



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

**„Ein Gegenbeispiel sagt mehr als tausend Sätze -
Gegenbeispiele in der Analysis “**

verfasst von / submitted by

Nina Schuldner

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 350 406

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Italienisch UF Mathematik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Analysis in einer Variablen	4
2.1	Gegenbeispiele im Zusammenhang mit der Stetigkeit reeller Funktionen in einer Variablen	4
2.1.1	Stetigkeit und Monotonie	4
	Monotonie $\Rightarrow$ Stetigkeit?	5
	Stetigkeit $\Rightarrow$ Monotonie?	7
2.1.2	Stetige Funktionen auf Intervallen	12
2.2	Gegenbeispiele im Zusammenhang mit der Differentiation reeller Funktionen in einer Variablen	19
2.2.1	Differenzierbarkeit und Stetigkeit	19
2.2.2	Stetige Differenzierbarkeit	20
2.2.3	Stetige Differenzierbarkeit von höheren Ableitungen	23
2.2.4	Lokale Invertierbarkeit	25
2.2.5	Die Regeln von De l'Hospital	29
2.2.6	Taylorreihen	32
2.2.7	Anfangswertprobleme	36
2.3	Gegenbeispiele im Zusammenhang mit anderen Funktionenklassen	41
2.3.1	Funktionen von beschränkter Variation	41
	Zusammenhang von beschränkter Variation und Monotonie	42
	Zusammenhang von beschränkter Variation und Stetigkeit	45
	Rechnen mit Funktionen von beschränkter Variation	48
2.4	Gegenbeispiele im Zusammenhang mit der Integration reeller Funktionen in einer Variablen	53
2.4.1	Integrierbarkeit beschränkter Funktionen	53
2.4.2	Rechnen mit integrierbaren Funktionen	58
2.4.3	Integrierbarkeit und Stammfunktionen	64
	Rechnen mit Stammfunktionen	64
	Zusammenhang zwischen integrierbaren Funktionen und Funktionen mit Stammfunktion	68
3	Mehrdimensionale Analysis	71
3.1	Gegenbeispiele im Zusammenhang mit der Stetigkeit reeller Funktionen in mehreren Variablen	71
3.1.1	Verschiedene Arten von Stetigkeit und wie sie zusammenhängen	71
	Grenzwerte von Funktionen im Zweidimensionalen	71
	Einige Stetigkeitsbegriffe	73
3.2	Gegenbeispiele im Zusammenhang mit der Differentiation reeller Funktionen in mehreren Variablen	75
3.2.1	Verschiedene Differenzierbarkeitsbegriffe und wie sie zusammenhängen	75
	Einige Differenzierbarkeitsbegriffe	75
	Stetigkeit und Differenzierbarkeit	78
	Zusammenhang der verschiedenen Differentiationsbegriffe	83

	Höhere Ableitungen	87
3.2.2	Der Satz von Schwarz	89
3.3	Gegenbeispiele im Zusammenhang mit der Integration reeller Funktionen in mehreren Variablen	93
3.3.1	Vertauschung der Reihenfolge beim Integrieren und Differenzieren	93
	Doppelintegrale bzw. iterierte Integrale	93
	Der Satz von Fubini	95
4	Literaturverzeichnis	104
5	Kurzfassung	106
6	Abstract	107

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, einigen Menschen zu danken, die mein Studium auf die eine oder andere Weise erleichtert haben:

Herrn Professor Raith, für seine Hilfsbereitschaft und Kompetenz, die das Schreiben an der Arbeit so angenehm gestaltet haben und dafür, dass er für all meine Fragen immer ein offenes Ohr und eine schlaue Antwort hatte.

Meinen Eltern, für ihre Geduld und Unterstützung, für die sie viel öfter ein Dankeschön bekommen sollten.

Steffi, Ingrid, Marlene, Birgit und Julia, für ihre Abwesenheit, die mich motiviert hat, denn ohne sie ist das Studium nicht mehr so wie es vorher war.

Juju, fürs Zuhören.

Abraham, für alles Mögliche.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, am 2.9.2016

1 Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird es, wie der Titel schon sagt, um Gegenbeispiele aus dem mathematischen Teilgebiet der Analysis gehen. Dabei stellt sich zunächst die Frage: Was sind eigentlich Gegenbeispiele genau, also was wird unter dem Begriff, der auf den ersten Blick so klar und intuitiv verständlich wirkt, genau verstanden, und wodurch unterscheiden sich Gegenbeispiele von gewöhnlichen Beispielen?

Mit dieser Frage haben sich auch diverse Autoren von mathematischer Fachliteratur zu diesem Thema auseinandergesetzt, und wir werden uns nun ansehen, welche Antworten sie darauf gefunden haben. Gary L. Wise und Eric B. Hall beschreiben in der Preface zu ihrem Werk “Counterexamples in probability and real analysis” auf sehr simple Weise, was sie unter einem Gegenbeispiel verstehen:

What is a counterexample? In this book a counterexample is any example or result that is counter to commonly held beliefs or intuition.
[Wise & Hall 1993, S. vii]

Diese Definition ist sehr allgemein gehalten und beschränkt sich darauf, Gegenbeispiele als etwas zu betrachten, das nicht unserer Erwartung oder Intuition entspricht. Ein weiterer wichtiger Aspekt von Gegenbeispielen wird von Andrei und Ludmilla Bourchtein in ihrem Werk “Counterexamples: from elementary Calculus to the beginnings of Analysis” ebenfalls knapp auf den Punkt gebracht:

A counterexample is understood here in a broad sense as any example that is counter to some statement.
[Bourchtein & Bourchtein 2015, S xiii]

Bernard R. Gelbaum und John M. H. Olmsted holen bei ihrer Erklärung zum Wesen der Gegenbeispiele in ihrem Werk “Counterexamples in analysis” etwas weiter aus. Sie schreiben

The principal type of question asked in mathematics is, “Is statement S true?” where the statement S is of the form “Every member of the class A is a member of the class B : $A \subset B$.” To demonstrate that such a statement is *true* means to formulate a proof of the inclusion $A \subset B$. To demonstrate that such a statement is *false* means to find a member of A that is not a member of B , in other words a *counterexample*. To illustrate, if the statement S is “Every continuous function is somewhere differentiable,” then the sets A and B consist of all continuous functions and all functions that are somewhere differentiable, respectively; Weierstrass’s celebrated counterexample of a function f that is continuous but nowhere differentiable [...] is a counterexample to the inclusion $A \subset B$, since f is a member of A that is not a member of B .
[Gelbaum & Olmsted 1964, S v]

Laut dieser Definition ist ein Gegenbeispiel etwas, das beweist, dass eine gewisse Aussage falsch ist. Dabei kann es sich z.B. um eine Funktion handeln, die, wäre die Aussage wahr, bestimmte Eigenschaften haben müsste. Wenn sie diese nicht

hat, kann sie als Gegenbeispiel zu dieser Aussage bezeichnet werden. Gelbaum und Olmsted sprechen auch an, dass die Unterscheidung zwischen Beispielen und Gegenbeispielen etwas vage erscheinen kann, denn:

Generally speaking, examples in mathematics are of two types, illustrative examples and counterexamples, that is, examples to show why something makes sense and examples to show why something does not make sense. It might be claimed that *any* example is a counterexample to *something*, namely, the statement that such an example is impossible.

[Gelbaum & Olmsted 1964, S v-vi]

Dass man zu jedem Beispiel eine Aussage finden kann, die durch ebenjenes Beispiel widerlegt wird und die dieses Beispiel dadurch zu einem “Gegenbeispiel” macht, ist natürlich ein legitimer Einwand. Dieser kann jedoch vernachlässigt werden, da man im Allgemeinen ein wirkliches Gegenbeispiel leicht von einem anderen unterscheiden kann, das erst durch geschickte sprachliche Formulierung zu einem solchen gemacht wird. In diesem Punkt bin ich mit Jürgen Appell einer Meinung, wenn er in seinem Buch “Analysis in Beispielen und Gegenbeispielen: Eine Einführung in die Theorie reeller Funktionen” (das im Übrigen meine Hauptinspirationsquelle für die vorliegende Arbeit darstellt), sagt:

Man könnte einwenden, dass die Unterscheidung von Beispielen und Gegenbeispielen künstlich ist, da sie in Wirklichkeit dasselbe sind - beide beweisen (sogar konstruktiv!) die Existenz eines Objekts mit gewissen erwünschten oder unerwünschten Eigenschaften. Trotzdem unterscheiden wir zwischen diesen beiden Begriffen, denn ihre Zielsetzung ist ja verschieden: Beispiele dienen im allgemeinen dazu, ein wahres schon bewiesenes Ergebnis zu illustrieren, Gegenbeispiele dazu, eine naheliegende aber falsche Vermutung zu widerlegen, bevor man sich vergeblich mit einem Beweis abmüht.

[Appell 2009, S ix]

Ich werde in meiner Arbeit unter einem Gegenbeispiel eine spezielle Art von Beispiel verstehen, nämlich eines, das eine, wenn auch möglicherweise intuitiv richtig erscheinende, aber dennoch falsche Aussage widerlegt. Je nach Art der Aussage, auf die sie sich beziehen, kann man dann noch verschiedene Typen von Gegenbeispielen unterscheiden, nämlich Gegenbeispiele die zeigen

- that necessary conditions are not sufficient
- that sufficient conditions are not necessary
- that a theorem’s result need not hold when its hypotheses are ignored

[Wise & Hall 1993, S vii]

Nun, da geklärt ist, was unter einem Gegenbeispiel verstanden wird, halte ich es noch für wichtig, zu erwähnen, dass Gegenbeispiele einen hohen Wert besitzen, nämlich einerseits aus didaktischer Sicht, da sie helfen, abstrakte Konzepte greifbarer zu machen, oder, wie Appell es formuliert:

[...] gerade Beispiele [sind] oft geeigneter [...], den “Kern” eines mathematischen Satzes freizulegen, während das Bemühen um größtmögliche Allgemeinheit diesen Kern häufig eher verdunkelt als erhellt. Um es mit einem bekannten englischen Didaktikerspruch auszudrücken: Only wimps treat the most general case - real teachers tackle examples. Auch bei der Definition eines neuen Begriffs ist es übrigens oft ratsam, diesen nicht gleich in voller Allgemeinheit “vom Himmel fallen zu lassen”, sondern zunächst durch Beispiele vorzubereiten. Und hat man diesen Begriff dann formal sauber eingeführt, sollten wiederum einige Beispiele und Gegenbeispiele folgen.

[Appell 2009, S vii]

Andererseits sind Gegenbeispiele auch ein wichtiger Bestandteil der Mathematik an sich. Das wird durch dieses Zitat von Gelbaum und Olmsted gut zur Geltung gebracht:

At the risk of oversimplification, we might say that (aside from definitions, statements, and hard work) mathematics consists of two classes – proofs and counterexamples, and that mathematical discovery is directed toward two major goals – the formulation of proofs and the construction of counterexamples. Most mathematical books concentrate on the first class, the body of proofs of true statements. In the present volume we address ourselves to the second class of mathematical objects, the counterexamples for false statements.

[Gelbaum & Olmsted 1964, S v]

Ich möchte mich also in meiner Arbeit ebenfalls auf diese “second class of mathematical objects”, also auf die Gegenbeispiele konzentrieren. Natürlich ist es dabei unvermeidlich, auch die theoretischen mathematischen Grundlagen zu behandeln, um die Gegenbeispiele zu kontextualisieren und allgemein ein vollständigeres Bild von den verschiedenen Thematiken zu entwickeln. Bei der Auswahl der Gegenbeispiele habe ich mich vorwiegend an das schon erwähnte Buch “Analysis in Beispielen und Gegenbeispielen: Eine Einführung in die Theorie reeller Funktionen” von Jürgen Appell gehalten, da dieses sich auf sehr umfangreiche und trotzdem leicht zugängliche Weise mit Gegenbeispielen auseinandersetzt. Unter den von mir behandelten Gegenbeispielen finden sich sowohl “Klassiker” wie die Weierstrassfunktion oder die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (die in etwas abgewandelter Form sehr vielseitig als Gegenbeispiel verwendbar ist), aber auch weniger bekannte Funktionen, die aber dennoch ihren Zweck erfüllen.

Natürlich stelle ich mit meiner kleinen Auswahl keinen Anspruch auf Vollständigkeit, denn schon allein für so gut wie jedes von mir behandelte Gegenbeispiel gäbe es wohl viele weitere Funktionen, die die gleichen Eigenschaften besitzen, und natürlich ist die Menge der Aussagen, die man anhand von Gegenbeispielen widerlegen könnte, weit größer als die Menge, die ich in dieser Arbeit präsentieren kann. Auch sind viele Gegenbeispiele so simpel und allgemein bekannt - was allerdings durchaus positiv ist - dass es sich nicht lohnt, sie in einer Arbeit wie dieser breitzutreten (man denke beispielsweise an die Betragsfunktion als Gegenbeispiel zur Aussage “Jede stetige Funktion ist differenzierbar”). Daher habe ich

diese bewusst weggelassen.

Außerdem habe ich mich auf Gegenbeispiele im Zusammenhang mit reellen Funktionen beschränkt, auch wenn komplexe Funktionen sicher auch ein ergiebiges Thema wären. Der Übersichtlichkeit halber besteht meine Arbeit aus zwei Teilen, nämlich dem ersten Teil über reelle Funktionen in einer Variablen und dem zweiten Teil über reelle Funktionen in mehreren Variablen. Beide Bereiche sind wiederum gegliedert in Kapitel, die sich mit zentralen Themen der Analysis beschäftigen, wie Monotonie, Stetigkeit, Differentiation und Integration.

2 Analysis in einer Variablen

Hier beginnt der erste Teil meiner Arbeit, in dem sich alles um Gegenbeispiele dreht, bei denen reelle Funktionen in einer Variablen die Hauptrolle spielen.

In Kapite 2.11, dessen Hauptthema die Stetigkeit ist, werden wir uns in Abschnitt 2.1.1 zuerst mit dem Zusammenhang von Stetigkeit und Monotonie beschäftigen und anschließend in Abschnitt 2.1.2 mit Sätzen zu stetigen Funktionen auf Intervallen.

Danach, in Kapitel 2.2 geht es um Differenzierbarkeit, wobei auch in Abschnitt 2.2.1 zunächst der Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit ergründet werden wird. Die Abschnitte 2.2.2 und 2.2.3 beschäftigen sich mit stetiger Differenzierbarkeit und höheren Ableitungen, schließlich folgen noch die Abschnitte 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6 und 2.2.7 zu den Themen lokale Invertierbarkeit, Hospital'sche Regeln, Taylorreihen und Anfangswertproblemen.

Kapitel 2.3 beschäftigt sich mit Funktionen von beschränkter Variation und den Abschluss bildet Kapitel 2.4, das sich mit der Integration reeller Funktionen in einer Variablen auseinandersetzt.

2.1 Gegenbeispiele im Zusammenhang mit der Stetigkeit reeller Funktionen in einer Variablen

2.1.1 Stetigkeit und Monotonie

In diesem Kapitel geht es um den Zusammenhang von Monotonie und Stetigkeit. Dazu vorab einige nützliche Definitionen.

Definition 1 (Monotonie). [vgl. Forster 2016, S 124]

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

Dann heißt f $\left\{ \begin{array}{l} \text{monoton wachsend} \\ \text{streng monoton wachsend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{streng monoton fallend} \end{array} \right\}$ falls gilt $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq f(x') \\ f(x) < f(x') \\ f(x) \geq f(x') \\ f(x) > f(x') \end{array} \right\}$ für alle $x, x' \in I$ mit $x < x'$.

Definition 2 (Stetigkeit). [vgl. Forster 2016, S 118]

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. f ist stetig im Punkt $p \in I$ genau dann wenn gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in I$ mit $|x - p| < \delta$ folgt, dass $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

Definition 3 (Unstetigkeitsstellen). [vgl. Zorich 2006, S 162]

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Ist f in einem Punkt $x_0 \in I$ nicht stetig, dann wird dieser Punkt eine Unstetigkeitsstelle oder eine Unstetigkeit von f genannt.

Man unterscheidet 3 Arten von Unstetigkeitsstellen: [vgl. Appell 2009, S 5 u. 7]

- i) Man sagt, dass eine Funktion f in einem Punkt $x_0 \in I$ eine Unstetigkeitsstelle 0. Art (oder hebbare Unstetigkeit) hat, falls der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ und der Funktionswert $f(x_0)$ existieren, aber verschieden sind.
- ii) Weiters nennt man x_0 eine Unstetigkeitsstelle 1. Art (oder einen Sprung) von f , falls beide einseitigen Grenzwerte $L^- = \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $L^+ = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$ existieren, aber verschieden sind.
- iii) Schließlich nennt man x_0 eine Unstetigkeitsstelle 2. Art (oder wesentliche Unstetigkeit) von f , falls der linksseitige oder der rechtsseitige Grenzwert L^- bzw. L^+ nicht existieren.

Monotonie $\Rightarrow$ Stetigkeit?

Es ist leicht einzusehen, dass Monotonie nicht Stetigkeit impliziert, also dass eine Funktion, die überall monoton ist, nicht überall stetig zu sein braucht. Dafür reicht es, als Gegenbeispiel eine monotone Funktion mit einer Unstetigkeitsstelle herzunehmen, z.B.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ x + 1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Eine monotone Funktion kann allerdings nicht “allzu” unstetig sein: Es gibt nämlich keine Funktionen, die überall monoton, aber nirgends stetig sind. Um das zu beweisen, muss man zunächst beachten, dass die Unstetigkeitsstellen einer monotonen Funktionen nur Sprungstellen sein können. Das besagt auch der folgende Satz.

Satz 1. [vgl. Zorich 2006, S 173]

Unstetigkeitsstellen einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $I \subset \mathbb{R}$ monoton ist, können nur Unstetigkeitsstellen 1. Art sein.

Beweis. [vgl. Zorich 2006, S 173]

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f monoton wachsend, denn für f monoton fallend funktioniert die Argumentation analog.

Sei also $x_0 \in I$ eine Unstetigkeitsstelle von f .

- Dass x_0 eine Unstetigkeitsstelle 0. Art ist können wir ausschließen, denn angenommen es wäre so, dann müsste gelten

$$L^- = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = L^+ \quad (1)$$

$$L^- \neq f(x_0) \neq L^+ \quad (2)$$

Da f monoton wachsend ist, gilt aber auf jeden Fall

$$L^- = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = L^+ \quad (3)$$

Es können also nicht beide Bedingungen (1) und (2) gelten, denn gilt $L^- = L^+$, dann müsste laut (3) auch gelten, dass $L^- = f(x_0) = L^+$, und das ist ein Widerspruch zu (2). Gilt $L^- \neq f(x_0) \neq L^+$, dann gilt laut (3), dass $L^- < f(x_0) < L^+$, also $L^- \neq L^+$, was wiederum ein Widerspruch zu (1) ist. Also kann es sich bei x_0 nicht um eine Unstetigkeitsstelle 0. Art handeln.

- Nun müssen wir noch zeigen, dass x_0 auch keine Unstetigkeitsstelle 2. Art sein kann. Dazu zeigen wir, dass, wenn f monoton ist, sowohl der linksseitige Grenzwert L^- als auch der rechtsseitige Grenzwert L^+ existieren. Dazu teilen wir den Definitionsbereich auf in die beiden Mengen

$$\begin{aligned} I_{x_0}^- &= \{x \in I : x < x_0\} \dots \text{Punkte "links von" } x_0 \\ I_{x_0}^+ &= \{x \in I : x > x_0\} \dots \text{Punkte "rechts von" } x_0 \end{aligned}$$

Da f monoton wachsend ist, gilt:

$$\begin{aligned} \forall x \in I_{x_0}^- &\Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \\ \forall x \in I_{x_0}^+ &\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \end{aligned} \quad (4)$$

Es reicht zu zeigen, dass der linksseitige Grenzwert L^- existiert, für L^+ geht der Beweis analog.

Wir betrachten dafür nun die Einschränkung $f|_{I_{x_0}^-} : I_{x_0}^- \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $M = \{f(x) : x \in I_{x_0}^-\}$ die Menge der Funktionswerte von $f|_{I_{x_0}^-}$, dann ist diese Menge laut (4) nach oben beschränkt durch $f(x_0)$ und $f|_{I_{x_0}^-}$ ist monoton wachsend. Da wir wissen, dass monoton wachsende, nach oben beschränkte Folgen konvergieren, existiert auch der linksseitige Grenzwert

$$L^- = \lim_{\substack{x \in I_{x_0}^- \\ x \rightarrow x_0}} (f|_{I_{x_0}^-})(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$$

der ja Grenzwert einer solchen Folge ist. Damit haben wir bewiesen, dass eine monotone Funktion nur Unstetigkeitsstellen 1. Art haben kann.

□

Damit kann man nun zeigen:

Satz 2. [vgl. Zorich 2006, S 173-174]

Die Menge der Unstetigkeitsstellen einer monotonen Funktion ist höchstens abzählbar.

Beweis. [vgl. Zorich 2006, S 173-174]

Sei $x_0 \in I$ eine Unstetigkeitsstelle von f , dann wissen wir dank Satz (1), dass x_0 eine Unstetigkeitsstelle 1. Art ist und somit die einseitigen Grenzwerte $L^- = \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $L^+ = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$ existieren und verschieden sind.

Die Funktion f ist monoton und wir können o.B.d.A. annehmen, dass f monoton wachsend ist (denn für f monoton fallend gilt der Beweis analog). Auf Grund der Monotonie muss dann gelten

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) < \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

und da x_0 eine Sprungstelle ist, muss in zumindest einer der beiden Ungleichheiten

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

strenge Ungleichheit gelten. Also angenommen $L^- = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) < f(x_0)$, dann betrachten wir das offene Intervall $(L^-, f(x_0))$ (also das Intervall, das den Sprung im Wertebereich darstellt). Da für $x \in I$ mit $x < x_0$ auf Grund der Monotonie gilt, dass $f(x) \leq \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$, folgt, dass f auf dem Intervall $(L^-, f(x_0))$ keine Werte annimmt.

Analog gilt für $f(x_0) < \lim_{x \searrow x_0} f(x) = L^+$, dass f auf dem Intervall $(f(x_0), L^+)$ keine Werte annimmt.

Man kann nun zu jeder Unstetigkeitsstelle x_0 ein solches Intervall angeben, und wenn $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ verschiedene Unstetigkeitsstellen von f sind, dann sind die zugehörigen, keine Werte von f enthaltenden Intervalle disjunkt, denn da f monoton ist, gilt:

$$\underbrace{\lim_{x \nearrow x_1} f(x) \leq f(x_1) \leq \lim_{x \searrow x_1} f(x)}_{\text{In mindestens einer der beiden Ungleichungen gilt strenge Ungleichheit}} \leq \underbrace{\lim_{x \nearrow x_2} f(x) \leq f(x_2) \leq \lim_{x \searrow x_2} f(x)}_{\text{In mindestens einer der beiden Ungleichungen gilt strenge Ungleichheit}}$$

Es kann höchstens abzählbar viele solcher paarweise disjunkten offenen Intervalle geben, denn in jedem dieser Intervalle können wir dank der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ eine rationale Zahl wählen. Dadurch erhalten wir eine Teilmenge der rationalen Zahlen, deren Mächtigkeit genau der Anzahl der Intervalle entspricht. Da es sich bei der Menge um eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$ handelt und $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, kann es auch nur abzählbar viele Intervalle geben. Daher ist die Menge der Unstetigkeitsstellen, von denen es ja genauso viele gibt wie zugehörige Intervalle, ebenfalls höchstens abzählbar. $\square$

Abschließend kann man also sagen, dass zwar gilt

$$f \text{ überall monoton} \not\Rightarrow f \text{ überall stetig}$$

aber

$$f \text{ überall monoton} \Rightarrow f \text{ stetig bis auf abzählbar viele Unstetigkeitsstellen}$$

Stetigkeit $\Rightarrow$ Monotonie?

Umgekehrt kann man sich natürlich auch fragen, ob Stetigkeit Monotonie impliziert. Die Antwort darauf ist ein eindeutiges Nein, denn es gibt Funktionen, die überall stetig, aber nirgends monoton sind. Solch eine Funktion ist zum Beispiel die sogenannte Weierstrass-Funktion, die ich im Folgenden als Gegenbeispiel vorstellen werde. Davor jedoch wieder einige nützliche Definitionen und Sätze, die wir später benötigen werden.

Definition 4 (Funktionsfolge). [vgl. Steinbauer o. J.-b, Abschnitt 5.1.2]

Sei M eine Menge von Funktionen, die alle auf $K \subset \mathbb{C}$ definiert sind und Werte in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ annehmen. Eine Folge in M heißt Funktionsfolge auf K . Wir schreiben für die Folge meist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(f_n)_n$ oder (f_n) .

Definition 5 (Konvergenz von Funktionenfolgen). [vgl. Forster 2016, S 255]

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge auf der Menge $K \subset \mathbb{C}$.

i) Die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$, falls $\forall x \in K : f_n(x) \rightarrow f(x)$, dh. wenn gilt:

Zu jedem $x \in K$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $N = N(x, \varepsilon)$, sodass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

ii) Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$, falls gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N = N(\varepsilon)$, sodass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in K$ und alle $n \geq N$.

Satz 3. [vgl. Forster 2016, S 256-257]

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen auf $K \subset \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen die Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist auch f stetig.

Beweis. [vgl. Forster 2016, S 256-257]

Sei $x \in K$. Es ist zu zeigen, dass f stetig ist, also dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \text{für alle } x' \in K \text{ mit } |x - x'| < \delta$$

Da die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_N(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } \xi \in K$$

Da f_N im Punkt x stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$|f_N(x) - f_N(x')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x' \in K \text{ mit } |x - x'| < \delta$$

Daher gilt für alle $x' \in K$ mit $|x - x'| < \delta$:

$$|f(x) - f(x')| \leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(x')|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(x') - f(x')|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

und somit ist f stetig. □

Satz 4 (Majorantenkriterium). [vgl. Forster 2016, S 75]

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$|a_n| \leq c_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut. Man nennt dann $\sum c_n$ eine Majorante von $\sum a_n$.

Beweis. [vgl. Forster 2016, S 75]

Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert auf Grund des Cauchy-Prinzips für Reihen und der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| \sum_{k=m}^n c_k \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq m \geq N$$

Daher ist

$$\sum_{k=m}^n |a_k| \leq \sum_{k=m}^n c_k < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq m \geq N$$

Die Reihe $\sum |a_n|$ erfüllt also das Cauchy-Prinzip für Reihen und ist somit konvergent, also ist $\sum a_n$ absolut konvergent. $\square$

Definition 6 (Supremumsnorm). [vgl. Forster 2016, S 258]

Sei K eine Menge und $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann setzt man

$$\|f\|_K := \sup \{|f(x)| : x \in K\}$$

Satz 5 (Konvergenzkriterium von Weierstrass). [vgl. Forster 2016, S 259]

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen. Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_K$ konvergiert, also wenn gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_K < \infty$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ absolut und gleichmäßig auf K gegen eine Funktion $F : K \rightarrow \mathbb{C}$.

Beweis. [vgl. Forster 2016, S 259]

Wir teilen den Beweis in 2 Schritte auf.

- Wir zeigen zunächst, dass $\sum f_n$ punktweise gegen eine gewisse Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Sei $x \in K$. Da $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_K$ gilt, können wir $\sum \|f_n\|_K$ laut Satz 4 als Majorante verwenden und somit konvergiert $\sum f_n(x)$ absolut. Wir setzen

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Damit ist die Funktion $F : K \rightarrow \mathbb{C}$ definiert.

- Sei $F_n := \sum_{k=0}^n f_k$. Wir beweisen, dass die Folge (F_n) gleichmäßig gegen F konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$, dann folgt aus der Konvergenz von $\sum \|f_n\|_K$, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_K < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N$$

Dann gilt für alle $n \geq N$ und alle $x \in K$:

$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_K < \varepsilon$$

und somit konvergiert $\sum f_n$ gleichmäßig gegen $F : K \rightarrow \mathbb{C}$.

□

Gegenbeispiel 1 (Weierstrass-Funktion). [vgl. Appell 2009, S 29-30]
Zuerst definieren wir

$$f_1 : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_1(x) = |x|$$

Diese Funktion können wir periodisch fortsetzen auf ganz $\mathbb{R}$ mit Periode 1, indem wir definieren

$$f_1(x+k) = f_1(x) \quad \left(k \in \mathbb{Z}, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$$

Für $n > 1$ können wir nun eine Funktionenfolge definieren mit

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}$$

- Für $n = 2$ erhalten wir also $f_2(x) = \frac{f_1(4x)}{4}$
- Für $n = 3$ erhalten wir dann $f_3(x) = \frac{f_1(16x)}{16}$
- usw.

Für alle n ist f_n eine stetige periodische Funktion mit Periode $\frac{1}{4^{n-1}}$ und maximalem Funktionswert $\max\{f_n(x) : x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}$.

Nun können wir die Funktionenreihe

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}$$

definieren.

Wir wollen nun zeigen, dass f stetig ist. Dabei hilft uns das Konvergenzkriterium von Weierstrass und Satz 3. Um das Konvergenzkriterium von Weierstrass anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_K$ konvergiert. Das ist klar,

denn bei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}$$

handelt es sich um eine geometrische Reihe. Da also $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_K$ konvergiert, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ absolut und gleichmäßig mit Limes $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, und somit ist f laut Satz 3 als gleichmäßiger Limes einer stetigen Funktionenfolge ebenfalls stetig.

Nun zeigen wir, dass f in keinem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ monoton wachsend oder fallend ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass x_0 die spezielle Form $x_0 = k \cdot \frac{1}{4^m}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ hat, denn die Menge dieser Punkte liegt dicht in $\mathbb{R}$. Für $n > m$ ist $f_n(x_0) = \frac{f_1(4^{n-1} \cdot k \cdot \frac{1}{4^m})}{4^{n-1}} = 0$, und daher gilt

$$f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = \sum_{n=1}^m \frac{f_1(4^{n-1}x_0)}{4^{n-1}}$$

Definieren wir nun für $m \in \mathbb{N}$, dass $h_m = \frac{1}{4^{2m+1}}$, dann gilt für $n > 2m+1$, dass $f_n(x_0 + h_m) = \frac{f_1(4^{n-1}(k \cdot \frac{1}{4^m} + \frac{1}{4^{2m+1}}))}{4^{n-1}} = 0$, also

$$f(x_0 + h_m) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0 + h_m) = \sum_{n=1}^{2m+1} \frac{f_1(4^{n-1}(k \cdot \frac{1}{4^m} + \frac{1}{4^{2m+1}}))}{4^{n-1}}$$

Nun vergleichen wir $f(x_0 - h_m)$, $f(x_0)$, $f(x_0 + h_m)$ miteinander.

$$\begin{aligned} f(x_0 + h_m) - f(x_0) &= \sum_{n=1}^{2m+1} f_n(x_0 + h_m) - \sum_{n=1}^m f_n(x_0) \\ &= \sum_{n=1}^{2m+1} [f_n(x_0 + h_m) - f_n(x_0)] \\ &= \sum_{n=1}^m [f_n(x_0 + h_m) - f(x_0)] + \sum_{n=m+1}^{2m+1} [f_n(x_0 + h_m) - f(x_0)] \\ &\geq -m \cdot h_m + (m+1)h_m = h_m > 0 \end{aligned}$$

Analog kann man zeigen, dass

$$f(x_0 - h_m) - f(x_0) \geq -m \cdot h_m + (m+1)h_m = h_m > 0$$

Dies zeigt, dass f in x_0 weder monoton wachsend noch monoton fallend sein kann, und somit ist f nirgends monoton, denn da die Punkte x_0 dicht in $\mathbb{R}$ liegen, gibt es in jedem noch so kleinen offenen Intervall solche Punkte.

Das zeigt, dass die Stetigkeit einer Funktion nichts über ihr Monotonieverhalten aussagt!

$$\begin{aligned} f \text{ überall stetig} &\not\Rightarrow f \text{ überall monoton} \\ &\not\Rightarrow f \text{ monoton auf Teilintervall} \end{aligned}$$

2.1.2 Stetige Funktionen auf Intervallen

In diesem Kapitel werden wir einen Spezialfall von stetigen Funktionen betrachten, nämlich stetige Funktionen, die auf beschränkten und abgeschlossenen Intervallen definiert sind. Um zu klären, was genau unter einem solchen Intervall verstanden wird, werden ich zunächst einige Definitionen anführen.

Definition 7 (Beschränktheit). [vgl. Forster 2016, S 95]

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, wenn es eine Konstante K gibt, sodass

$$x \leq K \text{ (bzw. } x \geq K) \text{ für alle } x \in A.$$

Man nennt dann K obere (bzw. untere) Schranke von A . Die Menge A heißt beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Definition 8 (Intervalle in $\mathbb{R}$). [vgl. Forster 2016, S 90]

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Für beschränkte Intervalle verwenden wir die Bezeichnungen

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ heißt abgeschlossenes Intervall
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ heißt offenes Intervall
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ und $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ heißen halboffene Intervalle

Für unbeschränkte Intervalle verwenden wir die Bezeichnungen

- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$ und $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$ heißen abgeschlossene Intervalle
- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$ und $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$ heißen offene Intervalle
- $(-\infty, +\infty)$ heißt sowohl abgeschlossenes als auch offenes Intervall

Insbesondere verstehen wir also unter einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall ein Intervall der Form $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Im Gegensatz zu anderen stetigen Funktionen haben stetige Funktionen auf beschränkten und abgeschlossenen Intervallen einige schöne Eigenschaften, wie unter anderem die folgenden beiden Sätze zeigen, die den Kern dieses Kapitels darstellen. Bevor ich sie vorstellen werde, benötigen wir noch eine kurze Definition:

Definition 9 (Beschränkte Funktion). [vgl. Forster 2016, S 117]

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls die Menge der Funktionswerte beschränkt ist, also falls es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$|f(x)| \leq K \text{ für alle } x \in A.$$

Die eben definierte Beschränktheit einer Funktion ist Thema des ersten Satzes über stetige Funktionen auf beschränkten und abgeschlossenen Intervallen, den ich nun behandeln werde.

Satz 6. [vgl. Appell 2009, S 45]

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall, dann ist jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Für den Beweis von Satz 6 benötigen wir noch den Satz von Bolzano-Weierstrass, der besagt, dass jede beschränkte reelle Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Satz 7 (von Bolzano-Weierstrass). [vgl. Deitmar 2014, S 61]

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat eine konvergente Teilfolge.

Beweis. [vgl. Deitmar 2014, S 61]

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, dann gibt es $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ sodass $\alpha_1 \leq a_n \leq \beta_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir halbieren nun das Intervall $[\alpha_1, \beta_1]$, in dem alle Folgenglieder liegen, indem wir setzen

$$\gamma_1 := \frac{\beta_1 + \alpha_1}{2}$$

Dadurch entstehen die beiden Intervalle $[\alpha_1, \gamma_1]$ und $[\gamma_1, \beta_1]$. Eines dieser beiden Intervalle muss unendlich viele Folgenglieder enthalten und wir benennen es um zu $[\alpha_2, \beta_2]$.

Setzt man den Prozess fort, erhält man eine Folge abgeschlossener Intervalle der Form $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$. Wir definieren $L(I_n) := \beta_n - \alpha_n$ als Durchmesser des Intervalls I_n und stellen fest, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(I_n) = 0 \quad (5)$$

Außerdem gilt klarerweise, dass $I_{n+1} \subset I_n$ und jedes I_n enthält unendlich viele Folgenglieder.

Wir wählen nun zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Index $j(n) \in \mathbb{N}$, sodass $j(n+1) > j(n)$ gilt und $a_{j(n)} \in I_n$.

Die Folge $(a_{j(n)})_n$ ist also eine Teilfolge von $(a_n)_n$ und konvergiert laut (5) gegen einen eindeutigen Punkt $x \in \mathbb{R}$ mit $x := \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ der in allen Intervallen I_n enthalten ist, denn es gilt

$$|a_{j(n)} - x| < L(I_n)$$

da $a_{j(n)}$ und x beide in I_n liegen. □

Nun können wir den Beweis für Satz 6 nachliefern.

Beweis. [vgl. Appell 2009, S 45]

Wir nehmen indirekt an, dass f nicht beschränkt ist. Dann gibt es ein $x_1 \in [a, b]$ mit $|f(x_1)| > 1$, ein $x_2 \in [a, b]$ mit $|f(x_2)| > 2$ und allgemein für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$ mit $|f(x_n)| > n$.

Da alle x_n im Intervall $[a, b]$ liegen und es sich bei $(x_n)_n$ somit um eine beschränkte Folge handelt, besitzt diese laut Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$, die gegen ein x_* konvergiert, und auf Grund der Abgeschlossenheit von $[a, b]$ gilt, dass $x_* \in [a, b]$.

Da f stetig ist, folgt aus $x_{n_k} \rightarrow x_*$, dass gilt $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_*)$.

Da $(f(x_{n_k}))_k$ eine konvergente Folge ist, muss sie auch beschränkt sein, also muss gelten

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ sodass } |f(x_{n_k})| \leq K \quad \forall x_{n_k} \in [a, b]$$

Das jedoch ist ein Widerspruch dazu, dass laut unserer anfänglichen Annahme gelten muss, dass

$$|f(x_{n_k})| > n_k \quad \forall n_k \in \mathbb{N}$$

Daher wissen wir nun, dass die ursprüngliche Annahme falsch war und haben somit bewiesen, dass f beschränkt sein muss. $\square$

Gleich im Anschluss folgt nun unser zweiter Satz über stetige Funktionen auf beschränkten und abgeschlossenen Intervallen.

Satz 8. [vgl. Forster 2016, S 117]

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall, dann nimmt jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Minimum und Maximum an, also es existieren $m, M \in [a, b]$ mit

$$\begin{aligned} f(M) &= \sup\{f(x) | x \in [a, b]\} \\ f(m) &= \inf\{f(x) | x \in [a, b]\} \end{aligned}$$

Beweis. [vgl. Forster 2016, S 117]

Es reicht, die Existenz des Maximums zu beweisen, denn führt man den Beweis analog mit $-f$ statt f , erhält man dieselbe Aussage auch für das Minimum.

Da wir aus Satz 6 schon wissen, dass f beschränkt ist, wissen wir auch, dass es ein $S \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$S = \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$$

Wir können eine Folge $(x_n)_n$ in $[a, b]$ wählen, sodass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = S \tag{6}$$

und zwar, indem wir für $n \in \mathbb{N}$ das x_n so wählen, dass gilt $f(x_n) > S - \frac{1}{n}$, denn dann gilt für alle n , dass $S - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq S$, und somit gilt (6).

Da die Folge $(x_n)_n$ beschränkt ist, hat sie laut Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ und es gibt ein $M \in [a, b]$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = M$$

Da f stetig ist, muss aus $x_{n_k} \rightarrow M$ folgen, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(M)$$

und da der Limes eindeutig ist, gilt mit (6), dass

$$f(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = S$$

Also gibt es ein $M \in [a, b]$ mit $f(M) = \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$. $\square$

Es gibt auch noch weitere interessante Sätze über stetige Funktionen auf beschränkten und abgeschlossenen Intervallen, wie z.B. der Zwischenwertsatz oder der Satz über die gleichmäßige Stetigkeit, diese sind jedoch nicht Thema dieses Kapitels.

Für die Formulierung von Satz 6 und Satz 8 haben wir 3 Voraussetzungen getroffen:

- Das Intervall ist abgeschlossen
- Das Intervall ist beschränkt
- Die Funktion f ist stetig

Um zu zeigen, dass diese Sätze tatsächlich nur auf diese spezielle Art von Funktionen zutreffen, also dass alle der 3 Voraussetzungen auch zwingend notwendig sind, werden wir nun eine Reihe von Gegenbeispielen behandeln, die zeigen, dass diese Sätze nicht mehr gelten, wenn auch nur eine einzige der Voraussetzungen nicht erfüllt ist [vgl. Appell 2009, S 46].

Zuerst betrachten wir zwei Gegenbeispiele, bei denen das Kriterium der Abgeschlossenheit des Definitionsbereichs nicht erfüllt ist. Da dabei auch von einem sogenannten Häufungspunkt die Rede sein wird, werden wir diesen vorher noch kurz definieren.

Definition 10 (Häufungspunkt). [vgl. Forster 2016, S 94]

Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Der Punkt a heißt Häufungspunkt von A , falls in jeder ε -Umgebung von a unendlich viele Punkte von A liegen.

Gegenbeispiel 2 (Intervall beschränkt, aber nicht abgeschlossen, f stetig $\nRightarrow f$ beschränkt). [vgl. Appell 2009, S 46]

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nicht abgeschlossen (ob M beschränkt ist oder nicht ist unerheblich) und sei x_0 ein Häufungspunkt von M , der nicht zu M gehört.

Wir betrachten die Funktion

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x - x_0}$$

Wir wissen, dass f stetig ist, da es sich um eine Zusammensetzung stetiger Funktionen handelt, doch wir können zeigen, dass f nicht beschränkt ist.

Da x_0 ein Häufungspunkt von M ist, können wir eine Folge $(a_n)_n$ finden, die gegen x_0 konvergiert und deren Folgenglieder gänzlich in M liegen. Dann lautet der Grenzwert der Funktion f

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n - x_0} = \infty$$

Somit ist f unbeschränkt.

Gegenbeispiel 3 (Intervall beschränkt, aber nicht abgeschlossen, f stetig $\nRightarrow f$ nimmt Minimum und Maximum an). [vgl. Appell 2009, S 46]

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nicht abgeschlossen, aber beschränkt, und sei x_0 ein Häufungspunkt von M , der nicht zu M gehört.

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= -|x - x_0| \end{aligned}$$

Die Funktion f ist klarerweise stetig, und sie ist auch beschränkt, denn da M beschränkt ist, gibt es

$$\begin{aligned} S &:= \sup\{x | x \in M\} \\ s &:= \inf\{x | x \in M\} \end{aligned}$$

und die Menge der Funktionswerte von f ist nach unten beschränkt durch $-|S - x_0|$ oder $-|s - x_0|$ (je nachdem, ob x_0 ein linker oder rechter Randpunkt von M ist), und sie ist nach oben beschränkt durch 0.

Der Wert 0 ist jedoch kein Maximum von f , denn es gilt

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -|x - x_0| = 0 \Leftrightarrow x = x_0$$

also wird er nur im Punkt x_0 angenommen, und dieser gehört nicht zu M .

Als nächstes sehen wir uns zwei Funktionen an, deren Definitionsbereich kein beschränktes Intervall ist.

Gegenbeispiel 4 (Intervall abgeschlossen, aber nicht beschränkt, f stetig $\nRightarrow f$ beschränkt). [vgl. Appell 2009, S 46]

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nicht beschränkt.

Das einfachste Beispiel für eine stetige Funktion auf M , die nicht beschränkt ist, ist die identische Abbildung

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= x \end{aligned}$$

da

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

gilt.

Gegenbeispiel 5 (Intervall abgeschlossen, aber nicht beschränkt, f stetig $\nRightarrow f$ nimmt Minimum und Maximum an). [vgl. Appell 2009, S 46-47]

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nicht beschränkt. Wir betrachten

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \frac{x^2}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Natürlich ist f stetig, und f ist auch beschränkt, da gilt

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2 + 1} < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

doch 1 ist kein Maximum von f , da die Gleichung

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$$

$$x^2 = x^2 + 1$$

von keinem $x \in M$ erfüllt werden kann.

Und zu guter Letzt behandeln wir noch Funktionen, deren Definitionsbereich zwar ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall ist, die aber nicht stetig sind. Ausnahmsweise werden ich hierbei jeweils zwei Varianten ein und desselben Gegenbeispiels vorstellen - jeweils eine sehr simple und eine etwas raffiniertere Funktion, die sich aus einer Abwandlung der Dirichletfunktion

$$D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ergibt.

Gegenbeispiel 6 (Intervall abgeschlossen und beschränkt, f unstetig $\nRightarrow f$ beschränkt). [vgl. Appell 2009, S 11 u. 47]

- Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Das Intervall $[0, 1]$ ist abgeschlossen und beschränkt, f ist jedoch unstetig im Punkt 0, denn

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \neq 0 = f(0)$$

und daher ist f auch unbeschränkt.

- Alternativ können wir auch die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} q & \text{für } x = \frac{p}{q} \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

betrachten.

Das Intervall $[0, 1]$ ist abgeschlossen und beschränkt, doch f ist in jedem Punkt $x_0 = \frac{p_0}{q_0} \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ unstetig, denn wählt man $0 < \varepsilon \leq q_0$, dann gibt es in jeder noch so kleinen δ -Umgebung um x_0 irrationale Punkte x , sodass gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0)| = q_0 \geq \varepsilon$$

Die Funktion f ist nicht beschränkt, da q unendlich groß werden kann.

Gegenbeispiel 7 (Intervall abgeschlossen und beschränkt, f unstetig $\nRightarrow f$ nimmt Minimum und Maximum an). [vgl. Appell 2009, S 11 u. 47]

- Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \text{ oder } x = 1 \end{cases}$$

Das Intervall $[0, 1]$ ist abgeschlossen und beschränkt, f ist jedoch nicht stetig in den Punkten 0 und 1, denn es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq \frac{1}{2} = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \neq \frac{1}{2} = f(1)$$

Die Funktion f ist zwar von unten durch 0 und von oben durch 1 beschränkt, dabei handelt es sich jedoch nicht um Minimum und Maximum, da es kein $x \in [0, 1]$ gibt mit $f(x) = 0$ oder $f(x) = 1$.

- Alternativ können wir auch die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^q \frac{q}{q+1} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

betrachten.

Wieder ist $[0, 1]$ ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall, aber f ist unstetig in allen Punkten $x_0 = \frac{p_0}{q_0} \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, denn wählt man $0 < \varepsilon \leq \frac{q}{q+1}$, dann gibt es in jeder noch so kleinen δ -Umgebung um x_0 irrationale Punkte x , sodass gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0)| = \frac{q}{q+1} \geq \varepsilon$$

Die Funktion f ist zwar beschränkt, denn es gilt

$$-1 < (-1)^q \frac{q}{q+1} < 1$$

doch bei -1 und 1 handelt es sich nicht um Minimum und Maximum, da die beiden Gleichungen

$$f(x) = (-1)^q \frac{q}{q+1} = -1$$

$$f(x) = (-1)^q \frac{q}{q+1} = 1$$

für kein $x = \frac{p}{q} \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ erfüllt werden können.

All diese Gegenbeispiele machen deutlich, dass tatsächlich auf keine der drei Voraussetzungen von Satz 6 und Satz 8 verzichtet werden kann und unterstreichen damit die Sonderrolle von stetigen Funktionen auf abgeschlossenen und beschränkten Intervallen.

2.2 Gegenbeispiele im Zusammenhang mit der Differentiation reeller Funktionen in einer Variablen

2.2.1 Differenzierbarkeit und Stetigkeit

In diesem Kapitel geht es um den Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit.

Man kann sehr leicht zeigen, dass Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert:

Satz 9. [vgl. Lasser & Hofmaier 2012, S 98]

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x \in I$ differenzierbar. Dann ist f stetig in x .

Beweis. [vgl. Lasser & Hofmaier 2012, S 98]

Sei $t \in I, t \neq x$, dann gilt, da f differenzierbar ist:

$$f(t) - f(x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot (t - x) \rightarrow f'(x) \cdot 0 = 0 \quad \text{für } t \rightarrow x$$

Also: Aus $t \rightarrow x$ folgt $f(t) \rightarrow f(x)$, und daher ist f stetig in x . $\square$

Genauso leicht ist es, einzusehen, dass eine stetige Funktion nicht überall differenzierbar sein muss - das klassische Gegenbeispiel dafür ist die Betragsfunktion, die zwar stetig, aber im Punkt 0 nicht differenzierbar ist, weil sich die “einseitigen”¹ Grenzwerte des Differenzenquotienten unterscheiden.

Interessanter ist aber, dass eine stetige Funktion nicht nur eine, sondern unendlich viele Nichtdifferenzierbarkeitsstellen haben kann. Es gibt nämlich Funktionen, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar sind. Eine solche Funktion ist die Weierstrass-Funktion, die wir schon in Kapitel 2.1.1 kennengelernt haben und jetzt unter dem Gesichtspunkt der Differenzierbarkeit betrachtet noch einmal als Gegenbeispiel verwenden können.

Gegenbeispiel 8 (Nochmals die Weierstrass-Funktion). [vgl. Gelbaum & Olmsted 1964, S 38 u. 78]

Seien f_n, f und h_m so definiert wie in Gegenbeispiel 1. Schon die Art, wie f konstruiert ist legt nahe, dass die Funktion wohl nicht differenzierbar ist, schließlich handelt es sich dabei um Überlagerungen der periodisch fortgesetzten Betragsfunktion.

Wir haben schon gezeigt, dass f überall stetig ist und durch die beiden Ungleichungen

$$f(x_0 + h_m) - f(x_0) \geq h_m > 0 \tag{7}$$

$$f(x_0 - h_m) - f(x_0) \geq h_m > 0 \tag{8}$$

haben wir gesehen, dass f in keinem noch so kleinen Intervall monoton ist. Diese Ungleichungen helfen uns nun auch, zu beweisen, dass f in keinem einzigen Punkt des Definitionsbereichs differenzierbar ist. Wir überprüfen die Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, indem wir die “einseitigen” Grenzwerte des Differenzenquotienten betrachten.

¹Streng genommen handelt es sich hier nicht um einseitige Grenzwerte, sondern um Grenzwerte passender Folgen.

- Für den “rechtsseitigen” Grenzwert gilt dann mit (7):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_m) - f(x_0)}{h_m} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h_m}{h_m} = 1$$

- Und für den “linksseitigen” Grenzwert gilt dann mit (8):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 - h_m) - f(x_0)}{-h_m} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h_m}{-h_m} = -1$$

Da die “einseitigen” Grenzwerte nicht übereinstimmen, kann der Differentialquotient nicht existieren, und somit ist f in keinem Punkt des Definitionsbereichs differenzierbar.

Also können wir zusammenfassend festhalten:

$$\begin{aligned} f \text{ differenzierbar} &\Rightarrow f \text{ stetig} \\ &\text{aber} \\ f \text{ stetig} &\nRightarrow f \text{ differenzierbar} \end{aligned}$$

2.2.2 Stetige Differenzierbarkeit

Da jede stetig differenzierbare Funktion natürlich auch differenzierbar ist, liegt bei wenig genauem Nachdenken vielleicht die Vermutung nahe, dass differenzierbare Funktionen auch stetig differenzierbar sind. Das gilt jedoch nicht, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt.

Gegenbeispiel 9.

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

- Für $x \neq 0$ lässt sich die 1. Ableitung berechnen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

- Für $x = 0$ auch, denn dafür braucht man nur den Limes des Differenzenquotienten im Punkt 0 zu berechnen:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{h}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h}\right)}_{|\sin(\frac{1}{h})| \leq 1} = 0 \end{aligned}$$

Also ist f überall differenzierbar, und die Ableitungsfunktion lautet

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Jetzt kann man sich Fragen nach den Eigenschaften der Ableitungsfunktion stellen; insbesondere interessiert uns, ob diese auch stetig ist. Zur Untersuchung der Stetigkeit betrachten wir $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Wir wollen nun zeigen:

$$\underbrace{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{stetig}} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{unstetig}} \quad (11)$$

Und dadurch ergibt sich dann, dass (11) insgesamt unstetig ist, da die Summe einer stetigen und einer unstetigen Funktion stets unstetig ist. Denn angenommen, p ist stetig, q ist unstetig und $(p + q)$ wäre stetig, dann müsste auch

$$(p + q) + (-p) = p$$

(als Summe zweier stetigen Funktionen, die bekanntermaßen immer stetig ist) stetig sein, und das ist ein Widerspruch dazu, dass q unstetig ist. Wir zeigen nun:

- $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist stetig.
Es reicht, dazu $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ zu betrachten.
 - Für $x \neq 0$ ist die Stetigkeit klar, da es sich um eine Zusammensetzung stetiger Funktionen handelt.
 - Für $x = 0$ betrachtet man den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Es gilt, da $|\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 1$ ist:

$$0 \leq \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

und da $x \rightarrow 0$ gilt (also auch $|x| \rightarrow 0$), folgt aus obiger Ungleichung, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

alternativ kann man das auch aus der Definition der Stetigkeit beweisen: Zu einem $\varepsilon > 0$ kann man einfach $\delta := \varepsilon$ wählen. Befindet sich x in der δ -Umgebung von 0, also $|x - 0| = |x| < \delta$, dann gilt für die Funktionswerte

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| < \delta = \varepsilon$$

womit die Stetigkeit gezeigt ist.

Auch geometrisch ist die Stetigkeit leicht einsehbar, denn der Graph

schwingt zwar in jeder Umgebung von 0 unendlich oft hin und her, aber er wird dabei von den beiden Medianen beschränkt und wird dadurch quasi gezwungen, sich dem Nullpunkt anzunähern, wenn x ebenfalls gegen 0 geht [vgl. Appell 2009, S 13].

- $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ist unstetig in $x = 0$

Wie auch die zuvor betrachtete Funktion $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ schwingt auch $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ in der Nähe von 0 unendlich oft hin und her, jedoch auf andere Art und Weise: Er ist dabei von zwei waagrechten Geraden auf Höhe -1 und 1 beschränkt, und wie wir gleich sehen werden, ist das für die Stetigkeit nicht förderlich. Durch diese Eigenschaft hat $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ jedenfalls auf jedem Intervall $(-\delta, \delta)$ (für $\delta > 0$) unendlich viele Nullstellen, Maxima und Minima [vgl. Appell 2009, S 12].

Diese Tatsache nutzen wir jetzt aus, um 2 verschiedene Nullfolgen zu definieren, bei denen die zugehörigen Folgen von Funktionswerten zu unterschiedlichen Grenzwerten führt. Dazu wählen wir genau die Folgen der Maxima bzw. der Minima:

- Folge der Maxima:

$\cos(x)$ hat Maxima bei $2k\pi$, daher hat $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ Maxima bei

$\frac{1}{2k\pi} := x_k \dots$ Folge der Maxima.

Es gilt: $\frac{1}{2k\pi} = x_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Für die Funktionswerte gilt dabei:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{x_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2k\pi}}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos(2k\pi) = 1 \quad (12)$$

- Folge der Minima:

$\cos(x)$ hat Minima bei $(2k+1)\pi$, daher hat $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ Minima bei

$\frac{1}{(2k+1)\pi} := y_k \dots$ Folge der Minima.

Es gilt: $\frac{1}{(2k+1)\pi} = y_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Für die Funktionswerte gilt dabei:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{y_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{(2k+1)\pi}}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos((2k+1)\pi) = -1 \quad (13)$$

Da die beiden Grenzwerte in (12) und (13) nicht übereinstimmen, ist $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ unstetig bei $x = 0$.

Wir haben also mit der Funktion (9) eine einfache Funktion gefunden, die zwar (überall) differenzierbar ist, deren 1. Ableitungsfunktion (10) allerdings nicht überall stetig ist.

Also:

stetig differenzierbar $\Rightarrow$ differenzierbar

aber

differenzierbar $\nRightarrow$ stetig differenzierbar

2.2.3 Stetige Differenzierbarkeit von höheren Ableitungen

Die obige Aussage kann man auch auf höhere Ableitungen ausdehnen:

n-mal stetig differenzierbar $\Rightarrow$ n-mal differenzierbar

aber

n-mal differenzierbar $\nRightarrow$ n-mal stetig differenzierbar

Gegenbeispiel 10.

Dazu braucht man nur die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad (14)$$

als Gegenbeispiel zu betrachten. Wir beginnen mit dem Induktionsanfang.

- Für $n = 0$ erhält man

$$g_0(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ist 0 mal differenzierbar und ihre 0-te Ableitung (also $g(x)$ selbst) ist unstetig (gerade daraus folgt nämlich, dass sie auch nicht differenzierbar ist). Der Beweis dazu ist analog zu dem von $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

- Für $n = 1$ erhält man

$$g_1(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Für diese Funktion haben wir in Gegenbeispiel 9 schon gezeigt, dass sie 1-mal differenzierbar, ihre 1. Ableitung jedoch unstetig ist (im Punkt 0).

- Für $n = 2$ erhält man

$$g_2(x) = \begin{cases} x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ist überall differenzierbar; auch im Nullpunkt, da der Differenzenquotient

$$\frac{g_2(x) - g_2(0)}{x - 0} = \frac{x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

für $x \rightarrow 0$ den Grenzwert 0 besitzt. Allgemein kann man sagen, dass der Differenzenquotient bei dieser Art von Funktionen (14) immer dann existiert, wenn in der abzuleitenden Funktion die kleinste Potenz von x mindestens 2 ist (also $n \geq 1$), da bei Bildung des Differenzenquotienten immer durch

x dividiert wird.

Die 1. Ableitung lautet also

$$g_2'(x) = \begin{cases} 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Diese ist wiederum differenzierbar und somit lautet die 2. Ableitung

$$g_2''(x) = \begin{cases} 12x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 6x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ist jedoch unstetig, da sie neben ansonsten stetigen Termen den unstetigen Term $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ enthält.

Die Funktion $g(x)$ ist also 2-mal differenzierbar, ihre 2. Ableitung ist jedoch unstetig.

Wir beenden hiermit den Induktionsanfang und gehen über zum Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$ und betrachten die Funktion

$$g_{n+1}(x) = \begin{cases} x^{2(n+1)} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x^{2n+2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Wir berechnen die 1. und 2. Ableitung:

$$\begin{aligned} g_{n+1}'(x) &= (2n+2)x^{2n+1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{2n} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ g_{n+1}''(x) &= (2n+2)(2n+1)x^{2n} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - (4n+2)x^{2n-1} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \underbrace{x^{2n-2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{x^{2(n-1)} \sin\left(\frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den letzten Term von $g_{n+1}''(x)$, nämlich $x^{2(n-1)} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, denn dabei handelt es sich um den Term mit der niedrigsten Potenz von x , also um den Term, der "kritisch" ist für das Stetigkeitsverhalten der gesamten Funktion $g_{n+1}''(x)$, da er auch beim weiteren Ableiten nach der Produktregel stets den Term mit der kleinsten x -Potenz liefern wird².

Wir wissen nun laut Induktionsanfang schon für alle n , dass

$$g(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

n -mal differenzierbar ist und die n -te Ableitung unstetig ist, und daher wissen wir auch für den Term $x^{2(n-1)} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ – also auch für $g_{n+1}''(x)$ insgesamt – dass es noch $(n-1)$ -mal differenzierbar ist (mit unstetiger $(n-1)$ -ter Ableitung).

Das bedeutet wiederum, dass $g_{n+1}(x)$ insgesamt $2 + (n-1) = n+1$ -mal differenzierbar ist, wobei die $(n+1)$ -te Ableitung unstetig ist.

²Denn beim Ableiten des Teils mit der x -Potenz wird diese um 1 verringert, und beim Ableiten des $\sin\left(\frac{1}{x}\right)/\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ -Teils wird die x -Potenz durch die innere Ableitung $\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ um 2 verringert.

2.2.4 Lokale Invertierbarkeit

Wandelt man die in Kapitel 2.2.2 vorgestellte Funktion (9) ein wenig ab, kann man sie auch in einem anderen Zusammenhang als Gegenbeispiel verwenden. Man kann nämlich zeigen

Satz 10. *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\exists x_0 \in [a, b]$ sodass $f'(x_0) > 0$, dann gilt, dass f lokal invertierbar ist.*

Ändert man aber die Voraussetzungen von Satz 10 so, dass f statt stetig differenzierbar nur differenzierbar ist, so gilt der Satz jedoch nicht.

Bevor ich darauf näher eingehen werde, möchte ich zunächst Satz 10 beweisen. Dafür benötige ich zwei Hilfssätze, die ich mitsamt ihren Beweisen hier anführen möchte.

Satz 11. *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Dann gilt, dass f streng monoton ist.*

Beweis. [vgl. Appell 2009, S 32-33]

Um diesen Satz zu beweisen, benutzen wir zunächst die Injektivität von f , die besagt, dass für zwei verschiedene Punkte $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$, gilt, dass $f(x) \neq f(y)$.

Also muss gelten, dass $f(x) > f(y)$ oder $f(x) < f(y)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den Fall, dass $f(x) > f(y)$ ist und nehmen indirekt an, dass f nicht streng monoton ist, also dass $\exists c \in [x, y]$ sodass

$$\begin{aligned} c \neq x \quad \text{und} \quad f(c) \geq f(x) \quad \text{oder} \\ c \neq y \quad \text{und} \quad f(c) \leq f(y) \end{aligned}$$

Im Falle der Gleichheit erhält man sofort einen Widerspruch zur Injektivität von f , da dann $c \neq x$ und $f(c) = f(x)$ bzw. $c \neq y$ und $f(c) = f(y)$ gelten würde. Ansonsten kann man, da f stetig ist, den Zwischenwertsatz anwenden, und für

$$f(c) > f(x) > f(y) \Rightarrow \exists \xi \in [c, y] : f(\xi) = f(x) \quad \text{und} \quad \xi \neq x$$

bzw

$$f(x) > f(y) > f(c) \Rightarrow \exists \mu \in [x, c] : f(\mu) = f(y) \quad \text{und} \quad \mu \neq y$$

was beides wiederum einen Widerspruch zur Injektivität von f darstellt. Damit ist bewiesen, dass f streng monoton ist. □

Satz 12. [vgl. Behrends 2015, S 261-262]

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

i) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ ist monoton steigend.

ii) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ ist streng monoton steigend.

Für $\leq$ bzw. $<$ und (streng) monoton fallend gilt der Satz analog.

Beweis. [vgl. Behrends 2015, S 261-262]

Anmerkung: Aus Platzgründen führe ich hier nur den Beweis von i) an, da der Beweis für ii) analog dazu funktioniert.

($\Rightarrow$) Um zu zeigen, dass f monoton steigend ist, wählt man beliebige Punkte $x, y \in [a, b]$ aus, für die gilt: $x < y$. Nun ergibt sich durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf $f|_{[x,y]} : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$, dass $\exists \xi \in (x, y)$ sodass $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi)$.

Laut Voraussetzung ist nun $f'(\xi) \geq 0$, also auch der Quotient $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ muss ≥ 0 sein. Da $x - y < 0$ gilt, muss daher auch $f(x) - f(y) \leq 0$ gelten, also $f(x) \leq f(y)$, und somit ist f monoton steigend.

($\Leftarrow$) Wir wissen, dass f monoton steigend ist auf $[a, b]$, also gilt

$$\forall x_1, y_1 \in [a, b] \text{ mit } x_1 < y_1 \Rightarrow f(x_1) \leq f(y_1)$$

Der Differenzenquotient für $x, y \in [a, b]$ mit $x \neq y$ lautet

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

– Für $x < y$ gilt dann

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(y)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - y}_{< 0}} \geq 0$$

– Für $x > y$ gilt

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(y)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - y}_{> 0}} \geq 0$$

Also insgesamt gilt $\forall x \in [a, b]$, dass

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

□

Nach dieser kurzen Vorarbeit können wir nun Satz 10 beweisen.

Beweis. [vgl. Steinbauer o. J.-a, Abschnitt 2.1.10]

Die Funktion f ist stetig differenzierbar, also ist die Ableitungsfunktion f' stetig. Wenn es also ein $x_0 \in [a, b]$ gibt mit $f'(x_0) > 0$, dann folgt daraus, dass f' nicht bloß in x_0 größer als 0 ist, sondern auf einer Umgebung um x_0 , sprich

$$\exists \delta > 0 \quad \text{sodass} \quad \forall x \in U_{\delta(x_0)} \cap [a, b] : f'(x) > 0.$$

Denn da $f'(x_0) > 0$ ist, können wir wählen: $\varepsilon := \frac{f'(x_0)}{2}$. Da f' stetig ist, folgt

$$\exists \delta > 0 \quad \text{sodass} \quad \forall x \in [a, b] : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f'(x) - f'(x_0)| < \varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2}. \quad (16)$$

Nun gilt $\forall x \in U_{\delta(x_0)} \cap [a, b]$:³

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |f'(x) + f'(x_0) - f'(x_0)| \\ &\geq |f'(x_0)| - |f'(x) - f'(x_0)| > |f'(x_0)| - \underbrace{\frac{f'(x_0)}{2}}_{\varepsilon} = \frac{f'(x_0)}{2} > 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Nun muss $f'(x) > 0$ gelten $\forall x \in U_{\delta(x_0)} \cap [a, b]$, denn wenn $f'(x_1) < 0$ wäre für ein $x_1 \in U_{\delta(x_0)} \cap [a, b]$, dann müsste es laut Zwischenwertsatz einen Punkt $\xi \in U_{\delta(x_0)} \cap [a, b]$ ⁴ geben mit $f'(\xi) = 0$, und das ist mit (17) jedenfalls ausgeschlossen. Die Ableitungsfunktion ist also größer 0 auf einer Umgebung um x_0 , und mit Satz 12 folgt daher, dass f auf dieser Umgebung streng monoton wachsend ist.

Wir zeigen nun, dass f bijektiv ist.

- Injektivität: Da f auf $U_{\delta(x_0)} \cap [a, b]$ streng monoton wachsend ist, gilt für $x, y \in U_{\delta(x_0)} \cap [a, b]$ mit $x < y$, dass $f(x) < f(y)$, also insbesondere folgt für $x \neq y$, dass $f(x) \neq f(y)$.
- Surjektivität: $f : U_{\delta(x_0)} \cap [a, b] \rightarrow f(U_{\delta(x_0)} \cap [a, b])$ ist jedenfalls surjektiv.

Da f auf $U_{\delta(x_0)} \cap [a, b]$ bijektiv ist, existiert dort die Umkehrfunktion f^{-1} , f ist dort also lokal invertierbar. $\square$

Wir haben also gesehen, dass eine stetig differenzierbare Funktion, deren Ableitung in einem Punkt x_0 größer als 0 ist, in einer Umgebung um x_0 lokal invertierbar ist.

f stetig differenzierbar, $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ lokal invertierbar
aber

f differenzierbar, $f'(x_0) > 0 \not\Rightarrow f$ lokal invertierbar

Gegenbeispiel 11.

Als Gegenbeispiel dafür betrachten wir die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \begin{cases} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Funktion ist überall differenzierbar, denn

³Als Folge aus der Dreiecksungleichung $|x + y| \geq |x| + |y|$ und (16).

⁴Genauer gesagt im Intervall (x_0, x_1) bzw. $(x_1, x_0) \subset U_{\delta(x_0)} \cap [a, b]$.

- Für $x \neq 0$ lässt sich die 1. Ableitung berechnen, da f eine Zusammensetzung aus differenzierbaren Funktionen ist.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 2 \left(2x \sin \left(\frac{1}{x} \right) + x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right) \\ &= 1 + 4x \sin \left(\frac{1}{x} \right) - 2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

- Für $x = 0$ auch, denn der Limes des Differenzenquotienten im Punkt 0 existiert und ist endlich:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \underbrace{2x \sin \left(\frac{1}{x} \right)}_{\rightarrow 0} \right) = 1$$

Die Ableitungsfunktion lautet also

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin \left(\frac{1}{x} \right) - 2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

$f'(x)$ ist aber, wie wir schon an (11) gezeigt haben, nicht stetig:

$$\underbrace{\underbrace{1 + 4x \sin \left(\frac{1}{x} \right)}_{\text{stetig}} \underbrace{- 2 \cos \left(\frac{1}{x} \right)}_{\text{unstetig}}}_{\text{unstetig}}$$

Also: f ist differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar.

Außerdem gilt $f'(0) = 1 > 0$.

Um lokal invertierbar zu sein, müsste f' auf einer Umgebung um 0 größer als 0 sein. Wir zeigen nun aber, dass es keine solche Umgebung gibt, also dass zwar gilt $f'(0) > 0$, aber in jeder Umgebung um 0 gilt: $\exists \xi : f'(\xi) < 0$.

Wir müssen nun die Stellen finden, für die $f'(\xi) < 0$ gilt. Dazu betrachten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 4x \sin \left(\frac{1}{x} \right) - 2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) < 0 \\ 1 &< 2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) - 4x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \\ 1 &< 2 \left(\cos \left(\frac{1}{x} \right) - 2x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \end{aligned}$$

Diese ist jedenfalls an den Maximumsstellen von $\cos \left(\frac{1}{x} \right)$ (die gleichzeitig die Nullstellen von $\sin \left(\frac{1}{x} \right)$ sind) bei $x = \frac{1}{2n\pi}$ (für $n \in \mathbb{N}$), erfüllt, denn dort gilt:

$$1 < 2 \left(\underbrace{\cos \left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} \right)}_1 - 2 \underbrace{\frac{1}{2n\pi} \sin \left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} \right)}_0 \right) = 2$$

Also: $f'(\frac{1}{2n\pi}) < 0$. Wir wählen daher die Folge $x_n := \frac{1}{2n\pi}$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, gilt laut Grenzwertdefinition:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \quad x_n \in U_{\varepsilon(0)}$$

Also: In jeder Epsilonumgebung $U_{\varepsilon(0)}$ um 0 liegen unendlich viele Punkte der Form $\frac{1}{2n\pi}$, und da $f'(\frac{1}{2n\pi}) < 0$ gilt, ist f nicht lokal invertierbar.

2.2.5 Die Regeln von De l'Hospital

In diesem Kapitel geht es um eine nützliche Technik zur Berechnung von Grenzwerten von Quotienten von Funktionen, bei der man mit bloßer Anwendung der herkömmlichen Grenzwertsätze scheitern würde.

Das passiert zum Beispiel bei zwei Funktionen f und g , die in einem Punkt x_0 beide den Grenzwert 0 haben, also

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

denn dann ist der Ausdruck

$$L := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

von der Form " $\frac{0}{0}$ " und daher unbestimmt.

Ebenso ist es bei zwei Funktionen f und g mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$$

nur dass L dann stattdessen von der Form " $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ " ist.

Für diese Berechnungen benötigt man die Regeln von De l'Hospital, die ich im Folgenden vorstellen werde, denn diese besagen, dass der Grenzwert L trotzdem existieren kann und dem Grenzwert

$$L' := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

entspricht [vgl. Appell 2009, S 112].

Wir werden nun einen Spezialfall der l'Hospitalischen Regeln beweisen, nämlich

Satz 13 (L'Hospitalische Regeln). [vgl. Appell 2009, S 112]

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

für ein $x_0 \in I$. Für $x \in I \setminus \{x_0\}$ gelte $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$. Falls der Grenzwert

$$L' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert, dann existiert auch der Grenzwert

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

und es gilt $L = L'$.

Um Satz 13 zu beweisen, benötigen wir noch die allgemeine Form des Mittelwertsatzes.

Satz 14 (Allgemeiner Mittelwertsatz). [vgl. Sauvigny 2014, S 110]

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und $g(a) \neq g(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Beweis. [vgl. Sauvigny 2014, S 110-111]

Wir konstruieren die Hilfsfunktion

$$h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

Dann ist h klarerweise auch stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) und $h(a) = 0 = h(b)$.

Dann gibt es (laut Satz von Rolle, den ich an dieser Stelle nicht anführen werde) ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi)$$

und das kann man umformen zu

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Womit der Satz gezeigt ist. □

Nun zum Beweis von Satz 13.

Beweis. [vgl. Appell 2009, S 112-113]

Da der Grenzwert $L' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass gilt

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L' \right| < \varepsilon$$

für alle x mit $0 < |x - x_0| < \delta$.

Wir wählen nun zwei Punkte x_1 und x_2 links von x_0 aus mit $x_0 - \delta < x_1 < x_2 < x_0$. Dann gibt es laut dem allgemeinen Mittelwertsatz ein $\xi \in (x_1, x_2) \subset (x_0 - \delta, x_0)$ mit

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Also gilt

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} - L' \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L' \right| < \varepsilon$$

Für $x_2 \rightarrow x_0$ erhält man dann

$$\left| \frac{f(x_1)}{g(x_1)} - L' \right| < \varepsilon$$

für x_1 mit $x_0 - \delta < x_1 < x$. Und das bedeutet, dass

$$L' = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Für $x \searrow x_0$ wählt man einfach $x_0 < x_1 < x_2 < x_0 + \delta$, lässt x_1 gegen x_0 gehen und erhält dasselbe Ergebnis, also insgesamt

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L'$$

□

Satz 13 gilt analog für die uneigentlichen Grenzwerte

$$L := \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$L' := \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

und für den Fall, dass gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$$

und für Grenzwerte von Produkten von Funktionen

$$L := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$$

mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

oder andersherum [vgl. Appell 2009, S 113].

Man muss jedoch beachten, dass die Umkehrung der l'Hospital'schen Regeln nicht gilt, also dass aus der Existenz des Grenzwerts L im Allgemeinen nicht die Existenz des Grenzwerts L' folgt [vgl. Appell 2009, S 120]. Das zeigen die folgenden beiden Gegenbeispiele.

Gegenbeispiel 12. [vgl. Appell 2009, S 120]

Seien

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned}g &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\g(x) &= x\end{aligned}$$

zwei Funktionen. Dann existiert zwar der Grenzwert

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

aber der Grenzwert

$$L' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right]$$

existiert wegen der Divergenz von $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht.

Gegenbeispiel 13. [vgl. Appell 2009, S 120]
Seien

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\f(x) &= x - \sin(x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}g &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\g(x) &= x\end{aligned}$$

zwei Funktionen. Dann existiert zwar der uneigentliche Grenzwert

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\sin(x)}{x} \right) = 1$$

aber der uneigentliche Grenzwert

$$L' = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \cos(x))$$

existiert wegen der Divergenz von $\cos(x)$ nicht.

2.2.6 Taylorreihen

In diesem Kapitel geht es um die sogenannten Taylorpolynome bzw. Taylorreihen, die dazu dienen, differenzierbare Funktionen durch eine Polynomfunktion anzunähern.

Die Idee dahinter ist folgende [vgl. Pöschel 2014a, S 241-242]:

- Eine im Punkt x_0 stetige Funktion f kann man in einer Umgebung von x_0 gut durch eine konstante Funktion annähern.
- Eine im Punkt x_0 differenzierbare Funktion f kann man in einer Umgebung von x_0 gut durch eine lineare Funktion annähern.

- Es ist nun naheliegen, sich zu fragen, ob man bei einer im Punkt x_0 mehrfach differenzierbaren Funktion mit Hilfe von Polynomen höheren Grades eine noch bessere Approximation erreichen kann.

Das ist in der Tat möglich, und zwar mit dem Taylorpolynom, das folgendermaßen definiert ist:

Definition 11 (Taylorpolynom). [vgl. Behrends 2015, S 273]

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar und sei $x_0 \in [a, b]$. Unter dem n -ten Taylorpolynom bei x_0 verstehen wir dann das Polynom

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \end{aligned}$$

Im Punkt x_0 stimmen dann jedenfalls der Funktionswert und alle Ableitungen bis zur Ordnung n von f und T_n überein, also

$$\begin{aligned} T_n(x_0) &= f(x_0) \\ T'_n(x_0) &= f'(x_0) \\ T''_n(x_0) &= f''(x_0) \\ &\vdots \\ T_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

ergibt sich [vgl. Appell 2009, S 123].

So gut ist die Approximation allerdings im Allgemeinen nur im Punkt x_0 bzw. in dessen Nähe [vgl. Behrends 2015, S 275].

Wie groß der Fehler ist, den man bei der Approximation macht, darüber gibt der Satz von Taylor Auskunft.

Satz 15 (Satz von Taylor). [vgl. Appell 2009, S 123]

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion und sei T_n das Taylorpolynom n -ten Grades. Dann gibt es ein ξ zwischen x_0 und x , sodass für $x \in [a, b]$ gilt

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

wobei das Restglied $R_n(x)$ definiert ist als

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Beweis. [vgl. Appell 2009, S 124]

Wir definieren zunächst die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ g(t) &= f(t) - T_n(t) - \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} (t - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

(beachte, dass x dabei fix ist).

Um später den Satz von Rolle auf g und seine Ableitungen anwenden zu können, berechnen wir

$$\begin{aligned} g(x_0) &= f(x_0) - T_n(x_0) = 0 \\ g(x) &= 0 \end{aligned}$$

und die Ableitungen

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(t) - T'_n(t) - (n+1) \cdot \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} (t-x_0)^n \\ g''(t) &= f''(t) - T''_n(t) - (n+1) \cdot n \cdot \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} (t-x_0)^{n-1} \\ &\vdots \\ g^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(t) - (n+1)! \cdot \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

und es gilt

$$g'(x_0) = g''(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$$

Laut Satz von Rolle gibt es nun ein x_1 zwischen x_0 und x mit $g'(x_1) = 0$, und daher gibt es ein x_2 zwischen x_0 und x_1 mit $g''(x_2) = 0$, und daher wiederum gibt es ein x_3 zwischen x_0 und x_2 mit $g'''(x_3) = 0$ usw., und schließlich gibt es auch ein x_n zwischen x_0 und x_{n-1} mit $g^{(n)}(x_n) = 0$. Und daher gibt es ein ξ zwischen x_0 und x_n mit

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! \cdot \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

und das kann man umformen zu

$$\begin{aligned} (n+1)! \cdot \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= f^{(n+1)}(\xi) \\ f(x) &= T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)} \end{aligned}$$

□

Ist die Funktion f sogar unendlich oft stetig differenzierbar, dann kann man zur Approximation sogar die Taylorreihe verwenden, die folgendermaßen definiert ist:

Definition 12 (Taylorreihe). [vgl. Appell 2009, S 128]

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft stetig differenzierbar und sei $x_0 \in [a, b]$. Unter der Taylorreihe von f bei x_0 verstehen wir

$$\begin{aligned} T_\infty(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots \end{aligned}$$

Die Taylorreihe muss jedoch nicht konvergieren, und auch wenn sie konvergiert, muss sie nicht gegen die ursprüngliche Funktion f konvergieren, also es muss nicht gelten

$$T_{\infty}(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

Gegenbeispiel 14. [vgl. Forster 2016, S 282-283]

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Die Besonderheit dieser Funktion ist, dass sich der Graph von f in der Nähe des Nullpunkts sehr stark an die x -Achse anschmiegt.

Wir wollen zunächst zeigen, dass f unendlich oft differenzierbar ist. Dazu behaupten wir, dass die n -te Ableitung von f von der Form

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist, wobei $p_n\left(\frac{1}{x}\right)$ ein passendes Polynom ist und beweisen dies mittels vollständiger Induktion.

- Induktionsanfang:

Für $n = 0$ erhalten wir $p_0\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ und

$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

- Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$:

– Für $x \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= [f^{(n)}(x)]' = \left[p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right]' \\ &= p_n'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \\ &= \left[-p_n'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} + 2p_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^3} \right] e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

und somit ist $p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) = -p_n'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2p_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3$

– Für $x = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \cdot p_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2} \right] \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left[y \cdot p_n(y) \cdot e^{-y^2} \right] \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y \cdot p_n(y)}{e^{y^2}} = 0 \end{aligned}$$

denn die Exponentialfunktion wächst stärker als jedes Polynom.

Und somit haben wir bewiesen, dass

$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Die Funktion f ist also unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Die Taylorreihe im Punkt $x_0 = 0$ ist dann

$$T_\infty(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x - 0)^k = 0$$

Die Taylorreihe T_∞ und die Funktion f stimmen also bloß für $x = 0$ überein, denn überall sonst gilt $T_\infty(x) = 0$, aber $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} > 0$.

Es gibt jedoch verschiedene hinreichende Bedingungen dafür, wann eine Funktion durch eine Taylorreihe dargestellt werden kann. Diese werden wir hier jedoch nicht mehr behandeln.

2.2.7 Anfangswertprobleme

In diesem Kapitel behandeln wir Anfangswertprobleme, eine spezielle Art von Differentialgleichung.

Unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung (erster Ordnung) verstehen wir eine Gleichung der Form

$$y' = f(x, y)$$

mit einer Variablen x , einer Funktion $y(x)$ und deren Ableitung $y'(x)$, wobei $f : M \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt.

Eine Lösung von dieser Gleichung ist jede differenzierbare Funktion $\varphi : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die aus $x \in D$ stets $(x, \varphi(x)) \in M$ folgt und für die

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in D$$

gilt [vgl. Appell 2009, S 132].

Im Allgemeinen erhält man als Lösung nicht bloß eine einzige Funktion, sondern eine ganze Kurvenschar. Das ist nicht weiter verwunderlich, da man beim Berechnen der Lösung meistens auf Stammfunktionen zurückgreifen muss, und diese sind nur bis auf eine Konstante c eindeutig bestimmt. Diese Konstante c spiegelt sich dann in der Lösung wieder.

Will man jedoch nur eine bestimmte Funktion erhalten, die die Gleichung erfüllt, muss man eine weitere Bedingung an die Lösungsfunktion hinzufügen, wie etwa einen festen Punkt (x_0, y_0) in der Ebene, durch den die Lösungskurve verlaufen soll. So etwas bezeichnet man dann als Anfangswertproblem [vgl. Appell 2009, S 138].

Definition 13 (Anfangswertproblem). [vgl. Appell 2009, S 138-139]

Ein Anfangswertproblem hat die Form

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

wobei (x_0, y_0) ein fest gewählter Punkt im Definitionsbereich von f sei. Eine Lösung des Anfangswertproblems ist jede differenzierbare Funktion $\varphi : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

und $\varphi(x_0) = y_0$.

Doch auch dann ist nicht garantiert, dass man durch die hinzugefügte Anfangsbedingung die Konstante c in der allgemeinen Lösung eindeutig bestimmen kann [vgl. Appell 2009, S 140]. Das zeigen die folgenden Gegenbeispiele, wobei man beim Ersten zwei verschiedene, beim Zweiten sogar unendlich viele verschiedene Lösungen erhält.

Gegenbeispiel 15. [vgl. Appell 2009, S 136-138 u. 141]

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{y} - y \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

Dabei handelt es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung, da sie von der Form

$$y' = p(x)y + q(x)y^\tau$$

ist mit $p(x) = -1$ und $q(x) = x$, die beide stetig sind und $\tau = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Durch die Transformation $z := y^{1-\tau} = \sqrt{y}$, also $y = z^2$, erhält man

$$y' = 2z$$

und gemeinsam mit

$$y' = xz - z^2$$

ergibt das eine lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 2z &= xz - z^2 \\ 1 &= \frac{x}{2} - \frac{z}{2} \\ z' &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z \end{aligned}$$

Da diese Gleichung von der Form

$$z' = u(x)z + v(x)$$

mit $u(x) = -\frac{1}{2}$ und $v(x) = \frac{1}{2}x$, hat die allgemeine Lösung die Form

$$z = e^{U(x)}(\alpha(x) + c)$$

wobei U eine Stammfunktion von u und α eine Stammfunktion von ve^{-U} ist. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} U &= \int u(x) \, dx = \int -\frac{1}{2} \, dx = -\frac{x}{2} \\ \alpha &= \int ve^{-U} \, dx = \underbrace{\int \frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}} \, dx}_{\text{Partiell integrieren}} = \frac{1}{2}x \cdot 2e^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}} \, dx = xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} = (x-2)e^{\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Daher lautet die allgemeine Lösung

$$z = e^{-\frac{x}{2}} \left((x-2)e^{\frac{x}{2}} + c \right) = x - 2 + ce^{-\frac{x}{2}}$$

und somit gilt

$$y = z^2 = (x - 2 + ce^{-\frac{x}{2}})^2$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt

$$y(0) = (c - 2)^2 = 4$$

und diese Gleichung hat zwei verschiedene Lösungen für c , nämlich $c_1 = 0$ und $c_2 = 4$, was bedeutet, dass durch den Punkt $(0, 4)$ zwei Lösungsfunktionen verlaufen, nämlich

$$\begin{aligned} y &= (x - 2)^2 \\ y &= (x - 2 + 4e^{-\frac{x}{2}})^2 \end{aligned}$$

und somit erhalten wir trotz Anfangsbedingung keine eindeutige Lösung.

Gegenbeispiel 16. [vgl. Appell 2009, S 141-142]

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Wegen der Wurzel werden wir uns auf nichtnegative Lösungen beschränken.
Es lassen sich leicht zwei Lösungen erraten, nämlich

$$y = 0$$

$$y = \frac{x^2}{4}$$

Man kann diese beiden Funktionen zu einer weiteren Funktion kombinieren, die ebenfalls eine Lösung des Anfangswertproblems ist. Für $\varepsilon > 0$ können wir definieren

$$y = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq \varepsilon \\ \frac{1}{4}(x - \varepsilon)^2 & \text{für } x > \varepsilon \end{cases}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden darf, erhalten wir damit überabzählbar viele Lösungen für das Anfangswertproblem.

Doch was ist der Grund für die Nichteindeutigkeit dieser Anfangswertprobleme, bzw. unter welchen Bedingungen ist ein Anfangswertproblem eindeutig lösbar? Die Antwort auf diese Frage liefert der folgende Satz.

Satz 16. [vgl. Appell 2009, S 142-143]

Sei $f : [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die bzgl. der zweiten Variable die Lipschitzbedingung

$$|f(x, y) - f(x, y')| \leq L |y - y'|$$

für $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ und $y_0 - b \leq y, y' \leq y_0 + b$ erfüllt. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

höchstens eine Lösung auf einem geeigneten Intervall $[x_0, x_0 + \alpha]$ mit $\alpha \leq a$.

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir einen weiteren Satz:

Satz 17. [vgl. Appell 2009, S 109-110]

Sei $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei $h(a) = 0$. Wenn es ein $L > 0$ gibt, sodass

$$|h'(x)| \leq L |h(x)| \quad \forall x \in [a, b]$$

dann gilt $h(x) \equiv 0$ auf $[a, b]$.

Beweis. [vgl. Appell 2009, S 110]

Wir fixieren einen Punkt $x_0 \in (a, b]$ und setzen

$$M := \max\{|h(x)| : a \leq x \leq x_0\}$$

$$M' := \max\{|h'(x)| : a \leq x \leq x_0\}$$

Da gilt

$$|h'(x)| \leq L |h(x)| \quad \forall x \in [a, b]$$

folgt

$$M' \leq L \cdot M$$

Wir können nun ein beliebiges $x \in (a, x_0]$ auswählen und den Mittelwertsatz auf das Intervall $[a, x]$ anwenden. Dieser besagt, dass es ein $\xi \in (a, x)$ gibt mit

$$\begin{aligned} h(x) - \underbrace{h(a)}_0 &= h'(\xi)(x - a) \\ h(x) &= h'(\xi)(x - a) \end{aligned}$$

Geht man nun zum Betrag über, ergibt sich

$$\begin{aligned} |h(x)| &= |h'(\xi)| (x - a) \\ &\leq M'(x - a) \\ &\leq M'(x_0 - a) \\ &\leq L \cdot M(x_0 - a) \end{aligned}$$

Da die Abschätzung für alle x gilt, gilt sie auch für das Maximum der $|h(x)|$, also

$$M \leq L \cdot M(x_0 - a) \quad (18)$$

Für $a \leq x_0 < a + \frac{1}{L}$ wäre $L \cdot (x_0 - a) < 1$, und dann wäre (18) ein Widerspruch falls $M \neq 0$. Somit muss gelten

$$h(x) = 0 \quad \forall x \in \left[a, a + \frac{1}{L} \right)$$

und lässt man x_0 gegen $a + \frac{1}{L}$ gehen, gilt das auch $\forall x \in [a, a + \frac{1}{L}]$. □

Damit werden wir nun Satz 16 beweisen.

Beweis. [vgl. Appell 2009, S 143]

Angenommen, es gibt zwei verschiedene Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : [x_0, x_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ (mit geeignetem $\alpha > 0$), die das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

erfüllen.

Wir betrachten die Differenzenfunktion $h(x) := \varphi_1 - \varphi_2$. Dann gilt

$$h(x_0) = \varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0) = y_0 - y_0 = 0$$

und h ist stetig differenzierbar. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} |h'(x)| &= |\varphi_1'(x) - \varphi_2'(x)| = |f(x, \varphi_1(x)) - f(x, \varphi_2(x))| \\ &\leq L |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = L |h(x)| \end{aligned}$$

für $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$, da f Lipschitz-stetig bzgl. der zweiten Variable ist. Daher erfüllt h die Bedingungen aus Satz 16, und somit folgt $h(x) \equiv 0$ auf $[x_0, x_0 + \alpha]$, und das bedeutet $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$, das Anfangswertproblem besitzt also höchstens eine Lösung. □

Der Grund für die Vielzahl an Lösungsfunktionen in Gegenbeispiel 15 und 16 ist also, dass in der Gleichung der Term $\sqrt{y}$ vorkommt, und die Funktion

$$\begin{aligned} f &: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(y) &= \sqrt{y} \end{aligned}$$

in der Nähe des Nullpunkts nicht Lipschitz-stetig ist. Denn angenommen, f wäre Lipschitz-stetig, dann gibt es ein $L > 0$, sodass

$$|f(x) - f(x')| \leq L |x - x'| \quad \forall x, x' \in [0, \infty)$$

Wir wählen $x' = 0$ und $x = \delta > 0$, dann folgt

$$\begin{aligned} |f(\delta) - f(0)| &\leq L |\delta - 0| \\ \sqrt{\delta} &\leq L \cdot \delta \\ L &\geq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \end{aligned}$$

Wenn wir nun δ genügend klein wählen, also $\delta < \frac{1}{L^2}$, dann erhalten wir

$$L \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}} > \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{L^2}}} = L$$

und das ist ein Widerspruch, also ist f nicht Lipschitz-stetig im Nullpunkt, und das erklärt die Uneindeutigkeit der zuvor behandelten Anfangswertprobleme.

Allerdings ist zu beachten, dass die Lipschitzstetigkeit nur eine hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems ist, sie ist aber keinesfalls auch notwendig. Das heißt, man kann zwar aus der Uneindeutigkeit eines Anfangswertproblems schließen, dass die Lipschitzbedingung nicht erfüllt ist, aber es gibt auch Anfangswertprobleme mit nicht-Lipschitz-stetigen Funktionen, die trotzdem eindeutig lösbar sind [vgl. Appell 2009, S 43].

2.3 Gegenbeispiele im Zusammenhang mit anderen Funktionenklassen

Zusätzlich zu den Klassen der stetigen und der differenzierbaren Funktionen gibt es natürlich noch weitere Funktionenklassen, bei deren Betrachtung man auf einige interessante Gegenbeispiele stößt.

2.3.1 Funktionen von beschränkter Variation

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit einer weiteren Klasse von Funktionen, nämlich mit Funktionen von beschränkter Variation. Worum es sich dabei handelt, darüber geben die folgenden Definitionen Aufschluss.

Definition 14 (Zerlegung eines Intervalls). [vgl. Appell 2009, S 37]

Eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ ist die Menge

$$\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_{m-1}, t_m\}$$

mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$ für $m \in \mathbb{N}$. Die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}([a, b])$.

Definition 15 (Funktionen von beschränkter Variation). [vgl. Appell 2009, S 37-38]

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, dann schreiben wir

$$\text{Var}(f; \mathcal{Z}, [a, b]) := \sum_{j=1}^m |f(t_j) - f(t_{j-1})|$$

und wir nennen

$$\text{Var}(f; [a, b]) := \sup\{\text{Var}(f; \mathcal{Z}, [a, b]) : \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}([a, b])\}$$

die Gesamtvariation von f auf $[a, b]$. Ist diese Zahl endlich, so heißt f von beschränkter Variation auf $[a, b]$.

Anschaulich bedeutet diese Definition, dass man sich eine Funktion von beschränkter Variation als “nicht allzu stark oszillierend” vorstellen kann.

Zusammenhang von beschränkter Variation und Monotonie

Zuerst werden wir uns ansehen, ob ein Zusammenhang zwischen der Monotonie und den Variationseigenschaften einer Funktion besteht. Der folgende Satz zeigt, dass aus Monotonie jedenfalls auch beschränkte Variation folgen muss.

Satz 18. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine monotone Funktion, dann ist f von beschränkter Variation.

Beweis. [vgl. Appell 2009, S 38]

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass f monoton wachsend ist. Sei $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, dann gilt:

$$t_{j-1} < t_j \quad \Rightarrow \quad f(t_{j-1}) \leq f(t_j)$$

also $f(t_j) - f(t_{j-1}) \geq 0$, und somit können wir die Betragsstriche weglassen und erhalten

$$\text{Var}(f; \mathcal{Z}, [a, b]) = \underbrace{\sum_{j=1}^m (f(t_j) - f(t_{j-1}))}_{\text{Teleskopsumme}} = f(b) - f(a)$$

also gilt auch $\text{Var}(f; [a, b]) = f(b) - f(a)$ (für f monoton fallend erhält man entsprechend $f(a) - f(b)$), und da dieser Wert jedenfalls endlich ist, ist f von beschränkter Variation. $\square$

Umgekehrt gestaltet sich die Situation jedoch etwas komplizierter, denn beschränkte Variation impliziert nicht Monotonie, wie das einfache Gegenbeispiel der Sinusfunktion zeigt.

Gegenbeispiel 17. Die Funktion

$$\begin{aligned} f &: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \sin x \end{aligned}$$

ist von beschränkter Variation, denn mit $\mathcal{Z} = \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ ist

$$\begin{aligned}\text{Var}(f; \mathcal{Z}, [0, 2\pi]) &= \sum_{j=0}^3 |f(t_j) - f(t_{j-1})| = 4 \\ &= \sup\{\text{Var}(f; \mathcal{Z}, [0, 2\pi]) : \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}([0, 2\pi])\}\end{aligned}$$

aber f ist nicht monoton auf $[0, 2\pi]$.⁵

Eine Funktion von beschränkter Variation muss also nicht auf ihrem gesamten Definitionsbereich monoton sein. Man könnte meinen, dass vielleicht zumindest eine abgeschwächte Form der Implikation gilt, also dass beispielsweise eine Funktion von beschränkter Variation zumindest auf einem Teilintervall $[c, d] \subseteq [a, b]$ monoton sein muss, doch auch das ist nicht der Fall, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

Gegenbeispiel 18. [vgl. Appell 2009, S 39-40]

Sei $(0, 1) \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1. Wir betrachten

$$\begin{aligned}f &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \begin{cases} 2^{-k} & \text{für } x = r_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\end{aligned}$$

Wir wollen zuerst zeigen, dass f von beschränkter Variation ist.

- Durch Wählen einer speziellen Zerlegung können wir zeigen, dass $\text{Var}(f; [0, 1]) \geq 2$ ist. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$, dann wählen wir die ersten n Zahlen $r_1, r_2, \dots, r_n$ der Größe nach aus und benennen sie um zu $t_1, t_3, t_5, \dots, t_{2n-1}$ und wählen zusätzlich $t_0 := 0$ und $t_{2n} := 1$. Insbesondere ist dann $0 = t_0 < t_1 < t_3 < \dots < t_{2n-1} < t_{2n} = 1$ und somit erhalten wir die Zerlegung $\mathcal{Z}_0 = \{t_0, t_1, t_3, \dots, t_{2n-1}, t_{2n}\}$ des Intervalls $[0, 1]$. Schließlich erweitern wir die Zerlegung $\mathcal{Z}_0$ um die Punkte mit geradem Index, indem wir für $k = 1, 2, \dots, n-1$ die Punkte t_{2k} im Intervall $(t_{2k-1}, t_{2k+1}) \setminus \mathbb{Q}$ wählen. Dadurch erhalten wir $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{2n-1}, t_{2n}\} \in \mathfrak{Z}([0, 1])$. Dann gilt

⁵Man kann das Intervall $[0, 2\pi]$ jedoch in Teilintervalle zerlegen, auf denen f monoton ist, nämlich $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. Funktionen, bei denen das möglich ist sind natürlich automatisch von beschränkter Variation. Umgekehrt gilt das jedoch nicht, siehe Gegenbeispiel 18 [vgl. Appell 2009, S 38-39].

(da für t_{2k} gilt, dass $f(t_{2k}) = 0$):

$$\begin{aligned}
\text{Var}(f; \mathcal{Z}, [0, 1]) &= \sum_{j=1}^{2n} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \\
&= f(t_1) + f(t_1) + f(t_3) + f(t_3) + \cdots + f(t_{2n-1}) + f(t_{2n-1}) \\
&= 2f(r_1) + 2f(r_2) + \cdots + 2f(r_n) \\
&= 2 \sum_{j=1}^n 2^{-j} = 2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^j \\
&= 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \\
&= 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right]}{\frac{1}{2}} = \frac{2 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right]}{\frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \\
&= 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \tag{19}
\end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ kommt der Ausdruck (19) beliebig nahe an 2 heran, also hat f mindestens eine Gesamtvariation von 2 (schließlich haben wir es hier mit einer speziellen Zerlegung von $[0, 1]$ zu tun, und es könnte andere Zerlegungen geben, bei der die Variation größer ausfällt).

- Ebenso können wir zeigen, dass $\text{Var}(f; [0, 1]) \leq 2$ gilt. Dazu sei $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$. Für $j \in \{1, \dots, m\}$ wähle $k(j) := \min\{k : r_k \in [t_{j-1}, t_j]\}$. Dadurch kommen wir zu folgender Gleichung

$$\sum_{j=1}^m \underbrace{|f(t_j) - f(t_{j-1})|}_{\substack{\leq \sup_{[t_{j-1}, t_j]} f - \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f = 2^{-k(j)}}} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Also gilt $\text{Var}(f; [0, 1]) \leq 2$.

Insgesamt ergibt das, dass $\text{Var}(f; [0, 1]) = 2$, also ist f von beschränkter Variation. Die Funktion f ist jedoch auf keinem noch so kleinen Teilintervall $[c, d] \subseteq [a, b]$ monoton, weil jedes Teilintervall unendlich viele rationale und irrationale Punkte enthält.

Es besteht jedoch trotzdem ein gewisser Zusammenhang zwischen beschränkter Variation und Monotonie, wenn auch ein anderer, als man es sich vielleicht erwarten würde. Der abschließende Satz zeigt nämlich, dass sich Funktionen von beschränkter Variation als Differenz zweier monoton wachsenden Funktionen darstellen lassen.

Satz 19. [vgl. Appell 2009, S 38]

Jede Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ von beschränkter Variation lässt sich in Form von $f = g + h$ mit einer monoton wachsenden Funktion g und einer monoton fallenden Funktion h darstellen.

Beweis. [vgl. Appell 2009, S 38]

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ von beschränkter Variation. Dann können wir aus f eine neue Funktion entwickeln, nämlich

$$\begin{aligned} v_f &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ v_f(x) &= \text{Var}(f; [a, x]) \end{aligned}$$

Diese nennen wir Variationsfunktion von f . Sie ist klarerweise monoton wachsend mit $v_f(a) = 0$ und $v_f(b) = \text{Var}(f; [a, b])$. Wir setzen nun $g := v_f$ und $h := f - v_f$. Dann gilt natürlich $g + h = v_f + (f - v_f) = f$ und wir müssen nur noch zeigen, dass h monoton fallend ist. Für $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ gilt

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \text{Var}(f; [x_1, x_2]) = v_f(x_2) - v_f(x_1)$$

und daraus folgt dann, dass

$$h(x_1) = f(x_1) - v_f(x_1) \geq f(x_2) - v_f(x_2) = h(x_2)$$

Also ist h monoton fallend. □

Also, nochmal zusammengefasst:

$$\begin{aligned} f \text{ ist monoton} &\Rightarrow f \text{ ist von beschränkter Variation} \\ &\text{aber} \\ f \text{ ist von beschränkter Variation} &\not\Rightarrow f \text{ ist überall monoton} \\ &\Rightarrow f \text{ ist monoton auf Teilintervall} \\ &\text{jedoch} \\ f \text{ ist von beschränkter Variation} &\Rightarrow f \text{ ist als Differenz zweier monoton} \\ &\text{wachsender Funktionen darstellbar} \end{aligned}$$

Zusammenhang von beschränkter Variation und Stetigkeit

Als nächstes werden wir uns mit der Frage beschäftigen, ob ein Zusammenhang besteht zwischen den Variationseigenschaften und der Stetigkeit einer Funktion. Diese Frage muss jedoch mit Nein beantwortet werden, denn einerseits muss eine Funktion von beschränkter Variation sicher nicht stetig sein (als Gegenbeispiel braucht man bloß an eine monotone Funktion mit einer Sprungstelle zu denken), andererseits gilt aber auch die umgekehrte Implikation nicht, also eine stetige Funktion muss nicht von beschränkter Variation sein. Als Gegenbeispiel dient uns die in der Arbeit schon öfter erwähnte Funktion $x \sin \frac{1}{x}$, da diese zwar nur so stark oszilliert, dass sie gerade noch stetig ist, aber schon zu stark, um von beschränkter Variation zu sein [vgl. Appell 2009, S 40].

Gegenbeispiel 19. [vgl. Appell 2009, S 40]

Wir betrachten

$$\begin{aligned} f &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \begin{cases} x \sin \left(\frac{1}{x} \right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Von dieser Funktion wissen wir schon aus unseren Überlegungen zu Gegenbeispiel 9, dass f stetig ist.

Wir wollen nun zeigen, dass f nicht von beschränkter Variation ist. Dazu müssen wir eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ so angeben, dass

$$\text{Var}(f; \mathcal{Z}, [0, 1]) = \sum_{j=1}^m |f(t_j) - f(t_{j-1})|$$

möglichst groß wird. Das können wir erreichen, indem wir die Zerlegung so wählen, dass die t_j immer abwechselnd an einer Minimums- und einer Maximumsstelle liegen. Zuerst können wir außerdem $t_0 := 0$ und $t_m := 1$ setzen, denn die Zerlegung muss ja jedenfalls an den Intervallgrenzen beginnen und enden. Um die Minimums- und Maximumsstellen im Intervall $(0, 1)$ zu finden, berechnen wir die 1. Ableitung von f für $0 < x < 1$. Diese lautet:

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Anschließendes Nullsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) &= 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Da $x \in (0, 1)$ gilt, können wir substituieren zu $u := \frac{1}{x}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \sin u &= u \cos u \\ u &= \frac{\sin u}{\cos u} \\ u &= \tan u \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist nun nicht ganz trivial; wir werden uns darauf beschränken, eine etwas naive graphische Näherungslösung herzuleiten. Dazu betrachten wir die Schnittpunkte der Graphen der Funktionen

$$\begin{aligned} g(x) &= x \\ h(x) &= \tan x \end{aligned}$$

auf dem Intervall $(0, \infty)$.

Wie man Abbildng 1 entnehmen kann, liegen die Schnittpunkte von g und h sehr nahe an den Punkten $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$. Daher ist es naheliegend, $u_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ für $k \in \mathbb{N}$ als Näherungslösung unserer Gleichung anzugeben. Durch Rücksubstituieren erhält man

$$x_k = \frac{1}{u_k} = \frac{2}{(2k+1)\pi}$$

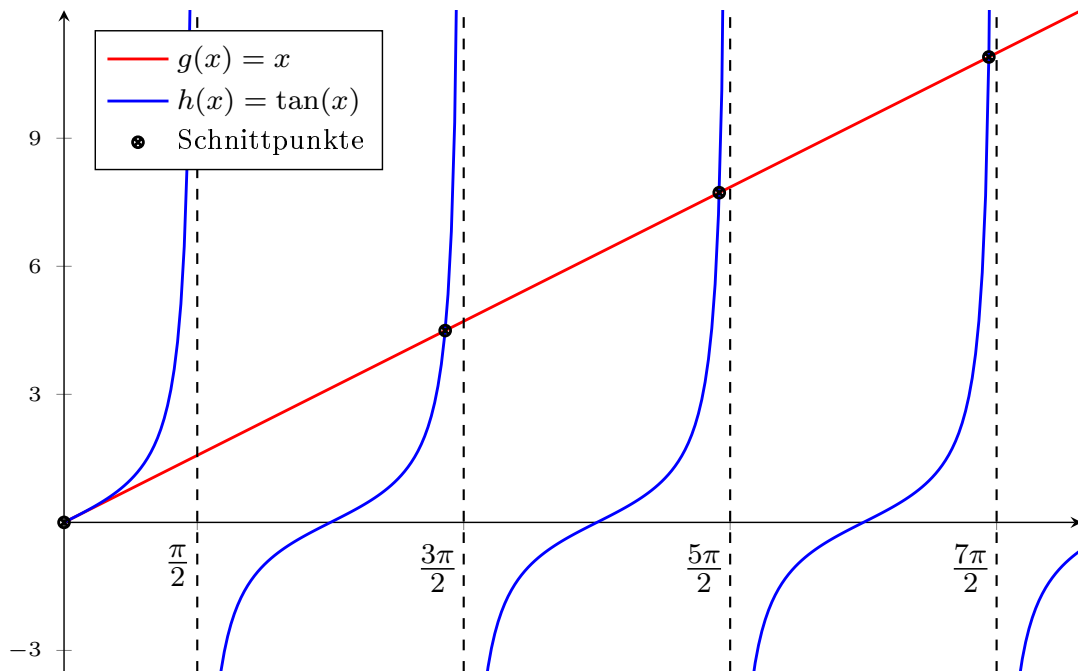


Abbildung 1: Schnittpunkte der Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ nähern sich zunehmend den Asymptoten

und das sind die Punkte, an denen f Maximum und Minimum (ausreichend genau) annimmt.

Unsere Zerlegung hat also die Form

$$\begin{aligned}
 t_0 &= 0 \\
 t_1 &= \frac{2}{(2m-1)\pi} \\
 t_2 &= \frac{2}{(2m-3)\pi} \\
 &\vdots \\
 t_{m-2} &= \frac{2}{5\pi} \\
 t_{m-1} &= \frac{2}{3\pi} \\
 t_m &= 1
 \end{aligned}$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(f; \mathcal{Z}, [0, 1]) &= \sum_{j=1}^m |f(t_j) - f(t_{j-1})| \\
 &= \sum_{j=1}^m \left| t_j \sin\left(\frac{1}{t_j}\right) - t_{j-1} \sin\left(\frac{1}{t_{j-1}}\right) \right|
 \end{aligned}$$

Wenn o.B.d.A. t_j eine Maximumsstelle und t_{j-1} eine Minimumsstelle sind, gilt

für $j = 2, 3, \dots, m-1$ (da $t_{j-1} < t_j$ ist):

$$\left| \underbrace{t_j \sin\left(\frac{1}{t_j}\right)}_1 - \underbrace{t_{j-1} \sin\left(\frac{1}{t_{j-1}}\right)}_{-1} \right| = |t_j + t_{j-1}| \geq 2$$

Also gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \left| t_j \sin\left(\frac{1}{t_j}\right) - t_{j-1} \sin\left(\frac{1}{t_{j-1}}\right) \right| \\ &= \left| \underbrace{t_1 \sin\left(\frac{1}{t_1}\right)}_{\pm 1} - 0 \right| + \underbrace{\left| t_2 \sin\left(\frac{1}{t_2}\right) - t_1 \sin\left(\frac{1}{t_1}\right) \right|}_{\geq 2t_1} + \dots + \left| \underbrace{t_m \sin\left(\frac{1}{t_m}\right)}_{\sin(1)} - \underbrace{t_{m-1} \sin\left(\frac{1}{t_{m-1}}\right)}_{\pm 1} \right| \\ &\geq t_1 + \sin(1) \pm t_{m-1} + 2 \sum_{j=1}^{m-2} t_j \\ &= t_1 + \sin(1) \pm t_{m-1} + 2 \sum_{k=0}^{m-2} \frac{2}{(2k+1)\pi} \\ &= t_1 + \sin(1) \pm t_{m-1} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{2k+1} \end{aligned} \tag{20}$$

Geht nun m gegen ∞ , können wir das Minorantenkriterium verwenden, um zu zeigen, dass die Reihe in (20) divergiert, genauer gesagt unendlich groß wird. Als divergente Minorante dient uns $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4k}$, denn es gilt für $k \geq 1$:

$$\frac{1}{4k} = \frac{1}{2k+2k} \leq \frac{1}{2k+1}$$

Das bedeutet, dass

$$\text{Var}(f; \mathcal{Z}, [0, 1]) \rightarrow \infty \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

also ist f nicht von beschränkter Variation.

Nochmal zusammengefasst:

$$\begin{aligned} & f \text{ von beschränkter Variation} \not\Rightarrow f \text{ stetig} \\ & \text{und auch} \\ & f \text{ stetig} \not\Rightarrow f \text{ von beschränkter Variation} \end{aligned}$$

Rechnen mit Funktionen von beschränkter Variation

Nun interessiert uns, ob zwei Funktionen von beschränkter Variation, wenn man sie miteinander kombiniert, also addiert, subtrahiert, multipliziert oder verknüpft, wieder eine Funktion von beschränkter Variation ergeben.

Für die Addition bzw. Subtraktion und Multiplikation stimmt das jedenfalls, wie die folgenden beiden Sätze zeigen.

Satz 20. [vgl. Grady o. J., S 5]

Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen von beschränkter Variation, dann ist auch $(f \pm g) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ von beschränkter Variation.

Beweis. [vgl. Grady o. J., S 5]

Sei $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$. Da f und g von beschränkter Variation sind, gibt es $K, L \in \mathbb{R}$, sodass

$$\text{Var}(f; [a, b]) = K$$

$$\text{Var}(g; [a, b]) = L$$

Es reicht, den Satz für $f + g$ zu zeigen, da man daraus dann folgern kann, dass auch $f - g = f + (-g)$ von beschränkter Variation sein muss, da wegen

$$\begin{aligned} & \text{Var}((-g); \mathcal{Z}, [a, b]) \\ &= \sum_{j=1}^m |(-g)(t_j) - (-g)(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^m |-[g(t_j) - g(t_{j-1})]| \\ &= \sum_{j=1}^m |g(t_j) - g(t_{j-1})| \\ &= \text{Var}(g; \mathcal{Z}, [a, b]) \\ &\leq \text{Var}(g; [a, b]) = L \end{aligned}$$

auch $-g$ von beschränkter Variation sein muss.

Wir betrachten also

$$\begin{aligned} & \text{Var}((f + g); \mathcal{Z}, [a, b]) \\ &= \sum_{j=1}^m |(f + g)(t_j) - (f + g)(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^m |f(t_j) + g(t_j) - f(t_{j-1}) - g(t_{j-1})| \\ &\leq \sum_{j=1}^m (|f(t_j) - f(t_{j-1})| + |g(t_j) - g(t_{j-1})|) \\ &= \sum_{j=1}^m |f(t_j) - f(t_{j-1})| + \sum_{j=1}^m |g(t_j) - g(t_{j-1})| \\ &\leq \text{Var}(f; [a, b]) + \text{Var}(g; [a, b]) \\ &= K + L \end{aligned}$$

Und da $K + L$ endlich ist und die Zerlegung $\mathcal{Z}$ beliebig gewählt war, ist auch $f + g$ von beschränkter Variation. $\square$

Satz 21. [vgl. Grady o. J., S 4]

Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen von beschränkter Variation, dann ist auch $(f \cdot g) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ von beschränkter Variation.

Beweis. [vgl. Ganster o. J., S 2]

Sei $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$. Da f und g von beschränkter Variation sind, gibt es $K, L \in \mathbb{R}$, sodass

$$\text{Var}(f; [a, b]) = K$$

$$\text{Var}(g; [a, b]) = L$$

Wir betrachten

$$\begin{aligned} & \text{Var}((f \cdot g); \mathcal{Z}, [a, b]) \\ &= \sum_{j=1}^m |(f \cdot g)(t_j) - (f \cdot g)(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^m |f(t_j) \cdot g(t_j) - f(t_{j-1}) \cdot g(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^m |f(t_j) \cdot g(t_j) - f(t_j) \cdot g(t_{j-1}) + f(t_j) \cdot g(t_{j-1}) - f(t_{j-1}) \cdot g(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^m |f(t_j) [g(t_j) - g(t_{j-1})] + g(t_{j-1}) [f(t_j) - f(t_{j-1})]| \\ &\leq \sum_{j=1}^m [|f(t_j)(g(t_j) - g(t_{j-1}))| + |g(t_{j-1})(f(t_j) - f(t_{j-1}))|] \\ &= \sum_{j=1}^m [|f(t_j)| \cdot |g(t_j) - g(t_{j-1})|] + \sum_{j=1}^m [|g(t_{j-1})| \cdot |f(t_j) - f(t_{j-1})|] \end{aligned}$$

Hierbei ist es noch wichtig zu beachten, dass eine Funktion von beschränkter Variation auch beschränkt sein muss, denn wählt man $\mathcal{Z}_0 = \{t_0, t_1, t_2\}$ mit $t_0 := a$ und $t_2 := b$ und $t_1 \in [a, b]$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} |f(t_1) - f(t_0)| &\leq |f(t_1) - f(t_0)| + |f(t_2) - f(t_1)| \\ &= \sum_{j=1}^2 |f(t_j) - f(t_{j-1})| \\ &= \text{Var}(f; \mathcal{Z}_0, [a, b]) \\ &\leq \text{Var}(f; [a, b]) \end{aligned}$$

und somit gilt für alle $t_1 \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |f(t_1)| &= |f(t_1) - f(t_0) + f(t_0)| \leq |f(t_1) - f(t_0)| + |f(t_0)| \\ &\leq \text{Var}(f; [a, b]) + |f(t_0)| \\ &= K + |f(t_0)| \\ &< \infty \end{aligned}$$

Also sind f und g beschränkt, und das bedeutet, es gibt $k, l \in \mathbb{R}$, sodass

$$|f(t_j)| \leq k \quad \text{und} \quad |g(t_j)| \leq l \quad \forall j \in \mathbb{N}, t_j \in [a, b]$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m [|f(t_j)| \cdot |(g(t_j) - g(t_{j-1}))|] + \sum_{j=1}^m [|g(t_{j-1})| \cdot |(f(t_j) - f(t_{j-1}))|] \\ & \leq k \cdot \text{Var}(g; [a, b]) + l \cdot \text{Var}(f; [a, b]) \\ & = k \cdot L + l \cdot K \end{aligned}$$

und da $k \cdot L + l \cdot K$ endlich ist und die Zerlegung $\mathcal{Z}$ beliebig gewählt war, ist auch $(f \cdot g)$ von beschränkter Variation. $\square$

Für die Verknüpfung zweier Funktionen f und g von beschränkter Variation gilt das jedoch nicht, denn im Allgemeinen muss $g \circ f$ nicht von beschränkter Variation sein, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt. Um uns unsere Überlegungen dazu zu vereinfachen, führe ich zunächst den Begriff der Lipschitz-Stetigkeit ein und erwähne einige wichtige Sätze in diesem Zusammenhang.

Definition 16 (Lipschitz-Stetigkeit). [vgl. Forster 2016, S 122]

Sei $a \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig* mit *Lipschitz-Konstante* $L \in \mathbb{R}, L > 0$, falls

$$|f(x) - f(x')| \leq L |x - x'| \quad \text{für alle } x, x' \in A.$$

Satz 22. [vgl. Appell 2009, S 101]

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und differenzierbar auf (a, b) mit beschränkter Ableitung. Dann gilt, dass f Lipschitz-stetig auf $[a, b]$ ist.

Beweis. [vgl. Appell 2009, S 101]

Da f differenzierbar auf (a, b) mit beschränkter Ableitung ist, bedeutet das

$$\exists L \in \mathbb{R}, L > 0 \quad \text{sodass} \quad |f'(x)| \leq L \quad \forall x \in (a, b)$$

Da f stetig ist, können wir den Mittelwertsatz anwenden, der besagt

$$\begin{aligned} \exists \xi \in (a, b) \quad \text{sodass} \quad |f(x) - f(x')| &= f'(\xi) |x - x'| \quad \forall x, x' \in [a, b] \\ &\leq |f'(\xi)| |x - x'| \\ &\leq L |x - x'| \end{aligned}$$

Also ist f Lipschitz-stetig auf $[a, b]$. $\square$

Satz 23. [vgl. Appell 2009, S 42]

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, dann ist f von beschränkter Variation.

Beweis. [vgl. Appell 2009, S 42]

Da f Lipschitz-stetig ist auf $[a, b]$, gibt es ein $L \in \mathbb{R}, L > 0$, sodass

$$|f(x) - f(x')| \leq L |x - x'| \quad \forall x, x' \in [a, b]$$

Sei $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$, dann gilt

$$\begin{aligned}\text{Var}(f; \mathcal{Z}, [a, b]) &= \sum_{j=1}^m |f(t_j) - f(t_{j-1})| \\ &\leq \sum_{j=1}^m L |t_j - t_{j-1}| \\ &= L \sum_{j=1}^m |t_j - t_{j-1}| \\ &= L(b - a)\end{aligned}$$

Da $L(b - a)$ endlich ist und die Zerlegung $\mathcal{Z}$ beliebig gewählt war, ist f von beschränkter Variation auf $[a, b]$. $\square$

Nun zum eigentlichen Gegenbeispiel.

Gegenbeispiel 20. [vgl. Appell 2009, S 40-41 u. 102]

Wir betrachten die beiden Funktionen

$$\begin{aligned}f &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \begin{cases} x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}g &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ g(y) &= \sqrt{y}\end{aligned}$$

Zuerst zeigen wir, dass f und g von beschränkter Variation sind.

- Für die Funktion f greifen wir dabei auf Satz 22 und 23 zurück. Wir berechnen die 1. Ableitung von f

– Für $x = 0$ gilt

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

– Für $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) - 2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Die 1. Ableitung ist beschränkt, denn für $0 < x \leq 1$ gilt

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| 2x \sin^2 \left(\frac{1}{x} \right) - 2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right| \\ &\leq \left| 2x \sin^2 \left(\frac{1}{x} \right) \right| + \left| 2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right| \\ &\leq 2|x| + 2 \\ &\leq 4 \end{aligned}$$

Wir können auch wie in Gegenbeispiel 9 zeigen, dass f stetig ist, und mit Satz 22 folgt dann insgesamt, dass f Lipschitz-stetig auf $[a, b]$ ist, woraus wiederum mit Satz 23 folgt, dass f von beschränkter Variation auf $[a, b]$ ist.

- Für die Funktion g reicht es, darauf hinzuweisen, dass die Wurzelfunktion als streng monoton wachsende Funktion laut Satz 18 von beschränkter Variation ist.

Die Verknüpfung der beiden Funktionen ist dann

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \begin{cases} |x| \left| \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right| & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und von dieser Funktion kann man wie in Gegenbeispiel 19 zeigen, dass $(g \circ f)$ nicht von beschränkter Variation ist (man wählt dann bloß statt einer Zerlegung, bei der die t_j abwechselnd Minimum und Maximum annehmen, eine, bei der sie abwechselnd Nullstelle und Maximum annehmen).

Also zusammengefasst:

$$\begin{aligned} f \text{ und } g \text{ von beschränkter Variation} &\Rightarrow (f + g) \text{ von beschränkter Variation} \\ &\Rightarrow (f \cdot g) \text{ von beschränkter Variation} \\ &\text{aber} \end{aligned}$$

$$f \text{ und } g \text{ von beschränkter Variation} \not\Rightarrow (g \circ f) \text{ von beschränkter Variation}$$

2.4 Gegenbeispiele im Zusammenhang mit der Integration reeller Funktionen in einer Variablen

2.4.1 Integrierbarkeit beschränkter Funktionen

In diesem Kapitel geht es um den Zusammenhang zwischen der Integrierbarkeit und der Beschränktheit einer reellen Funktion.

Es ist schon aus der folgenden Definition des Riemann-Integrals ersichtlich, dass Riemann-integrierbare Funktionen beschränkt sein müssen, denn darin kommt die Beschränktheit von f als notwendige Voraussetzung vor.⁶

⁶Man kann das Riemann-Integral auch über Riemann-Summen definieren, dann wären zunächst auch unbeschränkte Funktionen zugelassen, aber dann wiederum kann man beweisen, dass Riemann-integrierbare Funktionen beschränkt sind.

Definition 17 (Riemann-Integral). [vgl. Tretter 2013, S 110 u. 112]

Sei $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir setzen

$$\begin{aligned} m_i &:= \inf\{f(x) | x \in (t_{i-1}, t_i)\} \quad i = 1, \dots, m \\ M_i &:= \sup\{f(x) | x \in (t_{i-1}, t_i)\} \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

und definieren die Unter- bzw. Obersumme von f bzgl. $\mathcal{Z}$ als

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(f, \mathcal{Z}) &:= \sum_{i=1}^m m_i(t_i - t_{i-1}) \\ \mathcal{O}(f, \mathcal{Z}) &:= \sum_{i=1}^m M_i(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Damit definiert man das Ober- bzw. Unterintegral von f über $[a, b]$ als

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(f) &:= \sup\{\mathcal{U}(f, \mathcal{Z}) | \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}([a, b])\} \\ \mathcal{O}(f) &:= \inf\{\mathcal{O}(f, \mathcal{Z}) | \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}([a, b])\} \end{aligned}$$

Falls gilt $\mathcal{U}(f) = \mathcal{O}(f)$ nennen wir f Riemann-integrierbar über $[a, b]$ und wir setzen

$$\mathcal{U}(f) = \mathcal{O}(f) := \int_a^b f(x) \, dx$$

Wäre f nämlich nicht beschränkt, dann könnte man m_i und M_i nicht definieren, weil dann Supremum und Infimum nicht existieren müssen.

Umgekehrt gilt jedoch, dass nicht jede beschränkte Funktion integrierbar sein muss, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

Gegenbeispiel 21. [vgl. Appell 2009, S 160]

Wir betrachten die Dirichlet-Funktion

$$\begin{aligned} f &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Funktion ist natürlich beschränkt, denn es gilt $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [a, b]$. Wir zeigen nun, dass f nicht integrierbar ist. Sei $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z}([a, b])$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$, dann liegen in jedem noch so kleinen Teilintervall $[t_{i-1}, t_i]$ der Zerlegung sowohl rationale als auch irrationale Punkte, also gilt für $i = 1, 2, \dots, m$:

$$\begin{aligned} m_i &= 0 \\ M_i &= 1 \end{aligned}$$

Somit gilt für Ober- und Untersumme:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(f, \mathcal{Z}) &= \sum_{i=1}^m 0 \cdot (t_i - t_{i-1}) = 0 \\ \mathcal{O}(f, \mathcal{Z}) &= \sum_{i=1}^m 1 \cdot (t_i - t_{i-1}) = t_m - t_0 = b - a\end{aligned}$$

Diese Werte sind unabhängig von der Zerlegung $\mathcal{Z}$, also gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(f) &= 0 \\ \mathcal{O}(f) &= b - a\end{aligned}$$

und somit können Ober- und Unterintegral nicht übereinstimmen, was bedeutet, dass f nicht Riemann-integrierbar ist.

Es ist also nur eine ganz bestimmte Art von beschränkten Funktionen auch Riemann-integrierbar. Welche das ist, darüber gibt der folgende Satz Auskunft. Um ihn behandeln zu können, müssen wir noch definieren, was unter einer sogenannten Nullmenge verstanden wird.

Definition 18 (Nullmenge). [vgl. Appell 2009, S 196]

Eine Menge $N \subset \mathbb{R}$ heißt Nullmenge, wenn man für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $(I_n)_n$ von Intervallen $[a_n, b_n]$ finden kann, sodass gilt

$$N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leq \varepsilon$$

wobei $\lambda(I_n) = b_n - a_n$ die Intervalllänge bezeichnet. Die Intervalle können auch offen oder halboffen gewählt werden.

Nun zum Satz über die Integrierbarkeit beschränkter Funktionen.

Satz 24. [vgl. Appell 2009, S 197]

Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen $U(f)$ eine Nullmenge ist.

Beweis. [vgl. Appell 2009, S 157 u. 197-199]

Zunächst eine etwas technische Vorüberlegung.

- Für die Intervalle $I \subseteq [a, b]$ definieren wir die Oszillation von f auf I als

$$w(f; I) = \sup\{f(x) | x \in I\} - \inf\{f(x) | x \in I\}$$

und wir definieren

$$v(f; I) = \inf\left\{\sum_{j=1}^m w(f; [t_{j-1}, t_j])(t_j - t_{j-1}) \mid \{t_0, t_1, \dots, t_m\} \in \mathfrak{Z}(I)\right\}$$

also gilt

$$v(f; I) = \inf\{\mathcal{O}(f, \mathcal{Z}) - \mathcal{U}(f, \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(I)\}$$

Wir wissen, dass $v(f; I)$ additiv bzgl. des Intervalls I ist, das heißt wenn gilt $I = I_1 \cup I_2$ und $I_1 \cap I_2$ enthält genau einen Punkt, dann gilt $v(f; I) = v(f; I_1) + v(f; I_2)$.

Wir definieren außerdem

$$w(f; x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} w(f; [x - \delta, x + \delta])$$

Sei $\varepsilon > 0$ und gelte

$$w(f; x) \leq \varepsilon \quad \forall x \in I \quad (21)$$

dann behaupten wir, dass gilt

$$v(f; I) \leq \varepsilon \cdot \lambda(I)$$

Diese Behauptung wollen wir indirekt beweisen, indem wir annehmen, es würde gelten $v(f; I) > \varepsilon \cdot \lambda(I)$. Wenn wir nun I halbieren, gilt in einem der beiden abgeschlossenen Teilintervalle, die daraus entstehen, dass $v(f; I_1) > \frac{\varepsilon \cdot \lambda(I)}{2}$, wobei I_1 das entsprechende Teilintervall ist. Halbieren wir anschließend I_1 , gilt in einem der beiden daraus entstehenden Teilintervalle, dass $v(f; I_2) > \frac{\varepsilon \cdot \lambda(I)}{4}$, wobei I_2 das entsprechende Teilintervall ist. Die Fortsetzung dieses Verfahrens liefert eine Intervallfolge $(I_n)_n$ mit den Eigenschaften

$$\overline{I_n} = I_n \quad \text{und} \quad \lambda(I_n) = \frac{1}{2^n} \lambda(I) \quad \text{und} \quad v(f; I_n) > \frac{\varepsilon}{2^n} \lambda(I)$$

Der Durchschnitt dieser Intervalle enthält genau einen Punkt $x_* \in I$, und wegen (21) gilt $w(f; x_*) \leq \varepsilon$, also gilt auch $w(f; J) \leq \varepsilon$ für ein entsprechend kleines offenes Intervall J , das x_* enthält. Wählen wir $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $I_n \subseteq J$ gilt, dann erhalten wir

$$v(f; I_n) \leq w(f; I_n) \cdot \lambda(I_n) \leq \frac{1}{2^n} w(f; J) \cdot \lambda(I) \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \lambda(I) < v(f; I_n)$$

und das ist ein Widerspruch, also war unsere ursprüngliche Behauptung richtig.

- Nun zeigen wir die erste Richtung des Satzes. Wir nehmen an, f ist integrierbar und wollen zeigen, dass dann $U(f)$ eine Nullmenge ist. Dazu betrachten wir die Menge

$$M_k = \left\{ x \mid a \leq x \leq b, w(f; x) \geq \frac{1}{k} \right\} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}$$

Dann gilt

$$U(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$$

Für festes $k \in \mathbb{N}$ wählen wir eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ von $[a, b]$ mit

$$\mathcal{O}(f, \mathcal{Z}) - \mathcal{U}(f; \mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^m w(f; [t_{j-1}, t_j]) (t_j - t_{j-1}) \leq \frac{1}{k^2}$$

was möglich ist, weil f integrierbar ist. Nun zerlegen wir die Indexmenge in zwei disjunkte Teilmengen, also $\{1, 2, \dots, m\} = J \cup J'$, wobei J die Menge ist, die alle j enthält, für die es ein $x \in (t_{j-1}, t_j)$ gibt mit $w(f; x) \geq \frac{1}{k}$, und J' ist die Menge, die alle j enthält, für die für alle $x \in (t_{j-1}, t_j)$ gilt, dass $w(f; x) < \frac{1}{k}$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} &\geq \sum_{j=1}^m w(f; [t_{j-1}, t_j])(t_j - t_{j-1}) \\ &= \sum_{j \in J} w(f; [t_{j-1}, t_j])(t_j - t_{j-1}) + \sum_{j \in J'} w(f; [t_{j-1}, t_j])(t_j - t_{j-1}) \\ &\geq \sum_{j \in J} w(f; [t_{j-1}, t_j])(t_j - t_{j-1}) \\ &\geq \frac{1}{k} \sum_{j \in J} (t_j - t_{j-1}) \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\frac{1}{k} \geq \sum_{j \in J} (t_j - t_{j-1})$$

Daraus erhält man dann

$$\lambda(M_k) \leq \lambda\left(\bigcup_{j \in J} (t_j - t_{j-1})\right) \leq \sum_{j \in J} (t_j - t_{j-1}) \leq \frac{1}{k}$$

Also folgt für $k \rightarrow \infty$, dass $\lambda(M_k) \rightarrow 0$, also gilt $\lambda(U(f)) = 0$. Also ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge.

- Nun zeigen wir die zweite Richtung des Beweises. Sei $U(f)$ eine Nullmenge. Da f beschränkt ist, gibt es $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Sei $\varepsilon > 0$, dann wählen wir $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass gilt $k\varepsilon > M - m + 1$. Da gilt $U(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, sind alle Mengen M_k kompakte Nullmengen, und das bedeutet, dass wir jedes M_k mit endlich vielen disjunkten Intervallen überdecken können, deren Gesamtlänge kleiner ist als $\frac{1}{k}$. Die Randpunkte dieser Intervalle bilden eine Zerlegung von $[a, b]$ aus endlich vielen Teilintervallen $[t_{i-1}, t_i]$ und $[\tau_{j-1}, \tau_j]$, sodass gilt

$$\sum_i (t_i - t_{i-1}) \leq \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \sup\{w(f; x) | \tau_{j-1} \leq x \leq \tau_j\} \leq k$$

Da laut unserer anfänglichen Vorüberlegung aus $w(f; x) \leq \varepsilon$ für jedes $x \in I$

folgt, dass $v(f; I) \leq \varepsilon \cdot \lambda(I)$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} v(f; [a, b]) &= \sum_i v(f; [t_{j-1}, t_j]) + \sum_j v(f; [\tau_{j-1}, \tau_j]) \\ &\leq (M - m) \sum_i (t_i - t_{i-1}) + \frac{1}{k} \sum_j (\tau_j - \tau_{j-1}) \\ &\leq \frac{1}{k} (M - m) + \frac{1}{k} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, erhalten wir $v(f; [a, b]) = 0$, und das ist äquivalent dazu, dass f integrierbar ist.

□

Also zusammengefasst:

f Riemann-integrierbar $\Rightarrow f$ beschränkt

aber

f beschränkt $\nRightarrow f$ Riemann-integrierbar

jedoch

f beschränkt und Unstetigkeitsmenge ist Nullmenge $\Rightarrow f$ Riemann-integrierbar

2.4.2 Rechnen mit integrierbaren Funktionen

Ähnlich wie in Kapitel 2.3.1 wollen wir uns in diesem Kapitel damit beschäftigen, ob zwei integrierbare Funktionen, wenn man sie irgendwie miteinander kombiniert, also addiert bzw. subtrahiert, multipliziert oder verknüpft, wieder eine integrierbare Funktion ergeben.

Für die Addition bzw. Subtraktion ist sehr leicht zu sehen, dass man dadurch wieder eine integrierbare Funktion erhält.

Satz 25. *Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, dann ist auch die Funktion $(f \pm g)$ Riemann-integrierbar.*

Beweis. Dieser Satz lässt sich leicht aus der Definition des Riemann-Integrals beweisen. Wir beschränken uns dabei darauf, ihn für die Addition zu zeigen, denn für die Subtraktion funktioniert der Beweis analog.

Wir wählen eine gemeinsame Zerlegung $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ von $[a, b]$ für f und g und definieren

$$\begin{aligned} m_i &:= \inf\{f(x) | x \in (t_{i-1}, t_i)\} & i = 1, \dots, m \\ M_i &:= \sup\{f(x) | x \in (t_{i-1}, t_i)\} & i = 1, \dots, m \\ m'_i &:= \inf\{g(x) | x \in (t_{i-1}, t_i)\} & i = 1, \dots, m \\ M'_i &:= \sup\{g(x) | x \in (t_{i-1}, t_i)\} & i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Da f und g Riemann-integrierbar sind, gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(f) - \mathcal{U}(f) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \mathcal{O}(g) - \mathcal{U}(g) &< \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Und damit können wir zeigen

$$\begin{aligned}& \mathcal{O}(f+g) - \mathcal{U}(f+g) \\&= \inf\{\mathcal{O}((f+g), \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}([a, b])\} - \sup\{\mathcal{U}((f+g), \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}([a, b])\} \\&= \inf\left\{\sum_{i=1}^m (M_i + M'_i)(t_i - t_{i-1}) \mid \dots\right\} - \sup\left\{\sum_{i=1}^m (m_i + m'_i)(t_i - t_{i-1}) \mid \dots\right\} \\&= \inf\{\mathcal{O}(f, \mathcal{Z}) + \mathcal{O}(g, \mathcal{Z}) \mid \dots\} - \sup\{\mathcal{U}((f, \mathcal{Z}) + \mathcal{U}(g, \mathcal{Z}) \mid \dots\} \\&= \inf\{\mathcal{O}(f, \mathcal{Z})\} + \inf\{\mathcal{O}(g, \mathcal{Z})\} - (\sup\{\mathcal{U}(f, \mathcal{Z})\} + \sup\{\mathcal{U}(g, \mathcal{Z})\}) \\&= \mathcal{O}(f) + \mathcal{O}(g) - \mathcal{U}(f) - \mathcal{U}(g) \\&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\&= \varepsilon\end{aligned}$$

Und somit ist auch die Funktion $(f+g)$ Riemann-integrierbar. $\square$

Bildet man jedoch das Produkt bzw. die Verknüpfung zweier integrierbarer Funktionen, so muss das Ergebnis im Allgemeinen keine integrierbare Funktion sein. Für die Verknüpfung demonstrieren wir das anhand des folgenden Gegenbeispiels.

Gegenbeispiel 22. [vgl. Appell 2009, S 11 u. 197 u. 200]

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned}f &: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}\end{aligned}$$

und die Funktion

$$\begin{aligned}g &: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ g(x) &= \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass sowohl f als auch g integrierbar sind, wenden wir Satz 24 an. Beide Funktionen sind beschränkt, von unten durch 0 und von oben durch 1. Die Funktion f ist unstetig in allen rationalen Punkten $x_0 = \frac{p_0}{q_0} \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, denn wählt man $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{q_0}$, dann gibt es in jeder noch so kleinen δ -Umgebung um x_0 irrationale Punkte x , sodass

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0)| = \frac{1}{q_0} \geq \varepsilon$$

In allen irrationalen Punkten ist f jedoch stetig, also lautet die Unstetigkeitsmenge $U(f) = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, und da diese Menge abzählbar ist, ist sie auch eine Nullmenge.

Für die Funktion g lautet die Unstetigkeitsmenge $U(g) = \{0\}$, denn im Nullpunkt gibt es eine Sprungstelle, und da auch diese Menge abzählbar ist, ist sie eine Nullmenge.

Die Funktionen f und g sind somit laut Satz 24 als beschränkte Funktionen, deren Unstetigkeitsmenge eine Nullmenge ist, integrierbar.

Allerdings gilt für die Verknüpfung

$$g \circ f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

dass sie zwar beschränkt ist durch 1, aber sowohl in den rationalen als auch in den irrationalen Punkten unstetig ist. Also gilt $U(g \circ f) = [0, 1]$, und das ist als nicht-entartetes Intervall der Form $[a, b]$ ein typisches Beispiel für eine Menge, die keine Nullmenge ist, und somit ist $(g \circ f)$ laut Satz 24 nicht integrierbar.

Um nun auch für das Produkt zweier integrierbarer Funktionen ein ähnliches Gegenbeispiel zu finden, ist es sinnvoll, zunächst noch das uneigentliche Riemann-Integral zu definieren.

Definition 19 (Uneigentliches Integral). [vgl. Deitmar 2014, S 133]

Sei $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a, b - \varepsilon]$ mit $\varepsilon > 0$ integrierbar ist. Falls der Limes

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) \, dx$$

existiert, so sagt man, das Integral $\int_a^b f(x) \, dx$ konvergiert und man setzt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) \, dx$$

Analog an der unteren Grenze.

Aus Satz 25 und den Grenzwertsätzen folgt sofort, dass für zwei uneigentlich integrierbare Funktionen f und g auch die Summe $f + g$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Für das Produkt muss das allerdings nicht gelten, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

Gegenbeispiel 23. Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

und die Funktion $g(x) = f(x)$. Dann sind f bzw. g integrierbar, denn man kann das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 g(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

berechnen. Doch für das Produkt der beiden Funktionen, also für die Funktion $(f \cdot g) = \frac{1}{x}$, lässt sich das uneigentliche Integral nicht berechnen, denn

$$\int_0^1 (f \cdot g)(x) \, dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln(1) - \ln(\varepsilon)) = -\infty$$

Nach diesem kurzen Exkurs in Richtung uneigentliches Integral nun wieder zurück zu herkömmlichen Integralen und der Verknüpfung zweier integrierbarer Funktionen. Mit etwas strengeren Voraussetzungen kann man hier nämlich doch erreichen, dass die Verknüpfung ebenfalls eine integrierbare Funktion ergibt. Verlangt man nämlich von f und g , dass die äußere Funktion g stetig und die innere Funktion f integrierbar ist, dann erhält man mit der Komposition $(g \circ f)$ tatsächlich eine integrierbare Funktion. Das werden wir anhand des nächsten Satzes beweisen.

Satz 26. [vgl. Tretter 2013, S 115]

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $f([a, b]) \subset [m, M]$ und $g : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig, dann ist auch die Funktion $(g \circ f)$ Riemann-integrierbar.

Beweis. [vgl. Tretter 2013, S 115-116]

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da g stetig auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall ist, nimmt es laut Satz 8 Maximum und Minimum an, also existiert $K := \max\{|g(y)| \mid y \in [m, M]\}$. Außerdem ist g dann gleichmäßig stetig auf $[m, M]$, und das bedeutet, es gibt ein $\delta > 0$ mit $\delta < \frac{\varepsilon}{4K}$, sodass gilt

$$\forall y_1, y_2 \in [m, M] \text{ mit } |y_1 - y_2| < \delta \text{ folgt } |g(y_1) - g(y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (22)$$

Da f Riemann-integrierbar ist, gibt es eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$, sodass

$$\mathcal{O}(f, \mathcal{Z}) - \mathcal{U}(f, \mathcal{Z}) < \delta^2$$

Seien nun die Stützstellen von f definiert als

$$\begin{aligned} m_i &:= \inf\{f(x) \mid x \in (t_{i-1}, t_i)\} & i = 1, \dots, m \\ M_i &:= \sup\{f(x) \mid x \in (t_{i-1}, t_i)\} & i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

und die Stützstellen von $(g \circ f)$ definiert als

$$\begin{aligned} m'_i &:= \inf\{(g \circ f)(x) \mid x \in (t_{i-1}, t_i)\} & i = 1, \dots, m \\ M'_i &:= \sup\{(g \circ f)(x) \mid x \in (t_{i-1}, t_i)\} & i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

und setzen wir

$$I := \{i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid M_i - m_i < \delta\}$$

Für $i \notin I$ gilt dann natürlich $\delta \leq M_i - m_i$ und somit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I}}^m (t_i - t_{i-1}) &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I}}^m \frac{M_i - m_i}{\delta} (t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^m (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \frac{1}{\delta} (\mathcal{O}(f, \mathcal{Z}) - \mathcal{U}(f, \mathcal{Z})) \\ &< \delta \end{aligned}$$

Laut Definition von I und K und wegen (22) gilt

$$\begin{aligned} \forall i \in I: \quad M'_i - m'_i &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \\ \forall i \notin I: \quad M'_i - m'_i &\leq |M'_i| + |m'_i| \leq 2K \end{aligned}$$

Und da wir gewählt haben $\delta < \frac{\varepsilon}{4K}$ folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{O}((g \circ f), \mathcal{Z}) - \mathcal{U}((g \circ f), \mathcal{Z}) &= \sum_{i=1}^m M'_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^m m'_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^m (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \in I}}^m \underbrace{(M'_i - m'_i)}_{< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}}(t_i - t_{i-1}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I}}^m \underbrace{(M'_i - m'_i)}_{\leq 2K}(t_i - t_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \in I}}^m (t_i - t_{i-1})}_{\leq (b-a)} + 2K \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I}}^m (t_i - t_{i-1})}_{< \delta} \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + 2K\delta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2K\varepsilon}{4K} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Und somit ist auch die Funktion $(g \circ f)$ Riemann-integrierbar. $\square$

Schuld daran, dass in Gegenbeispiel 22 die Komposition $(g \circ f)$ nicht integrierbar ist, ist also die Funktion g , die im Nullpunkt nicht stetig ist.

Wichtig dabei ist, dass die Rollen von f und g im vorigen Satz nicht vertauscht werden dürfen, denn verlangt man umgekehrt, dass die innere Funktion f stetig und die äußere Funktion g integrierbar ist, so führt das im Allgemeinen nicht zu einer integrierbaren Komposition $(g \circ f)$. Um diesen Sachverhalt zu illustrieren verwenden wir das folgende Gegenbeispiel, für das wir noch eine kurze Definition benötigen.

Definition 20 (Innere Punkte, Abschluss und Rand einer Menge). [vgl. Appell 2009, S 1-2]

- Sei M eine Menge, dann heißt ein Punkt $x_0 \in M$ innerer Punkt von M , falls es ein $\delta > 0$ gibt mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq M$, d.h. zusammen mit x_0 enthält M ein ganzes Intervall um x_0 . Die Menge aller inneren Punkte von M wird mit M° bezeichnet und Inneres von M genannt.
- Schließlich bezeichnet man die Menge aller Punkte von M vereinigt mit der Menge der Häufungspunkte von M mit $\overline{M}$ und nennt sie Abschluss von M .
- Außerdem nennt man die Menge $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ den Rand von M .

Nun zum eigentlichen Gegenbeispiel.

Gegenbeispiel 24. [vgl. Appell 2009, S 19 u. 42 u. 200]

Sei $A \subset [0, 1]$ eine abgeschlossene Menge ohne innere Punkte, die keine Nullmenge ist. Daher wissen wir, dass $\partial A = A$ gilt. Wir definieren die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$f(x) = \text{dist}(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$$

die den kürzesten Abstand eines Punktes x zu einem Element aus A angibt. Wir wollen nun zeigen, dass f stetig ist.

Da A abgeschlossen ist, gilt $f(x) = 0$ genau für alle $x \in A$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ können wir ein $a \in A$ finden mit

$$\text{dist}(x_2, A) \leq |x_2 - a| \leq \text{dist}(x_2, A) + \varepsilon$$

Außerdem gilt dann natürlich $\text{dist}(x_1, A) \leq |x_1 - a|$ und insgesamt ergibt das

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \text{dist}(x_1, A) - \text{dist}(x_2, A) \\ &\leq |x_1 - a| + \varepsilon - |x_2 - a| \\ &\leq |x_1 - x_2| + \varepsilon \end{aligned}$$

Und da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, erhalten wir $f(x_1) - f(x_2) \leq |x_1 - x_2|$, und vertauschen wir x_1 und x_2 erhalten wir analog $f(x_2) - f(x_1) \leq |x_1 - x_2|$, also insgesamt

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\text{dist}(x_1, A) - \text{dist}(x_2, A)| \leq |x_1 - x_2|$$

also ist f Lipschitz-stetig mit $L = 1$ und somit natürlich auch stetig.

Die zweite Funktion, die wir betrachten, ist

$$g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < y \leq 1 \\ 1 & \text{für } y = 0 \end{cases}$$

Da g eine monoton wachsende Funktion ist, ist g integrierbar (aber g ist nicht stetig). Nun betrachten wir die Komposition

$$(g \circ f) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus A \end{cases}$$

Dabei handelt es sich um χ_A , die charakteristische Funktion der Menge A , und als solche ist sie integrierbar, genau dann wenn ∂A eine Nullmenge ist, denn es gilt $U(\chi_A) = \partial A$. Aber $\partial A = A$ ist keine Nullmenge, also ist die Funktion $(g \circ f)$ nicht integrierbar.

Und zusammengefasst ergibt das:

$$\begin{aligned} f, g \text{ sind Riemann-integrierbar} &\Rightarrow (f \pm g) \text{ ist Riemann-integrierbar} \\ f, g \text{ sind uneig. Riemann-integrierbar} &\Rightarrow (f \pm g) \text{ ist uneig. Riemann-integrierbar} \\ &\text{aber} \\ f, g \text{ sind Riemann-integrierbar} &\nRightarrow (g \circ f) \text{ ist Riemann-integrierbar} \\ f, g \text{ sind uneig. Riemann-integrierbar} &\nRightarrow (g \cdot f) \text{ ist uneig. Riemann-integrierbar} \text{ jedoch} \\ f \text{ Riemann-integrierbar, } g \text{ stetig} &\Rightarrow (g \circ f) \text{ ist Riemann-integrierbar} \\ &\text{aber} \\ f \text{ stetig, } g \text{ Riemann-integrierbar} &\nRightarrow (g \circ f) \text{ ist Riemann-integrierbar} \end{aligned}$$

2.4.3 Integrierbarkeit und Stammfunktionen

In diesem Kapitel werden wir uns zunächst mit dem Begriff der Stammfunktion beschäftigen und einige nützliche Sätze und Rechenregeln kennenlernen, die uns im zweiten Teil des Kapitels dazu dienen werden, den Zusammenhang zwischen integrierbaren Funktionen und Funktionen mit Stammfunktion zu ergründen.

Rechnen mit Stammfunktionen

Beginnen wir mit der Definition von Stammfunktionen.

Definition 21 (Stammfunktionen). [vgl. Forster 2016, S 218]

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine differenzierbare Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, falls gilt $F' = f$.

Nun interessiert uns wieder, ob die Eigenschaft, eine Stammfunktion zu besitzen, von zwei Funktionen f und g bei der Addition bzw. Subtraktion, beim Multiplizieren und bei der Verknüpfung auf die daraus entstehenden Funktionen $(f \pm g)$, $(f \cdot g)$ und $(g \circ f)$ übertragen wird.

Für die Addition bzw. Subtraktion ist das sehr leicht zu beweisen.

Satz 27. Sei $F' : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $G' : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, dann besitzt auch $(f \pm g) : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion.

Beweis. [vgl. Appell 2009, S 87]

Es gilt

$$(F \pm G)' = F' \pm G' = f \pm g$$

Also ist $(F \pm G)$ eine Stammfunktion von $(f \pm g)$. $\square$

Das Produkt und die Verknüpfung von zwei Funktionen mit Stammfunktion muss aber im Allgemeinen keine Stammfunktion besitzen, wie die folgenden beiden Gegenbeispiele zeigen.

Gegenbeispiel 25. [vgl. Appell 2009, S 179-181]

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und die Funktion

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Wir wollen zuerst zeigen, dass beide Funktionen eine Stammfunktion besitzen.

- Für f ist das nicht auf den ersten Blick ersichtlich, denn dafür müssen wir f als Differenz zweier Funktionen f_1 und f_2 darstellen, die beide eine Stammfunktion besitzen, denn dadurch folgt laut Satz 27, dass f ebenfalls eine Stammfunktion besitzt. Wir schreiben also

$$f = f_1 - f_2$$

mit

$$f_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f_1 = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und

$$f_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f_2 = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Nun müssen wir natürlich noch zeigen, dass f_1 und f_2 eine Stammfunktion besitzen. Man kann leicht nachrechnen, dass f_1 die Stammfunktion

$$F_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$F_1(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

besitzt. Da f_2 stetig ist, besitzt sie laut dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (den wir etwas später in diesem Kapitel kurz behandeln werden) eine Stammfunktion, nämlich

$$F_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F_2(x) = \int_0^x f_2(t) dt = \frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{t} \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

Die Funktion f hat dann einfach die Stammfunktion $F = F_1 - F_2$.

- Dass auch g eine Stammfunktion besitzt, lässt sich etwas einfacher zeigen, denn man kann wieder anhand des Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung argumentieren, dass g als stetige Funktion die Stammfunktion

$$G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt = \int_0^x \sqrt{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

besitzt.

Die Produktfunktion

$$(f \cdot g) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

besitzt jedoch keine Stammfunktion, denn für

$$H(x) = \frac{1}{4}x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right) - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{\sin 2t}{t^3} dt$$

gilt zwar $H' = f \cdot g$ für $x \in (0, 1]$, aber im Nullpunkt gilt

$$H'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x) - H(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x)}{x} = \frac{1}{2} \neq (f \cdot g)(0) = 0$$

Also hat $(f \cdot g)$ keine Stammfunktion auf $[0, 1]$.

Gegenbeispiel 26. [vgl. Appell 2009, S 175-176 u. 181]

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und die Funktion

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(y) = y^2$$

Wieder wollen wir zuerst zeigen, dass sowohl f als auch g eine Stammfunktion besitzen.

- Für f suchen wir zwei Funktionen g und h , die beide eine Stammfunktion besitzen, sodass gilt $f = h - g$. Dazu wählen wir

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und

$$h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Da die Funktion g stetig ist, besitzt sie laut Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Stammfunktion

$$G(x) = \int_0^x g(t) \, dt = 2 \int_0^x t \cos\left(\frac{1}{t}\right) \, dt \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1$$

und h hat die Stammfunktion

$$H : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Dann hat auch f eine Stammfunktion, nämlich $F = H - G$.

- Da g stetig ist, lautet die Stammfunktion laut Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$G(y) = \int_0^y t^2 \, dt = \frac{y^3}{3}$$

Verknüpft man f und g , erhält man wieder

$$(g \circ f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und von dieser Funktion haben wir schon im vorigen Gegenbeispiel 25 gezeigt, dass sie keine Stammfunktion besitzt.

Außerdem interessiert uns, welche Art von Funktionen überhaupt eine Stammfunktion besitzen. Ein notwendiges, allerdings nicht hinreichendes Kriterium, um das zu überprüfen, liefert der folgende Satz, der im Wesentlichen aussagt, dass eine Funktion mit Stammfunktion keine Unstetigkeitsstellen 1. Art, also Sprungstellen, haben darf [vgl. Appell 2009, S 88].

Satz 28. [vgl. Appell 2009, S 88]

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit Stammfunktion. Dann hat f auf I die Zwischenwerteigenschaft.

Beweis. [vgl. Appell 2009, S 88]

Sei $[a, b] \subseteq I$ ein beliebiges Intervall und o.B.d.A. gelte $f(a) < 0 < f(b)$. Um zu beweisen, dass f die Zwischenwerteigenschaft besitzt, müssen wir zeigen, dass es ein $\xi \in (a, b)$ gibt mit $f(\xi) = 0$.

Es gilt $F'(a) = f(a) < 0$ und $F'(b) = f(b) > 0$, also gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} &< 0 \quad \text{für } a < x < a + \delta \\ \frac{F(b) - F(x)}{b - x} &> 0 \quad \text{für } b - \delta < x < b \end{aligned}$$

Da gilt $x - a > 0$, folgt $F(x) - F(a) < 0$, also $F(x) < F(a)$, und da gilt $b - x > 0$, folgt $F(b) - F(x) > 0$, also $F(b) > F(x)$. Die Funktion F ist differenzierbar, also ist F auch stetig, und da sie stetig auf dem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a, b]$ ist, nimmt sie laut Satz 8 Minimum und Maximum an, also gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$F(\xi) = \min\{F(x) | a \leq x \leq b\}$$

Wegen den vorherigen Abschätzungen kann $F(\xi)$ nicht in der Nähe von $F(a)$ oder $F(b)$ liegen, also gilt $\xi \in (a, b)$, und da $F(\xi)$ ein Minimum ist, gilt $F'(\xi) = 0$, also auch $f(\xi) = 0$, und weil $[a, b] \subseteq I$ beliebig war, hat f auf I die Zwischenwerteigenschaft. $\square$

Also zusammengefasst

f und g haben Stammfunktion $\Rightarrow (f \pm g)$ hat Stammfunktion

aber

f und g haben Stammfunktion $\nRightarrow (f \cdot g)$ hat Stammfunktion

$\nRightarrow (g \circ f)$ hat Stammfunktion

Zusammenhang zwischen integrierbaren Funktionen und Funktionen mit Stammfunktion

Oft wird der Ausdruck

$$\int f(x) dx$$

fälschlicherweise als “Stammfunktion von f ” bezeichnet. Das ist irreführend, denn es suggeriert, dass Integral und Stammfunktion ein und dasselbe sind. Das ist jedoch falsch, und zwar aus mehreren Gründen:

- In der Definition der Stammfunktionen ist die Rede von Ableitungen, nicht von Integralen.
- Stammfunktionen und Integral können nicht dasselbe sein, denn es gibt sowohl integrierbare Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen, als auch Funktionen mit Stammfunktion, die nicht integrierbar sind [vgl. Appell 2009, S 167]. Das können wir auch mit den folgenden beiden Gegenbeispielen belegen.

Gegenbeispiel 27. [vgl. Appell 2009, S 176]

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Da die Funktion beschränkt ist (mit $|f(x)| \leq 1$) und ihre Unstetigkeitsmenge $U(f) = \{0\}$ eine Nullmenge ist (weil sie abzählbar ist), ist f laut Satz 24 integrierbar.

Nun wollen wir zeigen, dass f keine Stammfunktion haben kann. Dazu definieren wir

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und bilden die Differenz $h := f - g$, also wir erhalten

$$h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Von der Funktion g wissen wir schon aus Gegenbeispiel 26, dass sie eine Stammfunktion besitzt, also angenommen f hätte auch eine Stammfunktion, dann würde daraus folgen, dass auch h eine Stammfunktion hätte, aber das ist ein Widerspruch zu Satz 28, da h ja nicht einmal die Zwischenwerteigenschaft besitzt. Also kann f keine Stammfunktion haben.

Gegenbeispiel 28. [vgl. Appell 2009, S 176]

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Dann besitzt f , wie man leicht nachrechnen kann, die Stammfunktion

$$F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Aber betrachtet man $x_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, dann ist $x_n \in [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiters ist

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \sin(2\pi n) - 2\sqrt{2\pi n} \cos(2\pi n) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{2\pi n} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Also ist f unbeschränkt und kann daher nicht integrierbar sein.

Anders ist es jedoch, wenn es sich bei der betreffenden Funktion um eine stetige Funktion handelt. Dann nämlich besteht sehr wohl ein Zusammenhang zwischen Stammfunktion und Integral der Funktion. Dieser Zusammenhang wird vom ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erklärt, einem der wichtigsten Sätze dieses Teilgebiets der Analysis.

Satz 29 (Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). [vgl. Forster 2016, S 217]

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in I$. Für $x \in I$ sei

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

Dann ist die Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $F' = f$, also F ist Stammfunktion von f .

Beweis. [vgl. Forster 2016, S 217]

Für $h \neq 0$ gilt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt$$

Laut dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein ξ_h zwischen x und $x+h$, sodass

$$\int_x^{x+h} f(t) \, dt = h \cdot f(\xi_h)$$

Es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \xi_h = x$$

und da f stetig ist, folgt

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi_h) \right) = f(x) \end{aligned}$$

Also ist F Stammfunktion von f . □

Und zusammengefasst ergibt das

$$\begin{aligned} f \text{ ist integrierbar} &\not\Rightarrow f \text{ hat Stammfunktion} \\ f \text{ hat Stammfunktion} &\not\Rightarrow f \text{ ist integrierbar} \\ &\text{aber} \\ f \text{ ist stetig} &\Rightarrow f \text{ hat Stammfunktion} \end{aligned}$$

3 Mehrdimensionale Analysis

Ebenso interessant wie Gegenbeispiele zu Funktionen in einer Variablen sind natürlich Gegenbeispiele, die Funktionen in mehreren Variablen betreffen. Auch diese sollen in meiner Arbeit nicht zu kurz kommen, daher werde ich mich nun eingehender mit ihnen beschäftigen.

3.1 Gegenbeispiele im Zusammenhang mit der Stetigkeit reeller Funktionen in mehreren Variablen

Wie schon im Abschnitt 2.1 für Funktionen in einer Variablen, wollen wir auch hier zuallererst Gegenbeispiele behandeln, die im Zusammenhang mit der Stetigkeit von Funktionen interessant sind - nun jedoch mit dem Unterschied, dass wir es mit Funktionen in mehreren Variablen zu tun haben.

3.1.1 Verschiedene Arten von Stetigkeit und wie sie zusammenhängen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Stetigkeit von Funktionen in zwei Variablen. Dazu müssen wir zuerst darauf eingehen, wie Grenzwerte von Funktionen im Zweidimensionalen definiert sind, um uns anschließend mit unterschiedlichen Stetigkeitsbegriffen, wie partielle Stetigkeit und radiale Stetigkeit, auseinandersetzen zu können und diese mit der klassischen Definition der Stetigkeit zu vergleichen.

Grenzwerte von Funktionen im Zweidimensionalen

Grenzwerte von Funktionen spielen eine wichtige Rolle bei der Charakterisierung der Stetigkeit. Schon im Eindimensionalen haben wir eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig im Punkt $x_0 \in I$ genannt, wenn sowohl rechtsseitiger als auch linksseitiger Grenzwert in x_0 als auch der Funktionswert $f(x_0)$ existieren und übereinstimmen. Um dieses Konzept auf Funktionen in zwei Variablen zu übertragen, muss man jedoch beachten, dass die Annäherung an einen Punkt (x_0, y_0) in der Ebene nicht nur “von links” oder “von rechts” erfolgen kann, sondern auch auf sehr viele andere Arten! Das muss sich auch in der Definition des Grenzwerts einer Funktion in zwei Variablen widerspiegeln [vgl. Appell 2009, S 296-297]. Diese lautet folgendermaßen:

Definition 22 (Grenzwert einer Funktion). [Appell 2009, S 299]

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \overline{M}$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ Grenzwert der Funktion f in (x_0, y_0) , geschrieben

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

falls man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden kann derart, dass aus $(x, y) \in M$ und $0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$ stets $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ folgt.

Die Richtung der Annäherung an (x_0, y_0) spielt, wie man sieht, in dieser Definition keine Rolle, wichtig ist nur, dass der Grenzwert bei jeder Art der Annäherung

gleich ist. Natürlich kann man sich auch parallel zu den Achsen an einen Punkt (x_0, y_0) annähern. Einen solchen Grenzwert bezeichnet man dann als iterierten Grenzwert und schreibt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$$

Es wäre jedoch falsch, aus der Existenz der iterierten Grenzwerte auf die Existenz des allgemeinen Grenzwerts der Funktion zu schließen [vgl. Appell 2009, S 298-299], wie die folgenden beiden Gegenbeispiele zeigen.

Gegenbeispiel 29. [vgl. Appell 2009, S 299]

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Wir wollen nun sehen, ob der Grenzwert von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ existiert. Zwar kann man einen iterierten Grenzwert berechnen und erhält

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

aber schon dadurch, dass dieser nicht mit dem zweiten iterierten Grenzwert

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

übereinstimmt, ist klar, dass der allgemeine Grenzwert nicht existieren kann.

Gegenbeispiel 30. [vgl. Appell 2009, S 299-300]

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Wieder wollen wir sehen, ob der Grenzwert von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ existiert. Es gilt

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$$

also beide iterierten Grenzwerte existieren und stimmen sogar überein. Wenn man sich jedoch auf einer anderen Weise dem Nullpunkt nähert, nämlich auf einer der beiden Diagonalen $y = x$ oder $y = -x$, dann erhält man

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, -x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2 + x^2} = -\frac{1}{2}$$

und diese Grenzwerte stimmen nicht mit den iterierten Grenzwerten überein, also kann der allgemeine Grenzwert nicht existieren.

Einige Stetigkeitsbegriffe

Mit Hilfe des Grenzwerts von Funktionen in zwei Variablen können wir nun die Stetigkeit einer Funktion in zwei Variablen definieren.

Definition 23 (Stetigkeit von Funktionen in zwei Variablen). [vgl. Appell 2009, S 297]

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig in $(x_0, y_0) \in M$, falls gilt

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

also falls der Grenzwert der Funktion in diesem Punkt sowie der Funktionswert $f(x_0, y_0)$ existieren und übereinstimmen. Die Funktion f heißt stetig auf M , falls f in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in M$ stetig ist.

Außerdem gibt es im Mehrdimensionalen noch eine weitere Art der Stetigkeit, die jedoch “schwächer” ist als die zuvor definierte. Die Rede ist von der partiellen Stetigkeit, bei der man nur eine Variable als Laufvariable betrachtet und die andere(n) fixiert.

Definition 24 (Partielle Stetigkeit). [vgl. Appell 2009, S 300]

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt partiell stetig in $(x_0, y_0) \in M$, falls die Funktion $x \mapsto f(x, y_0)$ in x_0 und die Funktion $y \mapsto f(x_0, y)$ in y_0 stetig ist. Weiters heißt f partiell stetig auf M , falls f in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in M$ partiell stetig ist.

Ein weiterer Stetigkeitsbegriff, wenn auch ein etwas weniger gebräuchlicher, ist der der Radialstetigkeit. Kurz gesagt ist eine Funktion radialstetig in einem Punkt $(x_0, y_0) \in M$, wenn sie bei Annäherung auf jeder beliebigen Geraden, die durch den Punkt verläuft, stetig ist [vgl. Appell 2009, S 300].

Es ist leicht einzusehen, dass der allgemeine Stetigkeitsbegriff der stärkste ist, da er sich auf *alle* möglichen Arten der Annäherung an einen Punkt in der Ebene bezieht. Ist eine Funktion also stetig, so ist sie auch radialstetig, also stetig bei Annäherung auf jeder Geraden durch den Punkt, und ist sie radialstetig, dann ist sie automatisch auch partiell stetig, da ja die beiden Geraden durch den Punkt, die parallel zu den Achsen verlaufen, bei der Radialstetigkeit mit eingeschlossen sind. Also:

$$f \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ radialstetig} \Rightarrow f \text{ partiell stetig}$$

Die jeweiligen Umkehrungen gelten allerdings nicht, was wir anhand der nächsten Gegenbeispiele veranschaulichen werden. Das erste der beiden Gegenbeispiele wird zeigen, dass eine partiell stetige Funktion nicht radialstetig und auch nicht stetig zu sein braucht, und beim zweiten Gegenbeispiel geht es dann darum, dass auch eine radialstetige Funktion nicht stetig sein muss.

Gegenbeispiel 31. [vgl. Appell 2009, S 300]

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \text{ oder } y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \text{ und } y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann ist f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ partiell stetig, denn $f(x, 0) = f(0, y) \equiv 1$, und somit gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 1 = f(0, 0)$$

Allerdings gilt auf der Diagonalen $y = x$

$$f(x, x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Also kann f nicht radialstetig und auch nicht stetig sein.

Gegenbeispiel 32. [vgl. Appell 2009, S 301-302]

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^6 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zunächst kann man feststellen, dass f partiell stetig im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ist, denn bei Annäherung an den Achsen ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^6} = 0$$

und

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

und das stimmt mit dem Funktionswert $f(0, 0) = 0$ überein.

Zusätzlich ist f auch radialstetig, denn für jede Gerade $y = mx$ mit $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ ergibt sich ebenfalls

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{x^6 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^4 + m^2} = 0$$

Die Funktion f ist jedoch nicht stetig in $(0, 0)$, denn nähert man sich dem Nullpunkt auf der kubischen Parabel $y = x^3$ im 1. Quadranten (also es gilt $x > 0$) an, dann erhält man

$$\lim_{x \searrow 0} f(x, x^3) = \lim_{x \searrow 0} \frac{x^5}{x^6 + x^6} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{2x} = \infty$$

Die Funktion f ist also unstetig in $(0, 0)$, und zusätzlich auch noch unbeschränkt.

Also:

$$f \text{ partiell stetig} \not\Rightarrow f \text{ radialstetig} \not\Rightarrow f \text{ stetig}$$

3.2 Gegenbeispiele im Zusammenhang mit der Differentiation reeller Funktionen in mehreren Variablen

3.2.1 Verschiedene Differenzierbarkeitsbegriffe und wie sie zusammenhängen

In diesem Kapitel geht es um verschiedene Arten der Differenzierbarkeit von Funktionen in mehreren Variablen, wobei ich im ersten Teil zunächst die wichtigsten Differenzierbarkeitsbegriffe vorstellen werde und anschließend anhand einiger Gegenbeispiele die Zusammenhänge zwischen ihnen erläutern werde. Zur besseren Anschaulichkeit werden in den Gegenbeispielen nur Funktionen in zwei Variablen vorkommen.

Einige Differenzierbarkeitsbegriffe

Ähnlich wie die partiellen Stetigkeit kann man für Funktionen in zwei Variablen auch die partielle Differenzierbarkeit definieren. Eine gute Erklärung zum Charakter der partiellen Ableitungen findet sich bei Forster:

Die partiellen Ableitungen sind nichts anderes als die gewöhnlichen Ableitungen von Funktionen einer Veränderlichen, die man erhält, wenn man alle Veränderlichen bis auf eine festhält.

[Forster 2013, S 51]

Definition 25 (Partielle Ableitung). [vgl. Deitmar 2014, S 189-190]

- i) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine reelle Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt im Punkt $\xi \in U$ partiell differenzierbar in der j -ten Koordinatenrichtung, falls der Limes

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(\xi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\xi + t \cdot e_j) - f(\xi)}{t} \quad (\text{wobei } e_j \hat{=} \text{ der } j\text{-te Standardbasisvektor})$$

existiert. Die Zahl $\frac{\partial}{\partial x_j} f(\xi)$ heißt die j -te partielle Ableitung von f in ξ .

- ii) Die partielle Differenzierbarkeit ist äquivalent dazu, dass die j -te partielle Funktion

$$x_j \mapsto f(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, x_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$$

an der Stelle $x_j = \xi_j$ differenzierbar ist.

- iii) Die Funktion f heißt partiell differenzierbar, falls $\frac{\partial}{\partial x_j} f(\xi)$ für jedes $\xi \in U$ und jedes $j = 1, \dots, n$ existiert.

- iv) Die Funktion f heißt stetig partiell differenzierbar, falls die partiellen Ableitungen $x \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$ als Funktionen auf U stetig sind.

Bei der partiellen Differenzierbarkeit geht es nur um Differenzierbarkeit in eine bestimmte Richtung, nämlich in Richtung der Koordinatenachsen. Für die Differenzierbarkeit in eine andere beliebige Richtung braucht man noch den Begriff der Richtungsableitung.

Definition 26 (Richtungsableitung). [vgl. Deitmar 2014, S 196]

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Die Richtungsableitung von f im Punkt $\xi \in U$ in Richtung v ist

$$\partial_v f(\xi) = \left. \frac{\partial}{\partial t} f(\xi + tv) \right|_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + hv) - f(\xi)}{h}$$

Existieren alle Richtungsableitungen von f in einem Punkt ξ , so können wir f in diesem Punkt auch radialdifferenzierbar nennen, analog zum Begriff der Radialstetigkeit [vgl. Appell 2009, S 308].

Natürlich kann man die partiellen Funktionen $\frac{\partial}{\partial x_1} f, \frac{\partial}{\partial x_2} f; \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f$ wieder als gewöhnliche Funktionen auffassen, und diese, sofern es möglich ist, nochmals partiell differenzieren. Das führt uns auf den Begriff der höheren partiellen Ableitungen.

Definition 27 (Höhere Ableitungen). [vgl. Deitmar 2014, S 191]

- i) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_j} f$ wieder partiell differenzierbar, also existieren die Grenzwerte

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi) \right) & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} f(\xi) \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_n} f(\xi) \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi) \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} f(\xi) \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_n} f(\xi) \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi) \right) & \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} f(\xi) \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial}{\partial x_n} f(\xi) \right) \end{array}$$

für alle $\xi \in U$, so nennt man f zweimal partiell differenzierbar.

- ii) Die Funktion f heißt k -mal partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_l}} f$ für $1 \leq l \leq k$ und alle l -Tupel von Indizes $1 \leq i_v \leq n$ existieren.
- iii) Die Funktion f heißt k -mal stetig partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_l}} f$ stetig sind.

Die Ableitungsoperatoren in i) sind von innen nach außen zu lesen, also für $n = 2$ und $\frac{\partial}{\partial x_1} \hat{=}$ Ableitung in x -Richtung, $\frac{\partial}{\partial x_2} \hat{=}$ Ableitung in y -Richtung bedeutet $\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi) \right)$, dass zuerst nach x , dann nach y abgeleitet wird, bei $\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} f(\xi) \right)$ genau umgekehrt. Dass diese Reihenfolge unter bestimmten Voraussetzungen keine Rolle spielt, besagt der Satz von Schwarz, diesen werden wir aber erst im Abschnitt 3.2.2 behandeln [vgl. Appell 2009, S 313].

Ebenso kann man natürlich auch die höheren Richtungsableitungen definieren, doch diese werden uns hier nicht weiter beschäftigen. Stattdessen wollen wir gleich zum Begriff der totalen Differenzierbarkeit übergehen, die auf der Idee beruht, dass Differenzieren nichts anderes ist als eine lineare Bestapproximation. Im Falle einer Funktion in mehreren Variablen geht es also um die Approximierbarkeit einer Funktion durch lineare Abbildungen.

Definition 28 (Totale Differenzierbarkeit). [vgl. Deiser 2015, S 281]

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $\xi \in U$. Dann heißt f total differenzierbar in ξ , oder kurz differenzierbar in ξ , falls eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und eine Funktion $r : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ existieren, sodass gilt

$$i) \quad f(x) = f(\xi) + A(x - \xi) + r(x) \quad \text{für alle } x \in U$$

$$ii) \quad \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{|r(x)|}{|x - \xi|} = 0$$

Wir setzen

$$J_f(\xi) = f'(\xi) = A$$

$$df(\xi) = \text{“ die lineare Abbildung } g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ mit } g(x) = Ax \text{ für alle } x \text{”}$$

Die Matrix $J_f(\xi)$ heißt die Jacobi-Matrix oder die Ableitung von f und die lineare Abbildung $df(\xi)$ das Differential von f im Punkt ξ .

Die Funktion f heißt (total) differenzierbar, wenn f in allen $\xi \in U$ (total) differenzierbar ist.

Für den Fall $n = 2$ und $m = 1$ lässt sich die Differenzierbarkeit anschaulich interpretieren. So, wie eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $\xi \in \mathbb{R}$ lokal wie eine Gerade aussieht, nämlich wie die dortige Tangente

$$f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

so sieht ein differenzierbares $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ lokal wie eine Ebene aus, nämlich wie ihre dortige (als Funktion dargestellte) Tangentialebene

$$f(\xi_1, \xi_2) + J_f(\xi_1, \xi_2)((x, y) - (\xi_1, \xi_2)) = f(\xi_1, \xi_2) + a(x - \xi_1) + b(y - \xi_2) \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

mit $J_f(\xi) = (a, b)$ [vgl. Deiser 2015, S 283].

Wie die Jacobi-Matrix konkret aussieht, sagt der folgende Satz.

Satz 30. [vgl. Deiser 2015, S 299]

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei total differenzierbar im Punkt $\xi \in U$. Sei

$$J_f(\xi) = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

die Jacobi-Matrix von f im Punkt ξ . Dann ist f partiell differenzierbar in ξ , und es gilt

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi) \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq n$$

Beweis. [vgl. Deiser 2015, S 299]

Da die Jacobi-Matrix von f im Punkt ξ zeilenweise aus den Jacobi-Matrizen der Komponenten $f_1, \dots, f_m$ von f im Punkt ξ aufgebaut ist, genügt es, die Aussage für den Fall $m = 1$ zu beweisen.

Sei also $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $A = J_f(\xi) = (a_{11}, \dots, a_{1n})$. Da f total differenzierbar ist, gibt es ein $r : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f(\xi) + A(x - \xi) + r(x) \quad \text{für alle } x \in U$$

und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{r(x)}{|x - \xi|} = 0$$

Also gilt für $1 \leq j \leq n$ mit $x = \xi + h \cdot e_j$ folgendes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} f(\xi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h \cdot e_j) - f(\xi)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(h \cdot e_j) + r(\xi + h \cdot e_j)}{h} \\ &= A \cdot e_j + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(\xi + h \cdot e_j)}{h} \\ &= a_{1j} + 0 \\ &= a_{1j} \end{aligned}$$

Somit ist die Aussage bewiesen. □

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Da es schon bei Funktionen in einer Variablen so ist, dass Stetigkeit ein schwächerer Begriff ist als Differenzierbarkeit, ist es nicht weiter verwunderlich, dass sich daran auch im Mehrdimensionalen nichts ändert. Das heißt, Stetigkeit impliziert keine der vorher genannten Formen der Differenzierbarkeit, also eine stetige Funktion in mehreren Variablen muss weder partiell differenzierbar, noch radialdifferenzierbar, noch total differenzierbar sein, wie wir an unseren nächsten Gegenbeispielen beobachten können.

Gegenbeispiel 33. [vgl. Appell 2009, S 303]

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x, y) &= |x| + |y| \end{aligned}$$

Dann ist f stetig, da es sich um eine Zusammensetzung stetiger Funktionen handelt, aber f ist im Punkt $(0, 0)$ weder nach x noch nach y partiell differenzierbar, denn die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|}{y} \end{aligned}$$

existieren nicht.

Natürlich ist f dann auch nicht radialdifferenzierbar, denn dazu müssten ja alle Richtungsableitungen existieren, und wir haben ja schon gesehen, dass zumindest die zwei Ableitungen in Richtung der Achsen nicht existieren.

Gegenbeispiel 34. [vgl. Farwig et al. o. J., S 1]

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x, y) &= \sqrt{|xy|} \end{aligned}$$

Dann ist f überall stetig, da es sich um eine Zusammensetzung aus stetigen Funktionen handelt.

Man kann auch die partiellen Ableitungen im Punkt $(0, 0)$ berechnen, diese lauten dann

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0\end{aligned}$$

Wäre f also total differenzierbar, müsste für die Jacobi-Matrix gelten

$$J_f(0, 0) = (0, 0)$$

und es müssten ein $r(x, y)$ geben mit $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(x, y)}{|(x, y)|} = 0$, sodass die Gleichung

$$f(x, y) = f(0, 0) + J_f(0, 0) \cdot (x, y) + r(x, y)$$

erfüllt ist. Diese lässt sich durch Einsetzen umformen zu

$$\sqrt{|xy|} = r(x, y)$$

Nun kann man die Nullfolge $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})_n$ wählen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = (0, 0)$. Für diese Folge gilt dann aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})}{|(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Also ist f nicht total differenzierbar.

Bei Funktionen in einer Variablen ist es jedoch umgekehrt so, dass Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert. Das gilt im Mehrdimensionalen nur für Funktionen, die total differenzierbar sind oder stetig partiell differenzierbar. Das zeigen die folgenden Sätze.

Satz 31. [vgl. Deiser 2015, S 285]

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei differenzierbar in $\xi \in U$. Dann ist f stetig in ξ .

Beweis. [vgl. Deiser 2015, S 285]

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix und $r : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion, dann gilt auf Grund der Differenzierbarkeit von f in ξ , dass

$$\lim_{x \rightarrow \xi} r(x) = 0$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) - f(\xi) &= \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) - \lim_{x \rightarrow \xi} f(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} [f(x) - f(\xi)] \\ &= \lim_{x \rightarrow \xi} [A(x - \xi) + r(x)] = 0\end{aligned}$$

Und das bedeutet

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$$

Also ist f stetig im Punkt ξ . □

Da wir nun schon wissen, dass total differenzierbare Funktionen auch stetig sind, reicht es, für stetig partiell differenzierbare Funktionen zu zeigen, dass sie total differenzierbar sind, denn damit folgt automatisch, dass sie auch stetig sind.

Satz 32. [vgl. Deiser 2015, S 301]

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar in einem Punkt $\xi \in U$. Dann ist f total differenzierbar in ξ . Ist also f stetig partiell differenzierbar, so ist f total differenzierbar.

Beweis. [vgl. Deiser 2015, S 301-302]

Es genügt auch hier, den Fall $m = 1$ zu beweisen.

Sei

$$A = J_f(\xi) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\xi) \right) \quad (23)$$

Wir definieren $r : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$r(x) = f(x) - f(\xi) - A(x - \xi) \quad \text{für alle } x \in U$$

Dann müssen wir nur noch zeigen, dass gilt

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{|r(x)|}{|x - \xi|} = 0$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$ mit $U_{\varepsilon(\xi)} \subseteq U$. Wir betrachten für jedes $x \in U_{\varepsilon(\xi)}$ den folgenden “Weg” von ξ nach x parallel zu den Koordinatenachsen:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (\xi_1, \dots, \xi_n) \\ x^{(2)} &= (x_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ x^{(3)} &= (x_1, x_2, \xi_3, \dots, \xi_n) \\ &\vdots \\ x^{(n+1)} &= (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

So erhalten wir die Teleskopsumme

$$f(x) - f(\xi) = \sum_{1 \leq j \leq n} [f(x^{(j+1)}) - f(x^{(j)})] \quad (24)$$

Nun kann man bei dem Ausdruck $f(x^{(j+1)}) - f(x^{(j)})$ die Koordinaten $x_1, \dots, x_{j-1}$ und $\xi_{j+1}, \dots, \xi_n$ als konstant auffassen, also die Funktion als eindimensionale, nur von der j -ten Koordinate abhängige Funktion interpretieren, auf die man den (eindimensionalen) Mittelwertsatz anwenden kann, laut dem es ein μ_j zwischen $x^{(j)}$ und $x^{(j+1)}$ gibt, sodass gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(\mu_j) \cdot (x_j - \xi_j) = f(x^{(j+1)}) - f(x^{(j)}) \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n$$

Dann gilt mit (23) und (24):

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{|r(x)|}{|x - \xi|} &= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{|f(x) - f(\xi) - A(x - \xi)|}{|x - \xi|} \\
&= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\left| \sum_{1 \leq j \leq n} \left[f(x^{(j+1)}) - f(x^{(j)}) - \frac{\partial}{\partial x_j} f(\xi)(x_j - \xi_j) \right] \right|}{|x - \xi|} \\
&= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\left| \sum_{1 \leq j \leq n} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} f(\mu_j) \cdot (x_j - \xi_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} f(\xi)(x_j - \xi_j) \right] \right|}{|x - \xi|} \\
&= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\left| \sum_{1 \leq j \leq n} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(\mu_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} f(\xi) \right) (x_j - \xi_j) \right] \right|}{|x - \xi|} \\
&\leq \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{|x - \xi| \sum_{1 \leq j \leq n} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} f(\mu_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} f(\xi) \right|}{|x - \xi|} \\
&= \lim_{x \rightarrow \xi} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} f(\mu_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} f(\xi) \right| \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Denn da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_1} f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f$ stetig sind im Punkt ξ , und für $x \rightarrow \xi$ folgt, dass $\mu_1, \dots, \mu_n \rightarrow \xi$ gilt, gilt auch $\frac{\partial}{\partial x_j} f(\mu_j) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} f(\xi)$. $\square$

Ist eine Funktion nur radialdifferenzierbar oder partiell differenzierbar, so muss sie jedoch nicht stetig sein. Das zeigen die nächsten beiden Gegenbeispiele.

Gegenbeispiel 35. [vgl. Pöschel 2014b, S 43]

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\
f(x, y) &= \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

Dann können wir die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0, 0)$ berechnen und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0 \\
\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0
\end{aligned}$$

Die Funktion f ist jedoch nicht stetig im Nullpunkt, denn nähert man sich ihm entlang der durch den Ursprung verlaufenden Geraden

$$t \mapsto 0 + t \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

dann gilt für die Funktionswerte entlang der Geraden für $t \neq 0$

$$f(t \cos(\varphi), t \sin(\varphi)) = \frac{2t \cos(\varphi) \cdot t \sin(\varphi)}{t^2 \cos^2(\varphi) + t^2 \sin^2(\varphi)} = \frac{2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = \sin(2\varphi)$$

Und somit gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} [f(t \cos(\varphi), t \sin(\varphi)) - f(0, 0)] = \sin(2\varphi)$$

Der Grenzwert hängt also vom Winkel der Geraden ab und nimmt alle Werte zwischen $[-1, 1]$ an. Daher ist f im Nullpunkt nicht stetig.

Gegenbeispiel 36. [vgl. Appell 2009, S 308]

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq 0 \text{ oder } y \geq x^2 \\ 1 & \text{für } 0 < y < x^2 \end{cases}$$

Wir können zeigen, dass im Punkt $(0, 0)$ sämtliche Richtungsableitungen von f existieren, f also radialdifferenzierbar ist, indem wir zuerst zeigen, dass die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

existieren. Dann wählen wir den Vektor (u, v) mit $|(u, v)| = 1$, der nicht achsenparallel ist, also u und v sind beide nicht Null. Die Gerade $y = \frac{v}{u}x$ durch $(0, 0)$ und (u, v) schneidet die Parabel $y = x^2$ im Punkt $(\frac{v}{u}, \frac{v^2}{u^2})$, und da wir wissen, dass die Funktionswerte oberhalb der Parabel immer Null sind, gilt für $-\left|\frac{v}{u}\right| < t < \left|\frac{v}{u}\right|$ für die Werte entlang der Geraden, dass $f(tu, tv) = 0$, und daher gilt für die Richtungsableitungen in Richtung (u, v)

$$\partial_v f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu, tv) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0$$

Also ist f radialdifferenzierbar.

Stetig ist f jedoch nicht im Nullpunkt, denn nähert man sich auf der Parabel $y = x^2$, so erhält man

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = 0$$

und nähert man sich hingegen auf der Parabel $y = \frac{x^2}{2}$, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f\left(x, \frac{x^2}{2}\right) = 1$$

Also nochmal zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
& f \text{ ist stetig} \not\Rightarrow f \text{ ist partiell differenzierbar} \\
& \quad (\not\Rightarrow f \text{ ist stetig partiell differenzierbar})^7 \\
& \quad \not\Rightarrow f \text{ ist radialdifferenzierbar} \\
& \text{und} \\
& f \text{ ist total differenzierbar} \Rightarrow f \text{ ist stetig} \\
& f \text{ ist stetig partiell differenzierbar} \Rightarrow f \text{ ist stetig} \\
& \text{aber} \\
& f \text{ ist radialdifferenzierbar} \not\Rightarrow f \text{ ist stetig} \\
& f \text{ ist partiell differenzierbar} \not\Rightarrow f \text{ ist stetig}
\end{aligned}$$

Zusammenhang der verschiedenen Differentiationsbegriffe

Nun wollen wir herausfinden, wie die einzelnen Differentiationsbegriffe sich zueinander verhalten, also ob und wie sie sich gegenseitig implizieren, und dadurch erkennen, welcher von ihnen der “stärkste” Begriff ist.

Man könnte vermuten, dass die totale Differenzierbarkeit stärker ist als die anderen, denn zunächst einmal ist leicht zu sehen, dass sie auf jeden Fall stärker ist als die partielle Differenzierbarkeit, denn in Satz 30 haben wir schon gezeigt, dass totale Differenzierbarkeit partielle Differenzierbarkeit impliziert, doch umgekehrt folgt aus partieller Differenzierbarkeit nicht totale Differenzierbarkeit, wie wir schon in Gegenbeispiel 34 gezeigt haben.

Außerdem impliziert totale Differenzierbarkeit auch radiale Differenzierbarkeit, also wenn eine Funktion total differenzierbar ist, existieren auch alle ihre Richtungsableitungen. Das können wir anhand eines Satzes beweisen, für den wir zuvor noch den Begriff des Gradienten einführen müssen.

Definition 29 (Gradient). [vgl. Deiser 2015, S 313]

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar. Dann setzen wir für alle $\xi \in U$

$$\text{grad}(f)(\xi) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\xi) \right) \in \mathbb{R}^n$$

Der Vektor $\text{grad}(f)(\xi)$ heißt der Gradient von f im Punkt ξ , und die Funktion $\text{grad}(f) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt das Gradientenfeld von f . Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar in $\xi \in U$, so gilt

$$J_f(\xi) \cdot x = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_j} f(\xi) \cdot x_j = \langle \text{grad}(f)(\xi) | x \rangle \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \quad (25)$$

Also, wie es Deiser treffend formuliert:

⁷Das ist klar, weil ja die partiellen Ableitungen gar nicht existieren müssen, geschweige denn stetig sein.

Die m Zeilen der Jacobi-Matrix $J_f(\xi)$ sind die (zu Zeilenvektoren transponierten) Gradienten der Komponenten $f_1, \dots, f_m$ von f im Punkt ξ .

[Deiser 2015, S 314]

Satz 33. [vgl. Deiser 2015, S 314]

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ total differenzierbar in $\xi \in U$, und sei $w \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $|w| = 1$. Dann ist f im Punkt ξ in Richtung w differenzierbar, und es gilt

$$\partial_w f(\xi) = \langle \text{grad}(f)(\xi) | w \rangle = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_j} f(\xi) \cdot w_j$$

Beweis. [vgl. Deiser 2015, S 315]

Da f total differenzierbar ist, gilt

$$f(\xi + hw) = f(\xi) + A \cdot (hw) + r(\xi + hw)$$

für die Jacobi-Matrix $J_f(\xi) = A$ und die Restfunktion $r : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{r(x)}{|x - \xi|} = 0$. Daraus und mit (25) kann man folgern

$$\begin{aligned} \partial_w f(\xi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + hw) - f(\xi)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A \cdot (hw) + r(\xi + hw)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot Aw}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(\xi + hw)}{h} \\ &= Aw + 0 \\ &= \langle \text{grad}(f)(\xi) | w \rangle \end{aligned}$$

□

Umgekehrt muss eine radial differenzierbare Funktion jedoch nicht total differenzierbar sein, wie wir bei unserem nächsten Gegenbeispiel sehen werden.

Gegenbeispiel 37. [vgl. Pöschel 2014b, S 42]

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Im Punkt $(0, 0)$ kann man für jeden Vektor $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ die Richtungsableitungen in Richtung v berechnen, denn

$$\partial_v f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + hv) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot f(v)}{h} = f(v)$$

Wäre f total differenzierbar, würde die Jacobi-Matrix aus den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(0,0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}f(0,0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0\end{aligned}$$

bestehen, also müsste gelten $J_f(0,0) = (0,0)$ und es müsste ein $r(x)$ geben mit $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(x,y)}{|(x,y)|} = 0$, sodass gilt

$$\begin{aligned}f(x,y) &= f(0,0) + J_f(0,0) \cdot (x,y) + r(x,y) \\ \frac{x^2y}{x^2+y^2} &= r(x,y)\end{aligned}$$

Wählt man dann aber die Nullfolge $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})_n$, so folgt daraus

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})}{|(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\frac{1}{n^3}}{2\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{2n^3}}{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2\sqrt{2}n} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0\end{aligned}$$

und somit ist f nicht total differenzierbar.

Dass der Eindruck, die totale Differenzierbarkeit wäre der stärkste der Differentiationsbegriffe, jedoch falsch ist, zeigt sich daran, dass totale Differenzierbarkeit nicht stetig partielle Differenzierbarkeit impliziert. Das funktioniert ja schon bei Funktionen in einer Variablen nicht, wie wir schon in Gegenbeispiel 9 gezeigt haben.

Die Umkehrung gilt jedoch schon, also eine stetig partiell differenzierbare Funktion muss immer auch total differenzierbar sein. Das haben wir schon in Satz 32 bewiesen. Die stetig partielle Differenzierbarkeit ist also der stärkste der von uns behandelten Differentiationsbegriffe, denn sie impliziert alle anderen Differentiationsarten. Dass stetig partiell differenzierbare Funktionen natürlich auch partiell differenzierbar sind, liegt auf der Hand, und dadurch, dass aus stetig partieller Differenzierbarkeit auch totale Differenzierbarkeit folgt, folgt sofort, dass stetig partiell differenzierbare Funktionen auch radialdifferenzierbar sind.

Interessant ist dabei vielleicht noch folgendes: Dass eine partiell differenzierbare Funktion nicht stetig partiell differenzierbar sein muss, ist klar, denn sie muss ja noch nicht einmal total differenzierbar sein (siehe Gegenbeispiel 34). Aber

auch eine zweimal partiell differenzierbare Funktion muss nicht stetig partiell differenzierbar sein, wie das nächste Gegenbeispiel zeigt.

Gegenbeispiel 38. [vgl. Appell 2009, S 314-315]

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^6 + y^6} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dass f für $(x, y) \neq (0, 0)$ partiell differenzierbar in x - und y -Richtung ist, ist klar, und auch im Nullpunkt kann man die partiellen Ableitungen 1. Ordnung berechnen:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

Also lauten die partiellen Ableitungen 1. Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial x} f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \begin{cases} 2xy^2 \frac{y^6 - 2x^6}{(x^6 + y^6)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \begin{cases} 2x^2 y \frac{x^6 - 2y^6}{(x^6 + y^6)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Wieder ist für $(x, y) \neq (0, 0)$ klar, dass sowohl $\frac{\partial}{\partial x} f$ als auch $\frac{\partial}{\partial y} f$ partiell differenzierbar sind in x - und in y -Richtung, und auch im Nullpunkt gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, 0) - \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(0, y) - \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial y} f(x, 0) - \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial y} f(0, y) - \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

Wir verzichten darauf, die genaue Darstellung der partiellen Ableitungen 2. Ordnung abseits von $(0, 0)$ zu berechnen, denn für unseren Bedarf reicht es zu zeigen,

dass die partiellen Ableitungen 2. Ordnung im Nullpunkt zwar existieren, aber die partiellen Ableitungen 1. Ordnung dort nicht stetig sind, denn nähert man sich dem Nullpunkt auf der Hauptdiagonalen $y = x$, erhält man

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x^3 \cdot \frac{-x^6}{(2x^6)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2x^3} \right) = -\infty$$

und somit können die partiellen Ableitungen 1. Ordnung nicht stetig sein im Nullpunkt.

Zusammengefasst bedeutet das:

f ist total differenzierbar $\Rightarrow f$ ist partiell differenzierbar

f ist partiell differenzierbar $\nRightarrow f$ ist total differenzierbar

und

f ist total differenzierbar $\Rightarrow f$ ist radialdifferenzierbar

f ist radialdifferenzierbar $\nRightarrow f$ ist total differenzierbar

und

f ist total differenzierbar $\nRightarrow f$ ist stetig partiell differenzierbar

f ist stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow f$ ist total differenzierbar

($\Rightarrow f$ ist radialdifferenzierbar)

($\Rightarrow f$ ist partiell differenzierbar)

und

f ist partiell differenzierbar $\nRightarrow f$ ist stetig partiell differenzierbar

f ist zweimal partiell differenzierbar $\nRightarrow f$ ist stetig partiell differenzierbar

Höhere Ableitungen

Zum Abschluss wollen wir uns noch kurz mit höheren partiellen Ableitungen von Funktionen in mehreren Variablen auseinandersetzen. Eine zweimal partiell differenzierbare Funktion in zwei Variablen besitzt vier Stück partielle Ableitungen 2. Ordnung:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right), \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right)$$

Nun ist es interessant, sich zu fragen, ob aus der Existenz einer dieser Ableitungen die Existenz einer oder aller anderen Ableitungen folgt. Dabei kann man feststellen, dass die Existenz der beiden reinen partiellen Ableitungen 2. Ordnung, also $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right)$ und $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right)$ in einem Punkt jedenfalls nicht ausreicht, um die Existenz der gemischten partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right)$ und $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right)$ nach sich zu ziehen. Das zeigt auch das folgende Gegenbeispiel.

Gegenbeispiel 39. [vgl. Appell 2009, S 318]

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \log \log \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung lassen sich leicht berechnen und lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \begin{cases} y \log \log \frac{1}{|(x, y)|} + \frac{x^2 y}{|(x, y)|^2 \log |(x, y)|} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= \begin{cases} x \log \log \frac{1}{|(x, y)|} + \frac{xy^2}{|(x, y)|^2 \log |(x, y)|} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Auch die reinen partiellen Ableitungen 2. Ordnung lassen sich im Punkt $(0, 0)$ berechnen, denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, 0) - \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial y} f(0, y) - \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0 \end{aligned}$$

Die gemischten partiellen Ableitungen 2. Ordnung im Punkt $(0, 0)$ existieren jedoch nicht, denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(0, y) - \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \log \log \frac{1}{|0, y|}}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \log \log \frac{1}{|y|} = \infty \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial y} f(x, 0) - \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log \log \frac{1}{|x, 0|}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \log \log \frac{1}{|x|} = \infty \end{aligned}$$

Anders ist es, wenn die beiden gemischten partiellen Ableitungen 2. Ordnung in einem Punkt existieren und zusätzlich dort auch stetig sind. Dann nämlich stimmen diese dort nämlich sogar überein. Das ist ein Resultat des sogenannten Satzes von Schwarz, der Gegenstand von Kapitel 3.2.2 sein wird. Also zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right) \text{ und } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right) &\nRightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right) \text{ oder } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right) \\ \text{existieren} &\text{ existiert} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right) \text{ und } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right) &\Rightarrow \text{sowohl } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right) \text{ als auch } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right) \\ \text{existieren und sind stetig} &\text{ existieren und stimmen überein} \end{aligned}$$

3.2.2 Der Satz von Schwarz

Im Folgenden möchte ich den Satz von Schwarz vorstellen, ein wesentliches Resultat der mehrdimensionalen Analysis. Grob ausgedrückt besagt er, dass man unter gewissen Bedingungen die gemischten partiellen Ableitungen einer Funktion vertauschen kann. Auch wenn der Beweis dazu eher technisch ist, möchte ich ihn hier der Vollständigkeit halber anführen. Im Wesentlichen beruht er auf zweimaliger Anwendung des Mittelwertsatzes.

Satz 34 (Satz von Schwarz). [vgl. Deitmar 2014, S 191]

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(a) \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(a) \right) \quad \forall a \in U \quad \forall i, j : 1 \leq i, j \leq n$$

Beweis. [vgl. Steinbauer o. J.-b, Abschnitt 6.3.8.2] & [vgl. Deitmar 2014, S 191-192]

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit reicht es, den Satz nur für 2 unabhängige Variablen zu zeigen, da sich die Austauschbarkeit der partiellen Ableitungen immer auf jeweils 2 bezieht und die anderen Variablen dabei “festgehalten” werden [vgl. Steinfeld o. J.-b].

Wir wählen also $n = 2, i = 1, j = 2$ und $a = (0, 0)$, wobei wir setzen: $x_1 \hat{=} x$ und $x_2 \hat{=} y$. Außerdem wählen wir eine ε -Kugel, die innerhalb der Umgebung U liegt. Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $U_{\sqrt{2}\varepsilon(0)} \subseteq U$, also

$$W := [0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon] \times [0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon] \subseteq U_{\sqrt{2}\varepsilon(0)} \subseteq U$$

Nun seien $h, k \neq 0, |h|, |k| < \varepsilon \Rightarrow [0 - h, 0 + h] \times [0 - k, 0 + k] \subseteq W$.

Wir müssen nun zeigen: $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) \right)$. Laut Definition der partiellen Ableitung gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{f(h, k) - f(h, 0)}{k} - \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k}}{h} \quad (26)$$

- Für unseren Beweis betrachten wir zunächst den Quotienten in (26). Um ihn weiter vereinfachen zu können, definieren wir eine Hilfsfunktion:

$$\begin{aligned} \varphi : [0, h] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi(x) &= f(x, k) - f(x, 0) \end{aligned}$$

Die Funktion φ ist differenzierbar, da f partiell differenzierbar auf $[0, h] \subseteq U$ ist und wir können den Mittelwertsatz⁸ anwenden; dieser besagt nun:

$$\begin{aligned} \exists \alpha \in (0, h) : \varphi(h) - \varphi(0) &= h \cdot \varphi'(\alpha) \\ \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} &= \frac{\partial}{\partial x} f(\alpha, k) - \frac{\partial}{\partial x} f(\alpha, 0) \end{aligned}$$

⁸Man beachte, dass φ eine Funktion in einer Variablen ist!

Somit gilt:

$$\frac{\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k} - \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}}{h} = \frac{\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{k}}{h} = \frac{\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}}{k} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}f(\alpha, k) - \frac{\partial}{\partial x}f(\alpha, 0)}{k}$$

Nun können wir abermals eine Hilfsfunktion definieren:

$$\begin{aligned}\psi &: [0, k] \rightarrow \mathbb{R} \\ \psi(y) &= \frac{\partial}{\partial x}f(\alpha, y)\end{aligned}$$

Die Funktion ψ ist nun differenzierbar, da f zweimal partiell differenzierbar auf $[0, k] \subseteq U$ ist und wir können wieder den Mittelwertsatz anwenden, dieser besagt:

$$\begin{aligned}\exists \beta \in (0, k) : \psi(k) - \psi(0) &= k \cdot \psi'(\beta) \\ \frac{\psi(k) - \psi(0)}{k} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x}f(\alpha, \beta) \right)\end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\frac{\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}f(\alpha, k)}^{\psi(k)} - \overbrace{\frac{\partial}{\partial x}f(\alpha, 0)}^{\psi(0)}}{k} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x}f(\alpha, \beta) \right) \quad (27)$$

- Wir können nun den Quotienten (26) durch Umsortieren der Terme auch umschreiben zu:

$$\frac{\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h} - \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}}{k} = \quad (28)$$

und analog vorgehen wie bisher.

Wir konstruieren wieder die 1. Hilfsfunktion, diesmal lautet sie:

$$\begin{aligned}u &: [0, k] \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x) &= f(h, y) - f(0, y)\end{aligned}$$

Die Funktion u ist differenzierbar, da f partiell differenzierbar auf $[0, k] \subseteq U$ ist und somit liefert der Mittelwertsatz:

$$\exists \gamma \in (0, k) : u(k) - u(0) = k \cdot u'(\gamma) \quad (29)$$

$$\frac{u(k) - u(0)}{k} = \frac{\partial}{\partial y}f(h, \gamma) - \frac{\partial}{\partial y}f(0, \gamma) \quad (30)$$

Somit gilt:

$$\frac{\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h} - \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}}{k} = \frac{\frac{u(k)-u(0)}{h}}{k} = \frac{\frac{u(k)-u(0)}{k}}{h} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}f(h, \gamma) - \frac{\partial}{\partial y}f(0, \gamma)}{h}$$

Nun konstruieren wir die 2. Hilfsfunktion:

$$\begin{aligned}v &: [0, h] \rightarrow \mathbb{R} \\ v(x) &= D_2f(x, \gamma)\end{aligned}$$

Die Funktion v ist differenzierbar, da f zweimal partiell differenzierbar ist auf $[0, h] \subseteq U$ und der Mittelwertsatz liefert daher:

$$\begin{aligned}\exists \delta \in (0, h) : v(h) - v(0) &= h \cdot v'(\delta) \\ \frac{v(h) - v(0)}{h} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(\delta, \gamma) \right)\end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\frac{\overbrace{\frac{\partial}{\partial y} f(h, \gamma)}^{v(h)} - \overbrace{\frac{\partial}{\partial y} f(0, \gamma)}^{v(0)}}{h} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(\delta, \gamma) \right) \quad (31)$$

Da die beiden Quotienten (26) und (28) ident sind, stimmen auch (27) und (31) überein, und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(\alpha, \beta) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(\delta, \gamma) \right)$$

Gehen nun h und k gegen 0, dann gehen auch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gegen 0, und weil $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right)$ und $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right)$ laut Voraussetzung stetig sind, gilt:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) \right)$$

□

Am Ende des Beweises haben wir in einem wesentlichen Schritt verwendet, dass die zweiten partiellen Ableitungen von f stetig sind. Diese Voraussetzung ist also essentiell für die Gültigkeit des Satzes von Schwarz. Ist f nämlich bloß zweimal partiell differenzierbar mit Ableitungen, die auch nur in einem Punkt unstetig sind, so gilt der Satz von Schwarz nicht, wie auch ein explizites Gegenbeispiel zeigt.

Gegenbeispiel 40. [vgl. Appell 2009, S 316-317]

Sei $a = (0, 0)$ und wir betrachten

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x, y) &= \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}\end{aligned}$$

- Für $(x, y) \neq (0, 0)$ kann man durch Anwenden der Quotienten- und Produktregel die beiden partiellen Ableitungen berechnen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \frac{[y(x^2 - y^2) + xy \cdot (2x)](x^2 + y^2) - xy(x^2 - y^2) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= \frac{[x(x^2 - y^2) - xy \cdot (2y)](x^2 + y^2) - xy(x^2 - y^2) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= -\frac{x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

Und auch die zweiten partiellen Ableitungen lassen sich berechnen und stimmen, wie wir gleich sehen werden, sogar überein:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) &= \\ \frac{[(x^4 + 4x^2y^2 - y^4) + y(8x^2y - 4y^3)](x^2 + y^2)^2 - [y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)] \cdot 2(x^2 + y^2) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^4} &= \\ \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) &= \\ -\frac{[(y^4 + 4x^2y^2 - x^4) + x(8xy^2 - 4x^3)](x^2 + y^2)^2 - [x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)] \cdot 2(x^2 + y^2) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^4} &= \\ -\frac{x^6 - 9x^4y^2 + 9x^2y^4 + y^6}{(x^2 + y^2)^3} &= \\ \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}\end{aligned}$$

- Im Punkt $(0, 0)$ ist das aber nicht so. Hier unterscheiden sich die zweiten Ableitungen, wie wir gleich sehen werden. Wir wissen nämlich:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0 \quad (33)$$

Und daher:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(0, y) - \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0)}{y} \stackrel{(32)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \cdot \left(-\frac{y^5}{y^4} \right) = -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial y} f(x, 0) - \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0)}{x} \stackrel{(33)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^5}{x^4} = 1\end{aligned}\right\} \neq$$

Das liegt daran, dass die zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right)$ und $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right)$ im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig sind.

Betrachten wir $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right)$ (für $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right)$ funktioniert die Rechnung analog).

Bei Annäherung an $(0, 0)$ auf der x-Achse gilt dann:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, 0) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^6} = 1$$

Aber bei Annäherung an $(0, 0)$ auf der Diagonalen $y = x$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 + 9x^6 - 9x^6 - x^6}{2x^6} = 0$$

Die Funktion f erfüllt also die Voraussetzungen des Satzes von Schwarz nicht, da f zwar zweimal partiell differenzierbar, aber nicht zweimal *stetig* partiell differenzierbar ist.

3.3 Gegenbeispiele im Zusammenhang mit der Integration reeller Funktionen in mehreren Variablen

In diesem Kapitel werde ich einige Gegenbeispiele vorstellen, die im Bereich der Integration von Funktionen in mehreren Variablen interessant sind.

3.3.1 Vertauschung der Reihenfolge beim Integrieren und Differenzieren

Als Einstieg zu diesem Kapitel möchte ich zunächst Doppelintegrale behandeln, die uns schließlich zum Satz von Fubini, einem wichtigen Satz der mehrdimensionalen Integration, führen werden. Bevor ich diesen dann auch beweisen werde und ein Gegenbeispiel vorstelle, das die Grenzen seiner Gültigkeit deutlich macht, werde ich noch 2 weitere Sätze - mitsamt ihrer Beweise und einem weiteren Gegenbeispiel - vorstellen, die ich anschließend im Beweis des Satzes von Fubini benutzen werde.

Doppelintegrale bzw. iterierte Integrale ⁹

Bei Doppelintegralen geht es um reellwertige Funktionen über zweidimensionalen Gebieten, also man integriert $f : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Wir verlangen zunächst, dass das Gebiet M eine sehr spezielle Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist und die Form eines Rechtecks besitzt, also wir betrachten

$$f : M = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{wobei } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Dann nämlich kann man wieder die gewohnte Methode der Riemann-Integration anwenden.

Die Idee ist also, eine Zerlegung des Rechtecks M in Teilrechtecke zu finden und darüber Quader zu errichten, mit Hilfe deren Volumens man dann das Integral annähern kann.

Sei also

$$\mathcal{Z}_1 = \{s_0, s_1, \dots, s_m\}$$

eine Zerlegung von $[a, b]$ und

$$\mathcal{Z}_2 = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

eine Zerlegung von $[c, d]$, dann ist die Menge

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 \times \mathcal{Z}_2 = \{(s_i, t_j) : i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n\}$$

eine Zerlegung von M in Teilrechtecke. Es gibt natürlich nicht bloß eine solche Zerlegung, sondern mehrere, und die Menge aller dieser Zerlegungen nennen wir

⁹Für den Inhalt dieses Abschnitts: [vgl. Appell 2009, S 367-368 u. 370-371].

$\mathfrak{Z}(M)$. Die durch die Zerlegung entstehenden Teilrechtecke können als Grundfläche der Quader interpretiert werden.

Für die Höhe der Quader bestimmen wir nun spezielle Funktionswerte von f , nämlich jeweils das Supremum und das Infimum der Werte über dem betreffenden Teilrechteck¹⁰. Für $i = 1, 2, \dots, m$ und $j = 1, 2, \dots, n$ erhalten wir

$$M_{ij} := \sup\{f(s, t) : s_{i-1} \leq s \leq s_i, t_{j-1} \leq t \leq t_j\}$$

$$m_{ij} := \inf\{f(s, t) : s_{i-1} \leq s \leq s_i, t_{j-1} \leq t \leq t_j\}$$

Nun kann man die Summe des Volumens dieser Quader berechnen mit

$$\mathcal{O}(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} (s_i - s_{i-1}) (t_j - t_{j-1}) \dots \text{Obersumme von } f$$

$$\mathcal{U}(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} (s_i - s_{i-1}) (t_j - t_{j-1}) \dots \text{Untersumme von } f$$

und

$$\mathcal{O}(f) := \inf\{\mathcal{O}(f, \mathcal{Z}) : \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(M)\} \dots \text{Oberintegral von } f$$

$$\mathcal{U}(f) := \sup\{\mathcal{U}(f, \mathcal{Z}) : \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(M)\} \dots \text{Unterintegral von } f$$

wobei f Riemann-integrierbar heißt, falls

$$\mathcal{O}(f) = \mathcal{U}(f)$$

und in diesem Fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert des Ober- und Unterintegrals mit

$$\mathcal{O}(f) = \mathcal{U}(f) = \int_M f(x, y) \, d(x, y) \dots \text{Riemann-Integral von } f \text{ über } M$$

Man kann auch zeigen, dass alle stetigen Funktionen f Riemann-integrierbar über M sind.

Die Berechnung des Integral mittels Ober- und Untersummen ist jedoch eher mühsam. Eine wesentlich einfachere Berechnungsmethode bieten die sogenannten iterierten Integrale. Bei dieser Methode berechnet man statt des zweidimensionalen Integrals einfach die iterierten eindimensionalen Integrale

$$I_1 = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx$$

und

$$I_2 = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

¹⁰Das ist möglich, wenn f beschränkt ist.

Dabei stellt sich allerdings die Frage, ob die Reihenfolge der Integration egal ist, und ob tatsächlich dasselbe herauskommt wie bei der Berechnung mittels Ober- und Untersummen, also ob gilt:

$$I_1 = I_2 = \int_M f(x, y) \, d(x, y) \quad (34)$$

Unter welchen Voraussetzungen die Gleichheit (34) gültig ist, darüber liefert der Satz von Fubini Aufschluss.

Der Satz von Fubini

Der Satz von Fubini besagt im Wesentlichen, dass man bei einer stetigen Funktion die Integration bzgl. x und die Integration bzgl. y in beliebiger Reihenfolge ausführen und somit die Berechnung des zweidimensionalen Integrals auf die Berechnung eindimensionaler Integrale zurückführen kann.

Satz 35 (Satz von Fubini). [vgl. Appell 2009, S 371]

Sei $f : M = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy = \int_M f(x, y) \, d(x, y)$$

Für den Beweis des Satzes von Fubini benötigen wir noch zwei weitere Sätze, die ich nun vorstellen möchte:

Satz 36. [vgl. Appell 2009, S 363]

Sei $f : M = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auch gleichmäßig stetig.

Beweis. [vgl. Steinfeld o. J.-a]

Diesen Satz kann man am besten durch einen klassischen Widerspruchsbeweis einsehen. Also indirekt angenommen, f ist *nicht* gleichmäßig stetig, dann gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in M \text{ mit } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Man kann also wählen $\delta_n := \frac{1}{n}$, dann folgt

$$\exists x_n, y_n \in M \text{ mit } |x_n - y_n| < \delta_n \text{ und } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \quad (35)$$

Nun kann man $(x_n)_n$ als Folge auffassen, und diese Folge besitzt, da es sich um eine beschränkte Folge handelt, laut Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Also gilt:

$$\exists p \in M \text{ sodass } x_{n_k} \rightarrow p \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

Da außerdem gilt

$$|y_{n_k} - p| \leq \underbrace{|y_{n_k} - x_{n_k}|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|x_{n_k} - p|}_{\rightarrow 0} \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

muss auch gelten $y_{n_k} \rightarrow p$ für $k \rightarrow \infty$.
Da f stetig ist, gilt

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(p) \text{ und } f(y_{n_k}) \rightarrow f(p) \text{ für } k \rightarrow \infty$$

und daher

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq \underbrace{|f(x_{n_k}) - f(p)|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|f(p) - f(y_{n_k})|}_{\rightarrow 0} \text{ für } k \rightarrow \infty$$

also $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon$ für genügend große k . Und das ist ein Widerspruch zu (35), also ist f gleichmäßig stetig. $\square$

Der zweite Satz den wir benötigen besagt im Wesentlichen, dass unter bestimmten Voraussetzungen die Vertauschung der Reihenfolge beim Differenzieren und Integrieren erlaubt ist.

Satz 37. [vgl. Appell 2009, S 378-379]

Sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und bzgl. der ersten Variablen stetig partiell differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] = \int_c^d \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right] \, dy$$

dh. man darf Integration bzgl. y und Differentiation bzgl. x in beliebiger Reihenfolge ausführen.

Der Satz gilt analog für f bzgl. der zweiten Variablen stetig partiell differenzierbar und Vertauschung von Integration bzgl. x und Differentiation bzgl. y .

Beweis. [vgl. Appell 2009, S 378-379]

Wir definieren

$$F_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F_1(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$$

Wir zeigen, dass F_1 in $x_0 \in [a, b]$ differenzierbar ist mit der Ableitung

$$F_1'(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_c^d f(x_0, y) \, dy \right] = \int_c^d \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y) \right] \, dy$$

Dazu betrachten wir den Differenzenquotienten (für $x \neq x_0$):

$$\begin{aligned}\frac{F_1(x) - F_1(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\int_c^d f(x, y) \, dy - \int_c^d f(x_0, y) \, dy}{x - x_0} = \int_c^d \frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} \, dy = \\ &= \int_c^d \left[\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} - \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y) + \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y) \right] \, dy = \\ &= \int_c^d \left[\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} - \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y) \right] \, dy + \int_c^d \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y) \right] \, dy\end{aligned}$$

Das lässt sich wiederum umformen zu

$$\left| \frac{F_1(x) - F_1(x_0)}{x - x_0} - \int_c^d \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y) \right] \, dy \right| = \left| \int_c^d \left[\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} - \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y) \right] \, dy \right| \quad (36)$$

Da f stetig und nach x partiell differenzierbar ist, können wir den Mittelwertsatz anwenden, der besagt:

$$\exists \xi \text{ zwischen } x \text{ und } x_0 \text{ sodass } \frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} = \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, y)$$

Damit können wir (36) weiter umformen und mit Hilfe der Dreiecksungleichung für Integrale abschätzen:

$$\begin{aligned}\left| \int_c^d \left[\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} - \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y) \right] \, dy \right| &= \left| \int_c^d \left[\frac{\partial}{\partial x} f(\xi, y) - \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y) \right] \, dy \right| \\ &\leq \int_c^d \left| \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, y) - \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y) \right| \, dy \quad (37)\end{aligned}$$

Die Funktion f ist außerdem stetig partiell differenzierbar nach x , also ist die Ableitungsfunktion $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ stetig auf $[a, b] \times [c, d]$, also laut Satz 36 auch gleichmäßig stetig. Das bedeutet:

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{sodass} \quad \forall x, x_0 \in [a, b] \text{ mit } |x - x_0| < \delta \\ \Rightarrow \left| \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y) \right| < \varepsilon\end{aligned}$$

und daher können wir (37) weiter abschätzen

$$\int_c^d \left| \frac{\partial}{\partial x} f(\xi, y) - \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y) \right| \, dy < \int_c^d \varepsilon \, dy = \varepsilon(d - c)$$

Also:

$$\left| \frac{F_1(x) - F_1(x_0)}{x - x_0} - \int_c^d \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y) \right] \, dy \right| \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0$$

und somit gilt

$$F_1'(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_c^d f(x_0, y) \, dy \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F_1(x) - F_1(x_0)}{x - x_0} = \int_c^d \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y) \right] \, dy$$

□

Wir werden nun ein Gegenbeispiel behandeln, das zeigt, dass wenn man die Voraussetzungen von Satz (37) etwas abschwächt und nur verlangt, dass f partiell stetig und partiell differenzierbar nach einer Variablen ist, der Satz sofort seine Gültigkeit verliert.

Gegenbeispiel 41. [vgl. Appell 2009, S 383-384]

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}} & \text{für } 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{für } y = 0 \end{cases}$$

Wir untersuchen zuerst die Stetigkeit von f .

- Für $0 < y \leq 1$ ist f partiell stetig, da die partiellen Funktionen als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig sind.
- Für $y = 0$ betrachten wir den Limes

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{y^2}}{e^{-\frac{x^2}{y}}}$$

der von der Form “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” wäre, darum können wir die l’Hospitalschen Regeln anwenden und erhalten durch zweimaliges Differenzieren von Zähler und Nenner ¹¹

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^3}{y^2} \right)}{\frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-\frac{x^2}{y}} \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \frac{x^3}{y^3}}{e^{-\frac{x^2}{y}} \left(\frac{x^2}{y^2} \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \frac{x}{y}}{e^{-\frac{x^2}{y}}} =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial y} \left(2 \frac{x}{y} \right)}{\frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-\frac{x^2}{y}} \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \frac{x}{y^2}}{e^{-\frac{x^2}{y}} \left(\frac{x^2}{y^2} \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{x e^{-\frac{x^2}{y}}} = 0$$

- Insbesondere ist f auch partiell stetig in $(0, 0)$, denn

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$$

¹¹Bevor man ein zweites Mal differenziert, muss natürlich noch einmal überprüft werden, ob der Ausdruck immer noch von einer Form ist, die ein nochmaliges Anwenden der l’Hospitalschen Regeln erlaubt

Die Funktion f ist also partiell stetig auf $[0, 1] \times [0, 1]$, allerdings ist sie nicht stetig in $(0, 0)$, denn wenn man sich dem Nullpunkt auf der Parabel $y = x^2$ annähert, so erhält man

$$\lim_{x \searrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \searrow 0} \left(\frac{x^3}{x^4} e^{-\frac{x^2}{x^2}} \right) = \lim_{x \searrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{e} \right) = \infty$$

Die erste Voraussetzung von Satz 37 ist also nicht erfüllt, und auch nicht die zweite. Denn f ist zwar partiell differenzierbar nach x , wie man leicht sieht:

- Für $0 < y \leq 1$ lautet die partielle Ableitung nach x :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{3x^2}{y^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{y}} + \frac{x^3}{y^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{y}} \cdot \left(-\frac{2x}{y} \right) = e^{-\frac{x^2}{y}} \left(\frac{3x^2}{y^2} - \frac{2x^4}{y^3} \right)$$

- Für $y = 0$ erhält man für $h, k \in [0, 1], h \neq k$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, 0) = \lim_{h \rightarrow k} \frac{f(k, 0) - f(h, 0)}{h - k}$$

Also lautet die partielle Ableitungsfunktion

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{y}} \left(\frac{3x^2}{y^2} - \frac{2x^4}{y^3} \right) & \text{für } 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{für } y = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

Allerdings ist die partielle Ableitung nach x nicht stetig im Punkt $(0, 0)$, denn nähert man sich dem Nullpunkt auf der x -Achse, gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} f(x, 0) = 0$$

nähert man sich jedoch auf der Parabel $y = x^2$, gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{x^2}{x^2}} \left(\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2x^4}{x^6} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{x^2} = \infty$$

Die Funktion f ist also nicht stetig partiell differenzierbar in $(0, 0)$.

Nun werden wir f zuerst nach y integrieren und das Ergebnis dann noch nach x differenzieren (für $0 \leq x \leq 1$), also wir bilden $\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right]$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] = \int_0^1 \frac{x^3}{y^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{y}} dy = x^3 \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{y}}}{y^2} dy$$

Wir substituieren

$$\begin{aligned} t &= -\frac{x^2}{y} \\ \frac{dt}{dy} &= \frac{x^2}{y^2} \\ dy &= \frac{y^2}{x^2} dt \end{aligned}$$

und erhalten

$$x^3 \int \frac{e^t}{y^2} \cdot \frac{y^2}{x^2} dt = x e^t \Big|_0^1 = x e^{-\frac{x^2}{y}} \Big|_0^1 = x e^{-x^2} - \lim_{y \rightarrow 0} e^{-\frac{x^2}{y}} = x e^{-x^2}$$

Nun differenzieren wir nach x :

$$\frac{\partial}{\partial x} [x e^{-x^2}] = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2} (1 - 2x^2)$$

Also

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] = e^{-x^2} (1 - 2x^2) \quad (39)$$

Wenn wir umgekehrt zuerst nach x differenzieren und dann nach y integrieren, müssen wir jedoch eine Fallunterscheidung vornehmen:

- Für $x > 0$ erhalten wir mit (38):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right] dy &= \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y}} \left(\frac{3x^2}{y^2} - \frac{2x^4}{y^3} \right) dy \\ &= 3x^2 \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{y}}}{y^2} dy - 2x^4 \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{y}}}{y^3} dy \\ &= e^{-x^2} (1 - 2x^2) \end{aligned}$$

was mit (39) übereinstimmt.

- Für $x = 0$ erhalten wir jedoch

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x} f(0, y) \right] dy = \int_0^1 0 dy = 0$$

was sich aber von Ausdruck (39) unterscheidet, denn dieser hat an der Stelle $x = 0$ den Wert 1.

Nun wenden wir uns wieder dem Satz von Fubini zu, den wir nun mit Hilfe von Satz 36 und Satz 37 beweisen können.

Beweis. [vgl. Appell 2009, S 371-372 u. 379]

Wir definieren zunächst die beiden Funktionen

$$F_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F_1(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

und

$$F_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F_2(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

- Wir müssen nun zuerst zeigen, dass F_1 und F_2 stetig sind auf $[a, b]$ bzw. $[c, d]$, um daraus zu folgern, dass sie als stetige Funktionen auf beschränkten und abgeschlossenen Intervallen integrierbar sind. Wir beschränken uns darauf, zu beweisen, dass F_1 stetig ist, denn für F_2 funktioniert die Rechnung analog.

Sei also $\varepsilon > 0$, dann müssen wir ein $\delta > 0$ finden, sodass $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ folgt, dass

$$\begin{aligned} |F_1(x_1) - F_1(x_2)| &= \left| \int_c^d f(x_1, y) \, dy - \int_c^d f(x_2, y) \, dy \right| \\ &= \left| \int_c^d (f(x_1, y) - f(x_2, y)) \, dy \right| \\ &\leq \int_c^d |f(x_1, y) - f(x_2, y)| \, dy \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Um so ein δ zu finden, benutzen wir die gleichmäßige Stetigkeit von f , die uns durch Satz 36 geliefert wird. Da f gleichmäßig stetig ist, gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{sodass } \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \text{ mit } a \leq x_1, x_2 \leq b, \, c \leq y_1, y_2 \leq d \\ \text{und } |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Wir wissen auch, dass aus $|x_1 - x_2| < \delta$ folgt, dass $|(x_1, y) - (x_2, y)| < \delta$. Also

$$|F_1(x_1) - F_1(x_2)| = \int_c^d |f(x_1, y) - f(x_2, y)| \, dy < \int_c^d \varepsilon \, dy = \varepsilon(d - c)$$

Und daher ist F_1 stetig auf $[a, b]$.

- Nun müssen wir nur noch zeigen, dass

$$\int_a^b F_1(x) \, dx = \int_c^d F_2(y) \, dy \tag{40}$$

Dafür benötigen wir den Satz 37. Wir definieren

$$\begin{aligned} \varphi : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi(x) &= \int_c^d \left(\int_a^x f(t, y) \, dt \right) \, dy \end{aligned}$$

und betrachten die Ableitung

$$\varphi'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_c^d \underbrace{\left(\int_a^x f(t, y) dt \right)}_{\substack{\text{stetig} \\ \text{differenzierbar}}} dy \right]$$

Dass der Ausdruck in der runden Klammer stetig differenzierbar, also insbesondere auch stetig ist, folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung¹². Daher sind die Voraussetzungen von Satz 37 erfüllt und wir können vertauschen:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_c^d \left(\int_a^x f(t, y) dt \right) dy \right] = \\ &= \int_c^d \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_a^x f(t, y) dt \right) \right] dy \stackrel{\text{HSDI}}{=} \int_c^d f(x, y) dy = F_1(x) \end{aligned}$$

Und nun können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \int_a^b F_1(x) dx &= \int_a^b \varphi'(x) dx \\ &\stackrel{\text{HSDI}}{=} \varphi(b) - \underbrace{\varphi(a)}_0 = \varphi(b) = \int_c^d \left(\int_a^b f(t, y) dt \right) dy = \int_c^d F_2(y) dy \end{aligned}$$

Und damit haben wir die Gleichheit (40) gezeigt.

Durch Einsetzen von F_1 und F_2 erhalten wir dann

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b F_1(x) dx = \int_c^d F_2(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Die iterierten Integrale stimmen auch mit dem zweidimensionalen Integral überein, das werde ich jedoch an dieser Stelle nicht explizit beweisen. $\square$

Auch in diesem Beweis ist die Stetigkeit von f eine essentielle Voraussetzung. Dass der Satz von Fubini nicht gilt, wenn diese nicht gegeben ist, auch wenn sogar F_1 und F_2 stetig sind, zeigt das nächste Gegenbeispiel.

Gegenbeispiel 42. [vgl. Appell 2009, S 373-374]

Sei

$$\begin{aligned} f &: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x, y) &= \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{für } 0 < x < y < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

¹²Dieser wird im Folgenden mit ‘‘HSDI’’ abgekürzt.

Wir berechnen nun für $0 < x < 1$

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= \int_0^1 f(x, y) \, dy \\
 &= - \underbrace{\int_0^x \frac{1}{x^2} \, dy}_{\text{Rechtecksfläche}} + \int_x^1 \frac{1}{y^2} \, dy = -\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{y} \Big|_x^1 \right) = -\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x} = -1
 \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass F_1 sogar stetig ist, da es sich um eine konstante Funktion handelt, also können wir weiter integrieren:

$$\int_0^1 F_1(x) \, dx = \int_0^1 -1 \, dx = -1 \tag{41}$$

Nun machen wir dasselbe mit F_2 für $0 < y < 1$:

$$F_2(y) = \int_0^1 f(x, y) \, dx = \int_0^y \frac{1}{y^2} \, dx - \int_y^1 \frac{1}{x^2} \, dx = \frac{1}{y} + \left(\frac{1}{x} \Big|_y^1 \right) = \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{y} = 1$$

Auch F_2 ist stetig, weil konstant, und wir können integrieren:

$$\int_0^1 F_2(y) \, dy = \int_0^1 1 \, dy = 1 \tag{42}$$

(41) und (42) stimmen also nicht überein, obwohl F_1 und F_2 sogar stetig sind, und das liegt daran, dass die ursprüngliche Funktion f unstetig ist in allen Randpunkten und in den Punkten auf der Diagonalen $x = y$ im Bereich $[0, 1] \times [0, 1]$, denn beispielsweise im Punkt $(0, 0)$ gilt:

- Nähert man sich dem Nullpunkt auf der x-Achse, erhält man (da $y = 0 < 1$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$$

- Nähert man sich dem Nullpunkt auf der Parabel $y = x^2$ (wobei für $x, y \in [0, 1]$ natürlich gilt $y = x^2 < x$), erhält man

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$$

Und daher gilt der Satz von Fubini nicht.

4 Literaturverzeichnis

- Appell, J. (2009). *Analysis in Beispielen und Gegenbeispielen: eine Einführung in die Theorie reeller Funktionen*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Behrends, E. (2015). *Analysis Band 1: Ein Lernbuch für den sanften Wechsel von der Schule zur Uni. Von Studenten mitentwickelt*. Wiesbaden: Springer-Verlag.
- Bourchtein, A. & Bourchtein, L. (2015). *CounterExamples: From Elementary Calculus to the Beginnings of Analysis*. Boca Raton, Fla. [u.a.]: CRC Press.
- Deiser, O. (2015). *Analysis 2*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Deitmar, A. (2014). *Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Farwig, R., Chomo, C., Prasiswa, J. & Schulz, R. (o.J.). 5. Übungsblatt zur Analysis II. Zugriff am 2016-08-10 auf https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:oKSaWalW3yYJ:https://www3.mathematik.tu-darmstadt.de/evs/e/32.html%3Fevsver%3D108%26evsdir%3D172%26evsfile%3Due05_L.pdf+&cd=5&hl=de&ct=clnk&gl=at&client=firefox-b
- Forster, O. (2013). *Analysis 2: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen*. Wiesbaden: Springer-Verlag.
- Forster, O. (2016). *Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Wiesbaden: Springer-Verlag.
- Ganster, M. (o.J.). *Funktionen von beschränkter Schwankung*. Zugriff am 2016-08-10 auf http://www.math.tugraz.at/~ganster/lv_analysis_2/28_funktionen_beschraenkte_schwankung.pdf
- Gelbaum, B. R. & Olmsted, J. M. (1964). *Counterexamples in analysis*. San Francisco, Calif. [u.a.]: Holden-Day.
- Grady, N. (o.J.). *Functions of bounded variation*. Zugriff am 2016-08-10 auf <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/grady.pdf>
- Lasser, R. & Hofmaier, F. (2012). *Analysis 1 + 2: Ein Wegweiser zum Studienbeginn*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Pöschel, J. (2014a). *Etwas Analysis: Eine Einführung in die eindimensionale Analysis*. Wiesbaden: Springer-Verlag.
- Pöschel, J. (2014b). *Etwas mehr Analysis: Eine Einführung in die mehrdimensionale Analysis*. Wiesbaden: Springer-Verlag.
- Sauvigny, F. (2014). *Analysis: Grundlagen, Differentiation, Integrationstheorie, Differentialgleichungen, Variationsmethoden*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

- Steinbauer, R. (o. J.-a). *Sommersemester 2012: Einführung in die Analysis (Vo+Ue+Rep), handschriftliche Vorlesungsvorbereitung*. Zugriff am 2016-08-10 auf http://www.mat.univie.ac.at/~stein/lehre/SoSem12/EidA_Vo_2013-02-07_incl_index.pdf
- Steinbauer, R. (o. J.-b). *Sommersemester 2013: Reelle Analysis in mehreren und komplexe Analysis einer Variable für LAK (Vo+Ue), handschriftliche Vorlesungsvorbereitung*. Zugriff am 2016-08-10 auf http://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/SoSem13/VoRAimukAieVfLAK_2013-06-28.pdf
- Steinfeld, T. (o. J.-a). *Gleichmäßige Stetigkeit - Mathepedia*. Zugriff am 2016-08-10 auf http://www.mathepedia.de/Gleichmaeszige_Stetigkeit.aspx#L22
- Steinfeld, T. (o. J.-b). *Höhere partielle Ableitungen und der Satz von Schwarz - Mathepedia*. Zugriff am 2016-08-10 auf http://www.mathepedia.de/Hoehere_Ableitungen.aspx
- Tretter, C. (2013). *Analysis I*. Basel: Springer-Verlag.
- Wise, G. L. & Hall, E. B. (1993). *Counterexamples in probability and real analysis*. New York: Oxford University Press.
- Zorich, V. A. (2006). *Analysis 1*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

5 Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit geht es, wie der Titel schon verrät, um Gegenbeispiele, also um Beispiele, die grob ausgedrückt eine möglicherweise intuitiv richtig erscheinende, aber dennoch falsche Aussage widerlegen. Eine genauere Auseinandersetzung mit der Definition des Begriffs “Gegenbeispiel” findet sich in der Einleitung der Arbeit. Bei der Suche nach Gegenbeispielen habe ich mich auf das mathematische Teilgebiet der Analysis beschränkt, da dieses meines Erachtens besonders reich an sehr anschaulichen Gegenbeispielen ist.

Im Hauptteil meiner Arbeit, der sich in zwei Teile gliedert, wird nun eine große Sammlung an konkreten Gegenbeispielen präsentiert: Der erste Abschnitt behandelt Gegenbeispiele im Zusammenhang mit Funktionen in einer Variablen und der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit Gegenbeispielen im Zusammenhang mit Funktionen in mehreren Variablen. Diese beiden Kapitel wiederum gliedern sich in mehrere Unterkapitel zu Themen wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integration usw., innerhalb derer alle vorkommenden Gegenbeispiele ausführlich kontextualisiert werden.

Die Auswahl an Gegenbeispielen ist sehr vielfältig, sie reicht von “Klassikern” wie der Funktion $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$, die wohl jedem Mathematikstudenten aus einschlägigen Vorlesungen bekannt sind, bis hin zu eher unbekannten Gegenbeispielen, mit denen sich eine Auseinandersetzung jedoch trotzdem lohnt, da sie helfen, bestimmte Konzepte der Analysis besser begreifbar zu machen.

6 Abstract

This thesis deals with counterexamples, which are, roughly speaking, examples that prove that a statement - as intuitively right as it may seem at first glance - is false. A more detailed examination of the term “counterexample” will be given in the introduction to this thesis. I limited my research to counterexamples that occur in the mathematical branch of real analysis, which I consider to be especially rich in particularly illustrative counterexamples.

In the main part of my thesis, which consists of two sections, I present a large collection of thoroughly contextualized counterexamples: The first section deals with counterexamples that can be found in the context of functions of one real variable, while the second section deals with counterexamples that can be found in the context of functions of several real variables. Both of these sections are divided into several subsections about topics like continuity, differentiation, integration etc.

For my thesis I selected a great variety of counterexamples, which ranges from “classics” (like the function $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$) that are wellknown to almost every student of mathematics to more unusual ones that still deserve a closer examination, as they can be very helpful in understanding some crucial concepts of analysis.