

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Sangaku – Japanische Tempelgeometrie

Wie heilige Holztafeln den Mathematikunterricht bereichern können

verfasst von / submitted by

Martin Geppel

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 884

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium, UF Mathematik,
UF Informatik und Informatikmanagement

Betreut von / Supervisor:

Doz. Dr. Franz Embacher

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern, weil sie mir mein Studium und meine Weiterbildung finanziell überhaupt erst ermöglicht haben.

Weiters möchte ich meiner Schwester danken, die mit mir mehrere Stunden in der Bibliothek verbrachte und ohne deren Zutun diese Arbeit wahrscheinlich nie fertig geworden wäre.

Auch möchte ich Angie, Traude, Karin, Frau Wegricht und Frau Peter ein großes DANKE sagen, da sie mir in schwierigen Zeiten meines Studiums überaus hilfreich zur Seite standen und immer an mich glaubten.

Zu guter Letzt danke ich meinem Betreuer Herrn Doz. Dr. Franz Embacher dafür, mir dieses interessante Thema vorgeschlagen zu haben, für seine Hilfsbereitschaft und seine große Geduld während der gesamten Betreuungszeit.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	9
2. Geschichte	11
3. Wichtige mathematische Sätze.....	17
3.1. Abstand zweier „Kreisfußpunkte“	17
3.2. Inkreisradius des Dreiecks	18
3.3. Inkreisradius des rechtwinkligen Dreiecks	19
3.4. Peripheriewinkelsatz.....	19
3.5. Sehnentangentenwinkelsatz	20
3.6. Sehnensatz	21
3.7. Sekantensatz	22
3.8. Sekanten-Tangentensatz	23
3.9. Umkehrung des Sekanten-Tangentensatzes	23
4. Aufgabensammlung	25
4.1. Drei benachbarte Kreise	25
4.2. Viele benachbarte Kreise.....	26
4.3. Ein Quadrat zwischen zwei Kreisen.....	27
4.4. Zwei Kreise und ein Quadrat im Quadrat.....	29
4.5. Kreise im Halbkreis	31
4.6. Ein Fünfeck und fünf Rechtecke im Kreis	32
4.7. Kreise im Kreissektor	34
4.8. Ein Quadrat im Rhombus	36
4.9. Zwei Kreise im rechtwinkligen Dreieck 1	37
4.10. Zwei Kreise im rechtwinkligen Dreieck 2	39
4.11. Viele Kreise in zwei Rechtecken	40
4.12. Ein Rechteck und vier Kreise in zwei Kreisen	41
4.13. Ein Rhombus im Trapez	43
4.14. Ein „Oval“, zwei Rhomben und deren Inkreise	44

4.15.	Ein Dreieck im Kreis	46
4.16.	Viele in sich verschlungene Kreise.....	47
4.17.	Drei Kreise im Kreis	49
4.18.	Drei Quadrate im Dreieck.....	50
5.	Sangaku in der Schule	53
5.1.	Was sagt der Lehrplan?	53
5.1.1.	Allgemeiner Teil des Lehrplans	53
5.1.2.	Mathematik-Lehrplan der AHS-Unterstufe	55
5.1.3.	Mathematik-Lehrplan der AHS-Oberstufe.....	56
5.1.4.	Lehrplan des Wahlpflichtfachs Mathematik	56
5.2.	Dynamische Geometrie mit GeoGebra.....	58
5.2.1.	Aufgabe 4.1 mit GeoGebra	59
5.2.2.	Aufgabe 4.6 mit GeoGebra	60
5.2.3.	Aufgabe 4.8 mit GeoGebra	61
5.3.	Konstruktion mit Zirkel und Lineal.....	62
5.3.1.	Erklärung der Konstruktion der Grundrechnungsarten.....	62
5.3.2.	Konstruktion einer Sangaku-Aufgabe.....	64
5.3.3.	Das Problem mit der Einheit 1	67
5.4.	Die Berührungsprobleme des Apollonius von Perge	69
5.4.1.	Lösungen der Berührprobleme.....	69
5.4.2.	Konstruktion einer Sangaku-Aufgabe.....	78
5.4.3.	Apollonius-Werkzeuge in GeoGebra	81
5.5.	Känguru der Mathematik.....	83
5.5.1.	Känguru 2001 – Kategorie Student – Aufgabe 21	84
5.5.2.	Känguru 2002 – Kategorie Student – Aufgabe 19	85
5.5.3.	Känguru 2007 – Kategorie Junior – Aufgabe 26	86
5.5.4.	Känguru 2014 – Kategorie Student – Aufgabe 24	87
5.6.	Weitere Ideen für den Unterricht.....	88

5.6.1.	Sangaku selbst entwerfen	88
5.6.2.	Vereinfachung durch Einsetzen von Zahlen	88
5.6.3.	Vereinfachung durch Hilfslinien.....	89
5.6.4.	Pythagoreische Tripel.....	89
6.	Zusatzmaterialien im WWW	93
7.	Literaturverzeichnis.....	95
8.	Zusammenfassung/Abstract	99
8.1.	Zusammenfassung	99
8.2.	Abstract.....	99

1. Einleitung

„Sangaku“ (manchmal auch „San gaku“ oder „San-gaku“) ist japanisch und bedeutet wörtlich übersetzt „mathematische Tafeln“¹. Es handelt sich dabei um kunstvoll gestaltete Holztafeln, welche mathematische Aufgabenstellungen und Rätsel enthalten.

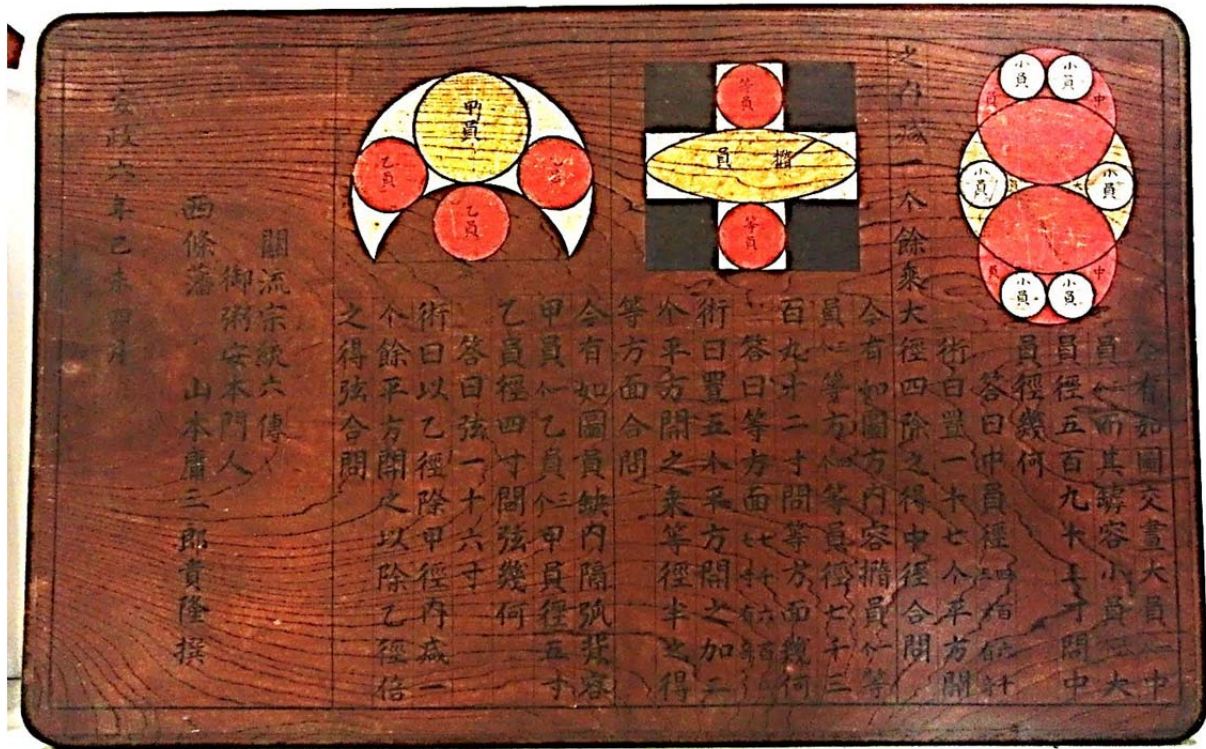


Abbildung 1: Sangaku im Konnō-Hachimangū-Schrein, Shibuya, Tokyo, 1859 ²

Diese Tafeln wurden in Japan während der Edo-Zeit (1603-1867) in buddhistischen Tempeln und Shintō-Schreinen zu Ehren der Götter aufgehängt. Sie galten nicht nur als Opfergaben, sondern waren zugleich auch als Herausforderung für Pilger gedacht.

In den Sangaku ging es hauptsächlich um Aufgaben aus der klassischen euklidischen Geometrie, wobei der Fokus ein ganz anderer als der in der westlichen Welt war. Einander berührende Kreise, Ellipsen, Dreiecke und weitere ineinander verschlungene geometrische Objekte spielten immer wieder die Hauptrolle. Manche der Aufgaben sind so einfach, dass die grundlegendsten Mathematikkenntnisse aus der Mittelschule zur Lösung führen, und andere wiederum so komplex, dass man heutzutage vielfach zu außergeometrischen Mitteln beispielsweise aus der linearen Algebra oder Analysis greifen würde.

Als Beispiel für eine typische Sangaku-Aufgabe sei hier eine sehr kunstvolle, jedoch mathematisch durchaus anspruchsvolle ausgewählt.

¹ Rothman / Fukagawa (1998) Spektrum der Wissenschaft, Juli 1998

² Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Sangaku> (11. Februar 2017)

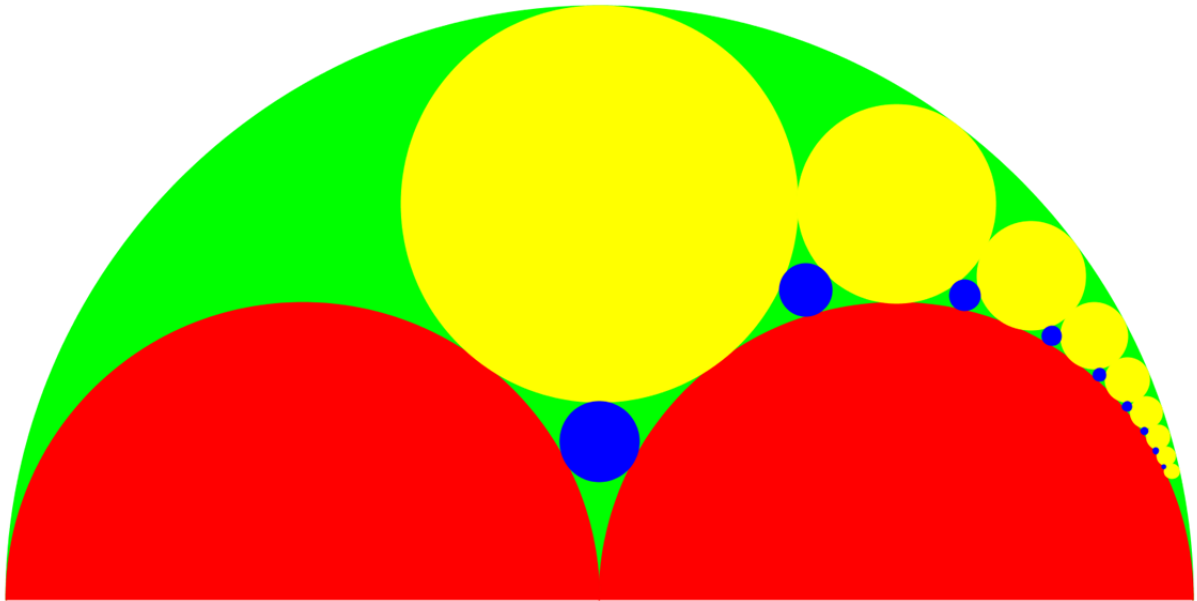


Abbildung 2: Beispiel für eine Sangaku-Aufgabe

Diese Aufgabe stammt von einem Sangaku aus dem Jahr 1788 aus dem Bezirk Tokio.³

Die Aufgabenstellung lautet: In den grünen Halbkreis vom Radius r sind zwei gleich große rote Halbkreise vom Radius $\frac{r}{2}$ eingeschrieben. Wie groß sind die blauen Kreise? Gesucht ist eine Formel für den Radius des n -ten blauen Kreises. Hinweis: Der Radius des fünften blauen Kreises beträgt $\frac{r}{95}$.

Für die Lösung würde man heute die Methode der Inversion am Kreis verwenden. In Japan verwendete man damals ein Äquivalent zur Kreisformel von Descartes. Auf den Lösungsweg werde ich jedoch nicht weiter eingehen.

Die Lösung selbst lautet: $\frac{r}{(2n-1)^2 + 14}$.

Die vorliegende Arbeit hat es sich unter anderem zum Ziel gesetzt, das Thema Sangaku im Allgemeinen vorzustellen und die Geschichte der Sangaku zu erläutern. Es werden wichtige Sätze, die häufig in Sangaku-Aufgaben benötigt werden, erklärt. Weiters wurde versucht, spezielle Sangaku-Aufgaben zu finden, welche im Mathematikunterricht bzw. im Mathematik-Wahlpflichtfach der AHS behandelt werden können. Anschließend werden Ideen für die Umsetzung im Unterricht aufgezeigt.

Zu einigen Teilen dieser Diplomarbeit gibt es weiterführende Materialien auf der zugehörigen Homepage des Autors <http://sangaku.geppel.at>. An den entsprechenden Stellen wird durch das Symbol  darauf verwiesen.

³ vgl. Rothman / Fukagawa (1998) Spektrum der Wissenschaft, Juli 1998

2. Geschichte

Die Tradition der Sangaku ist während der Edo-Zeit (1603-1867) entstanden. Edo ist der frühere Name der japanischen Hauptstadt Tokio. In der Zeit von 1639 bis 1854 verordneten die Machthaber die Abschließung Japans (sakoku). In dieser Periode war die Ein- und Ausreise untersagt. Die Häfen wurden gesperrt. Nicht einmal ausländische Literatur durfte konsumiert werden. Erst 1854 wurde die Isolation durch Commodore Matthew C. Perry mit US-amerikanischen Kriegsschiffen beendet.⁴

Während dieser Zeitspanne gab es also kaum Einflüsse von außen, was nicht nur negativ gesehen werden kann. Die Kunst und Kultur blühte im späten 17. Jahrhundert derart auf, dass diese Zeit als japanische Renaissance (genroku) bezeichnet wird. Auch in der Wissenschaft und insbesondere in der Mathematik wurden Fortschritte gemacht.⁵

Die Mathematik, die in dieser Zeit innerhalb Japans entstand, wird wasan genannt. Im Gegensatz dazu bezeichnen die Japaner die westliche Mathematik mit yosan.⁶



Abbildung 3: Zeichnung von Seki Takakazu⁷

Seki Takakazu (auch Seki Kowa genannt) gilt als der wichtigste Mathematiker der wasan-Tradition. Er lebte von 1642 bis 1708 und war Lehrer in der von ihm gegründeten Seki-Schule. Manche seiner Entdeckungen machte er zeitgleich mit bzw. kurz vor den westlichen Mathematikern. So entdeckte er beispielsweise die Bernoulli-Zahlen noch vor Bernoulli. In seinem Werk Kaiindai no Hō (dt. „Methode, um verborgene Probleme zu lösen“), das 1685 erschien, verallgemeinerte er eine alte chinesische Methode der Nullstellenberechnung von Polynomen und ermöglichte so das Auffinden aller reellen Nullstellen. William George Hor-

⁴ vgl. Rothman / Fukagawa (1998) Spektrum der Wissenschaft, Juli 1998: S. 83

⁵ vgl. Rothman / Fukagawa (1998) Spektrum der Wissenschaft, Juli 1998: S. 83

⁶ vgl. Rothman / Fukagawa (1998) Spektrum der Wissenschaft, Juli 1998: S. 83

⁷ Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Seki_Takakazu (11. Februar 2017)

ner veröffentlichte das sehr ähnliche Horner-Schema in Europa erst ca. 100 Jahre danach. Auch bei der Entdeckung von Determinanten zur Lösung von Gleichungen kam Seki Takakazu seinem deutschen Kollegen Gottfried Wilhelm Leibniz 10 Jahre zuvor. Allerdings beschränkte er sich nur auf 2x2- und 3x3-Matrizen. Ein weiteres Prinzip, das Seki entdeckte, war das Kreisprinzip enri. Es erinnert an die Exhaustionsmethode, welche die griechischen Mathematiker Eudoxos und Archimedes zur Berechnung der Kreisfläche verwendeten. Seki approximierte den Kreis mit n Rechtecken, während in der Exhaustionsmethode mit n-seitigen Polygonen gearbeitet wurde. Man kann daher enri als eine primitive Form der Integralrechnung ansehen. Es ist anzunehmen, dass enri und vergleichbare Techniken zur Lösung von Sangaku-Aufgaben verwendet wurden.⁸

Wie es dazu kam, dass Japaner Holztafeln mit mathematischen Inhalten in Tempeln aufhängten, ist nicht genau bekannt.

In der japanischen Religion Shintoismus gibt es achthundert Myriaden Götter, die kami. Da diese Götter nach Überlieferung Pferde liebten, war es üblich, ihnen Pferde zu opfern. Jene Gläubigen, die es sich nicht leisten konnten, ein ganzes Pferd zu opfern, hingen Holztafeln mit kunstvoll gemalten Pferdebildern (jap. „ema“) in den Tempeln und Schreinen auf. Folglich findet man heute noch Pferde auf vielen Tafeln des 15. Jahrhunderts und davor.⁹



Abbildung 4: Ema (dt. "Pferdebild") von Kano Motonobu, Kamo Jinja, Tatsuno, Hyogo¹⁰

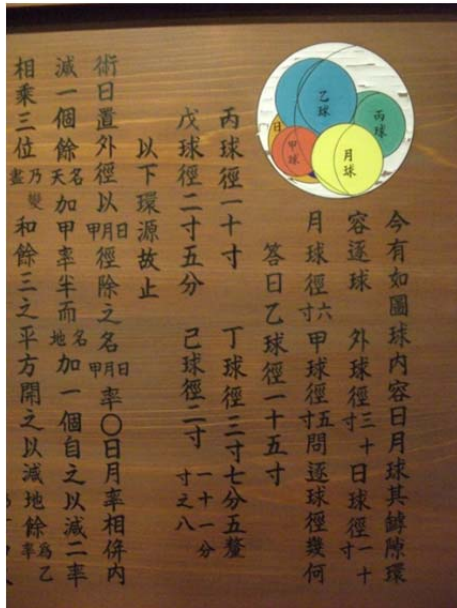
Man geht davon aus, dass die Mathematik-Tafeln ebenso als Opfergaben für die Götter oder einfach nur zu Ehren der Götter unter den überhängenden Dächern der religiösen Gebäude

⁸ vgl. Rothman / Fukagawa (1998) Spektrum der Wissenschaft, Juli 1998: S. 83
bzw. https://de.wikipedia.org/wiki/Seki_Takakazu (11. Februar 2017)

⁹ vgl. Rothman / Fukagawa (1998) Spektrum der Wissenschaft, Juli 1998: S. 80

¹⁰ Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Kan%C5%8D_Motonobu (11. Februar 2017)

Die älteste in Büchern erwähnte Sangaku-Tafel stammt aus dem Jahre 1668, die älteste noch erhaltene Sangaku-Tafel wurde im Bezirk Tochigi gefunden und ist aus dem Jahr 1683. Insgesamt sind heute noch ca. 880 Holztafeln erhalten. Die erste Sammlung von Sangaku-Aufgaben in Buchform wurde im Jahr 1789 veröffentlicht. Im 19. Jahrhundert wurden noch weitere Bücher über Sangaku verfasst.¹²





13

Die Fundorte der Sangaku-Tafeln sind relativ gleichmäßig über ganz Japan verteilt. Man findet Sangaku in Städten genauso wie in ländlichen Regionen. In buddhistischen Tempeln fand man jedoch nur ungefähr halb so viele Tafeln wie in Shinto-Schreinen. Eine Landkarte Japans mit der Anzahl der gefundenen Sangaku in jeder Präfektur ist in Abbildung 8 zu sehen.¹⁶



Abbildung 8: Anzahl der gefundenen Sangaku-Tafeln in den einzelnen Präfekturen Japans¹⁷

Wer die Urheber der Sangaku-Aufgaben sind, ist nicht genau geklärt. Man geht heute davon aus, dass zunächst Gelehrte der Samurai-Klasse mit dem Platzieren von Sangaku-Tafeln an religiösen Kultstädten begannen, später dann aber auch Bauern, Frauen und Kinder Sangaku praktizierten und sich eine Art Freizeitbeschäftigung für Menschen aller Bildungsschichten aus den Sangaku entwickelte.¹⁸

¹⁵ Quelle: <https://ja.wikipedia.org/wiki/耳成山口神社> (11. Februar 2017)

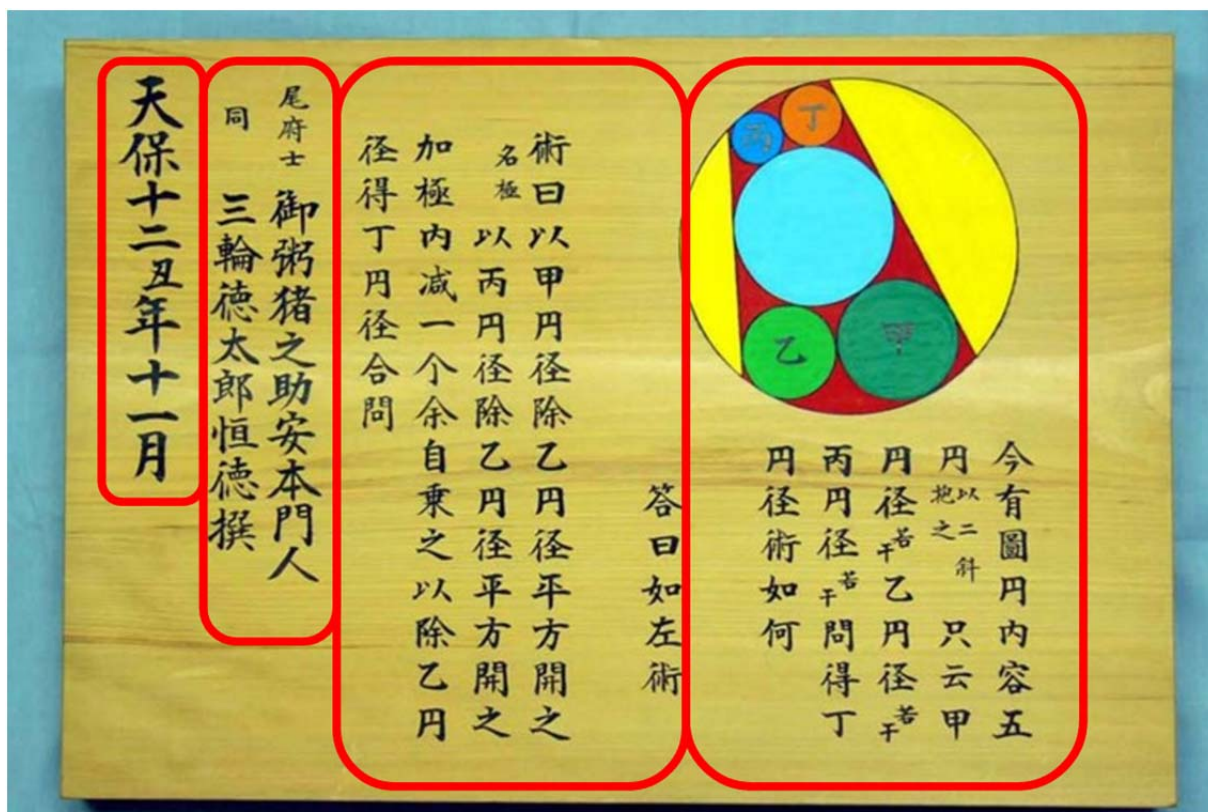
¹⁶ vgl. Rothman / Fukagawa (1998) Spektrum der Wissenschaft, Juli 1998: S. 80

¹⁷ Daten von Fukagawa / Pedoe (1989) - Japanese Temple Geometry Problems: S. 188; Bild-Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Japan_location_map_with_side_map_of_the_Ryukyu_Islands.svg (4. Februar 2017)

¹⁸ vgl. Rothman / Fukagawa (1998) Spektrum der Wissenschaft, Juli 1998: S. 86

Verfasst waren die Texte auf den Holztafeln ausschließlich in Kanbun, einer Hochsprache, deren Rolle in Japan mit jener von Latein in Europa verglichen werden kann. Es handelt sich um Japanisch in chinesischen Schriftzeichen. Diese Sprache wird heute von nur noch wenigen Menschen beherrscht.¹⁹

Die Tafeln waren zumeist mit der Aufgabenstellung samt Skizze, sowie der Lösung (meist aber ohne Lösungsweg), dem Autor der Aufgabe und dem Datum versehen. Der typische Aufbau einer Tafel ist in Abbildung 9 zu sehen.



Date Names Answer Problem

Abbildung 9: Aufbau einer Sangaku-Tafel²⁰

Auf vielen Tafeln sind auch mehr als eine Aufgabe bzw. ein Theorem verzeichnet. Hauptsächlich handelte es sich um Aufgaben aus der klassischen euklidischen Geometrie. Es waren aber auch diophantische Gleichungen, deren ganzzahlige Lösungen es zu finden galt, darunter. Auch die Volumsberechnung krummflächig begrenzter Körper, welche eigentlich die zur damaligen Zeit in Japan unbekannte Infinitesimalrechnung erfordern, war Inhalt der Aufgaben.²¹

¹⁹ vgl. Rothman / Fukagawa (1998) Spektrum der Wissenschaft, Juli 1998: S. 83

²⁰ Quelle: <http://player.slideplayer.com/27/9074258/> (4. Februar 2017)

²¹ vgl. Rothman / Fukagawa (1998) Spektrum der Wissenschaft, Juli 1998: S. 80

Mit der Zeit gerieten die Sangaku immer mehr in Vergessenheit. Es interessierten sich nur wenige Forscher für die traditionelle japanische Mathematik. Einer der wichtigsten Sangaku-Forscher der heutigen Zeit ist Hidetoshi Fukagawa, promovierter Mathematiker und Lehrer an einer höheren Schule im japanischen Bezirk Aichi (zwischen Tokio und Osaka). Er stieß vor ca. 50 Jahren auf ein altes Buch, in dem die Sangaku erwähnt waren. Davon war er so begeistert, dass er quer durch Japan reiste, um sie zu erforschen. Die Sprache Kanbun musste er eigens dafür erlernen. Nach ca. 20 Jahren seiner Forschung veröffentlichte er gemeinsam mit Dan Pedoe, einem Mathematikprofessor an der Universität von Minnesota in Minneapolis, das erste englischsprachige Buch über Sangaku. Mittlerweile hat er mehrere Bücher und Artikel herausgegeben und gilt als weltweit führender Sangaku-Experte.²²

²² vgl. Rothman / Fukagawa (1998) Spektrum der Wissenschaft, Juli 1998: S. 80-83

3. Wichtige mathematische Sätze

Für die Lösung der Sangaku-Aufgaben benötigt man einige mathematische Vorkenntnisse. Viele mathematische Sätze werden im Rahmen dieser Diplomarbeit als bekannt vorausgesetzt. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien hier kurz die wichtigsten aufgelistet: Lehrsatz des Pythagoras, Höhensatz, Kathetensatz, Satz des Thales, Strahlensatz, Winkelfunktionen ($\sin$, $\cos$, $\tan$), Sinussatz, Kosinussatz, ...

In diesem Kapitel sind jene Sangaku-relevanten Sätze, die man im Regelunterricht eher selten bespricht, inklusive deren Beweis angeführt, um in den späteren Kapiteln darauf Bezug nehmen zu können.

3.1. Abstand zweier „Kreisfußpunkte“

Dieser Satz entstammt einer Sangaku-Tafel aus dem Jahr 1892 aus der Präfektur Miyagi.²³

Satz²⁴: Gegeben seien zwei Kreise $k_1[M_1; r_1]$ und $k_2[M_2; r_2]$ sowie eine Gerade g . Die Kreise berühren einander von außen und sie berühren jeweils die Gerade g an den Punkten F_1 bzw. F_2 . Dann gilt $\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$.

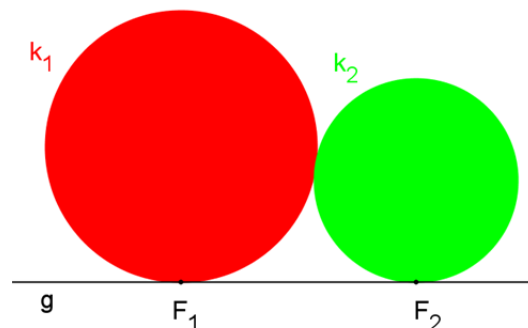


Abbildung 10: Satz Abstand zweier „Kreisfußpunkte“

Beweis²⁵: Für den Beweis zeichne man die in Abbildung 11 skizzierten Hilfslinien und verwende den Lehrsatz des Pythagoras im Dreieck $\triangle M_1M_2P$.

²³ vgl. Fukagawa / Pedoe (1989) - Japanese Temple Geometry Problems: S. 79

²⁴ vgl. Fukagawa / Pedoe (1989) - Japanese Temple Geometry Problems: S. 3

²⁵ vgl. Fukagawa / Pedoe (1989) - Japanese Temple Geometry Problems: S. 79

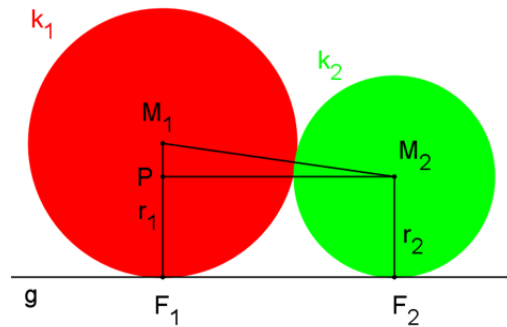


Abbildung 11: Beweis Abstand zweier „Kreisfußpunkte“

$$\begin{aligned} \overline{F_1 F_2} &= \overline{M_2 P} = \sqrt{M_1 M_2^2 - M_1 P^2} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = \\ &= \sqrt{r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 - r_1^2 + 2r_1 r_2 - r_2^2} = \sqrt{4r_1 r_2} = 2\sqrt{r_1 r_2} \end{aligned}$$

□

3.2. Inkreisradius des Dreiecks

Satz²⁶: Der Inkreisradius ρ eines Dreiecks mit Flächeninhalt $\mathcal{A}$ und Umfang u beträgt

$$\rho = \frac{2\mathcal{A}}{u}.$$

Beweis²⁷: Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit Inkreismittelpunkt I . Man zerlege das Dreieck in drei Teildreiecke $\triangle BCI$, $\triangle ACI$ und $\triangle ABI$. Die Summe der Flächeninhalte der Teildreiecke ist gleich dem Flächeninhalt des ursprünglichen Dreiecks. Durch Umformung erhält man den Inkreisradius.

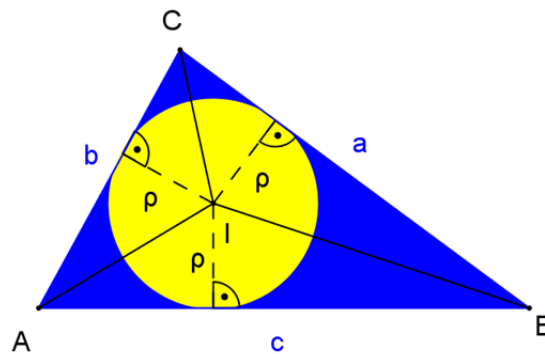


Abbildung 12: Beweis Inkreisradius des Dreiecks

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \mathcal{A}_{\triangle BCI} + \mathcal{A}_{\triangle ACI} + \mathcal{A}_{\triangle ABI} = \frac{a \cdot \rho}{2} + \frac{b \cdot \rho}{2} + \frac{c \cdot \rho}{2} = \frac{(a+b+c) \cdot \rho}{2} = \frac{u \cdot \rho}{2}$$

$$\Leftrightarrow \rho = \frac{2\mathcal{A}}{u}$$

□

²⁶ vgl. Agricola / Friedrich (2011) - Elementargeometrie: S. 33

²⁷ vgl. Agricola / Friedrich (2011) - Elementargeometrie: S. 33

3.3. Inkreisradius des rechtwinkligen Dreiecks

Satz²⁸: Der Inkreisradius ρ eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c beträgt $\rho = \frac{a+b-c}{2}$.

Beweis²⁹: Aus Satz 3.2 ist bekannt, dass $\rho = \frac{2\mathcal{A}}{u}$. Es ist also zu zeigen, dass $\frac{2\mathcal{A}}{u} = \frac{a+b-c}{2}$.

Dabei verwende man, dass im rechtwinkligen Dreieck $\mathcal{A} = \frac{ab}{2}$, $u = a+b+c$ und $c^2 = a^2 + b^2$ gilt.

$$\rho = \frac{2\mathcal{A}}{u} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b-c}{2}$$

□

3.4. Peripheriewinkelsatz

Satz³⁰: Alle Peripheriewinkel über demselben Kreisbogen sind gleich groß, und zwar halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel.

Beweis³¹: Man betrachte eine Kreissehne AB und einen Punkt P auf dem Kreisbogen über dieser Sehne. Es sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob der Kreismittelpunkt M innerhalb des Dreiecks $\triangle ABP$, außerhalb des Dreiecks $\triangle ABP$ oder auf einer der Seiten AP bzw. BP liegt.

Da $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MP} = r$ ist, sind die Dreiecke $\triangle ABM$, $\triangle AMP$ und $\triangle BMP$ gleichschenkelig mit Spitze in M . Insbesondere hat daher jedes dieser Dreiecke zwei gleich große Basiswinkel.

Seien $\angle MAP = \angle MPA = \alpha$, $\angle MBP = \angle MPB = \beta$, $\angle AMB = \mu$ und

$$\angle MAB = \angle MBA = \gamma = \frac{180^\circ - \mu}{2}.$$

Die Winkelsumme im Dreieck $\triangle ABP$ beträgt 180° . Daraus folgt:

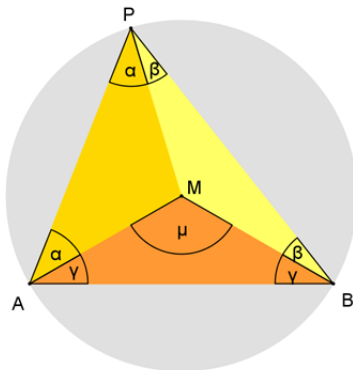
²⁸ vgl. <http://www.mathematische-basteleien.de/rdreieck.htm> (13. Dezember 2015)

²⁹ vgl. <http://www.mathematische-basteleien.de/rdreieck.htm> (13. Dezember 2015)

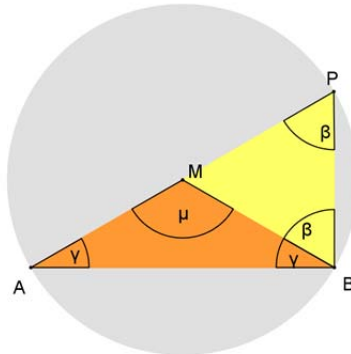
³⁰ Koth (SS 2011) - Skriptum zur Vorlesung Schulmathematik 2 - Elementargeometrie: S. 21

³¹ vgl. Koth (SS 2011) - Skriptum zur Vorlesung Schulmathematik 2 - Elementargeometrie: S. 22

1. Fall:



2. Fall:



3. Fall:

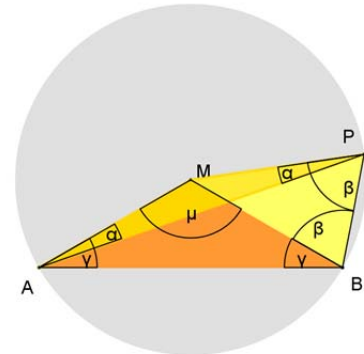


Abbildung 13: Peripheriewinkel (1)

Abbildung 14: Peripheriewinkel (2)

Abbildung 15: Peripheriewinkel (3)

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta + (180^\circ - \mu) = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = \mu$$

$$\alpha + \beta = \frac{\mu}{2}$$

$$2\beta + 2\gamma = 180^\circ$$

$$2\beta + (180^\circ - \mu) = 180^\circ$$

$$2\beta = \mu$$

$$\beta = \frac{\mu}{2}$$

$$2\beta - 2\alpha + 2\gamma = 180^\circ$$

$$2\beta - 2\alpha + (180^\circ - \mu) = 180^\circ$$

$$2\beta - 2\alpha = \mu$$

$$\beta - \alpha = \frac{\mu}{2}$$

□

3.5. Sehnentangentenwinkelsatz

Satz³²: Der Zentriwinkel μ im Kreis ist doppelt so groß wie der zum gleichen Bogen gehörende Sehnentangentenwinkel τ .

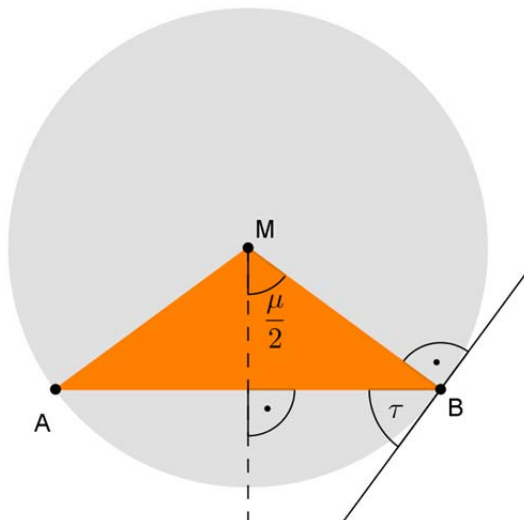


Abbildung 16: Beweis Sehnentangentenwinkelsatz

³² Koth (SS 2011) - Skriptum zur Vorlesung Schulmathematik 2 - Elementargeometrie: S. 21

Beweis³³: Sei $\angle AMB = \mu$. Da $\overline{AM} = \overline{BM} = r$, ist das Dreieck $\triangle ABM$ gleichschenkelig mit Basis AB . Daraus folgt: $\angle ABM = 90^\circ - \frac{\mu}{2}$. Da die Tangente an den Kreis im Punkt B auf den Radius BM normal steht, ist der Sehnentangentenwinkel τ gegeben durch $\tau = 90^\circ - \angle ABM = \frac{\mu}{2}$.

□

3.6. Sehnensatz

Satz³⁴: Haben zwei Sehnen durch einen Punkt P im Inneren eines Kreises die Endpunkte A , B bzw. C , D , dann gilt: $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$.

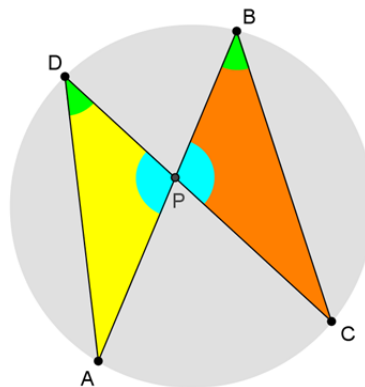


Abbildung 17: Beweis Sehnensatz

Beweis³⁵: Die Winkel $\angle ADP$ und $\angle CBP$ sind Peripheriewinkel über der gemeinsamen Sehne AC und daher gleich groß. Die Dreiecke $\triangle PAD$ und $\triangle PCB$ stimmen somit in diesem Winkel und im Winkel bei P (= Scheitelwinkel) überein und sind daher ähnlich. Daher stehen entsprechende Seiten dieser Dreiecke im selben Verhältnis, und es gilt: $\overline{AP} : \overline{DP} = \overline{CP} : \overline{BP}$ bzw. $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$.

□

³³ vgl. Koth (SS 2011) - Skriptum zur Vorlesung Schulmathematik 2 - Elementargeometrie: S. 21

³⁴ Koth (SS 2011) - Skriptum zur Vorlesung Schulmathematik 2 - Elementargeometrie: S. 38

³⁵ vgl. Koth (SS 2011) - Skriptum zur Vorlesung Schulmathematik 2 - Elementargeometrie: S. 38

3.7. Sekantensatz

Satz³⁶: Haben zwei Sekanten durch einen Punkt P im Äußeren eines Kreises die Schnittpunkte A, B bzw. C, D mit dem Kreis, so gilt: $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$.

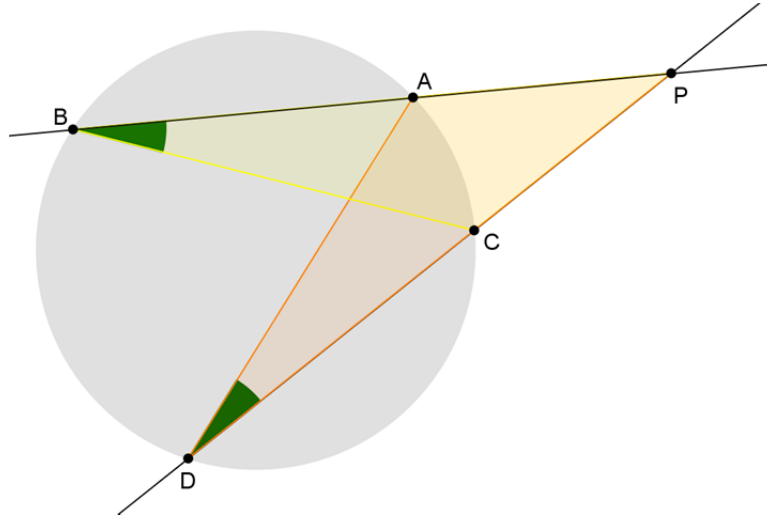


Abbildung 18: Beweis Sekantensatz

Beweis³⁷: Der Beweis erfolgt analog zum Beweis des Sehnesatzes 3.6.

Die Winkel $\angle ADP$ und $\angle CBP$ sind Peripheriewinkel über der gemeinsamen Sehne AC und daher gleich groß. Die Dreiecke $\triangle PAD$ und $\triangle PCB$ stimmen somit in diesem Winkel und im Winkel bei P überein und sind daher ähnlich. Daher stehen entsprechende Seiten dieser Dreiecke im selben Verhältnis, und es gilt: $\overline{AP} : \overline{DP} = \overline{CP} : \overline{BP}$ bzw. $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$.

□

³⁶ Koth (SS 2011) - Skriptum zur Vorlesung Schulmathematik 2 - Elementargeometrie: S. 38

³⁷ vgl. Koth (SS 2011) - Skriptum zur Vorlesung Schulmathematik 2 - Elementargeometrie: S. 38

3.8. Sekanten-Tangentensatz

Satz³⁸: Eine Sekante durch den Punkt P im Äußeren eines Kreises schneide den Kreis in den Punkten C und D , eine Tangente durch P berühre den Kreis in A . Dann gilt: $\overline{AP}^2 = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$.

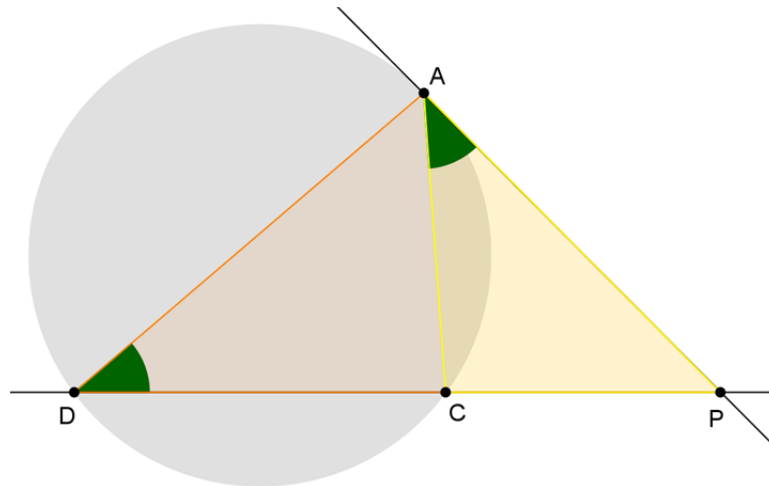


Abbildung 19: Beweis Sekanten-Tangentensatz

Beweis³⁹: Der Winkel $\angle ADP$ ist Peripheriewinkel über der Sehne AC und $\angle CAP$ ist zugehöriger Sehnentangentenwinkel und daher gleich groß. Die Dreiecke $\triangle PAD$ und $\triangle PAC$ stimmen in zwei Winkeln überein und sind daher ähnlich. Daher stehen entsprechende Seiten dieser Dreiecke im selben Verhältnis, und es gilt: $\overline{AP} : \overline{DP} = \overline{CP} : \overline{AP}$ bzw. $\overline{AP}^2 = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$.

□

3.9. Umkehrung des Sekanten-Tangentensatzes

Satz⁴⁰: Seien A , C und D Punkte auf einem Kreis und P ein Punkt außerhalb des Kreises. Weiters liegen die Punkte C , D und P auf einer Geraden. Wenn $\overline{AP}^2 = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$, dann ist die Gerade g durch A und P Tangente an den Kreis.

Beweis⁴¹: Der Beweis wird indirekt geführt. Falls g nicht Tangente an den Kreis wäre, wäre sie Sekante und es gäbe einen zweiten Schnittpunkt $A' \neq A$ auf dem Kreis. Nach dem Sekantensatz wäre dann $\overline{AP} \cdot \overline{A'P} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$, also $\overline{AP} = \overline{A'P}$, was im Widerspruch zur Annahme steht.

□

³⁸ Koth (SS 2011) - Skriptum zur Vorlesung Schulmathematik 2 - Elementargeometrie: S. 38

³⁹ vgl. Koth (SS 2011) - Skriptum zur Vorlesung Schulmathematik 2 - Elementargeometrie: S. 38

⁴⁰ vgl. Steinberg (1984) Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht S. 338

⁴¹ vgl. Steinberg (1984) Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht S. 338

4. Aufgabensammlung

In diesem Kapitel werden einige typische Sangaku-Aufgaben mit möglichen Lösungswegen vorgestellt. Es wurde darauf Wert gelegt, dass ein breites Spektrum an verschiedenen Aufgabenstellungen abgedeckt wird. Ich habe aus ca. 200 gesichteten Aufgaben diese 18 Aufgaben nach dem Kriterium der Umsetzbarkeit in einer AHS ausgewählt. Dabei werden verständlicherweise einige Aufgaben von AHS-Schülerinnen und -Schülern leichter bearbeitet werden können als andere. Ideen für den Unterricht finden Sie im Kapitel 5.

Die Titel der Aufgaben wurden von mir frei gewählt, um diese leichter unterscheiden zu können. Im Original haben die Aufgaben keine Namen oder Titel.

☞ Alle in diesem Kapitel behandelten Aufgaben und deren Lösungen sind online als Kopiervorlagen im PDF-Format unter <http://sangaku.geppel.at> verfügbar. Auch Link- und Literaturempfehlungen zu weiteren für den Unterricht interessanten Aufgaben finden Sie auf meiner Homepage.

4.1. Drei benachbarte Kreise

Diese Aufgabe entstammt einer Sangaku-Tafel aus dem Jahre 1824 aus der Präfektur Gunma.⁴²

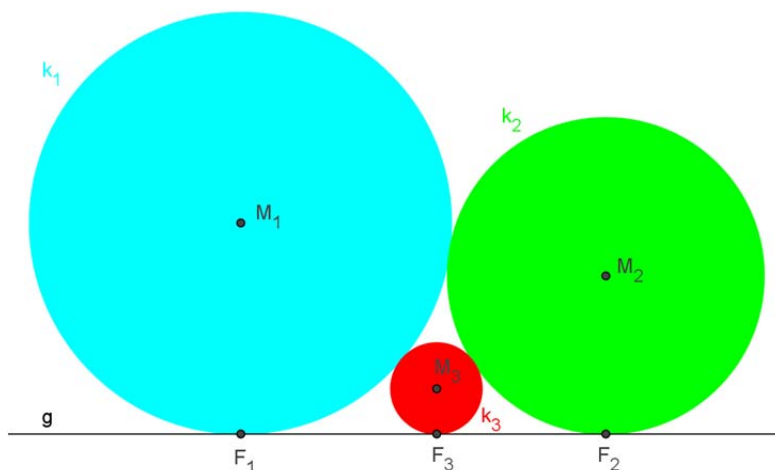


Abbildung 20: Aufgabe *Drei benachbarte Kreise*

Aufgabe⁴³: Drei Kreise $k_1[M_1; r_1]$, $k_2[M_2; r_2]$ und $k_3[M_3; r_3]$ berühren einander von außen,

und sie berühren die Gerade g (siehe Abbildung 20). Man zeige, dass $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$.

⁴² vgl. Fukagawa / Pedoe (1989) - Japanese Temple Geometry Problems: S. 79

⁴³ vgl. Fukagawa / Pedoe (1989) - Japanese Temple Geometry Problems: S. 3

Lösung⁴⁴: Man bezeichne die Berührungspunkte der Kreise k_i mit g als F_i .

Es gilt $\overline{F_1F_2} = \overline{F_1F_3} + \overline{F_3F_2}$

Nun verwende man Satz 3.1

$$2\sqrt{r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_3} + 2\sqrt{r_3r_2}$$

und dividiere die gesamte Gleichung durch $(2 \cdot \sqrt{r_1r_2r_3})$:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}$$

4.2. Viele benachbarte Kreise

Eine Erweiterung der vorhergehenden Aufgabe stammt aus der Präfektur Tokyo aus dem Jahr 1789. Die Tafel selbst gilt jedoch als verschollen.⁴⁵

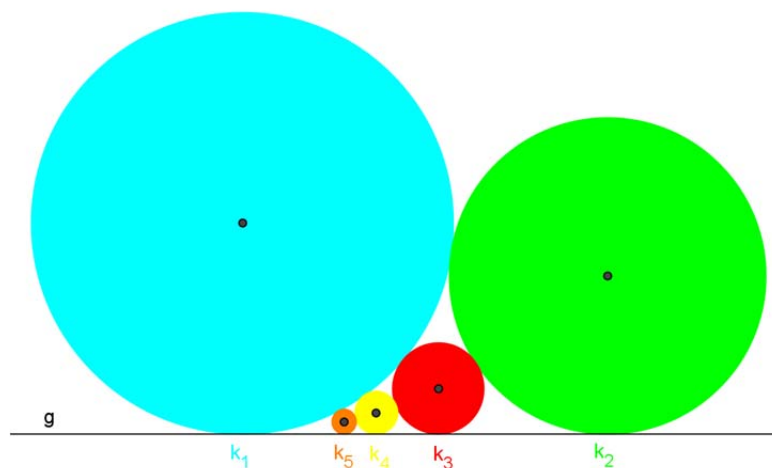


Abbildung 21: Aufgabe Viele benachbarte Kreise

Aufgabe⁴⁶: Man betrachte die gleiche Ausgangssituation wie in Aufgabe 4.1. Ein Kreis $k_4[M_4; r_4]$ berühre die Kreise k_1 und k_3 sowie die Gerade g . Ein weiterer Kreis $k_5[M_5; r_5]$ berühre die Kreise k_1 und k_4 sowie die Gerade g . usw.

Man finde eine Formel für r_n in Abhängigkeit von r_1 , r_2 und n .

Lösung⁴⁷: Aus Aufgabe 4.1 ist bereits bekannt, dass $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$ gilt. Man ersetze nun

$t_i = \frac{1}{\sqrt{r_i}}$, wodurch sich $t_3 = t_1 + t_2$ ergibt.

⁴⁴ Lösungsweg des Autors dieser Diplomarbeit

⁴⁵ vgl. Fukagawa / Pedoe (1989) - Japanese Temple Geometry Problems: S. 79

⁴⁶ vgl. Fukagawa / Pedoe (1989) - Japanese Temple Geometry Problems: S. 3

Da es sich bei k_4 – umschlossen von k_1 , k_3 und g – um die gleiche Situation handelt wie bei k_3 umschlossen von k_1 , k_2 und g , gilt folglich auch $t_4 = t_1 + t_3$. Gleichermäßen ergibt sich $t_5 = t_1 + t_4$, $t_6 = t_1 + t_5$, usw.

Allgemein gilt also $t_n = t_1 + t_{n-1}$, wobei t_1 und t_2 bekannt sind.

Es handelt sich um eine arithmetische Folge, mit diesen ersten Folgengliedern:

$$t_3 = t_1 + t_2$$

$$t_4 = t_1 + t_3 = t_1 + t_1 + t_2 = 2 \cdot t_1 + t_2$$

$$t_5 = t_1 + t_4 = t_1 + 2 \cdot t_1 + t_2 = 3 \cdot t_1 + t_2$$

$$t_6 = t_1 + t_5 = t_1 + 3 \cdot t_1 + t_2 = 4 \cdot t_1 + t_2$$

usw.

Daraus lässt sich die explizite Darstellung der Folge leicht ablesen. Es gilt also

$$t_n = (n-2) \cdot t_1 + t_2.$$

Ersetzt man nun wieder $t_i = \frac{1}{\sqrt{r_i}}$, so erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{n-2}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \quad (n \geq 3)$$

oder, nach r_n umgeformt,

$$r_n = \left(\frac{n-2}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \right)^{-2}.$$

4.3. Ein Quadrat zwischen zwei Kreisen

Diese Aufgabe stammt von einem Sangaku aus dem Katayamahiko-Schrein.⁴⁸

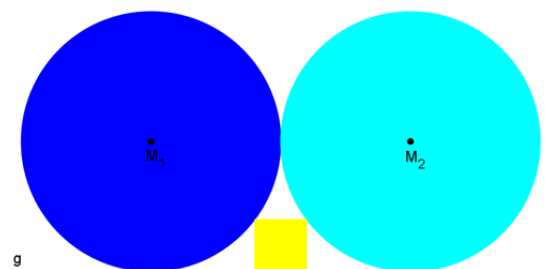


Abbildung 22: Aufgabe *Ein Quadrat zwischen zwei Kreisen*

⁴⁷ Lösungsweg des Autors dieser Diplomarbeit

⁴⁸ vgl. Fukagawa / Rothman (2008) - Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry: S. 95

Aufgabe⁴⁹: Zwei gleich große Kreise $k_1[M_1;r]$ und $k_2[M_2;r]$ berühren einander sowie eine Gerade g . Wie in Abbildung 22 zu sehen ist, liegt zwischen den Kreisen ein Quadrat mit einer Seite auf der Geraden und je einem Eckpunkt auf einem der beiden Kreise.

Man finde die Seitenlänge a des Quadrats in Abhängigkeit von r .

Lösung⁵⁰: Der Lehrsatz des Pythagoras angewandt auf das rote Dreieck (Abbildung 23) lautet

$$r^2 = (r-a)^2 + \left(r - \frac{a}{2}\right)^2.$$

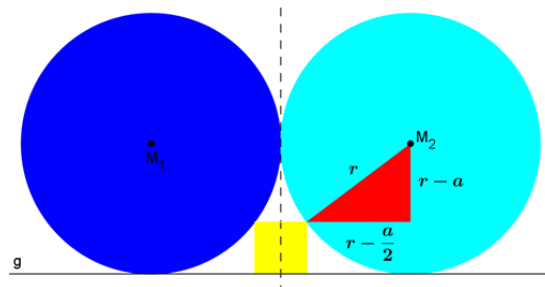


Abbildung 23: Lösung Ein Quadrat zwischen zwei Kreisen

Umgeformt ergibt dies die quadratische Gleichung $5a^2 - 12ra + 4r^2 = 0$, welche die Lösungen

$a_1 = \frac{2}{5}r$ und $a_2 = 2r$ hat. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass $a < 2r$ ist. Damit hat diese

Aufgabe also die Lösung $a = \frac{2}{5}r$.

⁴⁹ vgl. Fukagawa / Rothman (2008) - Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry: S. 95

⁵⁰ vgl. Fukagawa / Rothman (2008) - Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry: S. 123

4.4. Zwei Kreise und ein Quadrat im Quadrat

Die folgende Aufgabe fasst zwei sehr ähnliche Sangaku in einer Aufgabe zusammen. Der erste Teil der Aufgabe entstammt einem nicht mehr erhaltenen Sangaku aus der Präfektur Iwate aus dem Jahre 1820, während der zweite Teil der Aufgabe einer Tafel aus dem Jahre 1895 (also 28 Jahre nach dem Ende der Edo-Periode) aus der Präfektur Fukushima entspringt.⁵¹

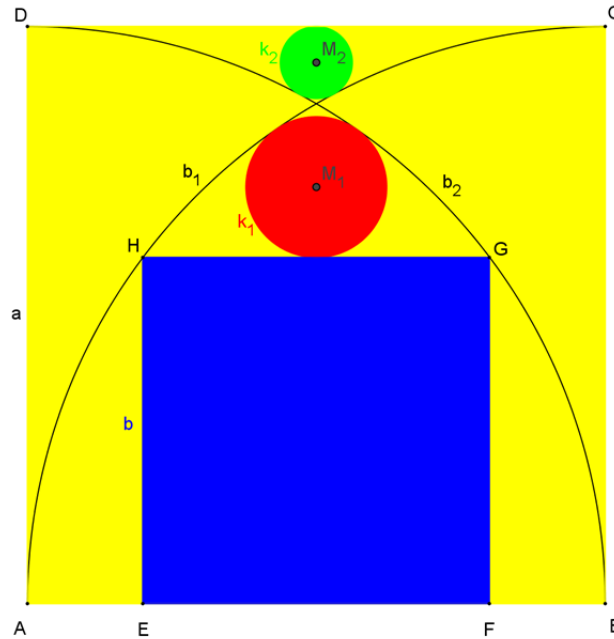


Abbildung 24: Aufgabe Zwei Kreise und ein Quadrat im Quadrat

Aufgabe⁵²: Gegeben sei ein Quadrat $\square ABCD$ mit der Seitenlänge a . Die Viertelkreisbögen $b_1[B;a]$ und $b_2[A;a]$ liegen im Quadrat (A und B sind die Mittelpunkte). Ein weiteres Quadrat $\square EFGH$ mit Seitenlänge b liegt innerhalb, wobei E und F auf AB liegen, G auf b_2 und H auf b_1 . Ein Kreis $k_1[M_1;r_1]$ berührt $\square EFGH$ von außen sowie b_1 und b_2 von innen. Ein weiterer Kreis $k_2[M_2;r_2]$ berührt $\square ABCD$ von innen sowie b_1 und b_2 von außen.

Gesucht sind b , r_1 und r_2 in Abhängigkeit von a .

⁵¹ vgl. Fukagawa / Pedoe (1989) - Japanese Temple Geometry Problems: S. 117

⁵² vgl. Fukagawa / Pedoe (1989) - Japanese Temple Geometry Problems: S. 37

Lösung⁵³: Man zeichne die in Abbildung 25 skizzierten Hilfslinien ein und beschrifte den Mittelpunkt K von AB .

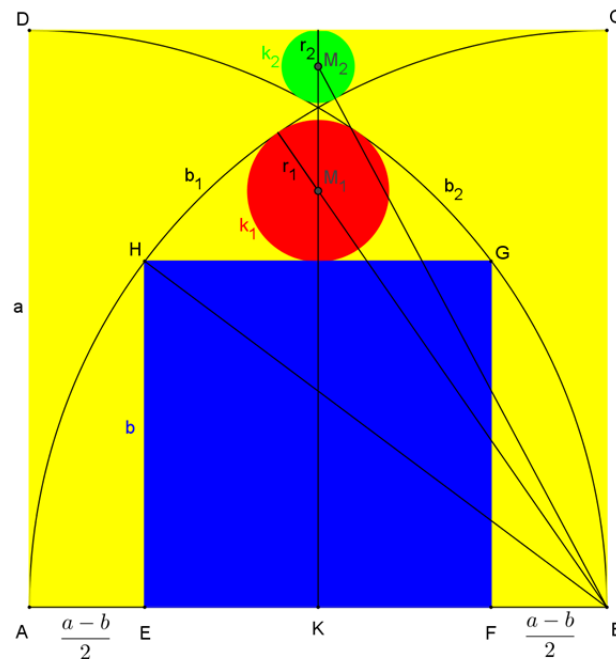


Abbildung 25: Lösung Zwei Kreise und ein Quadrat im Quadrat

Für die Berechnung der Seitenlänge b betrachte man das Dreieck $\triangle BHE$ und wende den Satz des Pythagoras an.

$$a^2 = b^2 + \left(b + \frac{a-b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow b = \frac{3}{5}a$$

Für den Radius r_1 folgt nun aus dem Satz von Pythagoras für das Dreieck $\triangle BM_1K$:

$$(a - r_1)^2 = (b + r_1)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow r_1 = \frac{39}{320}a$$

Der obere Radius r_2 lässt sich aus dem Dreieck $\triangle BM_2K$ berechnen:

$$(a + r_2)^2 = (a - r_2)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow r_2 = \frac{a}{16}$$

⁵³ vgl. Rubin (2008): S. 11.

4.5. Kreise im Halbkreis

Diese Aufgabe entstammt einem Sangaku im Kumano-Jinja-Schrein aus der Stadt Karuizawa in der Präfektur Nagano.⁵⁴

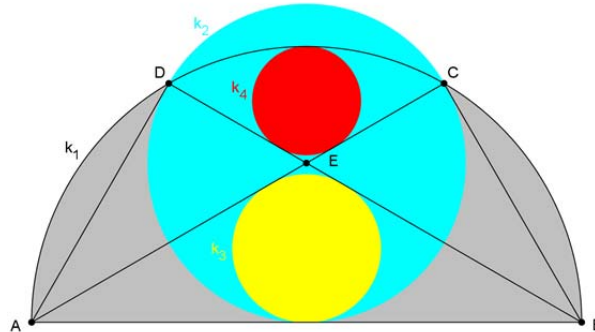


Abbildung 26: Aufgabe Kreise im Halbkreis

Aufgabe⁵⁵: $\overline{AB}$ ist der Durchmesser des Halbkreises $k_1[M_1; r_1]$. C und D liegen auf dem Halbkreis k_1 . AD und BC sind die Tangenten in D und C an den Kreis $k_2[M_2; r_2]$, wobei k_2 die Strecke AB berührt. Der Kreis $k_3[M_3; r_3]$ ist dem Dreieck $\triangle ABE$ eingeschrieben. Der Kreis $k_4[M_4; r_4]$ berührt AC und BD . Weiters berührt k_4 den Kreis k_1 von innen. Wenn $\angle BAD = \angle CBA = 60^\circ$, dann finde man r_2 in Abhängigkeit von r_1 .

Lösung⁵⁶: Zuerst gilt es zu erkennen, dass es sich bei k_2 um den Inkreis des gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABF$ handelt (siehe Abbildung 27), da $\angle BAD = \angle CBA = 60^\circ$ gilt. Die Kreise k_3 und k_4 sind für die Lösung der Aufgabe irrelevant.

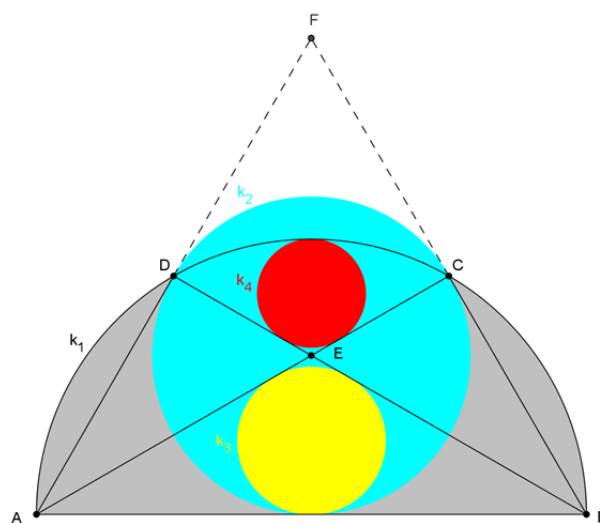


Abbildung 27: Lösung Kreise im Halbkreis

⁵⁴ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 8

⁵⁵ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 9

⁵⁶ Lösungsweg des Autors dieser Diplomarbeit

Gemäß Satz 3.2 ist der Inkreisradius eines Dreiecks $\rho = \frac{2\mathcal{A}}{u}$. Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks beträgt $h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, wie sich durch Anwendung des Satzes von Pythagoras leicht zei-

gen lässt. Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks ist daher $\mathcal{A} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Da

in diesem Fall $\rho = r_2$, $a = 2r_1$ und $u = 3 \cdot 2r_1 = 6r_1$ gilt, ergibt sich $r_2 = \frac{2 \cdot \frac{(2r_1)^2 \sqrt{3}}{4}}{6r_1} = \frac{\sqrt{3}}{3} r_1$.

4.6. Ein Fünfeck und fünf Rechtecke im Kreis

Diese Aufgabe entstammt einem Sangaku im Chōmeiji-Tempel aus der Stadt Tōmi in der Präfektur Nagano.⁵⁷

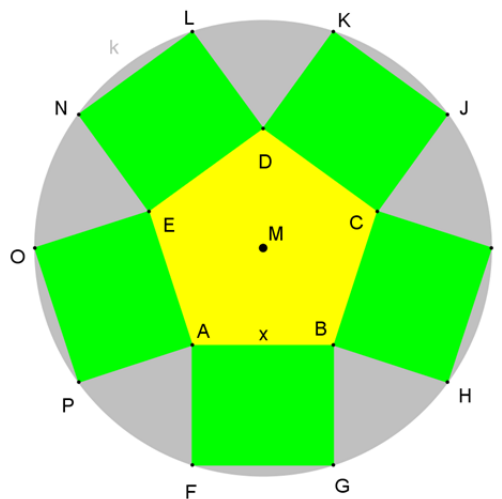


Abbildung 28: Aufgabe Ein Fünfeck und fünf Rechtecke im Kreis

Aufgabe⁵⁸: $ABCDE$ ist ein regelmäßiges Fünfeck. An allen Seiten befinden sich kongruente Rechtecke. Die Rechtecke berühren den Kreis $k[M;r]$ von innen. Wenn der Flächeninhalt der Rechtecke bei gegebenem r maximal ist, finde man die Seite $\overline{AB} = x$ eines Rechtecks in Abhängigkeit von r .

⁵⁷ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 39

⁵⁸ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 40

Lösung⁵⁹: Sei $\overline{AF} = y$ die Rechteckbreite.

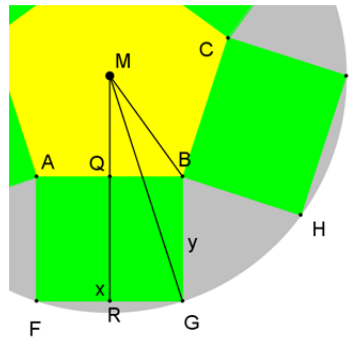


Abbildung 29: Lösung Ein Fünfeck und fünf Rechtecke im Kreis

Die Größe eines Innenwinkels eines regelmäßigen n -Ecks beträgt $\alpha = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^\circ$. Folglich

ist im Fünfeck ein Innenwinkel $\alpha = \frac{3}{5} \cdot 180^\circ = 108^\circ$.

Daraus ergibt sich der Winkel $\angle MBQ = \frac{\alpha}{2} = 54^\circ$.

Die Strecke $\overline{MR}$ lässt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle RGM$ berechnen:

$$\overline{MR}^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r^2 \Leftrightarrow \overline{MR} = \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$\text{Im Dreieck } \triangle BMQ \text{ gilt } \tan 54^\circ = \frac{\overline{MQ}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{MR} - \overline{RQ}}{\overline{BQ}} = \frac{\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} - y}{\frac{x}{2}}.$$

$$\text{Daraus ergibt sich } y = \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x}{2} \tan 54^\circ.$$

Der Flächeninhalt $\mathcal{A}$ des Rechtecks in Abhängigkeit von x und y beträgt $\mathcal{A}(x, y) = xy$. Ersetzt man nun y , so erhält man

$$\mathcal{A}(x) = x \cdot \left(\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x}{2} \tan 54^\circ \right)$$

Differenzieren und Nullsetzen führt zur Lösung. Dies kann komfortabel mithilfe eines Computeralgebrasystems, wie beispielsweise dem CAS von GeoGebra, erfolgen:

Löse [Ableitung $[x \cdot (\sqrt{r^2 - x^2/4} - x/2 \cdot \tan[54^\circ])]$, x] = 0, x]

⁵⁹ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 40

Diese drei rechnerischen Lösungen liefert GeoGebra:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}|r|, \quad x_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{5}+5}}{2} r, \quad x_3 = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{5}+5}}{2} r$$

Da aber $0 < x < r$ erfüllt sein muss, ist nur $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r$ eine gültige Lösung.

4.7. Kreise im Kreissektor

Diese Aufgabe entstammt einem Sangaku im Kumano-Jinja-Schrein aus der Stadt Karuizawa in der Präfektur Nagano.⁶⁰

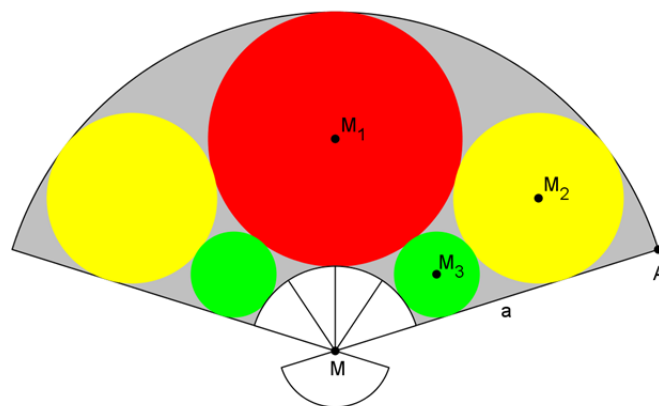


Abbildung 30: Aufgabe Kreise im Kreissektor

Aufgabe⁶¹: Die Figur ist symmetrisch. Die Kreise $k_1[M_1; r_1]$, $k_2[M_2; r_2]$ und $k_3[M_3; r_3]$ liegen zwischen den konzentrischen Kreisbögen $k_4[M; r_4]$ und $k_5[M; r_5]$. Sie berühren einander von außen. Weiters berühren k_2 und k_3 die Strecke $\overline{AM} = a$ (siehe Abbildung 30).

Man finde r_2 in Abhängigkeit von a und r_1 .

⁶⁰ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 8

⁶¹ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 14

Lösung⁶²: Wie in Abbildung 31 ersichtlich ist, gilt $2r_1 = 2r_2 + 2r_3$. Daraus ergibt sich

$$r_3 = r_1 - r_2$$

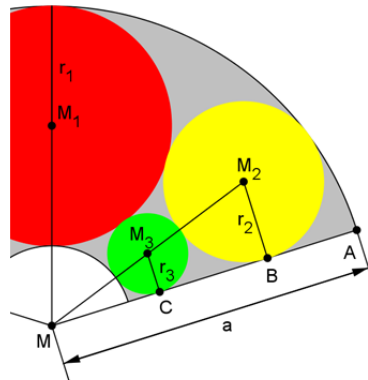


Abbildung 31: Lösung Kreise im Kreissektor

Aus den ähnlichen Dreiecken $\triangle MBM_2$ und $\triangle MCM_3$ erhält man

$$r_2 : r_3 = (a - r_2) : (a - 2r_2 - r_3)$$

Ersetzt man nun $r_3 = r_1 - r_2$, so ergibt sich

$$r_2 : (r_1 - r_2) = (a - r_2) : (a - 2r_2 - (r_1 - r_2))$$

$$r_2 \cdot (a - r_1 - r_2) = (r_1 - r_2) \cdot (a - r_2)$$

$$ar_2 - r_1r_2 - r_2^2 = ar_1 - ar_2 - r_1r_2 + r_2^2$$

$$2r_2^2 - 2ar_2 + ar_1 = 0$$

$$r_2 = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 8ar_1}}{4} = \frac{1}{2} \left(a \pm \sqrt{a^2 - 2ar_1} \right)$$

Da aber $2r_2 < a$ bzw. $r_2 < \frac{a}{2}$ gilt, ist nur $r_2 = \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a^2 - 2ar_1} \right)$ eine gültige Lösung.

⁶² vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 14

4.8. Ein Quadrat im Rhombus

Diese Aufgabe entstammt einer Tafel aus 1821 im Ohma Shinmeisya Schrein aus dem Dorf Yamada gun in der Präfektur Gumma.⁶³

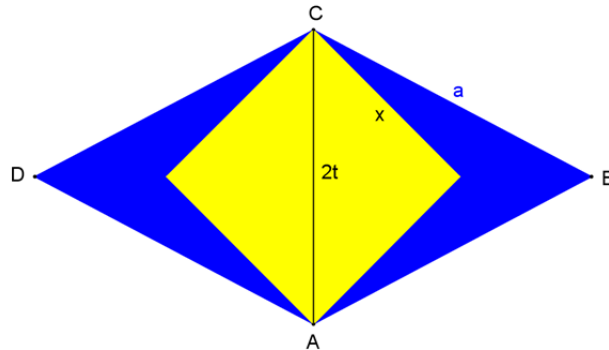


Abbildung 32: Aufgabe Ein Quadrat im Rhombus

Aufgabe⁶⁴: Gegeben ist ein Rhombus $ABCD$ mit Seitenlänge a . Die Diagonale $\overline{AC} = 2t$ sei variabel. Sei $\mathcal{A}(t)$ die Fläche des Rhombus minus der Fläche des gelben Quadrats, dessen Diagonale ebenfalls $\overline{AC}$ ist.

Man finde jene Seitenlänge x des Quadrats (in Abhängigkeit von a), bei der $\mathcal{A}(t)$ bei gegebenem a maximal ist.

Lösung⁶⁵: Die Fläche $\mathcal{A}_R$ eines Rhombus ist die Hälfte des Produkts der Diagonalen. In die-

$$\text{sem Fall } \mathcal{A}_R = \frac{2t \cdot 2\sqrt{a^2 - t^2}}{2} = 2t\sqrt{a^2 - t^2}.$$

Die Seite des Quadrats ist $x = \sqrt{2}t$, wodurch sich ein Flächeninhalt $\mathcal{A}_Q = 2t^2$ ergibt.

Die gesuchte blaue Fläche ist daher $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_R - \mathcal{A}_Q = 2t\sqrt{a^2 - t^2} - 2t^2$.

$$\text{Differenzieren ergibt } \frac{\mathcal{A}'(t)}{2} = \sqrt{a^2 - t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{a^2 - t^2}} - 2t.$$

$$\text{Setzt man nun } \frac{\mathcal{A}'(t)}{2} = 0, \text{ so erhält man } a^2 - 2t^2 = 2t\sqrt{a^2 - t^2}.$$

Quadrieren beider Seiten der Gleichung führt zu $8t^4 - 8a^2t^2 + a^4 = 0$, woraus sich

$$t^2 = \frac{8a^2 \pm \sqrt{64a^4 - 32a^4}}{16} \text{ berechnen lässt, was wiederum zu } t^2 = \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{a^2}{2} \text{ vereinfacht}$$

⁶³ vgl. Fukagawa / Rothman (2008) - Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry: S. 118

⁶⁴ vgl. Fukagawa / Rothman (2008) - Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry: S. 118

⁶⁵ vgl. Fukagawa / Rothman (2008) - Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry: S. 139

werden kann. Ersetzt man nun $t^2 = \frac{x^2}{2}$, so erhält man $x = \pm \sqrt{1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot a$. Da jedoch $0 < x < a$

gilt, ist $x = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot a$ die einzig mögliche Lösung.

Da im Laufe des Lösungsweges eine Gleichung quadriert wurde, bestätigt erst die Probe, also das Einsetzen der Lösung in die Gleichung, dass es sich dabei auch tatsächlich um eine Lösung handelt.

4.9. Zwei Kreise im rechtwinkligen Dreieck 1

Diese Aufgabe entstammt einer Tafel aus dem Hase-Kannondō-Tempel in der Stadt Nagano.⁶⁶

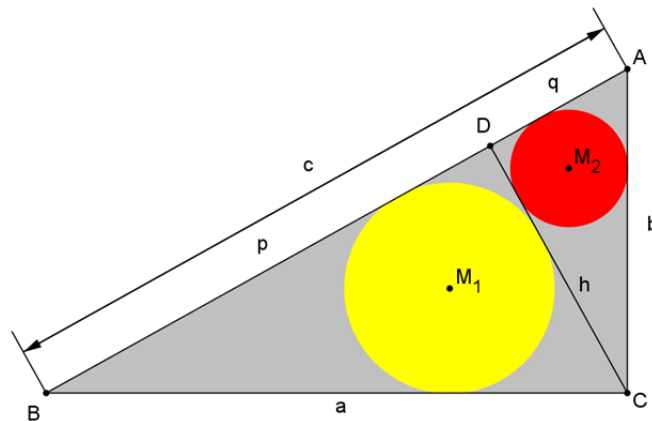


Abbildung 33: Aufgabe Zwei Kreise im rechtwinkligen Dreieck 1

Aufgabe⁶⁷: Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit der Höhe $h = \overline{CD}$ auf $c = \overline{AB}$ durch den Eckpunkt C . Die Kreise $k_1[M_1; r_1]$ und $k_2[M_2; r_2]$ sind den Dreiecken $\triangle BCD$ und $\triangle ACD$ eingeschrieben.

Man finde $a = \overline{BC}$ und $b = \overline{AC}$ in Abhängigkeit von r_1 und r_2 .

Lösung⁶⁸: Laut Lehrsatz des Pythagoras gilt $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Aus den beiden Flächenformeln $\mathcal{A} = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$ folgt $h = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

⁶⁶ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 63

⁶⁷ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 64

⁶⁸ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 64

Der Kathetensatz besagt, dass $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$, woraus sich $p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ und

$$q = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ ergibt.}$$

Verwendet man Satz 3.3 im Dreieck $\triangle BCD$, so erhält man

$$2r_1 = p + h - a = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} - a, \text{ was sich wiederum zu}$$

$$(2r_1 + a)\sqrt{a^2 + b^2} = a(a + b) \quad (1)$$

vereinfachen lässt.

Analog ergibt sich im Dreieck $\triangle ACD$ die Gleichung

$$(2r_2 + b)\sqrt{a^2 + b^2} = b(a + b) \quad (2)$$

Dividiert man nun $(1) \div (2)$, so erhält man $\frac{2r_1 + a}{2r_2 + b} = \frac{a}{b}$. Dies wird zu

$$b = \frac{r_2}{r_1} a \quad (3)$$

umgeformt. Einsetzen von (3) in (1) ergibt $(2r_1 + a)\sqrt{a^2 + \frac{r_2^2}{r_1^2} a^2} = a\left(a + \frac{r_2}{r_1} a\right)$

$$(2r_1 + a)a\sqrt{1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}} = a\left(a + \frac{r_2}{r_1} a\right) \quad | : a \quad (a \neq 0)$$

$$(2r_1 + a)\frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r_1} = a + \frac{r_2}{r_1} a \quad | \cdot r_1$$

$$2r_1\sqrt{r_1^2 + r_2^2} + a\sqrt{r_1^2 + r_2^2} = r_1 a + r_2 a \quad | - a\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

$$2r_1\sqrt{r_1^2 + r_2^2} = a(r_1 + r_2 - \sqrt{r_1^2 + r_2^2}) \quad | : (r_1 + r_2 - \sqrt{r_1^2 + r_2^2})$$

$$a = \frac{2r_1\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r_1 + r_2 - \sqrt{r_1^2 + r_2^2}} = \frac{2r_1\sqrt{r_1^2 + r_2^2} \cdot (r_1 + r_2 + \sqrt{r_1^2 + r_2^2})}{(r_1 + r_2)^2 - (r_1^2 + r_2^2)} = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2} \cdot (r_1 + r_2) + r_1^2 + r_2^2}{r_2}$$

$$\text{Einsetzen in (3) führt zu } b = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2} \cdot (r_1 + r_2) + r_1^2 + r_2^2}{r_1}.$$

4.10. Zwei Kreise im rechtwinkligen Dreieck 2

Eine auf den ersten Blick ganz ähnliche, jedoch wesentlich einfachere, Aufgabe findet sich auf einem Sangaku aus dem Sasamine-Tenjinsha-Schrein in der Stadt Nagano.⁶⁹

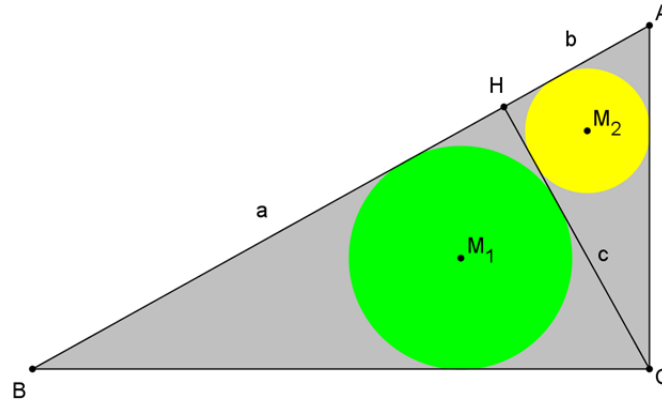


Abbildung 34: Aufgabe Zwei Kreise im rechtwinkligen Dreieck 2

Aufgabe⁷⁰: Das Dreieck $\triangle ABC$ ist bei C rechtwinklig. H ist der Fußpunkt der Höhe auf AB durch C . Die Kreise $k_1[M_1; r_1]$ und $k_2[M_2; r_2]$ sind den Dreiecken $\triangle BCH$ und $\triangle ACH$ eingeschrieben. Wenn $\overline{BH} = a$, $\overline{AH} = b$ und $\overline{CH} = c$, finde man r_1 und r_2 in Abhängigkeit von a , b und c .

Lösung⁷¹: Im Dreieck $\triangle BCH$ gilt $\overline{BC} = \sqrt{a^2 + c^2}$. Gemäß Satz 3.3 gilt $r_1 = \frac{a + c - \sqrt{a^2 + c^2}}{2}$.

Ebenso gilt im $\triangle ACH$, dass $\overline{AC} = \sqrt{b^2 + c^2}$ und damit ist $r_2 = \frac{b + c - \sqrt{b^2 + c^2}}{2}$.

⁶⁹ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 110

⁷⁰ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 111

⁷¹ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 111

4.11. Viele Kreise in zwei Rechtecken

Diese Aufgabe entstammt einem Sangaku im Miwa-Jinja-Schrein in der Stadt Nagano.⁷²

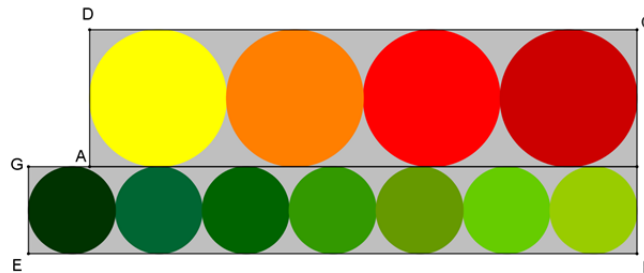


Abbildung 35: Aufgabe *Viele Kreise in zwei Rechtecken*

Aufgabe⁷³: $\square ABCD$ und $\square EFBG$ sind Rechtecke. Die Kreise $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$ berühren $\square ABCD$ von innen, die Kreise $k'_1, k'_2, k'_3, \dots, k'_n$ berühren $\square EFBG$ von innen, wie in Abbildung 35 zu sehen. Wenn $\overline{AD} = 91$ (sun), $\overline{EG} = 75$ (sun) und $\overline{GB} - \overline{AB} = 5$ (sun), finde man m und n .

Anmerkung: sun ist ein altes japanisches Maß, $1 \text{ sun} = 3,3 \text{ cm}$

Lösung⁷⁴: Es gilt die diophantische Gleichung $75n - 91m = 5$ zu lösen.

Die homogene Gleichung ist $75n - 91m = 0$ bzw. $75n = 91m$. Da 75 und 91 teilerfremd sind, lauten die Lösungen der homogenen Gleichung $m_h = 75k$ und $n_h = 91k$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Nun gilt es, mithilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden.

$$91 = 1 \cdot 75 + 16$$

$$75 = 4 \cdot 16 + 11$$

$$16 = 1 \cdot 11 + 5$$

$$11 = 2 \cdot 5 + 1$$

$$5 = 5 \cdot 1 + 0$$

$$\begin{aligned} \text{Es folgt } 1 &= 11 - 2 \cdot 5 = 11 - 2(16 - 11) = 3 \cdot 11 - 2 \cdot 16 = 3 \cdot (75 - 4 \cdot 16) - 2 \cdot 16 = 3 \cdot 75 - 14 \cdot 16 = \\ &= 3 \cdot 75 - 14 \cdot (91 - 75) = 17 \cdot 75 - 14 \cdot 91 \end{aligned}$$

Die Gleichung $17 \cdot 75 - 14 \cdot 91 = 1$ multipliziert mit 5 führt zu $85 \cdot 75 - 70 \cdot 91 = 5$, was wiederum bedeutet dass $m_p = 70$ und $n_p = 85$ eine partikuläre Lösung der Gleichung ist.

Alle Lösungen findet man durch Summieren der homogenen mit der partikulären Lösung:

$$m = 75k + 70, \quad n = 91k + 85 \quad \text{wobei } k \in \mathbb{N}, \text{ da } m, n > 0.$$

⁷² vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 82

⁷³ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 85

⁷⁴ Lösungsweg des Autors dieser Diplomarbeit

4.12. Ein Rechteck und vier Kreise in zwei Kreisen

Diese Aufgabe entstammt einem Sangaku im Suwa-Taisha-Shimosha-Schrein in der Stadt Shimosuwa in der Präfektur Nagano.⁷⁵

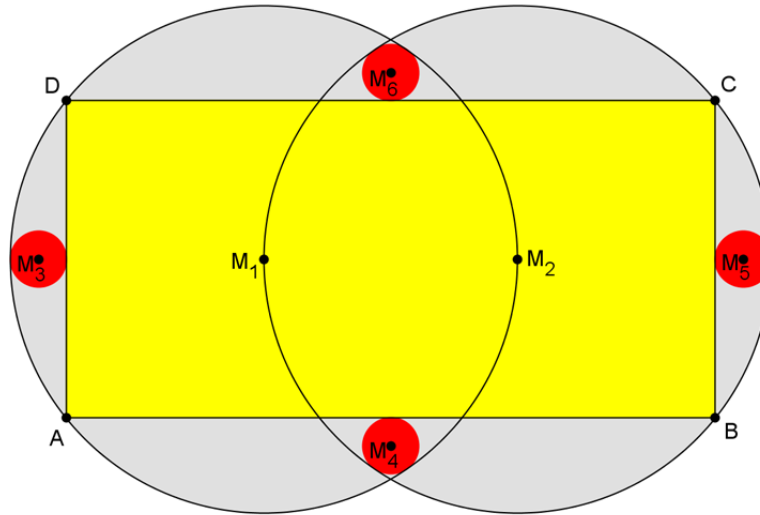


Abbildung 36: Aufgabe Ein Rechteck und vier Kreise in zwei Kreisen

Aufgabe⁷⁶: Der Mittelpunkt M_2 des Kreises $k_2[M_2; r_1]$ liegt auf der Kreislinie des Kreises $k_1[M_1; r_1]$. Die Eckpunkte des Rechtecks $\square ABCD$ berühren die Kreise k_1 und k_2 wie in Abbildung 36 zu sehen. Der Kreis $k_3[M_3; r_2]$ berührt die Strecke AD in ihrem Mittelpunkt und den Kreisbogen $\widehat{AD}$. Der Kreis $k_5[M_5; r_2]$ berührt die Strecke BC in ihrem Mittelpunkt und den Kreisbogen $\widehat{BC}$. Der Kreis $k_4[M_4; r_2]$ berührt AB sowie die Kreise k_1 und k_2 von innen. Der Kreis $k_6[M_6; r_2]$ berührt CD sowie die Kreise k_1 und k_2 von innen.

Man finde die Gleichung für r_1 in Abhängigkeit von r_2 .

⁷⁵ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 248

⁷⁶ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 251

Lösung⁷⁷: Sei $a = \overline{BC}$. Laut Satz des Thales ist das Dreieck $\triangle M_1EC$ rechtwinkelig.

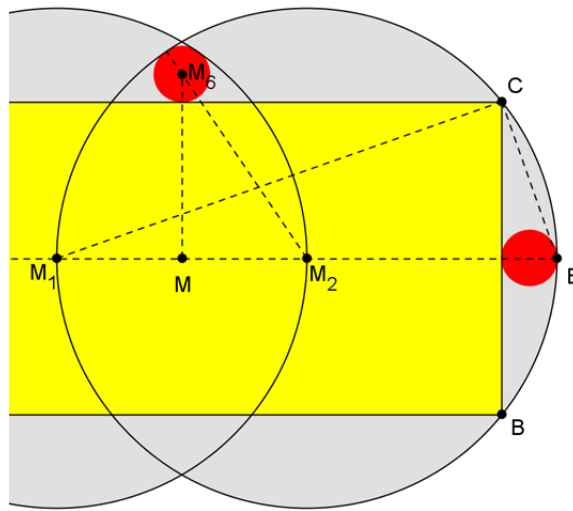


Abbildung 37: Lösung Ein Rechteck und vier Kreise in zwei Kreisen

Der Kathetensatz im Dreieck $\triangle M_1EC$ besagt dass $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = (2r_1 - 2r_2) \cdot 2r_2$, was sich zu $a^2 = 16r_2(r_1 - r_2)$ umformen lässt.

Im Dreieck $\triangle MM_2M_6$ gilt laut Lehrsatz des Pythagoras $(r_1 - r_2)^2 = \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + r_2\right)^2$, was sich wiederum zu $3r_1^2 - 8r_1r_2 - a^2 - 4ar_2 = 0$ umformen lässt.

Ersetzt man hier nun $a^2 = 16r_2(r_1 - r_2)$, so wird daraus

$$3r_1^2 - 8r_1r_2 - 16r_2(r_1 - r_2) - 4r_2\sqrt{16r_2(r_1 - r_2)} = 0.$$

Diese Gleichung wird nach Umformung zu

$$3r_1^2 - 24r_1r_2 + 16r_2^2 = 16r_2\sqrt{r_2(r_1 - r_2)}.$$

Quadrieren und weitere Umformung führt zur gesuchten Gleichung:

$$9r_1^4 - 144r_1^3r_2 + 672r_1^2r_2^2 - 1024r_1r_2^3 + 512r_2^4 = 0$$

Numerische Lösungen der Gleichung können nun z.B. mit Hilfe eines Computeralgebrasystems ermittelt werden. Dazu dividiere man die gesamte Gleichung durch r_2^4 und ersetze

$\frac{r_1}{r_2} = q$. Es entsteht die neue Gleichung: $9q^4 - 144q^3 + 672q^2 - 1024q + 512 = 0$. Der Computer

liefert die Lösungen $q \approx 4.67021$ oder $q \approx 9.08222$, was wiederum bedeutet, dass $r_1 \approx 4.67021r_2$ oder $r_1 \approx 9.08222r_2$.

⁷⁷ in Anlehnung an Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 251

4.13. Ein Rhombus im Trapez

Diese Aufgabe entstammt einem Sangaku aus dem Kōgenji-Kannondoō-Tempel in der Stadt Nagano.⁷⁸

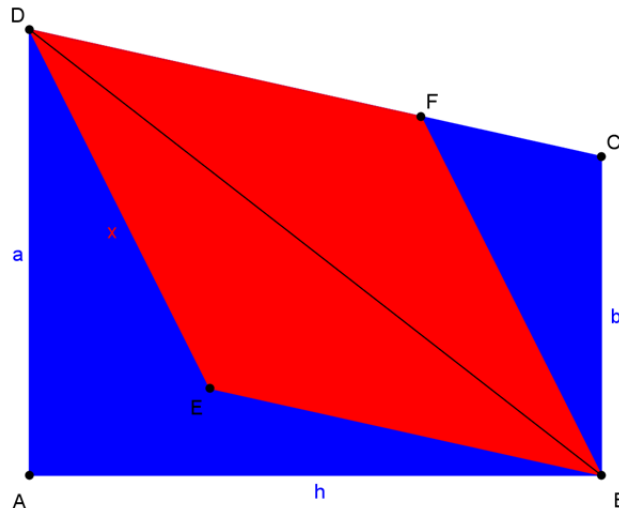


Abbildung 38: Aufgabe *Ein Rhombus im Trapez*

Aufgabe⁷⁹: $ABCD$ ist ein Trapez mit $\angle BAD = \angle CBA = 90^\circ$. $\overline{AD} = a$, $\overline{BC} = b$ und $\overline{AB} = h$. $EBFD$ ist ein Rhombus mit F auf der Strecke CD .

Man finde die Seitenlänge des Rhombus $\overline{DE} = x$ in Abhängigkeit von a , b und h .

Lösung⁸⁰: Zunächst werden die Punkte G , M und N sowie entsprechende Hilfslinien und der Winkel $\alpha = \angle BDC$ wie in Abbildung 39 eingezeichnet.

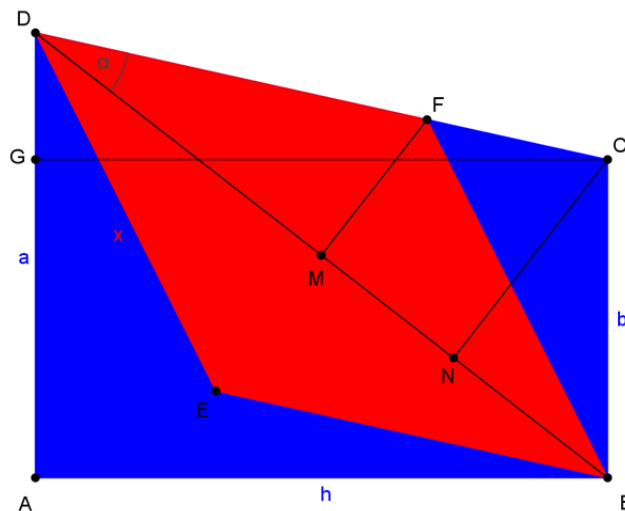


Abbildung 39: Lösung *Ein Rhombus im Trapez*

⁷⁸ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 117

⁷⁹ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 118

⁸⁰ in Anlehnung an Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 118

Im Dreieck $\triangle CDG$ ergibt der Lehrsatz des Pythagoras $\overline{CD} = \sqrt{(a-b)^2 + h^2}$.

Ebenso erhält man im Dreieck $\triangle ABD$, dass $\overline{BD} = \sqrt{a^2 + h^2}$.

Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle CDN$ gilt $\cos \alpha = \frac{\overline{DN}}{\overline{CD}}$.

Anwendung des Kosinussatzes im Dreieck $\triangle BCD$ liefert $b^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CD} \cdot \cos \alpha$.

Ersetzt man nun $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ und $\cos \alpha$, so erhält man

$$b^2 = a^2 + h^2 + (a-b)^2 + h^2 - 2 \cdot \sqrt{a^2 + h^2} \cdot \overline{DN}$$

Umgeformt ergibt dies $\overline{DN} = \frac{a^2 - ab + h^2}{\sqrt{a^2 + h^2}}$.

Nun betrachte man die ähnlichen Dreiecke $\triangle DMF$ und $\triangle DNC$:

Hier gilt $\overline{DM} : \overline{DF} = \overline{DN} : \overline{DC}$, also $\frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{2} : x = \frac{a^2 - ab + h^2}{\sqrt{a^2 + h^2}} : \sqrt{(a-b)^2 + h^2}$.

Umformung ergibt das gesuchte $x = \frac{(a^2 + h^2) \sqrt{(a-b)^2 + h^2}}{2(a^2 - ab + h^2)}$.

4.14. Ein „Oval“, zwei Rhomben und deren Inkreise

Diese Aufgabe entstammt einem Sangaku aus dem Kōgenji-Kannondoō-Tempel in der Stadt Nagano.⁸¹

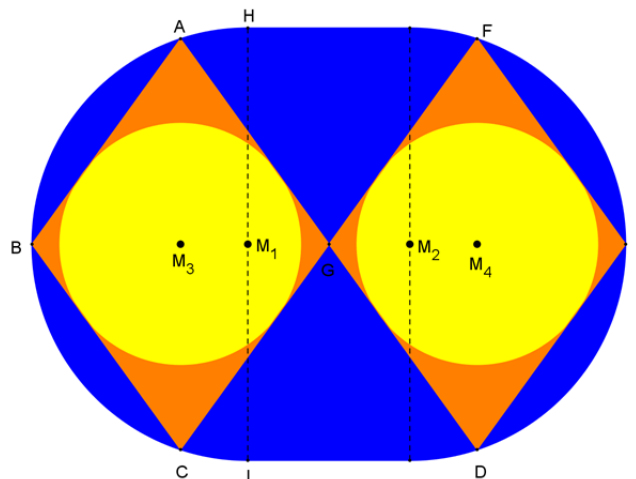


Abbildung 40: Aufgabe Ein „Oval“, zwei Rhomben und deren Inkreise

⁸¹ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 117

Aufgabe⁸²: $k_1[M_1; r_1]$ und $k_2[M_2; r_1]$ sind Halbkreise. $ABCG$ und $FGDE$ sind kongruente Rhomben. $ABCG$ berührt k_1 von innen, $FGDE$ berührt k_2 von innen. Die Kreise $k_3[M_3; r_2]$ und $k_4[M_4; r_2]$ sind den beiden Rhomben $ABCG$ und $FGDE$ eingeschrieben.

Wenn $\overline{BE} = a$ und $\overline{HI} = b$, finde man r_2 und $\overline{AB} = x$ in Abhängigkeit von a und b .

Lösung⁸³: Das Dreieck $\triangle ABC$ ist dem Kreis k_1 eingeschrieben, sodass der Sehnensatz (siehe Kapitel 3.6) angewandt werden kann: $\overline{BM}_3 \cdot (2r_1 - \overline{BM}_3) = \overline{AM}_3 \cdot \overline{CM}_3$. Ersetzt man $\overline{BM}_3 = \frac{a}{4}$, $2r_1 = b$ und $\overline{CM}_3 = \overline{AM}_3$, so erhält man $\frac{a}{4} \cdot \left(b - \frac{a}{4}\right) = \overline{AM}_3^2$ bzw. $\overline{AM}_3^2 = \frac{ab}{4} - \frac{a^2}{16}$.

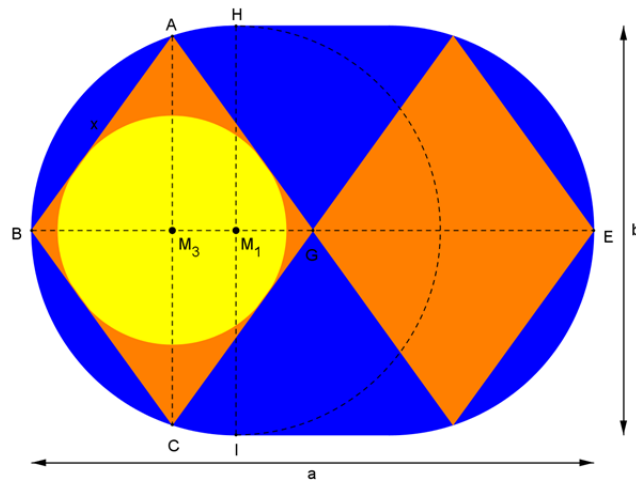


Abbildung 41: Lösung Ein „Oval“, zwei Rhomben und deren Inkreise

Der Lehrsatz des Pythagoras angewandt im Dreieck $\triangle ABM_3$ liefert $\overline{AB}^2 = \overline{AM}_3^2 + \overline{BM}_3^2$, also $x^2 = \frac{ab}{4} - \frac{a^2}{16} + \left(\frac{a}{4}\right)^2$, was wiederum zu $x = \frac{\sqrt{ab}}{2}$, dem ersten Teil der Lösung, führt.

Der Flächeninhalt des Rhombus $ABCG$ lässt sich sowohl über die Diagonalen mithilfe von $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BG}$, als auch über Seite und Höhe mithilfe von $\mathcal{A} = x \cdot 2r_2$ berechnen.

Da $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AM}_3 = 2\sqrt{\frac{ab}{4} - \frac{a^2}{16}}$ und $\overline{BG} = \frac{a}{2}$ ist, liefert Gleichsetzen der beiden Flächeninhaltsformeln: $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{ab}{4} - \frac{a^2}{16}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{2} \cdot 2r_2$.

Umformen führt zum zweiten Teil der Lösung: $r_2 = \frac{a}{8b} \sqrt{4b^2 - ab}$.

⁸² vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 119

⁸³ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 119

4.15. Ein Dreieck im Kreis

Diese Aufgabe entstammt einem Sangaku aus dem Yusawa-jinja-Schrein im Dorf Nozawa-Spa in der Präfektur Nagano.⁸⁴

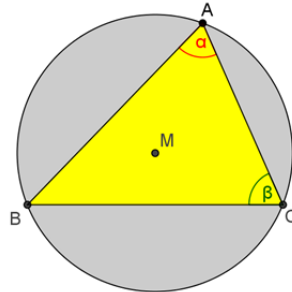


Abbildung 42: Aufgabe Ein Dreieck im Kreis

Aufgabe⁸⁵: Das Dreieck $\triangle ABC$ ist dem Kreis $k[M;r]$ eingeschrieben. Wenn $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, finde man $\overline{BC}$ und $\overline{AB}$ in Abhängigkeit von α , β und r .

Lösung⁸⁶: Laut Peripheriewinkelsatz (siehe Kapitel 3.4) ist $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$ (siehe Abbildung 43).

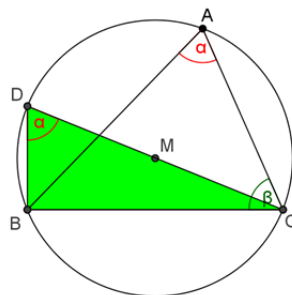


Abbildung 43: Lösung Ein Dreieck im Kreis

Das Dreieck $\triangle BDC$ ist gemäß des Satzes von Thales ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse $\overline{CD} = 2r$. In diesem Dreieck gilt $\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$, also $\overline{BC} = 2r \sin \alpha$.

Analog lässt sich $\overline{AB} = 2r \sin \beta$ herleiten.

⁸⁴ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 198

⁸⁵ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 200

⁸⁶ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 200

4.16. Viele in sich verschlungene Kreise

Diese Aufgabe entstammt einem Sangaku aus dem Tenmangū-Schrein im Dorf Kijimadaira in der Präfektur Nagano.⁸⁷

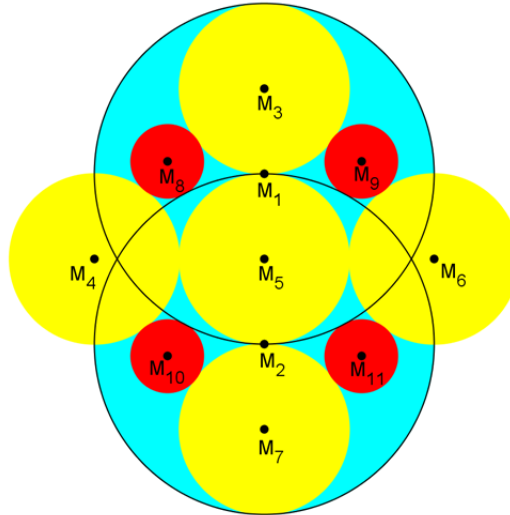


Abbildung 44: Aufgabe *Viele in sich verschlungene Kreise*

Aufgabe⁸⁸: Der Mittelpunkt des Kreises $k_1[M_1; r_1]$ liegt auf der Kreislinie von $k_2[M_2; r_1]$ und umgekehrt. Der Kreis $k_5[M_5; r_2]$ berührt sowohl k_1 als auch k_2 von innen. Die Kreise $k_3[M_3; r_2]$, $k_4[M_4; r_2]$, $k_6[M_6; r_2]$ und $k_7[M_7; r_2]$ berühren k_5 von außen. Die Gerade M_3M_7 und die Gerade M_4M_6 schneiden einander im Punkt M_5 im rechten Winkel. Der Kreis $k_8[M_8; r_3]$ berührt die Kreise k_2 , k_3 und k_4 von außen. Analog berühren die Kreise $k_9[M_9; r_2]$, $k_{10}[M_{10}; r_2]$, $k_{11}[M_{11}; r_2]$ die übrigen Kreise $k_{1,2}$ bzw. $k_{3,4,6,7}$ wie in Abbildung 44 zu sehen.

Man finde r_3 in Abhängigkeit von r_1 , wenn $r_1 = 2r_2$.

Lösung⁸⁹: Die Lösung wird am Beispiel des Kreises k_9 durchgeführt. Es gilt zu erkennen, dass M_9 auf der Winkelsymmetrale von $\angle M_6M_5M_3$ liegt, da M_9 von M_3 und M_6 gleichweit entfernt ist. Daraus folgt, dass $\angle M_9M_5M_3 = 45^\circ$ und $\angle M_2M_5M_9 = 135^\circ$.

Sei $\overline{M_5M_9} = x$. Nun betrachte man die Dreiecke $\triangle M_3M_5M_9$ und $\triangle M_2M_5M_9$ und verwende in beiden den Kosinussatz.

⁸⁷ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 191

⁸⁸ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 196

⁸⁹ Lösungsweg des Autors dieser Diplomarbeit

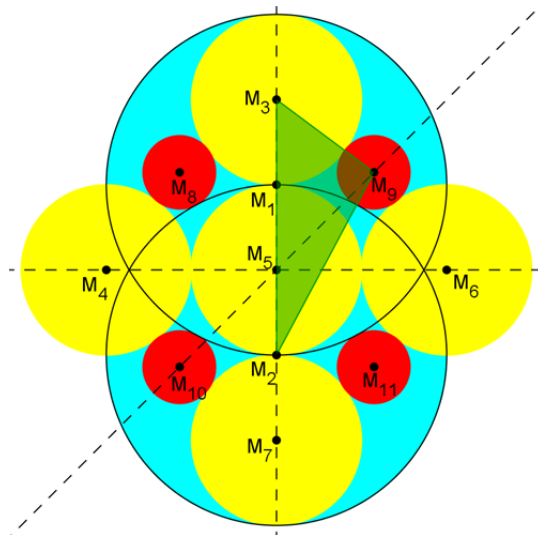


Abbildung 45: Lösung
Viele in sich verschlungene Kreise

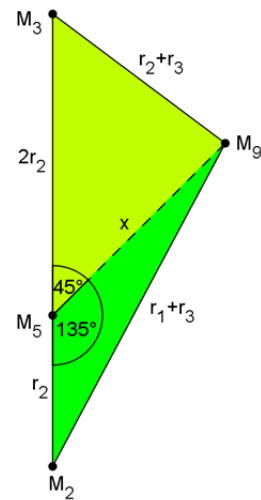


Abbildung 46: vergrößerte Lösung
Viele in sich verschlungene Kreise

$$\begin{aligned} \triangle M_3 M_5 M_9: (r_2 + r_3)^2 &= x^2 + (2r_2)^2 - 2 \cdot x \cdot 2r_2 \cdot \cos 45^\circ \\ &\Leftrightarrow -3r_2^2 + 2r_2 r_3 + r_3^2 = x^2 - 2\sqrt{2}r_2 x \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \triangle M_2 M_5 M_9: (2r_2 + r_3)^2 &= x^2 + r_2^2 - 2 \cdot x \cdot r_2 \cdot \cos 135^\circ \\ &\Leftrightarrow 3r_2^2 + 4r_2 r_3 + r_3^2 = x^2 + \sqrt{2}r_2 x \end{aligned} \quad (5)$$

Subtrahieren von (5) – (4) liefert: $6r_2^2 + 2r_2 r_3 = 3\sqrt{2}r_2 x$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6r_2 + 2r_3}{3\sqrt{2}}$$

Setzt man x in (4) ein, erhält man: $3r_2^2 + 4r_2 r_3 + r_3^2 = \left(\frac{6r_2 + 2r_3}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \sqrt{2}r_2 \cdot \frac{6r_2 + 2r_3}{3\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow 7r_3^2 + 18r_2 r_3 - 9r_2^2 = 0$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung lauten:

$$r_3 = \frac{3}{7}r_2 \quad (\text{bzw. } r_3 = -3r_2)$$

Da r_3 jedoch in Abhängigkeit von r_1 gesucht ist, ersetze man nun noch $r_2 = \frac{r_1}{2}$ und man erhält

die Lösung $r_3 = \frac{3}{14}r_1$.

4.17. Drei Kreise im Kreis

Diese Aufgabe entstammt einem Sangaku aus dem Jahre 1811 und wurde in der Präfektur Nagano gefunden.⁹⁰

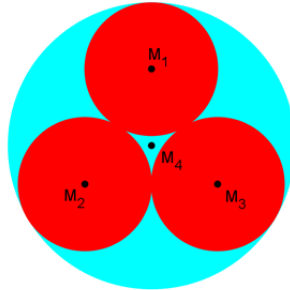


Abbildung 47: Aufgabe Drei Kreise im Kreis

Aufgabe⁹¹: Drei gleich große Kreise $k_1[M_1; r_1]$, $k_2[M_2; r_1]$ und $k_3[M_3; r_1]$ berühren einander von außen und einen vierten Kreis $k_4[M_4; r_2]$ von innen.

Man finde r_1 in Abhängigkeit von r_2 .

Lösung⁹²: Das Dreieck $\triangle M_1 M_2 M_3$ ist gleichseitig. M_4 ist sein „Mittelpunkt“, in dem Schwerpunkt, Inkreismittelpunkt, Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt zusammenfallen.

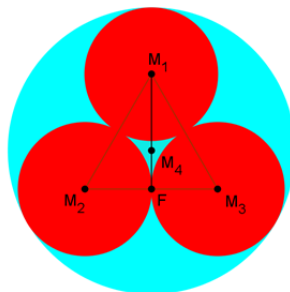


Abbildung 48: Lösung Drei Kreise im Kreis

Als Schwerpunkt teilt M_4 die Strecke FM_1 im Verhältnis $1:2$, wodurch $\overline{M_4 M_1} = \frac{2}{3} \cdot \overline{FM_1}$.

$\overline{FM_1}$ lässt sich dank Pythagoras im Dreieck $\triangle FM_1 M_3$ berechnen: $\overline{FM_1} = \sqrt{3} r_1$.

Der große Radius ist $r_2 = \overline{M_4 M_1} + r_1 = \frac{2}{3} \cdot \overline{FM_1} + r_1 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} r_1 + r_1 = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} r_1$.

Das bedeutet, dass $r_1 = \frac{3}{3 + 2\sqrt{3}} r_2 = \frac{3 \cdot (3 - 2\sqrt{3})}{9 - 12} r_2 = (2\sqrt{3} - 3) r_2$.

⁹⁰ vgl. Fukagawa / Pedoe (1989) - Japanese Temple Geometry Problems: S. 92

⁹¹ vgl. Fukagawa / Pedoe (1989) - Japanese Temple Geometry Problems: S. 16

⁹² Lösungsweg des Autors dieser Diplomarbeit

4.18. Drei Quadrate im Dreieck

Diese Aufgabe entstammt einem Sangaku, welches im Tennenji-Kannondō-Tempel im Dorf Kijimadaira in der Präfektur Nagano gefunden wurde.⁹³

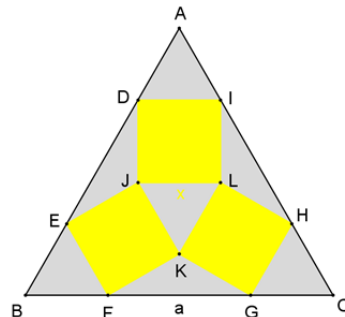


Abbildung 49: Aufgabe Drei Quadrate im Dreieck

Aufgabe⁹⁴: $\triangle ABC$ ist ein gleichseitiges Dreieck. Drei kongruente Quadrate „berühren“ $\triangle ABC$ von innen, wie in Abbildung 49 zu sehen ist. Weiters „berühren“ diese drei Quadrate einander in den Punkten J , K und L .

Wenn die Seite des Dreiecks a ist und die Seite der Quadrate x ist, finde man x in Abhängigkeit von a .

Lösung⁹⁵: Die kleinen Dreiecke $\triangle BEF$, $\triangle CGH$, $\triangle ADI$ und $\triangle JKL$ sind ebenfalls gleichseitig mit Seitenlänge x . Sei $\overline{FG} = \overline{HI} = \overline{DE} = y$.

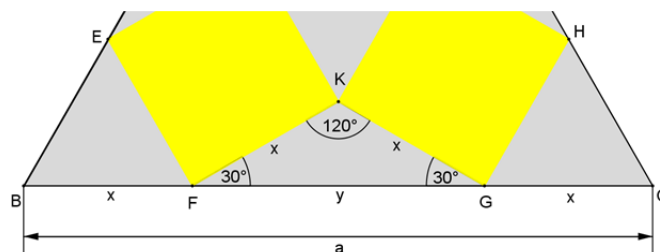


Abbildung 50: Lösung Drei Quadrate im Dreieck

Zunächst liegt der Fokus auf dem Dreieck $\triangle FGK$:

Der Winkel $\angle GFK = 180^\circ - (\angle EFB + \angle KFE) = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$ ist gleich dem Winkel $\angle KGF$.

Der Winkel $\angle FKG$ lässt sich über die Winkelsumme im Dreieck berechnen:
 $\angle FKG = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$.

⁹³ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 178

⁹⁴ vgl. Eiichi et al. (2003) - Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan: S. 180

⁹⁵ Lösungsweg des Autors dieser Diplomarbeit

Der Sinussatz angewandt im Dreieck $\triangle GFK$ liefert $\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{y}{\sin 120^\circ}$, was wiederum zu $y = \sqrt{3}x$ führt.

Die Seite a des großen Dreiecks setzt sich aus $a = 2x + y$ zusammen. Ersetzt man nun y , so ergibt sich $a = 2x + \sqrt{3}x = (2 + \sqrt{3})x$, was nach x umgeformt zur Lösung führt:

$$x = \frac{a}{2 + \sqrt{3}} = \frac{a \cdot (2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = (2 - \sqrt{3})a$$

5. Sangaku in der Schule

In diesem Kapitel werden einige Ideen für die Behandlung von Sangaku im Mathematikunterricht vorgestellt. Es sollen Lehrerinnen und Lehrern Anreize gegeben werden, wie und in welchen Zusammenhängen Sangaku in die Schule Einzug finden könnten.

5.1. Was sagt der Lehrplan?

Dieses Kapitel stellt zuerst den österreichischen Lehrplan der AHS (in den Fassungen vom 11. Mai 2000 für die Unterstufe bzw. 8. Juni 2004 für die Oberstufe) kurz vor. Dann zeigt es auf, in welchen Bereichen des Lehrplans Sangaku einen Platz finden und damit im Regelunterricht bzw. auch im Wahlpflichtfach Mathematik ihre Berechtigung haben.

Der österreichische Lehrplan für allgemeinbildende höhere Schulen ist in mehrere Teile gegliedert.

Der allgemeine Teil⁹⁶ gilt sowohl für die AHS-Unterstufe als auch für die AHS-Oberstufe in allen Fächern. Dieser allgemeine Teil gliedert sich wiederum in drei Teile. Im ersten Teil wird das „Allgemeine Bildungsziel“ formuliert, im zweiten Teil werden „Allgemeine didaktische Grundsätze“ besprochen und der dritte Teil handelt von der „Schul- und Unterrichtsplanung“. Nach dem allgemeinen Teil folgen die Stundentafeln und im letzten Teil sind die Lehrpläne der einzelnen Unterrichtsgegenstände verankert.

In diesem Kapitel werde ich zuerst auf den allgemeinen Teil, danach auf die Mathematik-Lehrpläne für AHS-Unterstufe⁹⁷, AHS-Oberstufe⁹⁸ und das Wahlpflichtfach⁹⁹ eingehen.

5.1.1. Allgemeiner Teil des Lehrplans

Der erste Teil „Allgemeines Bildungsziel“ behandelt den „gesetzlichen Auftrag“ der allgemein bildenden höheren Schule, wonach „eine umfassende und vertiefende Allgemeinbildung zu vermitteln ist“. In den „Leitvorstellungen“ werden einige wichtige Bereiche angesprochen, die im Unterricht Berücksichtigung finden sollen, wie z.B. interkulturelle Begegnung, Chancengleichheit, Weltoffenheit, Gleichstellung der Geschlechter, ... Die „Aufgabenbereiche der Schule“ werden im folgenden Abschnitt grob in „Wissensvermittlung“, „Kompetenzen“ und „Religiös-ethisch-philosophische Bildungsdimension“ unterteilt. In der folgenden Passage werden die „Bildungsbereiche“ erläutert, welche neben dem Fachwissen der einzelnen Unter-

⁹⁶ https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/11668_11668.pdf (12. November 2016)

⁹⁷ https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf (12. November 2016)

⁹⁸ https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf (12. November 2016)

⁹⁹ https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_29_11884.pdf (12. November 2016)

richtsgegenstände eine Grundlage für alle Fächer bieten sollen. Dabei geht es um die Bereiche „Sprache und Kommunikation“, „Mensch und Gesellschaft“, „Natur und Technik“, „Kreativität und Gestaltung“ sowie „Gesundheit und Bewegung“.

Im zweiten Teil „Allgemeine didaktische Grundsätze“ werden mehrere Grundsätze aufgezählt und beschrieben, welche bei der Planung und Durchführung des Unterrichts Beachtung finden sollen. Im Hinblick auf Sangaku im Unterricht erscheinen folgende davon wesentlich:

Im zweiten Punkt „Interkulturelles Lernen“ ist beispielsweise zu lesen „Aber es geht auch darum, Interesse und Neugier an kulturellen Unterschieden zu wecken, um nicht nur kulturelle Einheit, sondern auch Vielfalt als wertvoll erfahrbar zu machen.“ Der größte kulturelle Unterschied zwischen Österreich und Japan in der Edo-Zeit dürfte wohl die Tatsache sein, dass die Mathematik der Sangaku als Freizeitbeschäftigung von allen Volksgruppen angesehen wurde und somit einen viel höheren Stellenwert in der japanischen Kultur hatte.

Der vierte Grundsatz des Lehrplans lautet „Förderung durch Differenzierung und Individualisierung“. Dieser lässt sich aufgrund der stark variierenden Schwierigkeitsgrade der Sangaku leicht berücksichtigen. Es ist möglich, den Schülerinnen und Schülern Wahlmöglichkeiten bei den Aufgaben zu geben. Auch die Bearbeitung der Aufgaben in Partner- oder Gruppenarbeit bietet eine gute Möglichkeit der Differenzierung, bei der sich die Lernenden gegenseitig unterstützen können. Besonders motivierte Schülerinnen und Schüler erstellen womöglich selbst ihre individuellen Sangaku-Aufgaben, welche sie dann dem Rest der Klasse präsentieren wollen. Sangaku bieten also ein breites Feld für den Grundsatz der „Förderung durch Differenzierung und Individualisierung“.

Der sechste Grundsatz lautet „Stärken von Selbsttätigkeit und Eigenverantwortung“. Hier liest man z.B. „Im Unterricht ist [...] die selbsttätige und selbstständige Form des Lernens besonders zu fördern. Dafür bieten sich auch projektartige und offene Lernformen an.“ Etwas später heißt es „Schülerinnen und Schüler sind in zunehmendem Ausmaß zu befähigen, adäquate Recherchestrategien anzuwenden und Schulbibliotheken, öffentliche Bibliotheken sowie andere Informationssysteme real und virtuell zur selbstständigen Erarbeitung von Themen in allen Gegenständen zu nutzen.“ Somit wäre eine Möglichkeit, die Schülerinnen und Schüler selbst den historischen Hintergrund von Sangaku recherchieren und in Form von kleinen Referaten präsentieren zu lassen. Auch die Bearbeitung von Sangaku-Aufgaben kann im Format des offenen Lernens erfolgen. Viele unterschiedliche Aufgaben werden den Schülerinnen und Schülern angeboten und sie selbst wählen, welche sie bearbeiten wollen. Ihre Ergebnisse können Sie dann im Klassenverband präsentieren.

Dies waren nur einige Ideen, um die allgemeinen didaktischen Grundsätze umzusetzen. Der Phantasie der Lehrkräfte sind natürlich keine Grenzen gesetzt.

Im dritten Teil des Lehrplans „Schul- und Unterrichtsplanung“ werden neben Vorgaben, wie eine Unterrichtsplanung anzulegen ist, auch Möglichkeiten erläutert, schulspezifische Schwerpunkte zu setzen. Es wird die Einteilung des Lehrplans in „Kern- und Erweiterungsbereiche“ erläutert, wonach zwei Drittel der Unterrichtszeit für Themengebiete aus dem klar definierten Kernbereich zu verwenden sind und das restliche Drittel für ein vom Lehrer oder fächerübergreifendem Team von Lehrern festgelegtem Erweiterungsbereich zu verplanen sind. Es ist dadurch also leicht möglich, Sangaku im Erweiterungsbereich zu verankern und diese im Unterricht zu behandeln.

Der fünfte Punkt im Teil „Schul- und Unterrichtsplanung“ lautet „Fächerübergreifender und fächerverbindender Unterricht“. Hier wird erläutert, dass der traditionelle Fachunterricht durch Spezialisierung der Lehrkräfte zwar weiterhin besteht, aber viele Themenbereiche nur durch ein Zusammenwirken mehrerer Unterrichtsgegenstände bewältigt werden können. Es besteht die Möglichkeit des fächerverbindenden Unterrichts, wobei „Lehrerinnen und Lehrer im Rahmen ihres Fachunterrichts mögliche, die Fachgrenzen überschreitende Sinnzusammenhänge herzustellen“ haben. Die andere Möglichkeit ist der fächerübergreifende Unterricht, bei dem zu einem Thema „z.B. im Sinne des Projektunterrichts“ unterschiedliche Fächer ihren Beitrag dazu leisten können. Auch hierfür eignen sich Sangaku sehr gut, da nicht nur Mathematik sondern auch Geschichte, Religion und Kunst eine Rolle spielen.

5.1.2. Mathematik-Lehrplan der AHS-Unterstufe

Im Mathematik-Lehrplan der AHS-Unterstufe wird zuerst die „Bildungs- und Lehraufgabe“ definiert, danach werden die „Didaktische[n] Grundsätze“ diskutiert und zuletzt erfolgt die Auflistung des „Lehrstoff[s]“. Der Lehrstoff selbst wird für jede Klasse separat angegeben und gliedert sich jeweils in „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“, „Arbeiten mit Variablen“, „Arbeiten mit Figuren und Körpern“ sowie „Arbeiten mit Modellen, Statistik“.

Bei Betrachtung des Lehrstoffs lässt sich feststellen, dass vermutlich frühestens in der dritten Klasse, wahrscheinlich aber erst in der vierten die Behandlung von Sangaku erfolgreich stattfinden kann. Ein wesentlicher Satz zur Lösung der meisten Sangaku ist der Lehrsatz des Pythagoras und erst in der dritten Klasse steht „den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren nutzen können“. Aber auch hier wird es vermutlich zu früh sein, da erst in der vierten Klasse „Berechnungsmöglichkeiten mit Variablen darstellen können“ im Bereich

„Arbeiten mit Figuren und Körpern“ angesiedelt ist. Somit liegt es nahe, dass die ersten Sangaku erst in der 4. Klasse gelöst werden können.

5.1.3. Mathematik-Lehrplan der AHS-Oberstufe

Auch im Mathematik-Lehrplan der AHS-Oberstufe wird zuerst die „Bildungs- und Lehraufgabe“ definiert, danach werden wieder die „Didaktische[n] Grundsätze“ diskutiert und zuletzt erfolgt erneut die Auflistung des „Lehrstoff[s]“. Wiederum wird der Lehrstoff für jede Klasse separat angegeben.

Die fünfte Klasse eignet sich vermutlich am besten, um sich intensiver mit Sangaku zu beschäftigen, da hier das Kapitel „Trigonometrie“ mit den Punkten „Definieren von $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ für $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ “ und „Durchführen von Berechnungen an rechtwinkligen und allgemeinen Dreiecken, an Figuren und Körpern (auch mittels Sinus- und Kosinussatz)“ vorkommt. Auch das Kapitel „Gleichungen und Gleichungssysteme“ bei dem es um „Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen in einer Variablen“, „Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen“ und „Anwenden der oben genannten Gleichungen und Gleichungssysteme auf inner- und außermathematische Probleme“ geht, bietet sich für die Einbindung von Sangaku in den Unterricht an.

In der sechsten Klasse findet man im Lehrplan kaum Gelegenheit, Sangaku einzubinden. Nur im Kapitel „Folgen“ würde sich z.B. die Sangaku-Aufgabe 4.2 anbieten.

In der siebenten Klasse lassen sich die Sangaku im Rahmen des „Lösen von Extremwertaufgaben“ im Kapitel „Differentialrechnung“ verorten.

In der achten Klasse könnte theoretisch das „umfassende[...] Wiederholen, Vertiefen und Vernetzen von Stoffgebieten“ kurz vor der Matura eine Möglichkeit bieten, mit Hilfe von Sangaku einige Stoffgebiete miteinander zu vernetzen. Es erscheint jedoch angesichts des normalerweise sehr großen Zeitdrucks eher unwahrscheinlich.

5.1.4. Lehrplan des Wahlpflichtfachs Mathematik

Der Lehrplan des Wahlpflichtfaches lässt sehr viele Freiheiten. Die Bildungs- und Lehraufgabe ist es, „den Schülerinnen und Schülern gemäß ihren Interessen eine Erweiterung bzw. Vertiefung ihres Bildungshorizontes zu bieten.“ Die didaktischen Grundsätze unterscheiden sich nicht von jenen des Pflichtgegenstandes. Weiters wird erwähnt, dass unter anderem der Arbeit mit dem Computer eine zentrale Rolle beigemessen werden soll. Auch beim Lehrstoff ist an erster Stelle zu lesen: „Wie Lehrplan des Pflichtgegenstandes Mathematik.“ Danach werden noch mögliche Themengebiete für die Erweiterung aufgezählt: „Klassische Probleme der Mathematik; geometrische Probleme; [...]; zahlentheoretische Probleme, [...].“ In die hier aufge-

zählten Bereiche passen Sangaku natürlich auch. Somit bietet das Wahlpflichtfach den optimalen Rahmen, um sich intensiv über längere Zeit mit Sangaku auseinanderzusetzen, sofern die Schülerinnen und Schüler Interesse daran zeigen.

Abschließend ist anzumerken, dass Sangaku natürlich nirgendwo direkt im Mathematik-Lehrplan verankert sind, sie jedoch an mehreren Stellen in unterschiedlichen Kontexten eine Bereicherung für den Mathematikunterricht darstellen können.

Da es schwierig ist, das Thema Sangaku in nur einer Schulstufe zu verankern, wäre es also eine Überlegung wert, die Sangaku als wiederkehrendes Element im Mathematikunterricht über mehrere Schulstufen zu behandeln.

Beginnend in der vierten Klasse mit einfachen Aufgaben, die sich ausschließlich mithilfe des pythagoreischen Lehrsatzes lösen lassen, kann die Bearbeitung der Sangaku bis in die achte Klasse fortgesetzt werden.

Nur bei der ersten Thematisierung in der vierten Klasse ist mehr Zeit einzuplanen, um auch den historischen Hintergrund und Allgemeines über Sangaku zu besprechen. Später kann immer wieder Bezug darauf genommen werden und sobald eine oder mehrere Aufgaben zum aktuellen Lehrstoff passen, können diese einfach zwischendurch behandelt werden.

5.2. Dynamische Geometrie mit GeoGebra

Die bereits zur Lösung der Aufgabe 4.6 verwendete Software GeoGebra „ist eine kostenlose dynamische Mathematiksoftware für SchülerInnen und LehrerInnen aller Altersstufen. Sie verbindet Geometrie, Algebra, Tabellen, Zeichnungen, Statistik und Analysis in einem einfach zu bedienenden Softwarepaket.“¹⁰⁰ Das Programm erfreut sich mittlerweile großer Beliebtheit und ist bereits an vielen österreichischen Schulen im Mathematikunterricht im Einsatz. Ein wesentlicher Vorteil des Programmes ist, dass bei allen „geometrischen Objekten nicht nur die übliche geometrische, sondern auch eine algebraische Schnittstelle zur Verfügung“¹⁰¹ gestellt wird. Somit sind alle Objekte sowohl im Grafik-Fenster auf der rechten Seite als auch im Algebra-Fenster links sichtbar. (siehe Abbildung 51)

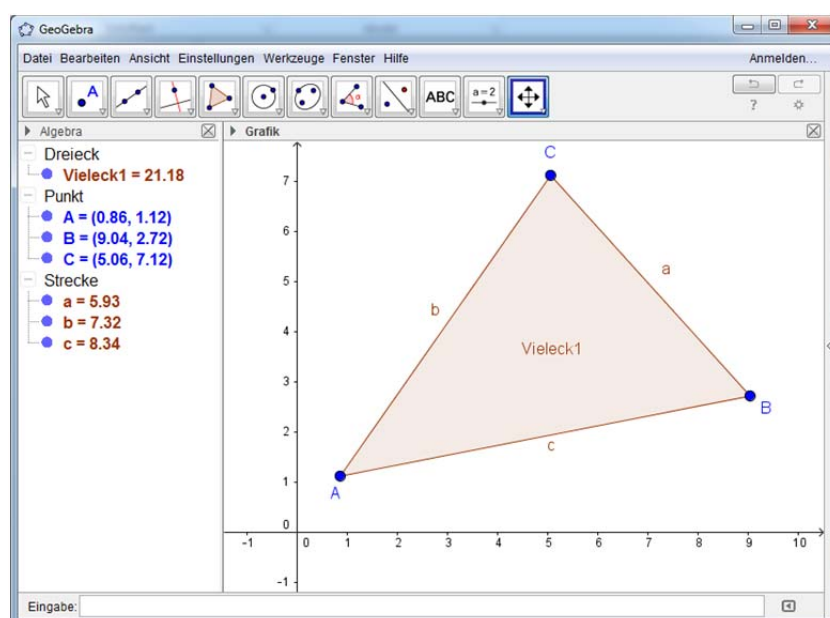


Abbildung 51: GeoGebra-Screenshot

Dies ermöglicht es, auch mit den Objekten Berechnungen durchzuführen. Diese Verknüpfung von Algebra mit Geometrie bringt somit auch für die Bearbeitung von Sangaku große Vorteile.

Die Erstellung neuer Objekte geschieht mithilfe der Werkzeuge in der oberen Werkzeugleiste. Für eine ausführliche Einführung in die Verwendung von GeoGebra sei auf die Internetseite <https://www.geogebra.org/manual/de/Anleitungen> verwiesen.

Wie GeoGebra für Sangaku genutzt werden kann, wird nun anhand ausgewählter Aufgaben gezeigt.

☞ Alle im Folgenden besprochenen GeoGebra-Dateien finden Sie auch unter <http://sangaku.geppel.at>

¹⁰⁰ <http://www.geogebra.org/about> (16. April 2016)

¹⁰¹ <https://de.wikipedia.org/wiki/GeoGebra> (23. April 2016)

5.2.1. Aufgabe 4.1 mit GeoGebra

In Aufgabe „4.1 Drei benachbarte Kreise“ sind zwei sich berührende Kreise und eine Gerade, welche Tangente beider Kreise ist, gegeben. Gesucht ist jener Kreis, der beide Kreise und die Gerade berührt.

Das bedeutet zuerst müssen in GeoGebra die beiden gegebenen Kreise sowie die Tangente konstruiert werden. z.B. wählt man $r_1 = 4$ und $r_2 = 3$ (siehe Abbildung 52)

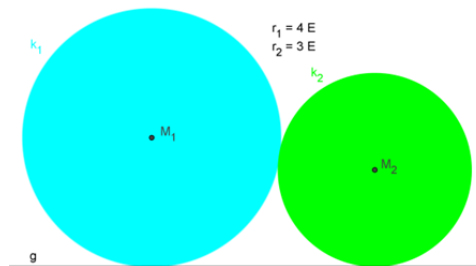


Abbildung 52: GeoGebra: Ausgangssituation der Aufgabe 4.1

Da nun nicht bekannt ist, wie groß r_3 sein soll, kann man hierfür einen Schieberegler erstellen. Das Werkzeug „Schieberegler“ verlangt nach einem Namen für die Variable und einem Intervall in dem sich die Variable befinden soll. In unserem Fall erscheint $r_3 \in [0; 2]$ sinnvoll. Die Schrittweite mit der r_3 variieren soll ist vermutlich mit 0.01 gut gewählt.

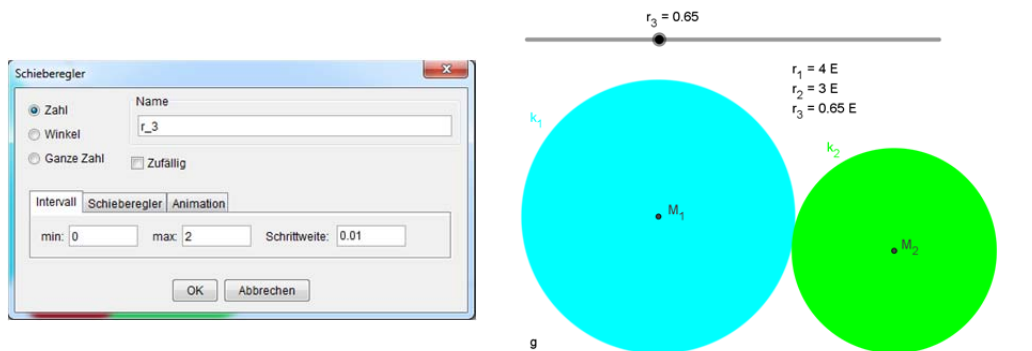


Abbildung 53: GeoGebra: Schieberegler erstellen

Es erscheint der Schieberegler mit welchem r_3 variiert werden kann. Nun muss noch der Mittelpunkt M_3 des Kreises k_3 konstruiert werden. Dazu erstellt man einen Hilfskreis mit Mittelpunkt M_1 und Radius $r_1 + r_3$. Hierzu verwende man das Werkzeug „Kreis mit Mittelpunkt und Radius“ und klicke auf M_1 . Danach wird der Radius $r_1 + r_3$ eingegeben. Bei Bewegung des Schiebereglers variiert die Größe des neuen Hilfskreises.

Nun kann man entweder einen zweiten Hilfskreis um M_2 mit Radius $r_2 + r_3$ konstruieren oder man konstruiert eine zu g parallele Hilfsgerade im Abstand von r_3 .

Egal wofür man sich entscheidet, der Schnittpunkt der beiden Hilfsobjekte soll der Mittelpunkt M_3 des gesuchten Kreises werden. Zuletzt muss also nur noch der Kreis k_3 mit Mittelpunkt M_3 und Radius r_3 erzeugt werden.

Durch Bewegung des Schiebereglers variiert r_3 und damit die ganze Konstruktion. Auf diese Weise lässt sich näherungsweise der passende Kreis und damit der passende Radius finden. (siehe Abbildung 54)

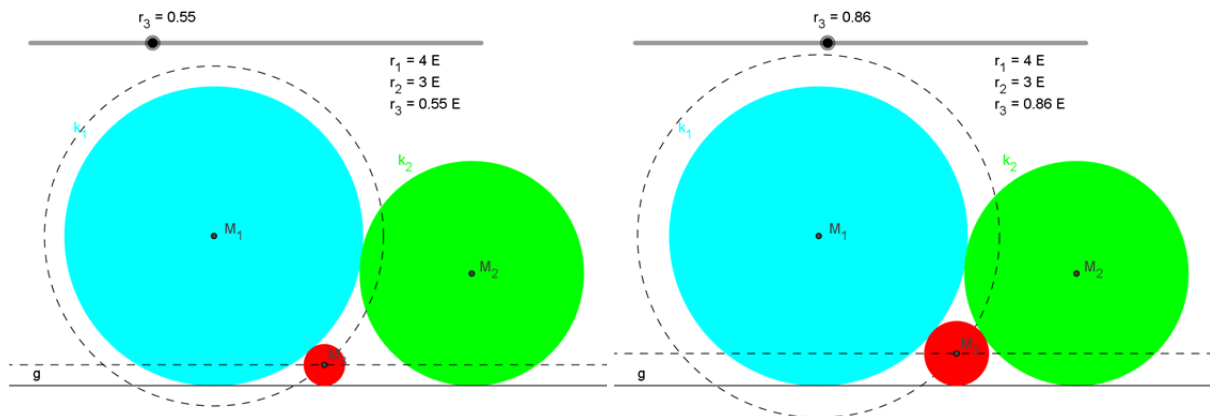


Abbildung 54: GeoGebra: Schieberegler verwenden

Mit GeoGebra ist es damit möglich, den Schülerinnen und Schülern ein Gefühl dafür zu geben, dass ein solcher Kreis überhaupt existiert und dass man ihn finden kann. Hat man ihn rechnerisch schon gefunden (beispielsweise gemäß Lösungsweg in Kapitel 4.1), so kann er auf diese Weise natürlich auch numerisch überprüft werden. Klickt man im Algebra-Fenster doppelt auf r_3 , so hat man die Möglichkeit, die Variable neu zu definieren. Schreibt man also $r_3 = 1 / (1/\sqrt{r_1} + 1/\sqrt{r_2})^2$, so verschwindet der Schieberegler und der Kreis k_3 hat exakt die richtige Größe.

5.2.2. Aufgabe 4.6 mit GeoGebra

Die Aufgabe „4.6 Ein Fünfeck und fünf Rechtecke im Kreis“ ist im Wesentlichen eine Extremwertaufgabe, wie sie in der 7. Klasse AHS gestellt werden kann. Es geht darum, die Seite eines Rechtecks zu finden, sodass der Flächeninhalt maximal wird. Um ein Gespür dafür zu bekommen, dass sich der Flächeninhalt tatsächlich in Abhängigkeit von der Seitenlänge ändert und es einen Maximalwert gibt, kann wiederum der Schieberegler helfen.

Die Seitenlänge des Rechtecks variiert von 0 bis r . Der Flächeninhalt des Rechtecks kann mit Hilfe eines Textfeldes angezeigt werden. (siehe Abbildung 55)

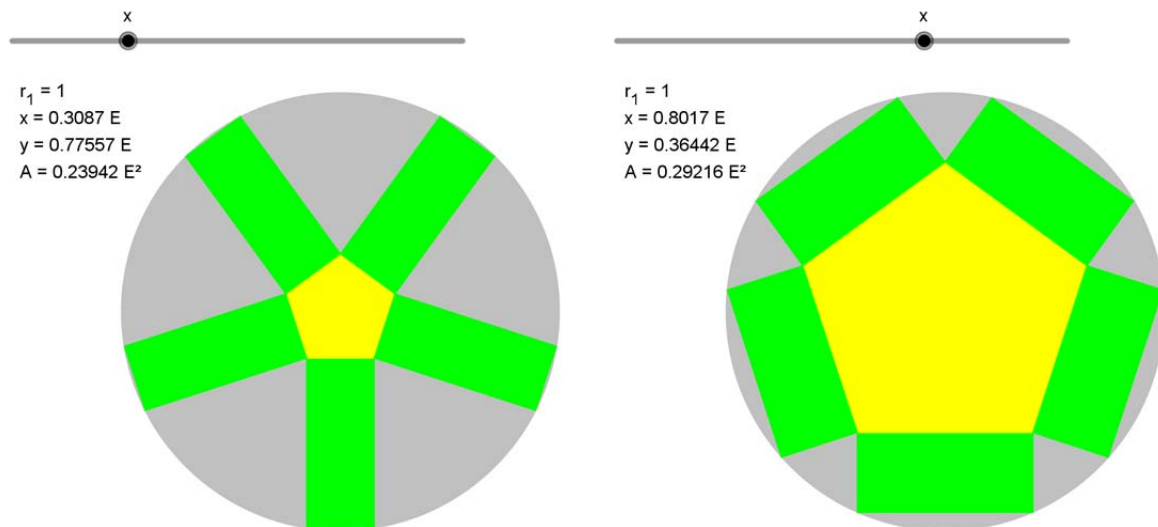


Abbildung 55: GeoGebra: Aufgabe 4.6

Da das Erstellen dieser GeoGebra-Datei relativ aufwändig ist, wird es im Unterricht besser sein, einfach die fertige Datei (die Sie online finden) zu verwenden, um die Situation zu veranschaulichen.

5.2.3. Aufgabe 4.8 mit GeoGebra

Ganz ähnlich ist auch die Extremwertaufgabe „4.8 Ein Quadrat im Rhombus“. Der Parameter t kann über den Schieberegler so lange variiert werden, bis der maximale Flächeninhalt gefunden ist. (siehe Abbildung 56)

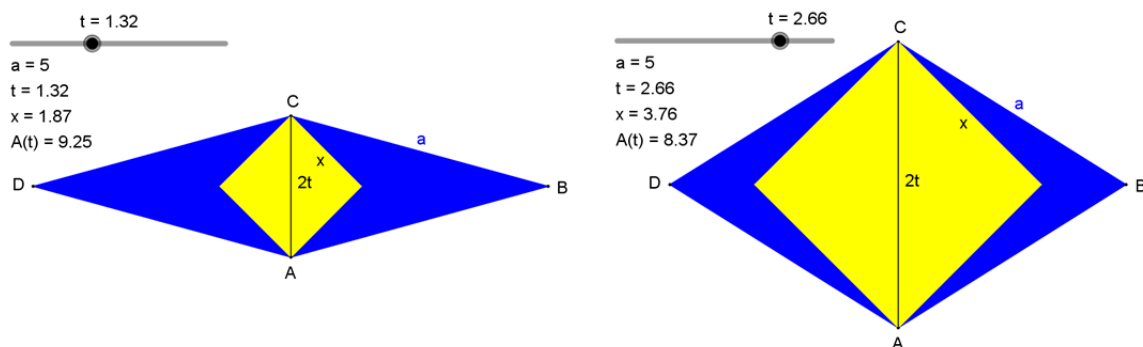


Abbildung 56: GeoGebra: Aufgabe 4.8

Auch diese Datei finden Sie online, um sie im Unterricht einsetzen zu können.

5.3. Konstruktion mit Zirkel und Lineal

In der Sangaku-Tradition Japans wurde in erster Linie nach algebraischen Lösungen der Aufgaben gesucht. Eine weitere, damit verwandte, aber andere Fragestellung, der man sich im Unterricht widmen kann, ist die Konstruierbarkeit der Sangaku. Schon in der Antike stellten sich viele europäische Mathematiker die Frage nach der Konstruierbarkeit von geometrischen Figuren ausschließlich mit Hilfe von Zirkel und Lineal. Heute weiß man, dass folgende algebraischen Operationen mittels Zirkel und Lineal immer konstruiert werden können: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zweier Zahlen sowie das Quadratwurzelziehen einer nichtnegativen Zahl.

Da der Großteil der Sangaku in ihren algebraischen Lösungen ausschließlich diese grundlegenden Rechenoperationen verwendet, eignen sich diese hervorragend, um die Konstruktion mit Zirkel und Lineal an ihnen zu erproben.

5.3.1. Erklärung der Konstruktion der Grundrechnungsarten

Im Folgenden ist die Vorgehensweise bei den vier Grundrechnungsarten sowie beim Quadratwurzelziehen kurz erläutert.¹⁰²

5.3.1.1. Addition

Um zwei Zahlen a und b zu addieren, zeichne man zuerst eine Gerade. Auf dieser Geraden wird die Strecke $a = \overline{A_1A_2}$ abgeschlagen. Von deren Endpunkt $A_2 = B_1$ schlage man nun die Strecke $b = \overline{B_1B_2}$ ab. Die Strecke $\overline{A_1B_2}$ entspricht der Zahl $a + b$.

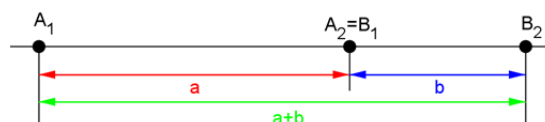


Abbildung 57: Konstruktion der Summe zweier Zahlen

5.3.1.2. Subtraktion

Die Differenz zweier Zahlen a und b wird konstruiert, indem man zuerst die Strecke $a = \overline{A_1A_2}$ auf einer Geraden abschlägt und danach von deren Endpunkt $A_2 = B_1$ in die entgegengesetzte Richtung die Strecke $b = \overline{B_1B_2}$ abschlägt. Die Strecke $\overline{A_1B_2}$ entspricht der Zahl $a - b$.

¹⁰² vgl.: https://de.wikipedia.org/wiki/Konstruktion_mit_Zirkel_und_Lineal#Algebraische_Operationen (20. März 2016)

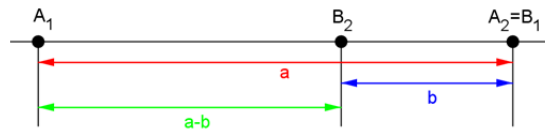


Abbildung 58: Konstruktion der Differenz zweier Zahlen

5.3.1.3. Multiplikation

Um die Zahlen a und b zu multiplizieren, gehe man wie folgt vor: Von einem Punkt S ausgehend zeichne man zwei Strahlen. Auf dem einen Strahl schlage man die Strecke $a = \overline{SA}$ sowie eine Strecke $\overline{SE}$ mit Länge 1 von S ausgehend ab. Am anderen Strahl wird die Strecke $b = \overline{SB}$ aufgetragen. Man verbinde E mit B durch eine Gerade und verschiebe diese parallel durch A . Der Schnittpunkt dieser parallelen Gerade mit dem zweiten Strahl sei C . Die Strecke $\overline{SC}$ entspricht der Zahl $a \cdot b$.

Begründung: Gemäß Strahlensatz gilt $\overline{SE} : \overline{SA} = \overline{SB} : \overline{SC}$, also $1 : a = b : \overline{SC}$, woraus $\overline{SC} = a \cdot b$ folgt.

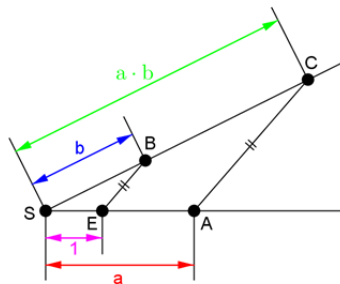


Abbildung 59: Konstruktion des Produkts zweier Zahlen

5.3.1.4. Division

Um den Quotienten $\frac{a}{b}$ zu konstruieren, zeichne man von einem Punkt S ausgehend zwei Strahlen. Auf dem einen Strahl schlage man die Strecke $a = \overline{SA}$ ab. Am anderen Strahl wird die Strecke $b = \overline{SB}$ sowie eine Strecke $\overline{SE}$ mit Länge 1 von S ausgehend aufgetragen. Man verbinde A mit B durch eine Gerade und verschiebe diese parallel durch E . Der Schnittpunkt dieser parallelen Gerade mit dem ersten Strahl sei C . Die Strecke $\overline{SC}$ entspricht der Zahl $\frac{a}{b}$.

Begründung: Gemäß Strahlensatz gilt $\overline{SC} : \overline{SA} = \overline{SE} : \overline{SB}$, also $\overline{SC} : a = 1 : b$, woraus $\overline{SC} = \frac{a}{b}$ folgt.



Die Quadratwurzel einer Zahl a wird konstruiert indem man auf einer Geraden die Strecke $\overline{E_1E_2}$ mit Länge 1 abschlägt und von $E_2 = A_1$ die Strecke $a = \overline{A_1A_2}$ aufträgt. Man errichte nun über $\overline{E_1A_2}$ einen Halbkreisbogen und lege durch A_1 die Senkrechte auf $\overline{E_1A_2}$. Der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit dem Halbkreisbogen sei S . Die Strecke $\overline{A_1S}$ entspricht der Zahl $\sqrt{a}$.

5.3.2. Konstruktion einer Sangaku-Aufgabe

Aufgabe: Die Kreise $k_1[M_1; r_1]$ und $k_2[M_2; r_2]$ berühren einander von außen und sie berühren die Gerade g . Man konstruiere jenen Kreis $k_3[M_3; r_3]$, der sowohl die beiden Kreise k_1 und k_2 als auch die Gerade g berührt (siehe Abbildung 62).

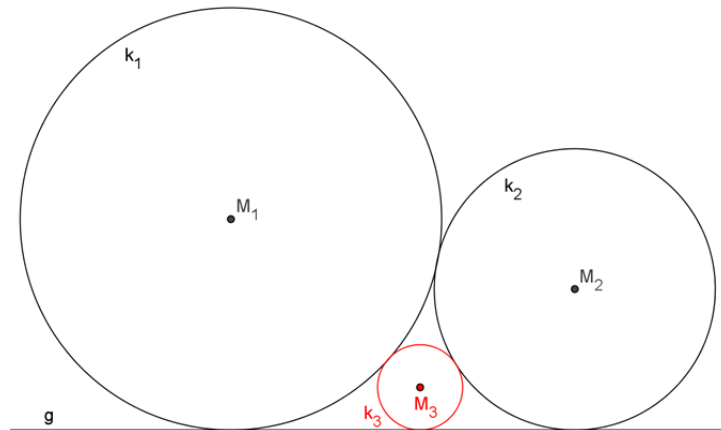


Abbildung 62: Konstruktionsaufgabe Drei benachbarte Kreise

Lösung: Aus der Aufgabe 4.1 ist bekannt, dass $\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$ gilt, was wiederum bedeutet,

dass $r_3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)^2}$. Dieser Ausdruck lässt sich geometrisch konstruieren, da nur die

Grundrechnungsarten, das Wurzelziehen und das Quadrieren (welches als Multiplikation mit sich selbst ebenfalls konstruiert werden kann) darin vorkommen.

Um r_3 zu konstruieren, ist es zuerst notwendig $\sqrt{r_1}$ und $\sqrt{r_2}$, wie in Abbildung 63, zu konstruieren.

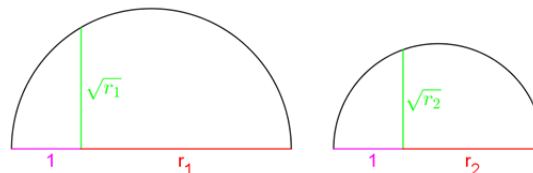


Abbildung 63: Konstruktion der Quadratwurzeln der Radien

In Abbildung 64 werden die Kehrwerte davon, also $\frac{1}{\sqrt{r_1}}$ und $\frac{1}{\sqrt{r_2}}$, konstruiert.

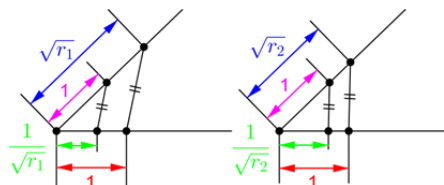


Abbildung 64: Konstruktion der Kehrwerte der Quadratwurzeln

Deren Summe, also $\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$, wird wie in Abbildung 65 konstruiert.

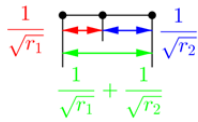


Abbildung 65: Konstruktion der Summe der Kehrwerte

Danach folgt das Quadrieren, also die Konstruktion der Multiplikation mit sich selbst, um den

Ausdruck $\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)^2$ zu erhalten. (siehe Abbildung 66)

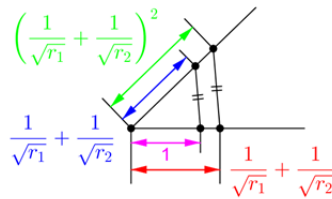


Abbildung 66: Konstruktion des Quadrats der Summe

Zuletzt muss nun erneut der Kehrwert gebildet werden, wodurch man $r_3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)^2}$ er-

hält. (siehe Abbildung 67)

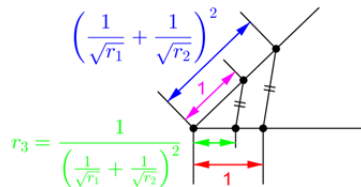


Abbildung 67: Konstruktion des Kehrwerts des Quadrats

Da r_3 nun bekannt ist, ist es möglich einen Kreis k_4 mit Mittelpunkt M_1 und Radius $r_1 + r_3$ zu konstruieren. Weiters wird eine Gerade h parallel zu g im Abstand von r_3 benötigt. Der Schnittpunkt von k_4 mit h ist der Mittelpunkt M_3 des Kreises k_3 . (siehe Abbildung 68)

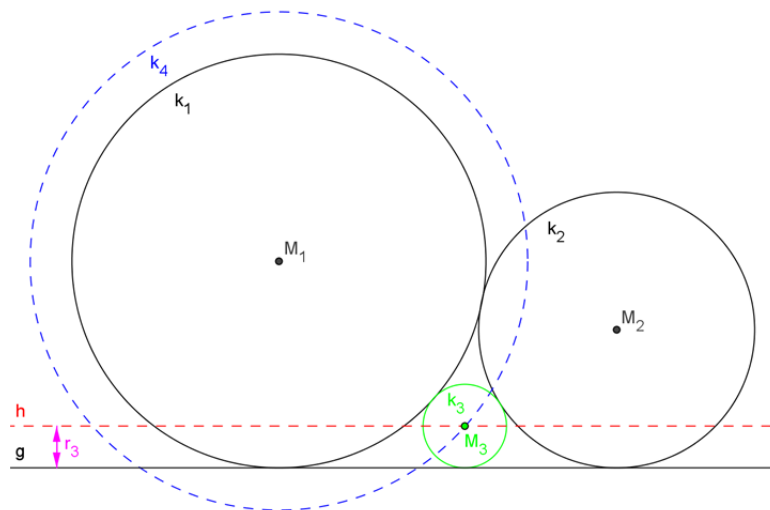


Abbildung 68: Konstruktion des dritten Kreises

5.3.3. Das Problem mit der Einheit 1

Die Konstruktionen einer Multiplikation, einer Division und auch einer Quadratwurzel erfordern es, dass die Einheit 1 gegeben ist. Diese ist im Normalfall jedoch nicht bekannt. Alternativ kann man versuchen, ob die Konstruktion auch mit einer frei gewählten Einheit e funktioniert. Bei der in Kapitel 5.3.2 ausgewählten Aufgabe 4.1 ist dies auch der Fall.

Konstruiert man nämlich das Produkt von a und b so wie in Kapitel 5.3.1.3, mit der Einheit e anstelle von 1, so konstruiert man in Wirklichkeit die Zahl $\frac{a \cdot b}{e}$.

Bei der Konstruktion des Quotienten von a und b so wie in Kapitel 5.3.1.4, mit der Einheit e anstelle von 1, ergibt sich $\frac{a}{b} \cdot e$.

Die Konstruktion der Quadratwurzel von a so wie in Kapitel 5.3.1.5, mit der Einheit e anstelle von 1, führt tatsächlich zur Zahl $\sqrt{a \cdot e}$.

Führt man nun die gesamte Konstruktion des Kapitels 5.3.2 erneut durch, so ergibt sich folgendes:

Anstelle von $\sqrt{r_1}$ und $\sqrt{r_2}$ erhält man $\sqrt{r_1 \cdot e}$ und $\sqrt{r_2 \cdot e}$.

Beim Bilden der Kehrwerte davon entstehen $\frac{e}{\sqrt{r_1 \cdot e}} \cdot e$ und $\frac{e}{\sqrt{r_2 \cdot e}} \cdot e$.

Die Summe davon ergibt $\frac{e^2}{\sqrt{r_1 \cdot e}} + \frac{e^2}{\sqrt{r_2 \cdot e}}$.

Die Konstruktion des Quadrats liefert $\frac{\left(\frac{e^2}{\sqrt{r_1 \cdot e}} + \frac{e^2}{\sqrt{r_2 \cdot e}} \right)^2}{e}$.

Zuletzt wird erneut der Kehrwert konstruiert, welcher zu $\frac{e}{\left(\frac{e^2}{\sqrt{r_1 \cdot e}} + \frac{e^2}{\sqrt{r_2 \cdot e}}\right)^2} \cdot e$ führt.

Algebraische Vereinfachungen dieses Ausdrucks zeigen, dass es sich dabei um das gesuchte r_3 handelt.

$$\frac{e}{\left(\frac{e^2}{\sqrt{r_1 \cdot e}} + \frac{e^2}{\sqrt{r_2 \cdot e}}\right)^2} \cdot e = \frac{e^3}{\left(\frac{e^2}{\sqrt{e}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)^2} = r_3$$

In diesem Fall funktioniert die Konstruktion also mit beliebig gewählter Einheit e . Im Allgemeinen kann jedoch leider nicht davon ausgegangen werden, dass dies bei jeder Konstruktion so ist.

5.4. Die Berührungsprobleme des Apollonius von Perge

Apollonius von Perge (ca. 262-190 v.Chr.) war ein griechischer Mathematiker der Antike. Er formulierte das apollonische Berührproblem: „Zu drei gegebenen Kreisen einer Ebene ist ein Kreis (sind Kreise) zu konstruieren, der (die) diese berührt (berühren). Die Konstruktion ist mit Zirkel und Lineal auszuführen.“¹⁰³

Bezieht man auch entartete Kreise, also Punkte ($r \rightarrow 0$) und Geraden ($r \rightarrow \infty$), mit ein, so entstehen diese 10 Aufgabenstellungen:

„Konstruiere einen Kreis, der

- | | |
|--|-------------|
| ➤ durch drei gegebene Punkte geht. | $P_1P_2P_3$ |
| ➤ drei gegebene Geraden berührt. | $g_1g_2g_3$ |
| ➤ durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt. | $P_1P_2g_1$ |
| ➤ durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt. | $P_1P_2k_1$ |
| ➤ durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Geraden berührt. | $P_1g_1g_2$ |
| ➤ zwei gegebene Geraden und einen Kreis berührt. | $g_1g_2k_1$ |
| ➤ durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt. | $P_1g_1k_1$ |
| ➤ eine gegebene Gerade und zwei gegebene Kreise berührt. | $g_1k_1k_2$ |
| ➤ durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Kreise berührt. | $P_1k_1k_2$ |
| ➤ drei gegebene Kreise berührt.“ ¹⁰⁴ | $k_1k_2k_3$ |

Diese zehn Fälle findet man auch in vielen der Sangaku-Aufgaben wieder. Will man beispielsweise die Sangaku-Aufgabe 4.1 alleine mit Zirkel und Lineal konstruieren, so kann man auf den Fall $g_1k_1k_2$ zurückgreifen.

In diesem Kapitel werden die Lösungen aller zehn apollonischen Berührprobleme vorgestellt und anhand der Aufgabe 4.1 „Drei benachbarte Kreise“ in einer konkreten Situation angewandt.

5.4.1. Lösungen der Berührprobleme

Alle hier angeführten Lösungen orientieren sich an dem Artikel „Die Berührprobleme des Apollonius von Perge“ von Günther Steinberg aus der Zeitschrift „Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht“ aus dem Jahre 1984.

¹⁰³ Steinberg (1984) Der mathematische und naturwissenschaftliche UnterrichtS. 336

¹⁰⁴ Steinberg (1984) Der mathematische und naturwissenschaftliche UnterrichtS. 337

5.4.1.1. $P_1P_2P_3$

Die beiden Streckensymmetralen von $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_1P_3}$ schneiden einander im gesuchten Mittelpunkt M . Der Radius r des gesuchten Kreises ist $\overline{P_1M}$. (siehe Abbildung 69)

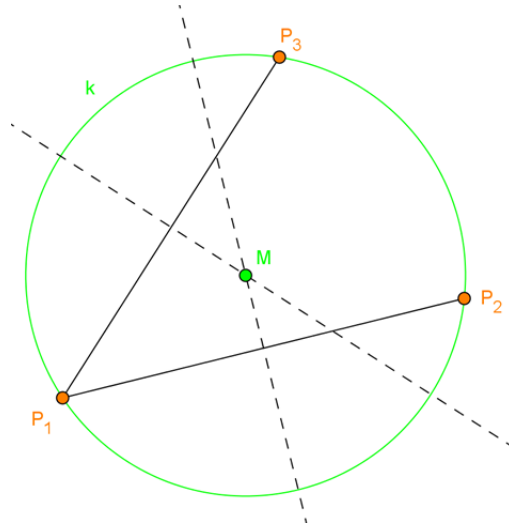


Abbildung 69: Lösung $P_1P_2P_3$

Es handelt sich dabei um die klassische Konstruktion des Umkreises eines Dreiecks, wie sie in jeder AHS-Unterstufe besprochen wird.

5.4.1.2. $g_1g_2g_3$

Die Schnittpunkte der Winkelsymmetralen von $\angle(g_1, g_2)$, $\angle(g_1, g_3)$ und $\angle(g_2, g_3)$ bilden die Mittelpunkte M_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, der gesuchten 4 Kreise. Der Radien werden durch die Lote von M_i auf g_j , $j \in \{1, 2, 3\}$, ermittelt. (siehe Abbildung 70)

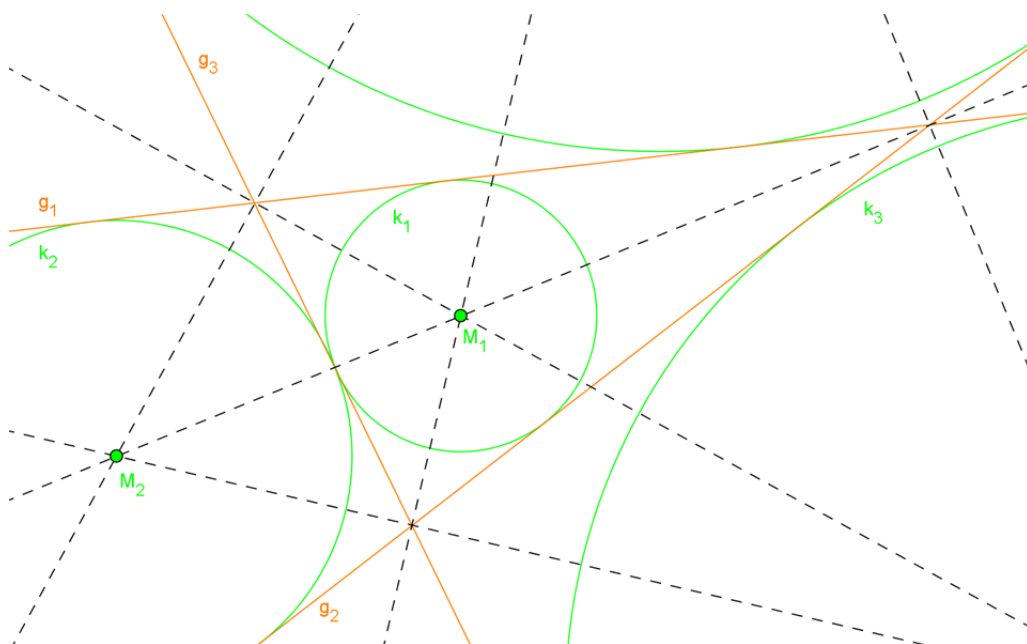


Abbildung 70: Lösung $g_1g_2g_3$

Wie leicht zu erkennen ist, handelt es sich dabei um die Konstruktion des Inkreises bzw. der Ankreise eines Dreiecks, wie sie zumeist ebenso in der AHS-Unterstufe durchgenommen wird.

5.4.1.3. $P_1P_2g_1$

g_1 schneidet die Gerade durch P_1 und P_2 in S (siehe Abbildung 71). Der Thaleskreis über $\overline{SP_2}$ schneidet die Senkrechte zu P_1P_2 durch P_1 in H . Der Kreis um S mit Radius $\overline{SH}$ schneidet g_1 in Q (bzw. Q'). Die gesuchten Kreis gehen durch Q (bzw. Q'), P_1 und P_2 . Die weitere Konstruktion verläuft gemäß Kapitel 5.4.1.1.

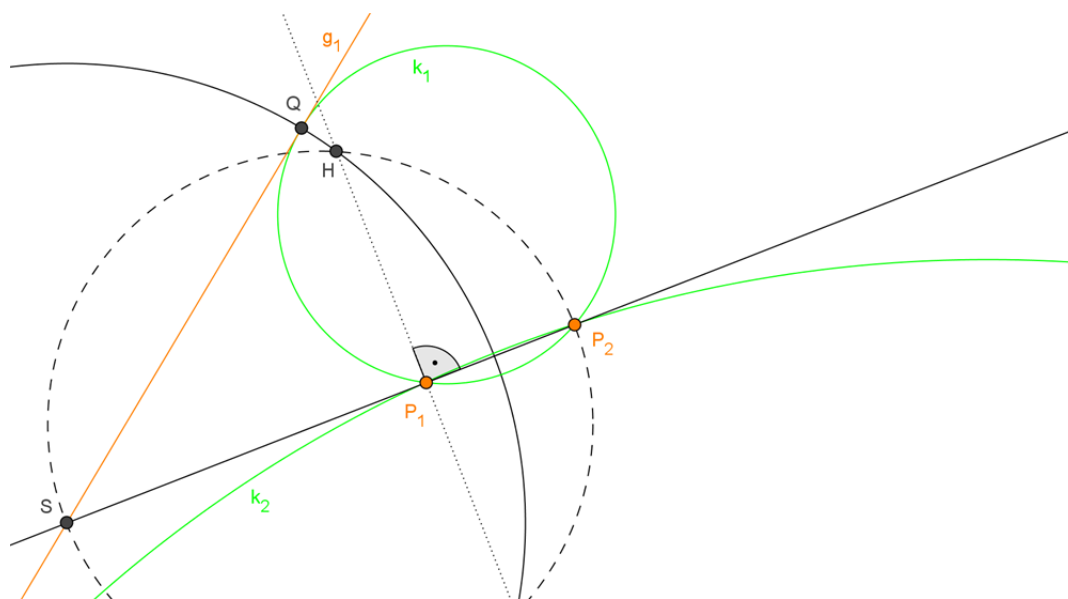


Abbildung 71: Lösung $P_1P_2g_1$

Beweis: Nach dem Kathetensatz gilt $\overline{SH}^2 = \overline{SP_1} \cdot \overline{SP_2}$. Wegen $\overline{SH} = \overline{SQ}$ gilt $\overline{SQ}^2 = \overline{SP_1} \cdot \overline{SP_2}$. Nach der Umkehrung des Sekanten-Tangentensatzes (siehe Kapitel 3.9) ist SQ Tangente an den Kreis durch P_1 , P_2 und Q . $\square$

5.4.1.4. $P_1P_2k_1$

Man zeichnet einen Hilfskreis h durch P_1 und P_2 , der k_1 in Q_1 und Q_2 schneidet. Die Gerade durch P_1 und P_2 schneidet die Gerade durch Q_1 und Q_2 in S . (siehe Abbildung 72)

Von S aus legt man die Tangenten an k_1 . Die Berührungspunkte seien B bzw. B' . Der Kreis durch P_1 , P_2 und B (bzw. B') hat SB als Tangente. Die weitere Konstruktion verläuft gemäß Kapitel 5.4.1.1.

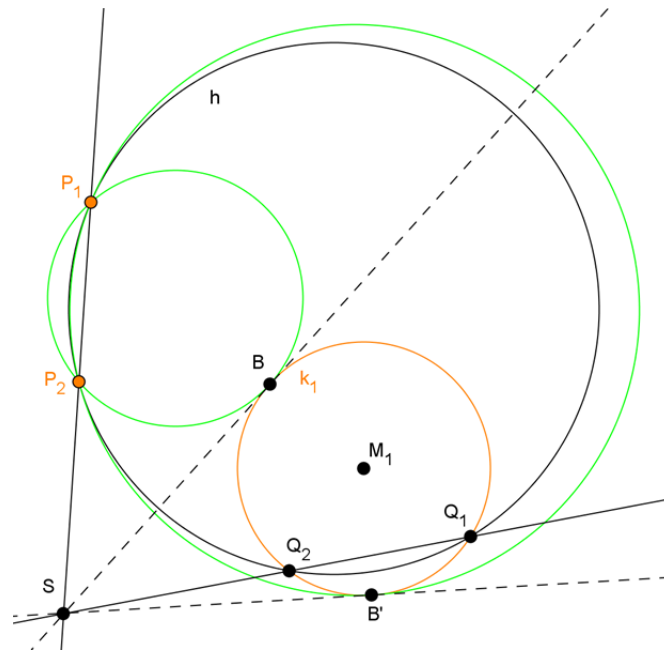


Abbildung 72: Lösung $P_1P_2k_1$

Beweis: Es gilt $\overline{SP_1} \cdot \overline{SP_2} = \overline{SQ_1} \cdot \overline{SQ_2}$ (gemäß 3.7 Sekantensatz) und $\overline{SQ_1} \cdot \overline{SQ_2} = \overline{SB}^2$ (gemäß 3.8 Sekanten-Tangentensatz), also $\overline{SP_1} \cdot \overline{SP_2} = \overline{SB}^2$.

SB ist also gemäß Umkehrung des Sekanten-Tangentensatzes (siehe 3.9) Tangente an den Kreis durch P_1 , P_2 und B . □

5.4.1.5. $P_1g_1g_2$

Man zeichnet s , die Winkelsymmetrale von $\angle(g_1, g_2)$, und spiegelt P_1 an s . Der gespiegelte Punkt sei P_1' . Der gesuchte Kreis geht durch P_1 und P_1' und berührt g_1 (und damit auch g_2 aufgrund der Eigenschaft der Achsenspiegelung). (siehe Abbildung 73)

Die weitere Konstruktion verläuft gemäß Kapitel 5.4.1.3.

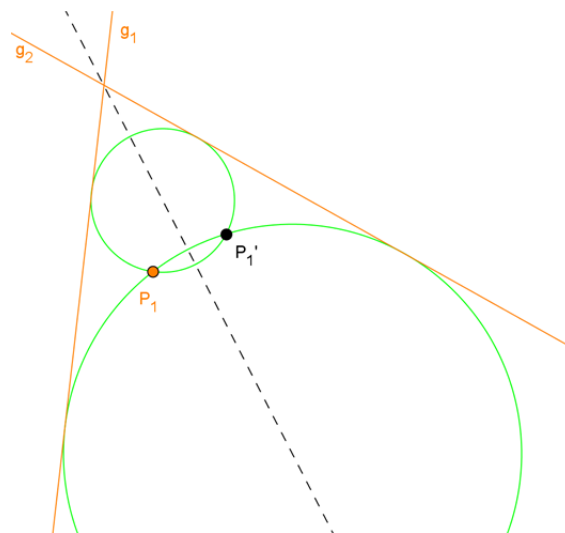


Abbildung 73: Lösung $P_1g_1g_2$

5.4.1.6. $g_1g_2k_1$

Man zeichnet Parallelen g_1' und g_2' zu g_1 und g_2 im Abstand r_1 und konstruiert nach 5.4.1.5 den Kreis h , der g_1' und g_2' berührt und durch M_1 geht. Der Radius sei r_h . Der Mittelpunkt dieses Hilfskreises ist Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Es gilt nämlich $\overline{MT_1} = r_h - r_1 = \overline{MT_2} = \overline{MT_3}$ und $MT_2 \perp g_2$, $MT_3 \perp g_1$ (siehe Abbildung 74).

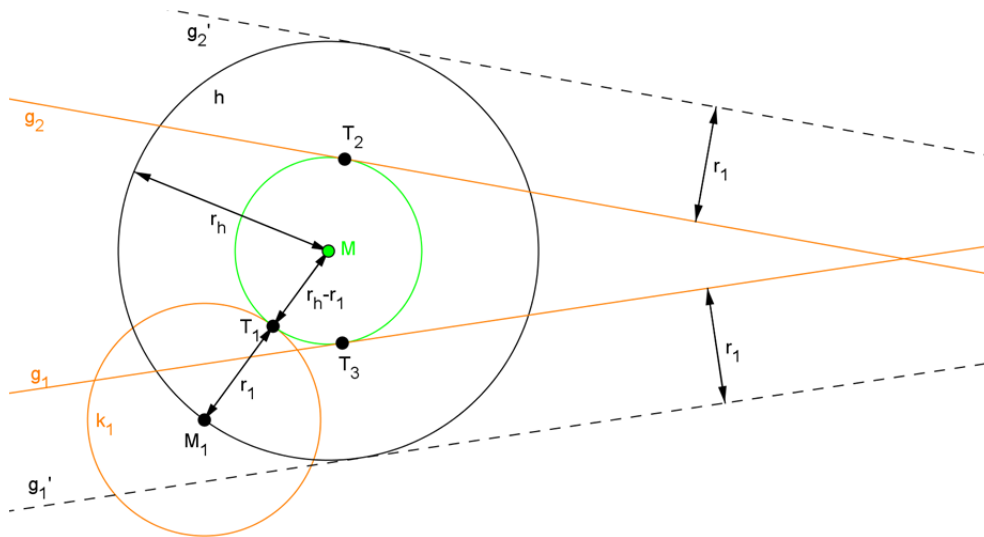


Abbildung 74: Lösung $g_1g_2k_1$

Da die parallelen g_1' und g_2' nicht nur nach außen, sondern auch nach innen gezeichnet werden können und außerdem die Konstruktion nach Kapitel 5.4.1.5 jeweils zwei Kreise liefert, so entstehen insgesamt vier Kreise, welche sowohl die beiden gegebenen Geraden g_1 und g_2 als auch den gegebenen Kreis k_1 berühren.

Anmerkung: Im Sonderfall, dass beide Geraden g_1 und g_2 den Kreis k_1 schneiden, entstehen sogar acht Lösungskreise.

5.4.1.7. $P_1g_1k_1$

Man fällt das Lot l von M_1 auf g_1 , der Lotfußpunkt sei A . Diese Gerade l schneidet k_1 in C und B (siehe Abbildung 75).

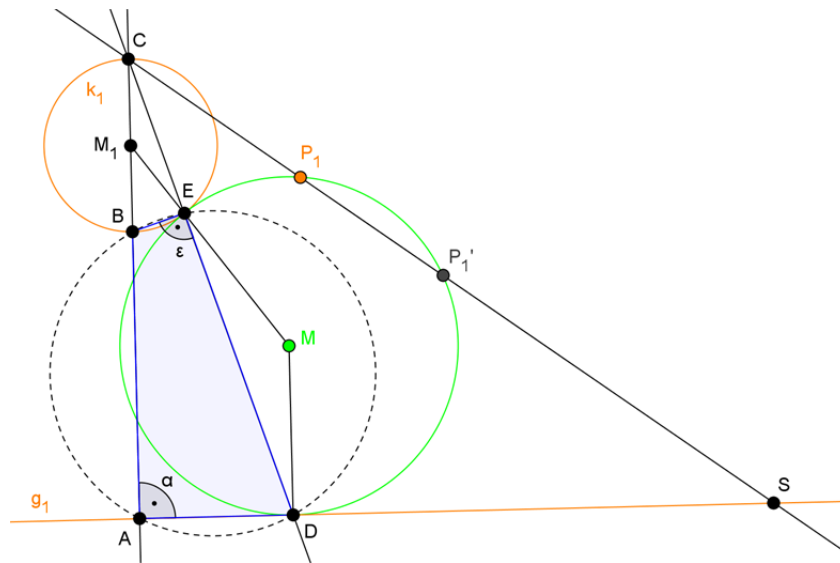


Abbildung 75: Lösung (1) $P_1g_1k_1$

Der gesuchte Kreis berühre k_1 in E und g_1 in D .

Im Viereck $ADEB$ gilt $\alpha = \varepsilon = 90^\circ$.¹⁰⁵ $ADEB$ ist folglich Sehnenviereck eines Kreises, in dem gilt: $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{CD} \cdot \overline{CE}$ (3.7 Sekantensatz).

CP_1 schneide den gesuchten Kreis in P_1 und P_1' es gilt dann $\overline{CP_1'} \cdot \overline{CP_1} = \overline{CD} \cdot \overline{CE}$ (3.7 Sekantensatz), und damit $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{CP_1'} \cdot \overline{CP_1}$.

Umgeformt ergibt letzte Gleichung das Verhältnis $\overline{CP_1} : \overline{CB} = \overline{CA} : \overline{CP_1'}$, woraus sich mit Hilfe des Strahlensatzes der Punkt P_1' konstruieren lässt (siehe Abbildung 76).

Der gesuchte Kreis geht durch P_1 und P_1' und berührt die Gerade g_1 . Die weitere Konstruktion erfolgt also gemäß Kapitel 5.4.1.3.

¹⁰⁵ $\varepsilon = 90^\circ$ kann durch Winkelbetrachtungen in $ADMM_1$ nachgewiesen werden:

$$\text{Es gilt } 90^\circ + 90^\circ + (180^\circ - 2 \cdot \angle(DEM)) + (180^\circ - 2 \cdot \angle(M_1EB)) = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \angle(DEM) + \angle(M_1EB) = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 180^\circ - (\angle(DEM) + \angle(M_1EB)) = 90^\circ$$

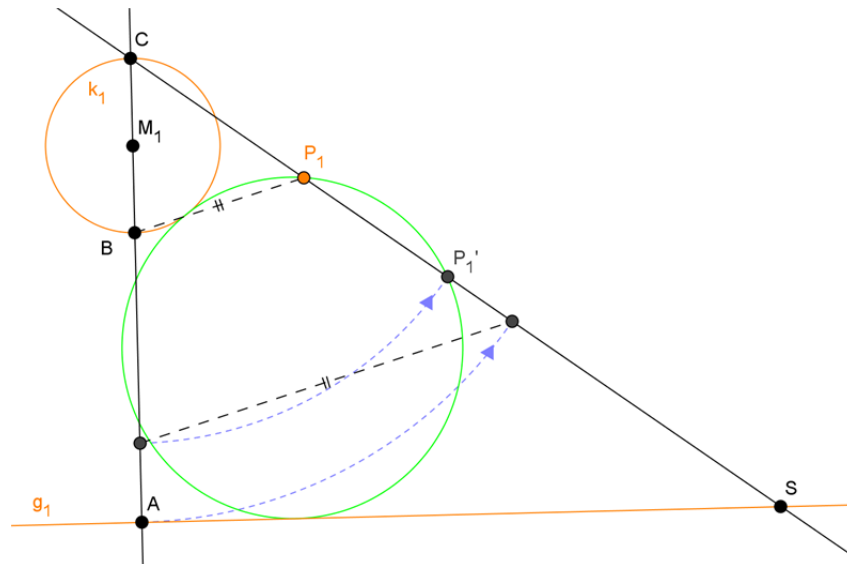


Abbildung 76: Lösung (2) $P_1 g_1 k_1$

Insgesamt gibt es vier Lösungskreise, die durch P_1 gehen und g_1 sowie k_1 berühren.

5.4.1.8. $g_1 k_1 k_2$

O.B.d.A. sei $r_2 \geq r_1$. Man zeichnet zu g_1 eine Parallele g_1' im Abstand r_1 . Dann zeichne man einen Hilfskreis h_1 um M_2 mit Radius $r_2 - r_1$. Ein weiterer Hilfskreis h_2 soll g_1' und h_1 berühren und durch M_1 gehen (Konstruktion nach 5.4.1.7). Der Mittelpunkt von h_2 sei M und sein Radius sei r_h . Jener Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r_h - r_1$ ist der gesuchte Kreis.

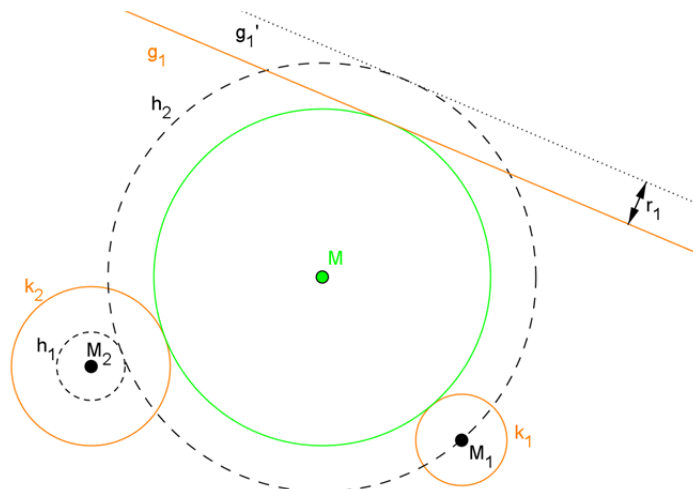


Abbildung 77: Lösung $g_1 k_1 k_2$

Insgesamt entstehen durch leichte Abwandlung der Konstruktionsschritte (z.B. Verschieben der Parallelen g_1' nach innen anstatt nach außen) acht Lösungskreise.

5.4.1.9. $P_1 k_1 k_2$

Man konstruiert zu k_1 und k_2 den äußeren Ähnlichkeitspunkt A . Der Punkt B_1 ist innerer Ähnlichkeitspunkt von k_1 und dem gesuchten Kreis k . Ebenso ist B_2 innerer Ähnlichkeitspunkt von k_2 und dem gesuchten Kreis k . Gemäß Satz von Monge¹⁰⁶ liegen die drei Ähnlichkeitspunkte A , B_1 und B_2 auf einer Geraden (siehe Abbildung 78).

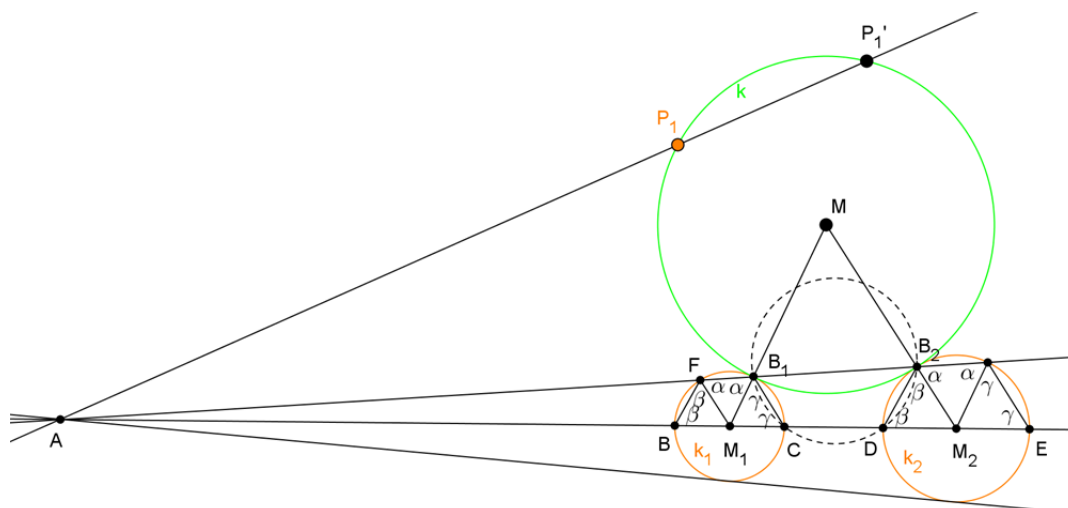


Abbildung 78: Lösung (1) $P_1 k_1 k_2$

Behauptung: B_1 , C , D und B_2 bilden ein Sehnenviereck.

Beweis: Zu zeigen ist, dass die gegenüberliegenden Winkel $\angle(CB_1B_2)$ und $\angle(B_2DC)$ einander auf 180° ergänzen.

Es ist $\angle(CB_1B_2) = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$ und $\angle(B_2DC) = 180^\circ - \beta$, also ist

$\angle(CB_1B_2) + \angle(B_2DC) = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ$, da die Winkelsumme im Viereck BCB_1F $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$ ist.

□

Es gibt also einen Kreis durch B_1 , C , D und B_2 . Nach dem Sekantensatz (siehe Kapitel 3.7) gilt $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB_1} \cdot \overline{AB_2} = \overline{AP_1} = \overline{AP_1'}$. Daraus lässt sich das Verhältnis $\overline{AP_1} : \overline{AC} = \overline{AD} : \overline{AP_1'}$ aufstellen, welches es ermöglicht, P_1' mit Hilfe des Strahlensatzes zu konstruieren (siehe Abbildung 79).

Damit muss der gesuchte Kreis durch P_1 und P_1' gehen und k_1 (oder k_2) berühren. Die Konstruktion kann also gemäß 5.4.1.4 fortgesetzt werden.

¹⁰⁶ Gaspard Monge (1746-1818): Die drei äußeren, oder ein äußerer und zwei innere Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen auf einer Geraden.

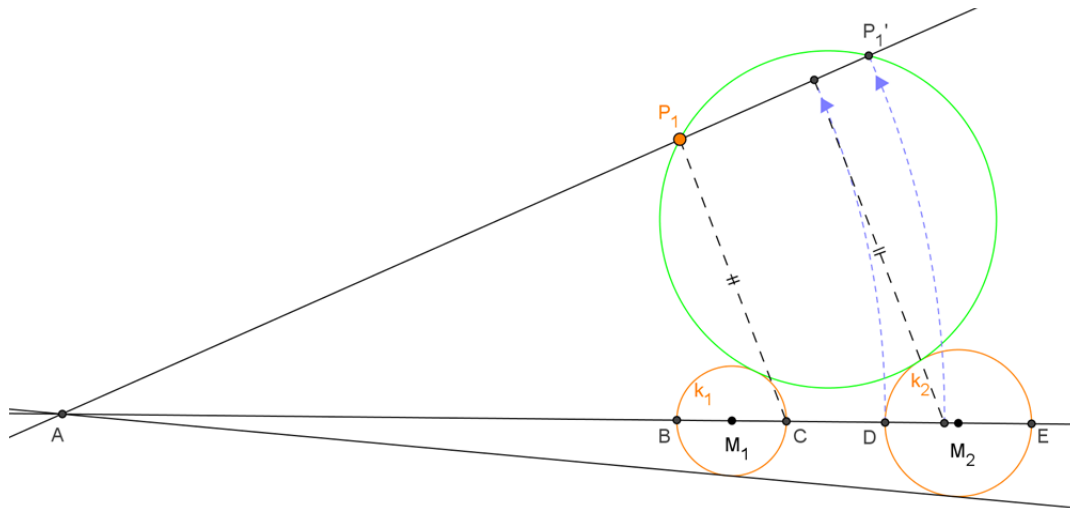


Abbildung 79: Lösung (2) $P_1 k_1 k_2$

Insgesamt gibt es vier Lösungskreise, welche k_1 und k_2 berühren und durch P_1 gehen.

5.4.1.10. $k_1 k_2 k_3$

Das eigentliche Berührproblem wird durch diesen letzten Fall abgedeckt.

Es sei $r_1 < r_2$ und $r_1 < r_3$.

Zunächst werden die Hilfskreise $h_2[M_2; r_2 - r_1]$ und $h_3[M_3; r_3 - r_1]$ benötigt. Nach 5.4.1.9 ist ein Kreis h konstruierbar, welcher durch M_1 geht und die Hilfskreise h_2 und h_3 berührt. Der Mittelpunkt dieses Kreises sei M und der Radius r_h (siehe Abbildung 80).

Der gesuchte Kreis hat ebenfalls den Mittelpunkt M . Der Radius ist $r_h - r_1$.

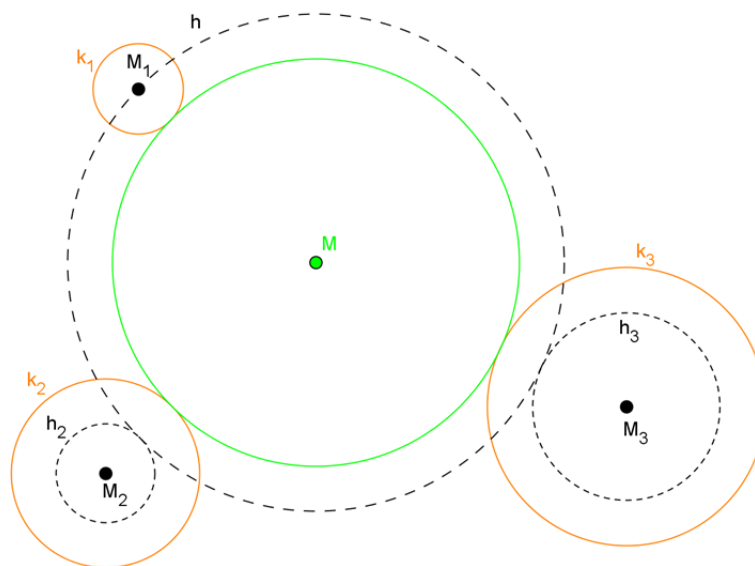


Abbildung 80: Lösung $k_1 k_2 k_3$

Insgesamt gibt es acht Kreise, welche die gegebenen Kreise k_1 , k_2 und k_3 berühren.

5.4.2. Konstruktion einer Sangaku-Aufgabe

Die in Kapitel 5.4.1 gezeigten Konstruktionsmöglichkeiten der Berührprobleme sollen nun Anwendung finden. Wie auch schon in Kapitel 5.3.2 soll der in Aufgabe 4.1 „Drei benachbarte Kreise“ gesuchte dritte Kreis konstruiert werden.

Aufgabe: Die Kreise $k_1[M_1; r_1]$ und $k_2[M_2; r_2]$ berühren einander von außen und sie berühren die Gerade g . Man konstruiere jenen Kreis $k_3[M_3; r_3]$, der sowohl die beiden Kreise k_1 und k_2 als auch die Gerade g berührt (siehe Abbildung 81).

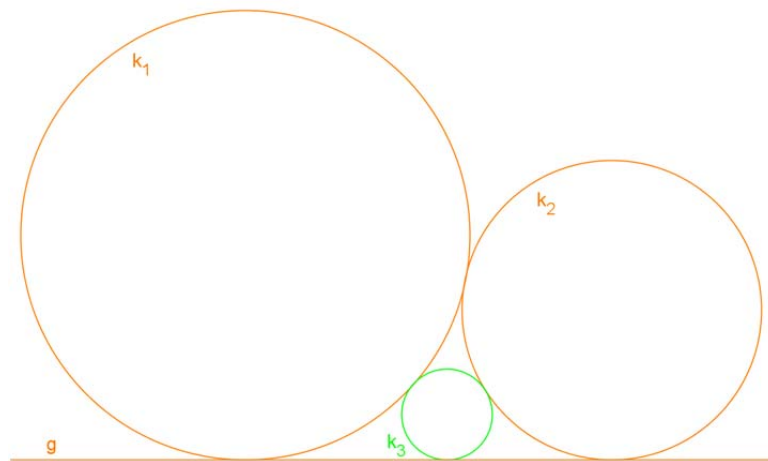


Abbildung 81: Konstruktionsaufgabe *Drei benachbarte Kreise*

Lösung: Da eine Gerade und zwei Kreise gegeben sind, handelt es sich um den Fall 5.4.1.8. Zunächst wird eine Parallele g' zu g im Abstand r_2 benötigt. Weiters wird der Hilfskreis h_1 um M_1 mit Radius $r_1 - r_2$ gezeichnet (siehe Abbildung 82).

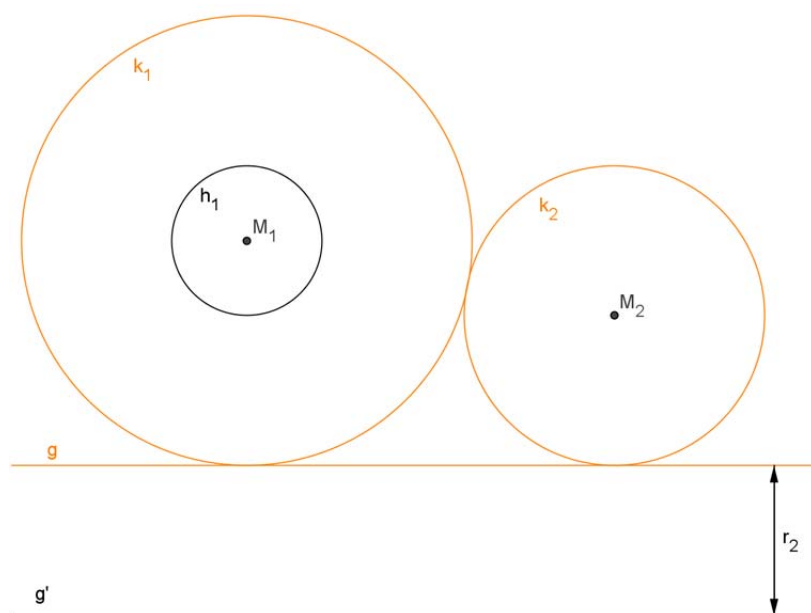


Abbildung 82: Apollonius-Konstruktion (1) *Drei benachbarte Kreise*

Von nun an konstruiert man gemäß 5.4.1.7 weiter, da jener Kreis gesucht ist, der durch M_2 geht und g' sowie h_1 berührt. Man fälle also das Lot l von M_1 auf g' , der Lotfußpunkt sei A , die Schnittpunkte mit h_1 seien B und C . Nun zeichne man eine Gerade a durch C und M_2 . Der Punkt A' entsteht durch Abtragen der Strecke $\overline{CA}$ von C aus auf der Geraden a . Man verbinde B und M_2 mit einer Strecke und verschiebe diese parallel durch A' . Der Schnittpunkt mit dem Lot l sei P' . Abtragen der Strecke $\overline{CP'}$ auf der Geraden a von C aus führt zum Punkt P . (siehe Abbildung 83)

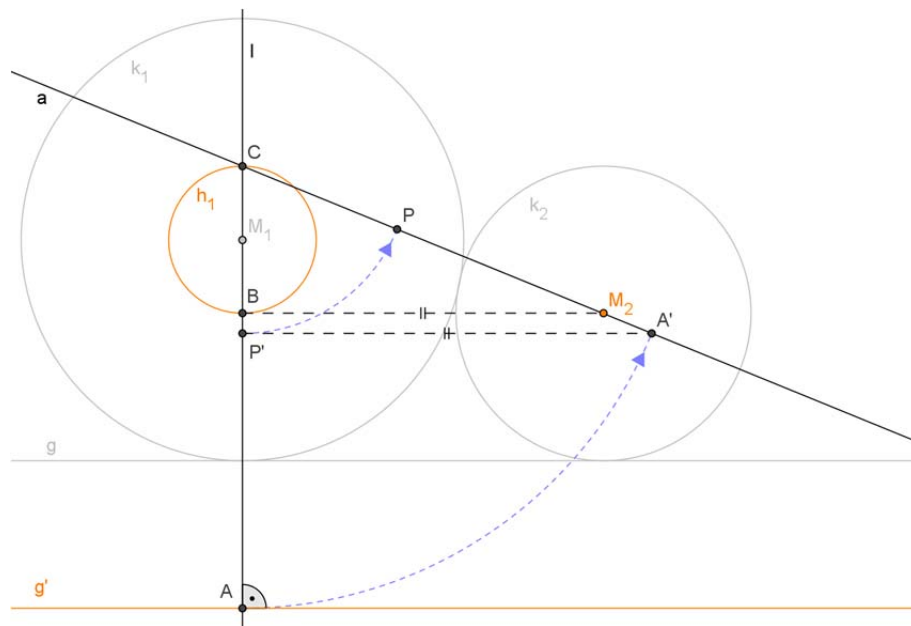


Abbildung 83: Apollonius-Konstruktion (2) *Drei benachbarte Kreise*

Die weitere Konstruktion erfolgt gemäß 5.4.1.3, da nun jener Kreis gesucht ist, der durch P und M_2 geht und die Gerade g' berührt.

Die Trägergerade a von P und M_2 schneidet g' in S . Der Thaleskreis t über $\overline{PS}$ schneidet die Senkrechte s auf a durch M_2 im Punkt H .

Der Kreis h_2 mit Mittelpunkt S und Radius $\overline{SH}$ schneidet g' in Q (siehe Abbildung 84).

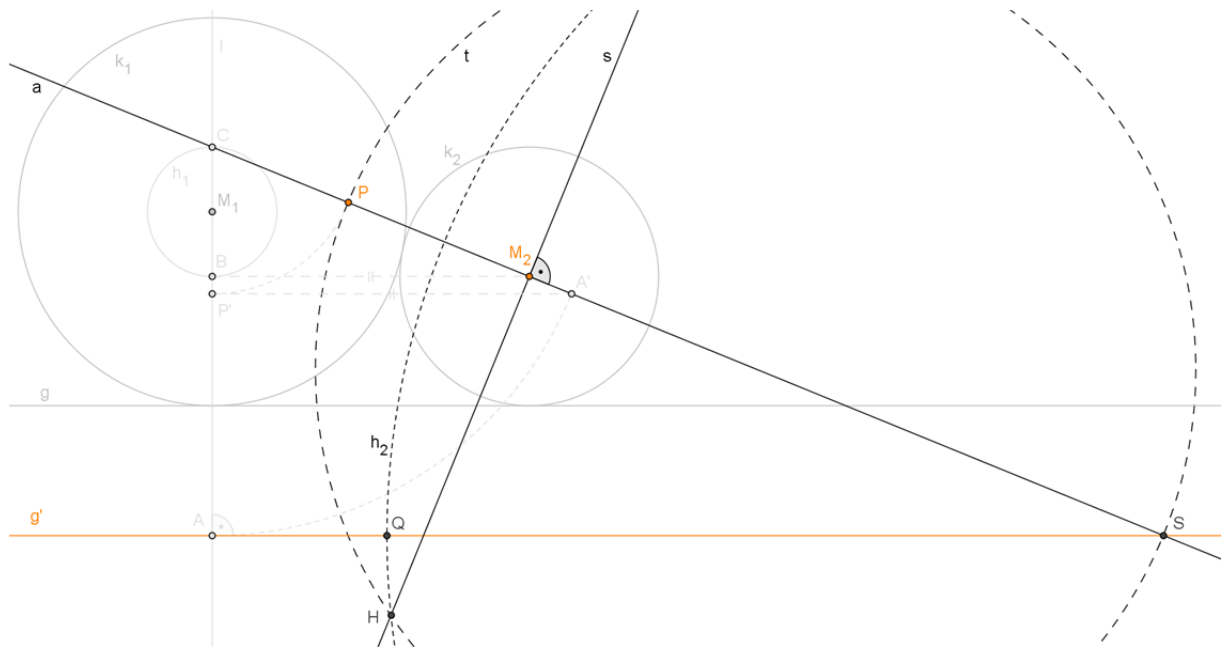


Abbildung 84: Apollonius-Konstruktion (3) *Drei benachbarte Kreise*

Nun gilt es jenen Kreis zu konstruieren, der durch P , M_2 und Q geht. Dies geschieht so wie in Kapitel 5.4.1.1 beschrieben.

Von den Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{M_2Q}$ wird jeweils die Streckensymmetrale benötigt. Deren Schnittpunkt M ist der Mittelpunkt des Kreises h_3 mit Radius $r_h = \overline{MM_2}$.

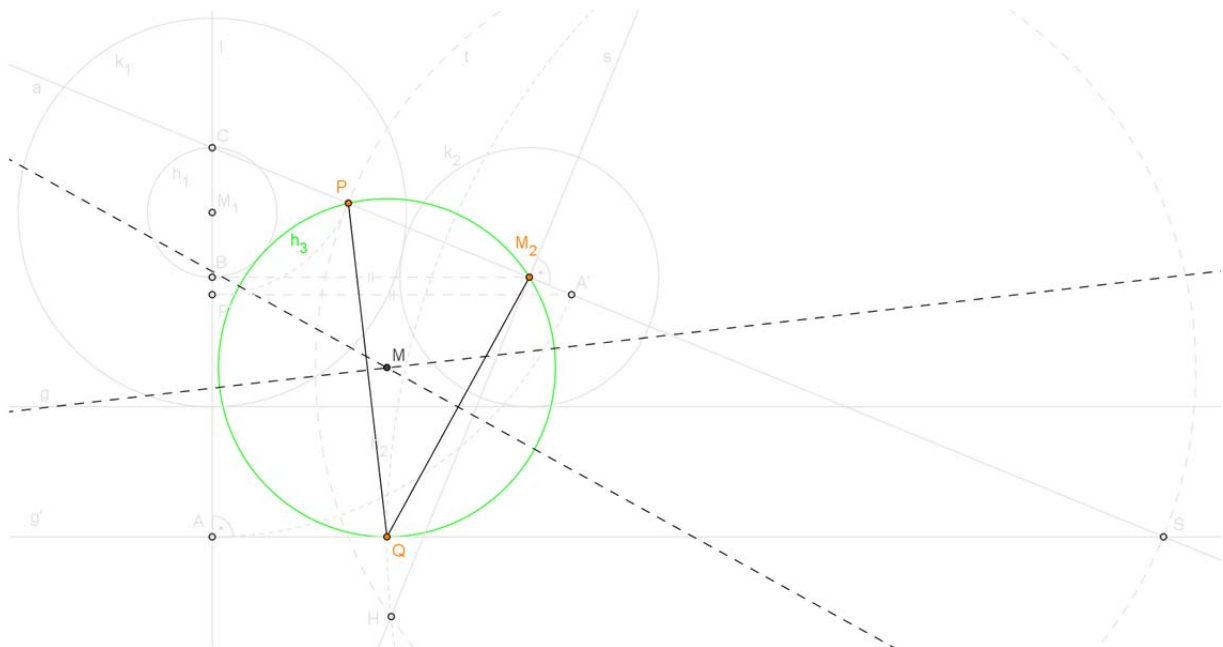


Abbildung 85: Apollonius-Konstruktion (4) *Drei benachbarte Kreise*

Da es sich bei h_3 noch nicht um den gesuchten Lösungskreis, sondern um jenen Hilfskreis handelt, den man bei der Konstruktion gemäß 5.4.1.8 zuerst erhält, muss dieser noch verklei-

nert werden. Der gesuchte Kreis k_3 hat den Mittelpunkt M und den Radius $r_h - r_2$ (siehe Abbildung 86).

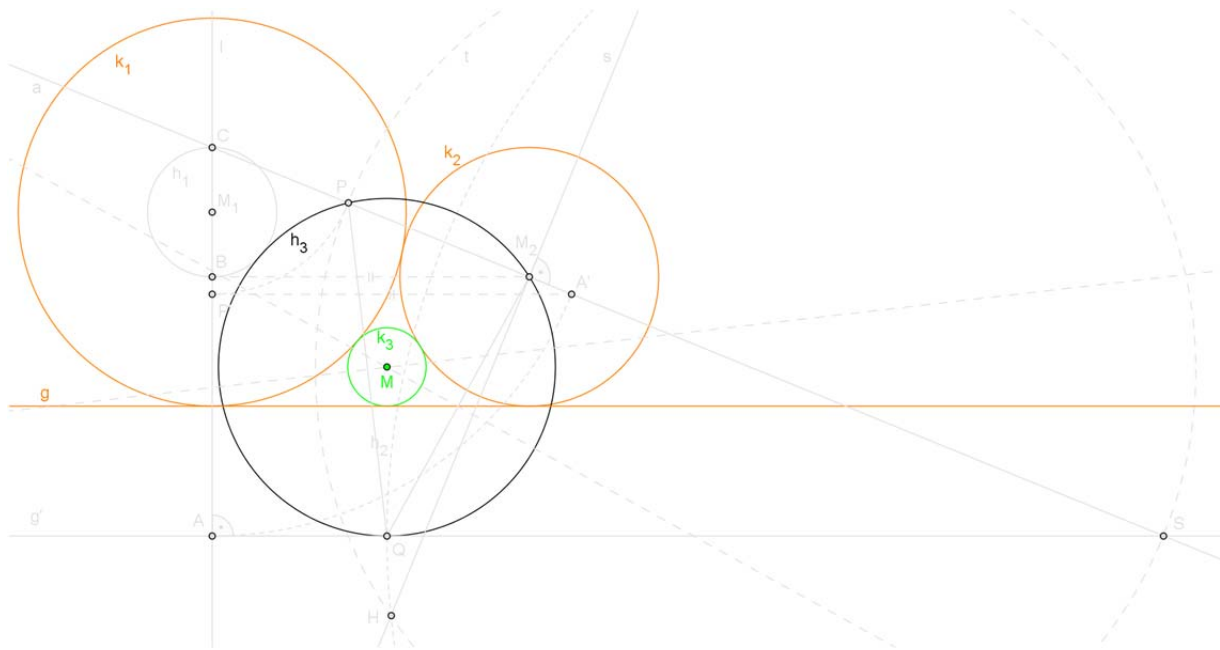


Abbildung 86: Apollonius-Konstruktion (5) *Drei benachbarte Kreise*

5.4.3. Apollonius-Werkzeuge in GeoGebra

Da die Konstruktionen nach Apollonius mitunter sehr aufwändig und unübersichtlich werden können, habe ich sie in GeoGebra als eigenständige Werkzeuge (Makros) programmiert. Diese Makros greifen intern aufeinander zu, wenn eine Konstruktion auf einen anderen Fall zurückgeführt wird. (z.B. wird der Fall Punkt-Punkt-Gerade auf den Fall Punkt-Punkt-Punkt zurückgeführt.)

☞ Auf <http://sangaku.geppel.at> findet man die Werkzeuge und eine kurze Beschreibung zum Download. Nach Öffnen der .ggf-Datei in GeoGebra stehen zehn zusätzliche Werkzeuge zur Verfügung, mit denen die Konstruktionen nach Apollonius durchgeführt werden können. (siehe Abbildung 87).

Es sei angemerkt, dass in den Makros nicht immer alle Sonderfälle bedacht wurden, weshalb eine korrekte Funktion nicht in allen Fällen gewährleistet werden kann.

Für weitere Details sei auf die Informationen auf der Homepage verwiesen.

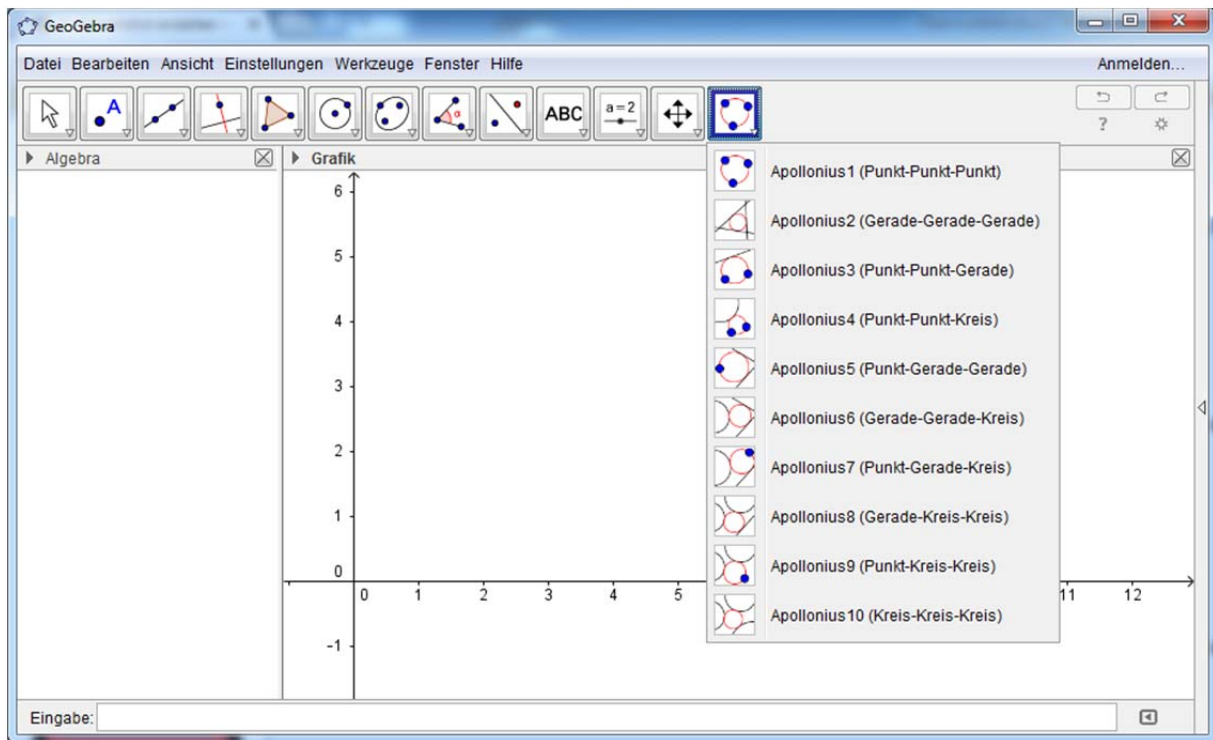


Abbildung 87: Apollonius-Werkzeuge in GeoGebra

Die Aufgabe 4.1 „Drei benachbarte Kreise“ kann mit Hilfe der Werkzeuge sehr rasch gelöst werden. Auswahl des Werkzeuges „Apollonius8 (Gerade-Kreis-Kreis)“ und anschließendes Klicken auf g , k_1 und k_2 (Reihenfolge beachten!) konstruiert alle Kreise, welche g , k_1 und k_2 berühren. Darunter befindet sich auch der gesuchte Kreis k_3 . (siehe Abbildung 88)

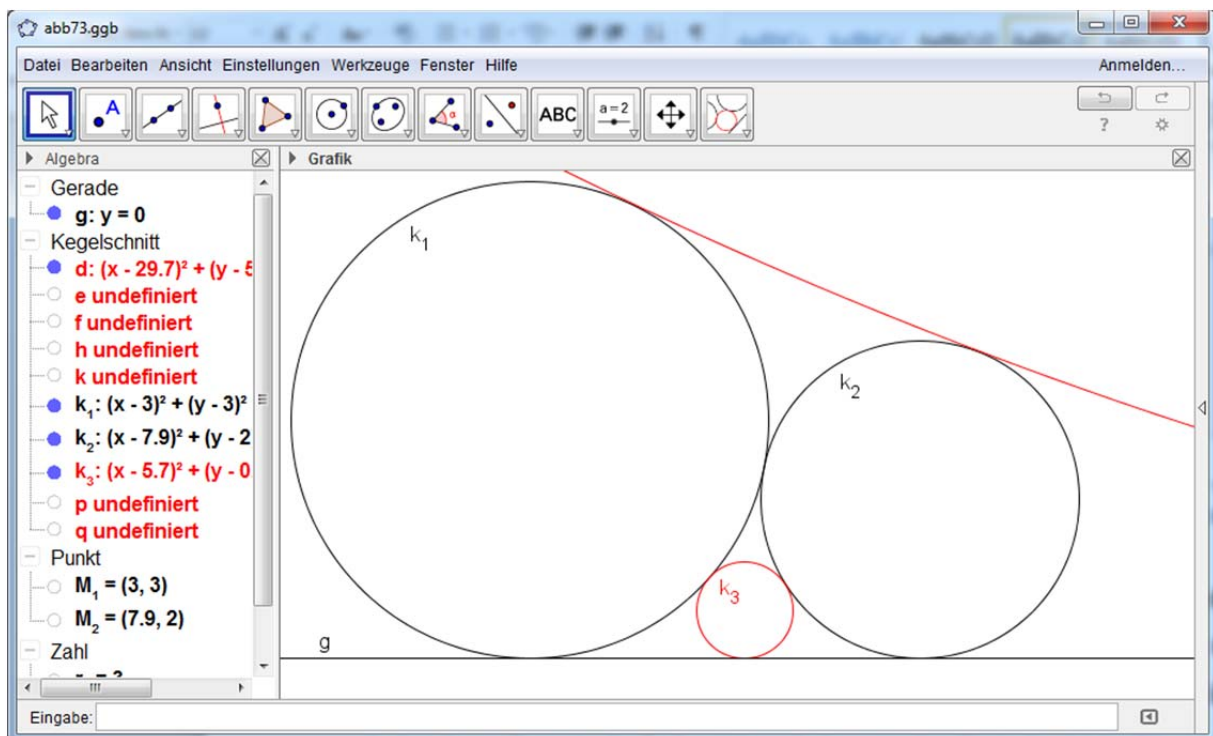


Abbildung 88: GeoGebra-Konstruktion der Aufgabe *Drei benachbarte Kreise* mit Hilfe der Apollonius-Werkzeuge

5.5. Känguru der Mathematik

Beim „Känguru der Mathematik“ handelt es sich um einen seit 1995¹⁰⁷ bestehenden internationalen Mathematik-Wettbewerb für Schülerinnen und Schüler, der in Österreich von der 1. bis zur 13. Schulstufe angeboten wird. Vorrangig geht es dabei um logisches Denken und weniger um die reine Anwendung von auswendiggelernten Formeln. Die Aufgaben unterscheiden sich deutlich von den typischen Schulbuchaufgaben.

Der Wettbewerb wird in Österreich jährlich an einem Donnerstag im März zeitgleich an allen teilnehmenden Schulen durchgeführt. Hilfsmittel wie Taschenrechner oder Formelsammlung sind nicht erlaubt. Je nach Schulstufe werden die Kategorien Felix (1.-2. Schulstufe), Ecolier (3.-4.), Benjamin (5.-6.), Kadett (7.-8.), Junior (9.-10.) und Student (11.-13.) unterschieden. In allen Kategorien werden bis zu 30 Fragen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades gestellt. Bei jeder Frage sind fünf Antwortmöglichkeiten vorgegeben, wovon nur eine korrekt ist. Für die richtige Beantwortung einer Frage bekommt man Gutpunkte, während die falsche Beantwortung zu Punkteabzug führt. Kann man die Aufgabe nicht lösen, ist es daher besser, keine Antwort zu geben als zu raten.

Die Aufgaben stammen aus den verschiedensten Themenbereichen der Mathematik. So sind beispielsweise Zahlentheorie und räumliche Vorstellung genauso vertreten wie Elementargeometrie.

Bei Durchsicht der Wettbewerbe der letzten Jahre fällt auf, dass viele der elementargeometrischen Aufgaben große Ähnlichkeit zu Sangaku haben. Die Bearbeitung von Sangaku im Unterricht kann also unter anderem auch als Vorbereitung auf den „Känguru-Wettbewerb“ dienen. Auch bei anderen Mathematik-Wettbewerben, wie etwa bei der „Mathematik-Olympiade“, gilt es, ähnliche Aufgabenstellungen zu bearbeiten.

In diesem Kapitel werden einzelne Aufgaben der letzten Jahre des „Känguru-Wettbewerbs“ vorgestellt und deren möglicher Lösungsweg präsentiert.

☞ Eine Liste weiterer Aufgaben der „Känguru-Wettbewerbe“ der letzten Jahre, welche den Sangaku-Aufgaben sehr ähnlich sind, ist online unter <http://sangaku.geppel.at> verfügbar.

¹⁰⁷ vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Känguru_der_Mathematik (11. April 2016)

5.5.1. Känguru 2001 – Kategorie Student – Aufgabe 21

Folgende Aufgabe entstammt der österreichischen Version des „Känguru der Mathematik“ aus dem Jahr 2001. Sie wurde in der Kategorie Student als 21. Aufgabe gestellt.

Aufgabe¹⁰⁸: Bestimme die Länge der größeren Rechteckseite. (siehe Abbildung 89)

- (A) $-2 + \sqrt{5}$ (B) $\frac{-2 + \sqrt{5}}{2}$ (C) 2.5 (D) $\sqrt{5}$ (E) $2\sqrt{5}$

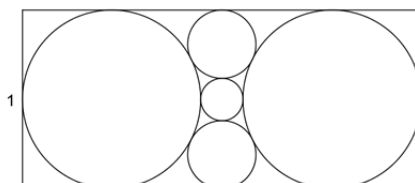


Abbildung 89: Känguru 2001 – Kategorie Student – Aufgabe 21

Lösung: Die Radien der großen Kreise sind $\frac{1}{2}$. Der Radius des kleinen Kreises sei x und die Radien der mittleren Kreise seien y (siehe Abbildung 90).

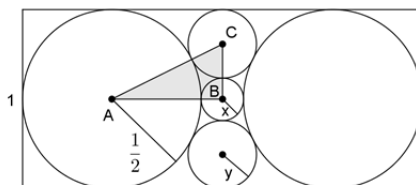


Abbildung 90: Lösung Känguru 2001 – Kategorie Student – Aufgabe 21

Es gilt, dass $2x + 4y = 1$ ist, woraus sich $y = \frac{1 - 2x}{4}$ ergibt.

Im Dreieck $\triangle ABC$ gilt der Lehrsatz des Pythagoras: $\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 + (x + y)^2 = \left(\frac{1}{2} + y\right)^2$. Ersetzt man hier y und formt die Gleichung um, so entsteht $4x^2 + 8x - 1 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x = \frac{\pm\sqrt{5} - 2}{2}$, wovon natürlich nur die positive relevant ist.

Gesucht ist die zweite Seite des Rechtecks, also die Summe der Durchmesser der großen Kreise mit dem Durchmesser des kleinen Kreises: $1 + 2x + 1 = \sqrt{5}$

Die Lösung ist somit (D) $\sqrt{5}$.

¹⁰⁸ vgl. <http://www.kaenguru.at/zum-herunterladen/aufgaben-der-vorjahre/2001/> (12. April 2016)

5.5.2. Känguru 2002 – Kategorie Student – Aufgabe 19

Diese Aufgabe wurde im Jahr 2002 in der Kategorie Student als 19. Aufgabe gestellt.

Aufgabe¹⁰⁹: Das „Dreieck“ in Abbildung 91 besteht aus berührenden Kreisen mit demselben Radius r . Die Höhe des „Dreiecks“ ist 2. Wie groß ist r ?

- (A) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$ (B) $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$ (C) $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ (D) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ (E) Ein anderer Wert.

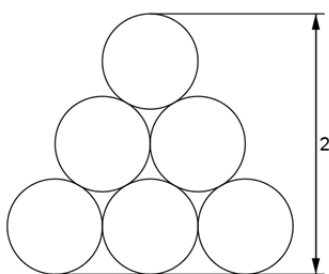


Abbildung 91: Känguru 2002 – Kategorie Student – Aufgabe 19

Lösung: Die Verbindung der Mittelpunkte der Kreise ergibt ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $4r$. (siehe Abbildung 92)

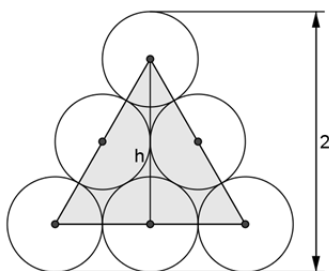


Abbildung 92: Lösung Känguru 2002 – Kategorie Student – Aufgabe 19

Die Höhe h des gleichseitigen Dreiecks ist gemäß des pythagoreischen Lehrsatzes $h = 2\sqrt{3}r$.

Da $2 = r + h + r = 2r + 2\sqrt{3}r = 2r(1 + \sqrt{3})$ ist, ergibt sich für $r = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$.

Die Lösung lautet also (A) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$.

¹⁰⁹ vgl. <http://www.kaenguru.at/zum-herunterladen/aufgaben-der-vorjahre/2002/> (12. April 2016)

5.5.3. Känguru 2007 – Kategorie Junior – Aufgabe 26

Im Jahr 2007 wurde in der Kategorie Junior folgende Aufgabe mit der Nummer 26 gestellt.

Aufgabe¹¹⁰: Zwei Kreise haben ihre Mittelpunkte auf der Diagonale eines Quadrats, und beide Kreise berühren je zwei Seiten des Quadrats und auch einander. (siehe Abbildung 93) Das Quadrat hat die Seitenlänge 1 cm. Was ist die Summe der Kreisradien in cm?

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\sqrt{2} - 1$ (D) $2 - \sqrt{2}$ (E) Es hängt von den Kreisradien ab.

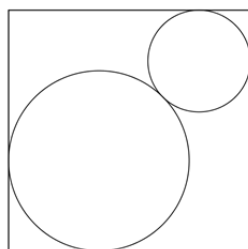


Abbildung 93: Känguru 2007 – Kategorie Junior – Aufgabe 26

Lösung: Die Diagonale des Quadrats mit Seitenlänge 1 cm beträgt gemäß Lehrsatz des Pythagoras $\sqrt{2}$ cm. Die beiden Radien seien r_1 und r_2 . (siehe Abbildung 94)

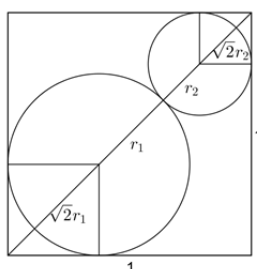


Abbildung 94: Lösung Känguru 2007 – Kategorie Junior – Aufgabe 26

Die Diagonale des kleinen Quadrats (links unten) mit Seitenlänge r_1 beträgt $\sqrt{2}r_1$. Die Diagonale des zweiten kleinen Quadrats (rechts oben) mit Seitenlänge r_2 beträgt $\sqrt{2}r_2$. Die Länge $\sqrt{2}$ (die Einheit cm wird in der folgenden Rechnung nicht angeschrieben) der großen Diagonale setzt sich aus $\sqrt{2}r_1$, r_1 , r_2 und $\sqrt{2}r_2$ zusammen, also gilt $\sqrt{2} = \sqrt{2}r_1 + r_1 + r_2 + \sqrt{2}r_2 = (\sqrt{2} + 1)r_1 + (\sqrt{2} + 1)r_2 = (\sqrt{2} + 1)(r_1 + r_2)$. Umformung ergibt

$$r_1 + r_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} = 2 - \sqrt{2}.$$

Die gesuchte Summe der beiden Radien ist also (D) $2 - \sqrt{2}$.

¹¹⁰ <http://www.kaenguru.at/zum-herunterladen/aufgaben-der-vorjahre/2007/> (12. April 2016)

5.5.4. Känguru 2014 – Kategorie Student – Aufgabe 24

Diese Aufgabe wurde beim Wettbewerb des Jahres 2014 in der Kategorie Student als 24. Frage gestellt. Bemerkenswert ist, dass es sich dabei um die Sangaku-Aufgabe 4.3 „Ein Quadrat zwischen zwei Kreisen“ mit Radius $r = 1$ handelt.

Aufgabe¹¹¹: In Abbildung 95 ist folgendes zu sehen: eine Gerade, die gemeinsame Tangente zweier berührender Kreise mit Radius 1 ist, und ein Quadrat mit einer Seite auf der Geraden und je einem Eckpunkt auf den beiden Kreisen.

Wie groß ist die Seitenlänge des Quadrats?

- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (E) $\frac{1}{2}$

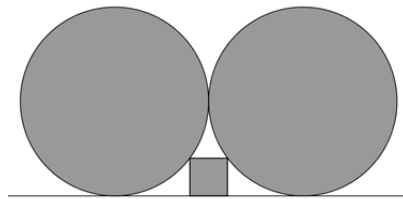


Abbildung 95: Känguru 2014 – Kategorie Student – Aufgabe 24

Lösung: Aus Aufgabe 4.3 ist die Lösung $\frac{2}{5}r$ bekannt. Da in diesem Fall $r = 1$ ist, lautet die

Lösung also (A) $\frac{2}{5}$.

¹¹¹ <http://www.kaenguru.at/zum-herunterladen/aufgaben-der-vorjahre/2014/> (11. April 2016)

5.6. Weitere Ideen für den Unterricht

5.6.1. Sangaku selbst entwerfen

Eine Möglichkeit, Schülerinnen und Schüler für Sangaku bereits in der Unterstufe zu begeistern, könnte das eigene Entwerfen und Gestalten von Aufgaben sein.

Im Rahmen eines interdisziplinären Projekts der Fächer Mathematik und Bildnerische Erziehung (oder eventuell auch Technisches Werken) können die Schülerinnen und Schüler zuerst im Mathematikunterricht die Aufgaben entwerfen und diese danach im Kunstunterricht auf ästhetisch ansprechenden Holztafeln aufbereiten.

Das Verfassen in Kanbun wird naturgemäß nicht möglich sein, aber ansonsten kann der Aufbau der Tafeln den Originalen entsprechen. Es sollte also eine Skizze der Aufgabenstellung, die Aufgabenstellung selbst sowie die Lösung (ohne Lösungsweg) vorhanden sein. Auch Autor der Aufgabe und Datum dürfen nicht fehlen. Ob sie auch von rechts nach links zu lesen sein sollen, ist freilich Geschmackssache. Für den genauen Aufbau der Tafeln sei hier auf Kapitel 2 und insbesondere Abbildung 9 verwiesen.

Thematisch werden sich die Aufgaben in einer 4. Klasse Unterstufe (8. Schulstufe) vor allem an der Satzgruppe des Pythagoras orientieren. Aber auch Aufgaben aus anderen Themenbereichen sind durchaus denkbar.

5.6.2. Vereinfachung durch Einsetzen von Zahlen

Die meisten der Sangaku-Aufgaben sind sehr allgemein orientiert und oft muss mit mehreren Variablen hantiert werden. Da dies bekanntlich bei vielen Schülerinnen und Schülern abschreckend wirkt, könnte man dem zunächst durch Einsetzen von Zahlen gegensteuern. Von vielen Schulbuchaufgaben sind die Schülerinnen und Schüler gewohnt, dass sie Geometrieaufgaben zuerst anhand eines Beispiels mit konkreten Zahlen rechnen und erst danach die Abstraktion auf den allgemeinen Fall vornehmen sollen.

Setzt man also z.B. bei Aufgabe 4.1 „Drei benachbarte Kreise“ für $r_1 = 4$ cm und $r_2 = 16$ cm ein, so ergibt sich als Lösung für $r_3 = \frac{16}{9}$ cm. Erst nachdem die Schülerinnen und Schüler sich mit diesem konkreten Fall auseinandergesetzt haben, geht man dann zum allgemeinen Fall über.

Auch bei Aufgabe 4.9 „Zwei Kreise im rechtwinkligen Dreieck 1“ kann eine wesentliche Vereinfachung herbeigeführt werden, indem man $r_1 = 4$ und $r_2 = 3$ wählt. Man erhält so nämlich ausschließlich ganzzahlige Werte für alle Abmessungen: $a = 20$, $b = 15$, $c = 25$, $p = 16$,

$q=9$ und $h=12$. Erst nach dem Lösen dieser konkreten Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler den allgemeinen Fall behandeln.

Es liegt natürlich im Ermessen der Lehrkraft, welcher Schwierigkeitsgrad den Schülerinnen und Schülern zuzutrauen ist, ob das Einsetzen konkreter Zahlen eine Vereinfachung der Aufgaben darstellt bzw. ob überhaupt eine Verallgemeinerung vorgenommen werden soll.

5.6.3. Vereinfachung durch Hilfslinien

Ohne Zweifel steht fest, dass bei vielen der Aufgaben der schwierigste Teil das Finden geeigneter Hilfslinien ist. Hat man in der Skizze die richtigen Hilfslinien eingezeichnet, so fehlt nicht mehr viel zur Lösung. Erscheinen also manche Aufgaben zu schwer, so kann den Schülerinnen und Schülern durch das Einzeichnen wesentlicher Hilfslinien geholfen werden. Aufgrund der Förderung der Problemlösekompetenz würde ich die Schülerinnen und Schüler jedoch zuerst alleine experimentieren lassen und nur im Bedarfsfall eine Skizze mit den Hilfslinien zur Verfügung stellen.

Beispielsweise wird Aufgabe 4.12 „Ein Rechteck und vier Kreise in zwei Kreisen“ wesentlich vereinfacht, wenn man Abbildung 37 zur Verfügung hat, in der alle für den Lösungsweg relevanten Dreiecke ersichtlich sind.

Allgemein sind die Schülerinnen und Schüler jedoch darauf hinzuweisen, dass sie Kreisradien in alle erdenklichen Richtungen einzeichnen können und sich somit selbst auf die Suche nach geeigneten Dreiecken machen können.

5.6.4. Pythagoreische Tripel

Bei einem pythagoreischen Tripel handelt es sich um ein Tripel (x, y, z) von natürlichen Zahlen, welche als Längen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks vorkommen können. Sie erfüllen somit die diophantische Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$. Beispielsweise sind $(3, 4, 5)$ oder $(5, 12, 13)$ pythagoreische Tripel.

Wenn x , y und z relativ prim sind, also keinen gemeinsamen Teiler haben, so spricht man von einem primitiven pythagoreischen Tripel.

Der japanische Mathematiker Fujita Sadasuke (1734-1807) veröffentlichte in seinem 1781 erschienenen Buch Seiyō Sanpō („Detaillierte Mathematik“) eine Möglichkeit, alle primitiven pythagoreischen Tripel zu erzeugen. Er verwendete dabei Satz 3.1 als Ausgangspunkt dafür.¹¹²

¹¹² vgl. Fukagawa / Rothman (2008) - Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry: S. 79-81

Satz¹¹³: Man zeige, dass (x, y, z) eine pythagoreisches Tripel ist, wenn

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2 \quad \text{und} \quad z = m^2 + n^2$$

für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n > 0$.

Beweis¹¹⁴: Aus Satz 3.1 ist bekannt, dass der Abstand zweier „Kreisfußpunkte“ $\overline{F_1 F_2} = 2\sqrt{r_1 r_2}$ ist, da der pythagoreische Lehrsatz im Dreieck $\triangle M_1 M_2 P$ gilt: $(r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + \overline{F_1 F_2}^2$ (siehe Abbildung 96).

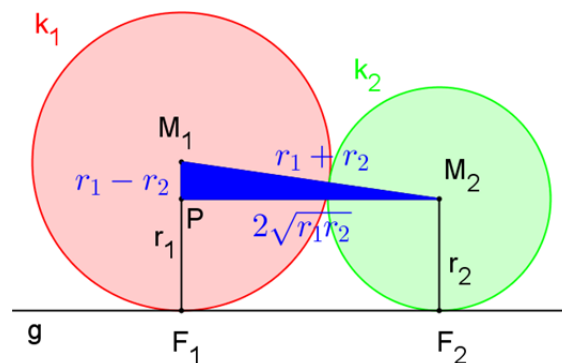


Abbildung 96: Beweis Pythagoreische Tripel

Dabei können r_1 und r_2 ganzzahlig gewählt werden, aber $\overline{PM_2} = \overline{F_1 F_2}$ soll ebenso ganzzahlig sein. Damit $\overline{F_1 F_2} = 2\sqrt{r_1 r_2}$ eine natürliche Zahl ergibt, ist es hinreichend, dass $\sqrt{r_1} = m$ und $\sqrt{r_2} = n$, wobei $m, n \in \mathbb{N}$. Folglich ist $r_1 = m^2$ und $r_2 = n^2$. Die beiden Katheten im rechtwinkligen Dreieck lauten also $x = 2\sqrt{r_1 r_2} = 2mn$ und $y = r_1 - r_2 = m^2 - n^2$. Die Hypotenuse ist $z = r_1 + r_2 = m^2 + n^2$. □

Dies ist die einfachste Methode der traditionellen japanischen Mathematik, um pythagoreische Tripel zu finden.

Angemerkt sei, dass der Beweis natürlich ebenso durch alleinige algebraische Umformungen möglich ist, jedoch keinen Aufschluss über die Idee der Formelfindung gibt:

$$x^2 + y^2 = (2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = 4m^2 n^2 + m^4 - 2m^2 n^2 + n^4 = m^4 + 2m^2 n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 = z^2$$

¹¹³ vgl. Fukagawa / Rothman (2008) - Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry: S. 80

¹¹⁴ vgl. Fukagawa / Rothman (2008) - Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry: S. 80-81

Im Folgenden sind einige Beispiele für primitive pythagoreische Tripel aufgelistet:

m	n	x	y	z
2	1	4	3	5
4	1	8	15	17
3	2	12	5	13
6	1	12	35	37
5	2	20	21	29
4	3	24	7	25
5	4	40	9	41

Tabelle 1: Beispiele für pythagoreische Tripel

Die pythagoreischen Tripel kommen zwar als solche nicht direkt im Lehrplan vor, werden jedoch oftmals in den Schulbüchern¹¹⁵ der 4. Klasse AHS erwähnt, da sie für Schülerinnen und Schüler eine interessante Ergänzung zum pythagoreischen Lehrsatz darstellen können.

¹¹⁵ z.B. Reichel et al. (2010) - Das ist Mathematik 4: S. 40,157

6. Zusatzmaterialien im WWW

☞ Einen Anhang im klassischen Sinne gibt es zu dieser Diplomarbeit nicht. Für alle weiterführenden Materialien sei hier erneut auf die Homepage <http://sangaku.geppel.at> verwiesen.

Unter anderem finden Sie dort:

- diese Diplomarbeit im PDF-Format
- alle mit GeoGebra erstellten Abbildungen als GeoGebra-Dateien zur weiteren Bearbeitung
- alle Aufgaben des Kapitels 4 und deren Lösungsweg als Kopiervorlage
- weitere interessante Sangaku-ähnliche Aufgaben der letzten Känguru-Wettbewerbe
- eine Literatur- und Linkliste zu weiterführenden Materialien
- die Apollonius-Werkzeuge für GeoGebra
- interaktive GeoGebra-Applets zu ausgewählten Sangaku-Aufgaben
- und vieles mehr



Abbildung 97: Homepage <http://sangaku.geppel.at>

Die Materialien auf der Homepage sind lizenziert unter einer *Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell 4.0 International Lizenz*.¹¹⁶

¹¹⁶ <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>

7. Literaturverzeichnis

Agricola, I.; Friedrich, T. (2011): Elementargeometrie, Wiesbaden.

Bundesministerium für Bildung Lehrplan AHS Oberstufe: Mathematik, Online-Quelle:
https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf, Abruf am 12.
November 2016.

Bundesministerium für Bildung Lehrplan AHS Oberstufe: Wahlpflichtfach Mathematik,
Online-Quelle: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_29_11884.pdf, Abruf
am 12. November 2016.

Bundesministerium für Bildung Lehrplan AHS Unterstufe: Mathematik, Online-Quelle:
https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf, Abruf am 12. November 2016.

Bundesministerium für Bildung Lehrplan AHS: allgemeiner Teil, Online-Quelle:
https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/11668_11668.pdf, Abruf am 12. November
2016.

Dörrbecker, M. Wikimedia: Landkarte Japan, Online-Quelle:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Japan_location_map_with_side_map_of_the_Ryukyu_Islands.svg, Abruf am 4. Februar 2017.

Eiichi, I.; Echio, N.; Hideaki, T.; Hirotaka, K.; Isao, K.; Kenji, Ō.; Nobuya, N.; Ryūtarō, Y.; Tetsuo, S. (2003): Japanese Temple Mathematical problems in Nagano Pref. Japan, Nagano City.

Fukagawa, H.; Pedoe, D. (1989): Japanese Temple Geometry Problems, Winnipeg.

Fukagawa, H.; Rothman, T. (2008): Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry, Princeton.

GeoGebra GmbH Info, Online-Quelle: <http://www.geogebra.org/about>, Abruf am 16. April 2016.

Hartmann, C. (29. Februar 2008). Sangaku - Japanische Tempelgeometrie, Schriftliche Hausarbeit. Bayerische Julius Maximilians-Universität Würzburg, Deutschland

Horibe, K. Mathematikal Beadwork, Online-Quelle: <http://player.slideplayer.com/27/9074258/>, Abruf am 4. Februar 2017.

Känguru der Mathematik - Österreich - Verein zur Förderung Mathematischer Interessen und Begabungen Aufgaben 2001, Online-Quelle: <http://www.kaenguru.at/zum-herunterladen/aufgaben-der-vorjahre/2001/>, Abruf am 12. April 2016.

Känguru der Mathematik - Österreich - Verein zur Förderung Mathematischer Interessen und Begabungen Aufgaben 2002, Online-Quelle: <http://www.kaenguru.at/zum-herunterladen/aufgaben-der-vorjahre/2002/>, Abruf am 12. April 2016.

Känguru der Mathematik - Österreich - Verein zur Förderung Mathematischer Interessen und Begabungen Aufgaben 2007, Online-Quelle: <http://www.kaenguru.at/zum-herunterladen/aufgaben-der-vorjahre/2007/>, Abruf am 12. April 2016.

Känguru der Mathematik - Österreich - Verein zur Förderung Mathematischer Interessen und Begabungen Aufgaben 2014, Online-Quelle: <http://www.kaenguru.at/zum-herunterladen/aufgaben-der-vorjahre/2014/>, Abruf am 11. April 2016.

Köller, J. (1999): Mathematische Basteleien, Online-Quelle: <http://www.mathematische-basteleien.de/rdreieck.htm>, Abruf am 13. Dezember 2015.

Koth, M. (SS 2011): Skriptum zur Vorlesung Schulmathematik 2 - Elementargeometrie, Universität Wien.

Reichel, H.-C.; Humenberger, H.; Litschauer, D.; Groß, H.; Aue, V.; Neuwirth, E. (2010): Das ist Mathematik 4, Wien.

Rothman, Tony; Fukagawa, Hidetoshi (1998): Sangaku: Japanische Geometrie, in: Spektrum der Wissenschaft, Juli 1998.

Röttgen-Burtscheidt, J. (1. 10 2007). Das Apollonische Berührproblem. Köln, Deutschland

Rubin, I. (2008): Sangaku - Probleme, Online-Quelle:

<http://www.matheraetsel.de/texte/SANGAKU.Pdf>, Abruf am 20 November 2015.

Steinberg, Günter (1984): Die Berührungsprobleme des Apollonius von Perge, in: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie GeoGebra, Online-Quelle:

<https://de.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>, Abruf am 23. April 2016.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie Känguru der Mathematik, Online-Quelle:

https://de.wikipedia.org/wiki/Känguru_der_Mathematik, Abruf am 11. April 2016.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie Kanō Motonobu, Online-Quelle:

https://de.wikipedia.org/wiki/Kan%C5%8D_Motonobu, Abruf am 11. Februar 2017.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie Konstruktion mit Zirkel und Lineal, Online-Quelle:

https://de.wikipedia.org/wiki/Konstruktion_mit_Zirkel_und_Lineal#Algebraische_Operationen, Abruf am 20. März 2016.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie Sangaku, Online-Quelle:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Sangaku>, Abruf am 11. Februar 2017.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie Seki Takakazu, Online-Quelle:

https://de.wikipedia.org/wiki/Seki_Takakazu, Abruf am 11. Februar 2017.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie 耳成山口神社, Online-Quelle:

<https://ja.wikipedia.org/wiki/耳成山口神社>, Abruf am 11. Februar 2017.

Wikipedia, Die freie Enzyklopädie Wikimedia: Isaniwa Jinja sangaku.jpg, Online-Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Isaniwa_Jinja_sangaku.jpg, Abruf am 11. Februar 2017.

☞ Alle Abbildungen, bei denen keine Quellen vermerkt sind, wurden vom Autor mithilfe der kostenlosen Software GeoGebra 5.0 angefertigt. Die entsprechenden GeoGebra-Dateien zu allen Abbildungen sowie die Grafiken selbst sind auch unter <http://sangaku.geppel.at> verfügbar.

8. Zusammenfassung/Abstract

8.1. Zusammenfassung

Sangaku sind kunstvoll bemalte Tafeln aus Holz, die mathematische Aufgabenstellungen und Rätsel vor allem aus dem Bereich der Geometrie zeigen und in Japan während der Edo-Zeit (1603-1867) in Shintō-Schreinen und buddhistischen Tempeln aufgehängt wurden.

In dieser Diplomarbeit wird das Thema Sangaku zuerst allgemein vorgestellt und der historische Hintergrund erklärt.

Es werden wichtige elementargeometrische Sätze, die häufig bei der Lösung von Sangaku-Aufgaben benötigt werden, behandelt.

Danach folgen 18 Sangaku-Aufgaben mit möglichen Lösungswegen. Diese Aufgaben wurden hinsichtlich ihres Schwierigkeitsgrades so ausgewählt, sodass sie auch im Mathematikunterricht der AHS behandelt werden können.

Anschließend werden Ideen für die Einbindung von Sangaku in den Unterricht vorgestellt. Es wird versucht, Sangaku im Lehrplan einzuordnen, Sangaku-Aufgaben werden mit der dynamischen Geometriesoftware GeoGebra bearbeitet und ausgewählte Aufgaben werden auf ihre Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal untersucht. Auch die mit vielen Sangaku-Aufgaben verwandten Berührungsprobleme des Apollonius von Perge werden vorgestellt und zur Konstruktion von Sangaku verwendet.

Zusatzmaterialien zu dieser Arbeit sind online verfügbar.

8.2. Abstract

Sangaku are hand-painted tablets of wood, which show mathematical tasks and puzzles, especially in the field of geometry. These were put in Shinto shrines and Buddhist temples during the Edo period (1603-1867) in Japan.

This thesis explains Sangaku generally and their historical background.

There are important geometrical theorems, which are often required in solving Sangaku tasks. This is followed by the presentation of 18 Sangaku tasks including possible solutions. These tasks have been chosen with regard to their level of difficulty, so that they can be discussed in Secondary School/High School.

Ideas for integrating Sangaku in school are presented. An attempt is made to classify Sangaku according to the Austrian curriculum, Sangaku tasks are processed with the geometry soft-

ware GeoGebra and selected tasks are tested for compass-and-ruler construction. The related problems of Apollonius are presented and used to construct Sangaku.

Additional material to this thesis is available online.