DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Wie man bei Wizard und anderen Kartenspielen gewinnen kann

Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zu ausgewählten Kartenspielen

Verfasserin

Ramona Neustifter

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 299
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtstudium UF Mathematik
	UF Psychologie und Philosophie
Betreuer:	ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ort, Datum	Unterschrift

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei einigen Personen bedanken, die mich während meines Studiums begleitet haben.

Zuerst möchte ich mich bei meinem Betreuer, Peter Raith für die großartige Unterstützung bedanken. Er hatte immer ein offenes Ohr für mich, hat sich stets viel Zeit genommen um meine Fragen zu beantworten und hat mir immer wieder mit hilfreichen Tipps weitergeholfen.

Der größte Dank gilt meinen Eltern, die mir vorallem durch ihre finanzielle Unterstützung ein angenehmes und sorgenfreies Studium ermöglicht haben. Sie haben mich in schwierigen Situationen stets daran erinnert, mein Ziel nicht aus den Augen zu verlieren, was mich immer wieder bestärkt und motiviert hat.

Ebenso danken möchte ich meiner Schwester Katharina und meinem Freund Roman. Für die Geduld die sie mit mir hatten, dafür, dass sie immer für mich da sind, wenn ich sie brauche und vorallem für die vielen Stunden, die sie kartenspielend mit mir verbracht haben, wodurch mir die Idee kam, dieses Hobby aus einer wissenschaftlichen Persektive zu betrachten.

Ein besonderer Dank gilt auch Yvonne Omischl, die über die Jahre von einer Studienkollegin zu einer wirklich guten Freundin geworden ist. Gemeinsam haben wir schwierige Prüfungen gemeistert und uns gegenseitig zum Weiterlernen motiviert. Dass sie mich auf der Zielgeraden überholt hat, hat mich angespornt meine Arbeit auch endlich fertigzustellen. Danke dafür!

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Das Phänomen von Glück und Unglück hat die Menschen schon immer fasziniert. Warum werden manche vom Glück verfolgt, während es um andere immer wieder einen großen Bogen macht? Was ist Glück überhaupt, und warum haben es immer die, die es nicht verdient haben? Ist es vorhersehbar, wer gewinnt? Oder noch besser - wie können wir es beeinflussen?
Es ist leicht, sich den Zufall als etwas vorzustellen, das über uns steht. Die alten Götter, Astrologie und Aberglaube: All das waren Versuche, das Unerklärliche zu erklären.
Auf die eine oder andere Weise, wird der Zufall vermutlich immer ein Geheimnis bleiben, doch durch die Sprache der Mathematik können wir ihn in Wahrscheinlichkeit ausdrücken und beschreiben.
Im Rahmer dieser Arbeit soll aufgezeigt werden, wie die Antwort auf die Frage, die sich im Laufe eines Kartenspieles oft gestellt wird - Werde ich mit diesen Karten gewinnen? - mit den Möglichkeiten der Wahrscheinlichkeitstheorie abgeschätzt werden kann.

Ziel dieser Arbeit ist es, verschiedene Kartenspiele zu analysieren und die Gewinnwahrscheinlichkeiten eines Spielers kritisch zu betrachten. Ich habe dazu zwei Kartenspiele ausgewählt, bei deren Berechnungen man mit elementaren Methoden der Wahrscheinlichkeit auskommt und werde an einem weiteren Kartenspiel zeigen, dass manchmal auch speziellere Verfahren anzuwenden sind.
Am Beginn dieser Arbeit wird ein Überblick über die für diese Arbeit relevanten Aspekte der Wahrscheinlichkeitstheorie gegeben. Nach einer kurzen geschichtlichen Einführung in das Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung, werden für die späteren Berechnungen grundlegende Definitionen, Sätze und Beispiele angeführt und erklärt. Abgesehen vom Kapitel 2.10 handelt es sich dabei um Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie, die auch auf allgemein bildenden höheren Schulen unterrichtet werden.

Anschließend bereitet das Kapitel *Kartenspiele*, indem die Geschichte des Kartenspiels und die verschiedenen Arten von Kartenspielen aufgezeigt werden, auf den Hauptteil dieser Arbeit vor.
Die darauffolgenden Kapiteln behandeln jeweils ein Kartenspiel. Dabei werden zunächst die Regeln der einzelnen Spiele erklärt bevor in der mathematischen Analyse ausgewählte Spielsituationen mit den Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschrieben werden.
Abschließend wird ein kurzer Einblick in die Anwendungsbereiche im Schulunterricht gegeben.

Alle in der Arbeit vorkommenden Bezeichungen sind geschlechtsneutral zu verstehen. Aufgrund der leichteren Lesbarkeit wähle ich jeweils die grammatikalisch näher liegende Form.

Kapitel 2

Wahrscheinlichkeitstheorie

2.1 Geschichtlicher Hintergrund

Obwohl sich Gelehrte bereits seit der griechischen Antike mit Zufall und Wahrscheinlichkeit beschäftigten, wurde eine mathematische Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung erst seit seiner Geburtstunde im 17. Jahrhundert systematisch betrieben (vgl. [5], S. 7).
Den Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung als selbständige Wissenschaft stellt offiziell ein Briefwechsel zwischen Pierre de Fermat und Blaise Pascal im Jahre 1654 dar. Die beiden französischen Mathematiker tauschten sich darin über die Lösung einiger von Chevalier de Méré an Pascal gestellter Fragen über die Gewinnaussichten in gewissen Situationen damals üblicher Glückspiele aus (vgl. [1], S. 7).
Es ging dabei insbesonderde um das sogenannte Teilungsproblem, das sich mit der Aufteilung des Gewinns bei einem vorzeitigen Spielabbruch beschäftigt. Auch über das Würfelproblem von Chavalier de Méré tauschten sich die beiden Mathematiker aus. Der französischen Edelmann und begeisterter Spieler zerbrach sich nämlich unter anderen den Kopf darüber, warum die Augensumme 11 beim Würfeln mit drei Würfeln häufiger vorkommt als die Augensumme 12, obwohl es - zumindest seiner Auffassung nach - für beide Augensummen genau sechs Möglichkeiten gibt (vgl. [5], S. 5).
Die Lösungen von Fermat und Pascal wurden dem niederländischen Mathematiker, Christian Huygens, der 1657 die erste systematische Abhandlung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung veröffentlichte mitgeteilt. Diese Abhandlung wurde von Jacob Bernoulli in seinem im Jahre 1713 erschienenen Werk „Ars conjectandi“ („Die Kunst des Mutmaßen“) aufgenommen und weitergeführt (vgl. [1], S. 7).
Im Jahr 1812 systematisierte Pierre-Simon Laplace den Kenntnisstand seiner

Zeit in seinem Werk „Théorie Analytique des Probabilités". Er beschrieb darin erstmals die Wahrscheinlichkeit als Quotient aus der Anzahl der für ein Ereignis günstigen und Anzahl der möglichen Fälle, wobei alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich waren (vgl. [5], S. 5).
Aber auch zahlzeiche andere Mathematiker, wie zum Beispiel Johann Carl F. Gauß, Pafnuti L. Tschebyschow oder Andrei A. Markow bereicherten die Wahrscheinlichkeitstheorie im 19. Jahrhundert. In dieser Zeit dehnte sich der Anwendungsbereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf verschiedenste Wissenschaften, wie die statische Mechanik oder die Vererbungslehre aus (vgl. [1], S. 8).
David Hilbert nahm im Jahre 1900 das Problem der Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie in seine Liste der 23 wichtigsten damals ungelösten mathematischen Probleme auf. Der deutsche Mathematiker hatte diese Probleme ausgewählt, weil sie ihm von zentraler Bedeutung zu sein schienen und er sich von der Lösung dieser Probleme einen entscheidenden Fortschritt auf den jeweiligen Gebieten erhoffte. Es bestand somit kein Zweifel mehr, dass die Wahrscheinlichkeitstheorie längst eine ernstzunehmende Teilwissenschaft geworden war und bis heute ist (vgl. [1], S. 8).
Rund 20 Jahre später versuchte der österreichische Mathematiker Richard Edler von Mises dieses Hilbertsche Problem zu lösen, indem er Wahrscheinlichkeit als Grenzwert von relativen Häufigkeiten definierte. Aufgrund der Problematik, die diese Definition aufwirft (siehe Teilkapitel 2.3) konnte sich diese jedoch nicht durchsetzen (vgl. [1], S. 8).
Vorallem die enge Bindung der Wahrscheinlichkeitsrechnung an ihre Anwendungen und die damit zusammenhängende Verbindung von wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden an bestimmte inhaltliche Fragegstellungen haben dazu geführt, dass es erst im Jahr 1933 dem russischen Mathematiker Alexander Kolmogorov gelang, eine mathematisch befriedigende Begründung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes einzuführen (siehe Teilkaptitel 2.4).
In den Jahrzehnten darauf wurden vorallem stochastische Prozesse untersucht, die als Zufallsvariablen in geeigneten Räumen aufgefasst werden können. Grundbausteine vieler solcher Prozesse sind der Brown-Wiener-Prozess sowie der Poisson-Prozess. (vgl. [4], S. 13)
Heute spielt die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine große Rolle in Bereichen der Naturwissenschaft, Wirtschaft, Technik oder Ökonomie und auch im Schulwesen wird angesichts dessen diesem Thema immer mehr Beachtung geschenkt.

2.2 Terminologie

In diesem Kapitel soll eine mathematische Präzensierung des Begriffes Wahrscheinlichkeit sowie die Klärung anderer grundlegender Begriffe stattfinden.
In der Wahrscheinlichkeitstheorie werden Ergebnisse eines so genannten Zufallsexperimentes betrachtet. Ein Zufallsexperiment hat verschiedene mögliche Ausgänge, die nicht durch logische oder andere Gründe determiniert sind. Zumindest gedanklich sollten die Experimente unter den gleichen Bedingungen so wiederholbar sein, dass der Versuchsausgang bei unabhängig durchgeführten Wiederholungen statistischen Regelmäßigkeiten folgt (vgl. [9], S. 1).
Beispiele von Zufallsexperimenten sind: das Werfen eines Würfels oder einer Münze, die Lottoziehung oder das Verteilen von Karten.
Die Menge aller möglichen Ausgänge eines solchen Zufallsexperiments wird als Ereignisraum Ω bezeichnet. Die Teilmengen von Ω stellen die Ereignisse dar.

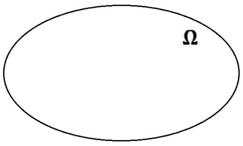
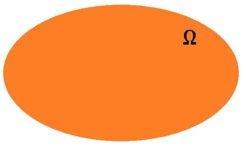
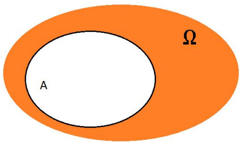
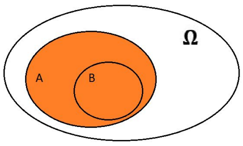
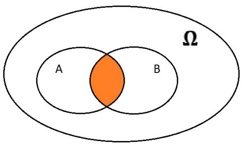
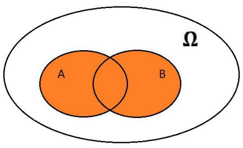
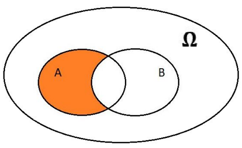
Ereignisse können verbal, wie Mengen oder mit Hilfe der Sprache der Logik beschrieben werden. Um Begriffe wie Teilmenge, Vereinigungsmenge, Schnittmenge oder leere Menge zu veranschaulichen, werden sie in der nachfolgenden Grafik dargestellt.

Beispiel 2.1. *Beim Werfen eines idealen Würfels*[1] *können als mögliche Versuchsereignisse die Augenzahlen* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *eintreten. Es gilt also der Ereignisraum* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Ist A das Ereignis „eine gerade Augenzahl wird geworfen“ so tritt A genau dann ein, wenn eine der Augenzahlen* $1, 3, 5$ *geworfen wird, es gilt also* $A = \{2, 4, 6\}$. *Für das Ereignis B „die geworfene Augenzahl ist höchstens gleich 3“ erhält man* $B = \{1, 2, 3\}$.

Beispiel 2.2. *Wird eine Münze, die auf der einen Seite „Kopf“ und auf der anderen Seite „Zahl“ zeigt, zweimal geworfen, können als mögliche Versuchsereignisse zweimal Kopf, zuerst Zahl und dann Kopf, zuerst Kopf und dann Zahl oder zweimal Zahl eintreten. Die Menge aller möglichen Ausgänge wird also beschreiben durch* $\Omega = \{(K,K),(Z,K),(K,Z),(Z,Z)\}$. *Ist A das Ereignis „die Münze zeigt zweimal die gleiche Seite“ so tritt A genau dann ein, wenn entweder zweimal Kopf oder zweimal Zahl geworfen wird, es gilt also* $A = \{(K, K), (Z, Z)\}$.

Beispiel 2.3. *Beim Ziehen aus einem Kartenspiel mit 52 Karten, bestehend aus Ass, König, Dame, Bube, Zehn, Neun, Acht, Sieben, Sechs, Fünf, Vier, Drei und Zwei in den Farben Pik* $\spadesuit$, *Herz* $\heartsuit$, *Karo* $\diamondsuit$ *und Kreuz* $\clubsuit$ *sei A das Ereignis „Wert kleiner als 4“ und B sei das Ereignis „in der Farbe* $\heartsuit$*“. Die Durchschnittmenge von A und B ist in diesem Fall* $A \cap B = \{\heartsuit 3, \heartsuit 2\}$.

[1] ein Würfel, der aus homogenen Material angefertigt und nicht „manipuliert“ wurde

Darstellung	Bezeichnung	Mengenlehre	Bedeutung
	$\emptyset$	leere Menge	unmögliches Ereignis
	Ω		sicheres Ereignis
	$\Omega \setminus A$		Ereignis A tritt nicht ein
	$B \subseteq A$	Teilmenge	wenn B eintritt, tritt auch A ein
	$A \cap B$	Durchschnitts-menge	Ereignis A und B treten ein
	$A \cup B$	Vereinigungs-menge	Ereignisse A oder B tritt ein
	$A \setminus B$	Komplement von B	Ereignis A tritt ein, B aber nicht

2.3 Relative Häufigkeit

Ist A ein beliebiges zufälliges Ereignis und wird ein Zufallsexperiment n-mal unter denselben Bedingungen durchgeführt, so tritt bei jeder Versuchsdurchführung entweder A oder das komplementäre Ereignis $\bar{A}$ ein.
Dabei heißt die Anzahl der Versuche, bei denen A eintritt *absolute Häufigkeit* $h_n(A)$ des Ereignisses A.
Der Quotient $r_n(A) = \frac{h_n(A)}{n}$ heißt *relative Häufigkeit.*

Beispiel 2.4. *Ein Würfel wird (1) 50 mal (2) 500 mal geworfen. Für die einzelnen Versuchsausgänge soll jeweils die relative Häufigkeit bestimmt werden.*

Ergebnis	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
1	卌|| $= 7$	$\frac{7}{50} = 0,14$
2	卌卌 $= 10$	$\frac{10}{50} = 0,20$
3	卌||| $= 8$	$\frac{8}{50} = 0,16$
4	卌|||| $= 9$	$\frac{9}{50} = 0,18$
5	卌|| $= 7$	$\frac{7}{50} = 0,14$
6	卌|||| $= 9$	$\frac{9}{50} = 0,18$

Abbildung 2.1: Ergebnisse nach 50 mal Würfeln

Ergebnis	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
1	卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌||| $= 88$	$\frac{88}{500} = 0,176$
2	卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌|| $= 77$	$\frac{77}{500} = 0,154$
3	卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌|| $= 82$	$\frac{82}{500} = 0,164$
4	卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌 $= 90$	$\frac{90}{500} = 0,180$
5	卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌| $= 86$	$\frac{86}{500} = 0,172$
6	卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌卌|| $= 77$	$\frac{77}{500} = 0,154$

Abbildung 2.2: Ergebnisse nach 500 mal Würfeln

Obwohl verschiedene Versuchsserien vom gleichen Umfang n im Allgemeinen verschiedene relative Häufigkeiten liefern, nimmt man an, dass die Werte $r_n(A)$ in der unmittelbaren Nähe eines festen Wertes liegen, falls n hinreichend groß ist (vgl.: [3], S. 6). Auch das Beispiel 2.2 zeigt, dass die Unterschiede zwischen den einzelnen Werten bei einer höheren Anzahl an Wiederholungen kleiner werden.
Aufgrund derartigen Beobachtungen hat der österreichische Mathematiker Richard von Mises versucht, die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses durch einen Zahlenwert zu definieren, dem sich die relativen Häufigkeiten $r_n(A)$ beliebig nähern, vorausgesetzt n ist genügend groß:

$$„P(A) = \lim_{n\to\infty} r_n(A)“$$

Gegen diese *naive Definition* ist allerdings einzuwenden, dass sich bei einer sehr hohen Anzahl an Wiederholungen des Zufallsexperiments im Laufe der Zeit die Versuchsbedingungen ändern können. Bei einem Würfel könnten beispielsweise Abnutzungserscheinungen auftreten, was unter Umständen dazu führen kann, dass das Zufallsexperiment nicht unendlich oft wiederholt werden kann. Selbst wenn es gelingen würde, die Versuchsbedingungen konstant zu halten, so muss der Grenzwert nicht existieren.
Daher ist es notwendig die Wahrscheinlichkeit auf eine andere Art einzuführen. Da die relativen Häufigkeiten $r_n(A)$ dennoch in einer gewissen Beziehung mit den Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ stehen, ist es hilfreich, einige Eigenschaften abzuleiten.

Eigenschaften der relativen Häufigkeiten:

- Für die absolute Häufigkeit $h_n(A)$ gilt: $0 \leqslant h_n(A) \leqslant n$.
  Nach Division durch n gilt daher für jedes A:
  $$0 \leqslant r_n(A) \leqslant 1 \tag{2.1}$$
- Das sichere Ereignis Ω tritt immer ein, also gilt:
  $$r_n(\Omega) = 1 \tag{2.2}$$
- Falls $A \cap B = \emptyset$ gilt für ihre absolute Häufigkeit:
  $$h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)$$
  Division durch n ergibt:
  $$r_n(A \cup B) = r_n(A) + r_n(B) \tag{2.3}$$

- Falls $A \cap B \neq \emptyset$ gilt für ihre absolute Häufigkeit:

$$h_n (A \cup B) = h_n (A) + h_n (B) - h_n (A \cap B)$$

  Division durch n ergibt:

$$r_n (A \cup B) = r_n (A) + r_n (B) - r_n (A \cap B) \tag{2.4}$$

2.4 Axiomatische Definition

Da sich also eine explizite Definition der Wahrscheinlichkeit mittels bekannter Begriffe als prinzipiell unmöglich erwiesen hat, greift man, wie auch in anderen Teilgebieten der Mathematik, auf eine axiomatische Begründung zurück.
Die Motivation dafür entsteht durch den bereits erläuterten Zusammenhang der Wahrscheinlichkeit mit den relativen Häufigkeiten. Für den im Jahr 1933 von Andrei Nikolajewitsch Kolmogoroff eingeführten Wahrscheinlichkeitsbegriff genügt es nämlich, die in 2.1 - 2.4 für relative Häufigkeiten abgeleiteten Eigenschaften als Axiome zu postulieren (vgl. [3], S. 8).

Axiom 1: Ist Ω die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Experiments, so ist jeder Teilmenge $A \subseteq \Omega$ eine reelle Zahl $P(A) \geq 0$ zugeordnet, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit A eintritt.

Axiom 2: Für das sichere Ereignis Ω gilt $P(\Omega) = 1$.

Axiom 3: Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Ereignisse, so gilt:

$$P \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P (A_i)$$

Die Eigenschaft des dritten Axioms wird auch σ-Additivität genannt. Zur Erklärung dieses Begriffes wird eine Definition benötigt, die die Minimalanforderungen an ein Ereignissystem beschreibt (vgl. [7], S. 9f).

Definition 2.5. Sei $\Omega \neq \emptyset$. Eine Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω heißt *σ -Algebra*, falls:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

$(\Omega, \mathcal{A})$ heißt dann *Ereignisraum.*

Wie im ersten Axiom bereits beschrieben, handelt es sich bei dem Begriff Wahrscheinlichkeit um eine Funktion, die jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnet. Mit der folgenden Definition soll nun jenes Maß, das den Grad der Wahrscheinlichkeit angibt, näher erklärt werden.

Definition 2.6. Sei $\Omega \neq \emptyset$ und sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. Eine Funktion $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls die Axiome 1-3 erfüllt sind.
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt *Wahrscheinlichkeitsraum.*

Aus den Axiomen lassen sich wichtige Eigenschaften, die für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten nützlich sind, ableiten.

Satz 2.7. *Eigenschaften*

(i) $P(\emptyset) = 0.$

(ii) Seien $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ *paareweise disjunkt.*
Dann gilt $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i).$

(iii) Sei $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$.

(iv) $\forall A \in \mathcal{A} : 0 \leq P(A) \leq 1.$

(v) Sei $A \in \mathcal{A}.P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A).$

Beweis:
ad (i) Für $i \in \mathbb{N}$ setze $A_i := \emptyset$.
$(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist paarweise disjunkt, weil für $i \neq j$ ist $A_i \cap A_j = \emptyset$.

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_i = \emptyset \stackrel{Ax3}{\Longrightarrow} P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

□

ad (ii) Setze $A_{n+1} := A_{n+2} := ... := \emptyset$. Mit Hilfe des 3. Axioms erhält man:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$\square$

ad (iii) Falls $A_1 \subseteq A_2$ dann gilt:

$$A_2 = A_1 \cup ((\Omega \setminus A_1) \cap A_2) \Rightarrow P(A_2) = P(A_1) + P((\Omega \setminus A_1) \cap A_2)$$
$$\Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$$

$\square$

ad (iv) Laut Axiom 1 und 2 sind $P(A) \geq 0$ und $P(\Omega) = 1$.
Mit Hilfe von (iii) erhält man:

$$0 \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1$$

$\square$

ad (v) $A \cap (\Omega \setminus A) = \emptyset$ und $A \cup (\Omega \setminus A) = \Omega$.

$$\Rightarrow 1 = P(\Omega) = P(A \cup (\Omega \setminus A)) = P(A) + P(\Omega \setminus A)$$
$$\Rightarrow P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$$

$\square$

2.5 Laplace Wahrscheinlichkeit

Im Folgenden wird der Laplace'sche Wahrscheinlichkeitsbegriff eingeführt. Ein großer Teil der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit Zufallsexperimenten, deren Ereignisraum endlich ist und jedes Elementarereignis gleichwahrscheinlich ist.
Bei einem idealen Würfel beispielsweise kann man aufgrund der Symmetrie davon ausgehen, dass keine der Augenzahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ bevorzugt auftritt. Das bedeutet, dass alle Augenzahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Formal betrachtet ergibt sich daraus folgende Definition.

Definition 2.8. Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt *Laplace – Experiment*, falls $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}$ eine endliche Menge ist und alle m Elementarereignisse $\{\omega_1\}$,$\{\omega_2\}$,..., $\{\omega_m\}$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit, also mit der Wahrscheinlichkeit $P(\omega) = \frac{1}{m}$ auftritt.

Alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$ bezeichnet man dabei als „mögliche Fälle", alle Ergebnisse, die in einer beliebigen Teilmenge A liegen, stellen die „günstigen Fälle" dar.

Definition 2.9. Für einen endlichen Ereignisraum Ω und $A \subseteq \Omega$ definiert

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

die *Laplace-Wahrscheinlichkeitsverteilung* auf Ω.
$|A|$ stellt die Anzahl der in A enthaltenen Versuchsergebnisse, also die Mächtigkeit von A dar. (Ω, P) heißt *Laplace-Raum.*

Beispiel 2.10. *Wie bereits erwähnt kann man bei einem idealen Würfel davon ausgehen, dass alle sechs Elementarereignisse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ auftreten. Für das Ereignis A „die geworfene Augenzahl ist ungerade" folgt daher $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Für das Ereignis B „die geworfene Augenzahl beträgt mindestens 5" erhält man $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.*

2.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis A unter einer bestimmten Vorraussetzung eintritt, ist es notwendig die sogenannte *bedingte Wahrscheinlichkeit* zu definieren.

Definition 2.11. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, weiters sei $B \in \mathcal{A}$ mit $P(B) > 0$. Dann definiert man für $A \in \mathcal{A}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B als

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Beispiel 2.12. *Unter 10000 Münzen befindet sich eine, die auf beiden Seiten „Zahl" zeigt, alle übrigen sind normal. Eine Münze wird zufällig ausgewählt und 15 mal geworfen. Dabei erscheint 15 mal „Zahl". Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Münze normal ist?*

$$P(\underbrace{\textit{es ist eine normale Münze}}_{A} \mid \underbrace{\textit{15 mal kommt Zahl}}_{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{\frac{9999}{10000} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15}}{\frac{9999}{10000} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15} + \frac{1}{10000} \cdot 1^{15}} \approx 0,2338$$

Unabhängige Ereignisse

Die Unabhängigkeit zweier Ereignisse A und B lässt sich folgendermaßen beschreiben:

> *(Die) Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A wird nicht beeinflusst durch die Information, dass B eingetreten ist, und umgekehrt gibt das Eintreten von A keine Veranlassung zu einer Neubewertung der Wahrscheinlichkeit von B ([7], S. 66).*

Definition 2.13. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(i) $A, B \in \mathcal{A}$ heißen *unabhängig*, falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

(ii) Eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ heißt *unabhängig*, falls für jede endliche nichtleere Teilmenge $I' \subseteq I$ gilt: $P\left(\bigcap\limits_{i \in I'} A_i\right) = \prod\limits_{i \in I'} P(A_i)$.

Proposition 2.14. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiters seien $A, B \in \mathcal{A}, P(B) > 0$. Dann sind A und B genau dann unabhängig, wenn $P(A|B) = P(A)$.*

Beweis:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$(\Rightarrow)\, P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$(\Leftarrow)\, P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$$

□

2.7 Kombinatorik

Die Hauptaufgabe der Kombinatorik liegt im Abzählen von Mengen, also in der Bestimmung von Mächtigkeiten, die für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten erforderlich sind. Mit Hilfe der folgenden kombinatorischen Methoden soll das oft komplizierte Abzählen der günstigen beziehungsweise möglichen Fälle vereinfacht werden.

2.7.1 Anordnungsmöglichkeiten von Elementen

Wenn es darum geht, alle n Elemente einer Menge in einer Reihenfolge anzuordnen, spricht man in der Fachsprache von *Permutationen.* Dabei muss zwischen Permutationen ohne und mit Wiederholung unterschieden werden.

Permutationen ohne Wiederholung

Beispiel 2.15. *Auf wieviele verschiedene Arten lassen sich 5 Bücher in einem Regal anordnen? Angenommen in dem Regal gibt es 5 Plätze. Für das erste Buch gibt es 5 Möglichkeiten es abzustellen, für das zweite Buch nur noch 4, für das dritte Buch 3, für das vierte Buch 2 und für das fünfte Buch bleibt nur noch eine Möglichkeit übrig. Insgesamt gibt es also* $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ *verschiedene Möglichkeiten diese 5 Bücher anzuordnen.*

Für n beliebige Dinge erhält man analog $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten.

Definition 2.16. Das Produkt $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ bezeichnet man mit $n!$ (sprich „n Fakultät“ oder „n Faktorielle“).

Satz 2.17. *Unter Berücksichtigung der Reihenfolge lassen sich n verschiedene Dinge auf* $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ *verschiedene Arten anordnen.*

Beweis: Induktion nach n.
Induktionsanfang

$n = 1$: Für eine einelementrige Menge gibt es eine Anordnungsmöglichkeit.

Außerdem gilt 1!=1.

Induktionsschritt

Induktionsvorraussetzung:	Es gibt $n!$ Möglichkeiten eine n-elementrige Menge anzuordnen
Induktionsbehauptung:	Es gibt $(n+1)!$ Möglichkeiten eine $(n+1)$–elementrige Menge anzuordnen
Beweis der Behauptung:	Für eine $(n+1)$–elementrige Menge gibt es $n+1$ Möglichkeiten die erste Position zu besetzen. Für jede Möglichkeit müssen die restlichen n Postitionen besetzt werden. Laut Induktionsvorraussetzung gibt es dafür genau $n!$ Möglichkeiten. Somit ist die Gesamtanzahl der möglichen Anordnungen einer $(n+1)$–elementrigen Menge genau $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$

Permutationen mit Wiederholung

Bei Permutationen mit Wiederholung geht es darum, Dinge anzuordnen, von denen manche gleich sind.

Beispiel 2.18. *Wieviele siebenstellige Nummern kann man aus drei Neunern, zwei Vierern, einem Zweier und einem Einser bilden? Einer dieser möglichen Anordnungen wäre zum Beispiel* 9 9 9 4 4 2 1*. Vertauscht man in einer bestimmten Anordnung gleiche Zahlen, so ist die neue Anordnung von der ursprünglichen Anordnung nicht zu unterscheiden. Daher ist es hilfreich gleiche Zahlen durchzunummerieren und unterscheidbar zu machen:* $9_1\ 9_2\ 9_3\ 4_1\ 4_2\ 2\ 1$*. Man erhält dadurch* 7 *unterscheidbare Elemente, für die es insgesamt* $7!$ *verschiedene Permutationen gibt. Hält man nun den Zweier und den Einser fest, so ergeben sich* $3!$ *Permutationen für die Neuner und* $2!$ *Permatationen für die Vierer. Insgesamt kann man also* $\frac{7!}{3!2!} = 420$ *verschiedene Nummern bilden.*

Wendet man diese Methode auf die Anordnung endlich viele Dinge an, von denen manche gleich sind so ergibt sich folgender Satz.

Satz 2.19. *n Dinge, von denen jeweils $n_1, n_2, ..., n_r$ gleich sind (r Klassen) und für die $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$ gilt, lassen sich auf*

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_r!}$$

verschiedene Arten anordnen.

Beweis: Es gibt

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n - n_1 + 1)}{n_1!} \quad \text{Möglichkeiten für die 1. Klasse}$$

$$\frac{(n - n_1) \cdot (n - n_1 - 1) \cdot ... \cdot (n - n_1 - n_2 + 1)}{n_2!} \quad \text{Möglichkeiten für die 2. Klasse}$$

$$\vdots$$

$$\frac{(n - n_1 - ... - n_{r-1}) \cdot ... \cdot 1}{n_r!} \quad \text{Möglichkeiten f. d. r-te Klasse}$$

Daher insgesamt

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n - n_1 + 1)}{n_1!} \cdot \frac{(n - n_1) \cdot (n - n_1 - 1) \cdot ... \cdot (n - n_1 - n_2 + 1)}{n_2!} \cdot$$
$$\cdot ... \cdot \frac{(n - n_1 - ... - n_{r-1}) \cdot ... \cdot 1}{n_r!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_r!} \text{ Möglichkeiten.}$$

□

2.7.2 Auswahlmöglichkeiten von Elementen

Häufig geht es darum, aus n Elementen eine Teilmenge k auszuwählen. Zum besseren Verständnis wird hier von einer Urne mit n Kugeln, aus der k Kugeln gezogen werden ausgegangen. Gezogene Kugeln können vor dem nächsten Zug wieder in die Urne zurückgelegt werden oder nicht. Man spricht von einer geordneten Stichprobe, wenn die Reihenfolge von Bedeutung ist und von einer ungeordneten Stichprobe, wenn das nicht der Fall ist.

Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen

Satz 2.20. *Es gibt n^k geordnete Stichproben mit Zurücklegen der Größe k einer n-elementrigen Menge.*

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für den 1. Zug gibt es } n \text{ Möglichkeiten}\\[4pt] \text{Für den 2. Zug gibt es } n \text{ Möglichkeiten}\\ \qquad\qquad\vdots\\ \text{Für den k-ten Zug gibt es } n \text{ Möglichkeiten}\end{array}\right\}\text{ insgesamt } n^k \text{ Möglichkeiten}$$

□

Beispiel 2.21. *In einer Urne befinden sich 8 durchnummerierte Kugeln. Wie viele verschiedene Zahlenkombinationen sind möglich, wenn nacheinander 4 Kugeln mit Zurücklegen gezogen werden? Da vor jedem Zug alle 8 Kugeln in der Urne sind und viermal gezogen wird, gibt es* $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4 = 4096$ *mögliche Kombinationen.*

Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen

Satz 2.22. *Seien $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$. Es gibt $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten für eine geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen der Größe k einer n-elementrigen Menge.*

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für den 1. Zug gibt es } n \text{ Möglichkeiten}\\[4pt] \text{Für den 2. Zug gibt es } n-1 \text{ Möglichkeiten}\\ \qquad\qquad\vdots\\ \text{Für den k-ten Zug gibt es } n-k+1 \text{ Mögl.}\end{array}\right\} n \cdot (n-1) \cdot \ \dots \ \cdot (n-k+1)$$

$$n \cdot (n-1) \cdot \ \dots \ \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ Möglichkeiten}$$

□

Beispiel 2.23. *In einer Urne befinden sich 9 Kugeln in unterschiedlichen Farben. Wie viele unterschiedliche Kombinationen gibt es beim Ziehen von 3 Kugeln ohne Zurücklegen, wenn die Reihenfolge von Bedeutung ist?*
Es gibt $\frac{9!}{(9-3)!} = 504$ *unterschiedliche Kombinationen.*

Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen

Satz 2.24. *Sei* $n, k \in \mathbb{N}$ *und* $k \leq n$*. Es gibt* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ *ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen der Größe* k *einer* n*-elementrigen Menge.*

Beweis: Es gibt $\frac{n!}{(n-k)!}$ geordnete Stichproben und $k!$ Möglichkeiten diese Elemente in verschiedener Reihenfolge anzuordnen. Deshalb gibt es

$$\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

ungeordnete Stichproben. □

Bemerkung: $\binom{n}{k}$ wird auch Binomialkoeffizient genannt.

Beispiel 2.25. *In einer Urne befinden sich 12 Kugeln. Wieviele unterschiedliche Zweierkombinationen gibt es beim Ziehen ohne Zurücklegen? Es gibt* $\binom{12}{2} = 66$ *verschiedene Zweierkombinationen.*

Ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen

Satz 2.26. *Es gibt* $\binom{n+k-1}{k}$ *ungeordnete Stichproben der Größe* k *einer* n*-elementrigen Menge.*

Beweis: Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Induktion nach k:
Induktionsanfang

$k = 1$: Es gibt $n = \binom{n}{1} = \binom{n+1-1}{1}$ Möglichkeiten.

Induktionsschritt

$k > 1$: 1. Zug ω_1 : $\binom{n+(k-1)-1}{k-1} = \binom{n+k-2}{k-1}$ Möglichkeiten.

1. Zug ω_2 : $\binom{n-1+(k-1)-1}{k-1} = \binom{n+k-3}{k-1}$ Möglichkeiten.

$\vdots$

1. Zug ω_n: 1. Möglichkeit: Deshalb insgesamt

$$\binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-3}{k-1} + ... + \underbrace{\binom{n+k-(n-1)-1}{k-1}}_{=\binom{k}{k-1}} + \underbrace{1}_{\binom{=k}{k}} =$$

$$= \binom{n+k-1}{k} \text{ Möglichkeiten.}$$

□

Beispiel 2.27. *Wie viele verschiedene Kombinationen von Augenzahlen sind beim Werfen von drei idealen Würfeln möglich?*
Ein idealer Würfel hat 6 verschiedene Augenzahlen $\Rightarrow n = 6$*. Es wird dreimal geworfen* $\Rightarrow k = 3$*. Es gibt also* $\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$ *verschiedene Kombinationen.*

Eine Urne enthält n Kugeln, von denen m schwarz und die restlichen $n-m$ weiß sind. Werden daraus k Kugeln ohne zurücklegen zufällig gezogen, so gilt für die Wahrscheinlichekeit P_x, unter den k gezogenen Kugeln genau x schwarze zu finden:

$$P_x = \frac{\binom{m}{x}\binom{n-m}{k-x}}{\binom{n}{k}} \qquad \text{für } 0 \leq x \leq min\,(m,k)$$

Beweis: Ein Versuchsergebnis besteht aus k Kugeln, die aus n Kugeln ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen gezogen werden. Daher gibt es insgesamt $\binom{n}{k}$ mögliche Fälle.
Aus den m schwarzen Kugeln lassen sich x Kugeln auf $\binom{m}{x}$ verschiedene Arten auswählen. Zu jeder bestimmten Auswahl der x schwarzen Kugeln gibt es $\binom{n-m}{k-x}$ verschiedene Möglichkeiten, die restlichen $k-x$ weißen Kugeln aus der Menge der weißen Kugeln auszuwählen. Für das Ergebnis „unter den k gezogenen Kugeln befinden sich genau x schwarze Kugeln“ gibt es somit $\binom{m}{x}\binom{n-m}{k-x}$ günstige Fälle. Daraus folgt die Behauptung

$$P_x = \frac{\binom{m}{x}\binom{n-m}{k-x}}{\binom{n}{k}}.$$

□

2.8 Diskrete Zufallsvariable

Bei Zufallsexperimenten interessiert man sich in der Regel für Zahlenwerte, die durch die Versuchsergebnisse $\omega \in \Omega$ eindeutig bestimmt sind. Jedem Versuchsereignis $\omega \in \Omega$ wird genau eine reelle Zahl $X(\omega) \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Die Werte dieser reellen Funktion X hängen, ebenso wie die Ergebnisse ω, vom Zufall ab. Daher wird X *Zufallsvariable* genannt. Um die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen bestimmten Wert x annimmt zu berechnen, betrachtet man alle Versuchsergebnisse ω, die durch die Funktion X auf den Zahlenwert x abgebildet werden. (vgl.[3], S. 55)
A_x bezeichnet die Gesamtheit dieser Versuchsergebnisse und es gilt

$$A_x = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}\,, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Die Zufallsvariable X nimmt also bei der Durchführung des Zufallsexperiments genau dann den Zahlenwert x an, wenn das Ereignis A_x eintritt. Die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable X den Wert x annimmt wird mit $P(X = x)$ bezeichnet. Aus 2.5 erhält man für diese Wahrscheinlichkeit nun die Gleichung

$$P(X = x) = P(A_x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}). \tag{2.6}$$

Analog nimmt X die Werte aus dem Intervall $]a, b]$ genau dann an, wenn gilt

$$A_{]a,b]} = \{\omega \in \Omega \mid a < X(\omega) \leqslant b\}\,. \tag{2.7}$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert aus dem Intervall annimmt, erhält man analog die Gleichung

$$P(a < X \leqslant b) = P(A_{]a,b]}) = P(\{\omega \in \Omega \mid a < X(\omega) \leqslant b\}). \tag{2.8}$$

Formal ergeben diese Überlegungen folgende Definition.

Definition 2.28. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.
Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt messbar, falls für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\{\omega : X(\omega) \leqslant \alpha\} \in \mathcal{A}$$

Eine messbare Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ wird Zufallsvariable genannt.

Definition 2.29. Eine Zufallsvariable X heißt *diskret*, falls sie nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele verschiedene Werte annimmt. Die Gesamtheit aller Zahlenpaare $(x_i, P(X = x_i))$ heißt *Verteilung der diskreten Zufallsvariablen X.*

2.9 Erwartungswert

Bei mehrmaliger Durchführung eines Zufallsexperiments sind oft die durchschnittlichen Ergebnisse von großer Bedeutung. Diese können mit Hilfe des Erwartungswertes berechnet werden.

Definition 2.30. Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Ein Erwartungswert existiert, falls $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} |x| \cdot (X = x) \leqslant \infty$ ist. Der Erwartungswert wird mit $E(x)$ bezeichnet und wird definiert durch

$$E(x) := \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x).$$

Satz 2.31. *Eigenschaften des Erwartungswertes: Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen. Dann gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

(i) $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha \cdot E(X) + \beta \cdot E(Y)$ *(linear)*

(ii) $X \leqslant Y \Rightarrow E(X) \leqslant E(Y)$ *(monoton)*

2.10 Markoff-Ketten

Für wahrscheinlichkeitstheoretische Berechnungen bei bestimmten Kartenspielen ist der Begriff der Markoff-Ketten von Bedeutung und soll daher anschließend kurz erklärt und definiert werden.
Markoff-Ketten sind besondere stochastische Prozesse, die zur Modellierung von zufälligen Zustandsänderungen eines Systems mit konstanten Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

Definition 2.32. Ein stochastischer Prozess $\{X_n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ mit endlichen Zustandsraum E heißt *endliche Markoff-Kette*, wenn er folgende Eigenschaft besitzt:
Für alle $n \in \mathbb{Z}^+$ und für alle $e_0, ..., e_{n+1} \in E$ mit

$$P(X_0 = e_0, ..., X_n = e_n) > 0$$

ist

$$P(X_{n+1} = e_{n+1} \mid X_0 = e_0, ..., X_n = e_n) = P(X_{n+1} = e_{n+1} \mid X_n = e_n).$$

X_n bezeichnet den Zustand eines Systems zur Zeit n. Die Wahrscheinlichkeit zur Zeit $n+1$ in einen beliebigen Zustand zu gelangen hängt nur vom Zustand zur Zeit n und von n ab und nicht davon, in welchen Zuständen das System zu früheren Zeitpunkten war.
Eine Markoff-Kette wird durch ihren *Zustandsraum*, ihre *Anfangsverteilung* und über ihre *Überganswahrscheinlichkeiten* bestimmt. Diese Begriffe werden anhand eines Beispieles erklärt.

Beispiel 2.33. *Ein Affe schwingt sich durch das in Abbildung 2.3 dargestellte Baumnetz. Er entscheidet sich an jeder Gabelung zufällig zu welchem Baum er sich als nächstes schwingt, darf dabei jedoch nicht stehen bleiben.*

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet der Affe nach 3 Sprüngen auf welchem Baum, wenn er auf dem Baum b_1 startet?

(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet der Affe nach 2 Sprüngen auf welchem Baum, wenn er auf einem beliebigen Baum startet?

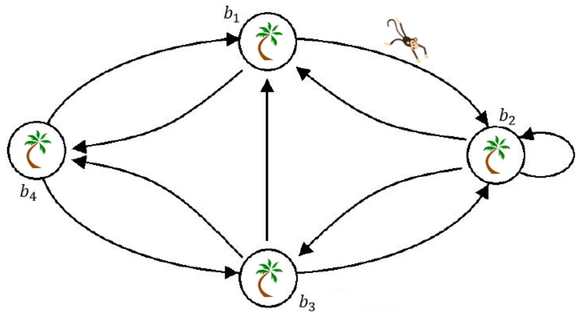


Abbildung 2.3: Markoffmodell mit vier Zuständen

Die vier Bäume stellen in diesem Modell vier Zustände b_1, b_2, b_3 und b_4 dar. Der *Zustandsraum* B ist daher gegeben durch $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

Die *Anfangsverteilung* gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich das System am Anfang in welchem Zustand befindet. Sie kann in Form eines Zeilenvektors, dem Anfangsvektor $\vec{p}(0)$, ausgedrückt werden. Dabei beschreibt $p_i(0)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Markoff-Kette im Zustand b_i von insgesamt n Zuständen beginnt. Es gilt $p_i(0) \geq 0$ und $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.
Startet der Affe bei seinem Kletterausflug auf dem Baum b_1, so ergibt sich der *Anfangsvektor* $\vec{p}(0) = (1, 0, 0, 0)$. Nimmt man an, dass der Affe auf einem beliebigen Baum startet und geht man von einer Gleichverteilung aus, lautet der *Anfangsvektor* $\vec{p}(0) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Die Wahrscheinlichkeit in einem Schritt von einem Zustand b_i in den Zustand b_j zu wechseln nennt man *Übergangswahrscheinlichkeit* und wird mir p_{ij} bezeichnet. Ist ein Übergang nicht möglich, so gilt $p_{ij} = 0$. Ist ein Übergang der einzigmögliche so beträgt $p_{ij} = 1$. Allgemein gilt: $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.
Im obigen Beispiel lassen sich also die Übergangswahrscheinlichkeiten wie folgt bestimmen:

$$
\begin{array}{llll}
p_{11} = 0 & p_{12} = \frac{1}{2} & p_{13} = 0 & p_{14} = \frac{1}{2} \\
p_{21} = \frac{1}{3} & p_{22} = \frac{1}{3} & p_{23} = \frac{1}{3} & p_{24} = 0 \\
p_{31} = \frac{1}{3} & p_{32} = \frac{1}{3} & p_{33} = 0 & p_{34} = \frac{1}{3} \\
p_{41} = \frac{1}{2} & p_{42} = 0 & p_{43} = \frac{1}{2} & p_{44} = 0
\end{array}
$$

Die *Übergangswahrscheinlichkeiten* können durch eine Matrix P, die sogenannte *Übergangsmatrix* beschrieben werden. Bei n Zuständen hat diese Matrix allgemein die Form:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Für das obige Beispiel hat sie folgende Form:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Anfangsvektors $\vec{p}(0)$ und der Übergangsmatrix P kann man den Zustand des Systems nach n Durchgänge folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} &\vec{p}(1) = \vec{p}(0) \cdot P \\ &\vec{p}(2) = \vec{p}(1) \cdot P = (\vec{p}(0) \cdot P) \cdot P = \vec{p}(0) \cdot P^2 \\ &\vec{p}(3) = \vec{p}(2) \cdot P = (\vec{p}(0) \cdot P^2) \cdot P = \vec{p}(0) \cdot P^3 \\ &\quad\vdots \\ &\vec{p}(n) = \vec{p}(n-n) \cdot P = ... = \vec{p}(0) \cdot P^n \end{aligned}$$

Hat also ein Zustand zum Zeitpunkt 0 die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\vec{p}(0)$, so ist die Verteilung zum Zeitpunkt n durch $\vec{p}(0) \cdot P^n$ gegeben.
Die Aufgabenstellung des obigen Beispieles lässt sich nun mit Hilfe von Markoff-Ketten wie folgt lösen:

(i) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet der Affe nach 3 Sprüngen auf welchem Baum, wenn er auf dem Baum b_1 startet?*
Start bei b_1 ergibt den Anfangsvektor $\vec{p}(0) = (1, 0, 0, 0)$, der Affe springt dreimal, also ist $n = 3$.

$$\vec{p}(3) = \vec{p}(0) \cdot P^3$$

$$\vec{p}(3) = (1, 0, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^3 = \left(\frac{7}{36}, \frac{29}{72}, \frac{1}{18}, \frac{25}{72}\right)$$

Der Affe landet, wenn er auf dem ersten Baum startet, nach 3 Sprüngen mit einer Wahrscheinlichkeit von...
...$\frac{7}{36} \approx 19,44\%$ wieder auf dem ersten Baum.
...$\frac{29}{72} \approx 40,28\%$ auf dem zweiten Baum.
...$\frac{1}{18} \approx 5.56\%$ auf dem dritten Baum.
...$\frac{25}{72} \approx 34,72\%$ auf dem vierten Baum.

(ii) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet der Affe nach 2 Sprüngen auf welchem Baum, wenn er auf einem beliebigen Baum startet?*
Start bei beliebigen Punkt ergibt den Anfangsvektor $\vec{p}(0) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, der Affe springt zweimal, also ist $n = 2$.

$$\vec{p}(2) = \vec{p}(0) \cdot P^2$$

$$\vec{p}(2) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 = \left(\frac{13}{48}, \frac{5}{16}, \frac{29}{144}, \frac{31}{144}\right)$$

Der Affe landet, wenn er auf einem beliebigen Baum startet, nach 2 Sprüngen mit einer Wahrscheinlichkeit von...
...$\frac{13}{48} \approx 27,08\%$ auf dem ersten Baum.
...$\frac{5}{16} = 31,25\%$ auf dem zweiten Baum.
...$\frac{29}{144} \approx 20,14\%$ auf dem dritten Baum.
...$\frac{31}{144} \approx 21,53\%$ auf dem vierten Baum.

Da für die weiteren Berechnungen mit Markoff-Ketten zusätzliche Begriffe benötigt werden, werden diese nun ebenfalls definiert und erklärt.

Definition 2.34. Eine reelle $n \times n$-Matrix $A = (p_{j,k})_{j,k=1}^{r}$ heißt *stochastische Matrix*, falls $p_{j,k} \geqslant 0$ für alle $j, k \in \{1, 2, ..., n\}$ und

$$\sum_{k=1}^{n} p_{j,k} = 1 \qquad \text{für alle } j \in \{1, 2, ..., r\}.$$

Ein reeller Zeilenvektor $p = (p_j)_{j=1}^{r}$ heißt *stochastischer Vektor*, falls $p_j \geqslant 0$ für alle $j \in \{1, 2, ..., r\}$ und $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$.

Definition 2.35. Eine Markoff-Kette heißt *homogen*, wenn P von n unabhängig ist.

Die Übergangsmatrix ist *unabhängig* heißt, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten mit der Zeit stets gleich bleiben, sich also nicht verändern.

Definition 2.36. Es sei P eine stochastische $n \times n$-Matrix. Eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ heißt *absorbierend*, falls

$$p_{i,j} = 0 \quad \forall i \in I \quad \forall j \in \{1, 2, ..., n\} \setminus I.$$

Ein absorbierender Zustand kann nicht mehr verlassen werden. In der Übergangsmatrix steht an dieser stelle ein Einheitsvektor. Man spricht von einer *absorbierenden Markoff-Kette*, wenn sie über mindestens einen absorbierenden Zustand verfügt und es von jedem Zustand aus möglich ist in einen absorbieren Zustand zu gelangen.

Definition 2.37. Ein Zustand e_i heißt *rekurrent*, falls es einen Zustand e_j gibt, von dem e_i wieder erreicht werden kann. Andernfalls heißt der Zustand *transient*.

Satz 2.38. *Sei P eine stochastische $n \times n$-Matrix, $J \subseteq \{1, 2, ..., n\}$. Dann ist der Spaltenvektor $(p_{j,J})_{j=1}^{r}$ gleich dem kleinsten Spaltenvektor $x = (x_j)_{j=1}^{r}$ mit $x_j \geqslant 0$ für alle $j \in \{1, 2, ..., n\}, x_j = 1$ für alle $j \in J$ und $(P \cdot x)_j = x_j$ für alle $j \in \{1, 2, ..., n\} \setminus J$.*

Der Beweis dieses Satzes kann in Gerda Pürmayrs Arbeit mit dem Titel „Ist Glück im Spiel berechenbar?“([13], S.132f) nachgelesen werden.

Kapitel 3

Kartenspiele

3.1 Ursprung und Geschichte

„Beim Spiel kann man einen Menschen in einer Stunde besser kennenlernen als im Gespräch in einem Jahr.“
(Platon, 427-347 v.Chr., griechischer Philosoph)

Wie das Zitat zeigt, beschäftige sich bereits Platon mit der Philosophie des Spieles und erkannte die Bedeutung des Spiels für den Menschen.

Obwohl es über den Ursprung der Spielkarten und des Kartensspiels zahlreiche Vermutungen gibt, ist die genaue Herkunft umstritten. Die geistigen Urheber der Spielkarte dürften vermutlich Perser, Chinesen, Tibetaner und Inder gewesen sein. Die ältersten, in Museen befindlichen Spielkarten aus dieser Zeit haben zwar keine Ähnlichkeit mit den heute gebräuchlichen Spielkarten, man geht aber davon aus, dass die Idee der Spielkarte von Nomaden, Abenteurer, Kaufleuten und Soldaten über den Vorderen Orient nach Italien und Spanien bis nach Nordeuropa gebracht wurde (vgl. [6], S. 6f).
Zahlreiche Urkunden beweisen, dass Spielkarten bereits im 14. Jahrhundert in Europa bekannt waren. Dem Schweizer Dominikanermönch Ingold zufolge gab es bereits um 1300 die ersten Spielkarten auf deutschem Boden. Die folgenden Jahren wurden vorallem durch Verbote, wie in Florenz im Jahre 1377, bei dem zu einem bereits bestehenden Verbot aller Glückspiele ein weiteres gegen das Kartenspiel erlassen wurde, geprägt. Noch im gleichen Jahr beschrieb der Basler Mönch Johannes von Rheinfelden sechs verschiedene Arten von Kartenspielen (vgl. [6], S. 7).
Die Spielkarte erfuhr im Laufe der Zeit eine große Verwandlung. Während die

ersten Spielkarten aus dünnen, runden Holzscheibchen und aus zusammenlegbaren Blättern bestanden, wurden zu Beginn des 14. Jahrhunderts die Spielkarten in Europa aus Holz, Leder, Seide oder Leinen hergestellt. Erst mit der Entwicklung des Buchdruckes im 15. Jahrhunderts kamen immer mehr Karten aus steifen Karton in Umlauf. Diese wurden mühsam mit der Hand gezeichnet und bemalt und gehörten daher zu Luxusartikeln, die sich nicht jeder leisten konnte (vgl. [6], S. 18).
Noch heute gilt das Kartenspiel als das populärste aller Spiele und ist auf der ganzen Welt verbreitet. Es verlangt vom Spieler Vernunft, Beherrschung, Fantasie und Kreativität im Handeln. Das Denkvermögen und die Konzentrationsfähigkeit werden gefördert und der Sinn für Zahlen kann entwickelt werden (vgl. [6], S. 6).

3.2 Kartenblatt

Das Kartenbild passte sich bis zur Mitte des letzten Jahrhunderts dem jeweiligen Zeitstil an. Da es kaum ein Thema der damaligen Zeit gab, das nicht auf einer Spielkarte abgebildet worden war, wurde die Spielkarte zu einem gewissen Informationsmittel. In den letzten 100 Jahren hat sich das Kartenbild jedoch kaum verändert, denn alle Änderungsversuche der Spielfabrikanten blieben ohne Erfolg. Eine Modernisierung der Spielkarte wurde von Kartenspielern auf der ganzen Welt abgelehnt. (vgl. [6], S. 19)

Es gibt verschiedene traditionelle Grunddarstellungen:

- **Französisches Bild**
  Das klassische Kartenspiel mit französischem Bild hat die Farbenwerte

Pik	♠
Herz	♥
Karo	♦
Kreuz (Treff)	♣

  Kartenforscher haben im Laufe der Zeit verschiedene Theorien über die Bedeutung der Symbole aufgestellt. In einer dieser Theorien werden die vier Symbole beispielsweise als Verdeutlichung der Jahreszeiten beschrieben: Frühling – Herz, Sommer – Pik, Herbst – Kreuz, Winter – Karo (vgl. [6], S. 18).

Die Kartenfolge besteht aus Ass, König, Dame, Bube, Zehn, Neuen, Acht, Sieben, Sechs, Fünf, Vier, Drei und Zwei. Die Anzahl der Karten, Rang und Wertfolge wechseln jedoch und sind von Spiel zu Spiel verschieden (vgl. [6], S. 20).

- **Anglo-amerikanisches Kartenbild**
  Das anglo-amerikanische Kartenbild entspricht in Farben und Werten dem französischem Kartenbild. Kleine Unterschiede gibt es in der Bezeichnung: Die Damen tragen statt dem „D“ ein „Q“ für *Queen* und die Buben statt dem „B“ ein „J“ für *Jack* (weit verbreiteter Name eines einfachen Mannes in England).

- **Deutsches Bild**
  Der wesentliche Unterschied zwischen französischem und deutschem Kartenbild besteht in drei der vier Farben.

Eichel	
Laub (Grün)	
Herz	
Schellen	

  Die Farbe Herz ist den beiden Blättern gemeinsam. Ein weitere Unterschied besteht in den Rängen von Dame/Ober und Bube/Unter (vgl. [10], S. 7).

- **Tarockbild**
  Das am meisten verbreitete Tarockspiel besteht aus 54 Karten. Es besteht aus 22 festen Trümpfen[1] und 32 Farbkarten, die den französischen Farben entsprechen.

Neben den Karten mit traditionellem Bild gibt es heutzutage viele Kartenspiele mit einem eigenständigen Kartenblatt. Dabei handelt es sich meist um sogenannte Autorenspiele mit eigenständigen Spielideen.

[1] „Trumpf“= Ein Trumpf ist eine Karte der Trumpffarbe. Sie gewinnt gegen jede Karte einer anderen Farbe.

3.3 Arten von Kartenspielen

Natürlich ist Kartenspiel ist nicht gleich Kartenspiel, bloß weil jedes mit Karten gespielt wird. Auch wenn sie sich teilweise nur in einzelnen Elementen unterscheiden, können sie in folgende Kategorien eingeteilt werden (vgl. [14]):

- **Ablagespiele**
  Bei dieser Form von Kartenspielen geht es darum alle Handkarten schnellstmöglich abzulegen. Die Werte der Karten spielen in der Regel keine Rolle. Die wohl bekanntesten Ablegespiele sind Mau-Mau, Rommé oder Schwarzer Peter. Aber auch Spiele wie Elfer raus, Ligretto oder Uno gehören zu diese Kategorie.

- **Anlegespiele**
  Ziel eines Anlegespieles ist es, möglichst viele Karten nach einem festen Schema anzulegen. Ein Beispiel hierfür wäre Patiencen.

- **Sammelspiele**
  Bei dieser Spielart geht es darum, möglichst viele Karten einer Art oder Kartenkombinationen zu sammeln, wie es beispielsweise bei Quartett oder Canaster der Fall ist.

- **Stichspiele**
  Das Ziel bei Stichspielen kann einerseits das Sammeln möglichst vieler Stiche[2] oder andererseits das Sammeln einer angesagten Anzahl von Stichen sein. Das wohl bekannteste Stichspiel ist Bridge. Weitere Beispiele sind Rage, Whist oder Wizard.

- **Augenspiele**
  Die wohl bekanntesten Augenspiele im deutchen Raum sind Doppelkopf oder Skat. Es geht dabei darum, möglichst viele Kartenpunkte zu sammeln.

- **Wettspiele**
  Bei Wettspielen ist das erforderliche Spielziel bereits im Vorfeld festgelegt. Die bekanntesten Wettspiele sind Blackjack und Poker.

- **Sonstige Kartenspiele**
  Moderne Kartenspiele wie zum Beispiel Bohnanza oder 6nimmt beinhalten oft so vielfältige Mechanismen, dass sie keiner Spielart eindeutig zugeordnet werden können.

[2]„Stich“= Jeder Spieler spielt reihum eine Karte in die Tischmitte aus. Diese Karten bezeichnet man als „Stich“.

Kapitel 4

Wizard

4.1 Die Spielregeln

Abbildung 4.1: Wizard von Ken Fisher

Bei Wizard[1] geht es um das Sammeln einer angesagten Anzahl von Stichen. Es kann von 3 bis 6 Spielern gespielt werden und dauert in etwa 45 Minuten.

Die Karten

Das Kartenblatt besteht aus 52 Farbkarten mit den Werten 1 bis 13 in Blau, Rot, Gelb und Grün und acht Aktionskarten, davon vier Zauberer „Z“ und vier Narren „N“.
Die jeweils stärkste Karte ist die „13“, die schwächste Karte ist die „1“.
Die vier Zaubererkarten sind immer Trumpf. Sie sind höher als jede „13“.
Die vier Narrenkarten sind nie Trumpf. Sie sind niedriger als jede „1“.

[1] AMIGO Spiel+Freizeit GmbH, Waldstraße 23-D5, D-63128 Dietzenbach

Die Illustrationen auf den Karten wurden den alten Abbildungen von vier Völkergruppen nachempfunden: Elfen (grün), Zwerge (rot), Menschen (blau) und Riesen (gelb). Diese haben jedoch für den Spielverlauf keine Bedeutung.

Abbildung 4.2: Kartenblatt von Wizard

Die Aufgabe

Bei diesem Kartenspiel muss jeder Spieler in jeder Stichrunde die genaue Anzahl der gewonnenen Stiche vorhersagen. Für die richtige Vorhersage gibt es Punkte. Wer am Ende des Spiels die meisten Punkte gesammelt hat, gewinnt.

Das Verteilen der Karten

Die Spieler erhalten in jeder Stichrunde unterschiedlich viele Karten. In der ersten Runde wird nur eine Karte an jeden Spieler ausgeteilt. Es kann also in dieser Runde nur einen Stich gewonnen werden. In der zweiten Runde erhält jeder Spieler zwei Karten und es geht es um zwei Stiche. In der dritten Runde werden jeweils drei Karten ausgeteilt, dann vier Karten usw., bis in der letzten Runde alle Karten im Spiel sind. Karten, die nicht an die Spieler verteilt werden, kommen als verdeckter Stapel in die Tischmitte. Nach jeder Spielrunde wechselt die Aufgabe, die Karten auszuteilen, im Uhrzeigersinn an den jeweils linken Spieler.

Der Trumpf

Nachdem ausgeteilt wurde, wird vom Stapel die oberste Karte umgedreht und offen auf den Stapel gelegt. Diese Karte bestimmt die Trumpffarbe für die jeweilige Stichrunde. Ist die aufgedeckte Karte ein Narr, gibt es in dieser Runde keine Trumpffarbe. Ist die aufgedeckte Karte ein Zauberer, darf der Spieler, der ausgeteilt hat, nachdem er sich die eigenen Karten angesehen hat, eine Trumpffarbe bestimmen. In der letzten Stichrunde gibt es keinen Trumpf, weil alle Karten im Spiel sind und es somit keinen Stapel gibt, von dem eine Karte aufgedeckt werden kann.

Die Vorhersage

Nachdem sich jeder Spieler seine Karten angesehen hat, muss er vorhersagen, wie viele Stiche er in dieser Runde wohl machen wird. Der Reihe nach werden die Vorhersagen der Spieler notiert. Es beginnt der linke Nachbar des Kartengebers.

Der Stich

Der linke Nachbar des Kartengebers spielt die erste Karten für den ersten Stich aus. Die anderen Spieler folgen im Uhrzeigersinn. Eine ausgespielte Farbe muss bedient[2] werden. Hat der Spieler die Farbe nicht, kann er eine andere Farbe abwerfen oder eine Trumpfkarte spielen. Eine Ausnahme stellen Zauberer- und Narrenkarten dar: Diese dürfen immer gespielt werden, auch wenn man bedienen könnte. Die höchste Karte gewinnt den Stich. Die Zaubererkarten sind dabei immer höher als alle anderen Karten, sogar höher als die Trumpfkarten. Der Gewinner nimmt den Stich, legt die Karten vor sich ab und eröffnet einen neuen Stich, indem er eine Karte ausspielt. Die erste Runde ist nach dem ersten Stich beendet, da nur um einen Stich gespielt wird.
Den Stich gewinnt:

- Die erste Zaubererkarte in einem Stich, oder
- die höchste Karte in der Trumpffarbe, oder
- die höchste Karte in der zuerst ausgespielen Farbe, wenn weder Trumpf noch Zauberer im Stich sind.

[2] „bedienen“= Der Spieler muss eine Karte ausspielen, die die gleiche Farbe wie die erste Karte des Stiches hat.

Wird ein Stich mit einer Zaubererkarte eröffnet, dürfen die folgenden Spieler beliebige Karten abwerfen, einschließlich weiterer Zauberer- oder Narrenkarten. Der Stich geht in jedem Fall an den ersten Zauberer. Wird ein Stich mit einer Narrenkarte eröffnet, darf als zweite Karte jede beliebige Karte gespielt werden. Erst die zweite Karte bestimmt die Farbe und muss bedient werden. Narrenkarten verlieren in der Regel den Stich. Werden allerdings in einem Stich nur Narren gespielt, gewinnt die erste Narrenkarte den Stich. Dies ist allerdings nur bei drei oder vier Spielern möglich.

Die Punkte

Hat ein Spieler die Anzahl der gewonnen Stiche genau vorhergesagt, so erhält er 20 Punkte plus 10 Punkte pro gewonnenen Stich. Wer daneben getippt hat, verliert jeweils 10 Punkte für jeden Stich, den er über oder unter seiner Vorhersage liegt.

Das Spielende

Gespielt wird so lange bis in der letzten Stichrunde alle Karten ausgeteilt wurden. Da 60 Karten im Spiel sind, ist das bei 6 Spielern die 10. Stichrunde, bei 5 Spielern die 12. Stichrunde, bei 4 Spielern die 15. Stichrunde und bei 3 Spielern die 20. Stichrunde. Gewonnen hat der Spieler, der die meisten Punkte gesammelt hat.

4.2 Mathematische Analyse

Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann bestimmt werden mit welcher Wahrscheinlichkeit die Spieler welche Karten erhalten und mit welcher Wahrscheinlichkeit die Spieler mit bestimmten Karten stechen.
Die folgenden Berechnungen beziehen sich auf eine Spielrunde mit drei Spielern (Spieler A, B und C) und den beliebig ausgewählten Trumpf 5[3].
Die Ergebnisse werden jeweils auf vier entscheidende Stellen gerundet.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekomme ich welche Karte/n?

- Runde 1: $n = 3$
  In der ersten Runde erhält jeder Spieler nur eine Karte. Haben alle drei Spieler einen Zauberer, sticht jener Spieler, der beginnt und die beiden anderen Spieler, die vielleicht damit gerechtnet haben, dass sie mit einem

[3] da von einem festen Trumpf ausgegangen wird, sind im folgenden von den 60 Karten nur noch 59 im Kartenstapel

Zauberer in der ersten Runde stechen werden, gehen leer aus. Haben alle drei Spieler einen Narr, erhält jener Spieler den Stich, der den ersten Narr ausgespielt hat, womit er vermutlich nicht gerechnet hat. Es stellt sich also die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit in der ersten Runde nur Zauberer oder nur Narren im Spiel sind. Da genausoviele Zauberer wie Narren im Spiel sind, lassen sich die Wahrscheinlichkeiten analog berechnen.
Es handelt sich hierbei um eine Laplace-Wahrscheinlichkeit. Die Anzahl der möglichen Fälle kann durch $\binom{59}{3}$ berechnet werden, denn es werden drei Karten aus 59 Karten ohne Zurücklegen gezogen. Für die Anzahl der günstigen Fälle sollen drei von den vier Zauberern beziehungsweise Narren ausgewählt werden: $\binom{4}{3}$. Für die Wahrscheinlichkeit ergibt sich daher:

$$P(\text{jeder Spieler hat einen Z bzw. N}) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{59}{3}} \approx 0{,}0001230$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Zauberer beziehungsweise Narr im Spiel ist lässt sich mit der Gegenwahrschlichkeit berechnen. Das Gegenereignis von „mindestens ein Zauberer bzw. Narr ist im Spiel“ ist „kein Zauberer bzw. Narr ist im Spiel“. Für die Wahrscheinlichkeit ergibt sich daher:

$$\begin{aligned} P(\text{mind. ein Spieler hat einen Z bzw. N}) &= 1 - P(\text{kein Z bzw. N}) = \\ &= 1 - \frac{\binom{55}{3}}{\binom{59}{3}} \approx 0{,}1930 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis zeigt, dass in circa 80% der Fälle in der ersten Runde kein Zauberer im Spiel ist. Die Karten in der Trumpffarbe, in diesem Fall Rot, haben in diesen Fällen die besten Chancen auf den Stich. Die Wahrscheinlichkeit, dass keine rote Karte im Spiel ist kann wie folgt berechnet werden: Zieht man von den 59 Karten die 12 roten Karten ab, so können die drei Karten noch aus 47 Karten gezogen werden. Für die Wahrscheinlichkeit ergibt sich daher:

$$P(\text{keine rote Karte ist im Spiel}) = \frac{\binom{47}{3}}{\binom{59}{3}} \approx 0{,}4988$$

Analog können auf diese Weise auch die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse „genau ein Spieler hat eine rote Karte“, „genau zwei Spieler haben eine rote Karte“ und „jeder Spieler hat eine rote Karte“ berechnet werden.

$$P(\text{genau ein Spieler hat eine rote Karte}) = \frac{\binom{12}{1} \cdot \binom{47}{2}}{\binom{59}{3}} \approx 0,3990$$
$$P(\text{genau zwei Spieler haben eine rote Karte}) = \frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{47}{1}}{\binom{59}{3}} \approx 0,09542$$
$$P(\text{jeder Spieler hat eine rote Karte}) = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{59}{3}} \approx 0,006767$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Spieler eine rote Karte erhalten hat lässt sich wieder mit der Gegenwahrscheinlichkeit berechnen.

$$\begin{aligned} P(\text{mind. ein Spieler hat eine rote Karte}) &= 1 - P(\text{keine rote Karte}) = \\ &= 1 - \frac{\binom{47}{3}}{\binom{59}{3}} \approx 0,5012 \end{aligned}$$

In knapp über der Hälfte der Fälle ist also mindestens eine rote Karte in der ersten Runde im Spiel.
Hat ein Spieler beispielsweise eine grüne Karte, wird er sich die Frage stellen, mit welcher Wahrscheinlichkeit, mindestens ein weiterer Spieler eine grüne Karte hat. Bei dieser Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit. Dabei muss die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler B oder Spieler C eine grüne Karte haben (Ereignis E_1) **und** Spieler A eine grüne Karte hat (Ereignis E_2) durch die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A eine grüne Karte hat dividiert werden. $E_1 \cap E_2$ tritt ein, wenn Spieler A und Spieler B eine grüne Karte haben, Spieler A und Spieler C eine grüne Karte haben oder wenn alle drei Spieler einer grüne Karte haben.

$$\begin{aligned} &P(\underbrace{\text{B oder C haben eine grüne Karte}}_{E_1} \mid \underbrace{\text{A hat eine grüne Karte}}_{E_2}) = \\ &= \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{\frac{\binom{13}{2}\cdot\binom{46}{1}+\binom{13}{2}\cdot\binom{46}{1}+\binom{13}{3}\cdot\binom{46}{0}}{\binom{59}{3}}}{\frac{\binom{13}{1}\cdot\binom{46}{2}}{\binom{59}{3}}} \approx 0,5546 \end{aligned}$$

- <u>Runde 2</u>: $n = 6$
  In der zweiten Runde erhält jeder Spieler zwei Karten, es sind also sechs Karten im Spiel. Um die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Zauberer im

Spiel sind zu berechnen, muss zuerst die Anzahl der günstigen Fälle bestimmt werden: Von den vier Zauberer werden alle ausgewählt, von den verbliebenden 55 Karten werden 2 Karten ausgewählt. Man erhält also $\binom{4}{4} \cdot \binom{55}{2}$ günstige Fälle. Die möglichen Fälle können durch $\binom{59}{6}$ brechnet werden.

$$P(\text{alle Z sind im Spiel}) = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{55}{2}}{\binom{59}{6}} \approx 0,00003296$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in der zweiten Runde alle vier Zauberer im Spiel sind, ist also sehr gering. Ebenfalls interessant für einen Spieler ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den sechs Karten mindestens ein Zauberer befindet. Diese Wahrscheinlichkeit kann mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit berechnet werden.

$$\begin{aligned} P(\text{mind. ein Spieler hat einen Z}) &= 1 - P(\text{kein Z ist im Spiel}) = \\ &= 1 - \frac{\binom{55}{6}}{\binom{59}{6}} \approx 0,3566 \end{aligned}$$

In rund 36% der Fälle ist in der zweiten Runde mindestens ein Zauberer im Spiel.
Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A einen Zauberer erhalten hat, wenn Spieler B und Spieler C keinen Zauberer erhalten haben, kann mit der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet werden. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A einen Zauberer erhalten hat (Ereignis E_1) **und** Spieler B und Spieler C keinen Zauberer besitzen (Ereignis E_2) durch die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler B und Spieler C keinen Zauberer haben dividiert. $E_1 \cap E_2$ tritt ein, wenn genau einer der vier Zauberer und genau fünf der verbleibenden 55 Karten gezogen werden. E_2 tritt ein, wenn mindestens vier Karten im Spiel sind, die keine Zauberer sind. Es können sich also zwei Zauberer, ein Zauberer oder kein Zauberer unter den sechs Karten befinden.

$$P(\underbrace{\text{A hat einen Z}}_{E_1} | \underbrace{\text{B und C haben keinen Z}}_{E_2}) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} =$$

$$= \frac{\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{55}{5}}{\binom{59}{6}}}{\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{55}{4}+\binom{4}{1}\cdot\binom{55}{5}+\binom{4}{0}\cdot\binom{55}{6}}{\binom{59}{6}}} \approx 0,3096$$

- Runde 3: $n = 9$
  In der dritten Runde erhält jeder Spieler drei Karten, es sind also neun Karten im Spiel. Es kann vorkommen, dass ein Spieler am Beginn der dritten Runde drei Stiche ansagt. Die übrigen Spieler werden sich in dieser Situation die Frage stellen, wie wahrscheinlich es ist, dass dieser Spieler drei Zauberer erhalten hat. Da hier nur ein Spieler betrachtet wird, spielen die anderen Spieler bei der Berechnung keine Rolle und die Wahrscheinlichkeit kann wie folgt bestimmt werden:

  $$P(\text{Spieler A hat drei Z}) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{59}{3}} \approx 0,0001230$$

  Diese Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A drei Zauberer erhalten hat ist zwar sehr klein, aber es ist nicht unmöglich. Ebenfalls gute Chancen auf drei Stiche hat der Spieler wenn er einen Zauberer und zwei Karten in der Trumpffarbe hat. Die Wahrscheinlichkeit dafür kann folgendermaßen berechnet werden:

  $$P(\text{A hat einen Z und zwei rote Karten}) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{59}{3}} \approx 0,008121$$

  Diese Wahrscheinlichkeit ist zwar immer noch sehr gering, es ist jedoch schon 66-mal wahrscheinlicher als, dass Spieler A drei Zauberer hat.
  Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Zauberer im Spiel ist kann nach dem gleichen Prinzip wie in den ersten beiden Runden berechnet werden:

  $$P(\text{mind. ein Spieler hat einen Z}) = 1 - P(\text{kein Z ist im Spiel}) = \\ = 1 - \frac{\binom{55}{9}}{\binom{59}{9}} \approx 0,4940$$

  An dem Ergebnis ist zu erkennen, dass in der dritten Runde bereits fast in der Hälfte der Fälle mindestens ein Zauberer im Spiel ist. Diese Wahrscheinlichkeit hat sich also von der ersten bis zur dritten Runde mehr als verdoppelt. Um feststellen zu können, wie sich diese Wahrscheinlichkeit im Laufe des Spieles entwickelt, wurden die Wahrscheinlichkeiten für die übrigen Runden nach dem gleichen Prinzip berechnet. Die Ergebnisse werden in der folgenden Tabelle übersichtlich dargestellt.

Die Berechnungen zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Zauberer im Spiel ist bei einem Spiel mit drei Spielern bereits ab der 9. Runde größer als 90% ist.

Runde	Anzahl der Karten im Spiel	alle Z sind im Spiel	mind. ein Z ist im Spiel
1	3	0,00	19,30
2	6	0,003	35,66
3	9	0,03	49,40
4	12	0,11	60,81
5	15	0,30	70,71
6	18	0,67	77,75
7	21	1,32	83,78
8	24	2,34	88,50
9	27	3,86	92,10
10	30	6,02	94,78
11	33	8,99	96,72
12	36	12,94	98,05
13	39	18,07	98,94
14	42	24,59	99,48
15	45	32,74	99,78
16	48	42,75	99,93
17	51	54,91	99,98
18	54	69,49	99,99
19	57	86,79	100,00
20	60	100,00	100,00

Abbildung 4.3: Wahrscheinlichkeit, dass bei drei Spielern alle bzw. mindestens ein Zauberer im Spiel ist (in Prozent)

Da das Spiel auch von mehr als drei Spielern gespielt werden kann, wird nun exemplaisch gezeigt, wie ausgewählte Wahrscheinlichkeiten für vier, fünf oder sechs Spieler berechnet werden können.

- Die Wahrscheinlichkeit, dass bei vier Spielern in der ersten Runde mindestens ein Zauberer im Spiel ist:

Bei vier Spielern sind in der ersten Runde vier Karten im Spiel. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Zauberer im Spiel ist lässt sich mit der Gegenwahrscheinlichkeit berechnen. Das Gegenereignis von „mindestens ein Spieler hat einen Zauberer“ ist das Ereignis „kein Zauberer ist im Spiel“. Zieht man von den 60 Karten die Trumpfkarte und die vier Zauberer ab, so werden die vier Karten aus einer 55–elementrigen Menge gezogen. Um die Anzahl aller möglichen Fälle zu bestimmen, wird eine 4–elementrige Menge aus 59 Karten gezogen.

$$P(\text{mind. ein Spieler hat einen Z}) = 1 - P(\text{kein Z ist im Spiel}) = \\ = 1 - \frac{\binom{55}{4}}{\binom{59}{4}} \approx 0,2506$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass bei fünf Spielern in der vierten Runde alle vier Zauberer im Spiel sind:
  Bei fünf Spielern sind in der vierten Runde 20 Karten im Spiel. Es müssen alle vier Zauberer und 16 Karten aus den verbliebenden 55 Karten gezogen werden. Für die Wahrscheinlichkeit ergibt sich daher:

$$P(\text{alle Zauberer sind im Spiel}) = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{55}{16}}{\binom{59}{20}} \approx 0,01065$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass bei sechs Spielern in der fünften Runde mindestens ein Zauberer im Spiel ist:
  Bei sechs Spielern sind in der fünften Runde 30 Karten im Spiel. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Zauberer im Spiel ist lässt sich auch hier wieder mit der Gegenwahrscheinlichkeit berechnen.

$$P(\text{mind. ein Spieler hat einen Z}) = 1 - P(\text{kein Z ist im Spiel}) = \\ = 1 - \frac{\binom{55}{30}}{\binom{59}{30}} \approx 0,9478$$

Auf diese Art und Weise können die Wahrscheinlichkeiten für jede beliebige Runde mit jeder beliebigen Anzahl an Spielern berechnet werden. Ab der 9. Runde ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Zauberer im Spiel ist so groß, dass man fast davon ausgehen kann, dass mindestens ein Zauberer im Spiel ist. Um die Ergebisse der ersten 8 Runden vergleichen zu können werden diese in der Abbildung 4.4 übersichtlich dargestellt.

Die Ergebnisse zeigen, dass die Anzahl der Spieler einen großen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Zauberer im Spiel ist, hat. Während in der dritten Runde bei drei Spielern im Durchschnitt in der Hälfte der Fälle mindestens ein Zauberer im Spiel ist, ist bei sechs Spielern schon durchschnittlich in rund drei Viertel der Fälle mindestens ein Zauberer im Spiel.

	mindestens ein Z ist im Spiel			
Runde	3 Spieler	4 Spieler	5 Spieler	6 Spieler
1	19,30	25,60	30,51	35,66
2	35,66	45,09	53,45	60,81
3	49,40	60,81	70,17	77,75
4	60,81	72,88	81,93	88,50
5	70,71	81,93	89,81	94,78
6	77,75	88,50	94,78	98,05

Abbildung 4.4: Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Zauberer im Spiel ist in Abhängigkeit der Anzahl an Spielern (in Prozent)

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehört der Stich mir?

Runde 1: $n = 3$

Spieler A beginnt / spielt die erste Karte aus: A – B – C
Um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass Spieler A mit einer bestimmten Karte sticht, muss jene Wahrscheinlichkeit ermittelt werden, mit der weder Spieler B noch Spieler C eine höhere Karte der jeweiligen Farbe oder einen Zauberer haben. Diese Wahrscheinlichkeiten werden im folgenden Abschnitt exemplaisch an einigen ausgewählten Karten auf zwei verschiedene Arten berechnet.

- Spieler A hat 1
  Mit Grün 1 sticht Spieler A nur, wenn Spieler B und C jeweils eine gelbe oder blaue Karte oder einen Narr haben.

$$P(\text{A sticht}) = P(\text{B hat G, B, N}) \cdot P(\text{C hat G, B, N}) =$$
$$= \frac{30}{58} \cdot \frac{29}{57} = \frac{5}{19} \approx 0,2632$$

Da es sich dabei um ein Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Bachtung der Reihenfolge handelt, kann die Anzahl der günstigen und möglichen Fälle auch mit Hilfe von Binomialkoeffizienten angegeben werden.

$$P(\text{A sticht}) = \frac{\binom{30}{2}}{\binom{58}{2}} \approx 0,2632$$

- Spieler A hat 7
  Mit Grün 7 sticht Spieler A nur, wenn Spieler B und C jeweils eine niedrigere grüne, eine beliebige gelbe oder blaue Karte oder einen Narr haben.

$$\begin{aligned} P(\text{A sticht}) &= P(\text{B hat } \text{1-6}, \text{G}, \text{B}, \text{N}) \cdot P(\text{C hat } \text{1-6}, \text{G}, \text{B}, \text{N}) = \\ &= \frac{36}{58} \cdot \frac{35}{57} = \frac{210}{551} \approx 0,3811 \\ P(\text{A sticht}) &= \frac{\binom{36}{2}}{\binom{58}{2}} \approx 0,3811 \end{aligned}$$

- Spieler A hat 13
  Mit Grün 13 sticht Spieler A nur, wenn Spieler B und C jeweils eine niedrigere grüne, eine beliebige gelbe oder eine beliebige blaue Karte oder einen Narr haben.

$$\begin{aligned} P(\text{A sticht}) &= P(\text{B hat } \text{1-12}, \text{G}, \text{B}, \text{N}) \cdot P(\text{C hat } \text{1-12}, \text{G}, \text{B}, \text{N}) = \\ &= \frac{42}{58} \cdot \frac{41}{57} = \frac{287}{551} \approx 0,5209 \\ P(\text{A sticht}) &= \frac{\binom{42}{2}}{\binom{58}{2}} \approx 0,5209 \end{aligned}$$

Analoge Wahrscheinlichkeiten ergeben sich, wenn Spieler A 1, 7, 13, 1, 7, 13 hat. Für ausgewählte Karten in der Trumpffarbe Rot ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

- Spieler A hat 1
  Mit Rot 1 sticht Spieler A nur, wenn Spieler B und C jeweils eine gelbe, blaue oder grüne Karte oder einen Narr haben.

$$\begin{aligned} P(\text{A sticht}) &= P(\text{B hat } \text{G}, \text{B}, \text{G}, \text{N}) \cdot P(\text{C hat } \text{G}, \text{B}, \text{G}, \text{N}) = \\ &= \frac{43}{58} \cdot \frac{42}{57} = \frac{301}{551} \approx 0,5463 \\ P(\text{A sticht}) &= \frac{\binom{43}{2}}{\binom{58}{2}} \approx 0,5463 \end{aligned}$$

- Spieler A hat 7
  Mit Rot 7 sticht Spieler A nur, wenn Spieler B und C jeweils eine gelbe, blaue oder grüne Karte, eine rote Karte mit dem Wert 1,2,3,4 oder 6

oder einen Narr haben. Die rote 5 muss hier ausgeschlossen werden, da dies die Trumpfkarte ist und nicht mehr zur Verfügung steht.

$$P(\text{A sticht}) = P(\text{B hat G, B, G, 1-4;6, N}) \cdot$$
$$\cdot P(\text{C hat G, B, G, 1-4;6, N}) =$$
$$= \frac{48}{58} \cdot \frac{47}{57} = \frac{376}{551} \approx 0,6824$$
$$P(\text{A sticht}) = \frac{\binom{48}{2}}{\binom{58}{2}} \approx 0,6824$$

- Spieler A hat 13
  Mit Rot 13 sticht Spieler A nur, wenn Spieler B und C jeweils eine gelbe, blaue oder grüne Karte, eine rote Karte mit dem Wert 1 bis 4 oder 6 bis 12 oder einen Narr haben. Die rote 5 wird auch hier wieder ausgeschlossen, da dies die Trumpfkarte ist und nicht mehr zur Verfügung steht.

$$P(\text{A sticht}) = P(\text{B hat G, B, G, 1-4;6-12, N}) \cdot$$
$$\cdot P(\text{C hat G, B, G, 1-4;6-12, N}) =$$
$$= \frac{54}{58} \cdot \frac{53}{57} = \frac{477}{551} \approx 0,8657$$
$$P(\text{A sticht}) = \frac{\binom{54}{2}}{\binom{58}{2}} \approx 0,8657$$

Diese Wahrscheinlichkeit kann auch mit der Gegenwahrscheinlichkeit berechnet werden. Da die 13 in der Trumpffarbe Rot nur von einem Zauberer übertroffen werden kann, ist das Gegenereignis zu „Spieler A sticht“ das Ereignis „es ist mindestes ein Zauberer im Spiel“.

$$P(\text{A sticht}) = 1 - P(\text{es ist mindestens ein Zauberer im Spiel}) =$$
$$= 1 - \Big[P(\text{B hat Z}) + P(\text{C hat Z}) + P(\text{B u. C haben Z})\Big] =$$
$$= 1 - \left[\frac{4}{58} \cdot \frac{54}{57} + \frac{54}{58} \cdot \frac{4}{57} + \frac{4}{58} \cdot \frac{3}{57}\right] =$$
$$= 1 - \frac{74}{551} =$$
$$= \frac{477}{551} \approx 0,8657$$

- Spieler A hat „Zauberer“

$$P(\text{A sticht}) = 1$$

- Spieler A hat „Narr“

$$\begin{aligned} P(\text{A sticht}) &= P(\text{B und C haben auch Narren}) = \\ &= \frac{3}{58} \cdot \frac{2}{57} = \\ &= \frac{1}{551} \approx 0,001815 \end{aligned}$$

Spieler C beginnt / spielt die zweite Karte aus: C - A - B
Die folgenden Berechnungen sollen zeigen, wie sich die Reihenfolge der Spieler auf die Wahrscheinlichkeiten zu stechen auswirken. In dieser Spielsituation spielt Spieler A erst die zweite Karte aus.

- Spieler A hat 1
  Mit Grün 1 sticht Spieler A nur, wenn als erstes ein Narr ausgespielt wird und Spieler B eine gelbe oder einer blaue Karte oder einen Narr hat.

$$\begin{aligned} P(\text{A sticht}) &= P(\text{C hat N}) \cdot P(\text{B hat } \text{1-13}, \text{1-13}, \text{N}) = \\ &= \frac{4}{58} \cdot \frac{29}{57} \approx 0,03509 \end{aligned}$$

- Spieler A hat 7
  Mit Grün 7 sticht Spieler A nur, wenn als erstes eine niedrigere grüne Karte oder ein Narr ausgespielt wird und Spieler B eine gelbe oder blaue Karte, eine niedrigere grüne Karte oder einen Narr hat.

$$\begin{aligned} P(\text{A sticht}) &= P(\text{C hat N}) \cdot P(\text{B hat } \text{1-13}, \text{1-13}, \text{1-6}, \text{N}) + \\ &\quad + P(\text{C hat } \text{1-6}) \cdot P(\text{B hat } \text{1-13}, \text{1-13}, <7, \text{N}) = \\ &= \frac{4}{58} \cdot \frac{35}{57} + \frac{6}{58} \cdot \frac{35}{57} \approx 0,1059 \end{aligned}$$

- Spieler A hat 13
  Mit Grün 13 sticht Spieler A nur, wenn als erstes eine niedrigere grüne Karte oder ein Narr ausgespielt wird und der Spieler B eine gelbe oder blaue Karte, eine niedrigere grüne Karte oder einen Narr hat.

$$\begin{aligned} P(\text{A sticht}) &= P(\text{C hat N}) \cdot P(\text{B hat } \text{1-13}, \text{1-13}, \text{1-12}, \text{N}) + \\ &\quad + P(\text{C hat } \text{1-12}) \cdot P(\text{B hat } \text{1-13}, \text{1-13}, <13, \text{N}) = \\ &= \frac{4}{58} \cdot \frac{41}{57} + \frac{12}{58} \cdot \frac{41}{57} \approx 0,1984 \end{aligned}$$

- Spieler A hat „Zauberer“
  Hat Spieler A einen Zauberer, so sticht er nur, wenn Spieler C vor ihm keinen Zauberer hat.

$$P(\text{A sticht}) = P(\text{Spieler C hat keinen Zauberer}) = \\ = \frac{55}{58} \approx 0,9483$$

- Spieler A hat „Narr“
  Hat Spieler A einen Narr, so kann er auf keinen Fall stechen, da Spieler C vor ihm an der Reihe ist.

$$P(\text{A sticht}) = 0$$

Analoge Wahrscheinlichkeiten ergeben sich, wenn Spieler A 1, 7, 13, 1, 7, 13 hat. Hat Spieler A eine Karte in der Trumpffarbe Rot so sticht er nur, wenn die beiden anderen Spieler keine oder eine niedrigere rote Karte haben. Es ergeben sich also die gleichen Wahrscheinlichkeiten, wie in dem Fall „Spieler A beginnt“.
Die Berechnungen zeigen also, dass die Wahrscheinlichkeit zu stechen stark abnimmt, wenn Spieler A nicht beginnt. Im folgenden werden nun auch die Wahrscheinlichkeiten zu stechen berechnet, wenn Spieler A die dritte Karte ausspielt.

Spieler B beginnt / spielt die dritte Karte aus: B - C - A

- Spieler A hat 1
  Mit Grün 1 sticht Spieler A nur, wenn Spieler B und Spieler C einen Narren ausspielen.

$$P(\text{A sticht}) = P(\text{B hat Narr}) \cdot P(\text{C hat Narr}) = \\ = \frac{4}{58} \cdot \frac{3}{57} \approx 0,003567$$

- Spieler A hat 7
  Mit Grün 7 sticht Spieler A nur, wenn die ersten beiden Karten niedrigere grüne Karten oder Narren sind.

$$P(\text{A sticht}) = P(\text{C hat } {<}7\text{, Narr}) \cdot P(\text{B hat } {<}7\text{,Narr}) = \\ = \frac{10}{58} \cdot \frac{9}{57} \approx 0,02722$$

- Spieler A hat 13
  Mit Grün 13 sticht Spieler A nur, wenn die ersten beiden Karten niedrigere grüne Karten oder Narren sind.

$$P(\text{A sticht}) = P(\text{C hat } {<}13, \text{Narr}) \cdot P(\text{B hat } {<}13, \text{Narr}) = \\ = \frac{16}{58} \cdot \frac{15}{57} \approx 0,07260$$

- Spieler A hat „Zauberer“
  Hat Spieler A einen Zauberer, so sticht er nur, wenn Spieler B und Spieler C vor ihm keinen Zauberer haben.

$$P(\text{A sticht}) = P(\text{B hat keinen Z}) \cdot P(\text{C hat keinen Z}) = \\ = \frac{55}{58} \cdot \frac{54}{57} \approx 0,8984$$

- Spieler A hat „Narr“
  Hat Spieler A einen Zauberer, so kann er auf keinen Fall stechen, da Spieler B und Spieler C vor ihm an der Reihe sind.

$$P(\text{A sticht}) = 0$$

Analoge Wahrscheinlichkeiten ergeben sich, wenn Spieler A 1, 7, 13, 1, 7, 13 hat. Hat Spieler A eine Karte in der Trumpffarbe Rot, so sticht er nur, wenn die beiden anderen Spieler keine oder eine niedrigere rote Karte haben. Es ergeben sich also die gleichen Wahrscheinlichkeiten, wie in dem Fall „Spieler A beginnt“. In der Abbildung 4.5 werden die eben berechnetet Ergebnisse übersichtlich dargestellt.
Die Ergebnisse zeigen, dass die Position im Spiel die Wahrscheinlichkeiten zu stechen stark verändert. Mit einer 3 in der Farbe Grün, Gelb oder Blau bespielsweise sticht ein Spieler, wenn er an der ersten Position spielt mit einer Wahrscheinlichkeit von 30%. Spielt er hingegen mit der gleichen Karte an der zweiten oder dritten Position, so liegt die Wahrscheinlichkeit zu stechen bei etwa 6,8 beziehungsweise 1,3%. Während man an Position 1 mit einer 13 in Grün, Gelb oder Blau mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 52% sticht, liegt die Wahrscheinlichkeit zu stechen an der dritten Position bei nur rund 7%.
Es gibt nur drei Spielsituationen in der ersten Runde, in denen ein Spieler sicher sein kann, dass er den Stich macht beziehungsweise nicht macht. Hat ein Spieler einen Zauberer und spielt an Position 1, macht er den Stich sicher. Hat ein Spieler einen Narren und spielt an Position 2 oder 3, so macht er den Stich sicher nicht.

Reihenfolge		**A** – B – C	C – **A** – B	B – C – **A**
Spieler A hat		Spieler A sticht mit dieser Karte	Spieler A sticht mit dieser Karte	Spieler A sticht mit dieser Karte
Farbe	Zahl			
G, G, B	1	26,32	3,51	0,36
G, G, B	2	28,13	4,54	0,60
G, G, B	3	30,00	5,63	0,91
G, G, B	4	31,94	6,78	1,27
G, G, B	5	33,94	7,99	1,69
G, G, B	6	35,96	9,26	2,18
G, G, B	7	38,11	10,59	2,72
G, G, B	8	40,29	11,98	3,33
G, G, B	9	42,53	13,43	3,99
G, G, B	10	44,83	14,94	4,72
G, G, B	11	47,19	16,52	5,51
G, G, B	12	49,61	18,15	6,35
G, G, B	13	52,09	19,84	7,26
Narr		0,18	0	0
Zauberer		100,00	94,93	89,83

Abbildung 4.5: Wahrscheinlichkeit, das Spieler A in Runde 1 sticht, wenn er keine Karte in der Trumpffarbe hat (in Prozent)

Hat ein Spieler in der ersten Runde eine Karte in der Trumpffarbe, so zeigen die Berechnungen, dass die Position im Spiel keine Rolle spielt. Die Wahrscheinlichkeit zu stechen ist hier auf jeder Position im Spiel gleich. Die Abbildung 4.6 stellt die Wahrscheinlichkeiten nocheinmal übersichtlich dar.

Spieler A hat		Spieler A sticht
Farbe	Zahl	mit dieser Karte
R	1	54,63
R	2	57,23
R	3	59,89
R	4	62,61
R	5	–
R	6	65,40
R	7	68,24

Spieler A hat		Spieler A sticht
Farbe	Zahl	mit dieser Karte
R	8	71,14
R	9	74,11
R	10	77,13
R	11	80,22
R	12	83,36
R	13	86,57

Abbildung 4.6: Wahrscheinlichkeit, das Spieler A in Runde 1 sticht, wenn er eine Karte in der Trumpffarbe hat (in Prozent)

Runde 2: $n = 6$

Spieler A beginnt / spielt die erste Karte aus: A - B - C

• Spieler A hat 13 und 7

Um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass Spieler A mit diesen Karten sticht, müssen zwei Fälle betrachtet werden. Der ideale Fall besteht darin, dass die beiden anderen Spieler weder rote Karten oder gelbe Karten kleiner als 7 noch einen Zauberer erhalten haben, denn in diesem Fall sticht Spieler A auf jeden Fall. Etwas schwieriger wird es für Spieler A, wenn eine oder mehrere höhere gelbe Karten im Spiel sind.

Idealer Fall: Für die Karten von Spieler B und Spieler C gilt

$$\left.\begin{array}{l} - \text{ keine rote Karte} \\ - \text{ keine gelbe Karte} > 7 \\ - \text{ kein Zauberer} \end{array}\right\} \text{ideal wären } \text{1-12}, \text{1-13}, \text{1-6}, \text{N}$$

Die vier Karten der beiden Spieler werden in diesem Fall also aus einer 35–elementrigen Menge gezogen. Für die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler B und Spieler C im idealen Fall liegen, erhält man also:

$$P_1 = P(\text{B und C liegen im idealen Fall}) = \frac{\binom{35}{4}}{\binom{57}{4}} \approx 0,1326$$

Kritischer Fall: Es ist mindenstens eine höhere gelbe Karten im Spiel.
Spieler A hat nur die Möglichkeit beide Stiche zu machen, falls nicht mehr als zwei höhere gelbe Karten im Spiel sind, wobei kein Spieler beide höhere gelbe Karten besitzen darf. Es kann nun sowohl die Wahrscheinlichkeit, dass dieser kritische Fall eintritt, also auch die Wahrscheinlichkeit, dass sich mindestens ein Gegner im kritischen Fall befindet, aber keine grüne Karte besitzt, berechnet werden. Er darf deshalb keine grüne Karte besitzen, da er sonst, wenn die grüne 13 ausgespielt wird, diese bedienen müsste und in der zweiten Stichrunde mit der höheren gelben Karte stechen würde.
Spieler B und C erhalten jeweils zwei Karten. Diese vier Karten werden aus jener 57–elementrigen Menge gezogen, die entsteht, wenn man von den 60 Karten die Trumpfkarte und die zwei Karten des Spielers A abzieht. Es sind sechs höhere gelbe Karten im Spiel, von denen eine beziehungsweise zwei ausgewählt wird/werden. Unter den drei beziehungsweise zwei übrigen Karten darf sich keine rote Karte (12), kein Zauberer (4) und keine niedrigere gelbe Karte (6) befinden, daher werden sie jeweils aus einer 35–elementrigen Menge gezogen. Nun muss noch der Fall, dass ein Spieler beide höheren gelben Karten hat, ausgeschlossen, also abgezogen, werden.

$$P(\text{kritischer Fall tritt ein}) =$$

$$= \frac{1}{\binom{57}{4}} \cdot \underbrace{\binom{6}{1} \cdot \binom{35}{3}}_{\text{eine G}} + \frac{1}{\binom{57}{4}} \cdot \underbrace{\binom{6}{2} \cdot \binom{35}{2}}_{\text{zwei G}} - \underbrace{2 \cdot \frac{\binom{6}{2}}{\binom{57}{2}}}_{\text{einer hat beide G}} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\binom{57}{4}} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{35}{3}}_{p(\text{eine höhere G ist im Spiel})} + \underbrace{\binom{6}{2} \cdot \left[\frac{\binom{35}{2}}{\binom{57}{4}} - 2 \cdot \frac{1}{\binom{57}{1}} \right]}_{p(\text{jeder hat eine höhere G})} \approx 0,1032$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich mindestens ein Gegner im kritischen Fall befindet, aber keine grüne Karte hat kann folgendermaßen berechnet werden:

$$P_2 = \underbrace{\frac{1}{\binom{57}{2}} \cdot \left[\binom{6}{1} \binom{23}{1} \right]}_{p(\text{B hat keine Grün})} \cdot \underbrace{\frac{1}{\binom{55}{2}} \cdot \left[\binom{22}{2} + \binom{22}{1} \cdot \binom{12}{1} + \binom{12}{2} \right]}_{p(\text{C im Idealfall}|\text{B im kritschen Fall})} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{\binom{57}{2}} \cdot \left[\binom{6}{1} \binom{23}{1} \right] \cdot \frac{1}{\binom{55}{2}} \cdot \left[\binom{5}{1} \binom{22}{1} \right]}_{p(\text{beide im kritischen Fall})} \approx 0,03907$$

Die Summe der eben berechneten Wahrscheinlichenkeiten P_1 und P_2 beschreibt nun die Wahrscheinlichkeit, dass A beide Stiche machen kann.

$$P(\text{Spieler A kann beide Stiche machen}) = P_1 + P_2 = 0,1717$$

Zusätzlich muss noch ein weiteres Szenario betrachtet werden.
Angenommen Spieler A spielt zuerst die grüne 13 aus und Spieler C liegt im Idealfall. Spieler B liegt im kritischen Fall und hat eine höhere gelbe Karte. Spieler A kann nur dann beide Stiche machen, wenn Spieler B die gelbe Karte in der ersten Stichrunde ausspielt. Dies hängt davon ab, ob er einen Stich machen möchte beziehungsweise angesagt hat oder nicht.
Hat Spieler B einen Stich angesagt, so wird er die gelbe Karte nur dann in der ersten Stichrunde ausspielen, wenn die zweite Karte mindestens den gleichen Wert hat.
Die zweite Karte kann also höher als die gelbe Karter oder gleich hoch sein. Wie viele Möglichkeiten es gibt, dass die zweite Karte höher ist als die gelbe Karte ist vom Wert der gelben Karten abhängig.

Wert der gelben Karte	Möglichkeiten eine höhere zweite Karte zu haben
13	0
12	1
11	2
10	3
9	4
8	5

Es gibt also 15 Möglichkeiten, dass die zweite Karte von Spieler B höher ist als seine gelbe Karte. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler die gelbe Karte ausspielt, wenn er eine höhere zweite Karte besitzt ist gleich 1, da er einen Stich machen möchte.
Es gibt 6 Möglichkeiten, dass die zweite Karte es Spielers den gleichen Wert hat, wie die gelbe Karte. In diesem Fall wird er mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ die gelbe Karte ausspielen.
Hat Spieler B eine niedrigere zweite Karte, wird er auf keinen Fall die gelbe Karte in der ersten Stichrunde ausspielen. In diesem Fall beträgt die Wahrscheinlichkeit 0.

Die Wahrscheinlichkeit für dieses Szenario lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$P(\text{A macht 2.Stich auch} \mid \text{C im Idealfall und B im kritischen Fall}) =$$
$$= \frac{15 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{1}{2}}{\binom{6}{1}\binom{23}{1}} \approx 0,1304$$

Wie man sieht, müssen bei der genauen Berechnung sehr viele unterschiedliche Szenarien beachtet werden, die mit steigender Anzahl an Karten immer komplexer werden. Für die folgenden Runden werden daher beliebig ausgewählte Kartenblätter angegeben.

Runde 5: $n = 15$

In der fünften Runde erhält jeder Spieler 5 Karten.
Spieler A erhält zum Beispiel: 4, 12, 13, 12, 10. Um die Wahrscheinlichkeit, mit der er mit diesen Karten sticht abschätzen zu können, stellt sich die Frage, wie viele Karten die Karten von Spieler A übertreffen und mit welcher Wahrscheinlichkeit diese im Spiel sind.

- mit 13 sticht er, wenn kein Zauberer im Spiel ist
- mit 12 sticht er, wenn kein Zauberer im Spiel ist *und*
  wenn B und C keine grüne Karte > 12 haben *und*
  wenn B und C keine rote Karte ausspielen
- mit 4 sticht er, wenn kein Zauberer im Spiel ist *und*
  wenn B und C keine blaue Karte > 4 haben *und*
  wenn B und C keine rote Karte ausspielen
- mit 12 sticht er, wenn kein Zauberer im Spiel ist *und*
  wenn B und C keine blaue Karte > 12 haben *und*
  wenn B und C keine rote Karte ausspielen
- mit 10 sticht er, wenn kein Zauberer im Spiel ist *und*
  wenn B und C keine gelbe Karte > 10 haben *und*
  wenn B und C keine rote Karte ausspielen

Diese Überlegungen lassen sich für alle Karten im Spiel treffen. In der folgenden Abbildung 4.7 wird die Anzahl der Karten, die die verschieden Karten überbieten übersichtlich dargestellt.

Karte		Anzahl der Karten, die diese überbieten
G, G, B	1	28
G, G, B	2	27
G, G, B	3	26
G, G, B	4	25
G, G, B	5	24
G, G, B	6	23
G, G, B	7	22
G, G, B	8	21
G, G, B	9	20
G, G, B	10	19
G, G, B	11	18
G, G, B	12	17
G, G, B	13	16

Karte		Anzahl der Karten, die diese überbieten
R	1	15
R	2	14
R	3	13
R	4	12
R	5	–
R	6	11
R	7	10
R	8	9
R	9	8
R	10	7
R	11	6
R	12	5
R	13	4

Abbildung 4.7: Anzahl der Karten, die die jeweilige Karte überbieten

Je mehr Karten es gibt, die die jeweilige Karte überbieten, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, mit dieser Karte zu stechen.
Angenommen Spieler B erhält die Karten: 2, 10, 13, 9, 4.
Und Spieler C hat das folgende Blatt: 3, 6, 3, 6, 7.
In diesem Fall sollte Spieler A, der die Karten 4, 12, 13, 12, 10 erhalten hat, zuerst die 13 ausspielen. Einserseits hat diese Karte die wenigstens Möglichkeiten überboten zu werden und andererseits sind die beiden anderen Spieler so gezwungen, ihre roten Karten zuzugeben.
Die zweitwenigsten Mögichkeiten überboten zu werden haben die Karten 12 und 12. Entscheidet sich Spieler A dazu, die 12 auszuspielen, wird er den Stich machen, da die beiden anderen Spieler 4 und 7 zugeben müssen. Spielt er allerdings 12 aus, kann Spieler B mit 13 stechen, sofern er einen Stich angesagt und ihn daher machen möchte. Für den Fall, dass Spieler A in der zweiten Stichrunde 12 ausspielt und Spieler B den Stich macht, muss Spieler A hoffen, dass Spieler B anschließend 4 ausspielt um mit 12 zu stechen.
Ob Spieler A mit 10 einen Stich macht, hängt davon ab, ob er noch einmal

die Möglichkeit bekommt, die erste Karte auszuspielen oder nicht. Wenn es dazu kommt, dass Spieler A 10 ausspielen kann, hat lediglich Spieler C die Möglichkeit ihn mit seiner letzten Karte in der Trumpffarbe abzustechen. Dies wird ebenfalls davon abhängen, ob Spieler C Stiche angesagt hat oder nicht.
Mit 4 wird Spieler A in den meisten Fällen keinen Stich machen, da es in diesem Fall 25 Karten gibt, die diese überbieten. Doch wie man bei diesen zufällig ausgewählten Kartenkombinationen sieht, ist sowohl 2 als auch 3 im Spiel und es wäre in diesem Fall möglich, dass Spieler A alle fünf Stiche macht.

Wie man sieht, werden die Berechnungen und Überlegungen bei steigender Kartenanzahl immer komplexer und aufwendiger. Eine Anleitung zum sicheren Sieg kann also im Rahmen dieser Arbeit nicht gegeben werden.

Kapitel 5

Poker

Der Ursprung des Pokerspieles liegt im 17. und 18. Jahrhundert, als man in Deutschland begann *„Pochen“* (von dem Wort *pochen/klopfen*), auf Englisch übersetzt *„to poke“* zu spielen. In Frankreich vergnügte man sich währenddessen mit *„Poque“* und brachte das Spiel nach Amerika, wo es zu seiner Blüte gelangte. Von New Orleans aus verbreitete sich das Spiel, vorallem über die Mississippi-Dampfer über ganz Amerika und schon bald war das Spiel allseits bekannt. (vgl. [11], S. 17)
Während des amerikanischen Bürgerkrieges in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entwickelten sich verschiedene Varianten, so zum Beispiel *Draw Poker* oder *Stud Poker*. Erst um 1919 wurde erstmals mit Gemeinschaftskarten gespielt und die erste Form von *Texas Hold'em* entstand. Im Jahr 1970 fand die erste *World Series of Poker (WSOP)* in Las Vegas statt, um die besten Pokerspieler zusammenzuführen. Die *WSOP* wurde über die Jahre immer größer und ist heute ein zweimonatiges Event mit knapp 60 Tunieren, bei denen der Sieger ein hohes Preisgeld erhält. (vgl.[21])
Im 21. Jahrhundert wird das Pokerspiel vor allem durch das Internet geprägt, weil es rund um die Uhr eine Plattform bietet, auf der jederzeit gespielt werden kann. Durch die Erfindung der sogenannten *Hole-Card-Cam* – eine Kamera, die die verdeckten Karten eines Spielers für die Zuschauer sichtbar macht – wurde das Pokerspiel seit einigen Jahren auch als Fernsehevent sehr populär.(vgl. [11], S. 18f)
Die wohl bekannteste und aufregendste Form des Pokers ist das *Texas Hold'em*, deren Regeln und Strategien im folgenden Kapitel näher erklärt und analysiert werden. Doch sei erwähnt, dass es neben *Texas Hold'em* Poker noch unzählige weitere Varianten des Pokerspiels gibt, wie zum Beispiel *Seven-Card-Stud*, *Omaha High/Low*, *Draw Poker* oder *Razz*.

5.1 Texas Hold'em - Die Spielregeln

Beim Pokern geht es darum, mit fünf Karten eine möglichst gute Hand (Pokerblatt) zu bilden. Gespielt wird um einen sogenannten Pot, also um die Summe aller Einsätze, die während des Spiels getätigt werden. Ziel des Spieles ist es, diesen Pot zu gewinnen, entweder mit dem besten Pokerblatt oder wenn alle anderen Spieler aussteigen.

Die Karten

In den Casinos Austria wird Poker mit einem anglo-amerikanischen Blatt zu 52 Karten gespielt. Das Ass ist die höchste Karte jeder Farbe, gefolgt von König, Dame, Bube, Zehn, Neun, Acht, Sieben, Sechs, Fünf, Vier, Drei und Zwei. In manchen Fällen kann das Ass auch als Eins gezählt werden. (vgl. [18])
In der Abbildung 5.1 werden Beispiele für Gewinnkombinationen, beginnend mit dem besten Blatt dargestellt.

Die Pokerchips

Es ist üblich beim Pokern nicht mit richtigem Geld sondern mit Spielgeld, den sogenannten *Chips* zu spielen. Bei den runden Chips gibt es zahllose Muster und Farbkombinationen, die aus Sicherheitsgründen von Casino zu Casino variieren, dennoch hat sich in Amerika für die Grundfarben ein weitverbreiteter Standard durchgesetzt (vgl. [8], S. 38):

$ 1	Weiß
$ 5	Rot
$ 25	Grün
$ 50	Blau
$ 100	Schwarz
$ 500	Violett
$ 1000	Gelb
$ 5000	Orange

Abbildung 1: Pokerchips [20]

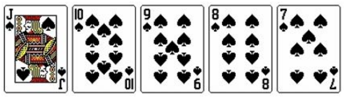
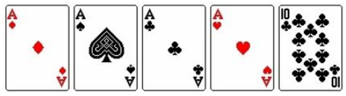
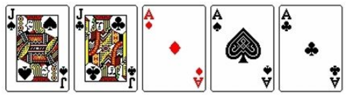
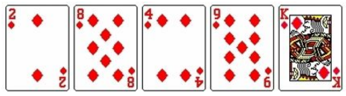
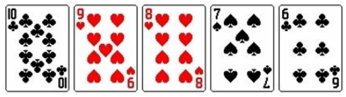
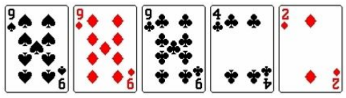
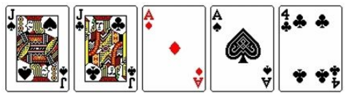
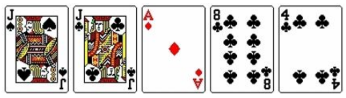
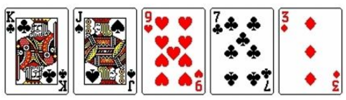
Bezeichnung	Beispiel
Royal Flush Fünf aufeinander folgende Karten der selben Farbe mit höchster Wertigkeit	
Straight Flush Fünf aufeinander folgende Karten der selben Farbe	
Four of a kind/Poker Vier gleiche Karten mit gleicher Wertigkeit	
Full House Kombination von Drilling und Paar	
Flush Fünf Karten derselben Farbe mit beliebigen Wert	
Straight/Straße Fünf aufeinander folgende Karten beliebiger Farbe	
Tree of a kind/Drilling Drei Karten mit gleichem Wert	
Two Pair/Zwei Paare Zweimal zwei Karten mit gleichem Wert	
Pair/Ein Paar Zwei Karten mit gleichem Wert	
High Card Wenn keine Kombination erreicht wird, gewinnt die höchste Karte	

Abbildung 5.1: Kartenkombinationen

Das Spiel

In Casionos, wo üblicherweise der Kartengeber, auch *Dealer* genannt, selbst nicht am Spiel teilnimmt, verwendet man einen sogenannten *Dealerbutton*. Diese kleine Scheibe wandert im Uhrzeigersinn von Spieler zu Spieler und zeigt damit nicht nur den theoretischen Geber an, sondern auch wer zuerst Karten bekommt, wer am Zug ist und wer die sogenannten *Blinds* setzen muss. Die *Blinds* sind Spieleinsätze, die vor der Kartenausgabe gesetzt werden müssen und sicher stellen, dass Geld und damit Action ins Spiel kommt. Die beiden Spieler links vom Dealer müssen einen vorbestimmten Betrag als gezwungene Wette setzen. Der erste Spieler setzt den sogenannten *Small Blind*, der zweite den *Big Blind*. Jeder Spieler erhält vom Dealer dann zwei verdeckte Karten, die *Hole Cards*. Anschließend beginnt die erste Wettrunde, auch *Pre-Flop* genannt, mit dem Spieler links vom Big Blind. Ein Spieler muss sich grundsätzlich zwischen drei möglichen Spielzügen entscheiden ([11], S. 25):

- Aufgeben, auch passen oder *fold* genannt.
- Mitgehen, auch *call* genannt oder schieben, auch *checken* genannt, wenn vorher nichts gewettet wurde.
- Wetten, auch *bet*, erhöhen oder *raise* genannt, wenn schon einmal gewettet wurde.

Die Spieler, die gezwungen waren noch vor der Kartenausgabe die Blinds zu setzen müssen zum Mitgehen nur noch die Differenz zwischen Blind und momentaner Wetthöhe ergänzen um im Spiel zu bleiben. Sie haben aber natürlich auch die Möglichkeit ihren Einsatz zu erhöhen. Die erste Wettrunde ist beendet, wenn alle Spieler, die nicht aussteigen wollen, bei einem Einsatz mitgegangen sind. Derjenige Spieler, der die letzte Erhöhung vorgenommen hat, darf allerding kein weiteres Mal erhöhen.
Nach der ersten Wettrunde folgt der sogenannte *Flop*. Nachdem der Dealer die oberste Karte des Stapels verdeckt weggelegt hat - sie also *verbrannt* hat - werden die ersten drei Gemeinschaftskarten (*Community-Cards*) offen auf den Tisch gelegt. Der Spieler links vom Dealer, der in der ersten Wettrunde den Small-Blind gesetzt hat beginnt und muss sich wiederrum zwischen den drei möglichen Spielzügen *fold*, *checken* oder *bet* entscheiden. Wobei immer eine Sache zu beachten ist: Es macht keinen Sinn aufzugeben, solange nicht gewettet wurde. Checken alle Spieler, so ist diese Wettrunde beendet, ohne dass weitere Chips in den Pot gelegt wurden. Sobald ein Spieler erhöht, kann nicht mehr gecheckt werden. Es kann nur noch mitgegangen, erhöht oder aufgegeben werden. Eine Wettrunde ist erst dann vorbei, wenn bei der letzten Erhöhung alle verbliebenen Spieler mitgegangen sind. In manchen Fällen wird die Anzahl der

erlaubten Erhöhungen pro Wettrunde eingeschränkt um zu vermeiden, dass eine Wettrunde zu lange dauert.
Anschließend eröffnet der Dealer die dritte Wettrunde indem er die oberste Karte des Stapels verbrennt und eine vierte Gemeinschaftskarte, auch *Turn* oder *Fourth Street* genannt, aufdeckt. Für den Ablauf der dritten Wettrunde gelten die gleichen Regeln wie für die zweite Wettrunde.
Ist die dritte Wettrunde beendet, verbrennt der Dealer erneut eine Karte und legt die fünfte und letzte Gemeinschaftskarte, auch *River* oder *Fifth Street* genannt, offen auf den Tisch und es wird erneut, genauso wie in Wettrunde zwei und drei vorgegangen. Am Ende dieser Wettrunde kommt es zu dem sogenannten *Showdown*, die Spieler zeigen ihre Karten, wobei jener Spieler, der zuletzt gewettet oder erhöht hat den Anfang macht. Wurde in der letzten Runde von jedem Spieler geschoben, zeigt derjenige seine Karten zuerst, der als Erster dran war.
Ist nur noch ein Spieler übrig, weil alle anderen aufgegeben haben, so gewinnt dieser Spieler den Pot und muss seine Karten nicht zeigen. Dies kann auch schon in früheren Wettrunden geschehen. Kommt es zu einem Showdown hat jener Spieler gewonnen, der aus den sieben Karten, die ihm zur Verfügung stehen, zwei Hole Cards und fünf Community-Cards, die beste Pokerhand kombiniert. Es dürfen dabei beliebig viele Karten verwendet werden. Sind die besten fünf Karten die Community Cards selbst oder haben zwei oder mehr Spieler eine Kombination von gleichen Wert, so wird der Pot geteilt (*Split Pot*). (vgl. [11], S. 24-29)

5.2 Mathematische Analyse

Da es bei Texas Hold'em im Gegensatz zu anderen Pokervarianten nicht die Möglichkeit gibt ein oder mehrere Karten auszutauschen und ein Spieler versucht aus maximal sieben Karten eine möglichst gute Kombination zu erreichen, lassen sich die Chancen auf ein gutes Blatt hier besonders gut vorraussagen.
Im folgenden Kapitel wird berechnet, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Spieler eine bestimmte Kartenkombination erhält, nachdem alle Karten ausgeteilt wurden, vorausgesetzt der Spieler steigt nicht während einer der Wettrunden aus.
Anschließend wird der Frage nach der Chance auf ein gutes Blatt, wenn noch nicht alle Karten bekannt sind, nachgegangen.

5.2.1 Die Chance auf ein bestimmtes Blatt

Royal Flush

Das Royal Flush ist die seltenste und bestmöglichste Hand im Poker. Es besteht aus Ass, König, Dame, Bube und Zehn $\{A, K, Q, J, 10\}$ in der gleichen Farbe (*suited*). Es gibt also vier verschiedene Möglichkeiten einen Royal Flash zu ziehen, in Pik $\spadesuit$, Herz $\heartsuit$, Karo $\diamondsuit$ oder Kreuz $\clubsuit$. Die übrigen beiden Karten können vollkommen beliebige Karten sein, da mit ihnen keine bessere Kombination erzielt werden kann.
Ingesamt werden also 7 Karten aus 52 entnommen, dabei gibt es 4 mögliche Kombinationen, die ein Royal Flash ergeben. Darüberhinaus besteht die 7-elemetrige Kartenkombination aus zwei beliebigen Karten, die aus den verbleibenden 47 Karten ausgewählt werden. Es ergibt sich also:

$$P(\text{Royal Flash}) = \frac{4 \cdot \binom{47}{2}}{\binom{52}{7}} = \frac{4324}{133784560} \approx 0,00003232$$

Straight Flush

Jede andere beliebige Straße einer Farbe, die nicht aus den fünf höchsten Karten besteht wird Straight Flush genannt. Es gibt insgesamt neun Möglichkeiten eine solche Straße zu bekommen:
$\{A, 2, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\{4, 5, 6, 7, 8\}$, $\{5, 6, 7, 8, 9\}$, $\{6, 7, 8, 9, 10\}$, $\{7, 8, 9, 10, J\}$, $\{8, 9, 10, J, Q\}$ oder $\{9, 10, J, Q, K\}$.
Unter den beiden übrigen Karten darf zusätzlich keine Karte sein, die das Blatt zu einem höheren Straight Flush macht. Der nächsthöhere Kartenwert muss also von den verbleibenden 47 Karten ausgeschlossen werden. Bei der niedrigsten Straße, bestehend aus $\{A, 2, 3, 4, 5\}$ darf also zusätzlich keine 6 gezogen werden. Die beiden zusätzlichen Karten können also nur aus einer Menge von 46 Karten gezogen werden. Daraus ergibt sich:

$$P(\text{Straight Flash}) = \frac{4 \cdot 9 \cdot \binom{46}{2}}{\binom{52}{7}} = \frac{37260}{133784560} \approx 0,0002785$$

Four of a kind

Ein Poker, also vier gleiche Karten, kann mit jeder der 13 verschiedenen Werte erreicht werden. Es gibt keine Möglichkeit mit den verbleibenden drei Karten ein besseren Blatt zu erhalten. Es wird also eine 3-elementrige ungeordnete Stichprobe aus den verbleibenden 48 Karten gezogen. Daraus ergibt sich:

$$P(\text{Four of a kind}) = \frac{13 \cdot \binom{48}{3}}{\binom{52}{7}} = \frac{224848}{133784560} \approx 0,001681$$

Full House

Um die Wahrscheinlichkeit für ein Full House, also eine Kombination aus einem Drilling und einem Paar zu berechnen müssen verschiedene Fälle unterschieden werden und dazu sind gewisse Vorüberlegungen notwendig. Es wird zunächst von einem bestimmten Wert k für den Drilling und einen bestimmten Wert j für das Paar ausgegangen. Um die Überlegungen leichter nachvollziehen zu können, werden den einzelnen Karten folgende Werte zugeordnet.

Karte	A	K	Q	J	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Wert	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Abbildung 5.2: Zuordnung von Werte für jede Karte

Der Drilling kann drei der vier möglichen Farben enthalten, das Paar nur zwei. Es gibt also $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}$ Möglichkeiten einen bestimmten Drilling und ein bestimmtes Paar zu erhalten.
z.B. Für einen Drilling mit dem Wert $k = 8$ gibt es $\binom{4}{3} = 4$ Möglichkeiten:

$$\{\spadesuit 7, \heartsuit 7, \diamondsuit 7\}, \{\spadesuit 7, \heartsuit 7, \clubsuit 7\},$$
$$\{\spadesuit 7, \diamondsuit 7, \clubsuit 7\}, \{\heartsuit 7, \diamondsuit 7, \clubsuit 7\}.$$

Für ein Paar mit dem Wert $j = 12$ gibt es $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten:

$$\{\spadesuit 3, \heartsuit 3\}, \{\spadesuit 3, \diamondsuit 3\}, \{\spadesuit 3, \clubsuit 3\}, \{\heartsuit 3, \diamondsuit 3\}, \{\heartsuit 3, \clubsuit 3\}, \{\diamondsuit 3, \clubsuit 3\}.$$

Die beiden übrigen Karten können jeden beliebigen Wert außer jenen des Drillings oder des Paares annehmen. Da es noch *eine* weitere Karte mit dem Wert des Drillings und *zwei* weitere Karten mit dem Wert des Paares in den verbleibenden 47 Karten gibt, können die beiden übrigen Karten nur noch aus einer 44-elemetrigen Menge gezogen werden. Es gibt also $\binom{44}{2}$ Möglichkeiten die beiden Karten zu ziehen. Nun muss noch unterschieden werden, ob der Wert des Drillings oder des Paares größer ist, denn in diesen Fällen müssen weitere Werte ausgeschlossen werden.
Da das Kartenblatt beim Pokern jeweils nur vier Karten mit gleichem Wert beinhaltet, kann der Fall, dass $k = j$ ist, ausgeschlossen werden.

1. Fall: $k > j$
Ist der Wert des Drillings größer als der Wert des Paares, so dürfen die beiden zusätzlichen Karten kein Paar mit kleineren Wert als der des Paares sein,

denn sonst würde ein höheres Full House entstehen, was das folgende Beispiel deutlich zeigt.
Angenommen der Wert des Drillings sei $k = 6$ und der Wert des Paares sei $j = 4$. Ein Blick auf die Tabelle zeigt, dass es sich um das Full House $\{9, 9, 9, J, J\}$ handelt. Bei dieser Kombination dürfen die Paare $\{Q, Q\}$, $\{K, K\}$ oder $\{A, A\}$ nicht gezogen werden, denn sonst würde ein höheres Full House, wie zum Beispiel $\{9, 9, 9, A, A\}$ entstehen . Es sind daher drei Paare, allgemein $(j - 1)$ Paare auszuschließen, die sich wiederrum aus jeweils zwei der vier Farben zusammensetzen können. Diese Kombinationen müssen von den $\binom{44}{2}$ Möglichkeiten für die beiden übrigen Karten subtrahiert werden. Es ergeben sich also

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\binom{44}{2} - (j-1) \cdot \binom{4}{2} \right)$$

Möglichkeiten.

2. Fall: $k < j$
Ist der Wert des Drillings kleiner als der Wert des Paares sind ähnliche Überlegungen wie im 1. Fall zu treffen. Die beiden zusätzlichen Karten dürfen wiederrum kein Paar mit einem kleineren Wert als der Wert des Paares sein, denn sonst würde ein höheres Full House entstehen, was das folgende Beispiel deutlich zeigt.
Angenommen der Wert des Drillings sei $k = 7$ und der Wert des Paares sei $j = 9$. Daraus ergibt sich das Full House $\{8, 8, 8, 6, 6\}$. Ein höhreres Full House würde entstehen, wenn das Paar $\{7, 7\}$, $\{9, 9\}$, $\{10, 10\}$, $\{J, J\}$, $\{Q, Q\}$, $\{K, K\}$ oder $\{A, A\}$ gezogen werden würde. Das Paar $\{8, 8\}$ kann hier ausgeschlossen werden, da es nur jeweils vier Karten mit gleichen Wert gibt. Auszuschließen sind also in diesem Beispiel 7 Paare, allgemein $(j - 2)$ Paare, die sich wiederrum jeweils aus zwei der vier Farben zusammensetzen lassen.
In diesem Fall muss zusätzlich beachtet werden, dass eine weitere Karte mit dem Wert j gezogen werden kann, ohne die Full House - Kombination zu verändern. Hat ein Spieler beispielsweise inklusive der Community-Cards das Blatt $\{8, 8, 8, 6, 6, 6, 10\}$, so würde der höchste Drilling und das höchste Paar zählen. Einige Kombination, die zuvor ausgeschlossen wurden müssen also wieder addiert werden. Und zwar jene Kombinationen, bestehend aus jeweils ein Drilling vom Wert k und vom Wert j, in drei der vier möglichen Farben und einer beliebigen Karte aus den verbleibenden 44 Karten.
Insgesamt ergibt sich also:

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\binom{44}{2} - (j-2) \cdot \binom{4}{2} \right) + \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1}$$

Da bis jetzt von einem bestimmten Wert k und einem bestimmten Wert j ausgegangen wurde, muss nun über alle j summiert werden. Das Paar kann die Werte 1,2,3,...,13 annehmen:

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{13} \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\binom{44}{2} - (j-1) \cdot \binom{4}{2} \right) +$$

$$+ \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\binom{44}{2} - (j-2) \cdot \binom{4}{2} \right) + \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1} =$$

Diese Summe muss nun den zwei Fällen entsprechend aufgespalten werden.
Für $k > j$ kann j die Werte $1, ..., (k-1)$ annehmen.
Für $k < j$ kann j die Werte $(k+1), ..., 13$ annehmen.

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\binom{44}{2} - (j-1) \cdot \binom{4}{2} \right) +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{13} \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\binom{44}{2} - (j-2) \cdot \binom{4}{2} \right) + \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1} =$$

Der Faktor $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}$ kann nun herausgehoben werden, dabei muss die zweite Summe aufgespalten werden:

$$= \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k-1} \left(\binom{44}{2} - (j-1) \cdot \binom{4}{2} \right) + \sum_{j=k+1}^{13} \left(\binom{44}{2} - (j-2) \cdot \binom{4}{2} \right) \right) +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{13} \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1} =$$

Nun kann $\binom{44}{2}$ und $\binom{4}{2}$ noch herausgehoben werden:

$$= \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{13} \binom{44}{2} - \binom{4}{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k-1} (j-1) + \sum_{j=k+1}^{13} (j-2) \right) \right) +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{13} \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{44}{1} =$$

Diese vier Summen können nun seperat berechnet werden:

(i) $\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{13} \binom{44}{2} = 12 \cdot \binom{44}{2}$

(ii) $\sum\limits_{j=1}^{k-1}(j-1) = 0+1+2+...+(k-2)$

(iii) $\sum\limits_{j=k+1}^{13}(j-2) = (k-2)+k+...+11$

(iv) $\sum\limits_{j=k+1}^{13}\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{44}{1} = (13-k)\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{44}{1}$

Die Ergebisse aus (ii) und (iii) können gleich addiert werden:

$$\sum_{j=1}^{k-1}(j-1) + \sum_{j=k+1}^{13}(j-2) = 0+1+...+(k-2)+(k-2)+k+...+11 = 66$$

Diese Teilergebnisse können nun in die Formel eingesetzt werden:

$$= \binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\left(12\cdot\binom{44}{2}-\binom{4}{2}\cdot 66\right)+(13-k)\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{44}{1}$$

Da k ebensfalls noch ein bestimmter Wert ist, muss noch über alle k summiert werden:

$$\sum_{k=1}^{13}\left[\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\left(12\cdot\binom{44}{2}-\binom{4}{2}\cdot 66\right)+(13-k)\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{44}{1}\right] =$$
$$= \binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\left(13\cdot 12\cdot\binom{44}{2}-\binom{4}{2}\cdot 66\cdot 13\right)+$$
$$+\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{44}{1}\sum_{k=1}^{13}(13-k) =$$

Die Summe kann wieder seperat berechnet werden:

(v) $\sum\limits_{k=1}^{13}(13-k) = 0+1+2+...+13 = 78$

Daher gibt es insgesamt

$$\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\left(13\cdot 12\cdot\binom{44}{2}-\binom{4}{2}\cdot 66\cdot 13\right)+\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{44}{1}\cdot 78$$

Möglichkeiten ein Full House zu erhalten.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler ein Full House erhält, ergibt sich demnach:

$$P(\text{Full House}) = \frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\left(13\cdot 12\cdot\binom{44}{2} - 13\cdot 66\cdot\binom{4}{2}\right) + 78\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{44}{1}}{\binom{52}{7}} =$$
$$= \frac{3\ 473\ 184}{133\ 784\ 560} \approx 0{,}025961023$$

Flush

Ein Flush, also fünf Karten derselben Farbe mit beliebigen Wert kann in jeder der vier möglichen Farben erlangt werden. Um solch ein Flush bilden zu können, können fünf, sechs oder alle sieben Karten dieselbe Farbe haben. Jeder dieser Fälle muss nun einzeln betrachtet werden.

1.Fall:
Um ein Flush mit fünf Karten derselben Farbe zu bilden, werden aus insgesamt 13 Karten einer Farbe fünf verschiedene Werte ausgewählt, die jedoch keine Straße bilden dürfen. Da es genau *eine* Möglichkeit gibt ein Royal Flush und genau *neun* Möglichkeiten gibt ein Straight Flush zu erhalten, müssen diese zehn Kombinationen von allen möglichen Kombinationen abgezogen werden. Damit verbleiben noch 39 Karten in anderen Farben aus denen die zwei übrigen Karten gezogen werden. Es ergeben sich also

$$\left(\binom{13}{5} - 10\right)\cdot\binom{39}{2} = 946\ 257$$

Möglichkeiten ein Flush mit maximal fünf Karten derselben Farbe zu erhalten.

2.Fall:
Um ein Flush mit sechs Karten derselben Farbe zu bilden, werden aus insgesamt 13 Karten einer Farbe sechs verschiedene Werte ausgewählt, die jedoch wie im 1.Fall keine Straße bilden dürfen. Wie bereits beschrieben gibt es zehn verschiedene Kombinationen, die eine Straße ergeben. Bei einem Royal Flush kann jede beliebige der acht verbleibenden Karten dieser Farbe die sechste Karte sein, da auf keinen Fall ein höheres Royal Flush erreicht werden kann. Bei einem Straight Flush hingegen kann die sechste Karte nur aus sieben der acht verbleibenden Karten dieser Farbe gewählt werden, da je eine dieser acht Karten das Blatt zu einem höherwertigen Straight Flush macht. Analog wie im 1.Fall wird die übrige Karte aus den verbleibenden 39 Karten in den anderen Farben gezogen.

Es ergeben sich also

$$\left(\binom{13}{6}-\left(1\cdot\binom{8}{1}+9\cdot\binom{7}{1}\right)\right)\cdot\binom{39}{1}=64\ 155$$

Möglichkeiten ein Flush mit maximal sechs Karten derselben Farbe zu erhalten.

3.Fall:
Um ein Flush mit sieben Karten derselben Farbe zu bilden, wird analog wie in den ersten beiden Fällen eine 7-elemetrige Menge aus den 13 Karten einer Farbe gezogen. Auch hier müssen alle möglichen Straßenkombinationen ausgeschlossen werden mit dem Unterschied, dass in diesem Fall zwei der acht (Royal Flush) beziehungsweise sieben (Straight Flush) möglichen Karten gezogen werden. Es erbenen sich also

$$\left(\binom{13}{7}-\left(1\cdot\binom{8}{2}+9\cdot\binom{7}{2}\right)\right)=1\ 499$$

Möglichkeiten ein Flush mit sieben Karten derselben Farbe zu erhalten.
Um die Wahrscheinlichkeit berechnen zu können muss nun die Summe aller Möglichkeiten dieser drei Fälle noch mit vier multiplizerit werden, da ein Flush in vier verschiedenen Farben erreicht werden kann.

$$P(\text{Flush})=\frac{4\cdot(946\ 257+64\ 155+1\ 499)}{\binom{52}{7}}=\frac{4\ 047\ 644}{133\ 784\ 560}\approx 0,030254941$$

Straight

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler ein Straight, also fünf aufeinanderfolgende Karten beliebiger Farbe, erhält müssen vier Fälle unterschieden werden. Die sieben Karten können (1) unterschiedliche Werte haben oder (2) ein Paar, (3) ein Drilling oder (4) zwei Paar beinhalten.

1.Fall:
Wird ein Straight aus einem Kartenblatt mit sieben unterschiedlichen Werten gebildet, so kann jede der sieben Karten in vier verschiedenen Farben gezogen werden. Es gibt also 4^7 Möglichkeiten für die Farbauswahl der Karten, von denen die Möglichkeiten, dass ein Flush entsteht, abgezogen werden müssen. Für ein Flush wird gewertet, wenn fünf, sechs oder alle sieben Karten einer Hand die gleiche Farbe haben.
Wenn fünf der sieben Karten die gleiche Farbe haben, können die beiden übrigen Karten in drei Farben auftreten, das ergibt $\binom{7}{5}\cdot 3^2$ Möglichkeiten.

Haben sechs der sieben Karten die gleiche Farbe, hat die siebenten Karte ebensfalls drei Farben zu Auswahl, das ergibt $\binom{7}{6} \cdot 3$ Möglichkeiten.
Und es gibt schließlich $\binom{7}{7}$ Möglichkeiten, dass alle sieben Karten die gleiche Farbe besitzen. Da dies für jede der vier Farben gilt, muss die Summe der Kombinaitionen mit vier multipliziert werden.
Es gibt also

$$4^7 - 4\left(\binom{7}{5} \cdot 3^2 + \binom{7}{6} \cdot 3 + \binom{7}{7}\right)$$

Möglichkeiten sieben Karten mit unterschiedlichen Werten zu erhalten abzüglich jener Kombinationen, die ein Flush ergeben.
Für ein Straight müssen nun fünf der sieben Karten eine Straße bilden. Wird die höchste Straße, also $\{A, K, Q, J, 10\}$ gezogen, können die übrigen beiden Karten jeden beliebigen der verbleibenden acht Werte annehmen: $\binom{8}{2}$. Bei jeder anderen der neun möglichen Straßen, dürfen die beiden übrigen Karten nur aus sieben der acht verbleibenden Karten gezogen werden, denn jeweils ein Wert würde das Blatt zu einer höheren Straße machen: $9 \cdot \binom{7}{2}$.
Somit ergeben sich für den ersten Fall

$$\left(4^7 - 4\left(\binom{7}{5} \cdot 3^2 + \binom{7}{6} \cdot 3 + \binom{7}{7}\right)\right) \cdot \left(\binom{8}{2} + 9 \cdot \binom{7}{2}\right) = 3\ 372\ 180$$

2.Fall:
Befindet sich unter den sieben Karten ein Paar, so kann dies entweder mit einem Wert, der nicht in der Straße vorkommt gebildet werden oder ein Wert der Straße ist zweifach vorhanden.

(i) Der Wert des Paares kommt nicht in der Straße vor

Für die Farben der fünf Karten, die kein Paar bilden gibt es 4^5 mögliche Kombinationen. Für die Farbe des Paares können zwei aus vier möglichen Farben gewählt werden. Es ergeben sich also $4^5 \cdot \binom{4}{2}$ Möglichkeiten.
Wie schon im 1. Fall müssen auch hier die Möglichkeiten ein Flush, das in vier verschiedenen Farben auftreten kann, zu erzielen, ausgeschlossen werden. Es gibt fünf mögliche Kombinationen, in denen vier Karten der Straße und eine Karte des Paares die gleiche Farbe haben. die übrige Karte der Straße und die des Paares können jeweils in drei verschiedenen Farben auftreten. Daraus ergeben sich $5 \cdot 3 \cdot 3$ Kombinationen.
Haben die fünf Karten der Straße die gleiche Farbe, so können die zwei Karten des Paares drei verschiedene Farben annehmen: $\binom{3}{2}$. Schließlich kann eine Karte des Paares auch die gleiche Farbe wie die Straße haben. In diesem Fall kann die zweite Karte des Paares eine der drei verbleibenden Farben annehmen: $\binom{3}{1}$.

Daraus ergibt sich nun Folgendes:

$$4^5 \cdot \binom{4}{2} - 4 \cdot \left(5 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{3}{2} + \binom{3}{1}\right)$$

Zusätzlich müssen diese Karten natürlich eine Straße bilden. Wird die höchste Straße gebildet kann das Paar einen der verbleibenden acht Werte annehmen. Bei jeder der anderen neuen verschiedenen Straße, darf das Paar nur einen von sieben der acht verbleibenden Werte annehmen, da eine der acht Karten das Blatt zu einer höheren Straße machen würde. Die Überlegungen von Punkt (i) ergeben insgesamt:

$$\left(4^5 \cdot \binom{4}{2} - 4 \cdot \left(5 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{3}{2} + \binom{3}{1}\right)\right) \cdot \left(\binom{8}{1} + 9 \cdot \binom{7}{1}\right)$$

(ii) Eine Karte des Paares ist Teil der Straße

Da eine Straße aus fünf verschiedenen Werten besteht, gibt es fünf Möglichkeiten für den Wert, der zweifach vorhanden ist.
Übrigen Überlegungen sind ident mit jenen aus Punkt (i). Daraus ergeben sich also

$$5 \cdot \left(4^5 \cdot \binom{4}{2} - 4 \cdot \left(5 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{3}{2} + \binom{3}{1}\right)\right) \cdot \left(\binom{8}{1} + 9 \cdot \binom{7}{1}\right)$$

Die beiden Ergebnisse können nun zusammengefasst werden und somit ergeben sich

$$\begin{aligned}
&\left(4^5 \cdot \binom{4}{2} - 4 \cdot \left(5 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{3}{2} + \binom{3}{1}\right)\right) \cdot \left(\binom{8}{1} + 9 \cdot \binom{7}{1}\right) + \\
&+5 \cdot \left(4^5 \cdot \binom{4}{2} - 4 \cdot \left(5 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{3}{2} + \binom{3}{1}\right)\right) \cdot \left(\binom{8}{1} + 9 \cdot \binom{7}{1}\right) = \\
&= 6 \cdot \left(4^5 \cdot \binom{4}{2} - 4 \cdot \left(5 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{3}{2} + \binom{3}{1}\right)\right) \cdot \left(\binom{8}{1} + 9 \cdot \binom{7}{1}\right) = \\
&= 2\,530\,440
\end{aligned}$$

Möglichkeiten für ein Straight, wenn sich unter den sieben Karten ein Paar befindet.

3.Fall:
Beinhaltet die Kartenkombination einen Drilling, so muss eine Karte davon zwangsweise auch Teil der Straße sein. Der Drilling kann somit fünf verschiedene Werte annehmen. Die Farbzusammenstellung des Drillings ist beliebig.

Es wird also eine 3-elemtrige Stichprobe aus den vier möglichen Farben, also einer 4-elemtrigen Menge gezogen. Die übrigen vier der sieben Karten können ebenso aus vier verschiedenen Farben gezogen werden. Daraus ergeben sich

$$5 \cdot 4^4 \cdot \binom{4}{3}$$

möglichen Kombinationen.
Wie auch schon in den ersten beiden Fällen müssen auch hier jene möglichen Kombinationen, die ein Flush ergeben, ausgeschlossen werden. Ein Flush kann in vier verschiedenen Farben auftreten. Um die Farbe der übrigen zwei Karten zu bestimmen, wird eine 2-elemtrige Stichprobe aus den drei verbleibenden Farben, also einer 3-elemtrigen Menge gezogen. Da die Kartenkombination einen Drilling beinhaltet, gibt es keine weiteren Möglichkeiten, ein Flush zu erhalten. Zuletzt muss aus den fünf unterschiedlichen Werten eine von zehn möglichen Straßen gebildet werden. Daraus ergeben sich für den dritten Fall

$$10 \cdot 5 \cdot \left(4^4 \cdot \binom{4}{3} - 4 \cdot \binom{3}{2}\right) = 50\ 600$$

mögliche Kombinationen.

4.Fall:
Befinden sich zwei Paare unter den sieben Karten, so muss eine Karte jedes Paares auch Teil der Straße sein. Für die Paare werden also zwei aus fünf Werten der Straße ausgewählt. Die drei übrigen Karten der Straße können jede beliebige Farbe annehmen. Die beiden Karten eines Paare können jeweils in vier verschiedenen Farben gezogen werden. Die Anzahl der Möglichkeiten kann also berechnet werden durch:

$$\binom{5}{2} \cdot 4^3 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}$$

Auch hier sind wieder jene Möglichkeiten, die ein Flush ergeben auszuschließen. Ein Flush kann in jeder der vier Farben gebildet werden. Für die beiden anderen Karten stehen jeweils drei Farben zur Verfügung. Zuletzt muss aus den fünf unterschiedlichen Werten der sieben Karten wieder eine der zehn möglichen Straßen gebildet werden. Insgesamt ergeben sich also für den vierten Fall

$$10 \cdot \binom{5}{2} \cdot \left(4^3 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} - 4 \cdot 3 \cdot 3\right) = 226\ 800$$

Möglichkeiten.

Um die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Spieler ein Straight erhält zu berechnen, muss nun die Summe der Möglichkeiten aus allen vier Fällen durch die Anzahl aller möglichen Kartenkombinationen dividiert werden.

$$P(\text{Straight}) = \frac{3\ 372\ 180 + 2\ 530\ 440 + 50\ 600 + 226\ 800}{\binom{52}{7}} =$$
$$= \frac{6\ 180\ 020}{133\ 784\ 560} \approx 0,046193821$$

Tree of a kind

Ein Drilling, also drei gleichwertige Karten, kann in 13 verschiedenen Werten vorkommen. Die restlichen vier der sieben Karten werden ohne Zurücklegen aus den übrigen 12 Werten ausgewählt, denn es darf weder ein Wert zweimal vorkommen, da sonst ein Full House entstehen würde noch darf der Wert des Drillings ein weiteres mal gezogen werden, da sonst ein Poker entstehen würde. Damit ein Drilling gewertet wird, darf der Wert des Drillings gemeinsam mit den übrigen vier Karten kein Straight ergeben. Die Anzahl der möglichen Straßenkombinationen ist vom Wert des Drillings abhängig. Betrachtet man die Liste aller möglichen Straßenkombinationen so ergibt sich für jeden Wert des Drillings eine bestimmte Anzahl an möglichen Straßenkombinationen.

$$\begin{array}{ccccc} \{A,2,3,4,5\} & \{3,4,5,6,7\} & \{5,6,7,8,9\} & \{7,8,9,10,J\} & \{9,10,J,Q,K\} \\ \{2,3,4,5,6\} & \{4,5,6,7,8\} & \{6,7,8,9,10\} & \{8,9,10,J,Q\} & \{10,J,Q,K,A\} \end{array}$$

Wert des Drillings	A	K	Q	J	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Anzahl Kombinationen	2	2	3	4	5	5	5	5	5	5	4	3	2

Abbildung 5.3: Anzahl der möglichen Straßenkombination in Abhängigkeit vom Wert des Drillings

Diese insgesamt 50 Kombinationen müssen von der Gesamtanzahl der Drillingen abgezogen werden. Somit erhält man:

$$13 \cdot \binom{12}{4} - 50$$

Nun muss noch die Auswahl der Farben berücksichtigt werden. Der Drilling kann drei der vier möglichen Farben enthalten. Die vier übrigen Karten können jede beliebige Farbe annehmen, es darf dabei jedoch kein Flush entstehen. Ein

Flush kann wiederrum in vier verschiedenen Farben gezogen werden. Für die beiden übrigen Karten stehen drei Farben zur Auswahl. Somit erhält man für die Auswahl der Farben:

$$\binom{4}{3} \cdot 4^4 - 4 \cdot \binom{3}{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler Tree of a kind erhält kann also folgendermaßen berechnet werden:

$$P(\text{Tree of a kind}) = \frac{\left(13 \cdot \binom{12}{4} - 50\right) \cdot \left(\binom{4}{3} \cdot 4^4 - 4 \cdot \binom{3}{2}\right)}{\binom{52}{7}} =$$
$$= \frac{6\ 461\ 620}{133\ 784\ 560} \approx 0,048298698$$

Two Pair

Um die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler Two Pair, also zweimal zwei Karten mit gleichem Wert, erhält bestimmen zu können, müssen zunächst zwei Fälle unterschieden werden.
Die Hand eines Spieler kann neben den zwei Paaren entweder (1.Fall) drei Karten mit unterschiedlichen Werten oder (2.Fall) ein weiteres Paar und eine einzelne Karte beinhalten.

1.Fall:
Zunächst werden die beiden Werte der Paare aus 13 möglichen Werten gezogen. Die drei übrigen Karten können nun aus den verbleibenden 11 Werten ausgewählt werden. Für die beiden Karten jedes Paares stehen je vier Farben zur Auswahl. Die drei Karten mit unterschiedlichen Farben können zunächst in jeder beliebigen Farbe gezogen werden.

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{11}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4^3$$

Nun müssen wiederrum die Kombinationen, die ein Flush ergeben abgezogen werden. Um ein Flush zu erhalten, muss eine Farbe in beiden Paaren vorkommen und die drei übrigen Karten müssen ebenfalls diese Farbe haben. Die zweiten Karten jedes Paares können demnach jede beliebige der drei verbleibenden Farben haben. Von den Farbkombinationen müssen also $4 \cdot \binom{3}{2}$ Kombinationen abgezogen werden. Für den ersten Fall erhält man also:

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{11}{3} \cdot \left(\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4^3 - 4 \cdot 3^2\right)$$

Weiters müssen alle Kombinationen, die eine Straße ergeben ausgeschlossen, also abgezogen, werden. Dazu wird, wie in dem Abschnitt zu Tree of a kind, die Anzahl der Straßenkombinationen, die die Werte von jeweils zwei Paaren enthalten, bestimmt.

$$\{A, 2, 3, 4, 5\} \quad \{3, 4, 5, 6, 7\} \quad \{5, 6, 7, 8, 9\} \quad \{7, 8, 9, 10, J\} \quad \{9, 10, J, Q, K\}$$
$$\{2, 3, 4, 5, 6\} \quad \{4, 5, 6, 7, 8\} \quad \{6, 7, 8, 9, 10\} \quad \{8, 9, 10, J, Q\} \quad \{10, J, Q, K, A\}$$

Paar	Straßen
A;2	1
2;3	2
3;4	3
4;5	4
5;6	4
6;7	4
7;8	4
8;9	4
9;10	4
10;J	4
J;Q	3
Q,K	2
K;A	1
$\sum$	40

Paar	Straßen
A;3	1
2;4	2
3;5	3
4;6	3
5;7	3
6;8	3
7;9	3
8;10	3
9;J	3
10;Q	3
J;K	2
Q;A	1
$\sum$	30

Paar	Straßen
A;4	1
2;5	2
3;6	2
4;7	2
5;8	2
6;9	2
7;10	2
8;J	2
9;Q	2
10;K	2
J;A	1
$\sum$	20

Paar	Straßen
A;5	1
2;6	1
3;7	1
4;8	1
5;9	1
6;10	1
7;J	1
8;Q	1
9;K	1
10;A	1
$\sum$	10

Abbildung 5.4: Anzahl der möglichen Straßenkombinationen in Abhängigkeit vom Wert der beiden Paare

Es gibt also in Summe 100 Straßen, die mit zwei Paaren gebildet werden können. Zusätzlich müssen die Farbkombinationen der Straßen betrachtet werden. Für beide Karten jedes Paares stehen wieder je vier Farben zur Auswahl und die restlichen Karten können auch hier in jeder beliebigen Farbe gezogen werden. Um die Möglichkeiten ein Flush zu erhalten auszuschließen, müssen aus denselben Gründen wie zuvor wieder $4 \cdot 3^2$ Möglichkeiten subtrahiert werden.

Man erhält also für den ersten Fall:

$$\binom{13}{2}\cdot\binom{11}{3}\cdot\left(\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 4^3-4\cdot 3^2\right)-100\cdot\left(\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 4^3-4\cdot 3^2\right)=$$

$$=28\ 962\ 360 \text{ Möglichkeiten.}$$

2.Fall:
Um alle Möglichkeiten dieses Falles zu bestimmen, müssen zunächst die drei Werte der drei Paare aus 13 möglichen Werten gezogen werden. Für die beiden Karten jedes Paares stehen je vier Farben zur Auswahl. Die siebente Karte kann nur noch aus den verbleibenden 10 Werten ausgewählt werden, da kein Drilling entstehen darf und sie kann eine beliebige Farbe haben. Hat ein Spieler drei Paare in der Hand, kann auf keinen Fall ein Flush oder ein Straight entstehen, da er maximal vier Karten einer Farbe beziehungsweise maximal vier Karten von unterschiedlichen Wert haben kann. Es müssen also keine weiteren Kombinationen ausgeschlossen werden. Für den zweiten Fall ergeben sich also

$$\binom{13}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 10\cdot 4=2\ 471\ 040$$

Möglichkeiten. Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, muss nun wieder die Summe der eben bestimmten Möglichkeiten durch die Anzahl aller möglichen Kombinationen dividiert werden.

$$P(\text{Two Pair})=\frac{28\ 962\ 360+2\ 471\ 040}{133\ 784\ 560}=$$

$$=\frac{31\ 433\ 400}{133\ 784\ 560}\approx 0,234955364$$

Pair

Ein Spieler kann ein Paar mit 13 verschiedenen Werten erhalten. Für die übrigen fünf Karten stehen somit 12 verschiedene Werte zur Verfügung. Sie dürfen allerdings nur unterschiedliche Werte annehmen, da kein Drilling und kein zweites Paar gezogen werden darf. Es gibt zunächst also $13\cdot\binom{12}{5}$ Möglichenkeiten ein Paar zu erhalten.
Von diesen möglichen Kombinationen müssen nun noch jene Kombinationen abgezogen werden, durch die eine Straße entstehen würde. Die Anzahl der möglichen Straßen ist vom Wert es Paares abhängig. Zur besseren Übersicht werden an dieser Stelle nocheinmal alle möglichen Straßenkombinationen aufgelistet:

$$\{A,2,3,4,5\} \quad \{3,4,5,6,7\} \quad \{5,6,7,8,9\} \quad \{7,8,9,10,J\} \quad \{9,10,J,Q,K\}$$
$$\{2,3,4,5,6\} \quad \{4,5,6,7,8\} \quad \{6,7,8,9,10\} \quad \{8,9,10,J,Q\} \quad \{10,J,Q,K,A\}$$

Paar mit A:
Mit einer Karte des Paares $\{A,A\}$ können die beiden Straßen $\{A,2,3,4,5\}$ und $\{10,J,Q,K,A\}$ gebildet werden. Die siebente Karte kann jeweils sieben verschiedene Werte annehmen. Im Falle der ersten Straße wären das die Werte $7,8,9,10,J,Q$ oder K und im Falle der zweiten Straße die Werte $2,3,4,5,6,7$ und 8.
Eine Straße kann jedoch auch mit den fünf unterschiedlichen Karten neben dem Paar gebildet werden. Dafür gibt es acht Möglichkeiten:
$\{2,3,4,5,6\},\{3,4,5,6,7\},\{4,5,6,7,8\},\{5,6,7,8,9\}$,
$\{6,7,8,9,10\},\{7,8,9,10,J\},\{8,9,10,J,Q\}$ und $\{9,10,J,Q,K\}$.
Es gibt also $2 \cdot 7 + 8 = 22$ Möglichkeiten eine Straße zu erhalten.

Paar mit 2:
Mit einer Karte des Paares $\{2,2\}$ können die beiden Straßen $\{A,2,3,4,5\}$ und $\{2,3,4,5,6\}$ gebildet werden. Die siebente Karte kann im Falle der ersten Straße die Werte $7,8,9,10,J,Q$ oder K annehmen und im Falle der zweiten Straße die Werte $8,9,10,J,Q,K$ oder A annehmen.
Mit den fünf unterschiedlichen Karten neben dem Paar können acht verschiedene Straßen gebildet werden:
$\{3,4,5,6,7\},\{4,5,6,7,8\},\{5,6,7,8,9\},\{6,7,8,9,10\},\{7,8,9,10,J\}$,
$\{8,9,10,J,Q\},\{9,10,J,Q,K\}$ und $\{10,J,Q,K,A\}$.
Es gibt also $2 \cdot 7 + 8 = 22$ Möglichkeiten eine Straße zu erhalten.

Paar mit 3:
Mit einer Karte des Paares $\{3,3\}$ können die Straßen $\{A,2,3,4,5\},\{2,3,4,5,6\}$ oder $\{3,4,5,6,7\}$ gebildet werden. Die siebente Karte kann wieder jeweils sieben Werte annehmen.
Mit den fünf unterschiedlichen Karten neben dem Paar können sieben verschiedene Straßen gebildet werden:
$\{4,5,6,7,8\},\{5,6,7,8,9\},\{6,7,8,9,10\},\{7,8,9,10,J\},\{8,9,10,J,Q\}$,
$\{9,10,J,Q,K\}$ und $\{10,J,Q,K,A\}$.
Es gibt also $3 \cdot 7 + 7 = 28$ Möglichkeiten eine Straße zu bilden.

Paar mit 4:
Mit einer Karte des Paares $\{4,4\}$ können die Straßen $\{A,2,3,4,5\},\{2,3,4,5,6\}$, $\{3,4,5,6,7\}$ oder $\{4,5,6,7,8\}$ mit jeweils sieben verschiedenen zusützlichen Karten gebildet werden.
Mit den fünf unterschiedlichen Karten können sechs weitere Straßen gebildet werden:
$\{5,6,7,8,9\},\{6,7,8,9,10\},\{7,8,9,10,J\},\{8,9,10,J,Q\},\{9,10,J,Q,K\}$

und $\{10, J, Q, K, A\}$.
Es gibt also $4 \cdot 7 + 6 = 34$ Möglichkeiten eine Straße zu bilden.

Paar mit 5:
Mit einer Karte des Paares $\{5, 5\}$ können die Straßen $\{A, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{3, 4, 5, 6, 7\}, \{4, 5, 6, 7, 8\}$ oder $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ mit jeweils sieben verschiedenen zusätzlichen Karten gebildet werden.
Mit den fünf unterschiedlichen Karten können fünf weitere Straßen gebildet werden:
$\{6, 7, 8, 9, 10\}, \{7, 8, 9, 10, J\}, \{8, 9, 10, J, Q\}, \{9, 10, J, Q, K\}, \{10, J, Q, K, A\}$.
Es gibt also $5 \cdot 7 + 5 = 40$ Möglichkeiten eine Straße zu bilden.

Paar mit 6:
Mit einer Karte des Paares $\{6, 6\}$ können die Straßen $\{2, 3, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\{4, 5, 6, 7, 8\}, \{5, 6, 7, 8, 9\}$ oder $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ mit jeweils sieben verschiedenen zusätzlichen Karten gebildet werden.
Mit den fünf unterschiedlichen Karten können vier weitere Straßen gebildet werden: $\{7, 8, 9, 10, J\}, \{8, 9, 10, J, Q\}, \{9, 10, J, Q, K\}$ und $\{10, J, Q, K, A\}$.
Es gibt also $5 \cdot 7 + 4 = 39$ Möglichkeiten eine Straße zu bilden.

Paar mit $7, 8$ oder 9:
Für diese Werte gelten die gleichen Überlegungen wie für den Wert 6, da es genauso viele Straßen mit einer Karte des Siebener-, Achter- und Neuerpaar gibt wie bei dem Sechserpaar. Es gibt also jeweils 39 Möglichkeiten eine Straße zu bilden.

Paar mit 10:
Für ein Paar mit dem Wert 10 gelten die gleichen Überlegungen wie für das Paar mit dem Wert 5. Es gibt daher ebenfalls 40 mögliche Straßenkombinationen.

Paar mit J:
Für ein Paar mit dem Wert J gelten die gleichen Überlegungen wie für das Paar mit dem Wert 4. Es gibt daher ebenfalls 34 mögliche Straßenkombinationen.

Paar mit Q:
Für ein Paar mit dem Wert Q gelten die gleichen Überlegungen wie für das Paar mit dem Wert 3. Es gibt daher ebenfalls 28 mögliche Straßenkombinationen.

Paar mit K:
Für ein Paar mit dem Wert K gelten die gleichen Überlegungen wie für das Paar mit dem Wert 2. Es gibt daher ebenfalls 22 mögliche Straßenkombinationen.

Um alle möglichen Kombinationen, die eine Straße ergeben zu erhalten, müssen nun die eben errechnete Werte addiert werden: $22 + 22 \cdot 2 + 28 \cdot 2 + 34 \cdot 2 + 40 \cdot 2 + 39 \cdot 4 = 426$.

Für die Anzahl der Möglichkeiten ein Paar zu erhalten gilt also:

$$13 \cdot \binom{12}{5} - 426$$

Zuletzt müssen noch die Farbkombinationen berücksichtigt werden. Für das Paar werden zwei Farben aus vier Farben ausgewählt. Die restlichen fünf Karten können zunächst jede beliebige Farbe annehmen: $\binom{4}{2} \cdot 4^5$.
Von diesen Kombinationen müssen allerdings noch jene Kombinationen abgezogen werden, die ein Flush ergeben. Ein Flush kann in **vier** verschiedenen Farben auftreten und aus fünf oder sechs Karten der gleichen Farbe bestehen. Bei einem Flush aus fünf Karten gleicher Farbe müssen zwei Fälle unterschieden werden. Zum einen kann eine Karte des Paares Teil des Flushes sein und zum anderen kann das Flush aus den übrigen fünf Karten neben dem Paar gebildet werden.
Im ersten Fall ist eine der fünf Karten neben dem Paar nicht Teil des Flushes. Diese Karte kann **drei** verschiedene Farben annehmen. Jene Karte des Paares, die nicht Teil des Flushes ist, kann ebenfalls aus **drei** möglichen Farben gezogen werden. Es ergeben sich also für den ersten Fall $\mathbf{5 \cdot 3 \cdot 3}$ Möglichkeiten.
Im zweiten Fall haben die beiden Kartes des Paares eine andere Farbe als das Flush, das sich aus den übrigen fünf Karten zusammensetzt. Für die Farbe des Paares werden also zwei Farben aus den drei verbleibenden Farben gezogen. Es ergeben sich für den zweiten Fall also $\boldsymbol{\binom{3}{2}}$ Möglichkeiten.
Bei einem Flush aus sechs Karten gleicher Farbe kann die siebente Karte drei verschiedene Farben haben, daher gibt es **drei** Möglichkeiten ein solches zu erhalten. Die Anzahl der Kombinationen, die ein Flush ergeben müssen nun von allen möglichen Farbkombinationen subtrahiert werden:

$$\binom{4}{2} \cdot 4^5 - 4 \cdot \left(5 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{3}{2} + 3\right)$$

Um die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler ein Paar erhält zu bestimmen muss nun die Anzahl der Kombinationen, die ein Paar ergeben, durch die Anzahl aller möglichen Kombinationen dividiert werden.

$$\begin{aligned} P(\text{Pair}) &= \frac{\left(13 \cdot \binom{12}{5} - 426\right) \cdot \left(\binom{4}{2} \cdot 4^5 - 4 \cdot \left(5 \cdot 3 \cdot 3 + \binom{3}{2} + 3\right)\right)}{\binom{52}{7}} = \\ &= \frac{58927800}{133784560} \approx 0,438225457 \end{aligned}$$

High Card

Wird keine der eben analysierten Kombinationen erzielt, so gewinnt die höchste Karte im Spiel. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler kein Paar oder ein höheres Blatt erhält kann mit der Gegenwahrscheinlichkeit berechnet werden.

$$\begin{aligned}
P(\text{High Card}) = 1 - [&P(\text{Royal Flush}) + P(\text{Straight Flush}) + P(\text{Four of a kind}) + \\
&+ P(\text{Full House}) + P(\text{Flush}) + P(\text{Straight}) + \\
&+ P(\text{Three of a kind}) + P(\text{Two Pair}) + P(\text{Pair})] = \\
= 1 - [&0,0003232 + 0,00027851 + 0,00168067 + \\
&+ 0,02596102 + 0,03025494 + 0,04619382 + \\
&+ 0,04829870 + 0,23495536 + 0,43822546] = \\
= 0,&1741192
\end{aligned}$$

Zur besseren Übersicht werden in der folgenden Tabelle nocheinmal die eben berechneten Wahrscheinlichkeiten, mit der ein Spieler die verschiedenen Kombinationen erhält, dargestellt:

Kombination	Wahrscheinlichkeit
Royal Flush	0,00003232
Straight Flush	0,00027851
Four of a kind	0,00168067
Full House	0,02596102
Flush	0,03025494
Straight	0,04619382
Three of a kind	0,04829870
Two Pair	0,23495536
Pair	0,43822546
High Card	0,17411920

Bei dieser Übersicht fällt auf, dass bei Texas Hold'em die Wahrscheinlichkeit ein Paar oder sogar zwei Paar zu erhalten größer ist, als die Wahrscheinlichkeit, dass mit den sieben Karten, die zur Verfügung stehen, keine Kombination erzielt wird.

5.2.2 Spielsituationen

Nachdem im vorherigen Abschnitt die Wahrscheinlichkeiten, mit den sieben ausgeteilten Karten ein bestimmtes Blatt zu erhalten, berechnet wurden, stellt sich nun die Frage, wie sich die Wahrscheinlichkeiten auf ein gutes Blatt in den verschiedenen Wettrunden verändern und wann es sinnvoll ist auszusteigen und wann unbedingt gewettet werden sollte.

Pre-Flop – Verhalten in der ersten Wettrunde

In dieser Runde werden jedem Spieler zwei verdeckte Karten, die sogenannten Hole Cards ausgeteilt. Es gibt also

$$\binom{52}{2} = 1326$$

mögliche Starthände, die ein Spieler ziehen kann.
Obwohl der Spieler zu diesem Zeitpunkt weniger als ein Drittel aller Karten kennt, muss er entscheiden ob er mitgeht oder aussteigt. Es stellt sich also die Frage, welche Starthände gut und welche weniger gut sind.
Grundsätzlich sind hohe Karten von Vorteil, denn im Zweifel gewinnt immer die höhere Kombination. Die Hole Cards sollten sich außerdem durch die Community-Cards zu einem höherwertigen Blatt kombinieren lassen.
Karten, die *suited* sind, also die gleiche Farbe haben, können später zum Beispiel ein Flush ergeben. Karten, die weniger als sechs Ränge auseinander liegen können später eine Straße bilden. Aus den eben genannten Gründen gilt 72 *offsuit* - also unterschiedlicher Farbe - als schlechteste Starthand im Poker. (vgl. [11], S. 66)
Die folgende Tabelle zeigt eine Liste der besten Starthände:

Hole Cards: Pair

Aus der Abbildung 5.5 lässt sich erkennen, dass ein Spieler, der als Hole Cards ein Paar erhalten hat, auf jeden Fall weiterspielen sollte. Dabei gilt natürlich: je höher das Paar desto besser.
Doch wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, als Starthand ein Paar zu erhalten? Es gibt 13 verschiedene Werte, in denen das Paar auftreten kann. Die Farben der beiden Karten werden aus einer 4-elementrigen Menge gezogen. Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, muss nun die Anzahl der Möglichkeiten ein Paar zu erhalten durch die Anzahl aller möglichen Starthände dividiert werden:

$$P(\text{Starthand Pair}) = \frac{13 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{78}{1326} \approx 0,058823529$$

Gruppe	Rang	Starthände
1	1-5	AA, KK, QQ, JJ, AKs
2	6-10	TT, AQs, AJs, AK, KQs
3	11-16	$ATs, KJs, AQ, 99, QJs, KTs$
4	17-24	$88, QTs, A9s, AJ, JTs, KQ, A8s, AT$
5	25-42	$K9s, A7s, KJ, A5s, Q9s, T9s, 77, J9s, A6s, QJ,$ $A4s, KT, QT, A3s, K8s, JT, A2s, Q8s$
6	43-51	$T8s, K7s, 98s, 66, J8s, A9, K6s, K5s, A8$
7	52-68	$87s, 97s, K4s, Q7s, T7s, K9, J7s, T9, 55$ $Q6s, Q9, K3s, J9, A7, Q5s, A5, K2s$
8	69-84	$Q4s, A6, T6s, J6s, A4, J5s, K8, Q3s, 44, T8,$ $A3, J8, Q8, K7, A2, K6$

Abbildung 5.5: Die besten Starthände (in der Wertigkeit absteigend), Quelle:[11], S. 67

Das Paar gilt deshalb als gute Starthand, weil die Wahrscheinlichkeit damit im Laufe des Spiels eine bessere Kombination zu erhalten relativ groß ist. Der Spieler hat insbesondere die Möglichkeit das Blatt zu einem *Three of a kind*, *Full House* oder sogar zu einem *Four of a kind* zu vervollständigen. Die Wahrscheinlichkeit ein Paar auf eine der eben genannten Kombinationen zu verbessern, soll anhand des folgenden Beispiels berechnet werden.

Starthand $\{\spadesuit K, \heartsuit K\}$
Damit der Spieler am Ende des Spiels einen Drilling hat, muss eine Community–Card den Wert K in der Farbe Kreuz oder Karo haben: $1 \cdot \binom{2}{1} = 2$
Die restlichen vier Karten müssen von unterschiedlichen Wert sein. Sie können also aus den verbleibenden 12 Werten gezogen werden. Die zwei möglichen Straßenkombinationen $\{9, 10, J, Q, K\}$ und $\{10, J, Q, K, A\}$, die dabei entstehen können, müssen von dieser Anzahl jedoch abgezogen werden: $\binom{12}{4} - 2$.
Die Farbauswahl der vier Karten kann beliebig sein. Auszuschließen sind jedoch jene drei Möglichkeiten, die ein Flush ergeben würden. Ein Flush kann in den Farben $\spadesuit$, $\heartsuit$ oder in der Farbe des dritten König entstehen: $4^4 - 3$.
Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit muss nun die Anzahl der Möglichkeiten, die ein Three of a kind ergeben, durch die Anzahl aller Möglichkeiten, fünf

Karten aus den verbleibenden 50 Karten zu ziehen, dividiert werden:

$$P(\text{Pair } \spadesuit K, \heartsuit K \to \text{Three of a kind}) = \frac{2 \cdot \left(\binom{12}{4} - 2\right) \cdot (4^4 - 3)}{\binom{50}{5}} \approx 0,1177377$$

Ein Full House kann mit dieser Starthand auf zwei Arten entstehen. Es kann einerseits ein dritter König und zusätzlich ein Paar gezogen werden. Andererseits kann das Paar auch mit einem Drilling aus den Community-Cards zu einem Full House kombiniert werden.

Ein dritter König kann in zwei verschiedenen Farben gezogen werden: $1 \cdot \binom{2}{1}$. Das zusätzliche Paar kann 12 verschiedene Werte annehmen. Für die Farbauswahl wird eine 2-elementrige Stichprobe aus einer 4-elementrigen Menge entnommen: $12 \cdot \binom{4}{2}$. Die beiden übrigen Karten müssen von unterschiedlichem Wert sein. Sie können also aus den verbleibenden 11 Werten gezogen werden, wobei die Farbauswahl beliebig sein kann: $\binom{11}{2} \cdot 4^2$.

Ein Drilling in den Community-Cards kann 12 verschiedene Werte annehmen. Für die Farbauswahl wird eine 3-elementrige Stichprobe aus der 4-elementrigen Menge gezogen: $12 \cdot \binom{4}{3}$. Die beiden zusätzlichen Karten müssen wieder von unterschiedlichem Wert sein. Sie können also ebenfalls aus den verbleibenden 11 Werten gezogen werden, wobei die Farbauswahl auch hier beliebig sein kann: $\binom{11}{2} \cdot 4^2$.
Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit muss nun die Summe der Möglichkeiten aus beiden Fällen durch die Anzahl aller Möglichkeiten, fünf aus 50 Karten zu ziehen, dividiert werden:

$$\begin{aligned} P(\text{Pair } \spadesuit K, \heartsuit K \to \text{Full House}) &= \frac{\binom{2}{1} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{11}{2} \cdot 4^2 + 12 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{11}{2} \cdot 4^2}{\binom{50}{5}} \\ &\approx 0,079744756 \end{aligned}$$

Damit aus einem Paar ein Vierling entsteht, müssen beide noch im Kartenstapel verbliebenen Könige gezogen werden. Die drei zusätzlichen Karten können jeden beliebigen Wert und jede beliebige Farbe annehmen.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Starthand zu einem Vierling wird, kann also wie folgt berechnet werden:

$$P(\text{Pair } \spadesuit K, \heartsuit K \to \text{Four of a kind}) = \frac{1 \cdot 1 \cdot \binom{12}{3} \cdot 4^3}{\binom{50}{5}} \approx 0,006645396$$

Aus den eben berechneten Ergebnissen lässt sich nun die Wahrscheinlichkeit berechnen mit der die Starthand $\{\spadesuit K, \heartsuit K\}$ im Laufe des Spieles zu einem guten Blatt wird:

$$\begin{aligned} P(\text{Pair } \spadesuit K, \heartsuit K \rightarrow \text{gutes Blatt}) &= P(\text{Pair } \spadesuit K, \heartsuit K \rightarrow \text{Three of a kind}) + \\ &+ P(\text{Pair } \spadesuit K, \heartsuit K \rightarrow \text{Full House}) + \\ &+ P(\text{Pair } \spadesuit K, \heartsuit K \rightarrow \text{Four of a kind}) = \\ &= 0,1177377 + 0,0797448 + 0,0066454 = \\ &= 0,2041279 \end{aligned}$$

Die Starthand $\{\spadesuit K, \heartsuit K\}$ wird also mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 20,4% zu einem *Three of da kind*, *Full House* oder *Four of a kind*, die aufgrund ihrer hohen Wertigkeit als gute Blätter bezeichnet werden können. Im Vergleich dazu liegt die Wahrscheinlichkeit auf solch ein gutes Blatt vor dem Austeilen nur bei rund 7,6%.
Das Beispiel zeigt also deutlich, dass ein Paar als Starthand die Chancen auf ein gutes Blatt erheblich, in dem gewählten Beispiel sogar um rund 12,8%, vergrößert.
Darüberhinaus gibt es natürlich auch die Möglichkeit mit einem Paar als Starthand andere Kombinationen, wie zum Beispiel ein Straight oder ein Flush zu erhalten. Für derartige Kombinationen gibt es allerdings günstigere Starthände, die im folgenden noch genauer analysiert werden.

Hole Cards: zwei benachbarte Karten gleicher Farbe (*Suited Connectors*)

Ein Blick auf die Abbildung 5.5 zeigt, dass $A, K suited$ auf Platz fünf in der Rangliste liegt und somit zu den besten Starthänden überhaupt gehört.
Die Wahrscheinlichkeit diese Hand am Beginn zu erhalten ist sehr gering und kann folgendermaßen berechnet werden. Die Kombination ist in jeder der vier Farben möglich und die Reihenfolge muss beachtet werden:

$$\begin{aligned} P(AKs) &= P(\spadesuit A, \spadesuit K) + P(\heartsuit A, \heartsuit K) + P(\diamondsuit A, \diamondsuit K) + P(\clubsuit A, \clubsuit K) = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{51} + 2 \cdot \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{51} + 2 \cdot \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{51} + 2 \cdot \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{51} = \\ &= \frac{8}{2652} \approx 0,003016591 \end{aligned}$$

Die höchste aller Suited Connectors, also Starthände, die in ihrer Wertigkeit direkt nebeneinander liegen und die gleiche Farbe haben, gilt aus mehrern Gründen aus besonders gute Starthand. Zum einen beinhaltet sie mit dem Ass

und dem König die beiden höchsten Karten im Spiel und gewinnt, wenn am Ende keine Kombination gebildet werden kann. Wird das Ass vom Flop getroffen, so bildet es das höchste Paar und die Chancen auf den Sieg stehen nicht schlecht, solange kein anderer Spieler ebenfalls ein Ass erhalten hat.
Für einen Spieler mit einem Ass in der Starthand ist es also wichtig zu wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein anderer Spieler auch ein Ass erhalten hat.
Diese Wahrscheinlichkeit ist von der Anzahl der Spieler abhängig. Sie lässt sich mit der Gegenwahrscheinlichkeit, also der Wahrscheinlichkeit, dass kein weiteres Ass im Spiel ist, berechnen. Im Kartenstapel befinden sich noch 50 Karten von denen 3 Karten Asse sind.

$$\begin{aligned}
P(\text{mind. ein A bei 2 Spielern}) &= 1 - \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \approx 0{,}117551020 \\
P(\text{mind. ein A bei 4 Spielern}) &= 1 - \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{48} \cdot \frac{44}{47} \cdot \frac{43}{46} \cdot \frac{42}{45} \cdot \frac{41}{44} \cdot \frac{40}{43} \approx \\
&\approx 0{,}414285714 \\
P(\text{mind. ein A bei 10 Spielern}) &= 1 - \frac{47}{50} \cdot \frac{46}{49} \cdot \frac{45}{48} \cdot \frac{44}{47} \cdot \frac{43}{46} \cdot \frac{42}{45} \cdot \frac{41}{44} \cdot \frac{40}{43} \cdot \\
&\quad \frac{39}{42} \cdot \frac{38}{41} \cdot \frac{37}{40} \cdot \frac{36}{39} \cdot \frac{35}{38} \cdot \frac{34}{37} \cdot \frac{33}{36} \cdot \frac{32}{35} \cdot \frac{31}{34} \cdot \frac{30}{33} \approx \\
&\approx 0{,}74693877
\end{aligned}$$

Die Berechnungen zeigen, je mehr Spieler mitspielen, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich mindestens ein weiteres Ass in den Starthänden der anderen Spieler befindet.

Hole Cards: zwei benachbarte Karten

Die Wahrscheinlichkeit die Starthand A, K in beliebiger Farbe zu erhalten, ist erheblich größer, als die Wahrscheinlichkeit, mit A, Ks in das Spiel zu starten:

$$P(AK) = 2 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{32}{2652} \approx 0{,}012066365$$

Befinden sich die beiden höchsten benachbarten Karten in den Hole Cards eines Spielers sollte er sich für den Fall, dass sich am Ende des Spieles aus den sieben Karten keine Kombination bilden lässt und die höchste Karte gewinnt, wieder fragen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein anderer Spieler auch ein Ass erhalten hat.

Eine zweite durchaus interessante Frage, die sich ein Spieler mit der Starthand $\{A, K\}$ stellen sollte ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich mindestens ein Ass oder König in den Community-Cards befindet.
Auch diese Wahrscheinlichkeit lässt sich am einfachsten mit der Gegenwahrscheinlichkeit, also der Wahrscheinlichkeit, dass kein Ass oder König gezogen wird, berechnen. In den verbleibenden 50 Karten befinden sich jeweils drei Asse und drei Könige. Für die erste Karte gibt es also 44 günstige Fälle und 50 mögliche Fälle. Somit ergibt sich:

$$P(\text{mind. ein Ass oder König}) = 1 - \frac{44}{50} \cdot \frac{43}{49} \cdot \frac{42}{48} \cdot \frac{41}{47} \cdot \frac{40}{46} \approx 0,487432272$$

Mit der Starthand $\{A, K\}$ erzielt man also mit einer Wahrscheinlichkeit von fast 50% ein hohes Paar, was zwar noch keine Garantie zu gewinnen ist, aber keine schlechte Ausgangslage darstellt.

Zwei benachbarte Karten können außerdem gut zu einer Straße kombiniert werden. Die Wahrscheinlichkeit, zwei beliebige benachbarte Karten zu erhalten, kann wie folgt berechnet werden: Zu jedem Kartenwert gibt es zwei benachbarte Kartenwerte. Jeder dieser Werte kann in vier Farben gezogen werden, daher gibt es ingesamt acht Karten, die gezogen werden dürfen.

$$P(\text{Starthand zwei benachbarte Karten}) = \frac{52}{52} \cdot \frac{8}{51} \approx 0,1568627$$

Hole Cards: zwei Karten gleicher Farbe

Auch eine Starthand bestehend aus zwei Karten gleicher Farbe - also *suited* - zählt zu den besten Starthänden, denn die Chancen auf ein Flush stehen in diesem Fall gut. Als erste Karte kann dabei jede beliebige der 52 Karte gezogen werden. Die zweite Karte muss dieselbe Farbe besitzen wie die erste Karte. Von dieser Farbe sind, unabhängig davon welche Farbe gezogen wurde, noch 12 Karten vorhanden. Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Starthand zwei Karten gleicher Farbe}) = \frac{52}{52} \cdot \frac{12}{51} \approx 0,235294118$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit aus einer Starthand dieser Art ein Flush entsteht, soll an folgendem Beispiel gezeigt werden.

Starthand $\{\heartsuit J, \heartsuit 4\}$
Damit der Spieler am Ende des Spieles ein Flush hat, müssen sich unter den

Community-Cards drei oder vier Karten in der Farbe der Starthand befinden. Die Möglichkeit, dass alle fünf Karten in dieser Farbe gezogen werden wird hier ausgeschlossen, denn in diesem Fall hätten alle Spieler ein Flush und das wäre nicht von Vorteil.
Es gibt $\binom{11}{3} \cdot \binom{39}{2}$ Möglichkeiten, dass drei der fünf Karten dieselbe Farbe wie die Starthand haben, denn es stehen 11 Karten dieser Farbe zu Verfügung und die zusätzlichen zwei Karten können aus einer Menge von 39 Karten gezogen werden. Im zweiten Fall wird eine 4-elementrige Stichprobe aus den 11 verfügbaren Karten in der Farbe der Starthand gezogen und nur noch eine Karte aus den verbleibenden 39 Karten ausgewählt: $\binom{11}{4} \cdot \binom{39}{1}$. Für die Wahrscheinlichkeit, dass aus dieser Starthand ein Flush entsteht, ergibt sich also:

$$P(\{\heartsuit J, \heartsuit 4\} \to \text{Flush}) = \frac{\binom{11}{3} \cdot \binom{39}{2} + \binom{11}{4} \cdot \binom{39}{1}}{\binom{50}{5}} \approx 0,06378023$$

Die Wahrscheinlichkeit liegt hier also bei rund 6,4% und ist somit mehr als doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit ohne Kenntnis der ersten beiden Karten ein Flush zu erhalten (3,0%).

Die weiteren Wettrunden: Flop, Turn, River

Je mehr Community-Cards bekannt sind, desto genauer kann die Wahrscheinlichkeit vorausgesagt werden. Wie die Wahrscheinlichkeiten berechnet werden können, wenn der Flop bereits bekannt ist, soll gezeigt werden, indem das vorherige Beispiel nocheinmal aufgegriffen wird und angenommen wird, dass der Flop $\{\heartsuit K, \heartsuit 8, \spadesuit 2\}$ ist.

Turn oder River macht $\{\heartsuit J, \heartsuit 4, \heartsuit K, \heartsuit 8, \spadesuit 2\}$ zu einem Flush:
Diese Wahrscheinlichkeit kann am einfachsten mit der Gegenwahrscheinlichkeit berechnet werden. Um kein Flush zu erhalten, darf keine Karte in der Farbe $\heartsuit$ gezogen werden. Unter den verbleibenden 47 Karten befinden sich noch 9 $\heartsuit$-Karten, die also nicht gezogen werden dürfen. Für die Wahrscheinlichkeit, dass aus diesem Blatt ein Flush wird ergibt sich also:

$$\begin{aligned} P(\{\heartsuit J, \heartsuit 4, \heartsuit K, \heartsuit 8, \spadesuit 2\} \to \text{Flush}) &= 1 - P(\text{beide Karten keine } \heartsuit\text{-Karten}) = \\ &= 1 - \frac{38}{47} \cdot \frac{37}{46} \approx 0,349676226 \end{aligned}$$

Im Durschnitt wird also in rund 35% aller Fälle ein solches Kartenblatt durch den Turn oder River zu einem Flush. Man darf jedoch nicht außer acht lassen, dass falls sowohl Turn also auch River $\heartsuit$-Karten sind, die anderen Spieler nur eine $\heartsuit$-Karte benötigen um ebenfalls ein Flush zu haben.

Angenommen die Community-Cards sind: $\{\heartsuit K, \heartsuit 8, \spadesuit 2, \heartsuit 5, \heartsuit 9\}$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein anderer Spieler ebenfalls ein Flush besitzt lässt sich analog zum obigen Beispiel mit der Gegenwahrscheinlichkeit berechnen. Der Unterschied liegt darin, dass in diesem Fall zwei $\heartsuit$-Karten weniger im Spiel sind.

$$P(\text{der anderer Spieler erhält ein Flush}) = 1 - \frac{38}{45} \cdot \frac{37}{44} = 0,2\overline{89}$$

Diese Wahrscheinlichkeit wird klarerweise immer größer je mehr Spieler teilnehmen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein weitere Spieler ebenfalls ein Flush besitzt, ist mit fast 29% relativ hoch. Es gewinnt jedoch jener Spieler mit dem höheren Flush. Da der erste Spieler einen $\heartsuit J$ besitzt, stehen seine Chancen nicht schlecht. Doch wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Spieler ein höheres Flush besitzt?
Ein höheres Flush hätte der andere Spieler wenn er ein $\heartsuit A$ oder eine $\heartsuit Q$ besitzt. Die Wahrscheinlichkeit, lässt sich wieder mit der Gegenwahrscheinlichkeit berechnen.

$$\begin{aligned} P(\text{der andere Spieler hat höheres Flush}) &= 1 - P(\text{er hat kein } \heartsuit A \ / \ \heartsuit Q\ ) = \\ &= 1 - \frac{43}{45} \cdot \frac{42}{44} = 0,0\overline{87} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler mit der Starthand $\{\heartsuit J, \heartsuit 4\}$ gewinnt ist aufgrund des $\heartsuit J$ relativ groß. Hat man allerdings ein Flush mit niedrigeren Kartenwerten so sollte man die Wahrscheinlichkeit, dass ein weitere Spieler ebenfalls ein Flush besitzt nicht unterschätzen.

Obwohl in dieser Analyse nur ausgewählte Spielsituationen betrachtet wurden, wird schnell klar, dass es keine sichere Gewinnstrategie geben kann, weil die Karten zufällig verteilt werden. Am wichtigsten für einen Spieler ist es zu wissen, mit welcher Starthand unbedingt gewettet und mit welcher Starthand es empfehlenswert ist auszusteigen.

Kapitel 6

Black Jack

Black Jack, auch bekannt als „17 und 4“ oder „21“ gehört zu den beliebtesten und meistgespielten Wettspielen.
Der Ursprung des Spiel liegt im 17. Jahrhundert, als in Frankreich ein Spiel namens *Vingt et Un* (übersetzt *21*) gespielt wurde. Französische Immigranten brachten das Spiel schließlich nach Amerika, wo es anfangs *21* genannt wurde. Um das Spiel interessanter zu machen und mehr Spieler an die Tische zu locken, boten die Spielcasions einen Auszahlungsbonus von 10 zu 1 an, falls ein Spieler mit den ersten beiden Karten eine Kompination aus einem Pik Ass und einem Pik Buben beziehungsweise Kreuz Buben - also einem schwarzen Buben - erreicht hat. Diese Hand, und kurz darauf auch das Spiel selbst, wurde *Black Jack* genannt. Obwohl dieser spezielle Bonus mit steigender Beliebtheit des Spiels wieder abgeschafft wurde, blieb dem Spiel dieser Name bis heute. (vgl. [16],[17])
Heute gehört Black Jack zu den populärsten Casinospielen der Welt. Wie jedes Spiel kann es aber auch zu Hause und privaten Kreisen gespielt werden. In diesem Kapitel werden die Spielregeln kurz erklärt und anschließend werden einige Überlegungen, die ein Black Jack Spieler beachten sollte, erläutert. Es werden dabei die Regeln des Casinos Austrias berücksichtigt.

6.1 Die Spielregeln

Ziel des Spieles ist es, mit zwei oder mehr Karten näher an 21 zu kommen als der *Croupier* (auch *Dealer* oder *Kartengeber* genannt), ohne dabei den Wert 21 zu überschreiten.

Die Karten

In den Casinos Austria wird mit sechs Kartenpaketen zu je 52 Blatt, also mit insgesamt 312 Blatt, gespielt. Bei den Spielkarten 2 bis 10 entspricht die Zahl, die auf der jeweiligen Karte steht, dem Wert der Karte. Die Bildkarten „Bube“, „Dame“ und „König“ zählen 10 Punkte und das „Ass“ zählt wahlweise einen oder 11 Punkte.
Die höchste Kartenkombination, die alle anderen Kombinationen schlägt wird *Black Jack* genannt. Ein *Black Jack* besteht aus Ass und Bild oder Ass und 10 in den ersten beiden Karten (siehe Abbildung 6.1).

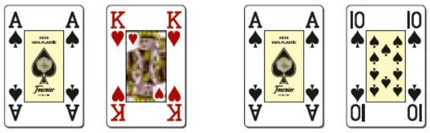


Abbildung 6.1: Black Jack, Quelle: [15]

Das Spiel

Black Jack wird in Casinos auf einem annähernd halbrunden Tisch gespielt, an dem bis zu sieben Spieler dem *Croupier*, der auch die *Bank* hält, gegenübersitzen (siehe Abbildung 6.2).

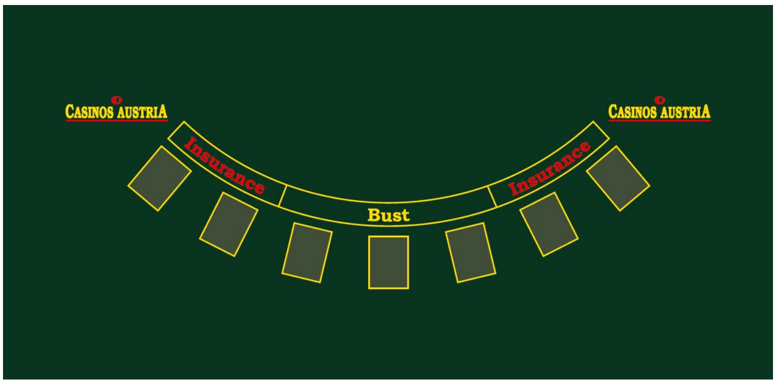


Abbildung 6.2: Black Jack Tisch, Quelle: [15]

Die im Halbkreis angeordneten Plätze der Spieler werden *Boxen* genannt, was jeden Spieler zu einem sogenannten *Boxeninhaber* macht. Jeder Spieler spielt einzeln gegen die *Bank* und hat somit im Grunde mit den anderen Spielern nichts zu tun.

Zu Beginn des Spieles plaziert jeder Spieler seinen Einsatz. Anschließend teilt der *Croupier* jedem Boxeninhaber und sich selbst eine offene Karte aus, danach erhält jeder Spieler – nicht aber der *Croupier* – eine weitere Karte, die ebenfalls offen aufgelegt wird. Links neben dem *Croupier* beginnend kann jeder Spieler nun nacheinander mit den Worten „*hit*“ oder „*Karte*“ solange weitere Karten verlangen, bis er glaubt nahe genug am Wert 21 zu sein. Wünscht ein Spieler keine weitere Karte, so kann er dies durch „*stay*“ oder „*keine Karte*“ signalisieren. Wer jedoch mit seinen Karten den Wert 21 überschreitet - sich *überkauft* - verliert sofort und sowohl der Einsatz als auch die Karten werden vom *Croupier* eingezogen. Sobald alle *Boxeninhaber* ihre Spielentscheidung getroffen haben, also keine weitere Karte mehr verlangt wird, ist der *Croupier* an der Reihe, zieht eine zweite Karte und deckt diese auf. Hat er einen Kartenwert von 16 oder weniger, muss er eine weitere Karte ziehen. Liegt er darüber, so darf er keine weitere Karte mehr aufdecken. Der *Croupier* muss ein Ass immer mit 11 Punkten bewerten, es sei denn, er würde den Wert 21 überschreiten, nur dann zählt das Ass einen Punkt. Überschreitet der *Croupier* den Wert 21, haben alle im Spiel verbliebenen Teilnehmer automatisch gewonnen. Haben ein Spieler und der *Croupier* Punktegleichstand, so gilt dies als Unentschieden („*Stand–Off*“) und der *Boxeninhaber* behält seinen Einsatz. Diejenigen Spieler, deren Karten also die Punktezahl von 21 nicht überschritten haben und einen höheren Wert als jene des *Croupiers* erzielt haben, gewinnen die Höhe ihres Einsatzes (1:1)(vgl. [15]).
Hat ein *Boxeninhaber* einen *Black Jack* – also erhält er zu Beginn ein Ass und anschließend eine Karte mit den Wert 10 (oder umgekehrt) – und bleibt der Kartenwert des *Croupiers* unter 21 oder überschreitet er diesen Wert, so hat der Spieler gewonnen und erhält das Eineinhalbfache seines Einsatzes (vgl. [15]). In der Abbildung 6.3 werden die eben beschriebenen Fälle, also wann ein Spieler gewinnt (1E oder 1,5E), verliert (-1E) oder ein Remis erreicht (0E) übersichtlich dargestellt.

Im Laufe eines Spieles haben die Boxeninhaber verschiedene Möglichkeiten, sich abzusichern oder die Gewinnchance zu erhöhen. Diese werden im Folgenden erläutert.

Versicherung

Zieht der *Croupier* als erste Karten ein Ass, kann sich der Spieler gegen einen möglichen *Black Jack* versichern, indem er einen Einsatz auf das Feld *Insurance* (siehe Abbildung 6.2) setzt. Erhält der *Croupier* tatsächlich einen *Black Jack*, bekommt der Spieler die Versicherung im Verhältnis 2:1 ausbezahlt. Ansonsten wird der Einsatz auf dem Feld *Insurance* eingezogen (vgl. [15]).

Spieler / Bank	< 17	17	18	19	20	21	> 21	BJ	21 (7+7+7)
17	-1	0	1	1	1	1	-1	1,5	1,5
18	-1	-1	0	1	1	1	-1	1,5	1,5
19	-1	-1	-1	0	1	1	-1	1,5	1,5
20	-1	-1	-1	-1	0	1	-1	1,5	1,5
21	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1	1,5	1,5
> 21	1	1	1	1	1	1	-1	1,5	1,5
Black Jack	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	1,5

Abbildung 6.3: Gewinnaussichten, Quelle: [12]

Siebener-Drilling

Erhält ein Spieler drei Siebener, also einen sogenannten *Siebener-Drilling* (*Triple Seven*), bekommt er sofort das Eineinhalbfache seines Einsatzes ausbezahlt – unabhängig davon, welche Karten der *Croupier* hat. Nach der Auszahlung ist das Spiel für die jeweilige Box beendet (vgl. [15]).

Teilen

Sind die ersten beiden Karten eines Spielers gleichwertig, so hat er die Möglichkeit des *Teilens* (*Splitting*) um seine Gewinnchancen zu erhöhen. Der Boxeninhaber spielt nun mit „geteilter Hand“, das heißt mit zwei getrennten Einsätzen weiter. Für jede geteilte Hand muss ein Einsatz in der Höhe des ersten Einsatzes gesetzt werden. *Teilt* ein Spieler zwei Asse, so erhält er auf jedes Ass nur noch eine weitere Karte. In diesem Fall gelten Ass und Bild bzw. Ass und 10 nicht als *Black Jack*, da die Kombination nicht mit den ersten beiden Karten erreicht wurde. Handelt es sich nicht um zwei geteilte Asse, bekommt der Spieler beliebig viele Karten für das weitere Spiel (vgl.[15]).

Verdoppeln

Ein Spieler kann nach dem Erhalt der ersten beiden Karten seinen Einsatz verdoppeln. Danach erhält er jedoch nur noch eine weitere Karte (vgl.[15]).

6.2 Mathematische Analyse

Black Jack gilt als einigermaßen ausgeglichenes Spiel, da es für Spieler und Bank annähernd symmetrisch ist und selbst nicht symmetrische Teile des Spieles scheinbar einen Vorteil für den Spieler darstellen, denn die *Bank* muss nach einer festgelegten Strategie weitere Karten ziehen, darf weder teilen noch verdoppeln und der Spieler kennt beim Ziehen weiterer Karten die erste Karte der Bank. Der einzige Vorteil der Bank liegt darin, dass sie auf jeden Fall gewinnt, wenn der Spieler mit seinen Karten den Wert 21 überschreitet, auch dann, wenn sie selbst die Grenze überschreitet. (vgl. [2], S. 83)
Angesichts dieser Tatsache, ist es ratsam, eine eher defensive Spielweise zu verfolgen und nicht nur die eigenen Karten zu beachten, sondern sich auch an der ersten Karte der Bank zu orientieren, da diese wichtige Informationen über das voraussichtliche Abschneiden der Bank enthält. (vgl. [2], S. 83)
In diesem Kapitel werden daher zunächst die Spielresultate der Bank analysiert und anschließend wird versucht mit Hilfe der erlangten Resultaten eine gewinnbringende Strategie für den Spieler aufzustellen.

6.2.1 Strategie der Bank

Da die Bank bei einem Kartenwert von 16 oder weniger eine weitere Karte ziehen *muss* und bei einem Kartenwert über 16 keine weitere Karte ziehen *darf*, kann die erreichte Punkteanzahl der Bank nur zwischen 17 und 26 liegen.
Bei Kartenwerten von mehr als 21, hat sich die Bank *überkauft*, daher können die Werte von 22 bis 26 zu einer Kategorie zusammengefasst werden. Bei einem Punktewert von 21 muss zwischen einem Black Jack und anderen Kartenkombination, die zu diesem Wert führen, unteschieden werden. Somit ergeben sich für die Bank sieben mögliche Punktestände am Spielende: 17, 18, 19, 20, 21, Black Jack und > 21.
Für jeden dieser Punktestände, kann nun rechnernisch ermitteln werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Fall eintritt. Es kann dabei davon ausgegangen werden, dass die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Kartenwerte immer konstant gleich sind. Diese Annahme führt zwar nicht zu einem exakten Ergebnis, da dies im Normalfall nur für unendlich viele Karten gilt, doch aufgrund der großen Menge an Karten und dem Ziel, eine im Durchschnitt optimale Strategie in guter Näherung zu entwickeln, kann dies vernachlässigt werden.(vgl.[2], S. 83)
Das Ziehen einer Karte wird also in der weiteren Analyse als unabhängiger Versuch betrachtet und es ergibt sich für das Laplace-Experiment der Ergebnisraum

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, B, D, K, A\}\,.$$

Die Ereignisse $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}$ und $\{9\}$ treten jeweils mit einer gleichen Wahrscheinlichkeit $P(2) = P(3) = ... = P(9)$ von $\frac{1}{13}$ auf. Da es vier verschiedene Karten mit dem Wert 10 gibt, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine zehnwertige Karte gezogen wird ($P(10 \cup B \cup D \cup K)$[1]) gemäß der Definition der Laplace-Wahrscheinlichkeitsverteilung $\frac{4}{13}$.

Aufgrund der Vielzahl von Möglichkeiten der Bank, die verschiedenen Punktestände zu erlangen, werden die Berechnungen mit dem Computer durchgeführt. Es kann nämlich beispielsweise passieren, dass die Bank zwölf Karten ziehen muss - nämlich 6 Asse, eine Sechs und wieder 5 Asse nacheinander. (vgl.[2], S. 83)

Da ein Black Jack nur auf zwei Wege erlangt werden kann, wird diese Berechnung zur Veranschaulichung durchgeführt.

$$\begin{aligned} P(\text{Black Jack}) &= P((10w \cap A) \cup (A \cap 10w)) = \\ &= P(10w \cap A) + P(A \cap 10w) = \\ &= \frac{4}{13} \cdot \frac{1}{13} + \frac{1}{13} \cdot \frac{4}{13} = \\ &= \frac{4}{169} + \frac{4}{169} = \frac{8}{169} \approx 0,0473 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, am Beginn eine Karte der Wertigkeit 10 und ein Ass beziehungsweise ein Ass und eine zehnwertige Karte zu erhalten, beträgt jeweils $\frac{4}{169}$.

Ein Black Jack entsteht, wenn entweder der eine oder der andere Fall eintritt. Die Wahrscheinlichkeiten für die sieben verschiedenen möglichen Punktestände der Bank, die mittelns Computer ermittelt werden können, werden in der Abbildung 6.4 dargestellt.

Was dabei besonders auffällt, ist das realtiv hohe Risiko der Bank, sich zu überkaufen, denn das passiert im Durchschnitt mehr als jedes vierte Mal. Verfolgt ein Spieler die gleiche Strategie wie die Bank, zieht er also nur solange eine weitere Karte, bis er mindestens 17 Punkte erreicht hat und verzichtet darauf zu verdoppeln oder zu teilen, dann gilt für sein Spiel die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung. Wäre das Spiel für Bank und Spieler tatsächlich symmetrisch, ergäbe sich für die Gewinnerwartung des Spielers der Wert 0. Aufgrund der herrschenden Unsymmetrien ist dies jedoch nicht der Fall, was die folgenden Berechnungen zeigen werden. (vgl. [2], S. 84)

[1] im Folgenden wird der Kartenwert 10 mit „10w“ abgekürzt

Bank-Ergebnis	Wahrscheinlichkeit
17	0,1451
18	0,1395
19	0,1335
20	0,1803
21	0,0727
Black Jack	0,0473
> 21	0,2816

Abbildung 6.4: Mögliche Punktestände der Bank, Quelle:[2], S. 83

Tritt der Fall ein, dass ein Spieler ein Black Jack hat (Ereignis E_1) und die Bank keinen Black Jack hat (Ereignis E_2), so erhält der Spieler das Eineinhalbfache seines Einsatzes, was einen Gewinn von $0,5E$ entspricht. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fall eintritt, lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2) &= P(E_1) \cdot P(E_2) = \\ &= 0,0473 \cdot (1 - 0,0473) = \\ &\approx 0,0451 \end{aligned}$$

Tritt der Fall ein, dass sich sowohl der Spieler (Ereignis E_3) also auch die Bank (Ereignis E_4) überkauft haben, verliert der Spieler seinen Einsatz sofort $(-1,0E)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fall eintritt, lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(E_3 \cap E_4) &= P(E_3) \cdot P(E_4) = \\ &= 0,2816 \cdot 0,2816 = \\ &\approx 0,0793 \end{aligned}$$

Die Gewinnerwartung des Spielers ergibt gemäß Definition des Erwartungswertes

$$E(X) = 0,5 \cdot 0,0451 + (-1) \cdot 0,0793 \approx -0,0568.$$

Verfolgt ein Spieler also die vorgeschriebene Strategie der Bank, so muss er mit einem durchschnittlichen Verlust von $5,68\%$ seines Einsatzes rechnen, was bestätigt, dass dies nicht zu empfehlen ist.

Die eben berechneten Werte zu der Gewinnerwartung, mit der bei einem Spiel mit der Strategie der Bank zu rechnen ist, werden in der Abbildung 6.5 übersichtlich dargestellt.

	Gewinn/Verlust	Wahrscheinlichkeit	Erwartung
Spieler hat BJ, Bank hat keinen	0,5	0,0451	0,0225
Spieler und Bank haben sich überkauft	-1,0	0,0793	-0,0793

Abbildung 6.5: Gewinnerwartung, (vgl.:[2], S. 84)

Ein Spieler sollte also die Entscheidung, ob er eine weitere Karte ziehen soll oder nicht, nach anderen Kriterien treffen. Da er zum Zeitpunkt dieser Spielentscheidung bereits die erste Karte der Bank kennt, empfielt es sich, diese zu berücksichtigen und die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Bank, bedingt zu ihrer ersten Karte zu kennen.
Bei diesen Wahrscheinlichkeiten handelt es sich um bedingte Wahrscheinlichkeiten, denn die Wahrscheinlichkeit, dass die Bank ihr Spiel beispielsweise mit der Summe 18 beendet, hängt von der ersten Karte, die sie erhalten hat, ab. Wenn sie zum Beispiel als erste Karte eine 8 zieht, ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie das Spiel mit einer 18 beenden wird, relativ groß, da sie dies am schnellsten Weg durch eine zehnwertige Karte, die mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{13}$ gezogen wird, erreicht. Hat sie hingegen als erste Karte eine 10 erhalten, ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie das Spiel mit einer Punktesumme von 18 beenden wird kleiner, als die für eine Summe von 20, da die Wahrscheinlichkeit für eine Karte mit den Punktewert 10 größer ist, als für jede andere Karte. (vgl.[12], S. 70)
Um diese bedingten Wahrscheinlichkeiten bestimmen zu können, ist eine Übersicht über die verschiedenen möglichen Spiele der Bank notwendig. Wie außerordentlich groß diese Vielfalt der Spielmöglichkeiten ist soll der folgende „einfache“ Fall verdeutlichen (vgl. [12], S. 72):
Angenommen die Bank hat als erste Karte eine 9 bekommen. Als zweite Karte zieht die Bank ...

(i) ... mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{13}$ ein Ass. Sie hätte dann eine Punktesumme von 20 erreicht und darf keine weitere Karte mehr ziehen.

(ii) ... mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{13}$ eine 10, einen Buben, eine Dame oder einen König und würde damit eine endgültige Punktesumme von 19 erreichen.

(iii) ... mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{13}$ eine 8 oder eine 9 und ihr Spiel wäre mit einer Punktesumme von 17 oder 18 ebensfalls beendet.

(iv) ... mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{13}$ eine 2, 3, ... oder 7, erreicht so eine Punktesumme, die kleiner als 17 ist und muss eine dritte Karte ziehen, was wiederrum eine Vielzahl von Möglichkeiten ergibt.
Zieht sie beispielsweise als zweite Karte eine 2, so ist das Spiel bei einer 6, 7 oder 8 als dritte Karte mit einer Punktesumme von 17, 18 oder 19 beendet. Bei einem As als dritte Karte (Punktesumme 12) hingegen muss die Bank eine vierte Karte ziehen und es ergeben sich wiederrum mehrere Möglichkeiten die verschiedenen Punktesummen zu erreichen.

Auf diese Weise müssten sämtliche Möglichkeiten durchgespielt werden und zwar nicht nur für den Fall, dass als erste Karte eine 9 gezogen wurde. Es können dabei recht komplizierte Kominationen auftreten, wie beispielsweise, dass die Bank folgende Karten in dieser Reihenfolge zieht:
2 2 2 2 2 As As As 6.
In diesem Fall liegen für die Bank immerhin 10 Karten auf dem Tisch, was zwar höchst ungewöhnlich aber möglich ist. Diese ausgefallene Möglichkeit macht deutlich, welche Schwierigkeiten bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten überwunden werden müssen. (vgl. [12], S. 73)
Angesichts der immensen Anzahl von Möglichkeiten empfiehlt es sich die Berechnungen der bedingten Wahrscheinlichkeiten mit dem Computer durchzuführen. Da es sich um Zustandsänderungen mit konstanten Wahrscheinlichkeiten handelt, können die exakten Werte mit *Markoff-Ketten* berechnet werden.

Dabei ist zuerst die *Übergangsmatrix P* zu bestimmen. Die Einträge beschreiben dabei die Wahrscheinlichkeit mit der bei einer Punktesumme von $2, 3, 4, ..., 21, \text{Black Jack}, > 21$ durch das Ziehen einer weiteren Karte die Punktesumme $2, 3, 4, ..., 21, \text{Black Jack}, > 21$ erreicht wird. Im folgenden wird anhand von ausgewählten Einträgen erklärt, wie diese Matrix bestimmt werden kann.
Bei einem Punktestand von 2 ist es unmöglich durch das Ziehen einer weiteren Karten den Punktestand von 2 zu erreichen, daher ist der Eintrag $p_{1,1} = 0$. Bei einem Punktestand von 3 kann durch das Ziehen einer Karte mit dem Wert 5 eine Punktesumme von 9 erreicht werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $\frac{1}{13}$, daher ist $p_{2,8} = 1$. Bei den Punktesummen über 10 muss unterschieden werden, ob die Punktesumme mit oder ohne einem Ass erreicht wurde. Bei einer

Punktesumme von 4 können 14 Punkte (ohne Ass) erreicht werden, indem eine zehnwertige Karte gezogen wird. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $\frac{4}{13}$, daher ist $p_{3,17} = 4$. Mit einem Ass kann die Punktesumme von 14 nicht erreicht werden, daher ist $p_{3,18} = 0$. Die Bank darf ab einer erreichten Summe von 17 Punkten keine Karte mehr ziehen und erreicht somit einen *absorbierenden Zustand*.

$$\mathbf{P} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix}
0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&4&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&0&4&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&1&0&1&0&1&0&4&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&0&1&0&1&0&1&0&4&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&4&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&4&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&4&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&4&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&4&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&4&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&4&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&4&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&4\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&4&0&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&5\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&4&0&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&6\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&4&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0&7\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&4&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&8\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&4&0&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13
\end{pmatrix}$$

Mit Hilfe dieser Übergangsmatrix und dem Satz 2.21 können die Wahrscheinlichkeiten der Bank für das Erreichen der verschiedenen Punktesummen in Abhängigkeit von der ersten Karte berechnet werden. Diese Ergebisse werden in der Abbildung 6.6 übersichtlich dargestellt.

Diese Wahrscheinlichkeiten sind zum Teil auffällig groß. Hat die Bank beispielsweise als erste Karte ein As erhalten, so zeigen die Berechnungen, dass sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 30,77% ein Back Jack ziehen wird, was für den Spieler bedeutet, dass ihm lediglich ein Back Jack in seinen eigenen Karten dabei helfen würde, seinen Einsatz nicht zu verlieren.
Ein wenig entspannter kann ein Spieler seine Spielentscheidungen treffen, wenn die Bank als erste Karte eine 6 gezogen hat, denn bei dieser ersten Karte ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Bank überkauft am größten und liegt bei beachtlichen 42,32%.

Punktesumme 1.Karte	17	18	19	20	21	> 21	Black Jack
Ass	13,08	13,08	13,08	13,08	5,39	11,53	30,77
2	13,98	13,49	12,97	12,40	11,80	35,36	–
3	13,50	13,05	12,56	12,03	11,47	37,39	–
4	13,05	12,59	12,14	11,65	11,12	39,45	–
5	12,23	12,23	11,77	11,31	10,82	41,64	–
6	16,54	10,63	10,63	10,17	9,72	42,32	–
7	36,86	13,78	7,86	7,86	7,41	26,23	–
8	12,86	35,93	12,86	6,94	6,94	24,47	–
9	12,00	12,00	35,08	12,00	6,08	22,84	–
10,B,D,K	11,14	11,14	11,14	34,22	3,24	21,21	7,69

Abbildung 6.6: Bedingte Wahrscheinlichkeiten der Bank (in Prozent), Quelle: [12], S. 75

An dieser Stelle könnte die Frage aufkommen, ob die Situation in der Wirklichkeit genauso aussieht. Um dieser Frage nachzugehen wäre es möglich mit Hilfe von Computerprogrammen eine sogenannte *Monte Carlo Simulation* durchzuführen.

Mit den exakt berechneten Wahrscheinlichkeiten aus Abbildung 6.6 können nun die Gewinn- und Verlustchancen verglichen werden. Dieser Vergleich soll zeigen, wie die jeweilige Situation des Spielers insgesamt zu bewerten ist.(vgl.[12], S. 78)
Bei einer positiven Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit, kann ein Spieler erwarten, *[...] bei wiederholter Konstellation dieser Art im Durchschnitt zu gewinnen([12], S. 78).*

Angenommen X beschreibt das mögliche Bankergbnis in Abhängigkeit einer ersten Karte a ($X \geq 17$) und Y steht für das Ergebnis des Spielers ($X \leq 21$), so kann die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler gewinnt, berechnet werden durch

$$P_G = P(X_a < Y) + P(X_a > 21).$$

Der Spieler verliert seinen Einsatz mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$P_V = P(X_a > Y)$$

und beendet das Spiel mit einem Stand-Off (Unentschieden) mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$P_U = P(X_a = Y).$$

Gewinnt der Spieler, so kann er dies auf zwei Arten schaffen. Er kann einerseits mit einem Black Jack das 1.5-fache seines Einsatzes gewinnen oder andererseits die Bank lediglich in der Punktesumme übertreffen und seinen einfachen Einsatz gewinnen. Verliert der Spieler bedeutet das den Verlust seines Einsatzes. Bei einem Unentschieden erhält der Spieler seinen Einsatz zurück, hat also weder einen Gewinn noch einen Verlust gemacht.
Formal ergibt das folgende Fälle:

$$\begin{aligned} \text{Gewinn: } & x_1 = 1,5 \vee x_1 = 1 \\ \text{Verlust: } & x_2 = -1 \\ \text{Unentschieden: } & x_3 = 0 \end{aligned}$$

Die Gewinnerwartung kann mit der Formel

$$E(Y) = x_1 \cdot P_G + x_2 \cdot P_U + x_3 \cdot P_V$$

berechnet werden.

Hat die Bank also beispielsweise als erste Karte eine 9 und der Spieler beendet sein Spiel mit einer Punktesumme von achtzehn, so kann man zuerst die Wahrscheinlichkeiten für einen Gewinn, ein Unentschieden und für einen Verlust berechnet werden.

$$\begin{aligned} P_G &= P(X_9 < 18) + P(X_9 > 21) = \\ &= P(X_9 = 17) + P(X_9 > 21) = \\ &= \quad 0,1200 \quad + \quad 0,2284 \quad = 0,3484 \\ P_V &= P(X_9 > 18) = \\ &= P(X_9 = 19) + P(X_9 = 20) + P(X_9 = 21) = \\ &= \quad 0,3508 \quad + \quad 0,1200 \quad + \quad 0,0608 \quad = 0,5316 \\ P_U &= P(X_9 = 18) = \\ &= \quad 0,1200 \end{aligned}$$

Für die Gewinnerwartung folgt in diesem Fall mit $x_1 = 1$, da kein Black Jack erreicht wird:

$$E(Y) = 1 \cdot 0,3484 + (-1) \cdot 0,5316 + 0 \cdot 0,1200 = -0,1832.$$

Diese Gewinnerwartung ist negativ, also kann der Spieler erwarten, dass er bei Spielen mit derselben Ausgangslage auf lange Sicht gesehen im Durchschnitt etwa 18,32% seines Einsatzes verlieren wird.
Beendet der Spieler sein Spiel mit einer Punktesumme von 21 (kein Black Jack), während die Bank als erste Karte eine 9 gezogen hat, so verbessern sich seine Gewinnchancen wesentlich, denn er kann dieses Spiel auf keinen Fall verlieren.

$$\begin{aligned}
P_G &= P(X_9 < 21) + P(X_9 > 21) = \\
&= P(X_9 = 17) + P(X_9 = 18) + P(X_9 = 19) + P(X_9 = 20) + P(X_9 > 21) = \\
&= \quad 0,1200 \quad + \quad 0,1200 \quad + \quad 0,3508 \quad + \quad 0,1200 \quad + \quad 0,2284 \quad = \\
&= \quad 0,9392 \\
P_U &= P(X_9 = 21) = \\
&= \quad 0,0608
\end{aligned}$$

Für die Gewinnerwartung folgt in diesem Fall wieder mit $x_1 = 1$:

$$E(Y) = 1 \cdot 0,9392 + 0 \cdot 0,0608 = 0,9392.$$

Aufgrund des positiven Vorzeiches dieser Gewinnerwartung, kann der Spieler also davon ausgehen, dass er bei wiederholter Konstellation dieser Art von seinem Einsatz im Durchschnitt 93,92% gewinnnen wird.
In Abbildung 6.7 werden nun alle Differenzen zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten des Spielers übersichtlich aufgelistet. Zur besseren Übersicht sind dabei die positiven Differenzen grau hinterlegt, während der Hintergrund der negativen Differenzen weiß bleibt.

Auffällig ist hierbei, dass ein Spieler mit einer Punktesumme von 17 oder weniger auf lange Sicht kaum Gewinne erzielen wird. Werden allerdings 20 beziehungsweise 21 Punkte erreicht, so kann er auf Dauer mit einem Gewinn rechnen. Abgesehen von den positiven und negativen Vorzeichen beziehungsweise der unterschiedlichen Farbhinterlegung lässt sich außerdem erkennen, dass nur drei Differenzen absolut klein sind. Dies ist bei einer erreichten Punktesumme von 17 und einer 5 oder 6 als erste Karte der Bank beziehungsweise bei einer erreichten Punktesumme von 19 und einer zehnwertigen ersten Karte der Bank der Fall. (vgl. [12], S. 81)
Es stellt sich jedoch immernoch die Frage, nach welchen Kriterien ein Spieler beim Ziehen von weiteren Karten eine optimale Spielentscheidung treffen kann. Dieser Frage wird im folgenden Abschnitt nachgegangen.

Punktesumme 1.Karte	< 17	17	18	19	20	21
Ass	-79,95	-63,87	-37,71	-11,55	14,61	33,07
2	-29,28	-15,30	12,17	38,63	64,00	88,20
3	-25,22	-11,72	14,83	40,44	65,03	88,53
4	-21,10	-8,05	17,59	42,32	66,11	88,88
5	-16,72	**-4,49**	19,97	43,97	67,05	89,18
6	-15,37	**1,17**	28,34	49,60	70,40	90,28
7	-47,54	-10,68	39,96	61,60	77,32	92,59
8	-51,06	-38,20	10,59	59,38	79,18	93,06
9	-54,32	-42,32	-18,32	28,76	75,84	93,92
10,B,D,K	-57,57	-46,43	-24,15	**-1,87**	43,49	81,17

Abbildung 6.7: Differenz zwischen bedingter Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit für den Spieler (in Prozent), Quelle: [12], S. 81

6.2.2 Strategie des Spielers

Ein Spieler verfolgt die optimale Spielstrategie, wenn er durch das Ziehen einer weiteren Karte seine Gewinnwahrscheinlichkeiten erhöht und er darauf verzichtet eine weitere Karte zu ziehen. Diese Gewinnwahrscheinlichkeit hängt dabei wesentlich von der bereits erreichten Punktesumme und in den meisten Fällen auch von der ersten Karte der Bank ab.
Hat ein Spieler zum Beispiel eine Punktesumme von 11 erreicht, so ist es offensichtlich, dass er - unabhängig von der ersten Karte der Bank - seine Situation nur verbessern kann, wenn er eine weitere Karte zieht, denn er kann sich auf keinen Fall überkaufen und wird mit einer weiteren Karte seine Gewinnwahrscheinlichkeit auf jeden Fall erhöhen. (vgl. [12], S. 81)
Etwas komplexer und schwieriger zu überblicken ist die Situation aber, wenn der Spieler beispielsweise 16 Punkte erreicht hat und vor der Entscheidung steht, eine weitere Karte zu ziehen oder nicht. Mit einer Karte, deren Wert sechs oder größer ist, würde sich der Spieler überkaufen und sofort verlieren. Die Wahrscheinlichkeit hierfür - also eine 6, 7, 8, 9, 10, B, D, K zu ziehen - beträgt $\frac{8}{13}$. Als nächste Karte wäre eine Karte vom Wert 5 oder kleiner günstig, die mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{13}$ gezogen wird. Es erweckt also den

Anschein, also ob es die optimale Spielentscheidung wäre, keine weitere Karte mehr zu ziehen, da die Wahrscheinlichkeit sich mit der nächsten Karte zu überkaufen größer ist als jene im Spiel zu bleiben und seine Chancen zu erhöhen, doch ist das wirklich der Fall?
Ein Blick auf die Abbildung 6.7 zeigt deutlich, dass eine Punktesumme von unter 17 im Durchschnitt auf lange Sicht gesehen auf deutliche Verluste hinweist. Am wenigsten schlecht sind dabei die Aussichten, wenn die Bank als erste Karte eine 5 oder eine 6 erhält.
Angenommen, die Bank hat als erste Karte eine 6 gezogen. Die Wahrscheinlichkeiten, mit der die Bank die unterschiedlichen Punktesummen erreicht, wurden bereits in Abbildung 6.6 dargestellt. Zu besseren Übersicht wird in Abbildung 6.8 der für die weiteren Überlegungen relevante Teil davon nochmals wiedergegeben.

Punktesumme 1.Karte	17	18	19	20	21	> 21	Black Jack
6	16,54	10,63	10,63	10,17	9,72	42,32	–

Abbildung 6.8: Bedingte Wahrscheinlichkeiten der Bank (in Prozent), wenn als erste Karte eine 6 gezogen wurde, Quelle: [12], S. 75

Wie bereits erwähnt, erreicht der Spieler bei einer bisherigen Punktesumme von 16 mit einer zusätzlichen Karte eine Punktesumme zwischen 17 und 21 mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{13}$ und überkauft sich mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{8}{13}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler in dieser Ausgangslage das Spiel gewinnen oder verlieren wird, lässt sich folgendermaßen bestimmen.
Der Spieler gewinnt, ...

(i) wenn er 17 Punkte erreicht und die Bank sich überkauft:
$E_1 = \{Y_{16} = 17 \cap X_6 > 21\}$

$$\begin{aligned} P_G = P(E_1) &= \\ &= \frac{1}{13} \cdot 0,4232 = \\ &= 0,032553846 \end{aligned}$$

Dieser Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 3,26% ein.

(ii) wenn er 18 Punkte erreicht und die Bank nur 17 Punkte erreicht oder sich überkauft:

$E_2 = \{Y_{16} = 18 \cap X_6 = 17\}$
$E_3 = \{Y_{16} = 18 \cap X_6 > 21\}$

$$\begin{aligned} P_G &= P(E_2 \cup E_3) = \\ &= \frac{1}{13} \cdot 0,1654 + \frac{1}{13} \cdot 0,4232 = \\ &= 0,045276923 \end{aligned}$$

Dieser Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,53% ein.

(iii) wenn er 19 Punkte erreicht und die Bank nur 17 oder 18 Punkte erreicht oder sich überkauft:
$E_4 = \{Y_{16} = 19 \cap X_6 = 17\}$
$E_5 = \{Y_{16} = 19 \cap X_6 = 18\}$
$E_6 = \{Y_{16} = 19 \cap X_6 > 21\}$

$$\begin{aligned} P_G &= P(E_4 \cup E_5 \cup E_6) = \\ &= \frac{1}{13} \cdot 0,1654 + \frac{1}{13} \cdot 0,1063 + \frac{1}{13} \cdot 0,4232 = \\ &= 0,053453846 \end{aligned}$$

Dieser Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,35% ein.

(iv) wenn er 20 Punkte erreicht und die Bank nur 17, 18 oder 19 Punkte erreicht oder sich überkauft:
$E_7 = \{Y_{16} = 20 \cap X_6 = 17\}$
$E_8 = \{Y_{16} = 20 \cap X_6 = 18\}$
$E_9 = \{Y_{16} = 20 \cap X_6 = 19\}$
$E_{10} = \{Y_{16} = 20 \cap X_6 > 21\}$

$$\begin{aligned} P_G &= P(E_7 \cup E_8 \cup E_9 \cup E_{10}) = \\ &= \frac{1}{13} \cdot 0,1654 + \frac{1}{13} \cdot 0,1063 + \frac{1}{13} \cdot 0,1063 + \frac{1}{13} \cdot 0,4232 = \\ &= 0,061630769 \end{aligned}$$

Dieser Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 6,16% ein.

(v) wenn er 21 Punkte erreicht und die Bank nur 17, 18, 19 oder 20 Punkte erreicht oder sich überkauft:
$E_{11} = \{Y_{16} = 21 \cap X_6 = 17\}$
$E_{12} = \{Y_{16} = 21 \cap X_6 = 18\}$
$E_{13} = \{Y_{16} = 21 \cap X_6 = 19\}$
$E_{14} = \{Y_{16} = 21 \cap X_6 = 20\}$
$E_{15} = \{Y_{16} = 21 \cap X_6 > 21\}$

$$
\begin{aligned}
P_G &= P(E_{11} \cup E_{12} \cup E_{13} \cup E_{14} \cup E_{15}) = \\
&= \frac{1}{13} \cdot 0,1654 + \frac{1}{13} \cdot 0,1063 + \frac{1}{13} \cdot 0,1063 + \frac{1}{13} \cdot 0,1017 + \frac{1}{13} \cdot 0,4232 = \\
&= 0,069869231
\end{aligned}
$$

Dieser Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 6,99% ein.

Der Spieler wird also mit einer Wahrscheinlichkeit von 26,29% gewinnen, wenn er eine weitere Karte zieht.

Analog kann man die Fälle, in denen der Spieler verliert und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten auflisten.

Der Spieler verliert, ...

(i) wenn er sich überkauft.
Dieser Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 61,54% ein.

(ii) wenn er 17 Punkte erreicht, die Bank aber das Spiel mit einer Punktesumme zwischen 18 und 21 Punkten beendet:
$E_1 = \{Y_{16} = 17 \cap X_6 = 18\}$
$E_2 = \{Y_{16} = 17 \cap X_6 = 19\}$
$E_3 = \{Y_{16} = 17 \cap X_6 = 20\}$
$E_4 = \{Y_{16} = 17 \cap X_6 = 21\}$

$$
\begin{aligned}
P_G &= P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = \\
&= \frac{1}{13} \cdot 0,1063 + \frac{1}{13} \cdot 0,1063 + \frac{1}{13} \cdot 0,1017 + \frac{1}{13} \cdot 0,0972 = \\
&= 0,031653846
\end{aligned}
$$

Dieser Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 3,17% ein.

(iii) wenn er 18 Punkte erreicht, die Bank aber das Spiel mit einer Punktesumme zwischen 19 und 21 Punkten beendet:
$E_5 = \{Y_{16} = 18 \cap X_6 = 19\}$
$E_6 = \{Y_{16} = 18 \cap X_6 = 20\}$
$E_7 = \{Y_{16} = 18 \cap X_6 = 21\}$

$$
\begin{aligned}
P_G &= P(E_5 \cup E_6 \cup E_7) = \\
&= \frac{1}{13} \cdot 0,1063 + \frac{1}{13} \cdot 0,1017 + \frac{1}{13} \cdot 0,0972 = \\
&= 0,023476923
\end{aligned}
$$

Dieser Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,35% ein.

(iv) wenn er 19 Punkte erreicht, die Bank aber das Spiel mit einer Punktesumme von 20 oder 21 beendet:
$E_8 = \{Y_{16} = 19 \cap X_6 = 20\}$
$E_9 = \{Y_{16} = 19 \cap X_6 = 21\}$

$$\begin{aligned} P_G = P(E_8 \cup E_9) = \\ &= \frac{1}{13} \cdot 0,1017 + \frac{1}{13} \cdot 0,0972 = \\ &= 0,0153 \end{aligned}$$

Dieser Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,53% ein.

(v) wenn er 20 Punkte erreicht, die Bank aber das Spiel mit einer Punktesumme von 21 beendet:
$E_{10} = \{Y_{16} = 20 \cap X_6 = 21\}$

$$\begin{aligned} P_G = P(E_{10}) = \\ &= \frac{1}{13} \cdot 0,0972 \\ &= 0,007476923 \end{aligned}$$

Dieser Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,75% ein.

Der Spieler wird also mit einer Wahrscheinlichkeit von 69,34% verlieren, wenn er eine weitere Karte zieht.

Das Spiel endet unentschieden,...

(i) wenn die Bank und der Spieler die gleiche Anzahl an Punkte erreichen:
$E_1 = \{Y_{16} = 17 \cap X_6 = 17\}$
$E_2 = \{Y_{16} = 18 \cap X_6 = 18\}$
$E_3 = \{Y_{16} = 19 \cap X_6 = 19\}$
$E_4 = \{Y_{16} = 20 \cap X_6 = 20\}$
$E_5 = \{Y_{16} = 21 \cap X_6 = 21\}$

$$\begin{aligned} P_U &= P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5) = \\ &= \frac{1}{13} \cdot 0,1654 + \frac{1}{13} \cdot 0,1063 + \frac{1}{13} \cdot 0,1063 + \frac{1}{13} \cdot 0,1017 + \frac{1}{13} \cdot 0,0972 = \\ &= 0,044376923 \end{aligned}$$

Der Spieler beendet also mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,44% das Spiel mit der gleichen Punkteanzahl wie die Bank, wenn er eine weitere Karte zieht.

Vergleicht man die Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit, so ergibt sich eine Differenz von $-0,4305$. Das bedeutet, dass der Spieler bei derartigen Spielkonstellationen auf lange Sicht mit einem durchschnittlichen Verlust von 43,05% seines Einsatzes rechnen muss, wenn er eine weitere Karte zieht. Diese Verlustwahrscheinlichkeit ist größer, als jene, wenn der Spieler bei einer Punktesumme von 16 und einer 6 als erste Karte der Bank keine weitere Karte zieht, denn diese liegt, wie in Abbildung 6.7 ersichtlich ist, nur bei 15,37%. (vgl. [12], S. 81-84)
Die Frage, ob ein Spieler bei einer erreichten Punktesumme von 16 Punkten und einer 6 als erste Karte der Bank eine weitere Karte ziehen soll, lässt sich also mit Nein beantworten.

Auf diese Art und Weise lassen sich auch alle weiteren Spielsituationen abwägen. Die Ergebnisse werden in Abbildung 6.9 übersichtlich dargestellt.
Bei den Berechnungen wurde davon ausgegangen, dass ein Ass in den Karten des Spielers als eins gezählt wird. Auf die Situationen, in denen ein Ass in der Regel als elf Punkte gezählt wird, wird später näher eingegangen.

Die Ergebnisse zeigen, dass je höher die Punktesumme des Spielers ist, mit desto größeren Verlusten ist zu rechenen, wenn eine weitere Karte gezogen wird. Ist beim Ziehen einer weiteren Karte mit einem Verlust zu rechen, bei dem Verzicht auf eine weitere Karte jedoch ebensfalls, so liegt es im Interesse des Spieler den Verlust so gering wie möglich zu halten. Dies macht ein Vergleich der errechneten Werte in Abbildung 6.7 und in Abbildung 6.9 deutlich. Für eine optimale Spielentscheidung des Spielers sind die Vorzeichen der Differenzen der einzelnen Werte, die in Abbildung 6.10 dargestellt werden, von großer Bedeutung, denn ist das Vorzeichen positiv, so kann der Spieler durch das Ziehen einer weiteren Karte seine Lage verbessern. Bei einem negativen Vorzeichen, sollte der Spieler auf eine weitere Karte verzichten, wenn er seine Gewinnaussichten verbessern möchte. (vgl.[12], S. 87)

Ein Spieler sollte sich den Inhalt der Tabelle besonders gut einprägen. Sie zeigt, dass bei 11 erreichten Punkte, wie bereits erwähnt auf jeden Fall eine weitere Karte gezogen werden sollte. Bei einer Punktesumme von 12 sollte der Spieler nur auf eine weitere Karte verzichten, wenn die Bank als erste Karte eine 4, 5 oder 6 erhalten hat. Hat der Spieler bereits 13, 14, 15 oder 16 Punkte erreicht so sollte er nur eine weitere Karte ziehen, wenn die Bank vor sich ein Ass oder eine Karte mit einem höheren Wert als 6 vor sich liegen hat. Ab einer erreichten Summe von 17 Punkten, sollte der Spieler auf jeden Fall auf eine weitere Karteverzichten.

Punktesumme 1.Karte der Bank	11	12	13	14	15
2	23,53	-25,34	-30,78	-36,22	-41,67
3	25,89	-23,37	-29,12	-34,87	-40,63
4	28,31	-21,35	-27,42	-33,49	-39,57
5	30,74	-19,33	-25,73	-32,14	-38,55
6	33,37	-17,06	-23,57	-30,08	-36,60
7	23,15	-25,34	-29,37	-33,41	-37,45
8	17,53	-30,79	-34,55	-38,31	-42,09
9	11,39	-26,88	-40,39	-43,90	-47,42
10,B,D,K	0,61	-44,46	-47,72	-50,99	-54,26

Punktesumme 1.Karte	16	17	18	19	20
2	-47,11	-53,62	-62,25	-72,92	-85,53
3	-46,38	-53,17	-62,00	-72,81	-85,50
4	-45,63	-52,70	-61,75	-72,70	-85,48
5	-44,95	-52,30	-61,52	-72,61	-85,45
6	-43,11	-50,89	-60,76	-72,27	-85,38
7	-41,49	-48,35	-59,12	-71,55	-85,19
8	-45,85	-50,60	-59,11	-71,37	-85,15
9	-50,94	-55,37	-61,65	-71,57	-85,09
10,B,D,K	-57,52	-61,64	-67,47	-75,03	-86,06

Abbildung 6.9: Differenzen zwischen bedingter Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit, Quelle: [12], S. 85

Punktesumme 1.Karte der Bank	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
As	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−
2	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−
3	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−
4	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
5	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
6	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
7	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−
8	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−
9	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−
10,B,D,K	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−

Abbildung 6.10: Verbesserung (+) oder Verschlechterung (−) beim Ziehen einer weiteren Karte, Ass als eins gezählt. Quelle: [12], S. 87

Bei einer zeilenweisen Betrachtung der Abbildung 6.10 wird deutlich, dass Ass, 7, 8, 9 oder eine zehnwertige Karte für die Bank von Vorteil sind, da der Spieler in diesen Fällen bei einer erreichten 16 oder weniger das Risiko mit dem Ziehen einer weiteren Karte den Wert 21 zu überschreiben, in Kauf nehmen sollte. Als relativ schlechte erste Karte gilt für die Bank eine 4, 5 oder 6, dicht gefolgt von der 2 und 3.(vgl. [12], S. 88)
Eine genaue Auflistung der prozentuellen Werte der Verbesserung beziehungsweise Verschlechterung beim Ziehen einer weiteren Karte wird in Abbildung 6.11 angeführt.

Da in den bisherigen Überlegungen ein Ass jeweils als eins gezählt wurde, stellt sich nun die Frage, wann ein Spieler von seiner Möglichkeit, ein Ass als elf Punkte zu zählen, Gebrauch machen sollte. Hat ein Spieler ein Ass und eine 5 erhalten, so ergibt das eine Punktesumme von sechs oder 16 und er wird vermutlich eine weitere Karte ziehen. Zieht er eine 2, muss der Spieler entscheiden, ob er das Ass als elf zählt und das Spiel mit 18 Punkten beendet oder ob er das Ass als eins zählt und bei einem Punktestand von 8 einer weitere Karte zieht. Der Spieler muss abwägen, ob er seine Gewinnchance vergrößern würde, wenn er eine weitere Karte zieht oder nicht.(vgl. [12], S. 90)

Punktesumme 1.Karte der Bank	11	12	13	14	15
As	49,97	17,47	15,70	13,93	12,14
2	52,18	3,94	-1,50	-6,94	-12,39
3	51,11	1,85	-3,90	-9,65	-15,41
4	49,41	-0,25	-6,32	-12,39	-18,47
5	47,46	-2,61	-9,01	-15,42	-21,83
6	48,74	-1,69	-8,20	-14,71	-21,23
7	70,69	22,20	18,17	14,13	10,09
8	68,59	20,27	16,51	12,75	8,97
9	65,71	17,44	13,93	10,42	6,90
10,B,D,K	58,18	13,11	9,85	6,58	3,31

Punktesumme 1.Karte der Bank	16	17	18	19	20
As	10,37	-5,49	-36,44	-69,41	-104,4
2	-17,83	-38,32	-74,42	-111,6	-149,5
3	-21,16	-41,45	-76,83	-113,3	-150,5
4	-24,53	-44,65	-79,34	-115,0	-151,6
5	-28,23	-47,81	-81,49	-116,6	-152,5
6	-27,74	-52,06	-89,10	-121,9	-155,8
7	6,05	-37,67	-99,08	-133,2	-162,5
8	5,21	-12,40	-69,70	-130,8	-164,3
9	3,38	-13,05	-43,33	-100,3	-160,9
10,B,D,K	0,05	-15,21	-43,32	-73,16	-129,6

Abbildung 6.11: Verbesserung oder Verschlechterung (-) beim Ziehen einer weiteren Karte, Quelle: [12], S. 89

Entscheidet er sich für eine zusätzliche Karte tritt einer der folgenden Fälle ein:

- Der Spieler erhält mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{4}{13}$ eine zehnwertige Karte und wird das Ass als eins zählen um sich nicht zu überkaufen. An seiner Ausgangslange von 18 Punkten ändert sich allerdings nichts.
- Mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{13}$ zieht der Spieler ein Ass, eine zwei oder eine drei. In diesen Fällen wird er das zuvor gezogene Ass als elf zählen und erreicht somit 19, 20 oder 21 Punkte.
- Zieht der Spieler eine Karte zwischen 4 und 9, was ihm ebenfalls mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{13}$ gelingt, wird er das Ass als eins zählen, da er sich sonst überkauft hätte. Seine Ausgangslage hätte sich in diesem Fall jedoch bei einer Punktesumme von unter 17 beziehungsweise 17 verschlechtert.

Angenommen die Bank hat als erste Karte eine 9 gezogen, so ergibt sich für die Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit beim Ziehen einer weiteren Karten ein Wert von $-14,51\%$ und beim Verzicht auf eine weitere Karte ein Wert von $-18,32\%$. In diesem Fall sollte der Spieler also eine zusätzliche Karte nehmen. (vgl. [12], S. 90)
Grundsätzlich sollte ein Ass zunächst immer als elf gezählt werden. Bei einer erreichten Summe von 19, 20 oder 21 Punkte sollte der Spieler unanhängig davon, welche Karte die Bank erhalten hat, keine weitere Karte mehr ziehen. Bei einer Punktesumme von 18 sollte ebenfalls auf eine zusätzliche Karte verzichtet werden, außer die Bank hat als erste Karte eine 9 oder eine zehnwertige Karte erhalten. Bei einer Punktesumme von 17 oder weniger sollte auf jeden Fall eine weitere Karte gezogen werden, da bei einer Punktesumme über 21 das Ass immernoch als eins gezählt werden kann. (vgl. [12], S. 91)
Abbildung 6.12 stellt diese Regeln nocheinmal übersichtlich dar.

Wie bereits bei den Spielregeln erwähnt, haben die Boxeninhaber die Möglichkeit, sich bei einem drohenden Black Jack der Bank zu versichern oder ihre Gewinnchancen zu erhöhen, indem sie splitten oder ihren Einsatz verdoppeln. Wann ein Spieler von einer dieser Möglichkeiten Gebrauch machen sollte, soll im folgenden Abschnitt erläutert werden.

Punktesumme 1.Karte der Bank	$\leqslant 16$	17	18	19	20
As	+	+	–	–	–
2	+	+	–	–	–
3	+	+	–	–	–
4	+	+	–	–	–
5	+	+	–	–	–
6	+	+	–	–	–
7	+	+	–	–	–
8	+	+	–	–	–
9	+	+	+	–	–
10,B,D,K	+	+	+	–	–

Abbildung 6.12: Verbesserung (+) oder Verschlechterung (–) beim Ziehen einer weiteren Karte. Ass als elf gezählt. Quelle: [12], S. 91

Wann sollte ein Spieler Splitten?

Das *Splitten* bzw. *Teilen* ist besonders sinnvoll, um eine ungünstige Ausgangslage zu verbessern, denn so werden in manchen Fällen zwei bessere Anfangsbedingungen erschaffen. Eine ungünstige Ausgangslage wäre zum Beispiel, wenn der Spieler zwei Achter - in Summe den Kartenwert 16 - erhalten, denn in diesem Fall würde jede Karte mit einem Wert über fünf zum Verlust führen. Durch das Splitten werden zwei seperate Spiele mit jeweils 8 Punkten begonnen und der Spieler könnte mit einer zehnwertigen Karte die Summe 18 erreichen. Selbst wenn sich der Spieler auf einer der beiden Hände überkauft, hat er immernoch die Chance, das andere Spiel zu gewinnnen.(vgl.[12], S. 63)

Wann sollte ein Spieler seinen Einsatz verdoppeln?

Verdoppelt ein Spieler seinen Einsatz, darf er danach nur noch eine weitere Karte ziehen. Um die Frage, wann ein Spieler verdoppeln sollte zu beantworten, ist es sinnvoll die Differenzen zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit, wenn nur noch eine zusätzliche Karte gezogen wird, mit jener eines normalen Spieles zu vergleichen.

Angenommen ein Spieler hat mit zwei Karten 11 Punkte erhalten und die erste Karte der Bank ist eine 7. Die Abbilung 6.9 zeigt, dass der Spieler beim Ziehen von nur einer weiteren Karte erwarten kann, pro Spiel 23,15% vom verdoppelten Einsatz zu gewinnen. Berücksichtigt man alle möglichen weiteren Ziehungen des Spielers, erhält man für den Fall, dass der Spieler nicht verdoppelt und nach dem in Abbildung 6.10 beschriebenen Prinzip weitere Karten zieht, eine Differenz von 29,23%.
Zwar ist der prozentuelle Wert der Differenz größer, wenn nicht verdoppelt wird, doch aufgrund des doppelten Einsatzes, ist einem höheren Gewinn zu erwarten.
In Abbildung 6.13 sind alle Fälle, in denen es sinnvoll ist zu verdoppeln mit einem D gekennzeichnet.

Punktesumme 1.Karte der Bank	9	10	11
As			
2		D	D
3	D	D	D
4	D	**D**	**D**
5	D	**D**	**D**
6	D	**D**	**D**
7		D	D
8		D	D
9		D	D
10,B,D,K			

Abbildung 6.13: Verdoppeln des Einsatzes. Quelle: [12], S. 94

Ein Spieler sollte seinen Einsatz also verdoppeln, wenn er nach zwei Karten eine Punktesumme von 10 oder 11 erreicht hat, sofern die Bank kein Ass oder eine zehnwertige Karte erhalten hat. Bei einer Punktesumme von 9 sollte ein Spieler nur verdoppeln, wenn die Bank eine 3,4,5 oder 6 erhalten hat.
Hat ein Spieler 10 oder 11 Punkte erreicht und die erste Karte der Bank ist eine 4,5 oder 6, ist es empfehlenswert seinen Einsatz zu verdoppeln. In diesen

Fällen sind die Differenzen zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten nämlich jeweils gleich groß, weshalb der Einsatz so groß wie möglich sein sollte. (vgl. [12], S. 94f)

Wann sollte ein Spieler seinen Einsatz versichern?

Die Bank bietet den Spielern die Möglichkeit, ihren Einsatz gegen einen drohenden Black Jack der Bank zu versichern. Eine derartige Versicherung kann ein Spieler abschließen, wenn die Bank als erste Karte ein Ass erhalten hat und damit die Chance auf ein Black Jack groß ist. Die Versicherungsgebühr beträgt in der Regel die Hälfte des Einsatzes. Zieht die Bank anschließend eine zehnwertige Karte und erreicht somit ein Black Jack, bekommt der Spieler, der sich dazu entschlossen hat seinen Einsatz zu versichern, seinen Einsatz und die Versicherungsgebühr zurück. Erhält die Bank keinen Black Jack, zieht die Bank die Versicherungsgebühr, also ein Drittel des gesetzten Betrages ein und das Spiel verläuft nach den üblichen Regeln weiter. Die folgende Abbildung 6.14 soll einen Überblick verschaffen. Aufgrund dieser Überlegungen kann der

Bank erhält Black Jack / Spieler hat sich versichert		ja mit $p = \frac{4}{13}$	nein mit $p = \frac{9}{13}$
ja	Einsatz: 1,0 Gebühr: 0,5	0	$-\frac{1}{3}$
nein	Einsatz: 1,0 Gebühr: 0,0	-1	0

Abbildung 6.14: Verlustanteil am gesamten Einsatz, nachdem die Bank eine zweite Karte erhalten hat. Quelle: [12], S. 110

zu erwartetende Gewinn im Fall, dass das Versicherungsangebot angenommen beziehungsweise nicht angenommen wird, berechnet werden.

$$E(\text{Angebot wird angenommen}) = \frac{4}{13} \cdot 0 + \frac{9}{13} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{13} \approx -0,2308$$

$$E(\text{Angebot wird nicht angenommen}) = \frac{4}{13} \cdot (-1) + \frac{9}{13} \cdot 0 = -\frac{4}{13} \approx -0,3077$$

Wird das Angebot von einem Spieler angenommmen, so büßt er also im Durchschnitt pro Spiel 23,08% seines Einsatzes ein. Verzichtet der Spieler darauf seinen Einsatz zu versichern, verliert er durchschnittlich 30,77% seines Einsatzes.

Auf dem ersten Blick scheint es also, als wäre der Verlust bei Inanspruchnahme der Versicherung geringer. Beachtet man jedoch die unterschiedlich hohen Einsätze, wird schnell klar, dass das Angebot auf keinen Fall angenommen werden sollte. Beträgt der reguläre Einsatz eines Spielers beispielsweise 50€, so muss er im Durchschnitt mit einem Verlust von circa 15€ rechnen, wenn er das Angebot, seinen Einsatz zu verbessern nicht annimmt. Nimmt er das Angebot an, muss er zusätzlich zu dem Einsatz von 50€ weitere 25€ auf das *Insurence* Feld legen. Im Durchschnitt muss der Spieler damit rechnen, dass er pro Spiel rund 17€, also mehr, als wenn er auf eine Versicherung verzichten würde, verliert.
Das Versicherungsangebot der Bank erweist sich bei genauer Betrachtung also als Verlockung, der ein Spieler nicht erliegen sollte. (vgl. [12], S. 111)

Kapitel 7

Anwendung im Unterricht

Einige in dieser Arbeit durchgeführte Berechnungen können auch in der Schule durchgeführt und besprochen werden. Die Anwendung erlernter Inhalte an realen Situationen fördert einige im Lehrplan der AHS-Oberstufe festgehaltene Bildungs- und Lehraufgaben, wie zum Beispiel die Folgende:

> *Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts. ([23], S. 1)*

Die Berechnungen, wie groß die Wahrscheinlichkeit in verschiedenen Kartenspielen ist, eine bestimme Karte oder Kartenkombinationen zu erhalten zählt dabei zu elementaren Anwendungen grundlegender Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Durch das Aufgreifen derartiger Situationen aus dem Alltag der Schüler kann Interesse geweckt werden.
Aber auch die mathematische Kompetenz des heuristisch experimetiellen Arbeitens kann gefördert werden, indem Grenz- und Spezialfälle untersucht werden um schließlich allgemeine Aussagen treffen zu können (vgl.[23], S. 1), wie es zum Beispiel bei Black Jack der Fall ist.
Durch Berechnungen an weniger populären Kartenspielen, wie Wizard kann Kreativität und Einfallsreichtum der Schüler gefördert werden. Es wird dabei vermittelt, dass die erlernten Fähigkeiten und Fertigkeiten in verschiedensten Situationen im Leben angewendet werden können.
Komplexere Berechnungen wie zum Beispiel die der bedingten Wahrscheinlichkeiten bei Black Jack mit Hilfe von Markoff-Ketten können – vorausgesetzt es besteht Interesse – im Rahmen des Wahlpflichtfaches Mathematik durchgenommen werden. Dabei kann eine Erweiterung beziehungsweise Vertiefung ihres Bildungshorizontes geboten werden.

Kapitel 8

Resümee

Die Arbeit zeigt, dass wie bei den meisten anderen Glückspielen auch bei Kartenspielen keine genaue Anleitung zum Gewinnen gegeben werden kann. Einige erarbeiteten Empfehlungen, wie man sich in den verschiedenen Situationen verhalten sollte, können allerdings die Gewinnwahrscheinlichkeiten erhöhen.
Es wurde deutlich, dass bei den behandelten Spielen sehr viel von der Entscheidung des Spielers anhängt, was bei anderen Glückspielen, beispielsweise Roulette nicht der Fall ist.

Bei Wizard wurde gezeigt, dass die Spieler mit elementaren Methoden leicht abschätzen können, mit welcher Wahrscheinlichkeit, welche Karten im Spiel sind. Vorallem die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Zauberer im Spiel ist, wird oft unterschätzt und sollte daher in jeder Runde beachtet werden. Je mehr Karten im Spiel sind, desto aufwendiger wird die Betrachtung der einzelnen Szenarien. Eine genau Anleitung zum Gewinnen konnte daher im Rahmen dieser Arbeit nicht gegeben werden.

Die Überlegungen zu Poker haben gezeigt, dass es vorallem wichtig ist gute von schlechten Starthänden zu unterscheiden. Vorallem unerfahrene Spieler sollten sich daher die Kriterien, die eine spielbare Hand erfüllen sollte, gut einprägen. Weiters wurde gezeigt, wie die Chancen mit bestimmen Starthänden auf eine gute Kombination mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung abgeschätzt werden kann.

Für Black Jack können die meisten Empfehlungen für ein gewinnbringendes Verhalten gegeben werden. Die wohl wichtigste ist dabei: Der Spieler sollte sich, in ähnlicher Weise wie es dem Croupier vorgeschrieben wird, wie eine Maschine verhalten und rationale Spielentscheidungen treffen um die Gewinnchancen zu erhöhen. Der wohl wichtigste Faktor beim Kartenspielen, nämlich der Spaßfaktor könnte dabei jedoch verloren gehen.

Ein weiterer spannender Faktor im Bezug auf Glückspiele und insbesondere Kartenspiele, der aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, ist der psychologische Aspekt. Vorallem beim Poker sind Spieler, die gut bluffen können oftmals auf der Siegerseite.

Abschließend möchte ich festhalten, dass es auch eine positive Seite hat, dass sich oftmals keine sichere Gewinnstrategie erarbeiten lässt, denn sowohl der Zufall, also auch das Glück machen Spiele überhaupt erst interessant und das Siegen reizvoll.

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] BANDELOW, C.: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*. Bibliographisches Institut AG, Mannheim, 1981.

[2] BEWERSDORFF, J.: *Glück, Logik und Bluff. Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen.*. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 4. Auflage, 2007.

[3] BOSCH, K.: *Elementare Einfügrung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Vieweg+Teuber Verlag, Wiesbaden, 11. Auflage, 2011.

[4] BROKATE, M., HENZE, N., HETTLICH, F., MEISTER A., SCHRANZ-KIRLINGER, G., SONAR, T.: *Grundwissen Mathematikstudium. Höhere Analysis, Numerik und Stochastik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2016.

[5] BÜCHTER, A.; HENN, H.W.: *Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.

[6] DANYLUIK, R.: *1x1 der Kartenspiele. Von Brige über Poker und Skat bis Zwicken*. humboldt, Hannover, 18. Auflage, 2010.

[7] GEORGII, H.O.: *Stochastik. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik* (3., überarbeitete und erweitertete Auflage). Walter de Gruyter GmbH & Co. KG., Berlin, 2007.

[8] HARROCH, R.D.; KRIEGER, L.: *Poker für Dummies*. Wiley-vch Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2006.

[9] KREGEL, U.: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 6. Auflage, 2002.

[10] MALA, M.: *Das grosse Buch der Kartenspiele*. Falken Verlag, NIederhausen, 1997.

[11] MEINERT, J.: *Die Pokerschule. Texas Hold'em Poker für Anfänger und Fortgeschrittene.* Knaur Taschenbuch Verlag, München, 2007.

[12] MONKA, M.; TIEDE, M.; Voß, W.: *Gewinnen mit Wahrscheinlichkeit. Statistik für Glücksritter.* Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg, 1999.

[13] PÜRMAYR, G.: *Ist Glück im Spiel berechenbar? Eine kritische Betrachung von Glückspielen mit Anregungen für den Stochastikunterricht.* Univ. Diplomarbeit, Wien, 2008.

[14] http://kartenspiel.org/die-verschiedenen-spielarten-beim-kartenspiel/ [Stand 16.11.2015]

[15] http://www.casinos.at/content/uploadNew/e3a36a82-cd5a-428f-9710-02b63f7f86ef.pdf [Stand 03.12.2015]

[16] https://www.blackjackregeln.com/ursprung/ [Stand 23.02.2016]

[17] http://www.casinoschule.com/artikel.php?item=34 [Stand 23.02.2016]

[18] http://www.casinos.at/content/uploadNew/5ed806f7-e13c-48a3-b0af-b322f9e78e34.pdf [Stand 04.12.2015]

[19] http://www.poker-anleitung.de/blattfolgen.html [04.12.2015]

[20] http://www.kooperfrance.com/jeton%20pokermaster/jetonsPokermaster.jpg [Stand 10.01.2016]

[21] http://www.poker.de/poker-strategie/texas-holdem-strategie/geschichte-des-texas-holdem/ [Stand 12.01.2016]

[22] http://www.iwr.uni-heidelberg.de/ agbock/TEACHING/2003ss/BIO2/PROJEKTE/ Markow-Ketten.pdf [Stand 25.02.2016]

[23] https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf [Stand 15.06.2016]

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Frage nachgegangen, wie man bei ausgewählten Kartenspielen gewinnen kann.
Am Beginn werden die für spätere Berechnungen relevanten wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen beschrieben und erklärt. Anschließend wird mit Hilfe der Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung versucht, die Gewinnchancen bei den Kartenspielen Wizard, Poker und Black Jack abzuschätzen, indem bestimmte Spielsituationen betrachtet werden. Dabei werden sowohl elementare Berechnungen durchgeführt als auch anspruchsvolle Verfahren, wie zum Beispiel die Bestimmung von bedingten Wahrscheinlichkeiten mit Markoff-Ketten, angewendet.
Obwohl schließlich einige Empfehlungen für ein gewinnbringendes Spielverhalten gegeben werden können, kann eine sichere Anleitung zum Gewinnen im Rahmen dieser Arbeit nicht erstellt werden.