

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Die Wellengleichung: Lösungen und
Ausbreitungseigenschaften“

verfasst von / submitted by

Johannes Wallmann

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium
UF Mathematik
UF Physik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Günther Hörmann

Abstract

Die Wellengleichung ist der Prototyp einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiten Grades der hyperbolischen Klasse. Sie spielt bei vielen Modellierungen eine wichtige Rolle, da mit ihr die Ausbreitung von Wellen und Schwingungen beschrieben werden kann. Die Kernfrage der vorliegenden Diplomarbeit ist, welche Form Lösungen der Wellengleichung haben und welche Eigenschaften sich daraus ableiten lassen. Lösungen der Gleichung sind stetig differenzierbare Funktionen, die grundsätzlich von mindestens zwei Variablen, dem Ort und der Zeit abhängen. Wird die Ortsvariable nur in einer Raumrichtung betrachtet, spricht man von der eindimensionalen Wellengleichung. Für diese Situation werden zwei Lösungsansätze vorgestellt, der Separationsansatz und die Lösungsformel von d'Alembert. Ersterer ist gut geeignet, um die partielle Differentialgleichung bei vorgegebenen Randbedingungen zu lösen, wohingegen beim Anfangswertproblem die Lösungsformel ihre Stärken hat. Die Lösungen für den höherdimensionalen Fall unterscheiden zwischen gerader und ungerader Raumdimension. Hier liegt der Fokus der Arbeit auf den noch anschaulichen zwei und drei Raumdimensionen. In diesem Zusammenhang finden die Poissonsche Formel und die Kirchhoffsche Formel Erwähnung und darauf aufbauend wird kurz das Huygenssche Prinzip diskutiert.

Abstract

The wave equation is a second-order linear partial differential equation. It is moreover of hyperbolic type, which has an effect on some solution strategies. As the name says, the equation describes propagating waves and oscillations. Therefore it is very important in many modelling processes. This diploma thesis deals with the question how solutions of the wave equation look like and which properties they have. In general the solutions are continuously differentiable functions in two independent variables. One of them represents time, the other is space. The dimension of the space variable defines the dimension of the wave equation. In case we have a one-dimensional space we can solve the equation by separation of the two variables or with the d'Alembert's formula. Both methods have different benefits in solving boundary-problems and initial value problems of the partial differential equation. While the first part of this thesis is about the one-dimensional problem, the second part discusses solutions for higher dimensions. Especially the wave equation in two and three dimensions will be focused on. The Poisson's formula and the Kirchhoff's formula represent a solution for this. Also the consequential Huygens' principle is a subject of discussion.

Vorwort

Die vorliegende Diplomarbeit habe ich als Abschlussarbeit meines Lehramtstudiums in den Fächern Mathematik und Physik an der Universität Wien verfasst. Beide Fächer wecken in mir schon lange gleichermaßen großes Interesse und inhaltlich gibt es einige Überschneidungsgebiete aus den zwei wissenschaftlichen Disziplinen. Aus diesem Grund war es für mich wichtig ein Thema für die Arbeit zu finden, das in diesem Grenzgebiet angesiedelt ist.

Im Rahmen eines Seminars für Angewandte Mathematik durfte ich mich ein erstes Mal näher mit der Wellengleichung befassen. Im Mittelpunkt stand damals der Separationsansatz. Als ich später mit meinem Betreuer, Günther Hörmann, auf der Suche nach einem geeigneten Thema war, kam die Idee auf, die Ausarbeitungen über diese spezielle partielle Differentialgleichung zu vertiefen und auszubauen. Das ist der Grund dafür, dass jetzt diese Diplomarbeit über die Wellengleichung vor Ihnen liegt. Teile der Seminararbeit über den Separationsansatz fanden, nach einer Überarbeitung, auch Eingang in die nachfolgenden Ausführungen.

An dieser Stelle ist es mir mehr als eine angenehme Pflicht, mich auch bei meinem Betreuer, Günther Hörmann, zu bedanken. Nicht nur für seine Unterstützung im Entstehungsprozess dieser Arbeit, sondern auch für sein wohlwollendes Entgegenkommen und Engagement den Studierenden an der mathematischen Fakultät gegenüber sei ihm ein Dank ausgesprochen.

Die Liste an Freunden, die mich durch das Studium begleitet haben und mir dabei durch oft sehr intensive mathematische Diskussionen neue Blickwinkel ermöglichten, wäre viel zu lang, um hier angeführt zu werden. Ohne ihre Hilfe beim Lernen in den vergangenen Jahren wäre das Studium sicher um einiges schwieriger gewesen. Auch für so manche kollegiale Anregung in speziellen Punkten dieser Arbeit bin ich sehr dankbar.

Nicht zuletzt möchte ich meiner Familie Danke sagen. Sie hat mir durch ihre Ermutigungen und die viele Unterstützung, die ich bekommen durfte, überhaupt erst die Möglichkeit gegeben dieses Studium zu absolvieren.

Johannes Wallmann
Wien, Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	9
2 Eindimensionale Wellengleichung	11
2.1 Modellierungsbeispiele	11
2.1.1 Schallwellen	11
2.1.2 Schwingende Saite	12
2.2 Separationsansatz	13
2.2.1 Superpositionsprinzip	14
2.2.2 Fourierreihen	15
2.2.3 Anfangsbedingungen	16
2.3 Allgemeine klassische Lösung	17
2.3.1 Transportgleichung	17
2.3.2 Methode von d'Alembert	20
2.3.3 Beispiele für Lösungen	24
2.3.4 Kausalität	26
2.3.5 Randbedingungen	27
2.3.6 Differenzengleichung	31
2.4 Schwache Lösung	33
2.4.1 Beispiel	36
2.4.2 Hilfsmittel für klassische Lösungen	37
3 Höhere Dimensionen	38
3.1 Dreidimensionales Problem	38
3.1.1 Kirchhoffsche Formel	39
3.1.2 Euler-Poisson-Darboux-Gleichung	42
3.1.3 Ungerade Raumdimensionen	46
3.2 Zweidimensionales Problem	47
3.2.1 Poissonsche Formel	47
3.2.2 Gerade Raumdimensionen	49
3.3 Ausbreitungseigenschaften	50
3.3.1 Kausalität	50
3.3.2 Charakteristischer Kegel	52
3.3.3 Huygenssches Prinzip	53
Literaturverzeichnis	55

1 Einleitung

Die Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung. Mit ihr können einfache Formen von Schwingungen und Wellen modelliert werden. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Für eine unbekannte Funktion $u : U \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(\mathbf{x}, t)$ mit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ lautet die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right), \quad 0 < c \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

In Anlehnung an die Probleme, die mit der Wellengleichung modelliert werden, identifiziert man t meistens als Variable der Zeit. Daher schränken wir $t \in [0, +\infty)$ ein. Grundsätzlich behalten die verschiedenen Lösungen der Gleichung meist auch für $t < 0$ ihre Gültigkeit, jedoch macht dies für die gestellten Probleme oft wenig Sinn. Die Variable $\mathbf{x}$ wird auch als Ortsvariable oder Raumvariable aufgefasst. So spricht man von der n -dimensionalen Wellengleichung und meint damit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, obwohl ja die Lösung u im $(n+1)$ -dimensionalen Raum liegt. Der Parameter c kann als Ausbreitungsgeschwindigkeit interpretiert werden und durch geeignete Wahl von Einheiten auf $c = 1$ gesetzt werden. Die Gleichung erscheint dann in der folgenden Form, die in der Literatur weitaus gebräuchlicher ist:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0. \quad (1.2)$$

Hier ist leicht zu erkennen, dass (1.2) eine homogene Differentialgleichung ist. Die inhomogene Wellengleichung, die in unseren Betrachtungen eine untergeordnete Rolle spielen wird, lautet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f, \quad (1.3)$$

für eine vorgegebene Funktion $f : U \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Die auftretenden partiellen Ableitungen sind alle zweiten Grades. Daher ist (1.1) eine Gleichung zweiter Ordnung. Zudem ist die Gleichung linear. Das heißt, dass alle auftretenden Ableitungen keine Koeffizienten, die von der unbekannten Funktion u abhängen, haben. Viele für Modellierungsprobleme wichtige Differenzialgleichungen haben diese Eigenschaften, sind also von zweiter Ordnung, homogen und linear. Sie können in ihrer allgemeinsten Form mit

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^m b_i(\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial y_i} + c(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in V \subseteq \mathbb{R}^m$$

angegeben werden. Um systematische Lösungen für Gleichungen dieser Art zu finden, gibt es noch eine weitere Unterscheidungsmöglichkeit. Diese Klassifikation ist mehr oder weniger willkürlich und nicht vollständig, bringt aber den Vorteil, Lösungskonzepte für einen bestimmten Typus von Gleichung parat zu haben. Wir definieren die Matrix

$$A(\mathbf{y}) := (a_{ij}(\mathbf{y})).$$

Ist $A(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{y} \in V$ positiv oder negativ definit (alle Eigenwerte sind entweder positiv oder negativ), so nennt man die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung elliptisch. Die Gleichung heißt parabolisch, wenn $A(\mathbf{y})$ semidefinit (zumindest ein Eigenwert

verschwindet, die anderen Eigenwerte sind entweder alle positiv oder alle negativ) ist. Schlussendlich ist die Gleichung vom hyperbolischen Typ, wenn $A(\mathbf{y})$ indefinit (es gibt positive und negative Eigenwerte) ist. (vgl. [2] S.185f) Folgt man dieser Einteilung kann man aus der Koeffizientenmatrix der Wellengleichung

$$A(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -c^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -c^2 \end{pmatrix} \quad \forall \mathbf{y} \in U \times [0, +\infty)$$

erkennen, dass (1.1) vom hyperbolischen Typ ist. Die Matrix ist eine Diagonalmatrix, da keine gemischten Ableitungen auftreten. Die Wellengleichung ist somit eine der einfachsten Gleichungen in der hyperbolischen Klasse. Eine Untersuchung von (1.1) ist daher lohnenswert und viele Eigenschaften, welche zum Vorschein treten, können auf kompliziertere hyperbolische Gleichungen übertragen werden.

Es stellt sich nun die Frage, welche Form die unbekannte Funktion u haben muss, damit sie (1.1) erfüllt und somit eine Lösung der Wellengleichung ist. Zudem wollen wir wissen, wie eine solche Lösung u beschaffen ist, insbesondere welche Eigenschaften sie unter fortschreitender Zeit hat.

Natürlich gibt es eine Fülle an Literatur, die sich diesem Problem schon angenommen hat und ein Spektrum an Lösungskonzepten anbietet. Die vorliegende Arbeit soll daher in gewisser Maßen eine Zusammenfassung dieser Konzepte sein und einen Sichtweise auf die Wellengleichung aus verschiedenen Blickwinkeln bieten. Nichtsdestotrotz werden die vorgestellten Ansätze möglichst detailliert wiedergegeben und ergänzt, sodass die Materie (hoffentlich) leicht verständlich ist.

2 Eindimensionale Wellengleichung

In diesem Kapitel beschränken wir uns vorerst darauf, die Ortsvariable x in einer Dimension zu betrachten. Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $u : U \times [0, +\infty)$, $u = u(x, t)$. Die Gleichung, die es zu lösen gilt, lautet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < c \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Zur Notation gibt es noch anzumerken, dass die partielle Ableitung einer Funktion f nach einer Variable x je nach Übersichtlichkeit der Darstellung als $\frac{\partial f}{\partial x}$ oder als f_x geschrieben wird.

2.1 Modellierungsbeispiele

Um die Relevanz von (2.1) zu untermauern, sollen im Folgenden zwei physikalische Beispiele diskutiert werden, die auf die Wellengleichung führen.

2.1.1 Schallwellen

Schallwellen sind räumliche Druckunterschiede, die sich in Abhängigkeit von der Zeit ändern. Eine Quelle von Schallwellen sind Musikinstrumente. Viele davon erzeugen ihren Ton dadurch, dass Luft auf eine Kante (Labium) geblasen wird, wodurch sich Wirbel an dieser Kante ausbilden. Diese Wirbel verursachen Druckunterschiede in der Luftsäule im inneren des Instrumentes. (vgl. [13] S.16f) Der Druck $p(x, t)$ einer Luftsäule der Länge L ist von dem Ort $x \in [0, L]$ für $0 < L \in \mathbb{R}$ sowie der Zeit $t \in (0, +\infty)$ abhängig. Druckunterschiede verursachen einen Luftstrom $s(x, t)$. Bei Überdruck strömt Luft an einem bestimmten Ort x weg und umgekehrt:

$$s(x, t) = a \frac{\partial p}{\partial x}(x, t), \quad 0 < a \in \mathbb{R}.$$

Falls die momentane Änderung des Luftstromes nicht konstant ist, ändert sich die Menge der Luft und dadurch auch der Druck. Wie schnell sich der Druck ändert (das heißt die zweite Ableitung des Druckes nach der Zeit), hängt damit zusammen, wie sich der Luftstrom an einem Ort ändert. Dort wo die Änderung $\frac{\partial s}{\partial x}(x, t)$ des Luftstroms s größer ist, fällt der Druck p schneller ab:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, t) = b \frac{\partial s}{\partial x}(x, t) = b \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) \right), \quad 0 < b \in \mathbb{R}.$$

Fasst man beide Proportionalitätskonstanten mit $c := \sqrt{ab}$ zusammen, erhält man die Wellengleichung wie in (2.1):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x, t). \quad (2.2)$$

Für ein an beiden Enden offenes Instrument der Länge L , bei dem die Luft an beiden Seiten abströmen kann, gelten die Randbedingungen:

$$p(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad p(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (2.3)$$

Ist das Instrument auf einer Seite verschlossen, kann hier keine Luft mehr strömen und es gelten die Randbedingungen

$$p(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (2.4)$$

2.1.2 Schwingende Saite

Ein weiteres Beispiel, das ebenfalls aus dem Bereich der Musik stammt, ist die schwingende Saite (vgl. [12] S.218). Eine schwingende Saite kann dadurch beschrieben werden, dass für jeden Ort zu jedem Zeitpunkt die Auslenkung $a(x, t)$ angegeben wird. Die Kraft F auf die Saite an einer Stelle x wirkt immer entlang der Saite in Richtung der Enden der Saite, wo diese eingespannt ist.

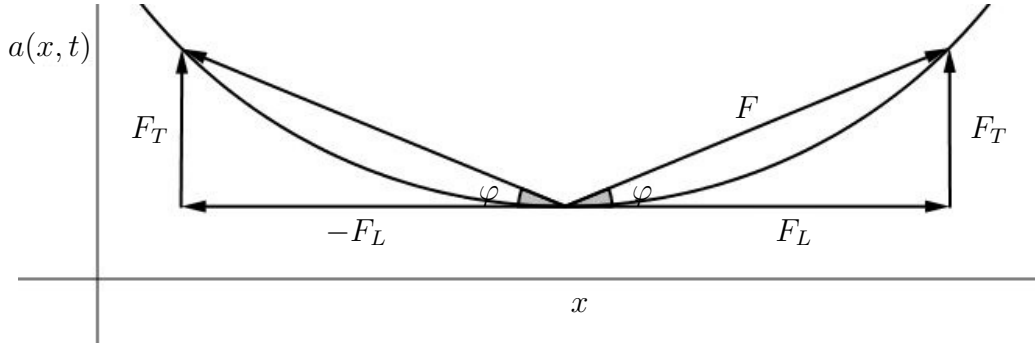


Abbildung 1: Kraftwirkung auf ein kleines Saitenstück

Diese Kraft kann, wie in Abbildung 1 dargestellt, in eine longitudinale Komponente (in x -Richtung) mit $F_L = |F| \cos \varphi$ und eine transversale Komponente (in Richtung der Auslenkung $a(x, t)$) mit $F_T = |F| \sin \varphi$ aufgespalten werden. Zudem gilt in dem betrachteten kleinen Teilstück der Saite, dass $\tan \varphi = \frac{a(x+\Delta x, t) - a(x, t)}{\Delta x}$. Da die auftretenden Winkel φ sehr klein sind, gilt die Näherung $\cos \varphi \approx 1$ und $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$. Somit ergibt sich für die nach rechts wirkende Kraft

$$F_L \approx |F| \quad \text{und} \quad F_T \approx |F| \cdot \frac{a(x + \Delta x, t) - a(x, t)}{\Delta x}$$

und für die nach links gerichtete Kraft

$$F_L \approx -|F| \quad \text{und} \quad F_T \approx |F| \cdot \frac{a(x - \Delta x, t) - a(x, t)}{\Delta x}$$

In Summe heben sich die longitudinalen Kräfte auf und die transversalen Kräfte ergeben zusammen

$$|F| \cdot \frac{a(x + \Delta x, t) + a(x - \Delta x, t) - 2a(x, t)}{\Delta x}.$$

Das Saitenstück der Länge Δx hat eine Masse von $\rho A \Delta x$, wobei A die Querschnittsfläche und ρ die Dichte ist. Die Beschleunigung die darauf ausgeübt wird, ist:

$$\frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial t^2} \approx \frac{|F|}{\rho A} \cdot \frac{a(x + \Delta x, t) + a(x - \Delta x, t) - 2a(x, t)}{\Delta x \Delta x}$$

Für den Grenzwert mit $\Delta x \rightarrow 0$ erhält man mit der Definition der zweiten Ableitung über den Differenzenquotient

$$\frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial t^2} = \frac{|F|}{\rho A} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(x, t).$$

Fasst man die Materialkonstanten und die Spannung der Saite zu einer Konstante zusammen $c := \sqrt{|F|/\rho A}$, erhält man die bekannte Wellengleichung wie in (2.1) oder (2.2):

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(x, t) \quad (2.5)$$

Die Randbedingungen ergeben sich dadurch, dass die Saite links und rechts eingespannt ist:

$$a(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad a(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (2.6)$$

2.2 Separationsansatz

Eine Möglichkeit, eine Lösung für die Wellengleichung (2.1) auf $[0, L] \times (0, +\infty)$ mit der Randbedingung (2.3) beziehungsweise (2.6) aus den Beispielen zu erhalten, ist der Separationsansatz (vgl. [3] S.168 und [12] S.219f). Insbesondere bei vorgegebenen Randbedingungen ist dieser Ansatz sehr anschaulich. Er beruht darauf, dass eine Lösung der Gestalt

$$u(x, t) = v(t)w(x) \quad \text{mit} \quad v \in C^2[0, +\infty), w \in C^2[0, L].$$

gesucht wird. Setzt man den Separationsansatz in die Wellengleichung ein, führt das an den Punkten, bei denen $v(t) \neq 0$ und $w(x) \neq 0$ gilt, zu

$$v''(t)w(x) = c^2 v(t)w''(x) \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)}.$$

In den Fällen $v \equiv 0$ oder $w \equiv 0$ ergibt sich die triviale Lösung $u \equiv 0$ und für $v(t) = 0$ und $w(x) = 0$ ist die Lösung ebenfalls $u(x, t) = 0$.

Da die linke Seite der Gleichung unabhängig von x und die rechte Seite der Gleichung unabhängig von t ist, gilt, dass beide Seiten unabhängig von x und t sein müssen; das heißt sie müssen konstant sein. Wir können daher eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ wählen, für die gilt:

$$\frac{1}{c^2} \frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = \lambda \quad \forall (t, x) \in (0, +\infty) \times [0, L]. \quad (2.7)$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$v''(t) = c^2 \lambda v(t) \quad (2.8)$$

und

$$w''(x) = \lambda w(x). \quad (2.9)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2.9) lautet

$$\tilde{w}(x) = \tilde{\alpha} e^{\sqrt{\lambda} x} + \tilde{\beta} e^{-\sqrt{\lambda} x}, \quad x \in [0, L].$$

Für $\lambda \geq 0$ folgt, in die Lösung eingesetzt, mit den Randbedingungen $w(0) = 0$ und $w(L) = 0$, dass $\alpha = \beta = 0$ und somit $u \equiv 0$. Diese triviale Lösung schließen wir aber aus. Somit bleibt nur noch die Möglichkeit $\lambda < 0$. Hier gilt $\sqrt{\lambda} \in i\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{C} : x = \pm ir, r \in \mathbb{R}\}$ und somit für die Lösung:

$$w(x) = \alpha \operatorname{Re}(e^{irx}) + \beta \operatorname{Im}(e^{irx}) = \alpha \cos(rx) + \beta \sin(rx),$$

beziehungsweise durch einsetzen von $r = \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R}$:

$$w(x) = \alpha \cos(\sqrt{-\lambda}x) + \beta \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

Die Randbedingung $w(0) = 0$ erzwingt $\alpha = 0$, wodurch sich durch die Randbedingung $w(L) = 0 = \beta \sin(\sqrt{-\lambda}L)$ ergibt. Die Voraussetzung $\beta \neq 0$ kann nur erfüllt sein, wenn $\sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0$. Der Sinus nimmt seine Nullstellen bei Vielfachen von π an, somit gilt $\sqrt{-\lambda}L = n\pi \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda} = n\pi/L$. Die einzigen nicht trivialen Lösungen für (2.9) sind also:

$$w_n(x) = \beta \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \beta \neq 0, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (2.10)$$

Da die Konstante λ negativ ist, ist die Lösung der Differentialgleichung (2.8) von der Form:

$$v(t) = a \cos(\sqrt{-\lambda}ct) + b \sin(\sqrt{-\lambda}ct),$$

woraus sich für $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ folgende Gestalt ergibt:

$$v_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (2.11)$$

Die Teillösungen (2.10) und (2.11) führen laut Separationsansatz zur Gesamtlösung:

$$u_n(x, t) = v_n(t)w_n(x),$$

beziehungsweise eingesetzt:

$$u_n(x, t) = \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (2.12)$$

Für die Randbedingung (2.4) ergibt sich $\sqrt{-\lambda} = -\frac{2n+1}{2L}\pi$, wobei $n \in \mathbb{Z}$. Somit lautet die Lösung der Wellengleichung:

$$u_n(x, t) = \left[a_n \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi ct\right) + b_n \sin\left(\frac{2n+1}{2L}\pi ct\right) \right] \sin\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right) \quad (2.13)$$

2.2.1 Superpositionsprinzip

Der Separationsansatz produziert als Lösung eine Funktionenschar. Durch den Parameter $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sind beliebig viele Funktionen u_n möglich, die alle die Wellengleichung lösen. Diese können durch das Superpositionsprinzip zusammengefasst werden.

Satz 2.1. Seien u_i für $i = 1, 2, \dots, m$ mit $m \in \mathbb{N}$ Lösungen der Wellengleichung (1.2) so sind auch alle Linearkombinationen davon Lösungen. Das heißt

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i(x, t) \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

erfüllt ebenfalls (1.2).

Beweis: Durch einfaches Einsetzen von u in (1.2) zeigt man durch die Linearität der Wellengleichung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) = 0\end{aligned}$$

Die Vertauschung von partieller Ableitung und Summe ist gerechtfertigt, da die Ableitung und somit auch die zweite Ableitung linear ist (vgl. [5] §15 Satz 2). $\square$

Da auch alle Linarkombinationen von (2.12) und (2.13) aufgrund des Superpositionsprinzips Lösungen der Wellengleichung sind, lautet eine Gesamtlösung, welche die Randbedingungen erfüllt

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^m \alpha_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^m \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (2.14)$$

Dabei wird der Vorfaktor α_n in die Koeffizienten a_n und b_n integriert. Unter geeigneten Konvergenzbedingungen kann die Reihe auch auf unendliche Linearkombinationen erweitert werden. Somit erfüllt

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x, t)$$

auch Gleichung (2.1) falls die Reihe konvergiert und mindestens zweimal stetig differenziert werden kann.

2.2.2 Fourierreihen

Um die Koeffizienten a_n und b_n aus (2.14) besser bestimmten zu können, wollen wir hier kurz wenige Bemerkungen zu Fourierreihen anführen. Dabei beschränken wir uns auf das Nötigste. Einen weiterführenden Einblick in die Thematik der Fourierreihen bietet beispielsweise [5] §23.

Definition 2.1. Die Fourierreihe einer stückweise stetigen Funktion $F : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ lautet

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T}t\right) + B_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T}t\right).$$

Dabei sind die Fourierkoeffizienten von F durch

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T}t\right) dt && \text{für } n \in \mathbb{N}, \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T}t\right) dt && \text{für } n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

gegeben. Die Funktion wird über das Intervall $[0, T]$ durch die Reihe periodisch mit einer Periodenlänge von T über ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

Satz 2.2. Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit der Periodenlänge T und integrierbar auf beschränkten Intervallen:

1. Wenn F eine gerade Funktion ist, das heißt $F(-x) = F(x)$ für alle x , dann hat die Fourierreihe von F die Gestalt $\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t)$.
2. Wenn F eine ungerade Funktion ist, das heißt $F(-x) = -F(x)$ für alle x , dann hat die Fourierreihe von F die Gestalt $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\frac{2\pi}{T}t)$.

Beweis: Um den ersten Fall zu zeigen, müssen die Koeffizienten B_n verschwinden. Dazu verwenden wir, dass das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Funktion wieder eine ungerade Funktion ist. Ist F gerade, ist der Integrand $\varphi(t) := F(t) \sin(n\frac{2\pi}{T}t)$ ungerade. Man rechnet dann für die Koeffizienten B_n :

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \varphi(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^T \varphi(t) dt + \int_0^T \varphi(t) dt \right] = \frac{1}{T} \left[\int_{-T}^0 \varphi(-t) dt + \int_0^T \varphi(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[\int_{-T}^0 (-\varphi(t)) dt + \int_0^T \varphi(t) dt \right] = \frac{1}{T} \int_{-T}^T (\varphi(t) - \varphi(t)) dt = 0 \end{aligned}$$

Für den Fall F ist eine ungerade Funktion verläuft der Beweis analog. Es zeigt sich dabei, dass der Integrand $F(t) \cos(n\frac{2\pi}{T}t)$ ungerade ist und damit das Integral über dem Intervall $[-T, T]$ verschwindet und somit auch die Koeffizienten A_n . $\square$

Mit den nötigen Hilfsmitteln aus dem Themenbereich der Fourierreihen ausgestattet, können wir weitere Bedingungen für die Lösung der Wellengleichung untersuchen.

2.2.3 Anfangsbedingungen

Die Gesamtlösung (2.14) enthält immer noch die beliebigen Koeffizienten $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, die bei den zeitabhängigen Termen stehen. Für eine explizite Lösung werden daher noch weitere Bedingungen benötigt. In der Wellengleichung tritt in x -Richtung eine Ableitung zweiter Ordnung auf. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit von zwei Randbedingungen (2.3), die zwei bestimmten Orten $x_1, x_2 \in U \subseteq \mathbb{R}$ einen fixen Wert $u(x_1, t)$ bzw. $u(x_2, t)$ für alle t zuordnen. Alternativ kann wie bei (2.4) anstelle eines Funktionswertes der Wert von $\frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t)$ angegeben werden. Analog verfahren wir in t -Richtung. Für einen fixen Zeitpunkt t_0 werden Werte von $u(x, t_0)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0)$ vorgelegt. Dies sind im allgemeinen Funktionen die von x abhängig sind. Der Einfachheit halber wählen wir $t_0 = 0$.

Zusammenfassend können die Bedingungen formuliert werden:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L] \subseteq \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

Dabei sind $f, g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ beliebige stückweise stetige Funktionen. In Anlehnung an die Beispiele in Abschnitt 2.1 kann f als Anfangsauslenkung der Saite bzw. der anfänglichen Druckverteilung und g als Anfangsgeschwindigkeit bzw. anfängliche Verteilung des Luftstromes interpretiert werden.

Satz 2.3. (vgl. [11] S.902f) Die Koeffizienten a_n und b_n der Gesamtlösung (2.14) sind (bis auf einen Vorfaktor) die Fourierkoeffizienten der Anfangsbedingungen f bzw. g , also bestimmt durch:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx$$

Beweis: Wir setzen die Funktionen f und g in die Lösung (2.14) ein und substituieren mit $L = \frac{T}{2}$:

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^m a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \sum_{n=1}^m a_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T} x\right) \quad \text{für } m \in \mathbb{N}.$$

Ebenso ergibt sich nach Differentiation nach t :

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^m b_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \sum_{n=1}^m b_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{2n\pi}{T} x\right) \quad \text{für } m \in \mathbb{N}.$$

Damit die Reihendarstellungen von f und g den Fourierreihen der Funktionen nach Definition 2.1 entsprechen, müssen f und g periodisch mit einer Periodenlänge $T = 2L$ sein. Da alle Partialsummen der Reihe nur den Sinus enthalten, müssen die Funktionen laut Satz 2.2 auch ungerade sein. Wir setzen dazu f und g auf dem Intervall $[-L, L]$ mit $f(-x) = -f(x)$ und $g(-x) = -g(x)$ fort. Die Koeffizienten können nun nach Definition 2.1 berechnet werden, b_n muss dabei aber mit dem Faktor $\frac{L}{n\pi c}$ skaliert werden. $\square$

2.3 Allgemeine klassische Lösung

In Abschnitt 2.2 haben wir x in einem beschränkten Intervall $[0, L] \subset \mathbb{R}$ angenommen. In diesem Abschnitt wird wieder die Gleichung (2.1) betrachtet, jedoch wollen wir $x \in \mathbb{R}$ annehmen. Dadurch können keine Randbedingungen angegeben werden, die im gerade vorgestellten Separationsansatz essentiell für die Herleitung einer expliziten Lösungen sind. Wir müssen einen anderen Weg finden, um diese allgemeinere Lösung der Wellengleichung zu finden.

2.3.1 Transportgleichung

Der Lösungsansatz für die Wellengleichung greift auf die Lösung einer anderen partiellen Differentialgleichung zurück. Wir wollen daher vorerst diese diskutieren und eine Lösung herleiten. Nichtsdestotrotz können hier schon tiefer gehende Erkenntnisse über die Lösung der Wellengleichung gewonnen werden.

Sei $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, so nennt man

$$c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u}{\partial t} = c_1 u_x + c_2 u_t = 0 \quad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (2.16)$$

die homogene Transportgleichung. Sie ist eine der einfachsten partiellen Differentialgleichungen.

Lemma 2.4. Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f \in C^1$, löst die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u(x, t) = f(c_2x - c_1t) \quad (2.17)$$

die Gleichung (2.16).

Beweis: Der Beweis orientiert sich stark an [15] S.8. Es werden die Variablen gemäß

$$\tilde{x} = c_1x + c_2t \quad \tilde{t} = c_2x - c_1t$$

transformiert und wir schreiben $u(x, t) = \tilde{u}(\tilde{x}(x, t), \tilde{t}(x, t))$. Die Ableitungen dieser Funktion u können mit Hilfe der Kettenregel berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} = c_1 \frac{\partial \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}} + c_2 \frac{\partial \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} = c_2 \frac{\partial \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}} - c_1 \frac{\partial \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}}. \end{aligned}$$

Wir können somit schreiben:

$$c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u}{\partial t} = c_1 \left(c_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + c_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} \right) + c_2 \left(c_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - c_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} \right) = (c_1^2 + c_2^2) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}.$$

Da aber laut Voraussetzung $c_1, c_2 \neq 0$ und somit auch $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, ist Gleichung (2.16) äquivalent zu $\frac{\partial \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})}{\partial \tilde{x}} = 0$. Die Lösung davon ist eine beliebige Funktion, die von $\tilde{x}$ unabhängig ist und mindestens einmal differenzierbar ist, das heißt $f(\tilde{t}) = f(c_2x - c_1t)$. $\square$

Die Lösung für die Transportgleichung lässt sich gut veranschaulichen. Der Ausdruck $c_2x - c_1t = \xi$ für $\xi \in \mathbb{R}$ ist eine Gerade in der (x, t) -Ebene. Die Lösung hat auf dieser Geraden einen konstanten Wert $f(\xi)$. Somit hat die Lösung im (x, t, u) -Raum die Gestalt einer Fläche, „die wie ein Stück Wellblech aus parallelen horizontalen Geraden aufgebaut ist.“ ([15] S.7)

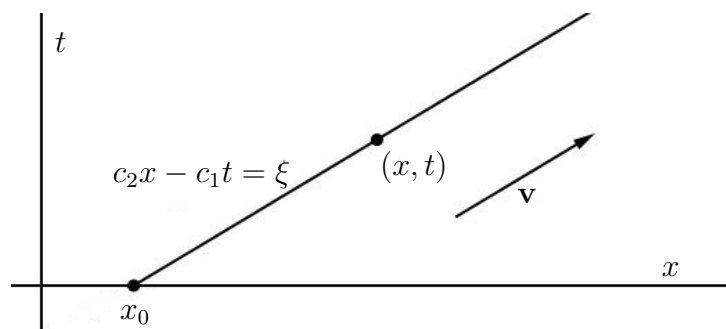


Abbildung 2: Charakteristik der Transportgleichung

Die Geraden der Form $c_2x - c_1t = \xi$ nennt man Charakteristiken der Differentialgleichung. Bildet man einen Vektor $\mathbf{v}$, der parallel ist zu den Geraden, die einen Normalvektor $(c_2, -c_1)$ haben, hat dieser die Koordinaten $\mathbf{v} = (c_1, c_2)$ beziehungsweise ein Vielfaches davon. Die Richtungsableitung von u entlang dieses Vektors ist durch Gleichung (2.16) gegeben. Sie soll immer Null sein. Daher ist u entlang der Charakteristiken konstant. Der

Wert von u an einem beliebigen Punkt (x, t) hängt nur vom Wert $f(\xi)$ mit $\xi = c_2x - c_1t$ ab. Bei einer vorgegeben Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = f(x)$$

kann $u(x, t)$ auf einer Charakteristik durch einen einzelnen Punkt $(x_0, 0) = (\frac{\xi}{c_2}, 0)$, dem Schnittpunkt der Charakteristik durch (x, t) und der x -Achse, bestimmt werden. Umgekehrt beeinflusst ein Anfangswert an der Stelle x_0 die Werte der Lösung $u(x, t)$ nur an den Punkten auf der Charakteristik. Bildlich dargestellt ist der Sachverhalt in Abbildung 2 (vgl. [9] S.5 und [15] S.7).

Die eben aus Lemma 2.4 gewonnene Erkenntnis soll noch kurz an einem konkreten Beispiel illustriert werden. Die Anfangswerte geben wir mit der Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ vor. Die Lösung der Transportgleichung (2.16) mit $c_1 = c_2 = 1$ lautet

$$u(x, t) = e^{-(x-t)^2}.$$

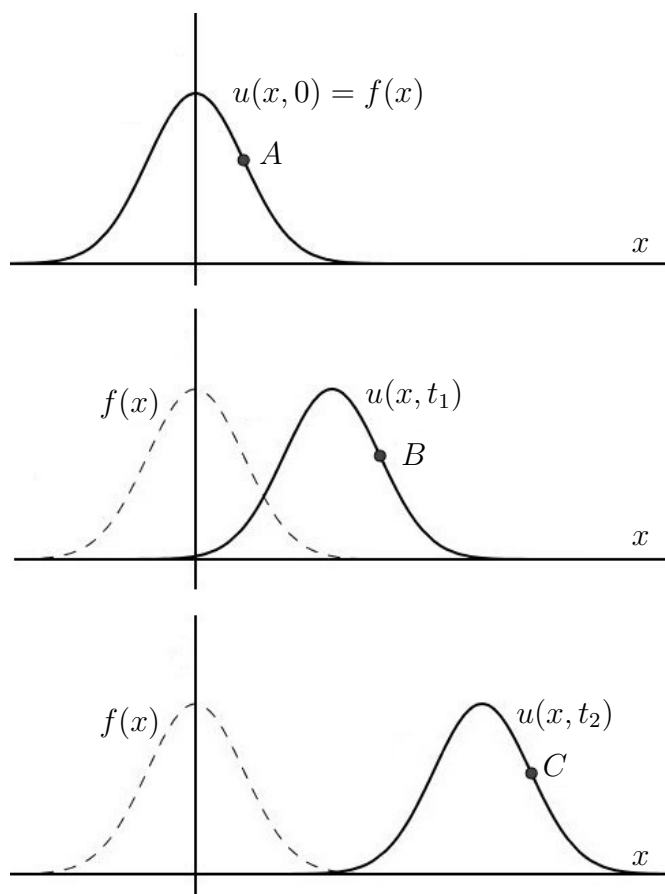


Abbildung 3: Lösung der Transportgleichung bei vorgegebenem f für $0 < t_1 < t_2$.

Der Graph der Lösung in Abbildung 3 zeigt eine Welle, die bei fortschreitendem t nach rechts wandert, ohne dabei ihr Aussehen zu verändern. Der Name Transportgleichung lässt sich auf diese Eigenschaft zurückführen. Die in Abbildung 3 eingezeichneten Punkte A, B und C liegen im (x, t, u) -Raum alle auf einer Geraden. Die Projektion der Punkte auf die (x, t) -Ebene liegt auf der charakteristischen Geraden, wie man in Abbildung 4 nachvollziehen kann.

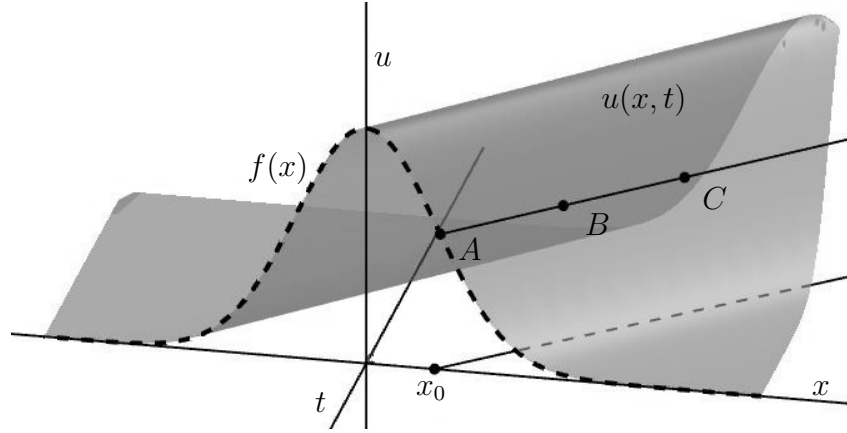


Abbildung 4: Lösung der Transportgleichung im (x, t, u) -Raum

2.3.2 Methode von d'Alembert

Um inhaltlich auf die Wellengleichung zurückzukommen wollen wir diese mit Hilfe eines speziellen Differentialoperators anschreiben. Dieser ist eine Abbildung, die eine Funktion auf eine andere Funktion abbildet und lautet in unserem Fall:

$$\square := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Oftmals wird dieser in der Literatur als d'Alembert-Operator bezeichnet. Die Wellengleichung (2.1) kann mit Hilfe des Operators daher verkürzt geschrieben werden als:

$$\square u(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Wie bei der Faktorisierung von Polynomen der Form $t^2 - c^2 x^2 = (t - cx)(t + cx)$, kann der Wellenoperator ebenfalls in ein Produkt zweier partieller Differentialoperatoren erster Ordnung aufgespalten werden. Der Grund dafür ist, dass die Terme mit den gemischten Ableitungen gleich sind: $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}$. Dies gilt, da der Differentialoperator auf C^2 Funktionen angewendet wird und dadurch die Voraussetzungen für den Satz von Schwarz gegeben sind. Man kann also berechnen (vgl. [14] S.50):

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + c \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} - c \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Hier sei kurz erwähnt, dass diese Schreibweise nicht eine Multiplikation der Operatoren im klassischen Sinne bedeutet, sondern, dass diese hintereinander ausgeführt werden. Die Wellengleichung kann daher in folgender Form dargestellt werden:

$$0 = \square u(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t). \quad (2.18)$$

Satz 2.5. Seien $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$, dann sind

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) \quad \text{und} \quad u(x, t) = \psi(x + ct)$$

Lösungen von (2.18).

Beweis: Wenn der zweite Faktor in Gleichung (2.18) verschwindet, das heißt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = u_t + cu_x = 0, \quad (2.19)$$

ist u eine Lösung von (2.18), da

$$\square u(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)0 = 0. \quad (2.20)$$

Gleichung (2.20) ist genau die Transportgleichung (2.16) aus Unterabschnitt 2.3.1 mit $c_1 = c$ und $c_2 = 1$. Deren Lösung aus Lemma 2.4

$$u(x, t) = \varphi(x - ct)$$

ist eine nach rechts wandernde Welle. Da die Faktorisierung des Wellenoperators kommutativ vertauscht werden kann, erhalten wir unter diesen Bedingungen mit einer analogen Vorgehensweise die Transportgleichung

$$u_t - cu_x = 0,$$

welche aufgrund $c_1 = -c$ und $c_2 = 1$ die Lösung

$$u(x, t) = \psi(x + ct)$$

hat. Die zweimal stetige Differenzierbarkeit von φ und ψ garantiert, dass die beiden Funktionen Lösungen der Wellengleichung sind. $\square$

Wie bei der Transportgleichung sind die zwei Lösungen Wellen, die nach rechts und links mit einer konstanten Geschwindigkeit $c > 0$ wandern. Ebenfalls gelten analog die Überlegungen zu den Charakteristiken. So wollen wir $\xi = x - ct$ und $\eta = x + ct$ als charakteristische Variablen auffassen. Es gilt, dass auf diesen Geraden die Lösung der Wellengleichung einen konstanten Wert hat. Aufgrund des Superpositionsprinzips ist die allgemeine Lösung eine Überlagerung von Wellen, die in positive und negative x -Richtung wandern. Das besondere daran ist, dass jede Lösung diese Gestalt hat (vgl. [14] S.51).

Satz 2.6. *Für jede Lösung $u \in C^2$ der Wellengleichung (2.1) gibt es zwei Funktionen $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$, sodass u gegeben ist durch*

$$u(x, t) = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct), \quad (2.21)$$

wobei

$$\xi = x - ct \quad \text{und} \quad \eta = x + ct \quad (2.22)$$

die charakteristischen Variablen sind.

Für die charakteristischen Variablen gilt offensichtlich $\xi = \xi(x, t)$ und $\eta = \eta(x, t)$. Eine Rücktransformation ergibt:

$$x = x(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \quad \text{und} \quad t = t(\xi, \eta) = \frac{1}{2c}(\eta - \xi)$$

Für $t \geq 0$ muss $\eta \geq \xi$ gelten.

Beweis: Eine ähnliche Form des Beweises findet man unter anderem bei [2] S.306, [9] S.40 und [14] S.52. Falls $u(x, t)$ eine C^2 -Lösung der Wellengleichung (2.1) ist, dann lässt sie sich mit den charakteristischen Variablen als

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\eta - \xi}{2c}\right) = u(x, t)$$

darstellen. Nach der Kettenregel ergibt sich die Ableitung von $\tilde{u}$ als:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{2} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{1}{2c}$$

und weiter die gemischte Ableitung aufgrund von $\frac{\partial u^2}{\partial x \partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial t \partial x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{2} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{1}{2c} \right) \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{2} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{1}{2c} \right) \frac{\partial t}{\partial \eta} \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{1}{2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \frac{1}{2c} \right) \frac{1}{2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{1}{2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{1}{2c} \right) \frac{1}{2c} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4c} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{1}{4c} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{4c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{4c^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\square u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4c^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Es gilt nun, dass $u(x, t)$ die Wellengleichung löst, genau dann, wenn $\tilde{u}(\xi, \eta)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

löst. Diese kann durch Substitution mit $v = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$ in die Form

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$$

überführt werden. Daraus folgt, dass v unabhängig von ξ ist und daher als Funktion von η aufgefasst werden kann. Zudem muss gelten $v \in C^1$. Durch Integration beider Seiten der Gleichung erhält man:

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \int v(\eta) d\eta + \varphi(\xi) = \varphi(\xi) + \psi(\eta) \quad \text{für} \quad \psi(\eta) = \int v(\eta) d\eta.$$

Die nur von ξ abhängige Funktion φ kann als Integrationskonstante aufgefasst werden. Werden die charakteristischen Variablen mit Hilfe der Gleichungen (2.22) ausgedrückt, erhält man die Lösung u laut Gleichung (2.21). Für die Lösung u gilt $u \in C^2$, wenn $\varphi, \psi \in C^2$, da die Summe zweier C^2 -Funktionen wieder eine C^2 -Funktion ist. Aus $v \in C^1$ folgt $\psi \in C^2$ und somit auch $\varphi \in C^2$. $\square$

Ausgehend von diesem allgemeinen Ansatz der Lösung wollen wir untersuchen, wie sich Anfangsbedingungen ähnlich denen in Kapitel 2.2.3 auf die Lösung auswirken. Konkret wollen wir also eine Lösung für die Wellengleichung (2.1) mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.23)$$

finden. Im Unterschied zu (2.15) sind hier $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Satz 2.7. ([10] S.110) *Die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t \in [0, +\infty), \\ u(x, 0) &= f(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{aligned} \quad (2.24)$$

ist durch die d'Alembertsche Formel gegeben:

$$u(x, t) = \frac{f(x+ct)}{2} + \frac{f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (2.25)$$

Aus Formel (2.25) sieht man, dass $f \in C^2$ und $g \in C^1$ sein müssen, da nur so $u \in C^2$ garantiert ist. Das Integral über g ist C^2 und die Summe zweier C^2 -Funktionen ist eben wieder eine C^2 -Funktion.

Beweis: Der Beweis ist auch zu finden bei [15] S.38 und [9] S.41. Setzt man in der allgemeinen Lösung (2.21) $t = 0$ ergibt sich:

$$u(x, 0) = \psi(x) + \varphi(x) = f(x). \quad (2.26)$$

Durch die Kettenregel ergibt sich ebenfalls aus (2.21) für $t = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = c\psi'(x) - c\varphi'(x) = g(x). \quad (2.27)$$

Der Ausdruck (2.26) abgeleitet und (2.27) durch $c \neq 0$ dividiert führt zu:

$$f'(x) = \psi'(x) + \varphi'(x) \quad \text{und} \quad \frac{1}{c}g(x) = \psi'(x) - \varphi'(x)$$

Dies kann als Gleichungssystem für die Funktionen ψ und φ aufgefasst werden. Nach Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen erhält man:

$$\psi'(x) = \frac{cf'(x) + g(x)}{2c} \quad \text{und} \quad \varphi'(x) = \frac{cf'(x) - g(x)}{2c}.$$

Durch Integration lässt sich dies überführen in

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + A \quad \text{und} \quad \varphi(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + B.$$

Dabei sind $A, B \in \mathbb{R}$ die Integrationskonstanten, für die laut Gleichung (2.26) gelten muss $A + B = 0$. Setzen wir nun ψ und φ in die allgemeine Lösung (2.21) ein und ersetzen das

Argument von ψ durch $\eta = x + ct$ und das Argument von φ durch $\xi = x - ct$, also durch die charakteristischen Variablen, ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(x, t) = \psi(\eta) + \varphi(\xi) &= \frac{f(\eta)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^\eta g(s) ds + \frac{f(\xi)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^\xi g(s) ds \\ &= \frac{1}{2}(f(\eta) + f(\xi)) + \frac{1}{2c} \int_0^\eta g(s) ds + \frac{1}{2c} \int_\xi^0 g(s) ds \\ &= \frac{1}{2}(f(\eta) + f(\xi)) + \frac{1}{2c} \int_\xi^\eta g(s) ds. \end{aligned}$$

□

2.3.3 Beispiele für Lösungen

Um eine bessere Vorstellung der Lösung (2.25) für das Anfangswertproblem (2.24) zu bekommen, wollen wir diese an konkreten Beispielen ausprobieren. Vorerst soll nur eine Anfangsauslenkung vorliegen, das heißt wir untersuchen den Fall $g \equiv 0$. Die Lösung reduziert sich daher zu

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct)}{2} + \frac{f(x - ct)}{2}.$$

Die Verteilung f spaltet sich also in zwei Wellen auf, die mit gleicher Geschwindigkeit c in positive und negative x -Richtung wandern. Die Größe reduziert sich auf die Hälfte, aber der Graph hat ansonsten genau das gleiche Aussehen wie $f(x)$. Geben wir uns die Anfangsbedingung wie schon in Abschnitt 2.3.1 mit $f(x) = e^{-x^2}$ vor. Offensichtlich ist f sicher zweimal stetig differenzierbar. Die Lösung lautet

$$u(x, t) = \frac{1}{2}e^{-(x+ct)^2} + \frac{1}{2}e^{-(x-ct)^2}$$

und deren Graph ist in Abbildung 5 für $0 < t_1 < t_2 < t_3$ zu sehen. Der Impuls $f(x)$

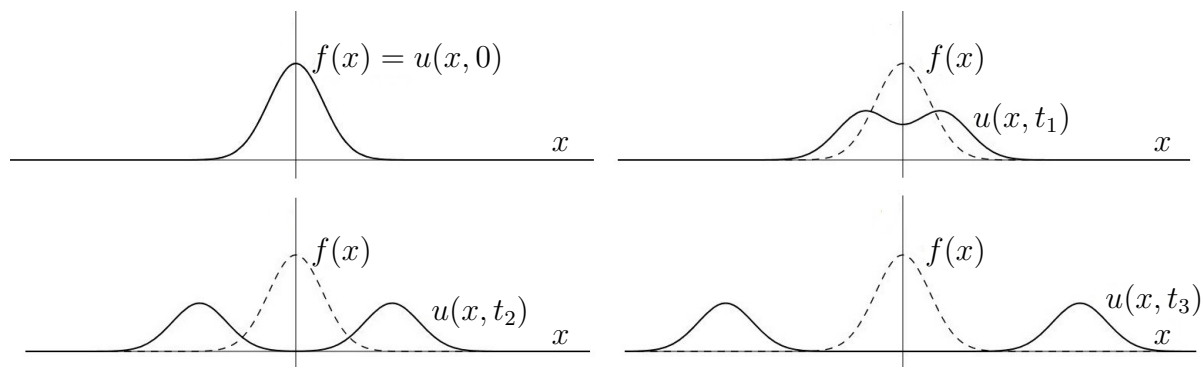


Abbildung 5: Lösung von u für $f(x) = e^{-x^2}$ als zwei fortlaufende Wellen

wandert für wachsendes t in beide Richtungen mit halber Größe weg vom Ursprung (vgl. [14] S.54).

Weisen die Anfangsdaten von vornherein schon zwei Impulse auf, kristallisieren sich in der Lösung vier Wellen heraus, von denen zwei in positive x -Richtung und zwei in negative x -Richtung mit gleicher Geschwindigkeit wandern. Für eine Anfangsauslenkung, wie beispielsweise

$$f(x) = e^{-x^2} + 2e^{-(x-1)^2},$$

die diese Situation darstellt (Impulsmitte $x = 0$ und $x = 1$), ist die Lösung

$$u(x, t) = \frac{1}{2}e^{-(x+ct)^2} + e^{-(x+ct-1)^2} + \frac{1}{2}e^{-(x-ct)^2} + e^{-(x-ct-1)^2}$$

in Abbildung 6 dargestellt. Als eine Konsequenz der Linearität der Wellengleichung nehmen die Wellen, die aufeinander zulaufen, nach der Kollision, bei der sie interagieren, wieder ihre ursprüngliche Form an. (vgl. [14] S.54)

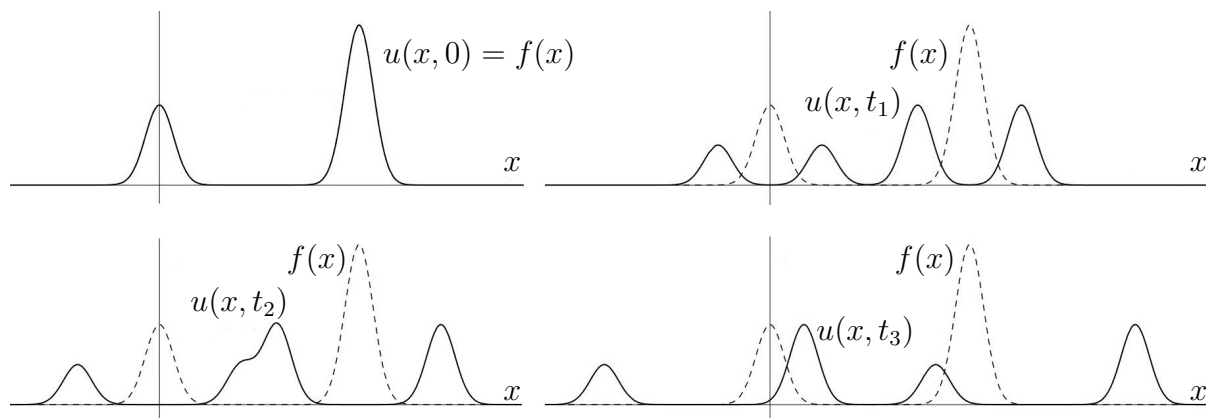


Abbildung 6: Lösung von u für $f(x) = e^{-x^2} + 2e^{-(x-1)^2}$ mit $0 < t_1 < t_2 < t_3$

Schlussendlich betrachten wir noch eine periodische Anfangsbedingung im Beispiel $f(x) = \cos(x)$. Aus dem Additionstheorem für Winkelfunktionen folgt die Lösung mit:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\cos(x + ct) + \cos(x - ct)) = \cos(x) \cos(ct).$$

Daraus ist sofort ersichtlich $u(x, t) = 0$, wenn $\cos(x) = 0$. Die Lösungen hat also genau dort Nullstellen, wo dies auch die Anfangsfunktion hat. In diesem Zusammenhang nennt man die Nullstellen auch Knotenpunkte der Welle und die entstehende Welle eine stehende Welle.

Wird nicht eine Anfangsauslenkung vorgegeben, sondern eine Anfangsgeschwindigkeit g , gilt also $f \equiv 0$, besteht die Lösung nur aus:

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

Das Interessante dabei ist, dass es zwar zu einer Ausbreitung des Signales kommt, die Auslenkung aber nicht mehr in ihre ursprüngliche Position zurückkehrt. Gut zu erkennen ist das in Abbildung 7 mit dem einfachen Beispiel $g(x) = e^{-x^2}$. Dem als Lösung eingezeichneten Graphen liegt diese Funktion zugrunde* (vgl. [14] S.55):

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{4c} (\operatorname{erf}(x + ct) - \operatorname{erf}(x - ct)).$$

*Wir verwenden die Bezeichnung erf für die Gaußsche Fehlerfunktion.

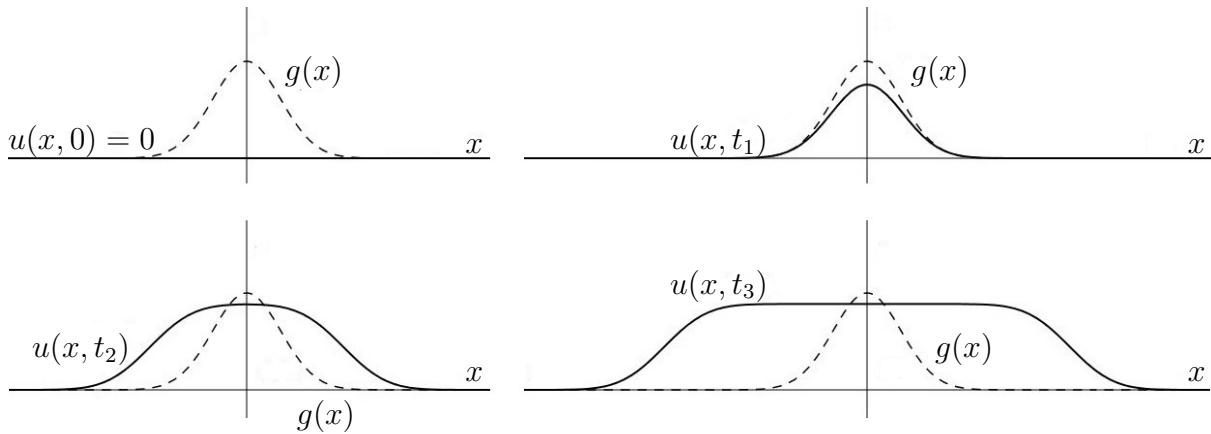


Abbildung 7: Lösung von u für $g(x) = e^{-x^2}$ mit $0 < t_1 < t_2 < t_3$

2.3.4 Kausalität

Direkt aus der Lösung (2.25) und untermauert durch die vorangegangenen Beispiele kann man erkennen, dass die Anfangswerte $f(x_0)$ und $g(x_0)$ an einem bestimmten Punkt x_0 der x -Achse die Lösung $u(x, t)$ nur in einem klar abgetrennten Bereich

$$I = \{(x, t) | x_0 - ct < x < x_0 + ct, t \in [0, +\infty)\}$$

beeinflusst. Daher nennt man I auch Einflussbereich des Punktes $(x_0, 0)$. Der Bereich I , in Abbildung 8 grau eingefärbt, wird durch das Charakteristikenpaar $x_0 = x - ct$ und $x_0 = x + ct$ begrenzt. Daraus folgt, dass sich kein Teil der Welle schneller als mit

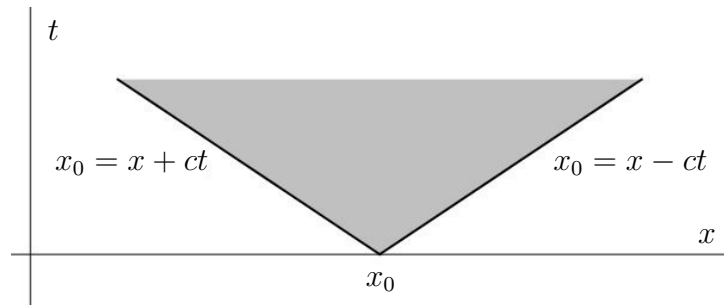


Abbildung 8: Einflussbereich der Anfangswerte

c ausbreiten kann. Dies gilt im übertragenen Sinne auch für „Störungen“ und „Signale“ (vgl. [9] S.42). Eine physikalische Erklärung für diese Tatsache liefert beispielsweise die Spezielle Relativitätstheorie, in der c der Lichtgeschwindigkeit gleichgesetzt wird. So kann der Bereich I als Lichtkegel, genauer als Zukunftslichtkegel, eines Ereignisses im Punkt $(x_0, 0)$ interpretiert werden.

Die umgekehrte Sichtweise ist, dass die Lösung $u(x, t)$ für beliebige $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ nur von den Werten der Anfangsfunktionen f und g auf dem Intervall $[x - ct, x + ct]$ der x -Achse abhängt. Die Endpunkte dieses Intervalls sind durch die zwei Charakteristiken,

welche durch (x, t) gehen, bestimmt. In Abbildung 9 ist die Situation skizziert. Hier sei nochmals in Erinnerung gerufen, dass die zwei Scharen von Charakteristiken $a = x - ct$ und $b = x + ct$ für $a, b \in \mathbb{R}$ parallelen Geraden darstellen. In der Literatur wird das Inter-

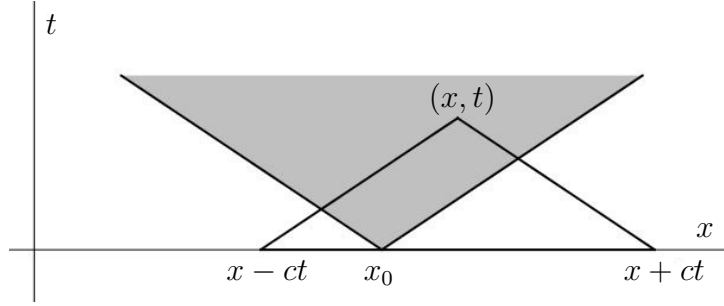


Abbildung 9: Abhängigkeitsbereich eines Punktes (x, t)

vall $[x - ct, x + ct]$ oft als Abhängigkeitsbereichs des Punktes (x, t) bezeichnet (vgl. [9] S.41). Seltener wird das Dreieck, welches durch die Punkte (x, t) , $(x - ct, 0)$ und $(x + ct, 0)$ begrenzt ist, als Vergangenheit des Punktes benannt (vgl. [15] S.42). Diese auf den rückwertigen Lichtkegel abzielende Bezeichnung rührt wieder aus der Interpretation mit Hilfe der Speziellen Relativitätstheorie. Im Spezialfall $g \equiv 0$ hängt die Lösung u nur von den Punkten $(x - ct, 0)$ und $(x + ct, 0)$ ab.

2.3.5 Randbedingungen

Die d'Alembertsche Formel liefert eine übersichtliche Lösung der Wellengleichung auf ganz $\mathbb{R}$. Jedoch muss sie auch für x in einem eingeschränkttem Bereich gelten, da bei praktischen Anwendungen der Ort meist nicht durch eine unendlich ausgedehnte Achse repräsentiert wird. Wir wollen daher wieder Randbedingungen wie beim Separationsansatz in Abschnitt 2.2 zusätzlich zu den Anfangsbedingungen betrachten. Bevor wir das endliche Intervall untersuchen, wollen wir das Problem im Halbraum $x \in [0, +\infty)$ betrachten. Zu lösen ist also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= 0 & \text{für } (x, t) \in [0, +\infty)^2, \\ u(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) & \text{mit } f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \\ u(0, t) &= 0 & \forall t > 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Offensichtlich muss $f(0) = g(0) = 0$ gefordert werden, damit die Problemstellung konsistent gestellt ist. Die Idee ist, dass die Funktionen der Anfangsbedingungen über ihren Definitionsbereich hinaus auf ganz $\mathbb{R}$ erweitert werden. Wie sich deren Eigenschaften auf die Lösung auswirkt, beschreibt folgendes Lemma (vgl. [1] S.315).

Lemma 2.8. *Sind die Anfangsbedingungen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gerade und $f \in C^2$ sowie $g \in C^1$, gilt für die Lösung:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \forall t > 0.$$

Sind f und g ungerade, folgt:

$$u(0, t) = 0 \quad \forall t > 0.$$

Beweis: Aus der d'Alembertschen Formel (2.25) folgt:

$$u(-x, t) = \frac{1}{2}(f(-(x - ct)) + f(-(x + ct))) + \frac{1}{2c} \int_{-(x-ct)}^{-(x+ct)} g(s) ds.$$

Sind f, g ungerade, ist dazu äquivalent:

$$u(-x, t) = \frac{1}{2}(-f(x - ct) + (-f(x + ct))) + \left(-\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds\right) = -u(x, t),$$

und somit ist u ungerade im ersten Argument. Für eine ungerade Funktion gilt immer, dass sie eine Nullstelle bei $x = 0$ hat, also $u(0, t) = 0$. Sind andererseits f, g gerade, zeigt sich für die Lösung:

$$u(-x, t) = \frac{1}{2}(f(x - ct) + f(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds = u(x, t),$$

also ist u auch gerade. Weil die Ableitung einer geraden Funktion eine ungerade Funktion ergibt, ist $\frac{\partial u}{\partial x}$ ungerade und es gilt $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$. $\square$

Um das Anfangs-/Randwertproblem (2.28) zu lösen setzen wir f, g ungerade auf $\mathbb{R}_-$ fort, konkret mit $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \geq 0 \\ -f(-x) & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x \geq 0 \\ -g(-x) & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

Sei $\tilde{u}(x, t)$ die Lösung dieses Anfangswertproblems auf ganz $\mathbb{R}$, dann ist wegen Lemma 2.8 $\tilde{u}$ ungerade und lautet

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(x - ct) + \tilde{f}(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s) ds. \quad (2.29)$$

Die Randbedingung $\tilde{u}(0, t) = 0$ ist automatisch erfüllt. Die Lösung des ursprünglichen Problems auf der Halbgeraden definiert man schlussendlich als $u(x, t) = \tilde{u}(x, t)$ für $0 \leq x$. Wie in Abbildung 10 zu erkennen, werden nur Werte der Lösung (2.29) für positive x betrachtet. Ebenfalls in Abbildung 10 erkennt man, dass die wandernden Impulse von $\tilde{u}$ sich bei $x = 0$ aufgrund der Symmetrie zu $\tilde{u}(0, t) = 0$ überlagern. Betrachtet man die Lösung u des eigentlichen Problems und blendet $\tilde{u}$ für $x < 0$ aus (in Abbildung 10 gestrichelt), erscheint es als würde die Welle reflektiert werden und die Auslenkung das Vorzeichen wechseln. Dies steht auch im Einklang mit physikalischen Wellen die bei der Reflexion an einem festen Ende ebenfalls eine Vorzeichenumkehr statt findet.

Wir wollen noch eine explizite Darstellung für u in Abhängigkeit von f, g angeben. Im Bereich $x \geq ct \geq 0$ treten in den ungerade fortgesetzten Funktionen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ nur positive Argumente auf, es gilt daher $\tilde{f} = f$ und $\tilde{g} = g$. Für $0 \leq x \leq ct$ erkennt man aber $\tilde{f}(x - ct) = -f(ct - x)$ und $\tilde{g}(x - ct) = -g(ct - x)$. Damit ergibt sich,

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds & \text{wenn } x \geq ct \geq 0, \\ \frac{1}{2}(f(x + ct) - f(ct - x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} g(s) ds & \text{wenn } 0 \leq x \leq ct, \end{cases} \quad (2.30)$$

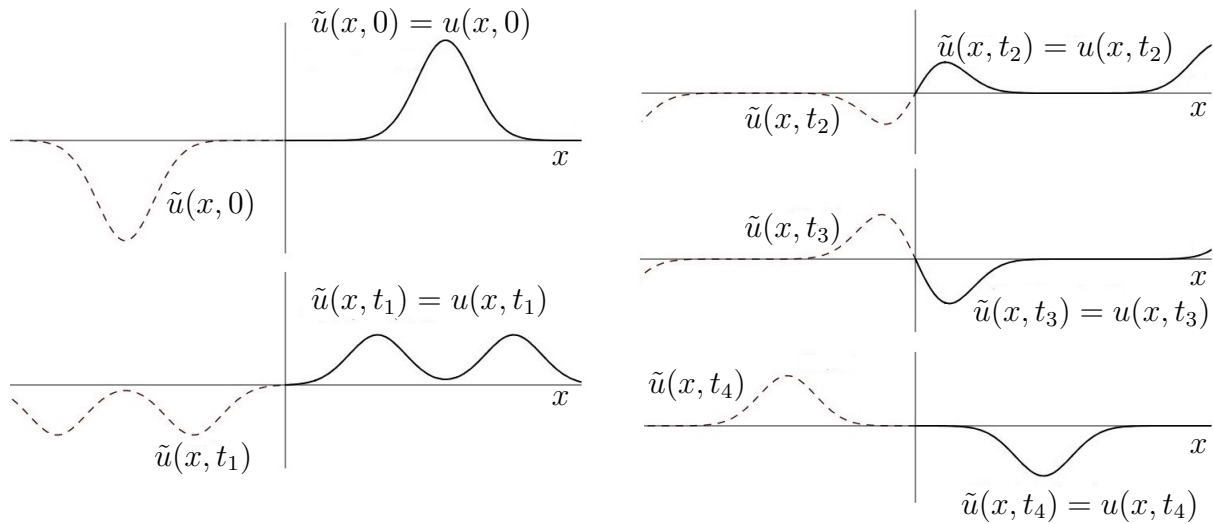


Abbildung 10: Darstellung der Lösung (2.29) für $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.

wobei der Vorzeichenwechsel für g im zweiten Integral durch Vertauschen der Grenzen realisiert wurde (vgl. [3] S.69). Diese Fallunterscheidung in (2.30) hat auch Auswirkungen auf den Abhängigkeitsbereich eines beliebigen Punktes (x, t) . Erfüllt dieser Punkt die Bedingung $x > ct$, ist der schon in Abbildung 9 skizzierte Bereich mit $[x - ct, x + ct]$ bzw. das dazugehörige Dreieck der Abhängigkeitsbereich des Punktes. Für $x < ct$ kann das Ergebnis wie in Abbildung 11 dargestellt werden. Durch die Bedingung $x < t$ gibt es eine

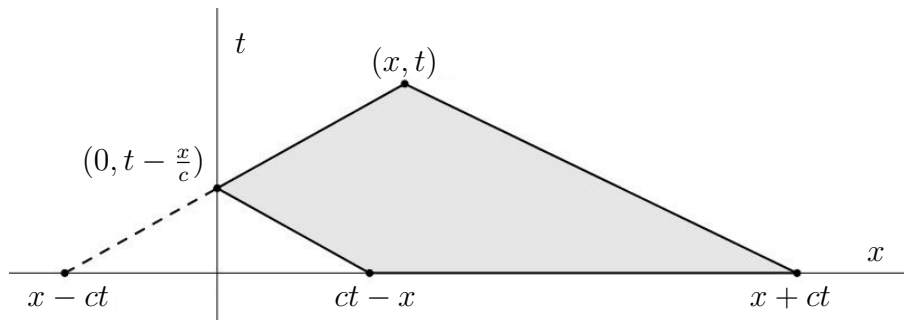


Abbildung 11: Abhängigkeitsbereich bei einer Reflexion am festen Ende (vgl. [15] S.67)

Charakteristik durch den Punkt (x, t) , die die t -Achse im Punkt $(0, t - \frac{x}{c})$ schneidet, bevor sie auf die x -Achse trifft. Wie aus (2.30) ersichtlich erfolgt die Reflexion mit Vorzeichenwechsel, wodurch die Charakteristik ab dem Punkt $(0, t - \frac{x}{c})$ an der t -Achse gespiegelt fortgesetzt wird. Die Werte von $u(x, t)$ hängen somit nur von f, g im Bereich $ct \pm x$ ab. Der schattierte Bereich in der Abhängigkeitsbereich des Punktes (x, t) (vgl. [15] §3.2). Abschließend sei noch eine Bemerkung zu der Randbedingung eines offenen Endes, wie es in (2.4) in Abschnitt 2.1 diskutiert wird, erwähnt. Um die Bedingung $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ zu erfüllen, werden die Anfangsbedingungen gerade auf $\mathbb{R}_-$ fortgesetzt. Wieder mit Lemma 2.8 ist die Randbedingung erfüllt. Die Welle wird am offenen Ende ebenfalls reflektiert, aber es kommt zu keinem Vorzeichenwechsel. Damit beschließen wir die Betrachtungen auf dem Halbraum und wollen uns dem endlichen Intervall zuwenden.

Wir suchen jetzt eine Lösung mit $L > 0$ für das Problem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= 0 \quad \text{für } (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty), \\ u(x, 0) &= f(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{mit } f, g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, \\ u(0, t) &= 0 \quad \text{und} \quad u(L, t) = 0 \quad \forall t > 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Dabei kann prinzipiell ähnlich wie für das Problem im Halbraum verfahren werden indem die Anfangsbedingungen auf die ganze reelle Achse ausgeweitet werden. Wir setzen f, g bezüglich beider Enden ungerade fort: $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ -f(-x) & \text{für } -L \leq x \leq 0 \\ 2L\text{-periodisch} \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ -g(-x) & \text{für } -L \leq x \leq 0 \\ 2L\text{-periodisch} \end{cases}$$

Die Lösung $\tilde{u}$ auf ganz $\mathbb{R}$ ist wie zuvor durch (2.29) gegeben. Sie erfüllt die Bedingung $\tilde{u}(0, t) = \tilde{u}(L, t) = 0$. Für das eigentliche Problem (2.31) ist die Lösung nun wieder $u(x, t) = \tilde{u}(x, t)$ mit $0 < x < L$. Jedoch kann in diesem Fall, nicht wie in (2.30), direkt das Verhalten der Lösung aus (2.29) für einen beliebigen Punkt (x, t) abgelesen werden, da es durch beide Ränder zu sehr vielen Reflexionen kommen kann.

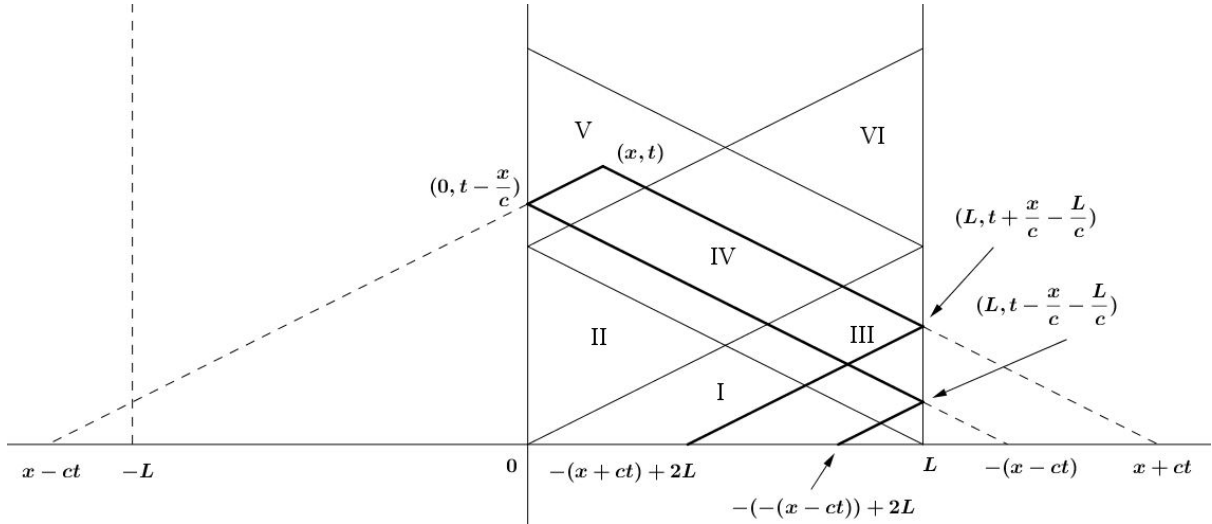


Abbildung 12: Anfangs/-Randwertproblem für einen Punkt (x, t)

Wie durch Abbildung 12 zu erahnen, verkomplizieren die zahlreichen Reflexionen eine explizite Lösung. Durch die Symmetrie der Charakteristiken, wird die (x, t) -Ebene in Bereiche I, II, III, IV, ... eingeteilt, in denen u jeweils eine andere Gestalt hat.

Wir wollen als Beispiel die Lösung des in Abbildung 12 in Bereich V eingezeichneten Punktes (x, t) kurz herleiten. Die Charakteristiken schneiden den Rand bei $(0, t - \frac{x}{c})$

und $(L, t + \frac{x}{c} - \frac{L}{c})$. Dabei werden sie an den Geraden $x = 0$ bzw. $x = L$ gespiegelt, wobei ein Vorzeichenwechsel erfolgt, da f, g ungerade über das Intervall hinaus fortgesetzt wurden. Eine Charakteristik schneidet anschließend direkt die x -Achse, die andere wird ein zweites Mal reflektiert mit einem weiteren Vorzeichenwechsel. Da die ursprünglichen Charakteristiken durch (x, t) außerhalb dem Intervall $[-L, L]$ die x -Achse schneiden und f, g periodisch sind, muss dementsprechend die Intervalllänge $2L$ addiert werden. Für alle Lösungen $u(x, t)$ mit (x, t) aus dem Bereich V können wir, aufgrund dieser Überlegungen und wegen (2.29) also angeben:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}(f(-(-(x - ct)) + 2L) - f(-(x + ct) + 2L)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s) ds \\ &= \frac{1}{2}(f(2L + x - ct) - f(2L - x - ct) - \frac{1}{2c} \int_{2L-x-ct}^{2L+x-ct} g(s) ds \end{aligned}$$

Man beachte dabei das negative Vorzeichen bei $-f(2L - x - ct)$, das sich aus der ungeraden Anzahl an Reflexionen ergibt. Die Berechnung des Integrals nützt aus, dass dieses aufgrund g ungerade im Intervall $[-L, L]$ verschwindet:

$$\begin{aligned} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s) ds &= \int_{x-ct}^{-L} g(s + 2L) ds + \int_{-L}^0 -g(-s) ds + \int_0^L g(s) ds + \int_L^{x+ct} -g(-s + 2L) ds \\ &= \int_{x-ct+2L}^L g(s) ds + \int_L^{-x-ct+2L} g(s) ds = \int_{x-ct+2L}^{-x-ct+2L} g(s) ds \end{aligned}$$

Die hier durchgeführte Methode (vgl. [15] S.68ff) lässt sich leider nicht verallgemeinern und ist darauf angewiesen, dass die Randbedingungen $u(0, t) = u(L, t) = 0$ homogen sind. Zudem wird die Berechnung für große t sehr unübersichtlich. Im nächsten Abschnitt wollen wir daher noch einen anderen Zugang kurz vorstellen.

2.3.6 Differenzengleichung

Wir betrachten wieder ein Anfangs-/Randwertproblem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= 0 \quad \text{für } (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty), \\ u(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) \quad \text{mit } f, g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, \\ u(0, t) = \alpha(t) \quad \text{und} \quad u(L, t) = \beta(t) &\quad \text{mit } \alpha, \beta : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Im Unterschied zu (2.31) werden hier die Ränder durch eine von t abhängige Funktion dargestellt. Um dieses Problem zu lösen, betrachten wir eine Differenzengleichung, die äquivalent zur Wellengleichung (2.1) ist (vgl. [9] S.41ff).

Satz 2.9. *Sie $u(x, t) \in C^2$ und $\epsilon, \delta \geq 0$. Dann erfüllt u die Wellengleichung (2.1) genau dann, wenn sie die Gleichung*

$$u(x - c\epsilon, t - \delta) + u(x + c\epsilon, t + \delta) = u(x + c\delta, t + \epsilon) + u(x - c\delta, t - \epsilon) \tag{2.33}$$

für alle $\epsilon, \delta \geq 0$ erfüllt.

Beweis: Nach Satz 2.6 erfüllt eine Lösung der Wellengleichung die Gleichung (2.33) genau dann, wenn zwei beliebige C^2 -Funktionen $\varphi(x+ct)$ und $\psi(x-ct)$ die Differenzengleichung erfüllen. Das zeigen wir durch einsetzen:

$$\begin{aligned} u(x-c\epsilon, t-\delta) + u(x+c\epsilon, t+\delta) &= \varphi(x-c\epsilon+ct-c\delta) + \varphi(x+c\epsilon+ct+c\delta) \\ &= \varphi(x+c\delta+ct+c\epsilon) + \varphi(x-c\delta+ct-c\epsilon) = u(x+c\delta, t+\epsilon) + u(x-c\delta, t-\epsilon) \end{aligned}$$

bzw.:

$$\begin{aligned} u(x-c\epsilon, t-\delta) + u(x+c\epsilon, t+\delta) &= \psi(x-c\epsilon-ct+c\delta) + \psi(x+c\epsilon-ct-c\delta) \\ &= \psi(x+c\delta-ct-c\epsilon) + \psi(x-c\delta-ct+c\epsilon) = u(x+c\delta, t+\epsilon) + u(x-c\delta, t-\epsilon) \end{aligned}$$

Für die Rückrichtung wählen wir o.B.d.A. ϵ , setzen $\delta = 0$ und formen äquivalent um:

$$\begin{aligned} u(x-c\epsilon, t) + u(x+c\epsilon, t) &= u(x, t+\epsilon) + u(x, t-\epsilon) \\ \Leftrightarrow c^2 \frac{u(x-c\epsilon, t) - 2u(x, t) + u(x+c\epsilon, t)}{c^2 k^2} &= \frac{u(x+c\delta, t+\epsilon) - 2u(x, t) + u(x-c\delta, t-\epsilon)}{k^2}. \end{aligned}$$

Im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ erhalten wir aufgrund der Definition des zweiten Ableitung über den Differenzenquotient sofort die Wellengleichung (2.1). $\square$

Die Differenzengleichung (2.33) beschreibt den Zusammenhang zwischen den Lösungen der Wellengleichung von verschiedenen Punkten im (x, t) -Raum. Die vier Punkte

$$A = (x-c\epsilon, t-\delta), \quad B = (x+c\delta, t+\epsilon), \quad C = (x+c\epsilon, t+\delta) \quad \text{und} \quad D = (x-c\delta, t-\epsilon),$$

wie sie auch in Abbildung 13 eingezeichnet sind, spannen ein Parallelogramm auf, das von Charakteristiken begrenzt ist.

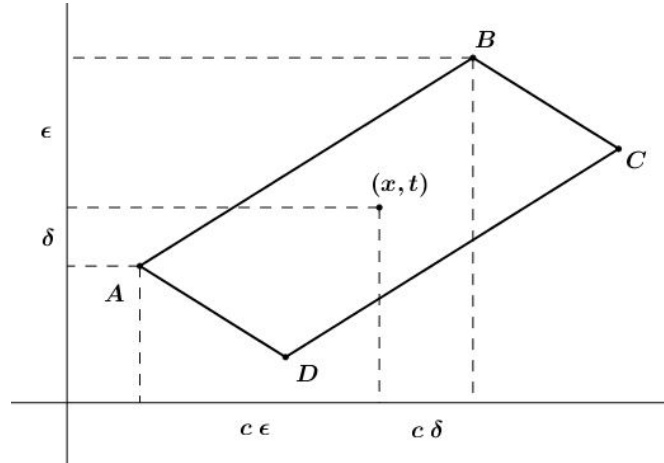


Abbildung 13: Ein aus Charakteristiken begrenztes Parallelogramm

Laut (2.33) gilt für diese Punkte:

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D). \quad (2.34)$$

Dies ermöglicht uns das Anfangs-/Randwertproblem (2.32) numerisch zu lösen.

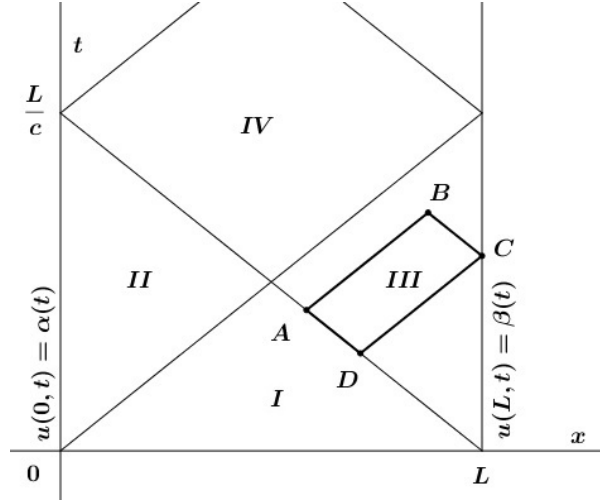


Abbildung 14: Lösung des Randwertproblems mit einem Differenzenverfahren

Wie aus Abbildung 14 zu erkennen, kann für einen Punkt B , der beispielsweise im Bereich III liegt, die Lösung mit Hilfe von drei weiteren Punkten A, C und D aus (2.34) bestimmt werden. Dabei ist die Lösung von $u(A)$ und $u(D)$ durch die d'Alembertsche Formel (2.25) im Bereich I gegeben und $u(C)$ ergibt sich aus der Randbedingung $\beta(t)$. Mit dieser Methode kann sukzessive die Lösung in den Bereichen I, II, III, IV, V... berechnet werden (vgl. [9] S.42).

2.4 Schwache Lösung

In den vorangegangenen Untersuchungen wurde vorausgesetzt, dass $u \in C^2$. Dies ist offensichtlich notwendig, da ansonsten die Ausdrücke $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ keinen Sinn machen. Daraus ergaben sich auch die Bedingungen an die Anfangsauslenkung $f \in C^2$ und die Anfangsgeschwindigkeit $g \in C^1$. In diesem Abschnitt wollen wir die Frage erörtern, ob man eine Funktion, die nicht zweimal stetig differenzierbar ist, in gewisser Weise auch als eine Lösung der Wellengleichung (2.1) interpretiert werden kann.

Dazu benötigt man einen verallgemeinerten Begriff der Ableitung einer Funktion. Dieser beruht auf der partiellen Integration eines Produkts aus zwei Funktionen. Wir wollen das Prinzip anhand einer Funktion $u = u(x)$, die nur von einer Variable abhängt erörtern und anschließend das Problem auf die Wellengleichung übertragen. Sei $I = (a, b)$ ein Intervall auf $\mathbb{R}$ und $u \in C^1(I)$. Zudem sei $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger in I , anders geschrieben $\phi \in C_c^\infty(I)$. Die partielle Integration liefert:

$$\int_a^b u'(x)\phi(x) \, dx = u(x)\phi(x) \Big|_a^b - \int_a^b u(x)\phi'(x) \, dx. \quad (2.35)$$

Da ϕ einen kompakten Träger hat, verschwindet sie auf den Rändern des Intervalls I . Es gilt daher $\phi(a) = \phi(b) = 0$ und somit verschwindet der Term $u(x)\phi(x) \Big|_a^b$. Falls u nun nicht differenzierbar ist, kann es dennoch eine Funktion $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ geben, die die Gleichung

$$\int_a^b v(x)\phi(x) \, dx = - \int_a^b u(x)\phi'(x) \, dx$$

erfüllt. Die einzigen Bedingungen an die Funktionen u und v sind, dass sie lokal integrierbar sein müssen. Existiert eine Funktion v nennt man sie die schwache Ableitung von u . Gibt es kein passendes v , hat u keine schwache Ableitung (vgl. [7] §17).

Für Funktionen $u(x_1, \dots, x_n)$, die von mehreren Variablen abhängen, kann gleich vorgegangen werden. Die Ableitung wird dann durch partielle Ableitungen D^α der Ordnung k repräsentiert. Hierbei ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Multiindex.

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u \quad \text{mit } \alpha_i \in [0, 1, \dots, n] \subset \mathbb{N} \text{ und } |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = k \quad (2.36)$$

Die Integration erfolgt über ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wobei der Randterm auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω wieder verschwindet, da $\phi \in C_C^\infty(\Omega)$, also eine Funktion mit kompaktem Träger in Ω ist. In der Literatur wird ϕ in diesem Zusammenhang oft als Testfunktion bezeichnet. Zu beachten gibt es noch, dass bei höheren partiellen Ableitungen der Ordnung k die Regel für die partielle Integration k -mal angewandt werden muss und sich daher das Vorzeichen von (2.35) auf der rechten Seite alternierend ändert. Wir wollen dies in einer formalen Definition festhalten.

Definition 2.2. (vgl. [3] S.256) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar auf Ω . Wir nennen v die k -te schwache partielle Ableitung von u , wenn

$$\int_{\Omega} v \phi \, dx = (-1)^k \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx$$

erfüllt ist für alle Testfunktionen $\phi \in C_C^\infty(\Omega)$. Die Notation lautet dabei

$$D^\alpha u = v.$$

Diese Definition können wir nun auf die Wellengleichung (2.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \square u = 0$$

übertragen. Angenommen es existieren die schwachen Ableitungen

$$v = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad w = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

dann ist

$$\begin{aligned} \int_U v \phi \, dx \, dt - c^2 \int_U w \phi \, dx \, dt &= (-1)^2 \int_U u \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \, dx \, dt - c^2 (-1)^2 \int_U u \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \, dx \, dt \\ &= \int_U u \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \, dx \, dt \\ &= \int_U u \square \phi \, dx \, dt = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

äquivalent zu (2.1) mit dem Gebiet $U = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$. Die schwachen Lösungen der Wellengleichung sind jene Funktionen u die Gleichung (2.37) für jedes $\phi \in C_C^\infty(U)$ erfüllen, aber nicht zweimal stetig differenzierbar sind und somit Gleichung (2.1) nicht erfüllen.

Satz 2.10. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann ist

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct))$$

eine schwache Lösung der Wellengleichung (2.1) mit den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = f(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$.

In diesem Zusammenhang stellt man fest, dass die schwache Lösung der Wellengleichung genau die gleiche Form hat, wie sie durch die d'Alembertsche Formel (2.25) gegeben ist. Aus diesem Grund ist es naheliegend durch eine Transformation wieder die charakteristischen Koordinaten einzuführen:

$$\xi = \xi(x, t) = x - ct \quad \text{und} \quad \eta = \eta(x, t) = x + ct.$$

Deren Rücktransformation ist gegeben durch:

$$x = x(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \quad \text{und} \quad t = t(\xi, \eta) = \frac{1}{2c}(\eta - \xi).$$

Beweis: Der Beweis orientiert sich an [4] S.305. Sei $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, mit Träger $\text{supp} \phi \subset Q := (-r, r) \times (0, s)$ für passend gewähltes $r, s > 0$. Mit den charakteristischen Koordinaten lässt sich ϕ ausdrücken als:

$$\varphi(\xi, \eta) = \phi(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)),$$

wobei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ gilt und $\text{supp} \varphi \subset \tilde{Q} = (-r - cs, r) \times (-r, r + cs)$. Denn für $\varphi \neq 0$ folgt für $(x, t) \in Q$ aufgrund der Transformation $(\xi, \eta) \in \tilde{Q}$. Wie im Beweis von Satz 2.6 lässt sich mit der Kettenregel berechnen:

$$\square \phi(x, t) = \frac{\partial^2 \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Zu zeigen ist nun:

$$\int_U u \square \phi(x, t) \, dx \, dt = 0$$

Wir setzen die Lösung u ein und substituieren. Der Satz von Fubini sichert uns dabei, dass die Reihenfolge der Integration beliebig ist und wir können das Integral nur in $\tilde{Q}$ auswerten, da die Testfunktion außerhalb verschwindet:

$$\begin{aligned} 2 \int_U u \square \phi(x, t) \, dx \, dt &= \int_{\tilde{Q}} (f(\xi) + f(\eta)) \frac{\partial^2 \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \, d\xi \, d\eta \\ &= \int_{-r-cs}^r \left(f(\xi) \int_{-r}^{r+cs} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \, d\eta \right) \, d\xi \\ &\quad + \int_{-r}^{r+cs} \left(f(\eta) \int_{-r-cs}^r \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \, d\xi \right) \, d\eta \\ &= \int_{-r-cs}^r f(\xi) \cdot 0 \, d\xi + \int_{-r}^{r+cs} f(\eta) \cdot 0 \, d\eta = 0, \end{aligned}$$

weil für die inneren Integrale gilt:

$$\int_0^{2s} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) d\eta = \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{-\eta}^{r+cs} = \frac{\partial \varphi(\xi, 2s)}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi(\xi, 0)}{\partial \xi} = 0.$$

Dies beruht darauf, dass $\text{supp} \varphi \subset \tilde{Q} \Rightarrow \text{supp} \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \subset \tilde{Q}$ und somit die Funktion φ und deren Ableitungen auf den Rändern von $\tilde{Q}$ verschwinden. Für den zweiten Summanden verläuft die Argumentation analog. Die Anfangsbedingungen ergeben sich direkt durch einsetzen. $\square$

Die schwache Lösung weist die gleichen Eigenschaften auf, wie sie in den Unterabschnitten 2.3.3 bis 2.3.5 im Rahmen der d'Alembertschen Formel diskutiert wurden. Jedoch bietet dieser Lösungsansatz weitere Möglichkeiten, die im Folgenden kurz skizziert werden.

2.4.1 Beispiel

Eine wichtige Rolle spielt die schwache Lösung bei der Modellierung. Beschreibt man verschiedene reale Probleme, treten nicht unbedingt immer stetig differenzierbare Funktionen auf. Die klassische Lösung würde dabei versagen. Als kurzes Beispiel, das dies verdeutlicht, sei die ausgelenkte Saite der Länge L angeführt. Die Anfangsbedingungen lauten dabei für ein beliebiges x_0 mit $0 < x_0 < L$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x_0} & \text{für } 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{L-x}{L-x_0} & \text{für } x_0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = 0.$$

Wie in Abbildung 15 im ersten Bild zu sehen ist, wird die Saite bei x_0 maximal ausgelenkt. Zudem ist sie bei 0 und L eingespannt. Wir geben uns daher zusätzlich noch die passenden Randbedingungen vor:

$$u(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad u(L, t) = 0 \quad \text{für } \forall t > 0.$$

Die Lösung lässt sich wie in Abschnitt 2.3.5 diskutiert herleiten, wobei aber eben f nicht zweimal stetig differenzierbar ist. Sie ist für die Zeitpunkte $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$ in Abbildung 15 dargestellt. Das hier beschriebene Problem kann auch, da Randbedingungen

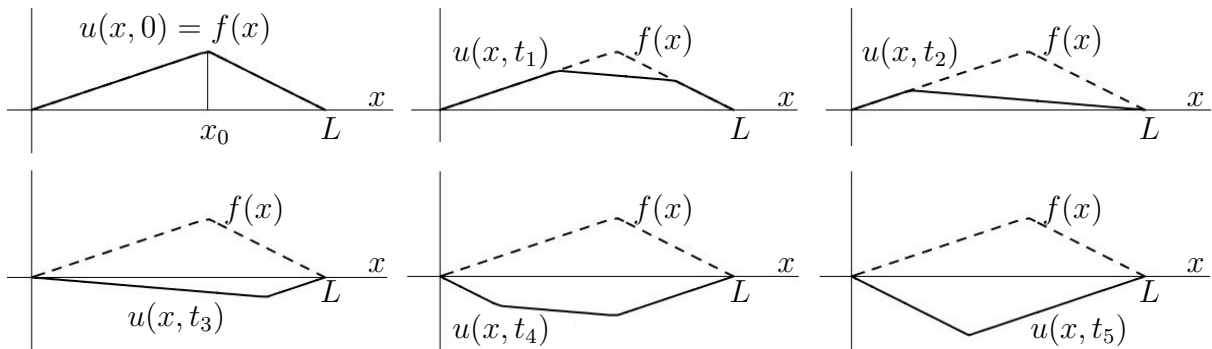


Abbildung 15: Welle mit nicht stetig differenzierbarer Anfangsauslenkung

auftreten, mit Hilfe des Separationsansatzes, wie unter anderem bei [12] S.222 zu finden, gelöst werden. Nachteilig dabei ist, dass aber unendliche Reihen bemüht werden müssen, über deren Konvergenz nicht direkt eine Aussage getroffen werden kann.

2.4.2 Hilfsmittel für klassische Lösungen

Ein weiterer Grund sich mit schwachen Lösungen zu beschäftigen liegt darin, dass dadurch oft klassische Lösungen gefunden werden können. Insbesondere wenn eine allgemeine partielle Differentialgleichung der Form $\mathcal{L}u = y$ mit y lokal integrierbar gegeben ist. Dabei ist

$$\mathcal{L} = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha$$

ein linearer Differentialoperator der Ordnung k mit konstanten Koeffizienten a_α und Multiindex α . Die partiellen Ableitungen sind wie in (2.36) mit D^α gegeben. Den zu $\mathcal{L}$ formal adjungierten Differentialoperator definieren wir durch

$$\mathcal{L}^* = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha.$$

Für u, y lokal integrierbar ist u die schwache Lösung von $\mathcal{L}u = y$ auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wenn gilt

$$\int_{\Omega} u \mathcal{L}^* \phi \, d^n \mathbf{x} = \int_{\Omega} y \phi \, d^n \mathbf{x},$$

für alle Testfunktionen $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ (vgl. [4] S.303f). Wenn man beachtet, dass für den formal adjungierten Operator des Wellenoperators gilt:

$$\square^* = (-1)^2 \square = \square,$$

der Operator also selbstadjungiert ist, erkennt man die Definition der schwachen Lösung in Gleichung (2.37) wieder. Vertiefende Information zu adjungierten Differentialoperatoren findet man beispielsweise bei [7] §3.

Da jede klassische Lösung auch eine schwache Lösung ist und eine schwache Lösung, wenn sie C^k -differenzierbar ist, eine klassische Lösung ist, ist die Untersuchung schwacher Lösungen durchaus lohnenswert. Den Beweis dieser Aussage findet man unter anderem bei [4] S.304.

3 Höhere Dimensionen

Im zweiten Teil dieser Arbeit widmen wir uns der Wellengleichung im n -dimensionalen Raum. Sei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $t \in [0, +\infty)$. Wir suchen eine Lösung $u : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(\mathbf{x}, t)$ für die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u \quad \text{mit} \quad 0 < c \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Hierbei bezeichnet Δ den Laplace-Operator. Er ist ein linearer Differentialoperator und ist über die Divergenz div und den Gradienten grad folgendermaßen definiert:

$$\Delta u = \text{div}(\text{grad } u).$$

Der Laplace-Operator ordnet einem Gradientenfeld (Vektorfeld), welches aus dem Skalarfeld u berechnet wird, die Divergenz (Skalarfeld) zu. Für kartesische Koordinaten ergibt sich die Darstellung:

$$\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}.$$

Um die Wellengleichung überhaupt zu erfüllen muss zudem vorausgesetzt werden $u \in C^m$ mit $m \geq 2$, u also mindestens zwei mal stetig differenzierbar sein. Die Wellengleichung kann auch mit Hilfe des d'Alembert-Operators ausgedrückt werden:

$$\square u = 0,$$

wobei dieser durch

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta$$

definiert ist. Das Anfangswertproblem, welches im Mittelpunkt unserer Betrachtungen liegen wird, ist durch:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) &= 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t \in [0, +\infty) \\ u(\mathbf{x}, 0) &= f(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

gestellt. Dabei sind $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beliebige, aber genügend oft stetig differenzierbare Funktionen. Die Lösung u wird auf dem $(n+1)$ -dimensionalen Halbraum $\{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, 0 < t \in \mathbb{R}\}$ gesucht. Wir konzentrieren uns hauptsächlich auf die Fälle $n = 2$ und $n = 3$, da diese mit noch überschaubarem Aufwand gelöst werden können. Nichtsdestotrotz erhält man einen Einblick in die grundlegende Vorgehensweise.

3.1 Dreidimensionales Problem

Da die Lösung für $n = 2$, wie in Abschnitt 3.2 zu sehen sein wird, auf der Lösung für $n = 3$ aufbaut, lösen wir als erstes das dreidimensionale Problem von (3.2). Beginnen wollen wir in Unterabschnitt 3.1.1 mit einer direkten Herleitung einer expliziten Formel für $u(x, t)$, anschließend wird in Unterabschnitt 3.1.2 die Struktur der getätigten Berechnungen erläutert und ein Ansatz für $n \geq 3$ aufgestellt.

3.1.1 Kirchhoffsche Formel

Die Erfahrung zeigt, dass sich Wellen im homogenen Raum kugelförmig ausbreiten. Daher ist es naheliegend das Problem (3.2) kugelsymmetrisch zu betrachten. Die hier vorgestellte Vorgehensweise orientiert sich an [1] S.329f. Sei $K_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq r\}$ die Kugel mit Radius $r > 0$ um den Mittelpunkt $\mathbf{x}$ und $\partial K_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = r\}$ die Sphäre dieser Kugel. Für unsere Berechnungen betrachten wir das Problem im beliebig gewählten Koordinatenursprung, also $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Wir integrieren (3.1) über die Kugel $K_r(\mathbf{0})$:

$$\int_{K_r(\mathbf{0})} \frac{\partial^2 u(\mathbf{y}, t)}{\partial t^2} dV_{\mathbf{y}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{K_r(\mathbf{0})} u(\mathbf{y}, t) dV_{\mathbf{y}} = c^2 \int_{K_r(\mathbf{0})} \Delta u(\mathbf{y}, t) dV_{\mathbf{y}}. \quad (3.3)$$

Die Vertauschung auf der linken Seite von Differentiation und Integration kann erfolgen, wenn $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ stetig ist und $K_r(\mathbf{0})$ kompakt ist, was beides erfüllt ist. Für den Beweis dieser Aussage sei auf [6] §10 Satz 2 verwiesen.

Lemma 3.1. *Sei $K_r(\mathbf{0}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{y}\| \leq r\}$ und $\partial K_r(\mathbf{0}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{y}\| = r\}$ wie oben definiert, dann gilt*

$$\int_{K_r(\mathbf{0})} \Delta u dV = \int_{\partial K_r(\mathbf{0})} \frac{\partial u}{\partial r} dS$$

Beweis: Sei $\mathbf{n} : \partial K_r(\mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Einheits-Normalenfeld der Sphäre $\partial K_r(\mathbf{0})$, das heißt das Vektorfeld, welches aus den Einheitsvektoren besteht, die normal auf die Kugeloberfläche stehen. Die Kugel $K_r(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^3$ ist eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand. Daher sind die Voraussetzungen für den Gaußschen Integralsatz (vgl. [7] §15 Satz 3) erfüllt und wir können aus der Definition für Δ berechnen:

$$\int_{K_r(\mathbf{0})} \Delta u(\mathbf{y}, t) dV_{\mathbf{y}} = \int_{K_r(\mathbf{0})} \operatorname{div}(\operatorname{grad} u(\mathbf{y}, t)) dV_{\mathbf{y}} = \int_{\partial K_r(\mathbf{0})} \langle \operatorname{grad} u(\mathbf{y}, t), \mathbf{n}(\mathbf{y}) \rangle dS_{\mathbf{y}}$$

Auf der Oberfläche der Kugel gilt $\mathbf{y} = r\mathbf{n}(\mathbf{y})$. Die Definition des Gradienten über die Richtungsableitung $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ von u in Richtung $\mathbf{n}$ mit $\langle \operatorname{grad} u, \mathbf{n} \rangle = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ führt zu:

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_r(\mathbf{0})} \langle \operatorname{grad} u(\mathbf{y}, t), \mathbf{n}(\mathbf{y}) \rangle dS_{\mathbf{y}} &= \int_{\partial K_r(\mathbf{0})} \langle \operatorname{grad} u(r\mathbf{n}(\mathbf{y}), t), \mathbf{n}(\mathbf{y}) \rangle dS_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\partial K_r(\mathbf{0})} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(r\mathbf{n}(\mathbf{y}), t) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\partial K_r(\mathbf{0})} \frac{\partial u}{\partial r}(\mathbf{y}, t) dS_{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Entscheidend dabei ist, dass die Richtungsableitung $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ schlussendlich nur vom Radius r abhängt, da die Einheits-Normalen $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ die Richtung des Radiusvektors $\mathbf{y}$ haben. $\square$

Berechnet man das Volumen der Kugel in Kugelkoordinaten, ergibt sich das benötigte Volumenelement durch:

$$dV = \tilde{r}^2 d\tilde{r} d\Omega. \quad (3.4)$$

Das Differential des Raumwinkels ist dabei mit $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ definiert. Ähnlich kann das Flächenelement des Oberflächenintegrals umgeschrieben werden zu:

$$dS = r^2 d\Omega. \quad (3.5)$$

Mit Hilfe des Lemmas 3.1 und den Transformationen (3.4) und (3.5) kann (3.3) durch Aufsplitten des Volumenintegral in einen radialen und einen winkelabhängigen Teil zu

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^r \tilde{r}^2 \int_{\partial K(\tilde{r})} u(\tilde{\mathbf{y}}, t) d\Omega_{\tilde{\mathbf{y}}} d\tilde{r} = c^2 \int_{\partial K_r(\mathbf{0})} r^2 \frac{\partial}{\partial r} u(\mathbf{y}, t) d\Omega_{\mathbf{y}} = c^2 r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int_{\partial K_r(\mathbf{0})} u(\mathbf{y}, t) d\Omega_{\mathbf{y}}$$

umgeformt werden. Diese Gleichung können wir nach r differenzieren und erhalten, da das radiale Integral verschwindet,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} r^2 \int_{\partial K_r(\mathbf{0})} u(\mathbf{y}, t) d\Omega_{\mathbf{y}} = c^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int_{\partial K_r(\mathbf{0})} u(\mathbf{y}, t) d\Omega_{\mathbf{y}} \right). \quad (3.6)$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, wollen wir eine Definition einführen.

Definition 3.1. Für die Funktion u sei der Mittelwert über die Kugeloberfläche $\partial K_r(\mathbf{x})$ (sphärisches Mittel in drei Dimensionen) festgelegt mit:

$$M_u(\mathbf{x}, r, t) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial K_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}, t) dS_{\mathbf{y}} \quad \text{mit } r > 0.$$

Für den Grenzfall $r = 0$ schreiben wir:

$$M_u(\mathbf{x}, 0, t) := \lim_{r \rightarrow 0} M_u(\mathbf{x}, r, t) = u(\mathbf{0}, t)$$

Gleichung (3.6) wird nach Division durch $4\pi r^2 \neq 0$ und mit oberer Definition zu:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(\mathbf{0}, r, t) = \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} M_u(\mathbf{0}, r, t) \right). \quad (3.7)$$

Für die rechte Seite gilt

$$\frac{c^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial M_u}{\partial r} \right) = \frac{c^2}{r^2} \left(2r \frac{\partial M_u}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 M_u}{\partial r^2} \right) = \frac{c^2}{r} \left(2 \frac{\partial M_u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 M_u}{\partial r^2} \right) = \frac{c^2}{r} \frac{\partial^2 (r M_u)}{\partial r^2},$$

und somit reduziert sich (3.7) zur eindimensionalen Wellengleichung für $r M_u$ mit r als Ortsvariable:

$$\frac{\partial^2 (r M_u)}{\partial t^2}(\mathbf{0}, r, t) - c^2 \frac{\partial^2 (r M_u)}{\partial r^2}(\mathbf{0}, r, t) = 0 \quad (3.8)$$

Eine radialsymmetrische Lösung der homogenen Wellengleichung ist also durch M_u gegeben. Aus Satz 2.6 wissen wir, dass mit $r M_u$ jede Lösung die Form

$$r M_u(\mathbf{0}, r, t) = \varphi(r - ct) + \psi(r + ct)$$

hat. Die Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ werden erst durch die Anfangsbedingungen näher bestimmt. Um nun diese unbekannten Funktionen näher bestimmen zu können, betrachten wir deren Verhalten für $r = 0$. Man kann direkt schreiben:

$$0 u(\mathbf{0}, t) = \varphi(-ct) + \psi(ct) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(ct) = -\varphi(-ct)$$

Obwohl $ct > 0$, gilt diese Gleichung auch für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$, da die Bezeichnungen φ und ψ einfach vertauscht werden können. Das heißt:

$$\psi(x) = -\varphi(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Damit folgt mit $\xi = r + ct$ und $\eta = r - ct$:

$$rM_u(\mathbf{0}, r, t) = \psi(r + ct) - \psi(-r + ct) = \psi(\xi) - \psi(-\eta).$$

Unter der Berücksichtigung der Kettenregel können wir einmal nach r und einmal nach t differenzieren und erhalten zwei Gleichungen:

$$M_u + r \frac{\partial M_u}{\partial r} = \frac{\partial(rM_u)}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \frac{\partial\xi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial r} = \frac{\partial\psi(\xi)}{\partial\xi} + \frac{\partial\psi(-\eta)}{\partial\eta} \quad \text{und} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial(rM_u)}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \frac{\partial\xi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\psi(\xi)}{\partial\xi} c + \frac{\partial\psi(-\eta)}{\partial\eta} (-c) = c \left(\frac{\partial\psi(\xi)}{\partial\xi} - \frac{\partial\psi(-\eta)}{\partial\eta} \right) \quad (3.10)$$

Gleichung (3.9) und (3.10) addiert liefert:

$$\frac{\partial(rM_u)}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial(rM_u)}{\partial t} = 2 \frac{\partial\psi(\xi)}{\partial\xi}. \quad (3.11)$$

In Gleichung (3.9) setzen wir $r = 0$, woraus folgt $\xi = ct = -\eta$ und somit weiter:

$$M(\mathbf{0}, 0, t) = u(\mathbf{0}, t) = 2 \frac{\partial\psi(ct)}{\partial\xi}$$

Wird hier t durch $t + \frac{r}{c}$ für $r > 0$ substituiert, kann man schreiben:

$$u(\mathbf{0}, \frac{r}{c} + t) = 2 \frac{\partial\psi(r + ct)}{\partial\xi} = 2 \frac{\partial\psi(\xi)}{\partial\xi}$$

Damit kann (3.11) vereinfacht werden zu:

$$\frac{\partial(rM_u)}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial(rM_u)}{\partial t} = u(\mathbf{0}, \frac{r}{c} + t)$$

O.B.d.A. setzen wir $t = 0$ und $r = c\tilde{t}$, wodurch sich durch Einsetzen der Definition für M_u ergibt:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{0}, \tilde{t}) &= \left[\frac{\partial(rM_u)}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial(rM_u)}{\partial t} \right]_{\substack{t=0 \\ r=c\tilde{t}}} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi r} \int_{\partial K_r(\mathbf{0})} u(\mathbf{y}, t) dS_{\mathbf{y}} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi r} \int_{\partial K_r(\mathbf{0})} u(\mathbf{y}, t) dS_{\mathbf{y}} \right) \right]_{\substack{t=0 \\ r=c\tilde{t}}} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi r} \int_{\partial K_r(\mathbf{0})} u(\mathbf{y}, t) dS_{\mathbf{y}} \right) + \frac{1}{4\pi c r} \int_{\partial K_r(\mathbf{0})} \frac{\partial u(\mathbf{y}, t)}{\partial t} dS_{\mathbf{y}} \right]_{\substack{t=0 \\ r=c\tilde{t}}} \end{aligned}$$

Hier können, da $t = 0$, direkt die Anfangsbedingungen $u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$ und $\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x})$ aus (3.2) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{0}, \tilde{t}) &= \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi r} \int_{\partial K_r(\mathbf{0})} f(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}} \right) + \frac{1}{4\pi c r} \int_{\partial K_r(\mathbf{0})} g(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}} \right]_{r=c\tilde{t}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi c \tilde{t}} \int_{\partial K_{c\tilde{t}}(\mathbf{0})} f(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}} \right) + \frac{1}{4\pi c c \tilde{t}} \int_{\partial K_{c\tilde{t}}(\mathbf{0})} g(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{1}{4\pi c^2 \tilde{t}} \int_{\partial K_{c\tilde{t}}(\mathbf{0})} f(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}} \right) + \frac{1}{4\pi c^2 \tilde{t}} \int_{\partial K_{c\tilde{t}}(\mathbf{0})} g(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Satz 3.2. Ist $u(\mathbf{x}, t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems (3.2), hat sie die eindeutige Form

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial K_{ct}(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}} \right) + \frac{1}{4\pi c^2 \tilde{t}} \int_{\partial K_{c\tilde{t}}(\mathbf{x})} g(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}}. \quad (3.13)$$

Beweis: Da für die Herleitung von (3.12) der Koordinatenursprung beliebig gewählt wurde und wir für $\tilde{t}$ allgemein t schreiben können, kann die Lösung an der Stelle $(\mathbf{x}, t)$ durch (3.13) angegeben werden. Ist $u \in C^m(\mathbb{R}^3)$ für $m \geq 2$ hat die Lösung notwendig die Form (3.13). Diese ist eindeutig (vgl. [9] S.129). $\square$

Die Lösung (3.13) wird auch Kirchhoffsche Formel genannt[†]. Wichtig dabei ist, dass die Anfangswerte über die Oberfläche $\partial K_{ct}(\mathbf{x})$ der Kugel vom Radius ct mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ integriert werden, um die Lösung $u(\mathbf{x}, t)$ zu erhalten. Bemerkenswert ist auch, dass eine Lösung der Wellengleichung weniger regulär als die Anfangswerte sein kann. Angenommen $u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) \in C^k$ und $\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \in C^{k-1}$, dann impliziert das nur $u(\mathbf{x}, t) \in C^{k-1}$ und $\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x}, t) \in C^{k-2}$ für $t > 0$ (vgl. [10] S.115).

3.1.2 Euler-Poisson-Darboux-Gleichung

Die vorangegangene Herleitung der Kirchhoffschen Formel mag etwas unübersichtlich und langwierig erscheinen, daher wollen wir hier noch eine etwas andere Sichtweise vorstellen, mit deren Hilfe wir ebenfalls (3.13) ableiten können. Zudem eröffnet sich auch ein Ansatz für höhere Dimensionen $n > 3$. Die Vorgehensweise nutzt prinzipiell wieder die Methode des sphärischen Mittels, jedoch für beliebige Dimensionen. Wir halten uns inhaltlich an [8] 187ff, [9] §5.1 und [10] §5.2.

Analog zu oben sei $K_r(\mathbf{x}) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq r\}$ die n -dimensionale Kugel mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ und Radius r und deren Sphäre $\partial K_r(\mathbf{x}) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = r\}$.

Definition 3.2. Für eine stetige Funktion $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir den Mittelwert über $\partial K_r(\mathbf{x})$ mit $r > 0$ durch:

$$M_h(\mathbf{x}, r) := \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial K_r(\mathbf{x})} h(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}}.$$

[†]Diese Bezeichnung wird in der Literatur unterschiedlich verwendet. Beispielsweise bei [3] S.72, [14] S.558 und [15] S.240 wird der Begriff Kirchhoffsche Formel, wie hier, eingeführt. Bei [1] S.331, [2] S.313 und [4] S.447 hingegen wird die Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung als Poisson-sche Formel benannt. Wir verwenden diesen Name aber für die Lösung der zweidimensionalen Gleichung (vgl. [3] S.74).

Dabei sei ω_n die Oberfläche der n -dimensionalen Einheitskugel, für deren Berechnung beispielsweise auf [7] §14.9 verwiesen wird.

Durch die Transformation $\mathbf{y} = \mathbf{x} + r\boldsymbol{\nu}$ mit $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$ und $\|\boldsymbol{\nu}\| = 1$ kann das sphärische Mittel über die Einheitskugel im Ursprung berechnet werden:

$$M_h(\mathbf{x}, r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K_1(\mathbf{0})} h(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\nu}) dS_{\boldsymbol{\nu}} \quad (3.14)$$

Fasst man den Mittelwert als eine Funktion $M_h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf ist aus (3.14) klar, dass aus $h \in C^k$ durch Vertauschung von Differentiation und Integration $M_h \in C^k$ folgt. Zudem kann, im Gegensatz zur ursprünglichen Definition bei der $r > 0$ vorausgesetzt wurde, durch (3.14) M_h für $r \in \mathbb{R}$ festgelegt werden. Dies geschieht, indem man negative r durch Ersetzen der Integrationsvariable $\boldsymbol{\nu}$ mit $-\boldsymbol{\nu}$ kompensiert. Als Konsequenz ist die Funktion M_h gerade in r , das heißt $M_h(\mathbf{x}, -r) = M_h(\mathbf{x}, r)$. Dieser Umstand führt, unter Berücksichtigung, dass jede ungerade Funktion den Funktionswert Null im Nullpunkt hat, dazu, dass für $r = 0$ gilt:

$$M_h(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} M_h(\mathbf{x}, r) \right)_{r=0} = 0 \quad (3.15)$$

Lemma 3.3. *Der sphärische Mittelwert M_h einer beliebigen Funktion $h \in C^2$ genügt der Darbouxschen Gleichung:*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_h(\mathbf{x}, r) = \Delta M_h(\mathbf{x}, r) \quad (3.16)$$

Beweis: Sei $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\eta(r) := \mathbf{x} + r\boldsymbol{\nu} = (x_1 + r\nu_1, \dots, x_n + r\nu_n)$. Wenden wir die mehrdimensionale Kettenregel (vgl. [6] S.71) an und nutzen aus, dass wir aufgrund der zweimal stetigen Differenzierbarkeit von M_h Ableitung und Integration vertauschen können, gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} M_h(\mathbf{x}, r) &= \frac{1}{\omega_n} \frac{\partial}{\partial r} \int_{\partial K_1(\mathbf{0})} h(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\nu}) dS_{\boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K_1(\mathbf{0})} \frac{\partial}{\partial r} h(\eta(r)) dS_{\boldsymbol{\nu}} \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K_1(\mathbf{0})} \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial \eta_i}(\eta(r)) \frac{d\eta_i(r)}{dr} dS_{\boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K_1(\mathbf{0})} \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial \eta_i}(\eta(r)) \nu_i dS_{\boldsymbol{\nu}} \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K_1(\mathbf{0})} \langle \text{grad } h(\eta(r)), \boldsymbol{\nu} \rangle dS_{\boldsymbol{\nu}} \end{aligned}$$

Hier wird auf die Definition des Gradienten $\text{grad } h(\mathbf{y}) = \left(\frac{\partial h}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial y_n} \right)$ zurückgegriffen. Da $\boldsymbol{\nu}$ auch der Normalvektor der Sphäre $\partial K_1(\mathbf{0})$ ist, kann der Gaußsche Integralsatz angewandt werden. Zudem benutzen wir die Linearität des Gradienten und der Divergenz (vgl. [7] S.25).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K_1(\mathbf{0})} \langle \text{grad } h(\eta(r)), \boldsymbol{\nu} \rangle dS_{\boldsymbol{\nu}} &= \frac{1}{\omega_n} \int_{K_1(\mathbf{0})} \text{div}(\text{grad } h(\eta(r))) dV_{\boldsymbol{\nu}} \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{K_1(\mathbf{0})} \text{div}(\text{grad}(h(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\nu}))) dV_{\boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{\omega_n} \int_{K_1(\mathbf{0})} r \text{div}(\text{grad } h(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\nu})) dV_{\boldsymbol{\nu}} \\ &= \frac{r}{\omega_n} \int_{K_1(\mathbf{0})} \Delta h(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\nu}) dV_{\boldsymbol{\nu}} \end{aligned}$$

Als nächstes nutzt man $\mathbf{y} = \mathbf{x} + r\boldsymbol{\nu}$ aus und spaltet das Integral über die Kugel in ein radiales Integral und in ein Integral, das über die Oberfläche integriert, auf. Dadurch kann man die Definition des sphärischen Mittels wieder einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{r}{\omega_n} \int_{K_1(\mathbf{0})} \Delta h(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\nu}) dV_{\boldsymbol{\nu}} &= \frac{r}{\omega_n r^{n-1}} \int_{K_r(\mathbf{x})} \Delta h(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} = \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \int_0^r \int_{\partial K_\rho(\mathbf{x})} \Delta h(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} d\rho \\ &= r^{1-n} \Delta \int_0^r \rho^{n-1} M_h(\mathbf{x}, \rho) d\rho \end{aligned}$$

Der Laplace-Operator darf vor das Integral gezogen werden, da $h \in C^2$. Wir können die soeben erhaltene Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial r} M_h(\mathbf{x}, r) = r^{1-n} \Delta \int_0^r \rho^{n-1} M_h(\mathbf{x}, \rho) d\rho$$

mit r^{n-1} multiplizieren und anschließend nach r ableiten:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} M_h(\mathbf{x}, r) \right) = r^{n-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_h(\mathbf{x}, r) = r^{n-1} \Delta M_h(\mathbf{x}, r).$$

□

Mit Hilfe des soeben bewiesenen Lemmas 3.3 und (3.15) wollen wir die Wellengleichung (3.1) mit dem Anfangswertproblem (3.2) auf eine partielle hyperbolische Differentialgleichung übertragen, die nur noch zwei unabhängige Variablen hat. Wir schreiben dafür das sphärische Mittel der Funktion $u : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ als:

$$M_u(\mathbf{x}, r, t) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial K_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}, t) dS_{\mathbf{y}} = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K_1(\mathbf{0})} u(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\nu}, t) dS_{\boldsymbol{\nu}} \quad (3.17)$$

Satz 3.4. *Sei $u = u(\mathbf{x}, t)$ mindestens zweimal stetig differenzierbar und eine Lösung der Wellengleichung. Für ein beliebig gewähltes, aber festes $\mathbf{x}$, löst die Funktion $M_u(\mathbf{x}, r, t) = M_u(r, t)$ die Euler-Poisson-Darboux Gleichung:*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(\mathbf{x}, r, t) = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(\mathbf{x}, r, t) \quad (3.18)$$

mit den Anfangswerten:

$$M_u(\mathbf{x}, r, 0) = M_f(\mathbf{x}, r) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} M_u(\mathbf{x}, r, 0) = M_g(\mathbf{x}, r) \quad (3.19)$$

Beweis: Aus Lemma 3.3 folgt

$$\Delta M_u(\mathbf{x}, r, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(\mathbf{x}, r, t).$$

Da u die Wellengleichung erfüllt, können wir mit (3.17) weiter schreiben:

$$\begin{aligned} \Delta M_u(\mathbf{x}, r, t) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K_1(\mathbf{0})} \Delta u(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\nu}, t) dS_{\boldsymbol{\nu}} \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K_1(\mathbf{0})} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\nu}, t) dS_{\boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(\mathbf{x}, r, t). \end{aligned}$$

Beide Gleichungen zusammen führen auf die Behauptung. □

Mit diesen Hilfsmitteln ausgestattet wollen wir als nächstes nochmals die Wellengleichung in drei Dimensionen lösen. Anzumerken gilt es noch, dass bis an diese Stelle alle Aussagen für eine beliebige Dimension n gelten und keine speziellen Einschränkungen gemacht wurden. Wir nehmen also ab hier explizit $n = 3$ an und transformieren $M_u \rightarrow \tilde{M}_u$ mit:

$$\tilde{M}_u(\mathbf{x}, r, t) = r M_u(\mathbf{x}, r, t) \quad (3.20)$$

Lemma 3.5. *Die Funktion $\tilde{M}_u(\mathbf{x}, r, t) = \tilde{M}_u(r, t)$ für ein beliebiges, aber festes $\mathbf{x}$ löst die eindimensionale Wellengleichung (2.1) mit den Anfangswerten:*

$$\begin{aligned} \tilde{M}_u(\mathbf{x}, r, 0) &= \tilde{M}_f(\mathbf{x}, r) = r M_f(\mathbf{x}, r) = \tilde{M}_f(r) \quad \text{und} \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{M}_u(\mathbf{x}, r, 0) &= \tilde{M}_g(\mathbf{x}, r) = r M_g(\mathbf{x}, r) = \tilde{M}_g(r) \quad \text{für } t = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Beweis: Aus (3.18) in Satz 3.4 folgt mit $n = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{M}_u &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r M_u) = r c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u = c^2 \left(r \frac{\partial^2}{\partial r^2} M_u + 2 \frac{\partial}{\partial r} M_u \right) \\ &= c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r M_u) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{M}_u \end{aligned}$$

□

Eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung ist durch die d'Alembertsche Formel (2.25) gegeben und hat die Gestalt:

$$\tilde{M}_u(r, t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{M}_f(r + ct) + \tilde{M}_f(r - ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} \tilde{M}_g(s) \, ds$$

Da M_f, M_g gerade sind und somit $\tilde{M}_f, \tilde{M}_g$ ungerade sind können wir schreiben:

$$\tilde{M}_u(r, t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{M}_f(ct + r) - \tilde{M}_f(ct - r) \right) + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} \tilde{M}_g(s) \, ds$$

Aus (3.15), (3.20) und (3.21) folgt über die Definition der Ableitung nach ct :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= M_u(\mathbf{x}, 0, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{M}_u(\mathbf{x}, r, t)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\tilde{M}_f(ct + r) - \tilde{M}_f(ct - r)}{2r} + \frac{1}{2rc} \int_{ct-r}^{ct+r} \tilde{M}_g(s) \, ds \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{(ct + r) M_f(ct + r) - (ct - r) M_f(ct - r)}{2r} + \frac{1}{2rc} \int_{ct-r}^{ct+r} s M_g(s) \, ds \right) \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (ct M_f(ct)) + \frac{ct}{c} M_g(ct) = \frac{\partial}{\partial t} (t M_f(\mathbf{x}, ct)) + t M_g(\mathbf{x}, ct). \end{aligned}$$

Da für $n = 3$ gilt $\omega_3 = 4\pi$ und aufgrund (3.17), können wir die Kirchhoffsche Formel angeben:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial K_{ct}(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}} \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial K_{ct}(\mathbf{x})} g(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}}.$$

Dieses stimmt mit der in Unterabschnitt 3.1.1 hergeleiteten Formel (3.13) überein. Wir können auch umgekehrt zeigen, dass jede Lösung, die die Form der Kirchhoffschen Formel hat, die Wellengleichung löst.

Satz 3.6. *Für jedes $f \in C^k(\mathbb{R}^3)$ und $g \in C^l(\mathbb{R}^3)$ mit $k \geq 3$ und $l \geq 2$ genügt die durch (3.13) definierte Lösung u der dreidimensionalen Wellengleichung (3.1).*

Beweis: Erfüllen f, g die Voraussetzungen, ist u mindestens zwei mal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$. Aufgrund des Superpositionsprinzips für Lösungen der Wellengleichung, reicht es zu zeigen, dass $tM_g(\mathbf{x}, ct)$ und $\frac{\partial}{\partial t}(tM_f(\mathbf{x}, ct))$ die Wellengleichung erfüllen. Für $n = 3$ und $r = ct$ gilt aufgrund von Lemma 3.3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(tM_g(\mathbf{x}, ct)) &= c \left(2 \frac{\partial}{\partial t} + ct \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) M_g(\mathbf{x}, ct) = c \left(2 \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) M_g(\mathbf{x}, r) \\ &= cr \left(\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) M_g(\mathbf{x}, r) = cr \Delta M_g(\mathbf{x}, r) = c^2 \Delta(tM_g(\mathbf{x}, ct)) \end{aligned}$$

Die Rechnung für $\frac{\partial}{\partial t}(tM_f(\mathbf{x}, ct))$ verläuft analog. □

3.1.3 Ungerade Raumdimensionen

Nachdem wir den Fall $n = 3$ jetzt ausführlich diskutiert haben, wollen wir uns kurz noch höheren Raumdimensionen widmen. Dazu kehren wir zur Euler-Poisson-Darboux-Gleichung (3.18) zurück, die für beliebiges n gilt. Das Entscheidende für die Herleitung der Kirchhoffschen Formel war, dass die Transformation (3.20) es uns ermöglichte das Problem (3.18) auf die eindimensionale Wellengleichung zu reduzieren. Ziel muss es nun sein eine solche Transformation $n \geq 3$ zu finden. Wir nehmen dafür an, dass n eine ungerade Zahl ist. Den Fall, dass n eine gerade Zahl ist behandeln wir später in Abschnitt 3.2.2. O.B.d.A. setzen wir $c = 1$.

Sei also

$$n = 2k + 1 \quad \text{mit } 1 \leq k \in \mathbb{N}$$

und $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ eine Lösung der Wellengleichung (3.1). Zudem seien $f, g \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$. Definiert man

$$\tilde{M}_u(r, t) := \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} (r^{2k-1} M_u(\mathbf{x}, r, t)), \quad (3.22)$$

mit M_u als sphärischem Mittelwert wie in (3.17), dann wird dadurch die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung in die Wellengleichung übergeführt. Es löst also $\tilde{M}_u$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{M}_u - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{M}_u = 0,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\tilde{M}_u(r, 0) = \tilde{M}_f(r) := \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} (r^{2k-1} M_f(\mathbf{x}, r)),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{M}_u(r, 0) = \tilde{M}_g(r) := \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} (r^{2k-1} M_g(\mathbf{x}, r)).$$

Diese Behauptung ist beispielsweise bei [3] S.75 Lemma 3 bewiesen. Weiter ergibt sich daraus, wie ebenfalls bei [3] S.76 gezeigt wird, eine Lösung der n -dimensionalen Wellengleichung durch folgende Formel:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\gamma_n} & \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} \int_{\partial K_t(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} \int_{\partial K_t(\mathbf{x})} g(\mathbf{y}) \, dS_{\mathbf{y}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dabei ist γ_n festgelegt durch:

$$\gamma_n := \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (2i - 1).$$

Für $n = 3$ stimmt diese Formel, da $\gamma_3 = 1$, mit der Kirchhoffschen Formel (3.13) überein. Umgekehrt gilt für eine ungerade Zahl $n \geq 3$ sowie $f \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$, dass die durch (3.23) konstruierte Funktion u eine eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems (3.2) ist. Der Beweis dazu ist beispielsweise bei [8] Satz 24.13 zu finden.

3.2 Zweidimensionales Problem

Bisher haben wir nur Dimensionen n betrachtet für $n \geq 3$ und n ungerade. Das liegt daran, dass für gerade n keine Transformation, wie (3.22) die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung in die eindimensionale Wellengleichung überführt (vgl. [3] S.73). Insbesondere gilt das auch für $n = 2$. Wir wollen zuerst eine Vorgehensweise für diesen Fall finden und genauer erörtern. Anschließend wird eine Lösung für allgemeines n angegeben.

3.2.1 Poissonsche Formel

Um die Wellengleichung in zwei Dimensionen zu lösen, betrachten wir das Problem für $n = 3$ und fassen die Lösung als eine von der dritten Raumkoordinate unabhängige Lösung auf. Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $u : \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(\mathbf{x}, t)$ mit $u \in C^2$ eine Lösung der Gleichung (3.1) für $n = 2$. Wir können dann

$$\tilde{u} : \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{u}(x_1, x_2, x_3) = u(\mathbf{x}, t)$$

als eine Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung (3.1) mit den Anfangswerten

$$\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) = \tilde{f}(x_1, x_2) = f(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \tilde{g}(x_1, x_2, x_3) = g(\mathbf{x}) \quad (3.24)$$

auffassen. Für $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ ist $\tilde{u}(\tilde{\mathbf{x}})$ mit Hilfe der Kirchhoffschen Formel (3.13) bestimmt:

$$u(\mathbf{x}, t) = \tilde{u}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial K_{ct}(\tilde{\mathbf{x}})} \tilde{f}(\tilde{\mathbf{y}}) \, dS_{\tilde{\mathbf{y}}} \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial K_{ct}(\tilde{\mathbf{x}})} \tilde{g}(\tilde{\mathbf{y}}) \, dS_{\tilde{\mathbf{y}}}. \quad (3.25)$$

Aufgrund von (3.24) sind die integrierten Funktion $\tilde{f}, \tilde{g}$ unabhängig von x_3 . Um die scheinbare x_3 -Abhängigkeit der Integration über die Kugelsphäre $\partial K_{ct}(\tilde{\mathbf{x}})$ zu beseitigen, setzen wir $x_3 = 0$, wir projizieren also die Integration über die Kugeloberfläche auf die (x_1, x_2) -Ebene und vereinfachen diese mit folgendem Lemma.

Lemma 3.7. *Sei $D_R(\mathbf{x}) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \leq R^2\}$ eine Kreisfläche mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ und Radius $R > 0$. Zudem sei $\tilde{f}$ wie in (3.24) definiert und $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, 0)$, dann gilt:*

$$\int_{\partial K_R(\tilde{\mathbf{x}})} \tilde{f}(\tilde{\mathbf{y}}) dS_{\tilde{\mathbf{y}}} = 2R \iint_{D_R(\mathbf{x})} \frac{f(y_1, y_2)}{\sqrt{R^2 - r^2}} dy_1 dy_2, \quad \text{mit,}$$

$$r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Beweis: Die Integration über die Kugeloberfläche kann aufgeteilt werden in eine Integration über zwei Halbsphären, die sich an der $(x_1, x_2, 0)$ -Ebene berühren. Für einen Punkt $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^3$ auf der Oberfläche der Kugel mit Mittelpunkt $\tilde{\mathbf{x}}$ und Radius $R > 0$ gilt:

$$\|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - 0)^2} = R.$$

Wir beschränken uns darauf nur eine Halbsphäre zu betrachten, können also die negative Wurzel ignorieren und den Satz über implizite Funktionen anwenden. Dadurch lässt sich die Oberfläche der Halbkugel in Abhängigkeit von y_1, y_2 darstellen als:

$$y_3(y_1, y_2) = \sqrt{c^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2} = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Für das Flächenelement $dS_{\tilde{\mathbf{y}}}$ gilt bei der Integration über eine mit $y_3 = y_3(y_1, y_2)$ angegebene Fläche (vgl. [2] S.315):

$$dS_{\tilde{\mathbf{y}}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2} dy_1 dy_2.$$

Integriert wird nun nur noch über die Kreisfläche $D_R(\mathbf{x})$. Beachten wir, dass $\tilde{f}(y_1, y_2, y_3) = \tilde{f}(y_1, y_2) = f(y_1, y_2)$, also nur von y_1, y_2 abhängt, können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial K_R(\tilde{\mathbf{x}})} \tilde{f}(\tilde{\mathbf{y}}) dS_{\tilde{\mathbf{y}}} &= \iint_{D_R(\mathbf{x})} \tilde{f}(y_1, y_2, y_3(y_1, y_2)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2} dy_1 dy_2 \\ &= \iint_{D_R(\mathbf{x})} f(y_1, y_2) \sqrt{1 + \left(\frac{-(y_1 - x_1)}{y_3}\right)^2 + \left(\frac{-(y_2 - x_2)}{y_3}\right)^2} dy_1 dy_2 \\ &= \iint_{D_R(\mathbf{x})} f(y_1, y_2) \sqrt{\frac{y_3^2 + (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}{y_3^2}} dy_1 dy_2 \\ &= \iint_{D_R(\mathbf{x})} f(y_1, y_2) \sqrt{\frac{R^2}{y_3^2}} dy_1 dy_2 = \iint_{D_R(\mathbf{x})} f(y_1, y_2) \frac{R}{|y_3|} dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

□

Indem wir Lemma 3.7 für $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ anwenden, kann für $R = ct$ die Lösung (3.25) vereinfacht werden:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi c} \iint_{D_{ct}(\mathbf{x})} \frac{f(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 \right) + \frac{1}{2\pi c} \iint_{D_{ct}(\mathbf{x})} \frac{g(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2. \quad (3.26)$$

Die Formel (3.26) ist eine Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung und wird oft auch als Poissonsche Formel bezeichnet. Bemerkenswert ist, dass die Anfangswerte über die ganze Kreisfläche $D_{ct}(\mathbf{x})$ integriert werden. Die hier angewendete Vorgehensweise, aus einer höherdimensionalen Lösung eine Lösung für kleinere Dimensionen abzuleiten, nennt man auch Absteigemethode (method of descent).

Als Informationsquelle für diesen Abschnitt dienten [1] S.343f, [9] S.134 und [15] S.243f.

3.2.2 Gerade Raumdimensionen

In Unterabschnitt 3.1.3 ist durch (3.23) eine Lösung der Wellengleichung für ungerade $n \geq 3$ angeführt. Von jeder ungeraden Dimension $n + 1$ kann durch die Absteigemethode eine Lösung für die gerade Dimension n hergeleitet werden (vgl. [15] S.245). Der Einfachheit halber setzen wir wieder $c = 1$. Sei dementsprechend

$$n = 2k \quad \text{mit } 1 \leq k \in \mathbb{N}$$

gerade und $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ eine Lösung der Wellengleichung. Die Funktion

$$\tilde{u}(x_1, \dots, x_{n+1}, t) := u(x_1, \dots, x_n, t)$$

löst die Wellengleichung auf $\mathbb{R}^{n+1} \times [0, +\infty)$ mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_1, \dots, x_{n+1}, 0) &= \tilde{f}((x_1, \dots, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{und} \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(x_1, \dots, x_{n+1}, 0) &= \tilde{g}((x_1, \dots, x_{n+1}) = g(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Über die Formel (3.23) ist eine Lösung für $\tilde{u}$ bestimmt. Wir ersetzen darin $n + 1 = 2k + 1$ durch $n = 2k$ und betrachten eine Lösung im Punkt $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Mit $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ können wir schreiben (vgl. [3] S.78):

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^{n-1} \int_{\partial K_t(\tilde{\mathbf{x}})} \tilde{f}(\tilde{\mathbf{y}}) dS_{\tilde{\mathbf{y}}} \right) + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^{n-1} \int_{\partial K_t(\tilde{\mathbf{x}})} \tilde{g}(\tilde{\mathbf{y}}) dS_{\tilde{\mathbf{y}}} \right) \right].$$

Die scheinbare x_{n+1} Abhängigkeit kann ähnlich dem zweidimensionalen Fall durch Projektion auf eine n -dimensionale Ebene beseitigt werden. Diese Vorgehensweise ist bei

[3] S.79 oder bei [8] S.195 genau ausgeführt. Man kann dort eine Formel finden, die eine Lösung darstellt:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mu_n} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \int_{K_t(\mathbf{x})} \frac{f(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2}} dV_{\mathbf{y}} \right) + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \int_{K_t(\mathbf{x})} \frac{g(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2}} dV_{\mathbf{y}} \right) \right]. \quad (3.27)$$

Dabei ist μ_n festgelegt durch:

$$\mu_n = \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} 2i$$

Fassen wir in der Poissonschen Formel (3.26) das Integral über die Kreisfläche als Volumenintegral im zweidimensionalen Raum auf, können wir feststellen, dass (3.27) aufgrund $\mu_2 = 2$ mit dieser übereinstimmt.

3.3 Ausbreitungseigenschaften

Wir kennen nun durch die in Abschnitt 3.1 und 3.2 vorgestellten Ansätze Lösungen der Wellengleichung für eine beliebige Raumdimension. In diesem Abschnitt wollen wir noch, analog zu Unterabschnitt 2.3.4, die Eigenschaften dieser Lösungen im Hinblick auf räumliche Ausbreitung erörtern, insbesondere für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

3.3.1 Kausalität

Betrachtet man die Lösungsformeln (3.13) und (3.26), ist zu erkennen, dass die Anfangsdaten f, g an einem Punkt $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ über eine Kugel oder ihren Rand integriert werden, deren Radius von t abhängt. Mit größer werdendem t wachsen die Kugeln konzentrisch mit der Geschwindigkeit c an. Dies ist in Abbildung 16 für zwei Zeitpunkte $t_1 < t_2$ dargestellt (vgl. [15] S.234).

Der Einflussbereich oder, in der Sichtweise t stelle die Zeit dar, die Zukunft eines Punktes $\mathbf{y}$ ist die Vereinigung all dieser Kugeln mit wachsendem t . Diese Vereinigung hat die Form eines Hyperkegels im $(\mathbf{x}, t)$ -Raum. Es ist nun entscheidend, ob über den Rand der Kugel wie für n ungerade in Formel (3.23) integriert wird, oder über das ganze Kugelvolumen an sich wie in Formel (3.27) für gerades n .

Wird nur über den Rand der Kugel integriert, besteht der Kegel nur aus seinem Mantel und wir können sagen, dass die Lösung für alle Punkte $(\mathbf{x}, t)$, die im Kegelrand $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = c(t - t_0)$ liegen von den Daten f, g in $\mathbf{y}$ für t_0 abhängen (vgl. [9] S.130). Der Einflussbereich eines Punktes $(\mathbf{y}, t_0)$ ist durch die Menge

$$\partial C = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = c(t - t_0)\} \quad \text{für } t \geq t_0$$

angeben. Wird hingegen bei geradem n über das ganze Kugelvolumen integriert, ist der Einflussbereich eines Punktes festgelegt durch:

$$C = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq c(t - t_0)\} \quad \text{für } t \geq t_0.$$

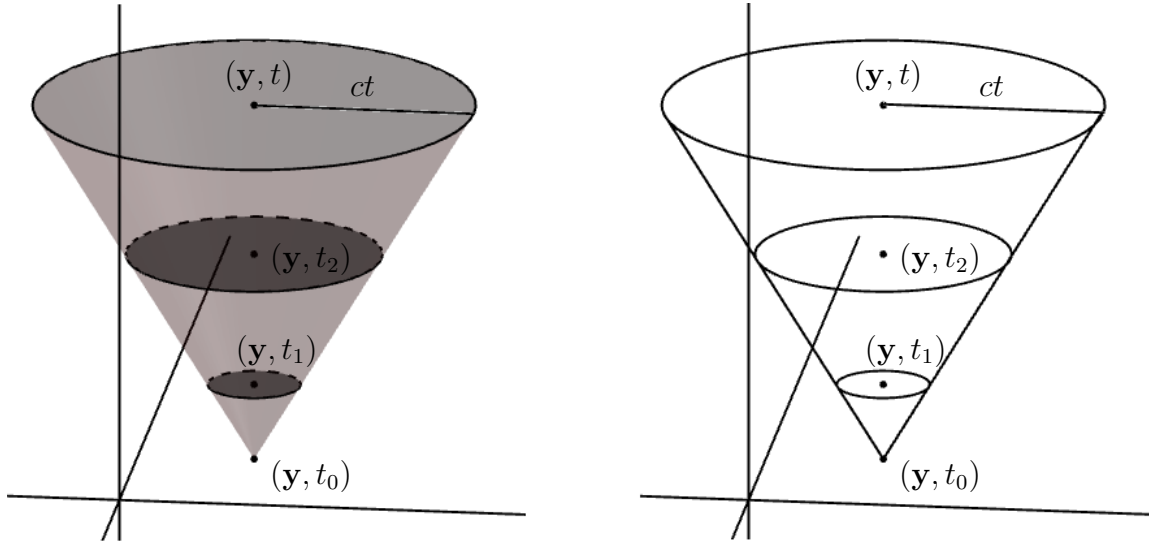


Abbildung 16: Einflussbereich eines Punktes $(\mathbf{y}, t_0) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ für n gerade (links) und n ungerade (rechts)

Abbildung 16 soll die Unterscheidung zwischen ungerader und gerader Raumdimension nochmals veranschaulichen, wobei der schattierte Bereich bedeuten soll, dass das Volumen gemeint ist. Zudem sind im Höherdimensionalen die Kreise Kugeln.

Eine andere Sichtweise ist, einen Punkt $(\mathbf{x}, t)$ zu betrachten und nach der Menge zu fragen, die die Lösung $u(\mathbf{x}, t)$ beeinflusst. Wir wollen also den Abhängigkeitsbereich der Lösung genauer betrachten. Wieder aus den Lösungsformeln (3.23) und (3.27) ist ersichtlich, dass die Anfangswerte f, g im Fall n ungerade über den Kugelrand integriert werden und im konträren Fall n gerade über das ganze Kugelvolumen. Der Abhängigkeitsbereich ist also entweder $\partial K_{ct}(\mathbf{x})$ oder $K_{ct}(\mathbf{x})$, wie auch in Abbildung 17 ersichtlich ist.

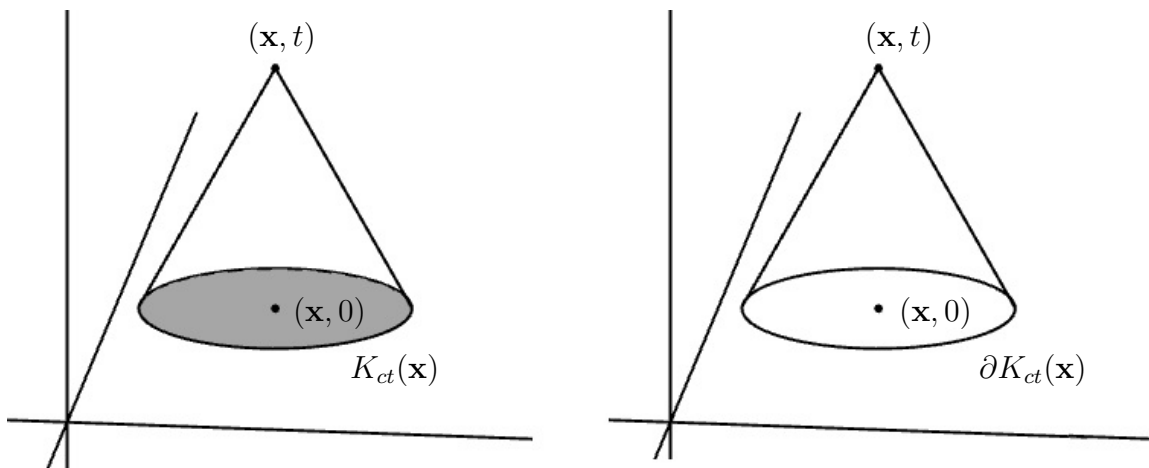


Abbildung 17: Abhängigkeitsbereich eines Punktes $(\mathbf{x}, t)$ für n gerade (links) und n ungerade (rechts)

3.3.2 Charakteristischer Kegel

Im eindimensionalen wurden der Einflussbereich bzw. Abhängigkeitsbereich durch die charakteristischen Geraden begrenzt. Daher ist es naheliegend die Oberfläche des Hyperkegels auch als charakteristische Fläche zu bezeichnen. Davon ausgehend wollen wir den Begriff charakteristisch etwas präzisieren.

Definition 3.3. ([4] S.433) Eine Hyperfläche $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{n+1}$ heißt charakteristisch, wenn für ihr Normalenfeld $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n, \nu_{n+1})$ gilt:

$$\nu_{n+1}^2 - c^2 \sum_{i=1}^n \nu_i^2 = 0. \quad (3.28)$$

Diese Definition deckt sich mit der Einführung der charakteristischen Geraden in Abschnitt 2.3.1 als Geraden auf denen die Lösung einen konstanten Wert hat. Der Normalvektor der Charakteristiken der eindimensionalen Wellengleichung war gegeben durch $(1, -c)$ und erfüllt somit Gleichung (3.28). Im Fall $n > 1$ ist die Oberfläche ∂C des Kegels mit Spitze $(\mathbf{y}, t_0)$ eine Hyperfläche $\partial C \in \mathbb{R}^{n+1}$ und kann durch $\phi : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 - c^2(t - t_0)^2$$

implizit angegeben werden. Ihre Normalvektoren lassen sich durch den Gradienten berechnen:

$$\text{grad}\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}, \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) = 2(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n, -c^2(t - t_0)).$$

Aus diesen zwei Gleichungen ist offensichtlich, dass ∂C eine charakteristische Fläche ist. Dies ist insofern einleuchtend, da der charakteristische Kegel auch dadurch erzeugt werden kann, indem die charakteristische Gerade der eindimensionalen Wellengleichung $x - y = c(t - t_0)^\ddagger$ um die t -Achse rotiert wird.

Grundlegend beim charakteristischen Kegel ist wieder, dass alle Punkte $(\mathbf{x}, t)$, die außerhalb liegen in keinsten Weise von den Werten von f, g in $(\mathbf{y}, t_0)$ beeinflusst werden können. Wie im eindimensionalen Fall gibt c daher die Ausbreitungsgeschwindigkeit an und kein Teil der Welle kann sich schneller ausbreiten.

Die Projektion des charakteristischen Kegels für eine beliebiges t auf eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ nennt man Wellenfront. Fasst man den Kegel, mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen als Graph einer Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf, ist die Wellenfront also die Punktmenge

$$\mathcal{C}_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \varphi(\mathbf{x}) = t\}.$$

Man kann zeigen, dass sich die Wellenfront mit der Geschwindigkeit c in Richtung ihrer Normalen ausbreitet (s. [4] S.441), dies sollte aber auch intuitiv klar sein.

[‡]In Kapitel 2 verwendeten wir meistens die Bezeichnung $y = x_0$ und setzten $t_0 = 0$.

3.3.3 Huygenssches Prinzip

Trifft eine Wellenfront auf einen Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ wird die Lösung u dort von den Anfangsdaten beeinflusst, dabei ist es wichtig wieder zwischen geraden und ungeraden Raumdimensionen zu unterscheiden. Eine Störung in den Anfangsdaten wirkt sich bei geradem n langfristig auf den Wert der Lösung aus, wohingegen bei ungeradem n scharf abgegrenzte Signale auftreten können. (vgl. [9] S.130f). Wir wollen dies kurz an Beispielen für $n = 2$ und $n = 3$ verdeutlichen, diese sind in ähnlicher Weise bei [2] S.317f zu finden. Dazu betrachten wir ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ bzw. $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Der Träger von f, g sei dieses Gebiet D , das heißt außerhalb von D gilt $f \equiv 0$ und $g \equiv 0$. Zudem sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt, der nicht in D liegt. Wir definieren:

$$a = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in D\} \quad \text{und} \quad b = \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in D\}.$$

Wir betrachten als erstes den Fall $n = 2$. Laut (3.26) bestimmen die Werte von f, g innerhalb der Kreisfläche $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq ct$ die Lösung $u(\mathbf{x}, t)$. Daraus folgt, dass mit $ct < a$, da D Träger von f, g ist, für die Lösung gilt $u(\mathbf{x}, t) = 0$. Für $a < ct < b$ ist $u(\mathbf{x}, t)$ klarerweise bestimmt und es gibt Funktionsargumente, an denen gilt $u(\mathbf{x}, t) \neq 0$. Für $ct > b$ kann aber weiterhin $u(\mathbf{x}, t) \neq 0$ auftreten, da immer über die gesamte Kreisfläche integriert wird und wegen $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < ct$ das Gebiet D eine Teilmenge der Kreisfläche $K_{ct}(\mathbf{x})$ ist. Das heißt es gibt eine vordere Wellenfront, die $\mathbf{x}$ zum Zeitpunkt $t = \frac{a}{c}$ erreicht, aber keine hintere Wellenfront. Die Wirkung der Welle bei $\mathbf{x}$ ist für alle $t > \frac{a}{c}$ erfassbar, wie auch in Abbildung 18 zu sehen ist.

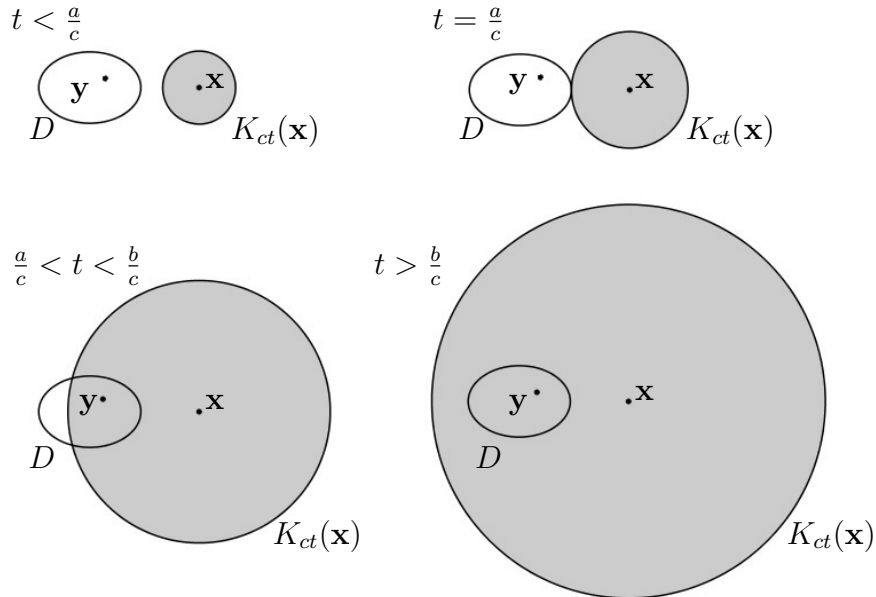


Abbildung 18: Einfluss von Störungen bei gerader Raumdimension

Die Situation im Fall $n = 3$ ist anders, da hier die Anfangswerte f, g nur auf dem Rand der Kugel $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = ct$ eine Rolle spielen. Wir suchen daher die gemeinsamen Punkte dieses Randes und des Gebietes D . Für $ct < a$ und $ct > b$ gibt es aber keine gemeinsamen Punkte, das heißt die Lösung verschwindet in diesem Fall. Wir können also schreiben $u(\mathbf{x}, t) = 0$ für $t \notin [\frac{a}{c}, \frac{b}{c}]$. Wie in Abbildung 19 auch ersichtlich ist, erreicht eine klar

abgegrenzte vordere Wellenfront den Punkt $\mathbf{x}$ an einem bestimmten Zeitpunkt $t = \frac{a}{c}$ und im Unterschied zum zweidimensionalen Fall hört die Wirkung der Welle auch an einem klar definierten Zeitpunkt $t = \frac{b}{c}$ auf. Wir sprechen daher auch von einer hinteren Wellenfront.

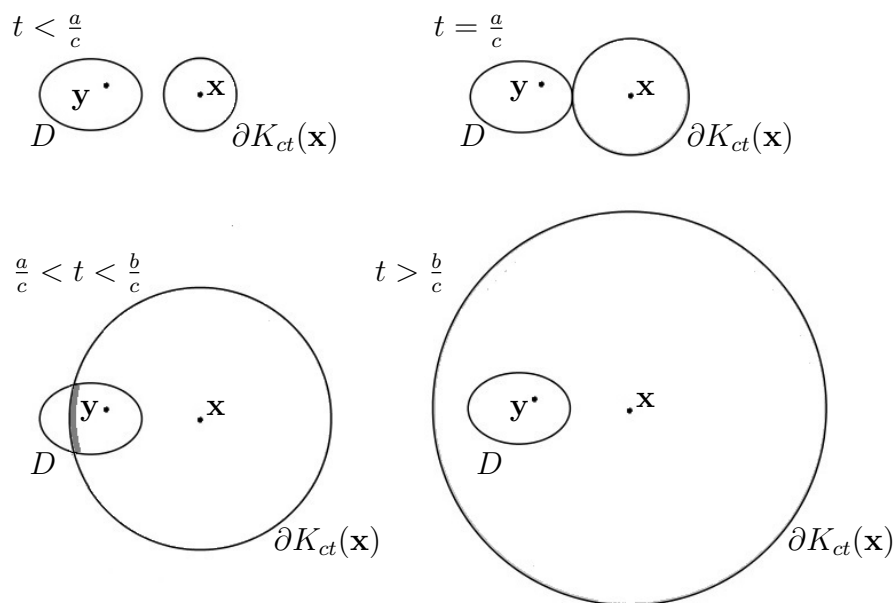


Abbildung 19: Einfluss von Störungen bei ungerader Raumdimension

Ist das Gebiet D sehr klein und gilt $a = b$, wird bei $t = \frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|}{c}$ nur ein kurzes Signal bei $\mathbf{x}$ empfangen. Dieses Phänomen nennt man Huygenssches Prinzip (vgl. [4] S.448). Es hat eine große Bedeutung, denn dadurch können wir unter anderem scharfe Bilder sehen. Fassen wir Licht als elektromagnetische Welle auf, die sich im Raum mit $n = 3$ ausbreitet, garantiert das Huygenssche Prinzip, dass wir ein kurzes Lichtsignal zum Zeitpunkt t_0 als ebenso kurzes Lichtsignal in einer Entfernung von $d = c(t - t_0)$ genau zur Zeit t sehen können. (vgl. [14] S.560) „Es bedeutet auch, dass jeder Klang sich mit einer genau festgelegten Geschwindigkeit ohne 'Echo' in der Luft ausbreitet, wenn man von Inhomogenitäten der Luft und von reflektierenden Wänden absieht. So kann ein Hörer zu einem Zeitpunkt t genau das hören, was ein Musiker zum Zeitpunkt $t - \frac{d}{c}$ gespielt hat, wobei d der Abstand des Musikinstruments vom Hörer ist, und nicht etwa eine Mischung von Tönen, die zu verschiedenen früheren Zeitpunkten gespielt wurden.“ ([15] S.240)

Im zweidimensionalen Fall gibt es, wie zuvor hergeleitet, keine hintere Wellenfront. Daher gilt hier das Huygenssche Prinzip nicht! Störungen haben eine andauernde Auswirkung, wenn sie einen Punkt einmal erreicht haben. Gut vorstellbar ist dies bei oberflächlichen Wasserwellen (vgl. [9] S.134). Eine glatte Wasseroberfläche wird plötzlich gestört (beispielsweise durch einen Stein, der ins Wasser geworfen wird). Die Wellen breiten sich kreisförmig aus. Wird ein Punkt auf der Wasseroberfläche von diesen Wellen erreicht, liegt er fortan immer im Wellenfeld. „Man kann darüber spekulieren, wie sich das auf das Leben in Flachland, einer zweidimensionalen Welt auswirken würde. Die Kommunikation wäre schwierig, da Licht- und Schallwellen nicht scharf ein- und wieder aussetzen, sondern für alle Zeit bestehen bleiben. Es wäre eine lärmgefüllte Welt!“ ([15] S.245)

Literatur

- [1] BERENDT, GERHARD U. WEIMAR, EVELYN: *Mathematik für Physiker: 2. Band Funktionentheorie, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen*, VCH, Weinheim 1990
- [2] BURG, KLEMENS. ET AL.: *Partielle Differentialgleichungen und funktionalanalytische Grundlagen: Höhere Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker*, 5. Auflage, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden 2010
- [3] EVANS, LAWRENCE C.: *Partial Differential Equations*, 2. Auflage, American Mathematical Society Providence, Rhode Island 2010
- [4] FISCHER, HELMUT U. KAUL, HELMUT: *Mathematik für Physiker: Band 2 Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, 4. Auflage, Springer Spektrum, Wiesbaden 2014
- [5] FORSTER, OTTO: *Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, 12. Auflage, Springer Spektrum, Wiesbaden 2016
- [6] FORSTER, OTTO: *Analysis 2: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen*, 9. Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2011
- [7] FORSTER, OTTO: *Analysis 3: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ mit Anwendungen*, 5. Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2009
- [8] JACOB, NIELS: *Lineare partielle Differentialgleichungen*, Akademie Verlag, Berlin 1995
- [9] JOHN, FRITZ: *Partial Differential Equations*, 4. Auflage, Springer, New York u.a. 1982
- [10] JOST, JÜRGEN: *Partielle Differentialgleichungen: elliptische (und parabolische) Gleichungen*, Springer, Berlin u.a. 1998
- [11] KARPFFINGER, CHRISTIAN: *Höhere Mathematik in Rezepten: Begriffe, Sätze und zahlreiche Beispiele in kurzen Lerneinheiten*, 2. Auflage, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2015
- [12] LEBL, JIRI: *Notes on Diffy Qs: Differential Equations for Engineers*, 5. Auflage, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016
- [13] MUSEHOLD, ALBERT: *Allgemeine Akustik und Mechanik des menschlichen Stimmorgans*, überarbeiteter Nachdruck, Omena-Verlag, Staufen 2013
- [14] OLVER, PETER J.: *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer, Cham u.a. 2014
- [15] STRAUSS, WALTER A.: *Partielle Differentialgleichungen: Eine Einführung*, Vieweg, Braunschweig u.a. 1995