



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Du Winkeldreiteiler!“

verfasst von / submitted by

Stefan Permesser

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on the
student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik

Betreut von / Supervisor:

Assoz. Prof. Doz. Dr. Michael Schlosser

Danksagung

Im Verlauf meines Studiums, speziell im Rahmen zahlreicher Übungen, Seminare und Praktika, habe ich viel mit Studienkolleginnen und -kollegen zusammengearbeitet. Diese Art der Zusammenarbeit schätze ich sehr.

Für die fachliche Betreuung während der Entstehung dieser Diplomarbeit bedanke ich mich bei Prof. Dr. Michael Schlosser.

Viel bedeuten mir auch die Ratschläge und die Unterstützung meiner Schwester. Besonderer Dank gilt meinen Eltern, ohne deren finanzielle sowie mentale Unterstützung mein Studium gar nicht erst möglich gewesen wäre.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	2
Einleitung	5
Überblick	6
Informationen zur Notation	7
1 Spielregeln	8
2 Die Unmöglichkeit der Winkeldreiteilung	11
2.1 Von der Konstruktion zur Algebra	12
2.2 Die Winkeldreiteilung aus algebraischer Sicht	26
2.3 Warum hat es mit dem Beweisen so lange gedauert?	30
2.3.1 Ein Zitat als Übergang zum nächsten Kapitel	32
3 Trisectoral Minds	33
3.1 Charakterisierung typischer Winkeldreiteiler	33
3.2 Bekanntgabe des Profils	39
4 Exakte Winkeldreiteilungen	40
4.1 ... mit einem markierten Lineal	41
4.2 ... mit der Quadratrix	46
4.3 ... mit der Archimedischen Spirale	49
4.4 ... mit der Kardioide	50
4.5 ... mit der Konchoide	52
4.6 ... mit der Trisektrix	54
4.7 ... mit Zimmermannswinkel und Schustermesser	57
4.8 ... mit Origami	59

5 Winkeldreiteiler in Onlineforen	62
5.1 Eine simple Näherungskonstruktion	62
5.2 Über die Ungültigkeit der Galois-Theorie	67
5.3 Exakte Näherungen	75
6 Ausblick	87
6.1 Mathematical Cranks and Pi	87
6.2 Fermat'sche Vermutung	88
6.3 Goldbach-Vermutung	89
6.4 Vierfarbenvermutung	90
6.5 Euklids Parallelenaxiom	91
Literaturverzeichnis	93
Abstract	97
Abstract (english version)	98

Einleitung

„‘Trisector,’ they say to him, ‘wouldn’t you agree that if there were a simple way to trisect an angle, there would be only one way? After all, there is only one way to bisect an angle. And don’t you think that if there were a way, someone would have found it by now? Look at all of these failed attempts; what makes you think that yours is any different? Are you really that much smarter, or luckier, than all of those people?’“ ([11] S. 64)

Trisectors, also Winkeldreiteiler, so bezeichnet der US-amerikanische Mathematiker Underwood Dudley (Professor an der DePauw University, Indiana, bis zur Emeritierung 2004) in [9], [11] und [10] jene Personen, die hartnäckig versuchen beliebige Winkel in drei gleiche Teile zu teilen, und zwar bloß mit Zirkel und Lineal und unter Einhaltung von Spielregeln, wie sie schon im antiken Griechenland formuliert wurden. Das Besondere daran, solche Versuche sind zwecklos und das können Mathematiker_innen spätestens seit dem 19. Jahrhundert auch beweisen:

- 1837: Unmöglichkeitsbeweis der Winkeldreiteilung und Würfelverdoppelung durch Pierre Laurent Wantzel
- 1882: Unmöglichkeitsbeweis der Quadratur des Kreises durch Ferdinand von Lindemann

Doch sogar schon früher, d. h. vor den ersten Unmöglichkeitsbeweisen, gab es Warnungen seitens der Wissenschaft, dass eben solche Konstruktionsversuche höchstwahrscheinlich ins Leere laufen. So verkündete etwa die Pariser Akademie der Wissenschaften im Jahr 1775 keine Lösungen mehr zur Dreiteilung des Winkels, zur Verdoppelung des Würfels, sowie zur Quadratur des Kreises zu untersuchen [31].

Im Jahre 1872 wurde in London *A Budget of Paradoxes* veröffentlicht. Es handelt sich dabei um ein Werk in zwei Bänden des heute noch berühmten englischen Mathematikers und Logikers Augustus De Morgan, der unter anderem den Begriff der mathematischen Induktion, also einer oft genutzten Beweismethode, prägte ([11] S. IX). In *A Budget of Paradoxes* geht es um verschiedenste Kuriositäten aus den Bereichen Mathematik, Naturwissenschaft und Religion. So führt De Morgan beispielsweise viele Behauptungen von Hobbymathematikern zur Kreiszahl π an, die meist aus dem zur damaligen Zeit populären Problem der Quadratur

des Kreises entstanden. Aber auch Winkeldreiteiler finden in De Morgans Sammlung Platz. Im Jahre 1915 wurde eine mit Kommentaren des Mathematikhistorikers David Eugene Smith ergänzte Version von *A Budget of Paradoxes* in Chicago herausgegeben. Dies ist auch jene Ausgabe, die mir während des Verfassens dieser Arbeit zur Verfügung stand ([6] & [7]).

In Anlehnung an De Morgans *A Budget of Paradoxes* brachte Underwood Dudley 1987 schließlich *A Budget of Trisections* heraus. Er beschreibt darin ausschließlich die sogenannten Winkeldreiteiler und ihre Näherungslösungen, mit der Absicht diese von weiteren Versuchen des Winkeldreiteilens abzuhalten. Dass ihm das jedoch nicht gelungen ist, macht Dudley sieben Jahre später unmissverständlich im Vorwort zur zweiten Auflage seines Buches deutlich:

„Well, it didn't work. The publication of the first edition of this book did not put a stop to trisectors and trisections. It did not even make a dent. Trisections continue to appear. [...] What is worse, I have received more than one letter whose writer said, in more or less these words

I have read your book on trisections. It is very interesting. Here is my method for trisecting angles using only straightedge and compasses.“ ([11] S. XVI)

Als ich das gelesen habe, stellten sich mir einige Fragen: Warum beschäftigen sich Leute mit Dingen, die ohnehin nicht funktionieren können? Was verstehen sie falsch oder zumindest anders als Mathematiker_innen? Ist es nicht möglich, zumindest die Unmöglichkeit der generellen Winkeldreiteilung verständlich rüberzubringen (und so nebenbei auch gleich die Unmöglichkeit der Würfelverdoppelung)?

Sollte es wider Erwarten dazu kommen, dass Sie, liebe_r Leser_in, sich für Konstruktionen mit Zirkel und Lineal interessieren, Sie aber nicht über die dahinterliegende Algebra Bescheid wissen, so hoffe ich, dass der folgende Text Sie davor bewahrt, jemals von einem Mathematiker oder einer Mathematikerin als „Winkeldreiteiler!“, „Kreisquadrierer!“ oder „Würfelverdoppler!“ bezeichnet (oder sogar beschimpft) zu werden. Als Grundlage für die Nachvollziehbarkeit der in dieser Arbeit dargebrachten Mathematik muss nicht mehr mitgebracht werden als das, was in Schulen gelehrt wird (beispielsweise der Umgang mit Trigonometrie, Koordinatengeometrie und komplexen Zahlen). Der Übergang zur Hochschul-Algebra erfolgt dann ohnehin Schritt für Schritt.

Überblick

Zu Beginn dieser Diplomarbeit wird in den *Spielregeln* festgelegt, worum es sich bei geometrischen Konstruktionsaufgaben sowie Konstruktionsmitteln handelt, was es bedeutet mit Zirkel und Lineal zu konstruieren und was das alles mit Euklid zu tun hat.

Im anschließenden Kapitel namens *Die Unmöglichkeit der Winkeldreiteilung* wird bewiesen, dass unter bloßer Verwendung von Zirkel und Lineal keine Konstruktionsvorschrift zur Winkeldreiteilung beliebiger Winkel gefunden werden kann. Die dafür notwendigen algebraischen Fähigkeiten werden ausgehend vom Schulstoff Schritt für Schritt erarbeitet.

Mit jenen Personen, die den seit 1837 von Wantzel bestehenden Unmöglichkeitsbeweis ignorieren oder nicht wahr haben wollen und stattdessen eigene Dreiteilungskonstruktionen präsentieren, beschäftigt sich das Kapitel der *Trisectoral Minds*. Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt aber nicht auf den unzähligen vermeintlich exakten Konstruktionen (es sind immer nur Näherungskonstruktionen), sondern auf den Gemeinsamkeiten dieser Personen.

Im Kapitel über *Exakte Winkeldreiteilungen* wird vorgeführt, dass die exakte Dreiteilung von Winkeln leicht realisierbar ist, wenn man auf die klassischen Spielregeln pfeift. Darüber hinaus werden Anleitungen erstellt, um diese Konstruktionen mit GeoGebra-Simulationen veranschaulichen zu können.

Dass es heute immer noch Winkeldreiteiler, wie diejenigen aus dem Kapitel *Trisectoral Minds* gibt, machen die *Winkeldreiteiler in Onlineforen* deutlich. Anhand dreier Beispiele werden deren Argumente gesammelt, analysiert und kritisiert.

Zum Abschluss werden im *Ausblick* Probleme aus anderen mathematischen Themenbereichen erwähnt, die ebenfalls gern und häufig allzu alternativ (und natürlich ohne Erfolg) gelöst werden.

Informationen zur Notation

Am Ende der Einleitung möchte ich noch auf die von mir verwendeten Bezeichnungen und Symbole eingehen. Als Dezimaltrennzeichen kommt bei mir, wie von gängigen Computerprogrammen bekannt (siehe *Mathematica*), der Punkt zum Einsatz, also z. B. 3.14 anstatt 3,25. Punkte in geometrischen Überlegungen wiederum kennzeichne ich mit Großbuchstaben, Geraden und Kreise mit Kleinbuchstaben. Für die Angabe von Winkeln verwende ich griechische Buchstaben, es sei denn sie werden in Kombination mit drei Punkten A , B , C genannt, dann schreibe ich $\angle ABC$. Eine Strecke zwischen den Punkten A und B bezeichne ich mit $\overline{AB}$. Den Abstand der Punkte A und B gebe ich mit $|AB|$ an.

Alle in dieser Arbeit dargestellten Abbildungen, bis auf Abb. 3.1 (und mit Ausnahme des Universitätslogos am Titelblatt natürlich), wurden von mir mit *GeoGebra 5* beziehungsweise *Mathematica 10.4* erstellt.

Kapitel 1

Spielregeln

Bei der Theorie geometrischer Konstruktionen geht es darum, ob eine gestellte Konstruktionsaufgabe mit festgelegten Konstruktionsmitteln lösbar ist. Ist sie das nicht, dann geht es darum welche alternativen Konstruktionsmittel zur Lösung der Konstruktionsaufgabe benötigt werden. Eine Konstruktionsaufgabe selbst sieht so aus, dass auf einem Zeichenblatt, ausgehend von bereits gegebenen Punkten und Linien, bestimmte gesuchte Punkte oder Linien gefunden werden sollen. Konstruiert und gezeichnet wird dabei mit einem idealen Stift, was bedeutet, dass die mit dem Stift gezogenen Striche die Dicke Null haben und dass Punkte ausdehnungslos sind. Praktisch umsetzen lässt sich letzteres zwar nicht, aber vorstellbar ist dies allemal.

Als Konstruktionsmittel dient beispielsweise ein Lineal, womit gerade Linien gezogen werden können. Das Zeichnen einer geraden Linie mittels Lineal ist allerdings stets so auszuführen, dass sie durch zwei gegebene oder bereits konstruierte Punkte geht. Üblicherweise setzt man außerdem voraus, dass dieses Lineal beliebig lang und das Zeichenblatt unbegrenzt sind, wobei es aber natürlich Teil der Konstruktionsaufgabe sein kann, dass sowohl das Zeichenblatt als auch das Lineal nur eine begrenzte Größe aufweisen dürfen. Während des Konstruierens entstehen neue Geraden also ausschließlich durch Anlegen des Lineals an bereits vorhandene Punkte. Darin steckt auch der Grund, warum bei jeder Konstruktionsaufgabe bereits mindestens zwei Punkte gegeben sein müssen. Wäre nämlich nur ein Punkt gegeben, so ließe sich kein weiterer Punkt konstruieren, da ganz einfach kein Punktepaa vorliegt, an welches das Lineal angelegt werden könnte. Auf welche Art und Weise die von vornherein gegebenen Punkte auf das Zeichenblatt gekommen sind, ist hingegen egal. Wichtig ist, dass von ihnen ausgehend nicht mehr als die erlaubten Konstruktionsmittel verwendet werden.

Ebenso wie es bei Konstruktionsaufgaben Standard ist, dass Geraden durch zwei Punkte festgelegt sind, gilt ein Punkt immer erst dann als konstruiert, wenn er als Schnittpunkt zweier bereits existierender Linien entsteht. Diese Linien müssen nicht unbedingt Geraden sein, sie

können z. B. auch Kreislinien sein, je nachdem was die vorliegende Konstruktionsaufgabe an Konstruktionsmitteln erlaubt. ([3] S. 1–3)

Worum es aber meistens geht, sind sogenannte Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Spricht man vom Konstruieren mit Zirkel und Lineal, dann meint man ganz bestimmte Spielregeln, die ihren Ursprung im antiken Griechenland haben. Die dazugehörigen Konstruktionsmittel beschrieb Euklid vor ungefähr 2300 Jahren in seiner Abhandlung *Die Elemente*. Konstruieren mit Zirkel und Lineal bedeutet, dass folgende Regeln eingehalten werden:

1. Das Lineal darf beliebig lang sein, darf dafür aber keine Markierungen aufweisen. Im Wesentlichen ist das Lineal also nicht mehr als eine beliebig lange gerade Kante.
2. Der Zirkel darf sich beliebig weit öffnen, aber auch er darf keine Markierungen besitzen. Ein erlaubter Zirkel ist somit zwar ein Instrument zum Zeichnen von Kreisen mit beliebig großen Radien, aber er darf keinen Radius, Winkel etc. anzeigen.
3. Man legt zunächst willkürlich zwei Punkte der Ebene als konstruierbar fest. Der eine soll mit O , der andere mit E bezeichnet werden. Der Abstand zwischen O und E wird als 1 festgelegt. Das heißt nicht, dass dieser Abstand genau 1 Meter, Zoll oder Zentimeter lang sein muss, stattdessen ist gemeint, dass von nun an dieser Abstand als Maßeinheit dient.
4. Mit dem Lineal kann durch zwei bereits konstruierte Punkte die Verbindungsgerade gezeichnet werden.
5. Ist der Punkt M konstruierbar und r als Abstand zweier konstruierbarer Punkte gegeben, dann kann mit dem Zirkel der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r gezeichnet werden.
6. Konstruierbar sind nur Punkte die sich als Schnittpunkte von Geraden, Schnittpunkte von Kreisen oder Schnittpunkte von Geraden mit Kreisen ergeben.
7. Die Konstruktion eines Punktes muss in endlich vielen Schritten erreicht sein.

Bemerkungen

Zu beachten ist der Unterschied zwischen „Zeichnen“ und „Konstruieren“. Geraden und Kreise werden nur gezeichnet, sie haben demnach lediglich den Status eines Hilfsmittels am Weg zur Konstruktion. Tatsächlich konstruiert werden aber nur Punkte der Ebene.

Als Ebene kann man sich die Gauß'sche Zahlenebene oder die kartesische Koordinatenebene vorstellen. Einem Punkt sind also Koordinaten bzw. Real- und Imaginärteil zugeordnet. Ist beispielsweise mal die Rede von einer konstruierbaren Zahl z oder einem Winkel α , so meint man damit den Punkt $(z, 0)$ und die komplexe Zahl $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

Kapitel 2

Die Unmöglichkeit der Winkeldreiteilung

Zunächst klingt es so, als ob mathematische Konstruktionen nur in den Bereich der Geometrie gehören. Mit diesem Kapitel möchte ich aber Schritt für Schritt zeigen, wie das ursprünglich geometrische Problem der Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal in die Sprache der Algebra übersetzt werden kann. Denn am Ende des Kapitels werde ich mit den Mitteln der Algebra beweisen, dass unter bloßer Verwendung von Zirkel und Lineal keine Konstruktionsvorschrift zur Winkeldreiteilung eines beliebigen Winkels gefunden werden kann. Hat man das verstanden, kann man sich jeden weiteren Versuch einer solchen Konstruktion sparen.

Eine meiner Meinung nach gute Einführung in diese Thematik liefern Johann Ciglers Buch *Körper – Ringe – Gleichungen* [5], insbesondere Kapitel 1, sowie Hans Humenbergers *Elementarmathematische Betrachtungen zum Delischen Problem und zur Winkeldreiteilung* [14], weshalb ich mich in den folgenden Abschnitten, also am Weg von der Übersetzung ins Algebraische bis hin zum Unmöglichkeitsbeweis der Winkeldreiteilung, stark an dieser Literatur orientiere.

Anm.: In anderen Werken über Algebra, wie zum Beispiel [12], werden geometrische Konstruktionen erst viel später behandelt, wodurch gleich einmal der Eindruck entstehen kann, dass jede Menge Theorie durchgekauert werden muss, bevor die algebraische Seite von Konstruktionen mit Zirkel und Lineal verstanden werden kann. Die folgenden Seiten dieses Kapitels sollen aber zeigen wie rasch man zu einem mathematisch korrekt geführten Beweis gelangen kann.

2.1 Von der Konstruktion zur Algebra

In der Schule wird gelehrt, dass auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zwar das Addieren, nicht aber dessen Umkehrung, das Subtrahieren, uneingeschränkt möglich ist. Durch Hinzufügen negativer Zahlen, also auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, geht dies dann schon, aber das Dividieren ist nach wie vor nicht beliebig durchführbar. Erst auf der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind all diese Rechenoperation, d. h. das Addieren, das Multiplizieren und deren Umkehrungen, ohne Einschränkungen möglich (wobei für die Division, das ist die Umkehrung der Multiplikation, die Null ausgenommen werden muss). Sowohl $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ als auch $\mathbb{Q}$ sind jeweils algebraische Strukturen, aber nur jene, in denen, salopp formuliert, alle vier Grundrechnungsarten uneingeschränkt durchführbar sind (Division durch Null ausgenommen), werden in der Algebra als Körper bezeichnet. Wieso das im Hinblick auf Konstruktionen mit Lineal und Zirkel von Bedeutung ist, soll ein kleiner historischer Exkurs verdeutlichen:

Als erstem gelang es dem französischen Mathematiker Pierre Laurent Wantzel im Jahre 1837 zu beweisen, dass eine generelle Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal unmöglich ist (vgl. [11] S. XV). Sein Beweis beruht auf der (oben angekündigten und unten ausführlich geschilderten) Übersetzung der geometrischen Konstruktionen in die Sprache der Algebra, wodurch erst ersichtlich wird, dass man mit Hilfe von Zirkel und Lineal Rechenoperationen durchführen kann, aber nur bestimmte, nämlich das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren und, jetzt neu im Vergleich zu $\mathbb{Q}$, Quadratwurzeln ziehen, mehr aber nicht. Für die Winkeldreiteilung müsste man jedoch noch zusätzlich Wurzeln dritten Grades ziehen können (Das Warum wird weiter unten geklärt). Wurzeln dritten Grades ergeben sich allerdings nicht durch Kombinieren von Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division oder Quadratwurzeln ziehen, egal wie man versucht, diese Rechenoperationen endlich oft zu kombinieren.

Als Ausgangspunkt für die nun folgenden algebraischen Überlegungen soll der Begriff des Körpers dienen. Beispielsweise hat die Menge $\mathbb{Q}$ mit ihren Eigenschaften die Struktur eines Körpers. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind hingegen keine Körper, da sie nicht alle Eigenschaften eines Körpers besitzen.

Definition 2.1 Als Körper wird eine Menge K bezeichnet, wenn:

1. je zwei Elementen $a, b \in K$ ein Element $a + b \in K$, die Summe der beiden Elemente, zugeordnet ist,
2. $a + b = b + a$ für alle $a, b \in K$ gilt (Kommutativität der Addition),
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle $a, b, c \in K$ gilt (Assoziativität der Addition),

4. ein Element $0 \in K$ mit $a + 0 = a$ für alle $a \in K$ existiert (Neutrales Element der Addition: „Nullelement“),
5. für jedes $a \in K$ ein Element $(-a) \in K$ mit $a + (-a) = 0$ existiert (Existenz eines inversen Elements bezüglich der Addition),
6. je zwei Elementen $a, b \in K$ ein Element $ab \in K$, das Produkt der beiden Elemente, zugeordnet ist,
7. $ab = ba$ für alle $a, b \in K$ gilt (Kommutativität der Multiplikation),
8. $(ab)c = a(bc)$ für alle $a, b, c \in K$ gilt (Assoziativität der Multiplikation),
9. $a(b + c) = ab + ac$ für alle $a, b, c \in K$ gilt (Distributivgesetz),
10. ein Element $1 \in K$ mit $1 \cdot a = a$ für alle $a \in K$ existiert (Neutrales Element der Multiplikation: „Einselement“),
11. $0 \neq 1$ und
12. für jedes Element $a \neq 0$ ein Element $a^{-1} \in K$ mit $aa^{-1} = 1$ existiert (Existenz eines inversen Elements bezüglich der Multiplikation).

Definition 2.2 Eine Teilmenge $Q \subseteq K$ eines Körpers K heißt *Teilkörper* (man kann auch *Unterkörper* dazu sagen), sofern Q selbst ein Körper mit den selben binären Verknüpfungen, sowie dem gleichen Null- und Einselement ist.

Also ist die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ein Körper, ebenso die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Sowohl $\mathbb{Q}$ als auch $\mathbb{R}$ sind Teilkörper der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Dabei ist $\mathbb{Q}$ der kleinste Teilkörper von $\mathbb{R}$, was man sich leicht überlegen kann: Gemäß Definition 2.1 muss ein Körper die Elemente 0 und 1 enthalten. Wegen der erlaubten Addition erhält man daraus zunächst ganz $\mathbb{N}$, wegen der uneingeschränkten Durchführbarkeit der Subtraktion ganz $\mathbb{Z}$ und wegen der Durchführbarkeit der Division ist man schon bei $\mathbb{Q}$ angekommen.

Da $\mathbb{Q}$ der kleinste Teilkörper von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ ist, gilt für jeden Teilkörper K von $\mathbb{C}$, dass $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$.

Für den Unmöglichkeitbeweis der Winkeldreiteilung spielen Teilkörper und das folgende Lemma eine wesentliche Rolle.

Lemma 2.1 Sei K ein Teilkörper von $\mathbb{C}$. Sei weiters $c \in K$, wobei $\sqrt{c} \notin K$.

Die Menge $K(\sqrt{c})$, d. h. die Menge aller Elemente der Gestalt $a + b\sqrt{c} \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in K$, bildet einen Teilkörper von $\mathbb{C}$, wobei sogar $K \subset K(\sqrt{c})$.

$K(\sqrt{c})$ wird quadratischer Erweiterungskörper von K genannt.

Beweis

Alle Elemente von $K(\sqrt{c})$ sind komplexe Zahlen. Für sie sind somit dieselben Rechenregeln anwendbar wie in $\mathbb{C}$. Dadurch sind bereits viele Körperaxiome für $K(\sqrt{c})$ erfüllt (Kommutativität, Assoziativität, Distributivgesetz). Desweiteren ist $0 \in \mathbb{C}$ auch das Nullelement in $K(\sqrt{c})$ und $1 \in \mathbb{C}$ ist das Einselement von $K(\sqrt{c})$.

Nun muss man sich aber noch um die Abgeschlossenheit und die Existenz der Inversen in $K(\sqrt{c})$ kümmern. Hierfür genügt es zu zeigen, dass mit $\alpha, \beta, \gamma \in K(\sqrt{c})$, wobei $\gamma \neq 0$, auch $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ und γ^{-1} wieder in $K(\sqrt{c})$ liegen, also die Gestalt $r + s\sqrt{c}$ mit $r, s \in K$ haben.

Sei also $\alpha = a_1 + b_1\sqrt{c}$ und $\beta = a_2 + b_2\sqrt{c}$. Damit ergibt sich, dass

$$\alpha + \beta = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{c},$$

$$\alpha - \beta = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{c}$$

und

$$\alpha\beta = (a_1a_2 + b_1b_2c) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{c}$$

tatsächlich wieder in $K(\sqrt{c})$ liegen, weil $a_1 \pm a_2$, $b_1 \pm b_2$, $a_1a_2 + b_1b_2c$ und $a_1b_2 + b_1a_2$ jeweils Elemente aus K sind (Beachte nämlich: K ist ja nach Voraussetzung ein Körper).

Sei $\gamma = a + b\sqrt{c} \neq 0$. Dann ist

$$\gamma^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{c}} = \frac{a - b\sqrt{c}}{(a + b\sqrt{c})(a - b\sqrt{c})} = \frac{a - b\sqrt{c}}{a^2 - b^2c} = \frac{a}{a^2 - b^2c} + \frac{-b}{a^2 - b^2c}\sqrt{c}.$$

Dabei ist wichtig, dass $(a + b\sqrt{c})(a - b\sqrt{c}) = a^2 - b^2c$ ungleich Null ist, da diese Ausdrücke im Nenner stehen. Um zu zeigen, dass diese Ausdrücke ungleich Null sind, geht man wie folgt vor:

Wegen $\gamma = a + b\sqrt{c} \neq 0$ ist auch $a - b\sqrt{c} \neq 0$, denn: Für den Fall $b = 0$ ist $a = \gamma \neq 0$. Für den Fall $b \neq 0$ und $a - b\sqrt{c} = 0$ wäre $\sqrt{c} = \frac{a}{b} \in K$ ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\sqrt{c} \notin K$. Nun ist also sowohl $a + b\sqrt{c}$ als auch $a - b\sqrt{c}$ ungleich Null. Wegen der Nullteilerfreiheit von $K \subseteq \mathbb{C}$ ist $(a + b\sqrt{c})(a - b\sqrt{c}) = a^2 - b^2c \neq 0$ und dies ist sogar ein Element aus K . In weiterer Folge sind $\frac{a}{a^2 - b^2c}$ und $\frac{-b}{a^2 - b^2c}$ Elemente aus K und daher $\gamma^{-1} \in K(\sqrt{c})$. $\square$

„Es ist in einem gewissen Sinn natürlich schon erstaunlich, dass obige Ausführungen über Körper bzw. Körpererweiterungen etwas mit den Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zu tun haben, dazu allerdings erst später.“ ([14] S. 6)

Jetzt geht es darum Konstruktionen mit Zirkel und Lineal mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems in die Sprache der Algebra zu übersetzen.

Zu Beginn wählt man, wie in den Spielregeln festgelegt, willkürlich zwei Punkte O und E der Ebene, denen man die Koordinaten $O = (0, 0)$ und $E = (1, 0)$ zuordnet. Der Abstand zwischen diesen beiden Punkten soll demnach als Maßeinheit dienen.

Davon ausgehend – welche weiteren Punkte der Ebene lassen sich mittels Lineal und Zirkel konstruieren?

Ein einfacher erster Schritt besteht darin mit dem Lineal eine Gerade durch die Punkte O und E zu zeichnen. Diese Gerade entspricht der x -Achse des kartesischen Koordinatensystems. Im Anschluss kann mit dem Zirkel die Strecke OE sukzessive nach links und rechts abgeschlagen werden (Maßeinheit). Auf diese Weise werden alle ganzzahligen Punkte der Form $(n, 0), n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ konstruiert (Abb. 2.1).

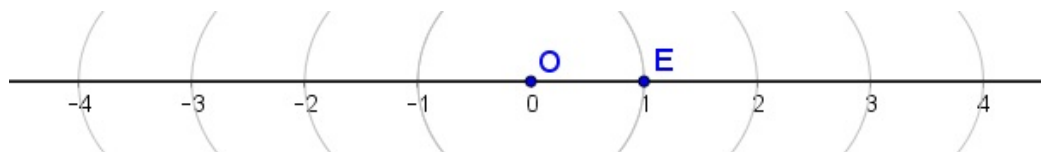


Abbildung 2.1: Konstruktion ganzer Zahlen

In einem weiteren Schritt kann die Normale auf die Gerade OE durch einen bereits konstruierten Punkt $(x, 0)$ gezeichnet werden (Abb. 2.2). Dazu genügt es beispielsweise die Schnittpunkte der Kreise um $(x - 1, 0)$ und $(x + 1, 0)$ mit Radius 2 per Lineal zu verbinden (Anm.: Natürlich können hier auch andere Radien $r > 1$ verwendet werden. Entscheidend ist, dass r als Abstand von zwei konstruierbaren Punkten darstellbar ist). Hat man zusätzlich einen bereits konstruierten Punkt $(y, 0)$, so können die Punkte $(x, \pm y)$ konstruiert werden, indem auf der Normalen durch $(x, 0)$ von vorhin mit dem Zirkel die Länge $|y|$ abgeschlagen wird.

Selbst von einem bereits konstruierten Punkt (x, y) , der nicht auf der x -Achse liegt (d. h. $y \neq 0$), kann die Normale auf die x -Achse gezeichnet werden (Abb. 2.3). Somit lässt sich der Schnittpunkt $(x, 0)$ konstruieren, und zwar wie folgt: Man schneidet einen Kreis mit Radius $r > |y|$ und Mittelpunkt (x, y) mit der x -Achse (Anm.: Auch hier wieder muss r als Abstand von zwei konstruierbaren Punkten darstellbar sein). Dadurch ergeben sich auf der x -Achse zwei Schnittpunkte S_1 und S_2 . Der Radius r kann gleich nochmal verwendet werden für zwei

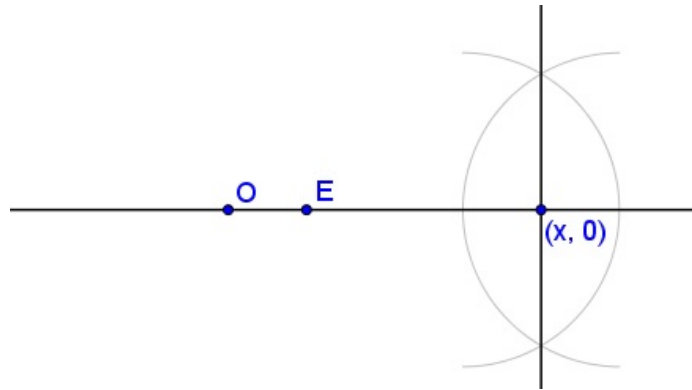


Abbildung 2.2: Zeichnen einer Normalen durch $(x, 0)$

Kreise um S_1 und um S_2 . Die zuletzt gezeichneten Kreise schneiden einander in zwei Punkten. Verbindet man diese zwei Punkte mit dem Lineal, so hat man auch schon die gesuchte Normale gefunden und den Punkt $(x, 0)$ konstruiert.

Den Abstand $|y|$ zwischen den Punkten $(x, 0)$ und (x, y) kann man nun mit dem Zirkel vom Punkt O aus auf die x -Achse abschlagen und erhält auf diese Weise den Punkt $(y, 0)$.

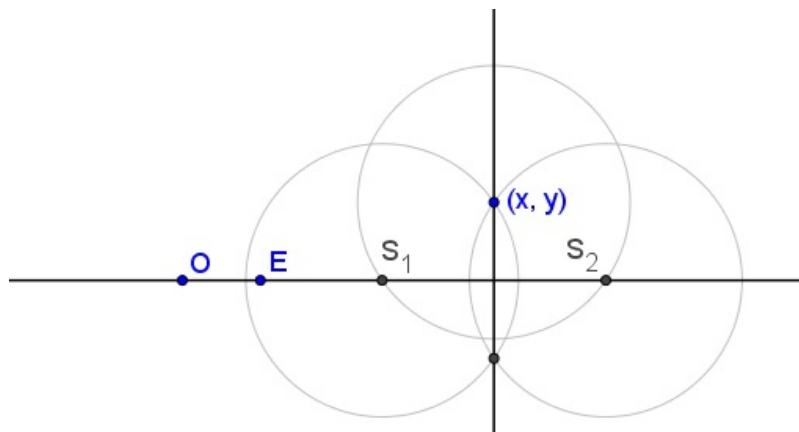


Abbildung 2.3: Zeichnen einer Normalen durch (x, y)

Die beiden vorigen Absätze zusammengefasst liefern folgende Erkenntnis:

- Ausgehend von zwei bereits konstruierten Punkten $(x, 0)$ und $(y, 0)$ lässt sich (x, y) konstruieren.
- Ausgehend vom bereits konstruierten Punkt (x, y) lassen sich $(x, 0)$ und $(y, 0)$ konstruieren.

Ein Punkt (x, y) ist also genau dann konstruierbar, wenn die Punkte $(x, 0)$ und $(y, 0)$ konstruierbar sind.

Jeder Punkt $P = (x, y)$ des kartesischen Koordinatensystems entspricht weiters einer komplexen Zahl in der Gauß'schen Zahlenebene, nämlich $z = x + iy$. Eine komplexe Zahl ist also genau dann mit Lineal und Zirkel konstruierbar, wenn sowohl der Realteil x als auch der Imaginärteil y konstruierbar ist. x und y sind dabei reelle Zahlen. Wann aber gilt eine reelle Zahl als konstruierbar? Ganz einfach:

Eine *reelle Zahl* a gilt als *konstruierbar*, wenn der Punkt $(a, 0)$ konstruierbar ist.

Zuletzt ging es darum, wie komplexe und reelle Zahlen konstruiert werden können. Jetzt können die gewonnenen Erkenntnisse mit dem schon weiter oben eingeführten Körperbegriff verknüpft werden. Dies geschieht mit nachstehendem Satz und ist insofern interessant, weil es darum geht, wie man mit Zirkel und Lineal Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ausführt.

Satz 2.1 *Die konstruierbaren reellen Zahlen bilden einen Körper.*

Beweis

Anstatt alle Körperaxiome einzeln nachzuweisen, reicht es zu zeigen, dass neben den konstruierbaren reellen Zahlen $a > 0$ und $b > 0$ auch $a \pm b$, ab und $\frac{1}{a}$ konstruierbare reelle Zahlen sind.

Summe und Differenz lassen sich konstruieren, indem man vom Punkt $(a, 0)$ aus mit dem Zirkel die Strecke b auf die x -Achse abschlägt (Abb. 2.4).

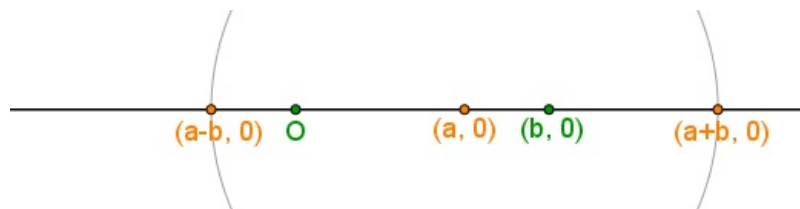


Abbildung 2.4: Konstruktion von Addition und Subtraktion

Die Konstruierbarkeit des Produkts ab lässt sich mit Hilfe des Strahlensatzes begründen. Dazu schlägt man vom Ursprung aus auf der y -Achse die Strecken 1 sowie b ab und auf der x -Achse die Strecke a . Im Anschluss zeichnet man die Strecke durch $(0, 1)$ und $(a, 0)$. Parallel zu dieser Strecke lässt sich eine Gerade durch $(0, b)$ legen, die die x -Achse im Punkt $(ab, 0)$ schneidet (Abb. 2.5). (Anm.: Warum das Zeichnen einer Parallelen mit Zirkel und Lineal überhaupt möglich ist, wird mit dem *Parallelenlemma* unter diesem Beweis geklärt.)

In sehr ähnlicher Weise kann man auch die Konstruierbarkeit von $\frac{1}{a}$ zeigen. Vom Ursprung aus schlägt man auf der x -Achse die Strecken 1 sowie a ab und auf der y -Achse nur die Strecke 1. Dann zeichnet man die Strecke durch $(0, 1)$ und $(a, 0)$. Parallel dazu lässt sich eine Gerade

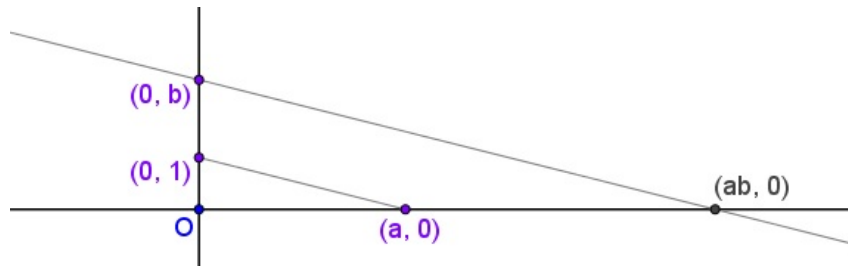


Abbildung 2.5: Konstruktion einer Multiplikation

durch $(1, 0)$ legen, die gemäß Strahlensatz die y -Achse im Punkt $(0, \frac{1}{a})$ schneidet. Mittels Zirkel ist es jetzt leicht $(\frac{1}{a}, 0)$ zu konstruieren (Abb. 2.6).

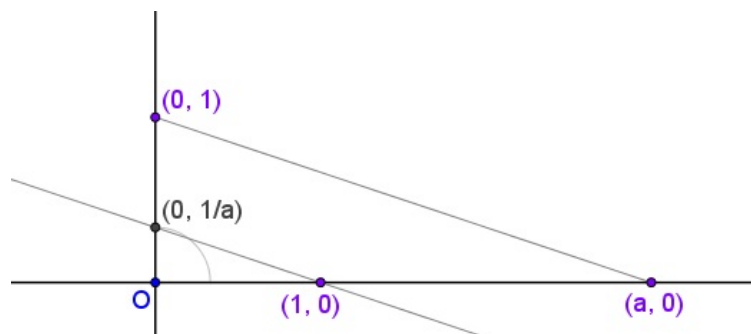


Abbildung 2.6: Konstruktion eines multiplikativ Inversen

□

Dadurch, dass $\frac{1}{a}$ konstruierbar ist, können mit Hilfe von Zirkel und Lineal zwei bereits konstruierte Zahlen dividiert werden. Will man beispielsweise $\frac{b}{a}$ konstruieren, braucht man bloß obige Konstruktionsschritte kombinieren: Sind a und b schon konstruiert, so konstruiert man zunächst $\frac{1}{a}$ und danach das Produkt $b \frac{1}{a}$.

Lemma 2.2 Seien drei Punkte A , B und C gegeben, dann kann die Gerade gezeichnet werden, die durch C geht und parallel zur Geraden g durch A und B ist (Parallelenlemma).

Das Parallelenlemma folgt schlicht daraus, dass sowohl die durch C gehende Normale n auf die Gerade g gezeichnet werden kann als auch die durch C gehende Normale auf die Gerade n . (Wie eine Normale auf eine Gerade durch einen Punkt gezeichnet werden kann, wurde bereits behandelt.)

Weiter oben hieß es, dass ein Punkt $P = (x, y)$ des kartesischen Koordinatensystems der komplexen Zahl $z = x + iy$ in der Gauß'schen Zahlenebene entspricht. Im Beweis zum Satz,

dass die konstruierbaren reellen Zahlen einen Körper bilden, wurde mit Punkten im kartesischen Koordinatensystem gearbeitet. Genauso gut kann man den Beweis unter Verwendung komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene führen. Bemerkenswert ist jedenfalls, dass man ohnehin nicht drumherum kommt mehr als nur die Zahlengerade zu verwenden, obwohl es einstweilen ja „nur“ um die Konstruierbarkeit reeller Zahlen geht.

Die Konstruierbarkeit des multiplikativen Inversen einer bereits konstruierten reellen Zahl sowie die Konstruierbarkeit des Produktes zweier konstruierbarer reeller Zahlen lässt sich alternativ zu vorhin also folgendermaßen beweisen:

Sind $a > 0$ und $b > 0$ konstruierbare reelle Zahlen, so sind jedenfalls die komplexen Zahlen a , i und daher auch bi konstruierbar. Verbindet man a und i mit einer Geraden, so besteht diese aus Punkten der Gestalt $i + \lambda(a - i)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder in kartesischer Schreibweise: $(0, 1) + \lambda(a, -1)$). $a - i$ ist dabei der Richtungsvektor, der bei einer parallelen Gerade gleich bleibt. Die Parallele durch bi besteht demnach aus den Punkten $bi + \lambda(a - i)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Durch Schneiden dieser Parallele mit der x -Achse konstruiert man schließlich das Produkt ab , was sich leicht nachrechnen lässt:

$$bi + \lambda(a - i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda a + i(b - \lambda) = 0$$

Der Imaginärteil ist genau dann Null, wenn $b - \lambda = 0$, d. h. für $\lambda = b$. Als Schnittpunkt mit der x -Achse ergibt sich durch Einsetzen von $\lambda = b$ in die Parallelengleichung:

$$bi + \lambda(a - i) = bi + b(a - i) = ab$$

Auch das zu a multiplikativ Inverse $\frac{1}{a}$ ist konstruierbar, denn als Schnittpunkt der Gerade $1 + \lambda(i - a)$ mit der y -Achse erhält man für $\lambda = \frac{1}{a}$ den Punkt $\frac{i}{a}$ (oder in kartesischer Schreibweise: $(0, \frac{1}{a})$).

Genug des alternativen Beweises dafür, dass die konstruierbaren reellen Zahlen einen Körper bilden. Im nächsten Schritt soll bewiesen werden, dass ebenso die konstruierbaren komplexen Zahlen einen Körper bilden.

Satz 2.2 *Die Menge aller konstruierbaren komplexen Zahlen $z = x + iy$ bildet einen Körper. Dieser Körper wird mit Ω bezeichnet.*

Beweis

Seien $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ konstruierbare komplexe Zahlen.

Summe, Differenz und Produkt von z_1 und z_2 , also

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \text{ und}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

sind dann ebenfalls konstruierbar, weil sich die Real- und Imaginärteile jeweils aus konstruierbaren reellen Zahlen zusammensetzen und somit selbst konstruierbar sind.

Für $z = x + iy \neq 0$ ist auch

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

konstruierbar, weil sowohl der Real- als auch der Imaginärteil konstruierbar ist. □

Bis hierher wurde demonstriert, wie man, ausgehend von bereits konstruierten reellen oder komplexen Zahlen, mittels Lineal und Zirkel weitere Zahlen konstruieren kann. Konstruierbar sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Daher ist sogar jedes Element der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ konstruierbar (denn in $\mathbb{Q}$ ist jedes Element als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellbar). Als Folge sind auch Zahlen der Form $r + is$ mit $r, s \in \mathbb{Q}$ konstruierbar. Somit ist klar, dass $\mathbb{Q}(i)$ ein Teilkörper von Ω ist. Man muss hier aber von einem *echten* Teilkörper sprechen, denn es gibt konstruierbare Zahlen, die zwar in Ω liegen, aber nicht von der Gestalt $r + is$ sind (mit $r, s \in \mathbb{Q}$). So lässt sich etwa von jeder konstruierbaren Zahl unter Verwendung von Zirkel und Lineal die Quadratwurzel finden – und das Wurzelziehen mittels Zirkel und Lineal wurde bislang überhaupt noch nicht berücksichtigt.

Wie das geht, kann durch Anwendung des Höhensatzes (vgl. Abb. 2.7) für jede konstruierbare Zahl $a > 0$ leicht demonstriert werden (Anm.: $a > 0$ bedeutet, dass a reell ist, denn in $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordnung, d. h. kein „größer“ oder „kleiner“. Quadratwurzeln konstruierbarer komplexer Zahlen werden etwas weiter unten behandelt):

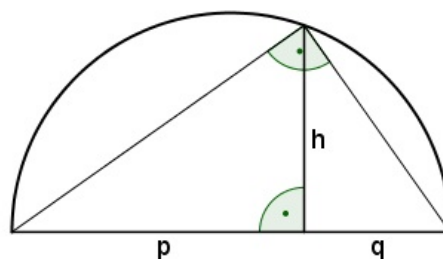


Abbildung 2.7: Höhensatz

Der Höhensatz besagt allgemein, dass für ein im Halbkreis eingeschriebenes rechtwinkeliges Dreieck folgendes gilt:

$$\frac{p}{h} = \frac{h}{q}$$

$$\Leftrightarrow pq = h^2$$

Für $p = a$ und $q = 1$ erhält man dann $h^2 = a$, beziehungsweise $h = \pm\sqrt{a}$.

Die konkrete Konstruktion einer Quadratwurzel ist wie folgt realisierbar:

Wie in Abbildung 2.8 schneidet man den Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{a+1}{2}\}$ mit der Gerade $x = \frac{a-1}{2}$. Mit $z = x + iy$ kommt man von der Kreisgleichung zunächst auf

$$|x + iy| = \frac{a+1}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

und durch Einsetzen von $x = \frac{a-1}{2}$ (Geradengleichung) erhält man für die Schnittpunkte als y -Komponente den Zahlenwert

$$y = \pm\sqrt{a}.$$

Somit lässt sich also von jeder konstruierbaren positiven reellen Zahl unter Verwendung von Zirkel und Lineal die Quadratwurzel finden.

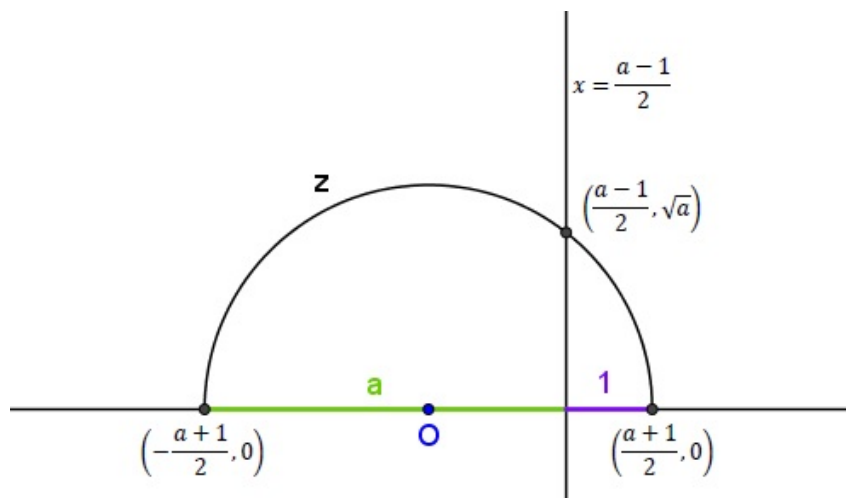


Abbildung 2.8: Konstruktion einer Quadratwurzel

Aber nicht nur von positiven reellen Zahlen können die Quadratwurzeln konstruiert werden, was zu einem Satz über den Körper Ω aller konstruierbarer komplexen Zahlen führt:

Satz 2.3 Ω enthält neben jedem Element $c \in \Omega$ auch dessen Quadratwurzel $\pm\sqrt{c}$.

Beweis

In Polarform ist $c = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ und $\sqrt{c} = \pm \sqrt{r} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} + i \sin \frac{\vartheta}{2} \right)$, wobei $r = |c|$. Es ist demnach also zu zeigen, dass $\sqrt{r}$ sowie $\cos \frac{\vartheta}{2} + i \sin \frac{\vartheta}{2}$ (Winkelhalbierung) konstruierbar sind.

Da $c = a + ib$ konstruierbar ist, sind a sowie b und, nach obigen Erkenntnissen über reelle Zahlen, $r = |c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ konstruierbar, in Folge dessen auch $\sqrt{r}$.

Die Konstruktion von $\cos \frac{\vartheta}{2} + i \sin \frac{\vartheta}{2}$ ist geometrisch ganz leicht. Algebraisch kann diese Winkelhalbierung aber auch ziemlich unkompliziert begründet werden: Vom Summensatz $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ ausgehend erhält man mit $\alpha = \beta = \frac{\vartheta}{2}$ zunächst

$$\cos \left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{2} \right) = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \underbrace{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}_{1 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{\cos \vartheta + 1}{2}.$$

$\cos \vartheta$ ist eine konstruierbare reelle Zahl, weshalb $\frac{\cos \vartheta + 1}{2} = \cos^2 \frac{\vartheta}{2}$ konstruierbar ist. Wegen der Konstruierbarkeit von Quadratwurzeln reeller Zahlen sind auch $\cos \frac{\vartheta}{2}$ und $\sin \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}$ konstruierbar. Damit sind alle notwendigen konstruierbaren Zutaten für $\cos \frac{\vartheta}{2} + i \sin \frac{\vartheta}{2}$ versammelt. $\square$

Der nächste Schritt am Weg zum Unmöglichkeitbeweis der Winkeldreiteilung wird sein zu zeigen, dass Ω der kleinste Teilkörper von $\mathbb{C}$ ist, der mit jedem Element c auch die Quadratwurzel $\sqrt{c}$ enthält.

Dazu beginnt man mit der Überlegung, welche Punkte man durch Schneiden von Geraden mit Geraden, Geraden mit Kreisen und Kreisen mit Kreisen erreicht. Damit ist es nämlich dann auch möglich zu argumentieren, welche Punkte man sicher nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren kann. Mit folgendem Beispiel möchte ich zeigen, worum genau es jetzt geht:

Gegeben seien ein gezeichneter Kreis k mit Mittelpunkt $(1, 3)$ und Radius 5, sowie eine gezeichnete Gerade g mit den Gleichungen

$$k : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$

$$\text{und } g : y = 2x - 6.$$

Man beachte, dass in diesen beiden Gleichungen nur ganzzahlige Koeffizienten vorkommen. Es handelt sich demnach jedenfalls um Elemente des Körpers $\mathbb{Q}$, der wiederum ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist. Durch Schneiden dieses Kreises und dieser Gerade konstruiert man zwei Schnittpunkte,

deren Koordinaten sich wie folgt ergeben:

Einsetzen von $y = 2x - 6$ in die Kreisgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
 (x-1)^2 + (2x-9)^2 &= 5^2 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 36x + 81 - 25 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 5x^2 - 38x + 57 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 - \frac{38}{5}x + \frac{57}{5} &= 0 \\
 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{19}{5} \pm \sqrt{\frac{76}{25}} \\
 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{19}{5} \pm \frac{2}{5}\sqrt{19}
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Geradengleichung erhält man die y -Komponenten:

$$y_{1,2} = \frac{8}{5} \pm \frac{4}{5}\sqrt{19}$$

Obwohl k und g ausgehend von Punkten mit rationalen (ja sogar ganzzahligen) x - und y -Koordinaten gezeichnet wurden, sind sowohl die x - als auch die y -Komponenten der beiden Schnittpunkte Elemente des quadratischen Erweiterungskörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{19})$, also von der Form $a + b\sqrt{19}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$.

Das gleiche Phänomen kann auch beim Schneiden zweier Kreise auftreten, aber alles der Reihe nach. Um es allgemein zu formulieren, seien eine Gerade g durch die Punkte (a_1, b_1) und (a_2, b_2) , sowie ein Kreis k mit Mittelpunkt (m_1, m_2) , der durch den Punkt (r_1, r_2) geht, gegeben, wobei $a_1, a_2, b_1, b_2, m_1, m_2, r_1, r_2$ in einem Teilkörper K von $\mathbb{R}$ liegen (z. B. in $\mathbb{Q}$, wie im obigen Beispiel):

$$\begin{aligned}
 g : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_2 - a_1 \\ b_2 - b_1 \end{pmatrix} \\
 k : \quad (x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 &= \underbrace{(r_1 - m_1)^2 + (r_2 - m_2)^2}_{r^2}
 \end{aligned}$$

Macht man aus der Parameterdarstellung der Gerade g eine Geradengleichung (Normalform: $(a_2 - a_1)y - (b_2 - b_1)x = (a_2 - a_1)b_1 - (b_2 - b_1)a_1$), so erkennt man, dass die Koeffizienten der Geraden- und Kreisgleichung auch im Teilkörper K von $\mathbb{R}$ liegen.

Beim Schneiden zweier Geraden, deren Koeffizienten in K liegen, liegen auch wieder die Koordinaten des Schnittpunktes x, y in K , weil bloß eine lineare Gleichung gelöst werden muss. Beim Schneiden einer Gerade mit einem Kreis bzw. beim Schneiden zweier Kreise, deren Koeffizienten in K liegen, ist jedoch eine quadratische Gleichung zu lösen, wie im

Beispiel von vorhin. Daher liegen die Koordinaten der Schnittpunkte in einem quadratischen Erweiterungskörper $K(\sqrt{c})$. (Anm.: K ist eine Teilmenge von $K(\sqrt{c})$, weshalb natürlich die Koordinaten der Schnittpunkte von Kreis und Gerade oder von zwei Kreisen auch selbst in K liegen können. Solch „schöne“ Fälle findet man meist in Schulbüchern, etwa in [15].)

Ausgehend von Geraden und Kreisen, die durch Punkte mit Koordinaten aus $K(\sqrt{c})$ gezeichnet wurden, kommt man dann auf Schnittpunkte mit Komponenten aus der quadratischen Erweiterung $(K(\sqrt{c}))(\sqrt{d})$ von $K(\sqrt{c})$. Für beispielsweise $c = 2$, $d = 3$ und $K = \mathbb{Q}$ besteht $(K(\sqrt{c}))(\sqrt{d})$ aus allen Elementen $k + l\sqrt{3}$ mit $k, l \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, also aus Elementen der Form $r + s\sqrt{2} + (u + v\sqrt{2})\sqrt{3} = r + s\sqrt{2} + u\sqrt{3} + v\sqrt{6}$, wobei $r, s, u, v \in \mathbb{Q}$.

Da es in den Spielregeln heißt, dass eine Konstruktion in endlich vielen Schritten abgeschlossen sein muss, gelangt man von anfangs rationalen Punkten zu Punkten mit Koordinaten aus der n -fachen quadratischen Erweiterung K_n von $K_0 = \mathbb{Q}$.

Satz 2.4 *Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn es eine endliche Menge von Körpern K_j gibt, sodass*

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n \subseteq \mathbb{R},$$

wobei $K_{j+1} = K_j(\sqrt{c_j})$ mit $c_j \in K_j$ und $x \in K_n$.

Dieser Satz bezieht sich auf konstruierbare reelle Zahlen, die ebenso als Koordinaten von Punkten aufgefasst werden können. Punkte wiederum können als komplexe Zahlen angesehen werden. Die Menge aller Punkte (x, y) , $x, y \in K$, entspricht somit dem quadratischen Erweiterungskörper $K(i) = \{x + iy : x, y \in K\}$. Daraus ergibt sich das folgende Korollar.

Korollar 2.1 *Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn*

$$L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_m$$

eine Kette von Teilkörpern von $\mathbb{C}$ ist, wobei

- L_0 ein beliebiger Körper ist, der nur aus konstruierbaren Zahlen besteht (wie z. B. $L_0 = \mathbb{Q}$),
- $L_{j+1} = L_j(\sqrt{c_j})$ jeweils eine quadratische Erweiterung von L_j ist, mit $c_j \in L_j$, und
- $z \in L_m$.

Wegen der Kette von Teilkörpern von $\mathbb{C}$, d. h. weil man sich sozusagen von unten der Menge aller komplexen Zahlen nähert, gilt schließlich das nächste (bereits angekündigte) Korollar.

Korollar 2.2 Ω ist der kleinste Teilkörper von $\mathbb{C}$, der mit jedem Element c auch die Quadratwurzel $\sqrt{c}$ beinhaltet.

Die Menge Ω aller konstruierbaren komplexen Zahlen „kann mehr“ als andere Körper. Während Körper wie zum Beispiel $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ nur die Umkehrung von Addition und Multiplikation erlauben, ist auf Ω sogar das Quadrieren invertierbar.

Für dieses uneingeschränkte Wurzelziehen ist doch eigentlich die Menge der komplexen Zahlen bekannt. Da stellt sich die Frage, ob denn nicht $\Omega = \mathbb{C}$ gilt.

Sobald man nur eine einzige Zahl findet, die in $\mathbb{C}$ aber nicht in Ω liegt, reicht das schon aus um diese Vermutung zu widerlegen.

Satz 2.5 Mit Zirkel und Lineal ist die Zahl $\sqrt[3]{2}$ nicht konstruierbar.

Beweis

Angenommen $\alpha = \sqrt[3]{2}$ wäre konstruierbar, dann müsste es eine Kette

$$\mathbb{Q} = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_m$$

von quadratischen Erweiterungen geben, sodass $\alpha \in L_m$.

Zunächst wird gezeigt, dass dieses α nicht in $\mathbb{Q}$ liegen kann:

Mit $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, wäre $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2$, also

$$a^3 = 2b^3.$$

Die linke Seite a^3 wäre demnach gerade und es müsste in ihrer Primfaktorzerlegung die Zahl 2 mit einer durch 3 teilbaren Vielfachheit auftreten. In der Primfaktorzerlegung der rechten Seite $2b^3$ käme 2 allerdings mit einer Vielfachheit $3k + 1$ vor, egal ob b gerade ($k \neq 0$) oder ungerade ($k = 0$) ist. Dies steht in Widerspruch.

Als nächstes wird gezeigt, dass es auch schon im Körper K ein Element β mit der Eigenschaft $\beta^3 = 2$ geben muss, wenn α mit $\alpha^3 = 2$ ein Element des quadratischen Erweiterungskörpers $K(\sqrt{c})$ ist, $c \in K$, $\sqrt{c} \notin K$:

Sei also besagtes α ein Element von $K(\sqrt{c})$, denn dann gilt $\alpha^3 = (r + s\sqrt{c})^3 = 2$, wobei $r, s \in K$.

Für den Fall $s = 0$ ist

$$\alpha^3 = r^3 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = r$$

und somit ist $\alpha \in K(\sqrt{c})$ auch ein Element von K wegen $r \in K$.

Für den Fall $s \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} \alpha^3 = 2 &\Leftrightarrow (r + s\sqrt{c})^3 = 2 \\ \Leftrightarrow r^3 + 3rs^2c + 3r^2s\sqrt{c} + s^3\sqrt{c^3} &= 2 \\ \Leftrightarrow r^3 + 3rs^2c + (3r^2s + s^3c)\sqrt{c} &= 2. \end{aligned}$$

Damit jedoch, wie vorausgesetzt, $\sqrt{c}$ kein Element von K ist, muss $3r^2s + s^3c$ gleich Null sein, denn sonst wäre

$$\sqrt{c} = \frac{2 - r^3 - 3rs^2c}{3r^2s + s^3c} \in K.$$

Das heißt:

$$\begin{aligned} 3r^2s + s^3c = 0 &\Leftrightarrow 3r^2 + s^2c = 0 \\ \Leftrightarrow s^2c &= -3r^2 \end{aligned}$$

Letzteres in $r^3 + 3rs^2c + \underbrace{(3r^2s + s^3c)}_0 \sqrt{c} = 2$ eingesetzt ergibt

$$2 = r^3 + 3r(-3r^2) = -8r^3 = (-2r)^3.$$

Mit $-2r = \beta$ ist nun ein Element aus K gefunden, das $\beta^3 = 2$ erfüllt.

Die vorige Erkenntnis bedeutet: Gäbe es in L_m eine Lösung der Gleichung $x^3 = 2$, dann müsste es auch in L_{m-1} eine Lösung geben, dann wiederum aber auch in L_{m-2} usw. Letztlich müsste sogar in $\mathbb{Q} = L_0$ ein solches Element existieren, was jedoch schon zu Beginn des Beweises ausgeschlossen werden konnte. $\square$

Dadurch, dass jetzt die Nicht-Konstruierbarkeit von $\sqrt[3]{2}$ bewiesen ist, ist gleichzeitig auch das berühmte Problem der Würfelverdoppelung geklärt. Soll nämlich das Volumen eines Würfels mit Kantenlänge 1 verdoppelt werden, dann müsste ein Würfel mit Kantenlänge $\sqrt[3]{2}$ konstruiert werden. Soll das Volumen eines Würfels mit Kantenlänge k verdoppelt werden, so müsste man $k\sqrt[3]{2}$ konstruieren.

2.2 Die Winkeldreiteilung aus algebraischer Sicht

Wie vorhin beim Problem der Würfelverdoppelung, kann in ähnlicher Art und Weise die Unmöglichkeit der Winkeldreiteilung bewiesen werden. Zwar gibt es Winkel, wie zum Beispiel 180° , die sich unter ausschließlicher Verwendung von Lineal und Zirkel in drei gleiche Teile unterteilen lassen, aber für jeden Winkel geht dies nicht.

Der Winkel 180° ist mit Zirkel und Lineal dreiteilbar, weil der Winkel 60° konstruierbar ist. Wegen der konstruierbaren Winkelhalbierung ist auch das Drittel von 90° , also 30° , konstruierbar.

Die Winkeldreiteilung von $\alpha = 60^\circ$ ist hingegen unmöglich, was im Folgenden gezeigt wird. In der Gauß'schen Zahlenebene ist $\alpha = 60^\circ$ auch als Bogen am Einheitskreis darstellbar. Dieser Bogen mit der Länge $\frac{\pi}{3}$ (ein Sechstel des Kreisumfangs 2π) ist wiederum als komplexe Zahl $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ interpretierbar. Man muss also letztendlich der Frage nachgehen, ob die komplexe Zahl $\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} = e^{\frac{i\pi}{9}}$, die

$$\left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right)^3 = \underbrace{\cos \frac{\pi}{3}}_{\frac{1}{2}} + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{3}}_{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$$

erfüllt, mit Lineal und Zirkel konstruierbar ist (Anm.: Die dem Winkel 60° entsprechende komplexe Zahl $e^{\frac{i\pi}{3}}$ ist ein Element des Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$). Die begründete Antwort liefert der nächste Satz samt Beweis.

Satz 2.6 *Mit Zirkel und Lineal ist die Zahl $e^{\frac{i\pi}{9}} = \cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}$ nicht konstruierbar.*

Beweis

Angenommen $e^{\frac{i\pi}{9}} = \cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}$ wäre konstruierbar, dann müsste es eine Kette

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_m$$

von quadratischen Erweiterungen geben, sodass $e^{\frac{i\pi}{9}} \in L_m$.

Zunächst wird gezeigt, dass $e^{\frac{i\pi}{9}}$ nicht in $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ liegen kann, oder allgemeiner formuliert: $X^3 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ kann in $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ nicht gelöst werden.

Gäbe es nämlich ein $X \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ das diese Gleichung erfüllt, dann wäre solch ein X von der Gestalt $\frac{d}{q} + \frac{h}{q}\sqrt{-3}$ mit $d, h, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, und $ggT(d, h, q) = 1$.

(Anm.: Man könnte meinen, dass in diesem Beweis $X = \frac{d}{p} + \frac{h}{q}\sqrt{-3}$ mit $d, h, p, q \in \mathbb{Z}$ und $ggT(d, h, p, q) = 1$ gesetzt werden müsse. Tatsächlich genügt aber ein Nenner, denn $\frac{d}{p}$ und $\frac{h}{q}$ müssen ja nicht gekürzt sein, wie folgendes Beispiel demonstrieren soll:

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{9}\sqrt{-3} = \frac{15}{18} + \frac{4}{18}\sqrt{-3} \text{ und } ggT(2, 5, 6, 9) = 1 = ggT(4, 15, 18).$$

Sei also

$$\left(\frac{d}{q} + \frac{h}{q}\sqrt{-3} \right)^3 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{d}{q}\right)^3 - 9\frac{dh^2}{q^3} + \left(\frac{3d^2h}{q^3} - \frac{3h^3}{q^3}\right)\sqrt{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

dann erkennt man durch Vergleich von linker und rechter Seite, dass

$$d^3 - 9dh^2 = \frac{q^3}{2}$$

und

$$3d^2h - 3h^3 = \frac{q^3}{2}$$

gilt.

Nach Voraussetzung sind ja d und h ganze Zahlen, weshalb auch $d^3 - 9dh^2$ eine ganze Zahl ist. Daraus folgt, dass q^3 eine gerade Zahl sein muss und somit ist auch q gerade. Da $3d^2h - 3h^3$ durch 3 teilbar ist, muss q ebenso durch 3 teilbar sein. Durch Subtrahieren der obigen beiden Gleichungen erhält man

$$d^3 - 9dh^2 - 3d^2h + 3h^3 = 0.$$

Daran ist zu erkennen, dass d durch 3 teilbar ist. Daher muss auch b durch 3 teilbar sein. Die anfangs teilerfremd vorausgesetzten Zahlen d , h und q hätten also doch einen Teiler gemeinsam, was einen Widerspruch darstellt. Somit kann $X^3 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ nicht gelöst werden, weshalb insbesondere $e^{\frac{i\pi}{9}}$ nicht in $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ liegen kann.

Als nächstes wird gezeigt, dass es auch schon im Körper K , wobei $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$, ein Element β mit der Eigenschaft $\beta^3 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ geben muss, wenn α mit $\alpha^3 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ ein Element des quadratischen Erweiterungskörpers $K(\sqrt{c})$ ist:

Sei also α ein Element von $K(\sqrt{c})$, weshalb $\alpha^3 = (r+s\sqrt{c})^3 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ gilt, wobei $r, s \in K$.

Für den Fall $s = 0$ ist

$$\alpha^3 = r^3 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = r$$

und somit ist $\alpha \in K(\sqrt{c})$ auch ein Element von K wegen $r \in K$.

Für den Fall $s \neq 0$ ist

$$\alpha^3 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (r+s\sqrt{c})^3 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow r^3 + 3rs^2c + 3r^2s\sqrt{c} + s^3\sqrt{c^3} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow r^3 + 3rs^2c + (3r^2s + s^3c)\sqrt{c} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Damit jedoch, wie vorausgesetzt, $\sqrt{c}$ kein Element von K ist, muss $3r^2s + s^3c$ gleich Null sein, denn sonst wäre

$$\sqrt{c} = \frac{\frac{1+\sqrt{-3}}{2} - r^3 - 3rs^2c}{3r^2s + s^3c} \in K.$$

Das heißt:

$$3r^2s + s^3c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3r^2 + s^2c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad s^2c = -3r^2$$

Letzteres in $r^3 + 3rs^2c + \underbrace{(3r^2s + s^3c)}_0 \sqrt{c} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ eingesetzt ergibt

$$\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} = r^3 + 3r(-3r^2) = -8r^3 = (-2r)^3.$$

Mit $-2r = \beta$ ist nun ein Element aus K gefunden, das $\beta^3 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ erfüllt.

Die Erkenntnis hier ist dieselbe wie schon beim Beweis zur Würfelverdoppelung: Gäbe es in L_m eine Lösung der Gleichung $X^3 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, dann müsste es auch in L_{m-1} eine Lösung geben, dann wiederum aber auch in L_{m-2} usw. Letztlich müsste sogar in $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) = L_0$ ein solches Element existieren, was jedoch schon zu Beginn des Beweises ausgeschlossen werden konnte. $\square$

Korollar 2.3 *Es gibt konstruierbare Winkel, für die mit Zirkel und Lineal keine Winkeldreiteilung möglich ist.*

Tatsächlich ist der Winkel 20° nicht der einzige, der unter bloßer Verwendung von Zirkel und Lineal nicht konstruiert werden kann. Beispielsweise lässt sich auch nicht der Winkel 10° konstruieren, da ja sonst per Winkelverdoppelung der Winkel 20° konstruierbar wäre. Verfolgt man diesen Gedanken weiter, so kommt man darauf, dass neben 20° und 10° auch 5° , 2.5° , 1.25° usw. nicht konstruierbar sind. Ebenso lassen sich die Winkel 40° , 80° , 160° , 320° , $640^\circ \equiv 280^\circ$ und $1280^\circ \equiv 200^\circ$ nicht konstruieren, weil sonst per (schrittweiser) Winkelhalbierung der Winkel 20° konstruiert werden könnte. Weitere Verdoppelungen führen allerdings auf keine neuen nicht konstruierbaren Winkel, denn $2560^\circ \equiv 40^\circ$, $5120^\circ \equiv 80^\circ$, $10240^\circ \equiv 160^\circ$ etc.

Umgemünzt auf komplexe Zahlen bedeutet dies, dass jedenfalls alle Zahlen der Form $e^{\frac{i\pi}{9} \cdot 2^k}$ und $e^{\frac{i\pi}{9} \cdot \frac{1}{2^l}}$ mit $k, l \in \mathbb{N}_0$ nicht konstruiert werden können. Wenn

$$e^{\frac{i\pi}{9} \cdot 2^k} = \cos\left(\frac{\pi}{9} \cdot 2^k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{9} \cdot 2^k\right)$$

nicht konstruiert werden kann, dann auch nicht

$$\cos\left(\frac{\pi}{9} \cdot 2^k\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{9} \cdot 2^k\right) = e^{-\frac{i\pi}{9} \cdot 2^k}.$$

Somit ist beispielsweise der Winkel 340° nicht konstruierbar. Durch Vertauschen von Real- und Imaginärteil der nicht konstruierbaren Zahlen oder durch Ändern der Vorzeichen ergeben sich schnell noch mehr nicht konstruierbare komplexe Zahlen. Als Beispiel dient etwa, dass sich

$$-\sin\left(\frac{\pi}{9} \cdot \frac{1}{2}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{9} \cdot \frac{1}{2}\right),$$

d. h. 100° , nicht konstruieren lässt, weil bereits

$$\cos\left(\frac{\pi}{9} \cdot \frac{1}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{9} \cdot \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{i\pi}{9} \cdot \frac{1}{2}},$$

also 10° , nicht konstruierbar ist.

Also allein aus der Tatsache, dass der Winkel 20° nicht konstruierbar ist und dass Winkelhalbierungen sowie Winkelverdoppelungen nur von konstruierbaren Winkeln aus möglich sind, ergeben sich bereits unendlich viele nicht konstruierbare Winkel. Damit sollte nun endgültig klar sein, dass es unter Einhaltung der klassischen Spielregeln keine generelle Konstruktionsvorschrift zur Dreiteilung von Winkeln geben kann.

Unendlich viele gefundene Beispiele bedeuten aber noch lange nicht, dass man bereits alle nicht konstruierbaren Winkel ausfindig gemacht hat. Man kann nämlich auch beweisen, dass das regelmäßige Siebeneck nicht mit Lineal und Zirkel konstruiert werden kann, was nichts anderes bedeutet, als dass der Winkel $\frac{360^\circ}{7}$ bzw. die komplexe Zahl $e^{\frac{2\pi i}{7}}$ nicht konstruierbar ist. Für den Beweis braucht man übrigens nicht viel mehr algebraisches Know-how, als hier bereits erarbeitet wurde (siehe [5] S. 15f. & [14] S. 40f.).

2.3 Warum hat es mit dem Beweisen so lange gedauert?

Die wesentliche mathematische Erkenntnis beim Konstruieren mit Zirkel und Lineal ist, dass genau jene Punkte konstruiert werden können, deren Koordinaten sich irgendwie als Lösungen linearer oder quadratischer Gleichungen darstellen lassen. (Anm.: Mit irgendwie meine ich, dass es erforderlich sein kann mehrere Gleichungen nacheinander zu lösen.) Die Würfelverdoppelung zum Beispiel scheitert daran, dass die zu lösende Gleichung $x^3 - 2 = 0$ nicht auf eine lineare oder quadratische Gleichung reduziert werden kann. Die Zahl π wiederum kann nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, weil sie transzendent ist (vgl. [2] S. 142–144). Das bedeutet,

dass es keine Gleichung mit rationalen Koeffizienten der Form $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ gibt, für die π eine Lösung wäre. Gäbe es so ein Polynom, dann hieße π algebraisch, dennoch müsste π nicht automatisch auch konstruierbar sein (Es wäre ja möglich, dass sich das Polynom nicht auf einen linearen oder quadratischen Ausdruck reduzieren lässt). Somit ist klar, dass alle transzendenten Zahlen (e , π usw.) niemals mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Jede mit Zirkel und Lineal konstruierbare Zahl ist algebraisch, aber nicht jede algebraische Zahl ist konstruierbar (z. B. $\sqrt[3]{2}$).

Diese und ähnliche Resultate wurden mehrheitlich im 19. Jahrhundert gefunden, doch warum erst so spät? Immerhin schrieb Euklid die Axiome seiner Geometrie etwa um 300 v. u. Z. nieder. Das hat hauptsächlich damit zu tun, dass im antiken Griechenland die Mathematik beinahe ausschließlich aus Geometrie bestand (vgl. [14] S. 3). Man arbeitete damals noch nicht mit den Mitteln der Algebra, d. h. man kannte keine Körper, Körpererweiterungen oder Ähnliches. Das Novum bei den alten Griechen war stattdessen, dass man sich überhaupt mit der Geometrie als abstrakte Idee auseinandersetzte. Geometrie war plötzlich ein vornehmer Denksport. Davor war Mathematik stets auf praktische Bedürfnisse ausgerichtet ([21] S. 218f.).

„Unter den Bedingungen der entwickelten Sklavenhaltergesellschaft, wie man sie etwa ab 500 v. u. Z. in den griechischen Stadtstaaten findet, erlosch jedoch rasch das Interesse der herrschenden Klasse an einer auf praktische Bedürfnisse gerichteten Wissenschaft.“ ([21] S. 218)

Mit den Griechen änderte sich die Mathematik gravierend, doch die Übertragung geometrischer Probleme in den Bereich der Algebra geschah erst viel später. Zunächst legte die Geometrie nach dem Ende der griechischen Kultur zur Römerzeit eine Jahrhunderte andauernde Pause ein. Erst in der Renaissance ab dem Ende des 15. Jahrhunderts wurde sie wieder populär, sogar bei Künstlern wie Albrecht Dürer ([21] S. 220). Genauere Aussagen über die Tätigkeiten beim Konstruieren konnten ab Descartes im 17. Jahrhundert getroffen werden, als dieser geometrische Probleme mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems in die Sprache der Algebra übersetzt hatte (vgl. [5] S. 11). Seit Descartes war man sich dann schon ziemlich sicher, dass Konstruktionen mit Lineal und Zirkel immer auf lineare und quadratische Gleichungen führen, aber Beweise dafür blieben noch aus. Es bedurfte weiterer Entwicklungen der Algebra hin zum Körperbegriff bis im 19. Jahrhundert Wantzel seine Unmöglichkeitbeweise der Würfelverdoppelung sowie Winkeldreiteilung formulieren, und Lindemann die Transzendenz von π nachweisen konnte.

Interessant finde ich, dass Carl Friedrich Gauß es bereits im Jahr 1796 schaffte zu beweisen, welche regelmäßigen n -Ecke (bzw. welche Winkel $\frac{360^\circ}{n}$) bloß mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Obwohl diese Errungenschaft vier Jahrzehnte vor Wantzels Unmöglichkeitbeweisen stattfand, ist sie mit elementaren Mitteln nicht nachzuvollziehen. Gauß zeigte, dass regelmäßige

n-Ecke mit

$$n = 2^k p_1 \cdots p_r$$

definitiv konstruierbar sind, wobei p_i paarweise verschiedene Primzahlen der Gestalt $2^{2^l} + 1$ sind ($k, l \in \mathbb{N}_0$). Bei Cigler [5] wird dies erst nach über 240 Seiten Algebra im letzten Kapitel mit Hilfe der Galois-Theorie bewiesen (Anm.: Galois wurde erst 1811 geboren, 15 Jahre nach Gauß' Beweis).

Doch nur weil Gauß bewiesen hatte, dass beispielsweise das regelmäßige 65 537-Eck irgendwie konstruierbar sein muss, gab es dafür noch längst keine Konstruktionsvorschrift. Diese lieferte ziemlich genau 100 Jahre später Johann Gustav Hermes in einer rund 200 Seiten langen Abhandlung, für die er zehn Jahre an Arbeit investiert hatte [13].

Klar, dass sich das 65 537-Eck optisch kaum von einem Kreis unterscheidet, aber dessen Konstruierbarkeit zu beweisen und dann auch noch eine Konstruktionsanleitung hierfür zu erstellen, sind meiner Meinung nach schöne Beispiele dafür, wie sich Mathematik weiterentwickelt.

2.3.1 Ein Zitat als Übergang zum nächsten Kapitel

Als Brücke von diesem zum nächsten Kapitel möchte ich ein paar Zeilen des deutschen Mathematikers Ludwig Bieberbach anführen, die dieser schon im Jahre 1952 mit seinem Buch über die *Theorie der geometrischen Konstruktionen* veröffentlichte.

„Da [...] alle mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte Koordinaten haben, die sich durch Quadratwurzelausdrücke aus den Koordinaten der gegebenen Punkte herstellen lassen, folgt [...], daß sich die Kante des doppelten Würfels nicht aus der Kante des einfachen Würfels mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt und daß [...] der Winkel von 60° nicht durch Konstruieren mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile zu teilen ist.

Dieser Satz begegnet in Kreisen von Nichtmathematikern ebensoviel Interesse wie Mißverständnis. Er besagt, daß die genannte Aufgabe nicht lösbar ist, wenn man Zirkel und Lineal in der [...] beschriebenen und genau festgelegten Weise benutzt. Er besagt nicht, daß man die Aufgabe nicht bei anderem Gebrauch dieser Instrumente, z. B. durch Probieren, lösen kann. Schon die Tatsache, daß eine gegebene Aufgabe auf gegebenem Weg unmöglich lösbar ist, begegnet in Laienkreisen Staunen. Offenbar setzt das Verstehen dieser Dinge schon eine gewisse Vertrautheit mit dem mathematischen Denken voraus, und doch wundert sich niemand, daß man mit dem Lineal allein keinen Kreis zeichnen kann. Das ist auch eine Unmöglichkeitssatz. Sie ist zwar primitiv, aber grundsätzlich der schwer verständlichen gleichartig.“ ([3] S. 51)

Kapitel 3

Trisectoral Minds

„What is it that makes people become trisectors? That is a question which will never be answered, but it is possible to give some of the characteristics of trisectors. I will proceed to do this, so that you will be able to recognize one when you see him and not be surprised by what he does or says.“ ([11] S. 20)

Für *A Budget of Trisections* trug Underwood Dudley bis ins Jahr 1987 insgesamt 103 Konstruktionen von angeblichen Winkeldreiteilern zusammen. Die meisten davon stammten, wohl aufgrund des Wohnsitzes des Autors in Indiana, aus den USA. Allein in Kalifornien konnte er 21 Winkeldreiteiler ausfindig machen. Aber auch aus anderen Staaten der Welt erhielt er Schriften, z. B. drei aus Indien, zwei aus England sowie Neuseeland. Einzelne Winkeldreiteiler kamen etwa aus Australien, Kanada, Südafrika, Taiwan, Guyana, Türkei und aus europäischen Ländern wie Finnland, Frankreich, Deutschland und Griechenland. Sogar eine vermeintliche Winkeldreiteilungskonstruktion aus Österreich konnte der Autor auftreiben. Elf Winkeldreiteilern konnte Dudley keinen Herkunftsort zuweisen ([9] S. 58). Bis zur Veröffentlichung der zweiten Auflage von *A Budget of Trisections*, erschienen unter dem Titel *The Trisectors* im Jahr 1994, wurden ihm noch zusätzlich Konstruktionen zugeschickt, die er aber nicht mehr in sein Buch aufnahm, da sie im Kern weitgehend ident mit den bisherigen waren ([11] S. XVI).

Eins haben all diese Konstruktionen natürlich gemeinsam: Sie sind keine Winkeldreiteilungen. Für bestimmte Winkel erzeugen diese Konstruktionsvorschriften zwar zum Teil erstaunlich gute Näherungen, sie produzieren aber für andere Winkel meist erhebliche Abweichungen (vergleichbar mit Näherungskonstruktionen aus Kapitel 5).

3.1 Charakterisierung typischer Winkeldreiteiler

Bevor ich nun zu typischen Eigenschaften von Winkeldreiteilern komme, möchte ich noch darauf aufmerksam machen, dass die Erhebungen Underwood Dudleys, auf die ich mich hier

berufe, schon vor mehr als 20 Jahren stattgefunden haben. Damals stellte Dudley zum Beispiel fest, dass beinahe 100 Prozent der Winkeldreiteiler männlich sind ([9] S. 18). Von allen ihm zugespielten vermeintlichen Winkeldreiteilungskonstruktionen stammten lediglich zwei von Frauen. Diese beiden Frauen sind für Dudley allerdings insofern interessant, da sie nicht über die Unmöglichkeit solcher Konstruktionen Bescheid wussten. Dies ist unter Winkeldreiteilern äußerst selten. Für gewöhnlich haben Winkeldreiteiler sehr wohl von der Unmöglichkeit gehört, scheinbar aber nicht verstanden, was das in der Mathematik bedeutet. Ein Einwohner des südamerikanischen Staates Guyana beispielsweise ließ sich 1975 nicht von seinem Weg abbringen, als ihn ein Gelehrter von der Unmöglichkeit überzeugen wollte:

„One great scholar wrote, and I quote: ‘I feel I should tell you that it was proved a long time ago that it was impossible to trisect an angle using ruler and compass alone: consequently, any attempt to perform this construction is bound to be a waste of time.’

He then prepared for me a simplified thesis proving the impossibility; and this nearly shattered my faith in the Supreme Mathematician, to whom I had made intercession for revelation. However, intuition and grace kept me constant in the face of many reverses till revelation came, pointing out to me that the requirement for the trisection of angles was the construction of a fourth root and not a cube root as the scholar had labored to prove.“ ([9] S. 29)

Dieser Mann hatte also erfahren, dass das was er tut jedenfalls Zeitverschwendung ist und er machte trotzdem mit einer neuen, garantiert nicht zum Ziel führenden Idee weiter. Über ähnliche Vorfälle berichtet Dudley gleich mehrfach: die einen kommen mit einer neuen Idee, andere bessern ihre Näherung nach. Diesbezüglich dürfte das Wort „unmöglich“ eher als „zu schwer um bis jetzt geschafft“ aufgefasst werden ([9] S. 20). Oder aber das „unmöglich“ wird so gesehen, dass es „laut Meinung der Mathematiker_innen nicht lösbar“ ist:

„My teacher said that it was the opinion of mathematicians that a solution was impossible. For over 55 years that puzzle has bugged me.“ ([9] S. 19)

Für mich als angehenden Lehrer ist dies zusätzlicher Ansporn klar zu kommunizieren, dass sich die Mathematik gerade dadurch auszeichnet, dass einmal Bewiesenes ewig währt. In einem Gespräch zwischen Dudley und einem Winkeldreiteiler kommt das klar zum Ausdruck. Dudley versucht zu erklären:

„In chemistry, the laws may need to be changed; the laws of physics may need to be changed; in fact they were: Newton discovered these laws that had to be changed by Einstein, but ...“ ([11] S. 39)

Dudleys Gesprächspartner meint aber, dass sich über die Jahre viele Dinge in der Mathematik geändert hätten, woraufhin Dudley sagt:

„No. Once a theorem is proved, it does not change. There are fashions in mathematics, and subjects come and go ...“ ([11] S. 39)

Die Unmöglichkeit der Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal ist bewiesen, daran ändert sich selbst in 55 Jahren oder mehr nichts mehr. Die vorhin genannte Zeitspanne von 55 Jahren führt zu einem weiteren interessanten Aspekt. Winkeldreiteiler sind laut Dudley tendenziell alt. Zwischen dem Erstkontakt mit der Thematik und dem Versuch selbst das Unmögliche zu schaffen, liegen häufig viele Jahre. So wurden Dudley Briefe von Hobbymathematikern geschickt, in denen sie schildern, dass sie von der Unmöglichkeit der Winkeldreiteilung erstmals in der Schule gehört hatten sich aber erst nach der Pensionierung voll und ganz auf das Problem stürzen konnten.

„The trisection is like a disease with a very long incubation period.“ ([11] S. 20)

Dazu passt auch ein Zitat De Morgans über einen Winkeldreiteiler aus dem Jahre 1848:

„‘The consequence of years of intense thought’: very likely, and very sad.“ ([7] S. 10)

Eine Winkeldreiteilungskonstruktion zu suchen beginnt bei manchen Personen auch deshalb, weil sie in irgendwelchen Magazinen oder Zeitschriften davon gelesen haben, dass bis jetzt noch nie eine Formel zur Winkeldreiteilung ausgearbeitet wurde. Dies führt zu Verwunderung über Wissenschaftler_innen und Mathematiker_innen im Speziellen, oder sogar Wut, wie folgende Aussage zeigt:

„How could men of science be so stupid? Any scientist or mathematician who declares that a thing is impossible is showing his limitations before he even starts on the problem at hand.“ ([11] S. 21)

Für mich klingt das wie eine Kritik an Wissenschaftler_innen, als ob sie sich vor schwerer Arbeit drücken würden. Scheinbar gibt es Menschen, die davon ausgehen, dass alles möglich sein muss. In die gleiche Kerbe wie vorhin schlägt auch ein anderer Winkeldreiteiler, der 1933 meinte, dass in der modernen Mathematik nicht einmal mehr der Versuch unternommen werde das ungelöste Problem zu lösen. Stattdessen würden nur Abhandlungen verfasst, die die Unmöglichkeit des Findens einer Winkeldreiteilungskonstruktion zeigen sollen. Seine Kritik lautet daher, dass keine Anreize mehr geschaffen würden dieses Problem zu lösen und dass Mathematiker_innen Leute wie ihn vom Problem abschrecken, ja sogar als Spinner abtun würden ([9] S. 20).

„Der Glaube, daß man jede Konstruktionsaufgabe, also z. B. auch die Dreiteilung eines beliebigen Winkels, mit Zirkel und Lineal müsse bewerkstelligen können, ist nicht auszurotten, obwohl schon die Unmöglichkeit, einen Kreis mit dem Lineal allein zu konstruieren, ein recht einleuchtendes Beispiel dafür ist, daß der Tragweite

eines jeden Konstruktionshilfsmittels Grenzen gesetzt sind, und obwohl der [...] angegebene Beweis z. B. dafür, daß man den Winkel von 60 Grad nicht mit Zirkel und Lineal allein dritteln kann, hinreichend einfach ist, um jedem nahegebracht werden zu können, der sich berufen fühlt, sich mit mathematischen Aufgaben zu befassen. Gleichwohl sind es nicht nur Außenseiter, sondern auch Akademiker, sogar studierte Mathematiklehrer höherer Lehranstalten, die immer wieder Zirkel- und Linealkonstruktionen für die Dreiteilung eines beliebigen Winkels anbieten. Die von den Urhebern für exakt gehaltenen Konstruktionen erweisen sich naturgemäß stets als Näherungskonstruktionen, deren Ergebnis dem angestrebten Ziel mehr oder weniger nahekommt.“ ([3] S. 121)

Trotz Bieberbachs Äußerungen über Akademiker und studierte Mathematiklehrer ist in *A Budget of Trisections* doch die Tendenz zu erkennen, dass Winkeldreiteiler nur wenig mathematische Kenntnis besitzen. Zwar berichtet Dudley selbst über zwei Ausnahmen (einer arbeitete mit partiellen Ableitungen, ein anderer verwendete in seinem trigonometrischen Beweis den nicht jedem und jeder bekannten Satz von Desargues [30]), aber der Großteil verfügt über nicht mehr als Schulgeometriewissen, wenige haben nicht einmal das (dafür aber vielleicht eine theologische oder geisteswissenschaftliche Ausbildung). Der deutsche Mathematiker Bieberbach merkt diesbezüglich noch etwas an:

„Denn vieles Mißverstehen und Nichtverstehen, namentlich von seiten nicht genügend ausgebildeter Mathematiker, die sich erfahrungsgemäß merkwürdigerweise gerade für Fragen aus dem Gebiet der geometrischen Konstruktionen interessieren, beruhen gerade auf dem Übersehen der klaren Definitionen und den dadurch bewirkten Unklarheiten und Verwechslungen.“ ([3] S. 2)

Dudley wundert sich darüber, dass jemand der kaum über Mathematik Bescheid weiß, überzeugt davon sein kann selbst ein Rätsel zu lösen, das über viele Jahrhunderte bereits die besten Köpfe ihres Faches beschäftigt hat.

„Would he today try nuclear fusion in his basement? And think that he had succeeded?“ ([9] S. 22)

Winkeldreiteiler glauben zudem ihre Winkeldreiteilung sei für die Mathematik von entscheidender Bedeutung. Einige gehen davon aus, dass Mathematiker_innen gerne Winkel in drei Teile teilen würden, das aber nicht zusammenbringen. Dass dies sehr wohl möglich ist, sofern man sich nicht an die ursprünglichen Spielregeln hält (blättere hierfür zum Kapitel über *Exakte Winkeldreiteilungen!*), ist ihnen entweder fremd oder sie beharren darauf, wie bei den alten Griechen nur Zirkel und Lineal zu verwenden. Es ist diesbezüglich ärgerlich, dass Medien, ob absichtlich (wegen einer reißerischen Überschrift) oder unabsichtlich (weil Journalisten und Journalistinnen es nicht besser wissen), weiterhin der Mathematik unterstellen noch immer keine Winkeldreiteilungskonstruktion gefunden zu haben. Die Aktualität dieses Themas erkennt

man beispielsweise anhand eines Fernsehberichtes des SRF (Schweizer Radio und Fernsehen) aus dem Jahr 2009 mit dem Titel *Origami löst unlösbare Probleme*, in dessen Begleittext es heißt:

„Origami ist nicht nur Kunst. Mit seinen komplexen Faltechniken lassen sich auch mathematische Probleme lösen. So versuchten Wissenschaftler seit der Antike, Winkel mit Zirkel und Lineal zu dreiteilen – ohne Erfolg. Mit Origami ist das problemlos möglich. Da staunen selbst ETH-Mathematiker.“ [36]

(Anm.: ETH steht für Eidgenössische Technische Hochschule) Schon allein der Titel des Fernsehberichts beinhaltet einen Widerspruch. Wenn etwas unlösbar ist, wie konnte es dann gelöst werden? Hier zeigt sich, wie der Mythos des bis jetzt nicht gelösten Problems völlig grundlos befeuert wird.

Von daher sind sich manche Winkeldreiteiler sicher, ihre Konstruktion wäre Geld wert. Manche werden sogar paranoid, wenn sie andere Personen ihre Arbeit sehen lassen, immerhin könnte jemand ihre wertvolle Idee stehlen. In einem Brief der Universität Göttingen wird über genau dieses Phänomen berichtet:

„So hat zum Beispiel ein Schlaumeier nur die erste Hälfte seiner Lösung eingeschickt und versprochen, er würde die zweite Hälfte nachreichen, wenn wir ihm 1.000 DM Vorschuß zahlen würden. Ein anderer hat mir zehn Prozent seiner Einnahmen aus Veröffentlichungen, Radio- und Fernsehinterviews versprochen, die er bekommen würde, wenn er berühmt geworden sei – und dies sei ja keine Frage, wenn ich ihn nur unterstützen würde. Falls nicht, so drohte er an, werde er sein Material an ein russisches Mathematikinstitut schicken und uns so um den Ruhm, ihn entdeckt zu haben, bringen.“ ([10] S. 62)

Dudley berichtet sogar von einem Winkeldreiteiler, der sich aus eben diesem Grund geweigert hat ihm seine Konstruktion zu schicken ([9] S. 22). Laut Dudley ist es üblich, dass Winkeldreiteiler ihre Schriften rechtlich schützen lassen, bevor sie sie jemandem zeigen. An dieser Stelle möchte ich auf das Kapitel *Winkeldreiteiler in Onlineforen* meiner Diplomarbeit verweisen, wo etwas ganz Ähnliches dargelegt wird.

Wie hingegen ein Mathematiker das Thema Geld und Mathematik beurteilt, macht folgende Zusammenfassung deutlich:

„Noch nie hat jemand ein mathematisches Theorem verkauft – und sei es noch so bedeutend. All die Hunderte und Tausende von mathematischen Artikeln, die jährlich in den wissenschaftlichen Zeitschriften erscheinen, bringen ihren Autoren keinen einzigen Pfennig ein. Veröffentlichen zu können, wird als Ehre oder zumindest als Privileg angesehen. Die einzigen finanziellen Vorteile, die jemals aus mathematischen Publikationen entstehen können, sind indirekter Natur wie Beförderungen wegen vieler verdienstvoller Arbeiten usw. Im Ingenieurwesen kann

man vielleicht eine Idee verkaufen, wenn man weiß, wie man es anfangen muß. Mit einer rein mathematischen Idee geht dies jedoch nicht. Der Grund hierfür ist einfach: Man kann sie zu nichts gebrauchen außer zur Förderung des Wissens, und die Förderung des Wissens war noch nie ein lukratives Geschäft.“ ([10] S. 157)

Neben den Geheimnistuern gibt es dennoch auch solche Winkeldreiteiler, die ihre Konstruktion gleichzeitig an viele verschiedene Universitäten zur Begutachtung schicken. So z. B. verteilte 1951 ein 82 jähriger Mann aus Michigan seine angebliche Winkeldreiteilung an insgesamt mehr als 200 Universitäten und Institute, woraufhin er über 60 Antworten erhielt, natürlich mehrheitlich mit dem gleichen Inhalt ([9] S. 29). Abgesehen vom Gerücht eine Winkeldreiteilungskonstruktion verkaufen zu können, schwirrt ebenso das Gerücht umher, dass auf das Finden der Winkeldreiteilungskonstruktion ein Preisgeld ausgeschrieben sei. Solche Preisgelder für mathematische Errungenschaften gab bzw. gibt es wirklich, z. B. für den Beweis der Fermat’schen Vermutung ([22] S. 50) oder der Poincaré-Vermutung [25], nicht jedoch für die Winkeldreiteilung. Gerüchte um Preisgelder locken Hobbymathematiker zudem in andere mathematische Bereiche, wie der *Ausblick* am Ende der Diplomarbeit zeigt.

„I have now trisected the angle, squared the circle, and doubled the cube ... Now what can I work on next?“ ([11] S. 43)

Zu guter Letzt möchte ich kurz auf den Schreibstil von Winkeldreiteilern eingehen. Dudley beschäftigte sich noch mit Briefen, die an Universitäten oder Professoren verschickt wurden. Ich analysierte Forumsbeiträge und Buchfragmente von Winkeldreiteilern. Wie ich aufgrund meiner Recherche in Onlineforen bestätigen kann, sind Texte von Winkeldreiteilern oftmals nur schwer verständlich. Sie verwenden teilweise eigens erfundene Begriffe und lassen wesentliche Informationen weg (Geheimhaltungstaktik?). Dudley merkt außerdem an, dass viele Winkeldreiteiler sehr komplizierte Grafiken anfertigen, die sich in den meisten Fällen deutlich vereinfachen ließen ([9] S. 23). Das in Abb. 3.1 dargestellte Gebilde ([29] Beitrag 315) ist ein noch junges Beispiel dafür. Diese Grafik tauchte 2010 sehr verpixelt in einem Mathematikforum auf und soll eine in 24 Schritten entstandene Winkeldreiteilung zeigen (Anm.: Über die Person, von der Abb. 3.1 stammt, berichte ich im Abschnitt *Exakte Näherungen* des Kapitels *Winkeldreiteiler in Onlineforen*).

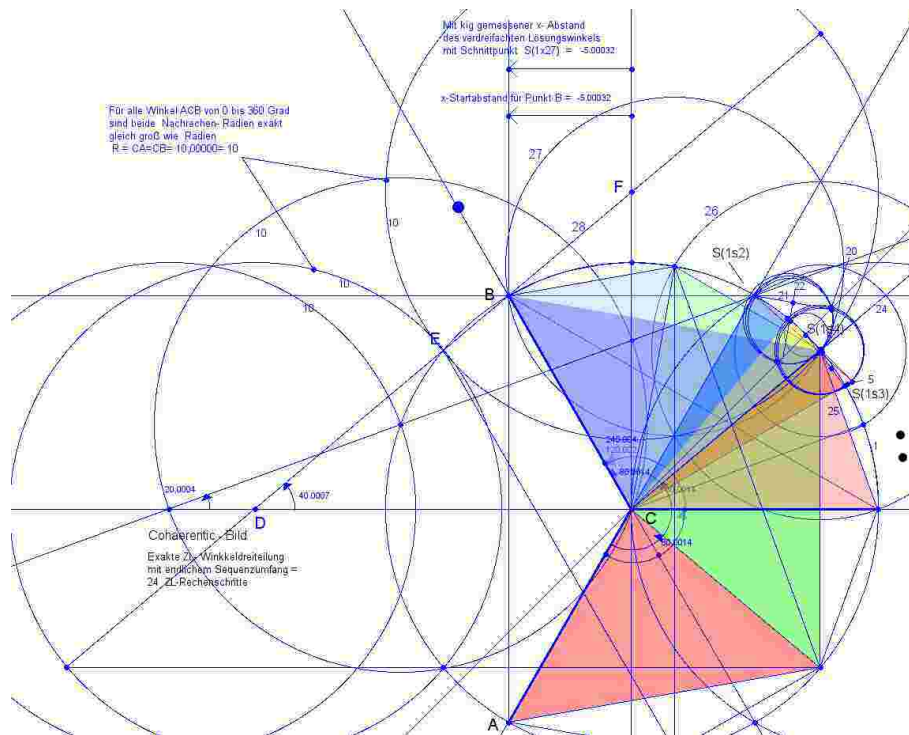


Abbildung 3.1: Eine angebliche Winkeldreiteilung

3.2 Bekanntgabe des Profils

Fasst man alle typischen Eigenschaften eines Winkeldreiteilers zusammen, so handelt es sich bei ihm um einen Mann im Pensionsalter ohne höhere mathematische Ausbildung, der komplizierte Zeichnungen anfertigt und sich von der Unmöglichkeit seines Unterfangens nicht überzeugen lässt, weil er glaubt, dass das was er tut für die Mathematik wichtig ist und eines Tages mit einem Preisgeld geehrt werden könnte. Was bleibt ist der Glaube, dass es doch irgendwie gehen muss:

„When told that it was impossible on algebraic grounds, he kept saying that he knew it was algebraically impossible, but that did not imply that geometric methods would not work. In fact, he said, his work showed that geometric methods would work.“ ([11] S. 169)

Kapitel 4

Exakte Winkeldreiteilungen

Die Unmöglichkeit der Winkeldreiteilung, so heißt das erste von mir für diese Arbeit verfasste Kapitel. Am Ende des Kapitels steht, dem Namen nach wenig überraschend, der Beweis, dass generelle Winkeldreiteilungskonstruktionen unter bloßer Verwendung von Zirkel und Lineal unmöglich sind. Warum trägt dann aber das jetzige Kapitel den Namen *Exakte Winkeldreiteilungen*? Kann man so etwas vielleicht doch machen? Wieso schreibt sogar Dudley einerseits,

„[...] many trisectors do not know that exact trisections are easy to do. They are under the delusion that there is a need for a method for trisecting. They are unaware that dividing an angle into three equal parts may be quickly accomplished [...]“ ([11] S. 3)

und andererseits:

„YOU CAN'T TRISECT ANGLES!
DON'T TRY!“ ([11] S. XVI)

Nun, das hängt damit zusammen, dass es auch ein Kapitel mit dem Namen *Spielregeln* gleich zu Beginn meiner Arbeit gegeben hat, in dem präzisiert wird, was mit „Konstruieren mit Zirkel und Lineal“ gemeint ist. Hält man sich an diese Spielregeln, dann geht diese Winkeldreiteilung ganz einfach nicht. Im Kapitel zu den Spielregeln habe ich aber auch bereits versucht klarzustellen, dass es ebenso geometrische Konstruktionen abseits dieser Spielregeln gibt. *Exakte Winkeldreiteilungen* als Titel für das hier nun vorliegende Kapitel macht Sinn, denn tatsächlich ist es ganz leicht exakte Winkeldreiteilungen zu realisieren. Man muss dazu bloß die eingangs beschriebenen Spielregeln ändern. Es genügt nämlich bereits eine geringe Lockerung der erlaubten Konstruktionsmittel um beliebige Winkel in drei gleiche Teile zu teilen. Es kann ausreichen, wenn man ein Lineal mit Markierungen geschickt anlegt, oder wenn man eine Schablone in der Form spezieller Kurven verwendet. Solche exakten Konstruktionen wurden übrigens schon

zur Zeit der antiken Griechen gefunden, etwa von Hippias oder auch Archimedes, also zu einer Zeit in der Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal erste Berühmtheit erlangten. Um noch einmal auf die Trisectoral Minds zurückzukommen: Wieso sollte für das Finden einer Winkeldreiteilungskonstruktion, die nur auf die Verwendung von Zirkel und Lineal beschränkt ist, ein Preisgeld ausgeschrieben sein, wenn doch längst andere geometrische Konstruktionen bekannt sind?

Für praktische Zwecke reicht es beispielsweise vollkommen aus ein Geodreieck oder einen Winkelmesser zu verwenden. Im Folgenden präsentiere ich einige verschiedene Ansätze um Winkeldreiteilungen durchzuführen („nur“ einige, weil für mich kein Anspruch auf Vollständigkeit besteht und weil ich gar nicht weiß, wie viele es überhaupt gibt). Als primäre Quellen hierfür dienen mir der Abschnitt *Non-Euclidean Constructions* in ([11] S. 3–17) sowie der Abschnitt über griechisch-hellenistische Mathematik in [1], wobei ich einige Beweise und alle Anleitungen zur Anwendung in GeoGebra selbst beisteuere.

4.1 ... mit einem markierten Lineal

Mit einer wahrlich minimalistischen Erweiterung obiger Spielregeln gelang es Archimedes Winkel dreizuteilen. Zwecks zeitlicher Einordnung, Archimedes lebte von 287 bis 217 v. u. Z. Neben einem Zirkel kommt bei seiner Konstruktion, und darin liegt nun die Erweiterung, ein Lineal mit zwei Markierungen zum Einsatz. Lediglich zwei Stricherl auf einem sonst blanken Lineal machen also den Unterschied bei den Konstruktionsmitteln aus, der Rest bleibt gleich.

Die Konstruktionsanleitung mit den archimedischen Mitteln kann wie folgt formuliert werden. Sei, wie in Abb. 4.1, $\angle BOA$ der zu dreiteilende Winkel, wobei $|BO|$ der Abstand der beiden Markierungen am Lineal sein soll. Zunächst zeichnet man eine Parallele zu $\overline{OA}$ durch den Punkt B , sowie einen Kreis mit Mittelpunkt B und Radius $|BO|$. Das Lineal mit den beiden Markierungen wird nun am Punkt O anliegend so platziert, dass die eine Markierung den Kreis schneidet und die andere die zuletzt gezeichnete Parallele. Die so entstehende Gerade schneidet die Parallele schließlich im winkeldreiteilenden Punkt, den ich mit T bezeichne. D. h. der ursprüngliche Winkel $\angle BOA$ ist genau dreimal so groß wie der neue Winkel $\angle TOA$. Die für diese Konstruktion erforderlichen Linien und Punkte sind in Abbildung 4.1 zu sehen.

Um das nicht bloß hinnehmen zu müssen, folgt auch schon eine Begründung, samt hilfreicher Grafik (Abb. 4.2): Ist θ das zum Winkel $\angle TOA$ gehörige Winkelmaß, so folgt daraus, dass auch der Winkel $\angle DTB$ gleich θ ist, weil ja $\overline{BT}$ parallel zu $\overline{OA}$ liegt. Weiters bilden die Punkte B , T und D ein gleichschenkliges Dreieck, denn die Konstruktion ist so aufgebaut, dass $\overline{BD}$ und $\overline{DT}$ gleich lang sein müssen. Somit ist auch beim Winkel $\angle DBT$ das Win-

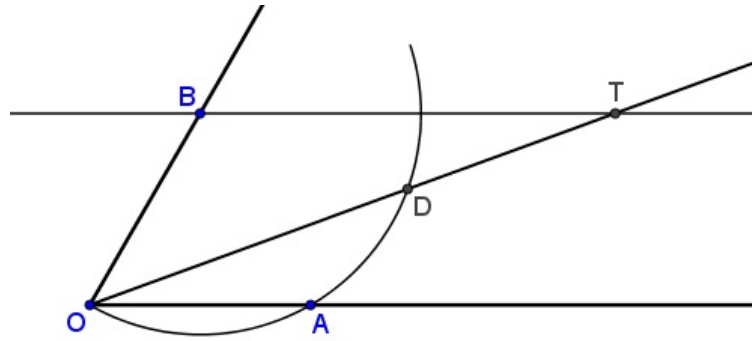


Abbildung 4.1: Winkeldreiteilung nach Archimedes

Winkelmaß θ . Vom Dreieck $\triangle BTD$ sind nun bereits zwei Winkel bekannt und die Winkelsumme im Dreieck beträgt stets 180° , weshalb $\angle BDT$ gleich $180^\circ - 2\theta$ ist. Der Supplementärwinkel zu $\angle BDT$, also $\angle ODB$, beträgt dann genau 2θ . Das von O , B und D gebildete Dreieck ist ebenso gleichschenkelig, weil $|OB| = |BD|$. Schlussendlich ergibt dies, dass der Winkel $\angle BOD$ dem Winkelmaß 2θ entspricht. Auf diese Weise ist bewiesen, dass $\overline{OT}$ von $\angle BOA$ exakt ein Drittel wegschneidet.

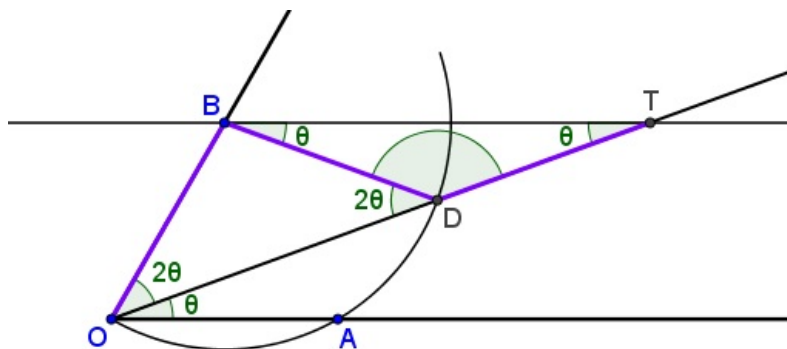


Abbildung 4.2: Archimedische Winkeldreiteilung erläutert

Eine exakte Winkeldreiteilung ist ebenso mit einem Lineal, auf dem zwei Markierungen im doppelten Abstand zu vordrin aufgedruckt sind, hier jetzt also $2|BO|$, möglich. Mit diesem Konstruktionsmittel lautet die zum Ziel führende Konstruktionsvorschrift wie folgt: Sei $\angle BOA$ in Abb. 4.3 der zu dreiteilende Winkel. Zu Beginn zeichnet man eine Gerade durch den Punkt B parallel zu $\overline{OA}$, sowie eine Gerade durch B senkrecht auf die Strecke $\overline{OA}$. Nun kommt das Lineal mit den Markierungen ins Spiel, denn es ist so zu platzieren, dass es am Punkt O anliegt und dass die eine Markierung die soeben gezeichnete Senkrechte schneidet, während die andere Markierung die Parallele durch B schneidet. Der sich so ergebende Punkt T ist bereits der Punkt von Interesse, d. h. die Strecke $\overline{OT}$ dreiteilt den ursprünglichen Winkel $\angle BOA$.

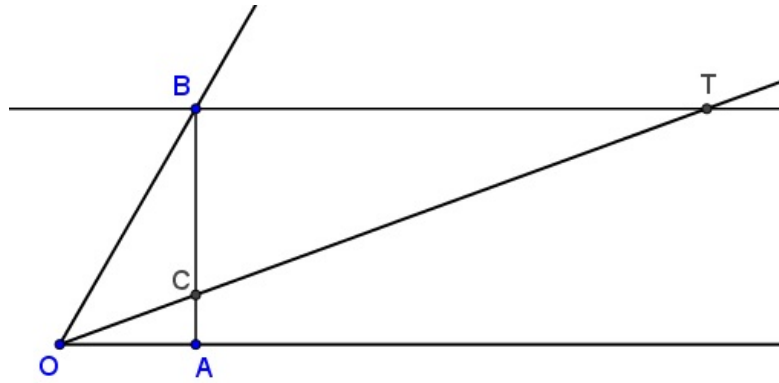


Abbildung 4.3: abgewandelte archimedische Winkeldreiteilung

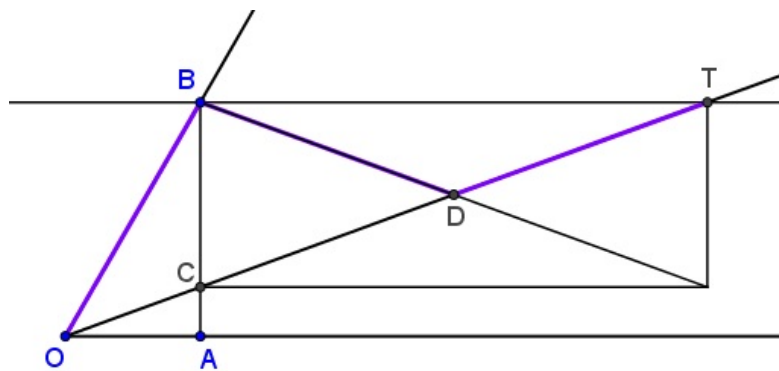


Abbildung 4.4: abgewandelte Winkeldreiteilung erläutert

Um zu beweisen, dass $\angle TOA$ wirklich ein Drittel von $\angle BOA$ ist, verwende ich in Abb. 4.4 ein Hilfsrechteck. Dieses Hilfsrechteck hat $\overline{BT}$ und $\overline{BC}$ als Seiten, sowie $\overline{CT}$ als Diagonale. Weil die Diagonalen eines Rechtecks gleich lang sind und einander halbieren, gilt für das hier vorliegende Hilfsrechteck $|BD| = |DT|$. Die Diagonale $\overline{CT}$ wiederum wurde mit Länge $2|BO|$ gezeichnet, weshalb $|DT| = |BD| = |BO|$ resultiert. Genau diese Konstellation lag schon bei der archimedischen Winkeldreiteilung vor, weshalb der Beweis an dieser Stelle endet. Somit ist auch hier mit der abgewandelten Konstruktionsvorschrift samt verändertem Lineal eine exakte Winkeldreiteilung realisierbar.

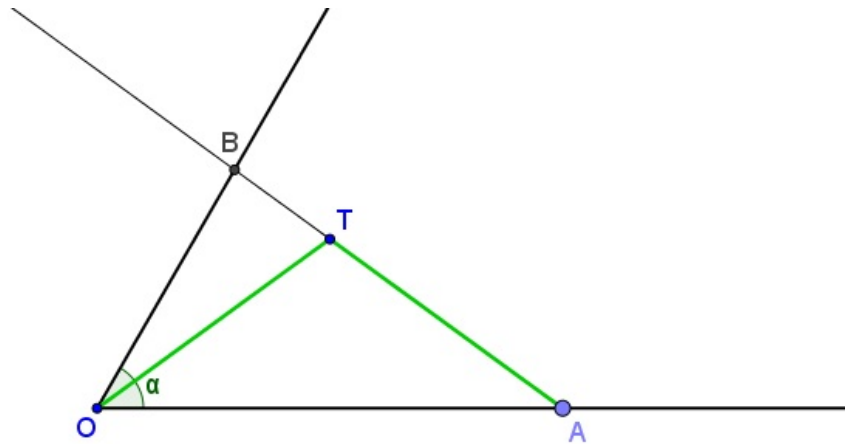


Abbildung 4.5: Instrument mit zwei Gelenken und vier Armen

Als nächstes wird ein mechanisches Instrument zur Dreiteilung beliebiger Winkel behandelt. Dieses Instrument besteht aus nur zwei Gelenken und vier Armen. In Abb. 4.5 ist α der zu dreiteilende Winkel. Das Instrument ist nun so am Winkel anzulegen, dass zwei seiner Arme, und zwar jene durch $\overline{OA}$ und $\overline{BO}$, den Winkel α einschließen. Der Punkt A kann dabei entlang seines Armes hin- und hergeschoben werden. Der Punkt T hingegen ist über ein Gelenk und zwei weitere Arme so mit dem Rest des Instruments verbunden, dass zwischen den Punkten O, T und A, T ein fester Abstand besteht, d. h. $|OT| = |AT|$. Die gewünschte Winkeldreiteilung gelingt jetzt, indem der Punkt A so verschoben wird, bis der Schnittpunkt B der beiden Arme durch $\overline{BO}$ und $\overline{AT}$ von O und T den gleichen Abstand hat (Anm.: Auch B hat während dieses Vorgangs keine fixe Position, sondern bewegt sich entlang seiner Achse).

Abb. 4.6 zeigt das Endresultat, in dem der ursprüngliche Winkel $\angle BOA$ dreimal so groß ist wie der neue $\angle TOA$. Zwecks Begründung dieser exakten Winkeldreiteilung geht man vom Winkelmaß θ bei $\angle TOA$ aus. Wegen $|OT| = |AT|$ ist θ ebenfalls das zu $\angle TAO$ gehörige Winkelmaß. Entsprechend ist $\angle BTO$ gleich 2θ . Da $|BO| = |BT|$ gewählt wird, ist desweiteren $\angle TOB$ gleich 2θ .

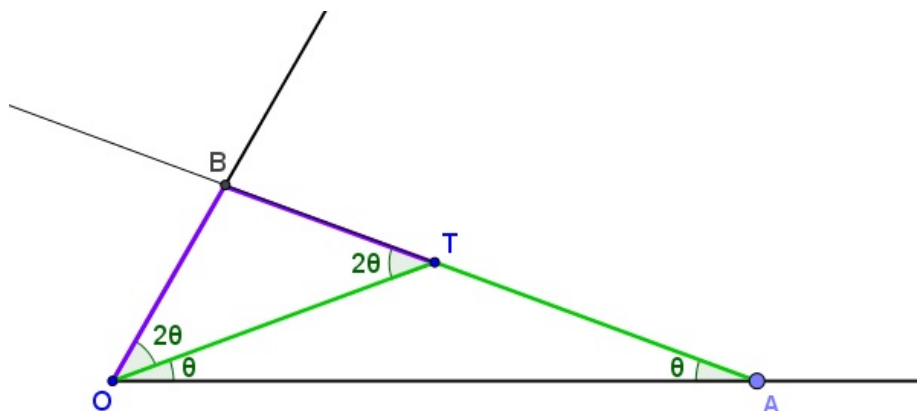


Abbildung 4.6: Winkeldreiteilung mit Schieberegler

Wer sich dieses Winkeldreiteilungsinstrument nicht nur vorstellen, aber auch nicht aus Feststoffen basteln will, für den oder die habe ich eine Anleitung zur Simulation des Instruments in GeoGebra formuliert. Als erstes zeichnet man einen beliebigen Winkel, ausgehend vom Koordinatenursprung und der positiven x -Achse (eventuell sogar einen per Schieberegler veränderbaren Winkel, sodass man später das Instrument bei verschiedenen Winkeln erproben kann). Dann legt man zwei Strahlen vom Koordinatenursprung O durch die Schenkel des Winkels. Danach definiert man einen Schieberegler a mit Werten größer als Null. Als Punkt A definiert man $(a, 0)$. Somit lässt sich der Punkt A mit Hilfe des Schiebereglers entlang der x -Achse bewegen. Jetzt benötigt man noch einen festen Wert, z. B. 3, der im Folgenden als fixer Abstand zwischen den Punkten O, T und A, T dienen soll. Um T einzeichnen zu können, muss dieser als $\left(\frac{a}{2}, \sqrt{3^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)$ definiert werden (Anm.: Man stelle sich dazu ein rechtwinkeliges Dreieck mit Kathete $\frac{a}{2}$ auf der x -Achse und einer Hypotenuse $\overline{OT}$ vor). Ist T einmal eingezeichnet, können die Strecke $\overline{OT}$ sowie ein Strahl von A durch T gezeichnet werden. Der Schnittpunkt dieses Strahles von A durch T mit dem am Winkel anliegenden Strahl (und da meine ich jetzt nicht den Strahl auf der x -Achse) bezeichnet man als B . Laut obiger Winkeldreiteilungsanleitung ist von nun an nur mehr der Punkt A so weit zu verschieben, dass $|BO| = |BT|$ erreicht ist. Dies lässt sich mit GeoGebra veranschaulichen, indem man extra die Strecken $\overline{BO}$ und $\overline{BT}$ definiert, wodurch das Programm die Längen dieser Strecken ausgibt. Ein Vergleich der Längen ist dann besonders leicht. Das selbe Ergebnis erreicht man auch, wenn man gleich in die Eingabezeile den Befehl `Länge[Strecke[O, B]]` sowie `Länge[Strecke[B, T]]` tippt.

4.2 ... mit der Quadratrix

Noch vor Archimedes, ja sogar bevor Euklid *Die Elemente* verfasst hatte, entdeckte Hippias von Elis bereits einen Weg eine Kurve zu zeichnen, mit der nicht nur Winkeldreiteilungen möglich sind, sondern sogar die Quadratur des Kreises. Diese etwa um 400 v. u. Z. von Hippias gefundene und als Quadratrix bezeichnete Kurve kommt so zustande: Im Quadrat $OABC$ (siehe Abb. 4.7) bewegt sich die Strecke $\overline{BC}$ mit gleichmäßiger Geschwindigkeit nach unten, während sich die Gerade durch O und C mit gleichmäßiger Winkelgeschwindigkeit im Uhrzeigersinn um O dreht. Die Geschwindigkeit der Strecke $\overline{BC}$ und die Winkelgeschwindigkeit der Gerade durch O und C sind dabei so zu wählen, dass $\overline{BC}$ und $\overline{OC}$ zum selben Zeitpunkt die Strecke $\overline{OA}$ erreichen. Da wo $\overline{BC}$ und $\overline{OC}$ einander schneiden, entsteht die Quadratrix, d. h. jeder Schnittpunkt der beiden sich bewegenden Strecken liegt jederzeit auf der Quadratrix. (Anm.: In Abb. 4.7 sind ein paar dieser Schnittpunkte angedeutet.)

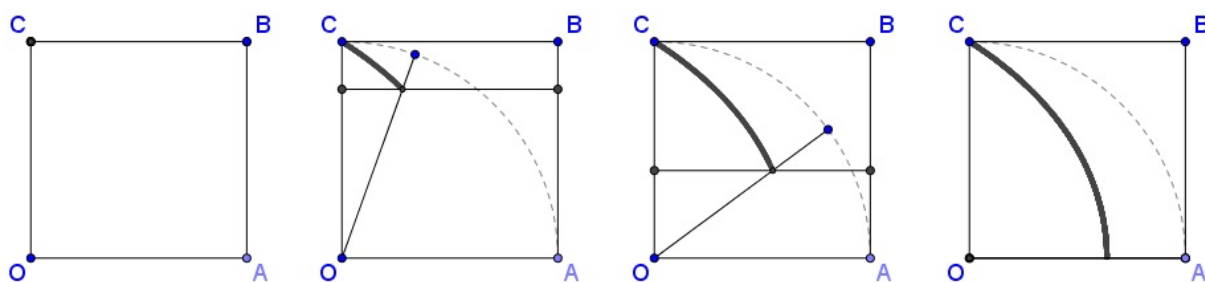


Abbildung 4.7: Entstehung der Quadratrix (v. l. n. r.)

Abbildung 4.8 zeigt, warum mit Hilfe der Quadratrix Winkeldreiteilung so leicht durchführbar sind. Der vertikale Abschnitt y und der Winkel φ sind nämlich proportional zueinander. Um den Winkel φ zu dritteln, genügt es also den Abschnitt y zu dritteln.

Um das Ganze noch mit etwas mehr Mathematik zu unterfüttern, werde ich jetzt die Gleichung der Quadratrix herleiten und nebenbei erläutern, wie sich die Kurve mit GeoGebra zeichnen lässt. Zunächst legt man mit $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 1)$ die vier Eckpunkte des Quadrats $OABC$ fest. Die zur Erstellung der Quadratrix nötige Bewegung soll zum Zeitpunkt 0 beginnen und zum Zeitpunkt 1 enden, wobei ich die Zeitvariable mit t kennzeichne. Sei also $0 \leq t \leq 1$. In GeoGebra kann man hierfür einen Schieberegler namens t mit Werten zwischen 0 und 1 erstellen. Wie in Abb. 4.9 zu sehen, weise ich Punkten auf der Quadratrix x - und y -Koordinaten zu. Für die y -Komponente zum Zeitpunkt t gilt

$$y(t) = 1 - t.$$

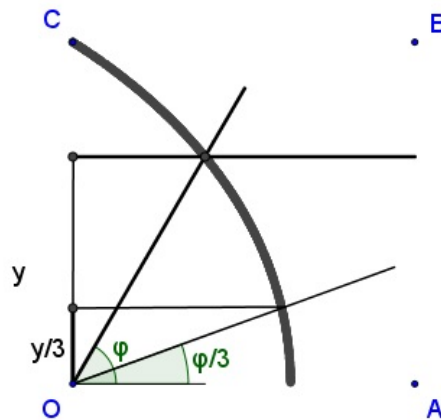


Abbildung 4.8: Winkeldreiteilung mit der Quadratrix

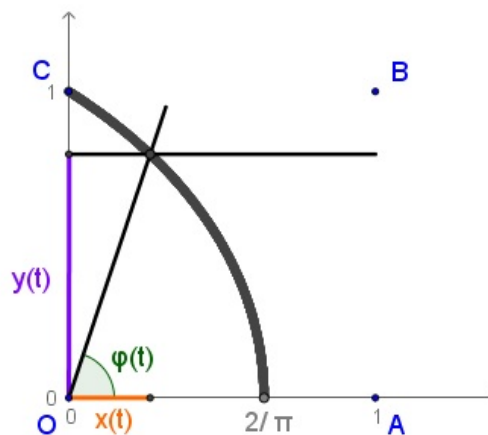


Abbildung 4.9: Quadratrix im Koordinatensystem

In GeoGebra erreicht man die sich von $\overline{BC}$ aus nach unten bewegendes Strecke, indem man zuerst zwei Punkte mit den Koordinaten $(0, 1 - t)$ sowie $(1, 1 - t)$ definiert, und diese dann miteinander verbindet. Für den Winkel der sich um O drehenden Gerade gilt

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(1 - t) = \frac{\pi}{2}y(t).$$

In GeoGebra erreicht man diesen Winkel, indem man einen *Winkel mit fester Größe* auswählt, zuerst A dann O anklickt und ins aufpoppende Fenster $\frac{\pi}{2} - t \frac{\pi}{2}$ einträgt (sofern man in den erweiterten Eigenschaften Radiant als Winkleinheit festgelegt hat – ansonsten muss man statt $\frac{\pi}{2}$ eben 90° schreiben). Ist das Erstellen des vom Schieberegler t abhängigen Winkels φ

geglückt, so legt GeoGebra automatisch einen um O rotierenden Punkt an. Diesen Punkt kann man im nächsten Schritt über eine Strecke mit O verbinden. Hiermit sind bereits die zwei sich bewegenden Strecken, die einander schneiden sollen, entstanden. Um jetzt die Quadratrix zu zeichnen, genügt es in GeoGebra einen Schnittpunkt anzuklicken und dessen Spur zu aktivieren. Damit wird bezweckt, dass beim Benutzen des Schiebereglers t der soeben entstandene Schnittpunkt Farbleckse hinterlässt, weshalb die Quadratrix sichtbar wird.

Anhand Abb. 4.9 ist zu erkennen, dass für $0 < t < 1$ die Beziehung

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \tan \varphi(t) = \tan \frac{\pi y(t)}{2}$$

gilt. Wegen $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ kann man ebenso $\frac{x(t)}{y(t)} = \cot \frac{\pi y(t)}{2}$ schreiben. Die Gleichung der Quadratrix lautet somit:

$$x = y \cot \frac{\pi y}{2}.$$

Aufgrund der konstruktionsbedingten Proportionalität des vertikalen Abschnitts y und des Winkels φ , die über

$$\varphi = \frac{\pi}{2} y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\varphi}{n} = \frac{\pi}{2} \frac{y}{n}$$

gegeben ist, lassen sich Winkel in n gleiche Teile teilen, so auch in $n = 3$ gleiche Teile, wie weiter oben bereits festgestellt.

Schlussendlich möchte ich noch auf den vielleicht seltsam anmutenden Namen Quadratrix eingehen. Dieser geht darauf zurück, dass die Kurve nicht nur zur Teilung von Winkeln herangezogen werden kann, sondern auch zur Quadratur des Kreises. Das stellte allerdings nicht Hippias selbst fest, sondern Deinostratos um 350 v. u. Z. Damit die Quadratur des Kreises gelingt, muss die Zahl π dargestellt werden, und das ist mit der Quadratrix möglich. Diese Feststellung kann in moderner Formulierung wie folgt zusammengefasst werden:

$$\lim_{y \rightarrow 0} y \cot \frac{\pi y}{2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan \frac{\pi y}{2}} \stackrel{\text{de l'Hospital}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi y}{2}} \cdot \frac{\pi}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \cos^2 \frac{\pi y}{2} = \frac{2}{\pi}$$

Mit der vorigen Zeile geht man der Frage nach, in welchem Punkt die Quadratrix mündet. Die y -Komponente dieses Punktes ist klar, denn diese geht gegen Null, aber der Wert der x -Komponente ist da schon kniffliger. Die Gleichung der Quadratrix lautet ja $x = y \cot \frac{\pi y}{2}$ und was passiert mit diesem x , wenn doch $\lim_{y \rightarrow 0} y = 0$ und $\lim_{y \rightarrow 0} \cot \frac{\pi y}{2} = \infty$? Wie der obigen Grenzwertbestimmung zu entnehmen ist, hilft die Regel von de l'Hospital weiter. Diese Regel darf immer dann angewendet werden, wenn der Grenzwert eines Quotienten, dessen Zähler und Nenner jeweils gegen Null konvergieren, bestimmt werden soll. Bei $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan \frac{\pi y}{2}}$ ist das der Fall.

Die an dieser Stelle anwendbare Regel von de l'Hospital besagt nun, dass sich durch Ableiten des Zählers und Ableiten des Nenners der Grenzwert nicht ändert. Mit diesem Trick ergibt sich schließlich für die x -Komponente als Grenzwert $\frac{2}{\pi}$. Hat man erst einmal $\frac{2}{\pi}$ konstruiert, dann ist es auch nicht mehr schwierig π zu erhalten, wodurch die Quadratur des Kreises ermöglicht wird.

Übrigens: Bei der Quadratrix soll es sich um die erste transzendente (d. h. nicht algebraische) Kurve in der Geschichte der Mathematik handeln [1]. Das bedeutet, dass auf dieser Kurve transzendente Punkte liegen, solche also, die sich auch nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen. Unter Einhaltung der Spielregeln vom Konstruieren mit Zirkel und Lineal wäre es zwar möglich unendlich viele Punkte auf der Quadratrix zu konstruieren, nicht aber z. B. $(\frac{2}{\pi}, 0)$, weil eben dieser Punkt transzendent ist. Das „Beste“ was man innerhalb dieser Spielregeln schaffen kann, sind also beliebig gute Näherungen für $\frac{2}{\pi}$.

4.3 ... mit der Archimedischen Spirale

Mit der selben Grundidee wie bei der Quadratrix von Hippias kann man auch mit der sogenannten Archimedischen Spirale Winkel dreiteilen. Denn damit macht man sich genauso eine Proportionalität zwischen Winkeln und der Länge von Geradenstücken zu Nutze. In Abb. 4.10 ist eine Archimedische Spirale zu sehen, bei der der Abstand vom Punkt O zum Punkt B stets proportional zum Winkel θ ist. In GeoGebra lässt sich so eine Spirale zeichnen, beispielsweise indem man einen Punkt $O = (0, 0)$ und einen weiteren Punkt auf der positiven x -Achse wie $A = (2, 0)$ definiert. Über einen Schieberegler a von 0 bis 360 kann man durch Anklicken von A und O einen Winkel mit fester Größe mit dem Winkelmaß $\theta = a^\circ$ gegen den Uhrzeigersinn festlegen. Jetzt wird noch ein Punkt benötigt, der sich proportional zum Winkel θ vom Ursprung O entfernt. Man kreiert diesen Punkt, ich nenne ihn B' , indem man in die Eingabezeile `Punkt[Kreis[O, a]]` schreibt. B' bewegt sich allerdings nicht entlang einer Spirale, sondern auf der x -Achse, dennoch benötige ich ihn für den nächsten Schritt. Dieser Schritt besteht darin, den Punkt B über `Drehe[B', a°, O]` zu definieren. Aktiviert man für B die Funktion *Spur anzeigen*, so wird durch Benutzung des Schiebereglers die gesuchte Archimedische Spirale sichtbar.

Um den Winkel $\angle BOA$ mit der Archimedischen Spirale dreizuteilen, muss lediglich die Strecke $\overline{BO}$ gedrittelt werden.

Die Archimedische Spirale ermöglicht es desweiteren Kreise zu quadrieren ([10] S. 210f.). Im einfachsten Fall erfüllt so eine Spirale in Polarkoordinaten (Winkel in Bogenmaß) die Gleichung $r = \theta$, weshalb bei $\theta = \pi$ die Zahl π als Abstand zwischen den Punkten O und B direkt

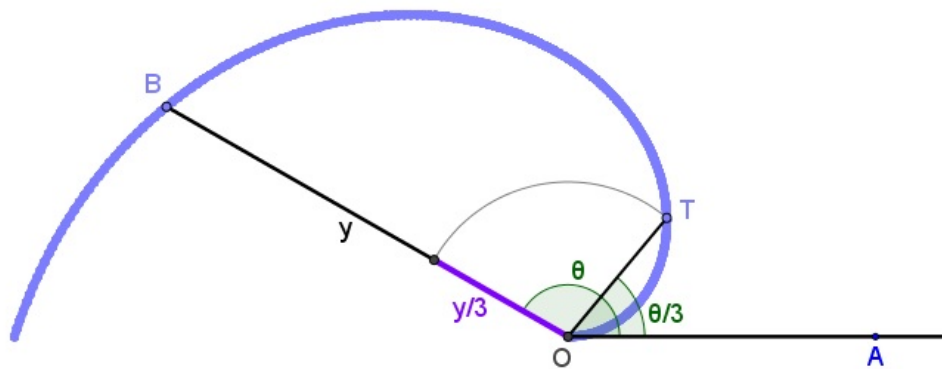


Abbildung 4.10: Archimedische Spirale

erzeugt wird. (Falls das jetzt wer nachmessen möchte: In Abb. 4.10 erfüllt die Spirale die Gleichung $r = 1.146\theta$, wodurch die beiden Punkte O und B bei $\theta = \pi$ genau 1.146π Einheiten auseinander liegen.)

4.4 ... mit der Kardioide

Im Folgenden stelle ich eine weitere Kurve vor, mit der Winkeldreiteilungen möglich sind – die Kardioide, benannt nach einer kitschigen Herzform (vgl. Abb. 4.11).

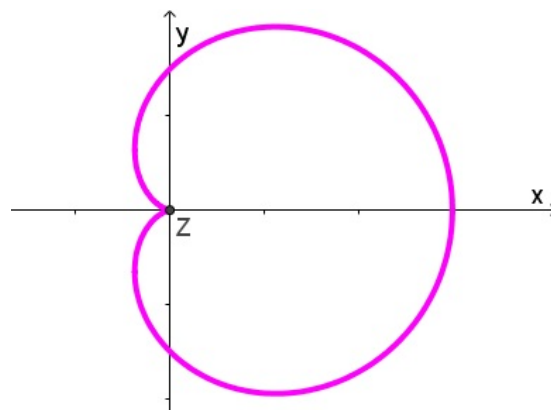


Abbildung 4.11: Kardioide

Für Winkeldreiteilungen ist die ganze Herzerlform gar nicht notwendig, sondern es genügt ein Ausschnitt davon. Um diesen zu zeichnen benötigt man eine feste Länge s . Wie in Abb. 4.12 erkennbar ist, legt man um den Punkt O einen Halbkreis mit Radius s . Dann zeichnet man von Z nach A einen Strahl. Vom Schnittpunkt dieses Strahls mit dem Halbkreis, das ist momentan also A , trägt man die Strecke s entlang des Strahls ab. Dadurch ist bereits ein

Punkt der Kardioide konstruiert. Dreht man nun den Strahl um Z gegen den Uhrzeigersinn, so erhält man weitere Punkte C der Kardioide, indem man dem Schnittpunkt S des Strahls mit dem Halbkreis die feste Länge s in Richtung des Strahls anhängt.

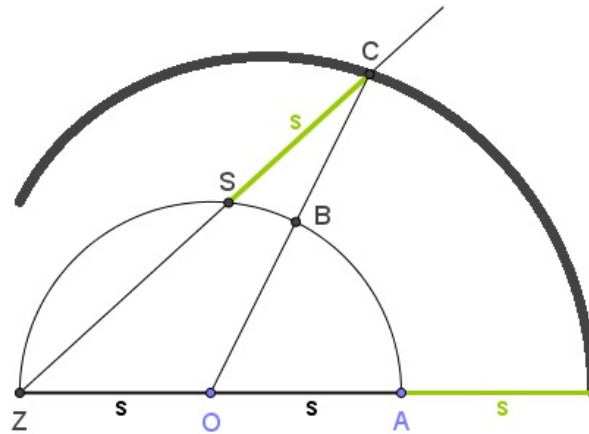


Abbildung 4.12: Winkeldreiteilung mit einer Kardioide

In GeoGebra lässt sich die Kardioide zum Beispiel realisieren, wenn man den besagten Strahl mittels Schieberegler um maximal 90° dreht. Um den Schnittpunkt S lässt sich daraufhin ein Hilfskreis mit dem festen Radius s einzeichnen, dessen Schnittpunkt mit dem Strahl den gesuchten Punkt C der Kardioide liefert. (Anm.: Es kann vorkommen, dass der Hilfskreis den Strahl in zwei Punkten schneidet. Gemeint ist dann der von Z weiter entfernte Schnittpunkt.)

Die Winkeldreiteilung von $\angle BOA$ mit der Kardioide gelingt, wenn man die Strecke $\overline{OB}$ hin zum Punkt C verlängert. Der in Abb. 4.12 dargestellte Winkel $\angle OCZ$ ist dann genau ein Drittel des ursprünglichen Winkels $\angle BOA$. Um das zu beweisen, weist man dem Winkel $\angle SOC$ das Winkelmaß θ zu. Wegen $|OZ| = |OS| = |SC|$ ergeben sich gleichschenklige Dreiecke und es folgt, dass $\angle OCS$ gleich θ ist. Für den Winkel $\angle OSC$ erhält man das Maß $180^\circ - 2\theta$ und somit ist in weiterer Folge $\angle OSZ$ gleich 2θ . $\angle OZS$ ist schließlich ebenfalls gleich 2θ , wodurch dem Winkel $\angle ZOS$ das Winkelmaß $180^\circ - 4\theta$ zugeordnet werden kann. Schlussendlich betrachtet man noch den 180° großen Winkel $\angle ZOA$, der sich aus $\angle ZOS$, $\angle SOC$ sowie $\angle BOA$ zusammensetzt. Von $\angle ZOS$ und $\angle SOC$ weiß man bereits wie groß sie sind, nämlich $180^\circ - 4\theta$ und θ . Daher muss $\angle BOA$ gleich 3θ sein.

Bei der Kardioide handelt es sich übrigens um eine algebraische Kurve vierten Grades, weshalb nicht alle ihrer Punkte mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Die Gleichung der in Abbildung 4.12 dargestellten Kurve lautet $(x^2 + y^2 - 2sx)^2 - s^2(x^2 + y^2) = 0$ bzw. in Polarkoordinaten $r = 2s \cos \varphi + s$, wobei hier ausnahmsweise Z der Ursprung ist und nicht O .

4.5 ... mit der Konchoide

Ähnlich wie die Kardioide wird auch die sogenannte Konchoide konstruiert. Dafür verwendet man allerdings anstatt eines Halbkreises eine gerade Linie. Im Detail funktioniert die Erstellung einer Konchoide folgendermaßen: Zu Beginn wählt man einen Punkt Z sowie eine Gerade g . Für die in Abb. 4.13 dargestellte Konchoide entschied ich mich für $Z = (0, 0)$ und $g : y = 2$. Jetzt kommt, wie schon bei der Kardioide, ein fester Abstand, z. B. $s = 3$, ins Spiel. Jedes gerade Verbindungsstück zwischen Z und g wird nun um s verlängert. Die von Z aus gesehenen Endpunkte der verlängerten Verbindungsstücke liegen schließlich auf der Konchoide.

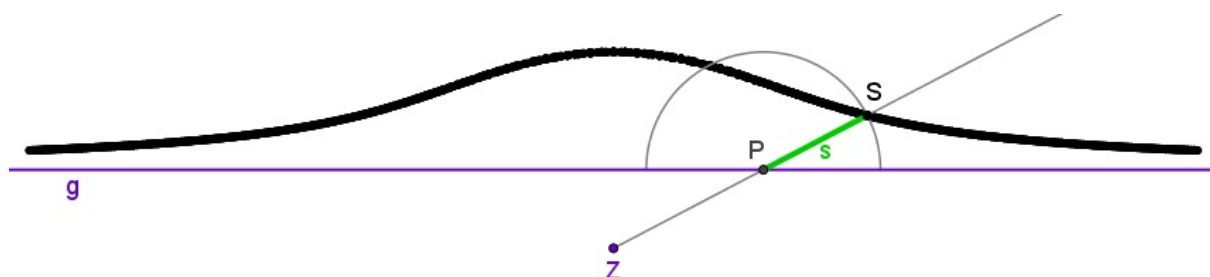


Abbildung 4.13: Konchoide

Auch hier entsteht eine algebraische Kurve vierten Grades. Sie (Abb. 4.13) wird durch die Gleichung $x^2 = \frac{y^2(s+2-y)(s-2+y)}{(y-2)^2}$ beschrieben, oder in Polarkoordinaten $r = s + \frac{2}{\sin \varphi}$.

Mit GeoGebra kann diese Konchoide konstruiert werden, wenn man einen Punkt P per Schieberegler auf g wandern lässt. Um P , oberhalb von g , zeichnet man einen Hilfshalbkreis mit festem Radius s ein. Dann definiert man einen Strahl von Z durch P und schneidet diesen mit dem Hilfshalbkreis. Der Schnittpunkt S liegt schließlich auf der Konchoide.

Mit Hilfe einer gegebenen Konchoide kann ein beliebiger Winkel $0^\circ < \theta < 90^\circ$ triseziert werden. Dazu legt man einen Schenkel des Winkels auf die senkrechte Gerade durch Z . In Abb. 4.14 ist θ als Winkel $\angle BOA$ eingezeichnet, wobei die Punkte A und B vorerst so zu verstehen sind, dass sie sowohl auf den Schenkeln des Winkels θ als auch auf der Gerade g liegen, selbst wenn man den Winkel θ entlang der senkrechten Gerade hin- und herschiebt. Nun legt man durch den Punkt B eine Normale auf die Gerade g und verschiebt den Winkel θ so lange auf oder ab, bis $|DT| = 2|BO|$ erreicht ist. Der Winkel $\angle TOA$ ist jetzt genau ein Drittel von $\angle BOA$.

Um das zu beweisen (vgl. [26]) bestimmt man den Mittelpunkt M von $\overline{DT}$, sodass $|DM| = |MT| = |BO| = |BM|$ gilt (nach Voraussetzung und wegen des Thaleskreises über $\overline{DT}$). Nun ist

$$\angle BOA = \angle TOA + \angle BOT$$

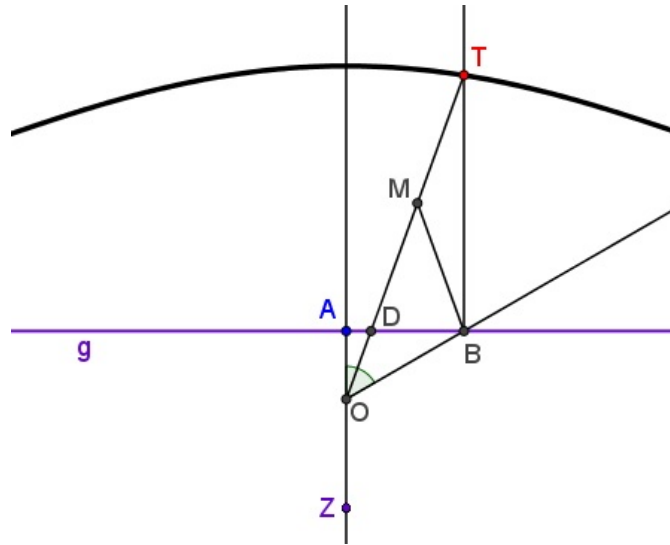


Abbildung 4.14: Winkeldreiteilung mit einer Konchoide

und wegen des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle OMB$ sind $\angle BOT$ und $\angle OMB$ gleich groß, also gilt

$$\angle BOA = \angle TOA + \angle OMB.$$

Der Winkel $\angle OMB$ wiederum ist so groß wie $\angle MTB$ und $\angle MBT$ zusammen (wegen der Winkelsumme im Dreieck $\triangle MTB$). Beim Dreieck $\triangle MTB$ handelt es sich erneut um ein gleichschenkliges, weshalb $\angle MTB$ und $\angle MBT$ gleich groß sind. Schlussendlich erhält man

$$\angle BOA = \angle TOA + 2 \cdot \angle MTB \stackrel{\text{Z-Winkel}}{=} 3 \cdot \angle TOA.$$

Um den Prozess des Winkeldreiteilens mittels Konchoide zu veranschaulichen, erstellte ich mit GeoGebra, beim Verfassen der vorigen Zeilen, ein für beliebige Winkel zwischen 0 und 90 Grad anwendbares Instrument. Basierend auf der bereits gezeichneten Konchoide mit $Z = (0,0)$, $g : y = 2$ sowie $s = 3$ (vgl. Abb. 4.13), definierte ich zunächst den Punkt $A = (0,2)$ (siehe Abb. 4.14) und eine Gerade durch A und Z . Anschließend erstellte ich einen Schieberegler $0 < o < 2$ und den Punkt $O = (0,o)$. Dieser Punkt O dient im Folgenden als Scheitelpunkt des Winkels θ , der ja vertikal bewegbar bleiben soll. Über einen weiteren Schieberegler $0^\circ < \theta < 90^\circ$ definierte ich besagtes θ , also den Winkel $\angle BOA$, wobei B auf g liegt. Durch B senkrecht auf g zeichnete ich eine Gerade ein, deren Schnittpunkt mit der Konchoide am Ende der winkeldreiteilende Punkt T sein soll. Dann kamen noch Verbindungsstrecken, der Punkt D , sowie der Mittelpunkt M von $\overline{DT}$ hinzu. Im Prinzip ist damit das Instrument bereits funktionstüchtig, sofern man es richtig anwendet: Über den Schieberegler θ wählt man die Größe des dreizuteilenden Winkels $\angle BOA$. Danach benutzt man den Schieberegler o so, dass

$\overline{DT}$ doppelt so lang wie $\overline{BO}$ wird (ablesbar, wenn man sich die Längen von $\overline{DT}$ und $\overline{BO}$ per Abstandsbefehl ausgeben lässt). Der sich daraus ergebende Winkel $\angle TOA$ ist schlussendlich der gesuchte. (Anm.: Sollte der dreizuteilende Winkel größer als 90° sein und sollten Sie diesen dennoch mit Hilfe einer Konchoide trisezieren wollen, so halbieren Sie ihn doch im Vorfeld so oft, bis er zwischen 0 und 90 Grad liegt, und verdoppeln nach geglückter Winkeldreiteilung das Ergebnis genau so oft. Denn Winkelhalbierungen und -verdoppelungen sind sogar mit Zirkel und Lineal konstruierbar.)

4.6 ... mit der Trisektrix

Winkeldreiteilungen ermöglicht auch eine als Trisektrix bezeichnete Kurve, wie Colin Maclaurin im 18. Jahrhundert herausgefunden hat. Um die Trisektrix zu konstruieren, beginnt man damit einen Halbkreis mit Mittelpunkt O durch die Punkte Z und A zu zeichnen. Im Anschluss legt man eine senkrechte Gerade durch den Mittelpunkt M von $\overline{OZ}$. Vom Punkt Z aus bildet man nun noch einen Strahl durch einen beliebigen Punkt P des Halbkreises. Den Schnittpunkt dieses Strahls mit der senkrechten Gerade bezeichne ich als Q . Der in Abb. 4.15 dargestellte Winkel $\angle OZP$ soll Werte zwischen 0 und 60 Grad annehmen können und wird von mir von jetzt an θ genannt. In GeoGebra könnte man θ wieder über einen Schieberegler definieren. Einen Punkt B der Trisektrix erhält man schließlich, wenn man vom Punkt Z weg auf den Strahl die Distanz $|ZP| - |ZQ|$ abträgt. In GeoGebra beispielsweise funktioniert das mittels Polarkoordinaten, wenn man nämlich B als $(|ZP| - |ZQ|; \theta)$ definiert (Beachte den Strichpunkt in der Polardarstellung von GeoGebra anstelle eines Beistrichs!).

(Anm.: Warum läuft θ ausgerechnet nur bis 60° ? Weil bei $\theta = 60^\circ$ die Punkte Q und P ident sind und somit das Dreieck $\triangle OZP = \triangle OZQ$ ein gleichseitiges ist. Die Trisektrix erstreckt sich dann bis hin zum Punkt Z (siehe Abb. 4.16) und das reicht aus um schlussendlich Winkel bis zu 180° dreizuteilen.)

Damit Winkeldreiteilungen mit Hilfe der Trisektrix gelingen, geht man wie folgt vor: Ist in Abb. 4.17 der Winkel $\angle BOA$ gegeben, so verbindet man den auf der Trisektrix gelegenen Punkt B mit Z und $\angle BZO$ ist bereits der gesuchte Winkel, d. h. $\angle BZO$ ist ein Drittel von $\angle BOA$.

Für den Beweis der beschriebenen Winkeldreiteilung greife ich auf Polarkoordinaten (r, θ) zurück. Dazu weise ich den verwendeten Punkten die Koordinaten $Z = (0, 0)$, $O = (1, 0)$ und $A = (2, 0)$ zu. Die Gleichung des Halbkreises mit Radius 1 ergibt sich dann zu $r = 2 \cos \theta$.

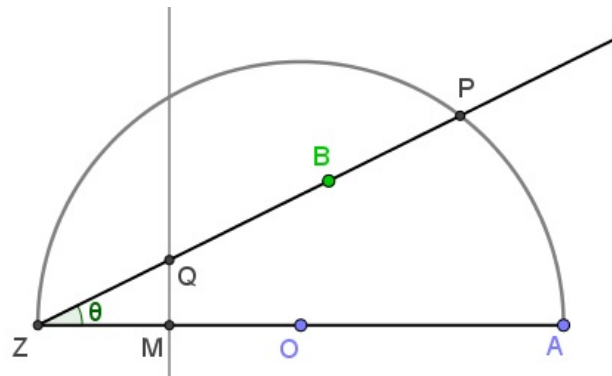


Abbildung 4.15: Konstruktion der Trisektrix

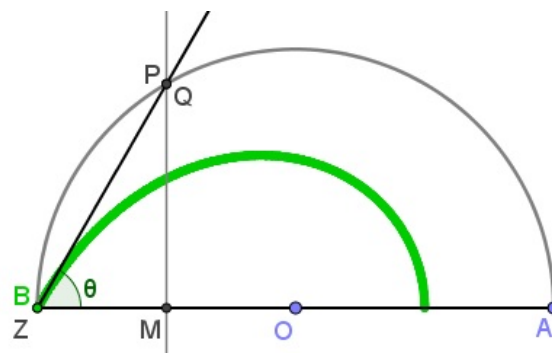


Abbildung 4.16: Trisektrix

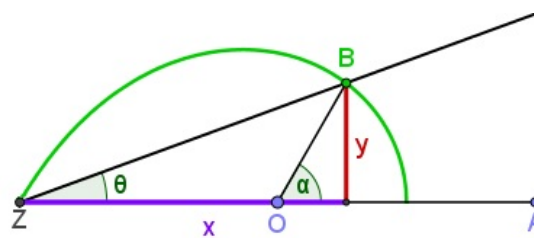


Abbildung 4.17: Winkeldreiteilung mit einer Trisektrix

D. h. für den Abstand zwischen den Punkten P und Z gilt, in Abhängigkeit vom Winkel θ ,

$$|ZP| = 2 \cos \theta.$$

Die senkrechte Gerade, auf der stets Q liegt, wird durch die Gleichung $r \cos \theta = \frac{1}{2}$ beschrieben. Der Abstand von Q und Z , in Abhängigkeit von θ , ergibt sich demnach zu

$$|ZQ| = \frac{1}{2 \cos \theta}.$$

(Anm.: Man könnte jetzt meinen $|ZQ| = \frac{1}{|ZP|}$, doch diese Konstellation kommt nur bei einem Halbkreis mit Radius 1 zu Stande. Verwendet man zur Konstruktion einer Trisektrix etwa einen Halbkreis mit Radius 2, so wäre $|ZP| = 4 \cos \theta$ und $|ZQ| = \frac{1}{\cos \theta}$, also $|ZQ| = \frac{4}{|ZP|}$.) Die Gleichung der Trisektrix lautet somit

$$r = |ZP| - |ZQ| = 2 \cos \theta - \frac{1}{2 \cos \theta}.$$

Dies kann aber noch beträchtlich umgeformt werden, und zwar unter Anwendung der Beziehung $\sin^2 + \cos^2 = 1$ sowie der Sumsätze für Sinus und Kosinus:

$$\begin{aligned} 2 \cos \theta - \frac{1}{2 \cos \theta} &= \frac{4 \cos^2 \theta - 1}{2 \cos \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta + \overbrace{2 \cos^2 \theta - 1}^{\cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta)}}{2 \cos \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} = \\ &= \frac{\overbrace{2 \sin \theta \cos \theta}^{\sin 2\theta} \cos \theta + \overbrace{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}^{\cos 2\theta} \sin \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{\sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta}{\sin 2\theta} = \\ &= \frac{\sin(2\theta + \theta)}{\sin 2\theta} = \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta} \end{aligned}$$

Als Zwischenergebnis soll $r = \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}$ festgehalten werden.

Mit Blick auf Abb. 4.17 geht der Beweis weiter:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x - 1} = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta - 1} = \frac{\sin 3\theta \sin \theta}{\sin 3\theta \cos \theta - \sin 2\theta}$$

Der letzte Ausdruck ist wiederum gleich $\tan 3\theta$, was anschließend noch vorgeführt wird. Somit gilt $\tan \alpha = \tan 3\theta$.

Um $\tan 3\theta = \frac{\sin 3\theta \sin \theta}{\sin 3\theta \cos \theta - \sin 2\theta}$ nachzuweisen, kann man untersuchen, ob denn die Gleichung $\tan 3\theta = \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}$ aufgeht, wenn man in dieser Gleichung $\tan 3\theta$ durch $\frac{\sin 3\theta \sin \theta}{\sin 3\theta \cos \theta - \sin 2\theta}$ ersetzt.

Unter Anwendung der Summensätze der Form

$$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta$$

$$\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta$$

erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} &= \frac{\sin 3\theta \sin \theta}{\sin 3\theta \cos \theta - \sin 2\theta} && \Leftrightarrow \\ \cos 3\theta \sin \theta &= \sin 3\theta \cos \theta - \sin 2\theta && \Leftrightarrow \\ (\cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta) \sin \theta &= (\sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta) \cos \theta - \sin 2\theta && \Leftrightarrow \\ -\sin 2\theta \sin^2 \theta &= \sin 2\theta \cos^2 \theta - \sin 2\theta && \Leftrightarrow \\ \sin 2\theta &= \sin 2\theta \underbrace{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}_1 \end{aligned}$$

Auf mechanischem Wege ließe sich die Trisektrix übrigens auch noch so erzeugen (vgl. [34] & [19]): Man lässt zwei anfangs übereinanderliegende Geraden in den Punkten Z und O in die selbe Richtung rotieren. Dreht sich dabei die Gerade um O gegenüber jener um Z mit dreifacher Drehzahl, so liegen die Schnittpunkte der zwei Geraden auf der Trisektrix ([19] S. 107f.). Auf diese Weise der Erzeugung der Kurve wird die Idee der Winkeldreiteilung klar deutlich, da konstruktionsbedingt der Winkel bei O dreimal so groß ist wie jener bei Z . Das erinnert außerdem stark an eine Methode der Winkeldreiteilung mit analogen Uhren:

„to trisect an angle, all you need is a watch and patience.“ ([11] S. 17)

Bei analogen Uhren rotiert der Minutenzeiger zwölf Mal so schnell wie der Stundenzeiger. Benutzt man die Achse der Zeiger als Scheitelpunkt des dreizuteilenden Winkels und betrachtet man die derzeitige Position des Minutenzeigers als Schenkel des Winkels, so wartet man bis der Minutenzeiger den zweiten Schenkel des Winkels erreicht hat. In dieser Zeitspanne hat der Stundenzeiger ein zwölftel des gegebenen Winkels zurückgelegt. Verdoppelt man nun den vom Stundenzeiger überschrittenen Winkel zweimal, so erhält man ein Drittel des ursprünglichen Winkels.

4.7 ... mit Zimmermannswinkel und Schustermesser

Es folgen nun von zwei praktischen Geräten abgeleitete Winkeldreiteilungskonstruktionen. Das eine Gerät ist der Zimmermannswinkel (oder -haken), das andere ein Schustermesser (vgl.

Anhand Abb. 4.19 erkennt man, dass die Winkeldreiteilung mit Hilfe des Zimmermannswinkels dank dreier kongruenter Dreiecke zu Stande kommt.

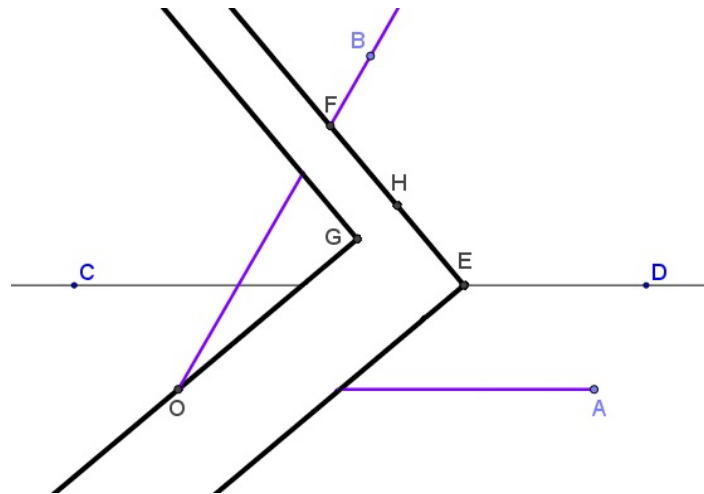


Abbildung 4.18: Winkeldreiteilung mittels Zimmermannswinkel

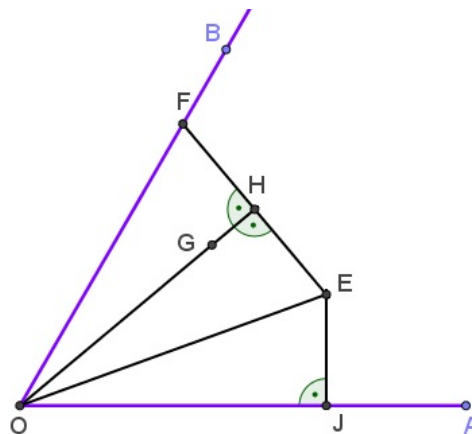


Abbildung 4.19: Winkeldreiteilung mittels Zimmermannswinkel erläutert

Mein Vorgehen, um die Winkeldreiteilung mittels Zimmermannswinkel in GeoGebra durchzuspielen, werde ich hier nun beschreiben (Anm.: Die Benennung der Punkte in Abb. 4.18 wird im

Folgenden übernommen). Zu Beginn wählte ich über einen Schieberegler den dreizuteilenden Winkel $\angle BOA$ aus, wobei ich O als Ursprung im Koordinatensystem und A auf der x -Achse festlegte. Dann definierte ich eine Gerade h im Abstand 2 von $\overline{OA}$, hier demnach $h : y = 2$. Im Anschluss definierte ich über einen weiteren Schieberegler einen Winkel mit Schenkel $\overline{OA}$ und Scheitelpunkt O , sodass ich eine Gerade zeichnen konnte, die sich in Abhängigkeit vom Winkel um O dreht. Diese Gerade entspricht der inneren Kante des Zimmermannswinkels in Abb. 4.18. Im Abstand 2 zur soeben gezeichneten Gerade schuf ich eine weitere Gerade k , die der äußeren Kante des Zimmermannswinkels entspricht. Als Schnittpunkt von k und h definierte ich den Punkt E . Durch E , senkrecht auf k , kam noch eine Gerade hinzu, deren Schnittpunkt mit dem Schenkel $\overline{BO}$ des ursprünglichen Winkels ich mit F bezeichne. Die Winkeldreiteilung von $\angle BOA$ erreicht man schlussendlich, wenn man den zweiten Schieberegler so betätigt, dass der Abstand zwischen E und F genau vier Einheiten lang ist.

Ebenso auf drei kongruenten Dreiecken (vgl. Abb. 4.20) basiert die Winkeldreiteilung mit Hilfe eines Schustermessers. Wird nämlich ein Schustermesser wie in Abb. 4.21 im Winkel $\angle BOA$ positioniert, so ist $\angle COT$ ein Drittel von $\angle BOA$. Übrigens: Das gebogene Stück des Schustermessers ist ein Teil eines Halbkreises mit Radius s .

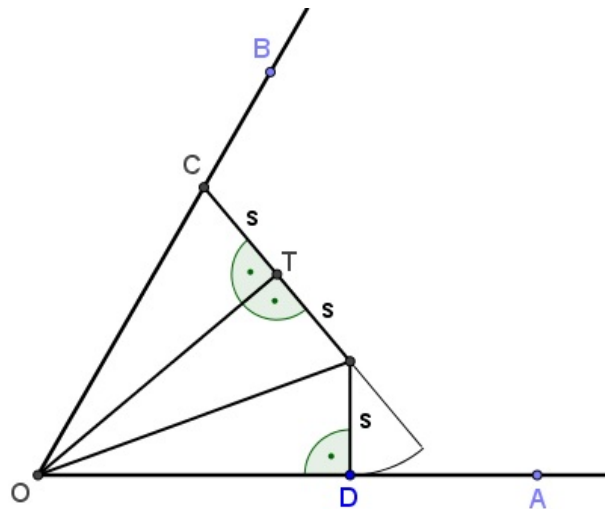


Abbildung 4.20: Winkeldreiteilung mittels Schustermesser erläutert

4.8 ... mit Origami

Ebenso auf drei kongruente Dreiecke führt eine Winkeldreiteilung, die durch spezielles Falten von Papier, d. h. durch Origami zu Stande kommt. Dieses Verfahren möchte ich hier zu guter Letzt noch anführen, da ich über Origami, oder zumindest über die fragwürdige Berichterstat-

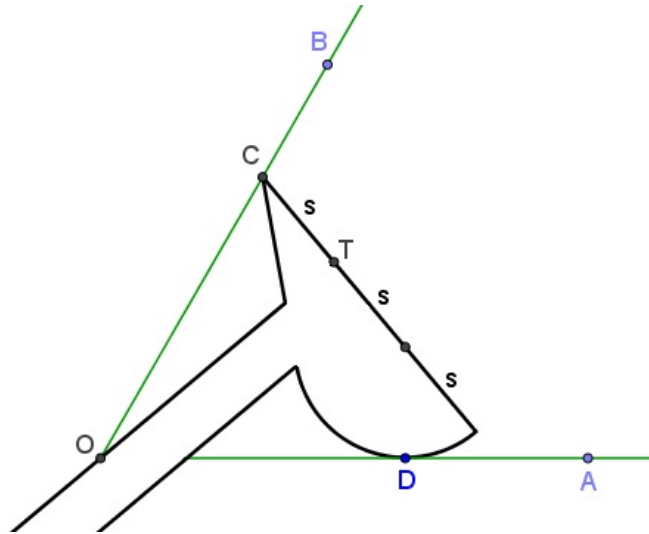


Abbildung 4.21: Winkeldreiteilung mittels Schustermesser

tung des SRF dazu, schon bei den *Trisectoral Minds* schrieb. Für diese Art der Winkeldreiteilung (vgl. [23] S. 255f.) nimmt man irgendein rechteckiges Blatt Papier zur Hand. Dann faltet man parallel zur unteren Kante $\overline{OA}$ des Blatts zwei Hilfslinien $\overline{CE}$ und $\overline{DF}$ ins Papier. Dabei ist wichtig, dass durch die beiden Hilfslinien zwei gleich große Rechtecke entstehen, dass also $|AE| = |EF|$ erreicht wird (siehe Abb. 4.22). Der dreizuteilende Winkel ist als $\angle BOA$ gegeben (oder man faltet ihn ins Papier).

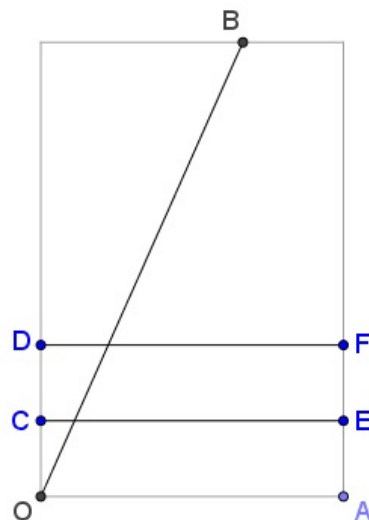


Abbildung 4.22: Winkeldreiteilung mit Origami (Ausgangslage)

Der nächste Schritt besteht darin, dass man mit einer einzigen Faltung den Punkt O auf die Strecke CE und den Punkt D auf die Strecke BO bringt. Daraus ergeben sich durch einen

weiteren Knick des Papiers, wie in Abb. 4.23, die neuen Punkte D' , C' sowie O' . Schließlich drittelt eine Faltung entlang $\overline{OO'}$ den ursprünglichen Winkel $\angle BOA$. Anhand Abb. 4.24 kann man erkennen, warum dies funktioniert. Die Dreiecke $\triangle OD'C'$, $\triangle OC'O'$ und $\triangle OO'H$ sind nämlich kongruent.

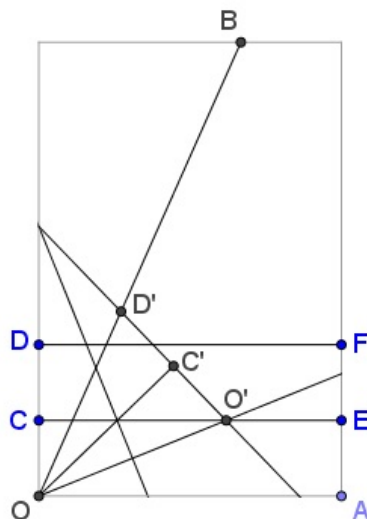


Abbildung 4.23: Winkeldreiteilung mit Origami

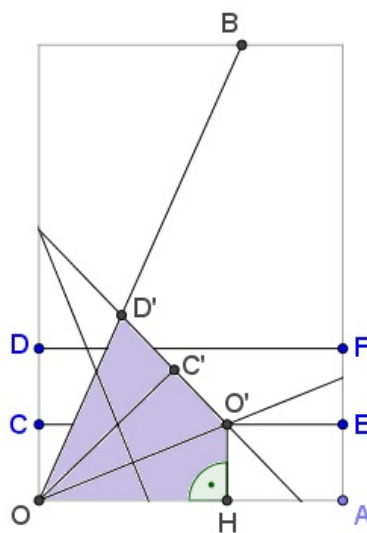


Abbildung 4.24: Winkeldreiteilung mit Origami (erläutert)

Kapitel 5

Winkeldreiteiler in Onlineforen

Angesichts der doch schon mehrere Jahre alten Bücher über Winkeldreiteiler und andere mathematische Kuriositäten, die ich für das Verfassen dieser Diplomarbeit ausfindig machen konnte, wollte ich natürlich wissen, ob es denn nach wie vor Leute gibt, die Unmögliches im Bereich der Mathematik vollbringen wollen. Und ja, ich stieß bei meiner Recherche tatsächlich auf erst vor kurzem entstandene Konstruktionsvorschläge.

Einen Hinweis auf die nach wie vor bestehende Präsenz sogenannter Winkeldreiteiler gibt der mittlerweile pensionierte Mathematik- und Physiklehrer Jürgen Köller auf seiner Website namens *Mathematische Basteleien*. Im Jahr 2009 schrieb er in einem Beitrag über die *Dreiteilung eines Winkels* diese Worte:

„Liest ein mathematisch Interessierter von den Unmöglichkeiten der Konstruktionen, so ist es für ihn verführerisch, es studierten Mathematikern zu zeigen, dass es doch geht. Nach etlichen Kontakten in den zehn Jahren meiner Internetpräsenz habe ich erfahren müssen, dass es sie gibt und dass man nichts ausrichten kann.“
[38]

5.1 Eine simple Näherungskonstruktion

Als Einstieg in dieses Kapitel beginne ich mit einer ziemlich simplen Idee. Im Hochschulbereich eines Mathematikforums stellte 2012 eine Person ihre Konstruktion vor und schrieb:

„Hallo,
ich habe gelesen, dass die Winkeldreiteilung im Allgemeinen nicht möglich ist. Auf vielen Seiten habe ich auch gelesen, dass der Winkel 60° nicht mit Zirkel und Lineal gedreiteilt werden kann. Was ist also an meiner Vorgehensweise falsch?

1. Kreis mit Radius r zeichnen.

2. Einen beliebigen Punkt P auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt verbinden.
3. In diesem Punkt P einstecken und mit dem Zirkel auf dem Kreis eine Markierung im Abstand von r zeichnen.
4. Diese Markierung sei nun Q . Q mit P und Q mit dem Mittelpunkt verbinden.
5. Nun hat man ein gleichseitiges Dreieck im Kreis eingezeichnet. Ein Winkel im gleichseitigen Dreieck ist bekanntlich 60° groß.
6. Die Linie zwischen Q und P dreiteilen (geht auch nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal).
7. Die zwei neuen Markierungen auf QP mit dem Mittelpunkt verbinden.
8. Nun hat man in der Ecke des Dreiecks beim Mittelpunkt 3 mal den Winkel von 20° .

Wenn eine Dreiteilung von 60° nicht möglich ist, wo ist dann mein Fehler? Ich erkenne ihn nicht.“ [32]

Abgesehen vom fehlenden Buchstaben r in „Markierungen“ aus Punkt 7 der Konstruktionsanleitung ergibt diese Konstruktion zwar drei Winkel, diese sind allerdings nicht gleich groß. Tatsächlich ist der mittlere Winkel mit rund 21.8° fast um drei Grad größer als seine benachbarten Winkel mit jeweils rund 19.1° . In folgender Abbildung, die die fertige Konstruktion zeigt, ist dieser Unterschied nur schwer zu erkennen, aber Abb. 5.2 verdeutlicht, warum die vorliegende Anleitung keine Winkeldreiteilung ermöglicht. Je größer der gegebene Winkel ist, desto unzumutbarer wird die beschriebene Konstruktion.

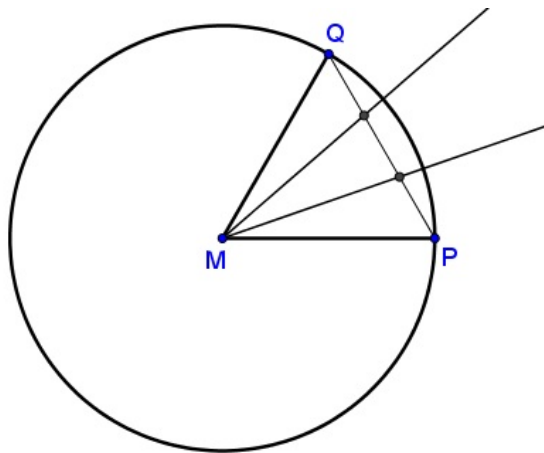


Abbildung 5.1: missglückte 60 Grad Dreiteilung mit dreigeteilter Strecke

Aus dem Diskussionsverlauf des Forums geht hervor, dass der oder die Fragesteller_in über die Untauglichkeit der vorgeschlagenen Konstruktion aufgeklärt werden konnte. Aus der fragenden Person ist somit wohl kein_e hartnäckige_r Winkeldreiteiler_in geworden, obwohl das, meiner

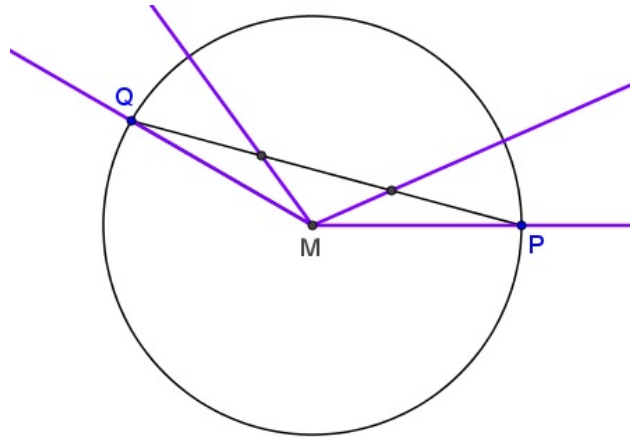


Abbildung 5.2: missglückte 150 Grad Dreiteilung mit dreigeteilter Strecke

Meinung nach, ja auch gar nicht zu befürchten war. Im Forumsbeitrag wurde nämlich nicht ein neues, bis jetzt noch nie entdecktes Verfahren angepriesen, sondern es wurde darum gebeten den eigenen Denkfehler aufzudecken, wohl wissend, dass da irgendetwas nicht stimmen kann.

Die Genauigkeit der hier vorgestellten Konstruktion lässt sich übrigens berechnen (vgl. [38]). Mit Blick auf Abbildung 5.3 lassen sich, ausgehend vom gegebenen Winkel α , die Größen s , r und damit schließlich β ermitteln.

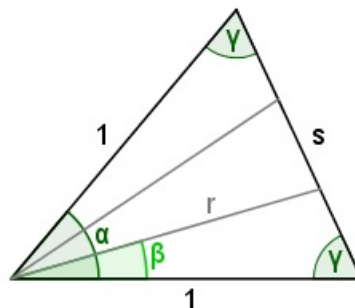


Abbildung 5.3: analysierte Näherungskonstruktion

Dazu wendet man zweimal den Cosinus- und einmal den Sinussatz an:

- Berechnung von s mit Hilfe des Cosinussatzes:

$$s^2 = 1 + 1 - 2 \cos \alpha$$

- Berechnung von r , nochmal mittels Cosinussatz:

$$r^2 = 1 + \left(\frac{s}{3}\right)^2 - 2\frac{s}{3}\cos\gamma \Leftrightarrow r^2 = 1 + \left(\frac{s}{3}\right)^2 - 2\frac{s}{3}\cos\left(\frac{180^\circ - \alpha}{2}\right)$$

- Abschließend liefert der Sinussatz den gesuchten Winkel β :

$$\frac{\sin\beta}{\frac{s}{3}} = \frac{\sin\gamma}{r} \Leftrightarrow \sin\beta = \frac{s}{3} \cdot \frac{\sin\left(\frac{180^\circ - \alpha}{2}\right)}{r}$$

Folgende Tabelle fasst die Ergebnisse für verschiedene Winkel α zusammen und macht deutlich, dass die Konstruktion bei größeren Winkeln immer ungenauer wird.

α	10°	20°	30°	60°	90°	150°
$\alpha/3$	$3.\dot{3}^\circ$	$6.\dot{6}^\circ$	10°	20°	30°	50°
β	3.33°	6.64°	9.90°	19.1°	26.6°	23.8°
Abweichung	0.1 %	0.5 %	1.0 %	4.5 %	11.4 %	52.4 %

Die vorgestellte Näherungskonstruktion kann, so viel sei dazu noch gesagt, mit geringem zusätzlichem Aufwand verbessert werden (vgl. [38]). Hierfür halbiert man im ersten Schritt den gegebenen Winkel α und teilt erst danach den halben Winkel nach obiger Methode in drei Teile. Wie in Abbildung 5.4 ist dann der Winkel $\varphi + \varphi'$ näherungsweise $\frac{\alpha}{3}$. Wie zuvor wird auch diese adaptierte Näherungskonstruktion bei großen Winkeln ungenauer, aber die Abweichung ist nicht mehr allzu schlimm. Beispielsweise erhält man für $\alpha = 90^\circ$ eine Näherung von $\varphi + \varphi' = 30.36^\circ$ und für $\alpha = 150^\circ$ ergibt sich $\varphi + \varphi' = 51.85^\circ$.

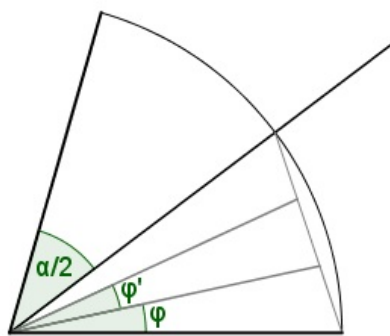


Abbildung 5.4: verbesserte Näherungskonstruktion

Der Grund für die verbesserten Resultate liegt darin, dass einerseits φ etwas kleiner, dafür andererseits φ' etwas größer ist als $\frac{\alpha/2}{3}$. (Das ist also eigentlich genau der Grund, warum die simple Konstruktion des Forumsmitglieds keine exakte Winkeldreiteilung ist.)

Da es an dieser Stelle gut passt, möchte ich auf zwei Texte hinweisen: Ebenfalls leicht realisierbare Winkeldreiteilungs-Näherungskonstruktionen werden etwa von Breidenbach ([4] S. 35–38) und Bieberbach ([3] S. 121–125) erklärt. Bei beiden wird sogar auf eine erstaunlich gute Näherungskonstruktion (maximal 18 Winkelsekunden Abweichung) des Malers Albrecht Dürer eingegangen, die dieser im Jahr 1525 „in vollem Bewußtsein ihres Näherungscharakters“ ([3] S. 121) in seiner *Underweysung der messung mit dem zirkel und richtscheyt* präsentierte. Dürers Lehrbuch für „alle künstbegyrigen jungen“ soll übrigens, durch Euklids Elemente inspiriert, entstanden sein, selbst wenn Dürer innerhalb all der Geometrie keinerlei Definitionen oder Beweise anführt (vgl. [12] S. 403).

Dürers Näherungskonstruktion eines Winkels $\angle BOA$, zu sehen in Abb. 5.5, lässt sich wie folgt bewerkstelligen. Zunächst teilt man $\overline{AB}$ in drei gleiche Teile und erhält C . Dann schneidet man die Senkrechte in C mit dem Kreisbogen. Vom Schnittpunkt D aus zeichnet man einen Kreisbogen um A mit dem Radius $|AD|$. Die entstehende Strecke $\overline{EC}$ wird abschließend ebenfalls gedrittelt und es ergibt sich der Punkt T , der einem exakten Dreiteilungspunkt sehr nahe kommt.

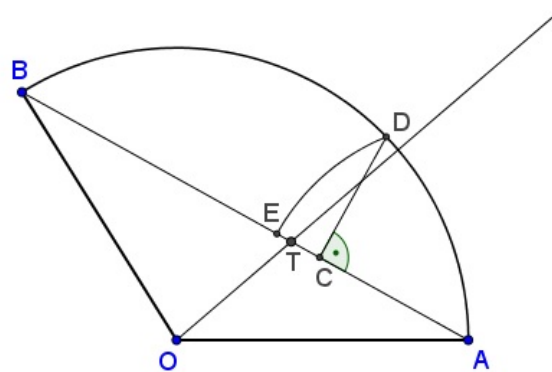


Abbildung 5.5: Dürers Näherungskonstruktion

Dudley schreibt in Anspielung auf die geringe Abweichung Dürers Näherungskonstruktion von nur rund 0.2 Winkelsekunden bei einem dreizuteilenden Winkel von 45° :

„Somit ist die Lösung des Winkeldreiteilers Albrecht Dürer weit besser als alle, die gewöhnlich von den heutigen Dreiteilern vorgelegt werden. Wenn man nach dieser Methode z. B. eine Rakete von North Dakota nach Moskau schösse (ich weiß, daß wir heute nicht mehr mit Raketen auf Moskau zielen, aber als Beispiel sei es uns noch einmal gestattet) und beim Zielen einen Fehler von 0.2'' macht, würde die Rakete nur rund fünfzig Fuß vom beabsichtigten Ziel entfernt einschlagen. Für praktische Zwecke ist dies präzise genug.“ ([10] S. 193)

5.2 Über die Ungültigkeit der Galois-Theorie

Ganz anders als vorhin verhält es sich hingegen mit einem Winkeldreiteiler, auf den ich in einem anderen Mathematikforum aufmerksam wurde [28]. In diesem Forum wurde 2009 über einen Autor (Jahrgang 1940) diskutiert, der Ende 2005 ein Buch mit dem Titel *Die Dreiteilung eines Winkels* veröffentlichte. Vom selben Autor gibt es mittlerweile weitere Bücher, in denen die Fermat'sche Vermutung bewiesen, oder eine Berechnung von π angegeben wird, die ich aber hier nicht behandeln will. Der Verlag, unter dem diese Bücher erschienen sind (auffällig viele Bücher des Verlags stammen vom selben Autor), wurde übrigens zeitgleich mit der Veröffentlichung des Buches über die Winkeldreiteilung in Potsdam (wenige Kilometer südwestlich von Berlin) gegründet. Desweiteren fungiert der Autor als Geschäftsführer des Verlags.

„Mit der Veröffentlichung einer mathematischen Abhandlung [...] über das bislang ungelöste geometrische Problem der Dreiteilung eines Winkels begann der Verlag seine Tätigkeit.“ (vgl. [37])

Wie bei anderen Winkeldreiteilern, siehe *Trisectoral Minds*, wird auch hier die Winkeldreiteilung als ein bislang ungelöstes Problem angesehen. Trotzdem liest man auf der Verlagshomepage, der Verlag sei auf mathematische, philosophische und naturwissenschaftliche Publikationen spezialisiert. Ja wenn dem wirklich so wäre (kein einziges Buch entstand unter Mitwirkung von Mathematiker_innen oder Naturwissenschaftler_innen), dann wäre es mir Wert gewesen für *Die Dreiteilung eines Winkels* fast 20 Euro auszugeben. So begnügte ich mich aber guten Gewissens mit einem kostenlos einsehbaren Kapitel des Buches. Es handelt sich dabei um das vierte Kapitel namens *Argumentation gegen Galois* [17]. Daneben kann man auf der Verlagshomepage noch zwei weitere Texte des selben Autors kostenfrei herunterladen. Der eine Text [16] unterscheidet sich im Inhalt kaum von Kapitel 4 des Buches, der andere [18] aber beinhaltet die angebliche Winkeldreiteilungskonstruktion. Mit ihr habe ich mich dann auch als erstes auseinandergesetzt, sonst hätte ich mich im vierten Kapitel des Buches überhaupt nicht mehr ausgekannt (Wie und wo sind gewisse Sekanten und sechsteilige Rechtecke einzuordnen? Was ist mit einer Sekantenteilung gemeint?).

Nach Durchsicht der achtseitigen Winkeldreiteilungskonstruktion – was nicht gerade leicht war, denn an manchen Stellen stimmen Text und Abbildung nicht überein, zudem sind einige Strecken in den Abbildungen zu kurz gezeichnet – sehe ich bloß eine unnötig komplizierte Art beliebige Winkel von Null bis 120 Grad zu verdreifachen. Der Autor schreibt zwar von α und $\frac{\alpha}{3}$, doch letztendlich wird nur $\frac{\alpha}{3}$ verdreifacht. Dabei geht er wie folgt vor:

Sei eine Strecke $\overline{AD}$ mit fester Länge $3s$ gegeben. Diese Strecke wird in sechs gleiche Teile geteilt, wobei M der Mittelpunkt von $\overline{AD}$ sein soll. Parallel und mit frei wählbarem

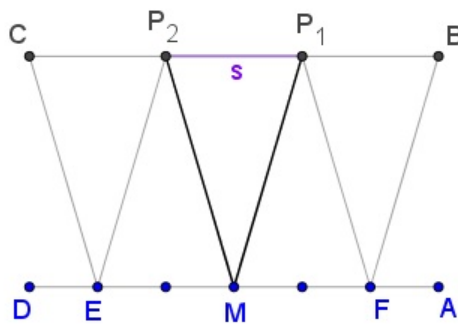


Abbildung 5.6: Rechteck zur Winkelverdreifung

Abstand zu $\overline{AD}$ wird nun eine durch drei geteilte Strecke $\overline{BC}$ gezeichnet, sodass $ABCD$ ein Rechteck bildet. Der in Abbildung 5.6 dargestellte Winkel $\angle P_1MP_2$ ist jetzt der, den der Autor später als gedrittelt anpreisen wird. Anschließend wird ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $|MP_1|$ gezeichnet. Mit Hilfe eines Zirkels kann nun noch das Sekantenstück $|P_1P_2|$ von P_1 und P_2 auf den Kreis abgeschlagen werden (vgl. Abb. 5.7). Der Winkel $\angle Q'MR'$ ist daraufhin dreimal so groß wie $\angle P_1MP_2$. (Anm.: Der Autor formuliert das alles ganz anders (nämlich viel länger), aber genau so geht er vor.) Man könnte natürlich ebenso sagen, dass die beiden äußeren Dreiecke in Abb. 5.6 so um P_1 bzw. P_2 gekippt werden, dass die Punkte F und E in M übergehen.

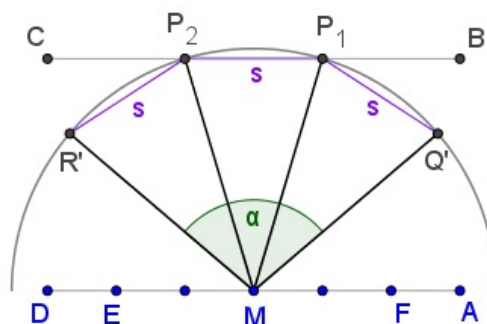


Abbildung 5.7: Winkelverdreifung mit α als Resultat

Wie aus seinem Text klar hervorgeht (wenn auch Anderes nur schwer verständlich ist, das kommuniziert er deutlich), ist der Autor der Meinung, dass nach obiger Methode jeder Winkel ausnahmslos in drei gleiche Teile geteilt werden kann. Selbst das vierte Kapitel seines Buches beginnt er damit, über seine Winkeldreiteilungskonstruktion zu berichten und diese als bloß mit Zirkel und Lineal erschaffene Konstruktion zu verteidigen:

„Die Dreiteilung jedes individuell einzelnen Winkels wurde einzig mit Zirkel und Lineal zeichnerisch in endlichen Schritten vollbracht. Allein dieses Moment genügte

schon als anschaulich geometrischer Beweis zur absoluten Widerlegung der Behauptung des Galois.“ ([17] S. 1)

Er erwähnt hier Galois – warum eigentlich? Évariste Galois hat selbst nie die Unmöglichkeit der Winkeldreiteilung bewiesen. Tatsächlich war Galois bereits seit fünf Jahren verstorben, als Wantzel zum ersten Mal besagter Beweis gelang. Der Autor schreibt sogar, dass Galois zufolge im Rechteck $ABCD$ alle Winkel durch drei ungeteilt sein müssten ([18] S. 1). Doch das stimmt überhaupt nicht, denn 180° , 90° , 45° usw. lassen sich problemlos mit Zirkel und Lineal dritteln. Kein_e Mathematiker_in beweist, dass kein Winkel ausschließlich mit Zirkel und Lineal triseziert werden kann. Stattdessen wird, so wie ich es in dieser Arbeit gemacht habe, bewiesen, dass nicht jeder beliebige Winkel mit Zirkel und Lineal gedrittelt werden kann. Und die Rolle, die Évariste Galois bei der ganzen Sache spielt, ist die, dass er für solche Beweise vor seinem Tod im Jahr 1832, mit der später nach ihm benannten Galois-Theorie, die Grundlagen schuf. Mit Hilfe der Galois-Theorie konnte beispielsweise geklärt werden, warum es keine Formel zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen fünften oder höheren Grades geben kann. Ebenso wurde es möglich zu zeigen, welche regelmäßigen Vielecke mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Zur Lösung des Problems der Winkeldreiteilung sowie der Würfelverdoppelung erwies sich die Galois-Theorie ebenfalls als nützlich.

(Anm.: Selbstverständlich könnte man weit mehr über Galois kurzes (weil nur 20 Jahre andauerndes) Leben, sein mathematisches Schaffen und dessen Einfluss auf die Mathematik schreiben, doch das soll nicht Kern der vorliegenden Arbeit sein. Immerhin gibt es darüber bereits eine Diplomarbeit aus dem Jahr 2012 mit dem Titel *Galoistheorie und Konstruktion mit Zirkel und Lineal* von Christian Dorner (den ich übrigens während meines Studiums als Lehrveranstaltungsleiter erleben durfte) [8].)

Zurück zur *Argumentation gegen Galois*: Im Text des Winkeldreiteilers wird immer wieder von einer „wirklichen Geometrie der Dreiteilung“ gesprochen. So müsse man laut Autor lediglich „den Kreisbogen der wirklichen Dreiteilung des Winkels durch eine geometrische Option optisch zur Sichtbarkeit“ ([17] S. 1) bringen. Dies gelinge deshalb, weil ein gleichseitiges Dreieck aus drei gleichen Seiten besteht (Wo genau in der Konstruktion ein gleichseitiges Dreieck vorkommen soll, weiß ich leider nicht). Und da Galois niemals bewiesen hat, dass ein gleichseitiges Dreieck keine drei gleichen Seiten hat, gehe aus der Galois-Theorie nicht hervor, dass Winkeldreiteilungen mit Zirkel und Lineal unmöglich sind.

„[Es; Anm.] muß zwangsläufig die theoretische Aussage von Galois zu diesem Problem von vornherein absolut falsch sein. Alle diese hier nochmals summierten Beweisformen belegen in Eindeutigkeit, daß die Prozedur der Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal in keinerlei mathematischer Friktion und in keinem Konflikt mit einer Gleichung dritten Grades stehen muß, wie es von Galois behauptet ward.“ ([17] S. 1)

Als Gleichung dritten Grades, die laut Autor vollkommen irrelevant für das Winkeldreiteilen sein soll, gibt er $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ an. Irrelevant ist sie allerdings nicht. Es gibt nämlich einen guten Grund, warum diese Gleichung in so mancher Version des Unmöglichkeitbeweises vorkommt, was ich nun knapp darlegen werde (vgl. [5] S. 14): Gleich zu Beginn des Abschnitts 2.2 dieser Diplomarbeit wurde erklärt, dass es bei der Dreiteilung des Winkels 3α darum geht, ob die komplexe Zahl $\cos \alpha + i \sin \alpha$, die $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$ erfüllt, mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Diese Zahl ist klarerweise nur dann konstruierbar, wenn auch ihr Realteil konstruierbar ist. Ein guter Ansatz besteht jetzt darin in

$$\underbrace{\cos 3\alpha}_{Re} + i \sin 3\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \underbrace{\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha}_{Re} + i (3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha)$$

die Realteile zu vergleichen. So kommt man auf

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \underbrace{\sin^2 \alpha}_{1 - \cos^2 \alpha} = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

was bereits der vom Autor missverstandenen Gleichung entspricht. Will man beispielsweise wissen, ob sich der Winkel $3\alpha = 60^\circ$ dreiteilen lässt, so berechnet man die linke Seite der Gleichung (in der der gegebene, dreizuteilende Winkel steckt), also $\cos 3\alpha = \cos (3 \cdot 20^\circ) = \frac{1}{2}$, und untersucht anschließend die Lösbarkeit von

$$\frac{1}{2} = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Genau diesen Schritt dürfte der Autor nicht verstanden haben. Das Praktische an dieser Gleichung ist doch, dass sie den gegebenen Winkel 3α und den zu konstruierenden Winkel α voneinander trennt. Substituiert man jetzt noch $u = \cos \alpha$, kommt man auf $\frac{1}{2} = 4u^3 - 3u$ bzw. $8u^3 - 6u - 1 = 0$. Mit $x = 2u$ liefert das ein Polynom dritten Grades:

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

Es genügt anschließend zu zeigen, dass keine Lösung dieser Gleichung konstruierbar ist. Denn dann ist klar, dass genauso $\frac{x}{2} = u$ sowie $u = \cos \alpha$ und daher $\alpha = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$ nicht konstruierbar sind (siehe [14] S. 38–40). Mit anderen Worten: Es genügt zu zeigen, dass dieses Polynom irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

In Bezug auf Gleichungen dritten Grades meint der Autor,

„die Aussage von Galois bedeutet nicht mehr und nicht weniger als: wenn zur algebraischen Lösung eines Problems eine Gleichung dritten Grades gelöst werden

muß, dann ist es nicht möglich, die geometrische Lösung nur mit Zirkel und Lineal zu vollbringen. Diese Aussage des Galois ist mathematisch absolut richtig. Aber aus Galois folgt deshalb im Umkehrschluß nicht, dass die Winkeldreiteilung algebraisch nur durch eine Gleichung dritten Grades lösbar ist.“ ([18] S. 5)

Der Autor bestreitet demnach nicht, dass dritte Wurzeln im Allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Er geht aber davon aus, dass es unter Einhaltung der klassischen Spielregeln noch einen anderen Weg zur Winkeldreiteilung geben muss (Anm.: Denselben Gedanken beobachtet man auch bei einem weiteren Winkeldreiteiler, der im nächsten Abschnitt beschrieben wird). Sein Weg besteht darin zwei lineare Gleichungen anzugeben, die beide jeweils das Problem der Winkeldreiteilung lösen sollen. Er macht das, indem er in Abb. 5.6 die Größen s , α und $\frac{\alpha}{3}$ als bekannt voraussetzt und dann die Länge der Strecke $\overline{MP_1}$ berechnet. Hierfür zeichnet er in die Abbildung ein rechtwinkeliges Dreieck ein und verwendet die Beziehung $\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$. Inwiefern jetzt die zwei Gleichungen zur Berechnung von $|MP_1|$ bestätigen sollen, dass Winkeldreiteilungen mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, kann ich nicht beantworten. Der Autor jedenfalls dürfte die beiden Gleichungen für bahnbrechend halten.

„Anmerkung: Diese beiden Gleichungen habe ich urheberrechtlich schützen lassen. Das hat zur Folge, dass Sie, wenn Sie sie verwenden wollen, verpflichtet sind, die Lizenz zu ihrer Nutzung zu erwerben.“ ([18] S. 8)

Darf man also seit 2005, beispielsweise im Schulunterricht, nicht mehr die Länge der Hypotenuse in rechtwinkligen Dreiecken berechnen, ohne vorher den Autor von *Die Dreiteilung eines Winkels* um Erlaubnis zu fragen? Zwischendrin schreibt der Autor doch etwas Wahres:

„Eine Lösung nicht zu finden, eine Lösung selbst in zwei Jahrtausenden nicht gefunden zu haben, ist längst noch kein Beweis, daß es keine Lösung gibt und geben kann.“ ([17] S. 2)

Das stimmt, dem ist als solches nichts hinzuzufügen (sofern man den Originaltext, in den der Satz eingebettet ist, ausklammert). Ohne Ausklammerung des rundum Befindlichen steckt darin aber die Kritik, Mathematiker_innen hätten vor Galois nichts zu Stande gebracht und danach ganz einfach seinen Irrtum geglaubt. Der Autor behauptet,

„daß bis Galois von keinem Mathematiker seit der Antike die wirkliche Dreiteilungslinie gesehen und geometrisch in Begriffenheit fixiert ward, und es zeigt sich zweitens ab Galois, daß bislang von keinem Mathematiker seit ihm auf der basis sowohl mathematischer als auch geometrisch gründlicher Argumentation der Nachweis erbracht werden konnte, daß Galois die Sachlage mathematisch falsch beurteilte.“ ([17] S. 2)

Ein weiterer Punkt, der dem Autor zufolge gegen Galois spricht, sei, dass sich das Problem der Winkeldreiteilung weitaus mehr von jenem der Würfelverdoppelung unterscheidet, als bisher

von Mathematiker_innen angenommen. Die Würfelverdoppelung sei nämlich ein Problem des Raumes, während die Winkeldreiteilung nur ein Problem der Fläche sei. Hinzu komme, dass sich der Autor beim Dreiteilen von Winkeln auf das Teilen einer Strecke beschränken könne, dass sich demnach das Problem der Fläche sogar auf ein eindimensionales Problem reduziere.

„Eine definierte Strecke kann man mit Zirkel und Lineal durch drei teilen. Darum ist die geometrische Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal uneingeschränkt möglich.“ ([17] S. 2)

Ohne seine Konstruktion zuvor gesehen zu haben, könnte man glauben, sein Buch handelt von genau jener Näherungskonstruktion, die ich im vorangegangenen Abschnitt beschrieben habe. Wahrscheinlich meint er als definierte Strecke aber die Strecke $\overline{BC}$ aus Abb. 5.6 & 5.7.

Die Meinung des Autors dürfte also sein, dass man die Probleme der Würfelverdoppelung und Winkeldreiteilung komplett verschieden anpacken muss. Er kommt damit auch auf verschiedene Resultate:

„Man kann eine dritte Wurzel nicht mit Zirkel und Lineal ‚ziehen‘. Im Problem des Beispiels der Unlösbarkeit der Halbierung des Würfels (Delisches Problem) ist der dreidimensionale Raum untrennbar mit der dritten Wurzel verknüpft. Dieses Problem ist mit Zirkel und Lineal nicht lösbar.“ ([18] S. 5)

Nochmals anders verhalte es sich darüber hinaus mit der Quadratur des Kreises. An der Unmöglichkeit ihrer Konstruktion zweifelt der Autor in keinsten Weise. Im Gegensatz zu den Unmöglichkeitsbeweisen von Winkeldreiteilung und Würfelverdoppelung habe der Beweis Lindemanns eine „völlig andere Basis“ ([17] S. 2) und außerdem sei die Zahl π in der geometrischen Ebene ohnehin sehr indifferent. Mich würde es allerdings nicht wundern, wenn der Autor mittlerweile auch darüber ein Buch geschrieben hat. Hinsichtlich der Dreiteilung von Winkeln wird es ab jetzt besonders kurios.

„Von Galois wurde im Jahr 1831 der rein mathematisch-algebraische Beweis mittels der Winkelfunktion vom Cosinussatz des dreifachen Winkels

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

geführt. [...]

Diese Winkelfunktion des dreifachen Winkels mag sein, was sie will, das ist gleichgültig; auch wenn man sie dreht und wendet, wie man will, sie ist und bleibt eine Funktion einer Linie in der Ebene. Sie resultiert als Linie der Ebene eine schnurgerade Kurve, und eine solche wird geometrisch, wo sie auch immer vorkommt, von allen Mathematikern immer als Gerade beschrieben. Funktionen der Gerade nennt man spätestens seit Cartesius und dessen Geometrie lineare Funktion.“ ([17] S. 3)

Soll das heißen $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ wäre eine lineare Funktion? Zunächst handelt es sich hierbei um eine Gleichung, nicht um eine Funktion. Diese Gleichung ist für jeden Winkel α erfüllt. Außerdem ist $\cos 3\alpha$ nicht linear. Abbildung 5.8 zeigt, dass diese Funktion (ich meine $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\alpha) = \cos 3\alpha$) ganz sicher nicht linear ist. Ich vermute, davon ließe sich der Autor beim Anblick des Funktionsgraphen sogar überzeugen. Sein fester Irrglaube dürfte eher darin bestehen, dass er davon ausgeht, Mathematiker_innen meinen mit kubischen Dingen immer ein Volumen, beziehungsweise mit quadratischen Dingen stets eine Fläche. Vielleicht sieht er aber eine Cosinusfunktion auch nur als Punkt, der sich auf der x -Achse hin- und herbewegt, d. h. entlang einer Geraden.

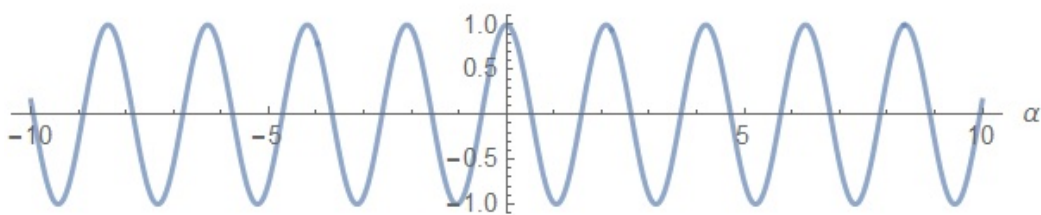


Abbildung 5.8: Graph einer nichtlinearen Funktion

„Ein Aggregat dritter Potenz ist als nicht in allen mathematisch denkbaren Fällen eines Gleichungssystems beurteilbar in nur kubischer Funktionalität, sondern es kann auch ebenso rein linear bedeuten, daß sich die Strecke im Gefüge der Gleichung sich selbst um die dritte Potenz verlängert, bzw. wie es beim obigen Cosinus tatsächlich sich ergibt, sich durch die Potenzierung verkürzt. Der mathematische organisierte Prozeß in dieser goniometrischen Funktion sucht nicht nach einem Volumen, er sucht nicht nach einer Fläche, er sucht nach einer Linie.“ ([17] S. 3)

Des Autors Kuriosität geht noch weiter. Nicht nur durch Angabe der beiden urheberrechtlich geschützten Gleichungen glaubt er alle Wurzeln dritten Grades umgangen zu haben, sondern auch dadurch, dass er im nächsten Schritt ganz einfach den Ausdruck $4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ durch $\frac{\sin 3\alpha}{\tan 3\alpha}$ ersetzt, weil ja $\cos 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\tan 3\alpha}$ gilt.

„Es erscheint ein reines Verhältnis von [...] zwei Zahlen zueinander, die einer dritten die Größe geben, ohne jegliche Potenz, ohne alles Kubische und Quadratische. [...]

So ist alles Kubische erloschen, geblieben ist ein mathematisches Problem einer Linie“ ([17] S. 3f.)

Diese Linie oder Strecke, von der da die Rede ist, dürfte für den Autor, wie von mir bereits vermutet, auf der x -Achse der Bereich zwischen -1 und 1 sein. So beschreibt der Autor, wie man ausgehend von einem im Einheitskreis eingezeichneten Winkel δ auf der x -Achse den Wert $\cos 3\delta$ konstruiert. Gemeint ist, was ich in Abb. 5.9 dargestellt habe.

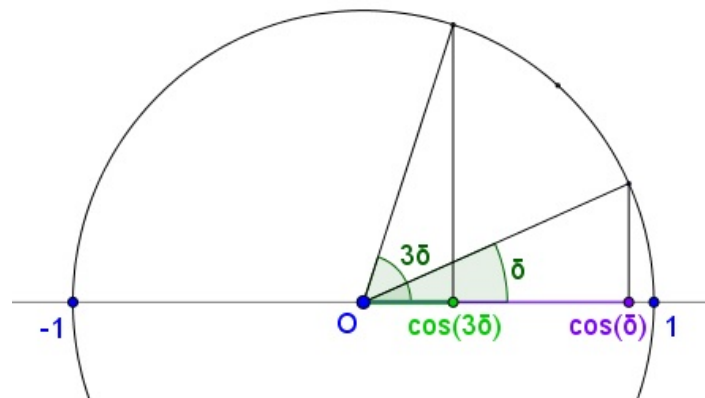


Abbildung 5.9: Winkelverdreifung

So wie der Autor bei seiner Konstruktionsanleitung fälschlicherweise davon ausgeht, dass es für eine Winkeldreiteilung genüge, die Strecke $\overline{BC}$ aus Abb. 5.6 & 5.7 in drei gleiche Teile zu stückeln, schildert er hier ebenso einen ertraglosen Gedanken. Nur weil es möglich ist $\cos 3\delta = 4 \cos^3 \delta - 3 \cos \delta$ zu konstruieren, wenn δ schon gegeben ist, wird nicht die Galois-Theorie oder Wantzels Beweis widerlegt. Die Konstruktionsaufgabe lautet nämlich genau anders herum: Kann man mit Zirkel und Lineal $\cos \delta$ konstruieren, wenn $\cos 3\delta$ bekannt ist? Und um das zu beantworten, kann $4 \cos^3 \delta - 3 \cos \delta$ sehr hilfreich sein, wie ich oben erläutert habe. Der Autor aber wundert sich, dass die Gleichung $\cos 3\delta = 4 \cos^3 \delta - 3 \cos \delta$ für jeden Winkel gilt (vgl. [16] S. 3f.), ohne zu erkennen, dass es in den von ihm kritisierten Beweisen um die Untersuchung der Lösbarkeit von $w = 4 \cos^3 \delta - 3 \cos \delta$ geht, wobei $-1 < w < 1$ fix gegeben ist (Bei der Frage nach der Dreiteilbarkeit von 60° ist $w = \frac{1}{2}$, so wie vorhin).

Der Autor dürfte zwar mitbekommen haben, dass es irgendwie um die Nullstellen eines Polynoms dritten Grades geht, allerdings fasst er auch das falsch auf. Denn er verkündet, dass es solche Nullstellen immer gebe, weil der Cosinus eines Winkels im Einheitskreis immer auf der x -Achse liegt ([17] S. 5).

Wie sehr der Autor von seiner Winkeldreiteilungskonstruktion überzeugt ist, zeigen folgende Zeilen, laut denen bisherige Unmöglichkeitsbeweise bereits der Vergangenheit angehören:

„Diesen Beweis wird es auch darum nicht geben, weil sich kein Mathematiker mehr finden wird, der diese Dummlichkeit begehen wird. Die Mathematik ist einer der wenigen Wissenschaften, in welcher sich die exakte Rechnung durchsetzt. Da es keinerlei Grund gibt, das nun offenbar gewordene Moment der mathematischen wie auch geometrischen Dreiteilung eines Winkels zu bestreiten oder gar noch weiterhin zu ignorieren, wird sich eine im Vergleich zur bisherigen wesentlich erweiterte Geometrie durchsetzen müssen, in welcher auch die Winkeldreiteilung als Normalität vorkommt.“ ([17] S. 6)

Das vierte Kapitel seines Buches endet schließlich genauso mit Eigenlob:

„Aus allem erweist sich, wie als Summe saldiert, daß jegliches Problem, und sei es nur ein simples geometrisches Problem, erst dann mit Aussagekraft beschrieben werden kann, nachdem es gründlich untersucht worden ist.“ ([17] S. 7)

In einem 2009 verfassten Text, also vier Jahre nach Veröffentlichung seines Buches über die Winkeldreiteilung, berichtet der Autor stolz über seine Errungenschaft und,

„daß bislang kein Mathematiker öffentlich aufgetreten ist, um diesen Elementarsatz zu widerlegen.“ ([16] S. 2)

Nun ja, vielleicht haben bloß alle Mathematiker_innen, die auf seine Texte gestoßen sind, Underwood Dudleys Rat befolgt:

„Now, will you know a trisector when you see one coming? And will you know what to do? Here is a hint: what you do involves your legs. No, you do not kick him.“ ([9] S. 31)

5.3 Exakte Näherungen

Spannend gestaltet sich auch die Recherche nach dem nächsten Winkeldreiteiler. Im Folgenden geht es nämlich um eine Person, die sich selbst Quadrierer nennt und über ein Jahr lang bis zum unfreiwilligen Abbruch in einem Forum mit Mathematiker_innen diskutierte. Den Anfang machte der Quadrierer mit einer mir nicht gänzlich verständlichen Behauptung, mit der er sich im Jahr 2009 an die Mathematiker_innen des Forums wandte. (Anm.: Die in den Zitaten nun vorkommenden Tipp- und Schreibfehler habe nicht ich erst beim Schreiben der Diplomarbeit fabriziert, sondern sie finden sich genau so in den Forumsbeiträgen. Daran muss man sich beim Stöbern in Foren dem Anschein nach leider gewöhnen.)

„Ist ein zufälliger Winkel ein natürlich erfahrbares Verhältnis, kann dieses prinzipiell in keine restfehlerfreie Zahl ausgemessen werden. Anhand dieses Wissens behaupte ich: Kein zufällig gegebener Winkel kann unter Zuhilfenahme einer Zahlenrechnung exakt im Sinne mathematischer Strenge in drei gleiche Teile geteilt werden? Oder irre ich mich da? Nein, das glaube ich nicht und stelle deshalb die im 19. Jahrhundert geführten mathematischen ‚Unmöglichkeitsschlüsse‘ zur Winkeldreiteilung als nicht oder nur wenig zutreffend in Frage?

Ein exakte Lösungssequenz aus Zikel- und Linealschritten (– ein Maßlineal hat Striche), die keine Annäherung an das ideelle Ergebnis durch Probierschritte vornimmt, ist somit durch diese Beweise nicht wirklich als unmöglich bewiesen.“ ([29] Themenstart)

Kann es denn doch ein Verfahren zur Dreiteilung eines beliebigen Winkels mittels Zirkel und Lineal geben, weil mathematische Unmöglichkeitsbeweise, die das widerlegen würden, im Hinblick auf das Problem der Winkeldreiteilung eigentlich gar nichts beweisen? So fasse ich zumindest die Behauptung des Quadrierers auf. Ich kann allerdings nicht nachvollziehen, worauf sich seine Behauptung stützt. Geht es ihm um Messunsicherheiten wie in der Physik? Meint er, dass die exakte Mathematik hier unzumutbar ist, weil das Winkelmaß eines gegebenen Winkels immer nur mit einer Messunsicherheit bestimmt werden kann (z. B. so wie Physiker_innen beim Messen mit Hilfe eines handelsüblichen Meterbandes eine Unsicherheit von ± 1 mm angeben)? In diese Richtung weisen im Forum auch die ersten Reaktionen auf Quadrierers Themenstart, in denen er darüber informiert wird, dass man sich in der Mathematik gar nicht erst um fehlerfreie Messungen kümmern muss. Ein Forumsmitglied stellt diesbezüglich ein Beispiel vor: Ist ein Quadrat mit Seitenlänge 7 gegeben und soll dessen Flächeninhalt ermittelt werden, so rechnet man $7 \cdot 7$, unabhängig davon, ob in irgendeiner Zeichnung das Quadrat mit einer gemessenen Seitenlänge von beispielsweise 7.01 cm dargestellt wird. Der Quadrierer wiederum schreibt, dass er für seine ersten Überlegungen überhaupt keine Zahlen benötigt, er verlangt nämlich zuerst ein Verfahren zur fehlerfreien Abbildung eines Winkels als Zahl. Dann erst akzeptiere er, dass man Arithmetik und Algebra ins Spiel bringt. Den ersten Reaktionen der Mathematiker_innen kontert er:

„Warum reagiert ihr so heftig? Habe ich am Selbstwertgefühl eurer geliebten Wissenschaft gekratzt? Passen meine simplen Denkansätze nicht in das ‚amtliche‘ Weltbild einer nach Höherem strebenden, das Simple meidenden Mathematik? Erregt euch mein Verstoß gegen mathematische Denkverbote, wie sie mit den berühmten indirekten Unmöglichkeitsbeweisen errichtet wurden?“ ([29] Beitrag 6)

Im selben Beitrag äußert der Quadrierer noch zwei Einwände gegen die Notwendigkeit der Konstruktion dritter Wurzeln beim Winkeldreiteilen, die da wären:

- „1. Einwand: Es ist eine unbewiesene Behauptung, daß die betrachtete Lösungsidee mit der algebrischen Gleichung nur die einzig mögliche ist.
- 2. Einwand: Es ist eine unbewiesene Behauptung, daß es kein elementargeometrisches Zusammenhangmodell geben kann, mit dem die dritte Wurzel ausgezogen werden kann.“ ([29] Beitrag 6)

Insbesondere der erste Einwand kam auch schon beim Winkeldreiteiler des vorangegangenen Abschnitts vor. Als Antwort auf diese Einwände argumentiert ein Mathematiker im Forum wie folgt:

„Könnte man eine Konstruktion angeben, die einen beliebigen Winkel dreiteilt, dann könnte man auch gewisse kubische Gleichungen (und zwar solche, die nur

reelle Wurzeln haben) lösen. Beide Problemstellungen sind also äquivalent und sind als unlösbar nachgewiesen, es ist nicht so, daß man andere Lösungsmöglichkeiten irgendwie ‚vergessen hat‘ oder nicht betrachtet.“ ([29] Beitrag 7)

Desweiteren wird versucht dem Quadrierer klar zu machen, dass Mathematiker_innen keineswegs das Simple meiden, da es in der Mathematik gerade darum geht, Kompliziertes möglichst einfach zu machen. Dann wird er auch noch auf überzeugende Methoden hingewiesen, mit denen er seine Behauptung über die seiner Meinung nach „nicht oder nur wenig zutreffenden“ indirekten Unmöglichkeitsbeweise untermauern könnte.

„a) Du falsifizierst die Sätze durch einen eigenen Beweis. [...]

b) Du zeigst, wo konkret in der gegebenen Beweisführung ein Fehler ist.

c) Du findest ein Gegenbeispiel.

Es reicht hier a) oder b) oder c)“ ([29] Beitrag 10)

Nach nur einem Tag meldet sich Quadrierer, der sich mittlerweile als „querdenkender Quadrierer“ und die anderen Forumsteilnehmer als „Hüter der mathematischen Unmöglichkeit“ bezeichnet, wieder zu Wort. Zunächst bittet er darum seinen mathematischen Ungehorsam zu verzeihen und er bedankt sich für die bisherigen Kommentare. Soweit herrscht im Forum also nach wie vor friedliche Stimmung, aber es taucht erneut der Vorwurf des Denkverbots auf.

„Meine Einsicht über errichtete mathematische Denkverbote wird zwar zurück gewiesen, die Praxis zeigt jedoch, auch wenn ihr es bestreitet, daß diese Beweise für Unmöglichkeit als Denkverbote tatsächlich wirken. Kein vernünftiger Mensch und schon gar kein Mathematiker hat, seit Bekanntwerden dieser Beweise, einen ernsthaften Versuch unternommen, zu der angesprochenen Problematik direkt zu arbeiten.“ ([29] Beitrag 12)

Im Anschluss referiert er über zwei verschiedene Theorien und deren Voraussetzungen. Quadrierer ist der Ansicht, dass Mathematiker_innen eine „vernünftige Theorie“ verfolgen, in der das Problem der Winkeldreiteilung längst als erledigt angesehen und daher nicht weiter verfolgt wird. Er selbst hingegen beziehe sich auf eine „verständliche Theorie“, die Zweifel erlaubt. Er zweifle zwar nicht an den Beweisen selbst, sondern an deren Voraussetzungen in der vernünftigen Theorie. Laut Quadrierer könnten diese Voraussetzungen auf das Problem der Winkeldreiteilung gar nicht zutreffen. Quadrierer vermutet demnach ein Problem nicht innerhalb mathematischer Beweise, weshalb er darin keine Fehler suchen und nachweisen möchte, sondern schon davor bei den Voraussetzungen der Beweise. Er möchte, dass Mathematiker_innen diese Voraussetzungen hinterfragen und ihm beweisen, dass diese passend sind. Zu seiner „verständlichen Theorie“ halte er sich übrigens noch bedeckt, da er darüber gerade ein Buch verfasse und deshalb nicht zu viel verraten will. Dennoch verfüge er bereits über Gegenbeispiele, basierend auf einem von ihm erfundenen „exakten sequenziellen Lösungsweg“.

Nach einigen Äußerungen weiterer Forumsmitglieder, z. B. dass es bereits zahlreiche exakte Winkeldreiteilungskonstruktionen gibt, sofern man nur andere Spielregeln zulässt, sowie Kritik an Quadrierers unklarer Ausdrucksweise („Was ist ein Winkelverhältnis?“ [29] Beiträge 10 & 16), reagiert dieser mit einer Aussage, derzufolge er durch die vorangegangenen Beiträge viel gelernt habe. Er zählt folgendes auf:

„Ich habe gelernt, meine Einsicht vom Startbeitrag bleibt zwar richtig, ich muß jedoch mit dieser Einsicht viel differenzierter umgehen. [...]

Ich weiß zwar, daß meine Winkeldreiteilung nach meinen Spielregeln [...] richtig ist, was sich aus dem nachvollziehbaren Vorgehen ergibt, das einen erkennbaren Sinn macht. Ich weiß aber nun auch, daß meine Winkeldreiteilung den algebraisch fundierten Unmöglichkeitbeweise nicht widerlegt, da die dortigen Spielregeln (gemachte Voraussetzungen) für diesen Beweis durch mein Vorgehen nicht berührt werden. Erst eine Winkeldreiteilung [...], welche die besagte algebraische Gleichung zur Grundlage (zum Ausgangspunkt) nimmt und alle in der Gleichung vorkommenden Rechenoperationen und Zahlen in eine Sequenz von Zirkelschritte transformiert [...], wäre ein widerlegendes Gegenbeispiel. Ich weiß aber nun auch, daß der Anspruch der Allgemeingültigkeit für den algebraischen Unmöglichkeitbeweis für die Winkeldreiteilung nicht gerechtfertigt ist, also nicht zutrifft.“ ([29] Beitrag 21)

Quadrierer geht also weiterhin davon aus, dass seine Einsicht und seine Winkeldreiteilung korrekt sind, obwohl er weder diese noch seine Spielregeln bisher klar kommuniziert hat. Sein „nachvollziehbares Vorgehen“ ist kaum nachvollziehbar. Interessanterweise bestreitet er aber auch nicht die Korrektheit von mathematischen Beweisen, wie jenen den Pierre Laurent Wantzel im Falle der Winkeldreiteilung erbracht hat, sondern er behauptet zu wissen, dass der Unmöglichkeitbeweis der Winkeldreiteilung nicht allgemein gültig ist. Falls er damit meint, dass es Winkel gibt, die mit Zirkel und Lineal gedrittelt werden können, oder wenn er meint, dass jeder Winkel unter Einhaltung alternativer Spielregeln dreiteilbar ist, dann hat er ja Recht. Quadrierers Interpretation dürfte aber dahingehend sein, dass noch immer die Möglichkeit besteht die Unmöglichkeit der Dreiteilung eines beliebigen Winkels mit Zirkel und Lineal zu widerlegen. Er möchte mit den Mathematiker_innen des Forums Kriterien für ein Gegenbeispiel ausarbeiten, sodass er später ein solches Gegenbeispiel anführen kann. Um das dann angeben zu können, besitze er schon ein „Zirkel-Rechenmodell“ bzw. eine „Zeichnungs-Rechenvorschrift“. So wie ich Quadrierers Idee verstehe, ermöglicht sein Verfahren der Winkeldreiteilung allerdings bestenfalls beliebig gute Näherungen.

„Meine exakten Zeichnungs-Rechenvorschriften umfassen eine endliche Sequenz endlich vieler Rechenanweisungen [...]. Diese Anweisungen reichen aus, ein beliebig genaues Ergebnis mit endlich vielen Schritten direkt herbei zu rechnen und dabei Nichts herbei zu probieren. Es ist hier teils nicht viel anders als bei der bekannten

Zahlendivision ‚1 durch 3‘, bei der hin zur Darstellung ‚Kommazahl‘ gerechnet wird und das Ergebnis beispiesweise wie folgt aussieht:

$1/3$ (nach x -Schritten) = 0.333 und bei

$1/3$ (nach $\{x + y\}$ -Schritten) = 0.333333

Wer es noch genauer braucht, kann in beiden Fällen wegen des Vorhandenseins der Zeichnungs- und der Zahlen-Rechenvorschrift bis zum nächsten letzten Schritt immer weiter rechnen.“ ([29] Beitrag 28)

Forumsteilnehmer antworten so,

„Hallo Quadrierer,

ich verstehe dich so:

Du hast ein Verfahren, das folgendes kann:

Wenn dir jemand eine Obergrenze für den Fehler gibt, wird dein Verfahren nach endlich vielen Schritten ein Ergebnis erreichen, dessen Fehler unter der Grenze liegt.

Es bestreitet niemand, dass das möglich ist.

Die Frage, um die es bei dem klassischen Problem geht, ist:

Gibt es ein Verfahren, das den Winkel EXAKT dreiteilt.“ ([29] Beitrag 29)

und so:

„Dein Ansatz entspricht nicht den Vorgaben. Du musst den Lösungspunkt nach endlich vielen Schritten EXAKT erreicht haben. Alles andere ist nichts anderes als eine Näherungskonstruktion. Daran ändert sich auch nichts wenn du das durch weitere Schritte zu einem beliebig genaueren Ergebnis führen kannst.“ ([29] Beitrag 30)

Nun sollte klar sein, dass beliebig gute Winkeldreiteilungsnäherungen nichts Neues mehr sind, sie aber auch keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal darstellen. Quadrierer entgegnet dem aber damit, dass er eine andere mathematische Sichtweise habe. Er vergleicht sich selbst mit Thales und Pythagoras, wohingegen er Mathematiker_innen mit Hippasos vergleicht. Aus der „Vernunft-Sichtweise“ von Hippasos seien Zahlen wie z. B. $\sqrt{2}$ oder π fix fertig. Aus seiner „Verstand-Sichtweise“, die seiner Meinung nach auf Thales und Pythagoras zurückführbar ist, sind $\sqrt{2}$ und π allerdings nicht vollständig fertig. Und diese nicht vollständig fertigen Zahlen lassen sich in endlich vielen Konstruktionsschritten angeben, so interpretiere ich zumindest Quadrierers Ausführungen (vgl. [29] Beitrag 33). Umgekehrt seien indirekte Beweise, die eine Unmöglichkeit zeigen sollen, aus seiner Sichtweise nicht relevant. Worum es Quadrierer gehe, ist zu zeigen, dass mit Pierre Laurent Wantzels Unmöglichkeitsbeweis lediglich bestätigt werden kann, dass Winkeldreiteilungskonstruktionen auf eine ganz bestimmte Art und Weise sicher nicht erstellt werden können. Quadrierer drückt dies etwas anders aus:

„die wantzel'sche Idee, es gibt nur einen wahren Lösungsweg für die Winkel-dreiteilung, bei dem ein elementar konstruiertes Ausziehen der 3. Wurzel [...] un-umgänglich ist, [ist; Anm.] nicht haltbar.“ ([29] Beitrag 33)

Komisch daran finde ich, dass Quadrierer scheinbar Wantzels Beweis akzeptiert, er aber Winkeldreiteilungen mit Zirkel und Lineal dennoch für möglich hält. Er beruft sich dabei auf andere Sichtweisen (also Spielregeln?), meint allerdings nicht solche Konstruktionen wie die, die ich im Kapitel über *Exakte Winkeldreiteilungen* beschrieben habe. Vielmehr schreibt er über etwas, das eine Näherungslösung zu sein scheint, wovon er aber behauptet es sei exakt. Am Ende ist er es aber, der von Mathematiker_innen eine „klare Bekenntnis zu klaren Vorgehensregeln“ vermisst und zudem wissen will, wo die „vernünftigen“ Regeln herkommen, insbesondere, wer diese als erster aufgeschrieben habe; ihm sei aus der Literatur dazu nichts bekannt. Die erste Antwort aus dem Forum auf seine Frage kommt rasch:

„Euklid (~360–280 v. Chr.), ‚Die Elemente‘, I. Buch, Postulate“ ([29] Beitrag 34)

Ich vermute, dass Quadrierer unter den „vernünftigen Vorgehensregeln“ jene Spielregeln meint, die ich ganz zu Beginn meiner Arbeit behandelt habe. Dort schrieb ich, dass es bei der Theorie geometrischer Konstruktionen darum geht, ob eine gestellte Konstruktionsaufgabe mit festgelegten Konstruktionsmitteln lösbar ist. Im Falle der Winkeldreiteilung unterscheidet man zwischen den Spielregeln (Konstruktionsmitteln) für euklidische und nichteuklidische Konstruktionen. Von dem her sind Euklids Elemente eine bekannte frühe Niederschrift solcher Spielregeln. Was ich nicht beurteilen kann, ist, ob für Quadrierer diese Unterscheidung gar nicht zählt, weil er beides, die euklidischen und die lockereren nichteuklidischen Regeln, der „vernünftigen“ Theorie zurechnet. Vielleicht will er ja generell etwas über die Arbeitsweise von Mathematiker_innen wissen. Hinterfragt er etwas innerhalb der Mathematik oder hinterfragt er die Mathematik als solche? Eins ist jedenfalls klar: Mathematik ist die exakteste Wissenschaft. Quadrierer präsentiert sich im Forum aber alles andere als exakt.

Sichtlich schon etwas verwirrt oder gar entnervt von den nicht klar abgegrenzten Vernunft- und Verstand-Theorien bzw. -Sichtweisen, oder wie auch immer, verabschieden sich die ersten Personen bereits von der Diskussion im Forum, während andere noch versuchen etwas zu klären, z. B.:

„Bei uns [Mathematiker_innen; Anm.] gibt es auch euklidische und nichteuklidische Geometrie, aber die Vertreter des einen streiten sich nicht mit denen des anderen herum, wer denn nun ‚Recht‘ hat. Sie wissen, dass ihre Ergebnisse nur relativ zu ihren Axiomen (‚Sichtweisen‘) korrekt sind.“ ([29] Beitrag 38)

„die Frage, inwiefern irrationale Zahlen tatsächlich ‚existieren‘, ist nicht mathematischer sondern philosophischer Natur. [...]“

Deine Argumentation zur Winkeldreiteilung ist folgende:

Du willst nicht von reellen Zahlen sprechen, sondern lieber von ‚erfahrbaren Raumverhältnissen‘. (ok!)

Du willst im Gegensatz zur üblichen Definition ein solches Verhältnis als mit Zirkel und Lineal konstruierbar betrachten, wenn es mit Zirkel und Lineal beliebig gut approximierbar ist. (auch ok!)

Du behauptest, dass man in diesem Sinn einen Winkel durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal dreiteilen kann. (Damit hast du Recht!)

Völlig verfehlt ist nun, dass du glaubst, dass das dem widerspricht, was Wantzel bewiesen hat. Seine (und die allgemein übliche) Definition von Winkeldreiteilung ist eben eine andere als deine und damit kommt er auch auf eine andere Aussage.“ ([29] Beitrag 40)

„[Du; Anm.] meinst Exakt bedeute, man müsse irrationale Verhältnisse dezimal ausziehen wenn man sie benutzen will. Das Gegenteil ist der Fall. Da man irrationale Verhältnisse endlich dezimal nicht korrekt darstellen kann muss man sie irrational benutzen, wenn es exakt bleiben soll. Die Diagonale des 1×1 Quadrats ist Wurzel(2) und nicht 1.4142.“ ([29] Beitrag 43)

Quadrierer ortet scheinbar aber nicht nur Probleme bei irrationalen Zahlen, sondern sogar bei simplen Brüchen, wie folgende Aussage zeigen soll:

„Hier will ich noch daran erinnern, daß das real nachvollziehbare Ergebnis in der Regel bei der Division niemals des ideell erdachte Ergebnis sein kann. Für dieses gibt es keine fertigen Schrittsequenz, keinen endenden Schritteprozeß. Hier erinnere ich noch mal an mein Beispiel $1/3 = 0.33333...!$ “ ([29] Beitrag 53)

Diesbezüglich gefällt mir der Hinweis, der von zwei Forumsmitgliedern gegeben wird ([29] Beiträge 44, 46 & 56). Sie weisen nämlich darauf hin, dass $\frac{1}{3}$ sehr wohl geometrisch exakt berechnet (also mit Zirkel und Lineal konstruiert) werden kann. Die periodische Darstellung 0.33333... im Dezimalsystem, die Quadrierer stören dürfte, hat beispielsweise im Dreiersystem eine ganz andere Gestalt. Dort kann sie mit nur einer Nachkommastelle angegeben werden.

$$(0.33333...)_{10} = (0.1)_3$$

Umgekehrt kann eine Zahl, die im Dezimalsystem schön kurz ist, in einem anderen Zahlensystem ganz schön unattraktiv werden:

$$(0.2)_{10} = (0.001100110011...)_{2}$$

Scheinbar ungeachtet obiger Hinweise verweist Quadrierer darauf, dass die von Mathematiker_innen getroffenen Schlüsse für die „reale Wirklichkeit“ nicht zutreffen könnten. Dies entspricht weitgehend dem bereits bekannten Gedanken – geht es erwiesenermaßen auf die eine

Art nicht, dann vielleicht auf eine andere. Weiterhin unklar bleibt allerdings, wie Quadrierer eine exakte Winkeldreiteilung bloß mit Zirkel und Lineal bewerkstelligen würde. Schien es bisher so, dass er schrittweise bessere Näherungen in Betracht zog, bestreitet er das nun selbst. Plötzlich meint er, eine „herantastende Iteration“ wäre in seinen Auflagen nicht zugelassen (vgl. [29] Beitrag 57). Aber von genau so einer schrittweisen Herangehensweise spricht Quadrierer jetzt seltsamerweise sogar bei der Winkelhalbierung. Obwohl Halbierungen jedes Winkels mit Zirkel und Lineal ganz leicht konstruiert werden können, heißt es in Quadrierers Ausführungen, dass es für die „errechnete Ergebnishälfte“ kein „vollständiges, durch eine Sequenz von Zirkelschritten beschriebenes oder darstellbares Abbildmodell“ gibt (vgl. [29] Beitrag 64). Geht es da letztendlich wieder darum, ein Verfahren zur fehlerfreien Abbildung eines Winkels als Zahl anzugeben, wie schon in den ersten Forumsbeiträgen? Oder geht es vielleicht darum, dass laut Quadrierers „Verstand-Sichtweise“ gewisse Zahlen nicht fertig vorliegen können? Seltsam ist jedenfalls, dass Quadrierer, trotz seiner Zweifel an der Realisierbarkeit von Winkelhalbierungen, behauptet, er könne Winkel dreiteilen. In Anlehnung an die Winkeldreiteilung von Archimedes (siehe Kapitel *Exakte Winkeldreiteilungen*), die von den üblichen Spielregeln abweicht, weil am Lineal eine Markierung sein darf, habe er es geschafft:

„Auch wenn du es dir nicht vorstellen kannst, erfüllt meine erfundene exakter Z-L-Lösungsweg, der das Linealproblem beseitigt, die euklid'schen [...] Auflagen.“
([29] Beitrag 64)

Selbstverständlich gibt Quadrierer keine Konstruktionsanleitung preis (Zur Erinnerung: Er schreibt ja gerade ein Buch darüber (das war 2009) und will zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht zu viel verraten). Immerhin reagiert er auf die zunehmende Kritik im Forum, er solle die von ihm verwendeten Begriffe definieren, sodass man verstehen kann, was er damit meint. Dennoch wird man aus seiner zusätzlichen Erläuterung nicht schlau:

„Und nun noch einige Worte zu meinen Begriffen.

Ich arbeite über elementare Raum-/Rechenzusammehänge im Sinne einer empirischen primären Naturwissenschaft und behaupte, die primären Raumzusammehänge und die daraus erfundenen abbildenden elementaren Rechenzusammehänge sind primärer als die Zahlen-Rechenzusammehänge.

Bei meinem Arbeiten erfinde ich Begriffe für Sachverhalte, welche durch die bekannten Begriffe nicht abgedeckt sind.“ ([29] Beitrag 66)

Nicht zum ersten Mal taucht nachfolgend eine Vermischung von exakten und näherungsweisen Lösungen auf.

„Trotzdem bleibt die Frage, warum der hippias'sche Lösungsweg kein exakter Lösungsweg sein soll, [...] unbeantwortet. Es kann damit sogar eine Zahl π nach x -Schritten und nach $x + y$ Schritten sogar noch genauer usw. exakt berechnet werden.“ ([29] Beitrag 68)

Was soll denn das heißen, wenn man etwas noch genauer exakt berechnet? Tatsächlich kann man mit der Quadratrix von Hippias jeden Winkel exakt dreiteilen. Dafür muss man allerdings die Spielregeln des Konstruierens mit Zirkel und Lineal verlassen (siehe Kapitel *Exakte Winkeldreiteilungen*). Will man sich trotzdem an diese Spielregeln halten, dann kann eben nicht jeder Punkt der Quadratrix konstruiert werden, weshalb für viele gegebene Winkel lediglich Näherungslösungen möglich sind.

Zusätzlich zu Hinweisen über den Unterschied von näherungsweisen bzw. exakten Dingen, wird im Forum noch einmal auf die Spielregeln des Konstruierens eingegangen. Ein Forumsmitglied schreibt:

„Ein ‚Punkt‘ hat keine Ausdehnung in unserem mathematischen System, anders als ein realer punkt auf dem Papier. [...] die menge der ‚mathematischen‘ Punkte, [...] die auf einen ‚physikalischen‘ Punkt passen ist unendlich.“ ([29] Beitrag 75)

Die Bemühungen der Forumsteilnehmer_innen laufen ins Leere, so wirkt es zumindest, wenn man Quadrierers folgenden Beitrag liest. Darin beklagt er nicht wahrgenommen zu werden. Er meint, Mathematiker_innen entscheiden darüber, wie Probleme angegangen werden müssen. Seine Ideen würden als unbedeutend definiert. Zudem behauptet Quadrierer nun, Mathematiker_innen meiden unbequeme Wege, was insofern interessant ist, da er am Anfang der Forumdiskussion noch der Meinung war, Mathematiker_innen machen alles nur kompliziert.

„Die Lösung für das angesprochen Problems erfindet Euklid beim Schreiben seiner ELEMENTE, indem er die sogenannte mathematische Bedeutung ‚unangenehmer‘ Probleme, wie es die klassischen Aufgaben sind, nach freiem Willen herauf oder herunter stuft. Euklid spart ‚unbequemen‘ Fragestellungen und unbequemes Lösungswissen einfach aus. Das bewußte Weglassen u.a. des Quadratrix-Wissens zeigt dies deutlich. Diese von Euklid erfundene Methode funktioniert auch heute noch. So tut man sich es einfach nicht länger an, über den vom Quadrierer produzierten ‚Schwachsinn‘ länger nach zu denken und erklärt sinngemäß, mich interessiert nur ‚Starksinn‘. Für das Geschwätz des Quadriers muß also nur definiert werden, es sei ohne jede mathematische Bedeutung und schon kann es so gehandhabt werden, als sei es Luft.“ ([29] Beitrag 83)

Ich kann bestätigen, dass im Forum die Äußerungen des Quadrierers niemals als „ohne mathematische Bedeutung“ definiert wurden. Stattdessen ist es so, dass die Mathematiker_innen des Forums auf jede seiner Fragen und Behauptungen eingehen. Jedem Beitrag des Quadrierers folgen gleich mehrere Antworten. Man gibt ihm Literaturhinweise und versucht ihn mit mathematischen Begriffen vertraut zu machen. Doch oftmals wirkt es so, als ob sich Quadrierer mit dem ihm Dargebotenen kaum bis gar nicht auseinandersetzt. So kommt es dann auch dazu, dass er beispielsweise nicht von seiner Meinung abrückt, es gebe mindestens genau so viele mit Zirkel und Lineal konstruierbare wie nicht konstruierbare Zahlen (vgl. [29] Beitrag

100). Doch das ist vollkommen falsch, denn die Menge der konstruierbaren Zahlen ist nur eine Teilmenge der algebraischen Zahlen, weshalb es nur abzählbar viele davon gibt. Darüber hinaus gibt es jedoch noch überabzählbar viele transzendente Zahlen, die bekanntlich nicht konstruiert werden können.

Mit Beitrag 220, den der Quadrierer etwa eineinhalb Monate nach dem Themenstart im Forum postete, stellte er endlich seinen Konstruktionsweg vor. Er tat das, indem er eine Formel für sein erfundenes „Zirkel-Rechenmodell“ angab, die da wäre:

$$b \cdot (1/3) = {}^{\pm 0} b/3 = {}^{-1} b - {}^{-2} b + {}^3 b - {}^{-4} b + {}^5 b - \dots + {}^{2N-1} b - {}^{2N} b.$$

Laut Quadrierer bezeichne b eine Kreisbogenlänge. Die hochgestellte Zahl sei der „Doppelungsmultiplikator“ und gebe an, wie oft b halbiert bzw. verdoppelt wird. Die Gültigkeit der exakten Winkeldreiteilung untermauert Quadrierer damit, dass $b \cdot (1/3)$ und $b \cdot (2/3)$ addiert genau b ergibt, wobei er $b \cdot (2/3)$ folgendermaßen angibt:

$$b \cdot (2/3) = {}^{+1} b/3 = {}^{-1} b + {}^{-2} b - {}^3 b + {}^{-4} b - {}^5 b + \dots - {}^{2N-1} b + {}^{2N} b.$$

Im Forum wird daraufhin vermutet (vgl. [29] Beitrag 230), dass obige Formel nichts anderes ist als eine längst bekannte Reihe, sofern man sich bei den hochgestellten Zahlen 3 und 5 ein Minus denkt (Tippfehler des Quadrierers vielleicht?):

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$$

Quadrierer arbeitet also mit Winkelhalbierungen (und -verdoppelungen?) und macht daraus bestenfalls eine Näherungskonstruktion. Eine weitere Version seiner Winkeldreiteilung in „26 wesentlichen Schritten“ sollte man, laut eines Beitrags des Quadrierer aus dem Jahr 2010 (siehe [29] Beitrag 278), auf einer Website nachlesen können. Auf dieser Website [33], die den Entstehungsprozess seines Buches begleite, konnte ich allerdings keinen Beweis ausfindig machen. Stattdessen erkennt man, dass Quadrierer an etwas arbeitet, das eine Alternative zur Geometrie sein soll. Er nennt diese Alternative „Cohaerentic“ bzw. „Zusammenhangwissen“. Außer dem Titelblatt, dem Inhaltsverzeichnis und ein paar einzelner Seiten des Buches, ist allerdings nicht viel zu sehen. Ein angekündigtes Gegenbeispiel, das die Unmöglichkeit von Winkeldreiteilungen mit Zirkel und Lineal widerlegen soll, stünde auf Seite 56 des Buches, doch das Buch dürfte es bis heute nicht geben. Es wird weder auf der Website noch sonst wo zum Verkauf angeboten. Also entweder Quadrierer schreibt noch immer daran, oder er hat das Projekt aufgegeben. (Anm.: Quadrierer wird unter seinem richtigen Namen als Anbieter und

Verantwortlicher der Website geführt. Für seine „erfundenen Sequenzen“ beansprucht er ein Copyright. Ob der angegebene Dokortitel bei seinem Namen im Impressum auch eine solche erfundene Sequenz ist, weiß ich nicht.)

Im Forum präsentierte Quadrierer später noch eine Grafik, die eine in 24 Schritten entstandene Winkeldreiteilung zeigen soll. Es ist jene Grafik, die ich bei den *Trisectoral Minds* bereits verwendet habe (Abb. 3.1). Der weitere Forumsverlauf bringt dann nichts Neues mehr. Die Versuche des Quadrierers, seine Sicht der Dinge preiszugeben, sowie die Versuche der anderen Forumsteilnehmer_innen, Mathematik zu erklären, sind erloschen. Dagegen kommen Wortmeldungen wie diese eines Forumsmitglieds:

„Amüsant finde ich, daß ein verschwommenes Weltbild konstruiert wird, mit dem man unter Verwendung von einerseits mathematischen Begriffen, andererseits inhaltsleeren Kunstwörtern die Widersprüche negieren zu können glaubt, die die eigene Denkweise produziert. Ich habe Ähnliches bei Diskussionen mit religiösen Eiferern, aber auch Esoterikern sowie Wünschelrutengängern und Energiefeldsuchern erlebt. Sobald die Argumentation sich komplett in Widersprüche gefangen hat, wird in eine andere Weltebene übergegangen und die fruchtlose Debatte beginnt mit einem neuen Anlauf im Hamsterrad.“ ([29] Beitrag 356)

Zum Abschluss möchte ich dieses „Hamsterrad“ Revue passieren lassen. Über die Person, die sich Quadrierer nennt, kann zusammenfassend gesagt werden, dass sie durchaus über einige Aspekte der Winkeldreiteilungsproblematik Bescheid weiß. So baut diese Person immer wieder historische Brocken ein – sie schreibt von Euklid, Archimedes, Hippias, Wantzel usw. Kleiner sind die Brocken, wenn es mathematisch konkret werden sollte. Zumindest das Wissen, dass bei der Konstruktion von Winkeldreiteilungen dritte Wurzeln erforderlich sind, dürfte vorhanden sein. Unklar bleibt jedoch bis zum Schluss, ob diese Person verstanden hat, dass das Konstruieren mit Zirkel und Lineal nur eine von vielen Spielregeln ist. Unklar bleibt dies nicht zuletzt deshalb, weil sich Quadrierer unklar ausdrückt und er es nicht schafft, anderen Personen seine Sicht der Dinge darzustellen. Dabei hilft es natürlich auch nicht Begriffe zu verwenden, die keiner kennt. Ein Forumsmitglied meint diesbezüglich:

„Ich habe eine Vielzahl von Worthülsen kennengelernt, mit denen du einen echten Gedankenaustausch wirksam verhindert hast, z. B.:

- restfehlerfreie Zahl
- elementargeometrisches Zusammenhangmodell
- Zirkel-Rechenmodell
- erfahrbares exaktes Raumverhältnis
- empirisch gewonnene Raumerfahrung
- gezeichnete Ausmessrechnung

nicht existierende fertige Winkelzahl

Z-L-Division

Raumrechengröße

Raumrechnungen anhand nachvollziehbarer räumlicher Zusammenhangs-Modelle

empirisch gesammelte Raumgesetzmäßigkeit

Zahlwerdung“ ([29] Beitrag 232)

Nach über einem Jahr und insgesamt 362 Beiträgen wurde schließlich die Diskussion mit dem Quadrierer vom Gründer des Forums mit folgenden Worten beendet:

„Ich sperre den Thread, weil ich nicht möchte, dass ein zufälliger und unbedarfter Besucher des MP [Forums; Anm.] sich Sorgen machen könnte, demnächst auch den hier vorgeführten Stil zu spüren zu bekommen.

Ich weiß, dass die Diskussion mit Quadrierer schon lange läuft und es lebhaft hin und her geht. Es ist nun aber schon so viel geschrieben worden, dass das Thema ganz in den Hintergrund rückt und es nur noch nach Zanken aussieht. Ich denke, es ist genug.“ ([29] Beitrag 362)

Kapitel 6

Ausblick

Die Dreiteilung des Winkels ist natürlich nicht das einzige Problem, das mathematisch Interessierte dazu veranlasst, kurios anmutende Dinge hervorzubringen. Wie eingangs bereits erwähnt, gibt es neben Winkeldreiteilern genauso Kreisquadrierer und Würfelverdoppler. Diese Diplomarbeit hätte demnach auch „Du Kreisquadrierer!“ oder „Du Würfelverdoppler!“ heißen können. Angesichts der Fülle an Material, auf das ich bei meinen Recherchen stieß, entschied ich mich dafür das Forschungsgebiet einzuschränken. Meine Entscheidung fiel schließlich auf die Winkeldreiteilung. Einerseits deshalb, weil ihre mathematische Analyse schneller erfolgt als bei der Quadratur des Kreises, andererseits deswegen, weil am Blatt Papier die Teilung von Winkeln anschaulicher ist als die Verdoppelung eines Würfels (wo man letztendlich immer nur die Zahl $\sqrt[3]{2}$ darstellen will).

6.1 Mathematical Cranks and Pi

Einen anderen Zugang wählt beispielsweise Dudley in *Mathematik zwischen Wahn und Witz* [10] (zuerst auf Englisch erschienen unter dem Titel *Mathematical Cranks*), indem er ganz allgemein zusammengetragen hat, „auf welche Ideen von der Mathematik begeisterte Außenseiter kommen“. Diese Ideen reichen von historisch angeblich immer wieder auftauchenden Zahlen, über matrizengeleitete Gebete bis hin zu Beweisen der Fermat'schen Vermutung. Schon allein der Abschnitt über *Die Quadratur des Kreises* ([10] S. 206–226) ist höchst lesenswert. Nach einem kurzen geschichtlichen Abriss der Bedeutung von π bei den alten Ägyptern, Babyloniern und Griechen folgen auf einige ernsthafte mathematische Seiten wilde Behauptungen von verschiedensten Leuten rund um π . Der Wert von π sei $3\frac{1}{6} = 3.1\dot{6}$, oder $\frac{908}{289} = 3.1418685\dots$, oder aber $\frac{20612}{6561} = 3.1415942\dots$, wobei es besser und einfacher ginge mit $\frac{355}{113} = 3.1415929\dots$

An anderer Stelle heißt es:

„Der Kreis ist nun quadriert

$$\pi = \frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}}$$

Copyright 1967

Beweis erhältlich“

([10] S. 222)

Es gibt Personen, die überzeugt davon sind, π sei gleich 3.12 oder $\sqrt{10}$. Erstaunlich, dass vieles davon nicht einmal genauer ist als das, womit schon die alten Ägypter, nämlich $(\frac{16}{9})^2$, und Babylonier ($3\frac{1}{8}$) gerechnet haben. Ähnliches findet man auch bei De Morgan in *A Budget of Paradoxes*, wenn dieser etwa über einen holländischen Seifenmacher berichtet, dessen Wert für π folgendermaßen aussieht:

$$3 + \frac{1008449087377541679894282184894}{6997183637540819440035239271702}$$

Demnach wäre $\pi = 3.144122\dots$, was De Morgan wie folgt kommentiert:

„It is to be hoped that he made better soap than values of π .“ ([6] S. 129)

6.2 Fermat'sche Vermutung

Viel ließe sich auch über die Fermat'sche Vermutung und ihre zahlreichen vermeintlichen Beweise schreiben. Die Fermat'sche Vermutung, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ keine positiven ganzzahligen Lösungen besitzt, für die Pierre de Fermat im 17. Jahrhundert angeblich bereits einen Beweis entdeckt, aus Platzgründen aber nicht niedergeschrieben haben will, wurde erst 1995 von Andrew Wiles auf 130 Seiten unter Verwendung moderner Hilfsmittel endgültig bewiesen ([22] S. 51f.). Dazwischen erarbeiteten Mathematiker Beweise der Vermutung zunächst für $n = 3, 4, 5, 7$ und dann sogar für eine ganze Klasse von Zahlen (vgl. [10] S. 60). Dennoch zieht die Fermat'sche Vermutung enorm viele mathematische Laien an, die Beweise dafür erstellen wollen. Hauptgrund dafür ist laut Dudley ein seit 1908 ausgeschriebenes Preisgeld von damals 100 000 Mark für das Beweisen der Fermat'schen Vermutung ([10] S. 60f.). Dieses Preisgeld kam allerdings nicht aus Kreisen der Mathematik, sondern von einem deutschen Industriellen, der die genannte Summe Gerüchten zufolge lieber irgendeinem Mathematiker vermachen wollte als seiner Frau oder Familie ([22] S. 50). Der entstandene Boom kommt in einem Brief des mathematischen Instituts der Universität Göttingen aus dem Jahr 1974 recht gut zum Ausdruck:

„Die Anzahl der bisher vorgelegten ‚Lösungen‘ wird nicht mehr festgehalten. Im ersten Jahr (1907–1908) wurden in den Akten der Akademie 621 Lösungen registriert; bis heute haben sie sich zu ungefähr drei Metern an Korrespondenz über das Fermatsche Problem angestaut. Seit einigen Jahrzehnten wird folgendermaßen vorgegangen: Der Sekretär der Akademie teilt die eingehenden Manuskripte in zwei Teile: kompletter Unsinn, der direkt zurückgeschickt wird, und Material, das nach Mathematik aussieht.“ ([10] S. 61f.)

Ein Beispiel eines fehlerhaften Beweises der Fermat’schen Vermutung möchte ich hier nun angeben. Dieser besonders kurze Beweis entstand 1982, auch aus der Motivation heraus, oben erwähnten Preis zu gewinnen.

„Sei $x^2 + y^2 = z^2$ und $x^n + y^n = z^n$. Nun sei $V = x^2 + y^2$ und $W = x^n + y^n$. Für $x = y = 1$ ist $2 = V = W$. Aus $V = W$ erhalten wir mit der obigen Gleichung $x^2 + y^2 = x^n + y^n$. Hieraus folgt mit der ersten Gleichung $z^2 = z^n$. Da $n > 2$ und $z > 0$, kann dies nur gelten, falls $z = 0$ oder $z = 1$ ist. Aber das ist nicht möglich, denn $z^2 = z^n = V = W = 2$.“ ([10] S. 78f.)

Deutlich komplizierter formulierte und ebenfalls fehlerhafte Beweise gibt es natürlich auch. Einige kann man bei Dudley nachlesen (siehe [10] S. 55–94).

Einen humorvollen Zugang zur Fermat’schen Vermutung zeigen übrigens die Drehbuchautoren der Fernsehserie *Die Simpsons*, als während der 1998 erstmals ausgestrahlten Folge *Im Schatten des Genies* eine von Homer Simpson beschriebene Tafel zu sehen war, auf der

$$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$$

stand (vgl. [22] S. 41–54). Und ja, mein Taschenrechner liefert für $3987^{12} + 4365^{12} - 4472^{12}$ das Ergebnis Null. Das liegt aber daran, dass dieser Taschenrechner nicht genügend Stellen darstellen kann. *Mathematica* hingegen reagiert auf die Eingabe $3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$ sofort mit einem „False“ und klärt darüber auf, dass in $3987^{12} + 4365^{12} = z^{12}$ das z gleich 4472.00000000705... und somit nicht ganzzahlig ist.

6.3 Goldbach-Vermutung

Zwar nicht ganz so beliebt bei mathematischen Amateuren wie π , die Winkeldreiteilung und die Fermat’sche Vermutung, dafür aber in anderer Hinsicht interessant ist die Goldbach-Vermutung. Sie wird nämlich von jenen Amateuren, die sich mit ihr auseinandersetzen, sowohl falsch bewiesen als auch fehlerhaft widerlegt (vgl. [10] S. 140–152). Interessant ist die Goldbach-Vermutung außerdem deshalb, weil sie auch von Mathematiker_innen bis heute weder bewiesen noch widerlegt werden konnte, obwohl die Vermutung ziemlich simpel klingt: Jede gerade Zahl, größer als zwei, ist Summe zweier Primzahlen.

Am 13. Jänner 2017, also nur kurz vor Fertigstellung dieser Diplomarbeit, wurde erneut ein Versuch eines Beweises der Goldbach-Vermutung veröffentlicht [24]. Dabei handelt es sich um einen zehnsseitigen Text, der einem lediglich sechssseitigen Beweis von 2013 desselben Autors entspringt. Ein Mathematiker der Humboldt-Universität Berlin beurteilt die kürzere und ältere Version des Beweises so:

„Das Ganze ist nicht schlüssig, weil auf mehreren Seiten Triviales ausgebreitet wird und dann auf den letzten Zeilen am Ende von Seite 4 schnell ein vermeintlicher Widerspruch produziert wird.“ ([35])

6.4 Vierfarbenvermutung

Erwähnenswert ist vielleicht noch die Vierfarbenvermutung, oder der Vierfarbensatz, wie man seit 1976 sagen kann. Diese soll, so Dudley, mehr Profis zu Narren gemacht haben als jedes andere mathematische Problem (vgl. [10] S. 126). Es handelt sich dabei um eine der Graphentheorie zugehörige Fragestellung, wie viele Farben benötigt werden, um beliebige Landkarten so einzufärben, dass zwei benachbarte Länder jeweils unterschiedliche Farben tragen. Die Vermutung mit vier Farben kam schnell, doch der Beweis war nicht leicht zu finden. Der 2003 verstorbene britisch-kanadische Mathematiker Harold Scott MacDonald Coxeter meinte sogar:

„Fast jeder Mathematiker muß schon eine aufregende Nacht hinter sich gebracht haben, in der er dachte, er hätte einen Beweis entdeckt, um morgens festzustellen, daß er einem Fehlschluß aufgesessen ist.“ ([10] S. 125)

Nach zahlreichen Versuchen, die sich im Nachhinein immer als fehlerhaft herausgestellt hatten (zum Teil erst nach mehrjähriger Überprüfung), gelang es schließlich den zwei Mathematikern Kenneth Appel sowie Wolfgang Haken im Jahr 1976 die Vermutung zu beweisen. Aufgrund der auftretenden großen Anzahl von Fallunterscheidungen im Beweis, mussten sie einen Computer einsetzen, um diese alle erst abarbeiten zu können. Gerade der Einsatz eines Computers störte daraufhin einige, die glaubten einen viel elementareren Beweis produzieren zu können. Dies glaubten nicht nur wissenschaftliche Amateure, sondern auch Profis, wie Dudley in *Mathematik zwischen Wahn und Witz* ausführlich erklärt ([10] S. 122–133). Ein Mathematikprofessor,

„der [...] schon über siebzig war, hielt bis zu seinem Tode an seinem ‚Beweis‘ fest. Als er 1978 starb, fühlte er sich von der offiziellen Mathematik verkannt und ausgeschlossen – ein bitteres Ende für einen Professor, der abgesehen von dem falschen Beweis der Vierfarbenvermutung ein angesehener Mathematiker war.“ ([10] S. 133)

6.5 Euklids Parallelenaxiom

Den Abschluss dieser Arbeit möchte ich einer Fragestellung widmen, die auch die Physik intensiv beschäftigt. Es geht um Euklids fünftes von fünf Axiomen, das sogenannte Parallelenaxiom. Demzufolge gibt es zu einer Geraden und einem Punkt, der außerhalb der Geraden liegt, nur eine einzige Gerade, die durch den Punkt geht und parallel zur gegebenen Gerade ist. Gemeinsam mit den ersten vier Axiomen liefert das die Euklidische Geometrie, in der es Rechtecke gibt, in der alle Dreiecke eine Winkelsumme von 180° besitzen etc., und von der man lange Zeit glaubte sie beschreibe die Realität korrekt.

Doch das fünfte Axiom lässt sich nicht beweisen, weshalb man es durch andere ersetzen kann und trotzdem wieder ein konsistentes logisches System erhält. So etwas nennt man dann Nichteuklidische Geometrie. Eine widerspruchsfreie Nichteuklidische Geometrie kann beispielsweise auf dem Axiom aufbauen, dass es zu einer Geraden und einem Punkt, der nicht auf der Geraden liegt, zwei Parallelen gibt. Jedenfalls ist die Nichteuklidische Geometrie genau so gut wie die Euklidische, was schon längst bewiesen werden konnte.

„Ein logisches System ist konsistent, wenn es keine Widersprüche enthält, wenn es also nicht möglich ist, daß aus den Axiomen sowohl ein Theorem als auch sein Gegenteil folgt.“ ([10] S. 111)

„Es stellt sich nun die Frage, was eigentlich die Geometrie des Raumes ist, die Euklidische oder die Nichteuklidische. [...] Die Frage nach der Geometrie kann man nicht beantworten. Wenn wir wollen, können wir annehmen, der Raum sei Euklidisch. Genaugut können wir aber annehmen, er sei es nicht. Wir können diese Wahl also ganz nach Belieben treffen.“ ([10] S. 111)

Selbstverständlich hat auch diese Fragestellung viele Menschen abseits der Wissenschaft fasziniert und zu fragwürdigen Veröffentlichungen bewegt (siehe [10] S. 98–121). In der Physik hingegen beschäftigt man sich deshalb ernsthaft mit dieser Thematik, weil man mittlerweile davon ausgeht, dass der Raum aufgrund von Gravitationsfeldern tatsächlich gekrümmt ist. Aber nicht nur das: Die Allgemeine Relativitätstheorie sagt voraus, dass Gravitationsfelder schwerer Massen sogar den Gang von Uhren beeinflussen. Man spricht dann von der Krümmung der Raumzeit [27].

Vierdimensionale Lebewesen könnten uns sagen, worin wir leben, so wie wir den Lebewesen eines zweidimensionalen Raumes berichten können, ob sie in einer ebenen oder gekrümmten Fläche wohnen. Nur leider kenne ich niemanden, der ein mindestens vierdimensionales Lebewesen kennt ...

Literaturverzeichnis

- [1] Baxa, Christoph: Geschichte der Mathematik und Logik. Vorlesung für das Lehramtsstudium, Universität Wien, Sommersemester 2015.
- [2] Beutelspacher, Albrecht; Danckwerts, Rainer; Nickel, Gregor u. a.: Mathematik Neu Denken: Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Wiesbaden; 2011.
- [3] Bieberbach, Ludwig: Theorie der geometrischen Konstruktionen. Basel; 1952.
- [4] Breidenbach, Walter: Die Dreiteilung des Winkels. Leipzig, Berlin; 1933.
- [5] Cigler, Johann: Körper – Ringe – Gleichungen: Eine Einführung in die Denkweise der Algebra. Wien (Download unter <http://homepage.univie.ac.at/johann.cigler/preprints/algebra.pdf>, zuletzt aufgerufen am 01.09.2016).
- [6] De Morgan, Augustus; Smith, David Eugene (Hrsg.): A Budget of Paradoxes, Volume I. London, Chicago; 1915.
- [7] De Morgan, Augustus; Smith, David Eugene (Hrsg.): A Budget of Paradoxes, Volume II. London, Chicago; 1915.
- [8] Dorner, Christian: Galoistheorie und Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Wien; 2012.
- [9] Dudley, Underwood: A Budget of trisections. New York u. a.; 1987.
- [10] Dudley, Underwood: Mathematik zwischen Wahn und Witz: Trugschlüsse, falsche Beweise und die Bedeutung der Zahl 57 für die amerikanische Geschichte. Basel u. a.; 1995.
- [11] Dudley, Underwood: The Trisectors. Washington, DC; 1994.
- [12] Fischer, Gerd: Lehrbuch der Algebra. Wiesbaden; 2013.
- [13] Hermes, Johann Gustav: Ueber die Teilung des Kreises in 65537 gleiche Teile. In: Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. Göttingen (1894), S. 170–186.

- [14] Humenberger, Hans: Elementarmathematische Betrachtungen zum Delischen Problem und zur Winkeldreiteilung. In: Internationale Mathematische Nachrichten Nr. 219 (2012), S. 25–43.
- [15] Malle, Günther; Koth, Maria; Woschitz, Helge u. a.: Mathematik verstehen 7. Wien; 2011.
- [16] Markowski, Karel: Der Satz von den Drei Unmöglich Ungleichen. 2009 (Download unter https://www.trigon-verlag.de/images/stories/satz_von_den_umoeglich_ungleichen.pdf, zuletzt aufgerufen am 23.1.2017).
- [17] Markowski, Karel: Die Dreiteilung eines Winkels. Potsdam; 2005 (Kap.4, Download unter <http://www.trigon-verlag.de/images/stories/trigon/programm/argumentation-gegen-galois.pdf>, zuletzt aufgerufen am 2.1.2017).
- [18] Markowski, Karel: Die geometrische Lösung der Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal. (Download unter <https://www.trigon-verlag.de/images/stories/trigon/abstract/dreiteilungkarel-doc.pdf>, zuletzt aufgerufen am 23.1.2017).
- [19] Polster, Steffen: Mathematik „alpha 2016“ (Download unter <http://mathematikalpha.de/wp-content/uploads/2016/02/handbuch.pdf>, zuletzt aufgerufen am 6.12.2016).
- [20] Schichl, Hermann; Steinbauer, Roland: Einführung in das mathematische Arbeiten. Berlin, Heidelberg; 2012.
- [21] Schreiber, Peter: Theorie der geometrischen Konstruktionen. Berlin; 1975.
- [22] Singh, Simon: Homers letzter Satz: Die Simpsons und die Mathematik. München; 2013.
- [23] Wohlgemuth, Martin (Hrsg.): Mathematisch für fortgeschrittene Anfänger. Heidelberg; 2010.
- [24] Wüsthofen, Ralf: Goldbach's conjecture. 2017 (Download unter <http://vixra.org/pdf/1403.0083vY.pdf>, zuletzt aufgerufen am 21.1.2017).

Internetquellen:

- [25] <http://derstandard.at/1277337191857>, zuletzt aufgerufen am 19.10.2016.
- [26] <http://did.mat.uni-bayreuth.de/studium/seminar/antike/bruischuetz/hilfsm2.html>, zuletzt aufgerufen am 29.11.2016.

- [27] <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/artMassstaebe/aufgaben.html>, zuletzt aufgerufen am 4.2.2017.
- [28] <http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/printtopic.php?topic=115078>, zuletzt aufgerufen am 12.12.2016.
- [29] <http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/printtopic.php?topic=125631>, zuletzt aufgerufen am 12.12.2016.
- [30] <http://mathworld.wolfram.com/DesarguesTheorem.html>, zuletzt aufgerufen am 19.10.2016.
- [31] https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratur_des_Kreises, zuletzt aufgerufen am 17.10.2016.
- [32] https://matheraum.de/forum/Winkeldreiteilung_60/t897380, zuletzt aufgerufen am 27.10.2016.
- [33] <http://www.cohaerentic.com/index.php/ueber2/lei>, zuletzt aufgerufen am 2.2.2017.
- [34] <http://www.johanneum-lueneburg.de/expo/jonatur/wissen/mathe/kurven/trisektr.htm>, zuletzt aufgerufen am 6.12.2016.
- [35] <http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/hobby-mathematiker-geniale-beweise-mit-kleinen-fehlern-a-934422.html>, zuletzt aufgerufen am 21.1.2017.
- [36] <http://www.srf.ch/sendungen/einstein/einstein-vom-9-april-2009>, zuletzt aufgerufen am 23.10.2016.
- [37] <http://www.trigon-verlag.de>, zuletzt aufgerufen am 2.1.2017.
- [38] Köller, Jürgen: Dreiteilung eines Winkels. 2009 (<http://www.mathematische-basteleien.de/dreiteilung.htm>, zuletzt aufgerufen am 3.1.2017).

Abstract

Diese Arbeit handelt davon beliebige Winkel in drei gleiche Teile zu teilen. Die Dreiteilung beliebiger Winkel ist auf verschiedene Weisen ganz leicht durchführbar, was hier auch demonstriert wird, aber sie ist unmöglich unter bloßer Verwendung von Zirkel und Lineal. Dies wurde erstmals im 19. Jahrhundert bewiesen. Trotzdem gibt es Personen, die behaupten Mathematiker_innen wären im Unrecht. Während sie in den letzten Jahrhunderten Briefe an Mathematiker_innen schrieben, verwenden sie mittlerweile Online-Foren, um auf ihre Winkeldreiteilungskonstruktionen aufmerksam zu machen. In dieser Arbeit werden Argumente der sogenannten Winkeldreiteiler gesammelt, analysiert sowie kritisiert, und es wird erklärt warum Mathematiker_innen doch Recht haben. Dazu werden geometrische Konstruktionen, insbesondere Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, im Gegensatz zu anderen Werken über Algebra, an den Beginn der Arbeit gestellt.

Schlussendlich soll klar werden, dass es nur von den zugelassenen Konstruktionsmitteln abhängt, ob Winkeldreiteilungen möglich sind oder nicht.

Abstract (english version)

This thesis is about trisecting angles. Trisections of any angle can easily be done in different ways, as shown here, but they are impossible with straightedge and compass alone. This was first proven in the 19th century. Nevertheless, there are people who think mathematicians are wrong. While they have been writing letters to mathematicians for the last centuries, they now use online forums to suggest their trisections. This thesis collects, analyzes and criticizes the trisectors arguments against mathematics and explains why mathematicians are right. Therefore geometrical constructions, especially straightedge and compass constructions, are discussed at the very beginning (contrary to other algebraic papers).

In the end it should be clear that it depends on the permitted construction-tools whether trisections are possible or not.