



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Leonhard Euler (1707-1783) –
Ein Abriss über sein Leben, seine Werke und
deren Bedeutung für den Schulunterricht

Verfasserin

Elisabeth Birke

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Matrikelnummer:	93 09 026
Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 313
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium Unterrichtsfach Mathematik
Betreuer:	ao. Prof. Dr. Gerhard Kowol

Wien, im Dezember 2008

Danksagung

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Kowol herzlich für seine geduldige und wohlwollende Betreuung bei der Erstellung dieser Arbeit sowie bei meiner Familie, bei meinen Freunden und ganz besonders bei meinem Lebensgefährten Christian für ihre Unterstützung und ihr Verständnis während dieser nicht immer einfachen Zeit bedanken.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden das Leben und das Werk Leonhard Eulers sowie seine Bedeutung für den Mathematikunterricht in drei Abschnitten behandelt:

- **Kurzbiographie Leonhard Eulers**

Hier wird Bezug auf Eulers ereignisreiches Leben (sowohl beruflich wie auch privat) genommen. Ein Überblick über sein Lebenswerk, das ja auch viele außermathematische Bereiche umfasst, samt der Angabe seiner Hauptwerke sollen einen Eindruck von Eulers unermüdlichem Schaffen vermitteln. Den Abschluss bildet eine allgemeine Literaturliste zu Leonhard Eulers Biographie.

- **Mathematische Ergebnisse Leonhard Eulers**

Dieser Abschnitt beinhaltet eine Auswahl aus Eulers umfangreichem mathematischen Werk. Exemplarisch werden Beiträge aus folgenden Bereichen behandelt: Algebra (Auflösung von algebraischen Gleichungen dritten und vierten Grades, Beweisversuch zum Fundamentalsatz der Algebra), Zahlentheorie (Primzahlsätze, Eulersche φ -Funktion, Potenzreste), Geometrie (Eulersche Gerade, Eulerscher Polyedersatz), Graphentheorie (Eulersche Linie), Funktionentheorie (Begriff und Umformung einer Funktion, Funktion einer komplexen Variablen), Differentialrechnung (unendlichkleine Größen, Begriffe und Definitionen zur Differentialrechnung) sowie Reihenlehre (konvergente und divergente Reihen, Euler-MacLaurinsche Summenformel, Eulersche Zahl e , Euler-Mascheroni-Konstante γ). Darüberhinaus werden Eulers Lehrbücher zur Algebra (“Die vollständige Anleitung zur Algebra”) und zur Analysis (“Einleitung in die Analysis des Unendlichen, 1. Teil”) behandelt.

- **Leonhard Eulers Bedeutung für den Schulunterricht**

Deren Analyse basiert auf gängigen österreichischen Schulbüchern, die betreffend der Einführung von Ergebnissen Eulers im Schulunterricht und der Auswahl an verwendeten Beispielen und Aufgaben untersucht werden. Gegenstand der Untersuchung sind die Eulersche Gerade, die Eulersche Linie, die Eulersche Zahl e , die Euler-Mascheroni-Konstante γ , die Eulersche Formel bzw. die Eulersche Identität und die Eulersche Gammafunktion. Aufgrund ihrer ausführlichen Behandlung im Schulunterricht und der verschiedenen Zugänge in Schulbüchern steht dabei die Zahl e im Mittelpunkt der Ausführungen.

Neben den genannten Themenkreisen ist es ein besonderes Ziel der Diplomarbeit einen Beitrag zur Würdigung der Relevanz von Resultaten Eulers für den heutigen Mathematikunterricht an österreichischen Schulen zu leisten.

Abstract

In this thesis life and works of Leonhard Euler and their relevance for contemporary education are outlined in three chapters:

- **Brief biography of Leonhard Euler**

In this chapter the eventful life of Euler – professional and personal – is discussed and his achievements, including a multitude of non-mathematical findings, are reviewed. Euler’s main works in chronological order intend to give an impression of his tireless efforts. The chapter is completed by a bibliographic list related to Euler’s vita.

- **Leonhard Euler’s mathematical finding**

This chapter contains a selection of Euler’s extensive mathematical works including: algebra (resolution of algebraic equations of third and fourth order, attempt to proof the fundamental theorem of algebra), number theory (prime number theorems, Euler’s totient function, power residues), geometry (Euler line, Euler characteristic), graph theory (Euler path), theory of functions (concept and transformation of a function, function of a complex variable), differential calculus (infinitesimal quantities, concepts and definitions for differential calculus), and series (convergent and divergent series, Euler-MacLaurin formulae, Euler’s number e , Euler-Mascheroni constant γ). Furthermore, Euler’s textbooks on algebra (“Elements of algebra”) and analysis (“Introduction to the analysis of the infinite, Part 1”) are highlighted.

- **Leonhard Euler’s relevance for contemporary education**

The assessment is based on current Austrian textbooks, which are reviewed with respect to (i) the introduction of Euler’s results and (ii) the chosen examples and exercises. The topics cover the Euler line, the Euler path, Euler’s number e , the Euler-Mascheroni constant γ , Euler’s equation and Euler’s identity, respectively, and Euler’s gamma function. Due to its extensive treatment in contemporary education and the various approaches in textbooks, this part centers on Euler’s number e .

Besides the mentioned themes a special aim of the thesis is to contribute to the appraisal of Leonhard Euler’s relevant findings for contemporary education in Austria.

Inhaltsverzeichnis

1	Leonhard Euler – Eine kurze Biographie mit einem Überblick über sein Lebenswerk	1
2	Eine Auswahl an Schwerpunkten in Leonhard Eulers mathematischem Werk	9
2.1	Algebra	9
2.1.1	“Die vollständige Anleitung zur Algebra”	9
2.1.2	Auflösung der algebraischen Gleichungen dritten und vierten Grades	10
	Auflösung der algebraischen Gleichungen dritten Grades	11
	Auflösung der algebraischen Gleichungen vierten Grades	15
2.1.3	Versuch des Beweises des Fundamentalsatzes der Algebra	20
2.2	Zahlentheorie	27
2.2.1	Kriterien für Primzahlen	27
2.2.2	Eulersche φ -Funktion	31
2.2.3	Theorie der Potenzreste	33
2.3	Geometrie	35
2.3.1	Eulersche Gerade	35
2.3.2	Eulerscher Polyedersatz	36
2.4	Graphentheorie	40
2.5	Funktionentheorie	41
2.5.1	Der Begriff einer Funktion	41
2.5.2	Die Umformung einer Funktion	44
2.5.3	Die Funktion einer komplexen Variablen	49
2.5.4	Die “Introductio” von Euler	50
2.6	Differentialrechnung	51
2.6.1	Von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen	52
2.6.2	Grundlegende Begriffe und Definitionen	54
2.7	Reihen	58
2.7.1	Konvergente und divergente Reihen	59

2.7.2	Euler-MacLaurinsche Summenformel	63
2.7.3	Eulersche Zahl e	65
2.7.4	Euler-Mascheroni-Konstante γ	68
3	Leonhard Eulers Bedeutung für den Schulunterricht – Möglichkeiten der Einführung schulrelevanter Ergebnisse sowie ein Auszug von Beispielen und Aufgaben dazu aus mehreren Schulbüchern	71
3.1	Eulersche Gerade	71
3.1.1	Einführung der Eulerschen Geraden im Schulunterricht der Unterstufe	71
3.1.2	Übungsaufgaben zur Eulerschen Geraden in österreichischen Schulbüchern der Unterstufe	73
3.1.3	Wiederholung der Eulerschen Geraden im Schulunterricht der Oberstufe	74
3.1.4	Beispiele und Übungsaufgaben zur Eulerschen Geraden in österreichischen Schulbüchern der Oberstufe	74
3.2	Eulersche Linie	76
3.2.1	Einführung der Eulerschen Linie im Schulunterricht	77
3.2.2	Beispiele und Übungsaufgaben zur Eulerschen Linie in österreichischen Schulbüchern der 5. Klasse AHS	79
3.3	Eulersche Zahl e	81
3.3.1	Einführung der Eulerschen Zahl e im Schulunterricht der 10. Schulstufe	83
	Zugang über die Zinseszinsrechnung	83
	Zugang über die Exponentialtafeln	86
	Zugang über die allgemeine Exponentialfunktion	88
	Andere Möglichkeiten der Behandlung der Zahl e in österreichischen Schulbüchern	90
	Überlegungen zur Eignung der verschiedenen Zugänge zur Eulerschen Zahl e in österreichischen Schulbüchern für den Mathematikunterricht	91
3.3.2	Beispiele und Übungsaufgaben zur Eulerschen Zahl e in österreichischen Schulbüchern der 10. Schulstufe	92
	Schulbuch [Reichel u. a. 2002]	92
	Schulbuch [Novak u. a. 1990]	93
	Schulbuch [Bernhard 2002b]	93
	Schulbuch [Schärf 1993]	94
	Schulbuch [Bürger u. a. 2000b]	95
	Schulbuch [Szirucsek u. a. 1994]	96

	Schulbuch [Taschner 1999b]	97
	Schlussfolgerungen	99
3.4	Euler-Mascheroni-Konstante γ	99
3.4.1	Behandlung der Euler-Mascheroni-Konstante γ im Schulunterricht der 6. Klasse AHS	100
3.5	Eulersche Formel bzw. Eulersche Identität	101
3.5.1	Behandlung der Eulerschen Formel bzw. der Eulerschen Identität in österreichischen Schulbüchern	102
3.6	Eulersche Gammafunktion	105
3.6.1	Behandlung der Eulerschen Gammafunktion im Schulunterricht der 8. Klasse AHS	106

Kapitel 1

Leonhard Euler – Eine kurze Biographie mit einem Überblick über sein Lebenswerk

Leonhard Euler wurde am 15. April 1707 als Sohn des Pfarrers Paul Euler (1670-1745) und von Margaretha Bruckner (1677-1761) in Basel geboren. Im Jahr 1708 zog die Familie in das nahe gelegene Städtchen Riehen um, wo Paul Euler von nun an die Pfarre leitete und Leonhard seine Kindheit und frühe Jugend verbrachte. Hier wurde er auch von seinem Vater in die Grundzüge der Mathematik eingeweiht und auf den Besuch der Baseler Schulen vorbereitet. Schon im Alter von 13 Jahren immatrikulierte der Pfarrersohn an der Universität Basel, und begann – obwohl seine Begabungen wohl eher in die Richtungen Mathematik und Philosophie zeigten – seinem Vater zuliebe Theologie zu studieren. Eine dort vor seinen Kommilitonen in Latein gehaltene Rede über Arithmetik und Geometrie enthält unter anderem die für einen Burschen so geringen Alters erstaunliche Erkenntnis: “Je mehr eine Wissenschaft den Verstand schärft und die Vernunft vollendet, desto vortrefflicher und vorzüglicher ist diese” [Thiele 1982, S.18f.].

Als Leonhard 1723 die Magisterwürde erwarb, gestattete ihm der Vater sich nun ausschließlich auf das Studium der Mathematik zu konzentrieren. Da sich der junge Euler im Unterricht von Johann Bernoulli I (1667-1748) rasch sehr viel Wissen angeeignet hatte, wurde ihm im Jahr 1727 eine Stelle als Adjunkt für Medizin an der von Zarin Katherina I (1684-1727) erst 2 Jahre zuvor gegründeten Akademie der Wissenschaften in Petersburg angeboten. Leider starb die russische Herrscherin am Tag von Eulers Ankunft. Da die neuen Machthaber der Akademie keineswegs positiv gegenüber standen, wusste man längere

Zeit nicht, ob diese fortbestehen würde. Euler, dessen Berufung als Mediziner in diesen Wirren untergegangen war und der sich in seiner Not schon fast der Marine verpflichtet hätte, konnte schließlich in der mathematischen Abteilung unterkommen. Ab 1731 war er dort als Adjunkt, dann als Professor für Mathematik tätig. Der Zeitraum von 1727-1741, während dessen sich Leonhard Euler in Russland aufhielt, wird allgemein als die “Erste Petersburger Periode” seines Schaffens bezeichnet.

An der Petersburger Akademie wurde Eulers Wirken von drei Faktoren günstig beeinflusst: Zum Einen wurde dem Wissenschaftler von seinem Arbeitgeber gestattet, sich hauptsächlich der Mathematik und der Mechanik zu widmen und zum anderen bestand für Euler hier die Möglichkeit, seine zahlreichen Werke zu publizieren. Drittens war Leonhard während seines Aufenthalts in Petersburg von vielen anderen begabten Forschern, wie Mathematikern, Astronomen, Physikern und Geographen umgeben, deren Anwesenheit seine Arbeit beschleunigte und anspornte.

An dieser Stelle sollen nun einige von diesen bedeutenden Wissenschaftlern angeführt werden: der Hydrodynamiker Daniel Bernoulli (1700-1782), die Mathematiker Jacob Hermann (1678-1733) und Christian Goldbach (1690-1764) und letztlich der Astronom Josef-Nicolas Delisle (1688-1768). Zusätzlich verkehrte Leonhard Euler noch brieflich mit Gelehrten aus anderen Ländern. Meistens schrieb er seinem Lehrer und Förderer Johann I Bernoulli, der schon früh in Euler den zukünftigen “princeps mathematicorum” sah und ihm seine persönliche Unterweisung in die Hauptgebiete der Mathematik angedeihen ließ [Kubacek 1989, S.5].

Euler befasste sich nicht nur mit der reinen Mathematik, sondern auch mit zahlreichen Anwendungen der Mathematik auf die Astronomie, Mechanik, Optik und Kartographie sowie auf das Artilleriewesen, den Schiffsbau und viele technische Problemstellungen. Der Schweizer Wissenschaftler galt als fleißigster Mitarbeiter der Akademie. Besonders die kartographischen Forschungen hatten es Euler, der seit 1735 Mitglied des geographischen Departments war, angetan. Wahrscheinlich hatte er sich beim Betrachten der vielen Karten so verausgabt, dass er schwer erkrankte und infolge dessen noch im selben Jahr die Sehkraft eines Auges verlor, was aber sein Schaffen nicht im geringsten beeinträchtigte.

Es wurden während der 1. Petersburger Periode über 50 Abhandlungen und Bücher Eulers gedruckt, welche sich auf verschiedenste Forschungsgebiete bezogen, die hier nur kurz genannt werden sollen: Algebra (Gleichungstheorie), Zahlentheorie (Primzahlen, Diophantische Analysis), Arithmetik, Geometrie (Analysis situs), Differentialgeometrie (reziproke Trajektorien, geodätische Linien), Differentialgleichungen, Reihentheorie (unendliche Reihen), Variationsrechnung, Mechanik (Eulersche Darstellung in der (Fluid)mechanik – Betrachtung eines raumfesten Kontrollvolumens; Tautochronen – d.h. Linien gleicher Fallzeit, bei denen man von jedem Punkt der Kurve die gleiche Zeit zum Tiefpunkt braucht;

Stoß- und Elastizitätstheorie), Schiffstheorie, Physik (Luftelastizität, Natur des Feuers), Astronomie (Positionsastronomie, Planetenbahnen), Gezeitentheorie und Musiktheorie.

Auch im privaten Bereich führte Euler in Petersburg ein glückliches und erfolgreiches Leben. Im Jahre 1733 heiratete er Katharina Gsell von St. Gallen, welche ihm 13 Kinder schenkte. Sein ältester Sohn Albert entwickelte sich zu einem begabten Wissenschaftler, der wesentlich an den späteren Arbeiten seines Vaters Anteil hatte und selbst Mitglied der Berliner und der Petersburger Akademie wurde.

Die nach dem Ableben von Zarin Anna I (1693-1740) entstandenen innenpolitischen Wirren veranlassten Euler im Jahr 1741 das Angebot Friedrichs II (1712-1786) an der Berliner Akademie zu arbeiten, anzunehmen. Ab 1746 wurde er der Direktor der mathematischen Klasse und nach dem Tod des Präsidenten Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) fungierte er sogar als inoffizieller Leiter der Berliner Akademie.

Über Eulers Wirken an der Akademie Friedrichs II der Wissenschaften existieren neben wissenschaftlichen Abhandlungen, Gutachten und dienstlichem Schriftwechsel noch Protokolle von Akademiesitzungen, an denen er fast immer teil nahm, die sein großes Arbeitspensum offenbaren. Das Buch von Scheel [Scheel 1984] beschäftigt sich ausschließlich mit den administrativen Arbeiten Eulers.

Da sich Euler immer wieder in Diskussionen über philosophische Fragen verwickeln ließ, dabei allerdings nicht die allgemein herrschenden Ansichten vertrat, genoss er am preussischen Hof kein allzu großes Ansehen. So sah sich Friedrich, der über diese Tatsache nicht besonders erfreut war, nach einem anderen Gelehrten um, der die Berliner Akademie führen sollte. Aus diesem Grund wurde Euler vom Kaiser das Leben in Berlin sehr schwer gemacht und deshalb kehrte der Schweizer 1766 im Alter von 59 Jahren auf die Einladung von Katharina der Großen nach St. Petersburg zurück.

Während der 25 Jahre (1741-1766) dauernden “Berliner Periode” verfasste Leonhard Euler abgesehen von vielen hunderten (!) Abhandlungen die Hauptwerke zur Variationsrechnung, zur Funktionentheorie, zur Differentialrechnung, die sogenannte zweite Mechanik, wie auch philosophische Briefe in drei Bänden.

Kurz nach seiner Ankunft im Osten führte der Verlust der Sehkraft des zweiten Auges zur gänzlichen Blindheit des Wissenschaftlers, die nicht einmal mit Hilfe einer zehn Jahre später durchgeführten Operation zu beheben war. Im Jahr 1771 ereilte Leonhard ein schwerer Schicksalsschlag – bei einem Brand seines Heimes wurde die Einrichtung sowie die Bibliothek gänzlich vernichtet und der blinde Mathematiker entging dem Feuertod nur durch den Mut seines Dieners, der seinen Herrn aus den Flammen rettete.

Unglücklicherweise hatte Euler fünf Jahre später auch noch den Tod seiner Frau, mit der er sehr verbunden war, zu beklagen. Ohne Pflege und Fürsorge unfähig zu überleben heiratete er 1778, im hohen Alter von 70 Jahren, daraufhin die Halbschwester seiner er-

sten Frau, Salome Abigail Gsell. Obwohl 1780 bzw. 1781 seine beiden Töchter starben, erhielt sich Euler sein fröhliches Wesen, wahrscheinlich hauptsächlich mit Hilfe seiner 26 Enkelkinder. In seinem letzten Lebensabschnitt erschienen Eulers Werke zur Astronomie (Bewegung und Position des Mondes, Gravitationsbeziehungen zwischen Mond, Sonne und Erde), Algebra (vollständige Anleitung zur Algebra 1. und 2. Teil), Dioptrik, Zahlentheorie und zur Analysis.

Am 18. September 1783 erlitt Leonhard Euler einen Schlaganfall, aufgrund dessen er das Bewußtsein verlor und es nicht mehr erlangte. Einen Tag später, im Alter von 76 Jahren hörte Euler für immer auf zu “rechnen und zu atmen” [Fellmann 1995, S.118].

Leonhard Euler ist nicht nur *der* produktivste Mathematiker aller Zeiten, sondern er gilt auch als einer der genialsten Vertreter seines Fachs. Er war Mitarbeiter aller wichtigen Akademien des 18. Jahrhunderts und gewann 20 Akademiepreise. Die Zahl seiner Abhandlungen beläuft sich auf 866 Stück, inklusive der ungefähr 20 Monographien. Sein Werk, dessen Edition seit dem Jahr 1907 von der Eulerkommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft gemeinsam mit vielen kompetenten Wissenschaftlern durch internationale Kooperation zusammengestellt und editiert wird, beinhaltet bis zum heutigen Tag ungefähr 70 Quartbände exklusive der ca. 3000 bis dato gefundenen wissenschaftlichen Briefe, die Leonhard mit den angesehensten Fachkollegen seiner Zeit gewechselt hatte. Zumindest 10 weitere Bände sind noch geplant.

Nicht einmal seine Augenkrankheiten konnten Eulers Produktivität beeinträchtigen – mehr als die Hälfte seines Lebenswerkes stammt aus den Jahren völliger Blindheit, nämlich aus den Jahren 1765-1783. Zur Veranschaulichung seien an dieser Stelle die Anzahl der Werke in einem bestimmten Zeitraum (siehe Tabelle 1.1) sowie die verschiedenen Fachgebiete seiner Arbeiten in Prozentsätzen (siehe Tabelle 1.2) angeführt. Die Hauptwerke Eulers sind in chronologischer Reihenfolge angegeben (Tabelle 1.3).

Jahr	Arbeiten	Prozent
1725-34	35	5
1735-44	50	7
1745-54	150	20
1755-64	110	14
1765-74	145	19
1775-83	270	35

Tabelle 1.1: Anzahl der Werke Eulers in bestimmten Zeiträumen (aus [Thiele 1982, S.161])

Trotz des vielen Glanzes und Ruhms, der Leonhard Euler während seines Lebens ereilte, wurde der Pastorensohn nie eitel, eingebildet oder gar geldgierig. Er blieb bescheiden und hielt stets streng an seinem reformistischen Glauben an. Letzteres lässt sich anhand einer Anekdote bestens dokumentieren: Als Denis Diderot (1713-1784) an den russischen Hof kam und hörte, dass ein Mathematiker einen “algebraischen Beweis” für die Existenz Gottes gefunden hätte, war er natürlich neugierig. Daraufhin antwortete Euler: “Monsieur, es ist $\frac{a+b^n}{n} = x$. Also existiert Gott. Antworten Sie!” Man erzählt, dass Diderot das durchaus verständlich fand [Meschkowski 1964, S.82].

Leonhard Eulers bewundernswürdiges Wesen kann man am besten mit den Worten des dankbaren Schülers M. Fuss ausdrücken, der den Charakter seines Lehrers folgendermaßen zusammenfasste: “Seine Frömmigkeit war rational und ehrlich. Sein Hingabe war glühend. Er war vollständig von der Wahrheit der Christenheit überzeugt. Er fühlte die Wichtigkeit der Würde und der Zufriedenheit und des Glücks der menschlichen Natur und er schaute über seine Widersacher und Gegner, als die schädlichsten, bösartigsten Feinde der Menschheit, hinweg” [Horner 1972, S.LI].

Obwohl die meisten Kinder Eulers früh gestorben sind, sei abschließend bemerkt, dass Eulers Nachkommen hochangesehene Bürger in der russischen Gesellschaft waren, die oft Ämter als Offiziere oder Ingenieure bekleideten. Aber nicht nur in der ehemaligen UdSSR, sondern auch in Europa (seit Beginn des 20. Jahrhunderts sogar in Basel) trifft man auf Nachfahren des bedeutenden Wissenschaftlers. Bekannte “Kindeskinder” Eulers sind der deutsche Ingenieur A.H. Euler, der sich Besitzer des deutschen Flugzeugführerzeugnis Nr. 1 rühmen durfte, der Nobelpreisträger für Chemie H.K. von Euler-Chelpin und dessen Sohn Ulf von Euler, der es sogar zum Präsidenten der Nobel-Stiftung brachte sowie selbst einen der begehrten Nobelpreise (für Medizin) erhielt.

Algebra, Zahlentheorie, Analysis	40% der Arbeiten
Mechanik, restliche Physik	28% der Arbeiten
Geometrie einschließlich Trigonometrie	18% der Arbeiten
Astronomie	11% der Arbeiten
Schiffswesen, Architektur, Artilleristik	2% der Arbeiten
Philosophie, Musiktheorie, Theologie, u.a.	1% der Arbeiten

Tabelle 1.2: Prozentuelle Aufteilung Eulers Werke auf verschiedene Wissensgebiete (aus [Thiele 1982, S.161])

1736	Mechanica (2 Bände)
1738/40	Rechenkunst (2 Bände)
1739	Tentamen novae theoriae musicae (“Musiktheorie”)
1744	Methodus inveniendi (“Variationsrechnung”)
1744	Theoria motuum planetarum et cometarum (“Himmelsmechanik”)
1745	Neue Ansätze der Artillerie
1747	Rettung der göttlichen Offenbarung gegen die Einwürfe der Freigeister
1748	Introductio in analysis infinitorum (“Einführung”, 2 Bände)
1749	Scientia novalis (“Schiffstheorie”, 2 Bände)
1753	Theoria motus lunae (“Erste Mondtheorie”)
1755	Institutiones calculi differentialis (“Differentialrechnung”, 2 Bände)
1762	Constructio lentium obiectivarum (“Achromatische Linsen”)
1765	Theoria motus corporum (“Zweite Mechanik”)
1766	Théorie générale de la dioptrique (“Linsentheorie”)
1768	Lettus á une Princesse d’Allemagne (“Philosophische Briefe”, 2 Bände)
1768	Institutiones calculi integralis (“Integralrechnung”, 3 Bände bis 1770)
1769	Dioptrica (“Optik”, 3 Bände bis 1771)
1770	Vollständige Anleitung zur Algebra (“Algebra”, 2 Bände)
1772	Theoria motuum lunae (“Zweite Mondtheorie”)
1773	Théorie complete de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux (“Zweite Schiffstheorie”)

Tabelle 1.3: Eulers Hauptwerke in chronologischer Reihenfolge (aus [Grabner 1996, S.2])

Allgemeine Literaturliste zu Eulers Biographie

BELL, Eric T.: *Die großen Mathematiker*. Düsseldorf/Wien : Econ, 1967

BURCKHARDT, F.: Vortrag von Prof. F. Burckhardt. In: *Die Basler Mathematiker Daniel Bernoulli und Leonhard Euler. 100 Jahre nach ihrem Tode gefeiert von der Naturforschenden Gesellschaft*. Basel : H. Georg’s Verlag, 1884, S. 39–71

FELLMANN, Emil A.: *Leonhard Euler*. Hamburg : Rowohlt, 1995

FUETER, Rudolf: *Leonhard Euler*. Basel : Birkhäuser, 1948. – Beiheft zur Zeitschrift *Elemente der Mathematik* Nr. 3 - Januar 1948

JUSCHKEWITSCH, A.P.: Einführung zur Sammlung von Aufsätzen Leonhard Eulers

zur Theorie der Funktion komplexer Variabler. In: WUSSING, H. (Hrsg.): *Zur Theorie komplexer Funktionen. Arbeiten Leonhard Eulers*. Leipzig : Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, 1983, S. 8–48

KUBACEK, Martina: *Übersetzung und Analyse der beiden Arbeiten Eulers: “De summa seriei ex numeris primis formatae” und “Supplementum quorundam theorematum arithmeticoarum”*. Universität Wien, Diplomarbeit, 1989

PORTER, Roy: *The Biographical Dictionary of Scientists*. New York : Oxford University Press, 1994

PURKERT, Walter: Leonhard Euler. In: GOTTWALD, Siegfried ; ILGAUDS, Hans-Joachim ; SCHLOTE, Karl-Heinz (Hrsg.): *Lexikon bedeutender Mathematiker*. Leipzig : Deutsch Verlag, 1990, S. 139–141

THIELE, Rüdiger: *Leonhard Euler*. Leipzig : B.G. Teubner, 1982

VALENTIN, G.: Leonhard Euler in Berlin. In: VORSTAND DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT (Hrsg.): *Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers*. Leipzig/Berlin : B. G. Teubner, 1907, S. 1–20

WUSSING, Hans ; ARNOLD, Wolfgang: *Biographien bedeutender Mathematiker. Eine Sammlung von Biographien*. Köln : Aulis, 1985

Kapitel 2

Eine Auswahl an Schwerpunkten in Leonhard Eulers mathematischem Werk

2.1 Algebra

2.1.1 “Die vollständige Anleitung zur Algebra”

Leonhard Eulers erstes großes Werk aus der Zeit des gänzlichen Verlustes des Augenlichtes “Die vollständige Anleitung zur Algebra”, das 1770 in Petersburg erschien, wurde höchstwahrscheinlich schon in Berlin begonnen. Es enthält unter anderem auch eine Definition der Algebra *“als der Wissenschaft, ... welche zeigt, wie man aus bekannten Größen unbekannte findet”*. Aus dieser Aussage ist ersichtlich, dass das Auflösen von Gleichungen das zentrale Thema der Algebra war. Das zweibändige Lehrbuch diktierte Euler seinem Gehilfen, einem mathematisch nicht ausgebildeten früheren Schneidergesellen, der dadurch – als mittelmäßig begabter Kopf – im Stande war, sogar schwierige algebraische Aufgaben zu lösen [Thiele 1982, S.146]. Aufgrund der didaktisch geschickten Vorgehensweise, die auch den absoluten Neuling von den natürlichen Zahlen über die arithmetischen und algebraischen Grundsätze und über die elementare Gleichungslehre bis zu diophantischen Gleichungen führt, wurde die “Algebra” ein Bestseller [Fellmann 1995, S.108].

Das Werk ist in zwei Teile, sowie mehrere Abschnitte gegliedert:

Teil 1:

- Von den verschiedenen Rechnungsarten mit einfachen Größen;
- Von den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen;
- Von den Verhältnissen und Proportionen;

Teil 2:

- Von den algebraischen Gleichungen und ihrer Auflösung;
- Von der unbestimmten Analytik.

Eulers Buch zeichnet sich durch die Verwendung der einfachen Sprache, durch das Anführen von zahlreichen Beispielen und Aufgaben samt Lösungen, durch die Angabe von Definitionen und von Erklärungen für die Rechenweise sowie durch praktische Anwendungen (z.B.: Interessens-, also Zinsrechnung) aus [Euler 1959]. Aus diesem Grunde spricht man von der “Algebra” noch heute als der gelungensten Einführung in dieses Gebiet für einen mathematischen Anfänger. Das Werk erschien 1770 in deutscher Originalfassung und wurde in unzählige andere Sprachen (unter anderem russisch, französisch, englisch und holländisch) übersetzt. Durch die Publikation in der Reclam Universalbibliothek erreichte die “Vollständige Anleitung zur Algebra” als mathematisches Buch im deutschen Sprachraum die größte Verbreitung – von 1883-1942 wurden 108.000 Stück gedruckt.

Somit wurde die “Algebra” im mathematischen Bereich bezüglich der Auflagezahlen nur von einem einzigen Schriftstück geschlagen, nämlich von Euklids “Elementen”, dem meistverkauften und meist aufgelegten Werk nach der Bibel überhaupt [Fellmann 1995, S.108f.].

2.1.2 Auflösung der algebraischen Gleichungen dritten und vierten Grades

In der “Algebra” ist der Auflösung von Gleichungen niederen Grades ein eigener Abschnitt gewidmet: Euler nimmt hier Bezug auf sämtliche Gleichungstypen (1. Grades, reinquadratisch, gemischtquadratisch, rein kubisch, vollständig kubisch und biquadratisch, d.h. 4. Grades), stellt die Regel des Cardano sowie die “kleine” Lösungsformel für gemischtquadratische Gleichungen vor, zeigt die Auflösung von Gleichungen durch Näherungen und vertieft das Gelernte durch zahlreiche praktische Aufgaben samt Lösungen, deren Schwierigkeitsgrad stark variiert.

Im folgenden Kapitel werden Eulers Überlegungen zur Auflösung algebraischer Gleichungen dritten und vierten Grades in seiner “Vollständigen Anleitung zur Algebra” im Detail behandelt.

Auflösung der algebraischen Gleichungen dritten Grades

Ausgehend von rein kubischen Gleichungen werde ich anschließend auf vollständige kubische Gleichungen und zum Abschluß kurz auf die Regel des Cardano zu sprechen kommen. Unter einer rein kubischen Gleichung versteht man eine Gleichung der Form $x^3 = a$, die also ausser dem Kubus der unbekannten Zahl nur noch eine bekannte – reelle – Zahl enthält [Euler 1959, 2. Teil, 1. Abschnitt, Kapitel 10]. Da jede quadratische Gleichung zwei Lösungen hat, nimmt man an, dass es für jede kubische Gleichung 3 Werte für x gibt, wobei man den ersten einfach durch das Ziehen der dritten Wurzel erhält:

$$x^3 = a \Rightarrow x = \sqrt[3]{a} \quad (2.1)$$

Um die beiden anderen Lösungen zu bekommen, muss man den Linearfaktor abspalten. Zur allgemeinen Darstellung dieses Vorgangs setzt man $\sqrt[3]{a} = c \Rightarrow a = c^3$. Aus $x^3 = a$ wird daher $x^3 = c^3 \Rightarrow x^3 - c^3 = 0$. Aufgrund der Beziehung

$$x^3 - c^3 = (x - c)(x^2 + cx + c^2) \quad (2.2)$$

folgt

$$(x - \sqrt[3]{a})(x^2 + \sqrt[3]{a}x + \sqrt[3]{a^2}) = 0 . \quad (2.3)$$

Durch Anwendung der “kleinen” Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man insgesamt

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{a} \\ x_2 &= \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{a} \\ x_3 &= \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{a} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Jede reinkubische Gleichung hat folglich 3 Lösungen, von denen die erste reell, die beiden anderen aber (konjugiert) komplex sind.

Als nächstes behandelt Euler die vollständigen kubischen Gleichungen [Euler 1959, 2. Teil, 1. Abschnitt, Kapitel 11], die folgende allgemeine Form besitzen:

$$\alpha x^3 \pm ax^2 \pm bx \pm c = 0 \quad (2.5)$$

Jede kubische Gleichung lässt sich als Produkt ihrer Linearfaktoren darstellen. Seien die Nullstellen p , q und r , dann sähe das so aus:

$$\begin{aligned}(x-p)(x-q)(x-r) &= (x^2 - px - qx + pq)(x-r) \\ &= x^3 - px^2 - qx^2 + pqx - rx^2 + prx + qrx - pqr \\ &= x^3 - (p+q+r)x^2 + (pq+pr+qr)x - pqr.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Dieser Ausdruck wird dann Null, wenn $x = p$ oder $x = q$ oder $x = r$ ist. Euler erörtert zunächst den Fall, dass $\alpha = 1$ und sowohl a , b und $c \in \mathbb{Z}$, als auch p , q , $r \in \mathbb{Z}$ sind. Betrachtet man nun die Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ unter der Voraussetzung, dass p , q und r deren Lösungen sind, erhält man durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned}a &= p+q+r \\ b &= pq+pr+qr \\ c &= pqr.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Aus $c = pqr$ kann man schließen, dass sich das konstante Glied durch alle drei Nullstellen teilen lässt. Mit diesem Wissen ausgestattet ist es nun leicht eine Lösung zu ermitteln, man probiert lediglich alle möglichen Teiler von c aus. Anschließend spaltet man den Faktor $(x-p)$ mittels Polynomdivision ab und errechnet sodann die beiden anderen Nullstellen.

Leider funktioniert das Erraten ganzzahliger Lösungen nur, wenn der Koeffizient von x^3 gleich 1 und jener von allen anderen Gliedern ganzzahlig ist. Ist das nicht der Fall und sind α , a , b , c rational, so muss man die Gleichung vorher von Brüchen befreien bzw. etwaige Koeffizienten von x^3 eliminieren, was ich anhand eines Beispiels erläutern möchte:

$$6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0.\tag{2.8}$$

Da man hier bei der üblichen Vorgangsweise, nämlich die Gleichung durch 6 zu dividieren und x durch $y/6$ zu ersetzen, in weiterer Folge einen sehr hohen Wert für das konstante Glied bekommen würde, bedient man sich statt dessen der Substitution $x = 1/z$ und erhält

$$\frac{6}{z^3} - \frac{11}{z^2} + \frac{6}{z} - 1 = 0.\tag{2.9}$$

Multipliziert man nun mit z^3 und formt um, hat die neue Gleichung

$$z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0\tag{2.10}$$

eine mit geringem Aufwand lösbare Form.

Zur Veranschaulichung möchte ich eine Aufgabe aus der “Algebra” vorstellen [Euler 1959, 2. Teil, 1. Abschnitt, Kapitel 11]:

Aufgabe: Finde jene beiden Zahlen, für die gilt: Die Differenz der zwei Zahlen ist 12 und

das Produkt dieser Differenz mit der Summe ihrer Kuben ergibt 102 144.

Lösung:

$$\begin{array}{llll} \text{kleinere Zahl} & \dots & x^3 & \rightarrow x^3 \\ \text{größere Zahl} & \dots & x+12^3 & \rightarrow x^3 + 36x^2 + 432x + 1728, \end{array} \quad (2.11)$$

$$\begin{array}{rcl} 12(2x^3 + 36x^2 + 432x + 1728) & = & 102\,144 \quad | : 12 \\ 2x^3 + 36x^2 + 432x + 1728 & = & 8\,512 \quad | : 2 \\ x^3 + 18x^2 + 216x + 864 & = & 4\,256 \quad | - 4256 \\ x^3 + 18x^2 + 216x - 3392 & = & 0. \end{array} \quad (2.12)$$

Da das konstante Glied sehr groß ist, faktorisiert man es mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung:

$$\begin{array}{r|l} 3\,392 & 2 \\ 1\,696 & 2 \\ 848 & 2 \\ 424 & 2 \\ 212 & 2 \\ 106 & 2 \\ 53 & 53 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 3392 = 2^6 \cdot 53 \quad (2.13)$$

Man substituiert nun x geeignet durch $2y$ und dividiert die entstandene Gleichung durch 8:

$$\begin{array}{rcl} (2y)^3 + 18(2y)^2 + 216 \cdot 2y - 3\,392 & = & 0 \quad | : 8 \\ y^3 + 9y^2 + 54y - 424 & = & 0. \end{array} \quad (2.14)$$

Die Teiler des konstanten Gliedes haben sich daher auf ± 1 , ± 2 , ± 4 , ± 8 und ± 53 reduziert, von denen ± 1 und ± 2 aufgrund ihrer geringen Größe als Lösung sofort ausgeschlossen werden können. Probiert man $y = 4$ aus, erhält man schon eine wahre Aussage:

$$64 + 144 + 216 - 424 = 0. \quad (2.15)$$

Somit ist $y = 4$ bzw. nach Rücksubstitution $x = 8$ die reelle Lösung der Gleichung. Die beiden gesuchten Zahlen lauten also 8 und 20. (Die anderen beiden Lösungen sind wieder konjugiert komplex.)

Im weiteren behandelt Euler die Regel des Cardano [Euler 1959, 2. Teil, 1. Abschnitt, Kapitel 12]. Ausgangspunkt ist die kubische Gleichung $x^3 = fx + g$, wobei Euler annimmt, dass $f, g \in \mathbb{Z}$ sind, jedoch gilt das Ergebnis für beliebige reelle oder komplexe Koeffizienten.

Zur Herleitung der Cardano-Regel nimmt man an, dass die Lösung ein Binom ist: $x = a + b$. Es ist dann

$$x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = a^3 + b^3 + 3abx. \quad (2.16)$$

Von der Gleichung $x^3 = 3abx + a^3 + b^3$ kennt man also schon die Lösung: $x = a + b$.

Euler setzt nun im weiteren Verlauf $a^3 = p$ und $b^3 = q$, so dass die kubische Gleichung

$$x^3 = 3x\sqrt[3]{pq} + p + q \quad (2.17)$$

dann die Lösung $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$ hat. Euler vergleicht dies nun mit der Ausgangsgleichung $x^3 = fx + g$. Es ist daher $f = 3\sqrt[3]{pq}$ und $g = p + q$. Daraus folgt

$$\frac{1}{27}f^3 = pq \quad \text{und} \quad g = p + q. \quad (2.18)$$

p, q sind somit die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - gz + \frac{1}{27}f^3$. Daher ist

$$p = \frac{g + \sqrt{g^2 - \frac{4}{27}f^3}}{2} \quad \text{und} \quad q = \frac{g - \sqrt{g^2 - \frac{4}{27}f^3}}{2}. \quad (2.19)$$

Eine kubische Gleichung $x^3 = fx + g$ hat somit die Lösung

$$x = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{g^2 - \frac{4}{27}f^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{g^2 - \frac{4}{27}f^3}}{2}}. \quad (2.20)$$

Diese Lösungsformel heisst allgemein die Regel des Cardano.

Die Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung (2.5) lässt sich auf den eben behandelten Fall zurückführen. Da die Division durch eine Konstante $\neq 0$ an den Lösungen nichts ändert, kann man dabei annehmen, dass der Koeffizient von x^3 gleich 1 ist. Ausgangspunkt ist also – nach Umbenennung der restlichen Koeffizienten – die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (2.21)$$

Hierbei genügt es, den quadratischen Summanden fortzuschaffen. Dazu setzt man

$$y = x + \frac{1}{3}a \Rightarrow x = y - \frac{1}{3}a. \quad (2.22)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - ay^2 + \frac{1}{3}a^2y - \frac{1}{27}a^3 \\ a \ x^2 &= \quad + ay^2 - \frac{2}{3}a^2y + \frac{1}{9}a^3 \\ b \ x &= \quad + by - \frac{1}{3}ab \\ c &= \quad + c. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Gleichung (2.21) geht also über in

$$y^3 - \left(\frac{1}{3}a^2 - b\right)y + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0. \quad (2.24)$$

Dies entspricht gerade der zuvor behandelten Gleichung $x^3 = fx + g$, wenn man

$$f = \frac{1}{3}a^2 - b \quad \text{und} \quad g = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab - c \quad (2.25)$$

setzt. Errechnet man daraus den Wert von g gemäß Gleichung (2.20), so erhält man die Lösung x für die gegebene Gleichung (2.21) aus $x = y - \frac{1}{3}a$.

Auflösung der algebraischen Gleichungen vierten Grades

Im weiteren möchte ich mehrere Möglichkeiten der Auflösung von Gleichungen vierten Grades (unter anderem auch die Regel von Bombelli), die Euler in seiner “Algebra” diskutiert, vorstellen.

Unter einer Gleichung vierten Grades, die auch biquadratisch genannt wird, versteht man eine Gleichung von folgender allgemeiner Form

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0; \quad (2.26)$$

wieder kann ja der Koeffizient der höchsten Potenz von x als 1 angenommen werden. Zunächst behandelt Euler die reinen biquadratischen Gleichungen $x^4 = f$ [Euler 1959, 2. Teil, 1. Abschnitt, Kapitel 13]. Deren Lösungen sind

$$\begin{aligned} x_1 &= +\sqrt{+\sqrt{f}} \\ x_2 &= -\sqrt{+\sqrt{f}} \\ x_3 &= +\sqrt{-\sqrt{f}} \\ x_4 &= -\sqrt{-\sqrt{f}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Der nächste Schritt Eulers besteht in der Untersuchung jener Gleichungen, bei denen das zweite und das vierte Glied fehlt: $x^4 + fx^2 + g = 0$ und die wie quadratische Gleichungen gelöst werden können. Substituiert man nämlich x^2 durch y , erhält man $y^2 + fy + g = 0$ und somit

$$y = -\frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4} - g} = \frac{-f \pm \sqrt{f^2 - 4g}}{2}. \quad (2.28)$$

Für x ergeben sich daher die 4 Lösungen

$$\begin{aligned}
 x_1 &= +\sqrt{\frac{-f + \sqrt{f^2 - 4g}}{2}} \\
 x_2 &= +\sqrt{\frac{-f - \sqrt{f^2 - 4g}}{2}} \\
 x_3 &= -\sqrt{\frac{-f + \sqrt{f^2 - 4g}}{2}} \\
 x_4 &= -\sqrt{\frac{-f - \sqrt{f^2 - 4g}}{2}}.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Bevor sich Euler nun den zwei Möglichkeiten zur Lösung der allgemeinen biquadratischen Gleichung zuwendet, behandelt er zwei spezielle Fälle, da man aus ihnen Rückschlüsse auf allgemeine Regeln ziehen kann. Hat die gegebene Gleichung die Form

$$x^4 + max^3 + na^2x^2 + ma^3x + a^4 = 0, \tag{2.30}$$

so kann sie als Produkt der zwei quadratischen Faktoren

$$x^2 + pax + a^2 \quad \text{und} \quad x^2 + qax + a^2 \tag{2.31}$$

geschrieben werden. Rechnet man dies nämlich aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 &(x^2 + pax + a^2)(x^2 + qax + a^2) \\
 &= x^4 + pax^3 + a^2x^2 + qax^3 + pqa^2x^2 + qa^3x + a^2x^2 + pa^3x + a^4 \\
 &= x^4 + (p + q)ax^3 + (pq + 2)a^2x^2 + (p + q)a^3x + a^4
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit Gleichung (2.30) erhält man folgende Bedingungen:

$$(i) \quad p + q = m \quad \text{und} \quad (ii) \quad pq + 2 = n \Rightarrow pq = n - 2. \tag{2.33}$$

p, q sind also die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - mz + n - 2 = 0$. Hat man auf diese Weise p und q ermittelt, setzt man jeden der Faktoren in (2.31) einzeln Null und erhält die 4 Lösungen der Gleichung:

$$\begin{aligned}
 x^2 + pax + a^2 = 0 &\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{pa}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{p^2 - 4} \\
 x^2 + qax + a^2 = 0 &\Rightarrow x_{3,4} = -\frac{qa}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{q^2 - 4}.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Der zweite besondere Fall, der hier noch besprochen werden soll, unterscheidet sich vom ersten lediglich durch das Vorzeichen des linearen Gliedes, die biquadratische Gleichung hat also die Form

$$x^4 + max^3 + na^2x^2 - ma^3x + a^4 = 0, \tag{2.35}$$

Diese kann analog in ein Produkt umgeformt werden:

$$(x^2 + pax - a^2)(x^2 + qax - a^2) = 0, \quad (2.36)$$

wobei p, q diesmal die Lösungen der Gleichung $z^2 - mz + n + 2 = 0$ sind. Analog zum vorigen Fall erhält man als Lösungen der gegebenen Gleichung

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{pa}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{p^2 + 4} \\ x_{3,4} &= -\frac{qa}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{q^2 + 4}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Nun geht Euler zu den allgemeinen biquadratischen Gleichungen über. Dabei behandelt er die sogenannte Regel des Bombelli [Euler 1959, 2. Teil, 1. Abschnitt, Kapitel 14], die die gegebene Gleichung auf eine 3. Grades zurückführt. Man nimmt dabei an, dass die allgemeine biquadratische Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (2.38)$$

einer Gleichung

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax + p\right)^2 - (qx + r)^2 = 0 \quad (2.39)$$

entspricht. Für p, q und r müssen nun Ausdrücke ermittelt werden, die der gegebenen Gleichung genügen. Dazu quadriert man die Gleichung (2.39) aus

$$x^4 + \frac{1}{4}a^2x^2 + p^2 + ax^3 + 2px^2 + apx - q^2x^2 - 2qrx - r^2 = 0 \quad (2.40)$$

und vergleicht die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} x^2 : \quad \frac{1}{4}a^2 + 2p - q^2 &= b \quad \Rightarrow \quad q^2 = \frac{1}{4}a^2 + 2p - b \\ x : \quad ap - 2qr &= c \quad \Rightarrow \quad 2qr = ap - c \\ x^0 : \quad p^2 - r^2 &= d \quad \Rightarrow \quad r^2 = p^2 - d. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich nun p, q und r ermitteln. Dazu berechnet man $4q^2r^2$ auf 2 Arten:

$$4q^2r^2 = \left(\frac{1}{4}a^2 + 2p - b\right)(p^2 - d) = (ap - c)^2. \quad (2.42)$$

Ausrechnen ergibt

$$\begin{aligned} &8p^3 + (a^2 - 4b)p^2 - 8dp - (a^2 - 4b)d = a^2p^2 - 2acp + c^2 \\ \Rightarrow &8p^3 - 4bp^2 + (2ac - 8d)p - a^2d + 4bd - c^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Somit erhält man eine kubische Gleichung in p , die auf die zuvor beschriebene Weise gelöst werden kann, da ja die Werte für a, b, c, d bekannt sind. Kennt man also p , so folgen die Werte für q und r aus der umgeformten ersten bzw. zweiten Gleichung:

$$q = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2p - b} \quad \text{bzw.} \quad r = \frac{ap - c}{2q} . \quad (2.44)$$

Die Kenntnis von p, q, r befähigt nun zur Lösung der mit der gegebenen allgemeinen biquadratischen Gleichung identischen Gleichung

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax + p\right)^2 - (qx + r)^2 = 0 . \quad (2.45)$$

Nachdem man das 2. Glied auf die rechte Seite gebracht und die Wurzel gezogen hat, erhält man

$$x^2 + \frac{1}{2}ax + p = qx + r \quad \text{oder} \quad x^2 + \frac{1}{2}ax + p = -qx - r . \quad (2.46)$$

Daraus folgen 2 quadratische Gleichungen mit je 2 Lösungen, nämlich

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{1}{2}a - q\right)x + p - r &= 0 \quad \text{und} \\ x^2 + \left(\frac{1}{2}a + q\right)x + p + r &= 0 . \end{aligned} \quad (2.47)$$

Außer der Regel des Bombelli gibt Euler noch eine andere Auflösung von biquadratischen Gleichungen an [Euler 1959, 2. Teil, 1. Abschnitt, Kapitel 15]. Dazu geht man von der Annahme aus, dass die Lösung die Form

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} \quad (2.48)$$

hat, wobei p, q und r die 3 Lösungen der kubischen Gleichung

$$z^3 - fz^2 + gz - h = 0 \quad (2.49)$$

sind. Da somit

$$z^3 - fz^2 + gz - h = (z - p)(z - q)(z - r) \quad (2.50)$$

ist, folgt durch Koeffizientenvergleich, dass

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad p + q + r &= f , \\ \text{(ii)} \quad pq + pr + qr &= g \quad \text{sowie} \\ \text{(iii)} \quad pqr &= h \end{aligned} \quad (2.51)$$

ist. Man quadriert nun die Lösung der biquadratischen Gleichung

$$x^2 = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr} . \quad (2.52)$$

Aufgrund der Relation (2.51i) folgt nach abermaligem Quadrieren

$$\begin{aligned}(x^2 - f)^2 &= (2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr})^2 \\ x^4 - 2fx^2 + f^2 &= 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{p^2qr} + 8\sqrt{pq^2r} + 8\sqrt{pqr^2} .\end{aligned}\tag{2.53}$$

Verwendet man hier Gleichung (2.51ii), bekommt man

$$x^4 - 2fx^2 + f^2 - 4g = 8\sqrt{pqr}(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}) .\tag{2.54}$$

Aus Gleichung (2.48) und Gleichung (2.51iii) folgt schließlich

$$\begin{aligned}x^4 - 2fx^2 + f^2 - 4g &= 8\sqrt{h}x \\ \Rightarrow x^4 - 2fx^2 - 8\sqrt{h}x + f^2 - 4g &= 0 .\end{aligned}\tag{2.55}$$

Wir haben also auf diesem Weg diejenige biquadratische Gleichung erhalten, deren Lösung $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ ist, wobei p , q und r die Lösungen der kubischen Gleichung $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$ waren. Obwohl dieser Gleichung 4. Grades das kubische Glied fehlt, kann man sie als “allgemein” betrachten. Ganz analog wie im kubischen Fall lässt sich nämlich jede beliebige Gleichung 4. Grades in eine mit fehlendem 2. Glied transformieren.

Will man somit die biquadratische Gleichung

$$x^4 - ax^2 - bx - c = 0\tag{2.56}$$

lösen, so führt man einen Koeffizientenvergleich mit der obigen Gleichung (2.55) durch und erhält

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad 2f &= a \Rightarrow f = \frac{a}{2} \\ \text{(ii)} \quad 8\sqrt{h} &= b \Rightarrow h = \frac{b^2}{64} \\ \text{(iii)} \quad f^2 - 4g &= -c \Rightarrow \frac{a^2}{4} - 4g = -c \Rightarrow g = \frac{a^2}{16} + \frac{c}{4} .\end{aligned}\tag{2.57}$$

Aus den Werten für f , g und h bildet man die kubische Gleichung

$$z^3 - fz^2 + gz - h = 0 ,\tag{2.58}$$

deren 3 Lösungen $z = p$, $z = q$ und $z = r$ sind. Hieraus resultiert eine Lösung

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}\tag{2.59}$$

der gegebenen Gleichung (2.56). Durch die unterschiedlichen möglichen Vorzeichen hat man anscheinend sogar 8 verschiedene Lösungen gefunden. Von ihnen sind allerdings jeweils immer nur 4 gültig. Man weiss, dass

$$\sqrt{pqr} = \sqrt{h} = \frac{1}{8}b\tag{2.60}$$

sein muss. Für positives b ist daher auch das Produkt der 3 Glieder positiv und es folgen diese 4 Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ x_2 &= \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} \\ x_3 &= -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} \\ x_4 &= -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} . \end{aligned} \tag{2.61}$$

Für negatives b ergeben sich dagegen die Werte

$$\begin{aligned} x_5 &= \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} \\ x_6 &= \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ x_7 &= -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ x_8 &= -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} . \end{aligned} \tag{2.62}$$

Euler hat auch wiederholt versucht, Gleichungen 5. und höheren Grades zu lösen. Abgesehen von Spezialfällen (z.B. bei Vorhandensein einer Rationalwurzel) sind aber alle Versuche gescheitert. Erst durch die Arbeiten von P. Ruffini, N.H. Abel und E. Galois offenbarte sich der tiefere Grund dafür: wie diese Mathematiker gezeigt haben, gibt es nämlich gar keine Lösungsformeln für allgemeine Gleichungen höheren als 4. Grades.

2.1.3 Versuch des Beweises des Fundamentalsatzes der Algebra

Unter dem Fundamentalsatz der Algebra versteht man die Tatsache, dass jede algebraische Gleichung n -ten Grades über dem Bereich der komplexen Zahlen immer genau n (nicht notwendigerweise voneinander verschiedene) Lösungen besitzt. Fasst man diese Aussage als Faktorisierungseigenschaft für das zugehörige Polynom auf, bedeutet das insbesondere, dass jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit reellen Koeffizienten als Produkt von reellen Faktoren ersten und zweiten Grades angesehen werden kann. Anders ausgedrückt: jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten kann in ein Produkt von n linearen Faktoren mit komplexen Koeffizienten zerlegt werden.

Zur Veranschaulichung sei als Beispiel ein Polynoms 5. Grades angeführt:

$$3x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 20x^2 - 8x = x(3x - 1)(x + 2)(x^2 + 4) . \tag{2.63}$$

Dabei ist der quadratische Faktor über den reellen Zahlen nicht mehr weiter zerlegbar. Lässt man auch den Bereich der komplexen Zahlen zu, kann man weiter aufspalten und erhält:

$$3x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 20x^2 - 8x = x(3x - 1)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i) . \tag{2.64}$$

Als die Mathematiker des 17. Jahrhunderts den Fundamentalsatz, dass eine Gleichung

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0, \quad (2.65)$$

vom Grad n mit reellen Koeffizienten, n Wurzeln (also Lösungen) hat, formulierten, war noch unklar, ob die Lösungen stets die Form $a + bi$ hatten. Viele Mathematiker glaubten damals an die Existenz imaginärer Größen anderer Art. Leonhard Euler dagegen behauptete als erster im Jahr 1743, dass jedes algebraische Polynom vom Grad n mit reellen Koeffizienten in reelle lineare oder quadratische Faktoren faktorisiert werden kann. Das heisst insbesondere, dass alle Lösungen von der Form $a + bi$ sind [Dickson u. Khwarizmi 1970, S.743f.].

Schon im Dezember 1742 hatte Euler an Christian Goldbach in Petersburg geschrieben, dass er sich in einem Briefwechsel mit Nikolaus I Bernoulli mit der Integration von Ausdrücken der Gestalt

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots} dx \quad (2.66)$$

beschäftigte. Wichtig wäre dabei die Zerlegung des Nenners in Faktoren. Öfters werden einige von diesen Faktoren imaginär. Seit C.F. Gauß nennt man diese Zahlen “komplex”. Da alle imaginären Faktoren als Teil eines reellen Ganzen erschienen, seien sie laut Euler so beschaffen, dass das Produkt von zweien wieder reell ist [Juskevic u. Winter 1965, S.131].

Nimmt man den Fundamentalsatz der Algebra als bewiesen an, folgt daraus, dass für jede rationale Funktion $P(x)/Q(x)$, wo P und Q reelle Polynome sind, das unbestimmte Integral $\int (P(x)/Q(x)) dx$ relativ einfach ermittelt werden kann. Zunächst muss man eine Polynomdivision ausführen, um den ursprünglichen Ausdruck in einen solchen überzuführen, bei dem der Grad des Zählers niedriger ist als der des Nenners. Dann betrachtet man $Q(x)$ als Produkt seiner reellen linearen und/oder quadratischen Faktoren und spaltet das Integral in Komponenten der Form

$$\int \frac{A}{(ax + b)^n} dx \quad \text{und/oder} \quad \int \frac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^n} dx \quad (2.67)$$

auf. Schließlich ermittelt man diese unbestimmten Integrale mit Hilfe von natürlichem Logarithmus, Arcustangensfunktion oder trigonometrischen Substitutionen. Euler nannte dies “eine wunderschöne und wichtige Konsequenz” des Fundamentaltheorems. Obwohl dieser Satz keinen Algorithmus zur Auffindung der Faktoren des Nenners beinhaltet, ist durch die Garantie der Existenz einer solchen Zerlegung auch die Existenz des unbestimmten Integrals für jede rationale Funktion gewährleistet [Dunham 1999, S.110f.].

Obwohl Leonhard Euler in seiner 1749 veröffentlichten Arbeit “Recherches sur les racines imaginaires des équations” nicht erfolgreich in seinem Unterfangen war, das Fundamentaltheorem der Algebra zu beweisen, möchte ich trotzdem auf einige seiner Ideen eingehen

[Dunham 1999, S.111-118]. Statt gleich das allgemeine Polynom zu behandeln, begann er zunächst mit einfachen Fällen. Als erstes untersuchte er das biquadratische Polynom anhand folgendem Satz:

Jedes biquadratische Polynom der Form $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, wo A, B, C, D reell sind, kann in zwei reelle Faktoren 2. Grades zerlegt werden

Den Beweis eröffnet Euler mit der Substitution $x = y - \frac{A}{4}$ – er eliminiert so das kubische Glied. Es ist also hinreichend $x^4 + Bx^2 + Cx + D$ mit reellen B, C, D zu betrachten. An dieser Stelle ergeben sich 2 Möglichkeiten: der Koeffizient des linearen Gliedes kann entweder gleich oder ungleich 0 sein.

Fall 1: $C = 0$

Hier hat man ein biquadratisches Polynom $x^4 + Bx^2 + D$, das quadratisch in x^2 ist und wiederum 2 Unterscheidungen notwendig macht.

Fall 1.1: $B^2 - 4D \geq 0$

In diesem Fall erhält man die folgende Zerlegung in 2 reelle Faktoren 2. Grades:

$$x^4 + Bx^2 + D = \left(x^2 + \frac{B - \sqrt{B^2 - 4D}}{2}\right) \left(x^2 + \frac{B + \sqrt{B^2 - 4D}}{2}\right) . \quad (2.68)$$

Ein Beispiel dafür ist $x^4 + x^2 - 12 = (x^2 - 3)(x^2 + 4)$.

Fall 1.2: $B^2 - 4D < 0$

In diesem Fall kann das Polynom als die Differenz von Quadraten aufgefasst und folgendermaßen faktorisiert werden:

$$\begin{aligned} x^4 + Bx^2 + D &= (x^2 + \sqrt{D})^2 - (x\sqrt{2\sqrt{D}} - B)^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{D} - x\sqrt{2\sqrt{D}} - B) (x^2 + \sqrt{D} + x\sqrt{2\sqrt{D}} - B) . \end{aligned} \quad (2.69)$$

Dabei sind alle Wurzelausdrücke reell; denn die Bedingung $B^2 - 4D < 0$ impliziert $4D > B^2 \geq 0$ und daher ist $\sqrt{D} \in \mathbb{R}$. Ebenso garantiert $4D > B^2$, dass $2\sqrt{D} > |B| \geq B$ und deshalb ist auch $\sqrt{2\sqrt{D}} - B$ reell. Betrachtet man das Beispiel $x^4 + x^2 + 4$, ist $B^2 - 4D = -15 < 0$ und man erhält

$$x^4 + x^2 + 4 = (x^2 - x\sqrt{3} + 2)(x^2 + x\sqrt{3} + 2) . \quad (2.70)$$

Der 2. mögliche Fall für den Koeffizienten des linearen Gliedes ist erheblich komplizierter.

Fall 2: $C \neq 0$

Euler merkt hier an, dass jede Zerlegung des reduzierten Polynoms 4. Grades in reelle Quadrate die Form

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = (x^2 + ux + \alpha)(x^2 - ux + \beta) , \quad (2.71)$$

wobei u, α, β reell sind, haben muss. Die linearen Terme müssen nämlich einander entgegengesetzt sein, damit das kubische Glied Null wird. Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der rechten Seite der Gleichung (2.71) folgt

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = x^4 + (\alpha + \beta - u^2)x^2 + (\beta u - \alpha u)x + \alpha\beta . \quad (2.72)$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert folgende 3 Bedingungen

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad B &= \alpha + \beta - u^2 \\ \text{(ii)} \quad C &= \beta u - \alpha u = (\beta - \alpha)u \\ \text{(iii)} \quad D &= \alpha\beta . \end{aligned} \quad (2.73)$$

Hierbei sind B, C, D die bekannten Koeffizienten des Polynoms 4. Grades, während u, α, β die unbekannten reellen Zahlen sind, deren Existenz Euler erst begründen muss. Aus den Bedingungen (2.73i) und (2.73ii) schließt er:

$$\alpha + \beta = B + u^2 \quad \text{und} \quad \beta - \alpha = \frac{C}{u} . \quad (2.74)$$

Dabei ist $u \neq 0$, da $0 \neq C = (\beta - \alpha)u$ ist. Durch Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen erhält Euler

$$2\beta = B + u^2 + \frac{C}{u} \quad \text{und} \quad 2\alpha = B + u^2 - \frac{C}{u} . \quad (2.75)$$

Setzt man $D = \alpha\beta$ in Beziehung mit diesen Resultaten, folgt

$$\begin{aligned} 4D = 4\alpha\beta = (2\alpha)(2\beta) &= \left(B + u^2 + \frac{C}{u}\right) \left(B + u^2 - \frac{C}{u}\right) \\ &= u^4 + 2Bu^2 + B^2 - \frac{C^2}{u^2} . \end{aligned} \quad (2.76)$$

Die Multiplikation mit u^2 bringt Euler schließlich auf

$$u^6 + 2Bu^4 + (B^2 - 4D)u^2 - C^2 = 0 . \quad (2.77)$$

Auf den ersten Blick erscheint es, als wäre alles noch komplizierter geworden – statt einer Gleichung 4. Grades in x liegt nun eine Gleichung 6. Grades in u vor. Allerdings ist diese kubisch in u^2 und da jede reelle Gleichung 3. Grades eine reelle Lösung

besitzt, kann man folgern, dass es einen reellen Wert für u^2 geben muss, der die Gleichung 6. Grades erfüllt. Das garantiert aber noch nicht die Existenz eines reellen Wertes für u , was ja Eulers eigentliches Ziel ist.

Euler untersucht nun die Gleichung 6. Grades genauer und gibt folgende Eigenschaften des zugehörigen Polynoms an:

- (i) B, C, D sind gegeben, die einzige Unbekannte ist u ;
- (ii) B, C, D sind reell;
- (iii) der Grad des Polynoms ist gerade, daher ist der Graph symmetrisch zur Ordinate;
- (iv) das konstante Glied des Polynoms 6. Grades ist $-C^2 < 0$.

Der Graph des Polynoms strebt gegen $+\infty$ für $u \rightarrow \pm\infty$. Aufgrund des Zwischenwertsatzes und der Eigenschaft (iii) existiert somit eine reelle Zahl $u_0 > 0$, so dass u_0 und $-u_0$ dem Polynom 6. Grades genügen. Damit ist die reelle Wurzel gefunden.

Eingesetzt in Gleichung (2.75) erhält Euler die Werte für α und β :

$$\beta_0 = \frac{1}{2} \left(B + u_0^2 + \frac{C}{u_0} \right) \quad \text{und} \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \left(B + u_0^2 - \frac{C}{u_0} \right). \quad (2.78)$$

Zusammenfassend kann man sagen, dass Euler für den Fall $C \neq 0$ die Existenz von reellen Zahlen u_0 , α_0 und β_0 exakt begründet hat, sodass

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = (x^2 + u_0x + \alpha_0)(x^2 - u_0x + \beta_0) \quad (2.79)$$

gilt. Dadurch hat er bewiesen, dass jedes reduzierte biquadratische Polynom mit reellen Koeffizienten – und als Erweiterung jedes biquadratische Polynom überhaupt – in 2 reelle quadratische Faktoren zerlegt werden kann, egal ob $C = 0$ oder nicht.

Der Fall einer Gleichung 5. Grades ist einfach zu behandeln: Ein ungeradzahliges Polynom $P(x)$ hat aufgrund des Zwischenwertsatzes zumindest einen reellen Schnittpunkt mit der x -Achse; z. B. bei $x = a$. Deshalb ist $P(x) = (x - a)Q(x)$, wobei $Q(x)$ ein Polynom 4. Grades ist, das aufgrund des vorigen Ergebnisses in 2 reelle quadratische Faktoren zerlegt werden kann.

An dieser Stelle entscheidet sich Euler für eine neue Strategie, um das Problem zu vereinfachen. Wenn er eine Zerlegung für reelle Polynome vom Grad 4, 8, 16, 32 und allgemein 2^n finden könnte, dann wäre das für jedes reelle Polynom möglich. Angenommen, man möchte das Polynom $x^{12} - 3x^9 + 52x^8 + 3x^3 - 2x + 17$ als Produkt von reellen linearen und/oder quadratischen Faktoren anschreiben, dann würde man mit x^4 multiplizieren und

$x^{16} - 3x^{13} + 52x^{12} + 3x^7 - 2x^5 + 17x^4$ erhalten. Vorausgesetzt, die Zerlegung wäre für ein Polynom 16. Grades bewiesen, wüsste Euler nun, dass dieses Polynom so eine Faktorisierung besitzt, wobei auch der Linearfaktor x 4-fach vorkommt. Lässt man diesen beiseite, bleiben die reellen linearen und/oder quadratischen Faktoren des ursprünglichen Polynoms 12. Grades übrig.

Eulers nächstes Ziel besteht also darin, zu zeigen, dass jede reduzierte Gleichung 8. Grades in zwei reelle Faktoren 4. Grades zerlegt werden kann:

$$x^8 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H = (x^4 + ux^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)(x^4 - ux^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \varphi) . \quad (2.80)$$

Jedoch erwies sich dieses Unterfangen als so kompliziert, dass ein Beweis scheiterte. Daher wendet sich Euler nun wieder der um das kubische Glied reduzierten Gleichung 4. Grades

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = (x^2 + ux + \alpha)(x^2 - ux + \beta) \quad (2.81)$$

zu und schlägt eine gänzlich andere Linie der Argumentation ein, von der er glaubt, dass sie erfolgreich auf Gleichungen 8. und noch höheren Grades ausgedehnt werden kann. Angenommen, die Gleichung hat die komplexen Lösungen p , q , r und s , dann gilt:

$$(x^2 + ux + \alpha)(x^2 - ux + \beta) = (x - p)(x - q)(x - r)(x - s) . \quad (2.82)$$

Aus dieser Zerlegung zieht Euler drei Folgerungen.

- Multipliziert man erstens die rechte Seite aus, erhält man $-(p + q + r + s)$ als Koeffizienten von x^3 . Da die Gleichung reduziert ist, folgt dass $p + q + r + s = 0$ sein muss.
- Zweitens muss der quadratische Faktor $(x^2 - ux + \beta)$ als Produkt von zwei der vier Linearfaktoren auftreten. Das heisst, dass $(x^2 - ux + \beta)$ sich aus $(x - p)(x - r) = x^2 - (p + r)x + pr$ oder $(x - q)(x - r) = x^2 - (q + r)x + qr$ oder auch anderen Kombinationen zusammensetzen könnte. Im ersten Fall wäre $u = p + r$, wohingegen im zweiten Fall $u = q + r$ wäre. u kann also jeden von $\binom{4}{2} = 6$ Werten annehmen:

$$\begin{aligned} R_1 &= p + q , & R_2 &= p + r , & R_3 &= p + s , \\ R_4 &= r + s , & R_5 &= q + s , & R_6 &= q + r . \end{aligned} \quad (2.83)$$

Da u eine Unbekannte mit sechs möglichen Werten ist, muss sie durch ein Polynom 6. Grades bestimmt werden: $(u - R_1)(u - R_2)(u - R_3)(u - R_4)(u - R_5)(u - R_6)$. Dieses stimmt mit dem Polynom 6. Grades in u überein, das Euler in Gleichung (2.77) gefunden hat.

- Wegen $p + q + r + s = 0$ gilt zusätzlich, dass $R_4 = -R_1$, $R_5 = -R_2$ und $R_6 = -R_3$ ist und das Polynom 6. Grades wird zu:

$$(u - R_1)(u + R_1)(u - R_2)(u + R_2)(u - R_3)(u + R_3) = (u^2 - R_1^2)(u^2 - R_2^2)(u^2 - R_3^2). \quad (2.84)$$

Das konstante Glied und daher auch der Schnittpunkt des Polynoms mit der Ordinate ist $-(R_1 R_2 R_3)^2$ und daher eine negative reelle Zahl, was ebenfalls mit dem Schluss aus Gleichung (2.77) übereinstimmt.

Euler kann also die gleichen Schlüsse wie zuvor ziehen, jedoch ohne explizit die Gleichung, die u bestimmt, aufzustellen. Der Vorteil dieses zweiten Zugangs zum biquadratischen Fall besteht darin, dass er ohne Rechenaufwand auch auf ein reduziertes Polynom 8. Grades angewendet werden kann. Für jede Kombination von vier der acht Linearfaktoren, in die das Polynom 8. Grades zerlegt wird, bekommt man einen Wert von u . Dann würde u Nullstelle eines Polynoms $\binom{8}{4} = 70$. Grades sein, wobei sich wieder ergibt, dass es eine positive reelle Lösung besitzt. Ähnlich argumentiert Euler für den Fall eines Polynoms 16. Grades – jedoch wäre die Gleichung zur Bestimmung von u hier schon $\binom{16}{8} = 12\,870$. Grades.

Von hier wäre es ein kleiner, analoger Schritt zum allgemeinen Fall, dass jedes reelle Polynom vom Grad 2^n in 2 reelle Polynome vom Grad 2^{n-1} zerlegt werden kann und der Beweis des Fundamentalsatzes wäre erbracht gewesen. Jedoch beinhaltet die Beweisführung logische Lücken: Wieso kann Euler behaupten, dass das Polynom 4. Grades 4 Lösungen, und das 8. Grades 8 Lösungen hat? Auch die Art der angenommenen Lösungen (reell, komplex oder überhaupt unspezifisch) und sich daraus ergebende Rechenregeln werden nicht berücksichtigt [Dunham 1999, S.111-118]. Nach heutiger Sichtweise wäre Eulers Beweis korrekt, wenn er die Existenz der Lösungen in einem Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$ vorweggenommen hätte [van der Waerden 1985, S.178]

Neben Euler (1751) bemühte sich auch D'Alembert (1748) einen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra zu finden. Keiner von beiden konnte jedoch eine lückenlose Argumentation liefern. Eulers großer Verdienst, der während des Ringens um einen Beweis zustande kam, war die 1. strenge Formulierung des Fundamentalsatzes, nämlich dass ein Polynom n -ten Grades über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ als Produkt von n komplexen Linearfaktoren dargestellt werden kann:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n), \quad (2.85)$$

wobei die x_n die Nullstellen des Polynoms sind [Fellmann 1983, S.398]. Der ausserordentlich wichtige Satz konnte erst im Jahr 1799 von Gauß, der sehr wohl die Vorarbeit von Euler und D'Alembert würdigte, in seiner Dissertation bewiesen werden [Wußing 1979, S.217].

2.2 Zahlentheorie

Leonhard Eulers Begeisterung für Zahlentheorie wird meistens auf seinen Briefwechsel mit Christian Goldbach, den er 1727 an der Petersburger Akademie kennenlernte und der bald darauf nach Moskau ging, zurückgeführt. Goldbach entzündete bei dem zuerst weniger interessierten Euler durch den Hinweis auf den unbewiesenen Charakter der sogenannten Fermatschen Zahlen (auf die später noch genauer Bezug genommen wird) in einem Brief vom 1. 12. 1729 die Leidenschaft für diesen Bereich der Mathematik. Insgesamt vier Bände der “Opera Omnia” sind der Zahlentheorie gewidmet und sie beinhalten Ergebnisse, die heute zu den Klassikern dieser Disziplin gehören. Auch wenn die Entdeckungen auf dem Gebiet der Zahlentheorie Eulers einzige mathematische Leistungen gewesen wären (was ja keineswegs der Fall ist), würden ihm allein diese einen dauerhaften Platz in den Annalen der Mathematik garantieren [Dunham 1999, S.7].

2.2.1 Kriterien für Primzahlen

Dieses Kapitel beschäftigt sich einerseits mit den Beweisen bzw. Widerlegungen Eulers von Fermats Vermutungen bezüglich Primzahlen. Zuvor sollen jedoch zwei andere Beweise Eulers behandelt werden. Dabei geht es zum einen um die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen, zum anderen um die Charakterisierung der geraden vollkommenen Zahlen.

Schon Euklid hat zwei Jahrtausende vor Euler bewiesen, dass die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen unendlich ist. Bemerkenswert an Eulers Beweis sind jedoch die verwendeten Mittel, die zum Ziel führen. Den Ausgangspunkt bildet die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \quad \text{mit } p \in \mathbb{P}. \quad (2.86)$$

Nun läßt Euler p die Menge $\mathbb{P}$ durchlaufen und erhält mittels Umformung die rein formale Identität

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \quad (2.87)$$

Aus der Divergenz der harmonischen Reihe schließt Euler, dass $\mathbb{P}$ nicht endlich sein kann. Darüber hinaus folgt sogar die Divergenz von $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ aus jener des obigen Produkts [Reinhardt u. Soeder 1994a, S.127].

Auch schon von Euklid wurde ein Theorem über vollkommene Zahlen bewiesen, nämlich: Wenn $2^k - 1$ eine Primzahl und $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$ ist, dann ist N eine vollkommene Zahl. Dabei versteht man unter einer vollkommenen Zahl eine natürliche Zahl, die gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Das trifft beispielsweise auf die Zahl 6 ($1+2+3=6$) und

die Zahl 28 ($1+2+4+7+14=28$) zu. Mit diesem Theorem hatte Euklid eine hinreichende Bedingung für eine vollkommene Zahl ermittelt. So erhält man z.B. für $k = 2$ die Primzahl $3 = 2^2 - 1$ und somit ist $N = 6$ vollkommen. Bei Euler taucht der Gegenstand der vollkommenen Zahlen als Nebenprodukt in der inhaltsreichen Arbeit “De numeris amicabilebus” auf. Zwei Zahlen heißen dabei befreundet, wenn die Summe der echten Teiler der einen die andere Zahl ergibt und umgekehrt. Vor Euler waren nur drei solcher Zahlenpaare bekannt, das kleinste ist 220 und 284. Euler entdeckte zusätzlich weitere 59 davon. Im Gegensatz zu Euklid, der die echten Teiler einer Zahl summierte, betrachtete er die Summe $\sigma(n)$ aller Teiler von n . Diesbezüglich zeigt Euler unter anderem folgende Eigenschaften:

1. p ist eine Primzahl $\Leftrightarrow \sigma(p) = p + 1$,
2. N ist vollkommen $\Leftrightarrow \sigma(N) = 2N$,
3. p ist eine Primzahl $\Rightarrow \sigma(p^r) = \frac{p^{r+1} - 1}{p - 1}$,
4. a und b sind relativ prim $\Rightarrow \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$,
5. m und n sind befreundet $\Rightarrow \sigma(m) = m + n = \sigma(n)$.

Mittels der Eigenschaften 3 und 4 kann man sofort die Teilersumme einer beliebigen natürlichen Zahl mit bekannter Primfaktorenzerlegung bestimmen. Beispielsweise gilt $\sigma(4800) = \sigma(2^6 \cdot 3 \cdot 5^2) = \sigma(2^6)\sigma(3)\sigma(5^2) = 127 \cdot 4 \cdot 31 = 15\,748$.

Ausgestattet mit diesem elementaren, aber wirkungsvollen Werkzeug kehrt Euler nun zu Euklids Theorem über vollkommene Zahlen zurück und zeigt, dass dessen hinreichende Bedingung bei geraden Zahlen auch notwendig ist. Euler beweist also folgenden Satz:

Wenn N eine gerade vollkommene Zahl ist, dann gilt $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$, wobei $2^k - 1$ eine Primzahl ist.

Zum Beweis schreibt man N in der Form $2^{k-1}b$ mit ungeradem b . Da N gerade ist, muss $k > 1$ sein. Da N vollkommen ist, gilt

$$\sigma(N) = 2N = 2(2^{k-1}b) = 2^k b . \quad (2.88)$$

Andererseits folgt aufgrund der Eigenschaften 3 und 5

$$\sigma(N) = \sigma(2^{k-1}b) = \sigma(2^{k-1})\sigma(b) = (2^k - 1)\sigma(b) , \quad (2.89)$$

weil 2^{k-1} und b relativ prim sind. Setzt man diese Ausdrücke für $\sigma(N)$ gleich, ergibt sich $2^k b = (2^k - 1)\sigma(b)$, also

$$\frac{2^k}{2^k - 1} = \frac{\sigma(b)}{b} . \quad (2.90)$$

Da $2^k - 1$ und 2^k relativ prim sind, folgt für $c \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & b = c(2^k - 1) \quad \text{und somit} \\ \text{(ii)} \quad & \sigma(b) = c2^k. \end{aligned} \tag{2.91}$$

Euler betrachtet nun zwei Fälle betreffend dem Wert von c :

Fall 1: Annahme $c > 1$

Wegen Gleichung (2.91i) ist jede der ganzen Zahlen 1 , b , c und $2^k - 1$ ein Teiler von b . Euler zeigt nun, dass sie sogar vier verschiedene Teiler von b sind.

- $1 \neq b$, sonst wäre $N = 2^{k-1}b = 2^{k-1}$, was unmöglich ist, da eine Potenz von 2 nicht vollkommen sein kann (Eigenschaft 3).
- $1 \neq c$, laut Voraussetzung.
- $1 \neq 2^k - 1$, andernfalls wäre $2^k = 2$ und daher $N = 2^{k-1}b = b$, also ungerade, im Widerspruch zur Voraussetzung.
- $b \neq c$, wäre nämlich $b = c$ so folgte aus Gleichung (2.91i): $b = c(2^k - 1) = b(2^k - 1)$ und daher $1 = 2^k - 1$, was wieder zum vorherigen Punkt führen würde.
- $b \neq 2^k - 1$, ansonsten wäre laut Gleichung (2.91i) $b = c(2^k - 1) = cb$, was $c = 1$ impliziert, was erneut der Voraussetzung von Fall 1 widerspricht.
- $c \neq 2^k - 1$, wäre nämlich $c = 2^k - 1$, würde Gleichung (2.91i) $b = c(2^k - 1) = c^2$ liefern. Aufgrund dessen hat b mindestens die drei Teiler 1 , c und c^2 , die wegen $c > 1$ alle verschieden sind. Somit muss $\sigma(b)$ – die Summe aller Teiler von b – zumindest so groß wie $1 + c + c^2$ sein. Andererseits folgt aus Gleichung (2.91ii) $\sigma(b) = c2^k = c[(2^k - 1) + 1] = c[c + 1] = c^2 + c < c^2 + c + 1$, ein Widerspruch.

Somit sind die Zahlen 1 , b , c und $2^k - 1$ vier verschiedene Teiler von b . Daher tritt jede Zahl als Summand in der Berechnung von $\sigma(b)$ auf. Deswegen folgt aus den Gleichungen (2.91i) und (2.91ii) $\sigma(b) \geq 1 + b + c + (2^k - 1) = c(2^k - 1) + c + 2^k = c2^k + 2^k > \sigma(b)$, ein Widerspruch, so dass Fall 1 nicht eintreten kann. Es bleibt

Fall 2: Annahme $c = 1$

Aufgrund von Gleichung (2.91i) folgt $b = 2^k - 1$ und aus Gleichung (2.91ii) $\sigma(b) = 2^k = b + 1$. Da $\sigma(b) = b + 1$ ist, impliziert Eigenschaft 1, dass b eine Primzahl ist, was zu beweisen war.

Um dieses Theorem über die vollkommenen Zahlen überhaupt nutzen zu können, muss man jedoch Primzahlen der Form $2^k - 1$ finden, was sich als schwieriges Unterfangen herausstellte. Bis $k < 100\,000$ gibt es nämlich nur 28 dieser sogenannten Mersenneschen Primzahlen [Reinhardt u. Soeder 1994a, S.127]. Euler selbst setzte sich intensiv mit der

Suche dieser Art von Zahlen auseinander und behauptete im Jahr 1772 in einem Brief an Daniel Bernoulli $2^{31} - 1 \in \mathbb{P}$ verifiziert zu haben [Dunham 1999, S.4].

Auch mit einem von der Darstellungsweise her ähnlichen Problem beschäftigte sich Euler. Im Zuge seiner zahlentheoretischen Untersuchungen kam Fermat zu der Vermutung, dass die heute unter dem Namen “Fermatsche Zahlen” bekannten Zahlen $F_k := 2^{2^k} + 1$ (mit $k \in \mathbb{N}$), stets prim seien. Für $k = 0, 1, 2, 3, 4$ erhält man tatsächlich Primzahlen: 3, 5, 17, 257, 65537. Jedoch konnte Euler bereits 1732 Fermats Behauptung für den Fall $k = 5$ falsifizieren. $F_5 = 4\,294\,967\,297$, lässt sich nämlich als Produkt $641 \cdot 6\,700\,417$ darstellen. Bis zum heutigen Tag konnte keine weitere Primzahl, die über F_4 hinausgeht, gefunden werden.

Im Folgenden sei kurz darauf eingegangen, wie Euler diese Zerlegung fand. Generell kann man die Menge der ungeraden Primzahlen einteilen in solche der Form $4n + 1$ und in solche der Form $4n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Nach Fermat kann im ersten Fall eine Primzahl immer als Summe zweier Quadrate dargestellt werden (z.B.: $13 = 4 \cdot 3 + 1 = 2^2 + 3^2$), während das beim zweiten Typ (z.B.: $19 = 4 \cdot 5 - 1 = ?^2 + ?^2$) unmöglich ist. Es gilt daher

$$p = 4n + 1 = x^2 + y^2. \quad (2.92)$$

Euler bewies auch die Umkehrung: jede ganze Zahl, die eindeutig (bis auf die Reihenfolge) als Summe zweier teilerfremder Quadrate dargestellt werden kann, ist eine Primzahl [Fellmann 1983, S.36]. Auf der Suche nach einer Faktorenzerlegung von F_5 entwickelte Euler das nach ihm benannte Kriterium, indem er aus der Erkenntnis, dass nur Divisoren der Form $4n + 1$ die Summe zweier Quadrate teilen können, weitere Schlüsse zog. Über die Folgerung, dass dann die Summe zweier Biquadrate ausschließlich von Ausdrücken der Form $8n + 1$ geteilt werden kann und die Summe $a^8 + b^8$ nur Teiler der Form $16n + 1$ besitzen kann, gelangte er zu einer allgemeinen Aussage, die heute Eulersches Kriterium heisst:

$2^{m+1}n + 1$ ist die einzige Teilerform von $a^{2^m} + b^{2^m}$.

F_5 kann also nur von Zahlen der Form $64n + 1$ geteilt werden und Euler musste nur wenige Versuche unternehmen, um 641 als Faktor zu finden.

Mit dem Ergebnis (2.92) und dessen Umkehrung hatte Euler ein wirkungsvolles Instrument zur Untersuchung großer Zahlen auf ihre Primhaftigkeit erlangt, das ihm beispielsweise die rasche Charakterisierung von 2 232 037 als Primzahl ermöglichte aufgrund dem Vorhandensein nur einer möglichen Darstellung gemäß Satz (2.92), $2\,232\,037 = 1^2 + 1\,494^2$. Danach betrachtete Euler die allgemeine Darstellung von Primzahlen in der Form

$$p = mx^2 + ny^2. \quad (2.93)$$

Setzt man hier $m = 1$, erhält man die Gleichung

$$p = x^2 + ny^2, \quad (2.94)$$

aus der Euler die Aufgabenstellung formulierte, alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ aufzufinden, die folgendes erfüllen: Wenn eine Zahl p nur auf eine Art in der Form $p = x^2 + ny^2$, mit x und y teilerfremd, dargestellt werden kann, dann ist sie eine Primzahl. Diese Zahlen n nannte Euler “numeri idonei” (passende Zahlen). 1, 2, 3, 5 gehören dazu, 11 jedoch nicht: $15 = 2^2 + 11 \cdot 1^2$ ist, z.B., nämlich keine Primzahl. Da man ja nicht für jedes n unendlich viele Zahlen p auf ihre Darstellbarkeit gemäß Gleichung (2.94) überprüfen kann, verwendete Euler als Grundlage seiner Untersuchungen folgende Beobachtung: für jedes nicht den Kriterien der “numeri idonei” entsprechende n existiert eine zusammengesetzte Zahl $m < 4n$, die nur auf eine einzige Weise durch $x^2 + ny^2$ angeschrieben werden kann. Mit Hilfe dieser Entdeckung ermittelte Euler alle passenden Zahlen bis $n = 2000$. Er fand 65 Stück, deren letzte die Zahl 1848 ist. Dass dies wirklich alle “numeri idonei” sind – bis auf eventuell noch eine weitere – konnte erst im Jahr 1934 durch Heilbronn und Chowla bewiesen werden [Fellmann 1983, S.36f.].

Der handschriftliche Nachlass Leonhard Eulers zur Zahlentheorie aus den Jahren 1752–1755 dokumentiert eine weitere Untersuchung im Bezug auf Primzahlen. Euler formulierte nämlich dort den Satz, dass in einem Intervall zwischen einer beliebigen natürlichen Zahl $a > 1$ und deren Doppeltem $2a$ mindestens eine Primzahl enthalten sein muss. Als Exempel setzt er $a = 24$ und überprüft alle Zahlen im Intervall $[24, 48]$, die sich durch eine Primzahl < 24 teilen lassen. Die Anzahl dieser zusammengesetzten Zahlen beträgt 18. Daher gibt es 6 Primzahlen ($24 - 18 = 6$) und zwar: 29, 31, 37, 41, 43 und 47. Gemeinsam mit anderen Manuskripten machen diese Erkenntnisse glaubhaft, dass Euler schon 100 Jahre vor Bertrand das sogenannte Bertrandsche Postulat aufstellte [Matvievskaia u. Ožigova 1983, S.158], welches lautet:

Für jedes $N \geq 2$ existiert eine Primzahl zwischen N und $2N$ [Reinhardt u. Soeder 1994a, S.127].

2.2.2 Eulersche φ -Funktion

Ein grundlegendes zahlentheoretische Ergebnis Eulers ist der sogenannte Euler-Fermat-Satz. Um ihn zu formulieren benötigt man die nach Euler benannte φ -Funktion: Wenn n eine ganze positive Zahl ist, dann gibt $\varphi(n)$ die Anzahl derjenigen positiven ganzen Zahlen a kleiner als n an, die zu n relativ prim sind, d.h. formal

$$\varphi(n) := |\{1 \leq a < n \mid \text{ggT}(a, n) = 1\}|. \quad (2.95)$$

Beispielsweise erhält man für die Zahl 6 den Wert $\varphi(6) = 2$ und für die Zahl 13 den Wert $\varphi(13) = 12$. Zur Berechnung des Wertes von φ für eine Zahl $n = \prod_{p|n} p^{k_p}$ dient die von Euler

hergeleitete Formel

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_{p|n} p^{k_p-1} (p-1) . \quad (2.96)$$

Bei der Berechnung von $\varphi(72)$ kann man also so vorgehen:

$$\varphi(72) = \varphi(2^3 \cdot 3^2) = 2^{3-1} \cdot (2-1) \cdot 3^{2-1} (3-1) = 24 . \quad (2.97)$$

Es gibt daher 24 Zahlen $\in \mathbb{Z}^+$, die kleiner als 72 und zu 72 teilerfremd sind. Die Bedeutung der φ -Funktion liegt unter anderem in ihrer Anwendung im Euler-Fermat-Satz. Dieser besagt, dass für eine ganze Zahl $n > 1$ und ein beliebiges $a \in \mathbb{N}$, das zu n relativ prim ist, folgendes gilt:

n teilt $a^{\varphi(n)} - 1$ oder anders ausgedrückt: $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Für Primzahlen $n = p$ folgt daraus wegen $\varphi(p) = p - 1$ der sogenannte kleine Fermatsche Satz:

Eine Primzahl p teilt stets $a^{p-1} - 1$, es sei denn p teilt a .

Im Laufe seines Lebens bewies Euler sowohl den kleinen Satz von Fermat, als auch den Euler-Fermat-Satz etliche Male. Der erste Beweis aus dem Jahr 1736 wird im Folgenden wiedergegeben. Da im Fall $p = 2$ nichts zu zeigen ist, nimmt Euler p als ungerade Primzahl an. Dann betrachtet er zunächst den Fall $a = 2$. Er schreibt 2^p als

$$2^p = (1+1)^p = 1 + \frac{p}{1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{p}{1} + 1 . \quad (2.98)$$

Subtrahiert man 2 von beiden Seiten, erhält man

$$2^p - 2 = \frac{p}{1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{p}{1} . \quad (2.99)$$

Die rechte Seite ist offensichtlich durch p teilbar, somit auch die linke Seite. Da jedoch p und 2 relativ prim sind, wird $2^{p-1} - 1$ von p geteilt. Anstatt mit dem allgemeinen Induktionsschritt fortzufahren, handelt Euler (was für ihn unüblich ist) den Fall $a = 3$ separat ab: Er schreibt 3^p als $(1+2)^p$ und potenziert aus:

$$3^p = 1 + \frac{p}{1}2 + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}4 + \dots + \frac{p}{1}2^{p-1} + 2^p . \quad (2.100)$$

Dann subtrahiert er $1 + 2^p$ von beiden Seiten und bekommt eine rechte Seite, die durch p teilbar ist. Da $3^p - 2^p - 1 = 3^p - 3 - 2^p + 2$ ist und man vom letzten Satz weiss, dass $2^p - 2$ von p geteilt wird, muss auch $3^p - 3$ von p geteilt werden. Falls p eine Primzahl ungleich 3 ist, folgt: p teilt $3^{p-1} - 1$.

Nun erst folgt der allgemeine Induktionsschritt: Wenn $a^p - a$ von p geteilt wird, dann gilt dies auch für $(a+1)^p - a - 1$. Der Beweis für den allgemeinen Fall ist fast identisch mit

dem für $a = 3$. Euler erklärt in der Abhandlung auch, wie diese Sätze, der Grundschrift und der Induktionsschritt zusammen den allgemeinen Fall beweisen. Es scheint, dass damals die Mechanismen eines Induktionsbeweises noch genauer dargelegt werden mussten als heute. Damit endet Eulers erster Beweis von Fermats kleinem Satz.

Die verallgemeinerte Version davon, der Satz von Euler-Fermat, wird heutzutage unter anderem für die Generierung von Schlüsseln für das RSA-Verfahren in der Kryptographie eingesetzt und ist daher von aktueller Wichtigkeit.

2.2.3 Theorie der Potenzreste

Eulers Untersuchungen des kleinen Satzes von Fermat resultierten in der Theorie der Reste nach einem Modul und fanden ihren Höhepunkt in der Formulierung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes [Fellmann 1983, S.35].

Unter einem n -ten Potenzrest $\text{mod } m$ versteht man einen teilerfremden Rest $a \text{ mod } m$, für welchen die Kongruenz $x^n \equiv a(m)$ lösbar ist, ansonsten liegt ein n -ter Potenznichtrest $\text{mod } m$ vor. Allgemein heissen zwei Zahlen kongruent bezüglich einer dritten Zahl m (dem Modul), wenn die Division durch m denselben Rest ergibt, bzw. äquivalent, wenn m die Differenz $b_1 - b_2$ teilt.

Die heutige Form der Kongruenzentheorie wurde von Gauß geschaffen, jedoch kannte Euler die Eigenschaften der Kongruenzen schon lange davor. Eulers Manuskripte zur Zahlentheorie belegen, dass er bereits im Jahr 1736 den folgenden Satz aufstellte:

Wenn die Division von 2^m durch n den Rest p ergibt, erhält man bei der Division von 2^{m+1} durch n den Rest $2p$ und bei der Division von 2^{2m} durch n den Rest p^2 .

Im Jahr 1761 verallgemeinerte Euler die Aussage: Ergibt a^μ bei der Division durch p den Rest r , dann liefert $a^{2\mu}$ bei der Division durch p den Rest r^2 und $a^{3\mu}$ den Rest r^3 etc. [Matvievskaia u. Ožigova 1983, S.155].

Die obige Definition der Potenzreste wirft nun im Prinzip zwei Hauptfragen auf:

1. Welche a sind n -te Potenzreste $\text{mod } m$?
2. Für welche m ist a ein n -ter Potenzrest $\text{mod } m$?

Für $m = p^\alpha$ mit $p \in \mathbb{P}$ gibt Euler eine Antwort für Frage 1:

a ist n -ter Potenzrest $\text{mod } p^\alpha$ ($p \neq 2$) genau dann, wenn $a^{\frac{\varphi(p^\alpha)}{\text{ggT}(n, \varphi(p^\alpha))}} \equiv 1(p^\alpha)$.

a ist n -ter Potenzrest $\text{mod } 2^\alpha$ ($\alpha \geq 2$) genau dann, wenn $a \equiv 1(4)$ und $a^{\frac{2^{\alpha-2}}{\text{ggT}(n, 2^{\alpha-2})}} \equiv 1(2^\alpha)$. Jedes ungerade a ist n -ter Potenzrest $\text{mod } 2$.

Im Falle $n = 2$, also der Frage, ob a quadratischer Rest ist, lässt sich die Beantwortung für $m = p \in \mathbb{P}$ leicht durchführen. Legendre führte dafür das Symbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ ein, das für

eine Primzahl q und eine ganze, zu q teilerfremde Zahl a wie folgt definiert wird:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{q}\right) &= 1, \text{ wenn } a \text{ ein quadratischer Rest modulo } q \text{ ist,} \\ &= -1, \text{ wenn } a \text{ ein quadratischer Nichtrest modulo } q \text{ ist.} \end{aligned} \quad (2.101)$$

Die Berechnung des Restsymbols wird nun durch das sogenannte quadratische Reziprozitätsgesetz ermöglicht, das etlichen Quellen zufolge Euler im wesentlichen bekannt war. Es lautet:

Wenn p und q verschiedene, ungerade Primzahlen sind, dann gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{q}{p}\right) &= \left(\frac{p}{q}\right) (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} = -\left(\frac{p}{q}\right), \text{ wenn } p \equiv q \equiv 3(\bmod 4) \\ &= \left(\frac{p}{q}\right) \text{ in allen anderen Fällen} \end{aligned} \quad (2.102)$$

Das Reziprozitätsgesetz ermöglicht gemeinsam mit den zwei Ergänzungssätzen für ein ungerades $p \in \mathbb{P}$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{p}\right) &= 1, \text{ falls } p \equiv 1(4) \\ &= -1, \text{ falls } p \equiv -1(4), \end{aligned} \quad (2.103)$$

und

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{p}\right) &= 1, \text{ falls } p \equiv \pm 1(8) \\ &= -1, \text{ falls } p \equiv \pm 3(8), \end{aligned} \quad (2.104)$$

die Berechnung des Legendreschen Restsymbols und damit die Entscheidung, ob eine Zahl ein quadratischer Rest oder ein quadratischer Nichtrest ist.

Möchte man beispielsweise wissen, ob die Gleichung $x^2 \equiv 230 \pmod{137}$ lösbar ist, ermittelt man das entsprechende Legendresche Restsymbol: Aus $\left(\frac{230}{137}\right)$ erhält man durch Reduktion des Symbolzählers modulo dem Symbolnenner $\left(\frac{93}{137}\right)$ und aufgrund der Multiplikativität des Symbols im Zähler $\left(\frac{3}{137}\right) \cdot \left(\frac{31}{137}\right)$. Die Anwendung des Quadratischen Reziprozitätsgesetzes und der zwei Ergänzungssätze sowie weitere Reduktionen liefern dann folgendes:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{137}\right) \cdot \left(\frac{31}{137}\right) &= \left(\frac{137}{3}\right) \cdot \left(\frac{137}{31}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{13}{31}\right) \\ &= -\left(\frac{31}{13}\right) = -\left(\frac{5}{13}\right) = -\left(\frac{13}{5}\right) = -\left(\frac{3}{5}\right) \\ &= -\left(\frac{5}{3}\right) = -\left(\frac{-1}{3}\right) = 1. \end{aligned}$$

Somit ist die Gleichung $x^2 \equiv 230 \pmod{137}$ lösbar.

Das quadratische Reziprozitätsgesetz spielt auch die entscheidende Rolle in Bezug auf die zweite Hauptfrage für Potenzreste. Mit dessen Hilfe lässt sich nämlich beweisen: Ist a vorgegeben, hängt $\left(\frac{a}{p}\right)$ lediglich von der Restklasse von $p \bmod 4a$ ab und wenn $a \in \mathbb{P}$ mit $a \equiv 1 \pmod{4}$ ist, dann nur noch von der Restklasse von $p \bmod a$ [Reinhardt u. Soeder 1994a, S.120f.].

Abschließend sei bemerkt, dass Eulers fast 50 Jahre andauernde zahlentheoretische Arbeit, die ja nur einen Bruchteil seiner enormen wissenschaftlichen Leistung darstellt, deutlich einige Eigenschaften seiner Arbeitsauffassung und seines Charakters widerspiegelt. Die Hartnäckigkeit, mit der er nach Lösungen für Probleme suchte, die Hochschätzung, mit der er auch zufälligen Resultaten begegnete und das ungeheure Tempo, mit dem er aktuelle Anlässe bedachte, blieben ihm sein gesamtes Leben erhalten [Weil 1992, S.293f.].

2.3 Geometrie

Niemand würde behaupten, dass Leonhard Eulers mathematisches Vermächtnis vorrangig seinen Beiträgen zur Geometrie zuzuschreiben ist, doch wäre es falsch daraus zu schließen, dass Euler diesen zeitlos faszinierenden Bereich der Mathematik ignorierte: Im Gegenteil sind vier Bände der Opera Omnia (insgesamt fast 1600 Seiten) geometrischen Forschungen gewidmet [Dunham 1999, S.125]. Dabei verhalfen Euler das Einsetzen sowohl algebraischer wie auch analytischer Methoden zu einer Vielzahl von Ergebnissen auf diesem Gebiet. So wurde beispielsweise die ebene und die sphärische Trigonometrie in der heute geläufigen Form von ihm geschaffen [Fellmann 1995, S.52]. Im Folgenden werden zwei der schönsten und wichtigsten Entdeckungen Eulers aus der elementaren Geometrie behandelt.

2.3.1 Eulersche Gerade

Im Jahr 1763 formulierte Euler den heute wohlbekannten Satz, dass in jedem Dreieck der Schnittpunkt H der Höhenlinien, der Schnittpunkt S der Schwerlinien und der Schnittpunkt U der Seitensymmetralen kollinear sind. Die gemeinsame Gerade, auf der diese Punkte liegen, heisst heute “Eulersche Gerade”. Euler zeigte zusätzlich, dass für die Abstände der drei “merkwürdigen” Punkte folgendes Verhältnis gilt [Fellmann 1995, S.55]:

$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1 . \quad (2.105)$$

Das Dreieck $M_{\overline{AB}}M_{\overline{BC}}M_{\overline{AC}}$ (siehe Abbildung 2.1), dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der jeweiligen Seite des Dreiecks ABC sind und dessen Seiten daher halb so lang sind wie die des ursprünglichen Dreiecks, ist mit dem Zentrum S perspektivisch ähnlich zum Dreieck

ABC . Daher schneiden sich die Schwerlinien der Dreiecke im Verhältnis 2:1. Die Höhen des Dreiecks ABC gehen dabei durch zentrische Streckung in jene des Seitenmitteldreiecks über, die identisch mit den Seitensymmetralen vom Ausgangsdreieck sind. Darum geht der Höhenschnittpunkt H in den Umkreismittelpunkt U über, womit Eulers Behauptung bewiesen ist [Reinhardt u. Soeder 1994a, S.159]. Für weitere Ausführungen zur Eulerschen Geraden verweise ich auf Kapitel 3.1.

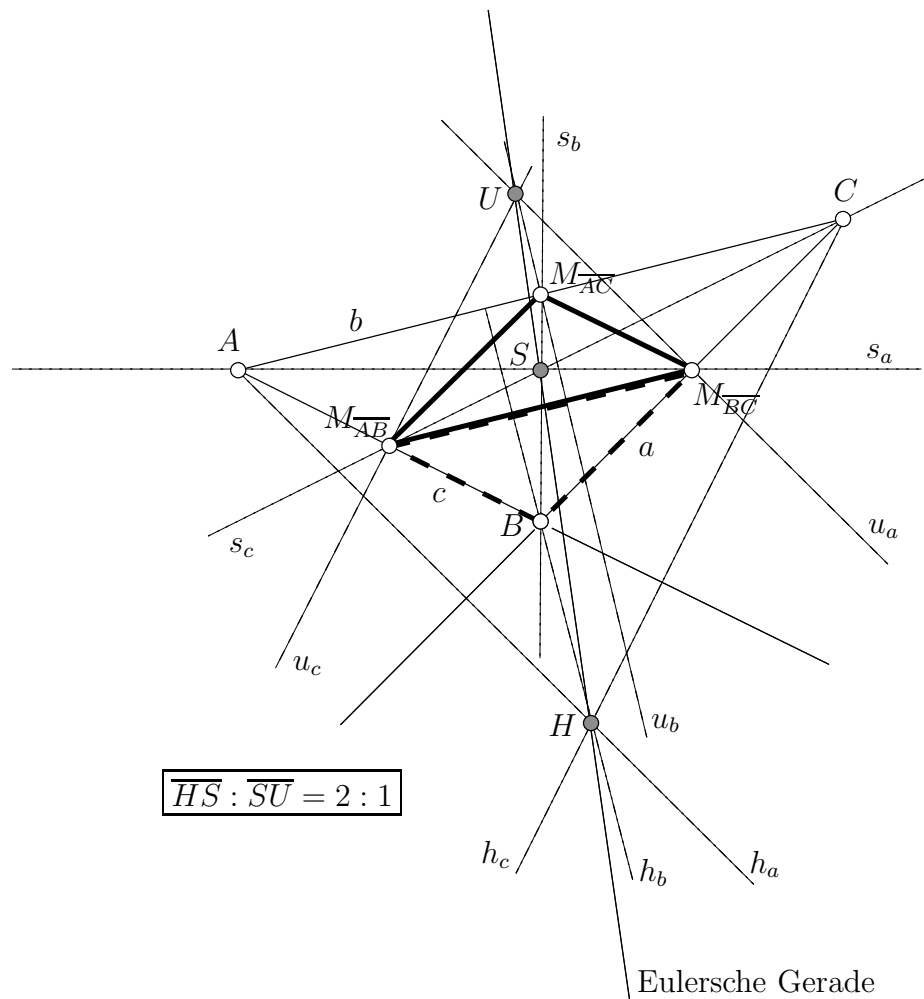


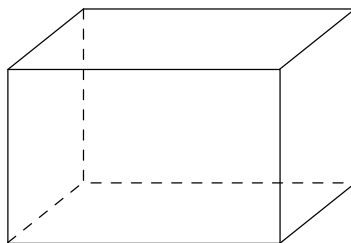
Abbildung 2.1: Die Eulersche Gerade

2.3.2 Eulerscher Polyedersatz

Als die Zeitschrift “Mathematical Intelligencer” Ende des letzten Jahrhunderts zur Wahl der zehn schönsten Sätze der Mathematik aufrief, belegte Euler gleich die ersten beiden Plätze. Dabei gewann die Eulersche Identität $e^{\pi i} = -1$ die absolute Gunst der Leser, doch schon auf Platz zwei rangierte der Eulersche Polyedersatz [Sandifer 2007b, S.9]:

Wenn ein beliebiger von lauter ebenen Vielecken begrenzter, konvexer Körper die Flächenanzahl f , die Eckenanzahl e und die Kantenanzahl k hat, dann gilt: $e + f - k = 2$.

Anhand von Abbildung 2.2 mit $e = 8$, $k = 12$ und $f = 6$ lässt sich die Formel anschaulich überprüfen.



$$e + f - k = 2$$

$$8 + 6 - 12 = 2$$

Abbildung 2.2: Der Eulersche Polyedersatz

Euler, der ahnungslos ob der Entdeckung dieses Satzes durch Descartes war [Fellmann 1995, S.58], stellte den Polyedersatz im Jahr 1750 im Rahmen der Abhandlung “Elementa doctrinae solidorum”, was sinngemäß “Bestandteile der Lehre von den Festkörpern” bedeutet, vor. Obwohl Euler die Arbeit mit einer ausführlichen Beschreibung seines Plans zur Schaffung einer sicheren Basis für die Geometrie der Körper begann, entstanden letztlich nur zwei Abhandlungen über den neuen Forschungsgegenstand, den Euler Stereometrie nannte. Die zu untersuchenden Körper bestehen nach Euler dabei aus Eckpunkten (*anguli solidi*), Flächen (*hedra*) und Kanten (*acies*) [Sandifer 2007b, S.10]. Neben dem Polyedersatz, den er etwas anders als heute üblich formulierte (“In einem beliebigen von Ebenen umschlossenen Festkörper überschreitet die Summe der Anzahl der Eckpunkte und der Anzahl der Flächen die Anzahl der Kanten um 2”), führte Euler noch ein zweites Hauptresultat an: “Die Summe aller ebenen Winkel, die an der Aussenseite eines gegebenen Festkörpers auftreten, ist gleich 8 weniger als vier rechte Winkel für jeden körperlichen Winkel.”

Scheinbar glaubte Euler, dass diese beiden Resultate von gleicher Wichtigkeit waren. Er bewies unter Verwendung des ersten Satzes den zweiten, jedoch war er nicht im Stande auch die Richtigkeit des Polyedersatzes zu zeigen. Dieses Unterfangen möchte Euler in der zweiten und letzten Abhandlung zur Stereometrie, der im Jahr 1751 verfassten Arbeit “*Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*” (Beweis einiger Eigenschaften der von Ebenen eingeschlossenen Festkörper), nachholen. Da er plant, den Beweis für den Polyedersatz, den ich in Anlehnung an die englischsprachige Literatur im weiteren Verlauf mit

$$V + F = E + 2 \tag{2.106}$$

(vertices, faces, edges) anschreiben werde, mit einer Art von “Reduktionsargumentation” zu führen, bereitet er die Leser auf seine Beweistechnik vor. Zuerst zeigt er im Zweidimensionalen, dass die Winkel in einem Vieleck mit A (angle) Winkeln sich zu $2A - 4$ rechten Winkeln aufsummieren lassen. Angenommen $ABCDEFG$ ist das konvexe Polygon (Abbildung 2.3). Durch das Ziehen der Diagonalen zerlegt Euler das Polygon in Dreiecke.

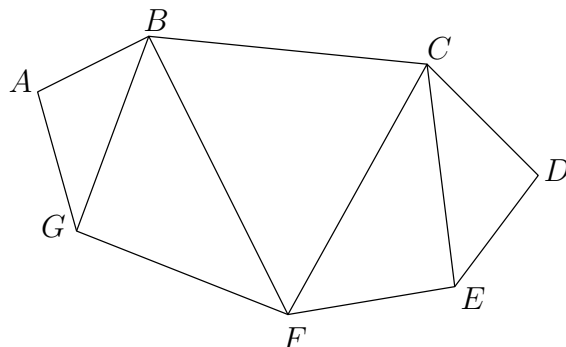


Abbildung 2.3: Beweis des Eulerschen Polyedersatzes (aus [Sandifer 2007b, S.14])

Das abgetrennte Dreieck CDE hinterläßt ein Vieleck mit $A - 1$ Ecken und vermindert seine Winkelsumme um zwei rechte Winkel. Nach n Schritten erhält man schließlich für irgendein n den Ausdruck $A - n = 3$ und das noch übrige Dreieck ABG hat eine Winkelsumme von zwei rechten Winkeln. Aus diesem Grund ist die Anzahl der rechten Winkel im ursprünglichen Polygon $2n + 2$ oder äquivalent dazu $2A - 4$. Um eine Analogie im Dreidimensionalen zu erzeugen, wählt Euler einen beliebigen Punkt auf der Innenseite des Polyeders und dehnt die Kanten zu jedem Eckpunkt aus. Das führt zu einer Zerlegung des Polyeders in Pyramiden, deren Basen die Flächen des ursprünglichen Polyeders sind. Da Euler der Meinung ist, dass dieser Zugang nicht funktioniert, wendet er sich einer anderen Art von Reduktionsplan zu und entscheidet sich Ecken zu entfernen (siehe Abbildung 2.4). In diesem Sinne entfernt Euler den mit O bezeichneten Eckpunkt, der mit den Eckpunkten

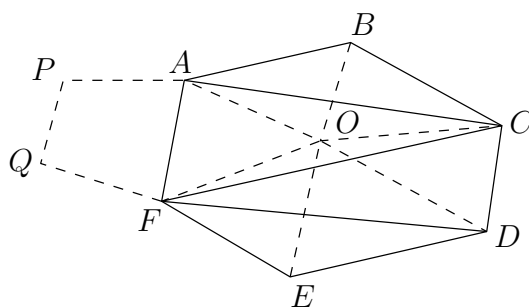


Abbildung 2.4: Beweis des Eulerschen Polyedersatzes (aus [Sandifer 2007b, S.15])

A , B , C , D , E und F verbunden ist, was ein Verschwinden der dreiseitigen Pyramiden

$OABC$, $OACF$, $OCDF$ sowie $ODEF$ nach sich zieht. Dann zeigt er, dass diese Operation die Beziehungen zwischen V , E und F aufrechterhält und folgert daraus, dass nach einem weiteren Vorgehen dieser Art schließlich nur mehr vier Eckpunkte, also eine dreiseitige Pyramide, übrig sind. Da $V + F = E + 2$ für dreiseitige Pyramiden gilt, schließt er, dass $V + F = E + 2$ auch für den ursprünglichen Polyeder gilt.

Die genaue Argumentationsweise Eulers ist folgende: Entfernt man Eckpunkt O , dann sinkt V um 1. Angenommen k ist die Anzahl der Flächen, die in O zusammentreffen, dann ist k gleichzeitig die Anzahl der Kanten, die in O aufeinanderstoßen, wie auch die Anzahl der Seiten des Polygons $ABCDEF$. Daher trianguliert das Polygon um $k - 2$ Polygone abzugeben, was die Einführung von $k - 3$ Kanten erfordert. Infolgedessen schmälert die Entfernung von O um einen Eckpunkt (O), k Kanten (OA , OB , etc.) und k Flächen (OAB , OBC , OCF , etc.). Wie auch immer, fügt es auch die $k - 2$ Flächen der Triangulation und die $k - 3$ Kanten, die in die Triangulation gingen, hinzu. In dem neuen Polyeder ist V durch $V - 1$, E durch $E - k + (k - 3) = E - 3$ und F durch $F - k + (k - 2) = F - 2$ zu ersetzen. Somit ist $V - E + F$ durch $V - 1 - (E - 3) + F - 2 = V - E + F$ zu ersetzen, das heisst $V - E + F$ ändert sich nicht. Da nach allen Reduktionen für eine dreiseitige Pyramide $V - E + F = 2$ gilt, ist das auch für den ursprünglichen Polyeder richtig.

Hätte er nicht einen subtilen, aber ernstzunehmenden Defekt, wäre das ein eleganter Beweis. Ein Beispiel für den Fehler wird in Abbildung 2.5 veranschaulicht: Auch wenn der

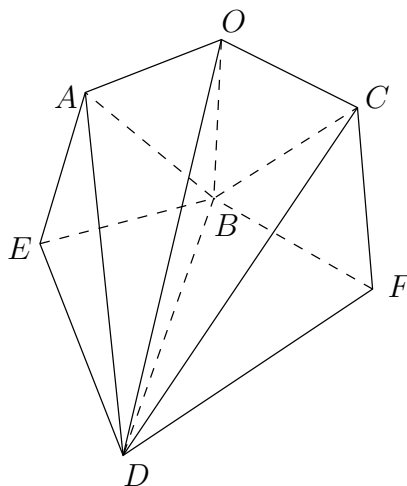


Abbildung 2.5: Beweis des Eulerschen Polyedersatzes (aus [Sandifer 2007b, S.16])

anfängliche Polyeder von Ebenen berandet wird, muss das nicht notwendigerweise auch für den Polyeder mit entferntem Eckpunkt O gelten. Möglicherweise kann man also den Vorgang der Eckenentfernung nicht wiederholen. Entfernt man beispielsweise in Abbildung 2.5 nach Eulers Rezept den Eckpunkt O , bleiben zwei Tetraeder, $AEBD$ und $CFBD$, übrig, die an die gemeinsame Kante BD angrenzen. Dieses Objekt würde Euler nicht als Polyeder

akzeptieren. Die aus der Entfernung eines Eckpunktes entstehenden Polyeder können jedoch auch andere unerwartete Eigenschaften haben, die eine Richtigstellung des Beweises schwierig machen können. Es bleibt die Tatsache bestehen, dass Eulers Beweis fehler- und lückenhaft ist; die Aussage des Polyedersatzes ist jedoch richtig [Sandifer 2007b, S.13–16].

2.4 Graphentheorie

Im dritten Jahrzehnt des 18. Jahrhunderts setzte sich Leonhard Euler mit der Frage nach dem Vorhandensein eines Rundgangs durch die Stadt Königsberg, bei dem jede Brücke über den Fluss Pregel genau einmal passiert wird, auseinander. Zu diesem Zweck stellte er die vier Stadtteile durch Punkte (Ecken) und die Brücken durch Verbindungslinien (Kanten) schematisch dar und überlegte, ob man den so entstandenen Graphen in einem Zug zeichnen kann. Aufgrund der Lösungen, die Euler zu diesem und ähnlichen Problemen fand, gilt er seit seiner Publikation dazu im Jahr 1736 als der Ahnherr der Graphentheorie bzw. der algebraischen Topologie.

Um die Lösung des Königsberger Brückenproblems zu skizzieren, definiere ich zunächst den Begriff eines Graphen: Ist E eine nicht leere, endliche Menge von Punkten (Ecken) und K eine endliche Menge von Kurvenbögen (Kanten), so wird das Paar (E, K) als Graph bezeichnet, wenn jede Kante in zwei (nicht unbedingt verschiedenen) Ecken endet und keine Kante sich oder eine andere Kante in einem inneren Punkt schneidet [Leßner 1980, S.10f.].

Die Fragestellung im Königsberger Brückenproblem kann nun darauf zurückgeführt werden eine sogenannte “Eulersche Linie” zu finden, das ist ein Kantenzug, in dem jede Kante des Graphen genau einmal durchlaufen wird. Euler beweist nun, dass eine solche geschlossene (offene) Linie genau dann in einem (endlichen) Graphen existiert, wenn der Graph zusammenhängend ist, d.h. wenn es zwischen je zwei Ecken einen Kantenzug gibt, und jeder Eckengrad, d.h. die Anzahl der Kanten, die in einer Ecke des Graphen zusammentreffen, entweder gerade ist oder genau zwei Eckengrade ungerade sind. Wie Euler feststellte, trifft die letztere Charakterisierung für das Königsberger Brückenproblem nicht zu und es ist deshalb unlösbar.

Übrigens sind endliche Graphen, in denen jeder Eckengrad gerade ist, auch nach Euler benannt [Reinhardt u. Soeder 1994a, S.253]. Die genauere Behandlung dieses Themenbereichs erfolgt in Kapitel 3.2.

2.5 Funktionentheorie

Leonhard Euler fasste die gesamten Entdeckungen (wobei viele von ihm selbst stammten), die bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts auf dem Gebiet der Analysis gemacht wurden, in seiner Trilogie “*Introductio in analysin infinitorum*” (1748), “*Institutiones calculi differentialis*” (1755) und “*Institutiones calculi integralis*” (1768-70) zusammen. Alle drei Werke, insbesondere die “*Introductio*” sind noch heutzutage für die Mathematik von Interesse und Belang [Dickson u. Khwarizmi 1970, S.745]. Das Fundament der Analysis als mathematische Wissenschaft von Variablen und Funktionen wurde nämlich in eben diesen Lehrbüchern von Euler gelegt. Ein wesentlicher Schritt dazu war die Präzisierung des Bernoullischen, im heutigen Sinne analytischen Funktionsbegriffs [Wußing 1979, S.191f.] Durch die Beschäftigung mit dem Problem der schwingenden Saite kam Euler zur Bildung von gewissen “willkürlichen” (nicht analytischen) Funktionen, die sich stückweise durch analytische Funktionen approximieren lassen. Dies rief heftige Kontroversen unter den Mathematikern der damaligen Zeit hervor, die die Analytizität nicht preisgeben wollten. Euler reagierte darauf mit einer allgemeinen Definition einer Funktion (siehe das folgende Kapitel 2.5.1) [Fellmann 1983, S.45].

Ein bemerkenswertes Charakteristikum der Arbeiten Eulers, das gerade auf dem Gebiet der Analysis besonders zum Tragen kommt, liegt in der Verwendung der sogenannten “*algebraischen Analysis*”, also dem Rechnen mit Reihen bzw. unendlichen Ausdrücken. Reihen, die durch ein Gesetz aufgestellt werden und deren allgemeines Glied daher angegeben werden kann, können auf arithmetische oder algebraische Art behandelt werden. Bei der üblichen arithmetischen Vorgehensweise werden die Glieder einer Reihe wie Zahlen behandelt und man benötigt die Konvergenz als Voraussetzung; bei der algebraischen Vorgehensweise verwendet man Plus- oder Minuszeichen nur als operative Symbole und die Konvergenz wird vernachlässigt. Die letztere Methode bildete die Basis aller Arbeiten Eulers. Ein Indiz dafür kann man auch im Titel “*Analysis des Unendlichen*”, des ersten Teils der “*Introductio*”, erkennen [Grabner 1996, S.4].

Die bahnbrechende Bedeutung dieses ersten Teils der “*Introductio*” hat ihren Ursprung letztlich in der Schaffung der noch heute gültigen Auffassung der Analysis samt der zugehörigen Terminologie sowie in der Vereinheitlichung der Symbolik durch Euler [Volkert 1988, S.139].

2.5.1 Der Begriff einer Funktion

Im ersten Kapitel des ersten Bandes der 1748 publizierten “*Introductio*” schuf Euler mit seinem legendären Funktionsbegriffs die sichere Grundlage seiner Analysis. Der schon im Jahr 1673 von Leibniz eingeführte Begriff “*functio*” hatte zuerst die Bedeutung “eine Funk-

tion haben”, d.h. bestimmte Stücke hatten betreffend einer Kurve eine bestimmte Funktion. So berührt die Tangente beispielsweise die Kurve in einem festgelegten Punkt. Später drückte Leibniz die Abhängigkeit einer Größe von einer anderen durch die Beschreibung “eine Funktion sein” aus. Im Jahr 1694 definierte Leibniz zum ersten Mal eine Funktion als Stück einer Geraden, das lediglich durch einen fixen Punkt und einen Punkt der gekrümmten Kurve festgelegt wird, wobei hier noch immer die geometrische Vorstellung der Kurve die Hauptrolle spielt. Euler hingegen hält sich in seiner “Introductio” sinngemäß an die 1696 von seinem Lehrer Johann Bernoulli formulierte Definition einer Funktion einer Veränderlichen als Zusammensetzung aus dieser variablen Größe und Konstanten [Volkert 1988, S.140f.]. Demgemäß definiert Euler die Funktion einer veränderlichen Zahlgröße als einen analytischen Ausdruck, der auf irgendeine Art aus der veränderlichen Zahlgröße und aus konstanten Zahlgrößen gebildet wird. Unter einer veränderlichen Zahlgröße versteht Euler eine unbestimmte, allgemeine Zahlgröße, die alle bestimmten Werte ausnahmslos umfasst. Die Funktion einer Veränderlichen ergibt dabei wieder eine Veränderliche. Eine konstante Zahlgröße hingegen ist eine bestimmte Zahlgröße, die immer denselben Wert behält. Da Euler das Symbol “ z ” für unabhängige Veränderliche benützt, führt er als Beispiele für Funktionen von z folgende Ausdrücke an: $a + 3z$, $az - 4z^2$, $az + b\sqrt{a^2 - 4z^2}$ oder c^z . “Scheinbare Funktionen”, die in Wirklichkeit Konstante sind, wären laut Euler z.B. z^0 , 1^z oder $\frac{a^2 - az}{a - z}$. Funktionen wie $a + bz + cz^2$ und $a + by + cy^2$ nennt er ähnlich, denn Funktionen unterscheiden sich nur durch die Art der Zusammensetzung aus Variablen und Konstanten voneinander, die in diesem Fall ja gleich ist. Bei der Einteilung der Funktionen unterscheidet Euler vorerst zwischen algebraischen und transzendenten Funktionen. Während bei ersteren nur algebraische Operationen (d.h. die vier Grundrechnungsarten, Potenzieren, Wurzelziehen) auftauchen, kommen bei letzteren auch transzendente Operationen (z.B. die Bildung von Exponential-, logarithmischen oder trigonometrischen Größen; Methoden der Integralrechnung) vor. Als Beispiel für eine algebraische Funktion gibt er $\frac{a + bz^n - c\sqrt{2z - z^2}}{a^2z - 3bz^3}$ an. Betreffend der transzendenten Funktionen vermerkt er, dass eine solche Funktion nur wirklich transzendent ist, wenn sie eine transzendente Operation nicht nur beinhaltet, sondern diese auch die Variable selbst betrifft. Eine weitere Differenzierung nimmt Euler in Bezug auf die algebraischen Funktionen vor und unterscheidet zwischen rationalen und irrationalen Funktionen. Während irrationale Funktionen wiederum in entwickelte (explizite) und unentwickelte (implizite) geteilt werden, sind rationale Funktionen entweder ganz oder gebrochen. Besonders wichtig ist Euler bei alledem jedoch die generelle Einteilung der Funktionen in eindeutige (uniformes) und mehrdeutige (multiformes). Diesbezüglich sind rationale ganze und gebrochene Funktionen eindeutig und die irrationalen Funktionen mehrdeutig. Unter den transzendenten Funktionen können sowohl eindeutige

wie auch mehrdeutige Funktionen aufgefunden werden. Hier existiert sogar die Möglichkeit unendlich vieldeutiger Funktionen, wie z.B. der zu Sinus z gehörige Kreisbogen. Bezüglich der mehrdeutigen Funktionen führt Euler die Namen 2-, 3-, 4- usw. deutig ein, wenn es für jeden bestimmten Wert von $z = 2, 3, 4$, usw. verschiedene Werte gibt. Letztlich kommen noch die Charakteristika gerade sowie ungerade vor. Als “gerade” wird eine Funktion von z angesehen, wenn sie ein identes Ergebnis hervorbringt, egal ob man für z einen bestimmten Wert k oder $-k$ einsetzt. “Ungerade” ist eine Funktion dann, wenn sie dagegen den negativen Wert liefert. Daher sind z.B. alle Potenzen von z mit geradem Exponenten gerade ($z^2, z^4, \dots$) und alle Potenzen von z mit ungeradem Exponenten ungerade ($z^1, z^3, \dots$) [Euler 1983, 1. Kapitel, S.3–14]. Trotz diesen vielfältigen Differenzierungen maß Euler der Unterscheidung zwischen reell- und komplexwertigen Funktionen keinerlei Bedeutung zu. Da $\sqrt{z}$ demgemäß reelle und komplexe Werte annehmen kann, spielt bei Euler ein fester Definitionsbereich noch keine Rolle [Volkert 1988, S.141f.].

Im weiteren definiert nun Euler im 1. Kapitel der “Introductio”:

“Eine Funktion einer veränderlichen Zahlgröße ist ein analytischer Ausdruck, der auf irgendeine Weise aus der veränderlichen Zahlgröße und aus eigentlichen Zahlen oder aus konstanten Zahlgrößen zusammengesetzt ist” [Euler 1983, S.4]

Dieser “analytische Ausdruck” wird durch algebraische und transzendente Operationen gebildet. Der Term “analytische Funktion” sollte also ursprünglich für eine in der Analysis gebrauchte Funktion stehen [Wußing 1979, S.227]. Dabei formulierte Euler die Vermutung, dass jede Funktion einer Variablen z durch eine unendliche Potenzreihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots$ dargestellt werden kann. Diese Form sei die vorteilhafteste für das Studium der Eigenschaften einer Funktion.

Nachdem der Begriff “analytische Funktion” im Jahr 1840 von Weierstraß den heutigen Sinn erhalten hatte, setzte er sich vollständig durch [Juschewitsch 1983, S.41f.]. Heute heisst eine Funktion analytisch, wenn sie (lokal) beliebig oft differenzierbar und durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar ist.

In seinem Lehrbuch zur Differentialrechnung aus dem Jahr 1755 benützt Euler jedoch eine andere Auffassung von Funktion, nämlich jene von der Funktion als beliebige Zuordnung, d.h. als Verbindung einer abhängigen und einer unabhängigen Variablen. Diese Anschauung durchdrang die Mathematik aber erst ein Jahrhundert später. Im Zuge der Behandlung des Problems der “schwingenden Saite” formulierte Euler einen gänzlich willkürlichen Funktionsbegriff. Solche willkürlichen Funktionen treten auch auf, wenn “freihändig” gezeichnete Kurven “zusammengestückt” werden. Die durch eine Gleichung beschreibbaren Kurven (“*curvae continuae*”) wurden von den beliebig gezeichneten Kurven (“*curvae discontinuae seu mixtae seu irregulares*”) unterschieden [Grabner 1996, S.6]. Es sei noch bemerkt, dass die heute gebräuchliche Notation $f(x)$ auf Euler zurückgeht und von ihm 1734 erstmals

verwendet wurde [Thiele 1982, S.111].

2.5.2 Die Umformung einer Funktion

Ich behandle im weiteren noch die Kapitel 2 und 3 der “Introductio”, genannt “Von der Umformung der Funktionen” bzw. “Von der Umformung der Funktionen durch Substitution”. Generell gibt es bei Euler zwei Arten der Umformung, je nachdem ob dieselbe Variable bestehen bleibt oder eine andere Veränderliche an ihre Stelle tritt. Bei der ersten Variante der Umformung ändert sich die Funktion nicht, sondern wird nur in einer anderen Form dargestellt. Als Beispiele dafür führt Euler an:

- $2 - 3z + z^2 = (1 - z)(2 - z)$,
- $a^3 + 3a^2z + 3az^2 + z^3 = (a + z)^3$,
- $\frac{2a^2}{a^2 - z^2} = \frac{a}{a - z} + \frac{a}{a + z}$.

Die zweite Variante nennt er “Umformung durch Substitution”. Da sie später ausführlich erläutert wird, wird hier nur ein einfaches Beispiel angegeben: Wenn man in der Funktion $a^4 - 4a^3z + 6a^2z^2 - 4az^3 + z^4$ den Ausdruck $(a - z)$ durch y ersetzt, erhält man die viel trivialere Funktion y^4 von y .

Besonders bedeutungsvoll ist für Euler die Zerlegung einer ganzen algebraischen Funktion in einfache Faktoren. Im Zusammenhang mit diesen Aufgaben verwendet er den damals noch nicht verifizierten Fundamentalsatz der Algebra. Als Anwendung zeigt er, wie man die Partialbruchzerlegung einer gebrochenen Funktion findet. Der einfachste Fall soll hier vorgeführt werden: Man löst $\frac{M}{N} = \frac{M}{(p - qz)S}$, wobei S den Faktor $(p - qz)$ nicht beinhaltet, auf, indem man $\frac{M}{N} = \frac{A}{p - qz} + \frac{P}{S}$ mit $A \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und $\text{grad } P < \text{grad } S$ unbestimmt ansetzt. Das liefert $\frac{P}{S} = \frac{M - AS}{(p - qz)S}$. Da die linke Seite der Gleichung mit der rechten Seite übereinstimmen muss und die Funktion P gleich dem Bruch $\frac{M - AS}{p - qz}$ ist, muss $M - AS$ durch $p - qz$ teilbar sein. Entspricht dies der Wahrheit, dann verschwindet $\frac{M - AS}{p - qz}$ durch das Substituieren von z durch $\frac{p}{q}$. Setzt man nun in M und S überall $z = \frac{p}{q}$, erhält man $M - AS = 0$ und daher $A = \frac{M}{S}$.

Eine alternative Lösungsmöglichkeit, nämlich mittels Koeffizientenvergleich, wird nun anhand eines Beispiels gezeigt. Es sei $M = 1 + z^2$ und $N = z - z^3$, dann hat der so gegebene

Bruch $\frac{1+z^2}{z-z^3}$ die Faktoren z , $1-z$ und $1+z$ des Nenners. Daraus folgt:

$$\frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{1+z} = \frac{1+z^2}{z-z^3}. \quad (2.107)$$

Multipliziert man die Gleichung nun mit dem gemeinsamen Nenner und ordnet die Glieder, erhält man: $A + Bz + Cz - Az^2 + Bz^2 - Cz^2 = 1 + z^2$. Der Koeffizientenvergleich liefert dann $A = 1$, $B = 1$ und $C = -1$. Aufgrund dessen lautet die gesuchte Zerlegung:

$$\frac{1+z^2}{z-z^3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}. \quad (2.108)$$

Den Abschluß des 2. Kapitels der "Introductio" bildet der schwierigere Fall, in dem $p-qz$ öfter als einmal als Faktor in N enthalten ist, was die Ermittlung von Partialbrüchen mit den Nennern $p-qz$, $(p-qz)^2$, $(p-qz)^3$, ... erfordert.

Im dritten Kapitel geht Euler zu Beginn auf die mehrfache Substitution ein:

"Wenn y irgendeine Funktion von z ist und z durch eine neue Veränderliche x bestimmt wird, so lässt sich auch y durch x bestimmen" [Euler 1983, S.36].

Als Beispiel dient die Funktion $y = \frac{1-z^2}{1+z^2}$. Setzt man hier $z = \frac{1-x}{1+x}$, dann geht y aufgrund dieser Substitution in folgenden Ausdruck über: $y = \frac{2x}{1+x^2}$. Jeder bestimmte Wert von x garantiert also den Erhalt von bestimmten Werten für z und y . Laut Euler bekommt man den identen Wert für y , wenn man statt z den bei der obigen Operation erhaltenen Wert einsetzt. Gemäß der Rechnung folgt für $x = \frac{1}{2}$, dass $z = \frac{1}{3}$ und $y = \frac{4}{5}$ ist. Andererseits liefert die Substitution von $z = \frac{1}{3}$ im Term $\frac{1-z^2}{1+z^2}$ denselben Wert für y .

Die Methode der Substitution verfolgt zweierlei Ziele, nämlich erstens die Rationalisierung irrationaler Ausdrücke und zweitens die übersichtliche Darstellung von y und z , wenn diese durch eine Gleichung höheren Grades in einer Form gegeben sind, aus der man y nicht explizit durch z ausdrücken kann. Zur Veranschaulichung der erwähnten Sinnhaftigkeit folgen nun Beispiele, aus deren Fülle einige ausgewählt wurden:

- Beispiel 1:

Gegeben: $y = \sqrt{a+bz}$

Gesucht: Eine neue Variable x , durch die man z und y rational ausdrücken kann.

Lösung: Man setzt $\sqrt{a+bz} = bx$. Daraus resultiert, dass $y = bx$, $a+bz = b^2x^2$ und letztlich $z = bx^2 - \frac{a}{b}$ ist. Es reicht also in der Angabe $z = bx^2 - \frac{a}{b}$ zu setzen, wodurch $y = bx$ wird und man einen rationalen Ausdruck von y und z in x erhält.

- Beispiel 2:

Gegeben: $y = \left(\frac{a+bz}{f+gz} \right)^{\frac{m}{n}}$

Gesucht: Eine neue Variable x , durch die man z und y rational ausdrücken kann.

Lösung: Vorerst setzt man $y = x^m \Rightarrow \left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^{\frac{m}{n}} = x^m \Rightarrow \frac{a+bz}{f+gz} = x^n$ und daraus folgt $z = \frac{a-fx^n}{gx^n-b}$.

Wenn nun $\left(\frac{\alpha+\beta y}{\gamma+\delta y}\right)^n = \left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^m$ ist, kann man also analog zu oben durch Gleichsetzen von jeder Seite der Gleichung mit x^{mn} sowohl y wie auch z rational mit Hilfe der Variablen x folgendermaßen darstellen: $y = \frac{\alpha-\gamma x^m}{\delta x^m-\beta}$ und $z = \frac{a-fx^n}{gx^n-b}$.

Anschließend gibt Euler eine Beschreibung der Vorgangsweise für die Funktion $y = \sqrt{(a+bz)(c+dz)}$ mit zwei einfachen reellen Faktoren an. Sind die Faktoren jedoch imaginär, empfiehlt sich folgenden Technik.

- Beispiel 3:

Gegeben: $y = \sqrt{p+qz+rz^2}$

Gesucht: Substitution für z , so, dass der Wert von y rational wird.

Lösung: Abhängig davon, ob p und r positive oder negative Zahlgrößen sind, gibt es drei verschiedene Möglichkeiten.

Fall 1. p sei eine positive Zahlgröße. Dann setzt Euler $p = a^2$ und $y = \sqrt{a^2+bz+cz^2}$. Aus der Gleichsetzung von $\sqrt{a^2+bz+cz^2} = a+xz$ ($= \sqrt{p}+xz$) erhält er mittels Quadrieren $a^2+bz+cz^2 = a^2+2axz+x^2z^2$. Daraus folgt $b+cz = 2ax+x^2z$ und weiters $z = \frac{b-2ax}{x^2-c}$. Schließlich bekommt man als Lösung $y = a+xz = \frac{bx-ax^2-ac}{x^2-c}$.

Fall 2. r sei eine positive Zahlgröße. Euler setzt $r = a^2$ und $y = \sqrt{a^2z^2+bz+c} = az+x$ ($= \sqrt{r}z+x$). Nach zum Fall 1 analogen Umformungen erhält man $z = \frac{x^2-c}{b-2ax}$ und $y = az+x = \frac{-ac-bx-ax^2}{b-2ax}$.

Fall 3. p und r seien negative Zahlgrößen. In diesem Fall ist y imaginär, wenn $q^2 \leq 4pr$ ist und nicht imaginär, wenn $q^2 > 4pr$ ist, wobei man dann den Ausdruck $p+qz+rz^2$ in zwei reelle Faktoren zerlegen und auf die Vorgangsweise in Eulers Beispiel $y = \sqrt{(a+bz)(c+dz)}$ rückführen kann. Da Euler jedoch anmerkt, dass es meist sinnvoller ist, y auf die Form $y = \sqrt{a^2+(b+cz)(d+ez)}$ zu bringen, werde ich diesen Weg verfolgen. Euler setzt in diesem Fall $y = a+(b+cz)x$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} a^2+(b+cz)(d+ez) &= a^2+2ax(b+cz)+(b+cz)^2x^2 \\ d+ez &= 2ax+bx^2+cx^2z. \end{aligned}$$

Man erhält also folgende Werte für z bzw. y :

$$z = \frac{d-2ax-bx^2}{cx^2-e}, \quad y = \frac{-ae+(cd-be)x-ax^2}{cx^2-e}.$$

Andere Fälle verlangen wiederum andere Kniffe. Manchmal ist es zum Beispiel von

Vorteil y auf die Form $y = \sqrt{a^2z^2 + (b + cz)(d + ez)}$ zu bringen. Setzt man dann $y = az + (b + cz)x$, bekommt man nach Gleichsetzen, Quadrieren und Umformen als Lösung der Aufgabe $z = \frac{bx^2 - d}{e - 2ax - cx^2}$, $y = \frac{-ad + (be - cd)x - abx^2}{e - 2ax - cx^2}$.

Die gerade behandelten Substitutionen, die die Auffindung eines rationalen Ausdrucks für die Quadratwurzel aus einem quadratischen Trinom ermöglichen, heißen heute “Eulersche Substitutionen” [Gelfond 1983, S.105]. Dazu sei noch ein konkretes Beispiel vorgeführt:

• Beispiel 4:

Gegeben: $y = \sqrt{-1 + 3z - z^2}$

Gesucht: Ein rationaler Ausdruck für y .

Lösung: Nach Überführung von y auf die Form $y = \sqrt{1 - 2 + 3z - z^2} = \sqrt{1 - (1 - z)(2 - z)}$ setzt Euler $y = 1 - (1 - z)x$. Nach Durchführung der üblichen Operationen erhält er $-2 + z = -2x + x^2 - x^2z$, woraus folgt, dass $z = \frac{2 - 2x + x^2}{1 + x^2}$ und $1 - z = \frac{-1 + 2x}{1 + x^2}$ ist. Letztlich schließt Euler: $y = 1 - (1 - z)x = \frac{1 + x - x^2}{1 + x^2}$.

Da von den gezeigten Fällen abweichende Funktionen nicht mit Hilfe einer rationalen Substitution in eine rationale Form transformiert werden können, zielt Euler auf eine andere Art der Vereinfachung ab.

• Beispiel 5:

Gegeben: Eine Funktion y von z , für die gilt: $ay^\alpha + bz^\beta + cy^\gamma z^\delta = 0$.

Gesucht: Eine neue Variable x , mit der man die Werte von z und y explizit darstellen kann.

Lösung: Ein allgemeines direktes Verfahren zur Lösung der obigen Aufgabe ist Euler unbekannt; er kann also weder y durch z noch umgekehrt ausdrücken. Durch den Ansatz $y = x^m z^n$ geht die gegebene Gleichung jedoch in folgende über: $ax^{\alpha m} z^{\alpha n} + bz^\beta + cx^{\gamma m} z^{\gamma n + \delta} = 0$. Für die Bestimmung des Exponenten n , so dass der Wert von z aus der neuen Gleichung gefunden werden kann, hat man drei Möglichkeiten.

Möglichkeit 1. $\alpha n = \beta$, also $n = \frac{\beta}{\alpha}$. Nach Division durch $z^{\alpha n} = z^\beta$ erhält man

$ax^{\alpha m} + b + cx^{\gamma m} z^{\gamma n - \beta + \delta} = 0$, woraus folgt: $z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}} \right)^{\frac{1}{\gamma n - \beta + \delta}}$. Durch Erweitern mit der Hochzahl α und dem Austausch von αn durch β resultiert: $z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}} \right)^{\frac{\alpha}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}$ und schließlich $y = x^m \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}} \right)^{\frac{\beta}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}$.

Möglichkeit 2. $\beta = \gamma n + \delta$, also $n = \frac{\beta - \delta}{\gamma}$. Dann liefert die zur letzteren analoge Vorgehensweise: $ax^{\alpha m} z^{\alpha n - \beta} + b + cx^{\gamma m} = 0$

$$\Rightarrow z = \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}} \right)^{\frac{1}{\alpha n - \beta}} = \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}$$

$$\Rightarrow y = x^m \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}} \right)^{\frac{\beta - \delta}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}$$

Möglichkeit 3. $\alpha n = \gamma n + \delta$, also $n = \frac{\delta}{\alpha - \gamma}$. Der übliche Prozess führt dann zu

$$ax^{\alpha m} + bz^{\beta - \alpha n} + cx^{\gamma m} = 0$$

$$\Rightarrow z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b} \right)^{\frac{1}{\beta - \alpha n}} = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b} \right)^{\frac{\alpha - \gamma}{\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\delta}}$$

$$\Rightarrow y = x^m \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b} \right)^{\frac{\delta}{\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\delta}}$$

Nach Einsetzen einer beliebigen Zahl (ausser 0) für m kann man den Ausdrücken die optimale Form geben. Ein konkretes Beispiel wird nun zur Veranschaulichung durchexerziert:

- Beispiel 6:

Gegeben: Die durch die Gleichung $y^3 + z^3 - cyz = 0$ definierte Funktion in y .

Gesucht: Eine neue Variable x , mit der man die Werte von y und z explizit darstellen kann.

Lösung: Verglichen mit dem theoretischen Beispiel 5 ist hier $a = -1$, $b = -1$, $\alpha = 3$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$ und $\delta = 1$. Euler setzt nun $m = 1$ und erhält folgende Ergebnisse.

Möglichkeit 1. $z = \left(\frac{x^3 + 1}{cx} \right)^{-1} = \frac{cx}{1 + x^3}$, $y = x \left(\frac{x^3 + 1}{cx} \right)^{-1} = \frac{cx^2}{1 + x^3}$.

Möglichkeit 2. $z = \left(\frac{cx - 1}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{x} \sqrt[3]{cx - 1}$, $y = x \left(\frac{cx - 1}{x^3} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{x} \sqrt[3]{(cx - 1)^2}$.

Möglichkeit 3. $z = (cx - x^3)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(cx - x^3)^2}$, $y = x(cx - x^3)^{\frac{1}{3}} = x \sqrt[3]{cx - x^3}$.

Daraus lässt sich ablesen welcher Art die Gleichungen zwischen y und z sein müssen, um durch den vorgeführten Algorithmus mittels Einführung einer neuen Variablen x gelöst werden zu können.

Im Rest des Kapitels behandelt Euler die verschiedensten Gleichungen, durch die y und z verbunden sein können und zeigt weitere Wege zur Auffindung einer neuen Variablen x zur rationalen bzw. expliziten Darstellung der beiden anderen Variablen y und z .

Gegen Ende des Kapitels formuliert Euler noch den folgenden interessanten Satz:

Sind in einer Gleichung zwischen y und z als Summen der Exponenten von y und z in den einzelnen Gliedern nur drei verschiedene Zahlen enthalten, zwischen denen eine konstante Differenz besteht, kann können y und z mit Hilfe einer quadratischen Gleichung durch eine neue Variable x ausgedrückt werden [Euler 1983, 3. Kapitel, S.36–48].

2.5.3 Die Funktion einer komplexen Variablen

Im Jahr 1777 benutzte Euler zum ersten Mal das Symbol “ i ”, für das gilt: $i^2 = -1$. Dieses Symbol wie auch der Name “komplexe Zahl” setzten sich aber erst durch die Verwendung von Gauß durch. Die Definition einer imaginären Zahl von Euler lautete in seiner “Vollständigen Anleitung zur Algebra” sinngemäß:

Eine Größe heisst imaginär, wenn sie weder größer als Null, noch kleiner als Null, noch gleich Null ist.

Gleichzeitig merkt er aber auch an, dass diese Bedingungen ebenso unmöglich wie der Ausdruck $\sqrt{-1}$ oder genereller $a + b\sqrt{-1}$ seien. Trotz dieser Zweifel zeigt Euler die Abgeschlossenheit der Menge der komplexen Zahlen $z = a + bi$ bezüglich algebraischer und bei entsprechender Einschränkung auch betreffend der zu seiner Zeit bekannten transzendenten Operationen. Aufgrund dessen behauptet er sogar, dass jede wie oben definierte imaginäre Größe immer in der Form $M + N\sqrt{-1}$ geschrieben werden kann [Wußing 1979, S.232].

Bei seinen Untersuchungen über Funktionen einer komplexen Variablen erreicht Euler durch die schon von Johann Bernoulli benutzte Substitution $z = x + iy$ das revolutionäre Ergebnis für das uneigentliche reelle Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (2.109)$$

Die mehrmalige Anwendung der Formel $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ auf die Funktion $y = \sin \frac{x}{2^k}$ für $k = 1, 2, 3, \dots$ führt ihn zugleich auf die Darstellung [Fellmann 1983, S.46f.]:

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k}. \quad (2.110)$$

Schon im Jahr 1777 stellte Euler die für die Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen wichtigen Gleichungen

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y} \quad (2.111)$$

auf. Das Integral

$$\int Z(z) dz = \int (M \pm iN) d(x \pm iy) = V(z) = P \pm iQ \quad (2.112)$$

bildet dabei die Basis für die Annahme, dass $Mdx - Ndy$ und $Ndx + Mdy$ integriert werden können, woraus die Gleichungen (2.111) resultieren. Weiters werden die Integrale $\int z^n \partial z$, $\int \frac{\partial z}{1+z^2}$, $\int \frac{\partial z}{1+z^3}$ sowie $\int \frac{z^{n-1} \partial z}{1+z^n}$ betrachtet, wobei $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ist [Müller 1907, S.99].

Ogleich es nicht unbedingt der Theorie der Funktion einer komplexen Variablen zuzuordnen ist, möchte ich dieses Kapitel mit der Dokumentation des Inhalts eines Briefes von Euler an Goldbach vom 4. 6. 1746 ausklingen lassen. Er schreibt darin, dass der Ausdruck $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ anscheinend reell ist und den Wert 0.2078795763 hat. Da

$$i^i = e^{i \lg i} = e^{\left(\frac{\pi i}{2} + 2k\pi i\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi} \quad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.113)$$

ist, kann i^i tatsächlich unendlich viele reelle Werte annehmen. Euler war also dem Hauptwert ($k = 0$) von i^i auf die Spur gekommen, von dem ausgehend er nur kurze Zeit später

$$\lg i = \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i \quad (2.114)$$

entdeckte [Fellmann 1983, S.46].

2.5.4 Die “Introductio” von Euler

Eulers zweibändige “Introductio in Analysin Infinitorum” ist erstmals im Jahr 1748 in Lausanne herausgegeben worden. Das Werk erfreute sich im 18. und 19. Jahrhundert solch großer Beliebtheit, dass acht weitere Auflagen erschienen und es auch ins Deutsche und Französische übersetzt wurde [Walter 1983, S.5]. Der erste Band beinhaltet dabei alle für ein umfassendes Verständnis der Analysis nötigen (meist algebraischen) Methoden und Ergebnisse. Im Mittelpunkt des zweiten Bandes steht die analytische Geometrie, insbesondere die Auffindung der geometrischen Eigenschaften von Kurven und Flächen ausgehend von den Gleichungen durch die diese dargestellt werden [Gelfond 1983, S.103]. Für mich hier und allgemein ist jedoch nur der erste Band von Interesse und er ist es auch, der gemeint ist, wenn man von *der* “Introductio” spricht. Um einen Eindruck des Umfangs dieses Werkes zu vermitteln, wird nun das Inhaltsverzeichnis angeführt [Volkert 1988, S.139f.]:

1. Von den Funktionen überhaupt
2. Von der Umformung der Funktionen
3. Von der Umformung der Funktionen durch Substitution
4. Von der Darstellung der Funktionen durch unendliche Reihen
5. Von den Funktionen zweier oder mehrerer Veränderlicher
6. Von den Exponentialgrößen und den Logarithmen
7. Von der Darstellung der Exponentialgrößen und der Logarithmen durch Reihen
8. Von den transzendenten Zahlgrößen, welche aus dem Kreise entspringen

9. Von der Aufsuchung der trigonometrischen Faktoren
10. Von dem Gebrauche der unendlichen Produkte bei der Bestimmung der Summen unendlicher Reihen
11. Von anderen unendlichen Ausdrücken für die Bogen und die Sinus
12. Von der Entwicklung der gebrochenen Funktionen in reeller Form
13. Von den rekursiven Reihen
14. Von der Vervielfachung und Teilung der Winkel
15. Von den Reihen, welche aus der Entwicklung von Produkten entspringen
16. Von der Zerlegung der Zahlen in Teile
17. Von dem Gebrauche der rekurrenten Reihen bei der Berechnung der Wurzeln der Gleichungen
18. Von den Kettenbrüchen

Aus der Fülle von Resultaten sollen neben den bereits ausführlich dargestellten noch einige besonders bedeutsame zumindest genannt werden: die Standardisierung der trigonometrischen Funktionen in der heute gebräuchlichen Form, der erste Beweis der Formel von Moivre und der sogenannten Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, die Untersuchung der Eulerschen Zahlen, die Entwicklung der Zahl π in ein unendliches Produkt, Eulers bekannte Formel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-x}}$, die Thetafunktion. Obwohl Euler oftmals mangelnde Strenge bei der Beweisführung von neu formulierten Erkenntnissen unterstellt wird, gilt die “Introductio” als “großer Wurf”. Sie ist eine gelungene Verbindung von bekanntem Wissen mit neuen Ergebnissen Eulers.

2.6 Differentialrechnung

Die zur Analysis des Unendlichen gehörige Differentialrechnung erfuhr durch Eulers unzählige Entdeckungen eine große Bereicherung. Neben der Erstellung seines Lehrbuchs “Institutiones calculi differentialis” arbeitete er sorgfältig Formeln für die Ableitung unter der Substitution von Variablen aus, formulierte und bewies einen Satz über homogene Funktionen, bewies das Theorem von Nikolaus I Bernoulli (für $z = f(x, y)$ gilt $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$) und verwendete Taylorreihen um Extrema von $f(x)$ zu finden, um nur einige seiner Ergebnisse auf dem Gebiet zu nennen [Dickson u. Khwarizmi 1970, S.746].

In seinem im Jahr 1755 erschienenen Werk zur Differentialrechnung definiert Euler diese sinngemäß als Methode das Verhältnis der verschwindend kleinen Zuwächse (Incremente) zu eruieren, die die Funktionen von Variablen aufgrund eines äusserst geringen Zuwachses der Variablen erfahren. Obwohl diese verschwindenden Incremente (mit der Bezeichnung Differentiale) strenggenommen gleich Null sind, kann ihr Verhältnis zueinander durch endliche Werte beschrieben werden. Im Gegensatz zu Leibniz, Berkeley oder Newton versteht Euler also unter den Differentialen reale Nullen und unter dem Differentialquotienten (dem vorher zitierten Verhältnis) einen Bruch, der “geometrisch gesehen” eine endliche Größe darstellt, dessen Zähler und Nenner “arithmetisch gesehen” jedoch Nullen sind.

Um dem Leser einen kleinen Überblick über Eulers Aufbau des Lehrbuchs zu vermitteln, wird dieser mit Hilfe eines Schemas veranschaulicht (siehe Abbildung 2.6). Da eine

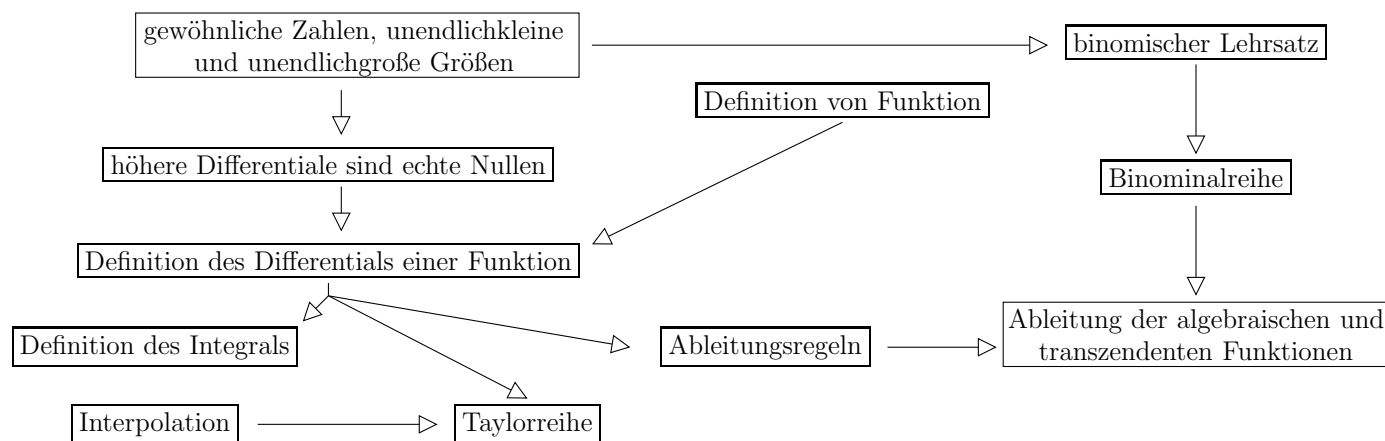


Abbildung 2.6: Eulers Aufbau der Differentialrechnung (aus [Volkert 1988, S.151])

Behandlung all dieser Themenbereiche den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, werde ich mich im weiteren Verlauf exemplarisch mit zwei Schwerpunkten daraus beschäftigen.

2.6.1 Von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen

In dem genannten Werk widmet Euler ein eigenes Kapitel (das dritte) dem Thema “Über die unendlichgroßen und die unendlichkleinen Größen”. Mit seiner Aussage, dass unendlichkleine Größen in der Mathematik wirklich gleich Null sind, hoffte Euler, das Mysterium und die Doppeldeutigkeit von Behauptungen wie “Das unendlich Kleine ist kleiner als jede beliebige Größe” oder dem Axiom von Johann Bernoulli, dass das Hinzufügen einer unendlichkleinen Zahl zu einer Größe diese nicht ändert, beseitigen zu können. Da $n \cdot 0 = 0$ für alle $n \in \mathbb{R}$ gilt, kann der Quotient $\frac{0}{0}$ tatsächlich jeden Wert annehmen und daher schließt

er, dass

$$\frac{n}{1} = \frac{0}{0} \quad (2.115)$$

ist. Da die Nullen ein bestimmtes Verhältnis zueinander haben, unterscheidet Euler zwei Arten von Gleichheit: a und b sind arithmetisch gleich, wenn deren Differenz gleich Null ist und geometrisch gleich, wenn deren Quotient gleich eins ist. Die unendlichkleinen Größen drücken also die unterschiedlichen geometrischen Verhältnisse bei arithmetischer Gleichheit aus [Volkert 1988, S.152f.]. Euler bezeichnet eine unendlichkleine Zahl mit dx , daher ist $dx = 0$ und $a \, dx = 0$ für jede endliche Zahl a . Diese beiden verschiedenen Nullen dürfen jedoch nicht durcheinandergebracht werden, wenn man den Quotienten $\frac{a \, dx}{dx} = a$ untersucht.

In ähnlicher Weise kann auch $\frac{dy}{dx}$ für einen endlichen Quotienten stehen, obwohl dx und dy gleich Null sind. Somit besteht die Infinitesimalrechnung für Euler im Wesentlichen darin, den Quotienten von unendlichkleinen Differentialen zu ermitteln. Dabei können unendlichkleine Größen vernachlässigt werden, da diese im Vergleich zu endlichen verschwinden. Für ein unendlichkleines dx gilt nämlich arithmetisch $a + dx = a - dx = a + n \, dx = a - n \, dx = a$ (für $n \in \mathbb{N}$). Daher ist $a + n \, dx = a$ und $\frac{a + n \, dx}{a} = 1$. Diese Zahlen sind also auch geometrisch gleich [Volkert 1988, S.153]. Auch die Vernachlässigbarkeit von höheren Potenzen von unendlichkleinen Zahlen beweist Euler mittels derartigen Argumenten: Da $dx = 0$ ist, ist auch $(dx)^2 = 0$ und es folgt $dx + (dx)^2 = dx$. Andererseits erhält man aus der zuvor abgeleiteten Beziehung $1 + dx = 1$ zunächst $\frac{1 + dx}{1} = 1$ und im weiteren $\frac{dx + (dx)^2}{dx} = 1$. Dieses Argument kann man beliebig wiederholen, so dass man allgemein $dx + (dx)^{n+1} = dx$ für alle $n > 0$ erhält. Das Weglassen von höheren Potenzen von Differentialen verwendete Euler häufig zum Auffinden des Differentials dy , wenn y eine Funktion von x ist [Ferzola 2007, S.157].

Naheliegenderweise verhalten sich unendlichgroße Zahlen genau umgekehrt wie unendlichkleine: während alle unendlichkleinen Größen arithmetisch gleich, möglicherweise aber geometrisch verschieden sind, sind alle unendlichgroßen Zahlen geometrisch gleich, jedoch arithmetisch unterschiedlich. Betrachtet man beispielsweise die beiden endlichen Größen a und b , dann sind $\frac{a}{dx} + b$ und $\frac{a}{dx}$ unendlichgroß. Da $\left(\frac{a}{dx} + b\right) - \frac{a}{dx} = b \neq 0$ (für $b \neq 0$), aber $\frac{\left(\frac{a}{dx} + b\right)}{\frac{a}{dx}} = 1 + \frac{b}{a} dx = 1$ gilt, liegt hiermit ein Beispiel für diese Aussage vor [Volkert 1988, S.153].

Während des 18. Jahrhunderts brachte man oft gegen die Differentialrechnung vor, dass all deren Formeln inkorrekt seien, da die Herleitungen auf dem Prinzip der Vernachlässigung unendlichkleiner Summanden basieren. Euler glaubte eine solche Kritik rein durch die Voraussetzung, dass alle unendlichkleinen Zahlen und Differentiale gleich Null seien,

vermeiden zu können. Aus diesem Grund arbeitete er einen eigenen Kalkül der Nullen aus. Obwohl das Konzept nicht widersprüchlich in sich selbst war, hatte es keinen Bestand, da es mit zu vielen Lücken behaftet war. Ein konsistentes Fundament für die Analysis zu schaffen, war letztlich erst durch die Interpretation der unendlichkleinen Größen als gegen den Grenzwert Null strebende Variablen möglich [Dickson u. Khwarizmi 1970, S.746].

Mit Hilfe der Non-Standard-Analysis kann man jedoch Eulers Zugang im heutigen Sinne präzisieren, so dass sich sein Vorgehen als völlig exakt erweist.

2.6.2 Grundlegende Begriffe und Definitionen

Alle in diesem Kapitel behandelten Berechnungen sind Bestandteil von Eulers “Institutiones calculi differentialis” und basieren auf Eulers algebraischer, d.h. auf der Grundlage der Reihenentwicklung aufgebauten Art der Differentiation. Das erste Differential von $y = f(x)$, wobei dx das Inkrement von x und P , Q , R und S Funktionen von x darstellen, wird folgendermaßen gebildet:

$$y^I = y + P \, dx + Q(dx)^2 + R(dx)^3 + S(dx)^4 + \dots \quad (2.116)$$

Daher ist

$$dy = P \, dx + Q(dx)^2 + R(dx)^3 + S(dx)^4 + \dots \quad (2.117)$$

Wir zuvor dargestellt wurde, sind höhere Potenzen von dx im Vergleich zu dx ohne Einfluss, so dass sich für das erste Differential dy von $y = P \, dx$ ergibt [Volkert 1988, S.148f.].

Ein bemerkenswertes Charakteristikum, das sich durch sämtliche Berechnungen Eulers zieht, ist die Verwendung von Potenzreihen als Ausdrucksmittel von Funktionen von Beginn an, jedoch ohne jegliche Erörterung von Fragen der Konvergenz. Da bei der Ermittlung von Ableitungen die Reihen stets im Endlichen abgebrochen werden, hat das auf das exakte Ergebnis keinen Einfluss.

Um das Differential dy für eine Potenzfunktion $y = x^n$ (mit $n \in \mathbb{R}$) zu erhalten, verwendet Euler wie üblich die Binominalentwicklung. Vermehrt man x um eine unendlichkleine Größe dx , dann erfährt y eine Änderung von dy , wobei dy folgendermaßen eruiert wird:

$$\begin{aligned} dy &= (x + dx)^n - x^n \\ &= nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1!}x^{n-2}(dx)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!}x^{n-3}(dx)^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.118)$$

Aufgrund der Vernachlässigung von Differentialen ab der Ordnung 2, ergibt sich für das (erste) Differential dy der Ausdruck $n x^{n-1}dx$. Newton und Leibniz stellten ähnliche Berechnungen an, um die Ableitung der Potenzfunktion zu finden. Auch heutzutage verläuft die

Herleitung der Differentiation von Potenzfunktionen mit positiven ganzzahligen Exponenten analog, wobei jedoch stets ein Grenzübergang verwendet wird: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$. Ebenfalls analog zu heutigen Herleitungen ist Eulers Beweis für die Produktregel:

$$\begin{aligned} d(pq) &= (p + dp)(q + dq) - pq \\ &= p \, dq + q \, dp + dp \, dq \\ &= p \, dq + q \, dp . \end{aligned} \tag{2.119}$$

Die dritte Zeile resultiert dabei wie üblich aus der zweiten unter Vernachlässigung von Differentialen höherer Ordnung.

Einzigartig wegen der Verwendung einer geometrischen Reihe ist Eulers elegante Herleitung der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q + dq} &= \frac{1}{q} \left(\frac{1}{1 + \frac{dq}{q}} \right) \\ &= \frac{1}{q} \left(1 - \frac{dq}{q} + \frac{(dq)^2}{q^2} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{q} - \frac{dq}{q^2} . \end{aligned} \tag{2.120}$$

Daraus folgt für $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

$$\begin{aligned} d\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{p + dp}{q + dq} - \frac{p}{q} \\ &= (p + dp) \frac{1}{q + dq} - \frac{p}{q} \\ &= (p + dp) \left(\frac{1}{q} - \frac{dq}{q^2} \right) - \frac{p}{q} \\ &= \frac{dp}{q} - \frac{p \, dq}{q^2} \\ &= \frac{q \, dp - p \, dq}{q^2} . \end{aligned} \tag{2.121}$$

Der Vorteil in der Verwendung von Potenzreihen bei der Differentiation zeigt sich besonders bei transzendenten Funktionen. Um etwa die (natürliche) Logarithmusfunktion abzuleiten verwendet Euler die Mercatorreihe:

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \tag{2.122}$$

Mit $y = \ln(x)$ folgt:

$$\begin{aligned}
 dy &= \ln(x + dx) - \ln(x) \\
 &= \ln\left(1 + \frac{dx}{x}\right) \\
 &= \frac{dx}{x} - \frac{(dx)^2}{2x^2} + \frac{(dx)^3}{3x^3} - \dots \\
 &= \frac{dx}{x} .
 \end{aligned} \tag{2.123}$$

Als weiteres Beispiel seien die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ vorgeführt. Deren Reihenentwicklung lautet:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\
 \text{(ii)} \quad \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots ,
 \end{aligned} \tag{2.124}$$

Zunächst folgen daraus $\sin(dx) = dx$ und $\cos(dx) = 1$. Euler erhält nun die gesuchten Ableitungen durch Substitution von dx in Gleichung (2.124(i)) und (2.124(ii)), der Vernachlässigung von Differentialen höherer Ordnung sowie dem Gebrauch des Additionstheorems für den sinus,

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a . \tag{2.125}$$

Die Anwendung von Gleichung (2.125) liefert Euler nämlich folgendes:

$$\begin{aligned}
 dy &= \sin(x + dx) - \sin x \\
 &= \sin x \cos dx + \sin dx \cos x - \sin x \\
 &= \sin x + \cos x dx - \sin x \\
 &= \cos x dx .
 \end{aligned} \tag{2.126}$$

Verglichen mit allen anderen Berechnungsmöglichkeiten, speziell mit der heute üblichen Grenzwertbildung für die Ableitung von $y = \sin x$, ist das die schönste und effektivste Art. Um das zu illustrieren, sei die Berechnung vorgeführt:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos(\Delta x) + \sin(\Delta x) \cos x - \sin x}{\Delta x} \\
 &= \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} + \sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} .
 \end{aligned} \tag{2.127}$$

Dann erhält man $y' = \cos x$, wenn man folgende zwei Grenzwerte verwendet:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \\
 \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= 0 .
 \end{aligned} \tag{2.128}$$

Der erste der beiden Grenzwerte ist in Eulers Gleichung $\sin(dx) = dx$ erfasst und der zweite ist vergleichbar mit seiner Gleichung $\cos(dx) = 1$ oder $\cos(dx) - 1 = 0$. Zwar ist Eulers Ableitung rechentechnisch kürzer als der gegenwärtige Standardzugang, jedoch benötigt er die Reihenentwicklung von Sinus und Cosinus.

Was Funktionen in mehreren Variablen betrifft, so bieten Eulers „Institutiones“ die erste systematische Darstellung davon. Euler versteht unter einer Funktion von n Variablen einen endlichen oder unendlichen Ausdruck, der diese Variablen beinhaltet. Gleich nach der Einführung dieser Funktionen spricht er die Frage nach der Beziehung unter den Differentialen aller beteiligten Variablen an und beweist dabei folgendes Ergebnis: Wenn $V = f(x, y, z)$ ist, dann gilt $dV = p \, dx + q \, dy + r \, dz$, wobei p , q und r Funktionen von x , y und z sind. Diese Formel leitet Euler heuristisch her: Wenn X eine Funktion von x alleine ist und um eine unendlichkleine Größe dx vermehrt wird, ergibt sich mit Hilfe des üblichen Arguments bei einer Variablen $dX = P \, dx$. Ähnliches gilt dabei für Y und Z als Funktionen von jeweils y und z alleine und man erhält also analog: $dY = Q \, dy$ sowie $dZ = R \, dz$. Für $V = X + Y + Z$ folgt daher $dV = dX + dY + dZ = P \, dx + Q \, dy + R \, dz$ und $V = XYZ$ liefert $dV = (X + P \, dx)(Y + Q \, dy)(Z + R \, dz) - XYZ$. Aus dem Weglassen der Differentiale höherer Ordnung, wie beispielsweise $ZPQ \, dx \, dy$ resultiert dann $dV = YZP \, dx + ZXQ \, dy + XYR \, dz$. Aus diesen beiden Beispielen schließt Euler, dass jeder algebraische Ausdruck von x , y und z das Differential

$$dV = p \, dx + q \, dy + r \, dz \quad (2.129)$$

hervorbringt (da eine algebraische Funktion in drei Variablen als Summe von Produkten dieser Variablen aufgefasst werden kann) und verallgemeinert das Ergebnis für einen beliebige Anzahl von Variablen.

Später greift Euler das Konzept der partiellen Differentiation auf. Wenn y und z konstant gehalten werden, dann gilt laut Gleichung (2.129) $dV = p \, dx$ (weil ja keine Änderung in y oder z vorliegt) und in weiterer Folge $p = \left(\frac{dV}{dx}\right)$, wobei die Klammern einen erinnern, dass p dem Differential von V in Bezug auf die Variable x entspricht. Ähnliche Bedeutungen gelten für $q = \left(\frac{dV}{dy}\right)$ und $r = \left(\frac{dV}{dz}\right)$. Das war Eulers Schreibweise und Verständnis der partiellen Differentiation. Das heute gängige Symbol ∂ , das ursprünglich von Legendre stammt, wurde im Jahr 1840 von Jacobi wiedereingeführt und erlangte allgemeine Akzeptanz. Obwohl Euler dies nicht explizit anschreibt, steht Gleichung (2.129) offensichtlich für

$$dV = \left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV}{dz}\right) dz . \quad (2.130)$$

Nach der Differentialrechnung für Funktionen in einer Variablen und der darauf folgenden Darstellung der Differentiale von Funktionen in mehreren Variablen behandelt Euler

die Integralrechnung [Ferzola 2007, S.157–162].

Gewisse Grundlagenfragen, die heutzutage von größerem Belang sind, wie die Bedeutung des Definitionsbereiches einer Funktion oder Differenzierbarkeitsfragen, spielen bei Euler, der mit den Funktionstermen abstrakt arbeitet, keine Rolle [Volkert 1988, S.151].

2.7 Reihen

Ab der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts wurde die Theorie der unendlichen Reihen immer wichtiger, da sie sich als äußerst wirkungsvolles Instrument zur Lösung einer Vielzahl von mathematischen Fragestellungen erwies. Euler holte sich diesbezüglich Anregungen von Arbeiten Fermats und Wallis' sowie dem Werk des Jesuiten a S. Vincentio. Dabei beschäftigte ihn anfangs das sogenannte "Baslerproblem", nämlich den Wert der Summe der unendlichen Folge der reziproken Quadratzahlen

$$S_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (2.131)$$

festzustellen, von dem man wusste, dass er endlich ist. Während keiner der berühmten Basler Mathematikerdynastie der Bernoullis eine Lösung dafür fand, gelang Euler im Jahr 1735 mit dem Ergebnis $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$ der Durchbruch. Dieses Resultat erhielt Euler als Spezialfall der Bestimmung der Summe S_{2k} der reziproken Potenzen der natürlichen Zahlen mit geraden Exponenten, die folgendes liefert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \zeta(2k) = a_{2k} \pi^{2k}, \quad (2.132)$$

wobei ζ für die von B. Riemann eingeführte Zetafunktion steht und a_{2k} die Koeffizienten der sogenannten "Euler-Maclaurinschen Summenformel" (siehe Kapitel 2.7.2) sind. Die im Zuge dessen von Euler entdeckten Ergebnisse $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$ sowie $S_4 = \frac{\pi^4}{90}$ wurden dann von Johann Bernoulli im Jahr 1742 in seiner "Opera" ohne Nennung des wirklichen Urhebers als die eigenen ausgegeben.

Auch die sogenannten "Eulerschen Zahlen" treten bei einer Reihenentwicklung auf, und zwar zum ersten Mal in den "Institutiones" aus dem Jahr 1755 als Koeffizienten der Secansreihe

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad (2.133)$$

Die ersten vier Eulerschen Zahlen lauten: $E_0 = 1$, $E_2 = -1$, $E_4 = 5$ und $E_6 = -61$. Auch führte Euler die heutzutage Fourier-Reihen genannten trigonometrischen Entwicklungen ein. Das grundlegende Beispiel

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad \text{für } 0 < x < k \quad (2.134)$$

wurde zwar erst im Jahr 1755 in den “Institutiones” gedruckt, tauchte jedoch schon 11 Jahre zuvor in einem Brief Eulers an Goldbach auf.

Von außerordentlicher Wichtigkeit für die Arbeit mit Reihen war die Frage nach deren Konvergenz bzw. nach der Zulässigkeit divergenter Reihen [Fellmann 1983, S.41–45]. Eulers Einstellung zu diesem Thema wird Gegenstand des folgenden Kapitels sein.

2.7.1 Konvergente und divergente Reihen

Unendliche Reihen wurden verwendet, lange bevor es irgendeine Art von Konvergenztheorie dafür gab. Euler und vor ihm Leibniz und Newton gelangten auf natürlichem Weg mittels gewöhnlicher Berechnungen, Koeffizientenvergleich oder auch aufgrund geometrischer Betrachtungen zu ihnen. Man schuf also nicht das Symbol der unendlichen Zahlenfolgen, um anschließend mit ihm zu arbeiten. Im Gegenteil, die Sachlage verhielt sich genau umgekehrt und daher kümmerten sich die damaligen Mathematiker auch kaum um Konvergenzfragen [Knopp 1964, S.473f.].

Durch Euler angeregt, der großes Interesse an diesem Gebiet entfachte, gleichzeitig jedoch auch mit seinen Gedanken diesbezüglich verwirrte, begann man sich ungefähr im Jahr 1730 intensiv mit Reihen auseinanderzusetzen. So etwa argumentierte Euler folgendermaßen um die Summe von $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ zu erhalten: Da

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (2.135)$$

ist, bekommt man für $x = -1$ die Summe $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ und für $x = -2$ die Summe $\frac{1}{3} = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots$. Als weiteres der zahlreichen Beispiele solcher Behauptungen in Eulers Arbeiten kann man die Entwicklung

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots \quad (2.136)$$

nennen, die für $x = 1$ das Resultat $\frac{1}{4} = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ liefert. Euler benutzte damals also die Entwicklung von Funktionen in Reihen, um die Summe gewisser divergenter Reihen zu eruieren. Für $x = -1$ schloss er aus Gleichung (2.136)

$$\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots \quad (2.137)$$

und $x = 2$ eingesetzt in Gleichung (2.135) eröffnete ihm

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots \quad (2.138)$$

Da die rechte Seite von Gleichung (2.138) größer als die rechte Seite von Gleichung (2.137) sein sollte, sollte die Summe von $1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$ auch über ∞ hinausgehen. Euler

schloss daraus, dass ∞ eine Art von Grenze zwischen den positiven und negativen Zahlen sein muss und insofern der Null entspricht.

Weiters betonte Euler in einer Abhandlung, dass Reihen nur für jene Werte von x , für die sie konvergieren, genutzt werden können und trotzdem folgert er in derselben Arbeit $\cdots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = 0$. Als Erklärung dafür führt er die beiden Entwicklungen $\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \cdots$ und $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots$ an. Summiert man die linken Seiten erhält man Null, wogegen sich die Summe der beiden rechten Seiten als die angegebene Reihe ergibt [Kline 1972, S.446ff.].

Im allgemeinen brach Euler die unendlichen Reihen bei einem unendlichsten Glied ab, beispielsweise in der im Jahr 1734 erschienenen Abhandlung “De progectionibus harmonicis observationes”. Hier trifft man auch auf Eulers Version des “Cauchyschen” Konvergenzkriteriums – laut Euler konvergiert eine Reihe, was gleichbedeutend mit einem endlichen Summenwert ist, wenn sie nach einem unendlichsten Glied nicht mehr (d.h. nur um eine unendlichkleine Größe) wächst. Mit seiner Formel

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\Omega} \approx \lg(\Omega + 1) + \gamma \approx \lg \Omega + \gamma \quad (2.139)$$

(wobei Ω für eine unendlichgroße Zahl und γ für die Eulersche Konstante steht) berechnet Euler die Reihensumme

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{3}{9} + \cdots \quad (2.140)$$

Dazu schreibt er die Reihe als Differenz der divergenten Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{\frac{\Omega+3}{2}} \approx \lg(\Omega + 3) + \lg \Omega - \lg 2 + \gamma \quad (2.141)$$

und der mittels Partialbruchzerlegung bearbeiteten Reihe

$$\begin{aligned} & \frac{2}{2} + \frac{3}{5} + \frac{4}{9} + \frac{5}{14} + \cdots + \frac{\Omega+1}{\frac{\Omega+3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\Omega} \right) + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{\Omega+3} \right) \\ &\approx \frac{2}{3} (\lg \Omega + \gamma) + \frac{4}{3} \left(\lg(\Omega + 3) + \gamma - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \end{aligned} \quad (2.142)$$

an. Dies liefert ihm dann:

$$\begin{aligned} S &= \lg(\Omega + 3) + \lg \Omega - \lg 2 + \gamma - \frac{2}{3} \lg \Omega - \frac{2}{3} \gamma - \frac{4}{3} \lg(\Omega + 3) - \frac{4}{3} \gamma + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \\ &= -\frac{1}{3} \lg(\Omega + 3) + \frac{1}{3} \lg \Omega - \lg 2 - \gamma + \frac{22}{9} . \end{aligned} \quad (2.143)$$

Da Ω unendlich groß ist, kann man $\lg(\Omega + 3)$ durch $\lg \Omega$ ersetzen und erhält schließlich [Laugwitz 1983, S.187f.]

$$S = \frac{22}{9} - \gamma - \lg 2 . \quad (2.144)$$

Euler führt auch eine noch heute bekannte und verwendete Methode der Transformation von Reihen ein. Gegeben ist dabei eine Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n , \quad (2.145)$$

von der er mit Hilfe von formalen algebraischen Schritten zeigt, dass folgendes gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}} , \quad (2.146)$$

wobei Δ^n die n -te endliche Differenz bezeichnet und

$$\Delta^n a_0 = \Delta^{n-1} a_1 - \Delta^{n-1} a_0 = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} a_i \quad \text{für } n \geq 2 \quad (2.147)$$

ist. Vom modernen Standpunkt aus liegt der Vorteil dieser Transformation im Überführen einer konvergenten Reihe in eine rascher konvergierende Reihe; auf divergente darf sie nicht angewendet werden. Euler, der ja üblicherweise nicht zwischen konvergenten und divergenten Reihen unterschied, sah in der Transformation dagegen auch die Möglichkeit der Umwandlung von divergenten in konvergente Reihen. Wendet man nämlich Gleichung (2.146) auf $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ an, liefert die rechte Seite von Gleichung (2.146) $\frac{1}{2}$. Gleichmaßen ergibt Gleichung (2.146) für die Reihe $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - \dots$ mittels Einsetzen $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{8}(1) + \frac{1}{16}(-1) + \dots = \frac{1}{3}$.

Ersichtlich sind diese Ergebnisse dieselben, die Euler durch die früher beschriebene Anwendung der Formel für die geometrische Reihe erhält. Euler ist ein großer Manipulierer, der den Weg zu einer Vielzahl von Resultaten, die später streng begründet wurden, aufzeigte [Kline 1972, S.452f.].

Den Gegenstand der Reihensummierung bearbeitete Euler auch in seiner bedeutenden Abhandlung “Über divergente Reihen” aus den Jahren 1754/55, in der er den Unterschied zwischen konvergenten und divergenten Reihen aufgriff. In Bezug auf die ersteren sagte er, dass solche Reihen, bei denen man durch konstantes Addieren von Gliedern immer näher an eine fixe Zahl herankommt (was notwendigerweise nach sich zieht, dass die Glieder kontinuierlich kleiner werden) als konvergent bezeichnet werden und ihre Summe eben diese fixe Zahl ist. Divergent heißen Reihen laut Euler dann, wenn ihre Glieder nicht kleiner werden und sogar wachsen können. Im Falle dessen sollte man den Ausdruck “Summe” nicht

verwenden, da dies auf eine tatsächliche Addition hinweisen würde. Zur Erklärung, was er mit einem definitivem Wert einer divergenten Reihe meint, legt Euler ein allgemeines Prinzip dar: Er betont, dass die divergenten Reihen von endlichen algebraischen Ausdrücken kommen und der Wert der Reihen der Wert des algebraischen Ausdrucks ist, von dem diese Reihe abstammt. Wann auch immer man eine unendliche Reihe als Entwicklung eines beliebigen abgeschlossenen Ausdrucks erhält, darf man sie in mathematischen Operationen als Äquivalent dieses Ausdrucks benutzen, selbst für Werte der Variable, für die die Reihe divergiert [Kline 2007, S.108f.]. Als Beispiele für divergente Reihen führt Euler folgende vier Paare an:

- $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$
 $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \dots$
- $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$
 $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} + \dots$
- $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$
 $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$
- $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$
 $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \dots$

Er lässt dabei nicht ausser Acht, dass solche Reihen die Ursache von großen Meinungsverschiedenheiten unter den Mathematikern waren, von denen einige bestritten und andere bestätigten, dass man eine derartige Summe finden könnte. Seiner Meinung nach sollte die erste Reihe der Liste den Wert unendlich haben, da sie als geometrische Reihe den Wert $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$ besitzt, der für Euler gleich unendlich ist [Sandifer 2007b, S.178].

In seinem Werk zur Differentialrechnung im Jahr 1755 wiederholt Euler sein Prinzip betreffend des Wertes einer divergenten Reihe am Beispiel der Reihe $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$. Da für ihn die Summe einer beliebigen unendlichen Reihe stets der endliche Ausdruck der Entwicklung ist, die die Reihe erzeugt, folgert er, dass $\frac{1}{1+x}$ für die Summe dieser Reihe steht. Ist man sich hierbei einig, fällt laut Euler die neue Definition des Begriffs "Summe" mit der üblichen Bedeutung für eine konvergente Reihe zusammen. Insofern als divergente Reihen keine Summe im eigentlichen Sinn des Wortes besitzen, kann keine Schwierigkeit aufgrund dieser Terminologie entstehen. Auf diese Weise kann man den Nutzen der divergenten Reihen einsehen und ihre Verwendung gegen alle Einwände verteidigen. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass Euler diese Methode auf Potenzreihen beschränkte [Kline 2007, S.109f.]. Das Missachten dieser Voraussetzung kann nämlich Probleme verursachen. So könnte beispielsweise die schon öfter zitierte Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$, die für $x = -1$

aus dem Ausdruck $\frac{1}{1-x}$ entspringt und dann den Wert $\frac{1}{2}$ hat, auch von anderen analytischen Ausdrücken herrühren und daher andere Werte liefern. Abweichende Möglichkeiten der Erzeugung dieser Reihe wären beispielsweise die (Dirichletsche) Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{4^x} + \dots \quad \text{für } x = 0 \quad (2.148)$$

oder die Reihe

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = \frac{1-x^2}{1-x^3} = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + \dots \quad \text{für } x = 1. \quad (2.149)$$

Im letzteren Fall ergibt sich $\frac{2}{3}$ als Wert der Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$; obwohl man bei der (Dirichletschen) Reihe den Wert nicht eindeutig feststellen kann, so könnte er doch von $\frac{1}{2}$ differieren. Eulers Grundsatz im Umgang mit divergenten Reihen war also alles andere als sicher und lediglich sein ausgeprägter mathematischer Instinkt schützte ihn vor Fehlern.

Der Konvergenzbegriff wurde schließlich erst von Cauchy (1821) und Abel (1826) geklärt, die gleichzeitig auch die divergenten Reihen verwarfen [Knopp 1964, S.475].

2.7.2 Euler-MacLaurinsche Summenformel

In seinem Werk “Ars conjectandi” führte Johann Bernoulli im Jahr 1713 im Zuge der Behandlung der Wahrscheinlichkeit die heute viel benützten Bernoulli Zahlen ein. Er gab dabei ohne Beweis folgende Formel für die Summe der Potenzen von aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen an:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^c &= \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} B_2 n^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} B_4 n^{c-3} + \\ &+ \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_6 n^{c-5} + \dots, \end{aligned} \quad (2.150)$$

wobei diese Reihe mit der letzten positiven Potenz von n abbricht und die B für die Bernoulli Zahlen stehen: $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, ... Gleichzeitig gab Bernoulli auch die Rekursionsrelation an, die die Berechnung dieser Koeffizienten ermöglicht. Eulers Leistung bezüglich Gleichung (2.150) liegt in der Verallgemeinerung der Bernoulli-Formel, die heute unter dem Namen Euler-MacLaurinsche Summenformel bekannt ist. Sei $f(x)$ eine reellwertige Funktion der reellen Variablen x mit $2k+1$ stetigen Ableitungen im Intervall $[0, n]$. Dann lautet Eulers Formel in der heute gebräuchlichen

Schreibweise:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n f(i) &= \int_0^n f(x) + \frac{1}{2}[f(n) - f(0)] + \frac{B_2}{2!}[f'(n) - f'(0)] + \frac{B_4}{4!}[f'''(n) - f'''(0)] + \cdots + \\ &\quad + \frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)] + R_k \end{aligned} \quad (2.151)$$

mit dem Restglied $R_k = \int_0^n f^{(2k+1)}(x)P_{2k+1}(x)dx$. Hier sind n und k positive ganze Zahlen und $P_{2k+1}(x)$ ist das $(2k+1)$ -te Bernoulli Polynom, das für $0 \leq x \leq 1$ durch

$$P_{2k+1}(x) = 2(-1)^{k+1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi mx)}{(2\pi m)^{2k+1}} \quad (2.152)$$

dargestellt werden kann. Die Bernoulli Zahlen B_i stehen dabei folgendermaßen in Verbindung mit den Bernoulli Polynomen:

$$P_k(x) = \frac{x^k}{k!} + \frac{B_1 x^{k-1}}{1!(k-1)!} + \frac{B_2 x^{k-2}}{2!(k-2)!} + \cdots + \frac{B_k}{k!}, \quad (2.153)$$

wobei $B_1 = -\frac{1}{2}$ und $B_{2k+1} = 0$ für $k = 1, 2, 3, \dots$ ist. Heute werden die Bernoulli Zahlen oft mittels einer von Euler stammenden Relation definiert, nämlich

$$t(e^t - 1)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \frac{t^i}{i!}. \quad (2.154)$$

Eulers Herleitung seiner Summenformel (Gleichung (2.151)) ist wegen der Verwendung der Infinitesimalrechnung zur Behandlung endlicher Reihen interessant. Gleich zu Beginn hält Euler fest, dass, wenn $s(n) = \sum_{i=0}^n f(i)$ ist, sich folgendes ergibt:

$$\begin{aligned} f(n) &= s(n) - s(n-1) \\ &= -[s(n-1) - s(n)] \\ &= \frac{ds}{dn} - \frac{1}{2!} \frac{d^2 s}{dn^2} + \frac{1}{3!} \frac{d^3 s}{dn^3} - \cdots \end{aligned} \quad (2.155)$$

Auflösen nach $\frac{ds}{dn}$ und Integrieren liefert somit:

$$s = \int f dn + \frac{1}{2!} \frac{ds}{dn} - \frac{1}{3!} \frac{d^2 s}{dn^2} + \cdots \quad (2.156)$$

Um nun die Summe s mittels f ausdrücken zu können, verwendet man eine Rekursion. Durch wiederholtes Differenzieren von Gleichung (2.156) erhält man:

- $\frac{df}{dn} = \frac{d^2s}{dn^2} - \frac{1}{2!} \frac{d^3s}{dn^3} + \frac{1}{3!} \frac{d^4s}{dn^4} - \dots$, daher ist $\frac{d^2s}{dn^2} = \frac{df}{dn} + \frac{1}{2!} \frac{d^3s}{dn^3} - \dots$
- $\frac{d^2f}{dn^2} = \frac{d^3s}{dn^3} - \frac{1}{2!} \frac{d^4s}{dn^4} + \frac{1}{3!} \frac{d^5s}{dn^5} - \dots$, daher ist $\frac{d^3s}{dn^3} = \frac{d^2f}{dn^2} + \frac{1}{2!} \frac{d^4s}{dn^4} - \dots$
- usw.

Setzt man diese Werte in Gleichung (2.156) ein, bekommt man

$$\begin{aligned}
 s = \int f dn + \frac{1}{2!} \left[f + \frac{1}{2!} \left(\frac{df}{dn} + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2f}{dn^2} + \dots \right) \right) - \frac{1}{3!} \left(\frac{d^2f}{dn^2} + \dots \right) \right] - \\
 - \frac{1}{3!} \left(\frac{df}{dn} + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2f}{dn^2} + \dots \right) + \dots \right) + \frac{1}{4!} \left(\frac{d^2f}{dn^2} - \dots \right) - \dots
 \end{aligned} \tag{2.157}$$

Euler schreibt dies zunächst als

$$s = \int f dn + \alpha f + \frac{\beta df}{dn} + \frac{\gamma d^2f}{dn^2} + \frac{\delta d^3f}{dn^3} + \dots \tag{2.158}$$

und substituiert s und seine Ableitungen in Gleichung (2.156), um die Rekursionsrelation für die Koeffizienten von f , $\frac{df}{dn}$, $\frac{d^2f}{dn^2}$, $\dots$ und schließlich Gleichung (2.151) zu erhalten.

Für den Fall, dass n in der Euler-MacLaurinschen Summenformel unendlich groß wird, divergiert die Reihe für beinahe alle $f(x)$, die in Anwendungen auftauchen. Dennoch approximieren sich die Reihe und das Integral oft, so dass man, je nachdem welcher Wert von beiden leichter berechenbar ist, den anderen als mögliches Ergebnis erhält, das dann auf andere Weise verifiziert werden muss.

MacLaurin gelangte unabhängig von Euler im Jahr 1742 zur selben Summenformel, wobei seine Methode aber etwas exakter und näher an der heute üblichen war. Das Restglied wurde erstmals von Poisson im Jahr 1827 genauer untersucht [Kline 2007, S.105–108].

2.7.3 Eulersche Zahl e

Die meisten Menschen, die eine höhere Schulausbildung durchlaufen haben, verbinden mit dem Namen “Leonhard Euler” als populärste seiner Entdeckungen die sogenannte “Eulersche Zahl e ”. Diese irrationale, sogar transzendente Zahl mit dem Wert 2,718281828... wird einerseits durch $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ als Grenzwert einer Folge (für $n \in \mathbb{N}$) bzw. einer Funktion (für $n \in \mathbb{R}$) oder andererseits durch $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ als Reihe definiert. Die Eulersche Zahl e genießt große Bedeutung als Basis des natürlichen Logarithmus und der natürlichen Exponentialfunktion und findet häufig Anwendung in der Differential- und Integralrechnung. Im Vergleich zu den im Kapitel 3.3.1 diskutierten, nicht ganz unproblematischen,

Einführungen von e in österreichischen Schulbüchern ist es an dieser Stelle natürlich interessant, sich der Einführung, die der Schöpfer seiner Zahl zuteil werden lässt, zuzuwenden. Dazu behandelt Euler in seiner "Introductio" im Vorfeld die Reihenentwicklung der allgemeinen Potenzfunktion, die er wegen $a^0 = 1$ durch $a^z = 1 + kz$ beschreibt, wobei $a > 1$, z als unendlichkleine Zahl und die Konstante k als abhängig von a angenommen wird. Der Zusammenhang zwischen a und k ist dabei durch folgende Beziehung gegeben:

$$a = 1 + k + \frac{1}{1 \cdot 2}k^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}k^4 + \dots \quad (2.159)$$

Nach geleisteter Vorarbeit nimmt Euler nun die Basis a eines Logarithmus so an, dass $k = 1$ wird, was eingesetzt in Gleichung (2.159) folgendes ergibt:

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \quad (2.160)$$

Anschließend berechnet er den Wert auf 23 Stellen genau:

$a = 2,718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,28$. Euler bezeichnet die Logarithmen die durch Verwendung dieser Basis entstehen, als natürlich oder hyperbolisch, da sie eine Möglichkeit zur Quadratur der Hyperbel darstellen. Zugleich führt er die Abkürzung e für diese Basis ein.

Aus $e^z = 1 + z$ für unendlichkleine z und $(e^z)^\Omega = (1 + z)^\Omega = e^v$ für unendlichgroße Ω erhält man

$$e^v = 1 + \frac{v}{1} + \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots, \quad (2.161)$$

womit sich auch die Entwicklung der allgemeinen Potenzfunktion, $a = e^{\ln a}$, zu

$$a^v = 1 + \frac{(\ln a)v}{1} + \frac{(\ln a)^2 v^2}{1 \cdot 2} + \frac{(\ln a)^3 v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots, \quad (2.162)$$

mit $k = \ln a$ ergibt [Volkert 1988, S.144ff.].

Für den Beweis der Irrationalität von e benützt Euler das Hilfsmittel der Kettenbrüche, wobei die allgemeinste Darstellung eines solchen folgende Form hat:

$$a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\delta}{e + \frac{\varepsilon}{f + \dots}}}}}$$

Dabei sind vor allem jene Kettenbrüche besonders interessant, bei denen alle Zähler gleich 1 sind; sie werden meist als regulär bezeichnet. Da die reguläre Kettenbruchentwicklung genau der rationalen Zahlen endlich ist, muss man nun lediglich zeigen, dass diese Entwicklung für e unendlich ist. Dazu betrachtet Euler die Zahl $\frac{e-1}{2} \approx 0,859\,140\,914\,229\,5 = \frac{8\,591\,409\,142\,295}{10\,000\,000\,000\,000}$. Deren Kettenbruchentwicklung beginnt mit $a = 0$, $b = 1$, $c = 6$,

$d = 10, e = 14, f = 18, g = 22$. An dieser Stelle bricht Euler ab mit dem Argument, dass die Glieder im Weiteren eine arithmetische Reihe bilden würden. Somit schließt Euler

$$\frac{e-1}{2} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \frac{1}{22 + \dots}}}}} . \quad (2.163)$$

Beachtenswert ist hierbei, dass die “arithmetische Reihe” nicht mit dem ersten Nenner beginnt, sondern erst mit der Zahl 6 anfängt und danach alle darauffolgenden Nenner jeweils um 4 wachsen. Jedenfalls kann das kein endlicher Kettenbruch sein. Somit ist $\frac{e-1}{2}$ nicht rational, so dass es auch e nicht sein kann [Sandifer 2007b, S.186f.].

Eng verbunden mit der Zahl e ist auch die sogenannte “Eulersche Formel” $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, die Euler in seiner “Introductio” in etwas abgewandelter Form herleitet. Um seine Gedanken besser nachvollziehen zu können, muss man jedoch etwas weiter ausholen und deshalb beginne ich mit seiner Vereinheitlichung der trigonometrischen Funktionen in der heute gebräuchlichen Form. Euler verwendet dazu als Grundlage den Einheitskreis, bezeichnet dessen halben Umfang mit π und adaptiert bekannte Definitionen durch Bezugnahme auf den Bogen des Kreises. Auf diese Weise erhält er die üblichen Werte der Winkelfunktionen $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1, \sin \pi = 0, \cos \pi = -1, \sin \frac{1}{2}\pi = 1, \cos \frac{1}{2}\pi = 0, \dots$ Behilflich bei der Auffindung anderer Werte sind Additionstheoreme sowie die Reihenentwicklung für Sinus und Cosinus, zu der Euler folgendermaßen gelangt: Ausgehend von $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ (wobei z für einen beliebigen Kreisbogen des Einheitskreises steht) liefert die Faktorisierung der linken Seite

$$(\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) = 1 . \quad (2.164)$$

Die Additionstheoreme ermöglichen nun unter der Voraussetzung, dass auch y ein Kreisbogen ist, folgende Rechenschritte:

$$\begin{aligned} (\cos z + i \sin z)(\cos y + i \sin y) &= \\ &= \cos z \cos y + i \cos z \sin y + i \sin z \cos y - \sin z \sin y \\ &= (\cos z \cos y - \sin z \sin y) + i(\cos z \sin y + \sin z \cos y) \\ &= \cos(z + y) + i \sin(z + y) . \end{aligned} \quad (2.165)$$

Auf analoge Weise bekommt man:

$$(\cos z - i \sin z)(\cos y - i \sin y) = \cos(z + y) - i \sin(z + y) . \quad (2.166)$$

Nach Gleichsetzung von z und y und anschließender “Verallgemeinerung” erhält Euler die bereits A. Moivre bekannten Beziehungen

$$\begin{aligned}(\cos z + i \sin z)^n &= \cos nz + i \sin nz \quad \text{bzw.} \\(\cos z - i \sin z)^n &= \cos nz - i \sin nz .\end{aligned}\tag{2.167}$$

Die Addition bzw. Subtraktion der zwei Gleichungen liefert dann:

$$\begin{aligned}\cos nz &= \frac{(\cos z + i \sin z)^n + (\cos z - i \sin z)^n}{2} \\ \sin nz &= \frac{(\cos z + i \sin z)^n - (\cos z - i \sin z)^n}{2i} .\end{aligned}\tag{2.168}$$

Euler setzt nun den Exponenten des Binoms gleich der unendlichgroßen Zahl N , wählt gleichzeitig den Bogen z unendlichklein und benennt das so entstehende endliche Produkt Nz mit v . Formt man $v = Nz$ zu $z = \frac{v}{N}$ um, gilt da z unendlichklein ist, $\frac{v}{N} = z = \sin z$ und $1 = \cos z = \cos \frac{v}{N}$. Verwendet man diese Beziehungen in Gleichung (2.168), so erhält man

$$\begin{aligned}\cos v &= \frac{\left(1 + \frac{vi}{N}\right)^N + \left(1 - \frac{vi}{N}\right)^N}{2} \\ \sin v &= \frac{\left(1 + \frac{vi}{N}\right)^N - \left(1 - \frac{vi}{N}\right)^N}{2i} .\end{aligned}\tag{2.169}$$

Da Euler schon im 6. Kapitel der *Introductio* die Beziehung $e^Z = \left(1 + \frac{Z}{N}\right)^N$ hergeleitet hat, gilt somit:

$$\begin{aligned}\cos v &= \frac{1}{2} (e^{vi} + e^{-vi}) \\ \sin v &= \frac{1}{2i} (e^{vi} - e^{-vi})\end{aligned}\tag{2.170}$$

bzw. [Volkert 1988, S.142ff.].

$$\begin{aligned}e^{vi} &= \cos v + i \sin v \\ e^{-vi} &= \cos v - i \sin v .\end{aligned}\tag{2.171}$$

Weitere Ausführungen zur Eulerschen Zahl sowie zur Eulerschen Formel folgen in den Kapiteln 3.3 und 3.5.

2.7.4 Euler-Mascheroni-Konstante γ

Die Eulersche Konstante γ mit dem Zahlenwert 0,577 215 66..., die üblicherweise als Limes von $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x} - \ln x$ für x gegen Unendlich definiert wird, sollte bezüglich

ihrer Interessantheit und Wichtigkeit gleich hinter den Konstanten π und e rangieren. Sie erlangte vor allem Bedeutung durch ihre Verbindung mit der Gammafunktion und ihr Auftreten in den Entwicklungen des Cosinus-, des Exponential- und des Logarithmusintegrals. Mathematikern ist γ aus ihrem Auftreten in folgender Formel bestens bekannt:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x} = \gamma + \ln x + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2x^2} + \frac{B_2}{4x^4} - \frac{B_3}{6x^6} + \cdots, \quad (2.172)$$

wobei $B_1, B_2, B_3, \dots$ für die Bernoulli Zahlen stehen.

Insbesondere zeigte Euler, wie man eine endliche Anzahl von Gliedern der einfachen harmonischen Reihe mit Hilfe der Logarithmusfunktion summieren kann. Dazu beginnt er mit

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \cdots \quad (2.173)$$

und formt die Gleichung zu

$$\frac{1}{x} = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} - \cdots \quad (2.174)$$

um. Durch Ersetzen von x durch $1, 2, 3, \dots, n$ erhält er dann folgendes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} &= \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots \\ \frac{1}{2} &= \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 16} - \frac{1}{5 \cdot 32} + \cdots \\ \frac{1}{3} &= \ln \frac{4}{3} + \frac{1}{2 \cdot 9} - \frac{1}{3 \cdot 27} + \frac{1}{4 \cdot 81} - \frac{1}{5 \cdot 243} + \cdots \\ &\vdots \\ \frac{1}{n} &= \ln \frac{n+1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{5n^5} + \cdots \end{aligned} \quad (2.175)$$

Nach Addieren unter Beachtung, dass jeder $\ln$ -Term die Differenz zweier $\ln$ -Terme ist, erhält Euler:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} &= \ln(n+1) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{n^3}\right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{n^4}\right) - \cdots \end{aligned} \quad (2.176)$$

oder

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + \gamma, \quad (2.177)$$

wobei γ die Summe der unendlichen Menge der endlichen arithmetischen Summen repräsentiert. Der Wert von γ ist von n abhängig, strebt jedoch für n gegen Unendlich zu einem festen Wert γ . Dieser wurde von Euler näherungsweise als 0,577 215 664 901 532 8

berechnet [Kline 1972, S.449f.]. Mascheroni dehnte die Genauigkeit der Berechnung auf das Doppelte davon aus, weshalb diese Konstante heute als Euler-Mascheroni-Konstante bezeichnet wird [Glaisher 2007, S.149f.].

Da

$$\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (2.178)$$

für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht, kann man γ auch folgendermaßen definieren, wie das heute meist üblich ist:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) . \quad (2.179)$$

Bis heute ist unbekannt, ob γ rational oder irrational ist [Kline 1972, S.450]. Die weitere Behandlung des Themenbereichs erfolgt in Kapitel 3.4.

Kapitel 3

Leonhard Eulers Bedeutung für den Schulunterricht – Möglichkeiten der Einführung schulrelevanter Ergebnisse sowie ein Auszug von Beispielen und Aufgaben dazu aus mehreren Schulbüchern

3.1 Eulersche Gerade

Unter der “Eulerschen Geraden” versteht man jene Gerade, auf der sowohl der Höhenschnittpunkt H , als auch der Umkreismittelpunkt U und der Schwerpunkt S eines Dreiecks liegen, wobei $\overline{SH} = 2\overline{SU}$ gilt. In Abbildung 3.4 bezeichnen h_a, h_b, h_c die Höhenlinien, u_a, u_b, u_c die Seitensymmetralen und s_a, s_b, s_c die Schwerlinien der jeweiligen Seiten.

3.1.1 Einführung der Eulerschen Geraden im Schulunterricht der Unterstufe

Die Einführung der Eulerschen Geraden, die in der 2. Klasse (6. Schulstufe) im Rahmen des Geometrieunterrichts über das Dreieck stattfindet, wird im folgenden anhand mehrerer österreichischer Schulbücher behandelt. Allen diesen Lehrbüchern ist gleich, dass im Vorfeld

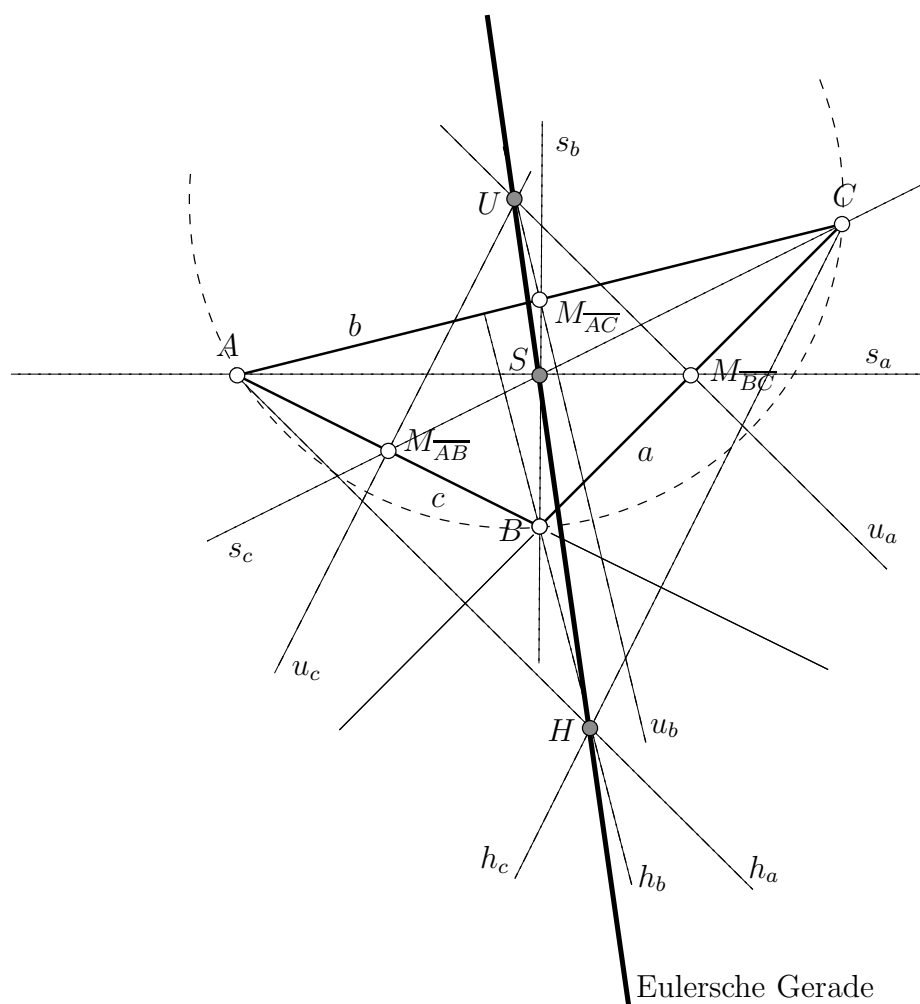


Abbildung 3.1: Die Eulersche Gerade

schon die Konstruktion und die Eigenschaften von Dreiecken sowie ihre Winkelsumme, illustriert durch schon gelöste Beispiele, besprochen worden sind. Zahlreiche Übungsaufgaben sollen den Schülern dabei die nötigen Fertigkeiten im Umgang mit Dreiecken vermitteln. Der Inhalt des Abschnittes, der sich mit der Eulerschen Geraden beschäftigt, gestaltet sich im Prinzip in allen untersuchten Lehrbüchern ähnlich: Nachdem der Höhenschnittpunkt H , der Schwerpunkt S , der Umkreismittelpunkt U und der Innkreismittelpunkt I eines Dreiecks vorgestellt worden sind, wird Bezug darauf genommen, dass diese vier Punkte besondere, “merkwürdige” (des Merkens würdige) Punkte darstellen, da sich drei nicht parallele Geraden (in diesem Fall die drei Höhenlinien bzw. ihre Verlängerungen, die drei Schwerlinien, usw.) normalerweise nicht in einem einzigen Punkt schneiden. Die Begründung für die Vergabe dieses Adjektives führt jedoch nur [Reichel u. a. 2000, S.205] an. Anschließend folgt die Bemerkung, dass H , S und U auf einer gemeinsamen Geraden,

eben der Eulerschen Geraden liegen. Mit Ausnahme von [Floderer 1997, S.90] erwähnen alle Schulbücher den Ahnherrn dieser Bezeichnung. Auch fällt das Thema “Eulersche Gerade” für alle Autoren in den Bereich “Erweiterungsstoff”. Unterschiedlich ist lediglich die Art der Aufbereitung: [Achleitner u. a. 2006, S.93] und [Reichel u. a. 2000, S.205] setzen auf eine anschauliche Zugangsweise durch selbstgebastelte Dreiecke. [Floderer 1997, S.90] legt darauf wenig Wert – er präsentiert das Stoffgebiet kurz und bündig durch Anführung der Tatsachen. Selbsttätige Schülerarbeit und eigenständiges Nachdenken wird hier also nicht wirklich gefördert.

3.1.2 Übungsaufgaben zur Eulerschen Geraden in österreichischen Schulbüchern der Unterstufe

So wie der theoretische Hintergrund sind auch die dazugehörigen Übungsaufgaben als schwieriger gekennzeichnet. Wahrscheinlich ist deshalb in jedem untersuchten Lehrbuch bloß eine Übungsaufgabe, die sich mit der “Eulerschen Geraden” beschäftigt, vorhanden. Da man sich in der 2. Klasse auf reine Konstruktionen beschränken muss, ist der Aufbau dieser überall bis auf geringe Unterschiede analog. Ein Dreieck ist jeweils durch drei Bestimmungsstücke gegeben, wobei die Angaben etwas im Schwierigkeitsgrad variieren: [Floderer 1997, S.90] hat sich für die leichteste Möglichkeit entschieden und legt das Dreieck durch die drei Seitenlängen fest. [Reichel u. a. 2000, S.205] wie auch [Achleitner u. a. 2006, S.93] gehen vom besagten Angabentypus aus und schreiten dann zu einem schwierigerem fort, bei dem auch Winkel für die Konstruktion verwendet werden müssen. Abgesehen von dieser Differenz soll sowohl in der Aufgabe 825 in [Reichel u. a. 2000, S.205], wie auch in den Aufgaben 579 in [Achleitner u. a. 2006, S.93] und 1073 in [Floderer 1997, S.90] das Dreieck samt den merkwürdigen Punkten H , U und S und der Eulerschen Geraden gezeichnet werden. Die Formulierung geht hierbei etwas auseinander: Während in [Reichel u. a. 2000, S.205] und [Achleitner u. a. 2006, S.93] nur das Einzeichnen der Eulerschen Geraden gefordert wird, verlangt [Floderer 1997, S.90] die Überprüfung der Lage der drei Punkte bezüglich der Geraden. Abschließend sei noch eine Übungsaufgabe aus dem an österreichischen Schulen am häufigsten verwendeten Lehrbuch [Reichel u. a. 2000, S.205] mit konkreten Zahlenangaben angeführt:

“Aufgabe 825d. Konstruiere das gegebene Dreieck ABC und die Punkte H , U und S ! Zeichne die Eulersche Gerade ein! $a=130$ mm, $b=74$ mm, $\alpha=66^\circ$.”

3.1.3 Wiederholung der Eulerschen Geraden im Schulunterricht der Oberstufe

Auch in einigen Schulbüchern der Oberstufe wird die Eulersche Gerade behandelt. So taucht sie etwa bei [Taschner 1998, S.174ff.] für die 5. Klasse AHS im Rahmen des Kapitels “Punkte, Vektoren, Geraden” im Bereich “Schneidende, parallele und gleiche Geraden” auf. Im Verlauf einer Übungsaufgabe zum Erweiterungsstoff wird die Eulersche Gerade erklärt und anschließend wird in mehreren Aufgaben mit ihr gerechnet. Erwähnenswert ist das Thema “Eulersche Gerade” weiters für [Bernhard 2002a, S.29] als Zusatz in einer Aufgabensammlung für die 5. Klasse im Zusammenhang “Ebene Koordinatengeometrie – Lagebeziehungen zweier Geraden”, wobei in der Anmerkung am Rand der Seite die Eulersche Gerade definiert wird. In [Novak u. a. 1990, S.179,S.183] kommt die Eulersche Gerade im Kapitel “Analytische Geometrie in der Ebene” vor. Jedoch folgt hier auf die Definition nicht nur eine Skizze zur Veranschaulichung sondern auch die Bemerkung, dass der Schwerpunkt die Strecke $\overline{HU}$ innen im Verhältnis 2:1 aufteilt, sowie die Darstellung der verbalen Beschreibung durch die Formeln $\{S, H, U\} \subset e$ (wobei e die Eulersche Gerade symbolisiert) und $-2\overrightarrow{SU} = \overrightarrow{SH}$. Praktisch angewandt wird das Ganze dann in einem vorgerechneten Beispiel und einer Übungsaufgabe. Wie in letzterem Schulbuch zählt auch für [Götz u. a. 2007, S.177] die Eulersche Gerade interessanterweise nicht zum Zusatz- oder Erweiterungsstoff. Aufgegriffen wird das Thema im Bereich “Punkt, Gerade und Ebene – Lineare Geometrie”, offensichtlich unter der Annahme, dass den Schülern die Eulersche Gerade noch aus der Unterstufe bekannt ist. Daher wird auf eine ausführliche Definition verzichtet und lediglich im Rahmen von zwei Übungsaufgaben darauf hingewiesen, dass der Umkreismittelpunkt U , der Höhenschnittpunkt H und der Schwerpunkt S eines Dreiecks auf der sogenannten Eulerschen Geraden liegen und dafür $\overline{SH} = 2\overline{SU}$ gilt.

Abschließend sei bemerkt, dass die Eulersche Gerade wohl zwar weniger zum Kernstoff zählt, jedoch für Begabtere (Wahlpflichtfachgruppen) oder auch bei intensiverer Behandlung ausgesuchter Bereiche durch den Lehrer im regulären Unterricht interessante Anwendungsmöglichkeiten bietet.

3.1.4 Beispiele und Übungsaufgaben zur Eulerschen Geraden in österreichischen Schulbüchern der Oberstufe

Mengenmäßig am umfangreichsten fallen die Übungsaufgaben zur Eulerschen Geraden in [Taschner 1998, S.174ff.] für die 5. Klasse AHS aus, wobei der Autor gängige Rechenaufgaben, die zum Üben des Aufstellens von Geradengleichungen und des Schneidens von Geraden gedacht sind mit Aufgaben für Begabte, die Einblick in den mathematischen Hintergrund gewähren, mischt. Alle diese Aufgaben, bei denen es sich konkret um

Nr. 583, 584, 586 und 589 handelt, sind als Erweiterungstoff gekennzeichnet. Die beiden grundsätzlicheren Aufgaben (Nr. 584 und 586), die genau wie sämtliche andere von Taschner bewusst neutral (also weder im unpersönlichen “Sie”, noch im jovialen “Du”) formuliert sind, beschäftigen sich mit der zeichnerischen und rechnerischen Bestimmung von Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt eines durch die Koordinaten seiner Eckpunkte gegebenen Dreiecks und der anschließenden Bestätigung der Lage der drei Punkte auf der Eulerschen Geraden. Aufgabe 586 erweitert die Aufgabenstellung zusätzlich noch um Fragen zum Feuerbachschen Punkt¹, zu den Höhenfußpunkten und in weiterer Folge zum Neunpunktekreis² eines Dreiecks. Die etwas schwierigeren Aufgaben 583 und 589 beschäftigen sich mit Verständnisfragen und verlangen Begründungen von Tatsachen von den Schülern. Beispielsweise möchte Taschner in Aufgabe 583 wissen, warum jede der drei Höhenlinien gleichzeitig auch die Streckensymmetrale der zugehörigen Seite des Seitenparallelendreiecks ist. Einige weitere Fragen führen schließlich auf die geforderte Erklärung der Lage von Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt auf der Eulerschen Geraden. Aufgabe 589 versteht sich als Fortsetzung der vorangegangenen, bei der zu zeigen war, dass der Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks ABC durch $H = U + (\overrightarrow{UA} + \overrightarrow{UB} + \overrightarrow{UC})$, wobei U der Umkreismittelpunkt ist, berechnet werden kann, und soll aufgrund der Kürze der Angabe explizit angeführt werden:

“Aufgabe 589. Warum ist durch $X = U + t(\overrightarrow{UA} + \overrightarrow{UB} + \overrightarrow{UC})$ ($t \in \mathbb{R}$) eine Parameterdarstellung der Eulerschen Geraden gegeben?”

In [Taschner 1998, S.174ff.] wird also sehr viel Wert auf das inhaltliche Verständnis des Stoffs und auf die Schulung der Fähigkeit, Dinge begründen und Sachverhalte erklären zu können, gelegt. Aufgrund dieser Gestaltung und Zielsetzung hebt sich [Taschner 1998, S.174ff.] deutlich von anderen für die 9. Schulstufe gedachten Lehrbüchern ab.

So wirken im Vergleich dazu die beiden nahezu analogen Aufgaben 10.35 und 10.36 in [Bernhard 2002a, S.29] simpel. Hier sollen der Umkreismittelpunkt bzw. der Höhenschnittpunkt eines durch die Koordinaten der Eckpunkte gegebenen Dreiecks berechnet sowie dieses graphisch durch eine Skizze veranschaulicht werden. Lediglich der Zusatz besteht im Ermitteln einer Parameterdarstellung der Eulerschen Geraden. Dafür muss der Schüler ja nur wissen, dass der Umkreismittelpunkt bzw. der Höhenschnittpunkt auf dieser Geraden liegen und des Aufstellens von Geradengleichungen mächtig sein. Aufgaben 10.35 und 10.36 sind also ohne Verständnis der Materie durch die bloße Kenntnis der nötigen Algorithmen zu lösen und fallen daher unter die Kategorie der Rechenaufgaben, bei denen das alleinige Auswendiglernen des “Lösungsrezeptes” eine volle Punkteanzahl bei der Schularbeit

¹Der Feuerbachsche Punkt eines Dreiecks ist der Umkreismittelpunkt des Seitenmittendreiecks.

²Der Neunpunktekreis eines Dreiecks ist jener Kreis, auf dem die Mittelpunkte der Dreiecksseiten, die Fußpunkte der Höhen sowie die Mittelpunkte der Strecken zwischen jeweils einer Dreiecksseite und dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks liegen.

garantiert.

[Novak u. a. 1990, S.179,S.183] ist durch die Wahl des ausgeführten Einstiegsbeispiels schon etwas kreativer – es wird unterstützt von einer Skizze gezeigt, wie man aus dem gegebenen Schwerpunkt und Umkreismittelpunkt eines Dreiecks den Höhenschnittpunkt berechnen und die Gleichung der Eulerschen Geraden aufstellen kann. Langweilig mutet leider dann die zugehörige Aufgabe 38 im Übungsteil an. Ähnlich wie in [Bernhard 2002a, S.29] sollen die drei merkwürdigen Punkte S , H und U eines Dreiecks aus der Angabe der Koordinaten der Eckpunkte und die Gleichung der Eulerschen Gerade ermittelt werden. Eine hinzugefügte Anleitung, man solle aus dem Verhältnis $-2\overrightarrow{SU} = \overrightarrow{SH}$, U unter vorheriger Berechnung von S und H bestimmen, erleichtert den Schülern noch zusätzlich die Bewältigung dieser nicht unbedingt anspruchsvollen Aufgabe. Die Forderung nach einer Skizze, die weniger Begabten die Situation veranschaulichen oder schematisch rechnenden Schülern einen weiteren Zugang liefern könnte, unterbleibt jedoch.

[Götz u. a. 2007, S.177] schließen sich mit den Aufgaben 564 und 565, die wahrscheinlich als Wiederholung des Stoffs aus den letzten Klassen gedacht sind, der bereits erwähnten Aufgabenart im Großen und Ganzen an. Aufgabe 564 besteht in der Berechnung von U , H , S eines durch die Koordinaten der Eckpunkte gegebene Dreiecks. Zusätzlich soll mit Hilfe des Hinweises $\overrightarrow{SH} = 2\overrightarrow{SU}$ gezeigt werden, dass die ermittelten Punkte auf der Eulerschen Geraden liegen. Die zweite Aufgabe unterscheidet sich jedoch (zumindest in der Angabe) etwas vom gewohnten Stil:

“Aufgabe 565. Die Geraden $a : x + y = 9$, $b : 7x + y = -27$ und $c : 7x - 5y = 51$ sind Trägergeraden der Seiten eines Dreiecks. Ermittle eine Gleichung der Eulerschen Geraden e ! Verifiziere, dass der Umkreismittelpunkt U , der Schwerpunkt S und der Höhenschnittpunkt H auf der Eulerschen Gerade e liegen! Berechne weiters das Verhältnis $\overline{US} : \overline{SH}$!”

Hier sind die Schüler bei der Lösung der Aufgabe zum Umdenken gezwungen, da ja zuerst einmal die in den anderen Aufgaben schon vorgegebenen Bestimmungsstücke des Dreiecks unter Einsetzung von vorhandenem Vorwissen herausgefunden werden müssen.

Insgesamt betrachtet regen jedoch die Aufgaben in [Taschner 1998, S.174ff.] wohl am meisten die Hirntätigkeit der Schüler an und tragen durch die unkonventionelleren Fragestellungen entscheidend zum Erwerb und vielfältigem Gebrauch von mathematischem/n Wissen und Fähigkeiten bei.

3.2 Eulersche Linie

Leonhard Euler trug entscheidend zur Entstehung der Graphentheorie bei, die aufgrund ihrer vielen Anwendungsmöglichkeiten große Bedeutung erlangte. Insbesondere geht auf den Schweizer Mathematiker die Idee der “Eulerschen Linie” zurück. Eine (geschlossene)

Eulersche Linie existiert dann, wenn die Kanten eines Graphen auf eine solche Art durchlaufen werden können, dass jede Kante auf dem Weg zum Ausgangsknoten genau ein Mal durchlaufen wird. Anschaulich kann eine Eulersche Linie beispielsweise durch den Graph in Abbildung 3.2 dargestellt werden. Eine mögliche (geschlossene) Kantenfolge ist hier $ABCDADAE$.

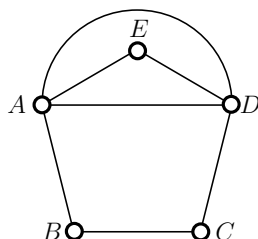


Abbildung 3.2: Beispiel für eine Eulersche Linie

Die folgenden Kapitel 3.2.1 und 3.2.2 sind der Behandlung der Eulerschen Linie in drei österreichischen Schulbüchern der Oberstufe gewidmet.

3.2.1 Einführung der Eulerschen Linie im Schulunterricht

Der Einstieg zu diesem Thema erfolgt in allen Lehrbüchern über das sogenannte “Königsberger Brückenproblem” (siehe Abbildung 3.3(a)). Dabei gehen [Bürger u. a. 2000a, S.272f.] auf die Eulersche Linie im Rahmen des Abschnitts “Graphen als Darstellungsmittel – Reise-routen” von allen untersuchten Werken am ausführlichsten ein. Die im heutigen Russland befindliche Stadt Königsberg (heute Kaliningrad, russische Exklave zwischen Polen und Litauen) liegt sowohl an den Ufern wie auch auf zwei Inseln des Flusses Pregel. Sieben Brücken gewährleisteten im 18. Jahrhundert die Verbindung der einzelnen Stadtteile.

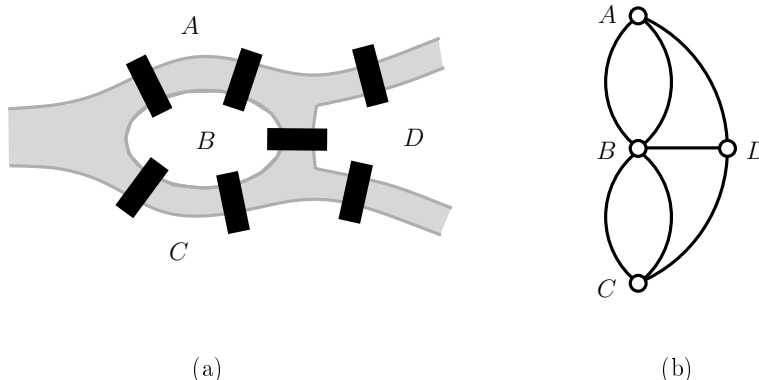


Abbildung 3.3: Das “Königsberger Brückenproblem”

Auf der Suche nach der Möglichkeit eines Rundganges, bei dem man jede Brücke exakt

einmal passiert um letztendlich zum Ausgangspunkt zu gelangen, stieß Euler auf die für dieses Problem günstige Darstellungsweise mittels einem Graphen (siehe Abbildung 3.3(b)). Äquivalent zu dieser Fragestellung ist die Untersuchung der Existenz einer Eulerschen Linie. Dieser Darstellung des Sachverhaltes schließen [Bürger u. a. 2000a, S.272f.] sogleich einen Aufruf zur Begründung des Fehlens einer solchen Linie in dem Fall an und bewegen damit die Schüler zur aktiven Auseinandersetzung mit dem Thema. Gefolgt von etlichen praktischen Anwendungsübungen bemerkt das Lehrbuch, dass ein Graph eine Eulersche Linie enthält, wenn jeder Knoten der Ausgangspunkt für eine gerade Anzahl von Kanten ist und vice versa. Den Abschluss dieses, für [Bürger u. a. 2000a, S.272f.] offensichtlich zum Kernstoff gehörigen Kapitels bildet ein kurzer Exkurs samt einer Übungsaufgabe zur (geschlossenen) Hamiltonschen Linie³.

Im Vergleich dazu gestalten [Szirucsek u. a. 1989, S.305] den entsprechenden Abschnitt im als “Basiswissen” gekennzeichneten Bereich “Darstellen und Analysieren von Daten und Beziehungsstrukturen – Beziehungsgraphen” eher knapp. Nach der Beschreibung des Königsberger Brückenproblems kommen die Autoren auf Eulers Beweis des Fehlens eines Weges in der obigen Art zu sprechen und geben als Begründung dafür die Existenz von mehr als zwei Knoten an, von denen eine ungerade Kantenanzahl ausgeht. Abgesehen von der etwas ausführlicheren Erklärung und der Verwendung des Begriffs “Grad eines Knotens” für die Anzahl der ausgehenden Kanten geben [Szirucsek u. a. 1989, S.305] den Schülern wenig Anstoß zu Eigeninitiative, da sie ihnen ja quasi die Lösung des Problems schon in den Mund legen. Auch die zwei zugehörigen Übungsaufgaben sind weder qualitativ noch quantitativ überzeugend. Aufwertend wirkt lediglich die Tatsache, dass bei der zweiten Aufgabe etwas Erfindergeist gefragt ist.

Während die beiden letzten Schulbücher der Eulerschen Linie einen richtigen Einstieg zuteil werden lassen, beschränkt sich [Taschner 1998, S.238] bei der Behandlung dieses Begriffs in seiner Ansicht nach zum Erweiterungsstoff gehörigen Kapitel “Mengen, Graphen, Relationen – Relationen und Graphen” auf zwei Übungsaufgaben. Ohne die Definition oder den Ausdruck “Eulersche Linie” zu erwähnen, stellt Taschner die Schüler vor die Herausforderung die Unlösbarkeit eines geringfügig abgewandelten “Königsberger Brückenproblems” sowie eine Verallgemeinerung von diesem zu beweisen.

Generell betrachtet erweist sich der Zugang zur “Eulerschen Linie” mit Hilfe des “Königsberger Brückenproblems” als recht anschaulich und für die Schüler ist die Bedeutung und der Nutzen der Graphentheorie für das alltägliche Leben dadurch gut nachvollziehbar. Die Anwendbarkeit auf eine Bandbreite an praktischen Problemstellungen wird hauptsächlich in [Bürger u. a. 2000a, S.272f.] deutlich herausgehoben.

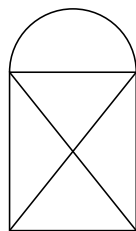
³Die Hamiltonsche Linie ist eine Linie, bei der jeder Knoten eines Graphen genau einmal passiert wird und die dann zum Ausgangsknoten zurückkehrt.

3.2.2 Beispiele und Übungsaufgaben zur Eulerschen Linie in österreichischen Schulbüchern der 5. Klasse AHS

Im Mittelpunkt dieses Kapitels stehen die Übungsteile der im vorigen Kapitel behandelten Lehrbücher im Hinblick auf Aufgabenstellung, Vielfalt, Praxisorientierung und Schwierigkeitsgrad. Wie schon erwähnt, begnügt sich [Taschner 1998, S.238] mit lediglich zwei Übungsaufgaben zur Eulerschen Linie. In Aufgabe 775 sollen die Schüler anhand eines (im Vergleich zu den sonst üblichen) sehr detaillierten Planes herausfinden, ob man von einem Gebäude von Königsberg aus dieses wieder erreichen kann, wenn man jede Brücke nur ein Mal passiert. Mit einem Hinweis ausgestattet, wie Kanten und Ecken des Graphen einzuzeichnen sind, soll der Plan zu diesem Zweck schematisiert werden. Die Erfassung der wesentlichen Informationen spielt hier die Hauptrolle. Anspruchsvoller ist Aufgabe 776, in der zu beweisen ist, dass ein Graph höchstens dann in einem geschlossenen Kantenzug durchlaufen werden kann, wenn an jeder Ecke eine gerade Anzahl von Kanten endet. Obwohl für die Lösung eine verbale Begründung ausreichend ist, müssen die Schüler hierfür doch einer gewissen mathematischen Logik mächtig sein. Auffallend bei der Formulierung der Aufgabenstellungen ist die Verwendung des Begriffs “Ecke” eines Graphen in Gegensatz zu dem sonst gebräuchlichen Vokabel “Knoten” dafür. Aufgrund der Tatsache, dass Taschner die Eulersche Linie nicht einmal beim Namen nennt und sie auch nur in zwei Aufgaben vorkommt, kann man sich des Eindrucks nicht erwehren, dass der Autor dieses Thema wohl für weniger wichtig hält.

[Szirucsek u. a. 1989, S.305] schließen dem vollständig ausgeführten Einstiegsbeispiel über das Königsberger Brückenproblem, in dem schon ausführlich die Unmöglichkeit der Existenz eines Weges der geforderten Art begründet wurde, zwei kurze Übungsaufgaben an. Die erste wird an dieser Stelle vollständig angeführt:

“Aufgabe 1261. Die nebenstehende Skizze soll in einem Zug mit lauter einfachen Linien gezeichnet werden. Überlege aufgrund von Aufgabe 1260, ob das möglich ist und in welchem Punkt begonnen werden kann. Führe die Aufgabe dann gegebenenfalls aus.”



Anhand der im Einstiegsbeispiel 1260 übermittelten Informationen stellt die Lösung der obigen Aufgabe für einen aufmerksamen Schüler wohl keine besondere Schwierigkeit dar.

Er weiss, dass ein solcher Weg nur dann existiert, wenn im Graphen keiner oder genau zwei Knoten von ungeradem Grad auftreten. Da in diesem Fall 2 Knoten vom Grad 4 und die anderen 2 Knoten vom Grad 3 sind, gibt es für diese Skizze zwei mögliche Kantenfolgen, die ihren Anfangs- bzw. Endpunkt jeweils in einem Knoten von ungeradem Grad haben. Jedoch stimmen diese Voraussetzungen meiner Meinung nach nicht mit der Definition einer Eulerschen Linie, bei der ja Anfangs- und Endpunkt ident sein müssen, überein. Die unpräzisen Formulierungen im Einstiegsbeispiel könnten die Schüler auf den Trugschluss führen, es handle sich bei diesen beiden möglichen Kantenfolgen, die die Figur in einem Zug durchlaufen, um Eulersche Linien. Aufgrund dieses Kritikpunktes empfindet man die folgende Aufgabe 1262 zum Thema, in der die Schüler eine ähnliche Aufgabe erfinden sollen und die sicherlich Kreativität, Verständnis und Begreifen von Zusammenhängen fördert, auch als zweifelhaft. Insgesamt betrachtet fehlen bei [Szirucsek u. a. 1989, S.305] wesentliche Details, die jedoch im Schulunterricht für die exakte Definition einer Eulerschen Linie notwendig sind. Deshalb sind auch die zwei, ansonsten passablen Übungsaufgaben, möchte man sie unter dem Titel “Eulersche Linie” anführen, weniger geeignet.

In [Bürger u. a. 2000a, S.272f.] wird die Eulersche Linie samt einer Fülle von Übungsaufgaben durchdacht präsentiert. Noch im Rahmen des erklärenden Einstiegstextes, der sowohl eine zeichnerische wie auch die zugehörige schematische Darstellung der Königsberger Brückenprobleme in Form eines Graphen beinhaltet, werden die Schüler (im Besitz des dazu nötigen Wissens) aufgefordert zu begründen, wieso in diesem Graphen keine Eulersche Linie existieren kann. Aufgaben 15.13 und 15.14 beschäftigen sich dann mit der Untersuchung der gegebenen Graphen in Bezug auf das Vorhandensein einer Eulerschen Linie sowie ihrer Angabe bzw. der Begründung für ihr Fehlen. In Aufgabe 15.15 sollen die Schüler einzelne Brücken aus der Skizze von Königsberg so weglassen, dass eine Eulersche Linie nun möglich ist, wobei es für die Lösung mehrere Varianten gibt. Diese drei Übungen zielen also auf die direkte Anwendung des erworbenen Wissens auf analoge Aufgabenstellungen ab. Praktisch nachvollziehbar mit Hilfe eines plastischen Drahtmodells ist Aufgabe 15.16, in der die Schüler herausfinden sollen, wieso es beim Tetraeder und Würfel im Gegensatz zum Oktaeder keine Eulersche Linie gibt. Auch Aufgabe 15.17 hat einen unbestrittenen Bezug zur Realität:

“Aufgabe 15.17. Plane eine Parkanlage oder eine Ausstellungshalle so, dass die Besucher das ganze Areal besichtigen können, ohne Wege mehrfach durchwandern zu müssen.”

Aufgabe 15.18 gleicht der Aufgabe 776 in [Taschner 1998, S.238]. Gesucht ist abermals der Beweis für die Existenz einer Eulerschen Linie unter der Voraussetzung, dass jeder Knoten des Graphen von geradem Grad ist. Allerdings soll diesmal differenziert werden, ob der betreffende Knoten der Anfang einer Eulerschen Linie ist oder nicht. Den Abschluss des Bereichs über Eulersche Linien bildet dann Aufgabe 15.19, in der es auch um die in den

anderen beiden Schulbüchern nicht erwähnte Hamiltonsche Linie geht. Zwei Graphen mit 6 Knoten, jedoch unterschiedlicher Kantenanzahl, die sowohl eine Eulersche als auch eine Hamiltonsche Linie besitzen, sollen gezeichnet werden.

Vergleicht man die drei behandelten Lehrbücher, kommt man zum Schluss, dass wohl [Bürger u. a. 2000a, S.272f.] am ehesten dem Anspruch gerecht wird, den Schülern die weitreichende Bedeutung der Graphentheorie auch für nicht rein mathematische, sondern alltägliche Belange zu vermitteln.

3.3 Eulersche Zahl e

Die weit über die Grenzen der Mathematik bekannte sogenannte “Eulersche Zahl” e bezeichnet eine irrationale, genauer transzendente reelle Zahl mit dem Wert 2,71828... Unter etlichen Darstellungsformen für e sind wohl die folgenden zwei Möglichkeiten die für den Schulunterricht relevanten: Einerseits lässt sich e als Grenzwert einer Folge bzw. Funktion (je nachdem ob $n \in \mathbb{N}$ oder $n \in \mathbb{R}$ gilt) auffassen:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (3.1)$$

Andererseits kann man e auch als Reihe ansehen:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \quad (3.2)$$

Die Eulersche Zahl e kommt in der Zinseszinsrechnung (stetige Verzinsung von Kapital), in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (beispielsweise in der bekannten “Rosinenbrot”-Aufgabe) sowie in den Naturwissenschaften (Wachstumsprozesse, radioaktiver Zerfall, Temperaturausgleichsvorgänge) vor. Jedoch stößt man mit der im Schulunterricht weitverbreiteten Verwendung der Zinseszinsrechnung bei der Einführung von e aufgrund deren Realitätsferne auf ein Urproblem des Mathematikunterrichts: ein Prozentsatz von 100 % oder Augenblicksverzinsung ist nämlich unreal. Die Kinder spüren gleich, dass etwas an den Haaren herbeigezogen wird, nur damit dann das herauskommt, was der/die LehrerIn will. Deswegen ist der Mathematikunterricht so unbeliebt! Auch viele Wachstumsprozesse können statt mit e^x genauso gut mit 2^x oder 3^x beschrieben werden – es gibt ja eigentlich nie ein kontinuierliches Wachstum auf lange Dauer. Am ehesten tritt dieses noch beim radioaktiven Zerfall auf, wodurch sich dieser Naturvorgang am besten als Zugang zur Eulerschen Zahl e im Schulunterricht eignen würde. Leider ist diese Ansicht bis jetzt in keinem österreichischen Schulbuch berücksichtigt worden.

Große Bedeutung genießt e zudem als Basis des natürlichen Logarithmus und der natürlichen Exponentialfunktion, die daher in der Literatur oft als e -Funktion abgekürzt

wird. Auch für die natürliche Exponentialfunktion, die im weiteren Verlauf mit “exp” oder e^x bezeichnet wird, werden zwei Varianten für die Definition verwendet: Analog zu e ist sie entweder der Grenzwert einer Folge mit $n \in \mathbb{N}$,

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad (3.3)$$

oder sie wird als Exponentialreihe definiert:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (3.4)$$

die zugleich die Taylorreihe der Exponentialfunktion um den Nullpunkt ist. Dabei kann man die Äquivalenz der beiden Darstellungen von $\exp(x)$ mit Hilfe der Anwendung des Binomischen Lehrsatzes folgendermaßen zeigen:

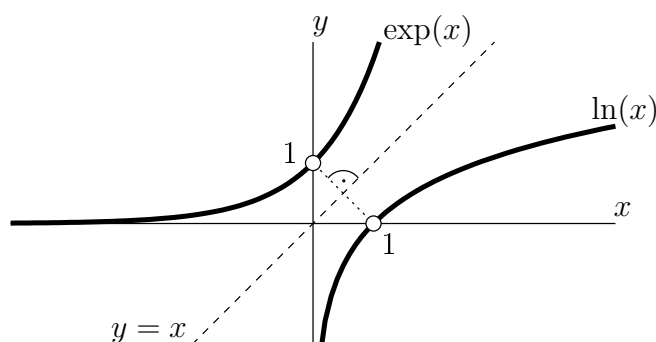
$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= 1 + x + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{x}{n}\right)^3 + \dots \\ &\dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(n-1))}{n!} \left(\frac{x}{n}\right)^n \end{aligned} \quad (3.5)$$

Nach Durchführung elementarer Rechenschritte erhält man daraus den Ausdruck für $\exp(x)$ als Potenzreihe:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{x^3}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\dots + \frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die Approximation dieser Reihe durch $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ [Schönhacker 2000, S.29f.] liefert dann die zum Grenzwert einer Folge alternative Darstellung der natürlichen Exponentialfunktion laut Gleichung (3.4).

Da die natürliche Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ positiv, stetig und streng monoton wachsend ist, existiert ihre Umkehrfunktion, das ist der für alle $x \in \mathbb{R}^+$ definierte natürliche Logarithmus $\ln(x)$. Für $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gilt dabei $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Wählt man als Basis $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ statt der Eulerschen Zahl e , erhält man die verallgemeinerte Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, die durch $x \mapsto a^x = \exp(x \ln a)$ definiert wird und für die $f' = \ln a \cdot f$ ist. Insbesondere ist die Exponentialfunktion zur Basis e die einzige Funktion (außer der konstanten Funktion $f(x) = 0$), die exakt mit ihren Ableitungen übereinstimmt. Die Logarithmusfunktion $\log_a$, die für alle $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ existiert und für deren erste Ableitung $\log'_a(x) = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$ gilt, ist hierbei die zugehörige Umkehrfunktion.

Abbildung 3.4: Exponentialfunktion $\exp(x)$

3.3.1 Einführung der Eulerschen Zahl e im Schulunterricht der 10. Schulstufe

In den folgenden Kapiteln werden verschiedene Möglichkeiten des Zugangs zum Thema anhand mehrerer österreichischer Schulbücher vorgestellt und anschließend auf ihre Relevanz für einen wertvollen Mathematikunterricht hin untersucht. Aus Mangel an einer didaktisch ideal geeigneten Einführung für die Eulersche Zahl e im allgemeinen sowie dem Fehlen einer solchen in österreichischen Schulbüchern im speziellen, werden die in den Lehrbüchern vorhandenen Zugänge im Vergleich zueinander beurteilt.

Zugang über die Zinseszinsrechnung

Die Einführung der Eulerschen Zahl e über die “augenblickliche” Verzinsung eines Kapitals wird in [Reichel u. a. 2002, S.222f.] und [Szirucsek u. a. 1994, S.168ff.] demonstriert. In [Taschner 1999b, S.279] erfolgt die Heranführung der Schüler an die Zahl e zwar über die sogenannten Exponentialtafeln, der Autor macht jedoch im Zuge des Voranschreitens im Stoff weiter hinten im Buch bei der Besprechung der Exponentialfunktion von der Zinseszinsrechnung Gebrauch.

Diese Art des Zugangs zur Eulerschen Zahl e , die wie schon erwähnt nicht unproblematisch ist, geht von der Verzinsung eines Kapitals K für ein Jahr mit einem Zinssatz von 100% aus und entwickelt über die schrittweise Verkürzung des Verzinsungszeitraumes von einem Jahr auf die Verzinsung bei täglicher Behebung und Wiedereinzahlung des Kapitals den Wert der “augenblicklichen”, also stetigen, Verzinsung. Bei jährlicher Verzinsung von K erhält man somit nach einem Jahr $2 \cdot K$, bei halbjährlicher Verzinsung $2,25 \cdot K$, bei monatlicher Verzinsung ungefähr $2,613 \cdot K$ und bei täglicher Verzinsung von K beträgt der Gesamtwert nach einem Jahr letztendlich ca. $2,7145 \cdot K$. Aus der relativ geringen Differenz zwischen monatlicher und täglicher Einzahlung schließt man, dass auch bei stetiger Ver-

zinsung ein Wert von etwa 2,71 erreicht wird und leitet so zum Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ über, der für die Eulersche Zahl e steht.

In den Grundzügen ist die Vorgangsweise in allen drei untersuchten Schulbüchern ähnlich, jedoch unterscheiden sie sich in einigen Details voneinander: [Reichel u. a. 2002, S.222f.] widmen der Eulerschen Zahl e im Kapitel “Exponential- und Logarithmusfunktionen” einen nach ihr benannten Teilbereich “Eulersche Zahl und natürliche Exponentialfunktion”. Anhand der oben geschilderten Prozeduren werden die Schüler durch einige Zwischenfragen (z.B. nach dem Kapital bei monatlicher Verzinsung) zur Mitarbeit angeregt und auf verständliche Weise zur Definition der Eulerschen Zahl e als $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281\dots$ hingeführt. Der Zusammenhang mit dem vorgerechneten Einstiegsbeispiel wird durch den Hinweis, dass e den Zuwachs an Kapital bei stetiger Verzinsung und jährlichem Zinssatz von 100% in einem Jahr angibt, hergestellt. Durch die Bemerkung über den für jegliches Bankwesen abnormen Zinssatz von 100% werden die Schüler auf die rein theoretische Bedeutung dieses Wertes hingewiesen. Bevor ausführlich der Umgang mit dem Taschenrechner bezüglich e erklärt wird, erfahren Interessierte einiges über den historischen Hintergrund der Eulerschen Zahl (sowie ihre Irrationalität bzw. Transzendenz) und auch ihre Bedeutung als häufig gebrauchte Basis von Exponentialfunktionen wird erwähnt. Während [Reichel u. a. 2002, S.222f.] durch die kurz und bündig aufgebaute Einführung auffallen, gestalten [Szirucsek u. a. 1994, S.168ff.] den betreffenden Bereich im Kapitel “Wachstumsprozesse – Exponentielles Wachstum, Geometrische Folgen” etwas genauer aus. Mit dem Vorwissen über diskretes exponentielles Wachstum ausgestattet geleiten die Autoren die Schüler mit Hilfe von teilweise oder vollständig vorgerechneten Beispielen zum kontinuierlichen exponentiellen Wachstum. Besonders gut nachvollziehbar wird in diesem Buch der Weg der Formel

$$K_n = K \left(1 + \frac{p}{100k}\right)^{kn} \quad (3.7)$$

für das Kapital nach n Jahren bei k Verzinsungen zur Darstellung der stetigen Verzinsung mit der Eulerschen Zahl e als $K_n = K \exp\left(\frac{pn}{100}\right)$ präsentiert. Durch Umformung und Substitution von $\frac{p}{100k}$ durch die Variable h erhält man

$$K_n = K \left[(1 + h)^{\frac{1}{k}}\right]^{\frac{pn}{100}}, \quad (3.8)$$

wobei $\frac{pn}{100}$ unabhängig von k ist. Da für $k \rightarrow \infty$ der Wert von h gegen Null konvergiert, wird nun untersucht, wie sich $(1 + h)^{\frac{1}{k}}$ verhält, wenn h beispielsweise die Nullfolge $\langle h_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ durchläuft und festgestellt, dass der Grenzwert dieser mit $\langle e_n \rangle$ benannten Folge $\left\langle \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\rangle$ die irrationale Eulersche Zahl e mit dem Zahlenwert von ungefähr

2,718281828 ist. Aufgrund der Konvergenz von $(1 + h)^{\frac{1}{h}}$ für $h \rightarrow 0$ gegen e folgt dann die Formel

$$K_n = K \exp \frac{pn}{100}. \quad (3.9)$$

Im anschließenden Beispiel werden mit dem Hinweis auf den Taschenrechnergebrauch, aber ohne detaillierte Anleitung ein paar Glieder der Folge $\langle e_n \rangle$ berechnet und ihre (langsame) Konvergenz gegen e demonstriert. Auch der Unterschied zwischen fiktivem Zinssatz p und effektivem Zinssatz p_{effektiv} wird anhand eines Beispiels behandelt. Der aus den Beispielen resultierende theoretische Hintergrund folgt in blauer Schrift jeweils am Ende dieser. Die Schüler erkennen daher sofort den Sinn der Wahl eines bestimmten Beispiels und empfinden diese Möglichkeit der Schulbuchgestaltung vielleicht als abwechslungsreicher. Die am Schluss jedes Kapitels noch einmal zusammengefasste Theorie beschränkt sich hierbei auf das Wesentliche: die allgemeine Formel $f(t) = ab^t$ (für $b \neq 1$, $b > 0$) für kontinuierliche exponentielle Prozesse, die spezielle Formel $f(t) = a \exp(kt) = f(0) \exp(kt)$ mit positivem k bei Wachstum und negativem k bei Abnahme und dem Hinweis der Benennung von $f(t) = a \exp(kt)$ mit “ e -Funktion” sowie dem Zusammenhang zwischen fiktivem und effektivem Zinssatz mit zweierlei Formeln.

Obwohl der Zugang in [Szirucsek u. a. 1994, S.168ff.] insgesamt recht stimmig ist, wird die häufige Verwendung von e als Basis von Exponentialfunktionen nur anhand des Beispiels der stetigen Verzinsung begründet, anstatt schon in der Einführung die enorme Bedeutung der Eulerschen Zahl für die Naturwissenschaften, also in weiterer Folge für das tägliche Leben, zu besprechen.

Wie eingangs erwähnt benützt [Taschner 1999b, S.279–283] die Zinseszinsrechnung im Gegensatz zu anderen Autoren als Zugang zu den dem Ergänzungstoff zugeordneten Exponentialfunktionen im gleichnamigen Kapitel des Bereichs “Reihen, Folgen, Funktionen”. Indem er die (Eulersche) Zahl e von den Exponentialfunktionen inhaltlich trennt, hebt er sich durch einen komplett anderen Aufbau des Schulbuches ab. [Taschner 1999b, S.279–283] unterscheidet sich zudem in der Wahl des vorgerechneten Einstiegsbeispiels: Er beginnt mit den historischen Rechnungen Jakob Bernoullis zur allgemeinen stetigen Verzinsung eines Kapitals und ermittelt dann mit Hilfe einiger eingeschobener Beispiele und Aufgaben Schritt für Schritt den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. In den theoretischen Abschnitten begründet [Taschner 1999b, S.279–283], dass die Exponentialfunktion aufgrund von $\exp(x) \exp(-x) = 1$ nie verschwindet und definiert diese als reelle Funktion

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \exp(0) = 1 \quad (3.10)$$

sowie

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \quad (3.11)$$

für die $\exp(px) = (\exp(x))^p$ für $x \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{Z}$ gilt. Mit dem Verweis auf die von Neper entdeckte natürliche Basis e leitet [Taschner 1999b, S.279–283] für alle vierstelligen Dezimalzahlen die Übereinstimmung der natürlichen Exponentialfunktion $\exp(x)$ mit der x -ten Potenz der natürlichen Basis e her und macht plausibel, dass dies für alle $x \in \mathbb{R}$ Gültigkeit besitzt. Es folgt die um die Eigenschaften $\exp(1) = e$ und $\exp(x) = e^x$ erweiterte Definition der Exponentialfunktion und die Einbeziehung von e in die Lösung des Bernoullischen Beispiels – Bei stetiger Verzinsung wird das Kapital in einem Jahr bei p Prozent Jahreszinssatz um $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \frac{p}{100}\right)^n = e^{\frac{p}{100}}$ als Faktor vermehrt. Trotz zahlreicher Anleitungen und Erklärungen zu den hinführenden Beispielen und Aufgaben wirkt der Stoff sehr abstrakt und die eher komplizierten Formulierungen verwirren sicher einige Schüler. Daran ändern auch die übersichtlich in gelben Kästen angeführten Definitionen wahrscheinlich wenig.

Vergleicht man insgesamt die drei untersuchten Lehrbücher würde man als Lehrer wohl eher [Reichel u. a. 2002, S.222f.], die alles wichtige auf zwei Seiten komprimieren oder wenn man das Thema ausführlicher (vielleicht für eine Realgymnasialklasse) darbieten möchte, [Szirucsek u. a. 1994, S.168ff.] als Unterrichts Anregung verwenden. [Taschner 1999b, S.279–283], der ja nicht einmal die Bezeichnung von e als Eulersche Zahl erwähnt, agiert meiner Meinung nach auf einem so hohen Niveau, das viele Schüler eher verschreckt als motiviert, und ist daher für einen “normalen” Schulunterricht die Zahl e betreffend als Lehrbuch eher weniger geeignet.

Zugang über die Exponentialtafeln

Rudolf Taschner wählt in seinem Lehrbuch für die 6. Klasse AHS im Kapitel “Potenz, Exponent, Logarithmus – Die natürliche Basis” [Taschner 1999b, S.96–106] einen im Schulunterricht etwas ungewöhnlichen Zugang zur Zahl e über sogenannte Exponentialtafeln. Dabei wird zuerst die Grundidee einer einfachen Exponentialtafel besprochen, um in weiterer Folge dann über genauere Exponentialtafeln und die bürgerliche Exponentialtafel zur natürlichen Basis aller Exponentialtafeln zu gelangen. Zum Verständnis tragen zahlreiche durchgerechnete Beispiele sowie selbst zu lösende Aufgaben bei, die sich mit dem theoretischen Wissen abwechseln. Der Vollständigkeit halber wird nun kurz auf das Prinzip von Exponentialtafeln, deren Ursprung im 16. Jahrhundert liegt, eingegangen. Michael Stifel berechnete damals die Potenzen von 1,1 für natürliche Exponenten auf eine Dezimalstelle genau und stellte die Ergebnisse in einer Tabelle dar. Aus dieser primitiven Exponentialtafel konnte man zu jeder Hochzahl n in der ersten Zeile die zugehörige Potenz $1,1^n$ in der zweiten Zeile ablesen. Da $1,1^{24} \approx 10$, kann jede Potenz mit höherem (oder auch negativem Exponenten) mit Hilfe der Tabellenwerte eruiert werden. Beispielsweise sind folgende zwei Rechenaufgaben [Taschner 1999b, S.97] so lösbar:

- $1,1^{91} = 1,1^{19+24\cdot3} = 1,1^{19} \cdot (1,1^{24})^3 = 6,1 \cdot 10^3 = 6100,$
- $1,1^{-67} = 1,1^{5-24\cdot3} = 1,1^5 \cdot (1,1^{24})^{-3} = 1,6 \cdot 10^{-3} = 0,0016 .$

Es genügt also eine Zerlegung zu ermitteln, in der ein Faktor einen Exponenten kleiner als 24 hat, den man aus der Exponentialtafel herauslesen kann. Der andere Faktor ist dann die entsprechende Potenz von 24. Obwohl hierbei bei sehr großen bzw. kleinen Werten für n nicht irrelevante Rundungsfehler auftreten, kann man so die höheren Operationen der Multiplikation und Division auf die niederen Rechenarten der Addition und Subtraktion zurückführen.

Da selbst im 16. Jahrhundert die Ergebnisse der obigen Exponentialtafel aufgrund ihrer Unexaktheit nicht brauchbar waren, verbesserte man die Resultate schließlich auf Tausendstel genau. Dazu war eine Exponentialtafel mit der Basis 1,001 notwendig, deren Potenzen $1,001^n$ jeweils auf drei Nachkommastellen gerundet wurden und man brauchte beachtliche 2304 Potenzen, um eine Näherung für den Wert 10 zu erhalten. Jost Bürgi steigerte die Genauigkeit im 17. Jahrhundert auf vier Nachkommastellen der Potenzen $1,0001^n$, musste dafür jedoch 23027 (!) Multiplikationen fehlerfrei durchführen. Dieses Vorwissen dient [Taschner 1999b] nun zur Einführung der sogenannten natürlichen Basis e . Er geht dazu ausführlich auf die Entdeckung einer gewissen Regelmäßigkeit in Exponentialtafeln von John Neper (gest. 1617) ein. Anlässlich der Betrachtung von Exponentialtafeln, die Rechenoperationen auf eine, zwei, drei bzw. vier Nachkommastellen genau ermöglichen, bemerkte der Schotte über die Gleichheit $1,0001^{10000} = 2,7181459$ die Übereinstimmung dieser Zahl mit jeweils einer Potenz in jeder Exponentialtafel für 1,1, 1,01 sowie 1,001. Unter Einbeziehung der zugehörigen realistischen Genauigkeit gilt nämlich:

$$1,1^{10} = 2,6; \quad 1,01^{100} = 2,70; \quad 1,001^{1000} = 2,717 \quad \text{und} \quad 1,0001^{10000} = 2,7181; \quad (3.12)$$

wobei also jede Zahl für dieselbe Größe auf verschiedene Nachkommastellen genau erstellt, steht. Nepers Benennung dieser rechtfertigt die nun folgende Definition Taschners von der allen Exponentialtafeln zugrundeliegenden natürlichen Basis als die auf 6 Nachkommastellen genau berechneten Zahl $e = 2,718282$. Weiters bemerkt der Autor noch, dass die Potenzen in der Folge mit ganzzahligen Exponenten $1,1^{10x}, 1,01^{100x}, 1,001^{1000x}, \dots$ sich immer exakter an e^x annähern, wobei x eine beliebige Dezimalzahl ist.

Abgesehen davon, dass [Taschner 1999b] die natürliche Basis e nie als Eulersche Zahl bezeichnet, sie ja nicht einmal erwähnt, wird der heutzutage eher unübliche Zugang über die Exponentialtafeln nur bedingt dem Anspruch dieser Einführung [Taschner 1999a, S.12] gerecht. Laut dem Autor soll den Schülern mit Hilfe des eben beschriebenen Zugangs auf "natürliche" Art die Bedeutung von e als meistverwendete Basis von Exponentialfunktionen und die Ursache dafür nähergebracht werden. Obwohl Taschner damit nicht unrecht

hat, erweist sich dieser Zugang für den Schulgebrauch als zu mühsam. Um die Einführung der Zahl e mittels Exponentialtafeln nämlich verständlich zu gestalten, müsste man wahrscheinlich beachtlich mehr Zeit investieren als bei traditionelleren Zugängen.

Zugang über die allgemeine Exponentialfunktion

Die Möglichkeit der Einführung der Eulerschen Zahl e über die allgemeine Exponentialfunktion wird in [Bürger u. a. 2000b, S.122f.] und [Schärf 1993, S.53f.] wahrgenommen. Beide Lehrbücher definieren dazu im Vorfeld samt graphischer Veranschaulichung den Begriff einer Exponentialfunktion und gehen mehr oder weniger genau auf die Eigenschaften dieser ein.

Von diesen Informationen ausgehend bespricht [Schärf 1993, S.53f.] im Kapitel “Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen” Exponentialfunktionen mit der Basis e . Er verifiziert anhand von Beispielen, dass man für e bei Einsetzen eines $x \rightarrow \infty$ in die Folge $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ einen gegen 2,718281... konvergierenden Wert erhält. Äusserst knapp und übersichtlich, jedoch alle wesentlichen Punkte enthaltend, definiert [Schärf 1993, S.53f.] nun

$$\lim \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad (3.13)$$

führt für e die Näherung 2,718 an und zeigt die Graphen der Exponentialkurven für e^x und e^{-x} . Auf die Stellung von e^x in zahlreichen Bereichen (Mathematik, Natur- und Wirtschaftswissenschaften, ...) und die Berechnung von a^x und e^x mit dem Taschenrechner wird hingewiesen. Obwohl auch dieser Autor die Bezeichnung Eulersche Zahl für e nicht angibt und so gut wie gar keine Eigeninitiative oder selbständige Arbeit von den Schülern einfordert, halte ich die beschriebene Einführung für den Zweck durchaus entsprechend. Da es in der HTL ja hauptsächlich um die Anwendung bestimmter Ergebnisse in der Praxis geht und die zur Verfügung stehende Zeit für die einzelnen Themenbereiche durch die Stellung der Mathematik als Hilfswissenschaft recht begrenzt ist, empfinde ich diese Art des Zugangs für den Schulunterricht in einer höheren technischen Lehranstalt als geeignet.

[Bürger u. a. 2000b, S.122f.], die ja auch eine relativ direkte Einführung für e wählen, unterliegen als Lehrbuch für die AHS anderen Kriterien der Beurteilung ihrer Schulrelevanz. Hier wird die Eulersche Zahl als Erweiterungstoff im Kapitel “Wachstums- und Abnahmeprozesse – Exponentialfunktionen” unter dem Titel “Natürliche Exponentialfunktionen” behandelt und ohne jegliche Bemühungen der Hinführung der Schüler an das Thema wird die Verwendung der einheitlichen Basis $e = 2,71...$ für alle Exponentialfunktionen in den Naturwissenschaften festgestellt. Betreffend einer Erklärung dieses Umstandes vertrösten sie auf die 8. Klasse AHS. Auf die Definition der natürlichen Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus folgt der Zusammenhang zwischen beliebigen und natürlichen

Exponentialfunktionen, der mit Hilfe der Formel

$$N(t) = N_0 a^t = N_0 (e^\lambda)^t = N_0 e^{\lambda t} \quad (3.14)$$

dargestellt wird, wobei N_0 für die Anzahl bestimmter Objekte zu Beginn und $N(t)$ für die Anzahl dieser nach einer gewissen Zeit t steht, sowie die Unterscheidung in Wachstums- und Abnahmefunktionen. Zusätzlich wird der Vorteil der direkten Ersichtlichkeit der Änderung in Prozenten bei allgemeinen Exponentialfunktionen erwähnt. Als Abschluss klären [Bürger u. a. 2000b, S.122f.] noch die Bedeutung von Zerfallsgesetzen als statistische Aussagen und untersuchen die Auswirkungen von Messungenauigkeiten. Mit Ausnahme der Aufforderung zur Begründung der Ungleichungen $a > 1$ und $\lambda = \ln a > 0$ bei Wachstum sowie $0 < a < 1$ und $\lambda < 0$ bei Zerfall bezüglich Gleichung (3.14) anhand des Monotoniesatzes werden die Schüler nicht zur Eigeninitiative motiviert. Da die Mathematik als exakte Wissenschaft gilt, erscheint die Anführung von $e = 2,71\dots$, also gerade einmal auf Hundertstel genau, dazu etwas zu salopp. Obwohl [Bürger u. a. 2000b, S.122f.] den Stoff gut verständlich formulieren, ist dieser Zugang wohl wenig schülerzentriert. Die versprochene Aufklärung über die Bedeutung von e folgt dann im Kapitel "Ableitung der Logarithmusfunktionen und der Exponentialfunktionen – Differentialgleichungen" des Lehrbuchs für die 8. Klasse AHS [Bürger u. a. 1992, S.74] im Zuge der Auffindung einer Stammfunktion von $\frac{1}{x}$. Die Definition von e als jene reelle Zahl, die $\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$ erfüllt, ergänzen [Bürger u. a. 1992, S.74] um einen Verweis auf die Behandlung von e als Basis des logarithmus naturalis in der 6. Klasse, führen den Wert von e nun sogar auf 6 Nachkommastellen genau an und wiederholen die Bezeichnung

$${}^e \log x = \ln x . \quad (3.15)$$

Dann endlich widmen die Autoren der Zahl e einen Abschnitt, der ihrer herausragenden Bedeutung besser gerecht wird [Bürger u. a. 1992, S.77f.]. Hier gehen sie auf die Bezeichnung von e als Eulersche Zahl, ihre Eigenschaft der Irrationalität und der Transzendenz, die Möglichkeiten der Darstellung von e als Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ oder als unendliche Summe $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$ auf der Basis von $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$ sowie auf die Formel $e^{2\pi i} = 1$ ein. Weiters wird die häufige Verwendung von e als Basis von Exponentialfunktionen mit der Übereinstimmung von e^x mit ihren Ableitungen begründet. Obwohl man schon in der 6. Klasse auf den Wert der Eulerschen Zahl für die Mathematik hätte eingehen können und es sich hierbei nicht um eine Einführung, sondern eine Wiederholung handelt, versöhnt diese Darstellung von e aufgrund des informationsreichen Inhalts den kritischen Betrachter.

Andere Möglichkeiten der Behandlung der Zahl e in österreichischen Schulbüchern

[Novak u. a. 1990, S.37f.] wählen zwar auch den Weg über die allgemeine Exponentialfunktion zur Eulerschen Zahl, jedoch unterscheidet sich die eigentliche Motivation der Schüler für die Einführung von e etwas von [Bürger u. a. 1992, S.77f.] und [Schärf 1993, S.53f.]. Daher wird [Novak u. a. 1990, S.37f.] in diesem Kapitel behandelt. [Novak u. a. 1990, S.37f.] besprechen im Vorfeld des Bereiches “Exponentialgleichungen und Logarithmus(funktion)” die allgemeine Exponentialfunktion a^x samt Beispiel, Eigenschaften und graphischer Darstellung sowie ihre wichtige Stellung in Naturwissenschaften und Wirtschaft zur Illustration von Wachstums- und Zerfallsprozessen. Dann stellen die Autoren einfach den Graphen der Funktion e^x , der viele “natürliche” Zunahmeprozesse veranschaulicht, vor. Anhand dessen ist für die Schüler klar ersichtlich, dass die Basis e dieser natürlichen Exponentialfunktion um den Zahlenwert 2 liegen muss. Nach geleisteter Vorarbeit definieren [Novak u. a. 1990, S.37f.] nun die Eulersche Zahl $e = 2,718281828\dots$, die für “kontinuierliche” Prozesse von grundlegender Bedeutung ist. Es folgen Denkanstöße zur graphischen Veranschaulichung solcher Prozesse (z.B. Luftdruck bei zunehmender Höhe), die praktische Näherung $e = 2,718$, der Hinweis auf die Eigenschaft von e als nichtperiodische Dezimalzahl sowie dem Zusammenhang mit Leonhard Euler. Obwohl der Zugang mit Hilfe der Beobachtung des Funktionsgraphen der Exponentialfunktion mit der ausdrücklich als Eulersche Zahl benannten Basis kein schlechter Ansatz ist, fehlen in der Definition von e wesentliche Details. Für ein Mathematik-Lehrbuch erachte ich eine Einführung von e ohne die Angabe des zugehörigen Grenzwertes oder der Reihendarstellung als unpräzise und lückenhaft. Erst in einer der darauffolgenden Übungsaufgaben erklären die Autoren nämlich ganz nebenbei die Übereinstimmung von e mit dem $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

In [Bernhard 2002b, S.18,S.21] taucht die Eulersche Zahl im Rahmen des Kapitels “Exponential- und Logarithmusfunktionen” auf. Nachdem am Rand neben den entsprechenden Aufgaben die allgemeine Exponentialfunktion $y = a^x$ definiert worden war, nimmt [Bernhard 2002b] kurz Bezug auf die Zahl e , die er als “Eulersche Zahl” bezeichnet, ihren Zahlenwert auf 5 Nachkommastellen genau angibt und ihre Transzendenz bemerkt. Etwas weiter hinten schickt er noch die Definition für die Verdopplungs- und Halbwertszeit hinterher. Da es sich bei diesem Buch nicht um ein Lehrwerk für die Schule, sondern lediglich um eine Aufgabensammlung zur Übung von bereits Erlerntem handelt, empfinde ich den Umgang mit der Eulerschen Zahl e hier als durchaus zweckgerecht.

Überlegungen zur Eignung der verschiedenen Zugänge zur Eulerschen Zahl e in österreichischen Schulbüchern für den Mathematikunterricht

Vergleicht man die vorgestellten Zugänge zur Eulerschen Zahl e , findet man natürlich bei jedem dieser gewisse Vor- und Nachteile. Die in den meisten Schulbüchern verwendete Einführung über die Zinseszinsrechnung erweist sich jedoch im Vergleich zu den anderen vorgestellten Möglichkeiten in jedem Fall für den Mathematikunterricht als geeignet. Da Prozent- und Zinsrechnung ja schon zum Vorwissen der Schüler aus den vorherigen Klassen zählen, kann man damit gut an Bekanntes anknüpfen. Unbedingt nötig ist hierbei aber die Thematisierung des ausschließlich theoretischen Wertes von 100% beim Zinssatz, womit man, wie schon eingangs erwähnt, den in der Realitätsferne liegenden Nachteil dieser Einführung anspricht. Ein Positivum besteht im Gegensatz dazu im Umstand, dass die Motivation der Schüler zur Selbsttätigkeit und aktiver Mitarbeit bei dieser Art des Zugangs durch Zwischenfragen oder die Aufteilung in kleinere Einheiten bei schrittweiser Hinführung besonders gut möglich ist.

Im Unterschied dazu ist für eine verständliche Präsentation der Zahl e als natürliche Basis aller Exponentialtafeln eine Menge an Vorwissen, das die Schüler weder vorher noch nachher brauchen, sondern nur für diese einmalige Einführung erlernen müssen, notwendig. Obwohl für historisches Hintergrundwissen durchaus interessant, ist der Zugang über die Exponentialtafeln im Schulunterricht wohl nicht ohne Grund etwas unüblich.

Betreffend der Vorstellung der Eulerschen Zahl e im Anschluss an die Besprechung der allgemeinen Exponentialfunktion gibt es geteilte Meinungen. Für den anwendungsorientierten Unterricht in einer HTL, in dem man den theoretischen Stoff sofort in Übungsaufgaben (eventuell auch anderer Schulfächer) verwenden können muss, bietet die schnelle lehrerzentrierte Methode des Frontalunterrichts mit ihrer Feststellung der Fakten die gewünschte Sinnhaftigkeit. In einer AHS, in der die Mathematik um ihrer selbst Willen betrieben wird und keiner Zweckgebundenheit unterliegt, sollte jedoch auch bei diesem Zugang Wert auf die Eigeninitiative der Schüler sowie deren Mitdenken und Verständnis gelegt werden. Das könnte man mit Hilfe von Beispielen von Naturvorgängen, die durch Exponentialfunktionen beschrieben werden, graphischen Veranschaulichungen von diesen Wachstums- bzw. Zerfallsprozessen sowie dem Besprechen der Auffälligkeiten in den Graphen erreichen. Da heutzutage in den Medien oft von solchen Vorgängen (Radiokarbonmethode zur Altersbestimmung von Skeletten, radioaktiver Zerfall, ...) die Rede ist, kann man das Interesse der Schüler sicher mit einem aktuellen Anlass wecken.

3.3.2 Beispiele und Übungsaufgaben zur Eulerschen Zahl e in österreichischen Schulbüchern der 10. Schulstufe

Als eine der bedeutendsten Zahlen in der Mathematik ist die Eulersche Zahl e natürlich Gegenstand zahlreicher Beispiele und Übungsaufgaben in Schulbüchern. Der nun folgende Abschnitt versteht sich als Streifzug durch österreichische Lehrbücher für Mathematik mit Fokus auf die jeweiligen Besonderheiten der einzelnen Werke sowie der exemplarischen Anführung von Beispielen und Aufgaben und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Obwohl meistens Aufgaben zum Berechnen von e^x mit dem Taschenrechner, zum Zeichnen des Funktionsgraphen von e^x mit anschließendem Untersuchen auf Besonderheiten und jegliche Art von Anwendungen zu e^x (meist in Wachstums- und Zerfallsprozessen) vorkommen, weist doch jedes Schulbuch etwas Spezielles in der Behandlung der Eulerschen Zahl e auf, das es von den anderen unterscheidet.

Schulbuch [Reichel u. a. 2002]

So etwa bringen [Reichel u. a. 2002, S.223] in ihren Aufgaben 886–894, die von dem ausführlich vorgerechneten Beispiel B zur Benutzung des Taschenrechners samt dem Hinweis auf die abweichende Bedeutung des Tasten “ e^x ” und “exp” angeführt werden, eine gute und straffe Auswahl an relevanten Aufgabentypen. Das Buch beginnt mit Aufgabe 886, in der die Berechnung von einzelnen Folgengliedern von e gefragt ist, und die auch im Internet für die Schüler abrufbar ist. Es folgen die üblichen Aufgaben zur Eulerschen Zahl e (Berechnung und graphische Darstellung von e^x sowie anwendungsorientierte Textaufgaben zu Abnahme- und Zunahmevergängen). Dabei sticht Aufgabe 890, die aus diesem Grund genau angegeben wird, heraus [Reichel u. a. 2002, S.223]:

“Aufgabe 890. Die Funktion $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ hat große Bedeutung in der Statistik (1) Zeichne deren Graphen im Intervall $D = [-3; 3]$, beweise (2) die dabei auftretende Symmetrieeigenschaft und (3) die Monotonie.”

Da es sich dabei um die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer $N(0, 1)$ -verteilten Zufallsvariablen handelt, die in der 8. Klasse AHS im Rahmen der Stochastik behandelt wird, demonstriert diese Aufgabe die weitreichende Stellung von e für den späteren Schulunterricht. Zudem werden durch den Aufruf zum Beweis die argumentativen und logischen Fähigkeiten der Schüler gefördert. Im Allgemeinen herrscht Einverständnis, dass sich ein guter Mathematikunterricht durch den Wechsel der verschiedenen Darstellungsebenen (verbal, formal, visuell) auszeichnet. Meiner Meinung nach ist genau das [Reichel u. a. 2002, S.223] durch die zwar breitgefächerte, aber minimalistische Auswahl an Aufgaben (nach dem Motto: “Soviel wie nötig, sowenig wie möglich”) hervorragend gelungen.

Schulbuch [Novak u. a. 1990]

[Novak u. a. 1990, S.38f.], die die Anzahl der Übungsaufgaben auch relativ knapp bemessen (Aufgaben 1–12), sind dabei weniger erfolgreich. Die reinen Rechen- und Zeichenaufgaben (Aufgaben 1–5) wirken, wahrscheinlich wegen den analogen Angaben, nicht recht anspruchsvoll. Die anschließenden Textaufgaben (eine Zinseszinsrechnung, ansonsten verschiedene Zu- und Abnahmeaufgaben) muten fast banal an, da meistens das bloße Einsetzen von Zahlen in den gegebenen Ausdruck zur Lösung führt. Lediglich bei Aufgabe 10 und Aufgabe 12 wird das selbständige Aufstellen der entsprechenden Formel verlangt. Möglicherweise liegt eine Ursache für die seltene Verwendung von [Novak u. a. 1990] im Schulunterricht im Mangel an Vielfalt und Schwierigkeitsgrad der Übungsaufgaben.

Schulbuch [Bernhard 2002b]

[Bernhard 2002b, S.18,S.21], der ja in seiner Funktion als Aufgabensammlung den Schülern kein neues Wissen vermitteln soll, sondern hauptsächlich der Wiederholung oder der Schularbeitsvorbereitung dient, muss jedoch nach völlig anderen Kriterien beurteilt werden. Ähnlich wie [Reichel u. a. 2002] beschränkt er sich auf ziemlich wenige, aber für das Stoffgebiet signifikante Aufgaben. Konkret handelt es sich dabei um die Aufgaben 6.2 und 6.5 bzw. die Aufgaben 6.25–6.28. Aufgabe 6.2 beschäftigt sich als Standardaufgabe im Detail mit dem Zeichnen der Graphen von mehreren Exponentialfunktionen in ein Koordinatensystem, dem Auffinden von Besonderheiten sowie dem Angeben der Gleichungen der zur y -Achse symmetrischen Exponentialfunktionen. Die der Aufgabe 11 von [Novak u. a. 1990, S.39] betreffend der Angabe ähnliche Aufgabe 6.5 von [Bernhard 2002b, S.18] behandelt den sinkenden Luftdruck bei zunehmender Höhe. Während [Novak u. a. 1990] von den Schülern nur die Berechnung der Luftdruckwerte an einigen Orten verlangt, erweitert [Bernhard 2002b, S.18] die Aufgabenstellung um ein zu zeichnendes Schaubild und um die Frage nach der prozentuellen Abnahme des Luftdrucks pro Kilometer. Mit diesen Zusätzen steigert er nicht nur den Schwierigkeitsgrad im Vergleich zu [Novak u. a. 1990] enorm, sondern verleiht der Sachsituation auch mehr Anschaulichkeit. In den Anwendungsaufgaben 6.25–6.28 [Bernhard 2002b, S.21] geht es dann um Wachstums- und Zerfallsprozesse, die mit Formeln dargestellt, durch Schaubilder visualisiert und deren Gesetzmäßigkeiten bestimmt werden sollen. In diesen wenigen Übungsaufgaben ist also alles Wesentliche enthalten und zudem wird durch die Wahl der Aufgaben der Realitätsbezug und die Brauchbarkeit im Alltag plausibel gemacht. So kennt beispielsweise jeder Schüler den radioaktiven Zerfall und erfährt eine besondere Motivation, wenn er selbst mit Hilfe der Radiokarbon-Methode das Alter eines Skelets eruieren kann, genauso wie es ja in aktuellen Fernsehserien wie “C.S.I.”, “Bones – Die Knochenjägerin” und ähnlichen immer zur Klärung eines Falls herangezogen

wird. Daher wird nun die Angabe der Aufgabe 6.28 vollständig angeführt [Bernhard 2002b, S.21]:

“Aufgabe 6.28.

(a) Mittels der ^{14}C -Methode (Radiokarbon-Methode) kann das Alter von abgestorbenen Organismen bestimmt werden. Ermittle damit das Alter eines Tierskeletts, wenn man noch 1,8% des ursprünglichen ^{14}C -Gehalts gemessen hat (Halbwertszeit $\tau=5730$ Jahre).

(b) Für radioaktives Kobalt gilt das Zerfallsgesetz $n_t = n_0 e^{-0,1308t}$ ($t \dots$ Jahre). (1) Wie viel Prozent einer gegebenen Kobaltmenge sind nach 20 Jahren noch vorhanden? (2) Wie viel Gramm Kobalt waren von derzeit $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ g}$ vor 50 Jahren vorhanden?”

Schulbuch [Schärf 1993]

Sehr anwendungsorientiert und praxisbezogen fallen auch die Aufgaben in [Schärf 1993, S.54f.] aus. Während die analogen Aufgaben 4.01–4.04, in denen e^x bzw. e^{-x} für verschiedene x auf 5 Stellen genau mit dem Taschenrechner berechnet werden soll, ein exakter Nachbau des vorgerechneten Beispiels 1 auf der vorhergehenden Seite sind und daher recht langweilig erscheinen, werden sie doch dem Anspruch eines HTL-Mathematikunterrichts gerecht. Es steht hier ja weniger das Erkennen von Zusammenhängen, das Führen von Beweisen, usw., sondern die korrekte und fehlerfreie Benutzung von Formeln im Vordergrund. In den folgenden drei Textaufgaben 4.10–4.12, die möglicherweise für andere Fächer relevant sind, wird dann genau diese Fertigkeit geübt. Es handelt sich hierbei um Aufgaben zur Berechnung des Flächeninhalts der vom Radiusvektor einer logarithmischen Spirale zwischen zwei Drehwinkeln überstrichenen Fläche, zur Ermittlung der nötigen Kraft zum gleichförmigen Anheben einer Stahlscheibe mit Hilfe eines Lederriemens sowie zur graphischen Darstellung der Abhängigkeit des Augenblickswerts der Stromstärke von der Zeit beim Einschalten eines Gleichstroms. Da in anderen Lehrbüchern (z.B. in [Bürger u. a. 2000b, S.148]) auch Aufgaben zur Stromstärke – wenngleich nicht in solchen speziellen Situationen – vorkommen, wird an dieser Stelle die entsprechende Aufgabe 4.12 aus [Schärf 1993, S.55] vorgestellt:

“Aufgabe 4.12. Beim Einschalten eines Gleichstroms ist der Augenblickswert der Stromstärke eine Funktion der Zeit. Es gilt: $i = I \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$; wobei $T = L/R$ ist. Stellen Sie die Abhängigkeit $i = i(t)$ graphisch dar!”

Schulbuch [Bürger u. a. 2000b]

[Bürger u. a. 2000b, S.122f.] weisen einige Besonderheiten in der Behandlung der Eulerschen Zahl e bezüglich der Wahl der Beispiele und Aufgaben auf. In den Beispielen und Aufgaben 5.27–5.38, in denen hauptsächlich Wachstums- und Zerfallsprozesse behandelt werden, wird einerseits großer Wert auf die Fertigkeit des Darstellens einer beliebigen Exponentialfunktion durch eine solche mit der Basis e gelegt, andererseits wird anhand mehrerer Aufgaben demonstriert, dass die prozentuelle Änderung in einem bestimmten Zeitraum allein aus der allgemeinen Darstellung $N(t) = ca^t$ auf einen Blick ersichtlich ist. Die Aufgaben 5.34–5.38 befassen sich schließlich mit dem Ermitteln von Intervallen, in denen die errechneten Werte unter der Berücksichtigung von Messfehlern liegen. Solche Genauigkeitsüberlegungen findet man in Schulbüchern eher selten, daher sei Aufgabe 5.36, auch wenn sie sich gewissermaßen als Ergänzung der Aufgabe 6.28 in [Bernhard 2002b, S.21] auffassen läßt, vollständig zitiert [Bürger u. a. 2000b, S.123]:

“In der Atmosphäre – und daher auch in allen lebenden Organismen – findet man denselben konstanten Anteil des radioaktiven Kohlenstoffisotops $C14$, dessen Halbwertszeit ca. 5760 Jahre beträgt. Nach dem Absterben des Organismus nimmt der $C14$ -Anteil exponentiell ab. In einem Tierskelett fand man nur noch 0,02% des ursprünglich vorhandenen $C14$ -Anteils. Gib Schranken für das Alter des Fundes an, wenn wir annehmen, dass die Halbwertszeit von $C14$ mit einem Fehler von ± 50 Jahren behaftet ist! (Hinweis: Wähle als Zeiteinheit 1000 Jahre!)”

Da der Abschnitt “Natürliche Exponentialfunktion” in [Bürger u. a. 2000b] als Ergänzungsstoff gekennzeichnet ist und dieser ja unter anderem für begabtere Klassen gedacht ist, könnte man erwarten, dass die zugehörigen Aufgaben von einem gewissen Niveau und Schwierigkeitsgrad sind, was hier leider nicht der Fall ist. Obwohl die Praxisbezogenheit durchaus gegeben ist, enttäuschen [Bürger u. a. 2000b] zusätzlich durch die fehlende Vielfältigkeit bei der Themenwahl der großteils analogen Aufgaben. Nach der Lektüre dieses Kapitels des Schulbuches könnte man meinen, dass die einzige Anwendungsmöglichkeit der natürlichen Exponentialfunktion in der Behandlung von Zu- und Abnahmevorgängen besteht. Positiv fällt jedoch auf, dass [Bürger u. a. 2000b] am Ende des Abschnitts “Wachstums- und Abnahmevorgänge” einen ausführlichen Wiederholungsteil, der eine Zusammenfassung wesentlicher Lerninhalte samt zugehörigen Übungsaufgaben enthält, bringen. Für die Eulersche Zahl e sind hierbei im Speziellen die Aufgabe 5.108 (theoretische Umwandlung einer beliebigen in eine natürliche Exponentialfunktion) [Bürger u. a. 2000b, S.141], die Aufgaben 5.133–5.135 (Wachstum von Bakterien und radioaktiver Zerfall) [Bürger u. a. 2000b, S.144] sowie die Aufgaben 5.146 und 5.153–5.156 (exponentielles Wachstum der Anzahl Grippeinfizierter, Sättigung von Flüssigkeiten und Blut durch

Substanzen, Stromstärke in einer Spule unter Spannung) [Bürger u. a. 2000b, S.146ff.] relevant.

Schulbuch [Szirucsek u. a. 1994]

[Szirucsek u. a. 1994] bietet im Unterschied zu [Bürger u. a. 2000b] eine große Bandbreite an vorgerechneten Beispielen und zu lösenden Übungsaufgaben mit den verschiedensten Anwendungen und Themen, die bunt gemischt sind. Den Einstieg bilden dabei die Beispiele 849–851 und 853 [Szirucsek u. a. 1994, S.168ff.], die mit Hilfe der Zinseszinsrechnung von diskretem zu kontinuierlichem exponentiellen Wachstum, zur Eulerschen Zahl e mit ihren Eigenschaften und zur e -Funktion führen. Die dazwischenliegende Aufgabe 852 beschäftigt sich mit dem Vergleich des Wachstumsfaktors $e^{\frac{p}{100}}$ bei kontinuierlichem Wachstum mit $1 + \frac{p}{100}$, jenen bei diskretem Wachstum, für $K_1 = Ke^{\frac{p}{100}}$ und $p=5\%$ und fügt sich somit gut in die Entwicklung der Theorie ein. Die anschließenden Beispiele und Aufgaben 854–861 [Szirucsek u. a. 1994, S.171ff.] behandeln die Anwendung der Eulerschen Zahl e in Wachstums- und Zerfallsprozessen auf vielfältige Art. [Szirucsek u. a. 1994] gehen in den jeweiligen Beispielen zur Erarbeitung des Stoffgebiets – Beispiele 854 und 855 (Zunahmeprozesse) bzw. Beispiel 857 (Abnahmeprozesse) – mit Hilfe von verbalen Erklärungen, Graphen, Tabellen und der Angabe des jeweils gültigen Wachstums- und Zerfallsgesetzes auf das Hintergrundwissen und die Vorgehensweise für/bei der Lösung der folgenden Aufgaben ein. Eingefügte Zwischenfragen regen die Schüler zusätzlich zur Eigeninitiative und zum Mitdenken an. Die eingestreuten Übungsaufgaben 856 bzw. 858–861 sind dann sehr abwechslungsreich gestaltet. In den Aufgaben 856 und 860 kommt der Computer zum Einsatz. Die Schüler sollen zwei Programme erstellen, die Berechnungen durchführen und Tabellen dafür ausgeben können. Gerade in der heutigen Zeit, in der schon fast jeder täglich mit dem Computer zu tun hat, stellen diese Aufgaben eine wichtige Anpassung und Vorbereitung an/für die zukünftigen Anforderungen im Arbeitsleben und in der Weiterbildung (Studium, Fachhochschule) dar. Die Textaufgaben 859 und 861 zielen wiederum auf die direkte Anwendung des erworbenen Wissens ab. Mit Aufgabe 858, deren Angabe nun folgt, fördern die Autoren die Fähigkeit der Schüler zum Argumentieren und Begründen [Szirucsek u. a. 1994, S.172]:

“Aufgabe 858. Allgemein gilt für die Halbwertszeit τ die Formel $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$ bzw. für das Zerfallsgesetz $n = n_0 e^{-\frac{\ln 2}{\tau} t}$. Zeige das.”

Letztlich findet sich in [Szirucsek u. a. 1994] nach einer kurzen Zusammenfassung der wesentlichen theoretischen Punkte noch ein Abschnitt mit den unterschiedlichsten Aufgaben zum linearen sowie zum diskreten und kontinuierlichen exponentiellen Wachstum. Die Aufgaben 862–878 [Szirucsek u. a. 1994, S.173ff.] umfassen die Zinseszinsrechnung sowie

Wachstums- und Zerfallsprozesse in etlichen verschiedenen sachlichen Einkleidungen und Fragestellungen. Die letzte dieser Aufgaben, in der die Schüler zu einem argumentativen Überblick über die Wiederholungsaufgaben aufgefordert werden, trainiert besonders das Erkennen von Zusammenhängen [Szirucsek u. a. 1994, S.175]:

“Aufgabe 878. In den von dir in diesem Abschnitt behandelten Aufgaben beschreiben die verwendeten Exponentialterme manchmal einen Sachverhalt ganz genau, manchmal aber nur näherungsweise. Gib je zwei derartige Beispiele an und begründe jeweils, warum eine präzise oder nur eine approximative Beschreibung vorliegt.”

Schulbuch [Taschner 1999b]

Rudolf Taschner, dessen Lehrbuch auf einem anderen Niveau als alle vergleichbaren anderen Werke aufgebaut ist, geht auch bei der Auswahl der Beispiele und Aufgaben wenig konform mit den sonst in der AHS verwendeten Büchern. Da er die natürliche Basis e anhand von Exponentialtafeln einführt, ist es nachvollziehbar, dass es in dem vorgerechneten Beispiel 389 und den folgenden Aufgaben 390–394 [Taschner 1999b, S.106ff.] um die Berechnung von e^x für verschiedene x auf vier bzw. sechs Nachkommastellen genau unter ausschließlicher Verwendung des auf Exponentialtafeln basierenden Wissens geht bzw. Exponentialtafeln von e^x für verschiedene x erstellt werden sollen. [Taschner 1999b], der sich ja normalerweise durch seine Vielfältigkeit und Originalität auszeichnet, verwundert bei dieser Aufgabensequenz durch Analogie. Er rechtfertigt die Wahl der Aufgaben mit dem Ziel der Erkenntnis der Schüler von e^x als Limes der Folge $1,1^{10x}$; $1,01^{100x}$; $1,001^{1000x}$; $1,0001^{10000x}$; ... [Taschner 1999a, S.12]. Fraglich ist jedoch, ob dafür so viele analoge Aufgaben von Nutzen sind bzw. ob diese überhaupt für das gewünschte Verständnis förderlich sind. Den Anschluss bilden das Beispiel 395 mit den zum Ergänzungsstoff gehörigen Aufgaben 396 und 397 [Taschner 1999b, S.109]. Im Demonstrationsbeispiel 395 wird die Exponentialkurve in einem 50% vergrößerten Koordinatensystem, idealerweise im Schulunterricht, gezeichnet und die Aufgaben 396 und 397 verstehen sich mit der graphischen Darstellung von e^x für verschiedene x bzw. Vielfache von x als Fortsetzung. In Aufgabe 398 [Taschner 1999b, S.109] sollen die Schüler dann ein Computerprogramm schreiben, das für beliebige positive Koeffizienten c und dezimale Exponenten k den Graphen von $y = ce^{kx}$ in einem entsprechend skalierten Koordinatensystem zeichnet. Hier geht es also um die visuelle Erfassung von e^x , die für ein tieferes Verständnis der Exponentialfunktion von Bedeutung ist. In den Zusatzaufgaben 399–402 [Taschner 1999b, S.109f.] für Begabte, die das Werkzeug zum allgemeinen Beweis der Stetigkeit von e^x liefern, sollen die Schüler teilweise unterstützt von Anleitungen die Rechenregeln $e^{x+y} = e^x e^y$ und $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ sowie die Folgerung $e^x < e^y$ aus $x < y$ für beliebige Dezimalzahlen als Exponenten begründen und mit Hilfe schrittweiser

Argumentation verstehen, dass die Hochzahl x bei e^x jede beliebige Zahl $\in \mathbb{R}$ sein darf. Sowohl inhaltlich, wie auch in der Formulierung kommen diese Aufgaben dem gewohnten Stil Taschners wieder näher. Die Kernstoffaufgaben 403–405 [Taschner 1999b, S.110] illustrieren praktisch durch Rechenaufgaben die vorher theoretisch begründete Stetigkeit der Exponentialfunktion. Zur besseren Vorstellbarkeit ist nun Aufgabe 403 im Detail angeführt [Taschner 1999b, S.110]:

“Aufgabe 403. Es sind der Reihe nach die Potenzen

$$a) \quad e^{0,3}, \quad e^{0,33}, \quad e^{0,333}, \quad e^{0,3333}, \quad e^{0,33333}$$

$$b) \quad e^{0,6}, \quad e^{0,57}, \quad e^{0,571}, \quad e^{0,5714}, \quad e^{0,57143}$$

$$c) \quad e^{1,1}, \quad e^{1,09}, \quad e^{1,091}, \quad e^{1,0909}, \quad e^{1,09091}$$

mit sechsstelliger Genauigkeit zu ermitteln.

Wie lautet daher die Potenz a) $e^{\frac{1}{3}}$, b) $e^{\frac{4}{7}}$, c) $e^{\frac{12}{11}}$ mit vierstelliger Genauigkeit?”

Taschner zielt hiermit auf die Gleichwertigkeit der Folge der Potenzen in Aufgabe 403 a) als Grenzwert der entsprechenden Zahlen mit der Potenz $e^{\frac{1}{3}}$ als Grenzwert von $1,1^3$; $1,01^{33}$; $1,001^{333}$; $1,0001^{3333}$; ... ab. Mit der Ergänzungsaufgabe 406 [Taschner 1999b, S.110], die vom Beweis der Positivität von e^x für $x \in \mathbb{R}$ mit Hilfe einer Anleitung handelt, beschließt [Taschner 1999b] den Theorieteil über die Exponentialfunktion vorerst. Im Verlauf des im Abschnitt “Der Zugang über die Zinseszinsrechnung” behandelten Kapitels über die Exponentialfunktion in Taschners Schulbuch findet sich später mit Aufgabe 835 [Taschner 1999b, S.283f.] eine weitere Übung zur natürlichen Basis e . Da das ganze Kapitel dem Ergänzungsstoff angehört, wirkt die Aufgabe über die Genauigkeit der Berechnung von e als Grenzwert einer Folge recht abstrakt und daher für durchschnittlich begabte Schüler unverständlich.

Die Praxisbezogenheit und Anwendungsorientiertheit des Erlernten wird dann in einem ausführlichen Aufgabenteil über Wachstum und Zerfall offensichtlich. Mit Hilfe von vorher erworbenen Wissen werden in den Aufgaben 451–456 [Taschner 1999b, S.128ff.] lineare, exponentielle, logarithmische und polynomale Wachstums- und Zerfallsprozesse visuell und formal behandelt. Die tabellarisch gegebenen Daten von jeweils vier Kurven ermöglichen die Erstellung der Graphen, nach denen entschieden werden soll, welche Art der Zu- oder Abnahme vorliegt. Weiters sollen die für die Abhängigkeiten der Variablen von der Zeit eruierten Formeln mit dem eingangs erhaltenen Datenmaterial auf Übereinstimmung verglichen sowie die einzelnen Kurven als Geraden in Koordinatensystemen mit logarithmischer Skalierung der Koordinatenachsen dargestellt werden. In den Aufgaben 457–460 [Taschner 1999b, S.130], die sich quasi als “Umkehrung” der vorangegangenen verstehen, sollen die gegebenen Exponentialkurven in zweierlei Koordinatensysteme (normal skaliert, logarithmisch skalierte Ordinate) eingezeichnet und die Unterschiede dabei aufgezeigt werden. Den Schülern soll hiermit der Einfluss der beiden Konstanten c und k in der formalen Darstel-

lung $y = ce^{kt}$ des exponentiellen Wachstums von y auf die graphische Veranschaulichung der Kurve augenscheinlich gemacht werden. Mit der Erstellung eines Zeichenprogramms am Computer für alle vier Typen von Wachstums- und Zerfallskurven in zwei Koordinatensystemen in Aufgabe 469 [Taschner 1999b, S.131] folgt schließlich die Verallgemeinerung der Resultate.

Nachdem durch die Beweisaufgaben 470 und 471 die wichtigen Begriffe der Verdopplungs- und Halbwertszeit beim exponentiellen Wachstum eingeführt wurden, kann man sich durch die Aufgabe 472 (Bakterienwachstum), Aufgabe 473 (abnehmender Luftdruck bei steigender Seehöhe), Aufgabe 477 (Harmonie der Töne), Aufgaben 479 und 480 (Kondensator bzw. Spule unter Gleichspannung) sowie Aufgabe 481 (Jahresringe eines Baumes) [Taschner 1999b, S.131–135] abermals von der Relevanz der natürlichen Exponentialfunktion und somit auch ihrer Basis e für viele Wissensgebiete (Biologie, Aerostatik, Musiktheorie, Elektrodynamik, ...), die weit über die “reine” Mathematik hinausgehen und daher von ihrer Bedeutung für den Alltag überzeugen.

Schlussfolgerungen

Ungeachtet der Unterschiedlichkeit der vorgestellten Lehrbücher in der Auswahl der Beispiele und Aufgaben bezüglich den Themen der verwendeten Sachsituationen, der Vielseitigkeit der Anforderungen (graphische Umsetzungen, Computereinsatz), dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellungen (bloße Rechenaufgaben oder sogar Argumentations- und Beweisaufgaben) sowie der Anwendungsorientiertheit kann aufgrund der ausführlichen Behandlung kein Zweifel an der ausserordentlichen Wichtigkeit der Eulerschen Zahl e bei den Schülern entstehen. Letztlich liegt es an der Präsentation des Lehrers, ob e im Gedächtnis der Schulabgänger ein bleibendes Bestehen erlangt.

3.4 Euler-Mascheroni-Konstante γ

Unter der sogenannten Euler-Mascheroni-Konstante, die nach Leonhard Euler und Lorenzo Mascheroni benannt ist, versteht man den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \ln n \right)$. Euler bezeichnete die Konstante, deren Zahlenwert 0,577215664901533... beträgt, mit dem Großbuchstaben C und verifizierte ihre Existenz. Trotz intensiver Bemühungen ist noch immer unbekannt, ob die heutzutage mit γ bezeichnete Zahl rational, irrational und im weiteren algebraisch oder transzendent ist.

Abgesehen von der Anwendung in der Mathematik kommt γ anscheinend in anderen Disziplinen nicht explizit vor, dafür tritt die Konstante im mathematischen Bereich in Grenzwertprozessen im Rahmen der Differential- und Integralrechnung relativ häufig auf:

So etwa bei der Beschreibung der Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \left[x \exp(\gamma x) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k} \right) \exp \left(-\frac{x}{k} \right) \right]^{-1} \quad (3.16)$$

(die in Kapitel 3.6 näher besprochen wird) durch die Weierstraßsche Produktdarstellung; dabei gilt $\Gamma'(1) = -\gamma$.

3.4.1 Behandlung der Euler-Mascheroni-Konstante γ im Schulunterricht der 6. Klasse AHS

Als anspruchsvolleres Stoffgebiet in der Mathematik wird die Euler-Mascheroni-Konstante γ eher selten in Schulbüchern vorgestellt. Abermals bildet das Lehrbuch von Taschner für die 6. Klasse AHS [Taschner 1999b] die rühmliche Ausnahme von der Regel. Im Aufgabenteil des ergänzenden Kapitels “Potenz, Exponent, Logarithmus – Wachstum und Zerfall” kommt Taschner im Verlauf der Aufgabe 478 auf die Eulersche Konstante γ zu sprechen. Der thematische Zugang wird dabei über die endliche harmonische Reihe geschaffen. Da diese Aufgabe die einzige Erwähnung der Eulerschen Konstante in österreichischen Schulbüchern darstellt, wird sie hier im Detail angegeben [Taschner 1999b, S.134]:

“Aufgabe 478. Die harmonische Summe: Berechnet man der Reihe nach die Summen

$$s(1) = 1,$$

$$s(2) = 1 + \frac{1}{2},$$

$$s(3) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

$$s(4) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$

...

$$s(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n},$$

erhält man Ergebnisse, die gut durch eine logarithmische Wachstumskurve $s(n) = k \ln n + c$ erfasst werden.

a) Wie lauten die Konstanten k und c , wenn man von den Werten für $s(5)$ und für $s(10)$ ausgeht?

b) Wie in a), wenn man von $s(10)$ und $s(20)$ ausgeht?

Das theoretische Werkzeug zum Verständnis und zur Lösung dieser Anwendungsaufgabe hat Taschner dabei schon zuvor erarbeitet [Taschner 1999b, S.124f.]. Er definiert das logarithmische Wachstum der Variablen $z = z(t)$ als die Abhängigkeit der Variablen z von der Zeit t in Form der Gleichung $z = k \ln t + c$, wobei k und c positive Konstanten sind, die schon durch das Einsetzen von zwei verschiedenen Wertepaaren für $(t \mid z)$ festgelegt

sind. Die graphische Veranschaulichung erfolgt durch eine Gerade mit Anstieg k und Ordinatenabschnitt c in einem t - z -Koordinatensystem mit logarithmisch skaliertem Abszisse. Ausgestattet mit diesen Informationen müssen die Schüler nun nur noch die entsprechenden Summen berechnen und k bzw. c mit Hilfe des Eliminationsverfahrens ermitteln. Für k werden dabei jeweils Werte um 0,9 und für c um 0,7 erhalten. Rechnerisch ist die Aufgabe 478 zwar nicht besonders schwierig, sie demonstriert jedoch die hohe Bedeutung der Theorie für die Anwendung in der reinen Mathematik. Anschließend an die Übungsaufgabe merkt Taschner an, dass für alle $n \in \mathbb{Z}^+$ die Summe $s(n)$ ziemlich genau durch $\ln n + \gamma$ angenähert wird und die Approximation bei zunehmenden Werten von n immer besser wird. Betreffend der Konstante γ stellt der Autor die Benennung nach Euler fest und gibt γ auf Tausendstel genau an. Wahrscheinlich wäre es zu aufwendig geworden noch auf die Bedeutung von γ im Detail einzugehen. Taschner ermöglicht aber immerhin einen tieferen Einblick in die Mathematik durch die Behandlung von Themenbereichen, die sonst aufgrund von Zeitmangel oder Schwierigkeitsgrad nicht zur Sprache kommen. Natürlich ergibt sich durch das gehobene Niveau von [Taschner 1999b] auch der Nachteil, dass es für Lehrer an Schulen mit durchschnittlich begabten und interessierten Schülern ein aufwendiges, wenn nicht sogar unmögliches Unterfangen ist, dieses Buch als Unterrichtsmittel zu verwenden. Trotzdem bin ich der Meinung, dass engagierte Lehrer von wissbegierigen und entsprechend intelligenten Schülern die Chance, mit diesem Lehrbuch Mathematik auf einer anspruchsvolleren Ebene zu betreiben, nutzen sollten, da sie ihre Schützlinge dadurch hervorragend fördern können.

3.5 Eulersche Formel bzw. Eulersche Identität

Die Eulersche Formel, die die Verbindung zwischen den trigonometrischen Funktionen und den komplexen Zahlen herstellt, lautet

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \text{mit} \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.17)$$

Aus ihr ergibt sich die Möglichkeit der Darstellung der trigonometrischen Funktionen als Linearkombinationen von imaginären Exponentialfunktionen:

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{mit} \quad \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}). \quad (3.18)$$

Oft kann man auch die Schreibweise $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ in der Literatur finden, die sich anhand Abbildung 3.5 recht schön veranschaulichen lässt. Setzt man den Winkel φ gleich π erhält man unmittelbar den Ausdruck

$$e^{i\pi} = -1 \quad \text{oder umgeformt} \quad e^{i\pi} + 1 = 0, \quad (3.19)$$

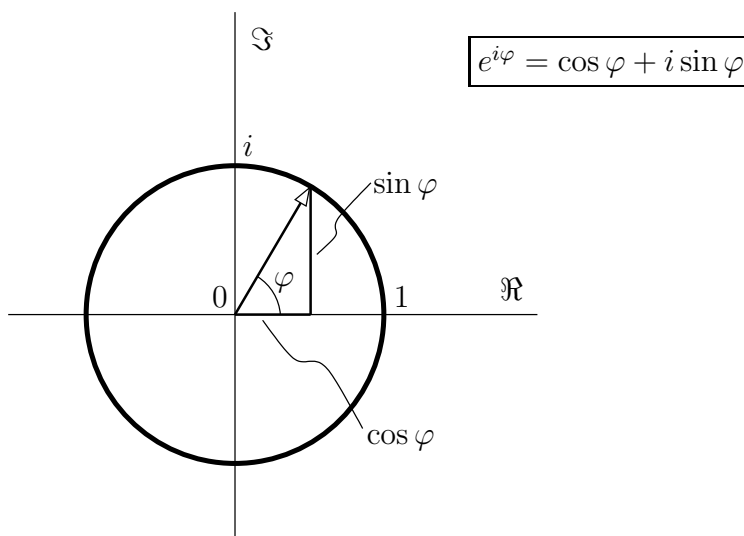


Abbildung 3.5: Die Eulersche Formel

der allgemein unter dem Namen Eulersche Identität bekannt ist. Der Zusammenhang zwischen den grundlegenden Konstanten e , i , π , der Zahl 1 bzw. -1 und der Zahl 0 fasziniert seit eh und je. Im Jahr 2000 wurde die Eulersche Identität zur “schönsten” Formel der Mathematik gewählt.

3.5.1 Behandlung der Eulerschen Formel bzw. der Eulerschen Identität in österreichischen Schulbüchern

Die Eulersche Formel samt der Eulerschen Identität kommt in den Schulbüchern für die 2. und die 4. Klasse HTL von Schärf sowie im Lehrbuch für die 8. Klasse AHS von Götz u. a. vor. Schärf behandelt erstere im Kapitel “Komplexe Zahlen – Exponentialform komplexer Zahlen” [Schärf 1993, S.93f.], wobei er ganz entgegen der sonst üblichen Schreibweise die imaginäre Einheit mit dem Buchstaben “ j ” bezeichnet⁴. Der Autor stellt zu Beginn ohne Beweis die Eulersche Formel $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$ als Verbindung zwischen den Exponentialfunktionen und den Kreisfunktionen vor und merkt an, dass für $e^{j\varphi}$ die Rechenregeln für Potenzen mit reellen Exponenten Gültigkeit besitzen. Anschließend geht er auf die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten einer komplexen Zahl (auch mittels der Eulerschen Formel) ein: $z = (a; b) = a + bj$; $z = (\varphi, r) = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$; $z = re^{j\varphi}$. Diese Theorie wird nun auf drei vorhergehende Beispiele angewandt und den Schülern erklärt, dass man etwa für $z = -2 - 3j$ auch $z = 3,61e^{j236,3^\circ}$ bzw. $z = 3,61e^{4,124j}$ oder für $z = (120^\circ; 6)$

⁴In der Elektrotechnik ist diese Notation zur Vermeidung einer Verwechslung der imaginären Einheit mit der Stromstärke üblich. In den Schulbüchern für die AHS, die sich mit der reinen Mathematik beschäftigen, wird jedoch stets der Buchstabe “ i ” für die imaginäre Einheit verwendet.

auch $z = 6e^{j120^\circ}$ bzw. $z = 6e^{\frac{2\pi}{3}j}$ schreiben kann. Dadurch tritt sehr schön die Verknüpfung der kartesischen Form $z = a + bj$ einer komplexen Zahl mit ihrer Schreibweise mit Hilfe der Polarkoordinaten $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ für den Radius und φ für den Winkel, wobei $a = r \cos \varphi$ und $b = r \sin \varphi$ gilt, zutage. Die Beziehung $z = re^{j\varphi} = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ verbindet, wie erwähnt, die Exponentialform $re^{j\varphi}$ mit den trigonometrischen Funktionen $\cos$ und $\sin$. Aufgrund der Praxisbezogenheit unterrichtet Schärf seine Schüler auch über die in der Elektrotechnik gebräuchliche Symbolik von $\underline{\varphi}$ für $e^{j\varphi}$ sowie $\underline{-\varphi}$ für $e^{-j\varphi}$ und daher beispielsweise $5 \cdot \underline{32^\circ}$ für $5 \cdot e^{j32^\circ}$. Es folgen die Beweise der Rechenregeln für die Multiplikation $z_1 z_2 = (\varphi_1 + \varphi_2; r_1 r_2)$ bzw. die Division $\frac{z_1}{z_2} = \left(\varphi_1 - \varphi_2; \frac{r_1}{r_2}\right)$ zweier komplexer Zahlen anhand der Exponentialform. Aus der Darstellung der imaginären Einheit j als $1e^{j90^\circ}$ entwickelt der Autor dann die Multiplikation bzw. Division einer komplexen Zahl mit/durch j sowohl formal wie auch mit einer verbalen Interpretation die Drehung des Zeigers bei der jeweiligen Rechenoperation betreffend versehen. [Schärf 1993] beschließt das Kapitel mit den Aufgaben 5.21 und 5.22, die mehr theoretischer Natur sind. Da [Schärf 1993] sonst meist anwendungsorientierte Aufgaben mit Zahlen oder Texten bringt, wird die Aufgabe 5.22, in der die zu z konjugiert komplexe Zahl mit z^* bezeichnet wird, hier angegeben [Schärf 1993, S.94]:

“Aufgabe 5.22. Beweisen Sie die wichtigen Beziehungen: $|z| = |z^*|$, $|z| = \sqrt{zz^*}$, $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.”

Im Lehrbuch für die 4. Klasse HTL ist der Eulerschen Formel im Rahmen des Bereichs “Ausbau der Infinitesimalrechnung – Unendliche Reihen” [Schärf 1995, S.151] sogar ein eigenes Kapitel gewidmet. Über die Reihenentwicklung von e^x führt der Autor hier die Schüler zur Eulerschen Formel $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ und wiederholt, dass diese zur Darstellung jeder komplexen Zahl in der Exponentialform dient. Im weiteren Verlauf erwähnt er auch die Formel von Moivre: $z^n = (a + bj)^n = [r(\cos \varphi + j \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + j \sin n\varphi)$. Anhand eines vorgerechneten Beispiels demonstriert nun [Schärf 1995] die Nützlichkeit der vorangegangenen Informationen bei der Vereinfachung von an sich aufwendigen Rechnungen. Er zeigt die Berechnung der beiden Integrale $I_1 = \int e^{\kappa x} \cos \omega x dx$ und $I_2 = \int e^{\kappa x} \sin \omega x dx$ statt mit der gebräuchlichen partiellen Integration unter Zuhilfenahme der Formeln von Euler und Moivre. Durch Eruierung von $I_1 + jI_2$ und anschließendem Vergleich von Real- und Imaginärteilen kommt man nämlich viel rascher zur Lösung als unter Verwendung der üblichen Vorgangsweise. Das erworbene Wissen wird anschließend mit der Aufgabe 12.12, in der es um den Sinus und Cosinus Hyperbolicus geht, überprüft [Schärf 1995, S.151]:

“Aufgabe 12.12. Zeigen Sie, dass die Formeln $j \sin x = \sinh jx = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2}$ und $\cos x =$

$$\cosh jx = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \text{ richtig sind.}''$$

Schärf stellt mit der Behandlung der Eulerschen Formel in seinen beiden Schulbüchern nicht nur die Zusammenhänge der verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten einer komplexen Zahl unter Einbeziehung von etwaigen Besonderheiten in der Elektrotechnik her, sondern illustriert auch die vielseitige Anwendung der Eulerschen Formel in den Gebieten der komplexen Zahlen, der unendlichen Reihen und in der Integralrechnung. Die Wahl der Beispiele und Aufgaben wird zudem einem Unterricht in einer AHS genauso gerecht und beschränkt die Verwendung dieses Schulbuchs nicht allein auf eine höhere technische Lehranstalt.

[Götz u. a. 2007] beschäftigen sich mit der Eulerschen Formel im Abschnitt “Wiederholung, Vertiefung und Ergänzung”, der vermutlich als Maturavorbereitung gedacht ist und vorwiegend aus Übungsaufgaben besteht. Im Kapitel “Analysis – Funktionen (Folgen) als Beschreibungsmittel – Reihenentwicklungen” fungiert die Anführung der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ in einem gelb unterlegten Kasten als Impuls für die darauffolgende Aufgabe 821, in der es um den Beweis der Formel von Euler und jener von Moivre sowie um die Entwicklung der Eulerschen Identität geht [Götz u. a. 2007, S.219]:

“Aufgabe 821. a) Beweise die Eulersche Formel, indem du die drei Funktionen als Reihen darstellst (vgl. LB 7. Kl. S.153 und Aufg. 820)!

b) Beweise die Formel von Moivre (LB 7. Kl. S.26) unter Anwendung der Eulerschen Formel! Begründe daran, dass die Formel von Moivre nicht nur für $n \in \mathbb{N}$, sondern für $n \in \mathbb{R}$ gilt!

c) Setze in der Eulerschen Formel $x = \pi$ und bringe alles auf die linke Seite der Gleichung. Die entstehende Beziehung wird als die schönste Formel der Mathematik bezeichnet. Wie lautet sie? Warum wird sie wohl so gepriesen?”

Mit dieser Aufgabe regen [Götz u. a. 2007] einerseits zur eigenständigen Arbeit an, indem sie mit den Verweisen auf die Nachschlagemöglichkeiten die Schüler auf den Alltag in Beruf und Studium vorbereiten, wo es weniger um das auswendige Beherrschen von Fakten als um die Fertigkeit des richtigen Benützens von Literatur und Nachschlagewerken zur Lösung von Problemen geht. Andererseits wird durch die Aufgabenstellung in 821 c) die Fähigkeit der Schüler zur Begründung ihrer Meinung gefördert.

Obwohl [Götz u. a. 2007] der Eulerschen Formel deutlich weniger Platz als [Schärf 1993, 1995] einräumen, ist die Aufgabe 821, die äußerst knapp alles Wesentliche enthält, für Schüler der 8. Klasse, die kurz vor der Matura stehen und sich noch die wichtigsten Dinge aneignen bzw. wiederholen müssen, eine gewinnbringende Möglichkeit zum Lernen oder Üben in jeglicher Hinsicht. Das Thema “Eulersche Formel” wird also in den österreichischen Schulbüchern, in denen es überhaupt Eingang findet, auf eine sehr sinnvolle Art und Weise den Schülern nähergebracht.

3.6 Eulersche Gammafunktion

Die Intention eine Fortsetzung der durch $n \mapsto n!$ auf $\mathbb{N}$ definierten Funktion auf $\mathbb{R}^+$ zu finden, führte zu der Entdeckung der Gammafunktion Γ , einer der wichtigsten nichtalgebraischen Funktionen der Mathematik. Euler, der im Jahr 1730 in einem Brief an Christian Goldbach das Integral $\int_0^1 \left[\ln \left(\frac{1}{t} \right) \right]^{x-1} dt$ zur Interpolation der Fakultätsfunktion in Erwägung zog, entwickelte folgende Darstellung der Gammafunktion als uneigentliches Integral:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{für } x > 0. \quad (3.20)$$

Für die Gammafunktion gilt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (3.21)$$

woraus man durch die Bedingung $\Gamma(1) = 1$ (da $\int_0^\infty e^{-t} dt = 1$) die Beziehung

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}^+ \quad (3.22)$$

erhält. Damit gelingt eine Ausweitung des Begriffs der Fakultät auf die positiven reellen Zahlen. In der Mathematik sind zudem noch die Produktdarstellung von Gauß,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad (3.23)$$

und jene von Weierstraß

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} e^{-Cx} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{1 + \frac{x}{\nu}} \quad (3.24)$$

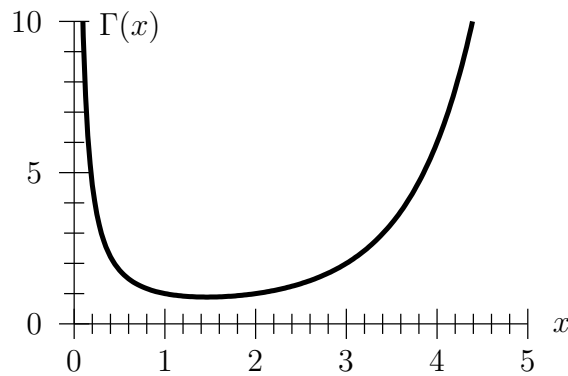
als Alternativen zur Eulerschen Darstellung der Gammafunktion geläufig. Um eine Näherung der Gammafunktion für $x > 0$ zu bekommen, kann man die folgende, nach J. Stirling benannte Formel, verwenden:

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}. \quad (3.25)$$

Zwischen der Gamma- und der Sinusfunktion ist zudem der interessante Zusammenhang

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (3.26)$$

bekannt, aus dem bei Einsetzen von $\frac{1}{2}$ für x die Gleichung $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ resultiert. Praktische Bedeutung besitzt $\Gamma(x)$ in der beliebig genauen Approximation von Fakultäten, der Gammaverteilung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie bei der Berechnung des Gaußschen Fehlerintegrals.

Abbildung 3.6: Die Eulersche Gammafunktion $\Gamma(x)$

3.6.1 Behandlung der Eulerschen Gammafunktion im Schulunterricht der 8. Klasse AHS

Rudolf Taschner beschäftigt sich in seinem Lehrbuch für die 8. Klasse AHS im Verlauf des Kapitels “Stammfunktionen, Integrale, Summen” im zum Ergänzungsstoff gehörigen Abschnitt “Fakultäten und Binominalkoeffizienten – Integraldarstellung der Fakultäten” [Taschner 2001, S.66] mit der Eulerschen Gammafunktion. In einer Aufgabensequenz, die der Herleitung der Stirlingschen Formel dient, soll zunächst für $n > 0$ anhand partieller Integration

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \quad (3.27)$$

verifiziert werden (Aufgabe 196). In der nächsten Aufgabe kommt dann Eulers Integraldarstellung der Fakultäten, wenn auch nicht unter dem Namen “Gammafunktion”, konkret zur Sprache [Taschner 2001, S.66]:

“Aufgabe 197. Das auf der linken Seite der Formel von Aufgabe 196 angeschriebene Integral ist für $n = 0$ zu berechnen. Hieraus sind die Formeln

$$\int_0^\infty t e^{-t} dt = 1, \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt = 2 \cdot 1, \int_0^\infty t^3 e^{-t} dt = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

und allgemein für natürliche Zahlen n die Formel

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = (n) \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n! \text{ herzuleiten. Diese Integraldarstellung der Fakultäten hat Leonhard Euler entdeckt.}”$$

Dieses Wissen wird sogleich in Aufgabe 198 angewandt, in der es um die Herleitung der Formel

$$n! = n^{n+1} \int_{-1}^\infty \exp[-n(1+x-\ln(1+x))] dx = n^{n+1} \exp(-n) \int_{-1}^\infty \exp[-n(x-\ln(1+x))] dx \quad (3.28)$$

für $n \in \mathbb{N}$ geht und die mit einer Anleitung versehen ist bei der die Eulersche Integraldarstellung eine tragende Rolle spielt. Zur Lösung der Aufgabe muss man nämlich $t^n e^{-t} = e^{-t+n \ln t} = e^{-n(\frac{t}{n} - \ln t)}$ gemeinsam mit der Substitution $\frac{t}{n} = 1+x$ oder auch

$t = n(1 + x)$ in der Integraldarstellung einsetzen. Die Nützlichkeit der Kenntnis dieser Formel wird also sofort nach ihrer Erwähnung unter Beweis gestellt. Leider war mit Ausnahme von [Taschner 2001] kein weiteres österreichisches Schulbuch auffindbar, das die Eulersche Gammafunktion behandelt. Da dieses Thema bestimmt zum anspruchsvolleren Schulstoff gehört und sogar in [Taschner 2001] als Ergänzungsstoff bezeichnet wird, wirkt das durchaus nachvollziehbar. Trotzdem bietet [Taschner 2001] hier einen guten Überblick, der wesentlich zum Verständnis beitragen könnte und interessierten Schülern nicht vorenthalten werden sollte. Möglicherweise kann gerade die schrittweise Heranführung über das Einsetzen von konkreten Zahlen zur allgemeinen Formel (wie in Aufgabe 197) viel dazu beitragen, diesem Thema etwas vom Schwierigkeitsgrad zu nehmen und es dadurch auch weniger begabten Schülern zugänglich zu machen.

Literaturverzeichnis

Achleitner u. a. 2006

ACHLEITNER, Renate ; RATZBERGER-KLAMPFER, Anita ; WEIKINGER, Maria: *ganz klar: Mathematik 2*. Wien : Jugend & Volk, 2006

Bernhard 2002a

BERNHARD, Martin: *Mathematik. Schularbeiten und Prüfungsaufgaben 5. Klasse*. Wien : öbv & hpt, 2002

Bernhard 2002b

BERNHARD, Martin: *Mathematik. Schularbeiten und Prüfungsaufgaben 6. Klasse*. Wien : öbv & hpt, 2002

Bürger u. a. 1992

BÜRGER, Heinrich ; FISCHER, Roland ; MALLE, Günther ; KRONFELLNER, Manfred ; MÜHLGASSNER, Thomas ; SCHLÖGLHOFER, Franz: *Mathematik Oberstufe 4. Arbeitsbuch für die 8. Klasse der AHS*. Wien : Hölder-Pichler-Tempsky, 1992

Bürger u. a. 2000a

BÜRGER, Heinrich ; FISCHER, Roland ; MALLE, Günther ; KRONFELLNER, Manfred ; MÜHLGASSNER, Thomas ; SCHLÖGLHOFER, Franz: *Mathematik Oberstufe 1. Arbeitsbuch für die 5. Klasse der AHS*. Wien : öbv & hpt, 2000

Bürger u. a. 2000b

BÜRGER, Heinrich ; FISCHER, Roland ; MALLE, Günther ; KRONFELLNER, Manfred ; MÜHLGASSNER, Thomas ; SCHLÖGLHOFER, Franz: *Mathematik Oberstufe 2. Arbeitsbuch für die 6. Klasse der AHS*. Wien : öbv & hpt, 2000

Dickson u. Khwarizmi 1970

DICKSON, Leonhard ; KHWARIZMI, Al: *Biographical Dictionary of Mathematicians*. Bd. 2. New York : Scribner, 1970-1991

Dunham 1999

DUNHAM, William: *Euler. The Master of us all*. Washington : The Mathematical Association of America, 1999

Erdős u. Underwood 2007

ERDÖS, Paul ; UNDERWOOD, Dudley: Some Remarks and Problems in Number Theory Related to the Work of Euler. In: DUNHAM, W. (Hrsg.): *The Genius of Euler. Reflections on His Life and Work*. Washington : The Mathematical Association of America, 2007, S. 215–224

Euler 1959

EULER, Leonhard: *Vollständige Anleitung zur Algebra*. Stuttgart : Reclam, 1959

Euler 1983

EULER, Leonhard: *Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Erster Teil (Reprint)*. Berlin/Heidelberg/New York : Springer, 1983

Fellmann 1983

FELLMANN, Emil A.: Leonhard Euler – Ein Essay über Leben und Werk. In: BURCKHARDT, J.J. ; FELLMANN, E.A. ; HABICHT, W. (Hrsg.): *Leonhard Euler (1707-1783). Beiträge zu Leben und Werk. Gedenkband des Kantons Basel Stadt*. Basel/Boston/Stuttgart : Birkhäuser, 1983, S. 13–98

Fellmann 1995

FELLMANN, Emil A.: *Leonhard Euler*. Hamburg : Rowohlt, 1995

Ferzola 2007

FERZOLA, Anthony P.: Euler and Differentials. In: DUNHAM, W. (Hrsg.): *The Genius of Euler. Reflections on His Life and Work*. Washington : The Mathematical Association of America, 2007, S. 155–165

Floderer 1997

FLODERER, Manfred: *Mathematik 2. Basisteil*. Wien : Hölder-Pichler-Tempsky, 1997

Gelfond 1983

GELFOND, Aleksander O.: Über einige charakteristische Züge in den Ideen L. Eulers auf dem Gebiet der mathematischen Analysis und in seiner “Einführung in die Analysis des Unendlichen”. In: BURCKHARDT, J.J. ; FELLMANN, E.A. ; HABICHT, W. (Hrsg.): *Leonhard Euler (1707-1783). Beiträge zu Leben und Werk. Gedenkband des Kantons Basel Stadt*. Basel/Boston/Stuttgart : Birkhäuser, 1983, S. 99–110

Glaisher 2007

GLAISHER, J.W.L.: On the History of Euler's Constant. In: DUNHAM, W. (Hrsg.): *The Genius of Euler. Reflections on His Life and Work*. Washington : The Mathematical Association of America, 2007, S. 147–152

Götz u. a. 2007

GÖTZ, Stefan ; REICHEL, Hans-Christian ; MÜLLER, Robert ; HANISCH, Günter: *Mathematik – Lehrbuch 8*. Wien : öbv & hpt, 2007

Grabner 1996

GRABNER, Birgit: *Analysis bei Euler – ein Abriß*, Universität Wien, Diplomarbeit, 1996

Horner 1772

HORNER, Francis: Excerpt from the Memoir of the Life and Character of Euler. In: *Leonhard Euler. Elements of Algebra*. New York/Berlin/Heidelberg/Tokyo : Springer, 1972, S. XLI–LI

Juschkewitsch 1983

JUSCHKEWITSCH, A.P.: Einführung zur Sammlung von Aufsätzen Leonhard Eulers zur Theorie der Funktion komplexer Variabler. In: WUSSING, H. (Hrsg.): *Zur Theorie komplexer Funktionen. Arbeiten von Leonhard Euler*. Leipzig : Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, 1983, S. 8–48

Juskevic u. Winter 1965

JUSKEVIC, A.P. ; WINTER, E. (Hrsg.): *Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729-1764*. Berlin : Akademie-Verlag, 1965

Kline 1972

KLINE, Morris: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York : Oxford University Press, 1972

Kline 2007

KLINE, Morris: Euler and Infinite Series. In: DUNHAM, W. (Hrsg.): *The Genius of Euler. Reflections on His Life and Work*. Washington : The Mathematical Association of America, 2007, S. 101–111

Knopp 1964

KNOPP, Konrad: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. Berlin/Göttingen/Heidelberg/New York : Springer, 1964

Kubacek 1989

KUBACEK, Martina: *Übersetzung und Analyse der beiden Arbeiten Eulers: "De summa seriei ex numeris primis formatae" und "Supplementum quorundam theorematum arithmeticoarum"*, Universität Wien, Diplomarbeit, 1989

Laugwitz 1983

LAUGWITZ, Detlef: Die Nichtstandard-Analysis: Eine Wiederaufnahme der Ideen und Methoden von Leibniz und Euler. In: BURCKHARDT, J.J. ; FELLMANN, E.A. ; HABICHT, W. (Hrsg.): *Leonhard Euler (1707-1783). Beiträge zu Leben und Werk. Gedenkband des Kantons Basel Stadt*. Basel/Boston/Stuttgart : Birkhäuser, 1983, S. 185–197

Leßner 1980

LESSNER, Günter: *Elemente der Topologie und Graphentheorie*. Freiburg : Herder, 1980

Matvievskaja u. Ožigova 1983

MATVIEVSKAJA, Galina P. ; OŽIGOVA, Helena P.: Eulers Manuskripte zur Zahlentheorie. In: BURCKHARDT, J.J. ; FELLMANN, E.A. ; HABICHT, W. (Hrsg.): *Leonhard Euler (1707-1783). Beiträge zu Leben und Werk. Gedenkband des Kantons Basel Stadt*. Basel/Boston/Stuttgart : Birkhäuser, 1983, S. 151–160

Meschkowski 1964

MESCHKOWSKI, Herbert: *Mathematiker-Lexikon*. Mannheim/Zürich : Bibliographisches Institut, 1964

Müller 1907

MÜLLER, Felix: Über bahnbrechende Arbeiten Leonhard Eulers aus der reinen Mathematik. In: VORSTAND DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT (Hrsg.): *Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers*. Leipzig/Berlin : B. G. Teubner, 1907, S. 61–116

Novak u. a. 1990

NOVAK, Johann ; BOLHAR-NORDENKAMPF, Andreas ; KONSTANTINIUK, Peter ; OBERHUMMER, Heinz ; SCHALK, Heinz-Christian ; STEMMER, Siegfried: *Mathematik Oberstufe Band II*. Wien : Reniets, 1990

Reichel u. a. 2000

REICHEL, Hans-Christian ; LITSCHAUER, Dieter ; GROSS, Herbert: *Das ist Mathematik 2*. Wien : öbv & hpt, 2000

Reichel u. a. 2002

REICHEL, Hans-Christian ; MÜLLER, Robert ; HANISCH, Günter: *Lehrbuch der Mathematik 6. Klasse*. Wien : öbv & hpt, 2002

Reinhardt u. Soeder 1994a

REINHARDT, Fritz ; SOEDER, Heinrich: *dtv-Atlas zur Mathematik. Band 1. Grundlagen, Algebra und Geometrie*. München : Deutscher Taschenbuch Verlag, 1994

Reinhardt u. Soeder 1994b

REINHARDT, Fritz ; SOEDER, Heinrich: *dtv-Atlas zur Mathematik. Band 2. Analysis und angewandte Mathematik*. München : Deutscher Taschenbuch Verlag, 1994

Sandifer 2007a

SANDIFER, Edward C.: *The Early Mathematics of Leonhard Euler*. Washington : The Mathematical Association of America, 2007

Sandifer 2007b

SANDIFER, Edward C.: *How Euler Did It*. Washington : The Mathematical Association of America, 2007

Schärf 1993

SCHÄRF, Julius: *Mathematik für Höhere Technische Lehranstalten. Band 2*. Wien : R. Oldenbourg, 1993

Schärf 1995

SCHÄRF, Julius: *Mathematik für Höhere Technische Lehranstalten. Band 4*. Wien : R. Oldenbourg, 1995

Scheel 1984

SCHEEL, Heinrich (Hrsg.): *Leonhard Eulers Wirken an der Berliner Akademie der Wissenschaften 1741-1766. Spezialinventar - Regesten der Euler-Dokumente aus dem zentralen Archiv der Akademie der Wissenschaften der DDR*. Berlin : Akademie-Verlag, 1984

Schönhacker 2000

SCHÖNHACKER, Stefan: *Die Zahl e*, Universität Wien, Diplomarbeit, 2000

Scriba 1984

SCRIBA, Christoph J.: Eulers zahlentheoretische Studien im Lichte seines wissenschaftlichen Briefwechsels. In: KNOBLAUCH, E. ; LOUHIVAARA, I.S. ; WINKLER, J. (Hrsg.): *Zum Werk Leonhard Eulers. Vorträge des Euler-Kolloquiums im Mai 1983 in Berlin*. Basel/Boston/Stuttgart : Birkhäuser, 1984, S. 67–94

Szirucsek u. a. 1989

SZIRUCSEK, Eduard ; DINAUER, Gerhard ; UNFRIED, Hubert ; SCHATZL, Herwig: *Mathematik 5. Allgemeinbildende höhere Schulen*. Wien : Ueberreuter-Hölder-Pichler-Tempsky, 1989

Szirucsek u. a. 1994

SZIRUCSEK, Eduard ; DINAUER, Gerhard ; UNFRIED, Hubert ; SCHATZL, Herwig: *Mathematik 6. Allgemeinbildende höhere Schulen*. Wien : Hölder-Pichler-Tempsky, 1994

Taschner 1998

TASCHNER, Rudolf: *Mathematik 1. Übungs- und Lehrbuch für die 5. Klasse AHS*. Wien : R. Oldenbourg, 1998

Taschner 1999a

TASCHNER, Rudolf: *Mathematik 2. Begleitheft für Lehrerinnen und Lehrer*. Wien : R. Oldenbourg, 1999

Taschner 1999b

TASCHNER, Rudolf: *Mathematik 2. Übungs- und Lehrbuch für die 6. Klasse AHS*. Wien : R. Oldenbourg, 1999

Taschner 2001

TASCHNER, Rudolf: *Mathematik 4. Übungs- und Lehrbuch für die 8. Klasse AHS*. Wien : R. Oldenbourg, 2001

Thiele 1982

THIELE, Rüdiger: *Leonhard Euler*. Leipzig : B.G. Teubner, 1982

Volkert 1988

VOLKERT, Klaus: *Geschichte der Analysis*. Mannheim/Wien/Zürich : Wissenschaftsverlag, 1988

van der Waerden 1985

WAERDEN, B.L. van d.: *A History of Algebra. From al-Khwarizmi to Emmy Noether*. Berlin/Heidelberg : Springer, 1985

Walter 1983

WALTER, Wolfgang: Einführung zur Reprintausgabe von Eulers Introductio. In: EULER, Leonhard: *Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Erster Teil (Reprint)*. Berlin/Heidelberg/New York : Springer, 1983, S. 5–21

Weil 1992

WEIL, André: *Zahlentheorie. Ein Gang durch die Geschichte von Hammurapi bis Legendre*. Basel : Birkhäuser, 1992

Wußing 1979

WUSSING, Hans: *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*. Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979

Elisabeth BIRKE | Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Elisabeth Marianne Friederike BIRKE, geb. Punz
Geburtsort/tag: Wien, 3. Juni 1975
Staatsbürgerschaft: Österreicherin
Wohnsitz: Halirschgasse 19/32
1170 Wien
Familienstand: geschieden, eine Tochter

Ausbildung

09.1985 - 06.1993 Realgymnasium Tulln,
Matura mit Auszeichnung bestanden
09.1993 - 01.1994 Pädagogische Akademie für Volksschullehrer,
1100 Wien
03.1994 - 06.1998 Diplomstudium Mathematik (Unterrichtsfach) und
sowie Geschichte, Sozialkunde und Politische Bildung (Unterrichtsfach),
10.2007 - dato Universität Wien

Berufserfahrung

1995 - 2001 Teilzeitbeschäftigung in Werbeagenturen (HC System
Promotion, Atelier Creative Promotion, Agentur Klasan),
Nachhilfeinstituten (Lernen 8, Schülerhilfe, Teach Me) und
Gastgewerbeunternehmen (Heuriger und Club Zimmermann,
Partyservice Zimmermann)
2002 - 2004 Vollzeitbeschäftigung in Gastgewerbeunternehmen
(Volksgarten Pavillon, Cafe Excelsior, Restaurant Bayou,
Weinbar Contor, Nelsons)
01.2005 - 12.2006 Ausbildung zur Pharmazeutisch Kaufmännischen Assistentin,
Apotheke zur Austria, 1090 Wien,
Lehrabschlussprüfung mit ausgezeichnetem Erfolg
02.2007 - dato Pharmazeutisch Kaufmännische Assistentin,
Hubertusapotheke, 1090 Wien
(Kinderkarenz seit 08.2007)

