



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Das didaktische Potential des
Problem Generators von Wolfram|Alpha

verfasst von

Matthias Berl

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt:

A 190 406 884

Studienrichtung lt. Studienblatt:

Lehramtsstudium UF Mathematik, UF Informatik
und Informatikmanagement

Betreut von:

Univ. Doz. Dr. Franz Embacher

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, September 2016

Kurzfassung

Der Problem Generator von Wolfram|Alpha ist ein Online-Learning-Tool, mit welchem Aufgaben zu verschiedenen Teilgebieten der Mathematik automatisch generiert werden können, um diese anschließend zu erarbeiten und zu lösen. Ein weiteres spannendes Feature ist, dass bei falscher Eingabe der Lösung Tipps angezeigt werden und nach nochmaliger Falscheingabe sogar der komplette Lösungsweg schrittweise angegeben wird. Die Arbeit soll einen technischen sowie didaktischen Einblick auf den Problem Generator von Wolfram|Alpha geben.

In der vorliegenden Arbeit wird zuerst eine Beschreibung des Aufbaus und der Umsetzung der Software gegeben, um diese danach durch Begriffsbestimmungen einem elektronischen Lernsystem zuordnen zu können. Der Hauptteil beschäftigt sich mit dem medien- und mathematikdidaktischen Design des Problem Generators. Hier werden speziell ausgewählte Beispiele bzw. Problemstellungen, welche vom Wolfram Problem Generator realisiert sind, gesichtet, beschrieben und nach theoretisch-wissenschaftlichen Ansätzen bewertet. Um das Verhalten im Umgang mit dem Problem Generator und den möglichen Nutzen beurteilen zu können, wird im letzten Teil der Arbeit das Ergebnis der durchgeführten empirischen Studie herangezogen.

Abstract

Wolfram|Alpha's problem generator is an online-learning tool, which allows one to automatically generate tasks for different fields of mathematics, in order to work out and solve them subsequently. Another exciting feature is that hints are shown if the wrong solution is entered, and after a further unsuccessful entry the entire solution process is given step-by-step. The aim of this thesis is to give not only a technical but also a didactic insight into Wolfram's problem generator.

In the present thesis, first of all, a description of the structure and the implementation of the software are given in order to assign them later on to an electronic learning system with the aid of definitions. The main part is concerned with the media- and mathematic-didactic design of the problem generator. Here, specially selected examples or rather statements of problems, which are implemented by the Wolfram problem generator, are sifted, described and evaluated according to theoretical and academic approaches. In the last part of the thesis the result of the empirical study is used to be able to assess the behavior while using the problem generator and the potential benefits of it.

Danksagung

Allen Personen, die mich auf meinem bisherigen Lebensweg begleitet und dazu beigetragen haben, mich zu dem Menschen zu machen, der ich heute bin, will ich danken.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Betreuer Univ. Doz. Dr. Franz Embacher, der mir stets mit Rat und Tat zur Seite stand. Durch seine kritische und konstruktive Haltung und seine überaus nette und wertschätzende Art konnte er mich in allen Bereichen der Diplomarbeit bestens unterstützen und leiten.

Meinen Freunden und Kollegen Thomas Fleck, Maximilian Motsch und Alexander Tauchner möchte ich für vorangegangene Diskussionen, das Korrekturlesen des Fragebogens sowie für wichtige Anmerkungen zur empirischen Studie danken.

Das Skikurs-Team der AHS St. Ursula Wien Mauer sei hier auch hervorgehoben. Viele Gespräche und Diskussionen auf den von mir begleiteten Skikursen begünstigten und festigten meinen Entschluss des Studienwechsels auf ein Lehramtsstudium. Vielen Dank für diese gemeinsame Zeit, für Eure liebevolle und freundschaftliche Art und für das jahrelange Vertrauen in mich. Die Zeit mit Euch werde ich nie vergessen.

Danke auch an all meine engsten Freunde, die in jedem Lebensabschnitt eine bedeutende Rolle spielten und hoffentlich noch lange spielen werden. Durch Euch habe ich Motivation und Inspiration für all mein Handeln und Tun erhalten. Ich danke Euch dafür.

Nicht zuletzt möchte ich meiner Familie danken, die mir stets helfend zur Seite stand. Meinen Eltern möchte ich für das Ermöglichen meines Bildungsweges danken. Ihr seid nicht nur während meiner Schulzeit, sondern auch im Studium immer helfend zur Seite gestanden. Meiner Mutter möchte ich für die liebevolle Unterstützung in all meinen Lebensbereichen danken. Ein Dankschön auch meiner Schwester, welche mir beim Ausarbeiten des Abstracts enorm unter die Arme gegriffen hat.

Schließlich spreche ich hier meinen größten Dank meiner Tochter Leni und meiner Lebenspartnerin und besten Freundin Lisa Ringhofer aus. Sie haben mich in verzweifelten Momenten motiviert und aufgemuntert sowie mich als ungeduldigen Autoren dieser Arbeit monatelang geduldig ertragen. Mein Leben wurde durch Euch bereichert und ich freue mich schon auf den baldigen Familienzuwachs im kommenden Februar. Danke dass Ihr immer für mich da seid. Ihr seid mein Glück, Ihr seid meine Liebe, Ihr seid mein Leben.

Inhaltsverzeichnis

1	EINLEITUNG	10
2	DIE WELT VON WOLFRAM	13
2.1	EINLEITUNG	13
2.2	ÜBER DEN GRÜNDER STEPHEN WOLFRAM	14
2.3	DIE ANTWORTMASCHINE WOLFRAM ALPHA	15
2.3.1	ALLGEMEINES	16
2.3.1.1	Suchmaschinen	17
2.3.1.2	Wissensmanagement und Informationsmanagement	19
2.3.2	FUNKTIONSWEISE VON WOLFRAM ALPHA	22
2.3.2.1	Data Curation Pipeline	25
2.3.2.2	Algorithmic Computation System	26
2.3.2.3	Linguistic Processing System	26
2.3.2.4	Automated Presentation System	27
2.3.3	PRODUKTE	28
2.3.3.1	Wolfram Alpha Pro	28
2.3.3.2	Wolfram Alpha for Mobile	31
2.4	WOLFRAM PROBLEM GENERATOR	33
2.4.1	ALLGEMEINES	33
2.4.2	BEGRIFFSBESTIMMUNG UND DEFINITION	34
2.4.2.1	Instant Learning	34
2.4.2.2	E-Learning	34
2.4.2.3	Klassifizierung von E-Learning-Umgebungen	39
2.4.2.4	Zuordnung des Wolfram Problem Generators zu einer Klasse der E-Learning-Szenarien	41
2.4.3	ENTSTEHUNG UND WEITERENTWICKLUNG	42
2.4.4	AUFGABENPOOL	43
2.4.4.1	Arithmetik	43
2.4.4.2	Zahlentheorie	44
2.4.4.3	Algebra	44
2.4.4.4	Analysis	46
2.4.4.5	Lineare Algebra	46
2.4.4.6	Statistik	47
2.4.5	UMSETZUNG UND AUFBAU DER PROBLEMSTELLUNGEN	48
2.4.5.1	Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung	48

2.4.5.2	Eingabe der Lösung und Korrektur	49
2.4.5.3	Tipp (Hint) zur Lösungsfindung	49
2.4.5.4	Step-by-step solution	50
2.4.5.5	History	54
2.4.5.6	Problem sheets	56
2.4.6	KRITISCHE AUSEINANDERSETZUNG	57
3	DIDAKTISCHER TEIL	60
3.1	MEDIENDIDAKTIK	60
3.2	MATHEMATIK-DIDAKTISCHE ANALYSE	61
3.2.1	TEILGEBIET 1: ADDIEREN VON NATÜRLICHEN ZAHLEN	63
3.2.1.1	Fachdidaktische Theorien	63
3.2.1.2	Aufbau und Umsetzung der Probleme	73
3.2.1.3	Didaktische Bewertung – Beurteilung des Lernarrangements und der Lernmöglichkeiten	78
3.2.2	TEILGEBIET 2: GLEICHUNGEN	80
3.2.2.1	Fachdidaktische Theorien	81
3.2.2.2	Aufbau und Umsetzung der Probleme	96
3.2.2.3	Didaktische Bewertung – Beurteilung des Lernarrangements und der Lernmöglichkeiten	103
3.2.3	TEILGEBIET 3: VEKTORADDITION IN DER EBENE	106
3.2.3.1	Fachdidaktische Theorien	106
3.2.3.2	Aufbau und Umsetzung der Probleme	114
3.2.3.3	Didaktische Bewertung – Beurteilung des Lernarrangements und der Lernmöglichkeiten	117
3.3	EINSATZGEBIETE UND MÖGLICHE ANWENDUNGSSZENARIEN – EINE DIDAKTISCHE BEWERTUNG	119
4	EMPIRISCHE STUDIE	121
4.1	MOTIVATION	121
4.2	FRAGEBOGEN	121
4.2.1	AUFBAU DES FRAGEBOGENS	121
4.2.2	DURCHFÜHRUNG	123
4.2.2.1	Zielgruppe	123
4.2.2.2	Pretest	125
4.2.3	DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE UND AUSWERTUNG	127
5	ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSFOLGERUNG	148

6	<u>ANHANG</u>	<u>150</u>
6.1	PROBLEM SHEET	150
6.1.1	ANSWER KEY	154
6.2	FRAGEBOGEN	158
7	<u>LITERATURVERZEICHNIS</u>	<u>177</u>
8	<u>ABBILDUNGSVERZEICHNIS</u>	<u>183</u>

1 EINLEITUNG

Als ich mich auf eine Nachhilfestunde im Fach Mathematik vorbereitete, entdeckte ich zufälligerweise die Homepage www.wolframalpha.com, was den ersten Kontakt zu einem überaus interessanten Online-Tool darstellte, welches ich so noch nicht kannte. Wolfram|Alpha¹ kann Antworten auf verschiedenste Fragen finden, noch besser formuliert wäre: berechnen. Und wirklich brauchbar und verständlich schienen mir die Antworten auf Fragen mit mathematischem Inhalt.

Ich lernte nach und nach die Vorteile und Vorzüge kennen und verwendete *Wolfram|Alpha* von nun an auch für mein Studium. Die Breite und Komplexität der angebotenen Funktionen konnte ich damals allerdings noch nicht abschätzen. Auf der anderen Seite begegnete mir *Wolfram|Alpha* zu keinem Zeitpunkt in meinem Studium, die Software *Mathematica* kam zumindest zwei mal in einer Übung (Übungen zur Analysis) zum Einsatz – dies aber nur durch die Lehrperson. Was hat nun *Mathematica* mit *Wolfram|Alpha* zu tun? *Wolfram|Alpha* läuft auf der Software *Mathematica*.

Des Weiteren durfte ich mich in zwei Lehrveranstaltungen der Studienrichtung *Lehramt Informatik und Informatikmanagement* mit *Wolfram|Alpha* genauer auseinandersetzen. Die von mir verfassten Arbeiten tragen die Titel *Die Antwortmaschine Wolfram|Alpha* und *Wolfram|Alpha – Einsatz im Unterricht und bei der Unterrichtsplanung*. Erst durch diese detaillierte Auseinandersetzung mit dem Online-Tool bekam ich einen Überblick über die Möglichkeiten, welche *Wolfram|Alpha* bereitstellt.

Sehr interessant erschien mir die *Step-by-step Solution*, welche Lösungswege komplett vor-skizzieren kann und wichtige Lösungshinweise anbietet. Erst vor Kurzem stieß ich dann auf ein neues Tool, nämlich den *Problem Generator*. Dieser generiert für verschiedenste mathematische Teilgebiete Aufgaben, welche zum automatisierten Üben verwendet werden können. Bei auftretenden Problemen bei der Lösungsfindung bzw. falscher Ergebniseingabe bekommt die/der AnwenderIn einen Tipp bzw. in zweiter Instanz die Möglichkeit, sich den Lösungsweg von der Step-by-step Solution vorzeichnen zu lassen, mit der Wahl der schrittweisen Hinführung zur Lösung oder der Anzeige des gesamten Lösungsweges.

¹ Offizielle Schreibweise auf der Homepage <http://www.wolframalpha.com/about.html> (Zugriff: 17.09.2016)

Der *Problem Generator* stellt neu generierte Aufgaben zur Verfügung, welche selbstständig gelöst werden können, und bietet Unterstützung in Form von Tipps bzw. der Step-by-step Solution an, sodass ich dieses Tool als sehr hilfreich und sinnvoll für eigenständiges, angeleitetes Lernen empfinde.

Hier setzt meine Diplomarbeit an. Zunächst wird der Problem Generator mit all seinen Funktionalitäten beschrieben. Danach sollen ausgewählte Problemstellungen des Problem Generators betrachtet werden, um Aussagen über den didaktischen Aufbau und die Umsetzung, die Sinnhaftigkeit und Nützlichkeit der angebotenen Aufgaben zu bekommen. Um zu sehen, welche Einstellungen verschiedene Personen dem Problem Generator gegenüber haben und wie diese den Nutzen im Bereich des Lernens einschätzen, wird eine empirische Studie mittels Fragebogen durchgeführt.

Weitere Motivation für dieses Thema erhielt ich, nachdem ich den Beitrag „*Ungleichungen? Ein Beispiel für den mathematischen Substanzverlust in den Curricula*“ von Heinz Schuhmann (Weingarten) gelesen habe. In diesem steht Folgendes geschrieben:

„Das Potential der im Internet verfügbaren didaktisch relevanten Materialien zum Thema *Ungleichungen* muss genutzt werden. Es ist eine mathematik-didaktische Aufgabe, die Online-Materialien zu sichten, auf ihre Eignung für den Mathematikunterricht hin zu bewerten, ihre Lernwirksamkeit zu untersuchen und Unterrichtskonzepte für ihre Nutzung zu entwickeln.“

Der Problem Generator bietet nicht nur Problemstellungen zum Thema Ungleichungen, sondern zu einer Vielzahl von Themengebieten an. Das ist ein weiterer Punkt, warum ich diese Arbeit schreibe. Heutzutage werden sehr viele Materialien und Inhalte im Internet auf diversen Seiten bereitgestellt, die nicht von einzelnen Personen überblickt werden können. Mit meiner Arbeit will ich einen Teil, nämlich im Konkreten den *Wolfram Problem Generator*, abdecken.

Auch die Nutzung und die ständige Online-Präsenz von neuen Technologien spielen solchen Lern-Tools in die Hände. Es ist nicht mehr notwendig, Software auf einem lokalen Medium zu installieren, um diese danach stationär verwenden zu können. Die Tools befinden sich auf einem Server, auf welche, falls eine Verbindung zum Internet besteht, zugegriffen werden kann. Daraus resultiert ein flexibles Arbeiten in der Cloud², unabhängig von Ort

² Im Bereich der Informationstechnologie (IT) ermöglicht Cloud Computing neue Verfahren zur Bereitstellung von IT-Ressourcen, d.h. solchen Ressourcen, die Unternehmen bei der elektronischen Datenverarbeitung (EDV) unterstützen. Beispiele hierfür sind Server oder Software-Anwendungen. Anstatt IT-Ressourcen in unternehmenseigenen Rechenzentren zu betreiben, können diese bedarfsorientiert bei einem Cloud-Anbieter reserviert, genutzt und wieder freigegeben

und Zeit. Dieses Aufkommen von mobilen Anwendungen empfinde ich als möglichen Schritt in eine neue „Lernkultur“, dem zumindest eine Chance gegeben werden sollte.

schlaue Kopf hinter all diesen technischen Lösungen? Dafür reicht ein Blick auf die Firmen-
seite, auf welcher ersichtlich ist, dass das Unternehmen *Wolfram Research*, welches die
Entwicklungen verwirklichte, im Jahre 1987 von *Stephen Wolfram* gegründet wurde.⁵ *Stephen Wolfram* ist auch der Mann, der weitestgehend für den Aufbau und die Ideen verant-
wortlich zu machen ist. Wolfram Research ist eines der weltweit angesehensten Unter-
nehmen im Bereich Computer-, Web- und Cloud-Software und bietet mittlerweile auch eine
Reihe von innovativen Programmen für SchülerInnen und StudentInnen an, um ihnen im
Bereich der Wissenschaft und Technologie eine reichhaltige Grundlage für die gesamte
Ausbildung zu ermöglichen.

2.2 ÜBER DEN GRÜNDER STEPHEN WOLFRAM⁶

Stephen Wolfram ist der Urheber der Software *Mathematica* und von *Wolfram|Alpha* und
ist Firmengründer und CEO von *Wolfram Research*. Wolfram wurde 1959 in London gebo-
ren, durchlief seine Bildungslaufbahn in Eton, Oxford und Caltech, publizierte sein erstes
wissenschaftliches Paper mit bereits 15 Jahren und promovierte im Fach Theoretische
Physik in Caltech im Alter von 20 Jahren. Seine ersten wissenschaftlichen Arbeiten führte
er auf den Gebieten der *Hochenergetischen Physik*, *Quantenfeldtheorie* und *Kosmologie*
durch.

Im Jahr 1973 startete Wolfram die Arbeit mit Computern, was ihn im aufkommenden Ge-
biet des Scientific Computing sehr schnell zu einem Fachmann entwickelte. 1979 wurde die
Idee eines SMP (Symbolic Manipulation Program), das erste moderne Computer Algebra
System, umgesetzt, welches mit dem Jahr 1981 in den Verkauf gelangte.

Wolfram befasste sich intensiv mit der Komplexität von Vorgängen in der Natur, welche er
mittels Computer-Experimenten studieren wollte - z.B. verwendete er einfache Computer-
programme, sogenannte *Zelluläre Automaten*, um deren Verhalten zu verstehen. Seine Ar-
beiten in den frühen 1980er-Jahren waren wissenschaftlich gesehen von großer Bedeutung
und fanden Eingang in Gebiete wie der *Complexity Theory* und der *künstlichen Intelligenz*.

Nach einer akademischen Karriere in Caltech, Princeton und zum Schluss an der Universi-
tät von Illinois als Professor der Physik, Mathematik und Computer Science wurde das Un-
ternehmen *Wolfram Research Inc.* im Jahr 1987 von Stephen Wolfram gegründet. Das war
auch der Startschuss für die Software *Mathematica*, welche am 23. Juni 1988 in der ersten

⁵ vgl. Wolfram, Stephen (Online: <http://www.stephenwolfram.com/about/>)

⁶ vgl. ebd.

Version erschien und heute bereits in der Version 11 verfügbar ist. Diese hat sich von Beginn an in vielen technischen und wissenschaftlichen Bereichen etabliert.

Aufbauend auf *Mathematica* und den Ideen von Wolframs Buch *A New Kind of Science* (beinhaltet Wolframs Errungenschaften und Ideen) verfolgt Wolfram sein aktuell ehrgeiziges Ziel:

„Constructing a system that would make as much of the world’s knowledge as possible immediately computable and accessible to everyone.“⁷

Und diese Forderung ist in großem Umfang mit dem Produkt *Wolfram|Alpha* bereits Realität – eine neue Dimension von computergestützter Berechnung ist damit erreicht worden. Dieser anhaltende Fortschritt und erarbeitete Erfolg ermöglicht es dem Team rund um Wolfram, welches bereits knapp 700 MitarbeiterInnen zählt⁸, immer wieder neue Technologien und Produkte in neuen, verschiedenen und wichtigen Richtungen aufzubauen.

2.3 DIE ANTWORTMASCHINE WOLFRAM|ALPHA

Bevor wir uns dem Problem Generator zuwenden, muss zuerst geklärt werden, was die „Suchmaschine“ *Wolfram|Alpha* darstellt, wie diese arbeitet und was mit dieser möglich ist.

So ziemlich jeder Mensch in unserem Kulturkreis kommt regelmäßig in den Genuss, eine Internet-Suchmaschine für seine Zwecke zu verwenden. Suchen kann man mittlerweile nach allem, was einem in den Sinn kommt. Die jeweiligen Ergebnisse der einzelnen Suchmaschinen können aber stark variieren. Die meist-genutzte Suchmaschine ist Google, welche als Suchresultate Links zu Internetseiten anführt, auf denen man mögliche Ergebnisse finden kann. *Wolfram|Alpha* ist in diesem Hinblick eine speziellere Suchmaschine, besser gesagt eine Antwortmaschine.⁹ Diese versucht eine direkte Antwort auf die gestellte Frage, welche nicht unbedingt als Frage formuliert sein muss, zu finden oder zu berechnen.

Erstmals stolperte ich über *Wolfram|Alpha*, als ich für Nachhilfestunden im Fach Mathematik nach Problemlöse-Software im Internet suchte. *Wolfram|Alpha* erlaubt es, mathematische Probleme online lösen und den zugehörigen Lösungsweg anzeigen zu lassen. Es läuft und basiert auf der mathematisch-wissenschaftlichen Software *Mathematica*. Seit diesem ersten, prägenden Kontakt lässt mich *Wolfram|Alpha* nicht mehr los und ich gebe mittler-

⁷ Wolfram, Stephen. Online: <http://www.stephenwolfram.com/about/> (Zugriff: 08.08.2016)

⁸ vgl. Wolfram.com. Online: <http://wolfram.com/company/background.html> (Zugriff: 08.08.2016)

⁹ vgl. Nagler und Serdar (2010)

weile dieses Wissen über diese Maschine auch laufend weiter, um andere auch in den Genuss kommen zu lassen, mit diesem überaus hilfreichen Online-Dienst zu arbeiten.

2.3.1 Allgemeines

*Wolfram|Alpha*s Anspruch ist leicht in einem Satz erklärt, welcher auf der Homepage als Leitspruch wie folgt formuliert ist:¹⁰

Bringing broad, deep, expert-level knowledge to everyone... anytime, anywhere.

Abbildung 2: Leitspruch von Wolfram|Alpha

Für das Team von Wolfram Research liegt das Hauptaugenmerk darauf, das ganze methodische Wissen berechenbar und für jeden zugänglich zu machen. Als Grundidee dient Wolfram|Alpha folgender Zugang: Es sollen alle objektiven Daten gesammelt und kuratiert werden und es wird darauf abgezielt, die Implementation von jedem bekannten Modell, jeder bekannten Methode und von jedem Algorithmus voranzutreiben. Alles was berechnet werden kann, soll berechnet werden können.¹¹ Dies kann allerdings aufgrund der Komplexität und der Breite des heutigen Wissensstandes nur als Ideologie angesehen werden und ist in der Realität nicht umsetzbar.

Das Projekt *Wolfram|Alpha* startete im Jahr 2005, wobei die Arbeiten ab dem Jahr 1986 für das Gelingen mitverantwortlich sind. Ohne *Mathematica* wäre das Projekt nicht denkbar gewesen. Im Mai 2009 war es dann soweit und *Wolfram|Alpha* wurde veröffentlicht, was eine neue Ära in den Bereichen Computation und künstliche Intelligenz einläutete.¹² Mittlerweile besteht die Software *Wolfram|Alpha* aus mehr als 10 Millionen Zeilen Mathematica-Code, welcher ständig erweitert wird.

Erfinder von *Wolfram|Alpha* ist Stephen Wolfram, welcher eine besondere, neue Art von Suchmaschine entwickeln wollte, welche sich von den anderen unterscheidet. Das Ziel ist es, Fragen auf Basis von wissenschaftlichen Datencontainern zu beantworten. *Wolfram|Alpha* ist ein Produkt von Wolfram Research, welches die Berechnungen auf Grundlage der mathematisch-wissenschaftlichen Software *Mathematica* durchführt.¹³

¹⁰ <http://www.wolframalpha.com/about.html> (Zugriff: 08.08.2016)

¹¹ vgl. Gottwald (2009)

¹² vgl. <http://www.stephenwolfram.com/about/> (Zugriff: 08.08.2016)

¹³ vgl. Gottwald (2009)

"Wolfram|Alpha zeigt nicht, wo man die Antwort finden kann, sondern gibt im Ergebnis die Antwort auf die Frage."¹⁴ Es ist also zu erkennen, dass *Wolfram|Alpha* einen komplett anderen Weg wie marktführende Suchmaschinen wie Google, Bing oder Yahoo eingeschlagen hat.

Wolfram|Alpha ist nun aber keine Suchmaschine (wie oben geschrieben), welche das Web durchsucht und Links anbietet, sondern es generiert Output durch computerbasierte Berechnungen. Dieser Unterschied soll in den nächsten Punkten herausgearbeitet werden, um zu verstehen, wie *Wolfram|Alpha* arbeitet und was diese Maschine darstellt.

2.3.1.1 Suchmaschinen¹⁵

2.3.1.1.1 Grundlagen

Als Suchmaschine kann ein Programm, welches zur Recherche von Dokumenten, die in einem Computer oder Computernetzwerk wie z.B. dem World Wide Web (WWW), gespeichert sind, verstanden werden. Aus Information-Retrieval-Systemen entwickelten sich die Suchmaschinen, welche einen Schlüsselwort-Index für die Dokumentenbasis erstellen, um Suchanfragen über Schlüsselwörter mit einer nach Relevanz geordneten Trefferliste zu beantworten. Als Suchergebnis liefert eine Suchmaschine eine Liste von Links, welche möglicherweise relevante Informationen beinhalten könnten.

Die Datenbeschaffung erfolgt in der Regel automatisch, im WWW durch Webcrawler, welche automatisch das WWW nach Inhalten durchsucht und analysiert. Wenn Menschen den Begriff "Suchmaschine" verwenden, wissen die wenigsten davon, wie Suchmaschinen überhaupt arbeiten. Man muss eine erste Unterscheidung in Crawler-basierte Suchmaschinen und von Menschen erzeugte Webverzeichnisse treffen. Diese beiden Arten von Suchmaschinen sammeln ihre Daten in radikal unterschiedlicher Weise, was sie von Natur aus verschieden macht. Im Wesentlichen gibt es folgende Typologie von Suchdiensten, was im nächsten Punkt dargestellt wird.

2.3.1.1.2 Arten von Suchmaschinen

a. Volltextsuchmaschine

Diese Suchdienste können so verstanden werden, dass sie rein maschinell einen Volltextindex von Internetressourcen (Webseiten) erstellen und diesen durchsuchbar in einer Datenbank bereitstellen. Es wird wort-genau nach dem Eingabe-String

¹⁴ <http://blog.wolfram.com/2009/03/05/wolframalpha-is-coming/> (Zugriff: 08.08.2016)

¹⁵ vgl. Nagler und Serdar (2010)

gesucht und somit spiegeln die Suchresultate auch nur jene Ergebnisse wider, welche den Eingabe-String enthalten. Mit der Zeit wurde erkannt, dass viele Suchergebnisse keine relevanten Informationen für die jeweiligen Anfragen beinhalten, was dazu führte, dass Suchanfragen manuell verfeinert und abgeändert werden. Bei Volltextsuchmaschinen gibt es Vergleichskriterien, wie Umfang/Abdeckung (d.h. die Anzahl der indexierten Webseiten), Aktualität (d.h. zeitlicher Abstand zwischen einer Seitenindexierung) und Rankingverfahren (d.h. die Art der Relevanzbewertung). Als Beispiele kann man die Suchdienste Google, Altavista, MSN Search, usw. nennen. Für die Volltextsuchmaschine ist es grundlegend, dass keine der existierenden Suchdienste die gesamte im WWW verfügbare Information abdecken kann.

b. Semantische Suchmaschine

Aufgrund der oft nicht passenden Suchergebnisse bei Volltextsuchmaschinen entwickelte sich eine neue Art von Suchmaschine, nämlich die semantischen Suchmaschinen. Nun wird nicht mehr nur die Anfrage als einfache Zeichenkette verstanden, sondern der Anfrage wird eine Bedeutung gegeben und diese wird in Verbindung mit Wort- und Themenverwandten zur Suche genutzt. Es werden Synonyme, Antonyme oder einfach Wörter, die in Verbindung mit dem gesuchten Wort überdurchschnittlich oft vorkommen, in die Suchmenge mit aufgenommen, welche alle die selbe Semantik wie das gesuchte Wort aufweisen - es wird nach der Bedeutung als nach dem Wort gesucht. Mit diesem Vorgehen kann die Suche erweitert werden, was dem Benutzer ein breiteres Ergebnis liefert.

Dieses Verfahren kann dazu führen, dass man als Suchergebnis eine Vielzahl von Resultaten erhält, was auch als Nachteil betrachtet werden kann. Deshalb bietet es sich an, die Suchanfrage durch Kombination mehrerer Wörter von Beginn weg zu konkretisieren. Beispiel: <http://dmoz.org>.

c. Meta-Suchmaschine

Diese Art von Suchmaschine erstellt keine eigenen Suchergebnisse, sondern bedient sich anderer Suchdienste, um Resultate zu bekommen. Metasuchmaschinen unterhalten somit keine eigene Indexdatenbank. Suchresultate von anderen Suchmaschinen werden kombiniert und nach dem Ranking bei jedem einzelnen Suchdienst angezeigt, was zu einem breiteren Suchergebnis führt. Zusätzlich wird angezeigt, von welchem Dienst die einzelnen Ergebnisse stammen, allerdings ist nicht ersichtlich,

ob es sich um qualifizierte (vom Such-Algorithmus selbst gefundene Links) oder gekaufte (ein Höchstbieter kann für einen bestimmten Suchbegriff einen Platz in der Ergebnisliste kaufen, welcher für diesen fix reserviert ist) Links handelt.

Meta-Suchmaschinen besitzen den Vorteil, dass keine einzelne Suchmaschine das gesamte Web abdeckt und eine Kombination somit ein besseres Ergebnis erwarten lässt. Beispiel: <http://www.metager.de>.

2.3.1.2 Wissensmanagement und Informationsmanagement

Um Informationen von Suchmaschinen abrufen zu können, müssen diese auf irgendeinem Weg beschaffen werden, um sie dann auswerten und interpretieren zu können. Dafür müssen die Begriffe *Informations-* und *Wissensmanagement* geklärt werden, was mit folgenden Definitionen nach Sturz¹⁶ passiert:

- Das *Informationsmanagement* beschäftigt sich mit allen Fragen der Speicherung, Verwaltung und Weitergabe von Informationen (= explizitem Wissen) und umfasst alle Maßnahmen, die dazu geeignet sind, Informationen in einem bestimmten Kontext zu erfassen, zu speichern, automatisch zu strukturieren und bereitzustellen.
- Das *Wissensmanagement* hingegen soll Menschen befähigen, die innerhalb oder auch außerhalb von Informationssystemen gespeicherten Informationen zu finden, diese zu bewerten und in der Folge mit dem Ziel zu nutzen, Lösungen mit gegebenen Problemstellungen zu finden und so einen Mehrwert zu schaffen.

Des Weiteren werden die zwei Begrifflichkeiten *Knowledge Warehouse* und *Computational Knowledge Engine*, welche Informationsmanagementsysteme darstellen, beschrieben, um das Konzept von *Wolfram/Alpha* verständlich zu machen.

2.3.1.2.1 Knowledge Warehouse

Bei diesem Konzept wurden Informationen bereits im Voraus durch Personen gefiltert und ausgewertet, um diese Informationen auf einen wesentlichen Teil zu komprimieren. Die vorsortierten Informationen werden dann von Personen in das Informationsmanagementsystem gespeichert. Das berühmteste Beispiel hierfür ist *Wikipedia*, was wir auch als „Wissenslagerhaus“ bezeichnen können. Hier besteht im Vergleich mit einer herkömmlichen Suchmaschine wie *Google* der Unterschied, dass nach der Suche im besten Fall ein Artikel

¹⁶ Sturz, W. (2010): S. 4

als Ergebnis angezeigt wird, welcher relevante Informationen zum eingegebenen Suchbegriff beinhalten kann.

Wikipedia liefert z.B. zum Suchbegriff „Fraktal“ genau eine Seite mit Informationen über Begriff und Umfeld, Fraktale Dimension, Selbstähnlichkeit, Beispiele, Anwendungen, Fraktale in der Natur, Verfahren zur Erzeugung von Fraktalen, „Einfache und regelmäßige“ Fraktale, Zufallsfraktale, Literatur Einzelnachweise und Weblinks. *Google* listet hingegen ungefähr 1.650.000 Einträge (Suchergebnis vom 16.08.2016) auf. Allerdings müssen diese noch von der suchenden Person auf relevante Informationen durchsucht und ausgewertet werden. Dennoch kommen die relevanten Seiten i.A. ganz oben und als erstes (PageRank).

Bei den Ergebnissen von Knowledge Warehouse-Systemen ist man allerdings auf die subjektive Informationsbeschaffung und –Aufbereitung der Autoren angewiesen – was bedeutet, dass Autoren möglicherweise Informationen nicht für relevant hielten und diese somit weglassen bzw. noch keine Informationen zum Suchbegriff im System gespeichert wurden und somit nicht abrufbar sind.¹⁷

2.3.1.2.2 Computational Knowledge Engine

Die Kombination aus einer Suchmaschine und einem Knowledge Warehouse kann als *Computational Knowledge Engine* beschrieben werden. Hierbei werden Informationen nicht nur im Web und in bestehenden Knowledge Warehouse-Systemen gesucht und als Link bzw. Ergebnisseite ausgegeben, sondern die vorhandenen Daten werden weiter verarbeitet und aufbereitet (engl. compute), sodass der/die AnwenderIn im besten Fall genau die relevanten Informationen entnehmen kann. Ein weiteres Detail besteht in der Nutzung einer internen Datenbank, welche durch eine manuelle Datenerfassung aufgebaut ist. Die *Computational Knowledge Engine* generiert also aus einer Suchanfrage mit Hilfe von Informationen aus dem Internet sowie aus der internen Datenbank durch Informationsverarbeitung eine passende Antwort.¹⁸

¹⁷ vgl. Nagler und Serdar (2010)

¹⁸ vgl. ebd.

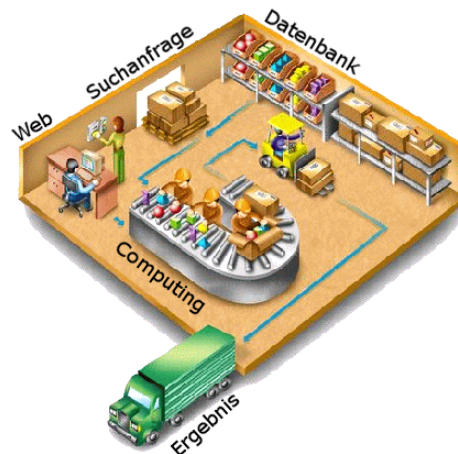


Abbildung 3: Veranschaulichung einer Computational Knowledge Engine. Quelle: <http://winfwiki.wi-fom.de/images/0/02/Cke.png>

Die Informationsverarbeitung basiert allerdings nicht ausschließlich auf den Daten, welche aus dem Internet oder der Datenbank stammen, sondern die Engine kann aufgrund von Logik, Regeln, Mathematik und Algorithmen eigene Daten produzieren.¹⁹ Das Ergebnis von 1+2 wird von einer *Computational Knowledge Engine* berechnet und nicht - mit sogar eher größerem Aufwand - gesucht, obwohl das Ergebnis auch sicherlich im Internet zu finden ist. Es gibt allerdings auch Antworten auf Suchanfragen, welche im Netz sicher nicht bzw. schwer zu finden sind, aber von einer *Computational Knowledge Engine* generiert werden können (siehe dazu das Beispiel 2. im Anschluss).

Hier sollen noch interessante Beispiele, welche mit *Wolfram/Alpha* erstellt wurden, die Funktionsweise verdeutlichen:

1. Nach Suche von Wetter-Informationen für einen bestimmten Ort erhält man konkrete Details für die aktuelle Wetterlage:



Abbildung 4: Wetterabfrage mit Ergebnis für den Ort Wartmannstetten

¹⁹ vgl. Nagler und Serdar (2010)

2. Im Netz können keine Informationen zu folgender Frage gefunden werden, welche aber von Wolfram|Alpha interpretiert und verarbeitet werden kann: „Wheater in Vienna when Heinz Fischer was born?“

Input interpretation:

weather	Vienna, Austria
	Heinz Fischer date of birth

Recorded weather for Vienna, Austria:

time range	day of Sunday, October 9, 1938
temperature	(10 to 14) °C (average: 12 °C)
conditions	rain, cloudy
wind speed	(0 to 4) m/s (average: 2 m/s)

Buttons: Show non-metric, More, Units »

Abbildung 5: Resultat von Wolfram|Alpha

3. Wolfram|Alpha sucht sich gegebenenfalls Informationen, mit welchen dann schließlich das Gesamtergebnis ermittelt werden kann:

(number of states world)-(number states united states)

Web Apps Examples Random

Assuming "number states united states" is a quantity | Use "number" as a US state property instead

Input interpretation:

number of sovereign states worldwide – number of US states

Result:

156

Show details

Download page POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE

Abbildung 6: Berechnung mit Daten aus dem Internet

2.3.2 Funktionsweise von Wolfram|Alpha

Nach der theoretischen Einleitung kann *Wolfram|Alpha* nun als *Computational Knowledge Engine* identifiziert und benannt werden, was auch Wolfram|Alpha bestätigt (siehe Abbil-

dung 7). Im weiteren Verlauf soll die Funktionsweise der Maschine genauer betrachtet werden.

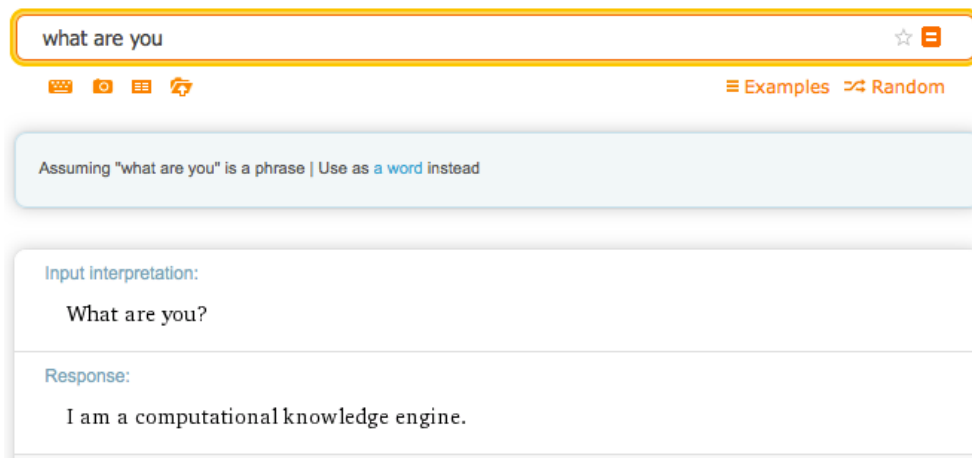


Abbildung 7: "What are you?"

Eine überaus wichtige Sache, um die Funktionsweise von *Wolfram|Alpha* zu verstehen, ist die, dass gelieferte Ergebnisse auf Suchanfragen meist *berechenbar* sind. Das heißt, dass *Wolfram|Alpha* nicht wie eine Enzyklopädie arbeitet – als Ergebnis resultieren in unterschiedlichen Präsentationsformen Zahlen und Fakten, welche eben berechenbare Daten darstellen. Als Beispiel soll hier die Suchanfrage nach dem Land *Österreich* dienen: *Wolfram|Alpha* liefert zu dieser Anfrage Informationen zu ...

- Name
- Flagge
- Geografische Daten
- Nachbarländer
- Demographische Daten
- Kulturelle Zusammensetzung
- Städte
- Ökonomische Daten
- Arbeitsmarkt
- Media und Telekommunikation
- Handel
- Transportwesen
- Bildung
- Gesundheitswesen
- UN Human Development Index

Zu diesen einzelnen Bereichen werden statistische Daten, aber kein enzyklopädisches Wissen wie Informationen zur Geschichte oder der Kultur, als Ergebnis ausgegeben. In der nachstehenden Abbildung 8 soll dies anhand der Daten für den Bereich Gesundheitswesen verdeutlicht werden.

Health care:	
health spending	\$3765 per person per year (US dollars per year per person) (purchasing power parity adjusted) (2007 estimate)
physicians per capita	3.63 people per 1000 people
hospital beds	7.6 per 1000 people (2006 estimate)

Abbildung 8: Daten zum Gesundheitswesen von Österreich

Es sei hier allerdings erwähnt, dass im Ergebnis auch der Wikipedia-Artikel zum Thema Österreich in zusammengefasster Form angezeigt wird, zu welchem auch ein Link führt. Also ist das direkte Auffinden von Informationen von nicht berechenbaren Daten (z.B. Geschichtliches) von der Ergebnisseite aus möglich.

Im nächsten Schritt stehen die Informationsquellen von Wolfram|Alpha im Fokus. Wie bereits in der Beschreibung der *Computational Knowledge Engine* ersichtlich war, gibt es unterschiedliche Datenquellen. Wolfram|Alpha greift hierfür auf Data Curators, sogenannte Datenverwalter, zurück. Diese sind auf das Sammeln, Bündeln und Verarbeiten von Informationen spezialisiert. Auf der anderen Seite wird automatisch über eine Schnittstelle in Echtzeit auf Daten aus dem Internet zugegriffen, wie z.B. Wetterdaten, Aktienkurse, etc. Hier muss zwischen zwei Bereichen des Webs unterschieden werden: das *Deep Web* und das *Surface Web*. Das *Deep Web* zeichnet sich dadurch aus, dass dieser Bereich auf Anfragen dynamische Inhalte erzeugt. Diese Inhalte sind in sortier- und durchsuchbaren Datenbanken abgespeichert, was für eine Suche nach spezifischen Daten - im Gegensatz zu statischen Webseiten - von großem Vorteil ist. Das Deep Web verfügt auch über wesentlich mehr Daten als das Surface Web. „Experten schätzen, dass es mehr als tausendmal so groß ist wie das herkömmliche, ‘Surface Web’ genannte Internet.“²⁰ Eine etwas veraltete Studie der Universität von Berkeley aus dem Jahr 2003 liefert folgende Details: Surface Web - 167

²⁰ Ries (2016), S. 4

Terabyte, Deep Web - 91.850 Terabyte.²¹ Beim automatischen Zugriff auf die Daten über die Programmierschnittstelle (API) wird auf das Surface Web, beim manuellen Zugriff der Data Curators meist auf das Deep Web zugegriffen.

Die verwendeten Quellen sind jeweils am Ende jeder Ergebnisseite unter *Sources* einsehbar. Für das oben gewählte Beispiel mit der Suchanfrage „Österreich“ wird z.B. die Primary Source mit *Wolfram|Alpha Knowledgebase, 2016* angeführt (in Abbildung 9 ersichtlich).

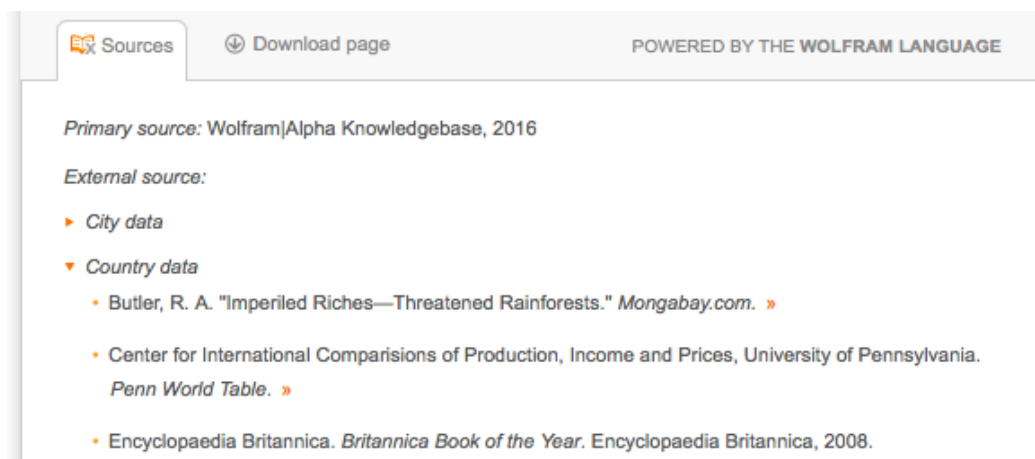


Abbildung 9: Ausschnitt der Quellen bei Suchanfrage "Österreich"

Der Blick in die FAQs von *Wolfram|Alpha* verrät, dass die Kerntechnologie von *Wolfram|Alpha* auf mehreren Elementen aufbaut. Allerdings ist die Rede von vier Schlüsselementen, welche die Hauptfunktionen beschreiben: *Data Curation Pipeline*, *Algorithmic Computation System*, *Linguistic Processing System* und *Automated Presentation System*. Diese sollen im weiteren Verlauf aufgrund der Arbeit von Nagler und Serdar (2010) beschrieben werden:²²

2.3.2.1 Data Curation Pipeline

Wie schon oben angemerkt gibt es Data Curators, welche das Sammeln, Bündeln und Verarbeiten von Informationen übernehmen, welche in einem firmeninternen Repository namens *Wolfram Knowledgebase* liegen. Dieses ist laut Wolfram „mit Abstand das größte und breiteste Repository berechenbaren Wissens der Welt.“²³ In Wolfram|Alphas Team sind mehrere hundert MitarbeiterInnen mit diesen Aufgaben betraut. Sie bringen Informationen und Daten in den entsprechenden Kontext und pflegen diese anschließend in die interne Datenbank ein. Die verwendeten Daten – manuell sowie automatisch eingepflegte Daten –

²¹ School of Information Management and Systems (2003), S. 11

²² vgl. Nagler und Serdar (2010)

²³ <http://www.wolfram.com/knowledgebase/> (Zugriff: 17.08.2016)

durchlaufen die sogenannte *Data Curation Pipeline*. Insgesamt sind bereits mehr als 10 Billionen Datensätze²⁴ in das System eingepflegt worden.

Die Knowledgebase enthält sorgfältig kuratiertes Fachwissen in Tausenden Bereichen, bezogen direkt aus Primärquellen. Sie umfasst nicht nur Milliarden von Datenelementen, sondern auch unzählige Algorithmen zu den Methoden und Modellen fast jeden Feldes.²⁵

In nachstehender Abbildung sind die wichtigsten abgedeckten Gebiete ersichtlich:

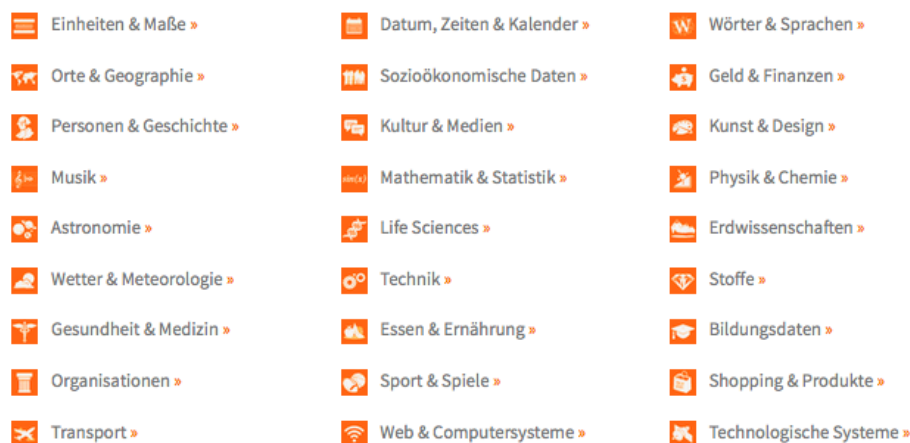


Abbildung 10: Abgedeckte Gebiete der Knowledgebase. Quelle: <http://www.wolfram.com/knowledgebase/>

2.3.2.2 Algorithmic Computation System

Aufbauend auf der Software *Mathematica* und speziellen Algorithmen werden in diesem System die notwendigen Berechnungen erledigt, um die gewünschten Ergebnisse zu bekommen.

2.3.2.3 Linguistic Processing System

Um gute Ergebnisse und Resultate bei Anfragen zu erzielen, ist die Eingabe von großer Bedeutung. In diesem Kontext ist von der Generik der Eingabe die Rede, wobei beschrieben wird, wie variabel und diffus eine Eingabe sein darf. Es soll möglich sein, dass die Wissensberechnungsmaschine die Eingabe in alltagstauglicher, natürlicher Sprache erhält, da Wolfram der Meinung ist, dass Menschen miteinander in natürlicher Sprache kommunizieren und es somit auch gut wäre, wenn dies mit einer Maschine passiert. Stephen Wolfram schreibt: "[...] nimm Fragen, die Menschen in natürlicher Sprache stellen und repräsentiere sie in einer präzisen Form, die in die Berechnungen passt."²⁶

²⁴ <http://www.wolframalpha.com/about.html> (Zugriff: 08.08.2016)

²⁵ <http://www.wolfram.com/knowledgebase/> (Zugriff: 17.08.2016)

²⁶ <http://blog.wolfram.com/2009/03/05/wolframalpha-is-coming/> (Zugriff: 08.08.2016)

Das *Linguistic Processing System* ist dafür verantwortlich, Suchabfragen bzw. Texteingaben in natürlich formulierter Sprache richtig zu interpretieren und gegebenenfalls in die *Wolfram Language* zu übersetzen. Das stellt für die/den AnwenderIn eine große Erleichterung dar, da die Syntax von Wolfram nicht auswendig gewusst werden muss. Beispiel: Wolfram|Alpha kann auch die Eingabe „*integral of $-x^2+4$ from -1 to 1*“ richtig interpretieren und liefert das passende Ergebnis, obwohl die korrekte Eingabe mit richtiger Syntax so aussehen würde: *Integrate[4 - x^2, {x, -1, 1}]*.

Seit Kurzem ist das sogenannte *Wolfram Natural Language Understanding (NLU) System* vollständig in Wolframs Technologie-Stack integriert und kommt in den meisten Wolfram-Produkten zum Einsatz. Dieses System zeichnet sich durch höchstpräzises Verständnis von natürlicher Sprache aus.²⁷ Aktuell ist allerdings eine Eingabe in englischer Sprache vorteilhafter, auch wenn manche Anfragen in deutsch bereits richtig interpretiert werden.

2.3.2.4 Automated Presentation System

Wolfram|Alpha zeichnet sich durch die Darstellung der Ergebnisse aus, da die Ergebnisseite stets sehr übersichtlich und selbsterklärend gestaltet ist. Dies ist möglich, da die Ergebnisse vom *Automated Presentation System* in geeigneter Weise (tabellarisch, grafisch, usw.) dargestellt werden. Die Ergebnisseiten lassen sich auch im CDF- bzw. PDF-Format exportieren, was ein weiteres Arbeiten erleichtern kann.

²⁷ <http://www.wolfram.com/natural-language-understanding/> (Zugriff: 17.08.2016)

2.3.3 Produkte

Auf Wolfram|Alphas Technologie bauen viele andere Produkte auf. Ein Überblick über diese soll mit nachstehender Grafik ermöglicht werden.

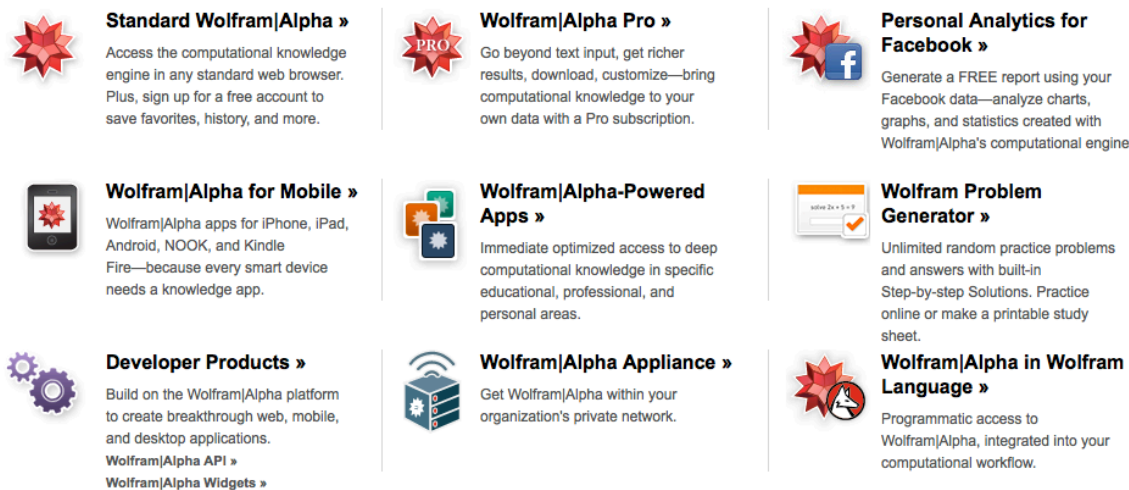


Abbildung 11: Produktpalette von Wolfram|Alpha. Quelle: <http://products.wolframalpha.com/>

Neben der Standard-Eingabe von *Wolfram|Alpha* werden Apps für Mobilgeräte, Analyse-tools für Facebook, Programmierumgebungen usw. angeboten. Dann scheint hier auch zum ersten Mal der *Wolfram Problem Generator* auf, wobei zuvor noch ein Blick auf ausgewählte Produkte geworfen wird.

2.3.3.1 Wolfram|Alpha Pro

Mit dieser Version von Wolfram|Alpha können weitere, sehr nützliche Features verwendet werden. Diese werden hier kurz beschrieben:

- Möglichkeit des Uploads von Dateien in über 60 verschiedenen Formaten, um diese mittels Wolfram|Alpha zu analysieren.
- Individualisierung des Aussehens der Ergebnissseite durch Wahl von unterschiedlichen Designs, interaktive Visualisierungen, etc.

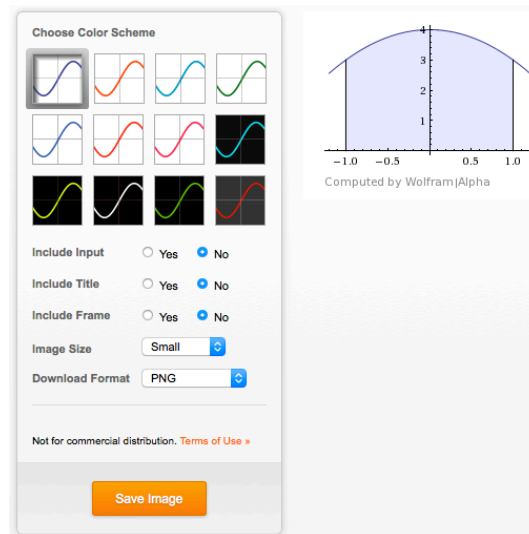


Abbildung 12: Individualisierung des Designs der Ergebnisseite

- Download von Ergebnissen als Tabelle, 3D-Modell, Grafik, usw.

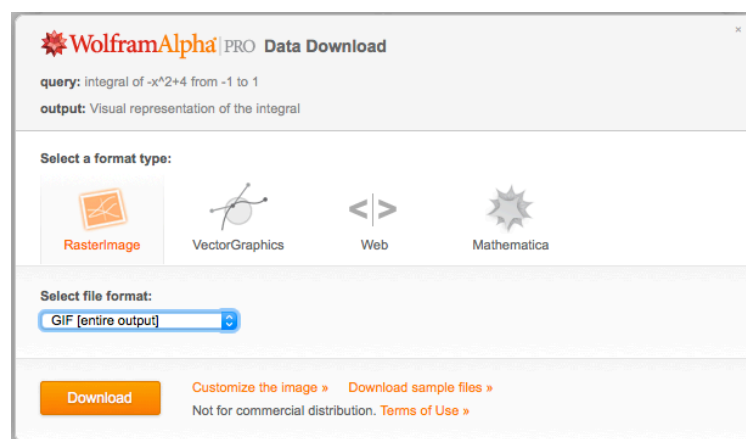


Abbildung 13: Downloadoptionen für Grafik

- Nutzung von Web-Apps für persönlicheren Umgang
- Feedback bei Lösungsproblemen mittels *Step-by-step solution*
- Verwendung der Hilfestellungen beim Arbeiten mit dem *Wolfram Problem Generator*
- Erweiterte Tastatur für mathematische Symbole & mehr



Abbildung 14: Erweiterte Tastatur

- Schnellere Berechnungszeiten
- Pro Premium Expert Support
- Favorites & History

2.3.3.1.1 Lizenzen

Wolfram|Alpha Pro bietet mehrere Lizenzmodelle an, wobei auch auf den schulischen Bereich Rücksicht genommen wird. Es gibt drei Hauptkategorien, wobei immer zwischen einer *Pro*- und einer *Pro Premium*-Lizenz unterschieden wird. In nachstehender Tabelle sind alle Möglichkeiten aufgelistet:²⁸

Pro	Pro \$5,49/Monat (jährliche Zahlung) oder \$6,99/Monat (monatliche Zahlung)
	Pro Premium \$9,99/Monat (jährliche Zahlung) oder \$12/Monat (monatliche Zahlung)
Pro for Students	Pro \$4,75/Monat (jährliche Zahlung) oder \$6/Monat (monatliche Zahlung)
	Pro Premium \$7,99/Monat (jährliche Zahlung) oder \$10/Monat (monatliche Zahlung)
Pro for Educators	Pro \$4,75/Monat (jährliche Zahlung) oder \$6/Monat (monatliche Zahlung)
	Pro Premium \$7,99/Monat (jährliche Zahlung) oder \$10/Monat (monatliche Zahlung)

Interessant ist, dass *Wolfram|Alpha* den *Problem Generator* bis Ende Juli 2016 nur in Verbindung mit einer *Pro*-Lizenz angeboten hat. Diese Regelung wurde allerdings aufgehoben

²⁸ <http://www.wolframalpha.com/pro/pricing/> (Zugriff: 18.08.2016)

und der Problem Generator ist nun auch frei und kostenlos zum Arbeiten verfügbar. Allerdings ist in der kostenlosen Version die *Step-by-step solution* nicht aufrufbar.

2.3.3.2 Wolfram|Alpha for Mobile

Dieser Bereich der Produktpalette beinhaltet für die/den MathematikerIn sehr hilfreiche und nützliche Apps. Angefangen von der Wolfram|Alpha-App bis hin zu Apps für den Bildungsbereich (Wolfram bietet im Bereich *Wolfram for Education* Technologie und Programme extra für SchülerInnen und StudentInnen an) – die Apps sind meist für iOS und Android-Systeme verfügbar - die App von Wolfram|Alpha sogar für mehrere Plattformen (siehe Abbildung 15).

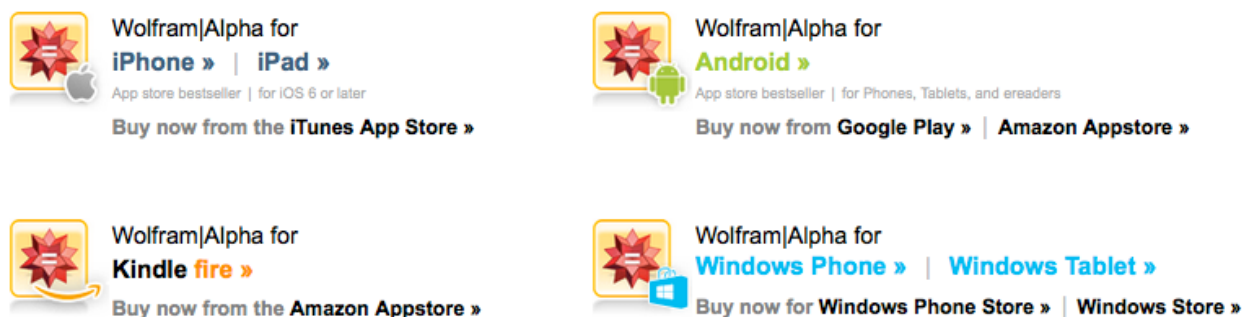


Abbildung 15: Wolfram|Alpha for Mobile. Quelle: <http://products.wolframalpha.com/mobile/>

In Abbildung 16 sind die *Wolfram Course Apps* und deren verschiedene Anwendungsgebiete ersichtlich. Diese sollen direkt im Unterricht oder beim Lernen verwendet werden und die Lernenden bei den speziellen Themen unterstützen. Die Apps sind für ein paar Dollars über iTunes, Google Play, Windows Phone Store bzw. Windows Store beziehbar.

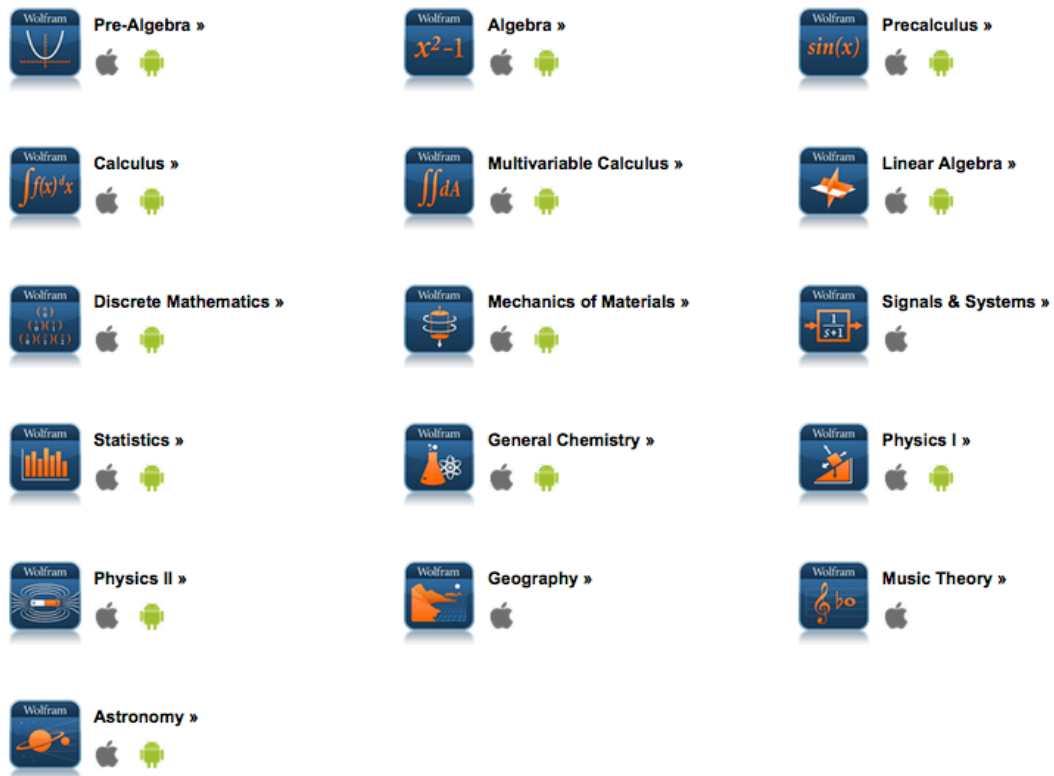


Abbildung 16: Course Assistant Apps. Quelle: <http://products.wolframalpha.com/courseassistants/>

2.4 WOLFRAM PROBLEM GENERATOR

2.4.1 Allgemeines

Diesen Abschnitt darf ich mit einem Zitat von Stephanie Oh, einer Mitarbeiterin von Wolfram Research, beginnen:

Now with Wolfram Problem Generator and Step-by-step solutions, students essentially have their own private tutor to help them better understand their homework and advance their knowledge.²⁹

Dieser Satz hat schon sehr viel Aussagekraft und lässt erahnen, welche Intentionen hinter der Idee *Problem Generator* stehen. Für einen Elternteil klingt es natürlich sehr verlockend, wenn es einen Online-Dienst mit Tutor- bzw. Nachhilfekompetenzen gibt. Und das Ganze zum monatlichen Preis von nur ein paar Dollars (Vergleich: die durchschnittlichen Kosten für Nachhilfe im Schuljahr 2013/14 plus Sommerferien belaufen sich pro betroffenem Haushalt auf € 732,-³⁰; die Wolfram|Alpha-Lizenz *Pro for Students* kostet in der billigeren Variante ca. € 50,- pro Jahr). Mögliche unreflektierte Gedanken der Eltern: Das Kind wird einfach vor den Computer gesetzt und der Problem Generator übernimmt mit seinen eingebauten Features die Lehrenden-Rolle bzw. soll zum Lernen motivieren. Als naheliegende Begrifflichkeit taucht Online-Nachhilfe auf, welcher die Funktion des Problem Generators alltagssprachlich gut beschreibt.

Der *Wolfram Problem Generator* fällt laut Homepage in die Kategorie *Instant learning tool*. Eine genaue Zuordnung zu einer Kategorie fällt allerdings schwierig, da heutzutage eine Vielzahl von Begriffs-Kreationen wie Multimediales Lernen, Mediengestütztes Lernen, Virtuelles Lernen, Distance Learning, Web-based-Teaching, Computer-based Training, Computer Assisted Learning, etc. existieren.³¹ Weit verbreitet und geläufiger, da auch schon länger im Sprachgebrauch, erscheint der Begriff des *E-Learning*. Dies bedeutet aber zeitgleich, dass dieser Begriff auch weniger aussagend erscheint, da dieser umfassender in seiner Bedeutung ist.

Für eine genaue Bestimmung des *Wolfram Problem Generators* sollen des Weiteren die wichtigsten Begrifflichkeiten und Definitionen betrachtet und hergeleitet werden.

²⁹ Oh, Stephanie (2014)

³⁰ IFES (2014), S. 40

³¹ vgl. Spitzwieser (2012), S. 46

2.4.2 Begriffsbestimmung und Definition

2.4.2.1 Instant Learning

In der Fachliteratur kommt der Begriff des *Instant Learning* meist in Zusammenhang mit mobilen Technologien zum Einsatz, allerdings sind keine genauen Beschreibungen zu finden.

Der Definition *Instant learning tool* von der offiziellen Homepage von Wolfram|Alpha Pro³² kann folgende Bedeutung zugewiesen werden: „Instant access to learning at any time and in many places.“³³ (Versuch der Übersetzung: Zu jeder Zeit und an so gut wie jedem Ort augenblicklicher Zugang zum Lernen.) Dieser Anspruch kann durch die neuen Medien wie z.B. mittels Smartphones oder Tablets realisiert werden.

Das Zitat „With Wolfram Problem Generator, each question is generated instantly, just für you“³⁴ gibt weiteren Aufschluss. Das Wort „instant“ kann hier so verstanden werden, dass die Maschine beim Lernen jede Frage erst im Augenblick des Zugriffs erstellt.

Da dieser Begriff nicht vollkommen geklärt werden kann, sollen weitere theoretische Zugänge für eine Begriffsbestimmung herangezogen werden.

2.4.2.2 E-Learning

Mit dem Aufkommen von Computern entwickelte sich sehr schnell der Begriff des *E-Learning*, welcher häufig dann verwendet wird, „wenn Computer in Netzwerken (insbesondere des Internets) zum Einsatz kommen und diese Technologien die technische Basis für die Lern- und Lehrhandlungen bilden.“³⁵ Das Internet soll hier als mittlerweile bevorzugtes Netzwerk als Medium hervorgehoben werden, was auch im alltäglichen Gebrauch des Begriffes E-Learning von der breiten Masse oft so verstanden wird. Durch das Internet war es den NutzerInnen plötzlich nicht nur möglich, auf weltweite Lerninhalte zuzugreifen, sondern auch Interaktion und Wissensaustausch mit anderen AnwenderInnen zu realisieren. Erste Plattformen boten lediglich Selbstlernmaterialien an (z.B. Programme zum Trainieren des Wortschatzes). Es folgten interaktive Formen, wie beispielsweise virtuelle Seminare, welche neben den Lerninhalten auch Kommunikation zwischen den TeilnehmerInnen förderten, die textbasiert verwirklicht war.³⁶

³² siehe <http://www.wolframalpha.com/pro/> (Zugriff: 29.08.2016)

³³ vgl. El-Hussein & Cronje (2010)

³⁴ <http://www.wolframalpha.com/problem-generator/> (Zugriff: 29.08.2016)

³⁵ Ebner, Schön & Nagler (2013), S. 3

³⁶ vgl. ebd.

Das Wort E-Learning setzt sich aus zwei Teilen zusammen, wobei mehrere synonym zu verwendende Schreibweisen existieren: E-Learning, eLearning, E-Lernen, electronic learning etc.³⁷ Die letzte Schreibweise zeigt, für was die Abkürzung „E“ steht: nämlich *electronic* oder *elektronisch* auf Deutsch.³⁸ Informationsverarbeitung sowie Kommunikation werden über den Computer und das Internet abgewickelt, also elektronisch.³⁹ Der zweite Teil wird von dem Wort „Learning“ gebildet, was übersetzt *lernen* bedeutet. Da dies einen im gesellschaftlichen Sprachgebrauch üblichen und gewohnten Begriff darstellt, soll der Prozess des Lernens hier nicht weiter beschrieben werden.

Für die Definition des Begriffs E-Learning wird die Arbeit von Seufert, Back und Häusler (2001) herangezogen:

E-Learning kann begriffen werden als Lernen, das mit Informations- und Kommunikationstechnologien unterstützt bzw. ermöglicht wird. Wichtig ist, dass diese Technologien mit dem Lernprozess selbst unmittelbar verbunden sind und nicht nur rudimentäre Hilfsmittel darstellen.⁴⁰

Seufert, Back und Häusler verstehen dabei E-Learning als einen Verbund von Lern- und Technologieprozessen.

Durch die Betrachtung einiger weniger Aspekte werden die möglichen Varianten des E-Learnings verdeutlicht, was von Back, Bendel und Stoller-Schai (2001) erarbeitet wurde:⁴¹

- eLearning ist stationär (z.B. PC Desktop) oder mobil (Smartphone) verfügbar,
- eLearning ist lokal (CD-ROM) oder global (verteilt auf Internetservern) abrufbar,
- eLearning hat einen statischen (PDF-Dokumente) oder dynamischen (interaktive Lernsoftware) Charakter,
- eLearning hat synchrone (Chat) oder asynchrone (Diskussionsforen) Kommunikationsmöglichkeiten und
- eLearning wird individuell (einzelne Lernpersonen) oder kollaborativ (Lerngruppen) wahrgenommen.

³⁷ vgl. Rey (2009)

³⁸ vgl. Ebner, Schön & Nagler (2013), S. 3

³⁹ vgl. Heyer (2015), S. 37

⁴⁰ Seufert, Back & Häusler (2001), S. 13

⁴¹ Back, Bendel & Stoller-Schai (2001)

Es werden somit Sachverhalte wie Nutzung, Medium, Interaktivität, Varianten der Kommunikation und Zielgruppe des Lernarrangements betrachtet, um E-Learning-Umgebungen detailliert beschreiben zu können.

Im Kontext von E-Learning-Umgebungen scheinen auch Begriffe wie *Computergestützte Lehr- und Lernsysteme* auf, auf welche im nächsten Punkt kurz eingegangen wird.

2.4.2.2.1 Computergestützte Lehr- und Lernsysteme

Diese Gruppe von Lernsystemen kann den Begriffen des *technologiegestützten Lernens* oder *technologisch gestützten Lernens* zugeschrieben werden, welche jene Technologien umfassen, mit deren Hilfe Aktivitäten des Lernens unterstützt werden.⁴² „Immer, wenn in einer Lern- oder Lehrsituation Technologien zum Einsatz kommen, kann vom technologieunterstützten oder technologisch gestützten Lernen gesprochen werden.“⁴³

Bei computergestützten Systemen zeigt der Name an, dass diese auf Basis von Computern laufen. Die Systeme sind durch verschiedene Bezeichnungen in der Literatur präsent, wobei viele von ihnen synonym verwendet werden. Die nachstehende Aufzählung soll diese Vielfalt darstellen⁴⁴:

- CAI: Computer Aided Instruction bzw. Computer Assisted Instruction (Bodendorf 1990), (Lillie/Hannum/Stuck 1989),
- CAL: Computer Aided Learning bzw. Computer Assisted Learning (Grob/Schnoor 1997),
- CAT: Computer Aided Teaching (Grob/Schnoor 1997),
- CBI: Computer Based Instruction (Criswell 1989), (Lillie/Hannum/Stuck 1989),
- CBL: Computer Based Learning bzw. Computerbasiertes Lernen (Hammond 1993),
- CBT: Computer Based Training (Brendel 1990),
- CUL: Computerunterstütztes Lernen (Möhrle 1995),
- CUU: Computerunterstützter Unterricht (Klimsa 1993).

⁴² vgl. Ebner, Schön, Nagler (2013), S. 2

⁴³ Dror (2008)

⁴⁴ vgl. Kammerl (2000), S. 11

All diese Systeme rücken den Computer ins Zentrum der Betrachtung, was für Baumgartner und Payr nicht ganz schlüssig ist, da eigentlich die Software die Basis bildet. Sie verwenden daher den Ausdruck *Lernen mit Software*⁴⁵.

2.4.2.2.2 Online-Nachhilfe

Bei diesem Begriff soll die Arbeit von Spitzwieser zum Thema *Online-Nachhilfe* herangezogen werden, welche eine gelungene Definition aufgrund von eher vagen Formulierungen von Dassler⁴⁶ erarbeitet hat:

Online-Nachhilfe ist eine Lernhilfe außerhalb der Schule (oder Ausbildung), die über das Internet stattfindet. Ihr Zweck ist es, Inhalte zu verstehen und Gelerntes anwenden zu können. Das gewünschte Resultat ist die Leistungssteigerung. Aufgabenbereiche der Lernhilfe sind das Lernen, Üben und Wiederholen sowie das Schließen von Wissenslücken, das Vorbereiten auf Prüfungen und das Erlernen von Arbeitstechniken. Die Umsetzung der Lernhilfe kann mittels synchroner und asynchroner sowie schriftlicher, audio- und audiovisueller Lernmedien erfolgen. Die Präsenz eines Lehrenden über ein Interface ist nur bei synchronen Lernmedien gegeben und somit nicht zwingend notwendig.⁴⁷

Online-Nachhilfe hat nach Moser (2008) noch einen wichtigen zu erfüllenden Aspekt, nämlich die didaktische Bearbeitung der Lerninhalte, welche er als eine Reduktion der Komplexität durch die Beschränkung auf bestimmte Situationen und Perspektiven bezeichnet. Themen sollen demnach so weit als möglich authentisch und realitätsgetreu sein, sollen aber Lernende nicht durch ihre Komplexität überfordern.⁴⁸

Online-Nachhilfe zeichnet sich dadurch aus, dass ein Zugriff auf Datenbanken mit didaktisch aufbereiteten Lerninhalten möglich ist. Es werden Lektionen zu bestimmten Themengebieten angeboten, welche mit interaktiven Übungen und Beispielen zum Vertiefen des Gelernten ausgestattet sind.

Für Online-Nachhilfe muss angemerkt werden, dass der Kontakt mit einer Lehrperson eine zentrale Rolle spielt. Die Varianten reichen von einfachem E-Mail-Verkehr, Chats, Videokonferenzen, Foren u.ä. Diese Möglichkeiten werden in der Theorie mit synchronen bzw. asynchronen Lernmethoden⁴⁹ beschrieben, wobei die Unterscheidung aufgrund der gegenwärtigen Präsenz des Lehrenden getroffen wird.

⁴⁵ Baumgartner & Payr (1994), S. 14

⁴⁶ vgl. Dassler (2010), S. 19

⁴⁷ Spitzwieser (2012), S. 10

⁴⁸ vgl. Moser (2008), S. 97

⁴⁹ vgl. Spitzwieser (2012), S. 11

Folgende Vor- und Nachteile lassen sich für die Online-Nachhilfe aufstellen:

Vorteile:

- Hohe räumliche und zeitliche Flexibilität der NutzerInnen⁵⁰
- Ständige Verfügbarkeit von Expertenwissen⁵¹
- Individuelle Anpassung der Lerninhalte möglich
- Integration verschiedener Lernmaterialien
- Erwerb von Medienkompetenz⁵²

Nachteile:

- Lesen und Arbeiten am Bildschirm (Stärkere Anstrengung und schnellere Ermüdung für das Auge)⁵³
- Fehlender persönlicher Kontakt zur Lehrperson (Nicht für alle NutzerInnen problematisch, da sehr personenspezifisch und situationsabhängig!)

Um aber erfolgreiches Lernen mithilfe von Online-Nachhilfe erst möglich zu machen, sind noch ein paar wichtige Aspekte zu betrachten. Einer davon ist die Usability (Bedienbarkeit) der Lernumgebung, welche „zu den wichtigsten Einflussfaktoren für den Erfolg eines Online-Lernangebotes“⁵⁴ zählt. Dazu zählen Dinge wie bedienerfreundliche, übersichtliche und nicht überladene Gestaltung der Homepage bzw. der Lernumgebung. Das führt dazu, dass NutzerInnen sich schnell zurechtfinden und mehr Zeit für die wesentlichen Tätigkeiten, nämlich das Lernen und Üben, bleibt. Dies führt wiederum zu mehr Zufriedenheit, was erfolgreiches Lernen begünstigt.⁵⁵

Der Erfolg einer multimedialen Lernumgebung ist für Seel und Ifenthaler (2009) ebenso von der Gestaltung und dem Design abhängig, damit produktives Lernen umgesetzt werden kann. Verantwortlich dafür sind folgende Eigenschaften:⁵⁶

- Lernende sollen die Umgebung explorativ erkunden können
- der Grad der Lenkung soll an die Lernenden angepasst sein
- Wissen soll eigenständig konstruiert werden können
- die Entwicklung von Problemlösemethoden soll ermöglicht werden

⁵⁰ vgl. Seel & Ifenthaler (2009), S.17f.

⁵¹ ebd.

⁵² vgl. Döring (2002), S. 252

⁵³ vgl. Kerkau (2011), S. 332

⁵⁴ Spitzwieser (2012), S. 33

⁵⁵ vgl. Kerkau (2011), S. 330ff.

⁵⁶ vgl. Seel & Ifenthaler (2009), S. 14ff.

2.4.2.3 Klassifizierung von E-Learning-Umgebungen

Um den *Wolfram Problem Generator* nun einer Klassifikation zuordnen zu können, sollen die lerntechnologisch orientierten Systematisierungsversuche, welche von Treumann, Ganguin und Arens (2012) beschrieben werden, herangezogen werden. Auf dieser Ebene kann eine Unterscheidung nach folgenden Aspekten erfolgen:⁵⁷

- aufgabenbezogene Aspekte
- methodische Aspekte im Sinne eines beabsichtigten Verwendungszwecks

Beim aufgabenbezogenen Aspekt steht das Funktionelle der Lernumgebung im Vordergrund. Es erfolgt eine Unterteilung in Entwicklungswerkzeuge für die Schaffung von angepassten Lernumgebungen und in Anwendungswerkzeuge für die Nutzung dieser Lernumgebungen.⁵⁸ Bei den Entwicklungswerkzeugen steht, wie schon der Name erahnen lässt, die Entwicklung von computergestützten Lernumgebungen im Fokus. Anwendungswerkzeuge werden von LehrerInnen und Vortragenden in den Bereichen Prüfungsadministration, Unterrichtsverwaltung und -organisation eingesetzt, als Lernsoftware werden diese von Lernenden genutzt. Mit Blick auf z.B. *edumoodle* ist allerdings zu erkennen, dass Anwendungs- und Entwicklungswerkzeuge auch ineinander übergehen können, da mittlerweile das Administrationssystem auch Entwicklungsfunktionalitäten anbietet, wie dies Ehlers (2011) ebenfalls anmerkt.⁵⁹

Auf der anderen Seite werden bei der methodischen Klassifizierung „eLearning-Szenarien nach dem dafür bestimmten Einsatz differenziert.“⁶⁰ In der Literatur sind mehrere Zugänge thematisiert, hier soll aber der von Kerres (2001) herangezogen werden, welcher eine Untergliederung in neun Grundformen tätigt. Die wichtigsten drei werden im weiteren Verlauf kurz beschrieben:

- *Teleteaching*
Diese Variante ermöglicht es Lernenden, Lehrveranstaltungen mittels Videokonferenz in Echtzeit zu verfolgen. Von Vorteil dabei ist, dass sich Beteiligte zwar zur selben Zeit, aber nicht am selben Ort begegnen (zeitabhängig, aber ortsunabhängig). Teleteaching realisiert somit die Bereitstellung und Übertragung von Bild und Ton sowie die Kommunikation zwischen Vortragenden und NutzerInnen, obwohl den

⁵⁷ vgl. Treumann, Ganguin & Arens (2012)

⁵⁸ vgl. Bodendorf (1990)

⁵⁹ vgl. Ehlers (2011)

⁶⁰ Heyer (2015), S. 26

AdressatInnen eine eher passive Rolle (ähnlich wie in Vorlesungen) zukommt. Die Universität Wien hat ein derartiges Service mit dem Namen *u:stream* eingerichtet. „Studierende können Aufzeichnungen von Lehrveranstaltungen zeitlich und örtlich ungebunden ansehen, beziehungsweise die Lehrveranstaltung via Live-Stream verfolgen.“⁶¹ Hier ist auch die Rede von zeitlich ungebunden, was darauf hindeutet, dass manche Dienste Videos auch archivieren und für spätere Wiedergaben bereitstellen. Beim Dienst *u:stream* entscheidet die/der LehrveranstaltungsleiterIn, ob eine Aufzeichnung und/oder ein Live-Stream umgesetzt werden soll.⁶²

- *Teletutoring*

Teletutoring ist auch unter dem Begriff *Betreutes Tele-Lernen* bekannt, was die Unterstützung durch TutorInnen bei der Bearbeitung von Lernaufgaben meint. Wichtig hierbei ist, ebenso wie beim Teleteaching, die räumliche Distanz zwischen den Beteiligten. Vorteilhaft ist dieses System im Bereich der Kooperation zwischen den Lernenden, da diese durch einen schnellen Kommunikationsaustausch verteiltes Lernen in Gruppen umsetzen können. Der Grad der Betreuung durch die/den TutorIn kann von asynchroner bis zu synchroner Kommunikation schwanken, wobei die synchrone Kommunikation erstrebenswert erscheint, da die betreuende Person direkt auf Schwierigkeiten und Probleme im Lernprozess hinweisen kann.

- *Offenes Telelearning*

Im Unterschied zu den bisher beschriebenen Verfahren kommt dieses E-Learning-Szenario ohne TutorInnen-Unterstützung bzw. Vortragende aus. Im Internet werden Lernmaterialien zur Verfügung gestellt, auf welche Lernende selbstständig und zeitlich flexibel zugreifen können, um ihr Wissen in bestimmten Bereichen zu vergrößern. „Erfolg verspricht diese Lernform allerdings nur dann, wenn der Lernende bereits ausreichende Lernkompetenzen besitzt, insbesondere im Rahmen von selbst-regulierten Lernprozessen.“⁶³ Durch die individuelle Auswahl von Lerninhalten wird ein differenziertes Lernen unterstützt.

Hier soll auch erwähnt werden, dass Begriffe wie *mobiles Lernen* (mit Mobiltelefonen) oder *Online-Lernen* (internet- bzw. intranetgestütztes Fernlernen) verwendet werden, welche sich auf bestimmte Technologien beschränken.

⁶¹ ZID Universität Wien

⁶² vgl. ebd.

⁶³ Heyer (2015), S. 27

In nachstehender Tabelle sind nochmals Merkmale sowie Vor- und Nachteile der hier vorgestellten methodischen Grundformen des E-Learning ersichtlich:⁶⁴

	Teleteaching	Teletutoring	Offenes Telelearning
Merkmale	Synchrone Kommunikation zwischen Lehr- und Lernperson	Zeitlich getaktete Übermittlung von Lernmaterialien mit entsprechenden Aufgaben; überwiegend asynchrone Kommunikation	Lerninhalte werden in modularen Datenbanken angeboten, der Abruf erfolgt wahlfrei; keine organisierte Kommunikation
Vorteile	Interpersonelle Interaktion ohne zeitliche Verzögerung	Betreuung durch Tutor; kooperativ verteiltes Lernen in Gruppen möglich	Individuelle Auswahl von Lerninhalten und Lernwegen möglich; zeitlich freier Zugriff
Nachteile	Technischer Aufwand groß; oft nur Einwegkommunikation möglich; Synchronisation des Lernprozesses notwendig	Aufwand bei Planungen (u.a. Anpassung an die Zielgruppe); organisatorischer Aufwand bei Durchführung	Kein systematisch aufbereitetes Lernangebot; keine systematische Betreuung; geringer Lernerfolg für Anfänger

2.4.2.4 Zuordnung des Wolfram Problem Generators zu einer Klasse der E-Learning-Szenarien

Nach Durchsicht der hier vorgestellten Begriffe und Szenarien (es gibt sehr viele nicht betrachtete Zugänge und Begriffe, welche für diese Arbeit allerdings nicht von Relevanz sind) soll dieser Punkt nun auflösen, in welche Klasse der verschiedenen Szenarien der *Wolfram Problem Generator* einzuordnen ist.

Ganz allgemein kann dieser der Kategorie eines *Computergestützten Lehr- und Lernsystems* bzw. dem Begriff des *Technologiegestützten Lernens* zugeschrieben werden. Begriffe wie *Computer Based Training*, *computerunterstütztes Lernen*, *computerbasiertes Lernen*, u.ä. sind für die Beschreibung zulässig.

Nach Erarbeitung der Eigenschaftenliste von Back, Bendel und Stoller-Schai (2001), welche oben beschrieben wurde, ergibt sich folgendes Bild: Der Wolfram Problem Generator ...

... ist stationär (Desktop-Version) sowie mobil (Smartphone),

... ist global über das Internet abrufbar,

⁶⁴ Kerres (2011)

- ... hat dynamischen Charakter (Interaktivität),
- ... hat *keine* Kommunikationsmöglichkeit und
- ... wird individuell wahrgenommen.

Es ist zu erkennen, dass für alle Punkte eine Zuordnung getroffen werden kann, lediglich der Punkt mit der Kommunikationsmöglichkeit muss mit „keine“ beantwortet werden. Der Problem Generator bietet Unterstützung nur in Form von den Hints bzw. der Step-by-step solution an. Kommunikation zu Lehrpersonen, TutorInnen oder dergleichen findet über die Plattform nicht statt.

Wie bereits schon oben erwähnt, kann im Zusammenhang mit dem Problem Generator der Begriff *Online-Nachhilfe* fallen. Allerdings ist auch hier der Punkt der Kommunikation ausschlaggebend: der Wolfram Problem Generator bietet weder synchrone noch asynchrone Lernmethoden an.

Beim *Offenen Telelearning*, welches unter dem Punkt *Klassifizierung von E-Learning-Umgebungen* beschrieben ist, wird keine Unterstützung von Lehrpersonen gefordert und ausschließlich aufbereitetes Lernmaterial online angeboten.

Es ist somit zu erkennen, dass der *Wolfram Problem Generator* dem *Offenen Telelearning* zuordenbar ist, welches wiederum ein E-Learning-Szenario beschreibt.

2.4.3 Entstehung und Weiterentwicklung

Der Problem Generator von Wolfram wurde Ende des Jahres 2013 veröffentlicht.⁶⁵ Dieser gehört zur Produktgruppe von Wolfram|Alpha und läuft auf dessen Technologien. Genauere Informationen und Details sind aber leider nirgends zu finden, deswegen kontaktierte ich das Wolfram|Alpha-Team per E-Mail.

Nach Anfrage beim Wolfram Customer Support-Team wurde ich mit meinen Fragen zu Schul-Lizenzen, Statistiken zur Verwendung des Problem Generators, Entwickler-Team und Weiterentwicklung/Updates zur Abteilung Public Relations Associate weitergeleitet. Ich war sehr erstaunt, dass gerade an diesem Tag, an welchem ich die Antwort auf meine Fragen erhielt, der Tag des Updates war – es wurden neue Features und Probleme angeboten sowie, was noch erfreulicher ist, der freie Zugang zu Wolframs Problem Generator ermöglicht. Die kostenpflichtige PRO-Lizenz ist somit nur noch für die Step-by-step solution erforderlich.

⁶⁵ vgl. The Wolfram|Alpha Team (2013)

Zu der Frage nach den verantwortlichen Personen für die einzelnen Themen bekam ich als Antwort, dass niemand aus dem Problem Generator-Team als „didaktischer Designer“ bezeichnet werden kann, allerdings haben die Designer/Entwickler gewisse Erfahrungen im Lehren und Unterrichten.

Die Weiterentwicklung des Problem Generators wird konsequent fortgesetzt (wie bereits oben beschrieben), wobei es interessant wäre, mit wie vielen Themengebieten gestartet wurde. Im Blog-Eintrag vom Oktober 2013 sind bereits alle sechs Teilgebiete, welche im nächsten Punkt dargestellt werden, umgesetzt.⁶⁶ Im offiziellen Community-Forum von Wolfram gibt es nicht viele Anzeichen dafür, dass Personen Wünsche für neue Probleme kundtun. Lediglich ein Eintrag kann gefunden werden, in welchem Probleme für die Anwendung der Regel von de l'Hospital gesucht werden und auf die Umsetzung hingewiesen wird.⁶⁷

Statistische Daten zur Verwendung des Problem Generators bzw. zur Anzahl von aktuell in Verwendung stehenden Pro-Lizenzen wären für diese Arbeit sehr anschaulich gewesen, die Frage danach konnte aber leider nicht beantwortet werden.

2.4.4 Aufgabenpool

Der Wolfram Problem Generator stellt Aufgaben in den folgenden sechs Teilgebieten der Mathematik zur Verfügung:

ARITHMETIK

ZAHLENTHEORIE

ALGEBRA

ANALYSIS

LINEARE ALGEBRA

STATISTIK

Des Weiteren werden alle Teilgebiete im Detail betrachtet und die einzelnen Themen dargestellt.⁶⁸

2.4.4.1 Arithmetik

2.4.4.1.1 Ganze Zahlen

- Addieren
- Subtrahieren
- Multiplizieren
- Dividieren

⁶⁶ vgl. The Wolfram|Alpha Team (2013)

⁶⁷ vgl. http://community.wolfram.com/groups/-/m/t/565122?_19_redirect=http%253A%252F%252Fcommunity.wolfram.com%252Fcontent%253Fp_id%253D3%2526p_p_lifecycle%253D0%2526p_p_state%253Dmaximized%2526p_p_mode%253Dview%2526_3_groupId%253D0%2526_6_3_keywords%253Dgenerator%2526_3_struts_action%253D%252Fsearch%252Fsearch%2526_3_redirect%253D%252Fweb%252Fcommunity%252Fcontent%253FcurTag%253Dwolfram%20alpha (Zugriff: 29.08.2016)

⁶⁸ vgl. <http://www.wolframalpha.com/problem-generator/> (Zugriff: 29.08.2016)

- Addieren und Subtrahieren
- Multiplizieren und Dividieren
- Zusammenfassung der Grundrechenarten

2.4.4.1.2 Bruchzahlen

- Addieren mit gemeinsamem Nenner
- Subtrahieren mit gemeinsamem Nenner
- Addieren mit verschiedenem Nenner
- Subtrahieren mit verschiedenem Nenner
- Multiplizieren
- Dividieren
- Vereinfachen
- Addieren und Subtrahieren
- Multiplizieren und Dividieren
- Zusammenfassung der Grundrechenarten

2.4.4.1.3 Vorrangregeln

- Basis-Operationen
- Exponenten einbezogen
- Klammerausdrücke einbezogen
- Exponenten und Klammerausdrücke einbezogen

2.4.4.2 Zahlentheorie

2.4.4.2.1 Ganze Zahlen

- Teilbarkeit
- Primzahlen
- Faktorisieren
- Größter gemeinsamer Teiler (GGT)
- Kleinstes gemeinsames Vielfaches (KGV)
- Relatively prime test
- GGT und KGV
- Zusammenfassung

2.4.4.3 Algebra

2.4.4.3.1 Radikale

- Addieren
- Subtrahieren
- Multiplizieren
- Distributivgesetz
- Rationalisieren
- Vereinfachen
- Zusammenfassung

2.4.4.3.2 Komplexe Zahlen

- Addieren
- Subtrahieren
- Multiplizieren
- Dividieren
- Finde die Norm

- Zusammenfassung

2.4.4.3.3 Polynome

- In einem Punkt auswerten
- Addieren
- Subtrahieren
- Ausmultiplizieren
- Faktorisieren
- Monom mit Polynom multiplizieren
- Zwei Polynome multiplizieren
- Nullstellen finden
- Zusammenfassung

2.4.4.3.4 Quadratische Polynome

- Ausmultiplizieren
- Faktorisieren
- Zusammenfassung

2.4.4.3.5 Lösen von Gleichungen

Ganze Zahlen

- Einstufige Gleichungen
- Einstufige Gleichungen mit Betragsfunktion
- Zweistufige Gleichungen
- Zweistufige Gleichungen mit Betragsfunktion
- Zusammenfassung

Bruchzahlen

- Einstufige Gleichungen
- Einstufige Gleichungen mit Betragsfunktion
- Zweistufige Gleichungen
- Zweistufige Gleichungen mit Betragsfunktion
- Mehrstufige Gleichungen
- Zusammenfassung

Radikale

- Einstufige Gleichungen
- Einstufige Gleichungen mit Betragsfunktion
- Zweistufige Gleichungen
- Zweistufige Gleichungen mit Betragsfunktion
- Mehrstufige Gleichungen
- Zusammenfassung

Quadratische Gleichungen

- Quadratische Ergänzung
- Ganzzahlige Lösungen
- Differenz von Quadraten
- Komplexe Lösungen
- Zusammenfassung

Allgemein

- Gleichungen in Linearfaktoren zerlegt
- Polynomgleichungen
- Zusammenfassung

2.4.4.4 Analysis

2.4.4.4.1 Asymptotisches Verhalten

- Rationale Funktionen

2.4.4.4.2 Ableitungen

- Faktorregel
- Produktregel
- Quotientenregel
- Kettenregel
- Zusammenfassung

2.4.4.4.3 Integrale

- Grundintegrale
- Partielle Integration
- Substitution
- Trigonometrische Substitution
- Zusammenfassung

2.4.4.5 Lineare Algebra

2.4.4.5.1 Vektorrechnung

2D Vektoren

- Addieren
- Subtrahieren
- Multiplikation mit einem Skalar
- Skalarprodukt
- Zusammenfassung

3D Vektoren

- Addieren
- Subtrahieren
- Multiplikation mit einem Skalar
- Skalarprodukt
- Kreuzprodukt
- Zusammenfassung

2.4.4.5.2 Matrizen

2 x 2 Matrizen

- Addieren
- Subtrahieren
- Spur
- Determinante
- Inverse

- Vektor-Matrix-Produkt
- Matrizenmultiplikation
- Zusammenfassung

3 x 3 Matrizen

- Addieren
- Subtrahieren
- Spur
- Determinante
- Inverse
- Vektor-Matrix-Produkt
- Matrizenmultiplikation
- Zusammenfassung

Allgemeine Matrizen

- Stufenform – Gaußsches Eliminationsverfahren
- Matrizenmultiplikation

2.4.4.6 Statistik

2.4.4.6.1 Listen

- Arithmetisches Mittel
- Median
- Modalwert
- Spannweite
- Zusammenfassung

Seit der letzten Aktualisierung des Problem Generators im Juli 2016 können Probleme speziell für eine Schulstufe und aus dem Bereich eines Common Core Standards gewählt werden. Common Core Standards sind einheitliche Lehrstandards in den USA, herausgegeben von der Common Core State Standards Initiative (ähnlich den Grundkompetenzen in Österreich).

„The Common Core concentrates on a clear set of math skills and concepts. Students will learn concepts in a more organized way both during the school year and across grades. The standards encourage students to solve real-world problems.“⁶⁹

Mit dieser Erweiterung ist es NutzerInnen möglich, noch gezielter zu üben und zu lernen.

Für folgende Schulstufen werden Probleme angeboten:⁷⁰

- Kindergarten
- Grade 1 - 8
- High School: Number and Quantity
- High School: Algebra

⁶⁹ Common Core State Standards Initiative

⁷⁰ vgl. ebd.

- High School: Functions

Für die folgenden mathematischen Teilgebiete sind Standards definiert:⁷¹

- ✓ Counting & Cardinality
- ✓ Operations & Algebraic Thinking
- ✓ Number & Operations in Base Ten
- ✓ Number & Operations – Fractions
- ✓ Measurement & Data
- ✓ Geometry
- ✓ Ratios & Proportional Relationships
- ✓ The Number System
- ✓ Expressions & Equations
- ✓ Functions
- ✓ Statistics & Probability

2.4.5 Umsetzung und Aufbau der Problemstellungen

2.4.5.1 Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung

Der Problem Generator bietet für jeden Aufgabentyp drei Schwierigkeitsgrade an, nämlich *Beginner* (leicht), *Intermediate* (mittelschwer) und *Advanced* (schwer). Diese Einstellung kann im rechten Bereich oberhalb der Frage vorgenommen werden (in Abbildung 17 farblich hervorgehoben).

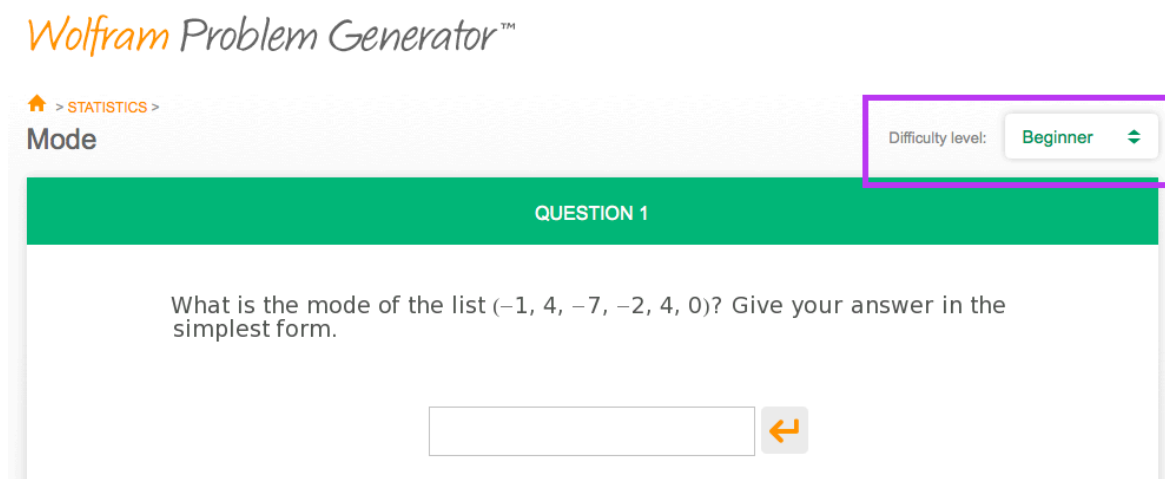


Abbildung 17: Einstellung der Schwierigkeitsgrade

Von der Groeben spricht von einem illusionären Ziel, wenn sie meint, dass SchülerInnen nach einer verlässlichen Vermittlung der Wissensgrundlage und Kompetenzen alle gleich

⁷¹ vgl. Common Core State Standards Initiative

seien.⁷² Eine Aufgabe der Lehrperson ist somit, mit Differenzierung und Individualisierung auf die Individuen mit ihren vielfältigen Entwicklungs-, Lern- und Sozialisationsvoraussetzungen zu reagieren. Diese Aufgabe steht im Mittelpunkt der Unterrichtsplanung.⁷³

Aufgrund dieser Aussagen ist die Umsetzung des Problem Generators mit der Möglichkeit der Auswahl der Schwierigkeitsstufen gut gelungen. SchülerInnen können somit die Aufgabenstellung an ihr eigenes Können und ihren persönlichen Wissensstand adäquat anpassen. Dies kann wiederum die Zahl der Erfolgsmomente steigern, was für zusätzliche Motivation sorgen kann.

Um die Schwierigkeitsgrade visuell besser unterscheiden zu können, sind folgende Farbkonzepte im Problem Generator integriert:

Leicht (Beginner)
Mittel (Intermediate)
Schwer (Advanced)

2.4.5.2 Eingabe der Lösung und Korrektur

Die Eingabe und Interpretation erfolgt hier basierend auf der bereits im Punkt 2.3.2.3 beschriebenen Methode des Linguistic Processing Systems. Wenn also die/der NutzerIn die richtige Schreibweise und Syntax eines mathematischen Ausdrucks nicht auswendig weiß, kann dieser auch in natürlicher Sprache formuliert werden.

2.4.5.3 Tipp (Hint) zur Lösungsfindung

„If you answer incorrectly the first time, don't give up! Hints will help you understand how to solve each problem.“⁷⁴

Bei erstmaliger, falscher Eingabe der Lösung erscheint unterhalb des Eingabefensters der Kommentar, dass die Eingabe falsch ist und ein Tipp (*Hint*) wird als weitere Unterstützung angezeigt (siehe Abbildung 18).

⁷² vgl. Von der Groeben (2008), S. 39

⁷³ vgl. BMUKK, Grundsatzerlass der Begabtenförderung

⁷⁴ <http://www.wolframalpha.com/pro/problem-generator/> (Zugriff: 08.08.2016)

QUESTION 1

What is $(0, 0, 6)$ cross $(-5, 2, -6)$?

$(-5, 0, -36)$



Input interpretation: $\{-5, 0, -36\}$

That's not correct.

HINT: Create a matrix out of the vectors $(0, 0, 6)$ and $(-5, 2, -6)$ along with the unit vectors $\hat{i}$, $\hat{j}$, and $\hat{k}$.

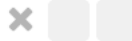


Abbildung 18: Hint bei erstmaliger falscher Antwort

Für alle Probleme eines Aufgabentyps werden stets die gleichen Tipps angezeigt. Diese sind die ersten Lösungshinweise der *Step-by-step solution*. Nach nochmaliger, also zweiter, falscher Eingabe der Lösung wird kein neuer Tipp generiert, sondern die/der NutzerIn erhält die Möglichkeit, die *Step-by-step solution* aufzurufen. Diese soll im nächsten Punkt genau beschrieben werden.

2.4.5.4 Step-by-step solution

„Have you ever given up working on a math problem because you couldn't figure out the next step? Wolfram|Alpha can guide you step by step through the process of solving many mathematical problems, from solving a simple quadratic equation to taking the integral of a complex function.“⁷⁵

Im Jahr 2009 gelang Wolfram mit der Umsetzung der *Step-by-step solution* der Schritt in eine neue Ära der Lösungsfindung. Mit Wolfram|Alpha konnten nicht nur spezielle Aufgaben gelöst, sondern fortan auch die dazugehörigen Lösungswege mit erklärenden Beschreibungen der einzelnen Schritte angezeigt werden. Das ausgeschriebene Ziel ist es, mehr Verständnis beim Lösen von Aufgaben und Problemen zu erhalten. Dabei soll auch die Entwicklung von Problemlösestrategien begünstigt werden.⁷⁶ Meist stoßen Lernende beim Erarbeiten von Lösungen an ihre Grenzen, da die mathematischen Theorien und durchdiskutierten Beispiele, welche im Internet auf verschiedensten Seiten leicht und in

⁷⁵ The Development Team (2009)

⁷⁶ vgl. <http://www.wolframalpha.com/pro/step-by-step-math-solver.html> (Zugriff: 01.09.2016)

großer Zahl zu finden sind, auf eigene Beispiele nicht umgelegt werden können. Die *Step-by-step solution* soll dann unterstützend eingreifen, wenn die lernende Person bei einem Problem den weiteren Lösungsweg nicht selbst finden kann oder den eigenen Lösungsweg kontrollieren will.

Die beeindruckende Möglichkeit der Vorskizzierung des Lösungsweges wurde bereits vor dem Aufkommen des Problem Generators in Wolfram|Alpha umgesetzt. Die Nutzung war zu Beginn noch kostenfrei. Im Jahr 2012 war es bei erfolgter Registrierung und Anmeldung bei Wolfram|Alpha noch möglich, dieses Feature drei mal am Tag gratis zu nutzen. Darüber hinaus war ein Upgrade auf die Wolfram|Alpha Pro-Lizenz von Nöten, was uneingeschränkten Zugang zur *Step-by-step solution* bedeutete.⁷⁷ Mittlerweile kann diese, egal ob in Wolfram|Alpha oder im Problem Generator aufgerufen, nur noch in Kombination mit der Pro-Lizenz verwendet werden.

Mit dem Aufkommen der *Step-by-step solution* waren bereits Themengebiete wie z.B. das Lösen von quadratischen Gleichungen oder die Berechnung von Integralen umgesetzt. Das Angebot hat sich immer weiter entwickelt, was bei der Themenvielfalt des Problem Generators gut herauszulesen ist. Hier sind nämlich alle eingebauten Aufgaben und Probleme mit der *Step-by-step solution* ausgestattet.

Bevor der Aufbau und die Umsetzung der *Step-by-step solution* beleuchtet wird, soll noch auf die Funktionsweise der *Step-by-step solution* eingegangen werden. Computer bzw. spezielle Software können schon längere Zeit Ergebnisse für Probleme berechnen und ausgeben. Interessanter und schwieriger gestaltet sich da die Bereitstellung von Lösungswegen, insbesondere von einzelnen Schritten. Wolfram verwendet hierfür raffinierte Algorithmen und Heuristiken, um erstens die Lösungsschritte zu generieren und zweitens diese dem Menschen in verständlicher Form darzubieten.⁷⁸ Die Heuristiken sind dabei logische Formulierungen von Methoden, welche für das Problemlösen in menschlicher, natürlicher Weise herangezogen werden. Die *Step-by-step solution* arbeitet auf einer *Mathematica*-Plattform zur Mustererkennung, um die Probleme zu erkennen und zu strukturieren.⁷⁹

Wie bereits oben angemerkt, erhält der Lernende nach der zweiten falschen Lösungseingabe die Möglichkeit, die *Step-by-step solution* heranzuziehen (Text „View the Step-by-step solution“ erscheint direkt über dem bereits angezeigten Hint). Nach Aufruf der *Step-by-step*

⁷⁷ vgl. The Wolfram|Alpha Math Team (2012)

⁷⁸ vgl. Stephen Wolfram Blog. Online: <http://blog.stephenwolfram.com/2014/08/computational-knowledge-and-the-future-of-pure-mathematics/> (Zugriff: 08.08.2016)

⁷⁹ vgl. The Development Team (2009)

solution öffnet sich ein eigenes Fenster, wobei nur die Aufgabenstellung angezeigt wird. Als Beispiel soll hier der Lösungsweg für das Finden der Determinante einer 3x3-Matrix dienen.



Abbildung 19: Aufruf der Step-by-step solution

Wie in obenstehender Abbildung ersichtlich ist, kann nun die Entscheidung getroffen werden, ob der Lösungsweg *schrittweise* (Next step) oder *komplett* (Show all steps) vorgezeichnet werden soll. Bei schrittweisem Vorgehen wird nun zuerst der erste Hint (Text in hellblauer Box) angezeigt, nach nochmaligem Drücken des Buttons „Next Step“ die Umsetzung des Hints.

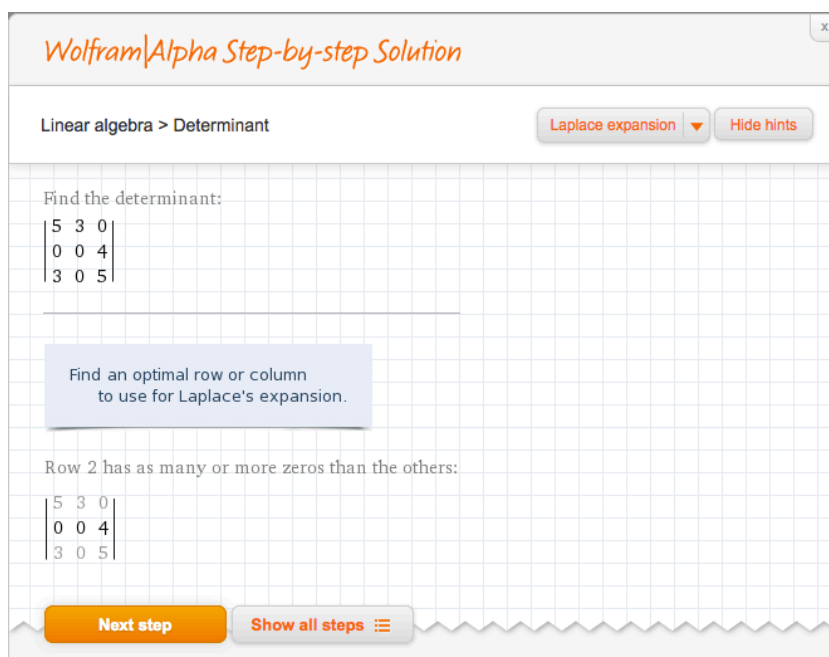


Abbildung 20: Erster Hint plus Umsetzung

Dies kann nun solange fortgesetzt werden, bis der komplette Lösungsweg dargestellt ist (in nächster Abbildung ersichtlich). In Abbildung 20 wird nun im rechten oberen Eck ein neuer Button angezeigt (Hide hints). Dieser kann verwendet werden, um nur die einzelnen Berechnungsschritte ohne vorgestellte Hints abzubilden.

Find the determinant:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Find an optimal row or column to use for Laplace's expansion.

Row 2 has as many or more zeros than the others:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

The determinant of the matrix $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ is given by $\sum_{j=1}^3 (-1)^{2+j} a_{2,j} M_{2,j}$ where $M_{i,j}$ is the determinant of the matrix obtained by removing row i and column j .

The determinant of the matrix $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ is given by $0 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix};$$

$$0 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Find all terms where the coefficient is 0.

Remove all terms where the coefficient is 0:

$$-4 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Compute the determinant of the matrix $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ and multiply the result by -4.

$$(-4) \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-4)(5 \times 0 - 3 \times 3) = -4(-9) = 36:$$

Answer:
36

Computed by Wolfram|Alpha

Abbildung 21: Kompletter Lösungsweg für Berechnung der Determinante einer 3x3-Matrix

Als didaktisch wertvoll kann auch der Umstand angesehen werden, dass für manche Probleme mehrere Lösungswege auswählbar sind. Dies ist immer dann möglich, wenn im oberen rechten Eck des Fensters der Step-by-step solution eine Drop-Down-Auswahl angezeigt wird (siehe Abbildung 20 und Abbildung 22). Für Lernende ist diese Realisierung überaus von Vorteil, da diese gegebenenfalls nur eine Lösungsvariante gelernt haben oder andere Wege studieren wollen. Durch die Behandlung von realitätsbezogenen Aufgaben, die mehrere Lösungswege ermöglichen, wird der lernpsychologische Bereich positiv angesprochen. Die Betrachtung mehrerer Lösungen bringt eine Fokussierung auf den Lösungsweg mit sich, was eine Steigerung der Problemlösefähigkeiten bedeutet.⁸⁰ Am Beispiel einer quadratischen Gleichung (siehe Abbildung 22) wird die Möglichkeit der Auswahl des Lösungsweges beim Problem Generator verdeutlicht. Hier kann die/der NutzerIn zwischen den Lösungswegen „Quadratische Ergänzung“ (Complete the square) und „Anwendung der Lösungsformel“ (Use quadratic formula) auswählen.

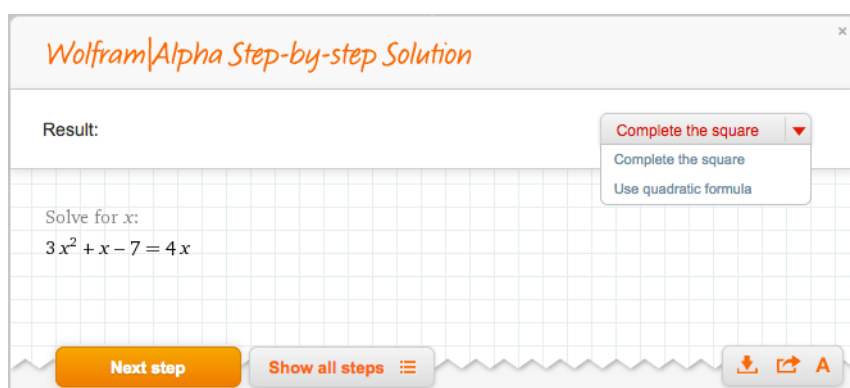


Abbildung 22: Umsetzung mehrerer Lösungswege

Egal in welcher Ansicht man sich befindet, am unteren rechten Rand der Step-by-step solution befinden sich immer die Auswahl für den Download der Daten (als Bild, Rohtext usw.).

2.4.5.5 History

Für Lernzwecke ist die Funktion der *History* von großer Bedeutung. Lernende können während dem Üben jederzeit folgende Details der bereits erledigten Problemstellungen sehen:

- Beispielangabe
- Antwort
- Lösung richtig oder falsch

⁸⁰ vgl. Guberman & Leikin (2013)

- Anzahl der Versuche pro Aufgabe
- Schwierigkeitslevel
- Anzahl korrekt gelöster Beispiele bezogen auf Gesamtzahl

Die History kann z.B. herangezogen werden, um ähnliche Beispiele zu betrachten, den Fortschritt erkennen zu lassen, Motivation zu erhalten, u.Ä.

The screenshot shows a 'History' section with a purple header. At the top right, it says 'Correct: 4 of 5'. Below this, there are five question entries, each with a colored bar on the left (blue for Question 5, green for Questions 4, 3, 2, and 1), the question text, the answer, and a status icon (checkmark or X).

Question	Question Text	Answer	Status
QUESTION 5	Find the GCD of 126 and 112.	14	X
QUESTION 4	What is the greatest common divisor of 6, 72, and 24?	6	✓
QUESTION 3	Find the GCD of 27 and 54.	27	✓
QUESTION 2	What is the GCD of 34 and 30?	2	✓
QUESTION 1	Find the GCD of 9 and 18.	9	✓

Abbildung 23: History zu Aufgabengebiet GGT

Wenn eine bereits erledigte Aufgabe mit dem Mauszeiger anvisiert wird, werden die Informationen zu der Anzahl der Versuche für diese Aufgabe und die einzelnen Antworten angezeigt. In nachstehender Abbildung ist rechts im blauen Balken zu erkennen, dass drei Lösungsversuche stattgefunden haben, wobei erst der dritte Versuch die richtige Lösung darstellte (2 Kreuze und 1 Haken!). Die Lösungseingabe beim zweiten Versuch war „9“, da der Zeiger, welcher nicht abgebildet ist, während der Aufnahme auf dem zweiten Kreuz stand. Für jede Aufgabe, egal ob diese richtig oder falsch gelöst wurde, kann in der History die Step-by-step solution aufgerufen werden.

The screenshot shows a single question entry for 'QUESTION 6'. It has a blue header bar with a checkmark, an X, and another X. Below the header, the question text is 'Find the GCD of 54 and 81.' and the answer is '27'. A link 'Step-by-step solution »' is visible. To the right of the answer, there is a small red box with the number '9' inside, indicating the number of attempts.

Abbildung 24: Detaillierte Informationen für jede Aufgabe

2.4.5.6 Problem sheets

Der Wolfram Problem Generator bietet die Funktion *Problem Sheets* an, damit Aufgaben auch offline bearbeitet werden können. Hierfür kann ein Aufgabenblatt generiert werden, welches im PDF-Format als Download angeboten wird. Bei der Generierung des Sheets besteht die Wahl zwischen zufällig neu generierten Aufgaben und den bereits gerechneten Aufgaben aus der History.

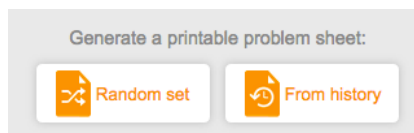


Abbildung 25: Auswahl der Aufgaben für Problem sheet

Die Möglichkeit der Auswahl der Aufgaben hat den Effekt, dass die/der NutzerIn entweder die bereits erledigten Aufgaben wiederholen und festigen bzw. neue Probleme bearbeiten kann.

Ein *Problem Sheet* besteht immer aus zwanzig Aufgaben. Der Schwierigkeitsgrad kann wie beim Online-Lernen aus den drei Stufen *Beginner*, *Intermediate* bzw. *Advanced* gewählt werden. Im Gegensatz zur Onlineeingabe, welche als Lösung eine direkte Antwort verlangt, besitzen alle Aufgaben auf dem *Problem Sheet* den Fragetyp Multiple Choice mit vier vorgegebenen Antworten. In nachstehender Abbildung ist die Voransicht (nicht komplett) eines *Problem Sheets* dargestellt.

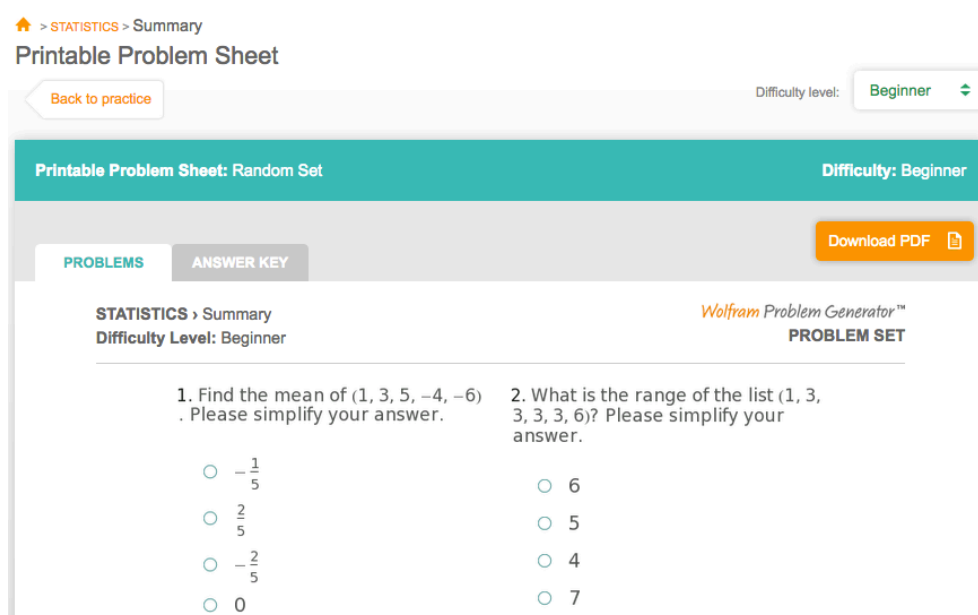


Abbildung 26: Problem Sheet-Voransicht

Mit dem Button „Download PDF“ kann der Download gestartet werden. Zusätzlich zum Aufgabenblatt bietet der Problem Generator auch das zugehörige Lösungsblatt (*Answer Key*) an, welches ebenfalls im PDF-Format verfügbar ist.

Hier sehe ich auch Potential für Elternteile oder LehrerInnen. Diese können differenziert für die Lernenden weiteres Übungs- bzw. Zusatzmaterial zum bestehenden Unterrichtsgeschehen auf sehr schnellem Wege erzeugen und haben mit dem *Answer Key* zusätzlich ohne eigenen Rechenaufwand alle Lösungen parat.

Im Anhang ist ein *Problem Sheet* zum Thema Statistik/Zusammenfassung mit Schwierigkeitsgrad Beginner und dem zugehörigen Lösungsblatt beigelegt.

2.4.6 Kritische Auseinandersetzung

Da das Arbeiten mit dem Wolfram Problem Generator Zeit vor dem Computer, mit dem Smartphone oder ähnlichen Medien in Anspruch nimmt, könnte hier beanstandet werden, dass dann noch mehr Zeit mit diesen neuen Technologien verbracht wird und SchülerInnen gar nicht mehr von digitalen Medien los kommen. In Printmedien und im Fernsehen gibt es immer wieder Diskussionen zu derartigen Sachverhalten, die sich meist auf aktuelle Studien anlehnen. Hier sollen kurz ein paar interessante Zugänge geschildert werden, um aktuelle Positionen zu verdeutlichen.

Beim Lesen des Artikels „Aus Lehrern sollen Dienstleister werden“ in der Standard-Ausgabe vom 27. Mai 2016 musste ich sofort an meine Diplomarbeit und somit an den Wolfram Problem Generator denken. Dieser Artikel beinhaltet ein Interview mit dem Philologen, Kunstpädagogen und Grafiker, Professor für Mediengestaltung und Medientheorie an der Hochschule Offenburg sowie Leiter der grafik.werkstatt an der Fakultät Medien und Informationswesen Ralf Lankau. Gleich die erste Frage und die zugehörige Antwort zeigen beispielhaft, wie digitale Medien gesehen werden können:⁸¹

STANDARD: Sie kritisieren, die Schulen stünden „unter dem Joch der Digitalisten“. Wie meinen Sie das?

Lankau: Das „Joch“ leite ich ab aus der massiven Bewerbung von Digitaltechnik für die Schulen und dem Interesse der IT-Industrie, mit immer mehr digitalen Geräten, Techniken und Diensten in den Schulen verankert zu werden und den Unterricht darauf auszurichten, im Prinzip den gesamten Bildungsmarkt so umzugestalten, dass alles auf digitalen Geräten und Software

⁸¹ Nimmervoll (2016)

aufbaut und wir lernen, dass Lernen isoliert an Geräten stattfindet, also im Prinzip ein ganz anderes Verständnis von Lernen, von Schule, von Unterricht, von Gemeinschaft.“

Das Lernen mit dem Wolfram Problem Generator würde ich nun auch als isoliert bezeichnen. Hier reduziert sich die Rolle der Lehrperson oder fällt komplett weg. Soziale Beziehungen sind aber für Lernprozesse überaus wertvoll und grundlegend, weil wir immer von anderen Menschen lernen.⁸²

In einem weiteren Standard-Artikel mit dem Titel „Die Angst vor der digitalen Verdummung“ steht folgendes zu lesen:

„Die zunehmende Digitalisierung von Berufs- und Privatleben ist ein Forschungsgegenstand, der Wissenschaftler polarisiert. Auf der einen Seite wird die digitale Revolution mit Begeisterung aufgenommen – sie steigere unsere Produktivität und hebe so unseren Lebensstandard. Auf der anderen Seite werden digitalen Technologien schädliche Einflüsse zugeschrieben – angefangen von der Vernichtung von Arbeitsplätzen bis hin zu Produktivitätseinbußen durch ständige Ablenkung. Zudem ließen sie unsere kognitiven Fähigkeiten verkommen.“⁸³

Hier kann gleich die Verbindung zu nächstem Absatz hergestellt werden.

Das Arbeiten vor dem Computerbildschirm hat sich in den letzten Jahren in Bezug auf die Aufmerksamkeit und die Konzentrationsdauer wesentlich verändert, was eine Studie von Gloria Mark belegt. Die durchschnittliche Konzentrationsdauer der ComputernutzerInnen betrug im Jahr 2004 noch 3 Minuten. Im Jahr 2012 waren die User durchschnittlich 1 Minute und 15 Sekunden fähig, sich auf eine bestimmte Aktivität zu konzentrieren. Die Generation Y (Menschen, die zwischen 1980 und 1999 geboren wurden und mit dem Internet, Computer und Smartphones aufgewachsen sind) schafft es durchschnittlich nur noch 45 Sekunden ihre Aufmerksamkeitsspanne vor dem Computerbildschirm aufrecht zu halten. Das Ablenkungspotential von digitalen Medien ist einfach sehr groß – Social Media, jederzeit Zugang zu einer gewaltigen Menge an Informationen, Werbung, angebotene Links, eintreffende Nachrichten uvm. können den Arbeitsfluss bzw. das konstruktive Arbeiten unterbrechen. Lernen vor dem Bildschirm wird dann zu einer echten Herausforderung. Multitasking ist dann kein Argument für Leistungsfähigkeit, sondern der Auslöser für oberflächliches und somit nicht unbedingt konstruktives Arbeiten.⁸⁴

⁸² vgl. Nimmervoll (2016)

⁸³ Zenz (2016)

⁸⁴ vgl. Mark, G. zit. nach Arte Pressemappe

Insgesamt empfinde ich die Auseinandersetzung mit dieser Thematik sehr interessant und wichtig. Die nur in diesem Punkt vorgestellte Diskussionsvielfalt und –Breite würde eine genauere Auseinandersetzung ermöglichen, wofür hier aber leider nicht genug Platz ist. Ich denke aber, dass Eltern und LehrerInnen einen richtigen (gibt es den?) bzw. sinnvollen Umgang mit neuen Technologien vorleben können und auftretendes Fehlverhalten für konstruktive Diskussionen heranziehen sollten. Das könnte jetzt natürlich als Wunschdenken abgestempelt werden, ich als Lehrer würde dieses Vorgehen allerdings erhoffen und zumindest im Informatikunterricht diesem Themengebiet Platz einräumen.

Meine Lebensgefährtin gibt als Diätologin ihren PatientInnen immer einen Rat des Paracelsus mit auf den Weg, welcher für viele Bereiche seine Richtigkeit hat. Auch bei der Verwendung von neuen Technologien ist dieses Zitat in meinen Augen äußerst zutreffend, mit welchem ich diese kritische Auseinandersetzung abschließen möchte. Es lautet:

„Alle Dinge sind Gift, und nichts ist ohne Gift; allein die Dosis machts, daß ein Gift kein Gift sei.“⁸⁵

⁸⁵ Paracelsus (1538)

3 Didaktischer Teil

3.1 Mediendidaktik

Durch das Internet wurde eine neue Art der Wissensvermittlung sowie –Beschaffung ermöglicht. Mittlerweile ist es eine so gut wie unerschöpfliche Ressource für Informationen jeder Art und zunehmend „Voraussetzung zur Teilhabe an der gesellschaftlichen Kommunikation“⁸⁶. Dies ist z.B. in der Vielzahl von Foren und Social-Media-Plattformen mit wissensvermittelnden Inhalten gut ersichtlich. NutzerInnen stellen Fragen zu gewissen Themen oder Problemen und erhalten meist sehr schnell Antworten oder sogar Lösungen. Auf der anderen Seite können durch das Web 2.0 alle Menschen neue Inhalte generieren und somit neues oder bereits vorhandenes Wissen individuell zugänglich machen. Der Unterschied bei dieser Art der Wissensvermittlung ist der, dass der direkte Kontakt zur Lehrperson wegfällt.⁸⁷

„Thema der Mediendidaktik ist damit zunächst das Lernen und Lehren mit intentional aufbereiteten Medien bzw. medialen Arrangements.“⁸⁸ Es gibt viele Varianten, wie auf diese Medien zugegriffen wird bzw. wie diese aufgebaut sind. Hier erfolgt eine Unterscheidung in analoge und digitale Medien, wobei zu den analogen Medien z.B. Texte und Bücher und zu den digitalen Medien E-Learning-Plattformen, über das Internet bereitgestelltes Material, Lernsoftware auf einer DVD, usw. zählen.

„Mediendidaktik greift damit in einen für andere Didaktiken schwer zugänglichen Bereich, denn informelles Lernen jenseits eines institutionellen Kontextes entzieht sich zunächst mangels der Präsenz einer lehrenden Instanz einer Gestaltbarkeit.“⁸⁹

Um Medien didaktisch sinnvoll nutzen zu können, weist Kerres (2001) den Medien drei Funktionen zu:⁹⁰

i. *Wissenspräsentation*

Hier kommt das Medium für eine geeignete Darstellung von Information und Wissen zum Einsatz. Als klassisches Medium wäre die Tafel, für die gegenwärtige Lehrsituation schon das Öfteren der Beamer zu nennen. Um die vorgestellten Informationen und Inhalte für die Adressaten zugänglich, merkbar und somit lernbar zu ma-

⁸⁶ Voß & Kerres (2008), S. 10

⁸⁷ vgl. ebd.

⁸⁸ ebd., S.11

⁸⁹ Kerres (2007)

⁹⁰ Kerres (2001)

chen, sind grafische Darstellungen, Skizzen, Diagramme, Veranschaulichungen, Lernhilfen usw. für Medien anzudenken.

ii. *Wissensvermittlung*

Der Lehr-Lernprozess spielt für diese Funktion eine zentrale Rolle. Nach präsentierten Lerninhalten soll von dem Lernmedium Bezug auf den Lernfortschritt genommen werden, um den Lehr-Lernprozess individuell regeln und somit besser anpassen zu können. „Das Computersystem ermöglicht damit eine gezielte Wissensvermittlung durch Rückkopplung zwischen Lernfortschritt und präsentierten Lerninhalten.“⁹¹ Dieser Sachverhalt benötigt allerdings einen hohen Grad an didaktischer Planung und Aufbereitung, da das Erreichen eines bestimmten Lernziels eine genaue Anpassung des medialen Lernangebots an den angestrebten Lernprozess bedeutet.

iii. *Wissenswerkzeuge*

Als Wissenswerkzeug kann z.B. ein Forum angesehen werden, welches in eine Lernumgebung eingebettet ist, um asynchronen Wissensaustausch zu ermöglichen. Dieses Einbetten kann mit verschiedenen Tools geschehen, welche dann die didaktische Funktion eines Wissenswerkzeuges erhalten und einen didaktischen Mehrwert für die Lernplattform bedeuten.

3.2 Mathematik-didaktische Analyse

„Mathematikdidaktik beschreibt die Wissenschaft von der Entwicklung praktikabler Kurse für das Lernen im Bereich der Mathematik sowie der praktischen und empirischen Überprüfung der Kurse einschließlich der Überlegungen zur Zielsetzung der Kurse und der Stoffauswahl.“⁹²

Das hier vorgestellte Zitat von Griesel (1971) schien als Start für diesen Teil sehr passend, da hier die Person des Lehrenden nicht direkt angesprochen wird. Die Entwicklung praktikabler Kurse für das Lernen ist ein zentraler Baustein, was in Bezug auf den Wolfram Problem Generator auch gut anzuwenden ist. Weitere didaktische Grundsätze aus dem Lehrplan der AHS-Oberstufe werden hier thematisiert, welche verständnisvolles Lernen in den Vordergrund stellen. Für die folgenden vier Grundsätze werden die Beschreibungen, wie sie im Lehrplan der AHS Oberstufe (gültig ab 2004) definiert sind, angeführt:⁹³

⁹¹ Voß & Kerres (2008), S. 13

⁹² Griesel (1971), S. 296

⁹³ BMB (2004), S. 2f

Lernen unter vielfältigen Aspekten

Einzelne Inhalte und Probleme sind aus verschiedenen Blickwinkeln zu sehen und aus verschiedenen Richtungen zu beleuchten. Vielfältige Sichtweisen sichern eine große Flexibilität bei der Anwendung des Gelernten. Die minimale Realisierung besteht in der gelegentlichen Verdeutlichung verschiedener Sichtweisen bei der Behandlung neuer Inhalte, die maximale Realisierung im konsequenten Herausarbeiten der Vor- und Nachteile verschiedener Zugänge. Damit wird ein vielschichtiges und ausgewogenes Bild der Mathematik gewonnen.

Lernen mit instruktionaler Unterstützung

Lernen ohne instruktionale Unterstützung ist in der Regel - insbesondere in Mathematik - ineffektiv und führt leicht zur Überforderung. Lehrerinnen und Lehrer müssen Schülerinnen und Schüler anleiten und insbesondere bei Problemen gezielt unterstützen. Die minimale Realisierung besteht in der Bereitstellung von schüleradäquaten Lernumgebungen und Lernangeboten, die maximale Realisierung in Differenzierungsmaßnahmen, durch die individuelle Begabungen, Fähigkeiten, Neigungen, Bedürfnisse und Interessen gefördert werden.

Lernen mit medialer Unterstützung

Die Beschaffung, Verarbeitung und Bewertung von Informationen hat auch mit Büchern (zB dem Schulbuch), Zeitschriften und mit Hilfe elektronischer Medien zu erfolgen. Nutzen und Problematik mathematischer Inhalte und Lernhilfen im Internet sind hier zu thematisieren. Die minimale Realisierung besteht in der gelegentlichen Einbeziehung derartiger Medien, die maximale Realisierung im gezielten Erwerb von Kompetenzen, die von der Informationsbeschaffung bis zur eigenständigen Abfassung und Präsentation mathematischer Texte und Facharbeiten reichen.

Lernen mit technologischer Unterstützung

Mathematiknahe Technologien wie Computeralgebra-Systeme, dynamische Geometrie-Software oder Tabellenkalkulationsprogramme sind im heutigen Mathematikunterricht unverzichtbar. Sachgerechtes und sinnvolles Nutzen der Programme durch geplantes Vorgehen ist sicherzustellen. Die minimale Realisierung besteht im Kennenlernen derartiger Technologien, das über exemplarische Einblicke hinausgeht und zumindest gelegentlich eine wesentliche Rolle beim Erarbeiten und Anwenden von Inhalten spielt. Bei der maximalen Realisierung ist der sinnvolle Einsatz derartiger Technologien ein ständiger und integraler Bestandteil des Unterrichts.

All diese vier Grundsätze haben im Hinblick auf die Verwendung des Wolfram Problem Generators ihren Stellenwert. Mit dem Problem Generator kann das *Lernen unter vielfältigen Aspekten* gefördert werden, da für bestimmte Problemstellungen teils auch mehrere Lösungsvarianten angeboten werden. Das kann dazu führen, dass neue Blickwinkel eingenommen werden können, was wiederum für das Verständnis des Gelernten von Vorteil ist. Der Problem Generator stellt ein Werkzeug dar, welches ohne Präsenz einer Lehrperson auskommt, was aber nicht bedeutet, dass keine *instruktionale Unterstützung* eingebettet ist. Die Step-by-step solution kann für Aufgaben Hilfestellungen anbieten, welche für konkrete Probleme gezielt zum Einsatz kommen können. Für den *Aspekt der medialen Unterstützung* kann angemerkt werden, dass Wolfram|Alpha mit dessen überaus informationsreicher und gut aufbereiteter Ergebnis-Ausgabe als Medium für Wissensbeschaffung und Bewertung von Informationen überaus lohnend herangezogen werden kann. Dies gilt auch für die gut strukturierte Darstellung der Step-by-step solution mit detaillierten Zwischenschritten und

dazu passenden Tipps. *Lernen mit technologischer Unterstützung* wird beim Arbeiten mit dem Problem Generator realisiert. Dabei ist auf ein sinnvolles Nutzen des Programms Wert zu legen, welches sich z.B. durch konkretes Üben auszeichnet.

Die hier vorliegende Analyse wird sich nur auf drei ausgewählte Themen und Aufgabentypen konzentrieren, da eine gesamte Auswertung den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen würde. Jedes Teilgebiet wird nach den folgenden Aspekten beleuchtet:

- i. Darstellung und Erarbeitung der fachdidaktischen Theorien
- ii. Aufbau und Umsetzung der Probleme vom Problem Generator
- iii. Fachdidaktische Bewertung – Beurteilung der Lernarrangements und der Lernmöglichkeiten

Zum Abschluss der Analyse werden mögliche Einsatzszenarien und die sinnvolle Verwendung im Mathematikunterricht sowie außerhalb des schulischen Umfelds beschrieben. Es soll die Frage „Wie kann mediale sowie technologische Unterstützung mit Hilfe des Wolfram Problem Generators umgesetzt werden?“ im Vordergrund stehen und didaktisch ausgewertet werden.

3.2.1 Teilgebiet 1: Addieren von natürlichen Zahlen

Die Wahl auf dieses, dem Anschein nach eher leichtem Teilgebiet der Mathematik ist so zu erklären, dass der Problem Generator für Aufgaben dieser Kategorie mehrere Lösungsstrategien anbietet und nach genauerer Betrachtung der fachdidaktischen Theorien der Bildungs- und Lehraufgabe große Wichtigkeit zukommt.

3.2.1.1 Fachdidaktische Theorien

Ein Blick auf den aktuellen Lehrplan der Volksschule zeigt, dass sich das Durchführen der Rechenoperationen, wobei *Rechenoperationen* einen eigenen Teilbereich im mathematischen Lehrplan darstellen (was die Bedeutung unterstreicht), durch alle 4 Schulstufen zieht. Die Unterschiede liegen in der Größe des Zahlenraumes – in der Grundstufe I (1. und 2. Schulstufe) liegt der Fokus auf dem Arbeiten im Zahlenraum bis 100, dieser wird in der 3. Schulstufe auf 1.000 und in der 4. Schulstufe auf 1.000.000 erweitert.⁹⁴ Hier sollen nun die Schwerpunktsetzung im Bereich der Rechenoperationen dargestellt werden:

⁹⁴ vgl. BMB (2012), S. 147ff

Als Schwerpunkte bis zum Ende der 2. Schulstufe gelten:⁹⁵

- das Erarbeiten der Operationsbegriffe in engem Zusammenhang mit der Entwicklung des Zahlenverständnisses;
- Durchführen der Rechenoperationen im additiven und im multiplikativen Bereich ohne und mit Notation der Rechengesetze;
- operatives Üben, zB Tausch-, Nachbar-, Umkehr-, Zerlegungsaufgaben;
- das Gewinnen handlungsorientierter Erfahrungen zur Bedeutung von Rechenregeln und das Anwenden zunehmend auch als Lösungshilfe;
- das Anwenden der Rechenoperationen in Spiel- und Sachsituationen.

Über die Schwerpunkte der Grundstufe I hinaus gilt:⁹⁶

- das mündliche Rechnen hat Bedeutung für die Förderung des Zahlenverständnisses, der Rechenfertigkeit, des Operationsverständnisses und für das Lösen von Sachproblemen;
- die schriftlichen Rechenoperationen dienen vor allem der Lösung kindgemäßer Sachprobleme;
- zum Lösen von Sachproblemen sind besonders überschlagendes Rechnen, Einschränken und vorteilhaftes Rechnen zu pflegen.

Es ist zu erkennen, dass die Förderung des Zahlenverständnisses zu den zentralen Themen zählt. Wir Menschen sind im täglichen Leben mit natürlichen Zahlen konfrontiert, welche im gegebenen Kontext stets eine spezielle Bedeutung haben. Die Gewinnung von tragfähigen und vielfältigen Vorstellungen von Zahlen soll daher im Arithmetikunterricht der Grundschule einen hohen Stellenwert einnehmen.⁹⁷ Diese vielfältigen Zahlaspekte der natürlichen Zahlen sollen nun anhand von Beispielen von Friedrich und Benz (2011) verdeutlicht und im Anschluss den einzelnen Aspekten zugeordnet werden:⁹⁸

1. Maximilian hat 2 Brüder. Dort liegen 4 Bauklötze.
2. Marie belegt beim Wettlauf den dritten Platz. Heute ist der 10. Juni.
3. Paul hat beim Hundertmeterlauf die Startnummer 36. Ich lese gerade in dem Buch auf Seite 9.
4. Der Schulweg ist 2 km lang. Die Bonbons kosten 40 Cent.

⁹⁵ BMB (2012), S. 148

⁹⁶ ebd., S. 154

⁹⁷ vgl. Padberg und Benz (2011), S. 13

⁹⁸ ebd., S. 13f

5. Alexander hat in dieser Woche zweimal gefehlt. Klatsche dreimal in die Hände.

6. $8 + 5 = 5 + 8$; $(8 + 7) + 13 = 8 + (7 + 13)$

7. 579 834
 + 688 - 359
 1267 475

8. Halle hat die Postleitzahl 33790. Ich habe die Telefonnummer 5679.

Zuordnung zu den einzelnen Zahlaspekten:

- ☐ Beispiel 1 (*Kardinalzahlaspekt*): Die Zahlen dienen der Beschreibung von Anzahlen (eins zwei, drei usw.). Es wird gefragt: „Wie viele?“
- ☐ Beispiel 2 (*Ordinalzahlaspekt*): Die Zahlen kennzeichnen die Reihenfolge innerhalb einer (total geordneten) Reihe. Man fragt: „An welcher Stelle?“ oder „Der wievielte?“ und erhält als Antwort erster, zweiter, dritter, usw. (natürliche Zahlen als *Ordnungszahlen*)
- ☐ Beispiel 3 (*Ordinalzahlaspekt*): Die Zahlen kennzeichnen auch hier eine Reihenfolge, allerdings werden diese in *der* Reihenfolge benutzt, in welcher sie im Zählprozess durchlaufen werden. Deswegen spricht man in diesem Fall von *Zählzahlen*. Die Ergebnisse benennt man mit eins, zwei, drei usw.
- ☐ Beispiel 4 (*Maßzahlaspekt*): Hier kommen die natürlichen Zahlen als Bezeichnung von Größen zum Einsatz, nämlich als *Maßzahl* bezüglich einer gewählten Einheit. Es können Fragen wie „Wie lang?“ oder „Wie teuer?“ gestellt werden.
- ☐ Beispiel 5 (*Operatoraspekt*): Diesem Aspekt wird die Bedeutung der Vielfachheit einer Handlung oder eines Vorgangs zugesprochen. Auf die Frage „Wie oft?“ erhält man Antworten wie einmal, zweimal, dreimal usw.
- ☐ Beispiel 6 (*Rechenzahlaspekt*): Die Gültigkeit der algebraischen Gesetze steht im Mittelpunkt (hier spricht man vom *algebraischen Aspekt* der Rechenzahlen). Die dargestellten Gleichheitsaussagen beruhen auf dem Kommutativ- bzw. Assoziativgesetz der Addition, wobei die natürlichen Zahlen hier zum Rechnen, also als *Rechenzahlen*, eingesetzt werden.
- ☐ Beispiel 7 (*Rechenzahlaspekt*): Auch bei diesen Beispielen kommen die natürlichen Zahlen als *Rechenzahlen* zum Einsatz, jedoch mit dem Unterschied, dass hier das algorithmische Lösen (bestimmte Folge von Rechenanweisungen) im Vordergrund steht (daher spricht man hier vom *algorithmischen Aspekt* der Rechenzahlen).
- ☐ Beispiel 8 (*Codierungsaspekt*): In den beiden dargestellten Beispielen dienen die natürlichen Zahlen dem Kennzeichnen und Unterscheiden von Dingen – die Ziffernfolgen die-

nen zur *Codierung*. Es erscheint nicht als sinnvoll, mit diesen Ziffernfolgen zu rechnen (z.B. macht es keinen Sinn, die Summe zweier Telefonnummern zu bilden) oder diese der Größe nach zu ordnen.

Um eine gute Übersicht über alle *Zahlaspekte* zu erhalten, werden hier nochmals alle Aspekte aufgelistet:

- Kardinalzahlaspekt
- Ordinalzahlaspekt
 - Ordnungszahl
 - Zählzahl
- Maßzahlaspekt
- Operatoraspekt
- Rechenzahlaspekt
 - algorithmischer Aspekt
 - algebraischer Aspekt
- Codierungsaspekt

Bevor also eine Einführung der Rechenoperationen stattfinden kann, muss zunächst eine Basis für das Verständnis über den Zahlbegriff geschaffen werden. Laut Lehrplan liegt ein Schwerpunkt bis zum Ende der 2. Schulstufe auf dem „Sichern des Verständnisses für Zahlen unter Berücksichtigung des Kardinal-, Ordinal-, Rechen- und Maßzahlaspekt“⁹⁹.

Betrachten wir nun des Weiteren die Lösungsstrategien, mit welchen SchülerInnen Aufgaben zur Addition von natürlichen Zahlen lösen. SchulanfängerInnen bedienen sich sogenannter Zählstrategien, welche aufgrund der Vorerfahrungen beim Zählen Sinn machen. Hier wird unter folgenden Zählstrategien unterschieden:¹⁰⁰

- a) Vollständiges Auszählen
- b) Weiterzählen vom ersten Summanden aus
- c) Weiterzählen vom größeren Summanden aus
- d) Weiterzählen vom größeren Summanden aus in größeren Schritten

Für jede der einzelnen Strategien sind unterschiedliche Vorkenntnisse erforderlich, was aber nicht bedeuten soll, dass eher einfachere Zählstrategien wie das Vollständige Auszählen bei höherem Wissensstand nicht mehr zum Einsatz kommen – auch Erwachsene greifen

⁹⁹ BMB (2012), S. 147

¹⁰⁰ vgl. Padberg und Benz (2011), S. 88ff

in bestimmten Situationen auf diese zurück. Bei den Zählstrategien tauchen aber Probleme auf, da diese oft fehleranfällig sind (z.B. man verzählt sich). Auch bei Vergrößerung des Zahlenraumes, spätestens ab dem Tausenderraum, werden Zählstrategien ineffektiv und aufwändig. Bei der Verwendung der Strategien werden unterschiedliche Aufgaben, welche Zusammenhänge aufweisen (z.B. $4+4$ und $4+5$), meist „blind“ erarbeitet und nicht sinnvoll interpretiert.¹⁰¹

Um die Addition sinngemäß erfassen zu können, ist es wichtig, dass zu Beginn mit vertrauten Sachsituationen (reale Situationen, in Form von Geschichten, in Bildform, u.Ä.) gearbeitet werden sollte. Das Beispiel aus dem Schulbuch *Welt der Zahl 1* zeigt eine solche Situation.¹⁰²



Abbildung 27: Bildliche Darstellung der Addition $4+3$

In diesem Beispiel sind mehrere gleichwertige Darstellungen abgebildet, welche alle die Additions Gleichung $4 + 3 = 7$ beschreiben. Die Darstellung soll insofern weiterhelfen, dass SchülerInnen erkennen, dass sich äußerlich unterschiedliche Objekte abstrakt einheitlich beschreiben lassen, nämlich genau durch die bereits oben angeführte Gleichung: Zu vier Elementen einer Art kommen drei weitere Elemente derselben Art hinzu. Das Beispiel soll auch dazu dienen, die einzelnen Grundvorstellungen bei der Addition zu thematisieren. Diese lauten im Detail (mit Beispielen):¹⁰³

- *Vereinigen*

Beispiel: Nina hat 4 Äpfel, Bernhard hat 3 Äpfel. Wie viele haben sie zusammen?

¹⁰¹ vgl. Padberg und Benz (2011), S. 88ff

¹⁰² vgl. Rinkens, Rottmann, Träger (2009), S. 38

¹⁰³ vgl. Padberg und Benz (2011), S. 92ff

- *Verändern*

Beispiel 1: Nina hat 4 Äpfel. Bernhard gibt ihr 3 Äpfel dazu. Wie viele Äpfel hat Nina danach?

Beispiel 2: Nina hat 4 Äpfel. Bernhard gibt ihr einige Äpfel dazu. Danach hat Nina 7 Äpfel. Wie viele Äpfel hat Bernhard ihr gegeben?

Beispiel 3: Nina hat einige Äpfel. Bernhard gibt ihr 3 Äpfel dazu. Danach hat Nina 7 Äpfel. Wie viele Äpfel hatte Nina ursprünglich?

- *Ausgleichen*

Beispiel: Nina hat 4 Äpfel. Bernhard hat 7 Äpfel. Wie viele Äpfel muss Nina bekommen, um genau so viele Äpfel zu haben wie Bernhard?

- *Vergleichen*

Beispiel: Bernhard hat 7 Äpfel. Nina hat 4 Äpfel. Wie viele Äpfel hat Bernhard mehr als Nina?

Hier soll ein Vergleich zur Vorlesung *Schulmathematik 1 (Arithmetik und Algebra)* (WS 2014/15, Leiter: Christoph Ableitinger), in welcher insgesamt drei Grundvorstellungen behandelt wurden, gezogen werden, da die Herangehensweise mit Zuständen und Änderungen gut gewählt und plausibel erscheint. Diese Grundvorstellungen werden in dieser Lehrveranstaltung folgendermaßen bezeichnet:¹⁰⁴

- *Vereinigungsvorstellung* (Zustand + Zustand = Gesamtzustand)

Beispiel: Nina hat 7 Äpfel (Zustand), Bernhard hat 5 Äpfel (Zustand), dann haben sie gemeinsam 12 Äpfel (Gesamtzustand).

- *Hinzufügen* (Zustand + Änderung = Zustand)

Beispiel: Nina hat 7 Äpfel (Zustand) und bekommt von Bernhard noch 5 Äpfel (Änderung) dazu. Insgesamt hat sie dann 12 Äpfel (Zustand).

- *Veränderungsvorstellung* (Änderung + Änderung = Gesamtänderung)

Beispiel: Nina bekommt zuerst 7 Äpfel (Änderung), danach weitere 5 Äpfel (Änderung). Sie hat somit insgesamt 12 Äpfel erhalten (Gesamtänderung).

¹⁰⁴ Vorlesung von Christoph Ableitinger: *Schulmathematik 1 (Arithmetik und Algebra)*, WS 2014/15

Ein Vergleich der beiden unterschiedlichen Definitionen der Grundvorstellungen zeigt, wie diese miteinander zusammenhängen:

Vereinigen	Vereinigungsvorstellung
Verändern	Veränderungsvorstellung
Ausgleichen	Hinzufügen
Vergleichen	keine Zuordnung möglich

Grundsätzlich zielen alle Grundvorstellungen auf die drei Standard-Fälle der Addition ab:

$$a + b = \square$$

$$a + \square = c$$

$$\square + b = c$$

Um das Erarbeiten des Operationsbegriffes¹⁰⁵, wie es im Lehrplan der Volksschule vorgeschrieben ist, möglich zu machen sowie den verständlichen Umgang mit diesem zu erreichen, müssen SchülerInnen konkrete Aufgaben mit den vorgestellten Grundvorstellungen „als Addition deuten sowie umgekehrt einer symbolisch gegebenen Additionsaufgabe entsprechende konkrete Aufgaben zuordnen können.“¹⁰⁶

Um die hier vorgestellten Grundvorstellungen der Addition gut fördern zu können, sollen in der Grundschule Arbeitsmitteln/Anschauungsmitteln zum Einsatz kommen. Diese sollen durch spezielle Strukturen dabei helfen, den Übergang zu den Rechenstrategien zu finden sowie den Aufbau von mentalen Vorstellungsbildern zu ermöglichen.

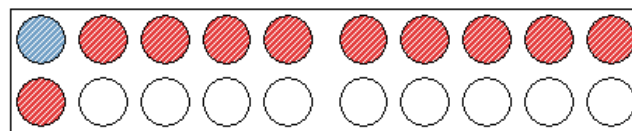
„Handlungen, Zeichnungen, symbolische Schreibweisen und das Gespräch im Unterricht begleiten bei jedem einzelnen Kind den Prozess der Verinnerlichung: Die äußeren, konkreten Handlungen sollen vom Kind im Geist nachvollzogen und schließlich ganz durch Denkhandlungen ersetzt werden. Die Denkhandlungen beziehen sich nicht mehr auf die konkreten Gegenstände, sondern in ihnen werden abstrakte Objekte – hier Zahlen - miteinander in Beziehung gesetzt. Man benötigt mathematische Symbole, um die Beziehungen aufzuschreiben.“¹⁰⁷

Als Arbeitsmittel bzw. Anschauungsmittel kommen beispielsweise das Zwanzigerfeld, der Zwanzigerrechenrahmen oder der Zahlenstrahl bzw. die Zahlengerade zur Verwendung.

¹⁰⁵ BMB (2012), S. 148

¹⁰⁶ Padberg und Benz (2011), S. 95

¹⁰⁷ Hasemann, S.94



$$1 + 10 = 11$$

Abbildung 28: Zwanzigerfeld

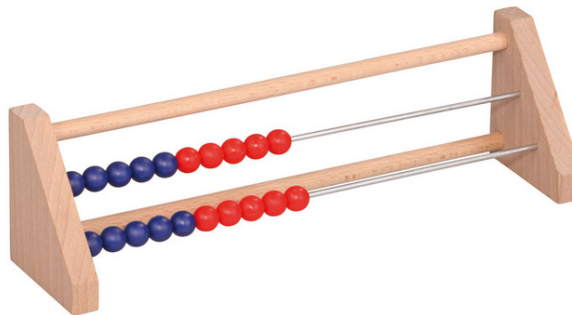


Abbildung 29: Zwanzigerrechenrahmen

Bei der Erweiterung des Zahlenraumes auf mehrstellige Zahlen werden diese Instrumente und auch Zählstrategien unbrauchbar. Deswegen sollen nun für den Tausenderraum neue Strategien beschrieben werden, die verschiedene Zugänge aufzeigen sollen. Padberg und Benz (2011) teilen im ersten Schritt die Strategien in die Kategorien halbschriftliches und schriftliches Rechnen. Der Unterschied bei diesen beiden Zugängen liegt in der Art und Weise des Lösungsweges. Halbschriftliches Rechnen beschreibt die Lösungsfindung mithilfe von Aufzeichnungen, Skizzen, schriftlichen Überlegungen usw. Diese schriftlichen Skizzen sollen dazu dienen, dass der weitere Lösungsweg im Kopf stattfinden kann. Hingegen beinhaltet schriftliches Rechnen Lösungswege mit vorgegebenen Rechenverfahren. Im weiteren Verlauf sollen nun für diese beiden Rechenvarianten die verschiedenen Lösungswege für die Addition aufgezeigt werden.

Halbschriftliches Rechnen bei der Addition

Die hier beschriebenen Lösungswege nach Padberg und Benz (2011) sollen individuelle Zugänge zur Lösungsfindung von SchülerInnen verdeutlichen, wenn diese selbstständig größere Zahlen miteinander addieren sollen. Folgende Lösungswege für das ausgewählte Beispiel $123 + 456$ sind sinnvoll:¹⁰⁸

¹⁰⁸ vgl. Padberg und Benz (2011), S. 178f

- *Stellenweises Rechnen*

Für diese Variante wird die Gültigkeit des Kommutativ- sowie des Assoziativgesetzes der Addition ausgenutzt. Die beiden Summanden werden stellenweise zerlegt, was für das gewählte Beispiel folgende beispielhafte Ausarbeitungen ergeben kann:

$\begin{array}{rcl} 123 + 456 & = & \\ 100 + 400 & = & 500 \\ 20 + 50 & = & 70 \\ 3 + 6 & = & 9 \end{array}$	$\begin{array}{rcl} 123 + 456 & = & 9 + 70 + 500 = \\ 3 + 6 & & \\ 20 + 50 & & \\ 100 + 400 & & \end{array}$
--	--

Hier können bereits Aussagen wie „Einer plus Einer, Zehner plus Zehner, Hunderter plus Hunderter“ getätigt werden, was für das schriftliche Rechnen eine gute Vorarbeit darstellt.

- *Schrittweises Rechnen*

Diese Methode basiert auf dem Assoziativgesetz der Addition. Im Gegensatz zur vorigen Methode wird hier nur ein Summand zerlegt, von dem die einzelnen Teile schrittweise zum anderen Summanden addiert werden. Am Zahlenstrahl kann diese Lösungsvariante gut visualisiert werden:

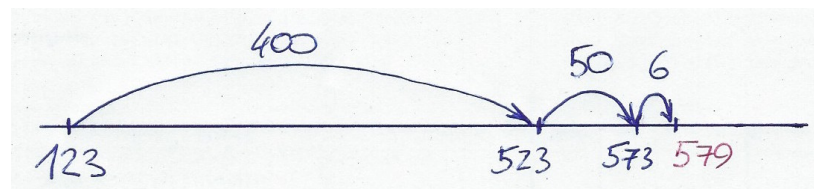


Abbildung 30: Schrittweises Rechnen

- *Mischform (aus stellenweisem und schrittweisem Rechnen)*

Wie bereits der Name erkennen lässt handelt es sich bei dieser Strategie um eine Kombination der ersten beiden. Das halbschriftliche Rechnen geschieht in diesem Fall meist in Gleichungsschreibweise und für die gewählte Addition $123 + 456$ ergeben sich beispielsweise folgende Fälle:

- ✓ $100 + 400 = 500$, $500 + 23 = 523$, $523 + 56 = 579$
- ✓ $100 + 400 = 500$, $500 + 56 = 556$, $556 + 20 = 576$, $576 + 3 = 579$
- ✓ $120 + 450 = 570$, $570 + 3 = 573$, $573 + 6 = 579$

- *Ableiten*

Für diese Variante kommt z.B. die Methode des gegensinnigen Veränderns der Summanden in Frage, was bei Anwendung eine leichtere Rechnung zum Ergebnis hat. Aus der Rechnung $123 + 456$ kann durch gegensinniges Verändern folgende Aufgabe erstellt werden: $120 + 459$.

Alle Strategien, die operative Beziehungen nutzen (wie z.B. Tausch-, Nachbar-, Verdoppelungs-, Analogieaufgaben), werden unter dem Namen *Ableiten* zusammengefasst.

Meist wird auf die Variante des halbschriftlichen Rechnens wenig Wert gelegt, da hierfür eine flexible Vorgehensweise vorgesehen ist. Schulbücher sind aber oft so aufgebaut, dass eine zuvor vorgestellte Lösungsstrategie für ein konkretes Beispiel verwendet werden soll, was einer selbstständigen Lösungsfindung im Weg stehen kann.¹⁰⁹

Schriftliches Rechnen bei der Addition

Die Lösung wird beim schriftlichen Rechnen durch Abarbeitung von Rechenverfahren ermittelt. Dem Rechenverfahren beim Addieren liegt das Verständnis über die Stellenwerte einer Zahl zugrunde. Zugangswege zur Addition können mithilfe von Rechengeld, dem stellenweisen Rechnen (halbschriftliches Rechnen) oder mittels Zehnerblöcken beschrieben werden.¹¹⁰

Das schriftliche Rechnen soll nun anhand des Beispiels $415 + 246$ dargestellt werden:

$$\begin{array}{r}
 415 \\
 + 246 \\
 \hline
 661
 \end{array}$$

Die Charakteristika der schriftlichen Addition werden von Padberg und Benz (2011) folgendermaßen beschrieben:

„Die Summanden werden stellengerecht untereinander angeordnet. Die Addition beginnt bei den Einern. Früher war in vielen Bundesländern die Rechenrichtung von unten nach oben vorgeschrieben. [...] Wird bei der Addition innerhalb einer Stellenwertspalte der Wert 9 über-

¹⁰⁹ vgl. Padberg und Benz (2011), S. 174

¹¹⁰ vgl. ebd., S. 224ff

schritten, notiert man die Übertragszahl – meist etwas kleiner – am unteren Rand der nächsten (linken) Spalte.“¹¹¹

In der Schule gibt es aber auch die Variante, dass die Übertragszahl schriftlich nicht festgehalten wird.

Mit dieser Auflistung von Rechenstrategien kann nun die Umsetzung der Addition von ganzen Zahlen durch den Wolfram Problem Generator unter die Lupe genommen werden. Zuvor noch als Abschluss dieses Unterpunktes ein Blick in den Lehrplan der Volksschule, welcher unter *Hinweise zu den einzelnen Teilbereichen* beim Punkt *Rechenoperationen* folgendes wiedergibt:

Beim Erlernen der additiven (Addieren, Subtrahieren) und multiplikativen (Multiplizieren, Dividieren) Rechenoperationen ist vom Erfahrungsbereich der Schüler auszugehen. Aus praktischem Handeln und bildhaftem Darstellen, wie z.B. Hinzufügen, Zusammenlegen, Vermehren, Vereinigen, Ergänzen, Wegnehmen, Abtrennen, Vermindern, sind die additiven Rechenoperationen abzuleiten, zu interpretieren und zu begründen. [...] Rechensicherheit bei Grundaufgaben ist in kindgemäßer Form anzustreben.¹¹²

Hier wird das Üben an anwendungsorientierten Aufgaben und das Arbeiten mit gut gewählten Visualisierungen hervorgehoben, um den Verständnisaufbau der Kinder für grundlegende Rechenoperationen wie das Addieren ganzer Zahlen nicht zu blockieren.

3.2.1.2 Aufbau und Umsetzung der Probleme

Folgende verschiedene Aufgabenstellungen bietet der Problem Generator in verschiedenen Schwierigkeitsstufen (diese sind in den Klammern ersichtlich) an:

- a. *What is 3 plus 4?* (leicht und mittel)
- b. $6 + 3 = ?$ (leicht und mittel)
- c. *Sum* $96 + 3$. (mittel und schwer)
- d. „*Add 434 and 317.*“ (mittel und schwer)
- e. „*What is three hundred thirty-six plus four hundred ninety-one?*“ (schwer)
- f. „*Compute* $257 + 417$.“ (schwer)
- g. „*What is 47 more than 244?*“ (schwer)

¹¹¹ Padberg und Benz (2011), S. 227

¹¹² BMB (2012), S. 163

Nach erstmaliger, falscher Lösungseingabe durch die/den Nutzer/in werden folgende *Tipps (Hints)* angeboten:

- i. *Think of each number and operation as moving along a number line. Move to the right for positive numbers.* (leicht)
- ii. *Evaluate $96 + 3$.* (mittel)
- iii. *Use long addition. Add the digits in the ones column.*

96

$+ 3$

(mittel und schwer)

Bei nochmaliger, falscher Lösungseingabe werden je nach Schwierigkeitsgrad drei verschiedene Lösungswege der *Step-by-step solution* bereitgestellt. Diese werden im weiteren Verlauf mit einer kurzen Beschreibung gezeigt.

Variante 1 (Zahlengerade):

Bei dieser Variante wird die Lösung mittels der Zahlengeraden ermittelt. Als erster Schritt wird als Hinweis wiederum der Tipp (i) verwendet, welcher aussagt, dass man bei jeder Zahl und jeder Operation an eine Bewegung längs der Zahlengerade denken soll. Ausgegangen wird immer von 0, dann wird die positive ganze Zahl nach rechts mittels Pfeil auf die Zahlengerade aufgetragen, was in Abbildung 31 ersichtlich ist. Danach wird im zweiten Schritt die Addition als Bewegung nach rechts angedacht, was bedeutet, dass im gegebenen Beispiel (durchzuführende Addition: $9 + 2 = ?$) von 9 gestartet werden soll, um dann 2 mittels neuem Pfeil aufzutragen. Als letzter Schritt soll noch abgelesen werden, auf welche Zahl der letzte Pfeil nun zeigt, was im konkreten Fall die Lösung der Addition darstellt.

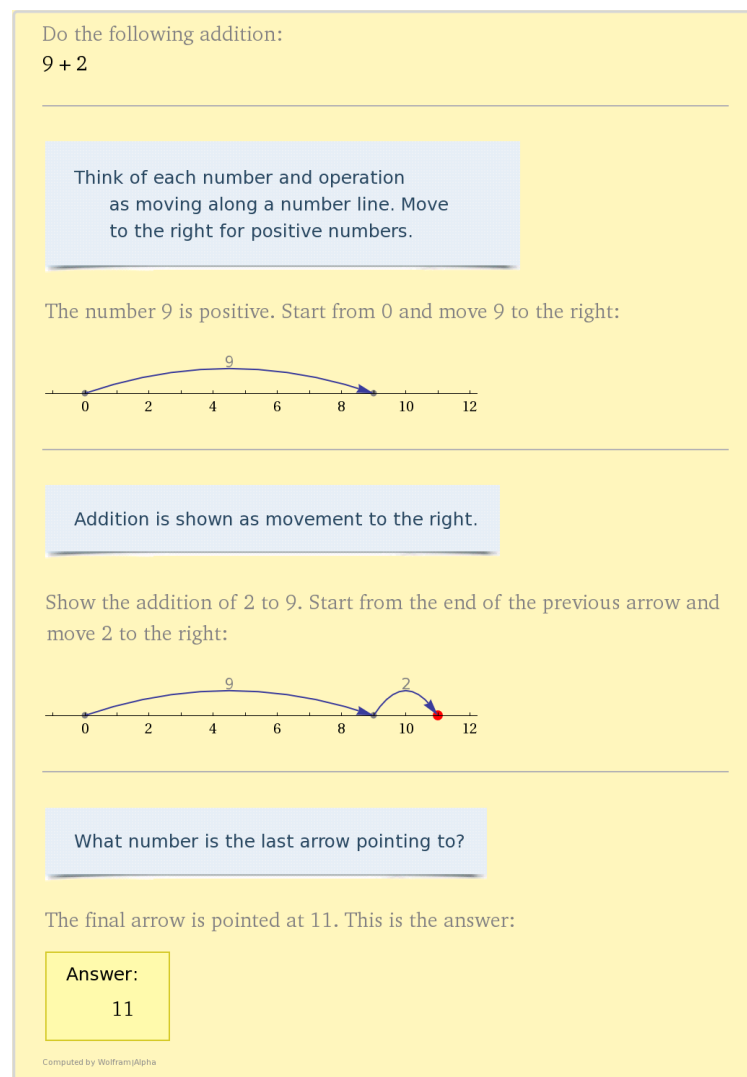


Abbildung 31: Variante 1 der Step-by-step solution beim Addieren von natürlichen Zahlen

Variante 2 (Blockdarstellung):

Diese Variante bietet eine Blockdarstellung der Zahlen zur Lösungsfindung an. Dabei wird jede Zahl in einzelne Blöcke zerlegt, welche dann gezählt werden können. Im ersten Schritt soll die erste Zahl, im gewählten Beispiel 9, als Anzahl von Blöcken interpretiert werden, welche dann gezeichnet werden sollen. Eine Addition wird im zweiten Schritt als das Zeichnen von zusätzlichen Blöcken (hier 2 Blöcke) gedeutet. Zur Ergebnisfindung sollen im letzten Schritt alle Blöcke gezählt werden.

Do the following addition:
 $9 + 2$

Think of each number as a number of blocks. Start by drawing 9 blocks.

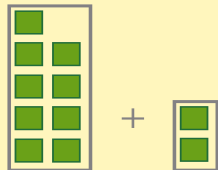
Draw 9 blocks:



9

Adding 2 is the same as drawing 2 more blocks.

Draw 2 blocks next to the 9 blocks:



9 2

How many blocks are there in total?

Count the total number of blocks:

Answer:
11

Computed by Wolfram|Alpha

Abbildung 32: Variante 2 der Step-by-step solution beim Addieren von natürlichen Zahlen

Variante 3 (*Stellenweises Rechnen*):

Die dritte Variante, welche nur für die Schwierigkeitsgrade mittel und schwer zu Verfügung steht, zeichnet die Lösungsfindung mittels stellenweisem Rechnen vor, was dem schriftlichen Rechnen zuzuordnen ist. Dabei sollen im ersten Schritt die Zahlen in der Einer-Spalte, im zweiten Schritt die Zahlen der Zehner-Spalte und zum Schluss die Zahlen in der Hunderter-Spalte aufaddiert werden.

Use long addition:

$$\begin{array}{r} 572 \\ + 209 \\ \hline \end{array}$$

Add the digits in the ones column.

$2 + 9 = 11$:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 572 \\ + 209 \\ \hline 1 \end{array}$$

Add the digits in the tens column.

$1 + 7 + 0 = 8$:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 572 \\ + 209 \\ \hline 81 \end{array}$$

Add the digits in the hundreds column.

$5 + 2 = 7$:

Answer:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 572 \\ + 209 \\ \hline 781 \end{array}$$

Computed by Wolfram|Alpha

Abbildung 33: Variante 3 der Step-by-step solution beim Addieren von natürlichen Zahlen

In nachstehender Tabelle ist die Zuteilung der einzelnen Varianten zu den Schwierigkeitsgraden ersichtlich:

Schwierigkeitsgrad / Variante	Variante 1 (Zahlengerade)	Variante 2 (Blockdarstellung)	Variante 3 (Stellenweises Rechnen)
Leicht (Beginner)	x	x	
Mittel (Intermediate)	x (teilweise)	x (teilweise)	x
Schwer (Advanced)			x

3.2.1.3 Didaktische Bewertung – Beurteilung des Lernarrangements und der Lernmöglichkeiten

Zuerst kann festgehalten werden, dass die Umsetzung der Lösungswege sowohl rechnerisch als auch grafisch realisiert ist, was für die Individualität der SchülerInnen von großem Vorteil ist. Für die/den Eine/n ist genau der Lösungsweg sinnvoll, für die/den Andere/n wiederum ein anderer. Um eine Differenzierung vornehmen zu können, sind die Aufgaben wieder in drei Schwierigkeitsstufen unterteilt. Die Unterschiede in den einzelnen Stufen der Problemstellungen liegen darin, dass die leichten Aufgaben (Beginner) eine Addition zweier einstelliger natürlicher Zahlen, die mittelschweren Aufgaben (Intermediate) eine Addition einer einstelligen mit einer zweistelligen natürlichen Zahl bzw. die schweren Aufgaben (Advanced) die Addition zwei- bzw. dreistelliger natürlicher Zahlen beinhalten. Somit kann ein breites Differenzierungspotenzial ausgeschöpft werden.

Interessant ist auch, dass auf verschiedene Aufgabentypen Rücksicht genommen wird. Die Aufgaben mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden unterscheiden sich nicht nur in der Wertigkeit der Zahlen (je schwieriger die Aufgabe desto größer die Zahlen), sondern auch in deren Formulierungen. Bei leichten Aufgaben wird z.B. zwischen „ $9 + 3 = ?$ “ und „*What is 5 plus 6?*“ gewechselt. Angaben der mittelschweren und schwierigen Aufgaben haben z.B. folgende Gestalt: „*Sum 722 and 119.*“, „*Add 434 and 317.*“, „*What is three hundred thirty-six plus four hundred ninety-one?*“, „*Compute $257 + 417$.*“ oder „*What is 47 more than 244?*“. Hier soll festgehalten werden, dass die vielseitigen Fragestellungen für die Vielfältigkeit und Individualität der SchülerInnen von großem Nutzen sind, weil damit „tragfähige Vorstel-

lungen – oder ‘mentale Objekte’¹¹³ – bei Lernenden ausgebildet werden. Diese Vorstellungen entwickeln sich aus der Beschäftigung oder aus Handlungen mit Begriffen in verschiedenen Darstellungsformen und Umweltsituationen und werden als Grundvorstellungen bezeichnet.“¹¹⁴ Bei den Aufgabenstellungen zur Addition natürlicher Zahlen wird darauf geachtet, dass nicht stets nur die Rechnung, wie z.B. $9 + 3 = ?$, als Problem gestellt wird, sondern mehrere Ausdrücke wie z.B. „Sum“ und „Add“ sowie Zahlen als Wörter einbezogen werden.

Im weiteren Verlauf soll nun eine Bewertung der einzelnen Varianten der Step-by-step solution erfolgen:

Variante 1 (Zahlengerade)

Dieser Lösungsweg mittels Zahlengerade spricht eine Erweiterung der Grundvorstellung *Hinzufügen* (Zustand + Änderung = Zustand) an. Wenn die Lösung betrachtet wird, kann folgendes Konstrukt angedacht werden:

$$\text{Zustand} + \text{Änderung} + \text{Änderung} = \text{Zustand}$$

Der Lösungsschritt, dass von null gestartet werden soll, könnte der Einfachheit halber weggelassen werden. Sinnvoller wäre die Definition des ersten Summanden als Startzustand. Dadurch würde direkt die Grundvorstellung *Hinzufügen* angesprochen werden. In nachstehender Abbildung soll dieser Sachverhalt veranschaulicht werden:

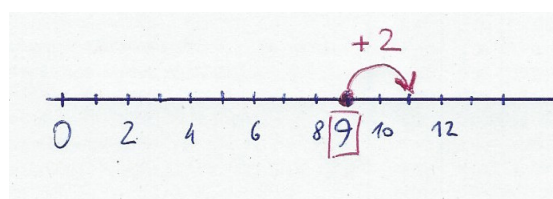


Abbildung 34: Lösung mittels Zahlengerade

Lösung ist laut letztem Hinweis die Zahl, auf die der letzte Pfeil zeigt. Somit ist nur noch ein Ablesen dieser notwendig und der lernende Person hat ein Ergebnis. Die Lösungsfindung kann auch mit Zählstrategien geschehen, z.B. Weiterzählen vom ersten Summanden aus.

¹¹³ Freudenthal (1983)

¹¹⁴ Weigand, Hans-Georg (2015), S. 262

Variante 2 (Blockdarstellung)

Mit dieser Variante wird eindeutig der Zugang mittels Zählstrategie gewählt. Für die Einführung der Addition ist diese Umsetzung sicher ein didaktisch wertvoller Weg.

Variante 3 (Stellenweises Rechnen)

Die Umsetzung des Lösungsweges beim schriftlichen Rechnen ist schrittweise gut nachvollziehbar. Jede Spaltenaddition wird in der richtigen Reihenfolge (zuerst die Einer, dann die Zehner, dann die Hunderter usw.) angegeben und auftretende Übertragungszahlen in der Rechnung vermerkt. Dies geschieht allerdings ohne weitere Kommentare, was vielleicht für eher schwächere SchülerInnen auf den ersten Blick verwirrend wirken kann. Hier sollte das schriftliche Rechnen im Vorhinein durch eine Lehrperson erklärt und eingeführt worden sein. Im Allgemeinen ist das Rechenverfahren aber sehr gut umgesetzt.

3.2.2 Teilgebiet 2: Gleichungen

Für das Teilgebiet 2 wurden die Problemfelder *Quadratische Gleichungen* und *Zweistufige Gleichungen mit Betragsfunktion mit ganzzahligen Lösungen* aus dem Bereich der Algebra gewählt. Bei diesen kann eine vielfältige und breite Lösungsdarstellung erwartet werden und zusätzlich deckt der Aspekt der Fallunterscheidungen (keine, eine oder zwei Lösungen) bei beiden Problemstellungen für SchülerInnen ein interessantes mathematisches Feld ab. Leonhard Euler beschreibt in seinem Buch *Vollständige Anleitung zur Algebra* die Hauptfunktion der Algebra im ersten Abschnitt des zweiten Teils mit dem Namen *Von den algebraischen Gleichungen und ihrer Auflösung* wie folgt:

„Der Hauptzweck der Algebra sowie aller Theile [sic] der Mathematik besteht darin, den Werth [sic] solcher Größen zu bestimmen, die bisher unbekannt gewesen, was aus genauer Erwägung der Bedingungen geschieht, welche stets durch bekannte Größen ausgedrückt sind. Daher wird die Algebra auch als die Wissenschaft definirt [sic], welche zeigt, wie man aus bekannten Größen unbekannte findet.“¹¹⁵

Dieser Suche soll im Algebraunterricht konstruktiv nachgegangen werden, wobei des Weiteren die zielführenden Theorien und Zugänge erläutert werden.

¹¹⁵ Euler (1770), S. 217

3.2.2.1 Fachdidaktische Theorien

Fischer und Malle (2004) merken in ihrem Buch *Mensch und Mathematik* an, dass jeder mathematischen Disziplin formale und inhaltliche Aspekte zugrunde liegen. Dabei handelt es sich um Beziehungen zwischen Zeichen bzw. Zeichenreihen sowie den Umgang mit diesen nach bestimmten Regeln auf der einen und um die Bedeutung und Interpretation dieser Zeichen bzw. Zeichenreihen auf der anderen Seite. Auf das Gebiet der elementaren Algebra bezogen:

Formale Aspekte:

- Umformen von Termen
- Lösen von Gleichungen

Inhaltliche Aspekte:

- Aufstellen und Interpretieren von Termen und Gleichungen

Fehler im Mathematikunterricht sind auf beiden Seiten nicht auszuschließen und tauchen nach bestimmten Schemata immer wieder auf. Eine durchaus oft beobachtbare Schwierigkeit wird beschrieben durch den *Umkehrfehler*, welcher in der mathematikdidaktischen Literatur gelegentlich als „Rosnick-Clement-Phänomen“ (nach P. Rosnick und J. Clement) bezeichnet wird. Dieser Fehler tritt beim Übersetzen von Texten in Formeln und umgekehrt auf.¹¹⁶ Das nachfolgende Beispiel von Rosnick und Clement soll diesen Sachverhalt verdeutlichen:

Es sei S die Anzahl der Studenten und P die Anzahl der Professoren an der Universität. Auf einen Professor kommen 6 Studenten. Drücken Sie das durch eine Gleichung mit Hilfe von S und P aus!¹¹⁷

Die Versuchsreihe von Rosnick und Clement an Studenten verschiedener Studienrichtungen als auch eine Folgestudie von Lochhead an LehrerInnen und UniversitätsprofessorInnen zeigten, dass diese Aufgabe nur etwa 60 % der Befragten richtig lösen konnten. Fast alle Befragten, die die Aufgabe nicht lösen konnten, machten denselben Fehler. Sie formulierten den Sachverhalt mathematisch in folgender Weise:

$$6 S = P$$

Hier wird ersichtlich, warum der Fehler als Umkehrfehler beschrieben wird: Die Gleichung wird verkehrt angeschrieben, da es richtig $S = 6 P$ heißen müsste. Fischer und Malle (2004)

¹¹⁶ vgl. Fischer & Malle (2004), S. 33f

¹¹⁷ Rosnick & Clement (1980)

arbeiten in einigen Interviews „derartige Schwierigkeiten im Aufstellen und Interpretieren von Formeln auf allen Altersstufen“¹¹⁸ heraus, wobei keine positive Korrelation weder mit dem Eindruck mangelnder Intelligenz noch mit schlechten Noten im Fach Mathematik festgestellt wurde. Sie kommen zu dem Schluss, dass ein Großteil der Menschen ein „falsches“ Verständnis von Variablen, Termen und Gleichungen besitzt und anscheinend dem inhaltlichen Aspekt im Mathematikunterricht zu wenig Bedeutung zukommt.¹¹⁹

Hefendehl-Hebeker und Rezat (2015) halten diesen Sachverhalt sehr gut in folgendem Absatz fest:

„SchülerInnen und Schüler sollen nicht vollendete Umformungsautomatismen ausbilden, die letztlich von Computern schneller und verlässlicher durchgeführt werden können, sondern vor allem ein inhaltliches Verständnis der algebraischen Sprache entwickeln sowie deren Sinn und Nutzen einsehen. Dazu zählt insbesondere, Terme und Formeln zum allgemeinen Beschreiben innermathematischer und außermathematischer Sachverhalte und als Hilfsmittel zum Lösen von Problemen, Argumentieren und Kommunizieren¹²⁰ zu verwenden.“¹²¹

Um dem inhaltlichen Aspekt Raum zu geben, darf eine Variable nicht bloß als Leerstelle oder Platzhalter, in die/den man Zahlen einsetzen darf, angesehen werden. Im nächsten Punkt sollen die verschiedenen Aspekte des Variablenbegriffs bestimmt werden.

3.2.2.1.1 Aspekte des Variablenbegriffs

Fischer und Malle (2004) unterscheiden zwischen drei Aspekten des Variablenbegriffs:

- *Gegenstandsaspekt*: Variablen als unbekannte oder nicht genau bestimmte Zahlen (bzw. andere Objekte)
- *Einsetzungsaspekt*: Variablen als Leerstellen (Platzhalter) für Zahlen (oder andere Objekte)
- *Kalkülaspekt*: Variable als bedeutungslose Objekte, mit denen nach bestimmten Regeln operiert werden darf.

Hierbei kann einer dieser drei Aspekte jeweils dem inhaltlichen bzw. dem formalen Aspekt zugeordnet werden. Dem inhaltlichen Aspekt wird der Gegenstandsaspekt, dem formalen Aspekt der Einsetzungs- und der Kalkülaspekt zugeschrieben. Beim Kalkül- und Einsetzungsaspekt kann jedoch eine mögliche inhaltliche Komponente ausgemacht werden. Diese

¹¹⁸ Fischer & Malle (2004), S. 38

¹¹⁹ vgl. ebd.

¹²⁰ vgl. Malle (1993), Verweis im Original

¹²¹ Hefendehl-Hebeker & Rezat (2015), S. 142

ist daran zu erkennen, dass „die Möglichkeit einer Einsetzung von Zahlen in die Leerstellen bzw. die Möglichkeit einer Interpretation der Zeichen als Zahlen“¹²² besteht.

Für die Veranschaulichung der einzelnen Aspekte des Variablenbegriffs soll nun auf das bereits vorgestellte Beispiel mit den Studenten und Professoren zurückgegriffen werden: Beim Aufstellen der Gleichung bzw. der Terme werden die Variablen als Zahlen (oder Größen) mit einer bestimmten Bedeutung interpretiert. Damit wird ein inhaltlicher Aspekt, nämlich der Gegenstandsaspekt angesprochen. Falls im weiteren Verlauf eine Umformung stattfindet, werden nun die Variablen als eher bedeutungslose Objekte gesehen. Diese Umformungen laufen dann nach gewissen Regeln ab, was eine Zuordnung zum Kalkülaspekt bedeutet. Der Einsetzungsaspekt kommt z.B. in folgendem Beispiel zum Tragen: $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. Bei dieser Gleichung werden x und y als Leerstellen für Zahlen gedacht, welche für jede Einsetzung für die Variablen als erfüllt angesehen wird.¹²³

Damit haben Fischer und Malle (2004) herausgearbeitet, dass das reine Arbeiten mit nur einem dieser drei Aspekte schwer möglich ist und es „auf ein Wechselspiel zwischen inhaltlichen und formalen Aspekten des Variablenbegriffs ankommt.“¹²⁴

3.2.2.1.2 Lösungszugänge

Bei der Lösungsfindung von Gleichungen wird von Wolff (1972) auf die bereits betrachteten Aspekte verwiesen. Folgende Aufgabe wird für die Darstellung der einzelnen Lösungszugänge¹²⁵ herangezogen:¹²⁶

Aufgabenstellung: Welche Zahl ergibt um 1 vermehrt und anschließend verdoppelt 8?

- *Lösung unter Betonung des Gegenstandsaspektes*

Wir nennen die gesuchte Zahl x. Für diese muss gelten:

$$2(x + 1) = 8$$

Da das Doppelte der Zahl x+1 gleich 8 ist, ist

$$x + 1 = 4$$

Addiert man also zur Zahl x die Zahl 1, erhält man 4. Somit ist die gesuchte Zahl

¹²² Fischer & Malle (2004), S. 41

¹²³ vgl. ebd., S. 42

¹²⁴ ebd.

¹²⁵ vgl. Wolff (1972)

¹²⁶ Fischer & Malle (2004): S. 43f

$$x = 3$$

- *Lösung unter Betonung des Kalkülaspektes*

Die gesuchte Zahl x muss der folgenden Gleichung genügen:

$$2(x + 1) = 8$$

Wir formen diese Gleichung durch Anwendung von Regeln um. Zunächst wenden wir diese Regel an: „Man darf beide Seiten einer Gleichung durch dieselbe von null verschiedene Zahl dividieren.“ Wir erhalten:

$$x + 1 = 4$$

Nun wenden wir die Regel an: „Man darf auf beiden Seiten einer Gleichung dieselbe Zahl subtrahieren.“ Wir erhalten:

$$x = 3$$

Somit ist 3 die gesuchte Zahl.

- *Lösung unter Betonung des Einsetzungsaspektes*

Die gesuchte Zahl muss die folgende Aussageform durch Einsetzung in den Platzhalter x in eine wahre Aussage überführen:

$$2(x + 1) = 8$$

Diese Aussageform ist äquivalent zur folgenden Aussageform, d.h. hat dieselbe Lösungsmenge wie diese:

$$x + 1 = 4$$

Diese Aussageform ist äquivalent zur Aussageform:

$$x = 3$$

Die Lösungsmenge dieser Aussageform kann man aber unmittelbar ablesen:

$$L = \{3\}$$

Somit ist 3 die gesuchte Zahl.

Wichtig für den Mathematikunterricht sehen Fischer und Malle (2004) die „anfängliche Betonung des Gegenstandsaspektes“¹²⁷, und somit die Hervorstellung der inhaltlichen Aspekte. Auch die Einfachheit der Lösung mit Betonung des Gegenstandsaspektes, welche im

¹²⁷ Fischer & Malle (2004), S. 45

präsentierten Beispiel erkennbar ist, lässt diesen Lösungsweg für den Einstieg in die Gleichungslehre am angemessensten erscheinen. Die beiden anderen Lösungswege sollen natürlich auch ihren Platz im Algebra-Unterricht bekommen, um die zwei zentralen Aspekte *Formalismus* und *inhaltliche Bedeutung* herauszuarbeiten.¹²⁸

3.2.2.1.3 Methodische Einführung

Um zu sehen, wie gegenwärtige Schulbuchliteratur das mathematische Teilgebiet der elementaren Algebra behandelt und einführt, wird das Schulbuch *thema mathematik 5* herangezogen. Hier erfolgt eine Unterteilung in die Kapitel *Terme* und *Gleichungen*. Im Kapitel *Terme* erfolgt zuerst die Bestimmung und Definition der Begriffe *Variable*, *Term* und *Formel*. Danach werden verschiedene Aufgabentypen behandelt, welche den inhaltlichen Aspekt in den Vordergrund stellen. Bei den ersten Aufgaben werden Variablen in erster Linie als Mittel zur allgemeinen Beschreibung von Situationen benutzt, wie dies von Fischer und Malle (2004) vorgeschlagen wird.¹²⁹ Hier wird der allzu schnellen Verwendung von Variablen zum Ausrechnen entgegengewirkt und vor dem formalen Rechnen die Beschreibung von Situationen, und somit der inhaltliche Aspekt, vorangestellt. Zur Veranschaulichung wird das Beispiel 271 aus *thema mathematik 5* hier abgebildet:

Ein Rechteck hat die Seitenlängen l und b . Was bedeutet:

a) $2l + 2b$

b) $l \cdot b$

c) $0,5 \cdot l \cdot b$

Im nächsten Schritt wird das *Rechnen mit Termen* thematisiert. Die Regeln zur Vorzeichensetzung, zu den Distributivgesetzen, zum Ausmultiplizieren und Expandieren sowie Faktorisieren werden vorgestellt, um diese danach auf wiederum allgemein gehaltene Aufgaben anzuwenden. Typisches Beispiel, welches auch im Buch *Mathematik und Mensch* angeführt ist, ist der Beweis der binomischen Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

mittels Grafik (siehe nachstehende Abbildung).

¹²⁸ vgl. Fischer & Malle (2004), S. 44f

¹²⁹ vgl. ebd., S. 52

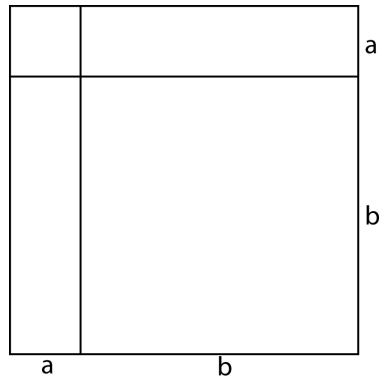


Abbildung 35: Visualisierung von $(a + b)^2$

Fischer und Malle (2004) plädieren auch dafür, „in der Schule möglichst früh einfache Formeln zur Lösung von Aufgaben heranzuziehen“. ¹³⁰ Dies geschieht im Schulbuch im nächsten Kapitel namens *Gleichungen*. Nach einer Definition und der Beschreibung der Grundvorstellung von der Gleichheit mit der zweischaligen Balkenwaage wird darauf aufmerksam gemacht, dass Lehrsätze, Definitionen und Formeln oft als Gleichungen formuliert werden. ¹³¹ Das nächste Unterkapitel widmet sich dem Umformen von Gleichungen. Zunächst wird der Begriff der *Äquivalenz* definiert, um danach die Äquivalenzumformungen zu erarbeiten. Diese sind folgendermaßen definiert: ¹³²

Äquivalenzumformungen: Die Aussage einer Gleichung $T_L = T_R$ bleibt erhalten, wenn

1. beide Seiten vertauscht werden.

$$T_L = T_R$$

$$T_R = T_L$$

2. auf beiden Seiten der gleiche Wert a addiert oder subtrahiert wird.

$$T_L = T_R \quad | + a$$

$$T_L + a = T_R + a$$

$$T_L = T_R \quad | - a$$

$$T_L - a = T_R - a$$

3. beide Seiten mit dem gleichen Wert $a \neq 0$ multipliziert oder durch den gleichen Wert $a \neq 0$ dividiert werden.

$$T_L = T_R \quad | \cdot a$$

$$a T_L = a T_R$$

$$T_L = T_R \quad | : a$$

$$\frac{T_L}{a} = \frac{T_R}{a}$$

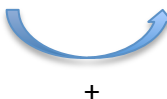
¹³⁰ Fischer & Malle (2004), S. 57

¹³¹ vgl. Brand et al. (2013), S. 66

¹³² Brand et al. (2013), S. 68

Dieser Zugang zu den Äquivalenzumformungen wird von Fischer und Malle (2004) als „Dasselbemachen auf beiden Seiten“ charakterisiert. Sie schreiben auch von den Regeln der Elementarumformungen, was dem „Hinübergeben eines Gliedes auf die andere Seite“ gleichkommt. Nachfolgendes Beispiel soll dies veranschaulichen:¹³³

Additive Elementarumformung:

$$58x - \boxed{27} = 60$$


Multiplikative Elementarumformung:

$$58x = 87$$


Diese Elementarumformungen werden in *thema mathematik 5* nicht erörtert und von LehrerInnen oft nicht geduldet, was Fischer und Malle (2004) als sachlich ungerechtfertigt empfinden:

„... denn die Regeln der Elementarumformungen sind korrekte Regeln und funktionieren genauso gut wie die anderen Regeln. Das Verbot des ‚Hinübergebens‘ hindert die Schüler meist auch nicht, es trotzdem zu tun, sie dürfen es nur nicht laut sagen. Dadurch entsteht eine unnötige Erschwernis für die Schüler: sie müssen dem Lehrer gegenüber anders argumentieren als sie denken. Die Regeln der Elementarumformungen haben demgegenüber den Vorteil, dem tatsächlichen Denken der Schüler angepaßter [sic] zu sein als die anderen Regeln.“¹³⁴

Einer der wichtigsten Aspekte für das Gleichungslösen ist das Erkennen von Termstrukturen auf beiden Seiten der Gleichung, um überhaupt entscheiden zu können, welche Regel anzuwenden ist.¹³⁵

Hier sei auch noch angemerkt, dass Umformungen ohne weitere Überlegungen problematisch sein können. Dies lässt sich anhand drei verschiedener Umformungstypen festmachen, welche kurz beschrieben werden:¹³⁶

¹³³ vgl. Fischer & Malle (2004), S. 74

¹³⁴ ebd., S. 74f

¹³⁵ vgl. ebd., S. 66ff

¹³⁶ vgl. Roth, S. 8

- *Äquivalenzumformung*

Diese wurden bereits oben thematisiert. Hier soll aber der Vermerk gemacht werden, dass eine Äquivalenzumformung eine Umformung ist, bei der sich die Lösungsmenge nicht ändert. Beispiel:

$$x - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{3\}$$

$$x - 2 = 1 \quad | + 2$$

$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{3\}$$

- *Gewinnumformung*

Zu gerade vorgestellter Äquivalenzumformung ist die Gewinnumformung eine Umformung, bei der die Lösungsmenge größer wird. Beispiel:

$$\sqrt{x+1} = x-1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{3\}$$

$$\sqrt{x+1} = x-1 \quad |^2$$

$$x+1 = (x-1)^2$$

$$x+1 = x^2 - 2x + 1 \quad | - (x+1)$$

$$0 = x^2 - 3x$$

$$0 = x \cdot (x-3)$$

$$x = 0 \text{ oder } x = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{0; 3\}$$

- *Verlustumformung*

Die Verlustumformung beschreibt eine Umformung, bei der die Lösungsmenge kleiner wird. Damit sind diese verboten. Folgendes Beispiel soll diesen Sachverhalt verdeutlichen:

$$x^2 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-2; 0\}$$

$$x^2 + 2x = 0 \quad | : x$$

$$x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-2\}$$

Im letzten Punkt der theoretischen Ausführungen soll nun noch ein didaktischer Blick auf die quadratischen Gleichungen geworfen werden, welche auf den bisher vorgestellten algebraischen Überlegungen aufbauen.

3.2.2.1.4 Quadratische Gleichungen

Definition (Quadratische Gleichung): Eine quadratische Gleichung wird durch die Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a \neq 0$ in der Variablen x festgelegt.

Im weiteren Verlauf sollen kurz die einzelnen Typen und Formen der quadratischen Gleichung beschrieben und deren Lösungswege mit möglichen Schwierigkeiten für die SchülerInnen skizziert werden:

- *Reinquadratische Gleichungen* ($ax^2 + c = 0$ mit $a \neq 0$)¹³⁷

In der Literatur kommt auch der Begriff „Reinquadratische Gleichung“ vor, wenn die Gleichung keinen linearen Anteil besitzt ($b = 0$). Die Gleichung hat dann folgende Form und kann folgendermaßen aufgelöst werden:

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$\text{Mit } -\frac{c}{a} = d \text{ ergibt sich:} \quad x^2 = d.$$

Wenn zur Gleichung $x^2 = d$ die Funktion $y = x^2 - d$ betrachtet wird, dann sind die Nullstellen der Funktion die Lösungen der quadratischen Gleichung. Folgende Lösungsfälle treten auf:

Für $d > 0$ gilt:

$$x^2 = d$$

$$|x| = \sqrt{d}$$

$$x = -\sqrt{d} \quad \text{oder} \quad x = \sqrt{d}$$

$$\mathbb{L} = \{-\sqrt{d}, \sqrt{d}\}$$

Für $d = 0$ gilt:

$$x^2 = 0$$

$$|x| = 0$$

$$x = 0$$

¹³⁷ vgl. Rothmeier (2008)

$$\mathbb{L} = \{0\}$$

Für $d < 0$ gilt:

Die Quadratwurzel einer negativen Zahl ist keine reelle Zahl

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$$

Im ersten Fall ist eine Fallunterscheidung zu sehen, welche für SchülerInnen eine Schwierigkeit darstellen kann. Die Wurzel einer Zahl liefert eigentlich ein eindeutiges Ergebnis, z.B. $\sqrt{4} = 2$. Allerdings muss die Lösung einer Gleichung nicht immer eindeutig sein. Für z.B. $x^2 = 4$ müssen die positive ($x = \sqrt{4} = 2$) als auch die negative Lösung ($x = -\sqrt{4} = -2$) beachtet werden. Beim Einsetzen der Lösungen in die Gleichung wird diese Fallunterscheidung verständlich: $(2)^2 = 4$ und auch $(-2)^2 = 4$.

- *Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0, b \neq 0, c = 0$)*¹³⁸

Diese Form kann durch Herausheben eines Faktors (Faktorisieren) schnell zu einer Lösung gebracht werden. Faktorisieren ergibt:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x \cdot (ax + b) = 0$$

Die erhaltene Gleichung beschreibt den Produktnullsatz, welcher folgendes besagt: Ist das Produkt zweier Zahlen gleich null, dann muss zumindest einer der beiden Faktoren null sein. Somit ist entweder $x = 0$ oder $ax + b = 0$. Daraus können wir unsere beiden Lösungen der Gleichung berechnen:

1. Fall (Lösung steht schon da): $x = 0$

2. Fall: $ax + b = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$

Somit resultiert die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$.

- *Allgemeine quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$)*

Für diese Gleichungsform stehen mehrere Lösungszugänge zur Verfügung, die hier kurz angedeutet werden sollen:

a) *Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat*¹³⁹

¹³⁸ vgl. Rothmeier (2008)

¹³⁹ vgl. Embacher (2014)

Wir machen uns das Wurzelziehen, wie es bereits für die reinquadratischen Gleichungen anwendbar war, zu Nutze. Hierbei war es für den Fall $d > 0$ möglich und auch sinnvoll. Um im Fall der allgemeinen quadratischen Gleichung das Wurzelziehen adäquat einzusetzen, ist die Gleichung noch anders zu formulieren. Dafür soll ein Beispiel herangezogen werden, um diesen Vorgang anschaulich und verständlich zu machen:

$$x^2 + 12x + 20 = 0$$

Beim Betrachten der Gleichung könnte der Zusammenhang zur 1. binomischen Formel erkannt werden, welche folgendermaßen lautet: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Es kann der Versuch angedacht werden, dass der quadratische Ausdruck als Quadrat geschrieben werden kann.

$$x^2 + 12x + 20 = (x + ?)^2$$

Hier ist beim Auflösen der binomischen Formel auf der rechten Seite zu erkennen, dass x^2 bereits richtig resultiert, welches auch im Term $x^2 + 12x + 20$ vorkommt:

$$(x + ?)^2 = x^2 + \dots$$

Die unbekannte Zahl ($= ?$) muss noch so ermittelt werden, dass auch der restliche Teil $12x + 20$ des Terms durch die binomische Formel beschrieben werden kann. Der Summand $12x$ der quadratischen Gleichung kann als der Teil $2ab$ der allgemeinen binomischen Formel interpretiert werden. Da für dieses Beispiel $a = x$ bereits Gültigkeit besitzt, sind $2b = 12$ oder $b = 6$. Daraus kann eine binomische Formel aufgestellt werden:

$$(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$$

Hier ist der Unterschied zur gewählten Gleichung allerdings auf einen Blick ersichtlich, nämlich der Summand 36. Damit die rechte Seite den Term $x^2 + 12x + 20$ beschreibt, muss aber nur noch auf beiden Seiten 16 subtrahiert werden. Das ergibt:

$$(x + 6)^2 - 16 = x^2 + 12x + 20$$

Für die Lösungen der allgemeinen quadratischen Gleichung wird nun die hier berechnete Darstellung verwendet:

$$x^2 + 12x + 20 = 0$$

$$(x + 6)^2 - 16 = 0$$

$$(x + 6)^2 = 16$$

Diese Gleichung beschreibt wieder die interessante Situation mit der Fallunterscheidung. Beim weiteren Umformen treten wieder zwei Lösungen, nämlich

$$x + 6 = \sqrt{16} \quad \text{oder} \quad x + 6 = -\sqrt{16}$$

auf. Weiteres Rechnen liefert für den ersten Fall

$$x + 6 = 4$$

$$x_1 = -2$$

und für den zweiten Fall

$$x + 6 = -4$$

$$x_2 = -10$$

Die Lösungsmenge kann nun durch

$$\mathbb{L} = \{-10, -2\}$$

definiert werden.

b) Faktorisieren

Auch der Produktnullsatz, welcher bereits weiter oben bei der Lösungsfindung der Gleichung $ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0, b \neq 0, c = 0$) zum Einsatz kam, kann für die allgemeine Gleichung in gewissen Fällen verwendet werden. Auch hier soll ein Beispiel zum besseren Verständnis angegeben werden:

$$x^2 + 9x + 14 = 0$$

Die linke Seite wird nun als Produkt zweier Faktoren in folgender Form geschrieben:

$$(x + d) \cdot (x + e) = 0$$

Der Monom x^2 der quadratischen Gleichung kann somit bereits erzeugt werden. Für die Variablen d und e müssen noch konkrete Zahlen gefunden werden. Nachdem $d \cdot e = 14$ ergeben muss, können die Variablen als $d = 2$ und $e = 7$ ausprobiert werden. Einsetzen in den Term ergibt:

$$(x + 2) \cdot (x + 7) = x^2 + 2x + 7x + 14 = x^2 + 9x + 14$$

Es ist zu erkennen, dass der richtige Term mit einem Produkt mit $d, e \in \mathbb{Z}$ beschrieben werden kann, was aber in anderen Fällen nicht klappen muss (z.B. $x^2 + 11x + 14$). Hier erscheint der Einsatz des Produktnullsatzes nicht sinnvoll.

Der Lösungsweg der quadratischen Gleichung ist somit schnell beschrieben:

$$x^2 + 9x + 14 = 0$$

$$(x + 2) \cdot (x + 7) = 0$$

Der Produktnullsatz sagt nun, dass entweder

$$(x + 2) = 0$$

oder im anderen Fall

$$(x + 7) = 0$$

sein muss.

Die beiden Lösungen ergeben sich somit zu

$$x_1 = -2 \quad \text{oder} \quad x_2 = -7$$

$$\mathbb{L} = \{-7, -2\}$$

Beim genaueren Hinsehen fällt auf, dass diese beiden Lösungen bereits im Produkt ersichtlich waren. Allgemein kann dieser Zusammenhang wie folgt beschrieben werden:

Besitzt die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ zwei Lösungen x_1 und x_2 , so gilt

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

c) *Kleine Lösungsformel*¹⁴⁰

Die Lösungen einer quadratischen Gleichung in der sogenannten Normalform

$$x^2 + px + q = 0$$

können auch ganz einfach mit einer Lösungsformel berechnet werden. Diese ergibt sich allgemein aus dem *Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat*, wobei die Herleitung hier nicht näher betrachtet werden soll.¹⁴¹

Angabe der kleinen Lösungsformel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Der Term unter der Wurzel wird als Diskriminante bezeichnet. Diese kann entweder positiv, null oder negativ sein, was insgesamt zu drei Lösungsfällen führt:

- *Fall 1:* $\frac{p^2}{4} - q > 0$:

Da die Diskriminante positiven Wert hat, kann die Wurzel gezogen werden und es resultieren zwei Lösungen mit der positiven oder der negativen Wurzel, nämlich:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

- *Fall 2:* $\frac{p^2}{4} - q = 0$:

Durch Einsetzen dieser Information in die Lösungsformel vereinfacht sich diese und es resultiert nur eine Lösung:

$$x = -\frac{p}{2}$$

¹⁴⁰ vgl. Embacher (2014)

¹⁴¹ Herleitung zu finden in: Embacher (2014), S. 7

- Fall 3: $\frac{p^2}{4} - q < 0$:

Die Wurzel einer negativen Zahl existiert in den reellen Zahlen nicht, deswegen gibt es keine Lösung für den Fall 3.

d) Große Lösungsformel¹⁴²

Die Lösungen der allgemeinen quadratischen Gleichung (mit $a \neq 0$)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

können mit der großen Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

bestimmt werden. Im Fall $a = 1$ beschreibt die quadratische Gleichung die Normalform, deren Lösungen wahlweise mit der kleinen oder der großen Lösungsformel berechnet werden können. Die Normalform kann auch durch eine Äquivalenzumformung herbeigeführt werden:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad |:a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Mit $p := \frac{b}{a}$ und $q := \frac{c}{a}$ folgt die bekannte Schreibweise der Normalform:

$$x^2 + px + q = 0$$

Die Diskriminante im Fall der großen Lösungsformel ist $b^2 - 4ac$. Wieder gibt es drei Lösungsfälle:

- Fall 1: $b^2 - 4ac > 0$:

Da die Diskriminante positiven Wert hat, kann die Wurzel gezogen werden und es resultieren zwei Lösungen mit der positiven oder der negativen Wurzel, nämlich:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Fall 2: $b^2 - 4ac = 0$:

Durch Einsetzen dieser Information in die Lösungsformel vereinfacht sich diese und es resultiert nur eine Lösung:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

¹⁴² vgl. Embacher (2014)

- Fall 3: $b^2 - 4ac < 0$:

Die Wurzel einer negativen Zahl existiert in den reellen Zahlen nicht, deswegen gibt es keine Lösung für den Fall 3.

Die Verwendung der großen Lösungsformel ist für alle bisher vorgestellten Typen anwendbar, allerdings sollte die Wahl der Lösungsmethode auch sinnvoll sein.

e) *Zeichnerisches Lösungsverfahren*¹⁴³

Wie gerade angesprochen wäre auch dieses Lösungsverfahren für alle verschiedenen Formen der quadratischen Gleichung anwendbar. Ein großer Vorteil dieser Methode liegt in der visuellen Darstellung des Terms als Funktion, deren Nullstellen die Lösungen der quadratischen Gleichung sind.

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind die Nullstellen der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Auch für dieses Verfahren sollen die drei Lösungsfälle veranschaulicht werden:

- 1. Fall: 2 Nullstellen $\Rightarrow \mathbb{L} = \{x_1, x_2\}$

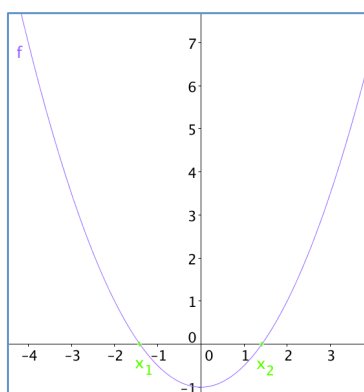


Abbildung 36: Quadratische Funktion mit 2 Nullstellen

- 2. Fall: 1 Nullstelle $\Rightarrow \mathbb{L} = \{x_1\}$

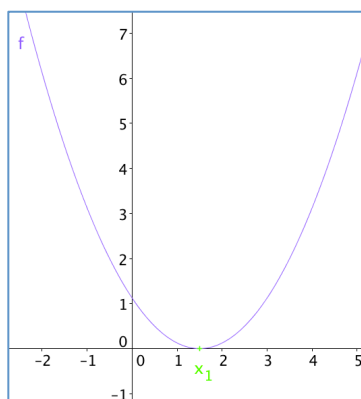


Abbildung 37: Quadratische Funktion mit 1 Nullstelle

¹⁴³ vgl. Rothmeier (2008)

- 3. Fall: keine Nullstellen $\Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$

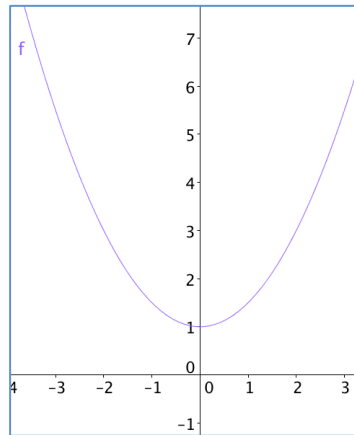


Abbildung 38: Quadratische Funktion ohne Nullstelle

Auf die theoretischen Aspekte der Lösungen von Gleichungen mit Betragsfunktion soll in dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden. Die Betrachtung der Umsetzung durch den Wolfram Problem Generator soll nur als weiteres Beispiel und für Interessierte für den Bereich der Algebra dienen, welches ebenso wie die Lösung der quadratischen Gleichung durch eine Fallunterscheidung gekennzeichnet ist. Das spezielle Themenfeld der Ungleichungen mit Betragsfunktion scheint im österreichischen AHS-Lehrplan nicht auf.

3.2.2.2 Aufbau und Umsetzung der Probleme

3.2.2.2.1 Quadratische Gleichungen

Für diesen Punkt wurden die Aufgabenstellungen für das Lösen von quadratischen Gleichungen mit ganzzahligen Lösungen gewählt. Als Beispiele wurden für jeden Schwierigkeitslevel folgende Angaben gewählt:

Beginner:

- Solve for x : $6x^2 - 42x = 0$.
- Solve for a : $a^2 - 9a + 14 = 0$.
- Solve for w in the equation $-6w^2 + 66w - 168 = 0$.

Intermediate:

- Solve the equation $-7v^2 + 98v - 336 = 0$ for v .

Advanced:

- Compute all the values, real and imaginary, of m such that $6m^2 - 96m + 360 = 0$.

Das erstmalige, falsche Eingeben der Lösung führt zur Anzeige des Hints, welcher für jeden Aufgabentyp und in jeder Schwierigkeitsklasse stets derselbe ist:

Factor the left hand side.

Ins Deutsche übersetzt sagt dieser folgendes aus: Faktorisiere die linke Seite der Gleichung. Es ist zu erkennen, dass dieser Hint auf eine Lösungsmethode eingeht, nämlich das Faktorisieren, welches in Punkt 3.2.2.1.4 beschrieben wurde.

Als nächstes wird die Step-by-step solution für die Aufgabenstellung $-6x^2+18x-12=0$ des Schwierigkeitsgrades *Beginner* dargestellt. Für alle Problemstellungen, egal welchen Schwierigkeitsgrades, werden stets dieselben Lösungsvarianten und Lösungsschritte angeboten. Hier sollen nun die drei realisierten Lösungsvarianten der Step-by-step solution dargestellt werden:

- *Faktorisieren*

Solve for x over the real numbers:

$$-(6x^2) + 18x - 12 = 0$$

Factor the left hand side.

The left hand side factors into a product with three terms:

$$-6(x-2)(x-1) = 0$$

Divide both sides by a constant to simplify the equation.

Divide both sides by -6 :

$$(x-2)(x-1) = 0$$

Solve each term in the product separately.

Split into two equations:

$$x-2 = 0 \text{ or } x-1 = 0$$

Look at the first equation: Solve for x .

Add 2 to both sides:

$$x = 2 \text{ or } x-1 = 0$$

Look at the second equation: Solve for x .

Add 1 to both sides:

Answer:

$$x = 2 \text{ or } x = 1$$

Computed by Wolfram|Alpha

Abbildung 39: Step-by-step solution „Faktorisieren“

- *Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat*

Solve for x over the real numbers:
 $-(6x^2) + 18x - 12 = 0$

Write the quadratic equation in standard form.

Divide both sides by -6 :
 $x^2 - 3x + 2 = 0$

Solve the quadratic equation by completing the square.

Subtract 2 from both sides:
 $x^2 - 3x = -2$

Take one half of the coefficient of x and square it, then add it to both sides.

Add $\frac{9}{4}$ to both sides:
 $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$

Factor the left hand side.

Write the left hand side as a square:
 $(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$

Eliminate the exponent on the left hand side.

Take the square root of both sides:
 $x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ or $x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

Look at the first equation: Solve for x .

Add $\frac{3}{2}$ to both sides:
 $x = 2$ or $x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

Look at the second equation: Solve for x .

Add $\frac{3}{2}$ to both sides:

Answer:
 $x = 2$ or $x = 1$

Computed by Wolfram|Alpha

Abbildung 40: Step-by-step solution „Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat“

- *Lösen mittels Formel*

Diese Step-by-step solution zeigt den Lösungsweg mittels großer Lösungsformel.

Solve for x over the real numbers:
 $-(6x^2) + 18x - 12 = 0$

Multiply both sides by a term to make the coefficient of x^2 positive.

Multiply both sides by -1 :
 $6x^2 - 18x + 12 = 0$

Factor constant terms from the left hand side.

$6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$:
 $6(x^2 - 3x + 2) = 0$

Divide both sides by a constant to simplify the equation.

Divide both sides by 6:
 $x^2 - 3x + 2 = 0$

Using the quadratic formula, solve for x .

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2};$$

$$x = \frac{3+1}{2} \text{ or } x = \frac{3-1}{2}$$

Evaluate $\frac{3+1}{2}$.

$$\frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2;$$

$$x = 2 \text{ or } x = \frac{3-1}{2}$$

Evaluate $\frac{3-1}{2}$.

$$\frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$

Answer:
 $x = 2 \text{ or } x = 1$

Computed by Wolfram|Alpha

Abbildung 41: Step-by-step solution „Große Lösungsformel“

3.2.2.2.2 Zweistufige Gleichungen mit Betragsfunktion

Diese Themengebiete ist durch folgende Aufgabenstellungen, wieder unterteilt in die einzelnen Schwierigkeitsstufen, gekennzeichnet. Angaben der unteren Schwierigkeitsstufen sind auch immer als Angaben der schwierigeren Probleme zu finden.

Beginner:

- Solve for x : $|6x + 5| - 6 = 0$ and write your answer in the simplest form.
- Solve for a : $|3a + 3| - 5 = 0$ and simplify your answer.
- Solve for q : $|5q + 7| - 7 = 0$ and please simplify your answer.
- Solve for n in the equation $|4n + 2| - 3 = 0$. Give your answer in the simplest form.
- Solve for n in the equation $|5n + 4| - 7 = 0$. Express your answer in the simplest form.

Intermediate:

- Find the values of u such that $|10 - 6u| - 7 = 0$ and please simplify your answer.

Advanced:

- Calculate the values of x such that $|6x + 10| - 6 = 0$ and give your answer in the simplest form.
- What are the values of x such that $|7x + 7| - 18 = 0$? Write your answer in the simplest form.
- Solve the equation $|8n + 8| - 15 = 0$ and return your answer in the simplest form.

Bei den Hints treten die nachstehenden Möglichkeiten auf (x steht hier für die Variable):

- Isolate terms with x to the left hand side.

Für diesen Aufgabentyp gibt es genau eine Variante der Step-by-step solution:

Solve for x over the integers:

$$|3 - x| - 4 = 0$$

Isolate terms with x to the left hand side.

Add 4 to both sides:

$$|3 - x| = 4$$

Eliminate the absolute value.

Split the equation into two possible cases:

$$3 - x = 4 \text{ or } 3 - x = -4$$

Look at the first equation:
Isolate terms with x to the left hand side.

Subtract 3 from both sides:

$$-x = 1 \text{ or } 3 - x = -4$$

Solve for x .

Multiply both sides by -1 :

$$x = -1 \text{ or } 3 - x = -4$$

Look at the second equation:
Isolate terms with x to the left hand side.

Subtract 3 from both sides:

$$x = -1 \text{ or } -x = -7$$

Solve for x .

Multiply both sides by -1 :

Answer:

$$x = -1 \text{ or } x = 7$$

Computed by WolframAlpha

Abbildung 42: Step-by-step solution für Lösen einer Gleichung mit Betragsfunktion

3.2.2.3 Didaktische Bewertung – Beurteilung des Lernarrangements und der Lernmöglichkeiten

3.2.2.3.1 Quadratische Gleichungen

Die Problemstellungen zeichnen sich beim Betrachten der Angaben durch einen Wechsel zwischen den einzelnen Formen

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$ax^2 + bx = 0 \text{ oder}$$

$$ax^2 + c = 0$$

einer quadratischen Gleichung aus, was die Vielfalt der verschiedenen Lösungswege anspricht. Hier sei auch positiv angemerkt, dass die Variable nicht stur mit x bezeichnet wird, sondern zufälligerweise Buchstaben quer durch das Alphabet erhält. Da den Variablen aber keine nähere Bedeutung zugeordnet wird, kommt für die Variablen der Kalkülaspekt zum Tragen. Das Abarbeiten bestimmter Regeln und Operationen steht im Vordergrund.

Interessant ist, dass Aufgabenstellungen im Schwierigkeitsgrad *Intermediate* und *Advanced* angeboten werden, welche die Lösungsfindung von Real- und Imaginärteil verlangen. Es konnten allerdings in der hier betrachteten Beispiel-Kategorie keine Probleme mit komplexen Lösungen gefunden werden (ausschließlich ganzzahlig). Somit könnten Verwirrungen beim Lösen der Problemstellungen insofern auftreten, dass diese Angaben im Themengebiet *Quadratische Gleichungen mit ganzzahligen Lösungen* gestellt wurden. Schwächere SchülerInnen könnten davon ausgehen, dass bei einer derartigen Gleichung auch imaginäre Lösungen gefunden werden müssen. Es existieren aber auch Problemstellungen von quadratischen Gleichungen, welche komplexe Lösungen haben, allerdings als eigene Auswahl bei der Übersicht der Themengebiete.

Des Weiteren sollen nun die Lösungsvarianten der Step-by-step solution der Reihe nach diskutiert werden. Vorweg ist das vielfältige Angebot mit drei Lösungsvarianten als didaktisch wertvoll zu beurteilen, da für SchülerInnen die Erklärung über einen anderen Weg möglicherweise verständlicher erscheint bzw. die verschiedenen Zugänge zu den Lösungen ein tieferes Verständnis erzeugen können.

Nun zur Bewertung der drei Lösungsvarianten:

- **Faktorisieren**

Die Gleichungen sind meist so aufgebaut, dass zu Beginn der Step-by-step solution aus jedem Summanden ein Faktor, nämlich eine reelle Zahl, herausgehoben werden kann (außer die Gleichungen sind bereits in der Normalform notiert). Im gleichen Schritt wird aber die erhaltene Normalform ebenfalls in Faktoren zerlegt. Allerdings ist diese Zerlegung bzw. dieses Faktorisieren in der Step-by-step solution nicht weiter beschrieben, was für NutzerInnen problematisch sein könnte. Wenn diese den bereits absolvierten Schritt nicht verstehen und auch keine Probe durch Ausmultiplizieren der erhaltenen Faktoren durchführen, wird das Verständnis auf der Strecke bleiben. Danach sind die einzelnen Schritte bis zur Lösung sowie die Fallunterscheidung mittels Gewinnumformung gut beschrieben und nachvollziehbar.

- *Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat*

Diese Methode ist schrittweise sehr gut nachvollziehbar. Allerdings bin ich der Meinung, dass die lernende Person bereits wissen muss, welches Ziel hinter diesem Verfahren steckt. Andernfalls würde das Abarbeiten von Rechenschritten des hier dargestellten Lösungsweges verständnislos und stur passieren.

Die Gewinnumformung bei der Fallunterscheidung wird zwar adäquat dargestellt, warum die Fallunterscheidung passiert, wird aber nicht vermittelt. Dies könnte SchülerInnen vor ein schwer lösbares Problem stellen, da diese möglicherweise nicht verstehen, warum auf einmal zwei Fälle angegeben werden.

- *Lösen mittels Formel*

Für diese Lösungsmethode wird die große Lösungsformel herangezogen. Beim Betrachten der Lösungsschritte der Step-by-step solution fällt aber ein interessanter Sachverhalt auf: Obwohl für die große Lösungsformel sofort die Koeffizienten a , b und c aus der allgemeinen quadratischen Gleichung herangezogen werden könnten, wird diese noch durch Umformungen auf die Normalform vereinfacht. Dies kann natürlich bei großen Zahlen für die Koeffizienten von Vorteil sein, ist aber nicht zwingend notwendig.

Problematisch erachte ich den Lösungsschritt des Einsetzens der Koeffizienten in die Lösungsformel. Hier ist nämlich der Aufbau der Formel nicht vermerkt, was das Einsetzen der Koeffizienten annähernd zum Ratespiel macht. Hier wäre die Angabe der Formel von klarem Vorteil, da auch NutzerInnen, welche keine Kenntnis der Formel haben, diese sinnvoll anwenden könnten.

Eine Lösungsmethode wäre hier für das Verständnis für das Gleichungslösen sehr sinnvoll, nämlich das vorgestellte zeichnerische Lösungsverfahren. Die grafische Darstellung der Funktion und die daraus resultierende Interpretation der Nullstellen als Lösung der quadratischen Gleichung können verschiedenen auftretenden Problemen entgegenwirken. Warum eine Fallunterscheidung beim rechnerischen Lösen auftritt ist mit der Visualisierung leicht erklärt und generell auch für jede lernende Person nachvollziehbar. Da die Visualisierung in Wolfram|Alpha für so gut wie jede Funktion umgesetzt ist, wäre das Einbeziehen der grafischen Lösung im Wolfram Problem Generator didaktisch überaus sinnvoll.

3.2.2.3.2 Zweistufige Gleichungen mit Betragsfunktion

Beim Betrachten der einzelnen Aufgabenstellungen des Problem Generators ist zu erkennen, dass jeweils die Gleichung nach der unbekannten Variablen gelöst werden soll. Damit wird bereits ein Grundverständnis für das Umformen von Gleichungen vorausgesetzt und nicht durch allgemeine Beschreibungen von Situationen entwickelt. Mit den umgesetzten Aufgabenstellungen kommt eher der Kalkülaspekt zum Tragen, da die Variable als bedeutungsloses Objekt gedeutet werden kann, mit dem nach bestimmten Regeln operiert werden darf. Bei der Umsetzung der Probleme im Themengebiet *Lösen einer Gleichung* wird auf die inhaltliche Komponente nicht Rücksicht genommen und direkt das formale Rechnen angesprochen.

Der Tipp (Hint) „Isolate terms with x to the left hand side.“, welcher als „Isoliere die Terme mit x auf der linken Seite“ übersetzt werden kann, kann nur dann hilfreich sein, wenn die lernende Person bereits weiß, auf welche Teile und wie Umformungen und Regeln angewendet werden dürfen. Dafür ist zuerst das Erkennen der Termstrukturen notwendig.

Die Step-by-step solution zeigt uns das weitere Vorgehen. Hier ist gut zu erkennen, dass die Umsetzungen der Tipps (z.B. „Add 4 to both sides“) genau die Äquivalenzumformungen beschreiben. Das Vorgehen nach bestimmten Regeln deutet auch hier darauf hin, dass die Lösungsfindung unter Betonung des Kalkülaspekts stattfindet.

Beim Betrachten der Lösungen der Wissensmaschine *Wolfram/Alpha* zum hier behandelten Problem ist zu erkennen, dass auch eine grafische Lösung für die Gleichung zu finden ist (siehe Abbildung 43). Hier sei angemerkt, dass für das Erkennen und Akzeptieren der zwei auftretenden Fälle beim Eliminieren der Betragsfunktion diese Grafik als zusätzliche Variante der Step-by-step solution von Vorteil wäre. Es könnte ein weiterer Zugang zur Lösung thematisiert werden, welcher eine neue Sichtweise auf das Problem ermöglicht und damit das Verständnis für diese Umformung verbessert.

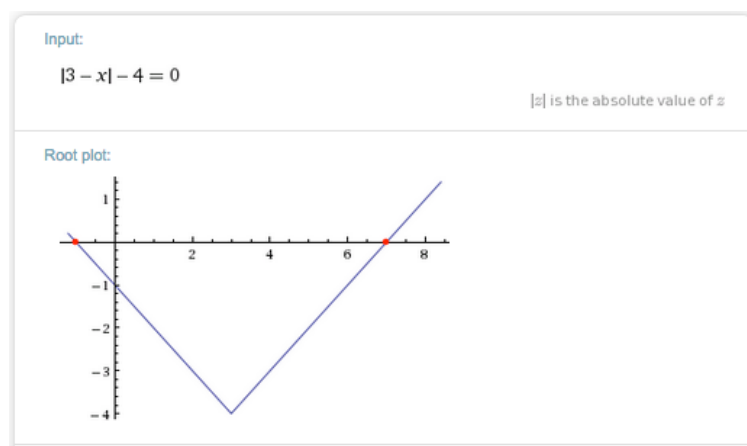


Abbildung 43: Grafische Lösung für Gleichung mit Betragsfunktion

3.2.3 Teilgebiet 3: Vektoraddition in der Ebene

Dieses Kapitel wird aufgrund der Anschaulichkeit von Vektoren im geometrischen sowie auch physikalischen Kontext gewählt. Damit wird auch das Themenfeld der analytischen Geometrie und der linearen Algebra abgedeckt.

3.2.3.1 Fachdidaktische Theorien

Um mit Vektoren hantieren und rechnen zu können, wird zuerst ein Grundverständnis dafür benötigt, da es sich um einen abstrakten Strukturbegriff in der Mathematik handelt. Es gibt mehrere Wege der Einführung des Vektorbegriffs, wobei allen eine wichtige Rolle zukommt – der Mathematikunterricht sollte sich nicht auf einen einzigen Zugang beschränken. Der sehr leistungsfähige Vektorbegriff, der sich durch einen hohen Abstraktionsgrad auszeichnet, soll durch geeignete Beispiele und spezielle Fälle angenähert werden. Diese sollen dazu dienen, Gemeinsamkeiten herauszuarbeiten und zu erkennen, um dann ein schrittweises „Emporarbeiten“ zur verallgemeinernden Begriffsbildung zu ermöglichen.¹⁴⁴

¹⁴⁴ vgl. Henn & Filler (2015), S. 87

Die drei üblichen Zugänge zum Vektorbegriff in der Schule werden von Henn und Filler (2015) folgendermaßen benannt:¹⁴⁵

- Vektoren als Klassen gleich langer, paralleler und gleich gerichteter Pfeile (Pfeilklassen).
- Arithmetische Auffassung von Vektoren als n-Tupel reeller Zahlen.
- Allgemeine Einführung über Vektorraumaxiome.

In folgenden Kontexten tauchen diese Zugänge auf:

3.2.3.1.1 Vektoren in geometrischen und physikalischen Kontexten

Dieses Kapitel basiert auf der Grundidee der Pfeilklassen. In dem Schulbuch *thema mathematik 5* wird der Vektor wie folgt definiert:¹⁴⁶

Definition: Zahlenpaare lassen sich geometrisch als Punkte oder Pfeile deuten. Ein solches Zahlenpaar heißt Vektor.

Diese Definition beinhaltet bereits das Wort Pfeile, welches im engeren Sinne den Pfeilklassen zuzuordnen ist. Hierbei wird der Vektorbegriff im Kontext von primär geometrischen sowie arithmetischen Modellen eingeführt.

Verschiebungen

Um eine Annäherung an den Vektorbegriff zu schaffen können in der Sekundarstufe I bereits Verschiebungen beim Arbeiten mit Koordinatensystemen zum Thema gemacht werden. Dabei werden Verschiebungen mit Hilfe von Verschiebungspfeilen intuitiv interpretiert. Ein typisches Beispiel für diesen Sachverhalt geben Henn und Filler (2015):¹⁴⁷

Beispiel: Koordinatendifferenzen bei Verschiebungspfeilen

- Warum beschreiben die in der Abbildung dargestellten Pfeile dieselbe Verschiebung?
- Ermittle für jeden der Pfeile die Koordinaten des Anfangs- und des Endpunktes.
- Berechne für jeden Pfeil die Differenzen der x- und der y-Koordinaten:
 - $x\text{-Koordinatendifferenz} = x\text{-Koordinate der Pfeilspitze} - x\text{-Koordinate des Anfangspunktes}$

¹⁴⁵ Henn & Filler (2015), S. 88f

¹⁴⁶ Brand et al. (2013), S. 180

¹⁴⁷ Henn & Filler (2015), S. 91

- $y\text{-Koordinatendifferenz} = y\text{-Koordinate der Pfeilspitze} - y\text{-Koordinate des Anfangspunktes}$

Was stellst du fest?

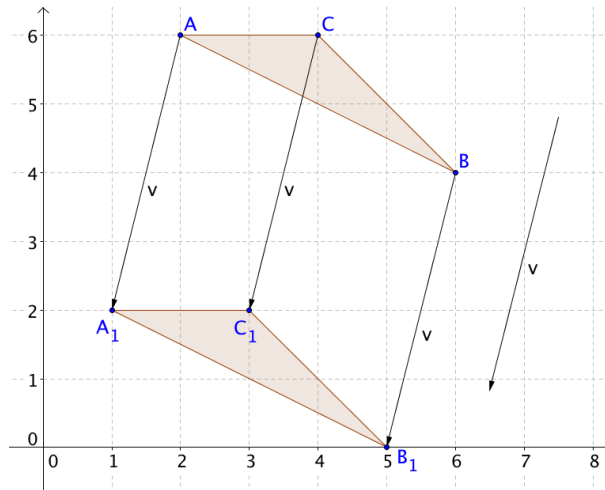


Abbildung 44: Verschiebungen

Bei diesem Beispiel sollen SchülerInnen die Erfahrung machen können, dass „die Paare der Koordinatendifferenzen von Anfangs- und Endpunkten für alle Pfeile gleich sind, welche dieselbe Verschiebung beschreiben“¹⁴⁸, was für ein Grundverständnis des Vektorbegriffes von großer Bedeutung ist.

Geschwindigkeiten und Kräfte

Beliebte Zugänge zum Vektorbegriff können mit physikalischen Inhalten erfolgen, nämlich mit gerichteten Größen wie Kräfte, Geschwindigkeiten, usw. Bereits in der Unterstufe werden im Physikunterricht Kräfte thematisiert, welche nun im Mathematikunterricht für die Einführung und Festigung des Vektorbegriffs wieder aufgegriffen werden können.

Das richtige Interpretieren der „Pfeile“ ist von Notwendigkeit. Folgende Informationen können aus einer Grafik, in der Kräfte eingezeichnet sind, entnommen werden:

- Größe der Kraft kann anhand der Länge des Pfeils (Betrag des Vektors) gedeutet werden (kurzer Pfeil – kleine Kraft, längerer Pfeil – größere Kraft).
- Richtungssinn der Kraft wird von Pfeilrichtung angegeben.

Auch hier ist im Mathematikunterricht darauf zu achten, dass Kräfte im Allgemeinen an verschiedenen Punkten angreifen können. Das bedeutet, dass eine Kraft nicht als ein be-

¹⁴⁸ Henn & Filler (2015), S. 91

stimmter Pfeil gedeutet werden darf, sondern dass dieser Pfeil nur *ein* Repräsentant einer Pfeilklassse ist.¹⁴⁹ In folgender Grafik soll das veranschaulicht werden: Die Kräfte F_1 und F_2 greifen im ersten Fall direkt am Bootsbug an, im zweiten Fall sind zusätzliche Seile gespannt, an denen die gleichen Kräfte wie in Fall 1 wirken. Für das physikalische Verhalten gibt es keinen Unterschied der beiden Fälle: Die resultierende Kraft ist gleich groß und gleich gerichtet, somit beschreiben diese die selbe Verschiebung.

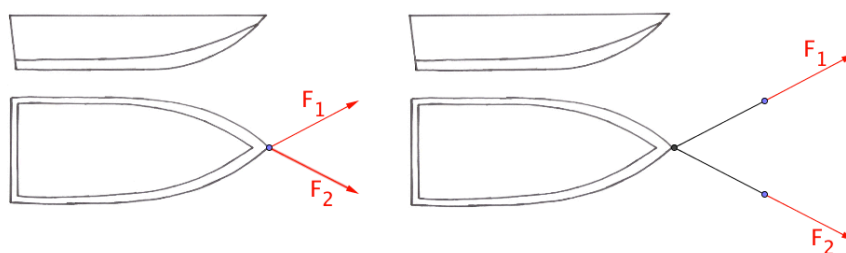


Abbildung 45: Kraft als Pfeil einer Pfeilklassse

Als weitere Erklärung soll die Definition der Pfeilklassse angegeben werden:¹⁵⁰

Definition (Pfeilklassse): Als *Pfeilklassse* bezeichnet man eine Äquivalenzklasse bezüglich der Äquivalenzrelation „parallelgleich“, d.h., eine Pfeilklassse $\vec{u}$ ist die Menge aller zu dem Pfeil $\vec{u}$ parallelgleichen Pfeile der Ebene bzw. des Raumes:

$$\vec{u} = \{\vec{x} \mid \vec{x} \text{ ist parallelgleich zu } \vec{u}\}$$

Jeder Pfeil $\vec{x} \in \vec{u}$ heißt Repräsentant der Pfeilklassse $\vec{u}$.

Mit dieser „Definition haben wir ein Vektormodell eingeführt, dabei jedoch nicht das Wort Vektor verwendet, sondern Pfeilklassse. Die Ursache hierfür liegt darin, dass der Begriff des Vektors wesentlich allgemeiner ist als der der Pfeilklassse.“¹⁵¹

Da dieser Punkt das Thema der Vektoraddition aufgreift, soll nun für dieses Vektormodell der Zugang zur Addition beschrieben werden. Die Definition geschieht im Pfeilklassenmodell mit Hilfe geometrischer Konstruktionen:¹⁵²

Definition (Summe der Pfeilklassen): Es seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Pfeilklassen sowie $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ und $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$ Repräsentanten dieser Pfeilklassen (welche so gewählt sind, dass der Anfangspunkt des Repräsentanten von $\vec{v}$ gleich dem Endpunkt des Repräsentanten von $\vec{u}$ ist). Als *Summe der Pfeilklassen*

¹⁴⁹ vgl. Henn & Filler (2015), S. 92ff.

¹⁵⁰ ebd., S. 95

¹⁵¹ ebd., S. 96

¹⁵² ebd.

sen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ wird die Pfeilklassse bezeichnet, welche den Pfeil $\overrightarrow{AC}$ als einen Repräsentanten besitzt (siehe Abbildung 46):

$$\vec{u} + \vec{v} = \{\vec{x} \mid \vec{x} \text{ ist parallelgleich zu } \overrightarrow{AC}\}$$

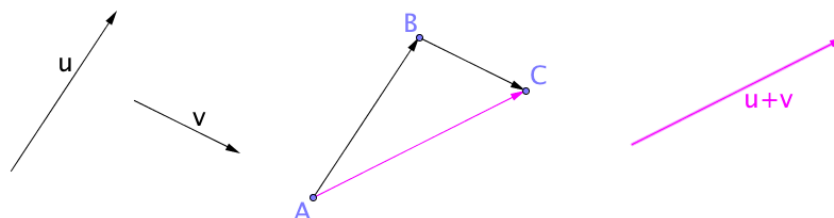


Abbildung 46: Addition von Pfeilklassen

Es sei noch angemerkt, dass der Begriff *Summe* sowie das Operationszeichen $+$ in der Definition verwendet werden, welche allerdings in diesem Kontext keinen Bezug zum Rechnen mit Zahlen haben, sondern nur geometrisch definiert sind.¹⁵³ Dieser Bezug wird erst im arithmetischen Kontext hergestellt, welcher nun im nächsten Punkt erarbeitet wird.

3.2.3.1.2 Vektoren in arithmetischen Kontexten

Bisherige Aufgaben und Beispiele zeichneten sich dadurch aus, dass deren Sachverhalte durch Pfeile veranschaulicht werden konnte, was auch einen Sinn ergibt. Dieses Kapitel verwendet Paare oder Tripel (allgemein: n-Tupel) reeller Zahlen, um Vektoren arithmetisch beschreiben zu können. Im Schulbuch *thema mathematik 5* wird nach einer geometrischen Einführung des Vektorbegriffes im dritten Kapitel (Addition und Subtraktion von Vektoren) auf diese andere Bedeutung Bezug genommen. Folgende Grundvorstellung ist hervorgehoben: „Ein Vektor enthält zusammengehörende Daten.“¹⁵⁴ Gleich die zwei Einführungsbeispiele dieses Kapitels zeigen die verschiedenen Lösungswege der Addition in beiden Kontexten mit folgenden Angaben:¹⁵⁵

- a. In der 5A-Klasse sind 13 Schülerinnen und 12 Schüler, in der 5B-Klasse 7 Schülerinnen und 18 Schüler, in der 5C-Klasse 10 Schülerinnen und 14 Schüler.

Stelle für jede Klasse einen „Personenvektor“ auf: Sein erster Eintrag soll die Anzahl der Schülerinnen, sein zweiter Eintrag die Anzahl der Schüler angeben.

Wie viele Schülerinnen und Schüler sind es in den fünften Klassen insgesamt?

¹⁵³ vgl. Henn & Filler (2015), S. 96

¹⁵⁴ Brand et al. (2013), S. 184

¹⁵⁵ ebd.

- b. Du gehst zuerst den Weg $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und dann weiter den Weg $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Gib den Vektor des direkten Weges vom Ausgangspunkt zum Endpunkt an.

Der Unterschied der beiden Modelle ist anhand der gewählten Beispiele gut zu erkennen. SchülerInnen sollen auch darauf aufmerksam gemacht werden, dass die geometrische Interpretation der ersten Aufgabe nicht unbedingt sinnvoll erscheint. Des Weiteren wird im Buch die Vektoraddition definiert:¹⁵⁶

Definition (Vektoraddition):

Du addierst Vektoren komponentenweise:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Geometrisch addierst du Vektoren, indem du die Pfeile „aneinander hängst“.

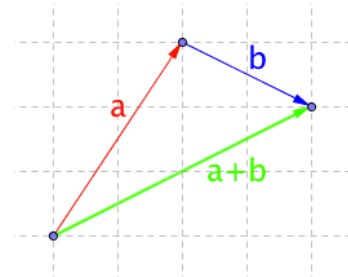


Abbildung 47: Geometrische Addition von Vektoren

Als weitere Beispiele für arithmetische Vektoren führen Henn und Filler (2015) Stücklisten und die Farbmischung in der elektronischen Bildwiedergabe (RGB-Modell) an.¹⁵⁷

Die Kombination von arithmetischem und geometrischem Kontext bei der Einführung der Vektoren kann Schwierigkeiten entgegenwirken. Eine Fehlvorstellung tritt z.B. beim Pfeilklassenkonzept häufig auf, nämlich die Vorstellung „Vektor = Pfeil“. Da Pfeile und Pfeilklassen dieselbe Schreibweise bzw. dieselben Symbole verwenden (z.B. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$, $\overrightarrow{AB}$), ist auf den ersten Blick nicht klar, ob ein Pfeil (entspricht einem Repräsentant einer Pfeilklassse) oder die Pfeilklassse (entspricht dem Vektor) gemeint ist.¹⁵⁸

„Im Sinne des Erwerbs eines verschiedenen (nicht nur geometrische) Aspekte integrierenden Verständnisses des Vektorbegriffs ist es wesentlich, eine arithmetische Vektorauffassung nicht nur bei der Einführung von Vektoren und für die Beschreibung geometrischer Sachverhalte heranzuziehen, sondern die Schüler sollten auch mit ‚eigenständigen‘ arithmetischen Beispielen für n-Tupel arbeiten.“¹⁵⁹

3.2.3.1.3 Vektorbegriff als verallgemeinernder Strukturbegriff

Dieses Modell soll auf dem Vorverständnis des Vektorbegriffs, aufgebaut auf geometrischen und arithmetisch-algebraischen Vektormodellen, ansetzen, um ein integriertes Begriffsver-

¹⁵⁶ Brand et al. (2013), S. 184

¹⁵⁷ vgl. Henn & Filler (2015), S. 108ff.

¹⁵⁸ vgl. ebd., S. 118

¹⁵⁹ ebd., S. 121

ständnis zu ermöglichen. Dabei ist zu erkennen, dass dieses Modell für eine Einführung des Vektorbegriffs in der Schule nicht geeignet ist, da zunächst intuitive und inhaltliche Schritte notwendig sind, damit letztendlich ein strukturelles und formales Begriffsverständnis erworben werden kann.

Dieses Modell baut auf der Definition des Vektorraumes auf, auf welcher der Vektorbegriff fundiert. In dieser sind die wesentlichen strukturellen Eigenschaften aller Vektormodelle, auch der Pfeilklassen sowie der n-Tupel, erfasst.

*Definition (Vektorraum)*¹⁶⁰: Eine nicht leere Menge V mit einer inneren Verknüpfung

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$$

und eine äußere Verknüpfung

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad (\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda \cdot \vec{v}$$

heißt *reeller Vektorraum* bzw. Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

A1. Für beliebige $\vec{u}, \vec{v} \in V$ gilt $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (*Kommutativität der Addition*).

A2. Für beliebige $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ gilt $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
(*Assoziativität der Addition*).

A3. Es existiert $\vec{o} \in V$, so dass für alle $\vec{u} \in V$ gilt: $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$
(*Existenz eines Nullvektors*).

A4. Zu jedem $\vec{u} \in V$ existiert $-\vec{u} \in V$ mit $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$
(*Existenz eines Gegenvektors zu jedem Vektor*).

S1. Für beliebige $\vec{u} \in V$ gilt $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

S2. Für beliebige $\vec{u} \in V$ und beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$
(*Assoziativität der Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen*).

S3. Für beliebige $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
(*1. Distributivgesetz*).

S4. Für beliebige $\vec{u} \in V$ und beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
(*2. Distributivgesetz*).

Die in der Definition geforderten Eigenschaften werden auch als *Vektorraumaxiome* bezeichnet. Damit kann der Begriff *Vektor* allgemein definiert werden: Ist $(V, +, \cdot)$ ein *Vektorraum*, so heißen die Elemente von V *Vektoren*.

¹⁶⁰ Henn & Filler (2015), S. 122

Es werden nun Möglichkeiten angegeben, welche Maßnahmen im Mathematikunterricht umgesetzt werden können, um Gemeinsamkeiten verschiedener Vektormodelle sichtbar zu machen. Als Beispiel wird die Beweisführung des 1. Distributivgesetzes für Pfeilklassen sowie n-Tupel herangezogen und gezeigt, dass diese zwar komplett unterschiedlich sind aber jeweils zum selben Ergebnis kommen. Der Beweis für Pfeilklassen soll hier nur grafisch angedeutet werden. Die Beweisführung ist für Interessierte bei Henn und Filler (2015) auf Seite 124 zu finden.

Beweis des 1. Distributivgesetzes für Pfeilklassen und n-Tupel: Für beliebige Pfeilklassen $\vec{u}, \vec{v}$ bzw. n-Tupel $\vec{x}, \vec{y}$ und beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v} \text{ bzw. } \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$$

Beweis für Pfeilklassen:

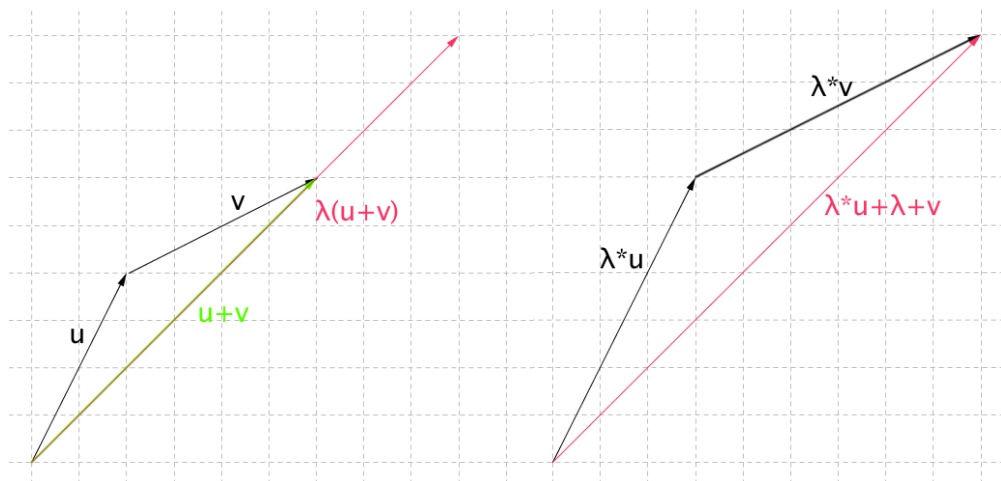


Abbildung 48: Grafischer Beweis des 1. Distributivgesetzes

Beweis für n-Tupel:

Für beliebige einander entsprechende Komponenten x_i, y_i ($i = 1 \dots n$) zweier n-Tupel

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

und für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt nach dem Distributivgesetz für reelle Zahlen $\lambda \cdot (x_i + y_i) = \lambda \cdot x_i + \lambda \cdot y_i$. Dies sowie die Definition der Addition und skalaren Multiplikation von n-Tupeln werden nun angewendet:

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) &= \lambda \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right] = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (x_1 + y_1) \\ \lambda \cdot (x_2 + y_2) \\ \vdots \\ \lambda \cdot (x_n + y_n) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot y_1 \\ \lambda \cdot x_2 + \lambda \cdot y_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n + \lambda \cdot y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \cdot y_1 \\ \lambda \cdot y_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot y_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \\
&= \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}
\end{aligned}$$

Wenn die Einführung und die verwendeten Modelle in einem Schulbuch betrachtet werden, ist in *thema mathematik 5* zu erkennen, dass der Hauptfokus auf der geometrischen Deutung liegt.

„Du kannst *Vektoren* in verschiedenen Anwendungen entdecken: In der Physik werden gerichtete Größen mit Vektoren beschrieben. In der Wirtschaftsmathematik kannst du Daten in Vektoren eintragen. Vektoren helfen geometrische Zusammenhänge und Konstruktionen zu beschreiben. Du lernst Vektoren in diesem Kapitel in erster Linie in ihrer geometrischen Bedeutung kennen – sobald du mit Vektoren, ihren Eigenschaften und Rechengesetzen vertraut bist, wendest du dein Wissen auf geometrische Aufgabenstellungen an.“¹⁶¹

Vereinzelte sind auch Aufgaben mit arithmetischem Kontext zu finden, in Bezug auf die Förderung des strukturellen und formalen Begriffsverständnisses sind so gut wie keine Beispiele vertreten. Eine Aufgabe widmet sich, wie hier bereits vorgeführt, dem allgemeinen Beweis von Rechengesetzen, wie den Distributivgesetzen.

Das Ziel dieses Modells zum Vektorbegriff ist es, dass SchülerInnen erkennen, dass die allgemein formulierten Vektorraumaxiome bereits alle Eigenschaften eines Vektors beschreiben. Dadurch kann der Bezug auf konkrete Modelle wegfallen.¹⁶²

„Diese Stufe strukturellen und formalen Begriffsverständnisses wird in der Schule i. Allg. nicht erreicht. Sie kann aber durch einige kleinere Beweise anhand der Vektorraumaxiome zumindest in Leistungskursen ansatzweise vorbereitet werden.“¹⁶³

3.2.3.2 Aufbau und Umsetzung der Probleme

Die Aufgabenstellungen des Teilgebiets *Vektoraddition in der Ebene* variieren, zugeteilt zu den drei Schwierigkeitsstufen, wie folgt:

¹⁶¹ Brand et al. (2013), S.179

¹⁶² vgl. Henn & Filler (2013), S. 125

¹⁶³ ebd.

Beginner:

- Return your answer in the simplest form: $(7, 7) + (-1, -4) = ?$
- Write your answer in the simplest form: $(7, 7) + (-1, -4) = ?$
- Give your answer in the simplest form: $(7, 7) + (-1, -4) = ?$
- What is $(7, 7)$ plus $(-1, -4)$? Give your answer in the simplest form.
- What is $(7, 7)$ plus $(-1, -4)$? Express your answer in the simplest form.
- What is $(7, 7)$ plus $(-1, -4)$? Return your answer in the simplest form.
- What is $(7, 7)$ plus $(-1, -4)$? Simplify your answer.
- Simplify: $(7, 7) + (-1, -4) = ?$
- What is $(7, 7)$ plus $(-1, -4)$? Please simplify your answer.

Intermediate:

- Please simplify your answer: $(7, 7) + (-1, -4) = ?$
- Find the sum of the vectors $(7, 7)$ and $(-1, -4)$. Write your answer in the simplest form.
- Simplify your answer: $(7, 7) + (-1, -4) = ?$
- Add the vectors $(7, 7)$ and $(-1, -4)$. Return your answer in the simplest form.
- Sum the vectors $(7\hat{i} + 7\hat{j})$ and $(-1\hat{i} - 4\hat{j})$. Write your answer in the simplest form.

Advanced:

- What is the value of the sum $(18, -22) + (-18, 20)$? Simplify your answer.
- Calculate the vector addition $(7\hat{i} - 20\hat{j}) + (7\hat{i} + 10\hat{j})$. Return your answer in the simplest form.

Kombinationsmöglichkeiten zwischen den einzelnen Teilen der Aufgabenstellungen sind jederzeit denkbar, was die Vollständigkeit der hier angeführten Beispiele nicht garantiert.

Des Weiteren ist zu erkennen, dass die Schwierigkeit zwischen den Stufen *Beginner* und *Intermediate* nur in dem Ausmaß steigt, dass auf der mittleren Schwierigkeitsstufe die kanonischen Einheitsvektoren $\hat{i}$ und $\hat{j}$ in die Angabe mit einbezogen werden. Sonst werden bei diesen beiden Leveln nur Vektoren mit einstelligen, ganzzahligen Komponenten ver-

wendet. Dies ändert sich beim Sprung auf die schwierigste Stufe: Diese bietet nun auch Vektoraddition von Vektoren mit zweistelligen, ganzzahligen Komponenten unter teilweiser Einbeziehung der kanonischen Einheitsvektoren an.

Ein Blick auf den angebotenen Hint nach falscher Eingabe der Lösung ist nun der nächste Punkt. Hier ist zu erkennen, dass für alle Aufgabenstellungen - egal welchen Schwierigkeitsgrades - immer nur genau ein Hint angeboten wird, nämlich der erste Lösungshinweis für den ersten Schritt der Step-by-step solution. Dieser hat bei Vektoraddition der Vektoren $(-3, -2)$ und $(6, 2)$ die Gestalt

Add the corresponding components of the vectors $(-3, -2)$ and $(6, 2)$,

was auf Deutsch folgendes bedeutet: Addiere jeweils die Komponenten der Vektoren $(-3, -2)$ und $(6, 2)$.

Die Step-by-step solution wird nachstehend für die Addition der Vektoren $(1, 2)$ und $(3, 1)$ abgebildet.

Simplify the following:
 $(1, 2) + (3, 1)$

Add the corresponding components of the vectors
 $(1, 2)$ and $(3, 1)$.

$(1, 2) + (3, 1) = (1 + 3, 2 + 1):$
 $(1 + 3, 2 + 1)$

Evaluate $1 + 3$.

$1 + 3 = 4:$
 $(4, 2 + 1)$

Evaluate $2 + 1$.

$2 + 1 = 3:$
Answer:
 $(4, 3)$

Abbildung 49: Step-by-step solution für die Vektoraddition

3.2.3.3 Didaktische Bewertung – Beurteilung des Lernarrangements und der Lernmöglichkeiten

Die Problemstellungen weisen stets die Vektor-Schreibweise in Zeilenform auf. In Schulbüchern werden Vektoren aber größtenteils in Spaltenform angegeben und damit gerechnet. Hier können für die lernende Person Interpretations-Schwierigkeiten auftauchen, die das Anwenden von erlernten Regeln behindern könnten. Auch das Auftauchen der kanonischen Einheitsvektoren, welche im englischen Raum mit

$$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden, kann bei Nichtkenntnis zu Problemen führen. Die Angabe besitzt z.B. folgende Struktur:

Sum the vectors $(7\hat{i} + 7\hat{j})$ and $(-\hat{i} - 4\hat{j})$.

Hier könnte zu Beginn von einem Darstellungsfehler vom Problem Generator ausgegangen werden, wenn nicht gewusst wird, dass $\hat{i}$ und $\hat{j}$ die kanonischen Einheitsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ benennen. Wenn dann die Angabe mit diesen Informationen ausgerechnet und anders ausgedrückt wird, erhält man folgende Vektoraddition:

$$\begin{aligned} (7\hat{i} + 7\hat{j}) + (-\hat{i} - 4\hat{j}) &= \\ &= \left(7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \left(- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

oder in anderer Schreibweise, welche vom Problem Generator verwendet wird:

$$(7, 7) + (-1, -4).$$

Die Verwunderung beim Erarbeiten dieser Problemstellung mit den Einheitsvektoren könnte auch deswegen groß sein, da der Problem Generator beim Hint sowie in der Step-by-step solution einfach von der hier berechneten Angabe für die Vektoraddition

$$(7, 7) + (-1, -4)$$

ausgeht und die kanonischen Einheitsvektoren nicht mehr berücksichtigt. Die Aufgabenstellung muss somit verstanden werden, um das Lösen der Problemstellung garantieren zu können. Anderenfalls wäre das Abbrechen der bereitgestellten Aufgabe eine mögliche Konsequenz. Des Weiteren könnte dies ein Dämpfer für die Motivation sein, da derartige Beispiele immer wieder auftauchen.

Nach der ersten Falsch-Eingabe der Lösung wird der *Hint* angezeigt, welcher zum komponentenweisen Addieren auffordert. Dabei wird auf die Definition im arithmetischen Kontext, welche auch im Schulbuch *thema mathematik 5* vorkommt, verwiesen.

Bei der *Step-by-step solution* wird der Hint durchgeführt und danach die einzelnen Additionen der Vektor-Komponenten vorgezeigt.

Weitere Anmerkungen

Wie bei der Lösungsfindung bei den Ungleichungen ist auch hier zu erkennen, dass die Step-by-step solution sich an die Abarbeitung von Regeln und Definitionen hält. In diesem Fall wird, wie schon beschrieben wurde, auf die Regel der komponentenweisen Addition verwiesen. Für mehr Verständnis könnte aber auch hier die Visualisierung der Vektoraddition dienen, welche für den geometrischen als auch den physikalischen Zugang (Kräfteparallelogramm) zu Vektoren übliche Praxis ist. Nach Kontrolle der Umsetzung bei Wolfram|Alpha wurden folgende Varianten ermittelt:

- Die Eingabe von z.B. $(1,2)+(3,1)$ wird richtig als Vektoraddition erkannt. Als Ergebnis erhält die/der NutzerIn die Ausgabe der Lösung plus das Angebot der Step-by-step solution, die Länge des Vektors und noch andere Details. In diesem Fall wird allerdings keine visuelle Lösung angeboten.
- Die obige Eingabe wird um ein Wort erweitert und sieht dann folgendermaßen aus: vector $(1,2)+(3,1)$. In nachstehender Abbildung ist nun ersichtlich, dass auch diese Eingabevariante zu der richtigen Lösung plus zusätzlichen Details führt, die Step-by-step solution ist allerdings hier nicht aufrufbar, dafür erhält die lernende Person eine grafische Lösung für die Addition zweier Vektoren in der Ebene.

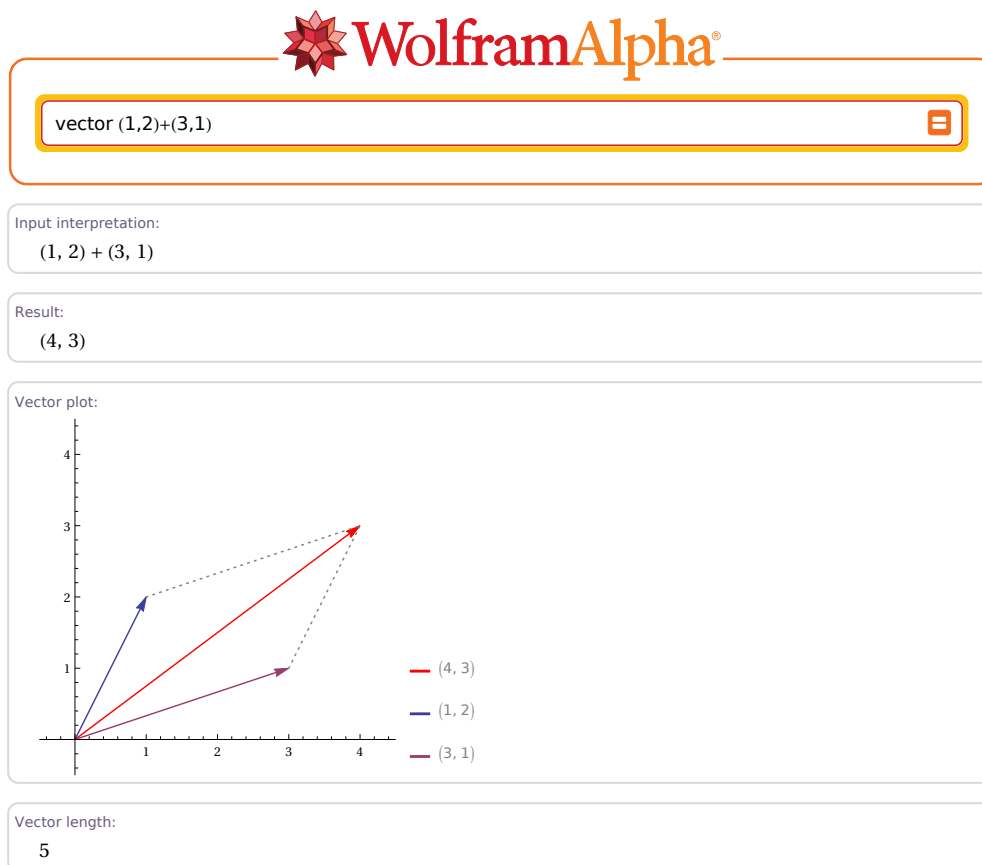


Abbildung 50: Ergebnisausgabe bei Eingabe der Vektoraddition in Wolfram|Alpha

Aufgrund dieser Umstände wäre zu empfehlen, dass der Problem Generator eine grafische Umsetzung ins Angebot (grafische Angabe sowie grafische Lösungsvorschläge) aufnimmt, um dem geometrischen Kontext des Vektorbegriffes Platz einzuräumen. Da die grafische Umsetzung von einzelnen Vektoren sowie die grafische Lösung der Vektoraddition in Wolfram|Alpha bereits realisiert wurde, wäre das Einbetten in die Step-by-step solution aus didaktischer Sicht zu empfehlen.

3.3 Einsatzgebiete und mögliche Anwendungsszenarien – eine didaktische Bewertung

In erster Linie wird der Wolfram Problem Generator für das Lernen von speziellen Themengebieten und das Üben gewisser Problemstellungen von SchülerInnen, StudentInnen und ähnlichen Personen herangezogen. Natürlich soll hier darauf aufmerksam gemacht werden, dass bei Weitem nicht für alle mathematischen Gebiete Problemstellungen angeboten werden. Bei Updates werden aber immer wieder neue Umsetzungen realisiert. Andere Möglichkeiten der Nutzung sind allerdings auch relevant und denkbar. Diese unterschiedlichen Zugänge sollen hier dargestellt und kurz beschrieben werden:

- *Problem Sheets:*

Diese Möglichkeit des Downloads von Aufgabensammlungen stellt für Eltern und LehrerInnen ein überaus sinnvolles Tool zur Verfügung. Damit lassen sich fast augenblicklich Aufgabenblätter zu den von Wolframs Problem Generator angebotenen Themengebieten erstellen, welche für spezielles Üben oder einfach nur als zusätzliche Materialien vor Schularbeiten oder Tests herangezogen werden können. Lösungen müssen auch nicht händisch errechnet werden, da auch die dazugehörigen Lösungen bereitgestellt werden. Das ist für fachfremde Elternteile von großem Vorteil.

- *Unterricht:*

Die Verwendung des Problem Generators kann auch im Mathematikunterricht angedacht werden. Eine mögliche Variante wäre der *flipped classroom* (Umgedrehter Unterricht). Diese stellt eine Unterrichtsmethode des integrierten Lernens dar, bei welcher das Unterrichtsgeschehen und die Hausaufgaben vertauscht werden. Zu Hause sollen die Lerninhalte selbstständig erarbeitet werden, im Unterricht soll dann das Erlernte Anwendung finden. Damit wird den SchülerInnen ein eigenes Arbeitstempo ermöglicht, noch dazu kann mittels neuer Technologien generell ortsunabhängig gearbeitet werden. Für diese Methode würde der Problem Generator für die Arbeiten und die Wissenserzeugung zu Hause ins Spiel kommen.¹⁶⁴

Beispiel: Einführung in die Vektoraddition und –subtraktion. Die SchülerInnen sollen mit Hilfe des Problem Generators die Rechenregeln für die Addition und die Subtraktion von Vektoren selbst lernen, um diese dann im Unterricht an ausgewählten Beispielen anzuwenden. Dafür kann zuerst darauf hingewiesen werden, dass die Step-by-step Solution diese Regel zwar nicht direkt allgemein anzeigt, aber die richtigen Tipps zur Lösung vorgibt. Mit diesen soll es dann möglich sein, die Regel selbst zu erarbeiten und zu verstehen.

Eine andere Variante für den Unterricht könnte so aussehen, dass die Lehrperson direkt im Unterricht die SchülerInnen mit dem Problem Generator Inhalte erarbeiten lässt. Beispielhaftes Szenario: Es werden Gruppen zu verschiedenen Themengebieten zugeordnet, welche zuerst in der Gruppe mithilfe des Problem Generators erarbeitet werden sollen. Danach werden diese Ergebnisse in einer Präsentation den anderen Gruppen vorgestellt.

¹⁶⁴ vgl. Buchner & Schmid

4 EMPIRISCHE STUDIE

4.1 MOTIVATION

Da ich die Vorzüge der *Step-by-step solution*, welche Teil des Problem Generators ist, während meines Studiums kennen und schätzen lernen durfte, aber keine Erhebung bezüglich Nutzung und Nutzen dieses Lösungsangebots sowie des Problem Generators zu finden bzw. aufzutreiben war, fiel der Entschluss, dass diese Arbeit durch eine empirische Studie begleitet werden soll. Die Kernthemen, auf denen die Studie aufbauen soll, behandeln folgende Punkte: Verständlichkeit und sinnvolle Umsetzung der Problemstellungen, der angebotenen Tipps und Lösungshinweise, Akzeptanz für persönlichen Einsatz, Lernmotivation durch den Einsatz des Problem Generators, Bekanntheitsgrad der Produkte von Wolfram|Alpha und selbst sowie im Unterricht eingesetzte und verwendete Software und Technologien. Um sinnvolle und aussagende Daten zu erheben, kommt eine quantitative Methode zum Einsatz. Durch einen Fragebogen sollen Informationen zum Verhalten im Umgang mit dem Wolfram Problem Generator und zu dessen möglichem Nutzen gewonnen werden.

4.2 FRAGEBOGEN

4.2.1 AUFBAU DES FRAGEBOGENS

Bei der Erstellung des Fragebogens wurde auf wissenschaftliche Theorien Acht genommen, insbesondere bei der Planung der Evaluation, den Fragestellungen und der Formulierung der Fragen.

„Der Fragebogen ist das beliebteste Mittel zur Datenerhebung, weil er mit relativ wenig Aufwand die Befragung einer großen Gruppe von Menschen ermöglicht und, wenn er gut konzipiert ist, umfangreiches Datenmaterial für die Evaluation bereitstellt.“¹⁶⁵

Als Mittel der Datenerhebung wird in dieser Arbeit die schriftliche Befragung, genauer ein vollstandardisierter Fragebogen, herangezogen. „Diese [die schriftlichen Befragungen, Anm.] werden von Befragten insgesamt als anonym erlebt, was sich positiv auf die Bereitschaft zu ehrlichen Antworten und gründlicher Auseinandersetzung mit den Fragen auswirken kann.“¹⁶⁶ Vollstandardisiert bedeutet in diesem Kontext, dass alle TeilnehmerInnen den selben Fragebogen vorgelegt bekommen – gleiches Aussehen, idente Reihenfolge der Fragen, gleiche Fragen.¹⁶⁷ Um gute Ergebnisse und brauchbare Daten erzielen zu

¹⁶⁵ Beywl, Schepp-Winter (2000), S. 50

¹⁶⁶ebd., S. 48

¹⁶⁷ vgl. ebd., S. 56

können, ist es allerdings wichtig, Unklarheiten bei Frageformulierungen vorab ausfindig zu machen. Diese könnten sich auf die Befragung dahingehend negativ auswirken, dass der Fragebogen frühzeitig beendet wird, da die Motivation für die weitere Teilnahme sinken kann. Um diesem Umstand entgegen zu wirken, wird ein Pretest vor Befragungsbeginn durchgeführt (Genauerer hierzu in Punkt 4.2.2.2).

Ein sehr großes Anliegen war mir, dass der Fragebogen online erstellbar und ausfüllbar ist. Für diese empirische Studie wird das Online-Tool *soscisurvey.de* verwendet, welches für wissenschaftliche Studien gratis verwendbar ist (gedeckt durch Subventionen). Durch Verwendung dieses Programms resultieren sehr viele Vorteile für Evaluationsbeauftragte sowie TeilnehmerInnen:

- Elektronisches Versenden der Einladung zur Befragung (per E-Mail, Facebook, ...)
- TeilnehmerInnen können auf ihren Endgeräten (PC, Tablet, Notebook, Smartphone, ...) sofort den Fragebogen ausfüllen
- Das sofortige Ausfüllen mit dem Smartphone erhöht die Motivation der TeilnehmerInnen und die Wahrscheinlichkeit der Teilnahme
- Kein Drucken des Fragebogens von Nöten
- Das verwendete Online-Tool *soscisurvey.de* bietet viele vordefinierte Features (Frageotypen, Layouts, Spezialfunktionen, ...) an
- Daten werden online gesichert
- Daten werden automatisch von *soscisurvey.de* ausgewertet
- Rücklauf-Statistik (wie viele Fragebogen wurden abgeschlossen / gesamt / kumulativ, Anzahl der Klicks, Diagramm) wird automatisch von *soscisurvey.de* erstellt
- Pretest schnell durchführbar (Anmerkungen zu den einzelnen Fragen können in Textfeldern online eingetragen werden)
- Nach abgeschlossener Befragung kann auf erhobene Daten sofort zugegriffen werden (kein Warten auf zurückgeschickte, fertige Fragebogen)

Nachdem das passende Werkzeug zur Erstellung des Fragebogens gefunden wurde, wird des Weiteren auf die Formulierung der Fragen genauer eingegangen. Der Großteil aller Fragen sind geschlossene Fragen, damit „schnell ein quantitativer Überblick über die Ver-

teilung der vorher festgelegten Antworten erstellt“¹⁶⁸ werden kann. Bei den Antwortmöglichkeiten kommen folgende Arten zum Einsatz¹⁶⁹: Einfachwahl mit mehreren Alternativen (Beispiel: Ja, Nein, Keine Angabe), Mehrfachwahl, Skala (Ausmaß, Intensität). Bei der Antwortmöglichkeit Skala wird teilweise mit Smileys gearbeitet, um die Emotion der Befragten direkt übernehmen zu können.

In der Einleitung des Fragebogens wird eine kurze Erklärung zum Grund, Inhalt und dem Verantwortlichen der Befragung gegeben. Um die Bereitschaft zum Mitmachen zu erhöhen, wird die Anonymität der Befragung versichert und eine Angabe zur voraussichtlichen Befragungsdauer gemacht. Damit der Fragebogen überhaupt eine Chance auf Finalisierung hat, sollte die allererste Frage eher einfach, aber interessant ausfallen. So wird die Neugier geweckt und die TeilnehmerInnen werden mit einer größeren Wahrscheinlichkeit den Fragebogen vollständig beantworten.

Der gesamte Fragebogen ist im Anhang unter Punkt 6.2 zu finden.

4.2.2 DURCHFÜHRUNG

4.2.2.1 Zielgruppe

Für die Befragung wurden folgende zwei Gruppen gewählt:

1. AbsolventInnen des letzten Maturajahrgangs 2015/16
2. StudentInnen des LA Mathematik bzw. jeder Studienrichtung mit LVAs mit mathematischen Inhalten

Ich beschränke mich in dieser Arbeit auf diese beiden Gruppen aufgrund von folgenden Punkten:

- Die Personen der Zielgruppe haben mit großer Wahrscheinlichkeit ihre Schullaufbahn bereits hinter sich, was einen freieren und wenig eingeschränkten Blick auf den Wolfram Problem Generator nach sich zieht. Software und Tools mit mathematischem Background sind nicht mehr vorgegeben und können frei nach Vorlieben, Einsatzgebiet, Bedarf, Budget usw. gewählt werden. Zur Zeit ist in der Schule die Software GeoGebra stark vertreten und oft als Hilfsmittel für die Reifeprüfung erlaubt. Dass könnte dazu führen, dass SchülerInnen den Einsatz des Wolfram Prob-

¹⁶⁸ Beywl, Schepp-Winter (2000), S. 51

¹⁶⁹ vgl. ebd., S. 52

lem Generators von vorn herein blockieren, was für eine Befragung kontraproduktiv wäre.

- Es besteht eine größere Wahrscheinlichkeit, dass Leute bereits mit dem Wolfram Problem Generator gearbeitet haben bzw. diesen kennen, was interessante Feedbacks ergeben könnte.
- Bei Befragung von SchülerInnen wäre ein parallel durchgeführter Fragebogen für die Eltern sinnvoll. Diese bezahlen normalerweise die Nachhilfe und somit wäre deren Sichtweise auf den Wolfram Problem Generator auch von Interesse.
- Für noch nicht eigenberechtigte bzw. minderjährige SchülerInnen wäre eine Einverständniserklärung der Eltern von Nöten, was eine zeitliche Verschiebung des Umfrage-Beginns bedeutet hätte.

Um diese Gruppen zeitgerecht zu erreichen, wurden E-Mails an bekannte Personen der Zielgruppe ausgeschickt, sowie auf Facebook in mehrere Gruppen ein Post mit den wichtigsten Informationen und dem Link zum Online-Fragebogen erstellt. Die Verwendung des Social Media-Kanals ist überaus nennenswert, da davon auszugehen ist, dass damit viele zutreffende Personen erreicht werden.

Im Endeffekt und nach Abschluss der Untersuchung können statistische Daten zur Teilnahme angegeben werden. Diese wurden automatisch von *soscisurvey.de* generiert und zeigen interessante Details auf, auf die nicht näher eingegangen wird:

- Insgesamt wurden 577 Aufrufe (Klicks) für diesen Fragebogen aufgezeichnet (einschließlich versehentlicher doppelter Klicks, Aufrufe durch Suchmaschinen, ...).
- Insgesamt wurden 37 Interviews abgeschlossen.

Fragebogen	Datensätze abgeschlossen / gesamt  / Klicks 		
 Fragebogen base	37	50	577
Gesamt	37	50	577

Abbildung 51: Rücklauf-Statistik für Fragebogen

- Einzelstatistik zu Ausstiegsseiten:

Letzte bearbeitete Seite	Datensätze abgeschlossen / gesamt / kumulativ			
Seite 25	37	37	37	
Seite 24	0	1	38	
Seite 16	0	1	39	
Seite 14	0	1	40	
Seite 13	0	1	41	
Seite 11	0	1	42	
Seite 7	0	1	43	
Seite 5	0	1	44	
Seite 4	0	2	46	
Seite 3	0	4	50	
Gesamt	37	50		

Abbildung 52: Einzelstatistik zu Ausstiegsseiten

- Rücklauf im Zeitverlauf:

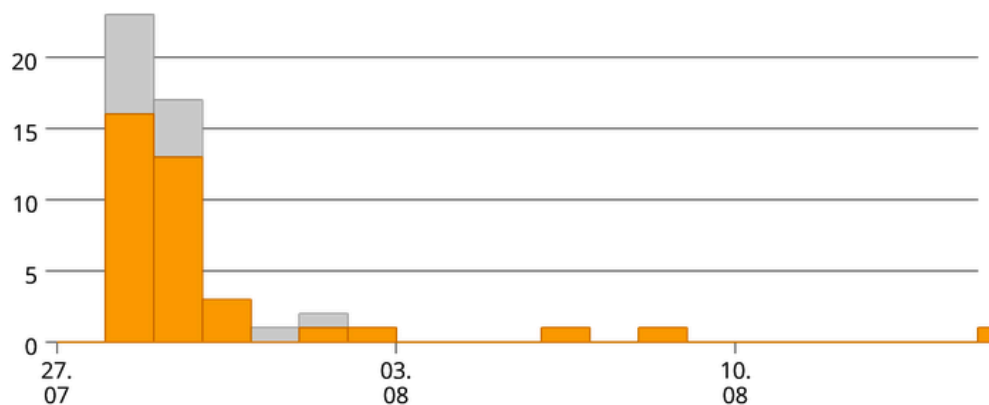


Abbildung 53: Rücklauf im Zeitverlauf

4.2.2.2 Pretest

Um Fehler und Abbruchkriterien im Fragebogen zu ermitteln wird nach Beywl und Schepp-Winter vor Durchführung der Befragung eine empirische Überprüfung (=Pretest) dringend angeraten.¹⁷⁰ Als TeilnehmerInnen wurden KollegInnen gewählt, welche bereits im Berufsleben stehen sowie teilweise noch studieren. Alle TeilnehmerInnen haben mathematischen Background, weswegen sie für die Zielgruppe des Pretests in Frage kommen, da sie der Zielgruppe des Fragebogens ähnlich sind.

Folgende Ergebnisse lieferte der Pretest (sortiert nach Testpersonen):

¹⁷⁰ vgl. Beywl, Schepp-Winter (2000), S. 56

Interview Nr. 34 – base

Seite 1

Alles klar

Seite 2

Alles klar

Seite 3

Frage klar, bei uns gabs nur klassischen matheunterricht

Interview Nr. 40 – base

Seite 11

B004

Bild wird bei mir nicht angezeigt. MacBookPro

Interview Nr. 58 – base

Seite 12

- Mehr Abstand oder _Question... add 24 and 7 _ kleiner machen, habe nicht gleich gewusst, dass die smilies zum beantworten der Frage dienen.
- "Bewerten Sie... und Verständlichkeit?" da gehört ein Punkt und kein Fragezeichen denke ich

Seite 13

Würde auch hier mehr Abstand vorschlagen - oder noch eine Überschrift über die smilies setzen (zb Bewertung!?)

Hat der Flecki gemeinsam mitn Franz die Antwort 34 gegeben?

Seite 15

Bewerten.... ? --> Punkt statt Fragezeichen

Seite 18

? --> .

Abbildung 54: Ergebnisse des Pretests

Die Anmerkungen sowie entdeckten Fehler wurden im Fragebogen eingearbeitet bzw. ausgebessert, soweit dies möglich war. Da der Fragebogen mit einem Online-Tool erstellt wurde und dieses nicht jede beliebige Formatierung vornehmen kann, konnten geforderte Abstände (siehe Abbildung 54 Interview Nr. 58 – base: Seite 12) nicht eingefügt werden und es musste eine Alternative gefunden werden – es wurden nun Anmerkungen zur Bewertung mittels Smileys auf den relevanten Seiten eingefügt.

Nach Einarbeitung der Anmerkungen des Pretests soll noch eine Checkliste zum Fragebogen¹⁷¹ mit folgenden Fragen durchgegangen werden, wobei in diesem Fall alle Fragen positiv beantwortet werden können:

- ✓ Gibt es überflüssige Fragen?
- ✓ Sind alle Fragen leicht zu verstehen?
- ✓ Können die Befragten die Fragen sinnvoll beantworten?
- ✓ Können die Befragten die Anleitung verstehen?

¹⁷¹ Beywl, Schepp-Winter (2000), S. 57

- ✓ Enthält der Fragebogen Abkürzungen, Fachausdrücke, umgangssprachliche Ausdrücke, die vielleicht nicht von allen verstanden werden?
- ✓ Ist die Zahl der Antwortkategorien groß genug, so dass Differenzierungen möglich sind/klein genug, so dass in der Auswertung nicht mehrere Antwortkategorien leer bleiben?
- ✓ Ist der Bogen logisch aufgebaut? Ist ein roter Faden zu erkennen?
- ✓ Lassen sich Einleitung, Überleitungen, ... flüssig lesen?
- ✓ Hält der Fragebogen das Interesse der Befragten aufrecht?

4.2.3 DARSTELLUNG DER ERGEBNISSE UND AUSWERTUNG

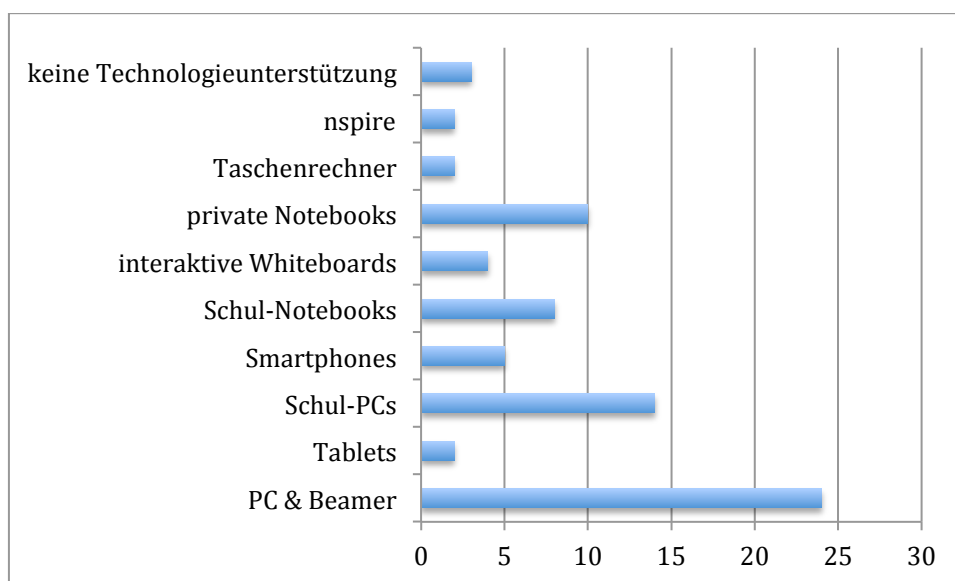
Die Auswertung und Darstellung der Ergebnisse des Fragebogens wurde mit Hilfe der Software Microsoft Excel durchgeführt. Hierfür wurden insgesamt 36 Fragebögen herangezogen.

Für die Auswertung der Netz-Diagramme mit den Smiley-Kategorien (Fragen 9 bis einschließlich 17) werden die Kategorien für die Berechnung des arithmetischen Mittels $\bar{x}$ als aussagende Größe folgendermaßen interpretiert:

	entspricht	1
	entspricht	2
	entspricht	3
	entspricht	4
	entspricht	5

Der gesamte Fragebogen, wie ihn die Befragten vorgelegt bekamen, ist im Anhang ersichtlich. Hier werden nur erklärende Bilder und Abbildungen den Fragen hinzugefügt, wenn dies für die Verständlichkeit der Frage als notwendig erscheint.

Frage 1: Welche Hardware bzw. welche Geräte werden in Ihrem technologiegestützten Mathematik-Unterricht verwendet?

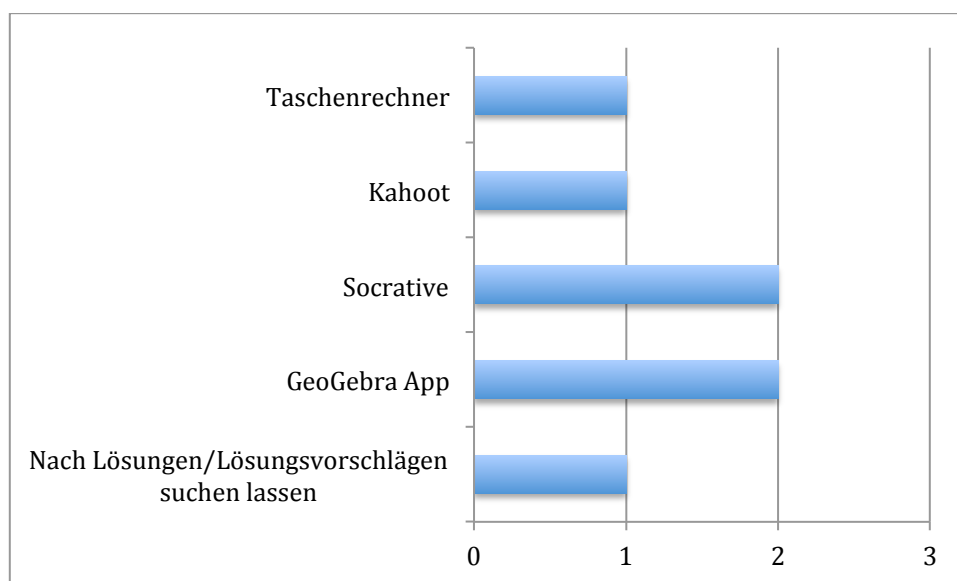


Aus dem Diagramm ist deutlich zu sehen, dass die vorherrschende Technologie im Mathematikunterricht der PC und der Beamer sind, gefolgt von Schul-PCs und Notebooks. Neue Technologien (wie z.B. Smartphones, interaktive Whiteboards) sind im Unterricht eher selten vertreten.

Ein Befragter sticht bei genauerer Betrachtung der Daten hervor. In diesem Fall wurde der Unterricht durch eine Vielzahl von Technologien unterstützt, nämlich im Detail durch: PC & Beamer, Schul-PCs, Schul-Notebooks, private Notebooks, Tablets, Smartphones und interaktive Whiteboards.

Interessant ist auch der Fall eines 21-jährigen AHS-Absolventen. Dieser gab an, dass keine Technologien im Mathematikunterricht zum Einsatz kamen. Heutzutage ist der technologiegestützte Unterricht aber schon im Lehrplan der AHS-Oberstufe vorgeschrieben und verankert.

Frage 2: Falls Sie bei Frage 1 „Smartphones“ ausgewählt haben: Wie kommen Smartphones im Mathematik-Unterricht zum Einsatz?

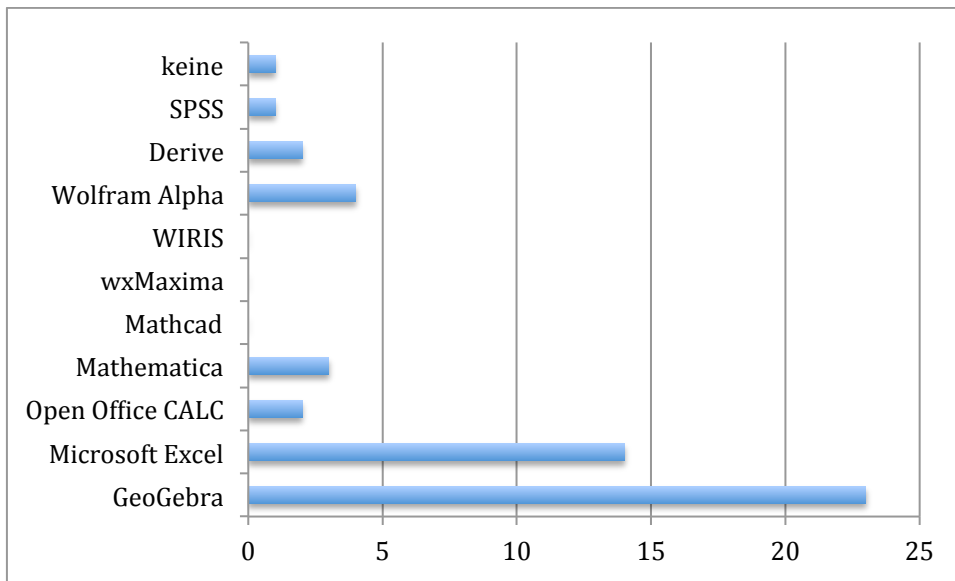


Nur fünf Befragte gaben die Nutzung des Smartphones im Mathematik-Unterricht an, wobei die im Diagramm dargestellten Antworten auf die offene Frage resultierten. Diese Antworten zeigen Möglichkeiten auf, wie das Smartphone im Unterricht sinnvoll zum Einsatz kommen kann:

- Taschenrechner-Apps sind gegenwärtig verglichen mit konventionellen Taschenrechnern leistungsmäßig gleichwertig, allerdings werden oft Gratis-Versionen zum Download angeboten.
- Mathematische Software-Produkte drängen auch vermehrt ins Internet. Die GeoGebra-App sowie Wolfram|Alpha for Mobile sind passende Beispiele und auf dem Smartphone jederzeit verfügbar.
- Kahoot und Socrative zählen zu den spielebasierten Lernplattformen. Mit diesen können Fragen über den Beamer projiziert werden, die die SchülerInnen mit ihrem Smartphone online beantworten können.

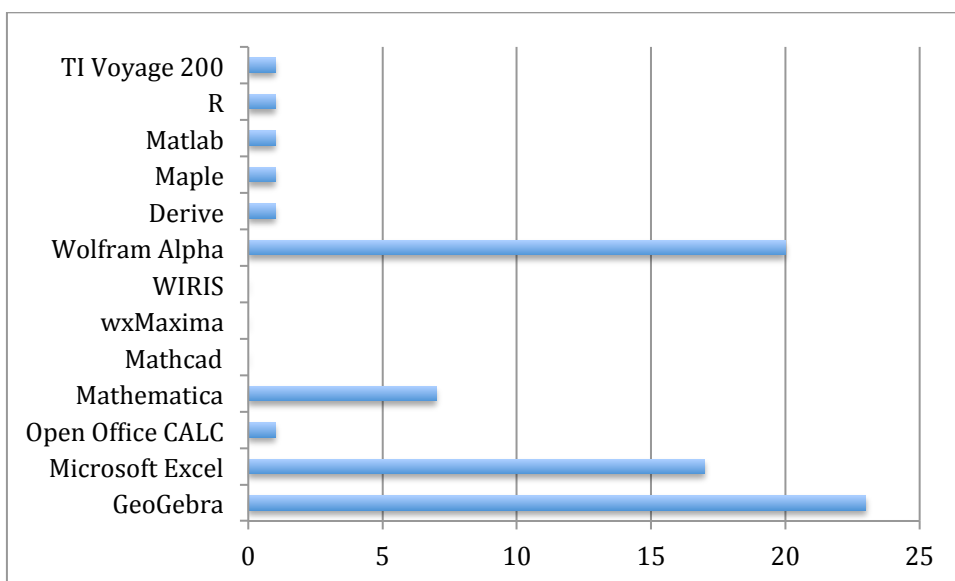
Die geringe Zahl der Smartphone-Nutzung im Mathematikunterricht lässt sich möglicherweise dadurch erklären, dass viele Schulen das Smartphone im Unterricht verbieten (teilweise muss dieses im Spint weggesperrt werden). Hinzu kommt die Tatsache, dass wertvolle, wissenschaftliche Apps für den Unterricht erst in letzter Zeit immer häufiger verfügbar sind.

Frage 3: Welche Software wird in Ihrem Mathematik-Unterricht verwendet?



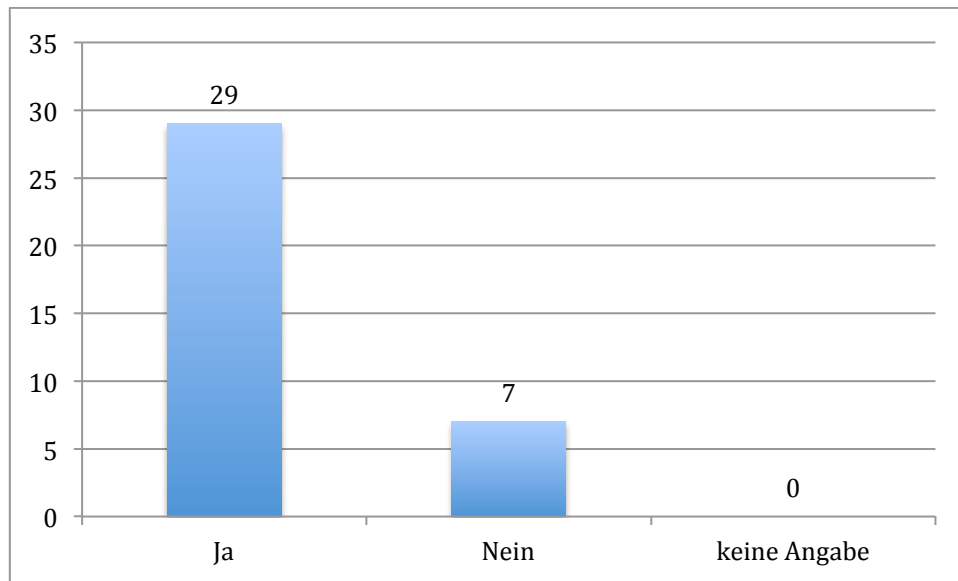
Die Mathematik-Software GeoGebra nimmt hier mit Abstand den ersten Platz bei der Anwendung von Software im Mathematikunterricht ein – gute 64 % der Befragten nutzen bzw. nutzten diese Software im Unterricht. 14 Befragte gaben an, dass Microsoft Excel im Unterricht verwendet wird. Im Diagramm ist zu erkennen, dass Produkte von Wolfram Research im Mathematikunterricht selten zum Einsatz kommen, aber dies zumindest passiert.

Frage 4: Welche Software verwenden Sie privat zum Lösen von Mathematik-Aufgaben bzw. zum Lernen?



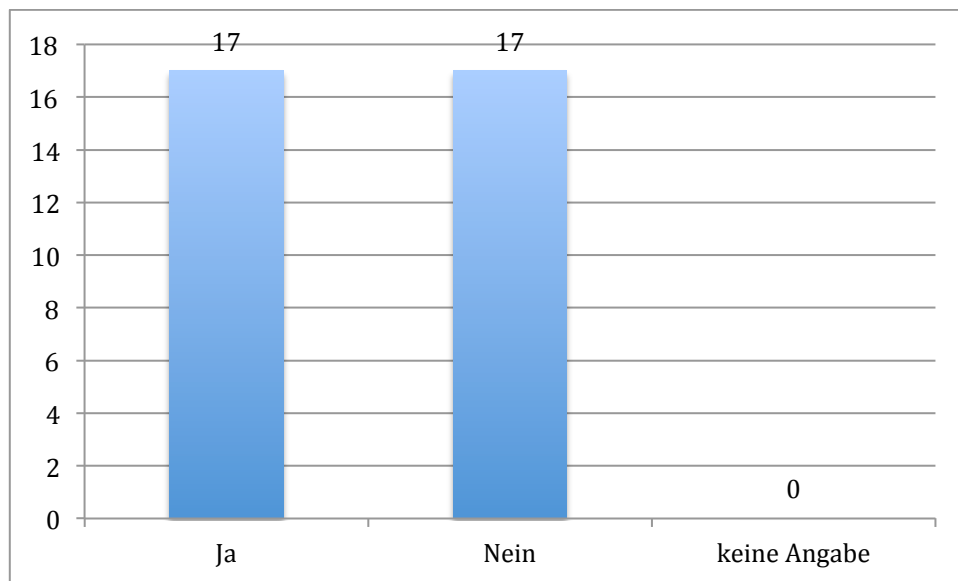
GeoGebra wird auch privat am häufigsten verwendet, allerdings spielt Wolfram|Alpha in diesem Kontext eine wichtigere Rolle. Wolfram|Alpha wird für das Üben und Lernen zu Hause von mehr als 55 % benutzt.

Frage 5: *Verwenden Sie Ihr Notebook zum Lösen von mathematischen Aufgaben?*



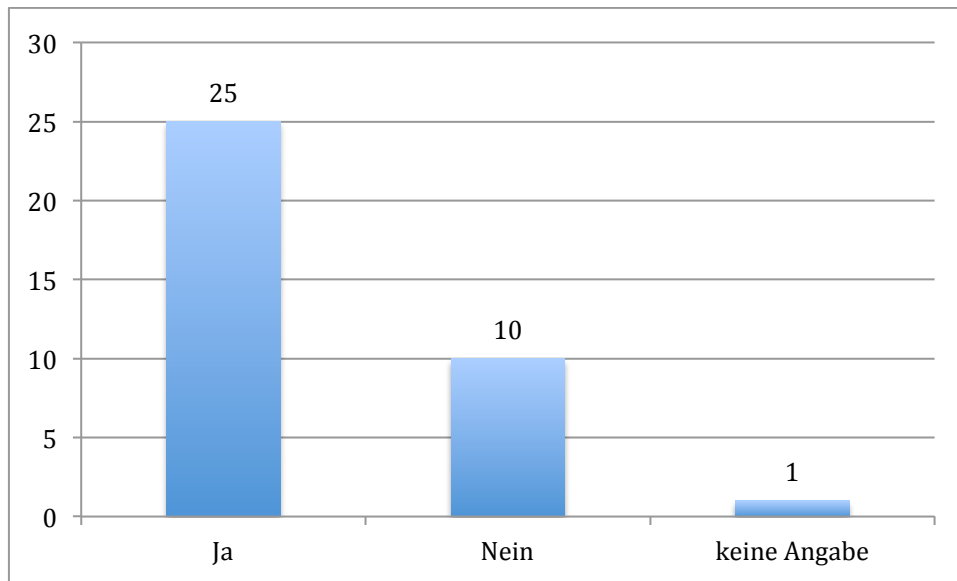
Auswertung zusammengezogen mit Auswertung von Frage 6.

Frage 6: *Verwenden Sie Ihr Smartphone zum Lösen von mathematischen Aufgaben?*

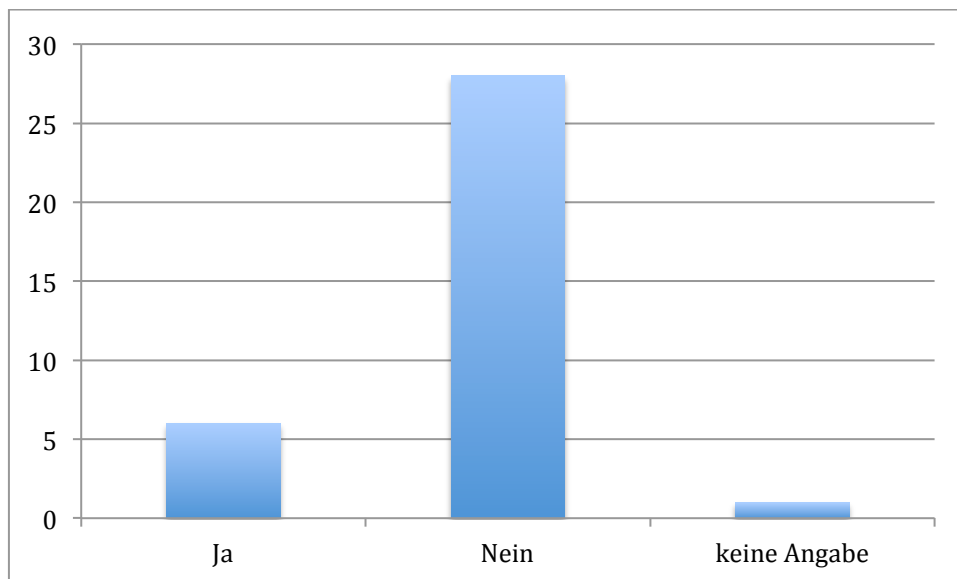


Die kombinierte Auswertung von Frage 5 und 6 zeigt auf, dass über 80 % das Notebook, aber nur 50 % das Smartphone zum Lösen von mathematischen Aufgaben heranziehen. Dies könnte so erklärt werden, dass Notebooks, aber auch noch PCs, klassische Instrumente für mathematische Auswertungen und Berechnungen darstellen.

Frage 7: *Kennen Sie die Wissensmaschine WOLFRAM ALPHA?*



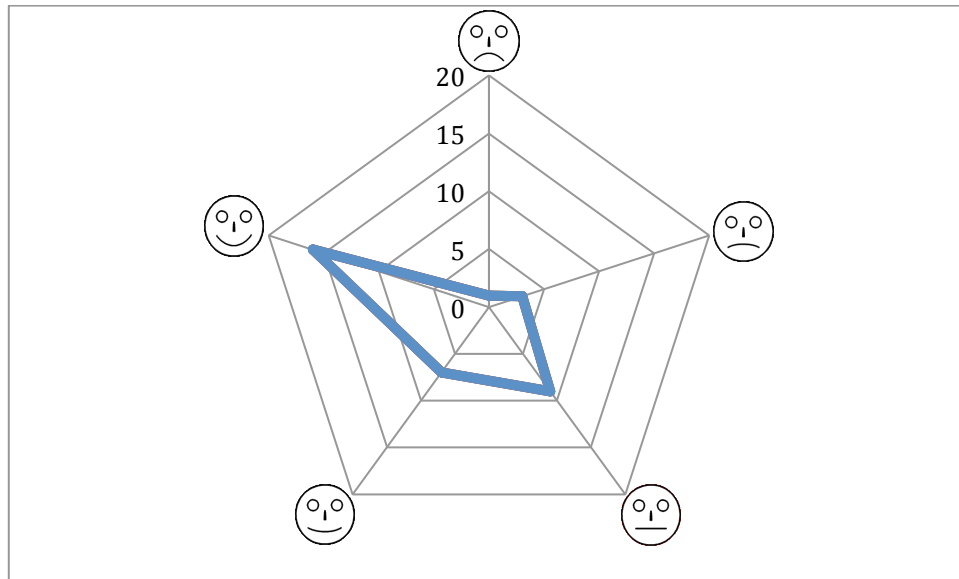
Frage 8: *Haben Sie mit dem PROBLEM GENERATOR von Wolfram Alpha bereits gearbeitet?*



Frage 9: *Für die nächsten 3 Fragen gehen Sie davon aus, dass Sie das Addieren von ganzen Zahlen im Unterricht nicht richtig verstanden haben. Bewerten Sie mit den Smileys unter der Abbildung folgende Angabe nach Ihrer Klarheit und Verständlichkeit!*

QUESTION 1

Add 24 and 7.



$$\bar{x} = 2,06$$

Der Großteil der Befragten, nämlich 23 von 36, hat diese Frage mit der besten (16 Stimmen) bzw. zweitbesten (7 Stimmen) Kategorie der Smileys bewertet, was für eine gute Verständlichkeit und Klarheit der Aufgabenstellung spricht. Dies passt auch gut mit dem errechneten arithmetischen Mittel von 2,06 zusammen. Die etwas größere Anzahl an WählerInnen der mittleren Kategorie könnte mit der verwendeten Sprache (Englisch) oder/und der wörtlich formulierten Additionsaufgabe zusammenhängen, was für SchülerInnen mit inhaltlichen Verständnisschwierigkeiten zum Problem werden könnte.

Frage 10: *Wie sehr hilft Ihnen folgender Tipp (HINT – farblich gekennzeichnet in folgender Abbildung) nach falscher Eingabe der Lösung?*

Add 21 and 2.

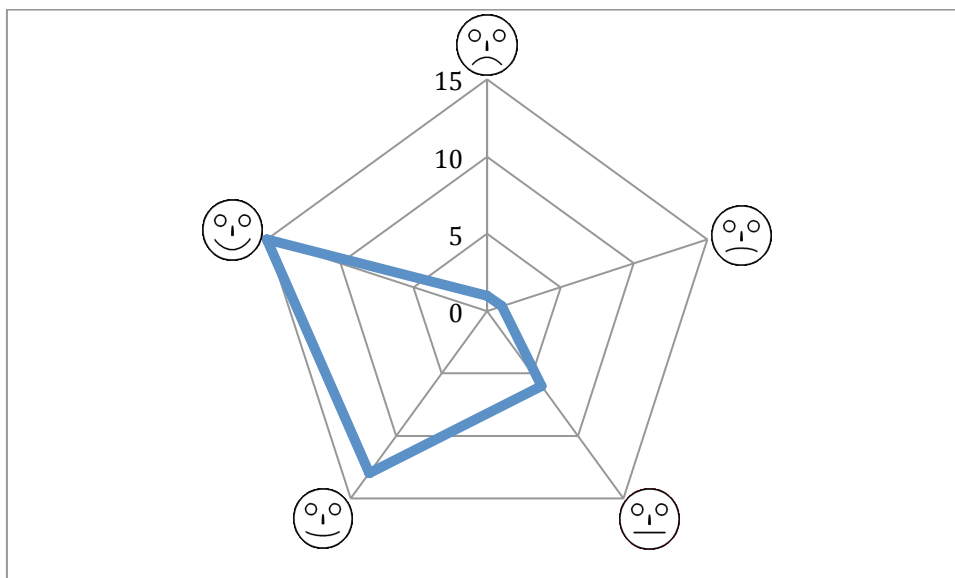
←

Input interpretation: 34

Incorrect answer.

HINT: Use long addition. Add the digits in the ones column.

$$\begin{array}{r} 21 \\ + 2 \\ \hline \end{array}$$



$$\bar{x} = 1,89$$

Aus dem Diagramm ist die didaktisch gute Umsetzung des Hints ersichtlich.

Frage 11: Auch der Tipp (HINT) führt Sie nicht zur richtigen Lösung beim Addieren von ganzen Zahlen. Wie sehr hilft Ihnen für Ihr Verständnis die nun angebotene STEP-BY-STEP SOLUTION (siehe Abbildung)?

Do the following addition:
 $21 + 2$

Think of each number and operation as moving along a number line. Move to the right for positive numbers.

The number 21 is positive. Start from 0 and move 21 to the right:

Addition is shown as movement to the right.

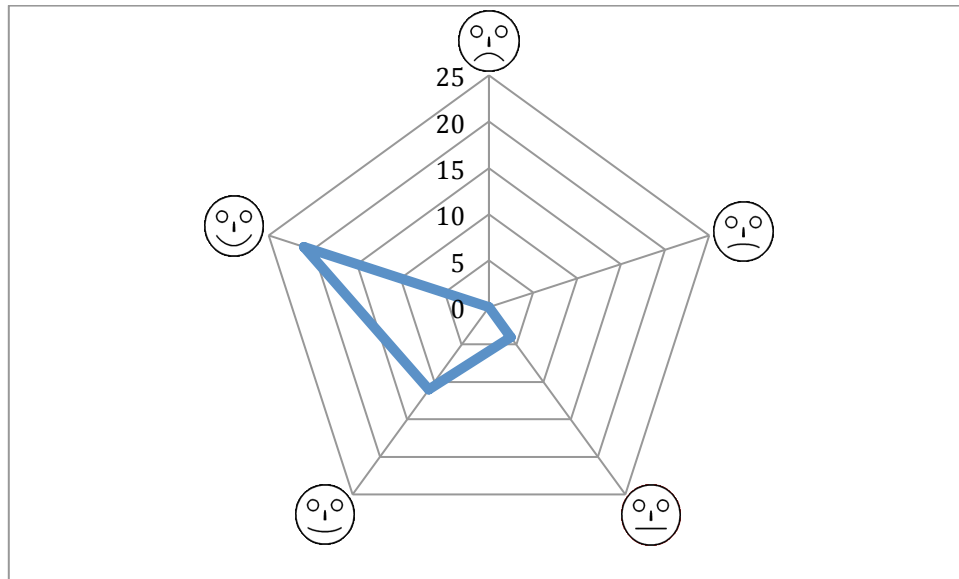
Show the addition of 2 to 21. Start from the end of the previous arrow and move 2 to the right:

What number is the last arrow pointing to?

The final arrow is pointed at 23. This is the answer:

Answer:
 23

Computed by Wolfram|Alpha



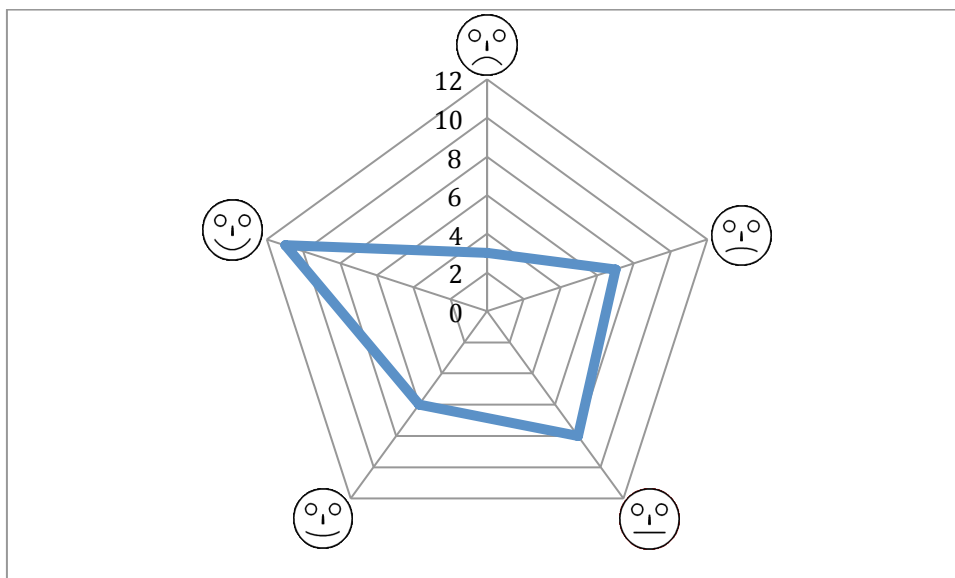
$$\bar{x} = 1,53$$

Die Step-by-step solution wurde von 60 % der Befragten mit der besten Note bewertet. Insgesamt bewerteten nur 4 Befragte die Lösungsschritte mit der mittleren Kategorie der Smileys, welche in diesem Fall die schlechteste gewählte Bewertungskategorie darstellt. Auch der errechnete Wert von 1,53 zeigt, dass eine verständliche Umsetzung der Step-by-step solution vorliegt.

Frage 12: Für die nächsten 3 Fragen gehen Sie davon aus, dass Sie die Vektormultiplikation mit einem Skalar im Unterricht nicht richtig verstanden haben. Bewerten Sie folgende Angabe nach ihrer Klarheit und Verständlichkeit!

QUESTION 1

What is -4 times the vector $(2, 4)$? Write your answer in the simplest form.



$$\bar{x} = 2,57$$

Für die Angabe bei der Problemstellung zum Thema Vektormultiplikation mit einem Skalar ergibt sich im Gegensatz zur Angabe der Addition von natürlichen Zahlen ein anderes Bild. Hier werden die mittleren drei Kategorien von insgesamt 21 von 36 Befragten ausgewählt, was auch am arithmetischen Mittel von 2,57 erkennbar ist. Der eher schlechte Wert kann durch mehrere mögliche Aspekte erklärt werden:

- Rechnung ist in Worten formuliert
- Angabe in englischer Sprache (Was bedeutet „times“ in diesem Kontext?)
- Vektoren werden in Österreich generell in Spalten- und nicht in Zeilenform angegeben.

Frage 13: *Wie sehr hilft Ihnen folgender Tipp (HINT – farblich gekennzeichnet in folgender Abbildung) nach falscher Eingabe der Lösung?*

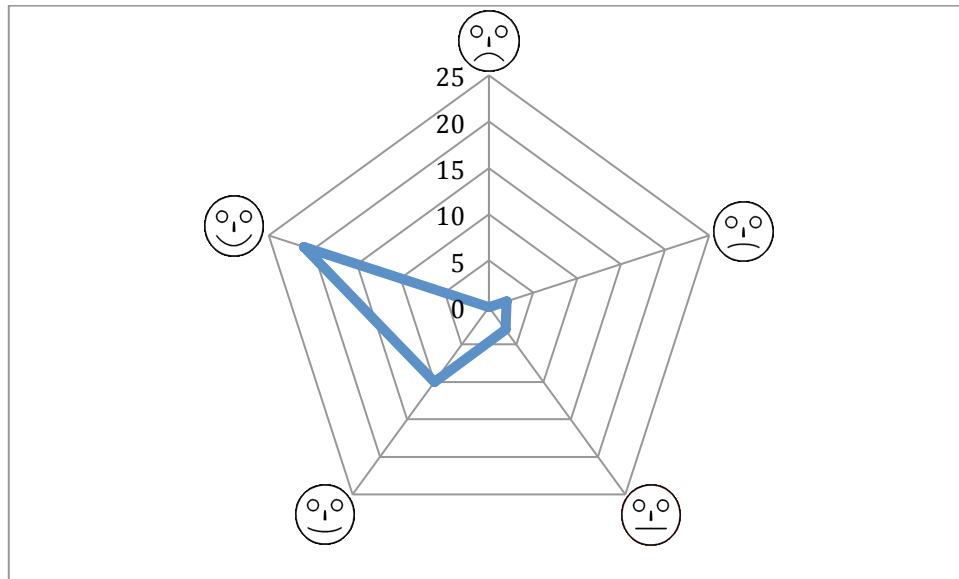
Write your answer in the simplest form: $-3(2, 1) = ?$

Input interpretation: $\{-6, -1\}$

Incorrect answer.

 **HINT:** Multiply each component of the vector $(2, 1)$ by -3 .



$$\bar{x} = 1,61$$

Der Hint wird im Durchschnitt mit 1,61 bewertet. Hier wird der Brückenschlag zur Definition der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar geschlagen und macht eine sinnvolle Interpretation des Hints möglich.

Frage 14: Auch der Tipp (HINT) führt Sie nicht zur richtigen Lösung beim Multiplizieren eines Vektors mit einem Skalar. Wie sehr hilft Ihnen für Ihr Verständnis die nun angebotene STEP-BY-STEP SOLUTION (siehe Abbildung)?

Simplify the following:
 $-3(2, 1)$

Multiply each component of the vector $(2, 1)$ by -3 .

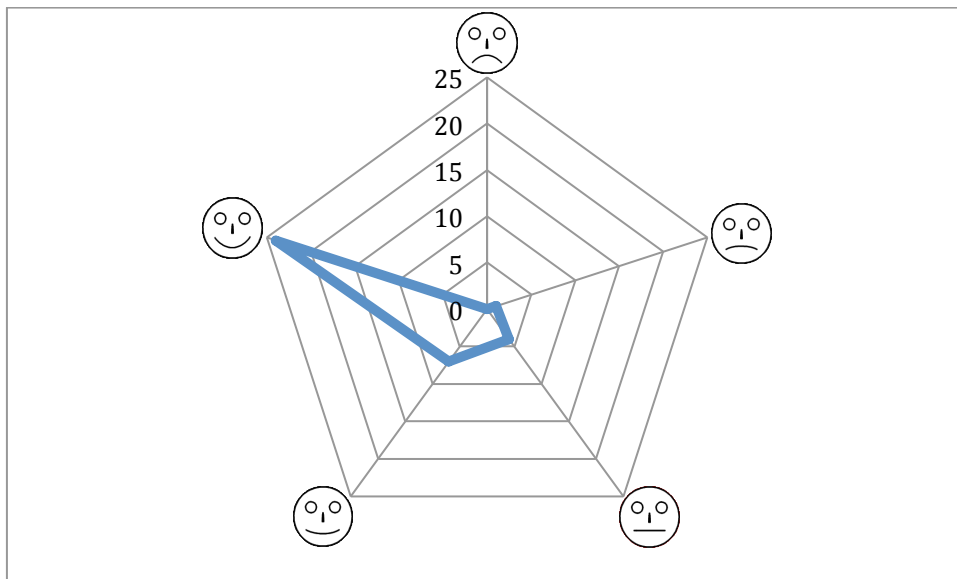
$-3(2, 1) = (-3 \times 2, -3 \times 1):$
 $(-3 \times 2, -3)$

Multiply -3 and 2 together.

$-3 \times 2 = -6:$

Answer:
 $(-6, -3)$

Computed by Wolfram|Alpha



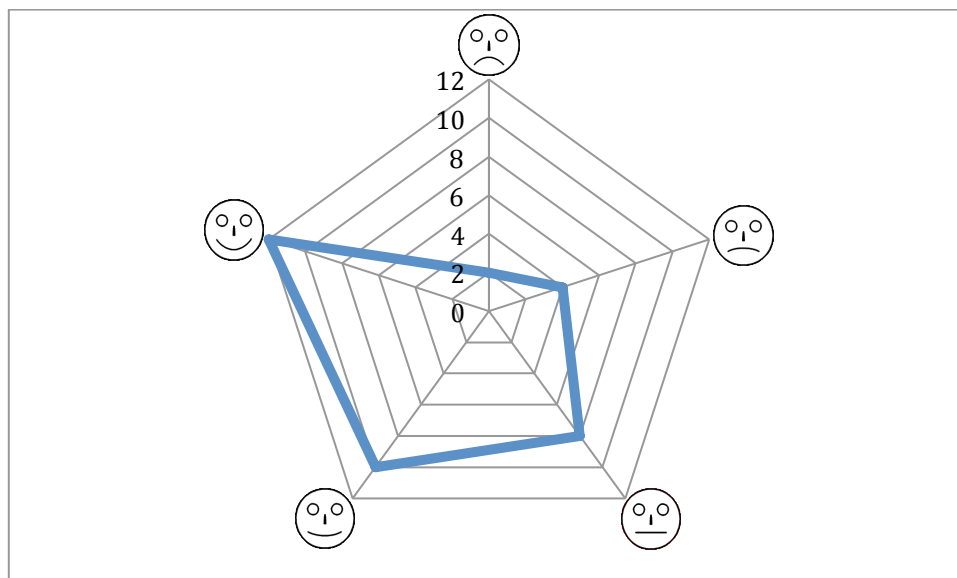
$$\bar{x} = 1,5$$

Mit großer Mehrheit von über 66 % der Befragten wird die Step-by-step solution mit der besten Kategorie bewertet. Die Schritte können somit gut nachvollzogen werden und damit für Verständnis sorgen.

Frage 15: Für die nächsten 3 Fragen gehen Sie davon aus, dass Sie die Produktregel beim Differenzieren/Ableiten im Unterricht nicht richtig verstanden haben. Bewerten Sie folgende Angabe nach Ihrer Klarheit und Verständlichkeit!

QUESTION 1

Take the derivative of $(4 + x) \ln(x)$.



$$\bar{x} = 2,28$$

Ein Wert von 2,28 für das arithmetische Mittel gibt zu bedenken, dass die Angabe nicht gut verständlich erscheint. Das Hauptproblem liegt in meinen Augen in der englischen Angabe: „Derivate“ kommt im österreichischen Unterricht eher nicht vor und damit kann es zu Interpretationsschwierigkeiten kommen.

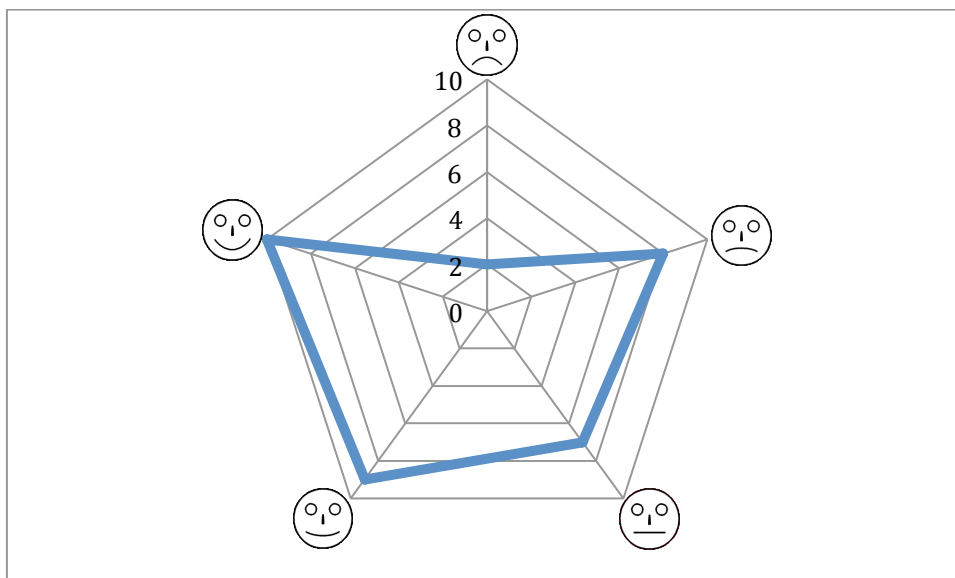
Frage 16: *Wie sehr hilft Ihnen folgender Tipp (HINT – farblich gekennzeichnet in folgender Abbildung) nach falscher Eingabe der Lösung?*

Take the derivative of $(4 + x) \ln(x)$.

Input interpretation: $4 \ln(x)$

Incorrect answer.

HINT: Use the product rule, $\frac{d}{dx}(uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$, where $u = x + 4$ and $v = \ln(x)$:



$$\bar{x} = 2,53$$

Die Meinungen über die Hilfestellung des angegebenen Hints gehen auch auseinander. Der Durchschnittswert von 2,53 zeigt, dass zwar mehr als die Hälfte der Befragten den Hint als hilfreich ansieht, eine große Zahl aber diesem kritisch gegenübersteht. Der Hint gibt die Definition der Produktregel in einer für den Mathematik-Unterricht nicht konventionellen Form an. Ein Blick in das Schulbuch *thema mathematik 7* zeigt, wie hier die Produktregel dargestellt wird: $[f \cdot g]' = f' \cdot g + f \cdot g'$.¹⁷² Der Vergleich mit der angebotenen Regel des Wolfram Problem Generators zeigt, dass bei dieser für die Ableitung $\frac{d}{dx}$ geschrieben wird, was im Mathematikunterricht zwar vielleicht thematisiert, aber im Normalfall beim Üben nicht verwendet wird. Dies scheint das Ergebnis dieser Frage zu erklären.

Frage 17: *Auch der Tipp (HINT) führt Sie nicht zur richtigen Lösung beim Ableiten mit der Produktregel. Wie sehr hilft Ihnen für Ihr Verständnis die nun angebotene STEP-BY-STEP SOLUTION (siehe Abbildung)?*

¹⁷² Brand et al. (2015), S. 54

Possible derivation:

$$\frac{d}{dx}((4+x)\log(x))$$

Use the product rule, $\frac{d}{dx}(uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$, where $u = x + 4$ and $v = \log(x)$:

$$= \log(x) \left(\frac{d}{dx}(4+x) \right) + (4+x) \left(\frac{d}{dx}(\log(x)) \right)$$

Differentiate the sum term by term:

$$= (4+x) \left(\frac{d}{dx}(\log(x)) \right) + \left[\frac{d}{dx}(4) + \frac{d}{dx}(x) \right] \log(x)$$

The derivative of 4 is zero:

$$= (4+x) \left(\frac{d}{dx}(\log(x)) \right) + \log(x) \left(\frac{d}{dx}(x) + \boxed{0} \right)$$

Simplify the expression:

$$= \log(x) \left(\frac{d}{dx}(x) \right) + (4+x) \left(\frac{d}{dx}(\log(x)) \right)$$

The derivative of x is 1:

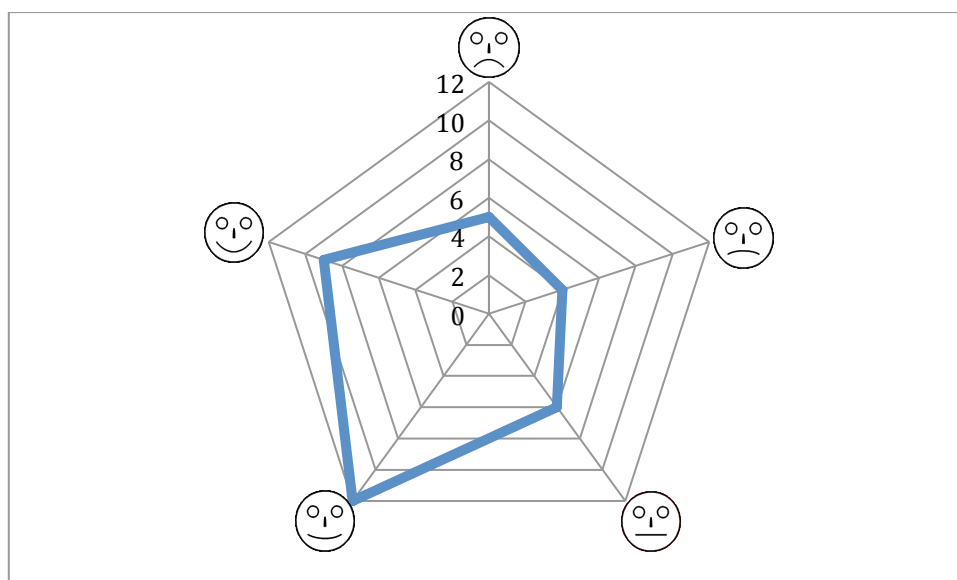
$$= (4+x) \left(\frac{d}{dx}(\log(x)) \right) + \boxed{1} \log(x)$$

The derivative of $\log(x)$ is $\frac{1}{x}$:

Answer:

$$= \log(x) + (4+x) \frac{1}{x}$$

Computed by Wolfram|Alpha

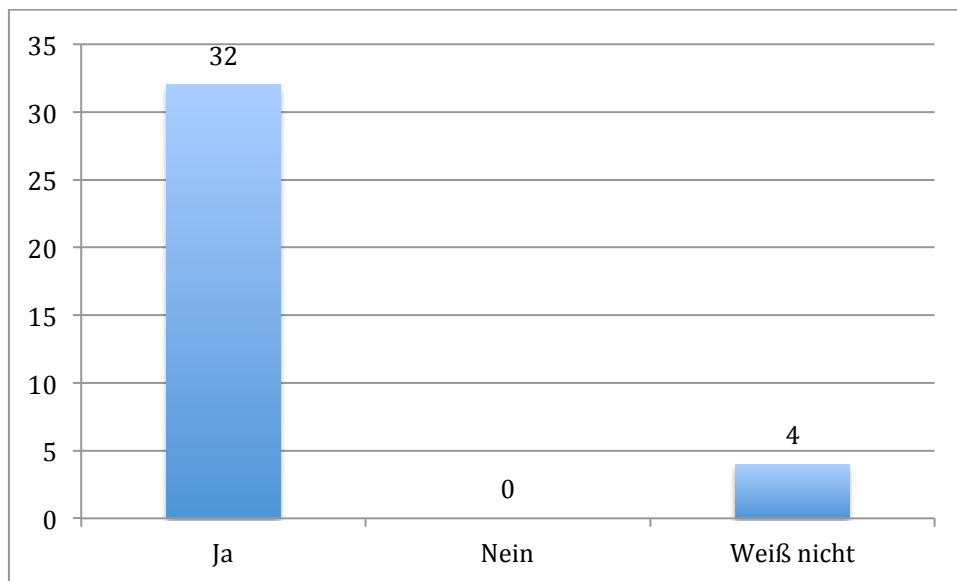


$$\bar{x} = 2,56$$

Der schlechteste Wert für das arithmetische Mittel von 2,56 ergibt sich wahrscheinlich durch die komplexe Darstellung der einzelnen Lösungsschritte. Für einen möglichen Ver-

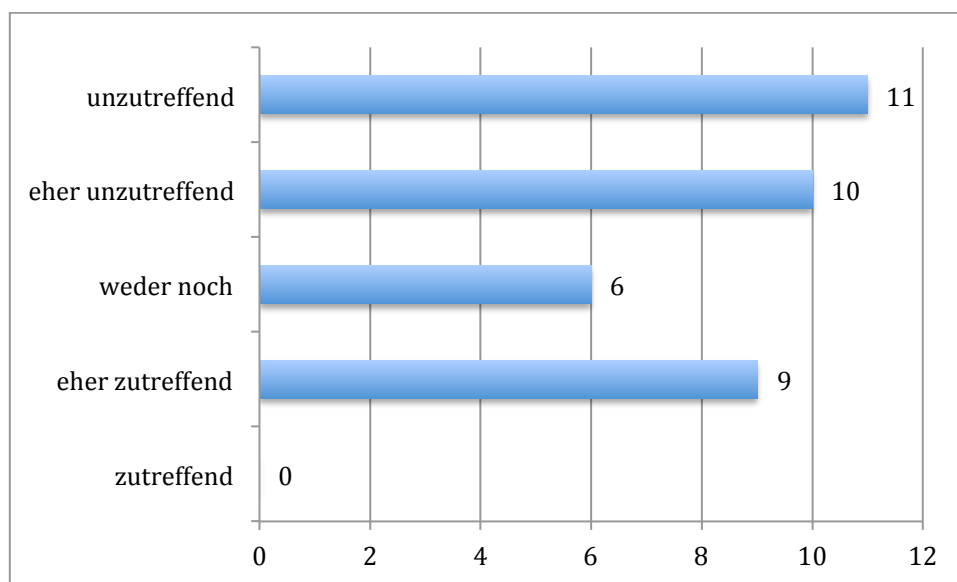
ständnisgewinn ist es für Lernende unvermeidbar, dass sich diese schrittweise durch den vorskizzierten Lösungsweg arbeiten. Da diese Erarbeitung aufgrund des komplexen Aussehens der Step-by-step solution allerdings bereits im Vorhinein erschwert wird, wird das Erreichen von Verständnis für diese Problemlösung für viele SchülerInnen behindert.

Frage 18: Können Sie sich vorstellen, den Problem Generator von Wolfram Alpha, welcher automatisch Übungsbeispiele neu generieren sowie zusätzlich Hilfestellungen beim Lösen anbieten kann, zum Lernen und Üben zu verwenden?



Diese Frage wurde mit großer Mehrheit (> 88 %) mit JA beantwortet. Daraus lässt sich ablesen, dass die Umsetzung und die integrierten Funktionalitäten des Wolfram Problem Generators für viele AnwenderInnen einen möglichen Nutzen in Übungssituationen bringt und somit Sinn für das Lernen macht.

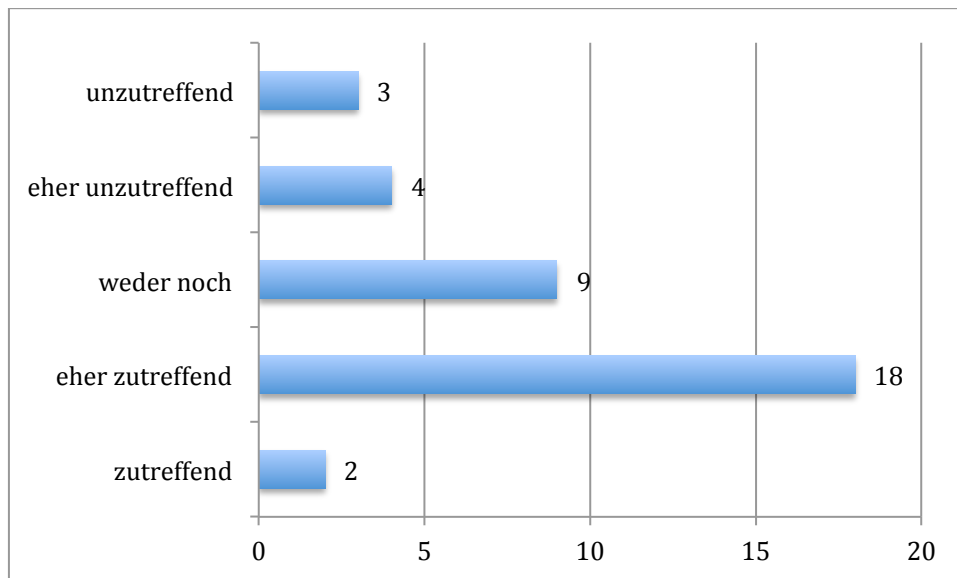
Frage 19: Für ein Online-Learning-Tool (wie z.B. den Problem Generator von Wolfram Alpha), welches automatisch Übungsbeispiele neu generieren sowie zusätzlich Hilfestellungen beim Lösen anbieten kann, würde ich eine monatliche Lizenzgebühr von ca. € 5,- aufwenden. Wie sehr trifft diese Aussage auf Sie zu?



Aus dem Diagramm lässt sich eine eher ablehnende Stimmung gegenüber Kosten für die eingeschränkte Verwendung des Problem Generators mit all seinen Features herausinterpretieren. Ganze 58 % der Befragten finden die Aussage für „unzutreffend“ bzw. „eher unzutreffend“. Das Ergebnis dieser Frage kann auch darauf zurückgeführt werden, dass ein Großteil der Befragten die dynamische Mathematik-Software GeoGebra, welche die großen Teilgebiete Geometrie, Algebra und Analysis verbindet, als Freeware, somit kostenfrei verwendet. Der Schritt des Zahlens von einer monatlichen Gebühr, auch wenn es sich wie im Fall des Wolfram Problem Generators nur um ein paar Euro handelt, kann dadurch erschwert werden. Ein Vergleich mit den und die Angabe der durchschnittlichen monatlichen Kosten für Nachhilfe von $732/12 = 61$ € im Schuljahr 2013/14¹⁷³ könnte womöglich die Statistik in eine andere Richtung lenken.

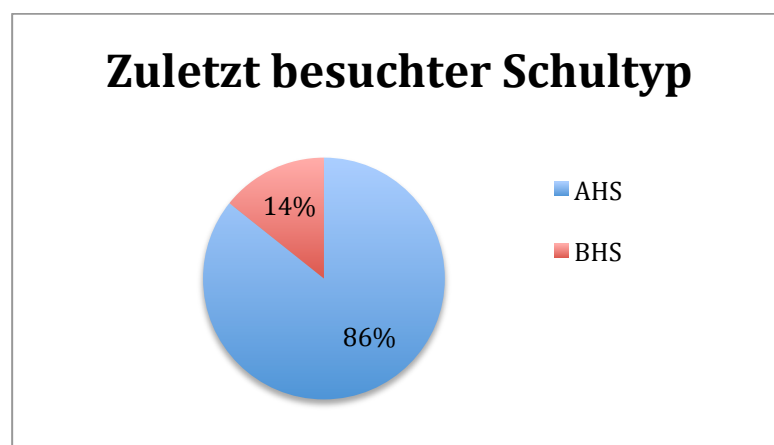
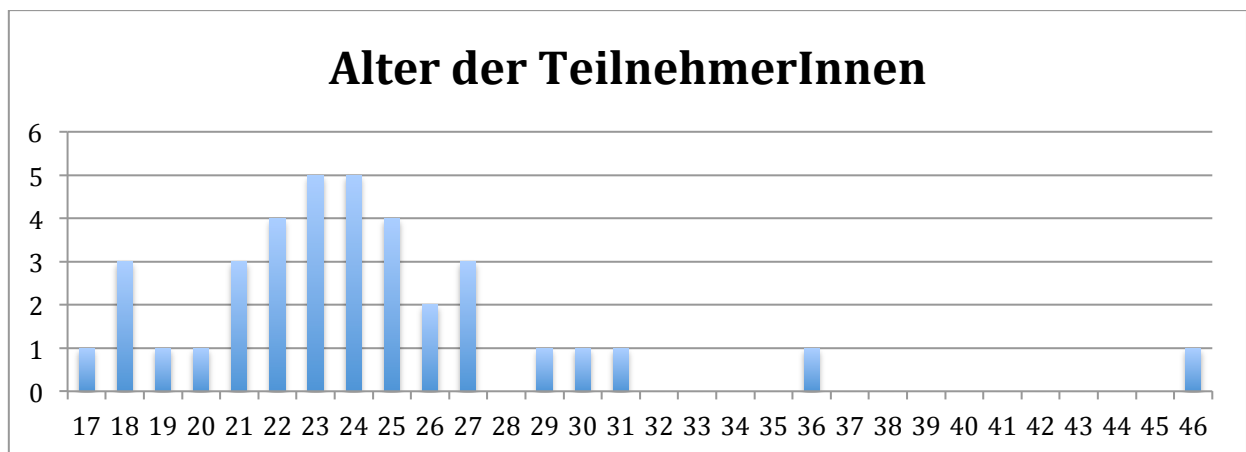
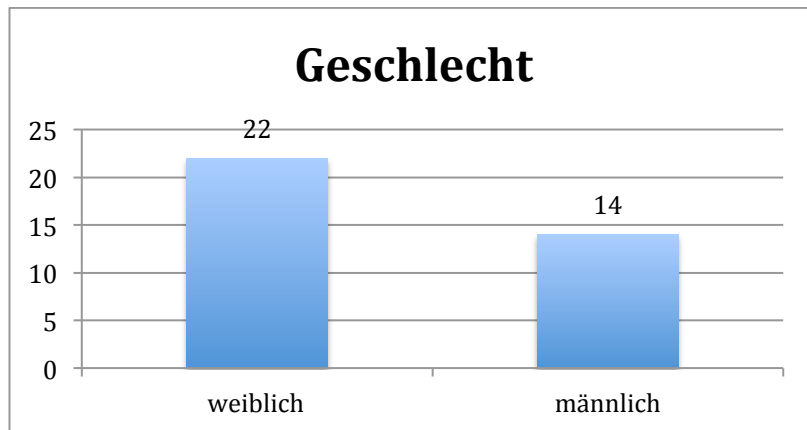
¹⁷³ IFES (2014), S. 40

Frage 20: *Das Arbeiten mit dem Problem Generator von Wolfram Alpha trägt zur Steigerung meiner persönlichen Lernmotivation bei. Wie sehr trifft diese Aussage auf Sie zu?*

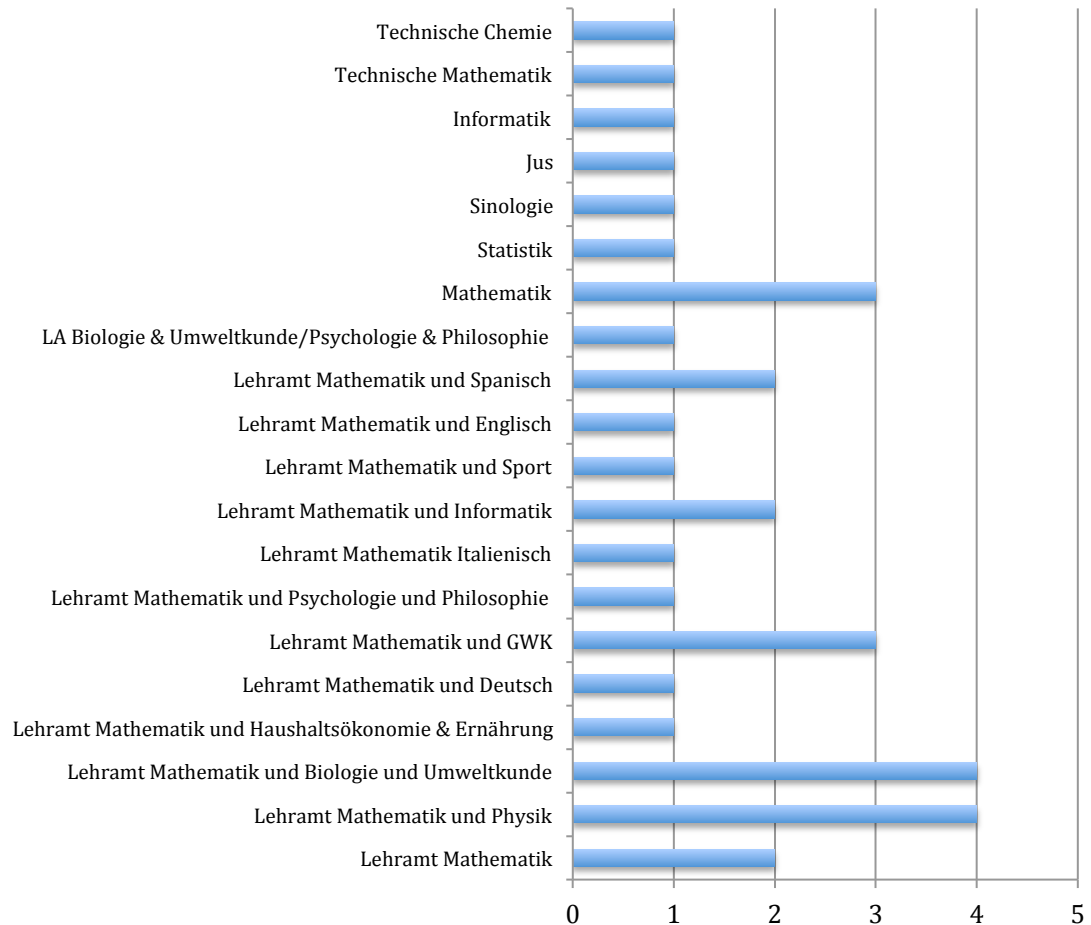


Die größte Gruppe (50 %) beantwortete diese Frage mit der Kategorie „eher zutreffend“. Aus dem Diagramm ist eine eher motivierende Komponente des Wolfram Problem Generators erkennbar.

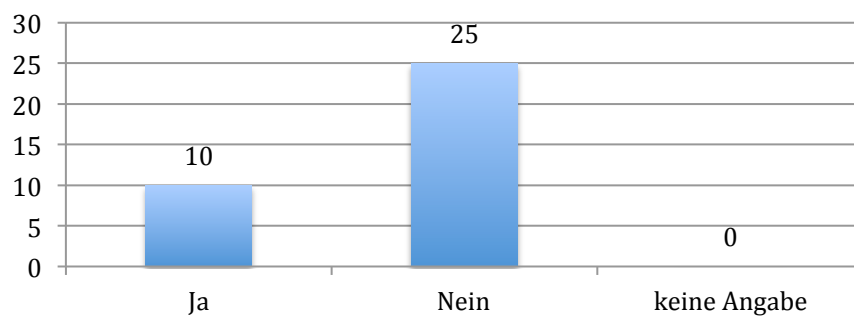
Demographische Daten:

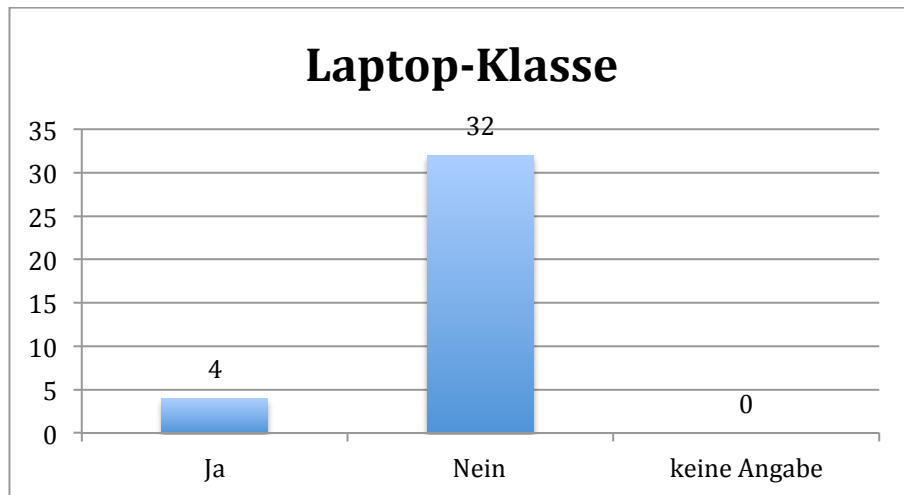


Aktuelle bzw. zukünftige Studienrichtungen der TeilnehmerInnen



Nachhilfe in Vergangenheit in Anspruch genommen





Anmerkungen/Kommentare:

Die folgende Aufzählung gibt alle getätigten Anmerkungen und Kommentare der Befragten wortwörtlich wieder:

- Englisch ist ein Problem (als SchülerIn wschl)
- Produktregel in dieser Schreibweise nicht verwendet und auch nicht in Formelsammlungen. $21+7$ lernt man in der VS und da ist die englische Version nicht motivierend. Die Matura hauptsächlich aus Textaufgaben. Wie wird man dem gerecht?
- Beim zweiten Tipp zum Ableiten werden die Terme getauscht. Ist ja nicht falsch, aber für eine Step-by-Step Erklärung anstrengender nachzuvollziehen. Erst recht, wenn man in den Grundlagen noch nicht sattelfest ist.

5€ ist etwas teuer, es gibt oft zusätzliche Bücher mit Hilfestellungen, Aufgaben und Lösungen, die länger als ein Monat verwendet werden können und auch nicht viel kosten. Außerdem könnte das Englisch ein Problem sein. Wie viele Schüler lernen, dass Ableitung derivative heißt?

Wenn man zusätzliche Beispiele braucht, könnte man auch den/die LehrerIn fragen, die haben meistens noch ein paar und merken dann gleich, dass man bemüht ist.

- Ich finde den Problem Generator grundsätzlich gut, nur bei Aufgaben wie bei dem Beispiel wo die Produktregel (Differentialregel) anzuwenden war bin ich nicht sicher, ob Schüler die noch Schwierigkeiten mit der besagten Materie haben, auch wirklich einen Nutzen daraus ziehen können. Es scheint mir durch die vielen Zeilen auch etwas verwirrend.

5 ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSFOLGERUNG

Nach der Darstellung und der didaktischen Bewertung der drei mathematischen Teilgebiete des Wolfram Problem Generators und der Auswertung der empirischen Studie habe ich in diesem Abschnitt die wichtigsten Punkte kurz zusammengefasst. Daraus leiten sich meine Schlussfolgerungen ab, die hier ebenfalls dargestellt werden.

Bei der Begriffsbestimmung war zu sehen, dass die Zuordnung zu einer Kategorie der Lernumgebungen bzw. -Szenarien nicht ganz einfach war, da der Begriff E-Learning durch viele Definitionen und Zugänge einen gewissen Interpretationsspielraum lässt. Letztendlich kann der Wolfram Problem Generator als *E-Learning-Umgebung*, welche *offenes Telelearning* realisiert, beschrieben werden.

Für das Angebot von Problemstellungen für mathematische Gebiete kann festgehalten werden, dass nicht für jedes Thema und für jeden Aufgabentyp passende Formate umgesetzt sind.

Derartige Tools wie der Wolfram Problem Generator könnten möglicherweise in Zukunft auch stärkeren Einsatz erleben. Grund dafür könnte die Verwendung des Smartphones im Mathematikunterricht bzw. im privaten Bereich sein, auch wenn in der hier durchgeführten empirischen Studie nur fünf Personen die Smartphone-Nutzung im Unterricht angaben. Immerhin verwenden laut Fragebogen 50 % der AnwenderInnen ihr Smartphone zum Lösen von mathematischen Aufgaben. Das Aufkommen von wissenschaftlichen Apps könnte diesen stärkeren Einsatz begünstigen.

Nach der didaktischen Bewertung der Lernarrangements und dem Einbeziehen der Umfrageergebnisse komme ich zu folgendem Resultat: Da die Angaben in englischer Sprache verfasst sind, kann es für NutzerInnen mit eher schwachen, mathematischen Englischkenntnissen zu Verständnisproblemen führen. Die Unterschiedlichkeit der einzelnen Angaben pro Aufgabengebiet sowie die Möglichkeit der Wahl zwischen drei Schwierigkeitsstufen ist für die Individualität und Vielfältigkeit der SchülerInnen positiv zu bewerten. Damit kann eine Differenzierung ermöglicht werden. Die Hints (Tipps) können bei speziellen Problemstellungen unterstützend wirken, allerdings sind diese auch oft nur dann nachvollziehbar bzw. anzuwenden, wenn die lernende Person bereits weiß, wie der Lösungsweg startet. Die Hints sind auch immer die Hinweise des ersten Lösungsschrittes der Step-by-step Solution. Hier könnte eine eigene, oftmals sinnvollere Herangehensweise und Umsetzung von Vorteil sein und für den Wolfram Problem Generator angedacht werden. Die Step-by-step solution

bietet allgemein gute und sinnvolle und auch oft mehrere verschiedene Lösungswege an. Diese unterschiedlichen Zugänge sprechen wieder für die Individualität und Vielfältigkeit der NutzerInnen. Meistens wird aber nur auf formale Aspekte, wie das Anwenden von Rechenregeln, und nicht auf inhaltliche Aspekte Bezug genommen. Dieser Sachverhalt ist auch sehr gut im vorgestellten Teilgebiet der Gleichungen zu erkennen, in welchem die Problemstellungen auf eine grafische Lösung verzichten. Diese könnte aber für inhaltliche Diskussionen und für das Verständnis von großem Nutzen sein. Zur Formulierung von den Lösungen sei angemerkt, dass oft Schreibweisen verwendet werden, die in Österreich so im Unterricht nicht vorkommen. Dies kann zu Problemen beim Verstehen der Lösungsschritte führen. Manche Lösungen können für Lernende auf den ersten Blick auch sehr komplex erscheinen (siehe Step-by-step Solution für die Produktregel beim Differenzieren), was das Gelingen des Lernprozesses behindern kann.

Schlussendlich möchte ich noch darauf hinweisen, dass der Wolfram Problem Generator nicht nur zum privaten Lernen eingesetzt werden kann, sondern dieser auch seine Berechtigung im Mathematikunterricht findet. Bei adäquater Unterrichtsplanung lässt sich dieser in didaktisch sinnvolle Unterrichtsszenarien integrieren (z.B. Flipped Classroom). Auch auf die Verwendung von Wolfram|Alpha will ich hier nochmals aufmerksam machen, da dieses Online-Tool auch gewisse Vorteile gegenüber verwendeten Software-Produkten bietet und für mobile Nutzung herangezogen werden kann.

Damit das Online-Lernen mit dem Wolfram Problem Generator wirklich gelingen kann, müssen die Gestaltung und die Umsetzung der einzelnen Problemstellungen mathematikdidaktisch erfolgen, aber auch viele Faktoren im Umfeld der lernenden Person stimmen. Im Lehr- und Lernprozess sind LehrerInnen durch technisierte Lehrmittel nicht zu ersetzen – die technisierten Hilfsmittel können den Lernprozess aber unterstützen. Meiner Meinung nach wäre der Wolfram Problem Generator diesbezüglich eine gute Wahl.

6 ANHANG

6.1 Problem Sheet

Statistics > Lists: Summary

Wolfram Problem Generator™

PROBLEM SET

1. What is the mean of the list (5, 7, -2, -3, 7, 2)? Express your answer in the simplest form.

- ☐ $\frac{7}{3}$
- ☐ $\frac{17}{6}$
- ☐ $\frac{5}{2}$
- ☐ $\frac{8}{3}$

2. Find the range of (3, 1, 3, 5). Please simplify your answer.

- ☐ 3
- ☐ 7
- ☐ 4
- ☐ 6

3. Find the mean of (-2, 6, 6, -4, -6, -3). Return your answer in the simplest form.

- ☐ $-\frac{2}{3}$
- ☐ $\frac{1}{6}$
- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☐ $-\frac{1}{3}$

4. Find the range of (1, 1, 1, 6, 8). Return your answer in the simplest form.

- ☐ 8
- ☐ 9
- ☐ 6
- ☐ 7

5. Find the range of (7, 4, 6, 4, 5). Give your answer in the simplest form.

- ☐ 11
- ☐ 28
- ☐ 3
- ☐ 2

6. What is the range of the list (6, 7, 0, 5, 5)? Express your answer in the simplest form.

- ☐ 7
- ☐ 8
- ☐ 6
- ☐ 0

7. Find the median of (5, 1, 6, 3, 6, 7). Simplify your answer.

- ☐ $\frac{11}{2}$
- ☐ 6
- ☐ $\frac{13}{2}$
- ☐ 5

9. Find the mode of (2, -5, -7, 6, 6). Please simplify your answer.

- ☐ 5
- ☐ 12
- ☐ 6
- ☐ 7

11. What is the mean of the list (6, 5, -1, -3)? Return your answer in the simplest form.

- ☐ $\frac{3}{2}$
- ☐ $\frac{7}{4}$
- ☐ 1
- ☐ 2

8. What is the mode of the list (0, -1, 3, 3, -6, 5)? Write your answer in the simplest form.

- ☐ 6
- ☐ 4
- ☐ 2
- ☐ 3

10. What is the mode of the list (-6, -2, 7, -2)? Please simplify your answer.

- ☐ -2
- ☐ -3
- ☐ -4
- ☐ -1

12. Find the mode of (-5, 4, 7, -5, -5). Simplify your answer.

- ☐ -6
- ☐ 4
- ☐ -5
- ☐ -10

13. Find the range of (3, 7, 2, 7, 7, 6).
Give your answer in the simplest form.

- ☐ 5
- ☐ 4
- ☐ 9
- ☐ 10

14. What is the mean of the list (−8, −5, 3, 7, −2, 8)? Give your answer in the simplest form.

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☐ $\frac{2}{3}$
- ☐ $\frac{19}{6}$

15. What is the median of the list (3, 5, 0, 2, 5, 7)? Express your answer in the simplest form.

- ☐ 4
- ☐ $\frac{9}{2}$
- ☐ $\frac{7}{2}$
- ☐ 5

16. Find the mean of (−6, 1, 7, −7, −4, −6). Please simplify your answer.

- ☐ $-\frac{7}{3}$
- ☐ $-\frac{8}{3}$
- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☐ $-\frac{5}{2}$

17. Find the mode of (−4, −4, 2, 0).
Write your answer in the simplest form.

- ☐ 2
- ☐ −4
- ☐ −5
- ☐ −8

18. Find the mode of (0, 4, −1, 5, 4, −4). Return your answer in the simplest form.

- ☐ 3
- ☐ 8
- ☐ 5
- ☐ 4

19. Find the range of (1, 7, 7, 1, 4, 3).
Return your answer in the simplest form.

- ☐ 5
- ☐ 8
- ☐ 7
- ☐ 6

20. Find the median of (3, 7, 1, 0, 6).
Return your answer in the simplest form.

- ☐ 4
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3

6.1.1 Answer Key

Statistics > Lists: Summary

Difficulty level: Beginner

Wolfram Problem Generator™

ANSWER KEY

1. What is the mean of the list (5, 7, -2, -3, 7, 2)? Return your answer in the simplest form.

- ☐ $\frac{7}{3}$
- ☐ $\frac{17}{6}$
- ☐ $\frac{5}{2}$
- ☒ $\frac{8}{3}$

2. Find the range of (3, 1, 3, 5). Return your answer in the simplest form.

- ☐ 3
- ☐ 7
- ☒ 4
- ☐ 6

3. Find the mean of (-2, 6, 6, -4, -6, -3). Simplify your answer.

- ☐ $-\frac{2}{3}$
- ☐ $\frac{1}{6}$
- ☒ $-\frac{1}{2}$
- ☐ $-\frac{1}{3}$

4. Find the range of (1, 1, 1, 6, 8). Return your answer in the simplest form.

- ☐ 8
- ☐ 9
- ☐ 6
- ☒ 7

5. Find the range of (7, 4, 6, 4, 5). Simplify your answer.

- ☐ 11
- ☐ 28
- ☒ 3
- ☐ 2

6. What is the range of the list (6, 7, 0, 5, 5)? Return your answer in the simplest form.

- ☒ 7
- ☐ 8
- ☐ 6
- ☐ 0

7. Find the median of (5, 1, 6, 3, 6, 7). Express your answer in the simplest form.

- ☒ $\frac{11}{2}$
- ☐ 6
- ☐ $\frac{13}{2}$
- ☐ 5

8. What is the mode of the list (0, -1, 3, 3, -6, 5)? Please simplify your answer.

- ☐ 6
- ☐ 4
- ☐ 2
- ☒ 3

9. Find the mode of (2, -5, -7, 6, 6). Simplify your answer.

- ☐ 5
- ☐ 12
- ☒ 6
- ☐ 7

10. What is the mode of the list (-6, -2, 7, -2)? Write your answer in the simplest form.

- ☒ -2
- ☐ -3
- ☐ -4
- ☐ -1

11. What is the mean of the list (6, 5, -1, -3)? Write your answer in the simplest form.

- ☐ $\frac{3}{2}$
- ☒ $\frac{7}{4}$
- ☐ 1
- ☐ 2

12. Find the mode of (-5, 4, 7, -5, -5). Return your answer in the simplest form.

- ☐ -6
- ☐ 4
- ☒ -5
- ☐ -10

13. Find the range of (3, 7, 2, 7, 7, 6). Express your answer in the simplest form.

- ☒ 5
- ☐ 4
- ☐ 9
- ☐ 10

14. What is the mean of the list (−8, −5, 3, 7, −2, 8)? Please simplify your answer.

- ☒ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☐ $\frac{2}{3}$
- ☐ $\frac{19}{6}$

15. What is the median of the list (3, 5, 0, 2, 5, 7)? Express your answer in the simplest form.

- ☒ 4
- ☐ $\frac{9}{2}$
- ☐ $\frac{7}{2}$
- ☐ 5

16. Find the mean of (−6, 1, 7, −7, −4, −6). Give your answer in the simplest form.

- ☐ $-\frac{7}{3}$
- ☐ $-\frac{8}{3}$
- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☒ $-\frac{5}{2}$

17. Find the mode of (−4, −4, 2, 0). Give your answer in the simplest form.

- ☐ 2
- ☒ −4
- ☐ −5
- ☐ −8

18. Find the mode of (0, 4, −1, 5, 4, −4). Simplify your answer.

- ☐ 3
- ☐ 8
- ☐ 5
- ☒ 4

19. Find the range of (1, 7, 7, 1, 4, 3).
Return your answer in the simplest form.

☐ 5

☐ 8

☐ 7

☒ 6

20. Find the median of (3, 7, 1, 0, 6).
Return your answer in the simplest form.

☐ 4

☐ 1

☐ 2

☒ 3

6.2 Fragebogen



universität
wien

0% ausgefüllt

Mein Name ist Matthias Berl. Im Rahmen meiner Diplomarbeit im Lehramtsstudium Mathematik/Informatik und Informatikmanagement an der Universität Wien untersuche ich **das didaktische Potential des Problem Generators von Wolfram Alpha**. Des Weiteren will ich das Verhalten im Umgang mit dem Problem Generator und den möglichen Nutzen betrachten, weshalb dieser Fragebogen zum Einsatz kommt.

Kurze Erklärung des Problem Generators: Der [Problem Generator von Wolfram Alpha](#) ist ein Online-Learning-Tool, mit welchem Aufgaben zu verschiedenen Teilgebieten der Mathematik automatisch generiert werden können, um diese anschließend zu bearbeiten und zu lösen. Ein weiteres spannendes Feature ist, dass bei falscher Eingabe der Lösung Tipps angezeigt werden und nach nochmaliger Falscheingabe sogar der Lösungsweg komplett schrittweise vorskizziert wird (Step-by-step solution).

Ich ersuche Sie, sich ca. 5 - 15 Minuten Zeit zu nehmen, um mir Ihre Ansichten darzustellen. Der Fragebogen ist selbstverständlich anonym und auch der Rückschluss auf Personen wird nicht möglich sein. Die Ergebnisse der Umfrage sowie meine Diplomarbeit werden den TeilnehmerInnen zur Verfügung gestellt und sind nach Abschluss dieser Diplomarbeit online unter <http://othes.univie.ac.at/> abrufbar.

Sollten Sie Fragen haben stehe ich unter [berl\[at\]orgternitz.at](mailto:berl[at]orgternitz.at) gerne zur Verfügung.

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität wien

4% ausgefüllt

MEDIENNUTZUNG (Fragen 1 bis 8)

Folgende Fragen beziehen sich auf den von Ihnen besuchten Mathematik-Unterricht bzw. auf das mathematische Arbeiten am privaten Arbeitsplatz (Hausübungen, Lernen, ...).

Falls Sie Ihre Schullaufbahn beendet haben oder Sie bereits studieren sollten, dann beziehen sich alle Fragen, bei welchen der Mathematik-Unterricht angesprochen wird, auf Ihre Schulausbildung der Oberstufe!

Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität wien

8% ausgefüllt

1. Welche Hardware bzw. welche Geräte werden in Ihrem technologiegestütztem Mathematik-Unterricht verwendet?

Mehrfachantworten möglich!

☒ PC & Beamer

☒ Schul-PCs

☒ Schul-Notebooks

☒ private Notebooks

☒ Tablets

☒ Smartphones

☒ interaktive Whiteboards

☒ andere:

Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität
wien

12% ausgefüllt

2. Falls Sie bei Frage 1 „Smartphones“ ausgewählt haben: Wie kommen Smartphones im Mathematik-Unterricht zum Einsatz?

Wenn nicht, dann können Sie diese Frage mit WEITER überspringen!

Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität
wien

16% ausgefüllt

3. Welche Software wird in Ihrem Mathematik-Unterricht verwendet?

Mehrfachantworten möglich!

- ☒ GeoGebra
- ☒ Microsoft Excel
- ☒ Open Office CALC
- ☒ Mathematica
- ☒ Mathcad

- ☒ wxMaxima
- ☒ WIRIS
- ☒ Wolfram Alpha
- ☒ andere:

Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität
wien

20% ausgefüllt

4. Welche Software verwenden Sie privat zum Lösen von Mathematik-Aufgaben bzw. zum Lernen?

Mehrfachantworten möglich!

☒ GeoGebra

☒ Microsoft Excel

☒ Open Office CALC

☒ Mathematica

☒ Mathcad

☒ wxMaxima

☒ WIRIS

☒ Wolfram Alpha

☒ andere:

Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität
wien

24% ausgefüllt

5. Verwenden Sie Ihr Notebook zum Lösen von mathematischen Aufgaben?

☒ Ja

☐ Nein

☐ Keine Angabe

Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität
wien

28% ausgefüllt

6. Verwenden Sie Ihr Smartphone zum Lösen von mathematischen Aufgaben?

☒ Ja

☐ Nein

☐ Keine Angabe

Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität
wien

32% ausgefüllt

7. Kennen Sie die Wissensmaschine WOLFRAM ALPHA?

☒ Ja

☐ Nein

☐ Keine Angabe

Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität
wien

36% ausgefüllt

8. Haben Sie mit dem PROBLEM GENERATOR von Wolfram Alpha bereits gearbeitet?

- ☒ Ja
☐ Nein
☐ Keine Angabe

Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität
wien

40% ausgefüllt

ARBEITEN MIT DEM PROBLEM GENERATOR (Fragen 9 bis 17)

Die nächsten Fragen beziehen sich auf das Arbeiten mit dem *Problem Generator von Wolfram Alpha*. Im Detail sind diverse Beispielangaben und die speziellen Features (*HINTS* und *STEP-BY-STEP SOLUTION*) Inhalt dieser Fragen, wobei nur ein kleiner Teil der angebotenen Aufgaben berücksichtigt wird.

Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität
wien

44% ausgefüllt

9. Für die nächsten 3 Fragen gehen Sie davon aus, dass Sie das Addieren von ganzen Zahlen im Unterricht nicht richtig verstanden haben.

Bewerten Sie mit den Smileys unter der Abbildung folgende Angabe nach Ihrer Klarheit und Verständlichkeit!

Versetzen Sie sich in die Lage einer/eines Schülerin/Schülers, welche/r gerade das Addieren ganzer Zahlen kennengelernt hat.

QUESTION 1

Add 24 and 7.



Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berli](#), Universität Wien – 2016



10. Wie sehr hilft Ihnen folgender Tipp (HINT – farblich gekennzeichnet in folgender Abbildung) nach falscher Eingabe der Lösung?

Versetzen Sie sich in die Lage einer/eines Schülerin/Schülers, welche/r gerade das Addieren ganzer Zahlen kennengelernt hat. Bewertung mittels Smileys unter Abbildung.

Add 21 and 2.

Input interpretation: 34

Incorrect answer.

HINT: Use long addition. Add the digits in the ones column.

$$\begin{array}{r} 21 \\ + 2 \\ \hline \end{array}$$



Zurück

Weiter

Erfragung unterbrechen



11. Auch der Tipp (HINT) führt Sie nicht zur richtigen Lösung beim Addieren von ganzen Zahlen. Wie sehr hilft Ihnen für Ihr Verständnis die nun angebotene STEP-BY-STEP SOLUTION (siehe Abbildung)?

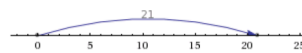
Versetzen Sie sich in die Lage einer/eines Schülerin/Schülers, welche/r gerade das Addieren ganzer Zahlen kennengelernt hat. Bewertung mittels Smileys unter Abbildung.

Do the following addition:

$$21 + 2$$

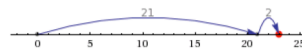
Think of each number and operation as moving along a number line. Move to the right for positive numbers.

The number 21 is positive. Start from 0 and move 21 to the right:



Addition is shown as movement to the right.

Show the addition of 2 to 21. Start from the end of the previous arrow and move 2 to the right:



What number is the last arrow pointing to?

The final arrow is pointed at 23. This is the answer:

Answer:
23

Computed by Wolfram|Alpha



Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen



universität
wien

56% ausgefüllt

12. Für die nächsten 3 Fragen gehen Sie davon aus, dass Sie die Vektormultiplikation mit einem Skalar im Unterricht nicht richtig verstanden haben.

Bewerten Sie folgende Angabe nach Ihrer Klarheit und Verständlichkeit!

Versetzen Sie sich in die Lage einer/eines Schülerin/Schülers, welche/r erst vor Kurzem die Vektorrechnung kennengelernt hat. Bewertung mittels Smileys unter Abbildung.

QUESTION 1

What is -4 times the vector $(2, 4)$? Write your answer in the simplest form.



Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität
wien

60% ausgefüllt

13. Wie sehr hilft Ihnen folgender Tipp (HINT – farblich gekennzeichnet in folgender Abbildung) nach falscher Eingabe der Lösung?

Versetzen Sie sich in die Lage einer/eines Schülerin/Schülers, welche/r erst vor Kurzem die Vektorrechnung kennengelernt hat. Bewertung mittels Smileys unter Abbildung.

Write your answer in the simplest form: $-3(2, 1) = ?$

$(-6, -1)$



Input interpretation: $\{-6, -1\}$

Incorrect answer.



HINT: Multiply each component of the vector $(2, 1)$ by -3 .



Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



14. Auch der Tipp (HINT) führt Sie nicht zur richtigen Lösung beim Multiplizieren eines Vektors mit einem Skalar. Wie sehr hilft Ihnen für Ihr Verständnis die nun angebotene STEP-BY-STEP SOLUTION (siehe Abbildung)?

Versetzen Sie sich in die Lage einer/eines Schülerin/Schülers, welche/r gerade die Vektorrechnung kennengelernt hat. Bewertung mittels Smileys unter Abbildung.

Simplify the following:

$$-3(2, 1)$$

Multiply each component of the vector $(2, 1)$ by -3 .

$$-3(2, 1) = (-3 \times 2, -3 \times 1):$$

$$(-3 \times 2, -3)$$

Multiply -3 and 2 together.

$$-3 \times 2 = -6:$$

Answer:

$$(-6, -3)$$

Computed by Wolfram|Alpha



Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen



universität
wien

68% ausgefüllt

15. Für die nächsten 3 Fragen gehen Sie davon aus, dass Sie die Produktregel beim Differenzieren/Ableiten im Unterricht nicht richtig verstanden haben.

Bewerten Sie folgende Angabe nach Ihrer Klarheit und Verständlichkeit!

Versetzen Sie sich in die Lage einer/eines Schülerin/Schülers, welche/r erst vor Kurzem die Differentialrechnung kennengelernt hat. Bewertung mittels Smileys unter Abbildung.

QUESTION 1

Take the derivative of $(4 + x) \ln(x)$.



Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität
wien

72% ausgefüllt

16. Wie sehr hilft Ihnen folgender Tipp (HINT – farblich gekennzeichnet in folgender Abbildung) nach falscher Eingabe der Lösung?

Versetzen Sie sich in die Lage einer/eines Schülerin/Schülers, welche/r erst vor Kurzem die Differentialrechnung kennengelernt hat. Bewertung mittels Smileys unter Abbildung.

Take the derivative of $(4 + x) \ln(x)$.

4*ln(x)

Input interpretation: $4 \ln(x)$

Incorrect answer.

HINT: Use the product rule, $\frac{d}{dx}(uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$, where $u = x + 4$ and $v = \ln(x)$:



Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berli](#), Universität Wien – 2016



17. Auch der Tipp (HINT) führt Sie nicht zur richtigen Lösung beim Ableiten mit der Produktregel. Wie sehr hilft Ihnen für Ihr Verständnis die nun angebotene STEP-BY-STEP SOLUTION (siehe Abbildung)?

Versetzen Sie sich in die Lage einer/eines Schülerin/Schülers, welche/r gerade die Differentialrechnung kennengelernt hat. Bewertung mittels Smileys unter Abbildung.

Possible derivation:

$$\frac{d}{dx}((4+x)\log(x))$$

Use the product rule, $\frac{d}{dx}(uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$, where $u = x + 4$ and $v = \log(x)$:

$$= \log(x) \left(\frac{d}{dx}(4+x) \right) + (4+x) \left(\frac{d}{dx}(\log(x)) \right)$$

Differentiate the sum term by term:

$$= (4+x) \left(\frac{d}{dx}(\log(x)) \right) + \left[\frac{d}{dx}(4) + \frac{d}{dx}(x) \right] \log(x)$$

The derivative of 4 is zero:

$$= (4+x) \left(\frac{d}{dx}(\log(x)) \right) + \log(x) \left(\frac{d}{dx}(x) + \boxed{0} \right)$$

Simplify the expression:

$$= \log(x) \left(\frac{d}{dx}(x) \right) + (4+x) \left(\frac{d}{dx}(\log(x)) \right)$$

The derivative of x is 1:

$$= (4+x) \left(\frac{d}{dx}(\log(x)) \right) + \boxed{1} \log(x)$$

The derivative of $\log(x)$ is $\frac{1}{x}$:

Answer:

$$= \log(x) + (4+x) \left[\frac{1}{x} \right]$$

Computed by Wolfram|Alpha



Zurück

Weiter



universität wien

80% ausgefüllt

VERWENDUNG DES PROBLEM GENERATORS (Fragen 18 bis 20)

Nachdem Sie nun den Problem Generator genauer kennengelernt haben zielen die drei letzten Fragen nun auf die Weiter-Verwendung des Problem Generators von Wolfram Alpha ab und sollen zeigen, ob Sie gewillt sind, ein vorliegendes Online-Learning-Tool persönlich zu nutzen.

Zum Abschluss werden noch demographische Daten erhoben.

Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität wien

84% ausgefüllt

18. Können Sie sich vorstellen, den Problem Generator von Wolfram Alpha, welcher automatisch Übungsbeispiele neu generieren sowie zusätzlich Hilfestellungen beim Lösen anbieten kann, zum Lernen und Üben zu verwenden?

- ☒ Ja
- ☐ Nein
- ☐ Weiß nicht

Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität
wien

88% ausgefüllt

19. Für ein Online-Learning-Tool (wie z.B. den Problem Generator von Wolfram Alpha), welches automatisch Übungsbeispiele neu generieren sowie zusätzlich Hilfestellungen beim Lösen anbieten kann, würde ich eine monatliche Lizenzgebühr von ca. € 5,- aufwenden.

Wie sehr trifft diese Aussage auf Sie zu?

☒

zutreffend

☐

eher zutreffend

☐

weder/noch

☐

eher unzutreffend

☐

unzutreffend

Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität
wien

92% ausgefüllt

20. Das Arbeiten mit dem Problem Generator von Wolfram Alpha trägt zur Steigerung meiner persönlichen Lernmotivation bei.

Wie sehr trifft diese Aussage auf Sie zu?

☒

zutreffend

☐

eher zutreffend

☐

weder/noch

☐

eher unzutreffend

☐

unzutreffend

Zurück

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität
wien

96% ausgefüllt

DEMOGRAPHISCHE FRAGEN

Geschlecht:

☒ weiblich

☐ männlich

Alter:

[Bitte auswählen]

Zuletzt besuchter Schultyp:

☒ AHS

☐ BHS

☐ andere:

Wenn Sie bereits studieren oder in Kürze ein Studium beginnen: Angabe Studienrichtung:

Nahmen Sie irgendwann während Ihrer Schulausbildung Nachhilfe in Anspruch?

☒ Ja

☐ Nein

☐ Keine Angabe

Waren Sie in einer Notebook-Klasse?

☒ Ja

☐ Nein

☐ Keine Angabe

Anmerkungen/Kommentare:

Weiter

Befragung unterbrechen

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016



universität
wien

Vielen Dank für Ihre Teilnahme!

Ich möchte mich ganz herzlich für Ihre Mithilfe bedanken.

Dieser Fragebogen wird für die Diplomarbeit mit dem Thema **Das didaktische Potential des Problem Generators von Wolfram Alpha** herangezogen und ausgewertet. Die Ergebnisse sind in der fertigen Diplomarbeit ersichtlich, welche auf der Homepage [E-Theses - Hochschulschriften-Service](#) baldigst veröffentlicht wird.

[Link zum Problem Generator von Wolfram Alpha](#)

Bei Fragen stehe ich Ihnen unter [berl\[at\]orgternitz.at](mailto:berl[at]orgternitz.at) gerne zur Verfügung.

Ihre Antworten wurden gespeichert, Sie können das Browser-Fenster nun schließen.

[Matthias Berl](#), Universität Wien – 2016

7 LITERATURVERZEICHNIS

- Arte Pressemappe: *Immer vernetzt: Wenn das Gehirn überfordert ist*. Dokumentation von Laurence Serfaty, Frankreich 2016. Online: http://presse.arte.tv/apios/press_release/2091.pdf (Zugriff: 03.09.2016).
- Back, A., Bendel, O., Stoller-Schai, D. (2001): *E-Learning im Unternehmen. Grundlagen – Strategien – Methoden – Technologien*. Zürich: Orell Fuessli.
- Baumgartner, P., Payr, S. (1994): *Lernen mit Software. Digitales Lernen*. Innsbruck: Österreichischer StudienVerlag.
- Beywl, W., & Schepp-Winter, E. (2000): *Zielgeführte Evaluation von Programmen - ein Leit-faden*. In: Qs Nr. 29 (Materialien zur Qualitätssicherung in der Kinder- und Jugendhilfe. Bundesministerium für Familie, Senioren, Frauen und Jugend – Referat 501 – 11018 Berlin (Hrsg). Online: http://www.univation.org/download/QS_29.pdf (Zugriff: 26.07.2016).
- Bodendorf, F. (1990): *Computer in der fachlichen und universitären Ausbildung*. München, Wien: R. Oldenbourg Verlag.
- Brand, C., Dorfmayr, A., Lechner, J., Mistlbacher, A., Nussbaumer, A. (2013): *thema mathe-matik für die 5. Klasse AHS*. 5. Auflage, Linz: Veritas-Verlag.
- Brendel, H. (1990): *CBT - der PC in Ausbildung und Schule*. Vaterstetten: IWT-Verlag.
- Buchner, J., Schmid, St.: *Flipped Classroom Austria – Das Konzept*. Online: <http://www.flipped-classroom-austria.at/das-konzept/> (Zugriff: 10.09.2016).
- Bundesministerium für Bildung (BMB) (2004): *Lehrplan für Mathematik – AHS-Oberstufe*. BGBl. II Nr. 277/2004 vom 8.7.2004.
- Bundesministerium für Bildung (BMB) (2012): *Lehrplan der Volksschule*. BGBl. Nr. 134/1963 in der Fassung BGBl. II Nr. 303/2012 vom 13. September 2012.
- Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur (BMUKK) (2009): *Grundsatzерlass zur Begabtenförderung*. Rundschreiben Nr. 16/2009. Online: https://www.bmb.gv.at/ministerium/rs/2009_16.html (Zugriff: 19.07.2016).
- Common Core State Standards Initiative: *Mathematics Standards*. Online: <http://www.corestandards.org/Math/> (Zugriff: 30.08.2016).
- Criswell, E. L. (1989): *The Design of Computer-Based Instruction*. New York: Macmilian.
- Dassler, Stefan (2004): *Online-Nachhilfe - Nachhilfeunterricht via Internet*. München, GRIN Verlag, <http://www.hausarbeiten.de/faecher/vorschau/23217.html>.

- Döring, N. (2002): *Online-Lernen*. In: Issing, L., Klimsa, P. (Hrsg.): *Information und Lernen mit Multimedia und Internet: Lehrbuch für Studium und Praxis*. S. 247 – 266. 3. vollständig überarbeitete Auflage. Weinheim: Beltz Verlag.
- Dror, I. (2008): *Technology Enhanced Learning: The good, the bad, and the ugly*. In: *Pragmatics & Cognition*, 16 (2), S. 215 – 223. John Benjamins Publishing Company.
- Ebner, M., Schön, S., Nagler, W. (2013): *Einführung – Das Themenfeld „Lernen und Lehren mit Technologie“*. In: Ebner, M., Schön, S. (Hrsg.): *L3T – Lehrbuch für Lernen und Lehren mit Technologien*. Berlin: Neopubli GmbH. Online: <http://l3t.tugraz.at/index.php/LehrbuchEbner10/issue/view/9/showToc> (Zugriff: 28.08.2016).
- Ehlers, U.-D. (2011): *Qualität im E-Learning aus Lernaltersicht*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- El-Hussein, M. O. M., Cronje, J. C. (2010): *Defining Mobile Learning in the Higher Education Landscape*. In: International Forum of Educational Technology & Society (Hrsg.): *Journal of Educational Technology & Society*. Vol. 13, No. 3, Innovations in Designing Mobile Learning Applications (Juli 2010), S. 12 – 21.
- Embacher, F. (2014): *Quadratische Gleichungen*. mathe online. Online: http://www.mathe-online.at/skripten/gleich/gleich_quadratische_gleichungen.pdf (Zugriff: 13.09.2016).
- Euler, Leonhard (1770): *Vollständige Anleitung zur Algebra*. Neue Ausgabe, Reclam Verlag, Leipzig. Online: <http://www.mathematik.com/Euleralgebra/2000.html> (Zugriff: 25.08.2016).
- Fischer, R., Malle, G. (2004): *Mensch und Mathematik: Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. Klagensfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik, Band 5. Neuaufgabe 2004. München/Wien: Profil Verlag.
- Freudenthal, H. (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Gottwald, Susanne (2009): *Die Wissensberechnungsmaschine Wolfram/Alpha*. Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, November 2009. Online: <https://opus4.kobv.de/opus4-zib/frontdoor/index/index/docId/1161> (Zugriff: 14.08.2016).
- Griesel, H. (1971): *Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten*. Band 1. Hannover: Schrödel Verlag.
- Grob, H. L., Schnoor, D. (1997): *Bessere Leistungen beim Lernen mit Multimedia - Ergebnisse eines Forschungsprojektes an der Universität Münster*. In: Beck, U., Sommer, W. (Hrsg.):

- Learntec 97: Europäischer Kongreß für Bildungstechnologie und betriebliche Bildung. Tagungsband, Karlsruhe.
- Guberman, R., Leikin, R. (2013): *Interesting and Difficult Mathematical Problems: Changing Teachers' Views by Employing Multiple-Solution Tasks*. In: *Journal of Mathematics Teacher Education*. v16 n1, S. 33-56, Feb 2013.
- Hammond, N. (1993): *Learning with Hypertext: Problems, Principles and Prospects*. In: Issing, L., Klimsa, P. (Hrsg.) (1997): *Information und Lernen mit Multimedia*. Basel: Beltz-PVU.
- Hasemann, K. (2007): *Anfangsunterricht Mathematik*. Heidelberg (2. Auflage).
- Hefendehl-Hebeker, L., Rezat, S. (2015): *Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung*. In Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., Weigand, H.-G. (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 117-148). Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.
- Henn, H.-W., Filler, A. (2015): *Didaktik der analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.
- Heyer, T. (2015): *eLearning im Sportstudium – eine vergleichende Betrachtung zur Präsenzlehre am Beispiel des integrativen Vermittlungskonzepts der Einkontakt-Rückschlagsspiele*. Institut für Sport und Sportwissenschaft, Universität Kassel.
- IFES (2014): *AK-Studie: Nachhilfe in Österreich – Bundesweite Elternbefragung 2014*. Auftraggeber: AK-Wien, Abteilung Bildungspolitik. Wien, Mai 2014. Online: http://media.arbeiterkammer.at/wien/PDF/studien/bildung/NH_Oesterreich_2014.pdf (Zugriff: 18.08.2016).
- Kammerl, R. (Hrsg.) (2000): *Computerunterstütztes Lernen – Eine Einführung*. In: *Computerunterstütztes Lernen*. München, Wien: R. Oldenbourg Verlag.
- Kerkau, F. (2011): *Usability-Testing zur Qualitätssicherung von Online-Lernangeboten*. In: Issing, L., Klimsa, P. (Hrsg.): *Online-Lernen. Handbuch für Wissenschaft und Praxis*. S. 329 – 337. 2. verbesserte und ergänzte Auflage. München: Oldenbourg Verlag.
- Klimsa, P. (1993): *Neue Medien und Weiterbildung: Anwendung und Nutzung in Lernprozessen der Weiterbildung*. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.
- Lillie, D. L., Hannum, W. H., Stuck, G. B. (1989): *Computers and Effective Instruction – Using Computers and Software in the Classroom*. New York: Longman Pub Group.
- Malle, G. (1993): *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.
- Möhrle, M. G. (1995): *Wachstum durch neue Technologien: Das Computergestützte Lernen an der Schwelle zur Breitentechnologie*. In: Schoop, E., Witt, R., Glowalla, U. (Hrsg.): *Hypermedia in der Aus- und Weiterbildung*. Dresdner Symposium zum computerunter-

stützten Lernen. Schriften zur Informationswissenschaft, Bd. 17, Konstanz: UVK, Universitätsverlag Konstanz.

Moser, Heinz (2008): *Einführung in die Netzdidaktik – Lehren und Lernen in der Wissensgesellschaft*. Zürich: Schneider Verlag Hohengehren GmbH, Verlag Pestalozzianum.

Nagler, E., & Serdar, D.: *Analyse der Suchmaschine Wolfram Alpha*. FOM Hessen. Online: http://winfwiki.wi-fom.de/index.php/Analyse_der_Suchmaschine_Wolfram_Alpha (Zugriff: 31.07.2016).

Nimmervoll, L. (2016): *Aus Lehrern sollen Dienstleister werden*. In: Der Standard Kompakt, 27. Mai 2016, Nr. 812, S. 6-7.

Oh, Stephanie (2014): *A Clear Picture of Basic Arithmetic with Wolfram|Alpha's Step-by-step*. In WolframAlpha Blog Archive, 27.01.2014. Online: <http://blog.wolframalpha.com/2014/01/27/a-clear-picture-of-basic-arithmetic-with-wolframalphas-step-by-step/#more-25770> (Zugriff: 03.08.2016).

Padberg, F., & Benz, Ch. (2011): *Didaktik der Arithmetik für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Paracelsus (1538): *Die dritte Defension wegen des Schreibens der neuen Rezepte*. In: *Septem Defensiones* 1538. Werke Bd. 2, Darmstadt 1965, S. 510.

Rey, G. D. (2009): *E-Learning – Theorien, Gestaltungsempfehlungen und Forschung*. Bern: Huber Verlag.

Ries, U. (2016): *Wegweiser durch das Darknet. Darknet: So funktioniert der Zugang ins Deep Web*. chip.de, 17.08.2016. Online: http://www.chip.de/artikel/Darknet-So-funktioniert-der-Zugang-ins-Deep-Web-2_63227164.html (Zugriff: 18.08.2016).

Rinkens, H.-D., Rottmann, T., Träger, G. (2009): *Welt der Zahl 1*. Braunschweig. Schroedel Verlag.

Rosnick, P., Clement, J. (1980): *Learning without Understanding: The Effect of Tutoring Strategies on Algebra Misconceptions*. In: Journal of Mathematical Behavior, Vol. 3, Nr. 1, S. 3-27.

Roth, J.: *Didaktik der Algebra*. Vorlesungsskript, Universität Koblenz Landau. Online: http://www.dms.uni-landau.de/roth/lehre/skripte/did_algebra/did_algebra_4_gleichungen.pdf (Zugriff: 17.09.2016).

Rothmeier, G. (2008): *Quadratische Gleichungen*. Elementarmathematik, Universität Regensburg. Online: http://www.uni-regensburg.de/mathematik/didaktik-mathematik/medien/lehre-ss12/rothmeier/elementarmathematik/studium_lba_rothmeier_3.2_gleichungen-quadratisch.pdf (Zugriff: 14.09.2016).

- School of Information Management and Systems (2003): *How much Information?* UC Berkeley, Regents of the University of California. Online: http://groups.ischool.berkeley.edu/archive/how-much-info-2003/printable_report.pdf (Zugriff: 18.08.2016).
- Seel, N. M., Ifenthaler, D. (2009): *Online lernen und lehren*. München: UTB GmbH.
- Seufert, S., Back, A., Häusler, M. (2001): *E-Learning – Weiterbildung im Internet. Das „Plato-cookbook“ für internetbasiertes Lernen*. Kilchberg: SmartBooks Publishing AG.
- Spitzwieser, Sonja (2012): *Online-Nachhilfe – Erwartungshaltungen von Schülerinnen und Schülern in Frankreich an Online-Nachhilfe mit besonderem Augenmerk auf den Fremdsprachenunterricht*. Diplomarbeit, Universität Wien.
- Stephen Wolfram Blog: *Computational Knowledge and the Future of Pure Mathematics*. August 12, 2014. Online: <http://blog.stephenwolfram.com/2014/08/computational-knowledge-and-the-future-of-pure-mathematics/> (Zugriff: 01.09.2016).
- Sturz, W. (2010): *Wissensmanagement – mehr als nur Informationsmanagement!* Institut für Management und Kommunikation Dr. Sturz. Online: https://germanspeakers.org/tl_files/articles/Wolfgang-Sturz-Wissensmanagement--Mehr-als-Informationsmanagement.pdf (Zugriff: 16.08.2016).
- The Development Team (2009): *Step-by-step Math*. WolframAlpha Blog Archive, 01.12.2009. Online: <http://blog.wolframalpha.com/2009/12/01/step-by-step-math/> (Zugriff: 01.09.2016).
- The Wolfram|Alpha Math Team (2012): *Introducing Expanded Step-by-step Math Solutions*. WolframAlpha Blog Archive, 26.09.2012. Online: <http://blog.wolframalpha.com/2012/09/26/introducing-expanded-step-by-step-math-solutions/> (Zugriff: 01.09.2016).
- The Wolfram|Alpha Team (2013): *New Wolfram Problem Generator: Practice and Learn*. WolframAlpha Blog Archive. Online: <http://blog.wolframalpha.com/2013/10/18/new-wolfram-problem-generator-practice-and-learn/> (Zugriff: 18.08.2016).
- Treumann, K., Ganguin, S., Arens, M. (2012): *E-Learning in der beruflichen Bildung. Qualitätskriterien aus der Perspektive lernender Subjekte*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Von der Groeben, A. (2008): *Praxisbuch: Verschiedenheiten nutzen. Besser lernen in heterogenen Gruppen*. 1. Auflage, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

- Weigand, Hans-Georg (2015): *Begriffsbildung*. In Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., Weigand, H.-G. (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 255–278). Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.
- Wolff, P. (1972): *Zur Didaktik der Gleichungslehre*. In: *Beiträge zur Mathematikdidaktik*. Festschrift für Wilhelm Oehl. Hannover: Schroedel.
- Wolfram, Stephen: *About Stephen Wolfram*. Online: <http://www.stephenwolfram.com/about/> (Zugriff: 08.08.2016).
- Wolfram, Stephen (2009): *Wolfram|Alpha is coming!* Wolfram Blog, März 2009. Online: <http://blog.wolfram.com/2009/03/05/wolframalpha-is-coming/> (Zugriff: 08.08.2016)
- Wolfram.com: *Über Wolfram Research*. Online: <http://www.wolfram.com/company/background.html?source=nav> (Zugriff: 08.08.2016).
- Wolfram|Alpha: *About Wolfram|Alpha*. Online: <http://www.wolframalpha.com/about.html> (Zugriff: 08.08.2016).
- Zenz, G. (2016): *Die Angst vor der digitalen Verdummung*. derStandard.at-Artikel vom 4. August 2016. Online: <http://derstandard.at/2000042166608/Die-Angst-vor-der-digitalen-Verdummung> (Zugriff: 18.09.2016).
- ZID Universität Wien: *u:stream – Audio- und Video-Streaming*. Online: <https://zid.univie.ac.at/ustream/> (Zugriff: 28.08.2016).

8 Abbildungsverzeichnis

Alle verwendeten Abbildungen und Darstellungen von Lösungshinweisen und Lösungswegen der Step-by-step solution sowie diverse Ergebnisse der Wissensmaschine Wolfram|Alpha wurden im Internet auf der Homepage <http://www.wolframalpha.com> selbst generiert und über die Funktion „Customize & save image“ im png-Format heruntergeladen. Bilder, bei denen keine Quelle vermerkt sind, sind entweder selbst produziert (z.B. GeoGebra) oder stammen von der offiziellen Homepage von Wolfram Research.

Des Weiteren habe ich mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.

Abbildung 1: Anwendungsbereiche in Form einer Word Map von Wolfram.....	13
Abbildung 2: Leitspruch von Wolfram Alpha	16
Abbildung 3: Veranschaulichung einer Computational Knowledge Engine. Quelle: http://winfwiki.wi-fom.de/images/0/02/Cke.png (Zugriff: 19.09.2016)	21
Abbildung 4: Wetterabfrage mit Ergebnis für den Ort Wartmannstetten.....	21
Abbildung 5: Resultat von Wolfram Alpha.....	22
Abbildung 6: Berechnung mit Daten aus dem Internet	22
Abbildung 7: "What are you?"	23
Abbildung 8: Daten zum Gesundheitswesen von Österreich	24
Abbildung 9: Ausschnitt der Quellen bei Suchanfrage "Österreich"	25
Abbildung 10: Abgedeckte Gebiete der Knowledgebase. Quelle: http://www.wolfram.com/knowledgebase/ (Zugriff: 19.09.2016)	26
Abbildung 11: Produktpalette von Wolfram Alpha. Quelle: http://products.wolframalpha.com/ (Zugriff: 19.09.2016)	28
Abbildung 12: Individualisierung des Designs der Ergebnisseite.....	29
Abbildung 13: Downloadoptionen für Grafik.....	29
Abbildung 14: Erweiterte Tastatur.....	29
Abbildung 15: Wolfram Alpha for Mobile. Quelle: http://products.wolframalpha.com/mobile/ (Zugriff: 19.09.2016)	31
Abbildung 16: Course Assistant Apps. Quelle: http://products.wolframalpha.com/courseassistants/ (Zugriff: 19.09.16) ...	32
Abbildung 17: Einstellung der Schwierigkeitsgrade.....	48
Abbildung 18: Hint bei erstmaliger falscher Antwort	50
Abbildung 19: Aufruf der Step-by-step solution	52
Abbildung 20: Erster Hint plus Umsetzung.....	52
Abbildung 21: Kompletter Lösungsweg für Berechnung der Determinante einer 3x3-Matrix	53

Abbildung 22: Umsetzung mehrerer Lösungswege	54
Abbildung 23: History zu Aufgabengebiet GGT.....	55
Abbildung 24: Detaillierte Informationen für jede Aufgabe.....	55
Abbildung 25: Auswahl der Aufgaben für Problem sheet	56
Abbildung 26: Problem Sheet-Voransicht	56
Abbildung 27: Bildliche Darstellung der Addition 4+3. Quelle: Rinkens, H.-D., Rottmann, T., Träger, G. (2009): <i>Welt der Zahl 1</i> . Braunschweig. Schroedel Verlag	67
Abbildung 28: Zwanzigerfeld. Quelle: http://blog.arbeitsblatt-profi.de/wp-content/ uploads/2013/01/Zwanzigerfeld_Aufgabe_vorgegeben.png (Zugriff: 19.09.2016)	70
Abbildung 29: Zwanzigerrechenrahmen. Quelle: https://static.betzold.de/images/prod/ 85036/Schueler-Rechenrahmen-ZR-20-blau-rot-85036_b-XL.jpg (Zugriff: 19.09.2016)	70
Abbildung 30: Schrittweises Rechnen.....	71
Abbildung 31: Variante 1 der Step-by-step solution beim Addieren von natürlichen Zahlen	75
Abbildung 32: Variante 2 der Step-by-step solution beim Addieren von natürlichen Zahlen	76
Abbildung 33: Variante 3 der Step-by-step solution beim Addieren von natürlichen Zahlen	77
Abbildung 34: Lösung mittels Zahlengerade.....	79
Abbildung 35: Visualisierung von $(a + b)^2$	86
Abbildung 36: Quadratische Funktion mit 2 Nullstellen.....	95
Abbildung 37: Quadratische Funktion mit 1 Nullstelle	95
Abbildung 38: Quadratische Funktion ohne Nullstelle.....	96
Abbildung 39: Step-by-step solution „Faktorisieren“	98
Abbildung 40: Step-by-step solution „Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat“	99
Abbildung 41: Step-by-step solution „Große Lösungsformel“	100
Abbildung 42: Step-by-step solution für Lösen einer Gleichung mit Betragsfunktion	102
Abbildung 43: Grafische Lösung für Gleichung mit Betragsfunktion	106
Abbildung 44: Verschiebungen	108
Abbildung 45: Kraft als Pfeil einer Pfeilkasse	109
Abbildung 46: Addition von Pfeilklassen.....	110
Abbildung 47: Geometrische Addition von Vektoren.....	111
Abbildung 48: Grafischer Beweis des 1. Distributivgesetzes.....	113
Abbildung 49: Step-by-step solution für die Vektoraddition.....	116
Abbildung 50: Ergebnisausgabe bei Eingabe der Vektoraddition in Wolfram Alpha.....	119
Abbildung 51: Rücklauf-Statistik für Fragebogen.....	124
Abbildung 52: Einzelstatistik zu Ausstiegsseiten.....	125
Abbildung 53: Rücklauf im Zeitverlauf	125
Abbildung 54: Ergebnisse des Pretests	126