



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Mathematische Fehlvorstellungen im
Erwachsenenalter“

verfasst von / submitted by

Julia Andersen

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree
of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

T 190 593 406 A

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Musikerziehung
UF Mathematik

Betreut von / Supervisor:

MMag. Dr. Andreas Ulovec

Danksagung

Mein größter Dank geht an MMag. Dr. Andreas Ulovec für die gute Betreuung und die unkomplizierte Zusammenarbeit. Die vielen Hilfestellungen und konstruktiven Ratschläge haben einen wichtigen Beitrag zur Entstehung meiner Arbeit geleistet.

Außerdem gilt den neun Interviewpartner*innen ein großer Dank. Ihre Gesprächsbereitschaft hat zur erfolgreichen Durchführung meiner empirischen Studie beigetragen.

Ein besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mir dieses Studium erst ermöglichten und mich während meiner gesamten Studienzeit unterstützt haben. Vor allem für die Selbstverständlichkeit, mit der sie das immer getan haben, möchte ich mich sehr bedanken.

Außerdem möchte ich Annemarie Mayr für das Korrekturlesen meiner Arbeit recht herzlich danke sagen.

Ganz besonders möchte ich mich bei Andreas dafür bedanken, dass er mir stets mit unterstützenden Ratschlägen und inhaltlichen Anregungen zur Seite stand und zu jeder Tageszeit ein offenes Ohr für mich hatte.

Auf eine wunderschöne und unvergessliche Studienzeit zurückblickend möchte ich mich bei meinen lieben Studienkolleginnen Veronika, Christine, Julia, Vicky und Irene für die schönen Momente und Erinnerungen bedanken.

Abstract

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Ausbildung von Fehlvorstellungen im Gebiet der Mathematik. Unter Fehlvorstellung ist in diesem Zusammenhang eine fehlende oder falsche Grundvorstellung zu verstehen, wenn also die Ausbildung von Grundvorstellungen misslingt. Leitende Frage der Forschung ist, ob und in welchem Ausmaß Fehlvorstellungen bei Erwachsenen vorhanden sind und ob sie je nach Alter der Testperson unterschiedlich stark ausgeprägt sind. Um dieser Frage nachzugehen wurden neun erwachsene Testpersonen zu drei Themenbereichen (Variablen, Vektorrechnung und Funktionen) befragt. Die Analyse der Interviewgespräche zeigt, dass in allen Themenbereichen Fehlvorstellungen vorliegen. Diese treten unabhängig vom Alter der Testperson mit derselben Häufigkeit und gleich ausgeprägt auf. Für den wissenschaftlichen Diskurs stellt sich die bedeutende Frage, wie die Ausbildung von mathematischen Vorstellungen grundsätzlich beeinflusst werden kann und ob dies gefördert werden soll. Außerdem unterstreicht die vorliegende Arbeit die dringende Relevanz der Erforschung von Gründen für die Ausbildung von Fehlvorstellungen, sowie Methoden, wie man diesen entgegenwirken kann.

English

The present diploma thesis deals with the topic of misconceptions in the field of mathematics. More accurately, the term misconception refers to a missing or false basic mathematical understanding, or when this fails to develop. This work discusses the main question, if and to what extent adults possess misconceptions and if there are any differences depending on the age of the subject. To investigate this question, nine adults were interviewed on the topics of variables, vector analysis and functions. The analysis of the interviews shows that misconceptions exist in all of the three tested topics. However, there seems to be no differences in the frequency or magnitude of misconceptions concerning the age of the tested subject. For the scientific discussion of this topic it remains to be elucidated how the development of a basic mathematical understanding can be achieved and whether pedagogical measures should be implemented in order to influence those. Further research might address possible reasons for the development of misconceptions.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	9
2. Theoretische Grundlagen	12
2.1. Grundvorstellungskonzepte in der Mathematikdidaktik.....	12
2.2. Intuitive Cognitions	16
2.3. Concept Images and Concept Definitions.....	18
3. Empirischer Forschungsstand zu Fehlvorstellungen	22
3.1. Fehlvorstellungen bei Variablen	23
3.1.1. Fehlvorstellungen aus der Literatur.....	25
3.1.2. Fehlvorstellungen, die sich aus den Interviews herauskristallisierten	31
3.2. Fehlvorstellungen in der Vektorrechnung	33
3.2.1. Fehlvorstellungen aus der Literatur.....	33
3.2.2. Fehlvorstellungen, die sich aus den Interviews herauskristallisierten	38
3.3. Fehlvorstellungen bei Funktionen.....	39
3.3.1. Fehlvorstellungen aus der Literatur.....	39
3.3.2. Fehlvorstellungen, die sich aus den Interviews herauskristallisierten	43
4. Durchführung der empirischen Studie	45
4.1. Methodischer Ansatz	45
4.2. Beschreibung der Fallgruppe.....	46
4.3. Durchführung der Interviews.....	46
4.3.1. Interviewleitfaden	47
4.3.2. Beiblatt	48

5. Empirische Ergebnisse und Datenausarbeitung.....	49
5.1. Qualitative Auswertung mit fallübergreifendem Fokus	49
5.1.1. Themenbereich Rechnen mit Variablen	49
5.1.2. Themenbereich Vektorrechnung	72
5.1.3. Themenbereich Funktionen.....	94
5.2. Quantitative Auswertung in den einzelnen Kategorien	112
6. Diskussion der empirischen Ergebnisse.....	116
7. Conclusio	120

1. Einleitung

Eine häufige Kritik am Mathematikunterricht ist, dass das bloße Rechnen nach Standardverfahren und Formelanwendung anstatt des Förderns des logischen Verständnisses sowie flexibel einsetzbarer mathematischer Kompetenzen im Vordergrund steht. Elementare Fähigkeiten verlieren unter dem großen Teppich an Schema-Aufgaben und Rechenbeispielen an Bedeutung. Schüler*innen fällt es oft schwer, mathematisch-logische Zusammenhänge zu erkennen, weshalb die Mathematik für viele Lernende eine schwere Disziplin darstellt.

Durch die Auseinandersetzung mit dieser Problematik des Unterrichts entwickelte sich mein Interesse für die Forschung individueller Denkstrukturen und Denkvorgänge. Die erfolgreiche Ausbildung von Grundvorstellungen legt das Fundament mathematischen Denkens. Doch was passiert, wenn die Ausbildung von Grundvorstellungen misslingt?

Das Fehlen adäquater Grundvorstellungen schafft Raum für die Entwicklung von Fehlstrategien, die sich in weiterer Folge zu Fehlvorstellungen manifestieren können. Diverse Studien zeigen, dass die Überwindung einst entwickelter Fehlvorstellungen eine schwere und mühsame Hürde darstellt.

Aus diesem Aspekt heraus entwickelt sich meine Forschungsfrage, in welchem Ausmaß Fehlvorstellungen bei Erwachsenen vorhanden sind und ob ein auffälliger Unterschied der Ergebnisse abhängig vom Alter der Testperson vorliegt.

Um dieser Fragestellung nachzugehen, arbeite ich mit Erwachseneninterviews und konzentriere mich dabei auf drei konkrete Themengebiete, wobei zwei davon im Lehrplan der Sekundarstufe II enthalten sind, das dritte Themengebiet der Sekundarstufe I zugehört. Es gibt nur vereinzelte empirische Studien zu Fehlvorstellungen dieser Themenbereiche und im Vergleich zum Forschungsstand von Fehlvorstellungen in der Primarstufe stellt die Sekundarstufe ein noch unerforschtes Gebiet dar.

Um den Einfluss der Komplexität einer Materie auf das Ausmaß der vorhandenen Fehlvorstellungen zu erforschen, habe ich mich bewusst für Themengebiete unterschiedlicher Schulstufen entschieden. Die Wahl der Themenbereiche soll die Hypothese stützen, dass im Erwachsenenalter weniger Fehlvorstellungen

vorhanden sind, je elementarer die Themengebiete sind. Diese Vermutung erscheint mir naheliegend, da elementare Themengebiete im alltäglichen Leben sowie auch im Berufsleben eine größere Präsenz aufweisen als komplexere Themengebiete und somit einst entwickelte Fehlvorstellungen durch die regelmäßige Konfrontation in unterschiedlichsten Kontexten eher behoben werden können.

Die für die Interviews verwendeten Aufgaben wurden von unterschiedlichen empirischen Studien sowie vom Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung (kurz: Bifie) ausgewählt und mit Aufgaben, die von der Autorin zusammengestellt wurden, ergänzt. Die Auswahl der Aufgaben zielt darauf ab, eventuell vorhandene Fehlvorstellungen aufzudecken. Dabei wurde darauf geachtet, dass zu jeder Fehlvorstellung aus der Theorie zumindest eine zugehörige Aufgabe existiert.

Die vorliegende Untersuchung bewegt sich zwischen einer statistischen Erhebung und einer individuellen Fallstudie, wobei die prozentuellen Angaben einer besseren Übersicht dienen und die Darstellung und Interpretation einzelner Interviewausschnitte bestimmte Aspekte genauer beleuchten.

Ziel der Studie ist es, anhand mehrerer Interviewsitzungen mit erwachsenen Testpersonen, Vorstellungen und Denkstrukturen zu erkennen, zu beobachten und zu analysieren. Dadurch sollen Aussagen über Fehlvorstellungen getätigt und das Ausmaß und die Bedeutung der Fehlvorstellungen festgestellt werden. Die methodische Vorgangsweise zur Datenerhebung wird in Abschnitt 4.1 erläutert.

Zu Beginn dieser Arbeit wird durch die Darstellung verschiedener Grundvorstellungsmodelle das Fundament der wissenschaftlichen Arbeit gelegt, denn eine Forschung über Fehlvorstellungen impliziert die Auseinandersetzung mit der theoretischen Ebene der Grundvorstellungskonzepte. Dies geschieht durch einen Vergleich der beiden Konzepte von Bender und Vom Hofe, deren Gemeinsamkeiten beleuchtet werden. In der Analyse von Denkprozessen spielt auch Intuition eine bedeutende Rolle, das gibt mir Anlass, das Prinzip

Intuitive Cognitions von Fischbein vorzustellen und als Brücke zu *Concept Images and Concept Definition* von Vinner und Tall zu verwenden.

Im zweiten Kapitel beschreibe ich konkrete Fehlvorstellungen der drei Themengebiete, die in anderen empirischen Untersuchungen beobachtet wurden. Diese Sammlung an Fehlvorstellungen aus der Literatur wird mit Fehlvorstellungen ergänzt, die aus den Ergebnissen meiner Studie formuliert werden können.

Das nächste Kapitel umfasst neben einer Beschreibung des methodischen Ansatzes und einer Schilderung der Fallgruppe, die Durchführung der empirischen Studie.

In einem weiteren Kapitel folgt eine umfassende Auswertung der Interviews und daraus resultierender Daten, die einer aufgabenspezifischen Zuordnung unterliegen. Die beobachteten Fehlvorstellungen sind in einem Diagramm dargestellt und mit einem jeweiligen Interviewausschnitt belegt und kommentiert. Individuelle Denkvorgänge werden beschrieben, analysiert und bestenfalls einer Kategorie zugeordnet.

Im letzten Kapitel werden die Ergebnisse diskutiert und Beobachtungen thematisiert, die bis dahin keine Erwähnung gefunden haben. So zum Beispiel eine detaillierte Analyse konkreter Auffälligkeiten, ein themenübergreifender Vergleich und eine Auseinandersetzung mit denjenigen Fehlvorstellungen, die in der Studie nicht vorgekommen sind.

2. Theoretische Grundlagen

2.1. Grundvorstellungskonzepte in der Mathematikdidaktik

Das Interesse an mathematikdidaktischen Überlegungen über Begriffsvorstellungen hat im deutschsprachigen Raum ihren Ursprung beim Zahlbegriff. Erste Konzepte zur Rechenmethodik der Volksschule stammen von Pestalozzi, der den damaligen verbalistisch-mechanistischen Rechenunterricht kritisiert und für die Ausbildung eines Vorstellungsvermögens plädiert. (Vom Hofe 1996a:78)

Der Begriff *Grundvorstellung* nimmt in der Literatur unterschiedliche Richtungen ein und obwohl sich Autoren immer wieder bemühten, den Begriff einheitlich festzulegen, gibt es keine genaue Definition davon. Manche Autoren legen den Schwerpunkt auf den Terminus Begriffsverständnis, so Hans-Joachim Vollrath (1984), andere konzentrieren sich auf die Beschreibung mathematischer Lernprozesse und didaktischer Modelle, siehe Freudenthal (1983) oder Griesel (1971), aber alle Modelle beschreiben die „Beziehung zwischen individuellen Lernprozessen, mathematischen Inhalten und realen Sachzusammenhängen.“ (Vom Hofe 1996b:241)

Die Verwendung der Begriffe „Vorstellung“, „Anschauung“, „Verinnerlichung“ oder „Verständnis“ lässt in der Literatur für Mathematikdidaktik auf die Verfolgung ähnlich didaktischer Ziele schließen, es geht nämlich darum, „elementare mathematische Inhalte anschaulich zu deuten und so beim Schüler ein adäquates Begriffsverständnis zu fördern.“ (Vom Hofe 1996a:5)

Aspekte und Kernpunkte zweier Grundvorstellungskonzepte

Im folgenden Abschnitt werden die Kernpunkte zweier mathematischer Grundvorstellungskonzepte der Autoren Bender und Vom Hofe erläutert und verglichen.

Bender betont im Grundvorstellungsbegriff das Wort *Grund* und definiert den Begriff über die drei Ebenen „Allgemeine Verbindlichkeit“, „Verankerung in der

Lebenswelt“ und „fundamentaler Charakter für das jeweilige Teilgebiet“ (Bender 1991:48). Die Ebene der allgemeinen Verbindlichkeit bezieht sich auf die Diskrepanz zwischen dem pädagogischen Ansatz, dass Lernende die Welt selbst entdecken und ihre eigene Welt konstruieren, und dem Ziel einer Verbindlichkeit der Konstrukte und Begriffe. Individuelle Erkenntnisse und Argumentationen sollen entfaltet werden, doch mit dem ständigen Ziel eines möglichst großen mathematischen Wahrheitsgehaltes. Als Lehrperson ist man mit diesem Dilemma ständig konfrontiert und eine Aufgabe besteht darin, die individuellen Schüler*innenkonstruktionen so nah wie möglich zur tatsächlichen Begriffsbedeutung zu lenken. (Bender 1991:48-49)

Benders zweite Ebene beinhaltet den Bezug zum kognitiv Greifbaren. Eine gelingende Sinnkonstruktion geschieht durch das Verknüpfen mathematischer Strukturen oder Begriffe mit der persönlichen Lebenswelt. Hierbei geht es in erster Linie nicht um einen realen Vergleich mit einer Alltagssituation, denn auch eine äußerst willkürliche Metapher kann das didaktische Ziel einer Hilfskonstruktion erfolgreich erfüllen, solange sie im Zusammenhang stimmig ist und dazu beiträgt, dass Begriffe von Schüler*innen sachbezogen gedeutet werden können. Eine Metapher darf die Begrifflichkeit keinesfalls verkomplizieren, sondern stets sparsam abbilden. Bender warnt vor dem Verfälschen einer Begrifflichkeit durch die Verwendung ungeeigneter Metaphern. Dies kann sich negativ auf die Entwicklung von Grundvorstellungen auswirken. (Bender 1991:49-51)

Die dritte Ebene markiert wieder das Bestimmungswort *Grund*, denn Grundvorstellungen liefern neben einführenden Vorstellungshilfen in neue Themengebiete auch eine informelle Grundstruktur, worauf Lernende neue Konstrukte in den jeweiligen Teilgebieten aufbauen können. Es geht also im weiteren Sinne nicht nur um die Ausbildung von Grundvorstellungen, sondern um deren Verknüpfung und Erweiterung, um an neue Kenntnisse zu gelangen. (Bender 1991:51-52)

Ähnlich beschreibt dies Vom Hofe in seinen drei Kernpunkten des Grundvorstellungskonzeptes. Er geht davon aus, dass für die Entwicklung eines Verständnisses für mathematische Situationen und Begriffe niemals eine Grundvorstellung ausreicht. Erst die Vernetzung mehrerer Grundvorstellungen

sichert ein nachhaltiges Grundverständnis. Er unterscheidet hierbei primäre und sekundäre Grundvorstellungen, also jene, die konkrete Handlungsvorstellungen meinen und jene, die diese Vorstellungen anhand von Symbolen, Diagrammen oder anderen mathematischen Darstellungsmodellen repräsentieren. Als dritten Kernpunkt betont er die Wichtigkeit einer ständigen Erweiterung und Erneuerung dieser Grundvorstellungen, um wirkliches Verstehen zu ermöglichen. (Vom Hofe 2003:6)

Die Konzepte von Bender und von Vom Hofe beruhen also beide auf einer Art Grundvorstellungsgerüst, in dem es eine Basis an Grundvorstellungen gibt, auf welcher im Laufe der Lernperiode aufgebaut wird. Dieser Basis an Grundvorstellungen schreibt Bender einen „fundamentalen Charakter“ (Bender 1991:51) zu. Vom Hofe nennt sie die „primären Grundvorstellungen“ (Vom Hofe 2003:6).

Bender beschreibt in seinem Konzept wichtige Aspekte für eine erfolgreiche Entwicklung dieser Grundvorstellungen und geht dabei auf die Ambivalenz zwischen dem selbstständigen Konstruieren der Wirklichkeit und dem tatsächlichen mathematischen Wahrheitsgehalt ein. Er geht von einer konstruktivistisch angehauchten Lerntheorie aus, in welcher Lernende die Wirklichkeit selbst konstruieren. Um der lauernden Gefahr zu entgehen, dass die Schüler*innenkonstruktionen keine allgemeinen Gültigkeiten widerspiegeln, muss dieser Prozess stets von einer außenstehenden Person kontrolliert und geregelt werden. Bender geht davon aus, dass von Lernenden entwickelte Grundvorstellungen anfangs stets fehlerhaft und unvollständig sind und deshalb eine ständige Weiterentwicklung und Überarbeitung bereits vorhandener Vorstellungen wichtig sind. Brousseau prägt den Begriff *Epistemologische Denkhürde*, um dieses Phänomen zu beschreiben. [siehe 2.3]

Vom Hofe geht genauer auf den Aspekt der Ausbildung von Grundvorstellungen ein und beschreibt mathematisches Arbeiten als eine Art Modellbildungsprozess in drei Schritten. Der erste Schritt liegt einer mathematischen Deutung einer Sachsituation zugrunde. Mathematische Begriffe und Verfahren sind das Werkzeug für eine mathematische Darstellung nichtmathematischer

Gegebenheiten. Auf dieser mathematischen Ebene werden mithilfe aller fachlichen Kenntnisse und Fertigkeiten die Ergebnisse ermittelt. Im letzten Schritt werden die Ergebnisse interpretiert und deren Sinnhaftigkeit in Bezug auf das jeweilige Sachproblem überprüft. (Vom Hofe 2003:5)

Im Vordergrund steht also ein ständiger Wechsel zwischen den zwei Ebenen Mathematik und Realität, wofür Grundvorstellungen die Basis bilden und unverzichtbar sind. (Vom Hofe 1995:97)

In Bezug auf das Begriffsverständnis bedeutet dies, dass Grundvorstellungen auch den Zusammenhang mathematischer Inhalte mit der individuellen Begriffsbildung beschreiben. (Vom Hofe 1995:97)

Die Begriffsbildung beinhaltet bei Vom Hofe drei Dimensionen:

1. Sinnkonstituierung

Dies geschieht durch die Verbindung zu realen oder bekannten Sachkontexten anhand anschaulicher Metaphern.

2. Psychologische Repräsentationen

Hierbei geht es darum, Sachsituationen zu finden, die den jeweiligen Begriff für den Lernenden verständlich machen. Eine Vorstellungsebene soll entwickelt werden und den Lernenden zu operativem Handeln befähigen.

3. Modellierung

Die Anwendung von Begrifflichkeiten auf neue Problemsituationen geschieht durch das Erkennen von Zusammenhängen und Strukturen oder durch adäquate Modellierung von Situationen oder Ereignissen. (Vom Hofe 1995:97-98)

Über die zentrale Bedeutung des Begriffsverständnisses in der Mathematikdidaktik sind sich Pädagoginnen und Pädagogen einig. So auch darin, dass die Ausbildung von Grundvorstellungen kein passives Abbild, sondern einen dynamischen und aktiven Prozess darstellt.

Bender und Vom Hofe beschreiben beide die Diskrepanz zwischen den individuellen Schüler*innenvorstellungen und den intendierten Grundvorstellungen der Lehrpersonen. Schüler*innenvorstellungen sind individuell verschieden und

stehen mit dem subjektiven Erfahrungsbereich in engem Zusammenhang. Dieser subjektive Erfahrungsbereich wird von unterschiedlichsten Faktoren beeinflusst und keinesfalls nur von der Lehrperson geprägt. Somit kann es trotz einem bewussten Umgang mit Grundvorstellungen zur Entwicklung von Fehlvorstellungen kommen. Um bereits verfestigte Fehlvorstellungen aufzubrechen, benötigt die Lehrperson Sensibilität für das Erkennen der tatsächlichen Schüler*innenvorstellungen. (Vom Hofe 1995:103-106) (Bender 1991:54-55)

2.2. Intuitive Cognitions

In der Beschäftigung mit der Mathematik spielt intuitives Begreifen eine große Rolle, denn wir lernen Mathematik nicht erst in der Schule, wo sie uns anhand systemischer Leitfäden vermittelt wird, mathematisches Begreifen beginnt schon viel früher. Beim Entdecken der Welt kommen geometrische Figuren in der Natur zum Vorschein, die Bedeutung von Mengen entdeckt man nicht nur bei der Nahrungszufuhr und spätestens beim ersten Geburtstag entsteht der Kontakt mit einer Zahl.

Mathematische Phänomene dieser Art werden vorerst nur intuitiv begriffen. Fischbein beleuchtet den Begriff Intuition genauer und geht davon aus, dass der Mensch die Intuition braucht, um an das Essenzielle zu gelangen, um die Wahrheit zu begreifen. (Fischbein 1987:5-14)

Der Mensch ist auf der ständigen Suche nach Gewissheit und beruft sich dabei lieber auf seinen instinktiven Glauben als auf theoretische Annahmen. Der Mensch neigt dazu, den Wahrheitsgehalt selbst entwickelter Interpretationen und Erklärungen von Sachverhalten zu überschätzen und sie offensichtlich und widerspruchsfrei hinzunehmen. (Fischbein 1987:36-37)

Intuition und Mathematik stehen in einem zwiespältigen Verhältnis zueinander. Einerseits herrschte in den Anfängen der Mathematik äußerste Vorsicht, mathematische Strukturen stets deduktiv aufzubauen und das intuitive Verständnis strikt abzugrenzen, andererseits benötigt der Mensch stets das Vertrauen in seine intuitiven Vorstellungen, um an die theoretisch fundierten

Aussagen zu glauben. Der Mensch verspürt einen Drang, sich auf dieser Erkenntnis auszuruhen und bei Bedarf sich darauf zu berufen. Fischbein spricht von *Intuitive Cognitions*, wobei manche davon sogar den Status eines allgemein gültigen Prinzips oder Axioms erhalten. Sie repräsentieren also eine stabile Komponente unseres kognitiven Systems und sind nur mehr schwer widerrufbar.

Zu einem didaktischen Problem und einer pädagogischen Herausforderung wird es, sobald diese intuitiven Vorstellungen den mathematischen Strukturen widersprechen. Das Aufbrechen solcher fest verankerten Grundvorstellungen ist sehr mühsam – sowohl für Lehrende als auch Lernende – und bedeutet eine komplette Umstrukturierung des kognitiven Systems. Lernende müssen akzeptieren, dass Vorstellungen, von deren Richtigkeit sie bis jetzt absolut überzeugt waren, plötzlich keine allgemein gültigen Wahrheiten mehr darstellen. Das kognitive System muss neu durchdacht und das Vertrauen in die eigenen Intuitionen hinterfragt werden. Eine solche Erkenntnis löst große Unsicherheit bei den Lernenden aus und kann sich negativ auf die zukünftige Entwicklung von Vorstellungen auswirken, da aus besagten Gründen das Vertrauen in ihre Intuitionen verloren geht, die aber für die Entwicklung von Vorstellungen unverzichtbar ist. Fischbein schreibt, dass Kinder meistens nicht mit dieser Art von Konflikt umgehen können, da sie noch nicht gut genug mit intellektuellen und emotionalen Ressourcen ausgerüstet sind, um objektiv über die Situation zu reflektieren, sondern verunsichert werden. Diese Ausblendung einer emotionalen Reaktion und Abkoppelung von Selbstzweifel ist eine Fähigkeit, die Mathematiker entwickeln müssen, um erfolgreich an neue Forschungsergebnisse zu gelangen. Sie begründen ihre Gedanken als wären sie von ihrer Richtigkeit absolut überzeugt, wissen aber stets, dass sie falsch liegen könnten. (Fischbein 1987:37-41)

Lernende reagieren unterschiedlich auf solche Enttäuschungen ihres kognitiven Systems. Manche verlieren den Glauben an die eigenen Fähigkeiten in dieser Materie, andere verlieren das Interesse an der Wissenschaft an sich. Es gibt noch keine Studien über die Ursachen der unterschiedlichen Reaktionen von Kindern auf diesen Konflikt. (Fischbein 1987:37-38)

Fischbein betont, dass das Ignorieren intuitiver Fehlvorstellungen keine erfolgsversprechende Überwältigungsstrategie darstellt, da intuitiv entwickelte

Konzepte nicht von selber verschwinden und solange sie nicht aufgehoben werden, stets Auswirkung auf unsere Denkvorgänge haben. Intuitiv entwickelte Fehlstrategien können nur mithilfe didaktischer Methoden von außenstehenden Personen aufgehoben werden. Methoden, in denen vermittelt wird, dass sogar die großen Wissenschaftler und Forscher an etwas geglaubt haben, dessen Gültigkeit später wieder aufgehoben wurde. Diese Tatsache bestärkt die Wissenschaft darin, dass sie auf logische Zusammenhänge statt auf empirische oder intuitive Annahmen aufbaut. Solche logischen Zusammenhänge widersprechen manchmal unserer natürlichen Vorstellungskraft, doch müssen wir sie akzeptieren und annehmen. (Fischbein 1987:38-39)

2.3. Concept Images and Concept Definitions

Das menschliche Gehirn arbeitet keinesfalls immer logisch, Denkvorgänge weichen immer wieder von der puren Logik ab. Für die Bearbeitung mathematischer Aufgaben entwickeln wir individuell unterschiedliche mentale Konzepte. Diese mentalen Konzepte sind eine persönliche Anpassung tatsächlicher mathematischer Inhalte an das Verständnis und Vorstellungsvermögen eines Menschen. Sie sind formal nicht definiert und beruhen kaum auf einer allgemeinen Gültigkeit. Trotzdem machen wir erfolgreich Gebrauch davon.

Tall und Vinner fassen all diese mentalen Konzepte und Bilder, die in uns vorherrschen, unter dem Begriff *concept image* zusammen.

„We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes.“

(Tall und Vinner 1981:2)

Alle Erfahrungen, die wir über die Jahre machen, tragen zum Aufbau des *concept images* bei und beeinflussen dessen Entwicklung, sei es bewusst oder unbewusst.

Das *concept image* ist das Resultat aller Erfahrungen, die zu einem Begriff oder einem bestimmten Inhalt gemacht werden. Demnach sind *concept images* keinesfalls global gleich, sondern stets individuell unterschiedlich. (Tall und Vinner 1981:2)

Das Individuum bildet also seine eigenen mentalen Bilder und Vorstellungen zu einem mathematischen Konzept, das aber nicht immer kohärent und widerspruchsfrei zum aktuellen Stand der mathematischen Wissenschaft ist.

Mit *concept definition* beschreiben die Autoren die individuell formulierten Definitionen, die Lernende für Begriffe oder Sachzusammenhänge finden.

„The concept definition [is] a form of words used to specify that concept.“

(Tall und Vinner 1981)

Concept definition kann entweder eine erlernte Beschreibung oder auch eine individuelle Formulierung der Lernenden sein. *Concept definition* unterscheidet sich von einer formalen Definition insofern, dass Lernende je nach Kontext und Verwendung sie von Zeit zu Zeit variieren können. (Tall und Vinner 1981)

Interessant erscheint die Tatsache, dass für eine bestimmte Aufgabe *concept image* und *concept definition* nicht unbedingt immer übereinstimmen und die Lernenden aus diesem Grund mehrere Lösungsmöglichkeiten haben. Die Widersprüchlichkeit fällt den Lernenden womöglich gar nicht auf. Aufgrund von *concept image* und *concept definition* können sie für beide Antworten eine Begründung finden. (Hoffkamp 2011:20)

Für Vinner und Tall kann es in zweierlei Fällen zu Konfliktsituationen kommen. Einerseits wenn ein Teil des *concept images* nicht mit der *concept definition* übereinstimmt oder umgekehrt. Dieses Phänomen nennen sie *potential conflict factor*. Die beiden Konzepte kommen hierbei jedoch nur dann in Konflikt, wenn sie gleichzeitig aufgerufen werden und im direkten Vergleich eine Unstimmigkeit

entdeckt wird. Ansonsten können Unterschiede in diesen beiden Konzepten gut nebeneinander existieren, so wie im oberen Absatz bei Hoffkamp beschrieben. Ein ernsterer Fall vom potential conflict factor betrifft jedoch die Widersprüchlichkeit zwischen dem concept image und der formalen Theorie. Eine solche Unstimmigkeit kann den Lernprozess behindern. Lernende mit einem solchen potential conflict factor werden ihre eigenen concept images beibehalten und die formale Theorie als überflüssig bewerten. (Tall und Vinner 1981)

Brousseau bezeichnet diese Konfliktsituation als *epistemologische Denkhürde*. Er beschreibt den Wissensbildungsprozess als nicht linear verlaufend. Wenn sich Wissen über längere Zeit als zufriedenstellende Hilfe zum Lösen von Problemen charakterisiert hat, so wird dieses Wissen im Verstand des/der Lernenden gefestigt. Bei der Konfrontation mit neuen mathematischen Prozessen kann sich dieses gefestigte Wissen jedoch plötzlich als unzulänglich oder mangelhaft erweisen und der/die Lernende befindet sich vor einer epistemologischen Denkhürde.

Bei der Erweiterung der Stoffgebiete müssen nämlich auch Vorstellungen und Deutungen zu diesem Stoffgebiet erweitert werden. Denkhürden hängen oftmals mit Ideen und Deutungen eines Begriffs oder einer Sachsituation zusammen, die die Sichtweise einschränken und so einer Erweiterung der Vorstellungen im Wege stehen. Es müssen also immer wieder Denkhürden überwunden werden, die sich aus dem Aufbau des Stoffes ergeben.

Hoffkamp nennt als Beispiel die multiplikative Operation bei der Zahlbereichserweiterung. Im Bereich der natürlichen und ganzen Zahlen wird bereits die Multiplikation erlernt und bedeutet hier immer eine Vergrößerung der Zahlen. Diese Vorstellung der Vergrößerung prägt sich ein, bevor der Zahlbereich auf Bruchzahlen erweitert wird. Mit dieser Erweiterung verliert die Vorstellung der Vergrößerung ihre Allgemeingültigkeit. (Hoffkamp 2011:27)

Dies ist nur ein Beispiel von Denkhürden, die sich aufgrund der Chronologie des Lehrstoffes ergeben. Epistemologische Denkhürden sind also ein kulturelles Phänomen und von der jeweiligen Sozialisation abhängig. (Hoffkamp 2011:27,28)

Die Auseinandersetzung damit scheint sehr lehrreich zu sein und übt die lernende Person darin, ihre Vorstellungen an neue Erkenntnisse anzupassen.

Epistemologische Denkhürden stehen in engem Zusammenhang mit den *concept image* und *concept definition* von Vinner und Tall, denn abhängig von den mentalen Bildern entstehen individuell verschiedene Denkhürden, die zu überwinden sind.

3. Empirischer Forschungsstand zu Fehlvorstellungen

Grundvorstellungen beschreiben also Übersetzungstätigkeiten zwischen Mathematik und Realität oder auch innerhalb des Gebietes der Mathematik zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen.

Gelingt die Ausbildung adäquater Grundvorstellungen nicht, so wirkt sich dies negativ auf die Vorstellungsebene und somit auf die mathematischen Kompetenzen von Lernenden aus. Die Konsequenz davon ist die Ausbildung von Fehlvorstellungen, die sich bei längerem Anhalten zu stabilen Fehlstrategien entwickeln können.

Die Ausbildung von Fehlvorstellungen hängt stark damit zusammen, wie schnell und wie gut es gelingt, neuen Methoden oder Begriffen sinnhafte Bedeutungen zuzuweisen. Wenn eine solche Bedeutungszuweisung nicht schnell genug oder nicht verständlich genug gelingt, so werden Lernende ihre Unsicherheit mit Merksätzen, Eselsbrücken und Formalismen wettmachen, die auch ohne eine sinnhafte Bedeutungszuweisung funktionieren. Lernende können in dem Fall ihre Lösungsstrategien nicht erklären oder begründen, sie können aber dennoch unter Umständen die Aufgabe erfolgreich lösen. Dies führt zu einem verfälschten Bild der Mathematik und den/der Lernenden entgeht die Sinnhaftigkeit der Materie. Außerdem werden damit falsche und einseitige Kompetenzen, mit denen problemorientierte Aufgaben nicht oder nur kaum gelöst werden können, abgefragt und gefördert. (Vom Hofe 2003:7)

Nitsch beschreibt Fehlvorstellungen als fehlerhafte Vorstellungen oder Konzepte, die reproduzierbar sind und nicht zufällig auftreten. (Nitsch 2013:1)

Der Ursprung solcher Fehlvorstellungen liegt entweder in Alltagsvorstellungen oder in innermathematischen Problemen. Fehlvorstellungen können demnach sowohl „inadäquate wissenschaftliche Vorstellungen“ als auch „inadäquate Alltagsvorstellungen“ (Nitsch 2013:2) sein.

In den folgenden Kapiteln werden Fehlvorstellungen in mehreren mathematischen Themenbereichen erläutert. Eine lückenlose Darstellung aller Fehlvorstellungen in diesen Bereichen ist keinesfalls das Ziel der folgenden Kapitel, sondern vielmehr

geht es um diejenigen Fehlvorstellungen, die für den empirischen Teil der Arbeit von Bedeutung sind und interessante Aspekte darstellen.

3.1. Fehlvorstellungen bei Variablen

„And one of the most important difficulties is the failure in understanding the concept of variable.”

(Akgün und Özdemir 2006:45)

Die richtige Interpretation von Variablen stellt für Lernende keine triviale Aufgabe dar, da Variablen je nach Kontext äußerst unterschiedliche Bedeutungen und Funktionen einnehmen können. Dass eine Variable sowohl ein Platzhalter für einen bestimmten unbekannten Zahlenwert sein kann, aber genauso ein Symbol für jede beliebige Zahl darstellt, ist nicht das einzige Beispiel für die Bedeutungsdivergenz von Variablen.

Die Ergebnisse der Studie von MacGregor und Stacey zeigen, dass die Interpretation der Bedeutung von Variablen durch Lernende intuitiv geschieht. Sie ist entweder durch Analogien zu bereits bekannten Systemen von Symbolen gelenkt oder sie beruht auf fehlerhafte Eigenkreationen. Lernende werden in der Schule und auch bei alltäglichen Aktivitäten mit unterschiedlichsten Systemen von Symbolen oder Zeichen konfrontiert. Sie alle beeinflussen die intuitiven Vorstellungen von Variablen, sei es unterstützend im positiven Sinn, aber auch störend mit negativen Auswirkungen auf die Entwicklung einer sinngerechten Variablenvorstellung.

Mac Gregory und Stacey sind überzeugt, dass fehlerhafte Eigenkreationen, besonders bei jüngeren Lernenden, kein Indikator für eine schwächere kognitive Entwicklung sind, sondern häufig sehr bedächtige Bestrebungen nach sinnvollen Erklärungen der neuen Notationen darstellen. (MacGregor und Stacey 1997:15)

Die Schwierigkeit, die Bedeutung von Variablen zu erkennen, beruht auf deren facettenreichem Bedeutungsspektrum. Egodawatte beschreibt sieben unterschiedliche Verwendungen von Variablen:

- Variable als Bezeichnung, so wie m für Meter

- Variable als Konstanten, so wie π , e , oder c
 - Variable als Unbekannte mit bestimmten Wert, so wie x in $5x - 9 = 11$
 - Variable als allgemeine Zahl, so wie a und b in $a + b = b + a$
 - Variable als unabhängig variierende Größe, so wie x in $y = 9x - 2$ und abhängig variierende Größe so wie y in $y = 9x - 2$
 - Variable als Parameter, so wie m und b in $y = m \cdot x + b$
- (Egodawatte 2011:39)

Gleichungen in einer oder mehreren Variablen können demnach auch sehr diversen Kontexten zugehören und unterschiedlichste Funktionen innehaben. Usiskin beschreibt fünf Kategorien von Gleichungen:

- eine Formel
 - eine lösbare Gleichung
 - eine Gleichheit
 - eine Proportion
 - eine Funktionsgleichung
- (Usiskin 1988:7)

Eindeutig erscheint die Tatsache hierbei, dass sich die Gleichungen in ihrer Funktion gänzlich voneinander unterscheiden. Manche Gleichungen haben tatsächlich die Funktion, gelöst zu werden, andere dienen einem ganz anderen Zweck, wie in etwa eine Proportionalität oder eine Gleichheit darzustellen, eine Funktionsgleichung zu beschreiben etc.

Im folgenden Abschnitt werden unterschiedliche Fehlvorstellungen, die aus Untersuchungen von Küchemann (1978), Clement (1982), MacGregor und Stacey (1997), McInty (2005) und Egodawatte (2011) hervortreten, erläutert und kategorisiert.

3.1.1. Fehlvorstellungen aus der Literatur

3.1.1.1. Falsche Interpretation von Variablen und ihrer Bedeutung im Kontext

Sowohl Variablen als auch Gleichungen haben viele unterschiedliche Funktionen und Verwendungszwecke. Die Schwierigkeit besteht darin, ein Bewusstsein für jene Unterschiede bei der lernenden Person herzustellen, um richtiges Operieren mit diesen Variablen zu ermöglichen. Viele Fehlvorstellungen liegen der falschen Interpretation von Variablen im Kontext zugrunde.

Collis beschreibt sechs Kategorien unterschiedlichen Hantierens von Variablen und Küchemann fügt je ein Beispiel hinzu: (vgl. Collis zitiert in Küchemann 1978:23)

- Abschätzung des Buchstabenwertes

Bei einer einfachen Gleichung in einer Variable, wie

$$a + 5 = 8$$

(vgl. Küchemann 1978:23)

kann der Wert der Unbekannten abgeschätzt werden, zum Beispiel durch Ausprobieren unterschiedlicher Zahlen. Die Unbekannte wird hier nicht ausgerechnet, sondern mögliche Werte werden eingesetzt und auf deren Richtigkeit überprüft.

- Ignorieren der Buchstaben

Gegeben sind 2 Gleichungen in zwei Variablen:

$$a + b = 43$$

$$a + b + 2 = ?$$

(vgl. Küchemann 1978:23)

Die Lösung der zweiten Gleichung ist unabhängig von den Werten der Variablen, daher kann eine Lösung durch das Weglassen der Variablen ganz einfach und schnell ermittelt werden.

- Buchstabe als Objektsbezeichnung

Variablen stehen nicht für einen Zahlenwert, sondern für ein Objekt. Es sei zum Beispiel eine geometrische Figur in der Ebene skizziert, deren Seitenlängen mit den Variablen l für Länge und h für Höhe beschriftet sind und der Umfang soll in Abhängigkeit von l und h angegeben werden.

$$u = 3 \cdot l + 2 \cdot h$$

Solange für l und h keine Zahlenwerte angegeben sind, stellen die beiden Variablen eher die Objekte Höhe und Länge als deren Werte dar.

- Buchstabe als Unbekannte mit bestimmtem Wert

Hierbei handelt es sich zum Beispiel um eine Gleichung in einer Variablen, deren Wert mithilfe algebraischer Rechenmethoden berechnet werden kann.

$$5x + 4 - x + 23 = 64x - 3$$

Die Variable hat also einen eindeutigen Wert.

- Buchstabe als allgemeine Zahl

Eine Variable stellt hier nicht eine bestimmte, noch unbekannte Zahl dar, die ausgerechnet werden kann, sondern ist ein Symbol für mehrere Zahlen oder sogar jede beliebige Zahl. Ein Beispiel dafür:

$$\text{„Wann ist } L + M + N = L + P + N \text{ wahr?“}$$

(McIntyre 2005:56, übersetzt aus dem Englischen)

In diesem Beispiel stellen die Variablen jede beliebige Zahl dar.

Es folgt ein Beispiel, in dem die Variable ein Symbol für mehrere Zahlen ist:

$c + d = 10$ und $c < d$. Welche Werte kann c annehmen?

(vgl. Küchemann 1978:23)

- Buchstabe als variierbare Größe

Der Wert der Variablen ist bedeutungslos und kann nicht berechnet werden. Es geht vielmehr um das Prinzip einer variierbaren Größe.

Küchemann stellt dazu folgende Aufgabe:

„Welcher der beiden Ausdrücke ist größer: $2 \cdot n$ oder $n + 2$?“

(vgl. McIntyre 2005:63, übersetzt aus dem Englischen)

Variablen treten also je nach Kontext in völlig unterschiedlichen Zusammenhängen und mit sehr diversen Zwecken auf. Trotzdem fasst man all diese Bedeutungskontexte unter demselben Begriff und derselben Darstellungsform zusammen: die Variable. Wenn Lernende die Unterscheidung jener Bedeutungskontexte nicht beherrscht, so handelt es sich um eine Fehlvorstellung zur Interpretationsweise von Variablen.

3.1.1.2. Variable als Abkürzung einer Einheit statt als Zahlenwert

Buchstaben werden in algebraischen Ausdrücken gerne als Abkürzungen von Einheiten gelesen anstatt als Zahlen. Diese Fehlvorstellung beruht auf dem Dilemma, dass bereits in der Arithmetik Buchstaben verwendet werden, doch mit einer völlig anderen Bedeutung, nämlich für die Darstellung einer Einheit und nicht als Zahlenwert. Siehe dazu auch MacGregor und Stacey (1997), Egodawatte (2011) und Clement (1982).

Beispiel: 6m bedeutet in der Arithmetik 6 mal 1 Meter, in der Algebra hat 6m die Bedeutung 6-mal eine unbekannte Anzahl von Metern.

3.1.1.3. Eingeschränkte oder fehlende Vorstellung einer Gleichung

Das Gleichheitszeichen wird in der Arithmetik als Symbol zum Finden numerischer Ergebnisse verwendet. Lernende festigen häufig die Beobachtung, dass rechts vom Gleichheitszeichen immer nur eine einzige Zahl steht. Das Gleichheitszeichen ist also in der Arithmetik ein Indikator für das gemeinsame Auftreten von Aufgabe und Ergebnis, wobei sich die Aufgabe stets links und die Lösung stets rechts vom Gleichheitszeichen befindet. In der Algebra wird das Gleichheitszeichen eher verwendet, um die Gleichheit zweier Terme widerzugeben statt ein Ergebnis darzustellen. (Egodawatte 2011:43-45)

In dieser Studie konnte eine weitere Fehlinterpretation zu Gleichungen beobachtet werden, nämlich dass eine Gleichung eine Proportion wiedergibt. In Aufgabe 5 erkannten einige das Verhältnis zwischen S und P richtig als 6 zu 1, doch die Folgerung, dass die zugehörige Gleichung dann $6 \cdot S = P$ ist, zeigt die Vorstellung einer direkten Widerspiegelung einer Proportion in der Gleichung.

3.1.1.4. Variable als Repräsentant unterschiedlicher Werte

Wenn ein Buchstabe als allgemeine Bezeichnung für ein Objekt verwendet wird, dann fehlt die Vorstellung von der wahrscheinlich wichtigsten Eigenschaft von Variablen, dass ein und dieselbe Variable immer auch denselben Wert hat. Verwendet man zum Beispiel den Buchstaben h um die Höhe zu bezeichnen, so birgt die Aufgabenstellung, eine Gleichung für folgenden Sachzusammenhang aufzustellen, Fehlerquellen in sich:

Zwei unterschiedliche Höhen unterscheiden sich um 10. Stelle eine Gleichung für diesen Sachzusammenhang auf.

Die Antwort lautet oftmals $h = h + 10$.

(MacGregor und Stacey 1997:10)

3.1.1.5. Wortreihenfolge als Variablenreihenfolge

Die Reihenfolge der Wörter in der Angabe wird direkt als die Variablenreihenfolge der aufgestellten Gleichung übernommen. Ein Aufgabenbeispiel dazu:

**„In einer Schule gibt es 6-mal so viele Schüler*innen wie Lehrpersonen.
Stelle zu diesem Verhältnis eine passende Gleichung mit den Variablen S
und L auf.“**

(Clement et al. 1981:288, übersetzt aus dem Englischen)

Als Lösung erscheint hier oftmals die Gleichung $6 \cdot S = L$, die direkt aus der Reihenfolge der Daten in der Angabe resultiert. Es wird also eine Angabe in eine algebraische Gleichung umformuliert, ohne dass man sich der tatsächlichen algebraischen Bedeutung bewusst ist. Eine scheinbare Bedeutung des Konstrukts könnte für Lernende sein, dass die Menge der Schüler*innen größere ist und deshalb den größeren Koeffizienten hat. (Clement 1982:22)

Die Schwierigkeit bei diesem Beispiel liegt darin, dass zwei ungleiche Gruppierungen gleichgestellt werden müssen. Die richtige Gleichung $S = 6 \cdot L$ beschreibt keineswegs die in der Angabe beschriebene Situation, sondern bloß eine hypothetische Operation, nämlich die Gruppe der Lehrpersonen um ein sechsfaches größer zu machen als sie tatsächlich ist. (Clement 1982:21)

3.1.1.6. X ist immer 1

Diese Fehlvorstellung beruht auf einer missverständlichen Kommunikation zwischen Lehrperson und Lernenden, wenn die Lehrperson darauf hinweist, dass x ohne einen Koeffizienten davor immer 1x bedeutet. Lernende missverstehen diesen Hinweis insofern, dass der Wert von x immer 1 ist. (MacGregor und Stacey 1997:10)

3.1.1.7. Prozess – Produkt – Dilemma

Ein mathematischer Ausdruck wie beispielsweise $a + b$ repräsentiert sowohl den Prozess der Addition als auch die Summe $a + b$ als eigenständiges Objekt. (Egodawatte 2011:39)

In der Arithmetik ist ein Ausdruck wie $3 + 5$ eine nicht fertig ausgerechnete Lösung, die man so nicht stehen lassen soll. Eine Summe wird durch Addieren der beiden Summanden berechnet. In der Algebra hingegen ist eine Summe nicht nur da, um ausgerechnet zu werden, sondern kann auch als Summe an sich seine Berechtigung haben.

3.1.1.8. Alphabetischer Wert einer Variablen

Das Phänomen, dass Lernende einen Buchstaben als eine andere Darstellungsform einer Zahl interpretieren, im Sinne von $A = 1$, $B = 2$, $F = 6$ usw. beobachtet man vor allem bei jungen Lernenden, die erst vor kurzem mit Variablen konfrontiert worden sind, deren (vielfältige) Bedeutung noch nicht verstanden haben und deshalb eigene Bedeutungskonstruktionen bilden [siehe oben]. (vgl. MacGregor und Stacey 1997:5-7) (vgl. McIntyre 2005:9)

3.1.1.9. Unterschiedliche Variablen können nicht denselben Wert haben

Die Wurzeln dieser Fehlvorstellung liegen wahrscheinlich in der falschen Interpretation von Variablen und ihre Bedeutung im Kontext. Eine Variable wird als Unbekannte mit bestimmtem Wert gedeutet, weshalb es keinen Sinn machen würde, dass zwei Variablen demselben Zahlenwert entsprechen. Die fehlende Vorstellung einer Variable als allgemeine Zahl führt also zur Fehlvorstellung, dass unterschiedliche Variablen nicht denselben Wert annehmen können.

Siehe dazu auch die Studie von Booth. (Booth 1988: 304)

3.1.2. Fehlvorstellungen, die sich aus den Interviews herauskristallisierten

3.1.2.1. Fehlende Vorstellung über direkte und indirekte Proportionalität sowie über lineare Zusammenhänge

Diese fehlende Vorstellung kristallisierte sich aus der Bearbeitung von Aufgabe 6 heraus und steht mit der Fehlvorstellung »Eingeschränkte oder fehlende Vorstellung einer Gleichung« in Zusammenhang, da eine Grundvorstellung von Gleichungen Voraussetzung für das Verstehen direkter und indirekter Proportionalität und linearer Zusammenhänge ist.

3.1.2.2. Variable als fixierte Mengeneinheit

Eine Variable wird als unbekannte, aber stets gleich große Menge interpretiert. Häufig werden sogar mehrere unterschiedliche Variablen als dieselbe Menge gedeutet und eine Multiplikation mit einer der Variablen zeigt ihr Verhältnis zur anderen Variable an.

Egogawatte beschreibt dieses Phänomen und weist auf zahlreiche empirische Studien hin, in denen diese Beobachtung gemacht wurde. Eine mögliche Erklärung ist für ihn, dass Lernende das Gleichheitszeichen nicht als Symbol einer Gleichheit verwenden, sondern als Trennung zweier Mengen, die der Schüler*innen, die mit $6 \cdot S$ notiert wird, und die der Professor*innen mit P . (Egogawatte 2011:47)

Diese Fehlvorstellung erwies sich bei Aufgabe 5, wo bei Vorhandensein der Fehlvorstellung S und P fixe Mengeneinheiten darstellten und die Gleichung $6 \cdot S = P$ die Proportion der Anzahl von Schüler*innen und Professor*innen entsprach.

3.1.2.3. Variablen als stets positive Zahlen

Wenn eine Variable ohne negatives Vorzeichen als stets positive Zahl interpretiert wird, und umgekehrt, ein negatives Vorzeichen vor einer Variablen einen negativen Zahlenwert anzeigt, so handelt es sich um die Fehlvorstellung »Variablen als stets positive Zahlen«.

3.2. Fehlvorstellungen in der Vektorrechnung

Hartmann erwähnt in ihrer Arbeit „Inhaltlichen Vorstellungen von Vektoren“, dass bei vielen Lernenden ein grundlegendes Verständnis für Vektoren fehlt. Sie hantieren gekonnt mit Vektoren, ohne über Grund und Bedeutung ihres Handelns Bescheid zu wissen. In diesen Fällen ist es schwer, eine konkrete Fehlvorstellungen festzulegen, da hinter dem bloßen Anwenden gelernter Rechenschemata meist gar keine mathematische Vorstellung vorherrscht. Außerdem hat sich in Hartmanns Untersuchungen herausgestellt, dass Lernende große Schwierigkeiten bei der richtigen Interpretation von Formeln haben. Solche Schwierigkeiten sind nicht der Ausdruck von speziellen Fehlvorstellungen zu Formeln, sondern beruhen auf Fehlvorstellungen im jeweiligen Themenbereich.

Im folgenden Kapitel werden unterschiedliche Fehlvorstellungen erläutert und kategorisiert, die aus empirischen Untersuchungen von Hartmann (1993), Jarmer (1995) und Gahler (2014) hervortreten.

3.2.1. Fehlvorstellungen aus der Literatur

3.2.1.1. Vektor als ortsgebundenes Objekt

Viele von Hartmann interviewte Schüler*innen beschrieben einen Vektor als einen konkreten Pfeil. Sie haben Schwierigkeiten, zwei gleiche Vektoren geometrisch als gleich zu identifizieren, wenn sie an unterschiedlichen Orten platziert sind. (Hartmann 1993:55-58)

Man könnte diese Fehlvorstellung auch „Vektor als Pfeil statt als Gesamtheit von Pfeilen“ formulieren. Jarmer spricht von der Unklarheit einer Lageunabhängigkeit von Vektoren. Häufig wurde ein Zahlenpaar nur als Vektor beschrieben, der vom Ursprung weggeht, also einem Ortsvektor. (Jarmer 1995:145)

Auch arithmetisch konnte oft nur sehr fehlerhaft begründet werden, ob zwei Vektoren gleich sind. (Hartmann 1993:27-29)

3.2.1.2. Vektor als Länge oder Strecke

Die Beschränkung eines Vektors auf seine Länge ist ein bekanntes Phänomen und lässt sich auch in der Untersuchung beobachten.

Bei der Frage, ob zwei Vektoren gleich oder ungleich sind, beziehen sich viele Schüler*innenantworten auf die Länge des Vektors. Zwei Vektoren sind für sie dann gleich, wenn sie dieselbe Länge haben, unabhängig von Richtung und Orientierung. (Hartmann 1993:53,71)

3.2.1.3. Vektor als Gerade

Die Verwechslung einer Geraden mit einem Vektor lässt sich dadurch begründen, dass ein Vektor benötigt wird, um eine Gerade in Parameterdarstellung angeben zu können. Diese zeigt die Studie von Hartmann. Unklar bleibt aber, ob eine solche Gerade begrenzt oder unendlich lang ist, da eine Gerade im Gegensatz zu einem Vektor unendlich ist. (Hartmann 1993:71)

3.2.1.4. Vektor als Richtungsangabe

Die Merkmale eines Vektors werden auf dessen Richtung beschränkt, die Länge und die Orientierung wird als bedeutungslos erklärt. (Jarmer 1995:20)

Die Entwicklung dieser Fehlvorstellung lässt sich durch die vektorielle Darstellung durch einen Pfeil begründen. Man verwendet für die Darstellung eines mathematischen Konstrukts einen Gegenstand aus der Realität. Der Rückgriff auf reale Objekte geschieht in der Mathematik durchaus häufig, sei es bei Benennungen oder bei der Verwendung von Symbolen. Als Beispiel sei hier die Benennung ‚Wurzel‘ sowie ‚Wurzel ziehen‘ für die Umkehrung des Quadrierens angeführt. Die mathematische Operation wird mit einer Wurzel im biologischen Sinn in Verbindung gebracht, um den Charakter des Ursprünglichen zu verdeutlichen. Die Wurzel einer Quadratzahl stellt den Ursprung dieser Zahl dar, sowie die Wurzel eines Baumes den Ursprung der Pflanze darstellt. Wenn man die Wurzel nun zieht, gelangt man an genau deren Ursprung.

Der Bezug zu realen Gegenständen vereinfacht im Idealfall die Begriffsvorstellung, doch kann dies auch Nachteile mit sich bringen. Mathematiker verwenden den

Begriff Wurzel, da er etwas Ursprüngliches darstellt und somit eine Merkhilfe sein könnte. Doch die Wurzel bringt auch noch viele andere Merkmale mit sich, etwa dass sie verschnörkelt ist, sich zweigt, in unterschiedlichste Richtungen zeigt, sich an etwas festhält, eine Art Stabilisator, unglaubliche Kräfte hat, usw. All diese Merkmale sind aber für die mathematische Verwendung des Begriffes Wurzel irrelevant und es kann für manche Menschen ein Problem darstellen, diese vielen Merkmale zu filtern und wichtige Merkmale von unwichtigen zu unterscheiden.

Zurück zur Darstellungsform eines Pfeiles bedeutet dies, dass die Darstellung durchaus Sinn macht, um einen Vektor von einer Strecke zu unterscheiden, doch Missverständnisse mitbringt, da es sich um die Adaptierung eines realen Objektes in die Welt der Mathematik handelt. In der realen Welt ist die Länge eines Pfeiles irrelevant. Das Ausschlaggebende ist die Richtung, in die der Pfeil zeigt.

3.2.1.5. Unklarheit bezüglich Richtung und Orientierung

Besonders bei der Frage, ob zwei skizzierte Vektoren gleich sind, wird deutlich, dass die Bedeutung der beiden Begriffe *Orientierung* und *Richtung* unklar ist. Wie im oberen Beispiel mit der Wurzel sind auch diese Begriffe keine rein mathematischen. In der Alltagssprache ist ihre Verwendung oftmals eine ähnliche oder sogar die gleiche, jedenfalls unterscheidet sie sich von der fachspezifischen Bedeutung. Aufgrund der Gleichbedeutung in der Alltagssprache fällt es auch in der Mathematik schwer, die Begrifflichkeiten zu unterscheiden und voneinander zu trennen. (Jarmer 1995:25-26)

3.2.1.6. Fehlende Vorstellung über den Zusammenhang zwischen geometrischer und arithmetischer Darstellung eines Vektors

Einige Interviews in Hartmanns empirischer Untersuchung zeigen, dass manche Aufgaben immer nur arithmetisch gelöst werden und gelöst werden können, andere Aufgaben wiederum nur geometrisch. Im Gespräch stellt sich heraus, dass die Befragten auch tatsächlich überzeugt sind, dass man die Aufgabe nur arithmetisch bzw. geometrisch lösen kann. Wie zum Beispiel Sandra, die den

Vektor $\vec{AB}$ aufstellen soll. Arithmetisch weiß sie ganz genau, wie das funktioniert, und wendet die Regel *Spitze minus Schaft* erfolgreich an. Als sie diese Rechnung anhand einer Skizze veranschaulichen soll, weiß sie nicht weiter, obwohl das Verbinden zweier Punkte im Koordinatensystem eine elementare Aufgabe darstellt. (Hartmann 1993:51-55)

Interessant in diesem Fall ist, dass Sandra zuvor einen Vektor als etwas Geometrisches einordnet, „weil man es eigentlich immer zeichnen muss, also den Vektor.“ (Hartmann 1993:54) Obwohl Sandra also sowohl eine arithmetische als auch eine geometrische Vorstellung zu Vektoren im Allgemeinen hat, kann sie Aufgaben, die sie gelernt hat, in erster Linie arithmetisch zu lösen, nicht auf ihre geometrische Vorstellung umlegen.

Im Interview mit Christian stellt sich heraus, dass er den Vektor $\vec{AB}$ zwar zeichnen kann und auch die Werte der Punkte auf den Achsen markiert, doch die Frage, ob man nun das Zahlenpaar, das den Vektor $\vec{AB}$ beschreibt, aus dieser Skizze ablesen kann, verneint er. (Hartmann 1993:64-65)

3.2.1.7. Fehlende Vorstellung über den Zusammenhang zwischen geometrischer und arithmetischer Darstellung der Summe von Vektoren

In einem von Gahler durchgeführten Interview erkennt man, dass die Addition zweier Vektoren arithmetisch kein Problem darstellt, doch geometrisch viele Unklarheiten auftreten. Manche Schüler*innen drehen den zu addierende Vektor so, dass er dieselbe Richtung besitzt wie der erste Vektor. Sie verlängern also den ersten Vektor um die Länge des zweiten. Hier ist die Addition stark mit einer linearen Vorstellung verbunden. Eine lineare Vergrößerung wie bei der Addition zweier Zahlen. (Gahler 2014:29)

Andere sind sich nicht einig, ob man einen Vektor verschieben darf und wieder andere sind unsicher, ob der Vektor unten oder oben drangehängt wird bzw. wie man die Addition darstellt. (Gahler 2014:52-53) (Jarmer 1995:55-60)

Interessant erscheint auch bei dieser Aufgabe, dass die arithmetische Lösung einfacher fällt, obwohl die geometrische Lösung auf denselben Vorstellungen beruht und kein komplexeres Handeln verlangt.

3.2.1.8. Fehlende Vorstellung von Vektor als n-Tupel

Durch die in der Schule vorrangige Arbeit mit geometrischen Aufgaben in der Vektorrechnung, verpassen manche Lernende, eine Vorstellung über die arithmetische Bedeutung eines Vektors aufzubauen.

In Hartmanns arithmetischen Vektoraufgaben beschreiten viele den geometrischen Lösungsweg, obwohl dieser für die Aufgabenstellung völlig unpassend ist. (Hartmann 1993:76-80)

Diese beschränkte geometrische Vorstellung verursacht die Fehlvorstellung, dass ein Vektor maximal dreidimensional ist und immer graphisch dargestellt werden kann.

3.2.1.9. Fehlinterpretation von Punkt und Vektor

In der empirischen Studie von Gahler wird in Lehrer*inneninterviews deutlich, dass die Unterscheidung zwischen Punkt und Vektor für viele Lernende nicht klar ist. (Gahler 2014:14)

Dies wird dadurch bemerkbar, dass Lernende einen Punkt kürzen oder die Spaltenschreibweise automatisch als Vektor interpretieren und die Zeilenschreibweise als Punkt. (Hartmann 1993:64-67)

3.2.2. Fehlvorstellungen, die sich aus den Interviews herauskristallisierten

3.2.2.1. Vektoren können immer graphisch dargestellt werden

Die dominierende geometrische Vorstellung von Vektoren verdrängt die Vorstellung eines Vektors als n -Tupel komplett und es wird die Folgerung getätigt, dass Vektoren stets graphisch darstellbare Objekte sind.

3.3. Fehlvorstellungen bei Funktionen

„Die Komplexität funktionalen Denkens ist einerseits bedingt durch die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten funktionaler Abhängigkeiten (Text, Graph, Formel, Tabelle usw.) und andererseits durch verschiedene Sichtweisen: Zuordnungsaspekt (punktweise Sicht), Kovariationsaspekt (dynamische Sicht), Objektaspekt (Funktionen als Ganzes).“

(Hoffkamp 2009:1)

Im folgenden Kapitel werden unterschiedliche Fehlvorstellungen erläutert und kategorisiert, die aus empirischen Untersuchungen von Vinner und Dreyfus (1989), Hoffkamp (2011) und Pfeifer (2012) hervortreten.

3.3.1. Fehlvorstellungen aus der Literatur

3.3.1.1. Eine Funktion ist eine Regel

Auf die Frage hin, was eine Funktion sei, wurde in der Studie von Vinner und Dreyfus eine Funktion unter anderem mit einer Regel gleichgesetzt. Eine Funktion sei das Resultat einer bestimmten Regel auf variierende Zahlen angewendet. Die besagte Regel verbindet das x und das y . Es kann zum Beispiel auch die Relation von x und y eine Funktion darstellen. (Vinner und Dreyfus 1989:360)

3.3.1.2. Eine Funktion muss kontinuierlich sein

Bei der Studie von Vinner und Dreyfuß stellte sich heraus, dass Schüler*innen Graphen mit Sprungstellen nicht als Funktion identifizierten. Ihre Begründungen waren sehr oft, dass eine Funktion nicht aufhören darf, da sie etwas Unendliches ist. (Vinner und Dreyfus 1989:362)

Auch in Hoffkamps Studie wird deutlich, dass Schüler*innen einen endlichen Graphen, wie zum Beispiel einen Halbkreis, nicht als Funktion identifizieren, da

eine Funktion mit dem Begriff der Unendlichkeit verknüpft wird. (Hoffkamp 2011:25)

3.3.1.3. Eine Funktion muss ein überschaubares Monotonieverhalten aufweisen

Nur Funktionen, die einen ‚schönen‘, gleichmäßig verlaufenden Graphen haben, werden von Lernenden als Funktion gedeutet. Funktionen mit unterschiedlich stark gekrümmten Kurven hingegen erkennen jene nicht als Funktion. Grund für dieses Phänomen könnte wohl sein, dass die meisten Funktionen, die in der Schule behandelt werden, tatsächlich ‚schöne‘ Graphen darstellen. Man betrachte zum Beispiel die quadratischen Funktionen, die anschließend an die linearen Funktionen behandelt werden. Auch Exponentialfunktionen haben für Lernende den Anschein eines gewissen Monotonieverhaltens, nämlich eines immer stärker steigenden oder fallenden Verhaltens.

Hoffkamp beobachtet in ihrer empirischen Studie die Vorstellung von Schüler*innen, ein „Graph muss vernünftig aussehen“. (Hoffkamp 2011:24)

3.3.1.4. Proportionalität als vorherrschende Art von Relation

Die Proportionalität wird von Lernenden als Relation überbewertet und gilt oftmals als bevorzugen. In der Literatur wird dies als „illusion of linearity“ (Hoffkamp 2011:24) beschrieben.

Graphisch bedeutet dies die Linearität. Die Überbewertung der Proportionalität lässt sich daraus schließen, dass die erste Begegnung mit Funktionen häufig die lineare Funktion ist. Die Erarbeitung des Funktionsbegriffes basiert auf der Proportionalität. Funktionen werden in Schulbüchern mit der linearen Funktion nicht nur eingeführt, sondern auch beschrieben und erklärt. Hoffkamp spricht hierbei von mathematischer Sozialisation. (Hoffkamp 2011:28)

3.3.1.5. Reduzierung von Funktionen auf einzelne Funktionsklassen

In fast allen Schulbüchern stellen die linearen Funktionen die Einführung in den Funktionsbegriff dar, danach folgen die quadratischen Funktionen als Erweiterung davon und wenn für die Exponential- und Logarithmusfunktionen noch Zeit bleibt, so hat die Lehrperson gute Arbeit geleistet. Andere Funktionen werden maximal als solche deklariert. Und schon wurde das Bild der Funktionen einseitig vermittelt, nämlich aus der Sicht der speziellen Funktionen, die durch einen schönen analytischen Ausdruck angegeben werden können. Alle anderen sind unter den Tisch gefallen und in Vergessenheit geraten. (vgl. Hoffkamp 2011:22-26)

3.3.1.6. Notwendigkeit eines Funktionsgraphen

Eine solche Fehlvorstellung tritt in Erscheinung, wenn Lernende eine Funktion nur beim Vorhandensein eines Funktionsgraphen diese als solche erkennen. Häufig wird sogar der Graph mit der Funktion gleichgestellt oder verwechselt.

Folgende fehlerhafte Formulierung deutet auf diese Fehlvorstellung hin: *Eine Funktion ist ein Graph, der...*

Diese Fehlvorstellung kann als ‚Concept Image‘ interpretiert werden [siehe 2.3]. (Hoffkamp 2011:25)

3.3.1.7. Graph-als-Bild Fehlvorstellung

Diese Fehlvorstellung beruht auf der ikonischen Interpretation des Graphen anstelle einer symbolischen. Das heißt, der Graph wird von der lernenden Person als die bildhafte Darstellung einer Realsituation gelesen. (Hoffkamp 2011:13)

Genannt sei zum Beispiel die Interpretation eines Zeit-Weg-Graphen als die 2D-Darstellung einer Bewegung. Oder die Verwechslung des größten Wachstums einer Funktion mit dem größten absoluten Wert. (Hoffkamp 2011:30)

Diesem Phänomen begegnet auch Pfeifer in ihrer Untersuchung. Lernende interpretieren den Graphen einer Textaufgabe als Abbild der Situation anstatt ihn abstrakt-mathematisch zu deuten. (Pfeifer 2012:22-23)

3.3.1.8. Bedeutung und Notwendigkeit von x in der Funktionsgleichung

Für Schüler*innen ist das Fehlen von x in einer Funktionsgleichung ein Grund, dass es sich hierbei nicht um eine Funktion handeln kann. Denn „wenn y eine Funktion in x ist, muss das x in der Formel vorkommen“ (Hoffkamp 2011:24).

Es ist anzunehmen, dass Schüler*innen sich an die Definition zurückerinnern, dass eine Funktion genau dann eine Funktion ist, wenn jedem y -Wert genau ein x -Wert zugeordnet wird. Für sie kann eine solche Zuordnung nicht stattfinden, wenn eine der beiden Variablen nicht einmal in der Funktionsgleichung vorkommt. Vinner und Dreyfus nennen dieses Phänomen ‚Concept Definitions‘ [siehe 2.3].

3.3.1.9. Fehlende Vorstellung über die Eindeutigkeit der Zuordnung

Das wichtigste Merkmal einer Funktion, nämlich die Eindeutigkeit der Zuordnung, bringt für Lernende große Verständnisprobleme mit sich. Die Verwechslung der eindeutigen Zuordnung mit Injektivität bzw. in manchen Fällen sogar die Gleichsetzung mit Bijektivität zählt zu einem der meist gesehenen fehlerhaften Konzepte. Dahinter verbirgt sich die Problematik, dass die Bedeutung von Definitionsbereich und Zielbereich nur sehr nebensächlich behandelt wird. (Hoffkamp 2011:25-26)

3.3.2. Fehlvorstellungen, die sich aus den Interviews herauskristallisierten

3.3.2.1. Die Notwendigkeit einer einzeiligen Funktionsgleichung

Das Kriterium, wodurch ein Graph eine Funktion darstellt, legen Lernende daran fest, dass der Graph durch eine einzeilige Funktionsgleichung dargestellt werden muss, also durch einen sogenannten Funktionsausdruck. Als Zuordnungsvorschrift erlauben die Lernenden als nur eine Gleichung. Dass eine Funktion aber nicht immer durch eine einzelne Gleichung dargestellt werden kann, da die Funktion zum Beispiel eine Fallunterscheidung erfordert oder eine Funktion auch einfach eine Menge an Punkten sein kann, solange die Zuordnung eindeutig ist, ist bei Lernenden häufig nicht präsent.

3.3.2.2. Eine Funktion darf keine Knickstellen enthalten

Graphen mit Knickstellen, sowie beispielsweise die Betragsfunktion, werden nicht als Funktionsgraphen erkannt. Aus mathematischer Sicht bedeutet dies, dass nur differenzierbare Funktionen als Funktionen interpretiert werden. Es ist aber unwahrscheinlich, dass Schüler*innen die Definition von Differenzierbarkeit so genau kennen. Wahrscheinlicher ist, dass die Ursache der Fehlvorstellung in der Reduzierung von Funktionen auf einzelne Funktionsklassen liegt, als in der Voraussetzung der Differenzierbarkeit, da die typischen Funktionen wie die lineare oder die quadratische Funktion keine Knickstellen aufweisen.

3.3.2.3. Eine Funktion ist eine Strecke

Die Verwechslung einer linearen Funktion mit einer Strecke wird an der Vorstellung erkannt, dass eine Funktion stets einen Anfangs- und einen Endpunkt besitzt. Als Beispiel kann genannt werden, dass Lernende die Länge eines Funktionsabschnittes mithilfe des Pythagoras berechnen wollen.

3.3.2.4. Der Graph einer Funktion muss eine Kurve sein

Es werden nur kurvige Graphen als Funktionsgraphen erkannt, alle Geraden oder andere lineare Graphen werden als Funktion ausgeschlossen.

3.3.2.5. Fehlende Vorstellung über funktionale Abhängigkeiten

Diese Fehlvorstellung bezieht sich darauf, dass Funktionsgraphen als Objekte der Geometrie gedeutet werden und ihre funktionalen Zusammenhänge außer Betracht gezogen werden.

4. Durchführung der empirischen Studie

4.1. Methodischer Ansatz

Es handelt sich um leitfadengesteuerte halbstrukturierte Interviews im Gegensatz zum offenen narrativen Interview und zum geschlossenen Interview mit Fragebögen.

Leitfadengesteuerte Interviews geben eine Strukturierung vor, wodurch sichergestellt wird, dass bestimmte Themenbereiche angesprochen werden, doch bleibt durch den offenen Gesprächsstil immer auch eine gewisse Strukturierungsmöglichkeit von Seiten des Interviewten. Durch die Sicherstellung bestimmter Aspekte entsteht eine gewisse Vergleichbarkeit zwischen den Interviews.

Der Leitfaden gibt kein standardisiertes Ablaufschema vor, sondern ermöglicht ein flexibles Gespräch und dient als Orientierung oder auch als Gedächtnisstütze für die interviewende Person. Ein bedeutender Unterschied zum narrativen Gespräch ist, dass die interviewende Person die Themenbereiche und Fragen vorgibt und somit die Relevanzsetzung steuert. Trotzdem gibt es stets Raum für narrative Gesprächspassagen. Die interviewende Person soll diese Momente nutzen, um individuelle Hintergründe besser verstehen zu können oder auch neue Aspekte zu erkennen, an die im Vorhinein nicht gedacht wurde.

(Heisteringer 2006: 4-6)

4.2. Beschreibung der Fallgruppe

Die Testpersonen der Studie stellen sich aus einer Gruppe von Personen zusammen, die über mündliche Verbreitung erreicht wurden und sich bereit erklärten, an der Studie teilzunehmen. Gesucht wurden ausschließlich Personen, die in ihrem beruflichen Werdegang keine mathematische oder technische Richtung eingeschlagen haben und auch sonst seit der Schulzeit keine nennenswerte Auseinandersetzung mit mathematischen Themen getätigt haben.

Eine Voraussetzung bei der Auswahl der Personen war, dass der besuchte Schultyp alle drei Themenbereiche der Studie behandelte, welches bei jeder AHS und BHS, aber auch bei anderen höheren Schulen der Fall ist. Die Matura war keine Voraussetzung, doch verfügten alle Interviewpersonen über eine positiv absolvierte Reifeprüfung.

Insgesamt wurden 25 Interviews mit neun unterschiedlichen Interviewpersonen im Zeitraum von Dezember 2016 bis Februar 2017 geführt. Die Gruppe der Proband*innen fällt in die Altersgruppe zwischen 23 und 64 Jahre und ist nach Geschlecht ausgeglichen vertreten. Die Testpersonen leben sowohl im ländlichen als auch im städtischen Raum.

Sieben der teilnehmenden Personen haben einen Hochschulabschluss und zwei sind Studierende.

4.3. Durchführung der Interviews

Die Wahl der Reihenfolge der drei Themengebiete wird den interviewten Personen überlassen. Die Reihenfolge der Aufgaben innerhalb der Themengebiete wird zufällig entschieden oder von der Interviewerin vorgegeben. Bei erfolgreicher Durchführung eines Themengebietes wird das nächste ausgesucht. Idealerweise konnten Gespräche zu allen drei Themengebieten durchgeführt werden, in wenigen Fällen war dies aufgrund von beschränkten Zeitressourcen von Seiten der Teilnehmenden nicht der Fall.

Die Interviews starten mit einer einführenden Beschreibung der Arbeit sowie Informationen zur Studie und dem Ausfüllen des Beiblattes.

4.3.1. Interviewleitfaden

Schritt 1: Beschreibung der Arbeit

a. Thema und Forschungsfrage

In meiner Arbeit untersuche ich Denkstrukturen, die beim Lösen mathematischer Aufgaben entstehen. Es geht um die Beobachtung unterschiedlicher Denkvorgänge, die ich im Anschluss im Hinblick auf die theoretischen Erkenntnisse analysieren und interpretieren werde.

b. Vorgangsweise und Methode

In ca. 20 Interviewgesprächen mit Erwachsenen werde ich mathematische Denkvorgänge beobachten und vergleichen. Der Einfachheit halber werde ich eine Tonaufnahme der Interviewgespräche machen. Die Aufnahmen dienen dem Festhalten des Gesprächs, um eine bessere Analyse zu ermöglichen. Eine Interviewsitzung wird ca. 30 min dauern. Es können pro interviewter Person bis zu drei Sitzungen abgehalten werden.

Schritt 2: Hintergründe zum Interviewgespräch

Die Interviews werden in der Arbeit anonym dokumentiert. Es werden personenbezogene Angaben wie Geschlecht, Alter, Ausbildung und beruflicher Werdegang festgehalten, nicht aber der Name.

Das Interviewgespräch dient der wissenschaftlichen Forschung im Bereich der Fachdidaktik in Mathematik. Die persönlichen mathematischen Leistungen werden nicht beurteilt, sondern Ziel der Arbeit ist es, individuelle Denkvorgänge zu erkennen, zu beschreiben und zu analysieren.

Schritt 3: Aufgaben

- a. Wenn die erste Aufgabe problemlos gelöst wird, stelle ich die nächste Aufgabe.
- b. Wenn bei der ersten Aufgabe falsche oder für mich nicht nachvollziehbare Denkschritte passieren, frag ich nach. Lösen sich die Schwierigkeiten, dann gehe ich zur nächsten Aufgabe. Stellen sich weitere Unklarheiten, die eventuell eine Fehlvorstellung andeuten, versuche ich diese zu erkennen.
- c. Wenn die interviewte Person bei der ersten Aufgabe keinen Lösungsvorschlag hat, frag ich nach, ob sie die Begriffe kennt und versuche herauszufinden, was unklar ist. Weiter Vorgehensweise wie bei Punkt 3b.

Schritt 4: Ende des Interviews

Die erste Sitzung des Interviewgesprächs geht zu Ende, wenn entweder alle Aufgaben eines Themengebietes durchbesprochen wurden, die Zeit viel mehr als 30 min überschreitet oder die interviewte Person Erholung braucht.

4.3.2. Beiblatt

Beiblatt	
Angaben zum Interview	Angaben zur Person
Ort: _____	Geschlecht: _____
Zeit: _____	Alter: _____
Themengebiet: _____	Ausbildung: _____
Dauer: _____	Beruflicher Werdegang: _____ _____

5. Empirische Ergebnisse und Datenausarbeitung

5.1. Qualitative Auswertung mit fallübergreifendem Fokus

Der erste Teil der Auswertung beleuchtet aufgabenspezifische Ergebnisse und gibt Aussage über fallübergreifende Beobachtungen.

5.1.1. Themenbereich Rechnen mit Variablen

Aufgabe 1

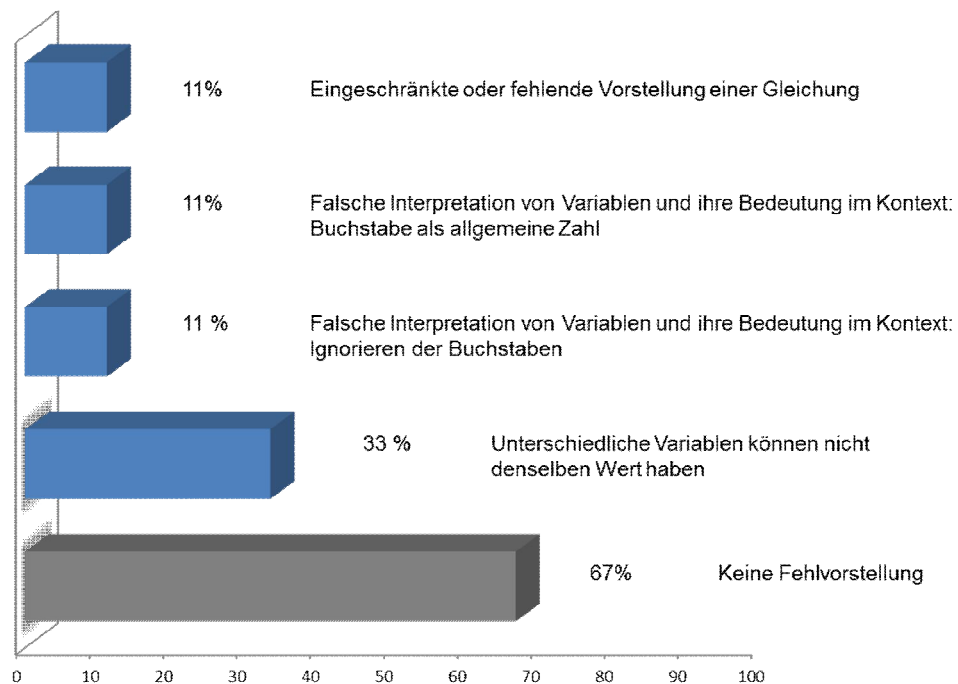
„Wann ist $L + M + N = L + P + N$ wahr?“

- a. Immer
- b. Niemals
- c. Manchmal

Begründe deine Antwort!“

(McIntyre 2005:56, übersetzt aus dem Englischen)

Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Die meisten Interviewpersonen konnten die Frage richtig beantworten. Einigen fiel es schwer, eine konkrete Begründung im Sinne von „dann, wenn M gleich P ist“ zu formulieren. Manche begründeten nur, dass es dann richtig sei, wenn die Summe links und die Summe rechts vom Gleichheitszeichen gleich groß ist. Doch durch kleine Hilfestellungen konnte die Mehrheit der befragten Personen die Aufgabe richtig lösen.

Im folgenden Interviewausschnitt äußert eine Person Zweifel daran, ob zwei unterschiedliche Variablen denselben Wert annehmen können. Es erscheint ihr sinnlos und sie entscheidet sich für die Antwort, dass zwei unterschiedliche Variablen nie denselben Wert annehmen können.

B: *„Ich sag niemals, weil ich, es wäre doch sinnlos, dass ich zwei Variablen nehme, das geht ja gar nicht, oder? Kann ich eine Variable nehmen, die das gleiche ist wie eine andere Variable? Also wenn das geht, an das kann ich mich nicht mehr erinnern, wenn das so sein darf, dann wäre es manchmal, dann wäre es dann, wenn M gleich P ist, wenn man das aber nicht machen darf, M gleich P , dann ist das niemals richtig.“*

I: *„Und was glaubst du intuitiv?“*

B: *„Dass es niemals richtig ist!“ (Interview 13)*

Ein weiterer Interviewausschnitt zeigt dieselbe Fehlvorstellung. Die Person behauptet, dass wenn zwei Variablen unterschiedlich sind, sie auch unterschiedliche Werte haben müssen.

B: *„Ich würde sagen: niemals.“*

I: *„Warum?“*

B: *„Ja quasi, weil das ja zwei, also das zwei Variablen, also sind übereinstimmend auf beide Seiten und zwei nicht, das heißt, sie haben auch nicht denselben Wert, das heißt, sie können niemals gleich sein.“ (Interview 15)*

Der nächste Interviewausschnitt beleuchtet die Fehlvorstellung einer eingeschränkten Vorstellung von Gleichungen, denn die interviewte Person verbindet eine Gleichung stets mit einem dazugehörigen Ergebnis. Sie interpretiert Variablen als Unbekannte mit bestimmtem Wert statt als allgemeine Zahl. Für sie ist eine Gleichung also nur dazu da, den Wert einer Unbekannten zu berechnen, was in dieser Aufgabe weder gefragt ist, noch überhaupt sinnvoll durchgeführt werden kann. Da die Person diese eingeschränkte Vorstellung von Gleichungen besitzt, erkennt sie nicht, dass gleiche Buchstaben hier ignoriert werden können, da sie keinen Einfluss auf die Lösung haben.

B: „Niemals, weil ähm (...), ja ich weiß nicht, weil ich die Variablen halt nicht kenne, und weil es unterschiedliche Variablen auf beiden Seiten sind.“

I: „Ok. Würde es einen Unterschied machen, wenn du die Variablen kennen würdest? Also den Wert der Variable?“

B: „Ähm, ja wahrscheinlich schon.“

I: „Von welchen Variablen müsstest du den Wert kennen?“

B: „Also man müsste zumindest eine Variable kennen, denk ich einmal.“

I: „Irgendeine?“

B: „Dann würd‘ ich sagen N.“

I: „Warum N?“

B: „Weil, wenn du die kennst, kennst du schon sehr viel von der Gleichung

I: „Du meinst, weil sie zweimal vorkommt?“

B: „Ja genau.“

I: „Das heißt, wenn man N kennt, weiß man, ob die Gleichung wahr ist?“

B: „Naja, man hat ja trotzdem extrem viele andere Variablen, wo man nicht weiß, was mit denen ist.“

I: „Was müsste man also dann wissen, um sagen zu können, ob die Gleichung wahr ist?“

B: „Ja alle bis auf eine.“

I: „Welche?“

B: „Irgendeine. Das ist egal. Man muss nur eine kennen, damit man es berechnen kann.“ (Interview 21)

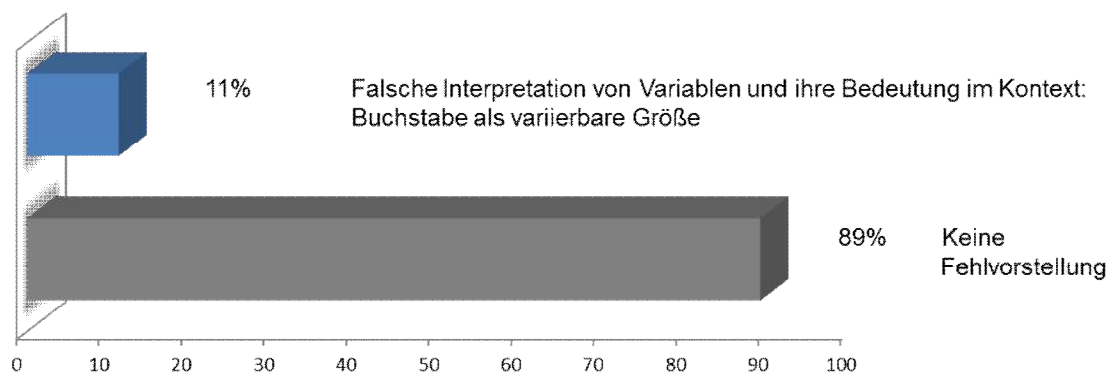
Die Person sieht also den Sinn einer Gleichung immer darin, eine Lösung zu berechnen anstatt im Allgemeinen eine Gleichheit widerzuspiegeln. In diesem Fall wird auf keine konkrete Lösung abgezielt, sondern es sollen Aussagen über die Wahrheit der Gleichung getroffen werden. Diese falsche Interpretation einer Gleichung kann als erweiterte Form der Fehlvorstellung »Prozess-Produkt-Dilemma« gedeutet werden. Nicht das Produkt im Sinne der Lösung der Gleichung ist gefragt, sondern der Prozess im Sinne der Interpretation der Gleichung steht im Fokus der Aufgabe.

Aufgabe 2

Angenommen t kann einen beliebigen reellen Zahlenwert annehmen. Welcher Term ist größer: $2 \cdot t$ oder $t + 2$? Begründe.

(vgl. McIntyre 2005:63, übersetzt aus dem Englischen)

Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Auch diese Aufgabe konnte fast durchgehend richtig gelöst werden. Nur eine Person hatte Schwierigkeiten mit der Vorstellung einer Variable als variierbare Größe.

„Also es müsste eigentlich $t + 2$ größer sein, weil wenn ich für t null einsetze, dann ist das ja dann zweimal null und ist dann null und da ist es ja dann immer noch plus zwei.“ (Interview 11)

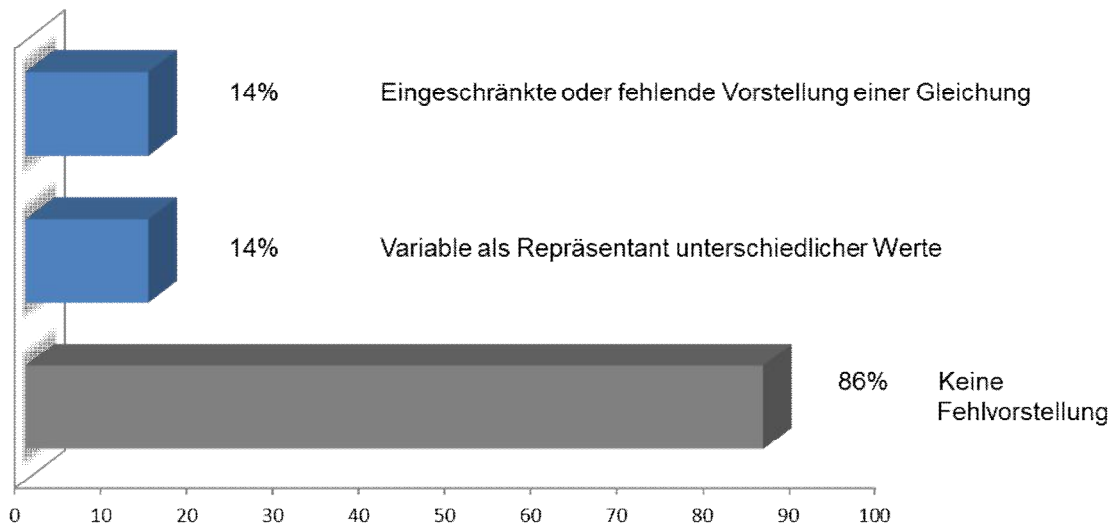
Womöglich kann diese Antwort auf zweierlei Interpretationen ausgelegt werden. Entweder die Person glaubt, dass eine Addition mit der Zahl zwei eine Variable schneller vergrößert als eine Multiplikation mit derselben Zahl. Dies kann unter Umständen bei jüngeren Personen der Fall sein, wo die Vorstellung der Addition sowie der Multiplikation noch neu und nicht vollständig ausgereift ist. Davon würde ich aber in diesem Fall nicht ausgehen. Wahrscheinlicher erscheint mir, dass die Person das Prinzip einer Variable als variierbare Größe nicht verinnerlicht hat und

ihre Vorstellung sich darauf beschränkt, dass die Variable des Terms $t + 2$ vergrößert wird, nicht aber die Variable des Terms $2 \cdot t$. Sie wählt als Anfangswert die Zahl null, vergleicht die Lösungen der beiden Terme, erkennt, dass der Term $t + 2$ einen größeren Wert ergibt und schließt daraus, dass für größer werdendes t der Term $t + 2$ noch größer wird und deshalb immer der größere ist. Die Person vergisst hierbei aber, dass sich die Variable t im Term $2 \cdot t$ ebenso verändert und dessen Lösung sich schneller vergrößert als die Lösung des anderen Terms.

Aufgabe 3

Die Höhe eines Hauses ist um drei Meter größer als die Höhe der zugehörigen Garage. Stelle eine Gleichung auf, die diesen Sachverhalt darstellt.

Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Nur eine Person hatte bei dieser Textaufgabe Schwierigkeiten, eine richtige Gleichung aufzustellen. Für die Unsicherheiten gibt es zweierlei Gründe. Die Person wählte für die Höhe des Hauses die Variable x und erkannte richtig, dass der Wert der Garage x minus 3 beträgt. Daraus stellte sie eine Gleichung auf, indem sie erklärte, dass man vom Haus drei abziehen muss, um die Höhe der Garage zu bekommen. Die Testperson schied auf: $x - 3 = x - 3$. Die Person musste selbst lachen und fügte hinzu:

„Das ergibt jetzt für mich keine Logik, aber theoretisch stimmt es ja, das ist eine Gleichung, die den Sachverhalt darstellt.“ (Interview 23)

Ich wies darauf hin, dass man aus der Gleichung erkennen soll, dass es eine Garage und ein Haus gibt, dessen Höhe sich um drei voneinander unterscheiden. Daraufhin änderte die Person die Variable x auf h und stellte die Volumesformel

eines Quaders auf. Ich fragte die Person, warum sie nun die Volumensformel verwendete und die Person antwortete:

„Irgendwo muss ja die Höhe enthalten sein. Ich muss die Höhe in die Gleichung einbauen, und dazu brauch ich ja eine Formel. Damit man das dann sieht.“ (Interview 23)

Die Person stellt also eine Gleichung mit einer Formel gleich und sucht nach einer Formel, um eine Gleichung aufstellen zu können. Hier handelt es sich um eine eingeschränkte Vorstellung von Gleichungen. Diese Einschränkung bezieht sich darauf, dass die Person in erster Linie Formeln als Gleichungen identifiziert.

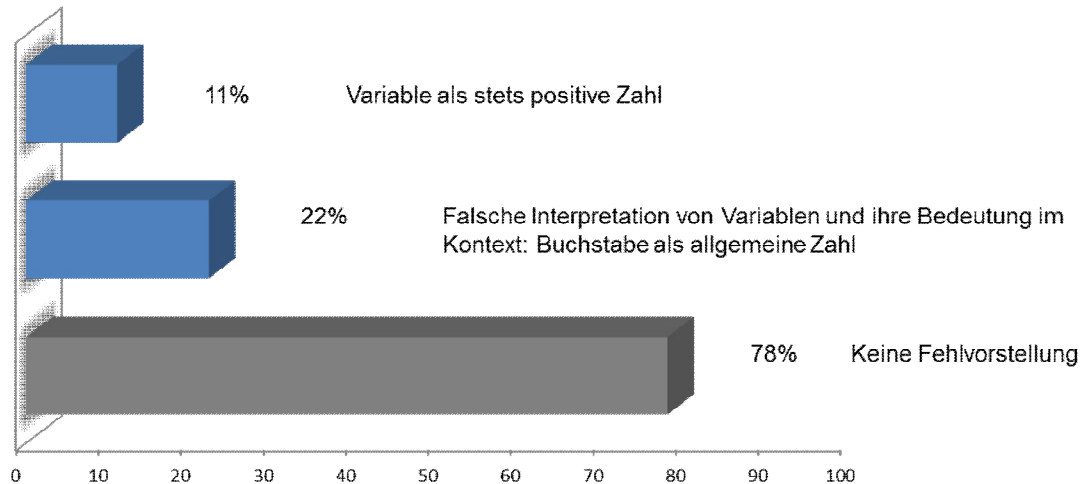
Nach längerem Überlegen meinte die Person schließlich, dass sie in ihrer ersten Gleichung x mit h austauschen könnte, denn dann würde die Gleichung mehr Sinn machen. Die Person schrieb schließlich: $h + 3 = h$.

Die Variable h wird sowohl für die Höhe des Hauses als auch für die Höhe der Garage verwendet und ist deshalb ein Repräsentant unterschiedlicher Werte.

Aufgabe 4

Wenn $c + d = 10$ und $c < d$ gilt, wie groß ist dann c ? (vgl. Küchemann 1978:23)

Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Bei einem Teil der Interviewpersonen konnte beobachtet werden, dass sie die Variable c als Unbekannte mit bestimmtem Wert interpretierten.

Eine Person konnte die Aufgabe nicht lösen und aufgrund von Beobachtungen zum Vorgehen kann vermutet werden, dass die Person als Lösung einen bestimmten Zahlenwert für c suchte. Erst nach längeren Überlegungen erkannte sie, dass die Variable c mehrere Werte annehmen kann und auch mehrere Werte eine Lösung dieser Aufgabe sein können. Das Umdenken von Variable als Unbekannte mit bestimmtem Wert auf Variable als allgemeine Zahl markierte die Person mit dem Kommentar: „Ah, das muss man vielleicht anders machen.“ (Interview 9)

Eine weitere Person schrieb als Lösung $c = 4$ auf. Auch hier kann vermutet werden, dass die Person die Vorstellung einer Variablen als Unbekannte mit bestimmtem Wert verinnerlicht hat.

Erst als ich sie fragte, ob c auch einen anderen Wert annehmen kann, erkannte die Person, dass mehrere Zahlen möglich sind. Sie antwortete, dass c die Werte 4, 3, 2, 1 und 0 annehmen kann.

Auf meine Frage, ob c auch eine negative Zahl sein kann, antwortete die Person:

„Nein, es kann keine negative Zahl sein, weil sonst würde da minus c stehen.“ (Interview 11)

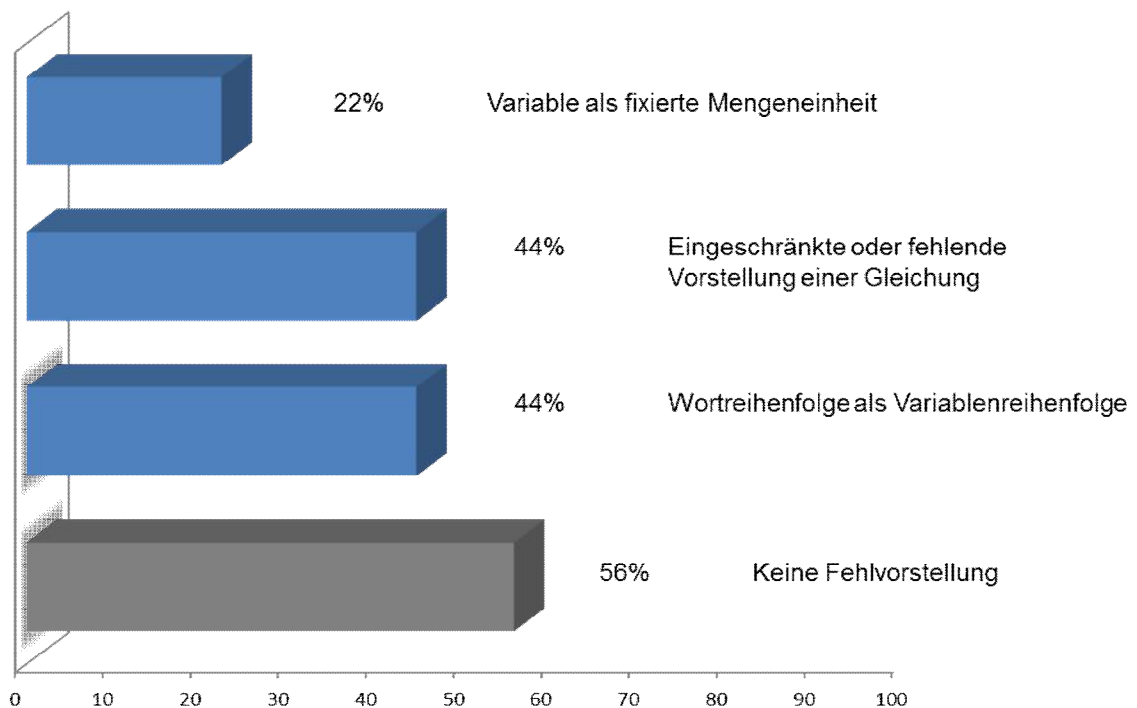
An dieser Stelle kommt eine neue Fehlvorstellung zum Vorschein und zwar, dass eine Variable ohne negatives Vorzeichen stets eine positive Zahl darstellt.

Aufgabe 5

„Eine Universität hat sechsmal so viele Student*innen wie Professor*innen. Stelle dafür eine passende Gleichung mit den Variablen S und P auf.“

(Clement et al. 1981:288, übersetzt aus dem Englischen)

Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Wenn das Aufstellen einer Gleichung von der Wortreihenfolge im Text beeinflusst ist, spricht man von der Fehlvorstellung »Wortreihenfolge als Variablenreihenfolge«. Die Angabe »Sechsmal so viele Studentinnen wie Professorinnen« wird Wort für Wort in die mathematische Sprache übersetzt und es entsteht somit die Gleichung $6 \cdot S = P$. Dies hängt wohl einerseits mit der Vorstellung einer Gleichung als abgekürzte Schreibweise zusammen, um einen Sachverhalt oder eine Proportion wiederzugeben. Natürlich kann eine Proportion grundsätzlich in einer Gleichung dargestellt werden, doch nicht in dieser Konstellation. Diese Vorstellung der abgekürzten Schreibweise kann in folgendem Interviewausschnitt sehr deutlich erkannt werden:

„Auf eine Professorin kommen sechs Studenten. Also eine Studentin, sechsmal, sind sechs Studentinnen, kommt auf eine Professorin.“
(Interview 5) Die Person notiert die Gleichung $6 \cdot S = P$.

Die Vorstellung einer Gleichung als Darstellung einer Proportion war in mehreren Interviews deutlich. Auf die Frage, warum eine Person die Gleichung $6 \cdot S = P$ aufgeschrieben hat, antwortete sie:

„Das ist das Verhältnis, in dem die zwei Variablen zueinanderstehen.“
(Interview 13)

Eine andere Person schrieb die Gleichung $S = P/6$ und sagte:

„Die Professoren sind ein Sechstel der Studenten.“ (Interview 23)

Neben dieser Vorstellung einer Gleichung als Proportion dominierte bei anderen Personen die Vorstellung einer Variablen als fixierte Mengeneinheit. S stellt also eine fixe Menge an Student*innen dar und bei vielen stellt P dieselbe fixe Menge an Professor*innen dar. Diese fixe Mengeneinheit muss mit dem Faktor sechs erweitert werden, um anzuzeigen, dass es sechsmal so viele Student*innen gibt.

Die Vorstellung einer fixierten Mengeneinheit tauchte in folgendem Interview auf:

I: *„Was bedeutet S genau?“*

B: *„S ist eine Menge an Studenten, eine vordefinierte, das kann eine Studentin sein, wenn es insgesamt nur sechs Studentinnen auf dieser Uni gibt.“*

I: *„Ist in deiner Gleichung S dann eine Studentin?“*

B: *„Ja, es ist halt eine Variable für die Studenten. Das heißt, es ist einfach eine vordefinierte Menge an Studenten und die nimmt man halt sechs Mal,*

damit man dieselbe vordefinierte Menge an Professoren bekommt. Man kann da alles Mögliche dafür einsetzen. Wenn man jetzt zum Beispiel weiß, dass auf der Uni zehn Professoren sind. S und P sind in dem Fall der gleiche Wert.“ (Interview 5)

In einem weiteren Interviewausschnitt versuchte eine Person die Aufgabe mithilfe eines Beispiels zu lösen.

„Also eine Universität hat jetzt zum Beispiel 20 Professoren und dann hat sie 120 Studenten. Ahm. Das ist jetzt dann Studenten, ja also das wären dann 120 steht dann auf einer Seite und auf der anderen Seite steht dann 20 zum Beispiel. Das sind dann 120 Studenten und 20 Professoren. Und dann hab ich die Studentenanzahl mal 6 ist gleich 20, oder?“ (Interview 11)

Die Notizen zu diesen Überlegungen sind folgende:

The image shows handwritten notes on a piece of paper. On the left side, there are four equations written vertically: $S \cdot 6 = P$, $S \cdot 6 = 20$, $120 = 20$, and $20 \cdot 6 = 20$. On the right side, there are two equations: $P = 20$ and $S = 120$.

Abb. aus Interview 11

Die Person wählte das Zahlenbeispiel $P = 20$ und $S = 120$. Durch das Einsetzen dieser Zahlen in die Gleichung entstand $120 = 20$. Auf die Frage, was sie genau eingesetzt hat, fügte die Person die Zeile $20 \cdot 6 = 20$ hinzu.

Es wurde also für S und P dieselbe Zahl 20 eingesetzt, obwohl die Person anfangs $S = 120$ notiert hat.

Der dahintersteckende Gedanke ist vergleichbar mit dem aus Interview 5, nämlich Variablen als unbekannte, aber gleich große Mengen. S und P stellen dieselbe Menge 20 dar und für die Berechnung der Menge der Student*innen muss diese Menge mit sechs multipliziert werden. Aus diesem Grund steht auf einer Seite der Gleichung $6 \cdot S$, auf der anderen Seite steht P.

Durch das Einsetzen der beispielhaften Zahlen in die Gleichung wird die Fehlvorstellung »Variable als fixierte Mengeneinheit« bestätigt, denn die beiden unterschiedlichen Variablen S und P werden als eine unbekannte, aber gleiche Menge von etwas aufgefasst.

Außerdem ist das Prinzip einer Gleichung nicht präsent, denn die Person notiert die Gleichung $120 = 20$ ohne geringsten Zweifel an dieser Aussage. Diese Fehlvorstellung fällt in die Kategorie »Eingeschränktes oder fehlendes Verständnis des Gleichheitszeichens«.

Die Person betonte sogar:

*„120 steht dann auf einer Seite und auf der anderen Seite steht dann 20 zum Beispiel. Das sind dann 120 Studenten und 20 Professoren.“
(Interview 23)*

Auch in Interview 13 stellte sich heraus, dass die interviewte Person eine falsche Vorstellung von Gleichungen besitzt.

B: „Wenn ich es auf der einen Seite wegnehme, muss ich es halt auf der anderen dazu tun. (...) Ich kann es ja nicht da abziehen und dort auch abziehen. (...) Dann verändert es sich ja.“

I: „Heißt das, es muss insgesamt immer dasselbe dastehen?“

B: „Ja genau.“ (Interview 13)

Es handelt sich hier um eine eingeschränkte bzw. verdrehte Vorstellung einer Gleichung. Die erste Aussage beinhaltet, dass eine Gleichung insgesamt, also linke und rechte Seite gemeinsam, immer denselben Wert beibehalten muss. Deshalb muss das, was auf einer Seite weggenommen wird, auf der anderen Seite dazugegeben werden, damit die gesamte Menge gleichbleibt.

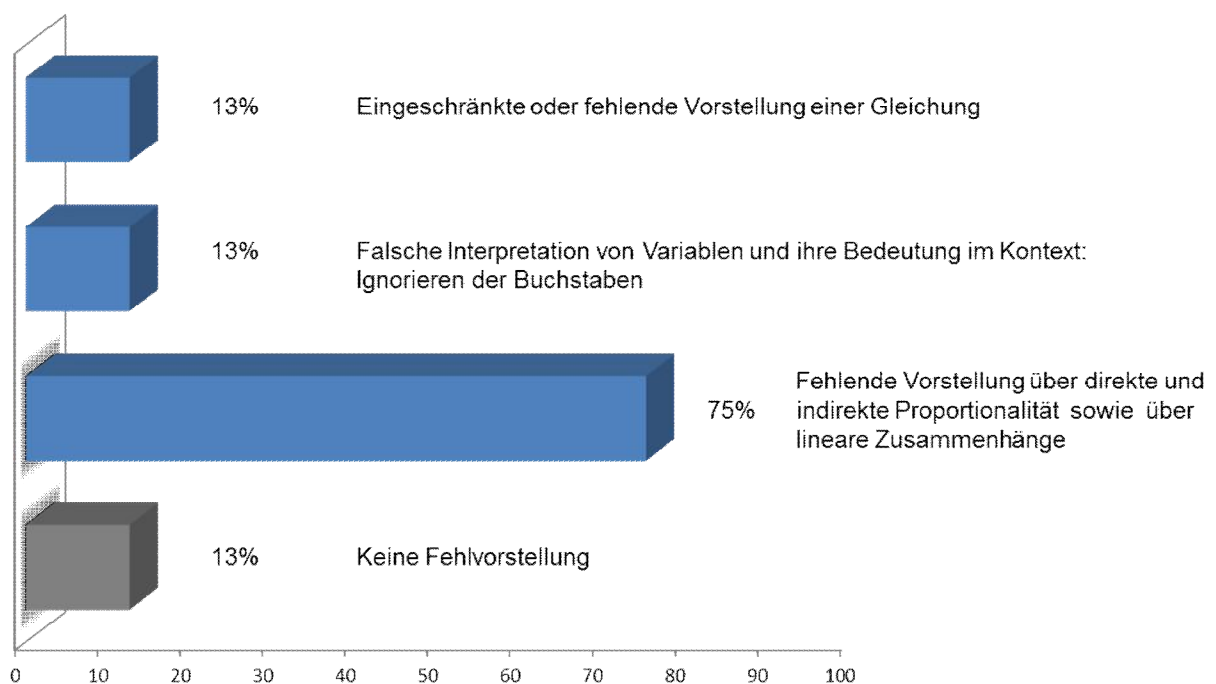
Aufgabe 6

a) Es gilt $x = 3y + 1$. Wie verändert sich der Wert von x , wenn der Wert von y um 2 steigt? (vgl. Küchemann 1978:23)

b) Wie verändert sich im folgenden Term y , wenn sich x halbiert? $y = \frac{4x^2 + 4}{3x}$

Auswertung

Bei dieser Aufgabe wurden nie beide Teilaufgaben gefragt, sondern nur eine davon. Der Grund für zwei unterschiedliche Teilaufgaben war die Erwartung, unterschiedliche Fehlvorstellungen erkennen zu können.



Kommentar / Interviewausschnitt

Bei dieser Aufgabe handelt es sich bestimmt um die kniffligste Fragestellung, was auch durch den niedrigen Prozentsatz der richtigen Lösungen bestätigt wird.

Nur bei einer sehr niedrigen Prozentzahl konnte eine Vorstellung über direkte und indirekte Proportionalität festgestellt werden. Alle anderen Interviewpersonen wiesen keine Vorstellung darüber auf, dass die Veränderung von x in Teilaufgabe a bzw. die Veränderung von y in Teilaufgabe b immer die gleiche ist, unabhängig von der Größe von x und y . Dies zeigte folgender Interviewausschnitt:

„Aber das bringt mir nichts, weil ich überhaupt nicht weiß, um welchen Wert y kleiner ist als x . Und dann stimmt das Verhältnis wieder nicht, dann weiß ich nicht, was mit x passiert.“ (Interview 23, Teilaufgabe a)

Eine weitere interviewte Person mit der Teilaufgabe b meinte, man könne die Lösung der Aufgabe ausrechnen, indem man die Gleichung auf $x = \dots$ bringt. Die Person glaubte, dass man dafür den Zähler in eine binomische Formel aufspalten muss.

„Wie ändert sich y , wenn sich x halbiert? Ja, das kann ich aber einfach ausrechnen.“ (Interview 5, Teilaufgabe b)

Einerseits führt dieser Vorgang zu keiner Lösung, da die Gleichung drei Unbekannte hat und die Veränderung von x nicht miteinbezogen wird. Andererseits hatte die Person Schwierigkeiten zu erkennen, welche Zahlen des Terms bedeutend für die Veränderung sind und welche Zahlen und Variablen ignoriert werden können, da sie keinen Einfluss auf die Veränderung haben. Es handelt sich also hierbei um eine falsche Interpretation von Variablen und ihre Bedeutung im Kontext. Für dieses konkrete Beispiel bedeutet dies das Ignorieren von Variablen, deren Werte für die jeweilige Situation unbedeutend sind.

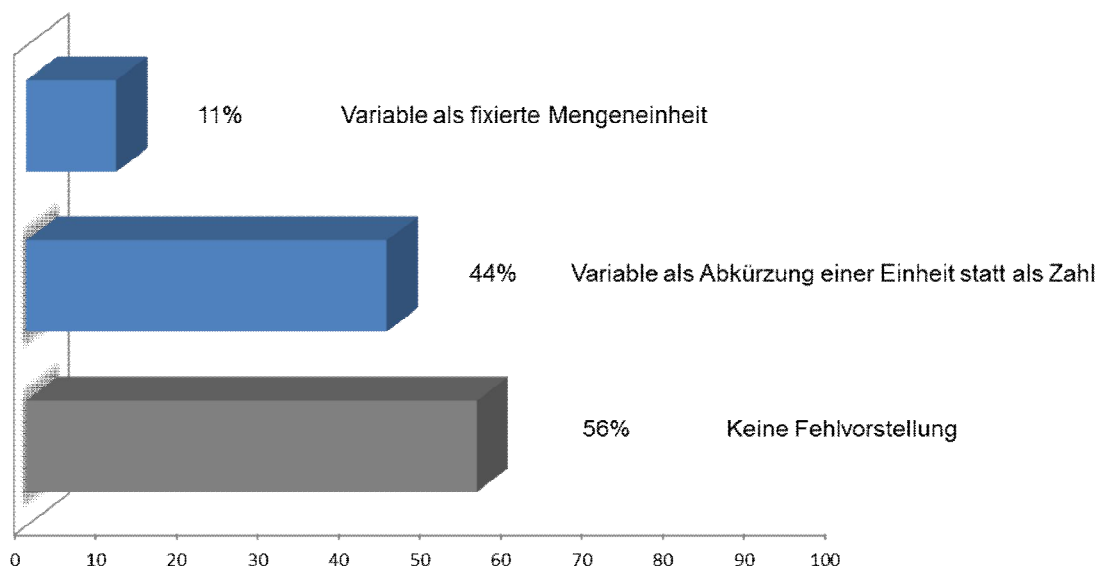
Außerdem handelt es sich auch um eine eingeschränkte Vorstellung einer Gleichung, denn die Person geht davon aus, dass die Lösung durch Berechnen der Gleichung erlangt wird, doch vielmehr geht es darum, anhand direkter oder indirekter Proportionen eine Aussage über die Veränderung von Variablen zu treffen.

Aufgabe 7

„Wassermelonen kosten zwei Dollar pro Stück und Ananas drei Dollar pro Stück. Wenn w die Anzahl der gekauften Wassermelonen angibt und a die Anzahl der gekauften Ananas, was gibt dann folgender Term an:“ $2 \cdot w + 3 \cdot a$

(McIntyre 2005:55, übersetzt aus dem Englischen)

Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Die Variablen w und a wurden sehr häufig als Abkürzungen der Wörter Wassermelone und Ananas statt als Zahlenwert interpretiert.

B: „Es heißt eigentlich eher, dass man zwei Wassermelonen kauft und drei Ananas, stimmt eigentlich, und nichts mit dem Preis, und wenn man den Preis wissen will, müsste man halt so schreiben.“

Die Person schreibt $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3$.

I: „Du schreibst zwei mal zwei plus drei mal drei, das wäre der Preis für was?“

B: „Zwei Wassermelonen und drei Ananas.“ (Interview 5)

Die Person erkannte die Variablen w und a nicht als Anzahl von Wassermelonen und Ananas, sondern als Abkürzung der Begriffe und interpretierte den Term $2 \cdot w + 3 \cdot a$ als zwei Wassermelonen und drei Ananas. Die Person betonte, dass dieser Ausdruck noch nichts über den Preis aussagt, sondern wenn man den Preis für diese Gleichung, also für zwei Wassermelonen und drei Ananas ausrechnen will, müsse man für die Variable w den Wert zwei einsetzen und für die Variable a den Wert drei, also $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3$.

Eine weitere Interviewperson stand vor dem Problem, dass sie zwar die Variablen als Anzahl der gekauften Früchte erkannte, doch den Term nicht interpretieren konnte. Dies lag daran, dass die Person die Multiplikation nur als Mengenvergrößerung und nicht als alternativen Sachverhalt interpretieren konnte.

„Zwei Wassermelonen und drei Ananas, oder? Ah Moment, die ANZAHL der gekauften Wassermelonen. Aha. Die Anzahl der gekauften Wassermelonen ist w , und du musst zwei w . Mah ist das blöd. (...) W ist die Anzahl und es kauft jemand zweimal w .“ (Interview 9)

Ich wies die Person darauf hin, dass nicht eine Lösung in Form einer Zahl, sondern eine Interpretation des Terms gefragt ist. Außerdem gab ich ihr den Tipp, die Angabe noch einmal genau durchzulesen. Nachdem die Person die Angabe laut durchgelesen hatte, äußerte sie:

„Es gibt halt an, dass zwei, also dass einfach zweimal irgendeine Menge Wassermelonen gekauft worden ist und dreimal eine Anzahl von Ananas, oder?“ (Interview 9)

Hier kommt eine Mengenauffassung von Variablen im Sinne einer bestimmten unbekannten Menge zum Vorschein. Eine solche falsche Interpretation von Variablen und ihre Bedeutung im Kontext kommen auch schon bei Aufgabe 5 vor.

Auch in den folgenden zwei Interviews wurde behauptet, dass der Term nichts über den Preis aussagt, sondern die Preisangaben nur zur Verwirrung dastehen. Es sei auch Zufall, dass die Zahlen vor den Variablen genau dem Preis entsprechen.

„Ich glaub, du probierst da zu verwirren, dass das genau die zwei Dollar und die drei Dollar immer sind. Weil ich würd irgendwie sagen: einfach die doppelte Menge der Anzahl der gekauften Wassermelonen plus die dreifache Menge der Ananas.“ (Interview 21)

Die Variablen w und a wurden in diesem Fall zwar schon als Anzahl und nicht als Abkürzung interpretiert, doch die Multiplikation einer Variable mit einer Zahl wurde nur als Mengenvergrößerung gedeutet, nicht als alternativer Sachverhalt wie zum Beispiel als Gesamtpreis, wenn der Faktor genau dem Preis pro Stück entspricht. Dies zeigte auch eine ähnliche Antwort aus einem anderen Interview:

„Da hab ich zweimal die Wassermelonen, die ich gekauft habe, plus dreimal die Ananas, die ich gekauft habe. Das hat ja nichts mit dem Dollar dann zu tun. (...) Das ist halt irgendwie eigentlich voll der Zufall.“ (Interview 23)

Aufgabe 8

„Für die Anzahl x der in einem Betrieb angestellten Frauen und die Anzahl y der im selben Betrieb angestellten Männer kann man folgende Aussage machen:

Die Anzahl der in diesem Betrieb angestellten Männer ist um 94 größer als jene der Frauen.

Es sind dreimal so viele Männer wie Frauen im Betrieb angestellt.

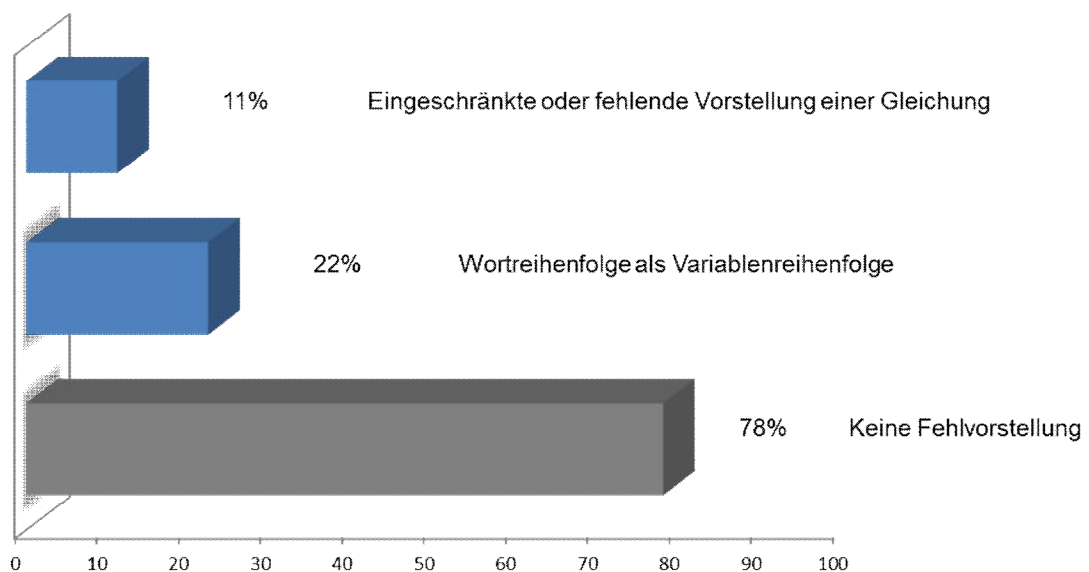
Kreuze diejenigen Gleichungen an, die die oben angeführte Aussage über die Anzahl der Angestellten mathematisch korrekt wiedergeben.“

(Bifie Aufgabenpool zu Sekundarstufe II, Aufgabe 1_157)

$x - y = 94$	☐
$3x = 94$	☐
$3x = y$	☐
$3y = x$	☐
$y - x = 94$	☐

Abb. Bifie Aufgabenpool

Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Wie bei Aufgabe 5 kommt hier die Fehlvorstellung »Wortreihenfolge als Variablenreihenfolge« zum Ausdruck, jedoch bei deutlich weniger Interviewpersonen. Dies bedeutet, dass einige Interviewpersonen Aufgabe 8 richtig lösen können, aber Aufgabe 5 nicht. Aus mathematischer Sicht unterscheiden sich die beiden Aufgaben kaum. Es werden dieselben mathematischen Grundvorstellungen gefragt und es steckt die gleiche Logik hinter den Aufgaben. Doch bei Aufgabe 5 muss die Gleichung selbstständig aufgestellt werden, wohingegen Aufgabe 8 unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten vorgibt. Interessanterweise entscheiden sich die Personen bei vorgegebenen Lösungsmöglichkeiten intuitiv eher für die richtige Gleichung, obwohl die entsprechende falsche Gleichung auch in den Lösungsmöglichkeiten vorkommt.

Trotzdem wurden manche Interviewpersonen von der Fehlvorstellung »Wortreihenfolge als Variablenreihenfolge« in die Irre geführt. Eine Interviewperson kreuzte die Antwortmöglichkeiten 4 und 5 an. Zur Antwortmöglichkeit 3 stellte die Person folgende Überlegung auf:

„Dreimal so viele Frauen wie Männer stimmt ja nicht anhand von dem, was da steht. Es sind ja dreimal so viele Männer wie Frauen.“ (Interview 23)

Es können ähnliche Hintergründe wie bereits bei Aufgabe 5 für diese Fehlvorstellung vermutet werden. Die Person missinterpretierte den Sinn einer Gleichung, indem sie die Gleichung als die Widerspiegelung einer Situation interpretierte. Die Grundidee oder Grundvorstellung einer Gleichung ist demnach nicht vorhanden. Interessanterweise gilt diese Beobachtung aber nur für Sachverhalte mit proportionalen Zusammenhängen und nicht für Sachverhalte mit linearen Zusammenhängen.

Das Bearbeiten dieser Aufgabe brachte eine weitere unerwartete Beobachtung. Die Formulierung »die Anzahl der in diesem Betrieb angestellten Männer ist um 94 größer als jene der Frauen« war für viele Interviewpersonen unklar ist. Fast alle

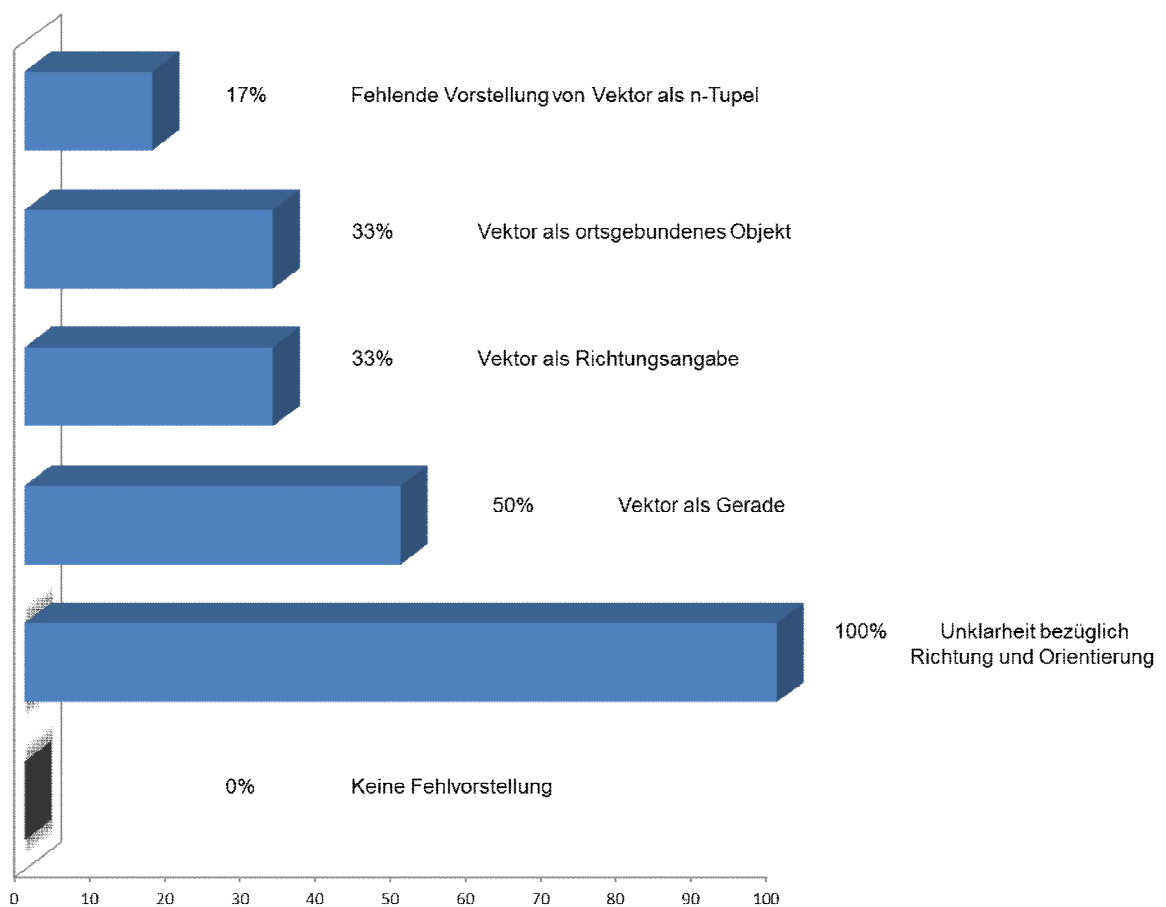
fragten nach der Bedeutung dieser Aussage. Warum diese Formulierung unklar war, wird hier nicht weiter thematisiert, da es den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

5.1.2. Themenbereich Vektorrechnung

Aufgabe 1

Was verstehst du unter einem Vektor?

Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Mit dem Thema Vektorrechnung gingen die Teilnehmenden auffallend anders um als mit den anderen Themen. Fast alle Personen äußerten, dass sie sich kaum mehr daran erinnern könnten, was ein Vektor überhaupt sei und wie man ihn

berechnet. Deshalb stellte die Beantwortung der ersten Aufgabe für einige eine große Schwierigkeit dar.

Die Antworten weisen in mehreren Aspekten Ähnlichkeiten auf. Die wohl auffallendste Gemeinsamkeit ist die Beschreibung eines Vektors als eine Richtungsangabe, ein Pfeil oder eine gerichtete Strecke. Keiner der interviewten Personen beschrieb einen Vektor als ein n -tupeliges Gebilde.

Die Verbindung eines Vektors mit einem Anfangs- und einem Endpunkt zählt ebenso zu einer häufig beobachteten Vorstellung. Dies zeigen die Vektorschreibweisen in Aufgabe 4, wo die Vektoren in Abhängigkeit vom Punkt P angegeben wurden sowie auch folgender Kommentar in Zusammenhang mit dieser Aufgabe:

„Ein Vektor gibt die Richtung und Entfernung von einem Punkt im Koordinatensystem in Bezug auf einen anderen an.“ (Interview 18)

In einem weiteren Interview wurde im Konkreten erwähnt, dass ein Vektor neben Richtung und Länge als dritte Komponente einen Startpunkt besitzt. Ein Vektor wurde hier also als ein ortsgebundenes Objekt interpretiert, das unter anderem über seinen Startpunkt definiert wird.

Manche Interviewpersonen verwechselten einen Vektor mit einer Geraden.

„Ich glaube, man kann einen Vektor unendlich in beide Richtungen verlängern. Ich glaube, das ist ein unendlicher Strich.“ (Interview 1)

Bei diesem Interview stellte sich im Laufe des Gesprächs heraus, dass die Person Vektoren in Zusammenhang mit vektorbasierten Graphikprogrammen kennt. Hier kann man einen Punkt entlang einer „Vektorgeraden“ verschieben, woher auch die Vorstellung eines unendlich langen Vektors kommt.

Aber auch aus einem anderen Interview kann vermutet werden, dass die Vorstellung eines Vektors als Gerade vorhanden ist, da Begriffe genannt wurden, die normalerweise nur in Bezug auf Geraden Verwendung finden.

I: „Du hast schon gesagt, dass die Richtung von Vektoren wichtig ist. Ist die Länge auch wichtig?“

B: „Ja, also, kommt drauf an, also ein Vektor ist ja, wenn ein Vektor geschnitten wird, in einer bestimmten Länge.“

I: „Was meinst du mit geschnitten?“

B: „Na wenn der eine Vektor den anderen Vektor schneidet. (...) Vor allem ist der Winkel wichtig bei Vektoren.“ (Interview 24)

Die Begriffe „geschnitten“ und „Winkel“ finden eher beim Rechnen mit Geraden Bedeutung. In Zusammenhang mit Vektoren sind diese Begriffe sehr unüblich und auch irreführend.

Eine andere Beobachtung betrifft den Begriff Orientierung, der in keinem einzigen Interview erwähnt wurde. Es fällt also schwer, zur Fehlvorstellung »Unklarheit bezüglich Richtung und Orientierung« handfeste Aussagen zu tätigen. Doch aus den meisten Gesprächen lässt sich die Beobachtung formulieren, dass die Testpersonen bei der Verwendung des Begriffs Richtung sowohl den mathematischen Begriff Richtung als auch Orientierung meinten. Zwei Vektoren, die dieselbe Richtung, aber unterschiedliche Orientierung haben, erkannten alle befragten Personen als Vektoren mit unterschiedlicher Richtung. Manche erkannten, dass es sich um zwei Vektoren mit genau umgekehrter Richtung handelt. Ein paar davon wussten sogar, dass es etwas mit einem Minus vor dem Vektor zu tun hat. Der Begriff Orientierung aber ist aus den Erinnerungen Erwachsener anscheinend komplett erloschen.

In einem Gespräch konnte eine interessante Unklarheit bezüglich Richtung und Orientierung festgestellt werden, nämlich dass ein Vektor gar keine Orientierung hat.

*„Ein Vektor ist eine Richtung, die in die eine oder andere Richtung gehen kann (lacht), nach hinten oder nach vorne. Hat keine Länge eigentlich.“
(Interview 1)*

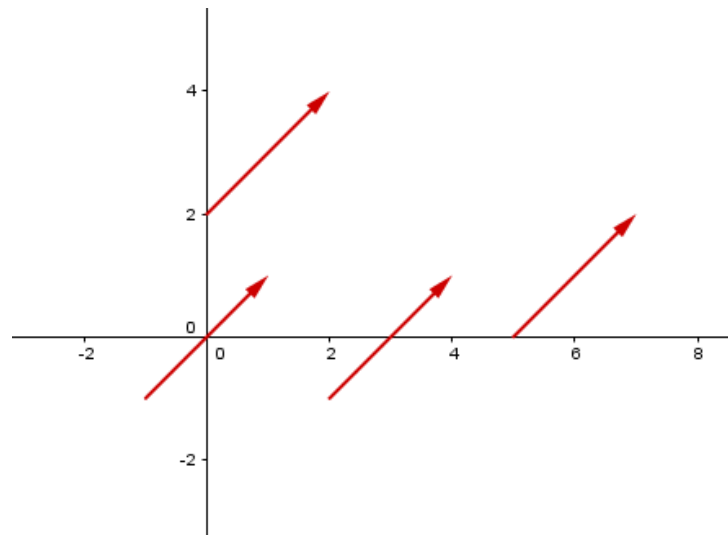
Außerdem ist aus diesem Interviewausschnitt sehr eindeutig zu erkennen, dass die Person die Vorstellung eines Vektors als Richtungsangabe ohne Länge innehatte. Diese beschränkte Vorstellung eines Vektors als eine Richtungsangabe ist auch in der nächsten Interviewsequenz erkennbar.

„Ein Vektor gibt im Raum, entweder im zwei- oder dreidimensionalen, ich weiß nicht, ob es vier Dimensionen gibt, ich kenn nur zwei und drei, gibt er eine Richtung an. (lacht) Ich mein, es gibt auch einen fünfdimensionalen Raum, goi. Egal. Er gibt im Raum (...) Ich kann mir nur drei vorstellen, und tu mir bei der dritten schon schwer (lacht). Gibt er, ist es ein Richtungsweiser.“ (Interview 20)

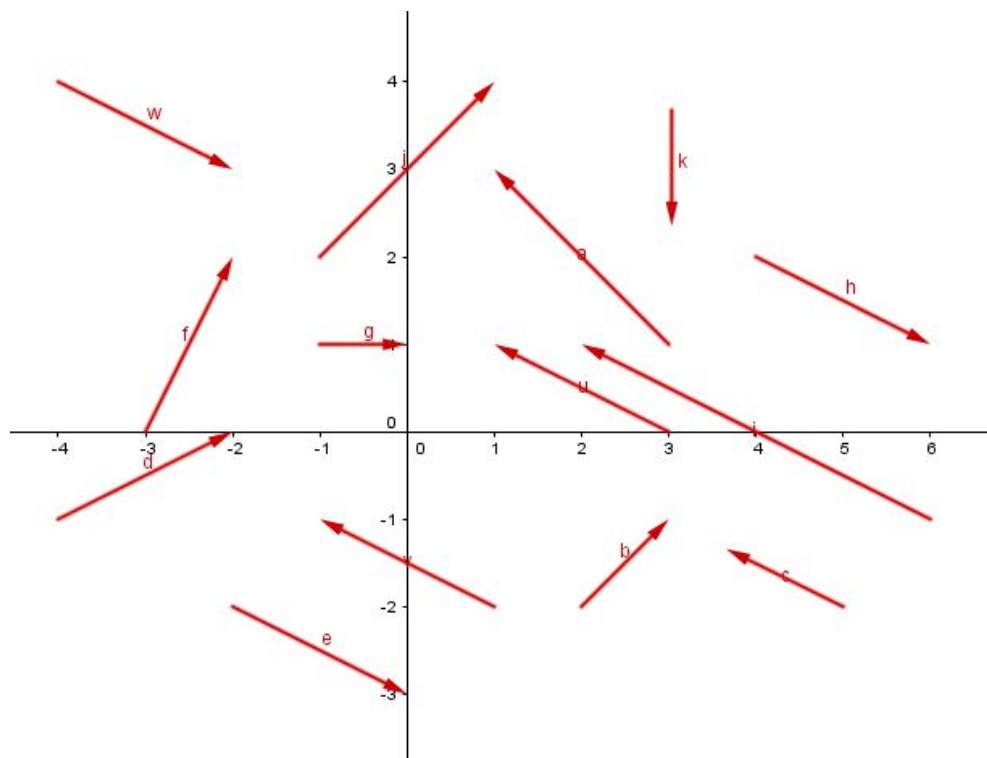
Neben dieser Vorstellung eines Vektors als Richtungsweiser kommt noch eine weitere Fehlvorstellung zum Vorschein, nämlich dass Vektoren auf maximal drei Dimensionen beschränkt werden. Die Person ist sich zwar irgendwie dessen bewusst, dass es schon mehr als drei Dimensionen gibt, doch vorstellen, und damit spricht sie von einer graphischen Vorstellung, kann sie sich nur drei Dimensionen. Wahrscheinlich fällt diese Vorstellung von höheren Dimensionen bei Vektoren deshalb so schwer, da die graphische Vorstellung von Vektoren dominierend ist und kaum jemand an ein n -tupeliges Gebilde denkt. Diese Beobachtung wird im Zuge der Aufgabe 6 genauer beschrieben.

Aufgabe 2

a) Sind diese Vektoren gleich oder verschieden?

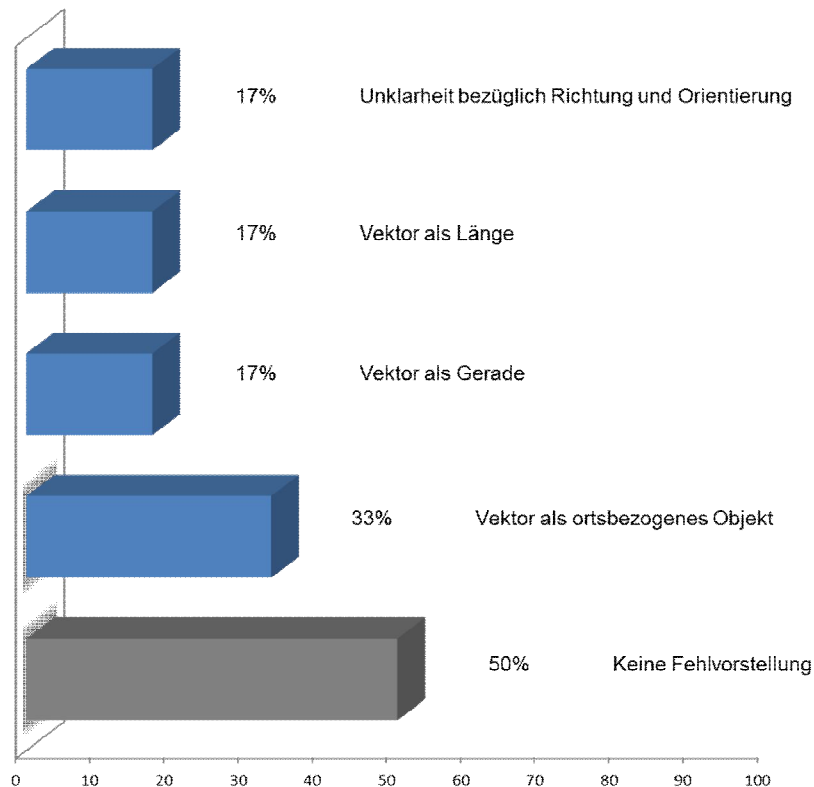


b) Was kannst du anhand dieser Vektormenge über Vektorklassen aussagen?



Auswertung

Bei dieser Aufgabe wurde wieder nur eine Teilaufgabe gestellt. Der Grund für zwei unterschiedliche Teilaufgaben war die Erwartung, unterschiedliche Fehlvorstellungen erkennen zu können.



Kommentar / Interviewausschnitte

Bei den Beantwortungen kamen ähnliche Fehlvorstellungen zum Vorschein wie bei der vorhergehenden Aufgabe.

Eine Interviewperson bezeichnete u und i als dieselben Vektoren, da man die Vektoren ja in beide Richtungen unendlich verlängern könne und die Richtung übereinstimmt. Die Verwechslung eines Vektors mit einer Geraden liegt nahe.

Dieselbe Interviewperson sagte über die beiden Vektoren e und v , dass jene Vektoren nur verschoben sind. Die Bedeutung der Begriffe Richtung und Orientierung ist hier wieder nicht präsent.

Eine andere Interviewperson meinte, dass Vektoren nur von ihrer Länge charakterisiert werden und deshalb die beiden Vektoren a und j sowie auch g und k gleich sind.

Ich fragte die Person, ob außer der Länge auch andere Faktoren für eine Gleichheit von Bedeutung sind. Die Person meinte, dass eine Gleichheit davon abhängt, ob die Vektoren im plus oder minus Bereich sind.

Hier handelt es sich wohl um eine besondere Art der Fehlvorstellung »Vektor als ortsgebundenes Objekt«.

Die Fehlvorstellung eines Vektors als ortsgebundenes Objekt kristallisierte sich in mehreren Gesprächen heraus:

I: „Kannst du dich noch erinnern, anhand welcher Faktoren ein Vektor bestimmt ist? Du hast schon gesagt Richtung und Länge, gibt es dann noch etwas?“

B: „Einen Startpunkt.“ (Interview 17)

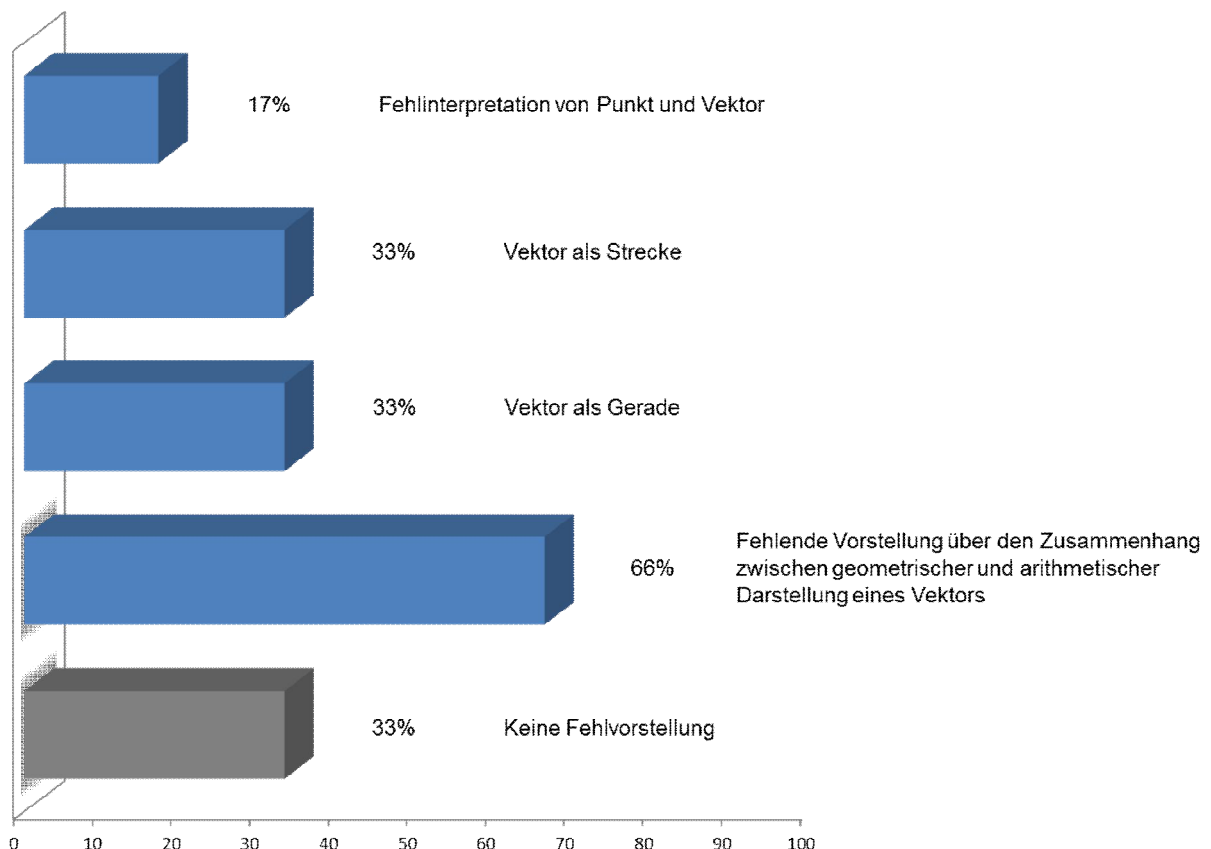
Die Vorstellung eines Anfangs- und Endpunkts ist auch schon aus Aufgabe 1 bekannt.

Aufgabe 3

Berechne den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ sowohl graphisch als auch rechnerisch.

$A = (5/2)$, $B = (8/4)$ (vgl. Jarmer 1995:60)

Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Auch bei dieser Aufgabe machte sich die Fehlvorstellung eines Vektors als eine Gerade sichtbar. Alle interviewten Personen konnten die angegebenen Punkte in ein Koordinatensystem einzeichnen, doch manche skizzierten nicht den Verbindungsvektor, sondern eine Gerade durch die beiden Punkte A und B.

Eine Person zeichnete zuerst den Verbindungsvektor ein, verlängerte dann diesen in beide Richtungen. Ich fragte sie, warum sie den Vektor in beide Richtungen noch verlängert hat. Die Person antwortete, dass sie sich erinnern könne, dass

der Schnittpunkt mit der x-Achse wesentlich sei, um den Vektor zu berechnen. Ich fragte sie weiter, ob man einen Vektor einfach ins Unendliche verlängern kann. Die Person antwortete:

„Ja theoretisch schon, aber die Schnittpunkte sind halt immer das Ausschlaggebende.“ (Interview 12)

Auch hier wird ein Begriff erwähnt, der Begriff Schnittpunkt, der grundsätzlich aus dem Themengebiet der Geraden stammt und in der Vektorrechnung verwirrend ist. Es liegt nahe, dass die Person die Vorstellung eines Vektors als eine Gerade verinnerlicht hat.

Für viele Personen stellt es eine große Schwierigkeit dar, aus der Skizze nun auch eine Lösung für den Verbindungsvektor anzugeben. Viele besitzen generell keine Vorstellung davon, dass ein Vektor als Zahlentupel angegeben wird. Andere erkennen nicht, wie dieses Zahlentupel aus der Skizze abgelesen werden kann. Mehr als die Hälfte der interviewten Personen verfügen über keine Vorstellung vom Zusammenhang zwischen geometrischer und arithmetischer Darstellung eines Vektors.

Um die konkreten Schwierigkeiten darzustellen, mit denen die interviewten Personen bei dieser Aufgabe zu kämpfen hatten, möchte ich im Folgenden mehrere Interviewpassagen näher schildern.

Eine interviewte Person konnte die Aufgabe graphisch richtig lösen. Sie konnte den Vektor richtig skizzieren und dessen Zahlentupel richtig ablesen. Bei der rechnerischen Lösung meinte die Person zuerst, die beiden Punkte addieren zu müssen. Sie bemerkte, dass sich dabei aber ein anderes Zahlentupel ergibt und überdenkt ihren Vorgang. Sie erkannte, dass sie B minus A rechnen muss, um dieselbe Lösung wie beim graphischen Vorgang zu erhalten, doch sie wunderte sich darüber.

„Aber der Vektor geht ja von A nach B. Warum muss ich das rückwärts rechnen? Das versteh ich gerade nicht.“ (Interview 1)

Sie meinte, dass B minus A eigentlich den Vektor mit umgekehrter Orientierung ergeben müsste, also von B nach A . Ich fragte sie, wie sie bei der graphischen Lösung gerechnet hat. Sie erklärte: „Zwei plus wie viel ist vier ergibt zwei, also ist der x -Wert zwei.“ (Interview 1) Sie meinte, dass die Rechnung $4 - 2 = 2$ mathematisch gesehen zwar dasselbe ist, aber der Vektor dann in die andere Richtung schaut.

Natürlich handelt es sich hier um die fehlende Vorstellung vom Zusammenhang zwischen geometrischer und arithmetischer Darstellung eines Vektors. Doch auffallend bei dieser Person ist, dass die Fehlvorstellung unter anderem daher kommt, dass sie die Richtungsweisung einer Subtraktion mit der eines Vektors verwechselt. Die Person weiß, dass die beiden Rechenschritte ‚zwei plus wie viel ist vier‘ und ‚vier minus zwei‘ dieselbe Lösung ergeben, doch sie interpretiert die Lösung der Subtraktion nicht als Wert sondern als Wert mit einer Richtung. So hat der Rechenschritt ‚zwei plus wie viel ist vier‘ dieselbe Richtung wie der Vektor, doch der Rechenschritt ‚vier minus zwei‘ hat genau die umgekehrte Richtung.

Eine andere Interviewperson meinte, dass es beim Angeben des Vektors darauf ankommt, „welchen Punkt ich auf dem Verbindungsvektor auswähle“ (Interview 12). Für diese Aussage können zwei mögliche Gründe genannt werden. Entweder verwechselt die Person einen Vektor mit einer Geraden, denn eine Gerade wird unter anderem durch einen frei wählbaren - auf der Gerade liegenden - Punkt angegeben oder die Person verbindet ein Zahlenpaar immer mit einem Punkt und meint deshalb, dass man als Zahlenpaar nur einen Punkt auf dem Vektor angeben kann. Es handelt sich hierbei also entweder um die Fehlvorstellung »Vektor als Gerade« oder um die Fehlinterpretation von Punkt und Vektor. Leider konnte dies aus dem Gespräch nicht klar erkannt werden.

Zwei Interviewpersonen meinten, den Vektor mithilfe des Pythagoras berechnen zu können.

„Also das erinnert mich jetzt irgendwie an eine Gerade. Also ich mein, das weiß ich jetzt nicht, ob man das darf, aber ich hab halt jetzt als Erstes, wie ich jetzt so denk, ist dieses Dreieck da, weißt eh, mit dem rechten Winkel und a plus b ist c . Und ich weiß halt, dass diese Länge drei ist und die ist zwei. Weil vom Punkt A zu Punkt B sind es drei Unterschied und von der Höhe her zwei. Und jetzt weiß ich, dass $3^2 + 2^2 = v^2$.“ (Interview 24)

Die Person verwechselt das Steigungsdreieck mit einem rechtwinkligen Dreieck aus der Geometrie und meint, der Vektor sei die Hypotenuse. Ein Vektor wird hier als Strecke interpretiert.

Eine interessante Beobachtung war, dass alle jene Testpersonen, die zuerst Aufgabe 4 lösten und danach Aufgabe 3, intuitiv glaubten, dass man den Verbindungsvektor in Aufgabe 3 durch die Summe der beiden Punkte berechnet. Da der Verbindungsvektor nichts mit einer Summenberechnung zu tun hat, kann dieser Denkfehler nur daher kommen, dass es in der vorigen Aufgabe um eine Summenberechnung ging. Da dieses Phänomen fast alle Testpersonen betraf, könnte dies ein Anzeichen dafür sein, dass in der Schule zu einem großen Teil das Anwenden von Lösungsmodellen bestimmter Aufgabentypen gelehrt wird. Der Fokus am Unterricht liegt leider häufig am Anwenden von standardisierten Schemenverfahren, anstatt am Erkennen eines Lösungsansatzes, der von Aufgabe zu Aufgabe unterschiedlich ist. Die Anwendung steht im Fokus und nicht der Prozess des Entdeckens. Dieses Eintrichtern der Anwendung standardisierter Verfahren kommt hier bei einigen Interviews zum Tragen, wo die Aufgaben zufälligerweise in dieser Reihenfolge gestellt wurden.

Aufgabe 4

Gegeben sind zwei an einem Punkt P angehängte Vektoren $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$. Ermittle die Summe dieser Vektoren sowohl graphisch als auch rechnerisch.

(vgl. Bifie Aufgabenpool zu Sekundarstufe II, Aufgabe 1_056)

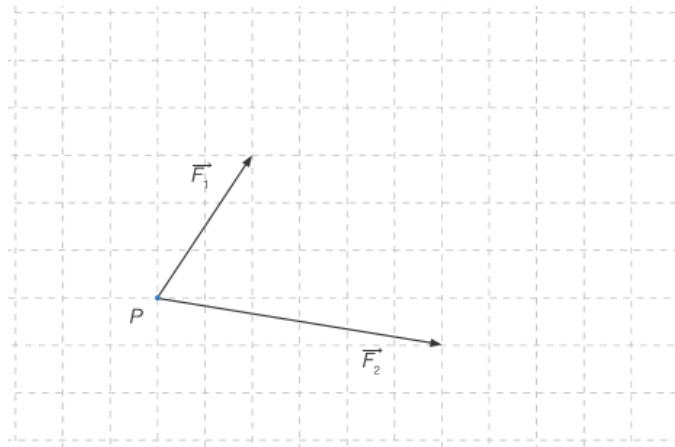
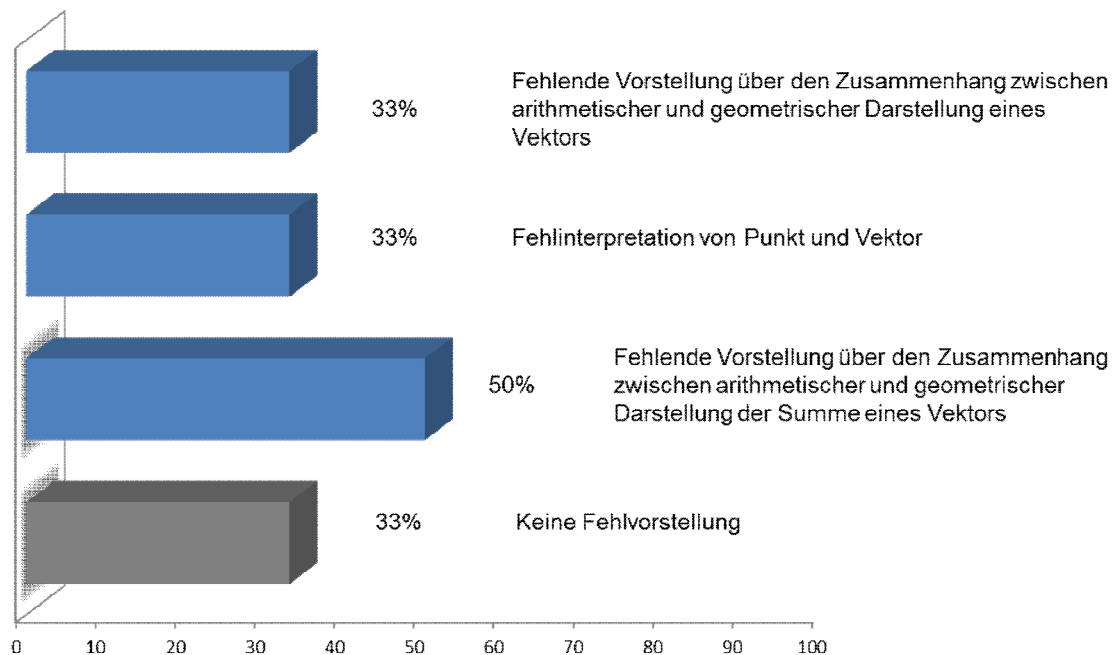


Abb. Bifie Aufgabenpool

Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Im Vorfeld konnte die Vermutung angestellt werden, dass die arithmetische Berechnung der Summe den interviewten Personen leichter fällt, da in der Schule das Rechnen mit Vektoren ausführlich durchgeführt wird und die Addition an sich keinen komplexen Rechengang darstellt. Bei der Durchführung der Interviews war überraschend, dass die meisten Personen Schwierigkeiten bei der arithmetischen Lösung hatten, da sie nicht wussten, wie man einen Vektor abliest.

Über die graphische Lösung waren sich die interviewten Personen auch nicht einig. Eine Person nahm P als den Nullpunkt an und zeichnete als Lösung den Punkt (8/2) ein, den sie rechnerisch erhalten hatte. Sie bestätigte, dass der Punkt die Lösung der Aufgabe sei, welches die Fehlinterpretation von Punkt und Vektor aufzeigt.

Eine sehr häufige Lösung war der Verbindungsvektor der beiden Pfeilspitzen als Summenvektor. Dies kann unter anderem darauf zurückgeführt werden, dass davor Aufgabe 5 bearbeitet wurde und dann zu Aufgabe 4 eine fehlerhafte Analogie gesehen wurde. Es kann angenommen werden, dass Aufgabe 5 zu dieser falschen Summenvorstellung verleitet, doch diese graphische Lösung wurde auch bei Personen beobachtet, die Aufgabe 4 vor Aufgabe 5 lösten.

Eine andere Lösung war das Herunterklappen eines Vektors, sodass die Vektoren gemeinsam eine Strecke bildeten und deren gemeinsame Länge die Lösung ergab.

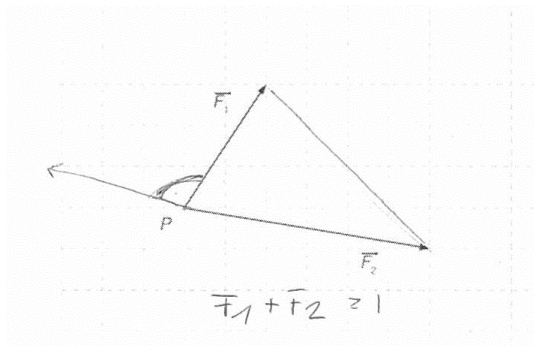


Abb. aus Interview 24

Dieser Lösungsvorgang wird auch in der Studie von Jarmer beschrieben.

(vgl. Jarmer 1995:55)

Über diese beobachteten Fehlvorstellungen hinaus können auch allgemeine Beobachtungen getätigt werden.

Viele Interviewpersonen vertraten die Meinung, dass in der Skizze ein Koordinatensystem fehlt. Ohne Koordinatensystem könnten sie den Vektor nicht ablesen, äußerten sie. Manche versuchten auch, ein Koordinatensystem willkürlich einzuzichnen. Ein Vektor ist für sie also ortsgebunden, obwohl teilweise dieselben Personen in Aufgabe 2 aussagten, man könne einen Vektor beliebig verschieben.

Anscheinend ist das Prinzip eines Vektors, dass es nur um Länge, Richtung und Orientierung geht, nicht aber um den Ort, nicht zur Gänze vorhanden.

„Naja das Problem ist, ich würd ja da quasi von null ausgehen, also irgendwo in meinem Koordinatensystem müsste ja null sein, aber da ist ja, das ist nirgends. Und es ist ja nicht gesagt, dass P null ist.“ (Interview 18)

Diese Fehlvorstellung hängt auch mit der Vorstellung zusammen, dass ein Vektor an einen Startpunkt gekoppelt ist, von dem ausgehend in eine bestimmte Richtung ein anderer Punkt erreicht wird. Diesen Denkvorgang erkennt man verbal bereits an der Beantwortung von Aufgabe 1 und schriftlich anhand der Lösungen dieser Aufgabe.

Eine Person gibt die Vektoren $\vec{F1} = \begin{pmatrix} P+2 \\ P+3 \end{pmatrix}$ $\vec{F2} = \begin{pmatrix} P+6 \\ P-1 \end{pmatrix}$ und an und erklärt, dass ein Vektor die Entfernung und die Richtung von einem Punkt zu einem anderen angibt. Außerdem fügt sie hinzu, dass ein Vektor immer einen Punkt als Zielobjekt angibt.

Besonders auffällig erscheint eine allgemeine Beobachtung zu den geometrischen Aufgaben von Vektoren, nämlich die Schwierigkeit, intuitive mathematische Vorstellungen anzuwenden. Gerade bei dieser Aufgabe, wo es um die Berechnung der Summe geht, kann auf eine intuitive Vorstellung zurückgegriffen werden, da die Summe aus einem anderen Kontext bekannt ist und nun auf die Vektorrechnung übertragen wird. Für das Lösen der Aufgabe ist es also nicht essentiell, sich an einen in der Schulzeit gelernten Lösungsweg zurückzuerinnern.

Trotzdem stellt die Lösung für fast alle Personen eine unmögliche Aufgabe da. Viele versuchten, die Aufgabe mit dem Kreuzprodukt oder dem Betrag zu lösen, zwei Berechnungen, die mit der Aufgabenstellung in keinem Zusammenhang stehen und komplett aus der Luft gegriffen sind. Hier ein Beispiel aus Interview 1:

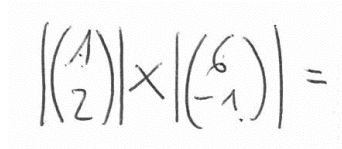

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \times \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} \right| =$$

Abb. aus Interview 1

Warum denken Lernende bei einer Additionsaufgabe an so komplexe Rechenmodelle, die man eigentlich für ganz andere Berechnungen braucht? Bei der Aufgabe »Berechne die Summe der beiden Zahlen« würde wahrscheinlich niemand überlegen, ob man dafür das Berechnen der Wurzel anwenden muss. Die Frage nach der Summe zweier Vektoren fordert genau denselben Denkvorgang wie die Frage nach der Summe zweier Zahlen. Und zwar jene Grundvorstellung, dass die Summe die Addition bedeutet, also die beiden Zahlen oder eben Vektoren addiert werden müssen. Würde man einen Vektor als mehrdimensionales Zahlentupel erkennen, so wäre die Analogie dieser beiden Aufgaben augenscheinlich. Dieser Aspekt wird am Ende des Kapitels genauer beleuchtet.

Aufgabe 5

„Gegeben sind die Vektoren $\vec{r}$, $\vec{s}$ und $\vec{t}$.“ Kreuze die zutreffenden Aussagen an:

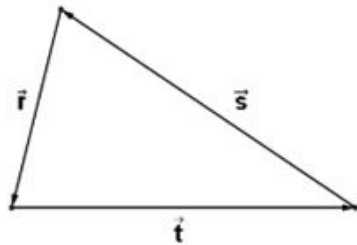
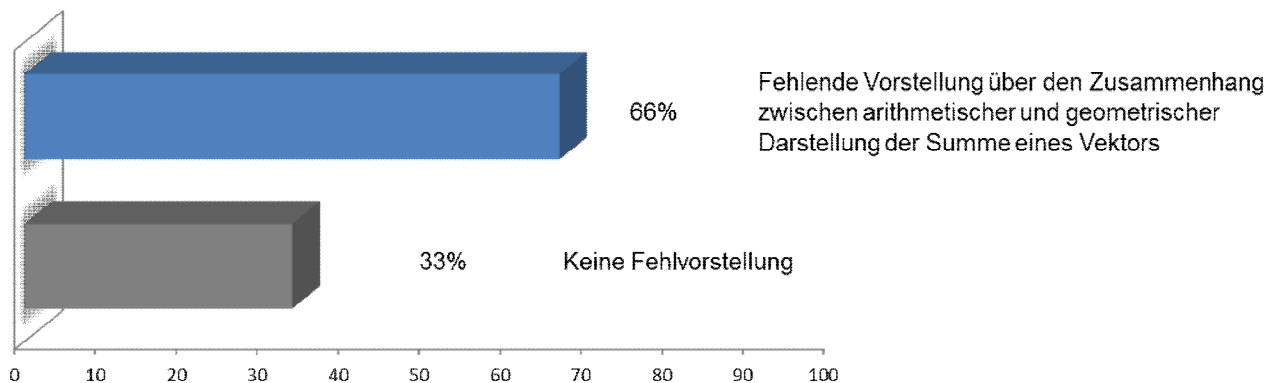


Abb. Bifie Aufgabenpool

$\vec{t} + \vec{s} = \vec{r}$	☐
$\vec{r} + \vec{s} = \vec{t}$	☐
$\vec{t} + \vec{s} + \vec{r} = \vec{p}$	☐
$\vec{r} - \vec{s} = -\vec{t}$	☐
$\vec{t} + \vec{s} = -\vec{r}$	☐
$\vec{t} + \vec{s} + \vec{r} = \vec{0}$	☐

(Bifie Aufgabenpool zu Sekundarstufe 2, Aufgabe 1_073)

Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Obwohl es bei dieser Aufgabe genau wie bei Aufgabe 4 um die Summe von Vektoren geht, konnten interessanterweise Personen, die die Aufgabe 4 nicht lösen konnten, diese Aufgabe erfolgreich lösen und vice versa.

Außer der fehlenden Vorstellung über den Zusammenhang zwischen der arithmetischen und der geometrischen Darstellung eines Vektors konnten bei dieser Aufgabe keine spezifischen Fehlvorstellungen erkannt werden.

Eine Person wollte keine der Antwortmöglichkeiten ankreuzen, da sie nicht wusste, „wie man hier denken muss“ (Interview 17). Eine andere Person meinte, dass alle Antworten falsch sind, da „die Vektoren alle in eine unterschiedliche Richtung (meint Orientierung) zeigen und man sie deshalb nicht zusammenführen kann“ (Interview 20). In einem anderen Interview wurden die ersten beiden Aussagen als wahr betrachtet und alle anderen als falsch. Hier wurde also die Orientierung der Vektoren ignoriert.

Aufgabe 6

„Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen:

Erstes Spiel: Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)

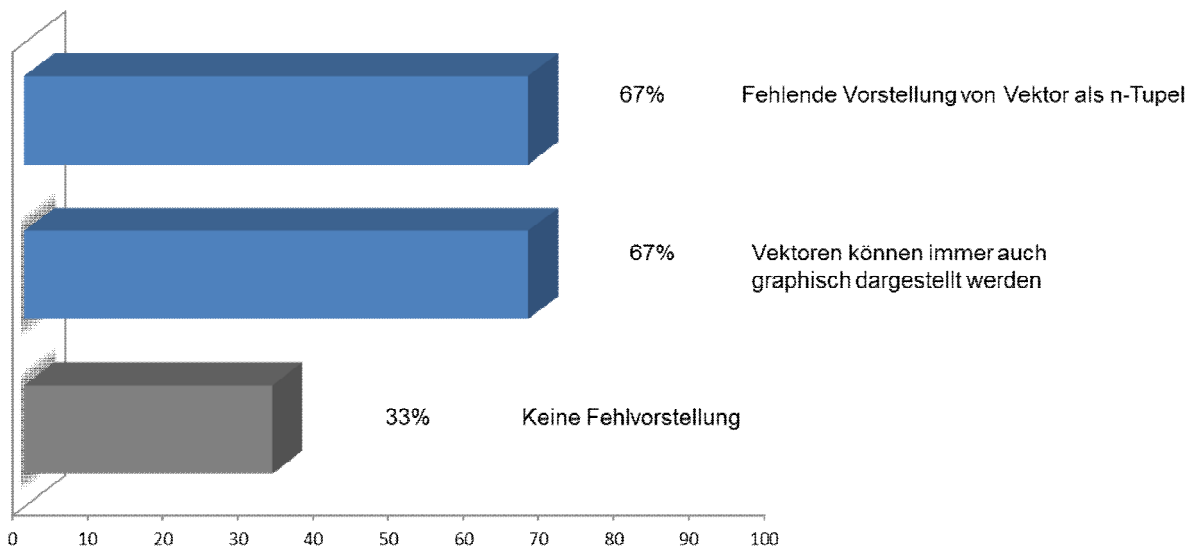
Zweites Spiel: Maier (3), Schmid (2), Eder (1)

Drittes Spiel: Müller (1), Eder (2), Schmid (1)

Viertes Spiel: Kaiser (4)

Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.“ (Hartmann 1993:97)

Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Es zeigte sich beim Durchlesen der Aufgabe mehrheitlich ein ähnliches Verhalten der Interviewpersonen. Einerseits gab es Verwunderung über die Zuordnung dieser Aufgabe zum Themengebiet der Vektorrechnung. Gleichzeitig konnten aber viele eine intuitive Antwort geben, die größtenteils richtig war.

Manche vergaßen die nicht geschossenen Tore, also die Nullen im Vektor, mitzuschreiben. Andere versuchten, die Spielnummerierung im Vektor mit Variablen zu kennzeichnen, wodurch folgender Vektor entstand:

$$\begin{pmatrix} a \cdot 2 \\ b \cdot 0 \\ c \cdot 1 \\ d \cdot 0 \end{pmatrix}$$

Doch die Vektoren wurden meistens nach kurzem Überlegen richtig ausgebessert. Andere Teilnehmende versuchten, den Vektor aufzuzeichnen. Eine Person äußerte sich auf meine Hilfestellung, dass eine graphische Darstellung nicht notwendig sei, wie folgt:

*„Aber es würde mir helfen, wenn ich es graphisch darstellen könnte, weil man kann ja immer graphisch darstellen, was man berechnet.“
(Interview 12)*

Die Fehlvorstellung eines Vektors als stets graphisches Objekt hängt natürlich mit der Fehlvorstellung zusammen, dass ein Vektor maximal drei Dimensionen hat.

Zum Themengebiet Funktionen gibt es eine parallele Fehlvorstellung dazu, nämlich dass Funktionen immer auch eine einzeilige Funktionsgleichung besitzen. Die Ursache dieser Fehlvorstellung liegt wahrscheinlich darin, dass Lernende eine Darstellungsform, die sie in einem bestimmten Kontext gelernt haben, als immer vorhanden interpretieren.

Die Vorstellung eines Vektors als n-Tupel war bei keiner Person vorhanden. Manche konnten diese Vorstellung aber während dem Bearbeiten der Aufgabe entwickeln, andere waren sehr stark davon überzeugt, dass ein Vektor mit mehr als drei Dimensionen „sinnfrei“ ist.

B: „Müller hätte 2, 0, 1, 0 Tore geschossen, der Schmid 1, 2, 1, 0, Kaiser 2, 0, 0, 4, aber ich weiß jetzt noch nicht konkret, was ich mit dieser Information anfangen soll. Vor allem was das für ein Vektor sein soll, das ist keiner.“

I: „Was meinst du mit: Das ist keiner?

*B: „Naja (...) in meiner, in meiner Schulzeit zumindest kann ich, kann ich mich nicht erinnern, dass ich einen Vektor mit vier Zahlen untereinander gesehen habe, wenn ich davon ausgehe, dass (...) dass die Vektoren maximal eine räumliche Anordnung haben, dann hab ich halt einfach nur drei Dimensionen, x, y, z. Dann kann ich das nicht beliebig erweitern.“
(Interview 18)*

Die Vorstellung eines Vektors mit mehr als drei untereinanderbeschriebene Zahlen brachte also bei vielen Schwierigkeiten mit sich. Dies hängt mit der fehlenden Vorstellung eines Vektors als n-Tupel zusammen. Die räumliche Vorstellung von Vektoren ist bei allen Teilnehmenden dominierend, weshalb ein Vektor von vielen automatisch als dreidimensional interpretiert wurde.

Aus einem weiteren Interview kann ebenso geschlossen werden, dass die interviewte Person nur über eine räumliche Vorstellung von Vektoren verfügt und einen Vektor stets als Verbindungsvektor zweier Punkte interpretiert.

„Ich weiß auch gar nicht, wie ich da einen Vektor, also, was, was, einen AB oder was willst du da? Vektor AB oder Vektor weiß ich nicht was. Weiß ich nicht.“ (Interview 24)

Aufgabe 7

„In einem Restaurant wird täglich ein vegetarisches Menü angeboten.

Der Vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix}$$

gibt die Anzahl der verkauften Menüs an den Wochentagen Montag bis Sonntag einer bestimmten Woche an, der Vektor

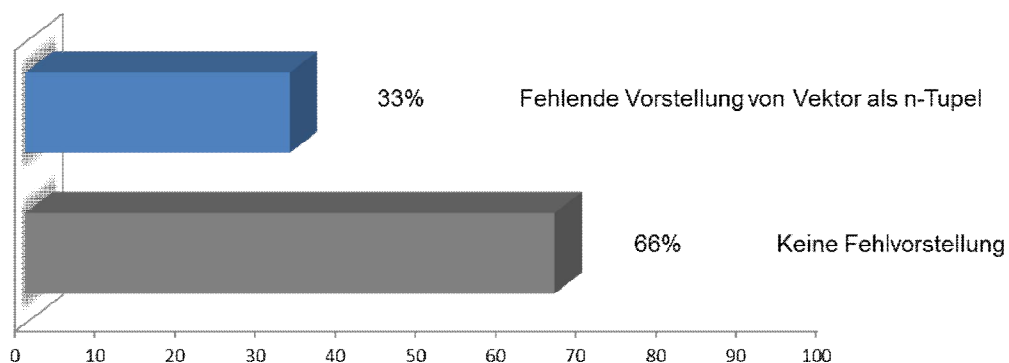
$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_7 \end{pmatrix}$$

die jeweiligen Menüpreise in Euro.“

Interpretiere in diesem Zusammenhang das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{p}$.

(Bifie Aufgabenpool zu Sekundarstufe 2, Aufgabe 1_296)

Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Diese Aufgabe verlangt ähnliche Grundvorstellungen wie Aufgabe 6 und konnte von sehr vielen intuitiv richtig gelöst werden, auch wenn sich einige über die Art der Notation wunderten. Sie meinten, es wäre einfacher, die Preise pro Wochentag in Worten auszusprechen. Der Sinn der arithmetischen Verwendung von Vektoren und dessen Vorteile war vielen Personen nicht bewusst.

Manche waren sich nicht sicher, ob als Lösung ein Vektor mit den unterschiedlichen Preisen pro Wochentag entsteht oder ob es eine Zahl ist, die den Gesamtpreis angibt. Zu erwähnen ist aber, dass immerhin 66% der befragten Personen das Skalarprodukt mit dem Gesamtpreis der verkauften Menüs in Verbindung brachten.

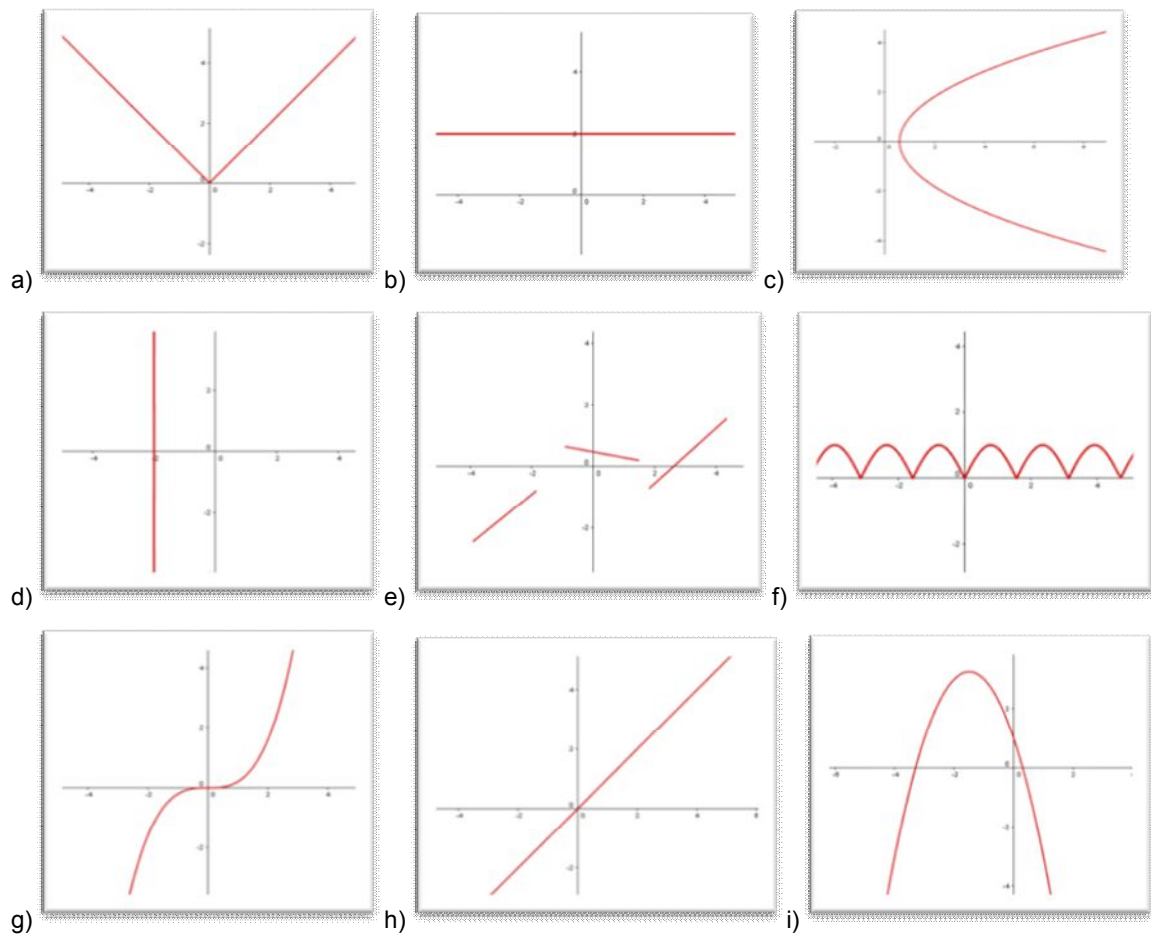
Eine Person, die bei Aufgabe 6 meinte, dass es keinen Vektor mit vier Zahlen geben kann, blieb auch bei dieser Aufgabe bei ihrer Meinung, obwohl sogar in der Angabe siebendimensionale Vektoren vorkommen. Die Vorstellung eines maximal dreidimensionalen Vektor ist hier ganz fest verankert und ein Vektor als n -Tupel eindeutig nicht bekannt.

Die Person begründete ihre Meinung, dass ein Vektor maximal aus drei untereinanderbeschriebenen Zahlen bestehen kann, damit, dass die Zahlen immer x , y und z darstellen und die vierte Zahl dann keine sinnvolle Bedeutung haben kann.

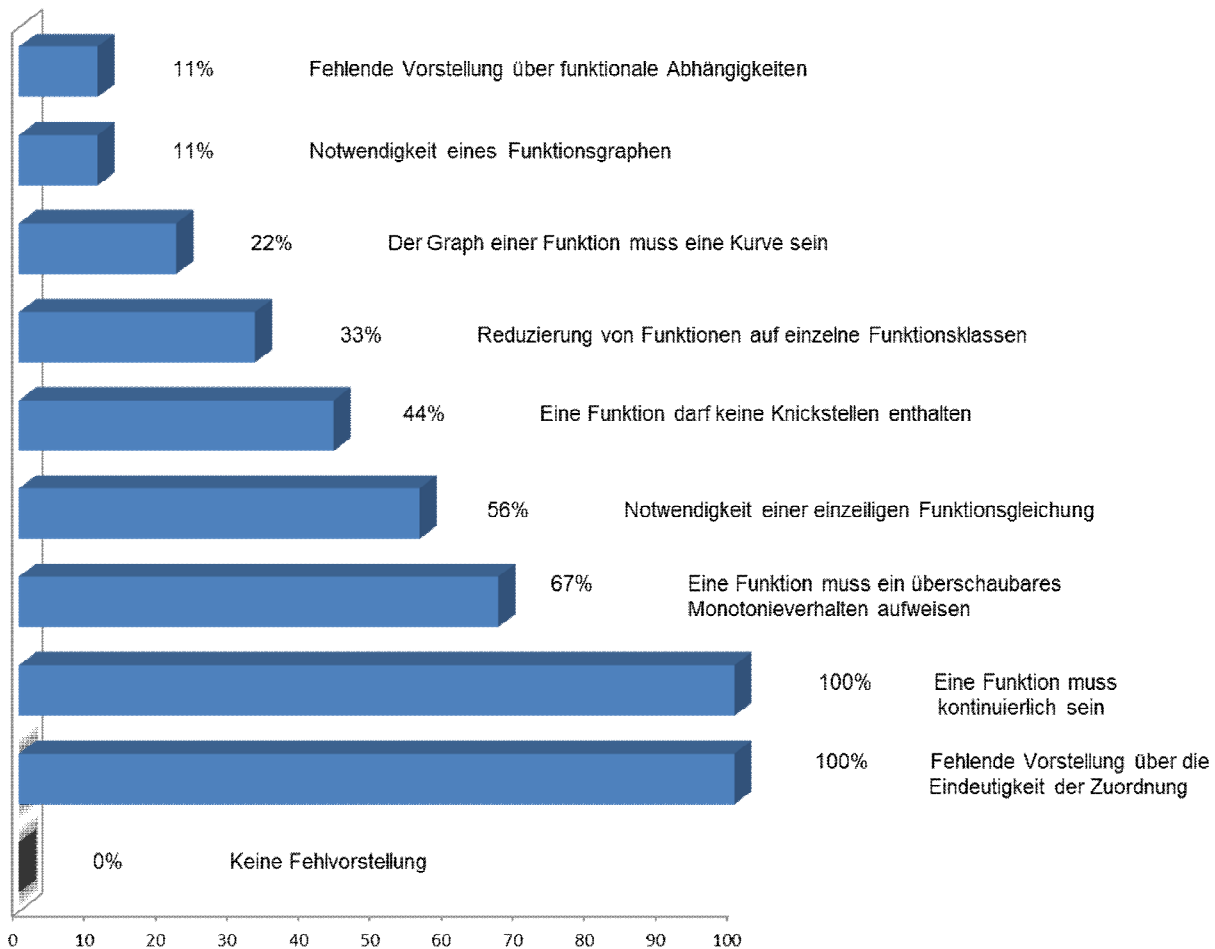
5.1.3. Themenbereich Funktionen

Aufgabe 1

Im Folgenden sind Darstellungen von Kurven und Gerade gegeben. Bei welcher dieser Abbildungen handelt es sich um eine Funktion y von x ?



Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Das Themengebiet Funktionen bringt die interessante Beobachtung, dass keine der interviewten Personen wusste, welches Kriterium ein Graph erfüllen muss, damit er eine Funktion darstellt. Die wichtige Definition einer Funktion, nämlich die Eindeutigkeit der Zuordnung, konnte bei keiner befragten Person als präsenste Grundvorstellung festgestellt werden.

Auf die Frage, nach welchen Kriterien bestimmte Graphen als Funktion erkannt oder ausgeschlossen wurden, entsprachen die meisten Antworten den Fehlvorstellungen, dass eine Funktion kontinuierlich sein muss, keine Knickstellen enthalten darf und ein eindeutiges Monotonieverhalten aufweisen muss.

Alle Interviewpersonen beschrieben Graph e als keine Funktion, da sie „nicht kontinuierlich ist“ (Interview 3) oder weil es „drei unterschiedliche Funktionen sind“ (Interview 6). Eine andere Person begründet: „Weil in meinem Kopf Funktionen immer solche durchgehenden Linien waren.“ (Interview 22)

Mit derselben Begründung wurde auch Graph a von manchen als Funktion ausgeschlossen, da es sich hier maximal um „zwei unterschiedliche Funktionen“ handeln kann (Interview 6). Andere erkannten Graph a jedoch schon als Funktion.

Ob eine Funktion Knickstellen haben darf, wurde unterschiedlich beantwortet, doch die Stetigkeit wurde von allen Testpersonen als Voraussetzung einer Funktion angenommen.

Manche Teilnehmenden hatten eine sehr präzise Vorstellung von einzelnen Funktionsklassen. So zum Beispiel eine Interviewperson, die meinte, nur Abbildung c und i seien Funktionen. Man kann davon ausgehen, dass sich die Vorstellung einer Funktion hier auf die Funktionsklasse der Parabeln beschränkt.

Die Graphen b und d wurden beide häufig als Funktionen erkannt. Hier starteten einige Personen den Versuch, eine Funktionsgleichung anzugeben, dies wurde überwiegend auch richtiggemacht.

Dafür wurde Graph f meist nicht in die Kategorie Funktion eingeordnet. Es gab dafür zweierlei unterschiedliche Begründungen: Manche waren von dem Knick irritiert und meinten, dass eine Funktion nie so spitz sein dürfe. Andere begründeten dies darin, dass man keine einzeilige Funktionsgleichung aufstellen könne, die einen solchen Graphen darstellt. Auf meine Frage, ob und warum man zu jeder Funktion auch eine einzeilige Funktionsgleichung angeben können muss, antwortete eine Person:

„Weil die muss ja einen Zusammenhang zwischen zwei Variablen darstellen, zwischen x und y.“ (Interview 3)

In einer Studie von Vinner und Dreyfus wird von der Fehlvorstellung einer Funktion als Regel geschrieben. (Vinner und Dreyfus 1989) Diese Fehlvorstellung konnte aus diesen Interviews nicht eindeutig erkannt werden, doch vielleicht beruht diese Aussage auf einer solchen Vorstellung. Eine Funktion gibt den Zusammenhang

zweier Variablen an und dieser Zusammenhang wird als etwas Fixes, Unveränderbares betrachtet, als etwas, das in einer einzigen Funktionsgleichung formuliert wird. Jegliche Zusammenhänge zwischen den beiden Variablen, die nicht in einer einzigen Gleichung beschrieben werden können, können keine Funktion darstellen. Es scheint also, als würde die Funktionsgleichung als eine Art Vorschreibung oder Regel interpretiert werden, die für alle Werte der Definitionsmenge gelten muss.

In folgendem Interviewausschnitt schränkte die Person Funktionsgraphen auf Kurven ein und meinte, dass Geraden keine Funktionen darstellen.

B: „Wahrscheinlich glaub ich, ich glaub jetzt eigentlich, vielleicht sind Geraden keine Funktionen. Vielleicht sind nur die eine Funktion (zeigt auf alle Kurven: c, f, g, i).“

I: „Wie kommst du darauf, dass Geraden keine Funktion sind?“

B: „Weil es Geraden sind. Genau. Weil man eine Geradengleichung aufstellen kann. Das ist eigentlich keine Funktionsgleichung. Glaub ich. Ich weiß nicht, was eine Funktionsgleichung ist.“ (Interview 6)

Die Person ist unschlüssig und unsicher, ob ihre Gedanken auch wirklich richtig sind, deshalb versucht sie noch weiter nachzudenken, was denn nun wirklich eine Funktion ist und woran man eine Funktion als solche erkennt.

I: „Hast du eine Idee oder eine Vorstellung, wie man erkennen kann, ob es eine Funktion ist oder nicht?“

B: „Vielleicht wenn es sich irgendwie wiederholt oder so, zum Beispiel durch ein Hochzeichen. F von x ist Ypsilon Quadrat. Mir kommt jetzt gerade vor, dass Funktionsgleichungen das mit dem Quadrat haben.“ (Interview 6)

Hier beschränkt die Person Funktionen auf die Funktionsklasse der quadratischen Funktionen. Sie beruft diese Einschränkung darauf, dass der Graph einer Funktion

sich immer periodisch wiederholen muss, was nur dann der Fall ist, wenn das x eine Hochzahl hat. Die Einschränkung auf Funktionen, dessen Graph eine periodische Wiederholung aufweist, deutet auf die Fehlvorstellung hin, dass ein Graph über ein überschaubares Monotonieverhalten verfügen muss.

I: „Wie kann man anhand eines Graphen erkennen, ob es ein Funktionsgraph ist oder ob es nur irgendeine Kurve ist?

B: „Weil sie sich periodisch wiederholt, oder so. Ich glaube, eine Funktion müsste sich, müsste sich schon innerhalb von einem Abschnitt dann irgendwann wiederholen. [Person zeigt es anhand einer Abbildung] Wenn das eine Funktion wäre, müsste sie sich da dann wiederholen. (...) Ja, weil durch die Hochzahl kann sie sich nur selbst potenzieren.“ (Interview 6)

Eine ähnliche Aussage über ein überschaubares Monotonieverhalten wurde in einem weiteren Interview getätigt. Auf die Frage, was einen Graphen zu einer Funktion macht, antwortete die Person, dass „in irgendeiner Form eine Regelmäßigkeit drinnen sein“ muss (Interview 14). Die Person zeigte dabei auf einen Funktionsgraphen dritten Grades. Ich erweiterte den Graphen mit ein paar Kurven und stellte die Frage, ob der Graph nun noch immer eine Funktion darstellt. Die Person antwortete, dass sie das jetzt nicht mehr tut, obwohl es sich noch immer um eine Funktion handelte.

Die Person erkennt also eine Funktion dritten Grades als solche, doch eine abgeänderte Funktion mit mehreren, unterschiedlich stark gekrümmten Kurven wird nicht mehr als eine Funktion erkannt. Dies deutet auf das Vorhandensein der Fehlvorstellung von einem überschaubaren Monotonieverhalten einer Funktion hin.

Eine interviewte Person verfügt nur über eine graphische Vorstellung von Funktionen. Sie setzte den Graph einer Funktion mit einer Funktion gleich und behauptete, dass es keine andere Darstellungsmöglichkeit einer Funktion gibt.

In einem weiteren Interview stellte sich heraus, dass eine Person keine Vorstellung von funktionalen Abhängigkeiten im Allgemeinen hatte. Diese Beobachtung bestätigt sich in der Beantwortung der Frage, ob es einen Unterschied zwischen den beiden Achsen gibt.

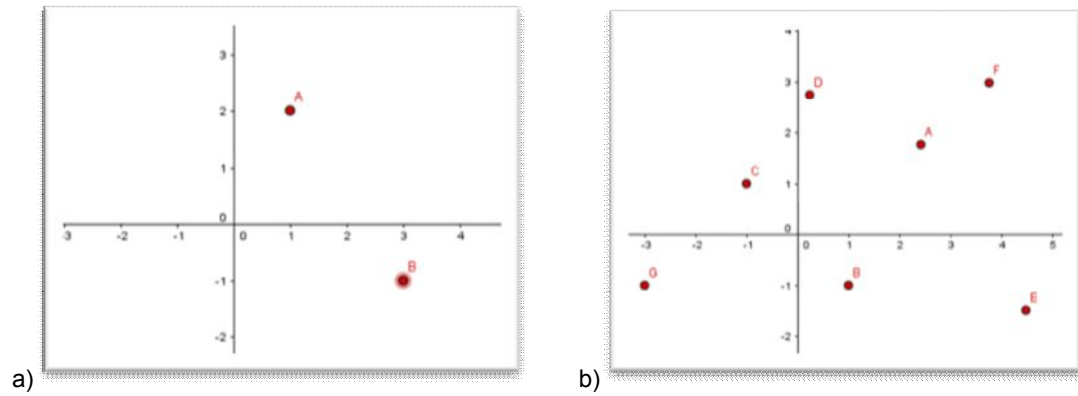
B: „Ja sicher spielt das immer zusammen, also, jetzt auch wenn man sich die Fläche oder so ausrechnen möchte mit den Funktionen, dann muss man das ja auch zum Beispiel multiplizieren, damit man eine Fläche ausrechnen kann.“

I: „Was muss man multiplizieren?“

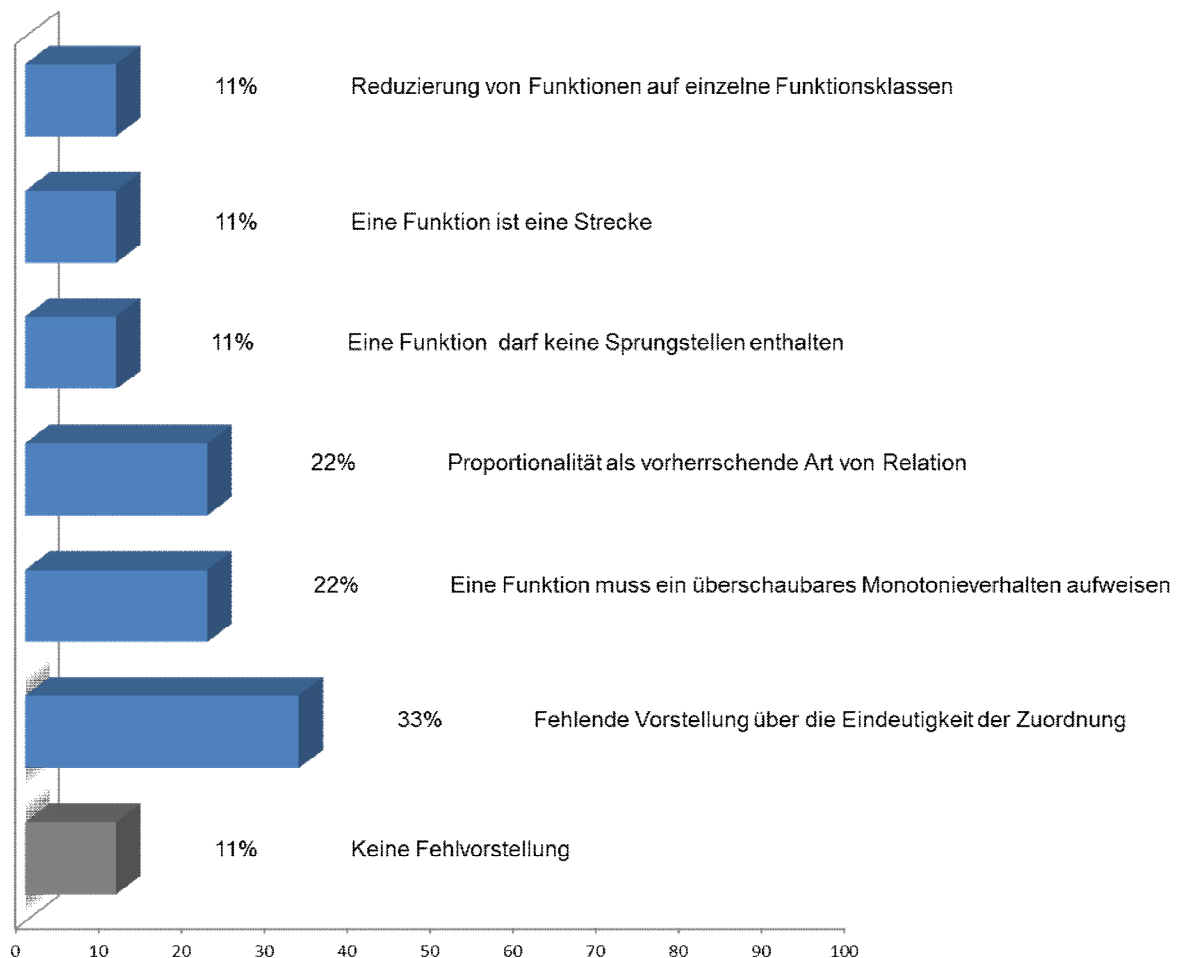
*B: „Die x-Achse mal der y-Achse, damit man eine Fläche bekommt.“
(Interview 7)*

Aufgabe 2

Welche „Funktionsgraphen kannst du zeichnen, die durch alle folgenden Punkte gehen?“ (vgl. Hoffkamp 2011:24)



Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Die Auswertung dieser Aufgabe ergibt die interessante Beobachtung, dass der erste Graph, der in Abbildung a eingezeichnet wird, bei 78% der befragten Personen eine Gerade ist. Knapp 30% davon meinten, dass diese Gerade die einzige Möglichkeit eines Funktionsgraphen durch die beiden gegebenen Punkte darstellt.

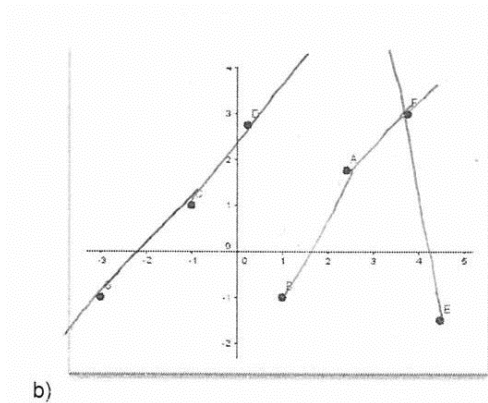


Abb. aus Interview 7

Eine Person zeichnete sogar in Abbildung b nur lineare Funktionen ein, indem sie die Punkte linear miteinander verband. Bei diesen Personen lässt sich also die Fehlvorstellung »Proportionalität als vorherrschende Art von Relation« feststellen, bei den anderen handelt es sich um eine Überbewertung der Proportionalität im Sinne einer primären Vorstellung, aber nicht im Sinne einer Fehlvorstellung.

Aus der Analyse der Interviews entsteht die Vermutung, dass insbesondere dann bevorzugt Geraden eingezeichnet wurden, wenn diese Aufgabe die erste gestellte Aufgabe war. Wenn vor dieser Aufgabe hingegen Aufgabe 1 bearbeitet wurde, zeichneten die Personen auch Kurven als Funktionsgraphen ein, da die Vorstellung einer Kurve als Graph aus dieser Aufgabe gespeichert worden war. Diese Beobachtung ist aber aufgrund der viel zu kleinen Befragungsgruppe nicht repräsentativ und kann nur als Vermutung formuliert werden.

Allgemein konnte beobachtet werden, dass in Abbildung a vorwiegend spezielle Funktionen eingezeichnet wurden, wie Geraden, Parabeln und Funktionen dritten Grades. Einige beantworteten die Frage nach der Anzahl der möglichen Funktionen mit unendlich viele, andere aber behaupteten, dass die eingezeichnete

Gerade oder Parabel die einzige Möglichkeit ist. Die Auswahl der Funktionsgraphen ist hier also auf einzelne Funktionsklassen beschränkt.

Bei Abbildung b kann aber keine solche spezielle Funktion einer bestimmten Funktionsklasse eingezeichnet werden. Eine Person äußert deshalb:

„Da wären wir wieder bei der Frage, ob die mehreren Hügel, ob das (lacht) [eine Funktion ist]. Ich würd sagen, da kannst du keine Funktion einzeichnen.“ (Interview 22)

Die Person hat die Fehlvorstellung einer Funktion mit überschaubarem Monotonieverhaltens verinnerlicht und schließt daher jegliche Möglichkeiten mit „mehreren Hügeln“ aus.

Keine der befragten Personen nannte die trivialste Lösung der Aufgabe, nämlich dass die Menge der Punkte bereits eine Funktion ergeben kann, wenn die Zuordnung dieser entspricht.

Ein Teil der Personen beachtete beim Einzeichnen der Graphen die eindeutige Zuordnung nicht, sondern zeichnete parabelähnliche Kurven ein, die keine Funktion darstellten.

Bei Abbildung b zeichneten fast alle Personen intuitiv einen richtigen Funktionsgraphen ein. Es konnte beobachtet werden, dass die Punkte immer als lokale Extrema in den Graphen integriert wurden, also als Höhepunkt oder Tiefpunkt verwendet wurden. Beim Versuch, weitere Funktionsgraphen zu finden, entstanden aber Graphen, die weit von der Definition einer Funktion entfernt waren. Keine einzige Person konnte einen zweiten richtigen Funktionsgraphen einzeichnen.

Manche meinten, dass es gar keine Möglichkeit gibt, ein Graph einzuzichnen, der durch alle Punkte geht, da die Kurve dann „zu steil“ wäre und die Höhepunkte „zu eckig“ (Interview 3). Hinter dieser Ansicht steckt die Fehlvorstellung einer Funktion mit überschaubarem Monotonieverhalten sowie die Fehlvorstellung, dass eine Funktion stetig sein muss.

Letzteres zeigte auch folgende Interviewsituation, bei der eine Person, die eine Kurve durch die Punkte in Abbildung b eingezeichnet hatte, die Spitzen der Kurve aber ausbesserte und abrundete.

I: „Warum hast du die Kurve gerade verändert?“

B: „Weil sie da nicht so spitz sein können.“

I: „Warum kann sie das nicht?“

B: „Weil dann ist es glaub ich keine Funktion, sondern eher zwei Geraden, die da aufeinandertreffen.“ (Interview 6)

Eine sehr gegenteilige Vorstellung von Funktionen ist die einer Strecke bzw. einer Aneinanderreihung mehrerer Strecken. Diese Vorstellung machte sich (wie bereits erwähnt) bei einer Person durch das lineare Verbinden der Punkte bemerkbar. Außerdem startete die Person den Graphen immer im Nullpunkt oder an einem Punkt an den Achsen.

Auf meine Frage hin, warum sie genau im Nullpunkt zu zeichnen beginnt bzw. ob die Funktion auch ins Unendliche gehen kann, antwortete die Person:

*„Bei einer Funktion muss es immer einen Anfangs- und einen Endpunkt geben, oder?“
(Interview 7)*

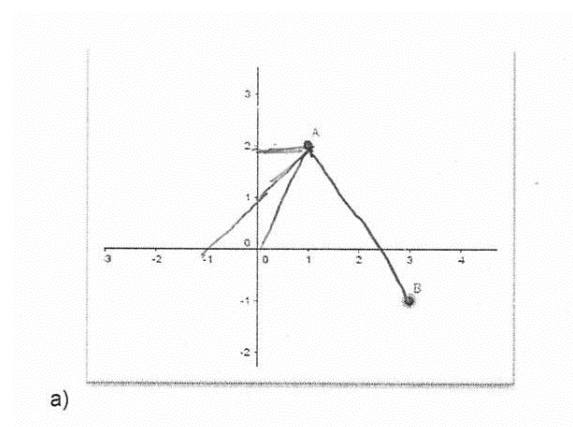


Abb. aus Interview 7

Aufgabe 3

Bei welcher dieser Gleichungen handelt es sich um eine Funktion y von x ?
Begründe deine Antwort!

a. $y = 3 \cdot x - 22$

e. $\frac{x^2+3x-23}{5} = y - 23$

b. $y = 4 + \frac{x}{2}$

f. $x^2 = y$

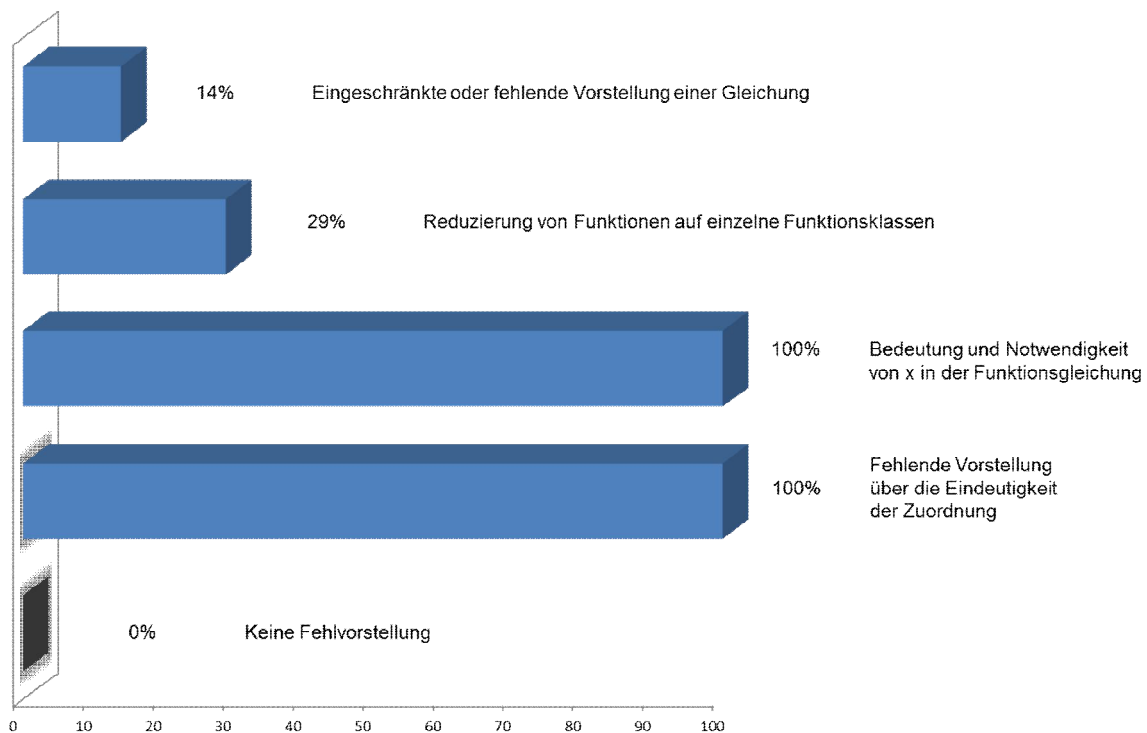
c. $4 \cdot x = 3 \cdot y$

g. $y^2 = x$

d. $x = 25$

h. $y = 3$

Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Eine fehlende Vorstellung über die Eindeutigkeit der Zuordnung konnte bei allen Testpersonen festgestellt werden, da niemand Beispiel d und g mit der Begründung ausschloss, dass diese Zuordnung keine Funktion darstellt. Dieselbe Erkenntnis bringt auch Aufgabe 1 mit sich und sie zeigt, dass die Vorstellung der eindeutigen Zuordnung tatsächlich nicht in den Denkstrukturen von Erwachsenen verankert ist.

Die meisten Interviewpersonen vertraten die Meinung, dass eine Funktion die Abhängigkeit zweier Variablen darstellt und aus diesem Grund immer auch zwei Variablen, nämlich x und y , in der Funktionsgleichung vorkommen müssen.

Eine Person schloss Beispiel d und h mit folgender Begründung aus:

*„Da fehlt das Ypsilon. X ist gleich 25 ist nur ein Punkt, nein nicht einmal. Und bei h ist es dasselbe. H ist keine Funktion, weil eine Funktion muss ja immer zwei Variablen haben. Eine Funktion ist es nur, wenn zwei Variablen vorkommen und deren Abhängigkeit voneinander gegeben ist.“
(Interview 6)*

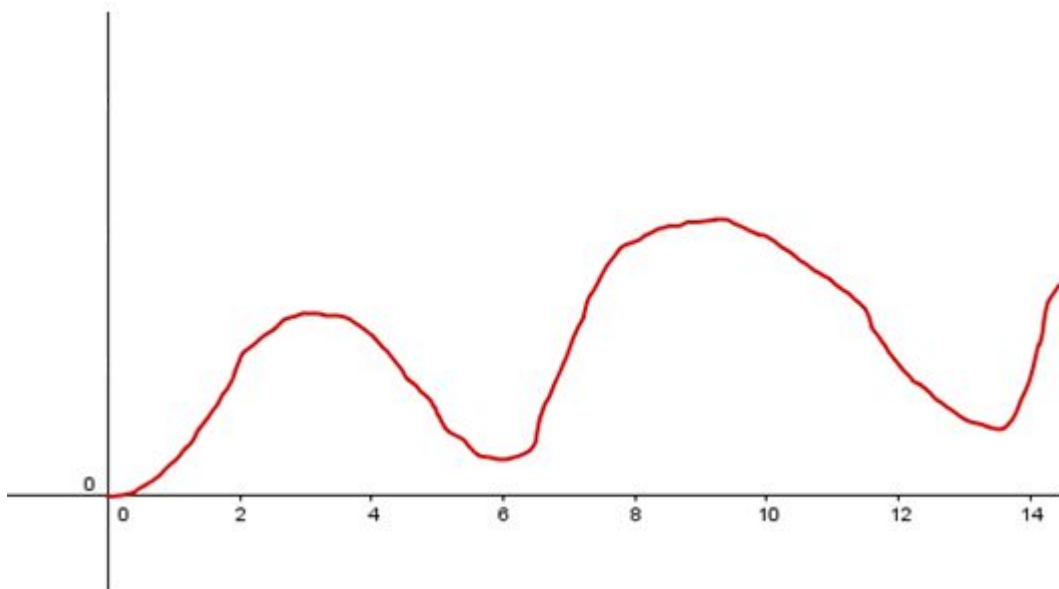
Eine Person erkannte nur Beispiel f und g als Funktion und äußerte, dass die anderen Beispiele nur eine normale Gleichung sind, aber keine Funktion darstellen. Die Vermutung liegt nahe, dass Beispiel f und g hier als Parabeln erkannt wurden und eine Beschränkung von Funktionen auf die Funktionsklasse der Parabeln vorliegt. Die Beschränkung auf die Funktionsklasse der Parabeln konnte auch bei Aufgabe 1 beobachtet werden.

Ein ähnlicher Zugang kann bei einer weiteren Person beschrieben werden, die zu Beginn der Aufgabe die allgemeine Funktionsgleichung $y = k \cdot x + d$ aufschreibt. Sie kommentierte, dass diese Gleichung erfüllt werden muss, um eine Funktion zu sein und äußerte, dass die Beispiele a, b, c und e aus diesem Grund eine Funktion beschreiben. Hier erfolgt die Beschränkung auf die Funktionsklasse der linearen Funktionen.

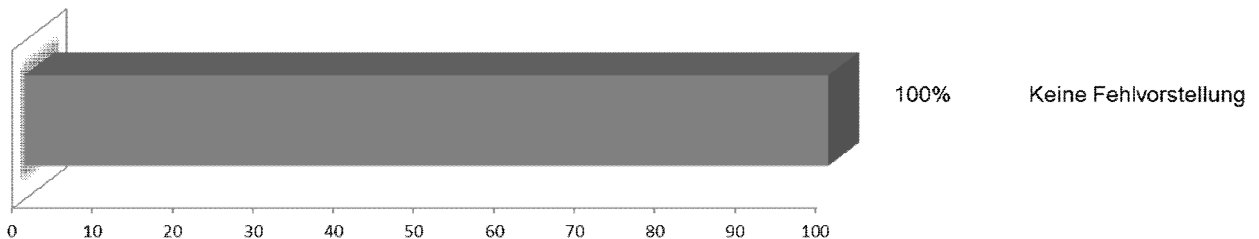
Unerwarteter Weise konnte bei dieser Aufgabe eine Fehlvorstellung aus dem Themenbereich Variablen festgestellt werden, nämlich eine eingeschränkte oder fehlende Vorstellung einer Gleichung. Die betroffene Person erkannte Beispiel a und b als Funktion, Beispiel e ordnete sie jedoch wegen des Bruchstriches keiner Funktion zu. Den Unterschied zu Beispiel b erklärte die Person damit, dass der Bruchstrich dort auf der anderen Seite ist. Es stellt sich heraus, dass die Person nur Gleichungen als Funktionen erkennt, bei denen das Ypsilon links vom Gleichheitszeichen steht und rechts „die Zahlen und das x“ (Interview 22). Dieselbe Person beschrieb f und g nicht als Funktion, weil „da keine Zahlen stehen“ (Interview 22).

Aufgabe 4

Eine Mountainbikerin legt in den ersten 14 min ihres Rennens eine hügelige Strecke mit folgender Geschwindigkeit zurück. Interpretiere die Graphik des Rennens:



Auswertung

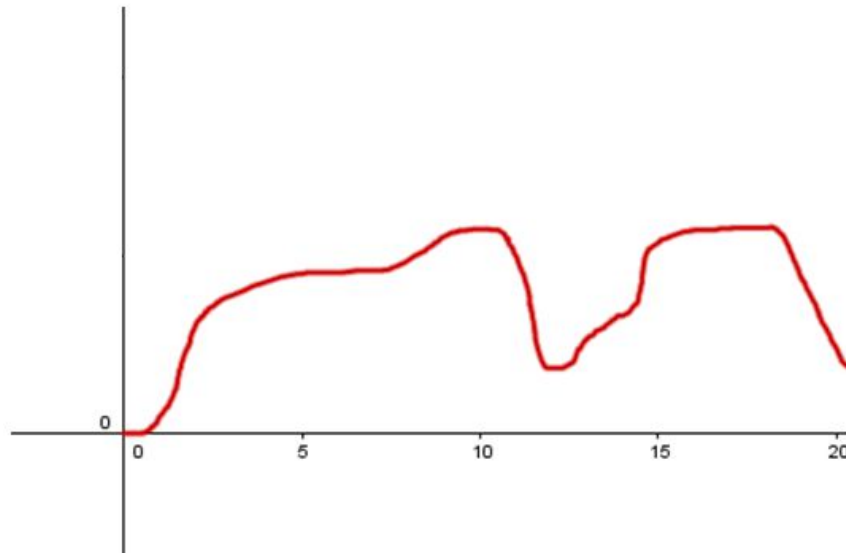


Kommentar / Interviewausschnitt

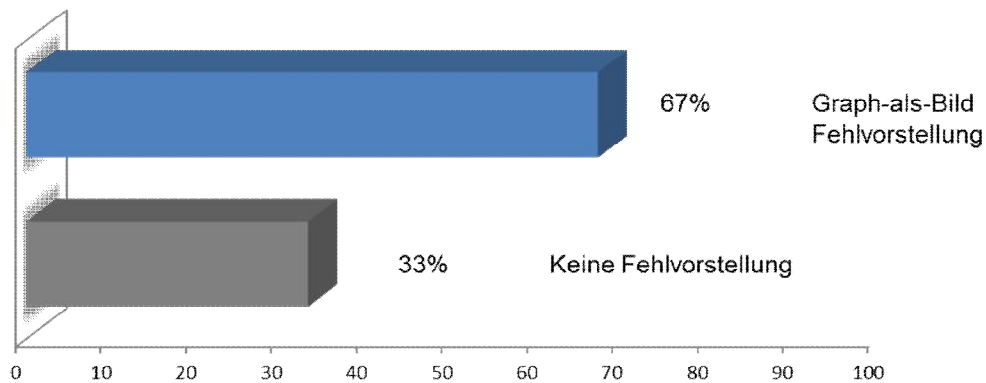
Obwohl doch einige Interviewpersonen nicht beantworten können, was die Grundidee einer Funktion ist, erkannten bei dieser Aufgabe alle die Idee des Funktionsgraphen und konnten diesen richtig deuten.

Aufgabe 5

Interpretiere folgende Funktion, die die Beschleunigung eines Rennautos auf einer Rennstecke in den ersten 20 Sekunden angibt.



Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

Der häufigste Irrtum beim Lösungsvorgang dieser Aufgabe lag darin, dass die Teilnehmenden den Graphen so interpretierten, als würde die Y-Achse wie in der vorigen Aufgabe die Geschwindigkeit angeben und nicht die Beschleunigung. Die Interviewpersonen erklärten bei einem steigenden Funktionsabschnitt, dass die Beschleunigung größer wird. Auf meine Frage, was dies für die Geschwindigkeit des Autos bedeutet, erklärten sie, dass das Auto schneller wird. Gleiches wird

über einen fallenden Funktionsabschnitt ausgesagt, nämlich dass die Beschleunigung geringer wird und somit auch die Geschwindigkeit.

Diese falsche Auffassung der Abbildung kann nicht daran liegen, dass die Aufgabe falsch oder schlampig gelesen wurde, da mehrmals darauf hingewiesen wurde, dass es in dieser Aufgabe um die Beschleunigung geht. Folgender Interviewausschnitt spiegelt diesen Denkvorgang gut wieder:

„Die Beschleunigung sinkt ab, er wird langsamer, er bremst.“ (Interview 10)

Gründe für diesen Denkfehler können einerseits sein, dass der Begriff Beschleunigung nicht ganz klar ist, wobei die mathematische Verwendung mit der alltagssprachlichen Verwendung des Begriffes übereinstimmt.

Naheliegend erscheint folgende andere Überlegung: Der Graph in Aufgabe 4 entspricht einer direkten Darstellung der Geschwindigkeit des Autos. Ein steigender Funktionsabschnitt zeigt eine steigende Geschwindigkeit an, ein fallender Funktionsabschnitt eine fallende Geschwindigkeit und ein konstanter Funktionsabschnitt eine konstante Geschwindigkeit. Der Graph übernimmt also die Rolle einer direkten Abbildung der Geschwindigkeitsveränderung.

Bei dieser Aufgabe erfolgt die Darstellung der Sachzusammenhänge auf einer anderen Ebene als der bloßen direkten Abbildung. Ein steigender Funktionsabschnitt zeigt im positiven Bereich eine steigende Geschwindigkeit an, ein konstanter Funktionsabschnitt zeigt im positiven Bereich ebenso eine steigende Geschwindigkeit an, wie das genauso auch ein fallender Funktionsabschnitt im positiven Bereich tut. Hier hängt die Veränderung der Geschwindigkeit nicht mit der Veränderung des Graphen zusammen, solange dieser im positiven Bereich liegt. Somit liegt hier keine direkte Abbildung vor. Wenn dies nicht erkannt wird, sondern der Graph trotzdem im Sinne einer Abbildung direkt abgelesen wird, handelt es sich im weitesten Sinne um eine Graph-als-Bild Fehlvorstellung.

Aufgabe 6

„Die gestrichelte Linie [der ersten Abbildung] wird vom Punkt A um die Entfernung x nach rechts gezogen. Der Wert $F(x)$ gibt die Größe der grau unterlegten Fläche an.“ Welcher Graph stellt diese Vergrößerung richtig dar? Begründe deine Wahl! (Hoffkamp 2011:12)

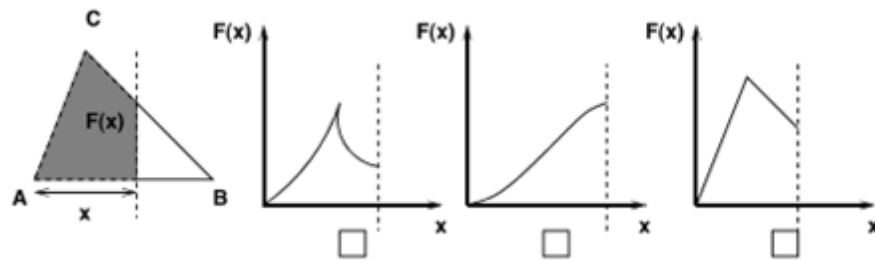
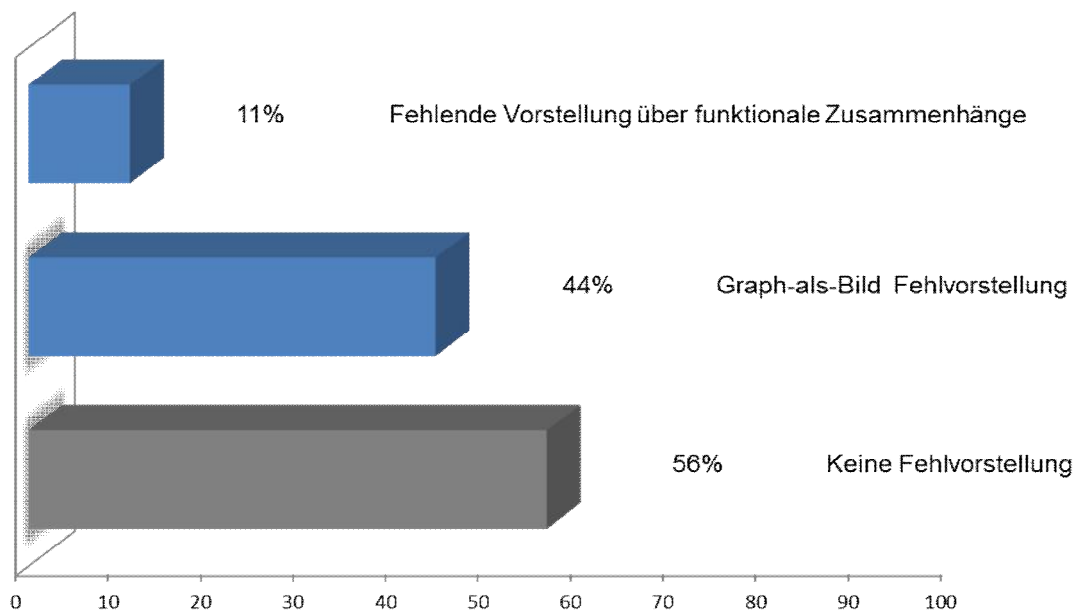


Abb. Bifie Aufgabenpool

Auswertung



Kommentar / Interviewausschnitt

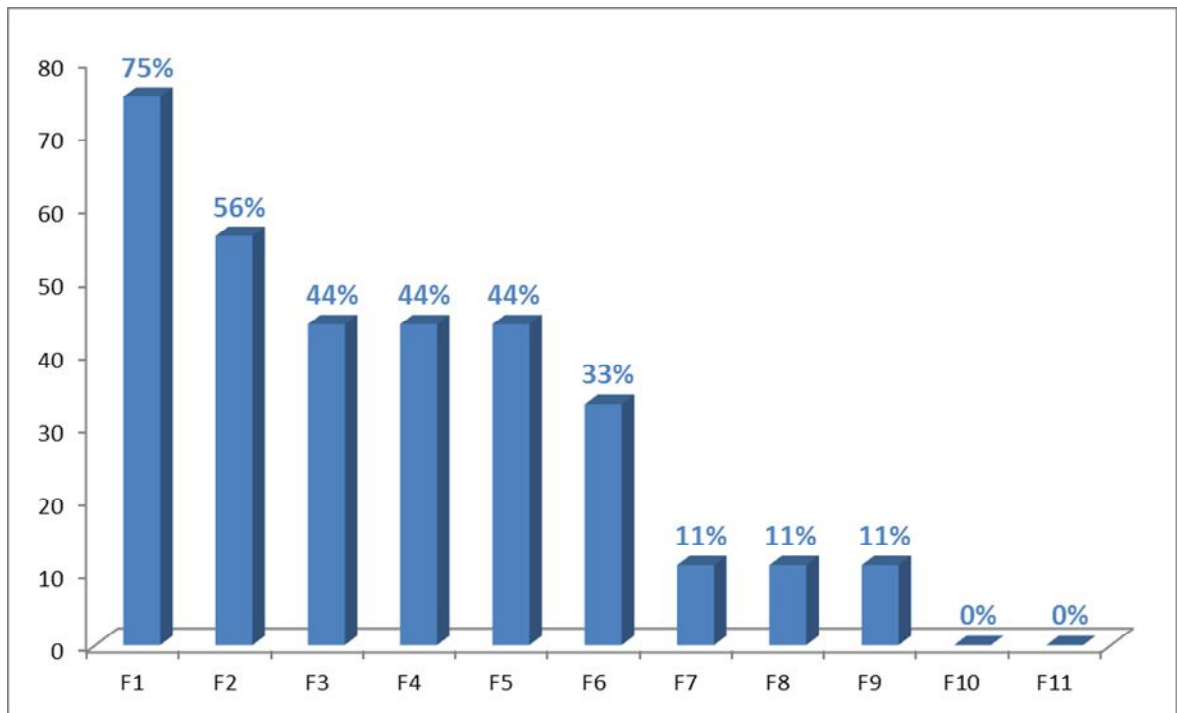
Die Entscheidung für Abbildung 3 als Lösung der Aufgabe lässt sich bei mehreren Personen beobachten und impliziert eine Graph-als-Bild Fehlvorstellung.

Eine Person erkannte trotz verbaler Hilfestellungen nicht, dass die Dreiecksfläche für ein größer werdendes x stets zunimmt, sondern interpretierte, dass die Fläche nach der Dreiecksspitze wieder kleiner wird. Außerdem verglich die Person die Fläche der Abbildung mit der Fläche zwischen dem Graphen und der x -Achse und entschied sich deshalb für Abbildung 3, da diese Abbildung „den Flächenverlauf vom ersten anzeigt“ (Interview 7). Die Person verfügte über keine Vorstellung von funktionalen Zusammenhängen und differenzierte nicht zwischen Abbildung und Graph. Die Entscheidung für Abbildung 3 als Lösung kann auf eine Graph-als-Bild Fehlvorstellung zurückgeführt werden.

5.2. Quantitative Auswertung in den einzelnen Kategorien

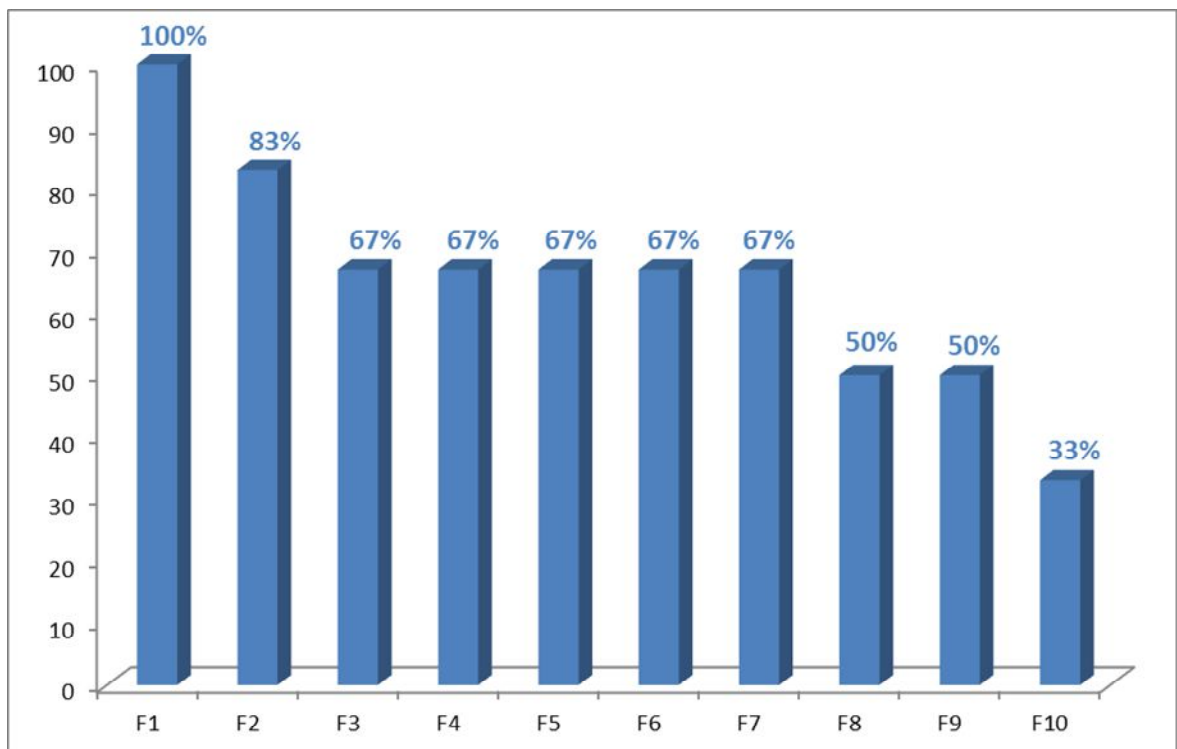
Dieser Teil der Auswertung gibt Auskunft über die Häufigkeit diverser Fehlvorstellungen, die bei der Durchführung der Interviews zum Vorschein kamen. Bei der Auswertung der Interviews wird auf prozentuelle Angaben über richtig und falsch beantwortete Aufgaben der einzelnen Interviewpersonen verzichtet, da eine solche Datenerhebung kein Teil der Arbeit darstellt. Es werden prozentuelle Angaben über beobachtete Fehlvorstellungen gemacht, welches nicht unbedingt mit der Richtigkeit der Lösung korreliert. Einerseits steht nicht jede falsch gelöste Aufgabe mit einer Fehlvorstellung in Verbindung, da auch andere Gründe für das nicht oder falsche Lösen einer Aufgabe vorliegen können. Andererseits wurden Aufgaben manchmal richtig gelöst, doch trotzdem konnte aus dem Gespräch eine Fehlvorstellung erkannt werden. Meine Datenerhebung beschreibt also den Anteil an Interviewpersonen, bei denen eine bestimmte Fehlvorstellung beobachtet wurde. Diese Fehlvorstellung kann bei einer Aufgabe oder bei mehreren unterschiedlichen Aufgaben vorgekommen sein. Gewertet wird eine bestimmte Fehlvorstellung pro interviewter Person nur einmal. Es kam ab und zu vor, dass Fehlvorstellungen, die in anfänglichen Aufgaben zum Vorschein kamen, sich bei späteren Aufgaben gelöst hatten. Diese Fälle werden nicht miteinberechnet, da sie im Laufe des Interviews richtiggestellt wurden.

Themengebiet Variablen



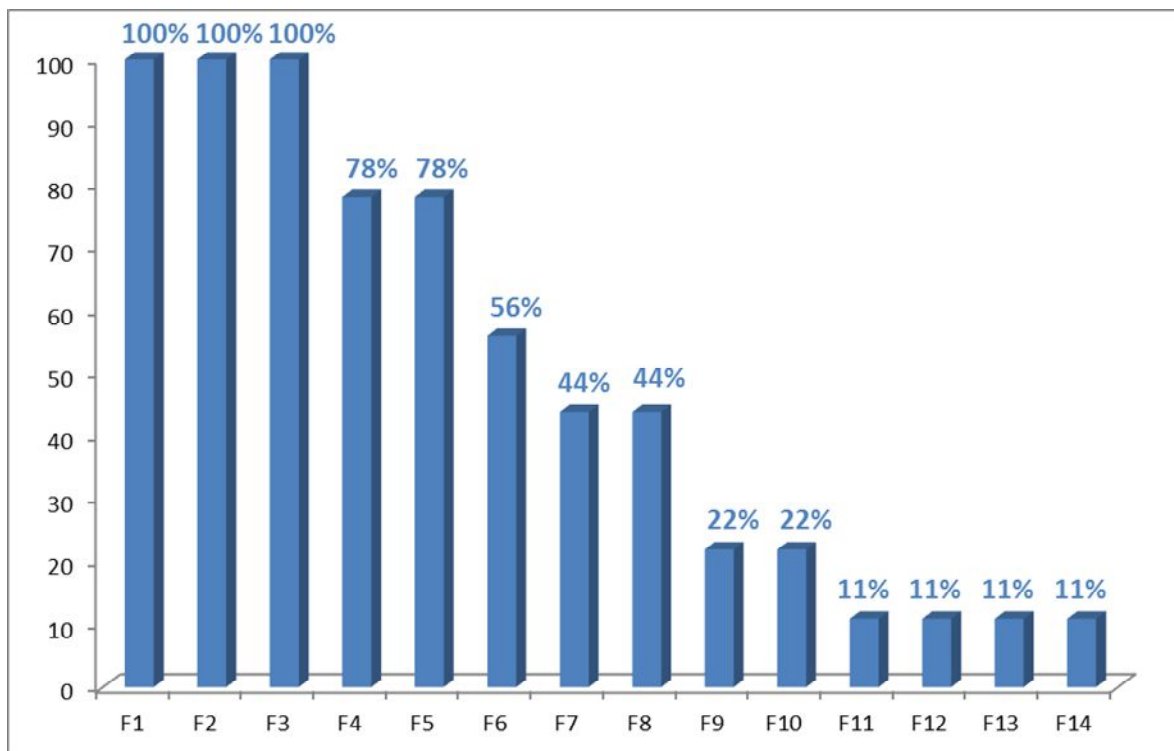
- F1 – Fehlende Vorstellung über direkte und indirekte Proportionalität sowie über lineare Zusammenhänge
- F2 – Eingeschränkte oder fehlende Vorstellung einer Gleichung
- F3 – Falsche Interpretation von Variablen und ihre Bedeutung im Kontext
- F4 – Variable als Abkürzung einer Einheit statt als Zahlenwert
- F5 – Wortreihenfolge als Variablenreihenfolge
- F6 – Unterschiedliche Variablen können nicht denselben Wert haben
- F7 – Variable als Repräsentant unterschiedlicher Werte
- F8 – Variable als fixierte Mengeneinheit
- F9 – Variablen als stets positive Zahlen
- F10 – X ist immer 1
- F11 – Alphabetischer Wert einer Variable

Themengebiet Vektorrechnung



- F1 – Unklarheit bezüglich Richtung und Orientierung
- F2 – Fehlende Vorstellung über den Zusammenhang zwischen arithmetischer und geometrischer Darstellung der Summe eines Vektors
- F3 – Vektor als Gerade
- F4 – Fehlende Vorstellung über den Zusammenhang zwischen arithmetischer und geometrischer Darstellung eines Vektors
- F5 – Fehlende Vorstellung von Vektor als n-Tupel
- F6 – Vektor als ortsgebundenes Objekt
- F7 – Vektoren können immer graphisch dargestellt werden
- F8 – Vektor als Länge oder Strecke
- F9 – Vektor als Richtungsangabe
- F10 – Fehlinterpretation von Punkt und Vektor

Themengebiet Funktionen



- F1 – Fehlende Vorstellung über die Eindeutigkeit der Zuordnung
- F2 – Eine Funktion muss kontinuierlich sein
- F3 – Bedeutung und Notwendigkeit von x in der Funktionsgleichung
- F4 – Eine Funktion muss ein überschaubares Monotonieverhalten aufweisen
- F5 – Graph-als-Bild Fehlvorstellung
- F6 – Reduzierung von Funktionen auf einzelne Funktionsklassen
- F7 – Eine Funktion darf keine Knickstellen enthalten
- F8 – Notwendigkeit einer einzeiligen Funktionsgleichung
- F9 – Proportionalität als vorherrschende Art von Relation
- F10 – Der Graph einer Funktion muss eine Kurve sein
- F11 – Notwendigkeit eines Funktionsgraphen
- F12 – Eine Funktion ist eine Regel
- F13 – Eine Funktion ist eine Strecke
- F14 – Fehlende Vorstellung über funktionale Abhängigkeiten

6. Diskussion der empirischen Ergebnisse

Der Hauptteil der Auswertungen zu den einzelnen Fehlvorstellungen wurde bereits in Kapitel 5 genauer ausgeführt. In diesem Kapitel widme ich mich Beobachtungen, die bis jetzt noch keine Erwähnung gefunden haben.

In der Menge der unterschiedlichen Fehlvorstellungen gibt es große Unterschiede zwischen den Aufgaben. Manche Aufgaben rufen viele unterschiedliche Fehlvorstellungen hervor, andere Aufgaben wiederum weisen nur ein oder zwei Fehlvorstellungen auf, die dafür meistens in einem hohen Ausmaß beobachtet werden können. Nur bei einer Aufgabe (Abschnitt 5.1.3, Aufgabe 4) konnte keine einzige Fehlvorstellung festgestellt werden. Meine Erwartung zu dieser Aufgabenstellung war das Aufdecken einer Graph-als-Bild Fehlvorstellung, indem ein steigender Graph als Berganstieg interpretiert wird und vice versa. Warum diese Erwartung nicht erfüllt wurde, kann nicht eindeutig beantwortet werden. Unter anderem kann es an der geringen Stichprobe der Studie liegen. Die Graph-als-Bild Fehlvorstellung konnte dafür in Aufgabe 6 in hohem Ausmaß festgestellt werden.

Außerdem zeigen die Analysen der Interviews, dass das Thema Vektorrechnung die größte Schwierigkeit für die Teilnehmenden darstellte, denn bei zwei Proband*innen wurde das Interview frühzeitig beendet, da sie aufgrund fehlender Erinnerungen zu keiner einzigen Aufgabe eine Aussage tätigen konnten. Auch die übrigen Testpersonen waren mit der Schwierigkeit konfrontiert, eine grundlegende Vorstellung eines Vektors zu haben. Ein Grund dafür könnte sein, dass dieses Themengebiet im Gegensatz zu den anderen beiden in der alltäglichen Konfrontation mit Mathematik relativ wenig Bedeutung findet und somit die Vorstellung der Begrifflichkeit an sich schon weniger präsent ist.

Diese Problematik war bei der Vektorrechnung schon absehbar, weshalb ich mich umso mehr bemüht habe, die Aufgaben so zusammenzustellen, dass man auf kein konkretes Wissen über Vektoren angewiesen war. Auch habe ich Aufgabe 3 bewusst gewählt, um in das Berechnen eines Vektors einzuführen. Diese

Grundproblematik war bei den anderen beiden Themengebieten nicht zu beobachten. Beim Themengebiet Variablen könnte dies daran liegen, dass der Begriff Variable sowie die Vorstellung, was eine Variable darstellt und wie man damit rechnet, für viele Erwachsene relativ klar ist. Beim Themengebiet Funktionen kann ebenso vermutet werden, dass ein intuitives Verständnis über Funktionen vorhanden ist, da Funktionen jeglicher Art im alltäglichen Leben und beim einen oder anderen vielleicht auch im Berufsleben vorkommen.

Einige Kommentare zu konkreten Fehlvorstellungen:

Der Themenbereich Vektorrechnung wies die interessante Fehlvorstellung auf, dass ein Vektor maximal drei Dimensionen annehmen kann. Diese Fehlvorstellung beruht auf der Beschränkung der geometrischen Verwendung von Vektoren. Aus geometrischer Sicht betrachtet, handelt es sich um eine logische Annahme, dass die drei Zahlen die Koordinaten x , y , und z darstellen, und eine vierte Zahl wenig Sinn machen würde. Aus allgemein mathematischer Sicht stellt ein Vektor jedoch in erster Linie eine $n \times 1$ -Matrix dar, die als Vorstufe zur Matrizenrechnung eingeführt wird. Geht man bei einem Vektor von einem n -Tupel aus, so gibt es eigentlich keinen Grund für die Fehlvorstellung, dass ein Vektor maximal drei Dimensionen annehmen kann.

Auf den ersten Blick scheint die geometrische Interpretation von Vektoren eine weniger abstrakte Anwendung zu sein als die n -Tupel Vorstellung. Doch bringt sie sehr schnell Probleme mit sich, da sie nur beschränkt übertragbar ist und mathematisch-logische Zusammenhänge verschwinden.

Eine ähnliche Situation bringen im Themengebiet Funktionen die Fehlvorstellungen, dass eine Funktion stetig sein muss und keine Knickstellen aufweisen darf. Es kann aus mathematischer Sicht keine Ursache für die Entstehung dieser Fehlvorstellungen geben, denn weder aus der Definition einer Funktion noch aus dessen Eigenschaften wird etwas über Knickstellen oder Stetigkeit angenommen. Man kann davon ausgehen, dass eine solche Vorstellung daher kommt, dass sich Funktionen im Unterricht häufig auf das Behandeln einzelner Funktionsklassen wie lineare, quadratische und kubische Funktionen beschränken. Die Reduzierung von Funktionen auf einzelne Funktionsklassen ist ein weiteres Beispiel für einen misslungenen Versuch der Vereinfachung einer für

den Unterricht anscheinend zu komplexen Materie, denn man vergisst dabei die aus dieser irreführenden Darstellung folgenden Konsequenzen.

Außerdem gibt es im Vergleich der geometrischen Aufgaben mit den arithmetischen Aufgaben in der Vektorrechnung eine interessante Auffälligkeit. In den beiden arithmetischen Aufgaben können bei 66% der Testpersonen keine Fehlvorstellungen diagnostiziert werden. Diese Zahl ist doch eindeutig höher als bei einigen der geometrischen Aufgaben, wie beispielsweise Aufgabe 3, 4 und 5 mit nur 33%.

Diese Tatsache erscheint auch aus dem Grund interessant, da erst seit wenigen Jahren Vektoren laut Lehrplan auch arithmetisch eingeführt worden sind und diese Art von Aufgabenstellungen noch nicht in den Schulbüchern der Teilnehmenden üblich war. Aufgabe 4 hingegen entspricht viel mehr einer Aufgabenstellung aus früheren Schulbüchern.

Trotzdem hatten die Testpersonen bei den geometrischen Aufgaben größere Schwierigkeiten, ihre intuitiven mathematischen Vorstellungen anzuwenden, als bei den arithmetischen Aufgaben. Die Personen kennen diese Art von Aufgabe nicht und haben deshalb keine Erinnerungen an Lösungsmodelle aus der Schulzeit. Es gibt kein standardisiertes Lösungsverfahren, auf das sie zugreifen können. Es bleibt ihnen also nichts anderes über, als auf ihre intuitiven mathematischen Vorstellungen zu vertrauen oder sie überhaupt erst zu aktivieren. Es scheint also, als sei das Zugreifen auf intuitive Vorstellungen bei bereits bekannten Aufgabentypen blockiert. Schließt eine frühere Auseinandersetzung mit einem Thema das Anwenden von Intuition aus oder handelt es sich um eine Folgewirkung unterrichtlichen Vorgehens?

Fehlvorstellungen aus der Literatur, die nicht in der Studie vorgekommen:

Aus den in der Theorie beschriebenen Fehlvorstellungen wurden in dieser Studie nicht alle festgestellt. Im Themenbereich Variablen konnten die Fehlvorstellungen »X ist immer 1«, »Prozess-Produkt-Dilemma« sowie »Alphabetischer Wert einer Variable« bei keiner der Testpersonen erkannt werden. Die Fehlvorstellungen

wurden unterschiedlichen Literaturnachweisen entnommen, die ausschließlich auf Studien beruhen, die bei Schüler*innen durchgeführt wurden. Dies könnte ein Grund sein, warum die Fehlvorstellungen meiner Studie nicht zur Gänze deckungsgleich mit den Fehlvorstellungen aus der Literatur sind. Besonders für die beiden Fehlvorstellungen »X ist immer 1« und »Alphabetischer Wert einer Variable« erscheint mir dieser Grund plausibel, da es sich hier um Vorstellungen handelt, die besonders bei der Einführung eines neuen Themengebietes durch unklare Materialien oder missverständliche Erklärungen entstehen können. Doch bei einer tieferen Auseinandersetzung mit der Materie können sich diese Vorstellungen nur schwer aufrechterhalten.

Ein anderer Grund ist natürlich auch die geringe Teilnehmerzahl und Aufgabenauswahl meiner Studie, die nur einen Ausschnitt aus möglichen Fehlvorstellungen im Erwachsenenalter beleuchten kann. Dies erscheint für mich als der Grund, warum die Fehlvorstellung »Prozess-Produkt-Dilemma« nicht beobachtet werden konnte.

7. Conclusio

Die vorliegende Arbeit analysiert Erwachseneninterviews im Hinblick auf Denkstrukturen und Denkstrategien. Die leitende Frage der Forschung war, in welchem Ausmaß mathematische Fehlvorstellungen bei Erwachsenen vorhanden sind. Die Interviews orientierten sich an diversen Aufgaben zu drei unterschiedlichen mathematischen Themenbereichen. Wichtig dabei war, dass durch das Erarbeiten der Aufgaben ein Gespräch entsteht, indem Denkvorgänge beleuchtet und mögliche Fehlvorstellungen konstatiert werden können.

Es folgt eine umfassende qualitative Auswertung der aufgabenspezifischen Beobachtungen, die von Interviewausschnitten unterstrichen werden. Um Informationen über das Ausmaß einzelner Fehlvorstellungen zu liefern, wird auch eine quantitative Auswertung der kategorisierten Fehlvorstellungen hinzugefügt.

Im vorhergehenden Theorieteil wird auf diverse Grundvorstellungsmodelle der Autoren Bender, Vom Hofe, Brousseau, Fischbein sowie Tall und Vinner verwiesen. Außerdem wird der empirische Forschungsstand zu Fehlvorstellungen in Kapitel 3 beleuchtet und theoretisch verortet, was als Grundlage für die empirische Studie dient.

Meine Forschungsfrage, in welchem Ausmaß Fehlvorstellungen bei Erwachsenen vorhanden sind, kann auf meine Zielgruppe bezogen (fern von mathematischen Bezügen) - wie folgt - beantwortet werden: Besonders bei den Themenbereichen Vektorrechnung und Funktionen konnte bei fast jeder Aufgabe bei mehr als der Hälfte der befragten Personen mindestens eine Fehlvorstellung beobachtet werden. Der Themenbereich Variablen liefert etwas abweichende Ergebnisse: Hier konnte bei fast allen Aufgaben (bis auf Aufgabe 6) bei mehr als der Hälfte der Proband*innen keine Fehlvorstellung festgestellt werden.

Der Vergleich der Analysen zu den unterschiedlichen Aufgaben führt also zur Erkenntnis, dass die Aufgaben zum Thema Variablen für Erwachsene einfacher zu lösen sind und in Summe weniger Fehlvorstellungen aufweisen als die anderen beiden Themenbereiche. Diese Erkenntnis beruht darauf, dass die Prozentzahl der Personen ohne Fehlvorstellungen bei Variablen deutlich höher ist als in den anderen Themengebieten. Meine aufgestellte Hypothese, dass im

Erwachsenenalter weniger Fehlvorstellungen vorhanden sind, je elementarer die Themengebiete sind, hat sich in dieser Stichprobe also bewahrheitet.

In Bezug auf den zweiten Aspekt meiner Forschungsfrage, inwieweit das Alter der Testpersonen die Ergebnisse beeinflusst, konnten keine Auffälligkeiten festgestellt werden, die die Vermutung zulassen, dass das Alter für das Ausmaß an Fehlvorstellungen eine entscheidende Rolle spielt.

Die Ergebnisse der Studie lassen sich nicht direkt auf die gesamte Bevölkerung übertragen, da es sich bei der Auswahl der Testpersonen nicht um einen repräsentativen Querschnitt der Gesellschaft handelt. Außerdem umfasst die Studie eine viel zu kleine Stichprobe, um aussagekräftige Ergebnisse zu erhalten. Mit einem Gesamtumfang von nur 25 Interviews mit neun unterschiedlichen Personen können keine quantitativen Aussagen getätigt werden.

Dennoch ist bemerkenswert, dass selbst bei Personen mit Hochschulabschluss das Ausmaß an vorhandenen Fehlvorstellungen auffällig hoch ist. Eine weiterführende Fragestellung könnte sich damit befassen, inwiefern der Ausbildungsgrad der Testpersonen die Ergebnisse beeinflusst.

Auch die Frage, wie Personen mit Fehlvorstellungen umgehen oder inwiefern sich vorhandene Fehlvorstellungen auf einen weiteren Lernprozess auswirken, stellt einen interessanten Aspekt dar, der zu untersuchen wäre.

Im Allgemeinen liegt zum Thema Fehlvorstellungen relativ wenig Literatur vor und der Großteil davon bezieht sich auf Themengebiete der Primarstufe. Im Vergleich zum Thema Grundvorstellungen stellen Fehlvorstellungen ein noch unerforschtes Gebiet dar. Der geringe Forschungsstand stellte eine Schwierigkeit für meine Studie dar, da einige Aspekte offen und unbeantwortet bleiben, doch soll die vorliegende Studie ein Anreiz dazu sein, weitere Forschung in diesem Bereich zu betreiben.

Was die Studie aber zeigt, ist, dass das Ausmaß an Fehlvorstellungen, die sich wahrscheinlich in der Schulzeit festgesetzt haben und seitdem nicht behoben wurden, so ergiebig ist und sich über eine so große Bandbreite erstreckt, dass es keinesfalls als Ausnahmefall oder als natürliche Folge von Lernen deklariert werden kann. Dies sollte durchaus ein Signal für Lehrende und ganz besonders

für Personen des politischen Diskurses sein, sich der Frage zu stellen, wie die Ausbildung von Vorstellungen grundsätzlich gefördert und beeinflusst werden soll. Eine Frage, worüber sich sogar Wissenschaftler*innen nicht einig sind. Auch die Frage nach den Gründen für eine fehlende oder misslungene Ausbildung von Grundvorstellungen bleibt im wissenschaftlichen Diskurs offen.

Literaturverzeichnis und Internetquellen

- AKGÜN**, Levent; **ÖZDEMİR**, M. Emin (2006): *Student's understanding of the variable as general number and unknown: a case study*. In: The teaching of mathematics, Vol. IX-1, pp. 45–51.
- BENDER**, Peter (1991): *Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen - ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht - erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen*. In: Helmut Postel, Arnold Kirsch und Werner Blum (Hg.): Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel. S. 48–59. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.
- BIFIE** (Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung)
Aufgabenpool zu Sekundarstufe II, AG2: (Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme, Aufgabe 1_157, Online verfügbar unter:
https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/index.php (Zugriff am 14.11.2016)
Aufgabenpool zu Sekundarstufe II, AG3: Vektoren, Aufgabe 1_056, Aufgabe 1_073, Aufgabe 1_296, Online verfügbar unter:
https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/index.php (Zugriff am 14.11.2016)
- BOOTH**, Lesley R. (1988): *Children's difficulties in beginning algebra*. In: The Ideas of Algebra. National Council of Teachers of Mathematics. K-12, pp. 299–306. Reston: A. F. Coxford (Ed.)
- CLEMENT**, John (1982): *Algebra word problem solution: thought processes underlying a common misconception*. In: Journal of Research in Mathematics Education, Vol. 13, No. 1, pp. 16–30.
- CLEMENT**, John; **LOCHHEAD**, Jack; **MONK**, Georg S. (1981): *Translation difficulties in learning mathematics*. In: American Mathematical Monthly, 88(4). pp. 288.

- EGODAWATTE**, Gunawardena (2011): *Secondary school students' misconceptions in algebra*. Dissertation, University of Toronto. pp. 39-47.
- FISCHBEIN**, Efraim (1987): *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. pp. 5-39. Online verfügbar unter <https://de.scribd.com/doc/163196879/Intuition-in-Science-and-Mathematics-E-Fischbein-2005-WW>. (Zugriff am 19.10.2016)
- GAHLER**, Christina (2014): *Didaktische Handlungsfähigkeit von Lehrpersonen in Bezug auf Fehlvorstellungen zu Vektoren*. Diplomarbeit, Universität, Wien. S. 14-53.
- HARTMANN**, Karin (1993): *Inhaltliche Vorstellungen von Vektoren. Eine Mathematische Untersuchung*. Diplomarbeit, Universität, Wien. S. 27-80.
- HEISTINGER**, Andrea (2006): *Qualitative Interviews - Ein Leitfaden zur Vorbereitung und Durchführung inklusive einiger theoretischer Anmerkungen*. S. 4-6. Online verfügbar unter https://www.uibk.ac.at/iezw/mitarbeiterinnen/senior-lecturer/bernd_lederer/downloads/durchfuehrung_von_qualitativen_interviews_uniwien.pdf (Zugriff am 22.12.2016)
- HOFFKAMP**, Andrea (2009): *Dynamisierter Repräsentationstransfer und Metavariation. Ein Ansatz zur Förderung funktionalen Denkens durch Computereinsatz*. In: Michael Neubrand (Hg.): *Beträge zum Mathematikunterricht*. S. 1. Berlin: WTM Verlag.
- HOFFKAMP**, Andrea (2011): *Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen. Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse*. Dissertation, Technische Universität, Berlin. S. 1-30.
- JARMER**, Monika (1995): *Empirische Untersuchung zur Vektorrechnung in der Schule*. Diplomarbeit, Universität, Wien. S. 20-145.

KÜCHEMANN, Dietmar (1978): *Children's understanding of numerical variables*.

In: Mathematics in School, Vol. 7, No. 4, pp. 23–26.

MacGREGOR, Mollie; **STACEY**, Kaye (1997): *Students' understanding of*

algebraic notation: 11-15. In: Educational Studies in Mathematics, Bd. 33.1, pp. 1–19. Kluwer Academic Publishers (Ed.).

McINTYRE, Zachary Scott (2005): *An analysis of variable misconceptions before*

and after various collegiate level mathematics courses. Master Thesis, The University of Main, pp. 9-63.

NITSCH, Renate (2013): *Von Lernschwierigkeiten. Lerntheoretisches Konzept zur*

Entstehung. Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. S. 1-2. Online verfügbar unter:

[http://www.mathematik.uni-](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2013/Einzelvortraege/BzMU13-Nitsch.pdf)

[dortmund.de/ieem/bzmu2013/Einzelvortraege/BzMU13-Nitsch.pdf](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2013/Einzelvortraege/BzMU13-Nitsch.pdf) (Zugriff am 12.11.2016)

PFEIFER, Eva-Maria (2012): *Grundvorstellungen zu funktionalen Abhängigkeiten -*

eine exemplarische Realisierung mittels Lernpfad. Diplomarbeit, Universität, Wien. S. 22-23.

TALL, David; **VINNER**, Shlomo (1981): *Concept image and concept definition in*

mathematics with particular reference to limits and continuity. In:

Educational Studies in Mathematics, Bd. 12, pp. 151–169. Kluwer Academic Publishers (Ed.).

USISKIN, Zalman (1988): *Conceptions of school algebra and uses of variables*. In:

The Ideas of Algebra. National Council of Teachers of Mathematics. K-12 8, pp.7. Reston: A. F. Coxford (Ed.)

VINNER, Shlomo; **DREYFUS**, Tommy (1989): *Images and Definitions for the*

Concept of Function. In: Journal of Research in Mathematics, Vol. 20, No. 4, pp. 356–366.

VOM HOFE, Rudolf (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akademischer Verlag. S. 97-106.

VOM HOFE, Rudolf (1996a): *Grundvorstellungen - Basis für inhaltliches Denken*. In: Mathematik lehren (78), S. 4–8.

VOM HOFE, Rudolf (1996b): *Über die Ursprünge des Grundvorstellungskonzepts in der deutschen Mathematikdidaktik*. In: Journal für Mathematik-Didaktik 17, S. 238–264.

VOM HOFE, Rudolf (2003): *Grundbildung durch Grundvorstellungen*. In: Mathematik lehren (118), S. 4–8.