



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

**”Tücken bei Stetigkeit und Differenzierbarkeit in
mehreren Variablen ”**

verfasst von / submitted by

Julian Mitteröcker

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 482 406

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Bewegung und Sport
UF Mathematik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Günther Hörmann

Abstract

Starting point of this thesis is the so called 'Cauchy error'. Augustin-Louis Cauchy was a pioneer of analysis and one of the most significant mathematicians in the 19th century. Nevertheless he made a bad mistake in the field of multidimensional analysis. In his book which he published in 1821 he claimed that separate continuity implies continuity. This claim got disproved by Guiseeppe Peano in 1884 stating a simple counterexample.

Content of this thesis is continuity and differentiability in higher dimensions. In the process the concepts of sperate continuity, radial continuity, continuity, smooth continuity, Lipschitz continuity, partial differentiability, differentiability and directional derivatives are covered. Important results of these topics are supported by numerous examples.

Nevertheless the main focus should be possible errors which may occur in the above stated concepts by introducing more variables. As mentioned at the beginning, the error of one of the best mathematicians of his days has its origin in considering higher dimensions. Starting with the 'Cauchy error' other possible errors will be discovered and supported by a number of counterexamples.

Zusammenfassung

Ausgangspunkt für diese Diplomarbeit ist der sogenannte 'Cauchy-Irrtum'. Augustin-Louis Cauchy gilt als Pionier der Analysis und war einer der bedeutendsten Mathematiker im 19. Jahrhundert. Trotzdem unterlief ihm im Bereich der mehrdimensionalen Analysis ein Irrtum. In seinem, im Jahr 1821 veröffentlichten Buch behauptete er nämlich, dass aus separater Stetigkeit schon Stetigkeit folgt. Widerlegt wurde diese Behauptung im Jahr 1884 von Guiseppe Peano mit einem einfachen Gegenbeispiel.

Inhalt dieser Diplomarbeit sind Stetigkeit und Differenzierbarkeit in mehreren Variablen. Dabei werden inhaltliche Bereiche wie separate Stetigkeit, radiale Stetigkeit, Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, lipschitz Stetigkeit, partielle Differenzierbarkeit, Differenzierbarkeit und das Konzept der Richtungsableitungen abgedeckt. Wichtige Resultate dieser Themen werden durch eine Vielzahl an Beispielen unterstützt.

Das Hauptaugenmerk jedoch soll auf den Tücken liegen, die sich in oben genannten Bereichen durch die Einführung mehrerer Variablen ergeben. Wie zu Beginn erwähnt, wurde diese auch einem der besten Mathematiker seiner Zeit zum Verhängnis. Ausgehend vom 'Cauchy-Irrtum' sollen weitere Tücken, unterstützt durch zahlreiche Gegenbeispiele, herausgearbeitet werden.

Danksagung

Zuallererst möchte ich meiner Familie, aber vor allem meinen Eltern, für ihre Unterstützung durch meines gesamtes Studiums danken. Ein weiter Dank gilt meinem Diplomarbeitsbetreuer Günther Hörmann, der mir während des gesamten Werdegangs meiner Diplomarbeit zur Seite gestanden ist.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	iv
0 Einleitung	1
1 Stetigkeit im $\mathbb{R}^m$	3
1.1 Separate Stetigkeit	3
1.2 Grenzwerte	6
1.3 Stetigkeit	7
1.4 Radiale Stetigkeit	13
1.5 Gleichmäßige Stetigkeit	17
1.6 Lipschitz Stetigkeit	21
2 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^m$	26
2.1 Partielle Differenzierbarkeit	26
2.2 Totale Differenzierbarkeit	33
2.3 Richtungsableitungen	48
3 Resümee	54
Quellenverzeichnis	56

0 Einleitung

Die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit in einer Variable spielen in der schulischen Mathematik eine bedeutende Rolle. Im Schulbuch *Mathematik verstehen 7* von Malle et al. (S. 103, 105) findet man für die Stetigkeit folgende

Definition 0.1:

Sei $A \subset \mathbb{R}$, dann heißt eine reelle Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig an der Stelle $p \in A$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$$

ist.

Differenzierbarkeit wird folgendermaßen definiert:

Definition 0.2:

Sei $A \subset \mathbb{R}$ offen, dann heißt eine reelle Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $p \in A$, wenn

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

existiert.

Sogar Funktionen in mehreren Variablen kommen, wenn auch nur implizit, im Lehrplan für das Unterrichtsfach Mathematik vor. Hier sind einfache Volumsformeln zu nennen, wie z.B.

$$V_{Zylinder}(r, h) = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

für einen Zylinder mit Höhe h und Radius r der Grundfläche, oder

$$V_{Quader}(a, b, c) = a \cdot b \cdot c$$

für einen Quader mit Seitenlängen a , b und c .

Obwohl diese Formeln Funktionen in mehreren Variablen sind, werden sie in Schulbüchern ausschließlich als

$$V_{Zylinder} = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

bzw.

$$V_{Quader} = a \cdot b \cdot c$$

geschrieben und somit die funktionale Abhängigkeit von mehreren Variablen bei Seite gelassen. Obwohl also Funktionen in mehreren Variablen durchaus in der schulischen Analysis vorkommen, spielen nichtsdestotrotz Stetigkeit und Differenzierbarkeit in mehreren Variablen in der Schule keine Rolle.

Wie man die Definitionen 0.1 und 0.2 nun auf mehrere Variablen verallgemeinern kann und welche Schwierigkeiten und Tücken, aber auch Möglichkeiten für neue Begriffe der Übergang in höherdimensionale Räume bietet, soll in der folgenden Diplomarbeit herausgearbeitet werden.

1 Stetigkeit im $\mathbb{R}^m$

Zunächst werden wir nach dem einfachen Konzept der separaten Stetigkeit die Definition der Stetigkeit so formulieren, dass sie auch mit der Definition in einer Variable konsistent ist. Außerdem werden wir die Möglichkeiten von mehreren Variablen nutzen, um auch noch neue Stetigkeitsbegriffe zu entwickeln.

1.1 Separate Stetigkeit

In diesem Kapitel beziehe ich mich vor allem auf folgende Quellen: J. Appell (S. 299f) und H. Heuser (S247f.)

Im ersten Kapitel geht es zunächst um das vereinfachte Konzept der separaten Stetigkeit. Dabei werden Funktionen in mehreren Variablen auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt. Wir werden sehen, dass man neben der separaten Stetigkeit aber noch stärkere Eigenschaften fordern kann. Diese Tatsache führt uns in einem späteren Kapitel zur Definition der radialen Stetigkeit.

Wir setzen für folgende Kapitel den Stetigkeitsbegriff für reelle Funktionen einer Variable voraus.

Definition 1.1:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $a := (a_1, \dots, a_m) \in U$ ein Punkt. Sei weiters $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, dann heißen

$$\begin{aligned} x_1 &\mapsto f(x_1, a_2, \dots, a_m) \\ &\vdots \\ x_k &\mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_m) \\ &\vdots \\ x_m &\mapsto f(a_1, \dots, a_{m-1}, x_m) \end{aligned}$$

die partiellen Funktionen von f nach $x_1, \dots, x_m$ bei a . Für $k \in \{1, \dots, m\}$ ist die Funktion $x_k \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_m)$ eine Funktion von einer Variablen. Das heißt es werden alle bis auf eine Variable fixiert, womit man Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ erhält.

Bemerkung:

Die Offenheit von U garantiert, dass die partiellen Funktionen jeweils in einer Umgebung von $x_k = a_k$, für $k \in \{1, \dots, m\}$, definiert sind.

Beispiel 1.2:

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = e^x + \sin(yz)$ und $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt. Die Funktionen $g, h, i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = e^x + \sin(a_2 \cdot a_3),$$

$$h(y) = e^{a_1} + \sin(y \cdot a_3),$$

$$i(z) = e^{a_1} + \sin(a_2 \cdot z)$$

sind die partiellen Funktionen von f nach x, y und z bei a .

Für die partiellen Funktionen können wir nun den Stetigkeitsbegriff für reelle Funktionen einer Variable anwenden. Dafür erhalten wir folgende

Definition 1.3:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a := (a_1, \dots, a_m) \in U$ ein Punkt. Dann heißt f separat stetig in a wenn die Funktion

$$x_1 \mapsto f(x_1, a_2, \dots, a_m) \quad \text{stetig in } a_1 \text{ ist,}$$

$$\vdots$$

$$x_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_m) \quad \text{stetig in } a_j \text{ ist,}$$

$$\vdots$$

$$x_m \mapsto f(a_1, \dots, a_{m-1}, x_m) \quad \text{stetig in } a_m \text{ ist.}$$

Außerdem heißt eine Funktion f separat stetig auf ganz U , wenn f für alle $x \in U$ separat stetig ist.

Beispiel 1.4:

$$\text{Sei } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Für $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ betrachten wir zunächst die partiellen Funktionen

$$x \mapsto \frac{xa_2}{x^2 + a_2^2}, \tag{1}$$

$$y \mapsto \frac{a_1 y}{a_1^2 + y^2}. \tag{2}$$

Wie wir aus den Rechenregeln für stetige reelle Funktionen wissen sind gebrochen rationale Funktionen ohne Nennernullstellen stetig. Deswegen sind auch die Funktionen (1) und (2) für $(x, y) \neq (0, 0)$ stetig und somit ist f für $(x, y) \neq (0, 0)$ separat stetig. Für den Punkt $(a_1, a_2) = (0, 0)$ ergeben sich die partiellen Funktionen

$$\begin{aligned}x &\mapsto f(x, 0) = 0, \\y &\mapsto f(0, y) = 0.\end{aligned}$$

Diese sind bei $x = 0$ bzw. $y = 0$ ebenso stetig, weshalb f separat stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$ ist.

Beispiel 1.5:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

Sei zunächst wieder $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$. Dafür erhalten wir die partiellen Funktionen

$$\begin{aligned}x &\mapsto \frac{x^2 - a_2^2}{x^2 + a_2^2}, \\y &\mapsto \frac{a_1^2 - y^2}{a_1^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Diese sind nach selbigem Argument wie in Beispiel 1.4 wiederum stetig für $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$.

Für $(a_1, a_2) = (0, 0)$ ergeben sich

$$\begin{aligned}f(x, 0) &= \frac{x^2}{x^2} = 1 && \text{für } x \neq 0, \\f(0, y) &= \frac{-y^2}{y^2} = -1 && \text{für } y \neq 0,\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}f(0, 0) &= 0 && \text{für } x = 0, \\f(0, 0) &= 0 && \text{für } y = 0.\end{aligned}$$

Deswegen ist f nicht separat stetig.

Bevor wir den Stetigkeitsbegriff in mehreren Variablen einführen können, benötigen wir noch den Begriff des Grenzwertes. Dafür wiederum brauchen wir noch Ergebnisse und Definitionen aus folgendem Abschnitt.

1.2 Grenzwerte

In diesem Kapitel beziehe ich mich vor allem auf J. Appell (S. 1), J. J. Duistermaat und J. A. C. Kolk (S. 12) und www.matheboard.de.

Bevor wir den Begriff des Grenzwertes einführen können, benötigen wir einige topologische Grundlagen.

Definition 1.6:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$. Ein Punkt $a \in U$ heißt Häufungspunkt von U , wenn

$$U \cap [V_\delta(a) \setminus \{a\}] \neq \emptyset$$

für jedes $\delta > 0$, wobei $V_\delta(a)$ eine δ -Umgebung von a ist.

Das heißt, dass jede noch so kleine Umgebung von a noch andere Punkte von U enthält. Weiters bezeichnen wir die Menge aller Punkte von U vereinigt mit der Menge aller Häufungspunkte von U mit $\overline{U}$. Wir werden im übernächsten Beispiel sehen, dass es auch Häufungspunkte geben kann, die nicht in U liegen.

Beispiel 1.7:

Betrachten wir $U := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1 \vee \|x\| = 0\} \subset \mathbb{R}^2$, wobei wir die euklidische Norm verwenden. Das heißt für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ist $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Betrachten wir zunächst alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| = 1$.

In der euklidischen Ebene stellt die Menge all dieser Punkte den Einheitskreis dar. Da aber in jeder noch so kleinen Umgebung eines beliebigen Punktes am Einheitskreis noch andere (sogar unendlich viele) liegen, sind alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| = 1$ Häufungspunkte.

Nun betrachten wir $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| = 0$. Da aber $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0$ ist und $x_1^2 \geq 0$ bzw. $x_2^2 \geq 0$ sind, muss $x = (0, 0)$ gelten.

Sei nun $0 < \delta = \frac{1}{2}$, dann gilt aber für die Umgebung $V_{1/2}(0, 0)$

$$U \cap [V_{1/2}(0, 0) \setminus \{(0, 0)\}] = \emptyset.$$

Das heißt $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| = 0$ ist kein Häufungspunkt.

Beispiel 1.8:

Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$, wobei wir wie im Beispiel 1.7 wiederum die euklidische Norm verwenden.

In der Euklidischen Ebene stellt diese Menge die offene Kreisscheibe des Einheitskreises dar.

Nach dem selben Argument wie oben sind alle Punkte in U auch Häufungspunkte.

Aber auch alle Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\| = 1$ sind Häufungspunkte. In jeder beliebig kleinen Umgebung dieser Punkte sind nämlich bereits Punkte von U enthalten.

Man sieht also, dass Häufungspunkte nicht notwendigerweise in U liegen müssen.

Bemerkung:

Ein Punkt von U , der wie $(0, 0)$ in Beispiel 1.7 kein Häufungspunkt ist, heißt isolierter Punkt.

Mit dem Begriff des Häufungspunktes kommen wir nun, als wesentlicher Teil dieses Kapitels, auf folgende

Definition 1.9:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ und sei $a \in \overline{U}$ ein Punkt. Sei weiters $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion, dann heißt $L \in \mathbb{R}^n$ Grenzwert der Funktion f in a , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$x \in U \text{ mit } \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon$$

gilt. Man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L. \tag{3}$$

1.3 Stetigkeit

Quellen dieses Kapitels sind hauptsächlich J. Appell (S. 299f.), M. Barner und F. Flohr (S. 45f.), J. J. Duistermaat und J. A. C. Kolk (S. 13), E. Hairer und G. Wanner (S. 222) und H. Heuser (S. 50).

Für den Stetigkeitsbegriff in mehreren Variablen verwenden wir eine andere Definition als in der Definition 0.1 in einer Variable. Trotzdem werden wir diese Eigenschaft als äquivalente Formulierung auch in mehreren Variablen erhalten.

Definition 1.10:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ sowie $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion und $a \in U$ ein Punkt. Dann heißt f stetig in a , falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$x \in U \text{ mit } \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Weiters heißt f stetig auf U , wenn f in jedem Punkt von U stetig ist.

Außerdem heißt f unstetig in $a \in U$, wenn f dort nicht stetig ist.

Satz 1.11:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion sowie $a \in U$ ein Punkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) f ist stetig in a
- ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- iii) Zu jeder Umgebung W von $f(a)$ gibt es eine Umgebung V von a , sodass

$$f(V \cap U) \subset W.$$

Einen Beweis dafür können Sie in J. J. Duistermaat und J. A. C. Kolk (S. 13f.) nachlesen.

Beispiel 1.12:

Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit $f(x) = Lx$ wobei $L \in \text{Mat}^{(n \times m)}$ eine $n \times m$ Matrix ist. Sei weiters $a \in \mathbb{R}^m$ ein Punkt. Für $\varepsilon > 0$ setzen wir zunächst

$$\|x - a\| < \delta := \frac{\varepsilon}{\|L\|}.$$

Dabei verstehen wir unter $\|\cdot\|$ die euklidische Norm und $\|L\|$ meint die Operatornorm. Daraus erhalten wir durch die Rechenregeln für Matrizen bzw. Vektoren

$$\|f(x) - f(a)\| = \|Lx - La\| = \|L(x - a)\| \leq \|L\| \cdot \underbrace{\|x - a\|}_{< \frac{\varepsilon}{\|L\|}} < \varepsilon.$$

Das heißt lineare Abbildungen sind stetig.

Im folgenden Beispiel betrachten wir eine Funktion, die nicht nur unstetig in einem bestimmten Punkt ist, sondern unstetig in allen Punkten in der Definitionsmenge.

Beispiel 1.13:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \text{ oder } y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \text{ und } y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Wir betrachten f bezüglich separater Stetigkeit und Stetigkeit im Punkt $a = (0, 0)$. Weil $f(x, 0) = f(0, y) \equiv 1$ gilt, ist f separat stetig in $(0, 0)$.

Für die Annäherung auf der Diagonalen $y = x$ hingegen ergibt sich

$$f(x, x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

weshalb f im Punkt $a = (0, 0)$ unstetig ist. Man kann zeigen, dass f sogar in keinem Punkt stetig ist.

Neben den äquivalenten Stetigkeitsbegriffen aus Satz 1.11, können wir auch ein Folgenkriterium für die Stetigkeit formulieren. Die genaue Aussage folgt im folgenden

Satz 1.14:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion sowie $a \in U$ ein Punkt. Die Funktion f ist genau dann stetig in a , wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U mit $x_n \rightarrow a$ folgt, dass $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Beweis. '⇒' Sei f stetig in a und sei weiters $\varepsilon > 0$.

Das heißt nach Definition 1.10, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$x \in V_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(a)). \quad (4)$$

Betrachten wir nun eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow a$. Da (x_n) gegen a konvergiert, gibt es für $\delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$ gilt, dass $x_n \in V_\delta(a)$. Aufgrund der Gleichung (4) folgt daraus, dass auch $f(x_n) \in U_\varepsilon(f(a))$. Das heißt aber, dass $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

'⇐' Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U mit $x_n \rightarrow a$ gelte $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen f sei nicht stetig in a . Das heißt es gibt ein $\varepsilon > 0$ sodass für alle $\delta > 0$ ein $x \in U$ existiert, sodass

$$\|x - a\| < \delta \text{ aber } \|f(x) - f(a)\| \geq \varepsilon.$$

Für $\delta := \frac{1}{n}$ gibt es eine Folge $x_n \in U$ mit $\|x_n - a\| < \frac{1}{n}$ und $\|f(x_n) - f(a)\| \geq \varepsilon$. Das heißt (x_n) ist eine Folge in U , die für $n \rightarrow \infty$ gegen a konvergiert, aber $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(a)$, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

□

Betrachten wir nun ein konkretes Beispiel, in dem wir die Unstetigkeit mit Hilfe des Folgenkriteriums zeigen.

Beispiel 1.15:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Beispiel 1.4 mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Wir untersuchen f bezüglich der Stetigkeit im Punkt $(0, 0)$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge die gegen 0 konvergiert. Setzen wir $x_n = \frac{1}{n}$ und betrachten

$$f(x_n, x_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0).$$

Das heißt es gibt eine Folge, die gegen $(0, 0)$ konvergiert, für die aber $f((x_n), (x_n))$ nicht gegen $f(0, 0)$ konvergiert. Daraus folgt, dass f nicht stetig in $(0, 0)$ ist.

Satz 1.16:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen sowie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die stetig in $a := (a_1, \dots, a_m) \in U$ ist, dann ist f auch separat stetig in a .

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die partiellen Funktionen stetig sind, also dass

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, a_2, \dots, a_m) &= f(a) \\ &\vdots \\ \lim_{x_m \rightarrow a_m} f(a_1, \dots, a_{m-1}, x_m) &= f(a) \end{aligned} \tag{5}$$

gilt. Da aber nach Voraussetzung f stetig in a ist und damit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ folgt, gilt für $x \rightarrow a$ auch

$$\begin{aligned} (x_1, a_2, \dots, a_m) &\rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_m) \\ &\vdots \\ (a_1, \dots, a_{m-1}, x_m) &\rightarrow (a_1, \dots, a_{m-1}, a_m) \end{aligned}$$

und somit sind die Gleichungen (5) erfüllt. $\square$

Bemerkung:

Man kann zeigen, dass Potenzen, Produkt und Summen stetig sind. Daraus folgt, dass Polynome stetig und insbesondere separat stetig sind.

Dass in Satz 1.16 nicht Äquivalenz gilt, zeigt folgendes Beispiel.

Beispiel 1.17:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Beispiel 1.4 mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Einerseits haben wir bereits in Beispiel 1.4 gesehen, dass f separat stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$ ist.

Andererseits haben wir mit dem Folgenkriterium in Beispiel 1.15 gezeigt, dass f im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig ist, woraus wir folgern können, dass

$$\text{separat stetig} \not\Rightarrow \text{stetig}.$$

Bemerkung:

Das Beispiel 1.17 ist jenes von Guiseppe Peano aus dem Jahr 1884, mit dem er die Vermutung von Augustin-Louis Cauchy, dass aus separater Stetigkeit auch schon Stetigkeit folgt, widerlegte. Wir sehen auch, dass es kein komplexes Beispiel gebraucht hat, um Cauchy's Irrtum aufzudecken.

Will man die Stetigkeit von Funktionen in mehreren Variablen beweisen, zeigt folgender Satz, dass es genügt, sich auf die Komponentenfunktionen zu beschränken.

Satz 1.18:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $a \in U$ ein Punkt. Sei weiters $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ wobei $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. Die Funktion f ist genau dann stetig in a , wenn die Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_n$ in a stetig sind.

Bemerkung:

Im folgenden Beweis werden wir eine wichtige Eigenschaft der Normen verwenden, nämlich die, dass alle Normen im $\mathbb{R}^m$ äquivalent sind. Einen Beweis dazu kann man in E. Hairer und G. Wanner (S. 312) nachlesen.

Beweis. '⇒' Nach obiger Bemerkung können wir nun folgende Abschätzungen mit der Maximumsnorm machen. Sei f stetig in a . Das heißt für alle $x \in U$ mit $\|x - a\| < \delta$ ist

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Nun gilt $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

$$|f_j(x) - f_j(a)| \leq \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon,$$

also sind alle Komponentenfunktionen ebenfalls stetig.

'⇐' Seien alle f_j für $j \in \{1, \dots, n\}$ stetig in a , dann gibt es für alle $\varepsilon_j > 0$ ein $\delta_j > 0$ sodass für $|x - a| < \delta_j$ mit $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ folgt

$$|f_j(x) - f_j(a)| < \varepsilon_j.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon_j := \frac{1}{n}\varepsilon$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Für $\|x - a\| < \delta$ gilt Folgendes:

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \underbrace{|f_1(x) - f_1(a)|}_{< \varepsilon_1} + \dots + \underbrace{|f_n(x) - f_n(a)|}_{< \varepsilon_n} \leq \varepsilon.$$

Das heißt f ist stetig in a .

□

1.4 Radiale Stetigkeit

In diesem Kapitel beziehe ich mich vor allem auf folgende Quellen: J. Appell (S. 299, 301), M. Barner und F. Flohr (S. 48ff.) und B. R. Gelbaum und J. M. M. Olmsted (S. 113).

Die Überlegungen zu separater Stetigkeit im vorigen Kapitel kann man auch als Stetigkeit entlang einer Koordinatenachse interpretieren. In diesem Kapitel werden wir nun einen Stetigkeitsbegriff kennenlernen, der etwas stärker ist als separate Stetigkeit.

Beispiel 1.19:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ sind die partiellen Funktionen jedenfalls stetig.

Betrachten wir den Punkt $(x, y) = (0, 0)$ so erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= \frac{0}{y^2} = 0, \\ f(0, y) &= \frac{0}{x^4} = 0 \end{aligned}$$

Also ist f separat stetig auf $\mathbb{R}$.

Für diese Funktion gilt aber noch mehr als die separate Stetigkeit. Für jede geradlinige Annäherung an den Ursprung ergibt sich nämlich derselbe Wert.

Sei $c \in \mathbb{R}$ und $\{(x, cx) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade durch den Ursprung. Für die Annäherung auf dieser Geraden an den Ursprung erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, cx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot cx}{x^4 + c^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{cx}{x^2 + c^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{c^2} = 0.$$

Funktionen mit dieser Eigenschaft nennt man radialstetig.

Definition 1.20:

Sei $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion sowie $a := (a_1, \dots, a_m) \in U$ ein Punkt. Dann heißt f radialstetig in a , falls

$$\lambda \mapsto f(a + \lambda \cdot v)$$

als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ für jedes $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ stetig in a ist.

Beispiel 1.21:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Wir betrachten $(a_1, a_2) = (0, 0)$ und die Gerade $\{(x, cx) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ durch den Ursprung. Nähern wir uns nun an der Geraden dem Punkt (a_1, a_2) an, erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, cx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - c^2 x^2}{x^2 + c^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 - c^2)}{x^2(1 + c^2)} = \frac{1 - c^2}{1 + c^2}.$$

Wir sehen, dass der Wert für die Annäherung an der Geraden $y = cx$ an den Ursprung von $c \in \mathbb{R}$ abhängt. Setzen wir konkret $c_1 = 2$ und für $c_2 = 3$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 2x) &= -\frac{3}{5}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 3x) &= -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Deswegen ist f nicht radial stetig in $(0, 0)$.

Satz 1.22:

Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion sowie $a \in U$ ein Punkt. Ist f radialstetig in a dann ist f auch separat stetig in a .

Beweis. Ist f radial stetig in $a \in U$ und ist $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ ein Vektor, dann ist nach Definition 1.20

$$\lambda \mapsto f(a + \lambda \cdot v)$$

stetig. Insbesondere ist dann f auch für $v = e_j$ mit $j \in \{1, \dots, m\}$ stetig, also separat stetig. $\square$

Beispiel 1.23:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Beispiel 1.19 mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Mit Satz 1.22 kann man die separate Stetigkeit der Funktion f auch aus der radialen Stetigkeit folgern.

Dass in Satz 1.22 nicht Äquivalenz gilt, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 1.24:

Sei f wie in Beispiel 1.4 mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Wir haben bereits gesehen, dass f separat stetig in $(0, 0)$ ist. Nähern wir uns nun an einer beliebigen Gerade $\{(x, cx) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ an den Punkt $(0, 0)$ an, dann erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, cx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{cx^2}{x^2 + c^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{cx^2}{x^2(1 + c^2)} = \frac{c}{1 + c^2}$$

Wie wir sehen, ist der Wert für die Annäherung an der Gerade $\{(x, cx) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ abhängig von c . Setzen wir konkret $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$ so erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) &= \frac{1}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 2x) &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Damit ist f nicht radial stetig in $(0, 0)$ und

separat stetig $\nRightarrow$ radial stetig.

Satz 1.25:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen sowie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in U$ ein Punkt. Ist f stetig in a , so ist f auch radial stetig in a .

Beweis. Ist f stetig in a , so ergibt jede beliebige Annäherung an den Punkte a den gleichen Wert, nämlich $f(a)$. Insbesondere natürlich jede Annäherung an einer beliebigen Geraden. $\square$

Dass in Satz 1.25 nicht Äquivalenz gilt zeigt folgendes Beispiel.

Beispiel 1.26:

Sei f wie in Beispiel 1.19 mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

An allen geraden Annäherungen an den Ursprung, haben wir $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, cx) = 0 = f(0, 0)$ erhalten. Nähern wir uns aber an der Parabel $\{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2\}$ an den Punkt $(0, 0)$ an, erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

Das heißt: f ist radial stetig aber nicht stetig und wir können sagen

$$\text{radialstetig} \not\Rightarrow \text{stetig}.$$

Im folgenden Beispiel werden wir eine Funktion betrachten, die bei Annäherung auf der Kurve $\{(x, cx^{m/n}) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ an einen Punkt a immer den gleichen Wert ergibt, aber trotzdem nicht stetig ist.

Beispiel 1.27:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-1/x^2} y}{e^{-2/x^2} + y^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$

Nähern wir uns nun dem Ursprung an der Kurve $\{(x, cx^{m/n}) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$, wobei $c \neq 0$ ist, durch $(0, 0)$ an. Dabei erhalten wir

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x, cx^{m/n}) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{-1/x^2} cx^{m/n}}{e^{-2/x^2} + c^2 x^{2m/n}}.$$

Nun heben wir im Nenner den Term $x^{2m/n}$ heraus und kürzen diesen mit $x^{m/n}$ im Zähler. Damit erhalten wir weiters

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x, cx^{m/n}) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{-1/x^2} cx^{m/n}}{e^{-2/x^2} + c^2 x^{2m/n}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{ce^{-1/x^2} x^{m/n}}{x^{2m/n} (e^{-2/x^2} \cdot x^{-2m/n} + c^2)} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{ce^{-1/x^2} x^{-m/n}}{e^{-2/x^2} \cdot x^{-2m/n} + c^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{ce^{-1/x^2} x^{-m/n}}{(e^{-1/x^2} \cdot x^{-m/n})^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Weil jedoch die Exponentialfunktion 'stärker' als die Wurzelfunktion ist, folgt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x, cx^{m/n}) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{ce^{-1/x^2} x^{-m/n}}{(e^{-1/x^2} \cdot x^{-m/n})^2 + c^2} = \frac{0}{0 + c^2} = 0.$$

Für die Annäherung entlang der Kurve $\{(x, e^{-1/x^2}) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ an den Punkt $(0, 0)$ gilt aber

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x, e^{-1/x^2}) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{-1/x^2} e^{-1/x^2}}{e^{-2/x^2} + e^{-2/x^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{-2/x^2}}{2e^{-2/x^2}} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

Deswegen ist f nicht stetig in $(0, 0)$.

Für die drei Stetigkeitsbegriffe, die wir bis jetzt kennen gelernt haben ergibt sich somit folgender Zusammenhang:

$$\text{stetig} \Rightarrow \text{radial stetig} \Rightarrow \text{separat stetig}.$$

Weiters haben wir durch Gegenbeispiele folgende falsche Implikationen gezeigt

$$\text{separat stetig} \not\Rightarrow \underbrace{\text{radial stetig}}_{\text{Bsp. 1.24}} \not\Rightarrow \underbrace{\text{stetig}}_{\text{Bsp.1.26}}.$$

Bemerkung:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sowie $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Funktionen, die stetig auf ganz U sind. Dann sind auch die Funktionen

i) $f + g$ sowie

ii) cf für $c \in \mathbb{R}$

stetig.

Seien weiters $h, i : U \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen, die ebenfalls auf U stetig sind, so sind auch die Funktionen

iii) $h \cdot i$ auf ganz U bzw.

iv) $\frac{h}{i}$ an allen Stellen, in denen $i \neq 0$ ist

stetig.

Sei jetzt $V \subset \mathbb{R}^m$ und $W \subset \mathbb{R}^p$. Seien weiters $j : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ und $k : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen, die verknüpft werden können, dann ist auch die Funktion

v) $k \circ j : V \rightarrow \mathbb{R}^n$

stetig.

Einen Beweis für i)-v) liefern M. Barner und F. Flohr (S. 48ff.).

1.5 Gleichmäßige Stetigkeit

In folgendem Kapitel beziehe ich mich hauptsächlich auf M. Barner und F. Flohr (S. 51), E. Hairer und G. Wanner (S. 305) und G. Hörmann (S. 96).

Durch die gleichmäßige Stetigkeit kann man Definition 1.10 der Stetigkeit noch verschärfen.

Wir erinnern uns, dass bei der Stetigkeit an einer Stelle a die Zahl $\delta > 0$ von ε und der Stelle a abhängig ist. Für die gleichmäßige Stetigkeit werden wir fordern, dass δ unabhängig von der Stelle a sein wird.

Definition 1.28:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$. Die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt gleichmäßig stetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$\forall x, y \in U \text{ mit } \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

gilt.

Bemerkung:

Direkt aus der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit folgt, dass eine gleichmäßig stetige Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ auch stetig ist.

Um zu zeigen, dass die Umkehrung aber nicht gilt können wir ein ganz einfaches, eindimensionales Beispiel betrachten. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $]0, 1]$ nämlich stetig aber nicht gleichmäßig stetig.

Deshalb wissen wir

$$\text{stetig} \not\Rightarrow \text{gleichmäßig stetig.}$$

Für die letzten beiden Teile des Kapitels über die Stetigkeit verallgemeinern wir die folgenden Resultate auf Mengen, die eine Metrik besitzen. Der Begriff Metrik verallgemeinert den Abstandsbegriff. Was genau das bedeutet, zeigt folgende

Definition 1.29:

Sei M eine Menge und $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Falls für alle $x, y, z \in M$ die Eigenschaften

(M1) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M2) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$,

(M3) Dreiecksungleichung: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

gelten, dann heißt d Metrik auf M und (M, d) heißt metrischer Raum.

Sobald eine Abbildung die Eigenschaften (M1)-(M3) erfüllt ist sie eine Metrik. Eine wichtige Metrik, die oft vorkommt, ist die euklidische Metrik.

Für $x, y \in \mathbb{R}^m$ mit $x = (x_1, \dots, x_m)$ und $y = (y_1, \dots, y_m)$ ist diese definiert als

$$d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}.$$

Da der zentrale Satz im Kapitel der gleichmäßigen Stetigkeit auf dem Begriff der kompakten Mengen aufbaut, wollen wir diesen im Folgenden wiederholen.

Definition 1.30:

Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^m$ heißt kompakt, wenn jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Elementen aus K eine Teilfolge besitzt, die gegen ein Element $a \in K$ konvergiert.

Satz 1.31 (Heine, Borel):

Sei $K \subset \mathbb{R}^m$, dann sind mit der euklidischen Metrik folgende Eigenschaften äquivalent:

- i) K ist kompakt.
- ii) K ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweis. Den Beweis für den Satz von Heine, Borel können Sie in E. Hairer und G. Wanner (S. 305 nachlesen). □

Bemerkung:

In beliebige Metrische Räume sind beschränkte und abgeschlossene Mengen nicht immer kompakt.

Allgemeiner kann man den Begriff der Kompaktheit in der Topologie mit Hilfe der Überdeckungseigenschaft verallgemeinern. Diese Eigenschaft zeigt der folgende

Satz 1.32:

Sei K eine kompakte Menge und sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine familie offener Mengen U_i mit einer offenen Überdeckung

$$\bigcup_{i \in I} U_i \supset K.$$

Dann gibt es endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_r$, so dass gilt:

$$U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} \supset K.$$

Das heißt aus jeder Überdeckung von K mit offenen Mengen lassen sich endlich viele dieser Mengen so auswählen, dass K von ihnen überdeckt wird.

Beweis. Dass der Beweis der Überdeckungseigenschaft beweistechnisch praktisch ist, können Sie in E. Hairer und G. Wanner (S. 306f.) nachlesen. $\square$

Dass für Funktionen auf kompakten Mengen aus Stetigkeit schon gleichmäßige Stetigkeit folgt, zeigt folgender

Bemerkung:

Die Definitionen für Stetigkeit bzw. gleichmäßige Stetigkeit lassen sich nun folgendermaßen auf metrische Räume verallgemeinern.

Seien (X, d_1) und (Y, d_2) metrische Räume sowie $K \subset X$ kompakt und $a \in K$ ein Punkt. Eine Funktion $f : K \rightarrow Y$ heißt stetig in a , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$x \in K \text{ mit } d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Weiters heißt die Funktion $f : K \rightarrow Y$ gleichmäßig stetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$\forall x, y \in K \text{ gilt : } d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Satz 1.33:

Seien $(X, d_1), (Y, d_2)$ metrische Räume, sei $K \subset X$ kompakt sowie $f : K \rightarrow Y$ eine stetige Funktion. Dann ist $f : K \rightarrow Y$ auch gleichmäßig stetig.

Beweis. Da f nach Voraussetzung stetig ist, können wir zu jeder Stelle $x \in K$ ein $\delta(x) > 0$ finden, sodass

$$\forall y \in K \text{ gilt : } d_1(x, y) < \delta(x) \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} > 0. \quad (6)$$

Die Vereinigung der Umgebungen $\bigcup_{x \in K} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x)$ ist eine Obermenge von K . Da K aber kompakt ist, existieren $x_1, \dots, x_k \in K$ sodass

$$\bigcup_{j=1}^k B_{\frac{\delta(x_j)}{2}}(x_j) \supseteq K.$$

Setzen wir nun $\delta := \min \left(\frac{\delta(x_1)}{2}, \dots, \frac{\delta(x_k)}{2} \right)$ und seien $x, y \in K$ mit $d_1(x, y) < \delta$, dann gilt

$$\exists j \in \{1, \dots, k\} : x \in B_{\frac{\delta(x_j)}{2}}(x_j).$$

Aus Eigenschaft (M3) folgt nun

$$d_1(y, x_j) \leq d_1(y, x) + d_1(x, x_j).$$

Nun können wir sagen, dass

$$d_1(y, x_j) \leq d_1(y, x) + d_1(x, x_j) < \delta + \frac{\delta(x_j)}{2}.$$

Schlussendlich erhalten wir aus der Minimalität von δ , dass

$$d_1(y, x_j) < \delta + \frac{\delta(x_j)}{2} \leq \frac{\delta(x_j)}{2} + \frac{\delta(x_j)}{2} = \delta(x_j)$$

gilt. Weiters gilt wieder aufgrund von (M3)

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(x_j)) + d_2(f(x_j), f(y)).$$

Wegen Gleichung (6) erhalten wir weiters

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(x_j)) + d_2(f(x_j), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

was die gleichmäßige Stetigkeit zeigt. □

1.6 Lipschitz Stetigkeit

In folgendem Kapitel beziehe ich mich vor allem auf J. J. Duistermaat und J. A. C. Kolk (S. 13) und www.matheraum.de.

Ein noch stärkerer Begriff als die gleichmäßige Stetigkeit aus dem vorigen Kapitel ist die so genannte lipschitz Stetigkeit. Lipschitz stetige Funktion werden auch dehnungsbeschränkt genannt.

Definition 1.34:

Seien (X, d_1) und (Y, d_2) metrische Räume dann heißt die Funktion $f : X \rightarrow Y$ Lipschitz stetig, wenn es eine Konstante $L \geq 0$ gibt, sodass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_1(x, y). \quad (7)$$

Die Konstante L heißt Lipschitz-Konstante.

Bemerkung:

Betrachten wir diese Definition für reelle Funktionen in einer Variable, dann wird Gleichung (7) zu

$$|f(y) - f(x)| \leq L \cdot |y - x|.$$

Umgeformt erhalten wir für $x \neq y$

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq L.$$

Das heißt, dass der Betrag des Differenzenquotienten für alle x und y im Definitionsbereich nicht größer als eine Konstante werden darf.

Beispiel 1.35:

Sei $f : [-4, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Wir betrachten für $x, y \in [-4, 1]$

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1}|$$

Wir können nun mit $|\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}|$ erweitern und erhalten

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1}| = \frac{|\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1}| \cdot |\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}|}{|\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}|}.$$

Da $|\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}| > 0$ ist können wir im Nenner die Beträge weglassen. Damit können wir weiters folgern:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \frac{|\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1}| \cdot |\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}|}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} = \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} \\ &= \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} |x - y|. \end{aligned}$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung ist $|x + y| \leq |x| + |y|$. Außerdem ist $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, weshalb $\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} \leq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ gilt. Deswegen folgt

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} |x - y| \leq \frac{|x| + |y|}{1 + 1} |x - y|.$$

Da $x, y \in [-4, 1]$ ist $|x| + |y| \leq 8$. Daher gilt schlussendlich

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x| + |y|}{1 + 1} |x - y| \leq \frac{8}{2} |x - y| = 4|x - y|.$$

Das heißt f ist auf $[-4, 1]$ lipschitz stetig mit Lipschitz-Konstante 4.

Beispiel 1.36:

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$. Wäre f lipschitz stetig, so müsste $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ und eine Konstante L gelten

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|. \quad (8)$$

Wählen wir nun $x \neq 0$ beliebig und $y = 0$.

Da in Gleichung (8) für $x \neq 0$ der Ausdruck $|x - y| > 0$ ist können wir diese umwandeln zu

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} \leq L.$$

Da aber

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{|\sqrt{x}|}{|x|} = \frac{1}{|\sqrt{x}|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty,$$

ist f nicht lipschitz stetig.

Satz 1.37:

Seien (X, d_1) und (Y, d_2) metrische Räume sowie $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. Ist diese lipschitz stetig so ist sie auch gleichmäßig stetig.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und setzen wir $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, wobei L eine Lipschitzkonstante für f ist.

Für $x, y \in X$ mit $\|x - y\| < \delta$ folgt aus der Lipschitz-Stetigkeit

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \underbrace{\|x - y\|}_{< \frac{\varepsilon}{L}} < L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Das heißt f ist gleichmäßig stetig. □

Dass aus gleichmäßiger Stetigkeit nicht Lipschitz-Stetigkeit folgt zeigt folgendes Beispiel.

Beispiel 1.38:

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Beispiel 1.36 mit $f(x) = \sqrt{x}$. Da f stetig ist und das Intervall $[0, 1]$ kompakt ist, ist f nach Satz 1.33 auch gleichmäßig stetig.

Wir haben aber bereits in Beispiel 1.36 gesehen, dass f nicht lipschitz-stetig ist.

Das heißt

$$\text{gleichmäßig stetig} \not\Rightarrow \text{lipschitz stetig}.$$

Im folgenden Satz zeigen wir für C^1 -Funktionen eine hinreichende Bedingung für die Lipschitz-Stetigkeit.

Satz 1.39:

Seien (X, d_1) und (Y, d_2) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine C^1 -Funktion. Diese ist lipschitz-stetig genau dann, wenn die Ableitung von f beschränkt ist.

Beweis. '⇒' Sei f lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L . Dann gilt für alle $x, y \in X$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq L.$$

Insbesondere gilt für alle $x \in X$

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq L.$$

Das heißt, die erste Ableitung ist beschränkt.

'⇐' Sei die erste Ableitung beschränkt durch $L \geq 0$. Seien $x, y \in X$ und o.B.d.A. $x < y$. Damit folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, dass es ein $\xi \in (x, y)$ gibt, sodass

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi) \leq L$$

ist. Das heißt, für alle $x, y \in X$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

□

Folgende Tabelle soll nun einen Überblick über alle Stetigkeitsbegriffe, die in diesem Kapitel behandelt wurden, geben. Das heißt wir betrachten Implikationen bzw. Gegenbeispiele zu den Implikationen.

Implikationen der Stetigkeitsbegriffe				
lipschitz stetig	$\Rightarrow$ Satz 1.37	gleichmäßig stetig	$\Rightarrow$ Definition 1.28	stetig
stetig	$\Rightarrow$ Satz 1.25	radial stetig	$\Rightarrow$ Satz 1.22	separat stetig
Gegenbeispiele der Stetigkeitsbegriffe				
separat stetig	$\nRightarrow$ Beispiel 1.24	radial stetig	$\nRightarrow$ Beispiel 1.26	stetig
stetig	$\nRightarrow$ Bemerkung S. 18	gleichmäßig stetig	$\nRightarrow$ Beispiel 1.38	lipschitz stetig

2 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^m$

Wie im eindimensionalen Fall kann man neben der Stetigkeit in mehreren Variablen auch den Begriff der Differenzierbarkeit in mehreren Variablen studieren. Dabei werden wir sehen, dass sich das einfache Konzept aus einer Variable nicht ohne weiteres auf mehrere Variablen verallgemeinern lässt.

2.1 Partielle Differenzierbarkeit

Die Quellen dieses Kapitels sind hauptsächlich J. Appell (S. 299), M. Barner und F. Flohr (S. 97), J. J. Duistermaat und J. A. C. Kolk (S. 61) und E. Hairer und G. Wanner (S. 324).

Zunächst werden wir, wie bei der Stetigkeit auch, ein vereinfachtes Konzept der Differenzierbarkeit betrachten. Dabei werden wir zunächst wiederum Funktionen mehrerer Variablen auf eine Variable reduzieren um dann diese auf ihre Differenzierbarkeit zu untersuchen.

Definition 2.1:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Seien weiters die partiellen Funktionen wie in Definition 1.1.

Ist die partielle Funktion $x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_m)$ in a_k differenzierbar, sagen wir, f sei in a partiell nach x_k differenzierbar.

Die Ableitung der partiellen Funktion $x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_m)$ in a sind dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, \dots, a_m) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, \dots, a_m) - f(a)}{h}.$$

Die Funktion f heißt partiell differenzierbar in a , wenn sie dort nach jedem x_k partiell differenzierbar ist.

Weiters heißt f auf ganz U partiell differenzierbar nach x_k , wenn f in jedem Punkt von U partiell nach x_k differenzierbar ist.

Bemerkung:

Weitere Schreibweisen für die partiellen Ableitungen sind $D_k f(a_1, \dots, a_m)$ oder $\frac{\partial f(a_1, \dots, a_m)}{\partial x_k}$.

Bemerkung:

Im Folgenden werde ich die ich für die partiellen Ableitungen die Schreibweise $D_k f(a_1, \dots, a_m)$ vorziehen.

Beispiel 2.2:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = |x \cdot y|$.

Die partielle Funktionen im Punkt $(0, 1)$ sind dann

$$\begin{aligned} f(0, y) &= 0, \\ f(x, 1) &= |x|. \end{aligned}$$

Da aber

$$f(x, 1) = |x| \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{für } h \rightarrow 0+ \\ -1 & \text{für } h \rightarrow 0- \end{cases}$$

ist f in $(0, 1)$ nicht partiell differenzierbar.

Beispiel 2.3:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Beispiel 1.4 mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \frac{y(x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= \frac{x(x^2 + y^2) - xy \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Für $(x, y) = (0, 0)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0. \end{aligned}$$

Das heißt f ist für alle (x, y) partiell differenzierbar.

Wie wir aber schon in Beispiel 1.17 gezeigt haben, ist f aber nicht stetig in $(0, 0)$. Das heißt

partiell differenzierbar $\nRightarrow$ stetig.

Bemerkung (Geometrische Interpretation):

Die Funktion $z = f(x, y)$ beschreibt intuitiv eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit den Koordinaten x , y und z . Der Schnitt mit der Ebene $y = y_0$ ist eine Kurve $x \mapsto f(x, y_0)$. Daher ist die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ die Steigung des Graphen im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ in x -Richtung.

Analog ist der Schnitt mit der Ebene $x = x_0$ eine Kurve $y \mapsto f(x_0, y)$ und die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ die Steigung des Graphen im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ in y -Richtung.

Erinnerung: Für Funktionen in einer Variablen ist es möglich, auch Ableitungen höherer Ordnung zu berechnen.

Dies können wir auch für partielle Ableitungen machen. Das führt uns zu folgender

Definition 2.4:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $a := (a_1, \dots, a_m) \in U$ ein Punkt. Sei weiters $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, dann heißt f zweimal partiell differenzierbar bei a , falls $\forall i, j \in \{1, \dots, m\}$ die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(a)$$

existieren. Für $i \neq j$ heißen $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(a)$ die gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung.

Bemerkung:

Obige Definition bedeutet, dass für $i, j \in \{1, \dots, m\}$ die partiellen Funktionen

$$x_i \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j} f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

differenzierbar sind.

Analog versteht man unter

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}} f(a)$$

die gemischten partiellen Ableitungen r -ter Ordnung.

Man kann sich anhand zweier einfacher Beispiele leicht vergewissern, dass manchmal die gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung übereinstimmen und manchmal auch nicht.

Wann und warum das der Fall ist zeigt folgender

Satz 2.5 (Satz von Schwarz):

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Besitzt f in einer Umgebung eines Punktes $a := (a_1, a_2)$ eine gemischte partielle Ableitung zweiter Ordnung, z.B. $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a)$, und ist diese stetig in a , dann existiert auch $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(a)$ und diese stimmt mit $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(a)$ überein.

Beweis. Sei o.B.d.A. $a = (a_1, a_2) = (0, 0)$. Zu zeigen ist, dass

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y} f(s, 0) - \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0)}{s} \quad (9)$$

für $s \rightarrow 0$ einen Grenzwert besitzt, der auch mit $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0, 0)$ übereinstimmt. Nach Definition 2.1 gilt für die partiellen Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} f(s, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(s, t) - f(s, 0)}{t}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t}. \end{aligned}$$

Setzen wir das in Gleichung (9) ein, erhalten wir

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y} f(s, 0) - \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0)}{s} = \frac{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(s, t) - f(s, 0)}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t}}{s}.$$

Nach den Grenzwertsätzen gilt weiters

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial}{\partial y} f(s, 0) - \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0)}{s} &= \frac{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(s, t) - f(s, 0)}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t}}{s} \\ &= \frac{1}{s} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[f(s, t) - f(s, 0)] - [f(0, t) - f(0, 0)]}{t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Definieren wir nun die Funktion g mit $g(s, t) := f(s, t) - f(s, 0)$. Mit Hilfe dieser neu definierten Funktion können wir Gleichung (10) schreiben als

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial}{\partial y} f(s, 0) - \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0)}{s} &= \frac{1}{s} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[f(s, t) - f(s, 0)] - [f(0, t) - f(0, 0)]}{t} \\ &= \frac{1}{s} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(s, t) - g(0, t)}{t}. \end{aligned} \quad (11)$$

Auf die Funktion $s \mapsto g(s, t)$ wenden wir nun den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an. Das heißt $\exists \sigma \in [0, h]$ sodass

$$\frac{g(s, t) - g(0, t)}{s} = \frac{\partial}{\partial x} g(\sigma, t).$$

Anders geschrieben heißt das

$$g(s, t) - g(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} g(\sigma, t) \cdot s. \quad (12)$$

Setzen wir in Gleichung (12) wiederum die Definition für die Funktion g ein, erhalten wir weiter

$$g(s, t) - g(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} g(\sigma, t) \cdot s = \frac{\partial}{\partial x} f(\sigma, t) \cdot s - \frac{\partial}{\partial x} f(\sigma, 0) \cdot s. \quad (13)$$

Nun können wir das Ergebnis aus Gleichung (13) für $g(s, t) - g(0, t)$ in Gleichung 11 einsetzen. Damit erhalten wir

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y} f(s, 0) - \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0)}{s} = \frac{1}{s} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(\sigma, t) \cdot s - \frac{\partial}{\partial x} f(\sigma, 0) \cdot s}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(\sigma, t) - \frac{\partial}{\partial x} f(\sigma, 0)}{t}. \quad (14)$$

Nach Voraussetzung existiert $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y)$ in einer Umgebung von $(0, 0)$. Deswegen können wir nun wiederum den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf die Funktion $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(\sigma, t)$ anwenden. Das heißt $\exists \tau \in [0, t]$, sodass

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x} f(\sigma, t) - \frac{\partial}{\partial x} f(\sigma, 0)}{t} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(\sigma, \tau). \quad (15)$$

Wie oben können wir das wieder anders schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\sigma, t) - \frac{\partial}{\partial x} f(\sigma, 0) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(\sigma, \tau) \cdot t.$$

Wir haben ja vorausgesetzt, dass $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y)$ in $(0, 0)$ stetig ist. Deswegen folgt einerseits aus $t \rightarrow 0$ auch $\tau \rightarrow 0$ und andererseits aus $s \rightarrow 0$ auch $\sigma \rightarrow 0$.

Setzen wir zunächst das Ergebnis aus Gleichung (15) in Gleichung (14) ein erhalten wir

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y}f(s, 0) - \frac{\partial}{\partial y}f(0, 0)}{s} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial x}f(\sigma, t) - \frac{\partial}{\partial x}f(\sigma, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(\sigma, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(\sigma, 0). \quad (16)$$

Mit Hilfe der Gleichung 16 können wir nun schlussendlich den gefragten Grenzwert berechnen.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial y}f(s, 0) - \frac{\partial}{\partial y}f(0, 0)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(\sigma, 0) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(0, 0).$$

Das heißt es ergibt sich die gesuchte partielle Ableitung zweiter Ordnung. $\square$

Beispiel 2.6:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (x + y^2)e^{xy}$.

Für die partiellen Ableitungen erster Ordnung erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}f(x, y) &= e^{xy}(xy + 1 + y^3), \\ \frac{\partial}{\partial y}f(x, y) &= e^{xy}(x^2 + 2y + xy^2). \end{aligned}$$

Aus den partiellen Ableitungen ersten Ordnung ergibt sich für die gemischte partielle Ableitung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x, y) = e^{xy}(xy^3 + 3y^2 + x^2y + 2x).$$

Da $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x, y) = e^{xy}(xy^3 + 3y^2 + x^2y + 2x)$ als Komposition von stetigen Funktionen ebenfalls stetig ist, ergibt sich aus Satz 2.5, dass auch $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x, y)$ existiert und gleich $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x, y)$ ist.

Beispiel 2.7:

$$\text{Sei } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ergeben sich die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= -\frac{x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}$$

Daraus folgt für die gemischte partielle Ableitung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Da aber $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ stetig ist, gilt auch

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Für $(x, y) = (0, 0)$ ergeben sich die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 \cdot \frac{h^2}{h^2} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 \cdot \frac{-h^2}{h^2} = 0.\end{aligned}$$

Für die gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial y} f(0 + h, 0) - \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(-h^4)}{h \cdot h^4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^5}{h^5} = 1, \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0 + h) - \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-h^4)}{h \cdot h^4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1.\end{aligned}$$

Betrachten wir nun

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^6} = 1, \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^6}{y^6} = -1.\end{aligned}$$

Das heißt, die gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind im Punkt $(0, 0)$ nicht gleich.

Definition 2.8:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $p \in \mathbb{N}$. Dann bezeichnen wir mit $C^p(U)$ die Menge aller Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, die auf U definiert und deren partielle Ableitungen der Ordnung $\leq p$ alle auf U vorhanden und stetig sind. Liegt U fest, so nennen wir $f \in C^p(U)$ eine C^p -Funktion.

Nun verallgemeinern wir den Satz 2.5 auf C^p -Funktionen.

Satz 2.9:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $f \in C^p$ dann sind die gemischten partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq p$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen.

Beweis. Sind die gemischten partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq p$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen, so gilt für jede Permutation σ der Menge $\{1, \dots, p\}$ und für alle $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, m\}$, dass

$$D_{j_1} \cdots D_{j_p} f = D_{j_{\sigma(1)}} \cdots D_{j_{\sigma(p)}} f.$$

Jede Permutation lässt sich aber als Verknüpfung von Transpositionen darstellen und für jede Transposition können wir Satz 2.5 anwenden. $\square$

2.2 Totale Differenzierbarkeit

In diesem Kapitel beziehe ich mich auf J. Appell (S. 299), M. Barner und F. Flohr (S. 48, 101f., 117), O. Constantin (S. 23, 43), A. Gathmann (S. 314ff.), B. R. Gelbaum und J. M. M. Olmsted (S. 119) und H. Heuser (S.260).

Die Definition der Differenzierbarkeit in einer Variable kann man nicht ohne weiters auf mehrere Variablen verallgemeinern. Trotzdem wollen wir am Anfang dieses Kapitels versuchen intuitiv von der Definition in einer Variable auf die in zwei Variablen zu schließen.

Erinnerung:

Für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heißt eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt $a \in I$ falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = : f'(a) \in \mathbb{R} \quad (17)$$

existiert. Die Zahl $f'(a)$ heißt dann Ableitung von f in a .

Verallgemeinerung:

Die Definition (17) ist auch für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zulässig. Trotzdem kann man diese nicht für eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Dann ist nämlich $(x - a) \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor und durch einen Vektor kann man $(f(x) - f(a)) \in \mathbb{R}^n$ nicht dividieren. Um nun trotzdem relativ einfach auf die Definition der Differenzierbarkeit in mehreren Variablen verallgemeinern zu können, gehen wir wie folgt vor.

In Definition (17) ist $f'(a)$ als lineare Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ interpretierbar und beschreibt die Steigung der Tangente der Funktion f im Punkt $(a, f(a))$.

Das heißt man kann den Funktionswert an einer beliebigen Stelle x folgendermaßen approximieren:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \quad (18)$$

Sei nun $U_\delta(a)$ eine δ -Umgebung von a . Um die Ungenauigkeit in der Approximation (18) 'auszugleichen' addieren wir ein Restglied r , das eine Funktion von $U_\delta(a)$ nach $\mathbb{R}$ ist und vom Abstand $x - a$ abhängig ist. Damit folgt

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + r(x - a).$$

Außerdem muss für $x \rightarrow a$ der Fehler $r(x - a)$ schneller gegen 0 streben als der Abstand $x - a$. Das Restglied r beschreibt nämlich den Fehler zwischen der eigentlichen Funktion f und ihrer Näherung in Gleichung (18). Für $x = a$ ergibt sich auf jeden Fall $r(x - a) = 0$. Die Bedingung, dass nun $r(x - a)$ schneller gegen 0 strebt als $x - a$ für $x \rightarrow a$ besagt nun, dass der Rest auch in der Nähe des Punktes a sehr klein ist; d. h. also dass die Näherung dort gut ist.

Setzt man nun $x = a + h$ und formt um, erhält man

$$f(a + h) - f(a) = f'(a) \cdot h + r(h) \quad (19)$$

mit der Eigenschaft, dass für $h \rightarrow 0$ wiederum $r(h)$ schneller gegen 0 streben muss als der Abstand h . Das heißt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$.

Betrachten wir nun $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sowie $a := (a_1, \dots, a_m) \in U$ ein Punkt. Um nun die Gleichung (19) auf diese Funktion verallgemeinern zu können müssen wir noch zwei Überlegungen machen.

Einerseits ist das Restglied eine Funktion von $U_\delta(0)$ nach $\mathbb{R}^n$, wobei wir für die Eigenschaft des Restgliedes $r(h)$ den Abstand durch die Norm ersetzen, d.h. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$.

Andererseits ist die Ableitungsfunktion $f'(a) =: A$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$, das heißt $A \in \text{Mat}^{n \times m}$.

Mit diesen Vorüberlegungen und Verallgemeinerungen können wir nun folgende Definition leicht nachvollziehen.

Definition 2.10:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $a = (a_1, \dots, a_m) \in U$ ein Punkt. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt (total) differenzierbar in a , wenn $A \in \text{Mat}^{(n \times m)}$ existiert, so dass eine Funktion $r : U_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert, sodass

$$f(a+h) - f(a) = Ah + r(h) \quad (20)$$

mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$.

Satz 2.11:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen sowie $a = (a_1, \dots, a_m) \in U$ ein Punkt. Sei weiters $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit den Komponentenfunktionen $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$, das heißt $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$. Die Funktion f ist genau

dann an der Stelle a differenzierbar, wenn $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ die Komponentenfunktionen f_j in a differenzierbar sind. Die Matrix $A \in \text{Mat}^{(n \times m)}$, die zusammen mit dem Restglied $r(h)$ mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$ die Gleichung 20 in Definition 2.10 erfüllt, ist eindeutig bestimmt und setzt sich aus den partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen zusammen, nämlich

$$A = J_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix heißt Jacobimatrix von f an der Stelle a .

Insbesondere ist f partiell differenzierbar, falls f differenzierbar ist. Dieses Resultat werden wir in Satz 2.16 noch explizit behandeln.

Beweis. Sei $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$ und $r(h) = \begin{pmatrix} r_1(h) \\ \vdots \\ r_n(h) \end{pmatrix}$.

Die Funktion f ist in a differenzierbar, genau dann wenn

$$f(a+h) - f(a) = Ah + r(h) \text{ mit } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

gilt. Durch Umformung erhalten wir die äquivalente Aussage

$$f(a+h) = f(a) + Ah + r(h) \text{ mit } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Benutzen wir nun die komponentenweise Gestalt von a , h , A und $r(h)$, so können wir dazu äquivalent für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ schreiben:

$$\begin{aligned} f_j(a+h) &= f_j(a) + a_{j1}h_1 + \dots + a_{jm}h_m + r_j(h) \\ \text{mit } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_j(h)}{\|h\|} &= 0 \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.12:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$.

Sei $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, dann ergibt sich für die partiellen Ableitungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} D_1 f_1(a) &= 2a_1, & D_2 f_1(a) &= -2a_2, \\ D_1 f_2(a) &= 2a_2, & D_2 f_2(a) &= 2a_1. \end{aligned}$$

Falls f an der Stelle a differenzierbar ist, dann kommt nur die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2a_1 & -2a_2 \\ 2a_2 & 2a_1 \end{pmatrix}$

als Ableitung in Frage. Für $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f_1(a+h) - f_1(a) &= (a_1 + h_1)^2 - (a_2 + h_2)^2 - a_1^2 + a_2^2 \\ &= a_1^2 + 2a_1h_1 + h_1^2 - a_2^2 - 2a_2h_2 - h_2^2 - a_1^2 + a_2^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2a_1 & -2a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \underbrace{h_1^2 - h_2^2}_{=r_1(h)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(a+h) - f_2(a) &= 2(a_1+h_1)(a_2+h_2) - 2a_1a_2 = 2a_1h_2 + 2a_2h_1 + 2h_1h_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2a_2 & 2a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \underbrace{2h_1h_2}_{=r_2(h)}. \end{aligned}$$

Nun stellt sich die Frage, ob für $r(h)$ gilt, dass $\frac{r(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.

Sei o.B.d.A. $h_1 \geq h_2$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{h_1^2 - h_2^2}{\|h\|} &\leq \frac{h_1^2}{\|h\|} = \frac{h_1^2}{h_1} = h_1 = \|h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\ \frac{2h_1h_2}{\|h\|} &= 2h_2 \leq 2h_1 = 2\|h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Das heißt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$, woraus die Differenzierbarkeit von f in a folgt.

Nach Satz 2.11 sind die Komponentenfunktionen differenzierbar und die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2a_1 & -2a_2 \\ 2a_2 & 2a_1 \end{pmatrix}$$

ist die Jacobimatrix von f an der Stelle a .

Wir wollen nun, analog zum eindimensionalen Fall, auch den Begriff der Ableitung einführen. Dazu dient folgende

Definition 2.13:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $a \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die in a differenzierbar ist. Dann heißt die eindeutig bestimmte Matrix $A \in \text{Mat}^{(n \times m)}$ aus Satz 2.11 die Ableitung von f an der Stelle a und wird mit $f'(a)$ oder mit $Df(a)$ bezeichnet.

Beispiel 2.14:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Wir betrachten die Stelle $a = (0, 0)$. Dann erhalten wir für die partiellen Ableitungen

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{\sqrt{h^2}} - 0}{h} = 0$$

und analog

$$D_2 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

Das heißt, es kommt als Ableitung für f in a nur $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ in Frage.

Für $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$f(a+h) - f(a) = f(h) = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}}_{=r(h)}.$$

Verwenden wir die euklidische Norm mit $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ dann erhalten wir

$$\frac{r(h)}{\|h\|} = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \cdot \frac{1}{\|h\|} = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2}.$$

Setzen wir nun $h_1 = h_2$, gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_1^2}{2h_1^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

und somit ist f in $a = (0, 0)$ nicht differenzierbar.

Beispiel 2.15:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Beispiel 2.2 mit $f(x, y) = |x \cdot y|$ und betrachten wir $a = (0, 0)$.

Für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Das heißt, falls f differenzierbar ist, kommt nur die Ableitung $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ in Frage.

Wieder betrachten wir für $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$$f(a+h) - f(a) = f(h) = |h_1 h_2| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \underbrace{|h_1 h_2|}_{=r(h)}.$$

Sei o.B.d.A. $h_1 \geq h_2$ so ist mit der Maximumsnorm $\frac{r(h)}{\|h\|} = \frac{|h_2 h_2|}{\|h\|} \leq \|h\|$ und es gilt

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$. Daher ist f in $(0, 0)$ differenzierbar.

Betrachten wir nun $a = (a_1, 0)$ mit $a_1 \neq 0$.

Wiederum berechnen wir zunächst die partiellen Ableitungen und erhalten

$$\frac{f(a_1 + h, 0) - f(a_1, 0)}{h} = \frac{0}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

$$\frac{f(a_1, h) - f(a_1, 0)}{h} = \frac{|a_1 h|}{h}$$

Da in der zweiten Gleichung der Grenzwert für $h \rightarrow 0$ nicht existiert ist f in den Punkten $(a_1, 0)$ mit $a_1 \neq 0$ nicht differenzierbar. Das werden wir in Satz 2.16 noch beweisen.

Ganz analog kann man zeigen, dass für Punkte $(0, a_2)$ mit $a_2 \neq 0$ die partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}$ nicht existiert und damit f auch für diese Punkte nicht differenzierbar ist.

Zuletzt betrachten wir $a = (a_1, a_2)$ mit $a_1 \neq 0$ und $a_2 \neq 0$. Dabei müssen wir nun vier Fälle unterscheiden:

1. Fall: $a_1 > 0$ und $a_2 < 0$

Für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{|(a_1 + h) a_2|}^{>0} - \overbrace{|a_1 a_2|}^{<0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a_1 + h)(-a_2) - (-a_1 a_2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-a_1 a_2 - a_2 h + a_1 a_2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-a_2 h}{h} = -a_2 \end{aligned}$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial y} f(a) = -a_1.$$

Falls also f in a differenzierbar ist, kommt nur die Ableitung $A = \begin{pmatrix} -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$ in Frage. Wählen wir nun $|h|$ so klein, dass $a_1 + h_1 > 0$ und $a_2 + h_2 < 0$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(a + h) - f(a) &= \overbrace{|(a_1 + h_1)(a_2 + h_2)|}^{>0} - \overbrace{|a_1 a_2|}^{<0} \\ &= -a_1 a_2 - a_1 h_2 - a_2 h_1 - h_1 h_2 - (-a_1 a_2) = \begin{pmatrix} -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} - \underbrace{h_1 h_2}_{=r(h)}. \end{aligned}$$

Nach gleichem Argument wie oben gilt auch hier, dass $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$ ist und somit f in diesem Fall differenzierbar ist.

2. Fall: Sei $a_1 < 0$ und $a_2 > 0$.

Dieser Fall geht analog zum 1. Fall.

3. Fall: Sei $a_1 > 0$ und $a_2 > 0$.

Ähnlich wie zum 1. Fall ergeben sich die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(a_1 + h)a_2| - |a_1 a_2|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_2 h}{h} = a_2 \\ \frac{\partial}{\partial y}f(a) &= a_1.\end{aligned}$$

Falls f in a differenzierbar ist kommt also nur $A = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ in Frage.

Wählen wir wieder $|h|$ so klein, dass $a_1 + h_1 > 0$ und $a_2 + h_2 < 0$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}f(a + h) - f(a) &= |(a_1 + h_1)(a_2 + h_2)| - |a_1 a_2| \\ &= a_1 a_2 + a_1 h_2 + a_2 h_1 + h_1 h_2 - a_1 a_2 = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \underbrace{h_1 h_2}_{=r(h)}.\end{aligned}$$

Und wiederum gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$ und somit ist f in a differenzierbar.

4. Fall: Sei $a_1 < 0$ und $a_2 < 0$.

Unter Beachtung der Vorzeichen ergibt sich dieser Fall analog zum 3. Fall.

Das heißt in Punkten (a_1, a_2) mit $a_1 \neq 0$ und $a_2 \neq 0$ ist f differenzierbar.

Satz 2.16:

Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}^m$ ein Punkt. Ist f differenzierbar in a , so ist f auch partiell differenzierbar in a .

Beweis. Seien alle Voraussetzungen wie in Definition 2.10. Setzen wir außerdem $h := s \cdot e_j$ für $j \in \{1, \dots, m\}$, wobei e_j den j -ten Einheitsvektor bezeichnet. Damit erhalten wir aus Gleichung (20)

$$f(a + h) - f(a) = Ah + r(h) \Leftrightarrow f(a + s \cdot e_j) - f(a) = sAe_j + r(s \cdot e_j).$$

Nun dividieren wir die Gleichung durch $\|h\| = \|s \cdot e_j\|$ und erhalten weiters

$$\frac{f(a + s \cdot e_j) - f(a)}{\|s \cdot e_j\|} = \frac{sAe_j}{\|s \cdot e_j\|} + \frac{r(s \cdot e_j)}{\|s \cdot e_j\|}.$$

Durch Subtrahieren von $\frac{sAe_j}{\|s \cdot e_j\|}$ bzw. Herausheben von $\frac{s}{\|s \cdot e_j\|}$ folgt

$$\frac{s}{\|s \cdot e_j\|} \left(\frac{f(a + s \cdot e_j) - f(a)}{s} - Ae_j \right) = \frac{r(s \cdot e_j)}{\|s \cdot e_j\|}.$$

Da für $s \rightarrow 0$ die rechte Seite gegen 0 konvergiert erhalten wir

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(a + s \cdot e_j) - f(a)}{s} = Ae_j.$$

Das heißt f ist partiell differenzierbar. □

Dass im Satz 2.16 nicht Äquivalenz gilt zeigt folgendes

Beispiel 2.17:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Beispiel 1.4 mit $\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ erhalten wir für die partiellen Ableitungen

$$D_1 f(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$D_2 f(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Betrachten wir nun $(x, y) = (0, 0)$. Für $D_1 f(0, 0)$ erhalten wir

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

Analog dazu folgt

$$D_2 f(0, 0) = 0.$$

Also ist f für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar.

Betrachten wir nun $(x, y) = (0, 0)$ bezüglich der Differenzierbarkeit. Da $D_1 f(0, 0) = D_2 f(0, 0) = 0$ kommt als Ableitung nur $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ in Frage. Wir erhalten für $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$$f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) = f(h_1, h_2) = \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2}}_{=r(h)}.$$

Unter Verwendung der euklidischen Norm erhalten wir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

Setzen wir nun $h_1 = h_2$ folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_1^2}{2h_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2h_1^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{8h_1^2}} = \infty$$

Das heißt f ist zwar partiell differenzierbar aber nicht differenzierbar in $(0,0)$, also

partiell differenzierbar $\nRightarrow$ differenzierbar.

Da das direkte Zeigen der Differenzierbarkeit einer Funktion relativ aufwendig ist, wollen wir nun eine hinreichende Bedingung für die Differenzierbarkeit finden. Diese Bedingung wird in folgendem Satz konkretisiert.

Satz 2.18:

Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und angenommen es existieren alle partielle Ableitungen $D_1 f, \dots, D_m f$ an einer Stelle $a = (a_1, \dots, a_m)$ und sind sie dort auch stetig, dann ist f an der Stelle a differenzierbar.

Beweis. Sei $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_m \end{pmatrix}$ und $r(h) = \begin{pmatrix} r_1(h) \\ \vdots \\ r_n(h) \end{pmatrix}$ mit

Eigenschaften wie in Definition 2.10.

Zu zeigen ist, dass

$$f(a+h) - f(a) = Ah + r(h)$$

mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$ gilt. Falls f differenzierbar ist, kommt für die Ableitung nur die Matrix $A = \begin{pmatrix} D_1 f(a) & \dots & D_m f(a) \end{pmatrix}$ in Frage.

Das heißt

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \begin{pmatrix} D_1 f(a) & \cdots & D_m f(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} + r(h) \\ &= D_1 f(a) \cdot h_1 + \dots + D_m f(a) \cdot h_m + r(h). \end{aligned}$$

'Zwischen' $b_0 := a$ und $b_m := a + h$ führen wir die 'Zwischenpunkte' $b_1, \dots, b_{m-1}$ folgendermaßen ein:

$$\begin{aligned} b_1 - b_0 &= h_1 e_1 \\ b_2 - b_1 &= h_2 e_2 \\ &\vdots \\ b_m - b_{m-1} &= h_m e_m \end{aligned}$$

Dann können wir $f(a+h) - f(a)$ schreiben als

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= (f(a+h) - f(b_{m-1})) + (f(b_{m-1}) - f(b_{m-2})) + \dots \\ &\quad + (f(b_1) - f(a)) \end{aligned} \tag{21}$$

Auf die einzelnen Summanden wenden wir den Mittelwertsatz an, das heißt für $j \in \{1, \dots, m\}$ existieren $c_j \in [b_{j-1}, b_j]$ sodass

$$f(b_{j-1} + h) - f(b_j) = D_j f(c_j) h_j$$

gilt. Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung (21) ein erhalten wir

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^m D_j f(c_j) h_j$$

und weiters

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^m (D_j f(c_j) - D_j f(a)) \cdot h_j + Ah$$

oder anders geschrieben

$$f(a+h) - f(a) - Ah = \sum_{j=1}^m (D_j f(c_j) - D_j f(a)) \cdot h_j.$$

Aus der Dreiecksungleichung bekommen wir die Abschätzung

$$|f(a+h) - f(a) - Ah| \leq \sum_{j=1}^m |D_j f(c_j) - D_j f(a)| |h_j|.$$

Verwenden wir außerdem die Maximumsnorm, so folgt weiters

$$\begin{aligned} |f(a+h) - f(a) - Ah| &\leq \sum_{j=1}^m |D_j f(c_j) - D_j f(a)| |h_j| \\ &\leq \|h\| \cdot \sum_{j=1}^m |D_j f(c_j) - D_j f(a)|. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir

$$\frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h\| \cdot \sum_{j=1}^m |D_j f(c_j) - D_j f(a)|}{\|h\|}.$$

Da aber nach Voraussetzung $D_1 f, \dots, D_m f$ stetig sind, folgt

$$\frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m |D_j f(c_j) - D_j f(a)| = 0.$$

□

Dass im Satz 2.18 nicht Äquivalenz gibt zeigt folgendes

Beispiel 2.19:

$$\text{Sei } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) + y^2 \sin(\frac{1}{y}) & \text{für } xy \neq 0 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \text{ und } y = 0 \\ y^2 \sin(\frac{1}{y}) & \text{für } x = 0 \text{ und } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = y = 0 \end{cases}.$$

Betrachten wir zunächst die partiellen Ableitungen für $(x, y) \neq (0, 0)$. Wir erhalten für

$$x \neq 0 : D_1 f(x, y) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

und analog für

$$y \neq 0 : D_2 f(x, y) = 2y \cdot \sin\left(\frac{1}{y}\right) - \cos\left(\frac{1}{y}\right).$$

Für $y \neq 0$ erhalten wir die partielle Ableitung

$$\begin{aligned} D_1 f(0, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h}) + y^2 \sin(\frac{1}{y}) - y^2 \sin(\frac{1}{y})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{h}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h}\right)}_{\text{beschränkt}} = 0. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für $x \neq 0$ die partielle Ableitung

$$D_2 f(x, 0) = 0.$$

Im Punkt $(0, 0)$ ergibt sich für die partiellen Ableitungen nach x und y ganz analog

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{h}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h}\right)}_{\text{beschränkt}} = 0,$$

$$D_2 f(0, 0) = 0.$$

Um nun die Stetigkeit der partiellen Ableitungen in $(0, 0)$ zu untersuchen betrachten wir

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{2x}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{beschränkt}} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\nexists} \right), \\ &\lim_{y \rightarrow 0} \left(\underbrace{2y}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{y}\right)}_{\text{beschränkt}} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{y}\right)}_{\nexists} \right). \end{aligned}$$

Das heißt beide Grenzwerte existieren nicht, weshalb $D_1 f$ und $D_2 f$ nicht stetig in $(0, 0)$ sind. Oder anders gesagt f ist nicht stetig partiell differenzierbar in $(0, 0)$.

Jetzt untersuchen wir noch die Differenzierbarkeit von f in $(0,0)$. Da aber $D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$ ist kommt für die Ableitung nur $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ in Frage. Für $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ betrachten wir

$$\begin{aligned} f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0,0) &= h_1^2 \sin\left(\frac{1}{h_1}\right) + h_2^2 \sin\left(\frac{1}{h_2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \underbrace{h_1^2 \sin\left(\frac{1}{h_1}\right) + h_2^2 \sin\left(\frac{1}{h_2}\right)}_{=r(h)} \end{aligned}$$

Für $h_1 \neq 0, h_2 = 0$ bzw. $h_1 = 0, h_2 \neq 0$ ergeben sich ähnliche Restglieder und für $h_1 = h_2 = 0$ ist das Restglied $r(h) = 0$. Deshalb kann man für diese Fälle analog folgende Berechnungen machen:

Sei nun o.B.d.A. $h_1 \geq h_2$, so erhalten wir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h_1^2 \sin\left(\frac{1}{h_1}\right)}{h_1} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{2h_1}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h_1}\right)}_{\text{beschränkt}} = 0.$$

Das heißt f ist zwar differenzierbar, aber nicht stetig partiell differenzierbar, also

differenzierbar $\nRightarrow$ stetig partiell differenzierbar.

Satz 2.20:

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ an der Stelle a differenzierbar, dann ist sie dort stetig.

Beweis. Sei $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$ und $r(h) = \begin{pmatrix} r_1(h) \\ \vdots \\ r_n(h) \end{pmatrix}$ mit

Eigenschaften wie in Definition 2.10.

Da f in a differenzierbar ist gilt

$$f(a+h) - f(a) = Ah + r(h) \text{ mit } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Weiters ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} Ah + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} \|h\|.$$

Da A aber eine lineare Abbildung ist und wir wissen, dass diese stetig ist, muss $\lim_{h \rightarrow 0} Ah = 0$ sein. Also insgesamt erhalten wir

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) = 0$$

Setzen wir $x = a + h$ so erhalten wir sofort

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

und somit ist f stetig in a . □

Bemerkung:

Dass in Satz 2.20 die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt, zeigt das einfache Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$. Die Funktion f ist zwar stetig im Punkt 0 aber nicht differenzierbar.

Das heißt

$$\text{stetig} \not\Rightarrow \text{differenzierbar}.$$

In folgendem Beispiel betrachten wir eine Funktion, die stetig und partiell differenzierbar, aber nicht differenzierbar ist.

Beispiel 2.21:

$$\text{Sei } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Um die Stetigkeit in $(0, 0)$ zu zeigen, benutzen wir Polarkoordinaten, das heißt wir setzen

$$x = r \cdot \cos(\alpha), y = r \cdot \sin(\alpha).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^4} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \alpha \, r^3 \sin^3 \alpha}{r^2 \cos^2 \alpha + r^4 \sin^4 \alpha} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \sin^4 \alpha \cos \alpha}{r^2 (\cos^2 \alpha + r^2 \sin^4 \alpha)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + r^2 \sin^4 \alpha}. \end{aligned}$$

Da sowohl $\sin \alpha$ als auch $\cos \alpha$ beschränkt sind folgt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\overbrace{r^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha}^{\rightarrow 0}}{\cos^2 \alpha + \underbrace{r^2 \sin^4 \alpha}_{\rightarrow 0}} = \frac{0}{\cos^2 \alpha} = 0.$$

Also ist f stetig in $(0, 0)$.

Für die partiellen Ableitungen erster Ordnung ergibt sich

$$\begin{aligned} D_1 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0, \\ D_1 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^5} = 0. \end{aligned}$$

Das heißt für die Ableitung A kommt nur $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ in Frage.

Für die Differenzierbarkeit in $a := (0, 0)$ betrachten wir also

$$f(a + h) - f(a) = f(h_1, h_2) - f(0, 0) = \frac{h_1 h_2^3}{h_1^2 + h_2^4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{h_1 h_2^3}{h_1^2 + h_2^4}}_{=r(h)}.$$

Verwenden wir die Maximumsnorm und sei o.B.d.A. $h_1 \geq h_2$ und setzen wir $h_1 = h_2^2$ ergibt sich

$$\frac{r(h)}{\|h\|} = \frac{\frac{h_1 h_2^3}{h_1^2 + h_2^4}}{h_1} = \frac{h_2^3}{h_1^2 + h_2^4} = \frac{h_2^3}{h_2^4 + h_2^4} = \frac{1}{2h_2} \xrightarrow{h_2 \rightarrow 0} \infty.$$

Das heißt

stetig und partiell differenzierbar $\nRightarrow$ differenzierbar.

2.3 Richtungsableitungen

In diesem Kapitel benutze ich folgende Quellen: J. Appell (S. 301), O. Constantin (S.33), E. Hairer und G. Wanner (S. 328) und H. Heuser (S. 273).

Eine Verallgemeinerung des Konzepts der partiellen Differenzierbarkeit sind die Richtungsableitungen. Das heißt wir betrachten jetzt nichtmehr nur die Ableitung in Richtung der Koordinatenachsen, sondern in beliebige Richtungen.

Definition 2.22:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiters sei $a \in U$ ein Punkt und $v \in \mathbb{R}^m$, $v \neq 0$ ein Vektor. Falls der Grenzwert

$$D_v f(a) := \frac{d}{dt}[f(a + tv)]|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

existiert, heißt die Zahl $D_v f(a)$ Richtungsableitung von f im Punkt a in Richtung v .

Bemerkung:

Da wir uns bei Richtungsableitungen, wie der Name schon sagt, für die Richtung interessieren, setzen wir im Folgenden stets $\|v\| = 1$ voraus. Für den Fall, dass $\|v\| \neq 1$ ist dividieren wir durch die Länge des Vektors v .

Beispiel 2.23:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y^2 - x^2$. Seien weiters $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt und $v = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor.

Wir betrachten

$$\begin{aligned} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} &= \frac{f\left(\begin{pmatrix} -1+4/5t \\ 3+3/5t \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)}{t} = \frac{\frac{9}{25}t^2 + \frac{18}{5}t + 9 - \frac{16}{25}t^2 + \frac{8}{5}t - 1 - 9 + 1}{t} \\ &= \frac{-\frac{7}{25}t^2 + \frac{26}{5}t}{t} = -\frac{7}{25}t + \frac{26}{5} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{26}{5}. \end{aligned}$$

Das heißt die Richtungsableitung von f im Punkt $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ in Richtung $v = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beträgt $\frac{26}{5}$.

Beispiel 2.24:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Wir wollen nun wissen, für

welche Richtungen $D_v f(0, 0)$ existiert.

Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor. Nach obiger Bemerkung nehmen wir

$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$ an. Damit erhalten wir:

$$D_v f(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix}\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{tv_1}{\sqrt{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2}}}{t} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot v_1}{t \cdot |t| \cdot \underbrace{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}_{=1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1}{|t|} = \begin{cases} 0 & \text{für } v_1 = 0 \\ \infty & \text{für } v_1 > 0 \\ -\infty & \text{für } v_1 < 0 \end{cases}.$$

Das heißt $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1}{|t|}$ existiert genau dann wenn $v_1 = 0$ ist. Da aber $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$ gilt, muss $v_2^2 = 1$ gelten also $v_2 = \pm 1$ sein.

Also existiert die Richtungsableitung $D_v f(0,0)$ in den Richtungen $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, also in Richtung der positiven bzw. negativen y -Achse.

Folgender Satz zeigt einen wichtigen Zusammenhang zwischen der Differenzierbarkeit einer Funktion und ihrer Richtungsableitungen.

Satz 2.25:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $a \in U$ differenzierbar ist. Dann existieren die Richtungsableitungen $D_v f(a)$ für jeden Richtungsvektor $v \in U$ und es gilt $D_v f(a) = Df(a)v$.

Beweis. Wir definieren die Funktion $g(t) := a + tv$. Für die Ableitung erhalten wir daraus $Dg(t) = g'(t) = v$. Nun berechnen wir die Richtungsableitungen

$$D_v f(a) = \frac{d}{dt} [f(\underbrace{a + tv}_{=g(t)})]_{t=0} = (f \circ g)'(0) = Df(\underbrace{g(0)}_{=a}) \cdot \underbrace{g'(0)}_{=v} = Df(a)v.$$

□

Wie das nächste Beispiel zeigt, können auch für eine nicht differenzierbare Funktion alle Richtungsableitungen existieren.

Beispiel 2.26:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Beispiel 1.26 mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{für } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{für } x = y = 0 \end{cases}.$

Wir betrachten die Richtungsableitungen im Punkt $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 v_1^2 t v_2}{t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^2 (t^2 v_1^4 + v_2^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2}.$$

Da die Richtungsableitungen nur für $v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sinnvoll sind betrachten wir folgende drei Fälle:

1. Fall: Sei $v_2 \neq 0$ dann erhalten wir für beliebiges v_1

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{tv_1^2 v_2}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{t^2 v_1^4 + v_2^2}_{\rightarrow 0}} = \frac{0}{v_2^2} = 0.$$

2. Fall: Sei $v_2 = 0$, womit $v_1 \neq 0$ folgt. Dann erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{tv_1^2 v_2}^{=0}}{\underbrace{t^2 v_1^4 + v_2^2}_{=0}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^2 v_1^4} = 0.$$

Das heißt alle Richtungsableitungen in $(0, 0)$ existieren.

Wie wir aber in Beispiel 1.26 schon gezeigt haben, ist f nicht stetig im Ursprung und damit insbesondere nicht differenzierbar in $(0, 0)$. Deswegen gilt

alle Richtungsableitungen existieren $\nRightarrow$ differenzierbar.

Definition 2.27:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiters sei f an der Stelle $a \in U$ nach allen Variablen $x_1, \dots, x_m$ partiell differenzierbar. Dann heißt der Vektor

$$\text{grad } f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_m} f(a) \end{pmatrix}$$

Gradient von f an der Stelle a .

Satz 2.28:

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei weiters f differenzierbar dann ist, falls $\text{grad } f(x) \neq 0$ gilt, $D_{v_0} f(x)$ maximal unter $D_v f(x)$ für alle v mit $\|v\| = 1$, wobei

$$v_0 := \frac{\text{grad } f(x)}{\|\text{grad } f(x)\|}. \quad (22)$$

Beweis. Für alle $x, y \in U$ gilt die Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung. Das heißt

$$\langle v, w \rangle \leq |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|. \quad (23)$$

Da f differenzierbar ist, existieren nach Satz 2.25 alle Richtungsableitungen und insbesondere die partiellen Ableitungen. Das heißt wir können nach Definition 2.27 den Gradienten von f in x bilden. Nach der Cauchy-Schwarz'schen-Ungleichung gilt also

$$\langle \text{grad } f(x), v \rangle \leq \|\text{grad } f(x)\| \cdot \underbrace{\|v\|}_{=1} = \|\text{grad } f(x)\|.$$

Setzen wir nun den Vektor v_0 aus Gleichung 22 für v ein erhalten wir

$$\langle \text{grad } f(x), v_0 \rangle = \langle \text{grad } f(x), \frac{\text{grad } f(x)}{\|\text{grad } f(x)\|} \rangle.$$

Aufgrund der Rechenregeln für das Skalarprodukt erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } f(x), v_0 \rangle &= \langle \text{grad } f(x), \frac{\text{grad } f(x)}{\|\text{grad } f(x)\|} \rangle = \frac{\langle \text{grad } f(x), \text{grad } f(x) \rangle}{\|\text{grad } f(x)\|} \\ &= \frac{\|\text{grad } f(x)\|^2}{\|\text{grad } f(x)\|} = \|\text{grad } f(x)\| \end{aligned} \quad (24)$$

Die Gleichheit in der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung (23) gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind. Das ergibt, dass $v_0 = \pm \frac{\text{grad } f(x)}{\|\text{grad } f(x)\|}$ für $\|v_0\| = 1$. Man kann sich aber leicht vergewissern, dass $v_0 = + \frac{\text{grad } f(x)}{\|\text{grad } f(x)\|}$ ein Maximum ist.

Das heißt dass das Maximum der Richtungsableitungen in Richtung v_0 durch $\|\text{grad } f(x)\|$ eindeutig bestimmt ist. $\square$

Kurz gesagt gibt der Gradient die Richtung des stärksten Anstiegs von f an und sein Betrag ist gerade dieser stärkste Anstieg.

Auch am Ende des Kapitels der Differenzierbarkeit wollen wir die wichtigsten Ergebnisse in einer Tabelle sammeln.

Implikationen und Gegenbeispiele der Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbegriffe

partiell differenzierbar	$\nRightarrow$ Beispiel 2.3	stetig	
differenzierbar	$\Rightarrow$ Satz 2.16	partiell differenzierbar	$\nRightarrow$ Beispiel 2.17
stetig partiell differenzierbar	$\Rightarrow$ Satz 2.18	differenzierbar	$\nRightarrow$ Beispiel 2.19
differenzierbar	$\Rightarrow$ Satz 2.20	stetig	$\nRightarrow$ Bemerkung S. 45
differenzierbar	$\Rightarrow$ Satz 2.25	alle Richtungsableitungen existieren	$\nRightarrow$ Beispiel 2.26

differenzierbar

stetig partiell differenzierbar

differenzierbar

differenzierbar

3 Resümee

Ausgehend vom 'Cauchy-Irrtum' haben wir in den vorangegangenen Seiten noch weitere Tücken herausgearbeitet. Bleiben wir zunächst bei der Stetigkeit. Nicht nur haben wir ein recht einfaches Gegenbeispiel für die Vermutung von Cauchy gefunden, sondern auch eines, in dem wir zwar partielle Stetigkeit gezeigt haben, aber in keinem Punkt Stetigkeit vorliegt.

Obwohl Augustin-Louis Cauchy irrtümlich dachte, dass schon aus separater Stetigkeit die Stetigkeit folgt, haben wir noch 'stärkere' Begriffe kennengelernt, aus denen jedoch im Allgemeinen auch nicht die Stetigkeit folgt. So haben wir radial stetige Funktionen betrachtet, die jedoch nicht stetig sind.

Sogar Funktionen, die bei Annäherung auf der Kurve $\{(x, cx^{m/n}) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ immer den gleichen Wert ergeben, sind nicht stetig.

Analog zum 'Cauchy-Irrtum' ergibt sich auch für die Differenzierbarkeit die mögliche Tücke, dass aus partieller Differenzierbarkeit nicht Differenzierbarkeit folgt. Dafür haben wir auch ein recht einfaches Gegenbeispiel gefunden.

Obwohl partielle Differenzierbarkeit zwar ein sehr einfacher Begriff ist, führt sie zu keinem Differenzierbarkeitsbegriff, der auch mit jenem in einer Variable konsistent ist. Es soll ja auch, wie im eindimensionalen Fall, aus einer sinnvollen Definition der Differenzierbarkeit auch Stetigkeit folgen, was ja im Sinn der partiellen Differenzierbarkeit nicht der Fall ist, was wir auch anhand eines Beispiels gezeigt haben.

Auch haben wir durch ein relativ kompliziert konstruiertes Beispiel gezeigt, dass differenzierbare Funktionen nicht stetig partiell differenzierbar sein müssen.

Für eine differenzierbare Funktion existieren alle Richtungsableitungen, was sich auch intuitiv ergeben würde, wenn man sich für eine Funktion im $\mathbb{R}^3$ die Ableitung als Tangentialebene vorstellt. Dass jedoch die Rückrichtung nicht gilt, lässt sich intuitiv nicht mehr so leicht erklären und stellt ebenfalls eine mögliche Tücke dar.

Die soeben beschriebenen Schwierigkeiten und Tücken spielen auch in der aktuellen Studienplanänderung für das Lehramtsstudium Mathematik an der Universität Wien eine wichtige Rolle. Im Zuge der Umstellung des auslaufenden Diplomstudiums auf das neue Bachelorstudium ist eine Analysisvorlesung in mehreren Variablen für angehende Lehrerinnen und Lehrer, im Rahmen des Bachelorstudiums, nicht mehr vorgesehen. All die Tücken, die in dieser Diplomarbeit aufgekommen sind, enthält man somit den

Lehramtsstudenten und -studentinnen vor. Diese wissen in Zukunft nicht, dass sich für Funktionen in mehreren Variablen die Definitionen für Stetigkeit und Differenzierbarkeit in einer Variable nicht einfach verallgemeinern lassen. Außerdem entgehen ihnen auch mögliche neue Begriffe, die man durch Funktionen mehrerer Variablen einführen kann. Zukünftig sind die Bachelorabsolventen bzw. -absolventinnen schon als Lehrer und Lehrerinnen tätig, was bedeutet, dass sie zumindest in den ersten Jahren ihrer Unterrichtstätigkeit über die herausgearbeiteten Tücken und Möglichkeiten nicht Bescheid wissen.

Quellenverzeichnis

- 1) Jürgen Appell: *Analysis in Beispielen und Gegenbeispielen*. Springer-Verlage, Berlin Heidelberg, 2009.
- 2) Martin Barner und Friedrich Flohr: *Analysis II*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1996.
- 3) Olivia Constantin: *Reelle Analysis in mehreren Variablen und komplexe Analysis in einer Variable für Lehramtskandidaten*. Vorlesung, Universität Wien, SS 2014.
- 4) Johannes Jisse Duistermaat und J. A. C. Kolk: *Multidimensional Real Analysis I: Differentiation*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- 5) Bernhard R. Gelbaum und John M. M. Olmsted: *Counterexamples in Analysis*. Courier Corporation, San Francisco, 2013.
- 6) Andreas Gathmann: *Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen*. Vorlesung, Technische Universität Kaiserslautern, 2011.
<http://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/gdm-2011/chapter-24.pdf>
- 7) Ernst Hairer und Gerhard Wanner: *Analysis in historischer Entwicklung*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.
- 8) Harro Heuser: *Lehrbuch der Analysis Teil 2*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
- 9) Günther Hörmann: *Analysis*. Vorlesung, Universität Wien, WS 2008/09.
- 10) Günther Malle, Maria Koth, Helge Woschnitz, Sonja Malle, Bernhard Salzger und Andreas Ulovec: *Mathematik verstehen 7*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien, 2011.
- 11) Lothar Rogge: *Stetige Funktionen*. Vorlesung, Universität Duisburg, 2010.
- 12) Mathe online verstehen: *Häufungspunkte von Teilmengen des $\mathbb{R}^2$* .
<http://www.matheboard.de/archive/15761/thread.html>, Zugriff am 23.05.2016.
- 13) Raum für Mathematik: *Lipschitz-Konstante*.
www.matheraum.de/forum/Lipschitz-Konstante/t890437, Zugriff am 23.05.2016.

- 14) Raimar Wulkenhaar: *Mehrdimensionale Analysis*. Vorlesung, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2009.