



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Vektorrechnung und offenes Lernen“

verfasst von / submitted by

Romina Arzt

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt / A 190 406 350
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

Studienrichtung lt. Studienblatt / Lehramtsstudium Unterrichtsfach Mathematik
degree programme as it appears on und Unterrichtsfach Italienisch
the student record sheet:

Betreut von / Supervisor:

Mag. Dr. Andreas Ulovec

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

„Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und nur die ausgewiesenen Hilfsmittel verwendet habe. Diese Arbeit wurde weder an einer anderen Stelle eingereicht noch von anderen Personen vorgelegt.“

Wien, 24.06.2016

DANKSAGUNG

Zunächst möchte ich mich bei meinem Betreuer Herrn Mag. Dr. Andreas Ulovec für die Unterstützung beim Verfassen meiner Diplomarbeit bedanken. Durch seine Spontaneität, Offenheit und anregenden Feedbacks war es für mich überhaupt möglich, diese für mich sehr interessante Arbeit zu verfassen.

Ich bedanke mich auch bei Doz. Dr. Franz Embacher für seine hilfreichen Ratschläge und sein großes Verständnis.

Helene und Simone danke ich von Herzen, dass sie Teile meiner Arbeit kontrolliert haben und stets ein offenes Ohr für mich hatten. Außerdem bedanke ich mich, dass sie mich auch in schwierigen Phasen aufgefangen haben und mir stets einen Rückhalt bieten.

Ein ganz besonderer Dank gilt meiner Familie und vor allem meinen Eltern, die mir dieses Studium erst ermöglicht haben und mich durch alle Höhen und Tiefen der Studienzeit begleitet haben. Außerdem möchte ich mich bei ihnen bedanken, dass sie immer in meine Fähigkeiten und mein Können vertraut haben und mich bei Unsicherheiten über die Berufswahl bestärkt haben.

1	EINLEITUNG	9
----------	-------------------------	----------

Teil I: moderne Unterrichtsformen

2	OFFENES LERNEN UND METHODEN	10
----------	--	-----------

2.1	ECKDATEN FÜR OFFENES LERNEN UND METHODENVIELFALT	10
2.2	AUF DEM WEG ZUR RICHTIGEN METHODE	11
2.3	POSITIVE ASPEKTE OFFENEN LERNENS UND WAS ZU BEDENKEN IST	12

3	EIN AUSZUG AUS DER METHODENVIELFALT	13
----------	--	-----------

3.1	AUFGABENKARTEI	13
3.2	EXPERIMENTIEREN	14
3.3	KNOBELTEAM	15
3.4	ICH-DU-WIR	15
3.5	MATHE-PANINI – SAMMELALBUM	16
3.6	POSTER	16
3.7	PROJEKTARBEIT	17
3.8	RÄTSEL	18
3.9	REDAKTION	18
3.10	SAMMELN – ORDNET – STRUKTURIEREN	18
3.11	SPIELE	19
3.12	STATIONENZIRKEL, LERNWERKSTATT	20

Teil II: Vektorrechnung in der Sekundarstufe II

4	DIDAKTIK DER VEKTORRECHNUNG	21
----------	--	-----------

4.1	DAS ARITHMETISCHE MODELL	22
4.2	DAS GEOMETRISCHE MODELL	24
4.3	ZUSAMMENFÜHRUNG VON PFEILKLASSEN UND ZAHLENTUPELN	30
4.4	ALGEBRAISCHE VEKTOREN MIT GEOMETRISCHER DEUTUNG	31
4.5	RECHNEN MIT VEKTOREN	32
4.5.1	<i>Das Skalarprodukt</i>	<i>32</i>
4.5.2	<i>Das Vektorprodukt</i>	<i>36</i>
4.6	ANALYTISCHE GEOMETRIE	38
4.6.1	<i>Parameterdarstellungen</i>	<i>38</i>
4.6.2	<i>Normalvektordarstellungen</i>	<i>40</i>
4.6.3	<i>Lagebeziehungen von Geraden</i>	<i>41</i>
4.6.4	<i>Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen</i>	<i>42</i>
4.6.5	<i>Lagebeziehungen von Ebenen</i>	<i>43</i>
4.6.6	<i>Abstandsberechnung</i>	<i>43</i>

5	VEKTORRECHNUNG IM LEHRPLAN	46
6	VEKTOREN BEI DER KOMPETENZORIENTIERTEN ZENTRALEN REIFEPRÜFUNG	47
Teil III: beispielhafte Anwendungen		
7	OFFENES LERNEN ZUM THEMA VEKTORRECHNUNG IN DER SEKUNDARSTUFE II.....	48
7.1	BEISPIEL ZUR METHODE „AUFGABENKARTEI“	48
7.2	BEISPIEL ZUR METHODE EXPERIMENTIEREN	53
7.3	BEISPIEL ZUR METHODE KNOBELTEAM.....	59
7.4	BEISPIEL ZUR METHODE ICH – DU- WIR.....	66
7.5	BEISPIEL ZUR METHODE MATHE – PANINI	70
7.6	BEISPIEL ZUR METHODE POSTER.....	75
7.7	BEISPIEL ZUR METHODE PROJEKTARBEIT	78
7.8	BEISPIEL ZUR METHODE REDAKTION.....	82
7.9	BEISPIEL ZUR METHODE RÄTSEL	84
7.10	BEISPIEL ZUR METHODE PLACEMATS	86
7.11	BEISPIEL ZUR METHODE SPIELE	89
7.12	BEISPIEL ZUR METHODE STATIONENBETRIEB	92
8	RESÜMEE	116
9	VERZEICHNISSE	118
9.1	LITERATURVERZEICHNIS.....	118
9.2	ABBILDUNGSVERZEICHNIS.....	120
10	ZUSAMMENFASSUNG UND ABSTRACT.....	122

1 Einleitung

Wenn ich an meine Schulzeit zurück denke, dann fällt mir zum Mathematikunterricht vorwiegend ein, dass er hauptsächlich aus Frontalunterricht bestand. Eine Methode, die, wenn sie ausschließlich verwendet wird, mittlerweile veraltet ist. Nicht zuletzt durch die Einführung der zentralen Reifeprüfung und des neuen Konzepts der Grundkompetenzen hat sich das Unterrichtsbild stark geändert. Anstatt der Lehrinhalte, also Inhalte, die von der Lehrperson vorgetragen wurden, sind jetzt die Fertigkeiten und Fähigkeiten der SchülerInnen, also das, was die SchülerInnen beherrschen, von besonderem Interesse. Diese Kompetenzen erlangt man am ehesten, indem man mit den Lehr- oder Lerninhalten auf verschiedenste Art und Weise arbeitet. Für mich bedeutet offenes Lernen im Mathematikunterricht, dass mathematische Inhalte durch unterschiedlichste Methoden unterrichtet werden und die SchülerInnen möglichst selbstständig und individuell lernen.

Aufgrund persönlicher Erfahrungen habe ich mir in meiner Arbeit die Aufgabe gestellt, mich eingehend damit zu beschäftigen, wie man SchülerInnen durch offenes Lernen und Methodenvielfalt zum Thema Vektorrechnung bestmöglich auf die zentrale Reifeprüfung vorbereiten kann, wie SchülerInnen selbstständig für die zentrale Reifeprüfung lernen können und wie Vektorrechnung praxisnah unterrichtet werden kann.

Dafür habe ich die Arbeit zunächst in drei Teile gegliedert. In Teil I erläutere ich die moderne Unterrichtsform „offenes Lernen“ und eine Auswahl an dazugehörigen Methoden. Die Auswahl habe ich so getroffen, dass sie zum Thema Vektorrechnung eingesetzt werden kann. In Teil II widme ich mich der Didaktik der Vektorrechnung. Ich beschreibe die verschiedenen Modelle der Interpretationen von Vektoren und befasse mich mit analytischer Geometrie in Ebene und Raum. Während die ersten beiden Teile meiner Arbeit vorwiegend auf Literaturrecherche basieren, ist der dritte Teil ein sehr praktischer Teil, in dem ich Beispiele für Methodenvielfalt mit Bezug auf die Vektorrechnung vorstelle.

Meine gewonnenen Erkenntnisse zu den oben genannten Forschungsfragen und Kommentare zum Verlauf des Verfassens der Arbeit und zu möglichen weiterführenden Interessen werde ich in einem abschließenden Resümee formulieren.

Teil I: moderne Unterrichtsformen

2 Offenes Lernen und Methoden

2.1 Eckdaten für offenes Lernen und Methodenvielfalt

Bis vor kurzem war es noch Gang und Gebe in Mathematikstunden einen sehr lehrerzentrierten Unterricht vorzufinden. Frontalunterricht, bei dem die Lehrperson die Hauptrolle des Geschehens einnimmt, war die Normalität, die SchülerInnen waren das Publikum, das (im Optimalfall) mitverfolgte, was die Lehrperson vortrug. In den letzten Jahren versuchte man jedoch immer mehr von dieser Methode wegzukommen und die SchülerInnen ins Zentrum des Unterrichts zu stellen. Mit dem Einsatz neuer schülerzentrierter Methoden wird darauf gezielt, die Lernenden zum selbstständigen Denken und Arbeiten zu aktivieren und somit die Unterrichtsqualität zu steigern. Dabei reicht das Spektrum von selbstständigkeitsorientierten bis zu geführten Methoden und von geschlossenen bis zu offenen Aufgaben. Geschlossene Aufgaben wären solche, bei denen eine bestimmte Lösung oder ein bestimmter Lösungsweg von der Lehrperson angedacht ist und die SchülerInnen durch gezielte Aufgabenstellungen dort hingeleitet werden. Offene Aufgaben hingegen sollen den Lernenden die Möglichkeit bieten, frei und kreativ zu arbeiten und individuelle Ergebnisse zu liefern. In diesem Sinn soll der „neue“, moderne Mathematikunterricht den SchülerInnen die Chance geben, sich in einem sicheren Umfeld erstmals mit dem Reflektieren von, und Hantieren mit mathematischen Inhalten zu beschäftigen, ihre Ergebnisse vorzustellen, zu erklären und anderen Lösungen und Lösungswegen gegenüberzustellen. Außerdem gibt es die Möglichkeiten SchülerInnen in Einzel-, aber auch Partner- oder Gruppenarbeit agieren zu lassen, was abgesehen von Abwechslung auch auf die Kommunikation innerhalb des Klassenverbandes außerhalb des Mathematikunterrichts eine positive Auswirkung haben kann. Durch den Einsatz so unterschiedlicher Unterrichtsformen soll die Motivation der SchülerInnen gesteigert und deren aktive Lernzeit verlängert werden. Methoden offenen Lernens sollen also verschiedene Funktionen erfüllen. Sie sollen den SchülerInnen ermöglichen Neues zu erkunden und erfinden, und zu lernen Kenntnisse zu gewinnen, zu sammeln und diese zu organisieren. Des Weiteren soll Kritik von Lehrpersonen und von SchulkollegInnen als Motivation und als Stärkung des Selbstvertrauens für mathematisches Arbeiten gesehen werden und durch Übungs- und Vertiefungsphasen eventuelle, individuelle

Defizite aufgehoben werden. Ein besonderes Augenmerk sollte man als Lehrperson auf schwächere SchülerInnen vor allem in Partner- und Gruppenarbeiten werfen um zu verhindern, dass sie mit dem selbstständigen Arbeiten an für sie schwierigen Inhalten überfordert sind. Offenes Lernen kann aber vor allem auch den weniger Mathematikbegabten SchülerInnen zu Gute kommen, denn sie können von den verschiedenen Ideen und Überlegungen ihrer KollegInnen profitieren.¹

Für das erfolgreiche Durchführen offenen Lernens sind einige Aspekte zu berücksichtigen.

2.2 Auf dem Weg zur richtigen Methode

Der erste Schritt zur Wahl von geeigneten Methoden ist, sich bewusst zu machen, welche Ziele und Kompetenzen der SchülerInnen man anstreben möchte. Dazu gehören klarerweise die fachlichen Kompetenzen, die die Schüler erhalten sollen, aber auch soziale und personale Kompetenzen, wie Selbstständigkeit, Kooperation und Toleranz. Als Nächstes muss man die Gegebenheiten innerhalb der Klasse, wie Schüleranzahl, Vorwissen, Arbeitsmotivation, Gewohnheiten etc. und der Schule, zum Beispiel mögliche Räumlichkeiten, mediale Ausstattung, usw. berücksichtigen. Sind diese Rahmenbedingungen geklärt, muss sich die Lehrperson entscheiden, welche Funktion die verwendete Methode haben soll. Sollen die SchülerInnen ein völlig neues Thema selbstständig erkunden, sollen sie ihre schon erworbenen Kompetenzen an Übungen anwenden oder vertiefen, sollen Inhalte gesammelt und organisiert werden oder soll schon Bekanntes überprüft werden. Es existieren auch verschiedene Arten von Sozialformen, die angewendet werden können, dabei reichen die Möglichkeiten, wie schon erwähnt, von Lernen im Klassenverband über Gruppen – und Partnerarbeit bis hin zur Einzelarbeit. Ebenso ist zu beherzigen, wie sich die Aktivität der SchülerInnen zeigen soll, also wie lange, in welcher Art und wie intensiv die aktive Arbeitsphase ist, und wie viel Zeit für die Übungen verwendet werden kann. Ein ebenfalls durchaus wichtiger Aspekt ist, sich über mögliche Schwierigkeiten in der Anwendung der einzelnen Methoden im Klaren zu sein und schon präventiv Lösungsvorschläge vorzubereiten. Auch der Einsatz von Medien ist durchaus von Bedeutung und sorgt durch die zahlreichen Optionen des Einsatzes für eine Vielfalt im Unterricht. Diese reicht von der Verwendung von Büchern und Schulbüchern über das Arbeiten an der Tafel und mit Plakaten, Overhead - Folien

¹ Vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II S.9-44), vgl. (Barzel, Holzäpfel und Leuder S.17-26), vgl. (Meyer S.27-41)

und Präsentationen über den Computer bis hin zur Tätigkeit in Computeralgebrasystemen. Zudem soll die Lehrperson früh genug darüber Bescheid wissen, welche Materialien und Medien benötigt werden. Darüber hinaus ist es unentbehrlich, sich Gedanken über die Kontrolle der Aktivität der SchülerInnen und über die Ergebnissicherung zu machen. Diese können durch das Beobachten der Lehrperson während der Arbeitszeit passieren oder durch abschließende Aufgaben, die die SchülerInnen erfüllen müssen. Dazu können Präsentationen und Vorträge über das Erlernte gehören, Ausstellungen von Plakaten, Bildern oder Kurzfilmen, das Schreiben von Protokollen, Diskussionen über die erarbeiteten Themen, schriftliche oder mündliche Zusammenfassungen der neuen Inhalte, oder ganz simpel passende Hausaufgaben. Um den Überblick über so viele Bereiche nicht zu verlieren, ist es bestimmt sehr hilfreich, sich von Anfang an eine schriftliche Aufzeichnung darüber zu machen, welche Pläne man verfolgt.²

2.3 Positive Aspekte offenen Lernens und was zu bedenken ist

Sich von der alten, eintönigen Unterrichtsform „Frontalunterricht“ zu entfernen bietet den SchülerInnen und auch den LehrerInnen eine viel abwechslungsreichere Art von Schule und macht sie in vielen Momenten spannend und aufregend. Jedoch ist es auch wichtig, diese moderne Art der Weiterbildung zu analysieren und kritisch zu hinterfragen. Als erstes möchte ich über die Sicherung der Lerninhalte reflektieren. Während im Frontalunterricht die Lehrinhalte immer eindeutig von der Lehrperson bestimmt und vorgetragen werden, sind die SchülerInnen heute oft auf sich selbst gestellt und müssen diese eigenständig in eine für sie passende Ordnung bringen. Das verursacht das Öfteren, dass sie den Überblick verlieren und nicht mehr klar erkennen können, welche Inhalte nun tatsächlich relevant sind und welche nicht. Dies sollten Lehrpersonen unbedingt berücksichtigen und versuchen, trotz offenem und freiem Lernen eine aufbauende, übersichtliche Struktur in ihrem Unterricht zu bewahren, die für alle SchülerInnen deutlich erkennbar und nachvollziehbar ist. Als besonders positiv würde ich die Möglichkeit des individuellen Lernens bewerten, die es den SchülerInnen erlaubt, in ihrer persönlichen Geschwindigkeit zu arbeiten oder Vertiefungsübungen auf ihre Bedürfnisse abzustimmen. Allerdings können die unterschiedlichen Arbeitsgeschwindigkeiten und Schwierigkeitsstufen auch zu Konflikten in der Klasse und im Unterricht führen. Es soll also

² Vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II S.27-43), vgl. (Barzel, Holzäpfel und Leuder S.86-132), vgl. (Meyer 172 - 180), vgl. (Bönsch und Kaiser s.23-27)

immer daran gedacht werden, dass auch wirklich alle SchülerInnen beschäftigt sind und, dass schwächere SchülerInnen wegen ihres geringeren Schwierigkeitslevels sozial nicht benachteiligt werden. Auch Gruppen – und Partnerarbeiten haben ihre Pro und Contras. Einerseits können SchülerInnen durch Input, gemeinsames Nachdenken und Zusammenarbeit mit ihren KollegInnen profitieren und teils bessere Ergebnisse erzielen, andererseits muss auch darauf geachtet werden, dass Einzelpersonen in der Gruppe nicht völlig inaktiv bleiben und sich nur an den Errungenschaften ihrer KollegInnen bereichern. Außerdem muss immer bedacht werden, dass bei Gruppenarbeiten meistens durch die rege Kommunikation innerhalb der Klasse der Lautstärkepegel stark nach oben wandert, was erstens für die Konzentration problematisch sein kann und zweitens auch für LehrerInnen als beratende Personen sehr unangenehm und hinderlich sein kann. Generell gilt, die Vielfalt der Methoden stetig aufrecht zu erhalten, denn bei zu häufigem Wiederholen ein und derselben Methode geht die Spannung und Motivation für die Unterrichtsform verloren. Dadurch wird zwar, und das ist natürlich sehr erstrebenswert, ein sehr abwechslungsreicher Unterricht geboten, es bedeutet allerdings auch einen außerordentlich größeren Mehraufwand für die Lehrperson. Die letzte Aussage soll das Bild von offenem Lernen auf keinen Fall ins Negative rücken, sie soll und muss von LehrerInnen aber für die Unterrichtsplanung unbedingt berücksichtigt werden.³

3 Ein Auszug aus der Methodenvielfalt

Der Begriff „Methode“ kann sehr breit gefächert interpretiert werden und reicht von kurzen Unterrichtssequenzen bis hin zu langzeitigen Unterrichtsgestaltungen. Außerdem können die Methoden auch ineinander verschachtelt angewandt werden, zum Beispiel durch Verwenden von einzelnen Unterrichtssequenzen in langfristigen Unterrichtsformen. Im Folgenden werde ich diesbezüglich ganz unterschiedliche Methoden vorstellen, die später die Basis für den Praxisteil meiner Arbeit bilden.

3.1 Aufgabenkartei

Die SchülerInnen müssen in Einzel- oder Gruppenarbeit selbstständig Lern- und Übungsmaterial in Form von Lernkarteien für ein bestimmtes Thema verfassen. Das

³ Vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II S.12-28,S.74ff), vgl. (Wiechmann S.9-19, S.58-60),vgl. (Bönsch und Kaiser S.23-27)

ausgewählte Thema wird aufgeteilt und die Lehrperson einigt sich mit den SchülerInnen über zu verwendende Literatur und Formate der Aufgaben. Dann arbeiten die einzelnen Personen oder Gruppen an der Erstellung der Karteiblätter mit Lösungen, die nach einer Kontrolle von der Lehrperson oder Vorstellung vor der Klasse in Kästchen gesammelt werden und für die gesamte Klasse als Übungsmaterial zur Verfügung stehen. Die Lernkarteien können jederzeit von den SchülerInnen für Übungszwecke verwendet werden oder überhaupt in Übungsphasen des Unterrichts eingebaut werden. Durch die selbstständige Erstellung von Aufgaben sind die SchülerInnen selbstredend dazu aufgefordert über das ausgewählte mathematische Gebiet zu reflektieren, was in Folge ein besseres Verstehen jenes Gebietes erzielt. ⁴

3.2 Experimentieren

Das Experimentieren ist eine gute Möglichkeit einen kleinen Einblick in die Arbeit der Forschung zu bekommen. Durch eine geeignete Fragestellung der Lehrperson versuchen die SchülerInnen mit PartnerInnen oder in Gruppen Forschungsarbeit zu betreiben und zu einem zufriedenstellenden Ergebnis zu kommen. Dabei soll dokumentiert werden, welches Experiment sie ausprobieren und welche Erkenntnisse sie daraus ziehen. Die Experimente können dabei rein mathematisch sein, also etwa das Ausprobieren von Beispielen, es können reale, mathematische Versuche ausgeführt werden oder zu gewünschten außermathematischen Erkenntnissen gearbeitet werden. Diese Methode hat natürlich vor allem den Zweck des Erforschens und Erarbeitens neuen Wissens und weniger des Übens von Altem. Wenn es Schwierigkeiten bei der Ausarbeitung der Forschungsvorgänge gibt, können diese auch im Klassenverband besprochen und verglichen werden, um für alle eine bestmögliche Forschungsbasis zu schaffen. Wichtig ist, den SchülerInnen nahezubringen, dass das Scheitern an einem Experiment nichts Negatives ist, und sie weiter zu ermutigen, neue Wege zu versuchen und ihre Pläne gegebenenfalls anzupassen. Eine schriftliche Dokumentation des Experiments ist sinnvoll, da die SchülerInnen sich danach orientieren können und auch bei eventuellen Adaptierungen über ihre Arbeit reflektieren können.⁵

⁴Vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II S.60-63)

⁵Vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II S.70-75)

3.3 Knobelteam

Bei dieser Methode arbeiten die SchülerInnen in Kleingruppen. Die erteilten Aufgaben bestehen aus mehreren Bedingungen, wie zum Beispiel Eigenschaften von Zahlenpaaren, Körpern oder Funktionen, die die SchülerInnen zum Problemlösen verwenden und erfüllen müssen. Jede/r SchülerIn erhält die allgemeinen Regeln der Methode „Knobelteam“, den Auftrag, der für die ganze Gruppe gleich ist und seine individuelle Bedingung für die Aufgabe. Die Kleingruppen erarbeiten dann eine gemeinsame Lösung für ihre erhaltenen Bedingungen, die als Abschluss der Klasse präsentiert werden kann. Zu den Aufgaben gibt es im Regelfall nicht nur eine einzige Lösung, was eine Diskussion innerhalb der Kleingruppen und anschließend auch im Klassenverband fördert. Idealerweise wird die Methode als Vertiefung und Festigung von schon gelerntem Inhalt verwendet. Um einen höheren Schwierigkeitsgrad zu erreichen, kann man auch mit allen ausgeteilten Bedingungen experimentieren und versuchen so viele Bedingungen wie möglich für eine Lösung zu verwenden.⁶

3.4 Ich-Du-Wir

Die „Ich-Du-Wir“ Methode konfrontiert die SchülerInnen mit noch unbekannten Aufgaben, die sie zuerst in Einzelarbeit zu lösen versuchen sollen, dann mit einem Partner besprechen und schlussendlich in der Klasse reflektieren. Der Vorteil an dieser Methode ist, dass sie den SchülerInnen zunächst den notwendigen Raum bietet, um sich selbstständig und alleine Gedanken über die gestellte Aufgabe zu machen. Erst dann werden die Ergebnisse mit den Partnern verglichen, was als Horizonterweiterung gesehen werden soll. Es geht bei dieser Methode keinesfalls um Fehlervermeidung, sondern vorwiegend darum, der Kreativität in der Mathematik freien Lauf zu lassen. Wenn sich die Partner auf eine Version geeinigt haben, werden die Ideen im Plenum diskutiert und man einigt sich auf eine gemeinsame Lösung.⁷

⁶Vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II S.124-127)

⁷ Vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II S.118-123)

3.5 Mathe-Panini – Sammelalbum

Das Mathe-Panini ist das für den Unterricht angepasste Aufkleber-Sammelalbum, wobei die SchülerInnen anstatt Aufkleber zu sammeln und zu tauschen, mit dem Verstehen von mathematischen Begriffen spielen. Auf einem Blatt werden von den SchülerInnen Begriffe in Kästchen eingetragen, von denen sie überzeugt sind, sie erklären zu können. Um die leer gebliebenen Felder zu füllen, müssen die SchülerInnen Begriffe mit ihren MitschülerInnen tauschen, indem sie sich noch nicht eingetragene Begriffe gegenseitig erklären. Wenn der Begriff verstanden wurde, darf der/die SchülerIn ihn in ihr Mathe-Panini eintragen. Die SchülerInnen müssen in der nächsten Tauschrunde in der Lage sein, auch den neuen Begriff an andere weiterzugeben. Anstatt die Begriffe zu erklären, kann die Lehrperson auch zusammenpassende Kartensätze in Klassengröße, jedoch vermischt austeilen, die die SchülerInnen untereinander tauschen müssen, sodass am Schluss jeder den gleichen Kartensatz erhält. Danach sollen die Kartensätze sortiert werden und zusammenpassende Begriffe gefunden und als solche markiert werden. Abschließend müssen die SchülerInnen die passenden Kartensätze einkleben und/oder ihre Ergebnisse aufschreiben. Ein besonderer Vorteil an dem gegenseitigen Erklären der Begriffe ist, dass die SchülerInnen neben der Erweiterung ihres Wissens auch üben über Mathematik zu sprechen.⁸

3.6 Poster

Das Entwerfen eines Posters bietet den SchülerInnen die Möglichkeit sich in ihrer Kreativität auszuleben. Durch das persönliche Gestalten von mathematischem Inhalt soll das Erlernte vertieft und gefestigt werden. In den meisten Fällen werden Poster von mehreren Gruppen gestaltet, die dann im Klassenraum oder im Schulgebäude aufgehängt werden. Sind die Poster in der Klasse sichtbar, so können sie als Hilfestellung für den Unterricht verwendet werden und durch ihre Präsenz eventuellen Wissenslücken entgegenwirken. Die Erstellung eines Posters kann einerseits als Ergebnissicherung einer anderen Methode dienen oder auch als eigenständige Unterrichtssequenz angewendet werden.⁹

⁸Vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II S.136-141)

⁹ Vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II)

3.7 Projektarbeit

Die Projektarbeit ist eine über längere Zeit angesiedelte Methode, die sogar fächerübergreifend angewendet werden kann. Es soll dabei von den SchülerInnen ein Produkt geplant und erstellt werden, für das zumindest subjektiv gesehen eine Verwendbarkeit gefunden wird. Durch das Arbeiten an einer realen, authentischen und auf ihre Interessen bezogene Aufgabe, soll die Motivation der SchülerInnen gestärkt werden. Sie sollen selbstständigkeitsorientiert arbeiten und von einer Zusammenarbeit als Gruppe und den individuellen Stärken der Beteiligten profitieren, was wiederum die Teamarbeit und die Klassengemeinschaft bestärkt. Das Arbeiten an Projekten erzielt eine sehr abwechslungsreiche und vielfältige Betätigung, die alle Sinne beinhaltet. Für die Umsetzung sind mehrere Phasen notwendig:

In der Initiativphase bespricht die Lehrperson gemeinsam mit den SchülerInnen mögliche Vorschläge und einigt sich auf ein konkretes Projekt. Darauf folgend werden notwendige Informationen, wie nötiges Fachwissen, eventuelle fächerübergreifende Zusammenarbeit, erforderliches Material, etc. gesammelt, um das Projekt zu realisieren. Dafür kann von der Klasse eine Mind- Map erstellt werden, auf die im besten Fall auch später noch zurückgegriffen werden kann. Nun folgt die Planungsphase, in der formale Abläufe besprochen werden und die zum Bau des Produkts erforderlichen Inhalte erarbeitet werden. Nach diesem theoretischen Teil des Projekts wird die praktische Realisation des Produkts vollzogen. Eventuelle, während der Bewerkstelligung auftretende Komplikationen oder Veränderungen können durch Überarbeitungen der Planung angepasst werden. Wenn das Produkt fertiggestellt wurde, wird es begutachtet und die bisherige Durchführung reflektiert. Wichtig ist, dass dies keine abschließende Phase sein soll, sondern eine Möglichkeit für Anregungen und eventuelle Nachbesserungen bieten soll, denn das erzielte Ergebnis soll unbedingt ein positives, fertiges Projekt sein. Eine Präsentation des fertigen Produkts schließt die Projektarbeit ab. Die angefertigten Produkte können zum Beispiel als Dekorationsobjekte in der Schule ausgestellt oder bei Schulfesten verkauft werden.¹⁰

¹⁰ Vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II S.174-179), vgl. (Peterßen S.238-248)

3.8 Rätsel

Rätsel sind im Unterricht immer wieder eine willkommene Abwechslung für die SchülerInnen. Sie lassen sich beispielsweise optimal als Wahlaufgaben bei der Freiarbeit oder im Stationenzirkel einsetzen. Die Art der Rätsel ist dabei sehr flexibel, von Lückentexten über Logikrätsel bis hin zu Kreuzworträtseln und Scherzfragen ist alles erlaubt. Wichtig ist, dass den SchülerInnen Lerninhalte auf witzige und ansprechende Art und Weise präsentiert wird.¹¹

3.9 Redaktion

Die Lehrperson erteilt eine konkrete Aufgabe zu der jede/jeder SchülerIn ein Schriftstück erstellen muss. Dies kann in Form eines Merksatzes, eines kurzen reflektierenden Textes, persönlicher Überlegungen, einer inhaltlichen Zusammenfassung oder als mathematische Lösung verfasst werden. Diese Schriftstücke werden dann in Kleingruppen reflektiert und es wird entweder ein aus den verschiedenen Einzelarbeiten zusammengesetztes, gemeinsames Dokument oder zumindest verbesserte Versionen der Einzelbeiträge erstellt. Die Idee dahinter ist, abgesehen von der Reflexion der SchülerInnen über das Thema, sich davon zu trennen, dass eine Korrektur ausschließlich von der Lehrperson durchgeführt werden muss. Durch das Korrigieren der eigenen Texte, lernen die SchülerInnen, welche Kriterien für eine gute Arbeit maßgeblich sind. Die Verbesserung der Texte kann auch in Stillarbeit von Einzelpersonen oder als Partnerarbeit ausgeübt werden.¹²

3.10 Sammeln – Ordnen – Strukturieren

Mithilfe von Mind Mapping oder Clustering können Begriffe zu bestimmten Themen gesammelt und geordnet werden. Dabei verfassen üblicherweise alle SchülerInnen ihre eigenen Überlegungen, die dann im Klassenverband in einem Netz – einer Mind-Map- sortiert werden. Somit wird eine Übersicht über Thema, Themenbereiche, das Wissen oder Vorwissen der SchülerInnen erstellt.¹³

Eine andere Art und Weise Ideen zu sortieren bietet das Arbeiten mit sogenannten Placemats. Die Klasse wird in Vierergruppen geteilt, jede Gruppe erhält von der Lehrperson ein eigenes Placemat, also ein großes Blatt Papier. Das wird so unterteilt, dass jedes Gruppenmitglied

¹¹ Vgl. (Peterßen S.252)

¹² Vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II S.180-183)

¹³Vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II S.184-191), vgl. (Peterßen 206f.)

einen eigenen Bereich am Blattrand besitzt, auf dem die persönlichen Ideen und Notizen zum angegebenen Thema Platz finden. Danach wird das Blatt so oft gedreht, bis jeder und jede alle Beiträge gelesen hat um anschließend in der Gruppe zu besprechen, was die wesentlichen und gemeinsamen Vorstellungen und Überlegungen sind. Diese werden in der Mitte des Placemats verständlich formuliert und der Klasse gezeigt. Das Besondere daran ist, dass die Notizen von den MitschülerInnen verstanden werden sollen, ohne, dass eine Erklärung der VerfasserInnen notwendig ist. Dies bezweckt, dass die SchülerInnen gut überlegen müssen, wie sie ihre Gedanken verständlich formulieren können.¹⁴

3.11 Spiele

In der Schule zu spielen bietet eine Gelegenheit, gleichzeitig den Unterricht aufzulockern und zu lernen. Dabei kann man zwischen Spielen zur Erarbeitung neuer Themen und als Übungszwecke unterscheiden. Als Erarbeitung neuer Lerninhalte sollen die SchülerInnen über die Spielzeit hinweg Strategien entwickeln und mathematische Strukturen erkennen. Diese werden dann in Gruppenarbeit oder im Klassenverband analysiert und bei einer abschließenden Spielrunde verifiziert. Für Übungszwecke ist das Spielen eine attraktive Alternative zu altbekannten Übungszetteln. Zusätzlich zum Festigen und Vertiefen der Kompetenzen, werden auch soziale Aspekte, wie Kommunikation und Teamgeist positiv beeinflusst. Der Ablauf erfolgt im Allgemeinen folgendermaßen: Zunächst werden die Spielregeln für alle Beteiligten festgelegt und bei Bedarf erklärt, wie der Ablauf des Spiels funktioniert. Dabei können völlig neue Spiele erfunden werden oder auch auf bekannte, wie Memory, Domino, oder Tabu zurückgegriffen werden.¹⁵

Im Folgenden exemplarisch ein Auszug dazu:

Mathe-Quiz

Für das Mathe – Quiz, das ähnlich wie die Fernsehshows funktionieren soll, werden zunächst klassenintern die Regeln für das Spiel vereinbart. Dabei wird besprochen, wer der Quizmaster sein soll, ob allein, paarweise oder in Gruppen geraten werden soll, ob es Joker gibt und so weiter. Die SchülerInnen erstellen selbstständig die Fragen und geben auch mögliche

¹⁴ Vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II S.152-155)

¹⁵ Vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II S.64-69,228-239) vgl. (Peterßen S.269-271), vgl.S. (Meyer S. 342-348)

Antworten an. Danach wird gespielt. Falsch beantwortete und schlecht formulierte Fragen werden gesammelt und nach dem Quiz gemeinsam analysiert. Optimal ist diese Methode als Zusammenfassung eines Kapitels einsetzbar und für Überprüfung von Grundkompetenzen.¹⁶

3.12 Stationenzirkel, Lernwerkstatt

Die Idee dieser Methode kommt von dem aus dem Sportbereich bekannten Zirkeltraining. Bei einem Stationenzirkel im Unterricht bearbeiten die SchülerInnen in einer vorgegeben Gesamtzeit mehrere, in sich geschlossene Einzelstationen, deren Reihenfolge frei wählbar ist. Zieht sich der Stationenzirkel über längere Zeit hinweg, so nennt man ihn auch Lernwerkstatt. Der Zirkel kann aus Pflicht- und Wahlstationen bestehen und soll in allen Aspekten, wie Sozialform, Schwierigkeitsgrad, Art der Handlung, usw. möglichst abwechslungsreich gestaltet sein. Es gibt die Möglichkeit, die Standorte der Stationen zu fixieren und die SchülerInnen „wandern“ zu lassen oder auch umgekehrt. Lässt man die SchülerInnen zwischen den Stationen wechseln, so kann man den Vorteil daraus ziehen, dass sich immer wieder neue Schüler-Konstellationen für Partner – und Gruppenarbeiten kreieren. Man kann diese Methode sowohl als möglichen Einstieg und Erarbeitung eines Themas oder auch für Übungszwecke eines schon bekannten Themas anwenden. Wichtig ist dabei, dass für die Lehrperson die Lernziele des Zirkels eindeutig sind und sie durch die Gesamtheit der Einzelaufgaben abgedeckt werden. Wenn die SchülerInnen noch nicht an diese Methode gewöhnt sind, ist es durchaus vorteilhaft, schon vorweg gemeinsam Regeln über Verhalten und Arbeitsweise während des Stationenzirkels aufzustellen. Dazu gehört zum Beispiel, dass die SchülerInnen zunächst möglichst selbstständig arbeiten sollen und im Falle von Fragen ihre KollegInnen zu Rate ziehen bevor sie sich an die Lehrperson wenden. Außerdem soll über die Organisation des Zirkels Klarheit geschaffen werden, was etwa mit Hilfe eines Handzettels erfolgen kann. Darauf wird eine kurze Auskunft zu Art der Sozialform, des Handelns, des Themas etc. über die Einzelstationen gegeben und die SchülerInnen können während der Durchführung der Methode leichter den Überblick über die schon bearbeiteten und noch ausstehenden Aufgaben bewahren. Man kann auch die Kategorien „Dauer der Aufgabe“ und „Schwierigkeitsgrad“ hinzufügen, sollte diese Angaben jedoch nur recht grob festlegen, da sie individuell sehr unterschiedlich wahrgenommen werden. Um zu große Ansammlungen an Einzelstationen zu vermeiden, kann man „Stationentickets“ einführen. Jede Station bekommt

¹⁶ Vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II S.142-147)

dann eine Nummer, Farbe oder ein Symbol und eine bestimmte Anzahl an zugehörigen Tickets, die an einem gemeinsamen Standort im Raum aufliegen. Entscheidet sich ein/e SchülerIn für eine Station, so holt er/sie sich das entsprechende Ticket und bringt es nach der Ausübung der Aufgabe wieder zurück. Ist kein Ticket mehr verfügbar, so muss der/die SchülerIn auf eine andere Station mit noch freien Plätzen ausweichen. Für die Ergebnissicherung eignet sich bei Zirkeln zur Erarbeitung neuer Inhalte zum Beispiel eine Selbstüberprüfung der angestrebten Kompetenzen, ein schon vorab angekündigter Abschlusstest, die Präsentation der wichtigsten Ergebnisse von einzelnen Gruppen, das Entwerfen von Postern, eine Besprechung im Klassenverband oder ein abschließendes Arbeitsblatt. Bei Stationenzirkeln, die als Übungsmöglichkeit dienen, können ebenfalls Selbstkontrollen oder Kontrollen der Lehrperson angewendet werden, oder man kann die SchülerInnen ein Lerntagebuch erstellen lassen, in dem sie ihre Lernfortschritte und mögliche Schwierigkeiten und Fragen dokumentieren sollen.¹⁷

Die Freiarbeit oder der Wochenplan verfolgen ein ähnliches Konzept. Dabei wird über einen längeren Zeitraum offenes Lernen betrieben. Die SchülerInnen entscheiden völlig frei, was sie wann machen wollen und in welcher Reihenfolge. Normalerweise gibt es Aufgaben zu mehreren Themen und zu verschiedenen Phasen der Erfassung der jeweiligen Themen. Die Überprüfung der Aufgaben soll von den SchülerInnen möglichst selbstständig durchgeführt werden. Die Methode Wochenplan zieht sich in der Regel über mehrere Wochen hinweg, dabei wird den Lernenden jedoch vorgegeben, welche Übungen sie innerhalb einer bestimmten Woche bearbeiten müssen.¹⁸

Teil II: Vektorrechnung in der Sekundarstufe II

4 Didaktik der Vektorrechnung

In diesem Kapitel gehe ich darauf ein, welche Modelle der Didaktik der Vektorrechnung existieren, welche Zusammenhänge es zwischen ihnen gibt, wie man mit Vektoren rechnet und ich werde ein Modell vorstellen, das die beiden sehr unterschiedlichen Interpretationen von Vektoren verbindet. Ich möchte zuerst damit beginnen, das arithmetische Modell

¹⁷ Vgl. (Wiechmann S.58-71), vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II S.198-207)

¹⁸Vgl. (Barzel, Büchter und Leuders, Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II S.76-83), vgl. (Wiechmann S.72-82)

vorzustellen und mich danach auf das geometrische Modell mit den Pfeilklassen konzentrieren. Außerdem stelle ich ein Modell vor, das die beiden Interpretationen verbindet und das meines Erachtens für den Schulunterricht äußerst geeignet ist.

4.1 Das arithmetische Modell

Im Alltag begegnen wir oft Sachverhalten, die nicht aus einzelnen Zahlangaben, sondern aus zwei, drei oder aus ganzen Listen davon bestehen. Ich denke hier an Stückzahlen von Lagerbeständen, Gehälter von Mitarbeitern, Arbeitszeiten mehrerer Tage oder Kosten mehrerer Produkte um nur einige Beispiele zu nennen. Die Idee des arithmetischen Modells ist, diese einzelnen Zahlen in Zahlenpaare, -tripel oder -tupel zu verwandeln, um die Problemsituationen übersichtlicher zu gestalten. Diese Zahlenpaare, -tripel und -tupel werden Vektoren in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^n$ genannt.¹⁹

Als ein sehr interessantes Beispiel zu Vektoren als Zahlentripel erweist sich das RGB – Modell, die Farbzusammenstellung für Fernsehbilder und Bilder auf Monitoren, das, wie schon durch seinen Name hingedeutet wird, auf den drei Farben Rot, Grün und Blau basiert. Die Farbe jedes (auch noch so kleinen) Lichtpunktes auf einem elektronischen Gerät wird durch diese

drei Grundfarben erzeugt und durch ein Tripel $\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$ dargestellt. Die Komposition der drei

Komponenten in einer je individuellen Lichtintensität ermöglicht das Entstehen verschiedener neuer Farben. Die Lichtintensität wird in 256 Werte eingeteilt, wobei diese Werte entweder natürliche Zahlen von 0 bis 255 oder rationale Zahlen im Intervall $[0,1]$ annehmen. Möchte man zum Beispiel die Farbe *schwarz* durch so ein Zahlentripel beschreiben, so sähe das

folgendermaßen aus $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Schwarz* wird als Grundzustand angenommen, also die

Lichtintensität aller drei Basisfarben ist 0. Die hellst mögliche Farbkombination hingegen ist die Farbe *Weiß*. Dafür wird die

stärkste Lichtintensität für alle 3 Komponenten verwendet $\begin{pmatrix} 255 \\ 255 \\ 255 \end{pmatrix}$

oder $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Im Folgenden verwende ich die Version der Lichtstärke

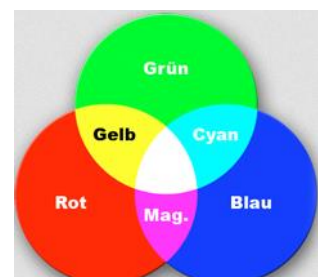


Abbildung 1 RGB Modell

¹⁹ Vgl. (Malle, Von Koordinaten zu Vektoren S.5f), vgl. (Malle, Neue Wege in der Vektorgeometrie S.11f), vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.100)

als rationale Zahl zwischen 0 und 1. Kombiniert man nur zwei Komponenten mit jeweils stärkster Lichtintensität 1, so erhält man die Farbe *Gelb* aus den Komponenten *Grün* und *Rot*,

also $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *Magenta* aus *Rot* und *Blau* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und *Cyan* aus *Grün* und *Blau* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.²⁰

Allgemein betrachtet, lautet die Definition derartiger Zahlentupel so:

„Unter einem n -Tupel reeller Zahlen versteht man eine geordnete Liste $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

mit $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Die Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ heißen Komponenten dieses n -Tupels. Die Menge aller n -Tupel reeller Zahlen wird mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Dabei handelt es sich um das n -fache Mengenprodukt $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_n$.“²¹

Die Zahlentupel werden dann in der Praxis z.B. durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ oder $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ angegeben.²²

Die Addition von n -Tupel

„Als Summe der n -Tupel $\vec{x}$ und $\vec{y}$ bezeichnet man das n -Tupel, welches durch Addition der

einander entsprechenden Komponenten von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ entsteht: $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.“²³

Die Addition von n -Tupeln

- ist kommutativ $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$,
- ist assoziativ $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$,
- besitzt ein Null-Element $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- und ein inverses Element $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.²⁴

²⁰ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.101f)

²¹ (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.103)

²² Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.103)

²³ (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.103)

²⁴ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.104)

Die skalare Multiplikation von n-Tupel

„Als Produkt des n -Tupels $\vec{x}$ mit einer reellen Zahl λ wird das n -Tupel bezeichnet, das durch

Multiplikation jeder Komponente von $\vec{x}$ mit λ entsteht: $\lambda \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$.²⁵

Für die skalare Multiplikation gilt:

- es gibt ein Eins-Element $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$,
- sie ist assoziativ $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x})$, wobei λ, μ reelle Zahlen sind,
- und distributiv $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$ und $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.²⁶

4.2 Das geometrische Modell

Beim geometrischen Modell von Vektoren geht es darum, Vektoren als Pfeile darzustellen, die zum Beispiel Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte oder Verschiebungen charakterisieren können. Die geometrische Darstellung von Vektoren kann helfen, das Lösen von Problemen durch ihre Veranschaulichung mittels Pfeilen zu erleichtern. Die wesentlichen Aspekte der Beschreibung derartiger Pfeile sind ihre Länge, Richtung und Orientierung, während ihre Positionierung hingegen variabel ist.²⁷

Betrachten wir exemplarisch folgenden Sachverhalt aus der Physik:

Ein Boot überquert mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ einen Fluss, dessen Strömung durch die Geschwindigkeit $\vec{v}_2$ dargestellt ist. Von Interesse ist nun, mit welcher Geschwindigkeit sich das Boot tatsächlich fortbewegt. Mit Hilfe einer entsprechenden Grafik kann die Problematik gut veranschaulicht werden.

²⁵ (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.103)

²⁶Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.104)

²⁷Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.86ff), vgl. (Vohns S.157-159), vgl. (Tietze, Klika und Wolpers S. 168)

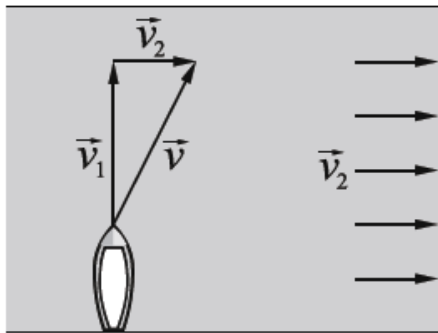


Abbildung 2 Beispiel zu Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeiten des Bootes $\vec{v}_1$ und der Strömung des Flusses $\vec{v}_2$ können graphisch durch Pfeile beschrieben werden. Die Positionen von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ können beliebig gewählt werden, sie können, wie man bei $\vec{v}_2$ in der Abbildung sieht, sogar an mehreren Stellen positioniert werden. Wichtig ist dabei, dass alle $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ jeweils gleich lang, gerichtet und orientiert sind. Nun wird einer

dieser Pfeile $\vec{v}_2$ an die Spitze einer dieser Pfeile $\vec{v}_1$ geheftet. Die gesuchte Geschwindigkeit $\vec{v}$ wird durch jenen neuen Pfeil dargestellt, der vom Anfangspunkt des Pfeils $\vec{v}_1$ zur Spitze des Pfeils $\vec{v}_2$ führt. Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, das es ermöglicht, die Geschwindigkeit $\vec{v}$ mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes über die Längen der bekannten Pfeile $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ zu berechnen.²⁸

Bisher wurde immer der Begriff Pfeile verwendet, obwohl es sich präziser ausgedrückt um Pfeilklassen handelt. Das sind Mengen von Pfeilen, die gleichwertige oder äquivalente Pfeile zusammenfassen. Dazu wird eine sogenannte Relation verwendet, die die Pfeile zueinander in Beziehung stellt.²⁹

„Zwei Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ heißen „parallelgleich“, falls sie gleich lang und gleichsinnig parallel sind, d.h. wenn gilt:

- i. Die Abstände zwischen Anfangs- und Endpunkt sind bei beiden Pfeilen gleich:
 $|AB| = |CD|$;
- ii. Die Geraden, denen die beiden Pfeile angehören, sind parallel: $AB \parallel CD$;
- iii. Die Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ sind gleich orientiert.“³⁰

Umgangssprachlich könnte man die gleiche Orientierung so formulieren, dass „die Spitzen der Pfeile in dieselbe Richtung zeigen“.³¹

In der Mathematik ist eine Relation nur dann eine Äquivalenzrelation, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Deshalb muss für die Relation *parallelgleich* gelten:

²⁸ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.86)

²⁹ Vgl. (Malle, Ein didaktisch orientiertes Vektorkonzept S.80ff), vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren 86-91)

³⁰ (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.89)

³¹ (Farkas)

- „Jeder Pfeil ist zu sich selbst parallelgleich (Reflexivität).“³²

Laut Definition von *parallelgleich* ist jeder Pfeil trivialerweise gleich lang wie er selbst und gleich orientiert wie er selbst. Ein Pfeil ist identisch mit sich selbst und somit parallel, weil identisch auch parallel impliziert.³³

- „Ist ein Pfeil $\overrightarrow{AB}$ parallelgleich zu einem Pfeil $\overrightarrow{CD}$, so ist auch $\overrightarrow{CD}$ parallelgleich zu $\overrightarrow{AB}$ (Symmetrie).“³⁴

Da die drei Kriterien Gleichheit in Länge, Richtung und Orientierung symmetrische Relationen sind, folgt unmittelbar daraus, dass auch *parallelgleich* eine symmetrische Relation ist.³⁵

- „Ist ein Pfeil $\overrightarrow{AB}$ parallelgleich zu einem Pfeil $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{CD}$ parallelgleich zu einem Pfeil $\overrightarrow{EF}$, so ist $\overrightarrow{AB}$ parallelgleich zu $\overrightarrow{EF}$ (Transitivität).“³⁶

Aus Abbildung 2 ist leicht nachzuvollziehen, dass auch die Transitivität der Relation *parallelgleich* gegeben ist. Ist $\overrightarrow{AB}$ gleich lang, gleich gerichtet und gleich orientiert wie $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{CD}$ gleich lang, gleich gerichtet und gleich orientiert wie $\overrightarrow{EF}$, dann ist $\overrightarrow{AB}$ auch gleich lang, gleich gerichtet und gleich orientiert wie $\overrightarrow{EF}$.³⁷

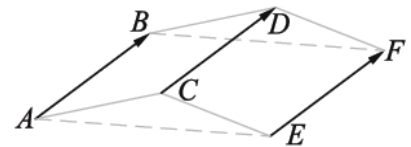


Abbildung 3 Transitivität

Im obigen Beispiel mit dem Boot, das den Fluss überquert entsprechen die Pfeile $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ Pfeilklassen, deren Pfeile alle gleich lang, gleich gerichtet und gleich orientiert sind. Die beiden konkreten gezeichneten Pfeile $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$, die verwendet werden, um das rechtwinkelige Dreieck aufzuspannen, werden Repräsentanten ihrer Pfeilklassen $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ genannt. Auch alle weiteren Pfeile $\overrightarrow{v_2}$ in Abbildung 2 sind Repräsentanten der Pfeilklassse $\overrightarrow{v_2}$.

³² (Filler und Henn, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebra verstehen-Geometrisch veranschaulichen und anwenden S.94)

³³ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.88f)

³⁴ (Filler und Henn, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebra verstehen-Geometrisch veranschaulichen und anwenden S.94)

³⁵ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.89)

³⁶ (Filler und Henn, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebra verstehen-Geometrisch veranschaulichen und anwenden S.94)

³⁷ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.89)

Etwas verwirrend ist die gleiche Bezeichnung von Pfeilklassen, nennen wir sie zum Beispiel $\vec{u}$, und deren Repräsentanten $\overrightarrow{u}$. Wenn man aber bedenkt, dass $\overrightarrow{u}$ als Repräsentant genau die zugehörige Pfeilklass $\vec{u}$ wiedergibt, kann man sich schon mit der gleichen Bezeichnung anfreunden.³⁸

Die Addition von Pfeilklassen

Es seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Pfeilklassen sowie $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ und $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$ Repräsentanten dieser Pfeilklassen (welche so gewählt sind, dass der Anfangspunkt des Repräsentanten von $\vec{v}$ gleich dem Endpunkt des Repräsentanten von $\vec{u}$ ist). Als Summe der Pfeilklassen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ wird die Pfeilklass bezeichnet, welche den Pfeil $\overrightarrow{AC}$ als einen Repräsentanten besitzt. Man schreibt $\vec{u} + \vec{v}$.³⁹

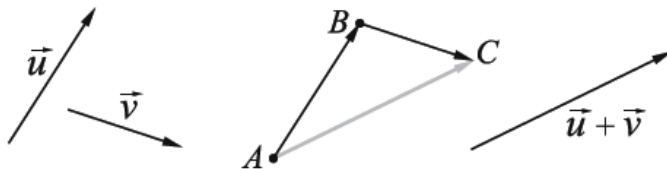


Abbildung 4 Addition von Pfeilklassen

Um tatsächlich von einer Rechenoperation sprechen zu können, muss das Bilden der geometrischen Summe zweier beliebiger Pfeilklassen immer realisierbar sein. Das ist es auch, da die Repräsentanten beliebiger Pfeilklassen immer so gewählt werden können, dass ihre Positionierung für die geometrische Summe (gemeint ist das Anfügen des zweiten Repräsentanten an die Spitze des ersten) geeignet ist. Außerdem gilt, dass alle neuen Pfeile, die aus der Summe beliebig gewählter Repräsentanten von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ entstehen, Repräsentanten derselben neuen Pfeilklass sind.⁴⁰

Wenn wir wieder an das Boot-Beispiel denken, dann heißt das, dass es für die Berechnung der tatsächlichen Geschwindigkeit des Bootes keine Bedeutung hat, an welcher Stelle des Flussufers das Boot seine Fahrt antritt und an welcher Stelle der Überfahrt die Berechnung der Geschwindigkeit mit Einfluss der Strömung stattfindet.

Für die Addition von Pfeilklassen gelten folgende Rechenregeln:

³⁸ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.90)

³⁹ (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.91)

⁴⁰ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.91ff)

- Kommutativität:

Für beliebige Pfeilklassen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.^{41}$$

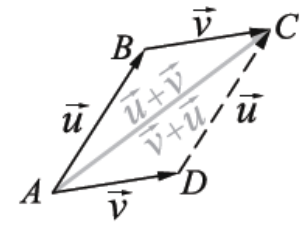


Abbildung 5 Kommutativität

- Assoziativität:

Für beliebige Pfeilklassen $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).^{42}$$

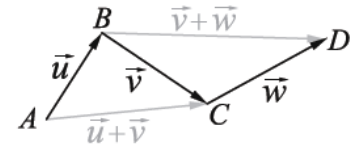


Abbildung 6 Assoziativität

- Nullpfeilklassen:

Es existiert eine Pfeilklassen $\vec{o}$, so dass für jede Pfeilklassen $\vec{u}$ gilt

$$\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}.^{43}$$

- Entgegengesetzte Pfeilklassen:

Zu jeder Pfeilklassen $\vec{u}$ existiert eine Pfeilklassen $-\vec{u}$ mit

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}.^{44}$$

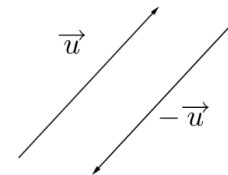


Abbildung 7 Entgegengesetzte Pfeilklassen

Die skalare Multiplikation von Pfeilklassen

„Es seien $\vec{u}$ eine Pfeilklassen der Ebene oder des Raumes mit einem Repräsentanten $\overrightarrow{AB}$ sowie λ eine reelle Zahl. Als Produkt $\lambda \cdot \vec{u}$ der Pfeilklassen $\vec{u}$ mit der Zahl λ bezeichnet man die Pfeilklassen die durch den Pfeil $\overrightarrow{AC}$ mit folgenden Eigenschaften repräsentiert wird:

- $|AC| = |\lambda| \cdot |AB|$,
- falls $\lambda > 0$ ist, so gehört C dem Strahl AB und für $\lambda < 0$ dem zu AB entgegengesetzten Strahl an.

(Für $\lambda=0$ ist $\lambda \cdot \vec{u}$ wegen $|AC| = |\lambda| \cdot |AB| = 0$ die Nullpfeilklassen.)⁴⁵

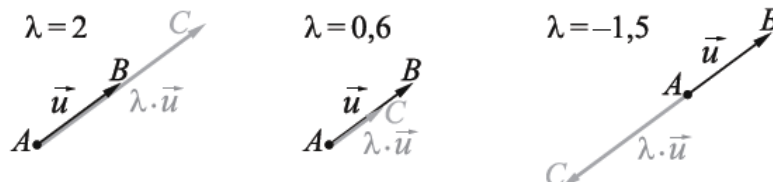


Abbildung 8 Multiplikation mit reellen Zahlen

⁴¹ (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.93)

⁴² (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.93)

⁴³ (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.93)

⁴⁴ (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.93)

⁴⁵ (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.95)

Das bedeutet, es handelt sich bei der Multiplikation einer Pfeilklassse mit einer reellen Zahl um eine Veränderung der Länge der Pfeilklassse. Man nennt diese Art der Multiplikation auch skalare Multiplikation.⁴⁶

Wiederum gibt es einige Rechenregeln, die für die Multiplikation von Pfeilklassen mit reellen Zahlen gelten:

- Existenz eines neutralen Elements bzgl. der Multiplikation:

„Für beliebige Pfeilklassen $\vec{u}$ gilt: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

- Assoziativität:

Für beliebige Pfeilklassen $\vec{u}$ und beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$.

- 1. Distributivgesetz:

Für beliebige Pfeilklassen $\vec{u}, \vec{v}$ und beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$.

- 2. Distributivgesetz:

Für beliebige Pfeilklassen $\vec{u}$ und beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$.“⁴⁷

Interessant ist hier die unterschiedliche Rolle der Zeichen „ $\cdot$ “ und „ $+$ “. Während es sich bei $\lambda \cdot \mu$ um ein Produkt zwei reeller Zahlen handelt, steht „ $\cdot$ “ in $\mu \cdot \vec{u}$ für das Produkt einer Pfeilklassse mit einer reellen Zahl. Ähnlich verhält es sich mit den Ausdrücken und $\lambda + \mu$, der die Summe zweier reeller Zahlen, und $\vec{u} + \vec{v}$ und $\lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$, die die Summen zweier Pfeilklassen beschreiben.⁴⁸

Ortsvektoren

In manchen Schulbüchern wird für die Addition eines Vektors zu einem Punkt keine speziell definierte „Punkt-Vektor-Addition“ eingeführt, sie wird hingegen über die Addition zweier Vektoren erklärt. Dafür wird ein Punkt P als Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ beschrieben, der vom Ursprung zum Punkt P im Koordinatensystem führt. Seine Koordinaten sind genau die des Punktes P , denn $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1-0 \\ p_2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ in der Ebene und analog $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1-0 \\ p_2-0 \\ p_3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ im Raum. Die

⁴⁶ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.95f)

⁴⁷ (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.96)

⁴⁸ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.96ff)

Addition eines Punktes mit einem Vektor wird somit zur Addition eines Ortsvektors mit einem weiteren Vektor. Ein Spezialfall der Ortsvektoren ist der Nullvektor $\vec{0}$, der sozusagen vom Ursprung zum Ursprung zeigt. $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.⁴⁹

4.3 Zusammenführung von Pfeilklassen und Zahlentupel

Es ist schon aus der Sekundarstufe I bekannt, dass beliebigen Punkten in einem Koordinatensystem Koordinaten zugeordnet werden können. Diese Punkte können durch

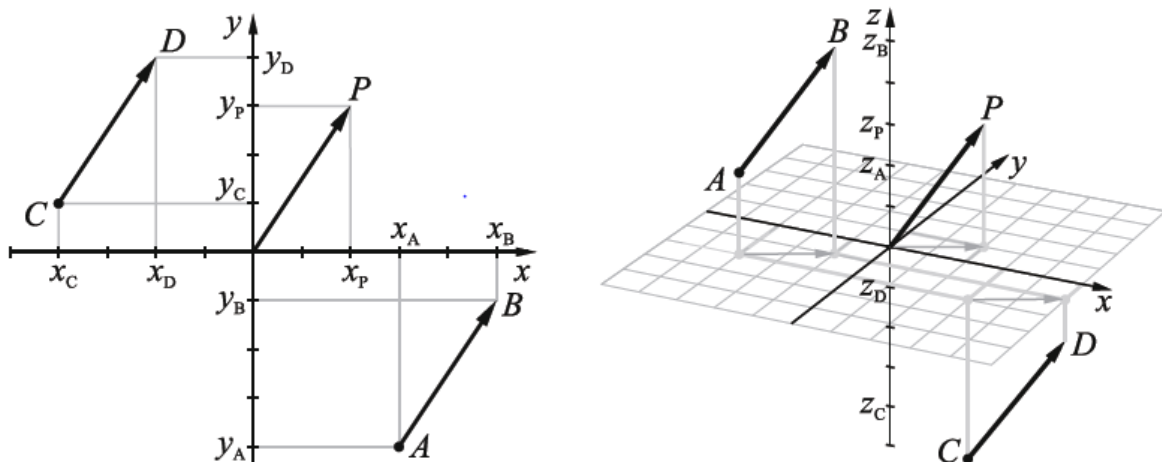


Abbildung 9 Pfeilklassen und Koordinaten

Pfeile verbunden werden und man sagt, die Pfeile verlaufen von einem Anfangs- zu einem Endpunkt, exemplarisch $\overrightarrow{AB}$ verläuft vom Anfangspunkt A zum Endpunkt B. Alle Pfeile, deren Koordinatendifferenzen bezüglich der x-, y- (und z-)Achse gleich sind, gehören derselben Pfeilklass an. Also zwei Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ heißen parallelgleich, wenn „ $x_B - x_A = x_D - x_C$ und $y_B - y_A = y_D - y_C$ (und im Raum $z_B - z_A = z_D - z_C$)“⁵⁰. Ähnlich verhält es sich mit der Verbindung zwischen arithmetischen Zahlentupel und Pfeilklassen. Für Zahlenpaare und Zahlentripel sind Pfeilklassen sozusagen ihre geometrische Veranschaulichung in der Ebene oder im Raum. Nehmen wir an, ein Zahlenpaar – oder tripel $\vec{p}$ wird in einem Koordinatensystem als Punkt P(x|y) bzw. P(x|y|z) eingetragen, so verläuft der zugehörige Pfeil vom Koordinatenursprung zum Endpunkt P und die zugehörige Pfeilklass lautet $\vec{p} =$

$$\begin{pmatrix} x_P - 0 \\ y_P - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{p} = \begin{pmatrix} x_P - 0 \\ y_P - 0 \\ z_P - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}. \text{ Repräsentanten von Pfeilklassen können}$$

⁴⁹ Vgl. (Embacher und Oberhuemer), vgl. (Filler und Henn, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebra verstehen-Geometrisch veranschaulichen und anwenden S. 106f.)

⁵⁰ (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.106)

wiederum durch Zahlenpaare und –tripel dargestellt werden, die ihre Koordinatendifferenz beschreiben. Die arithmetischen Zahlentupel werden also geometrisch durch Pfeile gedeutet und umgekehrt die geometrischen Pfeilklassen durch Zahlentupel arithmetisch beschrieben. Die beiden Begriffe werden zusammengefasst Vektoren genannt. Ich denke, damit ist auch die gleichverwendete Bezeichnung von Pfeilklassen und Zahlentupel erklärt.⁵¹

4.4 Algebraische Vektoren mit geometrischer Deutung

Das Pfeilklassenmodell hat sich aufgrund mehrerer Schwierigkeiten über die Jahre hinweg als für die Schule nicht unbedingt geeignet erwiesen. Für SchülerInnen scheint das Differenzieren zwischen Pfeilklassen und deren Repräsentanten ein Problem darzustellen, nicht zuletzt, weil im Unterricht oftmals keine klare und durchgehende Anwendung durchgeführt wird. Auch die Rechenoperationen werden im Pfeilklassenmodell nur über Repräsentanten eingeführt, Beweise werden oft ganz ausgelassen. Außerdem wird kritisiert, dass man in der analytischen Geometrie nicht in Pfeilklassen denkt, sondern mit Bewegungen durch Pfeile von Punkten aus arbeitet.⁵²

Deshalb wurde ein neues Konzept entwickelt, in dem Vektoren als algebraische Objekte aufgefasst werden und als Punkte oder Pfeile in einem fixen Koordinatensystem geometrisch gedeutet werden können. Ein Zahlenpaar oder –tripel kann in der Ebene oder im Raum als Punkt oder von beliebigen Punkten aus als Pfeile gedeutet werden, wobei diese Pfeile parallelgleich sind. In diesem Konzept werden Vektoren als Punkte mit Großbuchstaben A, B, C,... bezeichnet, als Pfeile mit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$. Geht ein Vektor von einem Punkt A zu einem Punkt B, dann heißt der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ und hat in der Ebene (und analog im Raum) die Koordinaten $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1 | b_2 - a_2) = (b_1 | b_2) - (a_1 | a_2) = B - A$, wobei A und B Zahlenpaare sind. Aus dieser Formel ergeben sich folgende Beziehungen:

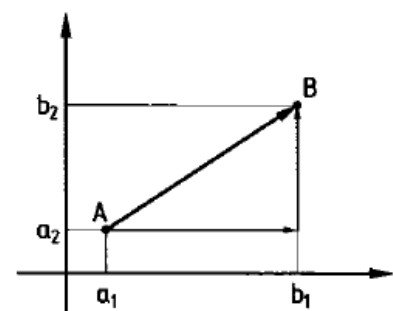
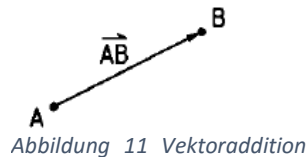


Abbildung 10 Vektor von A nach B

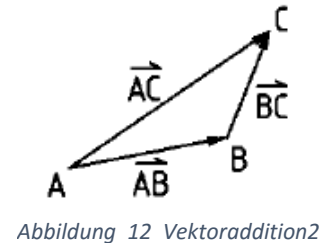
⁵¹ Vgl. (Filler und Henn, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebra verstehen- Geometrisch veranschaulichen und anwenden S.111-114)

⁵²Vgl. (Malle, Ein didaktisch orientiertes Vektorkonzept S.82ff), (Malle, Neue Wege in der Vektorgeometrie S.8ff)

- $A + \overrightarrow{AB} = B$



- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (B - A) + (C - B) = C - A = \overrightarrow{AC}$.⁵³



4.5 Rechnen mit Vektoren

Aus den Rechenregeln und Eigenschaften für die Addition und skalare Multiplikation von Zahlentupeln und Pfeilklassen folgen trivialerweise dieselben für diese Art der Auffassung, weshalb ich sie hier nicht noch einmal anführen werde. Neben den schon bekannten Rechenarten, existieren noch andere Arten der Multiplikation: das Skalarprodukt, das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt und nicht zuletzt das Spatprodukt.

4.5.1 Das Skalarprodukt

„Als Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}$ mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ wird die

Summe der Produkte der einander entsprechenden Komponenten von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bezeichnet:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i.$$
⁵⁴

Für das Skalarprodukt und beliebige Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

Es ist

- kommutativ: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,
- homogen: $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$ bzw. $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$,
- distributiv: $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$,

⁵³ Vgl. (Malle, Ein didaktisch orientiertes Vektorkonzept S.85ff), (Malle, Neue Wege in der Vektorgeometrie S.10ff)

⁵⁴ (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.122)

- und positiv definit $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ und $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$.⁵⁵

Interessant ist hier das Ergebnis, denn aus der Multiplikation von zwei Vektoren ergibt sich eine reelle Zahl, oder ein Skalar. Deshalb wird diese Rechenart auch Skalarprodukt genannt.⁵⁶

Als arithmetisches Beispiel eines Skalarprodukts nehmen wir an, ein Designer möchte berechnen, wie groß der Gewinn beim Verkauf seiner lagernden Produkte ist.

Produkt	Preis	Anzahl
Tasche	36€	9
T-Shirt	22€	8
Rucksack	39€	5
Rock	27€	7

Um nun den Gesamtgewinn zu berechnen, multipliziert man jeweils die Anzahl eines Produktes mit seinem Preis und summiert die Teilergebnisse auf. Genau das macht auch das Skalarprodukt:

Schreiben wir für die Preise den Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 36 \\ 22 \\ 39 \\ 27 \end{pmatrix}$ und für die Anzahl der Produkte den

Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. Dann sieht das Skalarprodukt der beiden Vektoren so aus:

$$\vec{p} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 36 \\ 22 \\ 39 \\ 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 36 \cdot 9 + 22 \cdot 8 + 39 \cdot 5 + 27 \cdot 7 = 884.$$

Der Gesamtgewinn beim Verkauf aller Produkte beträgt also 884€.⁵⁷

Um das Skalarprodukt geometrisch zu deuten, führen wir zunächst den Begriff „Betrag eines Vektors“ ein:

⁵⁵ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.122), (Filler und Henn, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebra verstehen-Geometrisch veranschaulichen und anwenden S.198)

⁵⁶ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.122)

⁵⁷Vgl. (Malle, Von Koordinaten zu Vektoren S.6) (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.122)

Als Betrag eines Vektors $\vec{p}$ wird die Länge dieses Vektors bezeichnet, also der Abstand zwischen dessen Anfangspunkt P_1 und Endpunkt P_2 . In der Ebene, aber auch im Raum lässt sich der Betrag eines Vektors über den pythagoreischen Lehrsatz herleiten und lautet:

$$|\vec{p}| = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Betrachten wir nun das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst, also $\vec{p} \cdot \vec{p} = x_p \cdot x_p + y_p \cdot y_p + z_p \cdot z_p = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, dann kann man einen Zusammenhang zwischen dem Betrag eines Vektors und dem Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst erkennen. Die Wurzel des Skalarprodukts eines Vektors mit sich selbst ergibt genau den Betrag (oder die Länge) des besagten Vektors: $|\vec{p}| = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p}} = \sqrt{|\vec{p}|^2}$.⁵⁸

Um das Skalarprodukt nun geometrisch zu deuten, denken wir an zwei unterschiedliche Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, und bilden deren Differenz $\vec{a} - \vec{b}$. Es entsteht ein Dreieck mit den Seiten $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$. Wir wissen schon, dass das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst die Länge des Vektors zum Quadrat ergibt. Bilden wir nun das Skalarprodukt der Seite $\vec{a} - \vec{b}$ und formen durch schon bekannte Rechenregeln um, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

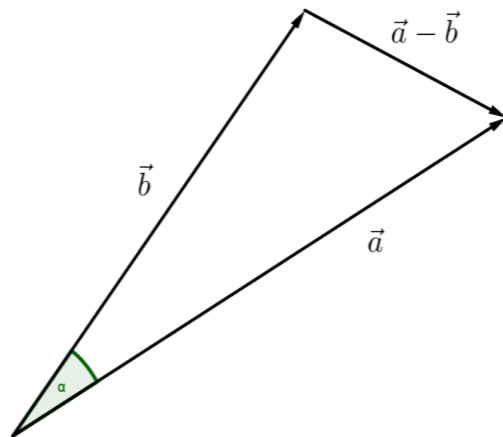


Abbildung 13 Skalarprodukt geometrisch gedeutet

Betrachtet man nun die letzte Zeile, so fällt auf, dass sie dem Cosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$, wobei α den von den Seiten a und b eingeschlossenen Winkel beschreibt, sehr ähnlich ist. Durch den Vergleich der beiden Terme ergibt sich eine Formel für den Winkel zwischen zwei Vektoren.

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

⁵⁸ Vgl. (Embacher und Oberhuemer), vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.124)

Da $|\vec{a}|^2 = a^2$ und $|\vec{b}|^2 = b^2$, jeweils die Länge der Seite zum Quadrat ist, können wir sie auf beiden Seiten subtrahieren, es bleibt:

$$-2\vec{a} \cdot \vec{b} = -2ab \cos \alpha$$

Als nächsten Schritt werden wir $\cdot (-2)$ rechnen und erhalten:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

Durch einfaches Umformen und der Tatsache, dass $a = |\vec{a}|$ und $b = |\vec{b}|$, ergibt sich für den Winkel zwischen den Seiten a und b, bzw. den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}^{59}$$

Wegen der Beziehung zwischen Cosinussatz und Skalarprodukt lassen sich folgende, wichtige Eigenschaften erklären. Zunächst betrachten wir, welche Werte die Cosinusfunktion annimmt:

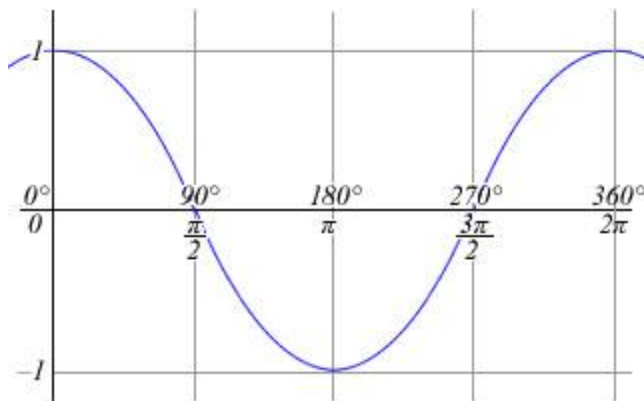


Abbildung 14 Cosinusfunktion

Die nebenstehende Abbildung zeigt, dass der Cosinus für alle Winkel unter 90° und über 270° Werte größer 0 annimmt, für Winkel zwischen 90° und 270° , genau 90° und 270° ausgenommen, Werte kleiner 0 und für die beiden Winkel 90° und 270° genau den Wert 0.

Winkel unter 90° und über 270° nennt man *spitze Winkel*, genau 90° und 270° wären *rechte Winkel* und Winkel zwischen 90° und 270° , die beiden exakten Werte 90° und 270° wiederum ausgenommen, sind *stumpfe Winkel*.

Für das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und der Formel $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$, ergibt sich folgender Sachverhalt:

- Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren negativ, so ist der Winkel zwischen den Vektoren spitz und umgekehrt.

⁵⁹Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.124), vgl. (Loviscach),

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0, \text{ da } \cos \alpha < 0, \text{ wenn } \alpha < 90^\circ, \alpha > 270^\circ \text{ und } |\vec{a}| |\vec{b}| > 0$$

- Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich Null, so ist der Winkel zwischen den beiden Vektoren ein rechter Winkel und umgekehrt.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ da } \cos \alpha = 0, \text{ wenn } \alpha = 90^\circ \text{ oder } \alpha = 270^\circ$$

- Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren positiv, so ist der Winkel zwischen den Vektoren stumpf und umgekehrt.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0, \text{ da } \cos \alpha > 0, \text{ wenn } 90 < \alpha < 270^\circ \text{ und } |\vec{a}| |\vec{b}| > 0 \text{ }^{60}$$

Man kann das Skalarprodukt auch über die Normalprojektion eines Vektors auf einen anderen deuten. Ist das Ergebnis positiv, so stehen die Vektoren in einem spitzen Winkel zueinander. Ist das Ergebnis der Projektion negativ, so liegt ein stumpfer Winkel vor. Bei Vektoren, die normal aufeinander stehen, ist die Projektion Null. ⁶¹

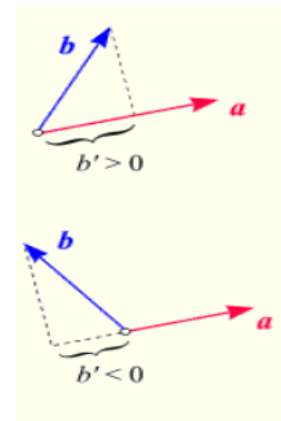


Abbildung 15 Skalarprodukt über Normalprojektion

4.5.2 Das Vektorprodukt

„Als Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ wird der Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ mit folgenden Eigenschaften bezeichnet:

- $\vec{u} \times \vec{v}$ ist sowohl zu $\vec{u}$ als auch zu $\vec{v}$ orthogonal.
- Der Betrag von $\vec{u} \times \vec{v}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms, d.h. $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \angle(u, v)$.
- $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{u} \times \vec{v}$ bilden ein Rechtssystem, d.h. ihre Orientierung entspricht der Orientierung der x-, y- und z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems. ⁶²
- Algebraisch wird das Vektorprodukt so definiert:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \text{ }^{63}$$

⁶⁰Vgl. (Loviscach)

⁶¹Vgl. (Embacher und Oberhuemer 11.5.16)

⁶²(Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.133)

⁶³Vgl. (Lechner S.28)

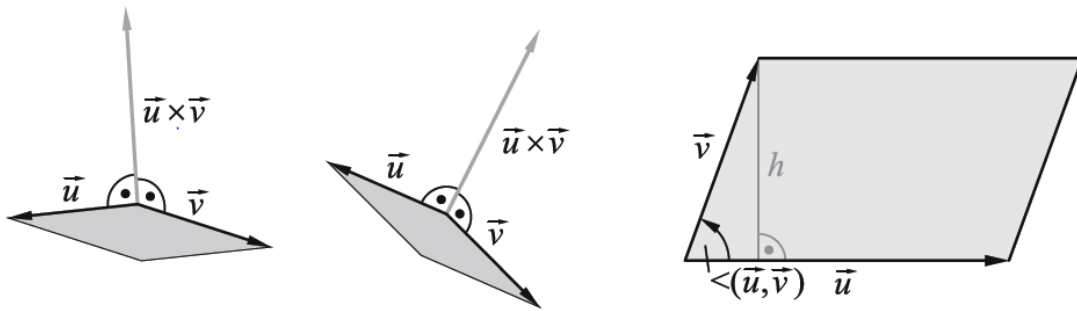


Abbildung 16 Vektorprodukt

Als erstes möchte ich anmerken, dass das Vektorprodukt nur im Raum, also im $\mathbb{R}^3$ gilt, sein Ergebnis ist wieder ein dreidimensionaler Vektor. Es kann also dazu verwendet werden, um einen Vektor zu erzeugen, der orthogonal auf die beiden anderen steht oder um Flächeninhalte oder Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Man nennt dieses Produkt auch Kreuzprodukt.⁶⁴

Folgende Rechengesetze gelten:

Das Vektorprodukt

- ist anti-kommutativ: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{u} \times \vec{v}$,
- besitzt ein Null-Element: $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$,
- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$,
- von $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ parallel sind,
- $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonal sind,
- ist distributiv: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ und $(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u}$,
- $\lambda \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \cdot \vec{v})$.⁶⁵

Um nun noch einen Schritt weiter zu gehen, kann man mithilfe des Vektorprodukts in Verbindung mit dem Skalarprodukt sogar Volumina berechnen. Man nennt das Produkt $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ *Spatprodukt* und sein Betrag ergibt das Volumen eines Parallelepipeds, auch genannt Spat. Je nach gewünschtem Volumen, kann die Formel für Pyramiden, Tetraeder etc. angepasst werden.⁶⁶

⁶⁴ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.133f)

⁶⁵ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.134)

⁶⁶ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.136)

4.6 Analytische Geometrie

Die Idee der analytischen Geometrie ist es, Objekte aus unserer Umwelt durch Zahlen zu beschreiben. Wir wissen schon, dass Punkte und Pfeile durch Koordinaten charakterisiert werden können. Nun ist das Ziel auch Geraden und Ebenen algebraisch zu beschreiben und sie in Beziehungen zu stellen.⁶⁷

4.6.1 Parameterdarstellungen

Geraden

Aus der Sekundarstufe I wissen wir schon, dass man Geraden in der Koordinatendarstellung $g: y = kx + d$ beschreiben kann. Es gibt allerdings auch die Möglichkeit, Geraden durch Vektoren zu beschreiben. Man geht von einem Punkt A aus und kann durch Addition mit allen Vielfachen eines sogenannten Richtungsvektors jeden Punkt auf der Gerade erreichen. Wir schreiben:

$g: \{X | X = A + t \cdot \vec{m}, t \in \mathbb{R}\}$, dabei ist die Gerade g die Menge aller Punkte X , wobei X jeweils der Punkt ist, der gerade durch das Vielfache t des Vektors $\vec{m}$ erreicht wird.

Kurz schreiben wir auch: $g: X = A + t \cdot \vec{m}, t \in \mathbb{R}$.⁶⁸

Ist der Richtungsvektor nicht gegeben, kann eine Gerade auch durch zwei Punkte A und B beschrieben werden, dann ist der Vektor $\vec{m} = \overrightarrow{AB}$.

Nun können wir eine Verbindung zwischen der schon bekannten Koordinatendarstellung und der neuen Parameterdarstellung von Geraden herstellen indem wir zunächst die Komponenten in der Parameterdarstellung explizit aufschreiben.

In der Ebene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

im Raum:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

Nun werden diese Formen in ihre einzelnen Gleichungen umgeschrieben.

⁶⁷Vgl. (Filler und Henn, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebra verstehen-Geometrisch veranschaulichen und anwenden S.149-160)

⁶⁸ Vgl. (Filler und Henn, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebra verstehen-Geometrisch veranschaulichen und anwenden S.172f)

$$x = a_1 + t \cdot m_1$$

$$y = a_2 + t \cdot m_2$$

$$x = a_1 + t \cdot m_1$$

$$y = a_2 + t \cdot m_2$$

$$z = a_3 + t \cdot m_3$$

Durch Lösen des somit entstandenen linearen Gleichungssystems und eventuellen Umformungen erhält man eine Beschreibung der Geraden:

in der Form

$$y = kx + d$$

durch ein Lösungssystem mit 2 Gleichungen

$$y = kx + d$$

$$y = lz + e$$

Dabei sind $a_1, a_2, a_3, m_1, m_2, m_3, k, d, l, e \in \mathbb{R}$.⁶⁹

Ebenen

Ebenen sind Objekte, die sich in verschiedene Richtungen unendlich ausstrecken. So wie Geraden die unendliche Verlängerung von Strecken sind, sind das Ebenen von „geraden Flächen“, also beispielsweise von Rechtecken. Während Geraden durch zwei Punkte oder einen Punkt und einen Richtungsvektor beschrieben werden können, benötigt man für Ebenen drei Punkte oder einen Punkt und zwei Richtungsvektoren. Wie vorher wird ausgehend von einem Punkt durch die Kombination der Vielfachen der beiden Richtungsvektoren jeder Punkt der Ebene erreicht.

Die Parameterdarstellung einer Ebenen lautet:

$$\varepsilon: \{X | X = A + t \cdot \vec{m} + s \cdot \vec{n} ; s, t \in \mathbb{R}\}$$

Und kurz:

$$\varepsilon: X = A + t \cdot \vec{m} + s \cdot \vec{n} ; s, t \in \mathbb{R}.^{70}$$

Auch Ebenen lassen sich in Koordinatenschreibweise umformen. Wieder betrachtet man zunächst die Komponenten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

⁶⁹Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.142ff),vgl. (Filler und Henn, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebra verstehen-Geometrisch veranschaulichen und anwenden S.174)

⁷⁰Vgl. (Filler und Henn, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebra verstehen-Geometrisch veranschaulichen und anwenden S.181)

und schreibt den Ausdruck in einzelne Gleichungen um.

$$x = a_1 + t \cdot m_1 + s \cdot n_1$$

$$y = a_2 + t \cdot m_2 + s \cdot n_2$$

$$z = a_3 + t \cdot m_3 + s \cdot n_3$$

Durch Lösen dieses Gleichungssystems erhält man eine Gleichung der Form:

$$ax + by + cz = d; a, b, c, d \in \mathbb{R}^{71}$$

4.6.2 Normalvektordarstellungen

Neben der Parameterdarstellung kann man Geraden in der Ebene und Ebenen im Raum auch durch ihre Normalvektoren durch die sogenannte *Normalvektordarstellung* beschreiben. Dazu benötigt man wie vorher einen Punkt P der Gerade bzw. der Ebene und einen auf ihren Richtungsvektor/ihre Richtungsvektoren normalen Vektor, man nennt diesen $\vec{n}$.

Geraden

Für Geraden in der Ebene sucht man einen zum Richtungsvektor $\vec{r}$ orthogonalen Vektor $\vec{n}$ über das Skalarprodukt. Daher muss $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$ oder $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = n_1 r_1 + n_2 r_2 = 0$. Um diese Gleichung zu erfüllen muss $n_1 = -r_2$ und $n_2 = r_1$ sein, also $\vec{n} = \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_1 \end{pmatrix}$ oder analog auch $\vec{n} = \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix}$.

Die Normalvektorform lautet dann:

$$\vec{n} \cdot (X - P) = 0 \text{ bzw. } \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P \text{ bzw. } n_1 x + n_2 y = n_1 p_1 + n_2 p_2 := d.$$

Geraden im Raum kann man nicht durch eine Normalvektordarstellung beschreiben, denn hier ergibt die Menge aller zu $\vec{n}$ orthogonalen Vektoren genau eine Ebene und keine Gerade.⁷²

Ebenen

Auch für Ebenen wird für diese Art der Darstellung ihr Normalvektor herangezogen. Diesen kann man durch das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren berechnen. Zusätzlich wird

⁷¹ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.151 f)

⁷² Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.156), (Filler und Henn, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebra verstehen-Geometrisch veranschaulichen und anwenden S.213)

wieder ein Punkt P der Ebene benötigt, die Normalvektordarstellung lautet analog zur Geradengleichung:

$$\vec{n} \cdot (X - P) = 0 \text{ bzw. } \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P \text{ bzw. } n_1x + n_2y + n_3z = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 := d. \text{ }^{73}$$

4.6.3 Lagebeziehungen von Geraden

Interessant ist nun, wie einander verschiedene Geraden in der Ebene und im Raum begegnen können und wie man dies rechnerisch herausfinden kann.

Allgemein können Geraden vier unterschiedliche Positionen zueinander einnehmen. Sie können einander schneiden, windschief, parallel oder identisch sein.

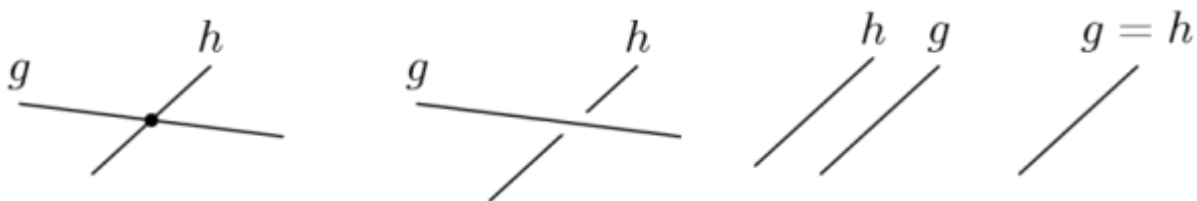


Abbildung 17 Lagebeziehung von Geraden im Raum

Geraden, die einander schneiden haben als einziges gemeinsames Merkmal ihren Schnittpunkt, ihre Richtungsvektoren sind unterschiedlich. Windschiefe Geraden haben weder gemeinsame Richtungsvektoren, noch einen Schnittpunkt, sie gehen sozusagen aneinander vorbei. Parallele Geraden hingegen haben gleiche Richtungsvektoren, jedoch keinen gemeinsamen Punkt und identische Geraden haben gleiche Richtungsvektoren und jeder Punkt der einen Geraden liegt auch auf der anderen. Um zu überprüfen ob sich die Geraden schneiden setzt man ihre Geradengleichungen gleich. Wenn ja, ergibt sich daraus ein Schnittpunkt. Analysiert man die Richtungsvektoren der Geraden, dann sind sie parallel oder identisch, wenn ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind. Liegt auch noch ein beliebiger Punkt der einen Gerade auf der anderen, so sind sie mit Sicherheit identisch. Trifft weder zu, dass sie identisch, oder parallel sind (also, dass ihre Richtungsvektoren Vielfache sind) noch, dass sie einander schneiden (also, dass es einen Schnittpunkt gibt), so sind die Geraden windschief.⁷⁴

Schneiden einander die Geraden und möchte man nun wissen, in welchem sogenannten *Schnittwinkel* das passiert, reicht es den Betrag des Kosinus ihrer Richtungsvektoren zu

⁷³ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.157), vgl. (Filler und Henn, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebra verstehen-Geometrisch veranschaulichen und anwenden S.213)

⁷⁴Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.144f)

berechnen. Für die Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ der Geraden berechnet man den Schnittwinkel α durch $\cos\alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.⁷⁵

4.6.4 Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen

Auch die Lagebeziehung zwischen Geraden und Ebenen kann man in einer ähnlichen Art analysieren.

Die erste Möglichkeit ist, dass die Ebene die Gerade schon enthält. Um herauszufinden ob die Gerade schon Teil der Ebene ist, setzt man die Geradengleichung und die Ebenengleichung gleich. Ist das Ergebnis eine eindeutige Lösung des entstandenen linearen Gleichungssystems (kurz LGS), so schneiden Ebene und Gerade einander in einem Schnittpunkt. Gibt es unendlich viele Lösungen, so enthält die Ebene die Gerade, ist das Lösen unmöglich, so sind Ebene und Gerade parallel zueinander. Wie vorher ist auch hier die Lagebeziehung abhängig von den beiden Richtungsvektoren.⁷⁶

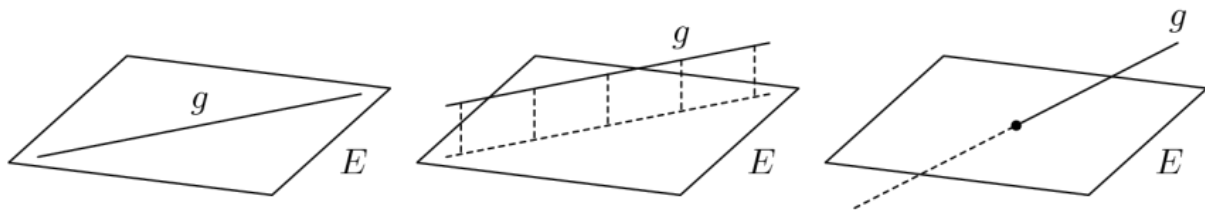


Abbildung 18 Lagebeziehung Ebene und Gerade

Beim Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene ist das schon etwas komplizierter. Berechnet man den Schnittwinkel über den Kosinus des Winkels zwischen dem Normalvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden, so erhält man den Winkel β in der nebenstehenden Abbildung. Da jedoch der (eigentlich gesuchte) Winkel α und der Winkel β genau 90° ergeben, und $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, kann man den Schnittwinkel über den Sinus, jedoch wieder

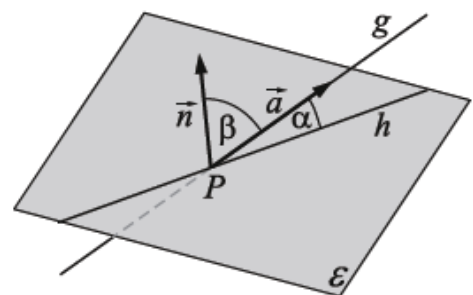


Abbildung 19 Winkel zwischen Gerade und Ebene

über die ursprüngliche Formel des Kosinus mit dem Skalarprodukt berechnen. Also ist $\cos\beta = \cos(90 - \alpha) = \sin\alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}$.⁷⁷

⁷⁵Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.159)

⁷⁶Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.152f)

⁷⁷Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.160)

4.6.5 Lagebeziehungen von Ebenen

Schneidet man zwei Ebenen, so können sie einander in drei Arten begegnen, sie können identisch oder parallel sein, oder einander in einer Schnittgeraden treffen.

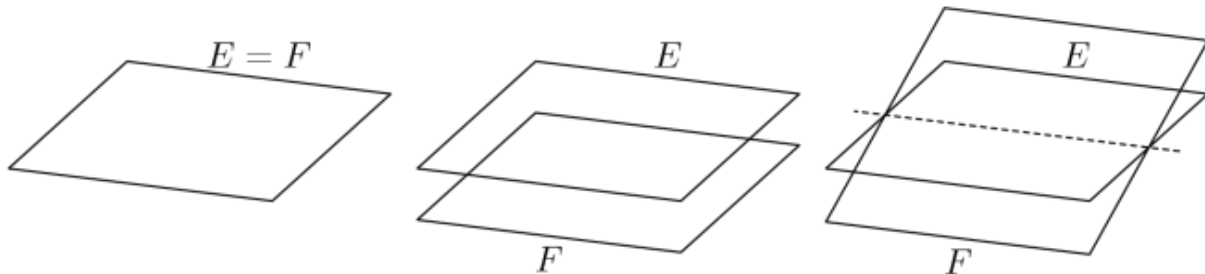


Abbildung 20 Lagebeziehung zweier Ebenen

Man untersucht wieder die Richtungsvektoren der Ebenen oder setzt ihre Gleichungen gleich. Ergibt das schneiden, oder gleichsetzen, der beiden Ebenen eine einparametrische Lösungsmenge, so gibt es eine Schnittgerade. Durch Zurückeinsetzen in eine Parameterdarstellung einer der beiden Ebenen erhält man die Parameterdarstellung der Schnittgeraden. Ist das Lösen des Gleichungssystems nicht möglich, so gibt es keinen Schnitt und die Ebenen sind parallel. Gibt es unendlich viele Lösungen des Gleichungssystems sind die beiden Ebenen identisch.⁷⁸

Den Schnittwinkel zweier Ebenen berechnet man meist über deren Normalvektoren, denn durch die Orthogonalität wird an der Größe des Schnittwinkels durch die Verwendung der Normalvektoren anstatt der Richtungsvektoren nichts verändert. Es ist also $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ der Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen.⁷⁹

4.6.6 Abstandsberechnung

Die Berechnung des Abstands zweier Objekte passiert oft über die Hessesche Normalform. Dazu ein Einschub:

„Ein Vektor, der den Betrag Eins hat, heißt Einheitsvektor. Zu jedem vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\vec{a}$ existiert ein Einheitsvektor: $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} * \vec{a}$.“⁸⁰

Diese Einheitsvektoren brauchen wir nun für die Hessesche Normalform, die über die Normalvektorform von Geraden und Ebenen hergeleitet wird. Sie lautet:

⁷⁸Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.154)

⁷⁹Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.160)

⁸⁰ (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.161)

$$g: \vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \text{ bzw. } \varepsilon: \vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0^{81}$$

Für den Abstand von Punkten zu Geraden in der Ebene und Ebenen sieht das so aus:

$$d(Q, g) = |\vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{P_0Q}| \text{ bzw. } d(Q, \varepsilon) = |\vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{P_0Q}|.$$

Zu erklären ist dies über eine Normalprojektion.

Der Vektor $\overrightarrow{P_0Q}$ wird auf $\overrightarrow{LQ}$ projiziert und $\overrightarrow{LQ}$ ist der minimale (weil orthogonal und somit gleich gerichtet wie $\vec{n}_0$), also der gesuchte Abstand von

der Geraden oder der Ebene zum Punkt. Der Betrag des Skalarprodukts ergibt die Länge der Projektion und somit den Abstand zwischen Gerade und Punkt.⁸²

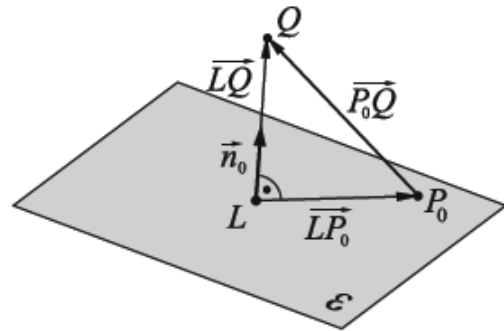


Abbildung 21 Abstand Ebene und Punkt

Um den Abstand zweier paralleler Geraden und Ebenen zu ermitteln geht man vor, wie im vorigen Beispiel. Der Unterschied ist nur, dass man den Punkt Q aus der Ebene beliebig wählen kann, denn alle Punkte der einen Geraden oder Ebene sind gleich weit zur anderen Geraden oder Ebene entfernt.⁸³

Um zu ermitteln, wie weit ein Punkt Q von einer Geraden im Raum entfernt ist, legt man zunächst durch den Punkt eine Ebene mit dem Richtungsvektor der Geraden als Normalvektor der Ebene. Somit ist nämlich die Ebene orthogonal zur Geraden und der Schnittpunkt der beiden Objekte der nächstentfernteste Punkt vom Punkt Q. Nun braucht man nur noch einen Vektor $\overrightarrow{LQ}$ aufstellen, dessen Betrag ergibt die Länge des Vektors und somit den Abstand zwischen der Geraden und dem Punkt im Raum.⁸⁴

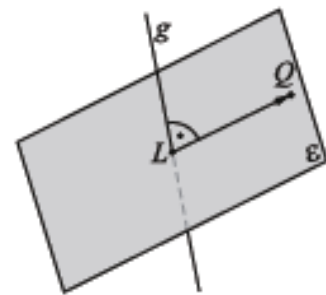


Abbildung 22 Abstand Punkt von Gerade

Am kompliziertesten ist es, den Abstand zweier windschiefer Geraden zu berechnen. Man sucht zunächst einen Vektor, der zu beiden Geraden orthogonal ist. Also berechnet man das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren. Außerdem bettet man die beiden Geraden in

⁸¹ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.161)

⁸² Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.161f)

⁸³ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.163f)

⁸⁴ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.163)

zwei parallele Ebenen, denn somit reicht es den Abstand eines Punktes einer Geraden zur anderen Ebene zu ermitteln. Dies erfolgt über eine Normalprojektion vom Vektor $\overrightarrow{P_0Q_0}$ auf den Normalvektor, der hier über das Vektorprodukt berechnet wird. Hat man also das Skalarprodukt vom Normalvektor mit $\overrightarrow{P_0Q_0}$ berechnet, so ergibt sich der Abstand der windschiefen Geraden durch die Berechnung seines Betrages.⁸⁵

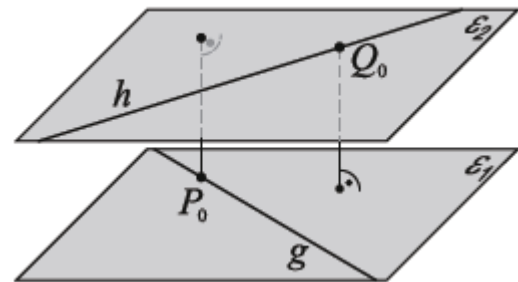


Abbildung 23 Abstand zweier windschiefer Geraden

⁸⁵ Vgl. (Filler, Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren S.164)

5 Vektorrechnung im Lehrplan

Der aktuelle Lehrplan (2004) verlangt neben dem Unterrichten mathematikspezifischer Themen auch allgemeine Aufgaben. Darunter findet man einerseits Vorstellungen, wie mathematisches Arbeiten im Unterricht aussehen soll, nämlich „darstellend-interpretierendes Arbeiten (...), formal-operatives Arbeiten (...), experimentell-heuristisches Arbeiten (...) und kritisch-argumentatives Arbeiten“⁸⁶. Außerdem soll im Mathematikunterricht kreatives Handeln, mathematisches Formulieren und das kritische Betrachten unserer Umwelt mit mathematischem Hintergedanken vermittelt werden. Spezifisch zum Thema Vektorrechnung schreibt der aktuelle Lehrplan für die 5. und 6. Klasse Folgendes vor:

5.Klasse AHS:

Vektoren und analytische Geometrie der Ebene

- Addieren von Vektoren und Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen, geometrisches Veranschaulichen dieser Rechenoperationen
- Ermitteln von Einheitsvektoren und Normalvektoren
- Arbeiten mit dem skalaren Produkt, Ermitteln des Winkels zweier Vektoren
- Beschreiben von Geraden durch Parameterdarstellungen und durch Gleichungen, Schneiden von Geraden
- Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie

Abbildung 24 Lehrplan AHS 5.Klasse

6.Klasse AHS:

Analytische Geometrie des Raumes

- Übertragen bekannter Begriffe und Methoden aus der zweidimensionalen analytischen Geometrie, Erkennen der Grenzen dieser Übertragbarkeit
- Ermitteln von Normalvektoren, Definieren des vektoriellen Produkts
- Beschreiben von Geraden und Ebenen durch Parameterdarstellungen bzw. Gleichungen
- Schneiden von Geraden und Ebenen, Untersuchen von Lagebeziehungen
- Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie und der Trigonometrie

Abbildung 25 Lehrplan AHS 6.Klasse

Während in der 7.Klasse AHS die Vektorrechnung explizit gar nicht vorkommt, fällt sie in der 8. Klasse AHS unter den Abschnitt „Wiederholung: umfassendes Wiederholen, Vertiefen und Vernetzen von Stoffgebieten“.⁸⁷

⁸⁶ (Lehrplan Mathematik S.1)

⁸⁷Vgl. (Lehrplan Mathematik S.1-6)

6 Vektoren bei der kompetenzorientierten zentralen Reifeprüfung

Seit der Einführung der zentralen Reifeprüfung gibt es neben dem Lehrplan auch noch einen Katalog an Grundkompetenzen, der die für die Reifeprüfung notwendigen Anforderungen enthält. Die Idee dabei ist, aus dem Lehrplan diejenigen relevanten Inhalte herauszufiltern, die alle AbsolventInnen einer allgemeinbildenden höheren Schule unbedingt beherrschen sollen. Vektoren sollen als Erweiterung der Zahlenbereiche verstanden werden und sowohl als algebraische als auch als geometrische Objekte verwendet werden. In Anlehnung an den Lehrplan sieht der Kompetenzkatalog für Vektoren so aus:⁸⁸

Vektoren

- AG 3.1 Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können
- AG 3.2 Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können
- AG 3.3 Definition der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können
- AG 3.4 Geraden durch (Parameter-)Gleichungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ angeben können; Geradengleichungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können
- AG 3.5 Normalvektoren in $\mathbb{R}^2$ aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können

Anmerkungen:

Vektoren sind als Zahlentupel, also als algebraische Objekte, zu verstehen und in entsprechenden Kontexten verständig einzusetzen. Punkte und Pfeile in der Ebene und im Raum müssen als geometrische Veranschaulichung dieser algebraischen Objekte interpretiert werden können.

Die geometrische Deutung der Skalarmultiplikation (in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) meint hier nur den Spezialfall $a \cdot b = 0$. Geraden sollen in Parameterform, in $\mathbb{R}^2$ auch in parameterfreier Form, angegeben und interpretiert werden können.

Abbildung 26 Grundkompetenzen

Die neue Reifeprüfung besteht aus zwei Abschnitten, den sogenannten Teil-1-Aufgaben und den Teil-2-Aufgaben. Die Teil-1-Aufgaben überprüfen jeweils *eine* Grundkompetenz aus dem Kompetenzkatalog durch eine kurze Aufgabe, die in sehr unterschiedlichen Formaten dargestellt werden kann. Es werden sowohl Multiple-Choice-Aufgaben gestellt, als auch offene und halboffene Fragen, Lückentexte, Zuordnungs- und auch Konstruktionsaufgaben. In meiner Forschungsarbeit ist mir aufgefallen, dass die Vektorrechnung ein sehr beliebtes

⁸⁸ Vgl. (Aue, Frebort und Hohenwarter S.1-7)

Thema für jene Teil-1-Aufgaben ist. Die bisher auffallend am häufigsten vorkommenden Aufgaben sind jene zu den Rechenoperationen von Vektoren (algebraisch und geometrisch), gefolgt von Aufgaben zu Lagebeziehungen und Normalvektoren. Während die Vektorrechnung unter den Teil-1-Aufgaben beachtlich oft vorkommt, wird in den Teil-2-Aufgaben fast gänzlich auf sie verzichtet. Die Teil-2-Aufgaben vereinen einzelne Grundkompetenzen für komplexere Aufgaben und verlangen das mathematische Arbeiten mit nicht sehr vertrauten Inhalten, wie physikalischen Größen oder der Finanzmathematik.⁸⁹

Teil III: beispielhafte Anwendungen

7 Offenes Lernen zum Thema Vektorrechnung in der Sekundarstufe II

In diesem dritten Teil möchte ich nun konkretes Arbeitsmaterial zur Realisierung von Vektorrechnung in offener Lernform darlegen und dabei auf so möglichst viele der oben genannten Grundkompetenzen eingehen. Diese Arbeitsmaterialien sollen beispielhaft für die Beantwortung meiner Forschungsfragen „Wie kann man SchülerInnen durch offenes Lernen und Methodenvielfalt gut auf die zentrale Reifeprüfung vorbereiten?“, „Wie können SchülerInnen selbstständig vorbereitendes Material für die zentrale Reifeprüfung erstellen?“ und „Wie kann Vektorrechnung praxisnah unterrichtet werden?“ dienen.

7.1 Beispiel zur Methode „Aufgabenkartei“

Kurzbeschreibung

Die SchülerInnen erstellen selbstständig in Gruppen Lernkarteien zum Thema Vektorrechnung und sollen dabei möglichst alle Grundkompetenzen abdecken. Die Karteikärtchen werden anschließend im Klassenverband diskutiert und verbessert und dann in kleinen Behältern im Klassenraum aufbewahrt. Somit können sie die SchülerInnen jederzeit für Übungszwecke verwenden.

Grundkompetenzen

AG 3.1, AG 3.2, AG 3.3, AG 3.4, AG 3.5

⁸⁹ Vgl. (Aue, Frebort und Hohenwarter S.19-22), vgl. (Bachmann, Lederer und Luksch)

Lehrplan	5.Klasse Vektoren und analytische Geometrie in der Ebene; 6. Klasse analytische Geometrie des Raumes
Schulstufe	Ende 6., 7. oder 8.Klasse AHS
soziale und personale Ziele	Teamarbeit; Selbstständigkeit; Präzision; Kritikbereitschaft;
Funktion	Wissen ordnen und systematisieren
Sozialform	Gruppenarbeit, Klassenverband
Material und Medien	Karteikärtchen; Schulbücher der 5. und 6. Klasse
Ergebnissicherung	Diskussion im Klassenverband
eventuelle Schwierigkeiten und Lösungsideen	Gruppeneinteilung – eventuell vom Lehrer vorgegebene Gruppen; Keine oder zu wenig vorhandene Schulbücher der 5. Und 6. Klasse – Lehrer bringt 1-2 Exemplare mit;
Aktive Arbeitsphase	Die SchülerInnen müssen über ihr Vorwissen reflektieren oder in ihren Unterrichtsmaterialien nachforschen und selbstständig Teil-1-Aufgaben erstellen. Sie müssen auch die Arbeit ihrer MitschülerInnen reflektieren und kritisieren. Dadurch wird ein Gefühl entwickelt, wie die Inhalte für die Reifeprüfung verstanden und gekonnt werden müssen und die Grundkompetenzen geübt.
Tätigkeit der Lehrperson	Die Lehrperson erklärt zunächst die Aufgabenstellung und ist dann als BeobachterIn und als Beratungsperson anwesend. Bei der abschließenden Diskussion fungiert die Lehrperson als Moderator und schreitet ein, falls eine falsche Aufgabe nicht als solche gesehen wird.

Wie war das noch mal????

Vektoren – Eine Zusammenfassung

Aufgabenstellung:

Erstellt mindestens 5 Karteikärtchen zum Thema Vektoren!

Dabei sollt ihr die möglichen Formate der Teil-1-Aufgaben berücksichtigen und so viele Grundkompetenzen, wie möglich abdecken. Überlegt, welche Fragestellungen passend sind und beurteilt eure Aufgaben nach ihrer Schwierigkeit. (leicht, mittel, schwer) Vergesst auch nicht die Lösung auf die Rückseite zu schreiben und gebt die GK an! Bildet dafür Dreiergruppen!

Zur Erinnerung die Grundkompetenzen und die möglichen Teil-1-Formate:

Vektoren

- AG 3.1 Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können
- AG 3.2 Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können
- AG 3.3 Definition der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können
- AG 3.4 Geraden durch (Parameter-)Gleichungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ angeben können; Geradengleichungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können
- AG 3.5 Normalvektoren in $\mathbb{R}^2$ aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können

Anmerkungen:

Vektoren sind als Zahlentupel, also als algebraische Objekte, zu verstehen und in entsprechenden Kontexten verständig einzusetzen. Punkte und Pfeile in der Ebene und im Raum müssen als geometrische Veranschaulichung dieser algebraischen Objekte interpretiert werden können.

Die geometrische Deutung der Skalarmultiplikation (in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) meint hier nur den Spezialfall $a \cdot b = 0$. Geraden sollen in Parameterform, in $\mathbb{R}^2$ auch in parameterfreier Form, angegeben und interpretiert werden können.

Antwortformate:

- Offenes oder halboffenes Antwortformat
- Lückentext
- Zuordnungsformat
- Konstruktionsformat
- Multiple-Choice (2 aus 5, 1 aus 6, x aus 5)

P.S. Ihr könnt auch die Schulbücher der 5. Und 6. Klasse als Hilfestellung verwenden.

Am Schluss werden alle Karteikärtchen von euren Gruppen präsentiert und in einer Klassendiskussion besprochen.

Mögliche Lösungsvorschläge:

Thema: Normalvektoren; GK: AG 3.5 mittel
Gegeben sind die beiden Geraden g und h.
$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \end{pmatrix}; h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$
Bestimme a_2 so, dass die beiden Geraden
normal aufeinander stehen!

→

Lösung
$\begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + a_2 \cdot (-2)$
$1 \cdot 2 + a_2 \cdot (-2) = 0$
$a_2 = 1.$

Thema: Vektoren interpretieren; GK:AG 3.1 mittel
In einer Fabrik arbeiten $A = \begin{pmatrix} 116 \\ 202 \end{pmatrix}$ Frauen und
Männer. Im Durchschnitt verdienen die
Frauen monatlich 1082€ und die Männer
1432€. Stelle eine Formel für die gesamten
monatlichen Gehaltsauszahlungen auf!

→

Lösung
A= Arbeiter
G=Gehalt = $\begin{pmatrix} 1082 \\ 1432 \end{pmatrix}$
M=monatliche Gehaltsauszahlung
$M = A \cdot G$

Thema: Skalarprodukt; GK: AG 3.3 leicht	
Die Eigenschaften des Skalarprodukts.	
Kreuze die beiden richtigen Antworten an!	
☐ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$	☐ $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ $a_1b_3 - a_3b_1 + a_2b_2$
☐ $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ $a_1b_1 + a_2b_2$	☐ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
☐ $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ $a_1b_1 + \dots + a_nb_n$	

→

Lösung	
$\circ \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$	$\circ \vec{a} \cdot \vec{b} =$ $a_1b_3 - a_3b_1 + a_2b_2$
$\circ \vec{a} \cdot \vec{b} =$ $a_1b_1 + a_2b_2$	$\bullet \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
$\bullet \vec{a} \cdot \vec{b} =$ $a_1b_1 + \dots + a_nb_n$	

Thema: Geraden angeben können; GK: AG 3.4 leicht
Gegeben sind der Punkt $A = (7 2)$ und ein
Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Gib die zugehörige Gerade g in Parameterform
an!

→

Lösung
$g: X = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Thema: Normalvektoren; GK: AG 3.5 schwierig
Ergänze die Koordinaten so, dass du ein
rechtwinkeliges Dreieck erhältst.
$A = (2 a), B = (10 2), C = (0 8)$
Der rechte Winkel liegt im Punkt A

→

Lösung
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
$\begin{pmatrix} 8 \\ 2-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8-a \end{pmatrix} = 0$
$-16 + (2-a) \cdot (8-a) = 0$
$a^2 - 10a = 0$
$a_1 = 0; a_2 = 10 \Rightarrow A = (2 0) \vee A = (2 10)$

7.2 Beispiel zur Methode Experimentieren

Kurzbeschreibung	Die SchülerInnen sollen mithilfe des Programms Geogebra mit der geometrischen Darstellung von Addition und Subtraktion von Vektoren experimentieren.
Grundkompetenzen	Vektoren AG 3.2, AG 3.3
Lehrplan	5. Klasse: Addieren von Vektoren, geometrisches Veranschaulichen dieser Rechenoperation
Schulstufe	5. Klasse AHS
soziale und personale Ziele	Selbstvertrauen für mathematisches Arbeiten entwickeln; Teamarbeit; Gegenseitiges Helfen und Profitieren;
Funktion	Neues erkunden mit Hilfe von Technologieeinsatz; Experimentieren mit Vektoren;
Sozialform	Einzel – und Partnerarbeit
Material und Medien	Programm Geogebra
Ergebnissicherung	Abschließendes Arbeitsblatt
eventuelle Schwierigkeiten und Lösungsideen	Probleme mit dem Programm Geogebra – Lehrperson steht bei Schwierigkeiten zur Verfügung; Partnerwahl – eventuell bestimmt die Lehrperson die Partner;
Aktive Arbeitsphase	Experimentieren mit Hilfe vom Programm Geogebra in Partnerarbeit; Bearbeiten des Arbeitsblattes in Einzelarbeit;
Tätigkeit der Lehrperson	Die Lehrperson beobachtet das Arbeiten der SchülerInnen und steht für Fragen zum Inhalt und zum Programm Geogebra zur Verfügung. Wenn die SchülerInnen bereit sind, wird das abschließende Arbeitsblatt ausgeteilt. Die Lehrperson kontrolliert die Ergebnisse der SchülerInnen.

Vektoren geometrisch addieren und subtrahieren!

Aufgabenstellung:

Ihr wisst schon, dass Vektoren algebraisch aber auch geometrisch als Punkte und Pfeile in einem Koordinatensystem interpretiert werden können. Die Addition und Subtraktion zweier Vektoren ist euch algebraisch schon bekannt. Wie aber könnte das geometrisch aussehen?

Verwendet für diese Aufgabe das Computerprogramm Geogebra und experimentiert drauf los! Kann man Vektoren geometrisch addieren und subtrahieren? Geht das mit der Darstellung als Pfeile und auch mit Punkten? Was passiert, wenn man Vektoren addiert und subtrahiert?

Macht euch Notizen zu diesen Fragen und schreibt eure Erkenntnisse auf.

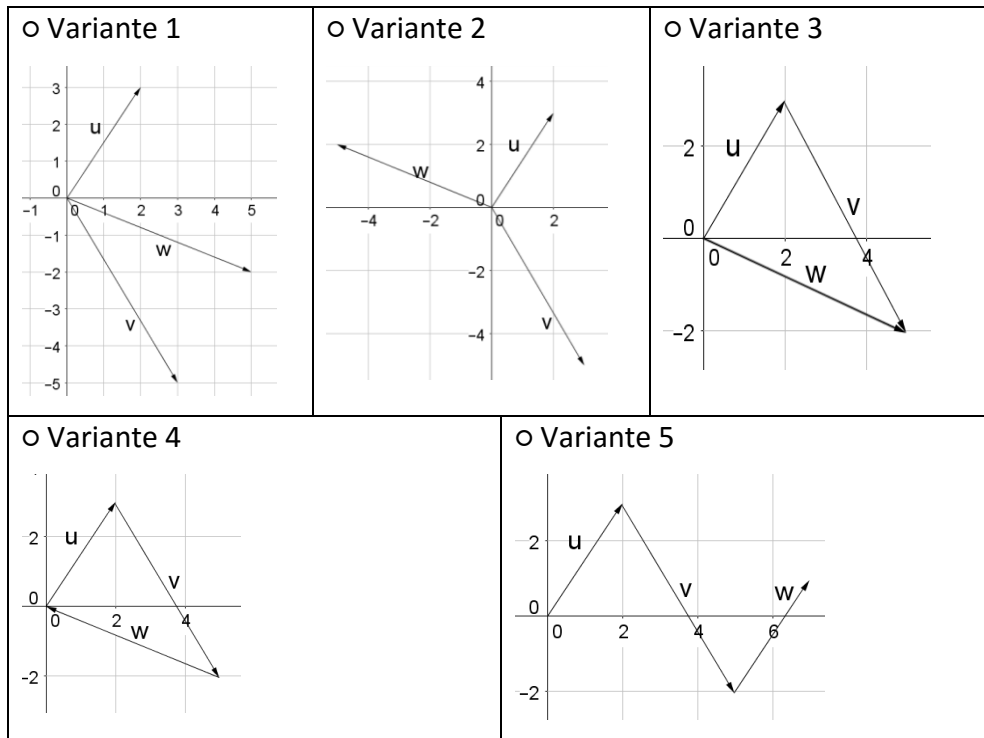
Als Abschluss sollt ihr eine Kompetenzüberprüfung machen, die euch verrät, ob ihr alles Notwendige herausgefunden habt. Ihr dürft eure Notizen dafür verwenden.

An die Computer, und los geht's!

Kompetenzüberprüfung zu Addition und Subtraktion von Vektoren – geometrisch

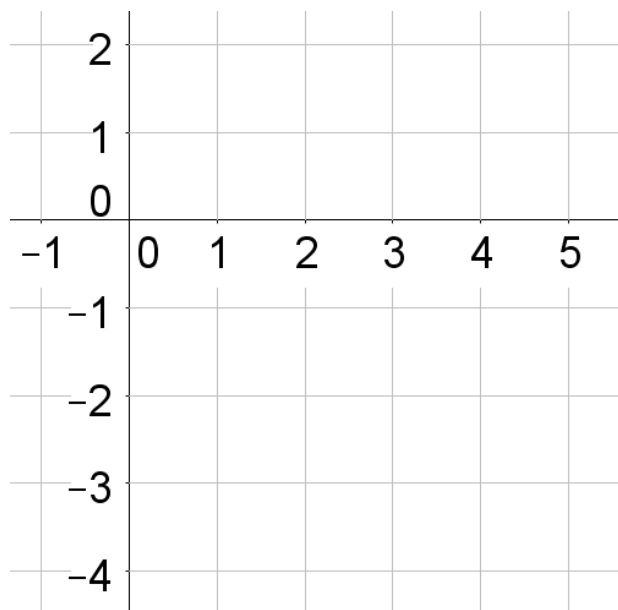
1. Geometrische Addition zweier Vektoren:

Welche beiden Antworten stimmen für $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$



2. Trage die beiden Vektoren in das Koordinatensystem ein und addiere sie.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



3. Geometrisches Subtrahieren zweier Vektoren. Ordne zu für $\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$!

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. Ergänze folgenden Text:

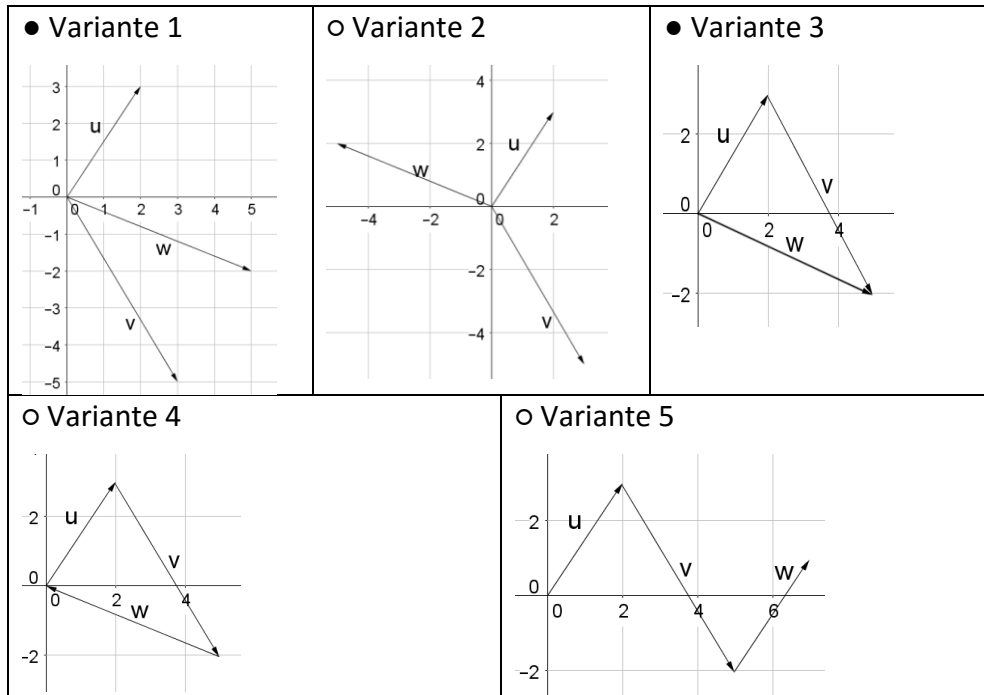
Interpretiert man die Addition zweier Vektoren geometrisch, so ist das Ergebnis ein _____, der vom _____ zum _____ reicht.

Die geometrische Subtraktion kann man als Addition eines Vektors $\vec{u}$ mit dem _____ von $\vec{v}$ verstehen. Gehen die beiden Vektoren vom selben Anfangspunkt aus, so ist deren Differenz ein neuer _____, der von der _____ zur _____ führt.

Kompetenzüberprüfung zu Addition und Subtraktion von Vektoren – geometrisch- LÖSUNG

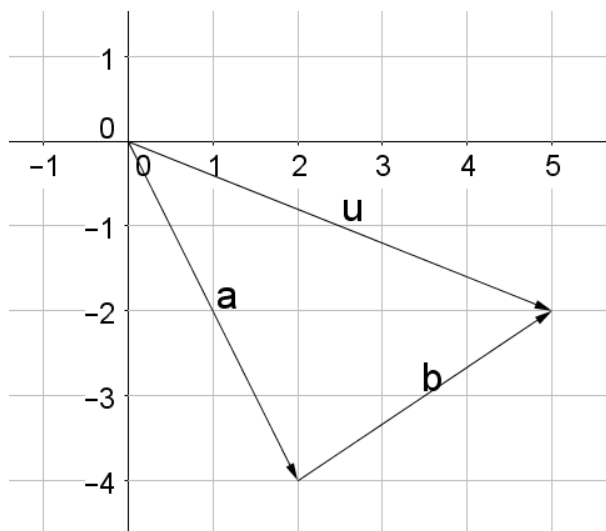
1. Geometrische Addition zweier Vektoren:

Welche beiden Antworten stimmen für $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

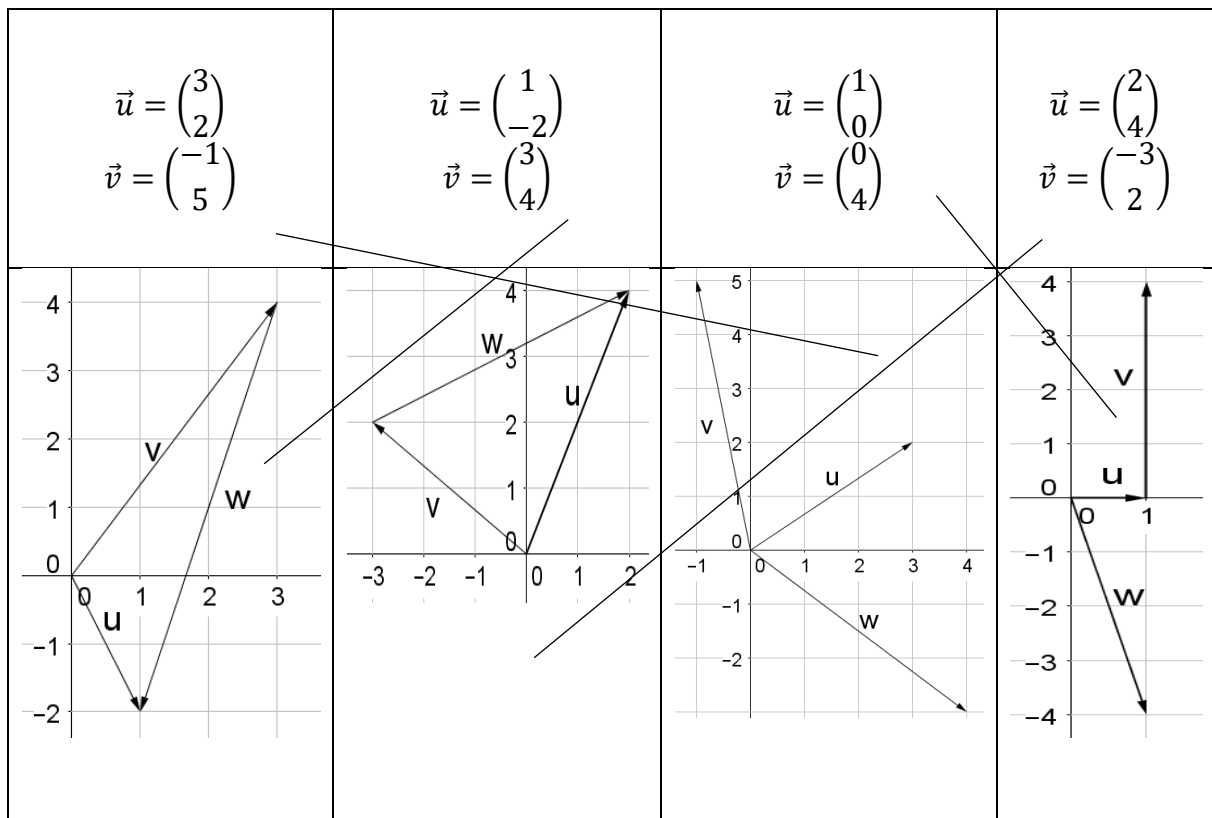


2. Trage die beiden Vektoren in das Koordinatensystem ein und addiere sie.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



3. Geometrisches Subtrahieren zweier Vektoren. Ordne zu für $\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$!



4. Ergänze folgenden Text:

Interpretiert man die Addition zweier Vektoren geometrisch, so ist das Ergebnis ein **neuer Vektor**, der vom **Anfangspunkt des ersten Vektors** zum **Endpunkt des zweiten Vektors** reicht.

Die geometrische Subtraktion kann man als Addition eines Vektors $\vec{u}$ mit dem **Gegenvektor** von $\vec{v}$ verstehen. Gehen die beiden Vektoren vom selben Anfangspunkt aus, so ist deren Differenz ein neuer **Vektor**, der von der **Spitze des zweiten Vektors** zur **Spitze des ersten Vektors** führt.

7.3 Beispiel zur Methode Knobelteam

Kurzbeschreibung	Die SchülerInnen müssen sich in Gruppen zu je 3 Personen aufteilen. Die Aufgabe für die ganze Klasse lautet, unter bestimmten Bedingungen, Lösungen für verschiedene Lagebeziehungen von Geraden zu finden. Diese Bedingungen sind Angaben zu den vorgegebenen Geraden. Dabei wird für zwei Geraden nur ein Punkt und für die dritte Gerade ein Richtungsvektor gegeben. Jetzt sollen die SchülerInnen im Team versuchen, so geeignete Geraden zu den Lagebeziehungen schneidend, windschief und parallel zu finden. Die SchülerInnen sollen dafür zuerst miteinander diskutieren und mit Hilfe des Programms Geogebra experimentieren. Außerdem sollen sie anhand dieses Programmes ihre Ergebnisse der Lehrperson präsentieren und einige Plots ausdrucken, ihre ermittelten Geradengleichungen angeben und erklären, wie sie zu ihren Ergebnissen kommen.
Grundkompetenzen	Vektoren AG 3.4
Lehrplan	Analytische Geometrie des Raumes: Untersuchen von Lagebeziehungen 6.Klasse
Schulstufe	6.Klasse AHS
soziale und personale Ziele	Zusammenarbeit; kreatives und experimentelles Arbeiten; sachliches diskutieren; andere Meinungen respektieren; eigene Meinung vertreten; argumentieren
Funktion	Die Beziehungen zwischen Geraden im Raum kennen lernen; Anwenden des Vorwissens; Experimentieren mit Hilfe des Programms Geogebra; gewöhnen an das Programm Geogebra;

	dreidimensionale Darstellung von Geraden durch Geogebra; Anwenden der mathematischen Sprache;
Sozialform	Gruppenarbeit
Material und Medien	Computer mit Geogebra Programm, eventuell Beamer
Ergebnissicherung	Präsentation der Ergebnisse anhand des Programms Geogebra; Plots mit Geradengleichungen und Erklärungen in Mitschrift
eventuelle Schwierigkeiten und Lösungsideen	Schwierigkeiten mit dem Programm Geogebra – Hilfestellung durch Klassenkollegen oder Lehrperson; Inhaltliche Schwierigkeiten – Hilfestellungen durch Schulbuch
Aktive Arbeitsphase	Die SchülerInnen müssen mithilfe ihres Wissens über Geraden und Vektoren und durch experimentelles Arbeiten mit dem Programm Geogebra zu Lösungen kommen. Sie sollen innerhalb der Gruppe diskutieren und erkennen, dass es für diese Aufgabenstellungen mehrere Lösungen gibt. Beispielfhaft sollen einige Plots ausgedruckt und mit Notizen versehen in die Mitschrift einsortiert werden.
Tätigkeit der Lehrperson	Zunächst erklärt die Lehrperson die Aufgabenstellung, danach ist sie Ansprechperson für eventuelle fachliche Schwierigkeiten und bei Schwierigkeiten mit Geogebra. Außerdem beobachtet die Lehrperson die aktive Arbeitsphase der SchülerInnen und kontrolliert die Ergebnisse anhand der Präsentationen und Ausdrücke der SchülerInnen.

Welche Geraden sind wohl gesucht?

Ein Knobelteam ist am Werk...

Aufgabenstellung:

Teilt euch in Dreiergruppen auf!

Jedes Gruppenmitglied erhält Informationen zu einer Geraden, wobei je zweien von euch ein Punkt und je einem/r ein Richtungsvektor vorgegeben werden.

Versucht nun zuerst in Diskussion miteinander und dann mit Hilfe des Computerprogramms Geogebra Geraden mit folgenden Vorgaben zu finden:

1. Die drei Geraden sind parallel zueinander.
2. Die drei Geraden schneiden einander in einem Punkt.
3. Die drei Geraden sind windschief.

Betrachtet mehrere Lösungen zu diesen Aufgaben und präsentiert sie eurer/m Lehrer/in. Druckt dann je ein Beispiel aus und ordnet sie in eurer Mitschrift ein! Gebt auch die Geradengleichungen in Parameterdarstellung an und erklärt, wie ihr zu eurem Ergebnis gekommen seid!

Mögliche Vorgaben:



• Gerade 1: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ • Gerade 2: $P = (-1 -1 4)$ • Gerade 3: $Q = (1 1 - 1)$	• Gerade 1: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ • Gerade 2: $P = (-3 -1 0)$ • Gerade 3: $Q = (1 3 4)$
• Gerade 1: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$ • Gerade 2: $P = (1 0 - 3)$ • Gerade 3: $Q = (1 3 - 3)$	• Gerade 1: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ • Gerade 2: $P = (3 -8 5)$ • Gerade 3: $Q = (1 2 - 3)$
• Gerade 1: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ • Gerade 2: $P = (0 3 - 2)$ • Gerade 3: $Q = (9 -2 7)$	• Gerade 1: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ • Gerade 2: $P = (-3 -1 0)$ • Gerade 3: $Q = (1 -8 - 9)$

Möglicher Lösungsvorschlag:

Vorgaben:

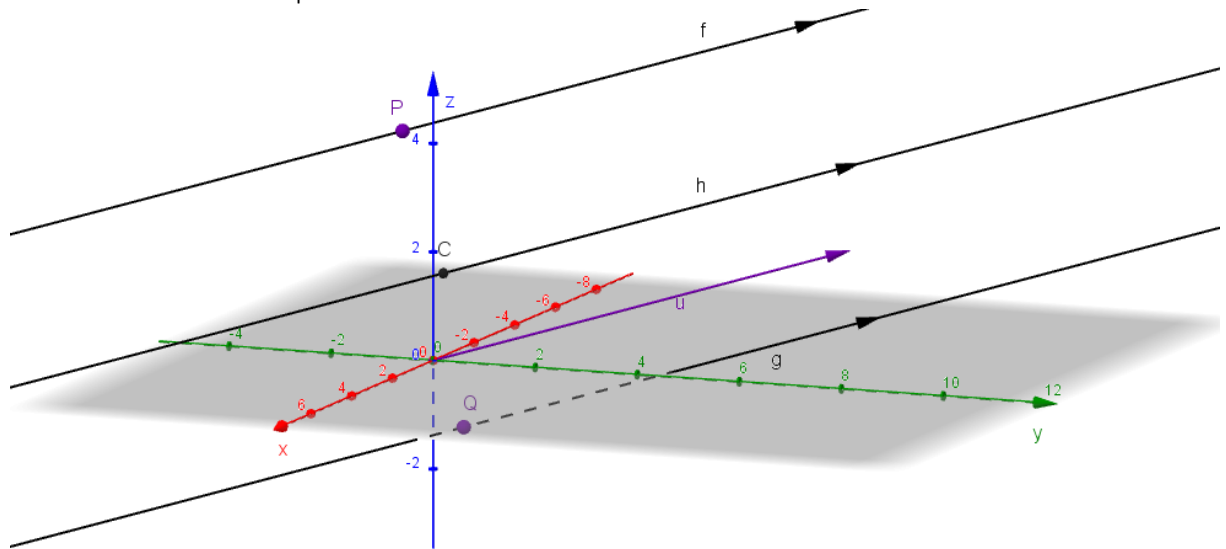
- Gerade 1: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$
- Gerade 2: $P = (-1|-1|4)$
- Gerade 3: $Q = (1|1| - 1)$

Anmerkung:

Im Folgenden sind die gegebenen Punkte und Richtungsvektoren lila eingezeichnet, die Lösungen schwarz.

Lösungen:

1. Die drei Geraden sind parallel:



Die Geradengleichungen lauten:

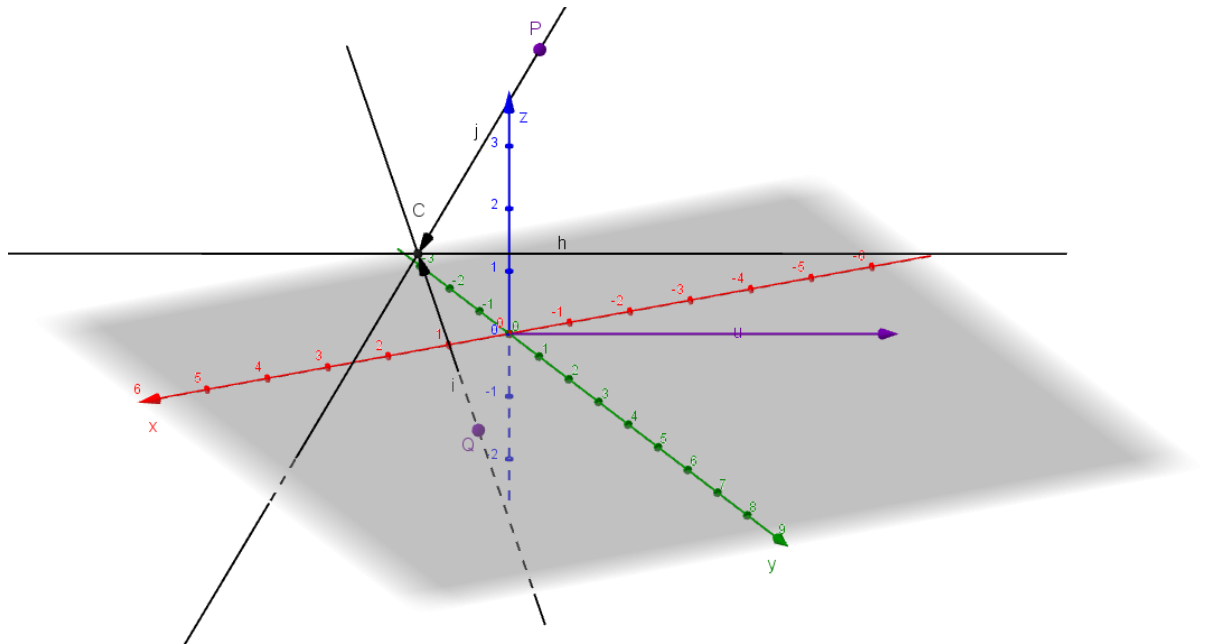
$$h: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f: X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Erklärung: Die Geraden müssen parallel sein, also müssen ihre Richtungen gleich sein. Somit ist die Parameterdarstellung je 1 Punkt plus der vorgegebene Richtungsvektor. Für Gerade 2 und 3 waren die Punkte vorgegeben. Für die erste Gerade konnte man einen Punkt frei wählen.

2. Die drei Geraden schneiden einander in einem Punkt.



Die Geradengleichungen lauten:

$$h: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

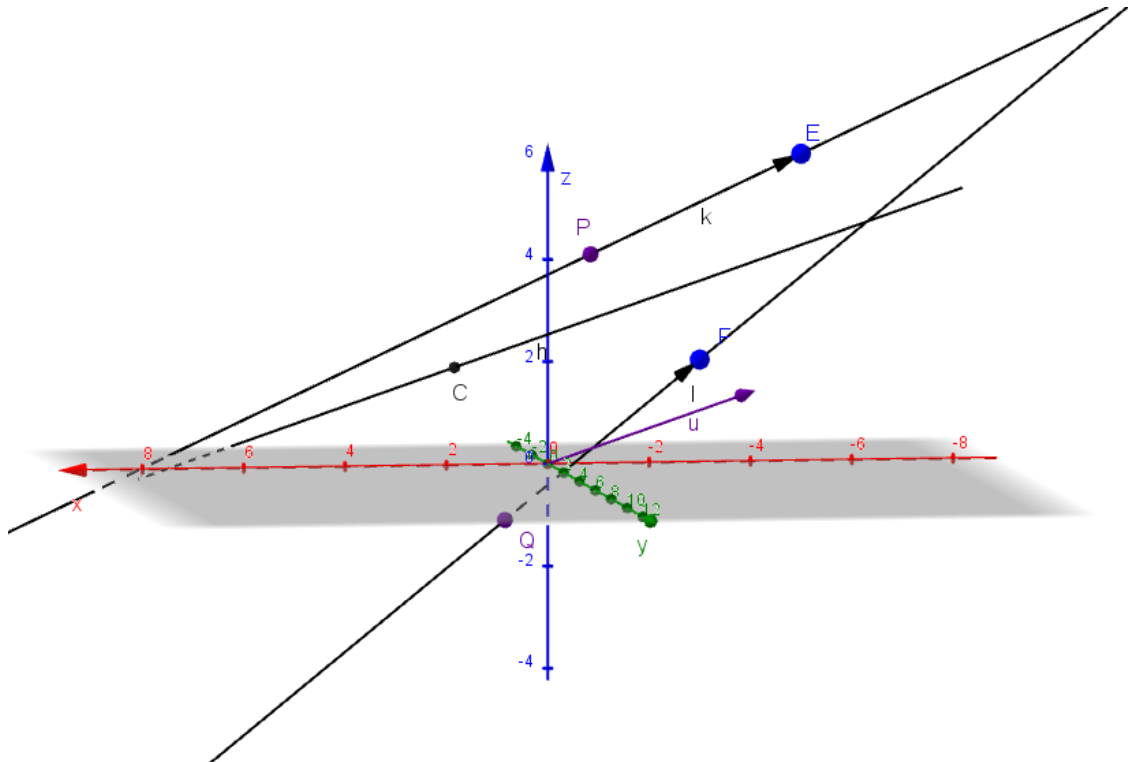
$$j: X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$i: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Erklärung:

Die erste Gerade geht wieder durch den (beliebigen) Punkt $C = (2|1|2)$ und hat den gegebenen Richtungsvektor. Die Punkte der Geraden 2 und 3 sind gegeben. Die Richtungsvektoren ergeben sich daraus, dass der Punkt C in diesem Beispiel schon der Schnittpunkt ist. Durch $C-P$ und $C-Q$ erhält man die Richtungsvektoren der beiden Geraden i und j.

3. Die drei Geraden sind windschief.



Die Geradengleichungen lauten:

$$h: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$k: X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$l: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Erklärung:

Die erste Gerade wird gewählt wie bisher. Durch Ausprobieren wurden die beiden anderen Geraden ermittelt und überprüft ob die drei Geraden windschief sind, indem versucht wurde, sie miteinander zu schneiden.

7.4 Beispiel zur Methode Ich – Du- Wir

Kurzbeschreibung	Die SchülerInnen bekommen die Aufgabe darüber zu reflektieren, ob es möglich ist, Vektoren miteinander zu dividieren. Sie sollen zuerst selbstständig darüber nachdenken, ob dies möglich sein könnte. Ihr Vorwissen über die unterschiedlichen Formen von Multiplikation von Vektoren soll ihnen dabei hilfreich sein. Danach wird mit Partner diskutiert und an der Lösung des Problems weitergearbeitet. Abschließend folgt eine Gruppendiskussion, in der möglichst alle Beteiligten ihre Meinungen und Überlegungen argumentieren sollen. Die SchülerInnen sollen während der Durchführung des Arbeitsauftrags immer Notizen zu ihren Überlegungen machen, die im Nachhinein als Ergebnissicherung, aber auch als Rückblick dienen sollen.
Grundkompetenzen	Vektoren AG 3.3
Lehrplan	5. Klasse: Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen, geometrische Veranschaulichung dieser Rechenoperation; Skalarprodukt; 6. Klasse: Definieren des vektoriellen Produkts
Schulstufe	6., 7. oder 8.Klasse AHS eventuell Wahlpflichtfach
soziale und personale Ziele	Selbstvertrauen für mathematisches Denken stärken; Argumentieren und Diskutieren üben; Sprachliche Kompetenz steigern; Schüchternheit ablegen; Gedanken strukturieren und ausformulieren; Akzeptieren anderer Überlegungen; Ideen anderer annehmen und gemeinsam weiterkommen;
Funktion	Experimentieren, reflektieren und systematisieren des Vorwissens;

Sozialform	Einzel- und Partnerarbeit, abschließend Diskussion im Klassenverband
Material und Medien	-
Ergebnissicherung	Notizen während der Einzel – und Partnerarbeit Beteiligung an der Diskussion
eventuelle Schwierigkeiten und Lösungsideen	mögliche Verweigerung von uninteressierten SchülerInnen – die Lehrperson soll versuchen, die SchülerInnen trotzdem zu motivieren und ihnen diese Art von Lernen attraktiv zu machen. Mögliche Ratlosigkeit – bei genereller Unkenntnis könnte man den SchülerInnen erlauben, in größeren Gruppen zu arbeiten oder sogar das Internet für Recherchezwecke zu verwenden.
Aktive Arbeitsphase	Nachdenken über diese Fragestellung; Aufschreiben von eigenen Ideen; danach Absprechen mit Partner; gemeinsam auf eine Lösung kommen, die in der Diskussion vertreten wird.
Tätigkeit der Lehrperson	Anfangs erklärt die Lehrperson die Aufgabenstellung und erklärt die Methode. Danach ist die Lehrperson Beobachter des Geschehens und steht für Fragen zur Verfügung. Zum Abschluss moderiert er/sie die Diskussion im Klassenverband.

Skalarprodukt, Vektorprodukt, Kreuzprodukt...

Und was ist mit der Division?

Aufgabenstellung:

Ihr habt nun schon etliche Arten von Multiplikationen im Zusammenhang mit Vektoren kennen gelernt. Nun wäre es doch interessant, sich zu überlegen, wie denn eine Division von Vektoren aussehen könnte.

Mach dir zunächst **alleine** über dieses Thema Gedanken!

Frage dich, wie so eine Division aussehen könnte und wie man sie geometrisch interpretieren könnte. Welche Art von Multiplikation würde denn ihr Gegenstück sein?

Du hast dafür 15 Minuten Zeit.

Danach besprich deine Überlegungen und Ideen mit **einem Partner!**

Einigt euch auf gemeinsame Argumente!

Ihr habt wiederum 15 Minuten Zeit.

Zum Abschluss sollt ihr eure Ideen in einer **Diskussion** innerhalb der **Klasse** verteidigen und argumentieren, wie ihr zu euren Überlegungen kommt. Könnt ihr euch auf eine Antwort einigen?

Notizen Einzelarbeit:
Notizen Partnerarbeit:
Antwort der Klasse:

Möglicher Lösungsvorschlag:

Notizen Einzelarbeit:

Es gibt ja verschiedene Produkte mit Vektoren:

Multiplikation mit einem Skalar. Da wird ein Vektor verlängert. Wenn man dividiert, wäre es, als würde man mit einem Bruch multiplizieren. Das heißt einer Zahl kleiner Eins und das wiederum wäre eine Verkürzung oder Verkleinerung eines Vektors. Das geht.

Skalarprodukt. Da werden zwei Vektoren miteinander multipliziert. Das Ergebnis ist aber eine Zahl. Wie soll man also umgekehrt eine Zahl durch einen Vektor dividieren? Möglicherweise kann man noch einen Vektor erraten, der für das Skalarprodukt passt.

Kreuzprodukt. Beim Kreuzprodukt werden zwei Vektoren „multipliziert“ und das „Produkt“ ist wieder ein Vektor. Aber das Multiplizieren von den Vektoren ist ja nicht wirklich ein reines Multiplizieren, sondern etwas sehr komplexes. Ich kann mir nicht vorstellen, dass es da eine Umkehrrechenart gibt.

Notizen Partnerarbeit:

Man kann höchstens beim Multiplizieren mit einer Bruchzahl von Dividieren eines Vektors sprechen. Und da ist es ja nicht Vektor durch Vektor.

Antwort der Klasse:

Es gibt keine Division von Vektoren.

7.5 Beispiel zur Methode Mathe – Panini

Kurzbeschreibung	Jeder Schüler und jede Schülerin bekommt ein Raster und eine Liste von Fragestellungen. Als erstes beginnen die SchülerInnen damit, sich zu überlegen, welche Fragen sie, ohne in den Schulbüchern nachzulesen, beantworten können. Diese Fragen dürfen sie in ihr Raster eintragen. Die übrig gebliebenen können sie nun erlangen, indem sie Fragen und Antworten mit ihren KollegInnen tauschen. Zum Tausch bittet man sein Gegenüber, ihm die Antwort auf eine frei gebliebene Frage zu erklären. Erst, wenn man sicher ist, die Antwort verstanden zu haben und sie richtig und eigenständig weitergeben zu können, darf dies in das Raster eingetragen werden.
Grundkompetenzen	Vektoren AG 3.1., AG 3.2., AG 3.3, AG 3.4, AG 3.5
Lehrplan	Vektoren und analytische Geometrie der Ebene 5. Klasse
Schulstufe	6.Klasse AHS
soziale und personale Ziele	Kommunikation mit den MitschülerInnen; geeignete, verständliche Ausdrucksweise; über Mathematik sprechen; Selbstreflexion; Stärkung des Klassenbundes
Funktion	Wissen auffrischen
Sozialform	Einzelarbeit, Partnerarbeit, Klassenverband
Material und Medien	Arbeitsblätter
Ergebnissicherung	Beobachtung durch die Lehrperson, abschließende mündliche Besprechung der Fragestellungen
eventuelle Schwierigkeiten und Lösungsideen	Lautstärke – darauf plädieren, sich leise zu unterhalten; Unterhaltungen über andere Themen – Lehrperson muss beobachten und zuhören;
Aktive Arbeitsphase	Die SchülerInnen müssen ihr Vorwissen abfragen und Formulierungen finden. Sie kommen in Bewegung, weil sie zum Tauschen aufstehen und gehen müssen. Sie hören die Antworten wiederholt, was zu einer besseren Merkfähigkeit

führen soll. Durch das Finden eigener Worte verfestigt sich das Wissen.

Tätigkeit der Lehrperson

Zunächst erklärt die Lehrperson, was zu tun ist. Danach ist sie stiller Beobachter und stellt sicher, dass die SchülerInnen aktiv sind und die Aufgabe ordentlich lösen.

Sammeln, sammeln, sammeln!!!

Das Vektor - Panini

Aufgabenstellung:

Bestimmt kennst du Sammelalben, wie das Panini-Album. Heute gibt's das mal für das Thema Vektorrechnung. Im untenstehenden Kästchen findest du einige Fragestellungen. Beginne zuerst damit, alle Fragestellungen, die du weißt stichwortartig in das Raster einzutragen.

Jetzt beginnt die Tauschaktion: Für die fehlenden Antworten kannst du deine MitschülerInnen um Hilfe bitten. Erst, wenn du eine Antwort so gut verstanden hast, dass du sie jemand anderem weiter geben könntest, darfst du auch diese Frage eintragen. Im Gegenzug erklärst du deinem Gegenüber eine deiner Antworten. Ziel ist, alle Felder zu füllen.

Auf die Plätze, Tauschen, LOS!!!

Fragestellungen:

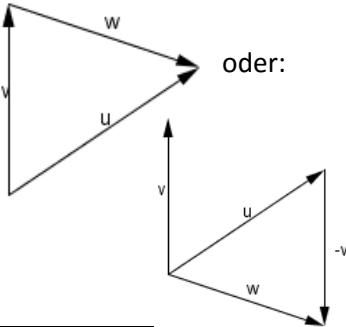
- Erkläre die Vektoraddition im geometrischen Sinn!
- Erkläre die Subtraktion zweier Vektoren im geometrischen Sinn!
- Erkläre das Skalarprodukt im geometrischen Sinn!
- Erkläre das Skalarprodukt im algebraischen Sinn!
- Wie wird ein Vektor berechnet?
- Deute eine Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar!
- Was ist ein Normalvektor?
- Wie wird ein Normalvektor im $\mathbb{R}^2$ gebildet?
- Wann sind zwei Vektoren normal?
- Wie wird eine Gerade in Parameterdarstellung im $\mathbb{R}^2$ aufgestellt?
- Wie können Geraden zueinander liegen?
- Was muss man tun, wenn eine Gerade die x-Achse schneiden soll und man den Schnittpunkt ermitteln möchte?

Das Vektor – Panini

Trage die erledigten Fragen stichwortartig ein!

Das Vektor – Panini – möglicher Lösungsvorschlag

Anmerkung: Die SchülerInnen sollen die Aufgaben erklären können. Sie müssen keine Notizen machen

Vektoraddition geometrisch. „Zwei Pfeile aneinander hängen. Neuer Vektor geht von Schaft Pfeil 1 zu Spitze Pfeil 2.“	Subtraktion geometrisch $\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$ 	Skalarprodukt geometrisch „Das Skalarprodukt ist eine Normalprojektion und, wenn sie Null ist, müssen die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen“
Skalarprodukt algebraisch: „Das Skalarprodukt ist die Summe der Produkte der zusammengehörigen Zeilen. Aus zwei Vektoren wird ein Skalar.“	Vektor berechnen „ Koordinaten des Endpunktes minus Koordinaten des Anfangspunktes. „	Multiplikation mit Skalar: „Geometrisch: Veränderung der Länge eines Vektors. Ein Skalar größer 1 verlängert den Vektor verlängert, zwischen 0 und 1 verkürzt ihn. Minus ändert die Orientierung. Algebraisch werden die einzelnen Vektoreinträge vergrößert oder verkleinert.“
Normalvektor „Steht im rechten Winkel auf den Ausgangsvektor, es gibt links – und rechtsgekippte Normalvektoren“	Bilden des Normalvektors: $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\vec{n}_a^l = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ $\vec{n}_a^r = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$	Überprüfen Normalvektoren „Zwei Vektoren sind normal aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.“
Gerade im $\mathbb{R}^2$ in Parameterdarstellung „Mit einem Punkt A und einem Richtungsvektor $\vec{v}$: $g: X = A + s \cdot \vec{v}$“	Lagebeziehungen Geraden: „identisch, parallel, einander schneidend und im $\mathbb{R}^3$ auch windschief. “	Gerade schneidet x-Achse „mit Parameterdarstellung der x-Achse gleich setzen. Lösung einsetzen in Parameterdarstellung der Gerade oder x-Achse. Man erhält den Schnittpunkt.“

7.6 Beispiel zur Methode Poster

Kurzbeschreibung	Die Klasse muss sich in möglichst gemischte Gruppen aufteilen, jede Gruppe sucht sich eines der vorgegebenen Themen aus. Dazu wird das Wissen der Gruppenmitglieder gesammelt und dazu ein Plakat gestaltet. Dieses wird von einem Gruppensprecher vor der Klasse präsentiert, es sollen Rückmeldungen der KollegInnen erfolgen
Grundkompetenzen	Vektoren AG 3.4
Lehrplan	• 5. Klasse: Beschreiben von Geraden durch Parameterdarstellung und durch Gleichungen • 6. Klasse: Beschreiben von Geraden und Ebenen durch Parameterdarstellungen bzw. Gleichungen
Schulstufe	6. Klasse AHS
soziale und personale Ziele	Teamwork; Verbesserung der Klassengemeinschaft; Arbeitsaufteilung und gemeinsames Arbeiten und Lernen; Stärken aller Gruppenmitglieder sehen und davon profitieren; Kommunikation über mathematische Inhalte; Kreatives Arbeiten und Gestalten; Konstruktive Kritik geben und annehmen können;
Funktion	Wissen systematisieren und festigen; Präsentieren von mathematischen Inhalten; Mathematische Diskussion führen;
Sozialform	Gruppenarbeit Präsentation im Klassenverband
Material und Medien	Plakate Geeignete Stifte Magnete
Ergebnissicherung	Präsentation der Plakate Diskussion

eventuelle Schwierigkeiten und Lösungsideen	Themenauswahl – notfalls teilt die Lehrperson den Gruppen die Themen zu; oder es wird zufällig gezogen Inhaltliche Schwierigkeiten – 5.Klasse und 6.Klasse Buch als Hilfestellung anbieten
Aktive Arbeitsphase	Reflektieren über die gefragten Inhalte; Zusammenfassen der wichtigsten Inhalte – sich in der Gruppe darauf einigen, welche aufs Plakat geschrieben werden; Plakat gestalten; Präsentieren; Diskutieren bei Plakatvorstellungen
Tätigkeit der Lehrperson	Berater bei Verfassen der Plakate Moderator bei Präsentation und Diskussion

Geraden und Ebenen als Gleichungen

– eine Zusammenfassung

Aufgabenstellung:

Wie kann man Geraden im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ darstellen und definieren?

Was wisst ihr über Parameterdarstellungen, Normalvektordarstellungen, Hauptformen,...?

Ihr sollt in Fünfer – oder Sechsergruppen arbeiten! Sammelt zunächst euer Wissen zu *einem* der untenstehenden Themen und fertigt mit diesen Aufzeichnungen jeweils ein möglichst ausführliches, vollständiges und übersichtliches Plakat an!

Wenn nötig, dürft ihr auch euer Schulbuch zur Hilfe nehmen.

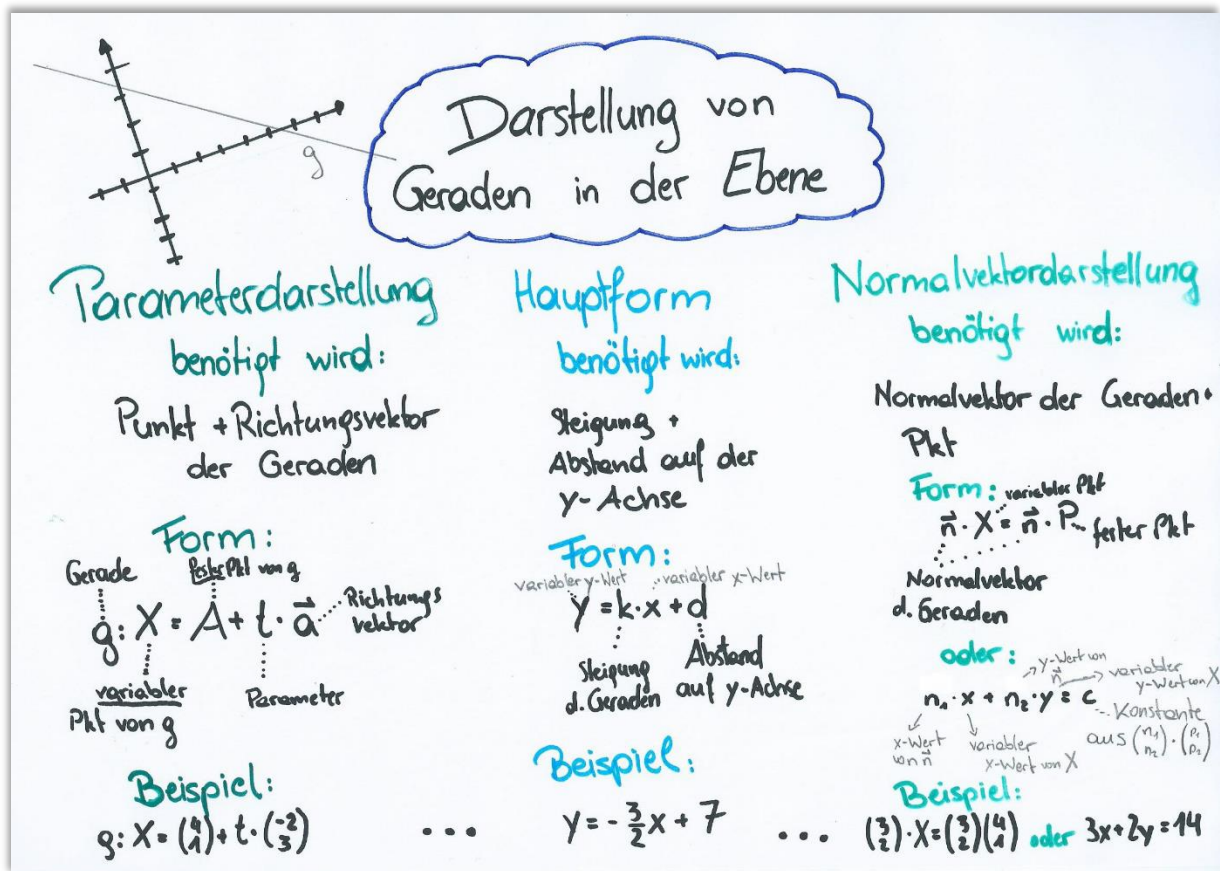
Die Themen zur Auswahl sind:

- Darstellung von Geraden in der Ebene
- Darstellung von Geraden im Raum
- Darstellung von Ebenen im Raum
- Die möglichen Darstellungsformen allgemein
- Zusammenhang der Darstellungsformen

Abschließend soll ein Gruppensprecher euer Ergebnis der Klasse präsentieren!

Möglicher Lösungsvorschlag:

zu Darstellung von Geraden in der Ebene



7.7 Beispiel zur Methode Projektarbeit

Kurzbeschreibung

Die SchülerInnen sollen sich als Klasse für den Bau eines Produkt entscheiden, dann gemeinsam den Plan für eine Umsetzung erstellen. Durch die praktische Umsetzung dieses Projektes soll das Thema Vektorrechnung immer wieder präsent sein, was die SchülerInnen darauf aufmerksam machen soll, wie die Vektorrechnung in der Praxis gebraucht und eingesetzt wird.

Ziel ist es, das Projekt fächerübergreifend umzusetzen und die Produkte tatsächlich anzufertigen und eventuell sogar zu verkaufen.

Grundkompetenzen	Vektoren AG 3.1, AG 3.2, AG 3.3, AG 3.4
Lehrplan	5. Klasse Vektoren und analytische Geometrie in der Ebene
Schulstufe	5. Klasse
soziale und personale Ziele	Diskussionsfreudigkeit Kompromissfähigkeit Präzision und Genauigkeit Teamarbeit Stärkung der Klassengemeinschaft Profitieren der Stärken der Individuen
Funktion	Vertiefend, wiederholend und praxisnah lernen
Sozialform	Einzel-, Partner-, Gruppenarbeit und Klassenverband
Material und Medien	Material zur Planung (Computer mit Geogebra, eventuell Tafel für Mindmap <i>für Liste für Bau des Produkts</i>); Material für Bau des Produkts
Ergebnissicherung	Beobachtung und Unterstützung durch Lehrperson
eventuelle Schwierigkeiten und Lösungsideen	Untertauchen von Einzelpersonen – dazu ermutigen mitzuarbeiten, ihre Stärken heraus filtern;
Aktive Arbeitsphase	Gesamtes Projekt – Planung, Bau, Verkauf
Tätigkeit der Lehrperson	Beobachtung und Unterstützung

Wir bauen ein ...

Aufgabenstellung:

Überlegt euch ein Produkt, das ihr gerne mal bauen möchtet. Überlegt euch, wie ihr dieses Projekt tatsächlich umsetzen könnt.

Fertigt dazu einen **Plan des Produkts** (zum Beispiel mit Geogebra) an und schreibt eine genaue **Liste** mit den Dingen, die ihr für den Bau dieses Produkts braucht.

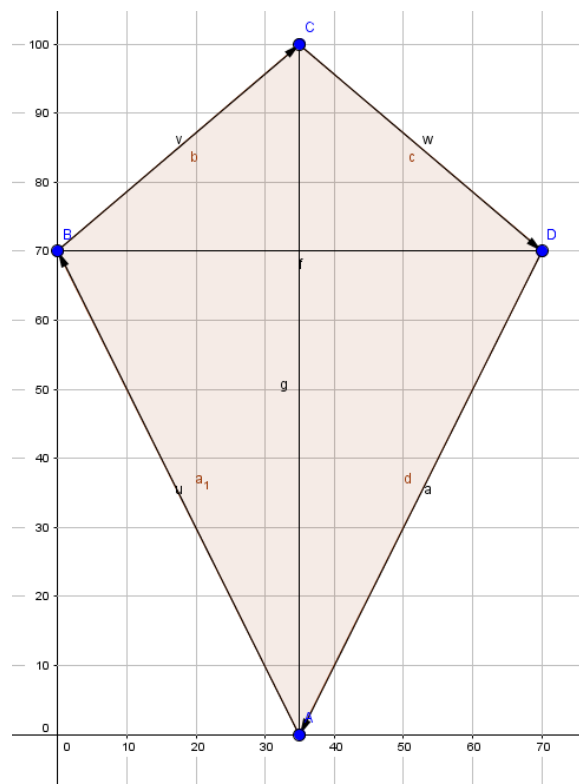
Berechnet auch, was die **Fertigung dieses Produkts kostet** und um welchen **Preis** ihr euer Produkt verkaufen könntet. Welchen Gewinn könntet ihr dabei machen?

Kann man hier Gebrauch von der Vektorrechnung machen? Und wenn ja, wie?

Möglicher Lösungsvorschlag:

Produkt Flugdrachen

Plan des Flugdrachens:



Liste für den Bau des Drachens: (gerechnet mit Hilfe von Geogebra)

- Holzstangen für den Rahmen:

Rahmen (also Umfang) und Diagonalen:

$$2 \cdot |\overrightarrow{AB}| + 2 \cdot |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{AD}| = 418.720202997915 \text{ cm} \approx 4,19 \text{ m}$$

- Stoff für die Bespannung des Drachens:

Fläche des Drachens:

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}| = 3500 \text{ cm}^2 = 0,35 \text{ m}^2$$

- Nägel zum Bau des Grundgerüsts und zum Befestigen des Stoffes

- Schnur zum Fliegen lassen.

wird an den Punkten B und D befestigt

Kosten für die Fertigstellung:

	Preis pro Einheit	Einheitswert
Holzstangen	1,99 € /Meter	5
Stoff	2,49€ /m ²	1
Nägel (100 Stück)	3,39€ / Packung	1
Schnur	0,39€ /Meter	10

$$\text{Produktionskosten } K = \begin{pmatrix} 1,99 \\ 2,49 \\ 3,39 \\ 0,39 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} = 19,73\text{€}$$

Gewinn bei Verkauf:

Es sind 28 Kinder in dieser Klasse.

Wenn alle Schüler einer Klasse ihre Drachen um 25€ verkaufen ist der Gewinn:

$$G = 28 \cdot (25 - K) = 147,56\text{€}$$

Die Vektorrechnung kann man hier beim Planen des Produkts benötigen und beim Berechnen der Kosten des Materials und des Gewinns.

7.8 Beispiel zur Methode Redaktion

Kurzbeschreibung	Die SchülerInnen sollen durch spielerische, kreative Weise ihr Wissen einsetzen und Merksätze, Liedstrophen, Reime etc. zu mathematischen Inhalten schreiben. Dafür müssen zunächst Inhalte der Vektorrechnung sammeln und in Bereiche aufteilen. Die verschiedenen Gruppen formulieren dann zu ihren zugeordneten Themenbereichen schriftliche Beiträge. Diese werden von der Lehrperson auf ihre Richtigkeit kontrolliert und dann für die ganze Klasse vervielfacht. Sie dienen als Merkhilfe für Inhalte zur Vektorrechnung.
Grundkompetenzen	Vektoren AG 3.1, AG 3.2, AG 3.3, AG 3.4
Lehrplan	5. Klasse: Vektoren und analytische Geometrie der Ebene; 6. Klasse: Analytische Geometrie des Raumes
Schulstufe	6. Klasse AHS
soziale und personale Ziele	Kreatives Arbeiten in Gruppen; Wertschätzen von Ideen anderer Gruppenmitglieder; Gemeinsames Überlegen und Reflektieren; Klassengemeinschaft stärken;
Funktion	Wiederholen von bereits bekannten Inhalten; Reflektieren von Wissen über Vektorrechnung; Formulieren von Beiträgen über mathematische Inhalte;
Sozialform	Klassengemeinschaft; Gruppenarbeit
Material und Medien	-
Ergebnissicherung	Kontrolle des Arbeitsauftrages; Beobachtung bei der Ausführung des Auftrages
eventuelle Schwierigkeiten und Lösungsideen	Mathematische Unsicherheiten und Schwierigkeiten – die SchülerInnen dürfen ihre Lehrbücher verwenden, wenn es nötig ist;

Aktive Arbeitsphase	Zunächst müssen die SchülerInnen zusammenfassen, was sie schon über Vektorrechnung wissen; diese Inhalte in Teilbereiche gliedern und zu diesen Teilbereichen Schriftstücke verschiedenster Art formulieren.
Tätigkeit der Lehrperson	Beobachtung und Moderation während der Wiederholung der Inhalte; Beobachtung beim Verfassen der schriftlichen Beiträge; Hilfestellung während der Ausführung des Arbeitsauftrages; Korrektur der ausgearbeiteten Schriftstücke;

Redaktion

Arbeitsauftrag:

Ihr wisst nun mittlerweile schon sehr viel über Vektoren und ihre Eigenschaften. Versucht nun als Klasse zunächst so viel wie mögliche Kenntnisse zu sammeln und diese in Teilbereiche zu ordnen.

Dann teilt euch in Gruppen auf und sucht euch euren Lieblingsbereich aus!

Zu diesem sollt ihr nun Merksätze, Strophen, Reime oder Ähnliches erfinden!

Und los geht's!

Sammelt die Beiträge und vervielfacht sie nach Absprache mit eurer Lehrperson für die ganze Klasse!

Möglicher Lösungsvorschlag:

Merksätze zu Multiplikation von Vektoren:

- Vektor $\cdot$ Vektor, das merk dir ja, ergibt als Ergebnis ein Skalar!
- Möchtest du im Raum den Normalvektor zweier Vektoren haben, dann musst du das Kreuzprodukt der beiden befragen!
- Verkürzung und Verlängerung eines Vektors, das ist klar, kriegst du bei Multiplikation mit einem Skalar!

7.9 Beispiel zur Methode Rätsel

Kurzbeschreibung	Die SchülerInnen sollen die in Mathematik verpackten Anweisungen zu Maxis Wegen in das Koordinatensystem eintragen. Dabei müssen sie Vektoren kennen und über Grundlagen zu Geometrie Bescheid wissen. Sie sollen außerdem die verwendeten Vektoren addieren und dieses Ergebnis mit dem „Rückkehrvektor“ vergleichen.
Grundkompetenzen	Vektoren AG 3.3
Lehrplan	5.Klasse Addieren von Vektoren, geometrisches Veranschaulichen dieser Rechenoptionen
Schulstufe	5. Klasse AHS
soziale und personale Ziele	Präzision beim Arbeiten; Spaß am Lernen haben
Funktion	Wiederholen von Inhalten zu Addition von Vektoren
Sozialform	Einzelarbeit
Material und Medien	Arbeitsblatt; Eventuell Geodreieck oder Lineal;
Ergebnissicherung	Kontrolle des Ergebnisses durch Lehrperson
eventuelle Schwierigkeiten und Lösungsideen	Nicht ernst nehmen des Arbeitsauftrages – Lehrperson soll den SchülerInnen vermitteln, dass diese Übung nützlich ist um schon bekannte Inhalte auf witzige Art und Weise zu wiederholen.
Aktive Arbeitsphase	In Einzelarbeit Kenntnisse über Addition von Vektoren anwenden; Übersetzen von Text in geometrische Objekte; Addieren von Vektoren wiederholen;
Tätigkeit der Lehrperson	Lehrperson beobachtet die SchülerInnen und hilft bei Bedarf.

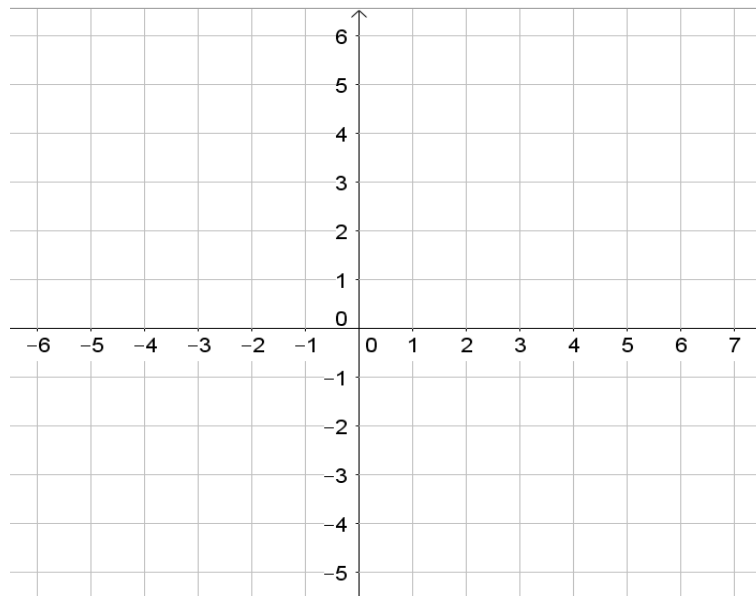
Maxi und die Vektoren - Rätsel

Aufgabenstellung:

Maxi ist ein kleines Mathemonster, das nur in Vektoren denken kann. Er begibt sich auf eine Erkundungstour im kartesischen Koordinatensystem.

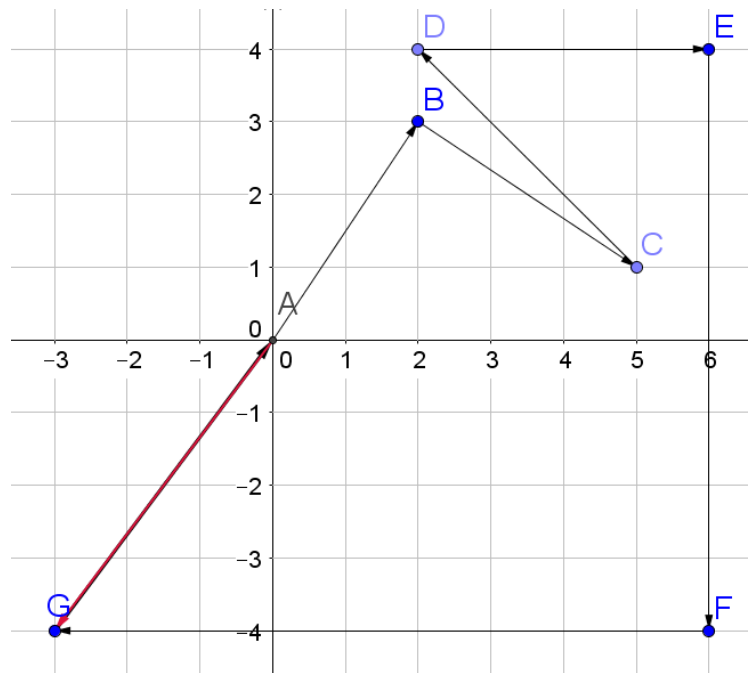
Der Anfangspunkt Maxis Weges liegt im Ursprung des Koordinatensystems. Maxi geht entlang des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bis zum ersten Punkt, dessen Koordinaten natürliche Zahlen sind. Dort macht er eine 90° Wendung nach rechts und wandert gleich weit weiter, wie die bereits zurückgelegte Strecke lang ist. Von hier aus bewegt sich der kleine Maxi um den Vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ weiter um dann parallel zur x-Achse vier Einheiten nach rechts zu laufen. Wieder biegt er um 90° nach rechts ab und geht gerade aus, bis er auf der anderen Seite der x-Achse gleich weit entfernt ist, wie er vorher war. Nun biegt er noch mal rechts ab und läuft senkrecht auf die y-Achse zu. Nach 9 Schritten bleibt er stehen. Maxi dämmert schon langsam, dass er die Orientierung verloren hat.

Du kannst ihm helfen, indem du ihm den schnellsten Weg zurück anhand eines Vektors verrätst! Wie lautet dieser Vektor?



Gib Maxis Schritte als Addition von Vektoren an und vergleiche das Ergebnis mit dem „Rückkehrvektor“!

Möglicher Lösungsvorschlag:



Der Rückkehrvektor lautet $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und ist in der Abbildung stärker markiert.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Der Vektor der Addition ist in der Farbe pink eingetragen.

Der Rückkehrvektor ist genau der Gegenvektor der Addition. Maximal 5 Schritte.

7.10 Beispiel zur Methode Placemats

Kurzbeschreibung

Die SchülerInnen sollen ihr Gedanken und ihr Wissen zum Thema „Interpretation von Vektoren“ auf sogenannte Placemats schreiben. Diese werden in der Gruppe diskutiert und schließlich ein gemeinsamer Lösungsvorschlag der Klasse präsentiert, indem die Placemats der ganzen Klasse sichtbar gemacht werden. Es soll eine gemeinsame Diskussion entstehen.

Grundkompetenzen

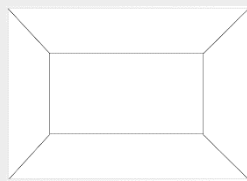
Vektoren AG 3.1, AG 3.2

Lehrplan

-

Schulstufe

5. Klasse AHS

soziale und personale Ziele	Mut zum Reflektieren und in Worte fassen von mathematischen Inhalten erlangen; Teamwork in der Klasse fördern; Selbstvertrauen für Diskussionen fördern; Konstruktive Kritik ausüben und annehmen können;
Funktion	Wiederholen und reflektieren von angeeignetem Wissen;
Sozialform	Einzel- und Gruppenarbeit, Diskussion im Klassenverband
Material und Medien	Placemat: Ein A3 Blatt soll folgendermaßen eingeteilt werden; Magnete;
	
Ergebnissicherung	Präsentation der Placemats und Diskussion
eventuelle Schwierigkeiten und Lösungsideen	Lautstärke bei Gruppenarbeit – es könnten einzelne Gruppen auch außerhalb des Klassenzimmers arbeiten. Durch stilles Aufschreiben und Kommentieren am Beginn sollte die Lautstärke zumindest bis zu den gemeinsamen Diskussionen kein Problem sein; Gruppen könnten voneinander „abschreiben“ – Lehrperson beobachtet das Arbeiten der Einzelpersonen und der Gruppen und bietet den Gruppen genügend Raum;
Aktive Arbeitsphase	Die SchülerInnen müssen zunächst selbstständig über ihr Wissen reflektieren und es aufschreiben, dann mathematische Inhalte von ihren GruppenkollegInnen kommentieren und bei Diskussionen in den Gruppen und in der Klassengemeinschaft ihre Standpunkte vertreten.
Tätigkeit der Lehrperson	Die Lehrperson dient als Beobachter des Geschehens und als Beratung bei eventuellen Schwierigkeiten. In der abschließenden Diskussion ist die Lehrperson als Moderator tätig.

Placemat Vektoren

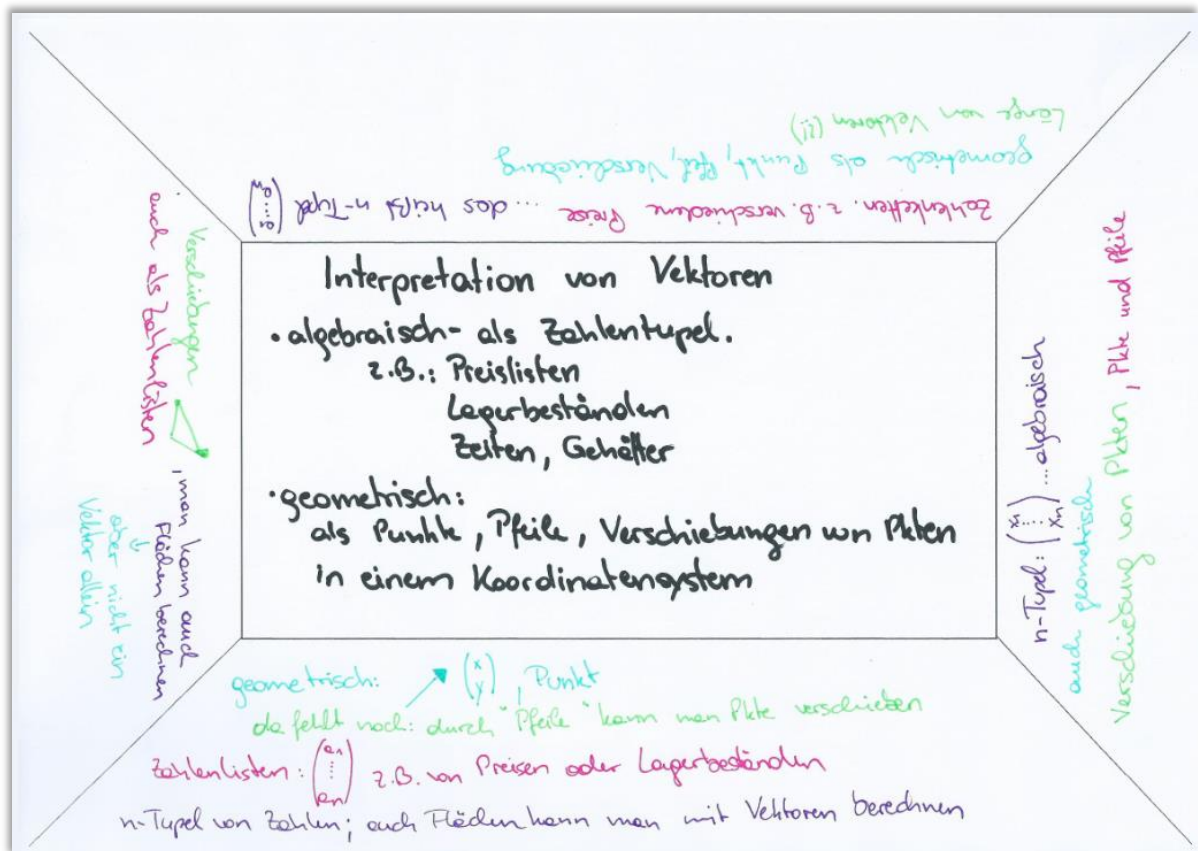
Arbeitsauftrag:

Teilt euch in Vierergruppen auf und setzt euch zusammen an einen Tisch!

Ihr bekommt ein Placemat auf dem zuerst jedes Gruppenmitglied für sich Überlegungen und Ideen zum Thema „Interpretation von Vektoren“ notieren soll und in seinem Feld aufschreibt. Dann wird der Papierbogen so oft rotiert, bis jedes Gruppenmitglied alle Beiträge gelesen hat. Verwendet unterschiedliche Farben und kommentiert anhand von Notizen die Beiträge eurer Gruppenmitglieder. Anschließend sollt ihr als Gruppe über eure Gedanken und Interpretationen diskutieren und in das mittlere Feld eine gemeinsame Version verfassen.

Am Ende sollt ihr auch die Interpretationen der anderen Gruppen kennen lernen. Dafür werden alle Placemats an die Tafel gehängt und im Klassenverband verglichen.

Möglicher Lösungsvorschlag:



7.11 Beispiel zur Methode Spiele

Kurzbeschreibung	Das Spiel dient zur Festigung der Kenntnisse über die geometrische Auffassung von Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Durch Würfeln werden Vektoren bestimmt, die den Spielzügen entsprechen. Ein Schritt entspricht dabei das Vorrücken um ein Kästchen des Spielfeldes. Ziel ist, seine 5 Spielfiguren von einer Seite des Spielfeldes auf die andere zu bringen. Stoßen zwei Spielmannchen auf das gleiche Feld, muss das schon stehende Spielmannchen zurück zum Start und das neue nimmt seinen Platz ein. Wer zuerst alle Spielfiguren im Ziel hat, gewinnt.
Grundkompetenzen	Vektoren AG 3.2
Lehrplan	5. Klasse geometrisches Veranschaulichen von Vektoren
Schulstufe	5. Klasse AHS
soziale und personale Ziele	Spaß am Lernen; Klassengemeinschaft fördern;
Funktion	Wiederholen und Vertiefen der geometrischen Auffassung von Vektoren Haptisches Lernen; „begreifen“ der Interpretation von Vektoren als Verschiebungen;
Sozialform	Partner– oder Gruppenarbeit
Material und Medien	Spielplan und Spielanleitung; Würfel und Spielfiguren für jede Spielgruppe;
Ergebnissicherung	Beobachtung durch die Lehrperson;
eventuelle Schwierigkeiten und Lösungsideen	Unterschiedliche Spieldauer – anstatt eine Anzahl von Runden wäre günstig eine Spieldauer anzugeben;
Aktive Arbeitsphase	Die SchülerInnen spielen das Vektorspiel.
Tätigkeit der Lehrperson	Beobachtung und eventuelle Hilfestellung

Vektorspiel

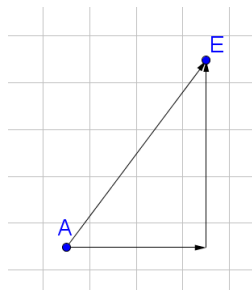
Spielanleitung

Man bekommt 5 Spielmännchen, die man von einer Seite des Spielfelds auf die andere bringen muss. Das kann man indem man seine Spielmännchen durch von Vektoren bestimmte Spielzüge fortbewegt. Diese Spielzüge bzw. Vektoren werden bestimmt, indem zwei Mal gewürfelt wird. Der erste Wurf bestimmt die x-Komponente, der zweite die y-Komponente der Vektoren. Ein Schritt entspricht dabei das Vorrücken um ein Kästchen des Spielfeldes. Treffen zwei Spielmännchen aufeinander, so muss das Männchen, das schon auf dem Feld ist wieder zurück an den Start und das neue Männchen nimmt seinen Platz ein.

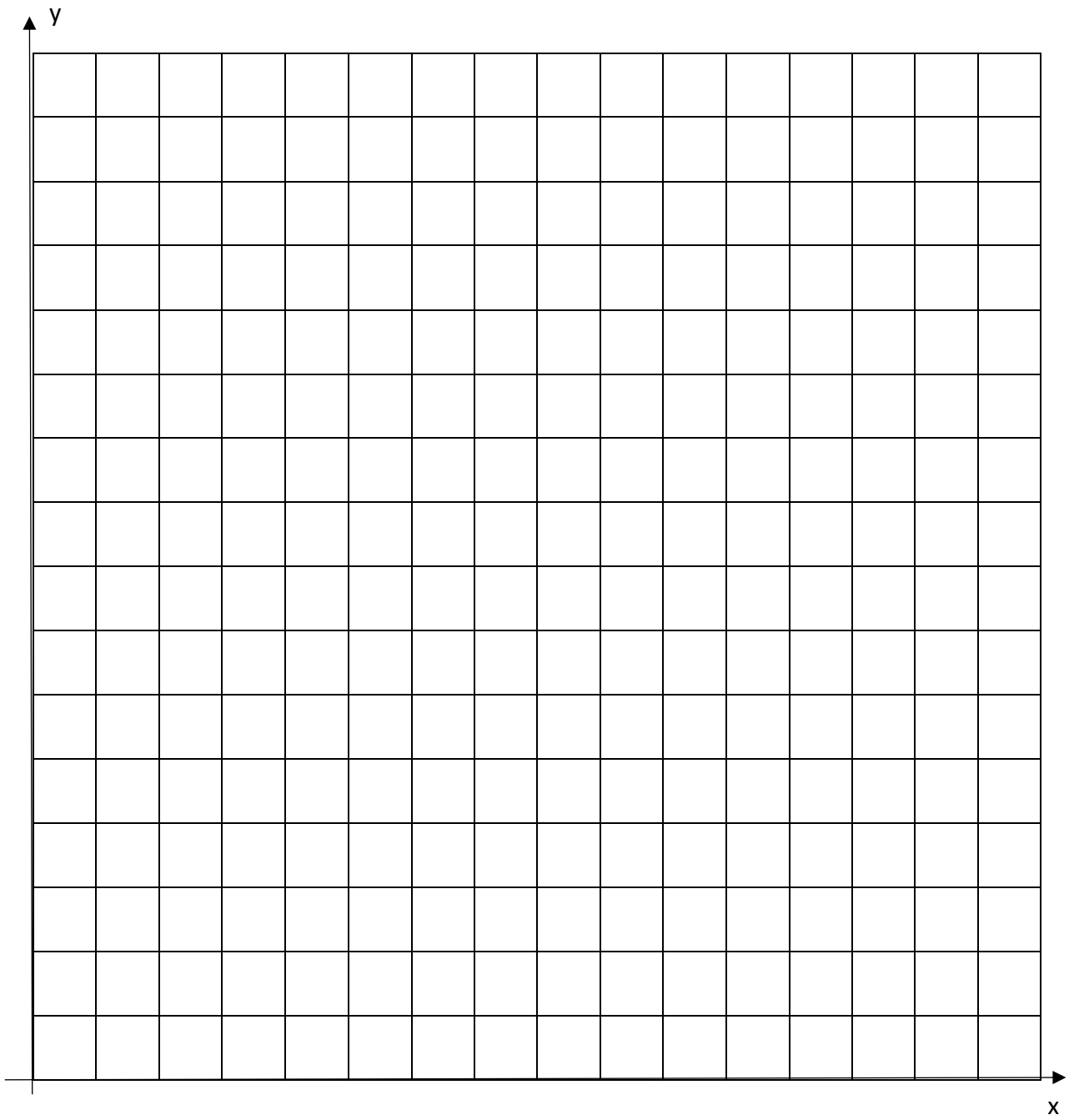
Sieger ist, wer als erstes alle 5 Männchen sicher auf die andere Seite des Spielfelds gebracht hat.

Das Spiel ist geeignet für 2 – 4 Spieler.

Beispiel für einen Spielzug: würfelt man für zuerst die Zahl 3 und dann die Zahl 4, dann entspricht das dem Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, was so viel bedeutet wie „3 Kästchen nach rechts, 4 Kästchen nach oben“.



Spielplan:



7.12 Beispiel zur Methode Stationenbetrieb

Kurzbeschreibung	Es liegt ein umfangreicher Stationenbetrieb mit Augenmerk auf die Vorbereitung zur Reifeprüfung zum Thema Vektorrechnung vor. Es gibt vier Pflicht - und zwei Wahlstationen aus denen aber mindestens eine absolviert werden muss. Ein Handzettel dient als überblicksmäßige Beschreibung der einzelnen Stationen. Die SchülerInnen sollen dort ihre schon erledigten Aufgaben als solche markieren. Station 1 ist ein Laufdiktat zur Interpretation von Vektoren. Das schon bekannte Wissen wird in spielerischer Form noch einmal aufgefrischt. Station 2 besteht aus einem ausführlichen Übungszettel zum Thema „Vektoren einsetzen und deuten“, ein praktischer Arbeitsauftrag zur Interpretation von Vektoren. Dieser soll von jedem/r SchülerIn einzeln bearbeitet werden. In Station 3 müssen die SchülerInnen in Einzelarbeit einen Lückentext zum Thema „Rechnen mit Vektoren“ ausfüllen. Es werden alle für die Reifeprüfung notwendigen Rechnungsarten behandelt. Station 4 ist in Partnerarbeit zu erledigen. Es handelt sich um ein inhaltlich umfangreiches Quiz, deren Fragen ähnlich wie die Teil-1- Aufgaben bei der Reifeprüfung aufgebaut sind. Station 5 und 6 sind zwei Spiele und stehen zur Wahl. Einmal handelt es sich um ein Domino, bei dem die Kompetenzen zu Lagebeziehungen gefragt sind, einmal um ein Tabu, dessen Begriffe aus allen Bereichen der Vektorrechnung kommen. Das Domino sollte zu zwei gespielt werden, das Tabu zu dritt.
Grundkompetenzen	Vektoren AG 3.1, AG 3.2, AG 3.3, AG 3.4, AG 3.5
Lehrplan	5. Klasse Vektoren und analytische Geometrie in der Ebene; 6. Klasse analytische Geometrie des Raumes

Schulstufe	8. Klasse AHS
soziale und personale Ziele	Motivation für Lernen mathematischer Inhalte; Kontakt mit unterschiedlichen Personen aus der Klasse; Konzentration trotz Lärm und Trubel im Klassenraum; Merkfähigkeit verbessern; Rhetorische Fähigkeiten verbessern;
Funktion	Wiederholung der Inhalte zum Thema Vektorrechnung; Vorbereitung für die Reifeprüfung
Sozialform	Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit
Material und Medien	Stationenbetrieb in Klassenstärke; Rote runde Zettel; Laudiktat laminiert Mathe – Quiz geschnitten in Stapeln; Domino geschnitten und laminiert; Tabu geschnitten und laminiert;
Ergebnissicherung	Selbst- und Partnerkontrollen
eventuelle Schwierigkeiten und Lösungsideen	Lautstärke – darauf aufmerksam machen, sich so leise wie möglich zu verhalten; Warteschlangen bei den Spielen – Stationentickets Keine Partneränderungen – Bedingung, für jede Übung anderen Partner zu wählen Zeitliche Unterschiede – zweite Wahlstation als Puffer
Aktive Arbeitsphase	Die SchülerInnen müssen die Stationen absolvieren. Sie können die Abfolge jedoch frei wählen;
Tätigkeit der Lehrperson	Beobachtung und eventuelle Hilfestellung bei inhaltlichen oder organisatorischen Schwierigkeiten;

Stationenbetrieb zur Vektorrechnung

Die Matura ist schon nah! Also sollten wir dringend unsere Kenntnisse zur Vektorrechnung auffrischen. Dieses Mal mit einem Stationenbetrieb!

Station	Was ist zu tun?	Pflicht/ Wahl	Sozialform	Art der Kontrolle	erledigt
1: Was ist ein Vektor?	Laufdiktat	P	 	Partnerkontrolle	
2: Vektoren einsetzen und deuten	Übungszettel	P		Selbstkontrolle	
3: Rechnen mit Vektoren	Lückentext	P		Selbstkontrolle	
4: Geraden, Lagebeziehungen, Rechnungsarten	Mathe-Quiz	P	 	Partnerkontrolle	
Zumindest eine der beiden Wahlstationen:					
5: geometrisch Veranschaulichen	Domino	W	 	Partnerkontrolle	
6: Begriffe der Vektorrechnung	Tabu	W	  	Kontrolle durch Gruppe	

VORGABE: STATION 1 Definition von Vektoren – ein Laufdiktat

Das folgende Laufdiktat beschreibt die verschiedenen Interpretationen von Vektoren.

Such dir einen Partner und schreib mit ihm um die Wette! Wer als erstes fertig ist, gewinnt!

Die möglichen Schreibtische sind mit einem roten Punkt markiert, die Vorgabe des Diktats bleibt auf seinem Platz!! Schreibt den Text auf das vorgegebene Blatt. Am Schluss müsst ihr auch noch ein bisschen selbst nachdenken!

Kontrolliert danach gegenseitig eure fertigen Diktate.

Auf die Plätze, fertig, los!

Vektoren können unterschiedlich interpretiert werden, nämlich algebraisch als Zahlentupel und geometrisch als Punkte und Pfeile in einem Koordinatensystem. Dabei kann ein Vektor durch unendlich viele Pfeile repräsentiert werden. Zwei Pfeile entsprechen demselben Vektor genau dann, wenn sie gleich lang, gleich gerichtet und gleich orientiert sind. Verbindet ein Vektor zwei Punkte, so berechnet man ihn durch die Differenz seines Endpunkts und seines Anfangspunkts.

Algebraisch können Vektoren für verschiedene Sachverhalte verwendet werden, zum Beispiel:

STATION 1: Definition von Vektoren – ein Lauftiktat (AG 3.1. und AG 3.2)

Lauft und schreibt um die Wette!!

[illegible]

STATION 2 Vektoren einsetzen und deuten können (AG 3.1 und AG 3.2)

Fülle den Übungszettel zunächst nach den Anweisungen alleine aus! Kontrolliere ihn anhand des Lösungzettels, den du bei der Station 2 findest!

Vektoren als Zahlentupel – ein Beispiel

Die folgende Tabelle zeigt die finanziellen Einkünfte und Ausgaben vier Schülerinnen in einem Monat:

Name	Taschengeld	Sonstige Einnahmen	Ausgaben für Nahrungsmittel	Ausgaben für Kleidung	Ausgaben für Aktivitäten
Susanne	30€	10€	17€	11€	0€
Alexandra	25€	5€	14€	2€	8€
Simone	40€	0€	5€	20€	4€
Helene	45€	10€	3€	38€	9€

- Stelle einen Vektor T auf, der das monatliche Taschengeld der vier Mädchen beschreibt.

A: _____

- Stelle einen Vektor M auf, der die monatlichen Gesamteinkünfte der Mädchen angibt.

A: _____

- Stelle einen Vektor S auf, der Simones monatliche Ausgaben angibt.

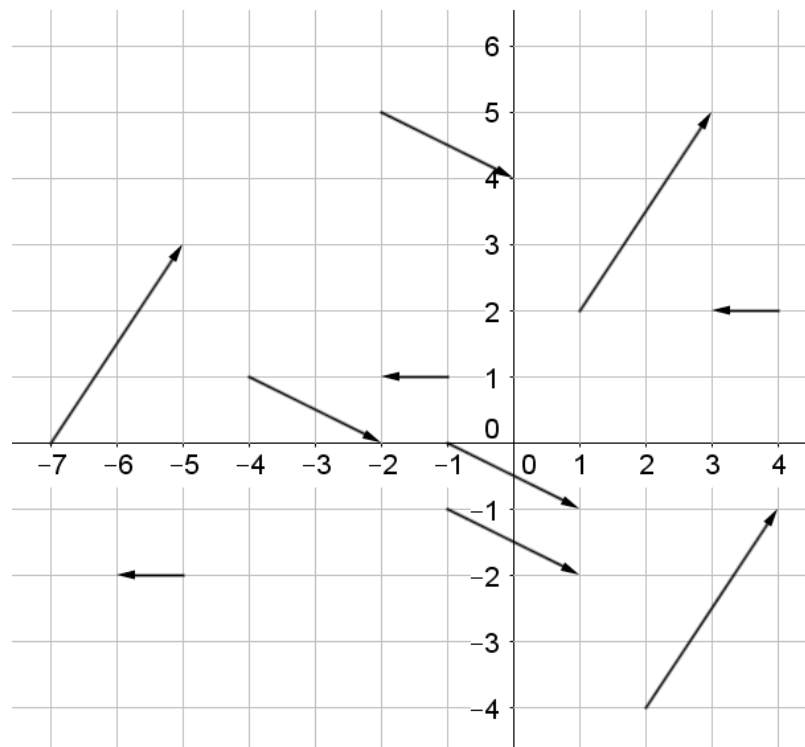
A: _____

- Was beschreibt der Vektor $D = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$?

A: _____

Vektoren als geometrische Objekte.

Welche Vektoren werden in der folgenden Abbildung des kartesischen Koordinatensystems dargestellt? Markiere, welche Pfeile die gleichen Vektoren repräsentieren!



LÖSUNG: STATION 2 Vektoren einsetzen und deuten können

Vektoren als Zahlentupel – ein Beispiel

Die folgende Tabelle zeigt die finanziellen Einkünfte und Ausgaben vier Schülerinnen in einem Monat:

Name	Taschengeld	Sonstige Einnahmen	Ausgaben für Nahrungsmittel	Ausgaben für Kleidung	Ausgaben für Aktivitäten
Susanne	30€	10€	17€	11€	0€
Alexandra	25€	5€	14€	2€	8€
Simone	40€	0€	5€	20€	4€
Helene	45€	10€	3€	38€	9€

- Stelle einen Vektor T auf, der das monatliche Taschengeld der vier Mädchen beschreibt.

A: $T = \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 40 \\ 45 \end{pmatrix}$

- Stelle einen Vektor M auf, der die monatlichen Gesamteinkünfte der Mädchen angibt.

A: $M = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 40 \\ 55 \end{pmatrix}$

- Stelle einen Vektor S auf, der Simones monatliche Ausgaben angibt.

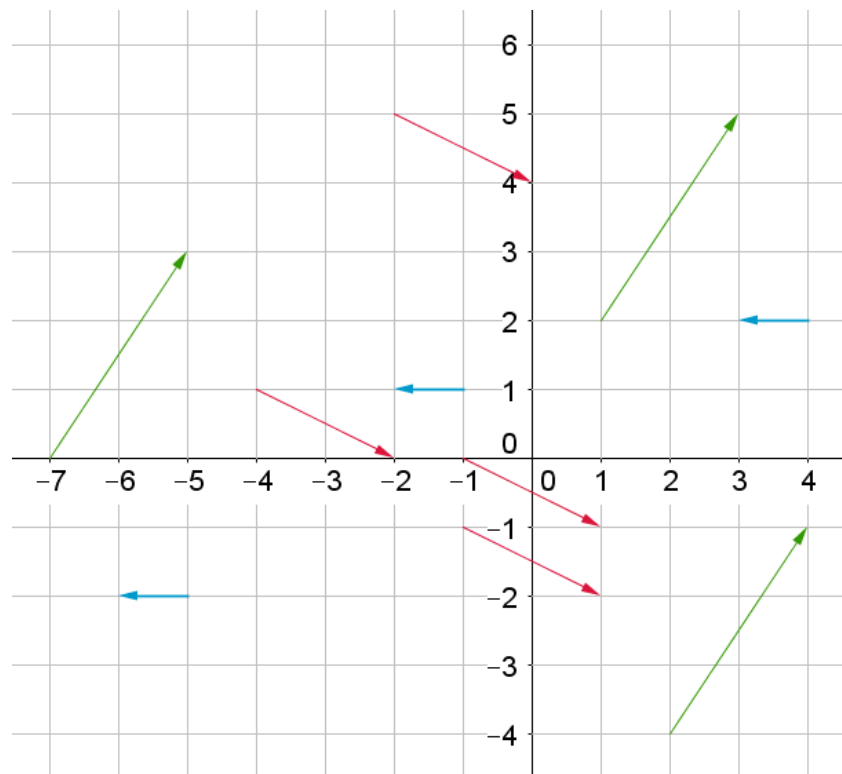
A: $S = \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Was beschreibt der Vektor $D = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$?

A: Der Vektor D ist das Restgeld, das den Mädchen nach einem Monat übrig bleibt.

Vektoren als geometrische Objekte.

Welche Vektoren werden in der folgenden Abbildung des kartesischen Koordinatensystems dargestellt? Markiere, welche Pfeile die gleichen Vektoren repräsentieren!



STATION 3: Rechnen mit Vektoren – ein Lückentext (AG 3.3)

Algebraisch gesehen funktioniert die Addition und Subtraktion von Vektoren gleich wie
_____. Werden zwei Vektoren addiert, so entsteht
_____, dessen Komponenten durch
_____ bestimmt sind. In der Mathematik schreibt man:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

und....

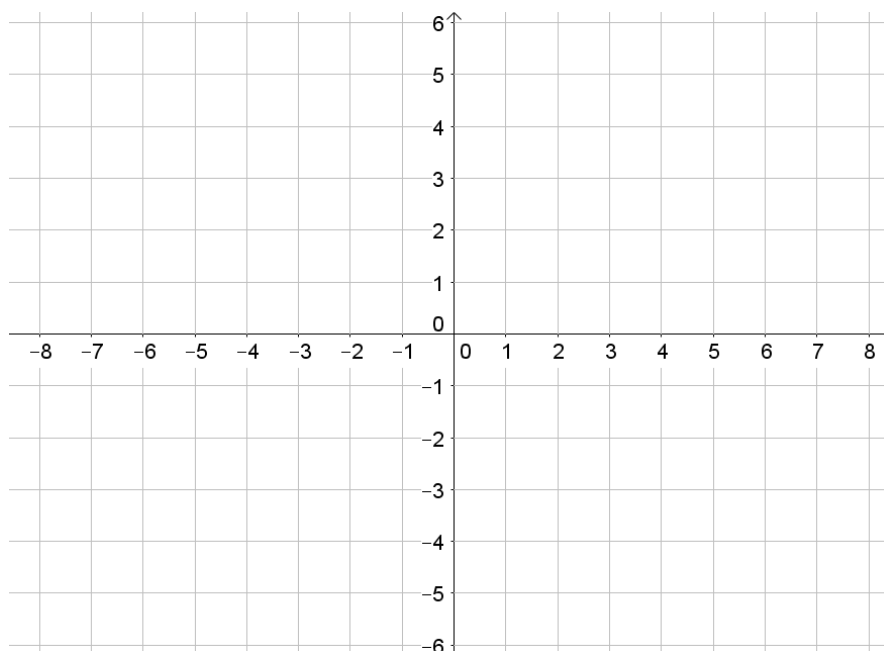
$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

Betrachtet man die geometrische Addition zweier Vektoren so ist das entweder das Anhängen
eines Pfeils an _____ oder _____.

Die Summe ist dann wieder ein _____.

Die Subtraktion $\vec{a} - \vec{b}$ ist ähnlich der Addition von Vektoren mit dem Unterschied, dass statt
dem Vektor $\vec{b}$ sein _____ verwendet wird.

Gib nun je ein Beispiel für die geometrische Interpretation von Addition und Subtraktion
mindestens zweier Vektoren an!



_____ , _____ ,
 _____. Wobei man bei der
 _____ von einer Vervielfachung des Vektors spricht. Das
 Produkt ist _____.

Sein Ergebnis ist _____. Im geometrischen Sinn hat es eine wichtige und sehr nützliche Eigenschaft: Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren _____, so stehen diese _____ aufeinander.

- Normalvektor im $\mathbb{R}^2$:

- Betrag eines Vektors $\vec{a}$:

- Einheitsvektor von $\vec{a}$:

LÖSUNG: STATION 3: Rechnen mit Vektoren – ein Lückentext (AG 3.3)

Algebraisch gesehen funktioniert die Addition und Subtraktion von Vektoren gleich wie **mit reellen Zahlen**. Werden zwei Vektoren addiert, so entsteht **ein neuer Vektor**, dessen Komponenten durch **die Addition bzw. Subtraktion der Komponenten der zu addierenden/subtrahierenden Vektoren** bestimmt sind. In der Mathematik schreibt man:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

und....

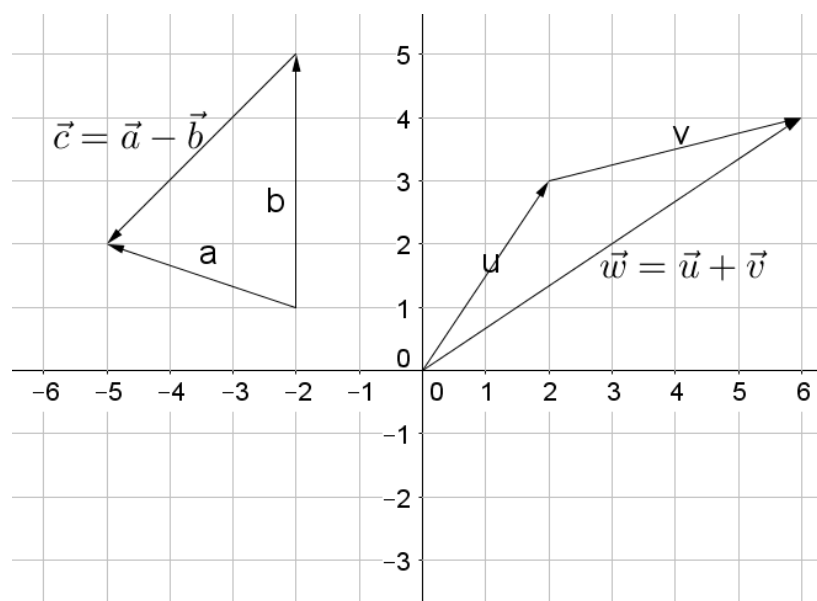
$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Betrachtet man die geometrische Addition zweier Vektoren so ist das entweder das Anhängen eines Pfeils an **einen Punkt** oder **einen Vektor**.

Die Summe ist dann wieder ein **Vektor**.

Die Subtraktion $\vec{a} - \vec{b}$ ist ähnlich der Addition von Vektoren mit dem Unterschied, dass statt dem Vektor $\vec{b}$ sein **Gegenvektor** verwendet wird.

Gib nun je ein Beispiel für die geometrische Interpretation von Addition und Subtraktion mindestens zweier Vektoren an!



Es gibt in der Vektorrechnung auch verschiedene Arten von Multiplikationen, nämlich **Multiplikation mit einem Skalar**, die **Skalarmultiplikation** und **das Kreuzprodukt**. Wobei man bei der **Multiplikation mit einem Skalar** von einer Vervielfachung des Vektors spricht. Das Produkt ist **ein Vektor**.

Das Skalarprodukt wird definiert durch: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$.

Sein Ergebnis ist **eine reelle Zahl**. Im geometrischen Sinn hat es eine wichtige und sehr nützliche Eigenschaft: Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren **Null**, so stehen diese **normal** aufeinander.

Gib auch noch die folgenden Definitionen an: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

- Normalvektor im $\mathbb{R}^2$:
dann ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und die Normalvektoren:
 $\vec{n}_a^l = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_a^r = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$
- Betrag eines Vektors $\vec{a}$:
 $|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$.
Der Betrag eines Vektors beschreibt seiner Länge.
- Einheitsvektor von $\vec{a}$:
 $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. **Seine Länge ist immer 1!**

STATION 4: Geraden, Lagebeziehungen, Rechnungsarten – ein Mathe-Quiz

AG 3.1, 3.2, 3.3, 3.4

Such dir als Erstes einen/eine SpielpartnerIn und nehmt euch jeweils einen Stapel Quizfragen.

Ihr sollt nun gegeneinander spielen.

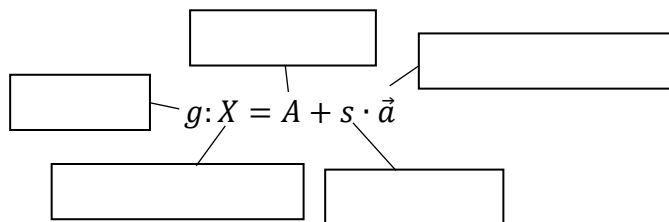
Ihr spielt gleichzeitig indem ihr die Fragen auf euren Zetteln beantwortet. Eine Runde entspricht dabei einer Frage. Wenn ihr mit der Frage fertig seid und glaubt, die richtige Antwort gefunden zu haben, sagt ihr laut: *Mathemaster!* Dann wird die Aufgabe mit den Lösungen verglichen. Hat der „Mathemaster“ die richtige Lösung, so bekommt er/sie einen Punkt, ist die Antwort falsch, so zählt der Punkt für den/die SpielpartnerIn.

Wer am Schluss die meisten Punkte hat, gewinnt das Spiel!

Frage 1 - Geraden

Ordne die richtigen Begriffe zu:

- (1) Fixer Punkt
- (2) variabler Punkt
- (3) Parameter
- (4) Gerade
- (5) Richtungsvektor



Frage 2 – Lagebeziehung

Gib die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g mit der x-Achse an!

$$g: X = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Antwort: _____

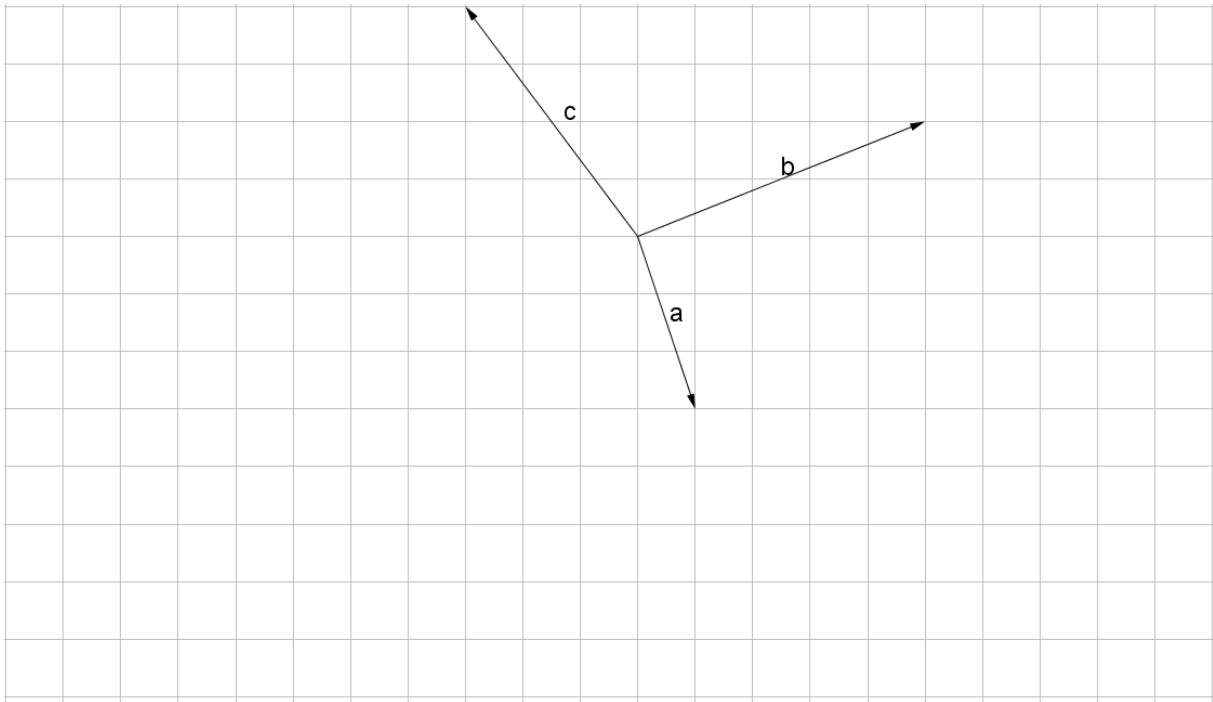
Frage 3 - Geraden

Beispiel: Gegeben sind zwei Punkte $A=(2|5|9)$ und $B=(1|3|-3)$, die auf der Geraden g in $\mathbb{R}^3$ liegen. Gib die Parameterdarstellung dieser Geraden g an!

Antwort: _____

Frage 4- Geraden

Stelle den Vektor $2a - b + c$ als Pfeil dar!



Frage 5 – Skalarprodukt

Die monatlichen Zahlungen für Strom in einem Mehrparteienhaus werden in einem Vektor

$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ dargestellt.

- Was bedeutet der Ausdruck $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot S$?

Antwort: _____

- Und was bedeutet $1,03 \cdot S$?

Antwort: _____

Frage 6 – Geraden

Eine Gerade $g: X = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist bekannt.

Gib eine Parameterdarstellung der Geraden h an, die zu g parallel ist und den Punkt $P(2|1)$ beinhaltet.

Antwort: _____

Frage 7 – Normalvektoren

Welche dieser Vektoren stehen normal auf den Vektor $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$
☐	☐	☐	☐	☐

Frage 8 - Geraden

Welche der folgenden Rechnungen hat als Ergebnis einen Vektor, wenn $\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren sind und c ein skalares Element?

☐	☐	☐	☐	☐
$\vec{a} + c \cdot \vec{b}$	$\vec{a} + \vec{b}$	$c + \vec{a} \cdot \vec{b}$	$c - \vec{b}$	$\vec{a} \cdot c \cdot \vec{b}$

Frage 9 - Lagebeziehungen

Gegeben sind zwei Geraden g und h, wobei der Richtungsvektor von h nicht festgelegt ist.

$$g: X = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad h: X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r * \vec{a}$$

Wie liegen g und h zueinander, wenn $\vec{a}$ wie folgt gegeben ist?

Ordne zu!

Lagebeziehung	
g und h sind parallel aber nicht ident	A
g und h sind identisch	B
g und h sind normal	C
g und h sind windschief	D
g und h schneiden einander	E

	Richtungsvektoren
	$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Frage 10 - Geraden

Gegeben sind die Geraden

$$g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

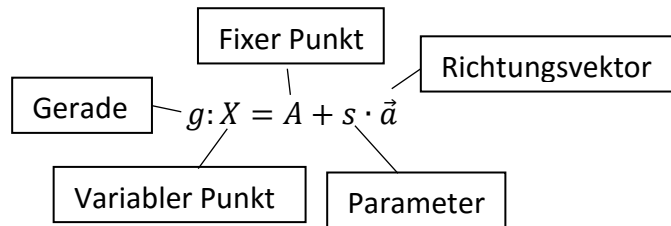
$$h: y = -\frac{3}{4}x + 5$$

Wie liegen diese beiden Geraden zueinander?

Antwort: _____

LÖSUNG STATION 4 : Mathe – Quiz

Frage 1: Lösung



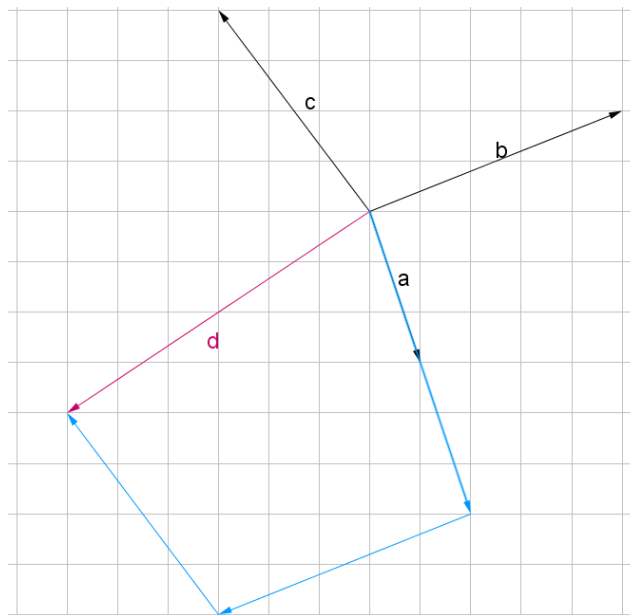
Frage 2: Lösung

$$\text{Schnittpunkt } S = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Frage 3 Lösung

$$g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Frage 4 Lösung



Frage 5 Lösung

- $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot S$ sind die gesamten Stromkosten des Mehrparteienhauses in einem Monat.
- $1,03 \cdot S$ bedeutet, dass die Mieter um 3% mehr bezahlen müssen.

Frage 6 Lösung

$$h: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Frage 7 Lösung

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$
•	○	○	•	○

Frage 8 Lösung

•	•	○	○	○
$\vec{a} + c \cdot \vec{b}$	$\vec{a} + \vec{b}$	$c + \vec{a} \cdot \vec{b}$	$c - \vec{b}$	$\vec{a} \cdot c \cdot \vec{b}$

Frage 9 Lösung

E	$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
A	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$
C	$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Frage 10 Lösung

Für Parallelität müsste die Steigung von h: $k = -\frac{4}{3}$ sein, ODER der Richtungsvektor der Geraden g: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

STATION 5: Lagebeziehungen – Mathedomino (AG 3.4, 3.5)

$k = \frac{1}{4}$	$g: X = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist parallel zu	$h: X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$ ist normal zu
$\begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix}$	Zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ passt die Steigung	$k = 7$	$g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist parallel zu
$h: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$	Zu $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ passt die Steigung	$k = \frac{1}{7}$	Ein Normalvektor von $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist
$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist normal zu	$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$	Ein Normalvektor von $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist
$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist normal zu	$\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$	Zu $\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ passt die Steigung
$k = 4$	$g: X = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ schneidet	$h: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$	Zu $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ passt die Steigung

LÖSUNG STATION 5: Lagebeziehungen - Mathedomino

$k = \frac{1}{4}$	$g: X = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist parallel zu	$h: X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$ ist normal zu
$\begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix}$	Zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ passt die Steigung	$k = 7$	$g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist parallel zu
$h: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$	Zu $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ passt die Steigung	$k = \frac{1}{7}$	Ein Normalvektor von $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist
$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist normal zu	$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$	Ein Normalvektor von $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist
$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist normal zu	$\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$	Zu $\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ passt die Steigung
$k = 4$	$g: X = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ schneidet	$h: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$	Zu $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ passt die Steigung

STATION 6: Begriffe der Vektorrechnung – das Spiel Tabu (AG 3.1, 3.2, 3.3, 3.4)

Skalarprodukt	Kreuzprodukt	Normalvektor
Ohne: • Multiplikation • Definition des Skalarprodukts • Normal	Ohne: • Multiplikation • Definition des Kreuzproduktes • Normal	Ohne: • orthogonal • rechter Winkel • 90 Grad

Vektoraddition	Vektorsubtraktion	Zahlentupel
Ohne: • Plus rechnen • Subtrahieren • zusammenzählen	Ohne: • abziehen • wegzählen • Addieren	Ohne: • Liste • Vektor • Aufzählung

Einheitsvektor	Betrag eines Vektors	Parameterform
Ohne: • Eins • Definition des Einheitsvektors • Bruch	Ohne: • Länge • Definition des Betrags • Abstand	Ohne: • Punkt + Vektor • Normalvektorform • Gerade

MÖGLICHE LÖSUNG STATION 6: Begriffe der Vektorrechnung – das Spiel Tabu

Skalarprodukt	Kreuzprodukt	Normalvektor
Mögliche Stichwörter: Rechenart ; Aufsummieren; Übergang von Vektoren auf reelle Zahlen ;	Mögliche Stichwörter: Erzeugt im Betrag einen Flächeninhalt; Man erzeugt einen dritten Vektor; Rechte-Hand-Regel;	Mögliche Stichwörter: Überprüfen mit dem Skalarprodukt; Im Raum durch Kreuzprodukt erzeugt;

Vektoraddition	Vektorsubtraktion	Zahlentupel
Mögliche Stichwörter: Geometrisch – Zusammenfügen von Pfeilen; Rechenart die funktioniert wie mit reellen Zahlen	Mögliche Stichwörter: Geometrisch ähnlich wie Zusammenfügen von Pfeilen; Entgegengesetzte Orientierung ;	Mögliche Stichwörter: Algebraische Auffassung von Vektoren; Zusammenfassen von Inhalten ;

Einheitsvektor	Betrag eines Vektors	Parameterform
Mögliche Stichwörter: Hat eine bestimmte Länge; Ist für alle dieser geometrischen Objekte gleich lang;	Mögliche Stichwörter: Kann man für die Berechnung von Flächen brauchen; Ist eine reelle Zahl	Mögliche Stichwörter: Braucht man um geometrische Objekte zu beschreiben; Variabler und fixer Teil durch reelle Zahl;

8 Resümee

Das Verfassen dieser Diplomarbeit war ein sehr durchwachsener Ablauf. Anfangs fiel es mir sehr schwer, mich an das wissenschaftliche Arbeiten und vor allem Schreiben zu gewöhnen, doch im Laufe der Zeit entwickelte ich eine Arbeitsweise, durch die ich sehr rasch zu einem Ziel fand.

Meine Forschungsfragen, wie man als Lehrperson SchülerInnen bestmöglich auf die zentrale Reifeprüfung vorbereiten kann, habe ich eigentlich schon im praktischen Teil dieser Arbeit beantwortet. Durch unterschiedlichste an die inhaltliche Thematik angepasste Methoden, können die SchülerInnen mit Übungsmaterial für die zentrale Reifeprüfung arbeiten. Ich habe herausgefunden, dass es auch zahlreiche Möglichkeiten gibt, den SchülerInnen zu zeigen, dass sie ihr Übungsmaterial selbst erstellen können. Dadurch lernen sie, worauf sie bei der Vorbereitung für die Matura besonderes Augenmerk legen sollten und verinnerlichen den Stoff noch intensiver. Die Methode Projektarbeit zeigt ein sehr praxisnahes Beispiel, das im Unterricht, wenn möglich fächerübergreifend, durchgeführt werden kann.

Schlussendlich möchte ich anmerken, dass das Thema Vektorrechnung natürlich nur ein kleiner Teil der Inhalte für die zentrale Reifeprüfung und vor allem des Lehrplans ist und ich im Rahmen dieser Arbeit auch nicht alle Teilbereiche der Vektorrechnung berücksichtigen konnte.

Als weiterführende Arbeit könnte man sich noch mehr Gedanken über offenes Lernen und schulische Lerninhalte machen und darüber, wie man auch in anderen Themenbereiche mit geeigneten, schülerzentrierten Methoden zur Vorbereitung für die Matura unterrichten kann.

9 Verzeichnisse

9.1 Literaturverzeichnis

- Aue, Vera, et al. „Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik.“ März 2013.
https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_2013-03-11.pdf. 16.06.16.
- Bachmann, Judith, Harald Lederer und Katharina Luksch. *Zentral-Matura 2016 Mathematik*. Stark Verlagsgesellschaft mbH & Co.KG, 2015.
- Barzel, Bärbel; Büchter, Andreas; Leuders, Timo. *Mathematik Methodik; Handbuch für die Sekundarstufe I und II*. Berlin: Cornelsen Schulverlage GmbH, 2014.
- Barzel, Bärbel, et al. *Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor GmbH&Co.KG, 2011.
- Bönsch, Manfred; Kaiser, Astrid. *Unterrichtsmethoden - kreativ und vielfältig*. Hohengehren: Schneider Verlag, 2002.
- Drumm, Julia. *Methodische Elemente des Unterrichts*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht GmbH & Co. KG, 2007.
- Ebbinghaus, Heinz-Dieter. *Zahlen*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1992.
- Embacher, Franz; Oberhuemer, Petra. *mathe-online*. <http://www.mathe-online.at/mathint/lexikon/p.html>. 15.03.16.
- Farkas, Heike. http://www.mathe-online.at/lernpfade/vekoren_ebene/?kapitel=1. 24.06.16.
- Filler, Andreas. *Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2011.
- Filler, Andreas; Henn, Hans-Wolfgang. *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebra verstehen-Geometrisch veranschaulichen und anwenden*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2015.
- Lechner, Josef. „Drei Vektorprodukte und einige Bemerkungen zur Gleichung $x^2+1=0$.“ 2003.
www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2003%20Band%2035/VortragLechner.pdf.
19.12.15.

Lehrplan Mathematik.

https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf. 16.06.16.

Loviscach, Jörn. *072 Skalarprodukt geometrisch*. 2013. Video Vorlesungsmitschnitt,
https://www.youtube.com/watch?v=5wedS_IKNDI. 11.05.16.

Malle, Günther. *Ein didaktisch orientiertes Vektorkonzept*. 2007.

<http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2007%20Band%2040/VortragMalle.pdf>.
19.01.16.

— . *Neue Wege in der Vektorgeometrie. Mathematik lehren/ Heft 133*. 2005: 8-15.

— . *Von Koordinaten zu Vektoren. Mathematik lehren/ Heft 133*. 2005: 4-7.

— . *Was ist ein Vektor? Antworten aus der Geschichte der Mathematik*. 1998.

<http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1998%20Band%2029/Malle1998.pdf>.
21.01.16.

Meyer, Hilbert. *Unterrichtsmethoden II: Praxisband*. Berlin: Cornelson Scriptor, 1987.

Peterßen, Wilhelm H. *Kleines Methoden-Lexikon*. München: Oldenbourg Schulbuchverlag GmbH, 2009.

Tietze, Uwe-Peter; Klika, Manfred; Wolpers, Hans. *Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II*. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1982.

Vohns, Andreas. *Von der Vektorrechnung zum reflektierten Umgang mit vektoriellen Darstellungen*. in: Allmendinger, Henrike. *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Fachmedien, 2013. S. 147-166.

Wiechmann, Jürgen. *Zwölf Unterrichtsmethoden*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag, 1999.

Wußing, Hans. *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*. Berlin: VEB Deutscher Verlag, 1979.

9.2 Abbildungsverzeichnis

ABBILDUNG 1 RGB MODELL	
HTTP://WWW.1BUCH.DE/UPLOADS/PICS/FARBRAUM_CMYK-RGB_FARBKREISE_01.PNG 10.05.16 . 22	
ABBILDUNG 2 BEISPIEL ZU GESCHWINDIGKEIT	
FILLER, ELEMENTARE LINEARE ALGEBRA. LINEARISIEREN UND KOORDINATISIEREN S.86	25
ABBILDUNG 3 TRANSITIVITÄT	
FILLER, ELEMENTARE LINEARE ALGEBRA. LINEARISIEREN UND KOORDINATISIEREN S.89	26
ABBILDUNG 4 ADDITION VON PFEILKLASSEN	
FILLER, ELEMENTARE LINEARE ALGEBRA. LINEARISIEREN UND KOORDINATISIEREN S.91	27
ABBILDUNG 5 KOMMUTATIVITÄT	
FILLER, ELEMENTARE LINEARE ALGEBRA. LINEARISIEREN UND KOORDINATISIEREN S.93	28
ABBILDUNG 6 ASSOZIATIVITÄT	
FILLER, ELEMENTARE LINEARE ALGEBRA. LINEARISIEREN UND KOORDINATISIEREN S.93	28
ABBILDUNG 7 ENTGEGENGESetzte PFEILKLASSEN	28
ABBILDUNG 8 MULTIPLIKATION MIT REELLEN ZAHLEN	
FILLER, ELEMENTARE LINEARE ALGEBRA. LINEARISIEREN UND KOORDINATISIEREN S.95	28
ABBILDUNG 9 PFEILKLASSEN UND KOORDINATEN	
FILLER, ELEMENTARE LINEARE ALGEBRA. LINEARISIEREN UND KOORDINATISIEREN S.106	30
ABBILDUNG 11 VEKTOR VON A NACH B	
MALLE, EIN DIDAKTISCH ORIENTIERTES VEKTORKONZEPT S.86	31
ABBILDUNG 10 VEKTORADDITION	
MALLE, EIN DIDAKTISCH ORIENTIERTES VEKTORKONZEPT S.86	32
ABBILDUNG 12 VEKTORADDITION2	
MALLE, EIN DIDAKTISCH ORIENTIERTES VEKTORKONZEPT S.86	32
ABBILDUNG 13 SKALARPRODUKT GEOMETRISCH GEDEUTET	
HTTPS://WWW.YOUTUBE.COM/WATCH?V=5WEDS_IKNDI 10.05.16.....	34
ABBILDUNG 14 COSINUSFUNKTION	
HTTP://WWW.VYOCITEJTO.CZ/MATEMATIKA/GONIOMETRICKE-FUNKCE/OPR/COSINUS.JPG 10.05.16 . 35	
ABBILDUNG 15 SKALARPRODUKT ÜBER NORMALPROJEKTION	
EMBACHER UND OBERHUEMER 11.05.16	36
ABBILDUNG 16 VEKTORPRODUKT	
FILLER, ELEMENTARE LINEARE ALGEBRA. LINEARISIEREN UND KOORDINATISIEREN S.133	37

ABBILDUNG 17 LAGEBEZIEHUNG VON GERADEN IM RAUM	
HTTP://WWW.MATHEMATIK.DE/GER/FRAGENANTWORTEN/ERSTEHILFE/ANALYTISCHE_GEOMETRIE/BILDER / VEKTOR2.4002.PNG 11.05.16	41
ABBILDUNG 18 LAGEBEZIEHUNG EBENE UND GERADE	
HTTP://WWW.MATHEMATIK.DE/GER/FRAGENANTWORTEN/ERSTEHILFE/ANALYTISCHE_GEOMETRIE/BILDER / VEKTOR2.4004.PNG 11.05.16	42
ABBILDUNG 19 WINKEL ZWISCHEN GERADE UND EBENE	
FILLER, ELEMENTARE LINEARE ALGEBRA. LINEARISIEREN UND KOORDINATISIEREN S.160	42
ABBILDUNG 20 LAGEBEZIEHUNG ZWEIER EBENEN	
HTTP://WWW.MATHEMATIK.DE/GER/FRAGENANTWORTEN/ERSTEHILFE/ANALYTISCHE_GEOMETRIE/BILDER / VEKTOR2.4006.PNG 11.05.16	43
ABBILDUNG 21 ABSTAND EBENE UND PUNKT	
FILLER, ELEMENTARE LINEARE ALGEBRA. LINEARISIEREN UND KOORDINATISIEREN S.162	44
ABBILDUNG 22 ABSTAND PUNKT VON GERADE	
FILLER, ELEMENTARE LINEARE ALGEBRA. LINEARISIEREN UND KOORDINATISIEREN S.163	44
ABBILDUNG 23 ABSTAND ZWEIER WINDSCHIEFER GERADEN	
FILLER, ELEMENTARE LINEARE ALGEBRA. LINEARISIEREN UND KOORDINATISIEREN S.164	45
ABBILDUNG 24 LEHRPLAN AHS 5.KLASSE	
HTTPS://WWW.BMBF.GV.AT/SCHULEN/UNTERRICHT/LP/LP_NEU_AHS_07_11859.PDF?4DZGM2 04.02.16	46
ABBILDUNG 25 LEHRPLAN AHS 6.KLASSE	
HTTPS://WWW.BMBF.GV.AT/SCHULEN/UNTERRICHT/LP/LP_NEU_AHS_07_11859.PDF?4DZGM2 04.02.16	46
ABBILDUNG 26 GRUNDKOMPETENZEN	
HTTPS://WWW.BIFIE.AT/SYSTEM/FILES/DL/SRDP_MA_KONZEPT_2013-03-11.PDF 16.6.16	47

10 Zusammenfassung und Abstract

In dieser Arbeit wird die Frage behandelt, wie man SchülerInnen bestmöglich auf die zentrale Reifeprüfung vorbereiten kann. Dies soll durch offenes Lernen geschehen und sich auf das Thema Vektorrechnung beziehungsweise die Grundkompetenzen AG 3.1, AG 3.2, AG 3.3, AG 3.4 und AG 3.5 konzentrieren. Diese Einführung in die Unterrichtsform des offenen Lernens wird von Erklärungen ausgewählter Methoden begleitet. Es folgen ein Auszug aus der Didaktik der Vektorrechnung und eine Zusammenführung dieser beiden vorangegangenen Kapitel anhand eines praxisorientierten Teils.

In this thesis, the research question is how to prepare students best on their final exam. This should be realized by open learning methods. In this thesis, I put the focus on the subject of vectors or rather the basic skills AG 3.1, AG 3.2, AG 3.3, AG 3.4 and AG 3.5. The introduction of the teaching form “open learning” is accompanied by illustrations of selected methods. This is followed by an excerpt from the teaching of vector analysis and a combination of these two previous chapters based on a practical part.