



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

"Sternenentwicklung und Entartete Materie"

verfasst von / submitted by

Stefanie Postmann

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik

Betreut von / Supervisor:

Doz. Dr. Franz Embacher

Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei all jenen bedanken, die mich während der Erstellung meiner Diplomarbeit unterstützt und motiviert haben.

Ganz besonders gilt dieser Dank Herrn Doz. Dr. Franz Embacher, der meine Diplomarbeit betreut hat - vielen Dank für die Geduld und Mühen.

Nicht zuletzt gebührt meinen Eltern, meiner Familie und meinen Freunden Dank, die mich während des gesamten Studiums begleitet und unterstützt haben.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Magisterarbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt und die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keiner anderen Prüferin/ keinem anderen Prüfer als Prüfungsleistung eingereicht.

Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandeln mit der Note „Nicht genügend“ (ohne Möglichkeit einer Nachbesserung oder Wiederholung) geahndet wird und weitere rechtliche Schritte nach sich ziehen kann.

Diese Arbeit wurde neben der gedruckten Version auch auf CD-Rom zur Prüfung der o.g. Erklärung bei der zuständigen Prüferin/dem zuständigen Prüfer hinterlegt.

Wien, 2016

Stephanie Polmann

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Das Pauli-Prinzip	2
3	Die Heisenbergsche Unschärferelation	9
4	Entstehung und Entwicklung der Sterne	11
5	Die Entwicklungsstadien der Sterne	19
6	Der Massendefekt	22
7	Nichtentartete Materie - Hauptreihensterne	25
8	Entartete Materie	28
9	Weiße Zwerge, Monde und Planeten	32
10	Neutronensterne	45
11	Anwendung in der Schule	52
11.1	Lehrplan	52
11.2	Schulbücher und Unterrichtsmaterialien	54
	Abstract	74
	Zusammenfassung	75
	Anhang	76
	Quellenverzeichnis	77
	Literaturverzeichnis	77
	Abbildungsverzeichnis	81

1 Einleitung

Sterne unterlaufen einer ständigen Wandlung. Leider werden wir Menschen die Entwicklung eines Sterns nie zur Gänze beobachten können - dazu müssten wir Millionen oder Milliarden Jahre leben. In dieser Arbeit werden wir die Entstehung eines Sterns und die Entwicklungsstufen eines Sterns bei Entartung kennenlernen.

Eine der wichtigsten Erkenntnisse der Physik ist, dass die Materie "normalerweise" aus Molekülen besteht. Diese Moleküle sind wiederum aus Atomen aufgebaut. Materie kann verschiedene Aggregatzustände annehmen:

- Gase
- Flüssigkeiten
- Festkörper
- Plasma

In meiner Diplomarbeit werde ich mich mit einer weiteren Zustandsform der Materie befassen, nämlich mit der entarteten Materie.

Allgemein tritt entartete Materie bei sehr großer Dichte auf. Die Gesetze der klassischen Gaskinetik können hier nicht mehr angewandt werden, da der Druck nicht mehr von der Temperatur abhängig ist, sondern vor allem von der Dichte. Dabei ist auffällig, dass der Durchmesser eines aus entarteter Materie bestehender Sterns umso kleiner wird, je größer dessen Masse ist. Dies ist eine einzigartige Besonderheit entarteter Materie.

Um den Begriff "Entartung" zu verstehen, benötigen wir vorerst zwei wichtige physikalische Erkenntnisse: Das Pauli-Prinzip und die Heisenbergsche Unschärferelation. Diese beiden Begriffe werden wir zunächst am Anfang dieser Arbeit genauer betrachten.

2 Das Pauli-Prinzip

Ein wichtiges Prinzip, welches wir für das Verständnis der Sternenentstehung und entarteter Materie benötigen, ist das Pauli-Prinzip oder auch Paulisches Ausschlussprinzip genannt. Es ist ein Grundprinzip der Quantenmechanik und wurde 1925 von Wolfgang Pauli aufgestellt. Der Österreicher Wolfgang Pauli erhielt 1945 den Nobelpreis für seine Formulierung des Ausschlussprinzips.

Bevor wir das Pauli-Prinzip genauer erklären werden, gehen wir kurz auf einige wichtige Atommodelle ein.

Schon vor etwa 2000 Jahren gab es eine grundlegende Vorstellung zu Atomen und Stoffen. Der griechische Philosoph Leukipp und sein Schüler Demokrit hatten damals schon die Vermutung, dass Stoffe aus kleinen Einheiten bestehen, welche sich nicht mehr zerteilen lassen. Sie nannten solch eine Einheit "Atom" oder "Urkorn". Auch wenn Demokrit und Leukipp über die Existenz von Protonen, Neutronen und Elektronen noch nichts wussten, konnten sie erste Überlegungen über ein Atommodell aufstellen. Im Jahre 1874 entdeckte der britische Physiker Sir Joseph John Thomson, dass Kathodenstrahlen aus geladenen Teilchen, den Elektronen, bestehen. In seinem Modell setzt sich ein Atom aus gleichmäßig verteilter Masse zusammen. Es besteht aus einer positiv geladenen Kugel, in der negativ geladene Elektronen eingelagert sind.

Erst 1911 konnte der neuseeländische Physiker und Nobelpreisträger Ernest Rutherford durch ein Experiment zur Streuung von Alpha-Teilchen nachweisen, dass ein Atom aus einem Kern und einer Hülle besteht. Die Masse des Atoms ist dabei im Kern konzentriert und ist positiv geladen. Rutherford stellte auch fest, dass sich in der Atomhülle negative Ladungen befinden und dass das Atom nach außen hin neutral ist.

Der dänische Physiker Niels Bohr nahm 1913 das Rutherfordsche Atommodell als Ausgangspunkt und fasste seine Erkenntnisse zu einem neuen Atommodell zusammen. Das Bohrsche Atommodell ist das erste Atommodell, welches Elemente der Quantenmechanik beinhaltet. Beim Rutherfordschen Atommodell besteht ein Atom aus einem Atomkern und aus einer Atomhülle. Die negativ geladenen Elektronen umkreisen den positiv geladenen Atomkern. Beim Bohrschen Atommodell kreisen die Elektronen auf stabilen Bahnen rund um den Kern. Dabei werden die Bahnen, auf denen die Elektronen kreisen, auch "Schalen" genannt und werden von innen nach außen mit den Buchstaben $K, L, M, N, \dots$ bezeichnet. Niels Bohr postulierte als erster, dass jede Schale ein ganz bestimmtes Energieniveau hat. Elektronen können laut Bohr nur bestimmte

Energien annehmen. Wenn die Schalen durchnummeriert werden, erhalten wir die sogenannte Hauptquantenzahl n . Das heißt, die K-Schale wird als erste Schale bezeichnet, die L-Schale als zweite und so weiter. Auf der n -ten Schale kann sich nur eine bestimmte Anzahl von Elektronen befinden, die mithilfe der Formel $2n^2$ berechnet werden kann. So befinden sich auf der 1. Schale maximal zwei Elektronen, auf der 2. Schale maximal 8 Elektronen und so weiter. Wichtig ist dabei, dass die innere Schale zunächst voll besetzt sein muss, und dann erst die nächste äußere Schale mit Elektronen besetzt werden kann. Wir werden uns später dazu noch ein kleines Beispiel zum besseren Verständnis ansehen.

Weiters ist bei diesem Atommodell wichtig, dass sich die Elektronen auf beschleunigten Kreisbahnen bewegen. Wie wir wissen, geben beschleunigte Ladungen elektromagnetische Strahlung ab. Dies würde aber bedeuten, dass Elektronen bei der Abgabe von Strahlung (Energie) langsamer werden und somit in den Atomkern stürzen würden, was aber nicht geschieht. Bohrs Grundgedanke war, dass ein Gleichgewicht zwischen der Zentrifugalkraft und der Coulombkraft herrschen muss. Beim Umkreisen eines Elektrons um den Atomkern sollte die Zentrifugalkraft gleich der Anziehungskraft des Elektron durch den Atomkern sein. Bohr stellte zwei Postulate auf, in denen er annahm, dass die klassische Physik im atomaren Bereich nicht mehr gilt:

1. Das erste Postulat besagt, dass Elektronen den Atomkern nur auf bestimmten stabilen Bahnen umkreisen, ohne dass die Elektronen Energie abgeben. Solange sich die Elektronen auf der gleichen Bahn bewegen, bleibt die Energie konstant. Diese Bahnen müssen eine bestimmte Quantenbedingung erfüllen, nämlich

$$2 \cdot \pi \cdot m_e \cdot v \cdot r = n \cdot \hbar.$$

Dabei steht v für die Bahngeschwindigkeit, m_e für die Elektronenmasse, $\hbar$ für das Plancksche Wirkungsquantum, r für den Abstand zum Atomkern der stabilen Bahn und n für die Quantenzahl.

Diese Formel besagt, dass der Bahndrehimpuls eines Elektrons auf einer stabilen Bahn ein ganzzahliges Vielfaches von $\hbar$ ist.

2. Das zweite Postulat besagt, dass beim Übergang eines Elektrons von einer Bahn zur anderen ein Elektron entweder Energie aufnehmen oder abgeben muss. Die Energiedifferenz zwischen dem Anfangs- und Endzustand entspricht der Frequenz der ausgesandten oder aufgenommenen elektromagnetischen Strahlung. Diese Energiedifferenz ΔE ist proportional zu $\hbar$.

$$\Delta E = E_m - E_n = \hbar \cdot f$$

Dabei ist E_m die Energie des Elektrons vor dem "Sprung" zur nächsten Schale, E_n die Energie des Elektrons nach dem "Sprung", f die Frequenz des Lichts und $\hbar$ das Plancksche Wirkungsquantum.

Das Bohrsche Atommodell lieferte erstmals Ansätze zum Verständnis des Spektrums von Wasserstoff. Dabei lehnte sich Bohr einerseits an das Rutherfordsche Atommodell an, indem er annahm, dass negativ geladene Elektronen auf wohldefinierten Bahnen um den positiv geladenen Atomkern kreisen. Andererseits formulierte er die zwei oben erwähnte Postulate anhand seiner Erkenntnisse über atomare Spektren. Außerdem konnte das Atommodell von Bohr auch zur Erklärung der Spektren von Ionen mit nur einem Elektron (zum Beispiel Deuterium) herangezogen werden. Für Atome, die mehr als ein Elektron haben, ist das Bohrsche Atommodell nicht anwendbar bzw. sehr ungenau. Es lässt sich noch einigermaßen auf "wasserstoffähnliche" Atome anwenden.

Bohr konnte ebenfalls den Radius einer Elektronenbahn von Wasserstoff berechnen, indem er die Zentrifugalkraft der Coulombkraft gleichsetzte, da diese beiden Kräfte im stabilen Zustand eines Atoms identisch sind. Mit dem klassischen Drehimpuls eines Elektrons stellte Bohr eine Formel für den Radius der Elektronenbahn für Wasserstoff auf, also

$$r = \frac{n^2 \cdot h^2 \cdot \varepsilon_0}{\pi \cdot m_e \cdot e^2}.$$

Dabei steht n für die jeweilige Bahn, h für die Plancksche Konstante, ε_0 für die Dielektrizitätskonstante, m_e für die Masse eines Elektrons und e für die Elektronenladung. Für den Grundzustand $n = 1$ erhalten wir daraus den Radius eines Wasserstoffatoms und nennen ihn den "Bohrschen Radius". Wir werden später noch eine andere Form des Bohrschen Radius kennenlernen.

Das Bohrsche Atommodell wurde von dem deutschen Physiker und Mathematiker Ar-

nold Sommerfeld erweitert, damit sich das Atommodell auch für Atome mit mehreren Elektronen anwenden lässt. Bei diesem Atommodell bewegen sich die Elektronen auf elliptischen Bahnen um den Atomkern. Dabei befindet sich der Atomkern in einem der beiden Brennpunkte der Ellipse.

Im 20. Jahrhundert konnten einige Physiker wie Albert Einstein, Erwin Schrödinger und Werner Heisenberg bedeutsame Erkenntnisse in der Quantenmechanik erlangen. Mit diesem Wissen war es möglich die bestehenden Atommodelle zu erweitern und zu verbessern. Das bis heute genaueste Atommodell, das Orbitalmodell, kam dadurch zustande, dass als Grundlage unabhängige Erkenntnisse von Erwin Schrödinger und Werner Heisenberg angewendet wurden. Orbitale sind Raumbereiche, in denen sich mit hoher Wahrscheinlichkeit Elektronen aufhalten. Dabei stellt man sich den Aufenthaltsbereich der Elektronen als "Wolke" vor. Die Anzahl der Elektronen hängt von den Schalen ab. So hat auf der ersten Schale ein Elektron Platz, auf der zweiten Schale vier Elektronen und so weiter, analog zum Bohrschen Atommodell. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit nimmt also von außen hin langsam ab bzw. von innen nach außen schnell zu. Das Problem bei diesem Atommodell ist, dass man nicht gleichzeitig die Position und die Geschwindigkeit eines Elektrons bestimmen kann, da ein Elektron ein quantenmechanisches Objekt ist. Dieses Phänomen wird als "Heisenbergsche Unschärfere-lation" bezeichnet, welches wir im folgenden Kapitel behandeln werden.

Elektronen können in diesem Atommodell anhand von vier Quantenzahlen beschrieben werden, mit deren Hilfe wir den Zustand eines Elektrons beschreiben können:

1. Die **Hauptquantenzahl** n , wobei $n = 1, 2, 3, \dots$ ist. Diese gibt an, auf welcher Schale sich das Elektron befindet. Als Grundzustand wird die niedrigste Bahn, also $n = 1$ bezeichnet. Die nächste Bahn ($n = 2$) wird als 1. angeregter Zustand bezeichnet, $n = 3$ wird als 2. angeregter Zustand bezeichnet, usw.
2. Die **Drehimpulsquantenzahl** bzw. **Nebenquantenzahl** l , wobei $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ist. Sie ist ein Maß für den Drehimpuls des Elektrons. Die Nebenquantenzahl differenziert die Schalen in Unterschalen, die mit dem Buchstaben s, p, d, f bezeichnet werden. Zum Beispiel kann es bei der Hauptquantenzahl $n = 1$ nur 1s-Orbital geben und bei der Hauptquantenzahl $n = 2$ nur ein 2s-Orbital. Ein s-Orbital kann bis zu zwei Elektronen fassen. Ein p-Orbital gibt es erst ab $n = 2$. Es gliedert sich in ein p_x -, p_y - und p_z -Orbital, wobei jedes davon wieder

zwei Elektronen fassen kann, jedoch mit einem unterschiedlichen Spin. Insgesamt kann ein p-Orbital sechs Elektronen fassen. Ein d-Orbital gibt es ab der Hauptquantenzahl $n = 3$ und kann 10 Elektronen fassen, wobei wir dieses Orbital nicht mehr genau beschreiben werden. Alle Orbitale mit der selben Nebenquantenzahl und der selben Hauptquantenzahl befinden sich in der gleichen Unterschale einer Hauptschale. Zum Beispiel werden Orbitale, die eine Drehimpulsquantenzahl von $l = 0$ haben, als s-Orbitale bezeichnet. Sie sind kugelförmig um den Atomkern angeordnet. Orbitale, die eine Nebenquantenzahl von $l = 1$ haben, haben eine hantelförmige Raumstruktur und werden als p-Orbitale bezeichnet.

3. Die **magnetische Quantenzahl** m , wobei $m = -l, \dots, 0, \dots, +l$ ist. Sie unterteilt die Unterschalen in $2l + 1$ Orbitale und beschreibt die räumliche Ausrichtung des Elektrons, die es bezüglich eines Magnetfeldes einnimmt. Die magnetische Quantenzahl gibt also Informationen über die Orientierung der Orbitale in einem Raum. Abbildung (1) zeigt uns zum Beispiel ein 2p-Orbital, welches einmal auf der x-Achse, auf der y-Achse und auf der z-Achse ausgerichtet ist.

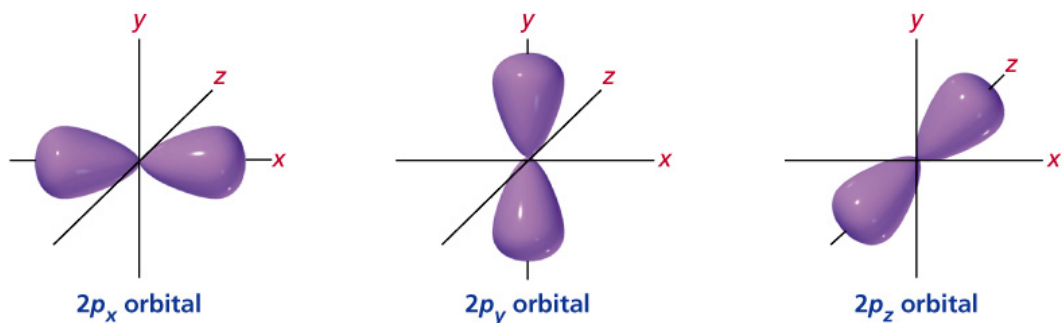


Abbildung 1: p_x -, p_y - und p_z -Orbital

4. Die **Spinquantenzahl** s , wobei $s = \pm\frac{1}{2}$ ist. Sie gibt den Eigendrehimpuls eines Elektrons an.

Mit dem Wissen über verschiedene Atommodelle, wenden wir uns nun dem Pauli-Prinzip zu. Was sagt das Pauli-Prinzip nun genau aus?

Das Pauli-Prinzip besagt, dass zwei Elektronen in einem Atom nie in allen vier Quantenzahlen übereinstimmen dürfen. Also entsprechend dem Pauli-Prinzip müssen sich Elektronen mindestens in einer der Quantenzahl n, l, m, s unterscheiden.

Zum besseren Verständnis des Pauli-Prinzips werden wir uns das 11. Element des Periodensystems, Natrium, genauer ansehen. Wir füllen die Elektronen nach dem Pauli-Prinzip auf. Angefangen wird mit der ersten Schale, also $n = 1$. Für die Drehimpulsquantenzahl und Magnetquantenzahl bleibt nur die 0 übrig, weil $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ und $m = -l, \dots, 0, \dots, l$ ist. Für die Spinquantenzahl bleibt $+\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$. Das bedeutet für das Atom, dass auf der ersten Schale nur zwei Elektronen Platz haben, da sich die Elektronen sonst nicht in einer der vier Quantenzahlen unterscheiden würden. Schauen wir uns an, wie viele Elektronen auf der zweiten Schale Platz haben: Da $n = 2$ ist, können wir die Drehimpulsquantenzahl gleich 0 oder +1 setzen. Wenn $l = 0$ ist, so ist m auch wieder 0. Ist $l = +1$, so kann m gleich $-1, 0$ oder $+1$ sein. Die Spinquantenzahl setzen wir wieder $\pm\frac{1}{2}$. Somit haben auf der zweiten Schale acht Elektronen Platz, die sich voneinander in mindestens einer Quantenzahl unterscheiden. Da Natrium 11 Elektronen hat, bleibt nur mehr ein Elektron übrig, welches auf der dritten Schale Platz hat.

In Tabelle (1) ist die Aufteilung der Elektronen von Natrium zu sehen.

n	l	m	s
1	0	0	$\pm\frac{1}{2}$
2	0	0	$\pm\frac{1}{2}$
2	+1	-1	$\pm\frac{1}{2}$
2	+1	0	$\pm\frac{1}{2}$
2	+1	+1	$\pm\frac{1}{2}$
3	0	0	$\pm\frac{1}{2}$

Tabelle 1: Quantenzahlen bei Natrium

Das Paulische Ausschlussprinzip gilt nicht nur für Elektronen, sondern für alle Teilchen, die einen halbzahligen Spin haben, z.B. Protonen und Neutronen. Diese Teilchen werden Fermionen genannt. Teilchen mit ganzzahligen Spin, welche Bosonen genannt werden, unterliegen jedoch nicht dem Pauli-Prinzip, da sie gleiche Quantenzustände

annehmen können.

Das Pauli-Prinzip findet vor allem Anwendung bei der Erklärung von Atomen, Festkörpern und Sternen. Beim Atomaufbau dürfen Elektronen nie die gleichen Quantenzahlen haben, was im Periodensystem sichtbar gemacht wird.

Bei der Erklärung des Sternenaufbaus findet das Pauli-Prinzip Anwendung bei der Elektronenentartung und bei der Neutronenentartung, welche wir in den folgenden Kapiteln genauer behandeln werden.

3 Die Heisenbergsche Unschärferelation

Wie schon im vorigen Kapitel erwähnt, spielt die Heisenbergsche Unschärferelation sowohl bei den Atommodellen als auch bei der Sternenentwicklung eine wichtige Rolle. Der Physiker Werner Heisenberg formulierte diese Unschärferelation 1927 in seinem Artikel "Anschaulicher Inhalt der quantenmechanischen Kinematik". Sie besagt, dass Ort und Impuls nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmt werden können, ohne eine Unschärfe von Impuls und Ort in Kauf zu nehmen. Wollen wir also die Kenntnis über einen Wert einer physikalischen Größe verbessern, so verschlechtert sich der Wert der anderen physikalischen Größe, welchen wir bestimmen möchten.

Die Heisenbergsche Unschärferelation für einen Ort und Impuls ist gegeben durch

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{bzw.} \quad \Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}, \quad (1)$$

wobei Δp die Impulsunschärfe bezeichnet, Δx die Ortsunschärfe, h das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum und $\hbar$ das Plancksche Wirkungsquantum.

Die Formel (1) besagt, dass das Produkt aus der Unschärfe von Ort und Impuls nie den endlichen Wert $\frac{\hbar}{2}$ unterschreitet. Wenn wir annehmen, dass einer der Werte ganz genau bekannt ist, zum Beispiel $\Delta x = 0$, so wäre $\Delta p = \infty$.

Wir wüssten also über die Messgröße p gar nichts, weil seine Unschärfe beliebig groß ist.

Die Gleichung gilt sowohl im Mikro- als auch im Makrokosmos. Im Makrokosmos sind solche Effekte sehr klein und können daher auch vernachlässigt werden. Bei subatomaren bzw. atomaren Objekten muss man diese Effekte jedoch berücksichtigen.

Wir wollen zum Beispiel den Ort für ein Elektronenbündel genau bestimmen. Wir richten einen Elektronenstrahl auf eine Blende mit einem Spalt der Breite Δx . Wenn wir den Ort der Elektronen direkt hinter dem Spalt bestimmen wollen, so sehen wir eine gleichmäßige Verteilung der Elektronen über die gesamte Breite des Spaltes. Wir können jedoch nicht vorhersagen, wo die Elektronen auftreffen werden. Die Stelle, an der die Elektronen auftreffen, ist nur mit einer "Unschärfe", also einer Ungenauigkeit von Δx vorherzusagen. Nun wollen wir in größerer Entfernung hinter dem Spalt das Auftreffen der Elektronen bestimmen. Sie verteilen sich über einen größeren Bereich. Beim Durchfliegen durch den Spalt haben die Elektronen eine Geschwindigkeit, also auch

einen Impuls in x -Richtung. Der Impuls ist daher auch nur mit einer gewissen "Unschärfe" also Ungenauigkeit Δp bekannt. Aus diesem Experiment folgt, dass, wenn die Breite des Spaltes verkleinert wird, die Elektronen auf einen kleineren Bereich eingengt werden. Wir haben eine kleinere Ortsunschärfe Δx , aber eine größere Impulsunschärfe Δp .

4 Entstehung und Entwicklung der Sterne

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der Entstehung der Sterne befassen.

Etwa 100 bis 250 Millionen Jahre nach dem Urknall bestand das Universum aus rund 75% Wasserstoff und 25% Helium. Wenn wir einen Blick in unseren Nachthimmel werfen, könnten wir glauben, dass der Raum zwischen Sternen und Galaxien "leer" sei. Doch in unserer Milchstraße gibt es nirgendwo ein materiefreies Gebiet, denn zwischen Sternen und Galaxien befindet sich die sogenannte interstellare Materie, welche aus Staub oder Gasmolekülen besteht. Interstellare Materie besteht zu 99% aus Gas und zu fast 90% aus dem häufigst vorkommenden Gas des Universums, nämlich Wasserstoff. Die übrigen 1% interstellarer Materie bestehen aus interstellarem Staub. Die Staubkörner haben etwa einen Durchmesser von $0,001 - 0,0001$ mm. Wichtig ist, dass die Wasserstoffwolken in H I - Gebiete und in H II - Gebiete unterteilt werden. In H I - Gebieten ist das Wasserstoffgas nicht ionisiert und hat eine Temperatur von etwa 50 Kelvin. In H II - Gebieten ist Wasserstoff ionisiert und das Plasma hat eine Temperatur von etwa 10 000 Kelvin. Sterne bilden sich aus massenreicher interstellarer Materie, also einer Gas- und Staubwolke.

Abbildung (2) zeigt uns die uns nächste Molekülwolke, den sogenannten Orionnebel, welcher etwa 1468 Lichtjahre von uns entfernt ist. Im Orionnebel befinden sich bereits heiße, junge Sterne.

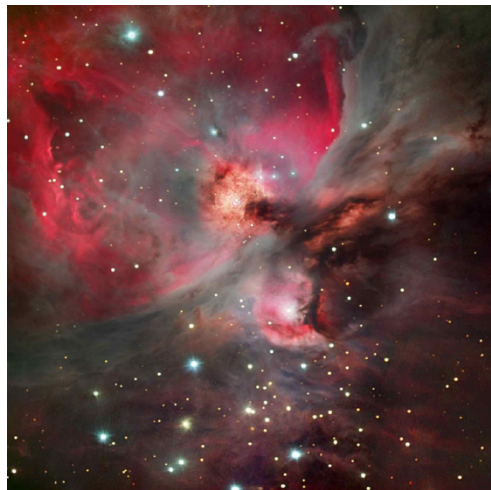


Abbildung 2: Orionnebel

Widmen wir uns einer sehr wichtigen und dominierende Kraft im Universum, die für die Entstehung der Sterne bedeutsam ist, der Gravitationskraft $F_G = G \cdot \frac{Mm}{r^2}$, wobei $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ die Gravitationskonstante, M die Masse eines Objekts, m die Masse eines anderen Objekts und r die Entfernung der beiden Objekte ist. Die Gravitationskraft versucht, alle Himmelskörper zusammenzuziehen, also zu kontrahieren. Voraussetzung für die Kontraktion ist das Jeans-Kriterium. Dieses Kriterium gibt an, ob aus einer Wolke ein Stern entstehen kann. Der britische Physiker und Astronom James Jeans erkannte, dass eine Kontraktion einer Wolke von der Dichte und der Temperatur abhängt.

Eine Wolke sollte also relativ kühl und dicht sein, damit Sterne entstehen können. Am besten geeignet sind kalte, dunkle H I - Gebiete mit einer Temperatur von 10 - 20 Kelvin. Bei diesen niedrigen Temperaturen weisen die Wasserstoffmoleküle noch eine Wärmebewegung auf. Dabei wird durch den Anstieg der Temperatur die Verdichtung der Wolke immer heftiger. Ein Teil der Bewegungsenergie wird auf den Stoßpartner übertragen. Dieser emittiert die aufgenommene Energie als Infrarotstrahlung. Durch diese Strahlungskühlung wird die Gravitationsenergie der Wolke in Wärmeenergie umgewandelt.

Damit diese Wärme abgestrahlt werden kann, muss die Wolke eine dementsprechende Opazität aufweisen. Opazität ist das Gegenteil von Transparenz und beschreibt die optische Dichte einer Wolke, also wie lichtundurchlässig sie ist. Die Opazität wird umso größer, je mehr die Kontraktion vorangeschritten ist. Die Temperatur und der Druck steigen an. Durch die Kontraktion der Wolke steigt auch die Dichte der Gas- und Staubwolke. Wenn sich aber nun ein Gleichgewicht zwischen Gravitation und Druck einstellt, stoppt die Kontraktion der Wolke.

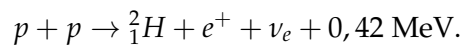
Es entstehen nur dann stabile Objekte, wenn die Materie der Gravitation einen Druck entgegensetzen kann, das heißt, es herrscht ein sogenanntes Gleichgewicht. Eine Gas- und Staubwolke kontrahiert nur, wenn sie genau aus diesem Gleichgewicht gerät. Auslöser dafür kann zum Beispiel eine Druckwelle sein. Die Gas- und Staubwolke erwärmt sich und die Temperatur steigt gleichzeitig enorm an.

Wie verhält sich aber nun in unserem Fall ein Wasserstoffatom bei hohen Drücken und Temperaturen?

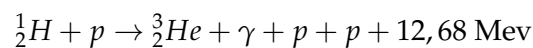
Wir wissen, dass ein Wasserstoffatom mehrheitlich aus einem Proton und einem Elektron besteht. Es gibt auch Wasserstoffkerne mit Neutronen, nämlich Deuterium und

Tritium. Bei hohen Temperaturen und Drücken treffen Protonen aufeinander und reagieren miteinander. Es setzt eine Kernfusion ein. Dabei wird Energie frei, welche den Druck erzeugt, der benötigt wird, um der Gravitation entgegen zu wirken. Dabei entstehen stabile Sterne, sogenannte Hauptreihensterne. Im Kern eines Hauptreihensterns finden zwei wichtige Reaktionen statt: das Deuteriumbrennen und das Wasserstoffbrennen.

Ein Deuteriumkern besteht aus einem Proton und einem Neutron und ist ein natürliches Isotop des Elements Wasserstoff. Beim Deuteriumbrennen erfolgt eine Reaktion von zwei Protonen zu einem Deuteriumkern, einem Positron, einem Neutrino und einer Energie von etwa 0,42 MeV. Bei einer Temperatur von etwa 10^6 Kelvin beginnt das Deuteriumbrennen. Formal bedeutet dies



Beim Wasserstoffbrennen wird im Kern Wasserstoff zu Helium verbrannt. Um einen Heliumkern zu bilden benötigen wir vier Wasserstoffkerne. Die Reaktion verläuft in Teilschritten. Dieser Prozess der Kernfusion beim Wasserstoffbrennen kann auf zwei Arten erfolgen: Proton-Proton- Reaktion und CNO-Zyklus. Die Proton-Proton-Reaktion ist bei Sternen relevant, die eine Masse unter 1,5 Sonnenmassen haben. Dabei wandeln die Sterne Wasserstoff in Helium um:



Der CNO-Zyklus erfolgt bei Temperaturen über 14 Millionen Kelvin. Bei 30 Millionen Kelvin ist dieser Prozess relevant. Dieser Zyklus läuft bei Sternen ab, die mehr als 1,5 Sonnenmassen haben, also bei massereichen Sternen. Dabei muss eine kleine Menge Kohlenstoff vorhanden sein, damit der Zyklus stattfinden kann, denn Kohlenstoff ist sowohl Reaktionspartner als auch Zwischenprodukt. Auch bei diesem Zyklus sind Zwischenprodukte vorhanden: ${}^{13}\text{N}$, ${}^{15}\text{O}$, welche jedoch nach kurzer Zeit unter Aussendung eines Positrons und eines Elektron-Neutrinos wieder zerfallen. Während des Zyklus werden auch energiereiche Photonen freigesetzt. Vier Wasserstoffkerne ${}^1\text{H}$ fusionieren zu einem Heliumkern ${}^4\text{He}$. Dies ist das Gesamtergebnis des Zyklus.

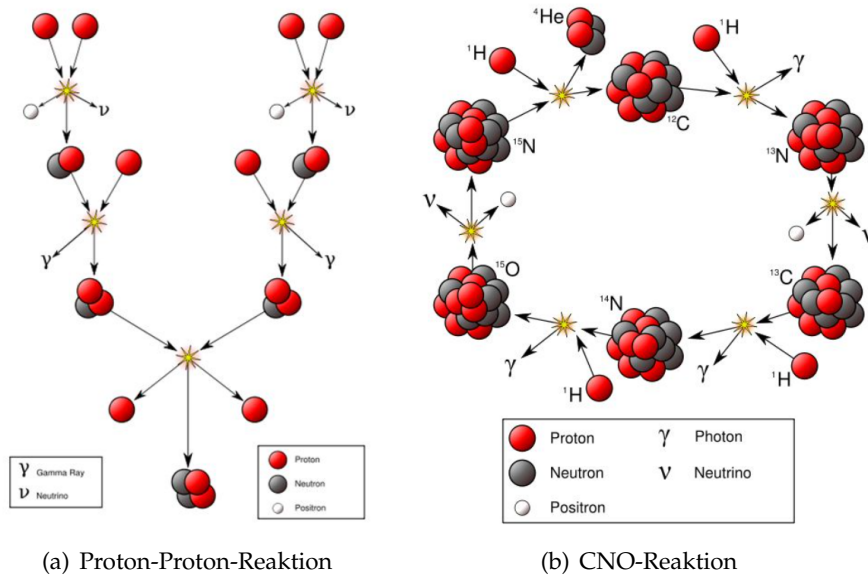


Abbildung 3: Kernfusionen im Sterninneren

Sterne verbringen die längste Zeit ihres Lebens - 10^6 bis 10^{11} Jahre - in der Hauptreihenphase. Sterne, die in der Hauptreihe sind, befinden sich im thermischen und hydrostatischen Gleichgewicht. Das bedeutet, dass der nach außen gerichtete Druck, der durch die Fusion von Wasserstoff zu Helium entsteht, der eigenen Gravitation des Sterns entgegenwirkt und somit einen Kollaps des Sterns verhindert. Im Kern reichert sich allmählich Helium an, solange bis der Wasserstoff verbraucht ist. Die Sterne verlassen nun die Hauptreihe. Genauer werden wir später erfahren. Wir wollen nun genauer ermitteln, wann die Kontraktion der Gaswolke vollendet und ein stabiles Gleichgewicht erreicht ist. Die Hauptfrage bei der Sternentstehung ist, wodurch ein Stern stabilisiert wird und nicht immer weiter durch seine Eigengravitation kollabiert. Dazu müssen wir eine sogenannte Gleichgewichtsbedingung aufstellen, die wir im Folgenden herleiten werden.

Eine Gleichgewichtsbedingung setzt sich aus Bedingungen für das hydrodynamische und thermische Gleichgewicht zusammen.

Wir betrachten nun einen Stern mit der Masse M und dem Radius R . Die Temperatur T , der Druck p und die Dichte ρ nehmen wir vereinfacht zuerst als konstant an. Wir wissen bereits, dass sich der Stern in einem hydrostatischen Gleichgewicht befindet. Der Druck ist definiert durch $p = \rho \cdot g \cdot h$. Durch Einsetzen von $g = \frac{GM}{R^2}$, $\rho = \frac{M}{R^3}$ und durch

$h \approx R$ können wir den Druck abschätzen, also

$$p \approx \frac{M}{R^3} \cdot \frac{GM}{R^2} \cdot R \approx \frac{GM^2}{R^4}. \quad (2)$$

Die Materie des Sterns kann als ideales Gas angesehen werden. Die ideale Gasgleichung, welche wir im Kapitel "Nichtentartete Materie" genau beschreiben werden, ist gegeben durch

$$pV = N \cdot k \cdot T, \quad (3)$$

wobei p der Druck, V das Volumen, N die Teilchenanzahl, k die Boltzmann-Konstante und T die Temperatur ist.

Wir wissen bereits aus Gleichung (2), dass der Druck p durch $p \approx \frac{GM^2}{R^4}$ gegeben ist. Für das Volumen V setzen wir $V = R^3$ ein. Weiters ist die Teilchenmasse N als der Quotient der Sternmasse M durch die Teilchenzahl m gegeben. Nun setzen wir diese Erkenntnisse in Gleichung (3) ein und erhalten

$$\frac{GM^2}{R^4} \cdot R^3 \approx \frac{M}{m} \cdot k \cdot T.$$

Wenn wir diese Gleichung noch kürzen, erhalten wir die **thermische und hydrostatische Gleichgewichtsbedingung**, also

$$\frac{GM}{R} \approx \frac{kT}{m}.$$

Wenn wir nun annehmen, dass die Temperatur, der Druck und die Dichte nicht im ganzen Stern konstant sind, können wir eine ähnliche Herleitung heranziehen:

Wir betrachten nun eine Gaskugel, die einen Stern oder eine interstellare Gaswolke darstellen soll. Dabei ist $M(r)$ die Masse innerhalb der Gaskugel mit Radius r und $\rho(r)$ die Dichte im Abstand r vom Zentrum. Die Gaskugel befindet sich wie oben im hydrostatischen Gleichgewicht. Außerdem herrscht ein Druck $p(r)$ im Abstand r vom Zentrum. Genauer betrachten wir nun eine im Abstand r liegende Fläche dA , auf der eine bestimmte Masse lastet. Auf eine im Abstand dr , wobei dr infinitesimal klein ist, liegende Fläche dA lastet eine um $dA dr \rho(r)$ verringerte Masse. Das Gewicht dieser verringerten

Masse ist gegeben durch

$$\frac{GM(r)}{r^2} dA dr \rho(r).$$

Für den Druckunterschied erhalten wir den Zusammenhang

$$dp \equiv p(r + dr) - p(r) = -\frac{GM(r)}{r^2} dr \rho(r).$$

Daher erhalten wir nach Division durch dr die **hydrostatische Gleichgewichtsbedingung**:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r). \quad (4)$$

Die hydrostatische Gleichgewichtsbedingung ist eine der wichtigsten Grundgleichungen für die Modellierung der Sterndynamik.

Wie schon oben erwähnt, ist die Dichte im Sterninneren nicht konstant, sondern abhängig von r . Um diese Gleichung zu lösen, muss die Zustandsgleichung vorgegeben sein, die den Druck als Funktion der Temperatur und der Dichte beschreibt, also

$$p = p(\rho, T).$$

Eine Zustandsgleichung bezeichnet einen funktionalen Zusammenhang zwischen thermodynamischen Größen. Mit ihrer Hilfe kann ein thermodynamisches System beschrieben werden.

Damit wir nun die Größenordnung des Drucks im Inneren des Sterns bestimmen können, nähern wir $\frac{dp}{dr}$ durch $-\frac{p}{R}$ an, wobei p der mittlere Druck im Stern und R der Radius des Sterns ist, also

$$\frac{dp}{dr} \approx \frac{p(R) - p(0)}{R} = -\frac{p(0)}{R} \approx -\frac{p}{R}. \quad (5)$$

Wir haben bei dieser Gleichung $p(R) = 0$ gesetzt, da der Druck an der Oberfläche des Sterns verschwindet. $p(0)$ stellt den mittleren Druck im Sterninneren dar - wir nennen ihn "p". Das ist allerdings für uns nur eine grobe Näherung, die aber für unsere Zwecke ausreichend ist. Setzen wir nun statt unser r ein R ein, können wir die hydrostatische

Gleichgewichtsbedingung annähern durch

$$\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) \approx \frac{GM}{R^2} \rho.$$

Setzen wir nun diese Näherung und Gleichung (5) in Gleichung (4) ein, erhalten wir

$$\frac{p}{R} \approx \frac{GM}{R^2} \rho.$$

Wenn wir diesen Ausdruck noch durch $\frac{\rho c^2}{R}$ dividieren, erhalten wir

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{GM}{Rc^2}.$$

Damit ergibt sich unsere Gleichgewichtsbedingung, also

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{GM}{c^2 R} \approx \frac{R_S}{R} \equiv \frac{\text{Schwarzschildradius}}{\text{Radius}}. \quad (6)$$

Die Gleichgewichtsbedingung (6) zeigt uns, dass der mittlere Druck in einem Stern unter Einfluss der Eigengravitation des Sterns zustande kommt.

Der Schwarzschildradius ist also definiert als $R_S = \frac{2GM}{c^2} = M \cdot 1,485 \cdot 10^{-27} \frac{\text{m}}{\text{kg}}$. Er stellt eine Grenze für einen Radius dar, die ein Objekt erreichen muss, damit an seiner Oberfläche die Lichtgeschwindigkeit gleich seiner Entweichgeschwindigkeit ist. Der Schwarzschildradius stellt also eine Grenze zum Schwarzen Loch dar. Für die Masse unserer Erde beträgt der Schwarzschildradius ungefähr $R_S = 0,89 \text{ cm}$. Interessant ist auch, dass der Schwarzschildradius für die Masse der Sonne ca. 2952 m und für den Mount Everest nur noch 1 nm beträgt.

Nachdem wir die Gleichgewichtsbedingung aufgestellt haben, wollen wir uns kurz mit der Stabilität und Instabilität eines Sterns beschäftigen.

Da $\frac{p}{\rho c^2}$ durch die Zustandsgleichung bestimmt ist, können wir diese in eine dimensionslose beziehungsweise einheitliche Form schreiben, also

$$\frac{p}{\rho c^2} = f(\rho, T), \quad (7)$$

wobei $f(\rho, T)$ die Sternmaterie charakterisiert. Die verschiedenen Zustandstypen der

Materie werden also durch die jeweilige Funktion f bestimmt. Das heißt, es muss

$$\frac{GM}{c^2 R} \approx f(\rho, T) \quad (8)$$

gelten. Bei der Entstehung eines Sterns ist es aber nun oft so, dass sich f aufgrund des Verhaltens der Materie ändert. Wir schauen uns nun an, was passiert, wenn Gleichung (8) nicht mehr gilt.

- Ist $\frac{GM}{Rc^2} \approx f(\rho, T)$, so befindet sich der Stern im hydrostatischen Gleichgewicht.
- Ist $\frac{GM}{Rc^2} < f(\rho, T)$, dann ist der von der Gravitation herrührende Druck kleiner als der von der Materie ausgeübte Druck, das heißt, der Stern expandiert, er wird größer.
- Ist $\frac{GM}{Rc^2} > f(\rho, T)$, so ist der von der Gravitation herrührende Druck größer als der von der Materie ausgeübte Gegendruck, das heißt, der Stern kontrahiert (kollabiert), er wird kleiner.

Aus unserer Gas- und Staubwolke ist ein Protostern entstanden. Protosterne werden als Vorläufer eines Sterns bezeichnet. Der Unterschied zwischen einem Protostern zu einem "normalen" Stern sind die physikalischen Verhältnisse.

Bevor wir uns nun genauer mit dem Endstadium Weißer Zerg und Neutronenstern befassen, werden wir uns kurz damit beschäftigen, welche Entwicklungsstadien ein Stern durchlaufen kann. Im folgenden Kapitel werden wir eine kurze Zusammenfassung darüber lesen können.

5 Die Entwicklungsstadien der Sterne

Wir werden uns nun kurz mit den Entwicklungsstadien von Sternen beschäftigen.

Ein Stern durchläuft in seinem Leben verschiedene Phasen, bis er "stirbt". Welche Phasen er durchläuft, hängt von seiner Masse ab.

Anfangs werden Sterne **Protosterne** genannt. Protosterne sind junge Objekte, die gerade dabei sind zu entstehen. Bei den jungen Sternen unterscheiden wir zwischen T-Tauri-Sternen und Blauen Sternen. **T-Tauri-Sterne** sind sogenannte Vorhaupttreihensterne und befinden sich noch nicht auf der Hauptreihe im Hertzsprung-Russel Diagramm, welches wir später noch genauer erläutern werden. Sie sind massenarme Sterne, bei denen die Kernfusion noch nicht eingesetzt hat bzw. gerade beginnt einzusetzen. Sie sind zwischen 10^5 und 10^7 Jahre alt und haben eine Masse zwischen 0,07 und 3 Sonnenmassen. **Blaue Sterne** sind junge Sterne, die höchstens einige Millionen Jahre alt sind. Sie sind sehr heiß und die Kernfusion ist bereits in vollem Gange. Sie leuchten blau, da sie mit einem hohem UV-Anteil strahlen.

Weiters gibt es sogenannte Riesensterne. Dabei unterscheiden wir zwischen Blauen Riesen und Roten Riesen. **Blaue Riesen** sind sehr massereich und haben etwa die 20-fache Sonnenmasse. Sie befinden sich im Stadium des Wasserstoffbrennens. Sie haben eine Oberflächentemperatur von ca. 35 000 Kelvin. In diesem Zustand können sich die Blauen Riesen mehrere 10 Millionen Jahre lang befinden.

Blaue Überriesen sind auch Blaue Riesen, jedoch mit etwa 40-facher Sonnenmasse.

Eine weitere Riesensternart ist der **Rote Riese**. Bei Sternen, die zwischen 0,3 und 2,3 Sonnemassen liegen, erfolgt ein Druck- und Temperaturanstieg, bis das Heliumbrennen zündet. Dies führt auch zu einem Temperaturanstieg der Hülle. Die Hülle des Sterns dehnt sich somit aus und es entsteht ein Roter Riese. Rote Riesen enden als Weiße Zwerge und erzeugen einen Planetarischen Nebel.

Rote Überriesen haben eine Masse zwischen 10-facher und 40-facher Sonnenmasse. Es findet kein Wasserstoffbrennen mehr statt, sondern nur mehr eine Helium-Fusionierung. Ist die Temperatur bei 1 Milliarde Kelvin angelangt, verbrennen sie Kohlenstoff. Rote Überriesen enden in einer Supernova und es bleibt ein Neutronenstern oder ein Schwarzes Loch zurück.

Außerdem gibt es in unserem Universum sogenannte Zwergsterne. Wir unterscheiden zwischen weißen, gelben, roten, braunen und schwarzen Zwergen. **Weißer Zwerge** haben maximal eine Masse von 1,4-facher Sonnenmasse und bestehen vorwiegend aus Helium. Nach einigen Millionen Jahren erlischt das Heliumbrennen und der Kern kontrahiert erneut. Wird diese Hülle abgestoßen entsteht ein **Planetarischer Nebel**. Das Helium im Kern des Sterns wird völlig aufgebraucht und es erfolgt ein Kollaps des Kerns bis zur Entartung der Elektronen. Zurück bleibt ein sehr heißer Kern, der aus Kohlenstoff und Sauerstoff besteht. Kühlt der Weiße Zwerg über Millionen von Jahren ab, so entsteht ein **Schwarzer Zwerg**. Schwarze Zwerge können keine Strahlung mehr emittieren. Solch ein Schwarzer Zwerg ist jedoch noch nicht im Universum nachgewiesen, da das Universum noch zu jung für eine Umwandlung eines Weißen Zwerges zu einem Schwarzen Zwerg ist.

Gelbe Zwerge verbrennen noch aktiv Wasserstoff und enden nach etwa 10 Milliarden Jahren als Weißer Zwerg. **Rote Zwerge** sind massearm und leuchten rötlich. Sie haben die größte Lebenserwartung aller Sterne, da sie aufgrund ihrer geringen Masse nur sehr langsam ihren Wasserstoff verbrennen. **Braune Zwerge** haben etwa 1/10 der Sonnenmasse und sind etwa so groß wie der Jupiter. Braune Zwerge sind also größer als normale Planeten, aber als Stern zu klein, um dauerhaft zu leuchten. Bei ihnen tritt nur kurz eine Kernfusion auf.

Wenn nun massereiche Sterne ihr Endstadium erreicht haben, enden sie entweder als **Neutronensterne** oder als **Schwarze Löcher**. Die Lebensdauer von Sternen wird als die Dauer definiert, wie lange sich ein Stern in der Hauptreihe befindet. Bei Sternen, die eine größere Masse als 8 Sonnenmassen besitzen, erfolgt neben dem Heliumbrennen und Kohlenstoffbrennen, auch Neonbrennen, Sauerstoffbrennen und Siliziumbrennen, sowie eine Fusion schwerer Elemente bis zum Eisen. Wenn alle Kernfusionsprozesse erlöschen, kommt es zum Kollaps des Eisenkerns. Dabei überwindet die Gravitation den Entartungsdruck der Elektronen. Durch den "Inversen Beta-Zerfall" ¹ werden Neutronen angereichert und es kommt zur Entartung der Neutronen. Hält der Entartungsdruck der Neutronen der Gravitation stand, so kommt es zur **Supernova-Explosion** und somit zur Entstehung eines **Neutronensterns**. Hält der Entartungsdruck der Neutronen der Gravitation nicht stand, entsteht ein Schwarzes Loch.

¹inverser Beta-Zerfall: $p + e^- \rightarrow n + \bar{\nu}_e$; siehe Kapitel "Neutronensterne"

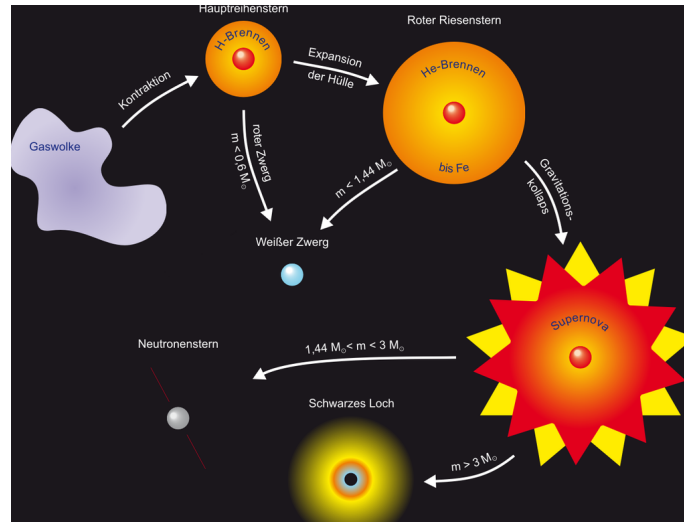


Abbildung 4: Von der Gas- und Staubwolke bis zum Tod eines Sterns

In den folgenden Kapiteln werden wir uns hauptsächlich mit entarteter Materie beschäftigen. Wir werden auch genauer auf die Stadien Weißer Zwerge und Neutronensterne eingehen, bei denen die Entartung eine entscheidende Rolle spielt.

6 Der Massendefekt

Für die Entstehung der Sterne spielt der sogenannte Massendefekt eine wichtige Rolle. Wir werden uns in diesem Kapitel damit befassen.

Eine entscheidende Rolle spielt der Kern eines Atoms. Er besteht aus positiv geladenen Protonen und neutralen Neutronen. Die positiven Ladungen drängen sich auf kleinsten Raum zusammen und stoßen sich stark ab. Der Grund, warum ein Kern nicht sofort auseinander fällt, ist die starke Wechselwirkung (auch starke Kraft genannt), welche 100-Mal stärker als die elektrische Wechselwirkung ist. Die starke Wechselwirkung wirkt allerdings nur über sehr kleine Distanzen (etwa $2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$). Das heißt, je kleiner der Abstand der Ladungen ist, desto größer ist die abstoßende Kraft. Da die Nukleonen (Protonen und Neutronen) im Atomkern durch die starke Wechselwirkung aneinander gebunden sind, hat der Kern eine Bindungsenergie. Zählt man die Masse der Nukleonen eines Kerns zusammen und vergleicht sie mit der Masse des Kerns, so fällt auf, dass der Kern etwas weniger Masse aufweist. Die fehlende Masse entspricht genau dieser Bindungsenergie des Kerns. Die Bindungsenergie kann mit der berühmten Formel von Albert Einstein

$$E = \Delta mc^2$$

berechnet werden, wobei E die Energie, c die Lichtgeschwindigkeit, m die Masse bzw. Δm die fehlende Masse beschreibt. Der Massendefekt Δm steckt also in der Bindungsenergie. Je höher der Massendefekt ist, desto stabiler ist der Atomkern, da viel mehr Energie zu seiner Zerlegung aufgewandt werden muss. Wenn sich zum Beispiel zwei Protonen und zwei Neutronen zu einem Helium-Kern verbinden, wird genau die Bindungsenergie $E = \Delta mc^2$ frei.

Diese Einsteinsche Formel gibt an, dass Energie und Masse ineinander übergehen können - sie wird auch als Äquivalenz von Masse und Energie bezeichnet. Die Bindungsenergie ist Null, wenn kein Massendefekt auftritt. Dies ist bei einem Wasserstoffatom der Fall, welches nur ein Proton im Kern hat. Mit dem Massendefekt kann nun die Bindungsenergie für jedes Nuklid berechnet werden. Üblicherweise wird die Bindungsenergie durch die Zahl der Nukleonen dividiert, da man sonst nicht viel über die Bindungsverhältnisse in Kernen sagen kann.

Der Massendefekt tritt auch bei der Entstehung von Sternen auf.

Stürzt eine Gaswolke zusammen entstehen viele Sterne. Dabei wird Energie frei, die Gravitations - Bindungsenergie. Nehmen wir an, dass ein Stern eine Kugel mit Masse M_0 ist. Wir denken uns, dass der Stern aus zwei Halbkugeln der Größe $\frac{M_0}{2}$ zusammengesetzt wird, um deren Größenordnung abzuschätzen. Die Entfernung der beiden Halbkugeln beträgt R . Das Gravitationspotential mit der Masse $\frac{M_0}{2}$ und mit der Entfernung R ist gegeben durch

$$V(R) \approx -\frac{GM_0}{2R}.$$

Das Gravitationspotential bezeichnet dabei die Arbeit im Gravitationsfeld. Daher erhalten wir für die Bindungsenergie E (durch Heranführen der beiden Halbkugel mit der Masse $\frac{M_0}{2}$ und mit der Entfernung R)

$$E \approx -V(R) \frac{M_0}{2} \approx \frac{GM_0^2}{4R} \approx \frac{GM_0^2}{R}. \quad (9)$$

Diese Formel ist nur eine grobe Abschätzung.

Mit der Formel (9) können wir die bei der Sternenentstehung frei werdende Energie für verschiedene Sternentypen berechnen.

Die Masse ΔM wird bei der Sternenentstehung in Form von Infrarotstrahlung und Photonen abgestrahlt. Der Stern hat dann eine Masse, die geringer ist als die Ursprungsmasse M_0 der Gaswolke, aus der der Stern entstanden ist, das heißt

$$M = M_0 - \frac{E}{c^2} \approx M_0 - \frac{GM_0^2}{Rc^2}.$$

Wir wollen jetzt die Formel mit Hilfe des Schwarzschildradius $R_S = \frac{GM_0}{c^2}$ vereinfachen und erhalten

$$M = M_0 \cdot \left(1 - \frac{GM_0}{Rc^2}\right) \approx M_0 \cdot \left(1 - \frac{R_S}{R}\right).$$

Daher können wir den Massendefekt $\Delta M = M_0 - M$ folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{\Delta M}{M_0} \approx \frac{R_S}{R}.$$

Der Gravitations-Massendefekt der Sonne beträgt etwa 10^{-6} und ist daher als Energiequelle gegenüber den Kernkräften sehr klein und kann daher auch vernachlässigt werden.

Bei Weißen Zwergen überwiegt die Kernenergie gegenüber der Gravitationsenergie. Erst bei Neutronensternen beginnt der Gravitations-Massendefekt bedeutend zu werden. Wird ein Neutronenstern gebildet, wird ein Teil der ursprünglichen Masse des interstellaren Gases in Energie umgewandelt. Bei der Bildung eines Neutronensterns wird eine Bindungsenergie von ca. 10^{45} J frei ($M \approx 10^{30}$ kg, $E \approx 10^{47}$ J). Dies entspricht dabei der im Supernovaausbruch freigesetzten Energie.

Die bisherigen Resultate können wir nun zusammenfassen und durch eine Funktion ausdrücken, die von der Temperatur und von der Dichte abhängig ist, also

$$\delta \approx \frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{\Delta M}{M} \approx \frac{R_S}{R} \approx \frac{p}{\rho c^2} = f(\rho, T),$$

wobei δ die Lichtablenkung, $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ die Rotverschiebung, $\frac{\Delta M}{M}$ der relative Massendefekt, $\frac{R_S}{R}$ das Verhältnis Schwarzschildradius zu Radius und $\frac{p}{\rho c^2}$ das Verhältnis mittlere Dichte zu mittlere Ruhedichte ist.

Wenden wir uns nun im folgenden Kapitel der "Nichtentarteten Materie" zu.

7 Nichtentartete Materie - Hauptreihensterne

Sternmaterie kann als ideales Gas angesehen werden und wir werden uns daher auf die Zustandsgleichung eines idealen Gases konzentrieren.

Wie schon im Kapitel "Entstehung und Entwicklung der Sterne" erklärt, beschreibt eine Zustandsgleichung einen funktionalen Zusammenhang zwischen thermodynamischen Größen. Mit ihrer Hilfe kann ein thermodynamisches System beschrieben werden. Bei einem idealen Gas werden alle Gasteilchen, die keine Ausdehnung aufweisen, also kein eigenes Volumen annehmen, als Massenpunkte angenommen. Für Hauptreihensterne kann nun die Zustandsgleichung durch die eines idealen Gases angenähert werden. Die Zustandsgleichung eines idealen Gases lautet

$$pV = n \cdot R \cdot T,$$

wobei p der Druck, V das Volumen, n die Stoffmenge, $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{Kmol}}$ die universelle Gaskonstante und T die Temperatur ist. Diese Zustandsgleichung beschreibt also den Zustand eines idealen Gases bezüglich der Zustandsgrößen p, V, n und T .

Diese Zustandsgleichung des idealen Gases kann auch ohne den atomaren bzw. molekularen Aufbau der Materie beschrieben werden. Dabei wird $n \cdot R$ durch die "Spezifische Gaskonstante R_G " und V durch das Molvolumen V_m in $\frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}$ ersetzt. Damit erhalten wir

$$p \cdot V_m = R_G \cdot T, \quad (10)$$

wobei $R_G = \frac{n \cdot R}{m}$ und R die universelle Gaskonstante, n die Stoffmenge und m die Masse ist.

Eine andere Form der Zustandsgleichung zeigt uns den Zusammenhang noch deutlicher:

$$p \cdot V_m = L \cdot k \cdot T$$

Dabei ist $L = 6 \cdot 10^{23}$, die Loschmidtsche Zahl - benannt nach dem Österreicher Josef Loschmidt - und $k = \frac{R_G}{L} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$, die Boltzmann-Konstante - eingeführt von Max Planck und benannt nach dem Österreicher Ludwig Boltzmann. Der Ausdruck $k \cdot T$ dieser Zustandsgleichung ist ein Maß für die innere Energie der Moleküle.

Das Molvolumen V_m kann durch die Gasdichte ρ ausgedrückt werden. Dafür benötigen wir das Wissen, dass das molare Volumen V_m (in $\frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}$) das Volumen V einer Stoffmenge n gleich 1 mol ist, also

$$V_m = \frac{V}{n}. \quad (11)$$

Zwischen Volumen und Druck besteht die Beziehung $V = \frac{m}{\rho}$. Durch Einsetzen der Beziehung in die Formel (11) ergibt sich

$$V_m = \frac{V}{n} = \frac{m}{\rho \cdot n}. \quad (12)$$

Allerdings wissen wir, dass $M = \frac{m}{n}$ ist. M ist dabei die Molare Masse und beschreibt die Masse m einer Stoffmenge n , welche gleich 1 mol ist. Die Molare Masse kann wiederum durch $M = L \cdot \mu$ beschrieben werden, da eine Stoffmenge von 1 mol gleichbedeutend mit einer Zahl von $L = 6 \cdot 10^{23}$ Teilchen ist. Weiters beschreibt μ in diesem Zusammenhang die Masse eines Gasmoleküls. Fügen wir nun alle Beziehungen zusammen und setzen wir in Gleichung (12) ein, erhalten wir

$$V_m = \frac{V}{n} = \frac{m}{\rho \cdot n} = \frac{M}{\rho} = \frac{L \cdot \mu}{\rho}. \quad (13)$$

Unser bisheriges Wissen können wir nun auch auf Hauptreihensterne anwenden. Wir setzen dabei $\mu \approx 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, da Hauptreihensterne größtenteils aus Wasserstoff bestehen. Daher erhalten wir durch Umformen der Formeln (10) und (13)

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R_G}{L} \cdot \frac{T}{\mu} = k \cdot \frac{T}{\mu}.$$

Nach Division durch c^2 ergibt sich die Zustandsgleichung des idealen Gases, also

$$f(\rho, T) = \frac{p}{\rho c^2} = \frac{kT}{\mu c^2} = f(T).$$

Mit dieser Gleichung können wir die Materie des Sterns in seiner ersten und längsten Phase seines Lebens beschreiben. Die Funktion f hängt also nur von der Temperatur T ab und gibt das Verhältnis von kT (mittlere thermische Energie) zu μc^2 (Ruheenergie) der Gasmoleküle an.

Mit der Gleichung (6) erhalten wir die Gleichgewichtsbedingung für Hauptreihensterne, also

$$\frac{GM}{c^2 R} = \frac{kT}{\mu c^2}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gleich dem Verhältnis $\frac{R_s}{R}$. Somit ist das Verhältnis $\frac{R_s}{R}$ und auch die Größe der relativistischen Effekte durch die Temperatur T im Sterninneren und durch die Protonenmasse festgelegt.

Wir müssen an dieser Stelle kurz erklären, was relativistische Effekte sind. Einen relativistischen Effekt können wir als Phänomen auffassen, welcher erst in der Relativitätstheorie angemessen beschrieben werden kann.

Für Hauptreihensterne, die sich gerade in der Phase des Wasserstoffbrennens befinden, beträgt die Temperatur typischerweise etwa 10^7 K. Dann können wir den Wert von kT bestimmen: $kT \approx 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 10^7 \text{K} \approx 10^{-16} \text{J} \approx 10^3 \text{eV} = 1 \text{keV}$. Dabei haben wir beachtet, dass $1 \text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{J}$ ist.

Um den Wert von μc^2 zu bestimmen, können wir eine einfache Abschätzung machen, also $\mu c^2 = 1,6 \cdot 10^{-27} \cdot 299792458^2 \approx 1,4 \cdot 10^{-10} \approx 1 \text{GeV}^2$. Daher gilt für Hauptreihensterne, also für normale Sterne

$$\frac{R_s}{R} \approx \frac{kT}{\mu c^2} \approx \frac{1 \text{keV}}{1 \text{GeV}} \approx 10^{-6}.$$

Diese Gleichung zeigt uns, dass relativistische Effekte unabhängig von der Größe der Gravitationskonstante sind. Daraus können wir nun Folgendes schließen:

Relativistische Effekte für Hauptreihensterne belaufen sich in der Größenordnung von 10^{-6} .

²genauer Wert: $1 \text{GeV} = 1,6 \cdot 10^{-10}$

8 Entartete Materie

Im folgenden Kapitel werden wir uns mit dem Begriff "entartete Materie" beschäftigen. Wenn ein Stern seinen Wasserstoff im Kern verbraucht hat, so kann die Temperatur und somit auch der Druck im Sterninneren nicht mehr aufrecht erhalten werden. Es kommt zu einer Erhöhung des Drucks und der Dichte. Der Stern kühlt ab und sein Radius R "wächst" nach der Gleichung

$$R = R_S \cdot \frac{\mu c^2}{kT} \quad (14)$$

an, da R umgekehrt proportional zur Temperatur ist. R_S ist dabei der Schwarzschildradius, kT die mittlere thermische Energie und μc^2 die Ruheenergie. Kühlt er weiter ab, kann er die benötigte Energie nicht mehr aufbringen um zu neuen Gleichgewichtszuständen zu gelangen. Dazu müsste er weiter nach Gleichung (14) gegen sein Gravitationsfeld expandieren. Der Stern bricht in sich zusammen.

Bei nichtentarteter Materie, welche wir im vorigen Kapitel behandelt haben, ist, wie schon erwähnt, der Druck durch die kinetische Energie des Teilchens bestimmt. Demgegenüber ist der Druck der entarteten Materie eine Folge des Paulischen Ausschlussprinzips. Wir können nun die Zustandsgleichung für entartete Materie herleiten, wobei wir $T = 0$ setzen dürfen, da bei hohen Dichten auch Temperaturen von der Größenordnung 10^6 keinen Einfluss haben. Bei Temperaturen, die für Sternmodelle und bei hohen Dichten in Betracht kommen, ist daher $f = f(\rho)$. In diesem Fall bezeichnen wir die Materie als entartet.

$$f(\rho, T) = \frac{p}{\rho c^2} = \begin{cases} f(T) & \text{ideales Gas } \left(= \frac{kT}{\mu c^2} \right) \\ f(\rho) & \text{entartete Materie.} \end{cases} \quad (15)$$

Geht die Temperatur gegen 0, so folgt, dass bei einem idealen Gas auch der Druck gegen 0 geht. Es herrscht somit kein Gleichgewicht.

Bei entarteter Materie ist der Fermi- oder Entartungsdruck (benannt nach dem US-amerikanischen Kernphysiker Enrico Fermi) der Elektronen für den Druck verantwortlich, nicht der der Moleküle. Der Fermi-Druck ist der Druck, der entsteht, wenn Fermionen eine sehr große Dichte haben und die Gravitation die Dichte versucht zu erhöhen. Gegen die Gravitation tritt nun der Fermi-Druck bzw. Entartungsdruck entgegen. Set-

zen wir Materie einem Druck im Bereich von $10^7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ aus, so nimmt die Materie metallische Eigenschaften an. Die Elektronen verhalten sich nun wie ein freies Elektronengas.

Damit wir nun den Druck von entartetem Elektronengas abschätzen können, betrachten wir ein Gebiet von der Größe d (mittlerer Abstand zweier "benachbarter" Elektronen). Die Dichte ist dabei $\rho \approx \frac{\mu}{d^3}$ und somit ist $d \approx \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$. Jedes Elektron beschränkt sich nun auf ein Raumgebiet mit Volumen d^3 . Dann erhalten die Teilchen aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation einen Impuls, den sogenannten Fermi-Impuls p_F mit

$$p_F d \approx \hbar. \quad (16)$$

Die Energie, die sogenannte Fermi-Energie des Elektrons, beträgt dabei

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{m_e d^2} \approx \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{\frac{2}{3}},$$

wobei m_e die Masse eines Elektrons darstellt.

Das heißt, je kleiner das Gebiet ist, das einem Elektron zur Verfügung steht, desto größer die Fermi-Energie. Haben wir ein sehr dichtes Elektronengas, dann ist die kinetische Energie der Elektronen weniger durch die Temperatur, sondern vor allem durch die Dichte des Gases bestimmt. Dies ist immer dann der Fall, wenn

$$\varepsilon_F \gg kT.$$

In diesem Zustand nennen wir das Elektronengas entartet.

Will man die Zustandsgleichung eines solchen Gases herleiten, können wir die kinetische Energie kT der Teilchen des idealen Gases durch ε_F "ersetzen", weil ja ε_F gleich kT ist. Das heißt

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{kT}{\mu c^2} \approx \frac{\varepsilon_F}{m_e c^2} \approx \frac{\frac{\hbar^2}{m_e d^2}}{\mu c^2} \approx \frac{\hbar^2}{m_e \mu d^2 c^2}. \quad (17)$$

Ist der mittlere Teilchenabstand d gegeben, dann haben stets die leichtesten Teilchen die größte Fermi-Energie und tragen am meisten zum Fermi-Druck bei. Für den Druck ist die Masse m_e der Elektronen verantwortlich, für die Ruhemassendichte die viel größere

Protonenmasse μ . Daher hängt die Dichte ρ mit dem Teilchenabstand d zusammen, also

$$\rho \approx \frac{m_e + \mu}{d^3} \approx \frac{\mu}{d^3},$$

wobei für die Elektronenmasse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg und für die Protonenmasse $\mu \approx 1,7 \cdot 10^{-27}$ kg gilt.

Setzt man Gleichung (16) und $\rho = \frac{\mu}{d^3}$ in Gleichung (17) ein, so erhält man die Zustandsgleichung entarteter Materie für den nicht-relativistischen Fall, also

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{\hbar^2}{m_e \mu d^2 c^2} \approx \frac{\hbar^2}{m_e \mu \left(\left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 c^2} \approx \frac{\hbar^2 \rho^{\frac{2}{3}}}{m_e \mu^{\frac{5}{3}} c^2} \approx \frac{\left(\left(\frac{\mu}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{3}} m_e c \right)^2 \rho^{\frac{2}{3}}}{m_e \mu^{\frac{5}{3}} c^2} = \frac{m_e}{\mu} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (18)$$

wobei

$$\rho_c = \frac{\mu}{\left(\frac{\hbar}{m_e c} \right)^3}$$

ist. Dabei ist ρ_c die Dichte, bei der der mittlere Abstand der Teilchen gleich der Elektronen-Compton-Wellenlänge ($\lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c} \approx 4 \cdot 10^{-11}$) ist. Numerisch ist $\rho_c \approx 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Die Zustandsgleichung (18) ist nun von der Form $\frac{p}{\rho c^2} = f(\rho)$ ³. Sie macht die Beschreibung des Verhaltens der Materie einfacher. Während in der Gleichung (15) (nichtentartetes Gas) von den drei Zustandsgrößen p, ρ und T zwei gewählt werden können, können wir in diesem Fall nur eine Zustandsgröße (p oder ρ) wählen.

Die oben erwähnte Zustandsgleichung hat zwei Vorteile. Einerseits sehen wir, dass der Druck durch die Elektronenmasse m_e und die Ruhemassendichte ρ durch die Protonenmasse μ bewirkt wird, nämlich anhand des Ausdrucks $\frac{m_e}{\mu}$. Andererseits tritt bei der Dichte ρ_c eine entscheidende Änderung ein. Setzen wir nun in diesem Fall den gegebenen mittleren Abstand $d \approx \frac{\hbar}{m_e c} = \lambda_e$ der Elektronen-Compton-Wellenlänge in die

³Vergleich Zustandsgleichung eines idealen Gases $\frac{p}{\rho c^2} = f(T)$

Gleichung (16) ein, erhalten wir

$$\frac{p\hbar}{m_{EC}} \approx \hbar, \quad p \approx m_e \cdot c$$

Man sieht, dass die Bewegung der Teilchen fast mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt, sie ist also relativistisch. Aus der speziellen Relativitätstheorie gilt folgender Zusammenhang zwischen Energie und Impuls,

$$\varepsilon_F \approx p \cdot c.$$

Setzen wir nun den relativistischen Ansatz in die obige Gleichung ein, erhalten wir die Zustandsgleichung entarteter Materie für den relativistische Fall, nämlich

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{m_e}{\mu} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (19)$$

$$\left(\varepsilon_F \approx p_F \cdot c \approx \frac{\hbar c}{d} \approx \hbar c \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{\varepsilon_F}{\mu c^2} \approx \frac{\hbar c \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}}}{\mu c^2} \approx \frac{\left(\frac{\mu}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{3}} m_e c c \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}}}{\mu c^2} \approx \frac{m_e}{\mu} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{3}} \right)$$

Wird diese Formel (19) auf Materie angewandt, die auch schwerere Elemente enthält, wird μ durch die mittlere Teilchenmasse pro Elektron ersetzt.

Daraus folgt abschließend und zusammenfassend für die Zustandsgleichung entarteter Materie

$$f(\rho) = \frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{m_e}{\mu} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\frac{n}{3}}, \quad (20)$$

wobei $n = 2$ (nichtrelativistisch) für $\rho < \rho_c \approx 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und $n = 1$ (relativistisch) für $\rho > \rho_c$.

Im Folgenden werden wir Weiße Zwerge und Neutronensterne behandeln, bei denen die Entartung Anwendung findet. Bei Weißen Zwergen sind die Elektronen entartet und bei Neutronensternen sind die Neutronen entartet.

9 Weiße Zwerge, Monde und Planeten

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Entstehung und mit der Zustandsgleichung eines Weißen Zwerges beschäftigen.

Zunächst werden wir auf das Hertzsprung-Russel Diagramm - benannt nach dem US-Amerikaner Henry Norris Russel und dem dänischen Astronom Ejnar Hertzsprung - eingehen, in dem die Weißen Zwerge abgebildet sind. Das Hertzsprung-Russel Diagramm dient dazu, die Zustände von Sternen in Abhängigkeit ihrer Masse ablesen zu können. Beim Hertzsprung-Russel Diagramm werden die Leuchtkraft der Sterne und die absolute Helligkeit der Sterne vertikal aufgetragen. Die Oberflächentemperatur der Sterne in Kelvin und die Spektralklassen werden dagegen horizontal aufgetragen. In Abbildung (5) wird das Hertzsprung-Russel Diagramm dargestellt. Die Sterne sind dabei in bestimmten Bereichen konzentriert.

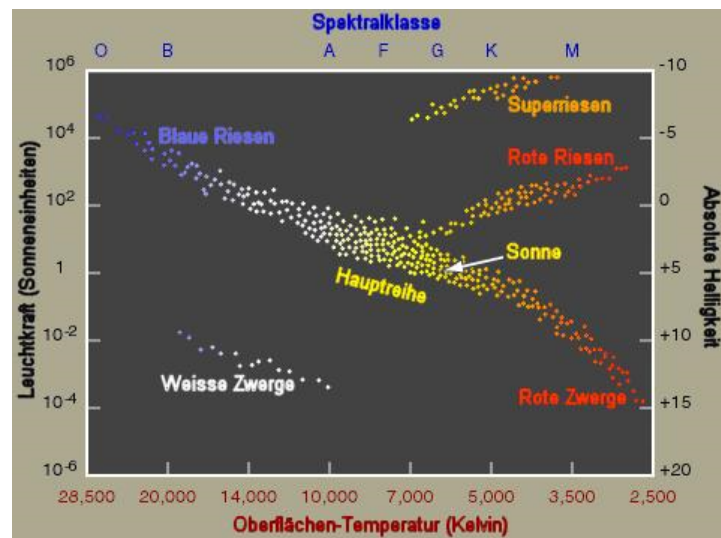


Abbildung 5: Hertzsprung-Russel Diagramm

Wir wollen kurz erklären, was die Begriffe im Diagramm (5) bedeuten: Die Leuchtkraft eines Sterns gibt an, wie viel Energie ein Stern in einer gewissen Zeit "abstrahlt". Die Leuchtkraft wird in Watt gemessen und wird meist in Sonneneinheiten $L_s = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}$ angegeben. Je größer die effektive Temperatur und der Radius eines Sterns sind, umso größer ist seine Leuchtkraft. Die effektive Temperatur ist dabei jene Temperatur, die ein schwarzer Körper haben müsste, um mit der gleichen Helligkeit pro Fläche zu strah-

len. Weiße Zwerge haben eine sehr geringe Leuchtkraft von etwa $10^{-2}L_s$ bis $10^{-3}L_s$. Eine weitere wichtige Größe im Hertzsprung-Russel Diagramm ist die absolute Helligkeit. Wenn wir einen Blick in den Nachthimmel werfen, sehen wir manche Sterne schwächer und andere stärker leuchten. Wie stark ein Stern leuchtet, hängt von seiner Entfernung und seiner wahren Helligkeit ab. Die scheinbare Helligkeit beschreibt, wie hell ein Stern am Himmel erscheint in Abhängigkeit von seiner Entfernung. Die absolute Helligkeit von Sternen können wir jedoch nur dann vergleichen, wenn wir die Sterne auf die gleiche Entfernung zur Erde auf die scheinbare Helligkeit beziehen. Die absolute Helligkeit beschreibt also die Helligkeit eines Sternes bezogen auf einer Entfernung von 10 pc ($\approx 32,6$ Lichtjahre). Die Entfernung eines Sterns könnten wir mit Hilfe der Differenz von scheinbarer und absoluter Helligkeit berechnen, also

$$m - M = 2,5 \log(r) - 5,$$

wobei m für die scheinbare Helligkeit, M für die absolute Helligkeit und r für die Entfernung steht.

Die Helligkeit eines Sterns hängt aber auch von zwei anderen Größen ab, also

$$T = 4\pi r^2 \sigma T^4,$$

wobei $4\pi r^2$ die Oberfläche eines Sterns bezeichnet und σT^4 das Stefan-Boltzman Gesetz ist, welches besagt, dass die Leuchtkraft eines Sterns mit der vierten Potenz seiner Temperatur steigt. Außerdem werden die Sterne je nach ihrer Oberflächentemperatur in Kelvin in Spektralklassen unterschieden.

In Abbildung (5) sind sieben Spektralklassen zu erkennen, nämlich O, B, A, F, G, K und M. Jeder Buchstabe bedeutet eine bestimmte Farbe des Stern. So steht die Spektralklasse mit dem Buchstaben O für blau, B für blau-weiß, A für weiß, F für weiß-gelb, G für gelb, K für orange und M für rot-orange. Sterne, die sich in der Spektralklasse O befinden, sind am heißesten und Sterne in der Spektralklasse M am kühnsten. Ein Weißer Zwerg befindet sich in der Spektralklasse zwischen B und A.

Allgemein sind im Hertzsprung-Russel Diagramm Weiße Zwerge, Blaue Riesen, Haupt-

reihensterne, Rote Riesen, Rote Zwerge und Superriesen zu sehen. Etwa 80 % der Sterne befinden sich auf einer Diagonale, die auch Hauptreihe genannt wird, welche von

links oben nach rechts unten verläuft. Jedoch werden wir uns im weiteren nur mit den Hauptreihensternen und Weißen Zwergen beschäftigen.

Wir wollen uns nun den Weißen Zwergen und ihrer Entstehung zuwenden.

Ein Weißer Zwerg bezeichnet ein Endstadium eines Sterns, wenn der Kern eine Masse von weniger als 1,4 Sonnenmassen besitzt. Besonders an einem Weißen Zwerg ist, dass sie keine Energie mehr erzeugen, sondern nur mehr abkühlen.

Ein Weißer Zwerg entsteht, wenn der Kern eines Sterns kollabiert, sobald die Energie-reserven für die Kernfusion aufgebraucht sind und wenn die Elektronen durch den Entartungsdruck stabilisiert sind.

Wir können nun Sternenmodelle im Dichtebereich von $10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ bis $10^{13} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ konstruieren und beschreiben. Genau in diesem Größenordnungsbereich befinden sich die Weißen Zwerge, deren Masse, Dichte und Radius wir nur abschätzen können. Der Ausgangspunkt für diese Berechnungen ist die bereits erwähnte und hergeleitete Gleichung

$$\frac{R_S}{R} \approx \frac{GM}{Rc^2} \approx \frac{p}{\rho c^2} = f(\rho),$$

wobei $f(\rho)$ durch die allgemeine Zustandsgleichung für entartete Materie gegeben ist. Weil $M \approx \rho R^3$ ist, gilt weiteres

$$f(\rho) \approx \frac{GM}{Rc^2} \approx \frac{GM}{c^2 \left(\frac{M}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}} \approx \frac{GM^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{1}{3}}}{c^2}.$$

Lösen wir diese Gleichung nach M auf, dann erhalten wir

$$M(\rho) \approx \frac{f(\rho)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{c^3}{G^{\frac{3}{2}}}.$$

Formal bedeutet das

$$M(\rho) = \begin{cases} \left(\frac{m_e c^2}{G\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\rho}}{\rho_c} & \rho > \rho_c \\ \left(\frac{m_e c^2}{G\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho_c}} & \rho < \rho_c, \end{cases}$$

wobei m die Masse eines Elektrons, μ die Masse eines Protons, ρ die Dichte und

$\rho_c \approx 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ die kritische Dichte ist, ab der die Elektronen relativistisch werden.

Die Masse steigt mit zunehmender Dichte, bis die kritische Dichte erreicht ist.

Außerdem hat $M(\rho)$ eine obere Grenze, die sogenannte Chandrasekhar-Grenze M_C , die dann erreicht wird, wenn $\rho = \rho_c$ ist. Die Chandrasekhar-Grenze oder auch Chandrasekhar-Masse markiert einfach die charakteristische Massengrenze für kompakte Objekte. Kompakte Objekte sind Objekte mit hoher Dichte, deren Reaktionen im Kern zum Erliegen gekommen sind. Sie beträgt ungefähr 1,4 Sonnenmassen. Bei Weißen Zwergen gibt es also eine Obergrenze an Masse. Abbildung (6) zeigt uns die "Entwicklung" eines Weißen Zwerges, Neutronensterns und Schwarzes Lochs anhand der Anfangsmasse, wobei wir die Neutronensterne im nächsten Kapitel genauer behandeln werden.

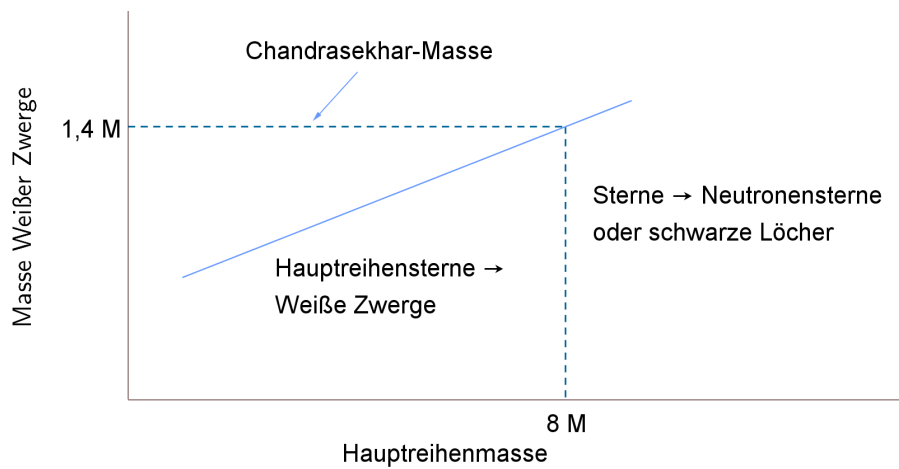


Abbildung 6: Bildung als Funktion der Anfangsmassen

Setzen wir für $\rho_c = \frac{\mu}{\left(\frac{\hbar}{m_e c}\right)^3}$ ein, so ergibt sich

$$M_C = \left(\frac{m_e c^2}{G\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_c}}\right) = \left(\frac{m_e c^2}{G\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) \left(\frac{\hbar}{m_e c}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{\hbar c}{G\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} \mu \approx 3,7 \cdot 10^{30} \text{ kg.} \quad (21)$$

Da sowohl M_C als auch μ die Dimension Masse haben, muss der Term innerhalb der Klammer dimensionslos sein. In diesem Zusammenhang spielen dimensionslose Grö-

ßen wie die Feinstrukturkonstante eine große Rolle. Es gilt

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137},$$

wobei $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C die Elementarladung und $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ die elektrische Feldkonstante ist.

Die Feinstrukturkonstante der Gravitation spielt dabei eine große Rolle. Sie ist gegeben durch

$$\alpha_G = \frac{G\mu^2}{\hbar c} \approx 5,9 \cdot 10^{-39}.$$

Dabei charakterisiert α_G die Stärke der Gravitationswechselwirkung. Setzt man nun die Feinstrukturkonstante der Gravitation in Gleichung (21) ein, so erhalten wir

$$M_C \approx \alpha_G^{-\frac{3}{2}} \mu \approx 2 \cdot 10^{57} \mu \approx 3,67 \cdot 10^{30} \text{kg} \approx 1,4 M_\odot,$$

wobei $M_\odot \approx 1,9889 \cdot 10^{30}$ kg einer Sonnenmasse entspricht.

M_C ist größenordnungsmäßig gleich der Sonnenmasse.

Daraus ergibt sich, dass alle Weißen Zwerge ungefähr die gleiche Masse haben, nämlich M_C (Chandrasekhar-Masse). Sie wird nur durch die Masse des Protons und durch die Konstanten c , G und $\hbar$ festgelegt und ist eine zentrale Größe in der relativistischen Astrophysik. Natürlich sind aber auch kleinere Weiße Zwerge möglich.

Kein Weißer Zwerg kann aber eine größere Masse als $M_C \approx 1,4 M_\odot$ besitzen. Kollabiert der Kern mit einer größeren Masse ($M > M_C$), so geschieht der Kollaps zunächst nicht-relativistisch - es kommt für $M > M_C$ kein Gleichgewicht zustande, was bedeutet, dass der Entartungsdruck der Elektronen den Kollaps nicht aufhalten kann.

Die hier gewonnenen Resultate sind von größter Bedeutung für das Verständnis des Universums, da sie zeigen, dass die Sterne keine zufälligen Größenordnungen haben. Man kann damit die Struktur der Weißen Zwerge systematisch aus den bekannten Gesetzen der Physik herleiten.

Wir wollen nun auch den Radius und die Masse von Weißen Zwegen bestimmen. Für den Radius nehmen wir an, dass die Masse homogen verteilt ist und die Dichte konstant bleibt. Dann gilt

$$R \approx \left(\frac{M}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{M_C}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{M}{M_C} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\rho_c}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Aus der Gleichung für die Masse der Weißen Zwerge als Funktion ihrer mittleren Dichten, also

$$M = M_C \left(\frac{\rho}{\rho_C} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

erhalten wir den Radius eines Weißen Zwerges:

$$R = R_C \left(\frac{\rho_C}{\rho} \right)^{\frac{1}{6}} \quad \text{mit} \quad R_C = \left(\frac{M_C}{\rho_C} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (23)$$

wobei R_C der Radius des schwersten Weißen Zwerges ist. Wenn wir nun die Chandrasekarmasse M_C mit $M_C \approx \alpha_G^{-\frac{3}{2}} \mu$ und die kritische Grenze ρ_C mit $\rho_C \approx \mu \lambda_e^{-3}$ in R_C einsetzen, erhalten wir somit für den Radius R_C eines Weißen Zwerges

$$R_C \approx \lambda_e \alpha_G^{-\frac{1}{2}} \approx 10^7 \text{ m} = 10^4 \text{ km}.$$

Wir haben gezeigt, dass sich die Radien Weißer Zwerge im Bereich von 10^4 km bewegen. Zum Vergleich dazu hat der Jupiter einen Radius von circa $7 \cdot 10^4$ km.

Eine weitere bemerkenswerte Beziehung bekommen wir aus den Gleichungen (22) und (23), also

$$MR^3 \approx M_C R_C^3.$$

Wir sehen, dass die Radien von Weißen Zwergen mit steigender Masse fallen. Die Gleichgewichtsbedingung für Weiße Zwerge können wir mit der Gleichgewichtsbedingung (6) und mit den Zustandgleichungen entarteter Materie (Gleichung (20)) aufstel-

len. Damit erhalten wir

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{GM}{c^2 R} \approx \frac{m_e}{\mu} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\frac{n}{3}}$$

$$\text{mit } n = \begin{cases} 2 & \text{wenn } \rho_* < \rho < \rho_c \quad (\text{nichtrelativistisch}) \\ 1 & \text{wenn } \rho_c < \rho < 10^{11} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (\text{relativistisch}), \end{cases}$$

beziehungsweise mit dem Druck, also

$$\text{mit } n = \begin{cases} 2 & \text{wenn } p_* < p < p_c \quad (\text{nichtrelativistisch}) \\ 1 & \text{wenn } p_c < p < 10^{25} \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2} \quad (\text{relativistisch}). \end{cases}$$

Dabei beschreibt $\rho_c \approx 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ die Grenzdichte und der dazugehörige Druck p_c hat einen Wert von $p_c \approx \left(\frac{\mu}{m}\right) \rho_0 c^2 \approx 10^{24} \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$. Weiters beschreibt ρ_* die Dichte des Wasserstoffatoms mit einem Wert von $\rho_* \approx \frac{m}{r_B^3} \approx 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und der dazugehörige Druck hat einen Wert von $p_* \approx 3 \cdot 10^{13} \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$.

Zum Vergleich können wir den Druck, der im Zentrum der Erde und im Zentrum der Sonne herrscht betrachten und erhalten $p_{\text{Erde}} \approx 4 \cdot 10^{11} \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$ und $p_{\text{Sonne}} \approx 2 \cdot 10^{16} \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$. Allgemein relativistische Effekte sind für Weiße Zwerge von der Größenordnung

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{m_e}{\mu} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 10^{-4}$$

von Bedeutung.

Für $p > p_0$ ist die Funktion $\rho(p)$ durch $f(\rho) = \frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{m_e}{\mu} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\frac{n}{3}}$ gegeben.

Der Zusammenhang zwischen Radius und Masse ist für $p > p_0$ gegeben durch

$$MR^3 = M_C R_C^3.$$

Der Übergangspunkt p_0 , an dem der atomare Aufbau zusammenbricht, ist durch den Schnitt der Gerade $\rho = \rho_0$ und der durch $f(\rho) = \frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{m_e}{\mu} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\frac{n}{3}}$ gegebenen Kurve definiert.

Die Gleichungen $M \approx \rho_0 R^3$ und $MR^3 = M_C R_C^3$ werden nun in einem Masse-Radius-Diagramm dargestellt.

Die minimale Masse M_P und den minimalen Radius R_P erhält man aus dem Schnittpunkt der beiden Kurven. Die minimale Masse M_P ist auch gleich der gesuchten unteren Massengrenze für Weiße Zwerge.

In Abbildung (7) ist der Schnittpunkt der beiden Kurven und somit die minimale Masse und der maximale Radius Weißer Zwerge zu sehen.

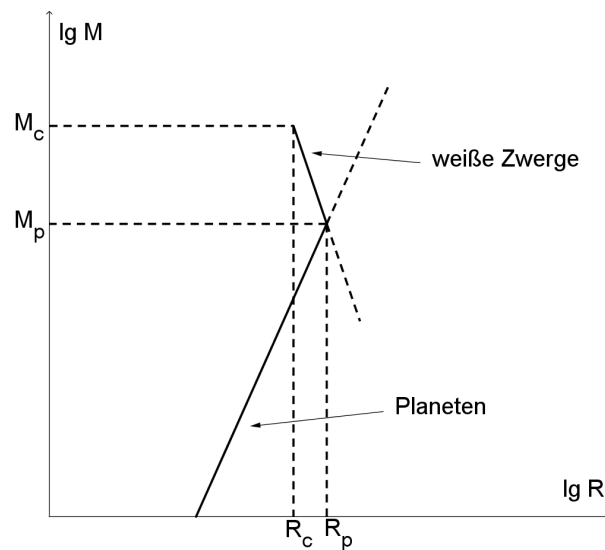


Abbildung 7: Massen-Radius-Beziehung

Wir wollen jetzt noch auf die untere Schranke M_P der Masse Weißer Zwerge eingehen. Diese untere Schranke ist essentiell, um den Bereich der Sterne von dem der Planeten zu trennen.

Daher muss die folgende Zustandsgleichung im Bereich kleiner Dichten verbessert werden.

$$f(\rho) = \frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{m_e}{\mu} \left(\frac{\rho}{\rho_C} \right)^{\frac{n}{3}} \quad (24)$$

Die Gleichung (24) gilt allerdings nur in einem Bereich von $10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} < \rho < 10^{13} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Die atomare Struktur kleiner, kalter Körper (Planeten und Monde) ist durch die elektromagnetische Wechselwirkung bestimmt, welche bewirkt, dass ein Körper „fest“ ist. Daher ist der Druck keine Folge der thermischen Bewegung der Nukleonen und Elektronen, sondern eine Folge der zwischen ihnen wirkenden Kräfte. In diesem Bereich kalter Materie ist die Dichte weitgehend unabhängig vom genauen Wert des Drucks und daher kann die Dichte größenordnungsmäßig als die Dichte des Wasserstoffatoms angesehen werden.

Charakteristisch für alle Planeten und deren Monde ist die Größenordnung der Dichte

$$\rho_0 \approx \frac{\mu}{r_B^3} \approx 8000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

mit $\mu = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ als die Masse der Protonen und $r_B = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ als der Bohrsche Radius, auf den wir noch eingehen werden.

Dieser Zusammenhang gilt, obwohl der Wert von $\rho(p=0) = \rho_0$ von der chemischen Zusammensetzung der Materie abhängig ist, aber eben nur geringfügig.

Der Bohrsche Radius r_B ⁴ entspricht dem mittleren Abstand des Elektrons vom Proton im Grundzustand und ist definiert durch

$$r_B = \frac{\lambda_e}{\alpha} = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m},$$

wobei $\alpha = \frac{1}{137}$ die Feinstrukturkonstante und $\lambda_e \approx 10^{-12}$ die Compton-Wellenlänge eines Elektrons ist.

Für Planeten und Monde gilt, dass ihr atomarer Aufbau durch die elektromagnetische Wechselwirkungen bestimmt ist. Unwesentlich für die innere Struktur ist der Druck, der durch die Schwerkraft bedingt ist. Überschreitet aber die Masse und damit der Druck einen gewissen Schwellenwert, so bricht die atomare Struktur der Planeten und Monde zusammen und es gilt

$$p = p(\rho, T).$$

⁴Herleitung im Anhang

Dieser Schwellenwert kennzeichnet die Grenze zwischen Planeten und Weißen Zwergen. Um den Wert für den Schwellenwert größenordnungsmäßig abzuschätzen, müssen wir die Zustandsgleichung (24) verbessern.

Um die Zustandsgleichung "normaler" Materie zu verbessern, wird sie durch $\rho = \rho_0$, wenn $p < p_0$ ergänzt. Dadurch erhalten wir ein Modell, das das Verhalten kalter Objekte im Bereich zwischen Atom und Weißem Zwerg beschreibt.

Wir wollen zusätzlich die maximale Masse M_p berechnen.

Dazu wird $\rho = \rho_0$ in die Massenformel für Weiße Zwerge $M = M_c \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{2}}$ eingesetzt. Mit Hilfe von $\rho_0 \approx \frac{\mu}{r_B^3} \approx 8000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und $r_B = \frac{\lambda_e}{\alpha} = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ erhalten wir folgenden Zusammenhang

$$M_p = M_c \left(\frac{\rho_0}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{2}} \approx M_c \alpha^{\frac{2}{3}} \approx 2 \cdot 10^{27} \text{ kg}.$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} M_p &= M_c \left(\frac{\rho_0}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{2}} = M_c \left(\frac{\frac{\mu}{r_B^3}}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{2}} = M_c \left(\frac{\mu}{r_B^3 \rho_c} \right)^{\frac{1}{2}} = M_c \left(\frac{\mu}{\left(\frac{\lambda_e}{\alpha} \right)^3 \rho_c} \right)^{\frac{1}{2}} = M_c \left(\frac{\mu}{\frac{\lambda_e^3 \rho_c}{\alpha^3}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= M_c \left(\frac{\mu \alpha^3}{\lambda_e^3 \rho_c} \right)^{\frac{1}{2}} \approx M_c \alpha^{\frac{2}{3}} \approx 2 \cdot 10^{27} \text{ kg} \end{aligned}$$

weil $\rho_c \approx \mu \lambda_e^{-3}$.

Weißer Zwerge können nur in einem Massenbereich $M_c \approx 3 \cdot 10^{30} \text{ kg} > M > 2 \cdot 10^{27} \text{ kg} \approx M_p$ existieren.

Der Massenbereich, der $\rho \approx \rho_0$ entspricht, mit $p < p_0$, also für Planeten gilt, ist enorm groß. Er reicht vom einzelnen Wasserstoffatom mit der Masse μ bis zu $M_p \approx 2 \cdot 10^{27} \text{ kg}$.

In Abbildung (8) sind die hergeleiteten einfachen Theorien den Resultaten detaillierter Rechnungen gegenübergestellt. Bei diesen detaillierten Rechnungen wurde auch die chemische Zusammensetzung berücksichtigt.

Es sind ebenso die Daten der Monde und Planeten des Sonnensystems und einiger

benachbarter Weißer Zwerge angegeben. Man kann hier sehen, dass eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung gegeben ist.

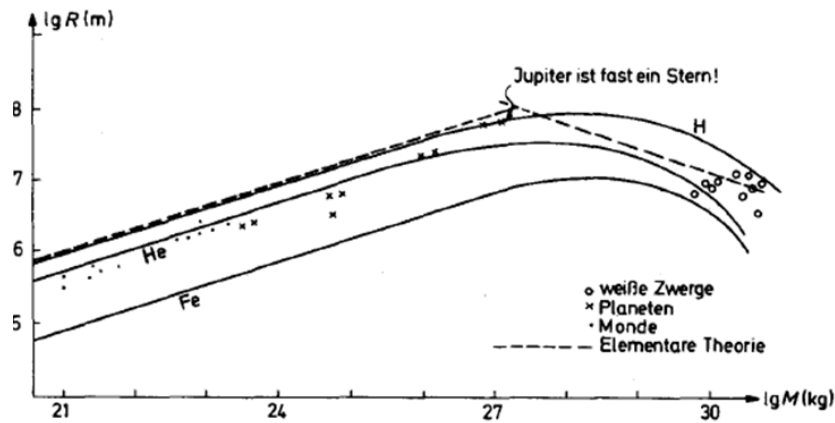


Abbildung 8: Massen-Radien-Beziehung für Weiße Zwerge, Planeten und deren Monde

Die drei theoretischen Kurven beziehen sich auf Körper, die aus Wasserstoff H, Helium He beziehungsweise Eisen Fe bestehen.

Wir werden nun auf die Entwicklung der Sonne eingehen. In der Abbildung (9) ist die Entwicklung unserer Sonne dargestellt. Der graue Balken in der Abbildung oben stellt den Zeitraum dar, wie lange sich die Sonne in der jeweiligen Entwicklungsphase befindet und unten in der Abbildung wie alt die Sonne wäre, wenn sie in diesen Zustand käme. Also in etwa 4,5 Milliarden Jahren ist der Brennstoff im Kern der Sonne verbraucht und die Hülle der Sonne dehnt sich zu einem Roten Riesen aus. Wenn die Hülle dann abgestoßen wird, entsteht ein Planetarischer Nebel und die Sonne endet in einem Weißen Zwerg.

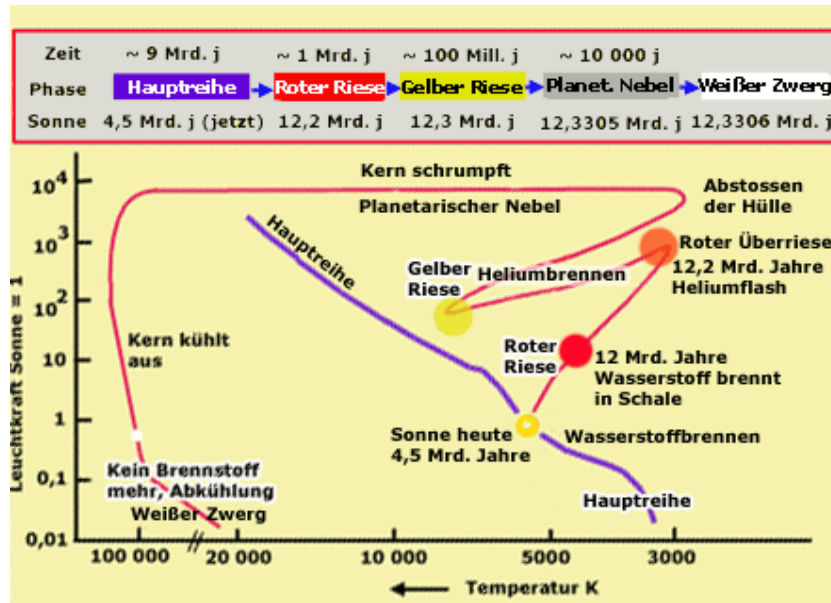


Abbildung 9: Diagramm der Sonne

Eine Zusammenfassung der Daten von Weißen Zwergen:

- Weiße Zwerge können durch die Entartung der Elektronen ihre Gravitation aufrechterhalten.
- Weiße Zwerge haben ungefähr die Masse unserer Sonne.
- Weiße Zwerge sind ungefähr erdgroß (Radius: $\sim 10^4$ km).
- Die maximale Masse ist durch die Chandrasekhar-Masse beschränkt.
- Typisch für Weiße Zwerge sind hohe effektive Temperaturen (5000 – 200000K) und eine geringe Leuchtkraft (ca. $10^{-2}L_s - 10^{-3}L_s$).
- Bis zu 10 % aller Sterne könnten Weiße Zwerge sein.
- Weiße Zwerge haben eine Dichte von ungefähr $10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.
- Weiße Zwerge sind das am häufigsten beobachtete Endstadium der Sternentwicklung.

Der bekannteste Weiße Zwerg ist Sirius B, der 1862 von Alvan Graham Clark entdeckt wurde und bereits 1844 von Bessel postuliert wurde. Er ist ein "dunkler Begleiter" von Sirius A in einem Doppelsternsystem.

Seine Daten:

Masse	$1,02M_{\odot}$
Dichte	$3 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Radius	5400 km
Rotverschiebung	$2,7 \cdot 10^{-4}$

Sirius B wurde am Beginn für einen gewöhnlichen, lichtschwachen Stern gehalten, jedoch zeigten spektroskopische Untersuchungen aus dem Jahr 1914, dass er sehr hohe Oberflächentemperaturen von ca. 24000 Kelvin aufweist und deswegen weiß leuchtet. Die Lichtschwäche ist nicht auf die niedrige Temperatur zurückzuführen, sondern auf die geringe Oberfläche.

Im folgenden Kapitel werden wir uns mit Neutronensternen befassen, die durch die Entartung der Neutronen die Gravitation aufrechterhalten können.

10 Neutronensterne

Neutronensterne bezeichnen das Endstadium von massereichen Sternen, das heißt von Sternen, die eine Masse größer als acht Sonnenmassen haben. Neutronensterne entstehen, wenn der Stern nach Beendigung der Kernfusion kollabiert und der dadurch ausgeübte Druck den Entartungsdruck der Elektronen überwindet.

Um theoretische Herleitungen der Eigenschaften von Neutronensternen kennenzulernen, muss die Zustandsgleichung der entarteten Materie (20) auf den Dichtebereich $10^{11} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} < \rho < 10^{20} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ erweitert werden. Der Kern des Sterns erreicht Dichten in Bereichen, in denen keine Stabilität mehr möglich ist. Bei Dichten größer als $10^{11} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ findet die Bildung von Neutronen durch den inversen Beta-Zerfall statt. Beim inversen Beta-Zerfall bewirkt ein Neutrino die Umwandlung eines Protons, also

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e,$$

wobei e^- ein Elektron, p ein Proton, n ein Neutron und ν_e ein Neutrino ist.

Das bedeutet, dass die Elektronen nach und nach verschwinden. Der inverse Beta-Zerfall ist vor allem bei sehr hohen Dichten von etwa $1,4 \cdot 10^{12} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ im Inneren eines Sterns wichtig. Der inverse Beta-Zerfall kommt hauptsächlich bei Weißen Zwergen und Neutronensternen vor, also bei kompakten Objekten. Bei Hauptreihensternen kann dieser Prozess nicht stattfinden, da die Sterne der Hauptreihe diese hohe Dichte niemals erreichen.

Durch den Wegfall der Fermienergie der Elektronen wird bei der Reaktion Energie frei, auch wenn die Neutronen um ungefähr zwei Elektronenmassen schwerer als Protonen sind. Bei steigender Dichte entstehen immer mehr Neutronen und bauen neutronenreiche schwere Atomkerne auf.

Der Druck wird mit der Dichte immer größer. Dies bewirkt die Verringerung der Zahl der Elektronen durch den inversen Beta-Zerfall. (Bei der Zustandsgleichung der entarteten Materie nimmt der Druck mit der Dichte zu.)

Wenn aber die Dichte $10^{16} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ überschreitet, beginnen sich die Atomkerne aufzulösen und es entsteht eine einheitliche Neutronenmaterie. Einen Stern, der in dieser Zustandsform sein Gleichgewicht findet, nennt man Neutronenstern.

Allmählich steigt der Druck wieder an, da nun die Neutronen die Aufgabe der Elektronen übernehmen und die Fermienergie mit wachsender Dichte ansteigt.

Um auf die Zustandsgleichung zu kommen, ersetzen wir in allen bisherigen Formeln die Elektronenmasse m_e durch die Neutronenmasse μ und erhalten

$$f(p) = \frac{p}{\rho c^2} \approx \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\frac{n}{3}}$$

$$\text{mit } n = \begin{cases} 2 & \text{wenn } 10^{16} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} < \rho < \rho_1 \quad (\text{nichtrelativistisch}) \\ 1 & \text{wenn } \rho > \rho_1 \quad (\text{relativistisch}). \end{cases}$$

Dabei ist $\rho_1 = \frac{\mu}{\left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^3} \approx 10^{20} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ die Grenzdichte, ab der die Neutronen relativistisch werden.

Zunächst können wir die Masse und den Radius von Neutronensternen im nicht-relativistischen Fall schätzen.

$$M \approx \frac{1}{m^2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{2}} \approx M_C \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$R \approx \frac{\hbar^{\frac{3}{2}}}{m^2 \sqrt{Gc}} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{-\frac{1}{6}} \approx \text{einige km} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{-\frac{1}{6}}.$$

Numerisch würde sich ein Wert von ungefähr 3 km ergeben - realistischer wären 5 km. Ein Vergleich mit Weißen Zwergen zeigt, dass Neutronensterne mit der Masse M um den Faktor $\frac{m_e}{\mu}$ kleiner sind, als ein Weißer Zwerg mit der gleichen Masse. Das typische Verhältnis zwischen Neutronensternen und Weißen Zwergen ist also etwa $\frac{m_e}{\mu}$.

Um die Masse der Neutronensterne als Funktion ihrer mittleren Dichte zu berechnen, ersetzen wir wieder die Elektronenmasse m_e durch die Neutronenmasse μ .

Dabei ergibt sich

$$M(\rho) = \begin{cases} \left(\frac{c^2}{G}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\rho}}{\rho_1} = M_C \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1}} & \rho < \rho_1 \\ M_C & \rho > \rho_1. \end{cases}$$

Die obere Grenze für Neutronensterne (wenn $\rho = \rho_1$) ist näherungsweise dieselbe wie für Weiße Zwerge, da die Elektronenmasse in die Chandrasekhar-Grenze nicht eingeht. Die größte Masse, die ein Neutronenstern besitzen kann, wird durch die Oppenheimer-Volkoff-Grenze beschrieben, also analog zur Chandrasekhar-Grenze für Weiße Zwerge. "Oppenheimer und Volkoff nahmen an, dass die Neutronen eines Neutronensterns in Form eines kalten, entarteten Fermigases vorliegen."⁵. Die Oppenheimer-Volkoff-Grenze und der dazugehörige Radius sind definiert durch

$$M \approx 0,7 M_{\odot} \left(\frac{1\text{GeV}}{m}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{g}}$$

und

$$R \approx 9,6\text{km} \left(\frac{1\text{GeV}}{m}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{g}},$$

wobei m die Fermionenmasse und g der Entartungsfaktor ist. Für Neutronen gilt, dass $g = 2$ und $m \approx 1 \text{ GeV}$ ist. Nach diesem Modell darf ein Neutronenstern höchstens eine Masse von 0,7 Sonnenmassen besitzen und einen Radius von knapp 20 Kilometer aufweisen.

Wenn also die Masse eines Sterns kleiner als M_C ist, so ist der Stern durch die Entartung der Neutronen stabil und es entsteht ein Neutronenstern. Ist die Masse eines Kerns jedoch größer als M_C , so bildet sich ein Schwarzes Loch.

Von Bedeutung ist, dass es im Dichtebereich $10^{11} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} < \rho < 10^{16} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ keine stabilen Sterne gibt, weil ein Stern bei dieser Dichte zu schwingen und kollabieren beginnt ($\rho \rightarrow \rho + \delta\rho$). Somit ist bei vergrößerter Dichte nur mehr die Masse $M(\rho + \delta\rho) < M(\rho)$ stabil. Falls ein Weißer Zwerg oder ein Neutronenstern oszilliert, erreicht er bei der Dichte $(\rho + \delta\rho)$ einen Dichtebereich, bei dem eine größere Masse $M(\rho + \delta\rho) > M(\rho)$ stabil ist. Daher kehrt der Stern zu seiner Ausgangsdichte zurück. Falls der Stern ex-

⁵Zitat: <http://wuerstchenundbier.com/1c6bc82e4c1f709.html> (aufgerufen am 10.10.2016)

pandiert, also bei $(\rho - \delta\rho)$, so ist bei der geringeren Dichte nur die Masse $M(\rho - \delta\rho) < M(\rho)$ stabil. Der Stern fällt zur ursprünglichen Dichte zurück, oszilliert also lediglich um einen Gleichgewichtszustand.

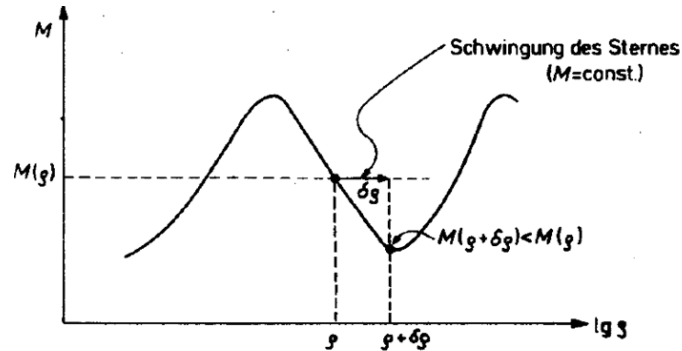


Abbildung 10: Im Bereich, in dem die Gleichgewichtskurve abfällt, gibt es keine stabilen Sterne.

Wir wollen den Radius eines Neutronensterns bestimmen.

Dazu ersetzt man die Compton-Wellenlänge des Elektrons durch die Compton-Wellenlänge des Neutrons $\lambda_n \approx 10^{-16}$ m.

Daraus folgt nun

$$MR^3 \approx M_C R_n^3$$

und

$$R_n \approx \lambda_n \alpha_G^{-\frac{1}{2}} \approx 10 \text{ km.}$$

Beeindruckend dabei ist, dass Neutronensterne nur einige Kilometer Durchmesser, aber annähernd die Masse unserer Sonne haben.

Interessant ist auch die Schwerebeschleunigung an der Oberfläche eines Neutronensterns. Diese ergibt sich aus typischen Werten, wie $M = 1,4M_\odot$ und $R = 10$ km.

$$g_{\text{Neutronenstern}} = \frac{GM}{R^2} \approx 2 \cdot 10^{12} \frac{m}{s^2} \approx 2 \cdot 10^{11} g_{\text{Erde}}$$

Sehr interessant ist der Größenunterschied zwischen Neutronensternen und Weißen

Zwergen. "Weiße Zwerge sind etwa 2000 mal so groß wie Neutronensterne." ⁶. Wir betrachten nun kurz die theoretische Erklärung über den Enartungsdruck und den Beweis in Bezug auf Weiße Zwerge und Neutronensterne in Dr. Franz Embachers Vortrag über "Die Endstadien der Sterne und wie es die Physik schafft, sie zu beschreiben".

Es gilt

$$\frac{R_{WZ}}{R_{NS}} \approx \frac{m_p}{m_e},$$

wobei R_{WZ} der Radius eines Weißen Zwerges, R_{NS} der Radius eines Neutronensterns, m_p die Protonenmasse und m_e die Elektronenmasse ist.

Beweis :

Wegen

$$M_{WZ}^{\frac{1}{3}} R_{WZ} \approx \frac{\hbar^2}{G m_p^{\frac{5}{3}} m_e}$$

und

$$M_{NS}^{\frac{1}{3}} R_{NS} \approx \frac{\hbar^2}{G m_p^{\frac{8}{3}}}$$

ist

$$M_{WZ} \approx M_{NS}$$

und daher gilt

$$\frac{R_{WZ}}{R_{NS}} \approx \frac{m_p}{m_e}.$$

□

Abbildung (11) zeigt Planeten, Weiße Zwerge und Neutronensterne in einem Masse-Radius-Diagramm.

⁶Zitat: <https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/EndstadienDerSterne/EndstadienDerSterne.pdf>, Seite 43, S.44

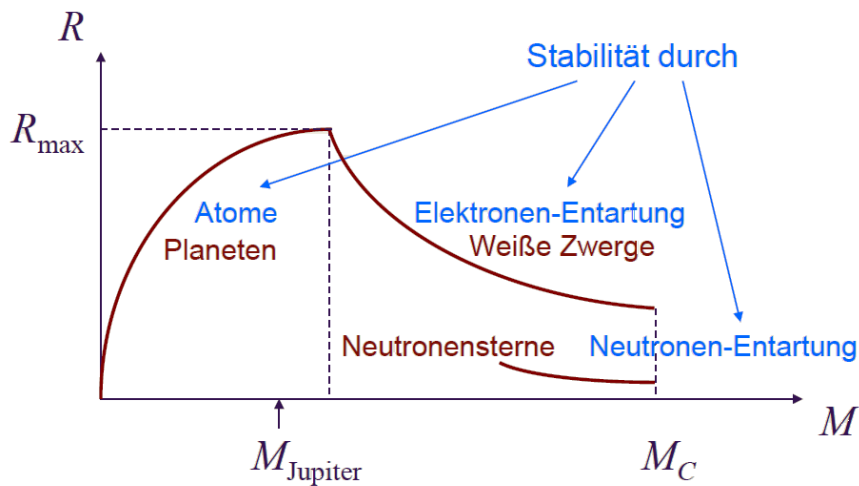


Abbildung 11: Masse-Radius-Diagramm

Nun können wir das Verhältnis von Schwarzschildradius zu Radius und damit die Größenordnung bei allgemein-relativistischer Effekte beschreiben. Es ergibt sich

$$\delta \approx \frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{\Delta M}{M} \approx \frac{R_S}{R} \approx \frac{p}{\rho c^2} \approx f(\rho) \approx \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 1,$$

wobei δ die Lichtablenkung, $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ die Rotverschiebung, $\frac{\Delta M}{M}$ der Massendefekt, $\frac{R_S}{R}$ das Verhältnis Schwarzschildradius zu Radius und $\frac{p}{\rho c^2}$ das Verhältnis mittlere Dichte zu mittlere Ruheenergiedichte ist.

Daraus können wir folgenden Schluss ziehen:

Relativistische Effekte sind für Neutronensterne von der Größenordnung eins.

Eine Zusammenfassung der Daten von Neutronensternen:

- Neutronensterne können durch die Entartung der Neutronen ihre Gravitation aufrechterhalten.
- Neutronensterne haben ungefähr eine Masse zwischen 1,2 und 2 Sonnenmassen.
- Neutronensterne sind nur einige Kilometer groß.

- Die maximale Masse ist durch die Chandrasekhar-Masse beschränkt.
- Neutronensterne haben eine Dichte von ungefähr $3 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.
- Die Temperaturen im Inneren eines Neutronensterns betragen zu Beginn etwa 100 Milliarden Kelvin.
- In unserer Milchstraße befinden sich etwa 100 Millionen Neutronensterne.

Der Neutronenstern "RX J1856-3754", der uns am nächsten ist, wurde 1992 entdeckt. Dieser ist etwa 450 Lichtjahre von uns entfernt und hat eine Masse von ungefähr 1,4 Sonnenmassen. Sein Radius ist leider nicht bekannt, aber er ist mit hoher Wahrscheinlichkeit größer als 11 km. RX J1856-3754 bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von etwa $100 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ relativ zum Sonnensystem.

11 Anwendung in der Schule

11.1 Lehrplan

Im Folgenden werden wir uns ansehen, wo die Themen "Sternenentwicklung" und "Entartete Materie" im Lehrplan sowie in einigen Schulbüchern vorkommen und wie es dargestellt werden.

Im Oberstufenlehrplan der AHS des Unterrichtsfaches Physik werden die Themen "Sternenentwicklung" und "Entartete Materie" in folgenden Bereichen behandelt:

7. und 8. Klasse⁷:

Die Schüler und Schülerinnen sollen folgende physikalische Bildungsziele erreichen:

- Die bisherigen entwickelten methodischen und fachlichen Kompetenzen vertiefen und darüber hinaus Einblicke in die Theorieentwicklung und das Weltbild der modernen Physik gewinnen;
- Einsichten in kernphysikalische Grundlagen (Aufbau und Stabilität der Kerne, ionisierende Strahlung, Energiequelle der Sonne, medizinische und technische Anwendungen) gewinnen und die Problematik des Umgangs mit Quellen ionisierender Strahlung verstehen;
- Einblicke in die Struktur Raum und Zeit (Entwicklungsprozesse von Weltansichten zur modernen Kosmologie, Gravitationsfeld, Grundgedanken der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie, Aufbau und Entwicklung des Universums) gewinnen;
- Verständnis für Paradigmenwechsel an Beispielen aus der Quantenphysik oder des Problemkreises Ordnung und Chaos entwickeln und Bezüge zum aktuellen Stand der Wissenschaft/Forschung herstellen können;
- Verständnis für die schrittweise Verfeinerung des Teilchenkonzepts, ausgehend von antiken Vorstellungen bis zur Physik der Quarks und Leptonen, gewinnen und damit die Vorläufigkeit wissenschaftlicher Erkenntnisse verstehen.

⁷https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_10_11862.pdf.

Im Lehrplan der HLW für Sozialmanagement des Unterrichtsfaches Physik - Chemie werden die Themen "Sternenentwicklung" und "Entartete Materie" in folgenden Bereichen behandelt:

3. Klasse⁸:

Die Schüler und Schülerinnen können

- sich Größenverhältnisse erschließen und Dimensionen im Mikro- und Makrokosmos einordnen;
- Entwicklung des Weltbilds aus historischer Sicht beschreiben;
- durch Recherche grundlegende Informationen zu Aufbau und Entwicklung des Universums gewinnen und die Grenzen menschlicher Erkenntnis bei der Untersuchung des Makro- und Mikrokosmos reflektieren.

In diesen Ausschnitten des Lehrplanes kommt nicht direkt das Thema "Entartete Materie" vor, jedoch sind diese Auszüge Grundlage für das Verständnis entarteter Materie. Auf dieser Grundlage kann entartete Materie im Unterricht angesprochen bzw. durchgenommen werden.

⁸http://www.stachristiana.at/images/rodaun/hlw/Dokumente/Lehrplaene/LP_HLW_SozM_2016.pdf

11.2 Schulbücher und Unterrichtsmaterialien

Wir werden nun in sechs unterschiedliche Schulbücher bzw. Schulartikel hineinschnuppern und werden betrachten, wie die Themen "Sternenentwicklung" und "Entartete Materie" dargestellt werden.

11.2.1 Sexl Physik 8, Schulbuch; Sexl, Kühnelt, Stadler, Jakesch, Sattlberger; 1. Auflage; Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2013

Im Schulbuch Sexl Physik 8 gibt es ein eigenes Kapitel "Astrophysik - Sterne und Galaxien", in dem behandelt wird, wie weit Sterne entfernt sind, wie groß sie sind, wie sich Sterne aus kalten Gaswolken zu heißen Objekten entwickeln und wie Sterne als Weiße Zwerge, Neutronensterne oder Schwarze Löcher enden.

Nach einem kurzen geschichtlichen Einstieg werden die Eigenschaften von Sternen behandelt. Unterteilt werden die Eigenschaften in "Helligkeit und Leuchtkraft der Sterne", "Temperatur und Radien der Sterne", "Masse der Sterne", "Suche nach extrasolaren Planeten" und "Veränderliche Sterne".

Zunächst werden die scheinbare Helligkeit und die Leuchtkraft der Sterne erklärt. Nach jeder physikalischen Definition wird ein Beispiel angeführt. So wird zum Beispiel in Bezug auf die scheinbare Helligkeit für den Stern Wega im Sternbild Leier der Wert $m = 0$ (m ... Magnitude) festgelegt. Bei dem Begriff Leuchtkraft wird als Beispiel Alpha-Centauri angeführt und mit der Sonne verglichen.

Die Temperatur der Sterne wird anhand des Wienschen Verschiebungsgesetzes ($\lambda_{max} \cdot T = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$) erklärt. Mit Hilfe dieses Gesetzes kann die Oberflächentemperatur eines Sterns berechnet werden. Als Beispiel wird unsere Sonne herangezogen, indem die AutorInnen die Oberflächentemperatur von ihr angeben und somit haben die Schüler und Schülerinnen einen guten Vergleich, wie "heiß" die Oberfläche der Sterne ist.

Aus der Temperatur und der Leuchtkraft der Sterne wird auf die Berechnung der Radien der Sterne übergeführt. Die AutorInnen stellen die allgemeine Formel der Leuchtkraft und die Formel der Leuchtkraft der Sonne in Beziehung und leiten somit auf die Formel zur Berechnung der Radien der Sterne über. Es wird dabei auch kurz das Hertzsprung-Russell-Diagramm in Bezug auf die Leuchtkraft und Temperatur der Sterne eingegangen und vorweg schon die Begriffe "Riesen" und "Weiße Zwerge" erwähnt. Es wird kurz erklärt, wo man sie im Hertzsprung-Russell Diagramm finden kann und

ihre Größe und Leuchtkraft wird mit der unserer Sonne verglichen.

Die Masse der Sterne wird in Bezug auf die Gravitationswirkung eingeführt. Dabei wird das 3. Keplersche Gesetz auf das System Sonne-Erde angewandt, um die Masse der Sonne zu berechnen. Dabei wird auf ein anderes Kapitel im Buch hingewiesen, in dem die Kepler Gesetze genau erklärt werden. Ich finde es sehr interessant, dass auch hier der erste entdeckte Weiße Zwerg "Sirius B" als Beispiel herangezogen und beschrieben wird. Die Autoren führen die Temperatur, die Leuchtkraft und den Radius von Sirius B an und vergleichen diese Größen mit denen der Erde und unserer Sonne.

Im Kapitel "Suche nach extrasolaren Planeten" und "Veränderliche Sterne" werden Fragen beantwortet, wie zum Beispiel "Ist das Planetensystem der Sonne einzigartig oder sind Planeten häufig?" bzw. "Gibt es in anderen Sternensystemen Planeten, auf denen Leben existieren kann?".

Das nächste große Kapitel befasst sich mit der Sternenentwicklung - Elementsynthese. Dabei werden Themen wie "Die Entwicklung von Sternen", "Sternenentwicklung in der Hauptreihe", "Die Altersphasen von sonnenähnlichen Sternen - Weiße Zwerge", "Die Altersphase von massenreichen Sternen", "Die Bildung der Elemente jenseits von Eisen" und "Schwarze Löcher" behandelt.

Im Kapitel "Die Entwicklung von Sternen" wird am Anfang die Frage behandelt, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit sich Sterne bilden können. Es wird mit Hilfe der Fluchtgeschwindigkeit, der Temperatur und der mittleren kinetischen Energie $\frac{3KT}{2}$ die Bedingung für den Kollaps einer Wolke hergeleitet. Ich möchte dazu den Merksatz der Autoren zitieren:

Wenn der Radius R einer Wolke den Wert

$$R > \sqrt{\frac{9kT}{8\pi Gm\rho}}$$

übersteigt, dann zieht sich die Gaswolke zusammen, und Sterne entstehen.

(T Temperatur, m Molekülmasse, ρ Dichte des Gases)⁹

Anschließend wird kurz darüber gesprochen, welche Temperatur, Masse und Größe ei-

⁹Zitat: Sexl Physik 8, Schulbuch; Sexl, Kühnelt, Stadler, Jakesch, Sattlberger ; 1. Auflage Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2013; Seite 122

ne Gaswolke haben muss, damit ein Sternhaufen entsteht. Als Beispiel wird der Orionnebel angeführt.

Beim Kapitel "Sternentwicklung in der Hauptreihe" wird beschrieben, ab welcher Temperatur die Kernverschmelzung von Wasserstoff zu Helium beginnt. Es wird erklärt, dass der erhöhte Gasdruck den Gewichtsdruck kompensiert und es dadurch zum Stillstand der Kontraktion kommt. Durch den Transport der Strahlungsenergie nach Außen, beginnt ein neuer Stern zu leuchten. Es wird beschrieben, wie viel Prozent der Sonnenmasse mindestens die Sternenmasse haben muss, damit der Stern nicht abkühlt und zu einem planetenähnlichen Körper wird. In einem weiteren Abschnitt gehen die AutorInnen auf die Energieproduktion der Sonne ein. In diesem Absatz werden der Proton-Proton-Zyklus und der Kohlenstoffzyklus anhand von theoretischen Herleitungen und Abbildungen erklärt.

Im nächsten Abschnitt wird "Die Altersphase von sonnenähnlichen Sternen - Weiße Zwerge" behandelt. Es werden die einzelnen "Phasen" erklärt, bis sich ein Stern zu einem Weißen Zwerg entwickelt. So wird am Anfang erklärt, dass eine neue Phase der Sternentwicklung beginnt, wenn der Wasserstoff in der Kernzone aufgebraucht ist.

Es wird dann kurz erklärt, was ein Roter Riese und ein planetarische Nebel ist. In diesem Abschnitt wird farblich hervorgehoben, dass sich Sterne mit einer Masse von $M < 1,4$ Sonnenmasse zu Weißen Zwergen entwickeln. Die AutorInnen erklären anhand von zwei Formeln, wie Helium zu Kohlenstoff verschmilzt und wie sich Sauerstoff bildet. Es wird erklärt, dass weniger Energie frei wird als bei der Heliumbildung und durch die Abkühlung sinkt der Druck des Sterns und die Last der Hülle komprimiert das Sterninnere weiter. Es wird auch die Dichte des Zwergsterns angegeben und die AutorInnen versuchen dies in Worten nochmals zu erklären.

Im darauffolgenden Abschnitt "Die Altersphasen von massereichen Sternen" wird die Entwicklung zu einem Neutronenstern beschrieben. Anfangs wird erklärt, dass der Druck der Elektronen nur bis zu einer oberen Massengrenze von $M < 1,4$ Sonnenmassen der Schwerkraft stand hält. Unter diesem Druck kontrahiert der Heliumkern und heizt sich weiter auf und es sind weitere Kernverschmelzungen möglich. Nach einigen Tagen ist auch das Siliciumbrennen beendet und der letzte Akt der Sternentwicklung folgt: die Explosion einer Supernova. Die AutorInnen ziehen als Beispiel die Supernova SN1987A heran und beschreiben einige interessante Eigenschaften und Details. So werden zum Beispiel 20 solche Ereignisse pro Jahr beobachtet, jedoch mit freiem Auge ist nur eine in 300 Jahren zu beobachten.

Nun wird beschrieben, wie lange sich ein Stern in seinen Alterphasen befindet. So dauert zum Beispiel das Stadium des Roten Riesen mit Heliumbrennen etwa 600 000 Jahre. Durch einige Informationen über Kernstoffprozesse wird die Entstehung eines Neutronensterns beschrieben. Ich möchte dazu einen Absatz zitieren, um zu verdeutlichen, wie die AutorInnen die Entstehung eines Neutronensterns übermitteln wollen:

*"Bei einer Temperatur von $6 \cdot 10^9$ K zerfallen die Fe-Kerne in ihre Bestandteile. Die Elektronen, die bisher den Sterndruck aufrechterhielten, vereinigen sich mit Protonen zu Neutronen, Neutrinos werden frei. Diese Prozesse kühlen den Stern und reduzieren den Druck. Dies beschleunigt den Kollaps, der erst zum Stillstand kommt, wenn die Dichte der Materie $10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, entsprechend der Dichte der Materie in Atomkernen, erreicht. Es gibt nun praktisch keine einzelnen Atomkerne mehr, sondern nur einen "Brei" aus Neutronen, einen **Neutronenstern**."*¹⁰

Die AutorInnen erklären die zwei wichtigsten Eigenschaften, die Neutronensterne haben müssen, damit sie beobachtet werden können: ihre hohe Rotationsgeschwindigkeit und ihr Magnetfeld. Anschließend wird kurz und knapp erklärt, was ein Pulsar ist.

Im nächsten Kapitel "Die Bildung der Elemente jenseits von Eisen" wird beschrieben, was bei der Verschmelzung leichter Kerne bis Eisen geschieht.

Im letzten Kapitel "Schwarze Löcher" wird die Entstehung eines Schwarzen Loches erklärt. Wenn ein Neutronenstern eine Masse $M > 2,5$ Sonnenmassen besitzt, kann der Druck der Neutronen der Gravitation nicht das Gleichgewicht halten. Der Stern fällt immer weiter in sich zusammen. Im Anschluss wird der kritische Wert, der Schwarzschildradius erklärt und die Inhalte zu einem Merksatz zusammen gefasst:

"Schwarzes Loch und Schwarzschildradius:

Sinkt der Radius eines Sternes unter seinen Schwarzschildradius

$$R_s = \frac{2GM}{c^2},$$

*so können weder Licht noch Materie den Stern verlassen."*¹¹

¹⁰Zitat: Sexl Physik 8, Schulbuch; Sexl, Kühnelt, Stadler, Jakesch, Sattlberger ; 1. Auflage Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2013; Seite 125

¹¹Zitat: Sexl Physik 8, Schulbuch; Sexl, Kühnelt, Stadler, Jakesch, Sattlberger ; 1. Auflage Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2013; Seite 126

Zum Schluss wird noch die Frage behandelt, wie man Schwarze Löcher sehen kann, wenn von ihnen keine Strahlung ausgeht. Die AutorInnen erwähnen und beschreiben dabei den ersten Kandidat für ein Schwarzes Loch: Cygnus X-1.

Résumé:

Meiner Meinung nach sind die hier kurz beschriebenen relevanten Inhalte dieses Unterrichtsbuches für Oberstufenschüler und –schülerinnen prägnant und gut erklärt. Es wird ein guter Überblick geschaffen – gleichzeitig aber auch auf mögliche vertiefende Inhalte neugierig gemacht. Dies ist z. B. bei der Frage nach Leben auf anderen Planeten gut ersichtlich – welcher Jugendliche möchte nicht wissen, ob es irgendwo „im All“ andere denkende Lebewesen vergleichbar mit uns Menschen gibt.

Die einzelnen Phasen, die ein Stern durchläuft, sind sehr ausführlich beschrieben und jeweils mit Vergleichen bzw. Beispielen untermauert. Der Begriff Entartung kommt jedoch nicht vor. Es wird zwar sehr genau beschrieben, wie sich ein Neutronenstern entwickelt, jedoch wird nichts über den Entartungsdruck bzw. über die Entartung der Neutronen erklärt.

Die für diese Arbeit wichtigen Themenbereiche werden in diesem Unterrichtswerk lehrplangerecht erklärt und sind daher meiner Meinung nach im Unterricht als Ausgangspunkte für unterschiedliche Unterrichtsmethoden gut einsetzbar. Ich könnte mir z. B. vorstellen, dass die unterschiedlichen Themenbereiche Grundlagen für Gruppenarbeiten und/oder Präsentationen sein können. Erwähnenswert ist meiner Meinung nach auch die optische Teilung des Lehrwerks: Jede Seite ist in einen Textteil und einen Seitenteil gegliedert. Im Seitenteil befinden sich farbige Abbildungen mit inhaltlichen Erklärungen dazu und zusätzliche Lernangebote wie zum Beispiel Tabellen. Diese Optik der Gliederung der angebotenen Lerninhalte hilft dem Lernenden genauso wie die farbliche Hervorhebung der angeführten „Merksätze“, die die wichtigsten Inhalte knapp und zusammenfassend anbieten.

11.2.2 Big Bang 8, Schulbuch; Martin Apolin; 1. Auflage; Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2008

Im Schulbuch Big Bang 8 gibt es ein eigenes Kapitel "Vom Leben und Sterben der Sterne", in dem die Geburt der Sterne (Wenn sich Sternenstaub zusammenballt), das Leben der Sterne (Von Riesen und Zwergen) und der Tod der Sterne (Leben aus Sternenasche und Supernova) behandelt wird.

Im ersten Teil des Kapitels geht es um den typischen Verlauf einer Sternentstehung. Anfangs wird beschrieben, was interstellare Materie bzw. Sternenstaub ist. Anschließend erklärt Martin Apolin, dass die Kontraktion einer gigantischen Gaswolke hunderttausend bzw. Millionen Jahre dauern kann. Die Wolke zerfällt in Teilwolken (Globulen) und es entstehen noch nicht stabile Protosterne und dann Sterne. Es wird erklärt, dass, wenn im Zentrum einer Gaskugel es eine Temperatur von einigen Millionen Kelvin hat, die Kernfusion zündet und ein Stern geboren wird. Anschließend beschreibt der Autor die Massenuntergrenze und die Massenobergrenze, damit die Kernfusion zünden kann.

In eigenen "Informationskästchen" wird zu diesem Abschnitt erklärt, unter welchen Bedingungen sich Gase zu Sternen zusammenballen. Mit Hilfe der Fluchtgeschwindigkeit und der mittleren kinetischen Energie wird auf die Jeans-Masse hingeleitet. Die Jeans-Masse wird den Schüler und Schülerinnen anhand einer Formel genauestens erklärt.

Der nächste Abschnitt dieses Kapitels behandelt "Das Leben der Sterne - Von Riesen und Zwergen". Die Schüler und Schülerinnen erfahren in diesem Abschnitt, dass es verschiedene Arten von Sternen gibt und erfahren mehr über das Leben unserer Sonne. Der Autor erklärt anfangs, dass ein Gleichgewicht zwischen dem nach außen wirkenden Gasdruck und dem nach innen wirkenden Gravitationsdruck entsteht, wenn im Inneren eines neuen Sterns die Fusion gezündet hat. Anschließend wird das Hertzsprung-Russel Diagramm mit Hilfe einer Abbildung erklärt. Dabei wird beschrieben, dass sich Sterne in der stabilen Phase in der sogenannten Hauptreihe aufhalten. Dazu wird auch unsere Sonne als Beispiel herangezogen. Weiters wird anhand einer weiteren genaueren Abbildung des Hertzsprung-Russel Diagramms die Phasen besprochen und erklärt, die unsere Sonne durchlaufen hat, durchläuft bzw. durchlaufen wird: Vor etwa 4,6 Milliarden Jahren entstand durch die Kontraktion einer Gaswolke ein Protostern. Die Sonne erreicht dann mit dem Zünden der Kernfusion ihre stabile Phase und verweilt dort über 6 Milliarden Jahre, bis sie zu einem Roten Riesen wird und rund 170-mal

so groß sein wird wie jetzt. Am Schluss des Sonnenlebens beginnt das Heliumbrennen und die Sonne macht eine relativ kurze Zeit als veränderlicher Stern durch. Wenn sich die Hülle immer weiter "ausdünnt" und der Kern kompakter wird, bleibt ein Weißer Zwerg über. Wenn dieser auskühlt, erreicht unsere Sonne ihr Endstadium und wird ein Schwarzer Zwerg.

In einem vom Text abgehobenen Informationsfeld, können sich die Schüler und Schülerinnen über Zwerge und Riesen genauer informieren. Ich möchte an dieser Stellen zitieren, wie der Autor einen Abschnitt dieses Kapitel zusammenfasst:

"Zusammenfassung:

*Wie das Leben eines Sterns verläuft und welche Elemente er dabei "erbrütet", hängt von seiner Masse ab. Die Sonne wird in 7 Milliarden Jahren ein Roter Riese und in knapp 8 Milliarden Jahren als Weißer Zwerg enden. Das Leben für die Menschen wird aber schon in 1 Milliarde Jahren unmöglich sein."*¹²

Im letzten Abschnitt dieses Schulbuches wird "Der Tod der Sterne - Leben aus Sterenasche und Supernova" behandelt. Gleich zu Beginn wurden anhand der folgenden Abbildung die drei möglichen Endstadien der Sterne erklärt.

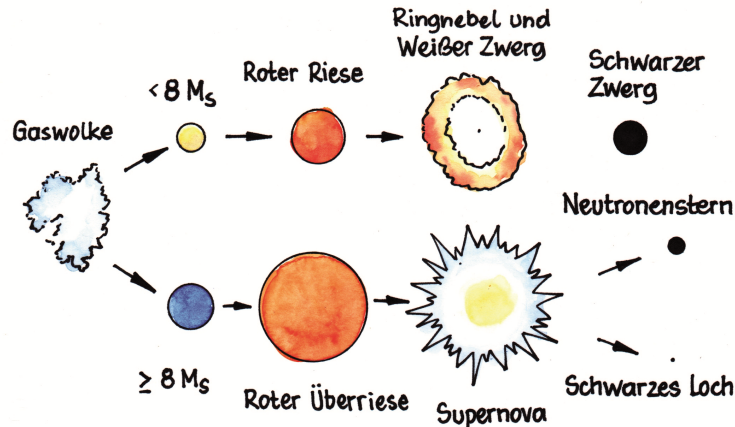


Abbildung 12: Die drei möglichen Endstadien der Sterne

Martin Apolin erklärt, dass unsere Sonne einmal ein Weißer Zwerg wird und wenn

¹²Zitat: Big Bang 8, Schulbuch; Martin Apolin; 1. Auflage; Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2008; Seite 89

er abkühlt als Schwarzer Zwerg endet. Anschließend beschreibt er im Zusammenhang der Masse eines Sterns zwei weitere mögliche Endstadien der Sterne: Neutronensterne oder Schwarze Löcher. Bei der Erklärung der Entstehung eines Neutronensterns entsteht, erwähnt er auch anhand einer Formel den inversen Beta-Zerfall.

Der Autor versucht immer auf die Sonnenmassen einzugehen. So beschreibt er zum Beispiel, was mit einem Neutronenstern passiert, wenn dieser nach einer Supernovaexplosion noch mehr als 2,5 Sonnenmassen hat. Die Gravitation ist dann so stark, dass sie durch nichts aufgehalten werden kann und ein Schwarzes Loch geboren wird.

Résumé:

Zusammenfassend ist zu sagen, dass sich in diesem Unterrichtsbuch Texte, Bilder, Tabellen und Graphiken ständig abwechseln und optisch voneinander getrennt sind. Schüler und Schülerinnen erfahren vertiefend und zugleich kurz und knapp, wie ein Stern entsteht und welche Phasen er durchläuft. Es spielt leider auch bei diesem Schulbuch die Entartung keine Rolle, jedoch bemüht sich Martin Apolin wichtige Begriffe, wie das Gleichgewicht oder den inversen Beta-Zerfall in seinen Text einzubauen und anhand von Beispielen zu erklären.

Weiters positiv ist zu bemerken, dass konkrete Fragen und Aufgabenstellungen - sie werden als "F" bezeichnet und sind durchnummeriert - zu unterschiedlichen Themenbereichen gestellt werden und diese durch einen Rahmen sehr gut optisch vom Rest zu unterscheiden sind. Ich möchte dazu ein Beispiele zitieren:

"Was musst du in der Apotheke kaufen, damit du Supernovaresten bekommst?"

Warum ist es für uns Menschen so wichtig, dass es in der Vergangenheit bereits sehr viele Sternexplosionen gegeben hat?"¹³

Im Text wird auf diese Fragen Bezug genommen (z.B.: siehe F12). Spezialthemen - sie sind durch ein "i" wie Informationen gekennzeichnet - werden ebenfalls in mit Rahmen versehenen Kästchen behandelt und unterbrechen den „Normaltext“. Sie können, müssen aber nicht gelesen und behandelt werden. Dadurch ergibt sich automatisch ein Differenzierungstext für Schüler und Schülerinnen, denen die Lehrkraft mehr anbieten möchte. Am Ende jedes Großkapitels wird eine kurze, knappe Zusammenfassung

¹³Zitat: Big Bang 8, Schulbuch; Martin Apolin; 1. Auflage; Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2008; Seite 89

angeboten – dies ist auch sehr hilfreich.

11.2.3 Faszination Physik 3+4; Bruno Putz; Veritas-Verlag; 3. Auflage (2009)

Im Schulbuch "Faszination 3+4" gibt es ein eigenes Kapitel, in dem die Astrophysik beschrieben wird.

Angefangen wird in diesem Buch mit der Geschichte der Astrophysik und der Astronomie. Es werden allgemein die Himmelsmechanik, das Newtonsche Gravitationsgesetz und die Gravitationsfelder beschrieben, bis hin zu den Zustandsgrößen der Sterne, sowie Geburt, Leben und Tod der Sterne.

Wir betrachten nun genauer die Unterkapiteln "Zustandsgrößen von Sternen - Datengewinnung" und "Geburt, Leben und Tod der Sterne".

Zunächst wird in diesem Schulbuch kurz auf die astronomische Entfernungsbestimmung eingegangen, bevor die Temperatur und die Leuchtstärke genauer behandelt werden. Es wird hier erklärt, wie die Farben mit der Temperatur eines Sternes zusammenhängen. Mit dem Wienschen Verschiebungsgesetz - benannt nach dem deutschen Physiker Wilhelm Wien - und dem Boltzmann-Gesetz versucht der Autor mit Hilfe dieser Formeln den Schülern und Schülerinnen zu erklären, wie man die Temperatur eines Sterns bzw. die spezifische Strahlungsleistung ermitteln kann.

Anschließend wird ausführlich auf die Entstehung und Entwicklung der Sterne eingegangen. Es wird genau beschrieben, wie ein Stern aus einer rotierenden Gas- und Staubwolke entsteht und welche wichtigen Rollen die Temperatur und die Gravitation spielen. Es wird das Wort "Gleichgewicht" im Zusammenhang mit der Gravitation verwendet, doch es wird leider nicht erklärt, was ein Gleichgewicht bzw. eine Gleichgewichtsbedingung ist. Es wird nur erwähnt, dass sich Sterne größtenteils ihres Lebens in einem stabilen Gleichgewicht befinden. Wiederum gut fand ich die Erklärung, wie sich ein Stern zu einem Roten Riesen verwandelt. Bruno Putz erklärt, wie die Temperatur und Stabilität dazu führt, dass sich ein Stern zu einem Roten Riesen "verwandelt" und erwähnt dabei die Fusion von Helium zu Kohlenstoff, welche durch zusätzlich eine Abbildung dargestellt wird. Positiv möchte ich auch anmerken, dass in diesem Zusammenhang die Begriffe "stabil" und "instabil" verwendet werden, da diese beiden Wörter dabei wichtige Rollen spielen.

Das nächste Unterkapitel behandelt die verschiedenen Altersphasen, vor allem die

Endstadien von Sternen und das Endstadium massereicher Sterne. Dabei wird erklärt, welche Bedingungen herrschen müssen, damit sich ein Roter Riese zu einem Weißen Zwerg entwickelt.

Ein kleiner Ausschnitt aus diesem Kapitel soll verdeutlichen, wie der Autor Bruno Putz den Schülern und Schülerinnen nahe bringen will, wie ein Weißer Zwerg entsteht:

Das Rote-Riesen-Stadium ist eine vorübergehende Phase, die verhältnismäßig rasch durchlaufen wird. Geht auch der Helium-Vorrat im Sternzentrum zu Ende, so fällt der Kern in sich zusammen, die äußere Sternenschichten werden abgestoßen und der heiße Kern wird freigelegt. Dieser Weiße Zwerg hat nun etwa Planetengröße. Den starken Gravitationskräften hält der Druck der komprimierten Elektronenhüllen das Gleichgewicht.¹⁴

Bruno Putz schildert die Entstehung von Roten Riesen und Weißen Zwergen im "Schnell-durchlauf". Es werden keine Zustandsformeln für Weiße Zwerge verwendet.

Beim Endstadium massereicher Sterne wird mit der Erklärung angefangen, dass bei massereicheren Sternen Kohlenstoff bei hohen Temperaturen von mehreren Milliarden Kelvin zu Silicium und Eisen fusioniert. Weiters wird erklärt, dass in einem Bereich bis ungefähr drei Sonnenmassen die Neutronen der Gravitationskraft das Gleichgewicht nicht mehr halten können - ein Neutronenstern entsteht. Wenn nach einem Supernova-Ausbruch noch mehr als drei Sonnenmassen vorhanden sind, können die Neutronen den Gravitationsdruck nicht mehr standhalten und es entsteht ein Schwarzes Loch. Bruno Putz verwendet in dieser Erklärung häufig Begriffe wie "Supernova-Ausbruch" und "Schwarzschildradius", welche davor noch nie vorgekommen waren und daher auch nicht erklärt wurden. Meiner Meinung nach kann dies Schüler und Schülerinnen verwirren und es trägt nicht zur Klärung bei.

Als letztes Unterkapitel wird sehr ausführlich das Hertzsprung-Russel Diagramm mit einer zusätzlichen Grafik erklärt. Zunächst wird die Grafik, welche die Leuchtkraft in Abhängigkeit von der Oberflächentemperatur darstellt, erläutert. Es wird anschließend kurz und bündig erklärt, wo sich Blaue Riesensterne, Rote Zwergsterne, Weiße Zwerge und Hauptreihensterne im Hertzsprung-Russel Diagramm befinden. Wieder wird

¹⁴Zitat: Faszination Physik 3+ 4; Bruno Putz; Veritas-Verlag; 3. Auflage (2009); Seite 259

erwähnt, dass die Hauptreihensterne sich in einer Phase mit stabilem Gleichgewicht befinden, ohne zu erklären, was dies eigentlich bedeutet. Schüler und Schülerinnen nehmen diese Information auf, jedoch ohne jegliches Hintergrundwissen.

Es werden leider generell sehr wenige Formeln in diesem Abschnitt verwendet, sondern vieles nur durch Text erklärt. Allerdings werden mehrere einfache Abbildungen verwendet, um das Verständnis der Schüler und Schülerinnen zu verstärken, wie zum Beispiel der "Aufbau der Sterne" oder die "Entwicklung der Sterne":

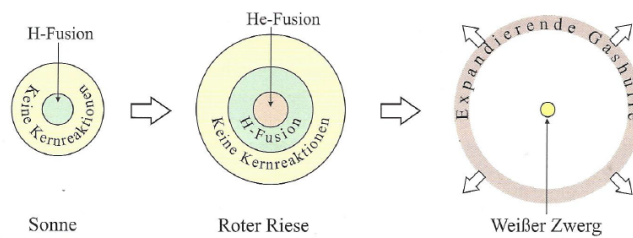


Abbildung 13: Aufbau der Sterne

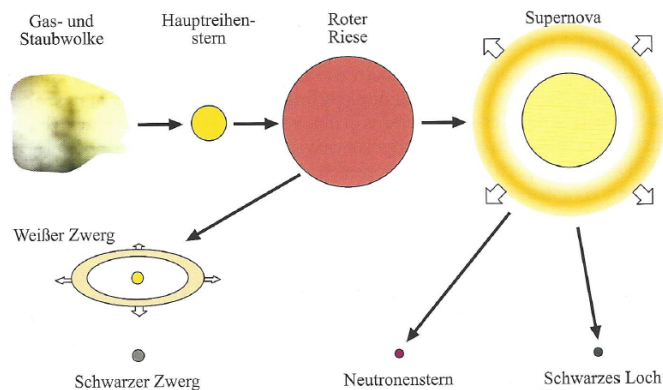


Abbildung 14: Entwicklung der Sterne

Résumé:

Ich finde es sehr gut, dass neben den bunt hinterlegten Formeln immer erklärt wird, welche Bedeutung die einzelnen Buchstaben haben. Meistens wird jeder kleine Abschnitt, zum Beispiel das Hubble-Gesetz, visualisiert. Die geschilderten Inhalte dieses

Schulbuchs sind meiner Meinung nach wertvoll, um Schülern und Schülerinnen grob die Entwicklung und Endstadien der Sterne kurz nahe zu bringen. Will die Lehrkraft jedoch weiter ins Detail gehen, zum Beispiel mit Zustandsgleichungen, sollte die Lehrkraft weitere vertiefende Unterrichtsmaterialien heranziehen.

Zusammenfassend möchte ich zu diesem Unterrichtswerk sagen, dass ich es nicht als einzige Quelle der Information für Schüler und Schülerinnen empfehle – Ergänzungen aus anderen Schulbüchern oder Fachartikeln zu diesem Themenbereich sind unbedingt von Nöten um genauere und intensivere Inhalte weiterzugeben, damit bei den Adressaten keine lückenhaften Erkenntnisse sondern ein abgerundetes Bild der Informationen entstehen kann. Didaktisch ist es ganz schlecht Fachbegriffe zu verwenden, diese aber nicht genau zu erklären – Mindestens einen kurzen Hinweis, wo der Schüler/die Schülerin nähere Informationen dazu erhalten kann (z.B. eine fundierte Internetseite oder ein Fachbuch), erachte ich als notwendig.

11.2.4 Physik Lektionen; Wessenberg-Raab; 1. Auflage 2004; öbv& hpt VerlagsgmbH & Co. KG, Wien 2004

Das Buch "Physik Lektionen" ist ein Lernskript für die HLA für wirtschaftliche Berufe. In diesem Schulbuch werden in einem eigenen kurzen Kapitel "Sterne und Planeten" behandelt, wobei ich das Unterkapitel "Das Leben der Sterne" genauer beschreiben möchte.

Begonnen wird damit, wie ein Stern aus einer Gas- und Staubwolke entsteht. Es wird dann lang beschrieben, wie ein Roter Riese, ein planetarischer Nebel, ein Weißer Zwerg und ein Schwarzes Loch entsteht. Die Autorin und der Autor beschreiben die Entwicklung der Sterne nur sehr knapp und verwenden keinerlei Begriffe, wie Entartung, Wasserstoffbrennen oder Ähnliches. Allerdings werden in jedem Absatz wichtige Wörter, wie Kernverschmelzung, Roter Riese, Neutronengas oder planetarischer Nebel aus dem Text optisch hervorgehoben. Damit wissen die Schüler und Schülerinnen sofort, welche Schwerpunkte in einem bestimmten Textteil im Mittelpunkt stehen.

Damit man einen Eindruck bekommt, wie der Autor und die Autorin den Schülern und Schülerinnen vermitteln will, wie zum Beispiel ein Neutronengas entsteht, möchte ich einen kleinen Absatz aus diesem Schulbuch zitieren:

*"Sobald der Kern jedoch vollständig in Eisen umgewandelt ist, sind keine weiteren Kernreaktionen, die Energie freisetzen, mehr möglich. Der Druck im Inneren des Sterns, der den Zusammenbruch verhindert, kann nicht länger aufrecht erhalten werden. Es kommt zu einem katastrophalen Gravitationskollaps; Elektronen und Protonen prallen zusammen und bilden Neutronen; es entsteht ein **Neutronengas**."*¹⁵

Résumé:

Dieses Schulbuch verlangt von Schülern und Schülerinnen viel Vorwissen über Grundbegriff der Sternenentwicklung. Viele Inhalte werden meiner Meinung nach sehr sprunghaft und unvollständig angeführt. Schüler und Schülerinnen kann das verwirren, da sie den Zusammenhang der Absätze möglicherweise nicht begreifen. So wird zum Beispiel mitten in einem Absatz erklärt, dass kleine Sterne, welche eine Masse von einem Viertel der Sonne haben, Rote Zwerge genannt werden. Im darauf folgenden Absatz beschreibt die Autorin und der Autor aber die Hauptperiode eines Sterns. Dies kann zur allgemeinen Verwirrung der Schüler und Schülerinnen führen.

Positiv zu bemerken ist, dass zu fast jedem Absatz eines Kapitels eine Abbildung zu finden ist, damit sich Schüler und Schülerinnen darunter mehr vorstellen können. Die nächste Abbildung zeigt ein Beispiel, auf der eine Supernova im Sternbild Vela zu sehen ist:

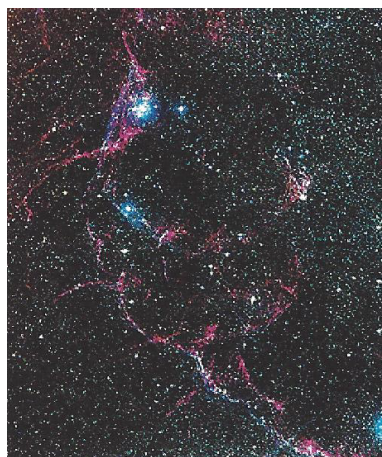


Abbildung 15: Supernova im Sternbild Vela

¹⁵Zitat: Physik Lektionen; Wessenberg-Raab; öbv&hpt VerlagsgmbH & Co. KG, Wien 2004(Seite 29)

Generell ist zu diesem Lehrwerk zu sagen, dass wesentliche Inhalte bzw. Fachbegriffe nicht erwähnt werden bzw. zu ungenau erklärt werden. Die vielen Abbildungen unterstützen zwar die Vorstellungen der Schüler und Schülerinnen, machen jedoch das Fehlende nicht wett. Ohne erklärende inhaltliche Ergänzungen von Seiten der Lehrkraft fehlen wichtige Lerninhalte und das neu erworbene Wissen der Schüler und Schülerinnen ist nicht vollständig.

11.2.5 Ein Stern (fast) zum Anfassen; Natalie Fischer; Astronomie Heute 01/2007; Spektrum der Wissenschaft Verlag

Dieser Artikel ist eine Vertiefung des Unterrichtsgegenstands Physik und wurde in "Astronomie Heute" veröffentlicht.

Der Artikel "Ein Stern (fast) zum Anfassen" behandelt kurze Ausschnitte aus der Sternenentwicklung: die Sterne bei Nacht, die Zustandsgrößen eines Sterns und die Sonne als nächster Stern.

Aufgebaut ist der Artikel, indem ein Inhalt kurz theoretisch behandelt wird und dazu die Schüler und Schülerinnen eine spezifische Aufgabe lösen sollen. Zusätzlich gibt es noch für Schüler und Schülerinnen Zusatzmaterialien, die sie für die Lösung der Aufgabenstellungen benötigen.

Beim ersten Kapitel "Die Sterne bei Nacht" wird auf die Helligkeit und Farbe von Sternen eingegangen. Nach einer sehr knappen Einleitung haben die Schüler und Schülerinnen die Aufgabe allein oder in Zweiergruppen Sterne zu beobachten und dabei die Helligkeit und Sternfarbe zu notieren. Zu dieser Aufgabenstellung steht den Schülern und Schülerinnen das Zusatzmaterial "Beobachtungshinweise" zur Verfügung. In diesem vierseitigen Zusatztext stehen Beobachtungsvorschläge für Sterne in verschiedenen Entwicklungsstadien im Vordergrund. Angefangen wird damit, welche Sterne man am Himmel mit einem Hilfsmittel, zum Beispiel einem Teleskop, beobachten kann. Es wird eine Liste angeführt, in der sich ausgewählte Sterne aus den Winter- und Sommersternbildern befinden. In dieser Liste werden Orte der Sternenentstehung und junge Sterne, Superriesen, Rote Riesen, Weiße Zwerge, Hauptreihensterne, Planetarische Nebel und Überreste von Supernova-Explosionen beschrieben. Zu jedem Punkt in der Liste werden die bedeutsamsten Beispiele und dazu die Sternbilder erklärt. So zum

Beispiel "Aktur", der uns am nächsten gelegener Roter Riese, der im Sternbild Bärenhüter auffindbar ist, der eine Entfernung von 36,71 Lichtjahre hat, einen Durchmesser von 31,45 Sonnenmasse aufweist und eine Masse besitzt, welche 2,4 mal größer ist, als die der Sonne.

Das nächste Kapitel dieses Artikels beschäftigt sich mit den Zustandsgrößen eines Sterns. Um herauszufinden, in welchem Lebensstadium sich der Stern befindet, muss zuerst geklärt werden, was ein Stern überhaupt ist. Dabei wird kurz der Aufbau eines Sterns erklärt und auf die Zustandsgleichung eines Sternes hingeleitet. Es wird in einem kurzen Absatz erklärt, wie die Zustandsgrößen zusammenhängen. Dazu wird ein einfaches Beispiel - die Masse-Radius-Dichte-Beziehung - herangezogen.

Die Schüler und Schülerinnen sollen sich überlegen, welche Größen sie verwenden würden. Damit die Schüler und Schülerinnen ein Gefühl für die Zustandsgrößen erhalten, gibt es zusätzlich zu diesem Artikel einen Zusatzartikel namens "Die Zustandsgrößen der Sterne". Bei diesem Zusatzartikel werden ausführlich die Helligkeit, die Leuchtkraft, die Farbe, der Spektraltyp, die Masse, der Radius, die Schwerebeschleunigung, die Temperatur, die Rotationsgeschwindigkeit, das Magnetfeld und die chemische Zusammensetzung der Sterne erklärt. Zu jedem dieser Punkte finden die Schüler und Schülerinnen vertiefende Aufgaben, bei denen manchmal zur Selbstkontrolle die Lösung angeboten wird. Ich möchte solch eine Aufgabe als Beispiel nun zitieren. Die Aufgabe wird in diesem Zusatzartikel zum Thema "Leuchtkraft" angeboten:

Die Strahlungsleistung der Sonne beträgt $L = 3,82 \cdot 10^{26}$ W. Das ist eine Zahl mit 26 Nullen.

Aufgabe:

Berechne, wie hoch die Energieproduktion der Sonne pro Liter Sonnenmaterie ist und vergleiche sie mit dem Energieumsatz eines Menschen ($0,01 \text{ W/l}$) und einer Kerzenflamme (1000 W/l). Die gesamte Energieproduktion vollzieht sich ausschließlich im Kern ($R_k = 1/4R$, $R = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$).

Lösung:

Der Sonnenkern hat ein Volumen von $V = \frac{4}{3}\pi R_k^3$.

Daraus folgt durch Einsetzen: $L/V = 0,0172 \text{ W/l}$ ¹⁶

Am Ende des Hauptartikels wird ausführlich die Sonne als nächstgelegener Stern beschrieben. Der Abschnitt ist besonders interessant, da man einen Blick in das Innere eines Sterns - der Sonne - hineinwirft. Dabei wird anhand des zwiebel-schalenartigen Aufbaus die Struktur des Sonneninneren erklärt.

Neben dem Hauptartikel "Ein Stern (fast) zum Anfassen" steht den Schülern und Schülerinnen noch ein weiterer Zusatzartikel zur Verfügung. Darin finden Schüler und Schülerinnen weitere Aufgaben, mit denen sie das Textverständnis noch weiter fördern können.

Résumé:

Meiner Meinung nach ist der Artikel "Ein Stern (fast) zum Anfassen" und die zugehörigen Zusatzartikel für den Physikunterricht sehr brauchbar und ansprechend gestaltet. Schüler und Schülerinnen müssen jedoch ein ausgeprägtes Vorwissen zu diesem Thema haben, da sie sich sonst mit den Aufgaben schwer tun. Der Artikel von Natalie Fischer ist für den Unterricht sehr ansprechend und didaktisch wertvoll aufgebaut. Neben physikalischen Formeln und Texten sind auf manchen Seiten Skizzen, Tabellen oder Bilder dargestellt, auf die sich die Schüler und Schülerinnen beziehen können. Ein Beispiel aus dem Zusatzartikel "Zustandsgrößen" zeigt eine Tabelle, bei der die Spektralklassen aufgelistet sind:

¹⁶Zitat: <http://www.wissenschaft-schulen.de/sixcms/media.php/1308/Zustandsgr%C3%B6%C3%9Fen.pdf>
(Zugriff am 1.9.2017)

<i>Klasse</i>	<i>Linien</i>	<i>Farbe</i>	<i>Temperatur-in K</i>	<i>Beispiel</i>
O	He ⁺⁺ , He ⁺	blau	28000 - 50000	mittlerer Gürtelstern Orion
B	He ⁺ , H, O ⁺	blau-weiß	9900 - 28000	Rigel, Spica
A	H, K, Ca ⁺	weiß	7400 - 9900	Wega, Sirius
F	Ca ⁺ , Fe, Ti, H	weiß-gelb	6000 - 7400	Procyon
G	Ca ⁺⁺ , Metalle	gelb	4900 - 6000	Kapella, Sonne
K	Ca, TiO	orange	3500 - 4900	Arktur, Aldebaran
M	TiO	rotorange	2000 - 3500	Beteigeuze, Antares
R	CN, CO, C	rotorange	3500 - 5400	- -
S	ZrO, CN	rotorange	2000 - 3500	- -
N	C	rot	1900 - 3500	- -

Abbildung 16: Spektralklassen

Aus meiner unterrichtsbezogenen Erfahrungen kann ich behaupten, dass Schüler und Schülerinnen sich etwas so Abstraktes mit Hilfe von Bildern oder Skizzen viel besser vorstellen können und es ihnen auch mehr Spaß macht, solch einen Text zu lesen und damit zu arbeiten.

Zusammenfassend möchte ich bemerken, dass der Aufbau dieses Artikels durchdacht und didaktisch gut aufbereitet ist. Er regt die Schüler und Schülerinnen nicht nur zum Lesen an, sondern führt sie gleich zu Arbeitsaufträgen hin, zu denen vertiefendes Material angeboten wird. Diese Aufgaben können alleine oder in Kleingruppen gelöst werden. Die Ergebnisse können anschließend mit unterschiedlichen Methoden präsentiert werden. Obwohl der Artikel direkt an die Lehrkräfte gerichtet ist – dies ist an der Anrede der Autorin an die PädagogInnen erkennbar (z. B. Ihre Schüler und Schülerinnen) – ist es durchaus möglich, den kompletten Artikel den Lernenden zur Verfügung zu stellen – es wird sie nicht irritieren, dass konkrete methodische und didaktische Hinweise in dem Artikel zu finden sind.

11.2.6 Sternenentstehung - Das Einmaleins der Sterne; Joseph V. Maugeri;

Astronomie Heute Jänner/Februar 2007; Spektrum der Wissenschaft Verlag

In dem Artikel von Joseph V. Maugeri kommt ein Vertiefungsartikel zum Thema Sternenentstehung vor, welcher im Unterricht gut einsetzbar ist.

In der Einleitung wird die Sonne als Beispiel eines Sterns herangezogen. Es wird beschrieben, wie die Sonne aufgebaut ist und welche Phasen sie durchlaufen hat bzw.

wird: Geburt, Erwachsenseinphase und Tod. Danach erfolgt eine Überleitung zu allen anderen Sternen. Der Artikel ist in fünf kurze Kapitel unterteilt:

- Vom Proto- zum Hauptreihenstern
- Wie hell ist ein Stern?
- Tod als Roter Riese
- Endstadium Weißer Zwerg
- Supernovae und Neutronensterne

Im Kapitel "Vom Proto- zum Hauptreihenstern" erklärt der Autor die Entstehung eines Sterns. Er verwendet dabei Begriffe wie Kernfusion, Wasserstoffbrennen und Gravitation. Dabei beschränkt er sich nur auf das Wesentliche und erklärt zum Beispiel das Wasserstoffbrennen kurz, damit die Schüler und Schülerinnen gerade das Wichtigste erfahren. Zwischendurch bezieht sich der Autor immer wieder auf den uns bekanntesten Stern - die Sonne.

Interessant finde ich, dass Joseph V. Maugeri viele physikalische Prozesse mit Alltagsgeschehen vergleicht. So vergleicht er die Kernfusion oder das Wasserstoffbrennen mit einem Lagerfeuer. Die Schüler und Schülerinnen können sich anhand solcher Vergleiche viel mehr unter physikalischen Prozessen vorstellen. Es wird die aktuelle Lebenswelt der Schüler und Schülerinnen häufig Bezug genommen.

Als nächstes behandelt er in einem kurzen Abschnitt, von welchen zwei "Dingen" es abhängt, wie lichtstark uns ein Stern erscheint, und zwar von der absoluten Helligkeit und seiner Entfernung zu uns. Bemerkenswert ist, dass er dabei immer wieder Beispiele von Sternen heranzieht und diese Sterne mit unserer Sonne vergleicht. So können Schüler und Schülerinnen sich meiner Meinung nach mehr darunter vorstellen und haben eine Bezugsgröße. Ich möchte nun einen kurzen Absatz zitieren, bei dem der Autor einen physikalischen Begriff wieder mit einem Alltagsgeschehen vergleicht:

"Ein Autoscheinwerfer in einer Kilometer Entfernung erscheint weniger hell als eine Taschenlampe einige Schritte vor Ihrem Gesicht. In ähnlicher Weise wirken Sterne mit hoher Leuchtkraft, die sich in großer Entfernung befinden, schwächer als solche mit geringer Leuchtkraft, die recht nah stehen. Unerfahrene Sterngucker unterliegen immer wieder der Täuschung, dass zwei eng beieinanderstehende Sterne mit ähnlicher Helligkeit zusammengehören. In Wahrheit

*können sie jedoch hunderte Lichtjahre voneinander entfernt sein."*¹⁷

Bei den Kapiteln "Tod als Roter Riese" und "Endstadium Weißer Zwerg" werden die beiden letzten Phasen der Sonne beschrieben. Der Autor erklärt, wie unsere Sonne sich zu einem Roten Riesen verwandelt. Er beschränkt sich wieder auf kurze Erklärungen, um das Wesentliche hervorzuheben. Beim letzten Kapitel "Supernovae und Neutronensterne" erklärt der Autor, wie sich massereiche Sterne "verabschieden". Dabei beschreibt er nur sehr knapp, wie es zu einer Supernova kommt und dadurch ein Neutronenstern entsteht. Ich finde es allerdings schade, dass beim Kapitel "Endstadium Weißer Zwerg" und "Supernovae und Neutronensterne" nie der Begriff Entartung erwähnt wird. Gerade bei der Entstehung eines Weißen Zwerges bzw. eines Neutronensterns spielt die Entartung der Elektronen bzw. der Neutronen eine sehr wichtige Rolle.

Ansprechend für Schüler und Schülerinnen finde ich die eindrucksvollen Bilder, die in dem Artikel zu sehen sind. Zum Beispiel wird in einem eigenen Abschnitt kurz die Zwiebschalenstruktur der Sonne bildlich dargestellt und durch einen kurzen Text beschrieben, wie die folgende Abbildung uns zeigt.

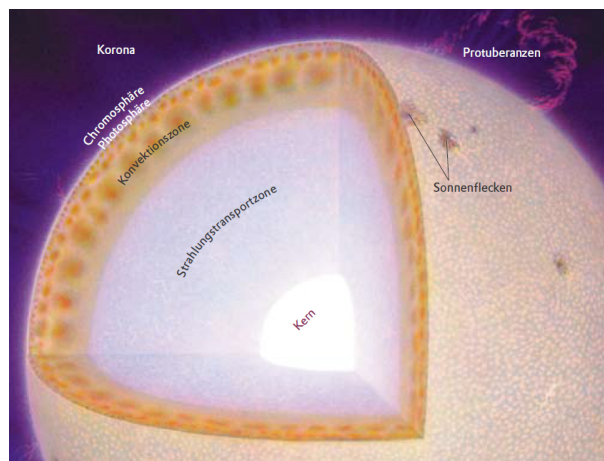


Abbildung 17: Die Zwiebschalenstruktur der Sonne

¹⁷Zitat: Sternentstehung - Das Einmaleins der Sterne; Joseph V. Maugeri; Astronomie Heute Jänner/Februar 2007; Spektrum der Wissenschaft Verlag (Seite 4); (Zugriff am 16.9.2017)

Résumé:

Der Artikel ist meiner Meinung nach sehr ansprechend und sehr schülerorientiert aufgebaut. Viele Alltagsvergleiche und Bilder sollen für das Verständnis schwieriger physikalischer Prozesse bei der Sternenentwicklung unterstützen, sodass sich Schüler und Schülerinnen darunter etwas vorstellen können. Jedoch wird ein ausgeprägtes Vorwissen vorausgesetzt, da Joseph V. Maugeri Begriffe wie das Wasserstoffbrennen und Kernfusion nicht genau erklärt, sondern einfach in den Artikel einbaut. Außerdem finde ich es schade, dass keine einzige Formel in diesem Artikel verwendet oder hergeleitet wird.

Zusammenfassend möchte ich sagen, dass dieser Artikel eine gute und interessante Grundlage für die geforderten Unterrichtsinhalte anbietet. Allerdings muss die Lehrkraft Zusatzinformationen in Form von anderen Artikel oder Inhalte aus einem Unterrichtsbuch anbieten, damit auch gewährleistet ist, dass gewisse Begriffe nicht nur erwähnt und verwendet werden, sondern auch wirklich inhaltlich verstanden werden.

Abstract

Contents of this diploma thesis are the evolution of stars and the possible degeneration of electrons and neutrons.

The main focus includes the field of the Pauli principle and other nuclear models, Heisenberg's uncertainty relation, the origin and evolution of stars, as well as their different evolution stages. Furthermore the areas of the mass defect, the differences between non-degenerate and degenerate matter as well as the origin and the character of different kinds of stars, in particular white dwarfs and neutron stars, are discussed. Important results in these areas are presented, supported by a number of formulae, pictures and examples.

Also, the Austrian curriculum in physics for secondary schools is analysed and school books and journals are compared in terms of didactical and methodical realisation.

Zusammenfassung

Inhalte dieser Diplomarbeit sind die Entwicklung der Sterne und die mögliche Entartung von Elektronen und Neutronen.

Die inhaltlichen Hauptaugenmerke liegen dabei in den Bereichen des Pauli-Prinzips und anderer Atommodelle, der Heisenbergschen Unschärferelation, der Entstehung und Entwicklung von Sternen sowie deren unterschiedlichen Entwicklungsstadien. Weiter werden die Themenbereiche des Massendefekts, die Unterschiede zwischen nichtentarteter und entarteter Materie sowie die Entstehung und die Merkmale von unterschiedlichen Sternentypen wie zum Beispiel der Weißen Zwerge und Neutronensternen behandelt. Wichtige Resultate dieser Bereiche werden vorgestellt und durch eine Vielzahl an Formeln, Abbildungen und Beispielen unterstützt.

Außerdem werden innerhalb dieser Arbeit der österreichische Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe und der HLW im Unterrichtsfach Physik sowie einige Unterrichtsmaterialien wie zum Beispiel approbierte Schulbücher oder Artikel in Fachzeitschriften im Hinblick auf diese speziellen Inhalte und deren didaktische und methodische Umsetzung für den Physikunterricht beschrieben.

Anhang

Herleitung des Bohrschen Radius

Schrödingergleichung für radialsymmetrische Wellenfunktion (Grundzustand):

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi(r) = E\psi(r)$$

Um diese Gleichung zu lösen verwenden wir den nicht normierten Ansatz:

$$\psi(r) = e^{-\frac{r}{a}}$$

Nebenrechnung: $\psi'(r) = -\frac{1}{a}e^{-\frac{r}{a}} \quad \psi''(r) = \frac{1}{a^2}e^{-\frac{r}{a}}$

Durch Einsetzen des Ansatzes in die Schrödingergleichung ergibt sich, nachdem $e^{-\frac{r}{a}}$ gekürzt wurde, folgender Zusammenhang: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2}{ar} \right) - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = E$

Wir wissen, dass E eine Konstante ist, daher müssen sich die Koeffizienten von $\frac{1}{r}$ wegeheben und es gilt:

$$a = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{mq^2} = r_B \approx 0,5 \cdot 10^{-10} m \dots \text{Bohrradius,}$$

wobei ϵ_0 die elektrische Feldkonstante ist und m die Masse der Elektronen.

Die Energie des Grundzustandes ist gegeben durch:

$$E_1 = -R_y = -\frac{\alpha^2}{2} mc^2 \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad \dots \text{Feinstrukturkonstante}$$

Quellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

- Paul Wagner, Georg Reischl, Gerhard Steiner: Einführung in die Physik; Facultas Verlags- und Buchhandel AG; Wien, 2009
- Christian Kruisz, Regina Hitzenberger: Physik verstehen; Facultas Verlags- und Buchhandel AG; 2. Auflage; Wien, 2011
- Franz Embacher: Skriptum- Weltbild der modernen Physik: Relativistische Astrophysik und Kosmologie; SS 2010; Fakultät für Physik an der Universität Wien
- Arnold Hansmeier; Faszination Astronomie - Ein topaktueller Einstieg für alle naturwissenschaftlich Interessierten; Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013
- Roman und Hannelore Sexl: Weiße Zwerge – Schwarze Löcher: Einführung in die relativistische Astrophysik; veröffentlicht im Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg, April 1975
- Heinrich Vogt: Aufbau und Entwicklung der Sterne; Akademische Verlagsgesellschaft Geest&Portig K.-H.; 2. Auflage, Leipzig, 1957
- Hans Kaiser: Das Weltall - Die Entstehung des Universums und des Sonnensystems, Sterne und Galaxien; Neuer Kaiser Verlag; Klagenfurt, 1990
- Hubert Goenner: Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie; Spektrum Akademischer Verlag GmbH; Heidelberg, Berlin, Oxford, 1996
- Ulrich Harten; Physik - Einführung für Ingenieure und Naturwissenschaftler; Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2007
- Torsten Fließbach: Allgemeine Relativitätstheorie; Spektrum Akademischer Verlag GmbH; 5. Auflage, München, 2006
- Johann Bienlein, Roland Wiesendanger: Einführung in die Struktur der Materie; Kern, Teilchen, Moleküle, Festkörper; B. G. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2003
- Joachim Krautter: Die Entstehung der Sterne - Interstellare Materie; Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft GmbH&Co; Heidelberg, 1986

- Joachim Herrmann: Astronomie - Planeten, Sterne, Galaxien; C. Bertelsmann Verlag GmbH, München, 1984
- Hans Jürgen Huber: Relativistische Zustandsgleichungen und Neutronensterne - Dissertation der Fakultät für Physik der Ludwig- Maximilians-Universität München; München, 1999
- Gerhard Zuba: Die Entstehung der Sterne und ihre Entwicklung bis zum Erreichen der Hauptreihe; Hausarbeit; Wien 1997
- Roman U. Sexl, Helmut K. Urbantke: Gravitation und Kosmologie - Eine Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie; 4. Auflage; Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin Oxford, 1995
- Paul A. Tipler, Ralph A. Llewellyn: Moderne Physik; Olenbourg Verlag, München, Wien, 2003
- Albert Jaros, Alfred Nussbaumer, Peter Nussbaumer, Kunze: Physik kompakt - Basiswissen 8; Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH&Co. KG; Wien, 2013
- Franz Gollenz, Gustav Breyer, Hans-Haimo Tentschert, Erich Reichel: Physik 4; Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH&Co. KG; Wien, 2013
- Sexl Physik 8, Schulbuch; Sexl, Kühnelt, Stadler, Jakesch, Sattlberger ; 1. Auflage Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2013
- Physik Lektionen; Wessenberg-Raab; 1. Auflage 2004; öbv& hpt VerlagsgmbH & Co. KG, Wien 2004
- Diehl, Erb, Heise, Kotthaus, Lindner, Schlichting, Schmalhofer, Schön, Schröder, H. Schulze, P. Schulze, Tews, Tillmanns, Winter: Physik Oberstufe Gesamtband; Cornelson Schulverlag GmbH, Berlin, 2013
- <http://itp1.uni-stuttgart.de/institut/arbeitsgruppen/wunner/Astrophysik1.pdf> (abgerufen am 5.10.2016)
- https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/WeltbildModernePhysik/Weltbild_Stichworte.pdf (abgerufen am 5.10.2016)

- http://www.wissenschaft-schulen.de/sixcms/media.php/1308/Zenrales_WiS_Dokument_AH.pdf(abgerufen am 19.7.2016)
- <http://www.sternwarte.de/astro/faq/detail.asp?ID=7>
(abgerufen am 10.7.2016)
- <http://www.spektrum.de/magazin/einmaleins-der-sterne/857849>
(abgerufen am 19.7.2016)
- <http://itp1.uni-stuttgart.de/institut/arbeitsgruppen/wunner/Astrophysik1.pdf>
(abgerufen am 1.7.2016)
- https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_10_11862.pdf
(abgerufen am 19.8.2016)
- http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen/lexdt_o.html
(abgerufen am 19.7.2016)
- <http://www.leifiphysik.de/astronomie> (abgerufen am 19.7.2016)
- <https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/EndstadienDerSterne/EndstadienDerSterne.pdf> (abgerufen am 19.7.2016)
- http://www.physik.uni-regensburg.de/forschung/gebhardt/gebhardt_files/skripten/WeisseZwerge.pdf (abgerufen am 9.7.2016)
- <http://www.rai-ming.de/alaxy/deuterium.htm> (abgerufen am 19.7.2016)
- <http://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/ewald/lec-wdnsbh.pdf>
(abgerufen am 1.7.2016)
- <http://www.chemie.de/lexikon/Massendefekt.html> (abgerufen am 10.6.2016)
- <http://www.terminal47.net/astronomie/entartetemat.html>
(abgerufen am 19.7.2016)
- <http://www.spektrum.de/lexikon/physik/betazerfall/1487>
(abgerufen am 23.6.2016)
- <http://wuerstchenundbier.com/1c6bc82e4c1f709.html> (abgerufen am 11.7.2016)

- https://www.wissenschaft-online.de/astrowissen/lexdt_b02.html
(abgerufen am 1.10.2016)
- <http://www.spektrum.de/lexikon/physik/inverser-betazerfall/7406>
(abgerufen am 20.7.2016)
- <http://www.geoastro.de/astro/stars/index.htm> (abgerufen am 19.8.2016)
- http://pulsar.sternwarte.uni-erlangen.de/wilms/teach/lavilla06/04_gueth.pdf
(abgerufen am 22.7.2016)
- <http://www.mgvoss.de/69.html> (abgerufen am 19.7.2016)

Abbildungsverzeichnis

1	p_x -, p_y - und p_z - Orbital	6
2	Orionnebel	11
3	Kernfusionen im Sterninneren	14
4	Von der Gas- und Staubwolke bis zum Tod eines Sterns	21
5	Hertzsprung-Russel Diagramm	32
6	Bildung als Funktion der Anfangsmassen	35
7	Massen-Radius-Beziehung	39
8	Massen-Radien-Beziehung für Weiße Zwerge, Planeten und deren Monde	42
9	Diagramm der Sonne	43
10	Im Bereich, in dem die Gleichgewichtskurve abfällt, gibt es keine stabilen Sterne.	48
11	Masse-Radius-Diagramm	50
12	Die drei möglichen Endstadien der Sterne	60
13	Aufbau der Sterne	64
14	Entwicklung der Sterne	64
15	Supernova im Sternbild Vela	66
16	Spektralklassen	70
17	Die Zwiebelschalenstruktur der Sonne	72

Quellen der Abbildungen

- **Abbildung 1:** <http://www.angelfire.com/falcon2/dirgni/orbitals.html>
(Zugriff am 16.9.2017)
- **Abbildung 2:** <http://abenteuer-universum.de/sterne/materie.html>
(Zugriff am 16.9.2017)
- **Abbildung 3:** http://images.slideplayer.org/2/850612/slides/slide_15.jpg
(Zugriff am 16.9.2017)
http://images.slideplayer.org/1/657181/slides/slide_32.jpg
(Zugriff am 16.9.2017)

- **Abbildung 4:** <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/46/Sternentwicklung.png>
(Zugriff am 2.10.2017)
- **Abbildung 5:** <http://www.eike-klima-energie.eu/klima-anzeige/teil-2-dynamisches-sonnensystem-die-tatsaechlichen-hintergruende-des-klimawandels/>
(Zugriff am 16.9.2017)
- **Abbildung 6:** Arnold Hansmeier; Faszination Astronomie - Ein topaktueller Einstieg für alle naturwissenschaftlich Interessierten; Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013; Seite 181
- **Abbildung 7:** Weiße Zwerge – Schwarze Löcher: Einführung in die relativistische Astrophysik ; Roman und Hannelore Sexl; veröffentlicht im Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg, April 1975
- **Abbildung 8:** Weiße Zwerge – Schwarze Löcher: Einführung in die relativistische Astrophysik ; Roman und Hannelore Sexl; veröffentlicht im Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg, April 1975
- **Abbildung 9:** <http://abenteuer-universum.de/sterne/sternentwick.html#ent>
(Zugriff am 16.9.2017)
- **Abbildung 10:** Weiße Zwerge – Schwarze Löcher: Einführung in die relativistische Astrophysik ; Roman und Hannelore Sexl; veröffentlicht im Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg, April 1975
- **Abbildung 11:** <https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Rel/EndstadienDerSterne/EndstadienDerSterne.pdf>
(Zugriff am 16.9.2017)
- **Abbildung 12:** Big Bang 8, Schulbuch; Martin Apolin; 1. Auflage; Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien 2008; Seite 90
- **Abbildung 13:** Bruno Putz: Faszination Physik 3+4 NEU. Linz: Veritas-Verlag 2015 (5. Aufl.), S. 258
- **Abbildung 14:** Bruno Putz: Faszination Physik 3+4 NEU. Linz: Veritas-Verlag 2015 (5. Aufl.), S. 262

- **Abbildung 15:** <http://www.wissenschaft-schulen.de/sixcms/media.php/1308/Zustandsgr%C3%B6%C3%9Fen.pdf> (Seite 3)
(Zugriff am 16.9.2017)
- **Abbildung 16:** <http://www.spektrum.de/magazin/einmaleins-der-sterne/857849>
(Zugriff am 16.9.2017)
- **Abbildung 17:** Physik Lektionen; Wessenberg-Raab; 1. Auflage 2004; öbv& hpt VerlagsgmbH & Co. KG, Wien 2004; Seite 29