



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Unstetige Dynamische Systeme - Eine Einführung

verfasst von / submitted by

Heyde Ye

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 482

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UniStG
UF Mathematik UniStG
UF Physik UniStG

Betreut von / Supervisor:

Mag.Dr.rer.nat. Roland Steinbauer

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Klassische Theorie	5
2.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen - Eine Begriffsbestimmung	5
2.2	Einfache Beobachtungen zu ODEs	7
2.3	Geometrische Interpretation von ODEs	9
2.4	Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz	12
2.5	Fehlende Regularität der rechten Seite	23
3	Lösungskonzept von Caratheodory	29
3.1	Lösungen im Sinne von Caratheodory	29
3.2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen im Sinne von Caratheodory . . .	32
3.3	Grenzen des Lösungskonzepts von Caratheodory	35
4	Lösungskonzept von Filippov	38
4.1	Lösungen im Sinne von Filippov	38
4.2	Existenz von Lösungen im Sinne von Filippov	41
4.3	Eindeutigkeit von Lösungen im Sinne von Filippov	44
5	Zusammenfassung aller Beispiele	50
A	Das Lebesgue-Integral	52

1 Einleitung

Diese Arbeit befasst sich mit unstetigen dynamischen Systemen. Technisch gesprochen handelt es sich dabei um gewöhnliche Differentialgleichungen mit unstetiger rechter Seite. Solche Gleichungen tauchen in einer Vielzahl von Anwendungen auf. Der Bogen spannt sich von der Physik bzw. Mechanik (unstetiger harmonischer Oszillator, Bewegung auf einer schiefen Ebene) über die Ingenieurwissenschaften (Regelungstechnik) bis zur Biomathematik (Räuber-Beute-Modelle).

Differentialgleichungen gehören ganz allgemein zu den mächtigsten Mitteln Naturvorgänge aber auch Vorgängen in den Humanwissenschaften zu beschreiben. Sie ergeben sich in natürlicher Weise in der Modellierung von Veränderungsprozessen verschiedener etwa physikalischer Größen zueinander. Differentialgleichungen beschreiben dabei den Zusammenhang einer gesuchten Funktion mit (einigen) ihrer Ableitung(en). Wir werden uns in dieser Arbeit ausschließlich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen, also dem Fall wo die sogenannte unabhängige Variable eindimensional ist. Dementsprechend treten in gewöhnlichen Differentialgleichungen nur gewöhnliche Ableitungen der gesuchten Funktion auf und nicht etwa partielle Ableitungen.

Ist der Anwender zuallererst am expliziten Lösen von Differentialgleichungen interessiert, so stellt die Mathematik eine Lösbarkeitstheorie zur Verfügung. Das ist insbesondere relevant, da es nicht immer möglich ist, eine explizite Lösung zu einer gegebenen Differentialgleichung auszurechnen. Die mathematische Existenztheorie stellt hingegen sicher, dass unter gewissen Voraussetzungen an die Gleichung Lösungen vorliegen bzw. dass diese eindeutig durch Anfangs- bzw. Randbedingungen festgelegt sind. Des Weiteren ermöglicht es die qualitative Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen Aussagen über das Verhalten der Lösungen zu machen ohne diese explizit zu bestimmen.

Diese mathematischen Theorien gehen zunächst davon aus, dass die auftretenden Funktionen “schön genug” sind, d.h. dass insbesondere die rechte Seite einer gewöhnlichen Differentialgleichung stetig oder sogar Lipschitz-stetig ist. Die zwei zentralen Sätze der klassischen Existenz- und Eindeigkeitstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen – der Satz von Peano und der Satz von Picard-Lindelöf – garantieren in diesem Falle die Existenz bzw. Eindeigkeit von Lösungen.

Im Anwendungszusammenhang ist diese “glatte” Theorie aber oft nicht ausreichend. Tatsächlich führen viele Modellierungen zu unstetigen rechten Seiten, wie wir im Verlaufe der Arbeit an einigen Beispielen explizit sehen werden. Viele weitere Beispiele in der Mechanik werden z.B. in [3] genannt. In solchen Fällen kann die klassische Theorie also nichts über die Existenz bzw. Eindeigkeit von Lösungen aussagen und es ist wünschenswert diese Theorie zu erweitern.

Der Kern einer solchen Erweiterung liegt in der Verallgemeinerung des Lösungskonzepts selbst. Werden im Rahmen der klassischen Theorie nur differenzierbare bzw. stetig-differenzierbare Funktionen als Lösungen zugelassen, so muss eine erweiterte Theorie zunächst klären, in welchem Sinne eine weniger reguläre Funktion eine Differentialgleichung erfüllen soll bzw. überhaupt kann. Hier gibt es natürlich eine Vielzahl von möglichen Auswegen

und wir werden in der vorliegenden Arbeit speziell zwei davon herausgreifen.

Als Erstes werden wir uns mit dem Lösungskonzept von Caratheodory befassen. Dieses stellt gewissermaßen eine minimale Erweiterung des klassischen Lösungskonzeptes unter Zuhilfenahme der Lebesgueschen Integrationstheorie dar. Statt der Differentialgleichung wird die klassisch äquivalente Integralgleichung betrachtet, die nicht nur differenzierbare, sondern nur absolut stetige Lösungen zulässt. Wir werden allerdings anhand von Beispielen sehen (Bewegung eines Körpers auf einer schiefen Ebene), dass dieses Lösungskonzept nicht allgemein genug ist, um einfache aber wichtige physikalische Phänomene korrekt zu beschreiben.

Das zweite Lösungskonzept, dass wir im Rahmen dieser Arbeit besprechen ist das von Filippov. Dieses geht über das Konzept von Caratheodory hinaus, indem es die Differentialgleichung durch eine sogenannte Differentialinklusion ersetzt. Das bedeutet, dass die Ableitung der Funktion an einer Stelle nicht etwa einen vorgegebenen Wert annehmen, sondern nur in einem bestimmten Wertebereich liegen muss, der aus der unstetigen rechten Seite konstruiert wird. Dieses Konzept ist etwa in der nicht-glatten Mechanik weit verbreitet und zeichnet sich durch seine Anwendungsorientierung aus.

Diese Arbeit wendet sich an Lehramtsstudierende des zweiten Studienabschnitts im Unterrichtsfach Mathematik. Die Inhalte der Grundvorlesungszyklen Analysis bzw. lineare Algebra werden vorausgesetzt. Zentrale Inhalte einer ersten Vorlesung über Differentialgleichungen werden im Rahmen der Arbeit wiederholt, um ein selbstständiges Lesen dieses Texts zu ermöglichen.

Zum Abschluss dieser Einleitung stellen wir den Inhalt dieser Arbeit etwas detaillierter dar. Kapitel 2 behandelt die klassische Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche die Grundlagen dieser Arbeit darstellt. In Abschnitt 2.1 erfolgt zuallererst eine Begriffsbestimmung. Dort wird geklärt, was unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung und ihrer Lösung genau verstanden wird. In Abschnitt 2.2 studieren wir das qualitative Verhalten von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen anhand eines einfachen, aber zugleich prototypischen Beispiels. Der darauffolgende Abschnitt 2.3 beschäftigt sich mit der geometrischen Interpretation von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wir werden sehen, dass das Lösen einer Differentialgleichung im geometrischen Sinne nichts anderes bedeutet als eine Lösungskurve zu einem gegebenen Richtungsfeld zu finden. In Abschnitt 2.4 kommen wir zum Hauptteil dieses Kapitels, wo wir die beiden zentralen Sätze in der klassischen Lösungstheorie vorstellen, nämlich den Satz von Peano, der durch die bloße Stetigkeit der rechten Seite der Differentialgleichung die Existenz einer Lösung garantiert, und den Satz von Picard-Lindelöf, der die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung durch das Hinzufügen einer Lipschitz-Bedingung garantiert. Zum Abschluss dieses Kapitels werden wir in Abschnitt 2.5 die Grenzen der klassischen Lösungstheorie aufzeigen. Dabei betrachten wir anwendungsrelevante Differentialgleichungen mit unstetiger rechter Seite und werden sehen, dass das „klassische“ Lösungskonzept dabei zu kurz greift.

Im 3. Kapitel stellen wir die Theorie von Caratheodory vor, die eine leichte Verallgemeinerung des klassischen Lösungskonzepts erlaubt. Dieses Lösungskonzept führen wir in Abschnitt 3.1 ein. Dabei wird der klassische Lösungsbegriff insofern abgeschwächt, also die Lösung die Differentialgleichung nur in fast allen Punkten (im Sinne des Lebesgue-Maßes) erfüllen muss. Die dafür benötigten Grundlagen der Lebesgue-Integrationstheorie sind im Anhang A zusammengestellt. stellt das Lösungskonzept von Caratheodory vor, die eine leichte Verallgemeinerung der klassischen Lösungstheorie darstellt. In Abschnitt 3.2 formulieren wir – analog zur klassischen Lösungstheorie – einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Caratheodory-Lösungen und beweisen diesen auch. Zum Abschluss dieses Kapitels beschäftigen wir uns in Abschnitt 3.3 mit den Grenzen des Lösungskonzepts von Caratheodory. Dabei werden wir einige Beispiele aus Kapitel 2 nochmal betrachten und sehen, dass das Lösungskonzept von Caratheodory weiterhin unseren Ansprüchen nicht ganz genügt.

Kapitel 4 stellt daher ein noch allgemeineres und auch anwendungsorientiertes Lösungskonzept vor, nämlich das Lösungskonzept von Filippov. In Abschnitt 4.1 erweitern wir abermals das Lösungskonzept. Nun wird nicht mehr verlangt, dass die Lösung die Differentialgleichung (fast überall) erfüllt, sondern der Geschwindigkeitsvektor in einer gewissen Menge liegt, die mit der unstetigen rechten Seite assoziiert wird; die Lösung erfüllt die Gleichung also nur mehr „approximativ“. Formal spricht man von einer Differentialinklusion und verwendet die Sprache der mengenwertigen Funktionen mit der wir uns ebenfalls weit auseinandersetzen werden. In Abschnitt 4.2 beschäftigen wir uns mit den Anfangsgründen der Existenztheorie für Filippov-Lösungen, wobei wir einen einfachen Existenzsatz formulieren werden. Zudem betrachten wir einige instruktive Beispiele. In Abschnitt 4.3 beschäftigen wir uns schließlich mit der Eindeutigkeit von Filippov-Lösungen. Wir formulieren dazu zwei einfache Eindeutigkeitssätze. Der erste Satz verwendet einseitige Lipschitz-Bedingungen und erinnert stark am Satz von Picard-Lindelöf. Der zweite Eindeutigkeitssatz ist sehr anwendungsorientiert und gilt für stückweise stetige rechte Seiten. Anhand von bereits betrachteten anwendungsorientierten Beispielen aus den vorherigen Kapiteln werden wir die Nützlichkeit des Filippov-Konzepts demonstrieren.

Beispiele spielen in unserer Darstellung der verschiedenen Lösungskonzepte eine wichtige Rolle. Insbesondere kehren wir immer wieder zu vier Schlüsselbeispielen (Beispiel A-D) zurück und betrachten sie von einem neuen Standpunkt aus. Im abschließenden 5. Kapitel stellen wir die im Text gewonnenen Erkenntnisse zu diesen Beispielen tabellarisch dar.

Schließlich geben wir im Anhang A eine kurze und konzise Zusammenfassung der Grundlagen der Lebesgueschen Integrationstheorie, die vor allem in den Kapiteln 3 und 4 benötigt wird.

2 Klassische Theorie

2.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen - Eine Begriffsbestimmung

Zuallererst beschäftigen wir uns mit der Frage, was eine Differentialgleichung bzw. eine gewöhnliche Differentialgleichung im Allgemeinen ist. In diesem Abschnitt orientieren wir uns stark an [15, Kapitel 1.2].

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung zwischen einer gesuchten Funktion und (einen) ihrer Ableitung(en), z.B.

$$m\ddot{x} + k\dot{x} = F \quad (1)$$

für eine Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit m, k, F konstant oder $F = F(x)$.

Die Terminologie gewöhnlicher Differentialgleichungen zielt darauf ab, dass nur gewöhnliche Ableitungen der gesuchten Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet werden – im Gegensatz zu partiellen Differentialgleichungen für Funktionen $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die partielle Ableitungen beinhalten, z.B. $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$.

Die genaue Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung und deren Lösung lautet wie folgt:

Definition 2.1.

- (i) Eine **gewöhnliche Differentialgleichung** [ordinary differential equation, ODE] ist eine Gleichung der Form

$$F(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}) = 0 \quad (2)$$

für die unbekannte Funktion x , welche k -mal differenzierbar auf J ist (mit $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall). Dabei ist $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion auf $U \subseteq \mathbb{R}^{2+k}$, offen und

$$x^{(j)}(t) := \frac{d^j x}{dt^j}(t) \quad (j \in \mathbb{N}) \quad (3)$$

bezeichnet die j -te Ableitung von x .

Wir nennen t die **unabhängige** und x die **abhängige** Variable.

Die höchste auftretende Ableitungsordnung von x (hier k) heißt **Ordnung** der ODE.

Falls $n > 1$ sprechen wir von einem **System von ODEs**.

- (ii) Eine **Lösung** von (2) ist eine Funktion ϕ , welche k -mal differenzierbar auf I ist, mit $I \subseteq J$, sodass $\forall t \in I$

$$F(t, \phi(t), \phi^{(1)}(t), \dots, \phi^{(k)}(t)) = 0 \quad (4)$$

gilt. Dies impliziert insbesondere, dass $\forall t \in I : (t, \phi(t), \phi^{(1)}(t), \dots, \phi^{(k)}(t)) \in U$.

Terminologie 2.2. In dieser Definition und auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird **immer** die nachstehende Terminologie verwendet, wobei U und V offene Teilmengen eines euklidischen Raumes bezeichnen und $0 \leq k$ ist.

- $C^k(U, V) := \{f : U \rightarrow V \mid f \text{ hat stetige Ableitungen bis zur Ordnung } k\}$
- $C^\infty(U, V) := \{f : U \rightarrow V \mid f \text{ hat stetige Ableitungen beliebiger Ordnung}\}$
- $C(U, V) := C^0(U, V)$
- $C^k(U) := C^k(U, \mathbb{R})$

Weiterverbreitet als (2) sind ODEs, die nach der höchsten Ordnung aufgelöst werden können, also Gleichung von der Form

$$x^{(k)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}) \quad (5)$$

mit $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ offen. Weiters lassen sich ODEs noch genauer klassifizieren.

Definition 2.3.

- (i) Eine ODE der Form (5) heißt **explizite ODE** der Ordnung k .
- (ii) Hängt f nicht von t ab (d.h. $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen) dann heißt (5) **autonom**, anderenfalls heißt (5) **nicht-autonom**.
- (iii) Ist f linear in den Variablen $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$, d.h. es gilt

$$f(t, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}) = g(t) + \sum_{j=0}^{k-1} f_j(t) y_j$$

mit $f_j, g \in C(U, \mathbb{R}^n)$ ($U \subseteq \mathbb{R}$ offen), so heißt (5) **linear**.

Im Folgenden geben wir einige Beispiele, wobei wir hier x' für $x^{(1)}$ und x'' für $x^{(2)}$ schreiben.

Beispiel 2.4.

- (i) Explizite ODEs sind etwa

$$x'' = x^2 - t - \sin(x), \quad (6)$$

$$x' + x = t^2 \quad (7)$$

- (ii) Explizite autonome ODEs sind etwa

$$x'' = \sin(x), \quad (8)$$

$$x' = ax \quad a \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

$$x' = ax(1 - x) \quad a \in \mathbb{R} \quad (10)$$

(iii) Explizite, nicht-autonome, lineare ODE ist etwa

$$x' = \sin t + (\cos t)x \quad (11)$$

Bemerkung 2.5. Jedes explizite System von ODEs (bzw. jede explizite ODE höherer Ordnung)

$$x^{(k)} = f(t, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}) \quad (12)$$

kann in ein System 1.Ordnung umgeschrieben werden. Dazu definieren wir die neuen unabhängigen Variablen $y = (x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)})$, wodurch wir das folgende System 1.Ordnung gewinnen:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ &\vdots \\ \dot{y}_{k-1} &= y_k, \\ \dot{y}_k &= f(t, y). \end{aligned} \quad (13)$$

Um ODEs bzw. Systeme von ODEs zu studieren, können wir uns also auf Systeme 1. Ordnung beschränken, welches wir im weiteren Verlauf der Arbeit auch tun werden. Daher werden wir ab jetzt immer folgende(s) (System von) ODE(s) betrachten

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (14)$$

mit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Unter einer Lösung von (14), auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ verstehen wir eine differenzierbare Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, die der Identität

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I \quad (15)$$

genügt.

2.2 Einfache Beobachtungen zu ODEs

Ist eine ODE gegeben, so ist es unser Ziel möglichst alles über die Lösung(en) herauszufinden. Neben dem expliziten Lösen einer Differentialgleichung, welches leider oft nicht möglich ist, kann ebenfalls, in Anlehnung an [11, Kapitel 1], das qualitative Verhalten der Lösungen studiert werden, ohne diese explizit zu kennen.

Dazu betrachten wir uns zunächst das einfachste und zugleich prototypische Beispiel einer ODE

$$x'(t) = ax(t), \quad (16)$$

für $x : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Eine Lösung dieser Gleichung kann schnell durch Berechnung gefunden werden: Sei $k \in \mathbb{R}$ dann ist die Funktion $x(t) = ke^{at}$ eine Lösung, denn tatsächlich gilt

$$x'(t) = ake^{at} = ax(t).$$

Außerdem existieren keine weiteren Lösungen, welches leicht gezeigt werden kann. Denn sei $u(t)$ irgendeine Lösung von (16). Wir berechnen

$$\frac{d}{dt}(u(t)e^{-at}) = u'(t)e^{-at} - au(t)e^{-at} = \quad (17)$$

$$= au(t)e^{-at} - au(t)e^{-at} = 0 \quad (18)$$

Daraus folgt, dass $u(t)e^{-at}$ konstant ist und wir definieren die Konstante $k := u(t)e^{-at}$. Somit gilt $u(t) = ke^{at}$. Damit haben wir mit $x(t) = ke^{at}$ alle Lösungen von (16) gefunden. Die Gesamtheit aller Lösungen einer Differentialgleichung bezeichnen wir als die **allgemeine Lösung** der Gleichung. Oft sind AnwenderInnen nicht an der allgemeinen Lösung interessiert, sondern an einer bestimmten Lösung. Dazu wird die ODE in Form eines sogenannten Anfangswertproblems formuliert:

$$x'(t) = ax(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (19)$$

dabei ist $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben.

Eine Lösung dieses Anfangswertproblems ist definiert als eine Lösung der ODE (16), die zusätzlich die sogenannte Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ erfüllt.

In unserem Fall ist die Konstante k aus der Lösung $x(t) = ke^{at}$ durch die Anfangsbedingung eindeutig festgelegt, denn damit diese die Anfangsbedingung erfüllt, muss $ke^{at_0} = x_0$ gelten und somit ist $k = x_0e^{-at_0}$. Oft wird $t_0 = 0$ gewählt; dann ist $k = x_0$.

Bemerkung 2.6. Es gibt eine sehr spezielle Lösung der Differentialgleichung (16) nämlich jene mit $k = 0$. Wir erhalten also die konstante Lösung $x(t) = 0$. Solche Lösungen bezeichnen wir als **Gleichgewichtslösungen** oder auch **Gleichgewichtspunkte** der Differentialgleichung.

Die Konstante a in der Gleichung (16) kann als Parameter angesehen werden. Wenn sich der Wert von a ändert, verändert sich die Gleichung und somit auch deren Lösungen. Das qualitative Verhalten der Lösungen wird sehr stark durch das Vorzeichen von a beeinflusst:

1. Gilt $a > 0$, dann gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at} = \infty$ für $k > 0$ bzw. $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at} = -\infty$ für $k < 0$.
2. Gilt $a = 0$, dann erhalten wir eine nur konstante Lösungen $x(t) = k$.
3. Gilt $a < 0$, dann ist $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at} = 0$, unabhängig von Vorzeichen von k .

Bemerkung 2.7. Wir sehen also für $a > 0$ bewegen sich alle Lösungen vom Gleichgewichtspunkt 0 weg, wohingegen für $a < 0$ sich alle Lösungen dem Gleichgewichtspunkt annähern. Wir bezeichnen im ersten Fall den Gleichgewichtspunkt als **Quelle**, im zweiten Fall als **Senke**. Dieses Verhalten kann auch durch **Phasenlinien** illustriert werden, wobei Gleichgewichte durch einen Punkt und das Verhalten der Lösungen um den Gleichgewichtspunkt durch Pfeile symbolisiert werden. Den Graph der Lösungen und die dazugehörige Phasenlinie von (16) für $a > 0$ bzw. für $a < 0$ zeigt Abbildung 1 bzw. Abbildung 2.

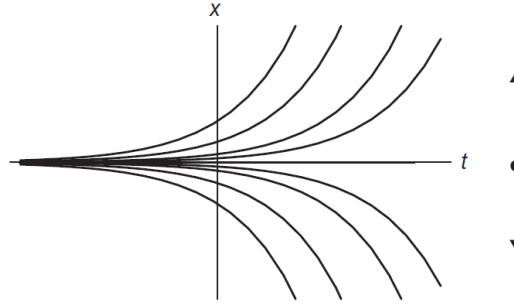


Abbildung 1: Der Graph der Lösungen und die dazugehörige Phasenlinie von (16) für $a > 0$ [11, Figure 1.1]

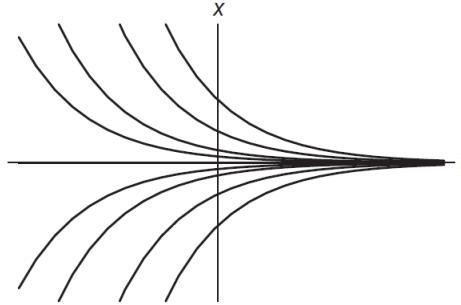


Abbildung 2: Der Graph der Lösungen und die dazugehörige Phasenlinie von (16) für $a < 0$ [11, Figure 1.1]

2.3 Geometrische Interpretation von ODEs

In diesem Abschnitt diskutieren wir die geometrische Interpretation von Differentialgleichungen, dabei folgen wir im Wesentlichen [2, Kapitel 1.5]. Wie am Ende von Abschnitt 2.1 angekündigt, beschäftigen wir uns nun mit folgenden n-dimensionalen System 1. Ordnung

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (20)$$

mit rechter Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Unter einer Lösung von (20), auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ verstehen wir definitionsgemäß eine differenzierbare Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, die der Identität

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I \quad (21)$$

genügt, und deren Graph $\Lambda := \{(t, x(t)) | t \in I\} \subseteq D$ eine differenzierbare Kurve, die sogenannte **Lösungskurve** oder **Integalkurve**, in D ist. Der Tangentialvektor $(1, x'(t))$ an eine solche Kurve Λ im Kurvenpunkt $(t_0, x(t_0))$, $t_0 \in I$ ist der Richtungsvektor der

approximierten Gerade (siehe Abbildung 3)

$$\begin{aligned} G_{t_0} &= \{(t, x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0)) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(t_0, x(t_0)) + (t - t_0)(1, x'(t_0)) : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Der Geschwindigkeitsvektor von Λ im Punkt $(t_0, x(t_0))$ ist also gerade der Vektor $(1, x'(t_0)) \in \mathbb{R}^{1+n}$. Dieser Vektor kann in der Form

$$(1, x'(t_0)) = (1, f(t_0, x(t_0)))$$

direkt durch die rechte Seite der Differentialgleichung (20) ausgedrückt werden. Ist nun ein beliebiger Punkt (t_0, x_0) aus D gegeben, so besitzen alle Lösungskurven von (20) durch den Punkt (t_0, x_0) – d.h. alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (23)$$

im Punkt (t_0, x_0) ein und denselben Richtungsvektor $(1, f(t_0, x_0))$. Da dies für jeden Punkt $(t_0, x_0) \in D$ gilt, ist folglich alleine das Vektorfeld

$$(t, x) \mapsto (1, f(t, x)), \quad \mathbb{R}^{1+n} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^{1+n} \quad (24)$$

bestimmend für den Verlauf der Lösungskurven von (20).

Für den Fall skalarer Differentialgleichungen (d.h. $n = 1$) ist daher eine Veranschaulichung im Zweidimensionalen möglich. Dazu zeichnet man durch jeden Punkt $(t, x) \in D$ ein kurzes Geradenstück einheitlicher Länge mit Richtungsvektor $(1, f(t, x))$ – d.h. mit Steigung $f(t, x)$ ein. Dieses Geradenstück wird oft **Linienelement** genannt. Die Gesamtheit aller Linienelemente heißt **Richtungsfeld**.

Das Lösen des Anfangswertproblems bedeutet also im geometrischen Sinne nichts anderes als im Punkt (t_0, x_0) beginnend eine Lösungskurve zu finden, die auf das Richtungsfeld passt. Die Gesamtheit aller Lösungskurven wird oft **Lösungsporträt** genannt.

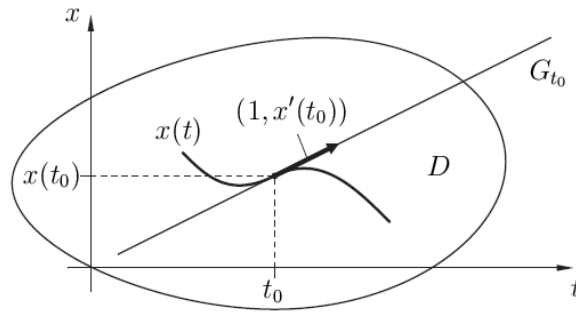


Abbildung 3: Lösungskurve mit Richtungsvektor $(1, x'(t))$ [2, Abb. 1.13]

Beispiel 2.8. Wir betrachten die skalare autonome Differentialgleichung

$$x' = x.$$

Kurven auf denen alle Linienelemente die gleiche Steigung besitzen heißen **Isoklinen**, welche oft von großem Nutzen sind. Exakter sind Isoklinen Kurven der Form

$$\{(t, x) \in D : f(t, x) = c\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Das zugehörige Richtungsfeld, die Isoklinen und die Lösungskurven sind in Abbildung 4 dargestellt. Wir sehen, dass die Unabhängigkeit der rechten Seite von t bewirkt, dass die horizontalen Geraden im $\mathbb{R}^2$ Isoklinen sind.

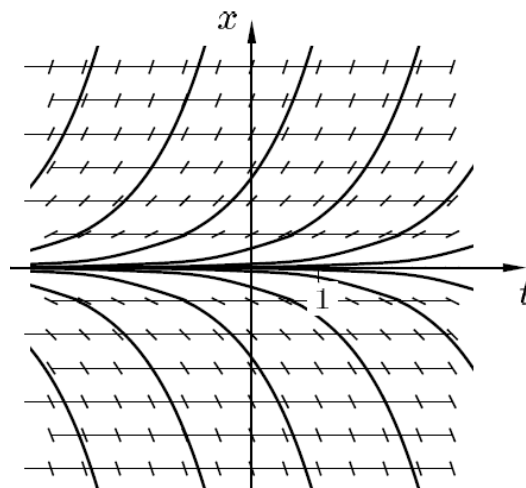


Abbildung 4: Richtungsfeld, Isoklinen und Lösungskurven der Differentialgleichung $x' = x$ [2, Abb. 1.15]

Beispiel 2.9. Im Falle der skalaren Differentialgleichung

$$x' = \ln t,$$

bewirkt die Unabhängigkeit der rechten Seite von x , dass eine in vertikal verschobene Lösungskurve wieder eine Lösungskurve ist. Darüber hinaus ist jede vertikale Gerade in $\mathbb{R}^2$ eine Isokline (siehe Abbildung 5).

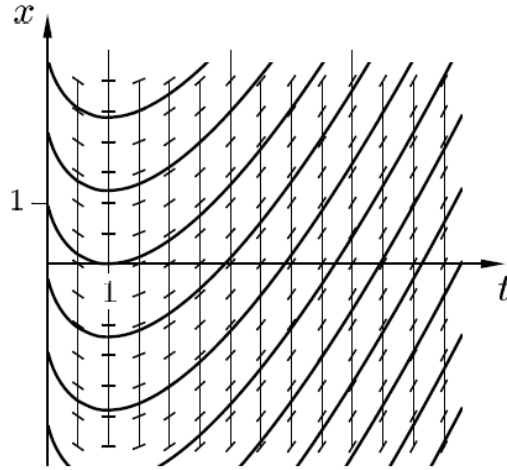


Abbildung 5: Richtungsfeld, Isoklinen und Lösungskurven der Differenzialgleichung $x' = \ln t$ [2, Abb. 1.14]

2.4 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz

In diesem Kapitel werden die beiden zentralen Sätze in der Lösungstheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen vorgestellt. Dieser Teil der Arbeit orientiert sich stark an [9, Kapitel 11/12] und [6, Kapitel II, §12].

Wieder betrachten wir das explizite System 1. Ordnung

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (25)$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x_0. \quad (26)$$

Dabei ist wieder $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(t_0, x_0) \in D$.

Wir suchen eine Lösung des Anfangswertproblems (25), (26) auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, also – wie auch im vorherigen Kapitel – eine differenzierbare Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, die der Identität

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I \quad \text{und} \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I \quad (27)$$

genügt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen resp. Anfangswertprobleme haben jedoch nicht immer eine Lösung und falls doch, so muss diese nicht eindeutig sein. Folgende zwei Beispiele sollen dies veranschaulichen.

Beispiel A. (Nicht-Existenz)

Wir betrachten ($t \in \mathbb{R}$)

$$x'(t) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (28)$$

Das zugehörige Richtungsfeld und die Phasenlinie sind in Abbildung 6 dargestellt. Für den Anfangswert $x(0) = 0$ existiert keine Lösung. Denn angenommen es existiert eine Lösung mit $x(0) = 0$. Genauer bedeutet dies, dass es eine differenzierbare Funktion $x : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $x(0) = 0$ und zusätzlich die Gleichung (28) erfüllt.

Daher gilt $x'(0) = -1$ und damit gibt es ein $\delta < \delta'$, sodass $x(t) < 0$ auf $(0, \delta')$, denn tatsächlich gilt

$$-1 = x'(0) = \lim_{t \searrow 0} \frac{x(t) - x(0)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{x(t)}{t}$$

und weil $t > 0$ muss $x(t) < 0$ für t nahe 0 gelten. Also gilt wegen (28) $x'(t) = 1$ auf $(0, \delta')$, was aber aufgrund des Nullstellensatzes der Differentialgleichung nicht möglich ist. Tatsächlich gilt (siehe [4, Seite 240, Korollar]), dass für eine Funktion x , die differenzierbar auf ein Intervall I ist, der Wertebereich der Ableitung $\{f'(x) | x \in I\}$ ein Intervall ist. Also gibt es keine Lösung des Anfangswertproblems.

Diesen Effekt kann man auch am Richtungsfeld (vgl. Abbildung 6) erkennen: Lösungskurven müssten bei $x = 0$ einen Knick haben, was ihrer Differenzierbarkeit widerspricht.

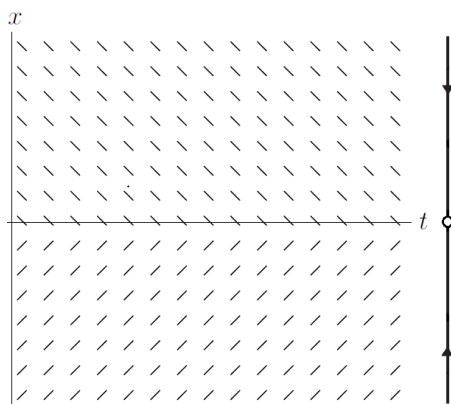


Abbildung 6: Richtungsfeld und Phasenlinie der Differentialgleichung (28)

Beispiel 2.10. (Nicht Eindeutigkeit)

Wir betrachten dazu das folgende Anfangswertproblem auf $I = [0, \infty)$:

$$x'(t) = \sqrt{x(t)} \quad (29)$$

$$x(0) = 0 \quad (30)$$

In diesem Fall können wir folgende 2 Lösungen angeben:

$$x_1(t) = \frac{t^2}{4} \quad (\text{tatsächlich gilt } x_1'(t) = \frac{1}{2}t = \sqrt{x_1(t)}) \quad \text{und} \quad (31)$$

$$x_2(t) = 0. \quad (32)$$

Diese beiden Beispiele zeigen, dass wir, um Lösbarkeit bzw. eindeutige Lösbarkeit zu erreichen Voraussetzungen an die rechte Seite von (25) (also an f) brauchen. In Beispiel 2.10 ist f in 0 nicht differenzierbar und in Beispiel A nicht einmal stetig. Wir werden im weiteren Verlauf dieses Kapitels sehen, dass das Anfangswertproblem (25), (26) unter milden Bedingungen mindestens eine und unter etwas schärferen auch nur eine Lösung zulässt.

Theorem 2.11. (Peano)

Das Anfangswertproblem (25), (26) besitzt auf dem Intervall $I = (t_0 - h, t_0 + h)$ eine (nicht notwendigerweise eindeutige) Lösung, falls f auf dem „Rechteck“

$$Q := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\}$$

stetig ist. Dabei ist $h = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$ mit $M := \sup_{(t,x) \in Q} |f(t, x)|$.

Beweis. [9, Satz 11.1, Kapitel 11] □

Die Existenz einer Lösung wird also nur durch die bloße Stetigkeit der rechten Seite f von (25) garantiert. Zusätzlich ist die Regularität der Lösung automatisch C^1 , statt nur differenzierbar. Genauer

Bemerkung 2.12. (Regularität der Lösung)

- (i) Ist x eine Lösung der ODE (25) und ist f stetig auf D (oder auch nur auf Q wie in Theorem 2.15), $f \in C(D)$, dann ist x sogar stetig differenzierbar, also $x \in C^1(I)$. Tatsächlich ist x als Lösung differenzierbar also insbesondere stetig und daher

$$x'(t) = f(t, x(t)) = f \circ (\text{id} \times x)(t)$$

stetig.

- (ii) Ist die Regularität der rechten Seite höher, so auch die der Lösung, genauer gilt ($k \geq 1$)

$$f \in C^k(D) \Rightarrow x \in C^{k+1}(I).$$

Um das einzusehen müssen wir obiges Argument lediglich iterieren, denn es gilt wegen (i) und $f \in C^k(D)$ ($k \geq 1$)

$$x'(t) = f(t, x(t)) \in C^1$$

und damit $x \in C^2(I)$ usw.

Durch das Hinzufügen einer sogenannten Lipschitz-Bedingung erhalten wir den Satz von Picard-Lindelöf, der sogar die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems (25), (26) garantiert. Doch zuerst zur Begriffsbestimmung:

Definition 2.13. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$

- (i) f heißt **Lipschitz-stetig** auf U falls eine (Lipschitz) Konstante $L \geq 0$ existiert, sodass $\forall x, y \in U$

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq L \|x - y\|_\infty \quad (33)$$

gilt.

- (ii) f heißt **lokal Lipschitz-stetig** auf U , falls jeder Punkt $x \in U$ eine Umgebung U' ($x \in U' \subseteq U$) besitzt, sodass $f|_{U'}$ Lipschitz-stetig ist.

Hier bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ die Supremums- bzw. Unendlichkeitsnorm einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\|\cdot\|_\infty := \sup_{x \in U} |f(x)|.$$

Dabei ist $|f(x)|$ die 2-Norm in $\mathbb{R}^m$. Weiters bezeichnet $f|_{U'}$ die Einschränkung der Funktion f auf $U' \subseteq U$.

Bemerkung 2.14. Wenn eine Funktion Lipschitz-stetig ist, bedeutet dies also, dass ihre Funktionswerte nicht weiter auseinander liegen können, als die entsprechenden Argumente mal einer fixen Konstante L . Oft bezeichnet man daher Lipschitz-stetige Funktionen auch als **dehnungsbeschränkt**.

Darüber hinaus können wir die Bedeutung der Lipschitz-Stetigkeit auch klar veranschaulichen. Dazu formen wir die Ungleichung (33) etwas um und betrachten sie in der Form

$$\frac{\|f(x) - f(y)\|_\infty}{\|x - y\|_\infty} \leq L. \quad (34)$$

Die linke Seite von (34) entspricht dem Differenzenquotienten und gibt die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ an. Dies bedeutet also, dass bei einer Lipschitz-stetigen Funktion f eine konstante Zahl L gefunden werden kann, sodass die

Steigung aller Sekanten, die wir durch ihren Graphen legen, kleiner oder gleich L ist. Insbesondere – falls f differenzierbar ist – bedeutet dies, dass die Ableitung von f beschränkt ist. Tatsächlich muss eine Lipschitz-stetige Funktion nicht differenzierbar sein. Als Gegenbeispiel dient einfach $f(x) = |x|$ das auf ganz $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L = 1$ ist, aber bekanntlich in $t = 0$ nicht differenzierbar.

Theorem 2.15. (*Picard-Lindelöf*)

Das Anfangswertproblem (25), (26) hat auf dem Intervall $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ eine eindeutige Lösung, falls f die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $f : D \supseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig.
- (ii) Es gibt ein „Rechteck“ $Q := \{(t, x) \in D \mid |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\} \subseteq D$ auf dem f eine Lipschitz-Bedingung bzgl. x erfüllt, d.h.

$$\exists L : |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2| \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in Q.$$

Dabei ist $h := \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$ mit $M = \sup_{(t,x) \in Q} |f(t, x)| =: \|f\|_{\infty, Q}$.

Eine ökonomische Art den Satz von Picard-Lindelöf zu beweisen besteht in der Verwendung eines Fixpunktarguments, genauer des Banachschen Fixpunktsatzes (oder einer leichten Verallgemeinerung, des Weissigerschen Fixpunktsatzes). Wir werden diesen Beweis im Folgenden führen, benötigen zuvor aber noch einige Vorbereitungen.

Definition 2.16.

- (i) Ein **metrischer Raum** ist eine Menge X zusammen mit einer Distanzfunktion (Metrik) $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X; \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$$

$$(M3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$$

- (ii) Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt **Cauchyfolge** falls

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geq N : d(x_n, x_m) < \epsilon$$

- (iii) Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt **konvergent** gegen x (den Grenzwert von $(x_n)_n$) falls

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N : d(x_n, x) < \epsilon.$$

Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

- (iv) Ein **metrischer Raum** heißt **vollständig**, falls jede Cauchyfolge konvergiert.

Theorem 2.17. (*Banachscher Fixpunktsatz*)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $T : X \rightarrow X$ eine Kontraktion, d.h. $\exists K$ mit $0 < K < 1$ sodass:

$$d(Tx, Ty) \leq Kd(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Dann besitzt T einen eindeutigen Fixpunkt z , d.h. $\exists! z \in X$ mit

$$Tz = z.$$

Außerdem gilt $z = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x$ für jeden beliebigen Startpunkt $x \in X$.

Beweis. [6, Satz 1, Kapitel 8] □

Mithilfe dieses Werkzeugs kann nun der Satz von Picard-Lindelöf ohne weitere Umwege bewiesen werden (siehe etwa auch [17, Satz I, §6, Kapitel II]).

Wir werden in diesem Beweis eine skalierte Version der Maximumsnorm verwenden. Sei dazu $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Wir definieren auf $C(I, \mathbb{R}^n)$ für ein beliebiges $L > 0$

$$\|x\|_0 := \sup_{t \in I} |x(t)| e^{-2Lt}.$$

Hier haben wir die 2-Norm auf $\mathbb{R}^n$ wieder mit $|\cdot|$ bezeichnet. Die Norm $\|\cdot\|_0$ ist äquivalent zur Maximumsnorm $\|x\|_\infty = \sup_{t \in I} |x(t)|$, d.h. $\exists C_1, C_2 > 0$ sodass

$$C_1 \|x\|_\infty \leq \|x\|_0 \leq C_2 \|x\|_\infty.$$

Tatsächlich gilt auf I , $\sup_{t \in I} e^{-2Lt} = e^{-2aL}$ und $\inf_{t \in I} e^{-2Lt} = e^{-2bL}$ und daher

$$e^{-2bL} \|x\|_\infty \leq \|x\|_0 \leq \|x\|_\infty e^{-2aL}.$$

Deswegen sind alle Fragen bzgl. der Konvergenz auf $C(I)$ $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_\infty$ gleichwertig (vgl. [10, Abschnitt 109]). Insbesondere gilt offensichtlich

$$x_n \rightarrow x \quad \text{bzgl.} \quad \|\cdot\|_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n \rightarrow x \quad \text{bzgl.} \quad \|\cdot\|_\infty.$$

Im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf werden wir auf dem Raum $(C(I), \|\cdot\|_0)$ arbeiten. Dieser ist wie auch $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum, also ein vollständiger normierter Vektorraum. Genauer bedeutet das, dass $C(I)$ mit der Metrik $d(x, y) = \|x - y\|_\infty$ bzw. der Metrik $d_0(x, y) = \|x - y\|_0$ ein vollständiger metrischer Raum ist (vgl. [10, Satz 109.5]). Des Weiteren werden wir eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq C(I)$ betrachten; diese ist als abgeschlossene Menge eines Banachraums selbst ein vollständiger metrischer Raum – aber kein Vektorraum und daher kein Banachraum mehr! Denn sei (x_n) eine Cauchy-Folge in A dann auch in $C(I)$ und weil $C(I)$ vollständig ist $\exists x := \lim x_n$ in $C(I)$. Da A abgeschlossen ist folgt, dass $x \in A$.

Beweis von Theorem 2.15: Zuerst schreiben wir das Anfangswertproblem (25), (26) in die (wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung) äquivalente Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (35)$$

um. Sei außerdem h wie im Theorem 2.15 definiert. Wir betrachten den Integraloperator

$$(Tz)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds$$

der aber leider nicht auf dem ganzen vollständig metrischen Raum $(C([t_0 - h, t_0 + h]), \|\cdot\|_0)$ definiert ist: f ist ja nur auf $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ definiert und um die Verknüpfung $f(t, z(t))$ zu definieren muss $(s, z(s))$ mit $s \in [t_0 - h, t_0 + h]$ in D liegen. Wir werden sogar benötigen, dass $(s, z(s))$ mit $s \in [t_0 - h, t_0 + h]$ in Q liegt und daher definieren wir die Teilmenge

$$A := \{z \in C([t_0 - h, t_0 + h]) : \|z - x_0\|_\infty \leq Mh\} \quad (36)$$

von $(C([t_0 - h, t_0 + h]), \|\cdot\|_0)$.

- (1) A ist eine abgeschlossene Teilmenge im Banachraum $(C([t_0 - h, t_0 + h]), \|\cdot\|_0)$ und daher ein vollständig metrischer Raum (vgl. die Bemerkung vor dem Beweis).
- (2) T ist auf A definiert, denn sei $z \in A$ dann gilt für alle $s \in [t_0 - h, t_0 + h]$ wegen der Bedingung an h , dass

$$|z(s) - x_0| \leq Mh \leq \beta \quad (37)$$

und somit ist $(s, z(s)) \in Q \subseteq D$ und daher ist die Verknüpfung $f(s, z(s))$ für alle $s \in [t_0 - h, t_0 + h]$ definiert.

- (3) T ist eine *Selbstabbildung* auf A , d.h. $T(A) \subseteq A$, denn sei $z \in A$ und $t, t' \in [t_0 - h, t_0 + h]$ dann gilt

$$|(Tz)(t) - (Tz)(t')| \leq \int_t^{t'} |f(s, z(s))| ds \leq M |t' - t| \rightarrow 0 \quad \text{für } t' \rightarrow t, \quad (38)$$

und daher ist Tz stetig und insbesondere $Tz \in C([t_0 - h, t_0 + h])$. Weiters sei $z \in A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ dann gilt

$$|(Tz)(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, z(s))| ds \leq Mh \quad (39)$$

und damit $\|Tz - x_0\|_\infty \leq Mh$ und daher $Tz \in A$.

- (4) T ist eine *Kontraktion* auf $(A, \|\cdot\|_0)$, denn seien $z, y \in A$ dann gilt für alle $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ wegen der Lipschitz-Bedingung an f

$$\begin{aligned}
|Tz(t) - Ty(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, z(s)) - f(s, y(s))| ds \\
&\leq \int_{t_0}^t L |z(s) - y(s)| e^{-2Ls} e^{2Ls} ds \\
&\leq \sup_{s \in [t_0 - h, t_0 + h]} |z(s) - y(s)| e^{-2Ls} L \int_{t_0}^t e^{2Ls} ds \\
&\leq \|z - y\|_0 L \left(\frac{e^{2Lt}}{2L} - \frac{e^{2Lt_0}}{2L} \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \|z - y\|_0 e^{2Lt}
\end{aligned}$$

Daraus folgt aber sofort

$$\|Tz - Ty\|_0 \leq \frac{1}{2} \|z - y\|_0$$

und somit ist T eine Kontraktion auf $(A, \|\cdot\|_0)$.

- (5) Nun folgt sofort aus dem Banachschem Fixpunktsatz die Existenz eines eindeutigen $x \in A$ mit $Tx = x$, d.h.

$$x(t) = Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (40)$$

Also haben wir wie behauptet die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (25), (26)

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{auf} \quad [t_0 - h, t_0 + h] \quad (41)$$

gefunden.

□

Bemerkung 2.18. (Geometrische Bedeutung der Eindeutigkeit)

Der Satz von Picard-Lindelöf liefert uns also lokale Existenz und Eindeutigkeit auf einem Intervall $[t_0 - h, t_0 + h]$. Geometrisch bedeutet die Eindeutigkeit, dass sich Lösungen nicht kreuzen, berühren oder ineinander einmünden können. Wäre das nämlich der Fall, so können wir im „bösen Punkt“ ein neues Anfangswertproblem starten und sehen, dass es gar keinen Kreuzungs-, Berühr- oder Einmündungspunkt geben kann.

Eine natürliche Fragestellung ist nun, ob diese lokale Lösung zu einer Lösung auf einem größeren Intervall fortgesetzt werden kann, und ob eine maximale Fortsetzung dieser lokalen Lösung existiert. Tatsächlich lässt sich zeigen, dass das Anfangswertproblem (25), (26) eine eindeutige nicht fortsetzbare Lösung besitzt, sofern f den Bedingungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt. Genauer gilt folgendes Theorem:

Theorem 2.19. Eine Funktion $f : D \supseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ erfülle die Bedingungen von Theorem 2.15.

- (i) Seien x_1, x_2 lokal eindeutige Lösungen des Anfangswertproblems (25), (26) auf den offenen Intervallen I_1, I_2 und sei (t_-, t_+) das maximale offene Intervall auf dem $x_1 = x_2$ gilt, dann ist

$$(t_-, t_+) = I_1 \cap I_2$$

D.h. stimmen zwei Lösungen irgendwo überein, dann schon auf ihrem gemeinsamen Existenzbereich.

- (ii) Das Anfangswertproblem (25), (26) hat eine eindeutige Lösung definiert auf einem maximalen offenen Lösungsintervall $I_{(t_0, x_0)}$.

Beweis.

- (i) Indirekt angenommen es gilt $(t_-, t_+) \not\subseteq I_1 \cap I_2$. Sei dazu $t_+ < T_+$ und $I_1 \cap I_2 = (T_-, T_+)$, d.h. $x_1(t) = x_2(t)$ auf (t_0, t_+) . Da die Lösungen stetig sind folgt $x_1(t_+) = x_2(t_+)$.

Nun betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_+) = x_1(t_+) = x_2(t_+)$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf (Theorem 2.15) gibt es eine eindeutige Lösung $x(t)$ auf einem Intervall um t_+ . Dies widerspricht aber der Tatsache, dass t_+ maximal ist. Daher ist $t_+ = T_+$.

Analoges gilt für t_- .

- (ii) Seien x_1, x_2 Lösungen wie in (i), dann können wir diese zu einer Lösung

$$\begin{cases} x_1(t), & t \in I_1 \\ x_2(t), & t \in I_2 \end{cases}$$

„verkleben“ und erhalten so eine Lösung auf $I_1 \cup I_2$. Diese Prozedur können wir beliebig oft wiederholen, bis wir ein maximales Lösungsintervall $I_{(t_0, x_0)}$ erhalten.

□

Bemerkung 2.20.

- (i) Die Prozedur im Beweis von Theorem 2.19 (ii) funktioniert nur, falls wir eine entsprechende Lösung zum Verkleben haben. Im Allgemeinen ist das Anfangswertproblem (25), (26) jedoch nicht global lösbar, d.h. $I_{(t_0, x_0)} \subsetneq \mathbb{R}$ (siehe Beispiel 2.21 unten). Was genau läuft beim Verkleben schief?

Angenommen wir haben eine Lösung des Anfangswertproblems (25), (26) auf I . Dann können wir in jedem Punkt $(t, x(t))$, $t \in I$ ein neues Anfangswertproblem starten. Allerdings könnte unser „lösungserzeugendes Rechteck“ Q aus dem Satz von Picard-Lindelöf (Theorem 2.15) um $(t, x(t))$ ein empfindlich kleines h und somit nur einen kleinen „Gewinn“ über t hinaus ausspucken, sodass die ganze Prozedur überflüssig ist.

- (ii) Im Allgemeinen ist das maximale offene Lösungsintervall viel größer als das Existenzintervall aus Picard-Lindelöf (Theorem 2.15), wie auch das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2.21. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x) = x^2, \quad x(0) = 1. \quad (42)$$

Dieses besitzt folgende eindeutige Lösung:

$$x(t) = \frac{1}{1-t} \quad (\text{tatsächlich gilt } x'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} = x(t)^2) \quad (43)$$

Offensichtlich divergiert $x(t)$ für $t \rightarrow 1$. Diese Lösung existiert also nicht global, sondern nur auf dem maximalen Intervall $(-\infty, 1)$, obwohl die rechte Seite der ODE, also die Funktion $x \rightarrow x^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Wir werden nun außerdem das Existenzintervall aus dem Satz von Picard-Lindelöf (Theorem 2.15) für dieses Beispiel berechnen. Dort ist das Existenzintervall gegeben durch $I = [t_0 - h, t_0 + h]$. Dabei ist $h := \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$ mit $M = \sup_{(t,x) \in Q} f(x)$. In diesen Beispiel ist $\alpha = \infty$ da $f(t, x) = x^2$ unabhängig von t ist. Das „Rechteck“ Q auf dem f eine Lipschitz-Bedingung erfüllt ist gegeben durch

$$Q = \{x : |x - 1| \leq \beta\}.$$

Somit ist

$$M = \sup_{|x-1| \leq \beta} x^2 = (\beta + 1)^2.$$

Um das maximal mögliche h zu berechnen, betrachten den Ausdruck

$$\frac{\beta}{M} = \frac{\beta}{(\beta + 1)^2} =: g(\beta).$$

Dieser ist maximal bei $\beta = 1$, denn tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} g'(\beta) &= \frac{(\beta + 1)^2 - \beta 2(\beta + 1)}{(\beta + 1)^4} \\ &= \frac{\beta + 1 - 2\beta}{(\beta + 1)^3} \\ &= \frac{1 - \beta}{(\beta + 1)^3} \end{aligned}$$

Also ist $g'(\beta)$ genau dann 0 wenn $\beta = 1$ ist.

Somit erhalten wir $h = g(\beta = 1) = \frac{1}{4}$ und daher ist das Existenzintervall aus dem Satz von Picard-Lindelöf gegeben durch $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Wir sehen, dass es – sowohl nach links als auch nach rechts – sehr viel kleiner ist als das maximale Existenzintervall $(-\infty, 1)$.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wenden wir uns noch einmal der Frage der Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen zu.

Bemerkung 2.22. (ODEs mit getrennten Variablen)

Das Beispiel 2.10 zeigt deutlich, dass bei Fehlen der Lipschitz-Bedingung die Eindeutigkeit verloren gehen kann. Tatsächlich gilt dort $f(x) = \sqrt{x}$ und somit $f'(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow 0$) und daher ist f nicht Lipschitz-stetig auf $[0, \infty)$ (vgl. Bemerkung 2.14).

Eine ODE muss jedoch die Lipschitz-Bedingung nicht zwingend erfüllen, um eine eindeutige Lösung zu besitzen, denn ODEs vom Typ getrennter Variablen

$$x'(t) = f(t)g(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (44)$$

besitzen eine eindeutige Lösung, sofern f und g stetige Funktionen sind und $g \neq 0$ gilt. Genauer gilt folgender Satz:

Satz 2.23. Seien $x_0 \in I_x \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in I_t \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $g : I_x \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I_x$, $f : I_t \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann besitzt das Anfangswertproblem (44) in einer Umgebung von t_0 eine eindeutige Lösung. Sie ergibt sich durch Auflösen der Gleichung

$$\int_{x_0}^x \frac{ds}{g(s)} = \int_{t_0}^t f(s) ds \quad (45)$$

nach x .

Beweis. [9, Satz 8.1, Kapitel II] □

Bemerkung 2.24. Betrachten wir folgende Spezialfälle von Satz 2.23.

- (i) Ist $g(x) = 1$, dann entspricht Satz 2.23 dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
- (ii) Ist $f(t) = 1$, dann erhalten wir eine autonome ODE, d.h. der Satz 2.23 garantiert auch für autonome ODEs die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung, sofern die rechte Seite g stetig ist und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I_x$ gilt.

Im Folgenden werden wir uns ein weiteres Beispiel einer ODE betrachten, dessen Vektorfeld weder den Bedingungen des Satzes von Picard-Lindelöf, noch den Bedingungen im Satz 2.23 genügen, aber dennoch eine eindeutige Lösung besitzt.

Beispiel 2.25. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x(t)) = \begin{cases} -x \log x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x \log(-x), & x < 0 \end{cases}, \quad x(0) = x_0. \quad (46)$$

Der Graph von f ist in Abbildung 7 dargestellt. Das Vektorfeld ist auf ihrer gesamten Definitionsmenge stetig und lokal Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, aber nicht lokal Lipschitz-stetig in 0, da

$$f'(x) = \begin{cases} -\log x - 1, & x > 0 \\ -\log(-x) - 1, & x < 0 \end{cases}$$

und daher gilt $f'(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 0$. Die rechte Seite der ODE genügt deswegen nicht den Bedingungen des Satzes von Picard-Lindelöf. Jedoch genügt diese auch nicht den Bedingungen im Satz 2.23, da $f(0) = 0$. Außerdem hat diese autonome ODE eine eindeutige Lösung für jede Anfangsbedingung. Denn für $x_0 > 0$ ist die Lösung gegeben durch

$$x_1(t) = \exp(\log x_0 \exp(-t))$$

auf dem maximalen Intervall $[0, \infty)$, wohingegen für $x_0 < 0$ die Lösung durch

$$x_2(t) = -\exp(\log(-x_0) \exp(t))$$

auf dem Intervall $[0, \infty)$ gegeben ist. Diese Lösungen sind eindeutig, da sie nur in Bereichen verlaufen, wo f lokal Lipschitz-stetig ist. Tatsächlich gilt $x_i(t) \neq 0$ für alle t und $i = 1, 2$. Ist schließlich $x_0 = 0$, dann ist $x(t) = 0$ auf $[0, \infty)$ eine maximale Lösung und auch eindeutig, da sie nicht an x_1 oder x_2 „gestückelt“ werden kann, diese erreichen ja $x_i(t) = 0$ nicht.

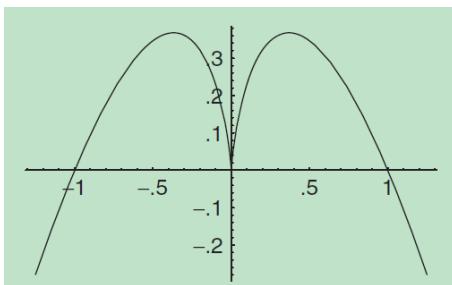


Abbildung 7: Graph der Funktion f aus Beispiel 2.25 [3, Figure 5(d)]

2.5 Fehlende Regularität der rechten Seite

Jetzt in Richtung des Hauptthemas der Arbeit werden wir, in Anlehnung an [3], Differentialgleichungen mit unstetiger rechter Seite genauer betrachten, denn für diese gelten die klassische Existenz- und Eindeutigkeitsätze nicht mehr – sie beruhen ja auf die Stetigkeit der rechten Seite. Dies werden wir in diesen Abschnitt genauer untersuchen und werden auf die Grenzen des klassischen Lösungsbegriffes stoßen. Blicken wir dazu nochmal auf den vorherigen Abschnitt 2.4 zurück, wo wir das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (47)$$

mit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(t_0, x_0) \in D$, betrachtet haben. Ist f zumindest stetig, so haben wir im Rahmen der klassischen Lösungstheorie gearbeitet. Erneuern wir uns außerdem an den dort eingeführten **klassischen Lösungsbegriff**: Unter einer Lösung von (47) auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ verstehen wir eine differenzierbare Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, die der Identität

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I \quad \text{und} \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I \quad (48)$$

genügt. Falls f stetig ist – wie in Bemerkung 2.12 bereits erläutert – folgt sofort, dass die klassische Lösung eine stetig differenzierbare Funktion sein muss. Im Kontext von ODEs mit nicht stetiger rechter Seite bezeichnet man daher meist eine Lösung schon als klassisch, falls sie stetig differenzierbar ist (vgl.[3]). Dieses werden wir im Folgenden auch tun. Die zwei zentralen Sätze der klassischen Lösungstheorie (siehe Theorem 2.11 bzw. Theorem 2.15) garantieren uns zum einen die Existenz und zum anderen sogar Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für das Anfangswertproblem (47). Das Beispiel A zeigt uns, dass durch das Fehlen der Stetigkeit die Existenz verloren gehen kann. Das muss aber nicht so sein, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel B. Wir betrachten

$$x'(t) = -\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases} \quad (49)$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung ist unstetig in 0. Dennoch existiert für jede Anfangsbedingung eine sogar eindeutige klassische Lösung. Denn für $x_0 > 0$ ist die Lösung gegeben durch $x(t) = x_0 - t$ auf dem maximalen Intervall $[0, x_0)$, wohingegen für $x_0 < 0$ die Lösung durch $x(t) = x_0 + t$ auf dem maximalen Intervall $[0, -x_0)$ gegeben ist. Wenn $x_0 = 0$, dann ist $x(t) = 0$ die Lösung auf dem maximalen Intervall $[0, \infty)$. In den ersten beiden Fällen garantiert der Satz von Picard-Lindelöf die Eindeutigkeit der Lösung: er muss nur auf einen eingeschränkten Definitionsbereich angewendet werden. Im letzten Fall ist die Eindeutigkeit eine Konsequenz der Forderung, dass die Lösung x eine stetig differenzierbare Funktion sein muss. Darüber hinaus gibt es keine weitere differenzierbare Lösung mit $x(0) = 0$, was wieder aus den Nullstellensatz der Differentialrechnung folgt (siehe Beispiel A). Das dazugehörige Richtungsfeld und die Phasenlinie sind in Abbildung 8 dargestellt.

Obwohl sich die Richtungsfelder von Beispiel A und Beispiel B kaum voneinander unterscheiden (vgl. Abbildung 6 und Abbildung 8) – nämlich nur in $x = 0$ – existiert für ersteres keine , aber für zweiteres sogar eine eindeutige Lösung. Der eigentliche Grund dafür ist, dass $x(t) = 0$ eine Gleichgewichtslösung von (49) ist, das Vektorfeld in Beispiel A aber keine Gleichgewichtslösung besitzt.

Insbesondere besitzt die ODE (49) klassische Lösungen, weil die rechte Seite im Unterschied zum Beispiel A die Lösung nicht zwingt, die Unstetigkeitsstelle zu passieren. Tatsächlich wird sie entweder vermieden oder gar nicht verlassen.

Falls die rechte Seite nämlich die Lösung zwingt die Unstetigkeitsstelle zu passieren, kann sie keine klassische (d.h. stetig differenzierbare) Lösung sein. In der Tat würde dann gelten

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

und falls f in einem Punkt $(t, x(t))$, der von der Lösungskurve passiert wird unstetig ist, impliziert das sofort die Unstetigkeit von x' , die damit keine klassische Lösung mehr ist.

Um sinnvoll über Lösungen von ODEs mit unstetiger rechter Seite sprechen zu können, liegt es also nahe den Lösungsbegriff zu erweitern und nicht nur klassische Lösungen zuzulassen. Diesen Weg werden wir in den folgenden beiden Kapiteln beschreiben, wo wir das Lösungskonzept von Caratheodory und Filippov kennenlernen werden.

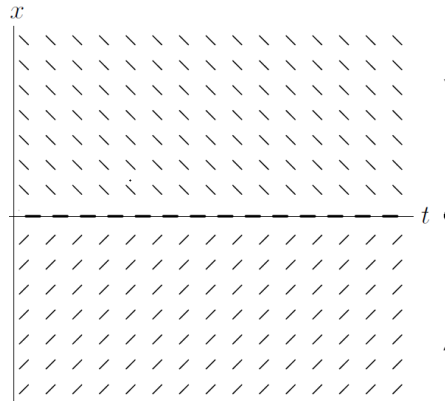


Abbildung 8: Richtungsfeld und Phasenlinie der Differenzialgleichung (49)

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch zwei explizite Beispiele aus der Mechanik betrachten, die auch im Anwendungskontext aufzeigen, dass der klassische Lösungsbegriff zu restriktiv ist um beobachtetes physikalisches Verhalten zu beschreiben.

Beispiel C. (Bewegung auf der schiefen Ebene mit Reibung)

Wir betrachten einen Körper, der unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer schiefen Ebene mit Neigung $\theta > 0$ hinuntergleitet. Dabei orientieren wir uns stark an [3, Beispiel 2]. Während sich der Körper bewegt wirkt die Reibungskraft F in die der Bewegung entgegengesetzte Richtung (siehe Abbildung 9). Laut dem sogenannten Coulomb'schen Reibungsmodell ist F proportional zur Kontaktkraft mit Proportionalitätsfaktor ν (Reibungskoeffizient) und insbesondere unabhängig von der Geschwindigkeit des Körpers – F ist dieser jedoch entgegengerichtet. Dieses Modell führt auf die folgende ODE

$$\dot{v}(t) = g(\sin \theta) - \nu g(\cos \theta) \operatorname{sign}(v(t)), \quad (50)$$

wobei v die Geschwindigkeit des Körpers, g die Erdbeschleunigung ($\approx 9,81 \text{ms}^{-2}$) und wieder

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

die Vorzeichenfunktion ist. Aufgrund ihres Auftretens ist die rechte Seite der ODE unstetig.

Experimentell lässt sich folgendes Verhalten des Körpers feststellen: Abhängig vom Reibungskoeffizienten ν (und Neigungswinkel θ) kann es vorkommen, dass der Körper aufgrund

der Reibungskraft zum Stillstand kommt, siehe auch das Phasenportrait, Abbildung 10. Während bei kleinen Reibungskoeffizienten die Bewegung nicht stoppt, führt ein großer Reibungskoeffizient zum Stoppen.

So ein Verhalten kann aber nicht durch eine klassische Lösung beschrieben werden. Denn angenommen v ist eine stetig differenzierbare Lösung mit $v(t') = 0 = \dot{v}(t')$, dann wäre $\sin(\theta) = 0$ und somit $\theta = 0$, was unserer Annahme $\theta > 0$ widerspricht.

Bemerkung 2.26. Das Beispiel C besitzt zwar keine klassische Lösungen, die das gewünschte Verhalten beschreiben, jedoch sehr wohl klassische Lösungen für positive Anfangsgeschwindigkeiten, die das Verhalten vor dem Stillstand beschreiben, d.h. es existiert eine klassische Lösung auf einem beschränkten Intervall mit der Anfangsbedingung $\dot{v}(0) = v_0 > 0$, nämlich

$$v(t) = t \cdot [g(\sin \theta) - \nu g(\cos \theta) \operatorname{sign}(v(t))] + v_0.$$

Dies ist eine klassische Lösung, solange $v(t) > 0$ ist. Wir erhalten daher das maximale Lösungsintervall $[0, \frac{-v_0}{g(\sin \theta) - \nu g(\cos \theta) \operatorname{sign}(v(t))})$.

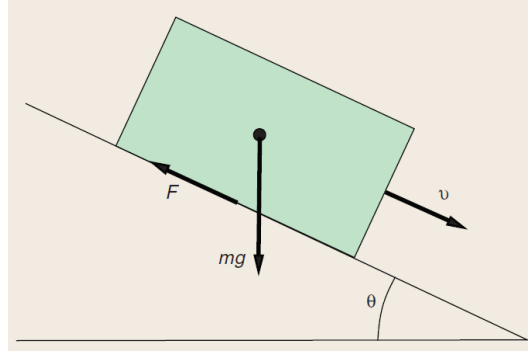


Abbildung 9: Bewegung auf der schiefen Ebene mit Reibung [3, Figure 2(a)]

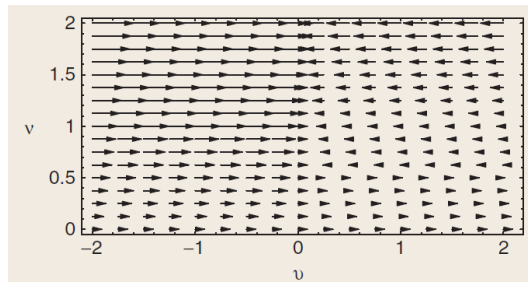


Abbildung 10: Phasenportrait der Differentialgleichung (50) [3, Figure 2(b)]

Beispiel D. (Unstetiger Harmonischer Oszillator)

Wir betrachten in diesem Beispiel eine Masse, die einer unstetigen Federkraft ausgesetzt ist (siehe Abbildung 11). Dabei orientieren wir uns stark an [3, Beispiel 3]. In Ruhelage $x = 0$ übt die Feder keine Kraft auf die Masse aus. Bewegen wir die Masse nach rechts, d.h. für $x > 0$, übt die Feder eine negative Kraft auf die Masse aus, wodurch diese zum Ruhezpunkt zurückgezogen wird. Bewegen wir analog die Masse nach links, d.h. für $x < 0$, übt die Feder eine positive Kraft auf die Masse aus, wodurch diese ebenfalls zum Ruhezpunkt zurückgezogen wird. Wir können dieses physikalische System mathematisch mit folgender Differentialgleichung beschreiben.

$$\ddot{x} + \text{sign}(x) = 0 \quad (51)$$

Wir schreiben die ODE (51) in ein System 1.Ordnung um (vgl. Bemerkung 2.5). Dazu setzen wir $x_1 = x$ und $x_2 = \dot{x}$ und erhalten

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (52)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\text{sign}(x_1(t)). \quad (53)$$

Das dazugehörige Phasenportrait ist in der Abbildung 12 dargestellt. Wir sehen, dass $(0, 0)$ der einzige Gleichgewichtspunkt der Differentialgleichung (51) ist. Das Phasenportrait zeigt auch deutlich, dass Lösungen aufgrund der Unstetigkeit der rechten Seite bei $x_1 = 0$ keine C^1 -Kurven sein können. Vielmehr zeigt sich, dass die Niveaufläche der Funktion $g(x_1, x_2) = |x_1| + \frac{x_2^2}{2}$ (siehe Abbildung 13) weg von der x_2 -Achse zum Phasenportrait der Gleichung (51) passen. Allerdings besitzen diese bei $x_1 = 0$ eine Spitze und sind daher nicht einmal differenzierbar. Wir werden später zu diesen Beispiel zurückkehren.

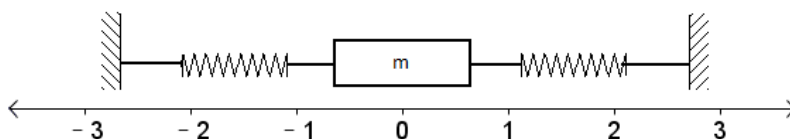


Abbildung 11: Unstetiger Harmonischer Oszillator

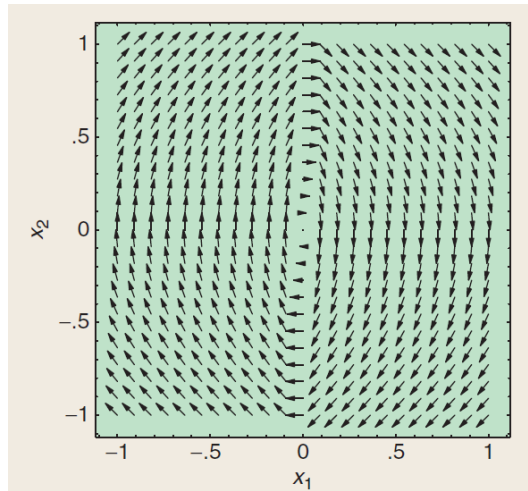


Abbildung 12: Phasenportrait der Differentialgleichung (51) [3, Figure 3(a)]

Wir werden im späteren Verlauf der Arbeit im Zusammenhang mit den neuen Lösungsbe-
griffen, die wir in den nächsten Kapiteln einführen werden, noch genauer auf diese Beispiele
eingehen.

3 Lösungskonzept von Caratheodory

3.1 Lösungen im Sinne von Caratheodory

Wie in Abschnitt 2.5 angekündigt, werden wir nun einen neuen Lösungsbegriff einführen, welcher uns erlaubt einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für ODEs mit unstetiger rechter Seite zu formulieren. Dabei benötigen wir einige Grundlagen der Maßtheorie bzw. der Theorie des Lebesgue-Integrals. Diese können im Anhang A nachgelesen werden. Die wesentliche Idee ist, dass die Bedingung des klassischen Lösungsbegriffs, dass die Lösung dem Vektorfeld für alle Zeiten folgen muss etwas gelockert wird. Das wird erreicht, indem wir statt der Differentialgleichung

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (54)$$

die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (55)$$

betrachten, die für allgemeinere Funktionen f und x sinnvoll ist.

Diese Idee führt zum Lösungsbegriff nach Caratheodory. Die exakte mathematische Definition einer **Caratheodory-Lösung** werden wir im Folgenden erläutern. Zuvor noch eine Begriffsbestimmung.

Definition 3.1. Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **absolut stetig** in $[a, b]$, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ angegeben werden kann, sodass für jedes endliche System $((\alpha_i, \beta_i))_{i=1}^p$ von paarweise disjunkten offenen Teilintervallen von $[a, b]$

$$\text{mit } \sum_{i=1}^p (\beta_i - \alpha_i) < \delta \text{ folgt, dass } \sum_{i=1}^p |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \epsilon.$$

Bemerkung 3.2. Jede Lipschitz-stetige Funktion ist offensichtlich absolut stetig und damit auch jede stetig differenzierbare Funktion. Die Umkehrung gilt allerdings nicht. Aus absolute Stetigkeit folgt sofort gleichmäßige Stetigkeit und damit auch Stetigkeit.

Betrachten wir nun etwas genauer die zu (54) assoziierte Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (56)$$

Im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf haben wir verwendet, dass für die dortigen Regularitätsklassen ($x \in C^1, f \in C^0$) die Integralgleichung (56) äquivalent zur Differentialgleichung (54) ist. Hier wollen wir das Setting verallgemeinern. Zunächst kann (56) nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung nur dann bestehen, wenn $x' (=f)$ Riemann integrierbar ist. Es lässt sich in Anlehnung an [10, Kapitel 131] aber auch zeigen, dass diese Gleichung bereits erfüllt ist, wenn x' bloß Lebesgue-integrierbar ist. Setzt man jedoch lediglich, um den klassischen Lösungsbegriff etwas zu lockern, voraus, dass x' fast überall existiert (d.h. die Lösung dem Vektorfeld fast überall folgen muss) und natürlich

nach wie vor Lebesgue-integrierbar ist, so braucht die Gleichung (56) nicht mehr zu gelten. Eine tiefere Analyse zeigt, dass das unbestimmte Integral in der Gleichung (56) nicht nur stetig, sondern sogar absolut stetig ist. Infolgedessen kann die Gleichung (56) höchstens dann bestehen, wenn x absolut stetig ist. Zusammenfassend können wir folgenden Satz formulieren, den wir jedoch nicht beweisen werden (vgl. [16, Satz 9.23]).

Satz 3.3. (*Verallgemeinerte Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung*)

- (i) Ist die Funktion x absolut stetig auf einem Intervall $[a, b]$, so ist sie fast überall auf $[a, b]$ differenzierbar, ihre Ableitung ist dort Lebesgue-integrierbar, und für alle $t, t_0 \in [a, b]$ gilt die Gleichung

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s) ds. \quad (57)$$

- (ii) Ist eine Funktion U integrierbar auf $[a, b]$, dann ist $(t_0 \in [a, b])$

$$u(t) := \int_{t_0}^t U(s) ds$$

absolut stetig und für fast alle $t \in [a, b]$ gilt

$$u'(t) = U(t).$$

Der Satz besagt also, dass genau die absolut stetigen Funktionen mittels des Lebesgueschen Integrationsprozesses aus ihren Ableitungen rekonstruiert werden können. Nach diesen Überlegungen kann nun ein sinnvolles Lösungskonzept angegeben werden.

Definition 3.4. (*Caratheodory-Lösung*)

Eine Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei I ein offenes Intervall ist, heißt **Caratheodory-Lösung** des Anfangswertproblems (54) auf I , falls x auf I absolut stetig ist und der Integralgleichung (56) für alle $t \in I$ genügt.

Bemerkung 3.5. Eine äquivalente Definition einer Caratheodory-Lösung ist nach Satz 3.3, dass x auf I absolut stetig ist und der Differentialgleichung (54) fast überall in I genügt. Da außerdem stetig differenzierbare Funktionen absolut stetig sind, folgt sofort, dass jede klassische Lösung auch eine Caratheodory-Lösung ist.

Betrachten wir nun zur Verdeutlichung ein Beispiel für eine ODE mit unstetiger rechter Seite, die eine Caratheodory-Lösung besitzt, jedoch keine klassische Lösung.

Beispiel 3.6. Wir betrachten das Anfangswertproblem ($t \in \mathbb{R}$)

$$x'(t) = f(x(t)) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad x(0) = 0. \quad (58)$$

Im Sinne von Caratheodory existieren 2 Lösungen, nämlich

$$x_1(t) = t \quad \text{und} \quad (59)$$

$$x_2(t) = -t \quad (60)$$

mit $x_1, x_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Wir sehen, dass beide Lösungen x_1 und x_2 die Differentialgleichung in $t = 0$ nicht genügen, denn tatsächlich ist $1 = x_1'(0) \neq f(x_1(0)) = \frac{1}{2}$ und $-1 = x_2'(0) \neq f(x_2(0)) = \frac{1}{2}$. Dies ist für Caratheodory-Lösungen aber erlaubt, da diese nicht für alle t der Differentialgleichung genügen müssen.

Diese Gleichung besitzt andererseits keine klassischen Lösungen mit Anfangswert $x(0) = 0$. Diese wären stetig differenzierbar und müssten auf $x \neq 0$ mit (59) bzw. (60) übereinstimmen. Dann wäre aber $\dot{x}(0) = 1$ bzw. $\dot{x}(0) = -1$ was (58) widerspricht.

Blicken wir außerdem auf das Beispiel D zurück:

Beispiel D.2. (Beispiel D – zum Zweiten)

Im Beispiel D haben wir einen unstetigen harmonischen Oszillator betrachtet, der mit folgenden System 1.Ordnung beschrieben werden kann:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (61)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\text{sign}(x_1(t)). \quad (62)$$

Wie wir bereits wissen, besitzt diese Differentialgleichung keine klassische Lösungen, die $x_1 = 0$ passieren.

Tatsächlich sind diese Caratheodory-Lösungen. Abbildung 13 zeigt die Niveaumengen der Funktion $g(x_1, x_2) = |x_1| + \frac{x_2^2}{2}$. Wenn man die Bahnkurven in dieser Abbildung in Uhrzeigersinn durchläuft, so sind sie Caratheodory-Lösungen dieser Differentialgleichung, die fehlende Differenzierbarkeit bei $x_1 = 0$ spielt keine Rolle.

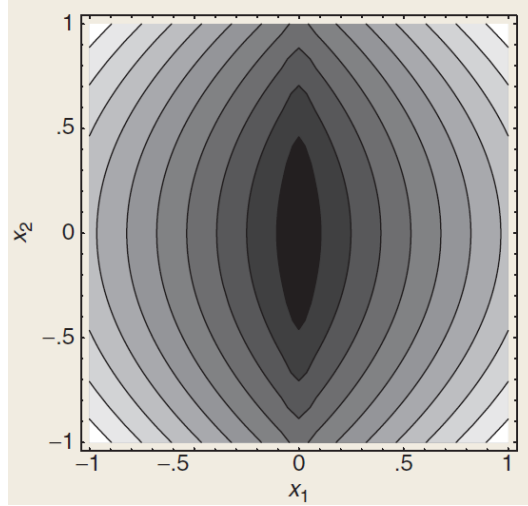


Abbildung 13: Niveaumengen der Funktion $g(x_1, x_2) = |x_1| + \frac{x_2^2}{2}$ [3, Figure 3(b)]

3.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen im Sinne von Caratheodory

Für den Lösungsbegriff nach Caratheodory kann nun ebenfalls – analog zum klassischen Lösungskonzept (vgl. Abschnitt 2.4) – ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz formuliert werden.

Satz 3.7. (*Existenz- und Eindeutigkeit für Caratheodory-Lösungen*)

Das Anfangswertproblem (54) hat auf $[t_0 + h, t_0 - h]$ eine eindeutige Lösung, falls f die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (1) $f : J \times \tilde{D} =: D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ genügt einer Caratheodory-Bedingung, d.h.
 - (i) die Abbildung $J \ni t \mapsto f(t, x)$ ist messbar für alle $x \in \tilde{D}$ und
 - (ii) die Abbildung $\tilde{D} \ni x \mapsto f(t, x)$ ist stetig für fast alle $t \in J$.
- (2) Es gibt ein „Rechteck“ $Q := \{(t, x) \in D \mid |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta\} \subseteq D$ auf dem f eine verallgemeinerte Lipschitz-Bedingung erfüllt, d.h. es gibt eine integrierbare Funktion $l : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$f(t, x_0) \leq l(t) \quad \text{und} \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq l(t) |x_1 - x_2|.$$

Dabei ist $h \leq \alpha$ so klein zu wählen, dass $M(h) = \int_{t_0-h}^{t_0+h} l(s) ds \leq \frac{\beta}{1+\beta}$.

Den Beweis werden wir wieder – analog zum Satz von Picard-Lindelöf – mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes führen, doch zuvor benötigen wir einen Hilfssatz.

Lemma 3.8. *Genügt f den Voraussetzungen von Satz 3.7 und ist u eine stetige Funktion auf J , so ist $t \mapsto f(t, u(t))$ eine auf J integrierbare Funktion.*

Beweisskizze. Wegen der Bedingung (2) im Satz 3.7 ist die Funktion $f(t, u(t))$ integrierbar, sobald sie messbar ist (vgl. [10, Satz 129.2]). Es genügt also zu zeigen, dass $f(t, u(t))$ messbar ist. Ist u konstant, so folgt die Messbarkeit aus dem 2. Teil der Caratheodory-Bedingung (siehe Satz 3.7 (1)(ii)). Daher ist $f(t, u(t))$ auch messbar, falls u eine Treppenfunktion, d.h. fast überall konstant ist. Ist u stetig, so kann u durch eine Folge u_k von Treppenfunktionen bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ approximiert werden (vgl. [14, Kapitel 4, Satz 1.13]), d.h. $\|u_k - u\|_\infty \rightarrow 0$. Wegen dem 2. Teil der Caratheodory-Bedingung (siehe Satz 3.7 (1)(ii)) gilt daher $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t, u_k(t)) = f(t, u(t))$ für alle $t \in J$. Da der Limes messbarer Funktionen messbar ist (vgl. [10, Satz 129.5]) folgt die Aussage. $\square$

Mithilfe des Hilfssatzes kann nun der Satz 3.7 ohne weiteren Umwege bewiesen werden. Der Beweis von Picard-Lindelöf (vgl. Theorem 2.15) kann dabei annähernd übertragen werden. Wir werden in diesem Beweis wieder eine skalierte Version der Maximumsnorm verwenden. Sei dazu I ein abgeschlossenes Intervall. Wir definieren auf $C(I)$

$$\|x\|_0 := \sup_{t \in I} |x(t)| e^{-2L(t)},$$

mit $L(t) = \int_{t_0}^t l(s) ds$.

Diese Norm ist wieder äquivalent zur Maximumsnorm $\|x\|_\infty = \sup_{t \in I} |x(t)|$, d.h. $\exists C_1, C_2 > 0$ sodass

$$C_1 \|x\|_\infty \leq \|x\|_0 \leq C_2 \|x\|_\infty.$$

Tatsächlich ist zunächst $l(t) > 0$. Daraus folgt, dass $L(t) > 0$ und somit ist $e^{-2L(t)} < 1$. Des Weiteren ist auch $L(t) \leq \int_{t_0-h}^{t_0+h} l(s) ds =: L$, also $e^{-2L(t)} \geq e^{-2L}$. Daher gilt tatsächlich

$$\|x\|_\infty e^{-2L} \leq \|x\|_0 \leq \|x\|_\infty$$

Im Beweis des Satzes 3.7 werden wir ebenso wieder auf dem Raum $(C(I), \|\cdot\|_0)$ arbeiten, der natürlich ein Banachraum ist.

Des Weiteren werden wir wie im Beweis von Picard-Lindelöf eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq (C(I), \|\cdot\|_0)$ betrachten; diese ist als abgeschlossene Menge eines Banachraums wiederum selbst ein vollständiger metrischer Raum (vgl. Bemerkungen vor den Beweis von Theorem 2.15) – aber kein Vektorraum mehr!

Beweis von Satz 3.7: Laut dem Lösungskonzept von Caratheodory (vgl. Kapitel 3.1) müssen wir die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

für ein auf $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ absolut stetiges x lösen. Es genügt jedoch x als stetig vorauszusetzen. Denn sei x stetig folgt sofort aus Lemma 3.8, dass $f(s, x(s))$ Lebesgue-integrierbar ist. Daraus folgt aus Satz 3.3 (ii), dass x absolut stetig ist.

Sei außerdem h wie im Satz 3.7 definiert. Wir betrachten – wie auch im Beweis von Picard-Lindelöf – den Integraloperator

$$(Tx)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

der aber leider wieder nicht auf dem vollständig metrischen Raum $(C([t_0 - h, t_0 + h]), \|\cdot\|_0)$ definiert ist; f ist ja nur auf $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ definiert und um die Verknüpfung $f(t, x(t))$ zu definieren muss $(t, x(t)) \in D$ liegen. Wir werden sogar benötigen, dass $(t, x(t)) \in Q$ liegt und daher definieren wir die Menge

$$A := \{x \in C([t_0 - h, t_0 + h]) : \|x - x_0\|_\infty \leq \beta\}. \quad (63)$$

- (1) A ist eine abgeschlossene Teilmenge des Banachraums $(C([t_0 - h, t_0 + h]), \|\cdot\|_0)$ und daher ein vollständig metrischer Raum.
- (2) T ist auf A definiert, denn sei $x \in A$ und $s \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Dann ist $(s, x(s)) \in Q \subseteq D$ und daher ist die Verknüpfung $f(s, x(s))$ für alle $s \in [t_0 - h, t_0 + h]$ definiert.
- (3) T ist eine *Selbstabbildung* auf A , d.h. $T(A) \subseteq A$, denn sei $x \in A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ dann gilt wegen der Bedingung in 3.7 (2)

$$\begin{aligned} |(Tx)(t) - x_0| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, x_0)| + |f(s, x_0)| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t l(s) \|x(s) - x_0\|_\infty + l(s) ds \\ &\leq \int_{t_0}^t l(s) (1 + \|x(s) - x_0\|_\infty) ds \\ &\leq (1 + \beta) M(h) \leq (1 + \beta) \frac{\beta}{1 + \beta} = \beta, \end{aligned} \quad (64)$$

wobei wir die Bedingung an h verwendet haben.

Damit $\|Tx - x_0\|_\infty \leq \beta$ und daher $Tx \in A$, weil Tx ja sogar absolut stetig ist.

- (4) T ist eine *Kontraktion* auf $(A, \|\cdot\|_0)$, denn seien $x, y \in A$ dann gilt für alle $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ wegen der verallgemeinerten Lipschitz-Bedingung an f , dass

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t l(s) |x(s) - y(s)| e^{-L(s)} e^{L(s)} ds \\ &\leq \sup_{s \in [t_0 - h, t_0 + h]} |x(s) - y(s)| e^{-2Ls} \int_{t_0}^t l(s) e^{L(s)} ds \\ &\leq \|x - y\|_0 \sup_{s \in [t_0 - h, t_0 + h]} e^{L(s)} \int_{t_0}^t l(s) ds. \end{aligned} \quad (65)$$

Daraus folgt aber sofort

$$\|Tx - Ty\|_0 \leq \|x - y\|_0 \int_{t_0-h}^{t_0+h} l(s) ds \leq \|x - y\|_0 \frac{\beta}{1+\beta} \leq \|x - y\|_0$$

und somit ist T tatsächlich eine Kontraktion auf $(A, \|\cdot\|_0)$.

- (5) Nun folgt sofort aus dem Banachschem Fixpunktsatz die Existenz eines eindeutigen $x \in A$ mit $Tx = x$, d.h.

$$x(t) = Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (66)$$

Also haben wir wie behauptet die eindeutige Caratheodory-Lösung des Anfangswertproblems (54)

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{auf} \quad [t_0 - h, t_0 + h]$$

gefunden.

□

3.3 Grenzen des Lösungskonzepts von Caratheodory

In diesem Abschnitt werden wir die Grenzen des Lösungskonzeptes von Caratheodory diskutieren, dabei folgen wir im Wesentlichen [3]. Zunächst werden wir die Caratheodory-Theorie für autonome ODEs genauer untersuchen.

Bemerkung 3.9. (Caratheodory-Theorie für autonome ODEs)

Für autonome ODEs liefert der Satz 3.7 keine Verbesserungen gegenüber dem Satz von Peano (Theorem 2.11) bzw. Picard Lindelöf (Theorem 2.15) und somit keine Verbesserungen gegenüber der klassischen Lösungstheorie. Denn tatsächlich reduziert sich der erste Teil der Caratheodory-Bedingung (siehe Satz 3.7 (1)) auf den Satz von Peano, da wegen der Zeitinvarianz Teil (i) wegfällt und Teil (ii) nur die Stetigkeit der rechten Seite voraussetzt. Bzgl. der Bedingung Satz 3.7 (2) lässt sich die verallgemeinerte Lipschitz-Bedingung wegen der Zeitunabhängigkeit in jener Form schreiben, wie wir es aus dem Satz von Picard-Lindelöf bereits kennen. Insgesamt reduziert sich also der Satz 3.7 für autonome ODEs auf den Satz von Picard-Lindelöf.

Bemerkung 3.10. (Grenzen des Existenzsatzes)

Blicken wir nochmal auf das Beispiel 3.6 zurück, wo wir die Differentialgleichung

$$x'(t) = f(x(t)) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (67)$$

betrachtet haben. Diese ist autonom und ist nicht stetig in 0. Daher erfüllt sie die Bedingungen von Satz 3.7 (bzw. von Picard-Lindelöf) nicht. Dennoch besitzt diese ODE eine eindeutige Lösung im Sinne von Caratheodory. Wir sehen also, dass eine ODE eine eindeutige Caratheodory-Lösung besitzen kann, obwohl sie die Bedingungen aus Satz 3.7 nicht erfüllt.

Wir haben bisher nur Differentialgleichungen betrachtet, die eine Caratheodory-Lösung besitzen. Man findet leider auch sehr leicht Beispiele von ODEs, die keine Caratheodory-Lösung besitzen. Wir werden dazu zwei Beispiele aus den vorherigen Kapiteln nochmals betrachten.

Beispiel C.2. (Beispiel C zum Zweiten)

Erinnern wir uns nochmal an Beispiel C zurück, wo wir folgende ODE betrachtet haben

$$\dot{v}(t) = g(\sin \theta) - \nu g(\cos \theta) \operatorname{sign}(v(t)). \quad (68)$$

Diese ODE beschreibt einen Körper, der unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer schiefen Ebene mit Neigung $\theta > 0$ hinuntergleitet, wobei v die Geschwindigkeit des Körpers, g die Erdbeschleunigung und ν der Reibungskoeffizient ist.

Wir suchen außerdem eine Lösung, die mit der experimentellen Beobachtung übereinstimmt, dass der Körper für genügend große Reibungskoeffizienten und positiver Anfangsgeschwindigkeit nach einer bestimmten Zeit zum Stillstand kommt. Wir haben gezeigt, dass dieses Verhalten durch keine klassische Lösung beschrieben werden kann.

Analoges gilt nun auch im Falle einer Caratheodory-Lösung, denn diese müsste folgende Eigenschaften erfüllen: $v(t) > 0$ für alle $t < t'$ und $v(t) = 0$ für alle $t \geq t'$. Dies kann jedoch durch keine Caratheodory-Lösung beschrieben werden, denn sie erfüllt für alle $t \geq t'$ nicht die Differentialgleichung – löst diese also auf eine Menge mit positiven Lebesgue-Maß nicht. Das Argument ist daher dasselbe wie früher, denn angenommen v ist eine absolut stetige Lösung mit $v(t') = 0 = \dot{v}(t')$, dann wäre $\sin(\theta) = 0$ und somit $\theta = 0$, was unserer Annahme $\theta > 0$ widerspricht.

Beispiel A.2. (Beispiel A zum Zweiten)

Erinnern wir uns an Beispiel A zurück, wo wir folgende ODE betrachtet haben:

$$x'(t) = f(x(t)) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (69)$$

Wir haben bereits festgestellt, dass diese ODE keine klassische Lösung für den Anfangswert $x(0) = 0$ besitzt. Tatsächlich besitzt sie für den Anfangswert $x(0) = 0$ auch keine

Caratheodory-Lösung, wie wir nun zeigen werden.

Angenommen x ist eine Caratheodory-Lösung der obigen Differentialgleichung. Dann existiert kein Intervall $[0, t')$ mit $x = 0$ auf $[0, t')$, denn sonst wäre dort $x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(s))ds = 0 - \int_0^t ds = -t$. Dies widerspricht jedoch der Annahme $x(t) = 0$.

Daher muss $x(t)$ wegen der Stetigkeit auf einem Intervall $[0, t'')$ entweder positiv oder negativ sein.

Angenommen $x(t) > 0$ auf $[0, t'')$, dann gilt $x(t) = 0 - \int_0^t ds = -t < 0$, welches der Annahme $x(t) > 0$ widerspricht. Also muss $x(t) < 0$ auf $[0, t'')$ sein. Dies ist aber ebenfalls nicht möglich, denn es wäre $x(t) = 0 + \int_0^t ds = t > 0$ im Widerspruch zur Annahme $x(t) < 0$. Insgesamt gibt es also keine Caratheodory-Lösung von (69) mit Anfangswert $x(0) = 0$.

Die Beispiele in diesem Abschnitt zeigen eindeutig, dass das Lösungskonzept von Caratheodory nicht allgemein genug ist um unseren Ansprüchen zu genügen (vgl. Kapitel 2.5). Einerseits können wichtige physikalische Phänomene nicht innerhalb des Konzepts beschrieben werden (Beispiel C.2), andererseits ist es weiterhin nicht möglich Caratheodory-Lösungen für einfachste unstetige rechte Seiten zu finden (Beispiel A.2).

Tatsächlich stellt das Lösungskonzept von Caratheodory nur eine minimale Erweiterung des klassischen Lösungskonzepts unter der Zuhilfenahme der Lebesgueschen Integrationstheorie dar. Um unser Programm, ein allgemeineres und anwendungsrelevantes Lösungskonzept hinzuzufügen, müssen wir den Lösungsbegriff weiter verallgemeinern, d.h. abschwächen um ans Ziel zu gelangen. Dies bewerkstelligen wir im nächsten Kapitel, indem wir des Lösungskonzept von Filippov verstellen.

4 Lösungskonzept von Filippov

4.1 Lösungen im Sinne von Filippov

Im diesen Abschnitt werden wir ein weiteres Lösungskonzept für ODEs einführen, nämlich das Lösungskonzept von Filippov [5, Kapitel 2]. Dabei orientieren wir uns stark an [3]. Schon im Rahmen des Lösungskonzeptes von Caratheodory wurde verlangt, dass die Lösung nur fast überall die ODE erfüllt. Wir werden hier nun einen Schritt weiter gehen, denn im Lösungskonzept von Filippov wird verlangt, dass die Lösung statt der Gleichung lediglich eine Mengeninklusion erfüllt – und das nur fast überall. Genauer soll der Geschwindigkeitsvektor der Lösungskurve fast überall in einer Menge liegen, die aus der unstetigen rechter Seite konstruiert wird – man kann also sagen, dass sie die Gleichung „nur fast“ oder in einem approximativen Sinne erfüllen muss. Technisch erfüllt eine Filippov-Lösung statt einer Differentialgleichung eine sogenannte Differentialinklusion. Die explizite Darstellung erfolgt mittels der Sprache der mengenwertige Funktionen, die wir nun einführen.

Definition 4.1. Sei $P(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller Teilmengen (Potenzmenge) des $\mathbb{R}^n$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine **mengenwertige Abbildung** ist eine Funktion $F : D \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$. Sie ordnet jedem $x \in D$ eine Menge $F(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ zu.

Wir werden außerdem für das Lösungskonzept von Filippov noch weitere Begriffe benötigen, die wir im Folgenden bestimmen.

Definition 4.2. Eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls für alle $x, y \in B$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in B$$

gilt.

Bemerkung 4.3. Diese Definition basiert auf der Parameterdarstellung der Verbindungsstrecke $\overline{xy}$ zwischen x und y :

$$\overline{xy} := \{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Eine Menge ist also genau dann konvex, wenn mit je zwei Punkten der Menge auch ihre Verbindungsstrecke ganz in der Menge liegt. Ein Beispiel für eine konvexe bzw. nicht-konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ wird in Abbildung 14 bzw. Abbildung 15 dargestellt.

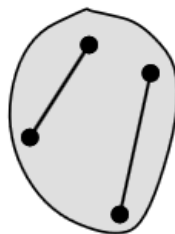


Abbildung 14: Konvexe Menge

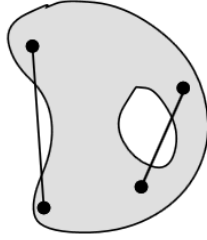


Abbildung 15: Nicht-konvexe Menge

Bemerkung 4.4. Der Durchschnitt konvexer Teilmengen ist konvex, denn sei A_α konvex für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ und sei außerdem $x, y \in \bigcap_\alpha A_\alpha$, dann ist für alle α $x, y \in A_\alpha$. Weil A_α konvex für alle α ist, gilt für alle α

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A_\alpha, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Daraus folgt aber sofort

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \bigcap_\alpha A_\alpha.$$

Also liegt die Verbindungsgerade auch im Durchschnitt und somit dieser konvex.

Definition 4.5. Die **konvexe Hülle** einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert als der Durchschnitt aller konvexen Mengen, die A enthalten, also

$$\text{co}(A) := \bigcap_{B \supseteq A, \text{konvex}} B$$

Bemerkung 4.6. Oft wird die konvexe Hülle einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ auch als die kleinste konvexe Menge, die A enthält, definiert. Diese beiden Definitionen sind äquivalent, denn sei A' die kleinste konvexe Menge, die A enthält, dann ist $A' \subseteq \text{co}(A)$, weil $A \subseteq \text{co}(A)$ und $\text{co}(A)$ wegen Bemerkung 4.4 konvex ist.

Außerdem ist $\text{co}(A) \subseteq A'$, denn A' ist ein zulässiges B in der Definition von $\text{co}(A)$ und deswegen gilt

$$\text{co}(A) = \bigcap_{B \supseteq A, \text{konvex}} B = A' \cap \bigcap_{B' \supseteq A, \text{konvex}, B' \neq A} B' \subseteq A'.$$

Daher ist $A' = \text{co}(A)$.

Nun können wir die Idee des Lösungskonzepts von Filippov wie folgt erklären, wobei wir uns in diesem Abschnitt nur auf autonome ODEs beschränken, d.h wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{70}$$

mit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, f nicht notwendigerweise stetig und $x : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow D$.

Der un stetigen rechten Seite der Gleichung wird nun eine spezifische mengenwertige Funktion $F(f)$ zugeordnet. Dabei wird $F(f)(p)$ aus den Werten von f in kleinen Umgebungen

des Punktes $p \in D$ gewonnen. Genauer betrachten wir die Bilder offener Bälle $B(p, \delta)$ um p mit Radius δ unter der Funktion f , bzw. dessen konvexe Hülle, was nur natürlich erscheint. Schließlich müssen wir in der Konstruktion der Filippov-rechten Seite $F(f)$ aus Konsistenzgründen Nullmengen ausschließen. Also wird $F(f)(p)$ als Durchschnitt konvexer Hüllen von Mengen der Form $f(B(p, \delta) \setminus S)$ gebildet, wobei S eine beliebige Lebesgue-Nullmenge ist. Formal können wir dies in folgender Definition zusammenfassen.

Definition 4.7. Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definieren wir die **Filippov mengenwertige Abbildung** $F(f) : D \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ als

$$F(f)(p) := \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(S)=0} \text{co}\{f(B(p, \delta) \setminus S)\}, \quad p \in D. \quad (71)$$

Dabei bezeichnet co die konvexe Hülle, μ das Lebesgue-Maß und S eine beliebige Lebesgue-Nullmenge.

Bemerkung 4.8.

- (i) Der Wert der Filippov mengenwertige Abbildung $F(f)(p)$ im Punkt p hängt gar nicht von $f(p)$ ab, d.h. falls f und g zwei Funktionen sind, für die es jeweils eine Umgebung U um p gibt, sodass $f(q) = g(q)$ für alle $q \neq p \in U$ gilt, dann sind die Filippov mengenwertige Abbildungen beider Funktionen gleich, d.h. $F(f)(p) = F(g)(p)$ für alle $p \in U$.
- (ii) Falls f stetig in p ist, dann ist die Filippov mengenwertige Abbildung gleich f , d.h. die Menge $F(f)(p)$ besteht nur aus $f(p)$, d.h. $F(f)(p) = \{f(p)\}$.

Bemerkung 4.9. Im Allgemeinen ist es nicht ganz einfach zu einer gegebenen unstetigen Funktion f die Filippov-rechte Seite $F(f)$ zu berechnen, daher wurde ein Kalkül geschaffen, des zumindestens ermöglicht $F(f)$ abzuschätzen, siehe [3, p.50/51] bzw. Bemerkung 4.15 unten. Im Rahmen der im Folgenden betrachteten Beispiele, werden wir die Filippov-rechte Seite explizit berechnen.

Nun können wir ein sinnvolles Lösungskonzept angeben.

Definition 4.10. (*Filippov-Lösung*)

Eine **Filippov-Lösung** der ODE (70) ist eine absolut stetige Funktion $x : I \rightarrow D$, die fast überall die Differential-Inklusion

$$x'(t) \in F(f)(x(t)) \quad (72)$$

erfüllt.

Eine Filippov-Lösung x ist also eine absolut stetige Kurve, die daher (vgl. Bemerkungen vor Satz 3.3 im Abschnitt 3.1) fast überall differenzierbar ist. Diese fast überall definierte Ableitung x' braucht aber nicht der ursprünglichen ODE zu gehorchen, sondern sie muss

nur ungefähr „gleich“ $f(x(t))$ sein, genau eben $x' \in F(f)(x(t))$. Klarerweise sind klassische Lösungen auch immer Filippov-Lösungen.

Das Lösungskonzept von Filippov ist Ausgangspunkt einer weit entwickelten Theorie [5], die viele anwendungsorientierte Existenz- und Eindeutigkeitssätze und auch eine qualitative Theorie zur Verfügung stellt. Dementsprechend ist sie in den Anwendungen etwa der nicht-glaten Mechanik weit verbreitet, siehe etwa [3] und die dort zitierte Literatur. Darüber hinaus ist das Filippov-Konzept auch von theoretischer Bedeutung, etwa wird es in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen verwendet, um die charakteristischen Kurven in Systemen mit schwacher Regularität zu berechnen, siehe etwa [12]. Ein weiterer Vorteil des Filippov-Konzepts ist, dass es kompatibel mit Regularisierungszugängen ist; bei dieser wird die unstetige rechte Seite einer ODE durch eine Folge glatter Funktionen approximiert, siehe [7], [8].

4.2 Existenz von Lösungen im Sinne von Filippov

Mithilfe des Lösungsbegriffs nach Filippov können nun ebenfalls – analog zum klassischen Lösungskonzept bzw. zum Lösungskonzept nach Caratheodory – ein Existenz- und Eindeutigkeitssätze formuliert werden. Im diesen Kapitel werden wir uns jedoch nur mit der bloßen Existenz beschäftigen. Ein einfacher Existenzsatz ist etwa der folgende für beschränkte rechte Seiten, den wir aber nicht beweisen werden. Zunächst eine Begriffsbestimmung.

Definition 4.11. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **fast überall beschränkt** auf D falls eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass für fast alle $x \in D$

$$|f(x)| \leq C \tag{73}$$

gilt.

Theorem 4.12. Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$ messbar und lokal fast überall beschränkt. Dann gibt es für alle $x_0 \in D$ mindestens eine Filippov-Lösung der Differentialgleichung (70) mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$.

In [5, Kapitel 2] wird eine umfassende Existenztheorie entwickelt, die aber weit über den Fokus dieser Diplomarbeit hinausgeht. Daher werden wir im weiteren Verlauf die Existenztheorie nicht weiter ausbauen, sondern stattdessen einige instruktive Beispiele betrachten.

Beispiel A.3/B.2. (Beispiel A zum Dritten und Beispiel B zum Zweiten)

Wie wir bereits in Beispiel A.2 festgestellt haben, besitzt die ODE

$$x'(t) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$$

keine Caratheodory-Lösung. Ebenso haben wir in Beispiel B festgestellt, dass die ODE

$$x'(t) = -\operatorname{sign}(x)$$

eine eindeutige klassische Lösung und somit auch eine Caratheodory-Lösung besitzt.

Die rechte Seite beider ODEs ist außerdem beschränkt und genügt daher den Bedingungen von Theorem 4.12. Deswegen besitzen beide ODEs eine, nicht notwendigerweise eindeutige Filippov-Lösung für jeden Anfangswert.

Betrachten wir zunächst deren Filippov mengenwertigen Abbildungen. Wie bereits erläutert unterscheiden sich die beiden Vektorfelder nur in 0, welche eine Lebesgue-Nullmenge ist. Da wir Lebesgue-Nullmengen aus der Filippov mengenwertige Abbildung herausnehmen, sind die Filippov mengenwertigen Abbildungen der beiden Vektorfelder ident und sind gegeben durch

$$F(f)(x) = \begin{cases} \{1\}, & x < 0 \\ [-1, 1], & x = 0 \\ \{-1\}, & x > 0 \end{cases} . \quad (74)$$

Wir sehen, dass diese Filippov mengenwertige Abbildung nur an der Unstetigkeitsstelle mehrere Werte annimmt. Dies gilt wie schon bemerkt auch im Allgemeinen (vgl. Bemerkung 4.8 (ii)).

Weil nun die Vektorfelder der beiden Beispiele die gleiche Filippov mengenwertige Abbildung besitzen haben diese auch die gleiche Lösung. Für $x_0 > 0$ ist eine maximale Lösung $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x(t) = \begin{cases} x_0 - t, & t \leq x_0 \\ 0, & t \geq x_0 \end{cases} ,$$

wohingegen für $x_0 < 0$ eine maximale Lösung $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + t, & t \leq -x_0 \\ 0, & t \geq -x_0 \end{cases}$$

gegeben ist. Wenn $x_0 = 0$, dann ist eine maximale Lösung $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $x(t) = 0$ gegeben. In allen drei Fällen ist es leicht zu sehen, dass die angegebenen Lösungen auch eindeutig sind.

Bemerkung 4.13. Wir haben nun ein Beispiel gefunden, dass zwar keine Caratheodory- aber eine Filippov-Lösung besitzt. Nun können wir uns die Frage stellen, ob zwischen Caratheodory- und Filippov-Lösungen ein Zusammenhang besteht. Tatsächlich gibt es aber keinen Zusammenhang. Es gibt Vektorfelder die gleichzeitig Caratheodory-Lösungen und Filippov-Lösungen besitzen, aber im Allgemeinen sind Filippov-Lösungen keine Caratheodory-Lösungen. Die Umkehrung gilt ebenso wenig, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.14. Wir betrachten ($t \in \mathbb{R}$)

$$x'(t) = f(x(t)) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (75)$$

Für den Anfangswert $x_0 = 0$ besitzt diese Differentialgleichung folgende zwei Caratheodory-Lösungen.

$$x_1(t) = 0, \quad (76)$$

$$x_2(t) = t, \quad (77)$$

wobei $x_{1,2} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Die Filippov mengenwertige Abbildung von (75) ist $F(f)(x) = \{1\}$, da der Ausnahmepunkt $x = 0$ mit $f(0) = 0$ eine Lebesgue-Nullmenge darstellt. Daher ist $x_2(t) = t$ die einzige Filippov-Lösung für den Anfangswert $x_0 = 0$.

Bemerkung 4.15. Die Berechnung der Filippov mengenwertigen Abbildungen ist wie bereits erwähnt leider oft nicht einfach. Daher gibt es verschiedene Rechenregeln, um die Berechnung zu vereinfachen. Einige dieser Regeln werden wir im Folgenden ohne Beweis vorstellen. Wir werden dabei Filippov mengenwertige Abbildungen für Funktionen der Form $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, wobei n und m nicht notwendigerweise gleich sein müssen (vgl. [3, p.50/51]).

1. *Summenregel:* Sei $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal beschränkt in $x \in \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$F(f_1 + f_2)(x) \subseteq F(f_1)(x) + F(f_2)(x).$$

Wenn entweder f_1 oder f_2 stetig in x ist, dann gilt sogar Gleichheit.

2. *Produktregel:* Sei $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ lokal beschränkt in $x \in \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$F((f_1, f_2)^T)(x) \subseteq F(f_1)(x) \times F(f_2)(x).$$

Wenn entweder f_1 oder f_2 stetig in x ist, dann gilt sogar Gleichheit.

3. *Kettenregel:* Sei $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar in $x \in \mathbb{R}^n$ und der Rang der Jacobi Matrix sei n . Außerdem sei $f_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ lokal beschränkt in $f_1(x) \in \mathbb{R}^m$, dann gilt

$$F(f_2 \circ f_1)(x) = F(f_2)(f_1(x)).$$

4. *Matrix-Transformations-Regel:* Sei $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal beschränkt in $x \in \mathbb{R}^n$ und $f_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ stetig in $x \in \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$F(f_2 f_1)(x) = f_2(x) F(f_1)(x).$$

4.3 Eindeutigkeit von Lösungen im Sinne von Filippov

In diesem Kapitel werden wir uns schließlich mit der Eindeutigkeit von Filippov-Lösungen beschäftigen, denn eine ODE muss nicht immer, wie in Beispiel A.3/B.2, eine eindeutige Filippov-Lösung besitzen, sofern sie überhaupt eine solche besitzt. Im Folgenden werden wir zuerst ein Beispiel für eine ODE geben, die keine eindeutige Filippov-Lösung besitzt.

Beispiel 4.16. Wir betrachten

$$x'(t) = \text{sign}(x), \quad x(0) = x_0. \quad (78)$$

Für jeden Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ besitzt die Differentialgleichung (78) eine eindeutige Filippov-Lösung, nämlich die klassische Lösung. Für den Anfangswert $x_0 = 0$ besitzt sie jedoch drei maximale Lösungen $x_1, x_2, x_3 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch $x_1(t) = -t$, $x_2(t) = 0$ und $x_3(t) = t$.

Wir können uns nun die Frage stellen, welche Bedingungen die rechte Seite einer ODE erfüllen muss, damit die Existenz und Eindeutigkeit einer Filippov-Lösung garantiert wird. Eine genauere Analyse über hinreichende Bedingungen für Eindeutigkeit von Filippov-Lösungen findet man in [5, Kapitel 2, §10]. Wir werden in diesem Abschnitt ausschließlich zwei einfache Eindeutigkeitssätze für Filippov-Lösungen formulieren. Ersteres erinnert am Satz von Picard-Lindelöf. Dazu eine Begriffsbestimmung.

Definition 4.17. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **fast überall einseitig Lipschitz-stetig** auf U falls eine Konstante $L > 0$ existiert, sodass für fast alle $x, y \in U$

$$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle \leq L |x - y|^2 \quad (79)$$

gilt, wobei $\langle, \rangle$ das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Bemerkung 4.18.

- (i) Jede Lipschitz-stetige Funktion ist einseitig Lipschitz-stetig, denn tatsächlich gilt wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle \leq |f(x) - f(y)| \cdot |x - y| \leq L \cdot |x - y|^2$$

- (ii) Aus einseitiger Lipschitz-Stetigkeit folgt nicht Stetigkeit, denn sei

$$\mathbb{1}_{Q(x)} = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (80)$$

die Dirichlet-Funktion, dann ist $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \mathbb{1}_{Q(x)} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ unstetig in jeden Punkt aber einseitig Lipschitz-stetig, denn

$$\left\langle \mathbb{1}_Q \left(\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ -\tilde{x} \end{pmatrix} \right), \begin{pmatrix} x - \tilde{x} \\ y - \tilde{y} \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{1}_Q((y - \tilde{y})(x - \tilde{x}) - (x - \tilde{x})(y - \tilde{y})) = 0$$

Theorem 4.19. Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$ messbar und fast überall lokal beschränkt. Falls für alle $x \in D$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass f fast überall einseitig Lipschitz-stetig auf $B(x, \epsilon)$ ist, dann existiert für alle $x_0 \in D$ eine eindeutige Filippov-Lösung der Differentialgleichung (70) mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$.

Wir werden dieses Theorem nun auf ein Beispiel anwenden.

Beispiel 4.20. Wir betrachten

$$x'(t) = f(x(t)) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (81)$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung ist unstetig in jeden Punkt in $\mathbb{R}$. Für die Berechnung der Filippov mengenwertige Abbildung spielt die Funktion in den rationalen Punkten keine Rolle, da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Daher ist die Filippov mengenwertige Abbildung gegeben durch $F(f)(x) = \{-1\}$. Außerdem ist f fast überall einseitig Lipschitz-stetig. Dazu genügt es nämlich nur Punkte $x, y \notin \mathbb{Q}$ zu betrachten. Für diese gilt $f(x) = -1 = f(y)$ und daher ist (79) erfüllt. Somit genügt f den Bedingungen in Theorem 4.19. Daher existiert für diese Differentialgleichung eine eindeutige Lösung für jede Anfangsbedingung $x_0 \in \mathbb{R}$. Diese ist gegeben durch $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x(t) = x_0 - t$.

Der zweite Eindeutigkeitssatz, den wir in diesem Kapitel vorstellen werden, gilt für stückweise stetige Funktionen, denn die Bedingungen in obigen Theorem 4.19 sind meistens zu restriktiv für diese Art von Funktionen. Für ein Beispiel einer ODE mit stückweise stetiger rechter Seite und eindeutige Filippov-Lösung, das die Bedingungen von Theorem 4.19 nicht erfüllt siehe etwa [3, p.53]. Zuerst werden wir also stückweise stetige Funktionen definieren.

Definition 4.21. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **stückweise stetig**, falls es eine endliche Familie von disjunkten und offenen, zusammenhängenden Mengen $D_1, \dots, D_m \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^m \overline{D_k}$ gibt, sodass für alle $k = 1, \dots, m$ die Funktion f stetig auf D_k ist. Außerdem nehmen wir an, dass die Einschränkungen von f auf D_k eine stetige Fortsetzung auf die Abschlüsse $\overline{D_k}$ erlauben. Die stetige Fortsetzung bezeichnen wir als $f|_{\overline{D_k}}$. Wir nennen $D_1, \dots, D_m$ eine Zerlegung von f .

Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ in dem f unstetig ist muss also im Rand mindestens zweier Gebiete D_i liegen. Wir bezeichnen die Menge der Unstetigkeitspunkte von f mit S_f und schreiben für den Rand der Gebiete ∂D_i . Dann gilt $S_f \subseteq \bigcup_{i=1}^m \partial D_i$ und S_f ist eine Lebesgue-Nullmenge.

Bemerkung 4.22. Die Filippov mengenwertige Abbildung für stückweise stetige Funktionen ist gegeben durch

$$F(f)(x) = \text{co}\{\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) : x_i \rightarrow x, x_i \notin S_f\}. \quad (82)$$

Diese mengenwertige Abbildung kann folgendermaßen berechnet werden: In den Stetigkeitspunkten von f , also für $x \notin S_f$ gilt $F(f)(x) = \{f(x)\}$ (vgl. Bemerkung 4.8 (ii)). In

den Unstetigkeitspunkten von f , also für $x \in S_f$ ist $F(f)(x)$ ein konvexer Polyeder in $\mathbb{R}^n$, welches durch

$$F(f)(x) = \text{co}\{f|_{\overline{D_k}}(x) : x \in \partial D_k\} \quad (83)$$

gegeben ist. Um dies zu veranschaulichen werden wir nun die Beispiele C und D nochmals betrachten.

Beispiel C.3. (Beispiel C zum Dritten)

In diesem Beispiel haben wir die Bewegung eines Körpers betrachtet, die auf einer schiefen Ebene hinuntergleitet. Die rechte Seite der dazugehörigen Differentialgleichung

$$\dot{v}(t) = g(\sin \theta) - \nu g(\cos \theta) \text{sign}(v(t))$$

ist stückweise stetig (sogar glatt) mit $D_1 = \{v \in \mathbb{R} : v < 0\}$ und $D_2 = \{v \in \mathbb{R} : v > 0\}$. Die Einschränkung der rechten Seite auf D_1 kann stetig fortgesetzt werden auf $\overline{D_1} = \{v \in \mathbb{R} : v \leq 0\}$, indem wir $f|_{\overline{D_1}}(0) = g(\sin \theta + \nu \cos \theta)$ setzen. Ebenso kann die rechte Seite der Differentialgleichung eingeschränkt auf D_2 stetig fortgesetzt werden auf $\overline{D_2} = \{v \in \mathbb{R} : v \geq 0\}$, indem wir $f|_{\overline{D_2}}(0) = g(\sin \theta - \nu \cos \theta)$ setzen. Daher ist die dazugehörige Filippov mengenwertige Abbildung $F(f) : \mathbb{R} \rightarrow P(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$F(f)(x) = \begin{cases} \{g(\sin \theta + \nu \cos \theta)\}, & v < 0 \\ \{g(\sin \theta - d\nu \cos \theta) : d \in [-1, 1]\}, & v = 0 \\ \{g(\sin \theta - \nu \cos \theta)\}, & v > 0 \end{cases}$$

Wir sehen, dass für genügend große Reibungskoeffizienten ν im Falle $v > 0$, $F(f)(x) < 0$ ist und im Falle $v < 0$, $F(f)(x) > 0$ ist. Daher muss jede Filippov-Lösung, welche mit einer positiven Anfangsgeschwindigkeit v_0 beginnt, irgendwann $v = 0$ erreichen. Wenn sie dann auch bei $v = 0$ bleibt, also stehen bleibt, ist sie noch immer eine Filippov-Lösung. Dieses Verhalten der Lösung entspricht den experimentellen Beobachtungen – nämlich, dass der Körper irgendwann auf der schiefen Ebene zum Stillstand kommt. Zum Abschluss dieses Kapitels werden wir sehen, dass dies auch die einzige Filippov-Lösung für Anfangswerte $v_0 > 0$ ist.

Beispiel D.3. (Beispiel D zum Dritten)

In diesem Beispiel haben wir einen nicht-glatten harmonischen Oszillator betrachtet. Die rechte Seite des dazugehörigen Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\text{sign}(x_1(t)). \end{aligned} \quad (84)$$

ist stetig auf den Halbebenen $D_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0\}$ und $D_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$, aber unstetig in $S_f = \{(0, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$ und klarerweise stetig von D_1, D_2 auf dem Rand $\partial D_1 = \partial D_2 = S_f$ fortsetzbar. Daher ist die rechte Seite stückweise stetig.

Die dazugehörige Filippov mengenwertige Abbildung ist gegeben durch

$$F(f)(x_1, x_2) = \begin{cases} \{(x_2, -\text{sign}(x_1))\}, & x_1 \neq 0 \\ \{x_2\} \times [-1, 1], & x_1 = 0 \end{cases}$$

Daher sind die Bahnkurven in der Abbildung 13, wenn man sie in Uhrzeigersinn durchläuft, Filippov-Lösungen dieser Differentialgleichung.

Wir werden nun den angekündigten Existenz- und Eindeutigkeitssatz für stückweise stetige rechte Seiten angeben. Der Einfachheit halber formulieren wir ihn nur für zwei Domänen D_1, D_2 , wobei wir für den gemeinsamen Rand $\partial D_1 = \partial D_2$ eine Regularitätsannahme treffen: $M = \partial D_1 = \partial D_2$ soll eine $(n-1)$ -dimensionale C^2 -Mannigfaltigkeit sein, d.h. es gibt um jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung W im $\mathbb{R}^n$ und eine C^2 -Funktion $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ mit nicht verschwindendem Gradienten und $M \cap W = f^{-1}(0)$. Salopp gesagt ist der Rand als Nullstellenmenge einer C^2 -Funktion darstellbar, d.h. es gibt keine „Ecken“.

Satz 4.23. *Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, stückweise stetig, mit Zerlegung D_1, D_2 , wobei die Menge der Unstetigkeitsstellen $S_f = \partial D_1 = \partial D_2$ von f eine $(n-1)$ -dimensionale C^2 -Mannigfaltigkeit ist. Sei außerdem $f|_{D_i}$ stetig differenzierbar und auch stetig differenzierbar ausdehnbar auf den Rand, d.h. $f|_{\overline{D_i}} \in C^1(\overline{D_i})$.*

Falls nun für jedes $x \in S_f$ entweder

$$\begin{aligned} f|_{\overline{D_1}}(x) & \text{ von } D_1 \text{ nach } D_2 \text{ zeigt, oder} \\ f|_{\overline{D_2}}(x) & \text{ von } D_2 \text{ nach } D_1 \text{ zeigt (siehe Abbildung 16)} \end{aligned}$$

dann existiert für alle $x_0 \in D$ eine eindeutige Filippov-Lösung der Differentialgleichung (70) mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$.

Wir werden diesen Satz nicht beweisen, aber plausibel machen. Zunächst garantiert die C^1 -Voraussetzung an die rechte Seite f schon die eindeutige Lösbarkeit der ODE auf $\overline{D_1}, \overline{D_2}$. Die Annahmen über das Verhalten der rechten Seite auf S_f erlauben grob gesprochen die Eindeutigkeit für Lösungen auf ganz D auszudehnen. Sehen wir uns in diesem Zusammenhang das mögliche Verhalten von f auf S_f in Abbildung 16 an, wobei $f|_{D_1}$ blau und $f|_{D_2}$ rot eingezeichnet ist.

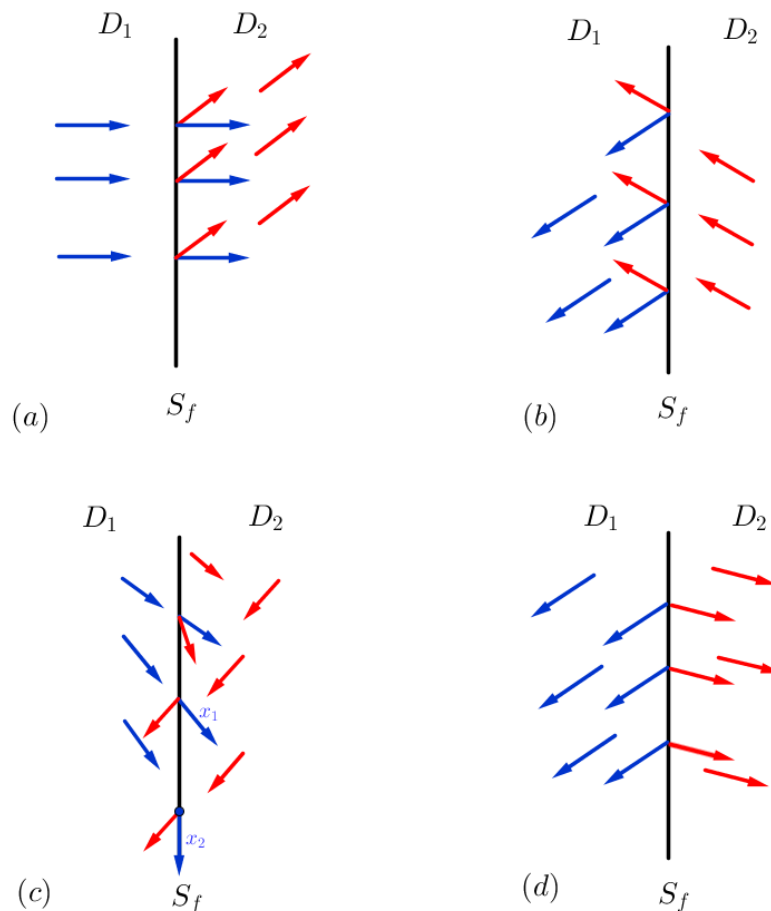


Abbildung 16: Mögliche Verhalten von f auf S_f

In den ersten beiden Fällen (a), (b) sind die Voraussetzungen des Satzes 4.23 erfüllt und die Lösungen laufen von D_1 nach D_2 in (a) bzw. von D_2 nach D_1 in (b) und die Eindeutigkeit ist erhalten; man spricht von transversal kreuzenden Lösungen.

Im Fall (c) zeigt auch immer einer der Pfeile ins jeweils andere Gebiet und wieder sind die Bedingungen von Satz 4.23 erfüllt und die Eindeutigkeit ist erhalten. Hier ist es allerdings möglich, dass Lösungen die z.B. in x_1 bzw. x_2 von D_1 bzw. D_2 auf S_f treffen in S_f bleiben; man spricht von attraktiven Trajektorien oder von S_f entlang-gleitenden Lösungen.

Die Situation in (d) schließlich wird im Satz 4.23 ausgeschlossen und es ist augenscheinlich, dass Lösungen, die in S_f starten sowohl nach D_1 als auch nach D_2 laufen können. Die Eindeutigkeit ist verletzt und wir sprechen von repulsiven Trajektorien.

Satz 4.23 lässt sich nun anwenden um die Eindeutigkeit für Lösungen unserer zwei Beispiele C und D zu begründen.

Beispiel C.4. (Beispiel C – zum letzten Mal)

Die rechte Seite der ODE

$$\dot{v}(t) = g(\sin \theta) - \nu g(\cos \theta) \operatorname{sign}(v(t))$$

ist wie bereits in C.3 festgestellt stückweise stetig. Auf $S_f = \{v = 0\}$ gilt $f|_{\overline{D_1}}(0) = \nu g > 0$, zeigt also nach D_2 (siehe auch Abbildung 10) und damit ist die Voraussetzung von Satz 4.23 erfüllt. Daher sind Filippov-Lösungen für jeden Anfangswert eindeutig, insbesondere die Lösungen für kleine Anfangsgeschwindigkeiten, die das Stehenbleiben des Körpers nach kurzer Zeit beschreiben.

Beispiel D.4. (Beispiel D – zum letzten Mal)

Auch für das von ODEs

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\operatorname{sign}(x_1(t)).\end{aligned}\tag{85}$$

haben wir bereits (siehe Beispiel D.3) festgestellt, dass die rechte Seite stückweise stetig ist. Außerdem zeigt $f|_{\overline{D_1}}(x)$ nach D_2 für jeden Punkt x in $S_f \cap \{x_2 > 0\}$, also den positiven Teil der y -Achse, da für solche $x = (x_1, x_2) = (0, x_2)$

$$f|_{D_1}(x) = (x_2, 0)$$

gilt, siehe auch Abbildung 12.

Analog zeigt $f|_{\overline{D_2}}(x)$ nach links also nach D_1 für $x \in S_f \cap \{x_2 < 0\}$. Schließlich gilt $f|_{\overline{D_1}}(0) = 0 = f|_{\overline{D_2}}(0)$, aber dieser Punkt, in den die Voraussetzungen des Satzes 4.23 verletzt sind, startet nur die Gleichgewichtslösung $x = 0$. Daher sind Filippov-Lösungen für jeden Startwert eindeutig.

5 Zusammenfassung aller Beispiele

Zum Abschluss der Arbeit geben wir eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten vier Beispiele, die wir in dieser Arbeit behandelt haben. Einen tabellarischen Überblick zeigt dabei Tabelle 1.

1. **Beispiel A:** Dieses Beispiel ist unser Paradebeispiel für Nicht-Existenz einer klassischen Lösung (p. 13, Beispiel A). Dabei haben wir die folgende Differentialgleichung betrachtet

$$x'(t) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Wir haben ebenfalls festgestellt, dass diese ODE keine Caratheodory-Lösung für den Anfangswert $x(0) = 0$ besitzt (p. 36, Beispiel A.2). Jedoch existiert für jeden Anfangswert eine sogar eindeutige Filippov-Lösung (p. 41, Beispiel A.3/B.2).

2. **Beispiel B:** In diesen Beispiel haben wir die Differentialgleichung

$$x'(t) = -\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}.$$

betrachtet. Sie besitzt im Gegensatz zum Beispiel A eine eindeutige klassische Lösung und somit auch eine Caratheodory-Lösung (p. 24, Beispiel B), obwohl sich die beiden Richtungsfelder in Beispiel A und B kaum voneinander unterscheiden. Des Weiteren haben wir festgestellt, dass die Filippov mengenwertige Abbildung von Beispiel A und Beispiel B identisch ist. Daher besitzt Beispiel B dieselbe eindeutige Filippov-Lösung wie Beispiel A (p. 41, Beispiel A.3/B.2).

3. **Beispiel C:** Dieses Beispiel beschreibt einen Körper, der unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer schiefen Ebene mit Neigung $\theta > 0$ hinuntergleitet. Die dazugehörige Differentialgleichung für die Geschwindigkeit des Körpers ist gegeben durch

$$\dot{v}(t) = g(\sin \theta) - \nu g(\cos \theta) \operatorname{sign}(v(t)),$$

wobei v die Geschwindigkeit des Körpers, g die Erdbeschleunigung und die Konstante ν der Reibungskoeffizient ist. Wir haben für diese Gleichung Lösungen gesucht, die zu dem experimentellen beobachtbaren Verhalten passen, dass der Körper für positive Anfangsgeschwindigkeiten und große Reibungskoeffizienten irgendwann nach endlicher Zeit zum Stillstand kommt. Wir haben festgestellt, dass solch ein Verhalten nicht durch klassische (p. 25, Beispiel C) und ebenso nicht durch Caratheodory-Lösungen (p. 36, Beispiel C.2) beschrieben werden kann. Jedoch gibt es sehr wohl eine sogar eindeutige Filippov-Lösung dieser ODE, die dieses Verhalten beschreibt (p. 46/49, Beispiel C.3/C.4).

4. **Beispiel D:** In diesem Beispiel haben wir einen unstetigen harmonischen Oszillator betrachtet, der mit folgenden System 1.Ordnung beschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\text{sign}(x_1(t)).\end{aligned}$$

Wir haben festgestellt, dass für dieses System keine klassische Lösungen (p. 27, Beispiel D) existieren. Jedoch besitzt dieses Beispiel identische Caratheodory- (p. 31, Beispiel D.2) und Filippov-Lösungen (p. 46/49, Beispiel D.3/D.4) .

Bsp.	Klassisch	Caratheodory	Filippov
A	× (p. 13, Beispiel A)	× (p. 36, Beispiel A.2)	✓ (p. 41, Beispiel A.3/B.2)
B	✓ (p. 24, Beispiel B)	✓	✓ (p. 41, Beispiel A.3/B.2)
C	× (p. 25, Beispiel C)	× (p. 36, Beispiel C.2)	✓ (p. 46/49, Beispiel C.3/C.4)
D	× (p. 27, Beispiel D)	✓ (p. 31, Beispiel D.2)	✓ (p. 46/49, Beispiel D.3/D.4)

Tabelle 1: Überblick über die wichtigsten Beispiele

A Das Lebesgue-Integral

In diesem Abschnitt werden wir in Anlehnung an [13, Kapitel 1.30] das Lebesgue-Integral genauer betrachten. Dabei beschränken wir uns auf den Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Die folgenden Definitionen und Sätze gelten auch analog für $\mathbb{R}^n$. Eine allgemeinere Darstellung der Theorie des Lebesgue-Integrals auf Maßräumen findet sich z.B. in [10, Kapitel XVI und Kapitel XXIII].

Betrachten wir zuallererst den Unterschied zwischen dem Riemann-Integral und dem Lebesgue-Integral. Für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ können wir diesen folgendermaßen veranschaulichen: Zur Beschreibung des Riemann-Integrals wird die x-Achse in Intervalle unterteilt und Rechtecke gemäß dem Funktionswert an der Stützstelle innerhalb der betreffenden Intervalle konstruiert. Diese Flächen werden anschließend addiert (siehe Abbildung 17) und schließlich wird die Intervalllänge im Limes gegen 0 betrachtet. Dagegen wird zur Beschreibung des Lebesgue-Integrals die y-Achse in Intervalle unterteilt. Dann werden jene Punkte x auf der x-Achse aufgesammelt in der $f(x)$ sein Wert im vorgegebenen y-Intervall hat. Hat man nun ein „Maß“ für diese aufgesammelten Punkte, so ergibt sich wieder multipliziert mit einem Wert aus dem y-Intervall eine „Fläche“. Diese werden dann addiert und der Limes im Falle kleiner y-Intervalle betrachtet.

Als Motto könnte man also sagen Riemann-Integral vs. Lebesgue-Integral bedeutet Querstreifen vs. Längsstreifen, siehe auch Abbildung 18.

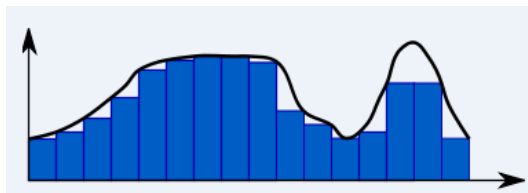


Abbildung 17: Illustration des Riemann-Integrals

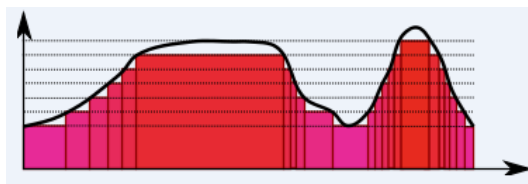


Abbildung 18: Illustration des Lebesgue-Integrals

Das Lebesgue-Integral spielt also das Integrieren auf das Problem zurück, möglichst komplizierten Mengen ein Maß zuzuordnen. Die genaue mathematische Definition lautet wie folgt:

Definition A.1. Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $([a_i, b_i])_{i=1}^{\infty}$ paarweise disjunkte Teilintervalle von $[a, b]$. Wir nennen $m([a, b]) = b - a$ das **Maß eines Intervalls** und $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^{\infty} m([a_i, b_i])$ das **Maß einer disjunkten Vereinigung von Intervallen**.

Mit gewissen technischen Aufwand lässt sich m auf kompliziertere Teilmengen von $\mathbb{R}$ ausdehnen und zwar auf die Familie $\mathcal{L} \subseteq P(\mathbb{R})$ der Lebesgue-messbaren Mengen, die wir im Folgenden definieren werden. Zuvor aber eine Begriffsbestimmung.

Definition A.2. Sei $N \subseteq \mathbb{R}$. N heißt **Lebesgue-Nullmenge**, falls für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge offener Intervalle (a_i, b_i) existiert, welche N überdeckt und das Gesamtmaß $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \epsilon$ hat.

Bemerkung A.3. Jede endliche und abzählbare Menge ist eine Nullmenge, jedoch gibt es auch überabzählbare Nullmengen, beispielsweise die Cantor-Menge (vgl. [13, Kapitel 1.30]). Wir werden außerdem folgende Sprechweise verwenden:

fast überall $:\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ mit Ausnahme höchstens eine Nullmenge.

Definition A.4. Wir nennen $\mathcal{L} \subseteq P(\mathbb{R})$ die **Familie der Lebesgue-messbaren Mengen**, falls $\mathcal{L}$ die kleinste Familie ist, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\mathcal{L}$ enthält alle Intervalle.
2. $\mathcal{L}$ enthält mit jedem $A \subseteq \mathbb{R}$ auch $\mathbb{R} \setminus A$.
3. $\mathcal{L}$ enthält mit jeder Familie $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ auch ihre Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
4. $\mathcal{L}$ enthält alle Nullmengen.

Bemerkung A.5. Die Eigenschaften 2. und 3. in dieser Definition machen $\mathcal{L}$ zu einer sogenannten σ -Algebra. Des Weiteren sind nicht alle Teilmengen von $\mathbb{R}$ messbar; offene und abgeschlossene Mengen aber sind messbar.

Wir können nun m auf $\mathcal{L}$ erweitern.

Satz A.6. Die Erweiterung von m auf $\mathcal{L}$ erfüllt folgende Eigenschaften:

1. $m(\emptyset) = 0$.
2. $m(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} m(A_i)$ für paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{L}$.
3. Sei $A \in \mathcal{L}$, dann ist $m(A) = \inf \{m(G) \mid G \supseteq A \text{ offen}\}$
4. $m(N) = 0$ für jede Nullmenge N .

Definition A.7. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Lebesgue-messbar**, falls für jedes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\{\alpha \leq f(x) \leq \beta\} \in \mathcal{L}$$

gilt.

Satz A.8.

1. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist f messbar. Die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_A$ einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann messbar, wenn $A \in \mathcal{L}$ ist. Endliche Linearkombinationen von charakteristische Funktionen von Lebesgue-messbaren Mengen sind messbar.
2. Mit $f, (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sind auch $|f|, \min(f_1, f_2), \sup(f_n)$ und $\inf(f_n)$ messbar.
3. Punktweise Limiten messbarer Funktionen sind messbar.
4. Falls $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar ist, dann ist f punktweiser Limes von Treppenfunktionen.

Definition A.9. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir definieren den **positiven bzw. negativen Anteil von f** als

$$\begin{aligned} f^+ &= \max(f, 0) \\ f^- &= \min(-f, 0) \end{aligned}$$

Es gilt $f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$.

Definition A.10.

1. Sei $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ mit paarweise disjunkten $A_i \subseteq \mathbb{R}$ und $m(A_i) < \infty$. Wir definieren das Integral

$$\int f := \sum_{i=1}^m \alpha_i m(A_i).$$

2. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar und $f \geq 0$. Wir definieren

$$\int f := \lim \int u_m \quad \text{mit} \quad u_m := \sum_{k=0}^{m2^m} \frac{k}{2^m} \mathbb{1}_{\{k2^{-m} < f < (k+1)2^{-m}\}}.$$

3. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar und $\int |f| \leq \infty$. Wir definieren

$$\int f := \int f^+ - \int f^-$$

Definition A.11. Der *Vektorraum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen* ist definiert als

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist Lebesgue-messbar und } \int |f| < \infty\}$$

Das Lebesgue-Integral ist eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals, d.h. jede Riemann-integrierbare Funktion ist auch Lebesgue-integrierbar und beide Integrale ergeben dasselbe Resultat. Es können allerdings mehr Funktionen Lebesgue- als Riemann-integriert werden, vor allem „wildere“ Funktionen, wie stark oszillierende, unstetige Funktionen. Das bekannteste Beispiel dafür ist die Dirichlet Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (86)$$

Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar, da alle Untersummen stets 0 und alle Ober-summen stets 1 sind. Da aber $\mathbb{Q}$ in der Menge der reellen Zahlen eine Lebesgue-Nullmenge ist, ist die Funktion fast überall 0. Also existiert das Lebesgue-Integral und besitzt den Wert 0.

Wozu brauchen wir diese „wilden“ Funktionen? In der Praxis auftretende Funktionen sind doch immer „hübsch“ (z.B. stückweise stetig, Riemann-integrierbar usw.). Tatsächlich benötigen wir solche „wilden“ Funktionen nicht, aber wir definieren $\mathcal{L}^1$, da es ein guter Raum ist, wo starke Sätze gelten, vor allem über Vertauschen von Integral und Limes. Im Folgenden werden wir einige dieser Sätze vorstellen.

Satz A.12. (*Monotone Konvergenz*)

Sei $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ Lebesgue-messbar und $f = \lim f_k$ (punktweise), dann ist auch f Lebesgue-messbar und es gilt

$$\lim \int f_n = \int \lim f_n$$

Satz A.13. (*Dominierte Konvergenz*)

Sei $f_1, f_2, \dots$ Lebesgue-messbar und $f_n \rightarrow f$ fast überall. Außerdem gelte für alle n fast überall $|f_n| \leq g \in \mathcal{L}^1$. Dann sind auch $f_n, f \in \mathcal{L}^1$ und es gilt

$$\lim \int f_n = \int \lim f_n$$

Satz A.14. (*Satz von Fubini*)

Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$, dann gilt

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx.$$

Bemerkung A.15. Auf $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ können wir nun $\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$ definieren. Allerdings ist $\|\cdot\|_1$ auf $\mathcal{L}^1$ nur eine Halbnorm, denn aus $\|f\|_1 = 0$ folgt nur $f(x) = 0$ fast überall, aber keineswegs $f = 0$. Um diese „Kleinigkeit“ auszuräumen identifiziert man alle $f \in \mathcal{L}^1$ mit $f = 0$ fast überall mit der Nullfunktion. Formal ausgedrückt bildet man in $\mathcal{L}^1$ Klassen bzgl. der Äquivalenzrelation

$$f \sim g :\Leftrightarrow f - g = 0 \text{ fast überall.}$$

Der entstehende Raum wird mit $L^1 = \mathcal{L}^1 \setminus \sim$ bezeichnet. Der Umstand, dass Elemente in L^1 strenggenommen Klassen von $\mathcal{L}^1$ -Funktionen sind wird fast immer unterdrückt, denn wir sprechen meistens von L^1 -Funktionen. Dies wollen wir auch in der folgenden Definition für L^1 - bzw. L^p -Räume tun.

Definition A.16. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren die **Räume integrierbarer Funktionen** als

$$(i) \quad L^1(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist Lebesgue-messbar und } \int |f| < \infty\} \quad \text{mit}$$

$$\|f\|_1 := \int_U |f(x)| dx$$

$$(ii) \quad L^2(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist Lebesgue-messbar und } \int |f|^2 < \infty\} \quad \text{mit}$$

$$\langle f, g \rangle := \int_U f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$(iii) \quad \text{Für } 1 \leq p < \infty \text{ definieren wir allgemeiner}$$

$$L^p(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist Lebesgue-messbar und } \int |f|^p < \infty\} \quad \text{mit}$$

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_U |f(x)|^p dx}$$

$$(iv) \quad L^\infty(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist Lebesgue-messbar und fast überall beschränkt}\} \quad \text{mit}$$

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup} |f| = \inf_{N \subseteq U, m(N)=0} \sup_{x \in U \setminus N} |f(x)| = \inf_{N \subseteq U, m(N)=0} \|f|_{U \setminus N}\|_\infty.$$

Satz A.17.

$$(i) \quad \text{Für } p \in [1, \infty] \text{ ist } L^p(U) \text{ ein Banachraum.}$$

$$(ii) \quad L^2 \text{ ist der einzige Hilbertraum.}$$

$$(iii) \quad \text{Ist } m(U) < \infty, 1 < q < 2 \text{ und } 2 < p < \infty, \text{ dann gilt}$$

$$C^0(U) \subseteq L^\infty(U) \subseteq L^p(U) \subseteq L^2(U) \subseteq L^q(U) \subseteq L^1(U).$$

Literatur

- [1] H. Amann: *Ordinary Differential Equations: An Introduction to Nonlinear Analysis*. De Gruyter, Berlin, 1. Aufl., 1990.
- [2] B. Aulbach: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Elsevier, 2. Aufl., 2004.
- [3] J. Cortes: *Discontinuous Dynamical Systems*. IEEE Control Systems Magazine, Vol. 28 (3), 2008, S. 36-73.
- [4] O. Deiser: *Analysis 1*. Springer, Heidelberg, 1. Aufl., 2011.
- [5] A.F. Filippov: *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1. Aufl., 1988.
- [6] O. Forster: *Analysis 2*. Springer, München, 10. Aufl., 2013.
- [7] S. Haller, G. Hörmann: *Comparison of Some Solution Concepts for Linear First-Order Hyperbolic Differential Equations with Non-Smooth Coefficients*. Publications De L'Institut Mathématique 84(98) 2008, S.123-157.
- [8] S. Haller: *Generalized Regularity and Solution Concepts for Differential Equations*. Dissertation, Universität Wien, 2008, siehe auch arXiv:0806.1451 [math.AP], 2008.
- [9] H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart, 4. Aufl., 2004.
- [10] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis-Teil 2*. Teubner, Stuttgart, 13. Aufl., 2004.
- [11] H. Hirsch, S. Smale, R. Devaney: *Differential Equation, Dynamical Systems, and an Intruduction to Chaos*. Elsevier, Amsterdam, 3. Aufl., 2013.
- [12] L. Hörmander: *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*. Springer, Berlin, 2009.
- [13] R. Steinbauer: *Funktionalanalysis I*. Vorlesungsausarbeitung, Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Wintersemester 2007/08.
- [14] R. Steinbauer: *Analysis in einer Variable für LAK*. Vorlesungsausarbeitung, Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Wintersemester 2012/13; online unter http://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/WS1213/AieVfLAK_Vo.2013-02-08_incl.index.pdf.
- [15] G. Teschl: *Ordinary Differential Equation and Dynamical Systems*. American Mathematical Society, Rhode Island, 1. Aufl., 2011.
- [16] W. Walter: *Analysis 2*. Springer, Berlin, 5. Aufl., 2002.
- [17] W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen-Eine Einführung*. Springer, Berlin, 7. Aufl., 2000.

Zusammenfassung

Differentialgleichungen sind im Allgemeinen ein wesentliches Werkzeug der mathematischen Modellierung und tauchen daher in einer Vielzahl von Anwendungen auf. Sie werden beispielsweise nicht nur verwendet um Naturgesetze zu formulieren, sondern auch um Vorgänge in den Humanwissenschaften zu beschreiben.

Diese Arbeit befasst sich mit unstetigen dynamischen Systemen – d.h. gewöhnliche Differentialgleichungen mit unstetigen rechten Seiten. Dabei richten wir unser Augenmerk weniger auf das explizite Lösen von Differentialgleichungen, sondern stellen vielmehr eine Existenz- und Eindeutigkeitstheorie zur Verfügung.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird die klassische Lösungstheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen behandelt. Dabei garantieren uns die zwei zentralen Sätze dieser Theorie – der Satz von Peano und der Satz von Picard-Lindelöf – im Falle einer stetigen bzw. Lipschitz-stetigen rechten Seite die Existenz bzw. Eindeutigkeit von Lösungen. Tatsächlich führen aber viele Modellierungen zu unstetigen rechten Seiten. In diesen Fällen kann diese „glatte“ Theorie nichts über die Existenz bzw. Eindeutigkeit von Lösungen aussagen. Deswegen ist es wünschenswert diese Theorie auch für unstetige rechte Seiten zu erweitern. Wir werden in dieser Arbeit zwei von vielen möglichen Erweiterungen nennen.

Als Erstes werden wir uns mit dem Lösungskonzept von Caratheodory befassen. Dieses stellt gewissermaßen eine minimale Erweiterung des klassischen Lösungskonzeptes unter Zuhilfenahme der Lebesgueschen Integrationstheorie dar. Wir werden anhand von Beispielen jedoch sehen, dass dieses Lösungskonzept nicht allgemein bzw. anwendungsorientiert genug ist, um einfache physikalische Phänomene korrekt zu beschreiben.

Das zweite Lösungskonzept, dass wir zum Abschluss dieser Arbeit besprechen ist das von Filippov. Dieses zeichnet sich durch seine Anwendungsorientierung aus. Dabei wird die Differentialgleichung durch eine sogenannte Differentialinklusion ersetzt. Das bedeutet, dass die Ableitung der Funktion an einer Stelle nicht etwa einen vorgegebenen Wert annehmen, sondern nur in einem bestimmten Wertebereich liegen muss, der aus der unstetigen rechten Seite konstruiert wird.