



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Extremwertaufgaben zum Nachdenken

verfasst von / submitted by

Gotthard Gansch

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A190 333 406

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

UF Deutsch, UF Mathematik

Betreut von /
Supervisor

MMag. Dr. Christoph Ableitinger, Privatdoz.

Danksagung

Es gibt eine Reihe von Menschen, denen ich – neben vielen anderen – explizit meinen Dank aussprechen möchte:

Zuallererst meinen Eltern, die mir einerseits erst diesen langen Bildungsweg ermöglicht haben, andererseits aber auch immer vorgelebt haben, welchen Wert Bildung hat, sodass für mich nie außer Frage stand, selbst auch studieren zu wollen. Danken möchte ich auch meinen Geschwistern, die mich während der Studienzeit begleitet und unterstützt haben.

Ein großes Dankeschön gilt auch meinen Betreuer – danke Christoph, dass du diese zeitraubende Arbeit auf dich genommen hast und zum Gelingen dieser Arbeit wesentlich beigetragen hast!

Zu erwähnen sind auch meine Studienkolleginnen und -kollegen, die mir – nicht nur bei dieser Arbeit – mit Rat und Tat zur Seite gestanden sind.

Danke auch an alle anderen Freunde und Wegbegleiter – diese Arbeit nahm viel Zeit in Anspruch, danke für euer Verständnis und eure Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
2	Theoretische Begrifflichkeiten	11
2.1	Der Monotoniesatz	14
2.2	Bedingungen für lokale Extremstellen	16
2.3	Die zweite Ableitung bei Extremwertaufgaben	19
2.4	Zulässige Umformungsschritte	21
2.5	Zwei bekannte Extremwertaufgaben	22
2.5.1	Die optimale Dose	23
2.5.2	Das optimale Milchpackerl	26
2.6	Optimieren und Modellieren	29
2.6.1	Der Modellbildungskreislauf	30
2.6.2	Die optimale Dose im Modellbildungskreislauf	32
3	Extremwertaufgaben in der Schule	40
3.1	Problematik und Wege der Öffnung	41
3.2	Extremwertaufgaben mit elementaren Lösungsmethoden	46
3.2.1	Symmetrie als Lösungsmethode	47
3.2.2	Dreiecksungleichung	55
3.2.3	Mittelungleichung	57
3.2.4	Quadratungleichung (Vollständiges Quadrat)	62
3.3	Weitere Lösungsmethoden für Extremwertaufgaben	63
3.4	Berühmte historische Probleme	64
3.4.1	Euklids Beweis	65
3.4.2	Das Fass des Kepler	68
3.4.3	Fermats Lösung	70
3.5	Didaktische Verzahnung der verschiedenen Bereiche	72

3.6	Extremwertaufgaben zum Nachdenken aus der Sicht verschiedener Lerntheorien	77
3.6.1	Kognitivistische Lerntheorien	78
3.6.2	Theorie nach Bruner.....	80
3.6.3	Phänomenologische Lerntheorien.....	82
3.6.4	Subjektwissenschaftliche Lerntheorien	82
4	Analyse: Extremwertaufgaben in österreichischen Schulbüchern	84
4.1	Mathematik 7 (Götz/Reichel)	85
4.2	Mathematik verstehen 7 (Malle et al.).....	87
4.3	Dimensionen 7 (Bleier et al.).....	89
4.4	klar_Mathematik 7 (Hötzel et al.)	91
4.5	Thema Mathematik 7 (Brand et al.).....	95
4.6	Vergleich und Fazit	98
5	Adaptionsmöglichkeiten bei Extremwertaufgaben	102
5.1	Adaption durch geometrische Überlegungen.....	102
5.1.1	Aufgabe „Kaputte Glasscheibe“.....	104
5.1.2	Aufgabe „Rechteck einem gleichschenkeligen Trapez einschreiben“ .	109
5.1.3	Verschiedene Ausschnitte eines Dreiecks	111
5.1.4	Vergleich zwischen Figuren und Körpern.....	112
5.1.5	Weitere Aufgaben, die auf bereits bekannte Resultate fußen	114
5.2	Extremwertaufgaben ohne (eindeutige) Lösung	116
5.3	Gewichtete Strecken und Flächen	119
5.4	Extremstellen diskreter Funktionen.....	123
6	Zusammenfassung/Fazit.....	126
7	Literaturverzeichnis.....	128
7.1	Bücher und Zeitschriften	128
7.2	Internetquellen	132
7.3	Approbierte Schulbücher (AHS, 7. Klasse)	133

7.4 Eigene Geogebra-Dateien	134
Anhang A – Kopiervorlage	135
Anhang B – Zusammenfassung	137
Anhang C – Abstract	139

1 Einleitung

Extremwertaufgaben sind ein fester Bestandteil im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II. Sie geben Einblick in die Anwendungsmöglichkeiten der Differentialrechnung. Oftmals verkommen Extremwertaufgaben jedoch zu einem Abarbeiten eines zuvor eingprägten Schemas: Nach dem – meist komplexeren – Suchen der Nebenbedingung(en) wird die erste Ableitung gebildet und Null gesetzt. In den Köpfen der Schülerinnen und Schüler bleibt nur $f'(x) = 0$ verankert. Was jedoch damit eigentlich bezweckt wird und was damit erreicht wird, ist vielen Schülerinnen und Schülern nicht mehr unmittelbar klar. Die vorliegende Arbeit setzt sich zum Ziel, das starre Muster der Extremwertaufgaben etwas zu durchbrechen und versucht, durch „Extremwertaufgaben zum Nachdenken“ diese eben genannte Schemenhaftigkeit abzulösen.

Danckwerts/Vogel bemängeln, dass vier wesentliche Aspekte bei den Extremwertaufgaben in der Schule zu kurz kommen: die Kraft elementarer Methoden, Einbeziehung historischer Momente, Aktivitäten zur Modellbildung und die Nutzung des Computers. Nimmt man jedoch verschiedene Schulbücher zur Hand, kann man sich davon überzeugen, dass elementare Methoden bereits vielfach angesprochen werden und auch die Nutzung des Computers bzw. grafikfähiger Taschenrechner stetig zunimmt. Es soll daher im Rahmen dieser Arbeit auch gezeigt werden, wie Extremwertaufgaben mit Dynamischer Geometrie-Software wie etwa GeoGebra behandelt werden können.

Die vorliegende Diplomarbeit gliedert sich dabei in folgende Bereiche: Zunächst werden im zweiten Kapitel theoretische Begrifflichkeiten geklärt, die für die Behandlung von Extremwertaufgaben von zentraler Bedeutung sind. So werden der Monotoniesatz, die Bedingungen für lokale Extremstellen und zulässige Umformungsschritte gezeigt, aber auch angeschnitten, weshalb die zweite Ableitung bei Extremwertaufgaben im Allgemeinen vernachlässigt werden kann. Außerdem werden noch zwei bekannte Extremwertaufgaben vorgestellt. Das dritte Kapitel

beschäftigt sich einerseits mit elementaren Lösungsmethoden wie etwa Symmetrieüberlegungen, der Dreiecksungleichung oder der Scheitelpunktform einer Parabel. Andererseits werden kurz auch andere Lösungsmethoden für Extremwertaufgaben behandelt und historische Probleme vorgestellt. Es soll gezeigt werden, wie diese Bereiche aus didaktischer Sicht ineinander verzahnt werden können. Im Anschluss daran wird versucht, die Begründung für die Behandlung derartiger „Extremwertaufgaben zum Nachdenken“ aus Sicht verschiedener Lerntheorien abzuleiten. Im Zuge des vierten Kapitels werden die zurzeit (Schuljahr 2015/2016) für die gymnasiale Oberstufe approbierten Schulbücher der 11. Schulstufe einer genaueren Analyse unterzogen. Das fünfte Kapitel zeigt nun, welche Adaptionmöglichkeiten bei Extremwertaufgaben vorliegen, also wie Aufgaben abgewandelt werden können, sodass sie auch tatsächlich zum Nachdenken anregen und demnach einen Lernprozess einleiten. Zum Abschluss liefert das sechste Kapitel ein Fazit und einen Ausblick zum weiteren Forschungsbedarf.

2 Theoretische Begrifflichkeiten

Extremwertaufgaben werden im Allgemeinen im Mathematikunterricht im Anschluss an die Kurvendiskussionen¹ behandelt.² Das kann einer sinnvollen Reihenfolge entsprechen, da auf bereits erarbeitetes Wissen aufgebaut werden kann. Das Anknüpfen an das Vorwissen als zentrales Element findet sich in verschiedenen Lerntheorien wieder, wie etwa bei Jerome Bruner.³ Der schulische Analysisunterricht und die Kurvendiskussion und Extremwertaufgaben im Speziellen orientierten sich dabei lange Zeit am kanonischen Aufbau der Einführungsvorlesungen zur Analysis. Die Abfolge der behandelten Themen in der Schule lautete demnach der Hochschule folgend Maximumsatz – Satz von Rolle – Mittelwertsatz – Monotoniesatz (bei Danckwerts/Vogel Monotoniekriterium genannt). Damit war man aber auch an die Behandlung des Stetigkeitsbegriffs gebunden. Mittlerweile hat sich in den Schulbüchern und damit auch im Unterricht durchgesetzt, den Monotoniesatz als „eigenständigen Ankerpunkt für die analytische Begründung der Kurvendiskussion anzusehen und die üblichen Kriterien für lokale Extrema und Wendepunkte von dort aus zu begründen. Die mathematische Rechtfertigung für diesen Standpunktwechsel liefert die Äquivalenz von Mittelwertsatz und Monotoniekriterium.“⁴ Dies bringt auch unmittelbar den großen Vorteil mit sich, dass direkt im Herzen der Sache gestartet wird und man sich zudem auf einen anschaulich evidenten Sachverhalt stützt: Es ist unmittelbar einleuchtend, dass ein Funktionsgraph, der in jedem Punkt eines Abschnitts einen positiven Anstieg hat, in diesem Abschnitt auch streng monoton wächst. Aus diesem Grund wurde vorgeschlagen, den Monotoniesatz aus der intuitiven Anschauung zu entnehmen und von ihm ausgehend das Feld lokal zu ordnen.⁵

¹ Der Name „Kurvendiskussion“ ist gebräuchlich, aber nicht ganz unumstritten. Eine Alternative ist etwa die Bezeichnung „Funktionsuntersuchung“. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit soll aber an dieser gebräuchlichen Variante nicht gerüttelt werden.

² Vgl. hierzu auch die Untersuchung der Schulbücher in Kapitel 5 der vorliegenden Arbeit.

³ Vgl. hierzu Bruner 1970, Bruner 1973 und auch Kapitel 3.6

⁴ Danckwerts/Vogel 2006, S. 135-136.

⁵ Weiter bemerken Danckwerts/Vogel an dieser Stelle, dass sich hier daraus ein weiterer Vorzug ergibt: Die unverzichtbare Rolle der Vollständigkeit der reellen Zahlen tritt an dieser Stelle nämlich besonders heraus. Die Einsicht, dass klassische Kurvendiskussionen des reellen Kontinuums bedürfen, wird somit quasi mitgeliefert. Vgl. hierzu Danckwerts/Vogel 2006, S. 38-40 und S. 136.

Der Aufbau der Analysis für höhere Schulen wird dabei bereits seit langer Zeit kontrovers diskutiert. Eine Vielzahl an Publikationen zu diesem Thema zeugt davon. Dabei erkennt man in der didaktischen Diskussion gewisse zeitabhängige Schwerpunkte: Die 60er-Jahre waren etwa von einer „Aufgabendidaktik“ geprägt, das heißt das Lehren und Lernen orientierte sich stark an gewissen Standard-Typen von Analysis-Aufgaben mit geringem Theoriebezug. Die 70er-Jahre brachten eine „Strenge-Welle“ bzw. „Exaktheitswelle“ mit einer Ausrichtung an die Analysis der Hochschule. In den 80er-Jahren besann man sich auf anschauliches und anwendungsbezogenes Vorgehen zurück, wohingegen die Diskussionen der 90er-Jahre vor allem um den Einsatz des Computers kreisten.⁶

In den Schulbüchern lassen sich diese verschiedenen Strömungen mit gewissen Abstrichen und Zeitverzögerungen wiederfinden. Der alltägliche Unterricht ist allerdings eher wenig davon beeinflusst worden. Er folgte über die Jahrzehnte hinweg recht stabilen Mustern, wie Blum ausführt: Er ist

- stark verfahrensorientiert. Die Schülerinnen und Schüler lernen punktgenau aufgabentypische Verfahren für die Schularbeiten oder die Matura, wobei die Komplexität der Terme das „Anspruchsniveau“ definiert;
- eher wenig vorstellungsorientiert. Formales (und auch theoriebezogenes) Vorgehen dominiert gegenüber inhaltlichen Überlegungen;
- nur wenig vernetzend, sowohl was Wiederholungen und Fortsetzungen als auch Bezüge zu Alltag, Umwelt oder anderen Fächern betrifft;
- methodisch variationsarm.⁷

Klika/Tietze/Wolpers berichten 1982 von diesen kontroversen Strömungen: Einerseits die „universitäre“ Position, die fachdidaktisch einem systematischen, axiomatisch-deduktiven Vorgehen und einer Strenge in der Beweisführung entspricht, und andererseits ein „genetischer Weg“ mit einer ausführlichen Propädeutik. Hierbei sollen den Anwendungen und den fundamentalen Ideen mehr Aufmerksamkeit geschenkt werden, weshalb Vereinfachungen der dargebotenen Theorie unumgänglich sind.⁸ Es entstehen didaktische Schwierigkeiten bei einer zu strikten Orientierung an der

⁶ Vgl. Blum 2000, S. 5.

⁷ Vgl. Blum 2000, S. 5.

⁸ Vgl. Klika/Tietze/Wolpers 1982, S. 88-92.

Analysis der Hochschule, wie sie Kroll 1992 im Rahmen einer Podiumsdiskussion erläuterte:

In einem langen Ringen hat [die Hochschullehre] ihre Grundbegriffe zunächst geklärt und dann kanonisiert, und nun werden dieselben Begriffe in der Schule in einer Allgemeinheit eingeführt, wie sie zwar wissenschaftlichen Notwendigkeiten entspringt, aber weit über den Erfahrungshorizont der Schüler hinausgeht. [...] Die Schüler lernen faktisch nur verbale Definitionen, die sie auf eigens dazu konstruierte Beispiele im Sinne einer vordergründig-technischen Überprüfung („Erkennungsdienst“) anzuwenden haben. Viele der Beispiele sind dabei so künstlich, daß sie von den Schülern als nicht sinnvoll akzeptiert werden. Interessanterweise findet aber die Erarbeitung der Schlüsselbegriffe der Kurvendiskussion – ich erwähne nur die notwendige Abgrenzung von „Hochpunkt“ und „lokalem“ bzw. „globalem Maximum“ – keineswegs die gleiche Aufmerksamkeit. Hier beläßt man es einfach bei der Anschauung, wie sie von den ganzrationalen Funktionen geprägt wird. Pädagogische Gründe stehen jedoch, soweit ich sehen kann, nicht dahinter. Man folgt lediglich auch hier dem wissenschaftlichen Vorbild, das sich auf Grund langer Vertrautheit nicht (mehr!) für die dazugehörige Anschauung interessiert.⁹

Die Exaktheitswelle der 70er-Jahre findet sich teilweise noch im Analysis-Unterricht der Schule wieder. Formales und theoriebezogenes Wissen dominiert im alltäglichen Unterricht gegenüber alltäglichen Überlegungen.¹⁰ Wie bereits erwähnt wird aber versucht, Kurvendiskussionen mehr an der Anschauung zu orientieren und etwa vom Monotoniesatz die analytische Begründung der Kurvendiskussion zu starten. Es wird dabei unter anderem argumentiert, dass etwa der Monotoniesatz ebenso elementar erfassbar ist wie der Mittelwertsatz, mit dessen Hilfe der Monotoniesatz üblicherweise bewiesen wird. Man durchläuft nicht eine lange Schlusskette, an dessen Ende erst die interessanten Sätze der Kurvendiskussion stehen, sondern führt eine „evidente“ Aussage wie das Monotoniekriterium auf eine andere „evidente“ Aussage zurück.¹¹ Durch derartige Argumentationen können aber auch Fehlvorstellungen auftreten, wie im nachfolgenden Subkapitel gezeigt wird: Der Monotoniesatz ist ein globaler Satz. Schülerinnen und Schüler können es aber für ebenso „evident“ halten, dass er auch lokal in einem Punkt gültig ist.

⁹ Wolfgang Kroll bei einer Podiumsdiskussion anlässlich der MNU-Hauptversammlung (Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts). Zit. nach: Danckwerts/Vogel 1992, S. 371.

¹⁰ Vgl. Blum 2000, S. 5.

¹¹ Vgl. Knoche/Wippermann 1986, S. 213-214.

Extremwertaufgaben können aber auch überhaupt als Einstieg in die Differentialrechnung dienen, da historisch die Entwicklung der Differentialrechnung durch Extremwertprobleme in Gang gekommen ist.¹² Für den Unterricht liegt hier eine wichtige Motivationsquelle. In der Regel wird aber – wie bereits thematisiert – ein anderer Zugang gewählt und Extremwertaufgaben werden als Anwendungen der Differentialrechnung behandelt.

2.1 Der Monotoniesatz

Für Kurvendiskussionen und Extremwertaufgaben im Speziellen ist der Monotoniesatz ein wichtiges Instrument zur Untersuchung von Funktionen und dient als Ausgangspunkt für die Begründung und Herleitung der üblichen Kriterien für lokale Extrema und Wendepunkte. Den Monotoniesatz (Danckwerts/Vogel (2006) nennen den Satz wie bereits erwähnt Monotoniekriterium) kann man wie folgt formulieren:

Eine auf einem Intervall differenzierbare Funktion mit überall positiver Ableitung ist dort streng monoton wachsend.

Oder formaler:

Sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $I \subseteq A$ ein Intervall. Dann gilt:

(1) $f'(x) > 0$ für alle inneren Stellen $x \in I \Rightarrow f$ streng monoton steigend in I

(2) $f'(x) < 0$ für alle inneren Stellen $x \in I \Rightarrow f$ streng monoton fallend in I

Hier merken Danckwerts/Vogel zudem an, dass es nützlich und wichtig ist, sich klar zu machen, dass dieses Monotoniekriterium ein globaler Satz ist: Eine Funktion, deren Ableitung an einer Stelle x_0 positiv ist, muss nicht in einer genügend kleinen Umgebung von x_0 auch streng monoton wachsen, wie man aber vorerst intuitiv vermuten möchte. Die Tangente an diesen Punkt x_0 ist natürlich monoton wachsend, und eine Funktion schmiegt sich – salopp formuliert – an die Tangente rund um diesen Punkt besonders gut an. Dennoch lässt sich ein Gegenbeispiel finden, um zu zeigen, dass diese

¹² Vgl. Hischer/Scheid 1995, S. 227.

Vermutung falsch ist, sofern f' nicht stetig ist¹³. Hier ist ein Griff in die Kiste der oszillierenden Funktionen hilfreich. Ein bekanntes Beispiel einer oszillierenden Funktion, das bei der exakten Einführung der Stetigkeit immer wieder behandelt wird, ist die Funktion f mit $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ mit $x \neq 0$ und $f(x) = 0$ für $x = 0$. Das Gegenbeispiel, das zeigt, dass der Monotoniesatz ein globaler Satz ist, ist von ähnlicher, wenn auch etwas komplexerer Form:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

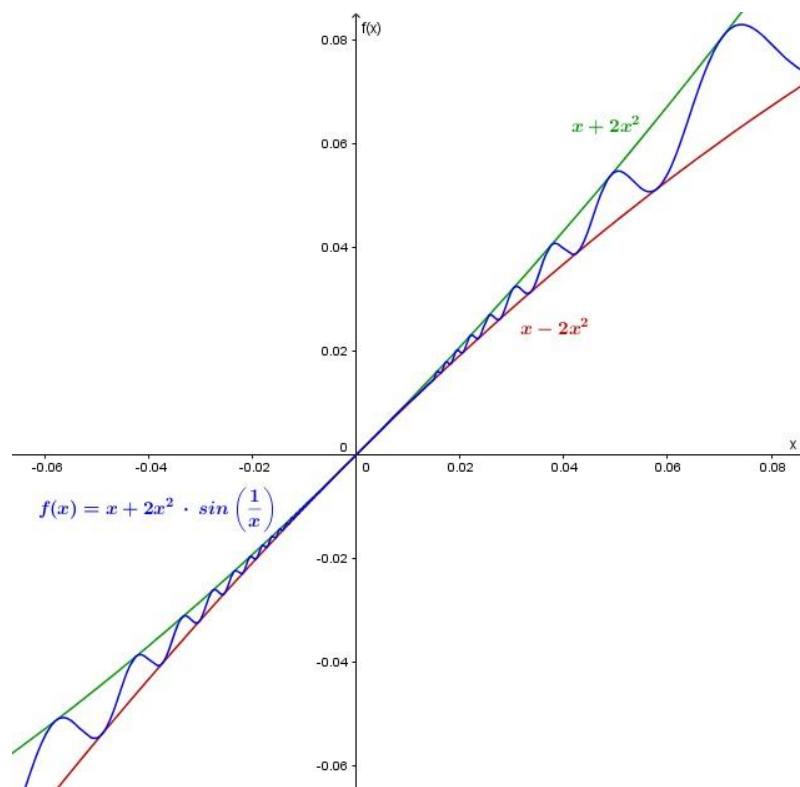


Abb. 1: Eine oszillierende Funktion als Gegenbeispiel. Eigene Darstellung (GeoGebra), nach: Knoche/Wippermann 1986, S. 214 bzw. Danckwerts/Vogel 2006, S. 137.

Die Funktion f bleibt dabei immer zwischen den beiden einhüllenden Kurven und oszilliert umso schneller, je näher man dem Nullpunkt kommt. Die einhüllenden Kurven sind klarerweise von der Form $x + 2x^2$ und $x - 2x^2$. Die Ableitung von f an der Stelle

¹³ Vgl. Knoche/Wippermann 1986, S. 214.

$x_0 = 0$ ist positiv, und dennoch ist f in keiner auch noch so kleinen Umgebung um Null (streng) monoton wachsend.¹⁴

Für $x \neq 0$ ist nämlich

$$f'(x) = 1 - 2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 4x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Daraus folgt, dass $f'(x) = -1 < 0$ für alle x mit $|x| = \frac{1}{2\pi k}$, $k \in \mathbb{N}$. Somit kann es keine Umgebung $U(0)$ geben, auf der f monoton wächst.

Es gilt aber: Ist $f'(x_0) > 0$, so sind in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 alle Funktionswerte links von x_0 kleiner und alle rechts von x_0 größer als $f(x_0)$, das heißt f wächst beim Durchgang durch die Stelle x_0 . Dies wird lokale Trennungseigenschaft genannt. Im schulischen Kontext ist aber die Behandlung solch etwas komplexerer Funktionen nicht unbedingt vorgesehen oder eher die Ausnahme. Dennoch bildet auch im schulischen Kontext der Monotoniesatz den Ausgangspunkt für die analytische Begründung der Kurvendiskussion, von dort aus kann man die üblichen Kriterien für lokale Extrema und Wendepunkte herleiten.

2.2 Bedingungen für lokale Extremstellen

Analog zum intuitiven „Herleiten“ des Monotoniesatzes kann auch die vertraute notwendige Bedingung gefunden werden, dass lokale Extrema eben nur dort liegen können, wo die Tangenten waagrecht verlaufen, also die erste Ableitung verschwindet. Dies folgt auch unmittelbar aus der soeben erwähnten lokalen Trennungseigenschaft: An Stellen x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$ wächst (oder fällt) f beim Durchgang durch x_0 , dementsprechend kann x_0 auch keine lokale Extremstelle sein.

Dass die Bedingung $f'(x_0) = 0$ notwendig, aber allein nicht hinreichend dafür ist, dass x_0 auch tatsächlich eine Extremstelle ist, ist bekannt. Anhand des folgenden geläufigen (und sehr einfachen) Beispiels kann dies anschaulich gezeigt werden:

¹⁴ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 137.

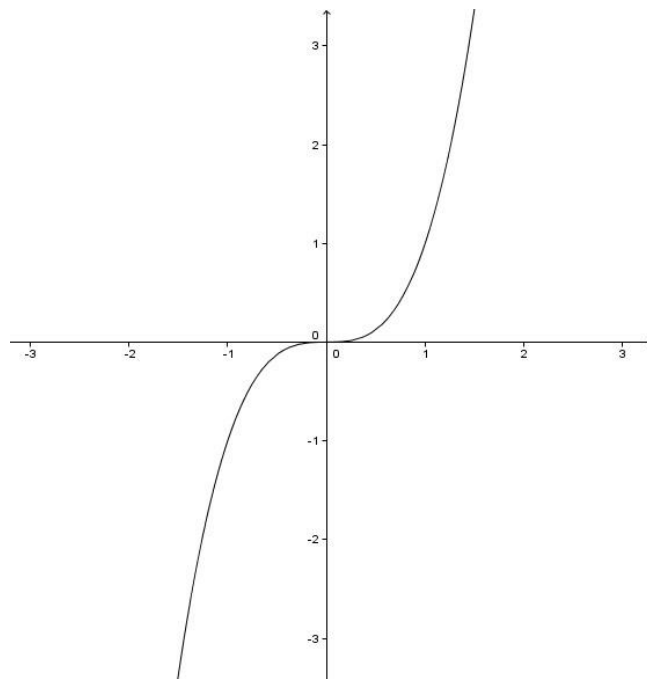


Abb. 2: $f(x) = x^3$. Eigene Darstellung (GeoGebra).

An der Stelle $x_0 = 0$ verläuft die Tangente zwar waagrecht, die erste Ableitung verschwindet also, dennoch ist klar ersichtlich, dass hier keine Extremstelle vorliegen kann, alle Funktionswerte links von x_0 sind kleiner und alle rechts von x_0 größer als $f(x_0) = 0$. Hierbei handelt es sich um einen sogenannten Sattel- oder Terrassenpunkt. Die erste hinreichende Bedingung für lokale Extrema liegt aber ebenso dicht am intuitiv-anschaulichen Verstehen und ruht direkt auf dem Monotoniesatz:

Wechselt f' bei x_0 das Vorzeichen von $-$ nach $+$ (von $+$ nach $-$), so fällt (steigt) f lokal links von x_0 und steigt (fällt) lokal rechts von x_0 .

In anderen Worten und allgemeiner formuliert ergibt dies die hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen:

Ändert eine Polynomfunktion f an der Stelle x_0 das Monotonieverhalten, dann ist x_0 eine lokale Extremstelle von f .

Das Problem an dieser Bedingung ist, dass man sich bei der Untersuchung von f' nicht nur auf die Stelle x_0 beschränken kann, sondern eine ganze Umgebung von x_0

berücksichtigen muss. In der Praxis ist dies oftmals sehr mühsam. Aus diesem Grund ist es wünschenswert, ein Kriterium zur Hand zu haben, das sich ausschließlich der Stelle x_0 bedient. So wechselt f' das Vorzeichen sicher dann, wenn die Ableitung von f' , also f'' , an der Stelle x_0 von null verschieden ist. Dies lässt sich wiederum durch die lokale Trennungseigenschaft begründen, somit ist ein Kriterium gewonnen, das in vielen Fällen leichter handhabbar ist und daher auch in der Schule bevorzugt wird:

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so besitzt f bei x_0 ein lokales Minimum. Entsprechend folgt aus $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ die Existenz eines lokalen Maximums an der Stelle x_0 .

Auch wenn dies nun leichter anzuwenden ist, bringt dies auch Nachteile mit sich: Das Minimum von f mit $f(x) = x^4$ im Nullpunkt wird durch diese Methode nicht gefunden. Doch auch das erste Kriterium des Vorzeichenwechsels von f' ist nicht notwendig für das Vorhandensein eines lokalen Extremums, wie Danckwerts/Vogel anmerken.¹⁵ Ein Gegenbeispiel ist wieder eine oszillierende Funktion:

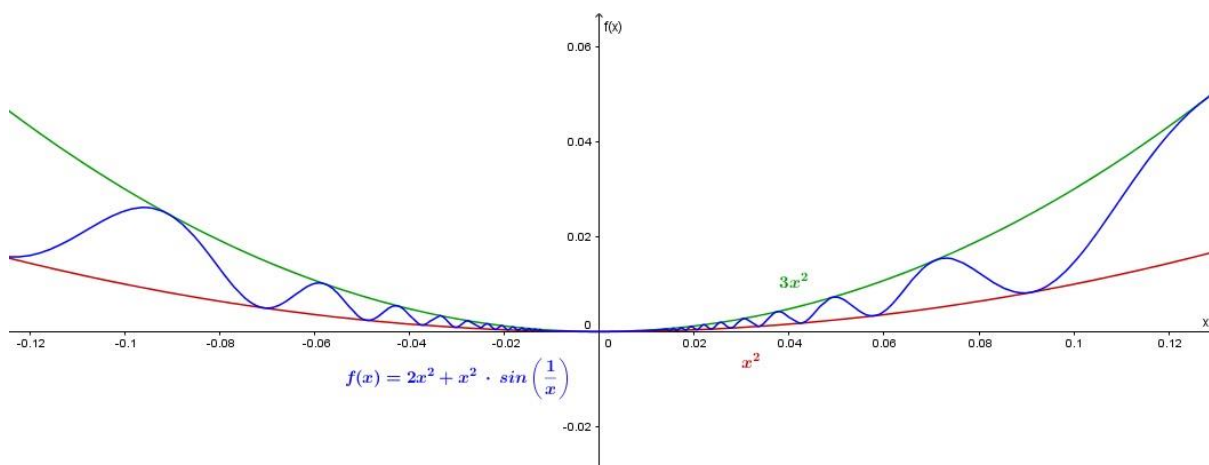


Abb. 3: Eine weitere oszillierende Funktion als Gegenbeispiel. Eigene Darstellung (GeoGebra); nach Danckwerts/Vogel 2006, S. 141.

Die Funktion f ist definiert als $f(x) = 2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $f(x) = 0$ für $x = 0$. Der Funktionsgraph von f liegt dabei zwischen den zwei Parabeln $3x^2$ und x^2 und hat an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Minimum. Die Steigung von f wechselt aber umso rascher von positiven zu negativen Werten, je näher man dem Nullpunkt kommt. Also

¹⁵ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 141

gibt es auch keine Nullumgebung, in der die Ableitung lokal links bzw. rechts von null ein einheitliches Vorzeichen hat. Die Funktion f hat bei $x_0 = 0$ also ein lokales Minimum, ohne dass f' bei x_0 einen Vorzeichenwechsel hat.

2.3 Die zweite Ableitung bei Extremwertaufgaben

Die Intuition ist also der Allgemeinheit des analytischen Ableitungsbegriffs nicht gewachsen, andererseits werden derartige Funktionen im Unterricht nicht thematisiert, und es werden auch derartige Subtilitäten im Unterricht wohl nicht behandelt werden.¹⁶ Sehr wohl thematisiert gehört die zweite Ableitung, die bei Kurvendiskussionen zur Klassifizierung von Extremstellen als Hoch- und Tiefpunkte verwendet wird. Bei schulklassischen Extremwertaufgaben wird die zweite Ableitung jedoch nicht benötigt, auch wenn sie oftmals verwendet wird: Es ist intuitiv klar, dass es ausreicht, die Funktionswerte der in Frage kommenden möglichen Extremstellen und die Funktionswerte der Randstellen des Definitionsbereichs zu vergleichen (wie in der nachfolgenden Abbildung 4 ersichtlich). Hier ist beispielsweise die Funktion f mit $f(x) = x^3(x - 1)(x + 2)$ im Intervall $[-2; 1,5]$ abgebildet. Dabei markieren a und b die Randstellen des Definitionsbereichs, der Punkt H einen Hochpunkt, der Punkt T einen Tiefpunkt und der Punkt S einen Sattelpunkt¹⁷. Oftmals wird aber bereits durch die zugrundeliegende Fragestellung klar, dass Randstellen als Lösungen gar nicht in Frage kommen können, wie etwa bei der Frage nach der optimalen Dose.¹⁸ Ein Radius oder eine Höhe mit der Länge null wird wohl kaum anschaulich-intuitiv als Lösungsmöglichkeit in Betracht gezogen werden und liefert auch in weiterer Folge eine Dose ohne Rauminhalt.

¹⁶ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 142

¹⁷ Dass es sich hierbei um einen Sattelpunkt handelt, wird nur durch das Betrachten der ersten Ableitung nicht klar. Wie aber in der Abbildung ersichtlich kommt der Sattelpunkt – wenn er nicht selbst am Rand des Definitionsbereichs liegt – auch durch das Betrachten der Funktionswerte sicher nicht als globales Minimum oder Maximum in Frage, was auch intuitiv klar ist.

¹⁸ Vgl. hierzu Kapitel 2.5.1

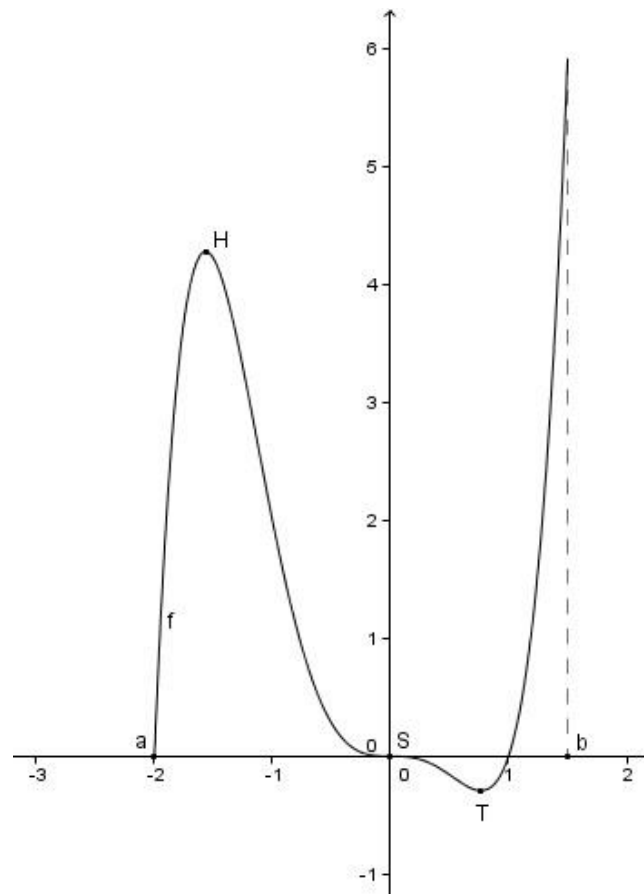


Abbildung 4: Die auf einem abgeschlossenen Intervall definierte Funktion f als anschauliches Beispiel für die obsoleete zweite Ableitung, eigene Darstellung (GeoGebra)

Beim Betrachten der Abbildung 4 wird klar, dass es irrelevant ist zu wissen, ob nun die Kandidaten für Extrema Hochpunkte, Tiefpunkte oder Sattelpunkte sind. Das Vergleichen der Funktionswerte genügt bei Extremwertaufgaben, wenn auch die Randstellen des Definitionsbereichs mit einbezogen werden: So ist der Funktionswert an der Stelle b ($f(1,5) = 5,90625$) größer als der Funktionswert des Hochpunktes, somit ist das Maximum in diesem Intervall am Rand des Definitionsbereichs zu finden, wohingegen das Minimum auch tatsächlich durch den Tiefpunkt repräsentiert wird. Dementsprechend wird die zweite Ableitung obsolet, da für die Zwecke einer Extremwertaufgabe nur zusätzliche unnötige Arbeit verrichtet wird. Der Vergleich der Funktionswerte reicht aus.

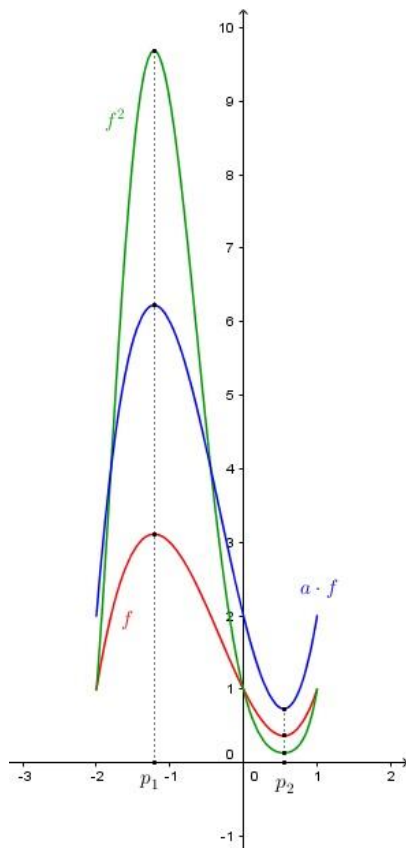
2.4 Zulässige Umformungsschritte

Für schulklassische Extremwertaufgaben ist es oftmals von Vorteil, die Funktion, von welcher die Extremstellen gesucht werden sollen (meist „Zielfunktion“ genannt), zu vereinfachen. Die wichtigsten im Unterricht behandelten Umformungsschritte stellen dabei das Weglassen konstanter Faktoren sowie das Quadrieren von Funktionen dar.

Einerseits können (positive) konstante Faktoren weggelassen werden, weil die Funktionen f und $a \cdot f$ an den gleichen Stellen ihre Extremstellen haben, sich also die x -Werte der Extrema nicht unterscheiden. Dies lässt sich ganz einfach zeigen:

Für zwei reelle Funktionen $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = a \cdot f(x)$ gilt:

$$\begin{aligned} p \text{ ist Maximumstelle von } f \text{ in } A &\Leftrightarrow f(x) \leq f(p) \text{ für alle } x \in A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \cdot f(x) \leq a \cdot f(p) \text{ für alle } x \in A \Leftrightarrow g(x) \leq g(p) \text{ für alle } x \in A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p \text{ ist Maximumstelle von } g \text{ in } A \end{aligned}$$



Für eine Minimumstelle funktioniert der Beweis analog, lediglich das Ungleichheitszeichen dreht sich um. Andererseits kann auch eine Funktion, deren Funktionswerte im Definitionsbereich positiv sind, quadriert werden. So haben f und $[f]^2$ an den gleichen Stellen ihre Extrema, durch Quadrieren bleibt ebenfalls die Lage der Extremstellen (also der x -Werte) unverändert. Dies kann man wiederum einfach zeigen. So gilt für zwei Funktionen $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ und $f^2: A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f^2(x) = [f(x)]^2$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in A$:

$$\begin{aligned} p \text{ ist Maximumstelle von } f \text{ in } A &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) \leq f(p) \text{ für alle } x \in A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [f(x)]^2 \leq [f(p)]^2 \text{ für alle } x \in A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f^2(x) \leq f^2(p) \text{ für alle } x \in A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p \text{ ist Maximumstelle von } f^2 \text{ in } A \end{aligned}$$

Abb. 5: Lage der Extremstellen.

Eigene Darstellung (GeoGebra).

Für eine Minimumstelle gilt wiederum der analoge Beweis mit umgedrehtem Ungleichheitszeichen. In Abb. 5 wird die Lage der Extremstellen für f sowie $a \cdot f$ und f^2 anhand der Funktion $f: [-2; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ dargestellt. Die Maximumstelle p_1 von f ändert durch Multiplikation mit einem Faktor (hier gewählt der Faktor 2) oder durch Quadrieren der Funktion ihre Lage nicht, ist demnach ebenso Maximumstelle von $a \cdot f$ und f^2 . Die Minimumstelle p_2 ist ebenso Minimumstelle von $a \cdot f$ und f^2 . Wie bereits erwähnt nützt man diesen Sachverhalt, wenn dadurch die Zielfunktion vereinfacht wird und damit das Auffinden der Extremstellen vereinfacht wird.¹⁹

2.5 Zwei bekannte Extremwertaufgaben

Bevor das Augenmerk in Kapitel 3 auf Extremwertaufgaben im schulischen Kontext und deren Bewertung gelegt wird, sollen hier zum Abschluss des Kapitels noch zwei Extremwertaufgaben präsentiert werden, die echte Anwendungsbeispiele darstellen. Außerdem illustrieren sie die Kraft des Ableitungskalküls, zeigen also den Schülerinnen und Schülern, was die Differentialrechnung zu leisten imstande ist. Es gibt bei den beiden hier explizierten Beispielen also einen Alltagsbezug, und die Lösungen sind nicht offensichtlich: Wie ist die optimale Dose zu dimensionieren, und welche Abmessungen hat das optimale Milchpackerl? Anhand der beiden Beispiele sollen auch die zuvor in diesem Kapitel dargebrachten Überlegungen näher ausgeführt werden. Die beiden präsentierten Beispiele werden überdies auch im schulischen Kontext verwendet und haben Eingang in die Schulbücher gefunden (zumindest in ihrer „leichtesten“ Form).

¹⁹ Dies wird in der vorliegenden Arbeit beispielsweise in der Aufgabe in Kapitel 5.3 praktiziert.

2.5.1 Die optimale Dose

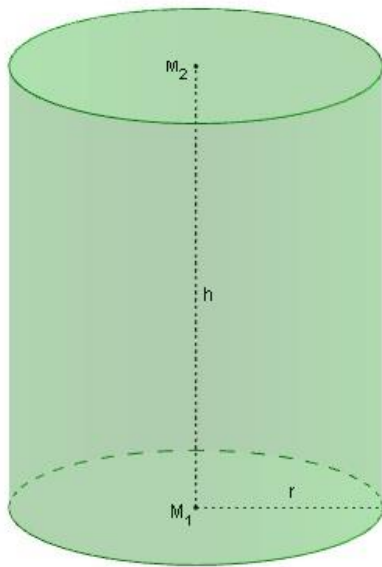


Abb. 6: Zylindrische Dose,
eigene Darstellung,
(GeoGebra).

Ein allseits beliebtes Beispiel ist – wie bereits erwähnt – die optimale Dose. Hierbei geht es darum herauszufinden, welche Abmessungen eine zylindrische Dose hat, um minimalen Materialverbrauch, also minimale Oberfläche, zu gewährleisten. Meistens handelt es sich dabei um eine 0,33l-, 0,5l- oder 1l-Dose. In diesem Beispiel soll die 1l-Dose behandelt werden, die im Alltag wohl nicht so häufig auftritt, aber etwas leichter und angenehmer zu behandeln ist (vgl. Umformung der Nebenbedingung). Die Oberfläche eines Zylinders berechnet sich dabei wie folgt:

$$O(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Diese zweidimensionale Funktion hilft noch nicht bei der Lösung des Problems, wenn nicht beachtet wird, dass die minimale Oberfläche nur unter Berücksichtigung eines konstanten Volumens zu finden ist. Dieses Beispiel kann nun allgemein, also mit beliebigem, aber festem Volumen, oder mit einem konkret vorgegebenem Volumen gelöst werden. Wie bereits erwähnt soll der Einfachheit halber hier zunächst angenommen werden, dass es sich um eine 1l-Dose (1 Liter = 1 dm³) handelt. Umformen nach der Höhe h liefert schließlich:

$$r^2 \pi h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{r^2 \pi}$$

Durch Einsetzen erhält man die Zielfunktion O in einer Variablen mit:

$$O(r) = 2r^2 \pi + \frac{2r\pi}{r^2 \pi} = 2r^2 \pi + \frac{2}{r}$$

Mit größer werdendem r nimmt der Summand $2r^2\pi$ zu, wohingegen der Summand $\frac{2}{r}$ abnimmt. Somit ist nicht ohne Weiteres zu erkennen, für welchen Radius die Oberfläche minimal wird. Dieser Entdeckung im Unterricht Raum zu geben, ist wichtig, wie auch Danckwerts/Vogel bemerken.²⁰

Ein Blick auf den Graphen von der Funktion O genügt, um das gesuchte Minimum hinreichend genau abzulesen.

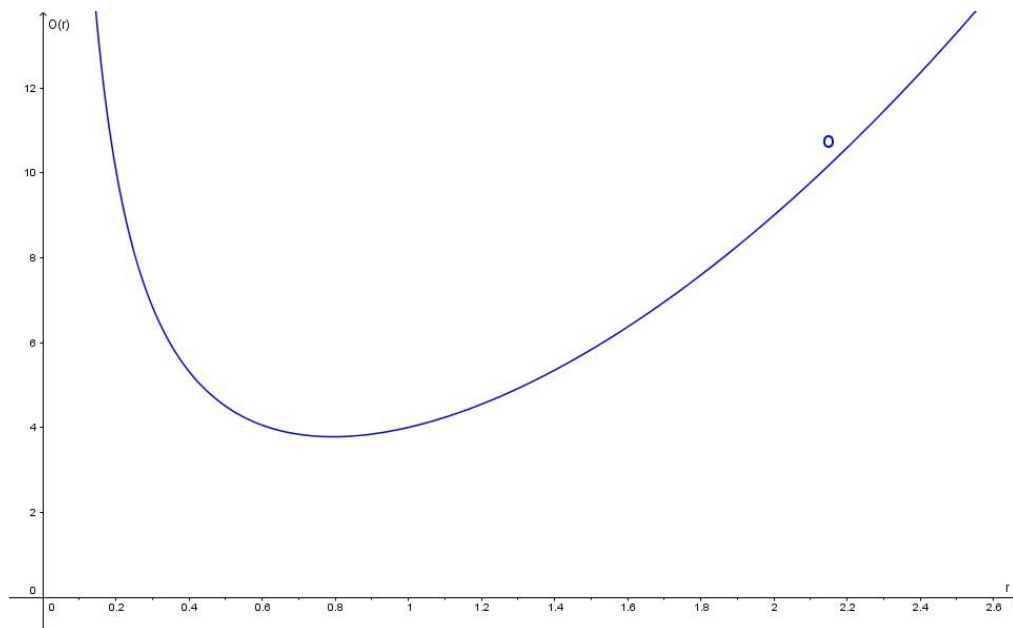


Abb. 7: Funktion O , eigene Darstellung (GeoGebra).

Durch etwaiges Vergrößern des Graphen kann auch das gesuchte Minimum genauer ermittelt werden. In vorliegendem Beispiel liegt dieses Minimum in etwa bei $r_{\min} \approx 0,54 \text{ dm} = 5,4 \text{ cm}$, die zugehörige Höhe kann schließlich leicht durch Einsetzen ermittelt werden und liegt bei $h_{\min} \approx 10,9 \text{ cm}$. Für den Praktiker ist das Problem nun gelöst, die Genauigkeit reicht allemal. Hier wurde das Problem außerdem vorerst ohne den Ableitungskalkül gelöst. Beim Blick auf die (nicht gerundeten) Werte für Radius und Höhe lässt sich aber die Vermutung aufstellen, dass die optimale Dose dadurch ausgezeichnet zu sein scheint, dass sie ebenso hoch wie breit ist. Wer sich hier sicher sein will, muss dies exakt zeigen, muss also eine theoretische Anstrengung auf sich nehmen. Für Danckwerts/Vogel ist nun die Differentialrechnung das Mittel der Wahl:²¹

²⁰ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 171

²¹ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 172-173.

$$O(r) = 2r^2\pi + \frac{2r\pi}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{2}{r}$$

$$O'(r) = 4r\pi - \frac{2}{r^2} = 0 \Rightarrow$$

$$4r\pi = \frac{2}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

Für $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ ist demnach die Oberfläche der Dose minimal, daher soll dieser Radius in weiterer Folge mit $r_{\min}$ bezeichnet werden. Durch geschicktes Umformen (auf einen Bruch bringen und Herausheben von 4π) zeigt sich, dass links von $r_{\min}$ die Ableitung $O'(r)$ negativ und rechts davon positiv ist. So ist der Nenner des Bruches stets positiv, der Zähler hingegen bestimmt das Vorzeichen:

$$O'(r) = 4\pi \cdot \frac{r^3 - \frac{1}{2\pi}}{r^2}$$

Damit fällt O links von $r_{\min}$ und rechts davon wächst es. Demnach ist die Oberfläche der Dose für $r_{\min}$ minimal, ein Betrachten der zweiten Ableitung ist – wie in Kapitel 2.3 vorhin gezeigt – nicht notwendig. Für die dazugehörige Höhe bedeutet dies:

$$h_{\min} = \frac{1}{\pi r_{\min}^2} = \frac{1}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^2} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}}{\pi \cdot \frac{1}{2\pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = 2 \cdot r_{\min}$$

Somit wurde gezeigt, dass die Höhe der optimalen Dose exakt so groß ist wie ihr Durchmesser, die Dose ist daher so hoch wie breit.²² Die hier vorgestellte Vorgehensweise ist die schulklassische mittels Differentialrechnung. In diesem Zusammenhang ist es schade, dass vor allem Danckwerts/Vogel nicht darauf hinweisen, dass dieses Ergebnis auch durch elementare Methoden zustande kommt. Sie sprechen sogar vielmehr davon, dass

[d]ieses (exakte) Ergebnis [...] ohne eine theoretische Anstrengung nicht zu haben gewesen [wäre]. Antworten auf theoretische Fragen sind eben nur mit theoretischen Hilfsmitteln möglich. Theoretische Einsichten haben ihren Preis.

²² Vgl. Jäger 1997, S. 53-54.

Sie beruhen auf machtvollen Werkzeugen, hier dem Ableitungskalkül mit den Kriterien der Kurvendiskussion.²³

Gerade Danckwerts/Vogel plädieren in diesem Buch aber auch für den Einsatz elementarer Methoden. Hier jedoch verschweigen sie dieselben: Mithilfe der Mittelungleichung kommt man auf dasselbe Ergebnis, wenn auch auf etwas umständliche Weise.²⁴

2.5.2 Das optimale Milchpackerl

Analog zur optimalen Dose (zylindrische Form) kann man auch nach der optimalen quaderförmigen Verpackung fragen. Diese Frage stellt sich beispielsweise bei Saft- und Milchverpackungen. Das Milchpackerl ist dabei bereits des Öfteren – ebenso wie zuvor erwähnte optimale Dose – Gegenstand von Modellierungs- und Optimierungsaufgaben gewesen. Das Milchpackerl eignet sich auch deswegen so hervorragend, weil es einen Gegenstand des alltäglichen Gebrauchs darstellt, den die Schülerinnen und Schüler kennen und auch selbst verwenden. Somit wird den Schülerinnen und Schülern klar, dass Mathematik in alltäglichen Bereichen angewendet wird. Hiermit lässt sich also eindrucksvoll die Kraft der Differentialrechnung zeigen. Das Milchpackerl ist ein inzwischen etabliertes Unterrichtsbeispiel für realitätsbezogene Extremwertaufgaben geworden. Das Beispiel soll hier nun in weiterer Folge vorgestellt werden.²⁵

Es stellt sich beim Betrachten eines Milchpackerls die Frage, ob bei der Herstellung dieser Verpackungen darauf geachtet wird, möglichst wenig Material zu verbrauchen. Durch das Auftrennen an den Kleberändern und das Entfalten des Packerl erhält man das folgende Faltnetz:

²³ Danckwerts/Vogel 2006, S. 173.

²⁴ Vgl. hierzu Kapitel 3.2.3 der vorliegenden Arbeit.

²⁵ Hierbei wird vor allem auf die Ausführungen von Böer 1993, S. 1-16, Danckwerts/Vogel 2001b, S. 22-24 und Danckwerts/Vogel 2006, S. 154-160 zurückgegriffen. Weiters thematisiert wird das Milchpackerl bei Blankenagel/Kindinger 1988, S. 34-37.

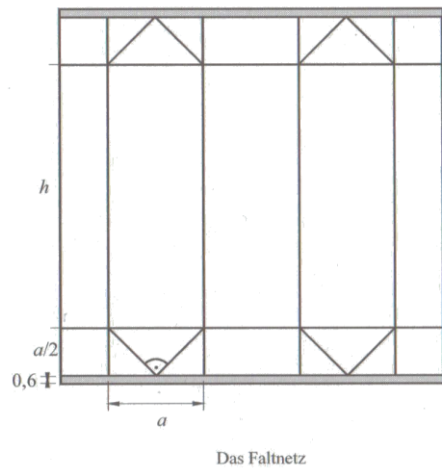


Abb. 8: Das Faltnetz eines Milchpackerls. Abb. aus: Danckwerts/Vogel 2006, S. 155.

Es handelt sich hierbei um ein Rechteck mit gleich breiten Kleberändern an drei Seiten und hochsymmetrischem Faltnetz. Das Milchpackerl hat die Maße $a = 7,1 \text{ cm}$ und $h = 19,7 \text{ cm}$.²⁶ Dies führt rein rechnerisch zum Inhalt $V = 7,1^2 \cdot 19,7 \approx 993 \text{ cm}^3$. Das gefüllte Packerl ist aber auch leicht bauchig, so dass auf jeden Fall ein Liter (also 1.000 cm^3) hineinpasst und auch noch Platz zum Aufschütteln bleibt.²⁷ Nun stellt sich eben die Frage, ob die Maße für a und h optimal sind. Hier erfolgt nun ein Perspektivenwechsel vom statischen Faltnetz hin zur Wahrnehmung der Kantenlänge a und der Höhe h als variierbare Größen. Dieser Schritt ist mitunter für Ungeübte nicht so leicht. Die in Abb. 8 grau dargestellten Kleberänder sind an allen drei Seiten gleich breit und betragen $0,6 \text{ cm}$. Aus dieser Abbildung lässt sich nun für den Materialverbrauch in Abhängigkeit von a und h folgende zweidimensionale Funktion M mit folgendem Funktionsterm aufstellen, der diese Kleberänder berücksichtigt. Dabei repräsentiert der erste Faktor die Höhe des abgebildeten Faltnetzes, der zweite Faktor die Breite:

$$M(a, h) = \left(h + 2 \cdot \frac{a}{2} + 2 \cdot 0,6 \right) \cdot (4a + 0,6)$$

²⁶ Böer, auf den dieses Beispiel zurückgeht, hat als faktische Maße $a = 7 \text{ cm}$ und $h = 19,5 \text{ cm}$ ermittelt. Vgl. hierzu Böer 1993, S. 6.

²⁷ Das bedeutet aber auch, dass der Quader-Ansatz für das Milchpackerl, der in der Volumsformel steckt, falsch oder zumindest nicht exakt ist. Dennoch kann vereinfachend damit weiter gerechnet werden (vgl. hierzu auch das Kapitel 2.6 „Optimieren und Modellieren“).

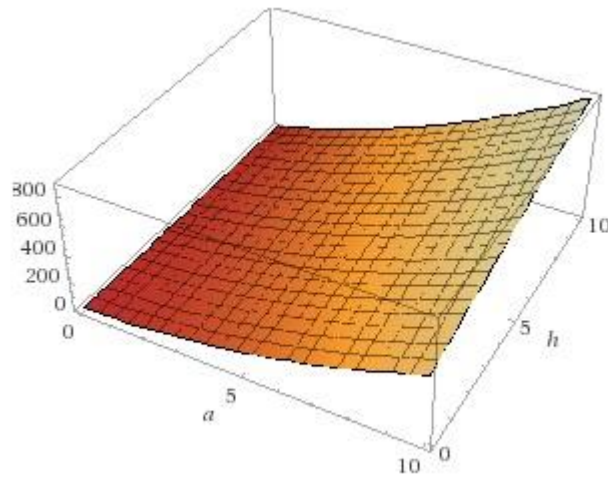


Abb. 9: Die Funktion M . Eigene Darstellung (wolframalpha.com).

Diese zweidimensionale Funktion führt unter der Nebenbedingung des festen Volumens von 1.000cm^3 nach Elimination von h schließlich auf folgende Zielfunktion M (mit $a > 0$)²⁸:

$$M(a) = \left(\frac{1000}{a^2} + a + 1,2\right) \cdot (4a + 0,6) = 4a^2 + 5,4a + 0,72 + \frac{4000}{a} + \frac{600}{a^2}$$

Das lokale – und in diesem Fall zugleich globale – Minimum von M findet man wie gewohnt über die Nullstelle der ersten Ableitung:

$$M'(a) = 8a + 5,4 - \frac{4000}{a^2} - \frac{1200}{a^3}$$

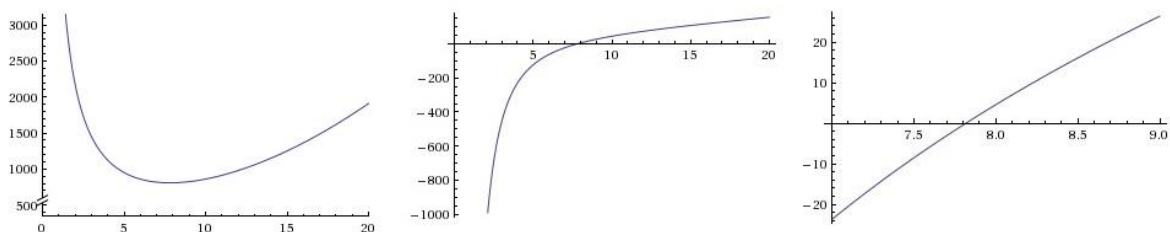


Abb. 10: Der Graph der Funktion M (links) und der Graph der Funktion M' (Mitte) und vergrößert dargestellt (rechts). Eigene Darstellung (wolframalpha.com).

²⁸ Böer gibt als Nebenbedingung das von ihm gemessene reale Volumen von 955cm^3 in der Nebenbedingung an, vgl. hierzu Böer 1993, S. 6.

Die Gleichung $M'(a) = 0$ kann leicht mithilfe des Computers (näherungsweise) gelöst werden. Überrascht wird man hier feststellen, dass der optimale Wert für a (etwa $7,8\text{ cm}$) doch erheblich vom gemessenen Wert von $7,1\text{ cm}$ abweicht. Das reale Milchpackerl ist offensichtlich nicht nur unter dem Gesichtspunkt der Materialminimierung gefertigt. Obgleich a um etwa 9% vom optimalen Wert abweicht, liegt der prozentuale Mehrverbrauch des Materials bei nur 2% und ist damit weniger dramatisch. In der Nähe eines lokalen Extremums ändern sich die Funktionswerte bekanntlich ja nur wenig. Warum weicht aber der tatsächliche vom optimalen Wert doch so stark ab? Dies – und die Bedeutung der Diskrepanz zwischen theoretisch errechnetem und faktisch realisiertem Wert – soll im nachfolgenden Subkapitel „Optimieren und Modellieren“ näher beleuchtet werden.

2.6 Optimieren und Modellieren

Anknüpfend an die beiden soeben vorgestellten Beispiele soll in diesem Kapitel illustriert werden, dass Optimieren und Modellieren oftmals stark zusammenhängen. Modellieren und Optimieren gehören in der angewandten Mathematik zusammen, in der Schulmathematik ist dies schwieriger nachzuvollziehen. Schulklassische Extremwertaufgaben gehören zu den Optimierungsaufgaben, die ersten Schritte des Modellierens wurden aber im Allgemeinen bereits durch die Aufgabenstellung vorweggenommen. In diesem Subkapitel sollen einerseits kurz Modellbildungskreisläufe (etwa von Blum und Schupp) vorgestellt werden und in weiterer Folge darauf aufbauend gezeigt werden, wie Modellierungsaufgaben aussehen können. Anhand des Beispiels der optimalen Dose soll dies nun konkretisiert werden. Danckwerts/Vogel plädieren dafür, auch im Rahmen der Extremwertaufgaben dem Modellieren Platz zu geben. Sie stellen fest, dass dies einer der vernachlässigten Aspekte bei Extremwertaufgaben ist. Wie in Kapitel 3.5 näher erläutert wird, gehört Modellbilden zum fachdidaktischen Allgemeingut und bildet andererseits den Kern der ersten Grunderfahrung nach Winter²⁹. Danckwerts/Vogel betonen, dass Extremwertprobleme in besonderer Weise dazu geeignet sind, Aktivitäten zur Modellbildung einzubeziehen.³⁰ Aus diesem Grund soll hier zunächst ein Modellbildungskreislauf

²⁹ Vgl. auch hierzu Kapitel 3.5 der vorliegenden Arbeit sowie Winter 1996, S. 37.

³⁰ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 196.

vorgestellt werden, anhand dessen das Beispiel der optimalen Dose einer genaueren Untersuchung unterzogen wird.

2.6.1 Der Modellbildungskreislauf

Wie bereits in der Überschrift angedeutet wird Modellbilden meist als Kreisprozess gesehen, der nicht selten auch öfters durchlaufen wird, so zumindest in der Literatur. Im Schulunterricht durchläuft man diesen Prozess wohl eher nur einmal. Der wohl bekannteste Modellbildungskreislauf ist bei Blum beschrieben:³¹

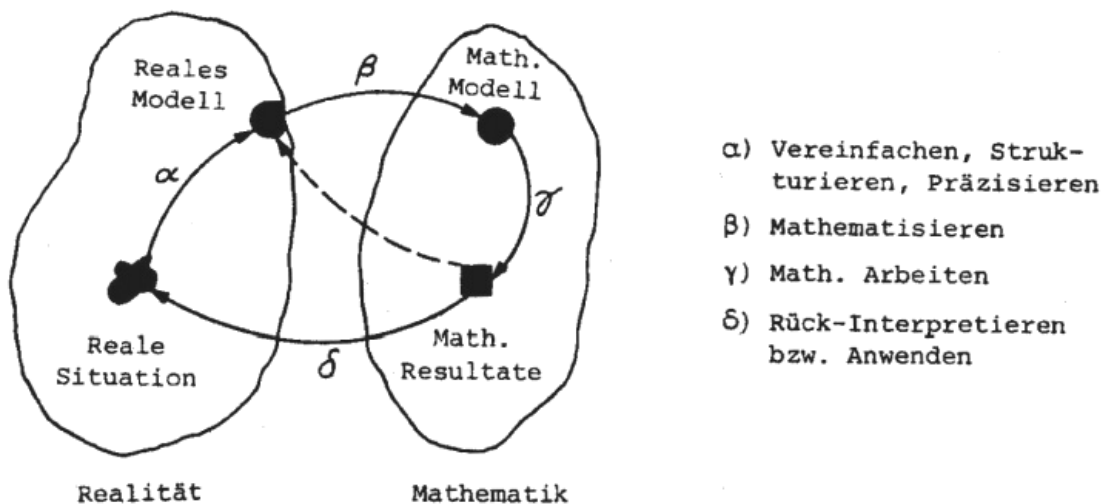


Abb. 11: Modellbildungskreislauf. Aus: Blum 1985, S. 200.

Dies stellt in gewisser Weise ein Standardmodell des Modellbildens für den Unterricht dar.³² Danckwerts/Vogel greifen ihrerseits auf den Modellbildungskreislauf nach Schupp zurück³³, der dem von Blum ähnlich sieht:

³¹ Vgl. Blum 1985, S. 200.

³² Vgl. Greefrath 2010, S. 49.

³³ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 197 sowie Schupp 1997, S. 4-10.

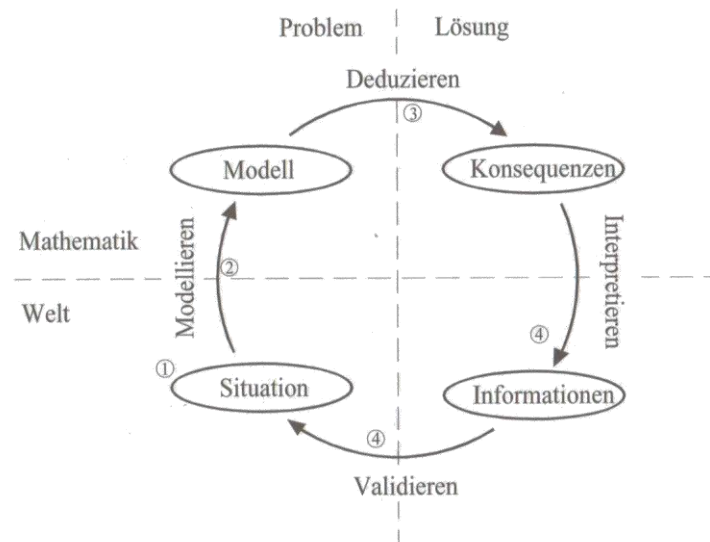


Abb. 12: Der Modellbildungskreislauf. Aus: Danckwerts/Vogel 2006, S. 197.

Hier werden vier Schritte identifiziert, die beim Modellbilden durchlaufen werden: Im ersten Schritt wird das außermathematische Problem *formuliert* (1), im zweiten Schritt mathematisch *modelliert* (2), im dritten Schritt innermathematisch *gelöst* (3) und im vierten Schritt wird die mathematische Lösung im Sachzusammenhang *interpretiert* und auf ihren Wert für die Lösung des Ausgangsproblems *befragt* (4).³⁴ Traditionell vernachlässigt werden dabei im schulischen Kontext die Aktivitäten des Modellierens, Interpretierens und des Validierens. Modellierungsaufgaben sollen aber Eingang in das schulische Geschehen finden. Als Konsequenz wird die traditionell stark verankerte Aktivität des Deduzierens an Bedeutung verlieren. Computer mit spezieller Software sowie programmierbare Taschenrechner werden diese Entwicklung beschleunigen.³⁵

Beiden Varianten des Modellbildungskreislaufs ist gemeinsam, dass sie zwischen „Realität“ und „Mathematik“ bzw. „Welt“ und „Mathematik“ unterscheiden. Hier gilt es anzumerken, dass diese Bezeichnungen etwas unglücklich gewählt sind und auch die Darstellung des Modellbildungskreislaufes verbesserungswürdig ist. Hier wird eine von der Welt abgekoppelte Mathematik impliziert, Mathematik ist jedoch Teil der Welt und dient der Beschreibung der Welt. So zeigen empirische Studien, dass Lernende in ihren tatsächlichen Bearbeitungen von Modellierungsaufgaben bereits vor dem

³⁴ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 197.

³⁵ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 197-198.

Erreichen des mathematischen Resultates vielfältige Beziehungen zwischen der Realität und der Mathematik berücksichtigen.³⁶ Andere Studien stellen die bereits erwähnte dichotomische Trennung in Mathematik und Welt grundsätzlicher in Frage.³⁷ Es gibt zudem auch neuere Modelle des Modellbildungskreislaufes, so hat etwa auch Blum mit seinen Mitarbeitern ein komplexeres Modell entworfen, um etwa möglichst genau beschreiben zu können, wie Lernende mit Modellierungsaufgaben umgehen.³⁸ Genau ob dieser Komplexität werden diese neueren Modelle aber oftmals auch kritisiert. Der Modellbildungskreislauf solle aber auch nicht leichtfertig kritisiert werden, ist er doch auch in der mathematikdidaktischen Literatur weit verbreitet, wie Meyer/Voigt schreiben. Sie versuchen auch des Weiteren zu klären, wie die Differenz zwischen dem Modellbildungskreislauf auf der einen Seite und den theoretischen Erkenntnissen aus empirischen Fallstudien auf der anderen Seite erklärt werden kann.³⁹

Eine Schwierigkeit beim Modellieren im schulischen Kontext stellt auch die Beurteilung dar: So kann es in Modellierungssituationen einerseits viele richtige Ergebnisse geben, andererseits können berechnete Ergebnisse unpassend sein. Dies kann darin begründet sein, dass zwar präsentierte Lösungen das Ergebnis korrekter Berechnung sind, aber das zugrundeliegende Modell inadäquat und falsch ist.⁴⁰ Schülerinnen und Schüler sollen aber auch erfahren, dass der Bezug zur Welt nur zu „unvollständigen“ Aufgaben führen kann, deren Folge dann die Fundamentalerfahrung ist, dass durchaus verschiedene Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Ergebnisse haben und man dennoch die Aufgabe vollständig und adäquat bearbeitet hat.⁴¹

2.6.2 Die optimale Dose im Modellbildungskreislauf

Das Beispiel der optimalen Dose⁴² soll nun nach den vier Schritten des Modellbildungskreislaufes nach Schupp (1997) untersucht werden. Hier liegt zwar

³⁶ Vgl. etwa Voigt 2013, <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2013/Einzelvortraege/BzMU13-Voigt.pdf>, S. 2 (26.7.2016) und Borromeo Ferri 2011.

³⁷ Vgl. etwa Schwarzkopf 2007, S. 95-105.

³⁸ Vgl. Ferri/Greefrath/Kaiser 2013, S. 17-18.

³⁹ Vgl. Meyer/Voigt 2010, S. 143-146.

⁴⁰ Vgl. Körner 2014, S. 18.

⁴¹ Vgl. Körner 2014, S. 17.

⁴² Vgl. Kapitel 2.5.1 der vorliegenden Arbeit.

noch keine echte Modellbildung im engeren Sinne vor, dennoch sollen hier in Anlehnung an Danckwerts/Vogel 2006 die bereits getätigten Schritte erläutert werden:

(1) *Die Problemstellung:* Zylindrische Dosen können verschiedene Größen und Formen haben. Der Einfachheit halber beschränkte man sich im Beispiel auf Dosen mit festem Volumen (ein Liter) und flüssigem Inhalt (Dosen mit anderem Inhalt wie etwa Fisch oder Würstchen etc. werden anders dimensioniert sein⁴³). Gesucht sind also die Abmessungen der Dose, also des Durchmessers und der Höhe, bei denen der Materialverbrauch minimal wird.

(2) *Die Modellierung:* Die Dose wird zu einer geometrischen Form idealisiert, es wird also ein (gerader) Zylinder betrachtet. Diese Fragestellung wurde in 2.5.1 bereits gelöst.

(3) *Innermathematische Lösung:* Der optimale Zylinder ist ebenso hoch wie breit, im konkreten Fall mit dem Volumen von einem Liter liefert dies die Abmessungen von etwa $r_{\min} \approx 0,54 \text{ dm} = 5,4 \text{ cm}$ und $h_{\min} \approx 10,9 \text{ cm}$.

(4) *Konfrontation mit der Realität:* Im schulischen Kontext würde das Beispiel nun wohl meist als richtig gelöst liegen gelassen werden. Geht man aber durch Supermärkte, so findet sich eine Vielzahl von verschiedenen Größen und Formen von Dosen, die meist von diesem berechneten Optimum abweichen. Nicht nur durch den Inhalt bedingt (wie etwa bei Fisch und Würstchen), sondern selbst bei flüssigem Inhalt scheint die innermathematische Lösung in der Realität nicht beachtet zu werden. Wenn man weiterhin annimmt, dass Dosenherstellern minimaler Materialverbrauch wichtig ist, dann muss man zum Schluss kommen, dass das bisherige Modell wesentliche Momente nicht erfasst haben dürfte, und das Modell daher einer Verfeinerung und Überarbeitung bedarf, also der Modellbildungskreislauf mit dem Einstieg in den zweiten Schritt erneut durchlaufen wird.

(2) *Verfeinerte Modellierung:* Betrachtet man nun Dosen genauer, so wird man feststellen, dass zum Zusammenfügen von Mantel, Boden und Deckel Überstände

⁴³ Vgl. hierzu auch den vierten Schritt dieses Modellbildungskreislaufes.

benutzt werden (vgl. auch das Faltnetz beim Milchpackerl, bei dem Kleberänder bereits berücksichtigt worden sind). Hier sollen nun in Anlehnung an Jäger weitere Überlegungen angestellt werden.⁴⁴

Die Dosen im Supermarkt folgen offensichtlich nicht der Bedingung $h = d$, die durch Betrachten eines Zylinders gewonnen worden ist. Beim Vermessen von Dosen wird man hingegen oftmals auf dieses Maß stoßen: $d = 9,9 \text{ cm}$ und $h = 11,9 \text{ cm}$. Das Volumen dieser Dose beträgt demnach ziemlich genau $V = 916 \text{ ml}$, in weiterer Folge soll mit diesem Volumen weiter gerechnet werden – dies stellt ebenso eine verfeinerte Modellierung dar, es kann aber natürlich mit dem bis vorhin verwendeten Volumen von einem Liter weitergerechnet werden, um besser Vergleiche herstellen zu können. Die Bedingung $h = d$ gilt aber naturgemäß auch für Zylinder mit einem Volumen von 916 cm^3 .

Bei der Herstellung werden – wie bereits erwähnt – der Boden und Deckel mit Hilfe von Falzen eingesetzt, wie dies in den Abb. 13 und 14 demonstriert wird. Diese Falze können nur gebildet werden, wenn Mantel, Boden und Deckel Überstände besitzen: Für die Standarddose (also mit den gemessenen Werten von $d = 9,9 \text{ cm}$ und $h = 11,9 \text{ cm}$) ist laut Angaben der Hersteller zur Höhe h ein Zuschlag von etwa 1 cm (nämlich je 5 mm für Boden und Deckel) und zum Durchmesser d ein Zuschlag von etwa $1,5 \text{ cm}$ (insgesamt) erforderlich. An der Schweißnaht des Mantels gibt es ebenso eine kleine Überlappung von etwa 2 mm , die aber vernachlässigt werden soll (Modellierung!).

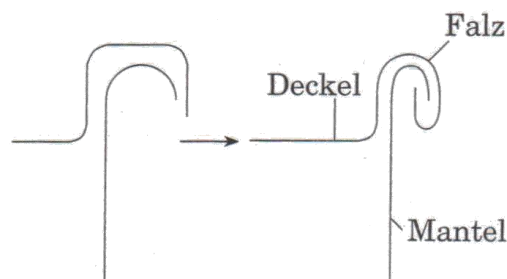


Abb. 13: Die Entstehung von Falzen. Aus: Jäger 1997, S. 54.

⁴⁴ Vgl. Jäger 1997, S. 53-57.

Die Oberfläche eines Zylinders gibt demnach den Materialverbrauch nicht genau an. An ihre Stelle tritt wegen der Zuschläge nun (Längenmaße in cm):

$$A = d \cdot \pi \cdot (h + 1) + \frac{(d+1,5)^2 \cdot \pi}{2}$$

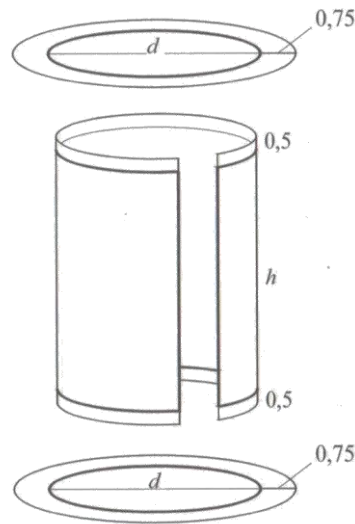


Abb. 14: Materialverbrauch bei einer Konservendose (mit Überständen). Aus: Danckwerts/Vogel 2006, S. 200.

Wiederum will man h eliminieren, durch das feste Volumen von 916 cm^3 ergibt sich:

$$V = 916 = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot h \Rightarrow h = \frac{4 \cdot V}{d^2 \cdot \pi} = \frac{3664}{d^2 \cdot \pi} \quad (d > 0)$$

$$A(d) = \frac{3664}{d} + \pi \cdot d + \frac{\pi}{2} \cdot (d + 1,5)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot d^2 + 2,5\pi d + 1,125\pi + \frac{3664}{d} \quad (d > 0)$$

(3) *Innermathematische Lösung:* Die Abbildung 15 zeigt den Graphen dieser Funktion. Wie man sieht, genügt es, nach der (einzigen) Nullstelle der Ableitung A' zu suchen.

$$A'(d) = \pi d + 2,5\pi - \frac{3664}{d^2}$$

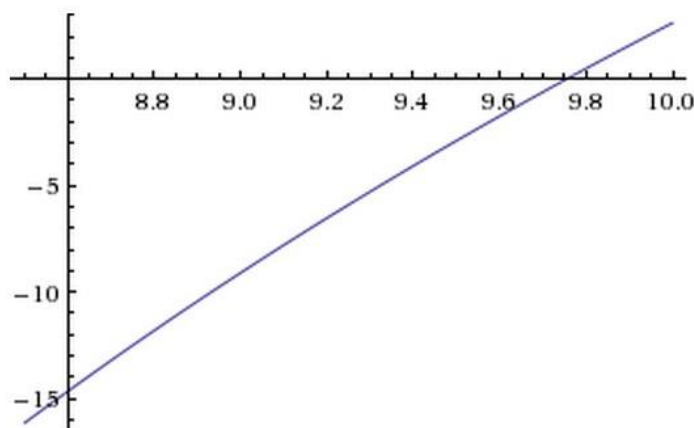


Abb. 15: Ausschnitt um die Nullstelle der Funktion $A'(d)$. Eigene Darstellung (wolframalpha.com).

Die Bedingung $A'(d) = 0$ führt also auf eine Gleichung dritten Grades, die mit dem Computer gelöst werden kann. Der Durchmesser, der zu einer in diesem Modell optimalen Dose führt, beträgt hiermit etwa $d \approx 9,8 \text{ cm}$ mit Berücksichtigung der Falzzuschläge. Dadurch ergibt sich für die Höhe h nun $h = 12,3 \text{ cm}$.

(4) *Konfrontation mit der Realität:* Somit ist diese Dose deutlich höher als breit, weicht also (ob geänderter Voraussetzungen im Modell) von der Bedingung $h = d$ deutlich ab. Nun aber weichen die errechneten Abmessungen nicht mehr wesentlich von den realen ab, wir haben also durch eine Verbesserung und Verfeinerung des Modells ein besseres Abbild der Realität zustande gebracht. Die verbliebene Abweichung hat nahezu keinen Einfluss auf den Mehrverbrauch an Material, wie Danckwerts/Vogel nachrechnen: Der prozentuale Mehrverbrauch liegt unter einem Promille.⁴⁵ Es lässt sich wiederum mittels Differentialrechnung zeigen, dass der Materialverbrauch unter Beachtung von Falzzuschlägen z_h zur Höhe und z_d zum Durchmesser dann minimal wird, wenn $h = d + z_d + z_h$ gilt.

Jäger stellt nun weitere Verfeinerungen des Modells vor, also ein erneutes Durchschreiten des Modellbildungskreislaufes. So sind aus Stabilitätsgründen Boden und Deckel oft aus dickerem Blech gefertigt als der Mantel, wobei das Dickenverhältnis bei ca. 1,2 liegt. Hier liefert das Modell schließlich eine etwas schlankere (und in weiterer Folge deshalb etwas höhere) Dose als in der Praxis. Diese in Summe recht

⁴⁵ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 202.

guten Übereinstimmungen sollen aber auch nicht zu einem Abbruch der Überlegungen führen. Jäger stellt fest, dass sich die bisherigen Modelle eine Schwäche teilen: „Es beruht auf der Identifizierung von ‚minimalen Kosten‘ mit ‚minimalem Materialverbrauch‘. Zwar ist der unmittelbare Materialverbrauch der wichtigste Faktor bei den Materialkosten, aber nicht der einzige!“⁴⁶ So kann man in weiterer Folge auch den Verschnitt mit einbeziehen, da gerade beim Ausstanzen der kreisrunden Deckel und Böden (sogenannten „Ronden“) doch mehr Verschnitt entsteht als beim Ausstanzen der rechteckigen Teile des Mantels (hier ist der Verschnitt in der Regel nicht größer als 1%). Zwischen den Ronden und am Rand muss aus technischen Gründen ein Steg von etwa 1,5 mm Breite stehen bleiben (vgl. Abb. 16).

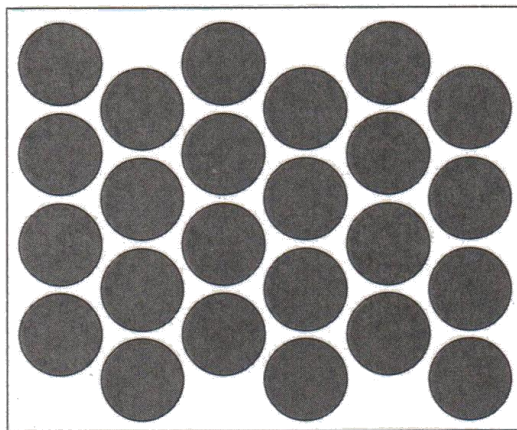


Abb. 16: Blechtafel mit auszustanzenden Ronden. Aus: Jäger 1997, S. 55.

Abb. 17 zeigt, wie man den Verschnitt in der Mitte einer Blechtafel berechnen kann, aus der diese Ronden heraus gestanzt werden sollen. Man fasst dazu je vier Ronden zusammen, wobei die Mittelpunkte dieser vier Ronden eine Raute bilden. Man braucht also für die Herstellung einer Ronde Blech von der Größe dieser Raute. Demnach ist der Verschnitt pro Ronde gleich dem Flächeninhalt der Raute abzüglich des Inhalts einer Ronde.

⁴⁶ Jäger 1997, S. 55.

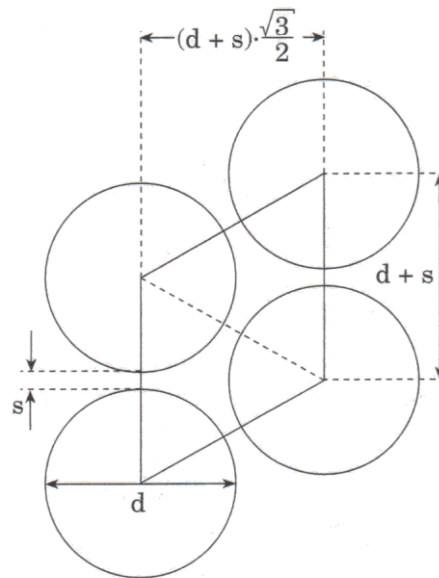


Abb. 17: Berechnung des Verschnitts. Aus: Jäger 1997, S. 55

In weiterer Folge ergibt sich schließlich, dass die Materialkosten für eine Dose mit einem Volumen von 916 ml unter Berücksichtigung der Falzzuschläge und des Verschnitts minimal ist, wenn $d = 9,5$ cm und $d = 13,0$ cm ist.

Das fortwährende Durchlaufen des Modellbildungskreislaufes, also das Verfeinern der Modelle, hat aber auch seine Grenzen: Einerseits werden Modelle immer komplexer, je mehr beachtet werden soll, andererseits ist eine präzise mathematische Lösung kaum möglich, weil man etwa wissen müsste, wie viele Spalten und wie viele Ronden pro Spalte eine Blechtafel haben soll. Außerdem sind die Hersteller meist an Normen gebunden, die oftmals historisch gewachsen sind und nicht immer an Fragen der Materialkosten gebunden waren. Außerdem werden bislang Fragen der Lagerung (wenig Stellfläche etc.) oder des Transports (Transportpaletten etc.) nicht beachtet, auch das verwendete Werkzeug kann entscheidend sein. So wird das Werkzeug zum Herausstanzen kreisrunder Ronden wesentlich teurer sein als das Werkzeug für das Stanzen von rechteckigen Mantelteilen, weshalb auch oft für Dosen unterschiedlichen Volumens die Böden- und Deckelmaße ident sind. Auch werden oftmals Deckel und Boden nicht nur dicker gehalten, sondern gänzlich aus anderem Material gefertigt (etwa Aluminium, relativ teuer) im Gegensatz zum Mantel (Weißblech, relativ billig). Auch kann es gewollt sein, dass die Mantelfläche größer ist, um mehr Werbefläche zur Verfügung zu haben. All diese Faktoren wurden bisher nicht berücksichtigt, sollen aber einen Einblick geben, inwieweit Modellierungsprozesse vordringen können, aber auch

zu verstehen geben, dass ein Modell niemals die Wirklichkeit in all ihren Facetten beschreiben kann und daher auch nie eine präzise mathematische Lösung existieren kann – manche Voraussetzungen sind etwa eben gar nicht bekannt oder bereits durch Normen und Vorschriften vorgegeben.

3 Extremwertaufgaben in der Schule

Die traditionelle Kurvendiskussion hat im Analysisunterricht der Schule eine unangefochtene Stellung, weist aber die Tendenz auf, in der algorithmischen Orientierung zu erstarren. Bereits durch leichte Adaptionen kann der Unterricht aber fruchtbarer sein: Danckwerts/Vogel schlagen vor, die Aufmerksamkeit auf eine stärkere Betonung qualitativer Elemente der Kurvendiskussion, auf die Einbeziehung von Sachkontexten, auf die konsequente Nutzung der Rechnermacht und auf die Einbeziehung divergenter Elemente bei der Aufgabenstellung zu richten.⁴⁷ Extremwertaufgaben werden in weiterer Folge aufbauend auf den Kalkül der Kurvendiskussion in den Unterricht eingeführt. Vielen Schülerinnen und Schülern ist aber der Zusammenhang nicht klar. Eine stärkere Verzahnung von Kurvendiskussion und Extremwertaufgaben kann hier Abhilfe schaffen, etwa das Beispiel des optimalen Milchpackerls oder der optimalen Dose, die in Kapitel 2.5 und 2.6 bereits vorgestellt worden sind, mit dessen Behandlung man in natürlicher Weise im Herzen der Kurvendiskussion ist.⁴⁸

Im folgenden Kapitel soll nun erläutert werden, ob Extremwertaufgaben in der jetzigen Form überhaupt noch zeitgemäß sind, welche Probleme und Schwierigkeiten durch die schulklassische Einführung begründet sind. Es soll gezeigt werden, dass durch das Einbeziehen traditionell vernachlässigter Aspekte wie dem Computereinsatz, elementarer Lösungsmethoden (in manchen Schulbüchern) und historischer Problemstellungen (Euklid, Kepler und Fermat beispielsweise) ein fruchtbareres und nachhaltigeres Lernen möglich wird und die Extremwertaufgaben nicht in ihrem schulklassischen Schema – dem Nullsetzen der ersten Ableitung – erstarren. Es soll einerseits gezeigt werden, was Extremwertaufgaben zum Nachdenken sein können, andererseits was diese spezielleren Aufgaben für die Schülerinnen und Schüler an Mehrwert bedeuten.

⁴⁷ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 164-165

⁴⁸ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 154

3.1 Problematik und Wege der Öffnung

Extremwertaufgaben sind aus dem schulischen Mathematikunterricht nicht wegzudenken. Sie stehen im österreichischen Lehrplan für die 7. Klasse unter dem großen Punkt „Differentialrechnung“. Sie werden als eigener Unterpunkt „Lösen von Extremwertaufgaben“ geführt, wohingegen das Newton'sche Näherungsverfahren oder das Approximieren von Funktionen durch Taylor-Polynome, die ebenso in Schulbüchern ihren Platz finden, schlicht als „Kennenlernen weiterer Anwendungen der Differentialrechnung“ zusammengefasst werden.⁴⁹ Extremwertaufgaben im schulklassischen Sinn stellen demnach in der 7. Klasse vor allem ein Beispiel der Anwendung der Differentialrechnung dar, wie auch der Blick auf den Lehrplan beweist. Dabei gehören Extremwertaufgaben auch zu den Optimierungsaufgaben, da schließlich immer eine Größe optimiert werden soll. Dabei gilt es aber zu bedenken, dass die Differentialrechnung nur *ein* Werkzeug darstellt, das herangezogen werden kann, um Optimierungsaufgaben zu lösen. Dass schulklassische Extremwertaufgaben auch durch andere Lösungsmethoden als der Differentialrechnung gelöst werden können, soll auch das folgende Kapitel 3.2 „Extremwertaufgaben mit elementaren Lösungsmethoden“ verdeutlichen.

Durch die Einordnung von Extremwertaufgaben in das Gebiet der Optimierungsaufgaben, die meist durch Anwenden der Differentialrechnung gelöst werden sollen, ergibt sich dadurch folgendes Schaubild für die Verortung von schulklassischen Extremwertaufgaben:

⁴⁹ Vgl. Bundesministerium für Bildung und Frauen (BMBF) (o.J.): Lehrplan Mathematik Oberstufe. https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2, zuletzt abgerufen am 20.11.2015.

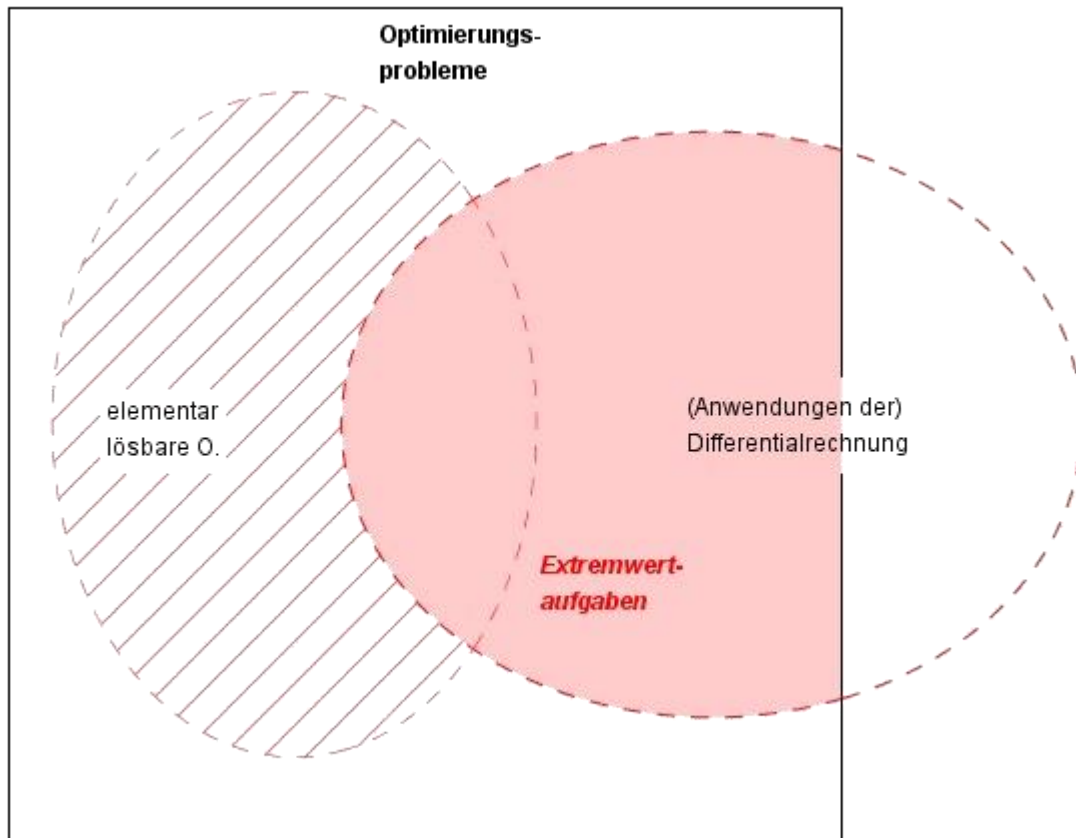


Abb. 18: Verortung von (schulklassischen) Extremwertaufgaben. Eigene Darstellung (GeoGebra).

Extremwertaufgaben, die in der Sekundarstufe II behandelt werden, sollen zumeist mit der Differentialrechnung gelöst werden, schließlich sieht der Lehrplan wie bereits erwähnt Extremwertaufgaben als Unterpunkt der Differentialrechnung. Manche Extremwertaufgaben können dabei auch mit elementaren Methoden gelöst werden. Es gibt natürlich auch Optimierungsprobleme, die nicht mit der Differentialrechnung gelöst werden können. Im schulischen Kontext der Extremwertaufgaben spielen derartige Optimierungsprobleme aber keine (große) Rolle, hier steht der Aspekt der Differentialrechnung im Vordergrund. Dort wo elementare Methoden zur Lösung wesentlich beitragen können, sollen sie aber auch im Unterricht erwähnt werden.⁵⁰

Extremwertaufgaben sind demnach im schulischen Kontext Optimierungsaufgaben, die meist mit der Differentialrechnung gelöst werden. Dieser Umstand sorgt bei Schülerinnen und Schülern für zwei Probleme: Einerseits wird nicht erkannt, dass das

⁵⁰ Vgl. hierzu vor allem das Kapitel 3.2.1 „Symmetrie als Lösungsmethode“.

schulklassische Lösen von Extremwertaufgaben einerseits mit der Differentialrechnung und in weiterer Folge mit den Kurvendiskussionen in starkem Zusammenhang stehen. Außerdem besteht die Gefahr, dass die Schülerinnen und Schüler Optimierungsprobleme ausschließlich mit den Extremwertaufgaben in Verbindung bringen, dementsprechend zur Lösung von Optimierungsproblemen immer unreflektiert und instinktiv auf den Differentialkalkül zurückgreifen, auch wenn etwa elementare Lösungsmethoden schneller und einfacher zu handhaben wären. Dies ist ein weiteres Problem, das nicht nur den Extremwertaufgaben immanent ist, aber gerade hier deutlich in Erscheinung tritt: Extremwertaufgaben verkommen in der Schule oftmals zu einem bloßen Abarbeiten eines vorher eingelernten Schemas, die Idee des Optimierens wird nicht als fundamentale Idee empfunden und zieht sich auch nicht durch verschiedene Schulstufen.⁵¹

Die beiden eben erwähnten Probleme treten dabei tatsächlich im schulischen Mathematikunterricht auf. So zeigte eine Untersuchung von Humenberger im Zuge seiner Habilitation, dass vielen Schülerinnen und Schülern der Zusammenhang zwischen Differentialrechnung, „gewöhnlicher“ Kurvendiskussion und den Extremwertaufgaben nicht klar ist. So stufen sie Extremwertaufgaben nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Prozentrechnung und dem Rechnen (insbesondere der Grundrechnungsarten) auf Platz vier der anwendbaren mathematischen Gebiete ein, wohingegen die Differentialrechnung abgeschlagen auf Platz 15 landete. Dagegen nannten Schülerinnen und Schüler aber auch als nicht anwendbare mathematische Gebiete die Kurvendiskussion auf Platz drei, die Differentialrechnung auf Platz vier und die Extremwertaufgaben auf Platz 9.⁵² Humenberger schlussfolgert daher, „daß Schüler Extremwertaufgaben offenbar losgelöst von Differentialrechnung sehen und sie auch ganz anders (als brauchbarer!) einstufen“⁵³.

Dass Extremwertaufgaben bei manchen Schülerinnen und Schülern beliebt sind und als anwendbar angesehen werden mag daran liegen, dass das Optimieren, die Suche nach dem Perfekten und dem Besten, auch im alltäglichen Leben eine große Rolle spielt: Wir wollen das Beste aus dem Tag machen, die Zeit optimal nutzen, das Geld

⁵¹ Vgl. Humenberger 2010, S. 44

⁵² Vgl. Humenberger 1997, S. 21-23

⁵³ Humenberger 1997, S. 22

einträglich und sicher anlegen, so wenig Steuern wie möglich zahlen. Kurz: Wir wollen maximalen Nutzen mit minimalem Einsatz erzielen – Extremwertaufgaben sind uns geläufig. Gerade für Schülerinnen und Schüler üben oft allein Wörter wie „am schnellsten“, „am besten“, „am längsten“ oder „am größten“ einen unglaublichen Reiz aus, der didaktisch ausgenützt werden sollte. Bereits Schülerinnen und Schüler in der ersten Klasse (also der fünften Schulstufe) haben ein ausgesprochenes Interesse an Superlativen und Rekorden, was den Lehrkräften den Auftrag gibt, Optimieren immer wieder („spiralförmig“) einzubauen.^{54,55} Auch die Natur strebt nach dem Optimum, wie etwa das Beispiel der Bienenwabe zeigt.⁵⁶ Die fast ausschließliche Verortung von Optimierungsproblemen im schulischen Analysisunterricht birgt aber Probleme: Es besteht die Gefahr einer verengten Sicht, was gleichermaßen für die Vielfalt an Problemstellungen wie auch den Reichtum an Methoden gilt.⁵⁷ So können im Unterricht in den verschiedensten Schulstufen Optimierungsprobleme behandelt werden, die durch elementare Methoden oftmals sogar leichter zu lösen sind. Der Ableitungskalkül soll nicht als einzige mögliche Methode in Erinnerung bleiben, sondern vielmehr ein kleiner Teil einer größeren Leitlinie, dem Optimieren, sein. So schreibt Schupp zusammenfassend: „Die Begegnung mit dem Optimieren als zentraler und aktueller mathematischer Aktivität erfolgt in unseren Schulen zu spät (für viele Schüler überhaupt nicht) und wenig repräsentativ.“⁵⁸ Hier äußert sich das zweite angesprochene Problem.

Es stellt sich die Frage, ob die Extremwertaufgaben mit technischen Hilfsmitteln wie Computer und leistungsfähigen Taschenrechnern überhaupt noch zeitgemäß sind, wenn Schülerinnen und Schüler bloß ein gewisses stur auswendig gelerntes Schema wiederholen. Extremwertaufgaben sind – wie bereits erwähnt – im Lehrplan der AHS Oberstufe als eigener Punkt verankert, somit sind diese auch im Unterricht zu behandeln, um den Lehrplan zu erfüllen. Die Frage nach der Sinnhaftigkeit der Behandlung dieses Aufgabentypus wird jedoch nicht durch den Lehrplan beantwortet. Als Argument gegen die in der Schule üblichen Funktionsuntersuchungen im Allgemeinen und die Lösung von Extremwertaufgaben mittels Differentialrechnung im Speziellen wird angeführt, dass diese gekünstelt und praxisfern seien. In der Praxis ist

⁵⁴ Vgl. Humenberger 1995, S. 183

⁵⁵ Vgl. hierzu auch Kapitel 3.6 der vorliegenden Arbeit, bzw. Bruner 1970 und Bruner 1973.

⁵⁶ Vgl. Vogel 2010, S. 4

⁵⁷ Vgl. Danckwerts/Vogel 1986, S. 24

⁵⁸ Schupp 1997, S. 4

man oft nur am ungefähren Verlauf des Funktionsgraphen interessiert, dieser lässt sich mit einem Computer problemlos feststellen. Außerdem funktionieren die Methoden der Differentialrechnung natürlich nur dann, wenn eine Termdarstellung der Funktion vorliegt.⁵⁹ Dementsprechend vertreten Bürger/Malle den Standpunkt, dass „[i]n der gedankenlosen Form [...] wir die Durchführung von Extremwertaufgaben mit Differentialrechnung nicht für sinnvoll [erachten]“⁶⁰. Als gewichtiges Argument für eine Beibehaltung der Extremwertaufgaben in anderer Form ist das Bedürfnis nach Anwendungen der Differentialrechnung zu erwähnen. Hier wird eindrucksvoll gezeigt, welch wirkungsvolles Werkzeug die Differentialrechnung sein kann. Auch Kirchgraber schreibt, dass das Lösen von Extremwertaufgaben und das Durchführen von Kurvendiskussionen durchaus „respektable Ziele“ sind: „Optimierungsaufgaben sind von großer theoretischer und praktischer Bedeutung, wenn es auch in der Praxis selten vorkommt, daß eine Zielfunktion nur von einer einzigen Variablen abhängt. Die klassische Kurvendiskussion ist keineswegs bedeutungslos.“⁶¹ Durch das Aufkommen von modernen Taschenrechnern sowie Computern ist es nun wichtig, die geänderten Vorzeichen zu berücksichtigen: „Im Vortechnologiezeitalter war der Begriff des Graphen eine Konstruktion, die nur ganz schwach durch Versinnbildlichungen gestützt werden konnte. Als Ausgangspunkt dienten einige wenige, durch einfache Terme definierte Funktionen. Für sie wurden überaus rudimentäre Wertetabellen erstellt. Die paar Punkte, die sich daraus ergaben, mußten genügen, um das Konstrukt Graph mental zu erzeugen.“⁶² In dieser Zeit war auch die Differentialrechnung ein mächtiges Instrument. Heutige Technologie ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern aber, in Sekundenbruchteilen selbst mit bescheidenen Mitteln „ein Artefakt [zu] erzeugen, das zwar *im Prinzip* keinen Deut besser ist als was ehemals aus kleinen Wertetabellen gewonnen wurde, das aber *de facto* dem mentalen Konstrukt Graph zum Verwechseln ähnlich sieht“⁶³. Die Kurvendiskussion wird damit durch leicht verfügbare Technologie trivialisiert, dass die ursprüngliche Legitimation verloren geht, wenn man nur das Produkt und nicht den zugrundeliegenden Prozess betrachtet. Auch die Segmentierung des Unterrichts – zuerst werden lineare Funktionen, dann allmählich

⁵⁹ Vgl. Malle 1996, S. 62

⁶⁰ Bürger/Malle 2000, S. 59

⁶¹ Kirchgraber 1999, S. 112.

⁶² Kirchgraber 1999, S. 112.

⁶³ Kirchgraber 1999, S. 112 (Hervorhebung wie im Original).

quadratische und schließlich rationale Funktionen behandelt⁶⁴ – erscheint Kirchgraber diesbezüglich als kaum noch denkbar, weil es für Schülerinnen und Schüler verlockend ist, mit verschiedensten Termen zu experimentieren. Damit kommen sie auch früher mit diesen zentralen Eigenschaften von Kurven wie Extrempunkten, Monotonie- und Krümmungsverhalten oder Nullstellen in Berührung.⁶⁵

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass mit der Behandlung von Extremwertaufgaben auch Probleme einhergehen: Den Schülerinnen und Schülern muss einerseits klar sein, dass die schulklassischen Extremwertaufgaben auf den zuvor erlernten Werkzeugeschatz der Differentialrechnung und in weiterer Folge der Kurvendiskussionen zurückgreifen. Andererseits sollte im Unterricht auch thematisiert werden, dass der Ableitungskalkül nicht die einzige Möglichkeit ist, Optimierungsaufgaben zu lösen. Weiters ist zu beachten und den Schülerinnen und Schülern zu vermitteln, dass alleine durch Betrachten der mittels Computer oder Taschenrechner geplotteten Funktion bereits Extremstellen und deren ungefähre Lage erahnt werden können. Danckwerts/Vogel identifizieren dabei vier ihres Erachtens vernachlässigte Aspekte bei der Behandlung von Extremwertaufgaben, die auch im Rahmen der vorliegenden Arbeit immer wieder thematisiert werden: die Kraft elementarer Methoden, Einbeziehung historischer Momente, Aktivitäten zur Modellbildung und die Nutzung des Computers.^{66,67}

3.2 Extremwertaufgaben mit elementaren Lösungsmethoden

Extremwertaufgaben lassen sich nicht nur mittels des Ableitungskalküls lösen, es gibt auch elementare Lösungsmethoden, die oftmals schneller und leichter nachzuvollziehen sind. In diesem Subkapitel sollen daher elementare Lösungsmethoden vorgestellt werden.

⁶⁴ Auch aus lernpsychologischen Gründen sei diese Unterrichtsdisposition bereits fragwürdig, argumentiert Kirchgraber weiter. Vgl. Kirchgraber 1999, S. 113.

⁶⁵ Vgl. Kirchgraber 1999, S. 112-113.

⁶⁶ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 208.

⁶⁷ In Kapitel 3.5 werden diese vier vernachlässigten Aspekte nochmals genauer thematisiert.

Hier gilt es zu bedenken, dass derartige Aufgaben, denen Optimieren als Kern innewohnt, bereits viel früher als die schulklassischen Extremwertaufgaben mittels Ableitungskalkül im Unterricht behandelt werden können. Gerade im Sinne eines spiralförmigen Curriculums⁶⁸ kann und soll sich Optimieren als Leitidee durch die verschiedensten Schulstufen ziehen. Optimierungsaufgaben können also schon mit elementaren Methoden vor der Differentialrechnung bearbeitet werden, weshalb im Folgenden nun verschiedene Lösungsmethoden behandelt werden sollen. Optimieren ist also nicht auf die Differentialrechnung beschränkt, viele Aufgaben passen sogar besser zu anderen Bereichen als zur Differentialrechnung.⁶⁹ So könne man das isoperimetrische Problem für Rechtecke eher in der Elementargeometrie verorten als in die Differentialrechnung.⁷⁰ Dies soll im Laufe dieses Subkapitels auch erfahrbar werden.

3.2.1 Symmetrie als Lösungsmethode

Symmetrie kann helfen, Lösungswege für Probleme zu finden, die sonst komplizierter und langwieriger zu lösen wären, wie etwa das allseits bekannte Beispiel von Gauß zeigt, der die Zahlen von 1 bis 100 in vorteilhafter Weise addiert hat und in gewisser Weise eine Art „Symmetrie“ beim Rechnen entdeckte. Gerade im Bereich der Extremwertaufgaben bzw. Optimierungsaufgaben können Überlegungen zur Symmetrie hilfreiche Dienste erweisen, wie das folgende Beispiel aus einem Schulbuch vorab deutlich machen soll⁷¹:

Bei einem Wettbewerb läuft jede Starterin vom Start zum Ziel. Dazwischen muss sie von einem Bach Wasser in eine Flasche füllen. Entnimm die Entfernungen der Zeichnung.

Welche Stelle am Bach muss angepeilt werden, damit der Weg möglichst kurz ist? Skizziere den Graphen der Zielfunktion im Intervall von 0 bis 160 und

⁶⁸ Vgl. Bruner 1970, Bruner 1973 und Kapitel 3.6 der vorliegenden Arbeit.

⁶⁹ Humenberger schränkt aber zugleich ein, dass dies nur ein subjektives Argument ist.

⁷⁰ Vgl. Humenberger 2010, S. 50

⁷¹ Bleier et al. 2011, S. 143 (Dimensionen 7, Bsp. 413)

zeichne die Stelle der gesuchten Lösung ein. Wie groß sind die Extrema am Rand des Intervalls?

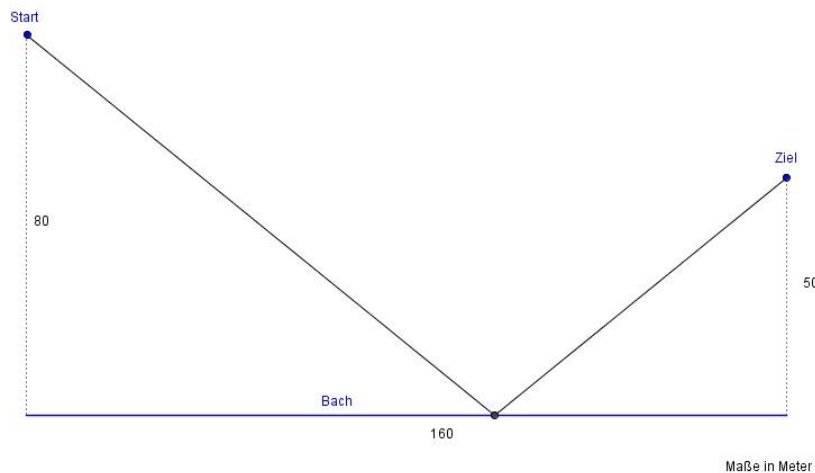


Abb. 19: Laufwettbewerb. Eigene Darstellung (GeoGebra). In Anlehnung an: Bleier et al. 2011, S. 143.

Dieses Beispiel kann mittels Ableitungskalkül gelöst werden, schneller und anschaulicher ist es aber wohl, wenn Überlegungen zur Symmetrie als Lösungsmethode verwendet werden. Indem man den Punkt des Ziels an der Geraden, die den Bach symbolisieren soll, spiegelt, wird die Symmetrie augenscheinlich. Es wird außerdem sichtbar, dass hier der Strahlensatz verwendet werden kann, die graphische Lösung außerdem auch das bekannte Teilen einer Strecke (mittels Strahlensatz) darstellt. Die graphische Lösung sieht nun wie folgt aus:

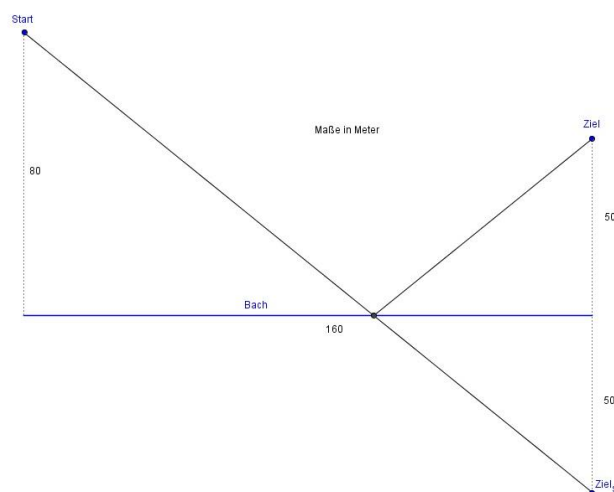


Abb. 20: Laufwettbewerb. Eigene Darstellung (GeoGebra). In Anlehnung an: Bleier et al. 2011, S. 143.

Das exakte Lösen dieses Beispiels ist nun mittels Strahlensatz kein Problem, wohingegen sich dies mittels Ableitungskalkül doch schwieriger darstellt. Durch Anwendung des zweiten Strahlensatzes ergibt sich folgende Lösung (x bezeichnet dabei den linken Teil des Baches):

$$80 : 50 = x : (160 - x)$$

$$80 \cdot (160 - x) = 50x$$

$$12800 - 80x = 50x$$

$$130x = 12800$$

$$x = \frac{1280}{13} \approx 98,46$$

Hier ist natürlich anzumerken, dass (weil auch intuitiv klar) hier von der Richtigkeit der Spiegelung als optimale Lösung ausgegangen wird. Im folgenden Subkapitel 3.2.2 wird aber die Richtigkeit dieses Lösungsansatzes mit der Dreiecksungleichung bewiesen, also durch eine weitere elementare Lösungsmethode.

Anhand der graphischen Lösung wird ersichtlich, dass der „kürzeste Weg“ auch dem Reflexionsgesetz genügt, und dass jeweils das eine das andere zur Folge hat, dass beide äquivalent sind.⁷² Somit kann in weiterer Folge diskutiert werden, dass dieselbe Lösungsmethode anwendbar ist, wenn stattdessen etwa ein Lichtstrahl und ein Spiegel oder eine Billardkugel und eine Bande erwähnt werden. Das Lösen mittels Ableitungskalkül, das im Folgenden nun vorgestellt werden soll, gibt die Symmetrie dahinter jedoch nicht zu erkennen, wie Humenberger/Reichel zu bedenken geben: „Die Symmetrie läßt auch das ‚Wesen des Punktes‘ erst erkennen, das bei einer Lösung durch Differentialrechnung noch immer im Verborgenen bliebe, obwohl ein geschlossener Term (abhängig von a und b) die Lage des Punktes P genau angeben würde! Dies ist auch der Grund, warum u.E. Differential- und Vektorrechnung für diese Aufgabe ‚nicht adäquat‘ sind.“⁷³

Durch zweimalige Anwendung des Satzes von Pythagoras ergibt sich hiermit: (Die letzte Umformung ist vor allem für das händische Ableiten notwendig.)

⁷² Vgl. Humenberger/Reichel 1995, S. 241

⁷³ Humenberger/Reichel 1995, S. 241

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{80^2 + x^2} + \sqrt{(160 - x)^2 + 50^2} = \\
 &= \sqrt{6400 + x^2} + \sqrt{25600 - 320x + x^2 + 2500} = \\
 &= \sqrt{6400 + x^2} + \sqrt{28100 - 320x + x^2} = (6400 + x^2)^{\frac{1}{2}} + (28100 - 320x + x^2)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Das händische Ableiten wird hier bereits sehr mühsam, im Schulbuch findet sich die Aufgabe daher konsequenterweise unter dem Punkt „Aufgaben mithilfe eines elektronischen Tools lösen“. Das Aufsuchen des Extremums, also das Nullsetzen der ersten Ableitung, ist händisch noch weit mühsamer, ist daher bevorzugt mit elektronischer Hilfe zu lösen. Es ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot (6400 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot (28100 - 320x + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-320 + 2x) = \\
 &= \frac{x}{\sqrt{6400+x^2}} + \frac{x-160}{\sqrt{28100-320x+x^2}}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{ an der Stelle } x = \frac{1280}{13} \text{ mit } f\left(\frac{1280}{13}\right) = 50 \cdot \sqrt{17}.$$

Im Vergleich zur Lösung mittels Strahlensatz wird hier deutlich, dass hier die geometrische Bedeutung und damit die dem Beispiel innewohnende Anschauung völlig verloren geht, wie bereits oben angedeutet werden sollte, andererseits der Ableitungskalkül hier zu mühsamen und langwierigen – wenn per Hand gerechnet – Rechnungen führt. Dieses Beispiel, das die Kraft des Ableitungskalküls demonstrieren soll, zeigt paradoxerweise vielmehr die Kraft elementarer Lösungsmethoden.

Ein ähnlich gelagertes Beispiel findet sich in Götz/Reichel (2011): Mathematik 7. In diesem Schulbuch wird aber bereits vorab ein Subkapitel „Ohne Differentialrechnung lösbare Aufgaben“ angeführt, weiters zeigt die Skizze bereits die Idee der Symmetrie zur Lösung.

Zwei Gebäude A und B mit einer gegenseitigen Entfernung $c = 130$ m liegen $a = 50$ m bzw. $b = 100$ m von dem geradlinigen Ufer eines Flusses entfernt. Die Bewohner des einen Hauses eilen zum Wasser, um mit dort gefüllten Kübeln beim Löschen des brennenden benachbarten Gebäudes zu helfen.

1) Berechne, 2) konstruiere den kürzesten Weg, den sie nehmen können!

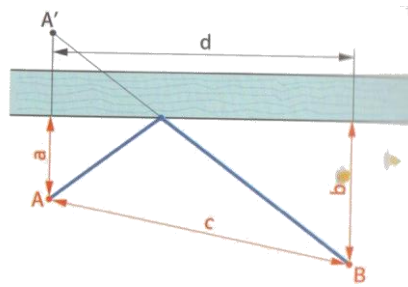


Abb. 21: Löschen eines Brandes. Aus: Götz/Reichel 2011, S. 152.

Hier wird demnach auf die Symmetrie Bezug genommen, auch das Konstruieren der Lösung soll die geometrische Bedeutung dieses Beispiels deutlich machen. Anhand dieses Beispiels sollte gezeigt werden, dass elementare Lösungsmethoden – in diesem Fall Überlegungen zur Symmetrie – durchaus ihren Platz bei Optimierungsaufgaben haben, und vor allem bereits vor den Extremwertaufgaben mit Ableitungskalkül gelöst werden können.

Gerade die klassischen „Einsteiger-Aufgaben“ sind oft bereits mittels Symmetrie-Überlegungen allein lösbar. Ist einmal gezeigt, dass das Quadrat das flächengrößte Rechteck mit konstantem Umfang ist, so können etwa folgende zwei Beispiele gelöst werden, die wohl in beinahe jedem Schulbuch in analoger Form zu finden sind:

An eine Mauer angrenzend soll mit 20m Drahtzaun ein rechteckiges Areal so eingezäunt werden, dass sein Flächeninhalt möglichst groß ist. Ist das Areal quadratisch zu wählen? Wenn nicht, wie lang müssen seine Seitenlängen gewählt werden?⁷⁴

An dieser Stelle soll noch angemerkt werden, dass die Fragestellung fruchtbar ist, ob die Einzäunung quadratisch zu wählen ist oder nicht. Hier soll bereits reflektiert werden und wird mit den Ergebnissen gearbeitet, dass das flächengrößte Rechteck mit konstantem Umfang das Quadrat ist. Die Lösung des oben formulierten Problems ist natürlich kein Quadrat, sondern ein Rechteck, das doppelt so lang wie breit ist. Durch Spiegelung an der Hausmauer muss sich nämlich wieder ein Quadrat ergeben.

⁷⁴ Malle et al. 2011, S. 68, Bsp. 3.117

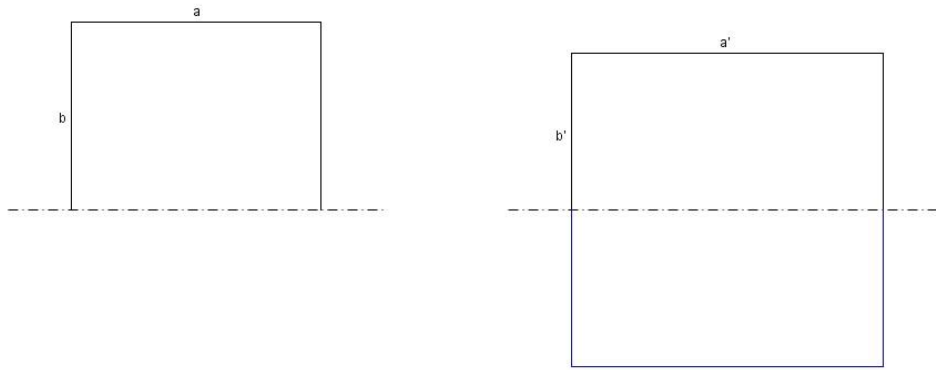


Abb. 22: Lösung durch Symmetrie, eigene Darstellung (GeoGebra).

Eine Adaption des Beispiels stellt nun das folgende dar:

In einer Mauerecke soll mit 40m Maschendraht ein rechteckiges Areal wie in nebenstehender Abbildung abgegrenzt werden. Wie sind die Seitenlängen zu wählen?⁷⁵

Auch hier gilt, dass durch zweimaliges Spiegeln wieder ein Quadrat entstehen muss, also durch Spiegeln an den beiden Hausmauern. Dadurch ergibt sich Folgendes:

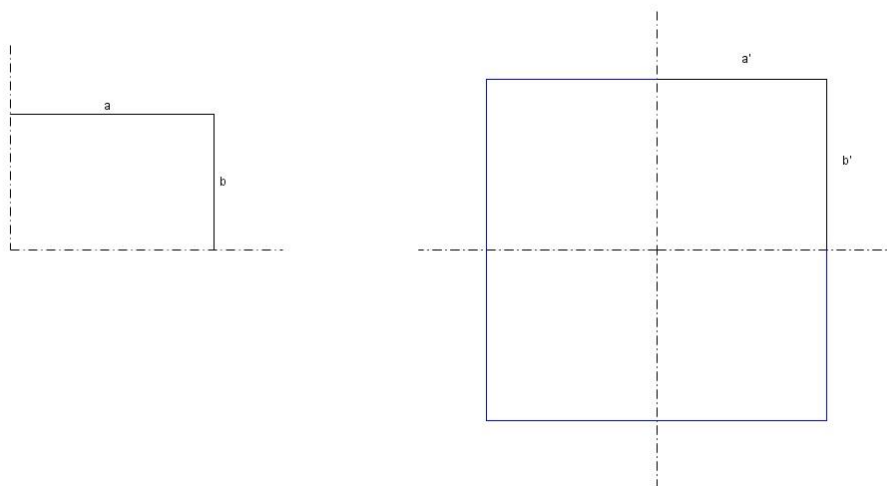


Abb. 23: Lösung durch Symmetrie, eigene Darstellung (GeoGebra).

Weitere Beispiele, die in so gut wie allen Schulbüchern vorkommen, sind Beispiele zu Kanälen oder Rinnen, die aus einer festen Anzahl von Brettern oder Platten gebaut werden sollen, bzw. aus einem großen Blech gebogen werden sollen.

⁷⁵ Malle et al. 2011, S. 68, Bsp. 3.118

Aus einer rechteckigen Blechtafel von 40cm Breite ist eine Rinne mit nebenstehendem Querschnitt anzufertigen. Wie groß muss x gewählt werden, damit die Querschnittsfläche möglichst groß wird?⁷⁶

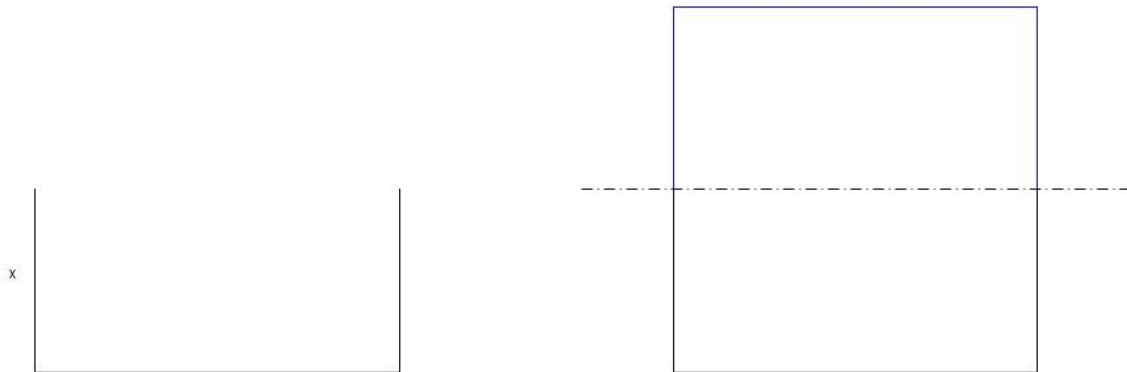


Abb. 24: Lösung durch Symmetrie, eigene Darstellung (GeoGebra).

Diese Rinne ist wie in der Abbildung ersichtlich oben offen und demnach ist diese Aufgabe analog zur Hühnerhof-Aufgabe zu lösen. Ein Beispiel mit einer Rinne, die ebenso durch Spiegelung auf ein Quadrat führt, aber eine leicht abgeänderte Aufgabenstellung aufweist, wäre folgendes:

Aus zwei Brettern der Breite a soll eine Rinne mit möglichst großer dreieckiger Querschnittsfläche hergestellt werden. Wie groß ist der Inhalt der Querschnittsfläche?⁷⁷

Nachdem diese Rinne wie in der Abbildung ersichtlich oben offen ist, muss durch Spiegelung wiederum eine quadratische Querschnittsfläche entstehen (bzw. ein quadratisches Prisma).

⁷⁶ Malle et al. 2011, S. 68, Bsp. 3.116

⁷⁷ Malle et al. 2011, S. 73, Bsp. 3.149

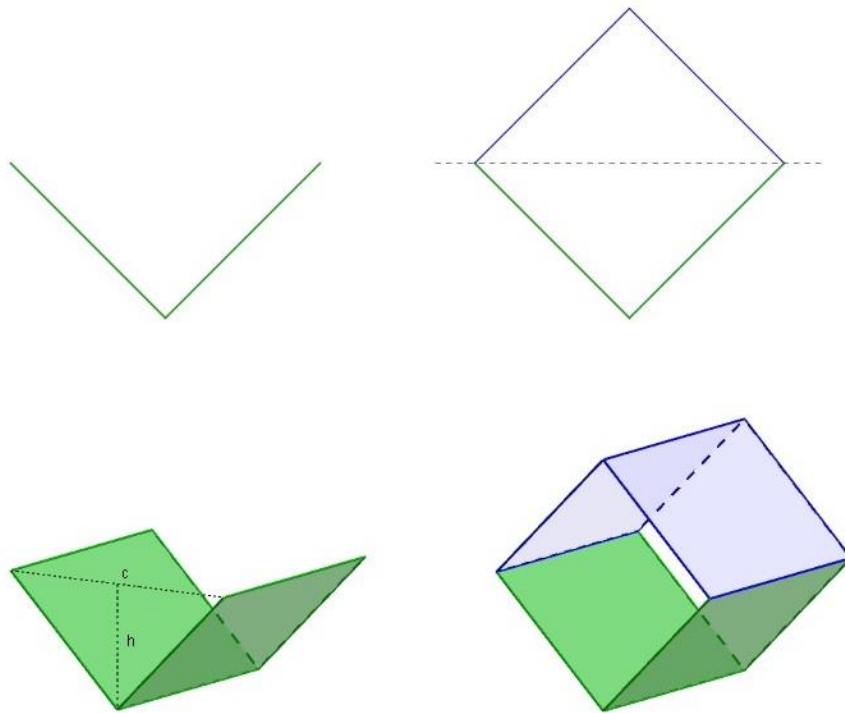


Abb. 25: Rinne im Querschnitt und dreidimensionale Darstellung; Symmetrie als Argument für die Dimensionierung, eigene Darstellung (GeoGebra).

Auch folgende Aufgabe kann schnell und einfach durch Spiegelung gelöst werden:

Aus einem quadratischen Blech soll durch Herausschneiden kleiner Eckquadrate das Netz einer Schachtel mit größtmöglichem Volumen hergestellt werden.⁷⁸

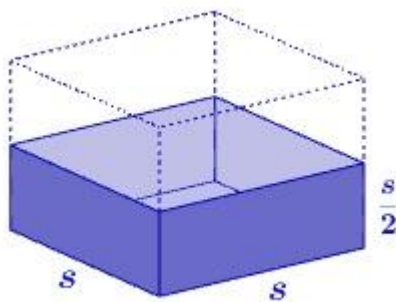


Abb. 26: Oben offene Schachtel. Symmetrie als Argument für die Dimensionierung. Eigene Darstellung (GeoGebra).

Diese oben offene Schachtel ist ein (oben offener) quadratischer Quader. Durch Spiegelung an der (offenen) Deckfläche muss ein Würfel entstehen. Der Würfel ist schließlich der oberflächenminimale quadratische Quader. Dementsprechend gilt, dass die oben offene Schachtel nur halb so hoch wie breit bzw. lang sein muss.⁷⁹ Diese Aufgabe kann man auch beispielsweise mithilfe einer weiteren elementaren Lösungsmethode, nämlich der Mittelungleichung, gelöst werden, wie in Kapitel 3.2.3 gezeigt wird. In

⁷⁸ Humenberger/Reichel 1995, S. 191.

⁷⁹ Vgl. Abb. 26 sowie Roth-Sonnen/Stein/Stengel 2004, S. 88.

weiterer Folge sollen nun weitere elementare Lösungsmethoden ebenso kurz vorgestellt werden.

3.2.2 Dreiecksungleichung

Die Dreiecksungleichung ist ein Satz aus der Geometrie, welcher besagt, dass im Dreieck die Summe zweier Längen mindestens so groß ist wie die Länge der dritten Seite.⁸⁰ Daher gilt formal:

Im Dreieck ist jede Seite kürzer als die beiden anderen zusammen.⁸¹

Nun kann dieser Satz ebenso zur Begründung der Lösung der vorhergehenden Aufgabe verwendet werden. Die Symmetrie wird hier aber ebenso benötigt, dennoch wird zur exakten Begründung zusätzlich zum zweiten Strahlensatz die Dreiecksungleichung verwendet.

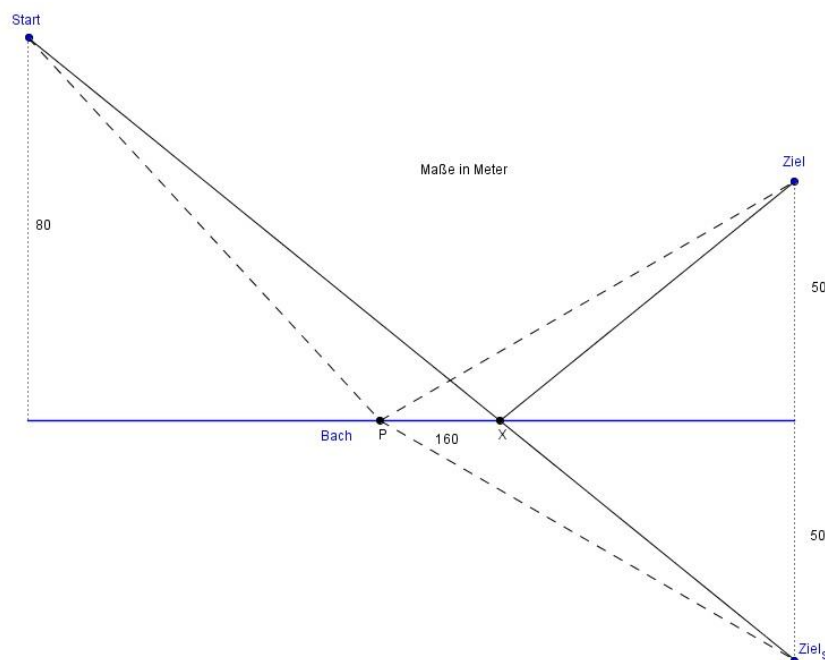


Abb. 27: Dreiecksungleichung, eigene Darstellung (GeoGebra).

⁸⁰ Gleichheit herrscht nur in einem entarteten Dreieck.

⁸¹ Vgl. Schupp 1997, S. 62

Die Lösung des Beispiels wird durch Symmetrieeigenschaften gefunden, ein Beweis der Richtigkeit kann mittels eben erwähnter Dreiecksungleichung erfolgen. Der gesuchte Punkt X sei nun die Lösung, also der Schnittpunkt der Geraden durch Start und das gespiegelte Ziel und der „Bach-Geraden“. Der Start-Punkt soll nun mit S bezeichnet werden, der Ziel-Punkt mit Z , der gespiegelte Ziel-Punkt mit Z' . Für jeden konkurrierenden Punkt $P \neq X$ gilt nun Folgendes:

$$|SP| + |PZ| = |SP| + |PZ'| > |SX| + |XZ'| = |SX| + |XZ|$$

Zur Begründung wurden somit lediglich die Dreiecksungleichung und die Spiegelungseigenschaften verwendet. Analog kann auch gezeigt werden, dass das gleichschenklige Dreieck unter allen Dreiecken mit gleicher Höhe über derselben Strecke den kleinsten Umfang hat.⁸² Dazu ist lediglich der Sonderfall zu betrachten, dass S und Z bzw. Z' den gleichen Abstand von der „Bach-Geraden“ haben, wie die Skizze illustrieren soll:

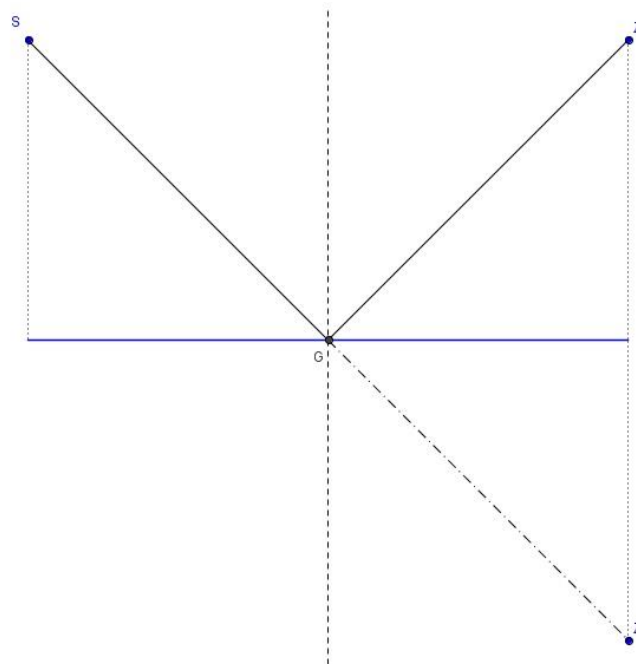


Abb. 28: Spiegelungseigenschaften als Begründung des Sonderfalls des Beispiels, eigene Darstellung (GeoGebra).

⁸² Vgl. Schupp 1997, S. 30

Die blaue „Bach-Gerade“ ist somit eine Mittelparallele im rechtwinkligen Dreieck SZZ' und halbiert SZ' . Daher ist nun auch $|SG| = |GZ|$ und G liegt auf der Mittelsenkrechten von SZ . Nun gilt wieder, dass jeder konkurrierende Punkt $P \neq G$ aufgrund der Dreiecksungleichung einen größeren Umfang des Dreiecks SPZ als der Umfang des Dreiecks SGZ zur Folge hätte.

3.2.3 Mittelungleichung

Das arithmetische Mittel zweier positiver reeller Zahlen ist nie kleiner als deren geometrisches Mittel: $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$ ⁸³

Der Beweis der Mittelungleichung kann dabei sowohl rechnerisch als auch geometrisch erfolgen, etwa durch den Höhensatz oder durch „geschickte“ Einteilung des Flächeninhaltes.⁸⁴ Beim Beweis durch den Höhensatz eignet sich wiederum der Einsatz einer dynamischen Geometriesoftware: Eine Strecke AB soll in zwei Teile p und q geteilt werden.⁸⁵ Ein Halbkreis, dessen Mittelpunkt genau in der Mitte der Strecke AB liegt, geht durch die Punkte A und B . Im rechten Winkel über dem Teilungspunkt T zeichnet man den Punkt C ein. Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck ABC , wobei die Strecke TC die Höhe h auf die Seite AB und die Strecke MC den Umkreisradius r darstellt. Der Umkreisradius r ist halb so lang wie die Strecke AB , also $r = \frac{p+q}{2}$. Den Teilungspunkt T kann man nun verschieben.

Der Höhensatz des Euklid besagt nun, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat über der Höhe flächengleich mit dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten ist, also $h^2 = p \cdot q$. Durch Verschieben des Punktes T entlang der Strecke AB wird klar, dass die Höhe h höchstens so lang sein kann wie der Umkreisradius r , wenn nämlich der Teilungspunkt genau in der Mitte der Strecke AB gewählt wird, also mit dem Mittelpunkt des Halbkreises zusammenfällt. Für jeden anderen konkurrierenden Teilungspunkt auf der Strecke AB gilt, dass die Höhe h kleiner ist als

⁸³ Vgl. Humenberger/Reichel 1995, S. 189

⁸⁴ Vgl. hierzu Humenberger/Reichel 1995, S. 189

⁸⁵ Für den Beweis durch den Höhensatz soll hier die übliche Beschriftung in einem rechtwinkligen Dreieck herangezogen werden, weshalb die Hypotenusenabschnitte mit p und q bezeichnet werden, auch wenn die Mittelungleichung hier mit a und b eingeführt wurde.

der Umkreisradius r . Demnach gilt: $r \geq h$ bzw. $\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{p \cdot q}$. Diese Beziehung lässt sich demnach leicht und anschaulich mittels Höhensatz beweisen.

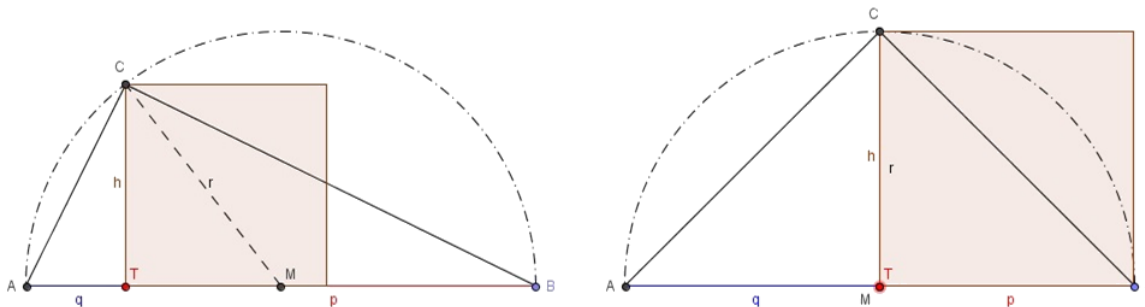


Abb. 29: Beweis der Mittelungleichung durch den Höhensatz. Eigene Darstellung (GeoGebra).

Die Mittelungleichung in der Form

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq a \cdot b$$

sagt beispielsweise aus, dass ein Produkt von Faktoren konstanter Summe dann maximal ist, wenn jeder Faktor die halbe Summe ausmacht, demnach die Faktoren also gleich groß sind. Das entspricht nun genau der Situation des flächengrößten Rechtecks mit konstantem Umfang, eine der beliebtesten Einstiegsaufgaben in die Extremwertaufgaben. In der Form

$$a + b \geq 2 \cdot \sqrt{ab}$$

lässt sich ablesen, dass unter allen Summen $a + b$, deren Summanden ein konstantes Produkt haben, diejenige die kleinste ist, bei deren die Summanden gleich groß sind, also $a = b$ gilt. Diese Form kann nun beim Problem des umfangkleinsten Rechtecks bei vorgegebenem Flächeninhalt benützt werden. Mithilfe dieser Ungleichungen können somit viele Extremalaussagen getätigt und auch begründet werden, auch ohne den Differentialkalkül zu kennen.⁸⁶ Dies zeigt sich vor allem bei der Verallgemeinerung der Mittelungleichung auf n Summanden:

⁸⁶ Vgl. Humenberger/Reichel 1995, S. 190

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Nebst der eben gezeigten geometrischen Bedeutung für $n = 2$ existiert eine geometrische, nämlich räumliche Interpretation für den Fall $n = 3$:

$$\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3 \geq a \cdot b \cdot c$$

Hier zeigt sich, dass der Würfel unter allen Quadern mit gleicher „Kantenlängensumme“ den maximalen Rauminhalt hat. Der Würfel hat außerdem unter allen Quadern mit gleichem Volumen minimale „Kantenlängensumme“:

$$a + b + c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$$

Humenberger/Reichel weisen darauf hin, dass dieses Prinzip auch bei anderen schulklassischen Aufgaben angewendet werden kann, wie etwa der folgenden:⁸⁷

Aus einem quadratischen Blech soll durch Herausschneiden kleiner Eckquadrate das Netz einer Schachtel mit größtmöglichem Volumen hergestellt werden.

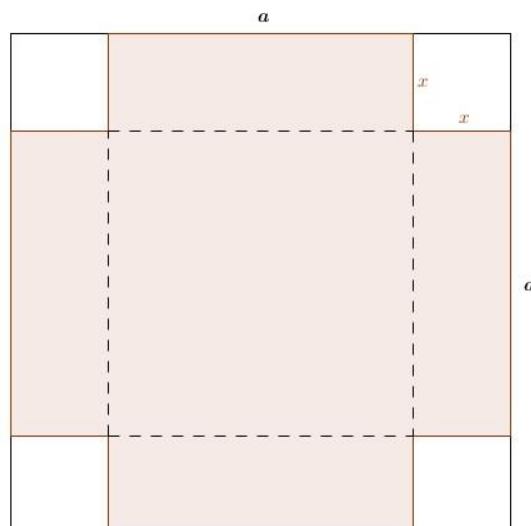


Abb. 30: Faltnetz einer Schachtel. Eigene Darstellung (GeoGebra). Nach: Humenberger/Reichel 1995, S. 190-191.

⁸⁷ Vgl. Humenberger/Reichel 1995, S. 191

Wie in Abb. 30 ersichtlich hat das quadratische Blech die Seitenlänge a , die kleinen herausgeschnittenen Eckquadrate haben die Seitenlänge x . Für das Volumen der Schachtel ergibt sich demnach klarerweise:

$$V = x \cdot (a - 2x) \cdot (a - 2x)$$

Hier haben die drei Faktoren nun leider keine konstante Summe, sondern $2a - 3x$, also eine Summe, die von x abhängt. $V = x \cdot (a - 2x) \cdot (a - 2x)$ wird jedoch dann maximal, wenn $V = 4x \cdot (a - 2x) \cdot (a - 2x)$ maximal wird. Durch diesen zulässigen Umformungsschritt ergibt sich jetzt der Vorteil, dass die Summe der drei Faktoren nun konstant ist, nämlich $2a$. Das Produkt ist nun genau dann maximal, wenn die einzelnen Faktoren gleich groß sind. In diesem Fall müssen die einzelnen Faktoren nun ein Drittel der konstanten Summe $2a$ ausmachen. Daher gilt:

$$4x = \frac{2a}{3} \Rightarrow x = \frac{a}{6}$$

So schlussfolgern Humenberger/Reichel, dass

„[v]iele klassische „Einschreibaufgaben“ und andere Extremwertaufgaben [...] mit dieser Methode – mutatis mutandis – ebenfalls lösbar [sind]. Es ist oft allerdings gar nicht so leicht, die Zielfunktion so ‚gültig umzuformen‘, daß sich eine konstante Summe bzw. ein konstantes Produkt ergibt, und daher die verallgemeinerte Mittelungleichung anwendbar ist.“⁸⁸

Hier spielt aber auch wiederum die Symmetrie eine große Rolle: Wie in Kapitel 3.2.1 gezeigt wurde, ist die oben offene Schachtel wie ein halber Würfel dimensioniert. Dies kann man aus dem obigen Ergebnis ebenso schließen. Man erspart sich aber die Berechnungen, wenn man sich auf die Symmetrie beruft. Auch das in Kapitel 2.5.2 vorgestellte Beispiel der zylindrischen Dose (der Einfachheit halber wieder eine 1-Liter-Dose) kann damit gelöst werden. Die Ähnlichkeit mit der Frage nach dem oberflächenminimalen quadratischen Quader ist frappierend, wenn man die Formeln zur Berechnung der Oberfläche betrachtet und den Quader wie den Zylinder beschriftet.⁸⁹

⁸⁸ Humenberger/Reichel 1995, S. 191

⁸⁹ Vgl. Abb. 31 sowie Roth-Sonnen/Stein/Stengel 2004, S. 88

Aus diesem Grund sollen auch beide an dieser Stelle vorgestellt werden. Es ist nun jedenfalls das Minimum der jeweiligen Funktion der Oberfläche zu suchen:

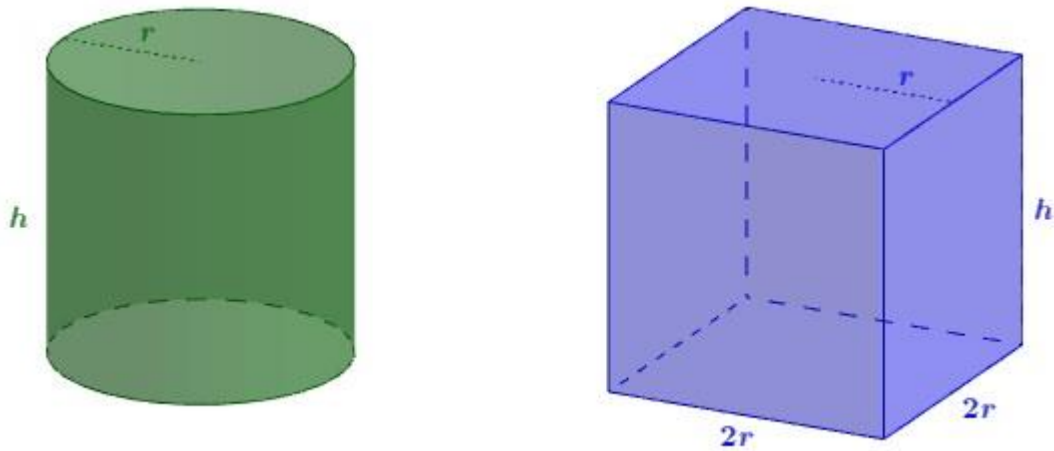


Abb. 31: Zylinder und quadratischer Quader. Eigene Darstellung (GeoGebra).

Zylinder:

$$\begin{aligned} O(r, h) &= 2r^2\pi + 2r\pi h = \\ &= 2\pi \cdot (r^2 + rh) \end{aligned}$$

$$V = r^2\pi h = 1$$

$$\Rightarrow r^2 h = c \quad \left(c = \frac{1}{\pi}\right)$$

$$r^2 + rh \rightarrow \text{minimal}$$

Quadratischer Quader:

$$\begin{aligned} O(r, h) &= 2 \cdot (2r)^2 + 4 \cdot 2r \cdot h = \\ &= 8r^2 + 8rh = 8 \cdot (r^2 + rh) \end{aligned}$$

$$V = (2r)^2 \cdot h = 4r^2 h = 1$$

$$\Rightarrow r^2 h = c \quad \left(c = \frac{1}{4}\right)$$

$$r^2 + rh \rightarrow \text{minimal}$$

Versucht man hier nun die Mittelungleichung anzuwenden, erkennt man, dass das Produkt von r^2 und rh aber r^3h und eben nicht r^2h ist, also nicht als konstant angesehen werden kann. Der Ausdruck $r^2 + rh$ wird aber genau dann minimal, wenn $2 \cdot (r^2 + rh) = 2r^2 + rh + rh$ minimal wird. Das Produkt dieser drei Summanden ist nun $2r^4h^2 = 2 \cdot (r^2h)^2$ und somit konstant. Die Summe ist ja dann minimal, wenn alle drei Summanden gleich groß sind, also $2r^2 = rh$ oder eben $h = 2r$. Der Zylinder ist damit genauso „breit“ wie „hoch“, also ein gleichseitiger Zylinder.⁹⁰ Dieses Ergebnis gilt nun analog für den quadratischen Quader: Er ist genauso „breit“ wie „hoch“, also ein Würfel.

⁹⁰ Vgl. Humenberger/Reichel 1995, S. 191-192

3.2.4 Quadratungleichung (Vollständiges Quadrat)

Eine weitere Möglichkeit, Extremwertaufgaben zu lösen, bietet die sogenannte Quadratungleichung. Diese sagt aus:

Für jede reelle Zahl x gilt $x^2 \geq 0$. Es ist $x^2 = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.⁹¹

Dies folgt sofort aus den Vorzeichenregeln beim Multiplizieren reeller Zahlen. Die Brauchbarkeit dieser Quadratungleichung zeigt sich vor allem dann, wenn man den Funktionsterm einer quadratischen Funktion auf ein vollständiges Quadrat ergänzt. Dabei ergibt sich:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Damit folgt aus der Quadratungleichung und $a \neq 0$

$$\text{für } a > 0: \quad f(x) \geq c - \frac{b^2}{4a}$$

$$\text{für } a < 0: \quad f(x) \leq c - \frac{b^2}{4a}$$

mit $f(x) = c - \frac{b^2}{4a}$ genau für $x + \frac{b}{2a} = 0$, also für $x = -\frac{b}{2a}$.

Daraus ergibt sich also:⁹²

Für $a < 0$ ($a > 0$) hat die Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ die Maximum- (Minimum-) Stelle $-\frac{b}{2a}$ und das Maximum (Minimum) $c - \frac{b^2}{4a}$.

Für Aufgaben, die auf quadratische Zielfunktionen führen, gibt diese Methode ein schnelles und bereits bekanntes Werkzeug mit, diese auch ohne Differentialrechnung zu lösen. Dies stellt kein großes Problem dar. Schwieriger wird es, wenn die Zielfunktion keine quadratische Funktion ist. Dennoch lassen sich manche Aufgaben

⁹¹ Vgl. Schupp 1992, S. 64

⁹² Vgl. Schupp 1992, S. 65

mit der Quadraturgleichung lösen, indem man auf eine günstige Hilfsfunktion ausweicht:

Welcher Punkt $P(x, y)$ der Normparabel ($y = x^2$) hat vom Punkt $S(0, s)$ minimale Entfernung? ⁹³

Für den Abstand $\overline{PS}$ gilt demnach: ⁹⁴

$$\overline{PS} = \sqrt{(x - 0)^2 + (x^2 - s)^2} = \sqrt{x^4 + (1 - 2s) \cdot x^2 + s^2}$$

$y = \sqrt{x^4 + (1 - 2s) \cdot x^2 + s^2}$ ist aber keine quadratische Funktion. Wenn man nun berücksichtigt, dass y genau dort minimal ist, wo $y^2 (= v)$ es ist, und außerdem, dass man für x^2 auch die Hilfsvariable u einsetzen kann, so erhält man die quadratische Hilfsfunktion $v = u^2 + (1 - 2s) \cdot u + s^2$. Diese hat nach obigem Satz die Minimumstelle $-\frac{1-2s}{2} = s - \frac{1}{2}$ und das Minimum $s^2 - \frac{(1-2s)^2}{4} = s - \frac{1}{4}$. Daraus ergibt sich für die Ausgangsfunktion die Minimumstelle $\sqrt{s - \frac{1}{2}}$ und das Minimum $\sqrt{s - \frac{1}{4}}$.

3.3 Weitere Lösungsmethoden für Extremwertaufgaben

Ebenso wie der Differentialkalkül nicht die einzige Lösungsmethode im schulischen Kontext darstellt, da elementare Methoden (bereits früher) zur Verfügung stehen, gibt es zusätzlich auch Lösungsmethoden, die über den schulischen Kontext hinausgehen. Zu erwähnen ist hier etwa die Methode von Lagrange, eine Methode zur Lösung von Optimierungsproblemen mit mehr als einer Nebenbedingung.⁹⁵ Es gibt eine Vielzahl an Lösungsmethoden für die unterschiedlichsten Problemstellungen, es soll jedoch hier nicht der Eindruck entstehen, dass sich die Lösungsmethoden für Optimierungsprobleme auf die im schulischen Kontext präsentierten beschränken. Unterscheiden

⁹³ Schupp 1992, S. 66.

⁹⁴ Vgl. Schupp 1992, S. 66

⁹⁵ Vgl. hierzu etwa Forster 2010, S. 114-116.

kann man etwa zwischen linearer, nichtlinearer oder vektorieller Optimierung, Spezialfälle davon sind etwa quadratische, parametrische oder diskrete Optimierung, um einen kurzen Einblick in die Vielfalt zu geben.⁹⁶

3.4 Berühmte historische Probleme

Im folgenden Kapitel sollen kurz berühmte Probleme und Lösungen behandelt werden, die einerseits im Unterricht thematisiert werden können, andererseits aber bereits Lösungsstrategien für so manche schulklassische Aufgaben liefern, auch wenn dies auf den ersten Blick vielleicht nicht gleich ersichtlich ist.

Bereits in der Antike ist man auf Extremwerte gestoßen, vor allem im Zusammenhang mit der Analyse geometrischer Konstruktionen. Es tauchen aber ebenso Extremwertaufgaben auf, bei denen die Verbindung zu irgendwelchen Konstruktionen nicht augenscheinlich ist.⁹⁷ So schrieb Euklid (ca. 300 v. Chr.) bereits, dass die längste Sehne im Kreis der Durchmesser sei, von allen anderen ist die dem Mittelpunkt nähere größer als die entferntere.⁹⁸ Man beschäftigte sich im antiken Griechenland mit dem isoperimetrischen Problem und wusste, dass der Kreis von allen isoperimetrischen Linien die inhaltsgrößte ist. Zenodorus ging es etwa um einen lückenlosen Beweis, und auch wenn er nicht völlig geglückt war, entdeckte er spannende Aussagen:

Unter allen regelmäßigen Vielecken vom gleichen Umfang hat dasjenige den größeren Inhalt, welches mehr Winkel aufweist.

Unter allen isoperimetrischen Vielecken derselben Eckenzahl hat das regelmäßige den größten Inhalt.⁹⁹

Nun soll zunächst erläutert werden, wie Euklid Extremwertaufgaben auf geometrische Weise löste.

⁹⁶ Vgl. hierzu etwa Benker 2003.

⁹⁷ Vgl. Schupp 1992, S. 53

⁹⁸ Vgl. Schupp 1992, S. 53

⁹⁹ Vgl. Schupp 1992, S. 54

3.4.1 Euklids Beweis

Eine der frühesten schriftlich überlieferten Extremwertaufgaben findet sich im Buch „Die Elemente“ von Euklid. Er suchte das flächengrößte in ein Dreieck eingeschriebene Parallelogramm, das mit dem Dreieck eine Ecke und den zugehörigen Winkel gemeinsam hat.¹⁰⁰ Durch Flächenvergleich zeigte er, dass dies genau das Parallelogramm sein muss, dessen Seitenlängen die Dreiecksseiten halbiert.

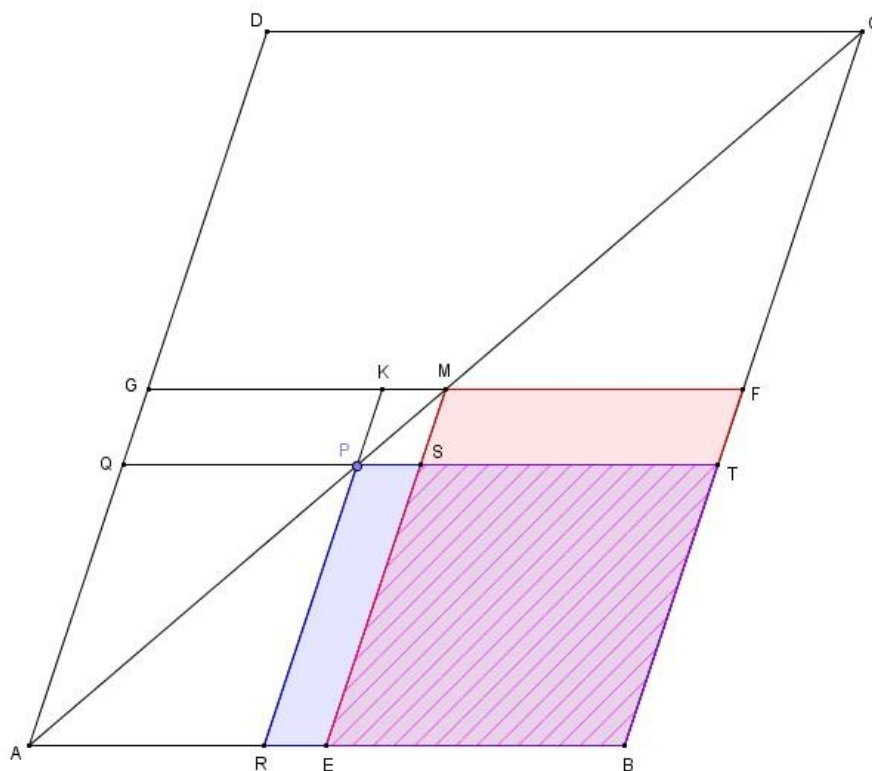


Abb. 32: Parallelogramm in Dreieck. Eigene Darstellung (Geogebra). Nach: Schupp 1992, S. 7.

Das Dreieck ABC wird dabei zuerst zu einem Parallelogramm ABCD ergänzt. Er vergleicht danach die Fläche des Parallelogramms BEMF (wobei B die Seitenmitte von AC ist) mit der Fläche eines beliebigen konkurrierenden Parallelogramms BRPT (wobei P ein anderer Punkt auf der Seitenlinie AC des Dreiecks ist). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liegt der Punkt P zwischen A und M, zwischen M und C wird analog argumentiert. Nun ist jedenfalls zu erkennen, dass beide

¹⁰⁰ Vgl. Schupp 1992, S. 7

Parallelogramme sich im Parallelogramm BEST überlappen, also die schraffierte Fläche gemeinsam haben. Demnach gilt es nur noch, die beiden Flächen FMST und ERPS zu vergleichen.

Die Dreiecke ARP und APQ sind kongruent, kongruent sind auch die beiden Dreiecke KMP und MPS und in weiterer Folge auch die Dreiecke AGM und AEM. Nachdem die beiden größeren kongruenten Dreiecke AGM bzw. AEM aus jeweils den beiden kleineren und einem Parallelogramm zusammengesetzt sind, ergibt sich daraus sofort, dass auch die beiden Parallelogramme ERPS und GKPQ eine gleich große Fläche besitzen müssen. Somit reicht es zu zeigen, dass GKPQ kleiner als FMST ist. GKPQ ist kleiner als GMSQ. Weil M klarerweise die Strecke FG halbiert, gilt deshalb auch, dass GMSQ die gleiche Fläche wie FMST besitzt. GMSQ ist aber größer als GKPQ, das wiederum gleich groß wie ERPS ist, also die Fläche des konkurrierenden Parallelogramms. Dass die Dreieckseiten dabei halbiert werden müssen, um das flächengrößte Parallelogramm zu erhalten, lässt sich dabei auch auf die Frage des flächengrößten Rechtecks mit konstantem Umfang zurückführen, bzw. aus diesem herleiten:

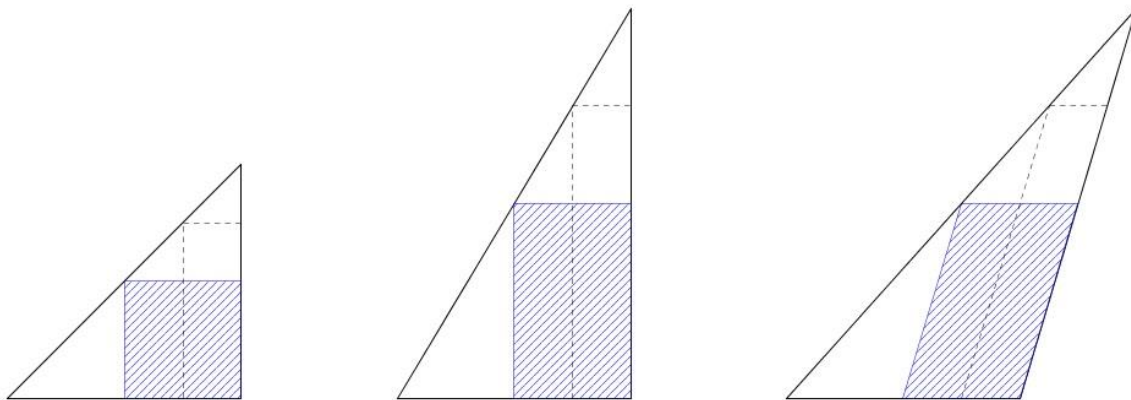


Abb. 33: Parallelogramm in Dreieck. Eigene Darstellung (Geogebra). Nach: Schupp 1992, S. 6.

Unter allen schenkelparallelen Rechtecken in einem gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck haben alle konkurrierenden Rechtecke als Umfang genau die Summe der beiden Schenkellängen des Dreiecks, also konstanten Umfang.¹⁰¹ Bei konstantem Umfang ist nun das Quadrat die optimale Lösung. Durch Streckung oder Stauchung

¹⁰¹ Vgl. hierzu die GeoGebra-Datei Gansch 2015c, <http://tube.geogebra.org/student/mFDSOKwq8> (26.7.2016).

entlang einer Achse, also durch eine senkrecht-achsenaffine Abbildung, ändern sich die Flächeninhaltsverhältnisse nicht. Ebenso wenig ändert eine Scherung die Flächeninhaltsverhältnisse. Somit ist hier ebenso gezeigt, dass das dem Dreieck flächengrößte eingeschriebene Parallelogramm genau die Dreiecksseiten halbiert.

Dass das flächengrößte Rechteck in einem rechtwinkligen Dreieck die Dreiecksseiten halbiert, kann man bereits sehr früh durch einfache Faltfiguren beweisen.¹⁰² Das optimale Rechteck hat dabei halb so großen Flächeninhalt wie das Ausgangsdreieck, die heruntergeklappten Flächen decken also genau das optimale Rechteck ab. Bei jedem konkurrierenden Rechteck überlappen sich Flächen oder Flächen überragen das Rechteck, somit ist die geklappte Fläche größer als das Rechteck. Dies kann auch anschaulich durch eine Dynamische Geometrie-Software gezeigt werden.¹⁰³

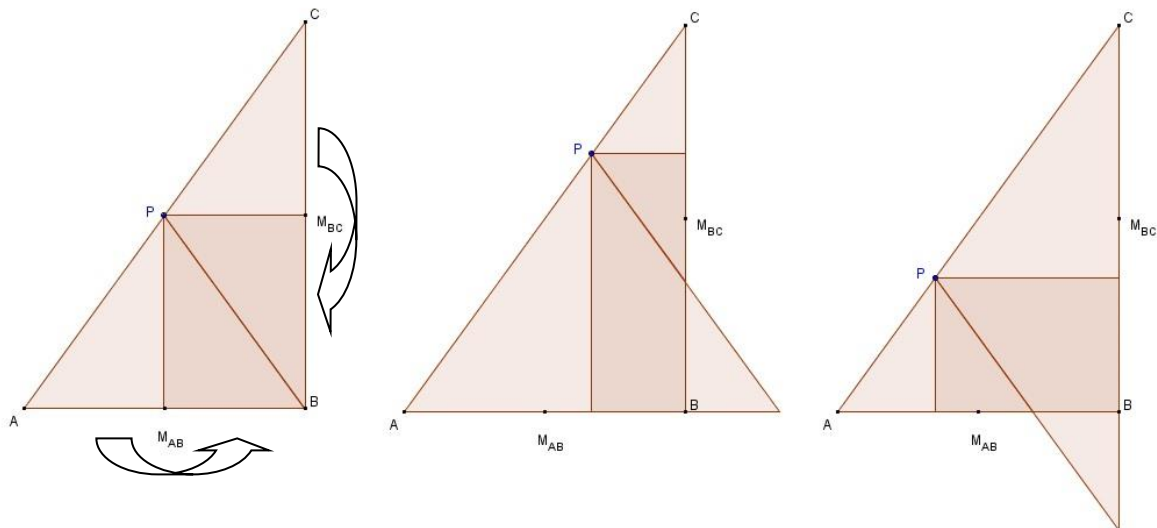


Abb. 34: Faltfiguren. Eigene Darstellung (Geogebra).

Weiters hat auch das optimale Rechteck, das auf der Basis liegend einem gleichschenkligen Dreieck eingeschrieben werden soll, die Seitenlängen $\frac{h}{2}$ und $\frac{c}{2}$, also halbe Höhe und halbe Basislänge. Daher halbiert auch das so eingeschriebene Rechteck die beiden Schenkel, und halbiert die halbe Basislänge, wie die Abb. 35 dies zeigt:

¹⁰² Vgl. hierzu die Kopiervorlage zu den Faltfiguren im Anhang.

¹⁰³ Vgl. hierzu die GeoGebra-Datei Gansch 2015a, <http://tube.geogebra.org/student/mTMbXhFoQ> (26.7.2016).

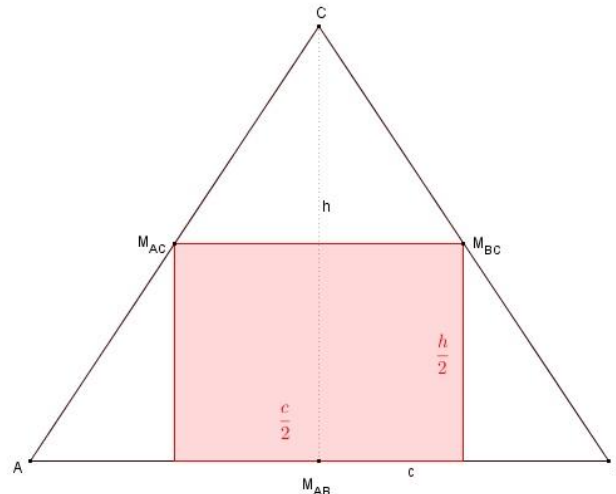


Abb. 35: Rechteck in gleichschenkeliges Dreieck. Eigene Darstellung (Geogebra).

Bei einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck kann man auch diesen Sachverhalt bereits lange vor der Differentialrechnung durch Falten zeigen. Hier wird ersichtlich, dass das optimale Rechteck den halben Flächeninhalt des Dreiecks besitzt, jedes konkurrierende Rechteck aber einen geringeren, weil sich die gefalteten Flächen überlappen oder über das Rechteck hinausragen. Dies kann wiederum mit einer dynamischen Geometrie-Software gezeigt werden.¹⁰⁴

3.4.2 Das Fass des Kepler

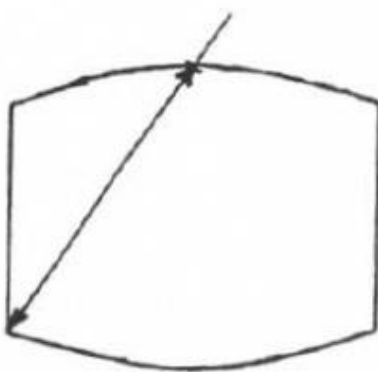


Abb. 36: Fass mit Visierrute, aus: Schoberleitner 2003, S. 87.

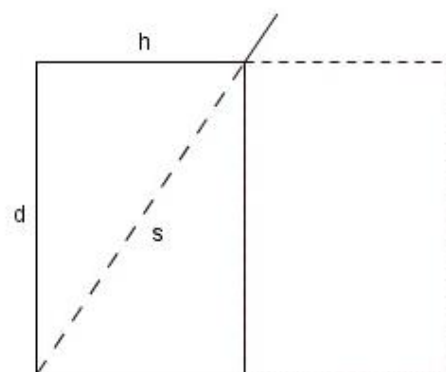


Abb. 37: Skizze des Zylinders, eigene Darstellung (GeoGebra).

¹⁰⁴ Vgl. hierzu die GeoGebra-Datei Gansch 2015b, <http://tube.geogebra.org/student/mxX6GdVHN> (26.7.2016).

Kepler staunte nicht schlecht, als er in Österreich im Jahr 1613 diese Messmethode für den Inhalt von Weinfässern kennenlernte: Eine Visierrute wurde mit der metallenen Spitze durch ein Loch in der Mitte des Fasses quer bis zu den Rändern der beiden Böden eingeführt, und wenn bei beiden Messungen dieselbe Länge ermittelt wurde, wurde auf dieser Visierrute der Inhalt mittels einer Markierung abgelesen. Kepler wunderte sich, dass „alle Fässer, ohne Rücksicht auf ihre Form, ohne jede weitere Überlegung oder Rechnung“¹⁰⁵ so auf ihren Inhalt bestimmt werden konnten. Gängige Methode damals war, mittels einer Visierrute mit zwei Skalen (einer linearen zur Messung der Fashöhe und einer quadratischen zur Messung des „mittleren Querschnitts“¹⁰⁶) das Fassvolumen zu bestimmen. Das österreichische Verfahren benötigte hierzu nur eine einzige Messung mit einer kubischen Skala.¹⁰⁷ Kepler fragte sich, bei welcher Form nun diese Messmethode zuverlässig war. Er überlegte: Wenn das Fass so gebaut war, dass bei gegebener Visierrutenlänge das Volumen des Fasses maximal ist, so werden kleine Abweichungen von dieser Form das Fassungsvermögen kaum beeinflussen. Er kam zu folgendem Ergebnis:

„Unter allen Zylindern mit gleichen Diagonalen ist derjenige der größte, dessen Basisdurchmesser sich zur Höhe verhält wie $\sqrt{2}$ zu 1.“¹⁰⁸

Das Beweisargument ist schwer durchschaubar und soll hier nicht weiter verfolgt werden, aber stattdessen soll mittels Differentialrechnung gezeigt werden, dass Keplers Entdeckung stimmt. Zu maximieren ist das Volumen des halben (nun zylindrischen) Fasses, wie in Abb. 37 gezeigt:

$$V = \pi \cdot d^2 \cdot h$$

Mit der Nebenbedingung $s^2 = h^2 + d^2$ (s fest; Satz des Pythagoras, vgl. Abb. 37) führt dies zur Zielfunktion

¹⁰⁵ Danckwerts/Vogel 1997, S. 60

¹⁰⁶ Meist wurde hierbei das arithmetische Mittel von kleinster Querschnittsfläche (Grundfläche) und größter Querschnittsfläche (Mittelfläche) verwendet. Es gab auch Vorschläge zur Verwendung eines gewichteten Mittels. Vgl. Schoberleitner 2003, S. 87.

¹⁰⁷ Vgl. Schoberleitner 2003, S. 87

¹⁰⁸ Danckwerts/Vogel 1997, S. 60

$$V(h) = \frac{\pi}{4} \cdot h \cdot (s^2 - h^2)$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{4} (-3h^2 + s^2)$$

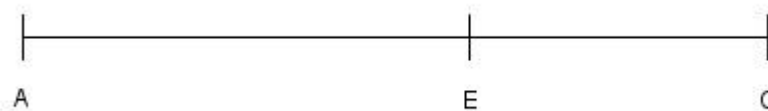
Die gesuchte Nullstelle von V' ist dabei $h = \frac{1}{\sqrt{3}}s$, was wiederum zu $d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s$ führt. Also ist in der Tat für den optimalen Zylinder $d : h = \sqrt{2} : 1$.

Mit Erstaunen stellte schließlich Kepler fest, dass die österreichischen Fässer (mit denen er zu tun hatte) in sehr guter Näherung mit dieser Form übereinstimmten. Als er nun die (leichte) Wölbung des österreichischen Fasses mit in seine Überlegungen einbezog, fand er des Weiteren heraus, dass die Visierrute nach wie vor das richtige Volumen anzeigte, bei länglicheren Fässern würde hingegen die Rute einen zu kleinen Wert anzeigen, bei kürzeren einen zu großen Wert.¹⁰⁹

3.4.3 Fermats Lösung

Fast 2000 Jahre nach Euklid beschäftigte sich auch Fermat mit der Lösung des isoperimetrischen Problems für Rechtecke. Fermats Lösung beruht darauf, dass sich die Werte einer Funktion in der Nähe eines Maximums nur wenig ändern. Er studierte folgende Fassung des isoperimetrischen Problems:

Die Strecke $\overline{AC}$ ist so zu teilen, dass das Produkt der Teilstrecken maximal wird.



Die Länge der festen Strecke $\overline{AC}$ entspricht hier dem konstanten halben Umfang aller konkurrierenden Rechtecke beim isoperimetrischen Problem. Fermat zählt dabei neben Descartes zu den ersten Mathematikern, die die neu entwickelte Algebra auf die Geometrie der Alten anwendete. Dabei ging es ihm um die Entwicklung einer

¹⁰⁹ Vgl. Schoberleitner 2003, S. 89-90.

universellen Methode zur Lösung von Extremalproblemen.¹¹⁰ Fermat löste das Problem wie folgt und schreibt:

Die Strecke AC ist bei E so zu teilen, dass $AE \cdot EC$ maximal wird. Wir schreiben $AC = b$; sei a eine der beiden Teilstrecken, so dass die andere $b - a$ ist, und das Produkt, dessen Maximum gesucht ist, wird zu $ba - a^2$. Ist nun $a + e$ das erste Teilstück von b , so wird das zweite $b - a - e$ sein, und das Produkt beider ist dann $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$. Dies muss dem vorherigen Punkt $ba - a^2$ gleichkommen (*adaequabitur*). Wir unterdrücken gleiche Summanden: $be \sim 2ae + e^2$, unterdrücken e : $b = 2a$. Um das Problem zu lösen, müssen wir folglich die Hälfte von b nehmen. Wir können schwerlich eine allgemeinere Methode erwarten.¹¹¹

Hier soll noch einmal übersichtlicher dargestellt werden, wie Fermat vorgegangen ist. Die Werte einer Funktion in der Nähe eines Maximums ändern sich nach Fermat nur unmerklich, daher wird eine (unendlich) kleine Änderung e der Strecke a eine nicht sichtbare Änderung des Produkts hervorrufen. Der gesuchte Teilungspunkt zeichnet sich also dadurch aus, dass das neue Produkt dem alten „gleichkommt“ (*adaequabitur*) – wird nachfolgend durch das Zeichen „ $\sim$ “ angedeutet. Demnach:

$$ba - a^2 + be - 2ae - e^2 \sim ba - a^2$$

$$be \sim 2ae + e^2$$

$$b \sim 2a + e$$

$$b \sim 2a$$

$$b = 2a$$

Fermat kürzte also das e und vernachlässigte schließlich das e als Summand, das ja eine (unendlich) kleine Änderung darstellt. Somit kommt er zum Schluss, dass $b = 2a$ sein muss. Ohne jegliche Rechtfertigung kommt er zu dieser gewünschten (und exakten) Lösung. So schreiben Danckwerts/Vogel: „Zu unser aller Entlastung: Der Nebel, der über dieser Schlussweise liegt, konnte erst 200 Jahre später im Zuge der

¹¹⁰ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 192-193

¹¹¹ zit. nach Danckwerts/Vogel 2006, S. 193 (Übersetzung von Danckwerts/Vogel)

Grundlegung der Differentialrechnung im 19. Jahrhundert gelichtet werden.“¹¹² Die Intuition Fermats kommt dabei auch heute im Analysisunterricht zur Maximumbestimmung mittels erster Ableitung zu tragen, wie Danckwerts/Vogel zeigen:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$$

bedeutet nämlich insbesondere (in guter Näherung)

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \approx 0 \text{ für kleine } |h|,$$

d.h. $f(x_0 + h) - f(x_0) \approx 0 \cdot h = 0$ für kleine $|h|$.

Also gilt in guter Näherung $f(x_0 + h) \approx f(x_0)$ für kleine $|h|$, d.h. in der Nähe der Maximalstelle x_0 ändern sich die Werte der Funktion f nur unmerklich. Dies war die Vorstellung, die Fermats Verfahren zugrunde lag.¹¹³ Das Ziel einer unterrichtlichen Auseinandersetzung muss sein, diese Lösungsmethode von Fermat herauszuarbeiten. Hiermit können auch historische Probleme fruchtbar in den Unterricht eingebaut werden. Die Verzahnung der verschiedenen Felder, der historischen Probleme wie auch elementarer Lösungsmethoden soll nun im folgenden Subkapitel näher erläutert werden.

3.5 Didaktische Verzahnung der verschiedenen Bereiche

Danckwerts/Vogel stellen fest, dass vier wesentliche Aspekte beim Thema Extremwertaufgaben vernachlässigt werden: die Kraft elementarer Methoden, Einbeziehung historischer Momente, Aktivitäten zur Modellbildung und die Nutzung des Computers.¹¹⁴ An dieser Stelle soll nicht unerwähnt bleiben, dass viele Schulbücher bereits elementare Methoden behandeln, wie die Analyse der approbierten Schulbücher in Kapitel 4 der vorliegenden Arbeit zeigt. Auch historische Momente werden teilweise angeschnitten, jedoch wird dies meist in Form eines Zusatztextes

¹¹² Danckwerts/Vogel 1997, S. 59

¹¹³ Vgl. Danckwerts/Vogel 1997, S. 60

¹¹⁴ Vgl. Danckwerts/Vogel 1997, S. 208.

abgehandelt. Hier stellt sich zudem die Frage, ob und in welcher Form historische Fragestellungen überhaupt miteinbezogen werden sollen, schließlich sind viele Begründungen nur schwer verständlich, andere hingegen decken sich ohnehin mit den elementaren Methoden. Technische Hilfsmittel werden aber noch nicht so häufig in den Schulbüchern erwähnt, hier obliegt es der Entscheidung der Lehrkräfte den Technologieeinsatz zu forcieren. So werden aber im Hinblick auf die neue standardisierte Reifeprüfung immer häufiger grafikfähige Taschenrechner angeschafft und vermehrt die dynamische Geometriesoftware GeoGebra eingesetzt. Welche Einsatzmöglichkeiten beispielsweise GeoGebra auch im Rahmen der Extremwertaufgaben bietet, soll im Rahmen dieser Arbeit auch in Kapitel 5 präsentiert werden. So können etwa in GeoGebra nicht nur Funktionsgraphen gezeichnet und analysiert werden, sondern auch Simulationen durchgeführt werden, wo etwa elementare Begründungen nachgestellt werden können, wie beispielsweise die Faltfiguren zeigen sollen.¹¹⁵ Dass in Zukunft aber der Technologieeinsatz an Wichtigkeit gewinnen wird, zeigen auch die im Oktober 2015 durchgeführten Änderungen am Informationstext des BIFIE (Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens) zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik: So werden für alle Schülerinnen und Schüler, die ab dem Haupttermin 2018 maturieren, Minimalanforderungen an elektronische Hilfsmittel gestellt. Die Minimalanforderungen sind „grundlegende Funktionen zur Darstellung von Funktionsgraphen, zum numerischen Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, zur Ermittlung von Ableitungs- bzw. Stammfunktionen, zur numerischen Integration sowie zur Unterstützung bei Methoden und Verfahren in der Stochastik“¹¹⁶. So wurden auch die Grundkompetenzen an mancher Stelle adaptiert, um diese Minimalanforderungen an elektronische Hilfsmittel zu berücksichtigen. So können etwa nun auch „komplexere Umformungen von Termen, Formeln und Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen durchgeführt werden“¹¹⁷ oder „Argumentwerte auch für Polynomfunktionen höheren Grades ermittelt werden“¹¹⁸.

¹¹⁵ Vgl. hierzu Kapitel 5 der vorliegenden Arbeit und Gansch 2015a, 2015b und 2015c.

¹¹⁶ BIFIE 2015, https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_neuaufgabe_2018_2015-10-19.pdf, S. 24 (zuletzt abgerufen am 20.11.2015).

¹¹⁷ BIFIE 2015, S. 7 (zuletzt abgerufen am 20.11.2015).

¹¹⁸ BIFIE 2015, S. 11 (zuletzt abgerufen am 20.11.2015).

Elementare Methoden finden sich also bereits in vielen Schulbüchern, der Technologieeinsatz wird nun auch stetig zunehmen. Inwiefern jedoch historische Problemstellungen Eingang finden sollen, sei dahingestellt. Demnach ist bereits vieles so umgesetzt, wie sich Danckwerts/Vogel dies vorstellen. Im schulischen Kontext schlagen sie jedenfalls für die Integration der von ihnen genannten Aspekte folgenden Ablauf vor:

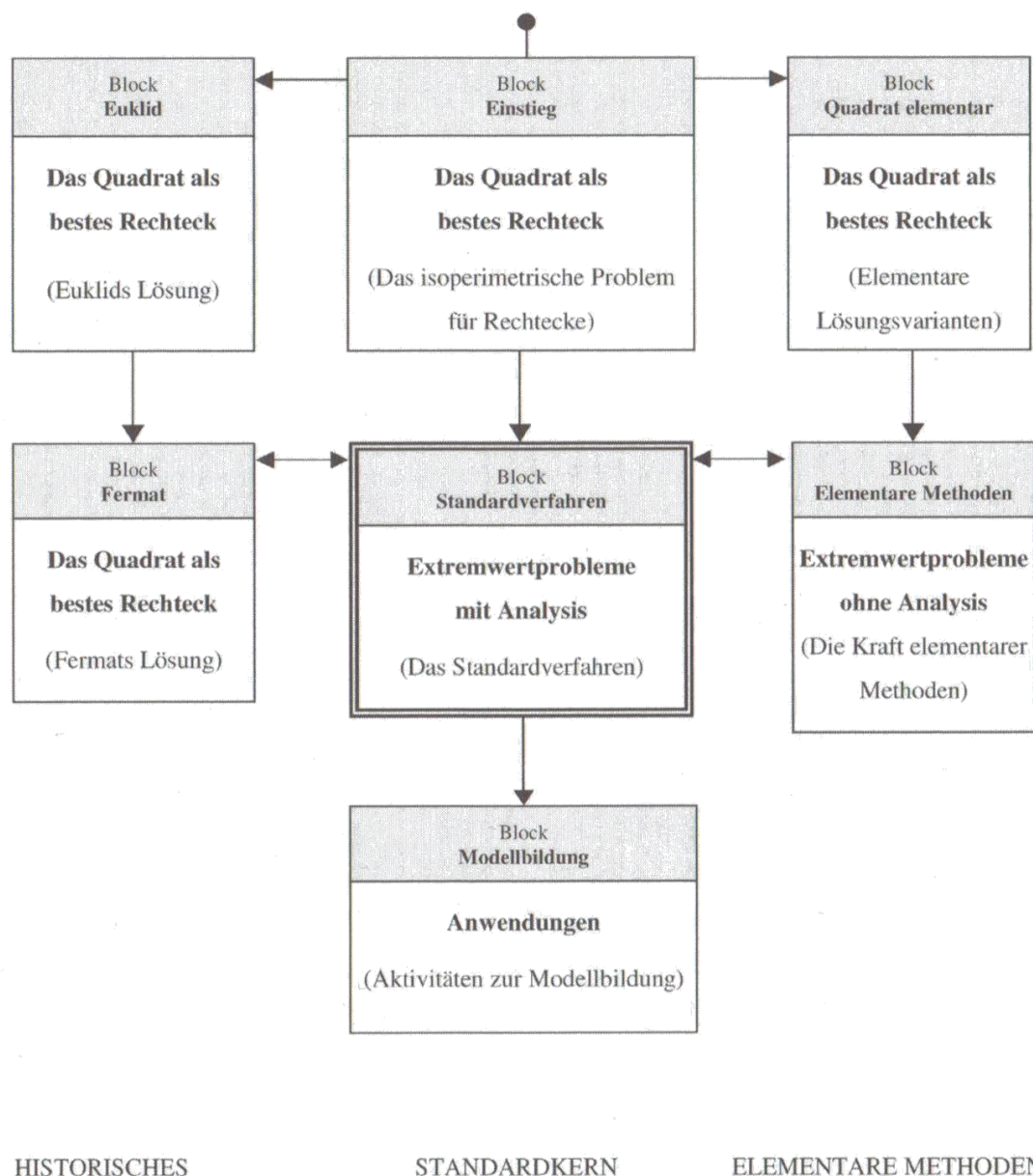


Abb. 38: Netzstruktur zum Themenkreis Extremwertprobleme. Abbildung aus: Danckwerts/Vogel 2006, S. 209

Als tragfähigen Ausgangspunkt identifizieren Danckwerts/Vogel dabei das einerseits sehr einfache, andererseits aber facetten- und beziehungsreiche isoperimetrische Problem für Rechtecke. Dieser Startpunkt öffnet in natürlicher Weise den Zugang sowohl zur historischen Sicht, in der Abbildung durch den linken Strang gekennzeichnet, als auch zu den elementaren Methoden, die durch den rechten Strang symbolisiert werden. Der rechte Strang der elementaren Methoden relativiert dabei die Bedeutung des analytischen Standardkalküls. Hier wird deutlich gemacht, dass es neben dem Standardverfahren für Extremwertaufgaben eine Fülle an – oftmals eben auch simpleren und vor allem auch intuitiv anschaulichen – verschiedenen Methoden gibt, die sich zur Lösung derartiger Problemstellungen eignen. Es wird klar, dass die Differentialrechnung hier genaue Resultate und vor allem Beweise für Behauptungen liefern kann, für die meisten (alltäglichen) Zwecke diese schulische Scheingenauigkeit aber gar nicht vonnöten ist. Ein Blick auf die Funktion lässt bereits erahnen, in welchem Bereich sich die Extremstelle finden lässt. Auch weiß man, dass sich die Funktionswerte in der Nähe einer Extremstelle nur wenig ändern, wie etwa auch bereits Fermat argumentierte, und daher eine übertriebene Genauigkeit im Allgemeinen keine (viel) besseren Resultate bringt. Mit Fermat ist man bereits auch im linken Strang angelangt, dem Themenkreis der historischen Probleme. Euklids Herangehensweise schärft den Blick für elementare Methoden, wohingegen Fermats Lösung zu einem tieferen Verständnis des heute üblichen Standardverfahrens führen soll.¹¹⁹

Ob beispielsweise historische Begründungen explizit thematisiert werden müssen, sei dahingestellt. Möglich ist aber auch ein anderer Aufbau, wie ich ihn im Rahmen der vorliegenden Arbeit in Kapitel 5 näher erläutere: So kann zuerst das isoperimetrische Problem für Rechtecke durch Flächenvergleich bewiesen werden. Startpunkt ist also eine elementare Begründung wie sie bereits Euklid kannte. Danach kann das isoperimetrische Problem für Rechtecke durch Differentialrechnung bewiesen werden. Darauf aufbauend kann man klassische Einschreibe-Aufgaben wie etwa das flächengrößte Rechteck in einem rechtwinklig-gleichschenkeligen oder in einem rechtwinkligen Dreieck behandeln. Hier kann man wiederum mit der Differentialrechnung den bekannten Kalkül trainieren, wohingegen elementare Begründungen wie die

¹¹⁹ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 208

bereits erwähnten Faltfiguren der Thematik eine anschauliche Komponente hinzufügen. Somit werden historische Problemstellungen und elementare Methoden miteinander verknüpft, ohne dass sie explizit als solche benannt werden. Die Schülerinnen und Schüler können dadurch profitieren, dass sie spielerisch an das Thema herangeführt werden und nicht durch einen Themenblock „Historisches“ abgeschreckt werden.¹²⁰

Die vernachlässigten Aspekte nach Danckwerts/Vogel tragen auch zum allgemeinbildenden Wert der Thematik bei, denn die Aspekte kann man den drei Grunderfahrungen von Winter direkt zuordnen. An dieser Stelle müssen aber zunächst die drei Grunderfahrungen erwähnt werden, die durch den Mathematikunterricht ermöglicht werden sollen:

- „(G1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- (G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
- (G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“¹²¹

Auf diesen drei Grunderfahrungen fußen auch die Überlegungen von Danckwerts/Vogel: So kann erst in der expliziten wechselseitigen Integration aller drei Grunderfahrungen der Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe seine spezifisch bildende Kraft entfalten. Charakteristisch für den Mathematikunterricht ist dabei ein Spannungsverhältnis zwischen den beiden ersten Grunderfahrungen. Das dynamische Gleichgewicht muss dabei in besonderem Maße im Oberstufenunterricht

¹²⁰ Vgl. hierzu die GeoGebra-Dateien Gansch 2015a, <http://tube.geogebra.org/student/mTMbXhFoQ> und Gansch 2015b, <http://tube.geogebra.org/student/mxX6GdVHN> (20.11.2015).

¹²¹ Winter 1996, S. 37

zur Geltung kommen. Anwendungen im Sinne modellbildender Aktivitäten sind dafür konstituierend und deshalb unverzichtbar.¹²²

Die vier erwähnten Aspekte lassen sich – wie bereits erwähnt – nun direkt diesen Grunderfahrungen zuordnen: Die elementaren Methoden und die historischen Momente kann man der zweiten Grunderfahrung (G2) zuordnen („Welt der Mathematik als Disziplin“), Modellbildung und Computer der ersten Grunderfahrung G1 („Beziehung der Mathematik zum Rest der Welt“) und alle vier Aspekte durch die Art ihrer Behandlung im Unterricht der dritten Grunderfahrung G3 („Heuristik als universelles Werkzeug“).¹²³ Die Einbeziehung der vernachlässigten Aspekte trägt demnach zum allgemeinbildenden Wert der Thematik bei. Die Frage stellt sich nun aber, weshalb Extremwertaufgaben zum Nachdenken im Unterricht ihren Niederschlag finden sollen, also Extremwertaufgaben, die Neues oder Unvorhergesehenes präsentieren. Mit der Beantwortung dieser Frage beschäftigt sich das folgende Subkapitel, das dabei auf verschiedene Lerntheorien zurückgreift.

3.6 Extremwertaufgaben zum Nachdenken aus der Sicht verschiedener Lerntheorien

Extremwertaufgaben zum Nachdenken sollen das Abarbeiten eines einmal auswendig gelernten Schemas zur Lösung von derartigen Aufgaben durchbrechen. Oftmals ergibt sich die größte Schwierigkeit beim Lösen von Extremwertaufgaben lediglich beim Suchen nach einer oder mehrerer Nebenbedingungen, um die Zielfunktion zu bestimmen. Auch hier werden mit Strahlensatz oder dem Lehrsatz des Pythagoras meist dieselben Lösungsansätze geboten. Doch weshalb ist es wichtig, diese Schemenhafte überhaupt zu durchbrechen? Welchen Mehrwert haben Extremwertaufgaben zum Nachdenken, also Extremwertaufgaben, die sich von den schulklassischen Aufgaben in gewisser Weise unterscheiden? Ist es sinnvoll, Beispiele, die eher irritieren und das Gefühl geben, dass das eingelernte Schema versagt hat, im Unterricht zu präsentieren?

¹²² Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 6-7

¹²³ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 208

Es gibt verschiedene Lerntheorien, die zur Beantwortung dieser Frage zu Rate gezogen werden können. Vorweg ist allen hier vorgestellten Lerntheorien gemeinsam, dass erst ein Moment des Staunens, des Zögerns und der Irritation erst tiefgreifende und somit fruchtbare Lernprozesse anregt. Hier soll somit ein kurzer Querschnitt durch aktuelle Lerntheorien gegeben werden, die sich zwar darin unterscheiden, wie sie das Phänomen Lernen betrachten und beschreiben, aber dennoch dieses Moment des Staunen und Zögern als wichtiges Element in allen Lerntheorien zu beobachten ist. Es wäre aber vermessen, auf diesen wenigen Seiten auch nur einen groben Überblick über die Vielfalt und die tieferen Argumentationen der Lerntheorien liefern zu können. Dennoch sollen paradigmatisch einige wenige zentrale Strömungen vorgestellt werden.

3.6.1 Kognitivistische Lerntheorien

Auch wenn Piaget und seine berühmte Theorie der kognitiven Entwicklung vor allem die geistige Entwicklung von Kindern beschreibt, so gilt es dennoch als schillerndes Referenzmodell, auf das im pädagogisch orientierten Diskurs über Lernen als auch bei neueren Lerntheorien in unterschiedlicher Schwerpunktsetzung und Interpretation zurückgegriffen wird. Bei Piaget geht es um die Herausbildung von sogenannten Schemata, allgemeiner, dynamischer Handlungsmuster, die sich durch Interaktion eines Kindes mit der Umwelt fortschreitend herausbilden. Diese Schemata unterliegen zweier grundlegender Prozesse, dem der Assimilation und der Akkommodation. Assimilation meint, dass die eintreffenden Informationen in bestehende Schemata eingeordnet werden, von Akkommodation wird dann gesprochen, wenn subjektive Schemata abgeändert werden müssen, weil die eintreffenden Informationen nicht mehr in die Schemata passen, weil unerwartete und neue Gegebenheiten auftreten. Beide Prozesse treten auf, um ein Gleichgewicht zu erzielen, also einen Ausgleich – bei Piaget Äquilibration genannt – zu erreichen.¹²⁴ Ein Individuum versucht dabei immer zuerst zu assimilieren, erst bei Scheitern kommt es zur Akkommodation. Für Entwicklungsfortschritte sind aber hauptsächlich die Akkomodationsprozesse verantwortlich. Zentrales Moment sind daher dosierte Diskrepanzerlebnisse, die diese Akkomodationsprozesse hervorrufen. Dabei darf auch die Diskrepanz zwischen

¹²⁴ Vgl. Piaget 2003, S. 53-67.

Bekanntem und Neuem nicht zu groß sein, weil sonst ein Rückzug aus der Problemsituation erfolgt.¹²⁵ Somit ist es wichtig, dass – auf den Unterricht umgelegt – die Probleme einerseits nicht zu schwer sind, also dem Vorwissen der Schülerinnen und Schüler in hohem Maße widersprechen, aber auch nicht allzu sehr bekannte Aufgaben mit geringem Schwierigkeitsgrad präsentiert werden, da diese Langeweile hervorrufen und keine Akkomodationsprozesse auslösen. Aufgaben, die diesen Spagat schaffen, also einen mittleren Neuigkeits- und Schwierigkeitsgrad aufweisen, rufen demnach genau diese dosierten Diskrepanzerlebnisse hervor, die tiefgründiges Lernen ermöglichen. Genau diese dosierten Diskrepanzerlebnisse sollen diese „Extremwertaufgaben zum Nachdenken“ bieten.

Derartige dosierte Diskrepanzerlebnisse können demnach auftreten, wenn Extremwertaufgaben aus dem altbekannten Schema fallen. Dies ist etwa dann der Fall, wenn keine eindeutige Lösung existiert oder die Extrema am Rand des Intervalls eingenommen werden. In Kapitel 5.1 etwa wird gezeigt, wie anhand leichter Adaptierungen bei geometrischen Extremwertaufgaben verschiedenste Lösungsfälle konstruiert werden können. So können selbst bei vergleichsweise einfachen Problemstellungen wie etwa beim Einschreiben eines Quadrates in ein Dreieck verschiedenste Aufgaben konstruiert werden. Je nach Aufgabenstellung gibt es unterschiedliche Lösungsfälle. Schreibt man ein Quadrat in ein rechtwinkelig-gleichschenkeliges Dreieck ein, so gibt es zwar eine eindeutige – und auch auf elementare Weise zu findende – Lösung, wenn nach dem flächengrößten eingeschriebenen Quadrat gesucht wird. Wird jedoch nach dem umfangkleinsten (oder umfanggrößten) eingeschriebenen Quadrat gesucht, wird man feststellen, dass alle konkurrierenden eingeschriebenen Quadrate gleich großen Umfang besitzen. Hier existiert demnach keine eindeutige Lösung, wie auch in Kapitel 5.2 näher erläutert wird. Die Erfahrung, dass es auch Aufgaben gibt, die nicht auf eine eindeutige Lösung führen, kann also helfen, Lernprozesse in Gang zu setzen, indem sie diese dosierten Diskrepanzerlebnisse hervorrufen.

¹²⁵ Vgl. Kestler 2015, S. 120

3.6.2 Theorie nach Bruner

Zentral für den Mathematikunterricht sind die Überlegungen von Jerome Bruner. Er ist ebenso wie Piaget ein Vertreter des Kognitivismus. Die Ausführungen zum spiralförmigen Curriculum sind wesentlich von ihm geprägt und beeinflusst. Bruner entwirft dabei ein Unterrichtskonzept, in dem in einem Fach zuerst die Struktur, die „fundamental ideas“¹²⁶, vermittelt werden sollen. Auf diese Grundlagen baut man in weiterer Folge immer wieder auf und kommt immer wieder dazu zurück. Dies erfordert demnach diesen spiralförmigen Aufbau des Curriculums, „der eine Wiederholung der Grundbegriffe auf den verschiedenen kognitiven und sprachlichen Niveaus ermöglicht bis hin zu den abstrakten, formalisierten Operationen der wissenschaftlichen Begriffsbildung.“¹²⁷ Diese Grundlagen eines Faches können nach Bruner dabei jeden Menschen egal welchen Alters beigebracht werden, weil „die basalen Ideen, die den Kern aller Naturwissenschaft und Mathematik bilden, und die grundlegenden Themen, die dem Leben und der Dichtung ihre Form verleihen, ebenso einfach wie durchschlagend sind“¹²⁸.

Die Grundlagen kann also jeder erlernen, stetiges Vertiefen in immer komplexerer Form ist die Idee dieser Curriculum-Spirale. Die Vorstellungen von Bruner sind im deutschen Sprachraum jedoch oftmals nur verkürzt wiedergegeben worden, „weil die Struktur-Konzeption nur auf die Auswahl und Anordnung von Lerninhalten bezogen wurde, wohingegen Bruner ausdrücklich zugleich innovative Lösungen für die Bereiche von Motivation, Methoden und Medien erörtert und postuliert“¹²⁹. Das Aufbauen auf diesen „fundamental ideas“ ist also ein zentraler Punkt in Bruners Theorie.

¹²⁶ Bruner 1970, S. 14

¹²⁷ Bruner 1970, S. 14

¹²⁸ Bruner 1970, S. 26

¹²⁹ Bruner 1973, S. 7 (Vorwort des Herausgebers).

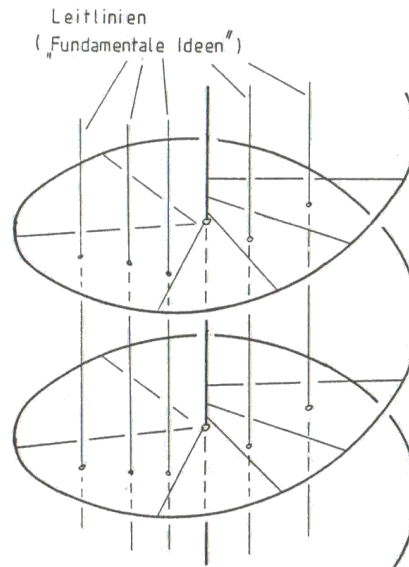


Abb. 39: Die „Curriculum-Spirale“ – Spiralprinzip: Die Leitlinien (Fundamentalen Ideen) durchstoßen die Curriculumspirale auf jeweils höherem Niveau. Abbildung aus: Humenberger/Reichel 1995, S. 27.

So begegnet man im schulischen Mathematikunterricht etwa der Leitlinie Optimieren in verschiedenen Schulstufen. Viele Schulbücher sind bereits so aufgebaut, dass man Inhalte etwa zur Leitlinie Optimieren in verschiedenen Schulstufen präsentiert bekommt und diese in immer komplexer werdender Form auch auf bereits vorhandenes Vorwissen anknüpfen. So findet man beispielsweise im Schulbuch der 10. Schulstufe von Malle et al. Aufgaben, bei denen von senkrecht nach oben geworfenen Körpern die größte erreichte Höhe gesucht wird. Nachdem hier eine quadratische Funktion vorliegt, kann mit dem Scheitel dieser Parabel das Extremum bestimmt werden. Hier greift man wiederum auf Wissen der 9. Schulstufe zurück. Dies sollte paradigmatisch illustrieren, wie die Curriculumspirale zu verstehen ist. Dementsprechend bedeutet das für die Behandlung von Extremwertaufgaben im schulischen Kontext, dass bereits in den Schulstufen zuvor die Leitlinie Optimieren angesprochen werden soll, damit tatsächlich auf Vorwissen angeknüpft werden kann.

3.6.3 Phänomenologische Lerntheorien

Auch der phänomenologische Zugang beinhaltet Diskrepanzerlebnisse, wie sie in der kognitivistischen Theorie bei Piaget genannt werden: Laut Meyer-Drawe sei etwa der zeitraubenden Irritation, die Lernprozesse überhaupt erst auslöst, in einer pädagogischen Lerntheorie besondere Aufmerksamkeit zu schenken.¹³⁰ „Unstimmigkeit, Irritation, Ausweglosigkeit, Staunen, Wundern, Stutzen, Ratlosigkeit, Verwirrung und Benommenheit unterbrechen den Fluss des Selbstverständlichen und drängen auf Verständnis.“¹³¹ Sie spricht vom „Lernen als Erfahrung“¹³², wobei man erst dann von Erfahren sprechen soll, wenn Überraschendes oder Neues auftritt. Auch hier geht es also um Diskrepanz, um Bruchstellen im Denken, die zentral sind für nachhaltiges und tiefgründiges Lernen.

3.6.4 Subjektwissenschaftliche Lerntheorien

Holzkamp gibt in seinem subjektwissenschaftlichen Zugang zu bedenken, dass das Subjekt schulischer Lernprozesse nicht die Lehrperson ist, der das Lernen an den Schülerinnen und Schülern vollzieht, sondern das Subjekt des Lernens sind vielmehr diese selbst. Er stellt dabei die Gründe in den Vordergrund, die ein Lernsubjekt haben muss, um zu lernen, also seine Lernintention, warum überhaupt gelernt werden soll. Er verneint, dass lediglich das Stellen von Lernanforderungen von der Schulseite auch zu intendiertem Lernen seitens des Lernsubjekts führt, dass es also das Geforderte auch lernen will. Holzkamp spricht dabei von einer Lernproblematik: „Um richtig zu verstehen, was hier mit einer ‚Lernproblematik‘ gemeint sein soll, muß man sich klar machen, daß natürlich nicht jede Problematik, vor der ein Subjekt in seiner Lebenspraxis steht, eine Lernproblematik ist. Es gibt ja auch vielfältige Widersprüche, Dilemmata, Problematiken, die nicht erst durch Lernen, sondern durch unmittelbares Handeln zu lösen sind: Unspezifische Handlungs- und Bewältigungsproblematiken. Diese werden zu ‚Lernproblematiken‘ erst dann, wenn das Subjekt einerseits eine bestimmte Handlungsproblematik nicht direkt überwinden kann, aber andererseits antizipiert, daß durch das Dazwischenschieben einer Lernphase eine solche

¹³⁰ Vgl. Meyer-Drawe 2008, S. 15

¹³¹ Meyer-Drawe 2008, S. 202

¹³² Vgl. Meyer-Drawe 2008, S. 187-214

Überwindung der Handlungsproblematik möglich sein wird“¹³³. Lernen findet also – im Gegensatz zum bloßem Problemlösen – bei Holzkamp immer dann statt, wenn man mit direkter Problembewältigung nicht weiter kommt, man daher innehält, auf Distanz geht, um herauszufinden, wodurch die Schwierigkeiten entstanden sind.¹³⁴ Auch wenn Holzkamp auf die Gründe des Lernens sein Augenmerk legt, so betont er dennoch die Wichtigkeit des Aspekts des Nicht-Weiterkommens und des Innehaltens. Ob auf diesen Bruch aber auch tatsächlich ein Lernprozess folgt, hängt davon ab, ob die Problematik durch bloßes Handeln zu lösen ist oder nicht. Demnach geht es auch bei Holzkamp um Diskrepanzerlebnisse, allerdings müssen Lerngründe vorliegen, um tatsächlich auch lernen zu wollen.

¹³³ Holzkamp o.J., www.kritische-psychologie.de/files/kh1992a.pdf, S. 8 (26.7.2016).

¹³⁴ Vgl. Holzkamp 1995, S. 184

4 Analyse: Extremwertaufgaben in österreichischen Schulbüchern

In den bisherigen Kapiteln wurde thematisiert, welches theoretische Fundament für Extremwertaufgaben notwendig ist, und dass sie zudem gut illustrieren, welches mächtiges Instrument die Differentialrechnung sein kann. Es wurde aber auch angemerkt, dass laut Danckwerts/Vogel in der Schule noch vier wesentliche Aspekte vernachlässigt werden: die Kraft elementarer Methoden, Einbeziehung historischer Momente, Aktivitäten zur Modellbildung und die Nutzung des Computers.¹³⁵ An dieser Stelle gilt es wieder einzuschränken, dass elementare Methoden bereits oft Eingang in die Schulbücher gefunden haben, wie sich nachfolgend zeigen wird. Des Weiteren stellt sich die Frage, ob Modellbilden überhaupt und in welcher Form in Schulbüchern Platz finden soll. Schulklassische Extremwertaufgaben sind dabei Optimierungsaufgaben, die meist mit der Differentialrechnung (teilweise in Verbindung mit elementaren Methoden) gelöst werden sollen, wie in Kapitel 3.1 gezeigt wurde. Den Schülerinnen und Schülern muss also bewusst sein, dass es auch andere Lösungsmethoden gibt. Andererseits können und sollen auch die Rechenkraft eines Computers und das Plotten von Funktionsgraphen in den Unterricht eingebaut werden.

Das folgende Kapitel untersucht nun die fünf zur Zeit¹³⁶ für den österreichischen Schulunterricht in den Gymnasien approbierten Schulbücher auch im Hinblick darauf, ob die bei Danckwerts/Vogel genannten vernachlässigten Aspekte im jeweiligen Buch Niederschlag gefunden haben, oder tatsächlich stiefmütterlich behandelt werden. Dabei soll jeweils das ganze Kapitel analysiert werden. Der Einstieg ins Thema und die weitere Struktur des Themas wird ebenso genauer betrachtet wie die Qualität und Quantität der Aufgaben. Dabei werden auch teilweise kurz ein paar Beispiele aus den Schulbüchern vorgestellt. Die Reihung der Schulbücher erfolgte durch Zufall und spiegelt dadurch auch keinerlei Wertung wider.

¹³⁵ Vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 208.

¹³⁶ Stand Schuljahr 2015/16.

4.1 Mathematik 7 (Götz/Reichel)

Das Thema der Extremwertaufgaben verorten Götz/Reichel im Kapitel „Einige Anwendungen der Differentialrechnung“, welches direkt auf die Kapitel „Differentialrechnung“ und „Kurvendiskussionen – Funktionsmodelle“ folgt. Dies stellt meines Erachtens einen logischen Aufbau dar. In besagtem Kapitel „Einige Anwendungen der Differentialrechnung“ stellt das Thema der Extremwertaufgaben (nach einer kurzen Vorschau) den ersten Teil dar, es folgen die Themen Newton'sches Näherungsverfahren, Taylorpolynome und Potenzreihen und die Regel von l'Hospital.

Der Einstieg in die Thematik der Extremwertaufgaben wird mittels des isoperimetrischen Problems für Rechtecke bewältigt: Es wird gefragt, wie ein Landwirt einen möglichst großen Hühnerhof mit 50 Laufmetern Maschendraht zu dimensionieren hat, um einen möglichst großen rechteckigen Platz zu erhalten. Es wird zunächst gezeigt, dass der Landwirt einfach verschiedene Dimensionierungen *ausprobieren* könnte. Danach wird aber gezeigt, dass er auch *zielgerichtet* vorgehen könnte, in dem er den Flächeninhalt A des rechteckigen Platzes durch eine zweistellige Funktion auffasst.

Direkt an diesen Einstieg nachfolgend werden Strategien zum Bearbeiten von Extremwertaufgaben anhand von jeweils einem durchgerechneten Beispiel gezeigt („Extremwertaufgaben mit Formvariablen lösen“, „Mit vereinfachten Funktionen und Hilfsvariablen arbeiten“, „Extremwertaufgaben ohne (eindeutige) Lösung bearbeiten“, „Das ‚Rezept‘ für das Lösen von Extremwertaufgaben verstehen“). Bereits im zweiten durchgerechneten Beispiel, also dem Beispiel nach dem eben genannten Hühnerhof, tritt ein Extremum am Rand des Definitionsbereiches auf. Hier ist außerdem positiv zu erwähnen, dass auch bereits zu Beginn des Kapitels erwähnt wird, dass einerseits Extremwertaufgaben nicht immer eine eindeutige Lösung haben müssen. Das Beispiel des umfanggrößten Rechtecks, dessen Seiten parallel zu den Diagonalen des Quadrates stehen, zeigt dies eindrucksvoll. Andererseits wird auch klar gemacht, dass die Differentialrechnung nur ein Werkzeug von vielen zur Bearbeitung von Extremwertaufgaben darstellt: „Beachte, dass man manche Extremwertaufgaben auch ohne Differentialrechnung lösen kann oder könnte [...]. Daher: Das obige ‚Rezept‘ soll

man verstehen und in eine konkrete Problemlösung umsetzen können, aber nicht sofort und stur in jedem Fall anwenden (versuchen).“¹³⁷

Nach den einführenden Bemerkungen und den durchgerechneten Beispielen folgen die Aufgaben, die nach verschiedenen Gesichtspunkten geordnet und wie folgt betitelt worden sind: „Aufgaben zur Theorie“, „Aufgaben mit einer explizit (durch eine Formel) gegebenen Nebenbedingung“, „Aufgaben, deren Nebenbedingungen mit dem Strahlensatz herleitbar sind“, „Aufgaben, deren Nebenbedingungen mit dem pythagoreischen Lehrsatz herleitbar sind“, „Aufgaben mit (Hilfs-)Winkeln“, „Vermischte Aufgaben“, „Ohne Differentialrechnung lösbare Aufgaben“, „Aufgaben aus Naturwissenschaft, Technik und Wirtschaft“. So werden die Beispiele einerseits anhand der Strategie zum Aufstellen der Nebenbedingung kategorisiert, was den Vorteil mit sich bringt, dass man gezielt auch Aufgaben etwa mit dem Strahlensatz üben kann, falls man hier noch Nachholbedarf sieht. Andererseits enthalten die nachfolgenden Themengebiete keine Hinweise zum Auffinden der Nebenbedingungen mehr, weshalb auch hier erst gedankliche Anstrengungen unternommen werden müssen, um zur richtigen Strategie des Auffindens der Nebenbedingungen zu kommen. Des Weiteren wird gezeigt, dass Extremwertaufgaben auf verschiedene Arten gelöst werden können, also nicht nur mit der Differentialrechnung^{138,139}, und dass Extremwertaufgaben in Naturwissenschaft, Technik und Wirtschaft eine bedeutende Rolle spielen. Hier werden realitätsnahe Beispiele präsentiert.

Dieses Buch enthält eine sehr große Anzahl an Aufgaben, so erstreckt sich das Kapitel Extremwertaufgaben von Seite 143 bis 153, beinhaltet in diesen 11 Seiten die Aufgaben 523 bis 608, also 86 Aufgaben.

¹³⁷ Götz/Reichel 2011, S. 146.

¹³⁸ Vgl. einerseits die Überschrift „Ohne Differentialrechnung lösbare Aufgaben“ sowie etwa das Beispiel 598 des Buches, das auch in Kapitel 3.2.1 der vorliegenden Arbeit vorgestellt wird.

¹³⁹ An einigen wenigen Stellen im Buch könnten noch dezente Hinweise eingebaut werden, um etwa geometrische Zusammenhänge besser zu verdeutlichen: So soll etwa im Bsp. 534 ein Hühnerhof an eine Mauer bzw. zwei Mauern angebaut werden. Dass hierbei wiederum die Symmetrie zum Tragen kommt, wurde nicht explizit erwähnt. Dies wurde bei Malle et al. (2011) in „Mathematik verstehen 7“ beim (analogen) Beispiel 3.117 durch den Zusatz „Ist das Areal quadratisch zu wählen? Wenn nicht, wie lang müssen seine Seitenlängen gewählt werden?“ gelöst. Hier wird zum Nachdenken angeregt, weshalb hier das Quadrat (vermeintlich) nicht die optimale Lösung ist. Vgl. hierzu auch das nachfolgende Subkapitel 4.2 der vorliegenden Arbeit.

In Bezug auf die von Danckwerts/Vogel genannten vernachlässigten Aspekte ist festzuhalten, dass elementare Methoden ihren Niederschlag finden, sogar ein eigenes kurzes Subkapitel „Ohne Differentialrechnung lösbare Aufgaben“ im Buch vorkommt. Modellierungsaufgaben finden sich jedoch im Buch nicht, auch werden historische Problemstellungen nicht thematisiert. Der Einsatz von technischen Medien wird im Buch selbst nicht explizit propagiert, wird aber wohl im Unterricht dennoch stattfinden, gerade im Hinblick auf die standardisierte Reifeprüfung. Die Entscheidung, an welchen Stellen welcher Technologieeinsatz erfolgt, obliegt aber hier wohl der Lehrkraft.

4.2 Mathematik verstehen 7 (Malle et al.)

Malle et al. verorten die Extremwertaufgaben in das Kapitel „Untersuchung von Polynomfunktionen“, das dem Kapitel „Grundbegriffe der Differentialrechnung“ direkt nachfolgt und sich vor dem Kapitel „Untersuchen weiterer Funktionen“ befindet. Somit wird hier auch bereits durch die Eingliederung in dieses Kapitel der Zusammenhang mit den Kurvendiskussionen, bzw. hier Funktionsuntersuchungen genannt, betont.

Auch hier erfolgt wie bei Götz/Reichel der Einstieg in die Thematik durch das isoperimetrische Problem für Rechtecke: Es wird gefragt, welches Rechteck vom Umfang 100 den größten Flächeninhalt besitzt. Diese Aufgabe wird durchgerechnet und näher erläutert. Es wird darauf hingewiesen, dass bei Polynomfunktionen zweiten Grades die lokale Maximumstelle auch gleichzeitig eine globale Maximumstelle ist, wenn die Maximumstelle in der Definitionsmenge liegt, dies aber nur in diesem speziellen Fall so ist: „Bei Polynomfunktionen zweiten Grades kann das globale Maximum nämlich auch an den Randstellen des Intervalls angenommen werden. Deshalb ist es im Allgemeinen besser, wie in der vorangegangenen Aufgabe vorzugehen. Dabei wird die zweite Ableitung nicht gebraucht.“¹⁴⁰

Es folgen nach diesem Einstiegsbeispiel ein paar weitere Aufgaben und daran anschließend wiederum jeweils ein durchgerechnetes Beispiel, das sich einer bestimmten Strategie widmet, mit zugehörigen weiteren Aufgaben zum eigenen

¹⁴⁰ Malle et al. 2011, S. 67. Vgl. hierzu auch Kapitel 2.3 der vorliegenden Arbeit.

Bearbeiten und Lösen: „Vereinfachen der Zielfunktion durch Weglassen eines konstanten Faktors“, „Aufgaben mit dem pythagoräischen Lehrsatz“, „Aufgaben mit dem Strahlensatz (bzw. mit ähnlichen Dreiecken)“, „Vereinfachen der Zielfunktion durch Quadrieren“, „Extremstellen am Rand des Intervalls“. In diesem Schulbuch ist es leider so, dass es im Gegensatz zu Götz/Reichel keinen Bereich gibt, wo vermischte Aufgaben ohne Anweisung präsentiert werden, welche Strategie zum Auffinden der Nebenbedingung notwendig ist. Weitere Extremwertaufgaben finden sich aber auch im nachfolgenden Kapitel „Untersuchen weiterer Funktionen“ bei den Subkapiteln „Untersuchen rationaler Funktionen“ und „Die Kettenregel“, wo derartige Hinweise dann zum Glück fehlen. Nachdem im Inhaltsverzeichnis aber explizit das Subkapitel „Extremwertaufgaben“ geführt wird, kann es natürlich der Fall sein, dass nur in diesem Subkapitel nach Aufgaben zum Üben gesucht wird und infolgedessen diese Problematik des Findens der Strategie zum Tragen kommt. Abschließend wird ein einseitiger Text mit dem Titel „Historisches zu Extremwertaufgaben“ angeführt, der kurz in die Überlegungen von Euklid und Fermat eintaucht.¹⁴¹

Positiv zu erwähnen ist, dass Extremstellen am Rand eines Intervalls sogar in Form einer eigenen Überschrift thematisiert werden und Aufgaben dazu gestellt werden. Das Subkapitel „Extremwertaufgaben“ ist dabei zehn Seiten lang und liefert 49 Aufgaben, dazu kommen 16 Aufgaben aus dem Subkapitel „Untersuchen rationaler Funktionen“ und 12 Aufgaben aus dem Subkapitel „Die Kettenregel“, in Summe demnach 77 Aufgaben.

In Bezug auf die von Danckwerts/Vogel genannten vernachlässigten Aspekte zeigt sich, dass auch hier Modellierungsaufgaben fehlen. Historische Problemstellungen werden anhand des bereits erwähnten einseitigen Textes über Euklid und Fermat präsentiert, eine Bearbeitung der Überlegungen von Euklid und Fermat ist – wie bei Danckwerts/Vogel vorgeschlagen – zumindest im Buch nicht intendiert. Elementare Methoden werden bis auf eine Ausnahme nicht explizit benannt: Die Aufgabe 4.69 soll jedoch mit Differentialrechnung und auch mit geometrischen Überlegungen gelöst werden:

¹⁴¹ Dieser historische Rückblick ist ähnlich dem in der vorliegenden Arbeit präsentierten Subkapitel 3.4 „Berühmte historische Probleme“, nur in verkürzter und einfacherer Form.

- 1) Welches ist der kürzeste Weg auf der Oberfläche eines Würfels mit der Kantenlänge a von einer Ecke zur diametral gegenüberliegenden Ecke?
- 2) Wie kann man diese Aufgabe auch geometrisch lösen?¹⁴²

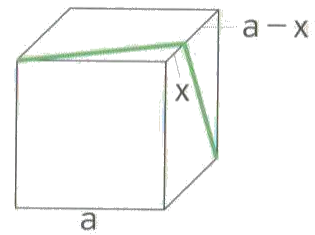


Abb. 40: Würfel. Aus: Malle et al. 2011, S. 95.

Bis auf diese Aufgabe werden keine expliziten Hinweise auf elementare Methoden geliefert, wenngleich etwa ein (eher dezenter) Hinweis auf zugrundeliegende Symmetrieeigenschaften existiert:

An eine Mauer angrenzend soll mit 20m Drahtzaun ein rechteckiges Areal so eingezäunt werden, dass sein Flächeninhalt möglichst groß ist. **Ist das Areal quadratisch zu wählen? Wenn nicht, wie lang müssen seine Seitenlängen gewählt werden?**¹⁴³

Elementare Methoden sind – vor allem im Vergleich zum Schulbuch von Götz/Reichel – also unterrepräsentiert. Beim Technologieeinsatz verhält es sich dagegen wie bei Götz/Reichel: Der Technologieeinsatz ist durch die standardisierte Reifeprüfung bedingt im Unterricht ein generelles Thema, im Buch wird es nicht explizit angesprochen – bis auf lediglich fünf Aufgaben zu Beginn des Kapitels, die mit einem Maus-Icon versehen sind, das Technologieeinsatz empfiehlt.

4.3 Dimensionen 7 (Bleier et al.)

In diesem Schulbuch befinden sich die Extremwertaufgaben als Subkapitel der Differentialrechnung nach dem Subkapitel der „Funktionsuntersuchungen“ und dem der „Umkehr- und Modellbildungsaufgaben“. Danach folgen noch die Subkapitel „Exaktifizierung“ sowie „Weitere Anwendungen der Differentialrechnung“.

¹⁴² Malle et al. 2011, S. 95, Bsp. 4.69.

¹⁴³ Malle et al. 2011, S. 68, Bsp. 3.117 (Hervorhebung durch den Autor der vorliegenden Arbeit). Vgl. hierzu auch Kapitel 3.2.1 der vorliegenden Arbeit.

Den Beginn dieses Kapitels markieren dabei eine kurze Wiederholung des Strahlensatzes sowie ein Verweis zum Üben von geometrischen Formeln, das sich als zusätzliches Lernmaterial auf der dem Schulbuch beigelegten CD befindet. Danach wird das Beispiel der optimalen Saftverpackung als tatsächlicher Einstieg in die Thematik durchgerechnet. Es folgen immer wieder Überschriften mit durchgerechneten Beispielen, denen ein paar wenige Aufgaben jeweils folgen: „Aufgaben, in denen die Nebenbedingung mithilfe des Satzes von Pythagoras ermittelt wird“, „Aufgaben, in denen die Nebenbedingung mithilfe des Strahlensatzes ermittelt wird“, „Aufgaben, in denen die Extremstelle am Rand eines Intervalls liegt“. Danach folgt ein größerer Block mit mehreren vermischten Aufgaben, sowie ein weiterer Block, der mit „Aufgaben mithilfe eines elektronischen Tools lösen“ überschrieben ist. Immer wieder finden sich auch Aufgaben, die auf ein Arbeitsblatt verweisen, das auf der CD enthalten ist.

Positiv ist also, dass einerseits das zugrundeliegende Vorwissen wie der Strahlensatz zu Beginn des Kapitels aufgefrischt wird, andererseits auch gezielt Aufgaben zu einzelnen Strategien zum Auffinden einer Nebenbedingung gewählt werden können. Leider fällt hier die Anzahl der Aufgaben aber sehr gering aus, so gibt es pro Überschrift nur noch zwei weitere Aufgaben konkret zu diesem Thema. Zum Themenbereich „Aufgaben, in denen die Extremstelle am Rand eines Intervalls liegt“ gibt es gleich gar keine weitere Aufgabe, nur das durchgerechnete Beispiel wird hier angeführt.

Leider gibt es keinerlei Hinweise auf elementare Methoden in diesem Schulbuch, obwohl sich einige Beispiele und Aufgaben durchaus dafür eignen würden: So wurde bereits die Aufgabe 413 im Kapitel 3.2.1 („Symmetrie als Lösungsmethode“) der vorliegenden Arbeit behandelt. Hierbei liegt eine Aufgabe vor, die auch mittels Symmetrieüberlegungen graphisch gelöst werden kann. Auch wird dann deutlich, dass die Lösung dem Reflexionsgesetz genügt, und dass jeweils das eine das andere zur Folge hat, also die beiden Sachverhalte zueinander äquivalent sind. Das alleinige Lösen mit dem Ableitungskalkül gibt die Symmetrie dahinter jedoch nicht zu erkennen, das besondere ‚Wesen des Punktes‘ bleibt im Verborgenen.¹⁴⁴ Auch die Aufgabe 403 ist hier anzuführen, da sie eine analoge Aufgabenstellung aufweist. Zu dieser Aufgabe

¹⁴⁴ Vgl. Humenberger/Reichel 1995, S. 241

findet sich aber keine Skizze im Buch, demnach ist es möglich, dass Schülerinnen und Schüler eine Skizze machen und dadurch auf Überlegungen zur Symmetrie stoßen.

Das Kapitel der Extremwertaufgaben ist in diesem Buch neun Seiten stark und bietet 42 Aufgaben, also deutlich weniger als etwa die Schulbücher von Malle et al. oder Götz/Reichel.

Elementare Methoden finden sich wie bereits erwähnt in diesem Buch nicht, auch findet sich nichts über historische Problemstellungen. Positiv zu erwähnen ist der Technologieeinsatz, der hier auch vonseiten des Buches forciert wird, wie die Überschrift „Aufgaben mithilfe eines elektronischen Tools lösen“ zeigt. Modellierungsaufgaben finden sich ebenso wie in den anderen Schulbüchern hingegen nicht.

4.4 klar_Mathematik 7 (Hötzel et al.)

In diesem Schulbuch finden sich die Extremwertaufgaben als erstes Subkapitel im Kapitel „Anwendungen der Differenzialrechnung“ wieder, das auf die Kapitel „Grundlagen der Differenzialrechnung“ und „Kurvendiskussion“ folgt. Das Subkapitel der Extremwertaufgaben ist selbst nochmals unterteilt in die Blöcke „Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen lösen können“, „Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen lösen können“, „Zusammenfassung“, „Musterbeispiele“ und „Übungsaufgaben“. Im letzten Subkapitel „Einsatz von Technologie“ des Kapitels „Anwendungen der Differenzialrechnung“ finden sich auch Extremwertaufgaben, die etwa mit Excel, GeoGebra und TI-Nspire bearbeitet werden sollen.

Der Einstieg folgt hier mit einem kurzen Text und einer Erklärung, was Extremwertaufgaben eigentlich sind und womit im Folgenden zu rechnen ist, und danach einem Musterbeispiel: Gesucht ist dabei die volumsgrößte Schachtel aus einem quadratischen Stück Karton. Dieses Musterbeispiel ist detailliert ausgeführt, auch Bemerkungen sind vorhanden, etwa dass das Betrachten eines Graphen einer Funktion bereits ausreichen kann, um das Optimum herauszufinden. Ein etwas komplexeres Beispiel, das der Silvesterrakete, die eine maximale „Wurfweite“ erzielen soll, wird im Anschluss präsentiert. Danach folgt ein einfaches Musterbeispiel, bei dem

aus zwei Stäbchen ein Dreieck mit größtmöglicher Fläche aufgespannt werden soll (die dritte Seite bleibt bei diesem Beispiel unberücksichtigt, es geht um den eingeschlossenen Winkel der beiden Stäbchen). Es folgt ein weiteres Musterbeispiel.

Danach kommt das Subkapitel „Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen lösen können“. Hier wird zuerst gefragt, wie viel Verpackungsmaterial für den Transport von einem Liter Flüssigkeit erforderlich ist. Es wird eine kleine Übersicht geboten über verschiedenste geometrische Körper:

Zylinder	Kegel	Kugel	Tetraeder	Würfel	"Idealkörper"
$V = 1 \text{ Liter}$ $O \approx 5,5 \text{ dm}^2$	$V = 1 \text{ Liter}$ $O \approx 6,1 \text{ dm}^2$	$V = 1 \text{ Liter}$ $O \approx 4,8 \text{ dm}^2$	$V = 1 \text{ Liter}$ $O \approx 7,2 \text{ dm}^2$	$V = 1 \text{ Liter}$ $O \approx 6,0 \text{ dm}^2$	$V = 1 \text{ Liter}$ $O \approx ?$

Abb. 41: Übersicht über verschiedene Verpackungsformen für einen Liter Flüssigkeit. Eigene Darstellung, nach: Hötzel et al. 2012, S. 144.

Dieses Beispiel ist ein guter Einstieg. An ihm erkennt man, dass unterschiedliche Verpackungsformen mit gleichem Volumen unterschiedlichen Materialverbrauch aufweisen, also eine unterschiedlich große Oberfläche besitzen. Beachtenswert ist hierbei, dass etwa der Würfel, also ein oberflächenminimaler Quader hier nur leicht besser abschneidet als etwa ein Kegel, ein Zylinder im Gegenzug sogar besser. Diese Gegenüberstellung verschiedener Körper ist zu begrüßen, da im Allgemeinen im Unterricht nur ein Körper hergenommen wird und dieser schließlich optimiert wird. Dass jedoch etwa ein Würfel im Vergleich zum Zylinder in Bezug auf die Oberfläche schlechter abschneidet, wird wohl nicht so oft thematisiert. Der Würfel bleibt lediglich als oberflächenminimaler Quader in Erinnerung, wird also in Verbindung mit einem Optimum gebracht. Es gibt aber eben in Bezug auf die Oberfläche „bessere“ Körper.

Mit dieser Übersicht wird auf das erste Musterbeispiel dieses Subkapitels übergeleitet, dem geringsten Materialverbrauch bei einer Getränkedose, also einem Zylinder. Nach dem Lösen dieser Musteraufgabe wird auch verglichen, wie groß der prozentuelle Mehrverbrauch ist, wenn man von den idealen Abmessungen etwas abweicht. Danach wird das isoperimetrische Problem für Rechtecke vorgerechnet, und es werden ein paar Einschreibeaufgaben gelöst. Außerdem wird ein Beispiel präsentiert, bei dem die

vorkommende Funktion keine Extremstelle im Definitionsbereich aufweist, daher eine Randstelle die Lösung darstellt. Im Anschluss an die durchexerzierten Musteraufgaben folgen eine Zusammenfassung und weitere Musteraufgaben. Es wird auch ein Beispiel gezeigt, bei dem eine geometrische Lösung präsentiert wird: Ein Krähe will von einem Baum zum Boden fliegen, um dort ein Körnchen aufzuheben, und danach zu einem Zaun fliegen. Gesucht ist dabei der kürzeste Weg Baum – Boden – Zaun.¹⁴⁵ Es wird auch darauf hingewiesen, dass das nichts anderes ist als das Reflexionsgesetz aus der geometrischen Optik. Nach diesen seitenlangen Einführungen und Musteraufgaben folgen nun die Übungsaufgaben.

Es werden verschiedene Übungsaufgaben gestellt. So findet sich die Aufgabe des Milchpackerls in der Form, wie sie auch in dieser Arbeit in Kapitel 2.5.2 bereits vorgestellt wurde. Es findet sich aber auch die folgende Aufgabe, die an das bereits erwähnte Beispiel mit der Krähe erinnert, dennoch eine nette Abwandlung darstellt:

Zwei Forschungseinrichtungen A und B liegen auf beiden Seiten eines kleinen Wasserkanals.

- Wo sollte eine kleine Fußgängerbrücke (= CD) gebaut werden, damit der Gehweg $\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB}$ zwischen beiden Instituten **möglichst kurz wird**?
- Begründe, warum die Angabe der Kanalbreite nicht erforderlich ist.
- Versuche eine geometrische Lösung des Problems zu finden.¹⁴⁶

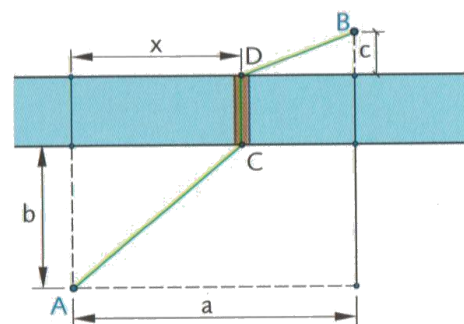


Abb. 42: Eine Brücke. Aus: Hötzel et al. 2012, S. 161.

Dies stellt eine durchaus gelungene Variation der üblichen Beispiele zur Symmetrie dar. Es ist auch wichtig, dass in der Skizze die Gehwege in unterschiedlichen Winkeln abzweigen, und man erst durch geometrische Überlegungen zur Erkenntnis kommt, dass es sich hierbei um die einfachste Version einer Aufgabe handelt, zwei Punkte miteinander zu verbinden.

¹⁴⁵ Vgl. hierzu auch das Kapitel 3.2.1 der vorliegenden Arbeit. Hier werden analoge (anders eingekleidete) Beispiele besprochen.

¹⁴⁶ Hötzel et al. 2012, S. 161, Bsp. 4.39 (Hervorhebung wie im Original).

Die Aufgaben, die im nächsten Subkapitel „Einsatz von Technologie“ präsentiert werden, haben einerseits natürlich den Technologieeinsatz zum Ziel, andererseits werden auch hier immer wieder Bezüge zu elementaren Methoden hergestellt. So sollen manche Aufgaben zuerst ohne Differentialrechnung gelöst werden.

Die Struktur dieses Buches ist gewöhnungsbedürftig und kann sicher kontrovers diskutiert werden: So werden gleich zu Beginn eine Menge an Musteraufgaben vorgestellt, erst in einem eigenen Block Übungsaufgaben gestellt. Die Musteraufgaben sind jedoch ausführlich kommentiert, was einerseits sicher beim erstmaligen Lesen positiv zu bewerten ist. Ist man jedoch auf der expliziten Suche nach einem bestimmten Thema, muss man sich durch viel Text und spärlich betitelte Seiten kämpfen, um zu den gewünschten Informationen zu gelangen. Somit wirkt dieses Schulbuch letztendlich wieder etwas überladen und unstrukturiert, obgleich das Ziel wohl ein gegenteiliges war. Dies ist natürlich aber nur eine subjektive Einschätzung.

Es finden sich auch Ansätze zu Modellierungsaufgaben in diesem Schulbuch, so wird etwa beim optimalen Milchpackerl die Aufgabe gestellt, ein Milchpackerl tatsächlich aufzufalten und mit den Ergebnissen der Rechnung zu vergleichen. Auch wenn hier der Modellbildungskreislauf kein weiteres Mal durchlaufen wird, wird dennoch die reflexive und evaluative Komponente zumindest angesprochen, die in den meisten Schulbüchern und den meisten Aufgaben zu kurz kommt.

Historische Problemstellungen werden nur am Rande im Text kurz erwähnt. Nach dem isoperimetrischen Problem steht geschrieben (hier erkennt man auch bereits die Schreibweise in diesem Schulbuch, es werden ausführliche Bemerkungen getätigt):

Wir haben damit wahrscheinlich die **älteste Extremwertaufgabe** gelöst, denn diese und ähnliche Aufgaben wurden bereits in der Antike bei den Griechen (Euklid, Heron, ...) diskutiert. Damals aus rein geometrischen Überlegungen heraus, da die Differenzialrechnung erst viel später entwickelt wurde.

Archimedes – ein begnadeter Physiker seiner Zeit – wird uns in der Integralrechnung der 8. Klasse noch im Zusammenhang mit der Flächenberechnung

begegnen. Wie du siehst, muss Mathematik über sehr, sehr viele Jahre langsam heranreifen. Sie ist ein wertvolles Kulturgut.¹⁴⁷

Das Kapitel der Extremwertaufgaben ist dabei 22 Seiten lang mit 16 Beispielen und 41 Aufgaben, wobei noch die Seiten und die darin enthaltenen Aufgaben des Subkapitels „Einsatz von Technologie“ zu beachten sind, die sich aber nicht nur auf die Extremwertaufgaben, sondern auch auf lokale und globale Approximation und die Methode der kleinsten Quadrate beziehen.

4.5 Thema Mathematik 7 (Brand et al.)

Extremwertaufgaben werden in diesem Schulbuch im Kapitel „Anwendungen der Differentialrechnung“ verortet, das dem Kapitel „Kurven und Flächen im Raum“ nachfolgt, obgleich es inhaltlich auf das Kapitel „Differentialrechnung – Eigenschaften von Funktionen“ aufbaut. Das Kapitel „Anwendungen der Differentialrechnung“ beinhaltet dabei „Anwendungen in der Wirtschaft“, „Newton-Verfahren“, „Ableitung unbestimmter Ausdrücke – Regel von de l’Hospital“, „Extremwertaufgaben“ und „Anwendungen aus der Physik“. Weitere Extremwertaufgaben finden sich dabei auch im nachfolgenden Subkapitel „Anwendungen aus der Physik“.

Den Einstieg bildet auch hier eine Hühnerhof-Aufgabe, in welcher ein möglichst großes rechteckiges Areal durch zwei Zäune abgesteckt werden soll, zwei weitere Seiten werden durch die Hauswand begrenzt. Das daran nachfolgende Musterbeispiel ist etwas bedenklich, weil sie wohl niemand mittels Differentialrechnung lösen würde:

Von einer geradlinig verlaufenden Straße soll eine Zufahrtsstraße zu einem Ausgrabungsort errichtet werden: Die Straße wird durch $x - 2y = -10$ beschrieben, der Ausgrabungsort liegt in diesem Modell im Koordinatenursprung. Wie muss die Zufahrt geplant werden, damit sie möglichst kurz ist (Entfernungen in km)?¹⁴⁸

¹⁴⁷ Hötzel et al. 2012, S. 147 (Hervorhebungen wie im Original).

¹⁴⁸ Brand et al. 2011, S. 212, Bsp. 919.

Dieses Beispiel wird im Buch wie folgt gelöst:

Ausführung:

- (1) Der Abstand eines Punktes $P(x|y)$ vom Koordinatenursprung ist:

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots \text{Hauptbedingung (HB)}$$

- (2) Der Punkt $P(x|y)$ muss auf der Straße liegen, daher gilt:

$$x - 2y = -10 \quad \dots \text{Nebenbedingung (NB)}$$

- (3) Wir drücken x aus der NB aus $x = 2y - 10$ und setzen in die HB ein:

$$\text{Zielfunktion } d(y) = \sqrt{(2y - 10)^2 + y^2} = \sqrt{5y^2 - 40y + 100} \text{ für } y \in \mathbb{R}$$

- (4) $d'(y) = \frac{10y - 40}{2\sqrt{5y^2 - 40y + 100}} = 0 \Rightarrow$ kritischer Wert $y = 4$

- (5) Für y sind alle reellen Zahlen möglich, daher gibt es kein Randextremum. Wir zeigen mithilfe der 2. Ableitung, dass $y = 4$ ein lokales und damit auch ein globales Minimum ist:

$$d''(y) = \frac{10 \cdot 2\sqrt{5y^2 - 40y + 100} - \frac{2(10y - 40)}{2\sqrt{5y^2 - 40y + 100}}(10y - 40)}{4 \cdot (5y^2 - 40y + 100)}$$

$$d''(4) = \frac{20 \cdot \sqrt{80 - 160 + 100}}{4(80 - 160 + 100)} > 0 \Rightarrow$$

Minimum!

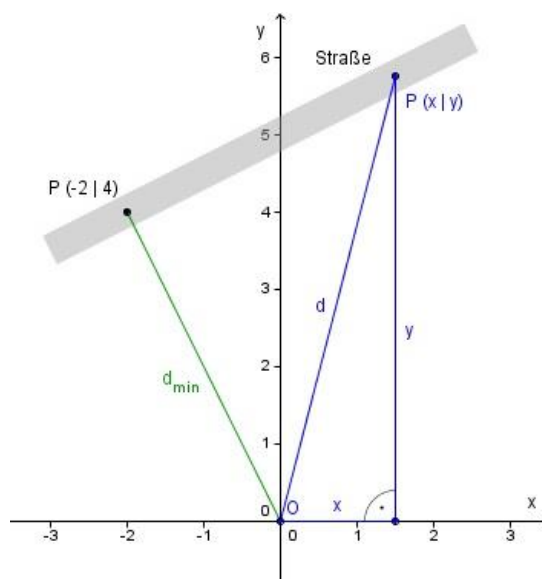
- (6) Mit $y = 4$ erhalten wir:

$$x = 2y - 10 = -2 \Rightarrow P(-2|4)$$

und den minimalen Abstand

$$d_{\min} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} \approx 4,47$$

(siehe Zeichnung).



Ergebnis: Im Punkt $P(-2|4)$ der Straße muss die Zufahrt zum Ausgrabungsort abzweigen.

Diese Zufahrt hat eine Länge von etwa 4,5 km.

Abb. 43: Skizze zu Beispiel.

Nach: Brand et al. 2011, S. 212,

Bsp. 919.

Bemerkung: Die Zeichnung lässt erkennen, dass

die Zufahrt in einem rechten Winkel zur Straße

steht. Rechne nach, dass dies tatsächlich der Fall ist!¹⁴⁹

¹⁴⁹ Brand et al. 2011, S. 212-213, Bsp. 919 (Hervorhebungen wie im Original).

Einerseits kann man dieses Beispiel sehr leicht durch andere Methoden lösen, so liefert bereits die Vektorrechnung ein probates Mittel – dass die Straße im rechten Winkel abzweigen muss, kann auch elementar schnell begründet werden.¹⁵⁰ Andererseits ist dieses Beispiel für den Einstieg wohl bereits deshalb ungeeignet, weil die Ableitungen hier merklich komplex und unüberschaubar werden. Zu allem Überduss wird hier noch die zweite Ableitung gebildet, die im Allgemeinen bei Extremwertaufgaben nicht gebildet werden muss¹⁵¹ – und hier bereits sehr unübersichtlich und komplex wird. Geradezu ironisch mutet hierbei die Anmerkung an, die man nach diesem Beispiel tätigt:

Welche Variable aus der NB ausgedrückt und dann in die HB eingesetzt wird, musst du von Fall zu Fall entscheiden. Bei Beispiel 919 ist es eindeutig günstiger (weniger Rechenaufwand), aus der NB die Variable x auszudrücken.¹⁵²

So minimiert sich der Rechenaufwand bei der richtigen Wahl der Methode und nicht durch die Wahl der Variable – die Differentialrechnung ist hier nicht unbedingt das Mittel der (ersten) Wahl. Die Vektorrechnung etwa liefert viel bessere Dienste, so liefert die Hesse'sche Normalform sofort:

$$d = \frac{10}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \approx 4,47$$

Nach diesem (meines Erachtens misslungenen) Einstieg folgen erste Aufgaben. Dabei finden sich auch vier Aufgaben, die analog Abstandsberechnungen einer Kurve vom Koordinatenursprung zum Thema haben. Wiederum ist die erste Aufgabe dabei eine Gerade in der Ebene, also eine lineare Funktion und damit wiederum leichter zu lösen. Es kann natürlich sein, dass man zuerst leichte Aufgaben zur Verfügung stellen wollte, dann sollte dies aber mit dem Hinweis versehen werden, dass diese Aufgaben auch anders gelöst werden können (und das viel schneller).

¹⁵⁰ Man kann diesen Sachverhalt etwa mit der Dreiecksungleichung begründen, vgl. hierzu auch das Kapitel 3.2.2 der vorliegenden Arbeit.

¹⁵¹ Vgl. hierzu Kapitel 2.3 der vorliegenden Arbeit.

¹⁵² Brand et al. 2011, S. 213 (Anmerkung zu Bsp. 919).

Schließlich folgen weitere Aufgaben, die mit „Ebene Aufgaben – Vereinfachung der Zielfunktion“ betitelt werden, sowie „Räumliche Aufgaben“ und „Anwendungsbeispiele“. Auch bei den Musteraufgaben zu den räumlichen Aufgaben und den Anwendungsbeispielen (optimale Dose, vgl. Kapitel 2.5.1 der vorliegenden Arbeit) findet sich jeweils die zweite Ableitung im vorgerechneten Beispiel.

Extremstellen am Rand eines Definitionsbereiches werden nur kurz thematisiert, so wird geschrieben: „Bei unseren Beispielen erhalten wir immer ein einziges lokales Extremum x_0 im Inneren der Definitionsmenge der Zielfunktion. Ist diese Menge ein endliches Intervall $[a; b]$, kann das globale Extremum nur bei a, b (Randextremum) oder bei x_0 sein.“¹⁵³

Das Kapitel „Extremwertaufgaben“ findet in diesem Schulbuch auf sieben Seiten Platz und behandelt dabei 47 Aufgaben, wobei noch drei Seiten und 15 Aufgaben im nachfolgenden Subkapitel „Anwendungen aus der Physik“ hier hinzuzurechnen sind.

Modellierungsaufgaben findet man auch hier nicht, ebenso wenig wird auf elementare Methoden verwiesen – im Gegenteil wird „mit Gewalt“ der Differentialkalkül einer (außerdem schlecht eingekleideten) Aufgabe übergestülpt, die anders leichter und schneller zu lösen wäre. Der Technologieeinsatz wird nicht explizit angesprochen, ist aber auch hier durch die standardisierte Reifeprüfung bedingt sowieso von der Lehrkraft an passenden Stellen zu behandeln. Historische Problemstellungen finden sich nicht in diesem Schulbuch.

4.6 Vergleich und Fazit

Gemeinsam ist allen Schulbüchern, dass das *Modellbilden* zu kurz kommt. Richtiges Modellbilden im Sinne der Modellbildungskreisläufe wird nicht behandelt, ist also – wenn es im Unterricht Platz finden soll – durch die Lehrkraft selbst zu initiieren, von den Büchern kommt hier kein Input. Richtiges Modellieren wird dies aber ohnedies nicht sein, da hierbei auch keine Vorgaben gemacht werden, mit welchem Werkzeug man die gestellte Aufgabe lösen kann. Demnach muss nicht differenziert werden oder

¹⁵³ Brand et al. 2011, S. 213.

auf elementarem Wege versucht werden, ein Extremum zu finden, es könnten auch ganz andere Herangehensweisen gewählt werden. Infolgedessen wird aber schließlich nicht die Differentialrechnung geübt bzw. eine Anwendung der Differentialrechnung gezeigt. Demnach bräuchten derartige Aufgaben, die schließlich doch mittels Differentialrechnung oder zumindest mit elementaren Methoden behandelt werden sollen, etwas Anleitung, dass die Schülerinnen und Schüler auch zur Differentialrechnung greifen.

Historische Problemstellungen finden sich ebenso – wenn überhaupt – nur in Textform in den Schulbüchern, diese werden aber nicht – wie von Danckwerts/Vogel aber gefordert – behandelt und für ein besseres Verständnis in den Unterricht mit hineingenommen. Dies mag auch darin begründet liegen, dass einerseits der Platz in Schulbüchern begrenzt ist, aber auch im Unterricht selbst oft die Zeit fehlt und sich die Lehrerinnen und Lehrer auf den Stoff konzentrieren, der auch tatsächlich abgeprüft wird und im Rahmen der standardisierten Reifeprüfung gekonnt werden muss, auch wenn manch sinnvolle Ergänzung, die aber nicht geprüft wird, zu einem besseren Verständnis führen kann.

Elementare Methoden finden sich in unterschiedlicher Ausprägung in den Schulbüchern. Während sie in den einen thematisiert werden und sogar einen eigenen Übungsblock bekommen, zeigen andere nur implizit, dass man Aufgaben auch anders lösen kann, andere wiederum beharren auf dem Differentialkalkül, auch wenn sich bei Beispielen eine elementare Methode regelrecht anbietet, sogar fast aufdrängt. Dagegen spricht aber, dass Extremwertaufgaben in dieser Form wohl auch nicht zur standardisierten Reifeprüfung kommen. Für manche Aufgaben ist es durchaus sinnvoll, elementare Methoden zu betrachten. Ziel wird es aber wohl sein, derartige Aufgaben primär mit der Differentialrechnung zu bearbeiten.

Ebenso verhält es sich mit dem *Einsatz des Computers* bzw. anderen technologischen Formen. Die einen Bücher liefern konkrete Beispiele für den Einsatz von Technologie mit, die anderen erwähnen Technologie nicht. Hier gilt anzumerken, dass bedingt durch die standardisierte Reifeprüfung der Technologieeinsatz stärker forciert wird. Es obliegt der Lehrkraft, wie und in welcher Form Technologie eingesetzt wird. Ab dem Haupttermin im Jahr 2018 werden aber gewisse Minimalanforderungen an

elektronische Hilfsmittel gestellt: „Die Minimalanforderungen an elektronische Hilfsmittel sind grundlegende Funktionen zur Darstellung von Funktionsgraphen, zum numerischen Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, zur Ermittlung von Ableitungs- bzw. Stammfunktionen, zur numerischen Integration sowie zur Unterstützung bei Methoden und Verfahren in der Stochastik.“¹⁵⁴ Durch den Einsatz von technischen Hilfsmitteln werden in Zukunft auch komplexer handzuhabende Aufgaben gestellt werden können. So findet sich etwa beim Katalog der Grundkompetenz unter dem Punkt Ableitungsfunktion/Stammfunktion der Hinweis, dass durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel das Ableiten von Funktionen nicht durch die in den Grundkompetenzen angeführten Differentiationsregeln eingeschränkt werden.¹⁵⁵ Derartige Hinweise finden sich an einigen Stellen. Aus diesem Grund wird es in Zukunft ohnehin der Fall sein, dass elektronische Hilfsmittel eingesetzt werden.

Spezialfälle wie etwa Extremstellen am Rand eines Definitionsbereiches oder Extremwertaufgaben ohne (eindeutige) Lösung werden in allen Schulbüchern zumindest in Teilen gezeigt.

Im Folgenden soll nun eine Übersicht zeigen, wie die unterschiedlichen Schulbücher hinsichtlich verschiedener Kriterien durch den Autor der vorliegenden Arbeit bewertet worden sind.

¹⁵⁴ BIFIE 2015, https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_neuaufgabe_2018_2015-10-19.pdf, S. 24 (26.7.2016).

¹⁵⁵ Vgl. BIFIE 2015, S. 14.

	Mathematik 7 (Götz/Reichel)	Mathematik verstehen 7 (Malle et al.)	Dimensionen 7 (Bleier et al.)	klar_ Mathematik (Hötzel et al.)	Thema Mathematik (Brand et al.)
Elementare Methoden	1	3	5	1	5
Historische Problemstellungen	5	3	5	4	5
Modellbilden	5	5	5	4	5
Technologieeinsatz	4	4	1	1	4
Struktur	1	1	2	2	2
Qualität und Quantität der Aufgaben	1	1	2	2	2
Spezialfälle (Randstellen, keine (eindeutige) Lösung, ...)	1	1	1	1	5

Beurteilung wie im Schulnotensystem. „1“ bedeutet daher beste Bewertung, „5“ die schlechteste Bewertung.

5 Adaptionmöglichkeiten bei Extremwertaufgaben

Manche Extremwertaufgaben können leicht verändert werden, sodass dabei etwa neue Lösungsfälle wie etwa Randextrema auftreten. Es gibt auch im schulischen Kontext Aufgaben, bei denen keine (eindeutige) Lösung existiert. Im Unterricht ist es nun möglich, wenige „Extremwertaufgaben zum Nachdenken“ einzustreuen, um die aus der Lernforschung bekannten und wichtigen „dosierten Diskrepanzerlebnisse“¹⁵⁶ hervorzurufen. In diesem Kapitel werden nun einige Möglichkeiten präsentiert, wie Aufgaben adaptiert werden können. Dies ist vor allem für Lehrkräfte interessant: Es soll anhand einiger Aufgaben gezeigt werden, wie Aufgaben adaptiert werden können und welche zusätzlichen Fragestellungen und Erkenntnisse daraus resultieren. Andererseits können diese Überlegungen auch für Schülerinnen und Schüler von Interesse sein, da durch die in weiterer Folge präsentierten Aufgaben sich ein tieferes Verständnis von Extremwertaufgaben aufbauen kann. Die Behandlung derartiger „Extremwertaufgaben zum Nachdenken“ soll jedenfalls – wie bereits erwähnt – helfen, die dosierten Diskrepanzerlebnisse hervorzurufen und somit auch Lernen initiieren.

5.1 Adaption durch geometrische Überlegungen

Extremwertaufgaben werden in der Schule oftmals nur nach dem bekannten Schema $f'(x) = 0$ gelöst, wie dies im Lauf dieser Arbeit bereits gezeigt worden ist. Ein tieferes Verständnis liegt dabei nicht immer zugrunde. Nachhaltiges und tiefgründiges Lernen vollzieht sich nach verschiedensten Lerntheorien vor allem dann, wenn „dosierte Diskrepanzerlebnisse“ vorliegen, also wenn ein Moment des Zögerns, des Staunens und der Irritation auftritt. Aus diesem Grund sollen auch Extremwertaufgaben im Unterricht Platz finden, die auf den ersten Blick vielleicht irritieren mögen, weil sie in gewissem Maße aus dem Schema fallen. So werden mittlerweile in den Schulbüchern Randextrema thematisiert. Diese Aufgaben können von vergleichsweise einfacher Form sein, wie etwa ein Blick zu Malle 2014 in das Kapitel „Extremstellen am Rand eines Intervalls“ zeigt:

¹⁵⁶ Vgl. Kap. 3.6

100m eines geraden Zauns stehen schon. Es sollen 200m Zaun so hinzugefügt werden, dass ein möglichst großes rechteckiges Areal entsteht (siehe nebenstehende Abbildung). Wie sind die Maße des Areals zu wählen?¹⁵⁷



Abb. 44: Eigene Darstellung, nach:
Malle et al. 2014, Bsp. 3.154 (GeoGebra).

Auf den ersten Blick handelt es sich bei dieser Aufgabe um ein isoperimetrisches Problem für Rechtecke, also etwas, dessen Lösung bereits bekannt ist. Bei genauerem Hinsehen erkennt man aber, dass hier das Quadrat als flächengrößtes Rechteck mit konstantem Umfang nicht die Lösung sein kann. Aufgrund der Einschränkung, dass der Zaun nicht abgerissen werden soll, sondern nur Zaun zusätzlich hinzugefügt werden soll, kann kein Quadrat als Lösung möglich sein, weil für die Seitenlänge dann gelten müsste:

$$\frac{200+100}{4} = \frac{300}{4} = 75$$

Nachdem aber 100m Zaun bereits stehen, kann die Seitenlänge nicht 75m betragen. Diese hier auf bereits bekannte Resultate zurückgeführten Überlegungen werden durch die Differentialrechnung bestätigt, wie auch das Schulbuch in der durchgerechneten Lösung des Beispiels zeigt:¹⁵⁸

Lösung:

- $A(x, y) = (100 + x) \cdot y$
- Nebenbedingung: $100 + 2x + 2y = 200$
 $y = 50 - x$
- $A(x) = (100 + x) \cdot (50 - x) = 5000 - 50x - x^2$

¹⁵⁷ Vgl. Malle 2014, S. 74; Bsp. 3.154.

¹⁵⁸ Leider wird dieser einfachen Begründung im Buch keinen Platz gegeben, dass das Quadrat das flächengrößte Rechteck bei konstantem Umfang ist. Ein kurzer Hinweis auf diesen elementaren Sachverhalt hätte meines Erachtens genügt.

($0 \leq x \leq 50$ unter Einbeziehung der Extremfälle $x = 0$ und $x = 50$)

- $A'(x) = -50 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = -25$

Die Stelle $x = -25$ liegt aber nicht im Intervall $[0; 50]$.

Somit kommen als globale Extremstellen in diesem Intervall nur die Randstellen in Frage. Wegen $A(0) = 5000$ und $A(50) = 0$ ist 0 die einzige globale Extremstelle in diesem Intervall. Man erhält also das größte rechteckige Areal, wenn man das bestehende Zaunstück zu einem Rechteck mit der anderen Seitenlänge 50 ergänzt.

Im Schulbuch wird eine Abbildung des Graphen der Funktion gezeigt, um zu erkennen, dass die Stelle $x = -25$ zwar eine globale Extremstelle von f in $\mathbb{R}$ ist, aber f eben nur im Intervall $[0; 50]$ definiert ist.

Durch eine leichte Adaption wurde das isoperimetrische Problem für Rechtecke insofern verändert, dass nun ein Randextremum als Lösung auftritt. In weiterer Folge soll nun gezeigt werden, wie Extremwertaufgaben adaptiert werden können, um Spezialfälle zu konstruieren, also etwa Randextrema, um besagte „dosierte Diskrepanzerlebnisse“ zu ermöglichen.

5.1.1 Aufgabe „Kaputte Glasscheibe“

Im Schulbuch von Malle et al. 2014 wird im Anschluss an die eben präsentierte Aufgabe eine weitere Aufgabe präsentiert, die sich einerseits gut dazu eignet, verschiedene Lösungsfälle zu konstruieren, also („normale“) Lösungen im Inneren eines Intervalls oder eben Randextrema. Diese verschiedenen Lösungsfälle können durch geometrische Überlegungen begründet werden, weshalb sie auch durch eine dynamische Geometrie-Software wie etwa GeoGebra veranschaulicht werden können. Aus diesem Grund wird in weiterer Folge auch immer wieder auf GeoGebra verwiesen, um die geometrischen Sachverhalte tatsächlich sichtbar machen zu können – vor allem in dynamischer Behandlung, dass also etwa durch Bewegen von Punkten andere Lösungsfälle entstehen. Die geometrische Veranschaulichung kann einerseits dazu dienen, Schülerinnen und Schülern den Sachverhalt näher zu

erläutern, aber auch für Lehrkräfte dienlich sein, um derartige Beispiele einfach und ohne langwieriges Rechnen zu erstellen:¹⁵⁹

Von einer rechteckigen Glasscheibe ist eine Ecke abgesprungen. Man möchte aus dem verbleibenden Rest ein möglichst großes Rechteck wie in der Abbildung herauschneiden. Wie müssen die Maße dieses Rechtecks gewählt werden und wie viel macht der dabei entstehende (minimale) Abfall aus?

Hinweis: $100 \leq x \leq 125$ bzw. $60 \leq y \leq 80$

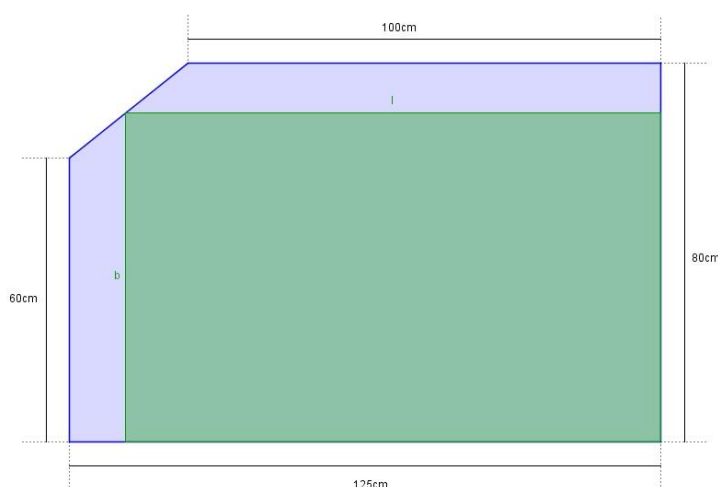


Abb. 45: Eigene Darstellung, nach: Malle et al. 2014, S. 74, Bsp. 3.155 (GeoGebra).

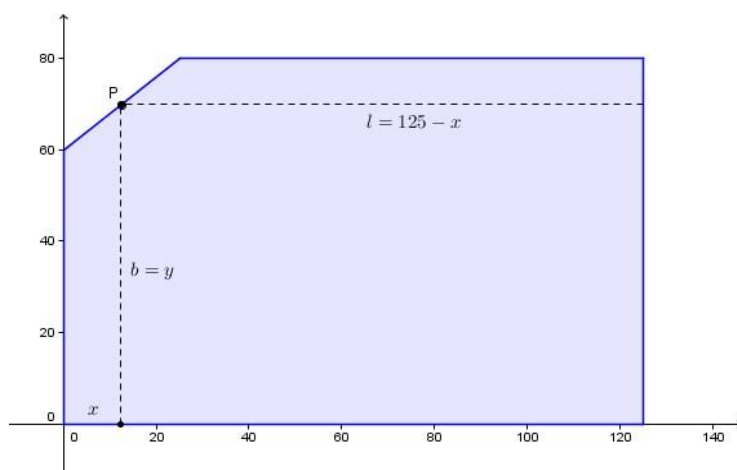


Abb. 46: Eigene Darstellung, nach: Malle et al. 2014, S. 74, Bsp. 3.155 (GeoGebra).

Diese Aufgabe kann man nun mittels Differentialrechnung lösen, wie dies in der Schule üblich sein wird:

Die Fläche des herausgeschnittenen Rechtecks hat wie in der im Buch abgebildeten Skizze (Abb. 45) ersichtlich die Abmessungen l und b . Daher ergibt sich nun aus der Flächenformel eines Rechtecks $A(l, b) = l \cdot b$. Wie üblich wird für eine Funktion in zwei Variablen eine Nebenbedingung gesucht. Die Skizze wird nun in ein Koordinatensystem übertragen (vgl. hierzu Abb. 46). Der Eckpunkt der Glasscheibe, der sich links-unten befindet, wird dabei – beispielsweise – im Koordinatenursprung verortet.

¹⁵⁹ Vgl. Malle et al. 2014, S. 74; Bsp. 3.155 (Hervorhebung wie im Original). In ähnlicher Form ist dieses Beispiel auch zu finden in: Hötzel et al. 2011, S. 159, Bsp. 4.20; Bleier et al. 2011, S. 139, Musterbeispiel und S. 141, Bsp. 393.

Der gesuchte Eckpunkt des aus der Glasscheibe geschnittenen Rechtecks liegt auf einer Geraden der Form $y = kx + d$. Er hat dabei die (üblichen) Koordinaten $P(x | y)$. Hier ist zu beachten, dass die erste Koordinate x der Beziehung $x = 125 - l$ genügt, wie man aus der Skizze entnehmen kann. Die Länge l wird dabei von der rechten Glasscheibenkante aus gemessen. Die zweite Koordinate y ist gleich der Breite der Glasscheibe b , weshalb $y = b$ gilt. Somit ergibt sich auch für die Fläche des herausgeschnittenen Dreiecks: $A(x, y) = (125 - x) \cdot y$. Nun gilt es, für die Gleichung der Geraden $y = kx + d$, auf der der gesuchte Eckpunkt liegt, die Werte für k und d zu ermitteln. Aus der Skizze unmittelbar ersichtlich ist, dass $d = 60$ gilt. Ebenso wenig stellt $k = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ ein großes Problem dar. Die Gleichung der Geraden, auf derer Punkt liegt, lautet demnach $y = \frac{4}{5}x + 60$. Durch Einsetzen ergibt sich:

$$A(x) = (125 - x) \cdot \left(\frac{4}{5}x + 60\right) = -\frac{4}{5}x^2 + 40x + 7500$$

Nun ist $A'(x) = -\frac{8}{5}x + 40$. Durch Nullsetzen der Ableitung folgt, dass $x = \frac{200}{8} = 25$. Daher liegt die gesuchte Stelle genau am Rand der Definitionsmenge. Wie aus der Skizze ersichtlich muss nämlich $0 \leq x \leq 25$ und $0 \leq y \leq 20$ gelten.

Auf den ersten Blick ist kein geometrischer Zusammenhang zu erkennen. So kann man nur aus den Abmessungen dieser Glasscheibe oder aus der Skizze nicht darauf schließen, ob nun ein Randextremum vorliegt. Auch helfen hier keine Überlegungen zur Symmetrie. Bei näherem Hinsehen wird jedoch ersichtlich, dass die Glasscheibe in ihrer „kaputten“ Form bloß einen Ausschnitt eines rechtwinkligen Dreiecks darstellt, dem ein seitenparalleles Rechteck eingeschrieben werden soll. Die Lösung dieses Problems ist somit bereits bekannt: Ein einem rechtwinkligen Dreieck eingeschriebenes Rechteck weist genau dann maximalen Flächeninhalt auf, wenn das Rechteck die Dreiecksseiten jeweils halbiert.¹⁶⁰ Dies stellt auch eine der frühesten schriftlich überlieferten Extremwertaufgaben dar und wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit bereits im Kapitel 3.4.1 „Euklids Beweis“ vorgestellt. Somit kann man bei der Lösung der ursprünglichen Aufgabe wieder auf ein bereits bekanntes Resultat zurückgreifen und bekommt in weiterer Folge ein Werkzeug in die Hand, den Punkt auf der Abbruchkante geometrisch – also eben auch mithilfe dynamischer

¹⁶⁰ Dieser Sachverhalt kann bereits durch einfache Faltfiguren gezeigt werden, vgl. hierzu die GeoGebra-Datei von Gansch 2015a, <http://tube.geogebra.org/student/mTMbXhFoQ> (20.11.2015).

Geometrie-Software anschaulich darstellbar¹⁶¹ – zu bestimmen. Nun kann so auch gezeigt werden, wie eine Änderung der Abbruchkante die Abmessungen des herauszuschneidenden Rechtecks beeinflusst. Durch Ändern der besagten Abbruchkante lassen sich also nun die verschiedensten Lösungsfälle konstruieren: Einerseits Extremstellen, die im Inneren des erlaubten Intervalls liegen, also auf schulklassische Aufgaben führen, andererseits wie bei Malle et al. Extremstellen, die genau am Rande des Intervalls liegen, und in weiterer Folge auch globale Extremstellen, die außerhalb des Intervalls liegen, wie etwa zuvor bei der Aufgabe des Zaunes, wo in weiterer Folge die Randstellen des Intervalls beachtet werden müssen.

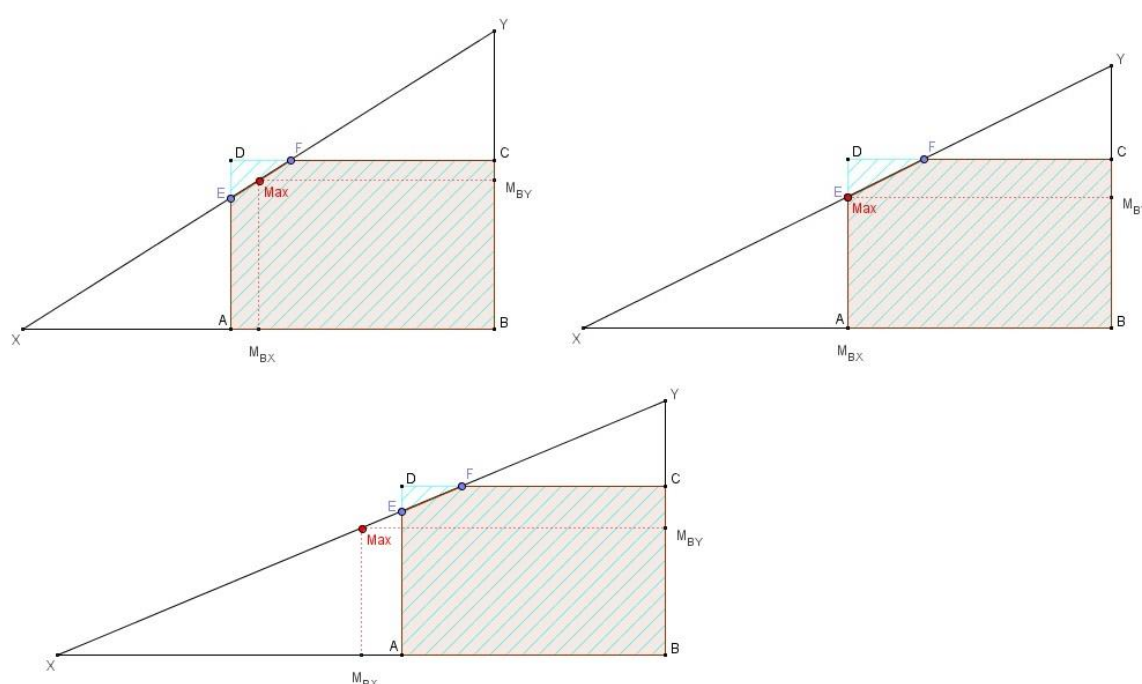


Abbildung 47: Verschiedene Lösungsfälle. Eigene Darstellung (GeoGebra).

Die Abbildungen zeigen die verschiedenen Lösungsfälle. Die erste Abbildung links oben zeigt die im schulischen Kontext wohl am häufigsten auftretende Variante, dass die Extremstelle auch im Intervall liegt. Im konkreten Fall bedeutet das, dass ein Rechteck aus der Glasscheibe geschnitten wird, dessen Eckpunkt auch irgendwo auf der Abbruchkante liegt. Die zweite Variante ist die, die auch im Schulbuch präsentiert wird: Die Extremstelle liegt genau am Rand des Intervalls. Demnach müssen nur die Funktionswerte an den beiden Randstellen miteinander verglichen werden. Die dritte

¹⁶¹ Vgl. hierzu die GeoGebra-Datei Gansch 2015e, <http://tube.geogebra.org/student/mq3zuglLr> (26.7.2016).

Variante ist diejenige, die wohl am seltensten in der Schule auftritt, aber auch Platz finden soll, um die bereits erwähnten „dosierten Diskrepanzerlebnisse“ zu ermöglichen. Hierbei liegt die globale Extremstelle außerhalb des Intervalls, demnach wird die gesuchte Lösung an einer der beiden Randstellen eingenommen. Die Glasscheibe kann nicht so zugeschnitten werden, wie die Abbildung zeigt, der Eckpunkt des Rechtecks läge außerhalb der Glasscheibe. Demnach bleiben nur die beiden Optionen übrig, dass der Eckpunkt des Rechtecks an einem der beiden Endpunkte der Abbruchkante liegt.

Wie bereits erwähnt kann dies auch der Lehrkraft dienlich sein, um eine Aufgabe mit dem gewünschten Lösungsfall konstruieren zu können, aber auch den Schülerinnen und Schülern, um durch Verschränken von Differentialrechnung, geometrischen Argumentationen, historischen Problemstellungen¹⁶² und Computereinsatz zu einem tieferen Verständnis von Extremwertaufgaben zu gelangen.

GeoGebra erlaubt auch, durch mehrere Fenster den Zusammenhang zwischen der Abbruchkante, dem eben präsentierten geometrischen Hintergrund des eingeschriebenen Rechtecks, dem algebraischen Term sowie dem Graphen zu illustrieren (vgl. Abb. 48). Es zeigt sich, dass die globale Extremstelle (natürlich) genau dann aus dem zulässigen Intervall fällt, wenn auch der Eckpunkt des eingeschriebenen Rechtecks über den Rand der Glasscheibe hinaus wandert, also in den „imaginären“ Teil des Dreiecks übergeht. Es ist also möglich, durch Verschieben der verschiedenen Punkte ein besseres Verständnis für die gesamten Zusammenhänge zu bekommen. Das fruchtbare Nebeneinander der geometrischen Methode und der Differentialrechnung kann außerdem zeigen, dass Extremwertaufgaben auf vielfältige Weise gelöst werden können.

¹⁶² Wie bereits erwähnt kann man hier an Euklids Beweis anknüpfen.

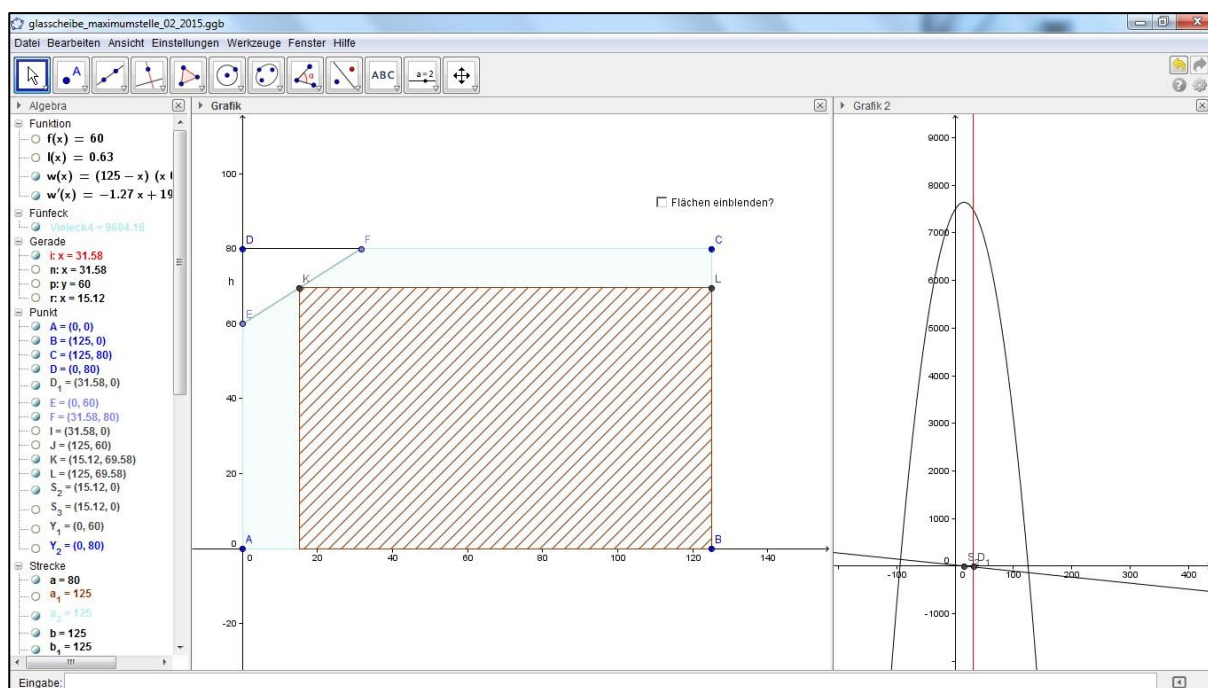


Abb. 48: GeoGebra-Fenster. Eigene Darstellung.

5.1.2 Aufgabe „Rechteck einem gleichschenkeligen Trapez einschreiben“

Die im Schulbuch von Malle et al. nachfolgende Aufgabe eignet sich ebenso für derartige Adaptionen. So soll einem gleichschenkeligen Trapez ein Rechteck so eingeschrieben werden, dass eine Rechteckseite auf der Grundlinie des Trapezes liegt.¹⁶³ Auch hierbei kann man dies geometrisch als kleinen Ausschnitt eines gleichschenkeligen Dreiecks auffassen, dem ein Rechteck so eingeschrieben werden soll, dass eine Rechteckseite auf der Basis des gleichschenkeligen Dreiecks liegt. Hier lassen sich nun ebenso wie vorhin gezeigt durch eine dynamische Geometrie-Software die verschiedenen Zusammenhänge zeigen und dadurch ein tieferes Verständnis erzielen. Auch hier kann man sich auf bereits bekannte Resultate stützen, wonach ein Rechteck, das auf der Basis liegend einem gleichschenkeligen Dreieck eingeschrieben wird, die beiden Schenkel und die halbe Basislänge halbiert.¹⁶⁴

¹⁶³ Vgl. Malle et al. 2014, S. 74; Bsp. 3.156. Ein ähnliches Beispiel findet sich etwa auch in Götz/Reichel 2011, S. 150, Bsp. 570 und Bsp. 571; Bleier et al. 2011, S. 141, Bsp. 392.

¹⁶⁴ Vgl. Kap. 3.4.1. In diesem Kapitel werden auch wieder Faltdiagramme als Beweis für die Richtigkeit dieser Aussage vorgestellt. Vgl. hierzu auch die GeoGebra-Datei Gansch 2015b, <http://tube.geogebra.org/student/mxX6GdVHN> (26.7.2016).

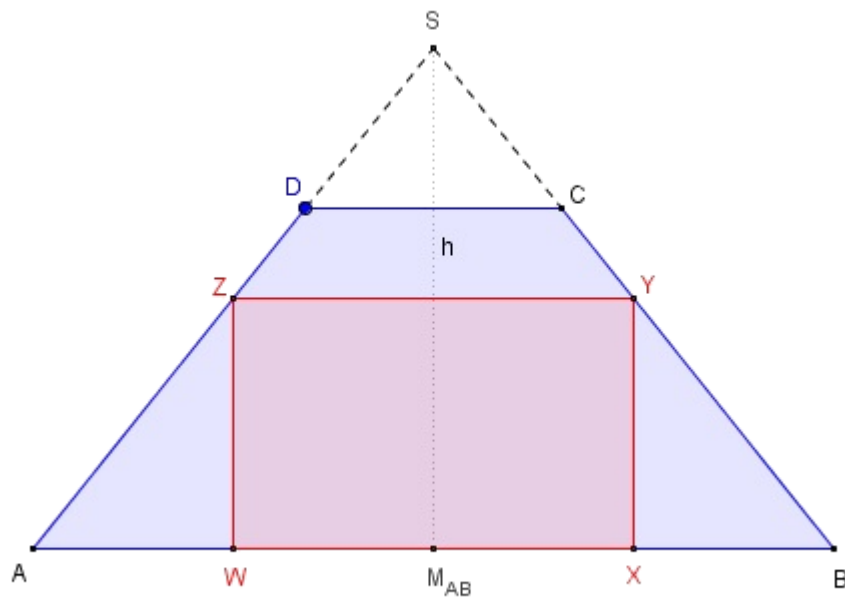


Abb. 49: Einem gleichschenkeligen Trapez (bzw. Dreieck) eingeschriebenes Rechteck, Lösung im Inneren des Intervalls. Eigene Darstellung (GeoGebra).

In dieser GeoGebra-Datei¹⁶⁵ ist der Punkt D beweglich, der Punkt C bewegt sich spiegelverkehrt dazu selbsttätig mit, nachdem ja ein gleichschenkliges Trapez ABCD bzw. ein gleichschenkliges Dreieck ABS betrachtet werden soll. Durch Kontrollkästchen lässt sich zudem wie hier gezeigt das Trapez ABCD mit den strichliert angedeuteten Verlängerungen zum Dreieck ABS „vervollständigen“ und das eingeschriebene Rechteck WXYZ einblenden, das je nach Wahl des Punktes D innerhalb oder außerhalb des Trapezes liegt. Liegt das Rechteck, das aufgrund der bereits bekannten Bedingung mit dem gleichschenkeligen Dreieck gefunden wurde, außerhalb des Trapezes, sind die Randstellen zu betrachten (vgl. Abb. 50).

¹⁶⁵ Diese GeoGebra-Datei findet sich unter Gansch 2015d, <http://tube.geogebra.org/student/mYjWslXfN> (26.7.2016).

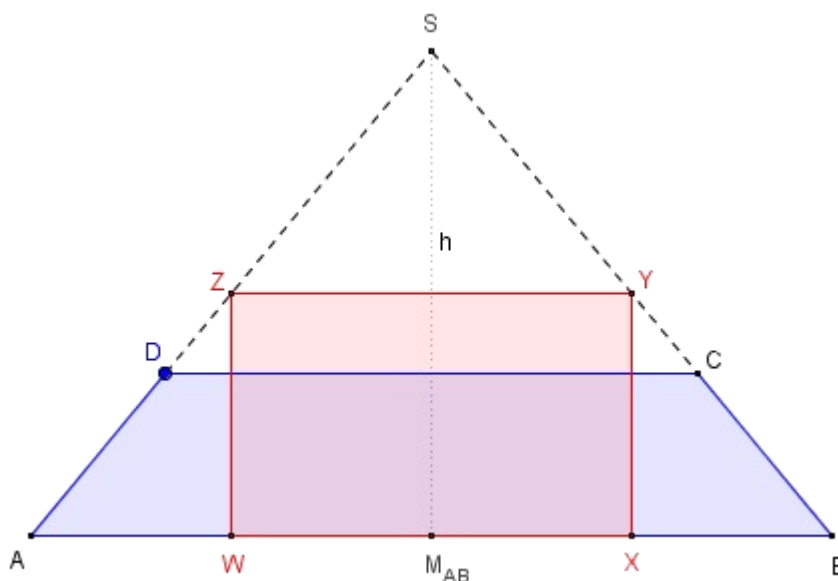


Abb. 50: Einem gleichschenkeligen Trapez (bzw. Dreieck) eingeschriebenes Rechteck, Lösung außerhalb des Intervalls. Eigene Darstellung (GeoGebra).

5.1.3 Verschiedene Ausschnitte eines Dreiecks

Weitere Adaptionsmöglichkeiten der beiden genannten Aufgaben bestehen darin, den Ausschnitt der jeweils zugrundeliegenden Figur, also des Dreiecks, anders zu wählen. Damit ergeben sich weitere Figuren, in welche sich Rechtecke einschreiben lassen. Ein paar Möglichkeiten sind in der folgenden Abbildung 51 veranschaulicht. Durch das Betrachten der Möglichkeiten kommt man eventuell auch zu manch eingekleideter Aufgabe. So könnte man die Möglichkeit rechts oben als Hauptaltar in einem Kirchenschiff interpretieren, der möglichst groß dimensioniert werden soll. Die Möglichkeit links unten könnte beispielsweise eine Bücherwand in einem einstöckigen Haus symbolisieren, wobei ein kleiner Teil des Dachgiebels als Dachboden abgetrennt ist. Hier sind der Fantasie keine Grenzen gesetzt, es gilt aber anzumerken, dass es sich hierbei eben nur um eingekleidete Aufgaben handelt.

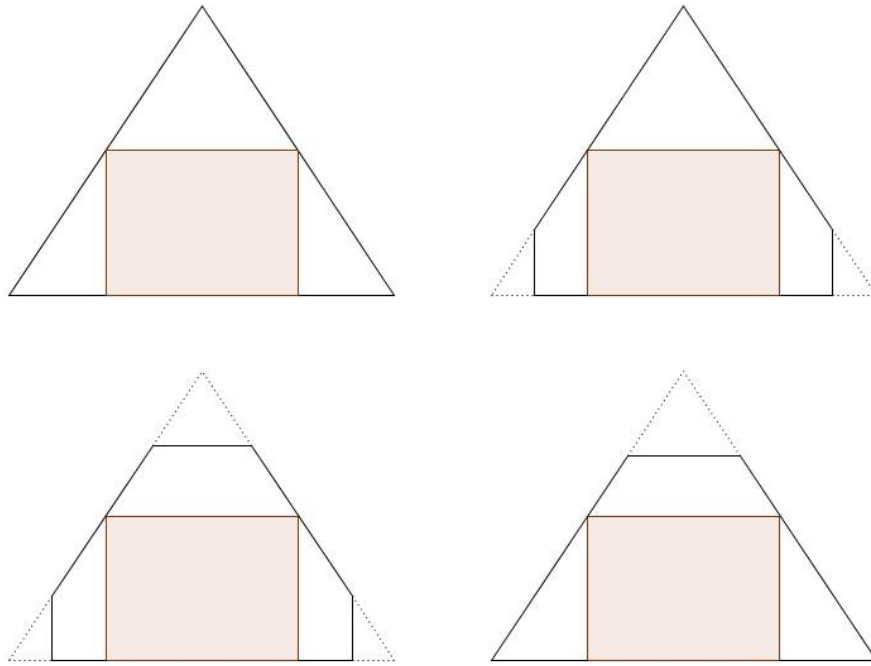


Abb. 51: Verschiedene Ausschnitte desselben Dreiecks mit eingeschriebenem Rechteck. Eigene Darstellung (GeoGebra).

5.1.4 Vergleich zwischen Figuren und Körpern

Weiters können die Figuren auch als Querschnitt dreidimensionaler Körper interpretiert werden. Somit können in weiterer Folge auch etwa Zylinder in einen Kegelstumpf eingeschrieben werden oder Quader in einen Pyramidenstumpf. Auch wenn also der Querschnitt durch eine Pyramide, in die ein Quader eingeschrieben werden soll, auf dieselbe Figur führt wie in der vorigen Abbildung links oben ersichtlich, so unterscheiden sich dennoch die Lösungen. Im zweidimensionalen Fall ist das Rechteck halb so hoch wie das gleichschenkelige Dreieck, im dreidimensionalen Fall nimmt der Quader nur ein Drittel der Höhe der Pyramide ein. Auch dieser Umstand ist bestimmt nicht jeder Schülerin und jedem Schüler klar und kann somit thematisiert werden.

Die beiden Rechnungen ähneln sich dabei sehr stark und unterscheiden sich nur durch einen zusätzlichen Faktor, der die „Tiefe“ der Grundfläche angibt. Die Nebenbedingung ist dabei in beiden Fällen dieselbe, sie kann mit dem Strahlensatz hergeleitet werden:

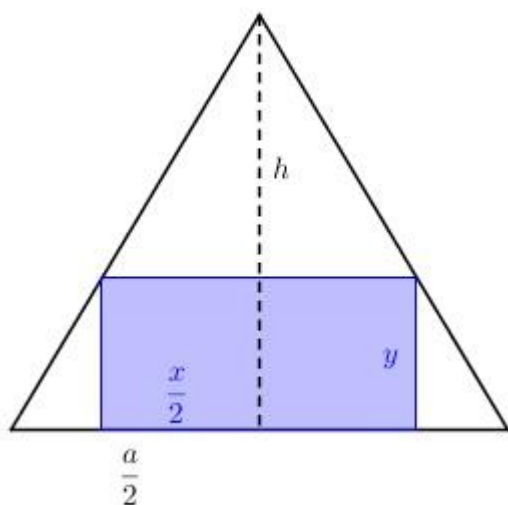


Abb. 52: Strahlensatz im Dreieck.
Eigene Darstellung (GeoGebra).

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right) : y = \frac{a}{2} : h$$

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right) \cdot h = y \cdot \frac{a}{2}$$

$$\frac{ah}{2} - \frac{xh}{2} = \frac{ay}{2} \quad / \cdot 2$$

$$ah - xh = ay \quad / : a$$

$$y = h - \frac{xh}{a}$$

In der linken Spalte soll nun der zweidimensionale Fall behandelt werden, also das Einschreiben eines Rechtecks in ein gleichschenkliges Dreieck. In der rechten Spalte wird der dreidimensionale Fall gezeigt, also das Einschreiben eines Quaders in eine quadratische Pyramide.

$$A(x, y) = x \cdot y \rightarrow \max$$

$$A(x) = x \cdot \left(h - \frac{xh}{a}\right) = hx - \frac{h}{a} \cdot x^2$$

$$A'(x) = h - \frac{2h}{a} \cdot x$$

$$h - \frac{2h}{a} \cdot x \stackrel{!}{=} 0$$

$$h = \frac{2h}{a} \cdot x \quad / : \frac{2h}{a}$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot a$$

$$V(x, y) = x^2 \cdot y \rightarrow \max$$

$$V(x) = x^2 \cdot \left(h - \frac{xh}{a}\right) = h \cdot x^2 - \frac{h}{a} \cdot x^3$$

$$V'(x) = 2h \cdot x - \frac{3h}{a} \cdot x^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$x \cdot \left(2h - \frac{3h}{a} \cdot x\right) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0$$

$$2h = \frac{3h}{a} \cdot x \quad / : \frac{3h}{a}$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot a$$

Das Ergebnis der linken Spalte ist dabei bereits ein bekanntes Resultat, das nun auch mit Differentialrechnung gezeigt wurde. Im Laufe der Arbeit wurde dies bereits mit geometrischen Überlegungen wie etwa den Faltfiguren gezeigt. Das Ergebnis der rechten Spalte ist aber vielleicht verwunderlich: Obwohl beide – der zwei- wie auch der dreidimensionale Fall – von derselben Nebenbedingung ausgehen, die außerdem aus derselben Skizze gewonnen wurde, unterscheiden sich die Ergebnisse. Nachdem bereits manchen Schülerinnen und Schülern nicht klar ist, dass Rechtecke mit konstantem Umfang unterschiedliche Flächeninhalte aufweisen können, ist dieses Ergebnis wohl nicht trivial und kann durchaus in der dargebrachten Form verglichen werden. Ohnedies sind dies zwei Standardaufgaben, die in allen Schulbüchern zu

finden sind. Man kann danach thematisieren, warum denn nun die beiden Resultate voneinander abweichen.

5.1.5 Weitere Aufgaben, die auf bereits bekannte Resultate fußen

Danckwerts/Vogel wählen das isoperimetrische Problem als Einstiegs- und Ausgangspunkt für die Extremwertaufgaben, von dem aus historische Problemstellungen wie auch elementare Methoden thematisiert werden können. Das Einschreiben eines Rechtecks bzw. eines Parallelogramms in ein rechtwinkeliges bzw. allgemeines Dreieck bietet ebenso Möglichkeiten, verschiedene Standpunkte zu erwähnen. Wie hier illustriert ist der Einsatz einer dynamischen Geometrie-Software oder eines grafikfähigen Taschenrechners leicht möglich und bietet sich an, außerdem werden bereits bei Euklid derartige Aufgaben thematisiert, die mittels Flächenvergleich gelöst werden. Demnach können elementare Methoden und historische Problemstellungen in einem Atemzug behandelt werden. Mittels Faltsfiguren können auch die Ergebnisse leicht und verständlich bewiesen werden, wobei ebenso auf elementare Methoden zurückgegriffen wird. Diese Faltsfiguren können wiederum auch mittels dynamischer Geometrie-Software anschaulich visualisiert werden. Durch geschickt gewählte Ausschnitte der Dreiecke ist es auch möglich, verschiedene Lösungsfälle zu konstruieren.

Es wird deutlich, dass bereits derart einfache Aufgaben wie etwa das Einschreiben eines Rechtecks in ein Dreieck eine Vielzahl an Möglichkeiten und Anknüpfungspunkte liefern. Oftmals liegen die Zusammenhänge aber auch im Dunklen und bleiben verborgen, man möchte nicht vermuten, welche Aufgaben noch miteinander in Verbindung stehen. So soll hier noch kurz eine Aufgabe präsentiert werden, von dem man anfänglich nicht vermuten möchte, dass dies ebenso mit dem Einschreiben von Parallelogrammen in Dreiecke begründet werden kann:

Welche Gerade durch den Punkt $P(3|2)$ schließt mit den positiven Koordinatenachsen ein Dreieck mit minimalem Flächeninhalt ein?¹⁶⁶

¹⁶⁶ Vgl. Roelfs o.J., nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/jahrgang112pdf/Extremwertaufgaben.pdf, S. 13 (26.7.2016).

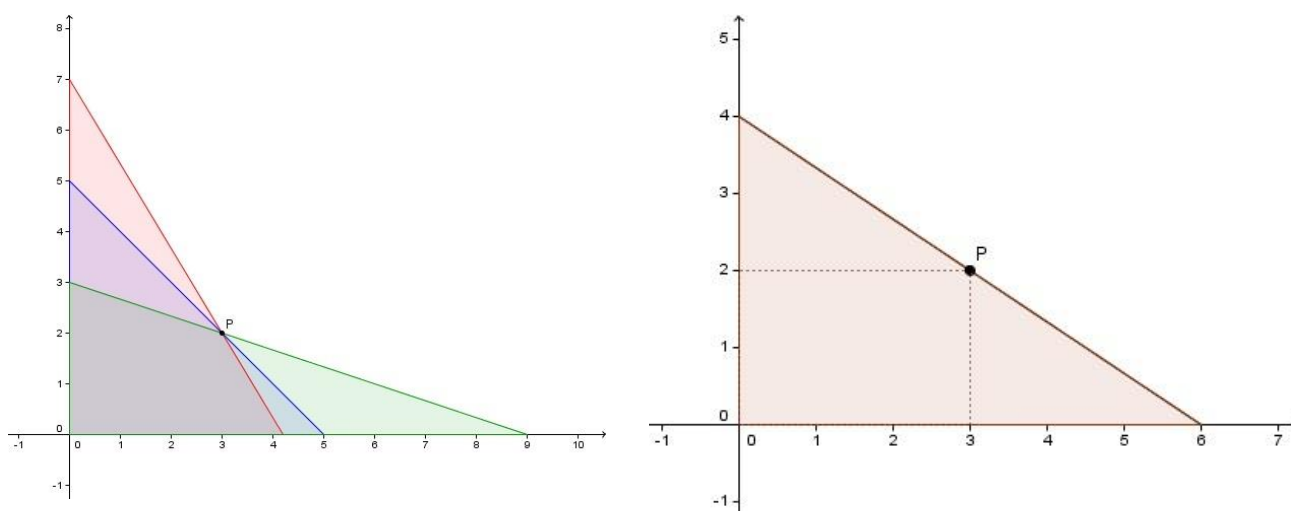


Abb. 53 und 54: Veranschaulichung in GeoGebra. Eigene Darstellung.

Wie in der linken Abbildung angedeutet wird gibt es hier verschiedene Möglichkeiten, eine Gerade durch den Punkt $P(3|2)$ zu legen. Welche nun die Gerade mit der kleinsten eingeschlossenen Fläche repräsentiert, ist (noch) nicht so leicht zu erkennen. Beim vorhin beschriebenen Einschreiben eines Rechtecks in ein rechtwinkeliges Dreieck sollte die Fläche des Rechtecks maximal werden, im Gegenzug wird natürlich die übrige Fläche des Dreiecks minimal. Hier hat man nun diesen „umgekehrten“ Fall vorliegen: Das Legen einer Gerade durch den Punkt kann man sich auch so vorstellen, dass einem bestehenden Rechteck ein rechtwinkeliges Dreieck (wie in der zweiten Abbildung angedeutet) umschrieben werden soll. Nachdem die Fläche des Dreiecks minimal werden soll und sich die Fläche des Rechtecks hier nicht ändert, kann wieder das bereits bekannte Resultat herangezogen werden, dass die Seitenlängen des Rechtecks die Seitenlängen des rechtwinkeligen Dreiecks halbieren – genau dann wird die Fläche des Rechtecks maximal, oder (wie in diesem Fall) die Fläche des umschriebenen Dreiecks minimal. Auch dies kann natürlich mittels dynamischer Geometrie-Software gezeigt werden.¹⁶⁷

¹⁶⁷ Vgl. hierzu die GeoGebra-Datei Gansch 2015f, <http://tube.geogebra.org/student/mP5TSzNEd> (26.7.2016).

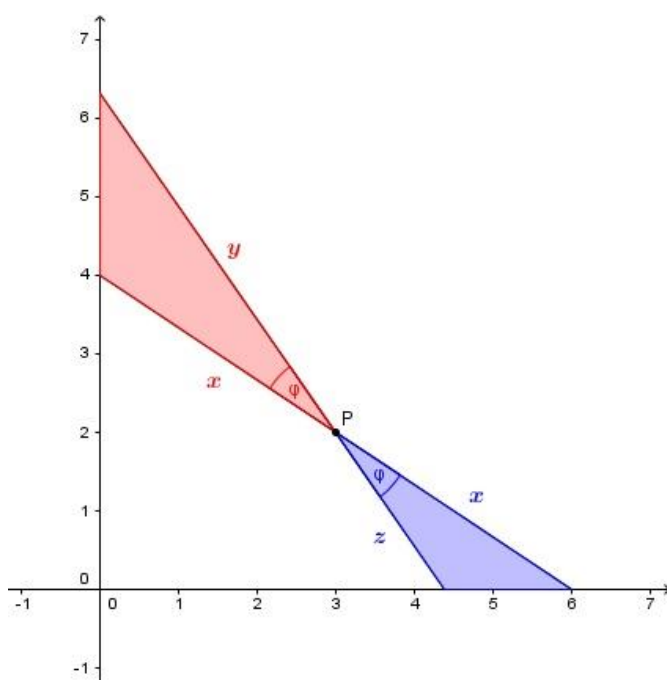


Abb. 55: Flächenvergleich. Eigene Darstellung (GeoGebra).

Die Richtigkeit dieses Ergebnisses lässt sich jedoch auch anders begründen: Die kleinste Dreiecksfläche ergibt sich dann, wenn der Punkt P der Mittelpunkt der Geraden ist. Für jede andere Gerade vergrößert sich der Flächeninhalt. Man wähle o.B.d.A. eine Gerade, die wie in Abb. 55 ersichtlich steiler verläuft, also die erste Achse an einer kleineren Stelle schneidet. Bei dieser Geraden fällt die blau dargestellte Fläche weg, die rote Fläche kommt hinzu. Die rote Fläche ist jedoch größer als die blaue: So gilt nach der

trigonometrischen Flächenformel: $A_{rot} = \frac{x \cdot y}{2} \cdot \sin(\varphi)$ und $A_{blau} = \frac{x \cdot z}{2} \cdot \sin(\varphi)$.

Nachdem $y > z$ gilt, muss auch $\frac{x \cdot y}{2} \cdot \sin(\varphi) > \frac{x \cdot z}{2} \cdot \sin(\varphi)$ und demnach $A_{rot} > A_{blau}$ gelten.¹⁶⁸

In diesem Subkapitel wurde gezeigt, welche vielfältigen Adaptionenmöglichkeiten es für manche Aufgaben gibt. Es sollen in den folgenden Subkapiteln nun weitere vorgestellt werden.

5.2 Extremwertaufgaben ohne (eindeutige) Lösung

Ausgehend von den bekannten Resultaten des Einschreibens eines Rechtecks in ein rechtwinkeliges Dreieck kann auch noch ein weiteres Beispiel konstruiert werden, das auf keine bzw. keine eindeutige Lösung führt. Dass jedes in ein rechtwinkelig-gleichschenkeliges Dreieck eingeschriebene Rechteck konstanten Umfang hat,¹⁶⁹

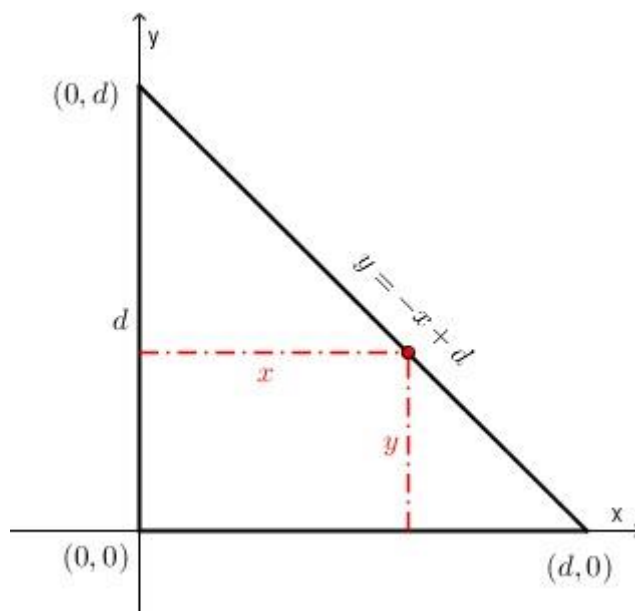
¹⁶⁸ Vgl. Roth-Sonnen/Stein/Stengel 2004, S. 87.

¹⁶⁹ Vgl. hierzu auch die GeoGebra-Datei Gansch 2015c, <http://tube.geogebra.org/student/mFDSokWq8> (26.7.2016).

kann genutzt werden, um eine simple Aufgabe zu konstruieren, das auf keine eindeutige Lösung führt:

Rechteck in ein gleichschenkelig-rechtwinkeliges Dreieck einschreiben

Geht man etwa von einem rechtwinkelig-gleichschenkeligem Dreieck aus, dessen Katheten (oder Schenkel) auf den Koordinatenachsen liegen, folgt für den Eckpunkt des Rechtecks, der auf der Hypotenuse bzw. der Basis des Dreiecks liegt, dass er der Gleichung $y = -x + d$ genügt. Die Wert von d ergibt sich aus der gewählten Länge der Schenkel des Dreiecks.



Daraus folgt nun:

$$U(x, y) = 2x + 2y \text{ unter der Nebenbedingung } y = -x + d$$

$$U(x) = 2x + 2 \cdot (-x + d) = 2x - 2x + 2d = 2d$$

Abb. 57: Nebenbedingung finden.

Eigene Darstellung
(GeoGebra).

Noch vor dem Abarbeiten des Schemas scheint ein „Fehler“ aufzutreten, die Funktion des Umfangs in Abhängigkeit einer der beiden Seitenlängen ist eine konstante Funktion. Dies liegt aber eben darin begründet, dass der Umfang aller konkurrierenden eingeschriebenen Rechtecke gleich ist, nämlich genau die Summe der beiden Längen der Schenkel.

Rechteck in ein rechtwinkelig-ungleichschenkeliges Dreieck einschreiben

Im nächsten Schritt bietet sich an, ein rechtwinkeliges, aber ungleichschenkeliges Dreieck zu betrachten. Sei etwa beispielsweise die Kathete, die auf der x -Achse liegt, doppelt so lang wie die andere Kathete, die auf der y -Achse liegt, dann führt dies für den Eckpunkt des Rechtecks auf der Hypotenuse zur Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + d$. Daraus ergibt sich wiederum:

$$U(x, y) = 2x + 2y \text{ unter der Nebenbedingung } y = -\frac{1}{2}x + d$$

$$U(x) = 2x + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x + d\right) = 2x - 2 \cdot \frac{1}{2}x + 2d = x + 2d$$

Dies führt im Gegensatz zum rechtwinkelig-gleichschenkeligem Dreieck zu einer linearen Funktion, die jedoch abgeleitet wieder zu einer konstanten Funktion führt:

$$U'(x) = 1$$

Dementsprechend versagt man auch hier dabei, ein Extremum zu finden. Betrachtet man den Graphen der Funktion U , die den Umfang des eingeschriebenen Rechtecks in Abhängigkeit von der Seitenlänge x beschreibt, so erkennt man, dass das Minimum genau bei $x = 0$ eingenommen wird. Das umfangkleinste eingeschriebene Rechteck ist also ein entartetes Rechteck, dessen Seitenlängen mit den kürzeren Katheten des Dreiecks zusammenfallen. Analog dazu ergibt sich, dass das umfanggrößte eingeschriebene Rechteck wiederum ein entartetes Rechteck sein muss, dessen Seitenlängen nun mit den längeren Katheten des Dreiecks zusammenfallen. Zwischen diesen beiden Extrema nimmt der Umfang linear zu. Das Betrachten der Randstellen dieser Funktion lieferte also zwar Extremstellen, will man jedoch entartete Rechtecke nicht zulassen, gibt es kein umfangkleinstes oder umfanggrößtes einem rechtwinkligen Dreieck eingeschriebenes Rechteck.¹⁷⁰

Es gibt also kein umfangkleinstes oder umfanggrößtes (nicht entartetes) Rechteck in einem rechtwinkligen Dreieck. Mit diesem Ergebnis kann man nun übergehen zum flächengrößten eingeschriebenen Rechteck in einem rechtwinkligen Dreieck. Manche Schülerinnen und Schüler werden auf die Differentialrechnung zurück greifen, hier bietet sich aber auch die Thematisierung elementarer Methoden bzw. ein Rückgriff auf bereits bekannte Ergebnisse an: Das nun bekannte Resultat, dass diese in rechtwinkelig-gleichschenkelige Dreiecke eingeschriebenen Rechtecke jeweils gleichen Umfang besitzen, kann mit dem isoperimetrischen Problem für Rechtecke verknüpft werden, das in vielen Schulbüchern zu Beginn der Behandlung von Extremwertaufgaben steht.

¹⁷⁰ Die Begründung hierzu liefert der „Satz des Eudoxos“ (bzw. auch oft als „Archimedisches Axiom“ eingeführt).

Nach der Behandlung des isoperimetrischen Problems für Rechtecke in allen Facetten wie bei Danckwerts/Vogel beschrieben, stellt nun die Aufgabe des eingeschriebenen Rechtecks in ein rechtwinkeliges Dreieck eine sinnvolle Fortsetzung dar. Wird dabei wie hier erläutert zuerst das Problem des umfangkleinsten (oder umfanggrößten) Rechtecks in einem Dreieck behandelt, kommt man ziemlich früh zum Ergebnis, dass bei Extremwertaufgaben nicht immer (eindeutige) Lösungen existieren müssen. Der Vorteil dieser hier gezeigten Aufgaben besteht darin, dass sie mittels Differentialrechnung sehr leicht zu behandeln sind, aber auch unmittelbar geometrisch einsichtig ist, dass hier ein konstanter Umfang vorliegt. Fragt man nun anschließend nach dem flächengrößten eingeschriebenen Rechteck, so kann man nun die bereits bekannten Resultate zur Begründung der Lösung verwenden, aber auch mittels Differentialrechnung sehr schnell zum selben Ergebnis kommen. Wie im Kapitel 5.1 bereits erwähnt bietet sich auch eine Behandlung der Lösung von Euklid an, womit historische Problemstellungen ebenso thematisiert werden.

5.3 Gewichtete Strecken und Flächen

Eine Möglichkeit, Extremwertaufgaben zu verändern, nenne ich „Gewichtete Strecken und Flächen“. Reflexionsaufgaben und deren Einkleidungen, also Aufgaben wie etwa in Kapitel 3.2.1 beschrieben, wo bei einem Wettbewerb von einem Startpunkt zum Ziel gelaufen werden muss und dazwischen bei einem geradlinig verlaufenden Bach Wasser geholt werden muss, sind jedem ein Begriff. Sie sind auch unter dem Namen „Feuerwehraufgabe“ bekannt. In Götz/Reichel findet sich etwa eine Adaption, wobei sich eine Lichtwelle durch zwei optisch verschieden dichte Medien bewegt und daher das Brechungsgesetz von Snellius anzuwenden ist.¹⁷¹ Es werden demnach die Strecken ungleich gewichtet, indem etwa die Geschwindigkeiten anders gewählt werden („Baywatch-Aufgabe“: ein Rettungsschwimmer kann sich an Land schneller bewegen als im Wasser) oder sich die Kosten unterscheiden („Verlegen von Leitungen“: Leitungen, die unter der Straße verlegt werden, sind billiger als Leitungen im freien Gelände). Gleiches gilt auch für Flächen, die zum Beispiel wiederum durch

¹⁷¹ Vgl. Götz/Reichel 2011, S. 152, Bsp. 598-602.

Kosten oder durch Wärmedurchgangskoeffizienten (Hausbau) unterschiedlich gewichtet werden können und jeweils zu unterschiedlichen Extrema führen können.

Stellvertretend für diese verschiedenen Möglichkeiten, die ich unter „Gewichtete Strecken und Flächen“ zusammengefasst habe, möchte ich eine Aufgabe zu gewichteten Strecken aus einem Schulbuch präsentieren, die sich mit bereits oben genannten Thema des Verlegens von Leitungen beschäftigt:¹⁷²

Vom Ort A soll längs der geradlinigen Straße AB ($\overline{AB} = 8$ km) bis zum Punkt D und dann durch das angrenzende Gelände zu einem Kraftwerk C ($CB \perp AB$, $\overline{CB} = 2$ km) unter der Erde eine Leitung verlegt werden. Die Kosten der Verlegung je Kilometer längs der Straße betragen a Euro; im Gelände sind die Verlegungskosten je Kilometer das k -fache dieses Betrages ($k > 1$).

- a) In welcher Entfernung von B muss der Anfangspunkt D der geradlinigen Abzweigung DC liegen, damit die gesamten Kosten der Verlegung möglichst gering werden?
- b) Berechne die minimalen Verlegungskosten, wenn die Verlegung längs der Straße 60.000€ je Kilometer und im Gelände 100.000€ je Kilometer kostet!
- c) Welchen Wert muss k annehmen, damit bei minimalen Gesamtkosten der Abzweigungspunkt D
 - 1) im Halbpunkt der Strecke AB , 2) im Punkt A , 3) im Punkt B liegt?
- d) Berechne im Fall c) für $a = 60.000$ € die minimalen Gesamtkosten!



Abb. 58: Skizze zur Aufgabe. Eigene Darstellung, GeoGebra.

¹⁷² Vgl. Götz/Reichel 2011, S. 153, Bsp. 604.

Zuerst wird man eine Skizze wie in der obenstehenden Abbildung ersichtlich erstellen. Die Strecke AB ist dabei 8 km lang, die Strecke BD ist x km lang. Damit gilt für die Strecke AD, dass sie $8 - x$ km lang sein muss. Durch die Skizze erkennt man zudem, dass die Strecke CD die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks BCD ist. Damit gilt für die Länge der Strecke CD, dass $\overline{CD} = \sqrt{2^2 + x^2}$. Nachdem die Kosten pro Kilometer entlang der Straße a Euro betragen, im Gelände hingegen das k -fache dieses Betrags, also $a \cdot k$, gilt demnach für die Gesamtkosten K der zu verlegenden Leitungen:

$$K(x) = (8 - x) \cdot a + \sqrt{x^2 + 4} \cdot ak$$

Hier wird ersichtlich, dass der Faktor a herausgehoben werden kann und demnach der konstante Faktor a weggelassen werden darf, ohne die Stelle des Extremwerts zu verändern. Daher gilt in weiterer Folge:

$$\overline{K}(x) = 8 - x + \sqrt{x^2 + 4} \cdot k$$

$$\overline{K}'(x) = -1 + \frac{kx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{kx - \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Durch Nullsetzen der Ableitung ergibt sich schließlich die Bedingung:

$$kx = \sqrt{x^2 + 4} \quad /^2 \text{ (Hierbei sind sicher beide Seiten nichtnegativ!)}$$

$$k^2 x^2 = x^2 + 4 \quad / -x^2$$

$$k^2 x^2 - x^2 = 4$$

$$x^2 \cdot (k^2 - 1) = 4 \quad / : (k^2 - 1)$$

$$x^2 = \frac{4}{k^2 - 1} \quad / \sqrt{}$$

$$x = \sqrt{\frac{4}{k^2 - 1}}$$

Somit ist nun beantwortet, in welcher Entfernung (abhängig vom Faktor k) von B der Abzweigungspunkt D liegen muss, damit die Kosten der Verlegung minimal werden. Sind nun – wie im zweiten Teil der vorliegenden Aufgabe – die Verlegungskosten entlang der Straße 60.000€ pro Kilometer und 100.000€ pro Kilometer im Gelände, kann man entweder dies nochmal analog wie eben durchrechnen. Alternativ erkennt

man, dass $a = 60.000$ und $a \cdot k = 100.000$, woraus folgt, dass $k = \frac{100.000}{60.000} = \frac{5}{3}$. Somit ergibt sich für den zweiten Teil der Aufgabe:

$$x = \sqrt{\frac{4}{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1}} = \sqrt{\frac{4}{\frac{25}{9} - 1}} = \sqrt{\frac{4}{\frac{16}{9}}} = \sqrt{\frac{36}{16}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ km}$$

Für den dritten Teil der Aufgabe gilt es nun lediglich, für ein gegebenes x den dazugehörigen Wert k zu ermitteln. Dies soll nun exemplarisch für zwei Möglichkeiten gezeigt werden. Einerseits soll der Abzweigungspunkt D genau mit dem Halbierungspunkt der Strecke AB (also $x = 4$) zusammenfallen (linke Spalte), andererseits soll der Punkt D im Punkt B (also $x = 0$) liegen (rechte Spalte):

$$\begin{array}{ll} 4 = \sqrt{\frac{4}{k^2 - 1}} & / \cdot 2 \\ 16 = \frac{4}{k^2 - 1} & / \cdot (k^2 - 1) \\ 16 \cdot (k^2 - 1) = 4 & / : 16 \\ k^2 - 1 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} & / + 1 \\ k^2 = \frac{5}{4} & / \sqrt{} \\ k = \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 1,12 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 0 = \sqrt{\frac{4}{k^2 - 1}} & / \cdot 2 \\ 0 = \frac{4}{k^2 - 1} \end{array}$$

Für den Halbierungspunkt AB findet man also einen Wert für k , wohingegen die rechte Spalte schwieriger zu lösen ist. So ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4}{k^2 - 1}} = 0$, der Wert für k müsste demnach unendlich groß sein, dass sich nicht eine kürzere Strecke über das Gelände auszahlen würde.

Diese vorgestellte Aufgabe ist meines Erachtens gelungen, da sie auch zuerst allgemein gelöst wird und erst im Anschluss daran mit konkreten Zahlen. Somit kann man einerseits das Ergebnis weiterverwenden, andererseits wird nun klarer, wie weit etwa der Punkt D bei einem vorgegebenen Wert k vom Punkt B entfernt liegen muss. Somit kann man sich auch etwas unter dem Ergebnis vorstellen.

In ähnlicher Weise kann man verschiedenste Aufgaben also adaptieren. Nicht nur Strecken, sondern auch Flächen lassen sich dahingehend gewichten. Demnach kann man von bereits bekannten Ergebnissen abweichen – wären die zu verlegenden Leitungen in der eben vorgestellten Aufgabe im Gelände gleich teuer wie auch entlang der Straße, erhält man schlicht die Hypotenuse des Dreiecks ABC, also eine direkte Verbindung, die bekanntlich die kürzeste Entfernung zweier Punkte darstellt.

5.4 Extremstellen diskreter Funktionen

In Schulbüchern werden (jedoch ohne zusätzliche Bemerkung versehen) gelegentlich diskrete Funktionen behandelt, von denen Extremstellen zu bestimmen sind. Dabei werden sie als kontinuierlich angenommen, damit wie gewohnt verfahren werden kann. Siehe beispielsweise:

Aus a) 64, b) 100 Zündhölzern ist ein Rechteck von größtem Flächeninhalt zu legen!¹⁷³

Aus a) 64, b) 124 ganzen Zündhölzern ist ein Rechteck von größtem Flächeninhalt zu legen. Aus wie vielen Zündhölzern bestehen die Seitenlängen des Rechtecks?¹⁷⁴

Dass dies nicht weiter thematisiert wird, ist nicht schlimm und würde auch am Ziel vorbei gehen, möglichst einfache Extremwertaufgaben einzuüben. Dennoch ist auffällig, dass die Anzahl x an Zündhölzern immer durch vier teilbar ist ($x \bmod 4 = 0$), also immer ganzzahlige Lösungen existieren. Hier kann man nun die Anzahl an Zündhölzern dahingehend verändern, dass $x \bmod 4 \neq 0$ gilt. So gilt dann beispielsweise (der Einfachheit halber) für 10 Zündhölzer $10 \bmod 4 = 2$:

$$A(x, y) = x \cdot y$$

Mit der Nebenbedingung $2x + 2y = 10$ ergibt das

$$A(x) = x \cdot (5 - x) = 5x - x^2.$$

¹⁷³ Götz/Reichel 2011, S. 147, Bsp. 529

¹⁷⁴ Malle et al. 2014, S. 68, Bsp. 3.114

Die Definitionsmenge der diskreten Funktion A lautet dabei $D_A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Die Funktion wird – wie bereits erwähnt – als kontinuierlich angenommen (vgl. hierzu die nebenstehende Abb. 59). Somit gilt nun für die Definitionsmenge $D = [0; 5]$. Nun kann damit wie gewohnt verfahren werden. Aus der Scheitelpunktform (also der Quadratungleichung) erkennt man nun auch ohne Differentialrechnung, dass bei einer Anzahl von $x = \frac{5}{2} = 2,5$ Zündhölzern das Maximum angenommen wird. Da aber die Zündhölzer nicht gebrochen werden sollen, ergibt sich für $x = 2$ und $x = 3$ dieselbe Lösung, weil die jeweils andere Seitenlänge dann den jeweils anderen Wert annimmt.

Für beispielsweise 11 Zündhölzer ($11 \bmod 4 = 3$) wird das Maximum bei $x = \frac{11}{4} = 2,75$ angenommen. Auch hier bestehen die Seitenlängen des resultierenden Rechtecks aus 2 und 3 Zündhölzern, nur bleibt natürlich ein Zündholz über, das gar nicht erst verwendet werden konnte, wenn es nicht gebrochen werden darf. Hier kommt man natürlich auch dem Quadrat möglichst nahe, das ja das flächengrößte Rechteck bei konstantem Umfang darstellt. Eine ungerade Anzahl $x \bmod 4 = \pm 1$ an Streichhölzern bedeutet demnach, dass immer eines übrig bleibt und damit nicht verwendet wird. Bei einer geraden Anzahl werden alle verwendet. Nur bei einer durch 4 teilbaren Anzahl, also für $x \bmod 4 = 0$, entsteht jedoch

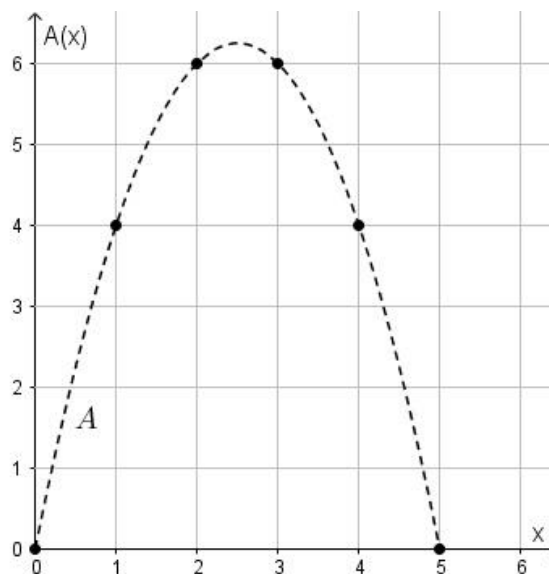


Abb. 59: Diskrete und kontinuierliche Funktion A in einem Koordinatensystem. Eigene Darstellung, GeoGebra.

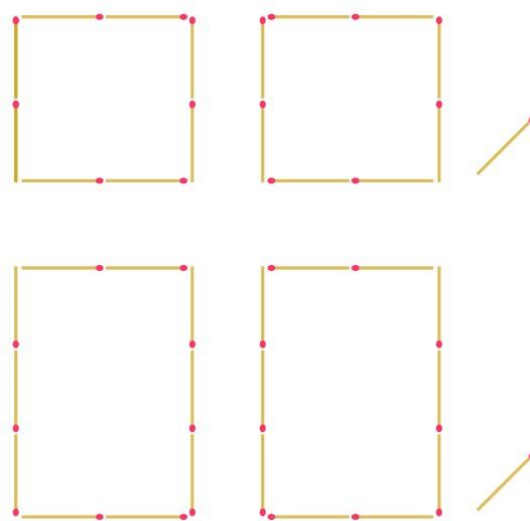


Abb. 60: Die Lösungen für 8, 9, 10 und 11 Streichhölzer. Bei ungerader Anzahl an Streichhölzern bleibt immer eines übrig. Eigene Darstellung, GeoGebra.

auch tatsächlich ein Quadrat, bei $x \bmod 4 = \pm 2$ handelt es sich immer um ein Rechteck.

Anders eingekleidet kann es sich etwa um die von der Autobahn bekannten Betonleitwände handeln, die wohl nicht extra geteilt werden, um ein möglichst großes rechteckiges Flächenstück abzugrenzen. Hierbei fällt nun auch das Problem weg, Zündhölzer sehr wohl leicht teilen zu können. Es kann sich aber auch um die von Veranstaltungen wie etwa Festivals bekannten Absperrgitter handeln, bei der ein möglichst großer Campingplatz abgegrenzt werden soll. Auch hier ist intuitiv klar, dass die Absperrgitter nicht geteilt werden sollen.

6 Zusammenfassung/Fazit

Extremwertaufgaben sind aus dem schulischen Analysis-Unterricht nicht mehr wegzudenken. Sie geben einerseits einen Einblick in die Kraft der Differentialrechnung, andererseits zeigen sie den Schülerinnen und Schülern auch realitätsnahe Anwendungsbeispiele. Die Behandlung von Extremwertaufgaben hat sich gewandelt, wie ein Blick in approbierte Schulbücher der gymnasialen Oberstufe zeigt: Elementare Lösungsmethoden werden (in manchen Schulbüchern) ebenso verwendet wie der Differentialkalkül. Dabei soll die fundamentale Idee des Optimierens im Mittelpunkt stehen. Extremwertaufgaben sollen nämlich nicht zu einem bloßen Abarbeiten eines zuvor gelernten Schemas verkommen. Auch ändern sich durch den vermehrten Technologieeinsatz wie etwa von Dynamischer Geometrie-Software (z.B. GeoGebra) und grafikfähiger Taschenrechner die Anforderungen, da einerseits leichter die Graphen von Funktionen betrachtet werden können, andererseits auch komplexere Funktionen betrachtet und abgeleitet werden können.

Die vorliegende Arbeit soll zeigen, dass durch „Extremwertaufgaben zum Nachdenken“ das übliche Schema durchbrochen werden kann und damit einhergehend auch Nachdenkprozesse angeregt werden können. So wird im fünften Kapitel dieser Arbeit gezeigt, welche Adaptionsmöglichkeiten Extremwertaufgaben bieten, um verschiedene Lösungsfälle konstruieren zu können. So werden im schulklassischen Unterricht meist nur Aufgaben behandelt, deren Lösung(en) (also die Extremstellen) im Inneren des Intervalls der zugrundeliegenden Funktion liegen. Liegen die Extremstellen aber außerhalb des Intervalls, sind die Randstellen zu betrachten und deren Funktionswerte zu vergleichen. Dies wird in der Schule oftmals vernachlässigt. Hierbei bieten sich vor allem Aufgaben an, die auch geometrisch gelöst oder begründet werden können: Das Neben- und Miteinander von Differentialrechnung und elementaren Methoden führt zu einem tieferen Verständnis. Mittels Differentialrechnung berechnete Ergebnisse können geometrisch gedeutet werden, aber auch geometrische Sachverhalte zur Begründung von algebraisch gelösten Ergebnissen herangezogen werden.

Bereits das Einschreiben eines Rechtecks in ein Dreieck bietet eine Vielzahl an Adaptionsmöglichkeiten wie auch eine Vielzahl an Anknüpfungspunkten für weiterführende und darauf aufbauende Aufgaben. Beispiele dafür finden sich ebenso im fünften Kapitel der vorliegenden Arbeit.

Es stellt sich aber die Frage, welchen Mehrwert nun tatsächlich derartige „Extremwertaufgaben zum Nachdenken“ haben. Um darüber valide Aussagen treffen zu können, muss auch empirisch nachgewiesen werden, dass derartige Aufgaben wirklich zu einem besseren Verständnis und zu einem nachhaltigen Lernen führen. Dies gilt es, etwa in realen Unterrichtssituationen zu überprüfen.

7 Literaturverzeichnis

7.1 Bücher und Zeitschriften

Benker, Hans (2003): Mathematische Optimierung mit Computeralgebrasystemen. Einführung für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Wirtschaftswissenschaftler. Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.

Blankenagel, Jürgen/Kindinger, Dieter (1988): Die H-Milchtüte. Eine Extremwertaufgabe mit verschiedenen Gesichtern. In: mathematik lehren 29, S. 34-37.

Blum, Werner (2000): Perspektiven für den Analysisunterricht. In: MU (Der Mathematikunterricht). Heft 4/5, S. 5-17.

Böer, Heinz (1993): Extremwertproblem Milchtüte. Eine tatsächliche Problemstellung aktueller Massenproduktion. In: Blum, Werner (Hrsg.): Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht. Beiträge aus dem ISTRON-Wettbewerb. Hildesheim: Franzbecker, S. 1-16.

Borromeo Ferri, Rita (2011): Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens – Kognitive Analysen von Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Borromeo Ferri, Rita/Greefrath, Gilbert/Kaiser, Gabriele (Hrsg.) (2013): Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe. Wiesbaden: Springer Verlag.

Bruner, Jerome S. (1970): Der Prozeß der Erziehung. Ins Deutsche übertragen von Arnold Harttung. Berlin: Berlin Verlag/Düsseldorf: Pädagogischer Verlag Schwann [Sprache und Lernen. Internationale Studien zur pädagogischen Anthropologie, Bd. 4].

Bruner, Jerome S. (1973): Relevanz der Erziehung. Ravensburg: Otto Maier Verlag [EGS-Texte, erziehungs- und gesellschaftswissenschaftliche Studententexte].

Bürger, Heinrich/Malle, Günther (2000): Funktionsuntersuchungen mit Differentialrechnung. In: mathematik lehren 103, S. 56-59.

Danckwerts, Rainer/Vogel, Dankwart (1986): Wider die einseitige Sicht der Mini-Max-Aufgaben! In: MU (Der Mathematikunterricht). Jahrgang 32, Heft 2, S. 24-29.

Danckwerts, Rainer/Vogel, Dankwart (1992): Quo vadis Analysisunterricht? In: MNU (Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht), Heft 6, S. 370-374.

Danckwerts, Rainer/Vogel, Dankwart (1997): Ein Blick in die Geschichte: Fermat und Kepler. In: mathematik lehren 81, S. 59-62.

Danckwerts, Rainer/Vogel, Dankwart (2001a): Extremwertprobleme mit Analysis – Anmerkungen zu einer stabilen Tradition. In: MU (Der Mathematikunterricht), Heft 4, Jahrgang 47, S. 16-21.

Danckwerts, Rainer/Vogel, Dankwart (2001b): Milchtüte und Konservendose – Modellbildung im Unterricht. In: MU (Der Mathematikunterricht), Heft 4, Jahrgang 47, S. 22-31.

Danckwerts, Rainer/Vogel, Dankwart (2006): Analysis verständlich unterrichten. München: Spektrum Akademischer Verlag (Mathematik Primar- und Sekundarstufe).

Forster, Otto (2010): Analysis 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen. 10., verb. Aufl. Wiesbaden: Springer Fachmedien [Grundkurs Mathematik].

Greefrath, Gilbert (2010): Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Hischer, Horst/Scheid, Harald (1995): Grundbegriffe der Analysis. Genese und Beispiele aus didaktischer Sicht. Heidelberg/Berlin/Oxford: Spektrum Akademischer Verlag [Texte zur Didaktik der Mathematik].

Holzkamp, Klaus (1995): Lernen. Subjektwissenschaftliche Grundlegung. Frankfurt/Main: Campus-Verl.

Humenberger, Hans (1995): Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich: BI-Wiss.-Verl. (Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, 31).

Humenberger, Hans (1997): Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht – erste Resultate eines Forschungsprojekts. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Bd. 18, Heft 1, S. 3-50.

Humenberger, Hans (2010): Das Quadrat als optimales Rechteck. Optimieren als fundamentale Idee erfahren. In: mathematik lehren 159, S. 44-50.

Jäger, Joachim (1997): Die optimale Dose. In: mathematik lehren 81, S. 53-58.

Kestler, Franz (2015): Einführung in die Didaktik des Geographieunterrichts. Grundlagen der Geographiedidaktik einschließlich ihrer Bezugswissenschaften. 2., überarbeitete und erweiterte Auflage. Kempten: Klinkhardt.

Kirchgraber, Urs (1999): Kurvendiskussion quo vadis? In: Selter, Christoph/Walther, Gerd (Hrsg.): Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann. Leipzig: Klett Verlag, S. 112-119.

Klika, Manfred/Tietze, Uwe-Peter/Wolpers, Hans (1982): Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg [Didaktik der Mathematik].

Knoche, Norbert/Wippermann, Heinrich (1986): Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis. Mannheim/Wien/Zürich: Bibliographisches Institut [Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 4].

Körner, Henning (2014): Modellieren. Szenen aus dem Unterricht. In: Henn, Hans-Wolfgang/Meyer, Jörg: Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. ISTRON-Schriftenreihe. Wiesbaden: Springer Fachmedien Verlag, S. 14-26.

Malle, Günther (1996): Einige Bemerkungen zu Funktionsuntersuchungen und Extremwertaufgaben. In: Malle, Günther/Reichel, Hans-Christian (Hrsg.): Fragen zum Mathematikunterricht. Festschrift zum 70ten Geburtstag von Heinrich Bürger. Wien: Verlag Holder-Pichler-Tempsky.

Meyer, Michael/Voigt, Jörg (2010): Rationale Modellierungsprozesse. In: Brandt, Birgit/Fetzer, Marei/Schütte, Marcus (Hrsg.): Auf den Spuren Interpretativer Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik. Götz Krummheuer zum 60. Geburtstag. Münster: Waxmann [Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, 5].

Meyer-Drawe, Käte (2008): Diskurse des Lernens. München: Wilhelm Fink.

Piaget, Jean (2003): Meine Theorie der geistigen Entwicklung. Herausgegeben von Reinhard Fatke. Aus dem Amerikanischen von Hainer Kober. Weinheim/Basel/Berlin: Beltz Verlag [Beltz Taschenbuch 42].

Roth-Sonnen, Nicole/Stein, Gunter/Stengel, Astrid (2004): Knobel-Aufgaben für die 9. und 10. Klasse. Berlin: Cornelsen Verlag [Eins plus: Begabungen fördern im Mathematikunterricht].

Schoberleitner, Franz (2003): Johannes Keplers Beiträge zur Mathematik. In: Schriftenreihe der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft Nr. 35, S. 80-97. Auch online abrufbar unter <http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2003%20Band%2035/VortragSchoberleitner.pdf>, zuletzt abgerufen am 26.7.2016.

Schupp, Hans (1992): Optimieren. Extremwertbestimmung im Mathematikunterricht. Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich: BI Wissenschaftsverlag [Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 20].

Schupp, Hans (1997): Optimieren ist fundamental. In: mathematik lehren 81, S. 4-10.

Schwarzkopf, Ralph (2007): Elementares Modellieren in der Grundschule. In: Büchter, Andreas/Humenberger, Hans/Hussmann, Stephan/Prediger, Susanne (Hrsg.): Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis. Festschrift zum 60. Geburtstag für H.-W. Henn. Hildesheim: Franzbecker, S. 95-105.

Vogel, Dankwart (2010): Maximal, minimal, optimal... In: mathematik lehren 159, S. 4-13.

Winter, Heinrich (1996): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Nr. 61, S. 37-46.

7.2 Internetquellen

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) (2015): Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Online abrufbar unter: https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_neuaufgabe_2018_2015-10-19.pdf, zuletzt abgerufen am 26.7.2016.

Bundesministerium für Bildung und Frauen (BMBF) (o.J.): Lehrplan Mathematik Oberstufe. Online abrufbar unter: https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2, zuletzt abgerufen am 26.7.2016.

Holzkamp, Klaus (o.J.): Die Fiktion administrativer Planbarkeit schulischer Lernprozesse. Online abrufbar unter: www.kritische-psychologie.de/files/kh1992a.pdf, zuletzt abgerufen am 26.7.2016.

Roofls, Günter (o.J.): Extremwertaufgaben. Online abrufbar unter:
nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/jahrgang112pdf/Extremwertaufgaben.pdf, (NiBiS =
 Niedersächsischer Bildungsserver), zuletzt abgerufen am 26.7.2016.

Schoberleitner, Franz (2003): Johannes Keplers Beiträge zur Mathematik. In:
 Schriftenreihe der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
 (ÖMG), Heft Nr. 35, S. 80-97. Auch online abrufbar unter
[http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2003%20Band%2035/VortragSchoberleitner](http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2003%20Band%2035/VortragSchoberleitner.pdf)
 .pdf, zuletzt abgerufen am 26.7.2016.

Voigt, Jörg (2013): Eine Alternative zum Modellierungskreislauf. Online abrufbar
 unter: [http://www.mathematik.uni-](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2013/Einzelvortraege/BzMU13-Voigt.pdf)
[dortmund.de/ieem/bzmu2013/Einzelvortraege/BzMU13-Voigt.pdf](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2013/Einzelvortraege/BzMU13-Voigt.pdf), zuletzt abgerufen
 am 26.7.2016.

7.3 Approbierte Schulbücher (AHS, 7. Klasse)

Bleier, Gabriele/Lindenberg, Judith/Lindner, Andreas/Stepancik, Evelyn (2011):
 Dimensionen 7. Wien: Dorner Verlag.

Brand, Clemens/Dorfmayr, Anita/Lechner, Josef/Mistlbacher, August/Nussbaumer,
 Alfred (2011): Thema Mathematik 7. Linz: Veritas.

Götz, Stefan (Hrsg.)/Reichel, Hans-Christian (Hrsg.)/Müller, Robert/Hanisch, Günter
 (2011): Mathematik 7. 1. Aufl. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH
 & Co KG.

Hötzel, Gerald/Postruznik, Günther/Urban-Woldron, Hildegard/Weigl, Franz (2012):
 klar_Mathematik 7. Wien: Verlag Jugend & Volks GmbH.

Malle, Günther/Koth, Maria/Woschitz, Helge/Malle, Sonja/Salzger, Bernhard/Ulovec,
 Andreas (2011): Mathematik verstehen 7. 1. Aufl. Wien: Österreichischer
 Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co KG.

7.4 Eigene Geogebra-Dateien

Gansch, Gotthard (2015a): Falten – Rechteck einem rechth. Dreieck einschreiben. Online abrufbar unter: <http://tube.geogebra.org/student/mTMbXhFoQ>, zuletzt abgerufen am 26.7.2016.

Gansch, Gotthard (2015b): Falten – Rechteck einem gleichsch. Dreieck einschreiben. Online abrufbar unter: <http://tube.geogebra.org/student/mxX6GdVHN>, zuletzt abgerufen am 26.7.2016.

Gansch, Gotthard (2015c): Einschreiben eines Rechtecks. Online abrufbar unter: <http://tube.geogebra.org/student/mFDSokWq8>, zuletzt abgerufen am 26.7.2016.

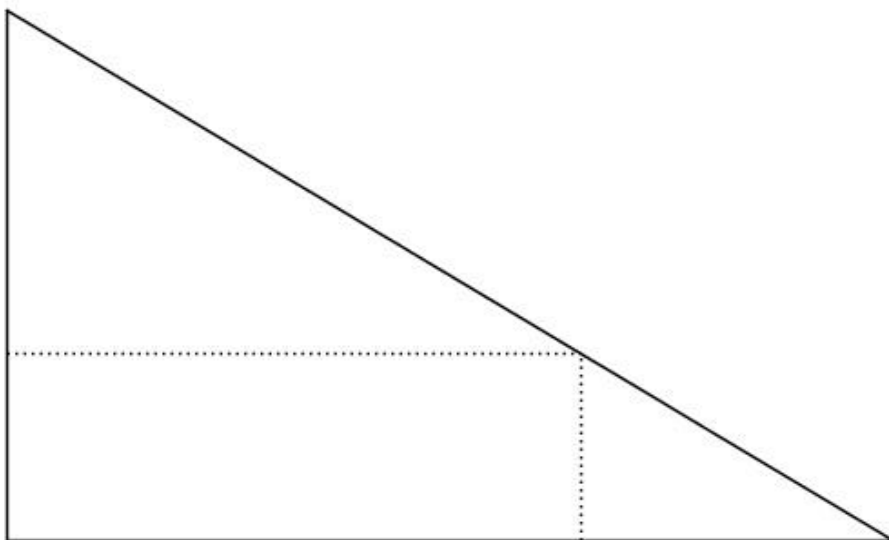
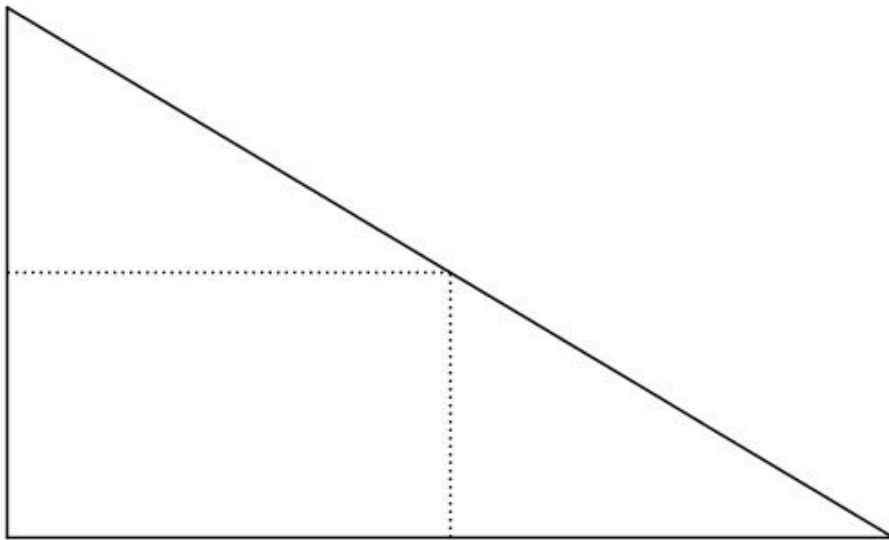
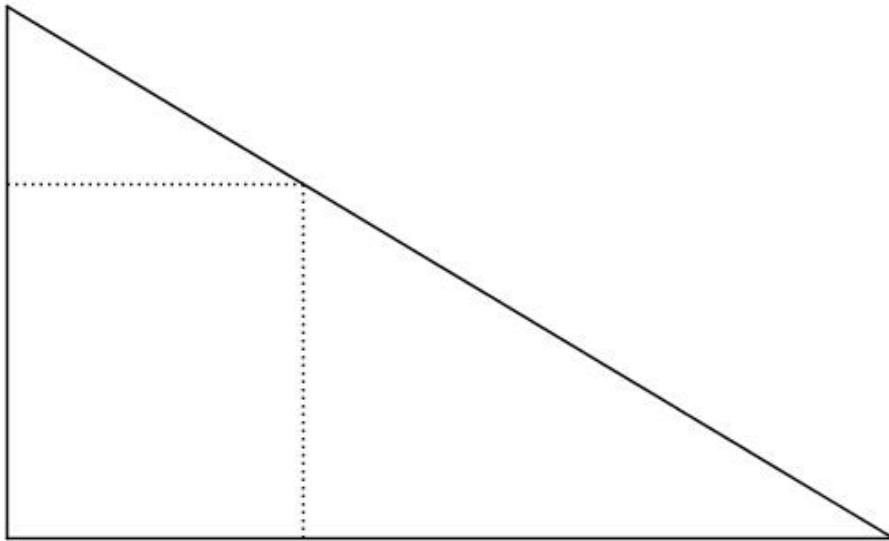
Gansch, Gotthard (2015d): Rechteck in ein Trapez einschreiben. Online abrufbar unter: <http://tube.geogebra.org/student/mYjWslXfN>, zuletzt abgerufen am 26.7.2016.

Gansch, Gotthard (2015e): Glasscheibe – Lösungsfälle. Online abrufbar unter: <http://tube.geogebra.org/student/mq3zuglLr>, zuletzt abgerufen am 26.7.2016.

Gansch, Gotthard (2015f): Extremum: Gerade durch Punkt. Online abrufbar unter: <http://tube.geogebra.org/student/mP5TSzNEd>, zuletzt abgerufen am 26.7.2016.

Anhang A – Kopiervorlage

Auf der nachfolgenden Seite findet sich eine Kopiervorlage, um die Faltdfiguren auch haptisch begreifbar zu machen und nicht nur in GeoGebra zu realisieren. Es sind drei Faltvorschläge eingezeichnet.



Anhang B – Zusammenfassung

Der Analysisunterricht bildet einen wesentlichen Bestandteil des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Die Extremwertaufgaben waren dabei lange aus dem Unterricht nicht mehr wegzudenken. Sie geben einen Einblick in die Anwendungsmöglichkeiten der Differentialrechnung. Oftmals verkommen Extremwertaufgaben jedoch zu einem Abarbeiten eines zuvor eingepprägten Schemas: Nach dem – meist komplexeren – Suchen der Nebenbedingung(en) wird die erste Ableitung gebildet und Null gesetzt. In den Köpfen der Schülerinnen und Schüler bleibt nur $f'(x) = 0$ verankert. Was jedoch damit eigentlich bezweckt wird und was damit erreicht wird, ist vielen Schülerinnen und Schülern nicht mehr unmittelbar klar. Darüber hinaus ist es durch das Aufkommen immer besserer und auch erschwinglicher Technologie wie etwa grafikfähigen Taschenrechnern oder Dynamischer Geometrie-Software möglich, in Kürze einerseits Graphen plotten zu lassen wie auch schwierige Ableitungen berechnen zu lassen. Andererseits sind Extremwertaufgaben zwar nach wie vor im Lehrplan verankert, sind aber nicht Teil der schriftlichen standardisierten Reifeprüfung in Mathematik. Dadurch stellt sich nicht nur die grundlegende Frage nach der Berechtigung der Behandlung von Extremwertaufgaben im ohnedies bereits dichten Oberstufen-Lehrplan, sondern – nach positiver Beantwortung – die Frage nach der Konzeption des Kapitels der Extremwertaufgaben. So ist sich die Fachliteratur doch einig, dass Extremwertaufgaben durchaus ihren Raum im schulischen Analysisunterricht haben, aber in einer anderen angepassten Form. Das ehemals übliche Reproduzieren eines Schemas soll abgelöst werden, das starre Muster der Extremwertaufgaben durchbrochen werden.

Im Zuge dieser sich ändernden Bedingungen hat sich auch die Behandlung von Extremwertaufgaben bereits gewandelt, wie ein Blick in Schulbücher zeigt: In der vorliegenden Arbeit wurden die für die gymnasiale Oberstufe approbierten Schulbücher näher untersucht. Elementare Lösungsmethoden werden (in manchen Schulbüchern) ebenso vermehrt verwendet wie der Differentialkalkül. Dabei soll immer die fundamentale Idee des Optimierens im Mittelpunkt stehen. Durch den im Zuge der

standardisierten Reifeprüfung obligatorischen Technologieeinsatz werden in Zukunft auch komplexere Funktionen betrachten und abgeleitet werden können (müssen).

Die vorliegende Arbeit soll zeigen, dass durch „Extremwertaufgaben zum Nachdenken“ das übliche Schema durchbrochen werden kann und damit einhergehend auch Nachdenkprozesse angeregt werden können. So wird gezeigt, welche Adaptionismöglichkeiten Extremwertaufgaben bieten, um etwa verschiedene Lösungsfälle konstruieren zu können. So werden im schulklassischen Unterricht meist nur Aufgaben behandelt, deren Lösung(en) (also die Extremstellen) im Inneren des Intervalls der zugrundeliegenden Funktion liegen. Liegen die Extremstellen aber außerhalb des Intervalls, sind die Randstellen zu betrachten und deren Funktionswerte zu vergleichen. Dies wird in der Schule oftmals vernachlässigt. Hierbei bieten sich vor allem Aufgaben an, die auch geometrisch gelöst oder begründet werden können: Das Neben- und Miteinander von Differentialrechnung und elementaren Methoden führt zu einem tieferen Verständnis der Thematik. Mittels Differentialrechnung berechnete Ergebnisse können geometrisch gedeutet werden, aber auch geometrische Sachverhalte zur Begründung von algebraisch gelösten Ergebnissen herangezogen werden. Hierzu werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein paar „Extremwertaufgaben zum Nachdenken“ vorgestellt.

Anhang C – Abstract

Teaching calculus is an essential component of mathematics classes. Exercises with extreme values have long been of paramount importance as part of mathematics classes as they grant an insight into application possibilities of differential calculus. Yet, exercises with extreme values are often dismissed as nothing more than a schema that was memorized previously: After mostly complex secondary conditions have been found, the first derivative is formed and then the equation is set null. Nonetheless, most pupils will merely memorise this as $f'(x) = 0$. The actual purpose of the calculation is thus not directly clear to the students. Moreover, the emergence of better and more affordable technology such as graphing calculators or dynamic mathematics software allows plotting graphs as well as calculating complex derivatives within a short period of time. Nevertheless, exercises with extreme values remain grounded in the curriculum, but are not part of the written standardized final exams (“Matura”) in mathematics. Because of that, the question whether exercises with extreme values should be implemented in the already tightly-filled curriculum of upper secondary levels has to be raised. If this question is answered with yes, the following question has to be how the chapter of exercises with extreme values should be designed. If it is implemented in a more adjusted form, the technical literature speaks for the inclusion of exercises with extreme values in the teaching of calculus in schools. The goal is to abolish the mere reproduction of schemas that used to be common amongst students previously.

In the course of the changing conditions, the way of handling exercises with extreme values has changed as well, as a look into school books quickly shows. In the given paper, school books that are aimed at upper secondary levels were examined and analysed. Elementary solution methods are (in some school books) used besides the differential calculus. The fundamental idea of optimising should always be prioritised here. By the obligatory use of technology that was implemented with regard to the standardised final exam (Matura), also more complex functions will (have to) be analysed and derived.

The given thesis aims to show that by using “Extremwertaufgaben zum Nachdenken” (non-literal translation: “exercises with extreme values to think about”), the usual patterns can be broken and further thinking processes are encouraged. Exercises with extreme values are shown to provide many adaptation possibilities in order to construct different solutions. In the classical teaching in schools, the only exercises that are dealt with are those that have a solution (being the extreme values) that lies within a certain interval of the given function. If the extreme values are outside of this interval, the marginal points have to be considered in order to compare their functional values. This is frequently neglected in schools. Exercises that can also be solved geometrically come to mind in this case: as differential equations and elementary methods coexist and interconnect with each other, a deeper understanding of the issue at hand can be reached. Solutions that were calculated by using differential equations can be interpreted geometrically, but geometrical facts can also be used to explain solutions that were calculated by means of algebra. With regard to this, “exercises with extreme values to think about” are presented in the given thesis.