



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Die Würfel sind gefallen“

Eine stochastische Betrachtung ausgewählter Würfelspiele.

verfasst von / submitted by

Marlene Trettenhahn

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 299

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UniStG
UF Mathematik UniStG
UF Psychologie und Philosophie UniStG

Betreut von / Supervisor:

Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Abstract in Deutsch

Da die Verwendung praxisbezogener Spiele im Mathematikunterricht diesen spannender, interessanter und interaktiver werden lassen kann, beschäftigt sich diese Diplomarbeit mit der mathematischen insbesondere stochastischen Betrachtung von Würfeln und Würfelspielen.

Zu Beginn wird die Entstehung des Würfels sowie dessen Entwicklung vom Astragalos zum modernen Spielwürfel als historisches Phänomen beschrieben. Die mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die zum Nachvollziehen der Berechnungen notwendig sind, werden ebenso dargelegt. Im Anschluss werden verschiedene Arten von Würfeln vorgestellt. Für den Stochastikunterricht besonders interessant sind dabei die teilweise symmetrischen Würfel, zu denen auch der Quaderwürfel zählt. Den Kern der Arbeit bilden ausgewählte Würfelspiele, die bezüglich einer oder mehrerer stochastischer Fragestellungen analysiert werden. Neben Spielen mit klassischen Spielwürfeln kommen auch Quaderwürfel und Astragaloι zum Einsatz. Jedes Spiel wird anschließend einer didaktischen Reflexion unterzogen, die die Einsetzbarkeit desselben im Stochastikunterricht einer allgemeinbildenden höheren Schule aufzeigt.

Abstract in Englisch

The usage of games in maths class may have positive effects like an increasing motivation of the students. Because of that, this diploma thesis considers the stochastic aspects of dice and dice games.

At the beginning the historical development from the Astragalos to the modern dice is described. In order to follow the calculations in this thesis, the basics of the probability calculations are also described. Different types of dice, like the cuboid shaped dice, are presented. The main part of this thesis is about stochastic questions concerning a few selected dice games. A didactic reflection of every mentioned game is made, that should show possibilities of the usage in maths classes in an AHS.

Danksagung

Zu Beginn möchte ich meinem Betreuer ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith für die Betreuung meiner Diplomarbeit danken. Durch seine prägnanten und schnellen Antworten auf meine Fragen hat er mich sehr unterstützt.

Besonderer Dank gilt meinen MathematiklehrerInnen aus dem Gymnasium. Frau Mag. Gabriele Ehmoser-Stefan legte mir schon zu Beginn meiner Schulzeit die Mathematik nahe und erweckte meine Begeisterung für dieses Fach. Mag. Claudia Reinsperger begleitete mich die darauffolgenden sechs Jahre und motivierte mich, mich intensiv mit Mathematik zu beschäftigen. Mag. Gerhard Egger stellte mich im Wahlpflichtfach vor schwierigere mathematische Probleme, die meinen Forschungsdrang nährten.

Außerdem gilt mein Dank auch meinen Eltern, die mir das Studium ermöglicht haben. Sie haben mir während meiner Schulzeit und universitären Ausbildung den nötigen Rückhalt gegeben. Weiters danke ich auch meinen Brüdern Paul und Konrad sowie meiner gesamten Familie.

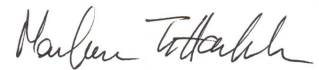
Ebenso danke ich meinem Freund Lukas, der mir stets eine große Hilfe war. Ohne seine geduldige Unterstützung hätte ich die Arbeit nicht beenden können.

Zuletzt möchte ich all meinen Freunden sowie Studienkollegen danken, die ich während meines Studiums kennengelernt habe. Viele schöne Erinnerungen meiner Studienzeit habe ich ihnen zu verdanken.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Karnabrunn, am 18. 4. 2017



Marlene Trettenhahn

Vorwort

Mit den Mathematikstunden in der Schule verbinden viele Menschen einen eher langweiligen Unterricht, der weder ansprechend noch verständlich ist. Die Themenbereiche werden oftmals als zu abstrakt empfunden und zu wenig anwendungsorientiert betrachtet. Dieses hartnäckige Vorurteil ist durch Generationen hinweg in unserer Gesellschaft verankert.

Im Sommersemester 2016 besuchte ich die Lehrveranstaltung „KO Probleme im Mathematikunterricht“, die von Univ.-Prof. Mag. Dr. Hans Humenberger geleitet wurde. Es wurden Mathematiker von unterschiedlichen Universitäten eingeladen, die Forschungsprojekte oder Ideen für den Mathematikunterricht vorstellten. Dabei hat mich ein Themenbereich besonders gefesselt. Der Vortrag „Mathematik: spannend - abwechslungsreich - nachvollziehbar, Förderung des Interesses bei Schüler/innen“ wurde von Mag. Sandra Reichenberger gehalten.

Auf der Suche nach einem Diplomarbeitsthema hat mich die zuvor erwähnte Lehrveranstaltung und insbesondere der Vortrag von Mag. Sandra Reichenberger nachhaltig beeinflusst. Mit dieser Arbeit will ich mich auf die Suche nach spannenden und abwechslungsreichen Spielen machen, die den Stochastikunterricht interessanter, interaktiver und kreativer werden lassen. Ich möchte gegen das Vorurteil eines langweiligen Mathematikunterrichts ankämpfen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	3
2	Allgemeines über das Würfelspiel.....	5
3	Historischer Hintergrund	7
3.1	Der Astragalos	7
3.2	Das Würfelspiel in der Antike	8
3.3	Das Würfelspiel im Mittelalter	10
3.4	Das heutige Würfelspiel	11
4	Wahrscheinlichkeitsrechnung im Lehrplan	13
5	Mathematische Grundlagen	19
5.1	Begriffe und Definitionen.....	19
5.1.1	Zufallsexperiment.....	19
5.1.2	Ergebnis.....	20
5.1.3	Ergebnisraum	20
5.1.4	Ereignis.....	21
5.1.5	Ereignisraum	24
5.1.6	Wahrscheinlichkeit.....	25
5.2	Begründung der Wahrscheinlichkeit	27
5.2.1	Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil	27
5.2.2	Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit	28
5.2.3	Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen	29
5.3	Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	30
5.3.1	Bedingte Wahrscheinlichkeit	30
5.3.2	Unabhängige Ereignisse	31
5.3.3	Baumdiagramm	33

5.3.4	Multiplikationsregel (1. Pfadregel)	34
5.3.5	Additionsregel (2. Pfadregel)	35
5.3.6	Gegenereignis	36
5.3.7	Satz von Bayes	37
5.4	Erwartungswert	39
5.5	Permutation	40
6	Verschiedene Arten von Würfeln	43
6.1	Symmetrische Würfel	43
6.1.1	Spielwürfel	43
6.1.2	Pokerwürfel	45
6.2	Teilweise symmetrische Würfel	46
6.2.1	Quaderwürfel	47
6.2.2	U-Würfel	47
6.3	Andere spezielle Würfel	48
6.3.1	Gezinkte Würfel	48
6.3.2	Astragaloi	49
7	Ausgewählte Würfelspiele	51
7.1	Mit einem Spielwürfel	51
7.1.1	Wahrscheinlichkeitsrennen	51
7.1.2	Zweiundzwanzig	58
7.1.3	Mensch, ärgere dich nicht	61
7.2	Mit zwei Spielwürfeln	66
7.2.1	Warten auf die Doppelsechs	66
7.2.2	Entenrennen	71
7.3	Mit teilweise symmetrischen Würfeln	76
7.3.1	Wahrscheinlichkeitsraten	76
7.3.2	Würfelraten	86
7.4	Mit Astragaloi	91

7.4.1	Venus.....	91
7.4.2	Pleistobolinda (Meistwurfspiel).....	94
8	Didaktisches Resümee	99
8.1	Vorteile von spielerischen Unterrichtssequenzen.....	99
8.2	Verankerung im Lehrplan.....	101
8.3	Reflexion der ausgewählten Würfelspiele.....	102
9	Anhang.....	105
10	Literaturverzeichnis.....	109
11	Abbildungsverzeichnis	111
12	Tabellenverzeichnis.....	113
13	Abkürzungsverzeichnis	115

1 Einleitung

Im Stochastikunterricht wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff gerne mit Münzen oder anhand von Glücksspielen wie Lotto demonstriert. Begibt man sich aber auf die Wurzeln des Glücksspiels erkennt man schnell, dass Würfel eine herausragende Rolle dabei spielen. Ich bin der Meinung, dass die Möglichkeiten für den Schulunterricht, die sich anhand der Berechnungen von Würfelspielen ergeben, noch nicht ausgeschöpft sind. Insbesondere die Rolle von unregelmäßigen Würfeln ist bisher fast ununtersucht geblieben. Daher möchte ich in dieser Diplomarbeit verschiedene Spiele mit verschiedenen Würfeltypen vorstellen, die man in den Unterricht integrieren kann. Ziel der Arbeit ist es Vorschläge für einen lebhaften und interessanten Stochastikunterricht aufzubereiten.

Den theoretischen Teil meiner Diplomarbeit möchte ich mit den historischen Wurzeln des Würfelspiels einleiten. Dabei werden Informationen vom antiken bis zum Würfelspiel in unserer heutigen Gesellschaft bereitgestellt. Anschließend werde ich auf die stochastischen Inhalte des Lehrplans für die allgemeinbildende höhere Schule eingehen.

Im nächsten Kapitel (**Kapitel 5**) werden die mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgezeigt. Diese bilden die Voraussetzung für die folgenden Berechnungen der Diplomarbeit. Weiters findet der Lesende eine Analyse verschiedener Würfeltypen in ihren Eigenschaften und Eigenheiten vor.

Den Kern meiner Arbeit bildet die Darstellung ausgewählter Würfelspiele. Diese werden einer stochastischen Betrachtung unterzogen und bezüglich interessanter mathematischer Fragestellungen berechnet. Im Anschluss an jedes Würfelspiel folgt eine didaktische Reflexion, die die Spiele in ihrer Einsetzbarkeit im Stochastikunterricht einer allgemeinbildenden höheren Schule analysiert.

Das letzte Kapitel bildet ein didaktisches Resümee, das die Vorteile spielerischen Lernens in der Schule aufzeigt.

2 Allgemeines über das Würfelspiel

Der Würfel ist ein Zufallsgerät, das vor allem in Gesellschaftsspielen Anwendung findet. Eine intuitive Regel besagt, dass immer diejenige Seite des Würfels geworfen wurde, die von oben sichtbar ist. Es handelt sich also um die der verdeckten Seite gegenüberliegende Seitenfläche.

Im Allgemeinen gilt, dass ein Würfel nicht auf einer Ecke oder einer Kante zu stehen kommt. Dies kann aber passieren, wenn auf einem weichen Untergrund wie zum Beispiel einem Teppich gewürfelt wird. Man kann in einem solchen Fall zu keinem eindeutigen Ergebnis kommen. Daher ist bei einem Würfelwurf immer dafür zu sorgen, dass dieser auf einem harten ebenen Untergrund geworfen wird.

Genau diesem Zweck dient ein spezielles Würfelbrett. Dieses besitzt zumeist eine runde oder achteckige Form aus Holz oder Leder. Der Boden ist mit grünem, manchmal auch mit rotem Filz ausgelegt. Das Würfelbrett soll die Würfel vor dem Wegrollen hindern und das Würfelgeräusch abdämpfen.



Abbildung 1: Würfelbrett

Quelle: https://images-na.ssl-images-amazon.com/images/I/81LZ0Xs5KxL._SL1500_.jpg, [27.3.2017]

Ein weiteres Hilfsmittel ist der Würfelbecher (**Abbildung 2**). Dieser ist aus Leder oder einem Kunststoff angefertigt und hat ein Fassungsvermögen von etwa einem Achtelliter¹. Der Würfelbecher stellt sicher, dass man nicht versucht durch geschicktes Würfeln aus der Hand die gewünschte Augenzahl zu erhalten. Gezinkte Würfel kann er aber nicht unschädlich machen. Bei der Verwendung eines Würfelbechers werden alle Würfel in den Becher gelegt. Dann werden die Würfel im Becher geschüttelt und anschließend auf das Würfelbrett geleert,

¹ Beck: Poker mit Würfeln, 10.

sodass sie noch etwas weiter kollern.² Bis zum endgültigen Stillstand der Würfel dürfen diese nicht mit der Hand berührt werden.



Abbildung 2: Würfelbecher

Quelle: https://images-na.ssl-images-amazon.com/images/I/51Ag-S1Rc2L._SY355_.jpg, [27.3.2017]

Zum professionellen Glücksspiel in Casinos werden Präzisionswürfel verwendet. Diese sind dem *idealen Würfel* (vgl. einleitende Erklärung in **Kapitel 7**), bei dem alle Seiten gleiche Wahrscheinlichkeit aufweisen, nachempfunden. Präzisionswürfel haben keine rund geschliffenen Kanten, sie sind also scharfkantig. Weiters sind sie transparent, um ein eingelassenes Gewicht, das ein Wurfergebnis beeinflussen könnte, sofort erkennen zu können. Um den Schwerpunkt des Würfels keinesfalls zu verändern, werden die Augenpunkte nicht in den Würfel eingelassen. Ansonsten wäre die Seite mit dem Sechser eindeutig leichter als die mit dem Einser. Stattdessen werden die Augen mit einem Material ausgefüllt, das dem restlichen Würfelmaterial in Dichte und Masse entspricht.³



Abbildung 3: Präzisionswürfel

Quelle: http://files.rakuten-static.de/778605d724312e07ff1c8702d27221f4/thumbs/160/14/129826731_545348.jpg, [27.3.2017]

² Beck: Poker mit Würfel, 11.

³ Petersen: Casino-Würfel, http://wuerfel.sammlung-online.de/wuerfelarten/casino_wuerfel.html, [27.3.2017].

3 Historischer Hintergrund

3.1 Der Astragalos

Das wohl älteste Zufallsgerät (30.000 v. Chr.), das zugleich mit dem modernen Würfel vergleichbar ist, ist der *Astragalos* (griech.), von den Römern auch *Talus* genannt.⁴ Dabei handelt es sich um die knöchernen Sprungbeine von Paarhufern wie zum Beispiel Schafen und Ziegen. Das ist der kleine Knochen, der die Verbindung zwischen dem Fuß und dem Schien- und Wadenbein herstellt.⁵

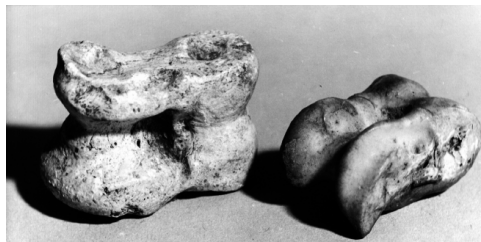


Abbildung 4: Astragaloi

Quelle: Haller: Berühmte Aufgaben der Stochastik, 1.

Dass wir heute über die Astragaloi wissen liegt daran, dass sie gerne als Grabbeigaben genutzt wurden. So fand man die Astragaloi vereinzelt in prähistorischen Gräbern (30.000 - 20.000 v. Chr.) und vermehrt ab dem 3. Jahrtausend vor Christus. Auch die Verbreitung derselben ist nicht zu unterschätzen. So fand man sie kulturübergreifend in Mittel- und Südosteuropa, sowie in Vorderasien und China. In Süditalien wurden manchmal sogar mehr als tausend Stück in einem Grab auf einmal gefunden. Auch bei den Griechen waren die Knöchelchen sehr beliebt. Neben echten Astragaloi wurden auch Nachbildungen aus Ton, Stein, Elfenbein oder Edelmetall entdeckt.⁶

Die Verwendung der Astragaloi diente zum einen dem Spiel und zum anderen der Vorhersage bei Orakeln. Die Regeln zum Spiel mit den Astragaloi sind nur lückenhaft überliefert, da sie nicht niedergeschrieben wurden. Mit der Einsetzung der Christianisierung ging auch das Wissen über die Spielregeln verloren und die Verwendung der Astragaloi stark zurück.

⁴ Beck: Poker mit Würfel, 5.

⁵ Haller: Berühmte Aufgaben der Stochastik, 1.

⁶ Haller: Berühmte Aufgaben der Stochastik, 1.

Heute gibt es Nachbildungen der Sprungbeine auch aus Plastik zu kaufen. Diese werden als Kinderspielzeug angepriesen. Auch in bestimmten Gebieten Afrikas kommen die Astragaloi noch heute zum Einsatz.⁷

Eine genauere Analyse der Astragaloi findet man in **Kapitel 6.3.2**. Zwei Spiele mit den Knöchelchen werden in **Kapitel 7.4** beschrieben.

3.2 Das Würfelspiel in der Antike

Die ältesten Würfelfunde stammen aus den Gebieten Mesopotamien und Ägypten des 3. und 2. Jahrtausends vor Christus.⁸ Es steht allerdings nicht fest, wer die Würfel erfunden hat. Unterschiedliche Quellen nennen verschiedene Ursprungsgeschichten. Besonders oft wird jedoch König Palamedes genannt, der mit der Erfindung der Würfel den Achäern an den Küsten Trojas an langen Tagen und Nächten die Langeweile ersparte. Die Kämpfer sollten durch das Würfelspiel von den Strapazen des trojanischen Krieges abgelenkt werden, um Unmut oder einen Aufstand der Männer zu verhindern.⁹

Das Spiel mit Würfeln war in Griechenland, Ägypten und Assyrien ebenso beliebt wie im römischen Reich.¹⁰ Dennoch sind vor allem die Römer für ihre Begeisterung für das Würfelspiel bekannt. Selbst das wohl berühmteste Zitat Caesars (100 - 44 v. Chr.) handelt von Würfeln. *Alea iacta est* – das lateinische Sprichwort bedeutet wörtlich übersetzt „Der Würfel ist geworfen worden“. Geläufiger aber ist die abgeänderte Übersetzung „Die Würfel sind gefallen“. Mit diesem Ausspruch wollte Caesar ausdrücken, dass er mit der Überschreitung des Rubikon im Konflikt mit seinem Gegner Pompeius (106 - 48 v. Chr.) ein Risiko eingegangen ist, aber noch nicht entschieden ist, für wessen Seite sich das Glück entscheidet.¹¹ Die Würfel befinden sich also noch in der Luft – das Ergebnis ist noch nicht erkennbar. Die wörtliche Übersetzung spiegelt den Hintergrund des Sprichworts besser wider.

Als sehr engagierter Würfelspieler verlor so mancher Römer einen großen Teil seines Besitzes. Manche gingen sogar so weit und boten sich selbst als Einsatz an, da sie sonst nichts mehr

⁷ Haller: Berühmte Aufgaben der Stochastik, 2.

⁸ Ineichen: Würfel und Wahrscheinlichkeit, 41.

⁹ Ineichen: Würfel und Wahrscheinlichkeit, 43.

¹⁰ Ineichen: Würfel und Wahrscheinlichkeit, 43.

¹¹ Ineichen: Würfel und Wahrscheinlichkeit, 40.

besaßen. Wenn sie Pech hatten, mussten sie sich dann dem glücklichen Gewinner als Sklave unterwerfen.¹²

Um die Manipulation beim Werfen eines Würfels zu verhindern hat man schon seit der Antike spezielle Geräte verwendet. Zum einen konnte ein Würfelbecher (lat.: *fritillus*) zum Einsatz kommen. Eine exklusivere Lösung ist die Verwendung eines Würfelturms (lat.: *turricula*). Dabei handelt es sich um eine quaderförmige Konstruktion aus Metall oder Holz, in die man die Würfel oben einwerfen kann. Die Würfel springen dann über die Stufen und durch das angebrachte Tor hinaus.¹³



Abbildung 5: Würfelturm (Turricula)

Quelle: http://www.replik-shop.de/images/product_images/popup_images/1122_2.jpg, [27.3.2017]

Antike Würfel wurden in verschiedensten Materialien gefunden. So waren sie aus Stein¹⁴, Ton, Metall, Knochen, manche sogar aus Elfenbein, Kristall oder Gold gefertigt. Besonders verbreitet waren aber die beinernen Würfel, die aus den Röhrenknochen des Mittelfußes von Rindern hergestellt wurden.¹⁵

Verglichen mit den modernen Würfeln stellen die Reliquien teilweise eher schlecht gearbeitete Würfel dar. Während die einen mehr oder weniger exakte Würfelform besitzen, sind die anderen eher Prismen mit quadratischer Grund- und Deckfläche.¹⁶

Charakteristisch für die antiken Würfel ist, dass die Anordnung der Werte auf den einzelnen Seiten des Würfels der heutigen Anordnung entspricht.¹⁷ Außerdem ist auch die Darstellung

¹² Beck: Poker mit Würfel, 6.

¹³ Ineichen: Würfel und Wahrscheinlichkeit, 45.

¹⁴ Beck: Poker mit Würfel, 6.

¹⁵ Ineichen: Würfel und Wahrscheinlichkeit, 50.

¹⁶ Ineichen: Würfel und Wahrscheinlichkeit, 50.

¹⁷ Ineichen: Würfel und Wahrscheinlichkeit, 51.

der einzelnen Werte mit der heutigen Darstellung vergleichbar. So befand sich das Einerauge im Mittelpunkt der Seitenfläche, die Zweier- und Dreieraugen in einer Diagonalen, vier Augen stehen in Quadratform zueinander, bei fünf Augen wird ein Punkt in der Mitte des Quadrats gesetzt und bei sechs Punkten werden die Punkte in zwei Reihen zu je drei Punkten dargestellt.¹⁸



Abbildung 6: antike Würfel

Quelle: <http://www.kunst-und-spiele.de/imgs/rom-wurfel.jpg>, [27.3.2017]

3.3 Das Würfelspiel im Mittelalter

Das Glücksspiel mit Würfeln zeichnete sich auch im Mittelalter durch große Beliebtheit aus. Dabei war das Spiel nicht nur auf die unteren Gesellschaftsschichten beschränkt. Neben Landsknechten und Personen mit handwerklichem Beruf hatten auch Kleriker und Juden Freude am Würfelspiel.¹⁹

Die städtischen Verwaltungseinrichtungen standen dem Spielrausche der Untertanen jedoch kritisch gegenüber. Nicht selten endete ein friedlicher Spielabend in einer Schlägerei oder ein sonst anständiger Bürger verlor sein gesamtes Hab und Gut. Noch problematischer war das Auftreten professioneller Falschspieler, die durch Tricks ganz gezielt ihre Gegner ausnahmen. Daher gab es immer wieder Spielverbote, die das zügellose Spiel unterbinden sollten. Beispielsweise wurden bei einer Säuberungsaktion 1472 in Nürnberg Würfel, Spielbretter und Kartenspiele auf dem Scheiterhaufen verbrannt.²⁰ Auch während der französischen Revolution war das Glücksspiel in Frankreich verboten. In Deutschland war das Spiel um Geld im Zeitraum von 1871 bis 1933 untersagt.²¹

¹⁸ Beck: Poker mit Würfel, 4.

¹⁹ Jütte: Die Anfänge des organisierten Verbrechens, 5.

²⁰ Jütte: Die Anfänge des organisierten Verbrechens, 6.

²¹ Colyns: Casino Geschichte, <http://www.casino-info-welt.ch/Casino-Geschichte.aspx>, [26.3.2017].

Die ersten Casinos kamen bereits im 12. Jahrhundert in Venedig auf. Dabei bezeichnet das Wort *Casino* (ital. für „kleines Haus“) einen privaten Ort der Vergnügung. Die ersten offiziellen Spielbanken wurden im 14. und 15. Jahrhundert eröffnet. Diese verbreiteten sich allmählich nach Frankreich, den Niederlanden und Deutschland.²²

3.4 Das heutige Würfelspiel

In der modernen Welt des 20. und 21. Jahrhunderts sind Spiele mit Würfeln noch immer Teil der Freizeitgestaltung und des gemeinschaftlichen Zusammenkommens. Es gibt viele Gesellschaftsspiele, die mit Hilfe von Würfeln gespielt werden. Stellvertretend sind *Mensch, ärgere dich nicht* und *Würfelpoker* zu nennen. Besonders bekannt ist auch das in amerikanischen Casinos gespielte Würfelspiel *Craps*.²³ Unter Freunden spielt man meist nur um des Spiels selbst willen oder gegen einen nur geringen Einsatz.

Noch heute erfreuen sich Casinos, in denen man höhere Summen Geld setzen kann, großer Beliebtheit. Die Zahl der BesucherInnen und SpielerInnen nimmt vor allem durch die Möglichkeit der Online-Spielbanken ständig zu.²⁴ Die legendärste Spielstadt ist Las Vegas, die jedes Jahr unzählige Glückssuchende aus aller Welt anlockt. Ähnlich wie in der Geschichte gibt es noch immer Menschen, die im Spielrausch nicht aufhören können zu spielen - sie werden als Spielsüchtige bezeichnet.

Das unregelte Glücksspiel wird in den meisten Staaten der Welt als illegal eingestuft. In Österreich ist die Durchführung von Glücksspielen dem Bundesministerium für Finanzen (BMF) vorbehalten. Dieses Recht kann durch Erlangen einer Konzession, für die zahlreiche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, auf andere übertragen werden. Derzeit gibt es zwei private Unternehmen, die unter staatlicher Aufsicht Glücksspiele in Österreich organisieren dürfen.²⁵ Dabei handelt es sich einerseits um Österreichische Lotterien GmbH und andererseits um Casinos Austria AG.²⁶

²² Colyns: Casino Geschichte, <http://www.casino-info-welt.ch/Casino-Geschichte.aspx>, [26.3.2017].

²³ Glogger: Spielcasinos – Tempel des Glücks, 13.

²⁴ Glogger: Spielcasinos – Tempel des Glücks, 57.

²⁵ Bundesministerium für Finanzen: Häufig gestellte Fragen zum Glücksspielmonopol, <https://www.bmf.gv.at/steuern/gluecksspiel-spielerschutz/gesetzliche-grundlagen/gspg-faq.html>, [26.3.2017].

²⁶ Bundesministerium für Finanzen: Häufig gestellte Fragen zum Glücksspielmonopol, <https://www.bmf.gv.at/steuern/gluecksspiel-spielerschutz/in-oesterreich/gspg-konzessionaere.html>, [26.3.2017].

4 Wahrscheinlichkeitsrechnung im Lehrplan

Das Bundesministerium für Bildung (BMB) sieht für den Bereich der Stochastik im Schulunterricht der AHS folgenden Lehrplan²⁷ vor. Dabei handelt es sich um den aktuell noch nicht eingesetzten neuen Lehrplan, der in der Oberstufe eine Semestrierung des Schuljahrs in Themengebiete vorgibt. Die bisher geltenden Lehrpläne für die AHS Unterstufe²⁸ und AHS Oberstufe²⁹ werden mit dem semestrierten Lehrplan, der ab dem Schuljahr 2017/18 gelten wird, abgelöst. Dieser stärker kompetenzorientierte Lehrplan wird mit der 5. Klasse aufsteigend in Kraft treten.

1. Klasse

Arbeiten mit Modellen, Statistik

- direkte Proportionalitäten erkennen (z.B. Warenmenge-Geld, Zeit-Weg),
- entsprechende Fragestellungen finden und Berechnungen durchführen können,
- Modelle mit realen Gegebenheiten vergleichen,
- grundlegende Überlegungen zur Sinnhaftigkeit von Modellen für die Praxis anstellen,
- Tabellen und graphische Darstellungen zum Erfassen von Datenmengen verwenden können.

2. Klasse

Arbeiten mit Modellen, Statistik

- charakteristische Kennzeichen von indirekten und direkten Proportionalitäten an Beispielen angeben können,
- einfache Fragestellungen dazu formulieren, sie graphisch darstellen und lösen können,
- Fragen zu sinnvollen Anwendungsbereichen für solche Proportionalitäten stellen;
- relative Häufigkeiten ermitteln können,

²⁷ AHS-Lehrplan Oberstufe neu: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568&FassungVom=2017-09-01>, [24.3.2017].

²⁸ AHS-Lehrplan Unterstufe: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_unterstufe.html, [24.3.2017].

²⁹ AHS-Lehrplan Oberstufe: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_oberstufe.html, [24.3.2017].

- entsprechende graphische Darstellungen lesen, anfertigen und kritisch betrachten können,
- Manipulationsmöglichkeiten erkennen

3.Klasse

Arbeiten mit Modellen, Statistik

- lineare Wachstums- und Abnahmeprozesse mit verschiedenen Annahmen unter Zuhilfenahme von elektronischen Rechenhilfsmitteln untersuchen können (z.B. Zinssätze),
- funktionale Abhängigkeiten erkennen, formelmäßig und graphisch darstellen;
- Untersuchen und Darstellen von Datenmengen.

4.Klasse

Arbeiten mit Modellen, Statistik

- Wachstums- und Abnahmeprozesse mit verschiedenen Annahmen unter Zuhilfenahme von elektronischen Rechenhilfsmitteln untersuchen können,
- funktionale Abhängigkeiten untersuchen und darstellen;
- Untersuchen und Darstellen von Datenmengen unter Verwendung statistischer Kennzahlen (z.B. Mittelwert, Median, Quartil, relative Häufigkeit, Streudiagramm).

5.Klasse

stochastikfrei

6. Klasse (4. Semester – Kompetenzmodul 4)

Beschreibende Statistik; Wahrscheinlichkeit

- Darstellungen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik kennen und damit arbeiten können

- Die Begriffe Zufallsversuch, Ereignis und Wahrscheinlichkeit kennen; Methoden zur Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten kennen: Bestimmung eines relativen Anteils, Ermittlung einer relativen Häufigkeit durch eine Versuchsserie, Angabe des subjektiven Vertrauens; wissen, dass diese Methoden nur näherungsweise bzw. unsichere Ergebnisse liefern
- Den Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten kennen
- Mit Wahrscheinlichkeiten rechnen können (Baumdiagramme; Additions- und Multiplikationsregel)
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten und (stochastische) Unabhängigkeit von Ereignissen kennen
- Den Satz von Bayes kennen und anwenden können

7. Klasse (6. Semester – Kompetenzmodul 6)

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Die Begriffe „diskrete Zufallsvariable“ und „diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung“ kennen
- Den Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten kennen
- Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufallsvariablen (Wahrscheinlichkeitsverteilung) kennen und deuten können
- Den Binomialkoeffizienten und seine wichtigsten Eigenschaften kennen
- Mit diskreten Verteilungen (insbesondere mit der Binomialverteilung) in anwendungsorientierten Bereichen arbeiten können

8. Klasse (7. Semester - Kompetenzmodul 7)

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen; beurteilende Statistik

- Die Begriffe „stetige Zufallsvariable“ und „stetige Verteilung“ kennen
- Die Normalverteilung zur Approximation der Binomialverteilung einsetzen können
- Die Normalverteilung in anwendungsorientierten Bereichen verwenden können

- Konfidenzintervalle ermitteln und interpretieren können
- Einfache statistische Hypothesentests durchführen und deren Ergebnisse interpretieren können

Vergleicht man den bis inklusive dem Schuljahr 2016/17 gültigen Lehrplan der AHS Unterstufe mit dem überarbeiteten Lehrplan, so erkennt man keine wesentlichen Unterschiede. Die Aufteilung der Themen sowie deren Formulierung stimmen überein. Dem Themengebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung im engeren Sinn wird in der Unterstufe somit weiterhin kein Platz eingeräumt und bleibt weiterhin auf die AHS Oberstufe begrenzt. Dennoch wird mit der Behandlung von Grundelementen der Statistik eine Basis für die Wahrscheinlichkeitsrechnung der AHS Oberstufe gelegt. In diesem Zusammenhang erachte ich das kritische Arbeiten mit Daten und Darstellung von Datenmengen, das Kennen der relativen Häufigkeit und die Verwendung statistischer Kennzahlen (z.B. Mittelwert, Median, Quartil, relative Häufigkeit, Streudiagramm) als besonders wichtig.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung im eigentlichen Sinn wird erst in der AHS Oberstufe fokussiert. Dabei ist die 5. Klasse jedoch noch komplett stochastikfrei. Erst in der 6. Klasse werden die Begriffe Zufallsversuch, Ereignis und Wahrscheinlichkeit erläutert. Das Auswerten und Interpretieren einer Versuchsserie kann hier verortet werden. Ein Vorschlag für eine Durchführung eines solchen Versuchs im Unterricht befindet sich im **Kapitel 7.3.1**. Das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten (Multiplikationsregel, bedingte Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes) steht ebenso im Rahmen des 4. Kompetenzmoduls.

Die 7. Klasse konzentriert sich dann auf diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen, insbesondere auf die Binomialverteilung. Die Begriffe Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufallsvariable treten dabei erstmals auf.

Im 7. Kompetenzmodul – entspricht dem ersten Semester der 8. Klasse – stehen zum einen stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen, insbesondere die Normalverteilung, im Vordergrund. Andererseits sollen auch Elemente der beurteilenden Statistik gelehrt werden. Konfidenzintervalle und einfache statistische Hypothesentests sollen berechnet und interpretiert werden können.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die voraussetzenden Kompetenzen für die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Unterstufe gelehrt werden, aber die Definition derselben und Berechnungen erst in der 6. Klasse zu verorten sind. Ich bin jedoch der Meinung, dass bereits SchülerInnen im Alter von 10 bis 14 Jahren ein Gefühl für die Wahrscheinlichkeit aufweisen. Insbesondere nachdem die Prozentrechnung im Unterricht durchgenommen wurde, kann man auf den Wahrscheinlichkeitsbegriff aufbauen. Einfache Würfelspiele lassen sich daher auch mit SchülerInnen der Unterstufe durchführen.

5 Mathematische Grundlagen

5.1 Begriffe und Definitionen

5.1.1 Zufallsexperiment

Beispiele für Zufallsexperimente:

- Z1: Werfen einer Münze
- Z2: Werfen eines regelmäßigen Würfels
- Z3: Ziehen einer Kugel aus einer Urne, wobei sich alle Kugeln durch nichts außer ihrer Farbe (rot, blau, grün) unterscheiden
- Z4: zufällige Auswahl einer Zahl aus 49 Zahlen
- Z5: Drehen des Zeigers des Glücksrads aus **Abbildung 7**.

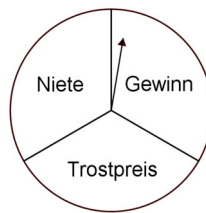


Abbildung 7: Glücksrad

- Z6: zufällige Auswahl einer Person aus einer bestimmten Personenmenge

Zufallsexperimente sind dadurch charakterisiert, dass sie verschiedene Versuchsausgänge annehmen können. Die möglichen Versuchsausgänge sind im Vorhinein bekannt. Beispielsweise kann beim Werfen einer Münze sowohl Kopf als auch Zahl auftreten, wenn man den Fall ausschließt, dass die Münze am Rand liegen bleiben kann.

Eine weitere Eigenschaft ist die Unvorhersehbarkeit des Ausgangs des Versuchs. Man kann im Vorhinein nicht wissen, wie das einzelne Experiment ausgehen wird. Man kann höchstens darauf wetten oder hoffen, dass bei der Münze Kopf bzw. Zahl erscheinen wird.

Zufallsexperimente sind außerdem wiederholbar. Im Gegensatz dazu lassen sich Vermutungen über einmalige Vorgänge, wie das Wetter an einem bestimmten Tag, nicht wiederholen. Eine Münze kann aber öfters hintereinander oder zeitversetzt geworfen werden.³⁰ In diesem Fall spricht man von einem mehrstufigen Zufallsexperiment. Wenn eine Münze 2-mal, 3-mal, ...

³⁰ Kütting, Didaktik der Stochastik. 56.

hintereinander geworfen wird, spricht man von einem 2-stufigen, 3-stufigen, ... Zufallsexperiment.

Allgemein kann ein Zufallsexperiment als eine zufällige Auswahl eines Elements aus einer bestimmten Menge aufgefasst werden.

5.1.2 Ergebnis

Die möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments heißen Ergebnisse und werden mit ω (*kleines Omega*) bezeichnet. Diese Ergebnisse werden auch Elementarereignisse genannt.

Die möglichen Ergebnisse beim Werfen einer Münze sind $\{Kopf\}$ und $\{Zahl\}$. Auch die übrigen Ergebnisse der Zufallsexperimente aus **Kapitel 5.1.1** sind hier angeführt.

- Z1: $\omega_1 = \{Kopf\}$, $\omega_2 = \{Zahl\}$
- Z2: $\omega_1 = \{1\}$, $\omega_2 = \{2\}$, $\omega_3 = \{3\}$, $\omega_4 = \{4\}$, $\omega_5 = \{5\}$, $\omega_6 = \{6\}$
- Z3: $\omega_1 = \{rote\ Kugel\}$, $\omega_2 = \{blaue\ Kugel\}$, $\omega_3 = \{grüne\ Kugel\}$
- Z4: $\omega_1 = \{1\}$, $\omega_2 = \{2\}$, $\omega_3 = \{3\}$, ..., $\omega_{49} = \{49\}$
- Z5: $\omega_1 = \{Gewinn\}$, $\omega_2 = \{Trostpreis\}$, $\omega_3 = \{Niete\}$

Als Personengruppe nehme man die SchülerInnengruppe, die aus Anna, Benni, Clemens, Dora und Emil besteht, an. Die Ereignisse des Zufallsexperiments Z6 lauten dann:

- Z6: $\omega_1 = \{Anna\}$, $\omega_2 = \{Benni\}$, $\omega_3 = \{Clemens\}$, $\omega_4 = \{Dora\}$, $\omega_5 = \{Emil\}$

5.1.3 Ergebnisraum

In der Literatur findet man zum Ergebnisraum Synonyme wie Stichprobenraum, Merkmalraum, Grundraum, Beobachtungsraum, Elementarergebnisraum, Ereignisraum, Ergebnismenge. Diesen Raum bzw. diese Menge bezeichnet man mit Ω (*Omega*).

Der Ergebnisraum ist die Zusammenfassung aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments in eine Menge Ω .

Für die in **Kapitel 5.1.1** angegebenen Zufallsexperimente sind hier die passenden Ergebnisräume angeführt:

- $Z1: \Omega = \{Kopf, Zahl\}$
- $Z2: \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $Z3: \Omega = \{rote\ Kugel, blaue\ Kugel, grüne\ Kugel\}$
- $Z4: \Omega = \{1, 2, 3, \dots, 49\}$
- $Z5: \Omega = \{Gewinn, Trostpreis, Niete\}$
- $Z6: \Omega = \{Anna, Benni, Clemens, Dora, Emil\}$

Die Mächtigkeit $|\Omega|$ des Ergebnisraums bezeichnet die Anzahl aller möglichen Ergebnisse bzw. die Anzahl der Elementarereignisse. Sie gibt Antwort auf die Frage wie viele verschiedene Versuchsausgänge möglich sind.

- $Z1: |\Omega| = 2$
- $Z2: |\Omega| = 6$
- $Z3: |\Omega| = 3$
- $Z4: |\Omega| = 49$
- $Z5: |\Omega| = 3$
- $Z6: |\Omega| = 5$

5.1.4 Ereignis

Jede Zusammenfassung von einem oder mehreren Ergebnissen eines Zufallsexperimentes in einer Menge E nennt man Ereignis. Jede Teilmenge E des Ergebnisraums Ω ist somit ein Ereignis.

Beim Werfen eines regelmäßigen Würfels (Z2) können neben den Elementarereignissen $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ auch folgende Ereignisse betrachtet werden:

- Es wird eine ungerade Augenzahl gewürfelt. $E = \{1, 3, 5\}$
- Es erscheint eine Augenzahl kleiner gleich als 4. $E = \{1, 2, 3, 4\}$
- Es fällt eine Quadratzahl. $E = \{1, 4\}$

Beim Zufallsexperiment Z_6 können neben der Auswahl einer bestimmten Person auch diese Ereignisse untersucht werden:

- Es wird ein Junge ausgewählt. $E = \{Benni, Clemens, Emil\}$
- Es wird ein Mädchen ausgewählt. $E = \{Anna, Dora\}$
- Es wird eine Person ausgewählt, deren Name maximal vier Buchstaben hat. $E = \{Anna, Dora, Emil\}$

Sicheres Ereignis

Tritt ein Ereignis E bei jeder Ausführung eines Zufallsexperiments mit Sicherheit ein, so wird es sicheres Ereignis genannt. Ein sicheres Ereignis ist unabhängig vom Versuchsausgang des Experiments.

Folgende Ereignisse sind Beispiele für sichere Ereignisse einiger Zufallsexperimente aus **Kapitel 5.1.1**.

- Münzwurf: E_{Z_1} : Es kommt entweder Kopf oder Zahl.
- Würfelwurf: E_{Z_2} : Es kommt eine Augenzahl kleiner gleich als 6.
- Zahlenwahl: E_{Z_4} : Es wird eine positive Zahl ausgewählt.
- Personenwahl: E_{Z_6} : Es wird ein Mädchen oder ein Junge gewählt.

Unmögliches Ereignis

Kann ein Ereignis E bei keiner Ausführung eines Zufallsexperiments eintreten, so wird es unmögliches Ereignis genannt.

Folgende Ereignisse sind Beispiele für unmögliche Ereignisse einiger Zufallsexperimente aus **Kapitel 5.1.1**.

- Münzwurf: E_{Z_1} : Es kommt weder Kopf noch Zahl.
- Würfelwurf: E_{Z_2} : Es kommt eine Augenzahl größer als 6.
- Zahlenwahl: E_{Z_4} : Es wird eine negative Zahl ausgewählt.
- Personenwahl: E_{Z_6} : Es wird ein Löwe gewählt.

Disjunktes Ereignis

Zwei Ereignisse E_1 und E_2 heißen disjunkt, wenn $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Folgende zwei Ereignisse bei einem Wurf eines regelmäßigen Würfels sind Beispiele für disjunkte Ereignisse.

- E_1 : Es wird ein Sechser gewürfelt. $E_1 = \{6\}$
- E_2 : Es wird eine ungerade Zahl gewürfelt. $E_2 = \{1, 3, 5\}$

Die beiden Ereignisse sind disjunkt, da es kein Ergebnis gibt, das sowohl E_1 als auch E_2 zuzuordnen ist. Wenn E_1 eintritt, dann tritt E_2 nicht ein. Wenn E_2 eintritt, dann tritt E_1 nicht ein. Es gilt $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Die beiden Ereignisse schließen sich also gegenseitig aus.

Man betrachte auch folgendes Gegenbeispiel. Wieder wird ein regelmäßiger Würfel geworfen. Dabei beobachte man diese Ereignisse:

- E_1 : Es wird ein Sechser gewürfelt. $E_1 = \{6\}$
- E_2 : Es wird eine gerade Zahl gewürfelt. $E_2 = \{2, 4, 6\}$

Die beiden Ereignisse sind nicht disjunkt, da das Ergebnis 6 sowohl E_1 als auch E_2 zuzuordnen ist. Es gilt $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, da $E_1 \cap E_2 = \{6\}$ ist.

Gegenereignis

Es sei E ein Ereignis eines Zufallsversuchs. Das Gegenereignis von E enthält alle Elemente des Ergebnisraumes Ω , die nicht in E sind. Das Gegenereignis tritt also genau dann ein, wenn das Ereignis E nicht eintritt. Das Gegenereignis zu E wird als $\neg E$ oder als $\bar{E}$ bezeichnet.

Das Eintreten eines Ereignisses oder des zugehörigen Gegenereignisses ist das sichere Ereignis, da sie zusammen alle Elemente des gesamten Ergebnisraums Ω abdecken.

$$E \cup \bar{E} = \Omega$$

In nachstehender Tabelle befinden sich Beispiele für Ereignisse und ihre zugehörigen Gegenereignisse:

Ereignis	Gegenereignis
Es wird eine gerade Zahl gewürfelt. $E = \{2, 4, 6\}$	Es wird eine ungerade Zahl gewürfelt. $\bar{E} = \{1, 3, 5\}$
Es wird beim Glücksrad aus Abbildung 7 ein Gewinn erzielt. $E = \{\text{Gewinn}\}$	Es wird bei diesem Glücksrad kein Gewinn erzielt. $\bar{E} = \{\text{Trostpreis}, \text{Niete}\}$
Es wird eine rote Kugel aus der Urne gezogen. $E = \{\text{rote Kugel}\}$	Es wird keine rote Kugel aus der Urne gezogen. $\bar{E} = \{\text{blaue Kugel}, \text{grüne Kugel}\}$
Es wird mindestens ein Dreier gewürfelt. $E = \{3, 4, 5, 6\}$	Es wird höchstens ein Zweier gewürfelt. $\bar{E} = \{1, 2\}$
Es wird eine Augenzahl kleiner als 4 gewürfelt. $E = \{1, 2, 3\}$	Es wird eine Augenzahl größer gleich als 4 gewürfelt. $\bar{E} = \{4, 5, 6\}$

Tabelle 1: Ereignis und Gegenereignis

5.1.5 Ereignisraum

Fasst man alle Ergebnisse in eine Menge $P(\Omega)$ zusammen, so nennt man $P(\Omega)$ den Ereignisraum von Ω . $P(\Omega)$ ist also die Menge aller Teilmengen von Ω und bezeichnet die Potenzmenge. Der Ereignisraum $P(\Omega)$ beinhaltet immer auch das sichere sowie das unmögliche Ereignis.

- Die Potenzmenge einer geworfenen Münze (Z1) lautet:

$$P(\Omega) = \{\emptyset, \{\text{Kopf}\}, \{\text{Zahl}\}, \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}\}$$

- Die Potenzmenge eines geworfenen Würfels (Z2) lautet:

$$P(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}, \{4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 5, 6\}, \{1, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 6\}, \{2, 3, 5, 6\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 5, 6\}, \{1, 2, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

$\{2, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}, \{4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 4, 5\},$
 $\{1, 2, 4, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 5, 6\}, \{1, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 6\},$
 $\{2, 3, 5, 6\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 5, 6\}, \{1, 2, 4, 5, 6\},$
 $\{1, 3, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Die Anzahl der Elemente der Potenzmenge der Menge Ω lassen sich auch ohne Aufzählen mit folgender Formel bestimmen.

$$|P(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$$

Der Ereignisraum eines Würfels hat also $|P(\Omega)| = 2^6 = 64$ Elemente.

- Z3: $|P(\Omega)| = 2^3 = 8$
- Z4: $|P(\Omega)| = 2^{49} = 562949953421312$
- Z5: $|P(\Omega)| = 2^3 = 8$
- Z6: $|P(\Omega)| = 2^5 = 32$

Bei unendlichen Ereignisräumen kann man die Potenzmenge im Allgemeinen nicht als die Menge aller Ereignisse heranziehen.

5.1.6 Wahrscheinlichkeit

Eine Wahrscheinlichkeit ist ein Maß für eine Erwartung.³¹ Sie gibt Auskunft mit welcher (subjektiven) Sicherheit man auf das Auftreten eines bestimmten Ereignisses vertrauen darf. Sie ist daher auch ein Maß des (subjektiven) Vertrauens und der Gewissheit.³²

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E wird mit $P(E)$ bezeichnet. In der Mathematik wird die Wahrscheinlichkeit durch eine reelle Zahl von 0 bis 1 ausgedrückt. Es gilt daher:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

³¹ Malle, Mathematik verstehen 6, 228.

³² Kütting, Didaktik der Stochastik, 35.

Je näher die Zahl bei 1 liegt, umso wahrscheinlicher wird das Ereignis. Je näher die Zahl bei 0 liegt, umso unwahrscheinlicher wird das Ereignis.³³ Ein sicheres Ereignis besitzt Wahrscheinlichkeit Eins, während ein unmögliches Ereignis Wahrscheinlichkeit Null aufweist.

$$P(E_{\text{sicher}}) = 1 \qquad P(E_{\text{unmöglich}}) = 0$$

In **Abbildung 8**³⁴ ist auf der senkrechten Achse die Wahrscheinlichkeit von 0 bis 1 aufgetragen. Daneben ist der (subjektive) Vertrauensgrad beschrieben.

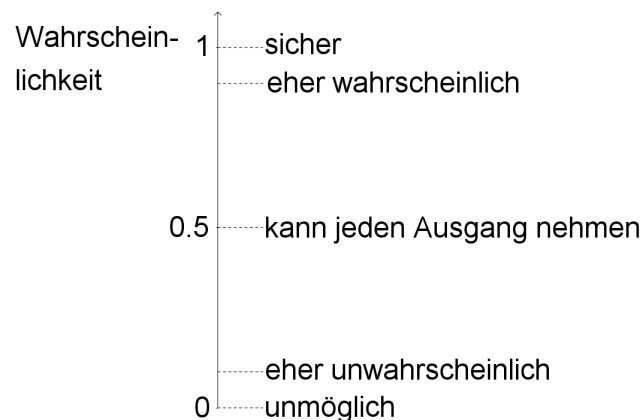


Abbildung 8: Wahrscheinlichkeit als Vertrauensmaß

Naive Wahrscheinlichkeit

Ein Experiment wird n -mal durchgeführt. $N_n(E)$ bezeichne die Anzahl, wie oft das Ereignis E bei diesen n Versuchen auftritt.

Die „Definition“ der naiven Wahrscheinlichkeit lautet dann:

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(E)}{n}$$

Daraus ergeben sich allerdings zwei Probleme. Erstens kann man ein Experiment nicht unendlich oft durchführen und daher kann man auch keinen Grenzwert bestimmen. Zweitens weiß man nicht, selbst wenn man eine Folge erhält, ob diese konvergiert.

³³ Kütting, Didaktik der Stochastik, 36.

³⁴ vgl. Kütting, Didaktik der Stochastik, 36.

5.2 Begründung der Wahrscheinlichkeit

5.2.1 Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil

Die Wahrscheinlichkeit kann als relativer Anteil begründet werden. Dazu betrachte man dieses Beispiel³⁵:

In **Tabelle 2** findet man die Anzahl der roten und schwarzen Kugeln in den Urnen A und B. Die Kugeln unterscheiden sich durch nichts außer ihrer Farbe. Aus jeder Urne wird eine Kugel verdeckt gezogen. Bei welcher der beiden Urnen zieht man eher eine schwarze Kugel?

	Urne A	Urne B
rote Kugeln	21	11
schwarze Kugeln	16	5
gesamt	37	16

Tabelle 2: Anzahl der roten und schwarzen Kugeln in Urne A und Urne B

Wäre die Anzahl der schwarzen Kugeln in Urne A kleiner gleich als 5, dann könnte man auf einen Blick sehen, bei welcher Urne eher eine schwarze Kugel gezogen wird. In diesem Fall geben die absoluten Häufigkeiten jedoch keinen Aufschluss über die Chance die gewünschte Kugel zu ziehen. Daher berechnet man sich die relativen Anteile der schwarzen Kugel in Urne A und Urne B.

Urne A: Relativer Anteil der schwarzen Kugeln an allen Kugeln in der Urne A

$$= \frac{16}{37} \approx 0,432432$$

Urne B: Relativer Anteil der schwarzen Kugeln an allen Kugeln in der Urne B

$$= \frac{5}{16} = 0,3125$$

Die Berechnungen führen zu dem Ergebnis, dass man eher bei der Urne A eine schwarze Kugel erhalten wird.

Durch die Berechnung wurde ein Maß der Erwartung, dass eine schwarze Kugel gezogen wird, angegeben. Der relative Anteil ist also ein Maß für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses E.

³⁵ vgl. Malle, Mathematik verstehen 6, 227.

Allgemeiner: Bei einem Zufallsversuch seien endlich viele Versuchsausgänge möglich. Diese haben alle die gleiche Chance einzutreten. Es sei G die Menge aller Versuchsausfälle und A die Menge aller Versuchsausfälle, bei denen ein bestimmtes Ereignis E eintritt. (Trivialerweise ist $A \subseteq G$.) Dann kann man für das Eintreten von E den relativen Anteil A in G nehmen, also³⁶:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } A}{\text{Anzahl der Elemente von } G} = \frac{|A|}{|G|}$$

Dies wird als der klassische bzw. nach Pierre-Simon Laplace als Laplace'sche Wahrscheinlichkeitsbegriff bezeichnet.

Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff ist ein wichtiger Spezialfall in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der allerdings nicht immer Anwendung findet. Während bei einem regelmäßigen Würfel die Gleichwahrscheinlichkeit angebracht ist, ist das beim Astragalos nicht der Fall.

5.2.2 Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit

Eine weitere Möglichkeit ist die Begründung der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit. Dabei wird ein Zufallsexperiment unter gleichen Bedingungen n -mal durchgeführt. Die Bedingungen für jeden Versuch sind immer gleich. Ein bestimmtes Ereignis E tritt dabei genau k -mal ein.³⁷ Die relative Häufigkeit h_n des Ereignisses E beträgt dann:

$$h_n(E) = \frac{k}{n}$$

Als Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses E kann man mit einer gewissen Unsicherheit die relative Häufigkeit von E unter den n Versuchen nehmen.³⁸ Also gilt:

$$P(E) \approx h_n(E)$$

Ein ausführliches Beispiel dazu befindet sich in **Kapitel 7.3.1** zum Spiel *Wahrscheinlichkeitsraten*.

³⁶ vgl. Malle, Mathematik verstehen 6, 228.

³⁷ Malle, Mathematik verstehen 6, 231.

³⁸ Malle, Mathematik verstehen 6, 232.

Dieser Zugang zur Wahrscheinlichkeit wird als empirischer (griech. *empeiria* = Erfahrung) Wahrscheinlichkeitsbegriff bezeichnet.

5.2.3 Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen

Der subjektivistische Wahrscheinlichkeitsbegriff ist ein Maß für die Sicherheit der persönlichen Einschätzung eines Sachverhalts. Als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E kann der Grad des subjektiven Vertrauens in das Eintreten von E genommen werden.³⁹

Auch im Alltag stützen wir uns auf unsere persönliche Einschätzung. Ein Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit auf Niederschlag an einem bestimmten Tag. Je nachdem wie ich die Situation einschätze, werde ich einen Regenschirm mitnehmen oder nicht.

Als weiteres Beispiel beobachte man die Zeit, die ich zum Bahnhof brauche. Je nachdem ob ich mir eine Verzögerung durch eine Umleitung oder zähen Verkehr im Stadtgebiet erwarte, werde ich mein Verhalten ändern und die Einschätzung der Fahrdauer zum Bahnhof anpassen.

Auch ExpertInnen stützen sich auf den subjektivistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff, wenn keine Ansätze zur Überlegung aufgrund des relativen Anteils und keine Versuchsserie zur Ermittlung der relativen Häufigkeit gegeben sind. Ein Atomphysiker kann beispielsweise behaupten, dass in einem bestimmten Atomkraftwerk mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,000001 in den nächsten Jahren ein Unfall passieren wird.⁴⁰ Auch wenn die Zahl durch das Fachwissen des Experten nicht aus der Luft gegriffen ist, beruht sie doch auf seiner subjektiven Einschätzung.

Sich auf sein subjektives Vertrauen zu berufen, ist eine umstrittene Möglichkeit Wahrscheinlichkeiten zu nennen. Dennoch kommt sie in der Praxis häufig zur Anwendung. Zu bevorzugen sind jedoch die oben genannten Methoden, Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil und Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit.

³⁹ Malle, Mathematik verstehen 6, 234.

⁴⁰ Malle, Mathematik verstehen 6, 234.

5.3 Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

5.3.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wenn sich unser Informationsstand ändert, dann beschränken sich die Möglichkeiten für ein bestimmtes Ereignis und es ändert sich somit auch die Wahrscheinlichkeit für dieses. Durch folgendes Beispiel⁴¹ soll dies gezeigt werden.

Betrachte das Ziehen einer Kugel aus Urne A bzw. Urne B aus **Kapitel 5.2.1**. Berechne dazu folgende Wahrscheinlichkeiten:

- 1) $P(X \text{ ist schwarze Kugel})$
- 2) $P(X \text{ ist schwarze Kugel})$, wenn man schon weiß, dass aus Urne A gezogen wurde
- 3) $P(X \text{ ist schwarze Kugel})$, wenn man schon weiß, dass aus Urne B gezogen wurde

	Urne A	Urne B	gesamt
rote Kugeln	21	11	32
schwarze Kugeln	16	5	21
gesamt	37	16	53

Tabelle 3: Häufigkeitsverteilung der roten und schwarzen Kugeln in den Urnen

Lösung:

$$1) P(X \text{ ist schwarze Kugel}) = \frac{21}{53} \approx 0,396226$$

$$2) P(X \text{ ist schwarze Kugel}) = \frac{16}{37} \approx 0,432432$$

$$3) P(X \text{ ist schwarze Kugel}) = \frac{5}{16} = 0,3125$$

Es zeigt sich, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses $X \text{ ist schwarze Kugel}$ anders eingeschätzt wird, wenn man über das Wissen der Auswahl der Urne verfügt.

⁴¹ Malle, Mathematik verstehen 6, 237.

Die soeben beschriebene bedingte Wahrscheinlichkeit kann man allgemein so formulieren:

Es seien E_1 und E_2 Ereignisse eines Zufallsversuchs. Die Wahrscheinlichkeit für E_2 unter der Voraussetzung, dass das Eintreten des Ereignisses E_1 bereits bekannt ist, nennt man bedingte Wahrscheinlichkeit von E_2 unter der Bedingung E_1 . Man definiert:

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

Der senkrechte Strich ist dabei als „unter der Bedingung von“ oder als „unter Voraussetzung von“ zu lesen.

In dem oben genannten Beispiel sieht die korrekte Schreibweise wie folgt aus.

$$P(X \text{ ist schwarze Kugel} | \text{Urne A}) = \frac{16}{37} \approx 0,432432$$

$$P(X \text{ ist schwarze Kugel} | \text{Urne B}) = \frac{5}{16} = 0,3125$$

5.3.2 Unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse E_1 und E_2 sind genau dann unabhängig, wenn die Wahrscheinlichkeit von E_2 nicht durch E_1 beeinflusst wird. Allgemein gilt: $P(E_2|E_1) = P(E_2)$

Betrachte dazu folgendes Beispiel. Ein regelmäßiger Würfel wird zweimal geworfen. Dabei erscheint beim ersten Wurf ein Sechser und beim zweiten Wurf eine Augenzahl kleiner gleich als Drei.

E_1 : Es kommt ein Sechser.

E_2 : Es kommt eine Zahl kleiner gleich als Drei.

Die beiden Ereignisse sind unabhängig, da die Augenzahl, die beim zweiten Wurf fällt, unabhängig vom Ergebnis des ersten Wurfs ist. Das Ereignis E_1 kann das Ereignis E_2 nicht beeinflussen. Der Würfel kann sich schließlich nicht merken, welche Augenzahl zuvor gefallen ist.

Die Ereignisse „*X ist schwarze Kugel*“ und „*Urne A*“ bzw. „*X ist schwarze Kugel*“ und „*Urne B*“ aus dem Beispiel aus **Kapitel 5.2.1** sind keine unabhängigen Ereignisse. Hierbei liegt eine Begünstigung bzw. Benachteiligung vor.

Begünstigung

Seien E_1 und E_2 zwei Ereignisse eines Zufallsversuchs. Man sagt E_1 begünstigt E_2 , falls $P(E_2|E_1) > P(E_2)$.

$$P(X \text{ ist schwarze Kugel} | \text{Urne A}) > P(X \text{ ist schwarze Kugel})$$

Das Ereignis „*Urne A*“ begünstigt also das Ereignis „*X ist schwarze Kugel*“.

Benachteiligung

Seien E_1 und E_2 zwei Ereignisse eines Zufallsversuchs. Man sagt E_1 benachteiligt E_2 , falls $P(E_2|E_1) < P(E_2)$.

$$P(X \text{ ist schwarze Kugel} | \text{Urne B}) < P(X \text{ ist schwarze Kugel})$$

Das Ereignis „*Urne B*“ benachteiligt also das Ereignis „*X ist schwarze Kugel*“.

5.3.3 Baumdiagramm

Das Erstellen eines sogenannten Baumdiagramms veranschaulicht alle möglichen Ausgänge eines ein- oder mehrstufigen Zufallsexperiments. Die Abzweigungen im Baumdiagramm werden Äste genannt. An den Enden dieser werden die Ergebnisse der Versuche geschrieben. Entlang der Äste selbst wird die Wahrscheinlichkeit des jeweiligen Versuchsausgangs angegeben.

Man betrachte folgendes Beispiel und erstelle das passende Baumdiagramm:

In einer Urne befinden sich drei Kugeln. Davon sind zwei mit einem „M“ und eine mit einem „O“ beschriftet. Ansonsten weisen die Kugeln keine Unterschiede auf. Bei einem Gewinnspiel wird dreimal hintereinander verdeckt gezogen. Nach jeder gezogenen Kugel wird diese wieder in die Urne zurückgelegt.

Das Baumdiagramm in **Abbildung 9** ist von links nach rechts zu lesen. Alle senkrecht übereinanderstehenden Knotenpunkte symbolisieren das einmalige Ziehen aus der Urne. Die Versuchsausgänge „O“ bzw. „M“ sind an den Enden der Äste aufgetragen.

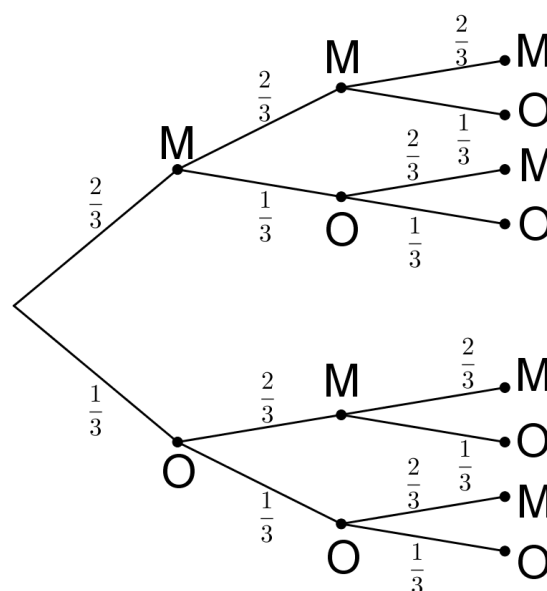


Abbildung 9: Baumdiagramm – Ziehen der Kugeln „O“ und „M“ aus einer Urne

Auf die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten eine Kugel mit „O“ oder eine Kugel mit „M“ zu ziehen, kann man aufgrund des relativen Anteils der Kugeln in der Urne schließen.

5.3.4 Multiplikationsregel (1. Pfadregel)

Bei dem Gewinnspiel aus **Kapitel 5.3.3** gewinnt man einen Jahresvorrat an Waschmittel, wenn man den Firmennamen „OMO“ genau in dieser Reihenfolge der Kugeln zieht.

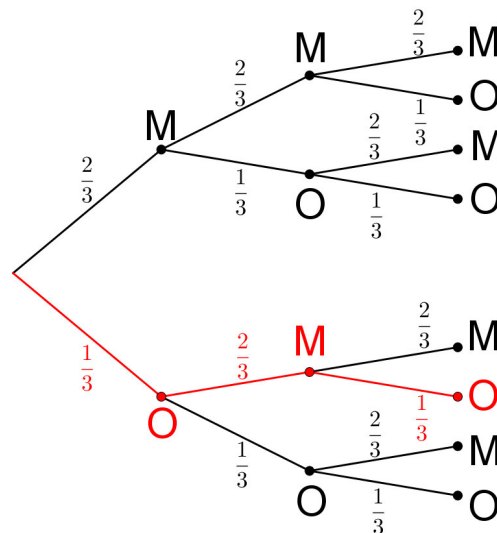


Abbildung 10: Baumdiagramm zum Gewinnspiel „OMO“ - Multiplikationsregel

Das Ereignis, dass man bei dem Gewinnspiel gewinnt, ist in **Abbildung 10** rot hervorgehoben. Zur Wahrscheinlichkeit zu diesem Ereignis kommt man durch folgende Überlegung: Wenn man beim Gewinnspiel sehr oft teilnimmt, dann wird man in $\frac{1}{3}$ der Fälle als erstes eine Kugel mit „O“ ziehen. In $\frac{2}{3}$ der Fälle, in denen man beim ersten Zug eine Kugel mit „O“ erhalten hat, wird man eine Kugel mit „M“ ziehen. Und in $\frac{1}{3}$ der Fälle, in denen man beim ersten Zug eine Kugel mit „O“ und beim zweiten Zug eine Kugel mit „M“ erhalten hat, wird man eine Kugel mit „O“ ziehen. Insgesamt wird man also in $\frac{1}{3}$ von $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{3}$ aller Fälle gewinnen.⁴² Daraus schließt man:

$$P(OMO) = \frac{1}{3} \text{ von } \frac{2}{3} \text{ von } \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27} \approx 0,074074$$

1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses eines mehrstufigen Zufallsexperiments ist das Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm.

⁴² Malle: Mathematik verstehen 6, 242.

5.3.5 Additionsregel (2. Pfadregel)

Bei dem Gewinnspiel aus **Kapitel 5.3.3** gewinnt man ein Testprodukt der Waschmittelfirma, wenn man den Firmennamen „OMO“ unbeachtet der Reihenfolge der Kugeln zieht. Beim Ziehen des Firmennamens in richtiger Reihenfolge der Kugeln erhält man den Jahresvorrat, aber kein Testprodukt.

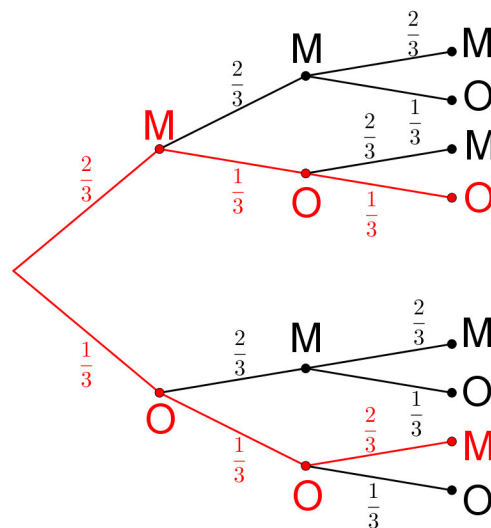


Abbildung 11: Baumdiagramm zum Gewinnspiel „OMO“ - Additionsregel

Das Ereignis E , bei dessen Eintreten man ein Testprodukt erhält, ist in **Abbildung 11** rot hervorgehoben. Dieses setzt sich aus den zwei Wegen (M, O, O) und (O, O, M) zusammen. Würde man das Ziehen dreier Kugeln sehr oft ausführen, dann würde man in $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ aller Fälle (M, O, O) und in $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$ der Fälle (O, O, M) erhalten. Da diese zwei Ausgänge des Zufallsversuchs disjunkt sind, würde man in $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$ aller Fälle (M, O, O) oder (O, O, M) erhalten.⁴³ Daraus schließt man:

$$P(E) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27} \approx 0,148148$$

2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses eines mehrstufigen Zufallsexperiments, das sich aus mehreren disjunkten Ereignissen zusammensetzt, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade. Es gilt:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

⁴³ Malle: Mathematik verstehen 6, 249.

5.3.6 Gegenereignis

Ausgehend vom Gewinnspiel aus **Kapitel Baumdiagramm 5.3.3**, wie wahrscheinlich ist es, dass man zwei verschieden beschriftete Kugeln zieht?

Lösung 1:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(MMO) + P(MOM) + P(MOO) + P(OMM) + P(OMO) + P(OOM) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Lösung 2:

Durch folgende Überlegung kommt man zu einer weiteren Lösungsmöglichkeit, die in manchen Beispielen den Rechenaufwand erheblich verkürzen kann:

Das Eintreten eines Ereignisses oder des zugehörigen Gegenereignisses deckt den gesamten Ergebnisraum Ω ab. Es handelt sich also um ein sicheres Ereignis. Einem sicheren Ereignis ist die Wahrscheinlichkeit 1 zuzuordnen.

$$P(E \cup \bar{E}) = 1$$

Aus der 2. Pfadregel folgt:

$$P(E) + P(\bar{E}) = 1$$

Durch Umformung erhält man eine Formel, die aus der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses auf die Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Ereignisses schließen lässt.

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

Das Gegenereignis in dem Kugelbeispiel ist das Ziehen von drei gleich beschrifteten Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit zwei verschieden beschriftete Kugeln zu ziehen ist also:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - (P(MMM) + P(OOO)) = 1 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

5.3.7 Satz von Bayes

Ein Zufallsversuch bestehe aus zwei Teilversuchen. Im ersten Teilversuch gehöre jeder Teilversuch zu genau einem der Ereignisse $A_1, A_2, \dots, A_n$. Es sei weiters B ein Ereignis im zweiten Teilversuch. Dann gilt für $i = 1, 2, \dots, n$:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}$$

wobei $P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$ ist.

Aus der bekannten Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit lässt sich der Satz von Bayes ziemlich schnell herleiten. Es gilt:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Formt man beide Terme nach $P(A \cap B)$ um und setzt diese gleich, so erhält man:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Durch Ausdrücken von $P(A|B)$ kommt man auf die gewünschte Formel vom Satz von Bayes.

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Zur Veranschaulichung betrachte folgendes Beispiel⁴⁴ aus der Medizin.

Eine bestimmte Krankheit trifft 20 von 100000 Personen. Eine medizinische Untersuchungsmethode ergibt bei 80% aller Erkrankten einen positiven Befund, aber leider auch bei 10% aller Nichterkrankten. Eine Person wird zufällig ausgewählt. Es ergibt sich ein positiver Befund. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person tatsächlich an der seltenen Krankheit leidet?

In **Abbildung 12** erkennt man das passende Baumdiagramm.

⁴⁴ Malle: Mathematik verstehen 6, 260.

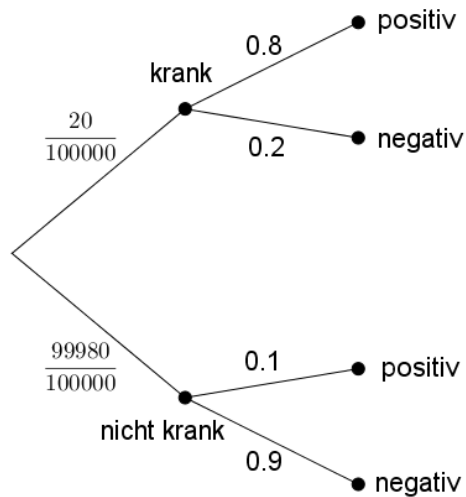


Abbildung 12: Baumdiagramm medizinische Untersuchung

Anhand des Baumdiagramms erhält man unter der Anwendung der Additionsregel:

$$P(\text{positiv}) = P(\text{krank}) \cdot P(\text{positiv}|\text{krank}) + P(\text{nicht krank}) \cdot P(\text{positiv}|\text{nicht krank})$$

$$= \frac{20}{100000} \cdot 0,8 + \frac{99980}{100000} \cdot 0,1 = 0,10014$$

Nach dem Satz von Bayes gilt:

$$P(\text{krank}|\text{positiv}) = \frac{P(\text{krank}) \cdot P(\text{positiv}|\text{krank})}{P(\text{positiv})} = \frac{\frac{20}{100000} \cdot 0,8}{0,10014} \approx 0,001598$$

Ein positiver Befund bedeutet also, dass die Krankheit nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1598% vorliegt. Dies ist eine überraschend kleine Wahrscheinlichkeit. Weitere medizinische Untersuchungen können bei einem positiven Befund Aufschluss geben.

5.4 Erwartungswert

Der Erwartungswert ist eine Kennzahl der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Er beschreibt die zentrale Lage einer Verteilung. Bei oftmaligem Durchführen eines Zufallsversuchs, wird sich der Mittelwert der Liste dem Erwartungswert der entsprechenden Zufallsvariablen annähern.

Ist X eine Zufallsvariable mit den Elementarereignissen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, dann heißt

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

der Erwartungswert von X .⁴⁵

Betrachte dazu folgende Berechnung zum Wurf eines regelmäßigen Würfels. Es bezeichne X die Augenzahl des Würfels. Alle Augenzahlen treten mit gleich hoher Wahrscheinlichkeit auf.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Tabelle 4: Wahrscheinlichkeitsverteilung eines regelmäßigen Würfels

Der Erwartungswert des Würfels lautet daher:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Wenn man sehr oft würfelt wird man im Mittel die Augenzahl 3,5 erhalten. Es ist anzumerken, dass 3,5 kein Wert des Ergebnisraums Ω ist.

⁴⁵ Malle: Mathematik verstehen 7, 210.

5.5 Permutation

Die Permutation (lat. *permutare* = vertauschen) ist ein Begriff der Kombinatorik und bezeichnet die Anzahl der Möglichkeiten eine bestimmte Anzahl von Objekten anzuordnen.

Betrachte dazu folgendes Beispiel. In einem Wartezimmer stehen an der Wand 3 Sessel. Wie viele Möglichkeiten gibt es drei Personen auf die Sessel zu setzen?

Lösung 1:

Dies kann man ganz einfach durch Aufzählen der Möglichkeiten herausfinden. Man nenne die Personen A, B und C. Dabei ergeben sich folgende Möglichkeiten:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

Es gibt also sechs verschiedene Möglichkeiten die Personen anzuordnen.

Lösung 2:

Anhand von **Abbildung 13** kann man aber auch eine andere Überlegung machen. Für die erste Person gibt es drei mögliche Sitzplätze. Für die zweite Person stehen dann nur mehr zwei Sessel zur Verfügung. Die dritte Person setzt sich dann auf den verbliebenen Sessel.

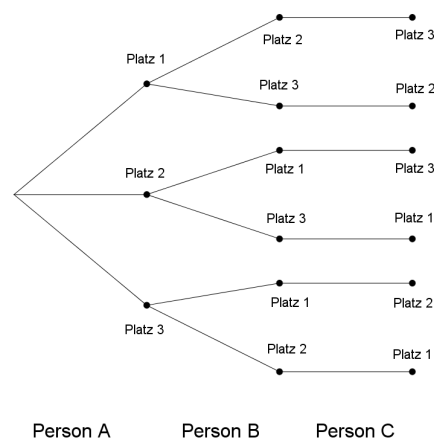


Abbildung 13: Baumdiagramm Permutation

Im Baumdiagramm ergeben sich drei Äste mit jeweils zwei Abzweigungen. Diese spalten sich durch die letzte Person nicht weiter auf. Daher schreibt man:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Bei fünf Sesseln und fünf Personen beträgt die Anzahl der möglichen Reihungen der Personen:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Allgemein lässt sich sagen, dass die Anzahl der Möglichkeiten n verschiedene Objekte anzuordnen $n!$ (n Fakultät) beträgt.

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

6 Verschiedene Arten von Würfeln

In diesem Kapitel werden unterschiedliche Arten von Würfeln vorgestellt. Generell kann man in symmetrische, teilweise symmetrische und unsymmetrische Würfeltypen unterscheiden. Diese werden in Eigenschaften und Besonderheiten, insbesondere auf ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung hin, dargestellt werden.

Zuvor möchte ich noch kurz über die Idealisierung des Würfels in der Mathematik diskutieren. Der sogenannte *ideale Würfel* bezeichnet einen zu 100% fairen Würfel. Dieser besitzt für jede Seitenfläche exakt die gleiche Chance gewürfelt zu werden. In der Realität gibt es solche Würfel nicht. Selbst die Präzisionswürfel im Casino weisen minimale Abweichungen in den Längen ihrer Seitenkanten auf. Der ideale Würfel ist ein Gegenstand, der nicht existiert und bleibt daher ein Gedankenexperiment.

Für mathematische Berechnungen wird aber für einen regelmäßigen Würfel immer der ideale Würfel angenommen. Alle möglichen Einflussfaktoren, die einen realen Würfel zu einer anderen Wahrscheinlichkeitsverteilung bringen, können in einer Berechnung nicht berücksichtigt werden.

In dieser Arbeit werde ich daher immer wenn von einem (Spiel-)Würfel die Rede ist, von einem idealen Würfel ausgehen. Auch teilweise symmetrische Würfel setzte ich als in ihrer Form, Material, etc. als perfekt hergestellt voraus.

6.1 Symmetrische Würfel

6.1.1 Spielwürfel

Der bekannteste unter den Würfeln ist der Spielwürfel. Der Würfel ist eine äußerst symmetrische Figur. Alle Ecken, Kanten und Seiten sind untereinander gleich. Zumeist sind die Kanten gleichmäßig abgerundet, um ein gefahrenloses Spiel zu garantieren. Weiters besitzt er sechs gleich große und quadratische Begrenzungsflächen, die orthogonal aufeinander stehen. Diese sind mit den Ziffern Eins bis Sechs oder mit den der Anzahl entsprechenden Punkten versehen. Die Punkte werden Augen genannt. Eine bestimmte Seite des Würfels zeigt also eine bestimmte Augenzahl. Im Allgemeinen ist eine höhere Augenzahl mehr wert als eine niedrige Augenzahl.

**Abbildung 14: Spielwürfel**

Quelle: https://t3.ftcdn.net/jpg/00/90/69/04/240_F_90690494_c36td4GiLwXDjZjcD3MvNBY5kHoIFCOi.jpg,
[2.3.2017]

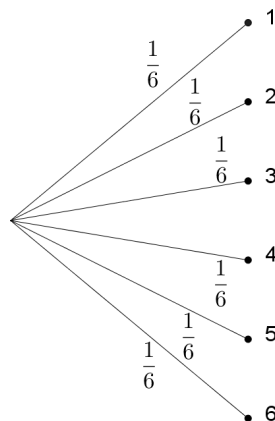
Die Anordnung der Augen erfolgt bei einem klassischen Spielwürfel nach folgendem System. Die Summe der Augenzahlen der jeweils gegenüberliegenden Seiten des Würfels ergibt immer Sieben. Somit liegen sich die Augenzahlen Eins und Sechs, Zwei und Fünf sowie Drei und Vier gegenüber.

$$1 + 6 = 7 \quad 2 + 5 = 7 \quad 3 + 4 = 7$$

Der Spielwürfel eignet sich sehr gut als Zufallsgenerator von Zahlen von Eins bis Sechs, da die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Augenzahl zu würfeln jeweils gleich groß ist. Da der Würfel sechs gleich wahrscheinliche Versuchsausgänge besitzt, beträgt die Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{6}$. Daher wird der Spielwürfel auch als *Laplacegerät* oder als *Laplacewürfel* bezeichnet.

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Das passende Baumdiagramm zum Spielwürfel sieht wie folgt aus.

**Abbildung 15: Baumdiagramm Spielwürfel**

6.1.2 Pokerwürfel

Ebenso wie der Spielwürfel ist auch der Pokerwürfel symmetrisch und besitzt sechs Begrenzungsflächen. Anstatt der Augenzahlen an den Seiten zeigt der Pokerwürfel sechs Kartensymbole der bekannten Spielkarten oder Pokerkarten. Die Symbole heißen Ass, König, Dame, Bube, Zehner und Neuner und sind in dieser Reihenfolge mit absteigender Wertigkeit zu interpretieren.



Abbildung 16: Pokerwürfel

Quelle: https://images-na.ssl-images-amazon.com/images/I/71BiX1II1kL._SL1500_.jpg, [2.3.2017]

Besonders ist, dass der König und der Zehner in Rot und die Dame in Blau dargestellt sind. Alle anderen Symbole sind in Schwarz gehalten.

Genauso wie beim Spielwürfel ist auch beim Pokerwürfel die Anordnung der Symbole geregelt. So liegt das Ass dem Neuner, der König dem Zehner und die Dame dem Buben gegenüber.

Für Gesellschaftsspiele mit Pokerwürfel benötigt man zumeist fünf Pokerwürfel. Man bezeichnet sie dann als einen Satz Pokerwürfel.

Die Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Symbol zu würfeln ist jeweils gleich groß und beträgt so wie beim Spielwürfel jeweils $\frac{1}{6}$. Also ist auch der Pokerwürfel ein Laplacewürfel.

$$P(\text{Ass}) = P(\text{König}) = P(\text{Dame}) = P(\text{Bube}) = P(\text{Zehner}) = P(\text{Neuner}) = \frac{1}{6}$$

Daher ähnelt das passende Baumdiagramm zum Pokerwürfel auch dem des Spielwürfels.

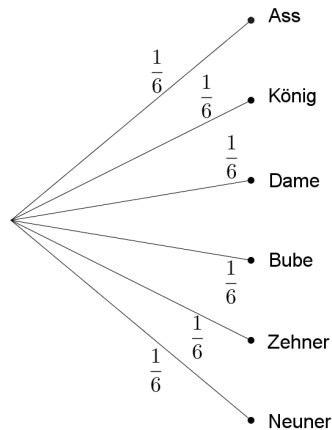


Abbildung 17: Baumdiagramm Pokerwürfel

6.2 Teilweise symmetrische Würfel

Teilweise symmetrische Würfel bezeichnen Zufallsgeräte, die weniger Symmetrie aufweisen als der Laplacewürfel. Beispiele für teilweise symmetrische Würfel sind der Quaderwürfel, auch Riemer-Quader genannt, und der U-Würfel. Dr. Wolfgang Riemer machte erstmals auf ihre außergewöhnliche Verwendung als didaktisches Hilfsmittel aufmerksam. Auf seiner Homepage <http://www.riemer-koeln.de/cmbasic/> findet man dazu weitere Informationen und weiteres Material.

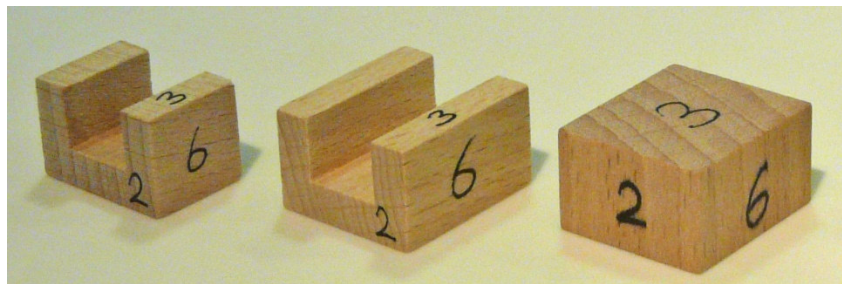


Abbildung 18: kurzer U-Würfel, langer U-Würfel, Quaderwürfel

Quelle: <http://www.riemer-koeln.de/mathematik/quader/dreiquader.jpg>, [2.3.2017]

Auch alltägliche teilweise symmetrische Objekte können zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten herangezogen werden. So können Legosteine sowie Stecknadeln, Bleistifte oder Nusschalenhälften untersucht werden.

6.2.1 Quaderwürfel

Der Quaderwürfel besitzt die Form eines Quaders mit sechs rechteckigen Begrenzungsflächen. Dabei sind gegenüberliegende Flächen deckungsgleich. Die Augenzahlanordnung entspricht dem üblichen Modell des Spielwürfels. Der Quaderwürfel kann sich durch unterschiedliche Kantenlängen in seinem Aussehen verändern. Vergleicht man ihn mit einem Spielwürfel, so scheint der Quaderwürfel in seiner Gestalt wie ein verzerrter Spielwürfel. Man kann sie daher auch als entartete Spielwürfel bezeichnen.

Die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Augenzahl des Quaderwürfels zu würfeln ist nicht für jede mögliche Augenzahl gleich groß. Dennoch kann man zwei Aussagen über die Eigenschaften dieses Würfels bezüglich der Wahrscheinlichkeit machen.

Man kann aus der Eigenschaft der Deckungsgleichheit zweier gegenüberliegender Seiten schließen, dass diese mit gleich hoher Wahrscheinlichkeit gewürfelt werden.

$$P(1) = P(6)$$

$$P(2) = P(5)$$

$$P(3) = P(4)$$

Außerdem gilt, dass größere Seitenflächen höhere Chancen haben gewürfelt zu werden. Kleinere Seitenflächen haben niedrigere Wahrscheinlichkeit gewürfelt zu werden.

Eine häufige Fehlannahme stellt die Vermutung dar, dass die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Augenzahl zu würfeln proportional zu der Größe der zugehörigen Seitenfläche ist. Dies gilt im Allgemeinen nicht. Um die tatsächliche Wahrscheinlichkeitsverteilung herauszufinden, muss die empirische Wahrscheinlichkeit herangezogen werden. Dies wird nochmals beim Spiel *Wahrscheinlichkeitsraten* im **Kapitel 7.3.1** aufgefasst werden.

6.2.2 U-Würfel

Der U-Würfel besitzt, wie auch schon sein Name verrät, eine U-Form. Diese kommt zustande, wenn man aus einem Quaderwürfel einen kleineren Quader längs einer Seitenfläche ausschneidet (vgl. **Abbildung 18**). Dadurch soll eine U-Figur mit überall gleich dicker Materialstärke entstehen. Die Augenzahlanordnung entspricht wieder dem üblichen Modell des

Spielwürfels. Durch unterschiedlich lange Kantenlängen kann sich der U-Würfel in seiner Erscheinung verändern. So entstehen ein kurzer U-Würfel oder ein langer U-Würfel.

Genauso wie beim Quaderwürfel ist die Wahrscheinlichkeiten eine bestimmte Augenzahl zu würfeln nicht gleich groß. Man kann aufgrund der Symmetrie des U-Würfels sagen, dass die gegenüberliegenden u-förmigen Seiten mit gleich hoher Wahrscheinlichkeit gewürfelt werden. Hält man sich an die Augenzahlanordnung wie in **Abbildung 18**, so schreibt man:

$$P(2) = P(5)$$

Außerdem werden die links und rechts an das U angrenzenden Seiten mit gleich hoher Wahrscheinlichkeit gewürfelt werden.

$$P(1) = P(6)$$

Aufgrund des Schwerpunkts des U-Würfels kann man schließen, dass die Basisseite weniger oft auftreten wird als die Seitenflächen der Augenzahl 3.

$$P(4) < P(3)$$

Bei einer der **Abbildung 18** abweichenden Beschriftung der Seitenflächen, muss man die oben getätigten Aussagen über die Wahrscheinlichkeiten entsprechend anpassen.

Über die genaue Wahrscheinlichkeitsverteilung kann die empirische Wahrscheinlichkeit Aufschluss geben.

6.3 Andere spezielle Würfel

6.3.1 Gezinkte Würfel

Gezinkte Würfel sind Spielwürfel, die manipuliert wurden, um die Gewinnchancen zu erhöhen. Vor allem Falschspieler und Betrüger verwenden gezinkte Würfel.

Ein sehr einfacher Versuch einen Würfel zu zinken entspringt schon der Antike. So wurden Würfel gefunden, die statt einem Einser einen zweiten Sechser besaßen. Da sich die beiden Augenzahlen gegenüberliegen, fällt der Betrug nicht so schnell auf.

Eine andere Möglichkeit bietet die Einarbeitung eines schwereren Materials auf einer Seite des Würfels. Aufgrund der Schwerkraft fällt der Würfel öfters auf die Seite, die mit Metall oder

Blei bestückt ist. Dadurch kann man erzielen, dass mehr Sechser als üblich fallen. Ein Nachteil dieser Methode ist, dass für die Würfel ein undurchsichtiges Material verwendet werden muss.

Gezinkte Würfel weisen eine größere Wahrscheinlichkeit auf einen Sechser zu würfeln als jede andere Augenzahl. Im Falle des antiken gezinkten Würfels mit zwei Sechsern verdoppelt sie sich sogar. $P(6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

6.3.2 Astragaloi

Die knöchernen Astragaloi, die seit prähistorischer Zeit Verwendung fanden, können als Vorläufer der modernen Spielwürfel aufgefasst werden. Statt der Unterscheidung in sechs Begrenzungsflächen, weist ein Astragalos nur vier mögliche Wurfresultate auf. Diesen wurden die Werte 1, 3, 4, 6 zugeordnet, daher lautet die Ereignismenge $E = \{1, 3, 4, 6\}$. Interessant dabei ist, dass die Summe gegenüberliegender Seiten, so wie beim modernen Spielwürfel immer 7 ergibt.



Abbildung 19: Werte der Astragaloi

Quelle: Haller: Berühmte Aufgaben der Stochastik, 3.

Die vier Seitenflächen werden im Gegensatz zum Spielwürfel mit unterschiedlich großer Wahrscheinlichkeit geworfen. Der durchschnittliche Astragalos weist folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung auf.⁴⁶

X	1	3	4	6
$P(X)$	0,10	0,35	0,48	0,07

Tabelle 5: Wahrscheinlichkeitsverteilung eines durchschnittlichen Astragalos

⁴⁶ Haller: Berühmte Aufgaben der Stochastik, 5.

Mit der Exaktheit dieser Werte sollte man es nicht so genau nehmen. Robert Ineichen berichtet von einem Versuch mit dem Astragalos eines Schafes, der eine Wahrscheinlichkeit von $P(1) = 0,087$, $P(3) = 0,43$, $P(4) = 0,391$ und $P(6) = 0,092$ aufweist.⁴⁷ Astragaloï von Rindern weisen wiederum andere Werte auf.

Gerundet kann man jedoch sagen, dass $P(1) \approx P(6) \approx 0,1$ und $P(3) \approx P(4) \approx 0,4$ ist.

⁴⁷ Ineichen: Würfel und Wahrscheinlichkeit, 31.

7 Ausgewählte Würfelspiele

In diesem Kapitel werde ich für den Stochastikunterricht ausgewählte Würfelspiele vorstellen. Diese werden zu Beginn in ihren Spielregeln erklärt. Anschließend werden konkrete Fragestellungen zu den Spielen entwickelt anhand deren das Spiel einer mathematischen, insbesondere stochastischen Analyse unterzogen wird.

Außerdem werden Umsetzungsmöglichkeiten für den Schulunterricht vorgestellt werden. Die Voraussetzungen sowie das Lernziel aus dem jeweiligen Spiel werden ebenso angegeben sein.

7.1 Mit einem Spielwürfel

7.1.1 Wahrscheinlichkeitsrennen

Für das Spiel *Wahrscheinlichkeitsrennen* benötigt man einen Spielwürfel und einen Spielstein pro Person. Optional kann ein Würfelbecher verwendet werden. Außerdem ist folgendes Spielfeld notwendig. Im Anhang befindet sich eine größere Druckvorlage.

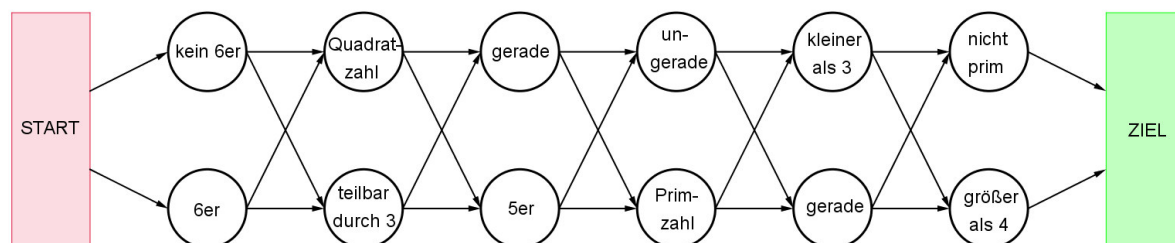


Abbildung 20: Spielfeld *Wahrscheinlichkeitsrennen*

Zu Beginn setzen alle SpielerInnen ihren Spielstein auf das Feld „Start“. Dann wird reihum gewürfelt. Sobald man eine Eins gewürfelt hat, darf man auf eines der beiden nächsten Spielfelder vorrücken. Ab jetzt darf man von einem Feld nur dann zu einem nächsten Feld weiterziehen, wenn man eine Augenzahl würfelt, die die Bedingung, die auf dem aktuellen Feld vermerkt ist, erfüllt. Das jeweils nächste Feld kann man sich entsprechend der weisenden Pfeile aussuchen. Wenn man durch das Würfergebnis die Bedingung nicht erfüllt, bleibt der Spielstein auf dem Feld stehen und man muss warten, bis man erneut an der Reihe ist. Ziel des Spiels ist es möglichst schnell ins Ziel zu gelangen.⁴⁸

⁴⁸ vgl. Kütting: Didaktik der Stochastik, 169.

Mathematische Analyse

Wenn man das Spiel öfters gespielt hat, stellen sich eventuell folgende Fragen.

- Warum habe ich bei manchen Feldern besonders großes Pech und komme nicht weiter?
- Gibt es Felder von denen man leichter weiterkommt als von anderen?
- Gibt es gleichwertige Felder?
- Gibt es eine Felderfolge, die für einen Sieg besonders günstig ist?

Um diese Fragen zu beantworten, rechnet man sich am besten zuerst die Wahrscheinlichkeit aller Bedingungen der Spielfelder aus, um sie anschließend besser miteinander vergleichen zu können.

Die Wahrscheinlichkeit eine Sechs zu würfeln, hat bei einem Spielwürfel nur ein günstiges Wurfresultat. Insgesamt gibt es sechs mögliche Wurfresultate. Nach der Formel $\frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$ ergibt sich dann die Wahrscheinlichkeit. Für alle folgenden Berechnungen wird ebenso diese Formel herangezogen, da man bei einem Spielwürfel davon ausgehen kann, dass kein Ergebnis bevorzugt auftreten wird.⁴⁹

$$P(6er) = \frac{1}{6}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Nicht-Auftretens eines Sechlers kann man mit Hilfe der Gegenwahrscheinlichkeit aus der Wahrscheinlichkeit des Erzielens eines Sechlers berechnen.

$$P(\text{kein } 6er) = 1 - P(6er) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Quadratzahlen entstehen bei der Multiplikation ganzer Zahlen mit sich selbst. Zu den ersten Quadratzahlen zählen $M = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots\}$. Auf einem Würfel lautet die Menge der vorkommenden Quadratzahlen $M_W = \{1, 4\}$.

$$P(\text{Quadratzahl}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Auf einem Würfel sind die Zahlen 3 sowie 6 durch 3 teilbar.

$$P(\text{teilbar durch } 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

⁴⁹ Bosch, Lotto und andere Zufälle, 44.

Die geraden Augenzahlen eines Würfels sind 2, 4 und 6.

$$P(\text{gerade}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit einen Fünfer zu würfeln ist genauso groß wie einen Sechser oder eine andere bestimmte Zahl zu würfeln.

$$P(5\text{er}) = P(6\text{er}) = \frac{1}{6}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer ungeraden Zahl kann man mit Hilfe der Gegenwahrscheinlichkeit aus der Wahrscheinlichkeit des Erzielens einer geraden Zahl berechnen.

$$P(\text{ungerade}) = 1 - P(\text{gerade}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Zu den Primzahlen $\mathbb{P}$ zählen $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$. Die Zahl 1 ist dabei nicht in der Menge der Primzahlen enthalten. Auf einem Würfel lautet die Menge der Primzahlen $\mathbb{P}_W = \{2, 3, 5\}$.

$$P(\text{Primzahl}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Die Augenzahlen die kleiner als 3 sind, lauten 1 und 2.

$$P(\text{kleiner als } 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Nicht-Auftretens einer Primzahl kann man mit Hilfe der Gegenwahrscheinlichkeit aus der Wahrscheinlichkeit des Erzielens einer Primzahl berechnen.

$$P(\text{nicht prim}) = 1 - P(\text{Primzahl}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Die Augenzahlen eines Würfels, die größer als Vier sind, lauten $\{5, 6\}$.

$$P(\text{größer als } 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Nun muss man nur noch die im Spielfeld einander vertikal gegenüberliegenden Spielfelder in der Wahrscheinlichkeit ihrer Bedingungen vergleichen.

$$P(6er) = \frac{1}{6} < \frac{5}{6} = P(\text{kein } 6er)$$

$$P(\text{Quadratzahl}) = \frac{1}{3} = P(\text{teilbar durch } 3)$$

$$P(\text{gerade}) = \frac{1}{2} > \frac{1}{6} = P(5er)$$

$$P(\text{ungerade}) = \frac{1}{2} = P(\text{Primzahl})$$

$$P(\text{kleiner als } 3) = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = P(\text{gerade})$$

$$P(\text{nicht prim}) = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = P(\text{größer als } 4)$$

Dabei kommt man zu dem Ergebnis, dass die Spielfelder „kein 6er“, „gerade“, und „nicht prim“ zu bevorzugen sind. Sie treten mit einer höheren Wahrscheinlichkeit auf als die Bedingungen der ihnen gegenüberliegenden Felder. Insbesondere das Ereignis „kein 6er“ tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{6}$ am häufigsten auf. Von diesem Feld kommt man also besonders schnell weiter.

Bei den Feldern „Quadratzahl“ und „teilbar durch 3“ sowie bei „ungerade“ und „Primzahl“ ist es egal, wie man sich entscheidet. Die Wahrscheinlichkeit der Bedingungen der sich gegenüberliegenden Felder ist jeweils gleich hoch. Die genannten Felder sind also gleichwertig.

Die Felder „6er“, „5er“, „kleiner als 3“ und „größer als 4“ sind zu vermeiden. Diese Ereignisse weisen im Gegensatz zu den ihnen gegenüberliegenden Feldern eine geringere Wahrscheinlichkeit auf. Insbesondere treten die Ereignisse „6er“ und „5er“ mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ am wenigsten oft auf. Um vom Startfeld auf das erste Spielfeld ziehen zu können, muss man einen Einser würfeln. Auch dieses Ereignis tritt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ im Gegensatz zu den anderen Spielfeldern selten auf. Diese Felder sind für das Weiterziehen zum nächsten Spielfeld also besonders ungünstig.

Dementsprechend kann man für den Sieg besonders günstige Felderfolgen angeben. In **Abbildung 21** sind diese durch die rote Farbe markiert. Schwarz gehaltene Felder sind zu vermeiden.

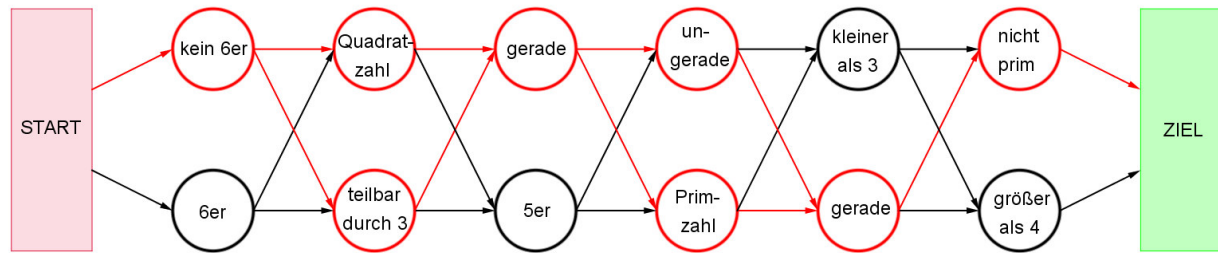


Abbildung 21: günstige Felderfolgen beim *Wahrscheinlichkeitsrennen*

Nun stellen sich mir noch zwei Fragen. Wie hoch kann die Wahrscheinlichkeit sein, dass man in jeder Runde ein Feld weiterkommt und sozusagen im Durchmarsch bis ans Ziel gelangt? Und wie hoch ist im Gegensatz dazu die Wahrscheinlichkeit, wenn man alle ungünstigen Felder benutzt?

Um eine möglichst hohe Wahrscheinlichkeit im Durchmarsch zu gewinnen zu erhalten, wird eine günstige (rote) Felderfolge gewählt. Die dabei erzielten Würfe würden dann zum Beispiel folgende Bedingungen erfüllen:

„1er“ – „kein 6er“ – „teilbar durch 3“ – „gerade“ – „ungerade“ – „gerade“ – „nicht prim“

$$P(\text{Durchmarsch günstige Felder}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{1728} \approx 0,002894$$

Eine Felderfolge, die alle ungünstigen Felder beinhaltet, könnte so aussehen:

„1er“ – „6er“ – „teilbar durch 3“ – „5er“ – „Primzahl“ – „kleiner als 3“ – „größer als 4“

$$P(\text{Durchmarsch ungünstige Felder}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{11664} \approx 0,00008573$$

Im Vergleich erkennt man, dass ein Durchmarsch bei günstiger Felderwahl mit 0,2894% viel wahrscheinlicher ist als ein Durchmarsch bei ungünstiger Felderwahl mit 0,008573%. Genauer genommen ist ein Durchmarsch bei günstiger Felderwahl zirka 33-mal so wahrscheinlich.

Didaktische Reflexion

Im Stochastikunterricht eignet sich das Spiel für ein spielerisches Erlernen der Formel

$\frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$. Durch das Würfelspiel können die Lernenden diese Formel intuitiv

erkennen. Den SchülerInnen wird außerdem eine Möglichkeit geboten sich selbst auf eine interaktive Art und Weise mit dem Laplacegerät des Spielwürfels auseinanderzusetzen.

Voraussetzung für das Spiel ist die Kenntnis über die Begriffe, die in den Bedingungen der Felder vermerkt sind. Bei Bedarf sollten diese mit den SchülerInnen vor dem Spiel kurz wiederholt werden. Generell sollten sie jedoch aus der Unterstufe bekannt sein und nichts Neues darstellen.

Immer zwei SchülerInnen sollen mit einem Spielfeld und einem Würfel das *Wahrscheinlichkeitsrennen* durchspielen. Das hat den Vorteil, dass das Spiel nicht so lange dauert und daher auch mehrmals hintereinander gespielt werden kann. So kommen alle SchülerInnen öfters selbst an die Reihe und können dadurch mehr Erfahrungen mit den einzelnen Spielfeldern des Spielplans machen. Ich denke, dass durch das Spiel der Ehrgeiz der SchülerInnen angeregt wird und sie daher bei einer Niederlage sowieso eine Revanche fordern werden. Es ist wichtig für diese Phase des spielerischen Auseinandersetzens genügend Zeit einzuräumen. In einer Viertelstunde sollten sich zirka drei Spielrunden pro Spielpaar ausgehen.

Anschließend werden die SchülerInnen über ihre Beobachtungen während des Spiels befragt. Es soll erkannt werden, dass man nicht von allen Feldern gleich gut weiterkommt. Die Lernenden können bestimmt berichten, bei welchen Feldern sie länger verweilen bis die gewünschte Augenzahl gewürfelt wurde. Um diese Beobachtungen genauer zu untersuchen wird dann ein Arbeitsblatt zum Spiel ausgeteilt. Eine Druckvorlage befindet sich im Anhang. Es sollen zu jeder Bedingung die günstigen Augenzahlen aufgezählt werden. Außerdem werden die Anzahl der günstigen Augenzahlen sowie aller möglichen Augenzahlen aufgeschrieben. In der letzten Spalte soll durch Anleitung der Lehrperson oder als Ergebnis aus einer Diskussion die Wahrscheinlichkeit mittels $\frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$ berechnet werden.

Die abschließenden Fragen dienen der Interpretation und Reflexion der Ergebnisse der Berechnungen. Diese sind am besten ohne Anleitung der Lehrperson zu beantworten.

Arbeitsblatt: Wahrscheinlichkeitsrennen

X	günstige Augenzahlen	Anzahl der günstigen Augenzahlen	Anzahl der möglichen Augenzahlen	$P(X)$
Quadratzahl				
teilbar durch 3				
gerade				
5er				
ungerade				
Primzahl				
kleiner als 3				
gerade				
nicht prim				
größer als 4				

- Gibt es Felder von denen man schwerer weiterkommt als von anderen?
Welche?.....
- Gibt es Felder von denen man leichter weiterkommt als von anderen?
Welche?.....
- Gibt es gleichwertige Felder? Welche?
.....
- Gib eine Felderfolge an, die für einen Sieg besonders günstig ist!
.....
- Gib eine Felderfolge an, die für einen Sieg besonders ungünstig ist!
.....

Wichtig ist im Anschluss an das Spiel zu betonen, dass das Auftreten aller Augenzahlen bei einem Spielwürfel gleich wahrscheinlich ist. Bei unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit der

Ereignisse gilt $\frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$ nicht. Das kann sehr gut anhand eines Quaderwürfels demonstriert werden.

Das Berechnen eines Durchmarschs bedarf der Multiplikationsregel, die zu diesem Zeitpunkt noch nicht zwingend bekannt sein muss. Daher kann dieses Beispiel zu einem geeigneten Zeitpunkt im Unterricht wieder aufgegriffen werden.

7.1.2 Zweiundzwanzig

Für dieses Spiel benötigt man einen Spielwürfel und einen Würfelbecher. Es können beliebig viele SpielerInnen daran teilnehmen.

Es wird reihum gewürfelt. Dabei darf jede Person so oft würfeln bis die Summe der gewürfelten Augenzahlen 22 erreicht oder überschreitet. Ziel des Spiels ist es dadurch möglich nahe an die Augensumme 22 heranzureichen oder diese sogar zu erreichen. Wer diesen Wert jedoch überschreitet, scheidet aus. Außerdem scheidet diejenige Person aus, die am weitesten von 22 entfernt ist. Die übrigen SpielerInnen würfeln weiter bis eine Person als SiegerIn hervorgeht.

Eine abgeänderte Variante des Spiels *Zweiundzwanzig* stellt das Würfelspiel *Fünfzehn* dar. Dabei wird die nicht zu überschreitende Zahl von 22 auf 15 abgeändert. Alle anderen Spielregeln bleiben erhalten.

Mathematische Analyse

Das Spiel soll anhand der folgenden Wurfreihen genauer untersucht werden.

Anna, Bernhard, Claudia und Daniel spielen *Zweiundzwanzig*.

- Anna würfelte bereits fünfmal. Dabei ergab sich folgende Wurfreihe: 3, 1, 5, 4, 6. Würdest du Anna raten, nochmals zu würfeln?
- Als nächstes würfelt Bernhard. Er erreicht nacheinander die Augenzahlen 6, 6, 2, 5. Soll er nochmals würfeln? Hat er bei einem erneuten Wurf weniger Gewinnchancen als Anna?
- Claudias Wurfergebnisse: 5, 5, 5, 5. Soll sie nochmals würfeln?
- Daniels Wurfergebnisse: 3, 4, 2, 3, 1, 5. Soll er nochmals würfeln?

Bei den Ziffernsummen Eins bis 16 ist es immer empfehlenswert nochmals zu würfeln. Alle möglichen Wurfergebnisse führen zu einer Augenzahlsumme von höchstens 22, da $16 + 6 = 22$.

Erst wenn eine höhere Summe erzielt wurde, muss man abwägen, ob sich ein erneuter Wurf lohnt. Dazu muss man sich die Anzahl der gewünschten Augenzahlen, je nach derzeitigem Spielstand ansehen. Insgesamt gibt es bei einem Spielwürfel sechs mögliche Wurfergebnisse.

Die jeweilige Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann aus der Formel $\frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der mögliche Fälle}}$.

	Günstige Augenzahl(en)	Anzahl der günstigen Augenzahlen	$P(\text{Augensummeist höchstens 22})$	%
Augensumme 17	1, 2, 3, 4, 5	5	$\frac{5}{6}$	83,33%
Augensumme 18	1, 2, 3, 4	4	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	66,67%
Augensumme 19	1, 2, 3	3	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	50,00%
Augensumme 20	1, 2	2	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	33,33%
Augensumme 21	1	1	$\frac{1}{6}$	16,67%

Tabelle 6: Berechnungen zu Zweiundzwanzig

Aus der Tabelle erkennt man, dass mit steigender Augensumme die Anzahl der günstigen Augenzahlen bei einem erneuten Wurf stets sinken. Dadurch sinkt auch die Wahrscheinlichkeit die Augensumme den Spielregeln entsprechend noch mehr an 22 anzunähern.

- Annas Wurfreihe 3, 1, 5, 4, 6 ergibt derzeit die Augensumme 19. In der Hälfte aller Fälle wird sie durch einen erneuten Wurf verlieren, da sie die Summe 22 überschreitet.
- Auch Bernhards Wurfergebnisse führen zur Summe 19. Für ihn gelten dieselben Chancen wie für Anna. Die bisherigen Wurfergebnisse haben keinen Einfluss auf seine Gewinnchancen.
- Claudia würfelte vier Fünfer und hat somit die Augensumme 20 erreicht. Aus der Tabelle kann man entnehmen, dass sie sich mit einem weiteren Wurf nur in einem Drittel (33,33%) der Fälle verbessern würde. Ein erneuter Wurf stellt ein hohes Risiko dar. Daher würde ich ihr davon abraten.

- d) Daniel würfelte bisher 3, 4, 2, 3, 1, 5. Mit der Augensumme 18 liegt er derzeit am weitesten von 22 entfernt. Um nicht auszusteigen, ist ein erneuter Wurf jedes Risiko wert. Aber aus der Tabelle erkennt man, dass er gute Chancen hat, die Augensumme 22 nicht zu überschreiten. Seine Chance sich zu verbessern liegt bei 66,67%. Er sollte also auf jeden Fall nochmals würfeln.

Didaktische Reflexion

Das Spiel *Zweiundzwanzig* wird mit einem Laplace-Würfel gespielt, bei dem alle Versuchsausgänge gleich wahrscheinlich sind. Daher stellt das Spiel eine Anwendung der Formel $\frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$ dar. Ich würde das Spiel nicht am Anfang der Wahrscheinlichkeitsrechnung präsentieren. Die SchülerInnen sollten bereits mit den Begriffen relativer Anteil und Wahrscheinlichkeit vertraut sein.

In der Schule lässt sich dieses Spiel einfach und schnell durchführen. Die Lernenden sollen in Gruppen zu jeweils fünf bis sechs Personen würfeln. Für ausreichend Spielwürfel sollte im Vorhinein gesorgt werden.

Es wird sich schnell bemerkbar machen, dass man ein Risiko eingeht, wenn man bei der Zwischensumme 19 oder höher nochmals würfeln will. Intuitiv wägen die SchülerInnen ihre Chancen ab und entscheiden dann, ob sie noch einen Wurf wagen sollen. Von Vorteil ist, dass die Entscheidungen der MitschülerInnen ebenso beobachtet und beurteilt werden. Somit können eine Vielzahl von Eindrücken gemacht werden. Insgesamt soll das Spiel zirka zweimal durchgeführt werden.

In einer anschließenden Diskussion können die SchülerInnen ihre Beobachtungen teilen und eventuell Vermutungen oder Behauptungen aufstellen. Zum Beispiel sollte erkannt werden, dass es bei den Zwischensummen kleiner gleich 16 immer empfehlenswert ist, nochmals zu würfeln. Außerdem kann die Vermutung geäußert werden, dass eine höhere Augensumme auch ein höheres Risiko mit sich bringt. Um die Vermutungen zu verifizieren oder falsifizieren, wird nach Anleitung der Lehrperson ein Raster, so wie es in **Tabelle 6** zu sehen ist, erstellt. Dieses soll in den Gruppen ausgefüllt werden. Die erhaltenen Ergebnisse werden im Anschluss verglichen und gemeinsam reflektiert.

Anhand von plakativen Beispielen kann, so wie es oben gezeigt wurde, nun nochmals die Entscheidungsfindung bei einer bestimmten Wurfreihe untersucht werden.

Außerdem kann man gut unabhängige Ereignisse anhand dieses Spiels erklären. Da Anna und Bernhard die gleiche Zwischensumme haben, sind ihre Chancen bei einem erneuten Wurf gleich groß. Es spielt keine Rolle, dass Bernhard zuvor höhere Augenzahlen geworfen hat. Ein Spielwürfel weist bei jedem Versuch eine gleich hohe Wahrscheinlichkeit seiner Seitenflächen auf. Die bekannten Ereignisse haben keinen Einfluss auf einen weiteren Würfelwurf.

7.1.3 Mensch, ärgere dich nicht

Das Spiel *Mensch, ärgere dich nicht* ist ein Gesellschaftsspiel mit einem Spielwürfel für vier Personen. Zu Beginn des Spiels stehen die vier Figuren der SpielerInnen auf einem Startfeld. Man darf jedoch erst starten, wenn man eine Sechs gewürfelt hat. Dazu hat man drei Versuche. Dann ist die nächste Person an der Reihe.

Zum Startvorgang des Spiels sollen folgende Fragen geklärt werden:

- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 30 Würfe bis zum Start benötigt werden?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 12 Würfe bis zum Start benötigt werden?
- Wie lange dauert es durchschnittlich bis ein Sechser geworfen wird?⁵⁰

Mathematische Analyse

Bei einem einmaligen Wurf mit einem Spielwürfel erhält man mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ einen Sechser. Man kann dann also gleich nach dem ersten Wurf die Spielfigur vom Startfeld auf das Spielfeld stellen.

Wurde beim ersten Wurf kein Sechser erzielt, so ist ein weiterer Wurf nötig. Mit der Gegenwahrscheinlichkeit von $\frac{5}{6}$ erhält man beim ersten Wurf keinen Sechser, sondern eine andere Augenzahl. Ein Sechser erscheint beim darauffolgenden Wurf nun wieder in $\frac{1}{6}$ der Fälle.

⁵⁰ Bosch, Lotto und andere Zufälle, 86.

Die Wahrscheinlichkeit genau zwei Versuche zu brauchen bis ein Sechser erscheint, ist nach der Produktregel also:

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} \approx 0,13889$$

Man braucht genau drei Würfe, wenn bei den ersten beiden Würfeln kein Sechser gewürfelt wird, aber beim dritten Wurf die Sechs fällt. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt:

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 0,11574$$

Wenn man genau vier Versuche braucht bis eine Sechs erscheint, sieht die Rechnung folgendermaßen aus:

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{125}{1296} \approx 0,09645$$

Allgemein kann man sagen, dass für n erforderliche Würfe, die bis zum Auftreten einer Sechs nötig sind, $n - 1$ Würfe keine Sechs ergaben und erst beim n -ten Wurf eine Sechs erschienen ist. Dabei ist die Variable n eine natürliche Zahl ($n \in \mathbb{N}$). Die Wahrscheinlichkeit, dass erstmals beim n -ten Wurf eine Sechs fällt, ist daher:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}, n \in \mathbb{N}$$

Setzt man nun $n = 30$, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass es genau 30 Versuche dauert, bis eine Sechs fällt.

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{30-1} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{29} \cdot \frac{1}{6} \approx 0,0008425$$

Nun wollen wir herausfinden mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens 12 Würfe notwendig sind, um erstmals eine Sechs zu erhalten. Eine Möglichkeit das zu berechnen, wäre mit Hilfe der Gegenwahrscheinlichkeit. Dazu müsste man die Wahrscheinlichkeiten für die benötigten Anzahlen von 1 bis 11 ausrechnen und addieren. Anschließend wird die Gegenwahrscheinlichkeit gebildet, indem man die erhaltene Summe von 1 abzieht. Diese

Variante wird vor allem mit höheren Zahlen immer umfangreicher und aufwendiger. Daher ist die folgende Überlegung zu bevorzugen⁵¹:

Mindestens 12 Versuche sind erforderlich, wenn die ersten 11 Versuche erfolglos waren und keine Sechs gefallen ist. Ob allerdings beim 12. Wurf eine Sechs erscheint oder nicht, ist nicht von Belangen. Mindestens 12 Versuche wurden dann jedenfalls benötigt. Die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens 12 Versuche für das Auftreten einer Sechs benötigt, ist also:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0,13459$$

Allgemein kann man sagen, dass mindestens n Würfe bis zum Auftreten einer Sechs erforderlich sind, wenn $n - 1$ Würfe keine Sechs ergaben. Dabei ist die Variable n wieder eine natürliche Zahl ($n \in \mathbb{N}$). Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Um herauszufinden, wie lange es durchschnittlich dauert bis ein Sechser geworfen wird, muss man sich den Erwartungswert berechnen.

X ...Anzahl der Würfe bis ein Sechser fällt

Hier sind nochmals die zuvor ausgerechneten Wahrscheinlichkeiten, eine bestimmte Anzahl von Würfeln zu brauchen bis eine Sechs auftritt, aufgelistet.

x_i	1	2	3	4	5	usw.
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$	

Tabelle 7: Wahrscheinlichkeit bei einer bestimmten Anzahl von Würfeln eine Sechs zu würfeln

Nun setzt man in die Formel des Erwartungswerts einer diskreten Zufallsvariable ein.

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \dots$$

⁵¹ Bosch, Lotto und andere Zufälle, 87.

Durch Herausheben des Faktors $\frac{1}{6}$ kommt man auf:

$$E(X) = \frac{1}{6} \left[1 + 2 \cdot \frac{5}{6} + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots \right]$$

Nun setzt man zur besseren Übersicht $x := \frac{5}{6}$. Dann erhält man:

$$E(X) = \frac{1}{6} [1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots]$$

Dann erkennen wir, dass die Summanden in der Klammer die Ableitung von $(x^0)' + (x^1)' + (x^2)' + (x^3)' + (x^4)' + \dots$ ist. Daher kann man schreiben:

$$E(X) = \frac{1}{6} [1 + x + x^2 + x^3 + \dots]'$$

Bei der Summe, die nun in der Klammer steht, handelt es sich um eine geometrische Reihe. Diese Potenzreihe besitzt den Konvergenzradius 1. Potenzreihen kann man gliedweise differenzieren - der Konvergenzradius ändert sich dabei nicht.

Falls $|x| < 1$ gilt, konvergiert die Reihe und es gilt für diese $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. x entspricht dieser Voraussetzung, da $|\frac{5}{6}| < 1$ gilt. Daher kann man nun die Formel für die geometrische Reihe anwenden.

$$E(X) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1-x} \right)'$$

Durch Ableiten des Ausdrucks $\left(\frac{1}{1-x} \right)$ kommt man auf:

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

Nun setzt man statt x wieder $\frac{5}{6}$ ein und erhält:

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 6$$

Man kommt nun zu dem Ergebnis, dass im Durchschnitt sechs Würfe erforderlich sind, bis zum ersten Mal ein Sechser auftritt.

Didaktische Reflexion

Das Spiel *Mensch, ärgere dich nicht* eignet sich sehr gut als Einbettung stochastischer Berechnungen. Die meisten SchülerInnen werden das Spiel aus ihrer Kindheit kennen und Erfahrungen mit dem Spiel haben. Daraus ergibt sich der Vorteil, dass das Spiel nicht in der Schule durchgeführt werden muss und man sich direkt in die Rechnung stürzen kann. Man darf allerdings nicht davon ausgehen, dass die Spielregeln allen SchülerInnen geläufig sind und aus diesem Grund sollten die relevanten Spielregeln gemeinsam wiederholt bzw. erarbeitet werden.

Als Voraussetzung für die Berechnungen gelten der Umgang mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff und der Multiplikationsregel. Ich würde zur Erarbeitung des Beispiels das gemeinsame Gespräch zwischen der Lehrperson und den SchülerInnen favorisieren. Aufgrund der nötigen Zwischenschritte wird eine zusätzliche Erklärung einzelner Rechenschritte durch die Lehrperson unverzichtbar. Vorschläge, Kommentare und Fragen von der Seite der SchülerInnen sollen natürlich erwünscht sein.

Im ersten Teil der Aufgabe kommt man auf das Gegenereignis zu sprechen. Die Wahrscheinlichkeit keine Sechs zu würfeln beträgt $1 - P(\text{Sechser}) = \frac{5}{6}$. Dies bietet eine gute Möglichkeit die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses zu wiederholen. Um die Lösung möglichst eingehend für die SchülerInnen darzustellen, ist es notwendig zuerst die Wahrscheinlichkeit genau beim ersten Wurf einen Sechser zu erhalten, zu berechnen. Anschließend wird die Wahrscheinlichkeit, dass genau beim zweiten Wurf erstmals ein Sechser kommt, ausgerechnet. Auch für genau den dritten und vierten Wurf soll dies berechnet werden, damit die SchülerInnen eine Gesetzmäßigkeit erkennen. Diese kann dann durch einen Term ausgedrückt werden. Nun kann man den ersten Teil der Aufgabe problemlos lösen, indem man die gewünschte Wurffanzahl einsetzt.

Die zweite Aufgabe zum Spiel *Mensch, ärgere dich nicht* stellt die Berechnung dar, wie viele Würfe mindestens bis zum Auftreten eines Sechсers notwendig sind. Hier kann demonstriert werden, dass die Anwendung der Gegenwahrscheinlichkeit eine unter anderem sehr aufwändige Möglichkeit des Lösens darstellt. Zum besseren Verständnis kann man mit den Überlegungen wieder beim ersten Wurf beginnen. Wie wahrscheinlich ist es, dass man mindestens einen Wurf braucht, um einen Sechser zu würfeln? Auf diese Frage sollten alle SchülerInnen die Wahrscheinlichkeit 1 als die richtige Lösung nennen. Es handelt sich um ein sicheres Ereignis. Bei der Notwendigkeit von mindestens zwei Würfeln hat man beim ersten Wurf keinen Sechser geworfen und die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt daher $\frac{5}{6}$. Die

SchülerInnen sollen durch diese Überlegungen abermals eine Gesetzmäßigkeit erkennen und den passenden Term aufstellen. Die Lösung zur zweiten Teilaufgabe erhält man nun durch Einsetzen.

Beim Vergleich der ersten und zweiten Aufgabenstellung kann thematisiert werden, dass die Wahrscheinlichkeit beim 10. Versuch einen Sechser zu Würfeln kleiner ist, als mindestens 10 Versuche zu brauchen, bis ein Sechser kommt. Dies kann zum einen mit den entsprechenden Termen begründet werden.

$$P(\text{6er erstmals beim } n - \text{ten Versuch}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} < \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = P(\text{min. } n \text{ Versuche})$$

Wichtig ist jedoch die inhaltliche Einsicht für das Verständnis. Die Bedingung des Eintretens des Ereignisses „Sechser“ beim n -ten Versuch stellt eine Einschränkung dar. Das Ereignis „Sechser nach mindestens n Versuchen“ legt nicht fest, wann der Sechser fallen wird.

Für den dritten Teil der Aufgabe ist der Erwartungswert zu berechnen. Dieser sollte aufgrund der dabei entstehenden geometrischen Reihe bereits bekannt sein. Auch mit geometrischen Reihen und dem Differenzieren sollten die SchülerInnen vertraut sein. Da es sich hierbei um eine Berechnung handelt, die viele Schnittstellen zu anderen Themenbereichen darstellt, sollte diese nur im kleinen Rahmen, eventuell mit einer Wahlpflichtfachgruppe, durchgeführt werden. Für den generellen Mathematikunterricht halte ich dieses Beispiel für zu kompliziert. Das Aufstellen des Erwartungswerts sollte aber durch die vorangegangenen Berechnungen aus dem ersten Teil keine Probleme darstellen. Das Ergebnis der Berechnung könnte einige SchülerInnen verwundern. Daher ist auch die Reflexion des Ergebnisses bezüglich des Beispiels bedeutsam.

7.2 Mit zwei Spielwürfeln

7.2.1 Warten auf die Doppelsechs

Ein Würfelspieler würfelt gleichzeitig mit zwei Spielwürfeln auf einem Tisch. Eine andere Person kommt zum selben Tisch, an dem der Würfelspieler sitzt, und meint: „Ich möchte mit

dir um den Inhalt meiner Brieftasche wetten, dass du es nicht schaffst innerhalb einer dir selbst vorgegebenen Anzahl von Würfeln mit beiden Würfeln eine Sechs zu erzielen.“

Berechne, wie viele Versuche der Würfelspieler sich selbst vorgeben sollte, damit die Wette für ihn erfolgsversprechend ist?⁵²

Mathematische Analyse

Um die Problemstellung näher zu erläutern, kann man sich zunächst überlegen, wie die Wette aussehen würde, wenn man mit nur einem Spielwürfel spielt. In **Kapitel 7.1.3** wurde durch die Berechnung anhand des Spiels *Mensch, ärgere dich nicht* bereits gezeigt, dass der Erwartungswert für das erstmalige Würfeln einer Sechs mit einem Würfel gleich 6 ist. Man kann also guten Gewissens darauf wetten, dass innerhalb von vier Würfeln eine Sechs erscheint. Die Chance dafür ist größer als 50% und daher gewinnt man bei dieser Wette eher als dass man verliert. Nur wie ist das mit zwei Würfeln?

Schon im 17. Jahrhundert beschäftigte sich Chevalier de Méré (1607 - 1684) mit dieser Fragestellung. Seine Überlegungen waren die folgenden: Mit einem Würfel eine Sechs zu würfeln beträgt $\frac{1}{6}$, bei zwei Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit zwei Sechser zu würfeln $\frac{1}{36}$. Mit einem Würfel eine Sechs zu erzielen ist also sechsmal so wahrscheinlich. Daher müssten auch sechsmal so viele Würfe notwendig sein, um die Wette erfolgsversprechend zu machen, folgte er. Das wären dann 24 Würfe, die man sich vorgeben müsste.⁵³ Anhand von Wurfreihen erkennt man aber, dass diese Überlegungen falsch sind.

Entgegen dieser Darstellung, war sich de Méré sehr wohl über den korrekten mathematischen Rechenweg bewusst. Er wusste auch, dass eine Vorgabe von 24 Würfeln zu einer Wahrscheinlichkeit führt, die kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.

Die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfel zwei Sechser zu erhalten, beträgt $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$. Die Wahrscheinlichkeit keine Doppelsechs zu würfeln beträgt nach der Gegenwahrscheinlichkeit daher $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$.

⁵² Bewersdorff: Glück, Logik und Bluff, 4.

⁵³ Bewersdorff: Glück, Logik und Bluff, 4.

Gibt sich der Würfelspieler nach de Mérés Vorschlag die Zahl 24 vor, so verliert er, wenn die ersten 24 Versuche erfolglos waren und keine Doppelsechs gefallen ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt:

$$\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,5086$$

Die Zahl 0,5086 ist größer als $\frac{1}{2}$ und daher ist ein Verlust wahrscheinlicher als ein Gewinn des Würfelspielers. Er muss sich also eine höhere Zahl als 24 vorgeben. Aber welche?

Gehen wir das Beispiel etwas allgemeiner an. Das gewünschte Ereignis A tritt mit Wahrscheinlichkeit p auf. Insgesamt wird eine Versuchsreihe mit n Versuchen durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass das gewünschte Ereignis mindestens einmal in der Versuchsreihe auftritt ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass nicht nur die unerwünschten Ereignisse auftreten. Dass nur unerwünschte Ereignisse auftreten, ist gleichbedeutend mit „Ereignis A tritt nicht auf“.

$$P(\text{Ereignis } A \text{ tritt mindestens einmal auf}) = 1 - P(\text{Ereignis } A \text{ tritt nicht auf})$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A bei n Versuchen nicht auftritt, wurde bereits oben berechnet und lautet in der allgemeinen Form $(1 - p)^n$. Daraus ergibt sich insgesamt $P(\text{Ereignis } A \text{ tritt mindestens einmal auf}) = 1 - (1 - p)^n$. Um eine günstige Gewinnchance zu erhalten, muss diese Wahrscheinlichkeit mindestens $\frac{1}{2}$ betragen. Daraus ergibt sich die folgende Ungleichung.

$$1 - (1 - p)^n > \frac{1}{2}$$

Um diese zu lösen, wird im ersten Schritt auf beiden Seiten 1 subtrahiert und anschließend mit (-1) multipliziert. Da man mit einer negativen Zahl multipliziert, dreht sich das Ungleichheitszeichen um. Man erhält:

$$(1 - p)^n < \frac{1}{2}$$

Im nächsten Schritt wendet man den Logarithmus an.

$$\ln(1 - p) \cdot n < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Nach den Logarithmusrechenregeln gilt $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1) - \ln(2)$ und $\ln(1) = 0$. Dividiert man anschließend durch $\ln(1 - p)$, muss man beachten, dass dieser Ausdruck negativ ist. Daher dreht sich das Ungleichheitszeichen erneut um. Damit sowohl der Ausdruck im Zähler als auch der im Nenner positiv ist, schreiben wir das negative Vorzeichen in den Nenner.

$$n > \frac{\ln(2)}{-\ln(1-p)}$$

Dieses Ergebnis kann man wie folgt interpretieren. Die Wahrscheinlichkeit, dass A mindestens einmal auftritt, ist dann erfolgsversprechen, wenn die Anzahl der Versuche n größer $\frac{\ln(2)}{-\ln(1-p)}$ gewählt wird, wobei p der Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Ereignisses A entspricht.

Um auf das ursprüngliche Würfelbeispiel zurückzukommen, setzt man für p nun wieder $\frac{1}{36}$ ein, was der Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Doppelsechs entspricht. So erhält man durch Berechnung $n > 24,605$.

$$n > \frac{\ln(2)}{-\ln\left(1 - \frac{1}{36}\right)} = \frac{\ln(2)}{-\ln\left(\frac{35}{36}\right)} \approx 24,605$$

Der Würfelspieler muss sich also eine Versuchsanzahl vorgeben, die mindestens 25 ist. Je höher die vorgegebene Versuchsanzahl, umso höher ist die Gewinnchance des Würfelspielers.

Bei vorgegebenen 25 Versuchen, beträgt die Gewinnchance des Würfelspielers:

$$P(\text{Ereignis } A \text{ tritt mindestens einmal auf}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{25} \approx 0,5055$$

Bei vorgegebenen 30 Versuchen, beträgt die Gewinnchance des Würfelspielers:

$$P(\text{Ereignis } A \text{ tritt mindestens einmal auf}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{30} \approx 0,5705$$

Bei vorgegebenen 40 Versuchen, beträgt die Gewinnchance des Würfelspielers:

$$P(\text{Ereignis } A \text{ tritt mindestens einmal auf}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{40} \approx 0,6759$$

In **Abbildung 22** sind die Wahrscheinlichkeiten innerhalb einer vorgegebenen Wurfanzahl eine Doppelsechs zu erzielen in ein Koordinatensystem eingetragen. Dabei wurden die Wahrscheinlichkeiten für die Versuchsanzahlen kleiner gleich 180 berechnet.

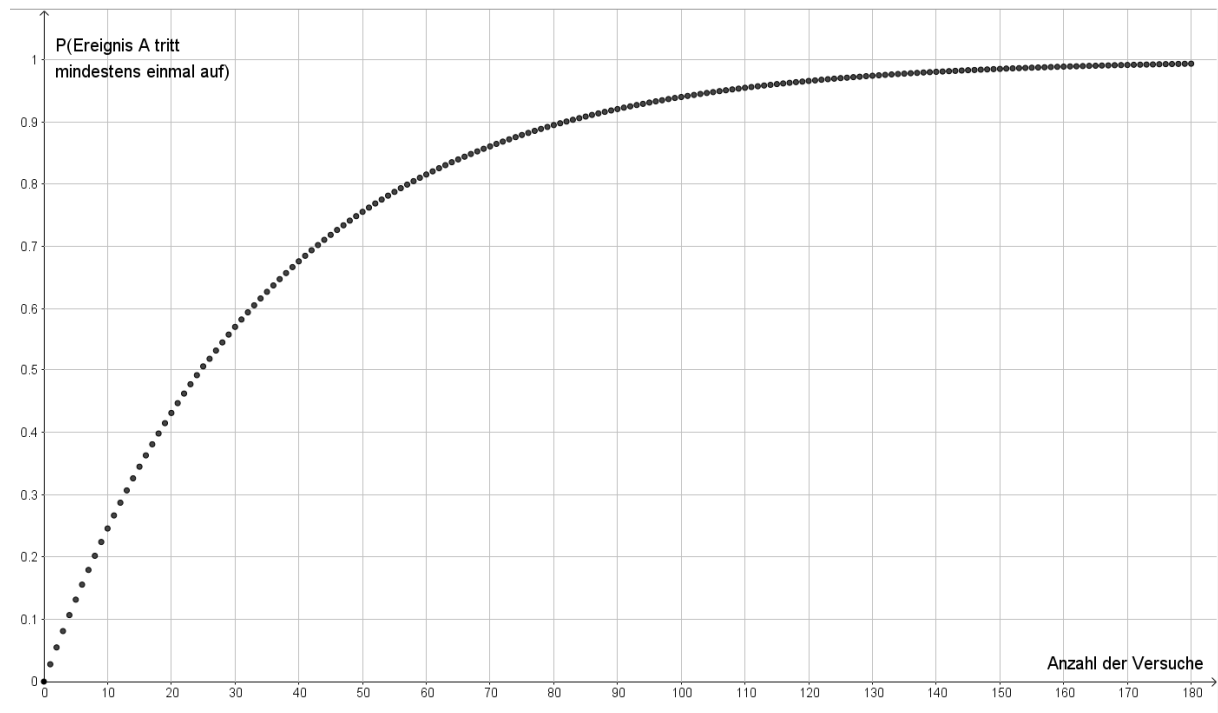


Abbildung 22: Auftretenswahrscheinlichkeit einer Doppelsechs in Abhängigkeit der Wurffanzahl

Anhand des Koordinatensystems erkennt man sehr schön, dass die Wahrscheinlichkeit einer Doppelsechs mit der Anzahl der Versuche steigt. Dabei wächst sie zu Beginn sehr schnell an und nähert sich dann unendlich weit dem Wert 1 an. Man erkennt außerdem, dass bei 24 Versuchen die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Doppelsechs unter 0,5 und bei 25 Versuchen über 0,5 liegt.

Didaktische Reflexion

Die Einbettung dieses mathematischen Problems in den historischen Hintergrund ist eine gute Möglichkeit, um das Interesse der SchülerInnen zu wecken. Auch die widersprüchliche Vermutung de Mérés kann besprochen und nachgerechnet werden. Die Berechnungen sollen die Lösung des historischen Problems darstellen.

Wichtig ist, dass zuerst die Überlegung anhand eines Würfels durchgeführt wird. So wird den SchülerInnen auch klar, was mit einem Vorteil für den Würfelspieler gemeint ist. Die darauffolgenden Überlegungen zum Würfeln einer Doppelsechs fallen ihnen dann bestimmt leichter.

Das Aufstellen der Ungleichung erfordert genaue Überlegungen zur Gegenwahrscheinlichkeit. Diese sollte durch andere Beispiele bereits bekannt sein und durch dieses Beispiel aus einem

anderen Blickwinkel kennen gelernt werden. Ich sehe eine eingehende Erklärung durch die Lehrperson als nötige Hilfe bei der Aufstellung der Ungleichung an. Um die Überlegungen zu vereinfachen, kann auch auf die zuvor überlegte Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{36}$ zurückgegriffen werden. Der allgemeine Fall mag für einige SchülerInnen zu abstrakt erscheinen.

Das Lösen der Ungleichung geschieht mithilfe des Logarithmus, der zu diesem Zeitpunkt bekannt sein soll. Alternativ kann die Ungleichung auch durch ein geeignetes CAS gelöst werden. So kommt man zum Ergebnis, dass man sich mindestens 25 Versuche vorgeben sollte.

Anhand der **Abbildung 22** kann man weitere Überlegungen und Interpretationen zu diesem Beispiel vornehmen. Wie viele Versuche soll man sich vorgeben, damit man zu 90% gewinnt? Welchem Ereignis wird in der Abbildung die Wahrscheinlichkeit 0 zugeordnet? Warum?

7.2.2 Entenrennen

Für dieses Spiel werden zwei Laplacewürfel benötigt. Außerdem benötigt man zwölf kleine Entenspielfiguren und folgendes Spielfeld. Alternativ kann man auch andere Tierfiguren verwenden und das Spiel entsprechend umbenennen.

Ziel	Ziel	Ziel	Ziel	Ziel	Ziel	Ziel	Ziel	Ziel	Ziel	Ziel	Ziel
Start	Start	Start	Start	Start	Start	Start	Start	Start	Start	Start	Start
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Tabelle 8: Spielfeld *Entenrennen*

Zu Beginn des Spiels werden die zwölf Entenfiguren auf die MitspielerInnen aufgeteilt. Anschließend werden die Spielregeln erklärt.

Eine unparteiliche Person wirft in jeder Runde beide Spielwürfel gleichzeitig. Dann soll aus den geworfenen Augenzahlen die Ziffernsumme gebildet werden. Die Spalte des Spielfelds, deren Nummer mit der Ziffernsumme der Würfel übereinstimmt, hat die Runde gewonnen und darf um ein Feld Richtung Ziel vorrücken. Ziel des Spiels ist es als Erstes das Ziel zu erreichen.

Nachdem die SpielerInnen mit den Spielregeln vertraut sind, sollen sie sich für eine Ziffernsumme entscheiden und ihre Spielfigur auf die entsprechende Spalte auf dem Spielfeld platzieren.

Mathematische Analyse

Um die größten Gewinnchancen zu haben, muss man sich berechnen, welche Ziffernsumme am ehesten gewinnt.

Der Ergebnisraum zum Spiel ist der folgende.

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Die Ziffernsumme 1 ist mit zwei Laplacewürfeln von Eins bis Sechs niemals zu erreichen. Die niedrigste mögliche Ziffernsumme, die man erreichen kann, ist 2. Es ist also unmöglich zu gewinnen, wenn man auf die Ziffernsumme 1 gesetzt hat. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gleich Null. $P(1) = 0$

Die höchste mögliche erreichbare Ziffernsumme ist zwölf. Dazu muss mit beiden Würfeln eine Sechs gewürfelt werden. Höhere Ziffernsummen kann man mit zwei Spielwürfeln nicht erhalten. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gleich Null. $0 = P(13) = P(14) = P(15) = \dots$

	1	2	3	4	5	6
1	{1, 1}	{1, 2}	{1, 3}	{1, 4}	{1, 5}	{1, 6}
2	{2, 1}	{2, 2}	{2, 3}	{2, 4}	{2, 5}	{2, 6}
3	{3, 1}	{3, 2}	{3, 3}	{3, 4}	{3, 5}	{3, 6}
4	{4, 1}	{4, 2}	{4, 3}	{4, 4}	{4, 5}	{4, 6}
5	{5, 1}	{5, 2}	{5, 3}	{5, 4}	{5, 5}	{5, 6}
6	{6, 1}	{6, 2}	{6, 3}	{6, 4}	{6, 5}	{6, 6}

Tabelle 9: alle möglichen Wurfergebnisse zweier Spielwürfel

Um die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens der anderen Ziffernsummen herauszufinden, muss man sich jeweils die Anzahl der Möglichkeiten ansehen, mit denen die Ziffernsumme erreicht werden kann. Außerdem muss man wissen, dass es insgesamt $6^2 = 36$ Wurfergebnisse gibt. Diese sind in **Tabelle 9** eingetragen. Alternativ kann man auch alle Würfelkombinationen aus den vorausgegangenen Überlegungen abzählen.

Die jeweilige Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann aus der Formel $\frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der mögliche Fälle}}$.

X	Würfelkombinationen	$P(X)$	%
Ziffernsumme 2	1 + 1	$P(2) = \frac{1}{36}$	2,78%
Ziffernsumme 3	1 + 2, 2 + 1	$P(3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$	5,56%
Ziffernsumme 4	1 + 3, 3 + 1, 2 + 2	$P(4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$	8,33%
Ziffernsumme 5	1 + 4, 4 + 1, 2 + 3, 3 + 2	$P(5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$	11,11%
Ziffernsumme 6	1 + 5, 5 + 1, 2 + 4, 4 + 2, 3 + 3	$P(6) = \frac{5}{36}$	13,89%
Ziffernsumme 7	1 + 6, 6 + 1, 2 + 5, 5 + 2, 3 + 4, 4 + 3	$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	16,67%
Ziffernsumme 8	2 + 6, 6 + 2, 3 + 5, 5 + 3, 4 + 4	$P(8) = \frac{5}{36}$	13,89%
Ziffernsumme 9	3 + 6, 6 + 3, 4 + 5, 5 + 4	$P(9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$	11,11%
Ziffernsumme 10	4 + 6, 6 + 4, 5 + 5	$P(10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$	8,33%
Ziffernsumme 11	5 + 6, 6 + 5	$P(11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$	5,56%
Ziffernsumme 12	6 + 6	$P(12) = \frac{1}{36}$	2,78%
Σ	$6^2 = 36$	1	$\approx 100\%$

Tabelle 10: Berechnungen Entenrennen

Aus der Tabelle kann man auslesen, dass die Ziffernsumme 7 aus sechs verschiedenen Kombinationen der zwei Würfel gebildet werden kann. Daher weist sie mit 16,67% auch die höchste Chance auf gewürfelt zu werden. Alle anderen Ziffernsummen weisen geringere Kombinationsmöglichkeiten in ihrer Bildung auf. Umso größer die Differenz einer Ziffernsumme von der Ziffernsumme 7, umso geringer ist ihre Anzahl der Bildungsmöglichkeiten.

Um das Entenrennen mit hoher Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, sollte man auf die Ziffernsumme 7 setzen. Am zweit wahrscheinlichsten gewinnen die Personen, die auf die Ziffernsummen 6 und 8 getippt haben. Mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit gewinnen die Ziffernsumme 2 und 12.

Didaktische Reflexion

Entenrennen stellt einen äußerst spielerischen Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung dar. Die SchülerInnen sollen durch das aktive Spielen bzw. Zusehen erkennen, dass die Augensummen nicht gleich oft auftreten. Außerdem sollen sie zu folgender Vermutung kommen. Im Gegensatz zu anderen Würfelspielen, bei denen die höchste Zahl die beste ist, gilt dies für das *Entenrennen* nicht. SpielerInnen, die auf den Zwölfer getippt haben, werden eher verlieren.

Diese und möglicherweise weitere Beobachtungen sollen im Anschluss an das Spiel in der Klasse besprochen werden. So kommt vielleicht, wenn auch mit der Hilfe der Lehrperson, der Vorschlag sich die möglichen Kombinationen der beiden Würfelergbnisse näher anzusehen. Eine geeignete Tabelle wie **Tabelle 9** kann von den SchülerInnen erstellt werden. Diese bietet Anlass für weitere Vermutungen und Überlegungen.

Die exakte Lösung zu dem Spiel soll dann aber die mathematische Berechnung desselben darlegen. Dazu würde ich den SchülerInnen die leere Tabelle mit den Spalten

X	günstige Würfelkombinationen	Anzahl der günstigen Würfelkombinationen	Anzahl der möglichen Würfelkombinationen	$P(X)$	%
-----	---------------------------------	---	---	--------	---

vorlegen. Eine Druckvorlage befindet sich im Anhang. Je nachdem über welches Vorwissen die SchülerInnen bereits verfügen, kann die Tabelle in Partnerarbeit oder gemeinsam mit der

Lehrperson in einem LehrerInnen-SchülerInnen-Gespräch ausgefüllt und berechnet werden. Eine Interpretation der Ergebnisse soll allenfalls im Plenum stattfinden.

Ich habe das Entenrennen selbst einmal durchgespielt und folgende Ergebnisse erhalten. Die Kreuzchen symbolisieren die Felder, auf denen die Figuren bereits zu stehen gekommen sind. In dieser Runde hat die Ziffernsumme 8 gewonnen. Diese hat zwar nicht die höchste Gewinnchance, aber ist dennoch mit 13,89% neben der Ziffernsumme 6 auf den zweiten Rang vertreten. Man sieht allerdings, dass die Ziffernsummen 5, 6 und 7 bis zum Schluss gleich oft erschienen sind. Dagegen liegen die anderen Ziffernsummen, mit Ausnahme der Ziffernsumme 4, weit zurück.

Ziel	Ziel	Ziel	Ziel	Ziel	Ziel	Ziel	Ziel	Ziel	Ziel	Ziel	Ziel
				X	X	X	X				
			X	X	X	X	X				
			X	X	X	X	X	X			
			X	X	X	X	X	X			
		X	X	X	X	X	X	X	X		
	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
Start	Start	Start	Start	Start	Start	Start	Start	Start	Start	Start	Start
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Tabelle 11: Beispielhafter Spielausgang zum Entenrennen

Der Unterschied zum Spiel *Wahrscheinlichkeitsrennen*, das in **Kapitel 7.1.1** vorgestellt wurde, liegt in der Verwendung zweier Würfel. Die möglichen Kombinationen der Augenzahlen müssen durchdacht und deren Anzahl bestimmt werden. Beide Berechnungen erfolgen aber mit derselben Formel. Ich denke, dass den SchülerInnen das *Entenrennen* schwerer fallen wird als das *Wahrscheinlichkeitsrennen*. Daher würde ich zuerst letzteres in den Schulunterricht einbauen.

Man kann anhand des Spiels auch das unmögliche Ereignis demonstrieren. Die Ziffernsumme 1 sowie alle Ziffernsummen größer als 12 werden bei Verwendung zweier Spielwürfel niemals auftreten. Diesen Ereignissen ist Wahrscheinlichkeit 0 zuzuordnen.

7.3 Mit teilweise symmetrischen Würfeln

7.3.1 Wahrscheinlichkeitsraten

Bei diesem Spiel ist ein Quaderwürfel gegeben, dessen Wahrscheinlichkeitsverteilung möglichst genau geschätzt werden soll. Noch bevor gewürfelt wird, soll nur anhand der Form des Quaderwürfels eine Schätzung abgegeben werden. In diesem Beispiel orientieren sich die Schätzwerte anhand des abgebildeten Quaderwürfels, den ich aus Holz angefertigt habe.



Abbildung 23: Quaderwürfel aus Holz

Bei der Schätzung schreibt man die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Augenzahl gewürfelt wird, in folgende Tabelle. Die in der Tabelle dargestellten Daten entsprechen dabei realen Schätzwerten zu dem gezeigten Quaderwürfel. Insgesamt wurden vier Personen befragt.

Eigene Schätzung	1	2	3	4	5	6
Johanna	0,35	0,05	0,10	0,10	0,05	0,35
Lukas	0,27	0,10	0,13	0,13	0,10	0,27
Claudia	0,32	0,06	0,12	0,12	0,06	0,32
Enya	0,25	0,10	0,15	0,15	0,10	0,25

Tabelle 12: Schätzungen des Quaderwürfels

Ziel des Spiels *Wahrscheinlichkeitsraten* ist es, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augenzahlen am genauesten zu schätzen.⁵⁴

Mathematische Analyse

Um herauszufinden, wer am besten geschätzt hat, muss man die tatsächliche Wahrscheinlichkeitsverteilung kennen. Diese ist bei Quaderwürfeln nicht auf geometrische Eigenschaften zurückzuführen, sondern muss anhand der Empirie untersucht werden. Da es sich bei dem Quaderwürfel jedoch um einen teilweise symmetrischen Körper handelt, kann man schließen, dass gegenüberliegende Seiten gleich große Wahrscheinlichkeit aufweisen werden. Das haben auch die ProbandInnen so erkannt.

Es wird als nächster Schritt eine Versuchsreihe gestartet und deren Ergebnisse systematisch notiert. Ich habe den Quaderwürfel insgesamt 1000-mal mit einem Würfelbecher auf ein Würfelbrett geworfen. Die absoluten Häufigkeiten, die ich dadurch erhalten habe, sind nach jeweils 100 Würfeln in nachstehender Tabelle aufgelistet.

	1	2	3	4	5	6
nach 100 Würfeln	17	6	19	19	14	25
nach 200 Würfeln	37	16	37	33	29	48
nach 300 Würfeln	66	28	52	47	39	68
nach 400 Würfeln	86	41	70	60	55	88
nach 500 Würfeln	112	50	82	74	70	112
nach 600 Würfeln	136	64	97	87	78	138
nach 700 Würfeln	155	82	109	96	95	163
nach 800 Würfeln	182	91	126	108	105	188
nach 900 Würfeln	208	101	139	123	109	220
nach 1000 Würfeln	237	118	151	139	119	236

Tabelle 13: Absolute Häufigkeiten des Quaderwürfels nach je 100 weiteren Würfeln

Zur besseren Veranschaulichung sind die absoluten Häufigkeiten nach 1000 Würfeln in einem Diagramm dargestellt. Dabei erkennt man erstmals, dass die Augenzahlen 1 und 6 im Vergleich zu den übrigen Seitenflächen am häufigsten auftreten. Sie nehmen gemeinsam fast die Hälfte der Wurfsergebnisse in Anspruch. Die restlichen Augenzahlen treten ungefähr gleich oft auf.

⁵⁴ vgl. Riemer: Mit Quadern „würfeln“, 1.

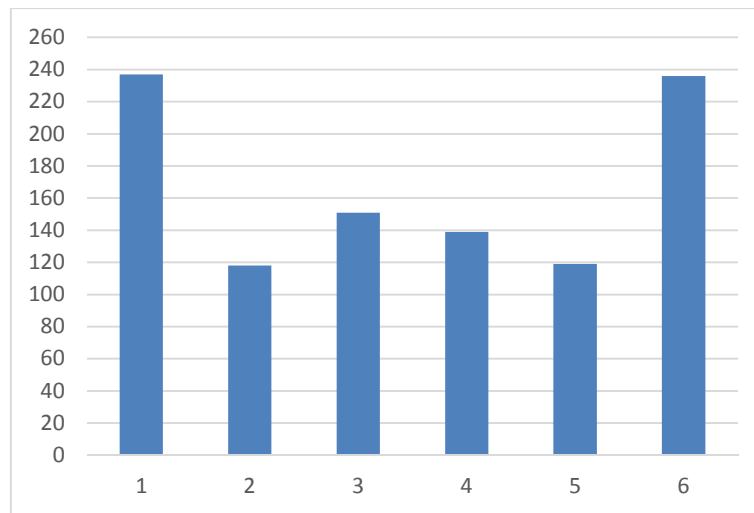


Abbildung 24: Absolute Häufigkeiten des Quaderwürfels nach 1000 Würfeln

Aus **Tabelle 13** kann man sich problemlos die relativen Häufigkeiten berechnen. Dazu dividiert man die absolute Häufigkeit einer Augenzahl durch die gesamte Versuchsanzahl. Beispielsweise berechnet man durch $\frac{37}{200} \approx 0,185$ die relative Häufigkeit einen Zweier zu würfeln aus den Daten der ersten 200 Versuche. Dadurch entsteht diese Tabelle:

	1	2	3	4	5	6
nach 100 Würfeln	0,170	0,060	0,190	0,190	0,140	0,250
nach 200 Würfeln	0,185	0,080	0,185	0,165	0,145	0,240
nach 300 Würfeln	0,220	0,093	0,173	0,157	0,130	0,227
nach 400 Würfeln	0,215	0,103	0,175	0,150	0,138	0,220
nach 500 Würfeln	0,224	0,100	0,164	0,148	0,140	0,224
nach 600 Würfeln	0,227	0,107	0,162	0,145	0,130	0,230
nach 700 Würfeln	0,221	0,117	0,156	0,137	0,136	0,233
nach 800 Würfeln	0,228	0,114	0,158	0,135	0,131	0,235
nach 900 Würfeln	0,231	0,112	0,154	0,137	0,121	0,244
nach 1000 Würfeln	0,237	0,118	0,151	0,139	0,119	0,236

Tabelle 14: Relative Häufigkeiten des Quaderwürfels nach je 100 weiteren Würfeln

Betrachtet man die relative Häufigkeit des Einsers und des Sechсers nach den ersten 200 Würfeln, so erhält man eine Wahrscheinlichkeit von 0,185 bzw. 0,240. Obwohl man aus den teilweise geometrischen Eigenschaften schließen können müsste, dass die beiden Seiten gleich oft auftreten, ist doch ein deutlicher Unterschied erkennbar. Auch beim Auftreten des Zweiers und Fünfers liegt nach 200 Würfeln noch eine größere Differenz vor. Mit 0,185 und 0,165 liegt die relative Häufigkeit des Dreiers bzw. Vierers noch am nächsten. Die nach 200 Würfeln erhaltene empirische Wahrscheinlichkeit für jede Augenzahl habe ich daher nicht als genau genug empfunden. Also habe ich weiter gewürfelt, denn die empirische Wahrscheinlichkeit

wird umso genauer, je öfter man würfelt. Diese nähert sich dann den tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten des Auftretens einer bestimmten Augenzahl immer genauer an. Ganz genau wird man die korrekte Wahrscheinlichkeit durch eine Versuchsreihe aber nie erreichen, da man ein Experiment nur endlich mal durchführen kann.

Die in **Tabelle 14** dargestellten relativen Häufigkeiten sind in **Abbildung 25** als Punktdiagramm mit interpolierten Linien ausgegeben. Auf der ersten Achse sind die Anzahl der Würfe in Hunderter-Schritten und auf der zweiten Achse die relative Häufigkeit aufgetragen. Für jede Augenzahl ist nach jeweils 100 weiteren Würfeln die relative Häufigkeit durch einen Punkt markiert.

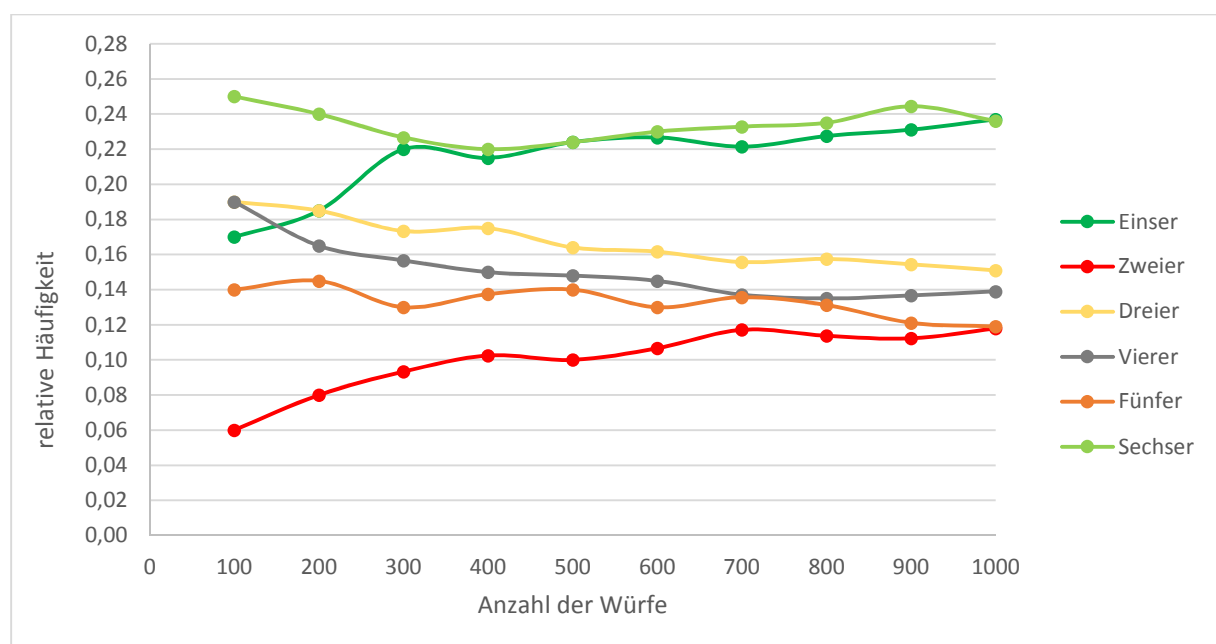


Abbildung 25: Annäherung der relativen Häufigkeiten des Quaderwürfels

Aus dem Diagramm kann man erkennen, dass nach 100 Würfeln die Augenzahlen 1 und 6 sehr weit entfernt liegen. Nach weiteren Würfeln nähern sie sich jedoch rasch an und pendeln dann zwischen 0,22 und 0,24.

Auch die Augenzahlen 2 und 5 weisen zu Beginn eine größere Differenz in ihrer relativen Häufigkeit auf. In den darauffolgenden Würfeln nähern sie sich kontinuierlich immer weiter an. Erst nach 1000 Würfeln stimmen sie in etwa in ihrer relativen Häufigkeit von zirka 0,12 überein.

Anders sieht es mit den Augenzahlen 3 und 4 aus. Diese treten anfangs fast gleich oft auf, aber bewegen sich dann wieder auseinander. Insgesamt sinken mit steigender Wurffanzahl ihre relativen Häufigkeiten. So könnte man nach 400 Würfeln den Eindruck bekommen, dass die

Wahrscheinlichkeit einen Zweier oder einen Fünfer zu würfeln höher liegt, als man nach 1000 Würfen vermuten würde. Nach etwa 800 Würfen näherten sich die beiden relativen Häufigkeiten wieder an, aber sind im Vergleich zu den übrigen Augenzahlen dennoch am weitesten voneinander entfernt.

Zusammenfassend sind in **Tabelle 15** die prozentuellen Häufigkeiten der einzelnen Seitenflächen nach 1000 Würfen angegeben. Einser und Sechser liegen dabei mit 23,7% bzw. 23,6% sehr knapp beieinander. Ebenso traten Zweier und Fünfer mit 11,8% und 11,9% fast gleich oft auf. Nur Dreier und Vierer weisen eine Differenz von 1,2% auf.

	1	2	3	4	5	6
nach 1000 Würfen	23,7%	11,8%	15,1%	13,9%	11,9%	23,6%

Tabelle 15: Prozentuelle Häufigkeiten des Quaderwürfels nach 1000 Würfen

Diese Differenz kann man sich damit erklären, dass zu wenig oft gewürfelt wurde. Bei einer höheren Versuchsanzahl würde sich dann ein näher beieinander liegender Wert einstellen. Eine weitere Möglichkeit die Differenz zu begründen, bietet die Figur und Ausführung des Quaderwürfels selbst. Obwohl der Würfel mittels einer Fräsmaschine auf den Zehntelmillimeter genau angefertigt wurde, können kleinste Ungenauigkeiten auftreten. Kein real angefertigter Würfel ist in allen Maßen symmetrisch. Ebenso kann kein Quader zu 100% in allen Kantenlängen und Winkeln perfekt sein. Andere Einflussfaktoren können die Abnutzung des Materials oder dessen unterschiedliche Dichte sein. Statt Holz hätte man ein widerstandsfähigeres einheitlicheres Material, wie zum Beispiel einen harten Kunststoff, heranziehen können.

Würde es sich um einen idealen Quaderwürfel handeln, so wären gegenüberliegende Seiten gleich wahrscheinlich. Daher habe ich aus den Ergebnissen der Versuchsserie den arithmetischen Mittelwert einander entsprechender Seitenflächen berechnet und so die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung erhalten. Beispielsweise erhält man durch $\frac{0,151+0,139}{2} = 0,1450$ das arithmetische Mittel der relativen Häufigkeiten eines Dreiers oder Vierers.

X	1	2	3	4	5	6
P(X)	0,2365	0,1185	0,1450	0,1450	0,1185	0,2365
%	23,65%	11,85%	14,50%	14,50%	11,85%	23,65%

Tabelle 16: Mittelwerte der Wahrscheinlichkeiten des Quaderwürfels

Dabei muss man beachten, dass es sich nur um gerundete Werte aufgrund der Daten aus 1000 Würfeln handelt. Bei weiteren Würfeln können sich die relativen Häufigkeiten und dadurch die erhaltene empirische Wahrscheinlichkeit wiederum ändern. Aus zeitökonomischen Gründen wird das Experiment nicht mehr öfters ausgeführt und die erhaltene empirische Wahrscheinlichkeit als die tatsächliche Wahrscheinlichkeit des Quaderwürfels angenommen.

Im Anschluss an das Experiment kann man die Ergebnisse mit den Schätzwerten zu Beginn vergleichen. Um die Schätzgenauigkeit der ProbandInnen zu ermitteln habe ich die minimalste Abweichung zur tatsächlichen Wahrscheinlichkeit berechnet. Dabei habe ich aufgrund der Symmetrie nur die Augenzahlen 1, 2 und 3 berücksichtigt.

$$\begin{aligned}d_{Johanna} &= |0,2365 - 0,35| + |0,1185 - 0,05| + |0,1450 - 0,10| \\ &= 0,1135 + 0,0685 + 0,045 = 0,227\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{Lukas} &= |0,2365 - 0,27| + |0,1185 - 0,10| + |0,1450 - 0,13| \\ &= 0,0335 + 0,0185 + 0,015 = 0,067\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{Claudia} &= |0,2365 - 0,32| + |0,1185 - 0,06| + |0,1450 - 0,12| \\ &= 0,0835 + 0,0585 + 0,025 = 0,167\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{Enya} &= |0,2365 - 0,25| + |0,1185 - 0,10| + |0,1450 - 0,15| \\ &= 0,0135 + 0,0185 + 0,005 = 0,037\end{aligned}$$

Dabei kommt man zu dem Schluss, dass Enya (18) am genauesten geschätzt hat und daher die Siegerin des Spiels ist. Sie hat mit 0,037 die geringste Abweichung zur tatsächlichen Wahrscheinlichkeit des Quaderwürfels. Lukas (23) schätzte mit einer Abweichung von 0,067 auch ziemlich genau.

Generell kann man sagen, dass das Auftreten eines Einsers bzw. Sechlers von allen SpielerInnen überschätzt wurde. Im Gegensatz dazu wurde das Würfeln eines Zweiers oder Fünfers als weniger häufiges Ereignis angenommen, als das es in Wirklichkeit ist.

Weiters kann man zeigen, dass die erhaltene empirische Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht proportional zu der Größe der Seitenflächen des Quaderwürfels ist. Dazu muss man die

Abmessungen desselben kennen oder abmessen. Mein Quaderwürfel hatte die Maße $24,4 \times 22,0 \times 19,5 \text{ mm}$. Daraus kann man sich die Größe der Seitenflächen berechnen.

$$A_1 = A_6 = 24,4 \cdot 22,0 = 536,8 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = A_5 = 22,0 \cdot 19,5 = 429,0 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = A_4 = 24,4 \cdot 19,5 = 475,8 \text{ mm}^2$$

Die gesamte Oberfläche des Würfels ergibt sich aus der Summe der Seitenflächen.

$$O = 2 \cdot (A_1 + A_2 + A_3) = 2 \cdot (536,8 + 429,0 + 475,8) = 2883,2 \text{ mm}^2$$

Um sich die jeweiligen relativen Anteile der Seitenflächen an der Gesamtfläche des Quaderwürfels zu erhalten, berechnet man:

$$R_1 = R_6 = \frac{A_1}{O} = \frac{536,8}{2883,2} \approx 0,1862$$

$$R_2 = R_5 = \frac{A_2}{O} = \frac{429,0}{2883,2} \approx 0,1488$$

$$R_3 = R_4 = \frac{A_3}{O} = \frac{475,8}{2883,2} \approx 0,1650$$

Vergleicht man diese aus der Geometrie erhaltenen Ergebnisse mit jenen aus dem Experiment (**Tabelle 17**), so erkennt man, dass diese stark voneinander abweichen. Die Augenzahlen 1 und 6 weisen einen geringeren Anteil an der gesamten Oberfläche des Quaderwürfels auf als die Wahrscheinlichkeit ihres Erscheinens im Experiment. Umgekehrt nehmen die übrigen Seitenflächen einen größeren Anteil an der Oberfläche in Anspruch als die entsprechende Wahrscheinlichkeit aus dem Experiment.

X	1	2	3	4	5	6
<i>P(X)</i>_{Experiment}	0,2365	0,1185	0,1450	0,1450	0,1185	0,2365
<i>R(X)</i>_{Geometrie}	0,1862	0,1488	0,1650	0,1650	0,1488	0,1862

Tabelle 17: Vergleich der Wahrscheinlichkeiten aus Geometrie bzw. Experiment

Somit ist gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Augenzahl zu würfeln nicht proportional zu der Größe der zugehörigen Seitenfläche ist.

Didaktische Reflexion

Das Arbeiten mit Quaderwürfeln in der Schule ist wenig verbreitet. Die meisten LehrerInnen demonstrieren den Wahrscheinlichkeitsbegriff anhand eines Spielwürfels, doch gerade Quaderwürfel sind aufgrund ihrer Eigenschaften als Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung didaktisch sinnvoll.⁵⁵

Verwendet man zur Demonstration des Wahrscheinlichkeitsbegriffs nur symmetrische Figuren, wie Spielwürfel oder Münzen, so tritt immer die Laplace-Wahrscheinlichkeit in den Vordergrund. Dass verschiedene Ereignisse unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten annehmen können wird dabei verschwiegen.

Werden nur unsymmetrische Figuren, wie zum Beispiel Reißnadeln oder „Schweinewürfel“ thematisiert, so fallen die Begriffe relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit schnell zusammen.

Die Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs anhand von teilweise symmetrischen Figuren bietet hingegen einige Vorteile. Der Begriff relative Häufigkeit wird mit der Realitätsebene, insbesondere beim Versuch mit den erhaltenen Ergebnissen, verbunden. Dahingegen wird der Begriff der Wahrscheinlichkeit (Modellebene) durch seinen hypothetischen Charakter ausgezeichnet. Auch wenn man ganz oft würfelt, wird man die tatsächliche Wahrscheinlichkeit, die gegenüberliegenden Seitenflächen gleich große Wahrscheinlichkeit zuweist, niemals genau erreichen. Somit wird der Unterschied zwischen den beiden Begriffen fassbar.⁵⁶

In der Schule kann man das Experiment zum Spiel *Wahrscheinlichkeitsraten* gut durchführen. Außerdem wird den SchülerInnen durch den Versuch ein experimenteller Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung ermöglicht. Wichtig ist dabei, dass die Lehrperson genügend viele Quaderwürfel gleicher Form und Beschriftung mitbringt. Dadurch können die SchülerInnen das Experiment weitgehend unabhängig voneinander durchführen.

Ich habe ein Arbeitsblatt erstellt, das die SchülerInnen durch die Unterrichtsstunde führen soll. Dabei ist zu Beginn die Einschätzung des Quaderwürfels eigenständig durchzuführen. Die SchülerInnen sollen ihre Vermutungen in Prozent angeben, da sie zu dem Zeitpunkt des Experiments noch keine Erfahrung mit Wahrscheinlichkeiten haben (müssen) und die Prozentschreibweise allen geläufig sein sollte. Durch das Aufstellen einer eigenen Hypothese

⁵⁵ Riemer: Mit Quadern „würfeln“, 1.

⁵⁶ Riemer, Mit Quadern „würfeln“, 2.

soll das Interesse am Quaderwürfel geweckt und die Motivation am Experiment gesteigert werden. Einige Schätzungen können im Plenum kommentiert und diskutiert werden. Die SchülerInnen sollen sich jedoch nicht gezwungen fühlen ihre Schätzung publik zu machen. Wichtig ist die gemeinsame Erkenntnis, dass die Summe aller angegebenen Prozentzahlen 100% ergibt. Andererseits soll erkannt werden, dass gegenüberliegende Seitenflächen bei oftmaligem Würfeln gleich oft auftreten werden.

Anschließend soll durch häufiges Würfeln die relative Häufigkeit jeder Seitenfläche berechnet werden. Um dabei möglichst viele Daten zu erhalten, wird zuerst 50 Mal alleine gewürfelt und anschließend werden Fünfer-Gruppen gebildet. Diese tauschen sich über ihre erhaltenen absoluten Häufigkeiten aus und berechnen aus der Summe derselben die gemeinsame relative und prozentuelle Häufigkeit. Im nächsten Schritt sollen die absoluten Häufigkeiten von vier unterschiedlichen Gruppen gesammelt werden. Insgesamt werden auf diese Weise 1000 Wurfresultate aufgenommen. Abermals ist aus der Summe der absoluten Häufigkeiten die gemeinsame relative und prozentuelle Häufigkeit zu berechnen.

Abschließend wird die zu Beginn getätigte Schätzung mit dem Ausgang des Experiments verglichen. Hier kann der empirische Wahrscheinlichkeitsbegriff (Realitätsebene) mit der Wahrscheinlichkeit (Modellebene) diskutiert werden.

Arbeitsblatt: Experiment mit einem Quaderwürfel

- 1) Sieh dir den Quaderwürfel genau an. Du sollst ohne Probewürfeln schätzen in wie viel Prozent der Fälle die einzelnen Seiten ungefähr oben liegen werden, wenn man den Würfel oft hintereinander wirft.

	1	2	3	4	5	6	Σ
eigene Schätzung	%	%	%	%	%	%	100%

- 2) Würfle 50 Mal mit dem Quaderwürfel und notiere dir mit Hilfe einer Strichliste wie oft die Augenzahlen auftreten.

	1	2	3	4	5	6	Σ
Strichliste							50
Absolute Häufigkeit							50

- 3) Suche dir vier MitschülerInnen und trage ihre und deine gewürfelten absoluten Häufigkeiten in die Tabelle ein. Berechne dann relative und prozentuelle Häufigkeiten.

Name	1	2	3	4	5	6	Σ
							50
							50
							50
							50
							50
Absolute Häufigkeit							250
Relative Häufigkeit							1
Prozentuelle Häufigkeit							100

- 4) Trage die absoluten Häufigkeiten deiner Gruppe und drei weiterer Gruppen in die Tabelle ein. Berechne dann relative und prozentuelle Häufigkeiten.

	1	2	3	4	5	6	Σ
Gruppe 1							250
Gruppe 2							250
Gruppe 3							250
Gruppe 4							250
Absolute Häufigkeit							1000
Relative Häufigkeit							1
Prozentuelle Häufigkeit							100

- 5) Vergleiche die erhaltene prozentuelle Häufigkeit mit deiner Schätzung. Hast du gut geschätzt?

Weiterführend ist es im Unterricht auch möglich, wenn es nicht ohnehin von Seiten der SchülerInnen kommt, darauf aufmerksam zu machen, dass die Wahrscheinlichkeit der Augenzahlen nicht proportional zu ihren relativen Häufigkeiten aus dem Experiment sind. Durch entsprechende Berechnung kann dies auch exemplarisch gezeigt werden.

Anhand des Quaderwürfels können auch weitere Berechnungen für den Stochastikunterricht eine Bereicherung sein. Beispielsweise kann man berechnen:

Ist es wahrscheinlicher viermal hintereinander einen Zweier zu würfeln oder hintereinander alle Augenzahlen in aufsteigender Reihenfolge zu würfeln? (Die Wahrscheinlichkeiten wurden aus **Tabelle 16** entnommen.)

$$P(2, 2, 2, 2) = P(2) \cdot P(2) \cdot P(2) \cdot P(2) = 0,1185^4 \approx 0,0001972$$

$$P(1, 2, 3, 4, 5, 6) = P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) \cdot P(4) \cdot P(5) \cdot P(6) \approx 0,00001651$$

7.3.2 Würfelraten

Bei diesem Spiel sind drei verschiedene Würfel gegeben. Beim ersten Würfel handelt es sich um einen Spielwürfel, der zweite Würfel ist ein Quaderwürfel. Der dritte Würfel ist ein U-Würfel und besitzt die in **Abbildung 26** gezeigte Augenordnung. Die Anordnung der Augenzahlen des Spielwürfels sowie des Quaderwürfels entspricht wie gewohnt dem Modell des Laplacewürfels.

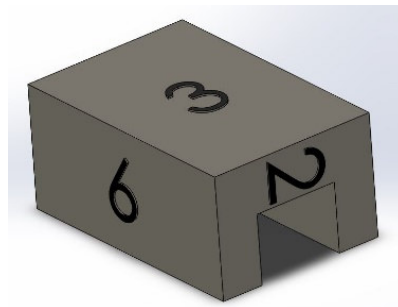


Abbildung 26: U-Würfel

Alle drei Würfel befinden sich zu Beginn des Spiels in einer Urne. Ein Würfel wird verdeckt gezogen und anschließend immer mit diesem verdeckt gewürfelt. Die anderen Würfel verbleiben in der Urne.

- Beim ersten Wurf wird ein Zweier gewürfelt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich beim gezogenen Würfel um den Spielwürfel, den Quaderwürfel bzw. um den U-Würfel?
- Es wird erneut gewürfelt. Nun erhält man einen Sechser. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich beim gezogenen Würfel um den Spielwürfel, den Quaderwürfel bzw. um den U-Würfel?

In nachfolgender Tabelle befinden sich für jeden der drei Würfeltypen die Wahrscheinlichkeiten eine bestimmte Augenzahl zu würfeln. Dabei entspringen die Wahrscheinlichkeiten des Quaderwürfels und des U-Würfels der Empirie.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Spielwürfel	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Quaderwürfel	0,05	0,1	0,35	0,35	0,1	0,05
U-Würfel	0,12	0,08	0,21	0,39	0,08	0,12

Tabelle 18: Wahrscheinlichkeiten eines Spielwürfels, Quaderwürfels und U-Würfels

Mathematische Analyse

Da sich die drei Würfel in der Urne befinden und verdeckt gezogen wird, ist die Wahrscheinlichkeit den Spielwürfel (S), den Quaderwürfel (Q) oder den U-Würfel (U) zu ziehen jeweils gleich groß. Daher kann man schreiben:

$$P(S) = P(Q) = P(U) = \frac{1}{3}$$

Man muss sich nun die Wahrscheinlichkeit für jeden Würfel einzeln berechnen. Dabei kommt die bedingte Wahrscheinlichkeit und der Satz von Bayes zum Einsatz.

a)

Spielwürfel:

$$\begin{aligned}
 P(S|2) &= \frac{P(2|S) \cdot P(S)}{P(2)} = \frac{P(2|S) \cdot P(S)}{P(2|S) \cdot P(S) + P(2|Q) \cdot P(Q) + P(2|U) \cdot P(U)} = \\
 &= \frac{P(2|S)}{P(2|S) + P(2|Q) + P(2|U)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + 0,1 + 0,08} \approx 0,4808
 \end{aligned}$$

Quaderwürfel:

$$P(Q|2) = \frac{P(2|Q)}{P(2|S) + P(2|Q) + P(2|U)} = \frac{0,1}{\frac{1}{6} + 0,1 + 0,08} \approx 0,2885$$

U-Würfel:

$$P(U|2) = \frac{P(2|U)}{P(2|S) + P(2|Q) + P(2|U)} = \frac{0,08}{\frac{1}{6} + 0,1 + 0,08} \approx 0,2308$$

Nach dem ersten Wurf kommt man zu dem Schluss, dass der Spielwürfel mit 0,4808 die höchste Wahrscheinlichkeit aufweist. An zweiter Stelle folgt der Quaderwürfel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2885 und der U-Würfel wurde mit Wahrscheinlichkeit 0,2308 geworfen. Allgemeiner könnte man sagen, dass der Spielwürfel zu zirka 50% und die anderen beiden Würfeltypen zu jeweils zirka 25% gewürfelt wurden.

b)

Die Ergebnisse aus a) werden als a priori Verteilung wahrgenommen. Bei der Berechnung des erneuten Wurfs fließen die Ergebnisse der vorherigen Rechnungen mit ein. Dadurch erhält man eine besser angenäherte Wahrscheinlichkeit als wenn man nur einen Wurf berücksichtigt.

Spielwürfel:

$$\begin{aligned} (S|6) &= \frac{P(6|S) \cdot P(S) \cdot P(S|2)}{P(6|2)} = \\ &= \frac{P(6|S) \cdot P(S) \cdot P(S|2)}{P(6|S) \cdot P(S) \cdot P(S|2) + P(6|Q) \cdot P(Q) \cdot P(Q|2) + P(6|U) \cdot P(U) \cdot P(U|2)} = \\ &= \frac{P(6|S) \cdot P(S|2)}{P(6|S) \cdot P(S|2) + P(6|Q) \cdot P(Q|2) + P(6|U) \cdot P(U|2)} = \\ &= \frac{\frac{1}{6} \cdot 0,4808}{\frac{1}{6} \cdot 0,4808 + 0,05 \cdot 0,2885 + 0,12 \cdot 0,2308} \approx 0,6555 \end{aligned}$$

Quaderwürfel:

$$(Q|6) = \frac{P(6|Q) \cdot P(Q|2)}{P(6|S) \cdot P(S|2) + P(6|Q) \cdot P(Q|2) + P(6|U) \cdot P(U|2)} =$$

$$= \frac{0,05 \cdot 0,2885}{\frac{1}{6} \cdot 0,4808 + 0,05 \cdot 0,2885 + 0,12 \cdot 0,2308} \approx 0,1180$$

U-Würfel:

$$(U|6) = \frac{P(6|U) \cdot P(U|2)}{P(6|S) \cdot P(S|2) + P(6|Q) \cdot P(Q|2) + P(6|U) \cdot P(U|2)} =$$

$$= \frac{0,12 \cdot 0,2308}{\frac{1}{6} \cdot 0,4808 + 0,05 \cdot 0,2885 + 0,12 \cdot 0,2308} \approx 0,2265$$

Es zeigt sich, dass die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um den Spielwürfel handelt, mit 0,6555 am größten ist. An zweiter Stelle folgt der U-Würfel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2265. Am unwahrscheinlichsten handelt es sich um den Quaderwürfel, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1180 gewürfelt wurde.

In der nachstehenden Tabelle sind die Wahrscheinlichkeiten, dass es sich um einen bestimmten Würfeltypus handelt nach dem ersten sowie nach dem zweiten Wurf zusammengefasst.

	nach dem ersten Wurf	nach dem zweiten Wurf
Spielwürfel	0,4808	0,6555
Quaderwürfel	0,2885	0,1180
U-Würfel	0,2308	0,2265

Tabelle 19: Wahrscheinlichkeiten nach dem ersten bzw. zweiten Wurf

Vergleicht man die Ergebnisse aus der Tabelle, kommt man zu dem Schluss, dass der Vorsprung, den der Spielwürfel nach dem ersten Wurf hatte, weiter ausgebaut werden konnte. Zu 65% handelt es sich um diesen. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um den Quaderwürfel handelt, hat sich stark reduziert und liegt nun bei nur 12%. Der U-Würfel ist durch den zweiten

Wurf in seiner Wahrscheinlichkeit geworfen zu werden in etwa gleich geblieben. Er liegt nach dem zweiten Wurf aber mit 23% sogar vor dem Quaderwürfel.

Ein weiterer Wurf und die entsprechenden Berechnungen würden noch genauere Aufschlüsse über den Würfeltyp zulassen. Je mehr Würfe durchgeführt werden, umso sicherer kann man sagen, um welchen Würfel es sich handelt. Dabei würden immer alle bisherigen Wurfausgänge berücksichtigt werden.

Didaktische Reflexion

Wenn den SchülerInnen die Begriffe Quaderwürfel und U-Würfel noch nicht bekannt sind, sollten diese unbedingt vor der Durchführung des Spiels erklärt werden. Das Mitbringen der unterschiedlichen Würfeltypen in den Unterricht ist für das Spiel ohnehin erforderlich. Die Würfel können dann gleich als Anschauungsmaterial für die Erklärung derselben dienen.

Es würde sich aber auch anbieten das Spiel *Wahrscheinlichkeitsraten* vor diesem Spiel durchzuführen. Dann wäre sichergestellt, dass sich die SchülerInnen ausreichend mit dem Würfeltypus des Quaderwürfels beschäftigt und die Herleitung dessen Wahrscheinlichkeitsverteilung verstanden haben. Die entstandene Verteilung der Wahrscheinlichkeit kann dann auch für dieses Beispiel übernommen werden. Die Wahrscheinlichkeiten für den U-Würfel müssen, wenn sie nicht durch ein ähnliches Experiment im Unterricht angenähert wurden, von der Lehrperson vorgegeben werden.

Nachdem die Begriffsbildung gesichert ist, kann das Spiel beginnen. Ein Schüler oder eine Schülerin soll sich freiwillig als WürflerIn zur Verfügung stellen. Diese Person wird einen der drei Würfeltypen verdeckt ziehen und würfeln. Nur das Ergebnis soll den MitschülerInnen mitgeteilt werden. Diese berechnen nach Anleitung durch die Lehrperson die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Spielwürfel handelt unter der Bedingung der genannten Augenzahl. Die Wahrscheinlichkeiten für die beiden anderen Würfeltypen unter der Voraussetzung der gefallenen Augenzahl können die SchülerInnen selbstständig berechnen.

Bei einem erneuten Würfelwurf mit demselben Würfel ändern sich die Voraussetzungen und somit auch die Wahrscheinlichkeiten.

Bei diesem Spiel handelt sich um ein Anwendungsbeispiel der bedingten Wahrscheinlichkeit und des Satzes von Bayes, das man gut im Schulunterricht demonstrieren kann. Oftmals ist den

SchülerInnen unklar, was die Bedingung ist und wofür die Wahrscheinlichkeit berechnet werden soll. Anhand des in der Klasse durchgespielten Spiels kann dies den SchülerInnen näher gebracht werden. Aufgrund des aktuell vorliegenden Informationsstands soll leichter erkannt werden, was die Voraussetzung ist.

7.4 Mit Astragaloi

Die Griechen und Römer spielten statt mit Würfeln auch mit Astragaloi, den Sprunggelenken von Paarhufern. Den vier möglichen Wurfergebnissen werden die Werte 1, 3, 4 und 6 zugeordnet. Die nachstehende Tabelle beschreibt die Wahrscheinlichkeit zu den möglichen Versuchsausgängen.

X	1	3	4	6
$P(X)$	0,10	0,35	0,48	0,07

Tabelle 20: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Astragaloi

7.4.1 Venus

Es sind vier Astragaloi im Spiel, die reihum gewürfelt werden. Die SpielerInnen werfen mit allen Astragaloi. Wer zuerst auf den ersten Wurf vier unterschiedliche Augenzahlen erzielt, hat gewonnen.⁵⁷ Dies gilt als der beste Wurf und wird *Venus* genannt.⁵⁸

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine *Venus* zu würfeln?
- Dasselbe Spiel wird mit vier modernen Spielwürfeln gespielt. Vergleiche die Gewinnchance gegenüber dem Spiel mit Astragaloi!
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten nur verschiedene Symbole bei sechs geworfenen Pokerwürfel auf?

⁵⁷ Uebel: Römische Spiele, 107.

⁵⁸ Beck: Poker mit Würfel, 5.

Mathematische Analyse

a)

Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Astragalos einen Einser, der zweite einen Dreier, der vierte einen Vierer und der letzte einen Sechser aufweist, lässt sich nach der Multiplikationsregel berechnen.

$$P(\{1, 3, 4, 6\}) = P(1) \cdot P(3) \cdot P(4) \cdot P(6) = 0,1 \cdot 0,35 \cdot 0,48 \cdot 0,07 \cdot 24 = 0,001176$$

Da es aber mehrere Möglichkeiten gibt, unterschiedliche Augenzahlen zu erhalten, ist die Wahrscheinlichkeit eine *Venus* zu erhalten ein Vielfaches des oberen Ergebnisses. Da es sich um eine Permutation handelt, gibt es insgesamt 4! Möglichkeiten die vier Augenzahlen auf die vier Astragaloï aufzuteilen.

$$P(Venus) = P(\{1, 3, 4, 6\}) \cdot 4! = 0,001176 \cdot 24 = 0,028224$$

Eine *Venus* zu würfeln gelingt mit Wahrscheinlichkeit 0,028224. Das sind 2,8224%.

b)

Die Spielwürfel haben sechs mögliche Wurfausgänge, die alle mit gleich hoher Wahrscheinlichkeit auftreten. Beim ersten Spielwürfel kann trivialerweise jede Augenzahl geworfen werden. Der zweite Spielwürfel darf außer der geworfenen Augenzahl des ersten Würfels alle anderen Wurfresultate aufweisen. Er hat also noch fünf Möglichkeiten. Beim dritten Würfel fallen nun beide Wurfresultate der ersten beiden Würfel weg, er hat also nur mehr vier Möglichkeiten. Der letzte Würfel darf einen der verbleibenden drei Wurfresultate annehmen. Somit erhält man die Anzahl der günstigen Versuchsausgänge.

Insgesamt gibt es bei einem Wurf mit vier Spielwürfel $6^4 = 1296$ mögliche Wurfresultate.

$$P(Venus) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \frac{360}{1296} = \frac{5}{18} \approx 0,2778$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2778 wird eine *Venus* mit vier geworfenen Spielwürfeln öfters auftreten als eine *Venus* mit vier Astragaloï.

c)

Nun muss jedes mögliche Symbol des Pokerwürfels genau einmal geworfen werden. Da es sich um eine Permutation handelt, gibt es dafür insgesamt 6! Möglichkeiten. Somit erhält man die Anzahl der günstigen Versuchsausgänge.

Insgesamt gibt es bei einem Wurf mit sechs Pokerwürfel $6^6 = 46656$ mögliche Wurfresultate.

$$P(\text{nur verschiedene Symbole}) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6^6} = \frac{6!}{6^6} = \frac{720}{46656} = \frac{5}{324} \approx 0,01543$$

Mit Wahrscheinlichkeit 0,01543 treten nur verschiedene Symbole bei sechs geworfenen Pokerwürfel auf. Dieses Ereignis tritt seltener auf als eine *Venus* mit vier geworfenen Astragaloi.

Didaktische Reflexion

Da es Nachbildungen der Astragaloi aus Kunststoff für wenig Geld im Internet zu kaufen gibt, bietet es sich an, diese für den Unterricht zu besorgen. Die SchülerInnen werden bestimmt von einem so andersartigen Würfel und dessen Geschichte gebannt sein. Mit dem Anschauungsmaterial können die SchülerInnen aber auch würfeln, sodass sie ein Gefühl für den Astragalos bekommen. Der Vergleich des *Venus*wurfs mit den Astragaloi mit dem Wurf eines Spielwürfels bzw. Pokerwürfels ist für eine Verbindung der Geschichte mit der Gegenwart besonders interessant.

Durch das Spiel *Venus* kann man den SchülerInnen die Permutation näher bringen. Das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten und insbesondere der Multiplikationsregel sollte schon bekannt sein. Wichtig ist, dass die Lernenden bei den Rechnungen b) und c) wieder die Formel $\frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$ erkennen.

Im Unterricht würde ich für dieses Beispiel ein offenes LehrerInnen-SchülerInnen-Gespräch vorschlagen. Vor der eigentlichen Berechnung sollen die SchülerInnen aufgefordert werden, mit den nachgebildeten Knöchelchen zu würfeln. Vielleicht traut sich auch jemand einen Tipp abzugeben, wie hoch die Chance ist, eine *Venus* zu würfeln. Die anschließenden Rechnungen sollen diese Frage dann lösen und die Wahrscheinlichkeiten mit den heutzutage üblichen Würfelmodellen verglichen werden.

Weiterführend eignen sich auch Astragaloi für die Spiele *Wahrscheinlichkeitsraten* und *Würfelraten* aus **Kapitel 7.3**. Diese Spiele müssten dann entsprechend abgeändert werden.

7.4.2 Pleistobolinda (Meistwurfspiel)

Dieses Spiel eignet sich für zwei MitspielerInnen, die mit ihren je zwei Astragaloi würfeln. Ist die Augensumme der eigenen zwei Astragaloi höher als die des Gegners, so hat man gewonnen und erhält die Astragaloi des Gegners.⁵⁹ Aufgrund eines oft zitierten antiken Sprichworts in der Literatur nimmt man an, dass dem Wurfergebnis $\{1, 6\}$ der Summenwert 1 zugeordnet wurde.⁶⁰

Berechne unter dieser Annahme die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augenzahlsumme.

Gaius würfelte die Augensumme 7. Mit welcher Chance kann Simon noch gewinnen?

Mathematische Analyse

X ...Augenzahl des ersten Astragalos

Y ...Augenzahl des zweiten Astragalos

In **Tabelle 21** sieht man in der ersten Spalte die Wurfausgänge des ersten Astragalos und in der ersten Zeile das Ergebnis des zweiten Astragalos. Die Einträge der so entstehenden Matrix bilden alle möglichen Augensummen ab. Die niedrigste Augensumme wird mit den Wurfergebnissen $\{1, 6\}$ bzw. $\{6, 1\}$ erzielt, die höchste Augensumme mit $\{6, 6\}$.

$X \backslash Y$	1	3	4	6
1	2	4	5	1
3	4	6	7	9
4	5	7	8	10
6	1	9	10	12

Tabelle 21: alle möglichen Augensummen zweier Astragaloi

Der Ergebnisraum zum Spiel lautet daher:

$$\Omega = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$$

In **Tabelle 22** entsprechen die Einträge der Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines bestimmten Wurfergebnisses. Beispielsweise wurde für den ersten Eintrag der dritten Zeile berechnet: $P(\{4, 1\}) = P(4) \cdot P(1) = 0,48 \cdot 0,1 = 0,048$. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für

⁵⁹ Haller: Berühmte Aufgaben der Stochastik, 5.

⁶⁰ Haller: Berühmte Aufgaben der Stochastik, 5.

$P(1)$ und $P(4)$ wurden dabei aus **Tabelle 20** entnommen. Zur Berechnung wurde die Multiplikationsregel angewendet.

XY	1	3	4	6
1	0,01	0,035	0,048	0,007
3	0,035	0,1225	0,168	0,0245
4	0,048	0,168	0,2304	0,0336
6	0,007	0,0245	0,0336	0,0049

Tabelle 22: Wahrscheinlichkeiten der Augensummen zweier Astragaloi

Da manche Augensummen auf zweierlei Wurfergebnisse zurückgeführt werden können und die Ereignisse stochastisch unabhängig sind, können die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten nach der zweiten Pfadregel addiert werden. Beispielsweise erhält man die Ziffernsumme 5 durch das Wurfergebnis $\{1, 4\}$ sowie $\{4, 1\}$. Daher ist $P(\{1, 4\} \cup \{4, 1\}) = P(\{1, 4\}) + P(\{4, 1\}) = 0,048 + 0,048 = 0,048 \cdot 2 = 0,096$. Das entspricht einer Wurfchance von 9,6% für die Augensumme 5.

$S \dots$ Augensumme

S	1	2	4	5	6	7	8	9	10	12
$P(S)$	0,014	0,01	0,07	0,096	0,1225	0,336	0,2304	0,049	0,0672	0,0049
%	1,4	1	7	9,6	12,25	33,6	23,04	4,9	6,72	0,49

Tabelle 23: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensumme zweier Astragaloi

Aus den Berechnungen erkennt man, dass die Augensumme 7 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,336 am häufigsten auftreten wird. Auch die Augensummen 8 und 6 weisen mit 0,2304 bzw. 0,1225 eine hohe Wahrscheinlichkeit auf. Die am wenigsten oft gewürfelte Summe ist zugleich die höchste mit Wahrscheinlichkeit 0,0049.

Um zu gewinnen muss Simon eine höhere Augensumme als 7 erreichen. Die für ihn günstigen Augensummen sind daher 8, 9, 10 und 12. Die Wahrscheinlichkeiten werden nach der zweiten Pfadregel addiert.

$$P(S > 7) = P(8) + P(9) + P(10) + P(10) = 0,2304 + 0,0049 + 0,0672 + 0,0049 \\ = 0,3515$$

Simon gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3515 (35,15%) gegen Gaius.

Didaktische Reflexion

Dieses Spiel ist vergleichbar mit dem *Entenrennen* aus **Kapitel 7.2.2**, allerdings sind die Wahrscheinlichkeiten für die Augenzahlen unterschiedlich verteilt. Außerdem werden für die Augensummen aufsteigend nicht alle natürlichen Zahlen erzielt und auch die besondere Regel für die Ziffernsumme 1 ist eine zusätzliche Schwierigkeit. Die SchülerInnen können nicht mehr die Formel $\frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$ wie bei der gleichverteilten Wahrscheinlichkeit der Augenzahlen verwenden. Stattdessen werden bei den Berechnungen die Multiplikationsregel und die Additionsregel von Wahrscheinlichkeiten angewendet. Den SchülerInnen soll klar werden, dass die zuvor gelernte Formel hier keinesfalls Anwendung findet. Dies kann auch kurz demonstriert werden.

Unter der Annahme, dass die Formel $\frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$ auch bei Astragaloi Anwendung findet, würde jede Ziffernsumme aus **Tabelle 21** mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{16}$ erscheinen. Die Ziffernsummen, die aus mehreren Würfelkombinationen gebildet werden können, haben entsprechend höhere Wahrscheinlichkeiten. In **Tabelle 24** wurden auszugsweise die Wahrscheinlichkeiten für die Ziffernsummen 1, 2 und 7 berechnet.

X	Würfelkombinationen	$P(X)$	%
Ziffernsumme 1	1 + 6, 6 + 1	$P(1) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	12,5%
Ziffernsumme 2	1 + 1	$P(2) = \frac{1}{16}$	6,25%
Ziffernsumme 7	4 + 3, 3 + 4	$P(7) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$	12,5%

Tabelle 24: Augensumme zweier Astragaloi bei gleicher Wahrscheinlichkeit der Augenzahlen

Man erkennt, dass bei einer Gleichverteilung der Wahrscheinlichkeiten eines Astragalos die Ziffernsummen 1, 4, 5, 7, 9 und 10 sowie 2, 6, 8 und 12 gleich hohe Wahrscheinlichkeit aufweisen würden.

$$P(1) = P(4) = P(5) = P(7) = P(9) = P(10) = \frac{1}{8}$$

$$P(2) = P(6) = P(8) = P(12) = \frac{1}{16}$$

Vergleicht man nun diese Ergebnisse mit den Ausgangsinformationen in **Tabelle 20**, so kommt man zu dem Schluss, dass hier etwas faul ist. Es ist undenkbar, dass die Ziffernsumme 1, die nur aus den Seitenflächen eines Astragalos gebildet werden kann, die mit Abstand die geringste Auftretenswahrscheinlichkeit haben, genauso oft in Erscheinung tritt wie die Ziffernsumme 7. Diese wird aus den Seitenflächen eines Astragalos gebildet, die mit Abstand am öftesten gewürfelt werden. Dies wird bestimmt alle SchülerInnen von der Nutzlosigkeit der oben genannten Formel für dieses Beispiel überzeugen.

8 Didaktisches Resümee

„Das Spiel nimmt im Leben des Menschen einen besonderen Platz ein. Die ersten Tätigkeiten eines kleinen Kindes sind Spiele, spielend und im Spiel lernt es seine Umwelt kennen – und eine verständige Umwelt betrachtet es als selbstverständlich, daß kleine Kinder eben spielen, sogar spielen müssen. Das Spiel hat für das Kind die Bedeutung einer praktischen und ernsthaften Arbeit.“⁶¹ (Kurzreiter 1981)

Spiele haben aber nicht nur in der Welt von Kindern, sondern auch von Jugendlichen und Erwachsenen eine bedeutende Rolle.⁶² Also warum sollten man nicht auch in der Schule spielen können? Der Ausspruch „Erst die Arbeit, dann das Spiel“ vermittelt, dass Arbeit und Spiel voneinander getrennt sind bzw. getrennt werden müssen. Eine Möglichkeit diese Trennung abzuschwächen und gleichzeitig den natürlichen Spieltrieb der Kinder für die Schule auszunützen, stellen Spiele dar, die das Lernen fördern. Diese (fach-)didaktischen Spiele schaffen Situationen, in denen das Spiel mit der Arbeit verbunden wird. Spiele ermöglichen gezielt spezielle Kenntnisse und Fähigkeiten zu trainieren. Auf diese Weise können sie den Weg des Kindes durch die Schule freundlicher gestalten und erleichtern.⁶³

8.1 Vorteile von spielerischen Unterrichtssequenzen

Das Heranziehen von Spielen im Schulunterricht bietet den SchülerInnen nicht nur eine Abwechslung zum Schulalltag, sondern bietet ihnen eine Reihe von Vorteilen.

„Das Spiel ist die Ebene, auf der Mensch den Mitmenschen begegnet, sie kennenlernen. Das Leben des Menschen als soziales und personales Wesen vollzieht sich vorwiegend in Gruppen.“⁶⁴ (Kurzreiter 1981)

Kurzreiter nennt mögliche Bereicherungen für die SchülerInnen durch das Spiel in der Schule⁶⁵.

- Förderung individueller Lernmöglichkeiten
- Behebung von Lerndefiziten
- Stärkung der sozialen Kompetenz
- Aktivierung der Selbstständigkeit
- Ermöglichung der Selbsterfahrung

⁶¹ Kurzreiter: Spielen in der Schule, 12.

⁶² Kurzreiter: Spielen in der Schule, 12.

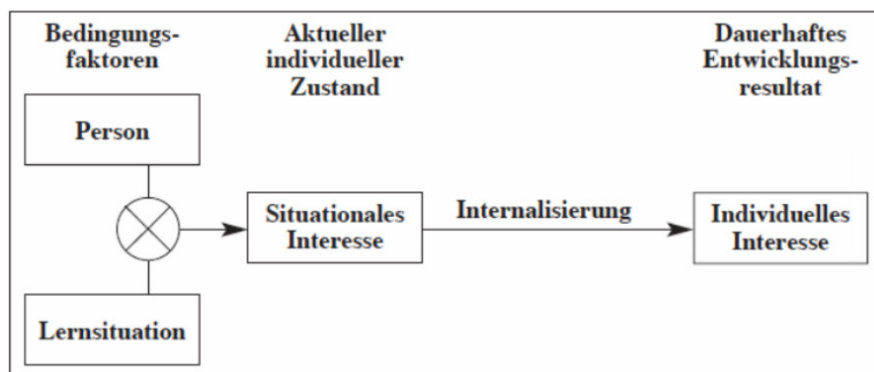
⁶³ Kurzreiter: Spielen in der Schule, 12.

⁶⁴ Kurzreiter: Spielen in der Schule, 41.

⁶⁵ Kurzreiter: Spielen in der Schule, 47.

Neben diesen möchte ich auch noch die Nachhaltigkeit des Lernens hervorheben. Durch den spielerischen Zugang wird ein mathematisches Problem für alle SchülerInnen verständlicher dargestellt. Diese begreifen die Fragestellung besser und können daher leichter Vermutungen aufstellen und ihre Beobachtungen in Worte fassen. Auch das Interpretieren der Ergebnisse in Bezug auf das Spiel macht für die SchülerInnen mehr Sinn. Der Unterricht wird dadurch lebhafter und der Austausch zwischen der Lehrperson und den SchülerInnen wird gefördert. Dies alles führt dazu, dass die Lernsequenz besser im Gedächtnis hängen bleibt. Eine interaktive Unterrichtsstunde, in der die SchülerInnen selbst experimentieren dürfen, hat viel mehr Erinnerungspotential als die durchschnittliche Lerneinheit.

Ein weiterer Vorteil, den ich erkennen kann, ist die Steigerung der Motivation und des Interesses der Lernenden. Dazu ein kurzer Exkurs in die Interessensgenese, die Entwicklung von Interesse. Diese wurde von Andreas Krapp 1998 durch folgende Graphik beschrieben und lässt sich in zwei Stadien unterscheiden.



Quelle: Krapp: Entwicklung und Förderung von Interessen im Unterricht, 191.

Das situationale Interesse

Das situationale Interesse bezieht sich, wie auch schon der Name verrät, auf konkrete Handlungssituationen. Es ist das Resultat aus der Wechselwirkung zwischen Personen- und Situationsfaktoren. Im Unterricht ist es von besonderer Bedeutung für situationales Interesse bei den SchülerInnen zu sorgen. Zuerst spielt die sogenannte „catch“-Komponente die bedeutende Rolle. Es geht darum das Interesse einzufangen und die Aufmerksamkeit der SchülerInnen zu erlangen. Das gelingt oft durch Überraschungs- oder Diskrepanzerlebnisse. Die zweite Komponente wird als „hold“-Komponente bezeichnet. Diese ist für die Aufrechterhaltung des Interesses über einen längeren Zeitraum hinweg zuständig. Das gelingt

durch motivationalen Anreiz, durch eine positive Erlebnisqualität oder durch die persönliche Sinnhaftigkeit des Lerninhaltes.⁶⁶

Das individuelle Interesse

Das individuelle Interesse entwickelt sich durch Internalisierung aus dem situationalen Interesse heraus. Man versteht darunter den dauerhaften Personen-Gegenstands-Bezug. Dazu tragen sowohl äußere Bedingungen, wie Lernaktivitäten, Materialien, Medien und Lernumgebung bei, als auch die Lerninhalte an sich.⁶⁷ Und damit die Lerninhalte so interessant wie möglich sind, kann man sie in Spiele oder Rätsel packen.

Spiele sind für den Unterricht eine wahre Bereicherung. Die SchülerInnen lernen auf eine intuitive Art und Weise, können Erfahrungen sammeln und Beobachtungen während des Spiels machen. Das Experimentieren und der Austausch mit MitschülerInnen fördern die Motivation, das Interesse sowie die sozialen Kompetenzen.

8.2 Verankerung im Lehrplan

Auch im Lehrplan für Mathematik der AHS Oberstufe findet man die spielerische Komponente des Unterrichts.

Unter „Didaktische Grundsätze“ liest man:

„Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen durch eigene Tätigkeiten Einsichten gewinnen und so mathematische Begriffe und Methoden in ihr Wissenssystem einbauen.“⁶⁸

Weiters findet man:

„Lernen im sozialen Umfeld: Der Einsatz passender Sozialformen ist auf die angestrebten Lernziele, die Eigenart der Inhalte und auf die jeweilige Lerngruppe abzustimmen. Ein konstruktives Klima

⁶⁶ Krapp: Entwicklung und Förderung von Interessen im Unterricht, 191.

⁶⁷ Krapp: Entwicklung und Förderung von Interessen im Unterricht, 192.

⁶⁸ AHS-Lehrplan Oberstufe neu: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568&FassungVom=2017-09-01>, [24.3.2017].

zwischen Lehrenden und Lernenden und innerhalb dieser Gruppen ist hilfreich für jeden Lernprozess. [...]“⁶⁹

Alle diese Bedingungen können Spiele und Experimente im Unterricht erfüllen. Eine gute und strukturierte Planung der Lehrperson sei dabei vorausgesetzt.

Spiele stehen daher nicht im Gegensatz zu einem sinnvollen Mathematikunterricht, sondern ergänzen und bereichern diesen.

8.3 Reflexion der ausgewählten Würfelspiele

Neben Würfelspielen können natürlich auch andere Spiele im Stochastikunterricht zum Einsatz kommen. Münzspiele und populäre Glücksspiele eignen sich ebenso für den Unterricht. Aber auch in anderen mathematischen Themengebieten sollen meiner Meinung nach Spiele und Rätsel öfters an der Tagesordnung stehen. Vor allem in der Unterstufe bieten sich dazu Zahlenrätsel an.

Spiele im Mathematikunterricht erfüllen neben den sozialen und motivationalen Komponenten weitere Funktionen.

Mathematische Spiele können dazu dienen bereits erlernte Fähigkeiten weiterhin zu trainieren und zu üben. Die Übungsphase wird für die SchülerInnen dadurch reizvoller und spannender gestaltet. Das Spiel *Wahrscheinlichkeitsrennen* aus **Kapitel 7.1.1** kann zum Beispiel auch zur Übung eingesetzt werden.

Für die Veranschaulichung mathematischer Phänomene können ebenso Spiele herangezogen werden. Das Spiel *Entenrennen* aus **Kapitel 7.2.2** dient zum Beispiel als Veranschaulichung, dass manche Ziffernsummen bei einem Wurf mit zwei Spielwürfeln öfters auftreten als andere.

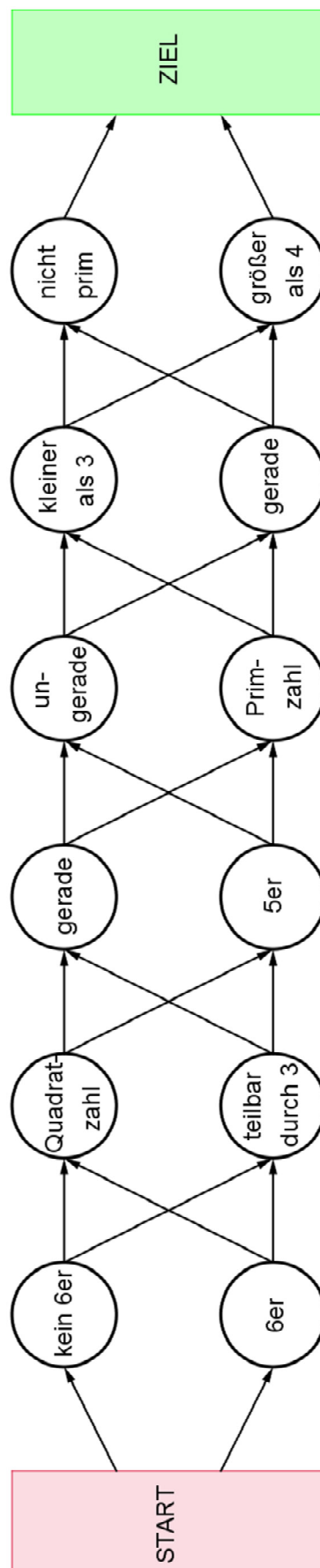
Spiele können im Unterricht zum Einsatz kommen, um mathematische Fragestellungen zu berechtigen. Beispielsweise wird durch das Spiel *Mensch, ärgere dich nicht* aus **Kapitel 7.1.3** das Berechnen des Erwartungswerts motiviert. Das Spiel *Warten auf die Doppelsechs* aus **Kapitel 7.2.1** bildet ebenso eine Geschichte um eine mathematische Fragestellung.

⁶⁹ AHS-Lehrplan Oberstufe neu: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568&FassungVom=2017-09-01>, [24.3.2017].

Als letztes möchte ich die Funktion des Spiels als die mathematische Behandlung selbst anführen.⁷⁰ Die meisten der von mir ausgewählten Würfelspiele sind unter dieser Kategorie einzuordnen. Ein Spiel wird in seiner Gesamtheit oder aufgrund einer speziellen Fragestellung analysiert.

⁷⁰ Kaps: Spiele und Mathematik, 15-44.

9 Anhang



Arbeitsblatt: Wahrscheinlichkeitsrennen

X	günstige Augenzahlen	Anzahl der günstigen Augenzahlen	Anzahl der möglichen Augenzahlen	$P(X)$
Quadratzahl				
teilbar durch 3				
gerade				
5er				
ungerade				
Primzahl				
kleiner als 3				
gerade				
nicht prim				
größer als 4				

- Gibt es Felder von denen man schwerer weiterkommt als von anderen?
Welche?.....
- Gibt es Felder von denen man leichter weiterkommt als von anderen?
Welche?.....
- Gibt es gleichwertige Felder? Welche?
.....
- Gib eine Felderfolge an, die für einen Sieg besonders günstig ist!
.....
- Gib eine Felderfolge an, die für einen Sieg besonders ungünstig ist!
.....

Arbeitsblatt: Entenrennen

[illegible]

Arbeitsblatt: Experiment mit einem Quaderwürfel

- 1) Sieh dir den Quaderwürfel genau an. Du sollst ohne Probewürfeln schätzen in wie viel Prozent der Fälle die einzelnen Seiten ungefähr oben liegen werden, wenn man den Würfel oft hintereinander wirft.

	1	2	3	4	5	6	Σ
eigene Schätzung	%	%	%	%	%	%	100%

- 2) Würfle 50 Mal mit dem Quaderwürfel und notiere dir mit Hilfe einer Strichliste wie oft die Augenzahlen auftreten.

	1	2	3	4	5	6	Σ
Strichliste							50
Absolute Häufigkeit							50

- 3) Suche dir vier MitschülerInnen und trage ihre und deine gewürfelten absoluten Häufigkeiten in die Tabelle ein. Berechne dann relative und prozentuelle Häufigkeiten.

Name	1	2	3	4	5	6	Σ
							50
							50
							50
							50
							50
Absolute Häufigkeit							250
Relative Häufigkeit							1
Prozentuelle Häufigkeit							100

- 4) Trage die absoluten Häufigkeiten deiner Gruppe und drei weiterer Gruppen in die Tabelle ein. Berechne dann relative und prozentuelle Häufigkeiten.

	1	2	3	4	5	6	Σ
Gruppe 1							250
Gruppe 2							250
Gruppe 3							250
Gruppe 4							250
Absolute Häufigkeit							1000
Relative Häufigkeit							1
Prozentuelle Häufigkeit							100

- 5) Vergleiche die erhaltene prozentuelle Häufigkeit mit deiner Schätzung. Hast du gut geschätzt?

10 Literaturverzeichnis

AHS-Lehrplan Oberstufe neu: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568&FassungVom=2017-09-01>, [24.3.2017].

AHS-Lehrplan Unterstufe: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_unterstufe.html, [24.3.2017].

AHS-Lehrplan Oberstufe: https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_oberstufe.html, [24.3.2017].

Beck, Fritz: *Poker mit Würfel, und andere Würfelspiele*. 3. Aufl. Wien [u.a.]: Pechan 1967.

Bewersdorff, Jörg: *Glück, Logik und Bluff. Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen*. 6. akt. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag 2012.

Bosch, Karl: *Lotto und andere Zufälle. Wie man die Gewinnquoten erhöht*. 2. Aufl. Wien [u.a.]: Oldenbourg 1999.

Bundesministerium für Finanzen: *Häufig gestellte Fragen zum Glücksspielmonopol*, <https://www.bmf.gv.at/steuern/gluecksspiel-spielerschutz/gesetzliche-grundlagen/gspg-faq.html>, [26.3.2017].

Colyns, Pierre: *Casino Geschichte*, <http://www.casino-info-welt.ch/Casino-Geschichte.aspx>, [26.3.2017].

Glogger, Helmut-Maria: *Spielcasinos – Tempel des Glücks. Spielen – Gewinnen – Genießen*. München: Peter Erd 1992.

Haller, Rudolf: *Berühmte Aufgaben der Stochastik. Von den Anfängen bis heute*. 2. überarb. Aufl. Berlin [u.a.]: De Gruyter 2016.

Ineichen, Robert: *Würfel und Wahrscheinlichkeit. Stochastisches Denken in der Antike*. Heidelberg [u.a.]: Spektrum Akademischer Verlag 1996.

Jütte, Robert: „Die Anfänge des Organisierten Verbrechens. Falschspieler und ihre Tricks im späten Mittelalter und der frühen Neuzeit“. In: *Archiv für Kulturgeschichte* 70 (1), 1-32.

- Kaps, Barbara: *Spiele und Mathematik. Anwendung und Bedeutung für den Mathematikunterricht*. Diplomarbeit Universität Wien, Wien: 1989.
- Krapp, Andreas: *Entwicklung und Förderung von Interessen im Unterricht. Psychologie in Erziehung und Unterricht*. 1998, online unter: <https://www.unibw.de/sowi1/interesse/literatur>, [30.3.2017].
- Kurzreiter, Josef (Hrsg.): *Spielen in der Schule*. Wien [u.a.]: Herold 1981.
- Kütting, Herbert: *Didaktik der Stochastik*. Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl. 1994.
- Malle, Günther: *Mathematik verstehen 6*. 1. Aufl. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch 2005.
- Malle, Günther: *Mathematik verstehen 7*. 1. Aufl. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch 2006.
- Petersen, Christian: *Casino-Würfel*, http://wuerfel.sammlung-online.de/wuerfelarten/casino_wuerfel.html, [27.3.2017].
- Riemer, Wolfgang: *Mit Quadern „würfeln“. Wahrscheinlichkeit als Modell der Wirklichkeit erleben – Modellierungskreislauf*. 2016, online unter: <http://www.riemer-koeln.de/mathematik/quader/quader-gebrauchsanleitung-ma-7-8.pdf>, [12.3.2017].
- Riemer, Wolfgang: *Spezielle Würfel*, <http://www.riemer-koeln.de/cmbasic/>, [12.3.2017].
- Uebel, Katharina: *Römische Spiele. So spielten die alten Römer*. Euskirchen: Regionalia-Verl. 2010.

11 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Würfelbrett	5
Abbildung 2: Würfelbecher	6
Abbildung 3: Präzisionswürfel	6
Abbildung 4: Astragaloi	7
Abbildung 5: Würfelturm (Turricula)	9
Abbildung 6: antike Würfel	10
Abbildung 7: Glücksrad	19
Abbildung 8: Wahrscheinlichkeit als Vertrauensmaß	26
Abbildung 9: Baumdiagramm – Ziehen der Kugeln „O“ und „M“ aus einer Urne	33
Abbildung 10: Baumdiagramm zum Gewinnspiel „OMO“ - Multiplikationsregel	34
Abbildung 11: Baumdiagramm zum Gewinnspiel „OMO“ - Additionsregel	35
Abbildung 12: Baumdiagramm medizinische Untersuchung	38
Abbildung 13: Baumdiagramm Permutation	40
Abbildung 14: Spielwürfel	44
Abbildung 15: Baumdiagramm Spielwürfel	44
Abbildung 16: Pokerwürfel	45
Abbildung 17: Baumdiagramm Pokerwürfel	46
Abbildung 18: kurzer U-Würfel, langer U-Würfel, Quaderwürfel	46
Abbildung 19: Werte der Astragaloi	49
Abbildung 20: Spielfeld <i>Wahrscheinlichkeitsrennen</i>	51
Abbildung 21: günstige Felderfolgen beim <i>Wahrscheinlichkeitsrennen</i>	55
Abbildung 22: Auftretenswahrscheinlichkeit einer Doppelsechs in Abhängigkeit der Wurfanzahl	70
Abbildung 23: Quaderwürfel aus Holz	76
Abbildung 24: Absolute Häufigkeiten des Quaderwürfels nach 1000 Würfeln	78
Abbildung 25: Annäherung der relativen Häufigkeiten des Quaderwürfels	79
Abbildung 26: U-Würfel	86

12 Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Ereignis und Gegenereignis	24
Tabelle 2: Anzahl der roten und schwarzen Kugeln in Urne A und Urne B.....	27
Tabelle 3: Häufigkeitsverteilung der roten und schwarzen Kugeln in den Urnen	30
Tabelle 4: Wahrscheinlichkeitsverteilung eines regelmäßigen Würfels	39
Tabelle 5: Wahrscheinlichkeitsverteilung eines durchschnittlichen Astragalos	49
Tabelle 6: Berechnungen zu <i>Zweiundzwanzig</i>	59
Tabelle 7: Wahrscheinlichkeit bei einer bestimmten Anzahl von Würfeln eine Sechs zu würfeln	63
Tabelle 8: Spielfeld <i>Entenrennen</i>	71
Tabelle 9: alle möglichen Wurfresultate zweier Spielwürfel	72
Tabelle 10: Berechnungen <i>Entenrennen</i>	73
Tabelle 11: Beispielhafter Spieldesign zum <i>Entenrennen</i>	75
Tabelle 12: Schätzungen des Quaderwürfels	76
Tabelle 13: Absolute Häufigkeiten des Quaderwürfels nach je 100 weiteren Würfeln.....	77
Tabelle 14: Relative Häufigkeiten des Quaderwürfels nach je 100 weiteren Würfeln.....	78
Tabelle 15: Prozentuelle Häufigkeiten des Quaderwürfels nach 1000 Würfeln.....	80
Tabelle 16: Mittelwerte der Wahrscheinlichkeiten des Quaderwürfels	80
Tabelle 17: Vergleich der Wahrscheinlichkeiten aus Geometrie bzw. Experiment	82
Tabelle 18: Wahrscheinlichkeiten eines Spielwürfels, Quaderwürfels und U-Würfels.....	87
Tabelle 19: Wahrscheinlichkeiten nach dem ersten bzw. zweiten Wurf	89
Tabelle 20: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Astragaloi	91
Tabelle 21: alle möglichen Augensummen zweier Astragaloi.....	94
Tabelle 22: Wahrscheinlichkeiten der Augensummen zweier Astragaloi	95
Tabelle 23: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensumme zweier Astragaloi	95
Tabelle 24: Augensumme zweier Astragaloi bei gleicher Wahrscheinlichkeit der Augenzahlen	96

13 **Abkürzungsverzeichnis**

bzw.	beziehungsweise
CAS	Computer Algebra System
Chr.	Christus
etc.	et cetera
griech.	griechisch
ital.	italienisch
lat.	lateinisch
min.	minimal
v. Chr.	vor Christus
vgl.	vergleiche
z.B.	zum Beispiel