



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Non scholae, sed vitae discimus?“

Der Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung in der
Sekundarstufe I“

verfasst von / submitted by

Lisa Melchart

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 299

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium
UF Mathematik UF Psychologie und Philosophie

Betreut von / Supervisor:

Mag. Dr. Andreas Ulovec

*Es ist ein lobenswerter Brauch:
Wer was Gutes bekommt,
Der bedankt sich auch.*

Wilhelm Busch

Dem für Diplomarbeiten üblichen Brauch, Menschen, die einen auf dem Weg zum Studienabschluss begleitet haben, Dank zu sagen, möchte ich an dieser Stelle Rechnung tragen.

Mein besonderer Dank für die stets freundliche, unkomplizierte und ermutigende Unterstützung beim Verfassen dieser Diplomarbeit gilt Dr. Andreas Ulovec. Ihre Hilfestellungen und Ratschläge haben mir über zahlreiche Hürden geholfen ohne mich in der Gestaltung meiner Arbeit einzuschränken.

Besonders im Mathematikstudium habe ich immer wieder außergewöhnliche Hilfsbereitschaft erlebt. Das gemeinsame Lernen und der Austausch mit Studienkolleginnen und Studienkollegen waren nicht nur wertvoll für meine Studienerfolge, sondern durch persönliche Gespräche eine Bereicherung für meine gesamte Studienzeit. Dafür möchte ich mich vor allem bei Lisa D., Lisa H., Lydia, Martin J. und Petra bedanken.

Für das gewissenhafte Korrekturlesen meiner Arbeit und die Unterstützung in der Endphase des Schreibens, aber auch während meiner Studienzeit bedanke ich mich bei meiner Freundin Nina. Danke, dass du immer für mich da bist.

Ein großer Dank gebührt meiner Familie, die mir stets Rückhalt gibt und mir eine wertvolle Stütze ist. Meiner Schwester Teresa danke ich für ihr Vertrauen in mich, ihre Ermutigung und dafür, dass ich Vieles von ihr lernen darf. Ich bin sehr froh, dich als meine Schwester zu haben. Meinen Eltern danke ich zunächst dafür, mir mein Studium überhaupt ermöglicht zu haben. Danke, dass ihr mir in allen Lebenslagen zur Seite steht, mich begleitet, mit ehrlichem Interesse Anteil an meinem Leben nimmt und meine vermutlich größten Fans seid.

Danke sagen möchte ich auch meinem Partner Martin, der mich mit seiner geduldigen, liebevollen und wertschätzenden Art stets auffängt, mich immer wieder dazu anregt, meine Komfortzone zu verlassen und damit wesentlich zu meiner persönlichen Weiterentwicklung beiträgt.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	7
1. Einleitung	9
2. Allgemeinbildung im Mathematikunterricht	10
2.1. Allgemeinbildungskonzept nach Hans Werner Heymann	10
2.1.1. Begriffsklärung Bildung und Allgemeinbildung	11
2.1.2. Lebensvorbereitung	12
2.1.3. Stiftung kultureller Kohärenz	15
2.1.4. Weltorientierung	21
2.1.5. Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch	27
2.1.6. Sozialethische und personenbezogene Aufgaben	34
2.2. Weitere Theorien zur Allgemeinbildung im Mathematikunterricht	41
2.2.1. Heinrich Winter	41
2.2.2. Günter Graumann	43
2.2.3. Roland Fischer	45
2.2.4. Hans-Christian Reichel	46
3. Schulbuchanalyse	49
3.1. Auswahl der Schulbücher	50
3.2. Methode	50
3.2.1. Begriffsbestimmung zu den aufgelisteten Kriterien	56
3.3. Analyse	59
3.3.1. Schulbücher der 5. Schulstufe	61
3.3.2. Schulbücher der 6. Schulstufe	67
3.3.3. Schulbücher der 7. Schulstufe	73
3.3.4. Schulbücher der 8. Schulstufe	81
3.4. Fazit	88
4. Resümee und Ausblick	92
Literaturverzeichnis	95
Abbildungsverzeichnis	97
Abkürzungsverzeichnis	98
Anhang	99

Vorwort

Den Satz *Non scholae, sed vitae discimus*. hörte ich regelmäßig auf der morgendlichen Autofahrt zur Schule, auf welcher mein Vater unter anderem versuchte mir zu vermitteln, worum es in der Schule eigentlich geht – Lernen für das Leben. Vermutlich wusste er nicht, dass das Zitat eine Abwandlung des im Original von Seneca stammenden Ausspruches ist, der zwar syntaktisch kaum, aber semantisch entscheidend anders lautet: *Non vitae, sed scholae discimus*. Seneca brachte damit bereits vor über 2000 Jahren seinen Unmut darüber zum Ausdruck, dass junge Menschen in den Schulen nicht auf das Leben vorbereitet werden. „Ich bin fast 18 und hab keine Ahnung von Steuern, Miete oder Versicherungen. Aber ich kann ‘ne Gedichtsanalyse schreiben. In 4 Sprachen.“¹ schrieb eine Schülerin aus Köln auf Twitter und stieß damit durchaus auf Resonanz. Mit ihren Worten übersetzt sie die Kritik Senecas am Schulsystem in die Sprache von heute und zeigt damit auf, dass in den Schulen des 21. Jahrhunderts scheinbar immer noch zu wenig lebenspraktische Inhalte vermittelt werden. Neben der Auswahl an Inhalten kommt vor allem dem Umgang mit denselben eine entscheidende Bedeutung zu. Als zukünftige Lehrerin sehe ich meine Aufgabe nicht nur darin, Mathematik, Psychologie und Philosophie so zu vermitteln, dass Schülerinnen und Schüler es als sinnvoll erfahren. Im Bewusstsein dessen, dass der Einfluss, den Lehrpersonen auf das Leben ihrer Schülerinnen und Schüler haben, oftmals überschätzt wird, zählt es zu meinen persönlichen Zielen, Schülerinnen und Schüler darin zu unterstützen, in den unterschiedlichsten Situationen ihres Lebens selbstbewusst, eigenständig und verantwortungsvoll handeln zu können und damit möglicherweise einen Beitrag zu ihrer Lebenstüchtigkeit zu leisten. In der vorliegenden Arbeit wird aufgezeigt, dass der Mathematikunterricht durchaus für die Umsetzung derartiger Vorhaben geeignet ist.

¹ (Nestler, 2015)

1. Einleitung

Allgemeinbildung ist das übergeordnete Ziel, welches in allen Schulformen der Sekundarstufe I angestrebt wird. Wie diese Bestrebungen in der Schulpraxis realisiert werden können und was es bedeutet, allgemeingebildet zu sein, wird in der vorliegenden Arbeit versucht zu spezifizieren. Dabei wird der Fokus vor allem darauf gelegt, welcher Beitrag im Mathematikunterricht zur Allgemeinbildung der Schülerinnen und Schüler geleistet werden kann.

Die wohl umfangreichste Arbeit in Bezug auf einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht stammt von Hans Werner Heymann, dessen Allgemeinbildungskonzept zunächst fächerunspezifisch entwickelt und anschließend auf den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I angewandt wurde. Ein entscheidender Aspekt Heymanns Theorie ist, dass neben der Auswahl von Inhalten, die in einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht integriert werden sollten, dem Umgang mit denselben, der sich in der sogenannten Unterrichtskultur äußert, eine maßgebliche Bedeutung zukommt. Wesentlichen Einfluss auf die Unterrichtskultur haben vor allem im Mathematikunterricht Schulbücher. Ihnen wird ein richtungsweisender Einfluss auf den faktischen Unterricht zugesprochen (vgl. Leuders, 2001), weshalb sie durchaus als Ansatzpunkt für Reformbewegungen gesehen werden können. Speziell im Mathematikunterricht kommt dabei den Aufgaben eine entscheidende Rolle zu, da diese mit Abstand am häufigsten zu mathematischen Aktivitäten von Schülerinnen und Schülern anregen (vgl. Büchter und Leuders, 2016). Aus diesem Grund wurden klassische Schulbücher als Forschungsgegenstand dieser Arbeit ausgewählt, deren Ziel es ist, aufzuzeigen, inwieweit Schulbücher zu einer allgemeinbildenden Unterrichtskultur nach Hans Werner Heymann anregen.

Die vorliegende Diplomarbeit gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Abschnitt wird zunächst Hans Werner Heymanns Allgemeinbildungskonzept ausführlich vorgestellt. Um einen Einblick in verschiedene Konzepte zu gewährleisten, wird zusätzlich ein Überblick über vier weitere Theorien eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts gegeben. Im zweiten Teil der Arbeit wird untersucht, inwieweit approbierte Mathematikschulbücher zu einer allgemeinbildenden Unterrichtskultur anregen. Grundlage dafür bilden die von Hans Werner Heymann formulierten Merkmale einer allgemeinbildenden Unterrichtskultur, welche zur Entwicklung eines Kriterienkataloges für die Analyse dreier Schulbuchreihen der Sekundarstufe I herangezogen wird.

2. Allgemeinbildung im Mathematikunterricht

Der Begriff Allgemeinbildung ist Bestandteil unserer Alltagssprache und wie für viele dieser Begriffe gilt, dass sie zwar häufig verwendet werden, aber nur schwer zu definieren sind. Die Meinungen darüber, was an allgemeinbildenden Schulen unterrichtet werden soll, sind divergent. Das liegt nicht zuletzt daran, dass diese Überlegungen sehr stark mit Wertvorstellungen und grundlegenden Weltanschauungen verbunden sind. Es scheint kulturübergreifend und nahezu weltweit zumindest darüber Einigkeit zu bestehen, dass Mathematik als Pflichtfach unterrichtet werden soll. Fragen nach dem Ausmaß, der inhaltlichen Akzentuierung und inwieweit dies verpflichtend geschehen soll, lassen sich weniger rasch beantworten. Didaktiker wie Wolfgang Klafki (1985) und Hans Werner Heymann (2013) sind davon überzeugt, dass bei pädagogischen Überlegungen wie den eben genannten der Bildungs- bzw. Allgemeinbildungsbegriff als Orientierungskategorie im Zentrum stehen sollte.

Im Folgenden wird zunächst Hans Werner Heymanns Allgemeinbildungskonzept genauer vorgestellt, da dieses die Grundlage für die im zweiten Teil dieser Arbeit vorgenommene Analyse von Schulbüchern der Sekundarstufe I ist. Ausgewählt wurde dieses Konzept aufgrund der überzeugenden Argumentationsweise des Autors, dem Bezug zur Schulpraxis, der fortlaufend hergestellt wird, dem humanistischen Ansatz, der dem gesamten Buch zugrunde liegt und vor allem der ausführlichen Anwendung des Allgemeinbildungskonzeptes auf den Mathematikunterricht.

2.1. Allgemeinbildungskonzept nach Hans Werner Heymann

Im Kapitel 2.1 beziehen sich alle Seitenangaben auf Heymann 2013.

Hans Werner Heymann beschreibt das Problem, dass herkömmlicher Mathematikunterricht an allgemeinbildenden Schulen weder absehbaren gesellschaftlichen Anforderungen noch den individuellen Bedürfnissen und Qualifikationsinteressen einer Mehrzahl der Heranwachsenden gerecht wird (S. 8). Daher ist es seine Überzeugung, dass ein verpflichtender Mathematikunterricht an allgemeinbildenden Schulen einer Rechtfertigung bedarf (S. 9). Das Allgemeinbildungskonzept, das in der Folge vorgestellt wird, soll als fachunabhängiger Maßstab zur Klärung der Frage „welche und wieviel Mathematik alle Heranwachsenden in unserer Gesellschaft auf welche Weise lernen sollen“ (S. 9) dienen.

2.1.1. Begriffsklärung Bildung und Allgemeinbildung

Nachdem der Bildungsbegriff in den 1960er-Jahren an Interesse eingebüßt hat, erfuhr die Bildungsdiskussion in den frühen 1980er-Jahren eine Renaissance. Den Anstoß zu dieser Entwicklung gaben laut Heymann die fehlgeschlagene Bildungs- und Curriculumsreform, die Gesellschaft betreffende Veränderungen wie das Aufkommen neuer Technologien und globale Probleme wie Bewahrung der Natur, Herstellung politischen Friedens und eine weltweite Verwirklichung sozialer Gerechtigkeit (S. 13ff.). Diese Problemkomplexe erfordern eine Diskussion über Bildung und Allgemeinbildung, da „die Herausforderung, die sie für pädagogisches Handeln darstellen, ohne pädagogische Leitvorstellungen nicht zu bewältigen ist“ (S. 20).

Wie eingangs erwähnt, zählt der Begriff Allgemeinbildung ebenso wie Bildung zu unserem alltäglichen Wortschatz. Oft werden diese Begriffe auch synonym gebraucht bzw. nicht klar voneinander unterschieden. Heymann differenziert unter Einbeziehung der jeweiligen Begriffsgeschichte Allgemeinbildung und Bildung auf folgende Weise:

Im Prozeß [sic] der begegnenden Aneignung zwischen dem Individuum und der Kultur, in der es heranwächst, betont der Allgemeinbildungsbegriff stärker die Seite der Gesellschaft, der Bildungsbegriff stärker die des Individuums (S. 42).

Die beiden Begriffe versteht Heymann als Antworten auf zwei verschiedene Problemstellungen, die in der pädagogischen und bildungstheoretischen Reflexion vordergründig sind. Das mit der Frage „*Was sollen Kinder und Jugendliche an öffentlichen Schulen lernen?*“ (S. 42) aufgeworfene schulpädagogische Grundproblem kann mit *Allgemeinbildung* beantwortet werden. Zur Beantwortung philosophisch anthropologischer Fragestellungen wie „*Was macht das Menschsein des Menschen aus?*“ oder „*Wie wird der Mensch zum Menschen?*“ (S. 42), die Heymann anthropologisches Grundproblem nennt, kann Bildung als Leitkriterium dienen (S. 42f.).

Jedem Menschen steht es frei, seine individuelle Bildung - von Heymann auch als Menschwerdung bezeichnet (S. 43) - an einem Weltbild, einem Bildungs- oder Persönlichkeitsideal, einer Philosophie oder Religion zu orientieren (S. 45f.). Es ist offensichtlich, dass es für das anthropologische Grundproblem in einer pluralistischen Gesellschaft wie der unseren keine Antwort geben kann, über welche unter allen Mitgliedern Einigkeit herrscht. Das schulpädagogische Grundproblem bedarf aufgrund der verpflichtenden Curricula an öffentlichen Pflichtschulen allerdings einer für alle akzeptablen Antwort in Form eines inhaltlichen Minimalkonsenses. Allgemeinbildung als Antwort auf dieses Problem muss so konzipiert sein, dass eine Vielzahl an unterschiedlichen,

möglicherweise auch konkurrierenden Bildungsidealen einen Platz findet und Schülerinnen und Schüler in der Konfrontation damit Anregungen für ihre individuelle Bildung bekommen. Denn laut Heymann soll schulische Allgemeinbildung „zur Bedingung der Möglichkeit von Bildung“ (S. 46) werden. Mit dieser Argumentation begründet Heymann seine Entscheidung, der Allgemeinbildung als pädagogisches Leitkriterium den Vorzug zu geben. Die leitende These seiner Arbeit lautet:

Die Idee der Allgemeinbildung läßt [sic] sich, wenn sie hinreichend konkret und gegenwartsbezogen ausgearbeitet ist, in kritischer, klärender und orientierender Funktion durchaus folgenreich auf die Probleme schulischen Fachunterrichts (hier: Mathematikunterrichts) beziehen (S. 11).

Heymann betont zugleich, dass eine Orientierung an einem Allgemeinbildungskonzept ohne der notwendigen fachlichen Kompetenz und fachbezogenen Phantasie keinen guten Mathematikunterricht hervorzaubern kann. Die Idee der Allgemeinbildung soll vielmehr eine Richtschnur sein, um sich nicht ins Spezialistische zu verlieren (S. 11).

In der Folge wird der Allgemeinbildungsbegriff über sieben Aufgaben der Schule expliziert. Dadurch soll schlussendlich ermöglicht werden, Lehrpläne, Curricula, Unterrichtskonzepte sowie deren unterrichtliche Realisationen im Hinblick auf ihre allgemeinbildende Qualität beurteilen zu können (S. 34). Diese sieben Aufgaben geben einen Orientierungsrahmen, innerhalb dessen durch rationales Argumentieren eine Beurteilung ermöglicht wird (S. 47).

Um von Allgemeinbildung sprechen zu können, müssen alle sieben Aufgaben und ihr „dialektisches Aufeinanderverwiesensein“ (S. 50) berücksichtigt werden. Heymann sieht in den im Folgenden näher beschriebenen sieben Aufgaben die wichtigsten Aspekte der Diskussion über schulische Allgemeinbildung konzentriert (S. 51).

2.1.2. Lebensvorbereitung

Es darf angenommen werden, dass eine Erwartung an Schule, über die Einigkeit besteht, dadurch gegeben ist, dass sie Schülerinnen und Schüler auf ihr späteres Leben vorbereiten soll. Das zu Lernende soll eine lebenspraktische Nützlichkeit aufweisen (S. 51). Diese sehr allgemein formulierte Aufgabe lässt sich auf verschiedenste Weise interpretieren. Um diesen Interpretationsspielraum kleiner zu halten unterscheidet Heymann zwischen Lebensvorbereitung im engeren und im weiteren Sinn. Unter Lebensvorbereitung im weiteren Sinn fallen einige der noch zu erläuternden Aufgaben einer allgemeinbildenden Schule, weshalb Heymann sich vor allem auf Lebensvorbereitung im engeren Sinn bezieht

(S. 61). Diese meint, dass Schülerinnen und Schüler Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten erwerben sollen, die für ihr Leben als Mitglieder der Gesellschaft notwendig sind und die sie ohne den Besuch der Schule zum Großteil nicht erlernen würden (S. 60f.). Eine Beschränkung auf diesen Bereich würde den Unterricht allerdings auf ein Zweck-Mittel-Denken reduzieren, das nicht mit der von Heymann postulierten Allgemeinbildungsidee vereinbar ist (S. 60).

Heymann geht davon aus, dass es gewisse Arten von Situationen gibt, mit welchen sich beinahe jedes Mitglied der Gesellschaft früher oder später konfrontiert sieht. Die Meisterung derartiger Situationen im Sinne einer „durchschnittlichen Lebensführung“ (S. 62) erfordert Qualifikationen wie beispielsweise die Kulturtechniken Lesen, Schreiben und Rechnen. Die mathematischen Kenntnisse, die im beruflichen und privaten Alltag der Menschen, die keinen mathematikintensiven Beruf ausüben, notwendig sind, hat Heymann unter Berücksichtigung verschiedener Untersuchungen auf folgende Qualifikationen zusammengefasst:

- *Arithmetischer Bereich*: Anzahlbestimmungen; Beherrschung der Grundrechenarten (je nach Komplexität „im Kopf“ oder schriftlich); Rechnen mit Größen, Kenntnis der wichtigsten Maßeinheiten, Durchführung einfacher Messungen (vor allem Zeit und Längen); Rechnen mit Brüchen mit einfachen Nennern in anschaulichen Kontexten; Rechnen mit Dezimalbrüchen; Ausrechnen von Mittelwerten (arithmetisches Mittel); Prozentrechnung; Zinsrechnung; Schlußrechnung („Dreisatz“); Durchführung arithmetischer Operationen mit einem Taschenrechner; Grundfertigkeiten im Abschätzen und Überschlagen
- *Geometrischer Bereich*: Kenntnis elementarer regelmäßiger Figuren (Kreis, Rechteck, Quadrat etc.) und Körper sowie elementarer geometrischer Beziehungen und Eigenschaften (Rechtwinkeligkeit, Parallelität etc.); Fähigkeit zur Deutung und Anfertigung einfacher graphischer Darstellungen von Größen und Größenverhältnisse (Schaubilder, Diagramme, Karten) sowie von Zusammenhängen zwischen Größen mittels kartesischer Koordinatensysteme (S. 136f.).

Obwohl diese mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten nur einen geringen Anteil dessen, was in allgemeinbildenden Pflichtschulen unterrichtet wird ausmachen, werden sie zum Teil nur unzureichend vermittelt. Dazu zählen vor allem „Fähigkeiten und Fertigkeiten im quantitativen Abschätzen, Überschlagen und Erkennen von Größenordnungen sowie die Interpretation und Handhabung von Daten in Tabellen und graphischen Darstellungen“ (S. 138). Aufgaben, die diese Fähigkeiten erfordern, können zumeist nicht mittels Algorithmen, also rezeptartigen Lösungsschemata, bearbeitet werden.

Die Lebensvorbereitung im engeren Sinn betrifft nur jene Bereiche der Mathematik, die „als Mittel für einen Zweck in einem außermathematischen Kontext“ (S. 140) gebraucht werden können. Heymann unterscheidet dabei zwei Hauptarten des Gebrauchs: Den Gebrauch der Mathematik als Werkzeug und jenen als Kommunikationsmedium. Alle Arten von Rechenoperationen fallen unter den Bereich „Werkzeug“, alle Formen der Darstellung und Veranschaulichung und deren Interpretation unter den Bereich „Kommunikationsmedium“ (S. 140).

Durch den zunehmenden Einsatz von Technologie wird zum einen der operative Aspekt immer mehr in Computer und Taschenrechner verlagert und zum anderen werden verschiedenste neue Formen der Darstellung ermöglicht, wodurch Mathematik vermehrt als Kommunikationsmedium gebraucht wird (S. 141). Dieser darstellende Aspekt findet sich im Alltag vor allem in elementarer Geometrie und deskriptiv verwendeten Funktionen sowie in Statistik und Wahrscheinlichkeitsaussagen wieder. Elementare Grundlagen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung sollten daher laut Heymann in ihren Anwendungen im sozialen, politischen und ökologischen Bereich entschieden thematisiert werden (S. 145). Heymann beanstandet, dass die darstellende Mathematik insgesamt eine höhere Wertigkeit erfahren sollte, als dies aktuell der Fall ist (S. 141).

Ein weiteres Desiderat der Schulmathematik in Bezug auf ihre lebenspraktische Verwendung sieht Heymann im Bereich der operativen Mathematik. Durch die zunehmende Automatisierung im produzierenden Gewerbe ist es vermehrt notwendig, die verwendete Technik zu überwachen, zu erwartende Ergebnisse abzuschätzen oder Prozesse auf ihre Effizienz zu prüfen. Für derartige Aufgaben sind mathematische Fähigkeiten wie Überschlagen, Abschätzen oder richtiges Einschätzen von Größenordnungen gefordert (S. 142). Heymann konstatiert, dass mit Blick auf die Lebensvorbereitung eben genannten mathematischen Aktivitäten in der Schule mehr Aufmerksamkeit geschenkt werden sollte. Technische Hilfsmittel sollten für rein algorithmische Prozesse zuverlässig genutzt werden können (S. 145).

In Bezug auf die Anwendung von Mathematik im Alltag wird zwischen Standard- und Nichtstandard-Anwendungen unterschieden. Erstere „umreißen in ihrer Gesamtheit die mathematische Alltagskultur“ (S. 143), werden also durch gesellschaftliche Konventionen als solche bestimmt. Es bedarf meist keiner besonderen Reflexion darüber, wie sie zu bewältigen sind. Im Gegensatz dazu bedürfen Nichtstandard-Anwendungen mathematischer Modellierung, also einer Übersetzung eines Problems in die Sprache der Mathematik. Viele Schülerinnen und Schüler haben Schwierigkeiten mit sogenannten

eingekleideten Aufgaben, auch wenn sie über die erforderlichen mathematischen Kenntnisse verfügen, da diese von den Standard-Aufgaben abweichen.

Heymann erwartet sich von einer unterrichtlichen Reflexion von Standard-Anwendungen und einem Schärfen des Bewusstseins für die Beziehung zwischen Sachproblemen und darauf bezogenen mathematischen Modellen, dass ein solcher Umgang auch auf Nichtstandard-Anwendungen abfährt. Damit ergibt sich die Chance, dass Schulabgänger und Schulabgängerinnen von dem rationalen Potential der Mathematik besser Gebrauch machen können (S. 144f.). Dabei setzt Heymann voraus, dass Fragen der Anwendung von Mathematik im Schulunterricht generell eine höhere Gewichtung zukommen.

Die genannten Vorschläge erfordern weniger Veränderungen der Curricula, als einen anderen Umgang mit dem zu Lernenden (S. 145).

Für die bisher in Bezug auf Verwertung des Gelernten im Alltag ausgesparte Gruppe derer, die in ihrer Zukunft einen mathematikintensiven Beruf ausüben möchten, schlägt Heymann eine äußere Differenzierung ab der 9. Schulstufe vor (S. 149ff.). Da sich die Ausführungen in dieser Diplomarbeit ausschließlich auf die schulische Allgemeinbildung der Sekundarstufe I beziehen, wird auf diese Überlegungen nicht weiter eingegangen.

2.1.3. Stiftung kultureller Kohärenz

Der von Heymann gebrauchte Kulturbegriff orientiert sich an einer Formulierung des Anthropologen Edward Tylor, der Kultur wie folgt definiert: „Jenes komplexe Ganze, das Wissen, Glauben, Kunst, Moral, Gesetz, Sitte und alle anderen Fähigkeiten und Gewohnheiten einschließt, die der Mensch als Mitglied der Gesellschaft erworben hat“ (S. 65). Es handelt sich um einen weit gefassten, soziologischen Kulturbegriff, der zunächst einmal deskriptiv und nicht normativ zu verstehen ist.

Kulturelle Kontinuität meint jenen Prozess, in dem das kulturelle Erbe von einer Generation zur nächsten weitergegeben und von dieser wiederum übernommen und weiterentwickelt wird. Dies macht den diachronen Aspekt der Kulturentwicklung aus. Die Weitergabe kultureller Errungenschaften und Eigentümlichkeiten an die nächste Generation passiert zu einem bedeutenden Teil in der Schule (S. 67f.). Dabei kann zwischen vorintentionaler und intentionaler Tradierung unterschieden werden. Vorintentional meint unabhängig von Lehrplänen und bewussten Vorhaben. Diese Art der Kulturvermittlung vollzieht sich automatisch durch den zwischenmenschlichen Umgang in der Schule. Intentionale

Tradierung hingegen bezieht sich auf die Inhalte der Lehrpläne, deren Weitergabe ebenfalls zur kulturellen Kontinuität beiträgt. In diesem Zusammenhang wird der Schule auch oft vorgeworfen, nicht zeitgemäß zu sein und vorwiegend veraltete, weltfremde oder lebensferne Inhalte zu vermitteln (S. 69). Heymann hält dem entgegen, dass die Tradierung von Kultur einem Fortschrittsstreben nicht widerspricht, solange sie nicht absolut gesetzt wird und unreflektiert erfolgt (S. 70). Er unterscheidet drei Formen der Tradierung: die unveränderte, unhinterfragte Übernahme, die produktive Weiterentwicklung und die Reflexion des Überlieferten. Vor allem die erste und dritte Art sind in der Schule von Bedeutung (S. 70f.).

Die Aufgabe, die Heymann der Schule vorgeben möchte, geht über die Aufrechterhaltung der kulturellen Kontinuität hinaus. Kulturelle Kohärenz schließt sowohl den diachronen als auch den synchronen Aspekt der Kulturentwicklung mit ein. Stiftung kultureller Kohärenz bedeutet für die Schule, dass sie einerseits für kulturelle Kontinuität und andererseits für ein gegenseitiges Verständnis zeitgleich bestehender Teilkulturen zu sorgen und dem Auseinanderfallen der Gesellschaft in disparate Kulturen entgegenzuwirken hat. Damit soll auch durch die Schule ein entscheidender Beitrag zum Funktionieren einer Demokratie geleistet werden (S. 68).

Konkret nennt Heymann zwei bedeutende Teilaufgaben, die es von der Schule zu erfüllen gilt. Zum einen soll die allgemeinbildende Schule eine Verständigung zwischen den Generationen ermöglichen. In einer sich schnell verändernden Gesellschaft, in welcher Wissen rasch veraltet ist, Wertvorstellungen im Wandel sind und durch neue Technologien eine Kluft zwischen den Generationen entsteht, sollten generationenübergreifende Gemeinsamkeiten die Grundlage für gegenseitiges Verständnis bilden. Zu diesen zählen unter anderem Handlungsnormen, Wertvorstellungen und elementare Kulturtechniken. Eltern sollen die Möglichkeit haben zu verstehen, was ihre Kinder in den ersten Schuljahren lernen (S. 74f.).

In Bezug auf den Mathematikunterricht bildet beispielsweise der im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Minimalkanon eine Basis für die Verständigung zwischen den Generationen. Diese elementaren mathematischen Kenntnisse sind erforderlich, um an der mathematischen Alltagskultur teilhaben zu können. Änderungen des Minimalkanons wie beispielsweise die Hervorhebung der Statistik oder die Verwendung von Mathematik als Kommunikationsmedium, die den Wandel der mathematischen Alltagskultur widerspiegeln, sind unverzichtbar, sollen aber behutsam vorgenommen werden (S. 155).

Die zweite Teilaufgabe besteht darin, Schülerinnen und Schülern zu ermöglichen, eine reflektierte kulturelle Identität auszubilden. Die kulturelle Identität eines Menschen steht in wechselseitiger Abhängigkeit mit jener der Gesellschaft oder der sozialen Gruppierung, welcher er angehört. In einer pluralistischen Gesellschaft gestalten sich kulturelle Identitäten vielfältig und sind keinesfalls eindeutig vorgegeben (S. 66f.). Eine eigenverantwortliche Gestaltung des Lebens, die Heymann als das Ziel individueller Bildung sieht, bedeutet, sich persönlich für die Aufrechterhaltung von Traditionen oder auch den Bruch mit Traditionen zu entscheiden. Eine reflektierte kulturelle Identität zu entwickeln heißt, die Besonderheit der eigenen Kultur zu erkennen, sich als zugehörig zu erleben ohne Fremdartiges abzuwerten, aufgeschlossen zu sein und andere Kulturen als gleichberechtigt anzuerkennen (S. 67).

Schülerinnen und Schüler sollen von einer allgemeinbildenden Schule Anstoß zur Herausbildung einer reflektierten kulturellen Identität bekommen. Hochleistungen der eigenen Kultur sind Heranwachsenden zu übermitteln ohne sie als „unüberholbare Maßstäbe absolut zu setzen“ (S.77). Traditionelle Bildungsinhalte sollen in einen Zusammenhang mit der Gegenwart gebracht und ihre geschichtliche und gesellschaftliche Bedingtheit aufgezeigt werden. Schülerinnen und Schüler erleben diese Inhalte oft als überflüssig und lebensfremd. Um dem entgegenzuwirken muss die Alltagskultur der Schülerinnen und Schüler aufgegriffen und mit den tradierten Hochleistungen in Beziehung gesetzt werden (S. 77f.).

Verbindungen zwischen Fach und außerfachlicher Kultur können mittels „zentraler Ideen“ (S. 78) hergestellt werden, die es Heymann zufolge in jedem Fach herauszuarbeiten gilt. Zentrale Ideen sollen aufzeigen, welche Bedeutung das Fach für die Kulturentwicklung hat und wie es mit dem täglich erfahrbaren Alltag verknüpft ist. In ihnen verbindet sich der diachrone mit dem synchronen Aspekt, da sie geschichtlich gewachsen sind und die Grenzen des einzelnen Faches transzendieren.

Im Mathematikunterricht könnte der Aufgabe auf diachroner Ebene genüge getan werden, indem die Mathematikgeschichte vermehrt in den Unterricht miteinbezogen wird. Anhand zentraler Ideen soll die besondere Universalität der Mathematik und ihre Bedeutung für die Gesamtkultur auf der Basis der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler erfahrbar gemacht werden. Darin sieht Heymann den entscheidenden Beitrag eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts zur Stiftung kultureller Kohärenz (S. 158).

Die Bedingungen, die Heymann bei seiner Auflistung zentraler Ideen zu erfüllen versucht, sind folgende:

Keine der Ideen soll ausschließlich einen bestimmten mathematischen Stoff repräsentieren. Jede Idee soll auf unterschiedliche kognitive Niveaus verdeutlicht sein und das mathematische Curriculum wie ein roter Faden vom Elementarunterricht bis zur höheren Mathematik durchziehen können [...]. Die oben diskutierten »kulturübergreifenden mathematischen Basisaktivitäten« sollten, als universale Grundlagen des Mathematiktreibens, in den Ideen zumindest »durchschimmern«. Und schließlich sollten sich die Ideen beliebig weit vertiefen lassen [...] (S. 173).

Folgende zentrale Ideen werden zur Diskussion gestellt.

Idee der Zahl

Zählen wird ähnlich wie die Muttersprache wie selbstverständlich schon in der frühen Kindheit gelernt. Dabei bedarf es kaum einer Reflexion, um die Anzahl einer Menge konkreter Objekte zu benennen. Ein deutlicher Abstraktionsschritt ist notwendig, wenn mit Zahlen operiert wird. Mit den vier Grundrechenarten und dem Vergleichen und Ordnen von Zahlen sind wir im Alltag beispielsweise im Zusammenhang mit Geld und Zeit konfrontiert. Die Idee der Zahl findet sich unter anderem im Arbeiten mit Zahlen, die keine konkrete Objektmenge repräsentieren; im Zählen von abstrakten Objekten wie unterschiedlichen Ausgängen eines Zufallsexperiments; beim Rechnen mit Variablen oder Zahlbereichserweiterungen wieder. Axiomatische Begründungen der natürlichen oder reellen Zahlen bis hin zu Sätzen der Zahlentheorie und algebraischer Strukturen basieren auf der Idee der Zahl. Anwendung finden Zahlen auch durch ihre Eigenschaft als Symbole in Telefonnummern, Hausnummern, Postleitzahlen oder Warenkennzeichnungen (S. 174f.).

Idee des Messens

Die Idee des Messens hängt stark mit der Idee der Zahl zusammen wie das Problem der Inkommensurabilität zeigt. Aus der Annahme, dass beliebige Strecken messbar sind, folgt, dass es „feinere“ Zahlen als die rationalen geben muss. Die physikalische Struktur unserer Welt erfassbar zu machen, wird durch Methoden des Messens ermöglicht. Das Messen von Längen, Flächen, Zeit, Gewicht, Geschwindigkeit und vielem mehr ist in unserem Alltag allgegenwärtig und verbindet damit die Mathematik mit der sinnlich erfahrbaren Welt. Allerdings werden uns die Ergebnisse derartiger Messungen beispielsweise durch Fieberthermometer, Tacho, digitale Uhren oder Waagen automatisch als Zahl präsentiert, wodurch der Vorgang des Messens nicht mehr nachvollzogen werden kann. Heymann plädiert dafür, Messerlebnisse zu bieten und in höheren Klassen möglichst fächerübergreifend die Theorie des Messens zu reflektieren (S. 175f.).

Idee des räumlichen Strukturierens

Keine andere mathematische Idee war für die Hochkulturen so bedeutend, wie die des räumlichen Strukturierens. Geometrische Grundformen oder Gestaltungsprinzipien wie Symmetrie sind in Gebrauchsgegenständen wie auch in der Architektur omnipräsent. Ästhetische Prinzipien sind häufig auf geometrische zurückführbar oder bauen sogar auf ihnen auf. In der perspektivischen Malerei wird Wissen über die Geometrie bewusst eingesetzt. Für den Mathematikunterricht empfiehlt Heymann konstruktive Aktivitäten wie zeichnen, entwerfen, geometrisch konstruieren sowie die Deutung der Umwelt in geometrischen Begriffen vermehrt in den Unterricht zu integrieren. Seiner Ansicht nach kann sich die Idee des räumlichen Strukturierens nur im ständigen Bezug auf den dreidimensionalen euklidischen Raum entfalten, weshalb er dazu rät, die Geometrie in der Sekundarstufe I nicht auf die Ebene „Zeichenblatt-Geometrie“ zu beschränken. Graphische Darstellungen unterschiedlichster Form, in welchen die Idee der Zahl, des Messens und der räumlichen Strukturierung auf zweidimensionaler Ebene miteinander verbunden sind, zählen mittlerweile zur mathematischen Alltagskultur. Allgemeinbildender Mathematikunterricht hat auch zur Aufgabe, Verständnis und auch Kritik an derartigen Visualisierungen von Daten zu fördern (S. 176f.).

Idee des funktionalen Zusammenhangs

Phänomene, die wir als getrennt wahrnehmen in Zusammenhang miteinander zu setzen, hilft uns dabei, die Welt geordneter zu erleben. Dass auf den Blitz der Donner, auf den Tag die Nacht oder auf die Aussaat meist eine Ernte folgt, sind alltäglich erfahrbare Zusammenhänge. Derartige Relationen in unserer Welt können mit mathematischen Mitteln beschrieben werden. Die Idee der funktionalen Beziehung zwischen direkt oder indirekt messbaren Größen ist für die Rolle der Mathematik in unserer Kultur zentral, da ohne sie moderne Naturgesetze nicht denkbar sind. Die Idee funktionaler Zusammenhänge zu begreifen ist Voraussetzung dafür, wissenschaftlichen und gesellschaftlichen Fortschritt tiefergehend begreifen zu können. Es handelt sich dabei um ein theoretisches Konzept, das im Alltag schwieriger erkennbar ist als zuvor genannte Ideen. Sind Schülerinnen und Schüler damit vertraut, fällt es ihnen leichter „latente“ Mathematik im täglichen Geschehen durchschauen zu können. Ein Beispiel dafür wäre die Formulierung „je mehr von diesem, desto mehr von jenem“ (S. 178). Sie sollen entdecken, dass es Möglichkeiten gibt, Zusammenhänge in proportionalen, linearen oder Exponentialfunktionen präziser zu beschreiben. Dadurch erlaubt die Mathematik, „meßbare [sic] Veränderungen in unserer

Welt theoretisch zueinander in Beziehung zu setzen und symbolisch zu bearbeiten“ (S. 178). Zu den bisher genannten Ideen lassen sich mannigfache Verbindungen herstellen. Funktionen operieren auf Zahlen und produzieren neue Zahlen, sie beschreiben Messreihen, können durch geometrische Kurven dargestellt werden und als solche geometrisch untersucht werden (S. 177f.).

Idee des Algorithmus

Algorithmen als Folgen eindeutiger Anweisungen, die einen Lösungsweg für ein gegebenes Problem genau und vollständig beschreiben, lassen sich nicht nur in der Mathematik und Informatik, sondern auch im Alltag beispielsweise beim Suchen einer Telefonnummer im Telefonbuch oder beim Befolgen eines Backrezeptes finden. Schon beim Erlernen der Grundrechenarten lernen Schülerinnen und Schüler algorithmisch vorzugehen. Die Idee des Algorithmus als solche wurde dennoch erst mit dem Aufkommen programmierbarer Computer als mathematische Werkzeuge verstärkt thematisiert. Ein Paradebeispiel für korrektes Abarbeiten von Algorithmen in der Schule bietet die sogenannte Kurvendiskussion, deren Stellenwert es nach Heymann zu überdenken gilt, da Computer diese Aufgabe meist schneller und zuverlässiger zu lösen vermögen. Schon im herkömmlichen Volksschulunterricht werden Schülerinnen und Schüler mit Aufgaben konfrontiert, die sich nicht algorithmieren lassen und damit auch nicht mittels Computer-Software gelöst werden können. Heymann plädiert dafür, grundsätzlich zwischen dem Konstruieren von Algorithmen und der Ausführung vorgegebener Algorithmen zu unterscheiden. Um die Idee des Algorithmierens zu verstehen, ist es notwendig mit beiden Tätigkeiten Erfahrungen zu sammeln. Für das Abarbeiten eines Algorithmus ist es nicht erforderlich zu wissen, warum er funktioniert. Dies gilt für das Dividieren, Wurzelziehen, Lösen einer quadratischen Gleichung oder Differenzieren einer Funktion sowie die Nutzung einer anwenderfreundlichen Benutzeroberfläche eines PC. Dieses Prinzip findet sich auch in der industriellen Fertigung. Für die Entwicklung eines Produktionsverfahrens bedarf es Kreativität, mathematisches, naturwissenschaftliches, ökonomisches und handwerkliches Wissen. Die Produktion kann weitgehend unabhängig davon erfolgen. In der Idee des Algorithmus kann Schülerinnen und Schülern eine tragende Idee der modernen Zivilisation mitsamt der Grenzen ihrer Anwendbarkeit aufgezeigt werden, wodurch ein wesentlicher Beitrag zur kulturellen Kohärenz geleistet werden kann (S. 179f.).

Idee des mathematischen Modellierens

Die Idee des mathematischen Modellierens bietet einen gemeinsamen Rahmen für die bisher eher klassischen Ideen und die Idee des Algorithmus. In ihr lässt sich der Wirklichkeitsbezug von Mathematik verdeutlichen, da mathematische Modelle immer dann konstruiert werden, wenn Mathematik zur Lösung realer Probleme verwendet wird. Die Resultate sind allerdings nicht losgelöst vom Modell zu betrachten, sondern bedürfen Interpretation. Bei einer Einkaufssituation beispielsweise kann der funktionale Zusammenhang zwischen Menge und Preis durch ein mathematisches Modell beschrieben werden. Auf dieser Ebene scheint die Modellierung allerdings als Verkomplizierung einer derartigen Alltagssituation. In der Stochastik oder bei Wachstumsprozessen allerdings sind Mathematik und die „Wirklichkeit“ beinahe undurchdringbar ineinander verwoben. In diesen Bereichen kommt der modelltheoretischen Betrachtungsweise ein hoher Stellenwert zu. Die Idee der Modellierung verdeutlicht die Rolle der Mathematik bei der Analyse und Lösung von Sachproblemen. Zudem ist sie charakteristisch für die Vorgehensweise in den exakten Wissenschaften. Im Unterricht genügt es laut Heymann in vielen Fällen schon, dass sich Lehrpersonen dem Modellaspekt, durch welchen die Mathematik einen starken Wirklichkeitsbezug gewinnt, bewusst sind ohne Schülerinnen und Schülern gegenüber das Wort „Modell“ zu verwenden. Im Laufe der Sekundarstufe I soll im Rahmen der elementaren Geometrie, in der Funktionenlehre und insbesondere in der Stochastik der Terminus Modell ausdrücklich gebraucht werden. Durch die Einbeziehung der Idee des mathematischen Modellierens in den Unterricht kann die „zivilisationsgestaltende und -verändernde Potenz der Mathematik“ (S. 182) verdeutlicht und damit ebenfalls ein Beitrag zur kulturellen Kohärenz geleistet werden (180ff.).

2.1.4. Weltorientierung

Einen Beitrag zur Weltorientierung zu leisten bedeutet, Schülerinnen und Schüler „mit materialem Wissen über die Welt auszustatten“ (S.79). Genauer formuliert Heymann die Aufgabe folgendermaßen:

Die Schüler sollen einen Überblick haben, die Erscheinungen um sich herum einzuordnen wissen, sie zueinander in Beziehung setzen können, über ihren engeren Erfahrungshorizont hinaus über die Welt »Bescheid wissen« (S. 79).

Die Idee, eine Erweiterung des Wahrnehmungs- und Urteilungshorizontes der Schülerinnen und Schüler zu ermöglichen, findet sich in unterschiedlicher Formulierung in schul- und bildungstheoretischen Konzepten wieder. Weltorientierung wird fälschlicherweise häufig als Enzyklopädismus oder Wissenschaftsorientierung ausgelegt. Letztere sieht Heymann zwar als „legitimen Ableger“ (S. 80) der Weltorientierung, jedoch ist sie kein Ersatz, da das Prinzip der Wissenschaftsorientierung die lebensweltlichen Akte des Weltverstehens nicht oder zu wenig berücksichtigt. Dennoch kann jenem Prinzip für die Aufgabe der Weltorientierung etwas abgewonnen werden. Folgender Grundsatz, der selbstverständlich zu sein scheint, kann davon abgeleitet werden: Lehrinhalte, die als objektiv gültig präsentiert werden, müssen wissenschaftlich fundiert sein. Die Wissenschaftsorientierung ist insofern als Element der Weltorientierung zu sehen, als moderne Wissenschaften ein Bestandteil unserer Welt sind. Daher müssen Ergebnisse und Methoden aller Einzelwissenschaften zwar nicht im Detail, aber zentrale Gegenstandsbereiche, Zuständigkeiten, Problemlösekapazitäten und spezifische Weltsichten der den Schulfächern zuordenbaren Wissenschaften im Unterricht vermittelt werden. Dazu ist eine exemplarische Vertiefung in Einzelprobleme, Fragemethoden und grundlegende Ergebnisse notwendig. Für die Begründung von verbindlichen, materialen Elementen in allgemeinbildenden Curricula muss Heymann zufolge die Exemplarität dieser Inhalte entscheidend sein (S. 83f.).

Die Schule kann nach Heymann darüber hinaus mit Hilfe folgender drei Maßnahmen Voraussetzungen zum Aufbau eines differenzierten persönlichen Weltbildes schaffen: Fachliche Entgrenzung, Einführung in konkurrierende Weltsichten und Thematisierung globaler Schlüsselprobleme. Wesentliche Aspekte dieser Maßnahmen sollen nun kurz erläutert werden.

Fachliche Entgrenzung soll als dialektisches Gegenprinzip zu dem der Wissenschaftsorientierung verstanden werden. Da das Leben sich nicht in wissenschaftliche Bereiche einteilen lässt, sollten auch die Grenzen der Schulfächer durchlässig gemacht werden. Bemühungen der Lehrpersonen sollten zum Teil dahingehen, die Bedeutung fachspezifischer Begriffe und Strukturen für Alltagsphänomene deutlich zu machen und aufzuzeigen, dass eine im Fach eingenommene eingeschränkte Perspektive zu Verzerrungen der Weltwahrnehmung führen kann. Eine Möglichkeit das Prinzip der fachlichen Entgrenzung umzusetzen bieten die zentralen Ideen, die über die Grenzen des Faches hinaus von Bedeutung sein sollten. Welche als zentrale Ideen eines Faches anzusehen sind, soll nicht von Experten und Expertinnen alleine, sondern in einer

Diskussion mit interessierten und informierten Laien und Laiinnen entschieden werden. Heymann versteht fachliche Entgrenzung sowohl als Konkretisierung des fachlichen Lernens durch die Thematisierung von Fragen und Problemen des Lebensalltages als auch als Verallgemeinerung der fachlichen Sichtweisen durch die Besinnung auf zentrale Ideen (S. 84f.).

Der zweite Aspekt, der in einer allgemeinbildenden Schule Berücksichtigung finden sollte ist die Einführung der Schülerinnen und Schüler in konkurrierende Weltansichten. Heymann vertritt die Ansicht, dass „eine Indienststellung der öffentlichen Schule für eine bestimmte religiöse oder politische Richtung mit den Grundsätzen einer demokratischen und pluralistischen Gesellschaft unvereinbar ist“ (S. 85). Weltorientierung als eine Aufgabe der allgemeinbildenden Schule bedeutet unter diesem Aspekt, Heranwachsenden zu ermöglichen, verschiedene Standpunkte kennenzulernen und sich selbst einen eigenen zu erarbeiten (S. 85f.).

Thematisierung globaler Zukunfts- und Weltprobleme ist der dritte Aspekt, den es im Bereich der Weltorientierung zu nennen gilt. Einen entscheidenden Beitrag zur Lösung solch diffiziler Probleme zu leisten, kann von der Schule nicht verlangt werden. Dennoch ist eine reflektierte Auseinandersetzung über aktuelle Schlüsselprobleme zwischen Lehrenden und Schülerinnen und Schülern, in der auch politische, geographische, naturwissenschaftliche und ökologische Bedingungen berücksichtigt werden, im Rahmen der Allgemeinbildung dringend notwendig. Heymann ist der Überzeugung, dass alle gängigen Schulfächer einige relevante Aspekte zur Wahrnehmung dieser Probleme beisteuern könnten (S. 86f.).

In Bezug auf den Mathematikunterricht stellt Heymann die Frage, welchen Beitrag dieser zur Erweiterung des Horizonts leisten kann bzw. wie eine Bereicherung des Weltbildes durch den Mathematikunterricht gelingen kann. Bezogen auf ein Schulfach bedeutet zur Weltorientierung beizutragen „zunächst einmal, eine Brücke vom (objektiven) Weltbezug des Faches zur (subjektiven) Welt der Schüler zu schlagen“ (S. 183). In der Beschäftigung mit den Inhalten eines Schulfaches sollen diese als Teil der Welt wahrgenommen und in das eigene Weltbild integriert werden können. Um diese Verbindung herzustellen, ist zunächst einmal der objektive Weltbezug der Mathematik zu bestimmen, was sich schwieriger als in anderen Fächern gestaltet, da die Mathematik „Teil unserer Welt und zugleich in ihr verborgen ist“ (S. 183). Die Mathematik ist nicht bloß Teil unserer Welt, sie

ist als Erkenntnismittel sogar konstitutiv für das rationale, durch die modernen Wissenschaften geprägte Weltbild. Als Konstruktionsmittel findet sie Verwendung in der Architektur, der Technik, der Wirtschaft und Verwaltung und beeinflusst damit wesentlich unsere aktuelle Lebenswelt. Die Mathematik ist gewissermaßen allgegenwärtig und dennoch nicht sichtbar. Um zu verhindern, dass Schülerinnen und Schüler die Mathematik als vom übrigen Leben isoliert wahrnehmen und damit ihr Weltbezug verborgen bleibt, bedarf es einen besonderen Umgang mit ihr im Unterricht (S. 184f.).

Im Zentrum Heymanns Überlegungen zum richtigen Umgang mit der Mathematik im Sinne der Weltorientierung steht die Anwendungsorientierung. Die mathematische Modellierung, die im vorhergehenden Kapitel bereits als zentrale Idee thematisiert wurde, ist auch unter dem Aspekt der Anwendung von Mathematik von großer Bedeutung (S. 186). Angelehnt an Gabriele Kaiser-Meißner beschreibt Heymann drei Ziele, die durch Anwendungen im Mathematikunterricht verfolgt werden können: pragmatisch-utilitäre, persönlichkeitsorientierte und gesellschaftskritische und an der Wissenschaft orientierte Ziele. Bei der Umsetzung letzterer können im Spannungsfeld zwischen der unverzichtbaren Auseinandersetzung mit der Mathematik als Wissenschaft und einem zu vermeidenden Spezialisismus die zentralen Ideen als Leitlinien dienen, um beispielhaft ein Bild der Wissenschaft Mathematik zu vermitteln (S. 189). Heymann konzentriert sich in seinen Ausführungen vor allem auf die beiden zuerst genannten Zielbündel.

Pragmatisch-utilitäre Ziele zu verfolgen bedeutet, die Mathematik für reale Situationen nutzbar zu machen. Dabei tut sich ein breites Spektrum an Qualifikationen auf, da ein Anwenden von Mathematik in realen Situationen sowohl auf gängige Tätigkeiten im Alltag wie auch auf Lösen von komplexen Problemen auf Expertenniveau bezogen werden kann (S. 189). Mathematik im Alltag anwenden zu können heißt, in einer Situation erforderliche mathematische Standard-Modelle abrufen zu können. Diese Fähigkeit auszubilden zählt im Grunde genommen zur Aufgabe der Lebensvorbereitung. Der entscheidende Unterschied zur Weltorientierung ist dann gegeben, wenn zur Anwendung der Mathematik in Standardsituationen ein Moment der Reflexion hinzukommt. Unterrichtspraktisch bedeutet das beispielsweise, zu einer gegebenen Aufgabe auch andere Lösungsansätze als den herkömmlichen zuzulassen oder überhaupt die Aufgabenstellung zu hinterfragen. Derartige Umdeutungen und kritische Betrachtungen sollen Schülerinnen und Schülern ermöglichen, ihre Umwelt auf verschiedene Weisen zu erschließen und vor allem Aspekte sehen zu

können, die ohne eine mathematische Betrachtungsweise vermutlich verborgen blieben (S. 190).

Am anderen Ende des Spektrums, wo die Anwendung von Mathematik weit über alltägliche Standardsituationen hinausgeht, ergeben sich für die Einbettung in den Unterricht einige Schwierigkeiten. Realitätsnahe Aufgaben sind zwangsläufig auch mit einer höheren Komplexität verbunden, die zwar anspornen, aber ebenso frustrierend wirken kann. Damit wäre das Ziel, einen weltorientierenden Mathematikunterricht zu bieten, verfehlt (S. 191f.). Heymann empfiehlt daher, komplexe Anwendungen im Rahmen von Projekten oder innerhalb eines Wahlpflichtfaches in den Unterricht zu integrieren. Über die mathematische Alltagskultur hinausgehend sieht Heymann jene anwendungsorientierten Aufgaben als gerechtfertigt, die mittels mathematischen Modellierens eine neue Sicht auf wichtige Phänomene der Alltagswelt der Schülerinnen und Schüler erschließen und damit ihren Vorstellungshorizont so erweitern, dass Teile der „versteckten“ Mathematik erkennbar werden. Zudem sollte das Niveau der benötigten Mathematik nicht über die intellektuellen Möglichkeiten der Mehrheit der Gruppe hinausgehen (191f.). Um Überforderung zu vermeiden hält Heymann es für legitim, Abstriche bei mathematischen Inhalten und deren Komplexität zu machen, da aktives mathematisches Modellieren eine anspruchsvolle geistige Tätigkeit ist, die für alle Schülerinnen und Schüler erfahrbar gemacht werden soll. Der Aufgabe der Weltorientierung entspricht es eher, Schülerinnen und Schüler zu ermöglichen, elementare Mathematik in für sie interessanten Modellierungen zur Anwendung zu bringen als sie mit Problemen zu konfrontieren, für deren Bearbeitung erst das „mathematische Rüstzeug“ mühsam erarbeitet werden müsste (S. 201f.).

Beim Verfolgen des zweiten Ziels, dem persönlichkeitsorientieren und gesellschaftskritischen, geht es weniger um die Anwendung von Mathematik an sich, als vielmehr darum, Schülerinnen und Schüler zu selbstständigem und kritischem Denken und Handeln in zukünftigen Situationen zu befähigen (S. 192). Aus diesem Grund kommt auch der Auswahl der zu behandelnden Probleme anhand ihres Inhaltes eine größere Bedeutung zu. Themenkomplexe, die sich für eine Bearbeitung mittels mathematischer Modellierung eignen, sind beispielsweise Stickoxidminderung durch Tempolimit, Schaffung von Arbeitsplätzen durch Verkürzung der Arbeitszeit, Wärmedämmung oder Verkehr und Geschwindigkeit (S. 193).

Auch wenn andere Fächer eher für eine inhaltliche Auseinandersetzung mit derartigen Themen prädestiniert sind, kritisiert Heymann, dass der herkömmliche

Mathematikunterricht sein Potenzial in diesem Bereich bei Weitem nicht ausschöpft. Der Mathematikunterricht würde sich nämlich nicht bloß für eine Thematisierung, sondern darüber hinaus dazu eignen, derartige Probleme zu analysieren, Varianten durchzurechnen, Größenordnungen zu veranschaulichen und Alternativen zu modellieren. Damit könnte entscheidend zur Weltorientierung beigetragen werden (S. 193f.).

Anwendungsorientierte Aufgaben werden meist in Form von Textaufgaben an die Schülerinnen und Schüler herangetragen. Heymann unterscheidet drei Typen von Textaufgaben. Jene Aufgaben, deren Zweck es ist ein zuvor im Unterricht behandeltes Lösungsverfahren zu üben, bezeichnet er als eingekleidete. Ein Charakteristikum dieses Aufgabentyps ist, dass mit dem Notieren der Lösung die Aufgabe als erledigt gilt. Typisch ist zudem, dass außermathematische Probleme meist isoliert präsentiert werden, wodurch kein Bezug zur Lebensrealität hergestellt werden kann. Dies kann auch dazu führen, dass die gegebenen Probleme von Schülerinnen und Schülern als unnötige Erschwerung gesehen werden, deren einziger Zweck darin besteht, den zu übenden Algorithmus zu verschleiern (S. 194f.).

Bei der zweiten Art von Textaufgaben werden hingegen ganze Problembereiche behandelt. Der Großteil des gegebenen Textes beinhaltet meist außermathematische Informationen, die für eine mathematische Modellierung notwendig sind. Aufgegriffen werden dabei typischerweise Themen wie Bevölkerungsexplosion, Bremsverhalten von Fahrzeugen, Energieverbrauch und Kosten von „Energiesparlampen“ (S. 195) im Vergleich zu herkömmlichen Glühbirnen. Das Lösen derartiger Aufgaben kann eigenständiges Recherchieren, eine partielle, grobe Modellierung oder das Ziehen von Handlungskonsequenzen miteinschließen. Eine Lösung kann dann als Anlass für weitere Fragen dienen oder sogar zu einer Modifizierung des Ausgangsproblems führen (S. 195f.). Beim dritten Typus handelt es sich nicht um Textaufgaben im eigentlichen Sinne, sondern um mathematikhaltige Sachtexte, die Zahlen oder graphische Darstellungen beinhalten. Diese ermöglichen, die Mathematik so zu präsentieren, wie sie auch tatsächlich außerhalb der Schule vorkommt (S. 196). Textaufgaben und mathematikhaltige Sachtexte können darüber hinaus anhand der folgenden Kriterien kategorisiert werden: Lebensnähe, Realitätsnähe, Bezug auf einen allgemeineren Problemkontext, Explizitheit der Aufgabenstellung und Offenheit der Aufgabenstellung (S. 196f.).

Die beiden letztgenannten Typen von Textaufgaben werden laut Heymann einem weltorientierenden Mathematikunterricht eher gerecht als übliche eingekleidete Aufgaben, da sie eine höhere Lebens- und Realitätsnähe aufweisen und offene Aufgabenstellungen eher ermöglichen. Dennoch plädiert Heymann nicht dafür, herkömmliche Textaufgaben aus dem Unterricht zu verbannen (S. 197). Oben genannte Kriterien können für eine Beurteilung der Brauchbarkeit der Aufgaben im Sinne der Brückenbildung zwischen Lebenswelt und Mathematik dienen. Mangelt es einer Aufgabenstellung an Offenheit, lässt sie also nur eine richtige Lösung zu, kann dem durch eine Umformulierung des Textes, an der auch Schülerinnen und Schüler mitarbeiten können, entgegengewirkt werden. Beinhaltet ein gegebener Text implizite Annahmen oder Erwartungen an den Lösungsweg, können diese aufgedeckt und gemeinsam hinterfragt werden. Für einen Modellierungsprozess ist wesentlich, dass für ein gegebenes Problem, dem die Mathematik nicht inhärent ist, eine Lösung mit mathematischen Mitteln gesucht wird. Dies lässt sich nach Heymann sowohl an „guten“ als auch an „schlechten“ Textaufgaben verdeutlichen, indem Schülerinnen und Schüler dazu angeregt werden, sie zu verändern oder „systematisch mißzuverstehen [sic]“ (S. 198). Für einen sinnvollen Umgang mit Anwendungsaufgaben ist auch ein Einsatz von Computern in Betracht zu ziehen. Diese können verwendet werden, um mathematische Modelle darzustellen und durch Variation der Eingangsgrößen zu analysieren (S. 200). Eine derartig zeitintensive Auseinandersetzung kann selbstverständlich nicht immer erfolgen, aber durch sie kann beispielhaft ein reflektierter Umgang mit Textaufgaben etabliert werden (S. 199).

2.1.5. Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch

Basis dieser Aufgabe bildet die klassische Definition von Immanuel Kant, die seinen Aufsatz zur Beantwortung der Frage „Was ist Aufklärung?“ aus dem Jahr 1784 einleitet:

Aufklärung ist der Ausgang des Menschen aus seiner selbst verschuldeten Unmündigkeit. Unmündigkeit ist das Unvermögen, sich seines Verstandes ohne Leitung eines anderen zu bedienen. Selbstverschuldet ist diese Unmündigkeit, wenn die Ursache derselben nicht am Mangel des Verstandes, sondern der Entschließung und des Mutes liegt, sich seiner ohne Leitung eines anderen zu bedienen. Sapere aude! Habe Mut dich deines eigenen Verstandes zu bedienen! ist also der Wahlspruch der Aufklärung (Kant, 2002, S. 9).

Diesem Text liegt die Annahme zugrunde, dass der Mensch zum vernünftigen Denken und zur Selbstbestimmung, die erst erarbeitet werden muss, fähig ist (S. 89). Die Begriffe

kritische Vernunft, Mündigkeit, Emanzipation und Aufklärung sind eng miteinander verbunden. Kritischer Vernunftgebrauch bedeutet, Behauptungen nicht unhinterfragt zu übernehmen, sondern sie auf „Widersprüche, Unstimmigkeiten und Unvereinbarkeiten“ (S. 89) zu prüfen und dabei der „Kraft der eigenen Urteilsfähigkeit“ (ebd.) zu vertrauen. Diese Vorgehensweise soll gleichermaßen auf das eigene Denken angewandt werden. Voraussetzung für den kritischen Vernunftgebrauch ist folgerichtiges Denken. Kritischer Vernunftgebrauch wiederum ist die Basis für Mündigkeit. Mündig zu sein bedeutet, selbstständig zu denken und eigenverantwortlich zu handeln. Der kritische Gebrauch der eigenen Vernunft erleichtert zudem, sich von Abhängigkeiten und Zwängen zu emanzipieren und zwar sowohl auf individueller als auch auf gesellschaftlicher Ebene (S.89f.). Aufklärung verbindet diese Begriffe miteinander, da sie darauf abzielt, den kritischen Vernunftgebrauch zu verwirklichen und damit Mündigkeit und Emanzipation zu ermöglichen (S. 90).

Für die Schule bedeutet diese Aufgabe zunächst, dass zum materialen Bildungsaspekt der Weltorientierung durch eine Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch auch ein formaler Aspekt hinzukommt (S. 91). Die Wissenschaftsorientierung spielt auch bei dieser Aufgabe eine Rolle, da kritischer Vernunftgebrauch ein universales Element aller wissenschaftlichen Tätigkeiten ist. Schülerinnen und Schüler sollen erkennen können, dass diese Denkweise keinesfalls nur für die Wissenschaften relevant ist, sondern gerade „für die Beurteilung und Bewältigung ganz alltäglicher Probleme ihren Sinn und ihre Notwendigkeit hat“ (S. 95).

Um zu klären, welcher Beitrag zum „Denkenlernen“ (S. 95) im Unterricht geleistet werden kann, orientiert sich Heymann zunächst an der kognitiven Lernpsychologie. Eine Schulung des kritischen Denkens kann nicht unabhängig von Inhalten passieren. Sie kann nur gelingen, wenn anhand von konkreten Inhalten damit zusammenhängende Schemata und Schlüsselkonzepte bewusst gemacht werden. Lernen ist als konstruktiver Akt zu verstehen, bei welchem neue Informationen in die eigene Wissensbasis integriert werden, indem sie interpretiert und Zusammenhänge erkannt werden. Um Denkfähigkeiten und -fertigkeiten auszubilden bedarf es daher der Herstellung vielfältiger Verbindungen zwischen neuem und bestehendem Wissen.

Geeignete Inhalte können zwar als Anlass zum Gebrauch der kritischen Vernunft dienen, dieser setzt aber auch eine gewisse Bereitschaft dafür voraus. Wie Forschungsergebnisse zeigen, kommt dieser Bereitschaft eine oft unterschätzte Bedeutung zu. Gute Denkerinnen

und Denker bzw. Problemlöserinnen und Problemlöser unterscheiden sich von weniger guten vor allem durch die Neigung, ihre Fähigkeiten zu gebrauchen. Die Ermunterung zum eigenständigen Gebrauch von Strategien und Denkfertigkeiten genügt oft schon, um die Bereitschaft generell zu steigern. Motivation und die Einstellung dem eigenen Können und der eigenen Intelligenz gegenüber beeinflussen darüber hinaus, ob es zu einem Gebrauch der Denkfertigkeiten kommt (S. 96).

Ein weiterer Faktor in Bezug auf die Entwicklung von Denkfähigkeit spielt das soziale Gefüge. Kritisches Denken zeichnet sich durch „Interpretation, Äußern von Zweifeln, Ausprobieren von Möglichkeiten, Einfordern rationaler Begründungen“ (S. 98) aus. Derartiges Umgehen mit Behauptungen unterliegt einer sozialen Bewertung. Es scheint positive Auswirkungen auf die Ausbildung von Denkfertigkeiten zu haben, wenn Schülerinnen und Schüler sozialen Gemeinschaften angehören, in denen rationale und kritische Argumentation als wertvoll gelten und wenn sie sich dort in der Analyse und Lösung von Problemen als fähig erleben (S. 98). Heymann konstatiert, dass kooperatives Problemlösen, bei welchem Schülerinnen und Schüler persönliche Stärken einbringen können, positiv auf individuelle Denk- und Problemlösefähigkeiten wirkt. Alleine durch aktives Beobachten steigt die Chance derartige Fähigkeiten zu entwickeln (S. 97). Erleben Schülerinnen und Schüler, dass kritisches Nachfragen positiv bewertet wird oder in einem Konflikt vernünftigen Argumenten mehr Gewicht gegeben wird als vorgefassten Meinungen oder dem sozialen Status einer Person, trägt dies ebenso zur Erfüllung der Aufgabe bei (S. 100). Für Heymann ist es vorstellbar, dass Denkschulung im Rahmen einer Lehrzeit, wie sie in handwerklichen Ausbildungen üblich ist, stattfindet. Der Unterricht müsste dann derart gestaltet werden, dass den Schülerinnen und Schülern lehrreiche Erfahrungen mit dem eigenen Denken ermöglicht werden und ausreichend Gelegenheit geboten wird, andere beim Bearbeiten einer Aufgabe zu beobachten (S. 98).

Insgesamt bedarf das Denkenlernen unter aufklärerischem Anspruch geeigneter Inhalte als Gegenstände des Denkens sowie einer „ermutigenden und schülerfreundlichen Unterrichtsatmosphäre“ (S. 103). Bezüglich der Auswahl von Unterrichtsthemen rät Heymann dazu, für Schülerinnen und Schüler irrelevant scheinende Inhalte, die in keinem Kontext mit ihren Erfahrungen im Alltag stehen wie beispielsweise das Erlernen und mechanische Anwenden von Formeln ohne diese zu verstehen, zu vermeiden. Damit würde nämlich die Denkfähigkeit eher gelähmt als angeregt. Die Auswahl der Inhalte sollte anhand

von „Relevanz und Begreifbarkeit, Altersgemäßheit, emotionale[m] Anregungsgehalt und Vernetzbarkeit des Wissensangebots“ (S. 102) erfolgen.

Bevor Heymann konkreter auf die Auswahl mathematischer Inhalte, anhand derer Denk- und Problemlösefähigkeiten trainiert werden können eingeht, erläutert er, was es bedeutet Mathematik zu verstehen, auf welche Art und Weise sie abstrakt ist und in welchem Verhältnis mathematisches Denken und Alltagsdenken stehen. Diese Überlegungen werden hier nur sehr komprimiert wiedergegeben, da sie aufgrund ihrer Ausführlichkeit den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würden und für die Analyse im zweiten Teil dieser Arbeit nur insofern relevant sind, als aus ihnen unterrichtspraktische Konsequenzen gezogen werden können.

Die Abstraktheit der Mathematik wird zum Teil als Ursache für Verständnisprobleme gesehen. Sie ist Heymann zufolge auf zweifache Weise gegeben. Zum einen ist die Mathematik ein abstraktes referentielles System, da mathematische Begriffe und Regeln sich auf Merkmale realer Gegenstände und deren Relationen beziehen lassen. Zum anderen ist sie ein abstraktes formales System, in dem mit mathematischen Symbolen nach festgelegten Regeln operiert werden kann (S. 223). Anhand eines konkreten Beispiels aus der elementaren Algebra kann dieser Doppelcharakter sichtbar gemacht werden. Für eine Gleichung lässt sich angeben, wie sie definiert wird und welche Regeln im Umgang mit Gleichungen eingehalten werden müssen, um stets eine zulässige Gleichung zu erhalten. Über diesen formalen Charakter hinaus lassen sich sowohl innermathematisch als auch außermathematisch Referenzen finden. Innermathematisch ist die elementare Algebra von Bedeutung, da sie ermöglicht, mit Zahlen in verallgemeinerter Form zu operieren. Sie kann außerdem verwendet werden, um außermathematische Situationen in algebraischen Ausdrücken zu beschreiben. Zu einem Term wie „ $17 - (8+3)$ “ lassen sich Rechengeschichten folgender Art erfinden: „Maria hat 17 Bonbons. Sie gibt 11 ihren Freunden, nämlich 8 Sandra und 3 Thomas“ (S. 220f.). Heymann betont, dass es hier nicht darum geht, Term-Aufgaben einzukleiden, denn diese wären bloß „lebensfremde Scheinanwendungen“ (S. 221). Vielmehr sollte versucht werden, für gegebene Terme passende Geschichten zu erfinden und diese wiederum in einen Term zu fassen. In diesem Prozess dürfen selbstverständlich Fehler auftreten, deren Analyse auch zum besseren Verstehen beitragen kann. Das Wechselspiel zwischen „Situationsfindungs- und Rückmodellierungsaufgaben“ (S. 222) gibt Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit zum Erfinden, Konstruieren, Probieren und Diskutieren, die Heymann im üblichen Algebra-

Unterricht vermisst. Der formale Aspekt wird laut Heymann im herkömmlichen Mathematikunterricht generell eher überbetont (S. 224). Für eine stärkere Beachtung des referenziellen Aspekts bedürfe es einer Unterrichtsform, die Erkundungsprozesse zulässt und auf die üblichen dualen Beurteilungen „richtig“ und „falsch“ hin und wieder verzichtet (S. 223).

Mathematische Sachverhalte zu verstehen heißt laut Heymann, „die formale und die referentielle Bedeutung [mathematischer Sachverhalte] aufeinander beziehen zu können“ (S. 223f.). Die Herstellung dieser Verbindung ist vor allem für das mathematische Modellieren essenziell. Schwierigkeiten im Anwenden und Lernen von Mathematik werden oft auf einen der Mathematik eigenen Denkmodus zurückgeführt. Heymann gibt als Beispiel für die Kluft zwischen dem Denken in der Mathematik und im Alltag eine eigens erlebte Situation an. Seine Tochter Katharina war über das Ergebnis (8), das sie bei der Division der Zahl 2 durch $\frac{1}{4}$ erhalten hat, verwundert. Ihr Unverständnis kam daher, dass sie die Zahl 2 zwar „geteilt“, aber als Ergebnis eine größere Zahl erhalten hat. Heymann versuchte mit der Erklärung des Unterschiedes von „teilen in“ und „teilen durch“ die Verwirrung aufzulösen. Er konnte zwar seiner Tochter damit verständlich machen, wie derartige Aufgaben zu rechnen sind, aber logisch erschien ihr diese Vorgehensweise nicht. Die Verwunderung über das Ergebnis der Division ist laut Heymann aber kein Resultat unterschiedlicher Denkweisen, sondern unterschiedlicher Übersetzungen des Wortes Dividieren in die Umgangssprache. Das Wort „Teilen“ macht für eine Division im Grunde nur für natürliche Zahlen als Divisoren Sinn. Für obiges Beispiel eignet sich die Formulierung „Wie viele Viertel passen in 2 Ganze?“ (S. 207) besser. Derartige Widersprüche können also aufgelöst werden, indem auf die Interpretation der verwendeten Begriffe differenziert eingegangen wird. In Bezug auf obiges Beispiel müsste im Unterricht von Beginn an „Teilen“ im Sinne von Aufteilen oder Verteilen als Spezialfall der Division verstanden werden, die ebenso bei Fragen wie „Wie viele x passen in y?“ oder „Mit welcher Zahl muß [sic] x multipliziert werden, daß [sic] y herauskommt?“ (S. 208) angewandt werden kann.

Die Vorstellung, dass mathematisches Denken eine zum Alltagsdenken grundsätzlich verschiedene Denkweise erfordert, ist Heymann zufolge empirisch schlechter gestützt als die Annahme, dass eine Fähigkeit zum mathematischen Denken „auf einer dichteren Vernetzung mathematischer Wissens Elemente untereinander sowie mit nicht-mathematischem Wissen beruht“ (S. 228). Demnach bedarf mathematisches Denken nicht

eines Umschaltens zwischen zwei unterschiedlichen Denkart, sondern einerseits einer angeborenen Disposition, Verknüpfungen einfacher herstellen zu können und andererseits einer bestimmten, durch oben beschriebene Einflüsse zustande kommende, Denksozialisation (S. 229). Hinsichtlich der Inhalte, anhand derer mathematisches Denken gelernt werden kann, diskutiert Heymann die folgenden drei Thesen:

1. *Mathematisch denken* lernen läßt [sic] sich an *jedem* mathematischen Inhalt, sofern es gelingt, ihn so zu unterrichten, daß [sic] er verstanden wird.
2. Unter den insoweit in Frage kommenden Inhalten gibt es solche, die für die Förderung der *allgemeinen* Denkfähigkeit mehr versprechen als andere.
3. Und unter diesen Inhalten gibt es solche, die nicht nur der allgemeinen Denkschulung dienen, sondern darüber hinaus in spezifischem Sinne Anlässe und Anreize für *kritisches* Denken bieten. (S. 240)

Die erste These resultiert aus den bisher skizzierten Überlegungen, die das Verstehen und die Abstraktheit der Mathematik sowie die Beziehung zwischen mathematischem und Alltagsdenken betreffen. Verständiges Denken in und mit der Mathematik setzt voraus, dass die Inhalte verstanden werden. Deshalb beschreibt Heymann jene Unterrichtsinhalte, die sich unter den Bedingungen des schulischen Alltags nicht so unterrichten lassen, dass sie von der Mehrheit der Schülerinnen und Schüler verstanden werden, als ungeeignet für einen allgemeinbildenden und damit denkfördernden Mathematikunterricht (S. 240). Dies ist allerdings kein Kriterium, das für eine Kategorisierung in geeignete und ungeeignete Inhalte taugt, da das Verstehen davon abhängt, auf welches bereits verstandene Wissen zurückgegriffen werden kann. Eine Eingrenzung denkfördernder Inhalte kann also nur mit Blick auf ein gesamtes Curriculum erfolgen. Zudem hängt das Verstehen maßgeblich vom Umgang mit dem zu Lernenden und der aufgewendeten Zeit ab. Daher erweist sich das in der ersten These enthaltene Kriterium für eine Auswahl mathematischer Inhalte als recht vage (S. 240f.). Auch die zweite These ist ein Resultat der bisherigen Überlegungen. Für das Verständnis ist es von großer Bedeutung, ob dem zu Lernenden eine Relevanz im außerschulischen Bereich zugesprochen wird und ob sich eine Verbindung zwischen mathematischem und alltäglichem Denken herstellen lässt. Wird im Mathematikunterricht darauf rücksichtgenommen, ist dies für eine Entwicklung einer allgemeinen Denkfähigkeit zuträglich. Inhalten, bei denen der referentielle Charakter der Mathematik ohne große Anstrengung deutlich gemacht werden kann, ist im Zweifelsfall der Vorzug zu geben (S. 241f.). Zusätzlich zur Verständnisorientierung, die in der ersten These ausgeführt wurde, und soweit eine vernünftige innermathematische Systematik beibehalten wird, sollten

Inhalte eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts mit Blick auf die allgemeine Denkschulung mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllen:

- [Sie sollten] unmittelbar lebensnützlich, d.h. für den privaten und beruflichen Alltag der Mehrheit brauchbar sein; und/oder
- exemplarisch für Mathematik als kulturelle Errungenschaft sein, etwa für eine oder mehrere der zentralen Ideen, die Schnittstellen zwischen der mathematischen und außermathematischen Kultur bezeichnen; und/oder
- viele Gelegenheiten zu Anwendungen bzw. Modellierungen in außermathematischen Sachzusammenhängen bieten, zumindest aber charakteristische Züge der Wissenschaft Mathematik als Teil unserer Welt aufzeigen [...]; und/oder
- Möglichkeiten zu einem lebendigen Unterricht eröffnen: zu sachlicher Verständigung, kooperativen Arbeiten, praktischem Tun, selbstverantwortlichem Handeln, sinnlichem Erfahren, kreativem Erfinden, spielerischem Problemlösen (S. 242).

Hier wird deutlich, dass das Ziel, einen „für die allgemeine Denkschule vielversprechend[en]“ (S. 242) Mathematikunterricht zu bieten, mittels der übrigen sechs Aufgaben einer allgemeinbildenden Schule realisiert werden kann. Dabei wird auf die noch folgenden drei Aufgaben, die in der letzten Bedingung zusammengefasst werden, vorgegriffen. Inhaltsbereiche, denen in Sekundarstufe I und II mehr Beachtung geschenkt werden sollte, sind laut Heymann Statistik, Datenanalyse, alltagsbezogene Stochastik und Geometrie unter Bezug auf Raumerfahrung (S. 243).

Die dritte These basiert auf der Annahme, dass eine entwickelte Denkfähigkeit eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für kritischen Vernunftgebrauch darstellt. Dementsprechend geben Inhalte, die eine Ausbildung von Denkfähigkeit und -fertigkeiten fördern nicht zwingend Anlass zum kritischen Vernunftgebrauch. Folgender Text aus einer Zeitung ist ein Beispiel dafür, dass sich gewisse Unterrichtsgegenstände besonders für die Einübung in kritisches Denken eignen:

Fuhr vor einigen Jahren noch jeder zehnte Autofahrer zu schnell, so ist es mittlerweile 'nur noch' jeder fünfte. Doch auch fünf Prozent sind zu viele, und so wird weiterhin kontrolliert, und die Schnellfahrer haben zu zahlen (S. 224).

Die Mathematik kann dabei als Mittel kritischen Denkens fungieren, indem Behauptungen, Sachverhalte oder natürliche Phänomene rational aufgeklärt werden. Sie ist zugleich Mittel und Gegenstand kritischen Denkens, wenn zur Darstellung von Informationen verwendete mathematische Modelle hinterfragt werden und dabei missbräuchliche Verwendung derselben aufgedeckt wird. In diesem Fall kann Aufklärung insofern stattfinden, als

Mitglieder der Gesellschaft oft mit irreführenden Zahlen oder Darstellungen konfrontiert werden, die aufgrund ihrer „mathematischen Gewandung“ (S. 244) vertrauenswürdig zu sein scheinen. Zum Gegenstand kritischen Denkens wird Mathematik dann, wenn über sie selbst, die Grenzen der Modellierbarkeit oder die Beziehung zwischen Mathematik und außermathematischer Welt reflektiert wird (S.244).

2.1.6. Sozialethische und personenbezogene Aufgaben

Die noch verbleibenden drei Aufgaben Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft, Einübung in Verständigung und Kooperation sowie Stärkung des Schüler-Ichs beziehen sich vor allem auf sozialethische und personenbezogene Aspekte einer allgemeinbildenden Schule. Im Mathematikunterricht gibt es inhaltlich deutlich weniger Möglichkeiten, diese Aspekte aufzugreifen als in Fächern wie Geschichte und Sozialkunde, politische Bildung, Religion oder auch im Sprachenunterricht. Daraus mag laut Heymann auch die Tatsache resultieren, dass sich besonders im Mathematikunterricht ein Spannungsfeld zwischen pädagogischen und fachlichen Ansprüchen auftut, welches es Lehrpersonen erschwert, den erzieherischen Auftrag der Schule zu erfüllen (S. 249). Heymann konstatiert, dass eine Beachtung sozialethischer und personenbezogener Zielsetzungen im Mathematikunterricht deutliche Auswirkungen auf den Umgang mit der Mathematik hat, „[d]enn *sozial* lernt man vor allem durch die Art, *wie* man zusammen mit anderen *fachlich* lernt“ (S. 250). Die Ausführungen zu den noch verbleibenden drei Aufgaben einer allgemeinbildenden Schule betreffen daher weniger konkrete Inhalte, die zur Erfüllung der Aufgabe geeignet sind, als einen förderlichen Umgang mit der thematisierten Mathematik (S. 250). Für alle drei gilt, dass beispielsweise der Frontalunterricht als - vor allem im herkömmlichen Mathematikunterricht - gängiges Element der Unterrichtskultur das Erreichen angestrebter sozialethischer und personenbezogener Ziele enorm erschwert (S. 256).

In den folgenden drei Abschnitten werden auf gleiche Weise wie bisher die verbleibenden Aufgaben einer allgemeinbildenden Schule beschrieben. In Bezug auf den Mathematikunterricht wird dabei auf hemmende und förderliche Faktoren zur Erfüllung der Aufgaben eingegangen.

Entfaltung von Verantwortungsbewusstsein

Hans Werner Heymann fordert von einer allgemeinbildenden Schule die Berücksichtigung eines ethischen Aspekts ein und zwar die Vermittlung von Werten. Dass es in einer pluralistischen Gesellschaft keine gemeinsamen Werte gibt, bezeichnet Heymann als falsch. Toleranz, Menschenwürde und Verantwortung bilden eine Wertebasis, die in modernen Demokratien gesamtgesellschaftlich geteilt werden (S. 104).

Für Heymann steht außer Frage, dass die Schule diese ethische Dimension aufnehmen muss, da überall, wo Menschen zusammenkommen, sittliches Verhalten von Bedeutung ist. Das Prinzip der Verantwortung sieht Heymann als derart universal und konsensfähig, dass eine zeitgemäße Erziehung auf ihm basieren kann. Dabei meint verantwortlich zu sein, dass die Folgen eines Handelns für sich und andere bedacht werden und für sie eingestanden wird (S. 105). Dies äußert sich auch im Umgang mit Sachkompetenzen. Heymann konstatiert, dass nur allgemeingebildet ist, wer mit seinen Kompetenzen verantwortungsvoll umgehen kann (S. 106).

Die Aufgabe der Schule, zur Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft beizutragen besteht darin, diese als Wert zu kultivieren. Verantwortungsbewusstsein soll sich auf den Umgang mit Mitschülerinnen und Mitschülern, anvertrauten Gegenständen, Lebewesen und auch dem eigenen Lernprozess erstrecken. Verantwortungsbereitschaft übersteigt laut Heymann die kognitive Ebene, da sie sowohl Wissen als auch Gefühl bedarf (S. 106). Die Schule soll Schülerinnen und Schüler ermöglichen, ihr Verantwortungsgefühl über die unmittelbare Umgebung hinaus auf Themen, die außerhalb ihres Erfahrungsraumes liegen auszuweiten (S. 108).

Lehrkräfte können vor allem durch den authentischen Umgang mit sich selbst und beispielsweise durch das Zugestehen von Fehlern eine verantwortungsvolle Haltung vorleben, die auf diese Weise am ehesten von Schülerinnen und Schülern angenommen werden kann (S. 110). Verbale Belehrung ist weniger wirkungsvoll als eine glaubwürdige Haltung der Lehrperson. Neben der Vorbildrolle der Lehrpersonen bieten außerdem schulische Themen Möglichkeiten, das Ausbilden der Verantwortungsbereitschaft zu unterstützen. Für den Mathematikunterricht kommen hierbei Themen in Frage, die bereits im vorhergehenden Kapitel angesprochen wurden (S. 257).

Im Mathematikunterricht lassen sich besonders auf zwei Ebenen Gelegenheiten zum Einüben in verantwortungsvolles Handeln finden. Einerseits kann sich Verantwortungsbereitschaft auf den eigenen Lernprozess beziehen. Verantwortung dafür

zu übernehmen bedeutet auch, Vorstellungen vom Ziel des eigenen Lernens zu entwickeln. Dies impliziert, Lernfortschritte mit eigenen Maßstäben messen zu dürfen. Individualisierte Unterrichtsphasen geben Gelegenheit, eigenständig Entscheidungen darüber zu treffen, welche Schwerpunkte gesetzt werden oder ob alleine, mit einem Mitschüler oder einer Mitschülerin oder mit der Lehrperson eine Lösung erarbeitet wird (S. 257).

Andererseits bezieht sich die Verantwortungsbereitschaft auf den Umgang mit Mitschülerinnen und Mitschülern. In diesem Bereich kann im Fachunterricht nur Verantwortungsbewusstsein eingeübt werden, wenn es Gelegenheit zur Interaktion gibt. Der herkömmliche Mathematikunterricht erfüllt laut Heymann aufgrund der Rolle der Lehrperson diese Funktion nicht (S. 257). Als eine für die Einübung in Verantwortungsbereitschaft geeignete Unterrichtsform nennt Heymann Gruppenarbeiten, deren Ergebnisse gemeinsam verantwortet werden sollen. Arbeitsaufträge in Form von offenen Problemstellungen sind dafür besonders geeignet. Heymann betont, dass sich soziales und fachliches Lernen nicht trennen lässt und sich der soziale Umgang innerhalb der Klassengemeinschaft auf den Umgang mit der Mathematik und damit auf das, was Schülerinnen und Schüler über Mathematik lernen, auswirkt (S. 258).

Einübung in Verständigung und Kooperation

Zusätzlich zur Einübung in soziale Umgangsformen, die die Schule mit der Sozialisationsfunktion ohnehin erfüllt, sind Verständigung und Kooperation Werte, die es für eine zeitgemäße Allgemeinbildung zu kultivieren gilt (S. 110). Verständigung versteht Heymann als „interaktives Verhalten, das sowohl auf mitmenschliches Verstehen zielt als auch auf Interessenausgleich und Ermöglichung eines praktischen Miteinanders“ (S. 110). Hierbei geht es um ein gleichzeitiges Bemühen darum, fremde Standpunkte nachvollziehen und eigene vermitteln zu können. Verständigung ist damit eine Grundvoraussetzung für ein friedvolles Zusammenleben gleichberechtigter Menschen. Kooperation bedeutet, gemeinsam ein Ziel anzustreben, auf das man sich zuvor verständigt hat. Kooperation setzt damit Verständigung voraus. Heymann betont diese sozialen Verhaltensweisen, da er sie nicht nur für das Privat- und Berufsleben, sondern allgemein für ein demokratisches Miteinander als erstrebenswert befindet. Tolerant anderen Interessen und Überzeugungen gegenüber zu sein und die Fähigkeit zu besitzen, sich zu verständigen und Kompromisse einzugehen bezeichnet er als „Überlebensbedingungen der Menschheit“ (S. 111).

Heymann beschreibt die Einübung in Verständigung und Kooperation als geeignetes Mittel, um dem Schulalltag inhärente Konkurrenzsituationen und Leistungsdruck zu entschärfen. Praktisch bedeutet die Einübung in Verständigung und Kooperation, möglichst viele Gelegenheiten zu bieten, in denen Schülerinnen und Schüler sich verständigen, austauschen und gemeinsame Arbeiten verrichten und diese als lohnend erleben können (S. 112).

Diesen Fähigkeiten kommt auch eine wichtige Bedeutung zu, wenn es um die Kommunikation zwischen Laiinnen bzw. Laien und Expertinnen bzw. Experten geht, die alltäglich stattfindet. Soll diese Kommunikation gelingen, müssen laut Heymann beide Seiten allgemeingebildet sein. Dieses Verhältnis lässt sich durchaus mit dem zwischen Lehrenden und Schülerinnen und Schülern vergleichen. Damit kann eine gelingende Kommunikation in der Klasse, die auf Verständigung und Kooperation basiert, über den Schulalltag hinaus positiv wirken, da Schülerinnen und Schüler ein Modell für ihre zukünftigen Rollen als Laiinnen bzw. Laien sowie als Expertinnen bzw. Experten kennenlernen (S. 114). Dieser Anforderung nachzukommen bedeutet beispielsweise für Lehrende im Mathematikunterricht zu demonstrieren, dass ihr mathematisches Expertenwissen hinterfragt werden darf und Fragen oder Ideen der Schülerinnen und Schüler ernst genommen werden (S. 259).

Des Weiteren sieht Heymann die Einübung in Verständigung und Kooperation als wesentlichen Beitrag zur interkulturellen Erziehung. Wo Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher Religion, Muttersprache oder Kultur zusammenkommen, steigt das Konfliktpotential. Die Schule bietet eine Chance, die Verständigung von Angehörigen anderer Nationalitäten und Kulturen zu fördern. Im Mathematikunterricht könnte Sprachproblemen beispielsweise durch sprachunabhängige Darstellungs- und Vermittlungsformen Abhilfe geleistet werden (S. 115).

Wie bereits erwähnt stellt der Frontalunterricht eine Kommunikationsform dar, die wenig Gelegenheit zur Verständigung und Kooperation bietet. Entscheidend ist laut Heymann, dass Schülerinnen und Schüler Möglichkeiten haben, sich über die aktuellen Inhalte des Mathematikunterrichts zu verständigen, da dies einen wesentlichen Beitrag zum Verstehen der thematisierten Mathematik leistet. Sozialformen wie Gruppen- oder Partnerarbeiten sind notwendig, wenn die Kooperation zwischen Schülerinnen und Schülern gefördert werden soll (S. 259).

Stärkung des Schüler-Ichs

Eine Unterstützung der Ich-Stärkung der Schülerinnen und Schüler ist aus dem Grund anzustreben, da zuvor genannte Bemühungen auf sozialer Ebene auch nur dann fruchten können, wenn Schülerinnen und Schüler in ihrer Persönlichkeit gestärkt sind. Damit ist gemeint, dass Selbstbewusstsein und Selbstvertrauen entwickelt werden, eigene Ziele und Wünsche identifiziert und auch realisiert werden können und ein realistischer Umgang mit den eigenen Stärken und Schwächen gefunden wird. Die Schule kann dazu nur indirekt beitragen. Als entscheidend sieht Heymann, dass curriculare und organisatorische Rahmenbedingungen geschaffen werden, die Freiräume für persönliche Entwicklung zulassen. Wichtig ist zudem, dass Lehrende ihre Schülerinnen und Schüler als eigenständige Personen ernst nehmen (S. 117).

Die Aufgabe der Ich-Stärkung beinhaltet drei Aspekte. Erstens soll eine Stärkung der Persönlichkeit Heranwachsende vor „gesellschaftlichen Vereinnahmungen und Zwecksetzungen“ (S. 118) schützen. Laut Heymann ist es Aufgabe der Schule, sich an den Bedürfnissen der Schülerinnen und Schüler zu orientieren, ihre Interessen bei der Inhaltsauswahl und Unterrichtsgestaltung zu berücksichtigen und sie als eigenständige Individuen beispielsweise dadurch zu achten, dass sie an pädagogischen Planungen beteiligt werden (S. 120).

Zweitens soll dem Aspekt Beachtung geschenkt werden, dass ein zufriedenstellendes Leben eines „vernünftigen Umgangs mit den eigenen Gefühlen und Trieben wie auch mit (eventuell internalisierten) Außenanforderungen“ (S. 118) bedarf. Ich-Stärkung in diesem Zusammenhang basiert auf Sigmund Freuds Theorie des Ichs als der Instanz, die ein Ausleben unserer Wünsche und Triebe reguliert, indem sie diese mit Forderungen der Realität abgleicht. Ich-Stärke bedeutet in diesem Sinne, realitätsgerechtes Verhalten an den Tag zu legen. Regeln und soziale Verbindlichkeiten, deren Einhaltung in der Schule eingefordert werden sollte, können zur Entwicklung und Aufrechterhaltung dieser Stärke beitragen (S. 121).

Drittens ist die Erkenntnis zu berücksichtigen, dass ein „stabiles Selbst“ (S. 123) nur erlangt werden kann, wenn eine Balance zwischen personaler und sozialer Identität besteht (S. 118). Die soziale Identität, die sich durch unterschiedliche soziale Rollen ergibt, ist an Anforderungen von außen geknüpft. Dem gegenüber steht die persönliche Identität, die von inneren Antrieben, Wünschen und Interessen geprägt wird, die nicht unbedingt äußeren Normen entsprechen. Die Schule kann der Forderung nach Stärkung des Schülerinnen-

und Schüler-Ichs nachkommen, indem sie einen sozialen Erfahrungsraum schafft, der eine Identitätsbalance erleichtert (S. 123).

Für einen Unterricht, der Ich-Stärkung und Identitätsfindung unterstützen soll, eignet sich offene Differenzierung laut Heymann besser als geschlossene. Voraussetzung für offene innere Differenzierung ist, dass Schülerinnen und Schüler eigene Stärken und Schwächen sowie ihren Lerntyp kennen und einschätzen lernen. Werden ihnen unterschiedliche Lernangebote gemacht, die verschiedene Lerntypen ansprechen, können Schülerinnen und Schüler individuelle Entscheidungen treffen und den Lernprozess selbst gestalten. Damit übernehmen sie automatisch Verantwortung für ihr Lernen. Heymann betont, dass selbst ein Lehrervortrag, wenn er verschiedene Anknüpfungsmöglichkeiten bietet und vielfältige „Wahrnehmungskanäle aktiviert“ (S. 125) den Kriterien der offenen Differenzierung entsprechen kann (S. 124f.).

Haben Schülerinnen und Schüler spezielle Interessen auf einem Wissensgebiet oder besonderes praktisches Können, sollen sie dieses laut Heymann in den Unterricht einbringen dürfen. Damit wird eine Alternative zur Persönlichkeitsstärkung durch besondere Schulleistungen geschaffen, die eine Aufwertung der eigenen Person ermöglicht. In der Sekundarstufe II können derartige Spezialisierungen von Schülerinnen und Schülern im Rahmen von Referaten, Projekten o.Ä. Eingang in den Unterricht finden. In der Sekundarstufe I sollen individuelle Interessen aufgegriffen werden, indem die Lehrperson Inhalte des Unterrichts mit subjektiven Einsichten und Bedeutungszuschreibungen der Schülerinnen und Schülern zu verknüpfen versucht. Heymann argumentiert diese Forderung wie folgt:

Je mehr Schule zu einem Erfahrungsraum wird, dessen Grenzen zu den außerschulischen Erfahrungsräumen der Schüler durchlässig sind, desto mehr Möglichkeiten zur Einbringung von Eigenem, desto mehr Möglichkeiten zur Identitätsfindung bietet sie (S. 125).

Die Schule hat die Möglichkeit, die Identitätsfindung von Schülerinnen und Schülern zu begünstigen, indem sie ihnen erlaubt, ihre individuellen Neigungen, Begabungen und Fähigkeiten zu pflegen. Gelegenheiten zur Entfaltung von Phantasie und Kreativität, beispielsweise durch spielerische Aktivitäten, sind Voraussetzung für die Ich-Stärkung von Schülerinnen und Schülern und können zugleich zur Stiftung kultureller Kohärenz genutzt werden (S. 126).

Betreffend den Mathematikunterricht konzentrieren sich Heymanns Ausführungen auf den Umgang mit Fehlern. Die Handhabung von Situationen, in denen Schülerinnen und Schüler

Fehler machen, gehört zum „Sozialcharakter des Mathematikunterrichts“ (S. 260). Fehler werden tendenziell als Indikatoren für Misserfolg gesehen, obwohl sie notwendige Begleiterscheinung eines jeden Lernprozesses sind. Dies zu erkennen ist unerlässlich für einen fruchtbaren Umgang mit Fehlern. Schülerinnen und Schüler sollten den Lernprozess als einen erfahren, in dem die thematisierte Mathematik individuell neu konstruiert werden muss und nicht als „fertiges Gefüge objektiven Wissens“ (S. 261) abgespeichert werden soll. Daraus würde laut Heymann die Chance erwachsen, dass Schülerinnen und Schüler mehr Mut zum Denken entwickeln und in der Folge mehr Erfolgserlebnisse haben, was zur Stärkung der eigenen Person beitragen kann. Gruppenarbeiten ermöglichen mehr Kommunikation zwischen den Schülerinnen und Schülern sowie das Eingehen auf individuelle Probleme, welche im Klassenverband möglicherweise nicht angesprochen werden. Daher eignet sich diese Interaktionsform eher für den produktiven Umgang mit Fehlern als andere (S. 261).

Heymann nennt weitere Merkmale des Mathematikunterrichts, die von Schülerinnen und Schülern als einschränkend erlebt werden:

- Es gibt nur selten Gelegenheiten, die eigene Phantasie und Kreativität zu entfalten. Der Unterricht verläuft meist in vorhersehbaren Bahnen und lässt [sic] wenig Raum für persönliche Initiative.
- Die Beiträge, die man selbst einbringen kann, werden im wesentlichen [sic] als außengesteuert erlebt, als Antwort auf die Anforderungen des Lehrers.
- Persönliche Fragen nach Sinn und Bedeutung dessen, was man im Mathematikunterricht zu lernen hat, sind im Unterricht kein Gegenstand.
- In höheren Klassen macht man die Erfahrung, daß [sic] es kaum möglich ist, fachliche Normen und Konventionen zu hinterfragen (S. 261).

Gegenmaßnahmen sind beispielsweise der vermehrte Einsatz von offenen Aufgaben, das Zulassen individueller Lösungswege, die Einbeziehung spielerischer Elemente oder das Aufgreifen unkonventioneller Ideen (S. 261).

2.2. Weitere Theorien zur Allgemeinbildung im Mathematikunterricht

Das Allgemeinbildungskonzept von Hans Werner Heymann soll in der Folge vergleichbar gemacht werden, indem verschiedene Ansätze von österreichischen und deutschen Fachdidaktikern und Mathematikern zum Thema Allgemeinbildung im Mathematikunterricht exemplarisch vorgestellt werden.

2.2.1. Heinrich Winter

Heinrich Winter versteht unter Allgemeinbildung ein Konglomerat aus Wissen, Fertigkeiten, Fähigkeiten und Einstellungen, das „jeden Menschen als Individuum und Mitglied von Gesellschaften in einer wesentlichen Weise betrifft“ (Winter, 1996, S. 35) und „für jeden Menschen unabhängig von Beruf, Geschlecht, Religion u.a. von Bedeutung ist“ (Winter, 1996, S. 35).

Aufgrund von globalen Problemen und gravierenden Wandlungsprozessen in unserer Gesellschaft ist es erforderlich, dass möglichst viele Menschen einen Zugang zu einer möglichst gediegenen Allgemeinbildung haben. Ähnlich wie Heymann argumentiert Winter, dass jedes Fach einer allgemeinbildenden Schule einer Legitimation bedarf. Winter begründet die Unentbehrlichkeit des Mathematikunterrichts an einer allgemeinbildenden Schule für Sekundarstufe I und II mit drei Grunderfahrungen, die für Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht erfahrbar gemacht werden sollen:

- (1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- (2) Mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
- (3) In der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben (Winter, 1996, S. 35).

Die erste Grunderfahrung bezieht sich auf Anwendungen der Mathematik sowohl im Alltag als auch darüber hinausgehend. Diese sind unentbehrlich für eine Allgemeinbildung, wenn sie so unterrichtet werden, dass Beispiele aus der Lebensrealität aufgegriffen und dazu verwendet werden, Schülerinnen und Schülern zu zeigen „wie mathematische Modellbildung funktioniert und welche Art von Aufklärung durch sie zustande kommen kann“ (Winter, 1996, S. 36). Allgemeinbildender Mathematikunterricht muss demnach den

Modellcharakter der Mathematik und Zusammenhänge zwischen Mathematik und dem täglichen Leben hervorheben.

Themenbereiche, die daher unbedingt Eingang in den Mathematikunterricht finden sollten sind Zinsrechnung, Bevölkerungskunde, Altersvorsorge sowie Versicherungs- und Steuerwesen. Die Bedeutung deskriptiver Modelle für Phänomene der physischen Welt soll Schülerinnen und Schülern vermittelt werden. Die Modellierung des Zusammenhangs von Oberfläche und Volumen bei Körpern ermöglicht es, Beobachtungen aus der belebten Natur verständlich zu machen und ist ein Beispiel dafür, welche Art von Aufklärung durch die Mathematik zustande kommt. Zu dieser ersten Grunderfahrung gehören schließlich auch Elemente der darstellenden Geometrie und die Schulung der Raumerfahrung.

Bei der zweiten Grunderfahrung geht es darum, dass Schülerinnen und Schüler einen Einblick in die innere Welt der Mathematik erhalten sollen. Beispielsweise kann anhand der fundamentalen Idee der Zahl demonstriert werden, dass sich alleine im Bereich der einfach zu konstruierenden natürlichen Zahlen viele Fragestellungen und Probleme ergeben, die zum Teil bis heute noch nicht geklärt sind (z.B. Frage, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt). Weitere bedeutungsvolle Erfahrungen sind jene der Erweiterbarkeit des Zahlenbegriffs oder die Inkommensurabilität von Diagonale und Seite eines Quadrates. Ein verständiger und auch kreativer Umgang mit Variablen, Termen, Formeln und Gleichungen ist eines der Ziele, das in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht erreicht werden soll. Der Geometrie als erster deduktiver Wissenschaft kommt auch für die zweite Grunderfahrung eine zentrale Stellung zu. In diesem Bereich besteht das allgemeinbildende Ziel darin, die „deduktive Ordnung zwischen Aussagen zu entdecken und auszudrücken“ (Winter, 1996, S. 37).

Die dritte Grunderfahrung bezieht sich auf den formalen Bildungscharakter der Mathematik. Schülerinnen und Schüler sollen darin gefördert werden, heuristische Strategien wie das Ausnutzen von Analogien und mentale Techniken wie Klassifizieren und Anordnen bewusst zu nutzen. Die eigene Tätigkeit zu reflektieren ist ein wichtiger Bestandteil des Einübens in Problemlösefähigkeiten. Dazu zählt auch, Fehler als Möglichkeit zu sehen, ein tieferes Verständnis zu erlangen indem ihr Ursprung aufgedeckt wird. Reflexion ist besonders im Bereich des Modellierens außermathematischer Sachverhalte zentral, da sowohl das Modell wie auch die Ergebnisse interpretiert und auf ihre Sinnhaftigkeit geprüft werden müssen. Laut Heinrich Winter gilt es auch die Auswirkungen, die ein Modell auf das Leben der Menschen haben kann, zu thematisieren. Beispielsweise beschreibt die Wurfparabel approximativ sowohl die Bahn des Lobs beim Tennis wie auch den Weg einer Granate.

Dem Problem, dass Mathematik als zu schwierig für die Allgemeinheit angesehen wird und ihr allgemeinbildender Charakter nur selten anerkannt wird, sollte laut Winter nicht mit inhaltlicher Reduktion oder äußerer Differenzierung begegnet werden. Positive Maßnahmen sind beispielsweise ein verstärkter Einsatz von Computern, das Aufgreifen neuester lebensrelevanter Anwendungen oder die Behandlung moderner mathematischer Themen. Für entscheidend hält Winter allerdings, dass Lehrpersonen die Mathematik als pädagogische Aufgabe entdecken und ihren Unterricht dementsprechend gestalten. Dafür sei es notwendig, zukünftigen Lehrerinnen und Lehrern in der Ausbildung näherzubringen, dass mathematische Inhalte aus „pädagogisch relevanten Blickwinkeln gesehen und verstanden werden müssen“ (Winter, 1996, S. 40).

2.2.2. Günter Graumann

Günter Graumann (1994) erwartet vom Mathematikunterricht an allgemeinbildenden Schulen, dass dieser zur allgemeinen Entwicklung der Schülerinnen und Schüler beiträgt. Die Welt, in der die Heranwachsenden leben, muss mitsamt ihren natürlichen und sozialen Gegebenheiten dabei berücksichtigt werden. Daher widmet sich Günter Graumann, angelehnt an Wolfgang Klafki, in seinen Ausführungen der Allgemeinbildung mit Blick auf die Schlüsselprobleme unserer Welt.

Graumann widmet sich zuerst dem Strukturieren der Welt mit Begriffen, da dieses grundlegend für unser Leben ist. Mathematische Begriffe und Darstellungsformen ermöglichen, die Erfahrungswelt auf eine bestimmte Weise beschreiben und erfassen zu können. Zu beachten gilt es dabei, dass mathematische Modellierung nicht alle Erfahrungen miteinbeziehen kann. Die Begrenztheit von Modellierungen zu reflektieren zählt laut Graumann (1994) zu den wesentlichen Zielen im Mathematikunterricht. Gleichmaßen sollte allerdings betont werden, dass es keine anderen Möglichkeiten gibt, „Erfahrungen zu begreifen und zu reflektieren sowie Planungen für die Zukunft zu machen, als daß [sic] wir Begriffe bilden, die Welt mit diesen strukturieren, Modelle entwerfen und diese dann wieder an der Wirklichkeit überprüfen“ (Graumann, 1994, S. 2).

Der Mathematikunterricht soll laut Graumann Schülerinnen und Schüler befähigen, wichtige mathematische Begriffe und Darstellungsweisen zu präzisieren und ihre richtige Verwendung einzuüben, systematisches Denken zu entwickeln und Zusammenhänge und übergeordnete Strukturen zu erkennen. Die Fähigkeit, vernetzt zu denken, ist notwendig, wenn es um Schlüsselprobleme der Menschheit geht. Graumann (1994) nennt als solche

Bevölkerung, Friedenssicherung, Ökologie und Ökonomie. Da diese Probleme eine hohe Komplexität aufweisen, braucht es eine Herangehensweise, die durch Übersichts- und Zusammenhangsdenken gekennzeichnet ist. Der Mathematikunterricht darf daher nicht nur aus „Rechnen“ und dem Anwenden von Algorithmen bestehen, sondern soll beispielsweise eigenständiges Entdecken und Entwicklung von Argumentationsfähigkeit möglich machen. Zur Förderung von vernetztem Denken eignet sich laut Graumann vor allem die Geometrie, da deren Objekte „einerseits relativ anschaulich sind und andererseits oft recht komplexe Zusammenhänge aufweisen“ (Graumann, 1994, S. 5). Aus diesem Grund sollte ihr im Mathematikunterricht eine größere Bedeutung zukommen.

Die sogenannten Schlüsselprobleme erfordern, das „positivistisch-mechanische Denken, bei dem die Welt als so etwas wie ein »großes Uhrwerk« vorgestellt wird“ (Graumann, 1994, S. 5) zu hinterfragen. Dies bedeutet unter anderem, das starke Kausalitätsprinzip² einer kritischen Reflexion zu unterziehen. Da sich viele Begebenheiten in unserer Umwelt nicht genau berechnen lassen bzw. keine genauen Voraussagen über sie getroffen werden können, ist es der Chaostheorie zufolge nicht immer möglich, Aussagen über Ursache und Wirkung in Form des starken Kausalitätsprinzips zu machen.

Unter dem Titel „Aus der Chaostheorie lernen“ stellt Graumann (1994) schließlich folgende zusätzliche Forderungen an einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht: Die Grenzen theoretisch geleiteten Handelns sollen aufgezeigt werden. Dies kann beispielsweise durch bereits erwähnte Diskussion über die Grenzen mathematischer Modellierung und Verfahren innerhalb der Mathematik passieren. Außerdem sollen Schülerinnen und Schüler „Handlungsorientierungen für komplexe Situationen, die eine kritische Reflexion des starken Kausalitätsprinzips beinhalten“ (Graumann, 1994, S. 6) erwerben. Das bedeutet, sich im Umgang mit komplexen Problemen nicht automatisch von positivistisch-mechanistischem Denken leiten zu lassen. Dem Mathematikunterricht kommt laut Graumann (1994) eine wesentliche Rolle bei der Verbreitung des Wissenschaftsparadigmas und damit bei der Vermittlung neuer Denkweisen zu.

² „Aus A*, das sich nur wenig von A unterscheidet, folgt B*, das sich von B auch nur wenig unterscheidet.“ (Graumann, 1994, S. 5)

2.2.3. Roland Fischer

Das Konzept von Roland Fischer basiert auf einem Allgemeinbildungsbegriff, wie ihn auch Hans Werner Heymann verwendet. Hauptziel eines allgemeinbildenden Unterrichts ist laut Fischer (2012), Schülerinnen und Schüler zu eigenständigem Handeln und Entscheiden zu befähigen.

Fischer (2012) geht davon aus, dass der Großteil der Entscheidungen, die ein Mensch in seinem Leben treffen muss, über seinen Wissens- und Kompetenzbereich hinausgeht. Aus diesem Grund wird es notwendig, sich beraten zu lassen oder Entscheidungen sogar zu delegieren. Der Kommunikation mit Expertinnen oder Experten kommt eine essentielle Bedeutung zu, da diese Rat und Wissen zur Verfügung stellen, aber die Entscheidung und damit die Verantwortungsübernahme den Laien zukommt. Im Bereich der individuellen Lebensführung, der politischen Willensbildung, bei Kaufentscheidungen, in der Medizin oder auch im beruflichen Leben kommt es häufig zu derartigen Situationen. Schülerinnen und Schüler zum Entscheiden zu befähigen, bedeutet vor allem, sie auf Situationen, in welchen sie als Laie auf die Kommunikation mit Expertinnen oder Experten angewiesen sind, vorzubereiten.

Damit diese Kommunikation gelingt, müssen beide Seiten über ein gemeinsames Basiswissen verfügen. Diese Grundkenntnisse, die in den Unterrichtsfächern vermittelt werden, umfassen Konzepte, Begriffe und Darstellungsformen der jeweiligen Disziplinen. Jegliches Wissen, das in seiner Anwendung über Alltagserfordernisse hinausgeht, kann zum Gelingen der Kommunikation mit Expertinnen und Experten bzw. zur Lösung von Problemen, die den eigenen Wissens- und Kompetenzbereich übersteigen, beitragen.

Darauf aufbauend kann die Expertin oder der Experte operieren, d.h. komplexere Handlungen durchführen und Probleme lösen. Erkenntnisse, die daraus gewonnen werden, müssen schließlich von einer Laiin bzw. einem Laien interpretiert und bewertet werden. Fischer (2012) konstatiert, dass mit Blick auf die Entscheidungsfähigkeit dem fachlichen Operieren ein geringerer Stellenwert als der Reflexion zukommt. Wird die Tatsache ignoriert, dass von mündigen, rechts- und wirtschaftsfähigen Menschen permanent gefordert wird, über Sachverhalte zu urteilen, die ihren Wissenshorizont übersteigen und anhand dieses Urteils Entscheidungen zu treffen, entsteht die Illusion, dass alle Menschen über Expertenwissen in allen Bereichen verfügen können. Daraus resultiert ein ständiges Defizitgefühl.

Folglich kann Entscheidungsfähigkeit „nicht als eine Summe von Mini-ExpertInnenkompetenzen dargestellt werden. Sie muss als eigener und zwar zentraler Kompetenzbereich im Bildungsprozess entwickelt werden [...]“ (Fischer, 2012, S. 15). Die laut Fischer übliche Herangehensweise, Schülerinnen und Schüler Handlungen nachahmen zu lassen, die von Spezialistinnen und Spezialisten durchgeführt werden, gilt es daher zu überdenken. Vielmehr sollen Schülerinnen und Schüler Gelegenheiten bekommen, sich in Handlungen einzuüben, die beim Delegieren und Beraten-Werden erforderlich sind. Zu diesen zählen Informationen zu beschaffen, Fragen zu stellen und zu verstehen und Problemlöseangebote zu beurteilen. Die wichtigste Handlung, nämlich zu entscheiden, wird laut Fischer (2012) in schulischen Lernprozessen kaum geübt.

2.2.4. Hans-Christian Reichel

Angelehnt an den antiken Philosophen Platon, der Mathematikkenntnisse voraussetzte, um in seine Akademie eintreten zu dürfen, hebt Hans-Christian Reichel den besonderen Wert der Mathematik für die Bildung und Erziehung Heranwachsender hervor. Dieser liegt sowohl in ihren praktischen Anwendungen als auch in ihrem Potenzial, durch die Beschäftigung mit der Mathematik das Denken zu schulen. Der Mathematikunterricht trägt laut Reichel und Resel (2002) zudem auf spezifische Weise zur Persönlichkeitsbildung junger Menschen bei. Hans-Christian Reichel zufolge zeichnen sich gebildete Menschen dadurch aus, dass sie „über eine Vielzahl von Sichtweisen und Strategien beim Erfassen und Formulieren, beim Lösen und Bewältigen von Problemen“ (Reichel, 1993, S. 115) verfügen. Notwendig dafür sind formale Fertigkeiten sowie die Fähigkeit, Probleme und Situationen aus unterschiedlichen Blickwinkeln erfassen zu können. Die Mathematik ist eine von vielen verschiedenen „Brillen“ (Reichel & Resel, 2002, S. 87), durch die wir die Welt sehen und deren Werkzeuge wir zum Lösen von spezifischen Problemen heranziehen können. Erst das Zusammenwirken der durch die verschiedenen Unterrichtsfächer vermittelten Denk- und Begriffsrahmen macht Allgemeinbildung aus.

Vor allem die Lösung außermathematischer Probleme mit Hilfe der Mathematik eignet sich dafür, die typische Herangehensweise dieser Wissenschaft kennenzulernen. Die Bearbeitung eines außermathematischen Problems erfolgt laut Reichel (1993, S. 117) in folgenden drei Schritten:

- (1) Übersetzen eines Problems in die Sprache der Mathematik
- (2) Lösung durch mathematisches (formales) Vorwissen
- (3) Rückübersetzung

Diese drei Schritte der mathematischen Modellierung sollen von Lehrpersonen bei allen Textaufgaben betont werden. Mathematische Modelle kommen selten ohne Abstrahierung oder Idealisierung aus. Diese typische Vorgehensweise kann laut Reichel nicht ohne Auswirkungen auf das Weltbild und damit auf die Persönlichkeit der Schülerinnen und Schüler bleiben. Die Fähigkeit zur Abstraktion ist Teil der „mathematische[n] Denkweise“ (S. 116) schlechthin, die Reichel (1993) als konstitutiven Aspekt von Bildung ansieht. Die mathematische Denkweise kann nicht getrennt davon gesehen werden, wie in der Mathematik Begriffe gebildet bzw. verwendet werden. Umgangssprachliche Begriffe werden in der Mathematik exakt definiert, um mit ihnen arbeiten zu können. Definitionen sind Voraussetzung für eine nachvollziehbare Argumentation – nicht nur in der Mathematik, sondern auch im Alltag. Der Sprache im Mathematikunterricht kommt laut Reichel und Resel (2002) eine besondere Bedeutung zu. Einerseits können sprachliche Fähigkeiten durch die Mathematik, andererseits mathematische Fähigkeiten durch die Sprachschulung gefördert werden.

Ein weiterer Aspekt, den Reichel und Resel (2002) hervorheben, ist die Kommunikation mit Expertinnen und Experten, deren Bedeutung vor allem Roland Fischer näher ausgeführt hat. Expertinnen- bzw. Expertenmeinungen zu hinterfragen oder einen kritischen Blick auf Studienergebnisse oder Zeitungsmeldungen zu werfen kann nach Reichel und Resel (2002) im Mathematikunterricht gefördert werden, womit ebenfalls ein Beitrag zur Persönlichkeitsbildung geleistet werden kann.

Neben den bisher genannten Aspekten, die den Wert der Mathematik für die Persönlichkeits- und Allgemeinbildung ausmachen, nennen Reichel und Resel (2002) noch weitere:

- Umgang mit Fehlern
- Die Überprüfbarkeit eigenen Tuns
- Die Fähigkeit zum Staunen
- Freude am Verstehen und Freude an Einsicht schlechthin
- Die Kraft des Formalen und des Abstrakten erleben
- Kritikbewusstsein und Kritikfähigkeit

3. Schulbuchanalyse

Im Anschluss an die Beschäftigung mit verschiedenen Theorien zur Allgemeinbildung im Mathematikunterricht, wird nun das Konzept von Hans Werner Heymann für eine Schulbuchanalyse herangezogen.

Im Mathematikunterricht scheint das klassische Schulbuch trotz vermehrtem Einsatz von technologischen Hilfsmitteln immer noch die Basis für den Unterricht zu bilden. Laut Keitel et al. (1980) zählen Schulbücher zu den wichtigsten Orientierungshilfen einer Lehrperson, welche die Lehrtätigkeit als ganze beeinflussen. Hans Werner Heymann betont in seinem Werk stets, dass vor allem der Umgang der Lehrenden mit den zu vermittelnden Inhalten und die Unterrichtskultur von hoher Bedeutung für eine allgemeinbildende Qualität des Mathematikunterrichts ist. Als Grundlage für den Mathematikunterricht haben Schulbücher maßgeblichen Einfluss auf das Unterrichtsgeschehen. Sie sind daher Teil der Unterrichtskultur und können entscheidende Anregungen dazu geben, wie Mathematiklernen in der Schule passiert. Timo Leuders (2001) zufolge üben Schulbücher einen „derart normativen Einfluss auf den faktischen Unterricht aus, dass man in ihnen einen maßgeblichen Ansatzpunkt für Reformbemühungen sehen muss“ (Leuders, 2001, S. 95). Nach Büchter und Leuders (2016) sind Aufgaben die elementaren Gliederungseinheiten in Schulbüchern. Diese können als Sammlung verschiedener Aufgabentypen, die nach fachsystematischen und lerntheoretischen Gesichtspunkten geordnet sind, gesehen werden. Im Mathematikunterricht kommt den Aufgaben eine entscheidende Rolle für das Lehren und Lernen zu, da diese die „mit Abstand häufigsten Anlässe für mathematische Aktivität von Schülerinnen und Schülern“ (Büchter & Leuders, 2016, S. 5) sind. Da somit auch klassische Schulbücher einen wesentlichen Beitrag zur Unterrichtskultur leisten, wurden diese als Forschungsgegenstand der vorliegenden Arbeit ausgewählt.

Im Folgenden soll überprüft werden, inwieweit Schulbücher zur allgemeinbildenden Qualität des Mathematikunterrichts nach dem bereits vorgestellten Konzept von Hans Werner Heymann beitragen. Dabei ist es kein Ziel dieser Analyse, eine quantitative Aussage darüber zu tätigen, wie sehr einzelne Schulbücher als Gesamtes den allgemeinbildenden Aufgaben gerecht werden. Vielmehr soll erfasst werden, in welchem Maße sich einzelne Merkmale eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts in den Schulbüchern wiederfinden.

3.1. Auswahl der Schulbücher

Hans Werner Heymann bezieht sich in seinen Ausführungen über die allgemeinbildenden Aufgaben des Mathematikunterrichts vor allem auf die Sekundarstufe I. Dies begründet er damit, dass besonders in diesen Schulstufen eine Balance zwischen Fachspezifität und allgemeinbildendem Anspruch gefunden werden muss (Heymann, 2013). Da die folgende Analyse auf dem Allgemeinbildungskonzept von Hans Werner Heymann aufbaut, wurde dafür ebenso der Fokus auf den Bereich der Sekundarstufe I gelegt. Ausgewählt wurden aktuelle vom Bundesministerium für Bildung und Frauen approbierte Schulbücher für allgemeinbildende höhere Schulen und neue Mittelschulen, die in der Schulbuchliste für das Jahr 2016/17 aufgelistet sind. Aufgrund der Vielzahl an Mathematikschulbüchern für die Sekundarstufe I, wurden zufällig drei Schulbuchreihen für diese Analyse ausgewählt: *Das ist Mathematik 1 bis 4* (DIM) (Humenberger & Reichel, 2016, 2011, 2012, 2012), *ganz klar Mathematik 1 bis 4* (GKM) (Achleitner et al., 2012, 2013, 2014, 2015) und *Mathematik verstehen 1 bis 4* (MV) (Salzger et al., 2014, 2015, 2016, 2017). Alle ausgewählten Schulbücher sind gemäß der Schulbuchliste kompetenzorientiert.

3.2. Methode

Da eine Analyse aller zwölf Schulbücher den Umfang dieser Arbeit überschreiten würde, wurde zunächst stichprobenartig ein Kapitel aus jedem Schulbuch ausgewählt. Dabei wurde versucht für jede Schulstufe Kapitel auszusuchen, die in allen drei Schulbuchreihen ähnliche Inhalte behandeln und in ähnlichem Umfang enthalten sind. Folgende Kapitel waren daher Gegenstand der Analyse:

- 5. Schulstufe
 - Mathematik verstehen 1, Kapitel 7: Einführung in die Geometrie
 - Das ist Mathematik 1, Kapitel I: Geometrische Grundbegriffe
 - ganz klar Mathematik 1: Grundlagen der Geometrie
- 6. Schulstufe
 - Mathematik verstehen 2, Kapitel 4: Gleichungen
 - Das ist Mathematik 2, Kapitel E: Gleichungen und Formeln
 - ganz klar Mathematik 2: Gleichungen

- 7. Schulstufe
 - Mathematik verstehen 3, Kapitel 11: Statistische Merkmale
 - Das ist Mathematik 3, Kapitel F: Statistik
 - ganz klar Mathematik 3: Statistik
- 8. Schulstufe
 - Mathematik verstehen 4, Kapitel 6: Die Kreiszahl π
 - Das ist Mathematik 4, Kapitel C: Berechnungen am Kreis
 - ganz klar Mathematik 4: Kreis

Grundlage für die Kriterien, anhand derer die Schulbuchkapitel analysiert wurden, bildete die von Hans Werner Heymann erstellte Tabelle *Merkmale allgemeinbildender und herkömmlicher Unterrichtskultur und ihr Bezug zu den zugrunde gelegten Allgemeinbildungsaufgaben* (siehe Anhang). Der Großteil der darin aufgelisteten Merkmale einer „allgemeinbildenden Unterrichtskultur“ (Heymann, 2013, S. 264) wurde entweder direkt übernommen oder derart umformuliert, dass eine Anwendung auf Schulbücher möglich wurde. Folgende sechs Merkmale sind in der dabei neu entstandenen Tabelle nicht enthalten, da diese als nicht auf Schulbücher übertragbar befunden wurden:

- (A4) Formalisierung ist niemals Selbstzweck, sondern in manchen Phasen des Unterrichts eine willkommene Hilfe, um Gedachtes und Verstandenes verfügbar zu halten.
- (A14) Im Unterricht sind Neugier, Spannung, Engagement, Überraschung, Lust am Denken und mathematischen Tun nichts Ungewöhnliches.
- (A17) Vernetzungen zwischen mathematischen Teilgebieten werden herausgearbeitet, der Bezug zu zentralen Ideen wird verdeutlicht
- (A20) Die Schüler übernehmen Verantwortung für ihren eigenen Lernprozeß [sic]
- (A24) Der andere – Schüler wie Lehrer – wird als Mensch ernst genommen; die Fähigkeit zum vernünftigen Denken wird ihm unterstellt
- (A25) Die Qualität eines Arguments hat mehr Gewicht als der soziale Status der Person, die es vertritt
(Heymann, 2013, S. 264ff.)

Die übrigen Merkmale wurden wie bereits erwähnt zum Teil umformuliert, um sie auf Schulbücher anwenden zu können. Außerdem wurden sowohl die Merkmale A5 und A7 als auch A1, A22 und A23 jeweils zu einem Merkmal (A5/7 und A1/22/23) zusammengefasst, da sich für diese Merkmale bezogen auf Schulbücher dieselben Kriterien ergeben. Auf diese Weise ist die folgende Tabelle entstanden, die zur Analyse der Schulbücher verwendet wurde.

Tabelle 1: Kriterienkatalog für die Schulbuchanalyse

	Merkmale einer „allgemeinebildenden Unterrichtskultur“ des MU nach Heymann	Merkmale übertragen auf Schulbücher	Kriterien, anhand derer die Merkmale erkannt werden können
A1/22/23 Lv Vb VK	Schüler kommunizieren direkt miteinander; es ist selbstverständlich, Mitschülern beim Verstehen zu helfen und sich selbst, wen nötig helfen zu lassen; es gibt immer wieder Gelegenheit, gemeinsam mit anderen an Probleme heranzugehen, sich über Ziele und Strategien zu verständigen, wechselseitig Schwächen auszugleichen und Stärken zu bündeln (Partner- und Gruppenarbeit)	Schülerinnen und Schüler werden zu Partner- und Gruppenarbeiten angeregt	- Partner- oder Gruppenarbeit - „Sprecht darüber“ - „Legt eure Aufgabenstellung einer anderen Gruppe zur Lösung vor!“
A2 kV VK SI	Schüler stellen „echte“ Fragen an Lehrer und Mitschüler, Mitschüler geben Mitschülern „echte“ Antworten (d.h. nicht nur auf den Lehrer schielend), erörtern untereinander Argumente	Schülerinnen und Schüler werden dazu angeregt, Argumente zu erörtern	- „Begründe“, „Erkläre“ - „mit eigenen Worten“ - offene Aufgaben, Modellierungsaufgaben
A3 kV	Das Verstehen mathematischer Sachverhalte wird ihrer technischen Beherrschung übergeordnet; es zeigt sich für den Lehrer nicht zuletzt daran, wieweit Schüler über das reflektieren können, was sie mathematisch tun	Das Schulbuch beinhaltet einen nennenswerten Anteil (25%) an Aufgaben, die Verständnis der mathematischen Sachverhalte erfordern	Anzahl der Aufgaben, die Verständnis erfordern in Relation zur Gesamtanzahl aller Aufgaben

A5/7 LV KV SI	Fehler werden zum Anlass genommen, über Gründe für diesen Fehler nachzudenken; Fehler werden als notwendige Begleiterscheinung von Lernprozessen akzeptiert	Schülerinnen und Schüler werden dazu angeregt, sich eigenständig an Lösungen heranzutasten, dabei gehörten Fehler zum Lösungsprozess dazu (Stichwort: trial and error)	- offene Aufgaben (Lösungsweg ist nicht vorgezeichnet, es gibt nicht unbedingt eine eindeutige Lösung, Schülerinnen und Schüler werden ermuntert, eigene Wege zu finden) - Fehleranalysen - „Probieren“, „Versuche“
A6 LV KV	Es gibt verschiedene Stufen der Annäherung an Erkenntnis, Hypothesen, Teillösungen usw.	Es gibt verschiedene Stufen der Annäherung an Erkenntnis, Hypothesen, Teillösungen usw.	- offene Aufgaben (Lösungsweg ist nicht vorgezeichnet, mehrere Lösungswege werden zugelassen) - Aufgaben, die die Herleitung von mathematischen Sachverhalten zum Inhalt haben
A8 LV KV	Es gibt Raum für Umwege, ungewöhnliche Ideen, Offenheit für unterschiedliche Verläufe des Unterrichts	Es gibt Raum für Umwege, ungewöhnliche Ideen, Offenheit beim Bearbeiten von Aufgaben	- offene Aufgaben (mehrere Lösungswege werden zugelassen; Schülerinnen und Schüler werden ermuntert, eigene Wege zu finden/etwas auszuprobieren)
A9 SI	Individuell unterschiedliche Lösungswege werden nicht nur akzeptiert, sondern als besondere Zugangsweise begrüßt	Schülerinnen und Schüler werden dazu angeregt, individuell unterschiedliche Lösungswege zu entwickeln	- offene Aufgaben (Lösungsweg ist nicht vorgezeichnet, Aufgaben sind derart formuliert, dass individuell unterschiedliche Lösungswege zustande kommen) - „Erfinde zum gegebenen Term einen passenden Text“

	Merkmale einer „allgemeinbildenden Unterrichtskultur“ des MU nach Heymann	Merkmale übertragen auf Schulbücher	Kriterien, anhand derer diese Merkmale erkannt werden können
A10 VK SI	Mathematiklernen wird häufig als ein Erkundungsprozess erfahren, der allein oder gemeinsam mit anderen in intensivem Austausch von Ideen und Argumenten vollzogen werden kann	Mathematiklernen wird häufig als ein Erkundungsprozess erfahren, der allein oder gemeinsam mit anderen in intensivem Austausch von Ideen und Argumenten vollzogen werden kann	- Fermi-Aufgaben - Modellierungsaufgaben - Schülerinnen und Schüler sollen selbständig Informationen einholen - „Recherchiere“
A11 kV VK	Schüler und Lehrer scheuen sich nicht, auch unfertige Gedanken in eigenen Worten wiederzugeben und anderen mitzuteilen	Schülerinnen und Schüler werden dazu aufgefordert, nicht nur Ergebnisse, sondern auch Rechen- oder Denkprozesse in eigenen Worten zu formulieren	- „Schreibe auf, wie du vorgegangen bist!“ - „mit eigenen Worten“ - „Begründe“
A12 Wo kV	Es gibt offene Aufgaben und Probleme, denen man sich auf sehr unterschiedliche Weise nähern kann, mit mehr als einer „vernünftigen“ Lösung	Es gibt offene Aufgaben und Probleme, denen man sich auf sehr unterschiedliche Weise nähern kann, mit mehr als einer „vernünftigen“ Lösung	- offene Aufgaben, die alle Aspekte von Offenheit aufweisen
A13 kV SI	Schüler erproben auf spielerische Weise in mathematischen Situationen ihre Phantasie und Kreativität	Schülerinnen und Schüler erproben auf spielerische Weise in mathematischen Situationen ihre Phantasie und Kreativität	- Spielerische Aufgaben, mathematische Rätsel - Fermi-Aufgaben - „Erfinde“
A15 kV VK	Es wird gemeinsam über das reflektiert, was mathematisch getan wird	Es wird (gemeinsam) über das reflektiert, was mathematisch getan wird	- Bedeutung von Rechnungen werden thematisiert - „Begründe“, „Warum...?“ - „Was bedeutet...?“ - „Ist es sinnvoll...?“

A16 kK Wo kV	Sinn und Bedeutung der jeweils anstehenden Mathematik werden thematisiert	Sinn und Bedeutung der jeweils anstehenden Mathematik werden thematisiert	- Aufgaben, die Sinn und Bedeutung der jeweils anstehenden Mathematik thematisieren - Aufgaben mit hoher Anwendungsrelevanz - „Was bedeutet...?“
A18 Lv Wo kV	Den Sinn von Anwendungsaufgaben (bzw. der dahinter stehenden Modellannahmen) zu diskutieren, ist substantieller Bestandteil des MU	Den Sinn von Anwendungsaufgaben (bzw. der dahinter stehenden Modellannahmen) zu diskutieren, ist substantieller Bestandteil des MU	- Verwendung des Begriffes Modell und Thematisierung des Modellierungskreislaufes - Anwendungsaufgaben enthalten auch Fragen, die das dahinterstehende Modell thematisieren
A19 kV	Die scheinbaren Selbstverständlichkeiten und Konventionen der Schulmathematik werden durchaus hinterfragt und angezweifelt	Die scheinbaren Selbstverständlichkeiten und Konventionen der Schulmathematik werden durchaus hinterfragt (und angezweifelt)	- Sätze, Formeln etc. werden überprüft/ hergeleitet - es wird thematisiert, dass es Konventionen gibt
A21 Sl	Die Schüler haben häufig Gelegenheit, von sich aus aktiv zu werden, sich mit einem Problem zu identifizieren	Die Schülerinnen und Schüler haben häufig Gelegenheit, von sich aus aktiv zu werden, sich mit einem Problem zu identifizieren	- es werden Gelegenheiten geboten, Persönliches einzubringen - Problemstellungen, mit welchen sich Schülerinnen und Schüler identifizieren können - es werden Themen angesprochen, die Kinder/Jugendliche betreffen

Die Abkürzungen unterhalb der Merkmalsbezeichnungen (Lv, Kk etc.) können im Abbildungsverzeichnis nachgelesen werden. Sie stehen für die sieben Aufgaben eines allgemeinbildenden Unterrichts und werden bei jenen Merkmalen angeführt, welche für die jeweilige Aufgabe von hoher Relevanz sind.

3.2.1. Begriffsbestimmung zu den aufgelisteten Kriterien

Prinzipiell sind die Kriterien als Indikatoren zu verstehen, die meist erkennen lassen, ob das jeweilige Merkmal zutrifft oder nicht. Es gilt jedoch nicht zwangsläufig, dass die Erfüllung eines Kriteriums die Erfüllung des Merkmals bedeutet. Im Zweifelsfall wurde zur Entscheidungsfindung auf die Formulierung des Merkmals zurückgegriffen. Ausdrücke in Anführungszeichen sind so zu verstehen, dass diese oder in ihrer Bedeutung ähnliche Formulierungen als Kennzeichen für das jeweilige Merkmal gelten. Nachfolgenden sollen nun einige Begriffe näher erläutert werden.

Verständnis erfordernde Aufgaben

Als Verständnis erfordernde Aufgaben werden jene bezeichnet, die zumindest eine Teilaufgabe enthalten, für deren Beantwortung die thematisierte Mathematik in dem Sinne verstanden werden muss, dass sie auf eine Art und Weise angewendet wird, die nicht zuvor präsentiert wurde. Wissensabfragen oder bloßes Anwenden oder Nachahmen von vorher behandelten mathematischen Mitteln gelten nicht als Verständnis erfordernd. Dabei sei angemerkt, dass diese Klassifizierung im Bewusstsein der Komplexität des Begriffes *verstehen* vorgenommen wurde. Die Begriffe *verstehen* und *Verständnis* bedürften einer eingehenden Beschäftigung, auf welche aus pragmatischen Gründen in dieser Arbeit leider verzichtet werden muss.

Offene Aufgaben

Zur Klassifizierung offener Aufgaben wurde folgende Definition des Landesbildungsservers Baden-Württemberg herangezogen:

Offene Aufgaben sind solche, bei denen ein Lösungsweg nicht vorgezeichnet und eine eindeutige Lösung nicht unbedingt erforderlich ist. Auch Irrwege dürfen zunächst beschritten werden. Die Aufgaben sollen zu grundlegenden Überlegungen anregen und womöglich auch Diskussionen entfachen. Ihre Lösung soll inhaltliche, qualitative Argumentation erfordern und damit die Auseinandersetzung mit dem Lehrstoff vertiefen. Offene Aufgaben erlauben mehrere Vorgehensweisen/Lösungswege, die Lösungswege sind nicht vorgegeben, lassen Raum für

eigene Fragestellungen und Zielsetzungen. Die Schülerinnen und Schüler sollen ermuntert werden, eigene Wege zu finden, diese in eigene Worte zu fassen und dann mit Mitschülerinnen, Mitschülern und der Lehrperson diskutieren (Landesbildungsserver BW, o.J.).

Für die Merkmale A5/7 bis A9 und A19 gelten beispielsweise offene Aufgaben als Kriterium. Dabei wird in Tabelle 1 jeweils in Klammer angegeben, welcher Aspekt offener Aufgaben für das jeweilige Merkmal für ausschlaggebend gehalten wird. Das Merkmal A12 gilt als erfüllt, falls eine Aufgabe alle Aspekte von Offenheit aufweist.

Fermi-Aufgaben

Nach Büchter und Leuders (2016) sind Fermi-Aufgaben eine Spezialform offener Aufgaben, die sich durch Fragestellungen auszeichnen, zu welchen zunächst kaum Daten vorliegen und die meist mit einfachen mathematischen Mitteln beantwortet werden können. Fermi-Aufgaben erfordern von Schülerinnen und Schülern eine Strategie für den Umgang mit Nichtwissen. Typischerweise müssen für die Beantwortung derartiger Fragen Schätzungen vorgenommen und begründete Annahmen aufgestellt werden. Fragen wie „Was kostet eigentlich eine Ausbildung – von der Schule bis zum Beruf?“ oder „Wie viele Tage wird mein Leben kürzer, wenn ich die Fernsehzeit abziehe?“ gelten als Fermi-Aufgaben (Büchter & Leuders, 2016, S. 166ff.).

Modellierungsaufgaben

Fermi-Aufgaben können bei genauer Betrachtung durchaus auch komplex sein und zu anspruchsvollen Modellierungsaufgaben werden. Aufgaben werden in der Folge als Modellierungsaufgaben bezeichnet, sofern sie von Schülerinnen und Schülern Modellbildung in folgender Bedeutung erfordern:

Modellbildung bedeutet also, ein gegebenes Problem aus unserer Umwelt zu vereinfachen oder zu strukturieren, Teilgebiete der Mathematik zu finden, mit deren Hilfe sich daraus ein mathematisches Problem formulieren lässt und dieses zu lösen. Das Ergebnis wird auf Plausibilität geprüft, interpretiert und dann wieder in unserer Alltagssprache auf die ursprüngliche Situation bezogen (Niedersächsischer Bildungsserver, 2007).

Die bewusste Verwendung des Begriffes Modell und die Thematisierung von Modellannahmen bei der Bearbeitung von Anwendungsaufgaben (Merkmal A18) wird sowohl von Heymann als auch von anderen Fachdidaktikern wie Hans-Christian Reichel (siehe S. 42f.) empfohlen.

Aufgaben mit hoher Anwendungsrelevanz

Nach Timo Leuders (2001) besteht die Anwendungsrelevanz einer Aufgabe darin, dass „die mit der Aufgabe vermittelten Inhalte und Methoden die Bedeutsamkeit der thematisierten Mathematik für die Gegenstände und Prozesse des täglichen Lebens angemessen wiedergeben“ (S. 101).

Aufgaben mit hoher Anwendungsrelevanz weisen laut Leuders (2001) meist folgende Merkmale auf: (1) Offenheit, (2) Durchbrechen der Exaktheit, (3) Anwendbarkeit im Alltag und (4) Lösungskompetenz für reale Probleme. Für das Durchbrechen der Exaktheit sind Fermi-Aufgaben beispielhaft. Sie erfordern mathematische Tätigkeiten wie Schätzen oder Überschlagen und zeigen, dass mathematisches Arbeiten nicht immer exaktes Arbeiten sein kann. Merkmal (3) ist eigentlich eine Vorstufe zum Merkmal (4). Hier geht es um Aufgaben, an denen erfahrbar wird, dass Mathematik helfen kann reale Probleme zu lösen. Eingekleidete Aufgaben sind nicht mit realen Problemen gleichzusetzen. Timo Leuders konstatiert: „Je ganzheitlicher, alltagsorientierter der Kontext ist, je ausführlicher die Beschäftigung mit ihm, desto größer ist die Chance, dass Schülerinnen und Schüler die Bedeutsamkeit von Mathematik auch erleben können“ (S. 108). Daher wurde eine hohe Anwendungsrelevanz als Kriterium für Merkmal A16 ausgewählt.

3.3. Analyse

In den folgenden Abschnitten werden nach Schulstufen geordnet die Ergebnisse der Schulbuchanalyse präsentiert. Dabei wird exemplarisch dargelegt, wie die Bewertung der Aufgaben zustande gekommen ist. Für jedes analysierte Kapitel wurde eine Tabelle erstellt, in welcher Aufgabennummer und Merkmalsbezeichnung eingetragen wurden. Diese Tabellen sind im Anhang einzusehen. Sie zeigen, welche Merkmale eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts von welchen Aufgaben erfüllt werden. Vorab sei erwähnt, dass der von Heymann geforderte inhaltliche Minimalkanon (siehe S.8f.) von allen Schulbuchreihen abgedeckt wird. Auf die Auswahl der von den Schulbüchern bearbeiteten Inhalte wurde daher in der Analyse nicht näher eingegangen.

Besonderheiten der einzelnen Schulbuchreihen

Jede Schulbuchreihe weist in der Strukturierung der Kapitel Besonderheiten auf, die auch für diese Analyse von Interesse sind. Da diese in den Büchern aller vier Schulstufen gleichermaßen gegeben sind, soll vorab darauf eingegangen werden.

In der Schulbuchreihe *Das ist Mathematik* beginnt jedes Kapitel mit sogenannten *Themenseiten*. Die meist zwei Seiten umfassenden Texte beinhalten verschiedenste Informationen über das neue Thema. Meist werden geschichtliche Hintergründe erläutert. Häufig wird auch darauf hingewiesen welche Relevanz die darauffolgenden Inhalte im Alltag haben. Damit wird in diesen Büchern das Merkmal A16 zum Teil von den Themenseiten abgedeckt. Unterkapitel werden ebenfalls mit Texten begonnen, die für diesen Abschnitt typische Rechnungen detailliert erklären. Für diesen Zweck werden meist Beispielaufgaben samt Lösungsweg angeführt. Teilweise werden an diesen Stellen auch Formeln hergeleitet, womit das Merkmal A19 erfüllt wird. Am Ende jedes Kapitels befindet sich eine Zusammenstellung von Aufgaben aus dem ganzen Kapitel (sog. *Wissensstraße*), deren Lösungen im Buch enthalten sind.

In den Büchern der Reihe *ganz klar Mathematik* ist am Anfang jedes Kapitels eine Doppelseite zu finden, welche einen kurzen Einführungstext und drei bis vier meist spielerische Aufgaben enthält, die keines spezifischen Vorwissens bedürfen. Zum Teil wird damit ein Beitrag zum Merkmal A13 geleistet. Im Anschluss daran beinhaltet erneut eine Doppelseite den sogenannten Kompetenzanzeiger und einen Kompetenzcheck. Der Kompetenzanzeiger soll Schülerinnen und Schülern zeigen, welche Kompetenzen sie nach Bearbeitung dieses Kapitels entwickelt haben. Der Kompetenzcheck beinhaltet Aufgaben,

deren Beantwortung als „Diagnoseinstrument“ (Achleitner, Klampfer, & Weikinger, 2012, S. 3) anzeigen soll, ob die erworbenen Kompetenzen angewandt werden können. Diese Aufgaben wurden in die Analyse miteinbezogen. Insgesamt enthalten diese Bücher kaum Erklärungen zu einzelnen Vorgehensweisen (Merkmal A19). Einige als Aufgaben gekennzeichneten Texte behandeln beispielsweise die Abstammung von verwendeten Begriffen oder die Bedeutung der thematisierten Mathematik für den Alltag (Merkmal A16). Am Ende jedes Kapitels werden im sogenannten Kompetenztraining verschiedene Aufgaben aus allen vorhergehenden Kapiteln gestellt. Für die Analyse in dieser Arbeit wurden dabei nur jene Aufgaben herangezogen, die dem ausgewählten Kapitel entstammen.

Die Schulbuchreihe *Mathematik verstehen* beinhaltet keine einführenden Texte am Beginn der Kapitel. Aufgaben und theoretische Erklärungen wechseln einander ab. Die Themen der Unterkapitel werden allerdings motiviert und ausführlich erklärt. Als reguläre Aufgaben gekennzeichnete, bereits gelöste Beispielaufgaben wurden nicht zur Analyse herangezogen, um einen unverfälschten Vergleich zwischen den einzelnen Schulbuchreihen zu erzielen. Im Abschnitt *DENKwürdiges* werden meist spielerische Aufgaben gestellt (Merkmal A13), die zum Teil über die Inhalte des betreffenden Kapitels hinausgehen. Eine Buchseite wird dem *MERKwürdigen* gewidmet. Ähnlich wie in den Themenseiten von *Das ist Mathematik* wird hier auf die Geschichte gewisser Begriffe oder mathematischer Sachverhalte und ihrer Verwendung im Alltag eingegangen (Merkmal A16). Abschließend werden in jedem Kapitel zur Wiederholung der Inhalte Wissensfragen und Anwendungsaufgaben gestellt, die gleichermaßen in die Analyse miteinbezogen wurden.

3.3.1. Schulbücher der 5. Schulstufe

Die in diesem Abschnitt untersuchten Kapitel der Schulbücher *Mathematik verstehen 1* (MV1), *Das ist Mathematik 1* (DIM1) und *ganz klar Mathematik 1* (GKM1) befassen sich mit den geometrischen Grundbegriffen Punkte, Strecke, Strahl, Gerade, Winkel und Symmetrie. Im Buch *ganz klar Mathematik 1* werden zusätzlich Flächen und ihre Eigenschaften, Körper und ihre Eigenschaften, Raumvorstellungsübungen und der Maßstab thematisiert. Bevor die Ergebnisse für diese Schulstufe vorgestellt werden, wird anhand einzelner Aufgaben gezeigt, wie die Bewertung zustande gekommen ist und welche Aufgaben dabei besonders aufgefallen sind.

Das ist Mathematik 1

Das Kapitel *Geometrische Grundbegriffe* umfasst 21 Seiten und 60 Aufgaben. Die Analyseergebnisse für diese Aufgaben sind in Tabelle 2 angeführt. Die nachfolgende Aufgabe ist exemplarisch dafür, wie Schülerinnen und Schüler zur Reflexion über die thematisierte Mathematik angeregt werden können.

Aufgabe 826: Gerade Linien in unserer Umwelt

- a) *Gibt es in unserer Umwelt wirklich ganz gerade Linien?*
- b) *Warum ist es nicht leicht bzw. gar nicht möglich, im Alltag Beispiele für Geraden und Strahlen im mathematischen Sinn zu finden?*
- c) *Im Alltag ist die Bedeutung der mathematischen Fachausdrücke oft etwas anders. Besprich das anhand der Worte „Wasserstrahl“ und „Lichtstrahl“! Sind das wirklich Strahlen im mathematischen Sinn? Wenn nicht, warum nicht? (Humenberger, et al., 2016)*

Bei Aufgabe 826 werden Schülerinnen und Schüler aufgefordert zu überlegen, was unter dem mathematischen Begriff *gerade Linie* im Alltag verstanden wird und ob es zu diesem Begriff eine Entsprechung in unserer Umwelt gibt. Die Merkmale A2 und A3 gelten daher als erfüllt. Es wird thematisiert, dass es sich bei geraden Linien um mathematische Objekte handelt, mit welchen operiert wird, weshalb Merkmal A15 als erfüllt gilt. Außerdem eröffnet die Fragestellung, ob es mathematische Objekte wie gerade Linien in unserer Umwelt gibt, die Möglichkeit über Sinn und Bedeutung der anstehenden Mathematik zu sprechen. Damit gilt auch A16 als erfüllt.

Die Fragestellung ermöglicht eine stufenweise Annäherung an die Erkenntnis, dass mathematische Objekte keine identische Entsprechung in der Umwelt haben. Bei diesem

Prozess können auch unfertige Gedanken besprochen werden. Aus diesem Grund wurden auch die Merkmale A6 und A11 als zutreffend gewertet. Der Begriff *Modell* wird zwar nicht eigens erwähnt, jedoch wird in der Aufgabe darauf Bezug genommen, dass beim mathematischen Modellieren Gegenstände in unserer Umgebung mit mathematischen Begriffen beschrieben werden, um Berechnungen anstellen zu können. Bei der Bearbeitung dieser Fragen drängt es sich nahezu auf, mathematisches Modellieren zu thematisieren, weshalb das Merkmal A18 ebenfalls zutrifft.

Die folgende Aufgabe bietet ein Beispiel dafür, wie Schülerinnen und Schüler auch Persönliches in den Unterricht einbringen können.

Aufgabe 869: *Zeichne oder fotografiere ein Objekt aus deinem Alltag, das mindestens drei Symmetrieachsen hat!* (Humenberger, et al., 2016, S. 203)

Diese Aufgabe erfüllt die Merkmale A2 bis A10, A12 und A21. Sie wurde als offene Aufgabe gewertet, da sie von Schülerinnen und Schülern individuell bearbeitet werden kann, eine Verbindung zwischen Alltag und Mathematik hergestellt wird und es erforderlich ist, Kenntnisse über die Symmetrie auf Objekte in der Umgebung anzuwenden. Diese Aufgabe bietet die Chance die Verbindung zwischen Mathematik und dem Alltag erfahrbar zu machen. Schülerinnen und Schüler werden dazu aufgefordert, ihre Umgebung auf eine bestimmte Art und Weise wahrzunehmen. Somit wird auch hier bereits auf einfachem Niveau eine Teilkompetenz des mathematischen Modellierens geübt. Diese Aufgabe bietet zudem die Möglichkeit Persönliches einzubringen, da die Objekte individuell ausgewählt werden können.

ganz klar Mathematik 1

Das Kapitel *Grundlagen der Geometrie* umfasst 19 Seiten und 111 Aufgaben. Die entsprechenden Analyseergebnisse sind in Tabelle 3 im Anhang einzusehen. Die nachfolgende Aufgabe weist keines der gesuchten Merkmale auf.

Aufgabe 376: *Im Alltag finden diese mathematischen Begriffe oft Verwendung. Zum Beispiel: Flugstrecke, Sonnenstrahlen, geradlinig, Wasserstrahl, Streckenposten usw. Sammle noch fünf weitere Begriffe!* (Achleitner, Klampfer, & Weikinger, 2012, S. 78)

Schülerinnen und Schüler werden zwar angeregt, selbst Begriffe zu finden und kommen so zu individuell unterschiedlichen Ergebnissen, jedoch beinhaltet diese Aufgabe keine Frage,

die zu grundlegenden Überlegungen darüber führen könnte, ob die Begriffe des Alltags jenen der Mathematik entsprechen. Die Aufgabe regt daher nicht zur Reflexion über die thematisierte Mathematik an, weshalb nicht davon auszugehen ist, dass diese Aufgabe zu einem tieferen Verständnis beiträgt. Durch eine zusätzliche Frage zur Bedeutung dieser Begriffe könnte zu einer Reflexion über dieselben und der Erkenntnis führen, dass die Bedeutung mathematischer Begriffe im alltäglichen Sprachgebrauch zum Teil eine andere ist, als die innermathematische.

Die nachstehende Aufgabe zum Thema Maßstab bietet die Möglichkeit, bereits in der fünften Schulstufe Grundzüge des Modellierens einzuüben.

Aufgabe 471: *Mathi plant mit seinen Freunden eine Seeradtour im Salzkammergut. Die Route lautet: Mondsee – Thalgau – Fuschl – Mondsee. Sie möchten mithilfe eines Atlanten die ungefähre Kilometeranzahl berechnen. Nimm den Atlas zur Hand und schlage die Salzburg-Karte auf! Berechne die Teilstrecken und anschließend die ungefähre Länge der gesamten Seeradtour!* (Achleitner, Klampfer, & Weikinger, 2012, S. 91)

Der Aufgabe 471 wurden die Merkmale A3, A5/7, A8, A9, A10, A12 und A16 zugewiesen. Bei dieser Aufgabe sollen die Kenntnisse über Maßstabsangaben angewandt werden. Entscheidend hierbei ist, dass Schülerinnen und Schüler selbst die benötigten Informationen eruieren müssen. Dabei wird offensichtlich, welche Verwendung Maßstabsangaben im täglichen Leben finden. Es wird indirekt vermittelt, dass die Mathematik ermöglicht, Landkarten zu strukturieren und Distanzen zu messen. Wesentlich bei dieser Aufgabe ist der Aspekt, dass es mehrere richtige Lösungen gibt, da die Länge der gesamten Radtour nur ungefähr ermittelt werden soll. Schülerinnen und Schüler müssen um zu einer Lösung zu kommen, eine Strategie entwickeln, wie sie der tatsächlichen Distanz mit den gegebenen Informationen möglichst nahekommen können.

Mathematik verstehen 1

Das Kapitel *Einführung in die Geometrie* umfasst 17 Seiten und insgesamt 72 Aufgaben, wovon fünf bereits gelöste Beispielaufgaben sind. Die Analyse der Aufgaben ist in Tabelle 4 einzusehen.

Die Fragestellungen der Aufgaben 7.02, 7.13 und 7.17 sind analog. Gleiches gilt für die Aufgaben 7.03, 7.14 und 7.18. Sie beziehen sich jeweils auf gerade Linien (7.02, 7.03), parallele (7.13, 7.14) und normale Geraden (7.17, 7.18). Dies erklärt die jeweils gleiche

Bewertung dieser Aufgaben. Folgende Fragestellungen sind jenen der Aufgabe 826 (DIM1) sehr ähnlich.

Aufgabe 7.02: *Gibt es in unserer Umwelt tatsächlich gerade Linien?* (Salzger, et al., 2014, S. 171)

Aufgabe 7.03: *Warum kann man sagen, dass 1) ein Bleistift, 2) ein Laternenmast, 3) eine Kante eines Geodreiecks, 4) eine Tischkante, 5) eine Leitersprosse näherungsweise die Form einer geraden Linie aufweist?* (Salzger, et al., 2014, S. 171)

Die Fragestellungen der Aufgaben 7.02 und 7.03 stehen in engem Zusammenhang, da sich beide auf das Verhältnis zwischen mathematischen Begriffen und deren Entsprechung in der Umwelt beziehen. Beide regen dazu an, über dieses Verhältnis zu reflektieren und diesbezügliche Überlegungen oder Argumente auszutauschen. Eine Diskussion über die Diskrepanz zwischen mathematischen Objekten und ihrem Pendant in der Umwelt kann zum besseren Verständnis über die Mathematik an sich und üblichen Vorgehensweisen wie dem mathematischen Modellieren, auf welches in Aufgabe 7.03 Bezug genommen wird, führen. Obige Aufgaben entsprechen in Kombination der Aufgabe 826 (DIM1). Daher wurden diese Aufgaben ebenso mit den Merkmalen A2, A3, A6, A11, A15, A16 und A18 bewertet.

Die nachstehende Aufgabe fordert Schülerinnen und Schüler auf, in Partnerarbeit zwei Methoden für das Zeichnen eines Winkels zu bewerten.

Aufgabe 7.39: *Enzo konstruiert den Winkel mit dem Maß 341° so, indem er zu einem gestreckten Winkel 161° hinzugibt. Karl konstruiert diesen Winkel so, indem er von einem vollen Winkel 19° abzieht. Bewertet diese beiden Methoden! Welche ist vorteilhafter? Probiert es aus!* (Salzger, et al., 2014, S. 180)

Bei dieser Aufgabe wurden die Merkmale A1/22/23 bis A9, A11 und A15 als zutreffend gewertet. Durch den Auftrag eine Entscheidung darüber zu treffen, welche Methode vorteilhafter ist, können Schülerinnen und Schüler zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen. Dabei gibt es keine richtige oder falsche Antwort. Es wird zur Reflexion über die Vorgehensweisen beim Konstruieren eines Winkels und zum selbständigen Ausprobieren angeregt. Durch die Bearbeitung der Aufgabe zu zweit können Argumente erörtert und Überlegungen miteinander geteilt werden.

Vergleich

Nachdem anhand einzelner Aufgaben gezeigt wurde, wie die Analyse zustande gekommen ist, sollen nun die drei Bücher miteinander verglichen werden. Diagramm 1 zeigt, wie viele Aufgaben in Relation zur Gesamtanzahl aller Aufgaben eines Kapitels die Merkmale A1/22/23 bis A21 erfüllen.

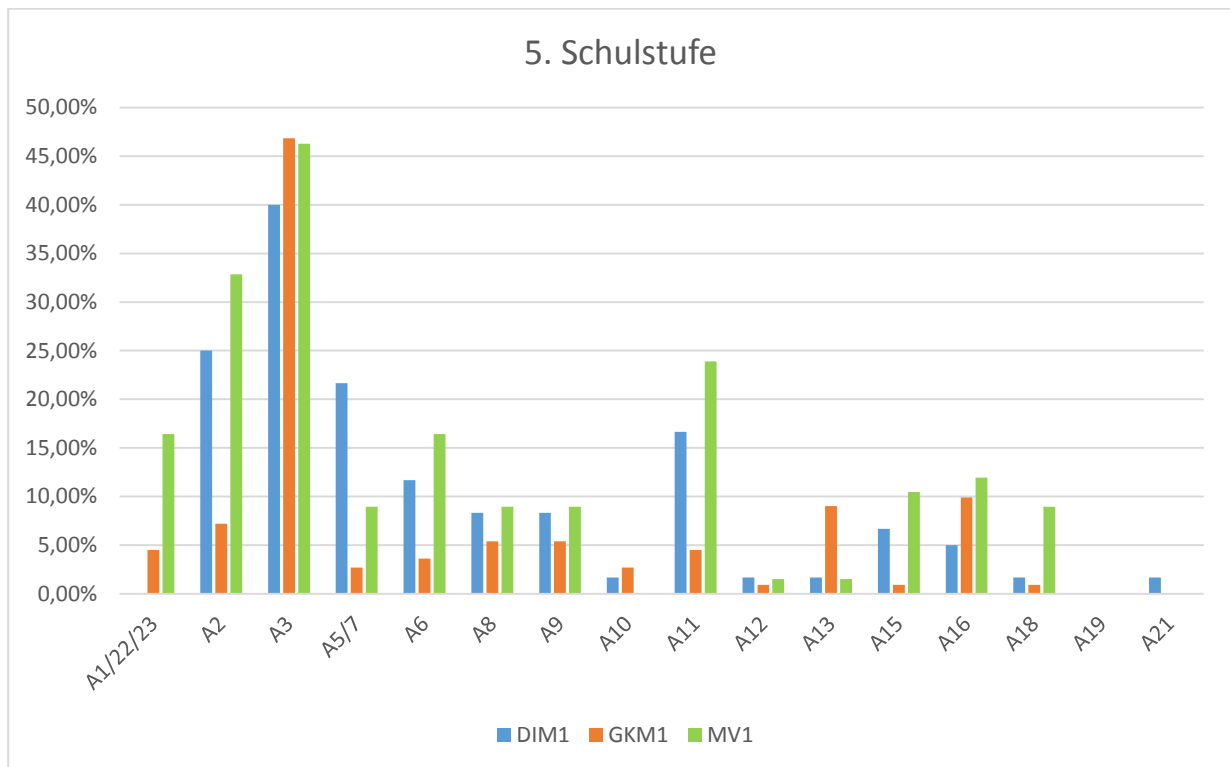


Diagramm 1: Vergleich 5. Schulstufe

Es fällt rasch auf, dass in DIM1 keine Partner- oder Gruppenarbeiten vorgesehen sind. Die vergleichsweise hohe Bewertung der Merkmale A2, A6, A11, und A18 für MV1 ergibt sich zum Teil daraus, dass sich die Aufgaben 7.02 und 7.03, welchen diese Merkmale zugesprochen wurden, in analoger Form in insgesamt drei verschiedenen Abschnitten (gerade Linie, parallele und zueinander normale Geraden) wiederfinden.

Alle drei Bücher enthalten einen relativ hohen Anteil an Verständnis erfordernden Aufgaben. In DIM1 bieten knapp 22% aller Aufgaben die Möglichkeit etwas auszuprobieren, wobei Fehler als Teil des Lösungsprozesses fungieren. Bei vielen dieser Aufgaben wird beispielsweise dazu aufgefordert Winkelmaße abzuschätzen. Es wird also keine exakte Lösung verlangt, wodurch die Antworten nicht in Kategorien von richtig oder falsch geteilt

werden. Selbst gröbere Fehlschätzungen sind nicht per se falsch, sondern bieten Anlass zu genauerer Betrachtung des Problems.

Die Merkmale A2 und A11, bei welchen es um das Erörtern von Argumenten und das Formulieren eigener Überlegungen geht, sind in den Büchern MV1 und DIM1 deutlich stärker ausgeprägt. Es wird sichtbar, dass in GKM1 viel Wert auf spielerische Elemente gelegt wird, da das entsprechende Merkmal (A13) auf 9% aller Aufgaben zutrifft. Die Bedeutung von Rechnungen wird in GKM1 hingegen wesentlich weniger thematisiert als es bei DIM1 und MV1 der Fall ist. Die Herleitung oder Überprüfung von Sätzen oder Formeln wird in keiner der betrachteten Aufgaben verlangt. Das zugehörige Merkmal (A19) wird häufig durch einführende Texte am Beginn von Unterkapiteln abgedeckt, wobei zu erwähnen ist, dass diese Erklärungen in den Büchern DIM1 und MV1 wesentlich umfangreicher sind als in GKM1.

3.3.2. Schulbücher der 6. Schulstufe

Die in diesem Abschnitt dargelegten Ergebnisse beziehen sich auf die Kapitel zum Thema Gleichungen der Bücher *ganz klar Mathematik 2 (GKM2)*, *Das ist Mathematik 2 (DIM2)* und *Mathematik verstehen 2 (MV2)*. In allen drei Büchern wird das Aufstellen, Umformen und Lösen von Gleichungen thematisiert. DIM2 und MV2 enthalten außerdem eigene Unterkapitel für Textaufgaben. Nachfolgend werden zuerst einzelne Aufgaben besprochen und im Anschluss daran die Analyseergebnisse der drei Bücher verglichen.

Das ist Mathematik 2

In DIM2 umfasst das Kapitel *Gleichungen und Formeln* 17 Seiten und 84 Aufgaben, deren detaillierten Analyseergebnisse in Tabelle 5 zu finden sind. Anhand der ersten Aufgabe, die aus DIM2 angeführt wird, soll aufgezeigt werden, dass bereits geringfügige Veränderungen die Aufgabe im Sinne des Allgemeinbildungskonzeptes von Hans Werner Heymann aufwerten könnten.

Aufgabe 416: Berechne jeweils die Autobuskosten (a) für die zurückgelegte Wegstrecke (z)! Verwende die Formel $a = t + p \cdot z$! Fülle die Tabelle aus!

1) Der Kilometerpreis (p) beträgt 1,45 €.

Tagessatz (t) \ Wegstrecke (z)	200 km	150 km	225 km	385 km	y km
a) 230 €					
b) 250 €					
c) x €					

(Reichel, et al., 2011, S. 92)

Wird die Aufgabe auf diese Art und Weise gestellt, entspricht sie keinem der gesuchten Kriterien, da die Lösung der Aufgabe bloß im Einsetzen der Werte für die jeweilige Variable und dem Ausrechnen des Terms besteht. Dies ist selbstverständlich legitim, wenn der Zweck der Aufgabe das Einüben in diese Tätigkeiten ist. Allerdings würde sich bei dieser Aufgabenstellung anbieten, Informationen wegzulassen und Schülerinnen und Schüler selbst ein Modell für den Preis einer Autobusfahrt zu entwickeln. Daran anschließend könnte verglichen werden, ob es für eine bestimmte Strecke oder ab einer bestimmten Anzahl an Personen günstiger ist, mit dem Auto zu fahren. Es gäbe verschiedene Möglichkeiten diese Aufgabe zu öffnen (vgl. Büchter & Leuders, 2016). Damit könnte erzielt werden, dass die Bedeutung der thematisierten Mathematik offensichtlich würde und sich Schülerinnen und Schüler in authentischeren mathematischen Tätigkeiten einübten.

Aufgaben, die in hohem Maße den geforderten Kriterien entsprechen, sind beispielsweise folgende:

Aufgaben 447 – 449: *Welche Angebote sind preisgünstiger? Entscheide möglichst rasch und begründe!*

447: *Ein Paket mit 40 Stück Biskotten kostet 0,90 €. Eine Schachtel mit 50 Stück kostet 1,10 €.*

448: *250 g Weizenkleie-Toastbrot kosten 1,30 €. 200 g Toastbrot kosten 1,10 €.*

449: *Eine 500-Gramm-Packung Kaffee „Goldbraun“ kostet 3,90 €. Eine 200-Gramm-Packung Kaffee „Braunes Gold“ kostet 1,90 €.*

(Reichel, et al., 2011, S. 96)

Für diese Aufgaben gelten die Merkmale A2 bis A12 und A16 als erfüllt. Es wird ein näherungsweise Lösen der Gleichungen durch Abschätzen gefordert. Schülerinnen und Schüler müssen eine Strategie entwickeln, wie das Ergebnis möglichst gut abgeschätzt werden kann. Auf welche Weise sie zu einer Lösung kommen, bleibt ihnen überlassen. Diese Aufgaben weisen eine hohe Anwendungsrelevanz auf, da sie offen sind, kein exaktes Arbeiten gefordert ist und Alltagssituationen aufgezeigt werden, in welchen die Mathematik helfen kann, Probleme zu lösen. Durch das Angeben von Begründungen werden die unterschiedlichen Vorgehensweisen offensichtlich. Falls diese im Anschluss näher besprochen werden, wird die Gelegenheit geschaffen, den Lösungsprozess der Mitschülerinnen und Mitschüler zu erfahren und davon zu profitieren.

ganz klar Mathematik 2

Das Kapitel *Gleichungen* umfasst 10 Seiten und insgesamt 51 Aufgaben, deren detaillierte Bewertung in Tabelle 6 im Anhang eingesehen werden kann. Die nachfolgende Aufgabe dient zum Einstieg in das Thema Gleichungen und wird ohne Vorinformationen gestellt.

Aufgabe 1054: *Viele Alltagssituationen kann man mithilfe von Zahlen, Variablen und Operationszeichen durch eine Gleichung darstellen. Damit sind manche Fragestellungen leichter lösbar. **Eine dieser Alltagssituationen wäre zum Beispiel: 72 € sind auf Maria und Mathi so aufzuteilen, dass Maria doppelt so viel erhält wie Mathi. Wie viel € bekommt Maria, wie viel Mathi?*** (Achleitner, Klampfer, & Weikinger, 2013, S. 211)

Da es bei dieser Aufgabe keine Vorinformation gibt, steht auch keine Anleitung zum Bearbeiten der Aufgabe zur Verfügung. Schülerinnen und Schüler müssen selbst einen

Lösungsweg erarbeiten. Damit wird eine eigenständige Annäherung an den Umgang mit derartigen Fragestellungen ermöglicht. Im Idealfall gelingt es, dass Schülerinnen und Schüler ohne vorgezeichneten Lösungsweg die Aufgabe richtig beantworten, indem sie wie beim Aufstellen einer Gleichung vorgehen. Außerdem soll vermittelt werden, dass Gleichungen in verschiedensten Alltagssituationen hilfreich sein können, womit die Bedeutung dieser Rechnungen thematisiert wird. Der Aufgabe 1054 wurden daher die Merkmale A3, A5/7, A6 bis A9 und A16 zugesprochen.

Bei der Aufgabe 1070 soll in Partnerarbeit das Umformen von Gleichungen mithilfe einer Balkenwaage begreiflich gemacht werden.

Aufgabe 1070: *Nehmt eine Balkenwaage und legt auf jede Waagschale 4 Würfel! Führt nun die folgenden Versuche durch und beobachtet dabei das Verhalten der Balkenwaage!*

a) Legt auf beiden Seiten 3 Würfel dazu!

b) Nehmt auf beiden Seiten 1 Würfel weg!

c) Halbiert auf beiden Seiten die Anzahl der Würfel!

d) Verdreifacht auf beiden Seiten die Anzahl der Würfel!

e) Wie lauten die durchgeführten Rechenoperationen zu a) bis d)?

(Achleitner, Klampfer, & Weikinger, 2013, S. 216)

Bei dieser Aufgabe ergibt sich die Schwierigkeit, dass die Verfügbarkeit einer Balkenwaage vorausgesetzt wird. Dieser Umstand führt möglicherweise dazu, dass Aufgabe 1070 im Unterricht nicht bearbeitet wird. Für den Fall, dass die Aufgabe in den Unterricht aufgenommen wird, bietet sie die Möglichkeit der Annäherung an Erkenntnis, da sich Schülerinnen und Schülern auf anschauliche Weise das Umformen einer Gleichung aneignen können. Die Aufgabe enthält zudem spielerische Elemente und ermöglicht durch das Veranschaulichen der Rechengvorgänge unter Umständen ein besseres Verständnis für das Umformen von Gleichungen. Im Unterpunkt e) sollen die einzelnen Schritte als Rechenoperationen niedergeschrieben werden. Durch die Verknüpfung von beobachtbarem Verhalten der Waage und dem Niederschreiben der zugehörigen Rechenschritte wird deren Bedeutung möglicherweise einsichtiger. Diese Aufgabe bietet das Potenzial, durch das Darstellen der einzelnen Schritte Gründe für etwaige Fehler zu erkennen. Die Merkmale A1, A5/7, A6, A13, A15 und A22/A23 wurden daher als zutreffend gewertet.

Mathematik verstehen 2

Das Kapitel *Gleichungen* in MV2 enthält insgesamt 95 Aufgaben auf 15 Seiten, wobei bei 16 Beispielaufgaben bereits ein Lösungsweg angegeben wird. Diese wurden daher nicht in die Bewertung miteinbezogen. Die detaillierte Bewertung kann in Tabelle 7 eingesehen werden. Die nachstehende Aufgabe entspricht den Merkmalen A3 bis A9 und A11 bis A15.

Aufgabe 4.42: *Gib für den Beruf jeweils einen Sachverhalt an, der durch folgende Terme beschrieben werden kann und beschreibe jeweils die Bedeutung der Variablen:*

(1) $a + b$ (2) $a \cdot b$ (3) $4 \cdot (a + b)$

a) Maurer b) Landschaftsgärtner c) Verkäuferin

(Salzger, et al., 2015, S. 119)

Bei dieser Aufgabe wird die Bedeutung von Termen und Variablen thematisiert. Die Schülerinnen und Schüler können dabei ihrer Kreativität freien Lauf lassen. Sie werden aufgefordert, selbst eine Verbindung zwischen der thematisierten Mathematik und den genannten Berufen herzustellen. Dabei können sich durch die Offenheit der Aufgabenstellung individuell unterschiedliche Antworten ergeben. Ein Ausprobieren und Testen möglicher Antworten auf Sinnhaftigkeit führt möglicherweise zu einem besseren Verständnis und individuellem Erkenntnisgewinn.

Ein Beispiel für eingekleidete Textaufgaben, wie Heymann sie beschreibt, bietet folgende Aufgabe:

Aufgabe 4.63: *Forscher ermitteln die Masse von fünf Walen. Ein Commerson-Deflin (siehe Bild), ein Buckelwal, ein Grauwal, ein Blauwal und ein Pottwal haben zusammen eine Masse von 61060 kg. Der Buckelwal ist 50-mal so schwer wie der Blauwal. Der Pottwal ist um 200 kg leichter als der Blauwal. Der Grauwal hat dieselbe Masse wie der Buckelwal. Der Delfin hat die kleinste Masse. Sie ist um 540 kg geringer als die Masse des Blauwals. Welche Masse hat jeder der fünf Wale?* (Salzger, et al., 2015, S. 122)

Um diese Aufgabe lösen zu können muss verstanden worden sein, wie Gleichungen aufgestellt werden und wie mit ihnen operiert wird. Die Informationen aus dem Text müssen in Gleichungen transformiert werden können. Auch das gekonnte Umformen von Gleichungen ist dafür notwendig. Diese Aufgabe eignet sich also durchaus dazu, das Arbeiten mit Gleichungen zu üben. Von den gesuchten Kriterien trifft allerdings nur A3 zu. Eine derartige Aufgabenstellung ist eher den eingekleideten Textaufgaben zuzuordnen. Sie entspricht keiner realen Problemstellung, da die Masse jedes Wales bereits bekannt sein muss, um die Aufgabe überhaupt erstellen zu können.

Vergleich

Diagramm 2 zeigt einen Vergleich der Analyseergebnisse der Schulbücher GKM2, DIM2 und MV2. Dazu wurde für jedes Merkmal ermittelt, wie viel Prozent aller Aufgaben eines Buchkapitels dieses erfüllen.

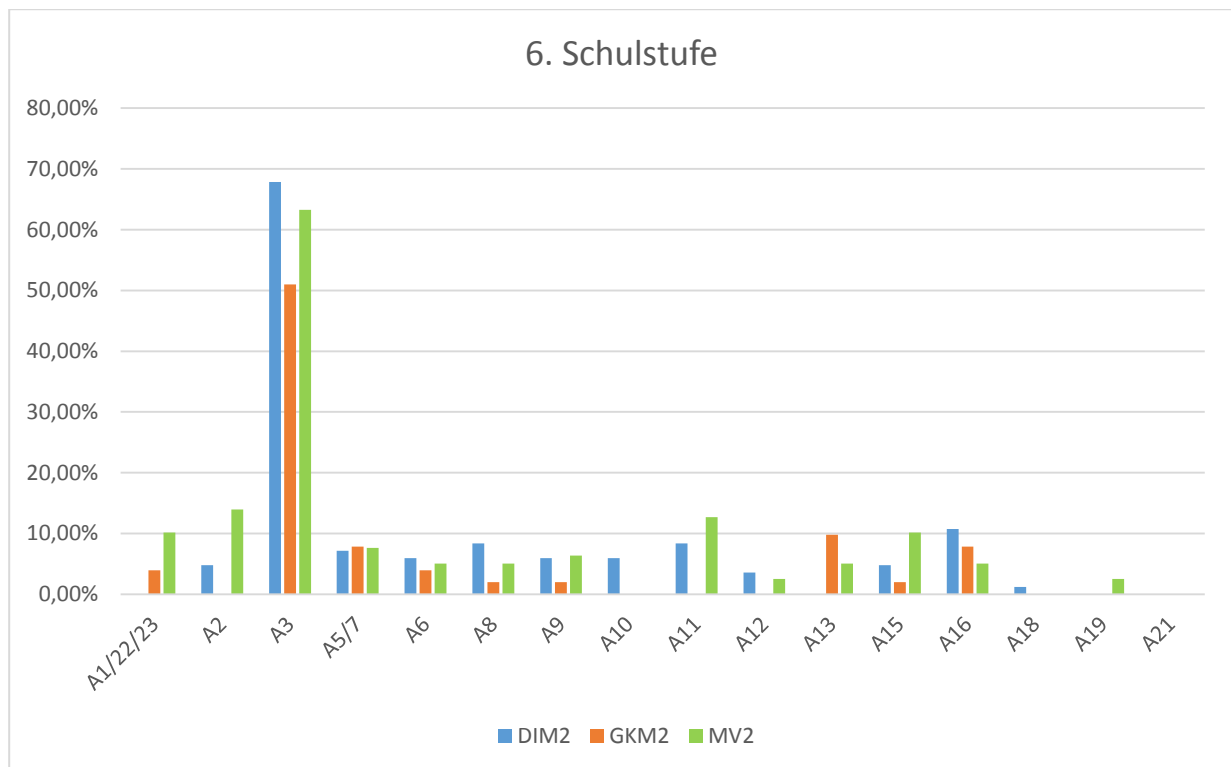


Diagramm 2: Vergleich 6. Schulstufe

Wie auch schon im Buch der 5. Schulstufe sind in DIM2 keine Partner- oder Gruppenarbeiten vorgesehen. Das Kapitel *Gleichungen* in GKM2 enthält keine Aufgaben, in welchen es erforderlich ist, zu argumentieren oder Denkprozesse in eigenen Worten wiederzugeben. In allen drei Büchern ist der Anteil an Verständnis erfordernden Aufgaben über 50%. In DIM2 entsprechen sogar knapp 68% dem zugehörigen Merkmal (A3). Deutliche Unterschiede zwischen den einzelnen Büchern sind für die Merkmale A8 und A9 zu verzeichnen. Aufgaben, die zur Annäherung an Erkenntnis dienen oder ungewöhnliche Ideen zulassen sind in GKM2 nur zu knapp 2% gegeben. Das Merkmal A10 wird nur von DIM2 erfüllt. Kriterium für dieses Merkmal sind Aufgaben, für welche eigenständig Informationen eingeholt werden müssen, Fermi-Aufgaben oder Modellbildungsaufgaben. Alle Aspekte von Offenheit (A12) weisen nur 3,6% aller Aufgaben in DIM2 und 2,5% in MV2 auf. Wie bereits im Schulbuch für die 5. Schulstufe wird auch in GKM2 der spielerische Aspekt betont. Das entsprechende Merkmal (A13) trifft hingegen auf keine der Aufgaben in DIM2 zu. Der Anteil an Aufgaben, auf welche die Merkmale A18, A19 und A21 zutreffen, ist relativ niedrig. In DIM2 wird in einer Aufgabe (1,2%) Bezug auf den Begriff des Modellierens

genommen. Das Merkmal A19, deren Kennzeichen das Überprüfen von mathematischen Sachverhalten ist, wird von zwei Aufgaben (2,5%) in MV2 erfüllt. Problemstellungen, mit welchen sich Schülerinnen und Schüler identifizieren können oder Aufgaben, die ermöglichen Persönliches einzubringen wurden in keinem der drei Bücher festgestellt.

3.3.3. Schulbücher der 7. Schulstufe

Die im folgenden Abschnitt besprochenen Analyseergebnisse beziehen sich auf Kapitel der Bücher *ganz klar Mathematik 3 (GKM3)*, *Das ist Mathematik 3 (DIM3)* und *Mathematik verstehen 3 (MV3)*. Inhalte dieser Kapitel sind statistische Darstellungen und Kenngrößen, wobei in den drei Schulbuchreihen verschiedene Schwerpunkte gelegt wurden. Bevor ein Vergleich der Ergebnisse dieser drei Bücher angestellt wird, wird anhand einzelner Aufgaben die Bewertung begründet.

Das ist Mathematik 3

In DIM3 wird das Thema Statistik auf 16 Seiten behandeln, wobei die Schwerpunkte auf Kontingenztafeln, Klasseneinteilung, Histogramme und Punktwolkendiagramme gelegt wurden. Dieses Kapitel enthält insgesamt 37 Aufgaben, wovon zwei nachfolgend näher besprochen werden. Die Ergebnisse aller Aufgaben sind in Tabelle 8 im Anhang einzusehen.

Aufgabe 770: *Erhebt für jeden der vergangenen 5 Tage die Zeit, die ihr am Computer verbracht habt auf eine halbe Stunde genau. Jeder Schüler und jede Schülerin sollte also 5 Zahlen zur Untersuchung beisteuern.*

1) *Sammelt diese Daten auf einer gemeinsamen Liste!*

2) *Überlegt euch eine geeignete Klasseneinteilung!*

(Reichel, et al., 2012, S. 163)

Aufgabe 770 erfüllt die Merkmale A1/22/23, A3 bis A8, A10 und A21. Sie dient dem Zweck, das Zusammenfassen quantitativer Merkmale in Klassen zu üben, wobei die Daten von den Schülerinnen und Schülern geliefert werden sollen. Es besteht damit die Möglichkeit, persönliche Informationen einzubringen. Sowohl Lösungsweg als auch Ergebnis sind nicht vorherzusehen. Die Aufgabe soll von der ganzen Klasse gemeinsam bearbeitet werden und kann somit zu anregenden Diskussionen, dem Austauschen von unfertigen Gedanken und vor allem dazu führen, voneinander zu lernen.

Im Rahmen der Analyse ist folgende Aufgabe besonders aufgefallen, da sie als einzige ein Projekt in diesem Ausmaß zum Inhalt hat. Aufgabe 776 erfüllt dementsprechend viele Merkmale (A1/22/23 bis A8, A10 bis A16 und A21).

Aufgabe 776: *Macht gemeinsam ein statistisches Projekt! Das Projekt besteht aus Datenerhebung, Datenbereinigung (also Kontrolle der Daten und möglicherweise Korrektur von Datenfehlern), Datenauswertung und aus der Interpretation der Ergebnisse.*

1) Denkt euch ein Projekt aus und erstellt einen Fragebogen! Ihr könnt entweder nur in eurer Klasse Daten erheben oder auch in anderen Klassen.

2) Wertet die Daten mit Kreuztabellen zB getrennt nach Buben und Mädchen aus!

3) Erstellt auch Histogramme!

(Reichel, et al., 2012, S. 165)

Bei dieser Aufgabe sind alle gesuchten Aspekte von Offenheit integriert. Sie lässt einen großen Gestaltungsspielraum zu, erfordert gemeinsames Vorgehen und ermöglicht eine Vertiefung der Lehrinhalte durch die eigenständige Entwicklung und Durchführung des Projekts. Schülerinnen und Schüler können in der Auswahl des Projektes ihre Kreativität ausleben und in der Umsetzung ihr Wissen über Statistik in einem sehr freien Rahmen anwenden. Diese Freiheit bedeutet gleichzeitig auch, Verantwortung für die Datenerhebung, -bereinigung, -auswertung und Interpretation übernehmen zu müssen. Damit werden die Schülerinnen und Schüler auch in ihrer Selbständigkeit unterstützt.

Eine Aufgabe aus DIM3, die zwar nicht aus dem analysierten Kapitel entstammt, aber ein besonderes Beispiel ist, da explizit mathematische Modelle und ihre Grenzen erwähnt werden, soll an dieser Stelle auch kurz angeführt werden.

Aufgabe 635: 8) Wie viel Euro kosten 20 kg dieser Wurstsorte? Wird der errechnete Preis wirklich zu zahlen sein?

	Ware	Menge	Preis
a)	Extrawurst	200 g	1,45 €
b)	Streichwurst	125 g	0,86 €

Nebenstehend ist folgender Text in einer Informationsbox zu lesen:

Grenzen der Gültigkeit

Die **direkte Proportionalität** zwischen Warenmenge und Preis erscheint uns als selbstverständlich. Beispiele aus der Wirklichkeit zeigen aber die Grenzen der Gültigkeit dieser Gesetzmäßigkeit auf. Geschäftsleute gewähren zB bei großen Warenmengen einen so genannten **Mengenrabatt**.

In die Formel „**Preis = Warenmenge mal Preis pro Mengeneinheit**“ kann rein rechnerisch natürlich jede Warenmenge eingesetzt werden. Für die Praxis ist aber nicht jede Warenmenge sinnvoll, zB **9,1034 dag** Wurst. Auch ist nicht jeder Preis sinnvoll, der dabei herauskommt, zB **2,137 €**.

Wir sagen: Die reale Situation wird durch ein mathematisches Gedankenmodell beschrieben. Dieses **mathematische Modell** hat Grenzen und kann die Wirklichkeit zwar recht gut, aber eben nicht vollständig erfassen.

(Reichel, et al., 2012, S. 130)

Diese Aufgabe ist selbstverständlich nicht in die Analyse miteinbezogen worden. Sie ist allerdings eine der wenigen Aufgaben, die eine Frage zu getroffenen Modellannahmen enthält und mathematische Modellierung sowie ihre Grenzen in diesem Ausmaß thematisiert. Dies scheint ein geeignetes Beispiel dafür zu sein, wie bereits in der 7. Schulstufe darauf hingewiesen werden kann, dass sich hinter einigen Anwendungsaufgaben Modellannahmen verbergen, die durchaus hinterfragt werden können.

ganz klar Mathematik 3

Im Kapitel *Statistik* werden auf 14 Seiten bzw. in insgesamt 49 Aufgaben vor allem das Untersuchen und Darstellen von Datenmengen thematisiert. Tabelle 9 im Anhang zeigt die Resultate der Analyse für alle Aufgaben dieses Kapitels. Das nachstehende Beispiel erfüllt beinahe alle der gesuchten Merkmale.

Aufgabe 921: *Gestalte mit einer Mitschülerin bzw. mit einem Mitschüler ein Plakat mit statistischen Schaubildern! Schneidet die Diagramme aus Zeitungen aus und klebt sie geordnet nach dem Diagrammtyp auf ein A3-Blatt! Hängt die fertigen Plakate an einer geeigneten Stelle in eurem Klassenzimmer auf und besprecht in Großgruppen die verschiedenen Schaubilder!*

- *Zu welchen interessanten Themen könnt ihr Schaubilder finden?*
- *Sind zwei unterschiedliche Diagrammtypen mit gleichem Inhalt vorhanden?*
- *Welche Diagrammtypen werden am häufigsten verwendet?*
- *Welche Stärken und Schwächen haben die einzelnen Diagrammtypen?*

(Achleitner, Klampfer, & Weikinger, 2014, S. 200)

Timo Leuders (2011) bezeichnet das Interpretieren von Zeitungsdaten als „wichtige Gelegenheit für mathematisch geleitete Alltagswahrnehmung“ (S. 106). Mit mathematisch orientierten Informationen mündig umzugehen sei Ziel eines allgemeinbildenden Unterrichts und wesentlicher Aspekt des kritischen Vernunftgebrauchs. Diese Aufgabe entspricht daher in vielen Aspekten den gesuchten Kriterien. Zum einen ist die

Aufgabenstellung sehr offen, sodass Schülerinnen und Schüler viele Freiräume haben und eigene Ideen einbringen können. Sie haben die Möglichkeit Schaubilder zu Themen auszuwählen, die sie für interessant halten. Die Verwendung der thematisierten Mathematik, in diesem Fall die statistische Darstellung von Daten, wird durch diese Aufgabe unverkennbar. Deren Bedeutung, Eigenheiten und Vor- bzw. Nachteile sollen anhand der Fragestellungen von Schülerinnen und Schülern erläutert werden. Die Kommunikation der Schülerinnen und Schüler untereinander wird bei dieser Aufgabe stark betont. Die Vorgehensweise, zuerst in Partnerarbeit ein Plakat zu erstellen und diese anschließend in Großgruppen zu besprechen, ermöglicht den Austausch der unterschiedlichen Überlegungen und führt vermutlich zu Erkenntnissen, die in Einzelarbeit nicht zustande kommen würden. Insgesamt erfüllt die Aufgabe 921 daher die Merkmale A1/22/23 bis A16 und A21.

Im Gegensatz dazu entspricht folgende Aufgabe keinem der Merkmale.

Aufgabe 934: *Zur Bestimmung der mittleren Schneehöhe wird an 60 Wintertagen die Höhe der Schneedecke gemessen. (Angaben in cm)*

0	0	2	0	5	20	19	19	18	17	16	15
18	25	24	23	23	22	20	15	15	14	13	12
12	12	32	38	36	36	36	36	35	35	32	30
28	25	21	18	15	11	11	11	10	9	9	8
16	17	17	20	20	16	14	12	8	2	0	0

a) *Führe eine Klasseneinteilung (Klassenbreite 6 cm) durch und erstelle eine Strichliste!*

b) *Bestimme die absolute, relative und prozentuelle Häufigkeit!*

c) *Bestimme den Zentralwert (Median) und den Modalwert!*

d) *Wie viel cm beträgt die mittlere Schneehöhe?*

(Achleitner, Klampfer, & Weikinger, 2014, S. 203)

Bei einer vergleichbaren Aufgabe aus MV3 (11.12) wird im Anschluss auf Aufgabe 934 Bezug genommen. Aufgabe 934 lässt kaum Freiräume und regt Schülerinnen und Schüler nicht zu eigenständigen Überlegungen an. Die Klassenbreite ist bereits vorgegeben, sodass die Klasseneinteilung nicht mehr den Schülerinnen und Schülern obliegt. Der Kontext, der dieser Aufgabe gegeben wurde, ist für die Bearbeitung derselben nicht von Bedeutung. Daher kann diese Aufgabe als eingekleidete klassifiziert werden. Anhand der Aufgabe 11.12 in MV3 wird darauf hingewiesen, welche kleinen Veränderungen zu einer Aufwertung im Sinne des vorgestellten Allgemeinbildungskonzeptes führen könnten.

Mathematik verstehen 3

In MV3 umfasst das Kapitel *Merkmale* 16 Seiten und 38 Aufgaben. Die Schwerpunkte wurden hier auf Arten von Merkmalen, Klassen, Vierfeldertafeln und den Vergleich von Merkmalen gelegt. Die Bewertung aller Aufgaben ist in Tabelle 10 ersichtlich. Die nachstehende Aufgabe ist mit Aufgabe 921 (GKM3), die bereits im Abschnitt *ganz klar Mathematik 3* erwähnt wurde, vergleichbar.

Aufgabe 11.12: *Das Fremdenverkehrsamt eines Wintersportortes möchte anhand von Daten über die Schneehöhen belegen, dass zu Jahresbeginn immer ausreichend Schnee vorhanden ist. Die Schneehöhen der vergangenen zwölf Jahre am 1. Jänner sind in Zentimeter angegeben: 45, 12, 128, 58, 88, 90, 34, 10, 62, 110, 68, 48*

1) Finde zwei verschiedene Einteilungen in Klassen, die eine unterschiedliche Aussage ermöglichen, und stelle sie grafisch dar! Die Verantwortlichen des Fremdenverkehrsamtes möchten die Schneehöhen attraktiv erscheinen lassen. Welche Einteilung ist günstig? Begründe die Entscheidung!

2) Berechne das arithmetische Mittel $\bar{x}$ der Schneehöhen! Welche Aussagekraft hat dieser Wert?

3) Welche Art Merkmal ist die „Schneehöhe“?

(Salzger, et al., 2016, S. 264)

Wie in Aufgabe 921 werden auch bei dieser Aufgabe Schneehöhen als zu bearbeitende Merkmale angegeben. Der Kontext, in welchen Aufgabe 11.12 eingebettet ist, entspricht jenem der Aufgabe 921. Entscheidend für die unterschiedliche Bewertung dieser beiden Aufgaben sind die zugehörigen Fragestellungen bzw. Arbeitsanweisungen. Der Kontext, in welchen Aufgabe 11.12 eingebettet ist, dient nicht bloß dem Einkleiden der Aufgabe. Die Fragestellung in 1) zeigt auf, dass derartige Überlegungen durchaus realitätsnah sind. Es wird offensichtlich, dass die Einteilung in Klassen Einfluss darauf hat, welche Aussagen über die vorhandenen Daten getroffen werden können und dass besonders im Bereich der Statistik Daten je nach Intention unterschiedlich dargestellt werden können. Die Aufgabe fördert daher einen kritischen Umgang mit statistischen Darstellungen. Im Unterpunkt 2) wird nach der Bedeutung des arithmetischen Mittels im gegebenen Zusammenhang gefragt, wodurch die Aufgabe zur Reflexion über die thematisierte Mathematik anregt. Insgesamt entspricht die Aufgabe daher den Merkmalen A2 bis A12, A15, A16 und A18.

Ebenso eignet sich Aufgabe 11.45, um für einen kritischen Umgang mit statistischen Auswertungen zu sensibilisieren.

Aufgabe 11.45: Jedes Jahr wird die Kaufkraft der Österreicherinnen und Österreicher pro Kopf ermittelt. Im Jahr 2014 veröffentlichte RegioData Research die folgenden Werte:

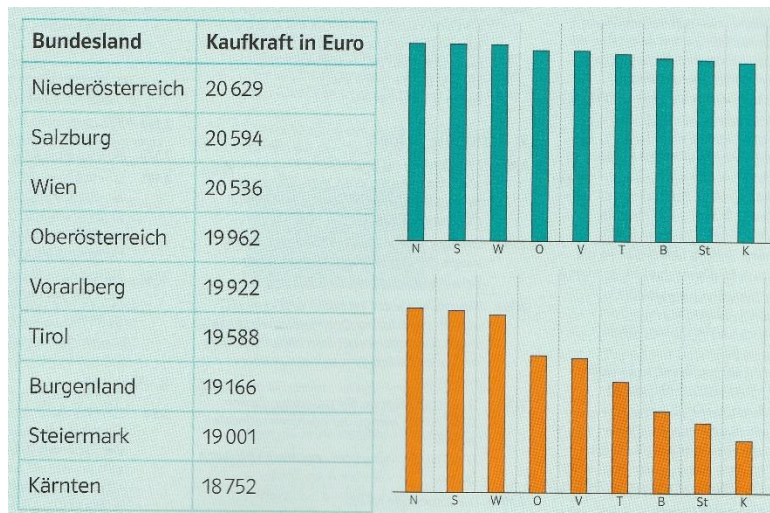


Abbildung 1: Aufgabe 11.45 (MV3)

1) Zeichne bei beiden Säulendiagrammen die 2. Achse ein! Skaliere und beschrifte sie korrekt! Welcher Eindruck zum Thema Kaufkraft in den einzelnen Bundesländern entsteht jeweils beim Betrachten der Darstellung?

2) Der Durchschnittswert für eine Person in Österreich ist mit 19 970 € angegeben. Stimmt dieser mit dem arithmetischen Mittel der Liste überein? Begründe die Antwort!

(Salzger, et al., 2016, S. 275)

Diese Aufgabe ist durchaus anspruchsvoll und erfordert ein sehr gutes Verständnis für statistische Darstellungen und Kenngrößen. Da in der Aufgabenstellung zwei Diagramme angeführt sind, die dieselben Daten veranschaulichen, werden Schülerinnen und Schüler darauf aufmerksam gemacht, dass derartige Schaubilder je nach Intention unterschiedliche Eindrücke vermitteln können. Sie sollen zudem herausfinden, wie die Unterschiede in den Diagramme zustande gekommen sind, indem sie die Skalierung der 2. Achse angeben. Die Aufgabe regt also dazu an, statistische Darstellungen zu hinterfragen und kritisch zu betrachten. Damit wird der Forderung nach Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch zweifelsohne nachgekommen. Die Aufgabe 11.45 entspricht daher den Merkmalen A2, A3, A6, A11 und A15 bis A19.

Vergleich

Diagramm 3 zeigt die Ergebnisse der analysierten Bücher GKM3, DIM3 und MV3, wobei jeweils der Anteil jener Aufgaben, die einzelne Merkmale erfüllen, in Prozent angegeben wird.

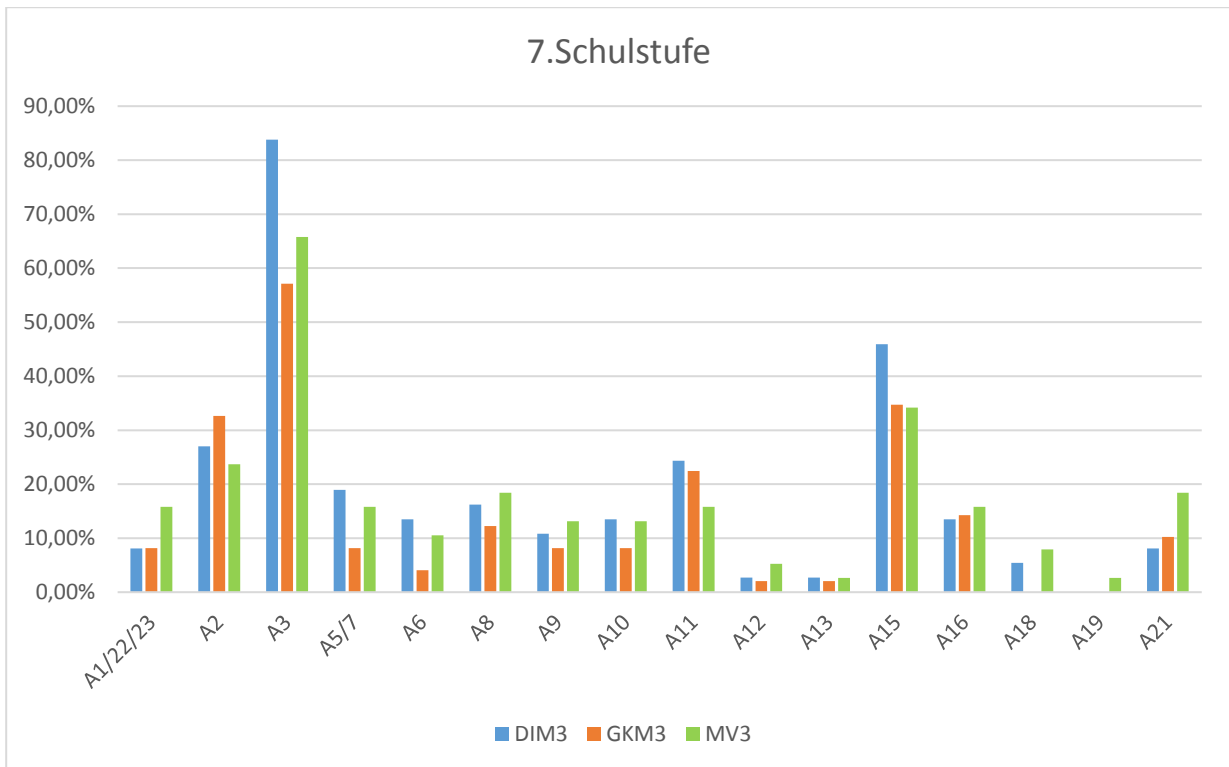


Diagramm 3: Vergleich 7. Schulstufe

Insgesamt fällt auf, dass die Bewertung der Merkmale bei allen drei in diesem Abschnitt behandelten Büchern im Vergleich zu den vorherigen Schulstufen tendenziell höher ausfällt. Alle drei Bücher enthalten einen gewissen Anteil an Partner- oder Gruppenarbeiten, wobei dieser in MV3 mit knapp 16% am höchsten ist. Die Merkmale A2 und A11 betreffen das Erörtern von Argumenten, Artikulieren von unfertigen Gedanken oder Denkprozessen. In allen drei Büchern sind derartige Aufgaben enthalten, wobei in GKM3 etwa 33% der Aufgaben dem Merkmal A2 und in DIM3 24,3% der Aufgaben dem Merkmal A11 entsprechen. Der Anteil an Verständnis erfordernden Aufgaben ist insgesamt sehr hoch. Besonders auffällig ist, dass in DIM3 knapp 84% aller Aufgaben zumindest Teilaufgaben enthalten, für deren erfolgreiche Bearbeitung mehr als das Anwenden von vorgegebenen Algorithmen erforderlich ist. Kennzeichen für die Merkmale A5/7 bis A9 sind unter anderem die Offenheit von Aufgaben. Auch diese Merkmale finden sich in allen drei Schulbüchern in relativ hohem Ausmaß.

Das Thema Statistik ist nahezu prädestiniert dafür, Schülerinnen und Schüler zum eigenständigen Einholen von Informationen anzuregen. Das entsprechende Merkmal A10 trifft auf knapp 14% bzw. 13% der Aufgaben in DIM3 bzw. MV3 zu. Das Merkmal A12 gilt als erfüllt, falls eine Aufgabe alle Aspekte von Offenheit aufweist, insbesondere auch mehrere vernünftige Lösungen möglich sind. Der Anteil dieser Aufgaben ist in MV3 mit 5,3% am höchsten. In Bezug auf den spielerischen Aspekt unterscheiden sich die drei Schulbücher kaum. Besonders auffällig ist, dass in DIM3 in knapp 46% aller Aufgaben die Bedeutung von Rechnungen thematisiert wird. Mit über 30% entsprechen auch in GKM3 und MV3 relativ viele Aufgaben dem Merkmal A15. Dies hängt vermutlich damit zusammen, dass im Bereich der Statistik viele Aufgaben darauf abzielen, Schaubilder zu interpretieren oder zu reflektieren, welche Aussagekraft einzelne statistische Kennwerte haben. In GKM3 ließ sich im Gegensatz zu DIM3 (5%) und MV3 (8%) keine Aufgabe finden, die sich auf Modellannahmen beziehen (A18). In MV3 entspricht eine Aufgabe (2,6%) dem Merkmal A19, das als zutreffend gilt, falls Sätze oder Formeln überprüft bzw. Konventionen der Schulmathematik thematisiert werden. Knapp 18% aller Aufgaben in MV3 ermöglichen, Persönliches einzubringen oder sich mit vorgegebenen Problemstellungen zu identifizieren. Das entsprechende Merkmal A21 trifft in GKM3 auf 10% bzw. in DIM3 auf 8% aller Aufgaben zu.

3.3.4. Schulbücher der 8. Schulstufe

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden nun die Analyseergebnisse der Bücher *ganz klar Mathematik 4 (GKM4)*, *Das ist Mathematik 4 (DIM4)* und *Mathematik verstehen 4 (MV4)* präsentiert. Themengebiet der analysierten Kapitel sind die Kreiszahl π und Berechnungen am Kreis. Wie bereits in den Abschnitten zuvor werden dafür einzelne Aufgaben vorgestellt, anhand derer das Zustandekommen der Bewertung nachvollziehbar gemacht werden soll. Abschließend werden die Ergebnisse der Schulbücher miteinander verglichen.

Das ist Mathematik 4

Das 19-seitige Kapitel *Berechnungen am Kreis* beinhaltet 89 Aufgaben zu den Themen Umfang des Kreises – die Zahl π , Länge des Kreisbogens, Flächeninhalt des Kreises, Flächeninhalt des Kreissektors und Flächeninhalt und Umfang des Kreisringes. Einsicht in die Ergebnisse der Analyse kann in Tabelle 11 im Anhang genommen werden. Ein Beispiel für Aufgaben mit hoher Anwendungsrelevanz ist folgendes:

Aufgabe 810: *Nimm die Erde als Kugel mit dem Radius 6370 km an! Der Schnitt entlang eines Meridianbogens (Längengradbogen) ist daher ein Kreis mit $r = 6370$ km. Österreich erstreckt sich entlang des 15°-Meridians von etwa 49,0° bis etwa 46,6° nördlicher Breite (→Skizze).*

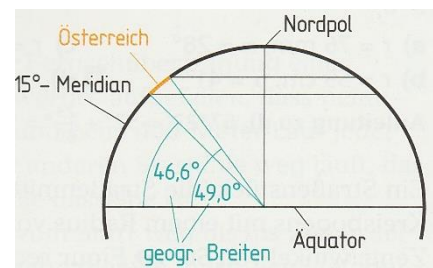


Abbildung 2: Aufgabe 810 (DIM4)

- Rechnet diese Nord-Süd-Ausdehnung in Kilometer um!
- Schlagt im Atlas nach und gebt an, welche Orte an Österreichs Grenze in der Nähe des 15°-Meridians liegen!
- Ermittelt Österreichs Nord-Süd-Ausdehnung (in Grad und Kilometer) an zwei weiteren Medianen!

(Reichel, et al., 2012, S. 198)

Aufgabe 810 entspricht den Merkmalen A2, A3, A8 bis A10, A12 und A16. Bemerkenswert ist die hohe Anwendungsrelevanz dieser Aufgabe. Die Aufgabenstellung könnte zwar durchaus noch offener formuliert sein, dennoch lässt sie auch in dieser Form verschiedene Lösungswege und ungewöhnliche Ideen zu und gibt Anlass zur Diskussion. Im Mathematikunterricht mit dem Atlas zu arbeiten und für verschiedene Orte die Nord-Süd-Ausdehnung Österreichs auszurechnen, ist sicherlich eine willkommene Abwechslung und weist auch auf Schnittstellen zwischen Geographie und Mathematik hin. Mit dieser Aufgabe

wird jedenfalls in einer für dieses Alter zumutbaren Komplexität die Bedeutung der Mathematik für die Kartographie und damit ihre Nützlichkeit für außerschulische Bereiche aufgezeigt. Der erste Satz „Nimm die Erde als Kugel mit dem Radius 6370 km an!“ weist indirekt darauf hin, dass für diese Anwendungsaufgaben Modellannahmen getroffen werden. Hier würde es sich anbieten, mathematisches Modellieren zu thematisieren bzw. zu erklären, falls es für Schülerinnen und Schülern noch unbekannt ist.

Für die folgende Aufgabe ist das Begründen eines innermathematischen Zusammenhangs erforderlich.

Aufgabe 867: *Begründet die Richtigkeit der Proportion $b:u = \alpha:360^\circ$ (→Figur rechts)! Leitet daraus die Formel für die Bogenlänge $b = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180}$ ab!* (Reichel, et al., 2012, S. 208)

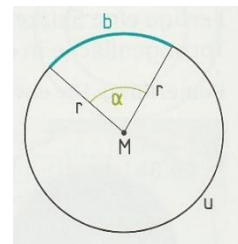


Abbildung 3: Aufgabe 867 (DIM4)

Die Formel $b = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180}$ soll nicht als gegeben hingenommen, sondern selbständig hergeleitet werden. Aufgabe 867 lässt zwar keine außermathematische Relevanz der thematisierten Mathematik erkennen, aber sie erfordert innermathematisches Begründen und erfüllt damit Merkmal A15. Außerdem wurden die Merkmale A1/A22/A23, A2, A3, A11 und A19 als zutreffend gewertet. Die Aufgabe soll in Partnerarbeit gelöst werden und birgt damit die Chance, dass Schülerinnen und Schüler untereinander Gedanken austauschen und voneinander profitieren können.

ganz klar Mathematik 4

In GKM4 enthält das Kapitel *Kreis* insgesamt 96 Aufgaben verteilt auf 19 Seiten. In jeweils einem Abschnitt werden die Kreiszahl π , Umfang und Flächeninhalt des Kreises, Winkelsätze im Kreis, Kreisteile und zusammengesetzte Flächen besprochen. In Tabelle 12 im Anhang sind die detaillierten Analyseergebnisse für dieses Kapitel aufgelistet. Folgende Aufgabe findet sich in allen drei Schulbüchern in ähnlicher Form wieder.

Aufgabe 458: *Ermittlung der Zahl Pi:*

Nimm fünf zylindrische Gegenstände (z.B. Chipsdose, Trinkglas ...) und ermittle durch Messung mit einem Maßband den Umfang und den Durchmesser der Grundfläche! Trage die Ergebnisse in die Tabelle ein und berechne anschließend das Verhältnis des Kreisumfangs zum Kreisdurchmesser!

Gegenstand	Umfang u	Durchmesser d	$\frac{u}{d}$

(Achleitner, Klampfer, & Weikinger, 2015, S. 104)

Auf Aufgabe 458 treffen die Merkmale A5/7, A6, A8, A10, A13 bis A16 und A19 zu. Schülerinnen und Schüler sollen mithilfe unterschiedlicher zylindrischer Gegenstände selbst erkennen, dass das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises konstant ist. Die Aufgabe wird ohne Vorinformation gestellt und soll vermutlich dabei helfen, die Zahl π begreifbar zu machen. Durch das Abmessen eigens gewählter Gegenstände weist diese Aufgabe auch einen spielerischen Aspekt auf. Das Kapitel *Kreis* enthält verhältnismäßig viele Aufgaben, welche zum selbständigen Überprüfen oder Herleiten von Formeln oder dem näherungsweisen Ermitteln von π auffordern. Damit wird zum einen zur Reflexion über das mathematische Tun angeregt und zum anderen auf die Bedeutung bestimmter mathematischer Sachverhalte, hingewiesen. Diese Aufgabe bietet dafür ein Beispiel, da die Bedeutung der Zahl Pi als Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser thematisiert wird und zugleich erkennbar wird, wie die Zahl (zumindest näherungsweise) berechnet werden kann.

Die nachstehende Aufgabe erfüllt ausschließlich das Merkmal A3.

Aufgabe 530: Vier kongruente Kreise sind laut Abbildung angeordnet. Die Kreise haben jeweils einen Durchmesser von 4 cm. Wie groß ist die grün eingefärbte Fläche?

(Achleitner, Klampfer, & Weikinger, 2015, S. 116)

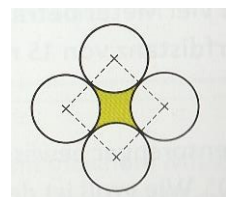


Abbildung 4: Aufgabe 530 (GKM4)

Der Lösungsweg dieser Aufgabe ist nicht vorgezeichnet. Um zum richtigen Ergebnis zu gelangen, bedarf es durchaus Verständnis und einer geeigneten Strategie zur Lösungsfindung. Die Aufgabe wurde nicht als offen gewertet, da es kaum Offenheit in der Bearbeitung gibt (im Grunde sind zwei Lösungswege möglich), mit dem Notieren der richtigen Antwort die Aufgabe als gelöst gilt und es damit nicht zu einer Vertiefung des Lehrstoffs kommt. Timo Leuders gibt für genau diese Art von „Standardaufgabe[n]“

(Leuders, 2001, S. 110) eine Möglichkeit an, wie sie zu einem relevanten und glaubwürdigen Problem umgestaltet werden können:

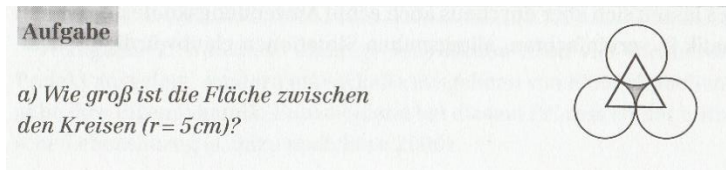


Abbildung 5: Aufgabe nach Leuders (2001, S. 110)

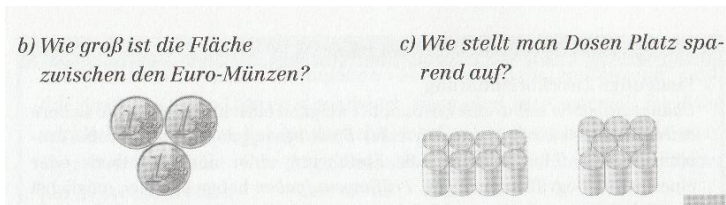


Abbildung 6: Alternativen zu Aufgabe 530 nach Leuders (2001, S. 111)

Ausgangspunkt ist eine dem obigen Beispiel 530 sehr ähnliche Aufgabenstellung (a). Eine Variante davon, die bereits alltagsnäher und offener formuliert ist, wird in b) angegeben. Offener wird die Aufgabe vor allem dadurch, dass Schülerinnen und Schüler die Geldstücke selbst vermessen müssen. Eine unterschiedliche Genauigkeit beim Messen führt dementsprechend zu unterschiedlichen Ergebnissen. Die Aufgabenstellung in c) ist deutlich anspruchsvoller, aber auch realitätsnäher. Timo Leuders weist darauf hin, dass „Platz sparend“ bewusst unscharf formuliert ist. Wird „möglichst Platz sparend“ mit „möglichst viele Dosen auf einer gegebenen Fläche“ übersetzt, so hängt das Ergebnis von Form und Größe der Fläche ab (Leuders, 2001, S. 111). Die Aufgabenstellung in c) könne in vielerlei Hinsicht die Bedeutung von Mathematik angemessen darstellen: „Ein offeneres Problem muss modelliert werden, Methode und Begriffe müssen entwickelt und Lösungen im Hinblick auf das Ausgangsproblem bewertet werden“ (Leuders, 2001, S. 111).

Mathematik verstehen 4

Das Kapitel *Die Kreiszahl π* umfasst 20 Seiten und 93 Aufgaben, die zur Analyse herangezogen wurden. Die einzelnen Abschnitte behandeln die Kreiszahl π , den Umfang eines Kreises, die Länge von Kreisbögen, den Flächeninhalt eines Kreises, von Kreisteilen sowie Kreissegmenten. Tabelle 13 im Anhang enthält die Ergebnisse der einzelnen Aufgabe dieses Kapitels. Für die nachstehende Aufgabe geben Büchter und Leuders (2016) einen Vorschlag, wie eine Öffnung gelingen könnte.

Aufgabe 6.41: Thomas hat zwei quadratische Kartonstücke jeweils mit der Seitenlänge 16 cm. Aus dem ersten schneidet er eine Kreisfläche mit dem Durchmesser 16 cm heraus, aus dem zweiten vier Kreisflächen jeweils mit dem Durchmesser 8 cm. Berechne in beiden Fällen, wie viel Prozent eines Kartonstücks als Abfall zurückbleibt! (Salzger, et al., 2017, S. 168)

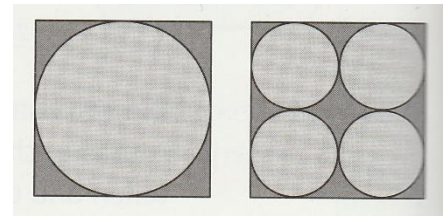


Abbildung 7: Aufgabe 6.41 (MV4)

Der Aufgabe 6.41 wurde lediglich Merkmal A3 zugesprochen. Büchter und Leuders (2016) kritisieren, dass bei obiger Aufgabenstellung Schülerinnen und Schülern „die Möglichkeiten zur Entdeckung und zur Begründung geradezu vorenthalten“ (S. 58) werden. Ihr Vorschlag besteht darin, bei selbigen Figuren als Ausgangspunkt die Aufgabenstellung zu verändern, sodass eine Begründung für die Gleichheit der Abfallanteile gesucht werden soll. Dabei könne der Sachverhalt der Ähnlichkeitsinvarianz von Flächenverhältnissen angewandt oder entdeckt werden (Büchter & Leuders, 2016, S. 58). Eine entsprechende Aufgabenstellung könnte wie folgt lauten: „Begründe, warum in den beiden abgebildeten Quadraten die weißen Flächenanteile gleich groß sind!“ (Büchter & Leuders, 2016, S. 59).

Die nachstehende Aufgabe ist auch in GKM4 (nur Teil a) und DIM4 zu finden.

Aufgabe 6.67: Beweist, dass der Inhalt der orangen Fläche gleich dem Inhalt der blauen Fläche ist! Hinweis: Überlegt, wie die Maße der blauen Fläche mit denen der orangen Fläche zusammenhängen! (Salzger, et al., 2017, S. 172)

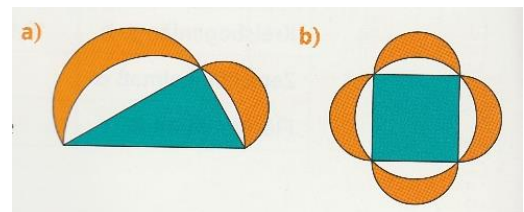


Abbildung 8: Aufgabe 6.67 (MV4)

Die Aufgabe 6.67 soll in Partnerarbeit gelöst werden. Mangels zusätzlicher Hinweise oder Anweisung ist die Aufgabe sehr anspruchsvoll, erfordert also offensichtlich Verständnis der gegebenen Sachverhalte. Im Vergleich zu GKM4 und DIM4 wird in MV4 nicht thematisiert, dass die Figur in a) den Namen *Möndchen des Hippokrates* trägt, da sich dieser bereits um 450 v. Chr. mit dem Zusammenhang der Flächeninhalte von Möndchen und rechtwinkeligem Dreieck beschäftigte und ihre Gleichheit bewies. Auf den geschichtlichen Hintergrund dieser Aufgabe zu rekurrieren wäre gewiss im Sinne der Stiftung kultureller Kohärenz, wie Heymann sie fordert. Nichtsdestotrotz bietet diese Aufgabe eine sehr gute Möglichkeit, sich im Begründen mathematischer Gegebenheiten zu üben. Die Aufgabenstellung ist offen formuliert und enthält nur einen vagen Hinweis, der zum Finden eines Lösungsweges verhelfen soll. Da das Argumentieren in innermathematischen

Situationen eines der wichtigsten Charakteristika des mathematischen Tuns ist, stellt es laut Büchter und Leuders (2016) einen wesentlichen allgemeinbildenden Aspekt des Mathematikunterrichts dar. Die Aufgabe 6.67 entspricht nach dem erstellten Kriterienkatalog den Merkmalen A1/22/23 bis A3, A6 bis A9, A11, A16 und A19.

Vergleich

Wie bereits in den Abschnitten zuvor soll nun ein Überblick der Analyseergebnisse für die vorgestellten Bücher in diesem Kapitel gegeben werden. In Diagramm 4 ist abzulesen, wie viel Prozent der Aufgaben der einzelnen Schulbücher die Merkmale A1/22/23 bis A21 erfüllen.

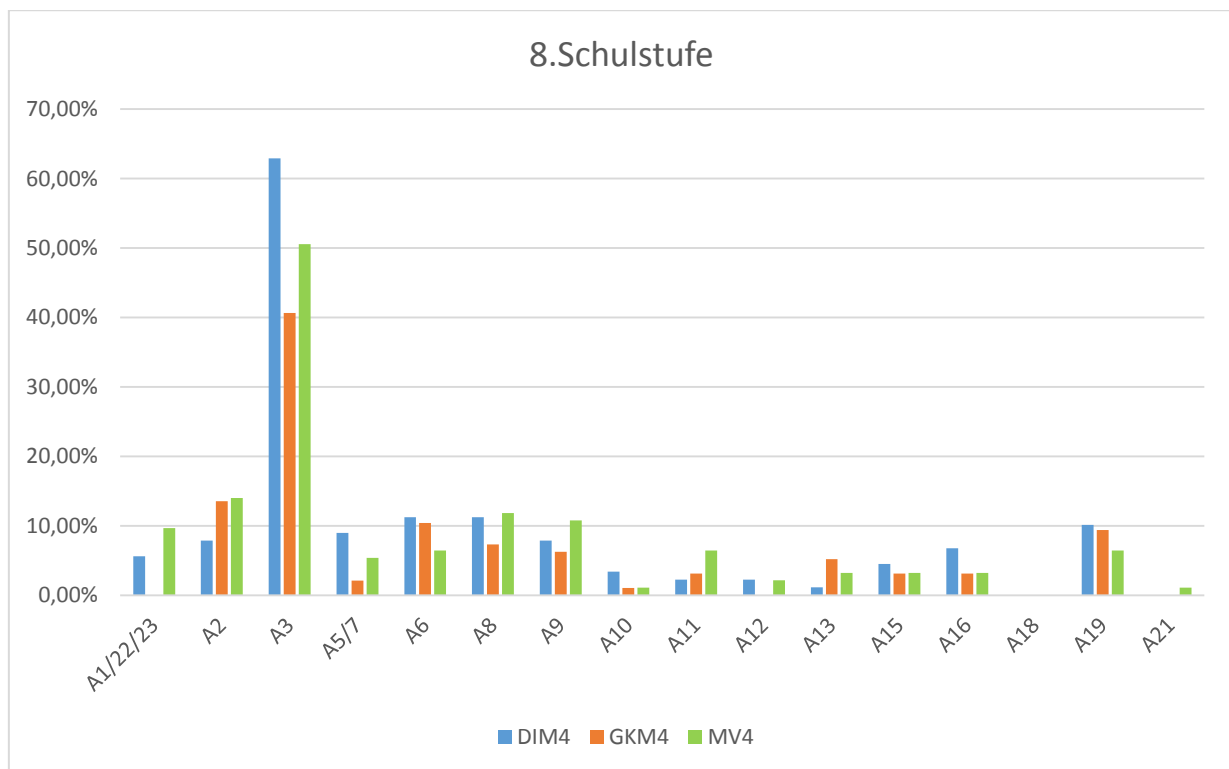


Diagramm 4: Vergleich 8.Schulstufe

Das Buch GKM4 enthält im analysierten Kapitel im Gegensatz zu DIM4 und MV4 keine Partner- oder Gruppenarbeiten (A1/22/23). Der Anteil an Aufgaben, die das Erörtern von Argumenten erfordern liegt in GKM4 und MV4 bei knapp 14%. Im Bereich der Verständnis erfordernden Aufgaben sind deutliche Unterschiede zu erkennen. Mit rund 63% sind diese am häufigsten in DIM4 zu finden. Für das Merkmal A5/7 gelten jene Aufgaben als Kennzeichen, die einen positiven Umgang mit Fehlern fördern oder dazu anregen, die Gründe von Fehlern zu eruieren. Dieses Merkmal trifft ebenfalls am häufigsten in DIM4 zu. Aufgaben, die verschiedene Stufen zur Annäherung an Erkenntnis, Hypothesen oder

Teillösungen (A6) ermöglichen, sind zu 6,5% in MV4 und zu 10% bzw. 11% in GKM4 bzw. DIM4 festgestellt worden. Den Merkmalen A8 und A9, welche sich auf das Zulassen ungewöhnlicher Ideen und individuell unterschiedlicher Lösungswege beziehen, entsprechen in MV4 11,8% bzw. 10,8% aller Aufgaben. Im Vergleich dazu gilt dies nur für 7,3% bzw. 6,3% der Aufgaben im GKM4. Eigenständiges Recherchieren oder Modellbilden wird in allen drei Büchern kaum verlangt. Ebenso liegt der Anteil an Aufgaben, die das Formulieren von Denk- oder Rechenprozessen erfordern, bei allen drei Büchern unter 7%. Aufgaben, die alle Aspekte von Offenheit vereinen, sind in DIM4 zu 2,3% und in MV4 zu 2,2% gegeben. Die Merkmale A13, A15 und A16 sind insgesamt relativ gering ausgeprägt, wobei wie bereits bei den bereits besprochenen Schulbüchern der Schulstufen 5 bis 7 das Merkmal A13 in GKM4 am häufigsten zutrifft. Auf Sinn und Bedeutung der jeweils anstehenden Mathematik (A16) wird in DIM4 bei knapp 7% aller Aufgaben Bezug genommen. Der Begriff Modell wird in keinem der analysierten Kapitel erwähnt. Im Gegensatz dazu ist der Anteil an Aufgaben, die Tätigkeiten wie Herleiten, Überprüfen oder das Beweisen von mathematischen Sachverhalten anregen, in allen drei Büchern relativ hoch. In DIM4 erfüllen ungefähr 10% aller Aufgaben dieses Merkmal (A19). Die einzige Aufgabe, die ermöglicht Persönliches beim Bearbeiten einer Aufgabe einzubringen (A21), ist in MV4 enthalten.

3.4. Fazit

Abschließend werden in diesem Kapitel die Ergebnisse der Schulbuchanalyse zusammengefasst, um einen Überblick über die Resultate zu geben. An dieser Stelle sei erneut darauf hingewiesen, dass letztendlich der Umgang der Lehrkräfte mit den vorliegenden Aufgaben entscheidend dafür ist, ob diese zur Allgemeinbildung der Schülerinnen und Schüler beitragen. Die in 3.3 präsentierte Analyse sollte vor allem zeigen, inwieweit Schulbuchaufgaben zu einer Unterrichtskultur im Sinne des Allgemeinbildungskonzeptes von Hans Werner Heymann anregen.

Für das erste untersuchte Merkmal galten Partner- oder Gruppenarbeiten als Kriterien. Der Großteil der analysierten Kapitel enthält zu weniger als 10% Partner- oder Gruppenarbeiten. *Mathematik verstehen* enthält als einzige Schulbuchreihe in allen analysierten Kapiteln entsprechende Aufgaben.

Besonders auffällig sind die pro Jahrgang und Schulbuch differierenden Werte, die sich für Merkmal A2 ergaben. Beim Themenkomplex *Einführung in die Geometrie* beispielsweise beträgt die Differenz zwischen der Merkmalsausprägung in MV1 (32,8%) und GKM1 (7,2%) 25,6%. Für die Bücher der 6. und 8. Schulstufe ergaben sich insgesamt eher niedrige Werte (zwischen 0% und 14%). Im Gegensatz dazu bewegen sich die Ergebnisse für die 7. Schulstufe zum Thema Statistik zwischen 23,3% und 33,3%.

In Bezug auf Verständnis erfordernde Aufgaben ergab sich im Verlauf der Analyse die Schwierigkeit, den Begriff Verständnis soweit einzugrenzen, dass eine für die Analyse taugliche Arbeitsdefinition gefunden werden konnte. Dieser Definition gemäß erfüllen alle Schulbücher die Anforderung, einen nennenswerten Anteil, nämlich mindestens 25%, ebensolcher Aufgaben zu enthalten. Besonders hohe Werte ergaben sich für die Schulbücher der 7. Schulstufe. Möglicherweise besteht hier ein Zusammenhang mit dem Themengebiet *statistische Kenngrößen und Darstellungen*.

Die Kriterien für die Merkmale A5/7 bis A9 sind einander recht ähnlich. Offene Aufgaben gelten für alle vier als eindeutiges Kennzeichen, wobei bereits Teilaspekte von Offenheit für eine positive Bewertung genügen können. Vor allem bei der Analyse der Schulbücher für die 5. Schulstufe variieren die Ergebnisse für das Merkmal A5/7 sehr stark. Mit 21,7% enthält DIM1 die meisten Aufgaben, die dieses Merkmal erfüllen. Verschiedene Stufen der Annäherung an Erkenntnis, Hypothesen, Teillösungen usw. (Merkmal A6) werden oft durch erklärende Texte am Anfang eines Abschnittes ermöglicht, da diese schrittweise an ein neues Thema heranzuführen. Dennoch wird beispielsweise auch durch das Herleiten von

Formeln eine stufenweise Annäherung an Erkenntnis erreicht. Auch die Ergebnisse für dieses Merkmal unterscheiden sich je nach Schulstufe und Schulbuchreihe. Den höchsten Anteil an entsprechenden Aufgaben enthält mit 16,4% MV1. Die Ergebnisse für die Merkmale A8 und A9 sind sehr ähnlich. Auch hier zeigt sich, dass es enorme Unterschiede gibt, da die Werte insgesamt von ungefähr 2% bis knapp 18% reichen, wobei der Anteil an Aufgaben, die Merkmal A8 oder A9 erfüllen vor allem in den Büchern der 6.Schulstufe sehr gering ist.

Mathematiklernen als Erkundungsprozess zu erfahren kann nach dem Kriterienkatalog beispielsweise von Fermi-Aufgaben oder Modellierungsaufgaben geleistet werden. Keines der analysierten Bücher enthält Fermi-Aufgaben. Gemäß der verwendeten Arbeitsdefinition entspricht keine der untersuchten Aufgaben allen Aspekten von Modellierungsaufgaben. Vorstufen oder Teilaspekte des Modellierens werden zwar von manchen Aufgaben abgedeckt, allerdings entspricht keine der untersuchten Aufgaben umfangreichen Modellierungsaufgaben. Eigenständiges Einholen von Informationen wird allerdings durchaus in den Schulbüchern gefordert. Das Merkmal A10 wurde in allen analysierten Büchern nur zu einem sehr geringen Teil festgestellt.

Betrachtet man die Ergebnisse für alle vier Schulstufen fällt auf, dass die Spannbreite der Ergebnisse für Merkmal A11 sehr groß ist. Sie reicht von 0% in GKM2 bis 24,3% in DIM3. Hier wird erneut ersichtlich, dass die Ausprägung der Merkmale sehr stark differiert.

Aufgaben, die alle Aspekte von Offenheit beinhalten (Merkmal A12), sind in sehr geringem Maß gegeben. Für den Großteil der betrachteten Kapitel trifft dieses Merkmal auf weniger als 5% aller Aufgaben zu.

Die analysierten Schulbuchaufgaben enthalten mehrheitlich keine spielerischen Aspekte. Im Vergleich mit *Das ist Mathematik* und *Mathematik verstehen* sind in der Schulbuchreihe *ganz klar Mathematik* relativ viele Aufgaben, die diesem Merkmal entsprechen, zu finden.

Der Anteil an Aufgaben, die zur Reflexion über das mathematische Tun anregen, ist in allen drei Büchern der 7.Schulstufe mit 34% bis 46% sehr hoch. In den Büchern der übrigen Schulstufen übersteigt dieser Anteil kaum 10%. Dieser Umstand ist möglicherweise darauf zurückzuführen, dass sich die Statistik besonders dazu eignet, über die Bedeutung von einzelnen statistischen Berechnungen oder Darstellungsformen zu reflektieren.

Wie bereits erwähnt wird das Merkmal A16 (Sinn und Bedeutung der jeweils anstehenden Mathematik werden thematisiert) oftmals durch zusätzliche Texte am Beginn („Themenseiten“ in *Das ist Mathematik*) oder am Ende („MERKwürdiges in *Mathematik*)

verstehen) eines Kapitels abgedeckt. In *ganz klar Mathematik* werden derartige Informationen in Form von als Aufgaben gekennzeichneten, kurzen Texten eingestreut. Aufgaben mit hoher Anwendungsrelevanz sind relativ selten. Der Maximalwert für dieses Merkmal liegt bei knapp 16% (MV3).

Die Thematisierung von mathematischen Modellen bzw. dem Modellierungskreislauf findet sehr selten statt. In der Hälfte aller analysierten Bücher erfüllt keine Aufgabe das Merkmal A18. Dieses wurde bereits als zutreffend gewertet, falls in Aufgaben eindeutig Bezug auf mathematisches Modellieren genommen wird, selbst wenn der Begriff Modell nicht explizit erwähnt wird.

Ähnlich wie es bei Merkmal A16 der Fall ist, gilt für das Merkmal A19, dass Konventionen meist in jenen Abschnitten der Schulbücher angesprochen werden, die zur Einführung in ein Thema oder der Erklärung dienen. Das Überprüfen oder Herleiten von mathematischen Sachverhalten gilt ebenso als Kriterium für Merkmal A19. Der Anteil an Aufgaben, auf welche diese Kriterien zutreffen, ist sehr gering. In sieben der insgesamt zwölf analysierten Schulbücher konnte keine entsprechende Aufgabe festgestellt werden.

Gleiches gilt für das Merkmal A21. Sieben der zwölf Schulbuchkapitel enthalten keine Aufgabe, welche Gelegenheiten bieten, Persönliches einzubringen oder sich mit Problemstellungen zu identifizieren. Beachtenswert ist hierbei, dass in den Ergebnissen der 7.Schulstufe die Werte zwischen 8% und 18% liegen. Dieser Umstand ist damit zu erklären, dass im Bereich der Statistik wiederholt persönliche Daten für Berechnungen und die Erstellung statistische Schaubilder herangezogen werden.

Insgesamt fällt auf, dass die Bewertung aller drei Schulbücher für die 7.Schulstufe besonders hoch ausgefallen ist. Die Statistik ist sicherlich ein Bereich, der die Verbindung von Alltag und Mathematik offensichtlich werden lässt. Zudem bietet dieses Themengebiet zahlreiche Gelegenheiten zum Hinterfragen, Reflektieren und Erörtern von Argumenten. Hans Werner Heymann zufolge sind Statistik, Datenanalyse und alltagsbezogene Stochastik Inhaltsbereiche, die einen hohen Wert für die Allgemeinbildung junger Menschen haben - vor allem, wenn dabei der Bezug zu sozialen, politischen und ökonomischen Fragen hergestellt wird. In Anbetracht dessen sind die Ergebnisse für die 7.Schulstufe wenig verwunderlich.

Im Gegensatz dazu scheinen die Aufgaben des Themengebietes *Gleichungen* insgesamt zu einem eher geringen Anteil die untersuchten Merkmale zu erfüllen. Die Vermutung liegt nahe, dass die Anzahl an Aufgaben, die den gesuchten Merkmalen genügen, unter

anderem vom Themengebiet abhängt. Im Laufe der Analyse zeichnete sich außerdem der Trend ab, dass zahlreiche Aufgaben, auf welche mehrere Merkmale zutreffen, als schwierig gekennzeichnet werden oder dem Erweiterungs- bzw. Vertiefungsbereich zugeordnet sind. Möglicherweise besteht hier die Gefahr, dass diese Aufgaben von vornherein abschreckend wirken oder sie erst gar nicht behandelt werden. Zum Teil sind Aufgaben, die gemäß dem Kriterienkatalog viele Merkmale erfüllen, durchaus anspruchsvoll. Dies sollte aber kein Grund sein, diese aus dem Unterricht zu verbannen.

In der Analyse wurde versucht herauszuarbeiten, weshalb einander ähnliche Aufgaben zum Teil verschieden bewertet wurden. Oftmals genühten kleine Unterschiede für eine abweichende Bewertung. Die Analyse hat deutlich gemacht, dass bereits kleine Unterschiede durchaus Veränderungen in Bezug auf die allgemeinbildende Qualität bewirken können. Eine zusätzliche Frage oder das Weglassen einer Information vermögen eine Aufgabe im hier geforderten Sinn bereits aufzuwerten.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass die mit Blick auf die allgemeinbildende Qualität wünschenswerten offenen Aufgaben, Fermi-Aufgaben und Modellbildungsaufgaben einen äußerst geringen Teil der analysierten Aufgaben ausmachen. Dementsprechend ist es auch wenig verwunderlich, dass mathematisches Modellieren zumindest in den betrachteten Aufgaben kaum thematisiert wird. Vor allem die Verwendung des Terminus Modell, das Thematisieren von Modellannahmen und Grenzen mathematischer Modellierung sind Aspekte eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts, deren Wichtigkeit in beinahe allen vorgestellten Konzepten betont wird. Diesbezüglich kann den untersuchten Schulbüchern durchaus ein Nachholbedarf attestiert werden. An dieser Stelle sei abschließend darauf hingewiesen, dass Aufgaben in geschlossener Form in dieser Arbeit keine Abwertung erfahren sollen. Deren Stärke liegt vor allem darin, dass sie das Erreichen eines bestimmten Ziels wie das schnelle Hinführen zu einem zentralen Problem, das Üben von grundlegenden Fertigkeiten oder eine klar definierte Leistungskontrolle garantieren (Leuders, 2001). Besonders im Mathematikunterricht wird es auch als positiv erlebt, dass Aufgaben eine eindeutige Lösung haben, wodurch eine nachvollziehbare Bewertung gewährleistet wird. Die vorliegende Arbeit soll daher nicht als Plädoyer gegen, sondern für eine bestimmte Art von Aufgaben gesehen werden.

4. Resümee und Ausblick

Zu Beginn dieser Arbeit wurden verschiedene Allgemeinbildungskonzepte mit besonderem Bezug zum Mathematikunterricht vorgestellt, wobei jenes von Hans Werner Heymann vor allem aufgrund der ausführlich dargelegten Anwendung auf den Mathematikunterricht als Grundlage für die im praktischen Teil dieser Arbeit erfolgten Analyse herangezogen wurde. In der Beschäftigung mit verschiedenen Allgemeinbildungskonzepten wurde ersichtlich, dass es trotz unterschiedlicher Herangehensweisen und Schwerpunktsetzungen durchaus Übereinstimmungen darüber gibt, auf welche Weise der Mathematikunterricht allgemeinbildend wirken kann.

Im Rahmen der Präsentation der Analyseresultate konnte gezeigt werden, dass Aufgaben in sehr unterschiedlichem Maß zu einer Unterrichtskultur im Sinne Heymanns anregen können. Es scheint also durchaus möglich zu sein, Aufgaben derart zu gestalten, dass sie eine allgemeinbildende Unterrichtskultur befördern. Zudem wurde darauf hingewiesen, welchen Stellenwert Aufgaben im Mathematikunterricht generell haben und dass diese durchaus eine Ansatzmöglichkeit für Reformen bieten.

Eine Erkenntnis, die durchaus ermutigend ist, besteht darin, dass es nicht unbedingt tief greifender Veränderungen bedarf, um eine Aufgabe im Sinne des Allgemeinbildungskonzeptes nach Heymann aufzuwerten. Hans Werner Heymann (2013) betont selbst, dass die Verwirklichung einer allgemeinbildenden Unterrichtskultur zum einen auf sehr unterschiedliche Weise möglich ist und zum anderen nur in kleinen Schritten innerhalb eines evolutiven Prozesses erreicht werden kann.

Die Möglichkeiten, Aufgaben im Sinne der Allgemeinbildung zu verändern, sind sehr vielfältig. Zahlreiche Anregungen und Vorschläge in Bezug auf die Gestaltung von Aufgaben bieten Büchter und Leuders (2016). Timo Leuders (2001), der sich in seiner Arbeit auch auf Hans Werner Heymanns Allgemeinbildungskonzept bezieht, beschäftigt sich unter anderem damit, welche Qualitätsmerkmale Aufgaben im Mathematikunterricht aufweisen können und durch welche Art von Aufgaben eine Steigerung der Unterrichtsqualität erreicht werden kann.

Weiterführend könnte dahingehend gearbeitet werden, die von Hans Werner Heymann aufgelisteten Merkmale einer allgemeinbildenden Unterrichtskultur noch detaillierter auf Anforderungen an Schulbuchaufgaben zu übertragen. Mit Hilfe der Anregungen von Büchter und Leuders (2016) beispielsweise könnten diesen Anforderungen entsprechende

Aufgaben entwickelt werden, die dem detaillierten Kriterienkatalog genügen. Eine Erprobung dieser Aufgaben im Unterricht könnte zusätzlich dahingehend analysiert werden, ob die entwickelten Aufgaben tatsächlich zu einer allgemeinbildenden Unterrichtskultur im Sinne Heymanns beitragen.

Literaturverzeichnis

- Achleitner, R., Klampfer, A., & Weikinger, M. (2012). *ganz klar Mathematik 1, Arbeitsbuch*. Wien: Jugend & Volk.
- Achleitner, R., Klampfer, A., & Weikinger, M. (2013). *ganz klar Mathematik 2, Arbeitsbuch*. Wien: Jugend & Volk.
- Achleitner, R., Klampfer, A., & Weikinger, M. (2014). *ganz klar Mathematik 3, Arbeitsbuch*. Wien: Jugend & Volk.
- Achleitner, R., Klampfer, A., & Weikinger, M. (2015). *ganz klar Mathematik 4, Arbeitsbuch*. Wien: Jugend & Volk.
- Bildungsserver Rheinland-Pfalz. (o.J.). *Ziele eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts nach H. W. HEIMANN*. Abgerufen am 10. Mai 2017 von https://mathematik.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/mathematik.bildung-rp.de/Fortbildungsmaterial/090603-Problemloesen/090603-Unterrichtskultur.pdf
- Büchter, A., & Leuders, T. (2016). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lerner fördern - Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- Fischer, R. (2012). Fächerorientierte Allgemeinbildung: Entscheidungskompetenz und Kommunikationsfähigkeit mit ExpertInnen. In Fischer, Greiner, & Bastel, *Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung* (S. 9 - 17). Linz: Trauner.
- Graumann, G. (1994). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung - mit Blick auf Schlüsselprobleme unserer Welt. *Mathematik in der Schule*, 32(1).
- Heymann, H. W. (2013). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.
- Humenberger, H., Hasibeder, J., Schüller-Reichl, J., Litschauer, D., Groß, H., & Aue, V. (2016). *Das ist Mathematik 1*. (H. Humenberger, Hrsg.) Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.
- Kant, I. (2002). Beantwortung der Frage: Was ist Aufklärung? In E. Bahr, *Was ist Aufklärung?* Stuttgart: Reclam.
- Keitel, C., Otte, M., & Seeger, F. (1980). *Text Wissen Tätigkeit: Das Schulbuch im Mathematikunterricht*. (M. Otte, Hrsg.) Königstein/Ts: Scriptor Verlag.
- Klafki, W. (1985). *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.
- Landesbildungsserver Baden-Württemberg. (o.J.). Offene Aufgaben. Abgerufen am 12. April 2017 von <http://www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/5fachdidaktik/offenaufgaben/>
- Leuders, T. (2001). *Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II*. Berlin: Cornelsen.
- Nestler, F. (2015). Wie ein Tweet eine Bildungsdebatte auslösen konnte. *Frankfurter Allgemeine Zeitung*. Abgerufen am 11. Mai 2017 von <http://www.faz.net/aktuell/wirtschaft/netzwirtschaft/naina-debatte-wie-ein-tweet-eine-bildungsdebatte-ausloesen-konnte-13372015.html>

- Niedersächsischer Bildungsserver. (2007). Mathematik in der Grundschule - Lektion 7: Modellieren. Abgerufen am 21. April 2017 von <http://www.nibis.de/~nealon/lektionen/mags/modellieren/index.htm>
- Reichel, H.-C. (1993). Bildung durch Mathematik. In H. Köhler, & R. Karl (Hrsg.), *Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht* (Bd. 2, S. 113-126). Buxheim Eichstätt: Polygon-Verlag.
- Reichel, H.-C., & Resel, R. (2002). Der Beitrag der Mathematik und des Mathematikunterrichts zur Persönlichkeitsbildung. *Schriftenreihe für Didaktik der Mathematik der Österreichischen Gesellschaft für Mathematikdidaktik*, 34, S. 85-100. Abgerufen am 21. März 2017 von <https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2002%20Band%2034/VortragReichel.pdf>
- Reichel, H.-C., Humenberger, H., Litschauer, D., Groß, H., Aue, V., & Neuwirth, E. (2011). *Das ist Mathematik 2.* (H.-C. Reichel, & H. Humenberger, Hrsg.) Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.
- Reichel, H.-C., Humenberger, H., Litschauer, D., Groß, H., Aue, V., & Neuwirth, E. (2012). *Das ist Mathematik 3.* (H.-C. Reichel, & H. Humenberger, Hrsg.) Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.
- Reichel, H.-C., Humenberger, H., Litschauer, D., Groß, H., Aue, V., & Neuwirth, E. (2012). *Das ist Mathematik 4.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2014). *Mathematik verstehen 1.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2015). *Mathematik verstehen 2.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2016). *Mathematik verstehen 3.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2017). *Mathematik verstehen 4.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.
- Wiater, W. (2003). Das Schulbuch als Gegenstand pädagogischer Forschung. Abgerufen am 20. April 2017 von <http://opus.bibliothek.uni-augsburg.de/opus4/frontdoor/index/index/docId/5>
- Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 4(2), S. 35-41.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Aufgabe 11.45 (MV3)	78
Abbildung 2: Aufgabe 810 (DIM4)	81
Abbildung 3: Aufgabe 867 (DIM4)	82
Abbildung 4: Aufgabe 530 (GKM4)	83
Abbildung 5: Aufgabe nach Leuders (2001, S. 110)	84
Abbildung 6: Alternativen zu Aufgabe 530 nach Leuders (2001, S. 111)	84
Abbildung 7: Aufgabe 6.41 (MV4)	85
Abbildung 8: Aufgabe 6.67 (MV4)	85
Diagramm 1: Vergleich 5. Schulstufe	65
Diagramm 2: Vergleich 6. Schulstufe	71
Diagramm 3: Vergleich 7. Schulstufe	79
Diagramm 4: Vergleich 8. Schulstufe	86

Abkürzungsverzeichnis

Lv	Lebensvorbereitung im engeren Sinne
kK	Stiftung kultureller Kohärenz
Wo	Weltorientierung
kV	Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch
Vb	Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft
VK	Einübung in Verständigung und Kooperation
SI	Stärkung des Schüler-Ichs

BW Baden-Württemberg

DIM1 Das ist Mathematik 1

DIM2 Das ist Mathematik 2

DIM3 Das ist Mathematik 3

DIM4 Das ist Mathematik 4

GKM1 ganz klar Mathematik 1

GKM2 ganz klar Mathematik 2

GKM3 ganz klar Mathematik 3

GKM4 ganz klar Mathematik 4

MV1 Mathematik verstehen 1

MV2 Mathematik verstehen 2

MV3 Mathematik verstehen 3

MV4 Mathematik verstehen 4

Anhang

A. Kurzfassung

Was soll Schülerinnen und Schülern an allgemeinbildenden Schulen vermittelt werden? In der vorliegenden Arbeit wird diese Frage mit besonderem Blick auf die Allgemeinbildung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I näher beleuchtet. Zunächst wird das Allgemeinbildungskonzept von Hans Werner Heymann ausführlich vorgestellt. Dieses basiert auf sieben Aufgaben einer allgemeinbildenden Schule, die fächerunspezifische Geltung haben. Auf welche Art und Weise diesen Forderungen speziell im Mathematikunterricht nachgekommen werden kann, wird eingehend erläutert. Um einen Einblick in verschiedene Konzepte zu gewährleisten, wird im ersten Teil dieser Arbeit zusätzlich ein Überblick über vier weitere Theorien eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts gegeben. Im zweiten Teil wird untersucht, inwieweit approbierte Mathematikschulbücher zu einer allgemeinbildenden Unterrichtskultur beitragen. Grundlage dafür bilden die von Hans Werner Heymann formulierten Merkmale einer allgemeinbildenden Unterrichtskultur, welche zur Entwicklung eines Kriterienkataloges für die Analyse dreier Schulbuchreihen der Sekundarstufe I herangezogen werden. Die Analyse zeigt, dass keines der betrachteten Schulbücher allen Kriterien einer allgemeinbildenden Unterrichtskultur entspricht.

B. Abstract

What kind of knowledge should students gain in grammar schools? This diploma thesis deals with this question with a focus on general knowledge teaching that can be found in lower secondary mathematics lessons. For a better understanding, Hans Werner Heymann's concept of general knowledge is explored in depth. The concept is formed of seven tasks that grammar schools have to fulfill, without being subject-dependent. How these requirements can be accomplished, especially in the mathematics classroom, is explained further. To gain insight into various concepts, the first part of this thesis also provides an overview of four other theories on general knowledge in mathematics lessons. In the second part an analysis of certified mathematics coursebooks is provided, and examines to what extent these coursebooks contribute to the conveyance of general knowledge. This analysis is based on characteristics of a classroom culture with a focus on general knowledge formed by Hans Werner Heymann. These characteristics are then used to develop a set of criteria

for the analysis of three coursebook series for the lower secondary. The analysis shows, that none of the examined coursebooks conform to all the criteria that are representative for a classroom teaching which is based on general knowledge.

C. Merkmale einer allgemeinbildenden Unterrichtskultur nach Hans Werner Heymann
(Bildungsserver Rheinland-Pfalz, o.J.)

Merkmale einer „allgemeinbildenden Unterrichtskultur“ des Mathematikunterrichts	Lv	kK	Wo	kV	Vb	VK	SI	Mb	Merkmale einer „herkömmlichen Unterrichtskultur“ des Mathematikunterrichts
Schüler kommunizieren direkt miteinander.	□				□	■			Schüler kommunizieren vorwiegend mit dem Lehrer bzw. über den Lehrer miteinander
Schüler stellen „echte“ Fragen an Lehrer und Mitschüler, geben Mitschülern „echte“ Antworten (d.h. nicht nur auf den Lehrer schießend), erörtern untereinander Argumente	□			■	□	■	■		Das vorherrschende Interaktionsmuster läßt sich als Dreischritt „Lehrerimpuls – Schülerantwort(en) – Lehrerkommentar“ beschreiben
Das Verstehen mathematischer Sachverhalte wird ihrer technischen Beherrschung übergeordnet; es zeigt sich für den Lehrer nicht zuletzt daran, wie weit Schüler über das reflektieren können, was sie mathematisch tun				■			□	■	Das Beherrschen eines mathematischen Gebiets wird durch den Lehrer über das Einfordern korrekter Lösungen zu vorgegebenen Aufgaben kontrolliert
Formalisierung ist niemals Selbstzweck, sondern in manchen Phasen des Unterrichts eine willkommene Hilfe, um Gedachtes und Verstandenes verfügbar zu halten und damit operieren zu können				■				■	Auf eine wissenschaftsnahe, abstrakte Sprechweise und einen hohen Grad der Formalisierung wird viel Wert gelegt
Fehler werden zum Anlass genommen, über Gründe für diesen Fehler nachzudenken	□			■	□		□	■	Fehler werden sofort korrigiert
Es gibt verschiedene Stufen der Annäherung an Erkenntnis, Hypothesen, Teillösungen usw.	■		□	■			□	■	Es gibt nur richtige und falsche Antworten
Fehler werden als notwendige Begleiterscheinungen von Lernprozessen akzeptiert	■			■			■	□	Fehler werden als Indikatoren für Mißerfolg gedeutet
Es gibt Raum für Umwege, ungewöhnliche Ideen, Offenheit für unterschiedliche Verläufe des Unterrichts				■			■	□	Schülergedanken, die aus Sicht des Lehrers vom offiziellen Thema wegführen, werden nicht weitergeführt
Individuell unterschiedliche Lösungswege werden nicht nur akzeptiert, sondern als besondere Zugangsweisen begrüßt				□	□		■	■	Es gibt immer nur einen zugelassenen Lösungsweg
Mathematiklernen wird häufig als ein Erkundungsprozeß erfahren, der allein oder gemeinsam mit anderen in intensivem Austausch von Ideen und Argumenten vollzogen werden kann			□			■	■	■	Mathematiklernen wird von den Schülern als das Nachvollziehen vom Lehrer vorgegebener Wege erlebt
Schüler und Lehrer scheuen sich nicht, auch unfertige Gedanken in eigenen Worten wiederzugeben und anderen mitzuteilen	□			■		■	□	□	Im wesentlichen werden nur die Ergebnisse des Denkens mitgeteilt und für die anderen Unterrichtsteilnehmer „veröffentlicht“
Es gibt offene Aufgaben und Probleme, denen man sich auf sehr unterschiedliche Weise nähern kann, mit mehr als einer „vernünftigen“ Lösung	□		■	■				■	Die im Unterricht gestellten mathematischen Aufgaben und Probleme sind eindeutig und nur auf eine Weise lösbar
Schüler erproben auf spielerische Weise in mathematikhaltigen Situationen ihre Phantasie und Kreativität				■				■	Die Beschäftigung mit Mathematik wird überwiegend als anstrengend, knochentrocken, ernst, phantasieötend erlebt

Im Unterricht sind Neugier, Spannung, Engagement, Überraschung, Lust am Denken und mathematischen Tun nichts Ungewöhnliches																			Der Unterricht verläuft in vorhersehbaren Bahnen, emotionale Betroffenheit durch die anstehenden Themen ist kaum auszumachen
Es wird gemeinsam über das reflektiert, was mathematisch getan wird																			Reflexion über Mathematik spielt keine Rolle
Sinn und Bedeutung der jeweils anstehenden Mathematik werden thematisiert																			Fragen nach Sinn und Bedeutung der Mathematik sind nicht Gegenstand des Mathematikunterrichts
Vernetzungen zwischen mathematischen Teilgebieten werden herausgearbeitet, der Bezug zu zentralen Ideen wird verdeutlicht																			Jedes mathematische Teilgebiet steht im wesentlichen isoliert für sich
Den Sinn von Anwendungsaufgaben (bzw. der dahinter stehenden Modellannahmen) zu diskutieren, ist substanzieller Bestandteil des Mathematikunterrichts																			Anwendungsaufgaben werden genauso wenig hinterfragt wie innermathematische Aufgaben
Die scheinbaren Selbstverständlichkeiten und Konventionen der Schulmathematik werden durchaus hinterfragt und angezweifelt																			Der Unterschied zwischen mathematischen Notwendigkeiten und Konventionen wird nicht thematisiert
Die Schüler übernehmen Verantwortung für ihren eigenen Lernprozess																			Verantwortlich für das Lernen der Schüler ist der Lehrer
Die Schüler haben häufig Gelegenheit, von sich aus aktiv zu werden, sich mit einem Problem zu identifizieren																			Die Schüler erleben ihre unterrichtliche Arbeit im wesentlichen als außengesteuert, als Antwort auf die Anforderungen des Lehrers
Es ist selbstverständlich, Mitschülern beim Verstehen zu helfen und sich selbst, wenn nötig, helfen zu lassen																			Der Mitschüler wird im wesentlichen als Konkurrent betrachtet
Es gibt immer wieder Gelegenheit, gemeinsam mit anderen an Probleme heranzugehen, sich über Ziele und Strategien zu verständigen, wechselseitig Schwächen auszugleichen und Stärken zu bündeln (Partner- und Gruppenarbeit)																			Jeder Schüler erlebt sich als Einzelkämpfer, „Kooperation“ findet lediglich auf der informellen Ebene des Unterrichts statt (Mogeln)
Der andere – Schüler wie Lehrer – wird als Mensch ernst genommen; die Fähigkeit zum vernünftigen Denken wird ihm unterstellt																			Der Lehrer nutzt die ihm gegebene institutionelle Gewalt, um die Schüler nach seinen Vorstellungen zu steuern
Die Qualität eines Arguments hat mehr Gewicht als der soziale Status der Person, die es vertritt																			Im Zweifelsfall hat der Lehrer qua Amt recht

Abbildung 1: Merkmale allgemeinbildender und herkömmlicher Unterrichtskultur des Mathematikunterrichts und ihr Bezug zu den zugrunde gelegten Allgemeinbildungsaufgaben nach HEYMANN (1996:264ff.).

Lv: Lebensvorbereitung im engeren Sinne; **kk:** Stiftung kultureller Kohärenz, einschließlich Orientierung an zentralen Ideen; **Wo:** Weltorientierung, einschließlich Anwendungsbezug; **kV:** Anleitung zum Denken, Verstehen und kritischen Vernunftgebrauch; **Vb:** Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft; **VK:** Einübung in Verständigung und Kooperation; **St:** Stärkung des Schüler-Ichs; **Mb:** Entwicklung des Mathematikbildes. Das Symbol ■ zeigt eine hohe, das Symbol □ eine partielle Relevanz für die betreffende Allgemeinbildungsaufgabe an.

D. Analyseergebnisse aller Aufgaben

Tabelle 2: DIM1

	Merkmale																
Aufgaben	A1/22/23	A2	A3	A5/7	A6	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A15	A16	A18	A19	A21	
824																	
825							x										
826		x	x		x				x			x	x	x			
827																	
828																	
829													x				
830																	
831		x	x	x													
832																	
833				x													
834																	
835				x													
836			x														
837																	
838																	
839			x	x	x							x					
840		x	x	x													
841																	
842																	
843																	
844																	
845																	
846		x	x		x	x	x		x								
847																	
848																	
849			x	x													
850		x	x	x	x	x							x				
851			x	x													
852		x	x		x				x			x					
853											x						
854			x	x		x	x										
855			x														
856			x														
857		x	x						x								
858		x	x						x								

859																
860																
861																
862																
863		x	x	x					x							
864			x													
865																
866																
867																
868																
869		x	x	x	x	x	x	x		x						x
870		x	x													
871																
872																
873			x													
874																
875		x	x						x							
876		x	x	x	x	x	x		x			x				
877		x							x							
878		x							x							
879																
880																
881			x													
882				x												
883			x													
Σ	0	15	24	13	7	5	5	1	10	1	1	4	3	1	0	1
%	0,00%	25,0 0%	40,0 0%	21,6 7%	11,6 7%	8,3 3%	8,3 3%	1,6 7%	16,6 7%	1,6 7%	1,6 7%	6,6 7%	5,0 0%	1,6 7%	0,0 0%	1,6 7%

Tabelle 3: GKM1

	Merkmale															
Aufgaben	A1	A2	A3	A5/ 7	A6	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A15	A16	A18	A19	A21
373																
374																
375																
1																
2		x	x													
3																
4		x														

5			x													
6																
7			x					x				x				
8			x													
376																
377																
378																
379																
380																
381	x															
382																
383																
384			x	x												
385																
386																
387			x		x											
388			x													
389																
390																
391																
392																
393		x						x								
394																
395																
396																
397								x								
398																
399			x													
400																
401			x													
402																
403																
404													x			
405																
406												x				
407												x				
408			x													
409			x	x		x	x									
410			x													
411			x													
412			x													
413		x	x					x								

414																
415			x													
416			x													
417			x													
418																
419																
420																
421													x			
422			x								x					
423	x										x					
424																
425																
426			x		x	x	x				x					
427			x													
428													x			
429											x					
430			x				x									
431		x	x								x		x			
432			x				x									
433		x	x						x		x					
434			x													
435			x													
436	x		x			x	x				x					
437																
438																
439		x	x													
440																
441	x										x					
442			x													
443			x													
444			x													
445			x													
446			x													
447			x													
448			x													
449																
450			x		x	x										
451			x													
452			x													
453			x													
454			x													
455			x													

456			x										x			
457																
458	x		x			x		x						x		
459																
460																
461																
462																
463																
464																
465		x	x		x				x			x	x			
466			x													
467			x													
468			x													
469																
470			x													
471			x	x		x	x	x		x			x			
B11			x													
B12			x													
B13			x													
B15			x										x			
Σ	5	8	52	3	4	6	6	3	5	1	10	1	11	1	0	0
%	4,50 %	7,21 %	46,85 %	2,70 %	3,60 %	5,41 %	5,41 %	2,70 %	4,50 %	0,90 %	9,01 %	0,90 %	9,91 %	0,90 %	0,00 %	0,00 %

Tabelle 4: MV1

	Merkmale															
Aufgaben	A1/22/23	A2	A3	A5/A7	A6	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A15	A16	A18	A19	A21
7.01	x												x			
7.02		x	x		x				x			x	x	x		
7.03		x	x		x				x			x	x	x		
7.04		x														
7.05																
7.06	x	x	x													
7.07	x	x	x													
7.08		x	x			x	x		x				x			
7.09																
7.10																
7.11																
7.12																
7.13		x	x		x				x			x	x	x		

7.14		x	x		x				x			x	x	x		
7.15																
7.16																
7.17		x	x		x				x			x	x	x		
7.18		x	x		x				x			x	x	x		
7.19																
7.20																
7.21																
7.22		x	x		x	x	x		x							
7.23																
7.26			x													
7.27			x													
7.28			x													
7.29			x													
7.30			x		x	x	x									
7.33																
7.34				x												
7.35																
7.36									x							
7.37		x	x													
7.38																
7.39	x	x	x	x	x	x	x		x			x				
7.40	x	x	x	x	x											
7.41	x	x									x					
7.43	x		x													
7.44			x	x		x	x									
7.45		x	x													
7.46		x	x													
7.47			x													
7.48			x													
7.49			x													
7.50			x													
7.51			x													
7.52		x	x	x	x	x	x			x						
7.53	x	x							x							
7.54	x	x							x							
7.55	x	x							x							
7.56	x	x							x							
7.57																
7.58																
7.59																
7.60																

7.61																
7.62																
7.63																
7.64																
7.65																
7.66																
7.67																
7.68																
7.69																
7.70			x													
7.71			x													
7.72		x	x	x					x							
Σ	11	22	31	6	11	6	6	0	16	1	1	7	8	6	0	0
%	16,4%	32,8 %	46,3 %	9,0%	16,4 %	9,0 %	9,0 %	0,0 %	23,9 %	1,5 %	1,5 %	10,4 %	11,9 %	9,0 %	0,0 %	0,0 %

Tabelle 5: DIM2

	Merkmale															
Aufgaben	A1/22/23	A2	A3	A5/7	A6	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A15	A16	A18	A19	A21
380												x				
381												x				
382																
383																
384																
385																
386			x													
387			x													
388			x													
389			x													
390			x													
391																
392																
393																
394																
395																
396																
397		x	x						x			x				
398			x						x							
399			x													
400			x													

401																
402			x			x							x			
403			x			x							x			
404																
405			x						x				x			
406			x													
407				x												
408																
409																
410			x						x							
411																
412																
413																
414																
415			x													
416																
417			x										x			
418			x										x			
419																
420													x		x	
421			x													
422			x													
423			x													
424			x													
425			x													
426			x													
427			x													
428			x													
429			x													
430			x													
431			x													
432			x													
433			x													
434			x													
435			x													
436			x													
437			x											x		
438			x													
439			x													
440			x													
441			x													
442			x													

443			x													
444			x													
445			x													
446			x													
447		x	x	x	x	x	x	x	x	x			x			
448		x	x	x	x	x	x	x	x	x			x			
449		x	x	x	x	x	x	x	x	x			x			
450			x	x	x	x	x	x								
451			x	x	x	x	x	x								
452																
453																
454			x													
455			x										x			
456																
457			x													
458			x													
459			x													
460			x													
461			x													
462			x													
463			x													
Σ	0	4	57	6	5	7	5	5	7	3	0	4	9	1	0	0
%	0,00%	4,76%	67,86%	7,14%	5,95%	8,33%	5,95%	5,95%	8,33%	3,57%	0,00%	4,76%	10,71%	1,19%	0,00%	0,00%

Tabelle 6: GKM2

	Merkmale															
Aufgaben	A1/22/23	A2	A3	A5/7	A6	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A15	A16	A18	A19	A21
1053	x										x					
1054			x	x	x	x	x						x			
1055																
1			x													
2																
3																
4																
5																
6																
7			x	x												
8			x													
9																

10			x													
11			x									x				
12			x													
1056																
1057																
1058																
1059			x													
1060			x													
1061																
1062											x					
1063			x								x					
1064			x													
1065																
1066											x					
1067			x													
1068																
1069				x												
1070	x			x	x						x	x				
1071																
1072																
1073																
1074																
1075			x													
1076																
1077																
1078			x													
1079			x													
1080																
1081			x													
1082			x													
1083			x										x			
1084			x													
1085			x													
1086			x			x										
1087			x													
1088			x													
1089			x													
1090			x													
1091			x													
Σ	2	0	26	4	2	1	1	0	0	0	5	2	2	0	0	0
%	3,92%	0,00%	50,98%	7,84%	3,92%	1,96%	1,96%	0,00%	0,00%	0,00%	9,80%	1,96%	7,84%	0,00%	0,00%	0,00%

Tabelle 7: MV2

	Merkmale															
Aufgaben	A1/22/23	A2	A3	A5/7	A6	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A15	A16	A18	A19	A21
4.01	x															
4.02	x															
4.04			x													
4.05			x													
4.06			x													
4.07			x													
4.08			x													
4.12																
4.13	x	x	x						x			x	x			
4.14	x	x	x						x			x	x			
4.15																
4.16		x	x						x			x	x			
4.17			x													
4.18				x	x	x	x			x	x					
4.20			x													
4.21			x													
4.26																
4.27																
4.28																
4.30																
4.31																
4.32																
4.36																
4.37					x										x	
4.38												x				
4.39																
4.42			x	x	x	x	x		x	x	x					
4.43			x									x				
4.44			x		x							x				
4.45				x		x										
4.46		x	x		x	x	x		x			x				
4.47		x	x	x					x							
4.48			x									x				
4.49			x													
4.51			x													

4.52			x													
4.53			x													
4.54			x													
4.55			x													
4.56			x													
4.57		x	x					x								
4.58			x													
4.59			x													
4.60			x													
4.61			x													
4.62			x													
4.63			x													
4.64			x													
4.65			x													
4.66			x													
4.67			x													
4.68			x													
4.69			x													
4.70	x	x	x	x			x		x							
4.71	x	x	x													
4.72	x								x							
4.73											x					
4.74	x	x		x			x				x					
4.75																
4.76																
4.77																
4.78		x							x							
4.79																
4.80																
4.81			x													
4.82			x													
4.83			x													
4.84			x													
4.85														x		
4.86			x													
4.87			x									x				
4.88																
4.89			x													
4.90			x													
4.91																
4.92			x									x				
4.93			x													

4.94			x													
4.95		x	x													
Σ	8	11	50	6	4	4	5	0	10	2	4	8	4	0	2	0
%	10,13 %	13,9 2%	63,2 9%	7,5 9%	5,0 6%	5,0 6%	6,3 3%	0,0 0%	12,6 6%	2,5 3%	5,0 6%	10,1 3%	5,0 6%	0,0 0%	2,5 3%	0,0 0%

Tabelle 8: DIM3

	Merkmale															
Aufgaben	A1/22/23	A2	A3	A5/7	A6	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A15	A16	A18	A19	A21
757												x				
758												x				
759			x									x				
760								x					x			
761			x									x				
762			x									x				
763			x									x				
764		x	x						x			x				
765																
766								x								
767		x	x	x			x		x			x				
768			x	x			x									
769	x		x	x	x	x		x								x
770	x		x	x	x	x		x								x
771		x	x						x			x				
772			x													
773			x	x		x	x									
774			x	x		x	x									
775			x													
776	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x		x			x
777			x									x				
778		x	x						x			x				
779		x	x		x	x			x			x				
780		x	x						x			x		x		
781		x	x						x			x	x	x		
782			x													
783			x									x	x			
784		x	x													
785			x													

786			x		x											
787			x													
788			x													
789			x													
790			x									x				
791																
792		x	x						x							
793			x									x	x			
Σ	3	10	31	7	5	6	4	5	9	1	1	17	5	2	0	3
%	8,11%	27,0 3%	83,7 8%	18,9 2%	13,5 1%	16,2 2%	10,8 1%	13,5 1%	24,3 2%	2,7 0%	2,7 0%	45,9 5%	13,5 1%	5,4 1%	0,0 0%	8,1 1%

Tabelle 9: GKM3

	Merkmale															
Aufgaben	A1/22/23	A2	A3	A5/7	A6	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A15	A16	A18	A19	A21
909												x	x			
910		x	x						x			x				
1			x													
2			x													
3																
4																
5			x									x	x			
6			x													
7		x	x						x							
911													x			
912												x				
913								x								x
914		x	x						x			x				
915																
916																
917		x	x													
918			x									x				
919																
920													x			
921	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x			x
922	x	x	x						x			x				
923		x	x			x	x		x			x				
924																
925			x									x				

926		x	x	x	x	x	x		x			x				
927		x	x						x			x				
928	x							x								x
929	x		x			x										x
930																
931		x	x						x							
932			x													
933			x				x									
934																
935		x	x	x												
936																
937		x	x			x			x							
938		x	x						x			x	x			
939		x	x	x												
940																
941			x									x				
942																
943			x													
944																
945																
946																
947												x				
948																
B65			x									x				
B68		x	x			x		x				x	x			x
Σ	4	16	28	4	2	6	4	4	11	1	1	17	7	0	0	5
%	8,16%	32,6 5%	57,1 4%	8,1 6%	4,0 8%	12,2 4%	8,1 6%	8,1 6%	22,4 5%	2,0 4%	2,0 4%	34,6 9%	14,2 9%	0,0 0%	0,0 0%	10,2 0%

Tabelle 10: MV3

	Merkmale															
Aufgaben	A1/22/23	A2	A3	A5/7	A6	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A15	A16	A18	A19	A21
11.01	x		x					x				x				x
11.04																
11.05																
11.06																
11.08			x													
11.09			x			x	x									
11.10			x													
11.11			x	x			x									
11.12		x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x		
11.13		x	x						x			x				
11.14		x	x	x	x	x	x		x			x	x			x
11.15	x	x	x	x	x	x	x			x		x				
11.17			x									x				
11.18			x									x				
11.21																x
11.22																x
11.23			x													x
11.24			x													
11.27			x													
11.28		x	x			x			x			x	x			x
11.29		x	x	x								x				
11.30			x									x	x	x		
11.31	x		x			x		x								x
11.32	x		x													
11.33	x		x					x								
11.34	x			x		x	x	x			x	x				
11.35																
11.36																
11.37																
11.38																
11.39																
11.40																
11.41																
11.42			x													
11.43		x	x										x			
11.44			x													
11.45		x	x		x				x			x	x	x		
Σ	6	9	25	6	4	7	5	5	6	2	1	13	6	3	1	7

%	15,79 %	23,6 8%	65,7 9%	15,7 9%	10,5 3%	18,4 2%	13,1 6%	13,1 6%	15,7 9%	5,2 6%	2,6 3%	34,2 1%	15,7 9%	7,8 9%	2,6 3%	18,4 2%
---	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	-----------	-----------	------------	------------	-----------	-----------	------------

Tabelle 11: DIM4

	Merkmale															
Aufgaben	A1/22 /23	A2	A3	A5/ 7	A6	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A15	A16	A18	A19	A21
788																
789																
790			x													
791																
792																
793																
794			x										x			
795			x										x			
796																
797																
798		x	x	x		x	x	x	x	x						
799	x				x			x			x				x	
800		x	x		x							x			x	
801			x		x							x			x	
802																
803																
804																
805																
806																
807			x													
808																
809			x													
810		x	x			x	x	x		x			x			
811			x													
812			x													
813			x													
814			x													
815			x													
816			x		x	x							x			
817			x	x	x	x							x			
818																
819																
820																

821																
822																
823			x													
824			x													
825	x		x	x								x				
826																
827																
828			x													
829			x													
830			x													
831			x													
832			x													
833			x	x			x									
834			x													
835			x													
836			x													
837			x													
838			x	x	x	x	x								x	
839	x		x	x	x	x	x								x	
840	x		x	x	x	x	x								x	
841			x													
842			x													
843																
844																
845													x			
846			x													
847			x													
848			x													
849			x													
850																
851																
852																
853																
854																
855			x													
856																
857			x													
858			x													
859			x													
860			x													
861			x													
862		x	x	x	x										x	

863		x	x	x	x										x	
864			x			x	x									
865			x													
866			x			x	x									
867	x	x	x						x			x			x	
868																
869		x	x													
870			x													
871																
872																
873			x													
874			x													
875			x													
876			x													
Σ	5	7	56	8	10	10	7	3	2	2	1	4	6	0	9	0
%	5,62%	7,87%	62,92%	8,99%	11,24%	11,24%	7,87%	3,37%	2,25%	2,25%	1,12%	4,49%	6,74%	0,00%	10,11%	0,00%

Tabelle 12: GKM4

	Merkmale															
Aufgaben	A1/22/23	A2	A3	A5/7	A6	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A15	A16	A18	A19	A21
453		x	x			x	x									
454																
455		x				x					x					
456																
457		x			x	x	x								x	
1		x							x			x				
2																
3			x													
4																
5																
6																
7																
8																
9																
458				x	x	x		x			x	x	x		x	
459						x										
460																
461		x														
462																

463		x			x						x				x	
464																
465		x	x		x							x			x	
466					x						x				x	
467																
468																
469			x													
470			x													
471																
472			x													
473																
474																
475																
476																
477															x	
478																
479																
480																
481			x													
482		x	x				x									
483			x													
484					x										x	
485																
486			x													
487																
488																
489																
490											x				x	
491																
492			x													
493																
494																
495			x				x									
496																
497		x														
498																
499																
500			x													
501																
502		x	x		x											
503																
504		x	x		x				x							

505																
506			x													
507			x	x	x	x	x								x	
508																
509																
510			x		x	x	x									
511			x													
512																
513			x													
514																
515																
516																
517																
518			x													
519			x													
520																
521			x													
522			x													
523																
524			x													
525			x													
526			x													
527			x													
528			x						x				x			
529																
530			x													
531																
532																
533			x													
534			x													
535			x													
536			x													
537		x	x										x			
538			x													
B29		x	x													
Σ	0	13	39	2	10	7	6	1	3	0	5	3	3	0	9	0
%	0,00%	13,5 4%	40,6 3%	2,08 %	10,4 2%	7,29 %	6,25 %	1,04 %	3,13 %	0,00 %	5,21 %	3,13 %	3,13 %	0,00 %	9,38 %	0,00 %

Tabelle 13: MV4

	Merkmale															
Aufgaben	A1/22 /23	A2	A3	A5/ 7	A6	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A15	A16	A18	A19	A21

6.01	x				x	x					x				x	
6.02	x				x	x					x				x	
6.04	x		x			x	x				x					
6.05			x									x			x	
6.06																
6.07																
6.08																
6.09																
6.10																
6.11																
6.12																
6.13																
6.14			x													
6.15			x													
6.16		x	x									x				
6.17		x	x						x			x				
6.20																
6.21																
6.22																
6.23			x													
6.24			x													
6.25			x													
6.26		x	x			x	x		x				x			
6.27		x	x										x			
6.31																
6.32																
6.33																
6.34																
6.35																
6.36			x													
6.37			x													
6.38																
6.39			x													
6.40			x													
6.41			x													
6.42			x													
6.43			x			x	x	x		x						x
6.45																
6.46																
6.47																
6.48			x													
6.49			x													

6.50			x													
6.51																
6.52		x	x													
6.53			x													
6.54			x													
6.55			x		x		x								x	
6.58																
6.59																
6.60																
6.61			x													
6.62			x													
6.63			x													
6.64			x													
6.65																
6.66			x	x												
6.67	x	x	x		x	x	x		x				x		x	
6.70																
6.71																
6.72																
6.73																
6.74			x													
6.75			x													
6.76			x													
6.77		x	x													
6.78																
6.79			x	x	x	x	x								x	
6.80	x	x	x	x		x	x		x							
6.81	x	x	x	x		x	x		x	x						
6.82	x		x													
6.83	x	x	x	x	x	x	x									
6.84	x															
6.85		x														
6.86																
6.87																
6.88																
6.89																
6.90																
6.91		x														
6.92																
6.93																
6.94																
6.95																

6.96																
6.97																
6.98			x													
6.99			x													
6.100			x													
6.101			x													
6.102			x													
6.103			x													
6.104			x			x	x		x							
Σ	9	13	47	5	6	11	10	1	6	2	3	3	3	0	6	1
%	9,68%	13,9 8%	50,5 4%	5,38 %	6,45 %	11,8 3%	10,7 5%	1,08 %	6,45 %	2,15 %	3,23 %	3,23 %	3,23 %	0,00 %	6,45 %	1,08 %