



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Warum dreht sich die Erde um die Sonne?
So viel Mathematik steckt in der Mechanik“

verfasst von / submitted by

Anna Maria Reumann

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements
for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik

Betreuer / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Danksagung

Zu Beginn bedanke ich mich bei meinem Betreuer, ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith, für die zeitaufwändige und mühevolle Unterstützung meiner Diplomarbeit. Während der gesamten Zeitspanne, die die Recherche, das Ideensammeln, das Verfassen und Verfeinern der Arbeit umfasste, konnte ich stets auf seine Hilfe und Ratschläge zählen.

Mein größter Dank gilt meinen Eltern, Anton und Paula, und meinen beiden Schwestern Katrin und Petra. Mama, Papa, ich danke euch, dass ihr mir das Lehramtsstudium ermöglicht habt. Bereits in meiner Schulzeit habt ihr meine Talente erkannt und gefördert. Darüber hinaus wart ihr in schwierigen Zeiten liebevolle und wegweisende Ratgeber, auf die ich stets zählen durfte. Ihr seid für mich in eurem Beruf stets als Vorbilder vorangegangen, sodass ich selbst die Freude am Unterrichten für mich entdecken konnte. Katrin und Petra, meine großen Schwestern, ich danke euch, dass ich Zeit meines Lebens stets zu euch und euren Familien aufblicken durfte, dass ihr euch immer um mich gesorgt habt und stets ein offenes Ohr für mich hattet.

Von ganzem Herzen will ich meinen beiden besten Freunden, Birgit Bergmann und Sandro Schlaffer, danken. Birgit, du hast mein Studium zu etwas ganz Besonderem gemacht. Gerne erinnere ich mich an die unzähligen Stunden, in denen wir gemeinsam Rechenaufgaben lösten. Danke, dass du in jeder Situation für mich da bist. Es freut mich ganz besonders, dass unsere gemeinsamen Interessen, nicht zuletzt die Liebe zur Mathematik, Physik und Blasmusik, uns zusammenführten. Sandro, du bist mir fast mein ganzes Leben lang ein treuer Wegbegleiter. Ich danke dir für die vielen musikalischen, kulturellen, schulischen und privaten Abenteuer, die wir schon gemeinsam erlebt haben. Ich schätze dich als jenen Menschen, der stets die passenden Worte für mich bereit hält, um an einem grauen Tag die Sonne neu erstrahlen zu lassen.

Ganz herzlich bedanke ich mich bei meinen ehemaligen Lehrerinnen und nun Kolleginnen Mag.^a Susanne Huber und Mag.^a Christina Windisch. Schon während meiner Schulzeit standen sie mir stets liebevoll und hilfreich zur Seite.

Zu besonderem Dank bin ich Frau Direktorin Mag.^a Helga Fabsits und Administrator Mag. Georg Hahn des BG/BRG/BORG Oberpullendorf verpflichtet, die mir ermöglichten, neben der Absolvierung meines Studiums bereits wertvolle Unterrichtserfahrung in Mathematik und Physik zu sammeln. Besonderer Dank gilt meinem Fachkollegen Mag. Paul Fraller, auf dessen Hilfe ich in fachlichen und persönlichen Angelegenheiten stets zählen darf.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit bestätige ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel verfasst zu haben. Alle Inhalte, die wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken übernommen wurden, sind mit der Angabe der jeweiligen Quelle gekennzeichnet. Auch für die Ressourcen aus dem Internet sind der Link und der Zugriffszeitpunkt aufgezählt. Diese Arbeit ist die erste dieser Art und liegt nicht in ähnlicher oder gleicher Form bei einer anderen Prüfungsstelle auf.

Neckenmarkt, Juni 2016



Anna Reumann

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	ii
Eidesstattliche Erklärung.....	iv
1 Einleitung	1
2 Begriffserklärung	5
1 Klassische Mechanik.....	5
1.1 Mechanik in der Schule.....	6
1.1.1 Didaktische Grundsätze	6
1.1.2 Lehrstoff	6
2 Mathematische Themengebiete in der AHS Oberstufe	7
2.1 5. Klasse.....	7
2.2 6. Klasse.....	8
2.3 7. Klasse.....	9
2.4 8. Klasse.....	10
3 Buchanalyse	11
1 <i>Big Bang</i>	11
1.1 Allgemeines zur Buchreihe.....	11
1.2 Mathematische Inhalte in der klassischen Mechanik	11
1.2.1 „Tooltime “	12
1.2.2 „Gedachte Singularität“	15
1.2.3 „Geradlinige Bewegungen“	18
1.2.4 „Zusammengesetzte Bewegungen“	28
1.2.5 „Newton mal drei“	34
1.2.6 „Arbeit und Energie“	39
1.2.7 „Impuls“	45
1.2.8 „Rotationen“	52
1.2.9 „Von Aristoteles bis Kepler“	58
1.2.10 „Newtons Gravitationsgesetz“	60
1.3 Analyse und Auflistung der mathematischen Inhalte	64
2 <i>Sext Physik</i>	65
2.1 Allgemeines zur Buchreihe.....	65
2.2 Mathematische Inhalte in der klassischen Mechanik	65
2.2.1 „Geschwindigkeit und Beschleunigung“	66
2.2.2 „Die Newton’schen Gesetze“	68
2.2.3 „Drittes Newton’sches Gesetz: Das allgemeine Wechselwirkungs-	
gesetz“	71
2.2.4 „Der Einfluss der Reibung“	73
2.2.5 „Spezielle Bewegungsformen“	75
2.2.6 „Druck in Flüssigkeiten und Gasen“	83
2.2.7 „Energie“	86
2.2.8 „Impuls“	90
2.2.9 „Drehimpuls“	95
2.3 Analyse und Auflistung der mathematischen Inhalte	99

4 Die Planetenbewegung	101
1 Weiterführende Mathematik	101
1.1 Funktionen mit zwei bzw. mehreren unabhängigen Variablen	101
1.2 Partielle Ableitungen	102
1.3 Gradient	102
1.4 Differentialgleichungen	103
1.5 Trennung der Variablen	104
1.6 Funktionen in Parameterdarstellung und deren Ableitung	105
2 Die Bewegung eines Planeten um einen Zentralkörper	107
3 Interpretation	113
5 Reflexion und Resümee	115
1 Buchanalyse	115
1.1 <i>Big Bang</i> und <i>Sextl Physik</i> im Vergleich	115
1.2 Die mathematischen Inhalte	116
1.2.1 Vektorrechnung	116
1.2.2 Trigonometrie	117
1.2.3 Funktionen, Funktionsgraphen, Diagramme und funktionale Abhängigkeiten	117
1.2.4 Elementargeometrie	118
1.2.5 Differential- und Integralrechnung	118
1.2.6 Eigene Meinung und Bemerkungen	119
2 Planetenbewegung	120
2.1 Implementierung der Aufgabe zur Berechnung der Planetenbewegung in der Schule	120
2.2 Die Berechnung der Planetenbewegung im Rahmen einer vorwissen- schaftlichen Arbeit	121
2.3 Die Berechnung der Planetenbewegung im Rahmen des Physikunter- richts	121
3 Abschließende Bemerkungen und Zusammenfassung	122
Literaturverzeichnis	123
Tabellenverzeichnis	126
Abbildungsverzeichnis	127
Anhang	133
1 Abstract	133
1.1 Deutsche Fassung	133
1.2 English version	134

1 Einleitung

Hier auf der Erde sitzen wir, genießen die Lasten des Alltags. Wir Erdbewohner, auch Menschen genannt, erblicken das Licht der Welt, wachsen heran, lernen, arbeiten und werden älter, bis sich eines Tages das Licht der Welt für uns auf ewig verfinstert. Während dieser Zeit – man nennt es auch *Leben* – dreht sich die Erde um die Sonne. Selten wahrgenommen, stellt dieses immerwährende Geschehnis eine Art Naturkonstante unseres Lebens dar.

Die Erde dreht sich also um die Sonne. Doch wieso kommt es denn eigentlich zu dieser gleichförmigen Rotation dieses Himmelskörpers um den uns nächsten Fixstern? Will Gott uns damit schwindelig machen? Bewegt er die Erde entlang einer Umlaufbahn um die Sonne, um seine Kinder auf einem natürlichen Karussell in Freude zu versetzen? Betrachtet man die Menschen, so merkt man sofort, dass sie weder lustig umhertorkeln (vorausgesetzt, sie stehen nicht unter dem Einfluss chemisch-destillierter Flüssigkeiten) noch dass sie grundsätzlich sehr viel Freude ausstrahlen (bedingt durch psychosoziale Komponenten, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll).

Aber vielleicht sieht die Situation auch ganz anders aus: Wäre es nicht möglich, dass nach dem Urknall (sofern das Universum auf diese Art und Weise seinen Ursprung fand) die Erde ein wenig in die strahlende, heiße Sonne verliebt war? Jene empfand die Erde jedoch als viel zu klein und lebendig und lehnte damit die Anziehung der Erde ab? Womöglich erwirkte die Sonne nach unzähligen romantischen Annäherungsversuchen der Erde eine einstweilige Verfügung gegen diese. Somit hat dieser kleine, von jeglicher Art von Lebewesen bewohnte Planet, nur noch die Möglichkeit, seine gelbe Oase aus einer Entfernung von ca. 150 Millionen Kilometern sinnlich und herzerwärmend zu betrachten.

So amüsant diese Theorien auch sein mögen, ist die Physik doch die einzige Wissenschaft, die uns erklären kann, wieso sich die Erde, und sogar alle Planeten unseres Sonnensystems um die Sonne drehen. Da jedoch der Großteil der Erdbewohner kein physikalisches Hochschulstudium genießen darf bzw. sich oft gegen dieses freiwillig entscheidet (was für so manchen Fachfan unverständlich erscheint), fordert zumindest das österreichische Bildungssystem eine Art *physikalische Grundausbildung*. In der AHS Oberstufe des kleinen, dennoch kulturell sehenswerten Staates Österreich stellt man heranwachsenden Menschen unter anderem spannende Fragen wie jene: „Was würdest du fühlen, wenn ein Wassertropfen auf deinem Kopf aufschlägt und du davon ausgehst, dass keine Luft da war, um die Bewegung dieser Flüssigkeit während des Falls zu bremsen?“ Oder Fragestellungen wie jene: „Was tust du, wenn ich dir sage, dass es gar keine Zentrifugalkraft gibt und du herausfindest, dass dich deine Eltern ein Leben lang angelogen haben, als sie dir sagten, dass diese der Grund dafür sei, wieso du nicht aus dem Ringelspiel fällst?“

Um es absolut zu dramatisieren: „Berechne, welcher Weg gemeint ist, wenn man von einem Lichtjahr spricht!“ Und ja, gefordert ist die Berechnung eines Weges und nicht einer Zeitdauer. Berechnung - Zahlen, Mathematik? In der Physik? Und spätestens jetzt hat jeder physikalisch-intellektuell Heranwachsende eine Antwort auf die Frage „Wozu brauche ich denn Mathematik jemals?“ Ja, man braucht diese abstrakte Kunst, die sich an Zahlen, Variablen und Skizzen erfreut, nämlich in der Physik! Nach dieser glorreichen Erkenntnis folgt zugleich große Ernüchterung, denn es klingt nach einer enormen Herausforderung, mathematisches Wissen in einer neuen, ebenso sehr abstrakten Naturwissenschaft, nämlich der Physik, anzuwenden. Diese Wahrheit wurde erkannt und oft am eigenen Leib erlebt: Mathematik und Physik - eine Hassliebe (womöglich auf eine ähnliche Art und Weise wie jene Beziehung zwischen Erde und Sonne)?

Im Rahmen der klassischen Physik, die sich, angefangen von gleichförmigen Translationen, Kräften, über Arbeit, Energie und Impuls, bis hin zu Rotationen, Gravitationsgesetz und Planetenbewegung (die Kepler'schen Gesetze sind hier zu erwähnen) erstreckt, kann also die Frage beantwortet werden, warum sich die Planeten unseres Sonnensystems um die Sonne drehen. Dazu benötigt man sowohl im Hochschulstudium Physik als auch im Unterricht viel mathematisches Know-how. Wie viel Mathematik nun tatsächlich zum Verständnis der klassischen Physik in der Schule gefordert wird, soll anhand einer umfangreichen Buchanalyse untersucht werden. Dazu werden zwei führende Schulbücher, unter anderem *Big Bang 5*, *Big Bang 6* und *Sexl Physik 5*, präzise unter die Lupe genommen.

Die beiden Werke werden auf unterschiedliche physikalische Inhalte der klassischen Mechanik untersucht. Genau betrachtet wird, wie die einzelnen Themen eingeführt werden - passiert dies experimentell, mathematisch, mittels eines Gedankenexperiments oder auf eine andere geeignete Methode? Ebenso wird weiterführend auf die physikalische Korrektheit und Schlüssigkeit der unterschiedlichen Themen geachtet.

Besondere Betrachtung gilt den unterschiedlichen mathematischen Inhalten, die in den einzelnen Kapiteln verwendet bzw. vorausgesetzt werden. Es soll aufgezeigt werden, ob SchülerInnen bereits die konkreten mathematischen Kenntnisse in den Physikunterricht mitbringen, um dadurch physikalische Inhalte verstehen bzw. noch besser erfassen zu können. Die Lehrpläne aus Mathematik und Physik und unterschiedliche Mathematik-Schulbücher sollen als entsprechende Vergleichsparameter dienen.

Im Rahmen dieser Buchanalyse wird sich herausstellen, dass SchülerInnen nach Beendigung des Besprechens der klassischen Physik bereits in der Lage sind, die Bewegung eines Körpers um einen Zentralkörper (vereinfacht die Bewegung der Erde um die Sonne) mit großen Vereinfachungen zu berechnen und mathematisch darzustellen.

In Tabelle 1.1 werden die verwendeten Physik-Schulbücher aufgelistet, die später genauer auf mathematische Inhalte untersucht werden. Darüber hinaus werden das Erscheinungsjahr, die Nachnamen der Autoren und die Titel der einzelnen Schulbücher angeführt.

Jahr	Autor	Titel
2007	Apolin	<i>Big Bang 5</i>
2007	Apolin	<i>Big Bang 6</i>
2012	Sexl, Kühnelt, Stadler, Jakesch, Sattlberger	<i>Sexl Physik 5</i>

Tabelle 1.1: Liste der analysierten Oberstufenphysikschulbücher

Die oben angeführten Schulbücher sind zurzeit die gängigsten, die in der Oberstufe der AHS im Physikunterricht Verwendung finden (vgl. [17], Letzter Aufruf: 24.10.2015).

Wie bereits in Tabelle 1.1 zu erkennen ist, teilt Martin Apolin die Inhalte der klassischen Mechanik auf zwei Klassen (5. und 6.) auf. Im Gegensatz dazu werden in *Sexl Physik* physikalische Themen der klassischen Mechanik nur in der 5. Klasse besprochen.

Weiterführend wird die Bewegung eines Körpers um einen Zentralkörper (sprich die Planetenbewegung) auf Hochschulebene rechnerisch durchgeführt und besprochen. Dies ermöglicht die Formulierung und Deutung der Kepler'schen Gesetze. Darüber hinaus wird die Frage gestellt, wie weit diese Rechnung aus dem Physikstudium in den Physikunterricht der AHS Oberstufe implementiert werden kann bzw. welche weiterführenden mathematischen Kenntnisse gefordert sind, um diese Thematik im Rahmen einer vorwissenschaftlichen Arbeit zu besprechen.

2 Begriffserklärung

Die folgenden Unterkapitel sollen einen Überblick über die in der Diplomarbeit verwendeten Begriffe und Themen geben.

1 Klassische Mechanik

Die klassische Mechanik beschäftigt sich mit der Gesetzmäßigkeit der Bewegungen materieller Körper, die als punktförmig betrachtet werden können. Bewegt sich ein Körper, so kommt es zu einer zeitlichen Änderung seines Ortes. Die Änderung des Bewegungszustandes eines Objektes erfolgt grundsätzlich unter Einfluss einer Kraft bzw. mehrerer Kräfte, die als bekannt angenommen werden (vgl. [14], S.1).

In diesem ältesten Teilgebiet der Physik vernachlässigt man Quantenphänomene wie z.B. die De-Broglie-Wellenlänge bzw. die Orts- und Impulsunschärfe von Teilchen und Objekten. Größen wie der Ort und der Impuls von Teilchen besitzen im Rahmen der Quantenphysik keine bestimmten Werte, denn es sind nur Wahrscheinlichkeitsangaben möglich. Daher bezeichnet man physikalische Theorien und Konzepte, bei denen diese Quantenphänomene vernachlässigt werden dürfen, als *klassisch* (vgl. [13], S.1).

In der klassischen Mechanik werden Systeme, die eine große Anzahl an Teilchen aufweisen, ebenso nicht behandelt. Deren physikalische Betrachtung erfolgt im Rahmen der Thermodynamik bzw. der statistischen Physik (vgl. [13], S.5).

Der erste Physiker, dem eine einheitliche Beschreibung der Bewegungsformen im Rahmen der klassischen Mechanik gelang, war Isaac Newton, welcher Ende des 17. Jahrhunderts lebte. Wie schon erwähnt, beruhen jene Konzepte auf dem Phänomen der Beschleunigung, die von einer Kraft oder mehreren Kräften hervorgerufen wird. Eine Weiterentwicklung dieser (mathematischen) Beschreibungen erfolgte im 18. bzw. 19. Jahrhundert. Mithilfe des Lagrange- bzw. des Hamiltonformalismus gelang es nun auch komplexere Bewegungsvorgänge zu beschreiben und zu exaktifizieren.

Im Laufe der Entwicklung der Naturwissenschaften, wie der Physik, wurde die Mathematik zu jenem Instrument, das am besten geeignet ist, um Gesetzmäßigkeiten zu formulieren und zu beweisen sowie Theorien weiter zu entwickeln. Ein tiefes Verständnis der Physik wird grundsätzlich dann möglich, wenn ebenso die Mathematik hinter einem bestimmten Phänomen erkannt wird. Das bedeutet zugleich, dass im Rahmen des Physikunterrichts unterschiedliche erlernte Themen des Mathematikunterrichts Anwendung finden (vgl. [5], S.1).

Um nun eine Korrelation der physikalischen Themengebiete der AHS Oberstufe mit den geforderten mathematischen Kenntnissen erkennen zu können, wird im nächsten Kapitel näher auf die Lehrpläne für Physik und Mathematik eingegangen.

1.1 Mechanik in der Schule

Der Lehrplan für Physik für die AHS Oberstufe beinhaltet alle physikalischen Themengebiete, die im Laufe des Physikunterrichts besprochen werden sollen. Um feststellen zu können, welche konkreten Themengebiete der klassischen Mechanik in der AHS Oberstufe unterrichtet werden sollen, werden nun Inhalte des Lehrplans angeführt.

1.1.1 Didaktische Grundsätze

Bereits unter „didaktische Grundsätze“ findet man einen Verweis, dass der Hauptfokus des Physikunterrichts in der 5. und 6. Klasse auf dem Bereich der klassischen Physik liegt. Hier sollen grundlegende Konzepte von den SchülerInnen erworben werden. Diese stellen die Basis, um die Prinzipien der modernen Physik, die zentrales Thema der 7. und 8. Klasse darstellen, verstehen zu können (vgl. [8], S.2).

In demselben Teil des Lehrplans wird konkret auf die Mathematik in der Physik Bezug genommen:

„Mathematisierung als spezifische physikalische Arbeitsweise bedeutet das Durchlaufen verschiedener Stufen zunehmender Abstraktion von der Gegenstandsebene über bildliche, sprachliche und symbolische Ebenen zur formal-mathematischen Ebene. Für das Verständnis sind die nichtformalen Ebenen wichtig, während der mathematischen Ebene für die Anwendung (Vorhersage) besondere Bedeutung zukommt“ ([8], S.3).

Das bedeutet, dass die einzelnen Themengebiete in der Physik mit mathematischen Inhalten erklärt werden. Es wird beschrieben, dass die Verwendung der Mathematik zuerst bildlich und symbolisch stattfinden sollte. Je tiefer man jedoch in die Physik eintaucht, desto mehr mathematische Abstraktion ist gefordert, um Inhalte zu verstehen und erklären zu können. Zusammengefasst bedeutet das, dass Physik und Mathematik im Unterricht stark miteinander verbunden sind (vgl. [8], S.3).

1.1.2 Lehrstoff

Die physikalischen Bildungsziele, die in der 5. und 6. Klasse zu erreichen sind, beschäftigen sich einerseits mit klassischer Mechanik, Elektrizitätslehre, Wärmelehre, Schwingungen und Wellen (vgl. [8], S.3).

Die konkreten Themen zur klassischen Mechanik aus dem Physiklehrplan lauten:

„Die Schülerinnen und Schüler sollen folgende physikalische Bildungsziele erreichen:

- (...)
- *mit Hilfe der Bewegungslehre (Relativität von Ruhe und Bewegung, Bewegungsänderung: Energieumsatz und Kräfte, geradlinige und kreisförmige Bewegung, Impuls und Drehimpuls, Modell der eindimensionalen harmonischen Schwingung) Verständnis für Vorgänge, beispielsweise im Verkehrsgeschehen oder bei den Planetenbewegungen, entwickeln“ ([8], S.3).*

2 Mathematische Themengebiete in der AHS Oberstufe

In den folgenden Abschnitten werden die mathematischen Themengebiete aus dem Lehrplan für die AHS Oberstufe nach Klassen aufgeteilt und überblicksmäßig beschrieben.

2.1 5. Klasse

In der 5. Klasse sollen die folgenden mathematischen Inhalte vermittelt werden:

- *„Zahlen und Rechengesetze“*
Das Rechnen mit Zehnerpotenzen, Näherungswerten, Schranken und exakten Werten stellt ein zentrales Thema dar. Darüber hinaus wird auf die richtige Interpretation und das Aufstellen von Termen und deren Umformung eingegangen (vgl. [6], S.3f.).
- *„Gleichungen und Gleichungssysteme“*
Besonderer Fokus liegt im Aufstellen von linearen und quadratischen Gleichungen in einer Variable und dem Aufstellen und Interpretieren von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen. Anwendung sollen diese Inhalte in inner- und außermathematischen Bereichen finden (vgl. [6], S.4).
- *„Funktionen“*
Die wichtigsten Typen von reellen Funktionen in einer Variable sollen auf unterschiedliche Weise erfasst, beschrieben und untersucht werden. Dies soll durch Terme, Tabellen und Graphen gelingen. Darüber hinaus soll auf Proportionalitäten und Abhängigkeit von Größen eingegangen werden. Ein wichtiger Verweis liegt in der Anwendung von Funktionen in außermathematischen Bereichen (vgl. [6], S.4).
- *„Trigonometrie“*
Im Bereich der Trigonometrie sollen die Winkelfunktionen (Sinus, Cosinus und Tangens) für Winkel zwischen 0° und 360° definiert werden. Berechnungen mit den Winkelfunktionen und mittels Sinus- und Kosinussatz sollen an unterschiedlichen Figuren und Körpern durchgeführt werden. Neben den bereits bekannten kartesischen Koordinaten sollen nun auch die Polarkoordinaten kennen gelernt werden (vgl. [6], S.4).

- *„Vektoren und analytische Geometrie der Ebene“*

Im Bereich der Vektorrechnung werden SchülerInnen mit unterschiedlichen Aufgabenstellungen konfrontiert: Addieren von Vektoren, Multiplizieren von Vektoren mit einem Skalar, geometrische Veranschaulichungen, Berechnen von Einheitsvektoren und Normalvektoren, Ermittlung des Winkels zwischen Vektoren. Ebenso sollen Geraden durch die Parameterdarstellung oder durch Gleichungen aufgestellt und diese in Bezug auf deren gegenseitige Lage beschrieben werden. Eine wichtige Anwendung der Vektorrechnung besteht im Lösen von geometrischen Aufgaben (vgl. [6], S.4)

2.2 6. Klasse

Die 6. Klasse beschäftigt sich mit den folgenden mathematischen Themengebieten:

- *„Potenzen, Wurzeln, Logarithmen“*

Die Potenzrechnung soll mit natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Exponenten erfolgen. Dabei sollen Wurzeln und Logarithmen besprochen werden. Das Rechnen und Umformen von Termen erlangt nun größere Anwendung (vgl. [6], S.4.).

- *„Folgen“*

Die Untersuchung von rekursiven und expliziten Folgen beinhaltet Aufgaben zur Monotonie, Beschränktheit, Konvergenz und fordert das Berechnen eines Grenzwertes. Ebenso sollen Eigenschaften der arithmetischen und geometrischen Folgen beschrieben werden. Es folgt die Anwendung dieser spezieller Folgen in anwendungsorientierten Bereichen wie dem Geldwesen (vgl. [6], S.4).

- *„Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme“*

Gleichungssysteme mit drei linearen Gleichungen sollen in einer Variable gelöst werden. Ebenso sollen mit einfachen Ungleichungen Fallunterscheidungen, Abschätzungen und Umformungen durchgeführt werden (vgl. [6], S.4).

- *„Reelle Funktionen“*

Potenz-, Exponential-, Logarithmus- und Winkelfunktionen sollen auf Eigenschaften (Monotonie, Extremstellen, Symmetrie, Periodizität) und deren Beziehungen zueinander untersucht werden. Darüber hinaus soll der Differenzenquotient als Instrument zur Berechnung von Änderungsmaßen dienen. Durch Anwendung der Funktionen können kontinuierliche Prozesse beschrieben, Modelle verglichen und deren Grenzen erkannt werden (vgl. [6], S.4f.).

- *„Analytische Geometrie des Raumes“*

Jene Begriffe, die bereits in der 5. Klasse im Zusammenhang mit der analytischen Geometrie in der Ebene (zweidimensional) eingeführt wurden, sollen nun auf den Raum übertragen werden. Darüber hinaus kommt es zur Einführung des vektoriellen Produkts. Geraden und Ebenen sollen auf zwei unterschiedliche Arten (Parameterdarstellung und Gleichungen) beschrieben werden. Die Untersuchung von Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen stellt einen zentralen Punkt in diesem

Thema dar. Durch Einbeziehung der Elementargeometrie und Trigonometrie sollen geometrische und anwendungsorientierte Aufgaben gelöst werden (vgl. [6], S.5).

- „*Stochastik*“

Grundbegriffe und verschiedene Darstellungsmöglichkeiten der beschreibenden Statistik sollen geklärt werden. Wahrscheinlichkeiten werden durch relative Anteile, relative Häufigkeiten und als subjektives Vertrauen besprochen. Rechenaufgaben mit gegebenen Wahrscheinlichkeiten sollen mithilfe der Multiplikations- und Additionsregel durchgeführt werden. Ebenso sollen Aspekte zur bedingten Wahrscheinlichkeit kennen gelernt werden (vgl. [6], S.5).

2.3 7. Klasse

Folgende mathematische Themen stellen den Hauptfokus des Mathematikunterrichts in der 7. Klasse dar:

- „*Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen*“

Rechnungen zum Abspalten reeller Linearfaktoren von Polynomen sollen durchgeführt werden. Es soll vermittelt werden, dass es notwendig ist, die reellen Zahlen durch komplexe Zahlen zu erweitern. Dazu sollen Rechenregeln zu den komplexen Zahlen kennengelernt werden. Das Vertrautwerden mit dem Fundamentalsatz der Algebra bildet den Abschluss des Themengebietes (vgl. [6], S.5).

- „*Differentialrechnung*“

Im Rahmen der Differentialrechnung soll zuerst der Differentialquotient (Änderungsrate) ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate) als sein Grenzwert definiert werden. Die Deutung dieses Begriffs soll inner- und außermathematisch erfolgen (Sekanten-Tangenten-Steigung, Durchschnitts-Momentan-Geschwindigkeit usw.). Elementare Ableitungsfunktionen sollen erkannt und berechnet werden. Sowohl die Bedeutung der ersten als auch der zweiten Ableitungsfunktion soll in inner- und außermathematischen Bereichen Anwendung finden. Unterschiedliche Differentiationsregeln sollen zur Ableitung von Polynomfunktionen hergeleitet und schließlich gekonnt werden. Dazu sollen unterschiedliche Funktionen bezüglich ihrer Monotonie, Krümmung, Extrem- und Wendestellen untersucht werden. Unterschiedliche Extremwertaufgaben sollen gelöst und Grundbegriffe sowie Methoden der Differentialrechnung sollen präzisiert werden (z.B. Stetigkeit). Abschließend sollen unterschiedliche Anwendungen der Differentialrechnung besprochen werden (vgl. [6], S.5).

- „*Nichtlineare analytische Geometrie*“

Berechnungen von Kreisen, Kugeln und Kegelschnittslinien sollen durch Gleichungen erfolgen. Ebenso sollen in diesem Zusammenhang Lagebeziehungen untersucht und Kreise mit Geraden, Kreise mit Kreisen geschnitten werden. Zusätzlich ist die Berechnung von Tangenten an Kreise und Kegelschnitte gefordert (vgl. [6], S.5).

- „Stochastik“

Die Begriffe der diskreten Zufallsvariable und der Verteilung sollen besprochen werden. Zusammenhänge von relativen Häufigkeitsverteilungen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Mittelwert und Erwartungswert, der empirischen Varianz und Varianz sollen erklärt und durchdacht werden. Das Arbeiten mit diskreten Verteilungen wie der Binomialverteilung soll in anwendungsorientierten Bereichen erfolgen (vgl. [6], S.5).

2.4 8. Klasse

In der letzten, also der 8. Klasse der AHS, sollen folgende Inhalte der Mathematik vermittelt werden.:

- „Integralrechnung“

Die qualitative Berechnung von Integralen durch Deuten einer Summe von sehr kleinen Produkten soll als Einführung zur Integralrechnung fungieren. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Zusammenhang von Differenzieren und Integrieren) soll als „Höhepunkt“ der Analysis besprochen werden. Elementare Integrationsregeln sollen helfen, um bestimmte Integrale zu berechnen. Ebenso sollen die unterschiedlichen Deutungen des Integrals, wie Flächeninhalt, Volumen und deren physikalische Anwendungen, diskutiert werden (vgl. [6], S.6).

- „Dynamische Prozesse“

Unterschiedliche Systeme sollen mithilfe von Wirkungsdiagrammen, Flussdiagrammen, Differenzen und Differentialgleichungen (Lösen einfacher Differentialgleichungen) beschrieben werden. Dahingehend werden Systeme in ihrem dynamischen Verhalten untersucht (vgl. [6], S.6).

- „Stochastik“

Die Begriffe „stetige Zufallsvariable“ und „Verteilung“ sollen erklärt und kennen gelernt werden. Außerdem kommt es zu einer vertieften Anwendung der Normalverteilung in außermathematischen Gebieten. Den Abschluss der Stochastik bildet das Arbeiten mit statistischen Hypothesentests und Konfidenzintervallen (vgl. [6], S.6).

- „Wiederholung“

Das Ende der 8. Klasse setzt den Schwerpunkt auf die Vertiefung und Vernetzung der gelernten mathematischen Themengebiete (vgl. [6], S.6).

3 Buchanalyse

1 *Big Bang*

1.1 Allgemeines zur Buchreihe

Die Physikschulbuchreihe *Big Bang* (verfasst von Martin Apolin) besteht aus vier Büchern: *Big Bang 5*, *Big Bang 6*, *Big Bang 7* und *Big Bang 8*.

Die meisten Kapitel, die die klassische Mechanik thematisieren, findet man im Buch *Big Bang 5*. Dieses beinhaltet die Kapitel „Gedachte Singularität“, „Geradlinige Bewegungen“, „Zusammengesetzte Bewegungen“, „Newton mal drei“, „Arbeit und Energie“, „Impuls“ und „Rotationen“. Von der klassischen Mechanik abgesehen, befasst sich dieses Buch mit den Grundlagen der Arbeitsweisen in der Physik, den SI-Einheiten und dem Aufbau der Materie (vgl. [1], S.2).

Das Buch *Big Bang 6* beinhaltet die Kapitel „Von Aristoteles bis Kepler“ und „Newtons Gravitationsgesetz“, zwei Kapitel, die ebenso zur klassischen Mechanik zählen und auf die später näher eingegangen wird (vgl. [2], S.2).

Schwingungen und Wellen, die Thermodynamik und die Elektrizitätslehre bilden die zentralen physikalischen Themen in *Big Bang 6* (vgl. [2], S.2).

Das Buch *Big Bang 7* wird in vier physikalische Kapitel unterteilt, nämlich in die Quantenmechanik, die Elektrodynamik, das Klima und Chaos. Bei näherer Betrachtung stellt man fest, dass die Quantenmechanik und die Elektrodynamik sehr genau besprochen werden, weshalb hier der Schwerpunkt liegt. Auf Klima und Chaos wird nur auf wenigen Seiten näher eingegangen (vgl. [3], S.2).

Das Buch *Big Bang 8* ist geprägt von den physikalischen Inhalten zur Relativitätstheorie, Radioaktivität und der Energiegewinnung durch Kernreaktionen, der Teilchenphysik und der Astrophysik (vgl. [4], S.2).

1.2 Mathematische Inhalte in der klassischen Mechanik

Bevor *Big Bang 5* konkret mit Inhalten der klassischen Mechanik beginnt (Kapitel „Gedachte Singularität“), gibt es ein Kapitel („Tooltime“), das als Vorbereitung zur Mechanik dient (vgl. [1], S.34 ff.).

1.2.1 „Tooltime“

Bereits zu Beginn des Kapitels wird ein grundlegender mathematischer Schritt unternommen: Der Autor führt die Begriffe „Vektor“ und „Skalar“ einerseits mittels Definitionen, andererseits mittels Beispielen ein.

Die Definition eines Skalars lautet:

„Größen, die man nur durch eine Zahl beschreiben kann, nennt man Skalare“ ([1], S.34).

Als Beispiele für Skalare werden u.a. die Masse, Dichte, Energie und die Stoffmenge, also Größen ohne Richtung, angeführt (vgl. [1], S.34).

Die Definition eines Vektors erfolgt folgendermaßen:

„Größen mit Richtung nennt man Vektoren. Zu ihrer Beschreibung braucht man mehrere Zahlen“ ([1], S.34).

Beispiele für Vektoren sind u.a. die Kraft, Geschwindigkeit, das Gewicht und die Beschleunigung, also Größen, bei denen es ebenso auf die Richtung ankommt (vgl. [1], S.34). In diesem Zusammenhang wird in einer Infobox darauf verwiesen, dass in dem vorliegenden Schulbuch vektorielle Größen stets fett gedruckt werden, wie in Gleichung 3.1:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = (F_x | F_y | F_z) \quad (3.1)$$

Um die Länge einer vektoriellen Größe zu bestimmen, wird der Betrag eines Vektors benötigt. Dazu wird im Buch auf den Satz des Pythagoras verwiesen. Als Beispiel werden auf den folgenden Seiten Aufgaben mit Geschwindigkeiten und der Gewichtskraft vorgestellt und erläutert (vgl. [1], S.34 f.).

In diesem Zusammenhang wird ebenso darauf eingegangen, wann Vektoren gleich sind. Dazu dient folgende Erklärung:

„Zwei Vektoren sind nur dann gleich, wenn sie in allen Merkmalen übereinstimmen“ ([1], S.35).

Dies bedeutet also, dass zwei Vektoren nur dann gleich sind, wenn sie sowohl dieselbe Richtung als auch denselben Betrag besitzen. Abbildung 3.1 soll diesen Zusammenhang noch deutlicher zeigen. Es sind hier vier gleich lange Vektoren dargestellt, die zwar in ihrer Länge, jedoch nicht in ihrer Richtung übereinstimmen. Damit sind sie nicht gleich.

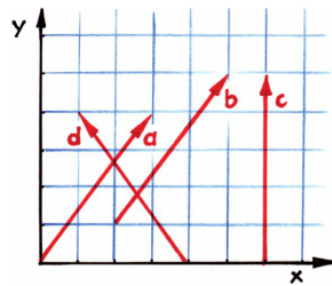


Abbildung 3.1: Vier gleich lange Vektoren [[1], S.35]

Nach Klärung der Berechnung der Länge eines Vektors und der Gleichheit von Vektoren wird auf die Vektoraddition näher eingegangen, da diese für weitere physikalische Aufgaben von Bedeutung ist. Abbildung 3.2 veranschaulicht die Vektoraddition von parallelen Vektoren (vgl. [1], S.36).

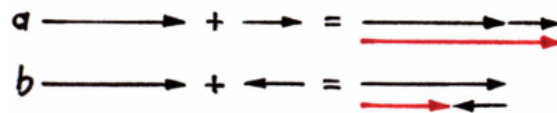


Abbildung 3.2: Vektoraddition - Grafische Addition von parallelen und antiparallelen Vektoren [[1], S.36]

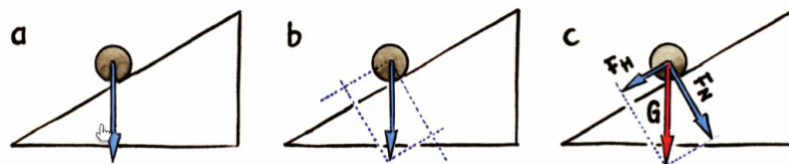
Das grafische Addieren von Vektoren im Zweidimensionalen wird sehr anwendungsorientiert gestaltet, nämlich am Beispiel von Kräften (siehe [1], S.37).

„Wenn alle Kräfte in einem System einander die Waage halten (wenn sie sich also aufheben), dann treten keine Beschleunigungen auf“ ([1], S.37).

Diese Einführung in die Vektorrechnung endet in der Erklärung, wie und weshalb Vektoren zerlegt werden. In einer Infobox am Rande wird eine theoretische Erklärung zur Zerlegung eines gegebenen Vektors in x- und y-Komponenten angeführt. ([1], S.38)

Wesentlich komplexer erweist sich die Zerlegung des Gewichtsvektors einer (auf einer Schrägen) nach unten rollenden Kugel in die Hangabtriebskraft F_H und in die Normalkraft F_N (vgl. [1], S.38).

Abbildung 3.3 soll diesen Zusammenhang darstellen.

Abbildung 3.3: Vektorzerlegung - Zerlegung des Gewichtsvektors in die Hangabtriebskraft F_H und in die Normalkraft F_N [[1], S.38].

Eine zweite Anwendung der Zerlegung von Vektoren findet man darin, indem erklärt wird, wieso es nicht möglich ist, ein Seil, auf dem ein Massestück hängt, völlig zu spannen (vgl. [1], S.39).

Die Ausgangssituation veranschaulicht Abbildung 3.4, eine vertiefende Erklärung liefert Abbildung 3.5.

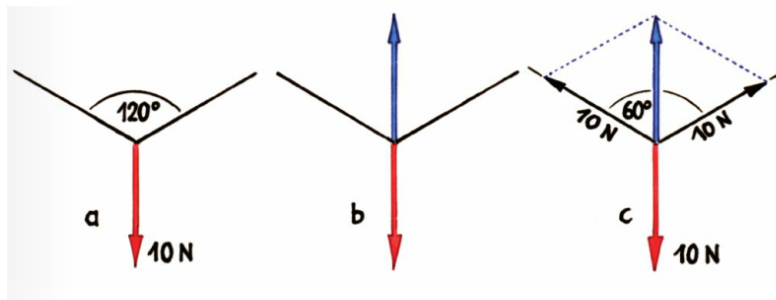


Abbildung 3.4: Massestück auf Seil [[1], S.39]

Da sich das Massestück in Ruhe befindet, muss es eine Kraft geben, die entgegengesetzt zur Gewichtskraft wirkt (blau). Diese Kraft kann in ihre Komponenten zerlegt werden (vgl. [1], S.39).

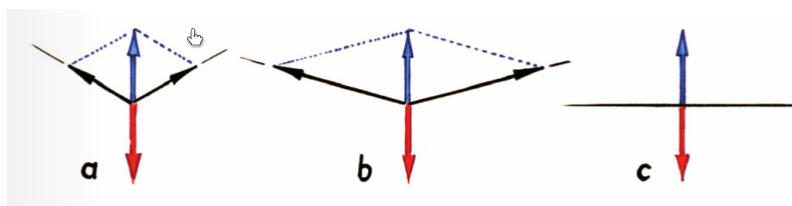


Abbildung 3.5: Spannen eines Seils [[1], S.39]

Wird das Seil stark gespannt, so wächst die benötigte Kraft (Komponenten des blauen Vektors) schnell an (vgl. Abbildung 3.5, b). Das heißt, dass die Kraft, mit der das Seil gespannt werden soll, unendlich groß werden müsste, bis das Seil vollständig gespannt ist. Dies veranschaulicht das unendlich breite Kräfteparallelogramm (vgl. Abbildung 3.5, c) (vgl. [1], S.39)

Abgesehen von dem zentralen Thema der *Vektorrechnung* findet man darüber hinaus noch Anwendungen im Rechnen mit *Zehnerpotenzen* und Inhalten der *Elementargeometrie* (vgl. Satz des Pythagoras und siehe [1], S.39).

1.2.2 „Gedachte Singularität“

Das Kapitel „Gedachte Singularität“ befasst sich mit der Definition und den Vereinfachungen des Körperschwerpunktes von Objekten.

Der Körperschwerpunkt wird eingeführt, indem auf ein regelmäßiges Dreieck verwiesen wird. Es wird beschrieben, dass man den Schwerpunkt dieser geometrischen Figur bestimmen kann, indem man ihre Schwerlinien kreuzt (vgl. [1], S.40).

Das Arbeiten mit geometrischen Figuren, wie dem Dreieck und dessen Schwerlinien, erinnert an mathematische Inhalte aus der *Elementargeometrie*.

Ein weiterführendes Anwendungsbeispiel findet sich im Stapeln von Büchern: Die Aufgabe lautet, wie weit man Bücher über die Tischkante schieben kann, ohne dass sie hinunterfallen. Abbildung 3.6 veranschaulicht die Aufgabenstellung (vgl. [1], S. 41).

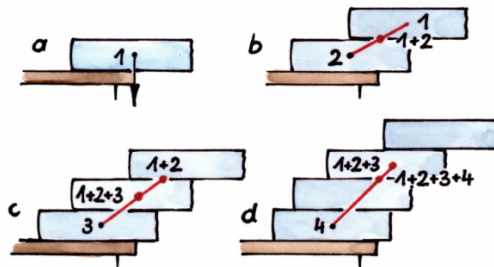


Abbildung 3.6: Bücher stapeln ([1], S.41)

Die Antwort auf die Problemstellung ist, dass der gemeinsame Körperschwerpunkt noch knapp über der Kante des Tisches liegen muss, damit die Bücher nicht zu Boden fallen. In diesem Zusammenhang wird in einer Infobox auf die harmonische Reihe verwiesen. Mit jedem Buch, das man auf den Stapel legt, verlagert sich der Körperschwerpunkt um die Hälfte der vorigen zurückgelegten Distanz (siehe Abbildung 3.6). Das lässt mit Gleichung 3.2 mathematisch beschreiben (vgl. [1], S.41).

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) \quad (3.2)$$

Der Klammerausdruck stellt die harmonische Reihe dar. Diese besitzt keinen Grenzwert. In diesem Zusammenhang erfolgt eine Aufgabenstellung, die sich damit beschäftigt, den Grenzwert der harmonischen Reihe mittels Computereinsatzes zu bestimmen ([1], S.48). Das Rechnen mit Reihen und das Bestimmen von Grenzwerten ist ein Teilgebiet der *Analysis*. Es stellt sich die Frage, ob es sinnvoll ist, solche Aufgaben in einem Physikbuch zu stellen, da zu dem Zeitpunkt noch keine etwaigen mathematischen Kenntnisse bei der Schülerin/beim Schüler vorliegen (vgl. [6], S.4).

Wichtige Beispiele zum Körperschwerpunkt lassen sich im Bereich des Sports finden. Das Rechnen mit *Zahlen und Maßeinheiten* ist vor allem in dieser Thematik (wie auch grundsätzlich beim physikalischen Rechnen) nicht wegzudenken. Im Zusammenhang mit Weit- und Hochsprung werden diese Umrechnungsschritte benötigt (vgl. [1], S.42f.).

Abbildung 3.7 zeigt zwei unterschiedliche Flugbahnen des Körperschwerpunktes beim Hochsprung. Es handelt sich hier um eine Art Vorstufe zu einem echten *Funktionsgraphen*. Man könnte erahnen, dass auf der Abzisse die Zeit aufgetragen ist, auf der Ordinate die Sprunghöhe. In den beiden dargestellten Diagrammen ist klar ersichtlich, dass beim Flop der Körperschwerpunkt des Sportlers tiefer liegt als beim Wälzer und so die zu überwindende Latte höher gelegt werden kann (vgl. [1], S.43).

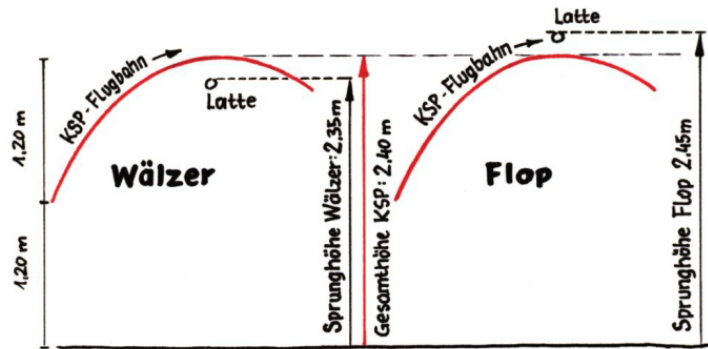


Abbildung 3.7: Hochsprung [[1], S.43]

Es finden sich noch weitere Anwendungsbeispiele aus dem Bereich des Sports, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll (siehe [1], S.42f.).

Weiterführend erfolgt eine Differenzierung zwischen stabilem, labilem und indifferentem Gleichgewicht. Diese drei Zustände des Gleichgewichts werden anhand der Hangabtriebskraft, die auf eine Kugel wirkt (siehe dazu Kapitel „Tooltime“), erklärt. Es wird hier wiederum auf die *Vektorzerlegung* der Gewichtskraft (siehe Abbildung 3.8) in die Hangabtriebskraft und Normalkraft verwiesen (vgl. [1], S.44).

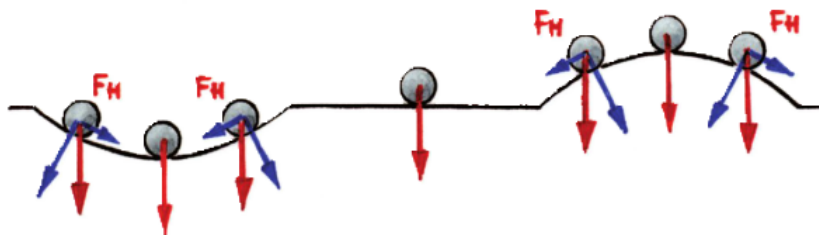


Abbildung 3.8: Drei Arten des Gleichgewichts [[1], S.44]

Den Abschluss bildet die Erklärung des Auftriebs von Körpern aus Sicht des Körperschwerpunktes eines schwimmenden Körpers in einer Flüssigkeit. Abbildung 3.9 stellt einen Körper in einem Gefäß auf verschiedenen Höhen dar. Es wird in einem *Diagramm* die Höhe des Gesamtkörperschwerpunktes gegen die Höhe des Würfelkörperschwerpunktes aufgetragen (vgl. [1], S.47).

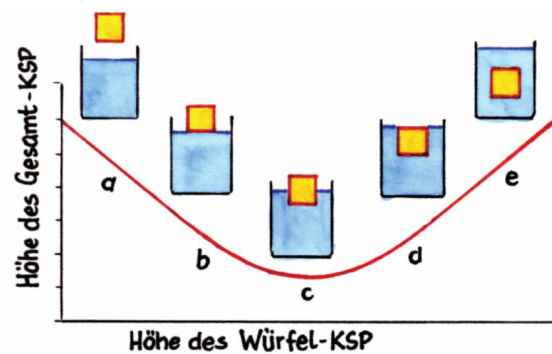


Abbildung 3.9: Darstellung des Auftriebs ([1], S.47)

Die Beschreibung zu Abbildung 3.9 lautet:

„Veränderung der Höhe des gemeinsamen KSP, wenn du einen Gegenstand eintauchst, der die halbe Dichte von Wasser hat. Bei b berührt er gerade die Oberfläche, und bei d taucht er ganz unter. Wenn er zur Hälfte eintaucht (c), ist die Höhe des Gesamt-KSP ein Minimum. Wenn du ihn noch weiter untertauchst, dann steigt der Gesamt-KSP wieder an. Deshalb stellt sich Zustand c von selbst ein“ ([1], S.47).

Abbildung 3.9 stellt eher eine Veranschaulichung der Situation dar als einen aussagekräftigen, mathematisch sinnvollen Funktionsgraphen. Ohne Lesen des Textes ist es schwierig, die Grafik sinnhaft zu interpretieren.

„Ein schwimmender Gegenstand befindet sich immer im stabilen Gleichgewicht. (...) Warum sinkt ein Gegenstand, dessen Dichte größer ist als Wasser, ganz auf den Boden? Weil erst am Boden der Gesamt-KSP ein Minimum hat. Alle Systeme stellen sich auf Dauer so ein, dass E_p ein Minimum wird“ ([1], S.47).

Der Auftrieb von Körpern in Flüssigkeiten wird also einerseits über den Körperschwerpunkt von Objekten besprochen, andererseits wird in diesem Zusammenhang das Prinzip des Archimedes erläutert (vgl. [1], S.48).

$$p = \frac{G}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho Ahg}{A} = \rho hg \Rightarrow p \propto h \quad (3.3)$$

In Gleichung 3.3 wird der Druck als Kraft pro Fläche angegeben; die Formeln für die Gewichtskraft G und die Masse m werden jedoch vorausgesetzt. Dies könnte sich für viele SchülerInnen als problematisch erweisen. Mathematisch erfordert dieser Zugang Grundkenntnisse aus dem Thema *Gleichungen und Formeln und funktionalen Abhängigkeiten*. Im Text wird die lineare Abhängigkeit des Druckes von der Tiefe angeführt:

„Der Druck nimmt somit linear mit der Tiefe zu, (...)“ ([1], S.48).

1.2.3 „Geradlinige Bewegungen“

Das Kapitel „Geradlinige Bewegungen“ befasst sich, wie der Name schon verrät, mit den möglichen Arten geradliniger Bewegungen. Die Vorgehensweise in dem Kapitel ist, dass vom einfachen Fall (der unbeschleunigten bzw. gleichförmigen Bewegung) ausgegangen und danach die komplexere, nämlich die beschleunigte/ungleichförmige Bewegung, beschrieben wird. Diese Bewegungsart wird unterteilt in die gleichmäßig und die ungleichmäßig beschleunigte Bewegung.

In der physikalischen Betrachtung der Geschwindigkeit wird direkt auf die Mathematik verwiesen. Es wird von einem Tachometer eines Autos ausgegangen. Auf diesem liest man die Einheit km/h ab. Dieses Verhältnis der Einheiten km und h verrät auch den Zusammenhang der zugehörigen Größen, nämlich Weg pro Zeit. Das heißt, dass die Geschwindigkeit mathematisch als das Verhältnis von Weg und Zeit definiert wird. Gleichung 3.4 stellt diesen Zusammenhang dar (vgl. [1], S.51).

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta s = v \cdot \Delta t \quad (3.4)$$

Darüber hinaus wird auch auf die gängigen Einheiten der Geschwindigkeit - km/h und m/s - und deren Umrechnung verwiesen. Die Erklärung zur Umrechnung der Einheiten ineinander ist im Text klar ersichtlich:

„Eine Stunde hat 60 Minuten zu je 60 Sekunden, also 3600 Sekunden. Wenn du dich mit 1 m/s bewegst, dann legst du also 3600 m in einer Stunde zurück, und das sind 3.6 km“ ([1], S.51).

Darüber hinaus wird das in Worten Gefasste mithilfe von *Formeln* mittels Gleichung 3.5 und Gleichung 3.6 mathematisch beschrieben.

$$1 \text{ m/s} = 3.6 \text{ km/h} \quad (3.5)$$

$$1 \text{ km/h} = 1 \text{ m/s} : 3.6 \approx 0.28 \text{ ms} \quad (3.6)$$

Anhand von Tabelle 3.1 werden verschiedene Geschwindigkeitswerte (in m/s) angeführt. Für viele SchülerInnen ist die Einheit m/s wesentlich abstrakter als km/h . Die Tabelle (samt Beispiele) kann dazu dienen, die ungewöhnlichere Einheit m/s den Lernenden näher zu bringen bzw. dient als Übung, um festzustellen, ob berechnete Geschwindigkeitswerte für spezielle Bewegungen überhaupt möglich sind. Es wird ebenso auf die Verwendung von *Größenordnungen* verwiesen:

„Du siehst, dass zwischen dem Wachstum deiner Haare und der Lichtgeschwindigkeit beachtliche 18 Größenordnungen liegen“ ([1], S.52).

Beispiel	m/s	Kommentar
Haarwuchs	$4 \cdot 10^{-9}$	umgerechnet 1 mm in drei Tagen
Weinbergschnecke	$3.5 \cdot 10^{-5}$	entspricht etwa 3 m pro Stunde
Mensch, Gehen	1	Bummeltempo
Mensch, Marathon	5.19/5.63	umgerechnet 1 mm errechnete Durchschnittsgeschwindigkeit beim Marathonweltrekord Frauen/Männer
Mensch, Sprint	12.5	maximale gemessene Geschwindigkeit beim 100m-Sprint der Männer; entspricht über 44 km/h
Gepard	28 bis 33	etwas 100 bis 120 km/h; schnellstes Säugetier
Schall in Luft, 20°C	342	Schall benötigt in der Luft etwa 3 Sekunden pro km. v ist von der Temperatur abhängig.
Satellit	$7.9 \cdot 10^3$	Geschwindigkeit für Kreisbahn um die Erde
Satellit	$1.12 \cdot 10^4$	Geschwindigkeit, um Erde zu verlassen; ist um den Faktor 10^4 kleiner als c
Lichtgeschwindigkeit c	$3 \cdot 10^8$	höchstmögliche Geschwindigkeit im gesamten Universum

Tabelle 3.1: Beispiele zu Geschwindigkeiten [[1], S.51]

Zur weiteren Interpretation und Darstellung von Bewegungen werden verschiedene *Geschwindigkeitsdiagramme* angeführt, u.a. das Weg-Weg-Diagramm, das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm und das Weg-Zeit-Diagramm (vgl. [1], S.53).

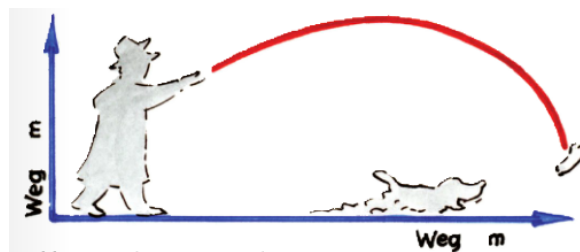


Abbildung 3.10: Weg-Weg-Diagramm [[1], S.53]

Abbildung 3.10 zeigt einen Funktionsgraphen in einem Weg-Weg-Diagramm. Hier sieht man direkt die Bewegung, die ein Körper ausführt (vgl. [1], S.53).

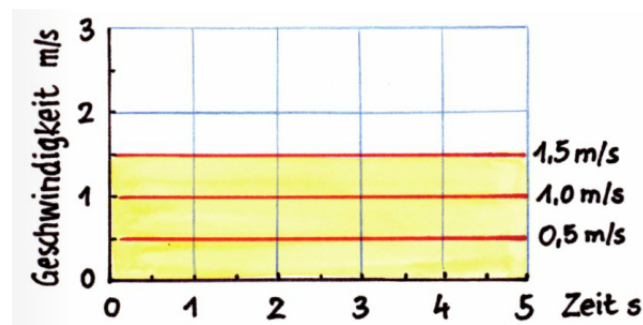


Abbildung 3.11: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm [[1], S.53]

In Abbildung 3.11 ist der Funktionsgraph einer Bewegung in einem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm dargestellt. Hier wird ebenso danach gefragt, welchen Weg ein Objekt in 5 s zurücklegt, wenn es sich mit 1.5 m/s bewegt. Dazu muss die *Fläche* unter der Kurve betrachtet werden (vgl. [1], S.53).

$$1.5 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s} = 7.5 \text{ m} \quad (3.7)$$

Durch Gleichung 3.7 erhält man einen Wert für diese zu berechnende Fläche. In diesem Zusammenhang wird auch auf Gleichung 3.4 in Worten verwiesen, indem geschlussfolgert wird, dass die Multiplikation von Geschwindigkeit und Zeit die zurückgelegte Strecke ergibt (vgl. [1], S.53).

Hier werden bereits - ohne mathematisch darauf einzugehen bzw. den Begriff zu erwähnen - Elemente der *Integralrechnung* verwendet.

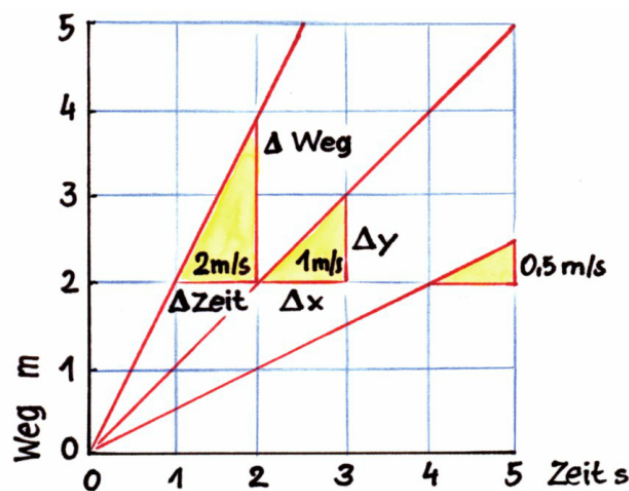


Abbildung 3.12: Weg-Zeit-Diagramm [[1], S.53]

Abbildung 3.12 stellt die Bewegung in einem Weg-Zeit-Diagramm dar. Es wird erläutert, dass am Anstieg der Geraden in einem Weg-Zeit-Diagramm die Geschwindigkeit der Bewegung ersichtlich ist bzw. abgelesen werden kann. Wieder wird auf die Formel Gleichung 3.4 verwiesen (vgl. [1], S.53).

Zusätzlich wird erwähnt, dass sowohl aus dem Weg-Zeit-Diagramm als auch aus dem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm dieselben Eigenschaften einer Bewegung entnommen werden können. Für den praktischen Gebrauch bzw. für die Darstellung einer speziellen Bewegung eignet sich einmal das eine, einmal das andere besser. Von der Verwendung eines Weg-Weg-Diagramms wird, wie schon erwähnt, abgeraten (vgl. [1], S.53).

Um gleichmäßig beschleunigte Bewegungen physikalisch erklären zu können, ist es notwendig, eine neue Größe kennen zu lernen, nämlich die Beschleunigung. Die physikalische Einführung der Beschleunigung folgt auf zwei Arten: durch ein Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm und durch eine Formel.

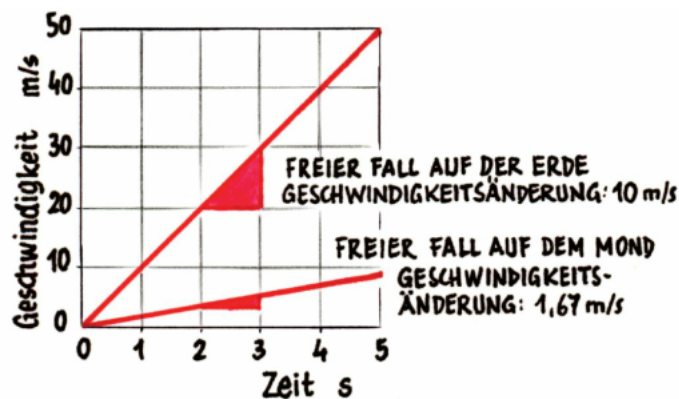


Abbildung 3.13: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ([1], S.54)

Abbildung 3.13 zeigt ein Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm für frei fallende Gegenstände einerseits auf der Erde, andererseits auf dem Mond. Zur Beschleunigung werden folgende Aussagen getätigt:

„Der Anstieg einer Geraden im v - t -Diagramm ist ein Maß für die Geschwindigkeitsänderung, also für die Beschleunigung“ ([1], S.54).

„Allgemein ist die Beschleunigung als Geschwindigkeitsänderung pro Zeit definiert“ ([1], S.54).

In Abbildung 3.13 ist jedoch irritierend, dass der Anstieg als Fläche markiert ist. Die Beschleunigung als *Differenzenquotient* aus Geschwindigkeit und Zeitdauer ist damit nicht klar ersichtlich.

Als Nächstes wird die Einheit der Beschleunigung m/s^2 erläutert. Nimmt eine Geschwindigkeit pro Sekunde um z.B. 10 m/s zu, so beträgt die Geschwindigkeitsänderung (und damit eben die Beschleunigung) 10 m/s^2 . Dieser Gedankengang wird durch Gleichung 3.8 mathematisch zusammengefasst (vgl. [1], S.54).

$$10\text{ m/s pro Sekunde} = 10\text{ (m/s)/s} = 10\text{ m/s}^2 \quad (3.8)$$

Erst nach der Betrachtung des *Diagramms* (vgl. Abbildung 3.13) folgt die Bekanntgabe der *Formel* zur Berechnung der Beschleunigung (vgl. [1], S.55).

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta v = a \cdot \Delta t \quad (3.9)$$

Durch Gleichung 3.9 wird noch einmal der klare Verweis auf den *Differenzenquotienten* ersichtlich.

Nach Einführung und Erläuterung der Beschleunigung wird der Gedanke der gleichmäßig beschleunigten Bewegung weitergetragen. Es wird die Frage gestellt, wie der zurückgelegte Weg beim freien Fall, als Beispiel für diese Art der Bewegung, zu- bzw. abnimmt.

Im Rahmen dieser Erklärung wird sehr mathematisch vorgegangen. In Abbildung 3.14 ist ein Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm dargestellt, in dem eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung eine Gerade mit (bekannter) Steigung ist. Ohne auf weitere *Integralrechnung* einzugehen, wird erläutert, dass in einem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm die Fläche unter der Kurve den zurückgelegten Weg angibt (vgl. [1], S.55).

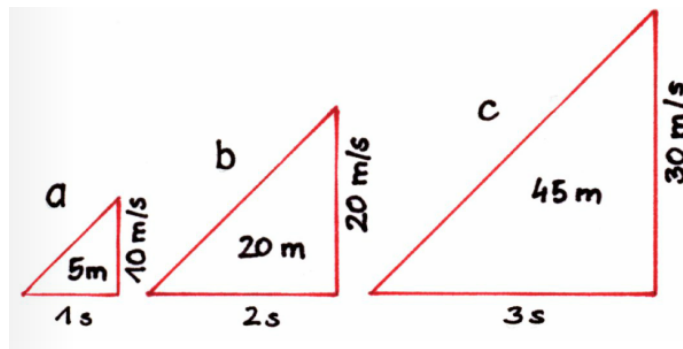


Abbildung 3.14: Geschwindigkeits-Zeit-Darstellung [[1], S.55]

Den Bezug zur *Integralrechnung* erkennt man auch an der Bildbeschreibung:

„Die Fläche unter der *v-t*-Kurve ergibt die Fallstrecke in Metern, also $(1 \text{ s} \cdot 10 \text{ m/s}) : 2 = 5 \text{ m}$ usw.“ ([1], S.55).

Um zu verdeutlichen, dass der zurückgelegte Weg bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung nicht mehr linear mit der Zeit wächst, sondern quadratisch, werden die aus Abbildung 3.14 berechneten Werte in ein Weg-Zeit-Diagramm eingetragen. Die Ordinate ist umgedreht, damit die Falltiefe verdeutlicht werden kann (vgl. [1], S.55).

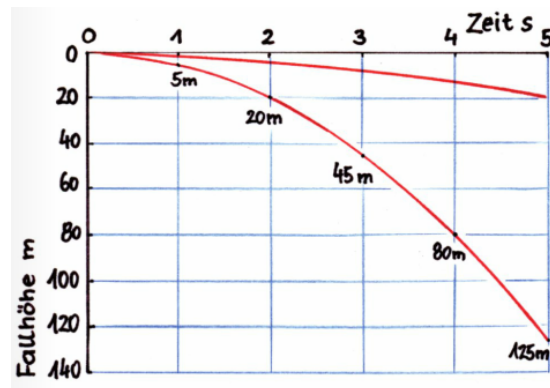


Abbildung 3.15: Weg-Zeit-Diagramm eines frei fallenden Körpers auf der Erde und auf dem Mond [[1], S.55]

Weitaus komplexer erweist sich nun die Hinführung zur Gleichung für die Falltiefe bzw. für die zurückgelegte Strecke einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Eine grafische Ableitung dazu erfolgt durch Abbildung 3.16 und der Verwendung von Gleichung 3.9.

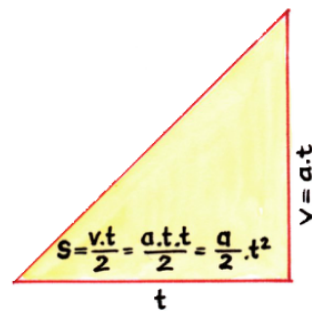


Abbildung 3.16: Grafische Ableitung der Gleichung für die Falltiefe [[1], S.55]

Hier wird auf eine Gerade in einem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm und das daraus entstandene *Dreieck* (siehe Abbildung 3.16) für das Maß der Falltiefe beim freien Fall (resp. des zurückgelegten Weges einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung) verwiesen. Nach kurzer Rechnung erhält man Gleichung 3.10 (vgl. [1], S.55).

$$s = \frac{v \cdot t}{2} = \frac{a \cdot t \cdot t}{2} = \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \quad (3.10)$$

Es wird hier nicht konkret auf die *funktionale Abhängigkeit* des Weges von der Zeit in Form eines Diagramms eingegangen, d.h. dass keine Parabel zur Veranschaulichung des zurückgelegten Weges bei derartigen Bewegungen erwähnt wird. In der Zusammenfassung des Kapitels wird jedoch ergänzt:

„Die Falltiefe wächst mit dem Quadrat der Fallzeit“ ([1], S.56).

Es wird eine Denkaufgabe gestellt, nämlich, wie man die Fallhöhe vergrößern muss, damit sich die Aufprallgeschwindigkeit am Boden nach dem freien Fall verdoppelt. Diese

Frage kann zu diesem Zeitpunkt rein mathematisch noch nicht mit einer Formel beantwortet werden. Deshalb wird, um zur Antwort zu gelangen, auf Abbildung 3.14 verwiesen (vgl. [1], S.55).

Diese Aufgabe dient eher dem Festigen des physikalischen Gelernten. Um die Frage richtig zu beantworten, ist die Anwendung der *Flächenformel des Dreiecks* gefordert. (Man muss die Höhe vervierfachen.)

Zusammengefasst werden in diesem Kapitel mathematische Grundkenntnisse aus dem Bereich der *Geometrie* (Dreiecksberechnung, usw.), ebenso aus dem indirekten Verständnis von *Differential- und Integralrechnung* gefordert. Die Hinführung zur Berechnung der zurückgelegten Wegstrecke bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung wird geprägt durch das Erkennen von *funktionalen Abhängigkeiten* und durch die *Umwandlung von Gleichungen und Formeln*.

Als zweites Beispiel für gleichmäßig beschleunigte Bewegungen wird der Bremsweg erläutert. Im Unterschied zum freien Fall handelt es sich hierbei um eine verzögerte Bewegung. In Abbildung 3.17 werden daher unterschiedliche Vektoren für Beschleunigungen angeführt. Hier wird besonders auf parallele und antiparallele Beschleunigungsvektoren eingegangen: Eine positive Beschleunigung tritt dann auf, wenn der Beschleunigungsvektor parallel zum Geschwindigkeitsvektor liegt. Man spricht von einer negativen Beschleunigung, wenn der Beschleunigungsvektor antiparallel zum Geschwindigkeitsvektor liegt (vgl. [1], S.56).

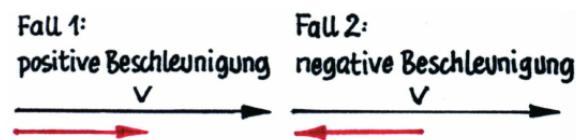


Abbildung 3.17: Beispiele für positive und negative Beschleunigung [[1], S.56]

Eine Anwendung des Bremsweges findet sich in der folgenden Aufgabe:

„Bei einer Sprengung fliegt ein Stein genau senkrecht nach oben und schlägt nach 6 Sekunden wieder auf. Wie hoch ist der Stein geflogen? Wie groß ist die Beschleunigung, wenn der Stein am höchsten Punkt stillsteht? Null?“ ([1], S.57).

Um die Frage beantworten zu können, wird die Bewegung einerseits anhand einer Parabel (Flugparabel) in einem Weg-Zeit-Diagramm veranschaulicht (siehe Abbildung 3.18), andererseits wird der Bewegungsvorgang in zwei Teile zerlegt: In die positiv beschleunigte Bewegung, der der Stein beim Abwurf folgt, bis er auf dem höchsten Punkt angekommen ist, und in die negativ beschleunigte Bewegung (= freier Fall), die der Stein vom höchsten Punkt der Bewegung bis zum Aufschlag am Boden durchmacht (vgl. [1], S.57).

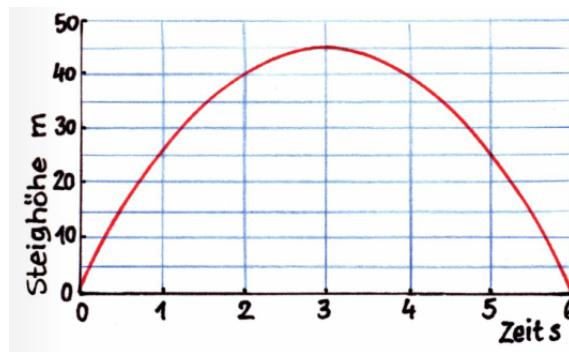


Abbildung 3.18: Weg-Zeit-Diagramm eines senkrechten Wurfes [[1], S.57]

In Abbildung 3.18 ist zu erkennen, dass der aufsteigende und der absteigende Teil symmetrisch sind.

Die Antwort auf die obige Frage wäre nun, dass die Geschwindigkeit am höchsten Punkt des Wurfes 0 m/s beträgt, die Beschleunigung jedoch wie an jedem Punkt des Wurfes $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ ist und nach unten zeigt. Unter Verwendung von Gleichung 3.10 mit $t = 3 \text{ s}$ (Zeit, nach der der Stein den höchsten Punkt erreicht hat) ergibt das eine maximale Flughöhe von 45 m . Ebenso folgt daraus, dass der Stein mit 30 m/s am Boden aufschlägt und aufgrund der Symmetrie der Bewegung auch mit derselben Geschwindigkeit weggeschleudert wurde (vgl. [1], S.57).

Um die obige Aufgabenstellung lösen zu können, ist hohe mathematische Abstraktion notwendig, da viele verschiedene mathematische Themengebiete verknüpft sind, u.a. *funktionale Abhängigkeiten, Symmetrien, Vektorrechnung, Formeln und Gleichungen*.

Schlussendlich liefert Apolin eine Formel auf die bereits zuvor gelieferte Erkenntnis, dass der Bremsweg bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung quadratisch mit der Geschwindigkeit wächst. Eine Veranschaulichung liefert Abbildung 3.19, in der die Kurve diesen quadratischen Zusammenhang darstellt (vgl. [1], S.58).

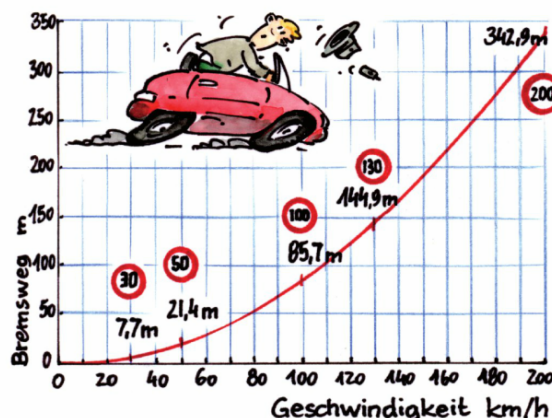


Abbildung 3.19: Bremsweg in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit [[1], S.58]

Um auf die Aussage „Der Bremsweg wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit“ zu gelangen, argumentiert Apolin vorerst mit bereits festgestellten Tatsachen (freier Fall - positive Beschleunigung) und modelliert/transferiert auf den gegebenen Fall (Bremsweg - negative Beschleunigung) (vgl. [1], S.57).

Die Herleitung von Gleichung 3.11 erfolgt mit Gleichung 3.9 und Gleichung 3.10 (vgl. [1], S.58).

$$s = \frac{a}{2} \frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a} \quad (3.11)$$

Physikalisches Experimentieren wird durch Messung des Bremsweges beim Radfahren gefordert. Anhand einer fertigen Experimentieranleitung können sich SchülerInnen selbstständig davon überzeugen, dass der Bremsweg proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist (vgl. [1], S.59).

Um eine mathematisch korrekte Auswertung der Daten durchführen zu können, benötigen die SchülerInnen Kenntnisse im Messen von Strecken, dem Rechnen mit Mittelwerten und Standardabweichungen, Erstellen von Diagrammen und der Näherung von Funktionen durch Polynome.

Apolin liefert, indem er das Fallen eines Regentropfens zur Erde näher erläutert, ein Beispiel für eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung. Es wird darauf verwiesen, dass die Beschleunigung des Tropfens aufgrund des Luftwiderstandes während seines Falls kleiner wird. Gleichung 3.12 liefert die Formel zur Berechnung der Luftwiderstandskraft frei fallender Objekte (vgl. [1], S.60f.).

$$F_w = \frac{1}{2} c_w \varrho A v^2 \quad (3.12)$$

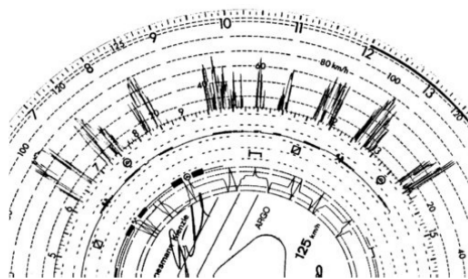
Im Zusammenhang mit Gleichung 3.12 wird konkret auf die auftretenden Größen eingegangen: Was bedeutet eine Verdoppelung von c_w , ϱ oder A bzw. von v ? Um diese oder ähnliche Fragen richtig beantworten zu können, müssen SchülerInnen die *funktionalen Abhängigkeiten* der Luftwiderstandskraft von den einzelnen Größen verstehen (vgl. [1], S.61).

Des Weiteren taucht die Frage auf, wann ein Körper beim freien Fall seine Maximalgeschwindigkeit erreicht. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Gewichtskraft $G = m \cdot g$ gleich der Luftwiderstandskraft (Gleichung 3.12) ist (vgl. [1], S.61).

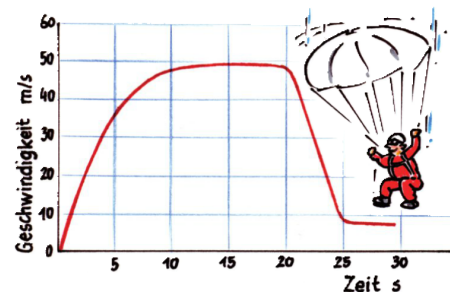
$$\begin{aligned} F_W &= G \\ \frac{1}{2} c_w \varrho A v^2 &= mg \\ v &= \sqrt{\frac{2mg}{c_w \varrho A}} \end{aligned}$$

Um diese Problemstellung zu lösen, benötigt man Kenntnisse mit dem Arbeiten mit *Formeln und Gleichungen*.

Das Fallschirmspringen und der Fahrtenschreiber (beispielsweise von LKWs) liefern weitere Beispiele für ungleichmäßig beschleunigte Bewegungen. Diese werden anhand von *Diagrammen* (siehe Abbildung 3.20 dargestellt. Einzelne Fragen beziehen sich auf jene Diagramme (vgl. [1], S.62).



(a) Fahrtenschreiber eines LKWs



(b) Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm eines Fallschirmsprungs

Abbildung 3.20: Beispiele für ungleichmäßig beschleunigte Bewegungen [[1], S.62]

Das Kapitel „Geradlinige Bewegung“ endet mit der Unterscheidung von Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit. Zuerst erfolgt eine qualitative Hinführung zu den beiden unterschiedlichen Geschwindigkeitsbegriffen durch Verweis auf die Radarkontrolle als Beispiel für die Messung der Momentangeschwindigkeit und auf die Section Control als Beispiel für die Messung der Durchschnittsgeschwindigkeit. Beim Radar wird die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt gemessen. Im Gegensatz dazu wird bei der Section Control zu zwei Zeitpunkten (z.B. Anfang und Ende eines Tunnels) die Zeit gemessen und auf die Durchschnittsgeschwindigkeit durch die Division von der bekannten Fahrlänge durch die gemessene Zeit zurückgerechnet (vgl. [1], S.63).

Einen anderen Blickwinkel liefert die Betrachtung der Laufgeschwindigkeit beim 100m- bzw. 200m-Lauf. Es stellt sich die Frage, welcher Weltrekordhalter (jener, der auf einer Strecke von 100 m, oder jener, der auf einer Strecke von 200 m schneller ist) das höhere Tempo benötigt, um die gegebene Strecke in möglichst kurzer Zeit zurückzulegen. Hierzu ist die Interpretation des Diagramms aus Abbildung 3.21 notwendig: Es kommt darauf an, ob man die Momentan- oder die Durchschnittsgeschwindigkeit betrachtet, um zu bestimmen, welcher Mensch das höhere Tempo aufweist (vgl. [1], S.63).

Da zuvor noch kein Geschwindigkeits-Weg-Diagramm wie jenes aus Abbildung 3.21 beschrieben wurde, könnte jenes aus Abbildung 3.21 irreführend wirken. Ein Weg-Zeit-Diagramm zur Beschreibung der beiden Geschwindigkeitsverläufe könnte hilfreicher sein, da mit konkreten Geschwindigkeiten gerechnet werden könnte.

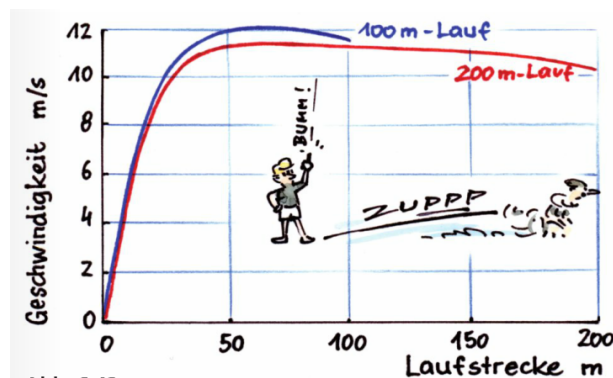


Abbildung 3.21: Geschwindigkeits-Weg-Diagramm [[1], S.63]

Mathematisch gesehen, beinhaltet die Berechnung der Durchschnittsgeschwindigkeit die Berechnung des *Differenzenquotienten* (in einem s-t-Diagramm). Die Momentangeschwindigkeit ergibt sich daraus, dass das Zeitintervall minimiert wird (gegen Null strebt) und somit ein Grenzwert der Geschwindigkeit berechnet wird. SchülerInnen der AHS lernen diese Vorgehensweise in der 7. Klasse im Zusammenhang mit dem *Differentialquotienten* kennen. Laut dem Lehrplan der 7. Klasse AHS Oberstufe gehört das Deuten der Ableitung in inner- und außermathematischen Anwendungen zu den Lehrzielen (vgl. [6], S.5).

Die Durchschnittsgeschwindigkeit wird in *Big Bang 5* nicht über den Differenzenquotienten eingeführt. Dieser sollte jedoch bei den SchülerInnen der 5. Klasse bekannt sein, da er in Mathematik im Bereich *lineare Funktionen* (4. und 5. Klasse) vorkommt (z.B. Ablesen der Geschwindigkeit als Steigung einer Geraden durch ein Steigungsdreieck) (vgl. [18], S.7 und [6], S.5).

Diverse Rechenaufgaben zu den besprochenen Inhalten findet man am Ende dieses Kapitels, auf die hier aber nicht näher eingegangen wird (vgl. [1], S.64).

1.2.4 „Zusammengesetzte Bewegungen“

In dem Kapitel „Zusammengesetzte Bewegungen“ geht es um die Überlagerung von Bewegungen. Wie schon in den Kapiteln zuvor werden Geschwindigkeiten als Vektoren betrachtet. Die Überlagerung von Bewegungen wird anhand von horizontalen und schiefen Würfeln betrachtet.

Auch in diesem Kapitel ist erkennbar, dass viele mathematische Inhalte aus dem Bereich der *Vektorrechnung*, *funktionalen Abhängigkeit*, *Formeln und Gleichungen* und *Algebra* Anwendung finden.

Um zusammengesetzte Bewegungen physikalisch betrachten zu können, ist es nötig zuerst das Unabhängigkeitsprinzip von Bewegungen zu diskutieren. Als Beispiel für das Unabhängigkeitsprinzip dient die (zusammengesetzte) Bewegung eines Bootes, das über einen Fluss ans andere Ufer schwimmt (vgl. Abbildung 3.22). Im Fluss selbst tritt durch die Bewegung des Wassers Strömung auf (vgl. [1], S.65).

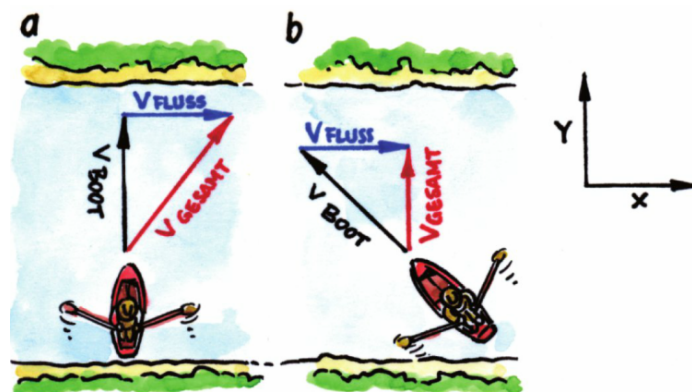


Abbildung 3.22: Boot im Fluss [[1], S.65].

Die Bildbeschreibung verrät die unterschiedlichen Wege, denen das Boot folgen kann:

„a ist der schnellste Weg, weil v_{Boot} genau quer zum Fluss zeigt. b ist der kürzeste Weg, und man kommt genau am gegenüberliegenden Ufer an. v_{gesamt} ist aber kleiner und man braucht länger“ ([1], S.65).

Das Unabhängigkeitsprinzip besagt, dass sich die einzelnen Bewegungen in einer zusammengesetzten Bewegung gegenseitig nicht beeinflussen. Das heißt, dass alle einzelnen Teilbewegungen einer zusammengesetzten Bewegung für sich behandelt und physikalisch untersucht werden können (vgl. [1], S.65).

Ein weiteres Beispiel, das das Unabhängigkeitsprinzip näher erklären soll, ist eine Aufgabe aus dem Alltag:

„Du stehst im Regen und die Tropfen fallen senkrecht mit 4 m/s zu Boden. Du beginnst mit 3 m/s zu laufen. Wie fällt dann aus deiner Sicht der Regen zu Boden?“ ([1], S.65).

Diese Aufgabe wird mittels Abbildung 3.23 graphisch gelöst. Hier wird klarerweise auf die *Vektorrechnung* verwiesen. Die Berechnung des Betrages eines Vektors wird in diesem Zusammenhang nicht besprochen bzw. wiederholt. Es wird ebenso nicht auf die Anwendung des Lehrsatzes des Pythagoras hingewiesen.

Es wird darauf verwiesen, dass sich ein Geschwindigkeitsvektor in seine einzelne Komponenten zerlegen und wieder zusammensetzen lässt (vgl. [1], S.65).

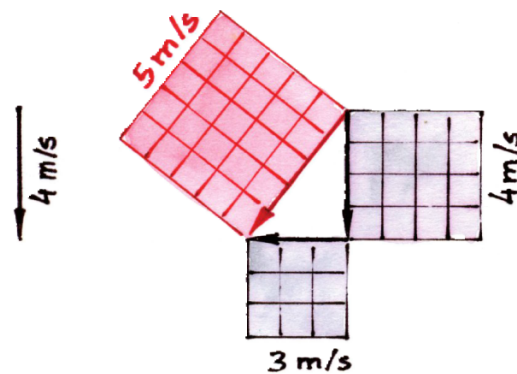


Abbildung 3.23: Darstellung der Vektoraddition mit Bezug zur Berechnung des Betrages eines Vektors [[1], S.65]

Als erste zusammengesetzte Bewegung geht Apolin auf den horizontalen Wurf ein. Dieser wird direkt über *Vektoren* charakterisiert:

„(...) Damit ist gemeint, dass zum Zeitpunkt des Abwurfs der Geschwindigkeitsvektor waagrecht ist“ ([1], S.66).

Die Bewegung beim horizontalen Wurf wird gemäß dem Unabhängigkeitsprinzip in die horizontale gleichförmige Bewegung (rote Dreiecke in Abbildung 3.24) und die vertikale beschleunigte Bewegung (rote Quadrate Abbildung 3.24) durch die Schwerkraft zerlegt. Mathematisch wird dadurch die Theorie zur Konstruktion einer Wurfparabel eines horizontalen Wurfes besprochen, was in Abbildung 3.24 ersichtlich ist (vgl. [1], S.66).

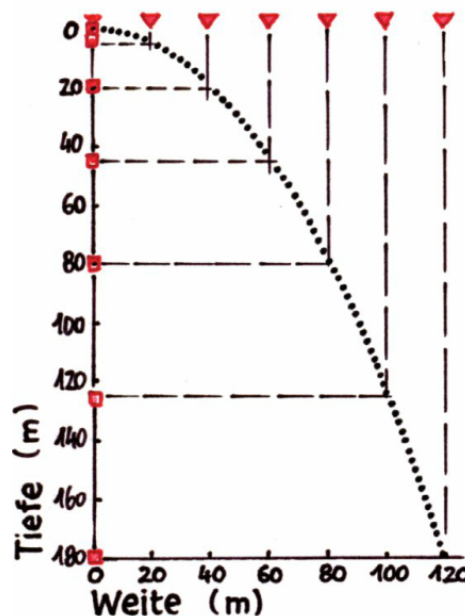


Abbildung 3.24: s-s-Diagramm eines horizontalen Wurfes [[1], S.66]

Wie schon erwähnt, wird in diesem Abschnitt gefordert, einen horizontalen Wurf in zwei einzelne Bewegungen aufzuspalten, nämlich in die Bewegung des freien Falls und in die horizontale Bewegung ohne Schwerkraft. Durch das Eintragen von Punkten in das Diagramm entsteht die sogenannte Wurfparabel. Obwohl hier *Funktionsgraphen* konstruiert bzw. skizziert werden, werden Funktionsgleichungen nicht erwähnt oder definiert. Im Zusammenhang mit Rechenaufgaben zum freien Fall als Teilbewegung des horizontalen Wurfs werden Grundkenntnisse aus dem Bereich *Formeln und Gleichungen* gefordert.

Als zweites Beispiel für zusammengesetzte Bewegungen werden schiefe Würfe diskutiert. Die Definition von schiefen Würfen erfolgt hier anders als bei jener der horizontalen Würfe, nämlich ohne den Bezug auf die Vektorrechnung:

„(...) Damit sind alle Würfe gemeint, bei denen der Abwurf nicht horizontal erfolgt“ ([1], S.68).

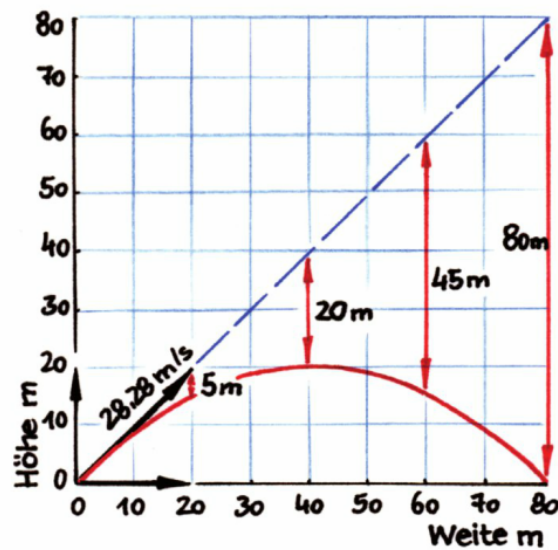
Dieser Abschnitt erweist sich als mathematisch höchst anspruchsvoll, da Kenntnisse aus unterschiedlichen Teilbereichen der Mathematik gefordert werden, u.a. aus der *Vektorrechnung*, der *Trigonometrie*, den *funktionalen Abhängigkeiten* und den *Formeln und Gleichungen*.

Die Einführung in diese Art der Wurfbewegung erfolgt im Text Schritt für Schritt. Es werden hier spezielle Annahmen gemacht und Voraussetzungen getroffen:

„Nehmen wir dazu an, dass jemand ein Ei mit 28.28 m/s (...) mit einem Winkel von 45° abwirft. Du wirst die schräge Zahl gleich verstehen“ ([1], S.68).

Erst danach kommt es zur Hinführung auf die Zerlegung des Geschwindigkeitsvektors in eine Vertikal- und Horizontalgeschwindigkeit von jeweils 20 m/s (vgl. [1], S.68). Wie auch schon im Abschnitt vorher werden hier Verweise weder zum pythagoräischen Lehrsatz noch zum Betrag eines Vektors getätigt. Nur in der Beschreibung von Abbildung 3.25 wird auf den pythagoräischen Lehrsatz bzw. auf die trigonometrischen Beziehungen verwiesen (vgl. [1], S.68).

Mittels Abbildung 3.25 wird die Wurfparabel eines schrägen Wurfs konstruiert. Es werden zwei *Funktionsgraphen* in ein s-s-Diagramm eingetragen, nämlich der schräge Wurf ohne Einfluss der Schwerkraft und das Wegnehmen der Fallhöhe beim freien Fall (vgl. [1], S.68).

Abbildung 3.25: Schiefer Wurf mit einem Winkel von 45° [1], S.66]

Die „*Mathematik des schiefen Wurfs*“ wird in einer sogenannten *Infobox* näher beschrieben (vgl. [1], S.68).

Es wird darin eine Gleichung für die Wurfweite beim schiefen Wurf angeführt (vgl. [1], S.68).

$$w = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (3.13)$$

Anhand von Gleichung 3.13 wird erklärt, dass der $\sin 90^\circ = 1$ und damit bei $\alpha = 45^\circ$ die größte Wurfweite erzielt wird. Darauf, dass die Wurfweite bei Würfen, deren Winkel sich auf 90° ergänzen, gleich groß ist, wird mathematisch nicht näher eingegangen (vgl. [1], S.68f.).

Mathematische Kenntnisse aus den Gebieten der *Trigonometrie*, *Vektorrechnung* und *Formeln und Gleichungen* sind hier gefordert.

Anhand von Gleichung 3.13 wird besprochen, dass die Wurfweite w quadratisch mit v wächst. Hier wird ebenso auf *funktionale Abhängigkeiten* Wert gelegt.

Um die Flugzeit und Steighöhe eines Körpers beim schiefen Wurf zu klären, ist es nötig, auf die Zerlegung des Geschwindigkeitsvektors in seine Vertikal- und Horizontalkomponenten einzugehen (vgl. [1], S.68).

Es wird hier im Bereich der *Vektorrechnung* und *Trigonometrie* ($\sin$, $\cos$) operiert (vgl. Abbildung 3.26).

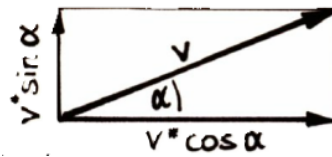


Abbildung 3.26: Zerlegung des Geschwindigkeitsvektors ([1], S.68)

Abbildung 3.26 verweist unter anderem auf die Zahlenwerte aus Abbildung 3.25, in der $v = 28.28 \text{ m/s}$ ist. In Gleichung 3.14 ist die Berechnung der horizontalen Komponente (v_x) des Geschwindigkeitsvektors (v) mithilfe der *Trigonometrie* ersichtlich (vgl. [1], S.68).

$$v_x = 28.28 \text{ m/s} \cdot \sin(45^\circ) = 20 \text{ m/s} \quad (3.14)$$

Darüber hinaus wird die folgende Aussage über Winkelfunktionen getätigt:

„Für rechwinkelige Dreiecke gilt allgemein: $\sin \alpha$ ist Gegenkathete durch Hypothense und $\cos \alpha$ ist Ankathete durch Hypothense“ ([1], S.68).

Mathematisch wird bewiesen, dass bei einem Abwurfwinkel von 45° die Wurfweite viermal so groß wie die Wurfhöhe ist ([1], S.68). Darauf soll nun näher eingegangen werden. Mit Gleichung 3.13 und dem gegebenen Winkel $\alpha = 90^\circ$ erhält man Gleichung 3.15.

$$w = \frac{v^2}{g} \quad (3.15)$$

Es wird nun die Aussage getätigt, dass sich der Geschwindigkeitsvektor v zu der vertikalen Geschwindigkeitskomponente v_y genauso wie eine Diagonale zu der Seite eines Quadrates verhält (vgl. [1], S.68).

Dazu wird weder eine Skizze noch eine Rechnung angeführt, um diesen Zusammenhang klarstellen zu können. Es wird hier womöglich auf das Vorwissen in der Unterstufe Bezug genommen. Der *Strahlensatz* bzw. die *Ähnlichkeit von Dreiecken* finden hier Verwendung.

Mittels Gleichung 3.16 wird gezeigt, dass die Wurfhöhe h ein Viertel der Wurfweite beträgt (vgl. [1], S.68).

$$h = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2g} = \frac{\frac{v^2}{2}}{2g} = \frac{v^2}{4g} \quad (3.16)$$

Dieser Zusammenhang wird durch eine hohe mathematische Abstraktion im Bereich von *Formeln und Gleichungen* und vor allem im Bereich der *funktionalen Abhängigkeiten* erläutert.

Einen Alltagsbezug und damit die Anwendungen der schiefen Würfe findet man im abschließenden Kapitel *„Schiefe Würfe im Sport“*. Mit unterschiedlichen *Diagrammen und Funktionsgraphen* bzw. Inhalten der *Vektorrechnung* werden unterschiedlichste physikalische Inhalte besprochen (vgl. [1], S.69-70).

1.2.5 „Newton mal drei“

Das Kapitel „Newton mal drei“ befasst sich mit den Newton'schen Axiomen und mit Beispielen von Kräften. Vor direkter Besprechung der Newton'schen Axiome wird auf träge und schwere Masse eingegangen.

Anders als womöglich erwartet (wenn man die vergangenen Kapitel betrachtet), treten hier vorwiegend die mathematischen Themengebiete *Formeln und Gleichungen*, *Diagramme* und *funktionale Abhängigkeit* auf. Weniger bis kaum Anwendung findet die Vektorrechnung.

Vom physikalisch-didaktischen Aufbau geht Apolin den klassisch mechanischen Weg: Er beginnt mit dem ersten Newton'schen Axiom (Trägheitssatz), befasst sich danach mit dem zweiten Newton'schen Axiom (Bewegungsgleichung) und endet schließlich im dritten Newton'schen Axiom (vgl. [1], S.71ff.).

Das Mechanikkonzept für die 7. Klasse der Ludwig-Maximilians-Universität München empfiehlt einen anderen physikalisch-didaktischen Weg: Die Mechanik soll ausgehend von der Dynamik (also beginnend beim zweiten Newton'schen Axiom) auf die Statik schließen. Es wird damit begründet, dass dieser Zugang für SchülerInnen vertrauter erscheint. Ebenso lässt sich so das erste Newton'sche Axiom als Spezialfall des zweiten ableiten (vgl. [18], Letzter Aufruf: 05.05.2016).

Bei Apolin wird die Bewegungsgleichung als *Kraft = Masse mal Beschleunigung* eingeführt. Die Bewegungsgleichung und damit die Definition einer Kraft wird mittels Gleichung 3.17 angegeben (vgl. [1], S.74).

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad (3.17)$$

Zur Interpretation der Formel wird folgende Aussage getätigt.

„(...) für jede Beschleunigung ist eine Kraft notwendig“ ([1], S.74).

Darüber hinaus zeigt ein v-t-Diagramm (siehe Abbildung 3.27) den Bewegungsverlauf von zwei unterschiedlich stark beladenen Autos (dasselbe Auto mit unterschiedlicher Last). Dieses *Diagramm* soll Gleichung 3.17 verdeutlichen.

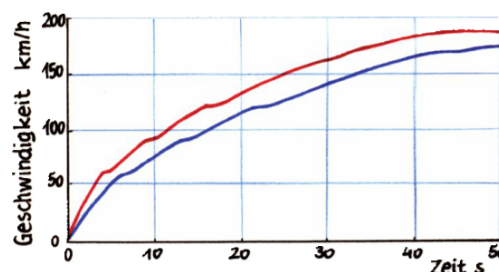


Abbildung 3.27: v-t-Diagramm zweier unterschiedlich stark beladener Autos ([1], S.74)

Hier ist es notwendig zu erkennen, dass die blaue Kurve den stärker beladenen PKW darstellt, da dieser aufgrund der höheren Masse eine nicht so große Beschleunigung vornehmen kann als der weniger beladene PKW. Fähigkeiten, um *Funktionsgraphen* richtig zu interpretieren, sind in diesem Zusammenhang gefordert.

Es kommt zu weiteren Überlegungen, die direkt auf die *funktionalen Abhängigkeiten* der unterschiedlichen Größen in Gleichung 3.17 eingehen: Wie verändert sich die Beschleunigung (bei gleichbleibender Kraft), wenn sich die Masse verringert? Diese Fragestellung wird unter anderem mittels Gleichung 3.18 zu klären versucht (vgl. [1], S.75).

$$a \uparrow = \frac{F}{m \downarrow} \quad (3.18)$$

Abbildung 3.28 zeigt die Nettobeschleunigung einer Rakete beim Start. Mithilfe der *Vektorrechnung* wird gezeigt, dass eine Rakete nur dann starten kann, wenn die Beschleunigung nach oben größer ist als die Gravitationsbeschleunigung (vgl. [1], S.75).

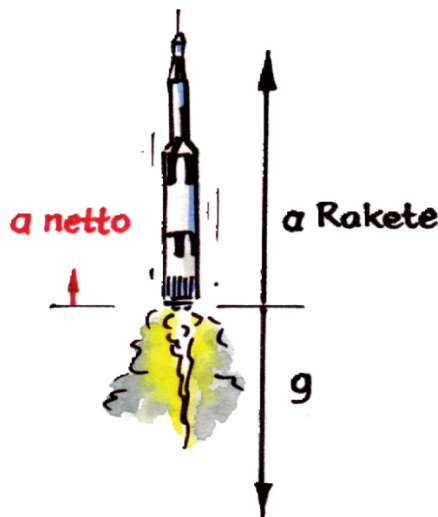


Abbildung 3.28: Beschleunigungen bei einem Raketenstart [[1], S.75]

Anwendungen der Bewegungsgleichung und weiterer bereits gelernter Formeln sind direkt mit Rechnungen im Kapitel zu finden. Hier findet man auch Rechnungen im Zusammenhang mit *Größenordnungen und Zehnerpotenzen*. Eine Rechenaufgabe fordert die Berechnung der Schubkraft einer 2900 Tonnen ($2.9 \cdot 10^6 \text{ kg}$) schweren Rakete bei einer wirkenden Beschleunigung von 11.5 m/s^2 . Gleichung 3.19 stellt die Lösung der Aufgabe dar (vgl. [1], S.75f.).

$$F = m \cdot a = 2.9 \cdot 10^6 \cdot 11.5 \text{ N} \approx 33 \cdot 10^6 \text{ N} \quad (3.19)$$

Das Ergebnis ($33 \cdot 10^6 \text{ N}$) wird umgewandelt in *33 Millionen Newton* und verglichen mit 5000 Formel-1-Autos bei Vollgas (vgl. [1], S.76).

Die Gewichtskraft-, Reibungs- und Federkraft werden als wichtige Beispiele für Kräfte in unserem Alltag angeführt und erklärt. Die drei Kräfte werden vor allem an *Formeln* und deren Interpretationen physikalisch besprochen und eingeführt.

Zuerst wird geklärt, was man physikalisch unter der Gewichtskraft versteht.

„Die Gewichtskraft (F_G) oder kurz ‚das Gewicht‘ ist die Kraft, mit der eine Masse von der Erde angezogen wird“ ([1], S.77).

Mithilfe der Definition und Gleichung 3.20 wird auch der Unterschied zwischen Masse und Gewicht mathematisch erklärt. Die Masse ist ein Skalar, also eine Zahl, das Gewicht (da es eine Kraft ist) ein Vektor. Wir befinden uns hier also in der *Vektorrechnung* (vgl. [1], S.77).

Das Gravitationsgesetz an sich wird erst im Schulbuch *Big Bang 6* besprochen.

$$F_G = mg \quad (3.20)$$

Die Reibungskraft wird mittels Gleichung 3.21 und Gleichung 1.2.5 eingeführt. Ebenso hilft Abbildung 3.29 den Zusammenhang zwischen der Reibungskraft F_R und der Normalkraft F_N zu erklären (vgl. [1], S.78f.).

$$F_R = \mu F_N \quad (3.21)$$

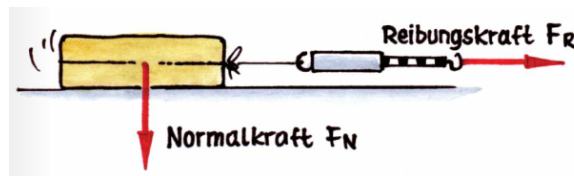


Abbildung 3.29: Zusammenhang zwischen Normalkraft und Reibungskraft [[1], S.79]

Obwohl in Gleichung 3.21 keine Vektoren ersichtlich sind, weist Abbildung 3.29 sehr wohl Anwendungen aus der *Vektorrechnung* auf.

Anhand von Gleichung 1.2.5 wird Gleichung 3.21 nochmals erklärt: Ist $\mu = 1$, so bedeutet dies, dass die Reibungskraft, also jene Kraft, mit der man an einem Gegenstand ziehen muss, genauso groß wie die Normalkraft ist. Wie in Gleichung 1.2.5 ersichtlich, gilt stets $\mu < 1$, das heißt, dass die Kraft, um einen Körper hochzuheben, größer ist, als ihn durch Reibung in Bewegung zu setzen (Haftreibung) bzw. ihn in Bewegung zu halten (Gleitreibung) (vgl. [1], S.79).

Mathematisch kann dies mittels Gleichung 3.22 ausgedrückt werden.

$$F_R < F_N \quad (3.22)$$

Stoffpaare	Haftreibungszahl	Gleitreibungszahl
Holz auf Stein	0.7	0.3
Gummi auf Beton (trocken)	0.65	0.5
Gummi auf Beton (nass)	0.4	0.35
Gummi auf Eis (trocken)	0.2	0.15
Gummi auf Eis (nass)	0.1	0.08
Stahl auf Teflon	0.04	0.04
Schlittschuh auf Eis	0.03	0.01

Tabelle 3.2: Haft- und Gleitreibungszahlen für unterschiedliche Materialien [[1], S.79]

Im Zusammenhang mit der Reibungskraft werden also vorwiegend mathematische Inhalte aus dem Bereich von *Formeln und Gleichungen* gefordert.

Als drittes Beispiel für Kräfte wird die Verformungskraft besprochen. Diese wird mit der folgenden Aussage eingeführt.

„Um eine Feder doppelt so stark zu dehnen, ist auch eine doppelt so große Kraft notwendig“ ([1], S.80).

Eine Veranschaulichung dazu liefert Abbildung 3.30, welche ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm zeigt, in dem ein linearer Zusammenhang der beiden Größen zu erkennen ist (vgl. [1], S.81).

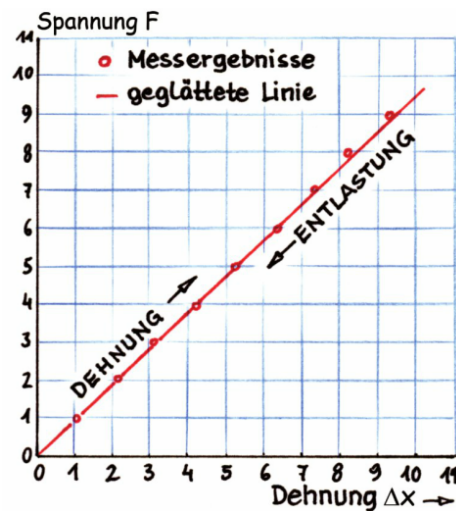


Abbildung 3.30: „Spannungs-Dehnungs-Diagramm einer Schraubenfeder“ [[1], S.81]

Dieser lineare Zusammenhang wird durch das Hook'sche Gesetz beschrieben, welches besagt, dass die Rückstellkraft (bei einer Feder) proportional zur Dehnung ist. Algebraisch wird dies durch Gleichung 3.23 ausgedrückt (vgl. [1], S.80f.).

$$F = k\Delta x \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{F}{\Delta x} \quad (3.23)$$

Es wird ebenso darauf verwiesen, dass es sich bei k um eine Konstante - die Federkonstante - handelt, die die Härte einer Feder angibt (vgl. [1], S.81).

Darüber hinaus wird erwähnt, dass der lineare Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung, also das Hook'sche Gesetz, immer nur in einem gewissen Bereich gilt. Dieser Zusammenhang wird mittels Abbildung 3.31 erklärt, welche die Dehnung von kollagenem Gewebe zeigt. Wird der elastische Bereich überschritten, so bleibt eine Verformung zurück (c). Nur in Bereich b gilt das Hook'sche Gesetz (vgl. [1], S.81).

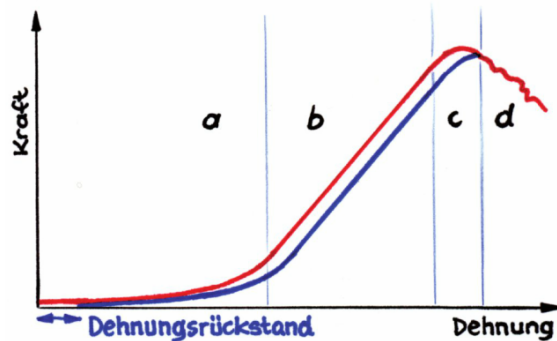


Abbildung 3.31: Spannungs-Dehnungs-Diagramm [[1], S.81]

Wie in Abbildung 3.31 ersichtlich, wird hier erwähnt, dass das Hook'sche Gesetz nicht auf dem ganzen Definitionsbereich gilt, sondern nur im angeführten Bereich b. (vgl. [1], S.81)

Es ist in diesem Zusammenhang gefordert zu wissen, was man unter *Definitionsmenge* versteht. Darüber hinaus wird gefordert, *Funktionsgraphen* und deren Verlauf richtig interpretieren zu können.

Erst nach Einführung und Klärung der Gewichtskraft, Reibungs- und Federkraft wird das dritte Newton'sche Gesetz besprochen. Das dritte Newton'sche Gesetz wird folgendermaßen definiert:

„Kräfte treten immer paarweise auf. Sie sind gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet, also $F_1 = -F_2$. Man sagt daher auch „Actio est reactio“ ([1], S.82).

Die Definition an sich fällt mathematisch betrachtet in den Bereich der *Vektorrechnung*, da die *Gleichung* $F_1 = -F_2$ auf zwei (Kraft-)Vektoren mit gleicher Länge schließen lässt, die in entgegengesetzte Richtungen zeigen.

Eine Anwendung sowohl des zweiten als auch des dritten Newton'schen Axioms findet sich in der folgenden Aufgabe:

„Du befindest dich auf blankem Eis und es gibt keine Reibung. Dein Freund ist so schwer wie du, und ihr zieht euch an einem Seil zueinander. Wo trifft ihr euch?“ ([1], S.82).

Die Frage wird im Text durch eine Rechnung beantwortet, die in Gleichung 3.25 angeführt wird (vgl. [1], S.82).

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad (3.24)$$

$$m \cdot \mathbf{a}_1 = m \cdot (-\mathbf{a}_2) \quad (3.25)$$

Für die Beschleunigungen gilt also $\mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_2$. Das heißt, dass sie betragsmäßig gleich groß, aber antiparallel sind. Dies hat zur Folge, dass die beiden Personen gleich schnell aufeinander zurutschen (vgl. [1], S.82).

Dieselbe Rechnung kann verwendet werden, wenn in derselben Aufgabe eine Person doppelt so schwer ist wie die andere (vgl. [1], S.82).

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad (3.26)$$

$$m \cdot \mathbf{a}_1 = 2m \cdot (-\mathbf{a}_2) \quad (3.27)$$

Betrachtet man also Gleichung 3.27, so gilt für die Beschleunigungen $\mathbf{a}_1 = 2 \cdot (-\mathbf{a}_2)$. Auf die halb so schwere Person wirkt also die doppelte Beschleunigung (von der Beschleunigung der schwereren Person). Das heißt, dass die leichtere Person doppelt so schnell rutscht wie die schwerere Person.

Im Buch ist dieser Zusammenhang algebraisch wesentlich komplizierter ausgedrückt, nämlich mit Gleichung 3.28 (vgl. [1], S.82).

$$m \cdot \mathbf{a}_1 = 2m \cdot \left(-\frac{\mathbf{a}_2}{2}\right) \quad (3.28)$$

Es stellt sich die Frage, weshalb hier der Ausdruck $\left(-\frac{\mathbf{a}_2}{2}\right)$ direkt verwendet wird, ohne zuerst mathematische Überlegungen anzustellen, welcher Beschleunigungswert die Gleichheit der Gleichung erfüllt. Danach könnte man direkt auf $\left(-\frac{\mathbf{a}_2}{2}\right)$ schließen.

Am Ende des Kapitels sind weitere Rechen- und Denkaufgaben im Zusammenhang mit den drei Newton'schen Axiomen angeführt. Auf diese wird hier nicht näher eingegangen (siehe [1], S.83).

1.2.6 „Arbeit und Energie“

Das Kapitel „Arbeit und Energie“ gipfelt im Satz über die Erhaltung der Energie. Es werden in diesem Zusammenhang unterschiedliche Energieformen und deren Umwandlung ineinander erklärt. Zu Beginn wird jedoch das Konzept der Arbeit als Hinführung zum Energiebegriff vorgestellt.

Zu Beginn des Kapitels wird Abbildung 3.32 präsentiert. In diesem Zusammenhang wird physikalisch eine qualitative Auseinandersetzung mit den Unterschieden zwischen Kraft und Arbeit hergestellt: Ist es möglich Kraft bzw. Arbeit zu sparen, wenn man, anstatt ein Fass in einen LKW zu heben, es entlang einer Rampe hinaufrollt? (vgl. [1], S.84).

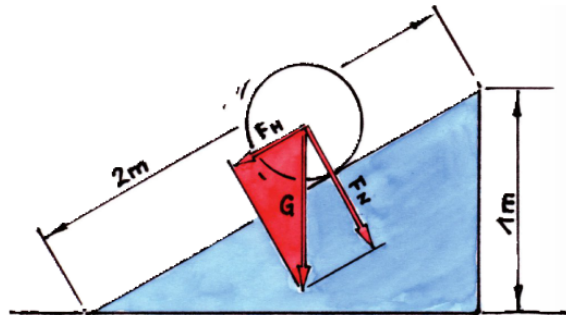


Abbildung 3.32: Mathematische Beschreibung des Transportes eines Fasses auf einen LKW [[1], S.84]

Die Bildbeschreibung ist sehr mathematisch formuliert. Es werden Inhalte aus dem Bereich der *Geometrie*, besonders der Ähnlichkeit von Dreiecken, gefordert:

„Wenn du die Fässer hebst bzw. rollst, dann verhalten sich die Wege wie 1:2. Die zu überwindende Kraft beim Heben ist das Gewicht G , beim Rollen die Komponente F_H . Das rote und das blaue Dreieck sind ähnlich (haben also gleiche Winkel), daher ist $F_H = \frac{G}{2}$: Also halbe Kraft, dafür doppelter Weg“ ([1], S.84).

Die Arbeit wird mit einer *Formel*, die aus der Multiplikation von Kraft (in Wegrichtung) und Weg zusammengesetzt ist, algebraisch beschrieben. Gleichung 3.29 zeigt also den Zusammenhang zwischen den einzelnen Größen, wobei F_p jene Kraft meint, die parallel zum Weg ist (vgl. [1], S.84).

$$W = F_p \cdot s \quad (3.29)$$

Als Nächstes werden die Hebe- und Beschleunigungsarbeit besprochen. Sowohl bei der Einführung der Hebearbeit als auch bei der Beschleunigungsarbeit erkennt man physikalisch-mathematisch essentielle Ungenauigkeiten.

Die Hebearbeit W_H und die potenzielle Energie E_p werden in Gleichung 3.30 gleichgesetzt (vgl. [1], S.86).

$$W_H = E_p = m \cdot g \cdot h \quad (3.30)$$

Die Formeln zur Berechnung der Hebearbeit W_H und der potenziellen Energie E_p sind dieselbe, doch das Gleichheitszeichen in Gleichung 3.30 bedeutet mathematisch gesehen, dass die Hebearbeit und die potenzielle Energie dasselbe sind, was jedoch nicht der Fall ist.

Dieselbe Ungenauigkeit findet sich im Zusammenhang mit der Beschleunigungsarbeit W_B und der kinetischen Energie E_k (vgl. [1], S. 87).

$$W_B = E_k = \frac{mv^2}{2} \quad (3.31)$$

Gleichung 3.31 wird aus Gleichung 3.29, Gleichung 3.17 und Gleichung 3.10 hergeleitet. Gleichung 3.32 zeigt den Beginn dieser Herleitung (vgl. [1], S.87).

$$W_B = m \cdot a \cdot \frac{a}{2} t^2 = \frac{m \cdot a^2 \cdot t^2}{2} = \frac{m \cdot (a \cdot t)^2}{2} \quad (3.32)$$

Nun wird Gleichung 3.9 in Gleichung 3.32 eingesetzt und es ergibt sich Gleichung 3.31 (vgl. [1], S.87).

Mathematisch betrachtet werden hier Grundkenntnisse aus dem Bereich *Formeln und Gleichungen* gefordert. In diesem Zusammenhang wird ebenso auf die *funktionale Abhängigkeit* der unterschiedlichen Größen eingegangen (Geschwindigkeit usw.). Es ist zu erwähnen, dass in den einzelnen Formeln wie z.B. Gleichung 3.29 alle vektoriellen Größen betragsmäßig verwendet werden.

Ebenso werden komplexere Rechnungen durchgeführt, wo Grundkenntnisse im Zusammenhang mit *Zehnerpotenzen* und *Größenordnungen* gefordert sind (siehe [1], S.86).

Der nächste Abschnitt dieses Kapitels beschäftigt sich mit der mechanischen Leistung. Diese ist durch Gleichung 3.33 gegeben (vgl. [1], S.89).

$$P = \frac{W}{t} \quad (3.33)$$

Mithilfe von Gleichung 3.33 werden Umrechnungen zwischen verschiedenen Einheiten (einerseits Pferdestärke und Kilowatt, andererseits Kilowattstunden und Joule) durchgeführt. Dies fordert Kenntnisse aus dem Bereich von *Formeln und Gleichungen* (vgl. [1], S.89f.).

- Umrechnung: Pferdestärke und Kilowatt

Früher wurde die mechanische Leistung (z.B. eines PKWs) in Pferdestärken angegeben, was jedoch keine SI-Einheit darstellt. Eine Pferdestärke ist folgendermaßen definiert:

„Wenn in einer Sekunde eine Masse von 75 kg um einen Meter gehoben wird, dann liegt eine Leistung von 1 PS vor“ ([1], S.90).

Die Umrechnung von 1 PS in Watt bzw. Kilowatt erfolgt mit Gleichung 3.33 und Gleichung 3.30 (vgl. [1], S.90).

$$P = \frac{E_p}{t} = \frac{75 \cdot 9.81 \cdot 1}{1} \quad W = 735.75 \text{ W} = 0.736 \text{ kW} = 1 \text{ PS} \quad (3.34)$$

Aus Gleichung 3.34 kann also entnommen werden, dass $\frac{3}{4} \text{ kW} \approx 1 \text{ PS}$ sind (vgl. [1], S.90).

- Umrechnung: Kilowattstunde und Joule

Die Angabe der Energie von elektrischem Strom erfolgt durch Kilowattstunden (kWh). Da die SI-Einheit der Energie jedoch das Joule ist, soll eine Umrechnung von $1 kWh = 1000 Wh$ in Joule durchgeführt werden. Dazu wird Gleichung 3.33 verwendet, indem man auf W umformt (vgl. [1], S.90).

$$1 kWh = 1000 W \cdot 3600 s = 3.6 \cdot 10^6 J \quad (3.35)$$

Gleichung 3.35 zeigt auf mathematischem Wege, dass $1 kWh$ $3.6 \cdot 10^6 J$ entspricht (vgl. [1], S.90).

In den beiden obigen Umrechnungsaufgaben ist ersichtlich, dass Kenntnisse aus dem Bereich *Formeln und Gleichungen*, *Größenordnungen* und *Arbeiten mit Maßen* erforderlich sind.

Tabelle 3.3 gibt Auskunft über Leistungswerte, die im Alltag auftreten. Es wird gezeigt, mit welchen *Größenordnungen* man im Bereich der Leistung bei alltäglichen Dingen, wie z.B. dem Fön, Autos usw., rechnen kann. Darüber hinaus werden hier viele Leistungswerte in *Zehnerpotenzschreibweise* angegeben.

Beispiel	Leistung	Kommentar
Mensch , Dauerleistung	100 – 500 W	Der untere Wert gilt für Untrainierte, der obere Wert für Weltklasseathleten
helle Glühbirne	100 W	
Toaster	800 W	Diese Angaben sind geräteabhängige Richtwerte.
Fön	1300 W	
Backrohr	3000 W	
Mensch , Höchstleistung	$\approx 7500 W$	Berechenbare kurzzeitige Höchstleistung von Weltklasseathleten.
PKW-Motor	37 – 736 kW	Vom kleinen Smart bis zum kräftigen Bugatti Veyron. Nach oben gibt es fast keine Grenzen!
Taurus (stärkste Lok der ÖBB)	7500 kW	Entspricht 10000 PS und somit der Leistung von etwas 100 Mittelautos.
Donaukraftwerk	$2 \cdot 10^8 W$	
Blitz	$10^9 W$	Ein Blitz hat eine sehr hohe Leistung, dauert aber nur etwas $10^{-4} s$.
Sonne	$10^{26} W$	Mit Abstand die größte Energiequelle im Sonnensystem.

Tabelle 3.3: Einige Beispiele zu Leistungen [[1], S.90]

Rechenbeispiele werden zu diesem Thema aus dem Bereich Sport (Spitzenleistung und Stufenlauf) durchgenommen und diskutiert, auf welche hier nicht näher eingegangen wird (siehe [1], S.91).

Nach der physikalischen Klärung des Energieerhaltungssatzes (Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden; einzelne Energieformen lassen sich nur ineinander umwandeln), findet der Energiesatz im Bereich von Sport und Mensch Anwendung (vgl. [1], S.92ff.).

Anhand der vollständigen Umwandlung von kinetischer in potenzielle Energie (z.B. ersichtlich am schwingenden Fadenpendel) kann mathematisch der Zusammenhang zwischen der Höhendifferenz und der Geschwindigkeit eines Körpers (z.B. des Pendels) am tiefsten Punkt hergestellt werden. Man bedient sich dabei Gleichung 3.30 und Gleichung 3.31, um Gleichung 3.39 zu erhalten, die obigen Sachverhalt beschreibt (vgl. [1], S.94).

$$E_k = E_p \quad (3.36)$$

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = m \cdot g \cdot h \quad (3.37)$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (3.38)$$

$$h = \frac{v^2}{2g} \quad (3.39)$$

Mathematisch fordert diese Aufgabe Grundkenntnisse aus dem Bereich von *Formeln und Gleichungen*. Gleichzeitig lässt der obige Zusammenhang Anwendungen aus dem Bereich der *funktionalen Abhängigkeiten* zu.

Eine weitere physikalische Aufgabe aus dem Sport, die anhand von Abbildung 3.33 dargestellt wird, kann mathematisch gelöst werden:

„Unter welchem Winkel fliegen zwei Billardkugeln auseinander, wenn man nicht zentral trifft?“ ([1], S.94).

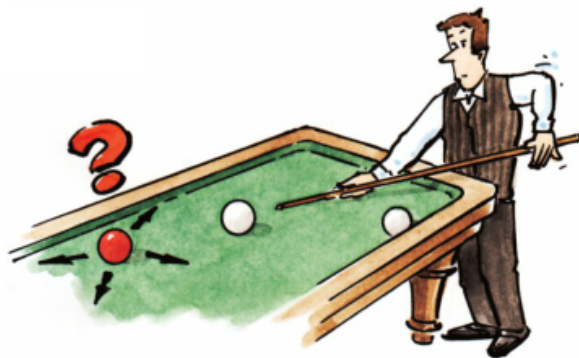


Abbildung 3.33: Stoß zweier Billardkugeln [[1], S.94]

Da Energieerhaltung gilt, muss die kinetische Energie der weißen Kugel, die sie vor dem Zusammenstoß aufweist, gleich der kinetischen Energie der beiden Kugeln (weiß und rot) danach sein (Annahme: elastischer Stoß). In Gleichung 3.42 wurde vorausgesetzt, dass die Massen der beiden Kugeln gleich groß sind. (vgl. [1], S.95).

$$E_{k,weiss} = E'_{k,weiss} + E'_{k,rot} \quad (3.40)$$

$$\frac{mv_{weiss}^2}{2} = \frac{mv_{weiss}'^2}{2} + \frac{mv_{rot}'^2}{2} \quad (3.41)$$

$$v_{weiss}^2 = v_{weiss}'^2 + v_{rot}'^2 \quad (3.42)$$

Darüber hinaus erinnert Gleichung 3.42 an den *Satz des Pythagoras*, welcher in der Form von Gleichung 3.43 vertrauter erscheint (vgl. [1], S.95).

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (3.43)$$

Der Bezug zu diesem Lehrsatz wird durch Abbildung 3.34 dargestellt. In dieser Abbildung entspricht a der Geschwindigkeit der weißen Kugel vor dem Stoß (v_{weiss}), b entspricht der Geschwindigkeit der weißen Kugel nach dem Stoß (v_{weiss}') und c entspricht der Geschwindigkeit der roten Kugel nach dem Stoß (v_{rot}') (vgl. [1], S.95).

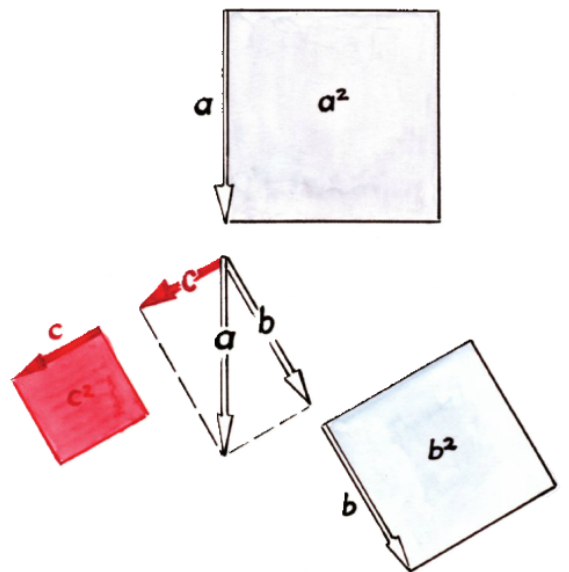


Abbildung 3.34: Geschwindigkeiten der Kugeln vor und nach dem Zusammenstoß [[1], S.95]

Das Arbeiten mit *Formeln und Gleichungen* und Kenntnisse aus dem Bereich der *Elementargeometrie* werden in der obigen Aufgabenstellung gefordert.

Im Zusammenhang mit dem Energiesatz beim Menschen wird der Wirkungsgrad samt der *Formel* zur Berechnung (vgl. Gleichung 3.45) desselben eingeführt (vgl. [1], S.96).

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{\text{Nettoenergie}}{\text{Bruttoenergie}} \quad (3.44)$$

$$\eta = \frac{E_n}{E_B} \quad (3.45)$$

Physikalisch gesehen wird hier erwähnt, dass man unter Bruttoenergie E_B die gesamte Energie versteht, die ein System samt Wärmeverlusten innehat. Die Nettoenergie E_N hingegen ist jene Energie, die man in einem System ohne Mitrechnung des Wärmeverlusts vorfindet. Der Wirkungsgrad, der durch Gleichung 3.45 ausgedrückt wird, gibt das relative Verhältnis zwischen diesen beiden Größen an (vgl. [1], S.96).

In Tabelle 3.4 wird veranschaulicht, wie effizient unterschiedliche Haushaltsgeräte Energie umwandeln. Daher werden Kenntnisse aus dem Bereich der *Prozentrechnung* gefordert.

System	η	Bruttoenergie $\Rightarrow$ Nettoenergie
Generator	99%	mechanisch $\Rightarrow$ elektrisch
Elektromotor 95%	elektrisch	$\Rightarrow$ mechanisch
Batteriezelle	90%	chemisch $\Rightarrow$ elektrisch
Automotor	25%	chemisch $\Rightarrow$ mechanisch
Dauerleistung Mensch	15 – 25%	chemisch $\Rightarrow$ mechanisch
Solarzelle	15 – 20%	Licht $\Rightarrow$ elektrisch
Glühlampe	5% elektrisch	$\Rightarrow$ Licht
Photosynthese	1%	Licht $\Rightarrow$ chemisch

Tabelle 3.4: Wirkungsgrad verschiedener Haushaltsgeräte ([1], S.96)

Abschließende Rechenaufgaben werden im Zusammenhang mit Energieumwandlungen beim Menschen (Nahrungsaufnahme und Sport) gestellt (vgl. [1], S.97f.).

1.2.7 „Impuls“

Als weitere Bewegungsgröße führt Apolin den Impuls ein.

Der Impuls wird mittels einer Gleichung 3.46 und mit den folgenden Worten definiert:

„Das Produkt von Masse und Geschwindigkeit ist der Impuls“ ([1], S.99).

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v} \quad (3.46)$$

In Gleichung 3.46 ist zu erkennen, dass der Impuls ein *Vektor* ist. Im Text selbst wird ebenso darauf hingewiesen, dass der Impuls - im Gegensatz zur Energie, welche eine skalare Größe darstellt - vektoriell betrachtet werden muss. Beim Impuls interessiert man sich also nicht nur für seinen Betrag, sondern auch für die Richtung, in die er wirkt (vgl. [1], S.99).

Der Impulssatz, welcher besagt, dass die Summe der Impulse eines abgeschlossenen Systems nicht verloren geht, sondern erhalten bleibt, wird schriftlich und mittels Gleichung 3.47 veranschaulicht (vgl. [1], S.99).

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \dots + \mathbf{p}_n = \textit{konstant} \quad (3.47)$$

Ähnlich wie im vorigen Kapitel („Actio est reactio“) wird dazu eine physikalische Aufgabe mathematisch gelöst, welche wie folgt lautet:

„Du drückst dich am Eis von deinem doppelt so schweren Freund ab. Wie schnell bewegt ihr euch relativ zueinander?“ ([1], S.99).

Diese Aufgabe wird mit dem zuvor formulierten Impulssatz und mit Verweis auf Gleichung 3.47 gelöst. Gleichung 3.48 stellt die Lösung des physikalischen Problems dar: Der doppelt so schwere Freund bewegt sich nur halb so schnell weg (vgl. [1], S.99).

$$2m \cdot \frac{1}{2}v + m \cdot (-v) = 0 \quad (3.48)$$

Es werden in diesem Zusammenhang Kenntnisse aus dem Bereich *Formel und Gleichungen* benötigt.

In diversen Rechnungen und Annahmen, auf die hier nicht näher eingegangen wird, werden Kenntnisse im Zusammenhang mit *Zehnerpotenzen* benötigt. Ein Beispiel dafür ist die folgende Aussage:

„Die Masse der Erde beträgt $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ “ ([1], S.100).

Eine mathematische etwas aufwändige Anwendung des Impulssatzes findet sich in der folgenden Aufgabe:

„Ein Auto rollt mit 10 m/s gegen ein gleich schweres stehendes. Welche Geschwindigkeit haben beide Autos nach dem Crash? Wie viel Prozent der kinetischen Energie wandeln sich dabei in Wärme um?“ ([1], S.100).

Um diese Aufgabe zu lösen, muss der Impulssatz angewendet werden. Dazu wird mittels Gleichung 3.49 eine mathematische Gleichung aufgestellt, die zeigt, dass die Impulse vor und nach dem Stoß gleich sind (vgl. [1], S.101).

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = \textit{konstant} \quad (3.49)$$

In Gleichung 3.49 gibt $\mathbf{v}_1$ die Geschwindigkeit des fahrenden Autos vor dem Stoß, $\mathbf{v}_2$ die Geschwindigkeit des ruhenden Autos vor dem Stoß (welche Null gesetzt werden kann), $\mathbf{v}'_1$ und $\mathbf{v}'_2$ die Geschwindigkeiten der Autos nach dem Stoß, welche gleichgesetzt bzw. durch $\mathbf{v}'$ ersetzt werden können, da sich beide Autos nach dem Stoß gleich weiterbewegen, an. Zu beachten ist, dass ebenso die Massen gleich sind und daher mit m bezeichnet werden können (vgl. [1], S.101).

Durch diese Überlegungen können folgende Vereinfachungen getroffen werden:

$$mv_1 = 2mv' \quad (3.50)$$

$$v_1 = 2v' \quad (3.51)$$

$$v' = \frac{v_1}{2} \quad (3.52)$$

Gleichung 3.52 zeigt, dass die Geschwindigkeit der beiden Autos nach dem Stoß die Hälfte der Geschwindigkeit vor dem Stoß sein muss. Die Situation ist ebenso in Abbildung 3.35 dargestellt (vgl. [1], S.101).

In diesem Zusammenhang wird gefordert, *Formeln* richtig interpretieren zu können.

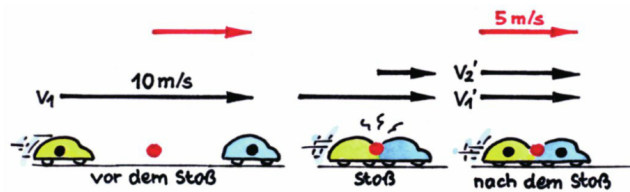


Abbildung 3.35: Zusammenstoß zweier Autos [[1], S.101]

Um die Frage nach der prozentuellen Umwandlung von kinetischer Energie in Wärme zu beantworten, kann Gleichung 3.31 verwendet werden. Die kinetische Energie vor dem Stoß ist durch Gleichung 3.53 gegeben (vgl. [1], S.101).

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad (3.53)$$

Nach dem Stoß ist die Masse doppelt so groß, also $2m$, die Geschwindigkeit aber nur noch halb so groß, daher $\frac{v}{2}$. Daher kann man weiter umformen (vgl. [1], S.101).

$$E'_k = \frac{2m \left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} \quad (3.54)$$

$$= \frac{2m \frac{v^2}{4}}{2} \quad (3.55)$$

$$= \frac{mv^2}{2} \quad (3.56)$$

$$E'_k = \frac{E_k}{2} \quad (3.57)$$

Die richtige Interpretation von Gleichung 3.57 zeigt, dass die kinetische Energie nach dem Stoß nur noch die Hälfte der kinetischen Energie vor dem Stoß beträgt. Das heißt, dass sich die Hälfte der kinetischen Energie in Wärme umgewandelt hat (vgl. [1], S.101).

Abbildung 3.36 zeigt einen Funktionsgraphen mit einer logarithmischen Skala auf der Ordinate, der den Zusammenhang zwischen dem Massenverhältnis und der umgewandelten kinetischen Energie darstellen soll (vgl. [1], S.101).

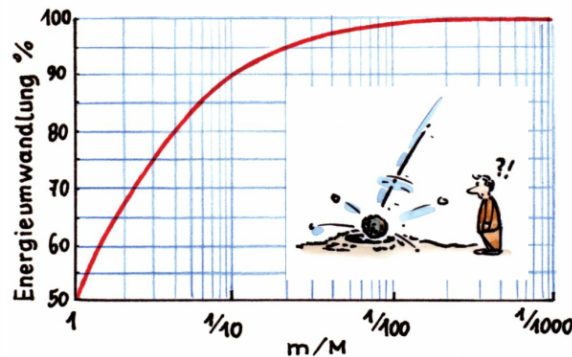


Abbildung 3.36: Zusammenhang zwischen dem Masseverhältnis der Autos und der umgewandelten kinetischen Energie [[1], S.101]

Im Text wird angeführt, dass für plastische Stöße charakteristisch ist, dass kinetische Energie in Wärme umgewandelt wird. Außerdem wird zur Erklärung von Abbildung 3.36 hinzugefügt, dass die logarithmische Skalierung der Ordinate bedeutet, dass von Markierung zu Markierung der Wert auf ein Zehntel schrumpft. Außerdem wird geäußert, dass die Umwandlung der kinetischen Energie proportional zum Massenunterschied ist (vgl. [1], S.101).

Das Rechnen mit *Logarithmen* bzw. die Darstellung logarithmischer Funktionen bzw. Achsen mit logarithmischer Skalierung werden erst in der 6. Klasse der AHS besprochen. SchülerInnen, die die klassische Physik in der AHS lernen, haben somit noch keine Vorkenntnisse im Zusammenhang mit diesem Thema (vgl. [6]. S.4).

Eine weitere mathematische Anwendung findet man in dieser Aufgabe:

„Sollten Leitschienen neben den Straßen eher plastisch oder elastisch sein?“ ([1], S.100).

Die Argumentation dafür, dass der Zusammenstoß zwischen Leitschienen und einem Auto immer plastisch sein muss, erfolgt anhand von Abbildung 3.37 (vgl. [1], S.101).

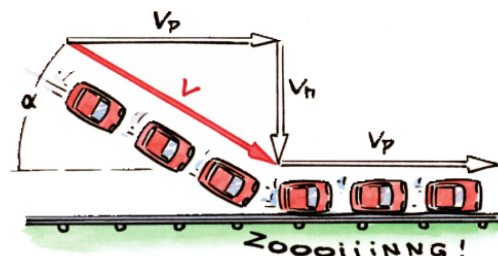


Abbildung 3.37: Zusammenstoß zwischen einem Auto und einer Leitschiene [[1], S.101]

Wie in Abbildung 3.37 zeigt, wird die Geschwindigkeit des Autos in zwei Komponenten, v_n und v_p (bleibt unter Vernachlässigung der Reibung konstant), aufgespaltet. Für die Wucht des Aufpralls ist nur die Komponente v_n notwendig, die vom Aufprallwinkel abhängt (vgl. [1], S.101).

Diese Aufgabe benötigt Wissen aus dem Bereich der *Vektorrechnung* und *Trigonometrie*, um herauszufinden bzw. zu verstehen, wann v_n minimal wird.

Mathematisch weiterführend sind Überlegungen zu der Landung eines Schispringers. Der Schispringer führt einen plastischen Stoß durch, daher wird kinetische Energie in Wärme umgewandelt. Je kleiner der Winkel ist, mit dem er am Hang aufkommt, desto weniger kinetische Energie (aufgrund des Fluges) muss umgewandelt werden. Dies ist wichtig, da es sonst beim Schispringer zu Verletzungen kommen kann. Abbildung 3.38 veranschaulicht die noch abzufangende kinetische Energie des Schispringers bei gegebenem Aufprallwinkel (vgl. [1], S.102).

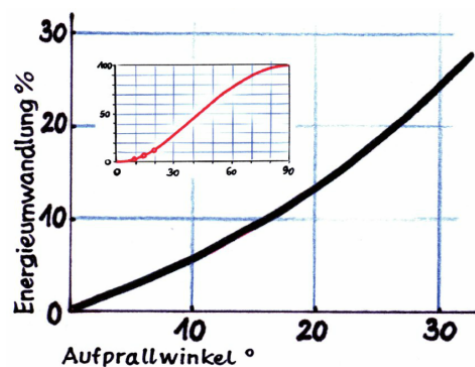


Abbildung 3.38: Veranschaulichung der Energieumwandlung (kinetische in thermische) [[1], S.102]

In diesem Zusammenhang ist es notwendig, *Diagramme* und *Funktionsgraphen* richtig interpretieren zu können.

Bei elastischen Stößen bleibt nicht nur der Impuls, sondern auch die kinetische Energie des abgeschlossenen Systems erhalten. Daher können bei derartigen Stößen Gleichungen zur Impuls- und Energieerhaltung aufgestellt werden ([1], S.103).

Betrachtet werden in diesem Zusammenhang zwei Kugeln mit Massen m_1, m_2 . Es wird angenommen, dass sich die zweite Kugel vor dem Stoß nicht bewegt, also $v_2 = 0$ (vgl. [1], S.103).

Es gelten der Impuls- (Gleichung 3.59) und der Energiesatz (Gleichung 3.58) (vgl. [1], S.103).

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \underbrace{\frac{m_2 v_2^2}{2}}_{=0} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \quad (3.58)$$

$$m_1 v_1 + \underbrace{m_2 v_2}_{=0} = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (3.59)$$

Vereinfacht ergeben sich daraus Gleichung 3.60 und Gleichung 3.61 (vgl. [1], S.103).

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \quad (3.60)$$

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (3.61)$$

Es handelt sich bei Gleichung 3.60 und Gleichung 3.61 um ein *Gleichungssystem* mit zwei Unbekannten, nämlich den Geschwindigkeiten der Kugeln nach dem Stoß, v_1' und v_2' . Es gilt nun dieses Gleichungssystem zu lösen, dies kann unter anderem mit der Substitutionsmethode erfolgen, wodurch man Gleichung 3.62 und Gleichung 3.63 erhält.

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (3.62)$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (3.63)$$

Gleichung 3.62 und Gleichung 3.63 ermöglichen alle elastischen Stöße von zwei Kugeln zu berechnen. Es werden vier Spezialfälle angeführt, die sich aufgrund der unterschiedlichen Massen m_1 und m_2 ergeben (vgl. [1], S.103).

- Ist $m_1 \ll m_2$, so kann m_1 vernachlässigt werden. Man erhält daher für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß $v_1' = -v_1$ und $v_2' = 0$. Das bedeutet, dass das zweite Objekt ruht, während das erste Objekt an ihm zurückprallt und in die entgegengesetzte Richtung rollt. Als Beispiel dient ein Flummi, der auf die Erde fallen gelassen wird und wieder in die Luft zurückspringt (vgl. [1], S.103).
- Ist $m_1 = \frac{m_2}{2}$, so erhält man für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß $v_1' = -\frac{v_1}{3}$ und $v_2' = \frac{2v_1}{3}$. Das bedeutet, dass das erste Objekt am zweiten abprallt und sich mit einer kleineren Geschwindigkeit zurückbewegt. Die Geschwindigkeit des zweiten Objekts ist kleiner als jene, die das erste Objekt vor dem Stoß hatte (vgl. [1], S.103).
- Haben beide Objekte die gleiche Masse, ist also $m_1 = m_2$, so ergeben sich die Geschwindigkeiten $v_1' = 0$ und $v_2' = v_1$ nach dem Stoß. Nach dem Stoß ruht das erste Objekt, während sich das zweite mit derselben Geschwindigkeit des ersten Objekts weiterbewegt. Dies tritt z.B. beim zentralen Stoß beim Billardspiel auf (vgl. [1], S.103).
- Ist die Masse des ersten Objekts doppelt so groß wie die Masse des zweiten, also $m_1 = 2m_2$, so erhält man für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß $v_1' = \frac{v_1}{3}$ und $v_2' = \frac{4v_1}{3}$. Das erste Objekt kommt also nicht zur Ruhe, sondern bewegt sich mit $\frac{1}{3}$ seiner ursprünglichen Geschwindigkeit weiter. Erstaunlicherweise hat das zweite, leichtere Objekt eine höhere Geschwindigkeit als das erste zuvor. Ein Fußballstoß dient in diesem Fall als Beispiel (vgl. [1], S.103).

In diesem Zusammenhang ist es notwendig, *Formeln und Gleichungen* richtig zu interpretieren, aufzustellen und mit diesen richtig umgehen zu können. (Z.B. Ist $m_1 \ll m_2$, so kann m_1 vernachlässigt und quasi als 0 betrachtet werden. Damit ist $v_1' = -v_1$ und $v_2' = 0$.) Dies erfordert höchste mathematische Abstraktion.

Am Ende des Kapitels erfolgt die Betrachtung der Kraft als Impulsänderung pro Zeit. Eine mathematische Herleitung dazu liefert Gleichung 3.64 (vgl. [1], S.104) .

$$F = ma = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad (3.64)$$

Ebenso wird der Kraftstoß als Produkt aus Kraft und Zeit definiert und damit als Impulsänderung beschrieben. Gleichung 3.65 stellt diesen Zusammenhang mathematisch dar (vgl. [1], S.104).

$$\Delta p = F \Delta t = m \Delta v \quad (3.65)$$

Wie zu erkennen ist, benötigt man zum Verständnis von Gleichung 3.64 und Gleichung 3.65 Wissen aus dem Bereich von *Formeln und Gleichungen*.

Eine sportliche Anwendung lässt sich im Zusammenhang mit dem Streck sprung erkennen: Wird der Kraftverlauf eines beliebigen Streck sprungs in einem Kraft-Zeit-Diagramm, wie es Abbildung 3.39 zeigt, dargestellt, so zeigt die Fläche unter dem Funktionsgraphen den Impuls resp. die Impulsänderung (vgl. [1], S.105).

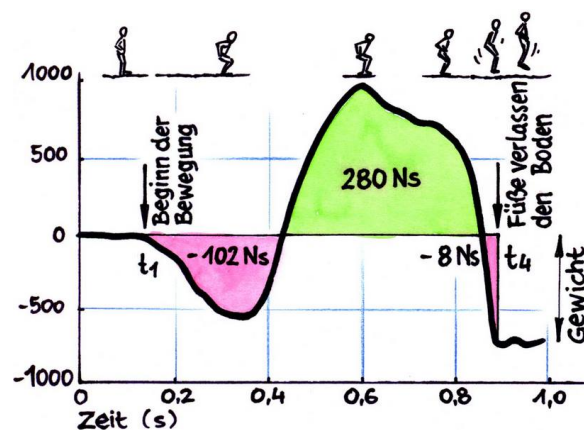


Abbildung 3.39: Kraftverlauf bei einem Streck sprung [[1], S.105]

In diesem Zusammenhang kommt es indirekt zur Anwendung von Kenntnissen aus der *Integralrechnung*, die jedoch erst in der 8. Klasse AHS im Mathematikunterricht besprochen wird (vgl. [6], S.6).

Am Ende des Kapitels sind weiterführende und vertiefende physikalische Rechenaufgaben gestellt, auf die hier nicht näher eingegangen wird (siehe [1], S.105).

1.2.8 „Rotationen“

Das Kapitel „Rotationen“ beschäftigt sich mit den physikalischen Grundlagen von Drehbewegungen. Diese werden in *Big Bang* 5 besonders anhand von Beispielen aus dem Alltag erklärt (vgl. [1], S.106).

In den ersten Zeilen des Abschnittes wird bereits direkt darauf hingewiesen, dass im Zusammenhang mit Drehbewegungen die Mathematik unverzichtbar ist:

„Um die Drehgeschwindigkeit zu definieren, brauchen wir ein wenig Mathematik“
([1], S.106).

Es folgt eine Hinführung zum Bogenmaß, indem auf den Umfang eines Kreises Bezug genommen wird. Folgende Aussagen werden in diesem Zusammenhang getätigt:

„Der Umfang eines Kreises ist $2r\pi$. Wenn man durch den Radius dividiert, bleiben immer 2π über. Bei jedem Kreis! Ein voller Kreisumfang entspricht also einerseits 360° und andererseits 2π “ ([1], S.106).

Es wird hier auf den *Einheitskreis* Bezug genommen, dieser jedoch nicht direkt erwähnt. Eine Umrechnung von Grad in Bogenmaß wird ebenso in diesem Abschnitt erwähnt:

„Um vom Bogenmaß auf Grad zu kommen, musst du mit rund 57 ($360^\circ/2\pi$) multiplizieren“ ([1], S.106).

Es werden hier Kenntnisse aus dem Bereich *Formeln und Gleichungen*, aber auch aus der *Elementargeometrie*, besonders Arbeiten mit dem Kreis, gefordert. Bereits aus der Unterstufe sollten sowohl das Bogenmaß als auch das Gradmaß bekannt sein.

Die Einführung des Bogenmaßes ermöglicht dem Autor nun die Winkelgeschwindigkeit mittels einer *Formel* anzugeben. Gleichung 3.66 wird im Text mit der bereits bekannten Geschwindigkeitsformel verglichen (Gleichung 3.4) (vgl. [1], S.106).

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (3.66)$$

In diesem Zusammenhang wird nun mittels der Rechten-Hand-Regel auf die Bestimmung von ω verwiesen (vgl. Abbildung 3.40). Es wird explizit erwähnt, dass die Winkelgeschwindigkeit ω , die Geschwindigkeit v und der Radius r im rechten Winkel aufeinander stehen und dass sich ω aus dem Kreuzprodukt von r und v ergibt (vgl. [1], S.107). Es werden hier wesentliche Kenntnisse aus der *Vektorrechnung* verlangt.

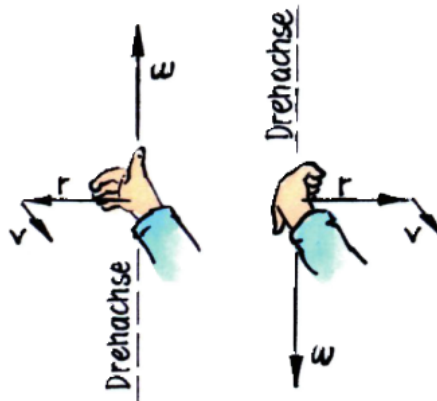


Abbildung 3.40: Rechte-Hand-Regel [[1], S.107]

Die Tangentialgeschwindigkeit ist durch Gleichung 3.67 gegeben. Das Wort *tangential* wird näher erläutert. Dazu dienen skizzenhafte, elementargeometrische Abbildungen aus dem Alltag, die die Bedeutung dieses Wortes erklären sollen (vgl. [1], S.106f.).

$$\mathbf{v} = \omega \mathbf{r} \quad (3.67)$$

Eine größere Rechenaufgabe im Zusammenhang mit der Drehbewegung der Erde wird ebenso ausgeführt, welche hier aber nicht näher erwähnt wird (siehe dazu [1], S.107). Diese fordert Überlegungen aus dem Bereich der *Trigonometrie*.

Als weitere physikalische Größe wird die Drehmasse bzw. das Trägheitsmoment besprochen. Sie gibt an, wie schwer es ist, einen Körper in Rotationen zu versetzen. Gleichung 3.68 liefert die mathematische Beschreibung dieser Größe (vgl. [1], S.108).

$$I = \sum I_{\text{Teil}} = \sum_i m_i r_i^2 \quad (3.68)$$

Das Summenzeichen in Gleichung 3.68 dient zur Darstellung der unterschiedlichen Drehmassen eines Drehkörpers, da diese ja in beliebiger Entfernung um die Drehachse desselben liegen können (vgl. [1], S.108).

Das Summenzeichen an sich tritt in der Schulmathematik kaum auf, könnte daher bei SchülerInnen verwirrend wirken, wenn dies nicht genauer, also ohne Darstellung von $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$, besprochen wird.

Man erkennt, dass die Einheiten der Masse ($[m] = kg$) und der Abstand von der Drehachse ($[r] = m$) im Buch falsch angeführt sind. Im Buch sind für die Einheiten Gleichung 3.69 und Gleichung 3.70 angeführt (vgl. [1], S.108).

$$[m] = kgm \quad (3.69)$$

$$[r] = kgm \quad (3.70)$$

Weitere Abstraktion ist notwendig, um zu verstehen, dass man sich einen Körper aus beliebig kleinen Teilen zusammengesetzt vorstellen kann. Über diese geometrischen Objekte muss dann integriert werden, um die Drehmasse mathematisch zu bestimmen (vgl. [1], S.108).

SchülerInnen jener Altersgruppe haben diesen Begriff im mathematischen Bereich wohl noch nie gehört, geschweige denn wissen sie, worum es sich dabei handelt. Integrieren wird, wie schon zuvor erwähnt, erst in der 8. Klasse AHS im Mathematikunterricht behandelt (vgl. [6], S.6).

Im nächsten Abschnitt wird das Drehmoment, jene physikalische Größe, die einen Körper in Rotation versetzt, beschrieben. Abbildung 3.41 zeigt eine Schraube samt Schraubenschlüssel. Ist der Abstand der Schraube zum Punkt am Schraubenschlüssel, wo die Kraft angreift, groß, so kann die Schraube leichter in Bewegung gesetzt werden (vgl. [1], S.110).

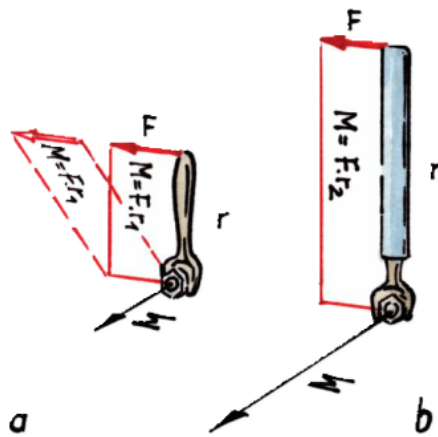


Abbildung 3.41: ([1], S.110 Abb.11.19)

In der Bildbeschreibung von Abbildung 3.41 liest man unter anderem:

„(...) Das Drehmoment M ist das Kreuzprodukt von F und r “ ([1], S.110).

Es wird der Begriff „Kreuzprodukt“ verwendet, der aber zu diesem Zeitpunkt noch nicht im Mathematikunterricht besprochen wurde (vgl. u.a. [6], [19], [9]).

Das Drehmoment wird außerdem mit Gleichung 3.71 algebraisch beschrieben, in der jedoch das Kreuzprodukt nicht zu finden ist. Stattdessen ist das Drehmoment durch eine Multiplikation gegeben (vgl. [1], S.110).

$$M = F \cdot r \quad (3.71)$$

In diesem Fall ist r der Abstand zwischen der Drehachse und der Wirkungslinie der Kraft. r wird außerdem Hebelarm genannt und gibt den Normalabstand von der Wirkungslinie zur Drehachse an (vgl. [1], S.110).

Eine weitere Beschreibung des Drehmoments erfolgt durch Flächen, die von r und F aufgespannt werden. Abbildung 3.42 erklärt das Hebelgesetz anhand einer Wippe mit zwei Personen. Befinden sich beide Drehmomente im Gleichgewicht, so gibt es keine Änderung der Winkelgeschwindigkeit (vgl. [1], S.110).

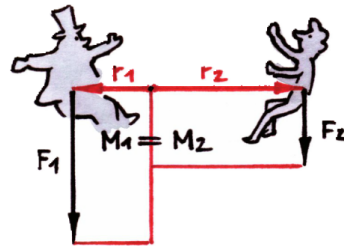


Abbildung 3.42: Wippe mit zwei Personen [[1], S.110]

In der mathematischen Beschreibung des Drehmoments bzw. des Hebelgesetzes findet man Elemente aus der *Geometrie*, aus *Formeln und Gleichungen* und aus der *Vektorrechnung*.

Der Drehimpuls wird mittels Gleichung 3.72 definiert. Obwohl direkt im Text erwähnt wird, dass es sich beim Drehimpuls, genauso wie bei der Winkelgeschwindigkeit und dem Drehmoment, um einen Vektor handelt, wird diesmal nicht direkt auf das Kreuzprodukt verwiesen (vgl. [1], S.112).

$$L = I\omega \quad (3.72)$$

Der Drehimpulssatz besagt, dass der Drehimpuls konstant ist, solange kein Drehmoment wirkt. Dieser Erhaltungssatz wird anhand einer Eiskunstläuferin mathematisch erklärt. Streckt eine Eiskunstläuferin ihre Arme aus, um auf dem Eis zu rotieren, wohnt ihr ein gewisser Drehimpuls inne. Zieht sie ihre Arme zum Körper und halbiert somit ihre Drehmasse, muss sich demzufolge die Winkelgeschwindigkeit verdoppeln (was auch in der Realität zu beobachten ist) (vgl. [1], S.112).

Der Drehimpulserhaltungssatz wird mathematisch durch Gleichung 3.73 beschrieben (vgl. [1], S.112).

$$L = I\omega = \frac{1}{2}I \cdot 2\omega \quad (3.73)$$

Die Drehenergie, als Gegenstück zur kinetischen Energie bei Translationen, wird mit Gleichung 3.74 beschrieben (vgl. [1], S.114).

$$E_{rot} = \frac{I\omega^2}{2} \quad (3.74)$$

Es tritt im Zusammenhang mit der Drehenergie eine weiterführende Rechenaufgabe zur Erdrotation auf, die mathematisches Wissen aus den Bereichen der *funktionalen Abhängigkeiten*, *Formel und Gleichungen* und dem Rechnen mit *Zehnerpotenzen und Größenordnungen* fordert. Auf diese soll hier aber nicht näher eingegangen werden.

Als Nächstes wird die Zentripetalkraft besprochen, die von Apolin anhand von Abbildung 3.43 eingeführt wird. Hier ist ein Auto in einer Kurvenfahrt dargestellt. Die Zentripetalkraft, gekennzeichnet mit F_{zp} , steht immer normal auf die Tangentialgeschwindigkeit v . Dies führt dazu, dass v gedreht wird, obwohl sich ihr Betrag nicht verändert (vgl. [1], S.116).

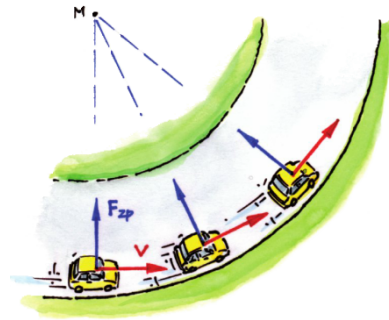


Abbildung 3.43: Bedeutung der Zentripetalkraft in der Kurvenfahrt[[1], S.116]

Wie bereits in Abbildung 3.43 ersichtlich, jedoch auch im Text zu lesen ist, spielen hier Kenntnisse aus dem Bereich der *Vektorrechnung* eine tragende Rolle. Beobachtet jemand ein Objekt, das eine Kurve durchfahren will, so muss auf dieses Objekt stets eine Kraft wirken, die dasselbe nach innen (zum Zentrum) beschleunigt (vgl. [1], S.116).

Für die Zentripetalkraft wird ebenso eine *Formel*, nämlich Gleichung 3.75, zur Berechnung derselben, angegeben (vgl. [1], S.116).

$$F_{zp} = m \frac{v^2}{r} = m \frac{(r\omega)^2}{r} = m\omega^2 r \quad (3.75)$$

Eine detailliertere Beschreibung und Herleitung der Zentripetalkraft wird ergänzend angeführt. Darüber hinaus finden sich weiterführende Themen in Bezug auf die Zentrifugalkraft in diesem Abschnitt des Kapitels (z.B. Looping) (siehe [1], S.116f.). Auf diese wird hier nicht näher eingegangen. Um diese Themen jedoch mathematisch verstehen zu können, werden Inhalte aus den Bereichen *Geometrie*, *Formeln und Gleichungen* und der *Vektorrechnung* gefordert.

Das Kapitel „Rotationen“ endet mit der Beschreibung der Bewegung eines Kreisel. Diese Bewegung wird geometrisch erklärt und gedeutet. Kenntnisse aus der *Vektorrechnung* finden hier große Anwendung.

Es wird zuerst die Wirkung einer Kraft auf Gegenstände bei Translationen eingegangen. Wirkt auf einen Gegenstand eine Kraft in Bewegungsrichtung, so erhöht sich der Betrag seiner Geschwindigkeit in Bewegungsrichtung. Wirkt eine Kraft schräg auf die Bewegungsrichtung eines Körpers, so verändert sich die Richtung der Bewegung. Visualisiert wird dieser Zusammenhang anhand zweier Grafiken, die in Abbildung 3.44 dargestellt sind (vgl. [1], S.119).

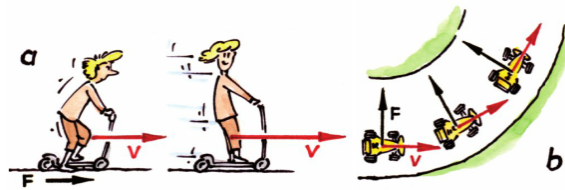


Abbildung 3.44: Wirkung von Kräften in Bewegungsrichtung und schräg dazu [[1], S.119]

Nach Betrachtung der Thematik anhand von Abbildung 3.44 wird auf die Wirkung von Kräften auf Objekte bei Rotationen eingegangen. Stehen das Drehmoment M und die Winkelgeschwindigkeit ω parallel zueinander, so kommt es lediglich zur Erhöhung des Betrages der Winkelgeschwindigkeit. Dies wird anhand von Abbildung 3.45 visualisiert (vgl. [1], S.119).

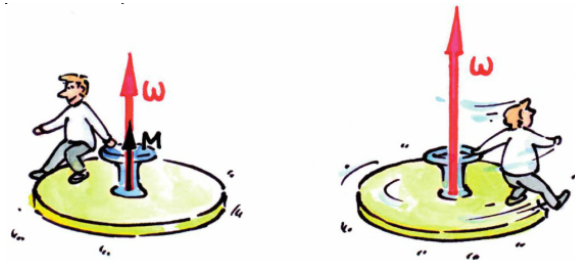


Abbildung 3.45: Erhöhung des Betrages der Winkelgeschwindigkeit [[1], S.119]

Stehen jedoch M und ω im rechten Winkel aufeinander, so kommt es zu einer Drehung des Winkelgeschwindigkeitsvektors. Eine grafische Veranschaulichung erhält man anhand von Abbildung 3.46 (vgl. [1], S.119).

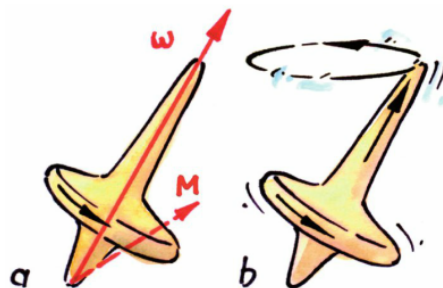


Abbildung 3.46: Drehung des Winkelgeschwindigkeitsvektors [[1], S.119]

Diese Drehung der Drehachse wird durch folgenden Merksatz formuliert:

„Die Kräfte, die an einem Kreise angreifen, wirken sich scheinbar um 90° in Rotationsrichtung verdreht aus“ ([1], S.119).

In diesem Abschnitt spielen Grundkenntnisse aus dem Bereich der *Vektorrechnung* eine tragende Rolle.

1.2.9 „Von Aristoteles bis Kepler“

Der Abschnitt „Von Aristoteles bis Kepler“ liefert einen geschichtlichen Rückblick, wie es zu der Entdeckung der Planeten, deren Bahnen und schließlich zur Aufstellung der Kepler'schen Gesetze kam. Hier wird näher auf Persönlichkeiten und deren Entdeckungen wie Kopernikus, Galilei und Kepler eingegangen. Am Ende des Kapitels findet man einen Überblick über unser Sonnensystem ([2], S.4ff.).

Da die geschichtlichen Erläuterungen wenige mathematische Kenntnisse (bis auf einige Berechnungen - siehe [2], S.4, 6) fordern, werden diese im Rahmen dieser Arbeit übersprungen, und es wird mit den Kepler'schen Gesetzen fortgefahren.

Das erste Kepler'sche Gesetz wird folgendermaßen definiert:

„Das 1. Kepler'sche Gesetz besagt, dass jeder Planet die Sonne auf einer Ellipse umkreist. Die Sonne befindet sich in einem der Brennpunkte“ ([2], S.8).

Dieses Gesetz verlangt nach Kenntnissen der *Ellipse* als geometrische Figur. Darüber hinaus wird Bezug auf die Eigenschaften derselben genommen. Es ist also nötig zu wissen, wie eine Ellipse aussieht und wo sich der Brennpunkt einer Ellipse befindet.

Es wird erläutert, wie Kepler zu der obigen Erkenntnis kam. Dies erfolgt geometrisch in einer ergänzenden Infobox, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll (vgl. [2], S.9).

Das zweite Kepler'sche Gesetz - der Flächensatz - wird folgendermaßen formuliert:

„Das 2. Kepler'sche Gesetz lautet: Die Linie zwischen einem Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeitabschnitten gleiche Flächen“ ([2], S.9).

Als Interpretation des Gesetzes wird angegeben, dass in der Position des Perihel (= sonnennächster Punkt der Erde) die Geschwindigkeit der Erde am größten ist und am Aphel (= sonnenfernster Punkt der Erde) am geringsten. Diese Tatsache und das Gesetz an sich werden durch Abbildung 3.47 veranschaulicht. Die Position der Erde ist in gleichen Zeitabständen ersichtlich (vgl. [2], S.11).

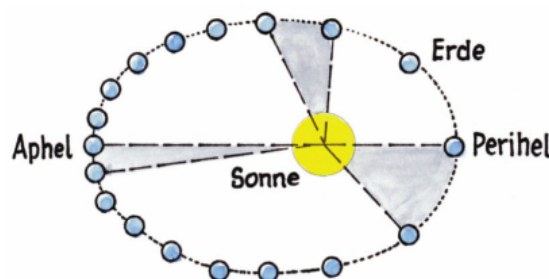


Abbildung 3.47: Veranschaulichung des zweiten Kepler'schen Gesetzes ([2], S.10)

Es bedarf indirekt eines mathematischen Vorwissens im Bereich von *Proportionalitäten* und *funktionalen Abhängigkeiten*, damit die Aussage des Gesetzes korrekt verstanden werden kann.

In der vorliegenden Buchreihe besagt das dritte Kepler'sche Gesetz:

„Das Verhältnis der Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten ist so groß wie das Verhältnis der dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen“ ([2], S.10).

Anhand dieses Gesetzes wird eine qualitative Erklärung gegeben, nämlich, dass man auf die Position eines anderen Planeten schließen kann, wenn man seine Umlaufzeit, die Länge der größeren Halbachse eines anderen Planeten und dessen Umlaufzeit kennt (vgl. [2], S.10).

Mathematisch genauer betrachtet wird das dritte Kepler'sche Gesetz in einer ergänzenden Infobox, deren Inhalt nun näher erläutert werden soll (vgl. [2], S.10).

In Gleichung 3.76 erkennt man, dass die Gleichung äquivalent umgeformt wurde.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = C \quad (3.76)$$

Betrachtet man z.B. die Sonne, so besagt die nun umgeformte Gleichung 3.76, dass das Verhältnis aus der dritten Potenz der Umlaufbahn zum Quadrat der Umlaufzeit für alle anderen Planeten konstant ist, also den gleichen Wert haben muss (vgl. [2], S.10).

Als Umlaufzeit wird ein Jahr und als Halbachse der Abstand von Erde zur Sonne - 1 Astronomische Einheit *AE* - angenommen. Werden diese beiden Größen in Gleichung 3.76 eingesetzt, reduziert sich die Gleichung zu Gleichung 3.77 (vgl. [2], S.10).

$$a^3 = T^2 \quad (3.77)$$

Um Gleichung 3.76 auf Gleichung 3.77 zu vereinfachen, bedarf es weiterführender Kenntnisse im Umgang mit *Gleichungen* und *funktionalen Abhängigkeiten*.

Das *Diagramm* in Abbildung 3.48 zeigt den Abstand und die Umlaufzeit aller Planeten unseres Sonnensystems (inkl. Pluto). Man erkennt, dass die x-Achse logarithmisch skaliert ist. Die Erklärung dazu ist, dass sich die „Werte von Markierung zu Markierung verzehnfachen“ (vgl. [2], S.10).

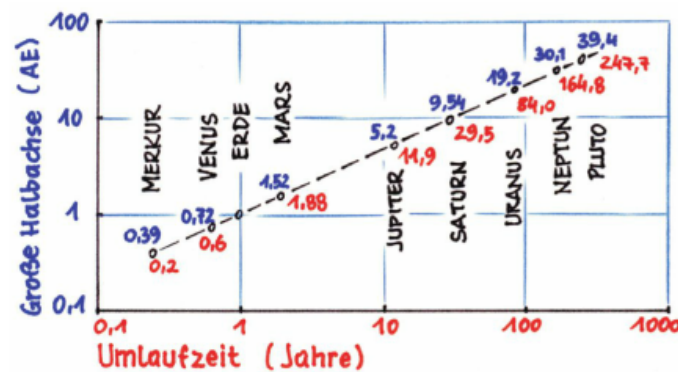


Abbildung 3.48: Abstand und Umlaufzeit aller Planeten und von Pluto. [[2], S.10]

1.2.10 „Newtons Gravitationsgesetz“

Die klassische Mechanik gipfelt im Gravitationsgesetz von Sir Isaac Newton. Dieser Physiker verallgemeinerte, dass alles im Universum der Gravitation folge, also *jeder Gegenstand zieht jeden Gegenstand an*“ (vgl. [2], S.16).

Newton selbst fand heraus, dass - genauso wie ein Apfel auf die Erde - der Mond um die Erde fällt. Das „Problem“, dass der Apfel einfach zu Boden fällt und die Erde nicht umkreist, wie eben der Mond, liegt darin, dass er zu langsam ist. Würde ein Apfel mit einer größeren Geschwindigkeit geworfen werden, so würde dieser genauso wie der Mond oder ein Satellit um die Erde kreisen. (vgl. [2], S.16f.)

Die Situation wird durch Abbildung 3.49 veranschaulicht: Bei einem normalen, sehr langsamen Apfel wirkt die Gravitationskraft in Bewegungsrichtung, was eine Beschleunigung des Tempos desselben in Richtung Erdmittelpunkt bewirkt. Hat ein Objekt - in diesem Fall der Apfel - eine Geschwindigkeit, die groß genug ist, so wirkt die Gravitationskraft senkrecht zur Bewegungsrichtung, was zu einer Änderung der Richtung, und damit zum Fallen des Apfels um die Erde, führt (vgl. [2], S.17).

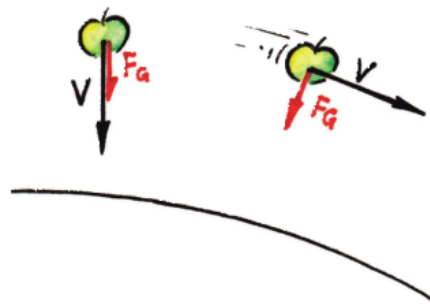


Abbildung 3.49: Fallen des Apfels[[2], S.17]

Das Newton'sche Gravitationsgesetz lautet:

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (3.78)$$

Gleichung 3.78 wird selbst in dieser Buchreihe qualitativ hergeleitet (vgl. [2], S.17). Es wird davon ausgegangen, dass sich Planeten auf Kreisbahnen (Vereinfachung!) bewegen. Wie bereits im Kapitel „Von Aristoteles bis Kepler“ erklärt wurde, benötigt man für die Bewegung auf einer Kreisbahn eine Kraft, die Zentripetalkraft. Diese ist durch die Gravitationskraft gegeben. Gleichung 3.79 stellt diesen Zusammenhang dar (vgl. [2], S.17).

$$F_{ZP} = F_G = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad F_G \propto \frac{v^2}{r} \quad (3.79)$$

Die Geschwindigkeit lässt sich - siehe Gleichung 3.4 - als Weg pro Zeit anschreiben. Für den Weg ist es zulässig $2\pi r$ und für die Umlaufzeit T anzunehmen, woraus sich Gleichung 3.80 ergibt (vgl. [2], S.17).

$$v = \frac{2\pi r}{T} \propto \frac{r}{T} \quad (3.80)$$

Wird Gleichung 3.80 in Gleichung 3.79 ersetzt, so erhält man Gleichung 3.81 (vgl. [2], S.17).

$$F_G \propto \frac{v^2}{r} = \frac{\frac{r^2}{T^2}}{r} = \frac{r}{T^2} \quad (3.81)$$

Lässt man nun das dritte Kepler'sche Gesetz - siehe Gleichung 3.77 - einfließen, so wird aus der großen Halbachse a der Umlaufradius r , was zu Gleichung 3.82 führt (vgl. [2], S.17).

$$T^2 \propto r^3 \quad (3.82)$$

Ersetzt man also mit Gleichung 3.82 T^2 in Gleichung 3.81, so erhält man die Proportionalität, welche durch Gleichung 3.83 gegeben ist (vgl. [2], S.17).

$$F_G \propto \frac{r}{T^2} \propto \frac{r}{r^3} = \frac{1}{r^2} \quad (3.83)$$

Weitere Überlegungen im Zusammenhang mit den Massen der auftretenden Körper (auf die hier nicht näher eingegangen werden soll) lassen auf eine direkte Proportionalität derselben schließen. Zusammen mit der experimentell bestimmten Gravitationskonstante G erhält man somit Gleichung 3.78 (vgl. [2], S.17).

Weiterführend wird die quadratische Abhängigkeit der Gravitationskraft der auftretenden Massen vom Abstand besprochen ([2], S.18).

Wie bereits ersichtlich, bedarf es am Beginn dieses Kapitels mathematischer Kenntnisse zu den Themen *Gleichungen und Formeln*, *funktionale Abhängigkeiten* und zum Teil auch der *Vektorrechnung*. Es werden weitere Rechenbeispiele im Zusammenhang mit dem Gravitationsgesetz präsentiert, auf die nicht weiter eingegangen werden soll (vgl. [2], S.19).

Nachdem das Gravitationsgesetz besprochen und erläutert wurde, wird Bezug auf das Gravitationsfeld genommen. Der Begriff „Vektorfeld“ wird im Zusammenhang mit dem Gravitationsfeld nicht konkret erwähnt. Es wird aber die Eigenschaft desselben preisgegeben:

„Gravitationsfeld: Damit ist gemeint, dass die Gravitationskraft an jedem Punkt in der Umgebung der Erde eine völlig exakt bestimmbar Richtung und Größe hat“ ([2], S.20).

In Abbildung 3.50 sieht man an einigen Punkten des Gravitationsfeldes Stärke und Richtung durch Vektoren dargestellt. Es wird ebenso darauf verwiesen, dass das Gravitationsfeld durch Feldlinien dargestellt werden kann. Dort, wo die Feldlinien dichter sind, ist die Gravitationskraft stärker, wo sie weiter auseinander sind, ist die Gravitationskraft schwächer (vgl. [2], S.20).

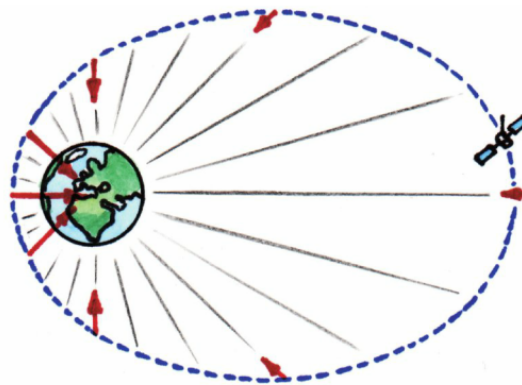


Abbildung 3.50: Gravitationsfeld der Erde ([2], S.20)

Auf den letzten Seiten des Kapitels wird noch einmal das dritte Kepler'sche Gesetz aufgegriffen und erklärt (vgl. [2], S.20f.).

Bereits im Kapitel „Von Aristoteles bis Kepler“ wurde erwähnt, dass sich Satelliten oder Planeten im Perihel schneller bewegen als im Aphel. Diese Tatsache wird nun mittels des Gravitationsfeldes (als Vektorfeld) erklärt (vgl. [2], S.20).

In Abbildung 3.51 ist die Bewegung der Erde um die Sonne auf einer Ellipse dargestellt. Im Perihel stehen v und F_G normal aufeinander (F_G wirkt als Zentripetalkraft, um die Erde auf einer Kreisbahn zu beschleunigen). Daher wird v auf einer Kreisbahn bewegt, was zur Folge hat, dass v und F_G nicht mehr normal aufeinander stehen, da F_G stets zur Sonne zeigt. Klar ersichtlich ist hier F_G als bremsende Komponente ([2], S.21). Im Aphel angekommen, stehen nun Geschwindigkeitsvektor und Gravitationskraft normal aufeinander. Bei der weiteren Bewegung dreht sich nun v wieder so, doch diesmal ergibt sich durch F_G eine beschleunigende Komponente (vgl. [2], S.21).

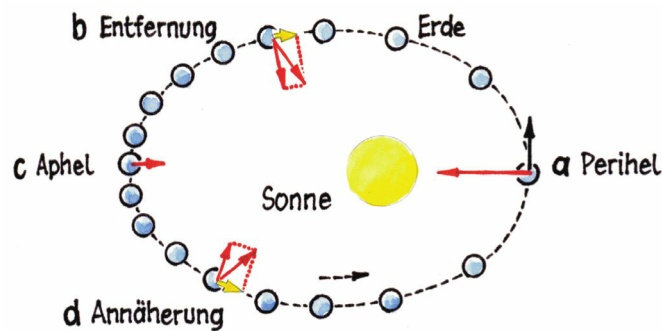


Abbildung 3.51: Veranschaulichung der Bewegung der Erde um die Sonne [[2], S.20]

Weitere Erklärungen des zweiten Kepler'schen Gesetzes erreicht man durch den Energiesatz und die Anwendung des Drehimpulses, auf die hier jedoch nicht näher eingegangen wird (siehe [2], S.21).

Auf weitere Rechenbeispiele und die Bedeutung von Hebearbeit und potenzieller Energie wird nicht weiter eingegangen, da diese wenig Anwendung in den kommenden Kapiteln finden (siehe [2], S.21f.).

Erwähnenswert ist jedoch das Eingehen auf die Bewegung von Satelliten im Gravitationsfeld der Erde mit bestimmten Geschwindigkeiten. In Abbildung 3.52 erkennt man, dass Satelliten die Bahnen von Kegelschnitten - Parabeln, Hyperbeln, Ellipsen - zurücklegen. Diese werden im Zusammenhang mit den unterschiedlichen Geschwindigkeiten angeführt, jedoch nicht näher mathematisch erläutert (vgl. [2], S.23).

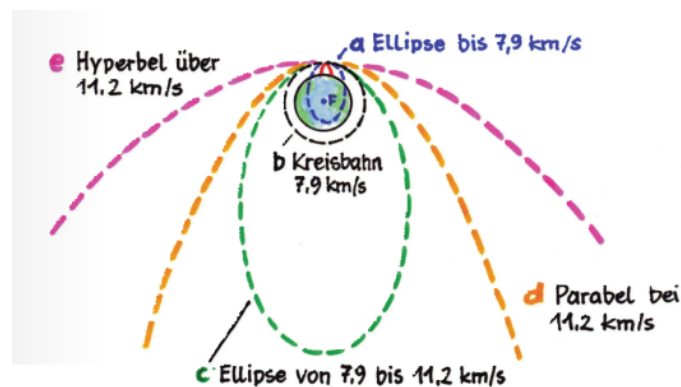


Abbildung 3.52: Bahnen von Satelliten [[2], S.23]

Auf weitere Rechenaufgaben und Vertiefendes soll hier nicht näher eingegangen werden.

1.3 Analyse und Auflistung der mathematischen Inhalte

Die Tabelle bildet einen Überblick über die mathematischen Inhalte, die im Rahmen der klassischen Mechanik in der Schulbuchreihe *Big Bang* von Martin Apolin besprochen werden. Angeführte Inhalte sind mit einem x in der Tabelle gekennzeichnet.

Kapitelnummern	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Elementargeometrie	x	x	x	x		x		x		
Vektorrechnung	x	x	x	x	x	x	x	x		x
Zehnerpotenzen Größenordnungen	x		x		x	x	x	x		
Reihen Grenzwerte		x						x		
Zahlen und Maße		x	x		x	x		x		
Funktionsgraphen Diagramme		x	x	x	x		x		x	
Gleichungen, Formeln		x	x	x	x	x	x	x	x	x
Funktionale Abhängigkeit		x	x	x	x	x	x	x	x	x
Integration			x					x		
Differenzenquotient			x							
Differenzialquotient			x							
Symmetrie			x							
Mittelwerte Standardabweichung			x							
Trendanalyse Polynomannäherung			x							
Trigonometrie				x	x		x	x		
Prozentrechnung						x				
Logarithmus							x		x	
Gleichungssysteme							x			
Kegelschnitte									x	x
Proportionalität									x	

Tabelle 3.5: Analyse *Big Bang*

2 Sexl Physik

2.1 Allgemeines zur Buchreihe

Die Physiks Schulbuchreihe *Sexl Physik* (verfasst von Roman U. Sxl, Helmut Kühnelt, Helga Stadler, Peter Jakesch und Eva Sattlberger) besteht - genauso wie *Big Bang* von Apolin - aus vier Büchern: *Sexl Physik 5*, *Sexl Physik 6*, *Sexl Physik 7* und *Sexl Physik 8*.

Die gesamte klassische Mechanik wird im Buch *Sexl Physik 5* besprochen. Dieses Buch beinhaltet die Kapitel „Die Bewegung“, „Die Kraft“ und „Die Erhaltungssätze“. Von der klassischen Mechanik abgesehen, befasst sich *Sexl Physik 5* auch mit elektrischen Strömen, elektrischen Ladungen und der Energieversorgung (vgl. [25], S.3).

Das Schulbuch *Sexl Physik 6* befasst sich mit den physikalischen Themen rund um die Thermodynamik (Wärmelehre) und den mechanischen Schwingungen und Wellen (vgl. [26], S.3).

Das Buch *Sexl Physik 7* wird in zwei große physikalische Kapitel unterteilt, nämlich in die Optik und in die Elektrodynamik, welche in der Diskussion der elektromagnetischen Schwingungen endet. Ein kurzer Einblick wird auch in die Welt der Quanten und Atome gegeben (vgl. [27], S.3).

Der letzte Band der Schulbuchreihe, *Sexl Physik 8*, ist geprägt von den physikalischen Inhalten aus dem 20. Jahrhundert. Dazu zählen die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie und die Quantenphysik. Zwei Welten prallen in der physikalischen Betrachtung des Mikro- und Makrokosmos aufeinander. Weitere Themen, wie der globale Klimawandel und die Chaostheorie, werden im Kapitel über interdisziplinäre Physik behandelt (vgl. [28], S.3).

2.2 Mathematische Inhalte in der klassischen Mechanik

In den kommenden Abschnitten sollen wesentliche mathematische und physikalische Unterschiede zwischen den beiden Schulbuchreihen *Big Bang* und *Sexl Physik* angeführt und besprochen werden. Am Ende dieses Kapitels findet sich (genauso wie am Ende der Analyse von *Big Bang 5* und *Big Bang 6*) eine Tabelle, die eine Übersicht über die verwendeten mathematischen Inhalte liefert.

2.2.1 „Geschwindigkeit und Beschleunigung“

Der physikalisch auffallendste Unterschied des Schulbuches *Sexl Physik 5* zum Schulbuch *Big Bang 5* ist, dass die Besprechung des Körperschwerpunktes ausfällt. Ein weiterer, jedoch nun mathematischer Unterschied liegt darin, dass in *Sexl Physik 5* kein Kapitel vorkommt, in dem die Unterschiede zwischen skalaren und vektoriellen Größen behandelt werden (vgl. [25], S.16 ff. und [1], S.34 ff.).

Sexl beginnt die klassische Mechanik in der Klärung, was man unter Bewegungen versteht. Danach folgt die Besprechung der Geschwindigkeit und Beschleunigung in der Physik (vgl. [25], S.16 ff.).

Von Beginn an wird zwischen der Momentangeschwindigkeit und der mittleren Geschwindigkeit unterschieden. Die mittlere Geschwindigkeit ist gegeben durch Gleichung 3.84. Man erkennt hier den mathematischen *Differenzenquotienten*, obwohl dieser nicht im Buch ausdrücklich erwähnt wird. Ebenso wird im Buch erklärt, dass es sich bei $\Delta t = t_2 - t_1$ um einen Zeitabschnitt und bei $\Delta \vec{s} = \vec{s}_2 - \vec{s}_1$ um den zugehörigen Wegabschnitt handelt (vgl. [26], S.17).

$$\vec{v} = \frac{\vec{s}_2 - \vec{s}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \quad (3.84)$$

Die Momentangeschwindigkeit wird mathematisch definiert, indem gefordert wird, dass das Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ möglichst klein gehalten wird. Sie wird durch Gleichung 3.85 mathematisch beschrieben (vgl. [26], S.17).

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \quad (\Delta t \text{ möglichst klein}) \quad (3.85)$$

Auch in diesem Zusammenhang wird (genauso wie in *Big Bang 5*) nicht erwähnt, dass es sich beim Berechnen der Momentangeschwindigkeit um die Anwendung des *Differentialquotienten* bzw. um eine Grenzwertbildung handelt.

Um die Notwendigkeit der Richtungsabhängigkeit der Geschwindigkeit zu diskutieren, führt Sexl in diesem Zusammenhang die Geschwindigkeit als eine *vektorielle Größe* ein. Wie bereits in Gleichung 3.84 und Gleichung 3.85 zu erkennen ist, erfolgt die Darstellung des Weges und der Geschwindigkeit nicht fett gedruckt wie bei Apolin (vgl. dazu Gleichung 3.1), sondern direkt über Vektorpfeile (vgl. [25], S.17).

Als Nächstes wird die Beschleunigung als „Maß für die Geschwindigkeitsänderung“ eingeführt. Dazu wird mathematisch formuliert:

„Als durchschnittliche Beschleunigung $\vec{a}$ wird die Geschwindigkeitsänderung $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ pro Zeitdauer $\Delta t = t_2 - t_1$ bezeichnet“ ([25], S.19).

Diese Formulierung wird mathematisch durch Gleichung 3.86 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass es sich dabei wieder um die Verwendung des *Differenzenquotienten* handelt, dieser jedoch nicht im Text erwähnt wird (vgl. [25], S.19).

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zeitdauer}} \quad \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (3.86)$$

Die Hinführung zu Gleichung 3.87 erfolgt dadurch, dass in Gleichung 3.86 die Anfangsgeschwindigkeit Null gesetzt wird, also $\vec{v}_1 = 0$, und die Bewegung beim Zeitpunkt Null startet, also $t_2 = 0$ (vgl. [25], S.19).

$$\vec{v} = \vec{a} \cdot t \quad (3.87)$$

Nach Klärung der gleichförmigen Bewegung setzt Sexl fort, indem er, ausgehend vom freien Fall (wie auch in *Big Bang* 5), die gleichmäßig beschleunigte Bewegung diskutiert. Die einzelnen Formeln, die bei dieser Art der geradlinigen Bewegung gelten, werden nicht (wie bei Apolin) mit Diagrammen ermittelt, sondern durch rein *algebraische Umformungen* (ausgehend von einem Experiment, das durchgeführt werden soll, vgl. [25], S.20). Für die Fallgeschwindigkeit (proportional zu t) ergibt sich aus Gleichung 3.87 mit $a = g$ Gleichung 3.88 (vgl. [25], S.21).

$$v = g \cdot t \quad (3.88)$$

Der Fallweg h wird hergeleitet, indem zuerst eine *Formel* für die mittlere Geschwindigkeit v_m beim freien Fall aufgestellt werden muss. Dies wird durch Gleichung 3.89 und der Bemerkung erreicht, dass die mittlere Geschwindigkeit v_m beim freien Fall (also einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung), die Hälfte der Endgeschwindigkeit v ist. Mit Gleichung 3.87 und Gleichung 3.89 erhält man schlussendlich Gleichung 3.90, mit der die Beschleunigung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung bestimmt werden kann (vgl. [25], S.20).

$$v_m = \frac{v}{2} = \frac{h}{t} \quad (3.89)$$

$$a = \frac{v}{t} = \frac{2v_m}{t} = \frac{2h}{t^2} \quad (3.90)$$

Um nun eine Gleichung für den Fallweg h (proportional zu t^2) aufzustellen, werden Gleichung 3.89 und Gleichung 3.90 mit $g = a$, was $g = \frac{2v_m}{t}$ ergibt, zusammengeführt. Damit erhält man Gleichung 3.91 (vgl. [25], S.21).

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (3.91)$$

Genauso mathematisch anspruchsvoll erfolgt die Angabe der Gleichung für die Endgeschwindigkeit v_{End} beim freien Fall ([25], S.21).

Diese wird im Buch nicht hergeleitet, dies soll jedoch im Rahmen dieser Arbeit dennoch geschehen. Dazu verwende man Gleichung 3.91, die auf $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ umgeformt wird und setzt sie mit Gleichung 3.88 (umgeformt auf $t = \frac{v}{g}$) gleich. Schließlich erhält man für die Endgeschwindigkeit v_{End} Gleichung 3.95.

$$\frac{v}{g} = \frac{2h}{g} \quad (3.92)$$

$$\frac{v^2}{g^2} = \frac{2h}{g} \quad (3.93)$$

$$v^2 = 2hg \quad (3.94)$$

$$v = \sqrt{2hg} \quad (3.95)$$

Ähnlich wie in *Big Bang 5* die „Mathematik des schiefen Wurfes“ (vgl. Abbildung 1.2.4) besprochen und damit Einblicke in die Trigonometrie gegeben wurden, so wird auch in *Sextl Physik 5* die *Trigonometrie* als Vertiefung besprochen. In diesem Zusammenhang kommt es zur Klärung der Winkelfunktionen $\sin$, $\cos$ und $\tan$ im rechtwinkligen Dreieck, zur Diskussion über *ähnliche Dreiecke* und weitere *algebraische Umformungen* bereits gelernter Formeln im Zusammenhang mit den gelernten Bewegungsformen. Anders als in *Big Bang 5* wird nicht näher auf Vektorzerlegung bzw. Vektoraddition eingegangen (siehe [25], S.23).

Ausgehend von einem Beispiel zur Berechnung der Schwimmgeschwindigkeit einer Sportlerin wird festgestellt, dass in *Sextl Physik 5* viele physikalische *Messwerte mit Messungengenauigkeit* angegeben werden (siehe [25], 24).

Am Ende des ersten Kapitels finden sich vertiefende und weiterführende Aufgaben. Hier bemerkt man, dass es viele Rechenaufgaben gibt, bei denen es nötig ist *algebraische Umformungen* durchzuführen (siehe [25], S.25).

2.2.2 „Die Newton'schen Gesetze“

Das zweite Kapitel im Buch *Sextl Physik 5*, das sich mit der klassischen Mechanik beschäftigt, beginnt mit der Klärung des Trägheitsgesetzes und des Relativitätsprinzips. Es wird ein geschichtlicher Rückblick darüber gegeben, wie es zur Entdeckung der Trägheit kam, also dass sich Körper geradlinig gleichförmig weiterbewegen oder ruhen, solange keine äußere Einwirkung auf sie ausgeübt wird. Darüber hinaus wird geklärt, dass nur Relativbewegungen festgestellt werden können, solange sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Ebenso wird der Begriff Inertialsystem anhand von Beispielen aus dem Alltag genauer unter die Lupe genommen (vgl. [25], S.28. ff.).

Der Kraftbegriff wird eingeführt, indem darauf Bezug genommen wird, dass sich bei Einwirkung einer Kraft auf einen Körper sein Geschwindigkeitsvektor ändert. Es wird hier jedoch nicht mathematisch unterschieden, dass eine Vektoränderung eine Änderung des Betrags oder der Richtung bedeutet. Es wird direkt erwähnt, dass dies für die Bewegung eines Körper bedeutet, dass er sein Tempo und/oder seine Richtung ändern kann (vgl. [25], S.31).

Das zweite Newton'sche Gesetz wird folgendermaßen formuliert:

„Wenn eine Kraft $\vec{F}$ auf einen Körper wirkt, wird dieser beschleunigt, das heißt er wird schneller oder langsamer oder er ändert seine Bewegungsrichtung. Die Kraft $\vec{F}$ ist direkt proportional zur Beschleunigung $\vec{a}$ “ ([25], S.32).

Bevor also noch Gleichung 3.96 zur Berechnung der Kraft eingeführt wird, wird festgestellt, dass die Kraft direkt proportional zur Beschleunigung ist. Wie im Zitat erkennbar ist, werden sowohl die Kraft als auch die Beschleunigung *vektoriell* angegeben. Es werden jedoch weder ein Hinweis noch eine Grafik angeführt, dass die beiden vektoriellen Größen immer in dieselbe Richtung zeigen (vgl. [25], S.32).

Nach Ausführung eines weiteren Experiments kann festgestellt werden, dass bei gleichem Kraftaufwand die Beschleunigung indirekt proportional zur Masse ist. Darüber hinaus wird gefolgert, dass das Produkt aus Masse und Beschleunigung gleich der auftretenden Kraft sein muss, da die Masse direkt proportional zur Kraft ist (vgl. [25], S.32).

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (3.96)$$

Diese experimentelle Erkenntnis samt Schlussfolgerung könnte für SchülerInnen Schwierigkeiten hervorrufen, da hier weiterführendes Verständnis von *Gleichungen und Formeln*, vor allem aber der *funktionalen Abhängigkeiten* gefordert sind.

Im Gegensatz zu *Big Bang 5* werden die Bewegungsgleichungen (Gleichung 3.97, Gleichung 3.98, Gleichung 3.99) angeführt, mit denen man die Bewegung von Körpern berechnen kann (vgl. [25], S.32).

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (3.97)$$

$$\vec{v} = \vec{a} \cdot t + \vec{v}_0 \quad (3.98)$$

$$\vec{s} = \vec{v} \cdot t + \vec{x}_0 \quad (3.99)$$

Im Zusammenhang mit der auftretenden Masse beim Kraftbegriff bespricht Sexl die Dichte von Körpern. Dazu wird formuliert:

„Zwei Körper mit gleichem Volumen können unterschiedliche Masse haben. Die beiden Körper unterscheiden sich jedoch durch ihre Dichte ϱ , das ist das Verhältnis der Masse m zum Volumen V “ ([25], S.33).

Mathematisch wird dies durch Gleichung 3.100 ausgedrückt (vgl. [25], S.33).

$$\text{Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} \quad \varrho = \frac{m}{V} \quad (3.100)$$

Obwohl eine Tabelle in diesem Zusammenhang angeführt wird, in der die Dichte unterschiedlicher Materialien zu finden sind, werden keine weiteren Rechnungen zur Vertiefung bzw. Veranschaulichung durchgeführt.

Rechnungen im Zusammenhang mit der Dichte sind den meisten SchülerInnen bereits aus dem Mathematikunterricht der Unterstufe (z.B. in der 3. Klasse im Rahmen des Berechnens der Masse bestimmter Körper) bekannt, da etliche Aufgabenstellungen in den Schulbüchern vorkommen (vgl. [7], S.7).

Genauso wie Apolin bespricht Sexl die Federkraft als Beispiel für Kräfte. In diesem Zusammenhang wird das Hook'sche Gesetz formuliert:

„Die Federkraft ist in einem begrenzten Bereich proportional zur Dehnung der Feder“ ([25], S.34)

Ebenso wird das Hook'sche Gesetz mittels Gleichung 3.101 und Abbildung 3.53 beschrieben, wobei $\vec{x}$ die Federdehnung und k die Federkonstante angibt. Es wird ausgesagt, dass die Feder umso stärker ist, je größer der Wert der Federkonstante ist (vgl. [25], S.34).

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x} \quad (3.101)$$

In Abbildung 3.53 ist zwar ein *Diagramm* für eine starke und eine schwache Feder ersichtlich, es wird jedoch keine Verknüpfung zwischen Gleichung 3.101 und der Steigung der Geraden als Wert für die Federkonstante hergestellt.

Kenntnisse zu den *linearen Funktionen* sollten bereits seit der 4. Klasse aus dem Mathematikunterricht vorhanden sein. Darüber hinaus wird das Thema in der 5. Klasse nochmals besprochen (vgl. [18], S.7 und [6], S.5).

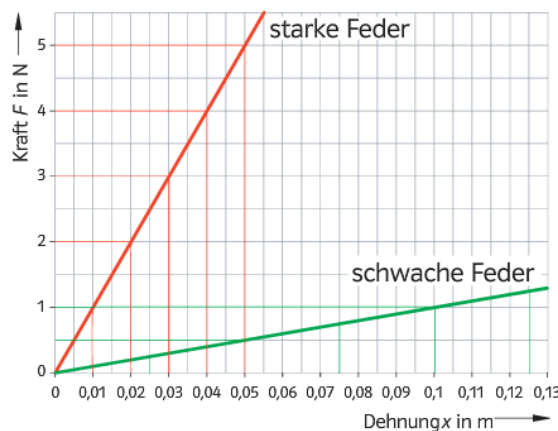


Abbildung 3.53: Belastung zweier unterschiedlich starker Federn ([25], S.34)

Das Kapitel „Die Newton'schen Axiome“ endet mit einem Ausflug in die Welt der *Vektorrechnung*. Das Addieren und Multiplizieren von Vektoren wird sowohl algebraisch als auch graphisch besprochen. Die Erklärung der Vektoroperationen erfolgt fast ausschließlich mathematisch (mithilfe von Pfeilen), nur bei der Vektoraddition und -subtraktion wird auf die physikalische Addition von Kräften verwiesen (vgl. [25], S.34).

Im Gegensatz zu *Big Bang 5* erfolgt im Zusammenhang mit der Besprechung der Multiplikation von Vektoren die Betrachtung des Skalarproduktes (Gleichung 3.102) und des Kreuzproduktes (Gleichung 3.103) (vgl. [25], S.35).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha \quad (3.102)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha \quad (3.103)$$

Beide Größen werden rein mathematisch und ohne Zusammenhang bzw. Bedeutung für die Physik erklärt.

2.2.3 „Drittes Newton'sches Gesetz: Das allgemeine Wechselwirkungsgesetz“

Das dritte Newton'sche Gesetz wird in *Sexl Physik 5* folgendermaßen formuliert:

„Übt der Körper A eine Kraft (actio) auf den Körper B aus, so übt gleichzeitig B auf A eine gleich große, aber entgegengesetzt wirkende Kraft aus (reactio)“ ([25], S.36).

Anders als Apolin wird die Gleichung für die obige Formulierung und damit die Aussage über das Wechselwirkungsgesetz von Kräften von Sexl *vektoriell* formuliert (vgl. [25], S.36).

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A} \quad (3.104)$$

Abbildung 3.54 soll dabei die Bedeutung von Gleichung 3.104 veranschaulichen, indem gezeigt wird, dass sich beide Personen, welche auf Skateboards stehen, bewegen, auch wenn nur eine am Seil zieht (vgl. [25], S.36).

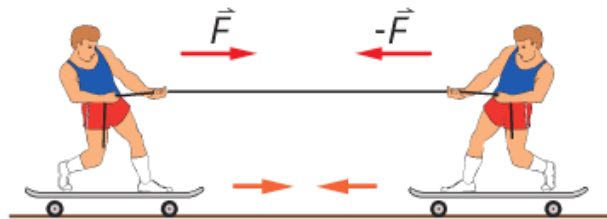


Abbildung 3.54: Darstellung des 3. Newton'schen Axioms ([25], S.36)

Abbildung 3.54 zeigt sehr deutlich die beiden gleich langen Kraftvektoren $\vec{F}$ und $-\vec{F}$. Das Minuszeichen lässt erkennen, dass der eine Vektor in die umgekehrte Richtung des anderen zeigt. Das bedeutet, dass $\vec{F}$ und $-\vec{F}$ zueinander antiparallel sind. Diese Tatsache wird jedoch nicht im Text oder in der Bildbeschreibung erwähnt.

Als Beispiel für das allgemeine Wechselwirkungsgesetz wird das Newton'sche Gravitationsgesetz sehr kurz angeführt. Um zu verdeutlichen, dass alle Körper einander anziehen, kann Abbildung 3.55 betrachtet werden (vgl. [25], S.37f.).

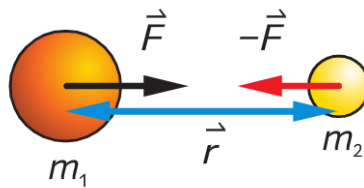


Abbildung 3.55: Darstellung des Gravitationsgesetzes [[25], S.38]

In Abbildung 3.55 sind wie auch in Abbildung 3.54 die Vektorpfeile der beiden wirkenden Kräfte, $\vec{F}$ und $-\vec{F}$, eingezeichnet, jedoch scheint der schwarze Pfeil länger zu sein als der rote. Dies ist jedoch falsch. Es kommt hier aufgrund der Farben zu einer optischen Täuschung. Daher haben die beiden Pfeile tatsächlich dieselbe Länge.

Ebenso wird der Abstand r der beiden Massen mit einem doppelten Pfeil dargestellt. Dies könnte bei SchülerInnen Verwirrung hervorrufen, da nun nicht klar ist, ob es sich bei r um eine vektorielle oder skalare Größe handelt. (Eine gerade Linie ohne Pfeile als Spitze wäre in Abbildung 3.55 geeigneter, da der Betrag eines Vektors mithilfe des Lehrsatzes des Pythagoras berechnet und damit zu einer skalaren Größe wird.)

In der Formulierung von Gleichung 3.105 selbst wird die Gravitationskraft skalar, also nicht als Vektor angegeben (vgl. [25], S.38).

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (3.105)$$

Damit entspricht Gleichung 3.105 der Schreibweise von Apolin (vgl. Gleichung 3.78).

Am Ende des Kapitels finden sich diverse Rechenaufgaben zum Gelernten. Folgende Aufgabe soll besonders hervorgehoben werden:

„Auf einen Körper wirken gleichzeitig eine Kraft von 3 N und eine von 4 N ein. Die Kräfte schließen miteinander einen Winkel von 90° ein. Wie groß ist die gesamte wirkende Kraft?“ ([25], S.38).

Zur Beantwortung der Frage gibt es die folgenden vier Auswahlmöglichkeiten, nämlich 3 N, 4 N, 5 N, 7 N (vgl. [25], S.38).

Diese Aufgabe fordert ein Zurückgreifen auf Inhalte aus dem Kapitel „Die Newton’schen Gesetze“ bzw. das Verknüpfen von Inhalten aus der *Vektorrechnung* und *Elementargeometrie*: Wirken zwei Kräfte im rechten Winkel zueinander, so kann durch Vektorverschiebung ein Kräfteparallelogramm gezeichnet werden. Den Betrag der resultierenden Kraft kann man mithilfe des pythagoräischen Lehrsatzes berechnen, was zu einem Ergebnis von 5 N führt.

2.2.4 „Der Einfluss der Reibung“

Nach Klärung der unterschiedlichen Reibungsarten (Haft-, Gleit- und Rollreibung), wird mit Gleichung 3.106 die Beziehung zwischen der Reibungskraft F_R und der Normalkraft F_N angegeben. Die Normalkraft ist jene Kraft, die normal auf die Berührungsfläche wirkt. Ebenso wird ausgesagt, dass die Reibungskraft entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung wirkt (vgl. [25], S.41).

$$F_R = f \cdot F_N \quad (3.106)$$

Wie in *Big Bang 5* werden die beiden Kräfte skalar und nicht vektoriell angegeben. Ebenso findet sich eine Tabelle mit unterschiedlichen Werten für den Reibungskoeffizienten f (bei Apolin μ) für die Haft- und die Rollreibung (vgl. [25], S.41).

Eine Rechenaufgabe wird im Zusammenhang mit dem Luftwiderstand gestellt. Es geht darum herauszufinden, mit welcher Geschwindigkeit ein Fallschirmspringer zur Erde sinkt ([25], S.40 ff.).

Wie auch Apolin gibt Sexl die Luftwiderstandskraft F_L in der Form von Gleichung 3.107 an (vgl. [25], S.42).

$$F_L = \frac{1}{2} c_w A \varrho_L v^2 \quad (3.107)$$

Auf einen Fallschirmspringer, der sich im freien Fall befindet, wirken zwei Kräfte, nämlich die Erdanziehungskraft F_G nach Gleichung 3.96 mit $a = g$ und die Luftwiderstandskraft F_L nach Gleichung 3.107. Die beiden Kräfte wirken entgegengesetzt, sodass man nach Umformung Gleichung 3.109 erhält (vgl. [25], S.42).

$$F = ma = F_G - F_L = mg - \frac{1}{2} c_w A \varrho_L v^2 \quad (3.108)$$

$$a = g - \frac{1}{2} \frac{c_w A \varrho_L v^2}{m} \quad (3.109)$$

Wenn angenommen wird, dass sich ein kugelförmiger Körper mit Radius r und Dichte ϱ_K im freien Fall befindet, so gilt für die Masse $m = \frac{4\pi\varrho_K r^3}{3}$ und für die Querschnittsfläche $A = \pi r^2$. Hat der kugelförmige Körper seine Grenzggeschwindigkeit erreicht, so wirkt auf ihn keine Beschleunigung. Es ist damit $a = 0$ und in diesem Fall sind die Erdanziehungskraft F_G und die Luftwiderstandskraft F_L gleich groß (aber entgegengesetzt gerichtet). Man erhält dann für die Grenzggeschwindigkeit v_G Gleichung 3.110 (vgl. [25], S.42).

$$v_G = \sqrt{\frac{8rg\varrho_K}{3c_w\varrho_L}} \quad (3.110)$$

Eine Interpretation von Gleichung 3.110 erfolgt dahingehend, dass festgestellt wird, dass die Grenzggeschwindigkeit beim freien Fall mit Luftwiderstand proportional zur Wurzel aus Radius mal Dichte ist. Daher fallen bei Luftwiderstand große und schwere Körper schneller als kleine und leichte (vgl. [25], S.42).

Diese Rechenaufgabe und die Interpretation der erhaltenen Gleichung erfordern vertie-

fende Kenntnisse aus dem Bereich der *Formeln und Gleichungen* sowie der *funktionalen Abhängigkeiten*.

Abschließend sind in diesem Kapitel zwei *Funktionsgraphen* abgebildet, deren Interpretation gefordert ist. In Abbildung 3.56 ist der Funktionsverlauf der Grenzggeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Fallzeit dargestellt. Abbildung 3.57 zeigt die Grenzggeschwindigkeit in Abhängigkeit des Radius der Regentropfen bzw. der Hagelkörner (vgl. [25], S.43).

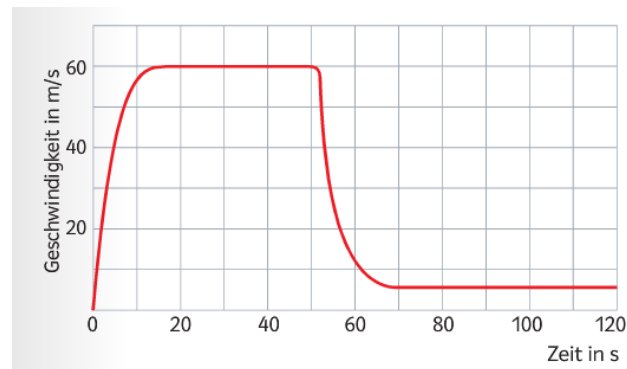


Abbildung 3.56: Grenzggeschwindigkeit beim Fallschirmsprung in Abhängigkeit von der Fallzeit [[25], S.43]

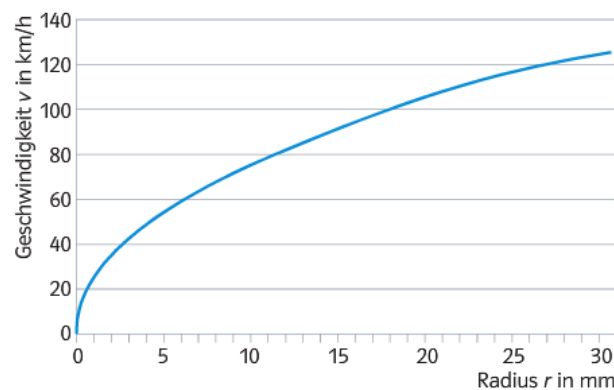


Abbildung 3.57: Grenzggeschwindigkeit von Regentropfen bzw. Hagelkörnern in Abhängigkeit vom Radius [[25], S.43]

In Zusammenhang mit Abbildung 3.56 und Abbildung 3.57 sind mathematische Kenntnisse aus dem Bereich des Interpretierens von *Funktionsgraphen* und der *funktionalen Abhängigkeit* von Größen gefordert.

2.2.5 „Spezielle Bewegungsformen“

Im Kapitel „Spezielle Bewegungsformen“ werden Wurfbewegungen beschrieben, die in weiteren Themen benötigt werden, um die Bewegung der Planeten um die Sonne nachvollziehen zu können (vgl. [25], S.44).

Wurfbewegungen sind zusammengesetzte Bewegungen, welche durch die vektorielle Addition einer gleichförmigen Bewegung (mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0) und einer gleichmäßig beschleunigten Fallbewegung in Richtung Erdmittelpunkt erfolgen (vgl. [25], S.44).

Bevor auf die einzelnen Arten der Wurfbewegung (lotrechter, waagrechter und schiefer Wurf) eingegangen wird, werden mittels Gleichung 3.111 und Gleichung 3.112 die Vektorgleichungen für die Momentangeschwindigkeit $\vec{v}$ und die zurückgelegte Strecke $\vec{s}$ angeführt (vgl. [25], S.44).

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t \quad (3.111)$$

$$\vec{s} = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{g}}{2} \cdot t^2 \quad (3.112)$$

In diesem Zusammenhang ist Verständnis in den Bereichen *Vektorrechnung* und *Funktionen* und *Formeln* gefordert.

Als erste Wurfbewegung wird der lotrechte Wurf erläutert. Ein lotrechter Wurf tritt dann auf, wenn man einen Körper senkrecht nach oben wirft. Da auf der Erde für gewöhnlich eine Kraft auf diesen wirkt, wird der Ball bei der Aufwärtsbewegung immer langsamer, bis seine Geschwindigkeit am Umkehrpunkt Null beträgt. Danach fällt der Körper zu Boden (vgl. [25], S.45).

Im Zuge der Beschreibung des lotrechten Wurfes erfolgt eine verbale Herleitung der Formeln für die Steigzeit (vgl. Gleichung 3.113) und Steighöhe (vgl. Gleichung 3.114) beim lotrechten Wurf (vgl. [25], S.45).

$$t_h = \frac{v_0}{g} \quad (3.113)$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \quad (3.114)$$

Die verbale Herleitung von Gleichung 3.113 und Gleichung 3.114 erweist sich als spärlich. Vergleicht man mit *Big Bang 5*, so erfolgt die Erklärung dieses Wurfes mittels Betrachtung der symmetrischen Bewegung: Die Fallbewegung des Körpers muss genauso lange dauern wie das Aufsteigen des Körpers, wenn man diesen in die Luft wirft. Analog kann für die Steighöhe argumentiert werden.

Als Aufgabe liegt eine Interpretation eines lotrechten Wurfes vor, der in Abbildung 3.58 dargestellt ist. Es tritt keine konkrete Fragestellung dazu auf (vgl. [25], S.45).

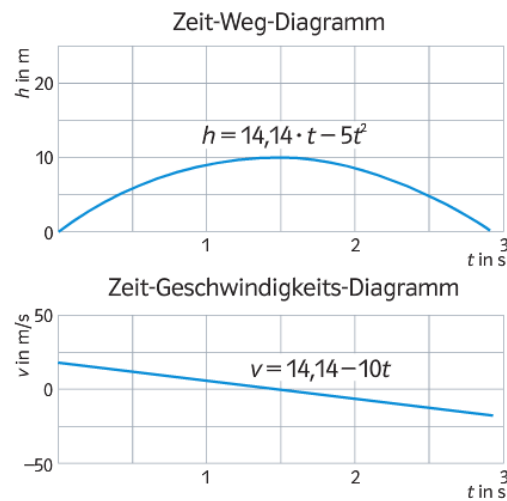


Abbildung 3.58: Interpretation von Diagrammen beim lotrechten Wurf [[25], S.45]

Als zweite Wurfbewegung wird der waagrechte Wurf angeführt. Ein waagrechter Wurf tritt auf, wenn man einen Körper in waagrechte Richtung mit der Geschwindigkeit v_0 weg wirft (Luftwiderstand wird vernachlässigt). In diesem Fall führt der Körper, wie schon erwähnt, zwei Bewegungen aus: eine geradlinig gleichförmige in horizontaler Richtung und die gleichmäßig beschleunigte Bewegung (freier Fall) Richtung Erdmitte. Durch die Zusammensetzung dieser beiden Bewegungen folgt der Körper einer bestimmten Bahn, die man als Wurfparabel bezeichnet. Dieser Zusammenhang wird einerseits mittels eines *Diagramms* (vgl. Abbildung 3.59), andererseits mittels eines Experiments (vgl. Abbildung 3.60) beschrieben (vgl. [25], S.45).

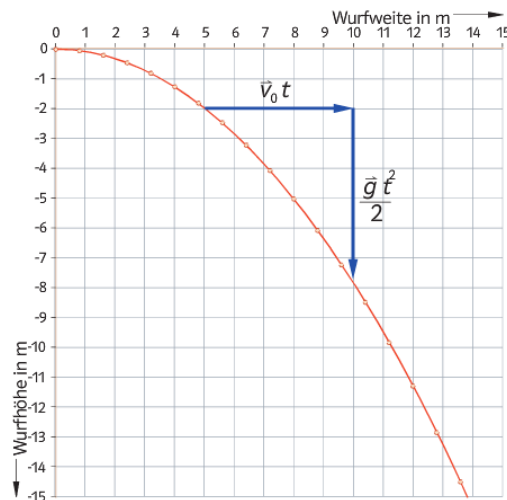


Abbildung 3.59: s-s-Diagramm für den waagrechten Wurf [[25], S.45]

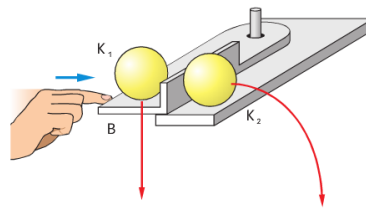


Abbildung 3.60: Experiment zur Veranschaulichung des Unabhängigkeitsprinzips beim waagrechten Wurf [[25], S.45]

Bevor auf die Anwendung der Wurfbewegungen im Sport eingegangen wird, erläutert *Sexl Physik 5* den schiefen Wurf. Ein Körper bewegt sich auf einer Parabel, wenn er mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit v_0 schräg nach oben geworfen wird. Mittels Abbildung 3.61 wird durch ein s-s-Diagramm veranschaulicht, dass die weiteste Wurfweite genau dann erreicht wird, wenn der Abwurfwinkel 45° beträgt (bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes). Darüber hinaus wird veranschaulicht, dass komplementäre Wurfwinkel die gleichen Wurfweiten erzielen (vgl. [25], S.46).

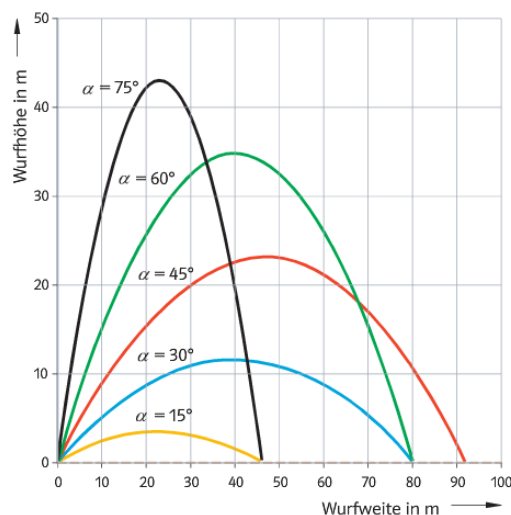


Abbildung 3.61: Wurfparabeln beim schiefen Wurf mit unterschiedlichen Wurfwinkeln [[25], S.46]

Im Zusammenhang mit den Wurfbewegungen werden unterschiedliche vertiefende Rechenaufgaben gestellt, die hier nicht näher angeführt werden. Diese erfordern weiterführende mathematische Kenntnisse aus dem Bereich der *Gleichungen und Formeln*, *funktionaler Abhängigkeiten* und der *Vektorrechnung*.

Die Bewegung eines Körpers auf Kreisbahnen wird als Weiterführung der Translation besprochen: Bewegt sich ein Körper auf einer Kreisbahn bzw. in einer Kurve, so muss eine Kraft auf ihn wirken, da es ständig zur Änderung seiner Bewegungsrichtung (Richtung der Geschwindigkeit) kommt (vgl. [25], S.47).

Mittels Abbildung 3.62 soll bei SchülerInnen die Frage auftauchen, wieso sich der Mond auf einer Kreisbahn um die Erde bewegt. Laut dem Trägheitsgesetz müsste dieser bereits weggefliegen sein. Da auf ihn aber die Anziehungskraft der Erde wirkt, bewegt sich derselbe auf einer Kreisbahn (vgl. [25], S.47).

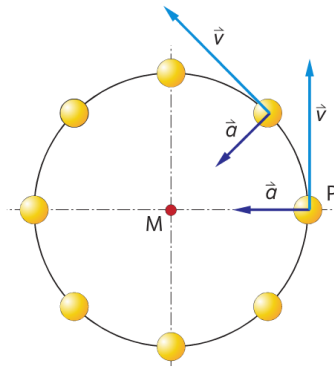


Abbildung 3.62: Darstellung eines Körpers auf einer Kreisbewegung [[25], S.46]

Die Zentripetalkraft und Zentripetalbeschleunigung werden algebraisch mittels Gleichung 3.115 und verbal durch die folgende Aussage erklärt:

„Kreisbewegungen sind beschleunigte Bewegungen. Die Ursache jeder Kreisbewegung ist eine Kraft $\vec{F}_Z$, die zum Zentrum des Kreises gerichtet ist (Zentripetalkraft)“ (vgl. [25], S.47).

$$\vec{F}_Z = m \cdot \vec{a}_Z \quad (3.115)$$

Es wird bemerkt, dass bei einer gleichmäßigen Bewegung der Betrag des Geschwindigkeitsvektors stets gleich groß ist, seine Richtung sich jedoch in jedem Augenblick ändert. Ebenso wird erläutert, dass der Beschleunigungsvektor $\vec{a}_Z$ stets in Richtung Kreismittelpunkt zeigt (vgl. [25], S.47).

Sexl Physik 5 führt die Zentripetalkraft allgemein und *vektoriell* ein. *Big Bang 5* hingegen passiert dies bereits über die Winkelgeschwindigkeit (vgl. Gleichung 3.75). Es ist klar ersichtlich, dass zum Verständnis der Kreisbewegung wichtige Elemente der *Vektorrechnung* beim Schüler/bei der Schülerin gefordert sind.

Als Nächstes führt Sexl das Bogenmaß ein. Dies erfolgt auf eine andere Art und Weise als in *Big Bang 5*. An Abbildung 3.63 und der zugehörigen Gleichung 3.116 erkennt man die Umrechnung von Bogenmaß in Grad und umgekehrt. Darüber zeigt hingegen Tabelle 3.6 die wichtigsten Winkel (in Grad) im Bogenmaß (vgl. [25], S.47).

$$\varphi = \text{Bogenmaß} : \text{Radius} = \frac{b}{r} \quad (3.116)$$

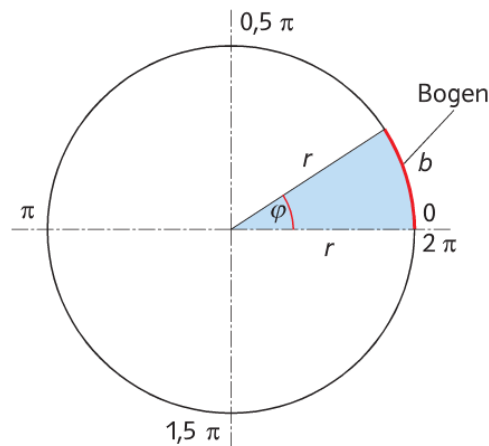


Abbildung 3.63: Einheitskreis [[25], S.47]

Gradmaß	0°	60°	90°	180°	270°	360°
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Tabelle 3.6: Umrechnung Gradmaß in Bogenmaß [[25], S.47]

Bewegt sich ein Körper auf einer Kreisbahn, so muss dieser sich schneller bewegen, je weiter entfernt er zum Kreismittelpunkt ist, um in der gleichen Zeit den gleichen Winkel zurückzulegen. Daher erfordert die Kreisbewegung eines Körpers die Angabe einer Geschwindigkeit, die unabhängig vom Abstand zum Kreismittelpunkt ist. Dies erreicht man über die Einführung der Winkelgeschwindigkeit ω , die durch den Quotienten aus dem Winkel $\Delta\varphi$ und der dafür benötigten Zeit Δt (vgl. Gleichung 3.117) gegeben ist. Die Herleitung dieser Formel wird anhand von Abbildung 3.64 erklärt (vgl. [25], S.48).

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (3.117)$$

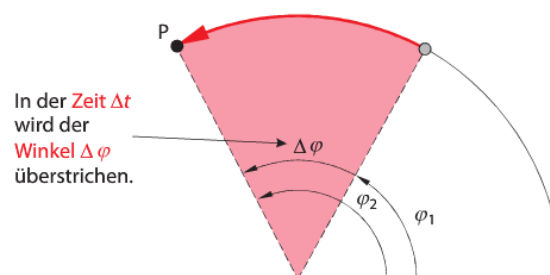


Abbildung 3.64: Herleitung der Winkelgeschwindigkeit [[25], S.48]

Anders als in Gleichung 3.117 ersichtlich, wird die Winkelgeschwindigkeit ω in Abbildung 3.65 als Vektor dargestellt. Da keine Herleitung erfolgt, ist nicht klar, wieso für die Winkelgeschwindigkeit Gleichung 3.118 gilt (vgl. [25], S.48).

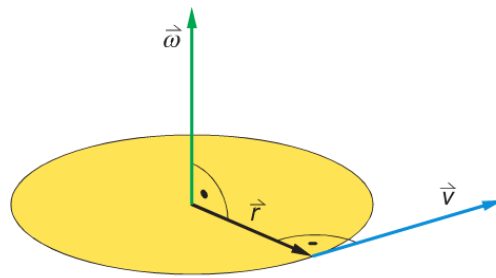


Abbildung 3.65: Die Winkelgeschwindigkeit als Vektor [[25], S.48]

$$\omega = 2\pi f = \frac{v}{r} \quad (3.118)$$

Die Umlaufzeit T eines Körpers auf einer Kreisbahn wird folgendermaßen definiert:

„Unter der Umlaufzeit T versteht man jene Zeitspanne, die der Körper zum Durchlaufen des gesamten Kreisumfangs benötigt“ ([25], S.48).

Eine Rechenaufgabe soll den Zusammenhang zwischen Umlaufzeit T und Frequenz f näher erläutern:

„Ein Windrad führt in 3 Sekunden 2 vollständige Umdrehungen durch. Die Zeit für eine Umdrehung beträgt daher $\frac{3\text{ s}}{2} = 1.5\text{ s}$. Pro Sekunde legt das Rad $\frac{2}{3}$ Umdrehungen zurück. Man bezeichnet diese Zahl als Frequenz f . Sie entspricht dem Kehrwert der Dauer für eine Umdrehung (Periode). In unserem Fall ist $f = \frac{2}{3}\text{ s}^{-1}$ “ ([25], S.48).

Dieser Zusammenhang zwischen Umlaufzeit T und Frequenz f wird in algebraischer Form mit Gleichung 3.119 dargestellt (vgl. [25], S.48).

$$f = \frac{1}{T} \quad (3.119)$$

Dahingehend werden die Formeln für die Beträge der Bahngeschwindigkeit v und die Winkelgeschwindigkeit ω , die von der Umlaufzeit T bzw. der Frequenz f abhängig sind, mittels einfacher algebraischer Umformungen hergeleitet. Für den Betrag der Bahngeschwindigkeit v ergibt sich Gleichung 3.120 und für den Betrag der Winkelgeschwindigkeit erhält man Gleichung 3.121. Betrachtet man ω vektoriell, so führt die Verwendung des Kreuzproduktes zu Gleichung 3.122 (vgl. [25], S.48).

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f = r \cdot \omega \quad (3.120)$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 2\pi f \quad (3.121)$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (3.122)$$

Im Umgang mit der Winkel- und Bahngeschwindigkeit, der Umlaufzeit und Frequenz werden sowohl mathematische Kenntnisse aus dem Bereich der *Vektorrechnung* als auch aus den Bereichen der *Formeln und Gleichungen* bzw. *funktionalen Abhängigkeiten* gefordert.

Die Herleitung der Zentripetalbeschleunigung a_Z erfolgt durch die Betrachtung von Abbildung 3.62. Bewegt sich ein Körper auf der Kreisbahn, so braucht dieser eine Umlaufzeit T für eine volle Umdrehung ($= 2\pi$). Die Spitze des Geschwindigkeitsvektors hat dabei einen Weg von $|v|2\pi$ zurückgelegt. Für die Beschleunigung, die durch den Quotienten aus Geschwindigkeitsänderung und Zeitdauer dargestellt ist, ergibt sich aus $a_Z = \frac{2\pi v}{T} = \omega v$ und Gleichung 3.120 eine Formel für a_Z , nämlich Gleichung 3.123 (vgl. [25], S.49).

$$a_Z = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} \quad (3.123)$$

Setzt man nun Gleichung 3.123 in Gleichung 3.115 ein, so erhält man eine Formel zur Berechnung der Zentripetalbeschleunigung in Abhängigkeit von der Masse und der Winkelgeschwindigkeit bzw. von der Bahngeschwindigkeit und dem Radius (vgl. [25], S.49).

$$F_Z = mr\omega^2 = m\frac{v^2}{r} \quad (3.124)$$

Das Kapitel „Spezielle Bewegungsformen“ endet in der Betrachtung der Bewegung von Planeten und Satelliten. In diesem Zusammenhang werden die erste und die zweite kosmische Geschwindigkeit besprochen (auf die hier nicht näher eingegangen wird). Ebenso werden die Kepler'schen Gesetze verbal und algebraisch erläutert (vgl. [25], S.50 f.).

Anders als bei Apolin werden die drei Kepler'schen Gesetze nur sehr kurz erwähnt. Das erste Kepler'sche Gesetz wird durch Abbildung 3.66 veranschaulicht und folgendermaßen formuliert:

„Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht“ ([25], S.51).



Abbildung 3.66: Visualisierung des ersten Kepler'schen Gesetzes [[25], S.51]

Das zweite Kepler'sche Gesetz wird in *Sext Physik 5* durch Abbildung 3.67 visualisiert und folgendermaßen verbal angeführt:

„Der von der Sonne zum Planeten gezogene Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen“ ([25], S.51).

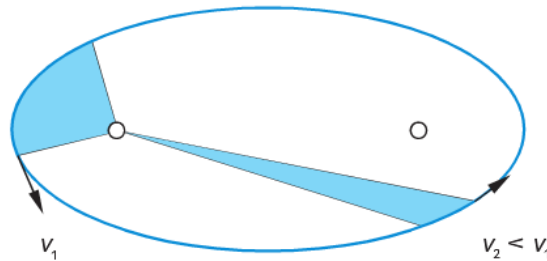


Abbildung 3.67: Visualisierung des zweiten Kepler'schen Gesetzes ([25], S.51)

Das dritte Kepler'sche Gesetz lautet:

„Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer Bahnradien“ ([25], S.51).

Im diesem Zusammenhang erfolgt eine Herleitung für die Bewegung eines Körpers (resp. eines Planeten) um die Sonne, wenn man jedoch vereinfacht annimmt, dass dieser sich auf einer Kreisbahn bewegt (vgl. [25], S.51).

Bei der kreisförmigen Bewegung eines Planeten um die Sonne müssen Gravitationskraft und Zentripetalkraft gleich groß sein, daher gilt Gleichung 3.125, wobei m die Masse des Planeten, M die Masse der Sonne und r den Abstand bezeichnen (vgl. [25], S.51).

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2} \quad (3.125)$$

Für die Bahngeschwindigkeit v eines Planeten um eine (fixe) Bahn um die Sonne gilt Gleichung 3.126, wobei T die Umlaufzeit angibt (vgl. [25], S.51).

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad (3.126)$$

Setzt man nun Gleichung 3.126 in Gleichung 3.125 ein und formt um, so erhält man Gleichung 3.127. Man erkennt also, dass der Quotient $\frac{T^2}{r^3}$ nur von der Masse der Sonne abhängt und damit für alle Planeten, die sie umgeben, gleich groß ist (vgl. [25], S.51).

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (3.127)$$

Diese Herleitung erfolgt sehr ähnlich zu jener aus *Big Bang 5*. Sie ist sehr leicht zu verstehen und erfordert wenige mathematische Kenntnisse aus dem Bereich der *Formeln und Gleichungen* und *funktionalen Abhängigkeiten*.

Weiterführende physikalische Aufgaben im Zusammenhang mit unterschiedlichen Bewegungsformen sind am Ende des Kapitels angeführt (siehe [25], S.52). Auf diese soll hier nicht näher eingegangen werden.

2.2.6 „Druck in Flüssigkeiten und Gasen“

Im Gegensatz zu *Big Bang 5* findet sich in *Sexl Physik 5* ein Kapitel zum Thema „Druck in Flüssigkeiten und Gasen“. In diesem wird erklärt, was man unter Druck, speziell dem hydrostatischen Druck, dem Luftdruck und dem Auftrieb versteht (vgl. [25], S.54 ff.).

Der Druck wird als gleichmäßige Krafteinwirkung F auf eine Fläche A verstanden. Um diese Beziehung der einzelnen Größen mathematisch auszudrücken, wird Gleichung 3.128 angegeben. Als SI-Einheit wird das Pascal angeführt. Es wird jedoch festgestellt, dass es sich bei der Einheit Pascal um eine sehr kleine Einheit handelt. Daher gibt man Drücke konventionell in Bar an. Die Umrechnung von Pascal in Bar erfolgt mittels Zehnerpotenzen und ist in Gleichung 3.129 mathematisch formuliert (vgl. [25], S.54).

$$\text{Druck} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \quad p = \frac{F}{A} \quad (3.128)$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \quad 100 \text{ Pa} = 1 \text{ mbar} \quad (3.129)$$

Als Nächstes folgt die mathematische Herleitung für die Formel des hydrostatischen Drucks. Dazu wird ein Körper mit der Fläche A betrachtet (der Körper wird nicht erwähnt, sondern nur die Fläche selbst), der sich in der Tiefe h unter Wasser befindet. Auf diesem Körper lastet laut Gleichung 3.96 eine Gewichtskraft von $F_G = m \cdot g$. Für den Druck, den die Wassersäule nun auf den Körper ausübt, gilt mittels Gleichung 3.128 (vgl. [25], S.55):

$$p = \frac{F_G}{A} = \frac{mg}{A} \quad (3.130)$$

Setzt man in Gleichung 3.130 für die Masse $m = \rho Ah$ ein, so erhält man Gleichung 3.131 als Formel für den hydrostatischen Druck p in einer Tiefe h (vgl. [25], S.55).

$$p = \rho gh \quad (3.131)$$

Auch bei dieser Herleitung ist zu erkennen, dass Kenntnisse aus dem Bereich von *Formeln und Gleichungen* und *funktionalen Abhängigkeiten* gefragt sind.

Eine Rechenaufgabe in diesem Zusammenhang lautet:

„Wie hoch ist der Gewichtsdruck des Wassers in einer Tiefe von 10 m?“ ([25], S.55).

Im Text selbst erfolgt keine Rechnung, sondern die Ergebnisse werden angeführt:

„Eine 10 m hohe Wassersäule von 1 m² Querschnitt hat eine Masse von 10 000 kg und ein Gewicht von 10⁵ N. Dies entspricht einem Druck von $\frac{10^5 \text{ N}}{\text{m}^2} = 10^5 \text{ Pa}$ bzw.

1 bar. Am Meeresboden bei etwa 10 000 m Tiefe herrscht ein Druck von 1000 bar“ ([25], S.55).

Es stellt sich jedoch in diesem Zusammenhang die Frage, wieso hier Ergebnisse wie die Masse des Wassers und die Gewichtskraft nicht direkt über das Volumen und die Dichte von Wasser ($\rho \approx 1 \text{ kg/dm}^3$) berechnet wurden. Für SchülerInnen könnte es schwierig sein zu erkennen, wie diese Werte berechnet wurden.

Somit wird einerseits aus Gleichung 3.131, andererseits aus der obigen Aufgabe klar, dass der hydrostatische Druck mit der Tiefe wächst (vgl. [25], S.55).

Im nächsten Abschnitt wird der Auftrieb von in Flüssigkeiten eingetauchten Körpern erklärt. Der Auftrieb wird als Kraft erklärt, die gegen die Gewichtskraft eines eingetauchten Körpers wirkt. Diese Krafteinwirkung hat zur Folge, dass in Wasser eingetauchte Körper leichter wahrgenommen werden, als wenn sie nicht in die Flüssigkeit eingetaucht sind (vgl. [25], S.56).

Um die Ursache des Auftriebs zu erläutern, erfolgt eine mathematische Herleitung. Wie bereits erwähnt, hängt der hydrostatische Druck von der Tiefe ab, was zur Folge hat, dass der Druck, der von unten auf einen Körper wirkt, größer ist als jener, der von oben auf ihn wirkt (auf den Seiten heben sich die Drücke auf). Abbildung 3.68 veranschaulicht diesen Zusammenhang mittels Pfeilen, die den Druck auf einen eingetauchten Körper darstellen. Die Auftriebskraft ergibt sich als Differenz dieser beiden Drücke (die von oben und unten wirken) und wird mittels Gleichung 3.128, Gleichung 3.131 und der Beziehung für das Volumen eines Prismas $V = Ah$ in eine mathematisch anschauliche Form (siehe Gleichung 3.132) gebracht (vgl. [25], S.56).

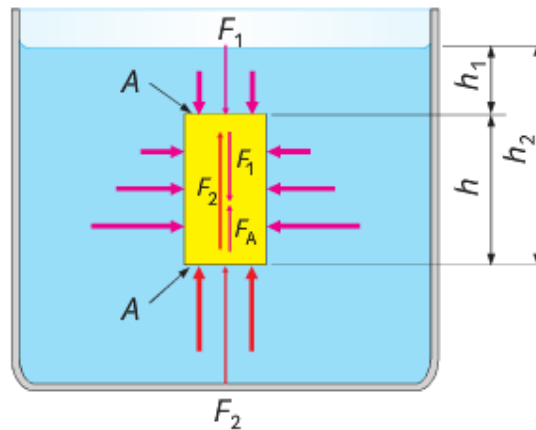


Abbildung 3.68: Veranschaulichung zur Herleitung des Auftriebs [[25], S.56]

$$F_A = F_2 - F_1 = p_2 A - p_1 A = \rho_{Fl} g A h_2 - \rho_{Fl} g A h_1 = \rho_{Fl} g A (h_2 - h_1) = \rho_{Fl} g V_K \quad (3.132)$$

Als Merksatz dient zu der obigen Herleitung folgende Formulierung:

„Ein vollständig in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper erfährt einen Auftrieb F_A , der seinem Gewicht entgegenwirkt.

$F_A = \varrho_{Fl} g V_K$, $\varrho_{Fl} \dots$ Dichte der Flüssigkeit, $V_K \dots$ Volumen des Körpers

Der Auftrieb entspricht dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit“ ([25], S.56).

Als Nächstes wird der Luftdruck als jenes Gewicht der Luft definiert, das aufgrund der Atmosphäre auf uns lastet. Es wird ausgesagt, dass die Masse der gesamten Luft in der Erdatmosphäre $5 \cdot 10^{18} \text{ N}$ beträgt, daher lastet auf jedem Quadratmeter der Erde ein Gewicht von 10^5 N . Damit beträgt der Normaldruck (= Luftdruck auf Meereshöhe) 10^5 Pa , was 1 bar entspricht (vgl. [25], S.57).

In diesem Zusammenhang wird die Masse mit dem Gewicht verwechselt: 10^{18} N entsprechen der Gewichtskraft der Luft, die auf die Erde wirkt, und nicht der Masse der Luft (diese müsste in kg angegeben werden). Ebenso fehlt hier die genau Herleitung, wie man auf den Druck von 10^5 N pro Quadratmeter kommt. Diese könnte man durch Division durch die Größe der Erdoberfläche berechnen.

Am Ende des Kapitels erfolgt eine Rechenaufgabe zu der Frage, wie viel Kraft notwendig ist, um die Magdeburger Halbkugeln auseinander zu ziehen, wenn diese evakuiert wurden. Es wird erwähnt, dass der Druckmesser der Halbkugeln $d = 42 \text{ cm}$ beträgt. Zuerst wird der Querschnitt A der beiden Halbkugeln mithilfe der Flächenformel für den Kreis berechnet (vgl. [25], S.58).

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{42}{2} \text{ cm}\right)^2 = 1384.74 \text{ cm}^2 = 0.1385 \text{ m}^2 \quad (3.133)$$

Wird angenommen, dass auf die Halbkugeln von außen ein Luftdruck von 10^5 Pa wirkt, so kann mithilfe von Gleichung 3.128 die Kraft berechnet werden, mit der sie von der Luft zusammengedrückt werden bzw. die notwendig wäre, um die Halbkugeln auseinander zu ziehen. Gleichung 3.134 zeigt diese Rechnung (vgl. [25], S.58).

$$F = pA = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.1385 \text{ m}^2 = 13850 \text{ N} \quad (3.134)$$

Im Zusammenhang mit dieser Aufgabe könnten sich Schwierigkeiten bei der Umrechnung von *Flächenmaßen* ergeben. Sonst benötigt der Schüler/die Schülerin Kenntnisse im Umgang mit *Formeln und Gleichungen*.

2.2.7 „Energie“

Das große Kapitel „Erhaltungssätze“ beginnt mit dem Unterkapitel zur Energie. Danach bespricht es den Impuls als zweite wichtige Erhaltungsgröße. Schlussendlich wird die Erhaltung des Drehimpulses als abschließendes Unterkapitel der klassischen Mechanik angeführt (vgl. [25], S.61 ff.).

Ähnlich zu *Big Bang 5* wird in *Sexl Physik 5* die Arbeit als aufgewendete Kraft, die in Wegrichtung wirkt, bzw. mittels Gleichung 3.135, eingeführt. Alle Kräfte werden in den Formeln skalar angegeben; Auf die Vektorschreibweise wird verzichtet (vgl. [25], S.63).

$$W = F_A \cdot s \quad (3.135)$$

Darüber hinaus wird Abbildung 3.69 verwendet, in der die Gewichtskraft F_G vektoriell in zwei Komponenten, nämlich in $F_\perp$, welche senkrecht zur schiefen Ebene steht, und in $F_\parallel$, welche hangabwärts wirkt, zerlegt wird. Dabei erfolgt schrittweise eine algebraische Hinführung zur Goldenen Regel der Mechanik (vgl. [25], S.63).

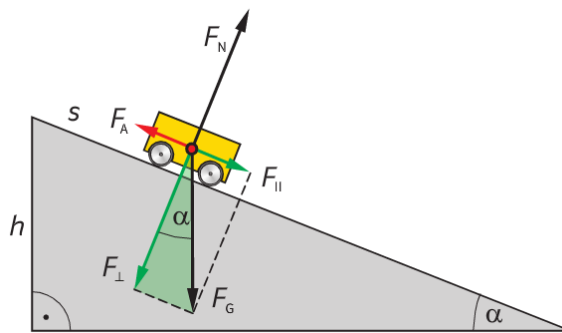


Abbildung 3.69: Kräftezerlegung eines Wagens, der auf einer schiefen Ebene rollt [[25], S.63]

Aus der *Ähnlichkeit* des grünen und des großen grauen *Dreiecks* in Abbildung 3.69 kann die Beziehung in Gleichung 3.136 aufgestellt werden (vgl. [25], S.63).

$$F_\parallel : F_G = h : s \quad \text{daher} \quad F_\parallel = F_G \cdot \frac{h}{s} \quad (3.136)$$

Will man die schiefe Ebene aus Abbildung 3.69 z.B. mit dem Rad erklimmen, so muss eine Kraft F_A aufgewendet werden, die der Kraft $F_\parallel$ entgegenwirkt. Somit erhält man Gleichung 3.137 (vgl. [25], S.63).

$$F_A = F_\parallel = F_G \cdot \frac{h}{s} \quad (3.137)$$

Aus Gleichung 3.137 kann geschlussfolgert werden, dass $F_\parallel$ resp. F_A und damit der Kraftaufwand z.B. beim Radfahren umso kleiner werden, je größer der Weg s ist bzw. je kleiner die zu überwindende Höhe ist. Formt man nun Gleichung 3.137 zu Gleichung 3.138 um, so sieht man, dass das Produkt $F_A \cdot s$ die Arbeit W ergibt. Sie ist unabhängig von der

Höhe h und damit von der Steigung der schiefen Ebene. Das heißt, dass man sich keine Arbeit (sondern Kraft) erspart, wenn man längere Wege bestreitet (vgl. [25], S.63).

$$F_A \cdot s = F_G \cdot h = W \quad (3.138)$$

Eine Anwendung der Goldenen Regel der Mechanik liefert Abbildung 3.70, in der ein Nussknacker abgebildet wird. In diesem Zusammenhang gilt für die auftretenden Kräfte Gleichung 3.139 (vgl. [25], S.63).

Es wird hier indirekt das Hebelgesetz angesprochen, welches aber erst später genauer erklärt wird.

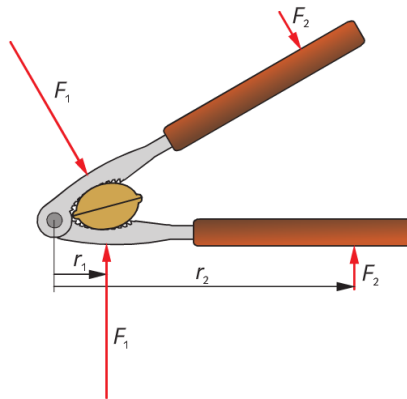


Abbildung 3.70: Hebelgesetz beim Nussknacker [[25], S.63]

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2 \quad (3.139)$$

Eine Situation, die bei Apolin nicht besprochen wird, ist in Abbildung 3.71 dargestellt. Der Mann zieht den Schlitten, daher wirkt eine Kraft unter einem bestimmten Winkel auf die Wegrichtung. Es kann hier nicht einfach die skalare Multiplikation, wie in Gleichung 3.135 formuliert, ausgeführt werden. Man benötigt zur Berechnung der verrichteten Arbeit das Skalarprodukt aus den Vektoren $\vec{s}$ und $\vec{F}$, was in Gleichung 3.140, Gleichung 3.141 und Gleichung 3.142 rechnerisch ausgeführt wird (vgl. [25], S.63).

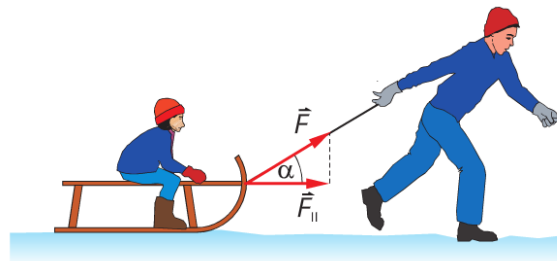


Abbildung 3.71: Arbeit, wenn die Krafteinwirkung nicht parallel zum Weg erfolgt [[25], S.63]

$$F_{||} = F \cos \alpha \quad (3.140)$$

$$W = F s \cos \alpha \quad (3.141)$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad (3.142)$$

Um diese Art von Rechnungen und Herleitungen zu verstehen, braucht man Kenntnisse aus dem Bereich der *Vektorrechnung*, *Trigonometrie*, der *Elementargeometrie*, der *funktionalen Abhängigkeiten* und von *Formeln und Gleichungen*.

Nach Klärung der physikalischen Arbeit mittels Formeln und Beispielen geht Sexl (genauso wie Apolin) auf die Hubarbeit (bzw. potenzielle Energie) ein. Sie wird ähnlich wie bei Apolin definiert:

„Wird ein Körper (Masse m) um die Höhe h gehoben, so erhöht sich seine Energie der Lage (potenzielle Energie) E_p um den Betrag mgh “ ([25], S.64).

Im Gegensatz zur potenziellen Energie erfolgt die Einführung der kinetischen Energie sehr mathematisch. Ebenso wie Apolin leitet Sexl die Gleichung für die Beschleunigungsarbeit mittels Gleichung 3.96, Gleichung 3.91 (in der Form $s = \frac{1}{2}a \cdot t^2$) und Gleichung 3.87 her. Daraus erhält man Gleichung 3.144 (vgl. [25], S.64).

$$W = F \cdot s = m \cdot a \cdot s = m \cdot a \cdot \frac{1}{2}at^2 = m \cdot \frac{1}{2}(at)^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.143)$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.144)$$

Als Merksatz für die kinetische Energie dient die folgende Formulierung:

„Wird ein ruhender Körper (Masse m) auf die Geschwindigkeit v beschleunigt, beträgt seine Energie der Bewegung (kinetische Energie) $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ “ ([25], S.64).

Im Gegensatz zu Apolin wird hier in der Bekanntgabe der Formeln zwischen Arbeit und Energie unterschieden. Arbeit und Energie werden nicht wie in Gleichung 3.30 und Gleichung 3.31 gleichgesetzt.

Nach Besprechung der Arbeit und der Energieformen kommt es zur Klärung, was unter Erhaltung der Energie verstanden wird. Sexl unterscheidet hier zwischen der Energieerhaltung in offenen und in geschlossenen Systemen (vgl. [25], S.66).

Für die Energieerhaltung in einem offenen System wird formuliert:

„Mechanische Arbeit W aus der Umgebung ändert die Gesamtenergie des Systems: $E_{ges, Ende} - E_{ges, Anfang} = W$ “ ([25], S.66).

Für die Energieerhaltung in einem geschlossenen System wird ausgesagt:

„In abgeschlossenen reibungsfreien Systemen ist die Gesamtenergie konstant: $E_{ges} = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = const.$ Unterschiedliche Energieformen können in einander umgewandelt werden“ ([25], S.66).

In diesem Zusammenhang wird auch durch Gleichsetzung von Gleichung 3.144 mit der Formel für die potenzielle Energie (Gleichung 3.145) die Gleichung für die Geschwindigkeit beim freien Fall (vgl. Gleichung 3.95) hergeleitet. Dies geschieht auf dieselbe Art und Weise, wie es in *Big Bang 5* ausgeführt wurde - vgl. dazu Gleichung 3.39 (vgl. [25], S.67).

$$E_p = mgh \quad (3.145)$$

Im Zusammenhang mit der Energieerhaltung werden einige Rechenaufgaben zu den Themen „Windenergie als Beispiele für Energieumwandlungen“, Energiesparen an den Beispielen „Rollwiderstand“ und „Luftwiderstand“ und Möglichkeiten des Treibstoffsparens präsentiert (vgl. [25], S.69 ff.).

Diese Aufgaben sind mathematisch anspruchsvoll und sehr zeitintensiv. Um sie zu lösen, werden Kenntnisse aus dem Bereich der *Formeln und Gleichungen*, der *funktionalen Abhängigkeiten* und der *Funktionen* benötigt. Auf die konkrete Lösung der Rechenaufgaben soll hier nicht näher eingegangen werden.

Zwei kürzere Aufgaben, die am Ende des Kapitels gestellt werden, um das Gelernte zu testen, sollen hier dennoch angeführt werden:

„Ein Ball wird hoch gehoben und auf den Boden fallen gelassen. Danach wird der gleiche Ball doppelt so hoch gehoben und wieder fallen gelassen. Wie groß ist die kinetische Energie im 2. Fall, wenn der Ball auf dem Boden ankommt?“ ([25], S.73).

Um diese Frage richtig zu beantworten, muss man Gleichung 3.145 für die potenzielle Energie verwenden. Wird ein Ball doppelt so hoch gehoben, so ist seine potenzielle Energie am höchsten Punkt doppelt so groß wie im 1. Fall (die Energie direkt proportional zur Höhe h). Da Energieerhaltung gilt, wird die gesamte potenzielle Energie in kinetische umgewandelt, welche nun ebenso doppelt so groß ist wie im 1. Fall.

Es gilt hier, das erlernte Wissen im Bereich der *funktionalen Abhängigkeiten* anzuwenden.

Die zweite Aufgabe, die hervorgehoben werden soll, lautet wie folgt:

„Chemische Energie des Treibstoffs wird in einem Auto, das von 0 auf 60 km/h beschleunigt, in kinetische Energie umgewandelt. Anschließend wird das Auto von 60 auf 120 km/h beschleunigt. Wie groß ist die Energie E_1 , die man für die Beschleunigung von 0 auf 60 km/h benötigt im Vergleich zur Energie E_2 , die zur Beschleunigung von 60 auf 120 km/h aufgewendet wird?“ ([25], S.73).

Um diese Aufgabe zu lösen, muss man die beiden kinetischen Energien E_1 und E_2 mittels Gleichung 3.144 berechnen. Die Masse des Autos wird mit m angenommen. Für E_1 erhält man Gleichung 3.146 und für E_2 Gleichung 3.146, wobei E_1 abgezogen wird.

$$E_1 = \frac{m \cdot 60^2}{2} = 1800m \text{ J} \quad (3.146)$$

$$E_2 = \frac{m \cdot 120^2}{2} - E_1 = 5400m \text{ J} \quad (3.147)$$

Um das Verhältnis der beiden Energien zu bilden, muss Gleichung 3.148 durch die Masse dividiert werden. Danach kann das Verhältnis der beiden Zahlen gebildet werden. Man sieht also, dass der Beschleunigungsvorgang von 60 auf 120 km/h dreimal so viel Energie benötigt wie jener von 0 auf 120 km/h.

$$E_1 : E_2 = 1800m : 5400m \quad (3.148)$$

$$E_1 : E_2 = 1 : 3 \quad (3.149)$$

Das Gelernte muss hier sinnvoll und kompetenzorientiert eingesetzt werden. Mathematische Kenntnisse im Zusammenhang mit *Gleichungen und Formeln*, *funktionalen Abhängigkeiten* und *Proportionen* sind gefragt.

2.2.8 „Impuls“

Als zweite Erhaltungsgröße beschreibt Sexl den Impuls. Anders als in *Big Bang 5* wird in *Sexl Physik 5* der Impuls über den Kraftstoß eingeführt. Der Kraftstoß ergibt sich aus dem Produkt von Kraft und Dauer der Einwirkung. Verwendet man die Definition der Kraft nach Gleichung 3.96 und jene der Beschleunigung nach Gleichung 3.86, so erhält man Gleichung 3.150. Ein Kraftstoß, der auf einen Körper wirkt, ändert somit seine Geschwindigkeit (vgl. [25], S.74).

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \vec{a} \cdot \Delta t = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v} \quad (3.150)$$

Damit ein ruhender Körper der Masse m auf die Geschwindigkeit $\vec{v}$ beschleunigt werden kann, muss ein Kraftstoß der Größe $m\vec{v}$ auf ihn einwirken. Diese Größe bezeichnet man als Impuls und sie ist durch Gleichung 3.151 gegeben (vgl. [25], S.74).

$$\text{Impuls} = \text{Masse} \cdot \text{Geschwindigkeit} \quad \vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad (3.151)$$

Wird Gleichung 3.150 weiter umgeformt und Gleichung 3.151 angewendet, so erhält man Gleichung 3.152 und es wird gefolgert, dass ein Kraftstoß auf einen Körper eine Impulsänderung bei diesem hervorruft. Abbildung 3.72 zeigt diesen Zusammenhang mithilfe der Addition von Vektorpfeilen: Wird auf einen Körper mit Impuls $\vec{p}$ ein Kraftstoß $\Delta \vec{p}$ ausgeübt, so kommt es zu der Impulsänderung, was zu einem Impuls von $\vec{p}'$ beim Körper führt (vgl. [25], S.74).

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v} = \Delta(m \cdot \vec{v}) = \Delta \vec{p} \quad (3.152)$$

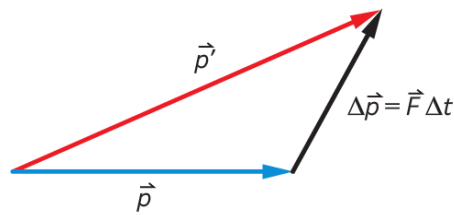


Abbildung 3.72: Impulsänderung [[25], S.74]

Wie auch schon in *Big Bang 5* wird der Impuls als vektorielle Größe angegeben, das heißt, dass die Richtung und die Größe desselben von großer Bedeutung sind. Diese Hinführung zum Impuls benötigt ein weitgehendes Verständnis im Bereich von *Formeln und Gleichungen*. Darüber hinaus sind in diesem Zusammenhang Kenntnisse aus dem Bereich der *Vektorrechnung* gefordert.

Kenntnisse im Interpretieren von Funktionsgraphen in außermathematischen Anwendungen zeigen Abbildung 3.73 und Abbildung 3.74.

Abbildung 3.73 zeigt ein Kraft-Zeit-Diagramm eines Fußgängers. Der rote Funktionsgraph gibt die auftretende Kraft beim harten Aufsetzen des Fußes, der blaue Funktionsgraph die auftretende Kraft beim weichen Aufsetzen des Fußes an (vgl. [25], S.75).

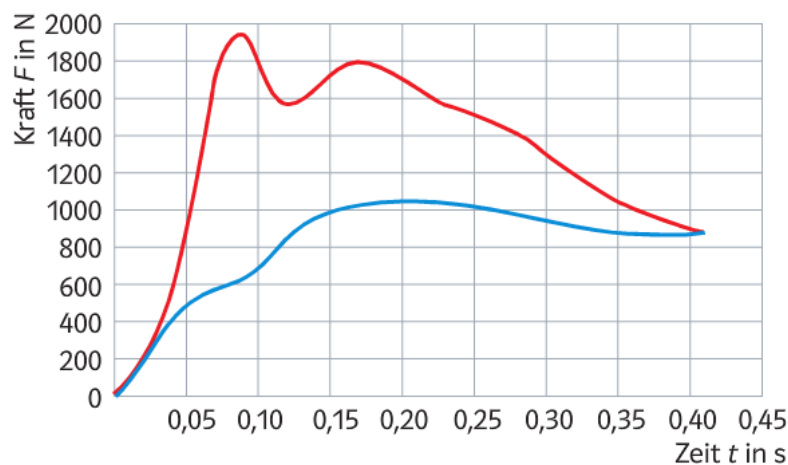


Abbildung 3.73: Kraft-Zeit-Diagramm beim Gehen [[25], S.75]

Abbildung 3.74 zeigt ein Kraft-Zeit-Diagramm beim Aufprall eines Tennisballes mit der Masse $m = 0,058 \text{ kg}$, der aus einer Höhe von $2,5 \text{ m}$ auf eine Kraftmessplatte fällt. Man kann aus dem Funktionsgraphen erkennen, dass der Aufprall ca. $0,02 \text{ s}$ dauert. Im Text selbst wird der Hinweis gegeben, dass man den Kraftstoß an der Fläche unter der Kurve abschätzen kann (vgl. [25], S.75).

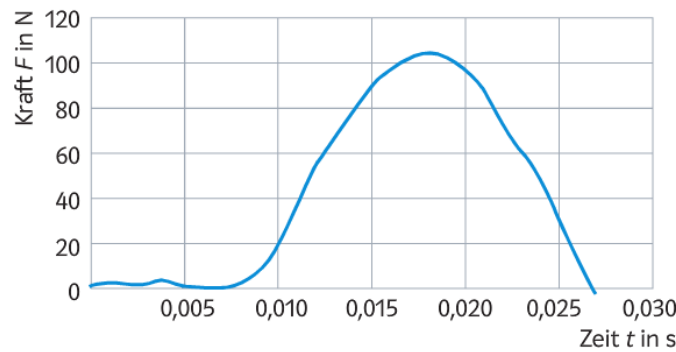


Abbildung 3.74: Kraft-Zeit-Diagramm beim Aufprall eines Tennisballes [[25], S.75]

Im Zusammenhang mit Abbildung 3.74 wird (genauso wie bei Apolin) indirekt auf Mittel der *Integration* verwiesen, die aber zu jenem Lernzeitpunkt den SchülerInnen noch nicht vertraut sind.

Die Formulierung zum Impulserhaltungssatz in *Sext Physik 5*, nämlich Gleichung 3.153, ist sehr ähnlich zu jener aus *Big Bang 5* (vgl. Gleichung 3.47) (vgl. [25], S.57).

$$\vec{p}_{ges} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \dots = \vec{p}'_{ges} \quad (3.153)$$

Anders als in *Big Bang 5* passiert eine Herleitung, die zeigen soll, wie es zu diesem Erhaltungssatz kommt. Dazu werden zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 betrachtet, auf die keine äußeren Kräfte wirken. Die beiden Körper weisen Anfangsgeschwindigkeiten von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ auf. Nachdem sie aneinanderstoßen, bewegen sie sich mit den Geschwindigkeiten $\vec{v}'_1$ und $\vec{v}'_2$ weiter. Daher treten die entsprechenden Impulse bei den beiden Körpern auf, die durch Gleichung 3.154 und Gleichung 3.155 gegeben sind (vgl. [25], S.75).

$$\vec{p}_1, \quad \vec{p}_2 \quad (3.154)$$

$$\vec{p}'_1 = \vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_1, \quad \vec{p}'_2 = \vec{p}_2 + \Delta\vec{p}_2 \quad (3.155)$$

Betrachtet man nun den Stoß der beiden Körper, so üben sie laut dem dritten Newton'schen Gesetz aufeinander die Kräfte $\vec{F}_{21}$ und $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ aus. Es kommt daher in einer Zeit Δt zu einer Impulsänderung, was durch Gleichung 3.156 und Gleichung 3.157 ausgedrückt werden kann (vgl. [25], S.75).

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = \vec{F}_{21}\Delta t \quad (3.156)$$

$$\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}'_2 - \vec{p}_2 = \vec{F}_{12}\Delta t = -\vec{F}_{21}\Delta t \quad (3.157)$$

$$(3.158)$$

Addiert man die Gleichungen, so erhält man Gleichung 3.159 und damit, dass es zu keiner Gesamtimpulsänderung während des Stoßvorganges kommt, sondern der Impuls erhalten bleibt (vgl. [25], S.75).

$$\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = (\vec{p}_1' + \vec{p}_2') - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{p}_{ges}' - \vec{p}_{ges} = 0 \quad (3.159)$$

Die Herleitung des Impulserhaltungssatzes erfolgt vektoriell. Es ist daher notwendig, Kenntnisse aus dem Bereich der *Vektorrechnung* zu besitzen. Ebenso wird Wissen im Zusammenhang mit *Formeln und Gleichungen* vorausgesetzt.

Eine erwähnenswerte Aufgabe im Zusammenhang mit Impulserhaltung ist die folgende:

„Du (Masse m_1) stehst in einem Boot (Masse m_2), das auf dem Wasser ruht. Du gehst mit der Geschwindigkeit v_1' (relativ zum Wasser) zum Heck. Was geschieht mit dem Boot?“ ([25], S.76).

Abbildung 3.75 zeigt die Situation: Bevor sich der Mensch in Bewegung setzt, haben sowohl er als auch das Boot keine Geschwindigkeit ($v_1 = v_2 = 0$) und somit auch keinen Impuls. Für den Gesamtimpuls gilt also $\vec{p}_{ges} = 0$. Während des Gehens muss der Gesamtimpuls $\vec{p}_{ges}'$ ebenso Null sein, daher kann Gleichung 3.160 aufgestellt werden. Durch Umformung erhält man Gleichung 3.161 (vgl. [25], S.76).

$$\vec{p}_{ges}' = m_1 \cdot \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = 0 \quad (3.160)$$

$$\vec{v}_2' = -\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1' \quad (3.161)$$

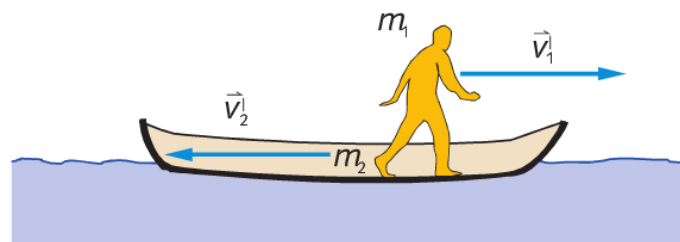


Abbildung 3.75: Eine Person bewegt sich auf einem zuvor ruhenden Boot ([25], S.76)

Gleichung 3.161 zeigt, dass sich das Boot während des Gehens rückwärts bewegt. Je schwerer die Person ist, die sich auf dem Boot befindet und je leichter das Boot ist, desto schneller erfolgt diese Rückwärtsbewegung (vgl. [25], S.76).

In diesem Zusammenhang sind mathematische Kenntnisse aus dem Bereich der *Vektorrechnung* und der Interpretation von *funktionalen Abhängigkeiten* gefordert.

Bei der Besprechung der elastischen Stöße wird in *Sexl Physik 5* eine ähnliche Rechnung mittels eines *Gleichungssystems* durchgeführt wie in *Big Bang 5*. Diese soll daher hier nicht näher ausgeführt und besprochen werden (vgl. [25], S.77).

Im Zusammenhang mit den unelastischen Stößen führt Sexl ebenso eine Rechnung durch, die zeigt, dass die Gesamtenergie und der Gesamtimpuls erhalten bleiben. Diese soll hier näher besprochen werden. Die Aufgabenstellung lautet:

„Ein Körper der Masse m_1 stößt mit der Geschwindigkeit v_1 auf einen ruhenden Körper der Masse m_2 . Das Material der Körper sei plastisch (nicht elastisch), die Körper verformen sich und bewegen sich gemeinsam mit der Geschwindigkeit v' weiter“ ([25], S.78).

Tabelle 3.7 zeigt die Gleichungen für den Gesamtimpuls und der Gesamtenergie vor und nach dem Stoß, die erhalten sind. Wichtig ist, dass es zu einer Veränderung der inneren Energie U kommt und diese in die Gleichung für die Gesamtenergie miteinbezogen werden muss (vgl. [25], S.78).

	Gesamtenergie	Gesamtimpuls
vor dem Stoß	$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + 0 + U$	$p = m_1v_1 + 0$
nach dem Stoß	$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 + U'$	$p = (m_1 + m_2)v'$

Tabelle 3.7: Gesamtenergie und Gesamtimpuls vor und nach dem plastischen Stoß ([25], S.78)

Aus der Impulserhaltung erhält man durch Gleichsetzen Gleichung 3.163 als Formel für die gemeinsame Geschwindigkeit der beiden Körper nach dem Stoß (vgl. [25], S.78).

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)v' \quad (3.162)$$

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1 \quad (3.163)$$

Berücksichtigt man die Energieerhaltung, so führt dies zur Gleichung 3.164 (vgl. [25], S.78).

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 + U' \quad (3.164)$$

Setzt man nun Gleichung 3.163 in Gleichung 3.164 ein, so erhält man nach einigen Umformungsschritten Gleichung 3.165 (vgl. [25], S.78).

$$U' - U = \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}E_{1,k} \quad (3.165)$$

Nun kommt es zu zwei Überlegungen, bei denen Gleichung 3.165 helfen soll, die Umwandlung der kinetischen Energie in innere Energie anzugeben:

Sind die beiden Massen m_1 und m_2 gleich groß, so folgt, dass sich die Hälfte der kinetischen Energie in innere Energie umwandelt. Damit bewegen sich beide Körper mit der halben Geschwindigkeit der ersten Kugel weiter (vgl. [25], S.78).

Ist die zweite Masse viel größer als die erste, gilt also $m_1 \ll m_2$, so kann man m_1 in Gleichung 3.165 vernachlässigen. Es wird also die gesamte kinetische Energie in innere Energie umgewandelt. Die beiden Körper kommen zum Stillstand. Dieser Fall tritt z.B. auf, wenn ein Auto gegen eine Betonwand fährt. Die innere Energie erkennt man an der Verformung des Autos nach dem Zusammenstoß (vgl. [25], S.78).

Um Aufgaben wie die obige nachvollziehen zu können, ist es notwendig, Kenntnisse im Zusammenhang mit *Gleichungssystem* und *Formeln und Gleichungen* zu haben. Ebenso

ist es notwendig, Gleichungen richtig zu interpretieren und Abschätzungen durchführen zu können.

Am Ende des Kapitels gibt es längere Rechenaufgaben, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll (siehe [25], S.79 f.).

2.2.9 „Drehimpuls“

Als letzte Erhaltungsgröße wird der Drehimpuls diskutiert. Zu Beginn des Kapitels wird festgehalten, dass man unter einem starren Körper ein Gebilde versteht, das seine Form bei Einwirkung von Kräften behält. Solch ein starrer Körper kann Translationen (geradlinige Bewegungen) oder Rotationen (Bewegungen auf Kreisbahnen) ausführen. Es wird darauf verwiesen, dass einige Phänomene, die im Zusammenhang mit der Kreisbewegung schon besprochen wurden (siehe „Spezielle Bewegungsformen“), auf die Rotation von starren Körpern übernommen werden können (vgl. [25], S.82).

Genauso wie in *Big Bang 5* wird zuerst die Winkelgeschwindigkeit eingeführt (vgl. Gleichung 3.66). Es wird ausdrücklich erwähnt, dass es sich hierbei um eine vektorielle Größe handelt (vgl. [25], S.83).

Danach wird die Winkelbeschleunigung als zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit und mittels Gleichung 3.166 definiert (vgl. [25], S.83).

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (3.166)$$

Die Bahngeschwindigkeit, die in *Big Bang 5* nur skalar mittels Gleichung 3.67 definiert wurde, wird in *Sexl Physik 5* auch mittels des Skalarprodukts als Gleichung 3.167 angegeben. Darüber hinaus wird die Bahnbeschleunigung a mittels Gleichung 3.168 eingeführt (vgl. [25], S.83).

$$\vec{v} = \vec{\omega} \cdot \vec{r} \quad (3.167)$$

$$a = \alpha r \quad (3.168)$$

Um das Drehmoment physikalisch zu besprechen, wird eine Aufgabe gestellt und gerechnet, die wie folgt lautet:

„Stelle ein Fahrrad auf Sattel und Lenker. Wie verhält sich das Vorderrad, wenn man die Stelle mit dem Ventil anhebt und anschließend das Rad sich selbst überlässt? (...)“ ([25], S.83).

Die Situation wird in Abbildung 3.76 dargestellt. Durch Anwendung der Vektorzerlegung wird die Gewichtskraft $\vec{F}$ in zwei Komponenten zerlegt, nämlich in die tangentielle Komponente $\vec{F}_T$, die auf das Rad in Richtung der Ausgangslage wirkt, und in die radiale Komponente $\vec{F}_R$, die an den Speichen des Rades wirkt. Wie man Abbildung 3.76 entnehmen kann, gibt bei einem Auslenkwinkel des Rades von γ für F_T Gleichung 3.169 (vgl. [25], S.84).

$$F_T = F \sin \gamma \quad (3.169)$$

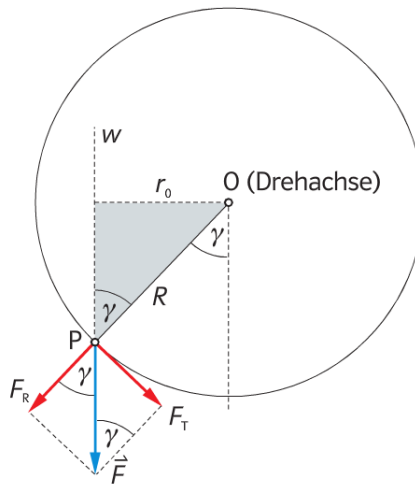


Abbildung 3.76: Kräfte, die bei der Rotation eines Rades wirken [[25], S.84]

Da F_T die gesamte Masse des Rades beschleunigt (die gesamte Masse m befindet sich im Rad, also Umfang des Rades), gilt mit Gleichung 3.96 und Gleichung 3.168 die Gleichung 3.170 (vgl. [25], S.84).

$$ma = mR\alpha = F_T = F \sin \gamma \quad (3.170)$$

Nun wird Gleichung 3.170 mit R multipliziert und mittels geometrischer Betrachtung Gleichung 3.171 geschlussfolgert (vgl. [25], S.84).

$$mR^2\alpha = FR\sin\gamma = Fr_0 \quad (3.171)$$

Zur Interpretation von Gleichung 3.171: Die rechte Seite der Gleichung hat die Form von *Kraft mal Länge*, der Ausdruck $FR \sin \gamma = Fr_0$ selbst wird als Drehmoment M bezüglich einer Drehachse bezeichnet. r_0 bezeichnet dabei einen Kraftarm. Das Drehmoment selbst wird als Vektor erwähnt und gibt die Richtung der Drehbeschleunigung an. Es wird ebenso erwähnt, dass sich das Drehmoment als Vektorprodukt in der Form von Gleichung 3.172 schreiben lässt (vgl. [25], S.84).

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.172)$$

Betrachtet man nun die linke Seite von Gleichung 3.171, so sieht man, dass es sich hierbei um eine Formel der Form Winkelbeschleunigung α mal mR^2 handelt, was als Trägheitsmoment I bezeichnet wird. Es wird darauf verwiesen, dass das Trägheitsmoment bei Rotationen jene Funktion hat, wie die Masse bei Translationen (vgl. [25], S.84). Nun kann die Bewegungsgleichung für Rotationen mittels Gleichung 3.173 formuliert werden (vgl. [25], S. 84).

$$\text{Drehmoment} = \text{Trägheitsmoment} \cdot \text{Winkelbeschleunigung} \quad \vec{M} = I \cdot \vec{\alpha} \quad (3.173)$$

Um diese Herleitung nachvollziehen zu können, benötigen SchülerInnen ein tiefes Verständnis von *Trigonometrie, Formeln und Gleichungen* und der *Vektorrechnung*.

In den nächsten Abschnitten werden ähnlich zu *Big Bang 5* das Hebelgesetz, der Körperschwerpunkt, die Arten von Gleichgewicht und die Rotationsenergie erklärt (vgl. [25], S.85 f.).

Um den Zusammenhang zwischen den auftretenden Größen bei der Translation und der Rotation zu erkennen, wird Tabelle 3.8 präsentiert (vgl. [25], S.87).

Translationsbewegung		Rotationsbewegung	
Weg	$\vec{s}$	Winkel	$\varphi = \frac{s}{r}$
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$
Masse	m	Trägheitsmoment	I
Bewegungsgleichung, Kraft	$\vec{F} = m\vec{a}$	Bewegungsgleichung, Drehmoment	$\vec{M} = I\vec{\alpha}$
Kinetische Energie	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	Rotationsenergie	$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$
Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$	Drehimpuls	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Kraftstoß	$\vec{F}\Delta t = \Delta \vec{p}$	Drehmomentstoß	$\vec{M}\Delta t = \Delta \vec{L}$
Leistung	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	Leistung	$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$

Tabelle 3.8: Größen bei der Translation und Rotation [[25], S.87]

Mittels Tabelle 3.8 gelingt ein mathematischer Vergleich der beiden Bewegungsarten. Sie hilft von einer Größe auf die andere schließen zu können und mathematische Zusammenhänge zu erkennen.

Der Drehimpuls $\vec{L}$ wird anders als in *Big Bang 5* in Vektorschreibweise (vgl. Gleichung 3.174) eingeführt. In diesem Zusammenhang wird direkt erwähnt, dass der Drehimpuls $\vec{L}$ ein Vektor ist und in die Richtung der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ zeigt (vgl. [25], S.87).

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (3.174)$$

Im Zusammenhang mit der Einführung des Drehimpulses wird auch ausgesagt, dass der Drehimpuls in abgeschlossenen Systemen immer erhalten bleibt. Dazu werden unterschiedliche Beispiele gegeben. Eine Denkaufgabe, die erwähnt werden soll, möge hier angeführt werden (vgl. [25], S.88).

Die Aufgabe lautet:

„Du stehst am Boden. Lass dir ein schnell rotierendes Rad geben und versuche, die Achse zu kippen“ ([25], S.88).

Führt man diesen Versuch durch, so bemerkt man, dass ein großer Widerstand gegen das Kippen des Rades auftritt und die Achse somit seitlich ausweicht. Verwendet man Gleichung 3.173 (ein Drehmoment verursacht eine Winkelbeschleunigung) und Gleichung 3.174, so erhält man Gleichung 3.175 (vgl. [25], S.88).

$$\vec{M} = I\vec{\alpha} = I \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} \quad (3.175)$$

Dies bedeutet:

„Im nicht abgeschlossenen System ist die zeitliche Drehimpulsänderung gleich dem von außen wirkenden Drehmoment“ ([25], S.88).

Um die Herleitung von Gleichung 3.175 zu verstehen, sind Kenntnisse aus dem Bereich von *Formeln und Gleichungen* notwendig.

Am Ende des Kapitels wird die Kreiselbewegung als komplexere Rotation ähnlich wie in *Big Bang 5* beschrieben ([25], S.89 f.).

Darüber hinaus werden mehrere Rechenaufgaben angeführt, auf die im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden soll (vgl. [25], S.89 ff.).

2.3 Analyse und Auflistung der mathematischen Inhalte

Die Tabelle bildet einen Überblick über die mathematischen Inhalte, die im Rahmen der klassischen Mechanik in der Schulbuchreihe *Sexl Physik* auftreten. Angeführte Inhalte sind mit einem x in der Tabelle gekennzeichnet.

Kapitelnummern	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Elementargeometrie	x		x				x		
Vektorrechnung	x	x	x	x	x	x		x	x
Zehnerpotenzen Größenordnungen		x	x	x	x	x			
Reihen Grenzwerte									
Zahlen und Maße	x				x	x			
Funktionsgraphen Diagramme		x	x	x	x		x		x
Gleichungen, Formeln	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Funktionale Abhängigkeit		x		x	x	x	x	x	
Integration								x	
Differenzenquotient	x								
Differenzialquotient	x								
Symmetrie									
Mittelwerte Standardabweichung	x								
Trendanalyse Polynomannäherung									
Trigonometrie	x						x		x
Prozentrechnung									
Logarithmus									
Gleichungssysteme								x	
Kegelschnitte									
Proportionalität									

Tabelle 3.9: Analyse *Sexl Physik 5*

4 Die Planetenbewegung

In den Schulbüchern *Big Bang 6* und *Sext Physik 5* wurde versucht, eine Bewegung der Planeten um die Sonne mathematisch zu beschreiben. Dabei wurden die Gravitationskraft und die Zentripetalkraft gleichgesetzt. In diesem Fall wurde von einer kreisförmigen Bewegung der Planeten um die Sonne ausgegangen.

Nun soll versucht werden, eine genauere Bewegung der Planeten um die Sonne herzuleiten. Dazu wird das erste Kepler'sche Gesetz mithilfe des Gravitationspotentials, der Energie- und Drehimpulserhaltung, hergeleitet.

Zuvor sollen weiterführende mathematische Inhalte, die in Mathematik im Rahmen der AHS Oberstufe nicht besprochen werden, jedoch teilweise in den Höheren technischen Lehranstalten, skizzenhaft angeführt werden.

1 Weiterführende Mathematik

1.1 Funktionen mit zwei bzw. mehreren unabhängigen Variablen

In der AHS Oberstufe beschäftigt man sich grundsätzlich mit Funktionen in einer Variable. Es gibt jedoch auch Funktionen mit zwei oder mehreren unabhängigen Variablen, die z.B. in der HTL im Mathematikunterricht besprochen werden (vgl. [24], S.26ff.).

„Unter einer reellen Funktion f von zwei Variablen x und y versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar (x, y) genau eine (reelle) Zahl z zuordnet. (...) x und y werden als die unabhängigen Variablen, z wird als Funktionswert oder abhängige Variable bezeichnet. Man schreibt kurz: $z = f(x, y)$ “ ([30], S.101).

Das Volumen eines Drehzylinders ist von den beiden Größen r und h abhängig. Gibt man das Volumen als Funktion dieser beiden Variablen r und h an, so erhält man: $V(r, h) = r^2 \cdot \pi \cdot h = f(r, h)$ (vgl. [30], S.101).

Analoges folgt für Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen.

1.2 Partielle Ableitungen

Die erste und die höheren Ableitungen einer Funktion in einer Variablen sind SchülerInnen der AHS Oberstufe ab der 7. Klasse vertraut (vgl. [6], S.5).

Die partiellen Ableitungen von Funktionen in zwei bzw. mehreren unabhängigen Variablen werden jedoch nur im Rahmen des Mathematikunterrichts in der HTL unterrichtet (vgl. [24], S.26ff.).

Sei z.B. eine Funktion $f(x, y)$ gegeben, wobei x und y zwei unabhängige Variablen sind, so kann man f einerseits partiell - also teilweise - nach x bzw. nach y ableiten. Diese Ableitungen werden auch Richtungsableitungen bzw. partielle Ableitungen genannt. Die Regeln, die bereits bei Funktionen in einer Variable gelernt wurden, finden auch hier ihre Anwendung. Schreibweisen für die partiellen Ableitungen nach x und y sind z.B. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ (vgl. [30], S.102).

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 + 4y$. Die partielle Ableitung nach x lautet $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x$ (Man leitet nach x ab und behandelt y wie eine Konstante.) Die partielle Ableitung nach y ist $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 4$ (Man leitet nach y ab und behandelt x wie eine Konstante.)

Es gibt auch partielle Ableitungen höherer Ordnung, diese werden aber im Rahmen dieser Arbeit nicht angeführt, da sie für die Berechnung der Planetenbewegung nicht relevant sind.

1.3 Gradient

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, so ist der Gradient gegeben als der folgende Vektor:

$$\text{grad} f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Der Gradient dient dazu, um die Änderungsrate eines Skalarfeldes f (z.B. Temperaturkarte) in eine gegebene Richtung zu bestimmen (vgl. [13], S.306).

Die geometrische Deutung des Gradienten im $\mathbb{R}^3$ wird nicht angeführt.

Es sei die Funktion $f(\vec{x}) = x^3 + y^2 z$ gegeben. Der Gradient der Funktion ist damit gegeben durch:

$$\text{grad} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x^3)}{\partial x} \\ \frac{\partial(y^2 z)}{\partial y} \\ \frac{\partial(y^2 z)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 2yz \\ y^2 \end{pmatrix}$$

Eine Anwendung des Gradienten, die auch später in der Berechnung der Planetenbewegung gleich zu Beginn Anwendung findet, liegt in der Betrachtung von Kräften, die nur vom Ort eines Teilchens bzw. Körpers abhängen. Es gilt dabei:

„Unter den zeitunabhängigen Kraftfeldern $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ lassen genau jene eine erhaltene Gesamtenergie zu, die der Gradient eines skalaren Feldes (d.h. einer Funktion) sind“ ([13], S.48).

Die Formel für diese Aussage liefert Gleichung 4.1 (vgl. [13], S.48).

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\text{grad}V(\vec{x}) \quad (4.1)$$

Ebenso erfolgt wird dabei geschlussfolgert:

„Ein (zeitunabhängiges) Kraftfeld $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ heißt konservativ, wenn es der Gradient eines skalaren Feldes ist“ ([13], S.49).

1.4 Differentialgleichungen

Das Beschreiben von Systemen mit Differentialgleichungen und das Lösen einfacher Differentialgleichungen sind im Lehrplan der AHS Oberstufe der 8. Klasse gefordert (vgl. [6], S.6).

Dennoch soll hier nochmals deren Bedeutung näher erläutert werden.

„Eine Gleichung, in der irgendwelche Ableitungen einer unbekannten Funktion vorkommen, heißt gewöhnliche Differentialgleichung. Die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung heißt Ordnung der Differentialgleichung“ ([30], S.115).

Das Wort *gewöhnlich* bezieht sich darauf, dass die gesuchte Funktion nur von einer Variable abhängt. Wäre dies nicht so, so würde man von partiellen Differentialgleichungen sprechen (vgl. [30], S.115).

Eine Differentialgleichung erster Ordnung ist z.B. $2y' + y = \sin(3x)$, eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist z.B. $y'' + y' + 4y = 0$ und eine Differentialgleichung dritter Ordnung ist z.B. $y' \cdot y''' + 1 = x$ (vgl. [30], S.115).

Es ist notwendig Differentialgleichungen zu lösen. Dazu soll folgende Aussage angeführt werden:

„Eine Differentialgleichung besitzt im Allgemeinen unendlich viele Lösungen, erkennbar an einer oder mehreren frei wählbaren Integrationskonstanten. Die Gesamtheit dieser Lösungen heißt allgemeine Lösung. Die Ordnung einer Differentialgleichung gibt die Anzahl der Integrationskonstanten in der allgemeinen Lösung an. Werden darin die Integrationskonstanten numerisch festgelegt, so spricht man von einer speziellen oder partikulären Lösung der Differentialgleichung. Geometrisch veranschaulicht ist die allgemeine Lösung eine Kurvenschar, die partikuläre Lösung eine Kurve aus dieser Schar“ ([30], S.120).

Darüber hinaus kann eine Aussage über sogenannte Anfangswert- bzw. Randwertaufgaben getätigt werden:

„Werden die Integrationskonstanten durch Anfangsbedingungen ($y, y', \dots$ an einer festen Stelle x_0) festgelegt, so spricht man von einer Anfangswertaufgabe. Eine Randwertaufgabe liegt vor, wenn die Integrationskonstanten durch Vorgabe von Funktionswerten oder Ableitungen an verschiedenen Stellen erfolgt“ ([30], S.120).

Als eine mögliche Lösungsmethode von Differentialgleichungen soll die Methode der Trennung der Variablen angeführt werden.

1.5 Trennung der Variablen

Die Methode der Trennung der Variablen kann bei Differentialgleichungen 1. Ordnung verwendet werden, wenn sie in der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$ vorliegen. Zuerst ist es notwendig, $\frac{dy}{dx}$ anstatt von y' zu schreiben. Danach sollen mittels geeigneter Umformungsschritte die Variablen getrennt werden. Nach der Integration sollte eine Auflösung der allgemeinen Lösung nach y passieren (vgl. [30], S.126).

Folgendes Beispiel soll erläutern, wie eine Differentialgleichung aufgestellt werden kann und wie die Trennung der Variablen vor sich geht:

„In einer Bakterienkultur sei die Vermehrungsrate proportional zur derzeitigen Anzahl an Bakterien. Formulieren Sie dies in Form einer Differentialgleichung!“ ([16], S.1).

Es gilt dabei Gleichung 4.2, in der $p(t)$ die Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt t angibt.

$$\underbrace{\dot{p}(t)}_{\text{Änderungsrate}} = \underbrace{c}_{\text{proportional}} \cdot \underbrace{p(t)}_{\text{zur Anzahl}} \quad (4.2)$$

Es liegt eine Differentialgleichung 1. Ordnung vor, die mittels Trennung der Variablen gelöst werden kann:

$$p'(t) = c \cdot p(t) \quad (4.3)$$

$$\frac{dp}{dt} = c \cdot p(t) \quad (4.4)$$

$$\frac{\frac{dp}{dt}}{p(t)} = c \quad (4.5)$$

$$\int \frac{1}{p(t)} dp = \int c dt \quad (4.6)$$

$$\ln(p(t)) = c \cdot t + p_0 \quad (4.7)$$

$$p(t) = e^{(c \cdot t + p_0)} \quad (4.8)$$

$$p(t) = e^{c \cdot t} \cdot \underbrace{e^{p_0}}_{:= p_0} \quad (4.9)$$

$$p(t) = p_0 \cdot e^{ct} \quad (4.10)$$

Mit Gleichung 4.10 hat man eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung gefunden. Deren spezielle Lösung kann gefunden werden, indem mehr Information über die Bakterienkultur preisgegeben wird:

„Angenommen die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 4 Stunden“ ([16], S.1).

Damit erhält man durch Einsetzen einen Wert für die Konstante c (vgl. Gleichung 4.15):

$$p(4) = 2 \cdot p_0 \quad (4.11)$$

$$p_0 \cdot e^{4c} = 2 \cdot p_0 \quad (4.12)$$

$$e^{4c} = 2 \quad (4.13)$$

$$4c = \ln 2 \quad (4.14)$$

$$c = \frac{\ln 2}{4} \quad (4.15)$$

$$(4.16)$$

Schlussendlich erhält man Gleichung 4.17 als die gesuchte Funktion.

$$p(t) = p_0 \cdot e^{\frac{\ln 2}{4} \cdot t} \quad (4.17)$$

1.6 Funktionen in Parameterdarstellung und deren Ableitung

In der Berechnung der Planetenbewegung ist auch die Ableitung einer Funktion in Parameterdarstellung gefordert. Funktionen, die in Parameterdarstellung gegeben sind, werden in der AHS Oberstufe nicht besprochen, geschweige denn soll deren Änderungsrate berechnet werden (vgl. [6], S.3ff.)

Daher soll nun eine Funktion in Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ betrachtet werden. Gesucht sei die Steigung in dem zum Parameterwert t zugehörigen Punkt $P(x(t)|y(t))$ der Funktion (vgl. [29], S.88).

Damit gilt:

„Geht man von der über die Parameterdarstellung gegebene Zuordnung $x \mapsto y$ aus, so kann y als verkettete Funktion $y = y(x) = y[x(t)]$ betrachtet werden“ ([29], S.88).

Wird nun Differenzierbarkeit der Funktion y vorausgesetzt, gilt nach der Kettenregel Gleichung 4.18 (vgl. [29], S.88).

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (4.18)$$

Die Ableitungen nach einem Parameter (meist t) werden oft mit einem Punkt gekennzeichnet. Diese Schreibweise ist in Gleichung 4.19 dargestellt (vgl. [29], S.89).

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad (4.19)$$

Damit kann man Gleichung 4.18 ganz einfach mittels Gleichung 4.20 anschreiben (vgl. [29], S.89).

$$\dot{y} = y' \cdot \dot{x} \quad (4.20)$$

Für die Ableitung einer Funktion in Parameterdarstellung erhält man durch Umformung von Gleichung 4.20 die Darstellung, die durch Gleichung 4.21 gegeben ist (vgl. [29], S.89).

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad (4.21)$$

Ableitungen zweiter (bzw. höherer) Ordnung werden wie an Gleichung 4.22 ersichtlich dargestellt (vgl. [29], S.91).

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad (4.22)$$

Es soll als Beispiel die Bewegung eines Balles während des waagrechten Wurfes betrachtet werden. Die Erdbeschleunigung beträgt dabei $g \approx 10 \text{ m/s}^2$, die Höhe des Abwurfs sei 1 m und die Abwurfgeschwindigkeit sei mit $v_0 = 2 \text{ m/s}$ gegeben (vgl. [29], S.89).

Für die Position des Balles (betrachtet man den waagrechten Wurf als zusammengesetzte Bewegung aus gleichförmiger Bewegung und dem freien Fall) gelten Gleichung 4.23 und Gleichung 4.24 (vgl. [29], S.89).

$$x(t) = v_0 \cdot t = 2t \quad (4.23)$$

$$y(t) = h - \frac{g}{2} \cdot t^2 = 1 - 5t^2 \quad (4.24)$$

Der Geschwindigkeitsvektor der Bewegung des Balles ist durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ gegeben. v_x erhält man, wenn man Gleichung 4.23 nach der Zeit t ableitet. Analoges gilt für v_y (vgl. [29], S.89).

Somit erhält man für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors Gleichung 4.25 und Gleichung 4.26 (vgl. [29], S.89).

$$v_x = \dot{x}(t) = 2 \quad (4.25)$$

$$v_y = \dot{y}(t) = -10t \quad (4.26)$$

Für die Funktion y' in Parameterdarstellung gilt somit Gleichung 4.27 (vgl. [29], S.90).

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-10t}{2} = -5t \quad (4.27)$$

2 Die Bewegung eines Planeten um einen Zentralkörper

In diesem Abschnitt soll die Bewegung eines Körpers resp. der Erde um einen Zentralkörper resp. die Sonne besprochen werden. Dazu wird eine Fachbereichsarbeit aus Mathematik verwendet (siehe [23], S. 12ff.). Es wird auf sämtliche mathematische Herleitungen und Beweise einzelner Formeln und Gesetze verzichtet, da dies den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

Man geht zunächst davon aus, dass die Sonne eine Masse M besitzt und sich im Ursprung 0 des $\mathbb{R}^3$ befindet. Die Sonne übt auf die Planeten, die sie umgeben, eine Kraft - die Gravitationskraft - aus (vgl. [23], S. 12ff.).

Diese Kraft ist ja, wie bereits durch Gleichung 4.1 angeführt, der negative Gradient des Gravitationspotentials. Dadurch ergibt sich Gleichung 4.28 (vgl. [23], S. 14).

$$U(\vec{x}) = -G \frac{Mm}{|\vec{x}|} = -G \frac{Mm}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \quad (4.28)$$

Das Gravitationsfeld ist ein zentrales Kraftfeld, daher ist der Drehimpuls dabei stets erhalten und konstant. Es wird nun das Koordinatensystem so gelegt, dass der Drehimpuls in Richtung $(0, 0, 1)$ zeigt, also entlang der x_3 -Achse. Das bedeutet, dass die Bewegung des Planeten in der x_1x_2 -Ebene stattfindet. Diese steht somit senkrecht auf den Drehimpuls. Das bedeutet, dass die Planetenbahn durch Gleichung 4.29 beschrieben wird (vgl. [23], S. 14f.).

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), 0) \quad (4.29)$$

Für Gleichung 4.29 können nun Polarkoordinaten eingeführt werden, welche durch Gleichung 4.30 und Gleichung 4.31 dargestellt sind (vgl. [23], S. 14).

$$x_1 = r \cdot \cos \varphi \quad (4.30)$$

$$x_2 = r \cdot \sin \varphi \quad (4.31)$$

$$x_3 = 0 \quad (4.32)$$

Die Energieerhaltung besagt, dass entlang der Planetenbahn die Energie konstant sein muss. Dabei müssen zwei unterschiedliche Energiearten betrachtet werden, nämlich die potentielle Energie $U(\vec{x})$ im Punkt $\vec{x}$ und die kinetische Energie $\frac{m}{2} \dot{\vec{x}}(t) \cdot \dot{\vec{x}}(t)$. Die Energieerhaltung ist durch Gleichung 4.33 ersichtlich (vgl. [23], S. 14).

$$U(\vec{x}(t)) + \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}(t) \cdot \dot{\vec{x}}(t) = c \quad (4.33)$$

Für die potentielle Energie $U(\vec{x})$ wird nun das Gravitationspotential, das durch Gleichung 4.28 dargestellt ist, in Gleichung 4.33 eingesetzt und damit ergibt sich Gleichung 4.35 (vgl. [23], S. 15).

$$U(\vec{x}(t)) + \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}(t) \cdot \dot{\vec{x}}(t) = c \quad (4.34)$$

$$-G \frac{Mm}{|\vec{x}(t)|} + \frac{m}{2} \left| \dot{\vec{x}}(t) \right|^2 = c \quad (4.35)$$

$$-G \frac{Mm}{|\vec{x}(0)|} + \frac{m}{2} \left| \dot{\vec{x}}(0) \right|^2 = c \quad (4.36)$$

Die Energie ist entlang der Planetenbahn erhalten, daher kann die Anfangsenergie zum Zeitpunkt $t = 0$, die durch Gleichung 4.36 dargestellt ist, nicht verloren gehen und mit Gleichung 4.35 gleichgesetzt werden (siehe Gleichung 4.40) (vgl. [23], S.15).

Aus der Konstruktion der Polarkoordinaten ergibt sich Gleichung 4.37 für den Abstand des Planeten zur Sonne. Darüber hinaus erhält man für die Geschwindigkeit Gleichung 4.38 (vgl. [23], S.15).

$$r(t) = |\vec{x}(t)| \quad (4.37)$$

$$v(t) = |\dot{\vec{x}}(t)| = \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2} \quad (4.38)$$

$$v(t)^2 = \dot{r}(t)^2 + r(t)^2 \dot{\varphi}(t)^2 \quad (4.39)$$

Gleichung 4.39 stellt das Quadrat der Geschwindigkeit dar. Diese Gleichung erhält man, wenn $x_1 = r \cdot \cos \varphi$ und damit $\dot{x}_1 = \dot{r} \cos \varphi - r \sin(\varphi) \cdot \dot{\varphi}$ gesetzt werden bzw. wenn $x_2 = r \cdot \sin \varphi$ und damit $\dot{x}_2 = \dot{r} \sin \varphi + r \cos(\varphi) \cdot \dot{\varphi}$ gilt (vgl. [23], S.15).

Nach Gleichsetzen von Gleichung 4.35 und Gleichung 4.36 erhält man Gleichung 4.40. Verwendet man Gleichung 4.37 und Gleichung 4.38, so ergibt sich Gleichung 4.41 (vgl. [23], S.15).

$$-G \frac{Mm}{|\vec{x}(t)|} + \frac{m}{2} \left| \dot{\vec{x}}(t) \right|^2 = -G \frac{Mm}{|\vec{x}(0)|} + \frac{m}{2} \left| \dot{\vec{x}}(0) \right|^2 \quad (4.40)$$

$$-G \frac{Mm}{r(t)} + \frac{m}{2} v(t)^2 = -G \frac{Mm}{r(0)} + \frac{m}{2} v(0)^2 \quad (4.41)$$

Nun folgt die Multiplikation von Gleichung 4.41 mit dem Faktor 2 und die Division durch die Planetenmasse m , was zu Gleichung 4.42 führt.

$$v(t)^2 - 2GM \frac{1}{r(t)} = v(0)^2 - 2GM \frac{1}{r(0)} \quad (4.42)$$

Die rechte Seite von Gleichung 4.42 wir als γ gesetzt, damit erhält man Gleichung 4.43 (vgl. [23], S.15).

$$v(t)^2 - 2GM \frac{1}{r(t)} = \gamma \quad (4.43)$$

$$\text{mit} \quad \gamma = v(0)^2 - 2GM \frac{1}{r(0)} = c \quad (4.44)$$

Die Gleichung der Planetenbahn wird in der Form $r = r(\varphi)$ gesucht. Daher ergibt sich für die erste Ableitung von r mittels partieller Differentiation Gleichung 4.45 (vgl. [23], S.15).

$$\dot{r}(t) = \frac{d}{dt} r(\varphi(t)) = \frac{dr}{d\varphi}(\varphi(t)) \cdot \frac{d\varphi}{dt}(t) = \frac{dr}{d\varphi}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \quad (4.45)$$

Ab jetzt wird bei $r(\varphi)$ das (φ) weggelassen. Die Erhaltung des Drehimpulses, auf deren Herleitung im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen wird, verlangt, dass für den konstanten Betrag des Drehimpulses Gleichung 4.46 gilt (vgl. [23], S.16).

$$r^2 \dot{\varphi} = c \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{c}{r^2} \quad (4.46)$$

Wenn in Gleichung 4.39 die Gleichung 4.46 eingesetzt wird, ergibt sich Gleichung 4.47 (vgl. [23], S.16).

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} \right)^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{c^2}{r^4} + \frac{c^2}{r^2} \quad (4.47)$$

Nun kann Gleichung 4.47 in Gleichung 4.43 eingesetzt werden. Mittels geschickter Umformung (u.a. Division durch c^2) erhält man Gleichung 4.49 (vgl. [23], S.16).

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{c^2}{r^4} + \frac{c^2}{r^2} - 2GM \frac{1}{r} = \gamma \quad (4.48)$$

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\gamma}{c^2} + \frac{2GM}{c^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \quad (4.49)$$

Da Planetenbahnen untersucht werden, kann r nie Null werden, was eine Substitution erlaubt, die durch Gleichung 4.51 gegeben ist (vgl. [23], S.16).

$$u := \frac{1}{r} \quad u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} \quad (4.50)$$

$$\text{damit:} \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \quad (4.51)$$

Gleichung 4.49 nimmt mit der Substitution die folgende Gestalt an (vgl. [23], S.16):

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\gamma}{c^2} + \frac{2GM}{c^2} u - u^2 \quad (4.52)$$

Nun muss Gleichung 4.52 auf ein vollständiges Quadrat ergänzt werden, was dadurch erreicht wird, dass man den Ausdruck $\frac{G^2 M^2}{c^4}$ einmal addiert und einmal subtrahiert. Dabei erhält man Gleichung 4.54.

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\gamma}{c^2} - \underbrace{\frac{G^2 M^2}{c^4} + \frac{2GM}{c^2} u - u^2}_{= -\left(u - \frac{GM}{c^2}\right)^2} + \frac{G^2 M^2}{c^4} \quad (4.53)$$

$$= \frac{\gamma}{c^2} + \frac{G^2 M^2}{c^4} - \left(u - \frac{GM}{c^2} \right)^2 \quad (4.54)$$

Schließlich erreicht man durch Herausheben des Terms $\frac{G^2 M^2}{c^4}$, dass Gleichung 4.54 die Form annimmt, die durch Gleichung 4.55 dargestellt ist.

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{G^2 M^2}{c^4} \left(1 + \frac{\gamma c^2}{G^2 M^2}\right) - \left(u - \frac{GM}{c^2}\right)^2 \quad (4.55)$$

Als weiteren Schritt setzt man p und ε so, dass sie später mit den Parametern der Kegelschnitte übereinstimmen. In Gleichung 4.56 und Gleichung 4.57 erkennt man die Ausdrücke für die Substitution (vgl. [23], S.16).

$$p := \frac{c^2}{GM} \quad (4.56)$$

$$\varepsilon := \sqrt{1 + \frac{\gamma c^2}{G^2 M^2}} \quad (4.57)$$

Setzt man nun diese Substitution in Gleichung 4.55 ein, so erhält man Gleichung 4.58 (vgl. [23], S.16).

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2 \quad (4.58)$$

Nun lässt Gleichung 4.58 eine Analyse zu: Ist $\varepsilon = 0$, so ergibt sich daraus Gleichung 4.59 (vgl. [23], S.16).

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -\left(u - \frac{1}{p}\right)^2 \quad (4.59)$$

In Gleichung 4.59 ist die linke Seite ≥ 0 und die rechte Seite ≤ 0 . Daraus folgt, dass beide Seiten 0 sein müssen (vgl. [23], S.16).

Damit erreicht man durch Umformung und Verwendung von Gleichung 4.50:

$$0 = -\left(u - \frac{1}{p}\right)^2 \quad (4.60)$$

$$0 = u - \frac{1}{p} \quad (4.61)$$

$$u = \frac{1}{p} \quad (4.62)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} \quad (4.63)$$

$$r = p \quad (4.64)$$

Gleichung 4.64 sagt nun, dass der Abstand r des Planeten zur Sonne konstant ist, was darauf schließen lässt, dass sich der Planet in einem *Kreis* um die Sonne bewegt (vgl. [23], S.16).

Nun muss noch der Fall betrachtet werden, wenn $\varepsilon > 0$ ist. Aus Gleichung 4.59 kann die Quadratwurzel gezogen und umgeformt werden, wodurch man Gleichung 4.69 erhält (vgl. [23], S.17).

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2 \quad (4.65)$$

$$\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2} \quad (4.66)$$

$$d\varphi = \frac{du}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2}} \quad (4.67)$$

$$\int d\varphi = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2}} \quad (4.68)$$

$$\varphi + C = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2}} \quad (4.69)$$

Um das Integral aus Gleichung 4.69 zu lösen, muss man die Substitution $w = u - \frac{1}{p}$ und damit $du = dw$ (da p konstant) vornehmen. Damit erhält man Gleichung 4.72 (vgl. [23], S.17).

$$\varphi + C = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(u - \frac{1}{p}\right)^2}} \quad (4.70)$$

$$= \int \frac{dw}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - w^2}} \quad (4.71)$$

$$= \frac{p}{\varepsilon} \int \frac{dw}{\sqrt{1 - \left(\frac{pw}{\varepsilon}\right)^2}} \quad (4.72)$$

Da p und ε konstant ist, darf man diesen Faktor, wie in Gleichung 4.72 ersichtlich, vor das Integral ziehen. In Gleichung 4.72 wird nun eine letzte Substitution vorgenommen, es wird nämlich $\frac{pw}{\varepsilon} =: z$ und damit $dz = \frac{p}{\varepsilon} dw$ verwendet. Durch diese Substitution ergibt sich Gleichung 4.73 (vgl. [23], S.17).

$$\varphi + C = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad (4.73)$$

Das Integral aus Gleichung 4.73 lässt sich leicht lösen, da es ein Grundintegral darstellt. (Dieses kann z.B. einer mathematischen Formelsammlung entnommen werden.) Durch Rücksubstitution von z und w erhält man schlussendlich Gleichung 4.78 (vgl. [23], S.17).

$$\varphi + C = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad (4.74)$$

$$= \arcsin(z) \quad (4.75)$$

$$= \arcsin\left(\frac{pw}{\varepsilon}\right) \quad (4.76)$$

$$= \arcsin\left(\frac{p\left(u - \frac{1}{p}\right)}{\varepsilon}\right) \quad (4.77)$$

$$= \arcsin\left(\frac{pu - 1}{\varepsilon}\right) \quad (4.78)$$

Nun verwenden wir die Umkehrfunktion des $\arcsin$, nämlich den $\sin$, um weitere Umformungen durchführen zu können (vgl. [23], S.17).

$$\varphi + C = \arcsin\left(\frac{pu - 1}{\varepsilon}\right) \quad (4.79)$$

$$\sin(\varphi + C) = \frac{pu - 1}{\varepsilon} \quad (4.80)$$

$$u = \frac{1 + \varepsilon \sin(\varphi + C)}{p} \quad (4.81)$$

Durch Verwendung von Gleichung 4.50 in Gleichung 4.81 erhält man Gleichung 4.82 (vgl. [23], S.17).

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \sin(\varphi + C)} \quad (4.82)$$

Gleichung 4.82 stellt also den Radius r als Funktion des Winkels φ dar. Nun muss der Parameter C gewählt werden: Dieser wird gewählt, indem man davon ausgeht, dass bei $\varphi = 0$ der Abstand des Planeten von der Sonne, also $\frac{p}{1 + \varepsilon}$, minimal ist (= Perihel). Damit ist $\sin(C) = 1$ bzw. $C = \frac{\pi}{2}$. Dabei ergibt sich Gleichung 4.83 (vgl. [23], S.17).

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \quad (4.83)$$

Verwendet man die trigonometrische Beziehung $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \varphi$ so erhält man Gleichung 4.84 als *Gleichung der Planetenbahn* (vgl. [23], S.17).

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (4.84)$$

Für $p > 0$ und $\varepsilon \geq 0$ stellt Gleichung 4.84 einen Kegelschnitt in Polarkoordinaten dar, wobei deren Brennpunkt im Ursprung ist. Dabei sind 4 Kegelschnitte möglich (vgl. [23], S.18f.):

- a) Falls $\varepsilon = 0$, so bewegt sich der Planet um die Sonne auf einem Kreis.
- b) Falls $0 \leq \varepsilon < 1$, so erfolgt die Bewegung des Planeten um die Sonne auf einer Ellipse.
- c) Falls $\varepsilon = 1$, so liegt eine Parabel vor (wird im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt).
- d) Falls $\varepsilon > 1$, so liegt eine Hyperbel vor (wird im Rahmen dieser Arbeit ebenso vernachlässigt).

3 Interpretation

Wir haben angenommen, dass es sich bei Gleichung 4.84 um eine Gleichung handelt, die Kegelschnitte beschreibt. Planeten umgeben die Sonne auf geschlossenen Bahnen. Daher wird in diesem Fall durch Gleichung 4.84 eine Ellipse beschrieben. Im Brennpunkt dieses Kegelschnitts befindet sich die Sonne. Damit wurde das *erste Kepler'sche Gesetz* hergeleitet und es wurde mathematisch Antwort auf die Frage gegeben, auf welche Art und Weise sich Planeten um die Sonne bewegen.

5 Reflexion und Resümee

1 Buchanalyse

1.1 *Big Bang* und *Sexl Physik* im Vergleich

Tabelle 3.5 veranschaulicht die einzelnen mathematischen Inhalte, die im Rahmen der klassischen Mechanik in den beiden Schulbüchern *Big Bang 5* und *Big Bang 6* Anwendung finden. Es ist kaum zu übersehen, dass großes mathematisches Wissen aus den Bereichen *Vektorrechnung*, *Formeln und Gleichungen*, *funktionale Abhängigkeiten*, *Funktionen und Graphen* und der *Elementargeometrie* gefordert ist.

Tabelle 3.9 zeigt jene Themenbereiche der Mathematik, die in *Sexl Physik 5* im Rahmen der klassischen Mechanik gefordert sind. Man bemerkt sofort, dass in diesem Schulbuch der Hauptfokus bei *Gleichungen und Formeln* liegt, da viele Herleitungen einzelner physikalischer Inhalte und deren Beweise durchgenommen werden. Genauso wie in *Big Bang 5* und *Big Bang 6* spielt die *Vektorrechnung* hier eine tragende Rolle. *Funktionen und Graphen*, ebenso die *funktionale Abhängigkeit* von Größen sind in *Sexl Physik 5* gefordert, jedoch nicht so stark wie bei Apolin.

Vergleicht man die beiden Schulwerke hinsichtlich ihres Zuganges zur Physik, so bemerkt man, dass Apolin eher qualitativ vorgeht, *Sexl Physik* eher quantitativ. Das bedeutet, dass *Sexl* sehr viel Wert auf Herleitungen legt, die sich oft als langwierig und schwer nachvollziehbar herausstellen. Apolin hingegen versucht eher anhand von Experimenten bzw. Gedankenexperimenten neue physikalische Themen einzuführen. Er regt zum Nachdenken an, warum bestimmte Phänomene so sein könnten, wie sie sind. Dem Herleiten von Formeln wird nicht so große Bedeutung zugemessen wie bei *Sexl Physik*. Ein Beispiel dazu liefert die Vorgehensweise in der Einführung des Trägheitsmoments und Drehmoments. In *Big Bang 5* passiert dies durch Beispiele aus dem Alltag. Es wird zum Denken angeregt und somit wird man intuitiv auf die einzelnen Größen und Begriffe geführt. In *Sexl Physik 5* hingegen werden die Formeln hergeleitet. Dies erweist sich als sehr kompliziert und mühsam.

Ist man mit der Vorgehensweise in den Naturwissenschaften vertraut, so bemerkt man schnell, dass *Sexl Physik* an das Rechnen im Hochschulstudium erinnert. Bevor eine Thematik genauer betrachtet bzw. Anwendung im Alltag findet, wird das Gesetz mathematisch formuliert. Dahingehend spielt auch das Rechnen mit Messfehlern - die Messgenauigkeit - eine tragende Rolle in diesem Schulwerk. Erstaunlicherweise finden die oft mühsam hergeleiteten Gesetze wenig Anwendung. Bei Rechenaufgaben werden oft Ergebnisse präsentiert, deren Rechenschritte nicht angeführt werden (vgl. Kapitel „Druck in Flüssigkeiten und Gasen“).

Anders als in *Big Bang* finden sich in *Sexl Physik* viele Tabellen, die Messgrößen mithilfe von Zehnerpotenzen preisgeben (z.B. verschiedene Massen, Dichte verschiedener Stoffe, usw.). Mit diesen Werten wird jedoch oft nicht gerechnet, was die Sinnhaftigkeit dieser Tabellen hinterfragt (vgl. [25], S.32 f.).

Ebenso werden in *Sexl Physik* oft Einheiten mit negativen Potenzen dargestellt. Dies ist im Schulbuch von Martin Apolin nicht der Fall.

1.2 Die mathematischen Inhalte

1.2.1 Vektorrechnung

SchülerInnen lernen meist erst gegen Ende des zweiten Semesters der 5. Klasse AHS Oberstufe die Vektorrechnung kennen. Vergleicht man dazu Auszüge aus unterschiedlichen Lehrwerken, so erkennt man, dass die Definition von Vektoren, algebraische und geometrische Rechnungen und Anwendungen zweidimensional, also in der Ebene, erfolgen (vgl. dazu [19], S.204ff. und [9], S.179ff.).

Die Betrachtung von Vektoren im Dreidimensionalen erfolgt zudem erst in der 6. Klasse (vgl. [20], S.156ff. und [10], S.95ff.).

Indem in *Big Bang 5* das Kapitel „Tooltime“ eine Einführung in die Vektorrechnung gibt, gelingt Apolin diese mathematische Wissenslücke, die SchülerInnen in den Mechanikunterricht mitnehmen, zu schließen. Es wird auf die übliche Pfeildarstellung, z.B. $\vec{F}$, verzichtet, indem vektorielle Größen fett gedruckt werden, z.B. **F**. Ich persönlich bevorzuge eher die mathematische Schreibweise, bei der eine vektorielle Größe mittels Pfeil dargestellt wird.

Anders ist es bei *Sexl Physik 5*. Er hat kein zusätzliches Kapitel, das die Vektorrechnung bespricht. Bei ihm werden jedoch Vektoren vertraut-mathematisch mit Vektorpfeilen, z.B. $\vec{F}$ angegeben. Am Ende des ersten Kapitels, nämlich bei „Geschwindigkeit und Beschleunigung“, gibt *Sexl Physik* einen Überblick über die wichtigsten Rechenoperationen im Zusammenhang mit Vektoren.

Im Kapitel „Rotationen“ aus *Big Bang 5* wird auf das Kreuzprodukt schriftlich verwiesen, das heißt, dass in diesem Zusammenhang eigentlich Grundkenntnisse der dreidimensionalen Vektorrechnung gefordert wären. Das Kreuzprodukt findet jedoch in keinem Kapitel der klassischen Mechanik aus der Schulbuchreihe *Big Bang* eine rechnerische Anwendung. Seine Bedeutung wird nur mittels Abbildungen (Rechte-Hand-Regel im Zusammenhang mit der Winkelgeschwindigkeit) veranschaulicht. Ebenso wird bei *Sexl Physik 5* an einigen Stellen auf das Kreuzprodukt verwiesen bzw. werden Formeln mit dieser Schreibweise angegeben. Dies erweist sich für SchülerInnen womöglich als sehr schwierig, da zu diesem Zeitpunkt noch keine Vorkenntnisse aus der dreidimensionalen Vektorrechnung vorhanden sind.

Mechanikunterricht ist ohne Vektorrechnung unvorstellbar. Größen, bei denen nicht nur der Betrag, sondern auch die Richtung eine entscheidende Rolle spielen, findet man in fast allen Kapiteln der klassischen Physik. SchülerInnen sind vor dem Physikunterricht oft nicht damit vertraut, dass Größen, wie z.B. die Geschwindigkeit, nicht nur einen Betrag (in diesem Fall das Tempo) ausweisen, sondern auch eine Richtung. Daher begegnen

Lehrenden im Physikunterricht viele Schülervorstellungen (vor allem zu Themen der Mechanik), die im Rahmen des Physikunterrichts mit den SchülerInnen umgedeutet werden sollen (vgl. [31], S.38f.).

1.2.2 Trigonometrie

Viele Inhalte der *Trigonometrie* sind vor allem im Kapitel „zusammengesetzte Bewegungen“ aus *Big Bang 5* gefordert. Die Trigonometrie wird, ebenso wie die Vektorrechnung, meist im 2. Semester der 5. Klasse AHS besprochen (vgl. [19], S.82ff. und [9], S.151ff.). Auch *Sext Physik 5* bedient sich an unterschiedlichen Stellen vieler Inhalte der Trigonometrie. Erwähnenswert sind hier die Kapitel „Geschwindigkeit und Beschleunigung“ und „Energie“. Hier wäre es hilfreich, wenn Mathematik- und PhysikkollegInnen einander über den Lernfortschritt der SchülerInnen informieren. Gegebenfalls könnte es von Vorteil sein trigonometrische Inhalte sowohl im Mathematik- als auch im Physikunterricht parallel zu besprechen bzw. kennen zu lernen.

Es ist durchaus möglich, dass SchülerInnen erst in der 6. Klasse AHS Oberstufe (aufgrund eines dementsprechenden Schulzweiges) in Physik unterrichtet werden. Dies bietet mathematisch betrachtet den Vorteil, dass diese SchülerInnen bereits viel mehr mathematisches Vorwissen in den Physikunterricht mitnehmen, um die Inhalte der Mechanik (vor allem in Bezug auf Vektorrechnung und Trigonometrie) besser verstehen zu können. Ein Nachteil ergibt sich jedoch, dass diese SchülerInnen oft eine verminderte Wochenstundenanzahl in Physik haben und somit einzelne Themen schneller besprochen werden müssen.

1.2.3 Funktionen, Funktionsgraphen, Diagramme und funktionale Abhängigkeiten

Große Aufmerksamkeit schenkt Apolin in seiner Schulbuchreihe auch dem Interpretieren von *Diagrammen und Funktionsgraphen*. In *Sext Physik 5* wird dieser mathematische Inhalt eher in die Übungsphase verlegt. Der Zugang zu physikalischen Phänomenen durch Funktionsgraphen und Diagramme findet eher bei Apolin Anwendung, daher wird in dieser Schulbuchreihe auch diesem mathematischen Inhalt mehr Aufmerksamkeit geschenkt.

Das Erlernen sowohl des intuitiven als auch des mathematisch-definierten Funktionsbegriffs taucht bereits in der 4. Klasse der AHS Unterstufe bzw. NMS auf (vgl. [7], S.7f.). Ebenso wird in der 5. Klasse AHS Oberstufe das Kapitel Funktionen neu besprochen (vgl. [6], S.4). In diesem Zusammenhang wäre es wünschenswert, dass das Interpretieren von Bewegungsdiagrammen (s-t-Diagrammen, v-t-Diagrammen) dem Berechnen des Differenzenquotienten in inner- und außermathematischen Bereichen im Mathematik- und Physikunterricht parallel erfolgt. Vergleicht man einzelne Mathematikbücher für die 5. Klasse, so erkennt man, dass manche Autoren mehr Wert auf physikalische Anwendungen in diesem Zusammenhang legen, andere eben eher weniger. Das Schulbuch *Mathematik verstehen 5* liefert viele Aufgaben, die das Interpretieren physikalischer Bewegungsaufgaben im Zusammenhang mit Funktionen fordern (vgl. [19], S.152ff.), das Buch *Thema Mathematik 5* hingegen bespricht diesen Inhalt kaum, setzt dagegen andere Schwerpunkte (vgl.

[9], S.101ff.).

Kaum zu übersehen ist, dass das Umformen von Gleichungen und Formeln in nahezu jedem Kapitel der Schulbücher Anwendung findet. Das bedeutet, dass die klassische Mechanik auch in der Schule von vielen mathematischen Herleitungen geprägt ist. Dabei wird die Bedeutung der Mathematik in der Physik klar ersichtlich. Am Beginn der 5. Klasse wird das Kapitel Gleichungen neu aufgegriffen, um Gelerntes aus der Unterstufe (vgl. [7], S.7f.) zu vertiefen (vgl. [19], S.16ff. und [9], 65ff.).

1.2.4 Elementargeometrie

Indem mit Kreisen und Dreiecken und weiteren geometrischen Figuren sowohl in *Big Bang* als auch in *Sexl Physik* gearbeitet wird, sind in beiden Schulbüchern wichtige Kenntnisse aus dem Bereich der *Elementargeometrie* gefordert.

Das Erlernen der Elementargeometrie beginnt in der AHS bzw. NMS bereits in der 1. Klasse (vgl. [7], S.5). In jedem Schuljahr der AHS Unterstufe bzw. NMS wird auf dem bereits Gelernten aufgebaut und es werden weitere komplexere Inhalte besprochen (vgl. [7], S.5ff.). Das bedeutet, dass ein umfangreiches mathematisches Vorwissen im Bereich der Elementargeometrie auch im Physikunterricht vorausgesetzt werden darf, da es zu einem kontinuierlichen Erlernen spezifischer Inhalte bereits über eine lange Zeitdauer kam.

1.2.5 Differential- und Integralrechnung

In der Herleitung der Geschwindigkeit und Beschleunigung werden indirekt, sowohl im Buch *Big Bang 5* als auch im Buch *Sexl Physik 5*, viele Aspekte des Differenzen- bzw. Differentialquotienten als mittlere bzw. momentane Änderungsraten verwendet. Der Differenzenquotient ist, wie schon erwähnt, den SchülerInnen bereits seit der 4. Klasse AHS Unterstufe bzw. NMS vertraut. Die Mathematik im Zusammenhang mit dem Differentialquotient erfolgt erst in der 7. Klasse AHS (vgl. [6], S.5).

Vor allem im Kapitel „geradlinige Bewegungen“ in *Big Bang 5* werden viele Aspekte des Integrals als Fläche unter einer Kurve besprochen. Das Integral selbst wird konkret im Kapitel „Rotationen“ im Zusammenhang mit dem Trägheitsmoment und der Drehmassen verwendet. SchülerInnen lernen das Integrieren erst in der 8. Klasse der AHS Oberstufe, daher werden sie sich unter diesem Begriff im Rahmen des Mechanikunterrichts nichts vorstellen können (vgl. [6], S.6).

Betrachtet man die Schulbuchreihe *Thema Mathematik*, so stellt man fest, dass im Buch für die 8. Klasse die Anwendung der Integralrechnung in der klassischen Mechanik besprochen wird (vgl. [12], S.60ff.).

Ebenso wird im Buch für die 7. Klasse der Zusammenhang zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung im Rahmen der Differentialrechnung diskutiert. Dieses Stoffgebiet stellt jedoch nur Erweiterungsmaterial dar, das heißt, dass nicht davon ausgegangen werden kann, dass alle SchülerInnen Kenntnisse in diesem Zusammenhang aufweisen (vgl. [11], S.220ff.).

Betrachtet man die Schulbuchreihe *Mathematik verstehen*, so erkennt man, dass die Ma-

thematik der Differentialrechnung bereits über die Begriffe Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeit eingeführt wird und immer wieder auf die Physik verwiesen wird (vgl. [21], S.12ff., 36).

Dasselbe passiert bei der Einführung des Integralbegriffs. Auch hier bedient man sich der Geschwindigkeiten von Objekten (vgl. [22], S.6ff.).

1.2.6 Eigene Meinung und Bemerkungen

An der Buchanalyse erkennt man also, dass viele mathematische Themengebiete, die im Erlernen der klassischen Mechanik gefordert sind, bei den SchülerInnen noch unbekannt sind. Das bedeutet, dass durch Verwendung der Mathematik große Probleme im Mechanikunterricht entstehen können. Wie aber schon an einer anderen Stelle erwähnt, ist Physik ohne Verwendung von Mathematik kaum vorstellbar bzw. sinnlos.

Da Martin Apolins Schulbuch *Big Bang* eher qualitative Zugänge zu den einzelnen physikalischen Inhalten aufweist, bevorzuge ich persönlich dieses Schulbuch im Physikunterricht. *Sexl Physik* hingegen verwendet eher langwierige Herleitungen, um neue Themengebiete zu besprechen. In *Big Bang* werden viele Diagramme und Funktionsgraphen besprochen und mit ihnen physikalische Inhalte erklärt. Herleitungen sind eher am Rande angeführt und demnach nicht dazu da, um einzelne Thematiken einzuführen.

Da ich selbst schon an einer Schule zwei Jahre lang Physik unterrichte, orientiere ich mich sehr wohl an dem Schulbuch *Big Bang 5*, verwende jedoch auch andere Quellen, z.B. das amerikanische Schulbuch *Conceptual Physics* von Paul G. Hewitt. Dieses Buch hat einen noch quantitativeren Zugang zur Physik, der mit vielen Alltagsbeispielen einhergeht. Mathematische Herleitungen passieren in diesem Buch nicht (vgl. [15]).

Für mich bedeutet das, dass ich einzelne Themen selbstständig mit unterschiedlichen Werken analysiere und vorbereite.

Es ist für mich vorstellbar bzw. genauso passiert es in meinem Unterricht, dass ich mich stets erkundige, welche Themen im Mathematikunterricht meiner PhysikschülerInnen bereits besprochen wurden. Erkenne ich, dass Kenntnisse der Differentialrechnung bzw. Integralrechnung nun vorhanden sind, so gestalte ich einzelne Stunden, indem ich bereits Gelerntes aus der Mechanik wieder aufgreife und nun vertiefend mit mathematischen Erklärungen unterrichte. Diese Vorgehensweise wäre natürlich genau dann optimal umzusetzen, wenn ich als Physiklehrerin ebenso die Klasse in Mathematik unterrichten könnte. Somit wäre es möglich viele physikalische Phänomene anzuwenden, um mathematische Begriffe und Themen einzuführen (z.B. Differenzen und Differentialquotient mittels Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit). Ebenso kann im Physikunterricht besonders darauf geachtet werden, welche mathematischen Kenntnisse bereits bei den SchülerInnen vorhanden sind und welche noch nicht vorausgesetzt werden können.

Ab dem Schuljahr 2016/2017 wird die allgemeinbildende höhere Schule in Österreich als modulare Oberstufe geführt. In diesem Zusammenhang wäre es wünschenswert, dass in jenen Schulen die einzelnen Module des Mathematik- und Physikunterrichts aufeinander abgestimmt werden können. Dies würde ebenso dazu beitragen, dass sich Physik und Mathematik in der klassischen Mechanik näher kommen könnten.

2 Planetenbewegung

Betrachtet man die Aufgabe zur Berechnung der Planetenbewegung (vgl. Abschnitt 2, S. 107ff.), so merkt man, dass dabei sämtliche mathematischen Kenntnisse der AHS Oberstufe gefordert sind: *Funktionale Abhängigkeiten*, das Arbeiten mit *Formeln und Gleichungen*, *Differential- und Integralrechnung*. Vertiefendes Wissen ist im Zusammenhang mit *Substitutionen* von Termen nötig, was womöglich, abhängig von der Lehrperson, genauer oder weniger genau im Mathematikunterricht besprochen wurde. Außerdem finden besondere *funktionale Abhängigkeiten* (z.B. Abhängigkeit des Radius von einem Winkel) Anwendung.

Im Rahmen der Rechnung werden weiterführende mathematische Kenntnisse gefordert, die in der AHS Oberstufe nicht lehrplanmäßig gefordert sind (vgl. [6], S.3ff. und Abschnitt 1, S. 101ff.).

2.1 Implementierung der Aufgabe zur Berechnung der Planetenbewegung in der Schule

An vielen Schulen, so auch an jener, an der ich bereits unterrichte, gibt es eine unverbindliche Übung „Mathematik für Begabte“. Ich kann mir gut vorstellen, dass man die Aufgabe zur Berechnung der Planetenbewegung um die Sonne im Rahmen dieser Übung bespricht.

Man könnte damit beginnen, dass zuerst die Differential- und Integralrechnung eingeführt wird. Dazu kann das Mathematikbuch der 7. und 8. Klassen dienen bzw. der Lehrende kann einen eigenen Weg gehen, um diese Themen vorerst zu klären. Hierzu könnte immer wieder sofort auf die Physik verwiesen werden und damit könnten physikalische Aufgaben gerechnet werden. In diesem Zusammenhang könnte man Funktionen in Parameterdarstellung und deren Ableitung kennen lernen (vgl. Aufgabe zum waagrechten Wurf in Abschnitt 1, S. 101ff.).

Ist das Grundwissen der Differential- und Integralrechnung vorhanden, wäre es nötig zu klären, was man unter Differentialgleichungen versteht. Ebenso sollte die Methode der Trennung der Variablen als Lösungsvariante einer solchen einfachen Differentialgleichung vorgestellt werden.

Mit diesem besprochenen Wissen wäre es nun grundsätzlich möglich die Planetenbewegung um die Sonne zu berechnen. Da diese Aufgabe sehr viel physikalisches Wissen voraussetzt, sollte die Rechnung gemeinsam in mehreren Etappen erfolgen. Ich kann mir eine Unterrichtsform vorstellen, in der ein Input des Lehrers/der Lehrerin stattfindet, die Lehrkraft geforderte Inhalte erklärt und danach Rechenanweisungen gibt, die die SchülerInnen im Team vorerst rechnen sollen. Danach soll das Berechnete im Plenum besprochen werden. Schritt für Schritt kommt man dann zur Berechnung der Kegelschnitte und damit zur Bewegung der Planeten um die Sonne.

Diese Vorgehensweise ermöglicht, dass SchülerInnen unterschiedlicher Klassen an der Übung teilnehmen können. Ebenso erfolgt dadurch eine Differenzierung und Methodenvielfalt.

2.2 Die Berechnung der Planetenbewegung im Rahmen einer vorwissenschaftlichen Arbeit

Es ist für mich ebenso vorstellbar, dass die Berechnung der Planetenbewegung im Rahmen einer vorwissenschaftlichen Arbeit abgehandelt wird. Dazu sind aber, meiner Meinung nach, viele Inputs der Lehrperson, bei der es von Vorteil sein wird, dass sie sowohl Mathematik als auch Physik unterrichtet, notwendig. Um diese Aufgabe zu berechnen, ist ein tiefes Verständnis der Physik und der Mathematik gefordert, daher bedarf man stets der Hilfe des Lehrers/der Lehrerin.

Schulbücher der HTL können unter anderem Wissenslücken der Mathematik schließen, die SchülerInnen schon in den Sommerferien, also vor dem eigentlichen Verfassen der VwA, genauer unter die Lupe nehmen können.

Problematisch erweist sich die vorliegende Aufgabe jedoch im Zusammenhang mit der Integralrechnung. Beachtet man den Lehrplan für Mathematik der AHS Oberstufe, so erkennt man, dass die Integralrechnung erst in der 8. Klasse besprochen wird. Will dieses Thema dennoch im Rahmen einer VwA behandelt werden, so muss dieses Themengebiet womöglich bereits vor der 8. Klasse selbstständig erlernt werden (vgl. [6], S.5f.).

2.3 Die Berechnung der Planetenbewegung im Rahmen des Physikunterrichts

Für mich persönlich ist es nicht vorstellbar, die Aufgabe zur Berechnung der Planetenbewegung im Rahmen eines regulären Physikunterrichts durchzunehmen. Die Berechnung fordert, wie schon an mehreren Stellen erwähnt, sowohl großes mathematisches als auch physikalisches Vorwissen, das bei SchülerInnen der 5. bzw. 6. Klasse noch nicht vorhanden ist.

Ich persönlich könnte mir jedoch durchaus vorstellen, dass jene Aufgabe, die in den Schulbüchern *Big Bang 6* und *Sext Physik 5* angeführt ist, im Physikunterricht sowohl selbstständig als auch im Plenum gerechnet und diskutiert werden kann.

Da die Kegelschnitte erst in der 7. Klasse im Mathematikunterricht besprochen werden, ist es zudem noch schwieriger diese Aufgabe in der 5. und 6. Klasse zu lösen, da SchülerInnen ebenso nicht wissen, was man unter Ellipse, Hyperbel und Parabel versteht.

3 Abschließende Bemerkungen und Zusammenfassung

Zusammenfassend lässt sich anführen, dass viele mathematische Themengebiete im Erlernen und Vertiefen der klassischen Mechanik der AHS Oberstufe gefordert sind. Viele Inhalte sind den SchülerInnen bereits bekannt, einige jedoch leider auch unbekannt.

Es bleibt zwar der Lehrperson selbst überlassen, wie viel Mathematik er/sie in seinen/ihren Physikunterricht einbaut, dennoch ist eine Annäherung der beiden Fächer, also Mathematik und Physik, für ein erfolgreiches Erlernen der klassischen Mechanik unumgänglich.

Die Frage bleibt offen, ob die Mathematik das Verständnis der Physik bzw. der klassischen Mechanik erleichtert bzw. wie viel Mathematik dazu beitragen kann Physik richtig zu erfassen. Dieser Frage kann im Rahmen weiterer Arbeiten nachgegangen werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Apolin, M. (2007), *Big Bang 5*, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG
- [2] Apolin, M. (2008), *Big Bang 6*, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG
- [3] Apolin, M. (2008), *Big Bang 7*, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG
- [4] Apolin, M. (2008), *Big Bang 8*, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG
- [5] Bauer, F. (1964), 1. Auflage, *Zur Rolle der Mathematik im Physikunterricht*, Berlin: Volk u. Wissen
- [6] BMBF (2004), *AHS Lehrplan Mathematik Oberstufe*. [Online]. Verfügbar unter: https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf [Letzter Zugriff: 26.10.2015]
- [7] BMBF (2000), *AHS Lehrplan Mathematik Unterstufe*. [Online]. Verfügbar unter: https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2 [Letzter Zugriff: 08.05.2016]
- [8] BMBF (2004), *AHS Lehrplan Physik Oberstufe*. [Online]. Verfügbar unter: https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_10_11862.pdf [Letzter Zugriff: 05.05.2016]
- [9] Brand, C., Dorfmayr, A., Lechner, J., Mistlbacher, A. & Nussbaumer, A. (2013), 5. Auflage, *Thema Mathematik 5*, Linz: Veritas Verlag
- [10] Brand, C., Dorfmayr, A., Lechner, J., Mistlbacher, A. & Nussbaumer, A. (2013), 2. Auflage, *Thema Mathematik 6*, Linz: Veritas Verlag
- [11] Brand, C., Dorfmayr, A., Lechner, J., Mistlbacher, A. & Nussbaumer, A. (2013), 3. Auflage, *Thema Mathematik 7*, Linz: Veritas Verlag
- [12] Brand, C., Dorfmayr, A., Lechner, J., Mistlbacher, A. & Nussbaumer, A. (2013), 2. Auflage, *Thema Mathematik 8*, Linz: Veritas Verlag
- [13] Embacher, F. (2010), 1. Auflage, *Elemente der theoretischen Physik*, Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag

- [14] Fließbach, T. (2015), 7. Auflage, *Mechanik*, Berlin: Springer Verlag
- [15] Hewitt, Paul G. (2006), 10. Auflage, *Conceptual Physics*, San Francisco, Calif. [u.a.]: Pearson Addison-Wesley
- [16] Hörmann, G. (2013), *Übung: Differentialgleichungen für LAK zur VO DGL für LAK, WS 2013/14*, Universität Wien
- [17] Lehrwerksübersicht Physik ÖBV (2015), *Lehrwerksübersicht Physik AHS Oberstufe*. [Online]. Verfügbar unter: <http://www.oebv.at/sixcms/list.php?page=fachseite&fachseite=AHS-Oberstufe+Physik> [Letzter Zugriff: 24.10.2015]
- [18] LMU. *Mechanikkonzept für die 7. Klasse*. [Online]. Verfügbar unter: http://www.didaktik.physik.lmu.de/archiv/inhalt_materialien/mechanikkonzept/index.html [Letzter Zugriff: 28.05.2016]
- [19] Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B. & Ulovec, A (2014), *Mathematik verstehen 5*, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG
- [20] Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B. & Ulovec, A (2010), *Mathematik verstehen 6*, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG
- [21] Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B. & Ulovec, A (2013), *Mathematik verstehen 7*, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG
- [22] Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B. & Ulovec, A. (2014), *Mathematik verstehen 8*, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG
- [23] Michor, F. (2000), *Die Mathematik der Planetenbewegung*, Klosterneuburg/Facharbeit
- [24] RIS Lehrplan - Bundesgesetzblatt (2011), *Allgemeines Bildungsziel, Schulautonome Lehrplanbestimmungen, didaktische Grundsätze und gemeinsame Unterrichtsgegenstände an den Höheren Technischen und Gewerblichen (einschließlich Kunstgewerblichen) Lehranstalten*. [Online]. Verfügbar unter: https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2011_II_300/COO_2026_100_2_701382.pdf [Letzter Zugriff: 28.05.2016]
- [25] Sexl, R., Kühnelt, H., Stadler, H., Jakesch, P. & Sattlberger, E. (2012), *Sexl Physik 5*, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG
- [26] Sexl, R., Kühnelt, H., Stadler, H., Jakesch, P. & Sattlberger, E. (2012), *Sexl Physik 6*, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG
- [27] Sexl, R., Kühnelt, H., Stadler, H., Jakesch, P. & Sattlberger, E. (2012), *Sexl Physik 7*, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG

- [28] Sexl, R., Kühnelt, H., Stadler, H., Jakesch, P. & Sattlberger, E. (2012), *Sexl Physik* 8, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG
- [29] Timischl, W. & Kaiser, G. (2015), 3. Auflage, *Ingenieur-Mathematik 3*, Wien: Verlag E. Dorner
- [30] Timischl, W. & Kaiser, G. (2014), 2. Auflage, *Ingenieur-Mathematik 4*, Wien: Verlag E. Dorner
- [31] Wiesner, H., Schecker, H. & Hopf, M. (2011), *Physikdidaktik kompakt*, Freising : Aulis-Verlag

Tabellenverzeichnis

1.1	Liste der analysierten Oberstufenphysikschulbücher	3
3.1	Beispiele zu Geschwindigkeiten [[1], S.51]	19
3.2	Haft- und Gleitreibungszahlen für unterschiedliche Materialien [[1], S.79] . .	37
3.3	Einige Beispiele zu Leistungen [[1], S.90]	42
3.4	Wirkungsgrad verschiedener Haushaltsgeräte [[1], S.96]	45
3.5	Analyse <i>Big Bang</i>	64
3.6	Umrechnung Gradmaß in Bogenmaß [[25], S.47]	79
3.7	Gesamtenergie und Gesamtimpuls vor und nach dem plastischen Stoß [[25], S.78]	94
3.8	Größen bei der Translation und Rotation [[25], S.87]	97
3.9	Analyse <i>Sext Physik 5</i>	99

Abbildungsverzeichnis

3.1 Vier gleich lange Vektoren [[1], S.35]	13
3.2 Vektoraddition - Grafische Addition von parallelen und antiparallelen Vektoren [[1], S.36]	13
3.3 Vektorzerlegung - Zerlegung des Gewichtsvektors in die Hangabtriebskraft F_H und in die Normalkraft F_N [[1], S.38].	13
3.4 Massestück auf Seil [[1], S.39]	14
3.5 Spannen eines Seils [[1], S.39]	14
3.6 Bücher stapeln [[1], S.41]	15
3.7 Hochsprung [[1], S.43]	16
3.8 Drei Arten des Gleichgewichts [[1], S.44]	16
3.9 Darstellung des Auftriebs [[1], S.47]	17
3.10 Weg-Weg-Diagramm [[1], S.53]	19
3.11 Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm [[1], S.53]	20
3.12 Weg-Zeit-Diagramm [[1], S.53]	20
3.13 Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm [[1], S.54]	21
3.14 Geschwindigkeits-Zeit-Darstellung [[1], S.55]	22
3.15 Weg-Zeit-Diagramm eines frei fallenden Körpers auf der Erde und auf dem Mond [[1], S.55]	23
3.16 Grafische Ableitung der Gleichung für die Falltiefe [[1], S.55]	23
3.17 Beispiele für positive und negative Beschleunigung [[1], S.56]	24
3.18 Weg-Zeit-Diagramm eines senkrechten Wurfs [[1], S.57]	25
3.19 Bremsweg in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit [[1], S.58]	25
3.20 Beispiele für ungleichmäßig beschleunigte Bewegungen [[1], S.62]	27
3.21 Geschwindigkeits-Weg-Diagramm [[1], S.63]	28
3.22 Boot im Fluss [[1], S.65].	29
3.23 Darstellung der Vektoraddition mit Bezug zur Berechnung des Betrages eines Vektors [[1], S.65]	30
3.24 s-s-Diagramm eines horizontalen Wurfs [[1], S.66]	30
3.25 Schiefer Wurf mit einem Winkel von 45° [[1], S.66]	32
3.26 Zerlegung des Geschwindigkeitsvektors [[1], S.68]	33
3.27 v-t-Diagramm zweier unterschiedlich stark beladener Autos [[1], S.74]	34
3.28 Beschleunigungen bei einem Raketenstart [[1], S.75]	35
3.29 Zusammenhang zwischen Normalkraft und Reibungskraft [[1], S.79]	36
3.30 „Spannungs-Dehnungs-Diagramm einer Schraubenfeder“ [[1], S.81]	37
3.31 Spannungs-Dehnungs-Diagramm [[1], S.81]	38

3.32 Mathematische Beschreibung des Transportes eines Fasses auf einen LKW [[1], S.84]	40
3.33 Stoß zweier Billardkugeln [[1], S.94]	43
3.34 Geschwindigkeiten der Kugeln vor und nach dem Zusammenstoß [[1], S.95] .	44
3.35 Zusammenstoß zweier Autos [[1], S.101]	47
3.36 Zusammenhang zwischen dem Masseverhältnis der Autos und der umge- wandelten kinetischen Energie [[1], S.101]	48
3.37 Zusammenstoß zwischen einem Auto und einer Leitschiene [[1], S.101]	48
3.38 Veranschaulichung der Energieumwandlung (kinetische in thermische) [[1], S.102]	49
3.39 Kraftverlauf bei einem Streck sprung [[1], S.105]	51
3.40 Rechte-Hand-Regel [[1], S.107]	53
3.41 [[1], S.110 Abb.11.19)	54
3.42 Wippe mit zwei Personen [[1], S.110]	55
3.43 Bedeutung der Zentripetalkraft in der Kurvenfahrt[[1], S.116]	56
3.44 Wirkung von Kräften in Bewegungsrichtung und schräg dazu [[1], S.119] . .	57
3.45 Erhöhung des Betrages der Winkelgeschwindigkeit [[1], S.119]	57
3.46 Drehung des Winkelgeschwindigkeitsvektors [[1], S.119]	57
3.47 Veranschaulichung des zweiten Kepler'schen Gesetzes [[2], S.10]	58
3.48 Abstand und Umlaufzeit aller Planeten und von Pluto. [[2], S.10]	60
3.49 Fallen des Apfels[[2], S.17]	60
3.50 Gravitationsfeld der Erde [[2], S.20]	62
3.51 Veranschaulichung der Bewegung der Erde um die Sonne [[2], S.20]	63
3.52 Bahnen von Satelliten [[2], S.23]	63
3.53 Belastung zweier unterschiedlich starker Federn [[25], S.34]	70
3.54 Darstellung des 3. Newton'schen Axioms [[25], S.36]	71
3.55 Darstellung des Gravitationsgesetzes [[25], S.38]	72
3.56 Grenzg eschwindigkeit beim Fallschirmsprung in Abhängigkeit von der Fall- zeit [[25], S.43]	74
3.57 Grenzg eschwindigkeit von Regentropfen bzw. Hagelkörnern in Abhängigkeit vom Radius [[25], S.43]	74
3.58 Interpretation von Diagrammen beim lotrechten Wurf [[25], S.45]	76
3.59 s-s-Diagramm für den waagrechten Wurf [[25], S.45]	76
3.60 Experiment zur Veranschaulichung des Unabhängigkeitsprinzips beim waag- rechten Wurf [[25], S.45]	77
3.61 Wurfparabeln beim schiefen Wurf mit unterschiedlichen Wurf winkeln [[25], S.46]	77
3.62 Darstellung eines Körpers auf einer Kreisbewegung [[25], S.46]	78
3.63 Einheitskreis [[25], S.47]	79
3.64 Herleitung der Winkelgeschwindigkeit [[25], S.48]	79
3.65 Die Winkelgeschwindigkeit als Vektor [[25], S.48]	80
3.66 Visualisierung des ersten Kepler'schen Gesetzes [[25], S.51]	81
3.67 Visualisierung des zweiten Kepler'schen Gesetzes [[25], S.51]	82

3.68 Veranschaulichung zur Herleitung des Auftriebs [[25], S.56]	84
3.69 Kräftezerlegung eines Wagens, der auf einer schiefen Ebene rollt [[25], S.63] .	86
3.70 Hebelgesetz beim Nussknacker [[25], S.63]	87
3.71 Arbeit, wenn die Krafteinwirkung nicht parallel zum Weg erfolgt [[25], S.63] .	87
3.72 Impulsänderung [[25], S.74]	91
3.73 Kraft-Zeit-Diagramm beim Gehen [[25], S.75]	91
3.74 Kraft-Zeit-Diagramm beim Aufprall eines Tennisballes [[25], S.75]	92
3.75 Eine Person bewegt sich auf einem zuvor ruhenden Boot [[25], S.76]	93
3.76 Kräfte, die bei der Rotation eines Rades wirken [[25], S.84]	96

Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.

Anhang

1 Abstract

1.1 Deutsche Fassung

Die vorliegende Diplomarbeit befasst sich mit der Fragestellung, wie viel und welche Themengebiete der Mathematik in der klassischen Mechanik der AHS Oberstufe benötigt werden. Dazu werden die Kapitel zur klassischen Mechanik der beiden gängigsten Physikschulbücher, nämlich *Big Bang* und *Sext Physik*, auf deren mathematische Inhalte analysiert. Es soll festgestellt werden, ob die darin vorkommende Mathematik von den SchülerInnen bereits erlernt wurde oder ob Weiterführendes in den Kapiteln der klassischen Mechanik auftritt.

Ein weiterer Einblick in die Mathematik der klassischen Mechanik soll gelingen, indem eine anspruchsvollere Berechnung der Planetenbewegung um die Sonne durchgeführt wird. Auch hier werden die dabei geforderten mathematischen Inhalte aufgezeigt.

In der abschließenden Reflexion und im Resümee werden die Ergebnisse der Schulbuchanalyse ausgewertet. Ebenso soll festgestellt werden, wie die Planetenbewegungsaufgabe in den Unterricht der AHS Oberstufe implementiert werden kann. Schlussendlich erfolgt eine persönliche Einschätzung darüber, wie guter Mechanikunterricht im Zusammenhang mit den geforderten mathematischen Inhalten in der 5. bzw. 6. Klasse gelingen kann.

1.2 English version

The present thesis deals with the questions of how many and above all which mathematical topics play an essential role in the teaching of classical mechanics in secondary school in Austria. The relevant units of the two most widely-used Physics textbooks, *Big Bang* and *Sext Physik*, are examined in order to find out whether the students are already familiar with the mathematical content at that stage or whether any new subject material has to be introduced.

Further insight into the connections between mathematics and classical mechanics is provided by the elaboration of a complex calculation of the motion of the planets around the sun. Again, the focus lies on the mathematical concepts required.

The results of the textbook analysis are presented and evaluated in the summary, which also aims at suggesting ways of implementing the aforementioned exercise on planetary motion in class. The paper is concluded with some personal reflection on how to combine tuition in mechanics with the Mathematics curriculum in Austrian fifth and sixth forms to make classes more successful.