



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Zur Struktur des Raumes der K -invarianten in irreduziblen
Darstellungen von $GL_2(\mathcal{F})$ als Modul unter der
Hecke-Algebra “

Verfasserin

Angelika Kroner

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, Mai 2009

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 405

Studienrichtung lt. Studienblatt: Mathematik

Betreuer: ao. Prof. Dr. Joachim Mahnkopf

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
1	Zulässige Darstellungen	4
2	Die Hauptseriendarstellungen und die Steinberg Darstellungen	6
2.1	Induzierte Darstellungen	6
2.2	Die Hauptseriendarstellungen	7
2.3	Sphärische Darstellungen	25
3	Der Level einer Darstellung	29
4	Charakteristische Polynome von Heckeoperatoren auf invarianten Teil-	
	räumen der Hauptseriendarstellungen	39
4.1	Die charakteristische Funktion von $\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))$ als Hecke-	
	operator im unverzweigten Fall	40
4.2	Die charakteristische Funktion von $\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))$ als Hecke-	
	operator im unverzweigten Fall	45
4.3	Die charakteristische Funktion von $\Gamma_1((\varpi^l)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^l))$ als Hecke-	
	operator im verzweigten Fall.	48
4.4	Die charakteristische Funktion von $\Gamma_1((\varpi^l)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^l))$ als Hecke-	
	operator im verzweigten Fall.	55
4.5	Übersicht über die Ergebnisse des Kapitels 4	60
5	Charakteristische Polynome von Heckeoperatoren auf invarianten Teil-	
	räumen der Steinberg Darstellungen	62
5.1	Adaption der Ergebnisse des Kapitels 4 an die Steinberg Darstellungen . .	62
5.2	Übersicht über die Ergebnisse des Abschnitts 5.1	66

0 Einleitung

Sei $\mathcal{F}$ ein nichtarchimedischer lokaler Körper und (π, V) eine irreduzible zulässige Darstellung von $GL(2, \mathcal{F})$. Zu jeder kompakt offenen Untergruppe K von $GL(2, \mathcal{F})$ konstruieren wir die Heckealgebra $\mathcal{H}_K$ bestehend aus allen K -biinvarianten Funktionen auf $GL(2, \mathcal{F})$ mit kompaktem Träger. Die Heckealgebra $\mathcal{H}_K$ operiert auf dem endlichdimensionalen Vektorraum V^K der unter K invarianten Vektoren in V . Durch diese $\mathcal{H}_K$ -Moduln V^K für K kompakt offen ist die Darstellung (π, V) bereits eindeutig bestimmt.

Ein wichtiger Spezialfall betrifft die maximal kompakte Untergruppe $GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ in $GL(2, \mathcal{F})$: Eine Darstellung (π, V) heißt sphärisch, wenn $V^{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})}$ nicht nur die Null enthält. In diesem Fall ist $V^{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})}$ eindimensional. Die unendlichdimensionalen sphärischen Darstellungen lassen sich vollständig charakterisieren, es sind genau die unverzweigten Darstellungen in der Hauptserie. Sie sind für die Theorie der automorphen Formen von zentraler Bedeutung, denn eine automorphe Darstellung σ lässt sich als Tensorprodukt von Darstellungen π_l von $GL(2, \mathbb{Q}_l)$ schreiben,

$$\sigma = \bigotimes_{\substack{l \text{ prim} \\ \text{oder } l=\infty}} \pi_l,$$

wobei fast alle π_l sphärisch sind.

Ist (π, V) sphärisch, dann wirkt also die sphärische Heckealgebra $\mathcal{H}_{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})}$ auf dem eindimensionalen Raum $V^{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})}$. Als Algebra wird $\mathcal{H}_{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})}$ von zwei Elementen $\mathcal{T}_0$ und $\mathcal{R}$ erzeugt. Ein bekanntes Resultat klärt die Struktur des $\mathcal{H}_{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})}$ -Moduls $V^{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})}$, indem es zwei Skalare angibt, die die Wirkung der Erzeuger $\mathcal{T}_0$ und $\mathcal{R}$ auf $V^{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})}$ beschreiben. Dabei ist die Wirkung von $\mathcal{R}$ durch den zentralen Charakter von π beschrieben. Der Operator $\mathcal{T}_0$ hingegen enthält die wesentliche Information über π ; die Eigenwerte von $\mathcal{T}_0$ bestimmen π bis auf Twist mit einem Charakter.

Die vorliegende Arbeit versucht dieses Resultat zu verallgemeinern: Anstelle von $GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ betrachten wir die Untergruppen

$$\Gamma_1(\varpi^t) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) : a \equiv 1 \pmod{\varpi^t}, c \equiv 0 \pmod{\varpi^t} \right\}, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Analog zu $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{H}_K$ definieren wir einen Heckeoperator $\mathcal{T}_t$ in $\mathcal{H}_{\Gamma_1(\varpi^t)}$. Für Steinberg Darstellungen oder Darstellungen in der Hauptserie (π, V) werden wir die Struktur des $\mathbb{C}[\mathcal{T}_t]$ -Moduls $V^{\Gamma_1(\varpi^t)}$ vollständig bestimmen.

Dabei stellt sich für $t > 0$ natürlich die Frage, wann $V^{\Gamma_1(\varpi^t)} \neq \{0\}$ ist. Im Fall $t = 0$ lautete die Antwort: $V^{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})}$ ist genau dann nicht trivial, wenn (π, V) in der Hauptserie liegt und unverzweigt ist.

Im Fall $t > 0$ haben wir eine offensichtliche Kette von Inklusionen:

$$GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) = \Gamma_1(\varpi^0) \supseteq \Gamma_1(\varpi^1) \supseteq \Gamma_1(\varpi^2) \supseteq \dots$$

und damit natürlich auch

$$V^{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})} \subseteq V^{\Gamma_1(\varpi^1)} \subseteq V^{\Gamma_1(\varpi^2)} \subseteq \dots \quad (1)$$

W. Casselman zeigt in [3], Theorem 1: Für jede zulässige irreduzible und unendlichdimensionale Darstellung (π, V) von $GL(2, \mathcal{F})$ gibt es eine natürliche Zahl l , die wir den Level der Darstellung (π, V) nennen werden, sodass

$$\dim(V^{\Gamma_1(\varpi^l)}) = 1 \quad \text{und} \quad \dim(V^{\Gamma_1(\varpi^t)}) = 0 \quad \text{für alle } t < l.$$

Außerdem steigt die Dimension der Teilräume in (1), sobald sie größer als Null ist immer um eins an. In anderen Worten, wenn $\dim(V^{\Gamma_1(\varpi^l)}) = 1$ gilt, dann gilt auch

$$\dim(V^{\Gamma_1(\varpi^{l+t})}) = 1 + t \quad \text{für } t \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere sind die Räume $V^{\Gamma_1(\varpi^t)}$ im allgemeinen nicht mehr eindimensional. Der Beweis dieser Aussage unterscheidet die Fälle, (π, V) cuspidal, (π, V) in der Hauptserie oder (π, V) eine Steinberg Darstellung. Im Gegensatz zum Beweis von Theorem 1 im Fall cuspidaler Darstellungen ist der Beweis im Fall von Darstellungen in der Hauptserie konstruktiv, die Dimension des Raumes $V^{\Gamma_1(\varpi^t)}$, $t \in \mathbb{N}$ wird bestimmt, indem eine Basis angegeben wird. In den letzten beiden Kapiteln werden wir diese Basis verwenden um die Struktur des $\mathbb{C}[\mathcal{T}_t]$ -Moduls $V^{\Gamma_1(\varpi^t)}$ für beliebige $t > 0$ zu bestimmen. So erhalten wir zum Beispiel in Abschnitt 4.1 für sphärische Darstellungen:

Satz. *Sei (π, V) unendlichdimensionale sphärische Darstellung, das bedeutet (π, V) liegt in der Hauptserie und ist unverzweigt. Für $t \geq 2$ zerfällt der $\mathbb{C}[\mathcal{T}_t]$ -Modul $V^{\Gamma_1(\varpi^t)}$ in die direkte Summe dreier unzerlegbarer Moduln:*

$$V^{\Gamma_1(\varpi^t)} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus V_0.$$

Dabei sind V_{λ_1} und V_{λ_2} als $\mathbb{C}$ -Vektorräume eindimensional und auf V_0 wirkt T_t nilpotent.

Ganz allgemein werden wir für Steinberg Darstellungen oder Darstellungen in der Hauptserie (π, V) sehen, dass $V^{\Gamma_1(\varpi^t)}$ als $\mathbb{C}[\mathcal{T}_t]$ -Modul in die direkte Summe höchstens dreier unzerlegbarer Moduln zerfällt:

$$V^{\Gamma_1(\varpi^t)} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus V_0.$$

Dabei sind V_{λ_1} und V_{λ_2} eindimensional und wir werden den Skalar λ_1 beziehungsweise λ_2 berechnen, der die Wirkung von $\mathcal{T}_t$ auf V_{λ_1} beziehungsweise V_{λ_2} beschreibt. Auf V_0 definiert $\mathcal{T}_t$ hingegen eine nilpotente lineare Abbildung, vergleiche die Abschnitte 4.5 und 5.2.

Einige Ergebnisse dieser Diplomarbeit lassen sich auch in [12] im Beitrag von William Casselman finden. Für unverzweigte Darstellungen (π, V) aus der Hauptserie betrachtet Casselman den zweidimensionalen Raum der unter der Iwahoriuntergruppe $\Gamma_0(\varpi)$ invarianten Vektoren aus V und berechnet die Matrixdarstellungen zweier Heckeoperatoren aus $\mathcal{H}_{\Gamma_0(\varpi)}$, vergleiche dazu die Abschnitte 4.1 und 4.2 dieser Arbeit. Für verzweigte Darstellungen (π, V) aus der Hauptserie behandelt Casselman nur den Fall, wo der Raum der Invarianten eindimensional ist, siehe die Abschnitte 4.3 und 4.4 dieser Arbeit.

Nun möchte ich kurz die Gliederung dieser Diplomarbeit beschreiben:

Im ersten Kapitel wird eine Erklärung der wichtigsten Begriffe gegeben.

Das zweite Kapitel behandelt die Hauptseriendarstellungen und die Steinberg Darstellungen.

Das dritte Kapitel enthält Theorem 1 aus [3], beweist dieses allerdings nur für Darstellungen in der Hauptserie und Steinberg Darstellungen.

Das vierte beziehungsweise fünfte Kapitel beinhaltet schließlich die versprochene Verallgemeinerung des bekannten Resultats über die Struktur von $V^{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})}$ als $\mathcal{H}_{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})}$ -Modul.

Abschließend sollte auf einen Zusammenhang dieser Diplomarbeit zu einem Resultat über Modulformen, vergleiche die Arbeiten von R. Coleman, D. Wan, F. Gouvêa und B. Mazur: [5], [4], [13] und [8], hingewiesen werden. Es besteht eine Bijektion zwischen primitiven Modulformen f und automorphen Darstellungen π . Wie bereits oben erwähnt lässt sich jede automorphe Darstellung π von $GL_2/\mathbb{Q}$ als Tensorprodukt von Darstellungen von $GL(2, \mathbb{Q}_l)$ schreiben:

$$\pi = \bigotimes_{\substack{l \text{ prim} \\ \text{oder } l=\infty}} \pi_l. \quad (2)$$

In diesem Tensorprodukt sind fast alle Darstellungen π_l sphärisch.

Analog zu der Familie $(\Gamma_1(\varpi^t))_{t \in \mathbb{N}}$ definiert man für natürliche Zahlen p, N und k , sodass p nicht N teilt, eine Untergruppe $\Upsilon(Np^k)$ von $SL(2, \mathbb{Z})$:

$$\Upsilon(Np^k) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) : Np^k | c, d \equiv 1 \pmod{Np^k} \right\}.$$

Die Mazur-Gouvêa-Vermutung, siehe [8], besagt, dass jede Modulform f zur Untergruppe $\Upsilon(Np)$, die Eigenform für alle Heckeoperatoren $\mathcal{T}_l$ und von endlichem Slope ist, in einer p -adischen Familie liegt. Eine Eigenform eines Heckeoperators heißt von endlichem Slope, wenn ihr Eigenwert bezüglich $\mathcal{T}_p$ ungleich Null ist. Die Mazur-Gouvêa-Vermutung wurde im wesentlichen von R. Coleman, siehe [5], bewiesen. In [4] verallgemeinert R. Coleman dieses Resultat auf Modulformen zu $\Upsilon(Np^k)$, indem er beweist, dass jede Heckeigenform f von endlichem Slope α und Level $\Upsilon(Np^k)$ in einer p -adischen Familie liegt.

Das Ergebnis der Diplomarbeit lässt sich in diesen Rahmen einfügen: Hat eine Modulform f in $\mathcal{S}_k(\Upsilon(Np^k)) \setminus \mathcal{S}_k(\Upsilon(Np))$ endlichen Slope, das heißt treffen die Voraussetzungen der Mazur-Gouvêa-Vermutung auf f zu, so ist die p -Komponente π_p in der Tensordarstellung der zu f gehörigen automorphen Form $\pi = \otimes \pi_l$ eine cuspidale Darstellung.

Recht herzlich möchte ich mich bei Herrn Professor Mahnkopf für die wohlüberlegte Problemstellung und die ständige Unterstützung bedanken.

1 Zulässige Darstellungen

Dieser Abschnitt soll einen Überblick über die wichtigsten später verwendeten Begriffe und Zusammenhänge geben, ohne sie zu beweisen. (Vergleiche [1], Kapitel 4.2 und Kapitel 4.4.)

Im gesamten Text sei $\mathcal{F}$ ein nicht archimedischer lokaler Körper mit p -adische Bewertung v_p und p -adischem Betrag $|\cdot|_p$, $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} = \{x \in \mathcal{F} : |x|_p \leq 1\}$ sein Bewertungsring, ϖ ein lokales Primelement und q die Kardinalität von $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}/(\varpi)$, (siehe auch [7]). Mit dx bezeichnen wir das additive Haarmaß auf $\mathcal{F}$, sodass $\text{Vol}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) = 1$ und mit d^*x bezeichnen wir das multiplikative Haarmaß auf $\mathcal{F}^*$, sodass $\text{Vol}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*) = 1$ gilt. Es gilt $d^*x = (1 - q^{-1})^{-1}|x|^{-1}dx$. Haarmaße werden zum Beispiel in [10] behandelt.

Wir interessieren uns für Darstellungen von $GL(2, \mathcal{F})$, können aber viele Resultate allgemeiner für Darstellungen total unzusammenhängender lokal kompakter Gruppen zeigen. Sei V ein möglicherweise unendlich dimensionaler $\mathbb{C}$ -Vektorraum und G eine total unzusammenhängende lokal kompakte Gruppe. Eine Darstellung (π, V) von G heißt glatt, wenn $\text{stab}(v) = \{g \in G : \pi(g)(v) = v\}$ für alle $v \in V$ offen in G ist. Ist π glatt und V^U endlichdimensional für alle offenen Untergruppen U von G , dann heißt π zulässig.

Sei $B(\mathcal{F})$ die Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen in $GL(2, \mathcal{F})$. Unter den hier vorkommenden Gruppen ist $B(\mathcal{F})$ die einzige Gruppe mit nichttrivialer Modulfunktion δ , es gilt: $\delta(b) = \left| \frac{y_1}{y_2} \right|_p$ für $b = \begin{pmatrix} y_1 & x \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} \in B(\mathcal{F})$. Wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt, meinen wir mit einem Haarmaß auf $B(\mathcal{F})$ immer das Links-Haarmaß.

Sei (π, V) eine glatte Darstellung von G . Ein lineares Funktional $\hat{v} : V \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir glatt, wenn es eine offene Umgebung U der 1 in G gibt, mit $\hat{v}(\pi(g)(v)) = \hat{v}(v)$ für alle $g \in U, v \in V$. Sei $\hat{V}$ der Raum aller glatten linearen Funktionalen auf V . Wir erhalten eine glatte Darstellung $(\hat{\pi}, \hat{V})$ auf G , die duale Darstellung zu (π, V) , indem wir

$$(\hat{\pi}(g)\hat{v})(v) = \hat{v}(\pi(g^{-1})(v)), \quad v \in V, \hat{v} \in \hat{V}, g \in G$$

setzen.

Sei $\mathcal{H}$ der $\mathbb{C}$ -Vektorraum aller lokalkonstanten $\mathbb{C}$ -wertigen Funktionen auf G mit kompakten Träger. Für G unimodular definieren wir durch

$$(\phi_1 * \phi_2)(g) = \int_G \phi_1(gh^{-1})\phi_2(h)dh, \quad g \in G, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}$$

eine Multiplikation auf $\mathcal{H}$. Damit wird $\mathcal{H}$ zu einer Algebra (ohne Einselement), der Heckealgebra. Sei (π, V) eine Darstellung von G , dann erhalten wir durch

$$\pi(\phi)v = \int_G \phi(g)\pi(g)(v)dg, \quad g \in G, \phi \in \mathcal{H}, v \in V$$

eine Darstellung (π, V) des Ringes $\mathcal{H}$. Ist K_0 eine kompakt offene Untergruppe von G , dann bildet $\mathcal{H}_{K_0}$, definiert als die Menge der unter K_0 rechts- und links-invarianten Funktionen in $\mathcal{H}$, eine Unter algebra von $\mathcal{H}$. Der Teilraum V^{K_0} der unter K_0 invarianten

Vektoren in V ist ein $\mathcal{H}_{K_0}$ -Modul.

Mit $N(\mathcal{F})$ bezeichnen wir die Gruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen in $GL(2, \mathcal{F})$. Für ψ ein nichttrivialer additiver Charakter von $\mathcal{F}$ definieren wir einen Charakter ψ_N auf der Gruppe $N(\mathcal{F})$ durch

$$\psi_N(u) := \psi(x) \quad \text{für } u = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N(\mathcal{F}).$$

Sei (π, V) eine glatte Darstellung von $GL(n, \mathcal{F})$. Ein lineares Funktional $\lambda : V \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\lambda(\pi(u)v) = \psi_N(u)\lambda(v)$ für alle $u \in N(\mathcal{F})$ und $v \in V$ heißt Whittaker-Funktional auf V .

Sei (π, V) eine glatte Darstellung von $B(\mathcal{F})$. Bezeichne mit V_N den Unterraum von V erzeugt von den Elementen der Form

$$\pi(u)v - v, \quad u \in N(\mathcal{F}), v \in V.$$

Der Teilraum V_N ist invariant unter der Gruppe der Diagonalelemente $T(\mathcal{F})$, denn für $u \in N(\mathcal{F})$, $t \in T(\mathcal{F})$ gilt

$$\pi(t)(\pi(u)v - v) = \pi(u')v' - v', \quad u' = tut^{-1}, v' = \pi(t)v.$$

Wir erhalten eine Darstellung $(\pi_N, V/V_N)$ von $T(\mathcal{F})$ auf V/V_N , die glatt ist. Der $T(\mathcal{F})$ -Modul V/V_N heißt Jacquet-Modul von V , wir bezeichnen ihn mit $J(V)$.

Für eine glatte Darstellung (π, V) von $B(\mathcal{F})$ und einen nichttrivialen additiven Charakter ψ von $\mathcal{F}$ sei $V_{N, \psi}$ der von den Elementen der Form

$$\pi(u)v - \psi_N(u)v, \quad u \in N(\mathcal{F}), v \in V$$

aufgespannte Teilraum von V . Auf $V/V_{N, \psi}$ operiert das Zentrum Z von $GL(2, \mathcal{F})$ via

$$z(v + V_{N, \psi}) := \pi(z)v + V_{N, \psi}, \quad z \in Z, v \in V.$$

Der Z -Modul $V/V_{N, \psi}$ heißt der getwistetete Jacquet-Modul, für ihn schreiben wir $J_\psi(V)$. Folgende Resultate zum getwisteten Jacquet-Modul, siehe [1], Kapitel 4.4, werden wir später verwenden:

Satz 1.1. *Der Funktor J_ψ ist exakt.*

Satz 1.2. *Sei (π, V) eine glatte Darstellung von $GL(2, \mathcal{F})$ für die es kein nichttriviales Whittakerfunktional gibt. Dann faktorisiert π durch die Determinantenabbildung: $GL(2, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}^*$.*

2 Die Hauptseriendarstellungen und die Steinberg Darstellungen

2.1 Induzierte Darstellungen

Sei G eine total unzusammenhängende lokal kompakte Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe. Ausgehend von einer glatten Darstellung (π, V) von H definieren wir nun zwei induzierte Darstellungen von G .

Sei V^G der Raum der Funktionen $f : G \longrightarrow V$, die folgende zwei Eigenschaften haben:

1. Für $h \in H$, $g \in G$ und δ_H bzw. δ_G die Modulfunktion von H bzw. G gilt:

$$f(hg) = \delta_G(h)^{-\frac{1}{2}} \delta_H(h)^{\frac{1}{2}} \pi(h) f(g) \quad (3a)$$

2. Es gibt eine offene Untergruppe K_0 von G , sodass

$$f(gk) = f(g) \quad \text{für } g \in G, k \in K_0. \quad (3b)$$

Wir erhalten eine Darstellung $\pi^G : G \longrightarrow \text{End}(V^G)$, die wir später als die von H nach G induzierte Darstellung bezeichnen werden, indem wir $(\pi^G(g)(f))(x) = f(xg)$ setzen. Die Bedingung (3b) garantiert uns, dass diese Darstellung glatt ist.

Mit V_c^G bezeichnen wir den Raum der Funktionen aus V^G , die kompakten Träger modulo H haben. Eine Funktion $f : G \longrightarrow V$ hat kompakten Träger modulo H , wenn $\text{supp}(f) \subseteq H \cdot K$ gilt für eine kompakte Teilmenge K von G .

Definition 2.1. Die Darstellung (π^G, V^G) oder auch $\text{Ind}_H^G(\pi)$ heißt die von H nach G induzierte Darstellung. Die Einschränkung von π^G auf den Raum V_c^G bezeichnen wir mit (π_c^G, V_c^G) und nennen sie die kompakt induzierte Darstellung von H auf G .

Bemerkung 2.2. Falls $H \backslash G$ kompakt ist, gilt $(\pi^G, V^G) = (\pi_c^G, V_c^G)$.

Proposition 2.3 (Frobeniusreziprozität). Sei G eine total unzusammenhängende lokal kompakte Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe. Seien (π, V) und (σ, W) Darstellungen von H bzw. von G . Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus, sodass

$$\text{Hom}_G(\sigma, \pi^G) \cong \text{Hom}_H(\sigma, \delta_G^{-\frac{1}{2}} \delta_H^{\frac{1}{2}} \pi).$$

Beweis. Sobald man sich klargemacht hat, wie der Isomorphismus aussieht, sind alle weiteren Überlegungen nur noch formales Nachprüfen.

Einem G -Homomorphismus $\Phi : W \longrightarrow V^G$ soll ein Element Ψ in $\text{Hom}_H(\sigma, \delta_G^{-\frac{1}{2}} \delta_H^{\frac{1}{2}} \pi)$ zugeordnet werden durch $\Psi(w) = \Phi(w)(1)$, $w \in W$. Wir zeigen, dass Φ wirklich ein H -Homomorphismus ist: Für $h \in H$ gilt

$$\begin{aligned} \Psi(\sigma(h)w) &= \Phi(\sigma(h)w)(1) = \pi^G(h)(\Phi(w))(1) = (\Phi(w))(1 \cdot h) = \\ &= \delta_G(h)^{-\frac{1}{2}} \delta_H(h)^{\frac{1}{2}} \pi(h) \Phi(w)(1) = \delta_G(h)^{-\frac{1}{2}} \delta_H(h)^{\frac{1}{2}} \pi(h) \Psi(w). \end{aligned}$$

Haben wir umgekehrt $\Psi \in \text{Hom}_H(\sigma, \delta_G^{-\frac{1}{2}} \delta_H^{\frac{1}{2}} \pi)$ gegeben, dann erhalten wir ein Element Φ in $\text{Hom}_G(\sigma, \pi^G)$, indem wir $\Phi(w)(g) = \Psi(\sigma(g)w)$, $w \in W, g \in G$ setzen. Wir zeigen, dass $\Phi(w)$ in V^G liegt, das heißt, wir überprüfen die Bedingungen (3a) und (3b):

(3a): Für $h \in H, g \in G$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi(w)(hg) &= \Psi(\sigma(hg)w) = \Psi(\sigma(h)\sigma(g)w) = \delta_G(h)^{-\frac{1}{2}} \delta_H(h)^{\frac{1}{2}} \pi(h) \Psi(\sigma(g)w) = \\ &= \delta_G(h)^{-\frac{1}{2}} \delta_H(h)^{\frac{1}{2}} \pi(h) \Phi(w)(g). \end{aligned}$$

(3b): Da σ glatt ist, gibt es zu w eine offene Untergruppe K_0 , unter der w invariant ist.

Es ist klar, dass $\Phi(w)$ die Eigenschaft (3b) bezüglich dieser Untergruppe K_0 erfüllt.

Damit wir wissen, dass Φ wirklich in $\text{Hom}_G(\sigma, \pi^G)$ liegt, müssen wir noch zeigen, dass es ein G -Homomorphismus ist. Sei dazu $j \in G$:

$$\Phi(\sigma(j)w)(g) = \Psi(\sigma(gj)w) = \Phi(w)(gj) = \pi^G(j) \Phi(w)(g).$$

Schließlich müssen wir zeigen, dass die Abbildungen $\Phi \mapsto \Psi$ und $\Psi \mapsto \Phi$ invers zueinander sind. Das ist eine weitere formale Rechnung, die wir uns hier ersparen. $\square$

2.2 Die Hauptseriendarstellungen

Ab jetzt werden wir uns nur noch mit einem Spezialfall der gerade beschriebenen Theorie beschäftigen:

Wir setzen $G = GL(2, \mathcal{F})$ und $H = B(\mathcal{F})$, die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen in G . Seien μ_1 und μ_2 zwei Charaktere von $\mathcal{F}^*$. Durch

$$\chi \left(\begin{pmatrix} y_1 & * \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} \right) = \mu_1(y_1) \mu_2(y_2) \quad (4)$$

erhalten wir einen Charakter χ auf $B(\mathcal{F})$, diesem entspricht eine glatte Darstellung $(\chi, \mathbb{C})$ von $B(\mathcal{F})$. Die von $B(\mathcal{F})$ nach $GL(2, \mathcal{F})$ induzierte Darstellung $\text{Ind}_{B(\mathcal{F})}^{GL(2, \mathcal{F})}(\chi)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ und nennen sie Hauptseriendarstellung, falls sie irreduzibel ist. (Wie wir später sehen werden, ist sie das „meistens“.)

In Bemerkung 2.2 haben wir festgestellt, dass es keinen Unterschied macht, ob wir die kompakt induzierte oder die induzierte Darstellung betrachten, wenn $H \backslash G$ kompakt ist. Nun werden wir zeigen, dass das in unserer Situation der Fall ist:

Proposition 2.4 (Iwasawazerlegung). *Sei $G = GL(n, \mathcal{F})$, $B(\mathcal{F})$ die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen in G und $K = GL(n, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$. Dann gilt:*

$$G = B(\mathcal{F})K \quad \text{und} \quad B(\mathcal{F}) \backslash G \text{ ist kompakt.}$$

Beweis. Die erste Aussage zeigen wir durch Induktion nach n . Der Induktionsanfang ist klar, für $n = 1$ ist nichts zu zeigen.

Sei $g \in G$. Unser Ziel ist es, ein $k \in K$ anzugeben, sodass gk obere Dreiecksform hat.

Dazu bestimmen wir zunächst wie folgt $k_1 \in K$, sodass in der letzten Zeile von gk_1 alle Einträge außer dem Eintrag (n, n) , also dem auf der Diagonale, Null sind.

Wähle dazu eine Permutationsmatrix $w \in GL(n, \mathcal{F})$ sodass sich die letzte Zeile g_n von g folgendermaßen schreiben lässt:

$$g_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)w,$$

wobei der p-adische Betrag von x_n größer oder gleich den Beträgen der x_1 bis x_{n-1} ist. Wir wählen

$$k_1 = w^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ -x_1 x_n^{-1} & -x_2 x_n^{-1} & -x_3 x_n^{-1} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten gk_1 von der gewünschten Form:

$$gk_1 = \begin{pmatrix} g_{n-1} & * \\ 0 & x_n \end{pmatrix}, \text{ wobei } g_{n-1} \in GL(n-1, \mathcal{F}).$$

Die Matrix k_1 liegt in K , denn x_n hat Betrag größer oder gleich den Beträgen von $x_1, \dots, x_{n-1}$.

Auf g_{n-1} können wir nun die Induktionsannahme anwenden, das heißt, wir finden $k' \in GL(n-1, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ sodass $g_{n-1}k'$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Schließlich setzen wir

$$k = k_1 \begin{pmatrix} k' & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

und sehen, dass gk obere Dreiecksgestalt hat. Damit haben wir $G = B(\mathcal{F})K$ gezeigt.

Die zweite Behauptung folgt leicht aus der ersten: Die Komposition der Einbettung von K in G und der Quotientenabbildung von $B(\mathcal{F}) \backslash G$ ist eine surjektive stetige Abbildung:

$$K \longrightarrow G \longrightarrow B(\mathcal{F}) \backslash G.$$

Da K eine kompakte Gruppe ist, ist auch ihr Bild unter dieser Abbildung, $B(\mathcal{F}) \backslash GL(n, \mathcal{F})$, kompakt. $\square$

Bemerkung 2.5. Aus der Iwasawazerlegung sehen wir, dass eine Funktion in $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ schon durch ihre Werte auf $GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ vollständig bestimmt ist. Genauer gilt, die Einschränkung, die einer Funktion in $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ die auf $GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ eingeschränkte Funktion zuweist, ist ein $GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ -Isomorphismus von $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ in den Raum aller lokalkonstanten Funktionen $\phi : GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\phi \left(\begin{pmatrix} x_1 & y \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} k \right) = \mu_1(x_1) \mu_2(x_2) \phi(k) \quad (5)$$

für $x_1, x_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*, y \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ und $k \in GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$.

Aus dieser Beobachtung sehen wir sofort, dass $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ zulässig ist: Die Glattheit ist

klar, sie ist sozusagen in die Definition der induzierten Darstellungen eingebaut, siehe (3b). Sei nun K_0 eine offene Untergruppe in $GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)^{K_0}$, also der Raum der unter K_0 invarianten Elemente in $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$, endlichdimensional ist. Aufgrund unserer Beobachtung genügt es zu zeigen, dass der Raum der lokalkonstanten Funktionen auf $GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$, die (5) erfüllen und invariant unter K_0 sind, endlichdimensional ist. Das ist aber klar, da $GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})/K_0$ endlich ist.

Notation: Sei X ein lokal kompakter total unzusammenhängender Raum. Mit $C_c^\infty(X)$ bezeichnen wir den Ring der lokalkonstanten Funktionen mit kompaktem Träger auf X . Ein lineares Funktional auf $C_c^\infty(X)$ heißt Distribution auf X und für den Raum der Distributionen auf X schreiben wir $\mathfrak{D}(X)$. Für jede lokal kompakte total unzusammenhängende Gruppe G gilt $\mathcal{H} = C_c^\infty(G)$.

Auf $C_c^\infty(G)$ wirkt G durch Rechts- und Linkstranslation:

$$(\rho(g)f)(x) = f(xg) \quad \text{und} \quad (\lambda(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$$

für $f \in C_c^\infty(G)$ und $g, x \in G$. Analog erhalten wir Aktionen von G auf $\mathfrak{D}(G)$:

$$(\rho(g)T)(f) = T(\rho(g^{-1})f) \quad \text{und} \quad (\lambda(g)T)(f) = T(\lambda(g^{-1})f),$$

wobei $T \in \mathfrak{D}(G)$.

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, zu klären, für welche Charaktere μ_1 und μ_2 die Darstellung $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ irreduzibel ist und wie die Situation im reduziblen Fall aussieht. Außerdem werden wir klären, wann zwei solche Darstellungen isomorph zueinander sind. Im folgenden schreiben wir (π, V) für die Darstellung $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$. Wir definieren folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} P : C_c^\infty(GL(2, \mathcal{F})) &\longrightarrow V, \\ P(\phi)(g) &= \int_{B(\mathcal{F})} \phi(b^{-1}g)(\delta^{\frac{1}{2}}\chi)(b)db, \quad \phi \in C_c^\infty(GL(2, \mathcal{F})). \end{aligned} \quad (6)$$

Zunächst überprüfen wir, dass $P(\phi)$ wirklich in V liegt, also die Eigenschaften (3a) und (3b) erfüllt:

$$P(\phi)(hg) = \int_{B(\mathcal{F})} \phi(b^{-1}hg)(\delta^{\frac{1}{2}}\chi)(b)db = \int_{B(\mathcal{F})} \phi(b^{-1}g)(\delta^{\frac{1}{2}}\chi)(hb)db = (\delta^{\frac{1}{2}}\chi)(h)P(\phi)(g),$$

für $h \in B(\mathcal{F})$. Für das zweite Gleichheitszeichen haben wir die Linksinvarianz des Maßes verwendet. Die Bedingung (3b) ist erfüllt, da ϕ lokalkonstant ist und kompakten Träger hat.

Mithilfe der Identität $d_R b = \delta(b)db$, wobei $d_R b$ das Rechts-Haarmaß auf $B(\mathcal{F})$ ist, lässt sich folgende Gleichung zeigen:

$$P(\lambda(h^{-1})\phi) = (\delta^{-\frac{1}{2}}\chi)(h)P(\phi), \quad h \in B(\mathcal{F}).$$

Für die Rechtstranslation gilt, da $\pi(g)$ auf V durch Multiplikation von rechts im Argument wirkt:

$$P(\rho(g)\phi) = \pi(g)P(\phi), \quad g \in GL(2, \mathcal{F}).$$

Durch Nachrechnen zeigen wir folgende weitere Eigenschaft der Abbildung P :

Proposition 2.6. *Die Abbildung $P : C_c^\infty(GL(2, \mathcal{F})) \longrightarrow V$ ist surjektiv.*

Beweis. Sei $f \in V$. Die Funktion, die auf K mit f übereinstimmt und sonst gleich Null ist, liegt in $C_c^\infty(GL(2, \mathcal{F}))$. Wir bezeichnen sie mit ϕ und werden zeigen, dass $P\phi = \text{Vol}(K \cap B(\mathcal{F}))f$ gilt. Aus der Iwasawazerlegung (Proposition 2.4) folgt, dass ein Element in V schon durch seine Einschränkung auf K vollständig bestimmt ist. Es genügt also zu zeigen, dass $\text{Vol}(K \cap B(\mathcal{F}))f$ und $P\phi$ auf K übereinstimmen. Es gilt:

$$(P\phi)(g) = \int_{B(\mathcal{F})} \phi(b^{-1}g)(\delta^{\frac{1}{2}}\chi)(b)db.$$

Der Integrand hat den Wert $\phi(g)$ falls $b \in K \cap B(\mathcal{F})$ und verschwindet sonst. Damit haben wir die Proposition gezeigt. $\square$

Für Beweise der nächsten beiden Propositionen verweisen wir auf [1], Kapitel 4.3.

Proposition 2.7. *Sei X ein total unzusammenhängender lokal kompakter Raum und $C \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann sind folgende Sequenzen exakt:*

$$0 \longrightarrow C_c^\infty(X - C) \longrightarrow C_c^\infty(X) \longrightarrow C_c^\infty(C) \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow \mathfrak{D}(C) \longrightarrow \mathfrak{D}(X) \longrightarrow \mathfrak{D}(X - C) \longrightarrow 0.$$

Dabei ordnet die Abbildung $C_c^\infty(X - C) \longrightarrow C_c^\infty(X)$ einer Funktion in $C_c^\infty(X - C)$ ihre durch Null auf C fortgesetzte Funktion in $C_c^\infty(X)$ zu. Die Abbildung $C_c^\infty(X) \longrightarrow C_c^\infty(C)$ ist die Einschränkungabbildung. Die Abbildungen in der zweiten Sequenz ergeben sich durch „Dualisieren“.

Proposition 2.8. *Sei G eine lokal kompakte total unzusammenhängende Gruppe G und ξ ein Charakter von G . Erfüllt eine Distribution $T \in \mathfrak{D}(G)$ die Gleichung $\lambda(h)T = \xi(h)^{-1}T$ für $h \in G$, dann ist sie bis auf einen linearen Faktor schon vollständig gegeben. Genauer gilt, es gibt eine Konstante c mit*

$$T(f) = c \int_G \xi(h)f(h)dh,$$

wobei dh das Links-Haarmaß auf G ist.

Proposition 2.9. *Die Darstellung $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ hat höchstens ein Whittakerfunktional.*

Beweis. Wir schreiben (π, V) für $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$. Sei $\Lambda : V \rightarrow \mathbb{C}$ ein Whittaker-Funktional. Definiere eine Distribution Δ auf $GL(2, \mathcal{F})$ durch

$$\Delta(\phi) = \Lambda(P\phi), \quad \phi \in C_c^\infty(GL(2, \mathcal{F})).$$

Aus den vor Proposition 2.6 gezeigten Eigenschaften der Abbildung P bezüglich Rechts- und Linkstranslation erhalten wir für $b \in B(\mathcal{F})$:

$$\lambda(b)\Delta(\phi) = \Delta(\lambda(b^{-1})\phi) = \Lambda(P(\lambda(b^{-1})\phi)) = \Lambda((\delta^{-\frac{1}{2}}\chi)(b)P\phi) = (\delta^{-\frac{1}{2}}\chi)(b)\Delta(\phi),$$

das heißt

$$\lambda(b)\Delta = (\delta^{-\frac{1}{2}}\chi)(b)\Delta, \quad b \in B(\mathcal{F}) \quad (7)$$

und analog (unter Verwendung der Eigenschaft des Whittaker-Funktional):

$$\rho(n)\Delta = \psi_N(n)^{-1}\Delta, \quad n \in N(\mathcal{F}). \quad (8)$$

Da P nach Proposition 2.6 surjektiv ist, ergeben zwei nicht proportionale Whittaker-Funktionale zwei linear unabhängige Distributionen mit den Eigenschaften (7) und (8). Wir sind also fertig, wenn wir zeigen können, dass der Raum der Distributionen mit diesen Eigenschaften eindimensional ist.

Aus der Bruhatzerlegung sehen wir, dass $B(\mathcal{F}) \backslash GL(2, \mathcal{F}) / N(\mathcal{F})$ aus zwei Doppelnebenklassen besteht. Als Repräsentanten können wir die Identität und das Element

$$w_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wählen mit den dazugehörigen Doppelnebenklassen $B(\mathcal{F})\mathbb{1}N(\mathcal{F})$ und $B(\mathcal{F})w_0N(\mathcal{F}) = GL(2, \mathcal{F}) - B(\mathcal{F})$. Nach Proposition 2.7 ist folgende Sequenz (mit den dort angegebenen Morphismen) exakt:

$$0 \rightarrow \mathfrak{D}(B(\mathcal{F})) \rightarrow \mathfrak{D}(GL(2, \mathcal{F})) \rightarrow \mathfrak{D}(GL(2, \mathcal{F}) - B(\mathcal{F})) \rightarrow 0.$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass das Bild der Distribution Δ unter $\mathfrak{D}(GL(2, \mathcal{F})) \rightarrow \mathfrak{D}(GL(2, \mathcal{F}) - B(\mathcal{F}))$ die Eigenschaften (7) und (8) ebenfalls erfüllt. Das wird uns später in Zusammenhang mit folgender Tatsache sehr hilfreich sein: Wir werden zeigen, dass der Raum der Distributionen in $\mathfrak{D}(GL(2, \mathcal{F}) - B(\mathcal{F}))$, für die (7) und (8) gilt, eindimensional ist. Sei dazu $\Delta_1 \in \mathfrak{D}(GL(2, \mathcal{F}) - B(\mathcal{F}))$ mit den Eigenschaften (7) und (8). Dann existiert eine Konstante c mit

$$\Delta_1(\phi) = c \int_{B(\mathcal{F})} \int_{N(\mathcal{F})} \phi(bw_0n^{-1})\psi_N(n)(\delta^{\frac{1}{2}}\chi^{-1})(b)dn db, \quad \text{für } \phi \in C_c^\infty(GL(2, \mathcal{F}) - B(\mathcal{F})).$$

Um das zu sehen, definieren wir eine Distribution T auf $B(\mathcal{F}) \times N(\mathcal{F})$ durch $T(\Phi) = \Delta_1(\phi)$, wobei $\Phi \in C_c^\infty(B(\mathcal{F}) \times N(\mathcal{F}))$ gegeben ist durch $\Phi(b, n) = \phi(bw_0n^{-1})$. Dass T wohldefiniert ist, ergibt sich daraus, dass die Abbildung: $(B, N) \rightarrow GL(2, \mathcal{F}), (b, n) \mapsto$

bw_0n^{-1} ein Homöomorphismus ist.

Für T gilt:

$$\begin{aligned} (\lambda(b_1, n_1)T)(\Phi) &= T(\lambda(b_1^{-1}, n_1^{-1})\Phi) = \Delta_1(\lambda(b_1^{-1})\rho(n_1^{-1})\phi) = \lambda(b_1)\rho(n_1)\Delta_1(\phi) = \\ &= (\delta^{-\frac{1}{2}}\chi)(b_1)\psi_N(n_1^{-1})\Delta_1(\phi) = (\delta^{-\frac{1}{2}}\chi)(b_1)\psi_N(n_1^{-1})T(\Phi). \end{aligned}$$

Proposition 2.8 liefert die Behauptung.

Ebenfalls mithilfe von Proposition 2.8 zeigen wir nun, dass eine Distribution Δ_2 in $\mathfrak{D}(B(\mathcal{F}))$, die (7) und (8) erfüllt, Null ist. Es gilt:

$$\Delta_2(\phi) = c \int_{B(\mathcal{F})} \phi(b)(\delta^{\frac{1}{2}}\chi^{-1})(b)db, \quad \phi \in C_c^\infty(B(\mathcal{F})).$$

Indem man das Integral in ein Integral mit Rechts-Haarmaß transformiert und verwendet, dass δ auf $N(\mathcal{F})$ trivial ist, sieht man, dass $\rho(n)\Delta_2 = \Delta_2$ für $n \in N(\mathcal{F})$ gilt. Da wir vorausgesetzt haben, dass Δ_2 die Eigenschaft (8) hat, folgt, dass die Konstante c und damit die Distribution Δ_2 Null ist.

Jetzt können wir zeigen, dass der Raum der Distributionen in $\mathfrak{D}(GL(2, \mathcal{F}))$, die (7) und (8) erfüllen, eindimensional ist. Für zwei solche Distributionen sind ihre Bilder in $\mathfrak{D}(GL(2, \mathcal{F}) - \mathcal{B}(\mathcal{F}))$ proportional. Also gibt es eine nichttriviale Linearkombination der zwei, deren Bild Null ist. Aus der Exaktheit der oben angegebenen Sequenz sehen wir, dass diese Linearkombination im Bild von $\mathfrak{D}(B(\mathcal{F})) \rightarrow \mathfrak{D}(GL(2, \mathcal{F}))$ liegt. Ihr Urbild hat die Eigenschaften (7) und (8), ist also Null nach den obigen Überlegungen. Damit ist auch die Linearkombination Null und die zwei Distributionen in $\mathfrak{D}(GL(2, \mathcal{F}))$, von denen wir ausgegangen sind, sind proportional. $\square$

Proposition 2.11 benötigt folgendes maßtheoretische Resultat, das wir ohne Beweis angeben, vergleiche [1], Lemma 2.6.1:

Lemma 2.10. *Sei G eine unimodulare topologische Gruppe und P, K zwei abgeschlossene Untergruppen mit K kompakt und $PK = G$. Den Raum aller stetigen Funktionen auf G , die $f(pg) = \delta_P(p)f(g)$ für $p \in P$ erfüllen, wobei δ_P die Modulfunktion von P ist, bezeichnen wir mit $C(P \backslash G, \delta_P)$. Wir erhalten eine Darstellung $(\rho, C(P \backslash G, \delta_P))$ von G , indem wir $(\rho(g)f)(x) = f(xg)$ setzen. Das lineare Funktional $I : C(P \backslash G, \delta_P) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $I(f) = \int_K f(k)dk$ ist dann invariant unter der Aktion von G .*

Proposition 2.11. *Seien μ_1 und μ_2 Charaktere von $\mathcal{F}^*$. Die duale Darstellung von $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ ist $\mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})$.*

Beweis. Wir schreiben (π, V) für $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ und (π', V') für $\mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})$. Für $f \in V$ und $f' \in V'$ liegt ff' in $C(B(\mathcal{F}) \backslash GL(2, \mathcal{F}), \delta_{B(\mathcal{F})})$. Die Gruppen $P = B(\mathcal{F})$ und $K = GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 2.10 und wir sehen, dass die Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $V \times V'$ definiert durch

$$\langle f, f' \rangle = \int_K f(k)f'(k)dk$$

die Eigenschaft

$$\langle \pi(g)f, \pi'(g)f' \rangle = \langle f, f' \rangle, \quad g \in GL(2, \mathcal{F}) \quad (9)$$

hat. Für f' aus V' erhalten wir ein lineares Funktional $l_{f'} : V \rightarrow \mathbb{C}$, indem wir $l_{f'}(f) = \langle f, f' \rangle$ setzen. Aus der Glattheit von π' folgt, dass $l_{f'}$ glatt ist, das heißt, es gibt eine offene Umgebung U der Identität in $GL(2, \mathcal{F})$ mit $l_{f'}(f) = l_{f'}(\pi(g)(f))$ für alle $g \in U$ und $f \in V$. Außerdem zeigen wir, dass aus $l_{f'} = 0$, schon $f' = 0$ folgt. Sei dazu $f' \in V'$, $f' \neq 0$ und $m \in K$ mit $f'(m) \neq 0$. (So ein m existiert, sobald $f' \neq 0$.) Es gibt eine kompakt offene Untergruppe K_0 von $GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ mit $f'(mk) = f'(m)$ für alle k aus K_0 . Betrachte $f_0 : GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$f_0(x) = \begin{cases} \chi(b)f'(m) & \text{falls } x = bmk \text{ für } b \in B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \text{ und } k \in K_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zunächst überzeugen wir uns davon, dass f_0 wohldefiniert ist. Seien $b_1 = \begin{pmatrix} b_1^1 & x \\ 0 & b_1^1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} b_2^1 & x \\ 0 & b_2^1 \end{pmatrix} \in B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ und k_1, k_2 aus K_0 . Wir müssen zeigen, dass aus $b_1mk_1 = b_2mk_2$ schon $\chi(b_1)f'(m) = \chi(b_2)f'(m)$, das heißt $\chi(b_1) = \chi(b_2)$ folgt. Man sieht leicht, dass es zu b_1, b_2 genau dann k_1 und k_2 mit $b_1mk_1 = b_2mk_2$ gibt, wenn ein $h \in mK_0m^{-1} \cap B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ existiert, sodass $b_1 = b_2h$.

Indem man $b_1mk_1 = b_2mk_2$ in f' einsetzt und die Definition der induzierten Darstellung verwendet, sieht man, dass aus $b_1mk_1 = b_2mk_2$ folgt, dass $\chi^{-1}(b_1) = \chi^{-1}(b_2)$ gilt. Also erhalten wir $\chi^{-1}(h) = 1$ für alle $h \in mK_0m^{-1} \cap B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$. Daraus folgt nun $\chi(h) = 1$ für $h \in mK_0m^{-1} \cap B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$, da $mK_0m^{-1} \cap B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ eine Gruppe ist.

Seien also $b_1mk_1 = b_2mk_2$, dann gibt es $h \in mK_0m^{-1} \cap B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ mit $b_1 = b_2h$. Da $mK_0m^{-1} \cap B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ im Level von χ liegt, gilt $\chi(b_1) = \chi(b_2)$, wie wir behauptet haben, das heißt f_0 ist wohldefiniert.

Man rechnet leicht nach, dass $f_0(bg) = \chi(b)f_0(g)$ für $b \in B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$, $g \in K$ und $f_0(gk) = f_0(g)$ für $g \in K$ und $k \in K_0$ gilt. Nach Bemerkung 2.5 gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion f in V mit $f|_K = f_0$.

Indem man die Definition der induzierten Abbildung verwendet und beachtet, dass die Modulusfunktion δ auf $B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ trivial ist, sieht man, dass $f(x)f'(x) = f'(m)^2$ für $x \in B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})mK_0$ gilt. Somit erhalten wir:

$$l_{f'}(f) = \int_K f(k)f'(k)dk = \int_{B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})mK_0} f(k)f'(k)dk = f'(m)^2 \text{Vol}(B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})mK_0) \neq 0.$$

Also ist $l_{f'}(f) \neq 0$ und die Zuordnung $f' \mapsto l_{f'}$ definiert eine Injektion: $\mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}) \rightarrow \widehat{\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)}$. Aus (9) sehen wir, dass diese Abbildung ein $GL(2, \mathcal{F})$ -Homomorphismus ist. Wenn wir zeigen können, dass die Abbildung auch surjektiv ist, sind wir fertig. Natürlich können wir unsere bisherigen Überlegungen auch auf μ_i^{-1} statt auf μ_i , $i = 1, 2$ anwenden und erhalten eine Injektion $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2) \rightarrow \widehat{\mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})}$.

Allgemein gilt für zwei zulässige $GL(2, \mathcal{F})$ -Moduln V, W und eine $GL(2, \mathcal{F})$ -lineare Injektion $\phi : V \longrightarrow W$, dass

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} : \widehat{W} &\longrightarrow \widehat{V}, \\ \tilde{\phi}(\hat{w})(v) &= \hat{w}(\phi(v))\end{aligned}$$

eine $GL(2, \mathcal{F})$ -lineare Surjektion definiert. Das folgt direkt aus der Definition der dualen Darstellung. Da $\widehat{\mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})} = \mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})$ gilt, vergleiche [9], erhalten wir auf diese Weise eine Surjektion: $\widehat{\mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})} \longrightarrow \widehat{\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)}$. Sie stimmt mit der Injektion $f' \mapsto l_{f'}, \mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ überein, was wir hier nicht nachprüfen wollen, das heißt, diese Abbildung ist ein Isomorphismus. $\square$

Lemma 2.12. *Seien μ_1 und μ_2 Charaktere von $\mathcal{F}^*$.*

Hat $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ einen eindimensionalen invarianten Unterraum, dann gilt $\mu_1 \mu_2^{-1}(y) = |y|^{-1}$ für alle $y \in \mathcal{F}$. Falls die Darstellung eine eindimensionale Quotientendarstellung hat, gilt $\mu_1 \mu_2^{-1}(y) = |y|$ für alle $y \in \mathcal{F}$.

Beweis. Wir schreiben wieder (π, V) für $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ und beginnen mit dem Beweis der ersten Aussage. Sei $f \in V$ so, dass f einen eindimensionalen invarianten Unterraum aufspannt. Es gibt einen Charakter ρ_0 von $GL(2, \mathcal{F})$ mit $\rho_0(g)f = \pi(g)f$ für alle $g \in GL(2, \mathcal{F})$. Offensichtlich ist ρ_0 trivial auf der Kommutatoruntergruppe $SL(2, \mathcal{F})$ von $GL(2, \mathcal{F})$. Daher faktorisiert ρ_0 durch die Determinantenabbildung und wir finden einen Charakter ρ von $\mathcal{F}^*$ sodass gilt $\pi(g)f = \rho(\det(g))f$. Mithilfe der Definition der induzierten Darstellung erhalten wir

$$f(bg) = (\delta^{\frac{1}{2}}\chi)(b)\rho(\det(g))f(1), \quad b \in B(\mathcal{F}), g \in GL(2, \mathcal{F}).$$

Da wir $f \neq 0$ vorausgesetzt haben, folgt $f(1) \neq 0$. Setzen wir in dieser Gleichung nun $b = g^{-1} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix}$, so erhalten wir $\delta^{\frac{1}{2}}(b)\chi(b) = 1$ und daraus folgt die erste Behauptung.

Hat (π, V) eine eindimensionale Quotientendarstellung, das heißt einen invarianten Unterraum der Kodimension eins, dann ist sein Komplement ein invarianter eindimensionaler Unterraum in der dualen Darstellung. Die zweite Behauptung folgt nun mithilfe von Proposition 2.11. $\square$

Proposition 2.13. *Sei (π, V) eine zulässige Darstellung von $(\mathcal{F}^*)^k$ mit $V \neq 0$. Dann enthält V einen eindimensionalen invarianten Unterraum.*

Beweis. Wir benutzen eine grundlegende Eigenschaft zulässiger Darstellungen, ohne sie zu beweisen (vgl. [1], Proposition 4.2.2): Da (π, V) glatt ist, erhalten wir eine Zerlegung

$$V = \bigoplus_{\chi \in \widehat{(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*)^k}} V_{\chi}.$$

Dabei ist $(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*})^k$ die Menge der Äquivalenzklassen endlichdimensionaler irreduzibler Darstellungen von $(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*)^k$ mit offenem Kern und V_χ ist der Raum der Vektoren $v \in V$, die $\pi(u)v = \chi(u)v$ für u in der kompakten Untergruppe $(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*)^k$ erfüllen. Da π zulässig ist, sind die Räume V_χ endlichdimensional.

Wähle $\chi \in (\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*})^k$ mit V_χ ungleich Null und setze $p_r = (1, \dots, 1, \varpi, 1, \dots, 1) \in (\mathcal{F}^*)^k$, $1 \leq r \leq k$ mit ϖ an der r -ten Stelle. Die Operatoren $\pi(p_r)$ kommutieren mit der Wirkung von $(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*)^k$, lassen also V_χ invariant. Die linearen Abbildungen $\pi(\epsilon p_r)$, $1 \leq r \leq k$, $\epsilon \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*$ auf dem endlichdimensionalen Raum V_χ kommutieren offensichtlich untereinander. Ein Resultat aus der linearen Algebra zeigt nun, dass sie einen gemeinsamen Eigenvektor besitzen. Der von ihm erzeugte eindimensionale Teilraum von V ist invariant unter einem Erzeugendensystem von $(\mathcal{F})^*$, nämlich unter den $\pi(\epsilon p_r)$, $1 \leq r \leq k$, $\epsilon \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*$, und ist damit der gesuchte invariante Unterraum. $\square$

Satz 2.14. *Seien μ_1 und μ_2 Charaktere von $\mathcal{F}^*$. Die Darstellung $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ ist irreduzibel, außer in den folgenden zwei Fällen:*

1. *Falls $\mu_1 \mu_2^{-1}(y) = |y|^{-1}$ für alle $y \in \mathcal{F}$, dann hat $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ einen eindimensionalen invarianten Unterraum mit irreduzibler Quotientendarstellung.*
2. *Falls $\mu_1 \mu_2^{-1} = |y|$ für alle $y \in \mathcal{F}$, dann hat $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ einen irreduziblen invarianten Unterraum der Kodimension eins.*

Beweis. Wieder schreiben wir (π, V) für $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$. Sei $0 \subsetneq V' \subsetneq V$ ein nichttrivialer invarianter Unterraum, $V'' = V/V'$ der dazugehörige Quotientenraum und π' bzw. π'' die Darstellungen von $GL(2, \mathcal{F})$ auf V' bzw. auf V'' . Nach Proposition 1.1 erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow J_\psi(V') \longrightarrow J_\psi(V) \longrightarrow J_\psi(V'') \longrightarrow 0.$$

Direkt aus der Definition des Jacquetmoduls und des Whittakerfunktional sehen wir, dass ein lineares Funktional auf V genau dann ein Whittakerfunktional ist, wenn es auf $V_{N, \psi}$ verschwindet. Das heißt wir können den Raum der Whittakerfunktionalen mit dem algebraischen Dualraum von J_ψ identifizieren. Aus Proposition 2.9 folgt nun, dass $J_\psi(V)$ höchstens eindimensional ist. Da die Sequenz exakt ist, muss deshalb $J_\psi(V')$ oder $J_\psi(V'')$ gleich Null sein.

Fall 1: Sei zunächst $J_\psi(V') = 0$, das bedeutet V' besitzt kein Whittakerfunktional. Nach Satz 1.2 faktorisiert π' durch die Determinantenabbildung: $GL(2, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}^*$ und wir können π' als Darstellung von $\mathcal{F}^*$ betrachten. Nach Proposition 2.13 hat π' einen eindimensionalen invarianten Unterraum, aus Lemma 2.12 folgt daher, dass $\mu_1 \mu_2^{-1}(y) = |y|^{-1}$ für alle $y \in \mathcal{F}$. Umgekehrt gibt es für Charaktere μ_1, μ_2 mit $\mu_1 \mu_2^{-1}(y) = |y|^{-1}$ einen Charakter μ von $\mathcal{F}^*$ mit $\mu_1(y) = \mu(y)|y|^{-\frac{1}{2}}$ und $\mu_2(y) = \mu(y)|y|^{\frac{1}{2}}$ und es ist klar, dass die Abbildung $f(g) = \mu(\det(g)) \in V$ einen eindimensionalen invarianten Unterraum erzeugt. Fall 2: Sei nun $J_\psi(V'') = 0$. Wie wir gerade für π gesehen haben, faktorisiert dann π'' durch die Determinantenabbildung. Durch „Dualisieren“ erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \widehat{V''} \longrightarrow \widehat{V} \longrightarrow \widehat{V'} \longrightarrow 0.$$

Aus Proposition 2.11 wissen wir, dass die duale Darstellung von V die Darstellung $\mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})$ ist. Da π'' durch die Determinantenabbildung faktorisiert, ist auch $\widehat{\pi''}$ trivial auf $SL(2, \mathcal{F})$, wie man sofort aus der Definition der dualen Darstellung sieht. Nun lassen sich die obigen Überlegungen anwenden und wir sehen, dass $(\mu_1^{-1}\mu_2)(y) = |y|^{-1}$ für alle $y \in \mathcal{F}$ gilt, das ist der zweite Fall. Außerdem gilt für Charaktere μ_1, μ_2 mit $(\mu_1\mu_2^{-1})(y) = |y|$, dass die duale Darstellung von $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ einen eindimensionalen invarianten Unterraum hat (s. oben) und daher hat $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ selbst einen invarianten Unterraum der Kodimension eins.

Wir müssen noch die Irreduzibilität der Quotientendarstellung aus dem ersten Fall und die Irreduzibilität des invarianten Unterraums der Kodimension eins aus dem zweiten Fall zeigen.

Seien zunächst μ_1 und μ_2 Charaktere mit $\mu_1\mu_2^{-1} = |\cdot|^{-1}$. Wähle einen Charakter μ mit $\mu_1 = \mu \cdot |\cdot|^{\frac{1}{2}}$ und $\mu_2 = \mu \cdot |\cdot|^{-\frac{1}{2}}$. Wir müssen zeigen, dass $(\pi, W) = \mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)/\mu(\det(\cdot))$ irreduzibel ist. Nach Proposition 1.1 ist folgende Sequenz exakt:

$$0 \longrightarrow J_\psi(\mu(\det(\cdot))) \longrightarrow J_\psi(\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)) \longrightarrow J_\psi(W) \longrightarrow 0.$$

Wie oben bemerkt, hat $J_\psi(\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2))$ höchstens Dimension eins und aus der Exaktheit der Sequenz schließen wir, dass auch $J_\psi(W)$ höchstens Dimension eins hat.

Angenommen U ist ein echter invarianter Teilraum von W . Wieder aus Proposition 1.1 sehen wir, dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow J_\psi(U) \longrightarrow J_\psi(W) \longrightarrow J_\psi(W/U) \longrightarrow 0$$

exakt ist und folgern, dass $J_\psi(U)$ oder $J_\psi(W/U)$ gleich Null ist.

Sei zunächst $J_\psi(U) = 0$. Früher im Beweis haben wir uns überlegt, dass V' einen eindimensionalen Unterraum hat, wenn $J_\psi(V') = 0$ gilt. Völlig analoge Überlegungen zeigen, dass U einen eindimensionalen invarianten Unterraum hat. Sei $\bar{f} = f + \langle \mu(\det(\cdot)) \rangle$ ein Erzeuger dieses eindimensionalen Teilraums. Wie in Lemma 2.12 sehen wir, dass es einen Charakter ρ von $\mathcal{F}^*$ gibt mit $\pi(g)\bar{f} = \rho(\det(g))\bar{f}$. Also gibt es ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit:

$$f(bg) = \mu(b_1b_2)\rho(\det(g))f(1) + \alpha\mu(\det(bg)) \quad (10)$$

für $b = \begin{pmatrix} b_1 & x \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in B(\mathcal{F})$ und $g \in GL(2, \mathcal{F})$. Da f nicht in $\langle \mu(\det(\cdot)) \rangle$ liegt, folgt also $f(1) \neq 0$. In Gleichung (10) setzen wir nun $b = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathcal{F}^*$ und $g = \mathbb{1}$ beziehungsweise $b = \mathbb{1}$ und $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und erhalten

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mu(a)f(1) + \alpha\mu\left(\det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

beziehungsweise

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \rho(a)f(1) + \alpha\mu\left(\det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Wir sehen also, dass $\mu = \rho$ gilt. Aus (10) folgt nun mithilfe von $\mu(b_1b_2)\mu(\det(g)) = \mu(\det(bg))$, dass $f \in \langle \mu(\det(\cdot)) \rangle$, ein Widerspruch zu $\langle f \rangle$ ist eindimensionaler Teilraum

von U .

Die Annahme $J_\psi(W/U) = 0$ führt auf ähnliche Weise zu einem Widerspruch. Damit haben wir gezeigt, dass $W = \mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)/\langle \mu(\det(\cdot)) \rangle$ irreduzibel ist.

Seien nun μ_1, μ_2 und μ Charaktere von $\mathcal{F}^*$ mit $\mu_1 \mu_2^{-1} = |\cdot|$, $\mu_1 = \mu|\cdot|^{\frac{1}{2}}$ und $\mu_2 = \mu|\cdot|^{-\frac{1}{2}}$. Wir müssen zeigen, dass der invariante Unterraum der Kodimension eins in $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ irreduzibel ist. Aus Proposition 2.11 erhalten wir, dass die duale Darstellung von $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ die Darstellung $\mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})$ ist. Wir wissen bereits, dass $\mu^{-1}(\det(\cdot))$ einen eindimensionalen invarianten Unterraum in $\mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})$ erzeugt und $\mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})/\langle \mu^{-1}(\det(\cdot)) \rangle$ irreduzibel ist. Die duale Darstellung einer zulässigen irreduziblen Darstellung ist irreduzibel (siehe z. B. [1]). Somit ist das Komplement von $\mu^{-1}(\det(\cdot))$ (bezüglich der Paarung, die wir wegen der Dualität erhalten) ein irreduzibler invarianter Teilraum der Kodimension eins in $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$, der isomorph zu $\widehat{\mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})/\langle \mu^{-1}(\det(\cdot)) \rangle}$ ist. $\square$

Satz 2.15. *Gibt es einen $GL(2, \mathcal{F})$ -Homomorphismus: $\mathcal{B}(\eta_1, \eta_2) \longrightarrow \mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$, dann gilt entweder $\eta_1 = \mu_1$ und $\eta_2 = \mu_2$ oder $\eta_1 = \mu_2$ und $\eta_2 = \mu_1$.*

Beweis. Wir schreiben $(\pi, V) = \mathcal{B}(\eta_1, \eta_2)$. Mit χ_1 beziehungsweise χ_2 bezeichnen wir den durch η_1 und η_2 beziehungsweise durch μ_1 und μ_2 definierten Charakter auf $B(\mathcal{F})$, also etwa:

$$\chi_1 \left(\begin{pmatrix} y_1 & * \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} \right) = \eta_1(y_1)\eta_2(y_2).$$

Aus der Frobeniusreziprozität (Proposition 2.3) sehen wir, dass es einen $B(\mathcal{F})$ -Homomorphismus $\Lambda : V \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt, wobei wir $\mathbb{C}$ als $B(\mathcal{F})$ -Modul mit folgender Skalarmultiplikation betrachten:

$$b \cdot v = (\delta^{\frac{1}{2}} \chi_2)(b)v \quad b \in B(\mathcal{F}), v \in \mathbb{C}.$$

Das bedeutet, es gilt $\Lambda(\pi(b)v) = (\delta^{\frac{1}{2}} \chi_2)(b)\Lambda(v)$ für $v \in V$ und $b \in B(\mathcal{F})$. Erinnern wir uns an die in (6) definierte Abbildung

$$P : C_c^\infty(GL(2, \mathcal{F})) \longrightarrow V$$

$$P(\phi)(g) = \int_{B(\mathcal{F})} \phi(b^{-1}g)(\delta^{\frac{1}{2}} \chi)(b)db.$$

Wir erhalten eine Distribution Δ auf $GL(2, \mathcal{F})$ durch $\Delta(\phi) = \Lambda(P(\phi))$. Da P surjektiv ist (vgl. Proposition 2.6), ist Δ nicht Null. Aus dem Verhalten von P unter Links- und Rechtstranslation (siehe vor Proposition 2.6) erhalten wir sofort:

$$\lambda(b)\Delta = (\delta^{-\frac{1}{2}} \chi_1)(b)\Delta, \tag{11}$$

$$\rho(b)\Delta = (\delta^{-\frac{1}{2}} \chi_2^{-1})(b)\Delta, \quad b \in B(\mathcal{F}). \tag{12}$$

Aus Proposition 2.7 wissen wir, dass folgende Sequenz exakt ist:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{D}(B(\mathcal{F})) \longrightarrow \mathfrak{D}(GL(2, \mathcal{F})) \longrightarrow \mathfrak{D}(GL(2, \mathcal{F}) - B(\mathcal{F})) \longrightarrow 0.$$

Es gibt also eine nicht verschwindende Distribution in $\mathfrak{D}(B(\mathcal{F}))$ oder in $\mathfrak{D}(GL(2, \mathcal{F}) - B(\mathcal{F}))$, die sich unter Links- und Rechtstranslation gleich verhält wie Δ .

Sei zunächst Δ_1 eine Distribution ungleich Null in $\mathfrak{D}(GL(2, \mathcal{F}) - B(\mathcal{F}))$, die (11) und (12) erfüllt. Aus (12) folgt, dass $\rho(n)\Delta = \Delta$ für $n \in N(\mathcal{F})$. Mithilfe von Proposition 2.8 sehen wir nun wie im Beweis von Proposition 2.9, dass

$$\Delta_1(\phi) = c \int_{B(\mathcal{F})} \int_{N(\mathcal{F})} \phi(bw_0n^{-1})(\delta^{\frac{1}{2}}\chi_1^{-1})(b)dn db,$$

wobei wir Δ_1 o.B.d.A. so wählen, dass $c = 1$ gilt. Für t in $T(\mathcal{F})$, der Gruppe der Diagonalmatrizen, gilt:

$$(\delta^{-\frac{1}{2}}\chi_2^{-1})(t)\Delta_1(\phi) \stackrel{(12)}{=} (\rho(t)\Delta_1)(\phi) = \int_{B(\mathcal{F})} \int_{N(\mathcal{F})} \phi(bw_0n^{-1}t^{-1})(\delta^{\frac{1}{2}}\chi_1^{-1})(b)dn db. \quad (13)$$

Im folgenden sei d_Rb das rechts-Haarmaß auf $B(\mathcal{F})$. Den letzten Ausdruck können wir umformen zu:

$$\begin{aligned} & \int_{B(\mathcal{F})} \int_{N(\mathcal{F})} \phi(bw_0n^{-1}t^{-1})(\delta^{-\frac{1}{2}}\chi_1^{-1})(b)dn d_Rb = \\ & \stackrel{\substack{n \mapsto t^{-1}nt, \\ dn \mapsto \delta^{-1}(t)dn \\ b \mapsto bw_0tw_0^{-1}}}{=} \int_{B(\mathcal{F})} \int_{N(\mathcal{F})} \phi(bw_0n^{-1})(\delta^{-\frac{1}{2}}\chi_1^{-1})(bw_0tw_0^{-1})\delta(t)^{-1}dn d_Rb = \\ & = \delta(t)^{-1}(\delta^{-\frac{1}{2}}\chi_1^{-1})(w_0tw_0^{-1})\Delta_1(\phi). \end{aligned} \quad (14)$$

Aus (13) und (14) erhalten wir:

$$(\delta^{-\frac{1}{2}}\chi_2^{-1})(t) = \delta(t)^{-1}(\delta^{-\frac{1}{2}}\chi_1^{-1})(w_0tw_0^{-1}).$$

Da Konjugation einer Diagonalmatrix mit w_0 einfach Vertauschung der Einträge auf der Diagonalen bedeutet, gilt $\delta(t) = \delta(w_0tw_0^{-1})^{-1}$ und damit $\chi_2(t) = \chi_1(w_0tw_0^{-1})$. Wir schließen, dass $\eta_1 = \mu_2$ und $\eta_2 = \mu_1$.

Nehmen wir nun an, es gibt eine nichtverschwindende Distribution Δ_2 in $\mathfrak{D}(B(\mathcal{F}))$ mit den Eigenschaften (11) und (12). Genau wie in Proposition 2.9 erhalten wir, dass

$$\Delta_2(\phi) = c \int_{B(\mathcal{F})} \phi(b)(\delta^{\frac{1}{2}}\chi_1^{-1})(b)db.$$

Indem wir das Integral als ein Integral mit Rechts-Haarmaß schreiben und eine Variablentransformation durchführen, sehen wir, dass

$$\rho(b)\Delta_2(\phi) = (\delta^{-\frac{1}{2}}\chi_1^{-1})(b)\Delta_2(\phi).$$

Andererseits gilt nach (12), dass $\rho(b)\Delta_2 = (\delta^{-\frac{1}{2}}\chi_2^{-1})(b)\Delta_2$. Es folgt $\eta_1 = \mu_1$ und $\eta_2 = \mu_2$. $\square$

Die nächsten beiden Sätze zeigen, dass $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ und $\mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)$ isomorph zueinander sind, vorausgesetzt sie sind irreduzibel.

Wir zerlegen die Charaktere μ_1 und μ_2 folgendermaßen:

$$\mu_i(y) = |y|^{s_i} \xi_i(y), \quad (i = 1, 2)$$

für ξ_i unitäre Charaktere von $\mathcal{F}^*$ und $s_i \in \mathbb{C}$. Dabei betrachten wir ξ_1 und ξ_2 immer als fix. Wir schreiben $(\pi_{s_1, s_2}, V_{s_1, s_2})$ oder (π, V) für $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ und $(\pi'_{s_2, s_1}, V'_{s_2, s_1})$ oder (π', V') für $\mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)$, je nachdem ob wir s_1 und s_2 als fix oder variabel betrachten. In Proposition 2.16, geben wir uns fixe s_1 und s_2 vor, wir bezeichnen die Darstellungen also einfach mit (π, V) und (π', V') .

Für $f \in V$ definieren wir $Mf : GL(2, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$Mf(g) = \int_{\mathcal{F}} f \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dx, \quad (15)$$

falls das Integral konvergiert.

Proposition 2.16. *Sei $\Re(s_1 - s_2) > 0$. Dann ist das Integral in (15) für alle $f \in V$ absolut konvergent, Mf liegt in V' und $M : V \longrightarrow V'$ ist ein nichttrivialer $GL(2, \mathcal{F})$ -Isomorphismus, auch Verkettungsoperator genannt. Sind also $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ und $\mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)$ irreduzibel, dann sind sie isomorph zueinander.*

Beweis. Wir beginnen damit, die absolute Konvergenz des Integrals zu zeigen. Indem wir die Definition der induzierten Darstellung, (3a) und (3b), anwenden, sehen wir:

$$\begin{aligned} & f \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) = \\ & = f \left(\begin{pmatrix} x^{-1} & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix} g \right) = \\ & = |x|^{-1} (\mu_1^{-1} \mu_2)(x) f \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix} g \right), \quad x \in \mathcal{F}^*. \end{aligned}$$

Da f lokalkonstant ist, gibt es eine Konstante N , sodass

$$f \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix} g \right) = f(g) \quad \text{für } |x| > q^N.$$

Das Integral $Mf(g)$ lässt sich nun günstig zerlegen:

$$Mf(g) = \int_{|x| \leq q^N} f \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dx + f(g) \int_{|x| > q^N} |x|^{-1} (\mu_1^{-1} \mu_2)(x) dx. \quad (16)$$

Im ersten Teil ist der Integrationsbereich kompakt und der Integrand lokalkonstant, das Integral also absolut konvergent. Wenden wir uns nun dem zweiten Teil zu:

$$\begin{aligned}
& \int_{|x| > q^N} |x|^{-1} |(\mu_1^{-1} \mu_2)(x)| dx = \\
&= \sum_{k > N} \int_{|x|=q^k} |x|^{\Re(-s_1+s_2)-1} dx = \\
&= \sum_{k > N} \text{Vol}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*) q^k (q^k)^{\Re(-s_1+s_2)-1} = \\
&= \text{Vol}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*) \sum_{k > N} (q^{\Re(s_2-s_1)})^k < \infty,
\end{aligned} \tag{17}$$

da wir $\Re(s_2 - s_1) < 0$ vorausgesetzt haben. Für das zweite Gleichheitszeichen haben wir verwendet, dass $d(ax) = |a|dx$ für alle $a \in \mathcal{F}^*$. Damit haben wir die absolute Konvergenz von $Mf(g)$ gezeigt.

Als nächstes überprüfen wir, dass Mf in V' liegt. Um die Bedingung (3a) zu verifizieren, zeigen wir

$$Mf \left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) = Mf(g), \quad x \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$$

und

$$Mf \left(\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} g \right) = \left| \frac{y_1}{y_2} \right|^{\frac{1}{2}} \mu_2(y_1) \mu_1(y_2) Mf(g), \quad y_1, y_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*.$$

Die erste Gleichung ist einfach, wir erhalten sie durch Einsetzen in die Definition von Mf und eine Variablentransformation. Für die zweite Aussage schreiben wir die linke Seite der Gleichung folgendermaßen um:

$$Mf \left(\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} g \right) = \int_{\mathcal{F}} f \left(\begin{pmatrix} y_2 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y_2 y_1^{-1} x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dx.$$

Durch die Variablentransformation $x \mapsto y_1 y_2^{-1} x$ bei der dx in $|y_1 y_2^{-1}| dx$ übergeführt wird und aus der Bedingung (3a) für f sehen wir, dass dieser Ausdruck mit der rechten Seite übereinstimmt. Die Bedingung (3b) erfüllt Mf offensichtlich: Ist f invariant unter Multiplikation von rechts im Argument mit Elementen der Gruppe K_0 , dann gilt das natürlich auch für Mf . Wir haben also gesehen, dass $Mf \in V'$.

Dass M ein $GL(2, \mathcal{F})$ -Homomorphismus ist, das heißt, $M(\pi(g)f) = \pi'(g)Mf$ für alle $g \in GL(2, \mathcal{F})$ und $f \in V$ gilt, sieht man direkt aus der Definition von Mf .

Es bleibt zu zeigen, dass es ein $\tilde{f} \in V$ mit $M\tilde{f} \neq 0$ gibt. Wir setzen

$$\tilde{f}(g) = \left| \frac{y_1}{y_2} \right|^{\frac{1}{2}} \mu_1(y_1) \mu_2(y_2) \tag{18}$$

für $g = \begin{pmatrix} y_1 & z \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $y_1, y_2 \in \mathcal{F}^*$, $z \in \mathcal{F}$, $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ und $\tilde{f}(g) = 0$ wenn g nicht von dieser Form ist. Hat g eine Zerlegung dieser Form, dann ist sie eindeutig, also ist $\tilde{f}$ wohldefiniert.

Für ein $g = \begin{pmatrix} y_1 & z \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & xz - y_1 \\ y_2 & xy_2 \end{pmatrix}$ können wir eine Umgebung U von g finden, sodass die zu den Matrizen in U gehörigen Koeffizienten y_1, y_2, z, x beliebig nahe bei den zu g gehörigen liegen, denn y_1, y_2, z, x hängen stetig von g ab. Wir sehen aus (18), dass $\tilde{f}$ lokalkonstant ist. Klarerweise erfüllt $\tilde{f}$ die Bedingung (3a), also gilt $\tilde{f} \in V$. Betrachten wir das Integral $M\tilde{f}(1)$, so sehen wir, dass der Integrand konstant eins ist und kompakten Träger hat, das Integral ist somit größer als Null. $\square$

Proposition 2.16 zeigt, dass $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2) \cong \mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)$, wenn $\Re(s_1 - s_2) > 0$ und die Darstellungen irreduzibel sind. Indem wir die Rolle von μ_1 und μ_2 in Proposition 2.16 vertauschen, sehen wir, dass auch $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2) \cong \mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)$ für $\Re(s_1 - s_2) < 0$, vorausgesetzt die Darstellungen sind irreduzibel. Was noch fehlt, ist also der Fall $\Re(s_1) = \Re(s_2)$.

Wie in Bemerkung 2.5 festgestellt, sind Funktionen in V bereits durch ihre Einschränkung auf $K = GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ vollständig festgelegt. Genauer gilt: die Einschränkungsabbildung $f \mapsto f|_K$ ist ein K -Isomorphismus von V in den Raum aller lokalkonstanten Funktionen f auf K mit

$$f\left(\begin{pmatrix} y_1 & x \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} k\right) = \xi_1(y_1)\xi_2(y_2)f(k)$$

mit $y_1, y_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*$, $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ und $k \in K$. Diesen Raum bezeichnen wir mit V_K . Für $f_0 \in V_K$ gibt es also eine eindeutige Fortsetzung $f_{s_1, s_2} \in V_{s_1, s_2}$ von f_0 auf $GL(2, \mathcal{F})$. Wir erhalten eine Zuordnung $(s_1, s_2) \mapsto f_{s_1, s_2}$. Diese nennen wir einen konstanten Schnitt der Familie von Darstellungen $\{(\pi_{s_1, s_2}, V_{s_1, s_2})\}_{(s_1, s_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}}$.

Proposition 2.17. *Sei $f_0 \in V_K$ fix und $(s_1, s_2) \mapsto f_{s_1, s_2}$ der dazugehörige konstante Schnitt. Für $g \in GL(2, \mathcal{F})$ und $s_2 \in \mathbb{C}$ beide fix lässt sich die nach Proposition 2.16 für $\Re(s_1 - s_2) > 0$ definierte Abbildung $s_1 \mapsto Mf_{s_1, s_2}(g)$ analytisch auf $\{s_1 \in \mathbb{C} : \mu_1 \neq \mu_2\}$ fortsetzen und wir erhalten einen nichttrivialen $GL(2, \mathcal{F})$ -Homomorphismus $M: V_{s_1, s_2} \longrightarrow V'_{s_2, s_1}$. (Wie früher sei $\mu_i(y) = |y|^{s_i} \xi_i(y)$, $i = 1, 2$.)*

Beweis. Nach der Definition induzierter Darstellungen gibt es eine offene Untergruppe K_0 von K , sodass $f_0(gk) = f_0(g)$ für $g \in K$ und $k \in K_0$. Daraus sehen wir, dass f_{s_1, s_2} auf gK_0 , $g \in GL(2, \mathcal{F})$ konstant ist, denn für $g = bh$, $b = \begin{pmatrix} b_1 & x \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in B(\mathcal{F})$, $h \in K$ und $k \in K_0$ gilt:

$$\begin{aligned} f_{s_1, s_2}(gk) &= f_{s_1, s_2}(bhk) = \xi_1(b_1)|b_1|^{s_1}\xi_2(b_2)|b_2|^{s_2}\left|\frac{b_1}{b_2}\right|^{\frac{1}{2}}f_0(hk) = \\ &= \xi_1(b_1)|b_1|^{s_1}\xi_2(b_2)|b_2|^{s_2}\left|\frac{b_1}{b_2}\right|^{\frac{1}{2}}f_0(h) = f_{s_1, s_2}(g). \end{aligned}$$

Somit können wir zu jedem $g \in GL(2, \mathcal{F})$ eine Umgebung finden auf der alle f_{s_1, s_2} , $(s_1, s_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ konstant sind. Nun ist auch klar, dass wir $N \in \mathbb{Z}$ so wählen können, dass

$$f_{s_1, s_2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{pmatrix}\right) = f_{s_1, s_2}(g) \quad \text{für } |x| > q^N, (s_1, s_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

Wie im Beweis von Proposition 2.16, vgl. (16), sehen wir, dass sich $Mf_{s_1, s_2}(g)$ für $\Re(s_1 - s_2) > 0$ folgendermaßen zerlegen lässt:

$$\int_{|x| \leq q^N} f_{s_1, s_2} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dx + f_{s_1, s_2}(g) \int_{|x| > q^N} |x|^{-s_1 + s_2 - 1} (\xi_1^{-1} \xi_2)(x) dx. \quad (19)$$

Zunächst überzeugen wir uns davon, dass die Abbildung: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$s_1 \longmapsto \int_{|x| \leq q^N} f_{s_1, s_2} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dx$$

eine analytische Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ definiert. Die Überlegungen zu Beginn dieses Beweises zeigen, dass sich der kompakte Bereich $\{x \in \mathcal{F}, |x| \leq q^N\}$ durch endlich viele offene Mengen überdecken lässt, sodass $f_{s_1, s_2} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ beliebig, auf jeder dieser Mengen konstant ist. Da auch die Funktion: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $s_1 \mapsto f_{s_1, s_2}(g)$ für $g \in GL(2, \mathcal{F})$ analytisch ist, wie man aus der Definition der induzierten Darstellungen unter Verwendung der Iwasawazerlegung von g sieht, folgt die Behauptung.

Wenden wir uns nun dem zweiten Summanden in (19) zu. Wir zeigen, dass sich die Funktion: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$s_1 \longmapsto f_{s_1, s_2}(g) \int_{|x| > q^N} |x|^{-s_1 + s_2 - 1} (\xi_1^{-1} \xi_2)(x) dx \quad (20)$$

analytisch auf $\mathbb{C} - \{s_1 : \mu_1 = \mu_2\}$ fortsetzen lässt. Ist $\xi_1 \xi_2^{-1}$ verzweigt, dann gilt für $m > N$

$$\int_{|x| = q^m} (\xi_1^{-1} \xi_2)(x) dx = 0.$$

Das bedeutet, der zweite Ausdruck in (19) ist konstant Null, die analytische Fortsetzbarkeit also klar. Falls $\xi_1 \xi_2^{-1}$ unverzweigt ist, gibt es $\alpha \in \mathbb{C}$ vom Betrag eins (ξ_1 und ξ_2 sind unitär), sodass $\xi_1 \xi_2^{-1}(y) = \alpha^{v_p(y)}$, wobei $v_p : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}$ die p-adische Bewertung ist. Für $\Re(s_1 - s_2) > 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} & f_{s_1, s_2}(g) \int_{|x| > q^N} |x|^{-s_1 + s_2 - 1} (\xi_1^{-1} \xi_2)(x) dx = \\ & = f_{s_1, s_2}(g) \sum_{k > N} \int_{|x| = q^k} |x|^{-s_1 + s_2 - 1} (\xi_1^{-1} \xi_2)(x) dx = \\ & = f_{s_1, s_2}(g) \sum_{k > N} \text{Vol}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*) q^k (q^k)^{-s_1 + s_2 - 1} \alpha^k = \\ & = f_{s_1, s_2}(g) \text{Vol}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*) \sum_{k > N} (\alpha q^{-s_1 + s_2})^k = f_{s_1, s_2}(g) \text{Vol}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*) \frac{(\alpha q^{-s_1 + s_2})^{N+1}}{1 - \alpha q^{-s_1 + s_2}}. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass sich (20) und damit auch die Funktion: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, s_1 \mapsto Mf_{s_1, s_2}(g)$ überallhin analytisch forsetzen lässt, wo $\alpha q^{-s_1+s_2} \neq 1$ gilt. Die Bedingung $\alpha q^{-s_1+s_2} \neq 1$ ist äquivalent zu $\mu_1 \neq \mu_2$ und damit haben wir die erste Aussage unseres Satzes gezeigt. Wir müssen noch überprüfen, dass $M(V_{s_1, s_2})$ in V'_{s_2, s_1} liegt. Sei $g = bk \in GL(2, \mathcal{F})$ mit $b = \begin{pmatrix} b_1 & x \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in B(\mathcal{F})$ und $k \in K$. Für $\Re(s_1 - s_2) > 0$ wissen wir aus Proposition 2.16, dass

$$Mf_{s_1, s_2}(bk) = \xi_1(b_1)|b_1|^{s_1}\xi_2(b_2)|b_2|^{s_2}\left|\frac{b_1}{b_2}\right|^{\frac{1}{2}}Mf_{s_1, s_2}(k).$$

Wegen der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung und da die rechte Seite als Funktion in s_1 analytisch ist, erfüllt Mf_{s_1, s_2} für s_1, s_2 beliebig die Bedingung (3a). Um zu zeigen, dass Mf_{s_1, s_2} auch die Bedingung (3b) erfüllt, erinnern wir uns an den Beginn dieses Beweises, wo wir gezeigt haben, dass es eine offene Untergruppe $K_0 \subseteq G$ gibt, sodass $f_{s_1, s_2}(gk) = f_{s_1, s_2}(g)$ für alle $s_1, s_2 \in \mathbb{C}, g \in GL(2, \mathcal{F})$ und $k \in K_0$ gilt. Im Beweis von Proposition 2.16 haben wir festgestellt, dass für $\Re(s_1 - s_2) > 0$ dann auch $Mf_{s_1, s_2}(gk) = Mf_{s_1, s_2}(g)$ gilt. Wieder aus der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung sehen wir nun, dass alle Mf_{s_1, s_2} unabhängig von der Wahl der s_1, s_2 die Bedingung (3b) bezüglich der Untergruppe K_0 erfüllen.

Wir müssen sicherstellen, dass $M : V_{s_1, s_2} \rightarrow V'_{s_2, s_1}$ nicht die Nullabbildung definiert. Mithilfe von (18) erhalten wir zu allen $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ ein $\tilde{f}_{s_1, s_2} \in V_{s_1, s_2}$ und die Einschränkungen dieser Funktionen auf K stimmen überein, es handelt sich also um einen konstanten Schnitt. Für $\Re(s_1 - s_2) > 0$ haben wir in Proposition 2.16 gesehen, dass $M\tilde{f}_{s_1, s_2}(1) = 1$ und wegen der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung bleibt diese Gleichung richtig für beliebige $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass $M : V_{s_1, s_2} \rightarrow V'_{s_2, s_1}$ tatsächlich einen $GL(2, \mathcal{F})$ -Homomorphismus definiert, also

$$M(\pi_{s_1, s_2}(g)f_{s_1, s_2})(h) - (\pi'_{s_2, s_1}(g)Mf_{s_1, s_2})(h) = 0 \quad (21)$$

für alle $g, h \in GL(2, \mathcal{F})$ gilt. Für $\Re(s_1 - s_2) > 0$ ist Gleichung (21) nach Proposition 2.16 erfüllt. Es genügt zu zeigen, dass die linke Seite der Gleichung analytisch in s_1 ist, denn dann können wir auf unser Argument der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung zurückgreifen und sind fertig. Dass die Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, s_1 \mapsto (\pi'_{s_2, s_1}(g)Mf_{s_1, s_2})(h) = Mf_{s_1, s_2}(hg)$ analytisch ist, folgt direkt aus unserer Definition von M . Wir müssen also noch überprüfen, dass die Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, s_1 \mapsto M(\pi_{s_1, s_2}(g)f_{s_1, s_2})(h)$ analytisch ist. Für konstante Schnitte $(s_1, s_2) \mapsto f_{s_1, s_2}$ ist die Funktion $s_1 \mapsto Mf_{s_1, s_2}$ laut Definition von M analytisch. Daher sind wir fertig, wenn wir $\pi_{s_1, s_2}(g)f_{s_1, s_2}$ als endliche Linearkombination konstanter Schnitte schreiben können, wo die Koeffizienten $\alpha_i(s_1)$ analytisch in s_1 sind, das heißt

$$\pi_{s_1, s_2}(g)f_{s_1, s_2} = \sum_{i=1}^n \alpha_i(s_1)f_{s_1, s_2}^i \quad (22)$$

mit $f^i \in V_K$ und dazugehörigen konstanten Schnitten $(s_1, s_2) \mapsto f_{s_1, s_2}^i$. Dazu benutzen wir, dass es eine kompakt offene Untergruppe K_0 von K gibt, sodass $f_0(gk) = f_0(g)$

für $g \in K$ und $k \in K_0$. Wie zu Beginn dieses Beweises ausgeführt, ist dann auch f_{s_1, s_2} für $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ beliebig, invariant unter K_0 . Weiters ist klar, dass $\pi_{s_1, s_2}(g)f_{s_1, s_2}$ für alle $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ invariant unter der kompakt offenen Untergruppe $K'_0 := gK_0g^{-1}$ ist. Also gilt

$$\pi_{s_1, s_2}(g)f_{s_1, s_2}|_K = \sum_{g_i \in K/K'_0} f_{s_1, s_2}(g_i g) \mathbb{1}_{g_i K'_0},$$

wobei $\pi_{s_1, s_2}(g)f_{s_1, s_2}|_K$ die auf K eingeschränkte Abbildung und $\mathbb{1}_{g_i K'_0}$ die charakteristische Funktion von $g_i K'_0$ sei. Auf Seite 22 haben wir bereits festgestellt, dass $s_1 \mapsto f_{s_1, s_2}(g_i g)$ analytisch ist. Außerdem ist K/K'_0 endlich. Also gibt es eine Linearkombination wie in (22) angegeben und M ist wirklich ein $GL(2, \mathcal{F})$ -Homomorphismus. $\square$

Korollar 2.18. *Seien μ_1, μ_2 und μ Charaktere von $\mathcal{F}^*$ mit $\mu_1 \mu_2^{-1} = |\cdot|^{-1}$, $\mu_1 = \mu \cdot |\cdot|^{-\frac{1}{2}}$ und $\mu_2 = \mu \cdot |\cdot|^{\frac{1}{2}}$. Sei $\mathcal{B}_f(\mu_2, \mu_1)$ der irreduzible invariante Teilraum der Kodimension eins in $\mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)$. Dann gilt*

$$\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)/\langle \mu(\det(\cdot)) \rangle \cong \mathcal{B}_f(\mu_2, \mu_1).$$

Beweis. Nach Proposition 2.17 gibt es einen nichttrivialen G -Homomorphismus $M : \mathcal{B}(\mu_1, \mu_2) \rightarrow \mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)$. Wäre M injektiv, dann würde $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2) \cong \mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)$ oder $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2) \cong \mathcal{B}_f(\mu_2, \mu_1)$ gelten, denn das Bild eines Homomorphismus ist ein invarianter Teilraum. Beide Situationen stehen in Widerspruch zu Satz 2.14, der zeigt, dass $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ einen eindimensionalen invarianten Unterraum mit irreduzibler Quotientendarstellung hat, $\mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)$ einen invarianten Unterraum der Kodimension eins besitzt und $\mathcal{B}_f(\mu_2, \mu_1)$ irreduzibel ist.

Also gilt $\ker(M) = \langle \mu(\det(\cdot)) \rangle$, denn der Kern eines Homomorphismus ist ein invarianter Teilraum und $\langle \mu(\det(\cdot)) \rangle$ ist der einzige echte invariante Teilraum von $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$. Da $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)/\langle \mu(\det(\cdot)) \rangle$ irreduzibel ist und $\mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)$ nicht, können diese beiden Darstellungen nicht isomorph sein. Wir erhalten also

$$\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)/\langle \mu(\det(\cdot)) \rangle \cong \mathcal{B}_f(\mu_2, \mu_1).$$

$\square$

Zusammenfassung der Ergebnisse dieses Abschnitts: Seien μ_1 und μ_2 Charaktere von $\mathcal{F}^*$ mit $\mu_1 \mu_2^{-1} \neq |\cdot|$ und $\mu_1 \mu_2^{-1} \neq |\cdot|^{-1}$. Dann ist $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ irreduzibel und heißt Hauptseriendarstellung oder Darstellung in der Hauptserie. Zwei Darstellungen $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ und $\mathcal{B}(\eta_1, \eta_2)$ in der Hauptserie sind genau dann isomorph, wenn $\mu_1 = \eta_1$ und $\mu_2 = \eta_2$ oder $\mu_1 = \eta_2$ und $\mu_2 = \eta_1$ gilt. Die duale Darstellung von $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ ist $\mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})$.

Seien μ_1, μ_2 und μ Charaktere von $\mathcal{F}^*$ mit $\mu_1 \mu_2^{-1} = |\cdot|^{-1}$, $\mu_1 = \mu \cdot |\cdot|^{-\frac{1}{2}}$ und $\mu_2 = \mu \cdot |\cdot|^{\frac{1}{2}}$. Dann enthält $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ einen eindimensionalen invarianten Unterraum, der von $\{g \mapsto \mu(\det(g))\}$ erzeugt wird und $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)/\mu(\det(\cdot))$ ist irreduzibel. Die Darstellung $\mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)$ enthält einen irreduziblen invarianten Teilraum $\mathcal{B}_f(\mu_2, \mu_1)$ der Kodimension eins. Es gilt $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)/\mu(\det(\cdot)) \cong \mathcal{B}_f(\mu_2, \mu_1)$. Diese Darstellung heißt Steinberg Darstellung oder spezielle Darstellung. Die duale Darstellung von $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ ist die Darstellung $\mathcal{B}(\mu_2^{-1}, \mu_1^{-1})$. Das Komplement von $\mu(\det(\cdot))$ bezüglich der Paarung, die wir wegen

der Dualität zwischen $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ und $\mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})$ erhalten, ist $\mathcal{B}_f(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})$. (Aus der Definition der dualen Darstellung sieht man, dass das Komplement von $\mu(\det(\cdot))$ ein invarianter Teilraum in $\mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})$ ist. Da die Paarung nicht ausgeartet ist, ist der Teilraum echt. Der einzige echte invariante Teilraum von $\mathcal{B}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})$ ist $\mathcal{B}_f(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1})$.)

2.3 Sphärische Darstellungen

Wir schreiben wieder K für $GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$. Mit $\mathcal{H}_K$ bezeichnen wir die Menge der K -biinvarianten Funktionen aus der Heckealgebra $\mathcal{H}$. Sie bildet eine Unterálgebra von $\mathcal{H}$ und V^K ist ein $\mathcal{H}_K$ -Modul.

Definition 2.19. Eine irreduzible zulässige Darstellung (π, V) von $GL(2, \mathcal{F})$ heißt sphärisch (oder unverzweigt), wenn V^K einen Vektor ungleich Null enthält. Einen Vektor in V^K ungleich dem Nullvektor nennen wir sphärischen Vektor. Die Álgebra $\mathcal{H}_K$ heißt sphärische Heckealgebra.

Wir verwenden folgendes Resultat aus der Álgebra ohne es zu beweisen:

Satz 2.20 (Elementarteilersatz). *Sei R ein Hauptidealbereich, Λ_1 freier R -Modul vom Rang n und Λ_2 ein freier R -Teilmodul von Λ_1 mit gleichem Rang n . Dann gibt es eine Basis $\xi_1, \dots, \xi_n$ von Λ_1 und Elemente $D_1, \dots, D_n$ in $R - \{0\}$ mit $D_{i+1} | D_i$ für $1 \leq i \leq n$ sodass $D_1 \xi_1, \dots, D_n \xi_n$ eine Basis von Λ_2 bilden.*

Proposition 2.21 (p-adische Cartanzerlegung). *Die Diagonalmatrizen*

$$\begin{pmatrix} \varpi^{n_1} & 0 \\ 0 & \varpi^{n_2} \end{pmatrix}, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}, \quad n_1 \geq n_2$$

bilden ein vollständiges Repräsentantensystem für $K \backslash GL(2, \mathcal{F}) / K$.

Beweis. Sei $g \in GL(2, \mathcal{F})$. Wir beginnen damit, zu zeigen, dass es in KgK eine Matrix von oben beschriebener Form gibt. Sei N eine ganze Zahl, sodass die Koeffizienten von $\varpi^{-N}g$ in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ liegen. Im „Elementary Divisor Theorem“ (Satz 2.20) setzen wir $R = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, $\Lambda_1 = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^2$ und Λ_2 der von den Zeilen von $\varpi^{-N}g$ aufgespannte Teilmodul von Λ_1 . Es gibt also eine Basis ξ_1, ξ_2 von $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^2$ und $D_1, D_2 \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ mit $D_2 | D_1$ sodass $D_1 \xi_1, D_2 \xi_2$ eine Basis von Λ_2 bildet. Diese Eigenschaften bleiben erhalten, wenn wir D_1 und D_2 mit Elementen in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*$ multiplizieren, sei also $\varpi^N D_1 = \varpi^{n_1}$ und $\varpi^N D_2 = \varpi^{n_2}$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Mit ξ wollen wir die Matrix mit den Zeilen ξ_1 und ξ_2 bezeichnen, sie liegt in K . Da die Zeilen von $\text{diag}(D_1, D_2)\xi$ den gleichen $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -Modul erzeugen, wie die Zeilen von $\varpi^{-N}g$ können wir ein $k \in K$ finden mit $k\varpi^{-N}g = \text{diag}(D_1, D_2)\xi$. Wir sehen, dass

$$\begin{pmatrix} \varpi^{n_1} & 0 \\ 0 & \varpi^{n_2} \end{pmatrix} = \varpi^N \text{diag}(D_1, D_2) = kg\xi^{-1} \in KgK,$$

wie behauptet.

Nun müssen wir noch zeigen, dass verschieden Matrizen $\text{diag}(\varpi^{n_1}, \varpi^{n_2})$ mit $n_1 \geq n_2$

verschiedene Doppelnebenklassen erzeugen. Sei dazu

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi^{n_1} & 0 \\ 0 & \varpi^{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \varpi^{n_1}ae + \varpi^{n_2}bg & \varpi^{n_1}af + \varpi^{n_2}bh \\ \varpi^{n_1}ce + \varpi^{n_2}dg & \varpi^{n_1}cf + \varpi^{n_2}dh \end{pmatrix} \in K \begin{pmatrix} \varpi^{n_1} & 0 \\ 0 & \varpi^{n_2} \end{pmatrix} K. \end{aligned}$$

Da $ad - bc$ und $eh - gf$ Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ sind, ist auch mindestens einer der Ausdrücke ae, af, ce oder cf eine Einheit. Aus $n_1 \geq n_2$ folgt nun, dass (ϖ^{n_1}) das von den Einträgen von g , einer beliebigen Matrix in $K \begin{pmatrix} \varpi^{n_1} & 0 \\ 0 & \varpi^{n_2} \end{pmatrix} K$, erzeugte Ideal ist. Außerdem ist klar, dass $(\varpi^{n_1+n_2})$ das von $\det(g)$ erzeugte Ideal ist. Somit sind die Doppelnebenklassen verschiedener Repräsentanten $\text{diag}(\varpi^{n_1}, \varpi^{n_2})$, $n_1 \geq n_2$ disjunkt. $\square$

Satz 2.22. *Die sphärische Heckealgebra $\mathcal{H}_K$ ist kommutativ.*

Beweis. Für eine Matrix $g \in GL(2, \mathcal{F})$ bezeichne g^t die transponierte Matrix. Betrachte die Abbildung ${}^t : \mathcal{H}_K \longrightarrow \mathcal{H}_K$, $\phi \mapsto \phi^t$, wobei $\phi^t(g) = \phi(g^t)$. Das ist eine Antiinvolution, denn:

$$\begin{aligned} (\phi_1 * \phi_2)^t(g) &= \int_{GL(2, \mathcal{F})} \phi_1(g^t h^{-1}) \phi_2(h) dh = \\ &\stackrel{h \mapsto hg^t}{=} \int_{GL(2, \mathcal{F})} \phi_1(h^{-1}) \phi_2(hg^t) dh = \\ &\stackrel{h \mapsto h^t}{\stackrel{h \mapsto h^{-1}}{=}} \int_{GL(2, \mathcal{F})} \phi_1(h^t) \phi_2(h^{-1t} g^t) dh = (\phi_2^t * \phi_1^t)(g). \end{aligned}$$

Für das vorletzte Gleichheitszeichen haben wir verwendet, dass das Haarmaß auf $GL(2, \mathcal{F})$ invariant unter Matrix-Transposition ist. Außerdem ist $GL(2, \mathcal{F})$ unimodular und somit invariant unter der Transformation $h \mapsto h^{-1}$, die Links- in Rechts-Haarmaß überführt. Andererseits bilden die charakteristischen Funktionen der Doppelnebenklassen in $K \backslash GL(2, \mathcal{F}) / K$ eine Basis von $\mathcal{H}_K$ über $\mathbb{C}$. Nach Proposition 2.21 sind diese Doppelnebenklassen invariant unter Transponieren, die Abbildung t ist also die Identität: $\mathcal{H}_K \longrightarrow \mathcal{H}_K$. Insgesamt erhalten wir

$$\phi_1 * \phi_2 = (\phi_1 * \phi_2)^t = \phi_2^t * \phi_1^t = \phi_2 * \phi_1$$

für beliebige $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}_K$, das heißt $\mathcal{H}_K$ ist kommutativ. $\square$

Satz 2.23. *Sei (π, V) eine irreduzible zulässige Darstellung von $GL(2, \mathcal{F})$, dann hat V^K höchstens Dimension eins.*

Beweis. Da (π, V) zulässig ist, ist V^K endlichdimensional. Aus einem grundlegenden Resultat über zulässige Darstellungen lokal kompakter total unzusammenhängender Gruppen (vgl. [1], Proposition 4.2.3) erhalten wir, dass V^K als $\mathcal{H}_K$ -Modul einfach ist, wenn

$V^K \neq 0$. Sei $\phi \in \mathcal{H}_K$ beliebig und λ ein Eigenwert der linearen Abbildung $\pi(\phi)$ auf dem endlichdimensionalen $\mathbb{C}$ -Vektorraum V^K . Der Eigenraum E_λ zum Eigenwert λ ist invariant unter $\mathcal{H}_K$, da $\mathcal{H}_K$ nach Satz 2.22 kommutativ ist. Aus der Irreduzibilität von V^K folgt nun, dass $E_\lambda = V^K$, das heißt ϕ operiert als Skalar auf V^K . Da ϕ beliebig war, operiert jedes Element in $\mathcal{H}_K$ als Skalar. Aus der Irreduzibilität folgt nun, dass V^K eindimensional ist. $\square$

Im folgenden beschäftigen wir uns mit dem Heckeoperator $\mathcal{T} \in \mathcal{H}_K$, definiert durch

$$\mathcal{T}(g) = \begin{cases} 1 & \text{falls } g \in K \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ist (π, V) eine Darstellung und $v \in V$, dann schreiben wir in Zukunft auch $\mathcal{T}v$ statt $\pi(\mathcal{T})v$.

Proposition 2.24. *Seien μ_1 und μ_2 unverzweigte Charaktere von $\mathcal{F}^*$ mit $\mu_1\mu_2^{-1}(x) \neq |x|$ und $\mu_1\mu_2^{-1}(x) \neq |x|^{-1}$. Dann ist $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ sphärisch und $\mathcal{T}$ wirkt auf V^K durch*

$$\mathcal{T}(v) = \lambda v \quad \text{wobei } \lambda = \text{Vol}(K)q^{\frac{1}{2}}(\mu_1(\varpi) + \mu_2(\varpi)), \quad v \in V^K.$$

Beweis. Sei χ der Charakter von $B(\mathcal{F})$, wie in (4) definiert. Wir setzen $\phi : GL(2, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\phi(bk) = (\delta^{\frac{1}{2}}\chi)(b), \quad \text{für } b \in B(\mathcal{F}), k \in K.$$

Das ist wohldefiniert, da $(\delta^{\frac{1}{2}}\chi)(u) = 1$ für alle $u \in B(\mathcal{F}) \cap K$ aufgrund der Unverzweigt-heit von μ_1 und μ_2 . Dass ϕ in $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ liegt und invariant unter K ist, ist klar. Aus Satz 2.23 wissen wir, dass der Raum der sphärischen Vektoren in $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ höchstens eindimensional ist, also gilt $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)^K = \langle \phi \rangle$. Mithilfe der Zerlegung

$$K \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} K \sqcup \bigsqcup_{B \bmod (\varpi)} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K,$$

(diese lässt sich ähnlich wie Lemma 4.1 beweisen), erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda &= (\mathcal{T}\phi)(1) = \int_{K \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K} \phi(g) dg = \\ &= \int_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} K} \phi(g) dg + \sum_{B \bmod (\varpi)} \int_{\begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K} \phi(g) dg = \\ &= \text{Vol}(K) \left(\phi \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \right) + \sum_{B \bmod (\varpi)} \phi \left(\begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right). \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt wegen der K -Invarianz von ϕ . Nun verwenden wir noch die Definition von ϕ und sind fertig:

$$\lambda = \text{Vol}(K) \left(\left| \frac{1}{\varpi} \right|^{\frac{1}{2}} \mu_2(\varpi) + q \left| \frac{\varpi}{1} \right|^{\frac{1}{2}} \mu_1(\varpi) \right) = \text{Vol}(K) \left(q^{\frac{1}{2}} (\mu_1(\varpi) + \mu_2(\varpi)) \right).$$

□

3 Der Level einer Darstellung

Definition 3.1. Sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal von $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. Wir benötigen folgende Untergruppen von $GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$:

$$\Gamma_0(\mathfrak{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) : c \equiv 0 \pmod{\mathfrak{b}} \right\}$$

und

$$\Gamma_1(\mathfrak{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) : a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{b}}, c \equiv 0 \pmod{\mathfrak{b}} \right\}$$

Die Gruppe $\Gamma_0(\varpi)$ heißt Iwahorigruppe.

Wir definieren $\pi_{\mathfrak{b}} : GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \rightarrow GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})$ durch

$$\pi_{\mathfrak{b}} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a + \mathfrak{b} & b + \mathfrak{b} \\ c + \mathfrak{b} & d + \mathfrak{b} \end{pmatrix}.$$

Wenn klar ist, welches Ideal $\mathfrak{b}$ gemeint ist, schreiben wir für die Abbildung $\pi_{\mathfrak{b}}$ auch nur π .

Lemma 3.2. Sei $\mathfrak{b} = (\varpi^l)$ ein Ideal in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ und $\bar{B}$ das Bild der Boreluntergruppe $B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ unter $\pi_{\mathfrak{b}}$. Dann gilt:

$$GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b}) = \bigsqcup_{i=0}^l \bar{B} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^i & 1 \end{pmatrix} \bar{B}.$$

Beweis. Wir überzeugen uns durch Nachrechnen. Sei zunächst $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ein Element in $GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ mit $c = \gamma \varpi^i$, $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*$ und $i > 0$. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ad - bc)\gamma^{-1} & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma d^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*$ gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 + \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d - (ad - bc)c^{-1} \\ 0 & (ad - bc)c^{-1} \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir gesehen, dass sich jedes Element in $GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})$ als $b_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^i & 1 \end{pmatrix} b_2$ mit b_1 und b_2 aus $\bar{B}$ und $0 \leq i \leq l$ schreiben lässt.

Die linken unteren Einträge der Matrizen in $B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^i & 1 \end{pmatrix} B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$, $i \geq 0$ haben p-adische Bewertung i , was zeigt, dass die Vereinigung tatsächlich disjunkt ist. $\square$

Manchmal werden wir auch folgende ähnliche Gleichung verwenden:

$$GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) = \bigsqcup_{i=0}^l B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^i & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0(\mathfrak{b}).$$

Um diese aus Lemma 3.2 zu folgern, hilft die leicht direkt nachzurechnende Gleichung $\Gamma_0(\mathfrak{b}) = B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \cdot \ker(\pi)$.

Satz 3.3. Sei (ρ, V) eine Darstellung von $GL(2, \mathcal{F})$ in der Hauptserie oder eine Steinberg Darstellung und ω ihr zentraler Charakter.

Dann gibt es ein Ideal $\mathfrak{b}$ in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, sodass

$$V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega} := \left\{ v : \rho \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) v = \omega(a)v \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(\mathfrak{b}) \right\} \quad (23)$$

nicht trivial ist.

Sei $\mathfrak{b}$ das größte Ideal mit $V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega} \neq \{0\}$ dann ist $V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$ eindimensional. Bezeichnen wir dieses Ideal mit $\mathfrak{c}(\rho)$, dann gilt: Der Raum $V^{\Gamma_0(\varpi^i \cdot \mathfrak{c}(\rho)), \omega}$ ist $i + 1$ -dimensional.

Definition 3.4. Das Ideal $\mathfrak{c}(\rho)$ mit der Eigenschaft $\dim(V^{\mathfrak{c}(\rho), \omega}) = 1$, nennen wir den Level der Darstellung ρ .

Bemerkung 3.5. Im Beweis von Satz 3.3 werden wir verwenden, dass für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{b} = (\varpi^l)$ gilt:

$$V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega} = V^{\Gamma_1(\mathfrak{b})}.$$

Für das Ideal $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ ist die Aussage trivial erfüllt, da dann $\Gamma_0(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) = \Gamma_1(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ gilt. Sei also nun $l > 0$. Dass ein unter $\Gamma_1(\mathfrak{b})$ invarianter Vektor in $V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$ liegt, folgt sofort aus der leicht nachzurechnenden Gleichung

$$\Gamma_1(\mathfrak{b})Z(GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})) = \Gamma_0(\mathfrak{b}).$$

Umgekehrt zeigen wir, dass sich ein Element in $\Gamma_1(\mathfrak{b})$ als Produkt von zwei Matrizen in $\Gamma_0(\mathfrak{b})$, deren linke obere Einträge gleich eins ist, schreiben lässt. Daraus folgt die Behauptung, denn $\omega(1)$ ist gleich eins, also v invariant unter beiden Faktoren und damit natürlich auch unter dem Produkt. Sei also $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ein beliebiges Element in $\Gamma_1(\mathfrak{b})$, es gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (b - xd)(1 - xy)^{-1} \\ \varpi^l & d - (b - xd)(1 - xy)^{-1}y \end{pmatrix}$$

mit $x = (a - 1)\varpi^{-l}$ und $y = c - \varpi^l$. Wir müssen noch nachprüfen, dass die Matrizen auf der rechten Seite in $\Gamma_0(\mathfrak{b})$ liegen. Für $\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ liegen offensichtlich alle Einträge in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ und die Determinante $1 - xy$ ist eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ (wir haben $l > 0$ vorausgesetzt). Die Elemente der zweiten Matrix liegen in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, denn wir haben gerade gesehen, dass $1 - xy$ invertierbar ist. Um zu sehen, dass die Determinante der zweiten Matrix wirklich in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*$ liegt, reicht es zu überprüfen, dass der rechte untere Eintrag eine Einheit ist. Das ist der Fall, da d in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*$ liegt, aber der Ausdruck $(b - xd)(1 - xy)^{-1}y$ nicht (y hat Bewertung größer als Null, da $l > 0$).

Ist der zentrale Charakter ω unverzweigt, dann gilt offensichtlich $V^{\Gamma_0(\mathfrak{b})} = V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$. In diesem Fall erhalten wir also sogar

$$V^{\Gamma_0(\mathfrak{b})} = V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega} = V^{\Gamma_1(\mathfrak{b})}.$$

Zum Beispiel sieht man leicht, dass Darstellungen in der Hauptserie $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ für unverzweigte Charaktere μ_1 und μ_2 unverzweigten zentralen Charakter besitzen.

Beweis von Satz 3.3. Seien μ_1 und μ_2 zwei Charaktere von $\mathcal{F}^*$. Für $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ schreiben wir $(\pi(\mu_1, \mu_2), V(\mu_1, \mu_2))$. Nach Definition ist $V(\mu_1, \mu_2)$ der Raum aller lokalkonstanten Funktionen $f : GL(2, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} g\right) = \mu_1(a)\mu_2(b) \left|\frac{a}{b}\right|^{\frac{1}{2}} f(g)$$

für alle $\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} \in B(\mathcal{F})$ und $g \in GL(2, \mathcal{F})$ und $\pi(\mu_1, \mu_2)$ die rechtsreguläre Darstellung von $GL(2, \mathcal{F})$ auf diesem Vektorraum.

Wähle zunächst μ_1 und μ_2 so, dass $(\rho, V) = (\pi(\mu_1, \mu_2), V(\mu_1, \mu_2))$ in der Hauptserie liegt, das heißt, $\mu_1\mu_2^{-1} \neq |\cdot|$ und $\mu_1\mu_2^{-1} \neq |\cdot|^{-1}$. Der zentrale Charakter ω von ρ ist dann gleich $\mu_1 \cdot \mu_2$, denn

$$\rho\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) f(g) = f\left(g \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} g\right) = \mu_1\mu_2(a) f(g)$$

für alle $f \in V(\mu_1, \mu_2)$, $g \in GL(2, \mathcal{F})$ und $a \in \mathcal{F}^*$.

Unser Ziel ist es für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{b} = (\varpi^l)$ in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ die Dimension des Raumes $V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$ zu bestimmen. Sei $K = GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$. Nach Bemerkung 2.5 ist die Einschränkungsabbildung

$$\begin{aligned} \text{res: } V &\longrightarrow V_K \\ f &\longmapsto f|_K \end{aligned}$$

ein K -Isomorphismus, wobei V_K die Menge aller lokalkonstanten Abbildungen $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} g\right) = \mu_1(a)\mu_2(b) f(g) \tag{24}$$

für alle $\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} \in B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ und $g \in K$ bezeichnet. Also ist die für uns interessante Dimension des Raumes $V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$ gleich der Dimension von $\text{res}(V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega})$. Für $\text{res}(V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega})$ schreiben wir im folgenden $V_K^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$. Dieser Raum $V_K^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$ besteht aus allen lokalkonstanten Funktionen f auf K mit folgender Eigenschaft:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = \mu_1(a)\mu_2(b)\mu_1\mu_2(a') f(g) \tag{25}$$

für alle $g \in K$, $\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} \in B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ und $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_0(\mathfrak{b})$.

Zunächst werden wir zeigen, dass $\mathfrak{b}$ in den Levels von μ_1 und μ_2 enthalten ist, wenn $V_K^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$ eine Funktion f ungleich der Nullfunktion enthält. Dazu definieren wir eine Menge ähnlich zu denen in Definition 3.1:

$$\Gamma(\mathfrak{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{\mathfrak{b}}, b \equiv c \equiv 0 \pmod{\mathfrak{b}} \right\}.$$

Diese Menge $\Gamma(\mathfrak{b})$ ist der Kern des Gruppenhomomorphismus $\pi_{\mathfrak{b}} : K \longrightarrow GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})$, also ein Normalteiler in K .

Wie in Bemerkung 3.5 sieht man, dass eine lokalkonstante Funktion f auf K , die (25) erfüllt, invariant unter $\Gamma_1(\mathfrak{b})$ ist. Insbesondere gilt

$$f(gkg^{-1}g) = f(gk) = f(g) \quad g \in K, \quad k \in \Gamma(\mathfrak{b}) \subseteq \Gamma_1(\mathfrak{b})$$

und daher auch

$$f(kg) = f(g) \quad g \in K, \quad k \in \Gamma(\mathfrak{b}) \subseteq \Gamma_1(\mathfrak{b}), \quad (26)$$

denn $g\Gamma(\mathfrak{b})g^{-1} = \Gamma(\mathfrak{b})$ für alle $g \in K$, da $\Gamma(\mathfrak{b})$ Normalteiler in K ist. Andererseits gilt

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \mu_1(a)\mu_2(d)f(g)$$

für $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ und $g \in K$. Wähle $g \in K$ mit $f(g) \neq 0$. Wir erhalten:

$$f(g) \stackrel{(26)}{=} f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \mu_1(a)\mu_2(b)f(g)$$

für alle $a, d \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*$ mit $a \equiv d \equiv 1 \pmod{\mathfrak{b}}$. Also ist $\mathfrak{b}$ in den Level von μ_1 und μ_2 enthalten, das heißt die Charaktere μ_1 und μ_2 sind trivial auf $1 + \mathfrak{b}$ und wir können sie als Charaktere von $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*/(1 + \mathfrak{b}) \cong (\mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})^*$ auffassen.

Sei $V_{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})}^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$ der Raum der Funktionen $\phi : GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b}) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}\right) = \mu_1(a)\mu_2(b)\mu_1\mu_2(a')\phi(g) \quad (27)$$

für $g \in GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})$, $\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} \in \bar{B} := \pi(B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}))$. Wir haben schon festgestellt, dass der für uns interessante Raum $V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$ isomorph zu dem durch (25) beschriebenen Raum $V_K^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$ von lokalkonstanten Funktionen auf K ist. Nun werden wir sehen, dass auch

$$V_K^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega} \cong V_{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})}^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega} \quad (\text{als Vektorräume})$$

gilt. Der Isomorphismus liegt auf der Hand, sei

$$\begin{aligned} \text{cong} : V_K^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega} &\longrightarrow V_{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})}^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega} \\ f &\longmapsto \{g \mapsto f(\pi^{-1}(g))\}. \end{aligned}$$

Wir erhalten wirklich eine Abbildung $\text{cong}(f)$, mit anderen Worten $\text{cong}(f)$ ist wohldefiniert, da f unter $\ker(\pi) = \Gamma(\mathfrak{b})$ invariant ist. Dass $\text{cong}(f)$ die Gleichung (27) erfüllt und somit in $V_{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})}^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$ liegt, folgt unmittelbar aus der Definition von cong und der

Eigenschaft (25) von f . Die Abbildung cong ist wirklich ein Isomorphismus, ihre Inverse ist:

$$\begin{aligned} \text{cong}^{-1} : V_{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})}^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega} &\longrightarrow V_K^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega} \\ \phi &\longmapsto \{k \mapsto \phi(\pi(k))\}. \end{aligned}$$

Eine Funktion $\phi \in V_{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})}^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$ ist durch den Wert $\phi(x)$, $x \in GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})$ bereits auf der gesamten Doppelnebenklasse $\bar{B}x\bar{B}$ festgelegt. An dieser Stelle kommt Lemma 3.2 ins Spiel, das uns eine Zerlegung von $GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})$ in ebensolche Doppelnebenklassen liefert:

$$GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b}) = \bigsqcup_{i=0}^l \bar{B} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^i & 1 \end{pmatrix} \bar{B}.$$

Für $\bar{B} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^i & 1 \end{pmatrix} \bar{B}$ schreiben wir X_i , wenn l aus dem Zusammenhang klar ist. (Beachte, $\bar{B} = \pi_{(\varpi^l)}(B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}))$, also hängt X_i von l ab.)

Wir setzen

$$\mathcal{J}(\mu_1, \mu_2, \mathfrak{b}) = \{i : 0 \leq i \leq l, \exists \phi \in V_{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})}^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega} \text{ mit } \phi(X_i) \neq \{0\}\}.$$

Wähle zu jedem $j \in \mathcal{J}$ eine Funktion $\phi_j \in V_{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})}^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$, sodass $\phi_j(X_j) \neq \{0\}$ und ϕ_j außerhalb von X_j verschwindet. Offensichtlich ist $\{\phi_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ eine Basis von $V_{GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})}^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$. Also gilt:

$$\dim(V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}) = |\mathcal{J}(\mu_1, \mu_2, \mathfrak{b})|.$$

Unser ursprüngliches Problem hat sich damit auf folgende Aufgabe reduziert: Für zwei fixe Charaktere μ_1 und μ_2 von $(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})^*$ und ein vorgegebenes Ideal $\mathfrak{b}$ müssen wir entscheiden, auf welchen Nebenklassen X_i eine Funktion ϕ existiert, die (27) erfüllt. Wir behaupten, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die folgenden zwei Bedingungen an i erfüllt sind:

1. ϖ^i liegt im Level von μ_1 und
2. $\mathfrak{b} \cdot \varpi^{-i}$ liegt im Level von μ_2 .

In anderen Worten, wir behaupten, dass $\mathcal{J}(\mu_1, \mu_2, \mathfrak{b})$ die Menge aller i , $0 \leq i \leq l$ ist, die diese zwei Bedingungen erfüllen. Die Kardinalität von $\mathcal{J}(\mu_1, \mu_2, \mathfrak{b})$ und damit die Dimension von $V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$ lässt sich mithilfe dieser Bedingungen sehr einfach bestimmen. Zeigen wir nun die Behauptung. Auf der Nebenklasse X_i können wir genau dann eine Funktion ϕ konstruieren, die (27) erfüllt, wenn für Matrizen $\begin{pmatrix} a_i & x_i \\ 0 & b_i \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a'_i & x'_i \\ 0 & b'_i \end{pmatrix}$ aus $\bar{B}$ mit

$$\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 & x'_1 \\ 0 & b'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_2 & x'_2 \\ 0 & b'_2 \end{pmatrix}$$

folgt, dass

$$\mu_1(a_1)\mu_2(b_1)\mu_1\mu_2(a'_1) = \mu_1(a_2)\mu_2(b_2)\mu_1\mu_2(a'_2).$$

Diese Bedingung können wir umformulieren zu: Für alle $\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a' & x' \\ 0 & b' \end{pmatrix}$ aus $\bar{B}$ mit

$$\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & x' \\ 0 & b' \end{pmatrix} \quad (28)$$

gilt

$$\mu_1(a)\mu_2(b) = \mu_1\mu_2(a').$$

Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich sieht man, dass es für gegebene a, b, a' und $b' \in (\mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})^*$ genau dann $x, x' \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b}$ gibt, die die Gleichung (28) erfüllen, wenn

$$\begin{aligned} b &\equiv b' \pmod{(\varpi^i)}, \\ a &\equiv a' \pmod{(\varpi^i)}, \\ a' &\equiv b \pmod{(\varpi^{-i} \cdot \mathfrak{b})} \\ \text{und } b - b' &= a' - a. \end{aligned} \quad (29)$$

(Beachte, dass $i \leq l$.)

Es bleibt zu zeigen, dass $i, 0 \leq i \leq l$ die zwei Bedingungen auf Seite 33 genau dann erfüllt, wenn für Elemente $a, b, a', b' \in (\mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})^*$, die die Kongruenzen aus (29) bezüglich i erfüllen, auch $\mu_1(a)\mu_2(b) = \mu_1\mu_2(a')$ gilt.

Nehmen wir zunächst an, für Elemente $a, b, a', b' \in (\mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})^*$ gilt $\mu_1(a)\mu_2(b) = \mu_1\mu_2(a')$, wenn a, b, a', b' die Kongruenzen aus (29) erfüllen. Für ein beliebiges $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ erfüllen die Elemente $a' = b = 1, a = b' = 1 + \gamma\varpi^i$ offensichtlich diese Kongruenzen, also gilt

$$\mu_1(1 + \gamma\varpi^i)\mu_2(1) = \mu_1(1)\mu_2(1) = 1.$$

Wir sehen, dass (ϖ^i) im Level von μ_1 liegt, also i die Bedingung 1. erfüllt. Genauso erhalten wir, dass (ϖ^{l-i}) im Level von μ_2 liegt, das heißt die Bedingung 2. erfüllt ist, wenn wir $a = 1 + \varpi^i, a' = 1, b = 1 + \gamma\varpi^{l-i}$ und $b' = 1 + \varpi^i + \gamma\varpi^{l-i}$ wählen. Dabei soll γ wieder ein beliebiges Element in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ sein.

Umgekehrt wählen wir nun $i, 0 \leq i \leq l$ so, dass i die zwei Bedingungen auf Seite 33 erfüllt. Wenn $a, b, a', b' \in (\mathcal{O}_{\mathcal{F}}/\mathfrak{b})^*$ die Kongruenzen aus (29) bezüglich erfüllen, folgt, dass

$$a \equiv a' \pmod{1 + (\varpi^i)} \quad \text{und} \quad a' \equiv b \pmod{1 + \varpi^{-i}\mathfrak{b}}.$$

Aus den an i gestellten Bedingungen erhalten wir sofort, dass $\mu_1(a)\mu_2(b) = \mu_1\mu_2(a')$ gilt. Wir haben also gezeigt, dass $\mathcal{J}(\mu_1, \mu_2, \mathfrak{b})$ die Menge aller i mit $0 \leq i \leq l$ ist, die die zwei Bedingungen auf Seite 33 erfüllen. Damit können wir nun ganz leicht die Dimension von $V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$ bestimmen. Für ϖ^k beziehungsweise ϖ^m die Level der Charaktere μ_1 beziehungsweise μ_2 gilt:

$$\dim(V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}) = |\mathcal{J}(\mu_1, \mu_2, \mathfrak{b})| = |\{i : 0 \leq i \leq l, i \leq k, l - i \leq m\}|. \quad (30)$$

Damit können wir sofort die Frage beantworten, für welches Ideal $\mathfrak{b} = (\varpi^l)$ der Raum $V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega}$ eindimensional ist. Dazu müssen wir l so wählen, dass es nur ein i , $0 \leq i \leq l$ gibt mit $l - m \leq i \leq k$. Wir erhalten $l = k + m$. Der Level der Darstellung (ρ, V) , wir bezeichnen ihn wieder mit $\mathfrak{c}(\rho)$, ist also gleich (ϖ^{k+m}) .

Aus (30) sehen wir außerdem, dass der Raum $V^{\Gamma_0(\varpi^t \mathfrak{b}), \omega}$, $t \geq 0$ Dimension $t + 1$ hat.

Für Darstellungen in der Hauptserie haben wir damit alle Aussagen des Satzes gezeigt, wenden wir uns jetzt den Steinberg Darstellungen zu. Seien μ_1 und μ_2 Charakter von $\mathcal{F}^*$ mit $\mu_1 \mu_2^{-1} = |\cdot|$. Dann gibt es einen Charakter μ von $\mathcal{F}^*$ mit $\mu_1 = \mu|\cdot|^{\frac{1}{2}}$ und $\mu_2 = \mu|\cdot|^{-\frac{1}{2}}$. Sei (ϖ^k) der Level von μ . In Abschnitt 2.2, Satz 2.14, haben wir gesehen, dass die Darstellung $(\pi(\mu_1, \mu_2), \mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)) = (\pi(\mu_1, \mu_2), V)$ einen irreduziblen invarianten Unterraum U der Kodimension eins enthält, während $(\pi(\mu_2, \mu_1), \mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)) = (\pi(\mu_2, \mu_1), W)$ einen eindimensionalen invarianten Unterraum aufgespannt von $\{g \mapsto \mu(\det(g))\}$ enthält. Die von $\pi(\mu_1, \mu_2)$ auf U definierte irreduzible Darstellung heißt Steinberg Darstellung, wir schreiben hierfür (ρ, U) . Es gilt, vgl Abschnitt 2.2:

$$V/U \cong \langle \mu \det(\cdot) \rangle \quad \text{und} \quad U \cong W / \langle \mu \det(\cdot) \rangle.$$

Weiters wissen wir aus Proposition 2.11, dass die duale Darstellung von V die Darstellung $\mathcal{B}(\mu^{-1}|\cdot|^{-\frac{1}{2}}, \mu^{-1}|\cdot|^{\frac{1}{2}})$ und U das Komplement (bezüglich der zur Dualität gehörigen Paarung) von $\langle \mu^{-1}(\det(\cdot)) \rangle \subseteq \mathcal{B}(\mu^{-1}|\cdot|^{-\frac{1}{2}}, \mu^{-1}|\cdot|^{\frac{1}{2}})$ ist.

Die Überlegungen, die wir für Darstellungen in der Hauptserie angestellt haben, bleiben auch für V richtig. Wir wissen also schon, dass der Raum $V^{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})}$ Dimension $l + 1$ hat, möchten aber die Dimension des Raumes der unter $\Gamma_1(\varpi^{2k+l})$ Invarianten in U bestimmen.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass μ verzweigt ist. Wir behaupten, es gilt

$$V^{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})} \subseteq U, \tag{31}$$

woraus wir sehen, dass die Dimension von $U^{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})}$ „noch immer“ $l + 1$ ist. Um (31) zu zeigen, rechnen wir nach, dass für f aus $V^{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})}$ gilt

$$\langle f, \mu^{-1} \det(\cdot) \rangle = 0,$$

also f in U liegt. Da $K = GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ kompakt und $\Gamma_1(\varpi^{2k+l})$ eine offene Untergruppe ist, gibt es $k_1, \dots, k_m$ mit $K/\Gamma_1(\varpi^{2k+l}) = \{k_1 \Gamma_1(\varpi^{2k+l}), \dots, k_m \Gamma_1(\varpi^{2k+l})\}$. Damit erhalten

wir:

$$\begin{aligned}
\langle f, \mu^{-1} \det(\cdot) \rangle &= \int_K f(k) \mu^{-1} \det(k) dk = \\
&= \sum_{i=1}^m f(k_i) \int_{k_i \Gamma_1(\varpi^{2k+l})} \mu^{-1} \det(k) dk = \\
&= \sum_{i=1}^m f(k_i) \int_{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})} \mu^{-1} \det(k_i k) dk = \\
&= \sum_{i=1}^m f(k_i) \mu^{-1} \det(k_i) \int_{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})} \mu^{-1} \det(k) dk.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck verschwindet, da das Integral am Schluss eine Summe über die Bilder einer endlichen Gruppe unter einem nichttrivialen Charakter ist, also verschwindet. Sei dazu $\det|_{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*$ die auf $\Gamma_1(\varpi^{2k+l})$ eingeschränkte Determinantenabbildung. Die Untergruppe $1 + (\varpi^k)$ von $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*$ ist offen, also ist auch ihr Urbild $M = \det|_{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})}^{-1}(1 + (\varpi^k))$ offen (und normal) in der kompakten Menge $\Gamma_1(\varpi^{2k+l})$. Somit ist $\Gamma_1(\varpi^{2k+l})/M$ eine endliche Gruppe. Es gilt:

$$\int_{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})} \mu^{-1} \det(k) dk = \text{Vol}(M) \int_{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})/M} \mu^{-1}(\det(h)) dh.$$

Dieser Ausdruck verschwindet, denn er ist die Summe über die Bilder der endlichen Gruppe $\Gamma_1(\varpi^{2k+l})/M$ unter dem nichttrivialen Charakter $\mu^{-1}(\det(\cdot))$.

Für μ unverzweigt, also $k = 0$, sieht die Situation anders aus. Da die lineare Abbildung

$$\begin{aligned}
V^{\Gamma_1(\varpi^l)}/U^{\Gamma_1(\varpi^l)} &\rightarrow V/U, \\
v + U^{\Gamma_1(\varpi^l)} &\mapsto v + U
\end{aligned}$$

injektiv und V/U eindimensional ist, hat auch $V^{\Gamma_1(\varpi^l)}/U^{\Gamma_1(\varpi^l)}$ höchstens Dimension eins. Wir werden zeigen, dass $V^{\Gamma_1(\varpi^l)}$ nicht in U liegt, also $U^{\Gamma_1(\varpi^l)}$ Dimension l hat. Wenn wir ein $f \in V$ angeben können, das invariant unter $\Gamma_1(\varpi^l)$ ist und $\langle f, \mu^{-1} \det(\cdot) \rangle \neq 0$ erfüllt, sind wir fertig. Betrachte

$$\begin{aligned}
f : GL(2, \mathcal{F}) &\rightarrow \mathbb{C}, \\
f\left(\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} k\right) &:= \mu(ab) \left| \frac{a}{b} \right| \quad \text{für } \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} \in B(\mathcal{F}), k \in GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}).
\end{aligned}$$

Da $K \cap B(\mathcal{F}) = B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ und μ unverzweigt ist, ist f wohldefiniert. Die Funktion f liegt offensichtlich in $V^K \subseteq V^{\Gamma_1(\varpi^l)}$ und es gilt

$$\langle f, \mu^{-1}(\det(\cdot)) \rangle = \int_K f(k) \mu^{-1}(\det(k)) dk = \int_K 1 dk \neq 0.$$

(Da μ und damit μ^{-1} unverzweigt ist, ist $\mu^{-1} \det(\cdot)$ auf K trivial. Auch f ist trivial auf K , wie man sofort aus der Definition von f erkennt.)

Damit sind alle Aussagen des Satzes gezeigt. $\square$

Seien wieder μ_1 und μ_2 Charakter von $\mathcal{F}^*$ mit Level (ϖ^k) beziehungsweise (ϖ^m) .

Der Beweis von Satz 3.3 zeigt auch, wie wir eine Basis von $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})}$, $l \geq 0$ konstruieren können. Bis jetzt waren wir nur an der Dimension dieses Raumes interessiert. Um diese angeben zu können, hatten wir eine Isomorphie zu einem Raum einfacherer Objekte gefunden. Eine Basis finden wir einfach, indem wir den umgekehrten Weg gehen: Wir beginnen mit einer Basis des Raumes der Funktionen $\phi : GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}/(\varpi^{k+m+l})) \rightarrow \mathbb{C}$, die (27) erfüllen, interpretieren die Basiselemente dann als Funktionen auf $GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ und erweitern sie schließlich zu Funktionen auf $GL(2, \mathcal{F})$.

Definiere zunächst Abbildungen $\lambda_i : GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathbb{C}$ für $0 \leq i \leq l$ wie folgt:

Falls $h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} & \tilde{\delta} \end{pmatrix} \in B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+i} & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0(\varpi^{k+m+l})$ setze

$$\lambda_i(h) := \mu_1(\alpha) \mu_2(\gamma) \mu_1 \mu_2(\tilde{\alpha})$$

und für $h \notin B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+i} & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0(\varpi^{k+m+l})$ sei $\lambda_i(h) = 0$.

Für jedes i , $0 \leq i \leq l$ definiere nun eine Abbildung

$$f_i : GL(2, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{C},$$

$$f_i(g) := \mu_1(a) \mu_2(c) \left| \frac{a}{c} \right|^{\frac{1}{2}} \lambda_i(h),$$

wobei $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} h$ die Iwasawazerlegung von $g \in GL(2, \mathcal{F})$ ist, das heißt $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in B(\mathcal{F})$ und $h \in GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$.

Korollar 3.6. *Die Funktionen $f_i : GL(2, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{C}$, $0 \leq i \leq l$ bilden eine Basis des Raumes $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})}$.*

Bemerkung 3.7. Im nächsten Kapitel werden wir immer wieder $f_i(g)$ für verschiedene $g \in GL(2, \mathcal{F})$ und $0 \leq i \leq l$ berechnen müssen. Dabei wird uns sehr nützlich sein, dass wir nur die p -adische Bewertungen der Einträge der Matrix g kennen müssen, um entscheiden zu können, ob $f_i(g) = 0$ gilt oder nicht.

Aus der Definition der $\lambda_i : K \rightarrow \mathbb{C}$ ergibt sich unmittelbar, dass $\lambda_i(k)$ und damit auch $f_i(bk)$, $b \in B(\mathcal{F})$, $k \in K$ genau dann ungleich Null ist, wenn

$$k \in \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K : v_p(c) = k + i \right\} \quad \text{für } i < l + m,$$

beziehungsweise wenn

$$k \in \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K : v_p(c) \geq k + l \right\} \quad \text{falls } i = l + m.$$

Daraus schließen wir, dass $f_i(g)$, $g \in GL(2, \mathcal{F})$ genau dann ungleich Null ist, wenn

$$g \in \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathcal{F}) : v_p(c) - v_p(d) = k + i \right\} \quad \text{für } i < l + m,$$

beziehungsweise wenn

$$g \in \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathcal{F}) : v_p(c) - v_p(d) \geq k + l \right\} \quad \text{falls } i = l + m.$$

4 Charakteristische Polynome von Heckeoperatoren auf invarianten Teilräumen der Hauptseriendarstellungen

Die Abschnitte 4.1 und 4.2 beschäftigen sich mit der Hauptseriendarstellung $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ für unverzweigte Charaktere μ_1 und μ_2 . Für zwei unterschiedliche $\Gamma_0(\varpi^l)$ -biinvariante Heckeoperatoren werden wir die linearen Abbildungen, die sie auf dem endlichdimensionalen Raum $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)^{\Gamma_0(\varpi^l)}$ definieren, bestimmen. Unser Ziel ist es, die charakteristische Polynome der durch die Heckeoperatoren gegebenen linearen Abbildungen zu berechnen. In den darauffolgenden zwei Abschnitten werden wir die Situation auf den verzweigten Fall verallgemeinern. Wir benötigen folgendes Lemma:

Lemma 4.1. *Für $l \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l)) = \bigsqcup_{\substack{B \bmod (\varpi) \\ B \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}}} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))$$

und

$$\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l)) = \bigsqcup_{\substack{B \bmod (\varpi) \\ B \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B\varpi^l & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l)).$$

Diese Zerlegungen bleiben richtig, wenn wir $\Gamma_0(\varpi^l)$ durch ihre Untergruppe $\Gamma_1(\varpi^l)$ ersetzen.

Beweis. Beginnen wir mit der ersten Gleichung. Dass die rechte Seite in der linken enthalten ist, sieht man sofort aus

$$\begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da $\begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $\Gamma_0((\varpi^l))$ liegt.

Sei $\mathcal{V}$ ein Vertretersystem von $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}/(\varpi)$. Um nachzuweisen, dass die linke Seite in der rechten Seite enthalten ist, genügt es natürlich

$$\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subseteq \bigsqcup_{B \bmod (\varpi)} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l)) \quad (32)$$

zu zeigen. Das bedeutet für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0((\varpi^l))$ müssen wir $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_0((\varpi^l))$ und $B \in \mathcal{V}$ finden mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

das heißt

$$\begin{pmatrix} \varpi a & b \\ \varpi c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'\varpi + c'B & \varpi b' + Bd' \\ c' & d' \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Wir beginnen mit der zweiten Zeile in (33), deren Einträge keine große Wahlfreiheit bieten: wir setzen $c' = \varpi c$ und $d' = d$. Wie gefordert liegt c' in (ϖ^l) und d' in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*$. Als nächstes wählen wir B aus dem Vetretersystem $\mathcal{V}$ so, dass $B \equiv bd^{-1} \pmod{(\varpi)}$ gilt. Wegen $-B + bd^{-1} \in (\varpi)$ können wir nun $b' = (-B + bd^{-1})d\varpi^{-1}$ wählen, denn dieser Ausdruck liegt in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. Schließlich setzen wir $a' = a - c'B\varpi^{-1}$. Da $c'B\varpi^{-1}$ in dem echten Ideal (ϖ^l) liegt, ist a' eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. Wir haben uns bereits davon überzeugt, dass die Matrix $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ in $\Gamma_0(\varpi^l)$ liegt; dass sie (33) erfüllt, rechnet man leicht nach. Dass die Vereinigung auf der rechten Seite disjunkt ist, sieht man daran, dass für eine Matrix $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))$ gilt $x \equiv Bz \pmod{(\varpi)}$, also $xz^{-1} \equiv B \pmod{(\varpi)}$. Ganz ähnlich überzeugen wir uns nun davon, dass auch

$$\Gamma_1((\varpi^l)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^l)) = \bigsqcup_{\substack{B \pmod{(\varpi)} \\ B \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}}} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^l))$$

gilt. Dass die rechte Seite in der linken enthalten ist, ist klar. Für die umgekehrte Richtung zeigen wir Gleichung (32) mit $\Gamma_1((\varpi^l))$ statt $\Gamma_0((\varpi^l))$. Für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1((\varpi^l))$ müssen wir also $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_1((\varpi^l))$ und $B \in \mathcal{V}$ finden, sodass die Gleichung (33), also

$$\begin{pmatrix} \varpi a & b \\ \varpi c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'\varpi + c'B & \varpi b' + Bd' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

erfüllt ist. Wir wissen schon, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - cB & (-B + bd^{-1})d\varpi^{-1} \\ \varpi c & d \end{pmatrix},$$

wobei wir $B \equiv bd^{-1} \pmod{(\varpi)}$ wählen, die Gleichung (33) erfüllt und in $\Gamma_0((\varpi^l))$ liegt. Da a kongruent 1 modulo (ϖ^l) ist und cB in ϖ^l liegt, gilt $a' \equiv 1 \pmod{(\varpi^l)}$. Die übrigen Aussagen des Lemmas lassen sich völlig analog zeigen. $\square$

4.1 Die charakteristische Funktion von $\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))$ als Heckeoperator im unverzweigten Fall

Bezeichne $(\rho, V) = \mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ die Hauptseriendarstellung für unverzweigte Charaktere μ_1 und μ_2 von $\mathcal{F}^*$ mit $\mu_1\mu_2^{-1}(y) \neq |y|$ und $\mu_1\mu_2^{-1}(y) \neq |y|^{-1}$. Nach Satz 3.3 und dessen Beweis ist $V^{GL_2(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})}$ in diesem Fall eindimensional. Genauer gilt für $l \in \mathbb{N}_0$:

$$\dim(V^{\Gamma_0((\varpi^l))}) = l + 1.$$

(Beachte, dass, wie in Bemerkung 3.5 festgestellt, $V^{\Gamma_0(\mathfrak{b})} = V^{\Gamma_0(\mathfrak{b}), \omega} = V^{\Gamma_1(\mathfrak{b})}$ gilt, da der zentrale Charakter von ρ unverzweigt ist.)

Auf $V^{\Gamma_0((\varpi^l))}$ operiert der Heckeoperator $\mathcal{T}_l$, definiert als die charakteristische Funktion von $\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))$. Wir werden das charakteristische Polynom dieser linearen Abbildung berechnen.

Im folgenden sei l eine fixe natürliche Zahl größer als Null.

Wir benötigen eine Basis des Raumes $V^{\Gamma_0((\varpi^l))}$, siehe Korollar 3.6. Da wir μ_1 und μ_2 als unverzweigt vorausgesetzt haben, vereinfacht sich die dortige Konstruktion:

Zunächst definieren wir die Funktionen $\lambda_i : GL_2(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \longrightarrow \mathbb{C}$, $0 \leq i \leq l$, durch

$$\lambda_i(k) := \begin{cases} 1 & \text{falls } k \in B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^i & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l)) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Diese erweitern wir zu Abbildungen $f_i : GL_2(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{C}$, $0 \leq i \leq l$ durch

$$f_i(bk) := \mu_1(a)\mu_2(c) \left| \frac{a}{c} \right|^{\frac{1}{2}} \lambda_i(k) \quad \text{wobei} \quad \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & c \end{pmatrix} \in B(\mathcal{F}), \quad k \in GL_2(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}). \quad (34)$$

Aus Korollar 3.6 wissen wir, dass $\{f_0, \dots, f_l\}$ tatsächlich eine Basis des Raumes $V^{\Gamma_0((\varpi^l))}$ ist.

In Bemerkung 3.7 haben wir festgestellt, dass die Ausdrücke $f_i(bk)$, $0 \leq i < l$, bzw. $f_l(bk)$ mit b und k wie oben genau dann nicht verschwinden, wenn der linke untere Eintrag von k Bewertung i beziehungsweise Bewertung größer oder gleich l hat.

Jetzt können wir mit der Berechnung der Matrixdarstellung von $\mathcal{T}_l$ bezüglich der Basis $\{f_0, \dots, f_l\}$ beginnen. Der Ausdruck $\mathcal{T}_l(f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} \right)$, $0 \leq i, j \leq l$, ist gleich dem Koeffizienten a_j von f_j in der Darstellung $\mathcal{T}_l(f_i) = \sum_{k=0}^l a_k f_k$, in anderen Worten:

$$([\mathcal{T}_l]_{\{f_0, \dots, f_l\}})_{j,i} = \mathcal{T}_l(f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} \right).$$

(Beachte: Die f_i haben disjunkten Träger.)

Um den Ausdruck

$$\mathcal{T}_l(f_i)(h) = \int_{\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))} f_i(hg) dg,$$

$h \in GL(2, \mathcal{F})$ berechnen zu können, verwenden wir eine Zerlegung aus Lemma 4.1:

$$\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l)) = \bigsqcup_{\substack{B \bmod (\varpi) \\ B \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}}} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l)). \quad (35)$$

Abgesehen davon, dass wir den Fall $l = 0$ schon in Abschnitt 2.3, Proposition 2.24 geklärt haben, sehen wir jetzt, dass es hier gar nicht möglich wäre, ihn ohne zusätzlichen Aufwand mitzubehandeln. Für $l = 0$ gilt nämlich $\Gamma_0(\varpi^l) = GL_2(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) = K$ und

$$K \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} K \sqcup \bigsqcup_{\substack{B \bmod (\varpi) \\ B \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}}} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K.$$

Unter Verwendung von (35) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_l(f_i)(h) &= \int_{\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))} f_i(hg) dg = \\
&= \sum_{B \bmod (\varpi)} \int_{\begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))} f_i(hg) dg = \\
&= \sum_{B \bmod (\varpi)} f_i \left(h \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \int_{\begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))} dg = \\
&= \sum_{B \bmod (\varpi)} \text{Vol} \left(\Gamma_0((\varpi^l)) \right) f_i \left(h \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Das dritte Gleichheitszeichen gilt, da f_i in $V^{\Gamma_0((\varpi^l))}$ liegt, das heißt invariant unter Multiplikation von rechts im Argument mit Elementen aus $\Gamma_0((\varpi^l))$ ist. Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus der Linksinvarianz des Haarmaßes. Um die folgenden Rechnungen möglichst übersichtlich zu halten, schreiben wir oft V statt $\text{Vol}(\Gamma_0((\varpi^l)))$.

Es gilt

$$\mathcal{T}_l(f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} \right) = \sum_{B \bmod (\varpi)} V f_i \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \quad (36)$$

Um $f_i \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ berechnen zu können, benötigen wir die Iwasawazerlegung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi & B \\ \varpi^{j+1} & B\varpi^j + 1 \end{pmatrix}.$$

Bei einer 2x2-Matrix lässt sich diese leicht durch Probieren finden, für $j \geq 1$ gilt

$$\begin{pmatrix} \varpi & B \\ \varpi^{j+1} & B\varpi^j + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - B\varpi^j & -B^2\varpi^{j-1} \\ \varpi^{j+1} & B\varpi^j + 1 \end{pmatrix}.$$

Für $j = 0$ liegt der rechte obere Eintrag der zweiten Matrix im allgemeinen nicht in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ und die Matrix selbst somit nicht in $GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$, wie in der Iwasawazerlegung gefordert. Diesen Fall müssen wir später gesondert betrachten. Wir sind aber schon so weit, dass wir $\mathcal{T}_l(f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} \right)$ für $j \geq 1$ berechnen können. Direkt aus (34) ergibt sich für $j \geq 1$ mithilfe der Iwasawazerlegung und Gleichung (36)

$$\mathcal{T}_l(f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} \right) = \sum_{B \bmod (\varpi)} V \mu_1(\varpi) \mu_2(1) \left| \frac{\varpi}{1} \right|^{\frac{1}{2}} = \text{Vol} \left(\Gamma_0((\varpi^l)) \right) q^{\frac{1}{2}} \mu_1(\varpi)$$

falls $i = j + 1$ oder $i = j = l$ und $\mathcal{T}_l(f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$ sonst.

Um den Überblick zu bewahren hilft es vielleicht sich klarzumachen, dass wir mit diesem

Ergebnis die erste bis l -te Zeile der für uns interessanten Matrix $[\mathcal{T}_l]_{\{f_0, \dots, f_l\}}$ kennen. (Die Zeilen- und Spaltenindizes beginnen hier bei 0.)

Um auch die nullte Zeile zu erhalten müssen wir die Ausdrücke $\mathcal{T}_l(f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$, $0 \leq i \leq l$, berechnen. Dazu brauchen wir die Iwasawazerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi & B \\ \varpi & B+1 \end{pmatrix},$$

das ist der Fall $j = 0$, den wir bei der obigen Iwasawazerlegung haben ausnehmen müssen. Es gilt

$$\begin{pmatrix} \varpi & B \\ \varpi & B+1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \varpi & \frac{B}{1+B} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{B}{1+B} & 0 \\ \varpi & B+1 \end{pmatrix} & \text{falls } B \not\equiv -1 \pmod{\varpi} \\ \begin{pmatrix} 1 & \varpi \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & z \end{pmatrix} & \text{falls } B = -1 + z\varpi, \text{ mit } z \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \end{cases}$$

Die linken unteren Einträge in den zweiten Faktoren der Iwasawazerlegungen haben Bewertung eins und null. Nach Bemerkung 3.7 ist klar, dass alle Ausdrücke $\mathcal{T}_l(f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$, $1 < i \leq l$, verschwinden. Weiters gilt

$$\mathcal{T}_l(f_1) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \sum_{\substack{B \pmod{\varpi} \\ B \not\equiv -1(\varpi)}} V \mu_1(\varpi) \mu_2(1) \left| \frac{\varpi}{1} \right|^{\frac{1}{2}} = V(q-1)q^{-\frac{1}{2}} \mu_1(\varpi)$$

und

$$\mathcal{T}_l(f_0) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = V \mu_1(1) \mu_2(\varpi) \left| \frac{1}{\varpi} \right|^{\frac{1}{2}} = Vq^{\frac{1}{2}} \mu_2(\varpi).$$

Anschaulich wirkt der Operator $\mathcal{T}_l$ auf der Basis $\{f_0, \dots, f_l\}$ also folgendermaßen

$$\begin{array}{ccccccc} \curvearrowright f_0 & \xleftarrow{\quad} & f_1 & \xleftarrow{\quad} & f_2 & \xleftarrow{\quad} & \dots & \xleftarrow{\quad} & f_{l-2} & \xleftarrow{\quad} & f_{l-1} & \xleftarrow{\quad} & f_l \curvearrowright \end{array} \quad (37)$$

Daraus können wir ablesen, dass die gesuchte Matrix, die wir jetzt schon vollständig bestimmt haben, Einträge in der ersten oberen Nebendiagonale und zwei Einträge auf der Diagonale hat. Mit $a := \mu_1(\varpi)$ und $b := \mu_2(\varpi)$ ist die Matrixdarstellung von $\mathcal{T}_l$ bezüglich der Basis $\{f_0, \dots, f_l\}$ von folgender Gestalt:

$$\text{Vol} \left(\Gamma_0(\varpi^l) \right) \begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}}b & (q-1)q^{-\frac{1}{2}}a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q^{\frac{1}{2}}a & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a & 0 & \dots \\ & & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \vdots & \ddots & q^{\frac{1}{2}}a & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & q^{\frac{1}{2}}a \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a \end{pmatrix} \quad \text{für } l > 1$$

und

$$\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi)) \begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}}b & (q-1)q^{-\frac{1}{2}}a \\ 0 & q^{\frac{1}{2}}a \end{pmatrix} \text{ im Fall } l = 1.$$

Nun bestimmen wir noch die Jordansche Normalform der durch $\mathcal{T}_l$ definierten linearen Abbildung. Sei λ Eigenwert dieser linearen Abbildung. Mit $A(\lambda)$ bezeichnen wir die algebraische Vielfachheit von λ und $G(\lambda)$ sei die geometrische Vielfachheit von λ , das heißt $G(\lambda) = \dim(\ker([\mathcal{T}_l]_{\{f_0, \dots, f_l\}} - \lambda \mathbb{1}))$. Man sieht leicht, dass $[\mathcal{T}_l]_{\{f_0, \dots, f_l\}}$ die Eigenwerte $0, \text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}a$ und $\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}b$ besitzt. Es gilt

$$\begin{aligned} A\left(\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}a\right) &= G\left(\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}a\right) = 1, \\ A\left(\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}b\right) &= G\left(\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}b\right) = 1, \\ A(0) &= l - 1, \\ \text{und } G(0) &= \dim(\ker([\mathcal{T}_l]_{\{f_0, \dots, f_l\}})) = l + 1 - \text{rg}([\mathcal{T}_l]_{\{f_0, \dots, f_l\}}) = 1. \end{aligned}$$

Die Matrix $[\mathcal{T}_l]_{\{f_0, \dots, f_l\}}$ hat Rang l , denn ihre letzten beiden Zeilen stimmen überein und ihre ersten l Zeilen sind offensichtlich linear unabhängig.

Hier ist die Jordansche Normalform also durch die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten schon vollständig bestimmt. Die Jordansche Normalform der durch $\mathcal{T}_l$ definierten linearen Abbildung sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} \text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}b & & & & \\ & \text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}a & & & \\ & & 0 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Für μ_1 und μ_2 unverzweigte Charaktere von $\mathcal{F}^*$ und $\mathcal{T}_l$ der Heckeoperator definiert als die charakteristische Funktion von $\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))$ gilt:

Das charakteristische Polynom $p(x)$ des Heckeoperators $\mathcal{T}_l$ auf $V^{\Gamma_0(\varpi^l)}$ ist

$$p(x) = \left(x - \text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}a\right) \left(x - \text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}b\right) x^{l-1}. \quad (39)$$

Der $\mathbb{C}[\mathcal{T}_l]$ -Modul $V^{\Gamma_0(\varpi^l)}$ lässt sich als direkte Summe dreier $\mathbb{C}[\mathcal{T}_l]$ -Moduln zerlegen:

$$V^{\Gamma_0(\varpi^l)} = V_{\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}a} \oplus V_{\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}b} \oplus V_0.$$

Dabei sind die $\mathbb{C}$ -Vektorräume $V_{\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}a}$ und $V_{\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}b}$ eindimensional und V_0 ist $l - 1$ -dimensional. Auf dem unzerlegbaren Modul V_0 wirkt $\mathcal{T}_l$ nilpotent.

Bemerkung 4.2. Aus Abschnitt 2.2, Proposition 2.17 wissen wir, dass $(\pi(\mu_1, \mu_2), \mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)) = (\rho, V)$ isomorph zu $(\pi(\mu_2, \mu_1), \mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)) = (\tilde{\rho}, \tilde{V})$ ist. Der Heckeoperator $\mathcal{T}_l$ definiert eine lineare Abbildung gleichzeitig auf $V^{\Gamma_0(\varpi^l)}$ und auf $\tilde{V}^{\Gamma_0(\varpi^l)}$. Wir zeigen nun, dass die charakteristischen Polynome dieser beiden linearen Abbildungen übereinstimmen müssen: Sei ψ ein $GL(2, \mathcal{F})$ -Isomorphismus von V nach $\tilde{V}$. Für ein beliebiges Element ϕ in der Heckealgebra, also insbesondere für $\mathcal{T}_l$, gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\phi)(\psi(v)) &= \int_{GL(2, \mathcal{F})} \phi(g) \tilde{\rho}(g)(\psi(v)) dg = \\ &= \int_{GL(2, \mathcal{F})} \phi(g) \psi(\rho(g)v) dg = \\ &= \psi \left(\int_{GL(2, \mathcal{F})} \phi(g) \rho(g)v dg \right) = \psi(\rho(\phi)v) \end{aligned}$$

für alle $v \in V$. Wir sehen also

$$\psi^{-1} \tilde{\rho}(\phi) \psi = \rho(\phi)$$

und daraus folgt die Behauptung.

Unser Ergebnis (39) stimmt mit dieser Beobachtung überein: das berechnete charakteristische Polynom $p(x) = \left(x - \text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) a q^{\frac{1}{2}} \right) \left(x - \text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) b q^{\frac{1}{2}} \right) x^{l-1}$ ist invariant unter Vertauschung von μ_1 und μ_2 .

4.2 Die charakteristische Funktion von $\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))$ als Heckeoperator im unverzweigten Fall

In der Problemstellung aus Abschnitt 4.1 ändern wir nur den Heckeoperator ab: Wir möchten nun das charakteristische Polynom des Heckeoperators $\mathcal{T}_l$, definiert als die charakteristische Funktion von $\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))$, bestimmen. Abgesehen von $\mathcal{T}_l$ behalten wir die Notation bei: $(V, \rho) = \mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ sei wieder die Hauptseriendarstellung für μ_1 und μ_2 unverzweigte Charaktere von $\mathcal{F}^*$ mit $\mu_1 \mu_2(y) \neq |y|$ und $\mu_1 \mu_2(y) \neq |y|^{-1}$. Auch die in (34) definierte Basis von $V^{\Gamma_0((\varpi^l))}$ erweist sich als für unser Vorhaben günstig. Wir können direkt damit beginnen, die Matrixdarstellung von $\mathcal{T}_l$ bezüglich $\{f_0, \dots, f_l\}$ zu berechnen. Wieder gilt

$$([\mathcal{T}_l]_{\{f_0, \dots, f_l\}})_{j,i} = (\mathcal{T}_l f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} \right), \quad 0 \leq i, j \leq l,$$

(unsere Argumentation war vom Heckeoperator unabhängig.) Das heißt, wir müssen folgende Integrale berechnen:

$$\mathcal{T}_l(f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} \right) = \int_{\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))} f_i \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} g \right) dg, \quad 0 \leq i, j \leq l.$$

An bzw. ab dieser Stelle ergibt sich eine Änderung zur obigen Rechnung. Um das Integral vereinfachen zu können, möchten wir den Integrationsbereich wieder in $\Gamma_0(\varpi^l)$ -Rechtsnebenklassen zerlegen. Aus Lemma 4.1 wissen wir:

$$\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l)) = \bigsqcup_{\substack{B \bmod (\varpi) \\ B \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B\varpi^l & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))$$

Unter Verwendung dieser Zerlegung erhalten wir analog zu oben:

$$\mathcal{T}_l(f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} \right) = \sum_{\substack{B \bmod (\varpi) \\ B \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}}} V f_i \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B\varpi^l & \varpi \end{pmatrix} \right).$$

Um den Ausdruck $f_i \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B\varpi^l & \varpi \end{pmatrix} \right) = f_i \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j + B\varpi^l & \varpi \end{pmatrix} \right)$ berechnen zu können, müssen wir die Iwasawazerlegung des Arguments suchen. Wieder ist eine Fallunterscheidung notwendig:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j + B\varpi^l & \varpi \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{j-1} + B\varpi^{l-1} & 1 \end{pmatrix} & \text{falls } j \geq 1 \\ \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 + B\varpi^l & \varpi \end{pmatrix} & \text{falls } j = 0 \end{cases} \quad (40)$$

Damit der Ausdruck $\mathcal{T}_l(f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} \right)$ für $i \leq l$ bzw. $i = l$ einen Wert ungleich Null annehmen kann, muss die Bewertung des linken unteren Eintrags im zweiten Faktor der Iwasawazerlegung von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j + B\varpi^l & \varpi \end{pmatrix}$ mit dem Index i übereinstimmen bzw. größer oder gleich l sein.

Beschäftigen wir uns zuerst mit dem komplizierteren ersten Fall der Iwasawazerlegung, $j \geq 1$. Wir interessieren uns also für die Bewertung von $\varpi^{j-1} + B\varpi^{l-1}$. Diese nimmt für $j < l$ und $j = l$ mit $B \not\equiv -1(\varpi)$ den Wert $j - 1$ an und ist für $j = l$ mit $B \equiv -1(\varpi)$ größer oder gleich l . Für $l \neq 1$ und $1 \leq j < l$, das heißt für alle Zeilen, außer der nullten und der l -ten, schaut die Situation recht einfach aus, hier gilt:

$$\mathcal{T}_l(f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^j & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} \sum_{B \bmod (\varpi)} V \mu_2(\varpi) |\varpi|^{-\frac{1}{2}} = V \mu_2(\varpi) q^{\frac{3}{2}} & \text{falls } i = j - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Betrachten wir nun die letzte, l -te Zeile, also den Fall $j = l$. Wie oben beschrieben hängt die Bewertung des linken unteren Eintrags im zweiten Faktor der Iwasawazerlegung vom Summationsindex B ab, genauer gilt:

$$\mathcal{T}_l(f_{l-1}) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^l & 1 \end{pmatrix} \right) = \sum_{\substack{B \bmod (\varpi) \\ B \not\equiv -1 \bmod (\varpi)}} V \mu_2(\varpi) |\varpi|^{-\frac{1}{2}} = (q - 1) q^{\frac{1}{2}} V \mu_2(\varpi)$$

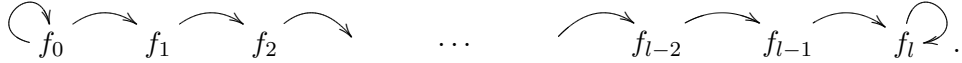
und

$$\mathcal{T}_l(f_l) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^l & 1 \end{pmatrix} \right) = V \mu_2(\varpi) |\varpi|^{-\frac{1}{2}} = V \mu_2(\varpi) q^{\frac{1}{2}}.$$

Für $0 \leq i < l-1$ verschwindet der Ausdruck $\mathcal{T}_l(f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^l & 1 \end{pmatrix} \right)$. Wir kennen jetzt die erste bis l -te Zeile der für uns interessanten Matrix $[\mathcal{T}_l]_{\{f_0, \dots, f_l\}}$. Um die nullte Zeile zu erhalten benutzen wir den zweiten Fall, $j = 0$, der Iwasawazerlegung aus (40). Es gilt:

$$\mathcal{T}_l(f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} \sum_{B \bmod (\varpi)} V\mu_1(\varpi) |\varpi|^{\frac{1}{2}} = V\mu_1(\varpi) q^{\frac{1}{2}} & \text{falls } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir stellen nun die Wirkung des Operators $\mathcal{T}_l$ auf der Basis $\{f_0, \dots, f_l\}$ grafisch dar. Der einzige Unterschied zu (37) ist, dass die Pfeile in die andere Richtung zeigen:



(Durch Umnummerieren der Basiselemente könnten wir ein Bild wie in (37) erhalten.) Für die gesuchte Matrix bedeutet dies, dass wir nun Einträge in der unteren ersten Nebendiagonale (anstatt in der oberen) und wieder zwei Einträge auf der Diagonale erhalten. Genauer schaut $[\mathcal{T}_l]_{\{f_0, \dots, f_l\}}$ mit $a := \mu_1(\varpi)$ und $b := \mu_2(\varpi)$ folgendermaßen aus:

$$\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) \begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}}a & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ q^{\frac{3}{2}}b & 0 & & & & \vdots \\ 0 & q^{\frac{3}{2}}b & 0 & \dots & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ & \vdots & \ddots & q^{\frac{3}{2}}b & 0 & \vdots \\ \vdots & & \dots & 0 & q^{\frac{3}{2}}b & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & (q-1)q^{\frac{1}{2}}b & q^{\frac{1}{2}}b \end{pmatrix} \quad \text{für } l > 1$$

und

$$\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi)) \begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}}a & 0 \\ (q-1)q^{\frac{1}{2}}b & q^{\frac{1}{2}}b \end{pmatrix} \quad \text{im Fall } l = 1.$$

Wie in Abschnitt 4.1 in (38) erhalten wir für die Jordansche Normalform der durch $\mathcal{T}_l$ definierten linearen Abbildung:

$$\begin{pmatrix} \text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}b & & & & \\ & \text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}a & & & \\ & & 0 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für μ_1 und μ_2 unverzweigte Charaktere von $\mathcal{F}^*$ und $\mathcal{T}_l$ der Heckeoperator definiert als die charakteristische Funktion von $\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))$ gilt:

Das charakteristische Polynom $p(x)$ des Heckeoperators $\mathcal{T}_l$ auf $V^{\Gamma_0(\varpi^l)}$ ist

$$p(x) = \left(x - \text{Vol}\left(\Gamma_0(\varpi^l)\right) q^{\frac{1}{2}a}\right) \left(x - \text{Vol}\left(\Gamma_0(\varpi^l)\right) q^{\frac{1}{2}b}\right) x^{l-1}. \quad (41)$$

Die Heckeoperatoren, die wir hier und im vorigen Abschnitt betrachtet haben, besitzen also das gleiche charakteristische Polynom.

Als $\mathbb{C}[\mathcal{T}_l]$ -Modul lässt sich $V^{\Gamma_0(\varpi^l)}$ folgendermaßen als direkte Summe schreiben:

$$V^{\Gamma_0(\varpi^l)} = V_{\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}a}} \oplus V_{\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}b}} \oplus V_0,$$

wobei $V_{\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}a}}$ und $V_{\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}b}}$ als $\mathbb{C}$ -Vektorräume eindimensional sind und V_0 $l-1$ -dimensional ist. Auf dem unzerlegbaren Modul V_0 wirkt $\mathcal{T}_l$ nilpotent.

Wie in Bemerkung 4.2 am Schluss des vorigen Abschnitts erklärt, muss das charakteristische Polynom invariant unter Vertauschung von μ_1 und μ_2 sein, $p(x)$ erfüllt diese Bedingung offensichtlich.

4.3 Die charakteristische Funktion von $\Gamma_1((\varpi^l)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^l))$ als Heckeoperator im verzweigten Fall.

Seien nun μ_1 und μ_2 beliebige Charaktere von $\mathcal{F}^*$ mit $\mu_1 \mu_2^{-1}(y) \neq |y|$ und $\mu_1 \mu_2^{-1}(y) \neq |y|^{-1}$ und $(V, \rho) = \mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ die dazugehörige Hauptseriendarstellung. (Wir setzen also μ_1 und μ_2 nicht mehr als unverzweigt voraus wie in den beiden vorigen Abschnitten.) Sei (ϖ^k) der Level von μ_1 und (ϖ^m) der von μ_2 . Aus Satz 3.3 wissen wir, dass $V^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})}$ für $l \in \mathbb{N}_0$ Dimension $l+1$ hat. Ähnlich wie in Abschnitt 4.1 betrachten wir die charakteristische Funktion von $\Gamma_1((\varpi^t)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^t))$, $t \in \mathbb{N}_0$ als Heckeoperator $\mathcal{T}_t$. Auf $V^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})}$ wirkt $\mathcal{T}_{k+m+l}$ als lineare Abbildung. Wir wollen ihr charakteristisches Polynom berechnen.

Wie auch in den beiden vorherigen Abschnitten verwenden wir, dass für eine kompakt offene Untergruppe K_0 von $GL(2, \mathcal{F})$ der Raum der unter K_0 -invarianten Elemente in V einen (endlichdimensionalen) $\mathcal{H}_{K_0}$ -Modul bildet. In Satz 3.3 wird $V^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})} = V^{\Gamma_0(\varpi^{k+m+l}), \omega}$ beschrieben. Im Gegensatz zu den beiden vorherigen Abschnitten stimmt hier $V^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})}$ nicht mit $V^{\Gamma_0(\varpi^{k+m+l})}$ überein, das ist der Grund, warum wir hier $\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})$ verwenden müssen.

Im folgenden sei l eine Zahl aus $\mathbb{N}_0$, die größer als Null ist, wenn $k = m = 0$ gilt.

Wir erinnern uns an die Basis von $V^{\Gamma_0(\varpi^{k+m+l})}$, die wir in Korollar 3.6 angegeben hatten: Zunächst definieren wir Abbildungen $\lambda_i : K \rightarrow \mathbb{C}$ für $0 \leq i \leq l$ wie folgt:

Falls $k = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} & \tilde{\delta} \end{pmatrix} \in B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+i} & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0(\varpi^{k+m+l})$ setze

$$\lambda_i(k) := \mu_1(\alpha) \mu_2(\gamma) \mu_1 \mu_2(\tilde{\alpha})$$

und für $k \notin B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+i} & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0(\varpi^{k+m+l})$ sei $\lambda_i(k) = 0$.

Für jedes i , $0 \leq i \leq l$ definiere nun eine Abbildung

$$f_i : GL(2, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$f_i(g) := \mu_1(a)\mu_2(c) \left| \frac{a}{c} \right|^{\frac{1}{2}} \lambda_i(k), \quad (42)$$

wobei $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} k$ die Iwasawazerlegung von $g \in GL(2, \mathcal{F})$ ist, das heißt $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in B(\mathcal{F})$ und $k \in K$.

Nach Korollar 3.6 bildet $\{f_0, \dots, f_l\}$ eine Basis von $V^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})}$.

Auch hier lässt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Verschwinden von f_i und dem zweiten Faktor der Iwasawazerlegung angeben, vergleiche Bemerkung 3.7. Sei zunächst $i < l + m$ (falls $m > 0$ ist das immer der Fall), dann gilt: $f_i(bn)$ mit $b \in B(\mathcal{F})$ und $n \in GL_2(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ kann nur dann einen Wert ungleich Null annehmen, wenn die Bewertung des linken unteren Eintrags von n den Wert $i + k$ hat. Für $i = m + l$ ist $f_i(bn) = f_{m+l}(bn)$ genau dann ungleich Null, wenn die Bewertung des linken unteren Eintrags von n größer oder gleich $i + k = k + m + l$ ist.

Die Basiselemente $\{f_0, \dots, f_l\}$ besitzen wie im unverzweigten Fall disjunkte Träger, die jetzt aber im allgemeinen nicht mehr den ganzen Raum $GL(2, \mathcal{F})$ überdecken. Aus dieser Beobachtung folgern wir, dass in der Matrix des Operators $\mathcal{T}_{k+m+l}$ bezüglich der Basis $\{f_0, \dots, f_l\}$ an der Stelle (j, i) der Ausdruck $(\mathcal{T}_{k+m+l} f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \right)$ steht, in anderen Worten:

$$([\mathcal{T}_{k+m+l}]_{\{f_0, \dots, f_l\}})_{j,i} = (\mathcal{T}_{k+m+l} f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \right), \quad 0 \leq i, j \leq l.$$

Wir müssen also folgende Integrale für $0 \leq i, j \leq l$ berechnen:

$$(\mathcal{T}_{k+m+l} f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \right) = \int_{\Gamma_1((\varpi^{k+m+l})) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^{k+m+l}))} f_i \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} g \right) dg.$$

Nach Lemma 4.1 bleibt die Zerlegung aus (35) richtig, wenn wir $\Gamma_0(\varpi^{k+m+l})$ durch $\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})$ ersetzen:

$$\Gamma_1((\varpi^{k+m+l})) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^{k+m+l})) = \bigsqcup_{B \bmod (\varpi)} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^{k+m+l})).$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{T}_{k+m+l} f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \right) = \\
& = \sum_{B \bmod (\varpi)} \int_{\begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^{k+m+l}))} f_i \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} g \right) dg = \\
& = \sum_{B \bmod (\varpi)} f_i \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \int_{\begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^{k+m+l}))} dg = \\
& = \sum_{B \bmod (\varpi)} \text{Vol} \left(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l}) \right) f_i \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad (43)
\end{aligned}$$

In Abschnitt 4.1 und 4.2 mussten wir um $f(g)$, $g \in GL(2, \mathcal{F})$ zu bestimmen, nur die Iwasawazerlegung von g kennen. Wenn wir die Definition der f_i in (42) betrachten, sehen wir, dass wir jetzt zusätzlich zur Berechnung der Iwasawazerlegung von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, deren zweiten Faktor in der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma}_0 & \tilde{\delta} \end{pmatrix} \in B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+i} & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0(\varpi^{k+m+l})$$

schreiben müssen. Um beim Suchen dieser Zerlegung nicht völlig auf blindes Probieren angewiesen zu sein, ist folgende Gleichung hilfreich, die wir schon in Lemma 3.2 verwendet haben. Für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$, $c = \gamma \varpi^t$ mit $t > 0$ und $\gamma \in \mathcal{O}^*$ gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ad - bc)\gamma^{-1} & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma d^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

(Beachte, dass c Bewertung größer als Null hat und daher wegen $(ad - bc) \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*$ auch d invertierbar ist.)

Sei zunächst $k + j \geq 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} \varpi & B \\ \varpi^{k+j+1} & B\varpi^{k+j} + 1 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - B\varpi^{k+j} & -B^2\varpi^{k+j-1} \\ \varpi^{k+j+1} & B\varpi^{k+j} + 1 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -B^2\varpi^{k+j-1} \\ 0 & B\varpi^{k+j} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + B\varpi^{k+j})^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (45)
\end{aligned}$$

Dabei ist das zweite Gleichheitszeichen die Iwasawazerlegung, die wir schon in Abschnitt 4.1 berechnet haben. Das dritte Gleichheitszeichen erhält man durch Anwendung von

(44).

Um die folgenden Umformungen übersichtlicher zu halten, sei wieder $V := \text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+j+l}))$.

Im Fall $1 \leq k+j$ können wir $(\mathcal{T}_{k+m+l}f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \right)$ nun für alle i , $0 \leq i \leq l$ berechnen. Durch Einsetzen von Gleichung (45) in (43) erhalten wir

$$\begin{aligned} & (\mathcal{T}_{k+m+l}f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ & = V \sum_{B \bmod (\varpi)} f_i \left(\begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -B^2\varpi^{k+j-1} \\ 0 & B\varpi^{k+j} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+B\varpi^{k+j})^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Indem wir die Definition (42) verwenden, sehen wir, dass

$$(\mathcal{T}_{k+m+l}f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \right) = V \sum_{B \bmod (\varpi)} \mu_1(\varpi) |\varpi|^{\frac{1}{2}} \mu_2(B\varpi^{k+j} + 1) \mu_1 \mu_2(B\varpi^{k+j} + 1)^{-1}, \quad (46)$$

falls $i = j+1$ oder $j = i = m+l$, was nur im Fall $m = 0$ vorkommen kann. Gilt weder $i = j+1$ noch $j = i = m+l$, dann verschwindet $(\mathcal{T}_{k+m+l}f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \right)$.

Die Summe in (46) lässt sich sehr stark vereinfachen. Wir müssen dazu beachten, dass $B\varpi^{k+j} + 1$ im Level von μ_1 liegt, den wir ganz zu Beginn als ϖ^k angenommen hatten, also $\mu_1(B\varpi^{k+j} + 1) = 1$ gilt. Außerdem sind die Ausdrücke, die μ_2 enthalten invers zueinander. Schließlich erhalten wir für $k+j \geq 1$:

$$(\mathcal{T}_{k+m+l}f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} Vq^{\frac{1}{2}}\mu_1(\varpi) & \text{falls } i = j+1 \text{ oder } j = i = m+l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für $k > 0$, das heißt der Level von μ_1 ist kleiner als $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, haben wir schon alle Einträge der Matrix $([\mathcal{T}_{k+m+l}]_{\{f_0, \dots, f_l\}})$ bestimmt. Der Fall $j = i = m+l$, tritt nur ein, wenn der Level von μ_2 ganz $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ ist, das heißt $m = 0$ gilt. Sei wieder $a := \mu_1(\varpi)$ und $b := \mu_2(\varpi)$. Für k und m beide größer als Null gilt:

$$[\mathcal{T}_{k+m+l}]_{\{f_0, \dots, f_l\}} = \text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})) \begin{pmatrix} 0 & q^{\frac{1}{2}}a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a & 0 & \dots & \vdots \\ & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & q^{\frac{1}{2}}a & 0 & \vdots \\ & & & \dots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a & 0 \\ \vdots & & & & \dots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a \\ 0 & \dots & & & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

mit dazugehörigem Bild

$$\begin{array}{ccccccc} & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\ f_0 & & f_1 & & f_2 & & \dots & & f_{l-2} & & f_{l-1} & & f_l \end{array}$$

Die Jordansche Normalform der durch $\mathcal{T}_{k+m+l}$ definierten linearen Abbildung besteht hier aus einem einzigen Jordan-Block zum Eigenwert 0:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $k > 0$ und $m = 0$ ergibt sich:

$$[\mathcal{T}_{k+m+l}]_{\{f_0, \dots, f_l\}} = \text{Vol} \left(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l}) \right) \begin{pmatrix} 0 & q^{\frac{1}{2}}a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a & 0 & \dots & \vdots \\ & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & q^{\frac{1}{2}}a & 0 \\ & & & 0 & q^{\frac{1}{2}}a & 0 \\ \vdots & & & & 0 & q^{\frac{1}{2}}a \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a \end{pmatrix}$$

und die Wirkung des Operators $\mathcal{T}_{k+m+l}$ auf der Basis $\{f_0, \dots, f_l\}$ lässt sich folgendermaßen veranschaulichen:

$$f_0 \xleftarrow{\quad} f_1 \xleftarrow{\quad} f_2 \xleftarrow{\quad} \dots \xleftarrow{\quad} f_{l-2} \xleftarrow{\quad} f_{l-1} \xleftarrow{\quad} f_l \xrightarrow{\quad}.$$

Für die dazugehörige Jordansche Normalform erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} \text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})) q^{\frac{1}{2}}a & & & \\ & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Auch wenn der Level von μ_1 gleich $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ ist, kennen wir schon die erste bis l -te Zeile der gesuchten Matrix. Um die Einträge der nullten Zeile zu berechnen, müssen wir die Zerlegung von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, wie wir sie in (45) für $k+j \geq 1$ durchgeführt haben, auch für den Fall $k+j = 0$ kennen. Zuerst brauchen wir die Iwasawazerlegung, die wir von früher übernehmen können. Dabei ergibt sich eine Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi & B \\ \varpi & B+1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{cases} \begin{pmatrix} \varpi & \frac{B}{1+B} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1+B} & 0 \\ \varpi & B+1 \end{pmatrix} & \text{für } B \not\equiv -1 \pmod{\varpi} \\ \begin{pmatrix} 1 & \varpi \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & z \end{pmatrix} & \text{falls } B \equiv -1 \pmod{\varpi}, B = -1 + z\varpi, z \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \end{cases}. \end{aligned}$$

Im ersten Fall, also $B \not\equiv -1 \pmod{\varpi}$, erhalten wir schließlich:

$$\begin{pmatrix} \varpi & B \\ \varpi & B+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi & \frac{B}{1+B} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (B+1)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $B = -1 + z\varpi, z \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \varpi & B \\ \varpi & B+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varpi \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit sind wir jetzt in der Lage $(\mathcal{T}_{k+m+l}f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \right)$ auch für $k+j=0$, was gleichbedeutend ist mit $k=j=0$, zu berechnen. Mithilfe von (43) sehen wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{k+m+l}f_i \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) &= V f_i \left(\begin{pmatrix} 1 & \varpi \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) + \\ &+ \sum_{\substack{B \pmod{\varpi} \\ B \not\equiv -1 \pmod{\varpi}}} V f_i \left(\begin{pmatrix} \varpi & \frac{B}{1+B} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (B+1)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Der erste Summand ist genau dann ungleich Null wenn $i=0$ und der zweite genau dann wenn $i=1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{k+m+l}f_1) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) &= \sum_{\substack{B \pmod{\varpi} \\ B \not\equiv -1 \pmod{\varpi}}} V \mu_1(\varpi) |\varpi|^{\frac{1}{2}} \mu_2(B+1) \mu_1(B+1)^{-1} \mu_2(B+1)^{-1} = \\ &= V(q-1) \mu_1(\varpi) q^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und

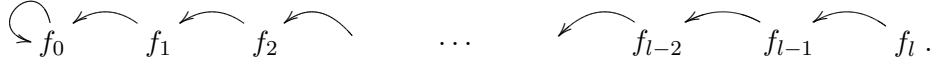
$$(\mathcal{T}_{k+m+l}f_0) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = V \mu_2(\varpi) |\varpi|^{-\frac{1}{2}}.$$

Für die Vereinfachung im ersten Fall haben wir verwendet, dass B in $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, dem Level von μ_1 liegt, also $\mu_1(B+1) = 1$ gilt.

Jetzt können wir auch für $k=0, m>0$ die Matrixdarstellung des Operators $\mathcal{T}_{k+m+l}$ bezüglich der Basis $\{f_0, \dots, f_l\}$ angeben:

$$[\mathcal{T}_{k+m+l}]_{\{f_0, \dots, f_l\}} = \text{Vol} \left(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l}) \right) \begin{pmatrix} bq^{\frac{1}{2}} & (q-1)q^{-\frac{1}{2}}a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q^{\frac{1}{2}}a & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a & \ddots & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \dots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a & 0 \\ \vdots & & & & \dots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a \\ 0 & \dots & & & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Wirkung von $\mathcal{T}_{k+m+l}$ auf der Basis $\{f_0, \dots, f_l\}$ lässt sich folgendermaßen veranschaulichen:



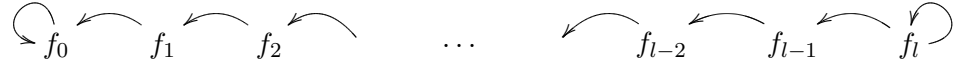
Hier erhalten wir für die dazugehörige Jordansche Normalform:

$$\begin{pmatrix} \text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})) q^{\frac{1}{2}b} & & & & \\ & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Den Fall $k = 0$ und $m = 0$ haben wir schon in Abschnitt 4.1 behandelt. Hier stellt er sich als Spezialfall heraus, den wir ohne weitere Rechnungen erhalten:

$$[\mathcal{T}_{k+m+l}]_{\{f_0, \dots, f_l\}} = \text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})) \begin{pmatrix} bq^{\frac{1}{2}} & (q-1)q^{\frac{-1}{2}}a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q^{\frac{1}{2}}a & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a & \ddots & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \dots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a \\ \vdots & & & & 0 & q^{\frac{1}{2}}a \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Für die Wirkung des Operators $\mathcal{T}_{k+m+l}$ auf der Basis $\{f_0, \dots, f_l\}$ erhalten wir das gleiche Bild wie in (37):



Abgesehen vom Faktor vor der Matrix stimmt unser Ergebnis mit dem aus Abschnitt 4.1 überein, wie wir erwartet haben. Der unterschiedliche Faktor lässt sich durch den leicht abgeänderten Heckeoperator erklären: In Abschnitt 4.1 betrachteten wir die charakteristische Funktion der Menge $\Gamma_0((\varpi^t)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^t))$ und hier die charakteristische Funktion der Menge $\Gamma_1((\varpi^t)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^t))$. Die Rechnungen aus Abschnitt 4.1 lassen sich aber ohne wesentliche Änderung für den hier verwendeten Heckeoperator durchführen, das Ergebnis stimmt dann mit (48) überein.

Nun ist es leicht, das charakteristische Polynom $p(x)$ des Heckeoperators $\mathcal{T}_{k+m+l}$, definiert als die charakteristische Funktion von $\Gamma_1((\varpi^{k+m+l})) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^{k+m+l}))$ anzugeben:

Sind μ_1 und μ_2 verzweigt, so gilt

$$p(x) = x^{l+1}$$

und $\mathcal{T}_{k+m+l}$ wirkt nilpotent auf dem unzerlegbaren $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{k+m+l}]$ -Modul $V^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})}$.
Falls μ_1 unverzweigt und μ_2 verzweigt ist, ergibt sich

$$p(x) = \left(x - \text{Vol}\left(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})\right) \mu_2(\varpi) q^{\frac{1}{2}} \right) x^l.$$

Als $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{k+m+l}]$ -Modul lässt sich $V^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})}$ folgendermaßen als direkte Summe zerlegen:

$$V^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})} = V_{\text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l}))_{q^{\frac{1}{2}}b}} \oplus V_0.$$

Als $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist $V_{\text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l}))_{q^{\frac{1}{2}}b}}$ eindimensional und V_0 l -dimensional. Der Heckeoperator $\mathcal{T}_{k+m+l}$ wirkt auf dem unzerlegbaren Modul V_0 nilpotent.
Ist die Situation von μ_1 und μ_2 vertauscht, d.h. μ_1 verzweigt und μ_2 unverzweigt, erhalten wir

$$p(x) = \left(x - \text{Vol}\left(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})\right) \mu_1(\varpi) q^{\frac{1}{2}} \right) x^l.$$

Der $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{k+m+l}]$ -Modul $V^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})}$ ist wieder direkte Summe zweier unzerlegbarer Moduln:

$$V^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})} = V_{\text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l}))_{q^{\frac{1}{2}}a}} \oplus V_0.$$

Als $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist $V_{\text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l}))_{q^{\frac{1}{2}}a}}$ eindimensional und V_0 l -dimensional. Auf V_0 wirkt $\mathcal{T}_{k+m+l}$ nilpotent.
Sind μ_1 und μ_2 unverzweigt, so gilt

$$p(x) = \left(x - \text{Vol}\left(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})\right) \mu_1(\varpi) q^{\frac{1}{2}} \right) \left(x - \text{Vol}\left(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})\right) \mu_2(\varpi) q^{\frac{1}{2}} \right) x^{l-1}.$$

In diesem Fall ist der $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{k+m+l}]$ -Modul $V^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})}$ direkte Summe dreier Moduln, vergleiche Abschnitt 4.1.

Auch hier sind $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ und $\mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)$ nach Abschnitt 2.2, Proposition 2.17 isomorph zueinander. Wie in Bemerkung 4.2 können wir folgern, dass die zum Heckeoperator $\mathcal{T}_{k+m+l}$ gehörigen linearen Abbildungen auf $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})}$ und auf $\mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})}$ das gleiche charakteristische Polynom haben. Unser Ergebnis erfüllt dieses Kriterium.

4.4 Die charakteristische Funktion von $\Gamma_1((\varpi^l)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^l))$ als Heckeoperator im verzweigten Fall.

Wie der Abschnitt 4.2 eigentlich nur eine Wiederholung von Abschnitt 4.1 mit abgeändertem Heckeoperator darstellt, möchten wir auch hier fast alle Voraussetzungen und Notationen des vorigen Abschnitts beibehalten, in dessen Situation aber einen anderen Heckeoperator betrachten.

Mit $\mathcal{T}_t$ bezeichnen wir nun die charakteristische Funktion von $\Gamma_1((\varpi^t)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^t))$, $t \in \mathbb{N}_0$. Wieder wollen wir das charakteristische Polynom der durch $\mathcal{T}_{k+m+l}$ auf $V^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})}$

definierten linearen Abbildung berechnen. Dazu verwenden wir die Matrixdarstellung von $\mathcal{T}_{k+m+l}$ bezüglich der Basis $\{f_0, \dots, f_l\}$ (siehe (42)). Es gilt:

$$([\mathcal{T}_{k+m+l}]_{\{f_0, \dots, f_l\}})_{j,i} = (\mathcal{T}_{k+m+l} f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \right), \quad 0 \leq i, j \leq l.$$

Um den Ausdruck auf der rechten Seite berechnen zu können, verwenden wir folgende Zerlegung, vergleiche Lemma 4.1:

$$\Gamma_1((\varpi^t)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^t)) = \bigsqcup_{B \bmod (\varpi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B\varpi^t & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^t)).$$

Damit erhalten wir analog zu (43):

$$(\mathcal{T}_{k+m+l} f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \right) = \sum_{B \bmod (\varpi)} \text{Vol} \left(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l}) \right) f_i \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B\varpi^{k+m+l} & \varpi \end{pmatrix} \right).$$

Um die Definition der f_i anwenden zu können, müssen wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B\varpi^{k+m+l} & \varpi \end{pmatrix}$$

als Element in $B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^t & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0(\varpi^{k+m+l})$ für $t \geq 0$ schreiben. Dazu benutzen wir die Iwasawazerlegung aus Abschnitt 4.2 und zerlegen ihren zweiten Faktor mithilfe von (44), wenn das möglich ist, und sonst durch Probieren. Schon für die Iwasawazerlegung ist eine Fallunterscheidung notwendig, betrachten wir zuerst $k+j > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B\varpi^{k+m+l} & \varpi \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} + B\varpi^{k+m+l} & \varpi \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + B\varpi^{m+l-j})^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + B\varpi^{m+l-j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

solange nicht $j = m+l$ und $B \equiv -1(\varpi)$ eintritt und

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B\varpi^{k+m+l} & \varpi \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+m+l+t} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (49)$$

sonst, das heißt wenn $j = m+l$ und $B \equiv -1(\varpi)$ mit $1+B = \gamma\varpi^{t+1}$, wobei $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^*$. Wir sind nun soweit, dass wir fast alle Zeilen der gesuchten Matrix berechnen können. Nur falls μ_1 unverzweigt ist, fehlt uns noch die nullte Zeile, um die wir uns später kümmern

werden.

Für j mit $0 < k + j < k + m + l$ finden wir mithilfe von (42):

$$(\mathcal{T}_{k+m+l} f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} V \sum_{B \bmod (\varpi)} \mu_2(\varpi) q^{\frac{1}{2}} \mu_1(1 + B\varpi^{m+l-j})^{-1} \mu_1(1 + B\varpi^{m+l-j}) \mu_2(1 + B\varpi^{m+l-j}) & \text{für } i = j - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Summe lässt sich stark vereinfachen. Dazu verwenden wir, dass $1 + B\varpi^{m+l-j}$ im Level von μ_2 liegt und die Faktoren, die μ_1 enthalten, invers zueinander sind. Für j mit $0 < k + j < k + m + l$ erhalten wir also

$$(\mathcal{T}_{k+m+l} f_{j-1}) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+j} & 1 \end{pmatrix} \right) = V q^{\frac{3}{2}} \mu_2(\varpi).$$

Damit können wir für verzweigte Charaktere μ_1 und μ_2 die Matrixdarstellung von $\mathcal{T}_{k+m+l}$ bezüglich $\{f_0, \dots, f_l\}$ angeben:

$$[\mathcal{T}_{k+m+l}]_{\{f_0, \dots, f_l\}} = \text{Vol} \left(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l}) \right) \begin{pmatrix} 0 & \dots & & \dots & 0 \\ q^{\frac{3}{2}}b & 0 & \dots & & \vdots \\ 0 & q^{\frac{3}{2}}b & 0 & \dots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & q^{\frac{3}{2}}b & 0 & \vdots \\ \vdots & & \dots & 0 & q^{\frac{3}{2}}b & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & q^{\frac{3}{2}}b & 0 \end{pmatrix}.$$

Wollen wir die Wirkung des Operators $\mathcal{T}_{k+m+l}$ auf der Basis $\{f_0, \dots, f_l\}$ grafisch veranschaulichen, so erhalten wir:

$$f_0 \xrightarrow{\quad} f_1 \xrightarrow{\quad} f_2 \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} f_{l-2} \xrightarrow{\quad} f_{l-1} \xrightarrow{\quad} f_l.$$

Die Jordansche Normalform zur durch $\mathcal{T}_{k+m+l}$ definierten linearen Abbildung besteht aus einem einzigen Jordan-Block zum Eigenwert 0, vergleiche (47).

Um im Fall μ_1 verzweigt und μ_2 unverzweigt die letzte Zeile zu erhalten, müssen wir uns an (49) erinnern. Damit gilt für $m = 0$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{k+m+l} f_{l-1}) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+l} & 1 \end{pmatrix} \right) &= \sum_{\substack{B \bmod (\varpi) \\ B \not\equiv -1 \bmod (\varpi)}} V \mu_2(\varpi) \left| \frac{1}{\varpi} \right| \mu_1(1 + B\varpi^m)^{-1} \mu_1 \mu_2(1 + B\varpi^m) = \\ &= V(q-1)q^{\frac{1}{2}} \mu_2(\varpi) \end{aligned}$$

und

$$(\mathcal{T}_{k+m+l} f_l) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+l} & 1 \end{pmatrix} \right) = V \mu_2(\varpi) \left| \frac{1}{\varpi} \right| \mu_1(\gamma)^{-1} \mu_1 \mu_2(\gamma) = V q^{\frac{1}{2}} \mu_2(\varpi).$$

Für $m = 0$ und $i < l - 1$ verschwindet $(\mathcal{T}_{k+m+l}f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{k+l} & 1 \end{pmatrix} \right)$.

Jetzt können wir auch für μ_2 unverzweigt und μ_1 verzweigt, die gesuchte Matrix angeben:

$$[\mathcal{T}_{k+m+l}]_{\{f_0, \dots, f_l\}} = \text{Vol} \left(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l}) \right) \begin{pmatrix} 0 & \dots & & \dots & 0 \\ q^{\frac{3}{2}}b & 0 & \dots & & \vdots \\ 0 & q^{\frac{3}{2}}b & 0 & \dots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & q^{\frac{3}{2}}b & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \dots & 0 & q^{\frac{3}{2}}b & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & (q-1)q^{\frac{1}{2}}b & q^{\frac{1}{2}}b \end{pmatrix}.$$

Auf der Basis $\{f_0, \dots, f_l\}$ wirkt der Operator $\mathcal{T}_{k+m+l}$ also folgendermaßen:

$$f_0 \xrightarrow{\quad} f_1 \xrightarrow{\quad} f_2 \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} f_{l-2} \xrightarrow{\quad} f_{l-1} \xrightarrow{\quad} f_l \xrightarrow{\quad}$$

Für die durch $\mathcal{T}_{k+m+l}$ definierten linearen Abbildung erhalten wir als Jordansche Normalform:

$$\begin{pmatrix} \text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})) q^{\frac{1}{2}}b & & & & \\ & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Was jetzt noch zu tun bleibt, ist die nullte Zeile der Matrix für μ_1 unverzweigt zu berechnen. Dazu müssen wir uns mit dem in (49) ausgelassenen Fall $k + j = 0$, der nur für μ_1 unverzweigt auftreten kann, beschäftigen. Wir müssen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 + B\varpi^{m+l} & \varpi \end{pmatrix}$ in der Form $B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^t & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0(\varpi^{k+m+l})$ für $t \geq 0$ schreiben. Mit $A = (1 + B\varpi^{m+l})$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \varpi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi & A^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \varpi - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich erhalten wir für $k = 0$:

$$\mathcal{T}_{k+m+l}(f_i) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} \sum_{B \bmod (\varpi)} V\mu_1(\varpi) |q|^{-\frac{1}{2}} \mu_1(A)^{-1} \mu_1 \mu_2(A) = Vq^{\frac{1}{2}} \mu_1(\varpi) & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Falls der Charakter μ_1 unverzweigt und μ_2 verzweigt ist, ergibt sich also:

$$[\mathcal{T}_{k+m+l}]_{\{f_0, \dots, f_l\}} = \text{Vol} \left(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l}) \right) \begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}}a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ q^{\frac{3}{2}}b & 0 & & & \vdots \\ 0 & q^{\frac{3}{2}}b & 0 & \dots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & q^{\frac{3}{2}}b & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \dots & 0 & q^{\frac{3}{2}}b & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & q^{\frac{3}{2}}b & 0 \end{pmatrix}.$$

Anschaulich wirkt der Operator $\mathcal{T}_{k+m+l}$ auf der Basis $\{f_0, \dots, f_l\}$ folgendermaßen:

$$\begin{array}{ccccccc} \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_{l-2} & f_{l-1} & f_l \end{array}$$

Für die Jordansche Normalform erhalten wir in diesem Fall:

$$\begin{pmatrix} \text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})) q^{\frac{1}{2}}a & & & & \\ & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun können wir das charakteristische Polynom $p(x)$ des Heckeoperators $\mathcal{T}_{k+m+l}$ auf $V_{\Gamma_1((\varpi^{k+m+l}))}$, definiert als die charakteristische Funktion von $\Gamma_1((\varpi^{k+m+l})) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^{k+m+l}))$, angeben:

Sind μ_1 und μ_2 verzweigte Charaktere, das heißt $k = m = 0$, dann erhalten wir

$$p(x) = x^{l+1}$$

und auf dem unzerlegbaren $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{k+m+l}]$ -Modul $V_{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})}$ wirkt $\mathcal{T}_{k+m+l}$ als nilpotente lineare Abbildung.

Ist μ_1 verzweigt und μ_2 unverzweigt, dann gilt

$$p(x) = \left(x - \text{Vol} \left(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l}) \right) q^{\frac{1}{2}}b \right) x^l.$$

Als $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{k+m+l}]$ -Modul lässt sich $V_{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})}$ als direkte Summe zweier unzerlegbarer Moduln schreiben:

$$V_{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})} = V_{\text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})) q^{\frac{1}{2}}b} \oplus V_0.$$

Dabei ist $V_{\text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})) q^{\frac{1}{2}}b}$ als $\mathbb{C}$ -Vektorraum eindimensional und V_0 l -dimensional.

Auf V_0 wirkt der Heckeoperator $\mathcal{T}_{k+m+l}$ nilpotent.

Für μ_1 unverzweigt und μ_2 verzweigt lautet das dazugehörige charakteristische Polynom

$$p(x) = \left(x - \text{Vol} \left(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l}) \right) q^{\frac{1}{2}}a \right) x^l.$$

Der $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{k+m+l}]$ -Modul $V^{\Gamma_0(\varpi^{k+m+l})}$ ist die direkte Summe zweier Moduln:

$$V^{\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})} = V_{\text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l}))q^{\frac{1}{2}a}} \oplus V_0.$$

Dabei ist $V_{\text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l}))q^{\frac{1}{2}a}}$ eindimensional und V_0 l -dimensional. Der Heckeoperator $\mathcal{T}_{k+m+l}$ wirkt auf dem unzerlegbaren Modul V_0 nilpotent.

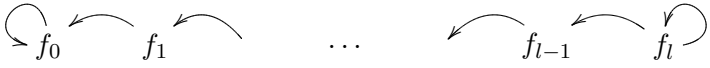
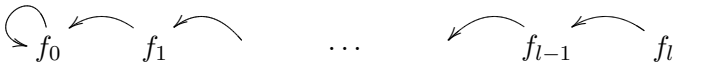
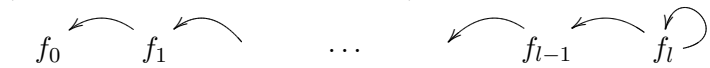
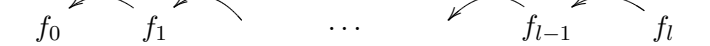
Für den Fall, wo μ_1 und μ_2 beide unverzweigt sind, verweisen wir auf Abschnitt 4.2, siehe auch das Ende des vorigen Abschnitts.

4.5 Übersicht über die Ergebnisse dieses Kapitels

Satz 4.3. Seien μ_1 und μ_2 Charaktere von $\mathcal{F}^*$, sodass weder $\mu_1\mu_2^{-1} = |\cdot|$ noch $\mu_1\mu_2^{-1} = |\cdot|^{-1}$ gilt. Für den Heckeoperator, definiert als die charakteristische Funktion von

$$\Gamma_1((\varpi^t)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^t)),$$

erhalten wir:

	charakteristisches Polynom des Heckeoperators und Skizze seiner Wirkung auf der Basis $\{f_0, \dots, f_l\}$
μ_1, μ_2 unverzweigt	$\left(x - \text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}} \mu_1(\varpi)\right) \left(x - \text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}} \mu_2(\varpi)\right) x^{l-1}$ 
μ_1 unverzweigt, μ_2 verzweigt	$\left(x - \text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})) q^{\frac{1}{2}} \mu_2(\varpi)\right) x^l$ 
μ_1 verzweigt, μ_2 unverzweigt	$\left(x - \text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})) q^{\frac{1}{2}} \mu_1(\varpi)\right) x^l$ 
μ_1, μ_2 verzweigt	x^{l+1} 

Betrachte den Heckeoperator, definiert als die charakteristische Funktion von

$$\Gamma_1((\varpi^t)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^t)),$$

dann gilt:

	<i>charakteristisches Polynom des Heckeoperators und Skizze seiner Wirkung auf der Basis $\{f_0, \dots, f_l\}$</i>
μ_1, μ_2 <i>unverzweigt</i>	$\left(x - \text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}} \mu_1(\varpi)\right) \left(x - \text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}} \mu_2(\varpi)\right) x^{l-1}$
μ_1 <i>unverzweigt</i> , μ_2 <i>verzweigt</i>	$\left(x - \text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})) q^{\frac{1}{2}} \mu_1(\varpi)\right) x^l$
μ_1 <i>verzweigt</i> , μ_2 <i>unverzweigt</i>	$\left(x - \text{Vol}(\Gamma_1(\varpi^{k+m+l})) q^{\frac{1}{2}} \mu_2(\varpi)\right) x^l$
μ_1, μ_2 <i>verzweigt</i>	x^{l+1}

5 Charakteristische Polynome von Heckeoperatoren auf invarianten Teilräumen der Steinberg Darstellungen

5.1 Adaption der Ergebnisse des letzten Kapitels an die Steinberg Darstellungen

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, die Ergebnisse des letzten Kapitels für Darstellungen in der Hauptserie nun auch für Steinberg Darstellungen zu formulieren und zu beweisen. In anderen Worten, wir möchten das charakteristische Polynom der linearen Abbildung auf $V^{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})}$ definiert durch einen Heckeoperator berechnen, wobei V eine Steinberg Darstellung ist.

Im Beweis von Satz 3.3 war es, nachdem wir den Satz zuerst für Darstellungen in der Hauptserie bewiesen hatten, recht einfach die Aussagen auch für Steinberg Darstellungen zu erhalten. Ähnlich nützlich wird uns das vorige Kapitel, das sich mit Heckeoperatoren für Darstellungen in der Hauptserie beschäftigte, sein, wenn wir die analoge Situation für Steinberg Darstellungen betrachten.

Seien μ_1, μ_2 und μ Charaktere von $\mathcal{F}^*$ mit $\mu_1\mu_2^{-1} = |\cdot|^{-1}$, $\mu_1 = \mu|\cdot|^{-\frac{1}{2}}$ und $\mu_2 = \mu|\cdot|^{\frac{1}{2}}$. Im Beweis von Satz 3.3 hatten wir die Realisierung der speziellen Darstellung als invarianten irreduziblen Unterraum der Kodimension eins von $\mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)$ verwendet. Wie früher schon bemerkt, ist dieser isomorph zu der Quotientendarstellung $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)/\langle\mu(\det(\cdot))\rangle$, mit der wir hier arbeiten werden. Im folgenden bezeichnen wir $\mathcal{B}(\mu_1, \mu_2)$ mit W und $\mathcal{B}(\mu_2, \mu_1)$ mit V .

Wir betrachten zuerst den Fall, dass μ verzweigt ist. Die Abbildungen $f_0, \dots, f_l$, die wir in (42) definiert haben, bilden eine Basis von $W^{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})}$, wie wir in Korollar 3.6 bemerkt haben. Nun sind wir aber an einer Basis des Raumes $(W/\langle\mu(\det(\cdot))\rangle)^{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})}$ interessiert. Dass die Bilder

$$\bar{f}_0 = f_0 + \langle\mu(\det(\cdot))\rangle, \dots, \bar{f}_l = f_l + \langle\mu(\det(\cdot))\rangle$$

in der Quotientendarstellung immer noch invariant unter $\Gamma_1(\varpi^{2k+l})$ sind, ist klar. Wir wissen auch schon aus Satz 3.3, dass der Teilraum der Quotientendarstellung der unter $\Gamma_1(\varpi^{2k+l})$ invarianten Dimension $l+1$ hat. Somit genügt es zu zeigen, dass die $\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_l$ linear unabhängig sind um zu wissen, dass sie eine Basis von $(W/\langle\mu(\det(\cdot))\rangle)^{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})}$ bilden. Die Eigenschaft linear unabhängig zu sein, das heißt für $\lambda_0, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lambda_0 f_0 + \langle\mu(\det(\cdot))\rangle + \dots + \lambda_l f_l + \langle\mu(\det(\cdot))\rangle = \langle\mu(\det(\cdot))\rangle \implies \lambda_0 = \dots = \lambda_l = 0$$

ist äquivalent zu

$$(\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_l f_l) \in \langle\mu(\det(\cdot))\rangle \implies \lambda_0 = \dots = \lambda_l = 0. \quad (50)$$

Wenn die obige Linearkombination der $f_0, \dots, f_l$ in $\langle\mu(\det(\cdot))\rangle$ liegt, kann sie nur das Nullelement sein, denn die Linearkombination ist invariant unter $\Gamma_1(\varpi^{2k+l})$ und $\mu(\det(\cdot))$ nicht, da wir μ als verzweigt vorausgesetzt haben. Die Behauptung folgt nun aus der Linearunabhängigkeit der $f_0, \dots, f_l$ in W .

Jetzt, wo wir uns versichert haben, dass die $\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_l$ eine Basis von $(W/\langle \mu(\det(\cdot)) \rangle)^{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})}$ bilden, können wir die Überlegungen aus Abschnitt 4.3 und Abschnitt 4.4 direkt übernehmen. Betrachten wir zuerst den Heckeoperator, den wir in Abschnitt 4.3 untersucht haben, also die charakteristische Funktion von $\Gamma_1((\varpi^{2k+l})) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^{2k+l}))$. Die Matrixdarstellung der durch diesen Operator auf $(W/\langle \mu(\det(\cdot)) \rangle)^{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})}$ definierten linearen Abbildung sieht bezüglich der Basis $\{\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_l\}$ so aus:

$$\text{Vol} \left(\Gamma_1(\varpi^{2k+l}) \right) \begin{pmatrix} 0 & q^{\frac{1}{2}}a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a & 0 & \dots & \vdots \\ & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & q^{\frac{1}{2}}a & 0 \\ & & & \dots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a \\ \vdots & & & & \dots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a \\ 0 & \dots & & & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei sei wieder $a := \mu_1(\varpi)$ und $b := \mu_2(\varpi)$. Die dazugehörige Jordansche Normalform besteht aus einem einzigen Jordan-Block zum Eigenwert 0, vergleiche (47).

In Abschnitt 4.4 hatten wir die charakteristische Funktion von $\Gamma_1((\varpi^{2k+l})) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^{2k+l}))$ als Heckeoperator behandelt. Für diesen schaut die dazugehörige Matrixdarstellung hier folgendermaßen aus:

$$\text{Vol} \left(\Gamma_1(\varpi^{2k+l}) \right) \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ q^{\frac{3}{2}}b & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & q^{\frac{3}{2}}b & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & q^{\frac{3}{2}}b & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & q^{\frac{3}{2}}b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & q^{\frac{3}{2}}b & 0 \end{pmatrix}.$$

Ihre Jordansche Normalform besteht wieder aus einem einzigen Jordan-Block zum Eigenwert 0.

Unabhängig davon, ob wir die charakteristische Funktion von

$$\Gamma_1((\varpi^{2k+l})) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^{2k+l}))$$

oder von

$$\Gamma_1((\varpi^{2k+l})) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^{2k+l}))$$

als Heckeoperator $\mathcal{T}_{2k+l}$ betrachten, erhalten wir für μ verzweigt das charakteristische Polynom

$$p(x) = x^l.$$

Auf dem unzerlegbaren $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{2k+l}]$ -Modul $(W/\langle\mu(\det(\cdot))\rangle)^{\Gamma_1(\varpi^{2k+l})}$ wirkt $\mathcal{T}_{2k+l}$ als nilpotente lineare Abbildung.

Sei nun μ unverzweigt. Im folgenden macht es keinen großen Unterschied, ob wir die Elemente in $(W/\langle\mu(\det(\cdot))\rangle)$ betrachten, die invariant unter $\Gamma_1(\cdot)$ sind, oder die, die invariant unter $\Gamma_0(\cdot)$ sind, da der zentrale Charakter trivial ist, vergleiche Bemerkung 3.5. Wieder suchen wir zunächst eine Basis des Raumes $(W/\langle\mu(\det(\cdot))\rangle)^{\Gamma_0(\varpi^l)}$. Aus dem Beweis von Satz 3.3 wissen wir, dass dieser Dimension l hat, während $W^{\Gamma_0(\varpi^l)}$ $l+1$ -dimensional ist. Die Elemente $f_0, \dots, f_l$ aus (34) bilden eine Basis von $W^{\Gamma_0(\varpi^l)}$, wie wir in Korollar 3.6 bemerkt haben. Hier vereinfachen sie zu:

$$f_i \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} k \right) = \mu(ac) \lambda_i(k), \quad (51)$$

wobei wie früher $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in B(\mathcal{F})$, $k \in GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$, $0 \leq i \leq l$ und λ_i die charakteristische Funktion von $B(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^i & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l)) \subseteq GL(2, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$. Wie im verzweigten Fall ist klar, dass die Bilder dieser Abbildungen, also $\bar{f}_0 = f_0 + \langle\mu(\det(\cdot))\rangle, \dots, \bar{f}_l = f_l + \langle\mu(\det(\cdot))\rangle$, in $(W/\langle\mu(\det(\cdot))\rangle)^{\Gamma_0(\varpi^l)}$ liegen. Außerdem bildet jede l -elementige Teilmenge von $\{\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_l\}$ schon eine Basis dieses Raumes, da sie die Bedingung (50) erfüllt, also linear unabhängig ist. Das sieht man leicht daraus, dass die f_i disjunkten Träger haben und

$$f_0 + \dots + f_l = \mu(\det(\cdot))$$

gilt (vergleiche (51)).

Nun sind wir so weit, dass wir die Matrixdarstellungen, die wir in Abschnitt 4.1 und in Abschnitt 4.2 für unverzweigte Darstellungen in der Hauptserie erhalten haben, an die Steinberg Darstellung anpassen können. Für den Heckeoperator definiert als die charakteristische Funktion von $\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))$ ist es günstig die Matrixdarstellung auf $(W/\langle\mu(\det(\cdot))\rangle)^{\Gamma_0(\varpi^l)}$ bezüglich der Basis $\{\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_{l-1}\}$ zu berechnen. Diese hat folgende Form:

$$\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) \begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}}b & (q-1)q^{-\frac{1}{2}}a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q^{\frac{1}{2}}a & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a & 0 & \dots \\ & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \\ & & & \vdots & \ddots & q^{\frac{1}{2}}a & 0 \\ \vdots & & & & \dots & 0 & q^{\frac{1}{2}}a \\ 0 & \dots & & & & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } l > 1$$

und

$$\text{Vol}(\Gamma_0((\varpi))) q^{\frac{1}{2}}b \quad \text{im Fall } l = 1.$$

Anschaulich wirkt der Heckeoperator auf der Basis $\{\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_{l-1}\}$ so:

$$\begin{array}{ccccccc} \curvearrowright \bar{f}_0 & \leftarrow \bar{f}_1 & \leftarrow \bar{f}_2 & \dots & \leftarrow \bar{f}_{l-2} & \leftarrow \bar{f}_{l-1} & . \end{array} \quad (52)$$

Jetzt möchten wir wie in Abschnitt 4.2 die charakteristische Funktion von $\Gamma_0((\varpi^l)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_0((\varpi^l))$ als Heckeoperator betrachten. Bezüglich der Basis $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_l\}$ von $(W/\langle \mu(\det(\cdot)) \rangle)^{\Gamma_0(\varpi^l)}$ hat dieser Heckeoperator folgende Matrixdarstellung:

$$\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) \begin{pmatrix} 0 & \dots & & \dots & 0 \\ q^{\frac{3}{2}}b & 0 & \dots & & \vdots \\ 0 & q^{\frac{3}{2}}b & 0 & \dots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & q^{\frac{3}{2}}b & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \dots & 0 & q^{\frac{3}{2}}b & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & (q-1)q^{\frac{1}{2}}b & q^{\frac{1}{2}}b \end{pmatrix} \quad \text{für } l > 1.$$

Auf dem eindimensionalen Raum $(W/\langle \mu(\det(\cdot)) \rangle)^{\Gamma_0(\varpi^1)}$ wirkt er durch den Skalar $\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi)) q^{\frac{1}{2}}b$. Wir erhalten folgendes Bild:

$$\bar{f}_1 \xrightarrow{\quad} \bar{f}_2 \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} \bar{f}_{l-2} \xrightarrow{\quad} \bar{f}_{l-1} \xrightarrow{\quad} \bar{f}_l \xrightarrow{\quad} \bar{f}_l.$$

Durch Umnummern der Basis könnten wir das gleiche Ergebnis wie in (52) erhalten. Die Jordanschen Normalformen der durch die zwei betrachteten Heckeoperatoren definierten linearen Abbildungen stimmen überein, wir erhalten in beiden Fällen:

$$\begin{pmatrix} \text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}b & & & & \\ & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Unabhängig davon, ob wir die charakteristische Funktion von

$$\Gamma_1((\varpi^l)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^l))$$

oder von

$$\Gamma_1((\varpi^l)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^l))$$

als Heckeoperator $\mathcal{T}_l$ betrachten, erhalten wir für μ unverzweigt das charakteristische Polynom:

$$p(x) = (x - \text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}} \mu_2(\varpi)) x^{l-1}.$$

Der $\mathbb{C}[\mathcal{T}_l]$ -Modul $(W/\langle \mu(\det(\cdot)) \rangle)^{\Gamma_0(\varpi^l)}$ lässt sich als direkte Summe zweier unzerlegbarer Moduln schreiben:

$$(W/\langle \mu(\det(\cdot)) \rangle)^{\Gamma_0(\varpi^l)} = V_{\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}}b} \oplus V_0.$$

Als $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist $V_{\text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l))q^{\frac{1}{2}b}}$ ein- und V_0 $l-1$ -dimensional. Auf V_0 wirkt $\mathcal{T}_l$ nilpotent.

5.2 Übersicht über die Ergebnisse des vorigen Abschnitts

Satz 5.1. Seien μ_1, μ_2 und μ Charaktere von $\mathcal{F}^*$ mit $\mu_1\mu_2^{-1} = |\cdot|^{-1}$, $\mu_1 = \mu|\cdot|^{-\frac{1}{2}}$ und $\mu_2 = \mu|\cdot|^{\frac{1}{2}}$. Für den Heckeoperator, definiert als die charakteristische Funktion von

$$\Gamma_1((\varpi^t)) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^t)),$$

erhalten wir:

	charakteristisches Polynom des Heckeoperators und Skizze seiner Wirkung auf einer Basis
μ unverzweigt	$(x - \text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}} \mu_2(\varpi)) x^{l-1}$
μ verzweigt	x^l

Betrachte den Heckeoperator, definiert als die charakteristische Funktion von

$$\Gamma_1((\varpi^t)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma_1((\varpi^t)),$$

dann gilt:

	charakteristisches Polynom des Heckeoperators und Skizze seiner Wirkung auf einer Basis
μ unverzweigt	$(x - \text{Vol}(\Gamma_0(\varpi^l)) q^{\frac{1}{2}} \mu_2(\varpi)) x^{l-1}$
μ verzweigt	x^l

Literatur

- [1] Daniel Bump. *Automorphic Forms and Representations*. Cambridge University Press, 1997.
- [2] William Casselman. Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups.
- [3] William Casselman. On Some Results of Atkin and Lehner. *Mathematische Annalen*, 201:301–314, 1973.
- [4] Robert F. Coleman. Classical and Overconvergent Modular Forms of Higher Level. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 9:395–403, 1997.
- [5] Robert F. Coleman. P-adic Banach Spaces and Families of Modular Forms. *Inventiones Mathematicae*, 127:417–479, 1997.
- [6] Stephen S. Gelbart. *Automorphic Forms on Adele Groups*. Princeton University Press, 1975.
- [7] Larry Joel Goldstein. *Analytic Number Theory*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- [8] F.Gouvêa und B. Mazur. Families of Modular Eigenforms. *Mathematics of Computation*, 58:793–806, 1992.
- [9] Colin J. Bushnell und Guy Henniart. *The Local Langlands Conjecture for $GL(2)$* . Springer, 2006.
- [10] Dinakar Ramakrishnan und Robert J. Valenza. *Fourier Analysis on Number Fields*. Springer, 1999.
- [11] Herve Jacquet und Robert P. Langlands. *Automorphic forms on $GL(2)$* . Springer, 1970.
- [12] Pierre Deligne und Willem Kuyk. *Modular Functions of One Variable II*. Springer, 1973.
- [13] Daqing Wan. Dimension Variation of Classical and p-adic Modular Forms. *Inventiones Mathematicae*, 133:449–463, 1998.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, am 5. 5. 2009

Lebenslauf

Persönliche Daten

Angelika Kroner
Würthgasse 1/12
1190 Wien

Tel.: 01-3679056 oder 0680-3056757
E-Mail: angelika.kroner@gmx.at

Geb. am 19. 2. 1986
ledig

Schulbildung

1992–1996	Volksschule Pfarrkirchen
1996–2004	Realgymnasium Kirchdorf
18. Juni 2004	Matura
Oktober 2004	Beginn des Mathematikstudiums in Wien
26. Sept. 2006	Abschluss des ersten Studienabschnitts

Bisherige Arbeitsverhältnisse

Sommer 2003	dreiwöchige Ferialarbeit in einem Seniorenheim in Bad Hall (Pflege)
Sommer 2005	sechswöchige Ferialarbeit im Schichtbetrieb der Firma Agru (Verpackung)
Sommer 2006	Betreuung in einem Kinderferienlager (eine Woche)
Sommer 2007	zweimonatiges Praktikum am Mathematikinstitut in Dushanbe, Tadjikistan
2007/2008	einjährige Anstellung als Tutorin für das Lineare Algebra-Repetitorium

Sonstige Kenntnisse

Grundkenntnisse in Mathematica, C, LaTeX und Microsoft Office
Englisch fließend, Französisch Grundkenntnisse

Hobbys	Klavier spielen, Kino, laufen
---------------	-------------------------------

Pfarrkirchen, 5. Mai 2009