich in einer angemessenen Zeit von 2-3 Unterrichtsstunden umsetzen. Die vorkommende Mathematik, Berechnen von Renditen, arithmetisches Mittel, Angemessenheit der Verwendung des arithmetischen Mittels, Standardabweichung und Korrelationen ist für die Sekundarstufe II passend. Das Aufstellen solcher Statistiken ist für an der Börse Arbeitende ständig notwendig und daher auch als authentisch zu betrachten. An sich ist das Aufstellen solcher Statistiken nicht von großer Relevanz für eine/n Schüler/in, weder für das momentane noch für das mutmaßlich spätere Leben. Es sollten jedoch statistische Beispiele und Aufgaben aus dem Bereich der Finanzmathematik durchgenommen werden sowie aus anderen Gebieten. Nahezu jede/r kommt in die Lage, dass er/sie ein risikobehaftetes Finanzprodukt angeboten bekommt, man denke an Sparformen, deren Ertrag an Aktien bzw. Fonds gebunden ist. Das Thematisieren von Risiken einer Aktie, wie Schwankungen, ist somit für alle zumindest im späteren Leben relevant.

17.16 Mathematik-Lehrbuch Wirtschaft – Rechnen mit Rendite und Risiko – Götz (Hrsg.), Schweiger und Diboky

Klassifikation geeignet bis bedingt geeignet

Begründung Die vorgeschlagenen Themenbereiche „Anleihen und Zinseszinsrechnung“, „Modellierungen von Aktienkursen“, die „Portfoliooptimierung“ sowie die „Bepreisung von Optionen“ wurden bereits in den Kapiteln 17.1, 17.3 und 17.14 besprochen.

17.17 Money out of nothing? – Prinzipien und Grundlagen der Finanzmathematik – Francesca Biagini und Daniel Rost

Klassifikation bedingt geeignet bis nicht geeignet

Begründung Der Artikel befasst sich mit der Bewertung von Optionen im Binomialmodell und reicht von No-Arbitrage- und Replikationsargumenten bis hin zur Bewertung mit Hilfe des risikoneutralen Maßes. Das Thema wurde bereits besprochen, siehe Kapitel 17.1.

17.18 Portfolioselektion mit GeoGebra – in welche Aktien soll ich investieren? – Lucia Del Chicca und Markus Hohenwarter

Klassifikation geeignet bis bedingt geeignet

Begründung Die in diesem Aufsatz vorgeschlagene Portfoliotheorie wurde bereits besprochen, siehe Kapitel 17.14.

17.19 Einblick in Optionen – Jörg Meyer

Klassifikation bedingt geeignet

Begründung MEYER verfasst einen Artikel zur Bewertung von Optionen. Die Besonderheit an diesem liegt daran, dass er Argumente aus der Vektorrechnung mit der No-Arbitrage- bzw.

Replikationsbewertung verbindet. Inhaltlich hat sich an den Argumenten für eine bedingte Eignung der stofflichen Auswahl nichts geändert, siehe Kapitel 17.1.

17.20 Abschätzen von Verlustrisiken – Norbert Brunner und Manfred Kühleitner

Klassifikation geeignet

Begründung Der Unterrichtsvorschlag trifft voll und ganz die *zentralen Ideen Handhabung von Risiko* und *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik*. Die verwendete Mathematik umfasst das Berechnen von Renditen bei einer großen Datenmenge in Excel, Häufigkeiten, Testen auf Verteilungen mit Hilfe von Histogrammen und Quantilen. Sie erscheint passend für Sekundarstufenschüler/-innen. Der Aufsatz beschäftigt sich im Großen und Ganzen mit dem Satz: „Wer an der Börse spekuliert, geht ein Risiko ein“. In ihm werden unterschiedliche Risikomaße besprochen, wie Verlustserien, Volatilität und der Value-at-Risk. Vor allem die Behandlung der gefährlichen Unterstellung einer Normalverteilung wird in diesem Aufsatz beleuchtet und ist ein wichtiger Punkt, den man aus der Schule mitnehmen soll. Im Finanzsektor hat diese Annahme zum Teil für große Probleme gesorgt (bis hin zur Krise). So ein Vorschlag ist authentisch und zeugt von Relevanz zumindest für das spätere Leben.

18 Welche finanzmathematischen Themen sollen im Fach Mathematik unterrichtet werden? – Empfehlungen

18.1 Schulen mit wirtschaftlichem Schwerpunkt

Die stofflichen Empfehlungen werden für eine fünfjährige Oberstufenschule mit wirtschaftlichem Schwerpunkt in lernzielartiger Form aufgelistet. Die Aufzählung ist zuerst nach Jahrgängen und in zweiter Ebene nach den *zentralen Ideen* gegliedert. Zu gewissen Themen der Zinseszinsrechnung gibt es bereits Lernzielformulierungen in den Lehrplänen beispielsweise in dem der Handelsakademie, in solchen Fällen werden keine Ziele angegeben, sondern auf die entsprechenden Dokumente verwiesen. Diese sind auch *expressis verbis* im Kapitel 3.2.2 nachzulesen. Dabei wird auch nicht auf eine spezielle Literatur verwiesen, weil genug Schulbücher mit entsprechenden Unterrichtsvorschlägen existieren. Im wesentlichen kommen alle Unterrichtsvorschläge aus dem Teil II „Unterrichtsmaterialien“ dieser Arbeit in Frage und alle bestehenden Vorschläge, die mit „geeignet“ bzw. „bedingt geeignet“ klassifiziert wurden.

- 1. Jahrgang
 - Zeitwert des Geldes: Das Prinzip „Ein Euro heute ist mehr wert als ein Euro morgen“ verständlich anwenden können. Einfaches Auf- und Abzinsen durchführen können.
 - Stochastik im Kontext Finanzmathematik: Statistische Kennzahlen im Kontext Finanzmathematik berechnen (z.B. Rendite, Mittelwerte, empirische Standardab-

weichung etc. ...) und statistische Darstellungen anfertigen können (z.B. Kreisdiagramme, Säulendiagramme, Histogramme, ...) (vgl. Unterrichtsvorschlag „Statistik der Aktienmärkte“ DAUME, 2009, S. 113)

- Replikation: Pay-Off-Diagramme zeichnen und als abschnittsweise definierte Funktion auffassen können. (vgl. ADELMEYER/WARMUTH, 2009, S. 112 f. bzw. DAUME, 2009, 196 ff.)

• 2. Jahrgang

- Zeitwert des Geldes: (dekursive) Verzinsung, Zinseszins, Verzinsungsmodelle. Für Formulierungen in Lernzielen siehe Lehrplan HAK, 2014, S. 88. Unterrichtsvorschläge dazu gibt es bereits genug, man schlage dazu ein entsprechendes Schulbuch auf.
- Stochastik im Kontext Finanzmathematik: Erkennen, dass Kurse am Finanzmarkt nicht deterministisch sind und daher eine stochastische Modellierung als sinnvoll erscheint. (vgl. Unterrichtsvorschlag „Der Zufall und Kurse an der Börse“ in Kapitel 11.2 auf Seite 178 ff. bzw. DÖHRMANN, 2004, S. 200 ff.)
- No-Arbitrage: Den Begriff in seinen Grundzügen erklären können und einfache Arbitragegeschäfte durchführen können (z.B. bei Wechselkursen). Erkennen, dass eine No-Arbitrage-Annahme bei Bepreisungen sinnvoll erscheint. (vgl. Unterrichtsvorschlag „No-Arbitrage und Replikation“ in Kapitel 11.5 auf Seite 253 ff.)
- No-Arbitrage – Replikation: Mit Hilfe des No-Arbitrage-Prinzips und der Replikation einen Preis für einen zukünftigen Wechselkurs finden können. (vgl. Unterrichtsvorschlag „No-Arbitrage“ und „Replikation“ im Kapitel 11.5 auf Seite 253 ff.)

• 3. Jahrgang

- Zeitwert des Geldes: Rentenrechnung, Schuldentilgung, Investitionsrechnung, Anleihen. Für Formulierungen in Lernzielen siehe Lehrplan HAK, 2014, S. 89. Unterrichtsvorschläge dazu gibt es bereits genug (siehe diverse Schulbücher bzw. vgl. DAUME, 2016, S. 145 ff.). Für Ideen zu Anleihen sei an dieser Stelle auf ADELMEYER/WARMUTH, 2009, S. 1-25 verwiesen.
- Stochastik im Kontext Finanzmathematik – Handhabung von Risiko: Korrelationskoeffizienten der Renditen zweier Aktienkurse berechnen und interpretieren können. (vgl. Unterrichtsvorschlag „Statistik der Aktienmärkte“ DAUME, 2009, S. 179)

• 4. Jahrgang

- Zeitwert des Geldes: Erkennen, dass Zinsen abhängig von der Laufzeit sind (Termstructure), sowie in einem diskreten Setting Forward Rates berechnen können. Für Ideen sei an dieser Stelle auf LUDERER, 2013, S. 81-88 verwiesen.
- Zeitwert des Geldes – Stochastik im Kontext Finanzmathematik: Zinssätze und Kurse an der Börse einfach stochastisch modellieren können. (vgl. Unterrichtsvorschlag „Kredite und Risiko“ in Kapitel 11.4 auf Seite 221 ff. bzw. ZSEBY, 2002)

- Zeitwert des Geldes – Handhabung von Risiko: Die Risiken bei einem Kredit aus der Sicht von Kreditnehmer/innen kennen. (vgl. Unterrichtsvorschlag „Kredite und Risiko“ in Kapitel 11.4 auf Seite 221 ff.)
- Handhabung von Risiko: Den Begriff Diversifikation erklären und einfache Portfoliooptimierungen durchführen können. (siehe Unterrichtsvorschlag „Diversifikation“ im Kapitel 11.3 auf Seite 193 ff.)
- 5. Jahrgang
 - Stochastik im Kontext Finanzmathematik: Die Verwendung stochastischer Modellierung in der Finanzmathematik kritisch betrachten können, insbesondere die Verwendung der Normalverteilung. (vgl. BRUNNER/KÜHLEITNER, 2016)
 - Handhabung von Risiko: Risikokennzahlen (z.B. Standardabweichung, Value-at-Risk, ...) berechnen und verständlich einsetzen können. (vgl. BRUNNER/KÜHLEITNER, 2016)
 - No-Arbitrage – Replikation: Derivate bepreisen können und die Abhängigkeit vom gewählten Modell thematisieren können. (vgl. Unterrichtsvorschlag „No-Arbitrage und Replikation“ in Kapitel 11.3 auf Seite 193 ff.)

18.2 Inhalte für alle Schulen

Anschließend sind die stofflichen Empfehlungen für eine vierjährige Oberstufe ohne expliziten wirtschaftlichen Schwerpunkt aufgelistet. Dies geschieht wieder in lernzielartiger Form. Die Ebenen der Aufzählung sind wie zuerst nach Jahrgängen und in zweiter Ebene nach den *zentralen Ideen* gegliedert.

- 5. Klasse
 - Zeitwert des Geldes: Das Prinzip „Ein Euro heute ist mehr wert als ein Euro morgen“ verständlich anwenden können. Einfaches Auf- und Abzinsen durchführen können.
- 6. Klasse
 - Zeitwert des Geldes: Über die Dynamiken eines Kredites aus der Sicht von Kreditnehmer/innen Bescheid wissen. (vgl. erstes Arbeitsblatt aus dem Unterrichtsvorschlag „Kredite und Risiko“ auf Seite 226)
 - Stochastik im Kontext der Finanzmathematik: Arbeiten mit Darstellungsformen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik aus dem Bereich der Finanzwelt. Erkennen, dass Kurse am Finanzmarkt nicht deterministisch sind und daher eine stochastische Modellierung als sinnvoll erachten. (vgl. Unterrichtsvorschlag „Der Zufall und Kurse an der Börse“ in Kapitel 11.2 auf Seite 178 ff. bzw. DÖHRMANN, 2004, S. 200 ff.)
 - Stochastik im Kontext der Finanzmathematik – Handhabung von Risiko: Die Risiken bei einem Kredit aus der Sicht von Kreditnehmer/innen kennen. (vgl. Unterrichtsvorschlag „Kredite und Risiko“ in Kapitel 11.4 auf Seite 221 ff.)

- 7. Klasse
 - Das Prinzip der Diversifikation von einem mathematischen Standpunkt aus verstehen können (vgl. Unterrichtsvorschlag „Diversifikation“ im Kapitel 11.3 auf Seite 193 ff.)
- 8. Klasse
 - Stochastik im Kontext der Finanzmathematik: Die Verwendung der Normalverteilung kritisch betrachten können (zum Beispiel aus dem Bereich der Finanzwelt). (vgl. Unterrichtsvorschlag BRUNNER/KÜHLEITNER, 2016)

19 Verifizierung der Forschungshypothese

Die gesammelten Ergebnisse ermöglichen die Beantwortung der in Kapitel 4 formulierten Forschungsfragen sowie die Verifizierung der ebendort formulierten Forschungshypothese.

Die erste Frage zielt auf den zu unterrichtenden Stoff ab: „Welche finanzmathematischen Themen kommen für den Unterricht in Frage?“ Die Finanzmathematik ist eine wissenschaftliche Disziplin und umfasst ein großes Stoffgebiet. Finanzmathematiker/innen arbeiten an Universitäten, bei Banken, Versicherungen, (Finanz)Aufsichten, etc... und sind dort mit unterschiedlichsten Aufgabenfeldern betraut. Im Alltag benötigt man in einer Welt wie heute Finanzwissen. Die Frage ist welches? und vor allem: „Welches soll in der Schule vermittelt werden?“, noch genauer für diese Arbeit: „Welches soll im Mathematikunterricht vermittelt werden?“. Gibt es gewisse Ideen, Einsichten, Denkweisen, ... , die zentral sind?

Es existieren schon Arbeiten im Bereich Mathematikunterricht und Finanzmathematik, die Themen zur Behandlung im Mathematikunterricht vorschlagen. Im deutschsprachigen Bereich sind es zwei Dissertationen (vgl. DÖHRMANN 2005 und DAUME 2009) und einige Publikationen in facheinschlägigen Zeitschriften, Tagungsbänden und Sammelwerken (siehe Kapitel 2.1).

Diese Ansammlung an vielen teils unzusammenhängenden Inhalten erinnert an die Diskussion *fundamentaler Ideen*. In diesem Zusammenhang sei auf SCHREIBER verwiesen, der für ein Teilgebiet der Mathematik den Begriff *zentrale Idee* forcierte. Nach den vier Kriterien (Zeitkriterium, Horizontalkriterium, Sinnkriterium und Vertikalkriterium) nach SCHWILL wurden basierend auf der Aussage von BRUNER

„It (designing curricula) is a task that cannot be carried out without the active participation of the ablest scholars and scientists.“ (BRUNER, 1960, S. 32)

durch eine Interviewreihe fünf *zentrale Ideen* der Finanzmathematik gewonnen (für genauere Ausführungen siehe Seite 74 ff.):

- *Stochastik im Kontext Finanzmathematik*
- *Handhabung von Risiko*
- *No-Arbitrage-Prinzip*

- *Replikation*
- *Zeitwert des Geldes*

Diese *zentralen Ideen* schränken die Themenwahl ein, sie sind auf hohem universitären Niveau wichtig und können auch auf einer niedrigen intellektuellen Stufe ausgeführt werden. So wurde eine Stoffauswahl aus dem Fach heraus begründet.

Eine reine Stoffauswahl aus dem Fach heraus ist nicht zwingend eine begründete Auswahl für den Mathematikunterricht. Es bedarf weiterer Kriterien. BLUM 1978, WINTER 1989 und JABLONKA 1999 haben ihrerseits Kriterien für einen guten (anwendungsorientierten) Mathematikunterricht formuliert. Daraus wurden vier entsprechende Kriterien formuliert (siehe Seite 165 ff.):

1. Formale Aspekte
2. Eignung
3. Authentizität
4. Mathematische Aspekte

Ausgehend von den *zentralen Ideen* der Finanzmathematik und den Kriterien für einen guten (anwendungsorientierten) Mathematikunterricht wurden unter besonderer Berücksichtigung der Stochastik Unterrichtssequenzen für die Sekundarstufe II entworfen. Anhand von Arbeitsblättern sollen Schüler/innen unterschiedliche Stoffgebiete selbstständig und eigenverantwortlich erarbeiten. In dieser Arbeit fiel die Wahl auf folgende vier Unterrichtssequenzen: „Der Zufall und Kurse an der Börse“, „Diversifikation“, „Kredite und Risiko“ und „No-Arbitrage und Replikation“. Es muss betont werden, dass es sich hierbei zwar um eine sehr fundierte Auswahl handelt, aber es ist immer noch eine Auswahl. Auf Basis der *zentralen Ideen* und der Kriterien für einen guten (anwendungsorientierten) Unterricht können noch weitere Unterrichtssequenzen, Arbeitsmaterialien, etc. für den Mathematikunterricht erstellt werden.

1. Bei der Unterrichtssequenz „**Der Zufall und Kurse an der Börse**“ (siehe Seite 178 ff.) wurde Wert auf den Zufallsbegriff gelegt, welcher exemplarisch am Aktienkurs bearbeitet werden sollte. Diese Unterrichtssequenz lieferte in vollem Umfang einen Beitrag zu der Idee *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik*.
Ein wesentlicher Punkt in der Finanzwelt ist eben, dass kein Kurs exakt vorausgesagt werden kann. Das zieht sich durch die stochastische Finanzmathematik, in der die Kurse mit Hilfe wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen modelliert werden. Diese Modelle sind in der Tat höchst komplex. Sie dienen in erster Linie nicht dazu den Kurs vorherzusagen, sondern einen Modellrahmen zu schaffen, in dem Derivate bepreist werden können.
Bei diesem Unterrichtsvorschlag geht es nicht darum den Schülern/innen bestimmte Aktienkursmodelle vorzustellen, sondern darum den *Zufall* am Beispiel von Aktienkursen zu thematisieren. Ausgehend vom deterministischen Prinzip der Aktienkursbestimmung zeigt das darauffolgende Arbeitsblatt, dass aus „Charts“ nicht der zukünftige

Kurs abgelesen werden kann. Im Wesentlichen basiert dieser Vorschlag auf dem folgenden Zitat:

FM1: „Ich finde eine coole Erkenntnis aus der Finanzmathematik ist schon, dass, also aus Finanzmathematik und von Fama, dass wenn die letzten fünf Tage der Aktienkurs gestiegen ist, dass das dann überhaupt keine Aussage darüber ermöglicht, ob der Kurs am sechsten Tag auch wieder steigen wird oder nicht steigen wird. Das ist etwas, was man nicht glaubt, oder?“

Das in Kreisen der Finanzwelt bekannte Beispiel: „Wer ist ein besserer Trader, ein Banker oder ein Affe?“ ist Teil der Unterrichtssequenz. Ausgehend von dem untenstehenden Zitat wurde eine passende Gruppenarbeit entworfen.

FM6: „da gibt es den Kahneman mit Thinking Fast and Slow und da gibt es ein recht gutes Kapitel und ein recht lustiges Kapitel, wo sie Experimente gemacht haben, sozusagen Aktienhandel per Zufallsgenerator, in dem Fall hat es halt, wie so oft ein Affe gemacht (lacht), und wo zum Teil rausgekommen ist, im Durchschnitt ist der Erfolg von diesem Zufallshandel genau gleich wie die Investmentbanker, die mit ausgeklügelten Strategien und hochbezahlten Posten und Boni und allem Drum und Dran nach irgendwas handeln, steigen eben um keinen Deut besser aus, weil eben diese Zufallskomponente von Preis- und Aktienentwicklung wahnsinnig unterschätzt wird.“

Zum Teil wird bei der Gruppenarbeit der Aspekt der Diversifikation behandelt. Denn Zufallsportfolios sind in der Regel (wenn man große Portfolios betrachtet, Gesetz der großen Zahlen) besser diversifiziert als andere.

Abschließend soll ein Blick über den Tellerrand, in diesem Fall über die Finanzmathematik, den Begriff des *Zufalls* auch in anderen Situationen thematisieren.

2. Der Lehrstoff des Unterrichtsvorschlags „**Diversifikation**“ (siehe Seite 193 ff.) stammt vor allem aus den *zentralen Ideen: Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik* und *Handhabung von Risiko*. Von einem Würfelspiel über den Aktienmarkt bis hin zu Alltagssituationen sind für die Schüler/innen Risiken zu minimieren. Das Prinzip „Setze nicht alles auf eine Karte“ wird auf unterschiedliche Art und Weise sichtbar, beginnend bei dem besagten Würfelspiel bis hin zu immer komplexer werdenden Situationen.

Die Zuordnung dieser Unterrichtssequenz zur Idee *Handhabung von Risiko* ist aufgrund der Risikominimierung klar. Wieso entstammt sie auch der Idee *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik*? Ein Risiko gibt es nur, wenn eine Unsicherheit besteht, also wenn eine stochastische Situation vorliegt. Die Einführung der Begriffe Rendite, Risiko und Korrelation erfolgt über die beschreibende Statistik am Beispiel von Aktienkursen und trägt damit wieder zur Idee *Stochastik im Kontext Finanzmathematik* bei. Durch diese Arbeitsblätter zur Portfoliooptimierung soll jenes Prinzip klar werden, welches ein Interviewpartner erwähnt:

FM1: „Ein anderer Bezug zum Alltag, den man aus der Portfoliooptimierungstheorie mitnehmen muss, ist es, dass es für Privatpersonen ein großer

Unfug ist, sich einzelne Aktien zu kaufen. Das ist schon ein bisschen subtiler und hört man weniger und das ist trotzdem eine wichtige Lehre, finde ich.“

Abschließend sollen die Schüler/innen einen Schritt weg von der Finanzmathematik gehen und den Aspekt der Diversifikation auch an Alltagssituationen diskutieren.

3. In der dritten Unterrichtssequenz „**Kredite und Risiko**“ (siehe Seite 221 ff.) sollen den Lernenden die Risiken eines Kredites bewusst werden. Die Materialien wurden zu den *zentralen Ideen: Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik, Handhabung von Risiko und Zeitwert von Geld* entworfen. Die Berechnungen des Schuldenstandes eines Kredites tragen im vollen Umfang zur Idee *Zeitwert des Geldes* bei. Alle verwendeten Formeln unterliegen dem Grundsatz der Finanzmathematik „Ein Euro heute ist mehr wert als ein Euro morgen“.

Damit die Risiken eines Kredites sichtbar werden, wird der Zinssatz zufällig angenommen. Die von den Schülern/innen geforderte Modellierung des Zinssatzes mit Zufallszahlen ist der Idee *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik* zuzuordnen. Basierend auf der Annahme analog zum Aktienkurs, die Veränderungen des Zinssatzes sind nicht vorhersehbar.

Bei dieser Aufgabe steht auch das Identifizieren des Risikos bei einem normalen Kredit bzw. einem Fremdwährungskredit aus der Sicht des Kreditnehmers im Vordergrund. Schüler/innen lernen in dieser Unterrichtssequenz mehrere Kreditarten kennen, die auf unterschiedliche Weise vom Leitzinssatz abhängen oder Fremdwährungskredite sind. In basalen Grundzügen werden Maßnahmen zur Absicherung behandelt. Hier im Vordergrund ist die Vermeidung hoch riskanter Produkte wie Fremdwährungskredite. Die Betrachtungen und der Vergleich dieser verschiedenen Kreditarten zeigt Vor- und Nachteile dieser auf und trägt ebenfalls zur Behandlung der Idee *Handhabung von Risiko* bei.

4. Der vierte Vorschlag „**No-Arbitrage und Replikation**“ (siehe Seite 253 ff.) wurde vor allem für Schulen mit wirtschaftlichem Fokus entworfen.

Zu Beginn stehen Überlegungen bei Währungstauschen, gefolgt von der Berechnung einer Forward Rate. Zuerst müssen explizit *Arbitragemöglichkeiten* gefunden werden. Anschließend steht die Preisfindung über das *No-Arbitrage-Prinzip* an. Die ersten beiden Arbeitsblätter behandeln ausschließlich Themen, die der *zentralen Idee No-Arbitrage-Prinzip* zuzurechnen sind. Die im Anschluss erläuterte Methode der *Replikation* wird bei Futures, bis hin zu Optionen in einfachen Modellen (Binomialmodell, Trinomialmodell) ausgeführt. In dieser Einheit wird der Begriff der *Replikation* nicht explizit eingeführt, da er an sich nicht nötig ist. Es wird auf komplizierte dynamische Replikationen verzichtet. Von den Lernenden werden nur einfache statische Replikationen mittels Buy-and-Hold-Strategien verlangt. Das basiert auf der Aussage von FM3.

FM3: „... den Aspekt von Arbitrage und Replikation kann man hier mit Hilfe von Beispielen von statischer Replikation, also Buy-and-Hold-Portfolios ... gut darstellen. Man kann Begriffe wie einen Forward-Kontrakt mit - Zinsen in zwei verschiedenen Währungen beispielsweise ... gut illustrieren und hier - ohne - fortgeschrittenen mathematischen Kalkül, also nur unter Benutzung von elementaren Rechnungen ... einführen.“

Abschließend erfährt der Lernende, dass der Preis einer Option abhängig vom gewählten Modell ist. So gibt es im Binomialmodell einen eindeutigen arbitragefreien Preis, während es im Trinomialmodell keinen eindeutigen arbitragefreien Preis gibt. In realitätsnäheren Modellen können mehrere arbitragefreie Preise existieren. Das ist ein erstes Schnuppern am „Fundamental Theorem of Asset Pricing“, welches sagt: „In einem Marktmodell mit einem risikoneutralen Maß gibt es genau dann einen eindeutigen Preis für jedes Derivat, wenn das Modell ein eindeutiges risikoneutrales Maß besitzt.“ Das Trinomialmodell ist im Allgemeinen frei von Arbitrage, hat aber kein eindeutiges Martingalmaß.

Zu Beginn der Arbeitsmaterialien wird noch kein Wert auf die Modellvoraussetzungen gelegt, da zu Beginn der einfache mathematische Kalkül der Bepreisung über *No-Arbitrage* und *Replikation* stehen soll. Erst am Ende wird die Wichtigkeit der Wahl des Modells thematisiert.

Noch viele weitere Unterrichtsvorschläge sind durch diese Arbeit begründbar oder ablehnbar, wenn bei der Stoffauswahl im Sinne der *zentralen Ideen* und mittels der genannten Kriterien argumentiert wird.

Die Schüler/innen nehmen die Thematik unterschiedlich auf. Sie reicht von langweilig bis hin zu voll begeistert. Explizit erwähnte eine Schülerin, dass sie sich bewusst für eine AHS entschieden hat und nicht für eine HAK, damit sie solche Themen nicht bearbeiten muss. Das blieb bei allen Erhebungen aber eine Einzelmeinung. Wie in der Einleitung im Kapitel 1 beschrieben, fordern Schüler/innen immer wieder – und das sogar öffentlich – mehr Finanzbildung und das für alle Schultypen! Allerdings ist zu betonen, dass es sich dabei um keine Geschmackssache handelt. Finanzbildung ist ein Teil der Allgemeinbildung (vgl. OECD, 2013, S. 140) und darf nicht Anbietern von Finanzdienstleistungen überlassen werden. An dieser Stelle soll, wie bei DAUME 2009, für die Integration der Finanzbildung in den bestehenden Fächerkanon plädiert werden. In Österreich ist das nach dem Grundsatzterlass für Wirtschafts- und Verbraucher/innenbildung auch gesetzlich vorgeschrieben.

Die empirischen Erhebungen zeigen, dass finanzmathematische Probleme bzw. Sichtweisen, die eine Relevanz für zumindest das spätere Leben aufweisen, auf dem Niveau von Schülern/innen aus der Sekundarstufe II adäquat dargestellt werden können. Dies lässt sich aus den eigenen Beobachtungen, der Bearbeitung der gestellten Fragen und den Antworten der Lehrer/innen erschließen.

Aus dem Erwähnten lässt sich die Forschungshypothese „Finanzmathematische Themen eignen sich für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II“ verifizieren.

Teil VI

Anhang-Transkripte

19.1 FM1

1 CD: Welche Entwicklungen bzw. Personen würdest du besonders in der Geschichte der Fi-
2 nanzmathematik hervorheben?

3

4 FM1: Ich möchte mit Bernoulli anfangen, wegen Nutzentheorie -

5

6 CD: Mhm

7

8 FM1: weil ich Nutzentheorie für etwas sehr sinnvolles halte.

9

10 CD: Nutzentheorie wird in der Literatur vielfach kritisiert.

11

12 FM1: Nutzentheorie ist sehr unvollständig, hat viele Fehler und eh, also sie ist sehr pro-
13 blematisch und das einzige was vielleicht noch problematischer ist, ist sie überhaupt beiseite
14 zu lassen. Ich meine oft, ein Beispiel was mir wichtig ist, wenn man davon spricht: Geht es
15 einer Bevölkerung gut, geht es einer Volkswirtschaft gut, also eine Kennzahl, die da vielleicht
16 hergenommen wird, ist das Wachstum des BIP. Also in einer gewissen Art und Weise, die
17 Kennzahl drückt ungefähr aus, was alle zusammen erwirtschaften und korreliert vielleicht
18 gut damit, was alle zusammen verdienen. Was da passiert ist, im Endeffekt misst man den
19 Gesamtnutzen, indem man halt jedem einzelnen eine lineare Nutzenfunktion zuschreibt und
20 die dann einfach aufaddiert. Also wenn du nicht den Gesamtnutzen optimierst, sondern zum
21 Beispiel jedem einen logarithmischen Nutzen gibst und das aufoptimierst, dann kommst
22 du halt drauf, dass damit es der Gesamtbevölkerung besser gehen soll, dann brauchst du
23 dich überhaupt nicht darum kümmern, dass das BIP wächst, dann müsstest du dich darum
24 kümmern, dass das irgendwie ausgeglichener wird. Dann kommst du nicht auf so Sachen,
25 wie, obwohl das BIP wächst, geht es der Gesamtbevölkerung immer schlechter, weil halt
26 die Ungleichverteilung der Gesellschaft größer wird. Ich finde halt, das ist ein Problem, wir
27 können uns gar nicht auf eine Nutzenfunktion einigen und im Prinzip verwenden wir deswe-
28 gen die vollkommen lineare Nutzenfunktion, wo wir uns in Wirklichkeit alle einig sind, dass
29 das der größte Unfug überhaupt ist, aber wenn wir uns nicht auf die Nutzentheorie einlassen
30 und sie komplett vermeiden, verwenden wir sie in ihrem ungeschicktesten Spezialfall.

31

32 CD: Ja, du meinst eine wichtige Person war eben Daniel Bernoulli beim St. Petersburg-
33 Paradoxon. Du möchtest ihn als erste wichtige historische Person nennen.

34

35 FM1: Ich bitte noch einmal darauf hinzuweisen, dass ich nicht die überlegteste Liste ab-
36 gebe.

37

38 CD: Ja, das ist kein Problem, es soll deine eigene Liste sein, das was dir ad hoc einfällt.

39

40 FM1: Ähm, dann Eugene Fama -

41

42 CD: Ja, ok, wieso? Wieso würdest du -

43

44 FM1: - ähm, die Feststellung, dass du kurzfristig eigentlich nicht systematisch gewinnen
45 kannst auf einem Aktienmarkt, das halte ich für etwas ganz wichtiges. - - Dann kenne ich mich
46 da wirklich inhaltlich zu schlecht aus, aber ich glaube, dass mit ihm das anfängt, dass man
47 sich überlegt, wie wichtig Diversifizierung ist, wenn man am Aktienmarkt vernünftigerweise
48 partizipieren möchte.

49

50 CD: und in Richtung Markowitz? Den möchtest du bewusst nicht nennen?

51

52 FM1: Ja, schau, das ist genau das Problem, wenn ich mehr überlegt hätte, dann hätte
53 ich Markowitz genannt und nicht Fama, wahrscheinlich.

54

55 CD: Ja, ja, aber es ist - -

56

57 FM1: Ja du hast Recht Markowitz und Fama kann man nebeneinanderstellen und man
58 muss wahrscheinlich Markowitz vor Fama nennen.

59

60 CD: Ja, aber ich finde es trotzdem interessant, dass du Fama zuerst genannt hast. Also,
61 wenn du meinst -

62

63 FM1: Ja, ok, das ist einfach jetzt gebiast, weil er hat gerade den Nobelpreis gewonnen
64 und ist mir im Kopf. Aber du hast Recht, man hätte hier Markowitz nennen müssen.

65

66 CD: Ich glaube, dass es hier kein richtig und kein falsch gibt.

67

68 FM1: - Ich glaube schon, dass du jetzt richtiger warst!

69

70 CD: Ok, das war nur eine Frage, die mir dazu eingefallen ist, die mir auf den Lippen ge-
71 brannt hat. Gibt es sonst noch weitere Personen oder Entwicklungen ein, die du für wichtig
72 hältst?

73

74 FM1: Black-Scholes haben sicherlich auch viele Auswirkungen gehabt, was in der Praxis
75 gemacht wird.

76

77 CD: Mhm, wie findest du diese Auswirkungen, waren die zu der Zeit richtig und sind
78 mittlerweile überholt, oder - - -

79

80 FM1: Das ist irgendwie schwer zu sagen. Es gibt Leute, die die Geschichte sicherlich so
81 erzählen, dass Black, Scholes halt diese Formel aufgestellt haben und als Auswirkung dieser
82 Folge wurden dann vielmehr Derivate gehandelt als vorher. Ich finde eine andere Art das zu
83 sehen, wäre ähm nach Bretton Woods haben die Banken angefangen, viel mehr in solchen
84 Sachen zu handeln und dann war es einfach notwendig, dass man irgendeine Konvention hat

85 dafür, um jetzt eine Bilanz erstellen zu können, da du halt nicht weißt, wie Derivate in der
86 Aktiva und Passiva Seite einer Bilanz überhaupt anschreiben sollst, und allein dafür braucht
87 man eine Konvention. Da war von der Sicht des Finanzsystems ein irrsinniger Bedarf da,
88 - ähm eine Konvention zu finden, die hilft, zu verschleiern, dass man diesen Dingen nicht
89 einen eindeutigen Wert zuordnen kann.

90

91 CD: Ja, Black-Scholes sind sicher wichtige Vertreter, sie haben ja auch einen wichtigen
92 Preis gewonnen. Sonst noch - - - wichtige Personen?

93

94 FM1: Nein, gehen wir zur nächsten Frage!

95

96 CD: Welche Ideen bzw. Prinzipien werden deiner Meinung nach in verschiedenen Teil-
97 bereichen der Finanzmathematik immer wieder sichtbar? - - - - - beziehungsweise, denk
98 vielleicht zuerst an Sätze, Begriffe und Definitionen die in verschiedenen Bereichen immer
99 wieder vorkommen und immer wieder ihre Wichtigkeit darstellen und warum diese dann dort
100 so wichtig sind?

101

102 FM1: Ja, aus mathematischer Sicht glaube ich halt, - - dass Grenzwertsätze etwas ganz
103 Wichtiges sind. Also ich meine, sobald du irgendeine Wahrscheinlichkeit, also Wahrschein-
104 lichkeitstheorie wird halt dort spannend - , wo du viele kleine zufällige Ereignisse zusam-
105 menfassen kannst und irgendwie mehr Struktur im Verhalten erkennen kannst, also mehr
106 Struktur im Verhalten erkennen kannst - -, weil sich viele kleine Sachen zusammengefasst,
107 dann doch mit mehr Gesetzmäßigkeiten verhalten als die einzelnen, und das ist eine sehr
108 philosophische Antwort.

109

110 CD: Ja, aber inwiefern findet das seine Anwendung in der Finanzmathematik und wieso
111 ist das gerade so wichtig in der Finanzmathematik deiner Meinung nach?

112

113 FM1: Ja ich glaube, dass du mit Wahrscheinlichkeitstheorie nicht viel aussagen kannst,
114 wenn du nicht solche Effekte betrachtest, also Wahrscheinlichkeitstheorie wird immer erst
115 dann - - Aussagen treffen können, wenn du so etwas sagst.

116

117 CD: Möchtest du noch etwas hinzufügen, oder wären Grenzwertsätze deine -

118

119 FM1: Ich mein Diversifizierung, also ich mein die meisten Grenzwertsätze - - - stimmen
120 halt, weil - - ja, ah, wenn man - - orthogonale Sachen zusammenzählt, dann sagt einem der
121 Pythagoras - -, dass es auf eine ganz bestimmte Art und Weise wächst. Also im Grunde ist
122 Pythagoras dafür verantwortlich, dass sich Risiko diversifiziert und genauso wie er für einen
123 zentralen Grenzwertsatz verantwortlich ist.

124

125 CD: Ja, also Konvergenz in verschiedenen Mitteln. - - - - Würde dir vielleicht noch et-
126 was außer Diversifikation einfallen, das du schon genannt hast, das ein Stück weg von der
127 Wahrscheinlichkeitstheorie ist und näher bei der Finanzmathematik, sofern man diese beiden
128 Gebiete überhaupt trennen kann?

129

130 FM1: Also aufgrund dessen was ich gerade gesagt habe, glaubt man halt, dass man viele
131 Sachen in erster Ordnung in Normalverteilung besser verstehen kann.

132

133 CD: Haben für dich bestimmte finanzmathematische Ideen eine Entsprechung im Alltag?

134

135 FM1: Meine Eltern haben einerseits Geld auf der Bank und andererseits einen Kredit
136 laufen. Ja das ist - -

137

138 CD: Ziemlich viele Menschen machen das so.

139

140 FM1: das ist hochgradig irrational und trotzdem ist es schwierig sie davon zu überzeugen,
141 das bleiben zu lassen. Meine Tante möchte auf Nummer sicher gehen, und deswegen hat sie
142 Gold gekauft.

143

144 CD: richtiges Gold oder Papiergold?

145

146 FM1: Papiergold natürlich, und ja, auch ein Freund von mir hat Gold und Öl gekauft,
147 um sich abzusichern und beide sind ganz stark gegen Spekulationen. Natürlich ist das genau
148 Spekulation, wenn man Gold und Öl kauft. Ein anderer Bezug zum Alltag, den man aus der
149 Portfoliooptimierungstheorie mitnehmen muss, ist es, dass es für Privatpersonen ein großer
150 Unfug ist, sich einzelne Aktien zu kaufen. Das ist schon ein bisschen subtiler und hört man
151 weniger und das ist trotzdem eine wichtige Lehre, finde ich. Und wahnsinnige banale Sachen,
152 wie man muss sich einfach durchrechnen, was kostet ein Auto im leasen und wie viel kostet
153 es ein Auto auf Kredit zu kaufen.

154

155 CD: Das machen viele nicht und viele sehen das Auto im Vordergrund, ich weiß nicht wie
156 viel da gerechnet wird bei manchen Personen. Noch einmal zurück zu dem Beispiel mit dem
157 Kredit und mit dem Haus, also du meinst eigentlich, steckt da für dich auch Diversifikation
158 dahinter? Denn man hat sein ganzes Portfolio auf einer Bank mit Sprachbuch und Kredit.
159 Wäre es da besser etwas anderes zu tun oder stehen da nicht auch andere Gründe irgendwie
160 dahinter? Warum man so handelt?

161

162 FM1: - - Menschen handeln irrational, weil sie es sich nicht zu Ende überlegen, das pas-
163 siert da!

164

165 CD: Ja, man überlegt es sich nicht zu Ende, es ist vielleicht auch ein bisschen Gewohnheit
166 dabei, oder sehen wie es andere machen. Natürlich, wenn man das nun ganz streng betrach-
167 ten würde und Nutzentheorie einschalten würde etc. - -

168

169 FM1: Man braucht hier nicht mal Nutzentheorie um einzusehen, dass es keinen Sinn
170 macht, wenn man sich Geld ausborgt und dann dem zurückgibt und bei einem deutlich
171 höhere Zinsen als beim anderen hat. Das ist ja wirklich ein strukturiertes Der-Bank-Geld-
172 schenken. Und ja ich mein Fremdwährungskredite (lacht), das ist ja schon wirklich Haare
173 sträubend, dass das funktioniert, dass man das Leuten verkauft.

174

175 CD: Ja das hat eine Zeit lange funktioniert und eine Zeit lange war das auch gut für die
176 Personen, - -

177

178 FM1: Was heißt hier gut, -

179

180 CD: nein es war nicht gut für sie, sie haben geglaubt, dass es gut für sie ist.

181

182 FM1: Ich finde eine coole Erkenntnis aus der Finanzmathematik ist schon, dass, also aus
183 Finanzmathematik und von Fama, dass wenn die letzten fünf Tage der Aktienkurs gestiegen
184 ist, dass das dann überhaupt keine Aussage darüber ermöglicht, ob der Kurs am sechsten
185 Tag auch wieder steigen wird oder nicht steigen wird. Das ist etwas, was man nicht glaubt,
186 oder?

187

188 CD: Das ist doch dasselbe, wie wenn man im Casino steht und elfmal hintereinander war
189 schwarz und dann setzen alle auf Rot.

190

191 FM1: Ähm im Casino ist es halt irgendwie, viel transparenter, oder?, dass das gemacht
192 wird um Leute auszunehmen. Wenn einem dann der seriöse Bankberater mit Dokortitel ein
193 Bild unter die Nase hält auf dem so ein Graph nach oben zeigt und dann ist noch so ein
194 subtiler Pfeil, der weiter in die richtige Richtung zeigt, dann ist es - - -

195

196 CD: Dann ist es schon fast Betrug.

197

198 FM1: Ja, schon irgendwie noch mieser.

199

200 CD: Von der Idee her steckt doch irgendwie dasselbe dahinter, warum Menschen so han-
201 deln, wie im Casino, also auch am Aktienmarkt?

202

203 FM1: Im Casino ist vielleicht intellektuell viel einfacher nachzuvollziehen, dass es da kei-
204 ne Gesetzmäßigkeiten gibt. Im Aktienmarkt da kannst eben sehr wohl suggerieren, dass es
205 Gesetzmäßigkeiten gibt und es wird ständig suggeriert. Ich meine, es ist immer, wenn ein
206 Analyst sagt, dass demnächst diese Aktie steigen wird, das ist ja immer eine blanke Lüge,
207 ja, du weißt genau, dass ein Analyst nichts über das zukünftige Verhalten voraussagen kann.
208 Trotzdem wird suggeriert, dass Leute, die sich mit Wirtschaft besser auskennen und eine Na-
209 se haben, eine gewisse Intuition haben, was auch immer, das schon können und das ist ähm - -

210

211 CD: Wie stehst du also gewissen Chartanalysten gegenüber?

212

213 FM1: Ja, da bin ich eben sehr bei Fama!

214

215 CD: Gibt es für dich Ideen und Prinzipien aus der Finanzmathematik, die auf mindestens
216 auf zwei bis drei unterschiedlichen intellektuellen Niveaus aufgezeigt werden können?

217

218 FM1: Die meisten Sachen, die wir eh die ganze Zeit reden, wieder. Der Aktienkurs heute
219 ist der beste Schätzwert für den Aktienkurs morgen. Wenn etwas anders wahr wäre, wenn der

220 Bankberater oder der Analyst im Fernsehen wirklich mehr wüsste. Was der machen würde,
 221 ist, er würde die Aktie heute kaufen und morgen verkaufen und würde damit reich werden.
 222
 223 CD: Macht er das?
 224
 225 FM1: Das macht er nicht, weil es ihm selbst klar ist, dass es nicht stimmt. Ich finde das
 226 ist ein Prinzip, dass du wirklich auf jedem Niveau vermitteln kannst.
 227
 228 CD: Wenn du das nur ganz kurz explizit, irgendwie ausführen würdest!
 229
 230 FM1: Du kannst es eben auf dem Niveau, auf dem wir gerade reden, traue ich das einem
 231 Unterstufen Schüler zu, dass man das ausführlicher bespricht und auf das kommt. Und dann
 232 auf einem sehr sehr viel höheren Niveau ist das halt, das Fundamental Theorem of Asset
 233 Pricing, das sagt: - Das Aktienkurse nur dadurch sinnvoll modelliert werden können, das
 234 man sagt, sie sind eine Summe aus, sie sind ein Semimartingal, das heißt die Summe aus
 235 einem Martingalteil und einem zweiten Teil der nur von einer Drift bestimmt ist und der
 236 Driftteil ist vernachlässigbar klein gegenüber dem Martingalanteil. Das ist ein mathema-
 237 tisch unglaublich tiefliegender Sachverhalt, der auch wieder nur sagt: Was du heute weißt,
 238 ist der beste Schätzwert von dem was er morgen sein wird, du kannst keine systematischen
 239 Überlegungen treffen.
 240
 241 CD: Würde dir ein weiteres Beispiel dazu einfallen, auch bereits erwähnte?- - -
 242
 243 FM1: Was geht so gut? - Ähm - diese Diversifizierungsgeschichten kannst du, finde ich
 244 auch auf so gut wie jedem Niveau darstellen, oder?
 245
 246 CD: Ja, wenn du sie nur ganz kurz explizit ausführen würdest!
 247
 248 FM1: Auf unterem Niveau halt. Versicherung macht wirklich viel Sinn für eine Einzel-
 249 person, also wenn jemand anderer das Risiko übernimmt, weil er will sich etwas ausmitteln.
 250 Dann kannst du das sehr weit hochziehen, das sind also viele verschiedene Einzelrisiken und
 251 in welcher Weise kann man die jetzt - -, in welcher Weise funktioniert da wirklich Diversifi-
 252 zierung, was ist der Value-at-Risk, gegeben eine gewisse Abhängigkeitsstruktur, was ist der
 253 entsprechende Value-at-Risk, welche Abhängigkeitsstruktur führt zum schwierigsten Value-
 254 of-Risk, dann bist du halt auf einem Niveau, wo man sich denkt, das muss jetzt endlich
 255 ins Aktuelle, - - also wo sich Leute vom Baselkomitee interessieren. Ich habe gerade die
 256 ... von der LSE und den ... aus Florenz da, und mit denen überlege ich, wie man da halt
 257 zeigen kann, dass da ein gewisser Algorithmus konvergiert. Es wäre eine Hoffnung, dass es in
 258 Basel 4 Eingang findet. Ich meine, da sind wir wirklich halt bei der ganz aktuellen Forschung.
 259
 260 CD: Das wäre zum Beispiel eine Idee die wirklich auf verschiedenen Niveaus durchführbar
 261 ist. Also vom Grundprinzip setze nicht alles auf eine Karte - -
 262
 263 FM1: Setzt nicht alles auf eine Karte und wo zahlt es sich aus eine Versicherung abzu-
 264 schließen und wo zahlt es sich nicht aus einen Versicherung abzuschließen? Also - - - wenn

265 ich jetzt als Privatperson jedes Jahr 3, 4 Flüge buche, dann zahlt es sich nicht aus eine
266 Stornoversicherung abzuschließen.

267

268 CD: Ja, wenn ich kein Sportler bin, dann zahlt es sich nicht aus mich gegen Sportverlet-
269 zungen - - abzusichern. Ok, noch irgendeine Idee noch irgendein Prinzip, welches dir ad hoc
270 einfallen würde? Welches vielleicht noch nicht genannt wurde?

271

272 FM1: - - - - - Also, ich mein zum tausendstem Mal diese Nutzentheorie, also ich glaube
273 wieder, dass man ein St. Petersburg Problem recht leicht erklären kann. Nutzentheorie wird
274 auch beliebig kompliziert in der Finanzmathematik. Was schon auch ziemlich interessant ist,
275 ist diese Schnittstelle von Nutzentheorie und Verhaltensforschung. Wo man untersucht, wie
276 sehr die Nutzentheorie halt das tatsächliche menschliche Verhalten überhaupt nicht richtig
277 abbildet.

278

279 CD: Es wird ja immer ein rationales Verhalten unterstellt, wobei sich der Mensch ja bei
280 weitem nicht so verhält, wie es unterstellt wird.

281

282 FM1: Mhm, - - die Leute sind ja auch nicht nur Deppen, sondern es ja auch bekannt, dass
283 die Nutzentheorie eine sehr grobe Approximation ist. Ich halte das eben, ich finde das ganz
284 toll wichtig, dass man diesen ersten Approximationsschritt schon mal ganz explizit benennt,
285 zumindest. In dem Moment wo du das Gesamteinkommen der Bevölkerung hernimmst, um
286 ihr Wohlergehen zu messen, dann unterstellst du auch ganz stark, welche Nutzentheorie
287 dahinter steckt und redest auch darüber und glaubst, dass du das Problem nicht hast, in
288 Wirklichkeit hast natürlich umso mehr.

289

290 CD: Vielen fällt das nicht auf, es wird nicht explizit genannt und geht ein bisschen unter!

291

292 FM1: - - Kahneman oder so, - - so Geschichten von Kahneman und Tversky, die halt
293 versuchen alternative Theorien aufstellen, die das Verhalten von Menschen in Experimenten
294 tatsächlich abbilden, das ist natürlich super, das weiter zu vereinfachen und zu verstehen an
295 welchen Stellen das Nutzenmodell zu stark falschen Aussagen führt.

296

297 CD: So wie du aber schon gesagt hast, wenn man Nutzentheorie nun wieder ganz ver-
298 nachlässigen würde, da kommt auch nicht zu richtigen Aussagen.

299

300 FM1: Mit Nutzentheorie möchte man natürlich nicht aufhören, sondern man möchte
301 natürlich versuchen, sich natürlich weiter Gedanken über die Schnittstelle machen.

302

303 CD: Abschließend noch eins? - - Ansonsten bedanke ich mich für das Interview!

304

19.2 FM2

305 CD: Welche Entwicklungen bzw. Personen würden Sie besonders in der Geschichte der Fi-
306 nanzmathematik hervorheben?

307

308 FM2: Also, ich glaube Entwicklungen ist sicher, also diese Arbitragetheorie, die wahr-
309 scheinlich, die wichtigste und das heißt auch, es gibt das erste Fundamental Theorem und das
310 zweite Fundamental Theorem, wo es eben darum geht, dass man dieses Replikationsargument
311 mit risikoneutraler Bewertung verbindet und also, ausgehend ist das eben von Black, Scholes,
312 die haben eben 73 den Wirtschaftsnobelpreis bekommen für das Black-Scholes-Modell, wo-
313 bei Wirtschaftsnobelpreis, ist ja kein wirklicher Nobelpreis, aber insofern ist sicher, was die
314 Personen betrifft, sind diese zwei sicher Ausgangspunkt und ich glaub ausgehend von diesem
315 Modell, wo man gesehen hat, den Zusammenhang zwischen Replikation und risikoneutraler
316 Bewertung. Das war eben der Ausgangspunkt der Finanzmathematik und hat dann eben zu
317 diesem Fundamental Theorem geführt. Das ist der Hauptpfeiler der Finanzmathematik.

318

319 CD: Würdest du diese beiden oder diese drei Personen, die da ja dahinter stehen, also
320 erste wichtige Entwicklung sehen?

321

322 FM2: Na, die erste wichtige Entwicklung geht auf Bachelier zurück. Das war diese Dis-
323 sertation, glaube ich, "Théorie de la spéculation", wo es eben schon darum gegangen ist, eben
324 den Zufall hineinzubringen. Das war sicher die erste wichtigste Entwicklung, glaube ich.

325

326 CD: Das Black-Scholes-Modell ist in letzter Zeit ziemlich umstritten bzw. schon überholt.
327 Würdest du sagen, dass die zu Recht den Nobelpreis bekommen haben zu dieser Zeit?

328

329 FM2: Ah, ja das würde ich schon sagen. Also, das war schon eine herausragende Arbeit.

330

331 CD: Möchtest du noch Entwicklungen nennen, die gar nicht an Personen geknüpft sind?

332

333 FM2: Seitdem wird sehr viel gemacht, um herauszufinden, dass diese Replikation nicht
334 funktioniert, wenn Märkte eben nicht vollständig sind, die eben der Realität entsprechen.
335 Man versucht jetzt eben und auch durch die Finanzkrise ausgelöst, diese modellfreie Finanz-
336 mathematik. Das man eben kein Modell dahinter hat und trotzdem eben noch quantitative
337 Aussagen macht.

338

339 CD: Welche Ideen bzw. Prinzipien werden deiner Meinung nach in verschiedenen Teilberei-
340 chen der Finanzmathematik immer wieder sichtbar?

341

342 FM2: Die wichtigste Idee oder eine der wichtigsten Ideen ist sicher das Fundamental Theo-
343 rem of Asset Pricing, wo man halt mit arbitragefreien Modellen arbeitet und die eben cha-
344 rakterisieren kann, dass es eben ein risiko-neutrales Maß gibt. Also ein Maß, das äquivalent
345 dazu ist. In sämtlicher Modellierung ist das das Hauptding, dass man mit solchen Modellen
346 arbeitet. Arbitragefreiheit ist wahrscheinlich das wichtigste Prinzip. - Also ich weiß nicht,
347 Ideen bezieht sich jetzt auf Beweise oder?

348

349 CD: Also es bezieht sich jetzt nicht auf eine Beweisidee sozusagen, also die Idee des Be-
350 weises, sondern eine generelle Idee, die alles übergreift, also eben, wie Arbitrage, wie du das
351 vorher genannt hast —

352

353 FM2: Arbitrage würde ich als das Prinzip in der Finanzmathematik sehen. Also ok, früher
354 ist man davon ausgegangen, man hat einen Wahrscheinlichkeitsraum, man hat ein Maß dar-
355 auf und modelliert in diesem Wahrscheinlichkeitsraum. Jetzt sagt man eben, man hat nun
356 viele Maße, das ist eben eine neuere Entwicklung. Trotzdem geht es nach wie vor darum,
357 Arbitragefreiheit in diesem erweiterten Setting zu formulieren. Man hat jetzt robuste Arbi-
358 trage und so weiter. Also-

359

360 CD: Also das findet in verschiedenen Modellen seine Anwendung?

361

362 FM2: Genau, also ich glaube, dieses Prinzip der Arbitragefreiheit ist nach wie vor sehr
363 wichtig. Obwohl es jetzt auch andere, also es gibt diese Entwicklung von stochastischer
364 Portfoliotheorie, wo man sagt, ok, es gibt auf langen Zeithorizonten kann es zu Arbitrage
365 kommen, aber es gibt eben dann andere Begriffe. Also es gibt eben dann sehr viele Begriffe
366 in einem gewissen Sinn Arbitragefreiheit. Dass man halt sagt, Arbitrage gibt es, aber Good
367 Deals sollte man ausschließen, dass man eben mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit sehr hohe
368 Gewinne macht, solche Dinge. Diese Prinzipien kommen eben hauptsächlich vor, und dann
369 versucht man das eben mathematisch zu formulieren, also was die mathematische Äquivalenz
370 zu so einem Prinzip ist. Also das ist etwas ökonomisches und dann - - -

371

372 CD: Du hast gerade die Portfoliotheorie erwähnt, würdest du die auf Markowitz zurück-
373 führen oder?

374

375 FM2: Nein, das ist etwas anderes, eine neuere, Fernholz und Karatzas, die haben das
376 entwickelt, vor ungefähr 10 Jahren. Das ist ein bisschen, also nicht orthogonal, aber nicht so
377 wie die klassische Portfoliotheorie.

378

379 CD: Ok, ich verstehe. Möchtest du noch etwas hinzufügen? Du bist sehr tief in der For-
380 schung, das kann ruhig weiter draußen sein.

381

382 FM2: Was eben wichtig ist, sind eben die Begriffe des Hedging und Bepreisung. Ich meine,
383 das ist genau in diesem Bereich wieder. Natürlich gibt es eben auch Portfoliooptimierung.
384 Das sind wahrscheinlich die drei größten Gebiete, also Hedging und Bepreisung und dann
385 eben Utility Maximization und so was -

386

387 CD: Haben für dich bestimmte mathematische Ideen eine Entsprechung im Alltag? Gibt
388 es für dich typische Fehler von Menschen, die auf einen Mangel finanzmathematischer Bil-
389 dung zurückzuführen sind?

390

391 FM2: Eine Entsprechung im Alltag ist sicher das Glücksspiel, also wo halt der Begriff
392 eines Martingales vorkommt. Die Charakterisierung in der Finanzmathematik von Arbitra-
393 gefreiheit ist das eben, dass es ein äquivalentes Maß gibt, dass meine Aktie ein Martingal ist.

394 Martingal bedeutet, dass man eben nicht gewinnen kann. Diese Strategie kommt natürlich
395 im Casino vor.

396

397 CD: Würdest du meinen, dass man Analysten prinzipiell gar nicht vertrauen darf?

398

399 FM2: Nein, würde ich nicht meinen. - -

400

401 CD: Weil, wenn ein Analyst meint die Aktie steigt am nächsten Tag, dementsprechend
402 müsste er sie kaufen und am nächsten Tag wieder verkaufen.

403

404 FM2: Das ist halt eine Einschätzung einer Person, die vielleicht mehr Informationen hat
405 über ein bestimmtes Unternehmen und - - - - - das ist eben die physikalische Wahrscheinlich-
406 keit, dass jetzt die Aktie steigt. Das ist aber im Gegensatz zu der risikoneutralen Bewertung,
407 wo man eben sagt, im risikoneutralen Maß ist mein Asset ein Martingal. Da sagt man eben,
408 das ist ein Martingal, - - - die beste Schätzung meiner Aktie, ist der Wert heute, also was
409 sie morgen sein wird. - - - Das sollte man mal vermitteln - - - -

410

411 CD: Das mit der Schätzung, diese Idee?

412

413 FM2: Ja, ja genau.

414

415 CD: Würdest du meinen, dass es noch viel trivialere Fehler gibt auf die die Menschen
416 hineinfallen. Also dahinter ein Martingal zu sehen, da steckt ja schon einiges an Mathematik
417 dahinter?

418

419 FM2: Ja, bzw. das kann man recht einfach an einen Modell in einem Zeitschritt, wo ich
420 eine Aktie habe, die rauf und runter geht, kann ich sagen, ok in meinem Finanzmathema-
421 tikmodell muss ich die Wahrscheinlichkeiten so abändern, dass es ein Martingal ist.

422

423 CD: Also in einem diskreten Modell mit nur einem Zeitschritt

424

425 FM2: Das macht man, glaube ich, in der Einführungsvorlesung, das ist auf jedem Fall
426 in der Oberstufe, also sobald ich Wahrscheinlichkeit habe, also ich glaube in der 7. Klasse
427 wird das gemacht, kann ich das - -. Also das ist leichter als jedes Wahrscheinlichkeitstheo-
428 riebeispiel (lacht), würde ich sagen und klar vermittelbar, meiner Meinung nach. Also auch
429 mit der Replikation und dann zu sehen, wie kann ich meine Option, also den Begriff der
430 Option sollte man mal einführen, sowieso und auch nur, also das was so langläufig, also was
431 vielleicht ein Fehler ist, dass man sagt die Banken sind schlecht, alles rein nur spekulativ und
432 jeder bereichert sich und so, dass es eben doch vielleicht ökonomischen Sinn hat, Optionen
433 zu haben. Natürlich gibt es ein Risiko, natürlich sind sehr viele Fehler passiert. Es wurden
434 Modelle angewandt, die man in dieser Situation nicht anwenden hätte sollen, aber - - alles
435 was in der Finanzbranche passiert ist per se schlecht, dass das einmal vielleicht ein bisschen
436 relativiert wird.

437

438 CD: Ok, das man deiner Meinung nach eben vermittelt, dass man auf das Modell achten

439 soll, das man eben anwendet.

440

441 FM2: Genau, die Finanzmathematik ist nicht eine schlechte Wissenschaft, sondern man
442 muss halt einfach die Voraussetzungen, die da dahinterstehen, die muss man halt berück-
443 sichtigen, wenn man sie auf eine Situation in der Praxis anwendet, so etwas sollte halt in der
444 Schule vermittelt werden.

445

446 CD: Das ist eventuell schon eine zentrale Idee überhaupt der angewandten Mathematik.
447 Das ist schon ein Schritt größer, dass man auf die Modellannahmen achten soll. Gibt es
448 für dich Ideen und Prinzipien aus der Finanzmathematik, die auf mindestens zwei bis drei
449 unterschiedlichen Niveaus aufgezeigt werden können? Wir waren teilweise schon bei dieser
450 Frage, du hast zuvor die 7. Klasse erwähnt.

451

452 FM2: Ob es in der Unterstufe auch funktioniert?

453

454 CD: Die Unterstufe alleine muss kein Kriterium sein.

455

456 FM2: Weiß ich nicht, weil da überhaupt keine Wahrscheinlichkeiten vorkommen.

457

458 CD: Nein es kommen keine Wahrscheinlichkeiten vor!

459

460 FM2: Also ich glaube man muss ja das nicht nur in Mathematik machen. In Geographie
461 und Wirtschaftskunde ist sicher, also in Wirtschaftskunde sollten Finanzmärkte eine Rolle
462 spielen und da auch - einmal Konzepte von Derivaten zu erläutern. Was hat das für einen
463 Sinn und so. Also was ich gar nicht erwähnt habe, Zinstheorie, das ist, glaube ich, auch
464 relevant.

465

466 CD: Was meinst du damit genauer, kannst du das vielleicht auf diesen 2-3 Niveaus
467 ausführen?

468

469 FM2: Auf diesen 2-3 Niveaus, also Zinsrechnung kommt ja vor, glaube ich, ja dann das
470 wird relativ schnell sehr mathematisch. Die normale Zinsrechnung kann man mal machen,
471 dann die verschiedenen Raten, ok dann Konvergenz in so gegen stetige Verzinsung von einfa-
472 chen, ich glaube das macht man und dann kurz ansprechen, wie modelliert man jetzt Zinsen.
473 Das ist natürlich -.

474

475 CD: Wie wird es denn wirklich in der Forschung gemacht?

476

477 FM2: Wie man das in einer Vorlesung einführt?

478

479 CD: Ja zum Beispiel.

480

481 FM2: Man beginnt mit einer Definition von verschiedenen Zinsraten und dann eigentlich
482 schon relativ schnell, wie bekommt man das aus Daten? Was gibt es am Markt? Dann kann
483 man eben besprechen, es gibt so Libor-Raten. Das ist, glaube ich auch für die Allgemein-

484 bildung nicht ganz irrelevant. Was ist eine Libor-Rate? Und es gab ja auch einige Skandale,
485 und man liest davon in der Zeitung und so. Dann eben Ansätze, wie man das Ganze mo-
486 dellieren kann. - Dass man eben sagt, man möchte eben eine Verteilung haben, die positiv ist.

487

488 CD: Aber es findet auf alle Fälle auch definitiv in der Forschung - seine Anwendung?

489

490 FM2: Auf jeden Fall, also die Zinsen sind momentan ein schwierig modellierbares Feld,
491 weil es gibt jetzt eben, so multiple Zinskurven, also eine Zinskurve ist eben, man schaut sich
492 an, es gibt eben Bonds, Anleihen, und die gibt es für sehr viele Laufzeiten. Man schaut sich
493 eben an, eine Zinskurve ist eben eine Abbildung von den Laufzeiten nach $\mathbb{R}^+$, und die muss
494 man eben stochastisch modellieren, da kann zum Beispiel, also das könnte man zum Beispiel
495 auch machen, dass man auf der Internetseite der EZB, kann man sich die Forwardkurve an-
496 schauen und dann sieht man, wie sich die jeden Tag bewegt, das ist ein schwieriges Modell,
497 man muss eben einen Prozess von Kurven - hinschreiben. Das ist wahrscheinlich nicht auf
498 dem Niveau der Schulmathematik. Als Ausblick sozusagen, dass man den Schülern zeigt, ok
499 das ist wirklich was -

500

501 CD: Das ist auch wichtig in der Forschung etc.

502

503 FM2: Ansonsten, also was sich wirklich eignet, wo man auch wirklich was verstehen kann,
504 Das ist eben dieses Beispiel, man hat eine Aktie, eine Zeitperiode, in der kann die Aktie rauf
505 und runter gehen mit Wahrscheinlichkeit, ich weiß nicht, $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{4}$ und dann sagt man ok, wenn
506 ich nun eine Option auf diese Aktie haben, dann muss ich die eben risikoneutral bewerten,
507 weil ich kann sie genau replizieren und wenn ich eben nicht diese risikoneutrale Bewertung
508 mache, dann gebe es Arbitrage. Also ich glaub, das ist ein sehr leicht vermittelbares Konzept,
509 auch schon in der Schule.

510

511 CD: Ok, - wenn du noch etwas hinzufügen möchtest!

512

513 FM2: Aso nein, wenn du noch Fragen hast (lacht).

514

515 CD: Nein, danke für das Interview.

516

19.3 FM3

517 FM3: Die erste zentrale Idee ist das Verwenden von Wahrscheinlichkeitstheorie im Kontext
518 von Finanzmathematik. Das geht zumindest auf Bachelier zurück, der eben einen geradezu
519 mythischen Glauben an die Wahrscheinlichkeit hatte. Nachzulesen in seiner Dissertation,
520 wo der letzte Satz lautet, dass die Finanzmärkte einem Gesetz gehorchen, ohne dass sie es
521 wissen, dem Gesetz der Wahrscheinlichkeit. Da sind wir heute sicher - - weniger, wie soll
522 ich sagen, begeistert oder weniger enthusiastischer unterwegs, sondern sind durchaus etwas
523 kritischer und sehen aber auch die Beschränkungen - , die Limitationen der Verwendung der
524 Wahrscheinlichkeitstheorie. Aber diesen Aspekt überhaupt einzubauen ist eine grundlegende
525 Idee.

526

527 CD: Würden Sie außer Bachelier noch weitere wichtige Personen aus der Geschichte her-
528 vorheben, die wichtige zentrale Aspekte zur Finanzmathematik beisteuern?

529

530 FM3: Die nächste fundamentale Idee scheint mir von Markowitz, die Portfolio-Theorie.
531 Also die Idee, dass - man mit Begriffen hantiert, die auf wahrscheinlichkeitstheoretischen
532 Konzepten basieren, eben Varianz- und Erwartungswert, und dass man hier eine Optimie-
533 rung durchführt, das erscheint mir außerordentlich wichtig und konzeptionell neu. Auch wenn
534 die involvierte Mathematik sich auf lineare Algebra in endlich dimensionalen Räumen be-
535 schränkt, aber nichts desto weniger sind die Ideen hier ganz grundlegend. Dann hier von
536 Markowitz ausgehend diese Ideen der linearen Algebra und der Optimierung, die dann zum
537 Capital-Asset-Pricing-Model und so weiter führen. Das ist der nächste Strang und als dritten
538 Strang würde ich schon die Black, Merton, Scholes, die Idee der Replikation von Derivaten,
539 also dass man im Kontext einer Brown'schen Bewegung, unter gewissen Voraussetzungen, je-
540 des beliebige Derivat perfekt replizieren kann. Das ist mathematisch schon eine verblüffende
541 und anspruchsvolle Idee und es hat enorme Konsequenzen gehabt.

542

543 CD: Und in der neueren Zeit? Oder, Sie können auch Entwicklungen nennen, die nicht
544 an Personen geknüpft sind. Welche wichtigen geschichtlichen Ereignisse würden Sie noch
545 hervorheben?

546

547 FM3: Das sind schon mal die großen Eckpfeiler. Aber natürlich geht es hurtig weiter. Auf
548 der einen Seite ist die Betonung der unvollständigen Märkte ebenso schön und verführerisch,
549 wie die Idee der Replikationen ist, so sehr muss man darauf hinweisen (lacht), dass diese
550 Idee eben zum Teil eine Illusion darstellt. Und das kann ich sagen, das wurde von akademi-
551 scher Seite eben schon seit mindestens 30 Jahren sehr stark betont. Aber bei den Praktikern
552 ist das erst ab 2008, also ab der Krise, wirklich angekommen. So weitere grundlegenden -
553 naja, Optimierung, es ist natürlich auch ein uraltes Thema, Portfoliooptimierung, also auf
554 Markowitz zurückgehend, aber das ist doch in einem dynamischen Kontext mathematisch
555 anspruchsvoller, weil Methoden benötigt und auch zu hübschen Ergebnissen führt, wie etwa
556 die Merton Regel, dass man immer einen gewissen Prozentsatz seines Vermögens in das risi-
557 kolose und das riskante Asset investieren soll. Das sind schöne und wichtige Ideen - , ja dann
558 gibt es darüber hinaus, also zur Zeit aktuelle Dinge, wie dass man Transaktionskosten ernst
559 nimmt, wie zum Beispiel eine Tobin-Tax und sich überlegt, was passiert in deren Präsenz.
560 Oder dass man sich fragt, in wie weit sind Ergebnisse robust, hängen also nicht von der Wahl

561 des Modells ab und so weiter und so fort.

562

563 CD: Nun möchte ich konkret in die verschiedenen Sparten der Finanzmathematik einge-
564 hen. Diese zentralen Ideen, von denen Sie schon einige genannt haben, und die an Personen
565 bzw. historische Ereignisse geknüpft waren, inwiefern spielen diese in den einzelnen Sparten
566 der Finanzmathematik eine Rolle?

567

568 FM3: Ja, ich glaube das habe ich eh schon gesagt, ja aber ich meine die Grundidee,
569 dass man überhaupt das ganze wahrscheinlichkeits-theoretisch betrachtet, naja das zieht sich
570 natürlich vollkommen durch und ist also die allgemein akzeptierte Methode.

571

572 CD: Beziehungsweise würden Sie hier wichtige Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie
573 nennen, die immer wieder in der Finanzmathematik vorkommen?

574

575 FM3: Naja, wichtige Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie sind sicher der Satz von
576 Girsanov oder der Martingal-Darstellungssatz etc. Aber es ist auch umgekehrt: Also ich finde
577 wirklich auch einen konzeptuell schönen Satz, finde ich das Fundamental Theorem of Asset
578 Pricing, das ganz klar die Beziehung zwischen Martingalen auf der einen Seite und Arbitrage
579 auf der anderen Seite herstellt.

580

581 CD: Nun möchte ich weg von der Mathematik zum Alltag gehen. Wo würden Sie sagen
582 spielen zentrale Ideen der Finanzmathematik im allgemeinen Leben eine wichtige Rolle?

583

584 FM3: Im alltäglichen Leben vielleicht nicht so sehr, aber als Beispiel diese Merton-Regel
585 ist zu mindestens im angelsächsischen Bereich durchaus eine allgemein akzeptierte Vorge-
586 hensweise geworden. Die auch im praktischen Denken einer breiten Schicht sich niederschlägt.
587 Dann natürlich auch im Denken der Banken insgesamt, also auch die Idee, dass man in der
588 Bilanzierung und in den Finanzierungsvorschriften wahrscheinlichkeits-theoretische Konzepte
589 nimmt, ist jedenfalls eine große Änderung, die ich mit großen Gefahren verbunden sehe und
590 was wirklich außerordentlich heikel ist. Aber natürlich in den, wo sie von Value at Risk oder
591 irgendwas in der Richtung sprechen, ist das etwas, was ohne mathematische Begriffsbildung
592 einfach nicht möglich ist. Ob es gut oder schlecht ist, ist wieder eine andere Frage, die man
593 länger erörtern müsste.

594

595 CD: Würden Sie sagen, dass es typische Fehler von Leuten gibt, die in der Finanzbranche
596 tätig sind oder die mit Geld zu tun haben, die auf Mangel von finanzmathematischer Bildung
597 zurückgehen?

598

599 FM3: Naja, es ist sicher die unkritische Verwendung, von, jetzt innerhalb der Bank, un-
600 kritische Verwendung von - - - mathematischen Modellen oder mathematischen Begriffen
601 wie Value-at-Risk, ist - sicher gefährlich, wenn man nicht gut weiß, was hinter den Modellen
602 steckt und welche Annahmen hier - getroffen werden. Also zum Beispiel in der Praxis wird
603 sehr sehr viel mit Gaußverteilung modelliert und die - Restriktionen die sich ergeben, da-
604 durch, dass im Finanzbereich der zentrale Grenzwertsatz nicht so ohne weiteres so einfach
605 anzuwenden ist, dass das weitgehend so nicht verstanden wird, aus dem sehe ich große Ge-

606 fahren, wenn Leute in einem etwas naiven Glauben an die Exaktheit der Mathematik solche
607 Modelle unkritisch verwenden.

608

609 CD: Das heißt, ein wichtiger Aspekt ist es auf die Annahmen des Modells zuschauen.
610 Unter welchen Voraussetzungen die gültig sind bzw. der Aspekt des Modellierens, der darin
611 steckt, trifft auch in der Finanzmathematik zu und stellt eine zentrale Idee da, ihrer Meinung
612 nach.

613

614 FM3: Außerordentlich stark (lacht) trifft das zu, aber dass man auf die Annahmen schaut,
615 impliziert insbesondere (lacht), dass man versteht, was da eigentlich passiert und was diese
616 Annahmen bedeuten.

617

618 CD: Abschließend komme ich zum letzten Kriterium: Das vertikal Kriterium. Sie haben
619 nun schon einzelne Ideen beziehungsweise zentrale Aspekte der Finanzmathematik genannt.
620 Könnten Sie diese nochmal auf verschiedene intellektuellen Niveaus ausführen? Sprich zum
621 Beispiel Unterstufe, Oberstufe, Einführungsvorlesung, Forschung etc. Wie könnten Sie das
622 explizit anführen, dass es auch im Unterricht und auch bei einem höheren Niveau eine wich-
623 tige Rolle spielt.

624

625 FM3: Naja, - also, ausgehend vom elementaren Niveau, das sozusagen grundsätzlich das
626 Auf- und Abzinsen sich überlegt, ohne dass man die Schüler allzu sehr quälen sollte damit.
627 Aber da könnte man den Aspekt von Arbitrage und Replikation, kann man hier mit Hilfe von
628 Beispielen von statischer Replikation, also Buy-and-Hold-Portfolios, kann man hier meines
629 Erachtens gut darstellen. Man kann Begriffe wie einen FORWARD-Kontrakt mit - Zinsen in
630 zwei verschiedenen Währungen beispielsweise kann man gut illustrieren und hier - ohne - -
631 fortgeschrittenen mathematischen Kalkül, also nur unter Benützung von elementaren Rech-
632 nungen, eben Begriffe wie Arbitrage oder eindeutige Bewertungen eines Kontrakts einführen.
633 Naja das kann man dann natürlich eben weiterführen, dann kann man eben zu einem Bi-
634 nomialmodell übergehen, wo eben dynamische Replikationsstrategien sind und dann kann
635 man wieder einen Tick weitergehen, dann kann man es in stetiger Zeit machen. Jetzt sind
636 wir irgendwo beim Bachelorniveau. Dann kann man in der Forschung beliebig weitergehen.

637

638 CD: Sie haben vorher auch diesen Aspekt von Markowitz genannt mit Portfoliooptimie-
639 rung. Könnten Sie sich vorstellen, dass das auch auf unterschiedlichen Niveaus durchführbar
640 ist? Diese Idee, die er eingeführt hat bzw. diese große Idee, die da dahinter steckt.

641

642 FM3: Naja, also, wie weit das in der Schule, also in der Sekundarstufe zu machen ist, -
643 weiß ich nicht. Aber in dem Moment, in dem man Begriffe wie Kovarianz verwendet -

644

645 CD: Kommen durchaus schon vor in der Sekundarstufe 2 -

646

647 FM3: Freut mich! Dann kann man das schon machen. Ich darf vielleicht verweisen in
648 meinem Skriptum über Mathematik 2", glaube ich, das ich im zweiten Semester für Be-
649 triebswirtschaftsstudenten verwendet habe, ist das explizit ausgerechnet für ein Beispiel von
650 zwei Stocks, wo eben die auf den ersten Blick verblüffende Tatsache illustriert wird, dass es

651 durchaus möglich ist, dass man bei zwei Stocks, wo der eine, der Stock Nummer 1, in jeder
652 Beziehung besser ist als der Stock Nummer 2, dass es trotzdem einen Sinn machen kann,
653 den Stock Nr. 2 dazu zu erwerben.

654

655 CD: Und auf höherem Niveau, also in der Forschung spielt diese Idee auch noch eine Rolle?

656

657 FM3: Naja - , die Idee, dass man versucht eine Varianz zu minimieren, die kommt bis
658 zu einem gewissen Grade noch vor. Aber da wird es auch von den Fragestellungen schon
659 anspruchsvoller.

660

661 CD: Also der Grundaspekt kommt noch vor?

662

663 FM3: Ja.

664

665 CD: Möchten Sie sonst noch was hinzufügen?

666

667 FM3: Nein. Alles Gute!

668

669 CD: Ich bedanke mich für das Interview!

670

19.4 FM4

671 CD: Wir kommen zur ersten Frage des Interviews. Mir geht es um wichtige historische Er-
672 eignisse und dazu möchte ich jetzt Sie fragen. Welche Entwicklungen bzw. Personen würden
673 Sie ganz besonders herausheben in der Geschichte der Finanzmathematik?

674

675 FM4: Den Louis Bachelier, der sich Gedanken gemacht hat, wie kann ich die Vorgänge
676 auf den Finanzmärkten verbinden mit mathematischer Theorie. Das war erstmals der Link.
677 Der ist sozusagen ganz wesentlich. Alle anderen Dinge, die ,sozusagen, kaufmännisches Den-
678 ken und mathematisches Denken verbunden haben, waren eher kaufmännisch und nicht so
679 finanzmathematischer Natur. Also das was man heute als Finanzmathematik bezeichnet,
680 glaube ich, ist der Bachelier der Pionier. Ich würde ihn grundsätzlich als erste zentrale Per-
681 son nennen.

682

683 CD: Sie würden den als ersten zentrale Person nennen, bzw. was würde danach kommen?

684

685 FM4: Dann noch ganz groß die drei Nobelpreisträger, jetzt müssen Sie mir helfen: Black,
686 Scholes und dann hat es noch einen dritten gegeben -

687

688 CD: - Merton -

689

690 FM4: Merton, genau. Die sozusagen mit Ihrer Optionsbewertung und Ihren Modell, dazu
691 die moderne Finanzmathematik geprägt haben und das sozusagen zum Mainstream-Thema
692 fast schon gemacht haben. Das so breit in die Industrie Eingang gefunden hat. Die waren
693 sozusagen von der Impactwirkung die größten in der Geschichte und daher sind die sozusa-
694 gen . . . , und das ist ja dann schon echt jüngere Geschichte, da das noch keine 50 Jahre her ist.

695

696 CD: Die sind ja eigentlich mittlerweile schon ziemlich umstritten die drei, also nicht als
697 Person, sondern die Theorie dahinter. Ahm, würden Sie sagen, dass sie damals zu Recht den
698 Nobelpreis bekommen haben?

699

700 FM4: Da tu ich mir jetzt schwer, dass ich das kritisiere, was das Nobelpreiskomitee aus-
701 gewählt hat. Ist sicher eine große wissenschaftliche Leistung gewesen, die man natürlich viele
702 Jahre danach kritisch sieht, die aber für die Zeit damals eine große Errungenschaft war und
703 die auch heute noch diese Errungenschaft nachwirkt, auch mit seinen Fehlern. - Liegt nicht
704 bei mir, das zu beurteilen, ob das Nobelpreiskomitee da richtig urteilt und es ist eine große
705 Leistung, und gehört auch dementsprechend gewürdigt, deswegen würde ich auch sagen der
706 Bachelier historisch zuerst und die vom Impact zuerst zu nennen und deswegen sind das die
707 zwei Dinge, die ich hier ansprechen will.

708

709 CD: Sie haben jetzt immer wieder Personen genannt. Ich weiß, dass die historischen Ent-
710 wicklungen fast immer auf Personen zurückgehen. Möchten Sie noch Entwicklungen nennen,
711 die jetzt nicht mit einer Person verknüpft sind?

712

713 FM4: Das ist aufgelegt, von der Frage her, das ist sozusagen die Krise und das Stichwort
714 Weapons of Math destruction. Was da passiert, oder wie die Rolle die Finanzmathematik

wirklich in der jüngsten Geschichte, sozusagen also in den letzten 5, 6, 7 Jahren, sozusagen was es da für Entwicklungen gegeben hat. Was es für Rückkoppelung oder Rückauswirkung auf unsere Realwirtschaft gehabt hat. - Da gibt es wahrscheinlich auch, Personen zu nennen, aber das sind dann nicht mehr Personen aus der Finanzwissenschaft, sozusagen aus der Finanzmathematik, sondern das sind sozusagen Anwender, die die Modelle verwendet haben oder vielleicht auch Modelle im kleinen weiterentwickelt haben, Produkte verkauft haben und die halt dann eine große Rückkoppelung auf die Wirtschaft gehabt haben. Das ist auch eine wesentliche Entwicklung, die anzusprechen ist.

723

CD: Ich komme zur nächsten Frage, das ist das sogenannte Horizontalkriterium. Ich habe es vorhin beim Optimieren schon erwähnt. Optimieren spielt ja in verschiedenen Zweigen der Mathematik eine wichtige Rolle und wir gehen jetzt wieder zur Finanzmathematik zurück. Welche Prinzipien, Idee spielen Ihrer Meinung nach in den verschiedenen Teilbereichen der Finanzmathematik eine wichtige Rolle bzw. werden immer wieder sichtbar? - - - Sie können ruhig an mathematische Definitionen, Begriffe, Sätze denken, die immer wieder auftauchen, immer wieder eine wichtige Rolle spielen.

731

FM4: Was ich vorhin nicht so stark hervorheben wollte, es geht um Schule. Da ist ganz wesentlich, die Grundidee, die Idee von Deduktion von Beweis. Wegzukommen von "Das ist eh plausibel", sondern sozusagen das ganz sauber durch zu argumentieren, und zu sagen: „Es ist logisch zwingend, dass wenn ich von dem ausgehe, dass ich zu diesem Ergebnis komme“. Das ist für mich jetzt eine Mathematiker-Herleitung, ein Gedankengang. Was ist für mich also eine zentrale Idee: Der Satz von Thales. Das ist jetzt nicht Finanzmathematik, das ist aber für mich persönlich das erste Mal, wo mir Mathematik in der Schule begegnet ist. Naja, der Winkel im Halbkreis ist immer ein rechter. Da kann ich mir viel dazu überlegen, und da kann ich viele Beispiele dazu finden. Dadurch wird es noch nicht bewiesen, aber dann überlege ich mir naja, Dreieckssumme, Winkel 180° bla bla, dann komme ich irgendwie drauf, das müssen genau 90° sein. Und genauso ist es auch in der Finanzmathematik, da ist es dann ganz wichtig, sich zu überlegen, ist es wahrscheinlich, dass es so ist oder ist es oft so, oder finde ich ein paar Beispiele dafür. Sondern sich zu überlegen, zentrale Frage in der Mathematik, wie ist der Optionspreis? Sich zu überlegen, gibt es einen eindeutigen Optionspreis und kann ich den eindeutig berechnen? Wenn ich vielleicht irgendwelche anderen Annahmen zu Grunde legen über die Dynamik des Aktienpreises etc. Und dann muss ich vielleicht nicht einmal, und das ist ein ganz wesentliches Element zum Beispiel grundlegender Fragen in Finanzmathematik, ich muss gar nicht wissen, wie der Aktienkurs morgen ist, aber ich weiß trotzdem wie der richtige Optionspreis dafür heute ist, wenn ich sozusagen die Dynamik oder den Prozess, die Entwicklung von dem Aktienkurs kenne, ohne den einzelnen Preis, ohne den einen Pfad zu kennen. Die Summe der Pfade die möglich sind, dann kann ich mir einen Optionspreis ausrechnen. Ich glaube, das ist ganz eine zentrale und wichtige Idee für Menschen, die noch nicht viel mit Finanzmathematik zu tun gehabt haben, dass sie es sozusagen kennenlernen.

755

CD: Es ist immer eine mathematische Modellierung, die dahinter steckt, also man nimmt natürlich gewisse Annahmen. Was würden Sie als ganz zentrale Modellierungsidee der Finanzmathematik sehen?

759

760 FM4: - na, Stochastische Prozesse.
761
762 CD: Stochastische Prozesse, ja.
763
764 FM4: Oder geht es an der Frage vorbei?
765
766 CD: Nein, nein Sie haben immer Recht.
767
768 FM4: (Lacht) Stochastische Prozesse, das ist sozusagen ein ganz wesentliches Element,
769 mit dem man sozusagen vertraut sein muss, wenn man Finanzmathematik machen will.
770
771 CD: Bei diesen Optionspreisberechnungen, würden sie es als wichtig für die Schule anse-
772 hen?
773
774 FM4: - - Es ist schon eine fortgeschrittene Idee, also für junge Schüler nicht, aber es ist, so-
775 zusagen, ein ganz ein großes Kernthema. In der Schule, ich würde sagen, ist für einen Schüler
776 nicht so direkt brauchbar, aber da geht es ja auch um sozusagen Bildung und da es ist sicher
777 gut, wenn man sich mal mit dem Thema auseinandersetzt, eben mit dieser Grundidee. Ich
778 habe einen stochastischen Prozess und ich muss vielleicht nicht den Preis von der Aktie am
779 nächsten Tag kennen, trotzdem kann ich mir heute schon den Optionspreis ausrechnen. Also
780 muss man jetzt, kann auch einfache Sachen machen, wie so ein binäres Modell, Binomial-
781 Model. Da ein bisschen was aufzeichnen, dass versteht ein Schüler auch und dann bekommt
782 er eine Grundidee, die Sie ihm mitgeben. Er muss jetzt nicht wissen, was eine Brown'sche
783 Bewegung ist und komplexe Sachen, aber sozusagen so ein Binomial-Modell ist sicher wert-
784 voll, glaube ich auch für Anfänger. Und man braucht auch keine komplexe Mathematik dazu.
785
786 CD: Es ist wichtig, dass wir die komplexe Mathematik weglassen. Die Brown'sche Bewe-
787 gung an sich, ist ja schon dermaßen kompliziert, dass man sie in der Schule nicht wirklich
788 vermitteln kann, weil dahinter ein ganzer - Patzen an Theorie steckt von Maßtheorie über
789 Stochastik und höhere Wahrscheinlichkeitsrechnung, das man ja alles dafür benötigt um das
790 in einem -, sagen wir, intellektuellen ehrlichen Rahmen zu machen, dass es dann für die
791 Schule schon sehr schwierig wird.
792
793 FM4: Was auch noch wesentlich ist sozusagen, ist das Zurückrechnen. Das ist auch noch
794 so ein Ding, mit dem vielleicht ein Schüler oder ein junger Mensch noch nicht so vertraut ist
795 sozusagen. Ich kenn natürlich dann am Ende des Tages die Auszahlungsbeträge sozusagen
796 von den Optionen, und dann beweg ich mich sozusagen in den Zeitschritten hin zur Gegen-
797 wart von der Zukunft sozusagen, sodass man auch mit dem Konzept vertraut wird.
798
799 CD: Sie meinen das Diskontieren bzw. das Abzinsen.
800
801 FM4: Ja, genau und sich auch überlegen, in dem Szenario 1 schaut es so aus, und da ist
802 mein Payoff so viel und in dem anderen ist es so viel. Und jetzt bin ich genau einen Zeitschritt
803 sozusagen davor, also ich bin heute zu T und dann gibt es $T+1$ und dann gibt es $T+2$ und
804 zu $T+2$ wird es fällig. Und wie schauen meine Auszahlungsprofile von den Optionen zum

805 Zeitpunkt $T+1$ zum Beispiel aus, wie schauen sie zum Zeitpunkt $T+2$ aus. $T+2$ ist sozusagen
806 einfach, weil da habe ich einfach ja nur das, und vielleicht einen davor, wie schaut es dort
807 aus sozusagen, das Rückwärtsrechnen in der Zeit sozusagen, dass man nicht vorwärtsgeht
808 in der Zeit, sondern vielleicht auch rückwärts gehen kann, und dann lande ich irgendwann
809 am heutigen Tag und dann finde ich für den heutigen Tag einen fairen Optionspreis. Das ist
810 vielleicht auch noch ein neuer Gedanken vielleicht für einen jungen Menschen, der vielleicht
811 noch nicht so angelernt ist, dass ist vielleicht wertvoll.

812

813 CD: Würden Sie sagen, dass noch ein anderes Prinzip dahintersteckt? Wie würde man
814 diesen Optionspreis berechnen?

815

816 FM4: Das ist jetzt schon eine Prüfung (lacht)!

817

818 CD: Wir waren jetzt schon sehr im Detail, einen Schritt hinaus, finde es fast zu detailliert.

819

820 FM4: Das habe ich eh so gemeint.

821

822 CD: Wenn Sie an wichtige Sätze denken -soll wieder keine Prüfung sein- oder an wichtige
823 Begriffe, die bei Ihnen hängen geblieben sind, welche sind das?

824

825 FM4: Ich versuche mich jetzt, weg zu bewegen von der höheren Mathematik, also was
826 für Studenten geeignet ist, und umzudenken was durchaus für Schüler brauchbar ist.

827

828 CD: Es kann ruhig auch ein Satz aus der höheren Mathematik sein, der zentral für sie war.

829

830 FM4: Da bin ich einfach zu weit weg von der Realität, dass mir jetzt spontan ein Satz mit
831 . . . Ich kenn das natürlich, aber habe Wortfindungsprobleme mit dem No-Arbitrage-Prinzip.
832 - - - Ich würde sagen, aber das kann ich jetzt auch nicht im konkreten benennen sozusagen.
833 Die Wahrscheinlichkeitstheorie - ja, die zentral sind, - was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum
834 und ja solche Sachen. Ich würde davon ausgehen, das einfachste ist das Binomial-Modell,
835 sprich da habe ich lauter endliche Wahrscheinlichkeitsräume. Sich dort zu bewegen, dort
836 lernt man das einfach kennen und da kann sich auch jemand, der noch nicht mit dem brei-
837 ten Theoriewerkzeug ausgestattet ist, mit Unendlich und Messen und Fast-sicher und alle
838 diese Feinheiten fallen dann natürlich weg. Das, glaube ich, wäre dann auch zielführend und
839 fruchtbringend, damit ist der Schüler oder der junge Mensch nicht überfordert, aber sozus-
840 agen da man mit den wesentlichen Ideen von Wahrscheinlichkeitstheorie vertraut ist.

841

842 CD: Danke, wir wandern nun weiter von der Mathematik und versuchen einen Bezug
843 zum alltäglichen Leben zu finden. Haben für Sie bestimmte finanzmathematische Ideen eine
844 Entsprechung im Alltag, oder sind in einer gewissen Art und Weise im Alltag auffindbar?
845 Was fällt Ihnen dazu ein? Wo sagen Sie, das ist ein Know-How, das braucht man unbedingt
846 oder das sollte jeder mündige Bürger haben? - - -

847

848 FM4: Ein Gedanke, ich muss nicht unbedingt den Aktienkurs von morgen kennen, auch
849 wenn ich sage, der heutige Preis ist die beste Schätzung von morgen bzw. für den morgen

850 abdiskontierten (lacht). Also ich muss den Kurs morgen nicht kennen trotzdem kann ich
851 heute schon Aussagen über den Optionspreis zum Beispiel treffen. Das mal eine Sache und
852 dann ist auch ganz wesentlich sozusagen und das ist ja die Grundidee der Finanzmathema-
853 tik, oder No-Arbitrage, ich muss die Idee von Portfolio kennen. Ich muss diese beiden Dinge
854 zusammengeben und das würde dann heißen - und dann kommt sozusagen das Ding dazu,
855 was ist Risiko. Ich bin risikofrei oder ich kenne den Preis sicher, wenn ich sozusagen für ein
856 Portfolio - , den Preis sozusagen, ich habe ein Portfolio, das unabhängig vom Szenario, geht
857 der Aktienkurs rauf oder runter, mein Portfolio ist gleich viel wert und daher kann ich dann
858 rückrechnen, das ist diese Grundidee, das würde ich sagen, das ist was Wesentliches für den
859 Alltag. Und es hängt sozusagen dann auch damit zusammen, was bedeutet Risiko, dass man
860 das vielleicht besser verstehen lernt. Risiko ist auch eng damit verwandt sozusagen, mit dem
861 Wort Hedgen? Das Portfolio aufstellen heißt ja dann, sozusagen, ich muss einen Hedge für
862 meine Aktie finden und ob die Aktie rauf oder runter geht ist mir dann egal, wenn ich das
863 Portfolio habe, nämlich Aktie plus Option oder plus verkaufte Option oder wie auch immer.
864 Ich habe dann ein Portfolio, dessen Wert konstant ist und sozusagen ich bin gehedget, ich
865 habe das Risiko rausgegeben. Einen Risikotransfer zu bewerkstelligen, das ist ja dann auch
866 die Grundidee von Finanzwirtschaft, ja sozusagen ich habe viele Einzelne, die Risiken ha-
867 ben und ich pool die und gleiche die dann gegeneinander aus. Dann kann es natürlich auch
868 sein, wenn ich irgendwo im Eck bin, irgendwo in einer Extremsituation. Viele Häuselbesitzer
869 sozusagen bekommen Probleme in Chicago oder in ganz Amerika und auf der ganzen Welt.
870 Und sozusagen, die Risiken davon sozusagen zu verstehen. Einfach im Binomial-Modell und
871 auf der anderen Seite sozusagen, wie können sich Risiken sozusagen häufen. Das ist, glaube
872 ich, ganz wesentlich für Finanzmathematik, das Auge zu schärfen für was bedeutet Risiko.
873 Das geht Eng einher mit, das habe ich eh schon gesagt, mit Hedgen und sozusagen mit
874 fortgeschrittenem, mit Modellkritik. Vielleicht reagiert das Modell so, wie ich es glaube, aber
875 in Extremsituationen reagiert es anderes oder vielleicht sogar gegenteilig, als wie es norma-
876 lerweise reagieren würde, dass man sich über solche Sachen mal diskutiert und nachdenkt,
877 dann, glaube ich, nimmt man was Wertvolles mit für den Alltag.

878

879 CD: Sie meinen also Risiko ist ein ganz zentraler Begriff und jeder Mensch sollte sich im
880 Klaren sein, wenn er im Finanzmarkt tätig ist, dass er ein gewisses Risiko eingeht.

881

882 FM4: Genau und wie er mit dem Risiko umgeht. Hedgen heißt ja genau das Gegenteil, ich
883 habe ein Risiko, ich denke da an Björk erstes Kapitel. Ich bin mit meiner Exportwirtschaft
884 in meiner Industrie beschäftigt, da ist es ganz natürlich, dass ich Risiko habe. Vielleicht will
885 ich aber dieses Risiko nicht haben, weil ich lieber abhängig bin von meinem Geschäftsmodell
886 und nicht von dem Dollarkurs oder vom Kronenkurs, ich glaube schwedische Kronen sind
887 es bei ihm. Deshalb versuche ich das Risiko, das eigentlich nicht meinem Geschäftsmodell
888 innewohnt, rauszubekommen und dafür kaufe ich mir einen Hedge. Das ist ja sozusagen was
889 Risikominimierendes. Einstieg in diesen Finanzderivatemarkt ist Reduktion von Risiko. Das
890 ist sozusagen diese Grundidee, das ist auch wieder erstes Kapitel von „Arbitrage Theory
891 in Continous Time“ oder so. Das zu verstehen, Risiko, was bedeutet das, kann vielleicht
892 sozusagen ein Derivat, eine Reduktion, genau dazu ist es ja eigentlich da, eine Reduktion
893 von Risiko sein, und dann sagen wir vielleicht, die bissl kritischere Sicht, natürlich kann ich
894 das auch sozusagen ohne das Grundgeschäft kaufen und dann hab ich kein Risiko. Kauf mir

895 aber durch das Derivat aber ein Risiko ein. Das zu verstehen, wie wirken die Dinge und was
896 passiert dann auch, das ist vielleicht auch dann nicht eine direkt finanzmathematische Fra-
897 ge, aber sozusagen das ist wichtig, dass man es fürs Leben lernt. Das war ja die eigentliche
898 Frage. - - Wo, wie passiert der Risikotransfer und wohin geht das Risiko. Zum Beispiel wie
899 ich vorhin gesagt habe, die Bank gibt sozusagen Privatkredite an Privatpersonen sozusagen
900 her. Von wo nach wo passiert da ein Risikotransfer? Was bedeutet zum Beispiel, das ist auch
901 nur mal eine grundsätzlichere Idee, die ich schon viel vorher nennen hätte sollen, die Diversi-
902 fikation sozusagen, ist auch noch ein ganz wesentliches Element. Für Sie ist Ihr Ausfall fatal
903 für Ihn, der jetzt nicht da sitzt, ist auch der Ausfall sozusagen fatal. Wenn ich Ihre beiden
904 Risiken nehme, also wenn jetzt einer von den beiden ausfällt, ich jetzt als Bank, dann kann
905 ich vielleicht noch damit umgehen, weil ja eh den anderen haben und von dem kriege ich
906 auch noch was, also wenn Sie viele wären. Diversifizierung sozusagen und was das bewirkt
907 und dann bleibt aber noch eine Restrisiko sozusagen bei mir über. Und auf der anderen Seite
908 dann auch noch das to Big to fail, wenn ich ausfalle dann haben Sie beide oder sie alle ein
909 Problem sozusagen, dass Sie das umdrehen können. Dass man das als Systemkritik versteht
910 und auch einmal thematisiert wird mit jungen Menschen, das ist absolut notwendig für eine
911 gesunde Allgemeinbildung.

912

913 CD: In einem Wort zusammengefasst, meinen Sie Handhabung von Risiko.

914

915 FM4: Ja, genau, ist gut!

916

917 CD: Zu meiner letzten Frage, bzw. letztem Kriterium: Wie können diese Ideen, Prin-
918 zipien auf verschiedenen intellektuellen Niveaus auf einer gewissen ehrlichen intellektuellen
919 Art durchgeführt werden? Denken Sie an Schule, Einführungsvorlesung und Forschung. Sie
920 haben ja selber geforscht, wenn Sie sich das wieder eine Stufe drunter vorstellen. Welche
921 Prinzipien, Ideen könnten Sie sich vorstellen, die nur auf zwei drei Niveaus durchführbar
922 sind und immer wieder vorkommen.

923

924 FM4: Das verstehe ich nicht, was muss ich machen? Soll ich das Thema Diversifikation
925 den drei Ebenen zuteilen.

926

927 CD: Ja genau, oder wenn Ihnen noch etwas Neues einfällt, dann zu diesem Thema.

928

929 FM4: - - Alle Sachen, die ich bis jetzt gesagt habe, eignen sich schon, - hoffentlich in softer
930 Form. Also Binomialmodell sozusagen für Schüler, also Sekundarstufe, ist durchaus drinnen
931 und es können dann sozusagen in einem theoretischen Setting aufgearbeitet werden oder soll-
932 ten aufgearbeitet werden, in einer Einführungsvorlesung im Grundstudium, also noch nicht
933 Dissertation und so. Aber sozusagen was ist ein Stochastischer Prozess und wie lässt sich
934 das sozusagen nicht nur auf endlichen und unendlichen Ereignisräume ausdehnen. Das hätte
935 ich sozusagen dort gesehen und ja die Aufgabe der Forschung fällt mir schwer, das wären
936 dann Fragestellungen die an den Stellen entstehen, sozusagen die Neuerkenntnisse gewinnen.

937

938 CD: War jetzt ihr Beispiel für Diversifikation oder für No-Arbitrage oder für beide? Auf
939 was wollten Sie sich beziehen?

940

941 FM4: Ich habe mich bezogen - -

942

943 CD: Oder sogar auf das Binomialmodell?

944

945 FM4: Ich glaube es funktioniert, sozusagen für alle. Man kann das Binomialmodell sozu-
946 sagen den Schülern zeigen, man kann den Schülern erklären was eine Diversifikation ist und
947 wie das sozusagen wirken kann und was dann mit Risiken passiert, wenn man diversifiziert.
948 Und genau so kann das auch mit No-Arbitrage-Modell, was ja sozusagen ein Teil von Bino-
949 mial, dort komme ich ja mit dem Grundgedanken, oder vielleicht muss man den Schülern das
950 No-free-lunch, kann man ihnen vielleicht noch verkaufen, aber sozusagen, No-Arbitrage, das
951 würde sie vielleicht schon etwas überfordern. Da sehe ich genau den Unterschied zwischen
952 Schule und Einführungsvorlesung. In der Schule würde ich sagen, das ist, was habe ich vorher
953 gesagt, da lasse ich die Schüler das in dem einfachen Ein- oder Zweischrittmodell bewerten
954 und die werden dann draufkommen, naja wenn ich das Portfolio habe, dann hat es immer
955 den gleichen Wert. Sie haben nicht verstanden, dass das sozusagen ein No-Arbitrage-Modell
956 ist oder No-Arbitrage-Portfolio ist, sie verstehen die Wirkungsweise und ihnen ist klar, dass
957 es nur einen Optionspreis geben kann. In der Einführungsvorlesung sozusagen kann ich das in
958 ein theoretisches Setting setzen. Und kann sagen, wir werden jetzt immer wann wir irgendein
959 Derivat haben nicht nur einen Put oder sondern auch irgendwas anderes dann werden wir
960 immer sozusagen ein Portfolio finden oder das Portfolio heißt ja, klingt ein bisschen so nach
961 statisch, ich kann natürlich sozusagen auch eine Investmentstrategie finden, die sich natürlich
962 dann auch immer ändert, abhängig vom Aktienkurs oder vom Payoff-Profil sozusagen. Dann
963 muss ich es dann komplexer machen und das wäre einem Studenten dann zuzumuten. - -

964

965 CD: Das ist genau das, wie ich es haben wollte. Sie haben es genau genannt wie es in der
966 Schule sein könnte, die Idee No-Arbitrage obwohl man es nicht explizit benennt, steckt es ja
967 dahinter. Man lernt es auf eine gewissen Art und Weise und man kann es im Studium, dann
968 machen und höchstwahrscheinlich braucht man es in gewissen Modellen in der Forschung
969 genauso noch? Möchten Sie noch irgendetwas hinzufügen?

970

971 FM4: Meine Privatmeinung, unabhängig von Finanzmathematik. Ich finde es gut, wenn
972 man sich in der Schule mit Finanzmathematik auseinandersetzt. Man sollte es aber sozusagen
973 nicht übertreiben, in dem Sinne was ich vorher gesagt habe. Ein bisschen kaufmännisches
974 Rechnen ist auch nicht schlecht, das ist zwar jetzt nicht echte Finanzmathematik, aber wenn
975 das auch vorkommt, dann ist das durchaus vernünftig, weil es wahrscheinlich die Probleme
976 von viel mehr Menschen sind, nicht wie bewerte ich so eine Option richtig. Aber wie rech-
977 ne ich oder was bedeutet der Zinssatz von meinem Kredit, den ich vielleicht einmal habe,
978 wenn ich Student bin oder was. Wie gehe sozusagen damit um, das ist vielleicht wichtig
979 oder ah das kann auch Finanzmathematik dann schon sein, nicht in dem Sinn, wie wir jetzt
980 darüber geredet haben, aber zum Beispiel, was bedeutet das für mich, ich habe Schulden
981 bei der Bank und dann sinkt oder steigt das Zinsniveau. Was hat das für Auswirkungen auf
982 mich, habe ich dort eine fixe oder eine variable Verzinsung bei der Bank, welche Konsequen-
983 zen hat das für meine Verschuldung. Das ist unabhängig von No-Arbitrage-Finanz, was wir
984 und ich wahrscheinlich unter Finanzmathematik verstehen. Aber sozusagen Zinsrechnung

985 ist auch schon Versicherungsmathematik und ist auch ein wesentliches Element und sollte
986 auch in der Schule noch stärker, ohne dass ich jetzt die Lehrpläne im Detail kenne, sein. Es
987 ist durchaus vernünftig sozusagen nicht nur Finanz- sondern auch Versicherungsmathema-
988 tik, Zinsrechnung sozusagen das auch verstärkt den Schülern sozusagen näherzubringen und
989 auch den jungen Studenten durchaus.

990

991 CD: Sie haben jetzt noch einen wichtigen Punkt hinzugefügt, der zu allen Kriterien passt.
992 Es spielt eine wichtige Rolle, sofern man einen Kredit aufnimmt oder ein Sparbuch hat. Das
993 hängt ja eigentlich zusammen.

994

995 FM4: Das meine ich auch bei Risikobetrachtung. Man sollte sich Gedanken machen, wie
996 ändert sich die Risikoposition, wenn ich Schuldner oder Gläubiger bin. Habe ich ein Spar-
997 buch oder einen Kredit. Der Schüler sollte drüber nachdenken, der Karl hat das Sparbuch,
998 die Maria hat den Kredit. Wie wirkt es sich aus, wenn die Zinsen fallen? Für den einen ist es
999 gut, für den anderen schlecht. Was passiert momentan, mit den andauernd fallenden Zinsen
1000 in unserer Volkswirtschaft? Ja!

1001

1002 CD: Das Prinzip, wie man eine Bank finanziert. Man nimmt sich einen Kredit und spart
1003 nebenbei noch. Das Auf- und Abzinsen spielt auch in großen Modellen eine wesentliche Rol-
1004 le. Es erfüllt ein Vertikalkriterium, spielt im Alltag einen Sinn und kommt in verschiedenen
1005 Bereichen der Finanzmathematik vor und hat auch sicher irgendwann seine geschichtliche
1006 Bedeutung. Ja, gut, besten Dank!

1007

1008 FM4: Bitte gerne!

19.5 FM5

FM5: Naja, also bei den Entwicklungen, ein für mich ganz zentrales Thema ist die Definition des Risikos, was man als Risiko erfasst und ahm, in dem Sinne auch, in der Nähe auch die Optimierung, also man will Beträge optimieren unter gegebenem Risiko, zum Beispiel in diese Richtung, zum Beispiel Portfoliooptimierung, also das heißt ein zentraler Punkt ist, wie man Risiko überhaupt definiert und erfasst, weil es sehr unterschiedlich ist, wie man jetzt Risiko definieren kann, ob es jetzt darum geht, dass du Varianzen hast, ob es darum geht, dass du Quantile einer Verteilung anschaust, Expected short fall von einer Verteilung anschaust, also das sind jetzt ganz unterschiedliche Aspekte eigentlich, da sind auch Risikomaße sehr relevant, also das Risiko ist eine ganz wesentliche Entwicklung in der Finanzmathematik, also das herauszuarbeiten, was das sein kann und ah.

CD: Seit wann gibt es diese Entwicklung in der Finanzmathematik?

FM5: Puh, ich selbst, ahm Risiko an sich, ahm, wenn es ganz einfach um Varianzen geht schon ziemlich lang, ich bin aber nicht wirklich geschichtlich so bewandert in der Finanzmathematik, wie das genau eingeordnet ist - - - Ich hätte jetzt einfach diese ganze Portfoliooptimierung, das ist nach dem zweiten Weltkrieg, so in den 50er und 60er Jahren, also wo dann Ökonomen darüber diskutiert haben, wie man Portfolio optimiert, da gibt es dieses Capm-Modell.

CD: Ist das Capm die Weiterentwicklung der Portfoliooptimierung?

FM5: Wie, was ist die Weiterentwicklung? Ah, das Capm ist die Weiterentwicklung der Portfoliooptimierung, ahm ja es kommt ganz darauf an, wo man den Anfang setzt, genau, ja, ja! Genau das war das Risiko, ein ganz wesentlicher Punkt, dann wenn ich noch Brainstorming mache, also was mir noch einfällt, wenn sozusagen wesentlicher Punkt der Märkte an sich, also wenn man Finanzmathematik betreibt, und was es viel einfacher macht, ist die Arbitragefreiheit. Das Herausarbeiten wie Arbitragefreiheit in Märkten gesichert ist, das sind, also das ist auch ein ganz wesentlicher Punkt, weil es auch theoretisch ein wesentlicher Punkt ist. Was mir noch einfällt, sind im Zusammenhang mit der Arbitragefreiheit, wenn man die Arbitragefreiheit voraussetzt, Bewertungsmethoden von komplizierten Produkten aufgrund der Arbitragefreiheit, das geht von ganz einfachen Sachen, wie ich weiß nicht Forward-Rate-Agreements bis zu Bewertungsmethoden von komplizierten Optionen. Wenn ich sonst noch, ahm, in dem Sinne von den Bewertungsmethoden, also auch Handel mit Aktien, ob das jetzt zeitdiskret ist oder zeitstetig ist, also die Zeitkomponente, aber auch ganz wesentlich die Verteilungskomponente, also wenn im Wesentlichen die Komplexität daher kommt, wie die Verteilung der Log>Returns einfach ausschaut von den Aktien, also ob das eine einfache Normalverteilung ist.

CD: Du bist ja jetzt schon einen Sprung weitergegangen. Ich möchte nun fragen, wie diese Ideen die du gerade nennst oder ob dir auch neue einfallen, wie die in den Teilbereichen der Finanzmathematik vorkommen, sprich ob die wirklich auch breit über die Finanzmathematik vorkommen. Du hast Arbitrage genannt, du hast Portfoliooptimierung genannt, dein letztes was du genannt hast, war dann eben schon die Bewertung -

1053 FM5: die Bewertung von gewissen Optionen über Arbitragefreiheit oder Handel einfach
1054 -
1055
1056
1057 CD: Ja, Handlungsstrategien. Spielen die immer wieder eine wichtige Rolle in der Fi-
1058 nanzmathematik, oder sozusagen spielen die wirklich in verschiedenen Teilbereichen der Fi-
1059 nanzmathematik, sofern sich diese noch einmal unterteilen lässt - -
1060
1061 FM5: Ja, also bevor ich das beantworte, oder versuche zu beantworten, vielleicht die
1062 Finanzmathematik an sich, das hätte mich interessiert, wie weit der Begriff Finanzmathe-
1063 matik gefasst wird. Weil äh, für mich an der Universität Finanzmathematik etwas anderes
1064 als außerhalb der Universität.
1065
1066 CD: Ja, das stimmt, vielleicht bist du von der Universität gewohnt, das es die stochasti-
1067 sche Finanzmathematik ist - -
1068
1069 FM5: Genau, vor allem auf Marktrisiko aus - -
1070
1071 CD: Genau, und wo es darum geht verschiedenste Optionen zu bepreisen in verschieden-
1072 sten Modellen etc. - - In der Öffentlichkeit bzw. im Alltag ist Finanzmathematik viel breiter
1073 gefasst, aber es darf durchaus viel breiter gefasst sein für das Interview.
1074
1075 FM5: Es hätte mich interessiert, wie es zum Beispiel, weil in der Aufsicht ist halt ganz
1076 wesentlich, doch nur jetzt das Risiko von Marktrisiko oder zum Beispiel das Kreditrisiko, ob
1077 das Kreditrisiko jetzt auch unter Finanzmathematik fällt, weile dann würde ich Statistik als
1078 ganz wesentlichen Punkt sehen. Aber jetzt nicht in der Forschung, sondern im Verständnis
1079 einfach von Risiko.
1080
1081 CD: Sie wird sozusagen in der Praxis angewendet?
1082
1083 FM5: Statistik oder was?
1084
1085 CD: Ja.
1086
1087 FM5: Ja, ja genau, statistische Modelle einfach.
1088
1089 CD: Sie spielt eine große und wesentliche Rolle?
1090
1091 FM5: Ja so was, wie man von Daten auf irgendwelche Implikationen kommt.
1092
1093 CD: Würdest du außer diesen Begriffen, die du schon genannt hast, noch zusätzliche
1094 erwähnen, beziehungsweise denk auch an wichtige Definitionen und Sätze, die dir jetzt spon-
1095 tan einfallen, jetzt wieder aus dem theoretischen Teil der Finanzmathematik, die wirklich
1096 eine wichtige Rolle spielen.
1097

1098 FM5: Eine wichtige Rolle, also Definitionen und Sätze einfach?
1099
1100 CD: Ja, ja, quer durch, wo du meinst das war ganz was Zentrales!
1101
1102 FM5: Hm, ja, ich mein ein ganz wesentlicher Punkt ist die Charakterisierung der Arbi-
1103 tragefreiheit die Hauptsätze der Finanzmathematik- - -
1104
1105 CD: Du meinst diese fundamentalen Theoreme?
1106
1107 FM5: Ja genau, das fundamental Theorem of Asset Pricing zum Beispiel auch, das, also
1108 wenn wir von Arbitrage reden, ansonsten - - wesentlicher Punkt jetzt, ich denke jetzt immer
1109 an Risikomessung, ist mir jetzt eingefallen, Value-at-Risk, also die Probleme der Value-at-
1110 Risk-Messung, das es kein kohärentes Risikomaß ist zum Beispiel, das war ein Punkt der mir
1111 noch einfällt, für mich ist sehr viel stochastische Analysis dabei. Also das heißt der ganze
1112 Itô-Calculus der da dahinter steckt, wenn man das jetzt zeitstetig oder zeitdiskret anschaut,
1113 oder die ganze Martingal-Theorie, das sind für mich ganz wesentliche Entwicklungen, wenn
1114 wir zur ersten Frage zurückkommen.
1115
1116 CD: Also, sprich Entwicklungen aus der Mathematik, die dann wichtig waren für die
1117 Finanzmathematik.
1118
1119 FM5: Genau ja.
1120
1121 CD: Also eben aus der stochastischen Analysis, die eben einen eigenen Calculus ent-
1122 wickelt hat für diese zeitstetigen Modelle um das ganze durchzuführen. Nun möchte ich
1123 einen Schritt weggehen von der ganzen Theorie zum Alltag, wie würdest du Entsprechungen
1124 im Alltag finden, inwiefern braucht man hier zentrale Ideen als Durchschnittsbürger bzw.
1125 auch als Praktiker.
1126
1127 FM5: - - wesentliche Punkte, glaube ich jetzt, wenn man es anwendet als Durchschnitts-
1128 bürger, ist das Verständnis von Zinsen, glaube ich, Zinseszinsrechnung auch, also eigentlich
1129 ganz unter Anführungszeichen einfache Grundsteine, in dem Sinne aber auch Bewertung von
1130 Rückflüssen, Cash flows, Zahlungsrückflüsse, Anleihen zum Beispiel, Anleihenbewertung, die
1131 ja ganz einfach zur Zinseszinsrechnung dazugehört. Die ÖNB führt in jährlichen Abschnitten im-
1132 mer eine Umfragen zum wirtschaftlichen Verständnis innerhalb der Bevölkerung durch, und
1133 das ist auch immer eine Standardfrage, und wenn der Marktzins steigt, fallen oder steigen
1134 dann die Marktpreise der Anleihen, die bereits verkauft wurden. Also das ist ein indirektes
1135 Verhältnis einfach, diese Frage wird regelmäßig zu 80% falsch beantwortet (lacht). Mathe-
1136 matisch gesehen ist ja nur eine Zinseszinsrechnung dahinter, und dass du halt richtig abzinst
1137 und dann weißt du halt, es steht im Kehrwert drin und das ist ein indirekte, eine indirekte - -
1138
1139 CD: Proportionalität?
1140
1141 FM5: Genau Proportionalität, aber ich glaub das ist ein wesentlicher Punkt, den man,
1142 der in der Bevölkerung vorhanden ist, der nicht bekannt ist.

1143

1144 CD: Darf ich da vielleicht noch einhaken, gibt es deiner Meinung nach typische Fehler
1145 von Leuten Menschen in Sachen Finanzbildung?

1146

1147 FM5: Also, das wäre z- -

1148

1149 CD: Das wäre zum Beispiel einer - -, würden dir weitere einfallen?

1150

1151 FM5: Ja ich glaube, typischer Fehler ist einfach, dass man glaubt, dass Entwicklung,
1152 so wie sie eben von Banken verkauft werden, wenn man jetzt irgendwelche Produkte kauft,
1153 einem vorgegaukelt wird, dass das einfach deterministisch ist, obwohl es nicht determini-
1154 stisch sein wird, also ich glaub, dass es ein großer Unterschied einfach, wenn man halt ir-
1155 gendwelche Skizzen bekommt und irgendwelche Szenarien bekommt und es kriegt man von
1156 mir aus drei Szenarien und man glaubt, das sind alle drei Szenarien, die es gibt und von
1157 mir aus wird nur ein Szenario angegeben, das vielleicht noch sehr gut ist, aber im Endef-
1158 fekt wird es dann ziemlich falsch laufen, also das ist, glaube ich ein Punkt, den man auch
1159 bei Fremdwährungskrediten ganz stark gesehen hat, da ist Österreich ganz stark betroffen.
1160 Ahm also, das ist jetzt reines Finanzverständnis, nicht in die Mathematik gehend. Das Ein-
1161 fachste glaube ich, das viele Leute auch einfach betrifft, ist diese Cash Flow Berechnung,
1162 Geldrückflüsse, Abzinsung in dem Sinn, und auch das Verständnis, dass man damit auch
1163 Sachen optimieren kann oder bewerten kann. Also nur das Grundverständnis, man muss ja
1164 nicht irgendwelche Sachen selbst bewerten, sondern nur das Grundverständnis. Also zum
1165 Beispiel, dass man auch Projekte bewerten kann, das ist außerhalb der Finanzmathematik,
1166 Projekte mit solchen Rückflüssen bewerten kann.

1167

1168 CD: Wenn wir jetzt ein Stück zu deiner Arbeit kommen, inwiefern siehst du da bzw.
1169 wendest du da zentrale Ideen der Finanzmathematik an, die du immer wieder benötigst?

1170

1171 FM5: Jetzt mal in meiner Arbeit verwende ich vor allem sehr viel Statistik und jetzt
1172 gar nicht konkret das was man in Finanzmathematik an der Universität gelehrt bzw. ge-
1173 lernt hat. Also da ist sehr viel Statistik dabei, statistische Zusammenhänge, wenn man es
1174 auf einfachen Niveau abhandelt, sind das einfach Parameterkennzahlen, Kennzahlen besser
1175 gesagt, Unterschied Mittelwert, Median, Quantile von einer Verteilung, ganz einfach, bis zu
1176 statistischen Modellen, sogenannte logistische Regressionen. Das sind Regressionen, verall-
1177 gemeinerte Regressionen, die man durchführt, also Zusammenhänge, die man versucht zu
1178 konstruieren zwischen einem Ereignis und Kennzahlen die man hat.

1179

1180 CD: Statistik ist ein wesentlicher Punkt in deiner Arbeit, würdest du da zustimmen?

1181

1182 FM5: Statistik ist eigentlich ein Hauptpunkt, was mich immer überrascht, ist, dass so-
1183 gar in Zeitungen wie dem Standard, oder so, oft der Median mit dem Mittelwert verwech-
1184 selt wird. Es ist erschütternd teilweise, auch wenn erklärt wird: Das Medianeinkommen der
1185 Österreicher schaut so aus, das heißt und dann kommt eine falsche Erklärung (lacht)

1186

1187 CD: Das heißt im Mittel - -

1188

1189 FM5: Ja, genau, oder andersrum, genau, öfters kommt es andersherum, das mittlere Ein-
1190 kommen schaut so aus, das heißt 50% der Österreicher verdienen nicht mehr. Also das ist
1191 dann einfach, ganz einfache Sachen die nicht richtig bekannt sind.

1192

1193 CD: Aber auch dazu beitragen, typische Fehler in Sachen Finanzbildung zu machen,
1194 würdest du da zustimmen?

1195

1196 FM5: Sozusagen, weil das Wissen einfach nicht da ist. Das man dadurch Fehler begeht.

1197

1198 CD: Es greift sozusagen ineinander, also einerseits Finanzbildung und finanzmathemati-
1199 sches Wissen und dann kommt ja schon das reinmathematische Wissen, wenn das nicht ganz,
1200 wenn beide nicht ganz funktionieren, dann führt das auch insgesamt zu falschen Aussagen.

1201

1202 FM5: Ja, das ist sicher ein wesentlicher Punkt!

1203

1204 CD: Ok, dann abschließend, ah, hast du nun schon einige zentrale Ideen genannt, ich
1205 möchte aber nun, dass du diese auf verschiedenen intellektuellen Niveaus ausführst.

1206

1207 FM5: Ok, - -

1208

1209 CD: also so wie du dir das eben vorstellen kannst. Was meine ich mit einem intellektu-
1210 ellen Niveau, also zum Beispiel Anfängervorlesung, Fortgeschrittenenvorlesung, Forschung
1211 oder Schule, Anfängervorlesung, Forschung oder Unterstufe, Oberstufe und Universität etc.
1212 - was dir dazu einfällt!

1213

1214 FM5: Jedes Thema sozusagen, - -

1215

1216 CD: Jedes Thema, du hast genannt Arbitrage, du hast genannt Portfoliooptimierung,
1217 Statistik, Bewertung von Optionen etc. - -

1218

1219 FM5: Statistik ist glaube ich, von einfachen Niveau oder Einstieg, sind es ähm einfache
1220 Sachen, wie äh Parameter herausfin - - äh nicht Parameter, sondern eigentlich Kennzahlen,
1221 Kennzahlen einer Statistik herauszufinden, also Mittelwert, Median, oder Quantile in dem
1222 Sinn. Quantile, glaube ich können auch solche Sachen, wie Value-at-Risk könnte man ein-
1223 fach... also ich weiß nicht was einfach... Anfängervorlesung ist das einfache Niveau oder ist
1224 das jetzt schon mittleres Niveau?

1225

1226 CD: Das könnte schon mittleres Niveau sein, ja!

1227

1228 FM5: Äh, ja der Value-at-Risk, eher mittleres Niveau, also das ist jetzt nicht fachspezi-
1229 fisch Mathematik nehme ich an, oder!

1230

1231 CD: Nein, nein, das ist ok, so wie du das empfindest!

1232

1233 FM5: Na, na es geht nur darum, also mittleres Niveau ist, wenn es eine Anfängervorlesung
1234 ist, ob es eine Anfängervorlesung ist für jemanden, der viel mit Verteilungen zu tun hat oder viel
1235 mit Verteilungen zu tun haben wird.

1236

1237 CD: Nein, also für Mathematiker, Finanzmathematiker, die eben die mathematische Aus-
1238 bildung durchlaufen müssen, also am Anfang eben die Analysis, lineare Algebra und dann
1239 anschließend eben die Vertiefung, sozusagen, aber man hat immer eine Einführungsvorlesung
1240 in Finanzmathematik und dann weiterführende Lehrveranstaltung, die drum herum zum
1241 Kontext passen, in dem Sinne.

1242

1243 FM5: Ja, ok, ahm genau den Value-at-Risk in das mittlere, ähm Regressionen.

1244

1245 CD: Auch in der Forschung, wird das auch verwendet?

1246

1247 FM5: Also ich hab dieses, in der Forschung werden vor allem mit Erweiterung des Value-
1248 at-Risk.

1249

1250 CD: Ja, ja, aber die Idee des Value at Risk gibt es noch?

1251

1252 FM5: Ich, ich glaube, also wie gesagt, ich glaube, es sind Erweiterungen, also das sind
1253 irgendwelche kohärenten Risikomaße, ich bin selbst aber nicht wirklich bewandert in dem
1254 Gebiet, ich weiß nur, dass es spezielle Risikomessungen gibt, eine Kollegin ... hat sich damit
1255 beschäftigt, ich persönlich eher nicht.

1256

1257 CD: Ok, ist die momentan an der ...?

1258

1259 FM5: Ja, ahm, genau, das waren diese Risikomaße, eine Erweiterung im Wesentlichen.

1260

1261 CD: Von einfachen Kennzahlen bis hin zu verschiedensten Risikomaßen etc, ok Statistik

1262

1263 FM5: und Regression, genau, Parameterschätzung auf einem höheren Level, man hat be-
1264 stimmte Daten und will dazu eine Verteilung finden, die gut passt, was heißt gut passen, wie
1265 misst man das, wie optimiert man das, wo wir wieder bei der Optimierung sind, oder wie
1266 optimiert man eine Verteilung auf die Daten, die man hat, ah, gut, also das war jetzt die Sta-
1267 tistik, was haben wir noch alles genannt Arbitrage, Arbitragefreiheit, ahm ok, auf höchstem
1268 Niveau, glaube ich, gibt es immer diese Frage der Arbitragefreiheit in speziellen Märkten, die
1269 mehr oder weniger exotisch sind, also das kann man besonders ausfahren, bin ich persönlich
1270 auch nicht wirklich bewandert. Arbitragefreiheit ist, glaube ich, ein wesentlicher Punkt in den
1271 Anfängervorlesungen, von dem Konzept, wie man etwas beurteilt, bewertet, also Optionen
1272 bewertet, mit dem Black-Scholes-Modell, also wie man etwas Hedgen kann zum Beispiel,
1273 was man nicht Hedgen kann. Oder also nicht Black-Scholes vollständiger Markt, unvoll-
1274 ständiger Markt, also wie man einfach äh trotzdem keine Arbitrage findet oder existiert. In
1275 Anfängen Arbitrage glaube ich, kann man einfach, also äh in einfachen Situationen, einfach
1276 darstellen, zum Beispiel irgendwelche gegebenen Punkte behandelt, die am Markt gehandelt
1277 werden, zum Beispiel Forward Zinsraten, also Forward Rates eigentlich, vergleicht mit Spot

1278 Zinsraten, also Tageszins mit, also Kassazins und zukünftiger Zins. Ah und ähm dass diese
1279 einfach, ganz einfach zusammenhängen, also Multiplikationen, also die Zinsrate von Morgen
1280 auf Übermorgen anschau und die Zinsrate von heute auf Übermorgen, also diese zwei Tage,
1281 die ich habe, dass diese zusammenhängt mit der Zinsrate von heute auf Morgen und der
1282 Zinsrate heute auf Übermorgen und die Argumentation ist einfach Arbitragefreiheit, also
1283 dass die so zusammenhängen müssen. Ein ziemlich einfaches Konzept und ich glaube, dass
1284 es schnell einleuchtend ist, dass das irgendwie zusammenhängen muss.

1285

1286 CD: Das heißt, das könnte man auch auf Schulniveau durchführen?

1287

1288 FM5: Ich denke schon, wenn man das versteht, es gibt keine Arbitrage, man kann nicht
1289 ohne Risiko immer hundertprozentig einen Gewinn einfahren, oder keinen Verlust einfahren,
1290 glaube ich, wäre das eine Idee, verstehst du was ich meine?

1291

1292 CD: Ja, ja..., ok Arbitrage wäre somit abgehakt.

1293

1294 FM5: Ja, Arbitrage, was äh - -

1295

1296 CD: Portfoliooptimierung?

1297

1298 FM5: Portfoliooptimierung, ja äh - -

1299

1300 CD: Bzw. Risiko, du hast es immer unter Risiko genannt.

1301

1302 FM5: Genau, also Risiko, ähm mal nachdenken - -

1303

1304 CD: Oder was steckt dahinter, hinter der Portfoliooptimierung?

1305

1306 FM5: Ja, also Portfoliooptimierung ist, glaube ich, viel mit der Nutzenmaximierung, ein-
1307 fach Nutzenmaximierung als Konzept einfach, dass man eine Nutzenfunktion hat und dass
1308 sozusagen der Nutzen oder die Nutzenfunktion die Präferenzen des Investors abbildet, in
1309 dem Sinn das kann man auf jeden Fall auf mittlerem Niveau darlegen.

1310

1311 CD: Aber hat dieser Nutzenansatz auch in der Forschung noch Bedeutung?

1312

1313 FM5: Ich glaub, auf jeden Fall, also Nutzenmaximierung - -das heißt in der Forschung
1314 wird es auch weiter behandelt!

1315

1316 CD: Ja, genau um das geht es mir!

1317

1318 FM5: Ahm, genau, einfachen Niveau ist diese Nutzenmaximierung etwas zu weit fort-
1319 geschritten. Ich glaube, dort ein Risiko im Sinne einer, ganz einfach mit der Standardab-
1320 weichung anzuschauen, würde ich zum Beispiel eine Möglichkeit finden, einen Einstieg ins
1321 Thema anzubieten.

1322

1323 CD: Also Standardabweichung gibt es schon in der Schule, somit auch in der Schule
1324 durchführbar deiner Meinung nach?

1325

1326 FM5: Durchaus, also hätte ich jetzt mal gedacht. Natürlich kann man auch immer damit
1327 aussagen, welche Probleme es dadurch gibt und dass es äh nicht der Weisheit letzter Schluss
1328 ist. Ähm gibt es noch eine Frage?

1329

1330 CD: Nein, das war die letzte Frage, du kannst natürlich noch etwas hinzufügen, wenn du
1331 möchtest.

1332

1333 FM5: Äh, nein!

1334

1335 CD: Dann bedanke ich mich für das Interview, Danke!

1336

19.6 FM6

1337 FM6: Ja, ich mein die üblichen kennt man ja eh, oder halt mit Bachelier, ich mein also das
1338 Akademische fangt halt mit Bachelier an, dann halt Black-Scholes, klarerweise, beziehungs-
1339 weise Merton, die ahm, - - - ich mein nicht unwichtige Dinge waren halt der - - , aber dieser
1340 Wechsel auf Local Volatility Sachen. Beziehungsweise - - - Black-Scholes ist halt die Zäsur
1341 schlechthin, ah in dem ganzen Setting und -

1342
1343 CD: Würdest du neue wichtige Entwicklungen nennen, denn das Black-Scholes-Modell,
1344 das ist ja auch schon einige Zeit her

1345
1346 FM6: Ja, es waren Black, Scholes, von den Unzulänglichkeiten her stochastische Volati-
1347 litätsmodelle, dann halt auch, auf der anderen Seite local-Vol-Modells, dann hat es Entwick-
1348 lungen gegeben, dass man das zusammenführt und so stochastische Local-Vol-Modells hat
1349 unter Anführungszeichen, ja ich mein, wo ich selbst auch dabei war, und was ich auch nicht
1350 uninteressant finde diese ganze modellunabhängige Finanzmathematik, die halt ein bisschen
1351 konservativer an das ganze herangeht, die würde ich, nicht nur weil ich selber auch dabei
1352 war (lacht), nicht als ganz unwichtig, einfach auch von der Perspektive her betrachten, weil
1353 es einfach ein ganz anderen Blickwinkel darauf gibt.

1354
1355 CD: Das ist nun zeitliche up-to-date, oder?

1356
1357 FM6: Naja zeitlich angefangen mit hat es 1998 mit diesem Hopson-Paper, des war quasi
1358 der Beginn 98 und ist glaube ich noch fashionable.

1359
1360 CD: Du hast in diesem Bereich deine Dissertation geschrieben?

1361
1362 FM6: Ausschließlich, also wie ich meine Dissertation angefangen habe, das war glaube ich
1363 genau gleichzeitig, also der ... und ich haben gemeinsam mit dem, also er hat vorher diese
1364 Idee schon mal gehabt mit dem Optimal-Transport, mit Finanzmathematik verbinden und
1365 gemeinsam ah-mit einem französischen Physiker, Mathematiker der auf der Société Générale
1366 arbeitet, dem ..., ah war dann quasi dieses Optimal-Transport und Finance, ja das war quasi
1367 der Beginn und dann habe ich nur in diesem Setting die ganzen drei Jahre gearbeitet.

1368
1369 CD: Welche Ideen der Finanzmathematik kommen immer wieder vor, bzw siehst du im-
1370 mer wieder. Du hast nun schon verschieden Bereiche gesehen in deiner Laufbahn. Einerseits
1371 die akademische und einerseits die praktische, du kannst die Bereiche nun getrennt betrachten
1372 oder zusammenfassen. Was würdest du sagen, kommt in diesen Bereichen immer wieder vor?

1373
1374 FM6: Ich mein was immer wieder vorkommt, was ein absolut zentrales, das wäre zum
1375 Beispiel eines von den zentralen Konzepte schlechthin, Hedging und Replikation mit dem
1376 steht und fällt seit Black, Scholes alles, weil die Black-Scholes-Formel über ein Replikati-
1377 onsargument zustande kommt, oder die so bewiesen wird in der Regel und ah - - - - die
1378 eigentlich alles, also selbstfinanzierende Strategie, Replikation oder Superreplikation oder
1379 Subreplikation und Superhedging und Subhedging, ist dann eh mehr oder minder dasselbe
1380 und diese Dualität ist so was von zentral wie nur irgendwas, also einerseits man hat dieses

1381 Pricing über ein Martingalmaß, über eben, über ein Pricingmeasure und das duale Konzept
1382 über eine Handelsstrategie des in der, also in der akademischen Finanzmathematik ist diese
1383 Dualität, also ohne diese Dualität kann man alles wegschmeißen. Also sind immer wieder
1384 Dualitätsargumente, die da immer wieder kommen, also das, was wir da gemacht haben,
1385 das ist eine einzige, von Black, Scholes weg bis zu dem, was der Walter Schachermayer da
1386 gemacht hat, es ist immer Dualitätstheorie.

1387

1388 CD: und in der Praxis, wie würdest du es da ansehen?

1389

1390 FM6: Ob am Markt, also das sind hochgradig theoretische Sachen, - - ah

1391

1392 CD: oder beziehungsweise was ist eine zentrale Idee, die in der Praxis wiederkehrt, was
1393 wendest du ständig an?

1394

1395 FM6: Das ist eben das Absurde in der akademischen Finanzmathematik werden Zinsen
1396 immer auf 0 gesetzt, in jedem Paper, weil es einfach nur mühsame Schreibaarbeit ist, außer
1397 es geht um die Modellierung von Short-Track-Modells, also wenn es nicht explizit um die
1398 Zinsmodellierung selber geht, werden die Zinsen immer 0 gesetzt, weil es mühsam ist. Das
1399 war eigentlich der größte Kulturschock beim Austritt aus der Uni, dass es da eigentlich nur
1400 um Zinsen geht, wirklich die ganze Zeit nur um Zinsen. - Aktien werden einfach gehandelt,
1401 Aktien betrachtet man in einem Banken- beziehungsweise Versicherung-Setting, sagen wir
1402 mal so, wirklicher Aktienhandel passiert vielleicht an Börsen mit High-Frequency-Trading
1403 oder eh schon algorithmisch hauptsächlich, das interessiert in einer normal Wirtschaft keinen
1404 Arsch, bis auf diese hochspezialisierten Trader auf den Börsen. Aktien sind einfach Eigen-
1405 kapital, Punkt, die werden nur von einem bilanziellen Standpunkt aus betrachtet. Also eine
1406 andere Perspektive gibt es da fast nicht, die und - - das ganze restliche Zeug, das sich unter
1407 Finanzmathematik abspielt, sind Anleihen, strukturierte Anleihen, Zinsswaps, oder da viel-
1408 leicht noch strukturierte, dass man da vielleicht irgendwelche Caps, Floors, oder irgendwelche
1409 Lock-In, wenn es irgendwie auf den Floor geht, dann bleibt, weiß der Teufel was, - Das Ba-
1410 siskonzept ist Anleihe, Swap und dann vielleicht noch irgendetwas wie ein Collar oder eben
1411 FX-Derivate oder FX-Tauschgeschäfte weil - was Firmen schon konkret an Hedging machen,
1412 ist, dass sie mittels Swaps versuchen, also Hedgen ja, also dass sie sich irgendeinen Preis
1413 einlocken. Das geht bis hin zu Ölswaps, wo Energiebetriebe, wie die EVN Gas- und Ölswaps
1414 abschließen, weil sie ihre Langfristbeträge hedgen wollen, das läuft dann über Hedgeaccoun-
1415 ting oder über Corporates, wie die Andritz, - die Kupfer, also das ganze Commodities-Zeug,
1416 da wird viel Hedging betrieben, sehr kurzfristig auch, das sind zum Teil irgendwelche Swaps
1417 überlagert auch mit FX-Tauschgeschichten, zum Beispiel wenn das Kraftwerk in China ge-
1418 baut wird, dass dann die eventuell auch das Währungsrisiko auch noch ausschalten. Also
1419 die Perspektive, die ich in der Wirtschaft gesehen habe, also von dem zentralen Konzept
1420 von Hedging hat weniger von dem Dualitätsprinzip zu tun, sondern - - - ist wesentlich eine
1421 Planbarkeit, also man macht irgendwelche Zinsen planbar, Rohstoffpreise planbar etc. - und,
1422 oder sichert sich halt ein Risiko in diesem Setting ab, wie weiß ich auch nicht, oder andere
1423 Immobilienfirmen, die Kredite mit variablen Zinsen haben.

1424

1425 CD: Ok, würdest du, wenn du jetzt aus beiden Schritten zurücktrittst und beide Bereiche

1426 aus einer Außenperspektive betrachtest, noch etwas zentrales sehen, beziehungsweise etwas
1427 anderes oder würdest du sagen, dass diese beiden Bereiche wesentlich deine Meinung geprägt
1428 haben, was eine zentrale Idee der Finanzmathematik ist, oder hättest du schon vorher etwas
1429 im Kopf gehabt, was eine zentrale Idee der Finanzmathematik ist?

1430

1431 FM6: Mhm - - - - - Also wie gesagt, was wirklich beide betrifft, ist wirklich Hedging,
1432 das ist, recht viel zentraler geht es nicht, weil es bis ganz tief in die theoretische Mathe-
1433 matik geht, wo man dann an irgendeinem Hahn-Banach-Theorem ansteht. Also das ist wie
1434 gesagt ganz steil, weil es ganz tief von der Theorie bis in die Praxis geht. Sonst, wie gesagt,
1435 diskontieren ist alles andere als trivial, vor allem Zinskurven basteln, vor allem wiederum ex-
1436 trahieren aus Anleihen, also dieses hin und her mit Bootstrapping, also wie man - - das ganze
1437 modelliert, was ganz anderes noch - Moment - - - - - ich mein der Zufall ist keine
1438 Idee der Finanzmathematik, den benutzt man zum Modellieren. Das ist, weil man es eben in
1439 der Regel stochastisch macht. Das würde ich jetzt nicht so genuin finanzmathematisch sehen.

1440

1441 CD: Also nicht direkt der Finanzmathematik zuschreiben?

1442

1443 FM6: Nein, also die Physiker arbeiten seit Jahrzehnten mit verrauschten Signalen und
1444 arbeiten mit stochastischer Analysis, weil sie halt eben selten ein klares Signal haben und
1445 immer filtern müssen

1446

1447 CD: eher eine zentrale Idee der Wahrscheinlichkeitstheorie?

1448

1449 FM6: Ja, genau, - - - -

1450

1451 CD: Wenn nicht, dann gehen wir weiter zur nächsten Frage, also wieder einen Schritt in
1452 den Alltag hinein. Haben für dich bestimmte finanzmathematische Ideen eine Entsprechung
1453 im Alltag? Denk an ein alltägliches Leben, nicht in speziellen an deines!

1454

1455 FM6: Also wieder das banale Beispiel Zinsen, was jeder, also ein zentrales Konzept an
1456 der ganzen Zinsmodellierung ist einfach, dass es eine Termstructure gibt von Zinsen. Und
1457 dass mit der Laufzeit Zinsen verschieden sind. Das weiß jeder Hausbauer, das weiß jeder,
1458 der irgendwie jetzt gerade sein Geld für einen Bausparer anlegen will und sein Geld für
1459 acht Jahre binden muss, damit er vielleicht gerade ein Prozent Zinsen bekommt, das ist real
1460 gerade. - Zinsen sind ja allgegenwärtig, vom normalen Konto bis zum Sparbuch, das jedes
1461 Kind schon hat und vor allem interessant ist eben aber der Zeitpunkt - Bindungen oder
1462 Bindungsfristen und da kriegt jeder in seinem Alter, also das kennt jeder Erwachsene und
1463 vielleicht auch schon Schüler, dass sich da eben eine Zinstermstructure ergibt, die man halt
1464 auch modellieren kann. Das ist eigentlich, das ist von der Modellierung her auch alles andere
1465 als trivial und hat auch alltägliche Entsprechungen. Weil man weiß auch von einem Konto,
1466 wo man abheben kann mit overnight, da kriegt man einfach keine Zinsen, - - bei zehn Jahren
1467 aber schon. Das wäre ein Ding, das sehr nahe am Alltag ist und ja - -

1468

1469 CD: Gibt es deiner Meinung nach typische Fehler von Menschen, die auf einem Mangel
1470 finanzmathematischer Bildung zurückzuführen sind?

1471

1472 FM6: Puh, - - - - - wieder ah, die Frage ist, wie weit das in den Bereich von finanz-
1473 mathematischer Bildung hineingeht oder wie weit das Allgemeinbildung ist?

1474

1475 CD: Ja, ja, Teile der finanzmathematischen Bildung können ja in die Allgemeinbildung
1476 hineinreichen.

1477

1478 FM6: aber wieder ein Alltagsbeispiel, wäre wieder, was vor 15 bis 20 Jahren den Haus-
1479 bauer von den Banken eingeredet worden ist, dass sie Fremdwährungskredite aufnehmen
1480 und dass kein Mensch von denen, also auch nicht einmal von den Verkäufern in den Banken,
1481 gewusst haben, dass die da eigentliche hochspekulative, völlig risikooffene Dinge verdrehen,
1482 also dass in manchen Varianten der Verlust potenziell unbegrenzt ist, also wie man einfahren
1483 kann, sieht man an der Stadt Linz, die die Sachen ein bisschen gröber gemacht hat, die aber-
1484 - also da wäre es sozusagen, also vielleicht braucht es ein bisschen finanzmathematische Bil-
1485 dung, dass man sich einmal so ein Diagramm zeichnet, ok was passiert mit meinem Kredit
1486 jetzt wirklich, wenn der Kurs da abstürzt und wenn dahin steigt und dann zeichnet man sich
1487 ein Diagramm, wenn da vielleicht irgendein Hebelfaktor auch drin ist, was da sein kann - -
1488 und die - - also da sind eh viel reingefallen - - - - also das andere das geht fast ein bisschen
1489 mehr in Versicherungsmathematik, also so Rentenrechnung.

1490

1491 CD: Das können wir auch ruhig erwähnen.

1492

1493 FM6: Also auch ganz banales Beispiel sind auch diese, wo - (lacht) - also die Struktur ist
1494 wie gesagt, sehr oft wirklich, als bei Anleihen, Coupons, man hat Fixbeträge, irgendwelche
1495 laufenden Zahlungen und so, bestes Beispiel sind Handyverträge, iPhone um 0 Euro, dafür
1496 40 Euro im Monat und das ist eine banale, also finanzmathematisch, höchst banale Rech-
1497 nung, aber trotzdem eine, dass ich mir irgendwie ausrechne, was zahle ich bei zwei Jahre
1498 Bindung, alleine über diese 40 Euro Beiträge und was kostet mir das Ding, wenn ich es mir
1499 kaufe und dafür einen super billigen Tarif nehme. Also das wäre ein extrem banaler Fall, wo
1500 man sagt, ok man hat laufende Cashflows oder irgendeinen Fixbetrag, da könnte man noch
1501 eine Verzinsung einbauen, aber das muss man nicht, aber so ganz einfache Sachen, die - - -
1502 ja - - - - - die wie gesagt Aktien oder so - - - - -

1503

1504 CD: Was möchtest du da erwähnen?

1505

1506 FM6: Also Aktien, das hat meiner Meinung nach nicht so eine große Relevanz. - - Ich mei-
1507 ne, da würde es eher, also da würde ich eher sagen, dass das Problem darin liegt, das hängt
1508 auch wieder davon ab, welche Aktien, das merkt man auch erst wieder, das zum Beispiel
1509 von österreichischen Unternehmen, da sind ganz viele Aktien so was weg von liquid, das ist
1510 unglaublich, oder Anleihen. Da gibt es Anleihen von österreichischen Großbanken und dann
1511 gibt es in zwei Jahren einen Trade, das heißt die Dinge werden emittiert und dann liegen
1512 sie gebunkert bei irgendwelchen Versicherungen und es gibt einfach keinen Handel mit den
1513 Dingen und auch keinen Markt und genauso mit Aktien, ahm es gibt Aktien, wahnsinnig
1514 viele Aktiengesellschaften sind nicht einmal notiert an der Börse und es gibt genug, die an
1515 der Börse notiert sind, riesige Unternehmen ah, wie die Uniqa und die hat einen Aktienkurs,

1516 der ist nahezu konstant über die Jahre hinweg, weil das Ding einfach nicht gehandelt wird.
1517 Ein Drittel ist Eigenkapital und in Eigenbesitz, wieder ein Drittel liegt bei zwei anderen
1518 Versicherungen und bei einer Bank und das sind einfach faktisch Beteiligungen, das Ding
1519 notiert offiziell an einer Börse, aber ja - da passiert nicht viel, einfahren kann man, wenn man
1520 als Ottonormalmensch glaubt, man kann irgendwie selber mitspielen und schlauer sein als
1521 so High-Frequency-Trader, und auf einer Daily-Basis Gewinn machen, ja - da - weil da völlig
1522 andere Mechanismen am Werk sind, Algorithmenhandel und das kapieren die Leute nicht
1523 ganz. Beziehungsweise, wenn, da gibt es, was Aktienhandel anbelangt, den Kahneman mit
1524 Thinking Fast and Slow und da gibt es ein recht gutes Kapitel und ein recht lustiges Kapitel,
1525 wo sie Experimente gemacht haben, sozusagen Aktienhandel per Zufallsgenerator, in dem
1526 Fall hat es halt, wie so oft ein Affe gemacht (lacht), und wo sich zum Teil sogar und wirklich
1527 rausgekommen ist, im Durchschnitt ist der Erfolg von diesem Zufallshandel genau gleich
1528 wie die Investmentbanker, die mit ausgeklügeltsten Strategien und hochbezahlten Posten
1529 und Boni und allem Drum und Dran nach irgendwas handeln, steigen eben um keinen Deut
1530 besser aus, weil eben diese Zufallskomponente von Preis- und Aktienentwicklung wahnsinnig
1531 unterschätzt wird.

1532

1533 CD: Inwiefern meinst du, dass das unterschätzt wird?

1534

1535 FM6: Weil sozusagen (lacht) - - ein wahnsinnig wichtiges Konzept trotz alledem ist die
1536 Stoppzeit, die Information geht bis jetzt und mehr weiß ich nicht und viele Trader glauben,
1537 sie sind schneller und wissen halt doch einen Tag mehr, tun es aber nicht und theoretisch
1538 nach Martingal-Theorie ist das dazu verantwortlich, warum ein Zufallsdings nicht schlechter
1539 aussteigt als einer mit sophisticated Strategy und die - ah - ja - - also die - das Konzept von
1540 eigentlich nicht in die Zukunft schauen, ist eigentlich auch ganz wichtig. Vielleicht nicht so
1541 zentral. Aber es ist nicht ganz unwichtig, dass man einen begrenzten Informationshorizont
1542 hat.

1543

1544 CD: Bei Modellierung von gewissen Assets?

1545

1546 FM6: Nein, überhaupt, technisch ist es ja als Stoppzeit modelliert das Ganze und aber
1547 wenn es nicht gerade eine Insiderhandelpartie ist oder so ah - aber ah - ist - mmh - es wird
1548 meiner Meinung nach unterschätzt, wie stark einfach Zufall am Werk ist, also die Modellie-
1549 rung mit Zufall ist nicht die schlechteste - prinzipiell. Das war jetzt ein bisschen abschweifend.
1550 Ahm -

1551

1552 CD: Wolltest du vorher noch etwas erwähnen und habe ich dich da weggeführt? Also wir
1553 waren noch bei den typischen Fehlern.

1554

1555 FM6: Ja, also wie gesagt typische Fehler. Ich meine, also wir sind eben doch nicht so weit
1556 weg, ein Fehler ist es eben, zu glauben, man kann in die Zukunft schauen, faktisch wissen
1557 wir keiner kann es. Wenn wir auf der ehrlichen Seite bleiben.

1558

1559 CD: Na, gut so ein Insiderhandel.

1560

1561 FM6: Nicht so eine Konspiration haben, die sich verschwört ah, das muss man mal auf
1562 der Seite lassen, das ist klar, - - -

1563

1564 CD: In der nächsten Frage interessiere ich mich für finanzmathematische Ideen und
1565 Prinzipien, bei denen mindestens dessen Kern auf verschiedenen intellektuellen Niveaus er-
1566 folgreich gelehrt werden kann bzw. eine Rolle spielt, zum Beispiel Unterstufe, Oberstufe,
1567 Einführungsvorlesung, Diplomand, Dissertant, Forscher. Gibt es für diese Ideen und Prinzi-
1568 pien aus der Finanzmathematik, die auf mindestens zwei bis drei unterschiedlichen intellek-
1569 tuellen Niveaus aufgezeigt werden können?

1570

1571 FM6: Beispielerorientiert?

1572

1573 CD: Ja, beispielerorientiert, wie du dir das vorstellen könntest, oder ob es überhaupt auf
1574 verschiedenen intellektuellen Niveaus durchführbar ist, also wenn du zum Beispiel vorher irgen-
1575 detwas über Zinskurven genannt hast, natürlich die zentrale Idee dahinter. Wenn du sagst,
1576 es spielt nur in der Forschung eine Rolle, aber sozusagen es wäre diese Idee gar nicht ver-
1577 mittelbar auf einem geringen Niveau, oder das mit dem Zufall.

1578

1579 FM6: Ja, ich mein Zinsen lernt man sowieso, also das lernt jedes Kind, das ist glaube
1580 ich sogar Unterstufenstoff. Das ist ja, da könnte ich mir schon vorstellen, das man in der
1581 Unterstufe ein bisschen mehr zu Zinsen macht, also nicht nur diskrete, also gut stetige Zinsen
1582 vielleicht noch nicht (lacht) oder den Grenzübergang, aber nicht nur hat, man teilt ein Jahr
1583 in zwölf Monate, sondern, wo ja faktisch dann der Zins gleich bleibt. Aber wenn man sagt,
1584 man hat etwas auf mehrere Jahre Bindung oder so, dass man da eine Kurve, das könnte ich
1585 mir schon vorstellen, dass das in der Unterstufe geht, also Oberstufe auf jedem Fall, also
1586 Oberstufe, wenn man so ein bisschen zu Analysis oder Grenzwert Sachen macht. Also weiß
1587 ich nicht, so etwas wie das Konzept von stetiger Verzinsung, aber so was ist, glaube ich eh
1588 Standard. - -

1589

1590 CD: Es kommt zwar nicht üppig in den Schulbüchern vor, aber in dem einen oder anderen
1591 kommt es vor.

1592

1593 FM6: Ja oder so einen Übergang, also so ein hin und herschalten zwischen stetigen und
1594 diskreten Zinsen, das ist auch alles andere als irrelevant. Das ist schon etwas, das in der
1595 Wirtschaft immer wieder vorkommt. Zum Teil von irgendwelchen Aufsichten, wie der EI-
1596 OPA, weil von der irgendetwas mit stetigen Modellen gerechnet wird und trotzdem wieder
1597 umgerechnet wird, weil jedes Unternehmen mit diskreten Zinsen rechnet. Also das wäre ober-
1598 stufentechnisch, beziehungsweise in der Oberstufe könnte man auch sicher so etwas machen,
1599 wie das Konzept von Forward-Rates. Also das wäre auch, also das ist auch alles andere als
1600 trivial, dass man sich jetzt von der Zeitstruktur überlegt, ok was passiert, habe ich nur von
1601 jetzt bis in zwei Jahren, habe ich von jetzt bis in einem Jahr, von einem Jahr bis in zwei
1602 Jahre, und dass man sich überlegt, wie müssen die Forward-Rates ausschauen.

1603

1604 CD: Was meinst du mit ausschauen?

1605

1606 FM6: Wie hoch einfach das ganze beim Ausrechnen, also ok wenn ich sage, ich habe jetzt
1607 den Euro mit drei Prozent über vier Jahre verzinst, wenn ich ihn aber die ersten zwei Jahre
1608 mit zwei verzins, wie muss die Forward-Rate von zwei bis in vier Jahre dazu ausschauen.
1609 Weil das ist zum Beispiel ein Konzept, das in der Forschung wahnsinnig wichtig ist.

1610

1611 CD: Ok, welches Konzept?

1612

1613 FM6: Forward-Rates, dass man eben nicht Zinsen von null wegrechnet, sondern, dass man
1614 beliebige Zinsen von beliebigen Zeitpunkten in der Zukunft auf beliebige andere Zeitpunkte
1615 in der Zukunft, also diese ganze Termstructure, wie die Zeitstruktur von so etwas ist. Und
1616 das halt ein Unterschied ist zwischen einer Forward-Rate, die eben erst später anfangt und
1617 die nämlich auch von der Höhe auch ganz anders sind. Also die sind automatisch schon viel
1618 höher, weil man sie ja dann multipliziert die Forward-Rates, also wenn man sie zum Beispiel.
1619 Man könnte das ja weiterspielen, also von zwei in vier und vier in sechs Jahren und so und
1620 die haben dann eben ein bisschen kontraintuitive Werte, oder sind halt hoch im Vergleich. So
1621 etwas zum Beispiel würde sich vertiefende in der Oberstufe so mit einfachen Einführungen
1622 schon eignen.

1623

1624 CD: Und in der Forschung auf der Uni?

1625

1626 FM6: Ja da gibt es verschiedenste Modellierungsansätze, von LIBOR-Modell oder dieses
1627 ganze Heath-Jorow-Morton Framework, da gibt es diese fetten Standardwerke, also da weiß
1628 ich nicht in wie weit das abgeschlossen ist, aber ich kann es mir nicht recht vorstellen. Also
1629 ich muss selber immer wieder nachdenken, damit ich das halbwegs auf die Reihe kriege.

1630

1631 CD: Also ich denke schon, dass das noch eine Rolle in der Forschung spielt!

1632

1633 FM6: Aso, ja, ja auf jedem Fall, also es sind zentrale Konzepte, die nämlich wirkliche rea-
1634 le Auswirkungen haben oder wo die Modellierung nicht unwichtig ist. Ah - und - zum Beispiel
1635 das zu verstehen ist alles andere als unwichtig, weil da geht es auch um Größenordnungen,
1636 die weiß ich nicht, diverse Versicherungen, die in Österreich nicht so groß sind, aber mit
1637 Mutterkonzern in München und weltweit, ich meine, die modellieren Forward-Rates und da
1638 geht es um Basispunkte. Es geht immer um Basispunkte, weil ab einem Volumen, wenn du
1639 im dreistelligen Millionen Euro bist, oder überhaupt in Milliarden Eurobeträge, wo - An-
1640 leihen so was, oder Modellierungen von Wert der Versicherung den sie intern machen oder
1641 Versicherungen, wenn sie intern schauen, was ist ihr Zeug alles Wert und die müssen, also die
1642 haben stochastische Software, große Dinge, die unter anderem auch Forward-Rates modellie-
1643 ren mit dem LIBOR-Modell und da macht es, - (lacht) also wenn die an der Kalibrierung ein
1644 bisschen was ändern, oder da ein anderes Modell nehmen (lacht), dann ist die Versicherung
1645 plötzlich 200 Millionen Euro weniger Wert. Also da spielen ein paar Basispunkte zum Teil
1646 eine brutale Rolle, also die - wir haben einmal eine Reihe von Anleihen bewertet für eine
1647 Bank, die haben uns gefragt, ob wir das machen können, weil sie sich nicht sicher waren, ob
1648 sie von der Mutter, ah Mutterkonzern, über den Tische gezogen werden bei diesem Rückkauf
1649 und da haben sie, pro Anleihe war ein Spread drauf und ein Zinsaufschlag von dreißig Basis-
1650 punkte um 0,03 Prozent war der Aufschlag nur. Nur dadurch, dass das Gesamtvolumen 300

1651 Millionen Euro war, reichen diese 30 Basispunkte, dass du halt einen Kaufpreisunterschied
1652 von 10 Millionen Euro bekommst (lacht). Von dem her ist alles andere unwichtig, weil von
1653 dem her, ist höchste Genauigkeit, also Kalibrierung gefragt, weil einfach durch diese riesigen
1654 Volumina, da ganz große Ausschläge herauskommen sonst.

1655

1656 CD: Ok, weitere zentrale Idee, - - - das war Hedgen, was du genannt hast.

1657

1658 FM6: ah - ja,

1659

1660 CD: Also es muss nicht immer mit Unterstufe beginnen.

1661

1662 FM6: Also ja, da sehe ich eher schwarz für eine Unterstufe, aber das man zum Beispiel,
1663 was ja auch ein zentrales Konzept ist, das man zum Beispiel Oberstufe vertiefend diskret,
1664 vielleicht machen könnte, das Konzept einer sich selbst finanzierenden Strategie, in einem
1665 ganz einfachen diskreten Modell.

1666

1667 CD: Was meinst du mit einer sich selbstfinanzierenden Strategie?

1668

1669 FM6: Dieses klassische Delta halt mit stochastischem Integral, das man sagt man han-
1670 delt genau so, dass im Erwartungswert, das Ding ... bleibt. - - - - - Also
1671 die, - was Hedging anbelangt, ist vielleicht, wäre es einfacher, dass man so etwas eher aus
1672 einer halbwirtschaftlichen Perspektive anschaut, wie zum Beispiel irgendein Unternehmen,
1673 das einen Kohlepreis einlogt oder Zinsen oder das man mit einen Zinsswap -

1674

1675 CD: Würdest du das nicht zur Finanzmathematik zählen?

1676

1677 FM6: Nein, nein, eh, aber ich meine eher konzeptuell in der Oberstufe, wenn man Zeit
1678 hat. Das sollte sich ausgehen. Das ist -

1679

1680 CD: Eine Stufe höher, spielt es nehmen ich an -

1681

1682 FM6: Also ja in den Einführungen sind diese Zinsdinger, waren immer erst ah also in
1683 der diskreten Finanzmathematik waren die ganz, man ok für die Modellierung brauchst du,
1684 also da kannst du nicht mit Binomialbäumen und so Scherze werken und deswegen sind die-
1685 se ganzen Zinsmodelle relativ fortgeschritten. Das ist immer erst stetige Finanzmathematik
1686 2. Also zumindest bei uns war es immer so. Das ist, diese ganze Zinsmodellierung Short-
1687 Ratemodells, das ist auch, also ich habe da auch selber am Anfang eine Zeitlang geknabbert,
1688 bis ich das, - - - irgendwie in mich hineingegangen ist. Ah - also, dass zum Beispiel diese
1689 ganze stetige Zinsmodellierung eher sozusagen auf einem fortgeschritten Level. Also einfach
1690 Beispiele und viele Sachen kann man auch diskret einfach machen, ahm Forward-Rates kann
1691 man natürlich auch diskret anschauen, dann geht es aber schon ziemlich -

1692

1693 CD: Der Anstieg ist steil -

1694

1695 FM6: Ja, und das ist, wie gesagt, absolut hochrelevant, weil das sozusagen an den Fi-

1696 nanzmärkten oder was auch in Österreich, Deutschland etc. passiert. Die Volumina sind, weiß
1697 ich nicht, damals hat der Christian Bayer von 80% geredet, also das an den Finanzmärkten.
1698 Anleihen, da werden auf einmal schnell eine halbe Milliarde Euro in Anleihen gegeben,
1699 strukturiert oder nicht, vom Stadt Österreich bis zu einem mittelkleinen Corporate. - Die
1700 Anleihen, Bonds ein bisschen strukturiert und vor allem die ganze Zinstheorie dazu, oder
1701 Zinsmodellierung, das ist absolut hochrelevant. - Ah im echten Leben, wie auch im akade-
1702 mischen Leben, das ist nach wie vor ein großes Topic. Also sagen wir so, das ist weniger
1703 eine zentrale Idee, aber ich meine, die Idee von Zinsen an sich, ist schon mal eine Angele-
1704 genheit, aber einfach auch, dass es ein ganzes Spektrum von vielen verschiedenen Arten von
1705 Zinsen gibt und wie man es rechnet und anschaut. Also wie gesagt, normale Spot-Rates,
1706 Forward-Rates und das ganze diskret und stetig und ja, da - - - dass es eben so etwas wie
1707 ein Termstructure gibt. Ah - dass das Spektrum, das Universum ein bisschen größer ist, als
1708 die vier Prozent die im Sparbuch sind, also jetzt eh nicht mehr, aber die zwei Prozent die
1709 im Sprachbuch stehen.

1710

1711 CD: Mit zwei Prozent wäre ich glücklich momentan!

1712

1713 FM6: Ja, eben, da wäre auch fast jeder glücklich, ah -

1714

1715 CD: Ok, noch irgendetwas, was dir einfällt abschließend, - - oder irgendetwas, was du
1716 noch loswerden möchtest?

1717

1718 FM6: Ah - - - - -

1719

1720 CD: Wenn dir nichts mehr dazu einfällt, dann bedanke ich mich für das Interview.

1721

1722 FM6: Bitte gerne!

1723

1724 CD: Danke

1725

Literatur

- Ableitinger C., Dorner C., Embacher F. und Ulovec A. (2014-2016) *Mathematik verstehen Technologietraining 5-8*. Öbv-Verlag, Wien.
- Adelmeyer M. (2006) Aktien und ihre Kurse. In: *mathematik lehren*, 134, S. 52-58.
- Adelmeyer M. und Warmuth, E. (2009) *Finanzmathematik für Einsteiger*. Vieweg-Verlag, Wiesbaden.
- Arai T. (2011) Good Deal Bounds Induced by Shortfall Risk. In: *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2(1), S. 1-21.
- Bachelier L. (1900) *Théorie de la spéculation*. Dissertation, Université Paris Sorbonne.
- Beike R. und Schlütz R. (2015) *Finanznachrichten lesen – verstehen – nutzen: ein Wegweiser durch Kursnotierungen und Marktberichte*. Schäffer-Poeschel, Stuttgart.
- Bentham J. (1781) *An Introduction to the Principals of Morals and Legislation*. Batoche Books Kitchener. Im Internet: <http://www.colorado.edu/philosophy/heathwood/pdf/bentham.pdf>
- Biagini F. und Rost D. (2010) Prinzipien und Grundlagen der Finanzmathematik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, S. 41-48.
- BIFIE (2013) *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung*. Im Internet: https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_2013-03-11.pdf.
- Black F. und Scholes M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: *The Journal of Political Economy*, Vol. 8, No. 3, S. 637-654.
- Blanchard O. und Illing G. (2011) *Makroökonomie*. 5. Auflage, Pearson Studium, München.
- Bleier G., Lindenberg J., Lindner A. und Süss-Stepancik E. (2015) *Dimensionen Mathematik 6*. E. Dorner Verlag, Wien.
- Blum W. (1976) Exponentialfunktionen in einem anwendungsbezogenen Analysis-Unterricht der beruflichen Oberstufe. In: *Die Deutsche Berufs- und Fachschule, Zeitschrift für Berufs- und Wirtschaftspädagogik*, S. 643-656.
- Blum W. (1978) Einkommensteuern als Thema des Analysisunterrichts in der beruflichen Oberstufe. In: *Die berufsbildende Schule, Zeitschrift des Berufsverbandes der Lehrer an beruflichen Schulen*, 30(11), S. 642-651.
- Blum W. (1996) Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht. Aus: Kadunz G. et al. (Hrsg.), *Trends und Perspektiven - Beiträge zum 7. internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik in Klagenfurt*, Hölder-Pichler-Tempsky, S. 15-38.

- Blum W. (2006) Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht – Herausforderung für Schüler und Lehrer. Aus: Büchter A. (Hrsg.), *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis*, Verlag Franzbecker, Hildesheim, S. 8-23.
- Blum W. et al. (2012) Gabriele Kaisers wissenschaftliches Werk. Aus: Blum W. et al. (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität*, Springer Spektrum, Wiesbaden, S. 1-15.
- Bosch K. (2011) *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*. 11. Auflage, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden.
- Bruner J. (1960) *The process of education*. Harvard University Press, Cambridge(Mass.).
- Brunner N. und Kühleitner M. (2016) Abschätzung von Verlustrisiken. In: *Stochastik in der Schule*, 36, S. 20-24.
- Bundesministerium für Bildung (2014) *Kompetenzkataloge für Angewandte Mathematik*. Wien. Im Internet: <https://www.srdp.at/downloads/dl/kompetenzkataloge-fuer-angewandte-mathematik-guelting-bis-zu-den-matura-pruefungsterminen-20162017/>
- Büchter A. und Leuders T. (2005) *Mathematikaufgaben selbst entwickeln*. Cornelsen Verlag, Berlin.
- Busse A. (2009) *Umgang Jugendlicher mit Sachkontext realitätsbezogener Mathematikaufgaben*. Dissertation, Franzbecker, Hildesheim und Berlin.
- Cuchiero C. (2006) *Affine Interest Rate Models - Theory and Practice*. Diplomarbeit, TU-Wien.
- Daume P. (2004) Stochastische Finanzmathematik für die Schule. In: *Beträge zum Mathematikunterricht*, S. 133-136.
- Daume P. (2006) Aktien auf der Spur. In: *mathematik lehren*, 137, S. 46-51.
- Daume P. (2006) Statistik der Aktienmärkte: Eine anwendungsorientierte Einführung in die beschreibende Statistik. In: *Stochastik in der Schule*, 26, S. 2-9.
- Daume P. (2009) *Finanzmathematik im Unterricht*. Vieweg-Verlag, Wiesbaden.
- Daume P. (2016) *Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht – Band 1: Zinsen, Steuern und Aktien*. Springer Spektrum, Wiesbaden.
- Daume P. (2017) *Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht – Band 2: Optionen und Ökonomische Funktionen*. Springer Spektrum, Wiesbaden.
- Del Chicca L. und Hohenwarter M. (2014) Portfolioselektion mit GeoGebra – in welche Aktien soll ich investieren? Aus: Kaenders R. und Schmidt R. (Hrsg.), *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen*, 2. erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Wiesbaden, S. 13-31.

- Del Chicca L. und Hohenwarter M. (2014) Portfolios Selektion mit GeoGebra – in welche Aktien soll ich investieren? In: *Schriftreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG*, 47, S. 17-32.
- Delbean F. und Schachermayer W. (2006) *The mathematics of arbitrage*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Döhrmann M. (2003) Vom Aktienkurs zum Random Walk. In: *Beträge zum Mathematikunterricht*, S. 185-188.
- Döhrmann M. (2004) *Zufall, Aktien und Mathematik: Vorschläge für einen aktuellen und realitätsbezogenen Stochastikunterricht*. Dissertation, Verlag Franzbecker, Hildesheim/Berlin.
- Dorner C. (2017) Kreditszenarien. Aus: Humenberger H. und Bracke M. (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 3*, Springer Spektrum, Wiesbaden, S. 51-81.
- Eichler E. und Vogel M. (2009) *Leitidee Daten und Zufall*. Springer-Verlag, Wiesbaden.
- Eisenführ F. und Weber M. (2003) *Rationales Entscheiden*. Springer-Verlag, Berlin.
- Ehrenberger R. (1896) *Zeitalter der Fugger*. 2 Bd., Jena.
- Fischer O. und Lombino M. (2010) *Volkswirtschaftslehre für Bankfachwirte (Prüfungstraining zum Bankfachwirt)*. Gabler Verlag, Wiesbaden.
- Gabath C. (2011) *Innovatives Beschaffungsmanagement*. Gabler Verlag, Wiesbaden.
- Gabriel T. (2000) *Value at Risk*. Diplomarbeit, Universität Wien.
- Gatto R. (2014) *Stochastische Modelle der aktuariellen Risikotheorie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Gericke H. (1984) *Mathematik in Antike und Orient*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokio.
- Götz S. (Hrsg.), Schweiger C. und Diboky F. (2007) *Rechnen mit Rendite und Risiko*. Öbv-Verlag, Wien.
- Götz S. und Reichel H. Ch. (Hrsg.) (2010) *Mathematik-Lehrbuch 6*. Öbv-Verlag, Wien.
- Götz S. und Reichel H.-Ch. (Hrsg.) (2013) *Mathematik-Lehrbuch 8*. Öbv-Verlag, Wien.
- Greefrath G. et al. (2013) Mathematisches Modellieren – Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. Aus: Borromeo-Ferri R. et al. (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule*, Springer-Verlag, Wiesbaden, S. 1-37.
- Griesel H. (1971) *Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten*. Band 1, Hannover.

- Gropengießer H. (2008) Qualitative Inhaltsanalyse in der fachdidaktischen Lehr-Lernforschung. Aus: Mayring P. und Glaeser-Zikuda M. (Hrsg.), *Die Praxis der Qualitativen Inhaltsanalyse*, Beltz, Weinheim Basel, S. 172-189.
- BMBF (2015) *Grundsatzterlass zur Wirtschafts- und Verbraucher/innenbildung*. Im Internet: https://www.bmb.gv.at/ministerium/rs/2015_15_de.pdf?5i83zd
- Hauer-Typpelet P. (2010) Angemessene Grundvorstellung zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln – Vorschläge für den Stochastikunterricht. In: *Schriftreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*, (Heft 43), S. 75-87, Wien.
- Hausmann W., Diener K. und Käsler J. (2002) *Derivate, Arbitrage und Portfolio-Selection: stochastische Finanzmarktmodelle und ihre Anwendungen*. Vieweg-Verlag, Braunschweig.
- Heitele D. (1975) An epistemological view on fundamental stochastic ideas. In: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 6 (2), S. 187-205.
- Hens T. und Rieger M. O. (2010) *Financial Economics*. Springer-Verlag, Heidelberg u.a..
- Herget W. et al. (2005) *Was für ein Zufall? Einige Bemerkungen über einen wenig beachteten Kern der Stochastik*. Universität des Saarlandes, Saarbrücken.
- Heugl H. (2014) *Mathematikunterricht mit Technologie*. Veritas-Verlag, Linz.
- Heymann W. (2000) Was ist guter Mathematikunterricht. Aus: Springer R. et al. (Hrsg.), *Was ist guter Fachunterricht*, Kettler Verlag, Bönen, S. 89-105.
- Homer S. und Sylla R. (1991) *A history of interest rates*. Rutgers University Press, New Brunswick und London.
- Hooker R. (1910) *The Code of Hammurabi*. Im Internet: <http://www.wsu.edu/~dee/MESO/CODE.HTM>.
- Hudson M. (2000) How interest rates were set. In: *Journal of the Economic and Social History of the Orient*, Vol. 43, S. 132-161.
- Humenberger J. und Reichel H.-Ch. (1995) *Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich.
- Jablonka E. (1999) Was sind „gute“ Anwendungsbeispiele? Aus: Maaß J. und Schlöglmann W. (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*, Verlag Franzbecker, Hildesheim, S. 65-74.
- Kaiser, G. (1995) Realitätsbezüge im Mathematikunterricht - Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. Aus: Graumann G. et al. (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht- Band 2*, Franzbecker, Bad Salzdetfurth ü. Hildesheim, S. 66-84.
- Kaiser G. et al. (2015 A) Anwendungen und Modellieren. Aus: Bruder R. et al. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*, Springer-Verlag, Wiesbaden, S. 357-384.

- Kaiser G. (2015 B) Werner Blum und sein Beitrag zum Lehren und Lernen mathematischen Modellierens. Aus: Kaiser G. und Henn H.-W. (Hrsg.), *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht*, Springer-Verlag, Wiesbaden, S. 1-24.
- Kimeswenger B. und Hohenwarter M. (2015) Interaktion von Darstellungsformen und GeoGebraBooks für Tablets. Aus: Roth J., Süß-Stepancik E. und Wiesner H. (Hrsg.), *Medienvielfalt im Mathematikunterricht*, Springer-Verlag, Wiesbaden, S. 171-184.
- Kramer R. (1990) *Umgang mit der Armut - Eine sozioethische Analyse*. Duncker & Humboldt, Berlin.
- Kremer J. (2011) *Portfoliotheorie, Risikomanagement und die Bewertung von Derivaten*. Springer-Verlag, 2. Auflage, Heidelberg.
- Kreps D. M. (1981) Arbitrage an equilibrium in economies with infinitely many commodities. In: *Journal of Mathematic Economics*, Vol. 8, S. 15-35.
- Krüger D. und Riemeier T. (2014) Die qualitative Inhaltsanalyse – eine Methode zur Auswertung von Interviews. Aus: Krüger K. et al. (Hrsg) *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, S. 133-145.
- Krüger K., Sill H. D. und Sikora C. (2015) *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer-Verlag, Heidelberg.
- Kütting H. (1994) *Didaktik der Stochastik*. Wissenschaftsverlag, Mannheim.
- Lehrplan für AHS-Oberstufe. BGBl. II – Ausgegeben am 8. Juli 2004 – Nr. 27. Im Internet: www.bmukk.gv.at.
- Lehrplan der Bildungsanstalt für Kindergartenpädagogik. BGBl. II – Ausgegeben am 12. August 2004, Nr. 327. Im Internet: http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/upload/2036_BAKIP.pdf
- Lehrplan der Bildungsanstalt für Elementarpädagogik. BGBl. II – Ausgegeben am 27. Juli 2016, Nr. 204. Im Internet: http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/upload/2383_BA\%20f\%FCr\%20Elementarp\%E4dagogik.pdf
- Lehrplan der Bildungsanstalt für Sozialpädagogik. BGBl. II – Ausgegeben am 15. Oktober 1993, Nr. 701. Im Internet: http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/upload/2038_BASOP.pdf
- Lehrplan der Bildungsanstalt für Sozialpädagogik. BGBl. II – Ausgegeben am 27. Juli 2016, Nr. 204. Im Internet: http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/upload/2038_BASOP.pdf
- Lehrplan für HAK. BGBl. II – Ausgegeben am 19. Juli 2004, Nr. 291. Im Internet: https://www.hak.cc/files/syllabus/598_HAK\%20LP\%202004\%20-%20Anlage\%201.pdf.
- Lehrplan für HAK. BGBl. II – Ausgegeben am 27. August 2014, Nr. 209. Im Internet: https://www.hak.cc/files/syllabus/Lehrplan_HAK_2014.pdf

- Lehrplan der höheren Lehranstalt für künstlerische Gestaltung. BGBl. II – Ausgegeben am 6. Oktober 2011, Nr. 326. Im Internet: http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/upload/1945_HLA\%20f\%FCr\%20k\%FCnstlerische\%20Gestaltung.pdf
- Lehrplan der höheren Lehranstalt für Kunst und Gestaltung. BGBl. II – Ausgegeben am 17. November 2015, Nr. 340. Im Internet: http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/upload/2325_HLA\%20f\%FCr\%20Kunst\%20und\%20Gestaltung.pdf
- Lehrplan der höheren Lehranstalt für Mode. BGBl. II – Ausgegeben am 7. Oktober 2009. Nr. 324. Im Internet: http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/upload/1477_HL_Mode_324_2009.pdf
- Lehrplan der Höheren Lehranstalt für Forstwirtschaft. BGBl. II – Ausgegeben am 16. August 2004, Nr. 331. Im Internet: http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/upload/2345_HLA\%20f\%FCr\%20Forstwirtschaft.pdf
- Lehrplan der Höheren Lehranstalt für Forstwirtschaft. BGBl. II – Ausgegeben am 27. Juli 2016, Nr. 201. Im Internet: http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/upload/2372_HLA\%20f\%FCr\%20Forstwirtschaft.pdf
- Lehrplan der höheren Lehranstalt für Sozialmanagement. BGBl. II – Ausgegeben am 17. November 2015, Nr. 340.
- Lehrpläne der höheren Lehranstalten für wirtschaftliche Berufe, Ausbildungszweig Umwelt und Wirtschaft. BGBl. II – Ausgegeben am 20. Juni 2008, Nr. 215. Im Internet: http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/upload/1950_HLW\%20-\%20Umwelt\%20und\%20Wirtschaft.pdf
- Lehrpläne der höheren Lehranstalten für wirtschaftliche Berufe, Ausbildungszweig Sozialmanagement. 2007. Im Internet: http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/upload/1234_HLW_AZSozialmanagement2007.pdf
- Lehrpläne der höheren technischen Lehranstalten. Im Internet: http://www.htl.at/htlat/lehrplaene.html#anchor_search.
- Lessenich P. (2014) *Basel III: Die neuen Eigenkapital- und Liquiditätsregeln für Banken*. Diplomica-Verlag, Hamburg.
- Leuders T. (2003) *Mathematik Didaktik*. Verlag Cornelson Scriptor, Berlin.
- Luderer B. (2013) *Mathe, Märkte und Millionen – Plaudereien über Finanzmathematik zum Mitdenken und Mitreden*. Springer Spektrum, Wiesbaden.
- Lusardi A. und Mitchell O. S. (2014) The Economic Importance of Financial Literacy: Theory and Evidence. In: *Journal of Economic Literature*, 52(1), S. 5-44.
- Maaß K. (2004) *Mathematisches Modellieren im Unterricht: Ergebnisse einer empirischen Studie*. Franzbecker, Hildesheim.

- Malle G., Woschitz H., Koth M. und Salzger B. (2010) *Mathematik verstehen 6.* Öbv-Verlag, Wien.
- Malle G., Woschitz H., Koth M. und Salzger B. (2012) *Mathematik verstehen 8.* Öbv-Verlag, Wien.
- Mandelbrot B. und Hudson R. (2009) *Fraktale und Finanzen.* 3. Auflage, Piper Verlag GmbH, München und Zürich.
- Markowitz H. (1999) The Early History of Portfolio Theory. In: *Financial Analysts Journal*, Vol. 55(4), S. 5-16.
- Mayring P. (2007) *Qualitative Inhaltsanalyse.* Beltz Verlag, Weinheim und Basel.
- McDonald R. (2006) *Derivatives Markets.* 2. Auflage, Pearson Educations, Boston.
- McDougall W. (1951) *Die Wissenschaft von den Verhaltensweisen.* Leo Lehnen Verlag, München.
- Meyer J. (2014) Einblick in Optionen. Aus: Henn H.-W. und Meyer J. (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Unterricht.*, Springer-Verlag, Wiesbaden, S. 27-44.
- Miller N.E. und Dallard J. (1941) *Social learning and imitation.* Yale University Press, New Haven.
- Mohn C. (2004) *Martingalmaße und Bewertung europäischer Optionen in diskreten unvollständigen Finanzmärkten.* Dissertation, Oldenburg.
- OECD (2013) *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework -Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy.* OECD Publishing.
- Pfeifer D. (2000) Zur Mathematik derivativer Finanzinstrumente: Anregungen für den Stochastik-Unterricht. In: *Stochastik in der Schule*, 2, S. 25-33.
- Prediger S., Link M., Hinz R., Hussmann S., Ralle B. und Thiele J. (2012) Lehr- Lernprozesse initiieren und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In: *MNU – Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 65 (8), 452-457.
- Reichel H.-C. und Kubelik T. (2002) *Mathematik - unsichtbar und dennoch allgegenwärtig.* Öbv-Verlag, Wien.
- Reichel H.-C. und Humenberger H. (Hrsg.) (2012) *Das ist Mathematik 3.* Öbv-Verlag, Wien.
- Sartor F. und Bourauel C. (2013) *Risikomanagement kompakt : in 7 Schritten zum aggregierten Nettorisiko des Unternehmens.* Oldenburg Verlag, München.
- Schachermayer W. (2000) *Die Rolle der Mathematik auf den Finanzmärkten.* Wien.

- Schachermayer W. (2008) The Notion of Arbitrage and Free Lunch in Mathematical Finance. Aus: Yor M. (Hrsg.), *Aspects of Mathematical Finance*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, S. 15-22.
- Schachermayer W. (2016) *Mathematics and Finance*. Im Internet: http://www.mat.univie.ac.at/~schachermayer/publications_adressed_to_a_wider_public.
- Schecker H. et al. (2014) Formate und Methoden naturwissenschaftsdidaktischer Forschung. Aus: Schecker et al. (Hrsg.), *Methoden der naturwissenschaftsdidaktischer Forschung*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, S. 1-15.
- Schellenberg P. (1825) *Kaufmännische Arithmetik oder allgemeines Rechenbuch für Banquiers, Kaufleute, Manufacturisten, Fabrikanten und andere Zöglinge*. Landes-Industrie-Comptoirs, Weimar.
- Schneider I. (1988) *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933 – Einführung und Texte*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.
- Schodl M. (2013) Aktuelles zur teilstandardisierten, kompetenzorientierten Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik (BHS). In: *Schriftreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*, 46, S. 80-99.
- Schreiber A. (1979) Universelle Ideen im mathematischen Denken – ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik. In: *mathematica didactica*, 2, S. 165-171.
- Schubert S. und Schwill A. (2011) *Didaktik der Informatik*. Spektrum-Verlag, Heidelberg.
- Schweiger F. (1982) Fundamentale Ideen zur Analysis und handlungsorientierter Unterricht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, S. 103-111.
- Schweiger F. (2010) *Fundamentale Ideen*. Shaker Verlag, Aachen.
- Schwill A. (1993) Fundamentale Ideen der Informatik. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, (25) 1, S. 20-31.
- Shreve S. (2003) *Stochastic Calculus for Finance I*. Springer-Verlag, Pittsburgh.
- Shreve S. (2004) *Stochastic Calculus for Finance II*. Springer-Verlag, New York.
- Stigler G. (1950) The Development of Utility Theory II. In: *Journal of Political Economy*, Vol. 58, No. 5, S. 373-396.
- Stobbe A. (1991) *Mikroökonomik*. 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin.
- Stummer W. (2003) Nuancen der Nichtbeliebigkeit von Aktienkurs-Modellierungen. In: *Stochastik in der Schule*, 2, S. 7-13.
- Tietze J. (2015) *Einführung in die Finanzmathematik*. 12. Auflage, Springer-Verlag, Wiesbaden.

- Tietze U. (1979) Fundamentale Ideen der linearen Algebra und analytischen Geometrie. In: *mathematica didactica*, 2, S. 137-163.
- Tietze U., Klika M. u. Wolpers H. (1982) *Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II*. Bd. 1, Vieweg-Verlag, Braunschweig.
- Tietze U., Klika M. u. Wolpers H., (2000) *Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II*. Bd. 2, Vieweg-Verlag, Braunschweig.
- Tietze U., Klika M. u. Wolpers H., (2002) *Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II*. Bd. 3, Vieweg-Verlag, Braunschweig.
- Vohns A. (2005) Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. In: *Journal für Mathematikdidaktik*, 26, 1, S. 52-79.
- Vohns A. (2007) *Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht Entwicklung und Perspektiven eines fachdidaktischen Prinzips*. Dissertation: Universität Siegen.
- Vohns A. (2016) Fundamental Ideas as a Guiding Category in Mathematics Education – Early Understandings, Developments in German-Speaking Countries and Relations to Subject Matter Didactics. In: *Journal für Mathematikdidaktik*, 37, Supplement 1, S. 193-223.
- von Mises R. (1972) *Wahrscheinlichkeit Statistik und Wahrheit*, Springer-Verlag, 4. Auflage, Wien, New York.
- Vorhölter K. (2009) *Sinn im Mathematikunterricht*. Budrich-Verlag, Opladen.
- Warmuth E. (2001) Optionen im Mathematikunterricht – eine Mode oder mehr? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, S. 640-643.
- Westermann B. (2003) Anwendungen und Modellbildung. Aus: Leuders T. (Hrsg.), *Mathematik-Didaktik*, Verlag Cornelsen Scriptor, S. 148-162.
- Whitehead A. N. (1911) *An Introduction to Mathematics*. Oxford University Press. London, New York, Toronto.
- Whitehead A. N. (1962) The mathematical Curriculum. Vortrag 1913. Dt Übers. In: *Neue Sammlung*, Heft 2, S. 257-266.
- Winkler R. (1914) *Geschichte, Wesen und volkswirtschaftliche Bedeutung der Arbitrage*. Dissertation, Erlangen.
- Winter H. W. (1995) Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, S. 37-46.
- Winter H. W. (2016) *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblick in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. 3. Auflage, Springer-Verlag, Wiesbaden.

- Wittmann E. C. (1974) *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, Vieweg Verlag, Braunschweig.
- Wittmann E. C. (1995) Mathematics education as a 'design science'. In: *Educational Studies in Mathematics*, 29(4), S. 355-374.
- Wußing H. (2013) *6000 Jahre Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Zseby S. (2002) Die Rolle der Simulation im Finanzmanagement. In: *Stochastik in der Schule*, 3, S. 12-22.

20 Kurzfassung

Welche finanzmathematischen Themen sollen im Mathematikunterricht gelehrt werden? Es gibt bereits einige Publikationen im mathematikdidaktischen Bereich zu Finanzmathematik, die Inhalte für die Schule empfehlen (z.B. zwei Dissertationen von DÖHRMANN und DAUME). Des Weiteren findet man auch einige kürzere Veröffentlichungen in fachdidaktischen Zeitschriften, wobei viele der Vorschläge auf persönlichen Einschätzungen der Autoren/innen fußen. Diese Situation erinnert an BRUNER und *fundamentale Ideen* einer Wissenschaft. Dieser schlägt als Lösung des beschriebenen Problems der Stofffülle vor, sich auf *fundamentale Ideen* der jeweiligen Disziplin zu konzentrieren. Im Sinne von SCHREIBER wird im Weiteren die Rede von *zentralen Ideen* anstatt von *fundamentalen Ideen* sein. Wie gelangt man zu *zentralen Ideen* der Finanzmathematik? Auch hierauf gibt BRUNER die Antwort: „It is a task that cannot be carried out without the active participation of the ablest scholars and scientists.“ (BRUNER, 1960, S. 32)

Aus diesem Grund wurden im Rahmen einer qualitativen Interviewstudie sechs Finanzmathematiker/innen befragt. Aus den Transkripten konnten durch eine qualitative Inhaltsanalyse nach MAYRING fünf *zentrale Ideen* extrahiert werden: Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik, Handhabung von Risiko, No-Arbitrage, Replikation und Zeitwert von Geld. Diese Ideen geben die stoffliche Grundlage zum Unterrichten finanzmathematischer Inhalte in der Schule. Allerdings lässt sich eine *zentrale Idee* nicht als Ganzes im Unterricht durchführen. Es bedarf weiterer Kriterien für eine Inhaltsauswahl aus dem Bereich der Finanzmathematik für die Schule. Aus Arbeiten von BLUM, JABLONKA und WINTER konnten vier normative Kriterien für guten (anwendungsorientierten) Mathematikunterricht abgeleitet werden: Formale Aspekte (der Inhalt muss passend zum Lehrplan sein, die Dauer der Unterrichtssequenz muss angemessen sein), Eignung (der unterrichtete Stoff muss entweder für das unmittelbare oder mutmaßliche spätere Leben relevant sein), Authentizität (der Inhalt spielt in der Praxis oder in der Wissenschaft eine wichtige Rolle) und mathematische Aspekte (die vorkommende Mathematik darf nicht zu trivial und nicht zu komplex für die jeweilige Altersstufe sein). Auf Basis der fünf *zentralen Ideen* und unter Berücksichtigung der oben genannten vier Kriterien wurden vier Unterrichtsvorschläge erstellt.

„Zufall und Aktienkurse“ baut auf Ergebnissen von DAUME und DÖHRMANN auf. Lernende sollen Erfahrungen zum Zufallsbegriff machen und erkennen, dass Aktienkurse nicht vorhersehbar sind.

Bei „Diversifikation“ lernen die Schüler/innen eine Strategie zur Risikominimierung für das Investieren am Finanzmarkt, wobei dabei auch aufgezeigt wird, dass diese Methode auch im Alltag verwendet werden kann.

„Kredite und Risiko“: Kredite und Tilgungspläne sind Teil des Lehrplans und auch Teil des Mathematikunterrichts, die vorkommenden Aufgaben vermitteln aber einen recht statischen Eindruck, Dynamiken und Risiken werden dabei kaum thematisiert. Dieser Unterrichtsvorschlag soll mittels Technologieeinsatz genau das leisten.

„Arbitrage und Replikation“ ist für Schulen mit wirtschaftlichem Schwerpunkt gedacht. Die Lernenden sollen einen ersten modernen Einblick in die Bepreisung von Finanzprodukten bekommen. Begriffe wie Arbitrage werden thematisiert.

Die letzten drei der vier genannten Unterrichtsvorschläge wurden im Unterricht getestet. Die Auswertung dieser empirischen Erprobung erfolgte mittels eines Drei-Perspektiven-Modells

(Forscher, Schüler/innen, Lehrperson). Aus den Berichten des Forschers über die Hospitationen, den schriftlichen Antworten der Schüler/innen auf ausgewählte Fragen der Arbeitsblätter und den Einschätzungen der Lehrperson zu Punkten wie Schüler/innenorientierung, Gestaltung der Arbeitsblätter etc. wurden im Sinne einer Entwicklungsforschung die Ergebnisse, sofern nötig, in die Unterrichtsmaterialien eingearbeitet. Die Forschungshypothese „Finanzmathematische Inhalte eignen sich für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II“ konnte verifiziert werden.

21 Abstract

Which aspects of financial mathematics should be taught in math classes? There are already a few publications in the field of financial mathematics and math education which suggest excitedly financial mathematical topics for school. From an external point of view those suggestions as a whole seem to be uncorrelated and unfounded, although the authors of the mentioned publications justify somehow their proposals. However, BRUNER's approach to solve such issues via *fundamental ideas* seems to be a proper way for answering the opening question. Referring to SCHREIBER I will speak of *central ideas* instead because financial mathematics is a subdomain of mathematics. How one can find such ideas? BRUNER himself gave the answer: „It is a task that cannot be carried out without the active participation of the ablest scholars and scientists.“ (BRUNER, 1960, p. 32)

Due to the fact that there is no list of *central ideas* of financial mathematics I set up a qualitative research design in which I have interviewed six financial mathematicians. Based on a qualitative content analysis I obtained five *central ideas* out of the transcripts: use of stochastics in a financial mathematical context, management of risk, no arbitrage principle, replication and time value of money. It is obvious that one cannot teach a *central idea* as a whole in math classes. Hence, one needs further criterions. With respect to BLUM 1978, JABLONKA 1999 and WINTER 1989 I have created four normative criterions for good (application-oriented) math classes: formal aspects (bounded time in class, suitability to the curriculum), suitability for students (the taught topic is relevant now or in the presumed later life), authenticity (the taught topic is relevant for scientists or practitioners) and mathematical aspects (the mathematical aspects is whether too trivial nor too complex). The actuality of the criterions is confirmed by KAISER 2015. Based on the *central ideas* and the above mentioned criterions I created four sequences concerning financial mathematics for math classes.

„Chance and stock prices“ has reference to theses of DÖHRMANN and DAUME. Students are supposed to gain experiences with the concept of chance and shall recognize that stock prices aren't predictable.

„Diversification“ deals with risk minimization in everyday life and on financial market.

„Credits and risk“: Loans and amortization schedules are part of the school curriculum and math classes. However, the corresponding exercises are taught statically. Risks and dynamics of a credit are seldom discussed. This teaching suggestion focuses on risks and dynamics of a loan with use of technology.

„Arbitrage and replication“ is a teaching sequence for schools with an economic focus. Students get a modern insight into financial product pricing. They get in touch with replication and the no arbitrage principle.

An empirical investigation tested three of these four teaching suggestions in math classes. The three-perspective-model analyzed the notes of it. The researcher wrote a report about the view of the learning processes in the classes, written answers of students give insights about the perspective of the students and the teachers wrote an experience report. Finally the findings have been considered and in the sense of a design research the teaching material has been revised.

I could verify the research hypothesis: „Financial mathematics is suitable for upper secondary math classes.“