



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Viel über das Nichts

Die historische und gegenwärtige schulische Bedeutung der Null

verfasst von

Tabea Maria Novoszel

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt:

A 190 406 884

Studienrichtung lt. Studienblatt:

Lehramtsstudium

UF Mathematik UF Informatik und Informatikmanagement

Betreut von:

ao. Univ.-Prof. i.R. Günter Hanisch

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit eidesstattlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, 2016

Tabea Novoszel

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mich während des Studiums unterstützt haben.

Allen voran richte ich ein herzliches Dankeschön an meine Eltern, die mir durch ihre Unterstützungen die Absolvierung meines Studiums überhaupt erst ermöglicht haben.

Besonderer Dank gebührt auch ao. Univ.-Prof. i.R. Günter Hanisch für die Übernahme der Betreuung meiner Diplomarbeit.

Zuletzt möchte ich mich noch bei meinen zahlreichen Studienkolleg/innen bedanken, mit denen eine erfolgreiche Zusammenarbeit im Laufe des Studiums gelungen ist.

Abstract

Der Begriff „Null“ tritt in vielen Bereichen des alltäglichen Lebens wie auch in den unterschiedlichsten Wissenschaften auf. Doch trotz des zahlreichen Vorkommens und des alltäglichen Gebrauchs dieses Begriffs fällt eine Definition alles andere als leicht. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es nun, vielen die Null betreffenden Fragen nachzugehen und das Mysterium der Null möglichst aufzuklären.

Dazu wird im ersten Teil der Arbeit vor dem geschichtlichen Hintergrund aufgezeigt, wie die Null überhaupt den Weg in unser Zahlensystem gefunden hat. Es wird dargestellt, dass die Null in vielen Kulturen unabhängig voneinander aufgekommen ist, sich entwickelt hat und es schließlich zu einer gegenseitigen Beeinflussung und dem Austausch der Ideen kam.

Der zweite Teil der Arbeit ist der Bedeutung der Null im heutigen Schulalltag gewidmet. Im Zuge dessen werden die Vorstellungen, die Schüler/innen nach der Volksschule mit der Null verbinden, beschrieben. Weiters werden der Ausbau dieser Vorstellungen in der Sekundarstufe 1, sowie die Unterrichtsthemen, in deren Zusammenhang der Null im Mathematikunterricht eine besondere Rolle zukommt, beleuchtet.

The term “zero” is used in many areas of everyday life as well as in various sciences. Despite its common and frequent usage a definition of this concept is difficult to find. The aim of this paper is to find answers to questions concerning zero and to solve the mystery of zero.

Therefore, the first part will describe how this number became part of our number system concerning the historical background. It will be shown that many cultures found zero independently of each other, developed it and it finally came to a mutual interaction and exchange of ideas.

The second part of this paper is devoted to the importance of zero in today’s school life. Considering that the ideas that students connect with zero after elementary school will be presented. Furthermore, the development of these ideas in secondary school and in subjects, where zero has a particular role in mathematics education, are illuminated.

Inhaltsverzeichnis

<u>Vorwort</u>	1
 <u>Abschnitt 1</u>	
<u>Die Geschichte der Null</u>	3
1.1 Das Aufkommen der Ziffern und Zahlen	3
1.2 Entwicklungen in der Alten Welt	5
1.2.1 Von den Sumerern zu den Babyloniern	5
1.2.2 Ägypter und Griechen	9
1.2.3 Indien und Südostasien	14
1.2.4 China	21
1.2.5 Die arabischen Ziffern und Europa im Mittelalter	23
1.3 Entwicklungen in der Neuen Welt	34
1.3.1 Maya	34
1.3.2 Inka	37
1.4 Bedeutung und Vorkommen der Null in anderen wissenschaftlichen Disziplinen	40
1.4.1 Geographie	40
1.4.2 Physik	42
1.4.3 Geodäsie	43
1.4.4 Informatik	45
 <u>Abschnitt 2</u>	
<u>Schulbuchvergleich</u>	47
2.1 Volksschule	47
2.1.1 Verankerung im Lehrplan	47
2.1.2 Verschiedene Zahlbegriffe	49
2.1.3 Die Einführung der Null in den Schulbuchreihen „Zahlenreise“ und „Eins Plus“	50
2.1.4 Die Null als Fehlerquelle	62
2.2 Sekundarstufe	69
2.2.1 Verankerung im Lehrplan	69
2.2.2 Blick in die Schulbuchreihen „Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden“ und „Das ist Mathematik“	69
 <u>Resümee</u>	91
 Literaturverzeichnis	95
Abbildungsverzeichnis	97

Vorwort

Der Begriff „Null“ tritt in vielen Bereichen des alltäglichen Lebens wie auch in den unterschiedlichsten Wissenschaften auf. Doch was genau ist die Null, und wie lässt sie sich definieren?

Bereits im Vorschulalter verbinden Kinder intuitiv etwas mit dem Begriff der Null, sei es beispielsweise im Zusammenhang mit der Temperaturmessung, mit dem Tacho im Auto oder mit Sportergebnissen. Interessant ist in diesem Zusammenhang auch, dass beim Zählen meist mit der Zahl Eins begonnen wird, dies beim Rückwärtszählen aber anders aussieht. Der Countdown für einen Start endet ja stets bei null. Ein ähnliches Beispiel aus dem Alltag lässt sich bezüglich der Uhrzeit aufzeigen: Hierbei wird zwischen 24:00 Uhr und 0:00 Uhr unterschieden, wobei 24:00 Uhr das Ende eines Tages bezeichnet und 0:00 Uhr den Beginn des neuen Tages.

Des Weiteren kommt der Begriff der Null in zahlreichen Redewendungen vor: null und nichtig sein (signalisiert meist Ungültigkeit), im Nullkommanichts (wenn etwas sehr schnell passiert), von null auf hundert (wenn sich etwas in sehr kurzer Zeit auf ein hohes Niveau entwickelt) usw.

Doch trotz all der zahlreichen Vorkommnisse und des alltäglichen Gebrauchs dieses Begriffs fällt eine Definition alles andere als leicht. Bezeichnet die Null die Leere, eine Ziffer oder doch eine Zahl? Was wäre dann der Wert der Zahl Null?

Im mathematischen Sinn bezeichnet die Null die Kardinalität der leeren Menge. Sie ist die kleinste Kardinalzahl und wird als erste Ordinalzahl gewählt. Als ganze Zahl ist die Null auf der Zahlengerade zwischen der Minus-Eins und der Eins verortet. Des Weiteren ist die Zahl Null gerade und die einzige reelle Zahl, die weder positiv noch negativ ist. Bezüglich des Umstands, ob sie als ein Teil der natürlichen Zahlen angesehen werden soll oder nicht, herrscht jedoch oftmals keine Einigkeit.¹

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es nun, den oben angeführten und vielen weiteren die Null betreffenden Fragen nachzugehen und das Mysterium der Null möglichst aufzuklären. Im ersten Teil der Arbeit soll dies vor dem geschichtlichen Hintergrund geschehen, um auch aufzuzeigen, wie die Null überhaupt den Weg in unser Zahlensystem gefunden hat. In diesem Zusammenhang wird darauf hingewiesen, dass die Null anfangs lediglich als ein Lücken-

¹ Vgl. <https://de.wikipedia.org/wiki/Null> [Zugriff am 21.10.2015]

zeichen im Stellenwertsystem verwendet wurde, danach als eigenständige Ziffer gesehen wurde und erst später die Vorstellung der Null als Zahl aufkam. Um dies zu erläutern, werde ich auf verschiedene Kulturen und Völker eingehen und jeweils deren Sichtweise der Null darstellen.

Der zweite Teil der Arbeit ist dann der Bedeutung der Null im heutigen Schulalltag gewidmet. Es soll aufgezeigt werden, welche Vorstellungen die Schüler/innen nach der Volksschule mit der Null verbinden und wie auf diesen Vorstellungen in der Sekundarstufe 1 aufgebaut wird bzw. wie diese ausgebaut werden. Des Weiteren soll auch eruiert werden, welche Unterrichtsthemen im Zusammenhang mit der Null im Mathematikunterricht überhaupt angesprochen werden und wann dieser Zahl eine besondere Rolle zukommt.

Möglicherweise sollte der Null sowohl im Alltag als auch im Rahmen der Schule mehr Aufmerksamkeit geschenkt werden, denn wie CHARLES SEIFE schreibt:

„Aber die Null kann nicht ignoriert werden. Sie birgt nicht nur das Geheimnis unserer Existenz, sondern sie wird auch für das Ende des Universums verantwortlich sein.“
(SEIFE 2000, S. 233)

Abschnitt 1

Die Geschichte der Null

1.1 Das Aufkommen der Ziffern und Zahlen

Um die Geschichte der Null in sinnvollem Maße rekonstruieren zu können, ist ein Überblick hilfreich, wie sich Zahlen und Ziffern generell im menschlichen Gedankengut etabliert haben. Diese Entwicklung begann vor sehr langer Zeit, und bis heute ist nicht gewiss, wo genau sie ihren Anfang nahm. Klarheit herrscht darüber, dass der Mensch zu Beginn nicht zählen konnte, weil er nicht fähig war, Zahlen zu erfassen. Seine Sprache, sein Erinnerungsvermögen, aber auch das abstrakte Denken waren zu jener Zeit nicht in entsprechendem Maße ausgebildet, doch die Menschheit wusste dies mit bestimmten Hilfsmitteln zu kompensieren. In diesem Sinne wurden einzelne Einheiten zum Beispiel durch das Schnitzen von Kerben in Holz oder Knochen, durch das Anhäufen bzw. Aneinanderreihen von Steinen, Muscheln, Knöchelchen und Stäben oder auch durch die Zuhilfenahme von Körperteilen einander zugeordnet. Durch solche Anfänge begannen die Menschen zwangsläufig zu zählen, und sie entwickelten mit der Zeit ein abstrakteres Verständnis für Zahlen. Zu Beginn sahen die Menschen die Zahlen nämlich als konkrete, von der Natur nicht ablösbare Gegebenheiten. Man konnte beispielsweise von vier Bäumen sprechen, aber nicht von der Vier selbst.

Da es bereits vor Jahrtausenden naheliegend war, mit den Fingern zu zählen zu beginnen, wurde die Zahl Zehn als Basis für die meisten Zahlensysteme gewählt. Die Völker der Maya, Azteken und Kelten wählten wegen der zehn Zehen ein System zur Basis 20, einige andere frühe Völker stattdessen die Zahl Zwölf. Die Sumerer und Babylonier hingegen stellten Zahlen im Sexagesimalsystem dar, also einem Stellenwertsystem zum Wert 60. Warum sie gerade diese Basis auswählten, kann heutzutage aber leider nicht mehr erschlossen werden. Erhalten geblieben sind uns aus dieser Zeit die Unterteilung in Stunden, Minuten und Sekunden sowie die Unterteilung des Kreises in 360 Grad.²

Als eines der ältesten erhaltenen Zeugnisse mathematischen Denkens gilt der Ishango-Knochen, welcher nach seinem Fundort in einem kleinen Fischerdorf in Zentralafrika benannt wurde. Dieser versteinerte Knochen wurde 1960 entdeckt, ist zehn Zentimeter lang, und die C14-Datierung lässt auf ein Alter von 20 000 bis 25 000 Jahren schließen. Die mathematische

² Vgl. IFRAH (1987, S. 14)

Struktur der Einritzungen zeigt sich deutlich in der Anordnung in den drei Spalten und in den Gruppen.



Abbildung 1: Ishango-Knochen



Abbildung 2: Ritzspuren

1937 wurde in Tschechien ein Wolfsknochen mit 55 Einkerbungen gefunden, auf welchem fünf Gruppen mit jeweils fünf kurzen und sechs Gruppen mit je fünf langen Kerben zu sehen sind. Dieser Knochen ist zwar vermutlich älter, aber nicht so exakt strukturiert und wird daher überwiegend nicht als geschichtliches mathematisches Zeugnis betrachtet.³

Einen wichtigen Stellenwert in der Geschichte der Arithmetik nimmt auch ein anderes Material ein: Kieselsteine. Mit diesen lernten die Menschen das Rechnen und entwickelten eine interessante Gewohnheit: Sie zählten unterschiedlichste Dinge mithilfe der Kieselsteine und gruppierten diese zu Haufen. Wenn der Haufen dann auf zehn Kieselsteine angewachsen war, wurde er durch einen anderen Stein ersetzt und mit diesem Stein ein neuer Haufen begonnen. Dieser Stein symbolisierte die Zehner, und dieses Prinzip setzte sich für Hunderter usw. fort.⁴

Spannend ist es nun, den Fortschritt des mathematischen Denkens – ausgehend von diesen primitiven Anfängen – zu verfolgen und zu sehen, dass viele Entwicklungen völlig unabhängig voneinander in verschiedenen Völkern in ähnlicher Weise stattgefunden haben. Beispielsweise erfanden die Babylonier die älteste bekannte Stellenwertschrift: eine Entdeckung,

³ Vgl. <http://www.obib.de/Archaeologie/Afrika/Ishango.html> [Zugriff am 23.10.2015]

⁴ Vgl. IFRAH (1987, S. 15)

die den Maya, Indern und Chinesen völlig unabhängig voneinander ebenfalls gelang. Den babylonischen Gelehrten gelang erst nach langwierigen Entwicklungen die Erfindung der Null. Die Maya hingegen kannten die Null, konnten mit dieser aber nicht rechnen. Die Chinesen übernahmen die Null von den indischen Mathematikern, und die indische Null wurde in etwa derselben Weise verwendet, wie wir dies tun. Es handelt sich dabei semantisch um jene Null, die mit den arabischen Ziffern übernommen wurde, denn die arabischen Ziffern gehen auf die indischen zurück und wurden im Laufe der Zeit und mit den Überlieferungen nur leicht verändert.⁵

1.2 Entwicklungen in der Alten Welt

1.2.1 Von den Sumerern zu den Babyloniern

Die Geschichte der Null beginnt vor etwa 5000 Jahren bei den Sumerern, die im südlichen Mesopotamien lebten. Dieses Volk verband das Dezimal- und das Sexagesimalsystem, wobei das sexagesimale Zahlensystem wahrscheinlich dem Handel mit anderen Kulturen zu verdanken war. Aufzeichnungen aus dieser Zeit konnten aufgrund des verwendeten Materials zu einem relativ großen Anteil erhalten bleiben, denn die Sumerer schrieben, indem sie mittels der Spitze eines hohlen Schilfhalms Kreise und Halbkreise in feuchte Tontafeln drückten. Diese Tafeln wurden durch das anschließende Brennen konserviert. Das Schilfrohr wich mit der Zeit einem Griffel mit dreiseitiger Spitze, und man konnte keilförmige Zeichen, durch Drehung des Griffels aber auch einen Haken bzw. Winkel erzeugen. Die sumerische Kultur wurde schließlich um 2500 v. Chr. von der akkadischen abgelöst, aber die Kombination des Dezimal- und Sexagesimalsystems blieb erhalten. Um 2000 v. Chr. (also zu altbabylonischer Zeit) schrieb man Zahlen folgendermaßen:

⁵ Vgl. IFRAH (1987, S. 16)

1	∇
2	∇ ∇
3	∇ ∇ ∇
4	∇ ∇ oder später 
5	∇ ∇ ∇ ∇
6	  
7	∇ ∇ ∇ ∇ ∇ oder  
8	    oder  
9	   oder später  (wobei die diagonale Schreibweise 3 · 3 anzeigt)
Für 10 benutzte man einen »Winkel«: <	
so dass 11 dargestellt wurde als < ∇	
und 12 als < ∇ ∇	

Abbildung 3: Zahlenschreibweise der Babylonier

Hierin zeigt sich das Dezimalsystem, das von den Sumerern erhalten geblieben war, denn für Einer wurde ein Keil und für Zehner ein Winkel verwendet. Zahlen ergaben sich dann aus der Kombination von beidem. In weiterer Folge kommt dann aber auch das sexagesimale Zahlensystem zum Vorschein, denn für die Darstellung der Zahl 60 wurde wiederum ein Keil verwendet, aber dieser wurde größer geschrieben als jener, der für einen Einer stand. Geschrieben wurden die Zahlen von den kleineren zu den größeren und von rechts nach links.

Die einzige Unterscheidung lag nun jedoch in der Größe der Keile, was zu Schwierigkeiten führte, wenn die Schreiber in Eile oder nachlässig bei ihren Aufzeichnungen waren: Die großen Keile wurden gelegentlich also kleiner, die kleinen größer geschrieben, und es kam zu Verwirrungen. Aus diesem Grund wurde die Idee geboren, die Stelle, an welcher die Keile positioniert sind, für ihren Wert stehen zu lassen. Das System der größeren und kleineren Symbole wurde also verworfen, und man ging zu einem Positionssystem über, welches mit Sechzigern, Zehnern und Einern arbeitete. Durch die Gruppierung der Keile und Winkelhaken waren Leerstellen zwischen den einzelnen Zahlen unausweichlich. Somit war es möglich, große Zahlen schnell und einfach darzustellen, und auch das Rechnen fiel relativ leicht.

Doch trotz dieser ausgeklügelten Stellenwertschreibung war die Unterscheidung mancher Zahlen nur aufgrund des Kontextes möglich. So wurde z.B. die Zahl 180 genauso wie die Zahl Drei durch drei Keile dargestellt. Dasselbe Problem trat beispielsweise bei den Zahlen 120 und Zwei auf. Solche Zweideutigkeiten wurden etwa tausend Jahre lang hingenommen, bis schließlich zwischen dem 6. und 3. Jahrhundert v. Chr. ein Zeichen mit zwei schräggestellten Keilen verwendet wurde, um Zahlenreihen auseinanderhalten zu können. Dieses

Symbol war kein neu erfundenes, sondern wurde zuvor schon als Trennzeichen verwendet, um beispielsweise Wörter von deren Definition zu trennen oder um in zweisprachigen Texten den Übergang von einer Sprache zur anderen zu signalisieren. Bezüglich der Stellenwertschreibung bedeutete dies nun, dass in jener Reihe, wo dieses Symbol auftrat, nichts stand. Diese „Null“ wurde dann natürlich in unterschiedlicher Weise geschrieben. Einig Beispiele hierfür sind unter anderem:

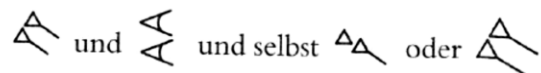


Abbildung 4: „Null“ der Babylonier

Dadurch waren die Probleme aber noch nicht allesamt gelöst. Diese Symbole wurden beispielsweise niemals am Ende einer Zahl verwendet, sondern immer nur in deren Mitte. Da man also die Zahl Zwei nun noch immer nicht von 20 oder 200 unterscheiden konnte, bedurfte es dennoch des Kontextes.⁶

Weiters konnte das Fehlen von zwei oder mehreren aufeinanderfolgenden Leerstellen nicht dargestellt werden. Trotz des noch unvollkommenen Systems stellten die babylonischen Gelehrten jedoch ein ganzes Jahrtausend lang sehr komplizierte Rechnungen an, wobei Verwechslungen der Zahlen durch den Kontext oder einen Kommentar verhindert wurden.

Der Zeitpunkt der Einführung der Null lässt sich nicht genau ermitteln, er liegt aber vor Anbruch der Seleukidenherrschaft (311 v. Chr. bis Mitte des 1. Jahrhunderts v. Chr.). Auf einer Tafel aus der Seleukidenzeit, die astronomischen Sachverhalten zuzuordnen ist und im British Museum aufbewahrt wird, wird die Zahl 60 durch einen Keil und einen Doppelwinkel dargestellt. Dieser Doppelwinkel am linken Ende der Zahl symbolisiert das Fehlen der Einer. Auf der Rückseite dieser Tafel wird die Zahl 180 nach demselben Prinzip durch drei Keile und wiederum einem Doppelwinkel dargestellt.

Eine andere astronomische Tafel aus Babylon, die etwa zur gleichen Zeit entstand, beschreibt eine Zahl folgendermaßen:



Abbildung 5: Astronomische Tafel der Babylonier

⁶ Vgl. KAPLAN (2001, S. 16–22)

Nach dem Sexagesimalsystem ergibt die Zahl das Ergebnis der Berechnung $2 \cdot 60^3 + 11 \cdot 60^2 + 46 \cdot 60 + 0$. In dieser Darstellung hat die Null am Ende eine besonders merkwürdige Gestalt, was vermutlich ein Anzeichen für Schnellschrift ist.⁷

Bis zur ersten Hälfte des zweiten vorchristlichen Jahrhunderts hatten die Babylonier also mit einiger Sicherheit eine abstrakte Zahlschrift entwickelt. Diese war anderen Systemen des Altertums bei Weitem überlegen, und wir verdanken den Babyloniern die Erfindung des ersten Positionssystems. Des Weiteren erfanden sie zu einem späterem Zeitpunkt (die ältesten bekannten Texte sind zur Zeit der Seleukiden entstanden) die Null, welche von Mathematikern nur in Mittelstellungen verwendet wurde, bei Astronomen jedoch auch am Ende sowie am Beginn einer Zahl. Durch die Verwendung zweier schräggestellter Keile am Beginn einer Zahl konnten babylonische Astronomen nun auch Brüche beschreiben (der Nenner entsprach dabei einer Potenz von 60).

Im babylonischen Gedankengut war aber noch keine „Zahl Null“ verankert. Obwohl beispielsweise der Doppelwinkel für eine Leerstelle innerhalb einer Zahl stand, wurde dieser wohl nicht mit dem Begriff des „Nichts“ in Verbindung gebracht. Diese beiden Aspekte wurden zur damaligen Zeit unabhängig voneinander betrachtet. Belege hierfür liefern zum Beispiel zwei mathematische Texte aus Susa (antike Stadt im Südwesten des heutigen Iran, nahe der irakischen Grenze): Im einen konnte der Schreiber die Null als Ergebnis nicht festhalten, und es heißt nur *„20 minus 20... du weißt ja“*; der andere Text handelt von einer Getreideverteilung, die null als Resultat hatte, und statt der Null wird lediglich angegeben *„Das Korn ist ausgegangen“* (IFRAH 1987, S. 423).⁷

Summa summarum haben die Babylonier als Vorstufe der Zahl Null ein Fehlzeichen entwickelt, welches aus der Notwendigkeit heraus entstand, jeder Zeichenfolge eine eindeutige Bedeutung zuzuordnen. Die Null fungierte lediglich als Platzhalter und symbolisierte eine leere Stelle auf dem Abakus. Das Symbol war nur eine Ziffer und keine Zahl, es hatte keinen Wert.⁸ Außerdem hatten die Babylonier weder einen Namen für null, noch wurde null als Lösung algebraischer Aufgaben anerkannt. Ihnen war die Zahl Null also nicht bekannt.⁹

⁷ Vgl. IFRAH (1987, S. 418–423)

⁸ Vgl. SEIFE (2002, S. 21f)

⁹ Vgl. <https://de.wikipedia.org/wiki/Null> [Zugriff am 27.10.2015]

1.2.2 Ägypter und Griechen

Die ägyptische Mathematik war sehr stark an praktischen Bedürfnissen orientiert, und es wurden stets Rechnungen mit konkreten Zahlen durchgeführt. Die natürlichen Zahlen wurden im Zehnersystem dargestellt, wobei es sich jedoch nicht um ein Positionssystem handelte, stattdessen wurden verschiedene Symbole für jede Potenz verwendet¹⁰:

1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
I	∩	ϣ	⋈	𓂢	𓂣	𓂤
Einfacher Strich	Rindsgespann	Seilschlinge	Wasserlilie	Finger	Kaulquappe oder Frosch	Heh (altägyptischer Gott der Unendlichkeit)

Abbildung 6: Zahlendarstellung der Ägypter

Als Zeichen für null wurde an manchen Stellen das Symbol  verwendet, welches möglicherweise für abwehrend ausgestreckte Arme steht. Eine Rechnung mit null wurde in den Inschriften des Tempels Edfu gefunden, welche auf das 2. Jahrhundert v. Chr. zu datieren sind. Dabei wird der Inhalt eines Viereckes mit den Seiten a, b, c, d mittels der Formel $F = \frac{a+c}{2} * \frac{b+d}{2}$ berechnet, welche sich für schmale, rechteckähnliche Landstücke relativ gut eignet. Dieselbe Formel wird dann auch zur Berechnung von Dreiecken verwendet, wobei c = 0 gesetzt wird.¹¹

Die Griechen verwendeten das ältere attische und das jüngere milesische System zur Zahlendarstellung. Das attische System wurde hauptsächlich im kaufmännischen Bereich (für Geld- und Warenangaben) und zur Bezeichnung der Spalten des Abakus verwendet. Man gebrauchte dabei die Anfangsbuchstaben der Zahlworte:¹⁰

I	Γ	Δ	H	X	M
1	5	10	100	1 000	10 000
	pente	deka	hekatōn	chilioi	myrioi

Abbildung 7: Zahlenschreibweise der Griechen

Bei den Griechen gab es keine Stellenwertschreibung und deshalb auch kein Symbol für die Null. Des Weiteren waren bei ihnen die Zahlen noch nicht vollständig vom Zählgegenstand abstrahiert. Zur entscheidenden Wendung für die Griechen kam es wohl durch Alexander den Großen, als dieser 331 v. Chr. mit seinen Truppen von Babylon nach Osten zog und die Null

¹⁰ Vgl. BAXA, VO *Geschichte der Mathematik und Logik* (SS 2015)

¹¹ Vgl. GERICKE (1970, S. 47)

möglicherweise bis nach Indien brachte. In einem astronomischen Papyri aus dem 3. Jahrhundert v. Chr. findet man das Symbol „o“ für null.¹² Wie kam es nun zu einem solchen Symbol? Die Griechen hatten die Null ursprünglich zwar von den Babyloniern übernommen, aber mit ihren eigenen Symbolen geschrieben. Die häufigste Erklärung bezüglich des griechischen Symbols ist, dass sich „o“ vom griechischen „Omikron“ ableitet, dem ersten Buchstaben von oudén (οὐδέν = „nichts“) oder von „ouk“ (οὐκ = „nicht“).¹³

Generell unterscheidet sich die griechische Mathematik der Antike wesentlich von jener der Babylonier und Ägypter. Im Vordergrund stand bei den Griechen nicht mehr so sehr die Frage nach dem „Wie“, sondern eher jene nach dem „Warum“. Man bemühte sich stets, Beweise für Behauptungen zu finden, und mathematische Fragestellungen wurden um ihrer selbst willen studiert. Regeln und Vorschriften der Babylonier und Ägypter wurden systematisiert, zu Theoriegebäuden zusammengefasst und weiter ausgebaut.¹⁴ Des Weiteren waren die Griechen Meister der Geometrie, denn sie sahen stets die Dualität von Zahlen und geometrischen Figuren. Das Zählen, das sie Logistik nannten, genoss bei ihnen kein hohes Ansehen und wurde zumeist den Händlern überlassen. In der Oberschicht galt das Zählen als anrüchig, und somit floss die mathematische Energie größtenteils in die Geometrie. Die Problematik dabei war aber nun, dass die Zahl Null keinen Sinn ergab: Welcher geometrischen Form oder Figur sollte man die Null zuordnen? Wie sollte eine Länge mit null Einheiten interpretiert werden? Die Griechen entwickelten also kein Bedürfnis nach der Null, weil dies für sie eine Zahl war, die keinen geometrischen Sinn hatte.

Nur in den astronomischen Tabellen der Griechen war die Null zu finden. Da sie die Null aber tendenziell nicht mochten, geschah es nicht selten, dass die Ergebnisse von Berechnungen, die in babylonischer Schreibweise angefertigt worden waren, wiederum zurück in das griechische Zahlensystem ohne die Null übertragen wurden. Die Ablehnung der Null durch die Griechen lag also keineswegs in deren Unwissenheit, stattdessen war der Grund dafür in ihrer Philosophie begründet. Die Null widersprach grundlegenden philosophischen Überzeugungen in Europa und beinhaltete zwei gefährliche Vorstellungen: die Leere und das Unendliche.¹⁵

Interessant ist auch die Betrachtung, was die Händler von dieser geometrischen Sicht der Mathematik hatten. Die griechischen Mathematiker pflegten die geometrische Rechenkunst durch das Malen der Figuren in Sand. Sie entwickelten dreieckige, aber auch quadratische

¹² Vgl. KAPLAN (2001, S. 26f) und Seife (2002, S. 75)

¹³ Vgl. GERICKE (1970, S. 47)

¹⁴ Vgl. BAXA, VO *Geschichte der Mathematik und Logik* (SS 2015)

¹⁵ Vgl. KAPLAN (2001, S. 30) und Seife (2002, S. 47f)

und pentagonale Zahlen, und für die Händler entwickelte sich als Hilfsmittel der Abakus (ein Rechenbrett). Auf diesen Rechenbrettern gab es natürlich keine Spalte, die für Null stand. Das „Nichts“ war kein Ding und auch keine Zahl, es war lediglich ein Zustand auf einem Teil des Rechenbrettes. Generell wurden kaum Bezeichnungen für die Mengen benötigt, da diese ja mit Hilfe der Rechensteine in Spalten gezeigt werden konnten.

Eine Theorie bezüglich des Aufkommens des Symbols für die Null kann schließlich auch von den Steinen der Rechenbretter abgeleitet werden. Die Steine, die für das Rechnen verwendet wurden, waren einigermaßen rund und wurden daher in der Schrift bzw. auf Zeichnungen durch volle Punkte • dargestellt. Eine naheliegende Darstellungsmöglichkeit, um zu zeigen, dass kein einziger Stein in einer Spalte lag, wäre die Verwendung eines leeren Punktes ○. Von einer solchen Figur auf die entsprechende Ziffer zu kommen, wäre dann kein großer Schritt mehr gewesen. Warum sich die Darstellung der Null von einem Kreis ○ dann über die Jahrhunderte zu dem uns heutzutage bekannten Symbol 0 entwickelt hat, könnte dadurch erklärt werden, dass es früher schwierig war, mit zersplissenen Federn einen durchgehenden Kreis zu ziehen. Einfacher gestaltete sich das Ziehen zweier geschwungener Striche.¹⁶

Die griechischen Philosophen hingegen verliehen ihrem Kosmos eine Dauerhaftigkeit durch die Vermeidung der Null und des Unendlichen. Sie sahen Bedrohungen darin, dass das Unendliche jede Bewegung unmöglich machen und die Leere den Kosmos in tausend Splitter zertrümmern könnte. Die Unendlichkeit machte sich aber dennoch bereits im Gedankengut der Griechen breit, was sich beispielsweise im Paradoxon des ZENON VON ELEA zeigt. Das von ZENON angestellte Gedankenexperiment handelt davon, dass Achilles im Wettlauf eine Schildkröte, die beim Start einen gewissen Vorsprung bekommt, niemals einholen könne: Hätte Achilles den Ausgangspunkt der Schildkröte erreicht, so wäre diese schon ein Stück weiter. Wäre Achilles auch dieses Stück gelaufen, wäre die Schildkröte wieder ein Stück weiter usw. Die folgende Abbildung veranschaulicht das Gedankenexperiment anhand konkreter Werte:

¹⁶ Vgl. KAPLAN (2001, S. 31–34)

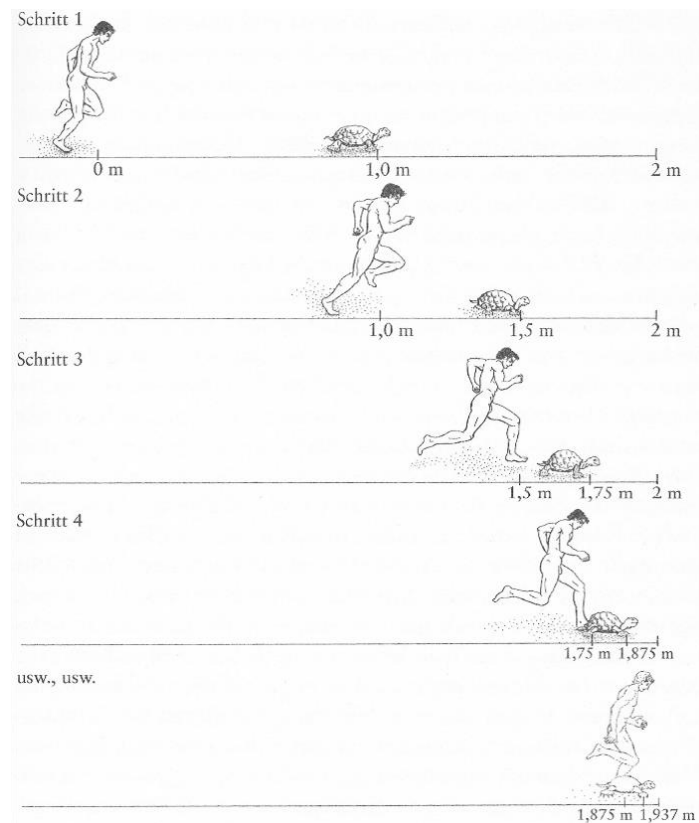


Abbildung 8: Wettlauf des Achilles mit der Schildkröte

Dieses Rätsel verwirrte sowohl die griechischen Philosophen als auch viele Gelehrte späterer Zeiten. Das Paradoxon konnte nicht erklärt, aber auch nicht widerlegt werden. Obwohl klar war, dass die Schlussfolgerung falsch sein musste, ließ sich kein Fehler in der Beweisführung finden. Jeder Schritt schien logisch korrekt. Auch ZENON selbst hatte keine Lösung für sein Paradoxon parat. Das Problem ist darin zu sehen, dass die griechischen Mathematiker der Antike den Begriff des Grenzwerts nicht kannten, weil sie nicht an die Null glaubten. Daher konnte die unendliche Reihe der Summanden auch keinen Grenzwert ergeben. Die Griechen erwogen zwar die Vorstellungen der Leere und der Unendlichkeit, lehnten jedoch sowohl die Null als auch die Unendlichkeit als Zahl ab.¹⁷

In der griechischen Antike gab es unterschiedliche Denkrichtungen, beispielsweise die der Atomisten. Diese waren der Meinung, dass der Kosmos aus kleinen Teilchen – den Atomen – bestehe. Damit diese eine Bewegung vollziehen konnten, musste es ihrer Ansicht nach einen leeren Raum zwischen den Teilchen geben, in welchen ein solches Teilchen vordringen hätte können. Sie hatten also die Vorstellung, dass der Kosmos von einer ungeheuren Leere erfüllt sei. Weiters kam bei ihnen auch die Idee eines unendlichen Vakuums auf, welches die Unendlichkeit mit der Null verbinden würde. Bezüglich des Paradoxons vertraten sie die Auffas-

sung, dass Achilles nach gewisser Zeit nur noch ein einziges Atom überspringen müsste und die Schildkröte dies in derselben Zeitspanne nicht schaffen würde. Also würde Achilles die Schildkröte irgendwann einholen.

Eine andere Sichtweise zeigt sich im aristotelischen System, welches ohne Leere und Unendlichkeit auskam. Hierbei wurde der Kosmos mit einer Nusschale verglichen. Der Kosmos wurde dabei im Zentrum verortet und war von Sphären umgeben, auf denen sich die Planeten bewegen sollten. Da es jedoch ihrer Ansicht nach keine Unendlichkeit gab, musste es eine äußerste Sphäre geben; der Kosmos hätte demzufolge eine endliche Ausdehnung und wäre komplett mit Materie gefüllt. Es gab ihrer Meinung nach also weder Grenzenloses noch die Leere. Interessanterweise konnte sogar die Existenz Gottes durch die Anwendung der aristotelischen Philosophie bewiesen werden. Diese wurde daraus abgeleitet, dass sich die Sphären langsam drehen und diese Bewegung durch irgendetwas verursacht werden musste. Da die ruhende Erde als Quelle dessen nicht in Frage kam und man von einer endlichen Anzahl von Körpern ausging, die einander antreiben konnten, wurde Gott als erster Beweger gesehen. Bezüglich des Paradoxons würde ihren Überzeugungen zufolge Achilles an der Schildkröte vorbeilaufen, weil die von ZENON beschriebenen unendlich nahe beieinanderliegenden Punkte keine Bestandteile der realen Welt seien könnten. Im Allgemeinen war das aristotelische System sehr erfolgreich, und sein berühmtester Anhänger war wohl ALEXANDER DER GROßE, der diese Lehre bis nach Indien verbreitete.

Die Ablehnung der Unendlichkeit und der Null führten jedoch auch zu Problemen. Betrachtet man nur die Geschichte, müsste es ja ein erstes Ereignis gegeben haben – die Schöpfung. Wie würde eine solche nach dem aristotelischen System interpretiert werden? Als Leere wäre dies ja nicht möglich. Wenn man dann davon ausgeht, dass es kein erstes Ereignis gab, müsste der Kosmos schon immer existiert haben. Man braucht also die Null oder die Unendlichkeit, denn ansonsten ergäbe der Kosmos keinen Sinn.¹⁷

Obwohl die aristotelische Sichtweise falsch war, war sie so einflussreich, dass sie über ein Jahrtausend lang das Aufkommen bzw. die Verbreitung anderer, wenn auch realitätsnäherer, Ansichten verhinderte. 200 Jahre nach ZENON erbrachte der griechische Mathematiker ARCHIMEDES interessante Arbeiten. Auf ihn geht das Axiom des Archimedes zurück, welches besagt, dass eine Zahl, die sukzessive zu sich selbst addiert wird, irgendwann jede andere Zahl übersteigt. Dieses Axiom folgt selbstverständlich der Ablehnung der Null. Weiters glaubte er an den aristotelischen Kosmos und stellte ein Gedankenexperiment diesbezüglich an. Darin galt es herauszufinden, wie viele Sandkörner wohl in den kugelförmigen Kosmos

passen würden. Bei den Berechnungen ging er vom Samenkeln einer Mohnblume aus und berechnete anschließend immer größere Einheiten. Die Anzahlen der Sandkörner überstiegen mit der Zeit jedoch die Möglichkeiten des griechischen Zahlensystems, und daher musste ARCHIMEDES eine neue Schreibweise für die riesigen Zahlen erfinden. Diese Zahlen waren zwar äußerst unhandlich, gingen aber sogar über das hinaus, was ARCHIMEDES für sein Gedankenexperiment brauchte. Wichtig daran war, dass die Zahlen endlich waren und man weiterhin die Unendlichkeit im griechischen Kosmos nicht benötigte.¹⁷

Die mittelalterlichen Gelehrten übernahmen schließlich große Teile der Philosophie und der Wissenschaften aus der Antike, und somit blieb auch die Furcht vor der Unendlichkeit und der Leere bestehen. Die Leere wurde als Teufelswerk angesehen, das Teuflische als leer und nichtig. Der Mönch BOETHIUS argumentierte zur damaligen Zeit, dass es nichts gäbe, was der allmächtige Gott nicht bewirken könnte. Er könnte aber nichts Böses schaffen, und daher sei das Böse nichts. In der mittelalterlichen Philosophie trafen jedoch das aristotelische System und die jüdisch-christliche Schöpfungsgeschichte aufeinander. Die Schöpfungsgeschichte war semitischen Ursprungs, und darin gab es keine Furcht vor der Leere. Der Zustand vor der Schöpfung wurde als „nichtiges Etwas“, das keine Form besaß, beschrieben. Er wurde jedoch nicht mit dem „letzten Nichts“ identifiziert. Die Furcht vor der Leere war also sehr groß, aber glücklicherweise fürchteten nicht alle Kulturen die Null so sehr.¹⁸

1.2.3 Indien und Südostasien

Die bisher geschilderte Rolle der Null als Platzhalter bzw. leere Stelle (bei den Babyloniern) und die Tatsache, dass sie nicht als Zahl angesehen wurde und keinen Wert hatte, sollten sich in Indien grundlegend ändern.

Alexander der Große zog im vierten Jahrhundert v. Chr. mit seinen Truppen von Babylonien ostwärts bis nach Indien und brachte möglicherweise auf diesem Wege auch die Null dorthin. Auf diese Weise hätten die indischen Mathematiker das babylonische Zahlensystem und die Null kennenlernen können, aber die aristotelische Philosophie (deren Ideen Alexander gewiss

¹⁷ Vgl. SEIFE (2002, S. 49–62)

¹⁸ Vgl. SEIFE (2002, S. 71)

verbreitete) konnte nicht Fuß fassen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass man in Indien niemals Furcht vor der Leere oder dem Unendlichen verspürte.¹⁹

Es ist jedoch auch nicht ausgeschlossen, dass die Inder das Positionssystem und die Null ohne äußere Einflüsse entdeckt haben. Es scheint nämlich, als ob die indischen Gelehrten als einzige ein gesprochenes Positionssystem zur Basis zehn entwickelt hätten. In diesem System erhalten bei regelmäßigem Aufbau die ersten neun ganzen Zahlen, die Zehn und ihre aufeinanderfolgenden Potenzen eigene Namen. Die weiteren Zahlen werden nach einem aufeinander aufbauenden Prinzip gebildet. Bei einer solchen Zahlendarstellung können schließlich die Namen der Basis und der verschiedenen Potenzen weggelassen werden. In diesem System der Zahlenwiedergabe wurden zuerst die Einer und anschließend die aufsteigenden Potenzen von zehn dargestellt. Zu bemerken ist auch, dass sich die Inder bei der Benennung der ersten neun ganzen Zahlen nicht auf die Zahlworte des Sanskrit beschränkten,

eka dvi tri catur pañca ṣaṭ sapta aṣṭa nava
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Abbildung 9: Zahlworte des Sanskrit

sondern auch Worte des Sanskrit benutzten, die sich auf die Natur, den Körperbau des Menschen und die Überlieferung bzw. Umsetzung mythologischer Vorstellungen beziehen. In diesem Sinne wurden auch symbolische Worte gefunden, die die Abwesenheit von Einheiten kennzeichnen:

NULL

<i>kha, ambara, ākāśa, antarikṣa gagana, abhra, viyat, nabhas</i> »Der Himmel, die Atmosphäre, der Raum«	<i>śūnya</i> »Die Leere«	<i>bindu</i> »Der Punkt«
---	-----------------------------	-----------------------------

Abbildung 10: Worte für null

Die Verwendung von Zahlensymbolen belegt, dass der Begriff der Null und das Positionssystem auf der Basis zehn in Indien schon im fünften Jahrhundert bekannt und möglicherweise auch über die Gelehrtenwelt hinaus verbreitet waren. Die Struktur des alten indischen Zahlensystems wurde dann nach dem Vorbild des gesprochenen Systems geschaffen.

Wie kam es aber nun zu diesen Entwicklungen? Vor dem Jahr 458 wurden in der indischen Gelehrtenwelt die ersten neun Ziffern des alten Brahmi-Ziffernsystems und die ersten neun Namen der Ordinalzahlen in ein Positionssystem zur Basis zehn in Sanskrit integriert. Dabei ist nicht auszuschließen, dass die Konzeption auf babylonische Gelehrte zurückgeht, denn

¹⁹ Vgl. SEIFE (2002, S. 75)

zwischen dem dritten Jahrhundert v. Chr. und dem ersten Jahrhundert n. Chr. wurden verschiedene Elemente der babylonischen Astronomie in Indien verbreitet. Aber auch der Kontakt zwischen Indien und China im zweiten Jahrhundert n. Chr. könnte Einfluss auf diese Entwicklungen gehabt haben. Durch deren Kombination von waag- und senkrechten Strichen könnte das indische Ziffernsystem den chinesischen Strichziffern nachgebildet worden sein. Noch einleuchtender (aber auch nicht beweisbar) scheint die Vermutung, dass sich die Verwendung des Positionssystems und der Null durch die Verwendung des Abakus etabliert hat. Arithmetische Aufgaben lösten die Inder nämlich gewiss mittels Zuhilfenahme von gegenständlichen Zahlendarstellungen (wie z.B. Finger, Kieselsteine,...) und vor allem durch die Verwendung einer Art von Abakus. Es ist davon auszugehen, dass dabei die Rechnungen mit den ersten neun Ziffern in vorher unterteilen Spalten durchgeführt wurden. Die Unterteilungen entsprachen den Zehnerpotenzen, wobei von rechts nach links zuerst die Einer, dann die Zehner, die Hunderter usw. standen. Um nun eine Zahl darzustellen, wurde das jeweilige Zahlzeichen für die Anzahl der Einheiten verwendet. Auf diese Art und Weise konnte man alle ganzen Zahlen darstellen, und eine Null war nicht nötig, weil das Fehlen von Einheiten einer Ordnung durch eine leere Spalte symbolisiert werden konnte. Die Zahl 1 024 607 130 000 wurde beispielsweise folgendermaßen auf einem Abakus mit Spalten dargestellt:

	⌒		≡	୪	୫		୭	⌒	≡				
	1	0	2	4	6	0	7	1	3	0	0	0	0

Abbildung 11: Bsp. auf dem Abakus in der alten indischen Zahlschrift

In der Praxis wurde dies in losem Erdreich oder Sand mit einem spitzen Gegenstand, auf einer mit Wachs überzogenen Tafel unter Zuhilfenahme eines Griffels oder auf einer Schiefertafel mit Kreide umgesetzt. Danach war es kein großer Schritt mehr, die Ziffern ohne die Spalten des Abakus zu schreiben. Jedoch musste nun ein neues Symbol eingeführt werden, um die Abwesenheit von Einheiten einer Ordnung darzustellen. Dies war die Geburtsstunde der indischen Null, die im Folgenden graphisch durch einen kleinen Punkt oder Kreis dargestellt wurde und verschiedene Sanskritnamen hatte.²⁰

Dasselbe Beispiel wie oben wurde ab nun wie folgt dargestellt:

²⁰ Vgl. IFRAH (1987, S. 494–500, 508–510)



Abbildung 12: Bsp. für die alte indische Zahlschrift unter Verwendung eines Symbols für die Null

bzw. in Texten oftmals mittels der verschiedenen Sanskritnamen so geschrieben:

Kha	ambara	śūnya	gagana	agni	rūpa	sapta	śūnya	rasa	catur	netra	kha	eka
Himmel	Atmosphäre	Leere	Raum	Feuer	Form	sieben	Leere	Geschmacksarten	vier	Augen	Himmel	eins
0	0	0	0	3	1	7	0	6	4	2	0	1

Abbildung 13: Darstellung einer Zahl in Sanskrit

Die indische Gesellschaft begrüßte die Null, vor allem weil im Hinduismus der Leere eine große Bedeutung zukommt. Ursprünglich war der Hinduismus eine polytheistische Religion, aber im Laufe der Zeit verschwammen die einzelnen Gottheiten, und der Hinduismus entwickelte sich zu einer monotheistischen Religion. Dabei wurden alle Götter zu Aspekten des allumfassenden Gottes BRAHMA. So wie viele Religionen des Ostens ist auch der Hinduismus maßgeblich von der Symbolik der Dualität geprägt. Erschaffung und Zerstörung sind hierbei stark miteinander verknüpft, und in diesem Sinne wird der Gott SHIVA sowohl als Schöpfer als auch als Zerstörer der Welt angesehen. Dies repräsentieren auch zahlreiche bildliche Darstellungen, in welchen er in der einen Hand die Trommel der Schöpfung und in der anderen die Flamme der Zerstörung trägt. Es gibt jedoch auch einen Aspekt dieser Gottheit (NISHKALA SHIVA genannt), der für das Nichts bzw. die Leere steht und wörtlich übersetzt Shiva „ohne Teile“ bedeutet. Der hinduistische Kosmos wurde als unendlich ausgedehnt angesehen, und außerhalb dieses Kosmos gab es noch viele weitere Universen. Die Gottheit steht in diesem Zusammenhang für die äußerste Leere bzw. das höchste Nichts. Des Weiteren gehen Hindus davon aus, dass der Kosmos wie auch die Unendlichkeit aus der Leere geboren wurden. Die Welt war also aus dem Nichts entstanden, und dieses Nichts wiederzuerlangen, ist das größte Ziel der Hindus. Durch diese Ansichten ist es zu erklären, dass die indische Gesellschaft die Null ohne Weiteres akzeptierte und die Null sich in ihrem Gedankengut etablieren konnte.²¹

Die indischen Mathematiker taten dann einen sehr wichtigen Schritt: Sie veränderten die Rolle der Null derart, dass diese nun nicht länger nur als ein Platzhalter, sondern als eine Zahl angesehen wurde. Ein indischer Text aus dem Jahre 476 n. Chr. lässt darauf schließen, dass die indische Mathematik durch die griechische, ägyptische und babylonische Mathematik

beeinflusst wurde. Doch irgendwann um das fünfte Jahrhundert n. Chr. (konkrete Daten lassen sich in diesem Zusammenhang heutzutage leider nicht mehr eruieren) führten die indischen Mathematiker ein anderes Zahlensystem ein. Dieses ähnelte zwar dem der Babylonier, unterschied sich aber in einem wichtigen Punkt davon: Es war kein Sechziger-, sondern ein Zehnersystem. Auch der Übergang der Inder zu einem Stellenwertsystem lässt sich nicht genau datieren. Der älteste Hinweis stammt von einem syrischen Bischof, der im Jahre 662 davon berichtet. Es ist jedoch davon auszugehen, dass die Hindu-Zahlzeichen zu dieser Zeit bereits stark verbreitet waren. Ab dem neunten Jahrhundert wurde mit Sicherheit ein Symbol für die Null als Platzhalter im Zehnersystem verwendet. Das indische Zahlensystem ermöglichte mittels ausgeklügelten Tricks das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren ohne den Abakus, und man konnte damit sogar schneller multiplizieren als mit einem Abakus.

Das indische Zahlensystem wurde jedoch nicht nur für alltägliche Aufgaben verwendet. Im Gegensatz zu den Griechen waren die Inder bei Weitem nicht so sehr an ebenen Figuren, Kegelschnitten oder der Geometrie ganz allgemein interessiert. Sie verwendeten die Zahlen nicht nur dazu, Abmessungen vorzunehmen oder Anzahlen zu eruieren, sie sahen keine Quadrate in Quadratzahlen und auch keine Rechtecke im Produkt zweier verschiedener Zahlen. Bei den Indern hatten die Zahlen keine rein geometrische Bedeutung mehr. Sie erkannten das Wechselspiel von Zahlzeichen, und dies war der Ursprung der heutigen Algebra.²¹

Diese beachtliche Entwicklung ging also von der Null als flüchtiger Zustand auf einem Teil des Rechenbretts aus und setzte sich zu ersten Versuchen fort, das Verhältnis der Null zu anderen Zahlen zu beschreiben. Diese Beschreibungen nahmen schließlich die Gestalt von Gesetzen an, und das gesamte Zahlenverständnis veränderte sich. Um die Null in die Welt der Zahlen einzugliedern, musste zuerst verstanden werden, wie mit ihr addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden konnte, und genau diesen Fragestellungen gingen die indischen Mathematiker nach. BRAHMAGUPTA (* 598, † 668), ein indischer Mathematiker und Astronom, stellte Regeln für die Arithmetik mit negativen Zahlen und mit der Zahl Null auf, die weitgehend unserem modernen Verständnis entsprechen. Er behauptete, dass jede Zahl minus sie selbst null sei, und bemühte sich um Generalisierung bei der Addition. Seine Ausformulierung der Regeln für die Subtraktion lautet schließlich:

²¹ Vgl. SEIFE (2002, S. 76–80)

„(...) eine negative Zahl von null subtrahiert wird positiv; eine positive wird negativ; eine negative minus Zero ist negativ; eine positive ist positiv; null: nichts.“ (KAPLAN 2001, S. 83)

Dies formuliert der indische Mathematiker BHĀSKARA (* 1114, † 1185) fünf Jahrhunderte später um:

„Bei der Addition oder Subtraktion mit Zero bleibt die Menge, ob positiv oder negativ, gleich. Aber von Zero subtrahiert, kehrt sie sich um.“ (KAPLAN 2001, S. 83f)

MAHĀVĪRA, ein indischer Mathematiker des neunten Jahrhunderts, war der Meinung, dass *„die Null die schützende Färbung dessen annahm, was ihr begegnete.“* Weiters beschrieb er, dass

„eine Zahl mit Null multipliziert null gibt und dass diese Zahl unverändert bleibt, wenn null (...) von ihr abgezogen wird.“ (KAPLAN 2001, S. 84)

Dieser Meinung waren auch BRAHMAGUPTA und BHĀSKARA, doch betreffend das Thema der Teilung durch null waren sie sich uneinig. BRAHMAGUPTA versuchte $0/0$ und $1/0$ zu berechnen, doch er scheiterte und meinte fälschlicherweise, dass null geteilt durch null gleich null sei. Beim Bruch $1/0$ kam er auf überhaupt keine Lösung, und im zwölften Jahrhundert äußerte BHĀSKARA zu diesem Problem Folgendes:

„Dieser Bruch, dessen Nenner eine Null ist, wird eine unendliche Größe genannt.“ (SEIFE 2002, S. 83)

Dies erklärte er mit den Worten:

„Es ergibt sich keine Änderung, wieviel man auch hinzufügt oder abzieht – so wie sich auch beim unendlichen und unwandelbaren Gott nichts verändert.“ (SEIFE 2002, S. 83)

Die indischen Mathematiker erkannten zu dieser Zeit also noch nicht, dass beim Rechnen mit reellen Zahlen eine Division durch null nicht möglich ist, weil eine solche Division kein eindeutiges Ergebnis hat.

Die Hindus führten jedoch auch weitere Operationen mit der neuen Zahl aus. Sie beschrieben z.B., dass $0^2 = 0$ und $\sqrt{0} = 0$ ist. Des Weiteren beschäftigten sie sich aber auch mit irrationalen und negativen Zahlen. Besonders die negativen Zahlen waren für die Inder sinnvoll und traten bei ihnen auch zum ersten Mal auf. Beachtlich ist in diesem Zusammenhang, dass sie die negativen Zahlen sogar in ihre Divisionsregeln (die bis heute noch gelten) miteinbezogen haben.²²

²² Vgl. KAPLAN (2001, S. 81–88) und SEIFE (2002, S. 82f)

Summa summarum ist die Null also zu einer eigenständigen Zahl herangereift, die einen bestimmten Wert und einen angestammten Platz auf der Zahlengerade hat. Sie musste genau zwischen plus eins und minus eins verortet sein, denn alles andere hätte keinerlei Sinn ergeben. Interessant ist in diesem Zusammenhang auch, dass bereits damals die Null nicht mehr rechts von der Neun platziert werden durfte (so wie beispielsweise auf den heutigen Computertastaturen). Die Sprache der Arithmetik und der Algebra war also im Begriff, sich zu entwickeln, und der hemmende Abstand zwischen den Zahlen und der Null verschwand, als sich die Aufmerksamkeit vom Wesen der Zahlen auf deren Verhalten verlagerte.

Der tatsächliche Wechsel der wissenschaftlichen Grundauffassung ereignete sich zwischen 500 und 1500 n. Chr., als die Zahlen nicht länger Objekte beschrieben, sondern selbst zu solchen wurden. Dem folgte auch der Erwerb von Adjektiven für die Zahlen (wie z.B. positiv, negativ, natürlich, rational).²²

Ein starker Einfluss Indiens lässt sich auch in Südostasien ausmachen. Dort finden sich Steininschriften, von denen einige den Khmer in Kambodscha und den Cham in Vietnam zuzuordnen sind. Diese alten Zivilisationen Indochinas und Indonesiens wurden seit den ersten Jahrhunderten n. Chr. sehr stark von Indien beeinflusst, und ihre Steininschriften sind in ihren Volkssprachen Altmalaiisch und Altjavanisch verfasst. Interessanterweise werden dabei gleichzeitig zwei verschiedene Arten von Zahlschriften verwendet. Für das Zählen im Alltag wurden zum einen die Zahlen in der Eingeborenensprache benutzt – diese Zahlen wurden also einfach in Worten ausgedrückt. Zum anderen haben die Khmer oftmals Ziffern ihres einheimischen Ziffernsystems verwendet, welches auf Basis 20 beruht und dem additiven Prinzip folgt. Die verschiedenen Ziffern können als graphische Varianten der Ziffern indischen Ursprungs gesehen werden, die von den Völkern Südostasiens adaptiert wurden. Belegt ist heutzutage der große Einfluss der indischen Astronomen auf die alten Zivilisationen Südostasiens, denn die Gelehrten der Khmer, Cham, Malaier und Javaner waren gänzlich auf die indische Kultur hin ausgerichtet. Für die Wiedergabe eines Datums wurden jedoch die Namen der Zahlen in Sanskrit verwendet. Mit der Zeit wurden die Zahlen in Sanskrit durch eine dezimale Zahlschrift mit Positionssystem und der Null ersetzt, deren Verwendung ab der zweiten Hälfte des siebten Jahrhunderts in Kambodscha und Sumatra und ab dem neunten Jahrhundert bei den Cham bezeugt werden kann. Manchen geschichtlichen Belegen zufolge müssten die Null und das Positionssystem in Indochina und auf dem Malaiischen Archipel also zwei Jahrhunderte früher als in Indien selbst existiert haben. Es ist jedoch davon auszugehen, dass diese

bereits in den indischen Kolonien verwendet wurden, sodass sie in Indien in einer noch früheren Epoche existiert haben müssen.²³

Die Bewohner der Insel Java beispielsweise verwendeten lange die Kawi-Schrift (eine altjavanische Schrift, die nachweislich mindestens seit dem achten Jahrhundert verwendet wurde), in welcher das Positionssystem und die Null folgendermaßen wiedergegeben wurden:

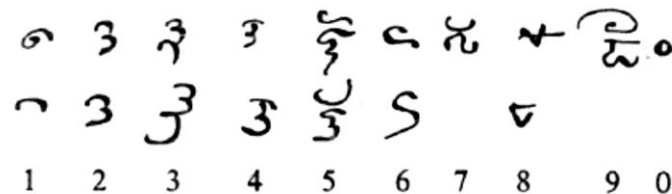


Abbildung 14: Kawi-Schrift

Später wurden diese Ziffern schließlich durch folgende Buchstaben bzw. Buchstabengruppen ersetzt, wobei die indische Schreibweise der Null beibehalten wurde:

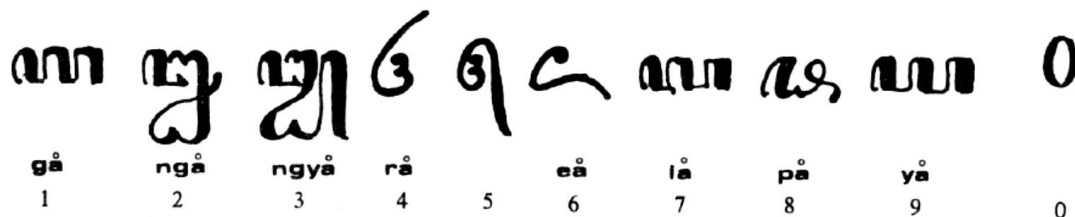


Abbildung 15: Zahlzeichen der Bewohner von Java

Die Vorteile der Null und eines dezimalen Positionssystems waren nicht zu übersehen, und die Gelehrten und Mathematiker, die mit ihren indischen Kollegen in Verbindung standen, erkannten dies früh. So kam es schließlich dazu, dass man die Verwendung der eigenen, unvollkommenen Zahlschriften aufgab und zur Methode der Inder wechselte bzw. sich von dieser beeinflussen ließ. Dies geschah zum Beispiel auch bei den chinesischen Mathematikern.²⁴

1.2.4 China

Die chinesischen Gelehrten verwendeten oftmals eine Zahlschrift, die „suan zı“ genannt wird und sich aus waagrechten und senkrechten Strichen zusammensetzt. Es handelt sich dabei um ein dezimales Positions- und Stellungssystem, welches sich unabhängig von äußeren Einflüssen entwickelt hat. Der Wert einer Ziffer wird in diesem System lediglich durch die Stelle in

²³ Vgl. IFRAH (1987, S. 491–493)

²⁴ Vgl. IFRAH (1987, S. 501, 511)

der Zahlenfolge bestimmt. Unsere heutige Zahlschrift zeichnet sich unter anderem dadurch aus, dass sie aus einer Reihe von neun Ziffern besteht. Das chinesische Ziffernsystem umfasste jedoch zwei Reihen: Die erste Reihe geht dabei von senkrechten Strichen aus



und die zweite Reihe von waagrechten.



Abbildung 16: Chinesische Reihen der Strichziffern

Zu Beginn der Verwendung dieser Zahlschrift konnten entweder nur die erste Reihe oder nur die zweite oder beide verwendet werden, um zusammengesetzte Zahlen darzustellen. Da es jedoch zu zahlreichen Zweideutigkeiten bei den Darstellungen kam, wurden seit der Han-Dynastie (von 206 v. Chr. bis 220 n. Chr.) die Ziffern beider Reihen abwechselnd verwendet. Die Einheiten ungerader Ordnungen wurden durch die Strichziffern der ersten Reihe, diejenigen gerader Ordnungen durch die Strichziffern der zweiten Reihe (bzw. umgekehrt) dargestellt.

Besonders bedeutend war dieses System deswegen, weil die chinesischen Mathematiker jener Zeit die Zahlen mittels kleiner Stäbchen aus Elfenbein oder Bambus bildeten und in den Quadraten eines Pflasters, auf einem Schachbrett oder auf einem Rechentisch platzierten. Felder fehlender Einheiten wurden dabei einfach freigelassen. Schließlich wurden diese Arten der Rechenbretter weggelassen, denn da die chinesischen Gelehrten über Jahrhunderte keine Null kannten, kam es zu zahlreichen Verwechslungen. Bei der Verschriftlichung der Zahlen genügte die bloße Freilassung einer Stelle nämlich nicht, um Missverständnisse zu vermeiden.

So war es im achten Jahrhundert wiederum der Einfluss indischer Mathematiker, der die chinesischen Gelehrten dazu brachte, einen kleinen Kreis einzuführen, um fehlende Einheiten zu symbolisieren. Nun stand dem Fortschritt der chinesischen Mathematik nichts mehr im Wege,

und sie konnten arithmetische und algebraische Gesetze über ganze Zahlen, Brüche und irrationale Zahlen entwickeln.²⁵

Beispiele für die Verwendung der Null wären unter anderem folgende:

○ 1 ; 0 -----> 10 ○ 2 ; 0 -----> 20 ≡○ 7 ; 0 -----> 70	○ 1 ; 0 ┐ 6 ; 9 ≡ 2 ; 9 -----> 106 929	≡┐ 1 ; 4 ; 7 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ○○○○○ -----> 1 470 000
1 7 4 -----> 174 = ┐ 3 2 7 -----> 327	┐ ≡ 6 5 4 -----> 654	— ┐ — ≡ ┐ 1 9 5 5 1 1 9 6 8 0 -----> 1 955 119 680

Abbildung 17: Beispiele für die Verwendung der Null im System chinesischer Strichziffern

1.2.5 Die arabischen Ziffern und Europa im Mittelalter

Das Mittelalter umfasst in der europäischen Geschichte etwa die Epoche zwischen dem 6. und 15. Jahrhundert. Speziell im Frühmittelalter litten große Teile Westeuropas vor allem unter dem Untergang des Römischen Reiches, während der Osten aufblühte. Es erhob sich im 7. Jahrhundert der Islam als neue Religion, welche sich infolge der arabischen Eroberungen ausbreitete und im Zuge dessen auch die Null von den Indern übernahm – und Europa die Null dann vom Islam.

Bereits um 700 erstreckte sich der islamische Machtbereich im Osten bis zu den Hindus und im Westen bis ins heutige Algerien, bevor er seinen Eroberungszug dann bis Spanien fortsetzte und sogar bis nach Frankreich ausdehnte. Anschließend wurde auf dem Weg nach China auch noch Indien erobert, wo die islamischen Gelehrten die indischen Zahlzeichen kennenlernten. Dort trafen sie auch auf die Null der Stellenwertschreibung, die sie bis 773 gemeinsam mit anderen Hindu-Zahlen nach Bagdad brachten. Anschließend kam es zur Übersetzung vieler Schriften ins Arabische. So wurde die Null in Indien zum Beispiel *śūnya* genannt, was

²⁵ Vgl. IFRAH (1987, S. 428–434)

sich im Arabischen dann zu *ṣifr* entwickelte. Europäische Gelehrte verwandelten später das arabische Wort *ṣifr* in das lateinisch klingende Wort *zephyrus*, was den Ursprung des Wortes Null in den romanischen Sprachen sowie im Englischen bildet.

Im neunten Jahrhundert gründete der KALIF AL-MAMUN in Bagdad das Haus der Weisheit als Treffpunkt für Gelehrte, und einer der ersten dort ansässigen Gelehrten war der Mathematiker MOHAMMED IBN MUSA AL-CHWARISMI. Dieser verfasste mehrere bedeutende Bücher, und durch sein Werk „*Über das Rechnen mit indischen Ziffern*“, welches auf das Jahr 825 zurückgeht, konnte sich das hinduistische Zahlensystem in der arabischen Welt schnell durchsetzen und verbreiten. Interessant ist in diesem Zusammenhang auch, dass, obwohl die Araber die Ziffern von den Indern lediglich übernommen hatten, diese in Europa stets arabische Ziffern genannt wurden. Zur Zeit der Entstehung dieses Werkes war Europa jedoch noch sehr weit von der Akzeptanz der Null entfernt. Die islamische Welt war hingegen stark von den Lehren ARISTOTELES‘ geprägt und musste diese zuerst überwinden, um die Akzeptanz der Null zu ermöglichen.

Genau dies tat sie, denn als die Null in den arabischen Ländern nach und nach bekannt wurde, nahm man sie bereitwillig an und lehnte die Lehren des ARISTOTELES ab. Anstelle dessen griffen die islamischen Gelehrten die Vorstellungen der Atomisten auf – jener Denkrichtung, die davon ausging, dass die Materie aus Atomen bestehe und zwischen diesen Teilchen ein Vakuum herrsche, damit die Atome eine Bewegung vollziehen konnten. Da nun die Null eingeführt war, wurde die Leere zu einer vertretbaren Idee, und die Muslime glaubten, dass Gott den Kosmos aus der Leere geschaffen habe.²⁶

Eine derartige Entwicklung machte auch das jüdische Volk durch. Dieses war im frühen Mittelalter in Spanien sowie im Nahen Osten beheimatet und folgte den aristotelischen Lehren. Man lehnte den Glauben an die Leere und an die Unendlichkeit ab, doch die aristotelischen Philosophien widersprachen der jüdischen Theologie. So kam es dazu, dass der Rabbiner MAIMONIDES im zwölften Jahrhundert die semitische, östliche Bibel mit der griechischen, westlichen Philosophie in Einklang bringen wollte. Von ARISTOTELES hatte MAIMONIDES zwar den Beweis für die Existenz Gottes im Sinne des ersten Bewegers der Sphären, die den Kosmos umgeben, gelernt, doch der rabbinischen Tradition zufolge musste er nun den biblischen Bericht von der Schöpfung des Universums aus der Leere annehmen. Dies widersprach den Lehren des ARISTOTELES, und so erklärte MAIMONIDES den Beweis von ARISTOTELES für fehlerhaft. Weiters erklärte er, dass der Schöpfungsakt vom Nichts ausgegangen sei – und somit war die Leere nichts Verdammenswertes mehr.²⁶

Ein ähnlicher Kampf fand auch in der christlichen Welt statt, denn auch während die Christen gegen die islamische Vorherrschaft kämpften (im neunten Jahrhundert unter der Herrschaft KARLS DER GROSSEN bzw. vom elften bis zum dreizehnten Jahrhundert während der Kreuzzüge), wurden islamische Ideen nach Europa getragen. Die arabische Erfindung des Astrolabiums beispielsweise wurde als nützliches Werkzeug angesehen, da man mit diesem unter anderem auch bei Dunkelheit die Uhrzeit bestimmen konnte. Vorerst keinen großen Anklang fanden jedoch die neuen Zahlen (eine Version der arabischen Ziffern noch ohne die Null). Um einen wichtigen Schritt in Richtung Einführung der Null zu machen, brauchte es im Jahre 1277 den Bischof von Paris, ÉTIENNE TEMPIER. Dieser berief eine Versammlung von Gelehrten ein, um die aristotelischen Lehren zu diskutieren bzw. zu kritisieren. So meinte er unter anderem bezüglich dieser Lehren, dass Gott sehr wohl ein Vakuum schaffen könne, wenn er es wolle, und daher durfte es plötzlich die Leere geben. Gott müsse – TEMPIERS Erläuterungen zufolge – nämlich die aristotelischen Lehren nicht einhalten, wenn er dies nicht möchte. Die Kirche folgte daraufhin zwar noch einige Jahrhunderte den Lehren ARISTOTELES‘, aber deren Fundament bröckelte bereits.²⁶

Der Mann, dessen Arbeiten schließlich die größte Wirkung im Hinblick auf die Einführung der Null in Europa hatten, war LEONARDO VON PISA. Als Sohn eines italienischen Kaufmanns und besser bekannt unter dem Namen FIBONACCI reiste er in den letzten Jahren des zwölften Jahrhunderts als Kaufmann durch Ägypten, Syrien, Griechenland, Sizilien und die Provence. Auf diesen Reisen konnte er vieles beobachten, untersuchen und vergleichen. So lernte er unter anderem die Mathematik von den Muslimen und kannte daher die arabischen Ziffern – inklusive der Null. Im Jahr 1202 veröffentlichte er sein Werk „*Buch des Abakus*“ („*Liber Abaci*“), welches jedoch nicht vom Rechenbrett bzw. vom Abakus handelt, sondern von den arabischen Ziffern. Er beschrieb dieses Zahlensystem als bestes Rechensystem, das er auf seinen Reisen angetroffen hatte, und erläuterte die Nützlichkeit der arabischen Ziffern bei komplizierten Berechnungen.²⁸

Vor der Einbürgerung der arabischen Ziffern benutzten Bankiers und Kaufleute zu dieser Zeit Rechenbretter in Verbindung mit Kerbhölzern (um beispielsweise Kreditsummen zu notieren) und als fortgeschrittene Variante das Zahlenbrett. Bei einem solchen Zahlenbrett wurde der

²⁶ Vgl. SEIFE (2002, S. 83–87, 89f)

Betrag auf eine Seite geschrieben und das Brett anschließend geteilt, und sowohl der Kunde als auch der Bankier bekamen ein Stück.

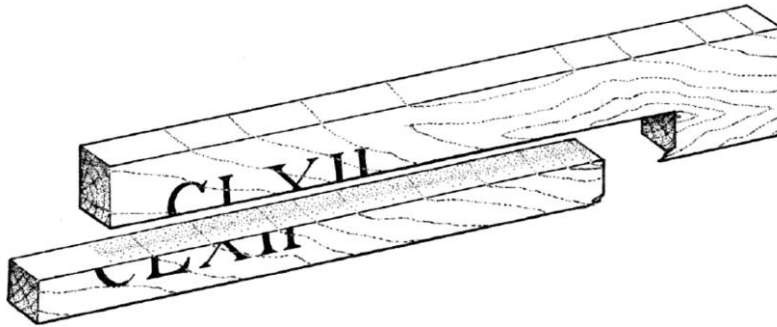


Abbildung 18: Ein Zahlenbrett

Die Verwendung der arabischen Ziffern ermöglichte den Kaufleuten nun den Verzicht auf diese Zahlenbretter, und so erkannten sie schnell deren Nutzen. Die Machthaber sprachen im Jahre 1299 in Florenz jedoch ein Verbot der arabischen Ziffern aus, weil diese angeblich leicht verfälscht werden könnten. Die italienischen Bürger verzichteten dennoch nicht mehr auf die Null und die arabischen Ziffern und setzten diese weiterhin ein. So kam es dazu, dass sich die Regierung dem Druck der Geschäftswelt beugen musste und die arabischen Ziffern erlaubt wurden. Anschließend wurden sie in ganz Europa verbreitet.

Es ist jedoch darin nicht nur ein Fortschritt zu erkennen, sondern im gleichen Zuge auch ein Rückschritt: Während BRAHMAGUPTA, BHĀSKARA und MAHĀVĪRA die Null in ihren Arbeiten bereits auf eine Stufe mit den anderen Zahlen stellten, hat diese Entwicklung die Reise in den Westen nicht überlebt. FIBONACCI schreibt nämlich über die neun indischen Zahlen und das Zeichen Null. Erst im Jahre 1300, in einem Werk mit dem Titel „*The Crafte of Nombrynge*“, werden zehn Zahlen genannt.

Auch der Kampf gegen die Lehren des ARISTOTELES war noch nicht gewonnen, denn mit deren Fall wäre auch der Beweis für die Existenz Gottes nichtig geworden. Somit musste diesbezüglich zuerst ein anderer Beweis gefunden werden.²⁸

In der Zwischenzeit stieg wegen des florierenden Handels die Nachfrage nach sorgfältigen Rechnungen und Aufzeichnungen für Geldgeschäfte. Der entscheidende Anstoß gelang schließlich etwa um das Jahr 1340, als das Bedürfnis nach einer exakten Buchführung aufkam. In diesem Zusammenhang kam es in Italien zur Erfindung der doppelten Buchführung, was eine Neudefinition der Null zur Folge hatte. Dabei sollten Soll und Haben in parallelen Spalten auf derselben Seite des Hauptbuches eingetragen werden. Ein ausgeglichenes Konto war nun daran zu erkennen, dass die Differenz der beiden null war. Auch Gewinne und Ver-

luste wurden in diesem Sinne doppelt geführt, indem ein zweites Erfolgskonto angelegt wurde, in welches mögliche Profite des ersten Kontos übertragen wurden. Die Null wurde hierbei demzufolge als Balancepunkt zwischen den negativen und positiven Mengen gesehen, und es kam zu einer Neudefinition der Null. Der Franziskaner LUCA PACIOLI (* um 1445 in der Toskana, † 1514 oder 1517 in Rom) war ein italienischer Mathematiker, der 1494 als Erster die doppelte Buchführung komplett beschrieb.²⁷ Dabei meinte er, dass die einzige Art, wie doppelte Buchführung funktionieren könne, darin zu sehen sei, allem einen numerischen Wert zuzuweisen. So wurde der Wert zum Gleichmacher, und das Paradigma, nach welchem Ziffern Zahlen waren, die Null aber ein Zeichen, fiel. Nun wurden sie alle als Zahlen angesehen.²⁸

Zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang auch der deutsche Rechenmeister ADAM RIES (* 1492 in Staffelstein, † 1559 in Annaberg). Er wuchs mit vielen (Halb-)Geschwistern auf, doch über seine Ausbildung ist heutzutage leider nichts bekannt. ADAM RIES hatte drei Töchter und fünf Söhne, wovon vier der Söhne in seine Fußstapfen traten. Sicher ist, dass er im Jahr 1518 in Erfurt eine Rechenschule betrieb und sein erstes Rechenbuch verfasste, welches sich ausschließlich mit dem damals üblichen „*Rechnen auf den Linien*“ beschäftigt.

Bekannt wurde er durch sein zweites Rechenbuch „*Rechnen auf der Linien und Federn*“, welches erstmals im Jahr 1522 erschien und bis ins 17. Jahrhundert mindestens 120-mal aufgelegt wurde. Es ist eine deutliche Erweiterung des ersten Buches, in welchem das schriftliche Rechnen – so wie wir es heute kennen – ausführlich beschrieben wird. Es wird auf die neuen Methoden des schriftlichen Rechnens beim Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren eingegangen, und danach werden auf 116 Seiten beispielhafte Anwendungen angeführt. Diese Aufgaben entstammen dem täglichen Leben und wurden mit Musterlösungen und Erklärungen angegeben.

Besonders erfolgreich war das Buch deshalb, weil ADAM RIES seine Bücher nicht – wie zum Großteil damals noch üblich – in lateinischer, sondern in deutscher Sprache verfasste. Dadurch weckte er auch das Interesse der Kaufleute und breiter Bevölkerungsschichten. Es war sein Bestreben, dass möglichst viele Menschen rechnen können und wissen, wie mit den Zahlen im Handel, im Gewerbe sowie beim Messen und Wiegen umzugehen ist.²⁹

²⁷ Vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Luca_Pacioli [Zugriff am 27.01.2016]

²⁸ Vgl. KAPLAN (2001, S. 118–122) und Seife (2002, S. 91–93)

RIES wurde lange Zeit nur als Rechenmeister des Volkes angesehen, und über seine eigentlichen mathematischen Leistungen war wenig bekannt. Er verfasste neben seinen Rechenbüchern jedoch auch ein großes Algebra-Werk, die „Coß“. Coß war im Mittelalter ein Zeichen für eine Unbekannte bzw. eine Variable. ADAM RIES bezeichnete sie auch als Radix, Wurzel oder Ding. Sein Werk „Coß“ stellt nun ein Bindeglied zwischen der mittelalterlichen beschreibenden und der heute bekannten analytischen Algebra dar. Dieses Werk konnte RIES jedoch nie in Druck geben, und daher gab er es als sein wertvollstes Erbe an seine Söhne weiter. Doch auch diesen gelang es nicht, den Druck zu bewerkstelligen, und das Buch galt lange Zeit als verschollen.

Heutzutage gilt ADAM RIES als der „Vater des modernen Rechnens“. Mit seinen Werken hat er entscheidend dazu beigetragen, dass die damals noch gebräuchlichen römischen Zahlen als unhandlich erkannt und durch die indisch-arabischen Ziffern ersetzt wurden. Sein Name ist aus der Redewendung „nach Adam RIESE“ allgemein bekannt, welche verwendet wird, um auszudrücken, dass etwas richtig gerechnet wurde.²⁹

1.2.6 Entwicklungen in der Renaissance und Neuzeit

Als Kernzeit der Renaissance gilt die europäische Kulturepoche des 15. und 16. Jahrhunderts. In diesem Zeitraum spielte die Null eine zentrale Rolle, denn die Leere zerstörte das aristotelische Fundament der Kirche und bereitete die wissenschaftliche Revolution vor.

Eine Aussage der aristotelischen Doktrin besagte, dass die Erde einzigartig und daher im Mittelpunkt des Kosmos sei. Des Weiteren sei sie die einzige Welt, die Leben beherbergen könne. Da die übrigen Planeten nämlich aus luftigem Material bestehen müssten, würden die Menschen im Himmelsgewölbe zwangsläufig auf die Erde herunterfallen. Die Annahme, dass auch auf anderen Planeten Leben existieren könnte, war diesen Ansichten zufolge also unsinnig. ÉTIENNE TEMPIER meinte seinerzeit jedoch, dass Gott jedes aristotelische Gesetz brechen könne, wenn er dies nur wolle. Demzufolge könnte er also auch Leben auf anderen Welten erschaffen, und es könnte Tausende anderer Erden geben.

NIKOLAUS VON KUES, ein berühmter, universal gebildeter deutscher Philosoph, Theologe und Mathematiker, ging nun davon aus, dass Gott genau dies getan haben musste und unendlich viele andere Welten geschaffen hatte. Durch diese Annahme verortete er die Erde nicht länger im Zentrum des Kosmos. NIKOLAUS KOPERNIKUS, der viel seiner freien Zeit der Astronomie,

²⁹ Vgl. <http://www.mathematik.de/ger/presse/ausdenmitteilungen/artikel/mdmv-17-2-117.pdf>

Mathematik und Kartographie widmete, setzte in der Zwischenzeit die Philosophie von KUES in die wissenschaftliche Theorie um, dass nicht die Erde, sondern die Sonne den Mittelpunkt des Kosmos bilde. Seine Ausführungen entsprachen zwar noch nicht ganz den heute bekannten Tatsachen, weil er von Kreisbahnen ausging, auf denen sich die Planeten bewegen sollten, aber die entscheidende Aussage war die über das heliozentrische Weltbild. Von da an drehte sich die Erde um die Sonne, und es gelang NIKOLAUS VON KUES und NIKOLAUS KOPERNIKUS, den Nussschalen-Kosmos des Aristoteles zu sprengen. Die Erde war nicht länger das Zentrum, und es existierte auch keine Hülle des Kosmos mehr.

Die katholische Kirche sah schweren Zeiten entgegen, und abweichende Vorstellungen, wie beispielsweise das Anzweifeln von ARISTOTELES' Lehren, wurden nicht geduldet. Obwohl es mehrere Jahrhunderte hindurch Annäherungen an andere Philosophien gab, kehrte man angesichts der Gefahr einer möglichen Spaltung zu den strengen aristotelischen Glaubenssätzen zurück. Der Nussschalen-Kosmos musste akzeptiert, die Leere abgelehnt werden, und die Null wurde als ketzerisch angesehen. Durch Unterdrückung wurde versucht, die alte Ordnung wieder herzustellen: 1534 wurde der Jesuitenorden gegründet, der diese Lehren sehr einflussreich vertrat. Ab 1543 wurden Protestanten auf Scheiterhaufen verbrannt und der sogenannte Index, ein Verzeichnis verbotener Bücher, verfasst. Trotz größter Anstrengungen schaffte es die katholische Kirche jedoch nicht, die neuen Lehren auszulöschen. Diese wurden mit der Zeit immer einflussreicher, und zu Beginn des 17. Jahrhunderts postulierte der Astronom und Theologe JOHANNES KEPLER, dass die Planeten die Sonne nicht auf Kreis-, sondern auf Ellipsenbahnen umrunden. Nun konnten mit bis dahin unvorstellbarer Genauigkeit die Bewegungen der Planeten beschrieben werden, und das heliozentrische Weltbild setzte sich trotz aller Widerstände seitens der Kirche durch. Somit war die aristotelische Philosophie dem Untergang geweiht.³⁰

Die Null und die arabischen Zahlen wurden in der Renaissance für das Rechnen unverzichtbar, und mit der Zeit waren sogar die Jesuiten zwischen den alten Lehren und neuen Philosophien hin- und hergerissen. Auch RENÉ DESCARTES (* 1596 in Frankreich, † 1650 in Stockholm), der seine Ausbildung an einem Jesuitenkolleg absolvierte, erfuhr diesen Zwiespalt. Einerseits konnte er die aristotelischen Lehren nicht völlig ablehnen, weil er die Leere fürchtete, andererseits stellte er jedoch die Null ins Zentrum der Zahlengerade. Er war ein französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler und ist heutzutage vor allem für seine Beiträge in der Geometrie bekannt. Die mathematische Erfindung der kartesischen Ko-

³⁰ Vgl. SEIFE (2002, S. 95, 99–105)

ordinaten geht auf ihn zurück. Ihm war schnell klar, dass er die Achsen des Koordinatensystems nicht mit der Zahl Eins beginnen konnte, und er verortete daher die Null im Achsenkreuz. Da er also Figuren und Zahlen in einen Zusammenhang brachte, gilt er als Begründer der analytischen Geometrie. Die europäische Geometrie und die östliche Algebra wurden von da an als eine Einheit gesehen. Geometrische Figuren konnten durch Gleichungen ausgedrückt werden, und die Null war als Zentrum des Koordinatensystems implizit Bestandteil jeder geometrischen Figur.

Gemäß seiner jesuitischen Ausbildung war DESCARTES jedoch auch bemüht, mit Hilfe der Null und der Unendlichkeit einen neuen Beweis für die Existenz Gottes zu finden. Als Naturwissenschaftler ging er davon aus, dass nichts aus dem Nichts geschaffen werden könne, und somit müssten alle Ideen schon bei der Geburt im Gehirn der Menschen vorliegen. Das Lernen besteht ihm zufolge folglich im Aufdecken der bereits eingepprägten Gesetze. Letztendlich müsse, weil die Menschen eine Vorstellung von einem unendlichen und vollkommenen Wesen in sich tragen, Gott existieren.

Trotz der Verwendung der Null in seinen Schriften bestritt DESCARTES jedoch die Existenz der Leere wie auch des Vakuums. Doch bereits im Jahre 1643 (also noch zu Lebzeiten DESCARTES‘) konnte TORRICELLI, ein Assistent GALILEIS, zum ersten Mal in der Geschichte ein Vakuum erzeugen und dieses auch aufrechterhalten.

Als Folge all dieser neuen Erkenntnisse und Erfahrungen waren die Lehren des ARISTOTELES geschlagen. Wissenschaftler fürchteten die Leere nicht länger, vielmehr begannen sie, diese zu untersuchen.³¹

Bezüglich der arithmetischen Eigenschaften hatten die Inder bereits geklärt, wie sich die Null beim Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren verhält. Offen war jedoch noch die Frage geblieben, was bei der Teilung durch null und konkret im Fall $0/0$ passiert, denn speziell dieser Ausdruck war noch völlig unbestimmt. Auch die Betrachtung des Verhaltens der Null als Exponent führte bei dieser Sachlage nicht weiter: Es konnte zwar festgestellt werden, dass $a^0 = 1$ für fast jedes a gilt, man fand jedoch keine Lösung für den Fall 0^0 . Selbst als für die Exponenten noch weitere Zahlenbereiche wie die negativen Zahlen oder Brüche zugelassen wurden, konnte man nicht feststellen, ob 0^0 nun 0 oder 1 ergibt. Man stellte lediglich die Regel auf, dass für fast jedes a gilt: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

³¹ Vgl. SEIFE (2002, S. 106–114)

Im 15. Jahrhundert machten die mathematischen Entdeckungen einen weiteren großen Schritt, als JOHN NAPIER, Baron von Merchiston nahe Edinburgh, seine sogenannten „Gleichungen mit nichts“ erfand. Dabei brachte er alle Terme einer Gleichung auf die linke Seite, sodass auf der rechten nur noch null stand. Demzufolge konnte er schließen, dass, wenn ein Produkt aus zwei oder mehr Faktoren gleich null ist, mindestens ein Faktor davon selbst gleich null sein musste. Waren Summen von Termen mit Variablen und Koeffizienten auf der linken Seite gegeben, formte er diese geschickt zu einem Produkt um. Dies funktioniert immer, wenn die gesuchte Variable eine rationale Zahl ist.

In weiterer Folge beschäftigten sich die Mathematiker nicht mehr so sehr mit der Frage, *was* die Addition und Multiplikation waren. Es war nun in ihrem Interesse herauszufinden, *wie* sie agierten. Daher sprachen sie nur von „einer Operation“ mit Zahlen, welche sie mit einem neutralen Symbol bezeichneten.³²

Im 17. Jahrhundert verlagerte sich das Interesse weg von Gleichungen hin zu Funktionen. Anstelle der Frage, *was* die Dinge sind, trat nun die Frage nach der Entstehung der Dinge in den Vordergrund.

Die Tangenten- und die Flächenberechnung waren aufgrund der Probleme mit der Null und der Unendlichkeit noch nicht zu bewältigen, da dies die Infinitesimalrechnung benötigt hätte. An dieser wurde in den folgenden Jahren viel gearbeitet, und einer ihrer Begründer war der im Jahre 1643 geborene ISAAC NEWTON (* 1642, † 1726). Seine Differenzialrechnung beruhte auf Fluxionen, welche man als die uns heutzutage bekannten Differenzialquotienten interpretieren kann. Er nannte die Variablen „Fluents“, was so viel wie „Fließende“ bzw. „Veränderliche“ bedeutet. Dazu kam es, indem er annahm, dass sich diese Variablen mit dem Fließen bzw. Vergehen der Zeit verändern würden. Ihre Fluxionen drückten dann die Änderungsgeschwindigkeiten aus. Seine Methode des Differenzierens bestand schließlich in einer Veränderung der Fluxionen um winzig kleine Bruchteile. Aufgrund der ungenügenden Zeit, die er ihnen ließ, konnten sie also nicht wirklich fließen. Unter Verwendung eines weiteren Tricks (das Weglassen eines Summanden und der unendlich kleinen Zeitspanne o) in seinen Berechnungen erhielt er mittels dieser Methode die richtigen Ergebnisse. Er konnte damit unter anderem die Steigung einer Tangente an jedem beliebigen Punkt einer Kurve berechnen. NEWTONS Fluxionsrechnung erschien jedoch recht zweifelhaft, weil sie letzten Endes auf einer verbotenen mathematischen Operation – der Division durch null – beruhte. Dem war jedoch entgegenzuhalten, dass seine Methode funktionierte und die Probleme der Tangenten-

³² Vgl. KAPLAN (2001, S. 128–130, 142–144, 153)

und Flächenberechnung löste. Um die Fläche unter einer Kurve zu berechnen, muss ja lediglich integriert werden, wobei die Integration in gewisser Hinsicht der Umkehrung der Differenziation entspricht. Die Infinitesimalrechnung entspricht nun der Gesamtheit der beiden Verfahren und wurde in weiterer Folge für die Mathematiker unentbehrlich. Mit der Infinitesimalrechnung hatten die Wissenschaftler nämlich universale Gesetze in der Hand, die nicht auf Spezialfälle beschränkt sind. Viele Gegebenheiten der Natur lassen sich durch Differenzialgleichungen ausdrücken, und mit der Infinitesimalrechnung hatte man nun das passende Werkzeug gefunden, um diese aufzustellen und zu lösen. Dabei setzt man eine Gleichung ein, die die jeweiligen Gegebenheiten beschreibt, und erhält als Ergebnis eine Gleichung, die gewissermaßen verschlüsselt die gesuchte Lösung enthält. Bemerkenswert ist, dass die Differenzialgleichung immer gilt und somit ein universales Gesetz darstellt. Trotz allem stand NEWTONS Methode jedoch auf einem wackeligen Fundament, und zwar wegen der Division durch null. In den Arbeiten seines großen Rivalen trat jedoch dasselbe Problem auf.

Bei diesem handelt es sich um GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (* 1646, † 1716), einem deutschen Philosophen, Mathematiker, Diplomaten, Historiker und politischen Berater der frühen Aufklärung. Er hatte bis etwa 1676 – vermutlich unabhängig von NEWTON – die Infinitesimalrechnung entwickelt, allerdings in anderer Form als NEWTON. Die infinitesimalen Größen, also jene Größen, die unendlich klein waren – kleiner als jede positive Zahl, die man angeben könnte, aber irgendwie doch größer als null –, bezeichnete NEWTON mit dem Kleinbuchstaben o , und sie verschwanden gegen Ende seiner Rechnungen immer auf wundersame Weise. Bei LEIBNIZ war dem nicht so. Er schrieb dafür dx , was eine winzig kleine Portion von x bezeichnete. In seinen Gleichungen blieben solch unendlich kleine Mengen unverändert, und die Ableitung von y nach x war bei ihm der Quotient dy/dx zweier unendlich kleiner Größen.

Die Infinitesimalrechnungen von NEWTON und LEIBNIZ waren gleichermaßen brauchbar, doch wegen der einfacheren Notation der Methode von LEIBNIZ (dy und dx konnten genauso wie normale Zahlen behandelt werden) wurde von den Mathematikern und Naturwissenschaftlern eher diese übernommen. Trotz aller Tricks wies jedoch die Differenzialrechnung von LEIBNIZ ebenso wie die von NEWTON die verbotene Division $0/0$ auf. Somit gründete die Infinitesimalrechnung zu dieser Zeit noch eher auf dem Glauben als der Logik.

Bezüglich dessen, wer denn nun der erste Entdecker der Infinitesimalrechnung ist, ist zu vermuten, dass NEWTON kurz nach 1660 auf die Idee dafür kam. Während seine Arbeit aber wahrscheinlich 20 Jahre lang unveröffentlicht geblieben war, entwickelte und publizierte LEIBNIZ seine eigene Variante.

Ein wichtiger Schritt, um das Mysterium um die Nullen aufzuklären, war die Regel von L'HOSPITAL, welche besagt, dass der Grenzwert eines Bruches unverändert bleibt, wenn Zähler und Nenner separat abgeleitet werden. GUILLAUME L'HOSPITAL (* 1661, † 1704) war ein französischer Mathematiker, nach welchem ein sehr wichtiger Satz – eben die „Regel von L'Hospital“ – benannt wurde, der aber eigentlich von JOHANN BERNOULLI entdeckt wurde. BERNOULLI war dessen Mathematiklehrer und konnte bereits früh mit der leibnizschen Infinitesimalrechnung umgehen. L'HOSPITAL erstellte aus den mathematischen Erkenntnissen, die ihm von BERNOULLI nähergebracht wurden, ein Lehrbuch, in dem er die Grundlagen der Infinitesimalrechnung, aber auch neue Ergebnisse beschrieb. Darunter war auch die sogenannte Regel von L'HOSPITAL, welche eine Möglichkeit liefert, um den Grenzwert eines Ausdrucks der Form $0/0$ auszuwerten. Aber auch Grenzwerte von Ausdrücken der Form ∞/∞ , 0^0 , 0^∞ oder ∞^0 konnten von nun an ermittelt werden. Einen Bruch der Form $0/0$ nennt man unbestimmten Ausdruck, weil dieser – abhängig von den Funktionen im Zähler und Nenner – jeden Wert annehmen kann. Von nun an wurde die Null nicht mehr als Feind, sondern vielmehr als Rätsel angesehen, welches man untersuchen konnte. In weiterer Folge wurde die Regel von L'HOSPITAL sehr bedeutsam. Das grundsätzliche Dilemma blieb jedoch bestehen, denn die Infinitesimalrechnung in den Methoden von NEWTON und LEIBNIZ beruhte letztendlich auf der Division durch null. Mit der Regel von L'HOSPITAL, die auf das Differenzieren zurückgreift, was aber auf Ausdrücken der Form $0/0$ beruhte, drehte sich die gesamte Argumentation im Kreis. Niemand konnte erklären, wie die unendlich kleinen Größen verschwanden und warum sich immer die richtige Lösung ergab, wenn man diese Größen zur richtigen Zeit verschwinden ließ. Auch die Division durch null störte niemanden, weil man mit der Infinitesimalrechnung alle Abläufe in der Natur erklären konnte. Somit hatte dieses Teilgebiet der Mathematik noch immer mehr mit Glauben und Vertrauen als mit Wissen zu tun.

Zur Zeit der Französischen Revolution wurde den Nullen in der Infinitesimalrechnung schließlich das Mystische genommen. Dieser Erfolg geht auf JEAN LE ROND zurück, der später den Nachnamen D'ALEMBERT annahm. Er erkannte, dass es wichtig ist, auch den Weg und nicht nur das Ziel eines Rechenweges oder Beweises im Auge zu haben, und führte den Begriff des Grenzwerts ein. Durch diese Errungenschaft konnte er die mit der Null im Zusammenhang stehenden Probleme der Infinitesimalrechnung lösen, und AUGUSTIN CAUCHY, BERNHARD BOLZANO und KARL WEIERSTRAß brachten seine Erkenntnisse später in eine strenge mathematische Form.

Es gelang die Feststellung, dass, wenn man in einem mathematischen Ausdruck auf die Größe unendlich trifft oder durch null teilen möchte, alle mathematischen Operationen zu sinnlosen

Ergebnissen führen. Setzt man jedoch ein Limes-Symbol vor beispielsweise eine Reihe unendlich vieler Summanden, trennt man den Vorgang vom Ziel und vermeidet den direkten Umgang mit der Unendlichkeit oder den Nullen. Folglich ist jede Teilsumme in einer Reihe mit einem Grenzwert endlich, und mathematische Operationen können auf jede solche Teilsumme angewandt werden. Dasselbe Prinzip funktioniert auch beim Differenzieren: Anstatt durch null zu dividieren, wird durch eine Zahl geteilt, die erst danach gegen null strebt. Es wird also eine erlaubte Division durchgeführt, und anschließend wird der Grenzwert des Bruches berechnet. Dieses Vorgehen entspricht der Forderung nach strenger Logik. Da der Begriff des Grenzwerts auf einem sehr sicheren Fundament steht, gilt dies ebenso für Ableitungen, die als Grenzwerte von Quotienten definiert sind. Somit hatte nun auch die Infinitesimalrechnung eine feste Grundlage, die Mystik war verschwunden, und die Logik eroberte das Gebiet der Mathematik.³³

1.3 Entwicklungen in der Neuen Welt

1.3.1 Maya

Historischen Belegen zufolge ist davon auszugehen, dass sich das Volk der Maya ungefähr im fünften Jahrhundert v. Chr. von anderen Indianern Amerikas abzuheben begann und sich bis ins dritte Jahrhundert n. Chr. etabliert hatte. Bewohnt wurden von diesem Volk unter anderem mehrere heutige mexikanische Bundesstaaten (wie z.B. Tabasco, Campeche, Yucatán), fast das gesamte guatemaltekische Hochland, Belíze, ein Teil von Honduras und der Westen von El Salvador. Nach dieser Frühzeit erreichte die Zivilisation der Maya ihren Höhepunkt und erbrachte dabei beachtliche Leistungen auf den Gebieten der Kunst, der Bildhauerei, der Architektur, des Schulwesens, des Handels sowie der Religion, der Mathematik und der Astronomie. Diese Ära ging nach Meinung verschiedener Forscher im Jahr 925 zu Ende, und zwischen dem neunten und zehnten Jahrhundert verließen die Maya aus völlig ungeklärten Gründen ihre religiösen Zentren und Städte. Die wahrscheinlichste Erklärung, die die Wissenschaft hierfür liefern kann, ist eine Revolte der Bauern gegen den Adel wegen ungleich verteilter Rechte zwischen den gesellschaftlichen Klassen. Mit Gewissheit kann dies jedoch bis heute von den Wissenschaftlern nicht bestätigt werden. Es kam rasch zum Verfall der Monumente der Maya, und im 16. Jahrhundert ging ihre Zivilisation vollständig unter.

³³ Vgl. SEIFE (2002, S. 128–131, 134–146, 147)

Neben ihren bemerkenswerten Werken hinsichtlich Kunst, Bildhauerei, Architektur und Gebäudetechnik erlangten sie vor allem auch wegen ihrer Leistungen auf intellektuellem Gebiet besonders großes Ansehen. Ihre kalendarischen Festsetzungen und Beobachtungen im Bereich der Astronomie waren extrem präzise, und auf dem Gebiet der Mathematik schufen sie eine echte Zahlschrift mit Positionssystem.³⁴

Die Maya verwendeten wie auch die Babylonier ein Stellenwertsystem, doch ihres war ein vigesimales: also ein System, das auf der Zahl 20 basiert. Zu dessen Entwicklung kam es, weil die Maya – wie alle mittelamerikanischen Völker – bereits lange davor nicht nur ihre zehn Finger zum Zählen benutzten, sondern auch noch zusätzlich ihre zehn Zehen. Interessant ist, dass die Maya zwei unterschiedliche Arten von Ziffern verwendeten.³⁵ Am häufigsten wurde ein einfaches graphisches System zur Darstellung benutzt, welches lediglich aus einem Punkt bzw. Kreis für die Zahl Eins, einem waagrechten Strich für die Zahl Fünf und weiteren Zeichen für die Potenzen von zwanzig bestand:³⁶

1	•	11	≡ oder •
2	• • oder ••	12	≡• oder • •
3	• • • oder •••	13	≡•• oder • ••
4	• • • • oder ••••	14	≡••• oder • •••
5	— oder	15	≡≡ oder
6	—• oder •	16	≡≡• oder •
7	—•• oder •	17	≡≡•• oder • •
8	—••• oder • •	18	≡≡••• oder • ••
9	—•••• oder • ••	19	≡≡•••• oder • •••
10	≡ oder		

Abbildung 19: Graphisches System der Maya

³⁴ Vgl. IFRAH (1987, S. 438–446)

³⁵ Vgl. SEIFE (2002, S. 23)

Ihr zweites Ziffernsystem bestand aus Glyphen, also bildhaften Zeichen (meist von Gesichtern):

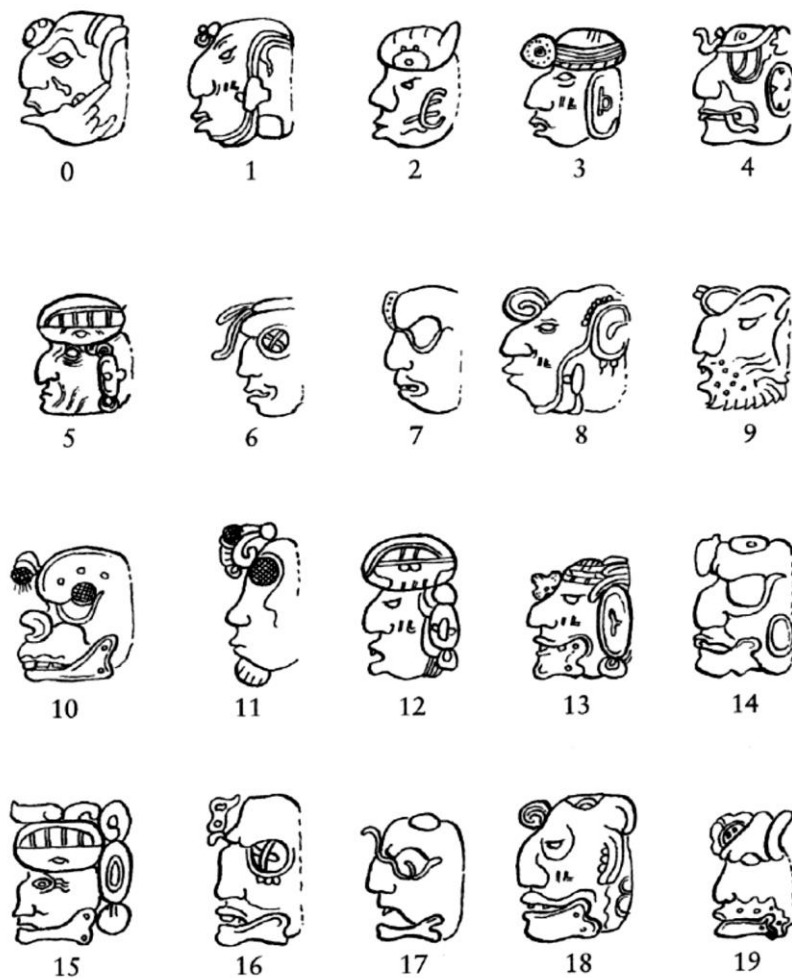


Abbildung 20: Glyphen der Maya

Besonders für die Darstellung der Null auf Pfeilern und Skulpturen gab es viele verschiedene Glyphen. Hierbei konnte es sich um Gesichter, manchmal ganze Figuren, eine halbe Blume, ein Schneckenhaus oder ähnliches handeln:



Abbildung 21: Verschiedene Glyphen der Null

Es bleibt natürlich die Frage zu klären, warum die Maya ein Zeichen für die Null in ihre Schrift aufnahmen, für welches sie keine konkrete Verwendung hatten. Heutzutage ist davon auszugehen, dass dies auf technische und religiöse Ansprüche sowie auf die ästhetischen Bedürfnisse der Bildhauer zurückgeht. Schriftzeichen und Götterbilder wurden wegen des rituellen Charakters der Stelen sehr sorgfältig ausgearbeitet. Hierbei kam der Ordnung der Glyphen eine große Bedeutung zu, und daher stellten die Bildhauer die Zeiteinheiten auf den Pfeilern stets in der Ordnung ihrer mathematischen Folge dar. Das Fehlen einer Zeiteinheit wurde demzufolge nicht geduldet, und die Lehrstelle musste mit einem Zeichen gefüllt werden. Vor diesem rituellen und ästhetischen Hintergrund gelang es dem Volk der Maya, eine Stellenwertschrift und die Verwendung einer echten Null zu entwickeln.³⁶

1.3.2 Inka

Die Inka herrschten zwischen dem 13. und 16. Jahrhundert über ein weite Teile Südamerikas umfassendes Reich, welches sich in seiner größten Ausdehnung vom heutigen Kolumbien

³⁶ Vgl. IFRAH (1987, S. 463, 468f)

über Ecuador, Peru und Bolivien bis in den Norden Chiles und Argentinien erstreckte. Zur Zeit der größten Ausdehnung um 1530 umfasste es ein Gebiet von rund 950 000 Quadratkilometern, und die Inka herrschten über 250 Völker und etwa neun Millionen Menschen. Das rituelle, administrative und kulturelle Zentrum war die Hauptstadt Qusqu (Cusco) im Hochgebirge des heutigen Peru.³⁷

Die Inka sprachen Quechua und verwendeten die Knotenschrift Quipu, die nur Ziffern ausdrückte. Quipu oder Khipu (Quechua: „Knoten“) ist eine Knotenschrift, die von den südamerikanischen Indios ab ca. 2500 v. Chr. bis zu den Inka verwendet wurde. Das Quipu war ein System für mathematische und statistische Aufzeichnungen, welche von besonders ausgebildeten Fachleuten – den sogenannten Quipucamayoc – beherrscht wurde. Diese waren hochgeachtete Staatsbedienstete, die alle Daten auf ihre Richtigkeit hin prüften. Mittels dieses Systems konnten Ernteerträge einzelner Verwaltungsbezirke des Inka-Reiches, die Anzahl der hergestellten Stoffe, die Ausbeute an Edelmetallen und Gold, die Bestände der Tierherden und ähnliches erfasst werden. Es konnten jedoch auch andere statistische Werte ermittelt werden, wie beispielsweise das Ausmaß der Streitkräfte oder Bevölkerungsstatistiken. Dies hatte unter anderem den Zweck, Steuerschulden und das Bevölkerungswachstum zu ermitteln. Interessant ist, dass ein Quipu wegen der nicht immer eindeutigen Zuordnung nie ohne mündliche Botschaft überbracht wurde.³⁷

Ein Quipu konnte unterschiedlich groß sein. Er bestand aus einer bis zu vier Meter langen dicken Hauptschnur, an die im rechten Winkel dünnere farbige Schnüre geknüpft wurden, welche das eigentliche Informationssystem darstellten.

Die Inka benutzten ein dezimales Stellenwertsystem und eine Vorstufe der Zahl Null: Am Hauptfaden waren farblich abgestufte Nebenfäden angeknüpft, die mit zehn verschiedenartigen Knoten versehen waren. Des Weiteren wurde zwischen Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern und Zehntausendern unterschieden. Hatte eine Stelle am Faden keinen Wert, so befand sich dort auch kein Knoten. Die unterschiedliche Bedeutung der Knoten resultierte aus der Fadenfarbe und -länge, dem Knotentyp sowie der vertikalen und horizontalen Position in diesem Gebilde, welches einem Vorhang ähnlich war. Eine gelbe Schnur stand für Gold, eine weiße für Silber, eine rote wurde für die Aufzeichnungen der Armee verwendet. Aber auch abstrakte Bedeutungen konnten die Knoten haben: beispielsweise weiß für den Frieden oder schwarz für Krankheit. Ob es Zeichen für Männer, Frauen oder Kinder gab, ist nicht überliefert.

Vor dem Knüpfen wurde die genaue Länge abgeschätzt, und verschiedene Fäden wurden auch mehrmals zu einer Schnur gedreht. Einzelne Fäden bestanden dabei aus Pflanzenfasern oder (Menschen-)Haaren, einige aus Wolle, die meisten aus Baumwolle. Wurde die Summe mehrerer Zahlen gebildet, so verband man die entsprechenden Schnüre durch eine weitere Schnur, auf der die Summe dargestellt wurde.³⁷

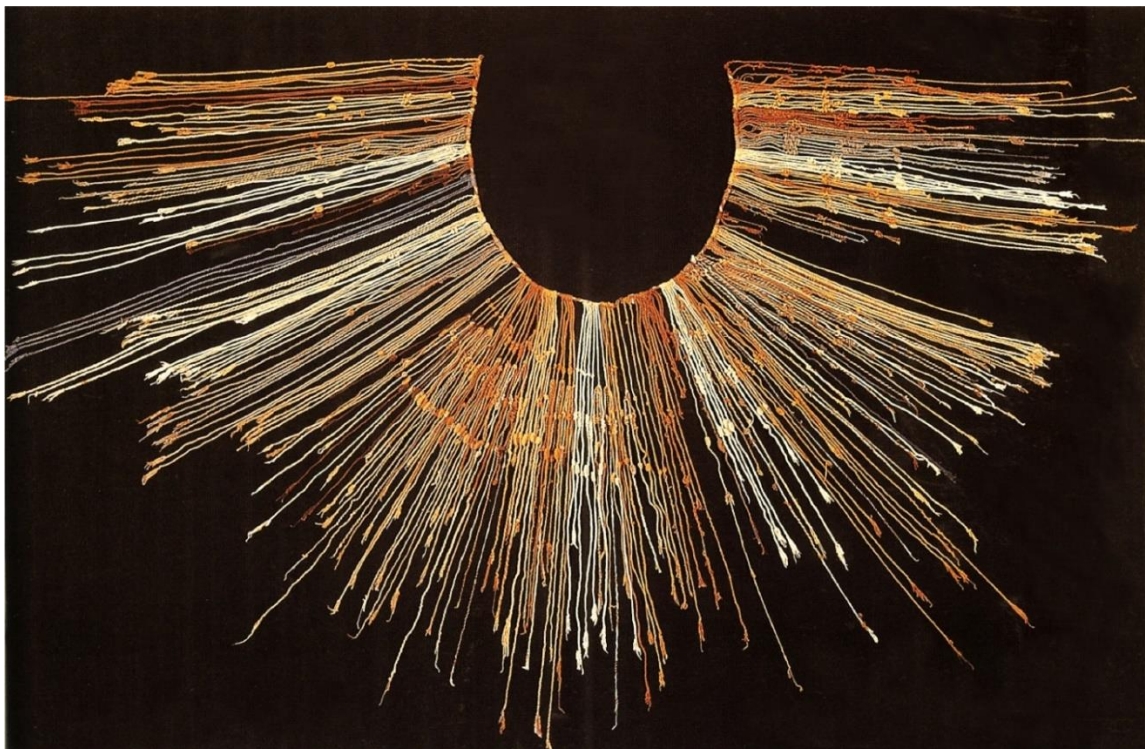
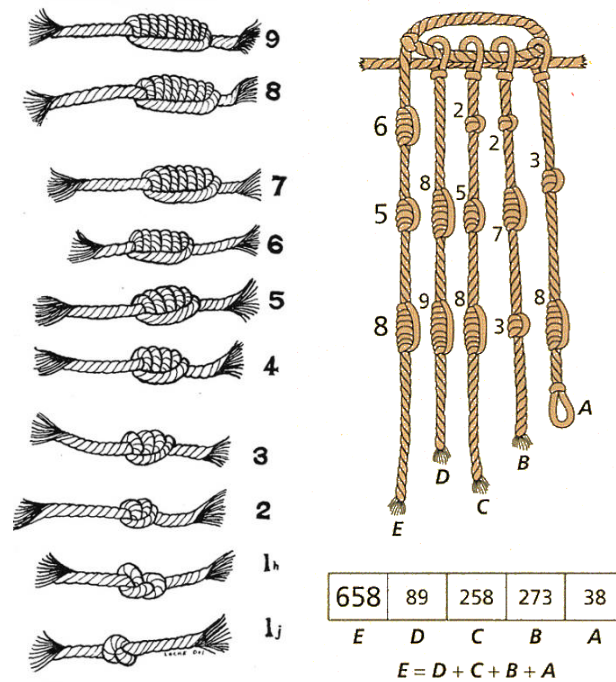


Abbildung 22: Beispiele für die Knotenschrift Quipu

Die meisten Quipus wurden schließlich von den spanischen Eroberern im 16. Jahrhundert zerstört. Die Knotenschrift gilt bis heute jedoch als ein grundlegendes Modell dafür, dass sich die Ursprünge der Schrift aus dem Rechnungswesen oder der Buchhaltung alter Kulturen entwickelt haben.³⁷

Alles in allem lassen sich in der sogenannten Neuen Welt also durchaus Entwicklungen unterschiedlichen Ausmaßes ausmachen: Während das Volk der Maya zwischen dem dritten und zehnten Jahrhundert eine echte Zahlschrift mit Positionssystem und sogar zwei unterschiedliche Arten von Ziffern entwickelte, beharrten die Inka zwischen dem 13. und 16. Jahrhundert auf ihrer Knotenschrift Quipu. Die Maya hatten viele verschiedene Glyphen für die Null, aber keine konkrete Verwendung dafür. Die Inka hingegen kennzeichneten eine Stelle ohne Wert lediglich durch das Nichtvorhandensein eines Knotens.

In beiden Kulturen ergab sich jedoch nicht die Notwendigkeit der Verwendung einer Null als Zahl, und somit kam es auch nicht zu weiterreichenden Entwicklungen.

1.4 Bedeutung und Vorkommen der Null in anderen wissenschaftlichen Disziplinen

Nachdem sich die indischen bzw. arabischen Zahlen und die Null auf dem Gebiet der Mathematik etabliert hatten und auch von der Gesellschaft sowie der Kirche akzeptiert wurden, konnten sie auch in anderen wissenschaftlichen Gebieten Einzug halten. Einige Beispiele hierfür sollen im Folgenden kurz dargestellt werden, um die Bedeutung der Null in den unterschiedlichsten Bereichen zu unterstreichen.

1.4.1 Geographie

Auf dem Gebiet der Geographie beispielweise wurde der Nullmeridian eingeführt. Beim Nullmeridian handelt es sich um einen halben Längengrad auf der Erdoberfläche im Gradnetz der Erde, der von einem geographischen Pol zum anderen verläuft. Dieser kann als Verbindungslinie aller Orte auf der Erde gesehen werden, an denen die Sonne zur gleichen Zeit den

³⁷ Vgl. http://www.indianerwww.de/indian/inka_kalender_schrift.htm, <https://de.wikipedia.org/wiki/Inka>, <https://de.wikipedia.org/wiki/Quipu> [Zugriff am 22.01.2016]

höchsten Punkt ihrer Tageslaufbahn am Himmel einnimmt, an denen also gleichzeitig Mittag ist. Von ihm aus wird die geographische Länge nach Osten und Westen gezählt. Vereinbarungsgemäß wird die geographische Länge im Sinne der Erdrotation positiv nach Osten gezählt (0° bis 360°). Verbreiteter ist jedoch die östliche Länge (0 bis 180° Ost, algebraisch positiv) und westliche Länge (0 bis 180° West, negativ). Als Abkürzungen werden O oder E für „Osten“ und W für „Westen“ verwendet. Das Symbol E (englisch für „East“, französisch „Est“) ist teilweise auch im Deutschen üblich.³⁸

Die Festlegung des Nullmeridians ist an sich willkürlich, er wurde aber durch eine internationale Vereinbarung während der Internationalen Meridiankonferenz 1884 durch Greenwich gelegt und wird daher oft auch als Greenwich-Meridian bezeichnet. Auf dieser internationalen Konferenz in Washington D.C. nahmen Vertreter aus 25 Nationen teil, und der Meridian wurde als Basis des internationalen Koordinatensystems eingeführt.

Vor der Festlegung auf einen internationalen Nullmeridian besaß nämlich fast jedes europäische Land seinen eigenen Nullmeridian, der meist der geographischen Länge der jeweiligen Hauptstadt bzw. deren Sternwarte entsprach. Mit dem zunehmenden internationalen Reiseverkehr (zu dieser Zeit besonders durch die Eisenbahnen) wurde schließlich eine Vereinheitlichung der bestehenden Systeme notwendig. Für den reibungslosen Betrieb nach Fahrplan war die Verwendung einer einheitlichen Zeit unumgänglich, denn bis dahin wurden lediglich die Ortszeiten genutzt, die in fast jeder Stadt unterschiedlich waren. Es wurde also zunehmend wichtig, eine genaue internationale Zeit zur Verfügung zu haben, welche als mittlere Ortszeit des Nullmeridians definiert wurde. Diese mittlere Sonnenzeit am Nullmeridian wurde maßgeblich für die Weltzeit (GMT, Greenwich Mean Time), die erst 1972 von der koordinierten Weltzeit (UTC) abgelöst wurde. Diese orientiert sich heutzutage nicht mehr an einer Ortszeit, sondern koordiniert die kontinuierliche Atomzeit mit der astronomisch gemessenen Universal Time, welche Unregelmäßigkeiten der Erdumdrehung und die Sonnenstände widerspiegelt.³⁸

Die Länge des Greenwich-Nullmeridians beträgt 20 003,9 Kilometer, und er durchquert folgende acht heutige Staaten auf Landgebiet: das Vereinigte Königreich, Frankreich, Spanien, Algerien, Mali, Burkina Faso, Togo und Ghana sowie das staatenlose antarktische Neuschwabenland und das südlichere Königin-Maud-Land.

³⁸ Vgl. <https://de.wikipedia.org/wiki/Nullmeridian>, https://de.wikipedia.org/wiki/Meridian_%28Astronomie%29 und <http://www.spektrum.de/news/warum-sich-der-nullmeridian-verschoben-hat/1361529> [Zugriff am 02.02.2016]

Außerdem durchquert der Nullmeridian folgende Gewässer: das Nordpolarmeer, die Nordsee, das Mittelmeer, den Volta-Stausee in Ghana und den Atlantischen Ozean einschließlich des Südpolarmeers.³⁸

Der heutige Standard ist nun nicht mehr an die Erdoberfläche gebunden, sondern orientiert sich an der Lage und am Maßstab eines zwei- oder dreidimensionalen Koordinatensystems, wobei als Bezugsfläche ein geeignetes Ellipsoid herangezogen wird. Meridiane sind bei genauer Berechnung nicht oberflächen-ortsfest, und daher verläuft der Nullmeridian ungefähr 102 Meter östlich der historischen Greenwicher „Touristen-Linie“ der alten Sternwarte Greenwich. Den Grund dafür wollen Forscher einer US-Behörde in einem Messfehler der Astronomen und Vermesser des 19. Jahrhunderts gefunden haben. In ihrer Veröffentlichung beschreiben sie, dass es zu einem systematischen Fehler bei der Ermittlung der Senkrechten gekommen sei. Diese Bestimmung wurde mit Hilfe eines quecksilbergefüllten Beckens als Wasserwaage vorgenommen, welches den Astronomen zeigte, wo der Erdmittelpunkt liegt. Allerdings musste dieses Becken für diese Aufgabe exakt senkrecht ausgerichtet werden und zeigt nur im gedachten Idealfall exakt auf den Mittelpunkt der Erde. In Wirklichkeit verzerren örtliche Schwerkraftfelder jedoch das Ergebnis, wozu es durch die bergige Landschaft und die Gesteinszusammensetzung kommt. Satelliten haben inzwischen diese Schwankungen in der Gravitation genauestens vermessen und legen einen Unterschied von 102 Metern in Richtung Osten nahe. Erst mit der Einrichtung moderner Messungen durch Satelliten, welchen der tatsächliche Erdmittelpunkt als Referenz zu Grunde liegt, konnten diese Verzerrungen also vermieden werden.³⁸

1.4.2 Physik

In der Physik wurde der absolute Nullpunkt definiert, der die theoretisch tiefste mögliche Temperatur bezeichnet. Er definiert den Ursprung der absoluten Temperaturskala und wird dementsprechend mit null Kelvin definiert, was $-273,15$ Grad Celsius oder $-459,67$ Grad Fahrenheit entspricht.

Die Temperatur eines Körpers wird durch die Bewegungsenergie seiner Atome bzw. Moleküle hervorgerufen. Je schneller sich die Teilchen bewegen, desto höher ist die Temperatur des Körpers, bzw. je langsamer sie sich bewegen, desto geringer ist dessen Temperatur. Der absolute Nullpunkt ist erreicht, wenn die Bewegungsenergie aller Teilchen gleich der sogenannten

Nullpunktsenergie ist. Gemäß dem dritten Hauptsatz der Thermodynamik ist der absolute Nullpunkt eine ideale Messgröße, welche nicht erreichbar ist. Reale Temperaturen können diesem jedoch beliebig nahekommen, und mittels Laserkühlung konnten Proben schon bis auf wenige Milliardstel Kelvin abgekühlt werden.³⁹

Zur Entdeckung des absoluten Nullpunkts trug seinerzeit der französische Physiker GUILLAUME AMONTONS bei. Er fand 1699 heraus, dass sich das Volumen einer Gasmenge linear mit ihrer Temperatur verändert. Da das Volumen eines Gases aber nicht negativ werden konnte, folgerte er die Existenz eines absoluten Nullpunkts, bei dem das Volumen der Gasmenge gleich null wäre. Durch Extrapolation seiner Messwerte schätzte er die Lage des Nullpunkts auf einen Wert von minus 248 Grad Celsius. Die in seiner Methode herangezogene Gesetzmäßigkeit der Volumenverkleinerung gilt jedoch nur für ideale Gase und nicht für Stoffe, die ihren Aggregatzustand ändern.

WILLIAM THOMSON entdeckte 1848 schließlich, dass nicht die Volumenverkleinerung, sondern der Energieverlust entscheidend ist. Hierbei ist es unerheblich, ob es sich um Gase oder feste Stoffe handelt, und er schlug daraufhin vor, eine neue, absolute Temperaturskala zu definieren. Diese Skala beginnt bei null, hat keine negativen Werte, und zu ihr ist die Volumenänderung proportional. Des Weiteren steigt sie so an, dass ein Temperaturunterschied von einem Kelvin jeweils einem Temperaturunterschied von einem Grad Celsius entspricht.³⁹

1.4.3 Geodäsie

In der Geodäsie – der Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche – wurde das Normalnull (abgekürzt NN oder N. N.) eingeführt. Dabei handelt es sich um die Bezeichnung für eine bestimmte Niveaufläche, die in einem Land als einheitliche Bezugsfläche bei der Ermittlung der Erdoberfläche vom mittleren Meeresniveau dient.

Vor drei Jahrhunderten wurde vom Magistrat der Stadt Amsterdam als standardisierter Pegel der mittleren Hochwasserlinie der Zuiderzee (ehemalige Meeresbucht in den Niederlanden) eingeführt. 1818 wurde dieser Pegel als Grundlage für die Höhenvermessungen in den Niederlanden festgelegt und bald als Bezugspunkt auch von vielen angrenzenden Ländern übernommen.⁴⁰

³⁹ Vgl. http://www.chemie.de/lexikon/Absoluter_Nullpunkt.html und https://de.wikipedia.org/wiki/Absoluter_Nullpunkt [Zugriff am 02.02.2016]

Die Preußische Landesaufnahme bezog beispielsweise 1877/78 ihre Daten auf den Amsterdamer Pegel. Im März 1879 bekam dann die Berliner Sternwarte eine Tafel mit dem Hinweis „37 Meter über Normalnull“. Die Höhenbezugsfläche des Normalnulls nähert den mittleren Meeresspiegel jedoch nur schlecht an, denn im Hochgebirge kann es zu Abweichungen von mehreren Dezimetern kommen. Außerdem kommt es bei der Bestimmung von Höhen neben den kleinen zufälligen Fehlern zu modellbedingten Abweichungen.

Die DDR hatte ihre Angaben auf den Kronstädter Pegel bei Sankt Petersburg bezogen, der etwa 14 Zentimeter über Normalnull liegt. In den 1980er-Jahren kam es in der Bundesrepublik Deutschland zu einer Umstellung des Höhensystems auf ein physikalisches Höhenmodell. Seit 1993 ersetzt das Normalhöhennull (NHN) das Normalnull im Netzwerk vermessener Höhen in Deutschland. Diese Umstellung der Höhenbezugsfläche erfolgte im Zuge der Zusammenführung der Höhennetze der alten und der neuen Bundesländer sowie der europaweiten Vereinheitlichung der Höhennetze.⁴⁰

Umgangssprachlich wird das Normalnull oft als Synonym für „über dem Meeresspiegel“ verwendet, fälschlicherweise jedoch auch für Gebiete außerhalb Deutschlands und Europas.

Die Normalhöhenpunkte in anderen Ländern orientieren sich an unterschiedlichen Bezugsflächen: in Osteuropa z. B. am mittleren Wasserstand des Pegels von Kronstadt (bei Sankt Petersburg), der 0,16 Meter unter NN liegt. Die deutsche Normalnullfläche für Höhenmessungen und Höhenangaben ist vom Nullpunkt des Amsterdamer Pegels abgeleitet. In Österreich beziehen sich die Höhenangaben auf eine Höhenmarke am Triester Pegel, der den mittleren Wasserstand der Adria wiedergibt und etwa 27 Zentimeter unter dem Amsterdamer Normalnull liegt. Die Schweizer verwenden einen Felsblock im Genfer See als Wasserstandsanzeiger des Mittelmeers, der ihren Höhenangaben zu Grunde liegt und dem etwa acht Zentimeter bis NN fehlen. Aus diesem Grund können die amtlichen Höhenangaben in den einzelnen Ländern voneinander abweichen. Diese Unterschiede ergeben sich aus der Tatsache, dass die Höhe des ruhenden mittleren Meeresspiegels nicht in allen Meeresteilen gleich ist.

Heutzutage wird also nicht mehr von „Meter über Normalnull“, sondern von „Meter über Normalhöhennull“ gesprochen. Dies ist auch die Grundlage für das United European Levelling Net (UELN), in dessen Rahmen die Höhensysteme der europäischen Länder vereinheitlicht werden sollen. „Nullpunkt“ des Systems ist wieder der Pegel in Amsterdam.⁴⁰

⁴⁰ Vgl. <https://de.wikipedia.org/wiki/Normalnull>, <http://www.wissen.de/lexikon/normalnull> und <http://www.spektrum.de/frage/wo-liegt-eigentlich-normalnull/690951> [Zugriff am 02.02.2016]

Ein Beispiel für die Notwendigkeit der Vereinheitlichung der Höhensysteme zeigt sich vor allem bei grenzüberschreitenden Bauwerken. So geriet beispielsweise die Hochrheinbrücke, eine Straßenbrücke, die den Schweizer und den deutschen Teil von Laufenburg am Hochrhein verbindet, in die Schlagzeilen, weil aufgrund eines Planungsfehlers bei der Bauausführung ein Höhenunterschied zwischen beiden Widerlagern entstanden war. Der Umstand des unterschiedlichen Höhenbezugs dieser beiden Länder (Deutschland bezieht sein Höhensystem auf den Amsterdamer Pegel, die Schweiz auf den Wasserspiegel des Mittelmeeres bei Marseille) war den verantwortlichen Planern bekannt und wurde auch berücksichtigt. Der errechnete Höhenunterschied von 27 cm wurde zwar beachtet, verdoppelte sich aufgrund eines Vorzeichenfehlers jedoch auf 54 cm. Dieser Fehler wurde während der Bauausführung bemerkt und konnte entsprechend frühzeitig beseitigt werden, was zu Korrekturmaßnahmen am deutschen Widerlager und Höhenangleichungen des Brückenüberbaus führte.⁴¹

1.4.4 Informatik

In der Informatik und speziell im Zusammenhang mit den Maschinenzahlen tritt oftmals eine vorzeichenbehaftete Null auf. Unter den Maschinenzahlen versteht man Zahlen, die im Computer in binärer Form gespeichert werden. Die positive Null (+0) und negative Null (−0) werden hierbei als zwei verschiedene Zahlen angesehen. Dies kann in manchen Fällen auch beim Datentyp Integer (ganze Zahlen) und bei den Gleitkommazahlen (reelle Zahlen) vorkommen. Des Weiteren wird die Darstellung −0 im wissenschaftlichen Umfeld manchmal für eine negative Zahl verwendet, die zu Null gerundet wurde.

Die Norm für binäre Gleitkommazahlen (IEEE 754) spezifiziert das Verhalten der positiven und negativen Null für zahlreiche Operatoren, wobei das Ergebnis immer auch von der verwendeten Rundungsmethode abhängt.

Bei numerischen Vergleichen sind die beiden Darstellungen der Null zwar identisch, doch bei einigen Berechnungen führen sie zu unterschiedlichen Ergebnissen und haben auch verschiedene Bitmuster. Bezüglich der Multiplikation und Division gelten die üblichen Regeln der Arithmetik. Bei der Addition und Subtraktion muss darauf geachtet werden, ob sich die Werte aufheben.⁴²

⁴¹ Vgl. <https://de.wikipedia.org/wiki/Hochrheinbr%C3%BCke> [Zugriff am 05.05.2016]

⁴² Vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Vorzeichenbehaftete_Null [Zugriff am 06.02.2016]

Ein weiteres Vorkommen des Begriffs der Null zeigt sich beim sogenannten Nullwert – einem Zustand, der in der Informatik das Fehlen eines Wertes kennzeichnet. Dabei werden zwei Arten der Null unterschieden: zum einen die Abwesenheit eines Wertes, weil dieser nicht existiert, und zum anderen die Abwesenheit eines Wertes, weil der Wert noch nicht bekannt ist. Der Nullwert entspricht also einem Wert bzw. einer Information und ist daher von der Zahl 0 verschieden. Auch sprachlich findet sich diese Unterscheidung wieder, denn der Nullwert wird durch die englische Aussprache von null ausgedrückt. Abzugrenzen ist der Nullwert jedoch grundsätzlich von der Zahl Null sowie von der leeren Menge. Der Nullwert ist nämlich weder als Zahl noch als Menge zu verstehen.⁴³

⁴³ Vgl. <https://de.wikipedia.org/wiki/Nullwert> [Zugriff am 07.02.2016]

Abschnitt 2

Schulbuchvergleich

Im Rahmen dieses Abschnittes soll ein Schulbuchvergleich betreffend die Null unternommen werden. In diesem Zusammenhang scheint es wichtig zu ermitteln, welche Vorstellungen die Schüler/innen bereits in der Volksschule von der Null entwickeln und wie sie mit dieser besonderen Zahl rechnen. Des Weiteren soll eruiert werden, wie diese Vorstellungen in die Sekundarstufe 1 weitergetragen werden und bei der Bearbeitung welcher Themen der Null im Mathematikunterricht eine besondere Bedeutung zukommt.

2.1 Volksschule

2.1.1 Verankerung im Lehrplan

Laut dem Bundesministerium für Bildung und Frauen besteht die Bildungs- und Lehraufgabe im Mathematikunterricht der Volksschulzeit in der Eröffnung folgender Möglichkeiten für die Schüler/innen:

- schöpferisch tätig sein
- rationale Denkprozesse anbahnen
- die praktische Nutzbarkeit der Mathematik erfahren
- grundlegende mathematische Techniken erwerben.

Der Unterrichtsgegenstand Mathematik wird dafür in die vier Teilbereiche „Aufbau der natürlichen Zahlen“, „Rechenoperationen“, „Größen“ sowie „Geometrie“ gegliedert und in der vierten Schulstufe noch um das Kapitel „Bruchzahlen“ erweitert.

Als Schwerpunkte des Bereiches „Aufbau der natürlichen Zahlen“ sind das Sichern des Verständnisses für Zahlen unter Berücksichtigung des Kardinal-, Ordinal-, Rechen- und Maßzahlaspekts sowie das Erarbeiten des Zahlenraumes bis 100 – ausgehend von gesicherten Zahlenräumen – zu sehen. Dies soll bis zum Ende der zweiten Schulstufe erreicht werden, und als eigens angeführter Unterpunkt ist im Lehrplan zu lesen:

„Entwickeln des Zahlbegriffs: Gewinnen des Zahlbegriffs im jeweiligen Zahlenraum einschließlich der Null (zB Zählen, Simultanerfassung)“

Nach der Entwicklung eines grundlegenden Zahlbegriffs soll eine Beschäftigung mit dem Auf- und Ausbauen des Zahlenraumes bis 100 erfolgen. Hierbei kommt das handlungsorientierte Darstellen und Durchgliedern des schrittweise zu erarbeitenden Zahlenraumes zu tragen, und die Schüler/innen sollen Zahlvorstellungen (z.B. durch Mächtigkeitsvergleiche, das Ordnen von Zahlen und das Bündeln) entwickeln. Des Weiteren kommt der Veranschaulichung von Zahlen (beispielsweise durch Zahlbilder, Mengendarstellungen, den Zahlenstrahl oder durch symbolische Darstellung) große Bedeutung zu, und auch die Orientierung im jeweiligen Zahlenraum erscheint wichtig. Weiters soll ein Verständnis für den dekadischen Aufbau geschaffen werden und das operative Durchforschen der Zahlen geübt werden (z.B. durch das Finden von Nachbarzahlen, das additive und multiplikative Zerlegen von Zahlen sowie das Vergleichen von Zahlen). Natürlich sind auch das Lesen und Schreiben von Ziffern bzw. Zahlen sowie das Unterscheiden von einer Ziffer und dem Stellenwert der Ziffer von großer Bedeutung.

Besonders in der Volksschule ist darauf zu achten, dass beim Erlernen der additiven (Addieren, Subtrahieren) und multiplikativen (Multiplizieren, Dividieren) Rechenoperationen vom Erfahrungsbereich der Schüler/innen ausgegangen wird. Vor diesem Hintergrund sind die additiven Rechenoperationen aus praktischem Handeln und bildhaftem Darstellen, wie z.B. Hinzufügen, Zusammenlegen, Vermehren, Vereinigen, Ergänzen, Wegnehmen, Abtrennen oder Vermindern, abzuleiten, zu interpretieren und zu begründen. Die multiplikativen Rechenoperationen sind dementsprechend aus Situationen, wie z.B. dem wiederholten Aneinanderfügen gleichmächtiger Mengen, Vervielfachen, wiederholten Ausgliedern gleichmächtiger Mengen, Verteilen oder Messen, abzuleiten, zu interpretieren und zu begründen.

Zur Bewältigung von Operationen dienen schließlich schriftliche Verfahren, wobei die Schaffung des Verständnisses für Rechenabläufe und Rechentechniken eine zentrale Rolle spielt. Des Weiteren ist Wert auf das Verständnis der Zusammenhänge zwischen den Operationen, auf das Erkennen zugrunde liegender Rechenregeln und auf das Finden von Lösungsstrategien zu legen.⁴⁴

Summa summarum muss der Entwicklung des Zahlbegriffs inklusive der Null im Unterrichtsgegenstand Mathematik eine zentrale Bedeutung eingeräumt werden. Bereits in der ersten Schulstufe muss der Auf- und Ausbau des Zahlenraumes beginnen und den Schüler/innen das Stellenwertsystem als Idee der fortgesetzten gleichschrittigen Bündelung nähergebracht werden. Sie sollen erkennen, dass dies erst durch die Erfindung eines Zeichens für das Fehlen

⁴⁴ Vgl. https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/VS7T_Mathematik_3996.pdf [Zugriff am 16.02.2016]

einer Ziffer – der Null – möglich wurde. Die Vorteile dessen sind klar darin zu sehen, dass wenige Zeichen für die Darstellung der Zahlen ausreichen und dass auch für die gesprochenen Zahlworte eine geringe Anzahl unterschiedlicher Formulierungen genügt.

2.1.2 Verschiedene Zahlbegriffe

Die Bedeutung der Null als Zahl wird besonders deutlich, wenn man dies aus der Perspektive der verschiedenen Aspekte des Zahlbegriffs betrachtet. Diese Aspekte sind in ihrer Entwicklung bei Kindern nicht immer streng voneinander getrennt und sollten dies auch nicht werden. Kinder lernen zunächst die verschiedenen Aspekte kennen und integrieren diese nur schrittweise zu einem Zahlenbegriff.

Die Frage „Wie viele?“ spielt auf den Kardinalzahlaspekt bzw. Anzahlaspekt an. Bei diesem kommt der Null im Gegensatz zu den restlichen natürlichen Zahlen eine besondere Rolle zu, denn sie ist der Ausdruck dessen, dass es nichts zu zählen gibt. Eine solche Vorstellung liegt also vor, wenn man grundsätzlich zählen könnte, die Handlung aber mangels Objekten beendet ist. Darüber hinaus wird im alltäglichen Sprachgebrauch die Null oftmals durch Synonyme ersetzt: Anstatt beispielsweise die Frage „Wie viele Äpfel sind noch im Korb?“ mit „0 Äpfel“ zu beantworten, wird häufig die Antwort „keine Äpfel“ gegeben.

Ähnlich verhält es sich beim Operatoraspekt, der im Zusammenhang mit der Frage „Wie oft?“ bzw. zur Beschreibung von Veränderungen verwendet wird. Dieser Aspekt ist eng mit der Multiplikation verbunden, und die Null ist bei dieser Auffassung das Zeichen dafür, dass nichts zu tun bzw. zu rechnen ist. Es werden im alltäglichen Gebrauch nicht null Äpfel in den Korb dazugelegt oder weggenommen werden. Ebenso wird die Frage „Wie oft warst du dieses Jahr schon in Urlaub?“ wohl niemand mit dem mathematischen Ausdruck „0-mal“ beantworten, sondern vermutlich eher mit der Umschreibung „gar nicht“.

Bezüglich des Ordinalzahlaspekts, welcher zum Nummerieren bzw. Ordnen von Gegenständen genutzt wird, findet die Null fast keine Verwendung. Als Beispiel könnten die Zahlwörter beim Rückwärtszählen eines Countdowns in Sekunden angesehen werden.

Beim Maßzahl- oder Skalenaspekt beziehen sich die Zahlen auf eine bestimmte Größe. So wird beispielsweise ein leeres Konto mit 0,00 € verbucht.

Im Zusammenhang mit dem Codierungsaspekt kommt der Null keine besondere Bedeutung zu. Bei Telefonnummern, Hausnummern, Postleitzahlen und ähnlichem spielt die Null dieselbe Rolle wie jede andere Zahl.

Natürlich kann mit der Null auch gerechnet werden, und somit kommt auch der Rechenzahlaspekt zum Tragen. Hierbei kommt der Null keinerlei inhaltliche Bedeutung zu. Die Bedeutung der Null wird lediglich über ihre formalen Verknüpfungen mit anderen Zahlen und über formale Regeln festgelegt.⁴⁵

Insgesamt zeigt sich also, dass es bezüglich der Aspekte des Zahlbegriffs im Vergleich zu anderen Zahlen einige Besonderheiten gibt und dass man im Alltag oftmals auch ohne das Zahlwort Null auskommt. Dies kann dazu führen, dass die Null nur als Ziffer und nicht als Zahl wahrgenommen wird, wodurch es zu grundsätzlichen Problemen beim Verstehen und Lernen von mathematischen Grundlagen kommen kann.

2.1.3 Die Einführung der Null in den Schulbuchreihen „Zahlenreise“ und „Eins Plus“

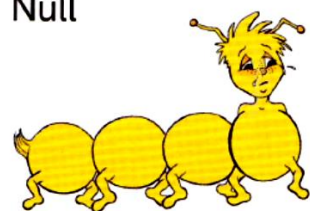
Die Schulbuchreihe „Zahlenreise“ wird sehr häufig im Mathematikunterricht an Volksschulen verwendet, und daher soll im Folgenden die Einführung der Null in diesen Werken analysiert werden.

Das Angebot für eine Schulstufe setzt sich stets aus einem Erarbeitungsteil und zwei Übungsteilen zusammen. Zusätzlich können auch CDs für jeden der Bände sowie ein Ferienheft erworben werden. Der Erarbeitungsteil ist in Farbe gestaltet, wohingegen die Übungsteile jeweils in Graustufen gedruckt werden. Die Reihenfolge der Aufgaben sowie die Aufgabenstellungen korrelieren klarerweise miteinander.

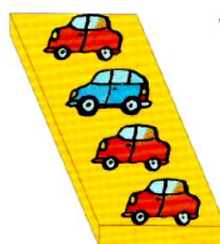
Im Erarbeitungsteil der ersten Schulstufe wird mit der Einführung der Zahlen Eins bis Vier begonnen und anschließend die Addition erklärt. Dann wird die Null eingeführt. Dies geschieht in diesem Buch durch die zeichnerische Gegenüberstellung von null Autos der Leitfigur Waupi im Gegensatz zu vier Autos einer anderen Raupe. Daran anschließend folgt die orthographische Darstellung der Null, welche die Schüler/innen auch direkt üben sollen. Ein leeres Gitternetz (keine eingezeichneten Punkte) sowie eine leere Säule daneben symbolisieren die Vorstellung der Null als nichts. In der abschließenden Abzählübung sollen dann noch alle bisher gelernten Zahlen wiederholt werden und die Null als „null Autos sind vorhanden“ beschrieben werden. Diese Übung kann auch im umgekehrten Sinn durchgeführt werden, indem die Zahlen Null bis Vier vorgegeben sind und jeweils der Anzahl entsprechend viele Objekte gezeichnet werden sollen. Konkret sieht dies alles im Buch folgendermaßen aus:

⁴⁵ Vgl. ABLEITINGER (VO Schulmathematik 1, WS 2014/15); <http://kira.dzlm.de/132> [Zugriff am 16.02.2016] und FAHSE (2014, S. 4–9)

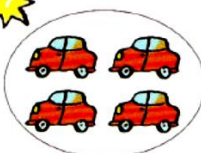
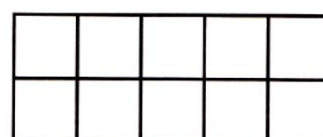
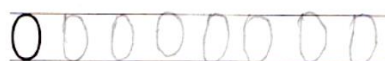
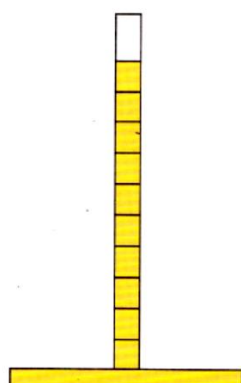
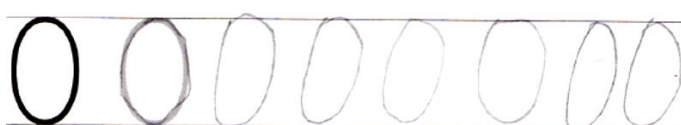
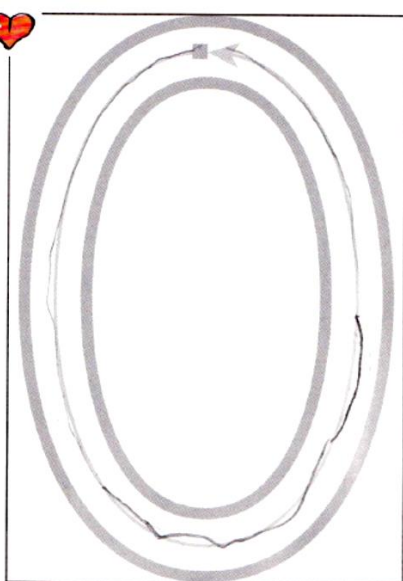
Null



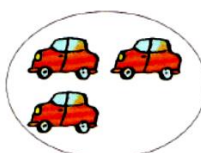
Waupi hat 0.



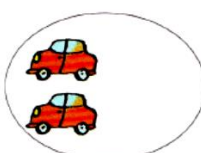
Raupi hat 4.



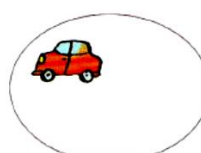
4



3



2



1



0

Abbildung 23: Einführung der Null im Werk „Zahlenreise 1 – Erarbeitungsteil“

Fortgesetzt wird im Erarbeitungsteil dann direkt mit der Subtraktion, wobei hier nur Rechnungen mit den Zahlen Eins bis Vier zu bearbeiten sind. Anschließend wird die Zahl Fünf gelehrt, und nun kommt auch zum ersten Mal die Null in einer Addition vor. Dies geschieht in Form der Rechnungen: $5 + \square = 5$ und $0 + \square = 5$. Auf den folgenden drei Seiten werden die Addition und Subtraktion sodann geübt, und die Häufigkeit des Auftretens der Null ist jener der anderen bis dahin gelernten Zahlen ähnlich.

Der zugehörige Übungsteil A ist im Aufbau dem Erarbeitungsteil ähnlich. Zuerst wird nochmals die orthografische Darstellung der Null in verschiedenen Größen geübt, und

anschließend sollen der Anzahl entsprechend viele Objekte in ein Rechteck gezeichnet werden. Dieses Rechteck bleibt bei der Zahl Null natürlich leer. Danach wird das Schreiben aller bisher bekannten Ziffern wiederholt, und es gibt eine Übung, um das Abzählen und das Schreiben der gelernten Zahlen zu trainieren.

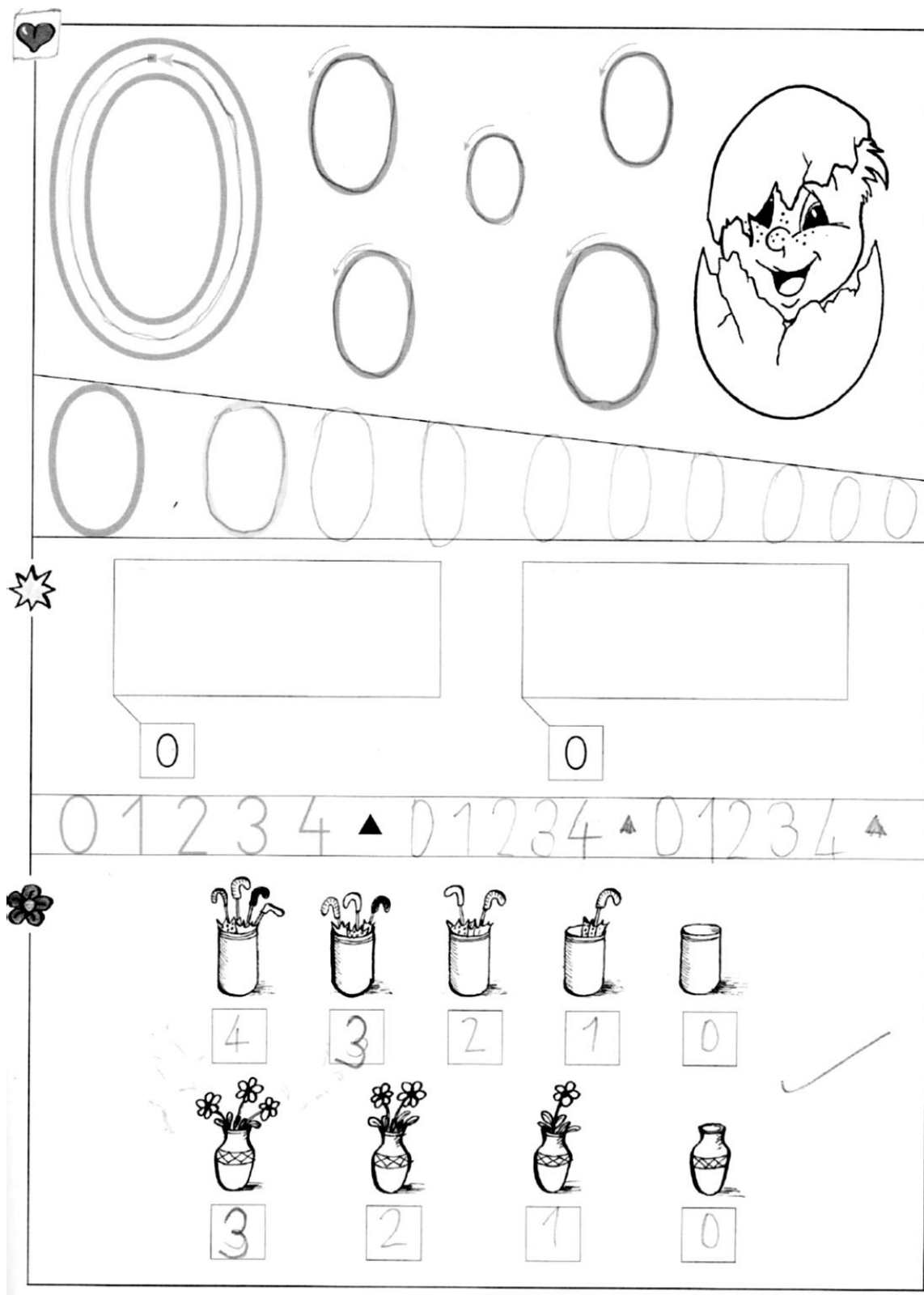


Abbildung 24: Einführung der Null im Werk „Zahlenreise 1 - Übungsteil A“

Im Gegensatz zum Erarbeitungsteil setzt der Übungsteil A nun jedoch nicht direkt mit der nächsten Ziffer fort, sondern bietet sofort die Möglichkeit der Durchführung von Additionen mit null. Diese sind in Formaten gestaltet, die den Schüler/innen bereits aus früheren Übungen bekannt sind:

$2 + 0 = \boxed{2}$

$4 + 0 = \boxed{4}$

$3 + 0 = \boxed{3}$

$0 + 1 = \boxed{1}$

$0 + 3 = \boxed{3}$

$0 + 4 = \boxed{4}$

$1 + 0 = \boxed{1}$

$0 + 2 = \boxed{2}$

$3 + 0 = \boxed{3}$

$2 + 0 = \boxed{2}$

$0 + 0 = \boxed{0}$

$0 + 4 = \boxed{4}$

$1 + 0 = \boxed{1}$
 $2 + 2 = \boxed{4}$
 $3 + 1 = \boxed{4}$
 $2 + 1 = \boxed{3}$
 $0 + 3 = \boxed{3}$

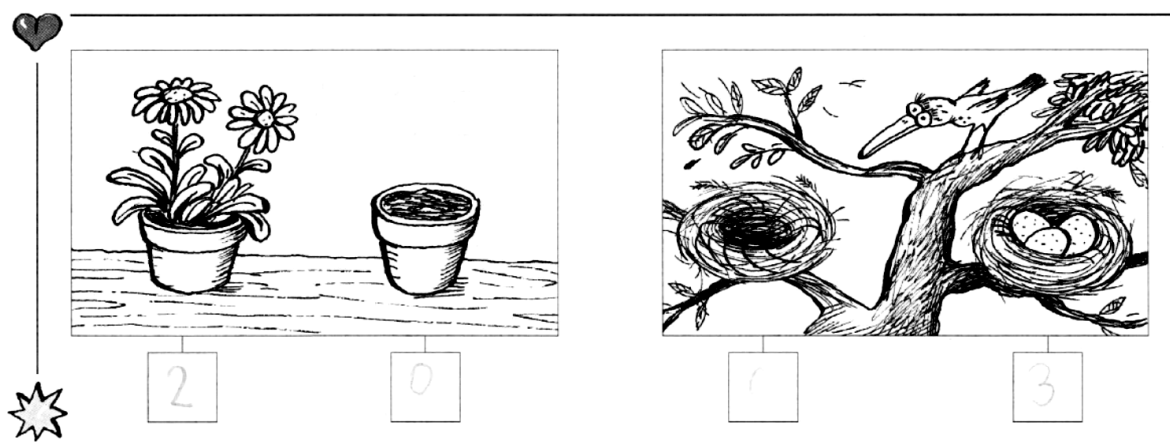
$4 + 0 = \boxed{4}$
 $1 + 2 = \boxed{3}$
 $3 + 0 = \boxed{3}$
 $0 + 1 = \boxed{1}$
 $0 + 4 = \boxed{4}$

$0 + 0 = \boxed{0}$
 $0 + 2 = \boxed{2}$
 $1 + 3 = \boxed{4}$
 $0 + 2 = \boxed{2}$
 $1 + 1 = \boxed{2}$

Abbildung 25: Erste Additionen mit der Null

Es wird demnach zuerst auf die Verwendung des Gitternetzes gesetzt, um die Additionen schematisch darzustellen. Dabei werden der erste Koeffizient durch Kreise und der zweite durch ausgemalte Kreise dargestellt. Somit kann die Übung derart variiert werden, dass zuerst sowohl die schematische Darstellung als auch die Koeffizienten gegeben sind und nur das Ergebnis ermittelt werden muss, und in einem nächsten, schwierigeren Schritt sowohl die bildliche Darstellung als auch das Ergebnis abgefragt werden. Anschließend folgen ein paar einfache Additionen, bei welchen nur noch die Summanden und das Ergebnis festgehalten werden.

Wie im Erarbeitungsteil kommt nun auch im Übungsteil A die Subtraktion zur Sprache, und es werden ebenfalls zuerst nur ein paar Rechnungen mit den Zahlen Eins bis Vier durchgeführt. Dann kommt jedoch wieder die Null ins Spiel, welche für das bessere Verständnis noch mittels Illustrationen dargestellt wird. Daran anschließend gibt es Additionen und Subtraktionen mit den Zahlen Null bis Vier in den bekannten Formaten.



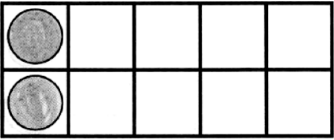
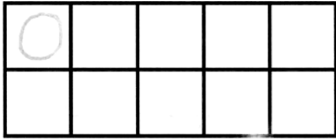
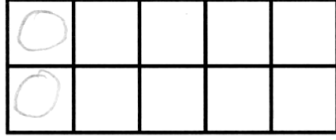
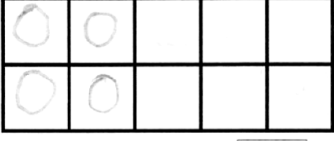
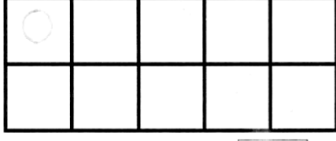
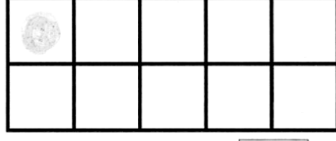
 $0 + 2 = 2$	 $1 + 0 = 1$	 $3 + 0 = 3$
 $0 + 4 = 4$	 $3 - 0 = 3$	 $2 - 0 = 2$
 $4 - 0 = 4$	 $1 - 0 = 1$	 $0 + 1 = 1$
 $1 + 0 = 1$	$3 - 0 = 3$	$3 + 0 = 3$
$2 + 2 = 4$	$0 + 4 = 4$	$2 - 1 = 1$
$3 - 1 = 2$	$1 + 3 = 4$	$3 + 1 = 4$
$1 + 1 = 2$	$4 - 0 = 4$	$4 + 0 = 4$
$0 + 2 = 2$	$2 - 0 = 2$	$4 - 2 = 2$

Abbildung 26: Beispiele der Addition und Subtraktion mit den Zahlen Null bis Vier

Nach diesen Beispielen wird im Übungsteil A erst die Ziffer Fünf eingeführt, bevor schließlich wieder Addition und Subtraktion mit allen bekannten Zahlen geübt werden.

Im Vergleich zu den Werken der Schulbuchreihe „Zahlenreise“ sollen nun jene der Reihe „Eins Plus“ vorgestellt werden. „Eins Plus“ setzt sich von der ersten bis zur dritten Klasse aus einem Erarbeitungs- und Übungsteil sowie aus drei CDs, die zusätzlich erworben werden können, zusammen. Für die vierte Schulstufe sind nur der Erarbeitungs- und der Übungsteil erhältlich. Beide Bände sind jeweils in Farbe gestaltet, und besonders interessant ist die immense Übereinstimmung von Übungen und Aufgabenstellungen. Zu einem großen Anteil kommen im Übungsteil nämlich dieselben Aufgaben vor wie im Erarbeitungsteil, nur mit anderen Zahlen.

Der grobe Aufbau des Schulbuches „Eins Plus 1“ unterscheidet sich wesentlich vom Aufbau des Werkes „Zahlenreise 1“. Während in Letzterem nach der Einführung der Zahlen Eins bis Vier sowie der Addition die Erläuterungen zur Null folgen, ist dies im Werk „Eins Plus“ erst viel später der Fall. Der Erarbeitungsteil von „Eins Plus“ ist in 28 Kapitel gegliedert, und erst im neunten Kapitel – den Zahlen von 0 bis 20 – kommt die Null erstmals zur Sprache. Generell ist der Aufbau so gestaltet, dass zuerst die Zahlen Eins bis Fünf eingeführt und anschließend Erläuterungen zur Addition und zum Gleichheitszeichen gegeben werden. Dann folgen das Kennenlernen der Zahlen Sechs bis Zehn und zwischendurch immer wieder einige Additionsaufgaben. Erst im Anschluss daran wird die Zahl Null kurz eingeführt. Dies geschieht folgendermaßen:

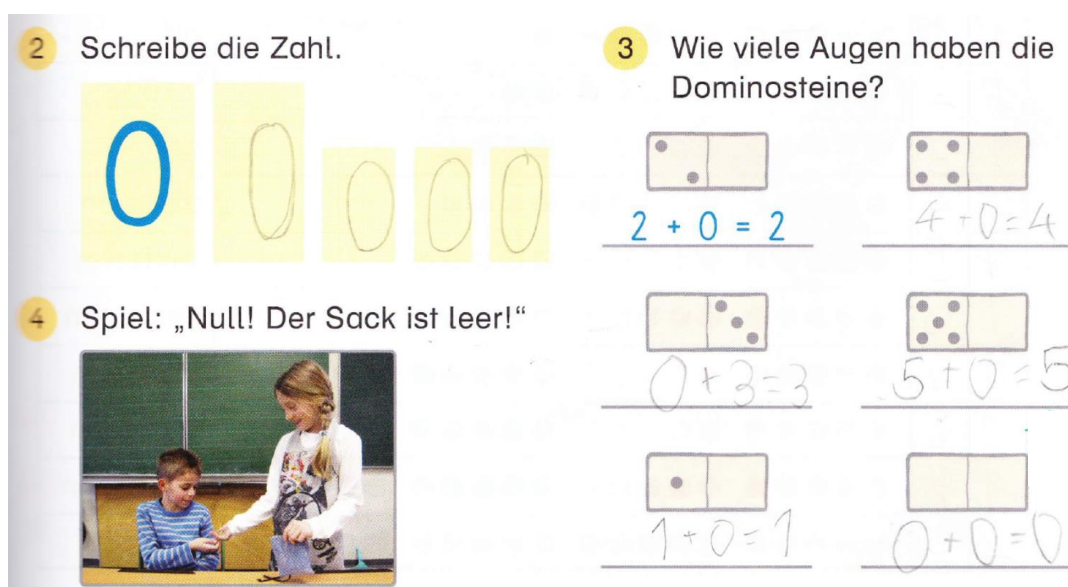


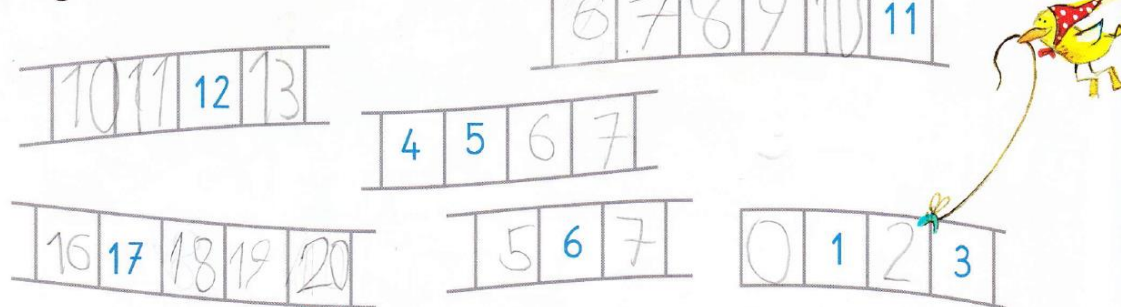
Abbildung 27: Einführung der Null im Werk „Eins Plus 1 – Erarbeitungsteil“

Die Null wird in diesem Schulbuch also lediglich durch das Lernen der orthographischen Darstellung (welche jedoch auch im Kapitel zuvor bei der Einführung der Zahl Zehn kurz angesprochen wurde) und im Zusammenhang mit Dominosteinen erläutert. Es gibt keine weiteren Illustrationen. Die direkte Fortsetzung bilden auszufüllende Zahlenbänder und eine grundlegende Erklärung zum Aufbau des Stellenwertsystems.

Ergänze die fehlenden Zahlen im Zahlenband.



Ergänze die Zahlenbänder.



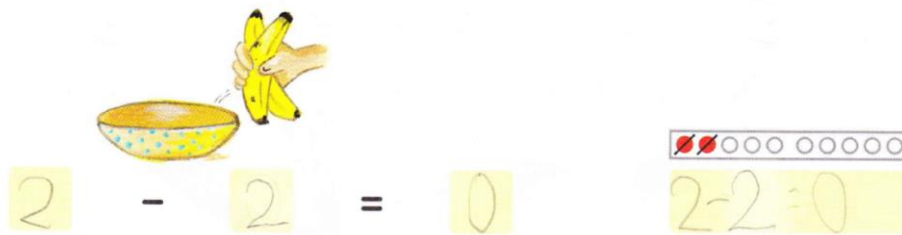
Lege und schreibe die Zahlen.

1	0	● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	zehn
1	1	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	elf
1	2	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	zwölf
1	3	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	dreizehn
1	4	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	vierzehn
1	5	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	fünfzehn
1	6	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	sechzehn
1	7	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	siebzehn
1	8	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	achtzehn
1	9	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	neunzehn
2	0	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	zwanzig

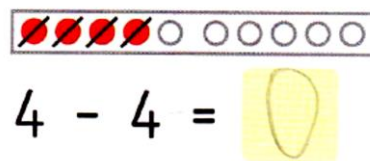
Abbildung 28: Erste Übungen im Zusammenhang mit der Null

Es wird also auf die Verortung der Null und auf unser Stellenwertsystem eingegangen, und in weiterer Folge werden nach der Einführung der Subtraktion auch die ersten Rechnungen mit null durchgeführt. Diese werden zuerst durch Illustrationen veranschaulicht und danach durch das bereits bekannte Format der ausgemalten Kreise. Erst im Anschluss daran werden die Rechnungen ausschließlich durch deren Koeffizienten und das Ergebnis notiert. Im Buch sieht dies konkret so aus:

Beschreibe die Bilder und ergänze die Rechnungen.



Lege und rechne.



Rechne und ergänze die fehlenden Rechnungen.

$$\begin{array}{rcl}
 1 & - & 1 = 0 \\
 2 & - & 2 = 0 \\
 3 & - & 3 = 0 \\
 4 & - & 4 = 0 \\
 5 & - & 5 = 0
 \end{array}$$

Abbildung 29: Rechnungen mit null

Im zugehörigen Übungsteil werden den Schüler/innen im Großen und Ganzen dieselben Aufgaben gestellt. Das Kapitel beginnt mit der Beschriftung von Zahlenbändern und dem Aufschreiben von Rechnungen anhand von Dominosteinen. Danach folgt das bekannte Format „Lege und rechne“, wobei auch Rechnungen mit null einfließen.

Generell sind sowohl der Erarbeitungsteil als auch der Übungsteil von „Eins Plus 1“ betont spielerisch aufgebaut. Anfangs wird sehr viel Wert auf das Beschreiben von Merkmalen und das Bilden von Gruppen gelegt. Auch das Fortsetzen von Mustern sowie das Abzählen von Gegenständen werden häufig trainiert. Aufgrund der Gestaltung des Werkes können oftmals

Geschichten in den Mathematikunterricht einfließen und Spiele realisiert werden. Zwischendurch finden sich auch immer wieder Knobelaufgaben und Rätsel, um das Unterrichtsgeschehen aufzulockern.

Die ersten fünf Zahlen werden vor der Einführung irgendeiner mathematischen Operation gelehrt und können somit nur anhand von Mengen bildlich beschrieben oder durch Abzählübungen eruiert werden. Das Kennenlernen der Addition sowie der Zahlen Sechs bis Zehn erweitern schließlich die Handlungsmöglichkeiten. Mit der Null kommt es dann zu einer wesentlichen Erweiterung des Zahlenraumes, und bis zum Ende der ersten Schulstufe werden in diesem Buch sogar die Zahlen bis 100 gelernt.

Im direkten Vergleich mit dem Schulbuch „Zahlenreise 1“ ist zu erkennen, dass es durch die vergleichsweise späte Einführung der Zahl Null im Werk „Eins Plus 1“ deutlich weniger Rechnungen mit dieser Zahl gibt. Es werden den Schüler/innen relativ wenige Möglichkeiten geboten, die Addition bzw. Subtraktion mit null zu üben. Auch die Erläuterungen zum Stellenwertsystem sind durchaus unterschiedlich gestaltet: Während dies im Werk „Eins Plus 1“ durch die oben angeführte Darstellung geschieht (vgl. Abbildung 28), bedient sich das Schulbuch „Zahlenreise 1“ dem Kontext des Geldes. Weitere Unterschiede lassen sich ausmachen: Die Zahlen, mit denen tatsächlich gerechnet wird, beschränken sich in „Zahlenreise 1“ auf den Zahlenraum 30, wohingegen in „Eins Plus 1“ die Zahlen bis 100 notiert werden und mit diesen in Zehnerschritten auch bereits gerechnet wird. Interessant ist des Weiteren die Tatsache, dass „Eins Plus 1“ ganz ohne Multiplikation und Division auskommt. Solche Operationen werden in dieser Schulbuchreihe erst in der zweiten Klasse gelehrt. Im Gegensatz dazu finden sich in „Zahlenreise 1“ bereits einfache Multiplikationen und Divisionen im Zahlenraum 20, wobei sämtliche Rechnungen durch bildliche Darstellungen veranschaulicht werden. Im Zusammenhang mit der Multiplikation kommt sogar bereits eine Rechnung mit dem Faktor Null vor.

In der zweiten Schulstufe wird im Werk „Zahlenreise 2“ dann die Multiplikation vertieft, und es gibt sogar einen eigenen Abschnitt „Malrechnen mit 0 und 1“. Dabei wird zuerst wiederum mit schematischen Darstellungen gearbeitet, um den Schüler/innen die richtige Vorstellung zu vermitteln. Später beschränkt man sich auf die Notation der Faktoren sowie deren Produkte.

Michael ist vergesslich. Er geht auch 3 mal in den Keller. Er bringt nie etwas mit. Wie viel hat er?

$$0 + 0 + 0$$

$$3 \cdot 0 = 0$$

$5 \cdot 0 = 5$	$9 \cdot 1 = 9$	$9 \cdot 0 = 0$
$8 \cdot 0 = 8$	$2 \cdot 1 = 2$	$2 \cdot 0 = 0$
$7 \cdot 0 = 7$	$4 \cdot 1 = 4$	$4 \cdot 0 = 0$
$3 \cdot 0 = 3$	$6 \cdot 1 = 6$	$6 \cdot 0 = 0$
$10 \cdot 0 = 10$	$1 \cdot 1 = 1$	$1 \cdot 0 = 0$

Abbildung 30: Multiplikationen in „Zahlenreise 2“

Nach der Erweiterung des Zahlenraumes auf die Zahlen bis 100 folgt in dieser Schulbuchreihe schließlich die Einführung der Division. Dabei wird diese oftmals auf die Multiplikation zurückgeführt und auf diese Art und Weise erklärt. So ist es möglich, dass die Schüler/innen Divisionen mit null als Dividend durchführen und auch verstehen können. Im Schulbuch wird dies etwa durch Beispiele folgender Art umgesetzt:

$$0 : 4 = 0 \quad \text{weil} \rightarrow 0 \cdot 4 = 0$$

Abbildung 31: Division mit Dividend Null in „Zahlenreise 2“

Somit sind die vier Grundrechnungsarten und auch die Rolle der Null im Zusammenhang mit diesen mittels der Schulbuchreihe „Zahlenreise“ eingeführt. Den Schüler/innen sollte das Stellenwertsystem klar sein, und durch die vielfältigen Aufgabentypen sowie die zahlreichen Illustrationen sollten sie gute Grundvorstellungen der Zahlen und insbesondere auch der Null entwickelt haben. Mit diesen Voraussetzungen können in den darauf folgenden Schulstufen die Rechenverfahren ausgebaut und mathematische Aufgaben in den verschiedensten Kontexten bearbeitet werden.

Der Band zwei der Reihe „Eins Plus“ setzt teils wiederum sehr spielerisch fort, und schon relativ früh am Beginn stehen das Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum 100. Schließlich

wird im sechsten Kapitel (von 27) erstmals die Multiplikation erwähnt, welche mittels der sogenannten „Ronni Ratz-Maschine“ umgesetzt wird.

Ergänze die Zahlen in der Ronni Ratz-Maschine. Schreibe immer das Doppelte in die zweite Zeile.

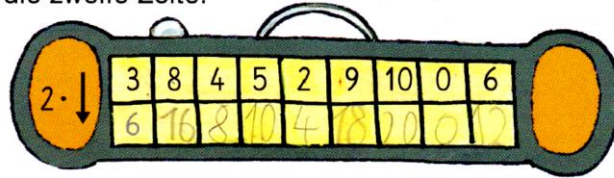


Abbildung 32: Erste Multiplikationen in „Eins Plus 2“

Hierbei wird die Null genauso wie alle anderen Zahlen behandelt. Es finden sich zur Multiplikation jedoch keine schematischen Darstellungen. Um das kleine Einmaleins zu trainieren, wird in weiterer Folge jeweils die gesamte Reihe abgefragt. Dies sieht im Buch beispielsweise folgendermaßen aus:

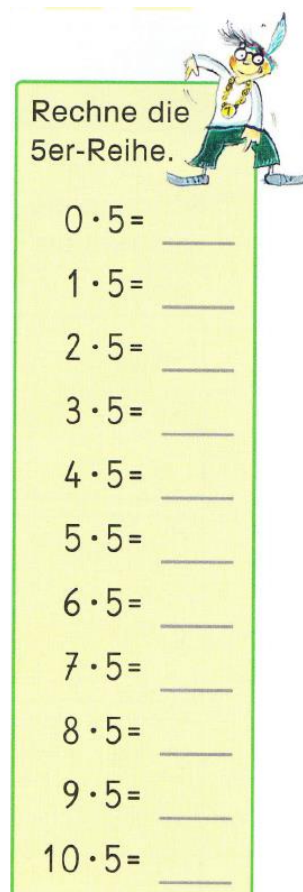
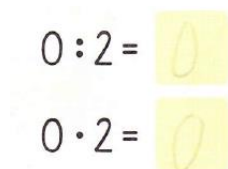


Abbildung 33: Übung zum kleinen Einmaleins in „Eins Plus 2“

Es wird also jedes Mal die Multiplikation mit null direkt mit geübt. Dies ist sehr sinnvoll, weil dadurch der Null keine besondere Rolle im Gegensatz zu den anderen Zahlen zugeschrieben wird.

Die Division wird zu Beginn durch die Schlagzeile „Gib mir die Hälfte!“ eingeleitet. Es kommt also anfangs nur die Division durch zwei zur Sprache, in welchem Zusammenhang jedoch auch die Null als Dividend auftritt.



Two yellow sticky notes are shown. The top note contains the handwritten equation $0 : 2 = 0$. The bottom note contains the handwritten equation $0 \cdot 2 = 0$.

Abbildung 34: Erstmaliges Auftreten der Division in „Eins Plus 2“

Weitere Erläuterungen zu dieser Aufgabe bietet das Schulbuch leider keine. Diese müssen wohl von der Lehrperson gegeben werden. Divisionen mit einer anderen Zahl als Divisor werden dann interessanterweise erst zwei Kapitel später erwähnt. Auffallend ist auch, dass die „Ronni Ratz-Maschinen“, welche von nun an die Multiplikation und Division vereinen, die Null als Bestandteil lange meiden. Erst acht Kapitel nach dem Kennenlernen der Division findet sich eine solche „Maschine“ mit Beteiligung der Null.

Den Umfang des Lehrstoffes betrachtend, ist der Stand der Schüler/innen in Mathematik nach den ersten beiden Schulstufen unter der Verwendung eines der beiden vorgestellten Schulbücher durchaus vergleichbar. Auch in der Reihe „Eins Plus“ wird mit den Zahlen von null bis einhundert gerechnet, und die vier Grundrechnungsarten wurden (neben vielerlei anderem) eingeführt. Die Schüler/innen sollten zu all diesen Bereichen gute Grundvorstellungen aufgebaut haben und gerüstet sein, um in den folgenden Klassen darauf aufzubauen. Durch die frühen Erläuterungen zum Stellenwertsystem in der ersten Schulstufe und durch den raschen Ausbau des Zahlenraumes bis 100 kann dies in der zweiten Klasse bereits gefestigt werden. Auch in die Bedeutung der Zahl bzw. Ziffer Null sollten die Schüler/innen bereits einen Einblick gewonnen haben, und durch den sehr spielerischen Zugang zur Mathematik sollte ihr Interesse an diesem Unterrichtsgegenstand durchaus geweckt worden sein.

2.1.4 Die Null als Fehlerquelle

Wenn man nun von einer offenbar gut gelungenen Einführung der Null ausgeht, stellt sich die Frage, warum schließlich beim schriftlichen Rechnen oftmals Fehler im Zusammenhang mit der Null auftreten. Manche dieser Fehlermuster finden sich bei einigen Schüler/innen sogar noch in der achten oder neunten Schulstufe. Aber welche Rolle spielt hierbei die Null als Fehlerquelle?

Bereits in den 1990er-Jahren wurden bezüglich dieses Themas Fallstudien veröffentlicht, und im Folgenden sollen nun einige Fehlerbeispiele angeführt und analysiert werden.

Bei den nachstehenden Beispielen von schriftlichen Subtraktionen, die von einem Schüler der vierten Schulstufe durchgeführt wurden, lässt sich ein typischer Schülerfehler ausmachen.

$$\begin{array}{r} 496 \\ - 136 \\ \hline 350 \\ \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 451 \\ - 47 \\ \hline 304 \\ \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 8072 \\ - 4008 \\ \hline 3064 \\ \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 987 \\ - 953 \\ \hline 1034 \\ \uparrow \end{array}$$

Abbildung 35: Fehlerhafte schriftliche Subtraktionen

Der Schüler macht immer genau dann einen Fehler, wenn in einer Spalte dieselben Ziffern übereinander stehen bzw. wenn sich diese Situation durch einen Übertrag aus der vorherigen Spalte ergibt. Anhand der ersten Subtraktion ist das Fehlermuster so zu erklären, dass der Schüler meint: „6 plus 10 gleich 16; schreibe 0 und übertrage 1“. Die korrekte Herangehensweise „6 plus 0 gleich 6; schreibe 0“ wird hier aufgrund des Ausweichens vor dem Rechnen mit der Null nicht ausgeführt.

Andere Varianten, die ebenfalls als Ausweichen vor der Null zu interpretieren sind, zeigen sich in einer Vermeidung der Null als Lösung bzw. im falschen Addieren des Übertrags.

$$\begin{array}{r} 496 \\ - 136 \\ \hline 366 \\ \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 451 \\ - 47 \\ \hline 454 \\ \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 773 \\ - 407 \\ \hline 386 \\ \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 849 \\ - 62 \\ \hline 987 \\ \uparrow \end{array}$$

Abbildung 36: Vermeidung der Null als Lösung bzw. falsche Addition des Übertrags

Bei den letzten beiden Beispielen müsste jeweils der Übertrag zur Null addiert werden. Dies wird strikt gemieden, indem der Übertrag zur Ziffer in der Zeile darüber addiert wird.

Im Gegensatz zu Fehlermustern, die durch die Vermeidung der Null entstehen, gibt es auch solche, wo die Null eine dominierende Rolle einnimmt. Beispiele hierfür wären unter anderen folgende:

$$\begin{array}{r} 958 \\ - 104 \\ \hline 804 \\ \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 704 \\ - 262 \\ \hline 502 \\ \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 365 \\ - 258 \\ \hline 110 \\ \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 773 \\ - 407 \\ \hline 376 \\ \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 849 \\ - 62 \\ \hline 887 \\ \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 549 \\ - 36 \\ \hline 13 \\ \uparrow \end{array}$$

Abbildung 37: Beispiele für das Dominieren der Null

Bei den ersten beiden Beispielen könnte der/die Schüler/in möglicherweise davon ausgegangen sein, dass überall dort, wo die Null vorkommt, auch null herauskommt. Dies könnte vielleicht fälschlicherweise von der Multiplikation abgeleitet worden sein, wo ein Faktor Null tatsächlich stets dominiert. Des Weiteren ist bei den Aufgaben zwei und drei zu erkennen, dass der/die Schüler/in diese wohl eher durch Abziehen als durch Ergänzen löst. Die Null würde hierbei dann als Zeichen für „geht nicht“ bzw. „nichts“ verwendet werden. Dieser Herangehensweise zufolge könnten (Erklärung anhand Bsp. 2) von null Einheiten nicht sechs Einheiten abgezogen werden bzw. würde in Beispiel drei nichts übrig bleiben, wenn von fünf acht abgezogen werden würde.

Dasselbe Fehlermuster findet sich auch in Fällen, in denen die Null den Übertrag bzw. die Ziffer darüber verschlingt – wie dies in den oben angeführten Beispielen vier bis sechs der Fall ist.

Diese Beispiele im Zusammenhang mit der schriftlichen Subtraktion dürfen jedoch nicht als zufällige Ergebnisse interpretiert werden. Vielmehr weisen sie auf mögliche Schwierigkeiten und Defizite des Unterrichts oder auf fehlerhafte Vorstellungen und Probleme im Umgang mit der Null hin. Daher ist es wichtig, solchen Fehlern vorzubeugen. Dies kann geschehen, indem beispielsweise kritische Aufgabenmerkmale ausführlich im Unterricht behandelt werden – und nicht erst bei Hausübungsbeispielen auftreten. Zu diesen Merkmalen zählen das Übereinanderstehen derselben Ziffern, eine verschiedene Stellenanzahl von Minuend und Subtrahend, das Vorkommen der Null sowie das Auftreten eines Übertrags, der zur Null oder zu einer leeren Stelle addiert werden muss. Des Weiteren können das Durchführen einer sofortigen Erfolgskontrolle (z.B. durch das Vorgeben der Ergebnisse in anderer Reihenfolge am unteren Blattrand oder durch das Vorkommen der Ergebniszahlen in nachfolgenden Aufgaben) sowie einer Rechenprobe bei Übungsaufgaben zur Vorbeugung von Fehlern beitragen.⁴⁶

Probleme im Zusammenhang mit der Null treten auch bei anderen schriftlichen Rechenverfahren auf, wie zum Beispiel bei der Multiplikation. Hierbei kann es zum Beispiel zu Einmal-eins-Fehlern mit der Null kommen, wie die nachfolgenden Beispiele veranschaulichen.

$\begin{array}{r} 320 \cdot 24 \\ \hline 642 \\ 1284 \\ \hline 7704 \end{array}$	$\begin{array}{r} 320 \cdot 204 \\ \hline 642 \\ 320 \\ 1284 \\ \hline 68684 \end{array}$	$\begin{array}{r} 310 \cdot 4 \\ \hline 1214 \end{array}$
--	---	---

Abbildung 38: Fehlerhafte schriftliche Multiplikationen mit null

Es handelt sich hier um eine fehlerhafte Vorstellung der Null beim elementaren Rechnen. Die Null als neutrales Element beim Addieren ist zwar korrekt, beim Multiplizieren jedoch nicht. Weiters kann es aufgrund der Beteiligung der Null bei der schriftlichen Multiplikation zu Fehlern im Multiplikationsverfahren kommen.

$$\begin{array}{r} 320 \cdot 24 \\ \hline 64 \\ 128 \\ \hline 768 \end{array} \quad \begin{array}{r} 302 \cdot 24 \\ \hline 64 \\ 128 \\ \hline 768 \end{array} \quad \begin{array}{r} 321 \cdot 20 \\ \hline 642 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 321 \cdot 204 \\ \hline 642 \\ 1284 \\ \hline 7704 \end{array}$$

Abbildung 39: Fehler im Multiplikationsverfahren

In diesen Fällen wird die Null korrekterweise bei der Multiplikation ignoriert, aber in der Folge werden fälschlicherweise auch die Stellenwerte der Ziffern ignoriert. Ratsam wäre hier, anfänglich eine ausführliche Schreibweise zu trainieren und erst später zur Kurzform überzugehen.⁴⁶

$$\begin{array}{r} 320 \cdot 24 \\ \hline 6400 \\ + 1280 \\ \hline 7680 \end{array} \quad \begin{array}{r} 320 \cdot 24 \\ \hline 640 \\ 1280 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 34 \cdot 51 \\ \hline 170 \\ 34 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 320 \cdot 204 \\ \hline 640 \\ 0 \\ 1280 \\ \hline \end{array}$$

Abbildung 40: Ausführliche Schreibweise und Kurzform

Auch bei Aufgaben der schriftlichen Division, in deren Quotient eine Null auftritt, kommt es in vielen Klassen zu einer überdurchschnittlich hohe Fehlerquote. Typisch sind in diesem Zusammenhang unter anderem folgende Fehler:

$$\begin{array}{r} 29435 : 7 = 425 \\ \hline 28 \\ \hline 14 \\ 14 \\ \hline 035 \\ 35 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28040 : 7 = 45 \text{ Rest } 5 \\ \hline 28 \\ \hline 040 \\ 35 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 29890 : 7 = 427 \\ \hline 28 \\ \hline 18 \\ 14 \\ \hline 49 \\ 49 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 29614 : 7 = 423 \text{ Rest } 4 \\ \hline 28 \\ \hline 16 \\ 14 \\ \hline 21 \\ 21 \\ \hline 04 \end{array}$$

Abbildung 41: Die Null beim schriftlichen Dividieren

Das Problem in den ersten beiden Beispielen ist in der Sprechweise der Schüler/innen zu sehen. Im ersten Beispiel kommt es im Laufe der Division zur Rechnung „drei geteilt durch sieben – geht nicht“, und anstatt korrekterweise an dieser Stelle der Division eine Null im Ergebnis zu notieren, wird lediglich die nächste Stelle des Dividenden in den Rechenvorgang integriert. Beim dritten Beispiel wird die Null nicht heruntergeholt, weil der/die Schüler/in wohl fälschlicherweise davon ausgeht, dass die Null nicht dividiert werden könne. Die vierte Aufgabe führt zur höchsten Fehlerquote. Hierbei wird die letzte Ziffer des Dividenden in den Divisionsvorgang integriert, und es ergibt sich die Situation, dass die neu entstandene Zahl kleiner als der Divisor ist. Irrtümlich wird nun diese Zahl direkt als Rest angesehen und nicht mehr dividiert. Somit kommt es auch nicht zur Notation der Null als Ziffer des Werts des Quotienten.

Wichtig sind dementsprechend die Kenntnis dieser häufigsten Fehlertypen durch die Lehrperson und der Versuch, diese von vornherein zu vermeiden. Dazu würde sich zum Beispiel die Einführung einer akkuraten Sprechweise eignen. Bezug nehmend auf das erste Beispiel sollte die Beschreibung des Vorgangs durch die Sprechweise „drei geteilt durch sieben – geht nicht“ unbedingt vermieden und durch „drei geteilt durch sieben geht null Mal“ verwendet werden. Dies steigert die Chance, dass die Null als Teil des Werts des Quotienten geschrieben wird. Eine weitere Möglichkeit, um Fehlern beim Dividieren vorzubeugen, ist die sofortige Bestimmung des Stellenwerts der ersten Ergebnisziffer. Wird beispielsweise im Rahmen des ersten Beispiels zu Beginn bewusst festgestellt, dass „29 Tausender durch 7 gleich 4 Tausender“ ergibt, so ist von vornherein die Anzahl der Stellen des Ergebnisses klar. Hierfür kann auch das ausführliche Schreiben einer Divisionstafel hilfreich sein. Sowohl beim Dividenden als auch beim Ergebnis werden die Einer, Zehner, Hunderter usw. gekennzeichnet, was den Schüler/innen die Durchführung der Division erleichtert. Wie bei der Multiplikation ist es auch bei der Division von großer Bedeutung, eine Kurzform der Schreibweise erst dann zu verwenden, wenn der Vorgang der Operation gefestigt ist.⁴⁶

Generell wird die Null in der Volksschule oftmals nachlässig behandelt. Diese kann nicht als Ergebnis einer Abzählübung dargestellt werden, und das Addieren bzw. Subtrahieren einer Null sieht wie ein Nichtstun bzw. ein Nicht-Rechnen aus. Dies kann in weiterer Folge zur Entwicklung der Ansicht von Schüler/innen führen, dass sich die Null beim Rechnen stets neutral verhält. Somit würden Multiplikationen und Divisionen folgendermaßen falsch durchgeführt werden: $3 * 0 = 3$, $0 * 3 = 3$, $3 : 0 = 3$, $0 : 3 = 3$. Aus der Auffassung „3 mit nichts multiplizieren“ kann dann leicht „3 nicht multiplizieren, also 3 unverändert lassen“ werden.

Weitere verbreitete Fehler sind unter anderem $\frac{4}{4} = 0$ („Kürzen im Zähler und Nenner; es bleibt nichts übrig“) und $\frac{0}{4} = 4$ („im Zähler ist nichts, und somit kann dieser weggelassen werden“). Es erweist sich folglich als sehr problematisch, den Nichts-Charakter stark zu betonen und dabei den Zahl-Charakter zu gering zu schätzen. Es ist von Beginn an wichtig, die Null als Zahl einzuführen, mit der man rechnen kann. Auch beim Üben des kleinen Einmaleins sollte die Null regelmäßig mittrainiert werden, und den Schüler/innen sollte bewusst sein, dass die Null durchaus auch als Rechenergebnis auftreten kann.⁴⁶

Es zeigte sich demnach bereits in den 1990er-Jahren, dass viele falsche Rechenergebnisse auf Schwierigkeiten im Umgang mit der Null zurückzuführen sind. Auch mehr als 20 Jahre später bestehen diese Probleme noch immer, und die Problematik ist wohl auch auf das Verstehen der Ambiguität der Null zurückzuführen. In diesem Zusammenhang lernen die Schüler/innen die Null einerseits als eine von zehn Ziffern, jedoch auch als eine von unendlich vielen Zahlen kennen. Die formale Bedeutung der Ziffer Null zeigt sich in der nicht besetzten Stelle einer Zahlendarstellung, wohingegen die inhaltliche Bedeutung von der Position der Ziffer abhängt. Während führende Nullen natürlicher Zahlen überhaupt keinen Einfluss haben und weggelassen werden können, stellt eine nachfolgende Null eine Multiplikation mit zehn dar.

Im Vergleich mit anderen natürlichen Zahlen erscheinen die Kardinalzahl 0 als Abwesenheit von etwas und die Null als Startpunkt des Zählens (ohne jedoch selbst zu zählen) noch einigermaßen einleuchtend. Kaum fassbar sind jedoch die Null als Größe und Ordnungszahl. Des Weiteren muss bei Rechenverfahren differenziert werden, welche Rolle die Null spielt. Bei Additionen und Subtraktionen verhält sie sich nämlich neutral, wohingegen die Ziffer Null bei Multiplikationen absorbierend wirkt.⁴⁸ Bei der Division muss unterschieden werden, ob die Null als Dividend, Divisor oder beides auftritt. Grundsätzlich können alle drei Fälle mittels der Vorstellung der Division als Umkehrung der Multiplikation erklärt werden. Im ersten Fall kann außerdem auch auf die Grundvorstellung des Verteilens zurückgegriffen werden. So könnte die Division $0 : 3$ beispielsweise durch „wenn ich nichts habe und dies an drei Personen verteilt wird, so hat jede Person nichts“ erläutert werden. Die Rechnung $3 : 0$ führt im Rahmen der Interpretation als Umkehrung der Multiplikation auf $0 * \square = 3$, und die Schüler/innen werden erkennen, dass eine solche Aufgabe keine Lösung haben kann, weil jede natürliche Zahl multipliziert mit null wiederum null ergibt. Im dritten Fall, welcher sich durch $0 : 0$ beschreiben lässt, ergibt sich die Multiplikation $0 * \square = 0$. Es ist leicht zu erkennen,

⁴⁶ Vgl. GERSTER (1989, S. 26–29)

dass hier für das Erhalten einer korrekten Gleichung jede natürliche Zahl eingesetzt werden kann. Da es somit unendlich viele Lösungen gibt und man keine bestimmte Lösung angeben kann, bezeichnet man diese Aufgabe als unlösbar.⁴⁷

Im Rahmen einer zu Beginn dieses Jahrtausends durchgeführten Fragebogenstudie wurden 155 Viertklässler/innen aus sechs Klassen an Hamburger Grundschulen befragt, um die Bedeutung der Null als Fehlerquelle heutzutage zu eruieren. Getestet wurden dabei die vier Bereiche „Null allgemein“, „Null als Rechenzahl“, „Null als Divisor“ sowie „Persönlicher Bezug zur Null“. Aufgaben, in denen die Null als Summand, Faktor oder Subtrahend auftrat, wurden dabei von 96% der Schüler/innen richtig gelöst. Wenn jedoch drei Summanden oder Faktoren gegeben sind, von denen der letzte null ist, halbiert sich die Anzahl richtiger Antworten. In Fällen, in denen die Null als Dividend auftritt, gaben 77% der Schüler/innen die richtige Antwort an, und die restlichen gaben entweder den Wert des Divisors als Ergebnis an, ließen die Aufgabe aus oder hielten diese für nicht lösbar. Am schwierigsten fallen den Schüler/innen Rechnungen, bei denen die Null als Divisor auftritt. Solche Aufgaben wurden lediglich von einem Kind als nicht lösbar deklariert und von weiteren zwölf ausgelassen. Diese könnten möglicherweise auch der Ansicht gewesen sein, dass die Aufgabe nicht lösbar sei. 63% beantworteten die Aufgabe mit „0“, und 28% notierten den Wert des Dividenden als Ergebnis.

Außerdem muss bedacht werden, dass einem korrekt angegebenen Ergebnis nicht zwangsläufig das richtige Verständnis zugrunde liegt. So übergeneralisieren beispielsweise viele Schüler/innen die absorbierende Wirkung der Null bei der Multiplikation auf die Division, was zum Ergebnis „0“ sowohl bei einer Division mit Dividend Null als auch bei einer solchen mit Divisor Null führen würde. Im ersten Fall wäre das Ergebnis zwar richtig, die Vorstellung der Schüler/innen jedoch nicht.⁴⁸

Der Umgang mit der Null erweist sich bei der Durchführung mathematischer Operationen für Schüler/innen also durchaus auch heutzutage noch als problematisch. Daher sind die Entwicklung von Grundvorstellungen und die Vorbeugung von Fehlern im Zusammenhang mit der Null bereits in der Volksschule von großer Bedeutung. Auch in der Sekundarstufe muss dem Thema jedoch die entsprechende Aufmerksamkeit geschenkt werden.

⁴⁷ Vgl. GRAUMANN (2002, S. 49f)

⁴⁸ Vgl. RUWISCH (2008)

2.2 Sekundarstufe

2.2.1 Verankerung im Lehrplan

Der Lehrplan der AHS-Unterstufe deckt sich mit jenem der Neuen Mittelschule und umfasst im Unterrichtsgegenstand Mathematik in jeder Klasse die vier Bereiche „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“, „Arbeiten mit Variablen“, „Arbeiten mit Figuren und Körpern“ sowie „Arbeiten mit Modellen, Statistik“. Im ersten Bereich heißt es unter anderem, dass die Kenntnisse und Fähigkeiten im Umgang mit den natürlichen Zahlen vertieft werden sollen, mehrstellige Multiplikationen und Divisionen durchgeführt werden können sollen, anhand von Teilern und Vielfachen Einblicke in Zusammenhänge zwischen natürlichen Zahlen gewonnen werden sollen und rationale Zahlen in verschiedenen Formen (als Zustände gegenüber einem Nullpunkt bzw. als Punkte auf einer Zahlengeraden) gedeutet werden sollen.⁴⁹ Bei all diesen angeführten und weiteren im Lehrplan verankerten Punkten schwingt die Bedeutung der Null mit. Daher ist es wichtig, auf die Null auch in der Sekundarstufe einzugehen: vor allem deswegen, weil nicht davon ausgegangen werden darf, dass die Null als Fehlerquelle bereits in der Volksschule ausgemerzt werden konnte. Daher sollen nun die Schulbuchreihen „Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden“ und „Das ist Mathematik“ vorgestellt und hinsichtlich jener Themen, bei denen der Null eine explizite Rolle zukommt, erörtert werden.

2.2.2 Blick in die Schulbuchreihen „Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden“ und „Das ist Mathematik“

Die Reihe „Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden“ wird vom Verlag Veritas herausgegeben und ist gemäß den Bildungsstandards kompetenzorientiert. Geeignet ist diese Schulbuchreihe (laut den Angaben im Buchinneren) in erster Linie für den Unterrichtsgebrauch in Neuen Mittelschulen, jedoch natürlich auch für jenen in allgemein bildenden höheren Schulen.

Der erste Band dieses Mathematiklehrbuches beginnt mit Erläuterungen zum Zahlenstrahl und mit der Wiederholung der natürlichen Zahlen. Dabei wird jeweils die Null als Anfangspunkt definiert.

⁴⁹ Vgl. https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2 [Zugriff am 02.03.2016]

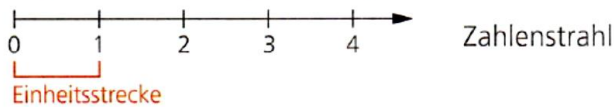
Wir wollen die natürlichen Zahlen auf einem **Zahlenstrahl** darstellen.

Zeichne dazu mit dem Lineal eine gerade Linie und markiere den Anfangspunkt.

Weil ein Strahl auf einer Seite unbegrenzt ist, zeichne einen Pfeil.



Bezeichne den Anfangspunkt mit null und trage in gleich großen Abständen (z. B. $\overline{01} = 1 \text{ cm}$) kleine Markierungen auf. Schreibe wie auf einem Lineal zu den Markierungen die weiteren Zahlen dazu. Du erhältst einen Zahlenstrahl.



Die Strecke zwischen 0 und 1 nennt man **Einheitsstrecke**. Es bedeutet, dass die Abstände zwischen den einzelnen Zahlen gleich groß sind. Die Markierung „3“ bedeutet z. B., dass zwischen 0 und 3 drei Einheitsstrecken Platz haben.¹⁾

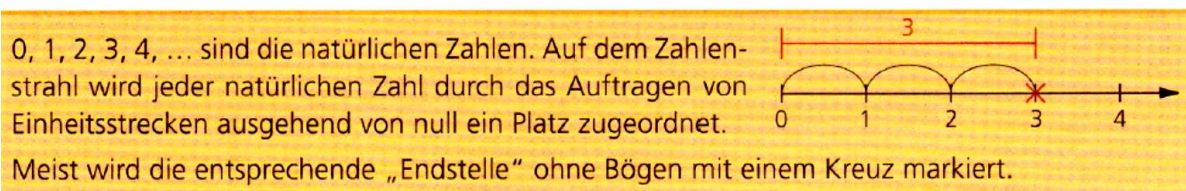


Abbildung 42: Beginn des Werkes „Mathematik - Verstehen + Üben + Anwenden 1“

Die Null als Anfangspunkt wird des Weiteren auch an einem praktischen Beispiel beschrieben und mittels einer Grafik illustriert. Dieses handelt vom Messen von Sprungweiten in einer Sprunggrube mit Sand, wofür ein Maßband verwendet wird. Das Messinstrument soll an der Absprunglinie angelegt werden, welche für die Null steht. Schließlich wird das Maßband als Zahlenstrahl interpretiert. Somit müssen sich die Schüler/innen nicht nur die rein mathematische Form des Zahlenstrahls einprägen, sondern können diese mit einer Erfahrung aus ihrem Alltag verbinden. Anschließend werden die Vergleichszeichen, Zahlenmengen und das dekadische System thematisiert. Nach einem kurzen Ausflug in das römische Zahlensystem wird schließlich das Runden gelehrt. Dabei lernen die Schüler/innen die Regeln, dass, wenn die nächstfolgende Ziffer 0, 1, 2, 3 oder 4 ist, abgerundet wird, und bei 5, 6, 7, 8 oder 9 aufgerundet wird. Das folgende Kapitel wird dann dem Rechnen mit natürlichen Zahlen gewidmet, wobei die vier Grundrechnungsarten gelehrt und eingehend geübt werden. Dabei wird jeweils das Kopfrechnen, das in der Volksschule bereits in großem Ausmaß geübt wurde, nochmals erklärt. Hierfür werden jeweils ein Einführungsbeispiel, die Fachausdrücke der Operation sowie eine Veranschaulichung (der Addition und Subtraktion anhand des Zahlenstrahls, der Multiplikation und Division mittels illustrierter Beispiele) dargestellt. Die Ziffer Null ist nur selten Bestandteil der Zahlen in den folgenden Beispielen der Addition als Kopfrechnungen, was sich auch bei den schriftlichen Additionen kaum ändert. Die Erläuterungen zur Subtrakti-

on sind gleich aufgebaut wie jene zur Addition. Die Subtraktion wird von Grund auf erklärt, und es folgen Beispiele zu Kopfrechnungen und schließlich zur schriftlichen Subtraktion. Auch bei der Multiplikation weicht das Schulbuch von dieser systematischen Herangehensweise nicht ab. Das Vorkommen des Faktors Null wird allerdings durch einen eigenen Merksatz erläutert.

!

Ist bei einer Multiplikation **ein Faktor null**, dann ist der **Wert des Produktes gleich null**.

$3 \cdot 0 = 0$	$0 \cdot 3 = 0$
$a \cdot 0 = 0$	$0 \cdot a = 0$

Abbildung 43: Merksatz zum Vorkommen des Faktors Null

Fraglich ist in diesem Zusammenhang, ob hierfür wirklich ein eigener Merksatz notwendig ist. Oftmals neigen Schüler/innen nämlich dazu, Merksätze lediglich auswendig zu lernen, ohne ein Verständnis für den beschriebenen Sachverhalt zu entwickeln. Geübt wird dieser beschriebene Umstand nachfolgend an nur drei Beispielen. Intensiv geübt werden später noch die Multiplikation mit reinen Zehner-, Hunderter- und Tausenderzahlen. Auch die schriftliche Multiplikation mit mehrstelligen Zahlen wird sehr ausführlich trainiert, um Fehler im Zusammenhang mit der Null und mit den Stellenwerten der Ziffern zu vermeiden. Ebenso eingehend wird hierbei der Übergang von einer sehr detaillierten Grundform über eine Zwischenform zur End- bzw. Kurzform hin dargestellt. Sogar der Nullenvorteil wird extra angesprochen und erläutert, um die Schüler/innen eine geeignete Schreibweise zu lehren.

Der zweite Faktor enthält in der Mitte die Ziffer 0 (Nullenvorteil)

eine Null:

<u>312 · 503</u>		<u>312 · 503</u>
1560		1560.
000	→ kürzer →	936
<u>936</u>		<u>156936</u>
156936		

zwei Nullen nacheinander:

<u>743 · 4002</u>		<u>743 · 4002</u>
2972		2972..
000	→ kürzer →	1486
000		<u>2973486</u>
<u>1486</u>		
2973486		

Abbildung 44: Erläuterungen zum Nullenvorteil

Durch diese gründlichen Erläuterungen kann wohl einigen Fehlern im Zusammenhang mit der Null vorgebeugt werden. Auch die Erklärungen zur Division sind sehr eindringlich, und der Division mit null kommt sogar ein eigener Abschnitt im Buch zu.

Null als Dividend

Dividiere die Zahl 0 durch 3 und durch 342.

$$0 : 3 = 0$$

$$\text{Probe: } 3 \cdot 0 = 0$$

$$0 : 342 = 0$$

$$\text{Probe: } 342 \cdot 0 = 0$$

Wenn du nichts hast und dieses „Nichts“ noch in mehrere Teile teilst, erhältst du wieder nichts.

⇒ Das Ergebnis ist immer null.

Null als Divisor

Dividiere die Zahl 3 durch 0. Hier sind sich die Kinder nicht einig.



Jakob sagt:

$$3 : 0 = 0$$

$$\text{Probe: } 0 \cdot 0 = 0$$

Falsch! $0 \neq 3$

Lena sagt:

$$3 : 0 = 3$$

$$\text{Probe: } 0 \cdot 3 = 0$$

Falsch! $0 \neq 3$



Die Rechnung $3 : 0$ ist nicht erlaubt!

Bei der **Division durch null** kann es **kein Ergebnis** geben, denn es gibt keine Zahl, die mit null multipliziert eine Zahl größer als null ergibt.

Deshalb sind die Mathematikerinnen und Mathematiker übereingekommen, **eine Division durch null nicht zuzulassen**.



1) Ist der Dividend null, dann ist auch der Quotient null.

$$0 : 3 = 0$$

2) Ist der Divisor null, kann man die Rechnung nicht ausführen!

$$\cancel{3 : 0} =$$

Abbildung 45: Erläuterungen zur Null als Dividend und Divisor

Im Gegensatz zu den Ausführungen im Zusammenhang mit der Multiplikation mit null wird also nicht lediglich ein Merksatz angegeben, sondern es finden sich zuerst vielsagende Erläuterungen. Erst danach wird das Wichtigste im Rahmen eines Merksatzes kurz zusammengefasst. Dadurch sollte es den Schüler/innen relativ leichtfallen, gute Grundvorstellungen zur Division mit null zu entwickeln. Derartige Divisionen werden nachfolgend anhand einiger Beispiele geübt, und auch der Division durch eine dekadische Einheit wird viel Aufmerksamkeit geschenkt. Schließlich wird die schriftliche Division ausführlich dargestellt und soll stets nach folgendem Schema durchgeführt werden:

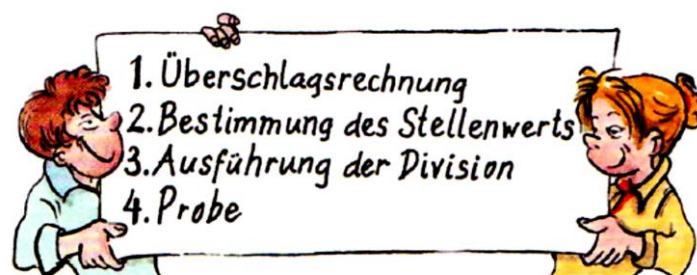


Abbildung 46: Vorgehensweise bei der schriftlichen Division

Dies wird anhand eines Einführungsbeispiels demonstriert und soll von vornherein Fehlern vorbeugen. In den dazugehörigen Beispielen kommt nur selten, aber doch die Ziffer Null als Bestandteil des Dividenden oder Divisors vor.

Nach den Erwähnungen der Null im Zusammenhang mit den Grundrechnungsarten kommt dieser Ziffer erst wieder einige Kapitel später bei den Dezimalzahlen Bedeutung zu. Dabei werden die Regeln des Rundens von Zahlen abermals angeführt.

Die letzte Nennung der Null in Band Eins der vorliegenden Schulbuchreihe findet sich bei der Division von Dezimalzahlen. Hierbei wird versucht, Fehlern im Zusammenhang mit der Stellenwertschreibung vorzubeugen.

Einführungsbeispiel

Berechne: $47,52 : 3 =$

Überschlag: $48 : 3 = 16$

Stellenwertbestimmung:

Gehe vor wie beim Dividieren mit natürlichen Zahlen.

$$\overset{\text{Z}}{47,52} : \overset{\text{Z}}{3} = \dots,$$

Rechnung: $47,52 : 3 = 15,84$

$$\begin{array}{r} - 3 \\ \hline 17 \\ - 15 \\ \hline 25 \\ - 24 \\ \hline 12 \\ - 12 \\ \hline 0 \text{ Rest} \end{array}$$

verkürzte Schreibweise: $47,52 : 3 = 15,84$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 25 \\ 12 \\ 0 \text{ Rest} \end{array}$$

Probe: $15,84 \cdot 3 = 47,52$

Wenn du sehr sicher rechnen kannst, dividiere ohne die Teilreste anzuschreiben.

Schreibe: $47,52 : 3 = 15,84$ oder $\overset{1}{4} \overset{2}{7},5 \overset{1}{2} : 3 = 15,84$

Aufgaben

- Führe die Divisionen vollständig durch (Überschlag, Stellenwert bestimmen, Rechnung, Probe):

Beispiele zum Stellenwertbestimmen:

$$\overset{\text{H}}{533,7} : \overset{\text{H}}{3} = \dots,$$

$$\overset{\text{E}}{146,34} : \overset{\text{E}}{81} = \dots,$$

$$\overset{\text{Z}}{6453,99} : \overset{\text{Z}}{217} = \dots,$$

Abbildung 47: Division von Dezimalzahlen

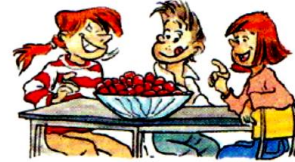
Dies kann geschehen, indem die Stellenwerte des Ergebnisses bereits vor der Durchführung der Rechnung bestimmt werden. Dargestellt wird diese Idee anhand eines Einführungsbeispiels, der Aufgabenerläuterung und einiger Aufgabenstellungen für selbst durchzuführende Beispiele. Auch der Fall, dass die Null die letzte Ziffer des Dividenden ist, wird extra berücksichtigt und angesprochen.

Beispiel: $19,270 : 5 = 3,854$

$$\begin{array}{r}
 42 \\
 27 \\
 20 \\
 0 \text{ Rest}
 \end{array}$$

Einführungsbeispiel

2,40 kg Erdbeeren sollen auf drei Kinder gleichmäßig aufgeteilt werden. Wie viel kg bekommt jedes Kind? Es ist natürlich sofort klar, dass jedes Kind weniger als 1 kg bekommt.



Stellenwertbestimmung:

$$\begin{array}{l}
 \text{z} \quad \text{z} \\
 2,40 : 3 = 0, \text{.} \\
 2,40 : 3 = 0,80
 \end{array}$$

3 ist zum ersten Mal in der Zifferngruppe 24 enthalten. Wir markieren die Ziffer 4, die den Stellenwert **z** hat. Daher hat auch der Quotient als höchsten Stellenwert **z**.

Jedes Kind bekommt 0,80 kg Erdbeeren.

Andere Möglichkeit:

3 ist in 2 nullmal enthalten, **Komma setzen**, 3 ist in 24 achtmal enthalten.

$$2,40 : 3 = 0,80$$

Abbildung 48: Weitere Erläuterung zur Division

Sogar jene Situation, in welcher der Divisor null Mal im entsprechenden Abschnitt des Dividenden enthalten ist, wird beachtet und diskutiert. Somit sollten Divisionen, bei denen die Null als Bestandteil des Dividenden oder Divisors vorkommt, von den Schüler/innen fehlerfrei durchgeführt werden können.

Durch die vielen ausführlich erklärten Beispiele und die Erklärungen, die zur Vermeidung von möglichen Fehlern angegeben werden, werden die besten Voraussetzungen für ein korrektes Rechnen geschaffen. Der Vermeidung der Null als Fehlerquelle wird eine große Bedeutung zugeschrieben, und es wird den Schüler/innen nicht viel Vorwissen aus der Volksschule abverlangt.

In den Werken der folgenden Schulstufen findet die Null nicht mehr so häufig Erwähnung wie in der ersten Klasse. So wird diese Ziffer in der zweiten Klasse beispielsweise nur einmal – im Zusammenhang mit dem Koordinatensystem – erwähnt.

Einführungsbeispiel

Zeichne zwei Zahlenstrahlen, die aufeinander normal (im rechten Winkel) stehen und denselben Anfangspunkt haben. Das entstehende Achsenkreuz heißt **(kartesisches) Koordinatensystem**, der gemeinsame Anfangspunkt 0 heißt (Koordinaten-) **Ursprung** oder Nullpunkt.

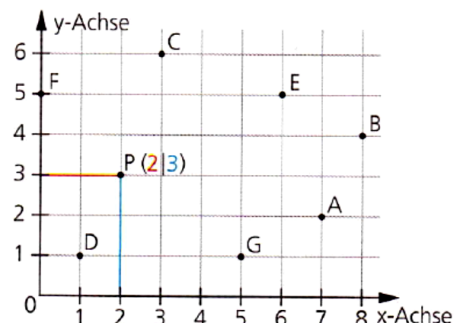
Die waagrechte Achse heißt **x-Achse**,
die senkrechte heißt **y-Achse**.

Jeder Punkt im Koordinatensystem ist durch zwei Zahlen eindeutig festgelegt:

$$P(2|3)$$

$\swarrow$
x-Koordinate von P
(vom Ursprung nach rechts)

$\searrow$
y-Koordinate von P
(nach oben)



Die erste Zahl ist immer die x-Koordinate (nach rechts), die zweite Zahl ist immer die y-Koordinate (nach oben). Diese Reihenfolge darf keinesfalls vertauscht werden!

Abbildung 49: Die Null im Koordinatensystem

Im ersten Band der Schulbuchreihe wird die Ordnung der Zahlen im Eindimensionalen auf einem Zahlenstrahl dargestellt, und dabei wird der Anfangspunkt mit null bezeichnet. In der zweiten Klasse wird dies nun auf den zweidimensionalen Raum ausgeweitet, und aus zwei Zahlenstrahlen wird ein Koordinatensystem geformt. Analog wird in diesem der Anfangspunkt bzw. der Koordinatenursprung mit null bezeichnet und kann demzufolge auch Nullpunkt genannt werden.

Im Band der dritten Klasse wird mit einer Wiederholung begonnen, wobei zuallererst auf die natürlichen Zahlen und auf deren Darstellung am Zahlenstrahl eingegangen wird.



Die natürlichen Zahlen verwenden wir zum Zählen.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen ohne die Zahl null

Die natürlichen Zahlen lassen sich der Größe nach ordnen.

Jede natürliche Zahl (ausgenommen der Zahl null) hat einen Vorgänger und einen Nachfolger.

Zahlenstrahl:

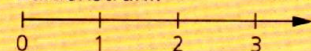


Abbildung 50: Beginn des Werkes „Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 3“

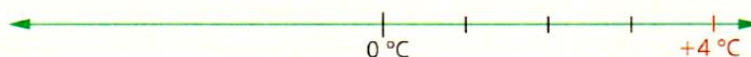
Die Grundrechnungsarten wie auch deren Verkettung können anhand einiger Beispiele geübt werden, bevor dann die negativen Zahlen eingeführt werden. Dies geschieht unter Bezugnahme auf einen Wetterbericht, ein Girokonto, die geografische Höhe sowie die Breitenkreise. Der Kontext der Temperatur ist bestimmt eine sehr sinnvolle und eindringliche Thematik, um eine Assoziation bezüglich der negativen Zahlen in den Schüler/innen zu wecken. Es kann

dabei auf den Erfahrungsschatz der Schüler/innen aus dem Alltag zurückgegriffen werden, und somit erscheinen die negativen Zahlen nicht als ein rein mathematisches Gebilde.

Jetzt bist du gefragt!

Manuel hört im Radio folgenden Wetterbericht: „Morgen ist es soweit. Die ersten Minusgrade im November kommen auf Österreich zu. Das Thermometer unterschreitet die 0-Grad-Grenze. Mit Temperaturen um -4°C wird gerechnet.“

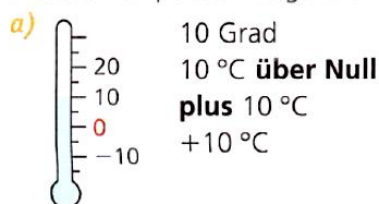
Manuel überlegt: -4°C



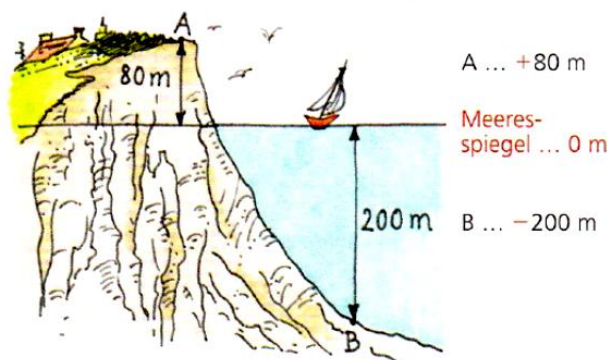
- Wo kann man -4°C einzeichnen? Kannst du Manuel helfen?
- Zeichne dann die Werte $+1^{\circ}\text{C}$; -1°C ; $+2^{\circ}\text{C}$ und -3°C ein!
- Was bedeutet deiner Meinung nach „unterschreitet die 0-Grad-Grenze“?
- Wo kommen im Alltag Zahlen mit einem Minus noch vor?

Einführungsbeispiele

- Welche Temperatur zeigt das Thermometer an?



- Ein **Girokonto** ist ein Konto, über das man seinen Geldverkehr abwickelt. Auf dem Girokonto kann man ein Guthaben (= Haben) aber auch Schulden (= Soll) haben.
Frau Lang hat 564 € Guthaben: $+564\text{ €}$ Herr Kurz hat 450 € Schulden: -450 €
- Gib die **geografische Höhe** der Punkte A und B im Vergleich zum Meeresspiegel an:
A liegt 80 m **über** dem Meeresspiegel,
B liegt 200 m **unter** dem Meeresspiegel.
- Breitenkreise ...**
werden vom Äquator aus nach Norden positiv, nach Süden negativ gezählt.



Im täglichen Leben kennzeichnet man Temperaturwerte, Kontostände, Pegelstände, geografische Höhen, Breitenkreise usw., die teils über und teils unter einer festgesetzten Null-Marke liegen, mithilfe von Vorzeichen. Das **positive Vorzeichen** wird meist **weggelassen**.

Abbildung 51: Einführung der negativen Zahlen

Auch die Interpretation der positiven und negativen Zahlen als Haben und Soll eines Kontos entspringt durchaus den alltäglichen Erfahrungen und erlaubt den Schüler/innen, Grundvorstellungen diesbezüglich zu entwickeln. Natürlich eignen sich auch Auseinandersetzungen mit Pegelständen, der geografischen Höhe, Breitenkreisen und Ähnlichem. Interessant ist die Beschreibung der Null als festgesetzte Marke, die die positiven von den negativen Zahlen trennt, sowie die Betrachtung aller Zahlen mit einem Vorzeichen, wobei das positive meist weggelassen wird.

Nach den sehr anschaulichen Ausführungen zu den negativen Zahlen werden diese schließlich auch im mathematischen Sinne betrachtet. Die Einführung wird hierbei durch eine im Raum der natürlichen Zahlen nicht lösbare Subtraktion gestaltet.

Führe in der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ die Subtraktionen aus und stelle sie auf dem Zahlenstrahl dar. Welches Problem ergibt sich bei **c)**?

a) $5 - 3 = 2$ (in $\mathbb{N}$ lösbar) **b)** $5 - 5 = 0$ (in $\mathbb{N}$ lösbar) **c)** $5 - 7 = ?$ (in $\mathbb{N}$ **nicht** lösbar)



Abbildung 52: Negative Zahlen in der Mathematik

Auf diese Art und Weise kommt ganz intuitiv die Notwendigkeit der Erweiterung der Zahlengeraden zu einem Zahlenstrahl auf. Anschließend wird die Null als die einzige ganze Zahl ohne Vorzeichen definiert und die Menge der ganzen Zahlen als zusammengesetzte Gruppe der positiven und negativen Zahlen sowie der Null beschrieben.



Die **ganzen Zahlen** bestehen aus:

den positiven ganzen Zahlen $\mathbb{Z}^+$, den negativen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}^-$ und der Zahl null.

Abbildung 53: Beschreibung der ganzen Zahlen

Nachfolgend finden sich viele Beispiele zur Darstellung und zu den Rechenregeln der ganzen Zahlen.

Die letzte Erwähnung der Null findet sich im Band der dritten Klasse dann im Zusammenhang mit dem Koordinatensystem. Das entsprechende Kapitel beginnt exakt so wie in der zweiten Klasse mit einer Landkarte, über welche ein Koordinatensystem gelegt ist und zu welcher einige Aufgaben betreffend das Herauslesen von Punkten gestellt sind. Der einzige Unterschied liegt darin, dass nun nicht nur der erste, sondern alle vier Quadranten gezeichnet werden. In den daran anschließenden Erklärungen zum kartesischen Koordinatensystem wird

dann wiederum der Schnittpunkt der beiden Achsen (wie bereits in Band Zwei) als Nullpunkt bzw. Ursprung betitelt.

Im Werk „Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 4“ kommt der Null überhaupt keine explizite Rolle mehr zu. Kurze Erwähnungen finden sich lediglich bei der Wiederholung der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sowie im Zusammenhang mit Funktionen. Hierbei wird beispielsweise der Graph einer homogenen linearen Funktion als eine Gerade durch den Nullpunkt definiert. Der Null als Zahl wird in diesem Band so gut wie gar keine Beachtung geschenkt; wenn, dann kommt die Ziffer Null nur als Bestandteil einer Zahl vor.

Insgesamt ist zu bemerken, dass die Schulbuchreihe nicht viele Vorkenntnisse aus der Volksschule voraussetzt. Das dekadische System und die Grundrechnungsarten werden sehr ausführlich erklärt, wobei bei den Grundrechnungsarten jeweils das Kopfrechnen, die Fachausdrücke der Operation, die schriftliche Umsetzung der Rechnung und die Eigenschaften bzw. Rechengesetze erläutert werden. Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass in vielen Situationen auf die Möglichkeit der Null als Fehlerquelle Rücksicht genommen und versucht wird, solchen Fehlern durch demonstrative Beispiele vorzubeugen. Dieser Herangehensweise ist zu entnehmen, dass auf die Entwicklung von Grundvorstellungen großer Wert gelegt wird. Unterstützt wird dies noch zusätzlich durch die zahlreichen schematischen Darstellungen in jedem Kapitel und durch die oftmaligen Wiederholungen.

Weiters zieht sich die Null als Beschreibung eines Anfangspunktes durch alle Bände – sei es bei der Ordnung der natürlichen Zahlen am Zahlenstrahl, als Schnittpunkt der Zahlenstrahlen beim Kennenlernen des ersten Quadranten des Koordinatensystems oder schließlich als Ursprung des kartesischen Koordinatensystems.

Die Tatsache, dass die Null in den höheren Schulstufen immer seltener explizit erwähnt wird, ist durchaus nachvollziehbar. Als Basis müssen den Schüler/innen zuerst die Grundzüge der Arithmetik vermittelt werden, um schließlich andere Teilgebiete der Mathematik erkunden zu können. So beschäftigt sich beispielsweise Band Eins über große Teile mit Erklärungen der natürlichen Zahlen und Dezimalzahlen sowie dem Rechnen mit diesen Zahlen. Den geometrischen Grundbegriffen und den Formen des Rechtecks, Quaders und Würfels kommt eine eher untergeordnete Rolle zu. Im vierten Band sieht dieses Verhältnis schon ganz anders aus: Den reellen Zahlen wird nur ein kurzes Kapitel gewidmet, und schließlich treten andere Kontexte wie die Prozent- und Zinsenrechnung, die Geometrie, die elementare Algebra, die Statistik, das Arbeiten mit geometrischen Körpern und das Lösen von linearen Gleichungen in den

Vordergrund. Ein solches Vorgehen lässt sich auch in den Bänden der Schulbuchreihe „Das ist Mathematik“ ausmachen, welches nun im Folgenden analysiert werden soll.

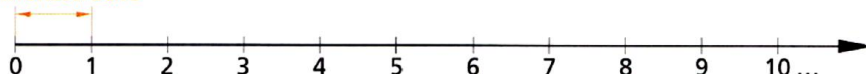
Die Unterstufenreihe „Das ist Mathematik“ wird vom Österreichischen Bundesverlag veröffentlicht und ist laut eigenen Angaben primär für den Unterrichtsgebrauch an allgemein bildenden höheren Schulen, aber auch für jenen an Neuen Mittelschulen zu verwenden. Weiters sind die Schulbücher gemäß den Bildungsstandards kompetenzorientiert, und in jedem Band findet sich ein eigenes Kapitel mit Aufgaben zu diesen Standards.

Den Beginn des ersten Bandes bilden ein kurzes Kapitel mit einleitenden Aufgaben und eines, das der Wiederholung dient. Dabei werden Vorkenntnisse aus der Volksschule vorausgesetzt, denn es kommen bereits die vier Grundrechnungsarten im Zahlenbereich von bis zu einer Million vor. Weiters werden der Kontext des Geldes, aber auch Umrechnungen der Längen- und Massenmaße behandelt. Nach anschließenden kurzen Erläuterungen zu den römischen Zahlzeichen und zum dekadischen Zahlensystem wird auf das Runden und auf die Ordnung der natürlichen Zahlen eingegangen. In diesem Zusammenhang werden ebenso wie im Band Eins der Schulbuchreihe „Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden“ die Rundungsregeln als Merksatz angegeben. Danach werden im Rahmen der Ordnung der natürlichen Zahlen die Vergleichszeichen wiederholt, und schließlich folgen Erläuterungen zu Zahlenmengen. Es ist interessant, dabei zu bemerken, dass bereits eine Definition der natürlichen Zahlen gegeben wird, Bruchzahlen und Dezimalzahlen kurz angesprochen werden und mathematische Zeichen (wie z.B. $\in$, $\notin$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_g$) eingeführt werden. Diese neuen Kenntnisse werden an einigen Beispielen praktisch umgesetzt, ehe dann der Zahlenstrahl für die graphische Darstellung der natürlichen Zahlen herangezogen wird. Dabei wird von der bekannten Tätigkeit des Ablesens der Temperatur von einem Thermometer ausgegangen und darauf hingewiesen, dass die Darstellung der natürlichen Zahlen mit der Skala eines Thermometers oder anderen Messgeräten vergleichbar ist. Auf diese Art und Weise kommen die Erläuterungen zum Zahlenstrahl auf, zu dessen Konstruktion sogar eine Anleitung angegeben ist.

Anleitung:

1. Zeichne einen Strahl mit dem **Anfangspunkt 0!**
2. Trage von **0** aus eine Strecke beliebiger Länge auf und bezeichne den rechten Endpunkt der Strecke mit **1!**
Diese Strecke heißt „**Einheitsstrecke**“.
3. Trage von **1** aus wieder die Einheitsstrecke nach rechts auf!
4. Bezeichne den rechten Endpunkt mit **2!** Genauso erhältst du die Punkte **3, 4, 5** usw.

Einheitsstrecke



Die Reihenfolge der Punkte auf dem Zahlenstrahl entspricht der Reihenfolge der Zahlen beim Zählen.

Zahlenstrahl

Zu jeder natürlichen Zahl gehört genau ein Punkt auf dem Zahlenstrahl.

Ein weiter **rechts** liegender Punkt entspricht immer der **größeren** Zahl;
der **links** liegende Punkt entspricht der **kleineren** Zahl.

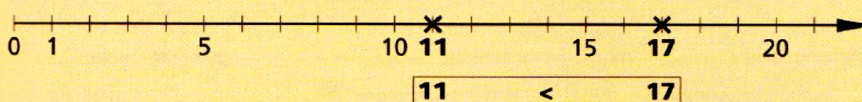


Abbildung 54: Erläuterungen zum Zahlenstrahl

Hierbei wird ganz klar die Null als Anfangspunkt festgelegt, und nach der Erklärung der Einheitsstrecke werden die wichtigsten Punkte betreffend den Zahlenstrahl in einem Merksatz festgehalten. Auffällig ist, dass bei den folgenden Aufgaben zum Zahlenstrahl jedoch nicht immer die Null als Anfangspunkt gewählt wird, sondern dass bei der Darstellung größerer Werte auf einen solchen Anfangspunkt verzichtet wird.

Die nachfolgenden Kapitel beschäftigen sich dann mit den vier Grundrechnungsarten, wobei der Null jeweils ein eigener Merksatz gewidmet wird. Die Einführung in die jeweilige Art des Rechnens stellen stets ein einführendes Beispiel sowie die Erläuterung der Fachausdrücke dar. Dann folgt jeweils der Merksatz im Zusammenhang mit der Null. Bei der Addition lautet dieser folgendermaßen:

Addieren von null

Wenn man **zu einer Zahl null addiert**, erhält man **wieder die gleiche Zahl**.

Abbildung 55: Merksatz zur Addition von null

In dem hierzu dargestellten Beispiel erklärt das Schulbuch wörtlich „ $37 + 0 = 37$, aber auch: $0 + 37 = 37$. Es ist „nichts“ dazugekommen.“ (REICHEL u.a. 2011, S. 34)

Weiters werden Möglichkeiten für die Veranschaulichung der Addition angeführt – einerseits mittels Strecken und andererseits am Zahlenstrahl.

Bezüglich der folgenden Aufgaben sind im Vergleich zum ersten Band der Reihe „Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden“ vor allem Unterschiede im Bereich des Schwierigkeitsgrades festzustellen. Während im Buch von LEWISCH u.a. mit einfachen Additionen zweistelliger Zahlen begonnen wird, werden im Werk von REICHEL u.a. zu Beginn schon die Addition in der Zeile und auch die Addition von untereinander stehenden Summanden erläutert. Bereits die zweite Übungsaufgabe behandelt Additionen in der Zeile im Zahlenbereich bis zu 100 000, und in der dritten Aufgabe geht es um Additionen untereinander stehender Summanden im achtstelligen Bereich. Auch die Null als Ziffer kommt hierbei des Öfteren vor. Die Ausführungen zur Subtraktion sind im Großen und Ganzen gleich aufgebaut wie jene zur Addition: ein einführendes Beispiel, die Erläuterung zu den Bezeichnungen, die Möglichkeiten der Veranschaulichung (mittels Strecken, am Zahlenstrahl und das Subtrahieren als Vergleichen bzw. Ergänzen) sowie ein Merksatz.



Abbildung 56: Merksatz zur Subtraktion von null

Im Zusammenhang mit diesem Merksatz wird des Weiteren angegeben, dass $37 - 0 = 37$, $0 - 37$ im Bereich der natürlichen Zahlen nicht durchführbar ist, und jede Zahl minus die gleiche Zahl null ergibt.

Ebenso wie bei der Addition werden auch bei der Subtraktion die Varianten des Rechnens in der Zeile sowie mit untereinander stehenden Zahlen kurz anhand von Beispielen dargestellt. Bei den ersten Übungsbeispielen finden sich wiederum Zahlen im sechsstelligen Bereich, und auch Subtraktionen, bei denen die Null Bestandteil einer oder beider Zahlen ist, sind keine Seltenheit.

Nachfolgend finden sich Erklärungen zum Zusammenhang der Addition und Subtraktion sowie zu den Rechenregeln, bevor schließlich die Aufmerksamkeit auf die Multiplikation gelenkt wird. Dieses Kapitel beginnt wie auch die beiden vorangegangenen mit einem anschaulichen Beispiel und mit den Bezeichnungen der Multiplikation. Im Anschluss wird wiederum explizit auf die Null eingegangen.

Die Vielfachen von zB 3 lauten: $3 \cdot 1 = 3$, $3 \cdot 2 = 6$, $3 \cdot 3 = 9$, $3 \cdot 4 = 12 \dots$

Die Vielfachen von 0 sind immer 0: $0 \cdot 1 = 0$, $0 \cdot 2 = 0 + 0 = 0$, $0 \cdot 3 = 0 + 0 + 0 = 0 \dots$

Was aber ergibt $3 \cdot 0$? Diese Frage lässt sich aus folgender Reihe beantworten:

$3 \cdot 4 = 3 + 3 + 3 + 3$ (in Worten: 4-mal den Summanden 3 nehmen) = 12,

$3 \cdot 3$ (in Worten: 3-mal die 3 nehmen) = 9 $3 \cdot 1$ (in Worten: 1-mal die 3 nehmen) = 3

$3 \cdot 2$ (in Worten: 2-mal die 3 nehmen) = 6 $3 \cdot 0$ (in Worten: kein-mal die 3 nehmen) = 0

Multiplizieren mit null

Wenn man **eine Zahl mit null multipliziert**, erhält man **immer null**.

Abbildung 57: Multiplikation mit null

Es werden in diesem Zusammenhang die Aufgabenreihen mit den Faktoren null und drei verwendet, um die Einführung der Null als Faktor möglichst anschaulich darzustellen. Dies dürfte anhand dieser Ausführungen wohl recht gut gelingen. Die Erklärung, dass die Addition gleicher Summanden durch die Multiplikation ersetzt wird, dürfte dies zusätzlich unterstützen. Auffällig ist jedoch, dass bei der Multiplikation $3 \cdot 0$ die wörtliche Umschreibung „kein-mal die 3 nehmen“ verwendet wird. Dadurch wird die Null im sprachlichen Gebrauch regelrecht vermieden, was generell zu problematischen Sprechweisen der Schüler/innen bei mathematischen Operationen, an denen die Null beteiligt ist, führen kann. Besser wäre vermutlich die Umschreibung „null Mal die 3 nehmen“. Die Schüler/innen sollten in der Volksschule bereits Einblicke in die semantische Bedeutung der Null gewonnen haben und somit diese Beschreibung durchaus korrekt interpretieren können. Die folgenden Aufgaben zum Üben dieser Rechenoperation sind sehr unterschiedlich und vielfältig gestaltet, und auch für die Multiplikation mit null werden eigens Beispiele angegeben.

Führe die Rechnungen durch!

a) $8 \cdot 0 =$	b) $10000 \cdot 1 =$	c) $849 \cdot 1 =$	d) $5817 \cdot 0 =$
$8 \cdot 1 =$	$10000 \cdot 0 =$	$1 \cdot 849 =$	$5817 \cdot 1 =$
$0 \cdot 8 =$	$1 \cdot 10000 =$	$849 \cdot 0 =$	$0 \cdot 5817 =$
$1 \cdot 8 =$	$0 \cdot 10000 =$	$0 \cdot 849 =$	$1 \cdot 5817 =$

Ist das Ungleichheitszeichen richtig gesetzt? Begründe deine Entscheidung!

a) $49 \cdot 9 < 49 \cdot 1$	d) $1 \cdot 1000 < 100000 \cdot 1$	g) $900 \cdot 1 < 9000 \cdot 0$
b) $23 \cdot 0 > 15 \cdot 0$	e) $38 \cdot 0 > 12 \cdot 0$	h) $1 \cdot 1 > 0 \cdot 10000$
c) $0 \cdot 100 > 10000 \cdot 0$	f) $0 \cdot 0 < 74 \cdot 0$	i) $0 \cdot 1 > 1 \cdot 0$

Abbildung 58: Beispiele zur Multiplikation mit null

Dies zeigt, dass nicht nur die Theorie gelernt und verstanden werden soll, sondern das neu Gelernte auch direkt an entsprechenden Übungsaufgaben erprobt werden soll.

Die Ausführungen zur Division im nächsten Kapitel sind ähnlich aufgebaut. Nach der üblichen Einführung wie auch bei den anderen bereits bekannten Grundrechnungsarten samt eini-

gen Beispielen kommt der Zusammenhang von Multiplikation und Division zur Sprache. Dabei wird auch wiederum dem Umgang mit der Null als Teil der Rechenoperation ein eigener Abschnitt gewidmet.

Entgegengesetzte Rechnungsarten

Die **Division** ist die **Umkehrung** der **Multiplikation**.
Die **Multiplikation** ist die **Umkehrung** der **Division**.

Den Zusammenhang zwischen dem Multiplizieren und dem Dividieren verwendet man bei der **Probe** für die **Division**:

Jede Division hat eine Multiplikationsprobe und eine Divisionsprobe.

Beispiel: Division $24 : 8 = 3$; **Proben:** $3 \cdot 8 = 24$ bzw. $24 : 3 = 8$

In der Praxis wird für die Division fast nur die (einfachere) **Multiplikationsprobe** verwendet.

Division: **Dividend** durch **Divisor** gleich **Quotient**;

Probe: **Quotient** mal **Divisor** gleich **Dividend**.

Beispiele für die **Division von 0**: **1)** $0 : 3 = 0$, weil $0 \cdot 3 = 0$; **2)** $0 : 7 = 0$, weil $0 \cdot 7 = 0$

Umgekehrt stellt sich die Frage: Wie viel ist $3 : 0$?

Jede Zahl a , die man bei der Division $3 : 0$ als Ergebnis nennen würde, wäre falsch.

Denn $0 \cdot a = 0$ und nicht 3!

Dasselbe gilt für jede andere Zahl (ungleich 0 statt 3). $a : 0$ ist **sinnlos**.

Division von und durch null

Null durch irgendeine Zahl (ungleich 0) **ist wieder null**.

Die **Division einer Zahl durch null** ist **sinnlos**.

Durch null kann nicht dividiert werden.

Was ist mit $0 : 0$?

Man könnte sagen: $0 : 0 = 0$, denn $0 \cdot 0 = 0$; oder $0 : 0 = 3$, denn $3 \cdot 0 = 0$

Das heißt: Die Division $0 : 0$ ist nicht eindeutig, sie ist daher auch **sinnlos**.

Abbildung 59: Erläuterungen zur Division

Die wichtigsten Informationen rund um die Division von und durch null werden in diesem Schulbuch also sehr komprimiert dargestellt. Wenn jedoch ein Grundverständnis der Zahl Null bei den Schüler/innen vorausgesetzt werden kann und die Erläuterungen des Buches im Unterricht eventuell ein wenig ausgeführt werden, um ihnen die entsprechende Aufmerksamkeit zukommen zu lassen, sollte es den Schüler/innen durchaus gelingen, derartige Aufgaben zu verstehen. Unter den anschließenden Übungsbeispielen finden sich (wie auch schon bei der Multiplikation) wiederum einige mit Beteiligung der Null.

Führe folgende Rechnungen aus! Streiche die sinnlosen Divisionen!

a) $0 : 100 =$	b) $1000 : 1000 =$	c) $0 : 1 =$	d) $1 : 1 =$
$100 : 1 =$	$1000 : 1 =$	$1 : 0 =$	$1 - 1 =$
$100 : 0 =$	$0 : 1000 =$	$0 : 0 =$	$1 \cdot 1 =$

Ist das Ungleichheitszeichen richtig gesetzt? Begründe deine Antwort!

a) $527 \cdot 0 < 0 : 49$	c) $639 : 639 > 639 \cdot 0$	e) $0 : 23 > 0 : 1$	g) $100 : 100 < 100 - 100$
b) $0 \cdot 518 > 426 : 1$	d) $57 \cdot 1 < 57 : 1$	f) $0 : 23 < 0 : 1$	h) $100 \cdot 0 > 100 - 100$

Abbildung 60: Beispiele zur Division von und durch null

Ebenso wie im vorangegangenen Kapitel kann also das neue Wissen sofort durch das Üben der entsprechenden Beispiele gefestigt werden.

Im Vergleich der untersuchten Ausführungen zu den vier Grundrechnungsarten in den beiden gewählten Schulbuchreihen ist festzustellen, dass der erste Band von „Das ist Mathematik“ wesentlich stärker auf die Vorkenntnisse aus der Volksschule sowie auf deren Ausbau setzt. Indizien hierfür sind das Wiederholungskapitel am Beginn des Werkes und der Schwierigkeitsgrad der Rechnungen in den Kapiteln der vier Grundrechnungsarten selbst. Weiters finden sich im Zusammenhang mit den Erläuterungen nicht so viele schematische Darstellungen und Illustrationen wie im ersten Band der Serie „Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden“, was für ein Schulbuch, das hauptsächlich Gebrauch an allgemein bildenden höheren Schulen findet, durchaus angemessen ist. Die besondere Rolle der Null wird in jedem der oben beschriebenen Kapitel von „Das ist Mathematik“ berücksichtigt und zur Genüge diskutiert. Auf die Null als mögliche Fehlerquelle wird jedoch nicht im selben Ausmaß Rücksicht genommen wie in „Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden“. Es finden sich im Werk von REICHEL u.a. keine eigens für diese Problematik konzipierten Beispiele und auch kein explizites Eingehen auf derartige mögliche Fehlerquellen. Dennoch werden in jedem Abschnitt ausreichend Übungsaufgaben unter Beteiligung der Null angegeben, was den Auf- und Ausbau der Grundvorstellungen bezüglich der Zahl sowie der Ziffer Null ermöglicht bzw. unterstützt.

Das nächste Auftreten der Null findet sich im Schulbuch von REICHEL u.a. ebenso wie auch im Werk von LEWISCH u.a. im Zusammenhang mit den Dezimalzahlen. Als Kontext wird im Buch „Das ist Mathematik 1“ jener des Messens der Körpertemperatur herangezogen und anschließend der mathematische Hintergrund – ausgehend von dem Einer – erklärt.

$$1 \text{ E} = 10 \text{ z} \quad 1 \text{ E} = 100 \text{ h} \quad 1 \text{ E} = 1\,000 \text{ t}$$

$$1 \text{ z} = 0,1 \text{ E} \quad 1 \text{ h} = 0,01 \text{ E} \quad 1 \text{ t} = 0,001 \text{ E}$$

Einheit	Schreibweise	Sprechweise
1 Zehntel	0,1	„null Komma eins“
1 Hundertstel	0,01	„null Komma null eins“
1 Tausendstel	0,001	„null Komma null null eins“

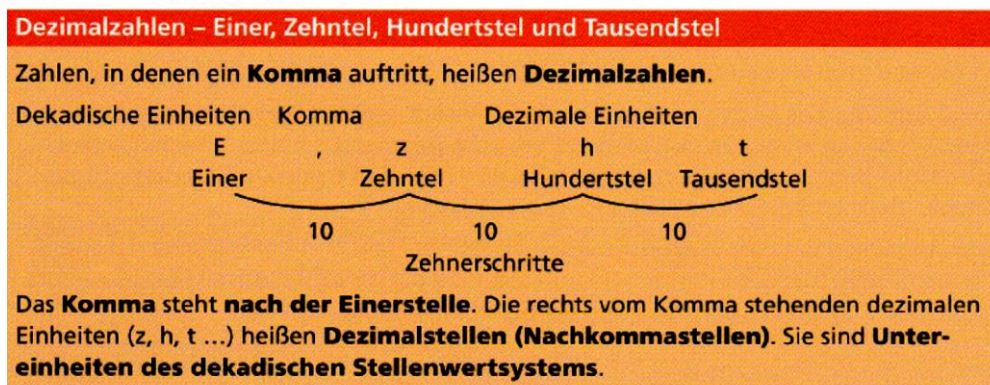


Abbildung 61: Einführung der Dezimalzahlen

Eine besondere Rolle kommt in diesem Zusammenhang auch dem Komma zu, weil es hier erstmals Erwähnung findet. Weiters wird kurz das Runden von Dezimalzahlen angesprochen, welches auf das Runden von natürlichen Zahlen zurückgeführt wird – wie auch im Werk „Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 1“.

Übereinstimmend ist in den beiden Schulbüchern auch das letztmalige explizite Vorkommen der Null im jeweils ersten Band beim Dividieren von Dezimalzahlen. Im Werk von REICHEL u.a. wird hierbei wiederum auf die bereits bekannte Operation mit natürlichen Zahlen zurückgegriffen und außerdem das Setzen des Kommas kurz erläutert.

Dividieren von Dezimalzahlen durch natürliche Zahlen

Eine Dezimalzahl wird wie eine natürliche Zahl dividiert.

Sobald man im **Dividenten** die **erste Ziffer nach dem Komma** „herabnimmt“, muss man im **Ergebnis** das **Komma** setzen.

Durch null kann (auch eine Dezimalzahl) **nicht dividiert** werden.

Abbildung 62: Dividieren von Dezimalzahlen

Der Null kommt bei diesem Thema eine eher untergeordnete Rolle zu. Im angeführten Merksatz wird diese nur kurz erwähnt, und auch das Dividieren durch dekadische Einheiten wird erläutert. Ansonsten wird auf die Null jedoch in keiner Art und Weise speziell eingegangen. Es finden sich keine Beispiele, um explizit die Stellenwertschreibung zu trainieren oder im Vorhinein den Stellenwert des Ergebnisses zu bestimmen. Außerdem enthält das Buch nur

sehr wenige Beispiele, in denen die letzte Ziffer des Dividenden eine Null ist. Genau dies wäre allerdings eine Situation, die Schüler/innen oftmals Schwierigkeiten bereitet und zu falschen Ergebnissen beim Rechnen führt.

Im zweiten Band von „Das ist Mathematik“ kommt es wesentlich seltener zur expliziten Nennung der Null als in Band Eins. Erwähnung findet diese Ziffer lediglich bei der Wiederholung und Vertiefung der vier Grundrechnungsarten, im Zusammenhang mit den Primzahlen und beim Kennenlernen des Koordinatensystems.

Im Wiederholungskapitel wird die Null als Faktor der Multiplikation und als Teil der Division nochmals aufgegriffen. Der Fall, in welchem die Null als Dividend auftritt, wird jedoch nicht angeführt.

$$a \cdot 0 = 0$$

Jede Zahl **mit null multipliziert ergibt null.**

$a : 0$ und $0 : 0$ sind **sinnlos.**

Durch null kann man nicht dividieren.

Abbildung 63: Wiederholung in „Das ist Mathematik 2“

Im nachstehenden Kapitel wird die Null von den Primzahlen und den zusammengesetzten Zahlen jeweils ausgeschlossen.

Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen

Natürliche Zahlen, die nur **1 und sich selbst** als **Teiler** (unechte Teiler) haben, heißen **Primzahlen**, wobei die Zahl **1 nicht** zu den **Primzahlen** gezählt wird.

Zahlen, die neben den unechten Teilern auch **echte Teiler** haben, heißen **zusammengesetzte Zahlen**.

Die Zahl **Null** ist **weder Primzahl noch zusammengesetzte Zahl**.

Abbildung 64: Erläuterung zu Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen

Zuletzt kommt der Null in Band Zwei im Koordinatensystem eine wichtige Rolle zu. Die Einführung in dieses geometrische Kapitel bilden ein Orientierungsspiel, für welches eine Karte mit Geländepunkten benötigt wird, und die Notwendigkeit, die Lage von Punkten und Figuren im geometrischen Sinn festzuhalten. Dabei wird jener Punkt $0(0|0)$, von dem die Koordinatenachsen ausgehen, als Ursprung des Koordinatensystems bezeichnet. Zu bemerken ist, dass dieser Punkt im Buch von REICHEL u.a. nicht auch als Nullpunkt bezeichnet wird.

Im dritten Band kommt es schließlich zur Einführung der ganzen Zahlen, wofür ebenso wie im Schulbuch von LEWISCH u.a. der den Schüler/innen bekannte Kontext der Minusgrade gewählt wird.

Minusgrade



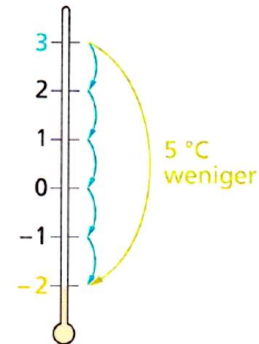
An einem Jännertag meldet der Radiosprecher folgende Frühtemperaturen: „Wien minus 7 °C, Salzburg minus 8 °C, Innsbruck minus 10 °C, Klagenfurt minus 13 °C ...“

Du weißt, dass mit **Minusgraden** Temperaturen unter null Grad angegeben werden.

Man schreibt: -7 °C , -8 °C , -10 °C , -13 °C ...

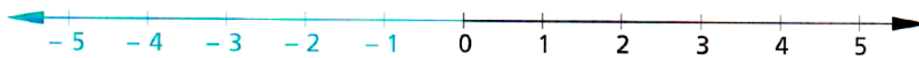
Diese Temperaturen werden durch so genannte **negative Zahlen** angegeben.

Wenn du von einer natürlichen Zahl eine größere natürliche Zahl subtrahieren sollst, zB: $3 - 5$, dann ist dies im Bereich der natürlichen Zahlen nicht möglich. Wenn du aber an Temperaturen denkst, dann wird diese Aufgabe lösbar: Wie viel Grad Celsius zeigt das Thermometer, wenn es zunächst 3 °C hat und die Temperatur um 5 °C fällt? Die Figur rechts zeigt den schrittweisen Rückgang der Temperatur von 3 °C bis zu -2 °C .



Veranschaulichung ganzer Zahlen auf der Zahlengeraden

Um ganze Zahlen zu veranschaulichen, spiegeln wir den Zahlenstrahl am Nullpunkt. Wir verlängern also den Zahlenstrahl über den Nullpunkt hinaus zur **Zahlengeraden**.



Auf der waagrecht gezeichneten Zahlengeraden liegen die **positiven** ganzen Zahlen **rechts** von der Zahl Null, die **negativen** ganzen Zahlen liegen **links** von der Zahl Null. Null ist weder positiv noch negativ, wird aber auch zu den ganzen Zahlen gezählt.

Abbildung 65: Einführung der ganzen Zahlen

Es wird also wiederum von einem alltäglichen Thema ausgegangen und dann der Bogen zur mathematischen Umsetzung und zur Bedeutung der ganzen Zahlen gespannt. Dies wird durch die Spiegelung des Zahlenstrahls am Nullpunkt, das Entstehen einer Zahlengeraden und die Veranschaulichung der ganzen Zahlen auf der Zahlengeraden realisiert. Die Null wird hierbei als Teil der ganzen Zahlen definiert, die jedoch weder ein positives noch ein negatives Vorzeichen hat.

Interessant ist, dass nicht nur die Einführung über die Bezugnahme auf Minusgrade in den beiden Schulbuchreihen in derselben Weise gestaltet ist, sondern in weiterer Folge auch dieselben Kontexte angesprochen werden. So finden sich in „Das ist Mathematik 3“ Beispiele betreffend die Temperatur und einen Kontoauszug sowie auch Beispiele im Zusammenhang mit der Seehöhe und den Höhenunterschieden. Zu Letzterem findet sich im Laufe des Kapitels sogar eine Grafik, welche jedoch wesentlich mehr konkrete Informationen enthält als die vergleichbare Illustration in „Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 3“.

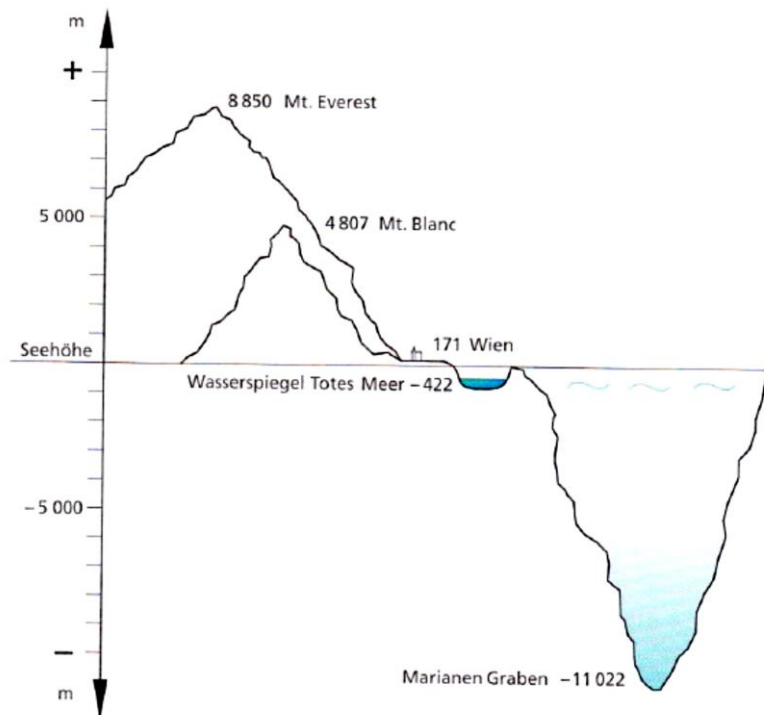


Abbildung 66: Beispiel zur Feststellung von Höhenunterschieden

Des Weiteren ist bei dieser Grafik zu bemerken, dass das Nullniveau nicht explizit gekennzeichnet ist.

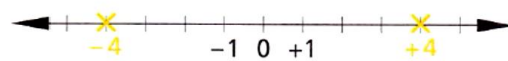
Nach diesen Erläuterungen kommt die Null erst wieder im Zusammenhang mit dem Betrag einer Zahl zur Sprache.

Betrag einer Zahl

Wir zeichnen zB die Zahlen $+4$ und -4 auf einer Zahlengeraden ein:

-4 hat vom Nullpunkt der Zahlengeraden den gleichen Abstand wie $+4$.

Dasselbe gilt für jede Zahl a und ihre Gegenzahl $-a$.



Betrag einer Zahl

Man nennt den **Abstand einer Zahl vom Nullpunkt** den (absoluten) **Betrag** der Zahl. Eine **Zahl** und ihre **Gegenzahl** haben **denselben Betrag**: $|+a| = |-a|$

Für den **Betrag** zB der Zahlen $+3$ bzw. -5 schreibt man $|+3| = 3$ bzw. $|-5| = 5$

Der **Betrag einer ganzen Zahl** ist immer eine **natürliche Zahl**.

Allgemein gilt: $|+a| = |-a| = a$ für $a \in \mathbb{Z}^+$. Für 0 gilt: $|0| = 0$

Abbildung 67: Betrag einer Zahl

Hierbei wird der Abstand einer Zahl zum Nullpunkt in den Mittelpunkt der Erklärungen gerückt. Des Weiteren wird auch angemerkt, dass der Betrag von null gleich null ist, was interessanterweise in den nachfolgenden Aufgaben unter anderem unmittelbar abgefragt wird.

Aber auch in anderen Beispielen wird in diesem Zusammenhang der Umgang mit der Null geübt.

Setze eines der Zeichen „<“, „>“ bzw. „=“ so ein, dass die Aussage stimmt!

- | | | | | | | | |
|-----------|--------|-----------|--------|-----------|---------|-----------|--------|
| a) $ -8 $ | $ +3 $ | c) $ +4 $ | $ -6 $ | e) $ +9 $ | $ -7 $ | g) $ -7 $ | $ 0 $ |
| b) $ +5 $ | $ -5 $ | d) $ 0 $ | $ -4 $ | f) $ -8 $ | $ -10 $ | h) $ +8 $ | $ -8 $ |

Gib, falls möglich, alle ganzen Zahlen an, für die die Aussage richtig ist!

- Beispiel** 1) $|x| \leq 3$ 2) $|y| > 4$ 1) $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 2) $\dots -7, -6, -5, 5, 6, 7 \dots$
- | | | | | |
|--------------|-----------------|--------------|------------------|------------------------|
| a) $ a = 3$ | c) $ c > 7$ | e) $ e = 0$ | g) $ g \geq 3$ | + i) $ i = i$ |
| b) $ b < 4$ | d) $- -d = -8$ | f) $ f > 0$ | h) $ h \geq -3$ | + j) $ j = -j$ |

Abbildung 68: Beispiele zum Betrag einer Zahl

Ebenso wie im dritten Band der Schulbuchreihe „Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden“ bei der Erweiterung des Koordinatensystems um die negativen Koordinaten wird der Null auch bei diesem Thema in „Das ist Mathematik 3“ zum letzten Mal in dieser Schulstufe eine bedeutende Rolle zugeschrieben. Während das Werk von LEWISCH u.a. jedoch von einer Landkarte ausgeht, nimmt das Buch von REICHEL u.a. direkt Bezug auf die mathematische Darstellung eines Koordinatensystems auf Millimeterpapier.

Dies waren alles in allem alle expliziten Nennungen der Null in der Schulbuchreihe „Das ist Mathematik“, denn in der achten Schulstufe wird dieser Zahl keine besondere Aufmerksamkeit mehr gewidmet.

Beim Vergleich der beiden Schulbuchreihen wird deutlich, dass durchaus einige Übereinstimmungen im Aufbau und in den Themen, in deren Zusammenhang die Null ausdrücklich auftritt, gegeben sind. In beiden Reihen ist eine starke Betonung der Arithmetik zu Beginn der Sekundarstufe zu erkennen, welche in den höheren Schulstufen von anderen Themen wie zum Beispiel der Geometrie abgelöst wird. Es fällt auf, dass häufig jeweils dieselben Kontexte verwendet werden, um mathematische Inhalte in die Lebenswelt der Schüler/innen einzubetten.

Selbstverständlich sind jedoch auch Unterschiede zu erkennen, die vor allem wohl darauf zurückzuführen sind, dass „Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden“ eher für den Gebrauch an den Neuen Mittelschulen konzipiert ist, während „Das ist Mathematik“ vorrangig für die Verwendung an allgemein bildenden höheren Schulen gedacht ist. Diese Tatsache zeigt sich beispielsweise im Ausmaß der Voraussetzung von Vorkenntnissen, an der Art und

Weise, wie neue Themen und mathematische Zusammenhänge eingeführt und erläutert werden, sowie an der Ausführlichkeit mancher Erklärungen. Des Weiteren gibt es in den Werken von LEWISCH u.a. wesentlich mehr grafische Veranschaulichungen, wohingegen sich die Werke von REICHEL durch eine größere Anzahl unterschiedlicher Kontexte und auch durch schwierigere Aufgabenstellungen auszeichnen. Der Null in der Rolle einer Fehlerquelle im Zusammenhang mit den vier Grundrechnungsarten wird im ersten Band von „Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden“ wesentlich mehr Aufmerksamkeit gewidmet als im vergleichbaren Werk von REICHEL, doch der Ausbau der Grundvorstellungen zu dieser besonderen Zahl sollte bei Verwendung gleich welchen Werkes in jedem Fall in sinnvollem Ausmaß gelingen.

Resümee

Wie im Zuge dieser Arbeit festgestellt werden konnte, kam der Null bereits vor Tausenden von Jahren eine wichtige Bedeutung zu, und so ist es auch heute noch.

Bereits vor etwa 5000 Jahren wurde im sexagesimalen Zahlensystem der Babylonier ein Symbol als Trennzeichen verwendet, welches jedoch bei Weitem noch nicht als „Zahl“ im Gedankengut verankert war. Dieses Fehlzeichen kann als Vorstufe der Zahl Null interpretiert werden, dessen Einführung aus der Notwendigkeit heraus entstand, jeder Zeichenfolge eine eindeutige Bedeutung zuzuordnen.

Die Griechen, die weder eine Stellenwertschreibung noch ein Symbol für die Null gebrauchten, entwickelten grundsätzlich kein Bedürfnis nach der Null, weil die Null für sie eine Zahl ohne geometrischen Sinn war. Außerdem ist ein weiterer Grund für die Ablehnung der Null durch die Griechen in ihrer Philosophie zu sehen. Vor dem Auftauchen der Null herrschte die reine Logik, und das Universum war voraussagbar und geordnet. Zenons unerklärliches Paradoxon wurde wegdiskutiert, indem die Unendlichkeit und die Null aus dem Zahlenreich ausgeschlossen wurden, was in weiterer Folge jedoch zu Problemen führte.

Zur grundlegenden Änderung der bis dahin bekannten Rolle der Null als Platzhalter bzw. als leere Stelle sowie der Tatsache, dass sie nicht als Zahl angesehen wurde und keinen Wert hatte, kam es schließlich in Indien. Die Einführung eines neuen Symbols, um die Abwesenheit von Einheiten einer Ordnung darzustellen, war schließlich die Geburtsstunde der indischen Null. Diese wurde von der indischen Gesellschaft begrüßt, und die indischen Mathematiker schafften den bedeutenden Schritt, die Rolle der Null von einem Platzhalter zu einer Zahl zu verändern.

Die Null war also zu einer eigenständigen Zahl herangereift, die einen bestimmten Wert und einen angestammten Platz auf der Zahlengerade hatte. Der weitreichende Einfluss der indischen Mathematiker zeigte sich bei den chinesischen Gelehrten ebenso wie in der arabischen Welt, und schließlich erreichte die wissenschaftliche Revolution auch Europa. Hierfür leistete LEONARDO VON PISA einen entscheidenden Anstoß, indem er die Nützlichkeit der arabischen Ziffern bei komplizierten Berechnungen erläuterte. Durch die Einführung der doppelten Buchführung, welche nur durch die Zuweisung numerischer Werte funktionieren konnte, fiel schließlich das europäische Paradigma, dass Ziffern Zahlen waren, die Null aber ein Zeichen. Dadurch wurden sie nun alle als Zahlen angesehen.

Im Laufe der wissenschaftlichen Revolution wich somit die rein logische Betrachtung der Welt einer empirischen, die mehr auf Beobachtungen als auf Philosophie beruhte.

Im Zusammenhang mit der Entwicklung der Infinitesimalrechnung musste jedoch zuerst die Unlogik der Division durch null ignoriert werden, ehe es den Mathematikern gelang, dieses Problem zu überwinden und die Infinitesimalrechnung logisch abzusichern.

Die gesamte historische Entwicklung betrachtend, ist es sehr interessant zu sehen, dass die Null in vielen Kulturen unabhängig voneinander aufgekommen ist und sich entwickelt hat. Seien es die die Null betreffenden Anfänge bei den Babyloniern, den Indern oder den Völkern der Neuen Welt: Im Laufe der Zeit kam es zu einer gegenseitigen Beeinflussung und zum Austausch von Ideen, sodass sich eine gemeinschaftliche Interpretation und Verwendung der Null entwickeln konnte. Die Symbole vieler Kulturen ähneln einander mittlerweile, und die Unverzichtbarkeit der Null beim Rechnen ist heutzutage nicht mehr zu bestreiten. Die arithmetischen Eigenschaften dieser besonderen Zahl wurden im Laufe der Entwicklungen definiert, und in der gegenwärtigen Zeit kommt der Vermittlung dieser Eigenschaften gegenüber Schüler/innen eine wichtige Rolle zu.

Daher wird bereits in der ersten Klasse der Volksschule damit begonnen, die Schüler/innen die orthographische Darstellung der Null, einige Grundvorstellungen sowie manch arithmetische Eigenschaften im Zusammenhang mit dieser Zahl zu lehren. Außerdem muss die Idee des dekadischen Systems verstanden werden, um die tiefere Bedeutung der Ziffer Null zu erkennen.

Dies wird in den Schulbüchern durch einen meist recht spielerischen Zugang und durch viele schematische Darstellungen realisiert. Dennoch kommt gerade zu Beginn der mathematischen Schulausbildung der Null oftmals eine eher untergeordnete Rolle zu, weil diese Zahl nicht als Teil der anfangs häufig verwendeten Abzählübungen verwendet werden kann. Dies sollte sich dann spätestens mit der Einführung der vier Grundrechnungsarten ändern, und Additionen sowie Subtraktionen mit null sollten von den Schüler/innen ohne Probleme durchgeführt werden können. Abhängig von der Wahl des Schulbuches wird in der Volksschule eventuell auch noch auf die Multiplikation oder gar Division mit null eingegangen. Diese Thematiken werden jedoch auf jeden Fall in der Sekundarstufe genau erläutert, und somit sollte der Schwerpunkt in der Volksschule auf einer gut gelungenen Einführung der Null und der Vermittlung eines grundlegenden Verständnisses dieser Zahl sowie deren Bedeutung liegen.

In der Sekundarstufe muss der Auseinandersetzung mit der Null also durchaus weiterhin Aufmerksamkeit geschenkt werden, um der Null als Fehlerquelle möglichst vorzubeugen und die Grundvorstellungen der Schüler/innen auszubauen. Um dies zu bewerkstelligen, wurden die vier Grundrechnungsarten in den Lehrbüchern der Sekundarstufe thematisiert und ausführlicher als zuvor in der Volksschule erläutert. Der Schwierigkeitsgrad ist selbstverständlich höher und auch der Zahlenbereich dementsprechend größer. Je nach Wahl des Lehrbuches wird mehr oder weniger speziell auf die Null und auf die Vorbeugung von Fehlern im Zusammenhang mit dieser Zahl eingegangen.

Doch trotz der Unterschiede zwischen den Schulbüchern fällt auf, dass der Null durchaus bei denselben Themen Bedeutung zukommt und dass auch oftmals dieselben Kontexte für die Einführung neuer Themen gewählt werden. In diesem Sinn spielt es auch keine Rolle, ob das Lehrbuch eher für eine allgemein bildende höhere Schule oder für eine Neue Mittelschule gestaltet ist.

Literaturverzeichnis

- Ableitinger Ch., VO *Schulmathematik 1 (Arithmetik und Algebra)*, WS 2014/15.
- Baxa C., VO *Geschichte der Mathematik und Logik*, SS 2015.
- Brunner u.a., *Zahlenreise 1 – Erarbeitungsteil*, 14. Auflage, Veritas-Verlag, 2012.
- Brunner u.a., *Zahlenreise 1 – Übungsteil A*, 14. Auflage, Veritas-Verlag, 2012.
- Brunner u.a., *Zahlenreise 2 – Erarbeitungsteil*, 14. Auflage, Veritas-Verlag, 2013.
- Fahse Ch., *Vorstellungen zur Null im Kontext der Division durch Null*, *mathematica didactica* 37, 2014.
- Gericke H., *Geschichte des Zahlbegriffs*, 1. Auflage, Hochschultaschenbücher-Verlag, Mannheim 1970.
- Gerster H., *Die Null als Fehlerquelle bei den schriftlichen Rechenverfahren*, *Grundschule* 12/1989, S. 26–29.
- Graumann G., *Mathematikunterricht in der Grundschule*, Verlag Julius Klinkhardt, 2002.
- <http://kira.dzlm.de/132> [Zugriff am 16.02.2016].
- http://www.chemie.de/lexikon/Absoluter_Nullpunkt.html [Zugriff am 02.02.2016].
- http://www.indianerwww.de/indian/inka_kalender_schrift.htm, <https://de.wikipedia.org/wiki/Inka>, <https://de.wikipedia.org/wiki/Quipu> [Zugriff am 22.01.2016].
- <http://www.mathematik.de/ger/presse/ausdenmitteilungen/artikel/mdmv-17-2-117.pdf> [Zugriff am 15.03.2016].
- <http://www.obib.de/Archaeologie/Afrika/Ishango.html> [Zugriff am 23.10.2015].
- <http://www.spektrum.de/frage/wo-liegt-eigentlich-normalnull/690951> [Zugriff am 02.02.2016].
- <http://www.spektrum.de/news/warum-sich-der-nullmeridian-verschoben-hat/1361529> [Zugriff am 02.02.2016].
- <http://www.wissen.de/lexikon/normalnull> [Zugriff am 02.02.2016].
- https://de.wikipedia.org/wiki/Absoluter_Nullpunkt [Zugriff am 02.02.2016].
- <https://de.wikipedia.org/wiki/Hochrheinbr%C3%BCcke> [Zugriff am 05.05.2016]
- https://de.wikipedia.org/wiki/Luca_Pacioli [Zugriff am 27.01.2016].
- https://de.wikipedia.org/wiki/Meridian_%28Astronomie%29 [Zugriff am 02.02.2016].
- <https://de.wikipedia.org/wiki/Normalnull> [Zugriff am 02.02.2016].
- <https://de.wikipedia.org/wiki/Null> [Zugriff am 21.10.2015].

- <https://de.wikipedia.org/wiki/Nullmeridian> [Zugriff am 02.02.2016].
- <https://de.wikipedia.org/wiki/Nullwert> [Zugriff am 07.02.2016].
- https://de.wikipedia.org/wiki/Vorzeichenbehaftete_Null [Zugriff am 06.02.2016].
- https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2 [Zugriff am 02.03.2016].
- https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/VS7T_Mathematik_3996.pdf [Zugriff am 16.02.2016].
- Ifrah G., *Universalgeschichte der Zahlen*, 2. Auflage, Campus Verlag, 1987.
- Kaplan R., *Die Geschichte der Null*, 2. Auflage, Campus Verlag GmbH, 2001.
- Lewisch u.a., *Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 1*, 5. Auflage, Veritas-Verlag, 2015.
- Lewisch u.a., *Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 2*, 4. Auflage, Veritas-Verlag, 2014.
- Lewisch u.a., *Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 3*, 4. Auflage, Veritas-Verlag, 2015.
- Reichel u.a., *Das ist Mathematik 1*, 1. Auflage, öbv, 2011 (Druck 0004).
- Reichel u.a., *Das ist Mathematik 2*, 1. Auflage, öbv, 2011 (Druck 0004).
- Reichel u.a., *Das ist Mathematik 3*, 1. Auflage, öbv, 2012 (Druck 0003).
- Ruwisch S., *Vorstellungen über null und Null*, Beiträge zum Mathematikunterricht online, 2008.
- Seife C., *Zwilling der Unendlichkeit – Eine Biographie der Null*, 4. Auflage, Wilhelm Goldmann Verlag, 2002.
- Wohllhart/Scharnreitner/Kleißner, *Eins Plus 1 – Erarbeitungsteil*, 4. Auflage, Helbling Verlag, 2013.
- Wohllhart/Scharnreitner/Kleißner, *Eins Plus 1 – Übungsteil*, 4. Auflage, Helbling Verlag, 2013.
- Wohllhart/Scharnreitner/Kleißner, *Eins Plus 2 – Erarbeitungsteil*, 5. Auflage, Helbling Verlag, 2014.

Abbildungsverzeichnis

- Abbildung 1: Ishango-Knochen: *Ishango-Knochen*, <http://www.obib.de/Archaeologie/Afrika/Ishango.html> [Zugriff am 23.10.2015].
- Abbildung 2: Ritzspuren: *Ishango-Knochen*, <http://www.obib.de/Archaeologie/Afrika/Ishango.html> [Zugriff am 23.10.2015].
- Abbildung 3: Zahlenschreibweise der Babylonier: Kaplan R., *Die Geschichte der Null*, 2. Auflage, Campus Verlag GmbH, 2001, S. 18.
- Abbildung 4: „Null“ der Babylonier: Kaplan R., *Die Geschichte der Null*, 2. Auflage, Campus Verlag GmbH, 2001, S. 22.
- Abbildung 5: Astronomische Tafel der Babylonier: Ifrah G., *Universalgeschichte der Zahlen*, 2. Auflage, Campus Verlag, 1987, S. 422.
- Abbildung 6: Zahlendarstellung der Ägypter: https://de.wikipedia.org/wiki/%C3%84gyptische_Zahlschrift [Zugriff am 27.10.2015].
- Abbildung 7: Zahlenschreibweise der Griechen: VO *Geschichte der Mathematik und Logik*, Baxa, SS 2015.
- Abbildung 8: Wettlauf des Achilles mit der Schildkröte: Seife C., *Zwilling der Unendlichkeit – Eine Biographie der Null*, 4. Auflage, Wilhelm Goldmann Verlag, 2002. S. 51.
- Abbildung 9: Zahlworte des Sanskrit: Ifrah G., *Universalgeschichte der Zahlen*, 2. Auflage, Campus Verlag, 1987, S. 494.
- Abbildung 10: Worte für null: Ifrah G., *Universalgeschichte der Zahlen*, 2. Auflage, Campus Verlag, 1987, S. 496.
- Abbildung 11: Bsp. auf dem Abakus in der alten indischen Zahlschrift: Ifrah G., *Universalgeschichte der Zahlen*, 2. Auflage, Campus Verlag, 1987, S. 510.
- Abbildung 12: Bsp. für die alten indischen Zahlschrift unter Verwendung eines Symbols für die Null: Ifrah G., *Universalgeschichte der Zahlen*, 2. Auflage, Campus Verlag, 1987, S. 510.
- Abbildung 13: Darstellung einer Zahl in Sanskrit: Ifrah G., *Universalgeschichte der Zahlen*, 2. Auflage, Campus Verlag, 1987, S. 510.
- Abbildung 14: Kawi-Schrift: Ifrah G., *Universalgeschichte der Zahlen*, 2. Auflage, Campus Verlag, 1987, S. 501.
- Abbildung 15: Zahlzeichen der Bewohner von Java: Ifrah G., *Universalgeschichte der Zahlen*, 2. Auflage, Campus Verlag, 1987, S. 501.

- Abbildung 16: Chinesische Reihen der Strichziffern: Ifrah G., *Universalgeschichte der Zahlen*, 2. Auflage, Campus Verlag, 1987, S. 428f.
- Abbildung 17: Beispiele für die Verwendung der Null im System chinesischer Strichziffern: Ifrah G., *Universalgeschichte der Zahlen*, 2. Auflage, Campus Verlag, 1987, S. 433f.
- Abbildung 18: Ein Zahlenbrett: Seife C., *Zwilling der Unendlichkeit – Eine Biographie der Null*, 4. Auflage, Wilhelm Goldmann Verlag, 2002, S. 92.
- Abbildung 19: Graphisches System der Maya: Ifrah G., *Universalgeschichte der Zahlen*, 2. Auflage, Campus Verlag, 1987, S. 463.
- Abbildung 20: Glyphen der Maya: Seife C., *Zwilling der Unendlichkeit – Eine Biographie der Null*, 4. Auflage, Wilhelm Goldmann Verlag, 2002, S. 24.
- Abbildung 21: Verschiedene Glyphen der Null: Ifrah G., *Universalgeschichte der Zahlen*, 2. Auflage, Campus Verlag, 1987, S. 469, und Kaplan R., *Die Geschichte der Null*, 2. Auflage, Campus Verlag GmbH, 2001, S. 94.
- Abbildung 22: Beispiele für die Knotenschrift Quipu: <http://www.latinamericanstudies.org/quipu.htm> und <http://www.schulabakus.de/Arithmetik/historisch.html> [Zugriff am 22.01.2016].
- Abbildung 23: Einführung der Null im Werk „Zahlenreise 1 – Erarbeitungsteil“: Brunner u.a., *Zahlenreise 1 – Erarbeitungsteil*, 14. Auflage, Veritas-Verlag, 2012, S. 19.
- Abbildung 24: Einführung der Null im Werk „Zahlenreise 1 – Übungsteil A“: Brunner u.a., *Zahlenreise 1 – Übungsteil A*, 14. Auflage, Veritas-Verlag, 2012, S. 19.
- Abbildung 25: Erste Additionen mit der Null: Brunner u.a., *Zahlenreise 1 – Übungsteil A*, 14. Auflage, Veritas-Verlag, 2012, S. 20.
- Abbildung 26: Beispiele der Addition und Subtraktion mit den Zahlen Null bis Vier: Brunner u.a., *Zahlenreise 1 – Übungsteil A*, 14. Auflage, Veritas-Verlag, 2012, S. 25.
- Abbildung 27: Einführung der Null im Werk „Eins Plus 1 – Erarbeitungsteil“: Wohlhart/Scharnreitner/Kleißner, *Eins Plus 1 – Erarbeitungsteil*, 4. Auflage, Helbling Verlag, 2013, S. 33.
- Abbildung 28: Erste Übungen im Zusammenhang mit der Null: Wohlhart/Scharnreitner/Kleißner, *Eins Plus 1 – Erarbeitungsteil*, 4. Auflage, Helbling Verlag, 2013, S. 34.
- Abbildung 29: Rechnungen mit null: Wohlhart/Scharnreitner/Kleißner, *Eins Plus 1 – Erarbeitungsteil*, 4. Auflage, Helbling Verlag, 2013, S. 36, 38.

- Abbildung 30: Multiplikationen in „Zahlenreise 2“: Brunner u.a., *Zahlenreise 2 – Erarbeitungsteil*, 14. Auflage, Veritas-Verlag, 2013, S. 17.
- Abbildung 31: Division mit Dividend Null in „Zahlenreise 2“: Brunner u.a., *Zahlenreise 2 – Erarbeitungsteil*, 14. Auflage, Veritas-Verlag, 2013, S. 45.
- Abbildung 32: Erste Multiplikationen in „Eins Plus 2“: Wohlhart/Scharnreitner/Kleißner, *Eins Plus 2 – Erarbeitungsteil*, 5. Auflage, Helbling Verlag, 2014, S. 28.
- Abbildung 33: Übung zum kleinen Einmaleins in „Eins Plus 2“: Wohlhart/Scharnreitner/Kleißner, *Eins Plus 2 – Erarbeitungsteil*, 5. Auflage, Helbling Verlag, 2014, S. 47.
- Abbildung 34: Erstmaliges Auftreten der Division in „Eins Plus 2“: Wohlhart/Scharnreitner/Kleißner, *Eins Plus 2 – Erarbeitungsteil*, 5. Auflage, Helbling Verlag, 2014, S. 60.
- Abbildung 35: Fehlerhafte schriftliche Subtraktionen: Gerster H., *Die Null als Fehlerquelle bei den schriftlichen Rechenverfahren*, Grundschule 12/1989, S. 26–29.
- Abbildung 36: Vermeidung der Null als Lösung bzw. falsche Addition des Übertrags: Gerster H., *Die Null als Fehlerquelle bei den schriftlichen Rechenverfahren*, Grundschule 12/1989, S. 26–29.
- Abbildung 37: Beispiele für das Dominieren der Null: Gerster H., *Die Null als Fehlerquelle bei den schriftlichen Rechenverfahren*, Grundschule 12/1989, S. 26–29.
- Abbildung 38: Fehlerhafte schriftliche Multiplikationen mit null: Gerster H., *Die Null als Fehlerquelle bei den schriftlichen Rechenverfahren*, Grundschule 12/1989, S. 26–29.
- Abbildung 39: Fehler im Multiplikationsverfahren: Gerster H., *Die Null als Fehlerquelle bei den schriftlichen Rechenverfahren*, Grundschule 12/1989, S. 26–29.
- Abbildung 40: Ausführliche Schreibweise und Kurzform: Gerster H., *Die Null als Fehlerquelle bei den schriftlichen Rechenverfahren*, Grundschule 12/1989, S. 26–29.
- Abbildung 41: Die Null beim schriftlichen Dividieren: Gerster H., *Die Null als Fehlerquelle bei den schriftlichen Rechenverfahren*, Grundschule 12/1989, S. 26–29.
- Abbildung 42: Beginn des Werkes „Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 1“: Lewisch u.a., *Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 1*, 5. Auflage, Veritas-Verlag, 2015, S. 6.
- Abbildung 43: Merksatz zum Vorkommen des Faktors Null: Lewisch u.a., *Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 1*, 5. Auflage, Veritas-Verlag, 2015, S. 41.

- Abbildung 44: Erläuterungen zum Nullenvorteil: Lewisch u.a., *Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 1*, 5. Auflage, Veritas-Verlag, 2015, S. 48.
- Abbildung 45: Erläuterungen zur Null als Dividend und Divisor: Lewisch u.a., *Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 1*, 5. Auflage, Veritas-Verlag, 2015, S. 53.
- Abbildung 46: Vorgehensweise bei der schriftlichen Division: Lewisch u.a., *Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 1*, 5. Auflage, Veritas-Verlag, 2015, S. 57.
- Abbildung 47: Division von Dezimalzahlen: Lewisch u.a., *Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 1*, 5. Auflage, Veritas-Verlag, 2015, S. 152.
- Abbildung 48: Weitere Erläuterung zur Division: Lewisch u.a., *Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 1*, 5. Auflage, Veritas-Verlag, 2015, S. 152.
- Abbildung 49: Die Null im Koordinatensystem: Lewisch u.a., *Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 2*, 4. Auflage, Veritas-Verlag, 2014, S. 88.
- Abbildung 50: Beginn des Werkes „Mathematik - Verstehen + Üben + Anwenden 3“: Lewisch u.a., *Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 3*, 4. Auflage, Veritas-Verlag, 2015, S. 6.
- Abbildung 51: Einführung der negativen Zahlen: Lewisch u.a., *Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 3*, 4. Auflage, Veritas-Verlag, 2015, S. 16.
- Abbildung 52: Negative Zahlen in der Mathematik: Lewisch u.a., *Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 3*, 4. Auflage, Veritas-Verlag, 2015, S. 18.
- Abbildung 53: Beschreibung der ganzen Zahlen: Lewisch u.a., *Mathematik – Verstehen + Üben + Anwenden 3*, 4. Auflage, Veritas-Verlag, 2015, S. 18.
- Abbildung 54: Erläuterungen zum Zahlenstrahl: Reichel u.a., *Das ist Mathematik 1*, 1. Auflage, öbv, 2011 (Druck 0004), S. 27.
- Abbildung 55: Merksatz zur Addition von null: Reichel u.a., *Das ist Mathematik 1*, 1. Auflage, öbv, 2011 (Druck 0004), S. 34.
- Abbildung 56: Merksatz zur Subtraktion von null: Reichel u.a., *Das ist Mathematik 1*, 1. Auflage, öbv, 2011 (Druck 0004), S. 39.
- Abbildung 57: Multiplikation mit null: Reichel u.a., *Das ist Mathematik 1*, 1. Auflage, öbv, 2011 (Druck 0004), S. 54.
- Abbildung 58: Beispiele zur Multiplikation mit null: Reichel u.a., *Das ist Mathematik 1*, 1. Auflage, öbv, 2011 (Druck 0004), S. 55.
- Abbildung 59: Erläuterungen zur Division: Reichel u.a., *Das ist Mathematik 1*, 1. Auflage, öbv, 2011 (Druck 0004), S. 61.

- Abbildung 60: Beispiele zur Division von und durch null: Reichel u.a., *Das ist Mathematik 1*, 1. Auflage, öbv, 2011 (Druck 0004), S. 62.
- Abbildung 61: Einführung der Dezimalzahlen: Reichel u.a., *Das ist Mathematik 1*, 1. Auflage, öbv, 2011 (Druck 0004), S. 96.
- Abbildung 62: Dividieren von Dezimalzahlen: Reichel u.a., *Das ist Mathematik 1*, 1. Auflage, öbv, 2011 (Druck 0004), S. 118.
- Abbildung 63: Wiederholung in „Das ist Mathematik 2“: Reichel u.a., *Das ist Mathematik 2*, 1. Auflage, öbv, 2011 (Druck 0004), S. 9.
- Abbildung 64: Erläuterung zu Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen: Reichel u.a., *Das ist Mathematik 2*, 1. Auflage, öbv, 2011 (Druck 0004), S. 24.
- Abbildung 65: Einführung der ganzen Zahlen: Reichel u.a., *Das ist Mathematik 3*, 1. Auflage, öbv, 2012 (Druck 0003), S. 16.
- Abbildung 66: Beispiel zur Feststellung von Höhenunterschieden: Reichel u.a., *Das ist Mathematik 3*, 1. Auflage, öbv, 2012 (Druck 0003), S. 18.
- Abbildung 67: Betrag einer Zahl: Reichel u.a., *Das ist Mathematik 3*, 1. Auflage, öbv, 2012 (Druck 0003), S. 22.
- Abbildung 68: Beispiele zum Betrag einer Zahl: Reichel u.a., *Das ist Mathematik 3*, 1. Auflage, öbv, 2012 (Druck 0003), S. 23.