



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Fraktale im Mathematikunterricht
unter besonderer Berücksichtigung der Modellierung
natürlicher Phänomene“

verfasst von / submitted by

Christine Görtz

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 445

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UniStG
UF Mathematik UniStG
UF Biologie und Umweltkunde UniStG

Betreut von / Supervisor:

Mag. Dr. Andreas Ulovec

Inhaltsverzeichnis

Abstract	3
1 Vorwort	4
2 Fachdidaktische Einführung	6
2.1 Bisherige Erkenntnisse über Fraktale im Mathematikunterricht	6
2.2 Der Begriff „Fraktale“ im Lehrplan	9
2.3 Mögliche Einordnung des Themas im Lehrplan	10
3 Benötigte Vorkenntnisse	13
3.1 Logarithmus und Logarithmusfunktion	14
3.2 Folgen, Reihen und Grenzwert	15
3.3 Modellieren	19
4 Die Programmiersprache Logo	21
4.1 Die Basics	21
4.2 Programmieren von Prozeduren	23
5 Begriffsklärung	24
5.1 Selbstähnlichkeit und Skaleninvarianz	24
5.2 Die fraktale Dimension	25
5.3 Fraktal	27
5.4 Natürliches Fraktal	28
6 Motivation der Anwendungsbeispiele für den Schulunterricht	30
7 Einstieg über das Phänomen der Küstenlinie Großbritanniens	31
7.1 Modellierung der Küstenlinie Großbritanniens	34
7.2 Der Flächeninhalt der Insel	38
7.3 Die Klärung des Begriffs Fraktal anhand der Koch-Kurve	40
7.4 Die Kochsche Schneeflocke als fraktales Modell der Insel Großbritannien	44
7.5 Berechnung der Küstenliniendimension	47
7.6 Abschlussbemerkung	50

8	Modellierung von Schwämmen	51
8.1	Allgemeines über Schwämme (<i>Porifera</i>)	51
8.2	Der Menger-Schwamm zur Modellierung von Schwämmen	53
8.3	Überprüfung durch Experimente	56
8.4	Abschlussbemerkung	60
9	Resümee	61
10	Anhang	63
	Literaturverzeichnis	79
	Internetquellen	81
	Abbildungsverzeichnis	83

Abstract

Fraktale erlebten ihren Höhepunkt in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts und zählen zu den jüngsten mathematischen Errungenschaften. Leider haben sie bisher noch kaum Erwähnung in den Lehrplänen und in weiterer Folge auch nicht im Mathematikunterricht gefunden. In dieser Arbeit werden daher zwei interessante Modellierungsbeispiele präsentiert, welche die Einführung von Fraktalen in den Mathematikunterricht den Lehrpersonen näher bringen sollen. Zum einen wird das berühmte Beispiel der Küstenlinie Großbritanniens genau unter die Lupe genommen und Schritt für Schritt mithilfe der Koch-Kurve modelliert. Zum anderen dient der Menger-Schwamm als fraktales Modell eines gewöhnlichen Tafelschwamms. Beide Anwendungsbeispiele überraschen mit Aha-Erlebnissen, die das Interesse an der Mathematik wecken sollen. Ebenso beinhalten diese neben einer Reihe von Sozialformen sowohl Computereinsatz als auch praktische Experimente und spiegeln so auf SchülerInnenenniveau den Ablauf von tatsächlicher Forschung wider.

Abstract

Fractals culminated in the second half of the 20th century and rank among the latest achievements of mathematics. They unfortunately found little reflection in the curriculum and consequently they are hardly taught in math class. Therefore, two interesting application examples are represented in this work, which should give teachers an understanding of the introduction of fractals in math class. For one thing the famous example of Great Britain's coastline is examined and modelled step by step with the aid of the Koch-curve. For another thing the Menger-sponge is used as a fractal model of an ordinary blackboard eraser. Both application examples surprise with aha-experiences, which should catch the pupils' interest in mathematics. In addition to a series of social forms they contain use of computers as well as practical experiments and reflect the progress of applied research with pupil adequate means.

1 Vorwort

Zum ersten Mal hörte ich von Fraktalen im Physikunterricht im Jahr meiner Matura. Ich weiß nicht mehr genau, wie meine Professorin auf das Thema gekommen ist, jedenfalls stellte sie uns die Mandelbrotmenge vor, die am Cover unseres Schulbuches abgebildet war. In diesem Zusammenhang stellte sie uns die Eigenschaft vor, dass egal welchen Bildausschnitt und in welcher Vergrößerung man die Menge betrachtete, sich die Strukturen ständig wiederholten. Die Faszination am Thema war geweckt. Dann hörte ich längere Zeit nichts mehr, bis mein Vater mir eines Abends die Wurzelschnecke vorstellte. Diese ist eine Schnecke, die durch rechtwinkelige Dreiecke, deren Hypotenusen die Folge der Quadratwurzeln der natürlichen Zahlen sind, gebildet wird. Auch hier steckt im gewissen Maße jene Selbstähnlichkeit, die mich bereits so bei der Mandelbrotmenge fasziniert hatte. Ein weiterer Aspekt der Wurzelschnecke ist auch, dass man mit ihrer Hilfe sehr gut ein echtes Schneckenhaus modellieren kann. Da mich die Schönheit und die Prozesse der Natur schon immer faszinierten, war dies sozusagen der erste Anstoß, der mich einige Jahre später zu dieser Arbeit motivierte.

Im Laufe des Mathematik Studiums wurde in verschiedenen Lehrveranstaltungen das Thema Fraktale immer wieder kurz angeschnitten, jedoch nie länger als eine Einheit lang. Dennoch ermutigte mich das um mir Literatur mit demselben Inhalt zu suchen und zu lesen. Auch lernte ich von verschiedenen Mathematik Fachdidaktikern, unter anderem auch von meinem Diplomarbeitbetreuer Mag. Dr. Andreas Ulovec, dass man Fraktale sehr wohl im Schulunterricht behandeln kann und wurde so wieder an meine damalige Faszination erinnert. Schließlich fasste ich den Entschluss, meine Diplomarbeit genau zu dem Thema „Fraktale im Schulunterricht unter besonderer Berücksichtigung der Modellierung natürlicher Phänomene“ zu schreiben.

Hierfür verschaffte ich mir zuallererst einen Überblick über den derzeitigen Forschungsstand zu Fraktalen im Mathematikunterricht. Die wenigen fachdidaktischen Papers, die ich zu diesem Thema fand, untermauerten meine Einstellung, dass Fraktale den Mathematikunterricht enorm bereichern können. Als nächstes durchforstete ich die verschiedenen Lehrpläne nach dem Begriff „Fraktal“. Diese Suche blieb bis auf zwei kurze Erwähnungen relativ erfolglos. Der Grund dafür ist unter anderem, dass Fraktale zu den jüngsten mathematischen Errungenschaften zählen und erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts populär wurden. Nichtsdestotrotz lassen sich Fraktale sehr gut im Lehrplan unterbringen. Hierfür beleuchtete ich die wichtigsten benötigten Vorkenntnisse, abgesehen von der Geometrie, zur Behandlung von diesem Thema

im Mathematikunterricht sowie das Programm MSWLogo, welches heutzutage nicht mehr populär ist, jedoch ideal ist zum Zeichnen von vielen Fraktalen.

Das Kernstück der Arbeit begann ich mit der Klärung der wichtigsten Begrifflichkeiten rund um Fraktale, zu denen die Leserin und der Leser angehalten sind vorzublättern, sofern der Begriff Fraktal nicht geläufig ist. Anschließend präsentiere ich einige schultaugliche Inhalte mit zusätzlichen Bemerkungen für den Einsatz im Schulunterricht. Diese Anwendungsbeispiele wurden von der Verfasserin in stundenlanger Arbeit selbst geschrieben und erprobt, was mir extrem viel Freude bereitete.

Besonders danken möchte ich an dieser Stelle meinem Freund Benjamin, der mir während der Erstellung der Beispiele die gesamte Zeit mit Rat und Tat zur Seite stand und zum Teil weiterarbeitete, als ich nicht mehr konnte. Ohne ihn wären die Beispiele bei weitem nicht so gelungen und ausführlich geworden. Auch wenn schlussendlich leider nicht alle erarbeiteten Beispiele Platz in der Arbeit fanden, vergesse ich sicherlich nicht die Zeit, die wir gemeinsam in sie investiert hatten. Doch nicht nur bei der Diplomarbeit, sondern auch bei allen anderen Dingen stand er mir zusammen mit meiner Familie unterstützend zur Seite. Ohne ihren Rückhalt wäre ich niemals so schnell dorthin gekommen, wo ich heute stehe.

Des Weiteren danke ich meinem Diplomarbeitsbetreuer Mag. Dr. Andreas Ulovec, der mich während dem Schreiben meiner Arbeit immer wieder bestärkte auf dem Weg zu bleiben, den ich eingeschlagen hatte. All diese Menschen und noch viele mehr unterstützten mich tagtäglich bei meinem Werdegang und halfen mir dabei die Person zu werden, die ich heute bin.

Vielen Dank!

2 Fachdidaktische Einführung

„*Schools change slower than churches*“ lautet ein vielzitiertes Titel eines Artikels von Hans Haenisch in der Zeitschrift Pädagogik aus dem Jahre 1991. Davon ist auch leider nicht der Lehrplan des Unterrichtsfaches Mathematik ausgenommen. Denn obwohl das Thema Fraktale ein sehr spannendes und von vielen Mathematik Didaktikern und Didaktikerinnen als durchaus unterrichtsrelevant empfunden wird, hat es lediglich in den Lehrplänen des Wahlpflicht-Unterrichts „*Zur Vertiefung und Erweiterung des Bildungsinhaltes von Pflichtgegenständen*“ in den Fächern Mathematik und Darstellende Geometrie kurze Erwähnung gefunden (Bundesministerium für Bildung und Frauen. *Lehrpläne der AHS Oberstufe*, 2004).

2.1 Bisherige Erkenntnisse über Fraktale im Mathematikunterricht

Die International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching, kurz CIEAEM, ist eine jährliche Konferenz in der sich seit 1950 MathematiklehrerInnen und ForscherInnen treffen um fundamentale Fragen der Mathematik sowie die aktuellen Bedingungen des Mathematikunterrichts zu besprechen. Auch sind die TeilnehmerInnen bemüht durch intensive Zusammenarbeit die Qualität des Mathematikunterrichts des 21. Jahrhunderts zu verbessern (The International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching). Bereits in der 55. CIEAEM Konferenz im Juli 2003 wurde vorgeschlagen Fraktale schon in der Volksschule und den Sekundarstufen einzuführen. Der italienische Lektor Adalberto Codetta Raiteri (2005) zeigte daraufhin in einer Studie mit 23 LehrerInnen, darunter 15 des Faches Mathematik, dass man Fraktale in jeder Schulstufe unterrichten kann, wenn man den richtigen Schwierigkeitsgrad und Zugang berücksichtigt. Der Autor selbst beschreibt Fraktale als ausgezeichneten Zugang zu „gutem Mathematikunterricht“, da mathematische Modelle von Fraktalen SchülerInnen jedes Alters begeistern und teilweise sogar zur weiteren Auseinandersetzung mit dem Thema motivieren. Auch befindet er, dass sich gerade Fraktale ausgezeichnet für interdisziplinäre Aktivitäten, Computereinsatz sowie Gruppenarbeiten im Unterricht eignen.

Den Einsatz von Computern beschreiben die meisten Mathematik DidaktikerInnen als essentiell. Reinhard Oldenburg (2011) beispielsweise arbeitete an einem gewinnorientierten Forschungsinstitut, bevor er Lehrer wurde, und schickte Fragebögen an verschiedene

Unternehmen der Wirtschaft, Technik und des Ingenieurwesens. Von allen kam die einheitliche Meinung zurück, dass Computer in der heutigen Zeit für die Mathematik immer wichtiger würden, wobei das Modellbilden im Vordergrund stehe. Dabei werden bereits fertig entwickelte und in der Fachliteratur gefundene Modelle für die benötigten Zwecke umfunktioniert und verändert. Oldenburgs Meinung nach sollte daher ein Balance gefunden werden zwischen der traditionell gewachsen und der modernen Mathematik in der Schule. Auch Adalberto Codetta Raiteri und Renza Cambini (2004) befinden mathematisches Modellieren im Mathematikunterricht des 21. Jahrhunderts als ungemein wichtig. Fraktale eignen sich ihrer Ansicht nach besonders gut für diese Zwecke, da sie in verschiedene Teildisziplinen hineinreichen und die Schülerinnen und Schüler so interdisziplinär arbeiten. Doch nicht nur in Hinblick auf das Modellieren, sondern auch auf Rechercheaufgaben und die Verwendung von Lernplattformen und Programmen eignet sich Computereinsatz im Schulunterricht. In diesem Kontext werden in mehreren meiner Quellen immer wieder die Programme Fractint und Logo genannt. Fractint ist ein gratis Generator für Fraktale, wie beispielsweise die Mandelbrotmenge (Wegner, Tim. The Fractint Development Team WWW pages), wobei das Programm selbst leider bereits veraltet ist und auf neueren Betriebssystemen nicht mehr läuft. Logo ist eher eine Programmiersprache als ein Programm per se und somit Bestandteil vieler Programme, wobei in dieser Arbeit MSWLogo verwendet wird. Castellanos und Sacristan (2005) untersuchten bei Grafikdesign StudentInnen die Eignung von Logo. Sie waren verblüfft, dass entgegen ihrer Erwartungen die Studierenden die Programmiersprache auf Anhieb verstanden und sogar noch nach den Einheiten freiwillig damit weiterarbeiteten. Durch die Verwendung von Logo erweiterten die StudentInnen laut den Autoren ihre Problemlösefähigkeiten und ihre Art zu denken.

Jedoch ist nicht nur der Einsatz von Computern zu beachten, sondern die „richtige“ Herangehensweise an das Thema Fraktale. Auch in diesem Punkt sind sich die Mathematik FachdidaktikerInnen einig. Das Thema sollte spannend eingeführt und möglichst frei von den SchülerInnen selbst oder in Gruppen bearbeitet werden, auch wenn sie dies mit verschiedenen Herangehensweisen verfolgen. Unter anderem meint Vladimir Vanek (2012), dass es wichtig sei mit einem interessanten Fakt anzufangen. Dies könnte beispielsweise mittels der Aufgabe ebene Figuren mit verschiedenen Eigenschaften, wie endlichem/unendlichem Umfang und endlicher/unendlicher Fläche, zu finden, bewerkstelligt werden. Weiters könne man dann die Faszination aufrechterhalten, indem man auf Fraktale in der Natur, beispielsweise Wolken, Küstenlinien, Blitze, Broccoli, Dendriten oder ähnliches, eingeht. Einen etwas anderen Zugang verfolgten Codetta Raiteri und Cambini (2004). Sie sind der Ansicht, dass Begriffe, wie

Selbstständigkeit, nicht eingeführt, sondern anhand von eigenständiger Recherche und Beobachtung selbst erarbeitet werden sollten. Hierfür verwendeten sie die Software Fractint. Diese generierte Fraktale, die die SchülerInnen untersuchen und beschreiben mussten. In weiterer Folge lernten die Jugendlichen auch, mit Hilfe von Logo selbstständig Fraktale zu generieren. Für Castellanos und Sacristan (2005) stand die freie Aktivität der Studierenden an erster Stelle. Des Weiteren lagen die Rollen der Lehrpersonen darin, als Ratgeber und Mediatoren die Fragen der StudentInnen nicht direkt zu beantworten sondern mittels detaillierterer Fragen zu analysieren. Auch wurden Gruppenarbeiten zu zweit oder dritt bevorzugt, da so höhere intellektuelle Levels erreicht werden konnten. Neben diesen Rahmenbedingungen teilten die Autoren Arbeitsblätter aus, die Informationen über Fraktale, vorprogrammierte Logo-Beispiele zum Nachvollziehen des Programmiervorgangs sowie Arbeitsaufträge enthielten. Ab dann durften die Studierenden entweder alleine oder in Kleingruppen arbeiten, wobei sie sich zumindest in regelmäßigen Abständen miteinander austauschen mussten. Als essentiell für den Erfolg sehen Castellanos und Sacristan an, die Inhalte so zu präsentieren, dass sie einen bedeutsamen Lernerfolg für die Studierenden darstellen, und den StudentInnen genügend Möglichkeiten zu kreativen Tätigkeiten zu bieten. Zusammenfassend kann man also sagen, dass es unzählige Gründe gibt, Fraktale im Schulunterricht zu behandeln. Neben dem praxisorientiertem Einsatz von Computern und Fraktalen als Grundlage für Modelle kann man ihre reine Ästhetik sowie ihre Mysterien als Begründung für deren Behandlung im Schulunterricht vorbringen. Mittels Faszination kann so also ein leichter Einstieg in das Thema gefunden werden und die Motivation der SchülerInnen gesteigert werden. Essentiell ist auch, dass die Lernenden möglichst selbstständig an das Thema herangehen und mehr Freiheiten bei der Bearbeitung bekommen. Lehrpersonen sollen hierbei nicht alles vorweg nehmen, sondern die SchülerInnen selbst forschen und entwickeln lassen.

2.2 Der Begriff „Fraktale“ im Lehrplan

Die Lehrpläne der AHS-Oberstufe wurden am 08.07.2004 im Zuge der AHS-Oberstufen-Reform veröffentlicht und stufenweise in den folgenden Schuljahren eingeführt. Sie bestehen aus einem allgemeinen Teil, in dem Bildungs- und Lehraufgaben sowie didaktische Grundsätze, Schul- und Unterrichtsplanung erörtert werden, und den Lehrplänen der einzelnen Unterrichtsgegenstände. Dieser wiederum ist aufgebaut aus der Gegenstandsbezeichnung, der Bildungs- und Lehraufgabe, den didaktischen Grundsätzen und dem „Lehrstoff“ (Bundesministerium für Bildung und Frauen. *Lehrpläne der AHS-Oberstufe*, 2004). Die Lehrpläne der Berufsbildenden Schulen sind weniger übersichtlich aufgrund der großen Anzahl von Fachrichtungen und Schularten (Berufsbildende Schulen. *Downloads*, 2015). Insbesondere die Lehrpläne der HTL bilden lediglich die *„pädagogische und rechtliche Grundlage“* und *„werden entweder in einschlägigen Verordnungen verlautbart oder als Schulversuche genehmigt“*. Diese Freiheit ist vor allem wichtig, um am Puls der Zeit zu bleiben und sich so an *„den Stand der Technik und die Erfordernisse der Gesellschaft und des Arbeitsmarktes“* schneller anpassen zu können (HTL-Inovativ. *Lehrpläne*, 2015).

Weder in den Lehrplänen der Pflichtfächer der AHS Oberstufe (Bundesministerium für Bildung und Frauen. *Lehrpläne der AHS-Oberstufe*, 2004), noch in denen der Berufsbildenden Schulen (Berufsbildende Schulen. *Downloads*, 2015) ist das Thema Fraktale zu finden.

Im Lehrplan des Wahlpflichtfaches Mathematik besteht die Bildungs- und Lehraufgabe lediglich darin, *„den Schülerinnen und Schülern gemäß ihrer Interessen eine Erweiterung bzw. Vertiefung ihres Bildungshorizontes zu bieten“*. Bei den didaktischen Grundsätzen wird auf den Pflichtfachlehrplan verwiesen, wobei die *„Ausführung von handlungsorientiertem Unterricht“* und im Speziellen das Arbeiten *„mit dem Computer (CAS, Tabellenkalkulation, Internet usw.)“* hervorgehoben werden. Im Lehrstoff wird ebenfalls der Lehrplan des Pflichtgegenstandes angeführt sowie eine lange Liste an mathematischen Anwendungsgebieten, worunter auch Fraktale fallen. Ein richtiges Prachtstück des Lehrplanes stellt folgender Absatz dar:

„Die Schülerinnen und Schüler sollen im Rahmen der ausgewählten Themen mit instruktionaler Anleitung selbsttätig Fragen stellen, die sich daraus ergebenden Probleme mit mathematischen Methoden analysieren und gegebenenfalls lösen sowie die Ergebnisse der Arbeit mit zeitgemäßen Hilfsmitteln präsentieren können.“

(Bundesministerium für Bildung und Frauen. *Lehrplan des Wahlpflichtfaches Mathematik*, 2004) In diesem Absatz ist beinahe alles abgedeckt, was die im vorigen Kapitel genannten FachdidaktikerInnen vorgeschlagen haben.

Der Lehrplan des Wahlpflichtfaches Darstellende Geometrie beinhaltet dieselbe Bildungs- und Lehraufgabe wie der des Wahlpflichtfaches Mathematik und verweist auch größtenteils auf den Lehrplan des Pflichtgegenstandes. Innerhalb der didaktischen Grundsätze weicht dieser Lehrplan von dem des Wahlpflichtfaches Mathematik ab. Im Wahlpflichtfach Darstellende Geometrie sollen ausgewählte geometrische Themen sowohl selbstständig als auch unter Anleitung bearbeitet werden, wobei auch Hausübungen gegeben werden können. Auch hier wird wieder innerhalb des Abschnittes Lehrstoff auf den Lehrplan des Pflichtgegenstandes Darstellende Geometrie verwiesen. Neben diesem Verweis sind auch noch drei zusätzliche Themenbereiche angegeben, worunter auch *„die Verwendung iterativer geometrischer Prozesse zur Erzeugung geometrischer Objekte mittels CAD-Paketen (zB Ornamente und Fraktale) sowie ein fortgeschrittenes Konstruieren und Modellieren“* fällt. Somit ist im Lehrplan des Wahlpflichtfaches Darstellende Geometrie sehr genau angegeben, wie das Thema Fraktale zu behandeln ist (Bundesministerium für Bildung und Frauen. *Lehrplan des Wahlpflichtfaches Darstellende Geometrie*, 2004).

2.3 Mögliche Einordnung des Themas im Lehrplan

Die einschlägige Suche nach dem Wort „Fraktale“ in den Lehrplänen blieb relativ erfolglos. Dennoch kommen Fraktale indirekt immer wieder im Schulunterricht vor beziehungsweise können da oder dort ihren Platz finden. Beispielsweise kann bereits in der 5. und 6. Klasse des Pflichtgegenstandes Physik die Brownsche Bewegung im Rahmen der Wärmelehre genannt werden, wobei man hierbei auf einige grundlegende fraktale Eigenschaften eingehen kann (Bundesministerium für Bildung und Frauen. *Lehrplan Physik*, 2004). Im Folgenden werde ich mich lediglich auf den Lehrplan des Pflichtfaches Mathematik der AHS (2004) beschränken, wobei die Inhalte genauso in berufsbildenden Schulen übernommen werden können.

Im Bereich der Bildungs- und Lehraufgabe ist angeführt, dass der Mathematikunterricht das lebensbegleitende Lernen fördern soll durch die Vermittlung mathematischen Denkens und mathematischer Kompetenzen.

„Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts.“

(Bundesministerium für Bildung und Frauen. *Lehrplan Mathematik*, 2004: S. 1)

Bereits in diesem Punkt spiegelt sich der Gedanke von Reinhard Oldenburg (2011) wieder. Als Beiträge zu den Bildungsbereichen werden im Lehrplan unter anderem angeführt:

„Mensch und Gesellschaft:

Der Unterricht soll aufzeigen, dass Mathematik in vielen Bereichen des Lebens (Finanzwirtschaft, Soziologie, Medizin usw.) eine wichtige Rolle spielt

Natur und Technik:

Viele Naturphänomene lassen sich mit Hilfe der Mathematik adäquat beschreiben und damit auch verstehen; Die Mathematik stellt eine Fülle von Lösungsmethoden zur Verfügung, mit denen Probleme bearbeitbar werden

Kreativität und Gestaltung:

Mathematik besitzt neben der deduktiven auch eine induktive Seite; vor allem das Experimentieren an neuen Aufgabenstellungen und Problemen macht diese Seite sichtbar, bei der Kreativität und Einfallsreichtum gefördert werden

Gesundheit und Bewegung:

Durch die Bearbeitung mathematisch beschreibbarer Phänomene aus dem Gesundheitswesen und dem Sport können Beiträge zu diesem Bildungsbereich geleistet werden“

(Bundesministerium für Bildung und Frauen. *Lehrplan Mathematik*, 2004: S. 2)

In diesen Bildungsbereichen wird dezidiert die Anwendbarkeit mathematischer Modelle angesprochen, wofür sich Fraktale besonders gut eignen und immer häufiger zum Einsatz kommen.

Bei den Didaktischen Grundsätzen wird vor allem Methodenvielfalt sehr hoch geschrieben. Unter anderem findet sich hier folgendes:

„Lernen in anwendungsorientierten Kontexten

Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. Vernetzungen der Inhalte innerhalb der Mathematik und durch geeignete fächerübergreifende Unterrichtssequenzen sind anzustreben. Die minimale Realisierung besteht in der Thematisierung mathematischer Anwendungen bei ausgewählten Inhalten, die maximale Realisierung in der ständigen Einbeziehung anwendungsorientierter Aufgaben- und Problemstellungen zusammen mit einer Reflexion des jeweiligen Modellbildungsprozesses hinsichtlich seiner Vorteile und seiner Grenzen.

Lernen mit technologischer Unterstützung

Mathematiknahe Technologien wie Computeralgebra-Systeme, dynamische Geometrie-Software oder Tabellenkalkulationsprogramme sind im heutigen Mathematikunterricht unverzichtbar. Sachgerechtes und sinnvolles Nutzen der Programme durch geplantes Vorgehen ist sicherzustellen. Die minimale Realisierung besteht im Kennenlernen derartiger Technologien, das über exemplarische Einblicke hinausgeht und zumindest gelegentlich eine wesentliche Rolle beim Erarbeiten und Anwenden von Inhalten spielt. Bei der maximalen Realisierung ist der sinnvolle Einsatz derartiger Technologien ein ständiger und integraler Bestandteil des Unterrichts.“

(Bundesministerium für Bildung und Frauen. *Lehrplan Mathematik*, 2004: S. 2f.)

Diese beiden Absätze entsprechen genau den Ratschlägen der Mathematik FachdidaktikerInnen. Fraktale können anwendungsorientiert genutzt werden und eignen sich extrem gut für fächerübergreifenden Unterricht mit Biologie, Physik oder Darstellender Geometrie. Auch sind für die Behandlung von Fraktalen Computer und entsprechende Programme unverzichtbar. Wie nun unschwer zu erkennen ist, erfüllen Fraktale mehr der genannten Punkte des Lehrplans als manch anderes Thema, unter anderem aufgrund der Tatsache, dass Fraktale ein sehr junges Gebiet der Mathematik darstellen.

Im Lehrstoff selbst lassen sich Fraktale am besten im Anhang an die Themen Potenzen, Wurzeln, Logarithmen und Folgen in der 6. Klasse unterbringen. Hierzu findet man folgende Punkte:

„Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

- *Definieren von Potenzen mit natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Exponenten, Definieren von Wurzeln und Logarithmen*
- *Formulieren und Beweisen von Rechengesetzen für Potenzen, Wurzeln und Logarithmen; Umformen entsprechender Terme*

Folgen

- *rekursives und explizites Darstellen von Folgen*
- *Untersuchen von Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz, intuitives Erfassen und Definieren des Begriffes Grenzwert*
- *Definieren der Eulerschen Zahl*
- *Arbeiten mit arithmetischen und geometrischen Folgen und Reihen, Erkennen des Zusammenhangs zwischen arithmetischen Folgen und linearen Funktionen sowie zwischen geometrischen Folgen und Exponentialfunktionen*

- *Verwenden von Folgen zur Beschreibung diskreter Prozesse in anwendungsorientierten Bereichen (insbesondere Geldwesen)*“

(Bundesministerium für Bildung und Frauen. *Lehrplan Mathematik*, 2004: S. 4)

Für die im Mathematikunterricht zu behandelnden Fraktale werden nämlich unbedingt rekursive Darstellungen von Folgen und der Grenzwertbegriff sowie die Logarithmusfunktion benötigt. Um komplexere Fraktale wie beispielsweise die Julia-Menge oder die Mandelbrot-Menge besprechen zu können, sollten zumindest die komplexen Zahlen auch schon behandelt worden sein. Dies geschieht erst in der 7. Klasse. Auch bin ich der Ansicht, dass diese beiden fraktalen Mengen ein Mathematikverständnis auf Hochschulebene fordern und daher wenn überhaupt weniger genau behandelt werden sollten im Rahmen des Mathematikunterrichts.

3 Benötigte Vorkenntnisse

Wie bereits erwähnt wäre es meiner Ansicht nach sinnvoll, das Kapitel Fraktale direkt nach den Logarithmen, Folgen und Reihen in der 6. Klasse anzuhängen. Innerhalb dieser werden nämlich der Logarithmus sowie der Grenzwert erstmals eingeführt. Beide werden später noch unter anderem zur Berechnung der fraktalen Dimension benötigt. Ebenso sollte bereits ein gewisses Vorstellungsvermögen in Zusammenhang mit Iterationen vorhanden sein, um das Thema gut behandeln zu können. Neben diesen Aspekten wäre es auch nützlich, Grundkenntnisse und bereits ein gewisses Geschick im Modellieren zu besitzen.

Für die Inhalte Logarithmus, Folgen und Reihen betrachtete ich die Inhalte der beiden gängigsten österreichischen Oberstufenschulbücher „Mathematik 6“ von Götz und Reichel (2010) und „Mathematik verstehen 6“ von Malle u.a. (2014) sowie die meines ehemaligen Mathematikschulbuchs „Mathe Master 6“ von Steiner und Novak (2005). Die im Folgenden zusammengefassten Inhalte entstammen also in leicht abgeänderter Form diesen drei Quellen. Zur Bearbeitung des Kapitels 2.3 Modellierung nahm ich mir das Buch „Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II“ von Tietze, Klika und Wolpers (1997) und das „Themenheft Mathematik „Modellieren“: Volksschule Grundstufe I + II“ des BIFIE (2012) zur Hand.

3.1 Logarithmus und Logarithmusfunktion

Definition: Seien $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $b \in \mathbb{R}^+$. Jene Zahl $x \in \mathbb{R}$, für die $a^x = b$ gilt, heißt Logarithmus von b zur Basis a .

Man schreibt kurz $x = \log_a b$ und bezeichnet a als Basis und b als Numerus.

Satz: Rechenregeln für das Logarithmieren

Für alle $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und alle $u, v \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$(1) \log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$$(2) \log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

$$(3) \log_a u^r = r \cdot \log_a u, r \in \mathbb{R}$$

$$(4) \log_a \sqrt[r]{u} = \frac{1}{r} \cdot \log_a u, r \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

Logarithmen mit speziellen Basen:

- dekadischer Logarithmus (logarithmus generalis) zur Basis 10: $10^x = b \Leftrightarrow x = \lg b$
- natürliche Logarithmus (logarithmus naturalis) zur Basis e : $e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b$
- duale Logarithmus (logarithmus dualis) zur Basis 2: $2^x = b \Leftrightarrow x = \text{ld } b$

Satz: Umrechnungsformel von $\lg x$ auf $\log_a x$: $\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$

Der dekadische Logarithmus und der Logarithmus zur Basis a sind also direkt proportional. Den Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{\lg a}$ nennt man den Modul.

Zwecks Vereinfachung kann man die Basis a überall dort weglassen, wo diese gleichgültig und die selbe ist.

Definition: Eine reelle Funktion $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = c \cdot \log_a x$ ($c \in \mathbb{R}^*, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) heißt Logarithmusfunktion.

Satz: Eigenschaften der Logarithmusfunktion mit $f(x) = \log_a x$

- (1) Die Logarithmusfunktion ist nur für positive reelle Zahlen definiert, das heißt der Graph verläuft rechts von der y-Achse.
- (2) Die y-Achse ist die einzige Asymptote der Logarithmusfunktion.
- (3) Die Funktion ist nach unten und oben unbeschränkt.
- (4) $f(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
- (5) Für $a > 1$ ist die Funktion streng monoton wachsend, für $0 < a < 1$ ist sie streng monoton fallend.
- (6) Die Graphen der Logarithmusfunktion zur Basis a und zur Basis $\frac{1}{a}$ liegen symmetrisch bezüglich der x-Achse.

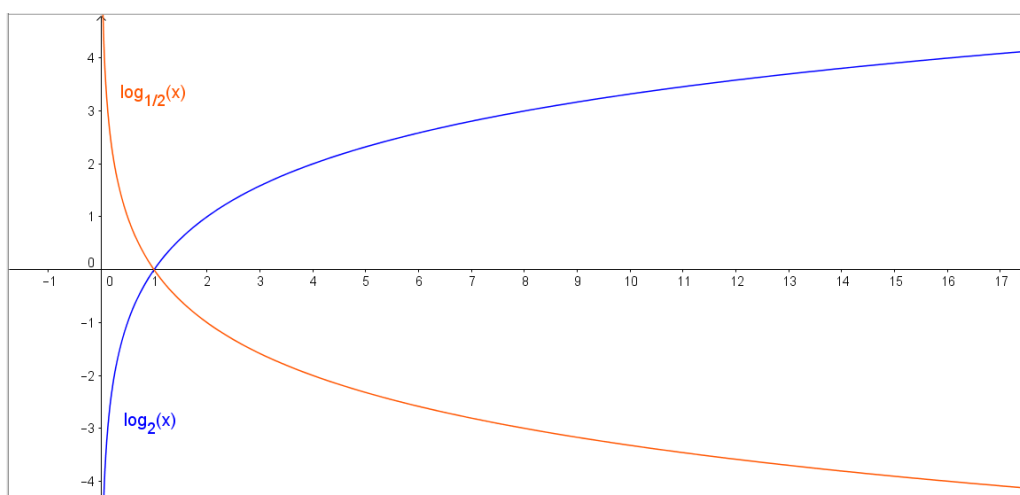


Abbildung 1: Logarithmusfunktionen

3.2 Folgen, Reihen und Grenzwert

Definition: Eine Abfolge von Zahlen $\langle a_1; a_2; \dots \rangle$ heißt eine (unendliche) Folge $\langle a_n \rangle$, wenn ein Bildungsgesetz bekannt ist, welches es gestattet, zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}^*$ das zugehörige Folgenglied anzugeben. a_1 heißt das Anfangsglied und a_n heißt das n-te oder allgemeine Glied der Folge.

Bemerkungen:

- 1) Eine Folge ist darstellbar durch eine Funktion $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(n) = a_n$.
- 2) Bei Folgen ist die Reihenfolge der Glieder wichtig!
- 3) In einer Folge können mehrere (oder sogar lauter) gleiche Folgenglieder auftreten.

Darstellungsformen:

- explizit mittels Funktionsterm
- rekursiv durch Abhängigkeit zwischen Folgengliedern

Definition: Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt (streng) monoton wachsend / fallend, wenn jedes ihrer Glieder (echt) größer / kleiner als das unmittelbar vorhergehende ist, d.h. wenn $\forall n \in \mathbb{N}^*$ gilt $a_n \leq (<) a_{n+1} / a_n \geq (>) a_{n+1}$.

Gilt für alle Indizes $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = a_{n+1}$, so ist die Folge konstant.

Folgen, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, heißen alternierend.

Definition: Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge.

(1) Eine reelle Zahl K heißt obere Schranke der Folge, wenn $a_n \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Eine reelle Zahl k heißt untere Schranke der Folge, wenn $a_n \geq k \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Die Folge heißt nach oben / unten beschränkt, wenn sie eine obere / untere Schranke besitzt.

Sie heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Gibt es eine obere beziehungsweise untere Schranke, so gibt es deren unendlich viele. Die größte untere Schranke heißt Infimum, die kleinste obere Supremum.

Besitzt eine Folge keine Schranken, so heißt sie unbeschränkt.

Definition: Unter der ε -Umgebung der reellen Zahl a versteht man das offene Intervall $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ und man schreibt $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$.

Definition: Die Zahl a heißt Grenzwert (Limes) der Folge $\langle a_n \rangle$, geschrieben $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, wenn in jeder auch noch so kleinen ε -Umgebung von a fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Glieder der Folge liegen. Man schreibt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^*: n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Folgen, für die eine solche Zahl existiert, heißen konvergent.

Jene Folgen, die keine solche Zahl besitzen, heißen divergent.

Eigenschaften: Seien $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, dann gilt

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b} \quad (b_n, b \neq 0)$$

Satz: Eine monoton wachsende / fallende und nach oben / unten beschränkte Folge $\langle a_n \rangle$ ist konvergent.

Der jeweilige Grenzwert a stimmt dann mit dem Supremum / Infimum überein.

Satz: Ist $\langle a_n \rangle$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $c \in \mathbb{R}$, dann sind auch die Folgen

$\langle c \cdot a_n \rangle$ und $\langle c + a_n \rangle$ konvergent und es gilt:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (c + a_n) = c + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c + a$$

Definition: Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt arithmetische Folge, wenn die Differenz zweier Nachbarglieder konstant ist, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ gilt $a_{n+1} - a_n = d$.

Die Konstante d heißt Differenz der arithmetischen Folge.

- rekursiv: $a_n = a_{n-1} + d$
- explizit: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Satz: Jede arithmetische Folge $\langle a_n \rangle$ kann als eine auf $\mathbb{N}$ definierte lineare Funktion aufgefasst werden, d.h. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(n) = d \cdot n + a_0$.

Satz: Eine arithmetische Folge $\langle a_n \rangle$ ist genau dann konvergent, wenn ihre Differenz d gleich Null ist, die Folge also konstant ist.

Definition: Eine Folge $\langle b_n \rangle$, deren Glieder von Null verschieden sind, heißt geometrische Folge, wenn der Quotient zweier Nachbarglieder konstant ist, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ gilt $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$.

Die Konstante q heißt Quotient der geometrischen Folge.

- rekursiv: $b_n = b_{n-1} \cdot q$
- explizit: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Satz: Jede geometrische Folge $\langle b_n \rangle$ kann als eine auf $\mathbb{N}$ definierte Exponentialfunktion aufgefasst werden, d.h. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(n) = b_0 \cdot q^n$ ($b_0, q \in \mathbb{R}^*$).

Satz: Eine geometrische Folge $\langle b_n \rangle$ mit $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ ist

- (1) konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = 0$ für $|q| < 1$
- (2) divergent für $|q| > 1$
- (3) konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = b_1$ für $q = 1$
- (4) divergent und alternierend für $q = -1$

Definition: Ist $\langle a_n \rangle$ eine Folge, so bezeichnet man den Ausdruck der Form $a_1 + a_2 + \dots$ mit Summanden aus der Folge $\langle a_n \rangle$ als zu dieser Folge zugehörige Reihe.

Die Folge $\langle s_n \rangle = \langle a_1; a_1 + a_2; a_1 + a_2 + a_3; \dots \rangle$ heißt Partialsummenfolge der Folge $\langle a_n \rangle$.

Satz: Ist $a_1 + \dots + a_n$ eine endliche arithmetische Reihe mit n Gliedern, so hat sie die Summe

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}.$$

Satz: Ist $b_1 + \dots + b_n$ eine endliche geometrische Reihe mit n Gliedern und $q \neq 1$, so hat sie

$$\text{die Summe } s_n = \sum_{i=1}^{n-1} b_1 \cdot q^i = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Definition: Eine unendliche Reihe $a_1 + a_2 + \dots$ heißt genau dann konvergent, wenn die Folge $\langle s_n \rangle$ ihrer Partialsummen konvergiert.

Den Grenzwert S der Partialsummenfolge $\langle s_n \rangle$ bezeichnet man als Summe der Reihe und schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S = a_1 + a_2 + \dots$.

Divergiert dagegen die Folge $\langle s_n \rangle$ der Partialsummen, so heißt die Reihe divergent und besitzt keine Summe S .

Satz: Die unendliche geometrische Reihe $b_1 + b_2 + \dots$ ist genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$. In diesem Fall ist ihre Summe $S = \frac{b_1}{1-q}$.

3.3 Modellieren

Modellieren bedeutet ein reales Problem aus dem Bereich Naturwissenschaft, Technik, Wirtschaft, Sozialwissenschaft oder Umwelt mit Hilfe der Mathematik in ein mathematisches Modell zu überführen, dieses zu berechnen und hinsichtlich seines Bezugs zur Wirklichkeit zu interpretieren. Der Modellbildungsprozess selbst besteht aus vier Schritten. Im ersten wird eine reale Situation in ein reales Modell umgewandelt. Hierfür müssen zuerst alle Voraussetzungen, Bedingungen und Einflussgrößen der realen Situation erfasst werden. Anschließend kann man dann die Situation hinsichtlich des Problems strukturieren und sie schlussendlich vereinfachen und idealisieren. Beim zweiten Schritt wird das Realmodell in ein formal mathematisches Modell übersetzt. Hierbei helfen Vereinfachungen und Präzisierungen. Im dritten Schritt geht es um die Erarbeitung einer Lösung mit rein innermathematischen Hilfsmitteln. Sollte man hierbei mit reiner Mathematik nicht weiter kommen, muss man in einem der vorigen Schritte weitere Vereinfachungen durchführen. Beim letzten Schritt wird die erarbeitete Lösung interpretiert und validiert. Hierfür übersetzt man die gewonnenen mathematischen Ergebnisse in die Realität zurück und vergleicht, ob sie realistisch sind. Sofern bei diesem Schritt Widersprüche zur Wirklichkeit auftauchen, sollte man den Kreislauf nochmals von vorne beginnen. In manchen Fällen muss ein Modellierungskreislauf mehrmals durchlaufen werden, bevor man zu realistischen Ergebnissen kommt.

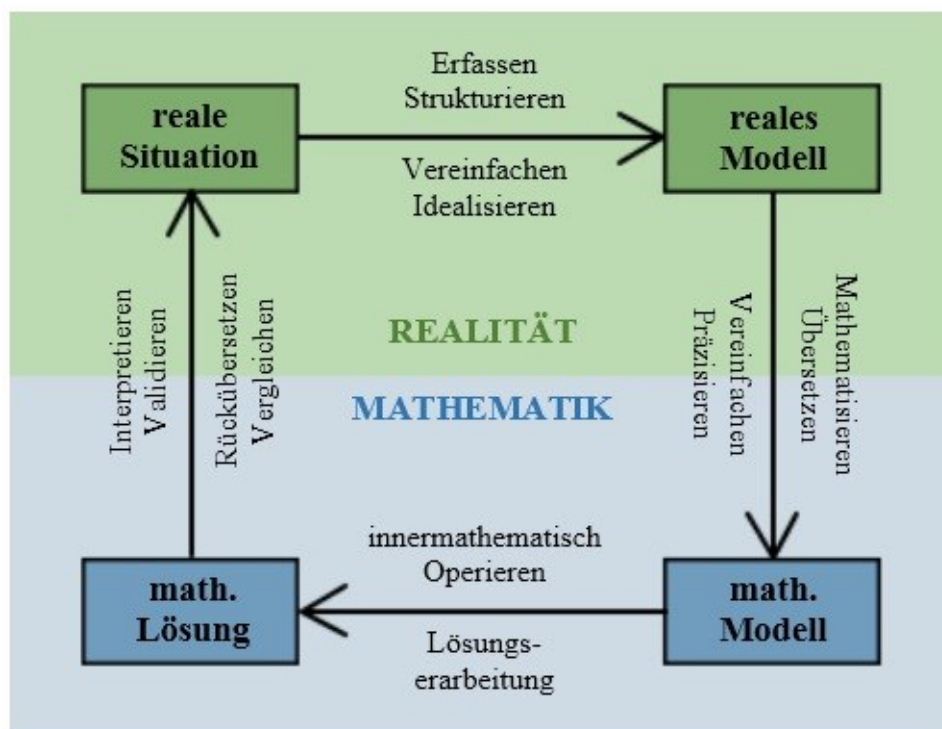


Abbildung 2: Der Modellierungskreislauf

Man unterscheidet im Allgemeinen zwei Arten von Modellen. Deskriptive Modelle haben zum Ziel, die Realität möglichst genau abzubilden. Sie können eine rein beschreibende oder auch erklärende Funktion haben, wobei ihre Wirkungszusammenhänge unbedingt berücksichtigt werden müssen. Beispiele für deskriptive Modelle wären physikalische Modelle oder in der Umwelt beobachtbare Phänomene. Normative Modelle definieren im Gegensatz dazu zum Teil erst die Realität durch ein geeignetes Modell. Es geht hierbei weniger um die Beschreibung der Wirklichkeit, sondern mehr um die Realisierung von Zielvorstellungen. Ihre Funktion liegt in der Simulation und Ermittlung der Konsequenzen für die Realität. Beispiele für normative Modelle wären unter anderem Einkommenstarife oder Effektivzinsberechnungen.

Modellbildung ist, wie bereits im ersten Kapitel erwähnt, in wissenschaftlichen und technischen Bereichen ein immer wichtigeres heuristisches Werkzeug zur Theorienentwicklung. Sie hat viele Vorteile. Unter anderem können Kosten für teure, umfangreiche und langwierige Experimente erheblich verringert werden, wenn man diese durch geeignete Modelle ersetzt, denn Modelle sind zeitunabhängig, können sowohl verlangsamt als auch beschleunigt und nebenbei beliebig oft durchgeführt werden. Vor allem kann man mit ihrer Hilfe auch Gefahren vermeiden, beispielsweise wenn es um die Folgen von Reaktorunfällen oder ähnliches geht. Doch leider stoßen auch noch so kompetente Modellbildner manchmal an ihre Grenzen. Müssen zum Beispiel zu viele Parameter berücksichtigt werden, scheitert man oft mit mathematischen Hilfsmitteln, da das Modell zu komplex ist. Auch kann man nicht alle Experimente gänzlich durch Modelle ersetzen. In manchen Fällen werden Experimente mit Modellen verknüpft, wodurch sie dann auch durch Zeit- und Geldressourcen beschränkt sind. Alles in allem muss man sich vor Augen halten, dass ein Modell die Realität niemals vollständig abbilden kann, sondern nur ein bedeutsames Darstellungs-, Kommunikations- und Denkmittel darstellt, welches neben vielen Vorteilen auch seine Grenzen besitzt (Tietze u.a., 1997).

4 Die Programmiersprache Logo

Da für mich selbst die Programmiersprache Logo auch Neuland war, nahm ich mir die beiden Werke von Helmut Schauer „Einfach LOGO: Grundlagen des Programmierens in LOGO“ (1985) und „LOGO: Jenseits der Turtle“ (1988) zu Hilfe. Anschließend experimentierte ich mit dem Gratisprogramm Microsoft Windows Logo (kurz MSWLogo). Nach einigen Programmerversuchen gelangen bereits einfachere Fraktale, wie beispielsweise die Koch-Kurve. Sollte man selbst nicht so viel Zeit in das Probieren investieren wollen, gibt es auch viele hilfreiche Bücher mit vorgeschriebenen Programmierbefehlen für Fraktale. Einige davon werde ich selbst im Laufe dieser Arbeit vorstellen. Die wichtigsten Befehle und Tipps zur Bedienung sind in den folgenden Unterkapiteln zusammengefasst.

4.1 Die Basics

Öffnet man einen Logo-Interpreter, sieht man in der Mitte des Grafikbildschirms ein Dreieck oder eine Pfeilspitze, die sogenannte Turtle, zu Deutsch Schildkröte. Diese zeigt die Richtung an, in der ein Zeichenbefehl ausgeführt wird. An der Turtle ist ein fiktiver Zeichenstift angefügt, damit man ihre Bewegung noch im Nachhinein verfolgen kann. Alle Befehle zur Steuerung der Turtle sind in der Programmiersprache Logo in englischer Sprache festgelegt und somit bei den meisten Logo-Interpretern gleich. Durch betätigen der Enter-Taste wird der Befehl ausgeführt.

Die wichtigsten Befehle zum Bewegen der Turtle lauten:

Befehl	Eingabe	Alternative	Wirkung
forward	fd_Schritte		die Turtle bewegt sich um die angegebene Schrittzahl nach vorne
back	bk_Schritte	fd_-Schritte	die Turtle bewegt sich um die angegebene Schrittzahl nach hinten
right	rt_Grad		die Turtle dreht sich um die angegebene Gradzahl nach rechts
left	lt_Grad	rt_-Grad	die Turtle dreht sich um die angegebene Gradzahl nach links

Wenn man den selben Befehl mehrmals hintereinander geben möchte, gibt es den Befehl

Befehl	Eingabe	Wirkung
repeat	repeat <u>Anzahl</u> [<u>Befehl</u>]	wiederholt den Befehl so oft wie angegeben

Wird die Turtle über den Rand des Grafikbildschirms hinausgesteuert, kommt sie am gegenüberliegenden Bildschirmrand wieder zum Vorschein. Will man dies verhindern, gibt es hierfür zwei verschiedene Einstellungen:

Eingabe	Wirkung
window	die Turtle kann über den Rand hinweglaufen und verschwindet
fence	es erscheint eine Fehlermeldung, wenn die Turtle aufgrund eines Befehls den Grafikbildschirm verlassen soll

Zum Zurücksetzen der Einstellungen muss man „wrap“ eingeben. Um auch die Zeichnungen am Grafikbildschirm zu löschen und / oder die Turtle in die Mitte des Bildschirms zurückzubringen gibt es die Befehle „clean“ und „home“ beziehungsweise „cs“ (clearscreen). Dasselbe Ergebnis erzielt man durch das Drücken des „Reset“ Knopfes links im Eingabefenster.

Für anspruchsvollere Zeichnungen gibt es ebenfalls diverse Befehle:

Befehl	Eingabe	Alternative	Wirkung
penup	pu		hebt Schreibstift, also wird nicht gezeichnet
pendown	pd		senkt Schreibstift, also zeichnet wieder
penerase	pe		löscht alle Linien, die abgefahren werden
setpencolour	setpc <u>Farbnummer</u>	bei MSWLogo unter Set - PenColour einstellbar	ändert die Farbe des Schreibstifts: 0 schwarz, 1 weiß, 2 grün, 3 violett, 4 orange, 5 blau
fill	fill		füllt die Fläche bei der sich die Turtle befindet mit der derzeitigen Farbe des Schreibstifts
hideturtle	ht		lässt das Dreieck verschwinden
showturtle	st		lässt Dreieck wieder erscheinen

4.2 Programmieren von Prozeduren

Befehle, die häufiger benötigt werden, kann man programmieren und durch Eintippen des Prozedurnamens wieder abrufen. Komplexere Prozeduren kann man mit Hilfe von Parametern und Rekursionen definieren:

Befehl	Eingabe	Wirkung
Programmieren einer Prozedur	to <u>Prozedurname</u> ↵ Befehl ↵ end	programmiert eine Prozedur für dieses Dokument
Parameter	: <u>Zeichen des Parameters</u>	definiert einen Parameter
Rekursion	to <u>Rekursionsname</u> : <u>Zeichen des Parameters</u> ↵ Prozedurname : <u>Zeichen des Parameters</u> ↵ Rekursionsname : <u>Zeichen des Parameters</u> mit Rekursionsformel ↵ end	macht das nachträgliche Bearbeiten einer Prozedur möglich

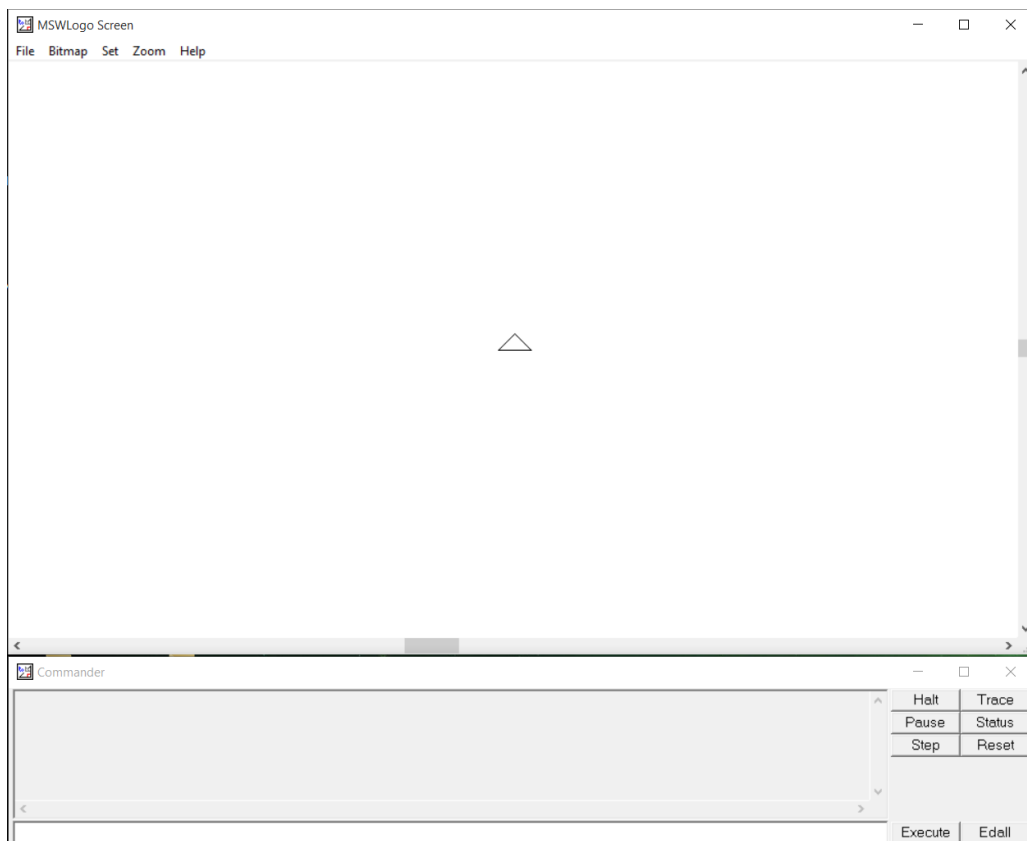


Abbildung 3: Die MSWLogo Benutzeroberfläche

5 Begriffsklärung

Bevor mit dem Hauptteil dieser Arbeit überhaupt begonnen werden kann, müssen noch die wichtigsten Begriffe definiert werden.

5.1 Selbstähnlichkeit und Skaleninvarianz

Die meisten Fraktale sind „*invariant gegenüber bestimmten Maßstabstransformationen. Sie werden skaleninvariant genannt. Ein Fraktal, das invariant ist gegenüber der üblichen geometrischen Ähnlichkeit, heißt selbstähnlich.*“ (Mandelbrot, 1987: S. 30)

„*Wenn jeder Teil eines Gebildes dem Ganzen geometrisch ähnlich ist, werden sowohl das Gebilde als auch die erzeugende Kaskade (der Erzeugungsmechanismus) selbstähnlich genannt.*“ (Mandelbrot, 1987: S. 46)

„*Selbstähnlichkeit drückt die Invarianz oder Symmetrie des Systems gegenüber einer Maßstabsänderung aus.*“ Hierbei handelt es sich „*um multiplikative Änderungen, unter denen das System sich selbst ähnlich bleibt. Kurz gesagt bedeutet dies, dass sich das Erscheinungsbild selbstähnlicher Objekte nicht ändert, wenn man sie vergrößert oder verkleinert.*“ (Schroeder, 1994: S. 2)

Selbstähnlichkeit oder Skaleninvarianz bedeutet, dass sich eine Figur, Menge oder ähnliches in allen Skalen, das heißt egal wie weit man hinein- oder hinauszoomt, immer wieder selbst ähnlich ist, sich also ihre Struktur unendlich oft wiederholt. Als gutes Beispiel dafür dienen russische Matroschka Holzpuppen. Die größte enthält eine kleinere, die der größeren sehr ähnlich sieht. Diese beinhaltet wiederum eine kleinere und so geht es weiter, bis zur fünften oder sechsten kleinsten Puppe, die noch immer Ähnlichkeit mit der größten ausweist (Schroeder, 1994).

5.2 Die fraktale Dimension

Kommen wir nun zu den verschiedenen Dimensionsbegriffen. Einerseits gibt es den uns geläufigen, stets ganzzahligen euklidischen Dimensionsbegriff, dessen Dimension $D_E = 0$ für einen Punkt, $D_E = 1$ für eine Strecke, $D_E = 2$ für eine Fläche und $D_E = 3$ für einen Quader ist. Andererseits gibt es viele weitere, nichtganzzahlige, die für Fraktale benötigt werden. Der am häufigsten verwendete, fraktale Dimensionsbegriff ist die Hausdorff-Dimension, benannt nach ihrem Erfinder Felix Hausdorff im Jahr 1919 (Schroeder, 1994). Da diese jedoch schwer handhabbar ist, verwendet man die Ähnlichkeitsdimension um die Hausdorff-Dimension abzuschätzen (Mandelbrot 1987). Um dieser mathematischen Diskussion auszuweichen, wird in dieser Arbeit lediglich der Begriff „fraktale Dimension“, abgekürzt mit D_F , verwendet. Diese ist wie folgt definiert:

$$D_F := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N)}{\log(1/r)}$$

Hierbei ist N die Anzahl der benötigten Streckenabschnitte mit Länge r um die Kurve „abzugehen“. Interessanterweise geht aufgrund der Selbstähnlichkeit bei Fraktalen N gegen unendlich, je kleiner r gewählt wird (Schroeder, 1994). Die fraktale Dimension kann sowohl nichtganzzahlig als auch ganzzahlig sein (Mandelbrot, 1987). Interessant ist auch, dass sie bei euklidischen Körpern, wie einem Quadrat, genau der euklidischen Dimension, also $D_E = 2$, entspricht. Damit stellt die fraktale Dimension lediglich eine Erweiterung der euklidischen Dimension dar. Dennoch ist zu beachten, dass auch bei manchen Fraktalen $D_F = 2$ gelten kann. Das berühmteste Beispiel hierfür ist die flächendeckende Hilbert-Kurve. (Schroeder, 1994).

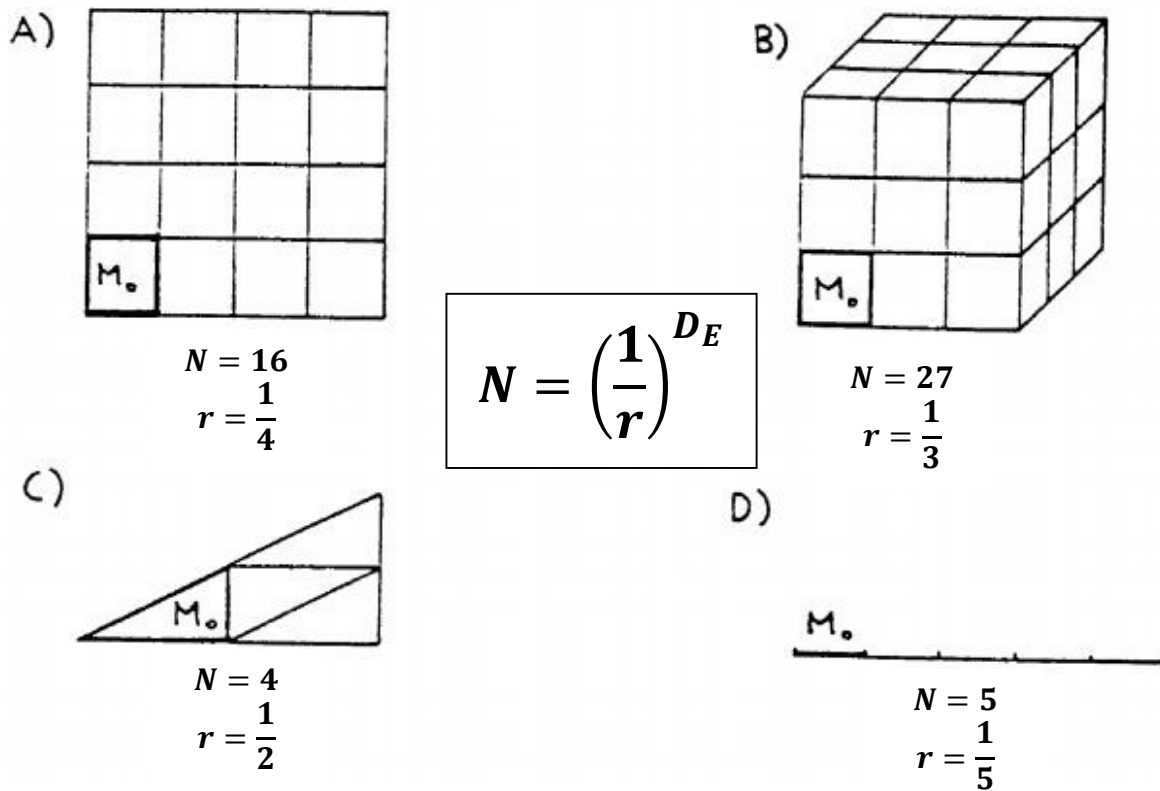


Abbildung 4: Die fraktale Dimension als Erweiterung der euklidischen Dimension

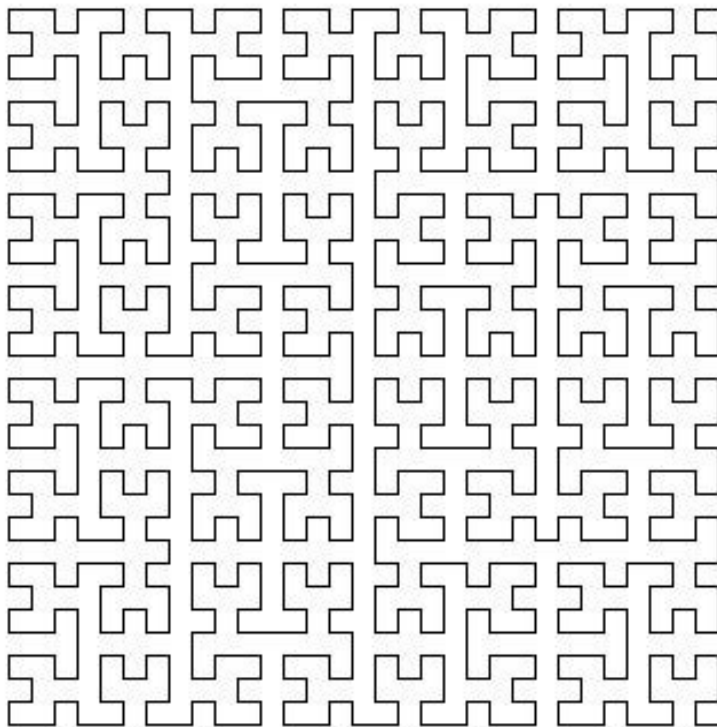


Abbildung 5: Die Hilbert-Kurve

5.3 Fraktal

„Das Auftreten immer feinkörnigerer Wiederholungen derselben Struktur ist eine der bemerkenswerten Konsequenzen von Selbstähnlichkeit; solche Strukturen fasst man heute im allgemeinen unter dem Sammelbegriff Fraktale (von lateinisch fractus: in Stücke zerbrochen) zusammen, eine Wortschöpfung von Benoit B. Mandelbrot, dem Vater der Fraktale.“
(Schroeder, 1994: S. 2)

„Diese neue Geometrie beschreibt viele der unregelmäßigen und zersplitterten Formen um uns herum – und zwar mit einer Familie von Figuren, die wir Fraktale nennen werden. Die nützlichsten Fraktale enthalten den Zufall sowohl in ihren Regularitäten als auch in ihren Irregularitäten. Außerdem sind die meisten der hier beschriebenen Formen skaleninvariant. Sie besitzen in allen Größenbereichen denselben Grad an Irregularität und/oder Zersplitterung. Eine zentrale Rolle wird die fraktale (Hausdorff-)Dimension spielen.“
(Mandelbrot, 1987: S. 13)

„Ein Fraktal ist nach Definition eine Menge, deren Hausdorff-Bresicovitch-Dimension echt die topologische Dimension übersteigt.“ (Mandelbrot, 1987: S. 27)

Der Begriff Fraktal wurde erstmals von dem Mathematiker Benoît B. Mandelbrot 1975 verwendet und ist seitdem nur noch schwer aus der Welt der Mathematik, Physik und anderen Gebieten wegzudenken. Fraktale reichen von einfachen mathematischen und geometrischen Spielereien bis hin zu hoch komplexen Teilchenbewegungen, die nur noch schwer als Fraktale identifizierbar sind.

Das Wort Fraktal stammt von dem lateinischen Wort *fractus* ab, was übersetzt gebrochen, in Stücke zerbrochen bedeutet (Mandelbrot, 1987). Mit der Definition von Fraktalen ist es nicht ganz so einfach. Fraktale besitzen, ähnlich wie in der Biologie der Begriff Leben, keine genaue Definition sondern nur eine Liste von Eigenschaften, die die meisten Fraktale erfüllen. Ebenso gibt es aber immer wieder Ausnahmen, die die eine oder andere Eigenschaft nicht erfüllen.

Fassen wir also ein Fraktal als eine Menge, bezeichnet mit F , auf, die im günstigen Fall folgende Eigenschaften erfüllt:

- (1) F besitzt eine Feinstruktur, das heißt egal wie weit man hineinzoomt, erkennt man dennoch Einzelheiten
- (2) F kann weder lokal noch global mit traditionellen geometrischen Mitteln beschrieben werden
- (3) Selbstähnlichkeit, wenn auch nur annähernd oder statistisch
- (4) die fraktale Dimension von F ist gewöhnlich größer als die euklidische Dimension von F
- (5) F ist meistens relativ einfach und oft rekursiv definiert.

Mandelbrot befand lediglich den Punkt (4) als Definition für Fraktale. Diese wurde aber bald verworfen aufgrund von sich häufenden Ausnahmen (Falconer, 1993).

5.4 Natürliches Fraktal

Exakte Fraktale sind mathematische Konstrukte und treten in der Natur genauso wenig auf wie eine gerade Linie oder ein perfekter Kreis. Aber es gibt Naturphänomene, die einem Fraktal bereits sehr nahe kommen wie beispielsweise der Aufbau von Romanesco, Flechten, Moosen, Farnen, Bäumen, Flüssen, Wolkenrändern, Küstenlinien, Bergen und unserer Lunge oder auch bei anscheinend chaotischen Teilchenbewegungen und Waldbränden. Wenn wir also annähernd natürliche Fraktale konstruieren wollen, müssen wir individuelle Verschiedenheiten zulassen, deren statistische Größenverteilungen einem gewissen Typus entsprechen. Auch muss uns klar sein, dass der Natur Grenzen gesetzt sind, beispielsweise nach unten hin durch die Größe von Atomen oder Zellen und nach oben hin durch physikalische Kräfte, die auf den Körper einwirken. Dadurch ergeben sich laut Halling (1995) maximal fünf Verkleinerungsschritte.

Schon Galileo Galilei machte sich um 1600 Gedanken darüber, wie groß der Querschnitt von Knochen werden müsste, wenn ein hypothetisches Tier doppelt so lang, breit und hoch werden würde. Dieses Tier wäre dann also achtmal so schwer, wobei sein Knochenquerschnitt nur um das Vierfache gewachsen wäre. Das Skelett könnte also das Gewicht nicht tragen. Daher müssten Knochen mit einem Faktor größer als 2 skaliert werden, was früher oder später dazu führen würde, dass die Knochen des Tieres größer wären als der Körper und dies ist logischerweise unmöglich. Leonardo da Vinci fand über ein Jahrhundert davor heraus, dass es ein festes Verhältnis zwischen dem Durchmesser eines Astes d mit seinen zwei Gabelungen

d_1 und d_2 geben muss, damit eine Flüssigkeit ungehindert durchfließen kann. Diese Beziehung ist heute bekannt als biologisches Röhrenmodell und lautet $d^\Delta = d_1^\Delta + d_2^\Delta$. Bei Flüssen und Ästen von Bäumen ist der Exponent $\Delta = 2$, bei Venen und Arterien ergibt sich ein Schätzwert von 2,7 und bei den Bronchien der Lunge sogar annähernd 3. Innerhalb der Lunge gibt es circa 15 Gabelungen, die annähernd selbstähnlich sind und beinahe den gesamten Raum ausfüllen. Da der Widerstand gegen den Luftstrom möglichst gering ausfallen sollte, benötigt man ein festes Gabelungsverhältnis von $d/d_1 = d/d_2 = 2^{1/3}$ (Schroeder, 1994). Mandelbrot (1987) führte diesen Gedanken in seinem Werk „Die fraktale Geometrie der Natur“ weiter, indem er auf den annähernd selbstähnlichen Wachstumsprozess der Lunge hinwies. Hierbei wächst aus einer Knospe ein Ast, der zwei weitere Knospen austreibt aus denen wiederum Äste entspringen und so weiter. Diese Iteration führt schlussendlich zu einer selbstähnlichen Baumstruktur der Lunge und wiederum einem Exponenten $\Delta \approx 3$.

6 Motivation der Anwendungsbeispiele für den Schulunterricht

In den folgenden Kapiteln werde ich nun einige schultaugliche Beispiele zur Modellierung von natürlichen Fraktalen anführen. Die Beispiele sind in der Regel sehr schülerInnenfreundlich gewählt und sollten als nicht zu schwer und dennoch fordern empfunden werden. Im Allgemeinen sollten sie mit den in Kapitel 3 angeführten und noch grundlegendere Schulkenntnissen gelöst werden können. Des Weiteren hoffe ich persönlich, dass die Beispiele nicht nur die mathematischen Fertigkeiten, sondern auch das Interesse am Fach aufgrund von möglichen Aha-Erlebnissen selbst fördern.

In den jeweiligen Unterkapiteln sind zum Teil auch Stundentafeln abgebildet, die einen möglichen Ablauf von Mathematikstunden skizzieren sollen. Die angegebenen Zeiten dienen lediglich der Orientierung und sind nur geschätzte Werte. Die tatsächliche Länge einer Sequenz hängt selbstverständlich von der Klassensituation ab und sollte in jedem Fall neu überlegt werden. Neben den Sequenzlängen sind auch die benötigten Arbeitsmaterialien angegeben um die Planungen der Stunden zu erleichtern. Alle Arbeitsmaterialien, wie beispielsweise Arbeitsblätter, sind im Anhang zu finden.

Neben diesen Beispielen können und sollen auch weitere Fraktale im Mathematikunterricht präsentiert werden. Da dies den Rahmen der Arbeit jedoch sprengen würde und bereits ausgezeichnet in vielen verschiedenen Werken dargestellt wurde, belasse ich es dabei auf mein Literaturverzeichnis hinzuweisen und konzentriere mich auf die Darstellung von Modellierungsaufgaben, die ich in dieser Form noch nie gesehen habe.

7 Einstieg über das Phänomen der Küstenlinie Großbritanniens

Wie bereits erwähnt, würde ich persönlich das Thema „Fraktale“ erst in der 10. Schulstufe anschließend an die Themen „Logarithmus und Logarithmusfunktion“ sowie „Folgen, Reihen und Grenzwerte“ behandeln. Wie von Vladimir Vanek (2012) vorgeschlagen, wählte ich als Einstieg das faszinierende Phänomen der Küstenlinie Großbritanniens, die je nach Vergrößerungsfaktor immer länger wird. Dieses sollen die Schülerinnen und Schüler zu zweit oder zu dritt mit Hilfe von vorgefertigten Arbeitsblättern und detaillierten Arbeitsaufträgen erarbeiten und die Ergebnisse zusammen an der Tafel sammeln. Anschließend sollen die unterschiedlichen Ergebnisse besprochen und hinsichtlich ihrer Richtigkeit analysiert werden. Dabei ist geplant, dass Schülerinnen und Schüler Argumente für oder gegen die Richtigkeit der Ergebnisse finden, die im Plenum ausführlich diskutiert werden. Innerhalb dieser Diskussion sollte herauskommen, dass die Küstenlinie immer länger wird, da immer mehr Details gemessen werden, je größer der Maßstab, das heißt umso stärker die Vergrößerung, ist. Um auf diese elementare Lösung zu kommen, ist es essentiell, dass den Schülerinnen und Schülern genügend Zeit zum Besprechen gegeben wird. Die Lehrperson selbst sollte möglichst nichts vorweg nehmen und auch dann und wann die Schülerinnen und Schüler in Sackgassen laufen lassen. Die einzige „erlaubte“ Hilfestellung sollten leitende Fragen sein, die zum genaueren Nachdenken und Begründen anregen. Die erarbeiteten Lösungen werden ins Heft übertragen.



Abbildung 6: Die Küstenlinie Großbritanniens (Messlänge [cm] : 20.000.000 [cm])

Tätigkeit	Zeit [min]	Materialien	Methode	Kompetenzen	Bemerkungen
Begrüßung	5		frontal		Kontrollieren der Anwesenheit, Besprechung der weiteren Vorgehensweise
Einstieg in das Thema Fraktale mittels Küstenlinie Groß- britanniens	15	S: Arbeitsblätter, Zirkel, Bleistift, Taschenrechner, Tafel, Kreide	Partner- oder Gruppen- arbeit	H3 I1 K1 H2 I3 K2	Lehrperson hilft bei Schwierigkeiten mit der Aufgabenstellung und bei der Interpretation der Ergebnisse durch Leitfragen. Ergebnisse werden an der Tafel gesammelt.
Besprechen der Ergebnisse	20	L: Tafel, Beamer, Bilder der Vergrößerungen	Lehrer-Schüler-Interaktion, Plenum	H3 I1 K3 H4 I3 K1/3	Schülerinnen und Schüler sollen auf das Phänomen der immer länger werdenden Küstenlinie kommen.
Sammeln der Lösungen	10	S: Heft, Schreibstift L: Tafel, Kreide	frontal		Die Lösungen der Diskussion werden ins Heft übertragen.



Abbildung 7: Die Küstenlinie Großbritanniens (Messlänge [cm] : 50.000 [cm])



Abbildung 8: Die Küstenlinie Großbritanniens (Messlänge [cm] : 2.000 [cm])

7.1 Modellierung der Küstenlinie Großbritanniens

Zur Modellierung der Küstenlinie Großbritanniens eignet sich ein Polygonzug, dessen Schrittweite immer kleiner wird (Mandelbrot, 1987). Um diesen zu zeichnen, kann man beispielsweise das Geometrieprogramm GeoGebra zu Hilfe nehmen. Unter dem Menüpunkt „Bearbeiten“ gibt es die Funktion „Bild einfügen von“. Man wähle das gewünschte Bild, in meinem Fall die gesamte Küstenlinie Großbritanniens (Messlänge [cm] : 20.000.000 [cm]), und fixiert dieses. Nachdem das erledigt ist, benötigt man den Zirkelradius. Diesen erhält man, indem man den Abstand des Maßstabes am rechten unteren Rand des Bildes nimmt. Nun setzt man einen Punkt an einer bestimmten Küstenstelle für den Kreismittelpunkt. Anschließend nimmt man die gewünschte Radiuslänge in den Zirkel und schlägt ab. Bei der ersten Stelle, an der der Kreis die Küstenlinie schneidet, wird ein neuer Mittelpunkt gesetzt. Dies wird so oft wiederholt, bis nur noch ein Abstand, der kleiner ist als der Radius, zwischen erstem und letztem Kreismittelpunkt übrig bleibt. Zu guter Letzt kann man nun einen Polygonzug durch all die Mittelpunkte zeichnen.

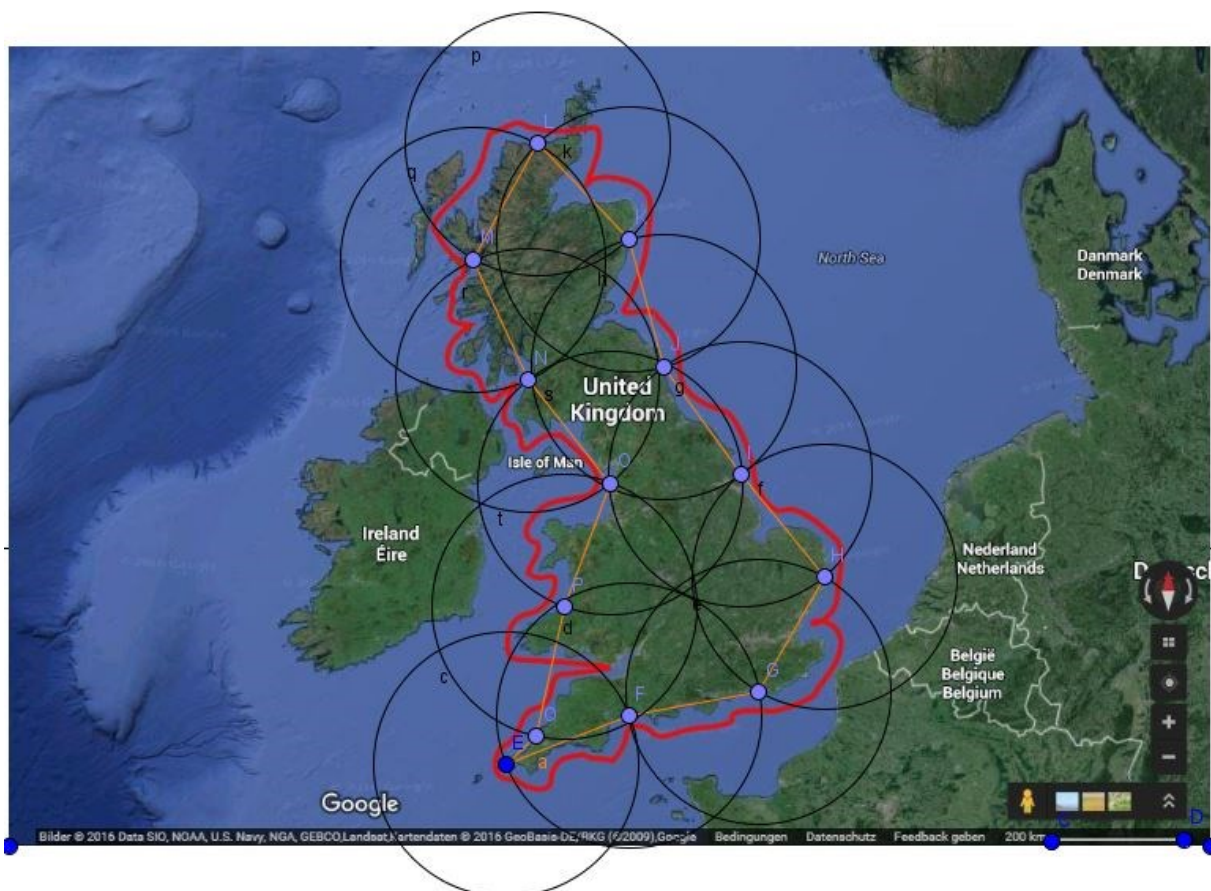


Abbildung 9: Polygonzug mit Maßzahl $M = 200$ km

Mit der gemessenen Radiuslänge r , der Länge der kleinen Strecke a (alles in GeoGebra-Einheiten, kurz GE) und der Anzahl der Polygonzugabschnitte N kann man die Länge des Polygonzugs in GE berechnen: $L = r \cdot N + a$.

Radiuslänge r	1,25 GE
Länge der kleinen Strecke a	0,39 GE
Anzahl der Polygonzugabschnitte N	12
Länge des Polygonzugs L	15,39 GE

Nun kann man mit Hilfe der Maßzahl M in (Kilo-) Metern die Länge der Küstenlinie $L(M)$ näherungsweise ausdrücken:

$$L(M) = \frac{L \cdot M}{r}$$

Länge des Polygonzugs L	15,39 GE
Maßzahl M	200 km
Radiuslänge r	1,25 GE
Länge der Küstenlinie $L(M)$	2.462 km

Wiederholt man diesen Vorgang für die Maßzahlen $M_1 = \frac{200}{2}$ km, $M_2 = 100$ km und $M_3 = \frac{100}{2}$ km, so ergibt dies:

	$M_1 = \frac{200}{2}$ km	$M_2 = 100$ km	$M_3 = \frac{100}{2}$ km
Radiuslänge r	0,31 GE	0,39 GE	0,39 GE
Länge der kleinen Strecke a	0,04 GE	0,06 GE	0,13 GE
Anzahl der Polygonzugabschnitte N	29	29	70
Länge des Polygonzugs L	9,03 GE	11,37 GE	27,43 GE
Länge der Küstenlinie $L(M)$	2.913 km	2.915 km	3.517 km

Da mit dieser Methode nur wenige Maßzahlen in Frage kommen, werden M_1 und M_2 , die jeweils gleich 100 km sind, zur Betrachtung der Messgenauigkeit herangezogen.



Abbildung 11: Polygonzug mit Maßzahl $M = \frac{200}{2} \text{ km}$

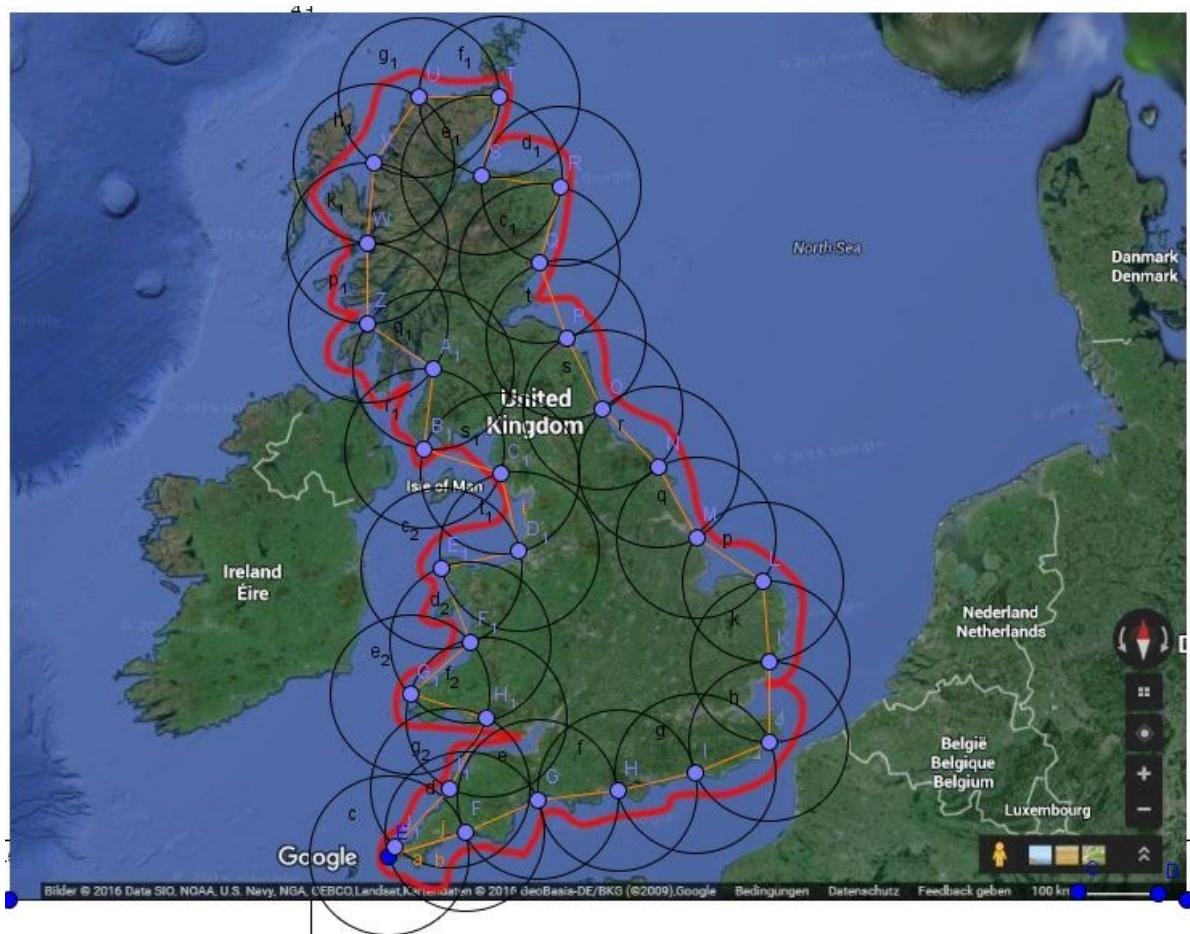


Abbildung 10: Polygonzug mit Maßzahl $M = 100$ km



Abbildung 12: Polygonzug mit Maßzahl $M = \frac{100}{2} \text{ km}$

Auch mit dieser Methode sieht man sehr gut, dass die Länge des Polygonzugs beziehungsweise der Küstenlinie immer länger wird, je kleiner der Messradius gewählt wird, da dadurch immer feinere Details, wie Fjorde oder Buchten, aufgenommen werden in der Messung (Mandelbrot, 1987).

7.2 Der Flächeninhalt der Insel

So wie die Länge der Küstenlinie, ist auch die Fläche der Insel sehr einfach zu berechnen mit folgender Formel:

$$A(M) = \frac{A \cdot M^2}{r^2}$$

Hierbei ist A die Fläche des Vielecks, die man durch Verbinden der Punkte erhält und aus der GeoGebra Datei ablesen kann. Für die Maßzahlen $M_0 = 200$ km, $M_1 = \frac{200}{2}$ km, $M_2 = 100$ km und $M_3 = \frac{100}{2}$ km erhält man so:

	$M_0 = 200$ km	$M_1 = \frac{200}{2}$ km	$M_2 = 100$ km	$M_3 = \frac{100}{2}$ km
Quadrat des Radius r^2	1,56 GE ²	0,0961 GE ²	0,1521 GE ²	0,1521 GE ²
Fläche des Vielecks A	8,28 GE ²	2,22 GE ²	3,47 GE ²	14,27 GE ²
Fläche der Insel $A(r)$	212.308 km ²	231.009 km ²	228.139 km ²	234.550 km ²

Wie unschwer zu erkennen ist, pendelt der Wert um 230.000 km². Laut Wikipedia hat die Insel Großbritannien je nach Artikel eine Fläche von 219.331 km² beziehungsweise 230.977 km². Die Suchplattform Google schlägt einen Wert von 229.848 km² vor. Diese zwei Homepages dienen den meisten Schülerinnen und Schülern als erste Anlaufstelle und werden daher bewusst in die Arbeit eingebunden, obwohl sie keineswegs vertrauliche Quellen darstellen. In anderen Nachschlagewerken war leider nur die Gesamtfläche des Vereinten Königreichs angegeben. Trotz alledem passt der berechnete Wert sehr gut mit den Angaben im Internet überein.

Während es in der ersten Einheit primär darum ging, ein Gefühl für die Materie zu bekommen, wäre es geplant, dass in der zweiten Einheit tatsächlich das Berechnen der Länge der Küstenlinie sowie der Fläche der Insel im Vordergrund steht.

Tätigkeit	Zeit [min]	Materialien	Methode	Kompetenzen	Bemerkungen
Begrüßung und Wiederholung	5		frontal		Kontrollieren der Anwesenheit, Wiederholen der Ergebnisse der Vorstunde
Modellierung der Küstenlinie Groß- britanniens	15	S: Computer, GeoGebra, Bilder der Insel	Partner- arbeit	H1 I3 K1	Lehrperson hilft bei Schwierigkeiten mit der Aufgaben- stellung oder dem Programm.
Berechnen der Länge der Küstenlinie und der Fläche der Insel	20	S: Computer, GeoGebra, Arbeitsblatt, Schreibstift, Taschen- rechner	Partner- arbeit	H2 I3 K2	Vom Rechenweg sollte nicht zu viel vorweg genommen werden.
Recherche	5	S: Computer, Internet	Partner- arbeit	H3 I1 K3	Ergebnisse sollen im Internet auf ihren Wahrheitsgehalt recherchiert werden
Vergleichen der Ergebnisse	5	S: Arbeitsblatt, Schreibstift L: Tafel, Kreide	frontal	H1 I3 K3 H2 I3 K3	Die Lösungen werden verglichen und diskutiert.

7.3 Die Klärung des Begriffs Fraktal anhand der Koch-Kurve

Die Koch-Kurve ist ein von dem Mathematiker Helge von Koch 1904 vorgestelltes Beispiel einer Kurve, die zwar überall stetig, aber nirgendwo differenzierbar ist (Schroeder, 1994). Sie eignet sich hervorragend zur Demonstration fraktaler Eigenschaften, da sie einfach definiert ist, eine schnell erkennbare Feinstruktur besitzt, selbstähnlich ist und ihre fraktale Dimension größer als die euklidische ist. Ebenso dient sie als grobes Modell für eine Küstenlinie, die mit immer größer werdendem Maßstab betrachtet wird (Mandelbrot, 1987).

Ausgegangen wird von einer Strecke mit der Länge 1, genannt Initiator. Das mittlere Drittel wird durch ein gleichseitiges Dreieck ersetzt, welches unten offen ist. Diesen ersten Konstruktionsschritt nennt man Generator. Die Länge des Generators beträgt nun $\frac{4}{3}$, da die Länge der Strecke 1 in drei gleich große Teile unterteilt, das mittlere Drittel entfernt und durch zwei Strecken der Radiuslänge $r = \frac{1}{3}$ ersetzt wurde. Wiederholt man diesen Vorgang, führt man also den zweiten Iterationsschritt durch, ist die Kurve bereits $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ lang. Diesen Prozess kann man nun (zumindest in der Theorie) unendlich oft wiederholen, wobei nach n Iterationsschritten die Koch-Kurve eine Länge $L(n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ aufweist. Es ist also unschwer zu erkennen, dass sie auf einem endlichen Streckenabschnitt unendlich lang wird (Schroeder, 1994).

Mit Hilfe von MSWLogo lässt sich die Koch-Kurve sehr einfach konstruieren. Unter dem Menüpunkt „Edall“ rechts unten auf der Benutzeroberfläche lässt sich eine Prozedur, ich nenne sie „koch“ programmieren. Wie nicht unschwer zu erkennen ist, betrifft die zweite Zeile den Initiator, der lediglich aus einer Strecke mit der vorgegebenen Länge besteht. In den Zeilen drei bis neun stehen abwechselnd die Befehle zum Zeichnen einer Strecke, die je nach Iterationsschritt verschieden lang ist, und zum Drehen der Turtle um den angegebenen Winkel (Hohenwarter, 2007). Die beschriebene Prozedur und das Ergebnis sehen wie folgt aus:

```
to koch :laenge :schritt
if :schritt<1 [fd :laenge stop]
koch :laenge/3 :schritt-1
lt 60
koch :laenge/3 :schritt-1
rt 120
koch :laenge/3 :schritt-1
lt 60
koch :laenge/3 :schritt-1
end
```

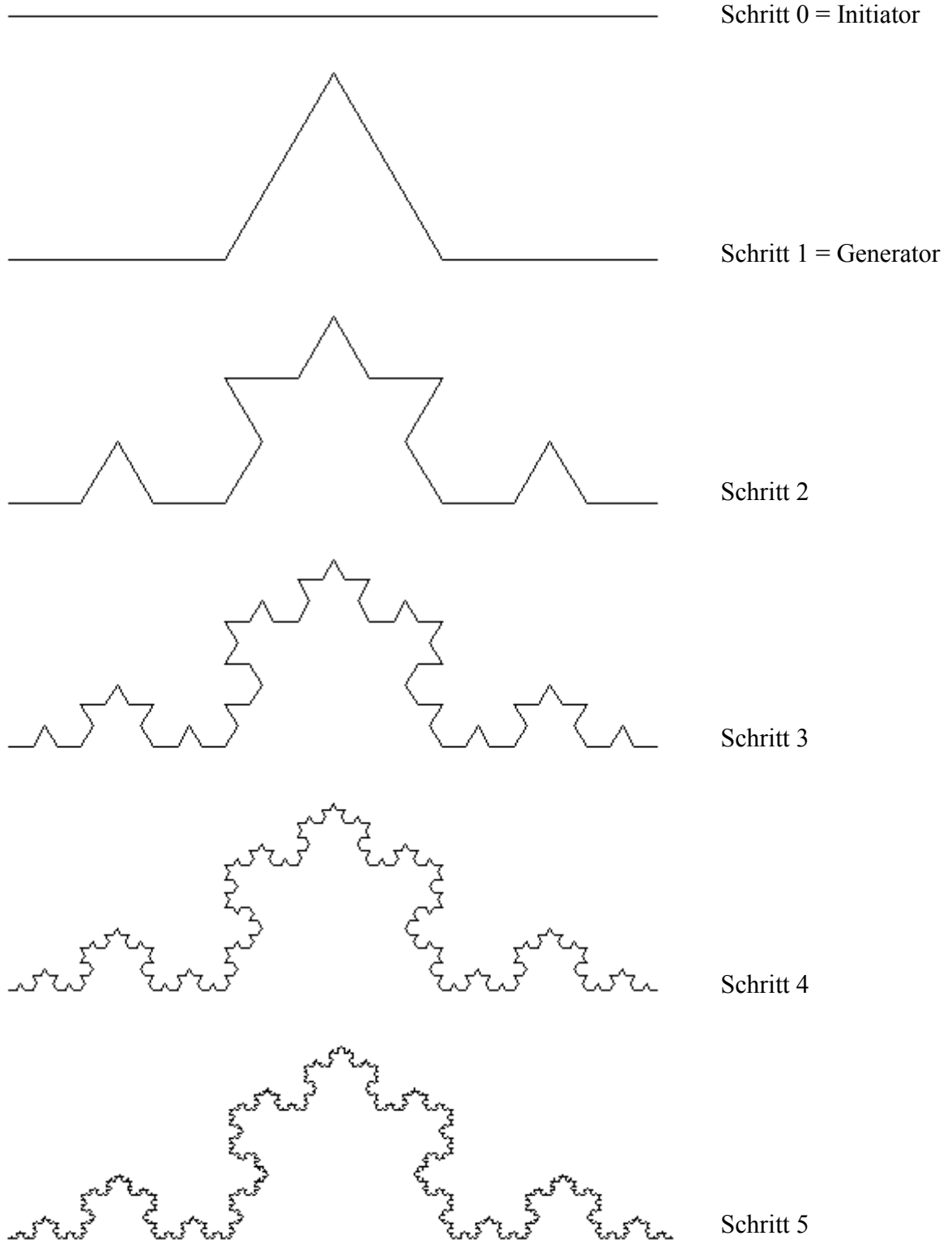


Abbildung 13: Die ersten fünf Iterationsschritte der Koch-Kurve samt Initiator

Bei genauerer Betrachtung sieht man bereits beim zweiten Iterationsschritt, dass sich der Generator an allen Seiten der Kurve in verkleinerter Form wiederfindet. Selbiges gilt auch für jeden weiteren Schritt, wobei es mit der Zeit immer schwieriger wird, die einzelnen Strukturen genau zu erkennen beziehungsweise abzubilden. Schon bei dem fünften Iterationsschritt müsste man in das Bild hineinzoomen, um die einzelnen Strukturen noch ausmachen zu können. Die fraktalen Eigenschaften der einfachen Konstruktion, der Selbstähnlichkeit und der Feinstruktur können sehr einfach erarbeitet werden.

Zur Berechnung der fraktalen Dimension greifen wir auf ihre Definition und wiederum die Konstruktion der Koch-Kurve zurück. Der Generator drittelt den Initiator und verwendet vier Strecken, die alle ein Drittel der Länge des Initiators aufweisen. Das heißt, dass $N = 4$ Streckenabschnitte mit Länge $r = \frac{1}{3}$ benötigt werden um die Strecke des vorhergegangenen

Iterationsschritts abzugehen. Als fraktale Dimension D_F ergibt sich daher $D_F = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1,26$.

Somit ist die fraktale Dimension D_F größer als die euklidische Dimension einer Kurve $D_E = 1$. Doch wie kann eine Kurve eine Dimension größer 1 besitzen? Dies tritt auf, da die Kurve bei manchen Abschnitten sich selbst so sehr nähert, dass sie beinah flächendeckend, also mit Dimension 2, wird.

Da man theoretisch unendlich viele dieser Iterationsschritte machen kann, wird jede noch so kleine Strecke früher oder später durch den Generator ersetzt. Da dadurch schlussendlich keine messbare Strecke mehr übrig bleiben kann, kann man die Kurve auch nicht mit traditionellen geometrischen Hilfsmitteln beschreiben. In der Sprache der Mathematik ausgedrückt ist die Koch-Kurve überall stetig, also zusammenhängend und nicht oszillierend, aber nirgends differenzierbar, mit anderen Worten hat nirgends eine eindeutige Tangente, aufgrund der unendlich vielen Knicke. Dies ist jedoch Stoff der 11. Schulstufe und sollte daher besser weggelassen oder vereinfacht beschrieben werden.

Schließlich und endlich konnten so alle fünf Eigenschaften von Fraktalen bei der Koch-Kurve nachgewiesen werden.

Tätigkeit	Zeit [min]	Materialien	Methode	Kompetenzen	Bemerkungen
Begrüßung und Wiederholung	5		frontal		Kontrollieren der Anwesenheit, Wiederholen der Ergebnisse der Vorstunde
Konstruktion der Koch-Kurve	15	L: Computer, LOGO oder Tafel, Kreide, Tafeldreieck, Schwamm S: Heft, Lineal, Bleistift, Schreibstift	frontal	H2 I3 K2	Lehrperson konstruiert Koch- Kurve, Schülerinnen und Schüler zeichnen nach
Berechnung der Länge und der Hausdorff- Dimension	10	L: Tafel, Kreide S: Heft, Schreibstift	frontal	H2 I1 K2	Lehrperson rechnet an der Tafel vor, Schülerinnen und Schüler sollen mithelfen und mitdenken
Besprechung der Eigenschaften der Koch-Kurve	10	L: Computer, LOGO, Tafel, Kreide S: Heft, Schreibstift	Lehrer- Schüler- Inter- aktion, Plenum	H3 I3 K2	Schülerinnen und Schüler sollen selbst Eigenschaften wie die Selbstähnlichkeit, unendliche Länge, etc. erkennen
Definition der Begriffe Selbstähnlich- keit, Hausdorff- Dimension und Fraktal	10	L: Tafel, Kreide S: Heft, Schreibstift	frontal	H3 I3 K2	Begriffe werden mit Hilfe der vorher gesammelten Ergebnisse definiert und ins Heft übertragen

7.4 Die Kochsche Schneeflocke als fraktales Modell der Insel Großbritannien

Geht man nun von einem gleichseitigen Dreieck anstatt einer Strecke als Initiator aus, wobei der Generator derselbe bleibt, erhält man nach wenigen Iterationen die Kochsche Schneeflocke. Diese ähnelt zumindest annähernd der Insel Großbritannien.

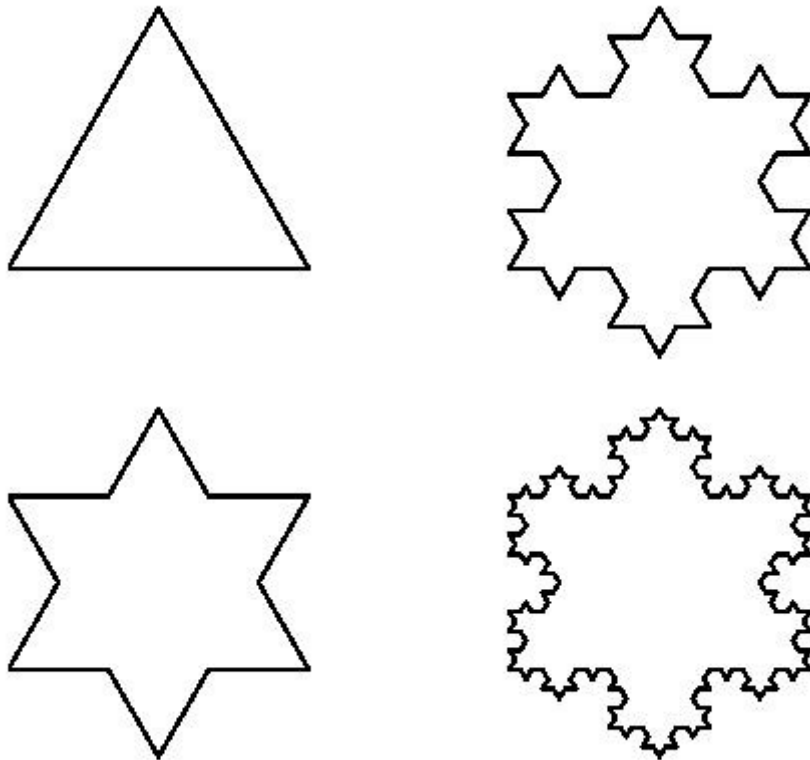


Abbildung 14: Die ersten drei Iterationen der Kochschen Schneeflocke samt Initiator

Da die Kochsche Schneeflocke von drei Koch-Kurven begrenzt wird, ergibt sich für den Umfang $U(n) = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Somit konvergiert ihr Umfang mit jedem Iterationsschritt mehr gegen unendlich. Im Fall der Küstenlinie Großbritanniens kann man auf dieselbe Vermutung kommen. Da diese aber ein natürliches Fraktal darstellt, sollte spätestens bei der Radiuslänge der Größe eines Sandkornes aufgehört werden. Jegliche weitere Verkleinerung wäre unnatürlich. Auch ändert sich die Länge der Küstenlinie ständig durch die Gezeiten, wodurch eine Radiuslänge von weniger als zehn Metern obsolet wird. Dadurch ergibt sich zwar eine bei weitem längere Küstenlinie, als auf den ersten Blick zu vermuten ist, jedoch mit endlicher Größe.

Die Fläche der Kochschen Schneeflocke geht von einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a aus. Der Initiator hat daher die Fläche $A_0 = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$. Mit jedem Konstruktionsschritt n wird jede Seite mit einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge $\frac{a}{3^n}$ bestückt. Da der Generator eine Strecke durch vier kürzere ersetzt, kommen bei jedem Iterationsschritt 3^n Seiten dazu. Wichtig ist, dass man die Fläche des vorhergegangenen Schritts immer dazuzählt. Die ersten drei Iterationen sind im Folgenden berechnet:

$$A_1 = A_0 + 3 \cdot \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{9}\right)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + 12 \cdot \frac{\left(\frac{a}{9}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{9}\right) + 12 \cdot \frac{\left(\frac{a}{9}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{3} \\ &= \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{4}{9^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= A_2 + 48 \cdot \frac{\left(\frac{a}{27}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{4}{9^2}\right) + 48 \cdot \frac{\left(\frac{a}{27}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{3} \\ &= \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{4}{9^2} + 3 \cdot \frac{4^2}{9^3}\right) \end{aligned}$$

Allgemein für den Iterationsschritt n ergibt dies also:

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{4}{9^2} + 3 \cdot \frac{4^2}{9^3} + \dots + 3 \cdot \frac{4^{n-1}}{9^n}\right)$$

Die Summen in den Klammern sind unendliche geometrische Reihen mit $b_n = b_1 + b_2 + \dots = b_1 \cdot q^{n-1}$. Im Fall der Kochschen Schneeflocke sind das Anfangsglied $b_1 = \frac{3}{9}$ und der Quotient $q = \frac{4}{9}$. Somit ist $|q| < 1$ und die unendliche geometrische Reihe konvergiert gegen die Summe $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{9}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\frac{3}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}$. Setzt man das in obige allgemeine Formel ein, erhält man:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{5}\right) = A_0 \cdot \frac{8}{5} = A_0 \cdot 1,6$$

Als Resultat erhält man, dass die Kochsche Schneeflocke gegen eine Fläche konvergiert, die um 60% größer ist als die des Initiators (Hohenwarter, 2007). Es konnte also gezeigt werden, dass trotz des unendlichen Umfangs die Fläche endlich bleibt. Dieses Ergebnis kann man

wiederum auf die Insel Großbritannien übertragen, deren Küstenlinie auch immer länger wird, wobei sich der Flächeninhalt um einen konstanten Wert einpendelt.

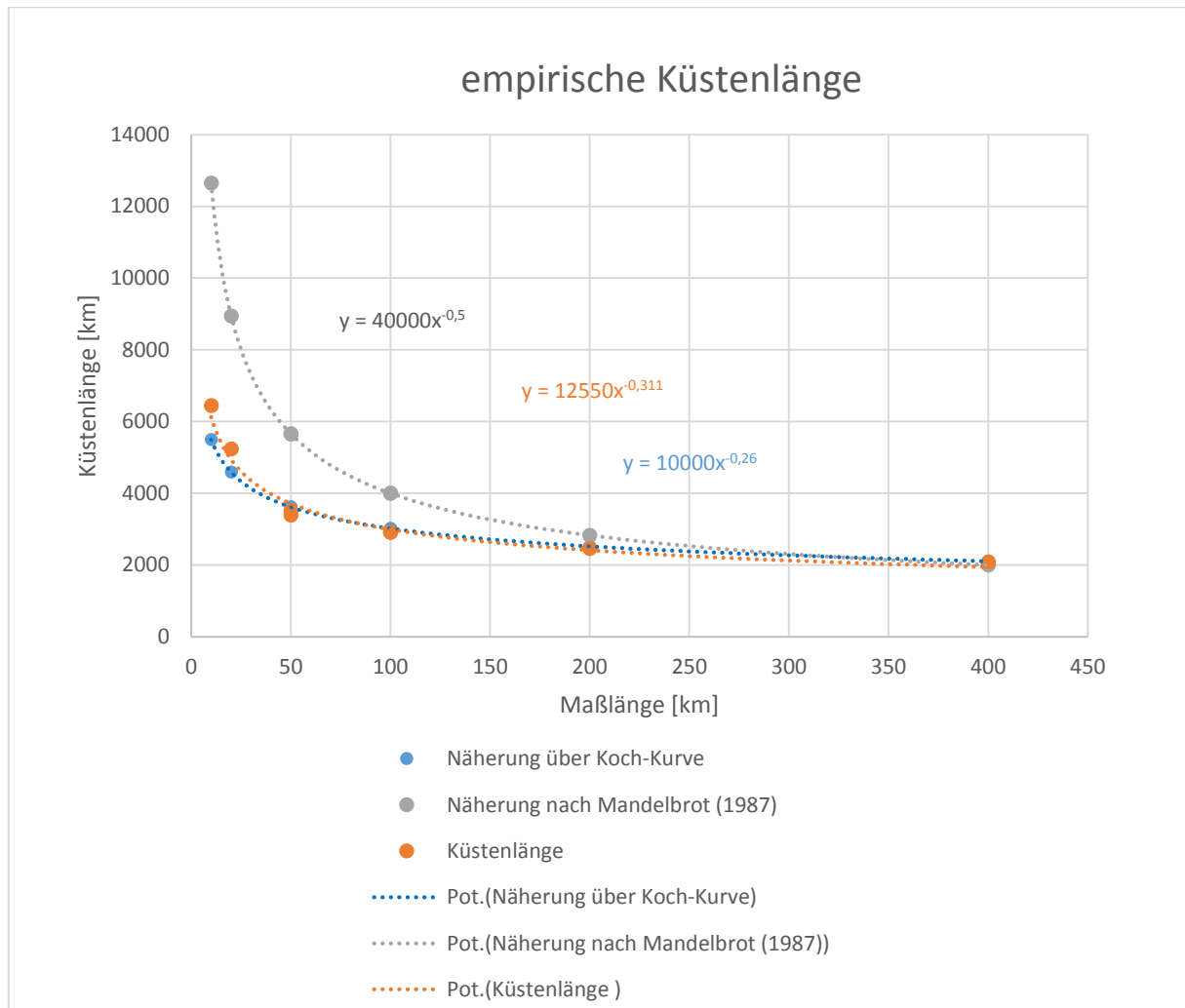
Tätigkeit	Zeit [min]	Materialien	Methode	Kompetenzen	Bemerkungen
Begrüßung und Wiederholung	5		frontal		Kontrollieren der Anwesenheit, Wiederholen der Ergebnisse der Vorstunde
Konstruktion der Kochschen Schneeflocke	10	L: Computer, LOGO	frontal	H2 I3 K2	Lehrperson konstruiert die Kochsche Schneeflocke, Schülerinnen und Schüler schauen und denken mit
Berechnung des Umfangs	5	L: Tafel, Kreide S: Heft, Schreibstift	frontal	H2 I1 K2	Lehrperson berechnet den Umfang Schülerinnen und Schüler helfen und denken mit
Besprechung der Gemeinsam- keiten und Unterschiede mit Großbritannien	10	L: Computer, LOGO, Tafel, Kreide S: Heft, Schreibstift	Lehrer- Schüler- Inter- aktion, Plenum	H3 I3 K2 H4 I3 K2	Schülerinnen und Schüler sollen selbst Gemeinsamkeiten und Unterschiede mit Großbritannien erkennen
Berechnung der Fläche	15	L: Tafel, Kreide S: Heft, Schreibstift	frontal	H2 I1 K2	Lehrperson berechnet die Fläche Schülerinnen und Schüler helfen und denken mit
Besprechung der Gemeinsam- keiten und Unterschiede mit Großbritannien	5	L: Computer, LOGO, Tafel, Kreide S: Heft, Schreibstift	Lehrer- Schüler- Inter- aktion, Plenum	H3 I3 K2 H4 I3 K2	Schülerinnen und Schüler sollen selbst Gemeinsamkeiten und Unterschiede mit Großbritannien erkennen

7.5 Berechnung der Küstenliniendimension

Zur Berechnung der Dimension der Küstenlinie Großbritanniens betrachtet man erneut die fraktale Dimension der Koch-Kurve. Diese ist, wie bereits berechnet wurde, rund 1,26. Ebenso sollte man die erste Näherung der Küstenliniendimension von Mandelbrot (1987) zu Rate ziehen, die $\frac{3}{2} = 1,5$ beträgt. Laut dem Autor erhält man diese aus der Formel $L(M) \approx \lambda \cdot M^{1-D_H}$, wobei λ eine Konstante ist. Da man die Küstenlinie durch einen Polygonzug mit Maßlänge M annähert, benötigt man also $\lambda \cdot M^{-D_H}$ dieser Polygonzugabschnitte.

Wie bereits bei der Berechnung der Küstenlänge beschrieben, wurde auch zur Berechnung der Dimension der Küstenlinie Großbritanniens die Karte von Großbritannien mit Hilfe von verschiedenen Maßlängen vermessen, um an die verschiedenen Küstenlängen bei unterschiedlichen Vergrößerungen zu erhalten. Anschließend wurden diese in eine Excel-Tabelle und weiter in ein Punktdiagramm übertragen. Letzteres wurde mit einer Trendlinie und der zugehörigen Funktionsgleichung versehen, wobei sich eine Potenzfunktion am besten eignete. Diese besitzt exakt die Form $L(M) \approx \lambda \cdot M^{1-D_H}$, wobei man λ und noch viel wichtiger die fraktale Dimension D_F aus ihr herauslesen kann. In meinem Fall erhielt ich $D_F \approx 1,31$, die genau zwischen der Dimension der Koch-Kurve und der von Mandelbrot (1987) angenäherten liegt. Die Punktdiagramme der beiden zeigen ein ähnliches Bild, wobei hierbei die Formel der Trendlinie mit $\lambda_{Koch} = 10.000$ und $\lambda_{Mandelbrot} = 40.000$ angegeben wurde. Dabei ist zu beachten, dass die Dimension der Koch-Kurve deutlich bessere Werte liefert und sich, so wie an anderen Stellen bereits gezeigt, sehr gut zur Annäherung eignet.

Maßzahl der Karte	Maßlänge M [km]	Küstenlänge L(M) [km]	Näherung über Koch-Kurve [km]	Näherung nach Mandelbrot (1987) [km]
200*2	400	2083	2106	2000
200	200	2462	2522	2828
200/2	100	2913	3020	4000
100	100	2915	3020	4000
100/2	50	3517	3616	5657
50	50	3389	3616	5657
20	20	5239	4589	8944
10	10	6446	5495	12649



Auch kann man durch Einsetzen von zwei Messergebnissen und Umformen der Formel $L(M) \approx \lambda \cdot M^{1-D_F}$ die Werte λ und D_F berechnen. Allgemein lautet die Umformung wie folgt:

$$L(M_1) = \lambda \cdot M_1^{1-D_F}$$

$$L(M_2) = \lambda \cdot M_2^{1-D_F}$$

$$\frac{L(M_1)}{M_1^{1-D_F}} = \lambda = \frac{L(M_2)}{M_2^{1-D_F}}$$

$$\frac{L(M_1)}{L(M_2)} = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{1-D_F}$$

$$\log\left(\frac{L(M_1)}{L(M_2)}\right) = (1 - D_F) \cdot \log\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

$$D_F = 1 - \log\left(\frac{L(M_1)}{L(M_2)}\right) / \log\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

Für die obigen Längen ergibt dies folgende fraktale Dimensionen:

Maßzahl M	200	200/2	100	100/2	50	20	10
200*2	1,24	1,24	1,24	1,25	1,23	1,31	1,31
200		1,24	1,24	1,26	1,23	1,33	1,32
200/2				1,27	1,22	1,36	1,34
100				1,27	1,22	1,36	1,34
100/2						1,43	1,38
50						1,48	1,40
20							1,30

Wie unschwer zu erkennen ist, weichen die einzelnen Werte zum Teil relativ stark voneinander ab, je nachdem welche zwei Maßzahlen zur Berechnung herangezogen werden. Dies liegt daran, dass die Fehleranfälligkeit dieser Methode wesentlich höher ist, da hier immer nur zwei (ziemlich ungenau) gemessene Längen betrachtet werden. Auch ergeben sich so eine Vielzahl von Werten, wodurch die Dimension letzten Endes immer noch nicht bestimmt ist. Daher ist die erste Methode deutlich der zweiten vorzuziehen. In der Schule ist es dennoch sicherlich von Vorteil, auch diese Methode einmal vorzuführen, da die Schülerinnen und Schüler hierbei den mathematischen Hintergrund verstehen können und nicht nur eine Zahl präsentiert bekommen. Wichtig ist schlussendlich das Für und Wider beider Lösungswege zu besprechen.

Tätigkeit	Zeit [min]	Materialien	Methode	Kompetenzen	Bemerkungen
Begrüßung und Wiederholung	5		frontal		Kontrollieren der Anwesenheit, Wiederholen der Ergebnisse der Vorstunde
Ablesen der Küstenlinien-dimension aus der Formel	10	L: Computer, MS Excel, Tafel, Kreide S: Heft, Schreibstift	frontal	H1 I4 K2 H3 I4 K2	Lehrperson führt den Näherungsweg vor, Schülerinnen und Schüler schauen und denken mit

Berechnung durch Umformen der Formel	15	S: Heft, Schreibstift	Einzelarbeit	H2 I2 K2	Schülerinnen und Schüler sollen die Umformungsschritte selbst mit ihren Vorkenntnissen schaffen.
Vergleichen der Ergebnisse	10	L: Computer, MS Excel S: Heft, Schreibstift	Lehrer-Schüler-Interaktion, Plenum	H3 I2 K3	Schülerinnen und Schüler sollen die Ergebnisse ansagen. Die Lehrperson klärt Fragen.
Besprechen von Vor- und Nachteilen der beiden Methoden	10	L: Tafel, Kreide S: Heft, Schreibstift	Lehrer-Schüler-Interaktion, Plenum	H4 I2 K2/3 H4 I4 K2/3	Schülerinnen und Schüler sollen die Methoden selbst beurteilen.

7.6 Abschlussbemerkung

Dieses erste Modellierungsbeispiel zeigt sehr schön, mit welchen einfachen Mitteln man solche komplexe Strukturen behandeln kann. Auch wenn es viel Zeit in Anspruch nimmt, die nicht immer so einfach zu finden ist, empfinde ich es dennoch als sehr förderlich. Immerhin werden in diesen Stunden nicht nur verschiedenste Sozialformen verwendet, wobei vor allem die Schülerinnen und Schüler selbst aufgefordert sind eigenständig zu arbeiten und nachzudenken, sondern es wird auch anschaulich demonstriert, wie in der Forschung tatsächlich gearbeitet wird. Ebenso empfinde ich es persönlich einfacher Dinge zu verstehen, die man selbst erarbeitet hat, als solche, deren Ergebnisse einfach nur vorgestellt wurden. Besonders hoffe ich, dass dieses doch überraschende Ergebnis der immer länger werdenden Küstenlinie die Schülerinnen und Schüler dazu motiviert selbst die Berechnungen vorzunehmen um dem Phänomen auf den Zahn zu fühlen.

8 Modellierung von Schwämmen

Dieses Kapitel behandelt zwei Objekte, die so manchen Schülerinnen und Schülern ständig im Schulalltag begegnen, ohne dass sie ihnen nähere Betrachtung schenken. Hierbei meine ich zum einen den Tafelschwamm. Dieser ist zwar kein natürliches Phänomen per se, wurde aber nach dem natürlichen Vorbild eines echten Schwammskeletts erzeugt. Zum anderen spiele ich auf die Mathematikschulbücher der Reihe „Mathematik“ von Götz und Reichel (2010) an, auf deren Cover den Menger Schwamm abgebildet ist.

8.1 Allgemeines über Schwämme (*Porifera*)

Schwämme (*Porifera*) gehören zu den einfachsten Tieren. Ihr Körper ist noch sehr einfach gebaut und besteht aus einem zentralen Hohlraum, der mit strudelnden Kragengeißelzellen ausgekleidet ist, und einer mit Poren durchsetzten Körperwand. Diese kann je nach „Bautyp“ wiederum mehrere kleinere Hohlräume enthalten. Diese werden Ascon, Sycon und Leucon genannt, wobei der Leucon-Typ die meisten Verzweigungen und Hohlräume besitzt. Der Körperbau eignet sich ideal zum Filtern von Wasser, was auch der Ernährungsweise dieser Tiere entspricht. Durch die Poren gelangt Wasser in die Körperwand, die Nahrung wird herausgefiltert und die Kragengeißelzellen strudeln das Wasser in den zentralen Hohlraum, der nach oben hin geöffnet ist. Als Stützstrukturen besitzen die meisten Schwämme Kalk- oder Kieselnadeln. Zur Verbindung dieser produzieren viele auch ein collagenähnliches Protein namens Spongin. Schwämme des Leucon-Typs, die ausschließlich aus dem weichen Spongin aufgebaut sind und denen die harten Nadeln fehlen, wurden (und werden leider heute noch) als Badeschwämme verwendet (Campbell, 2009).

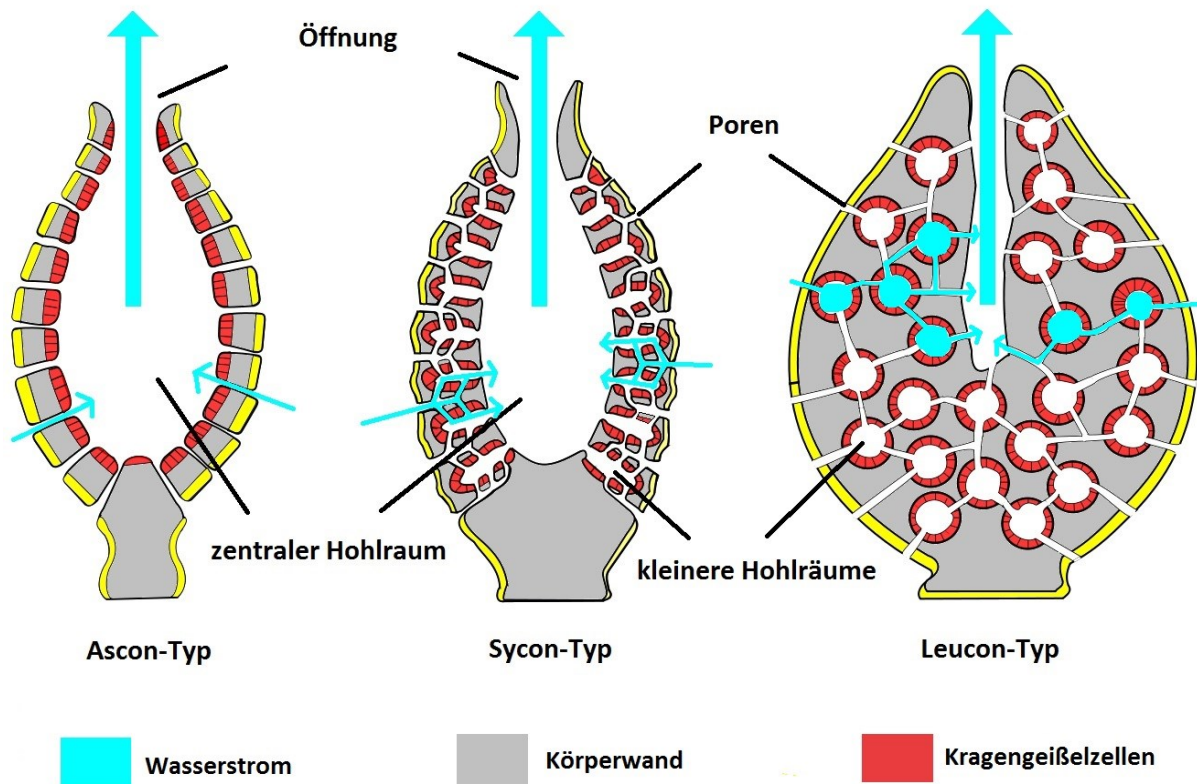


Abbildung 15: Schematischer Aufbau der drei Schwammtypen



Abbildung 16: Schwämme des Ascon-, Sycon- und Leucon-Typs

8.2 Der Menger-Schwamm zur Modellierung von Schwämmen

Betrachtet man nun einen würfel- oder quaderförmigen Tafelschwamm, so besteht dieser aus Schaumstoff, besitzt aber, wie sein natürliches Vorbild, die Eigenschaft Wasser enorm gut aufzusaugen aufgrund der porösen Struktur. Um einen Tafelschwamm zu modellieren eignet sich der Menger-Schwamm. Die Konstruktion von diesem ist recht simpel: Man nimmt einen Würfel, unterteilt ihn in 27 gleichgroße Teilwürfelchen und entfernt die sechs Würfelchen aus der Mitte der jeweiligen Würfelseiten und das zentrale Teilwürfelchen. So verbleiben 20 Würfelchen. Mit diesen wird nun dasselbe gemacht. Dies kann man in der Theorie wiederum unendlich oft wiederholen (Schroeder, 1994). Der Grenzwürfel besitzt hierbei erstaunliche Eigenschaften.

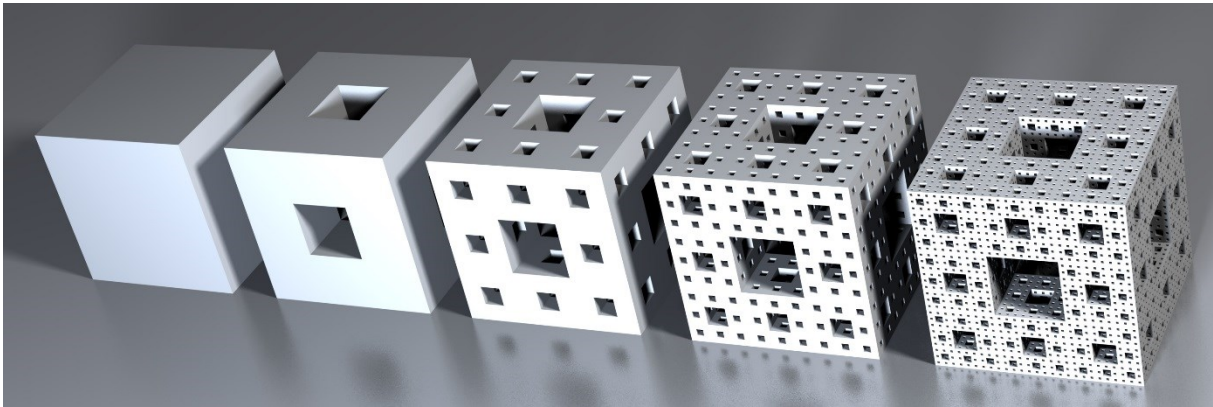


Abbildung 17: Die ersten vier Iterationsschritte des Menger-Schwamms samt Initiator

Zu Beginn ist es einmal wichtig, sich die Situation zu verinnerlichen um die Kantenlänge richtig berechnen zu können. Als Modell dafür leistet ein Rubikwürfel gute Dienste. Nehmen wir an die Kantenlänge des Initiators sei $l(0) = a$. Diese wird n -mal gedrittelt, also $l(n) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Nun berechnen wir uns die Anzahl der verbleibenden, nicht ausgehöhlten Würfelchen. Nach dem ersten Aushöhlungsschritt bleiben $w(1) = 20$, nach dem zweiten verbleiben innerhalb dieser 20 abermals 20, also $w(2) = 20 \cdot 20$ Würfelchen. Dies wird wiederum insgesamt n -mal gemacht, also hat man nach dem n -ten Aushöhlungsschritt $w(n) = 20^n$ kleine Teilwürfelchen. Die Länge der Oberfläche des Grenzwürfels nach unendlich vielen Aushöhlungsschritten konvergiert näherungsweise gegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O(n) > \lim_{n \rightarrow \infty} 20^n \cdot 6 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n > \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \cdot a^2 \cdot 2^n = \infty.$$

Das Volumen des Schwammes nach n Aushöhlungsschritten $V(n)$ ist das Volumen des Ausgangswürfels $V(0)$ abzüglich der Summe der Volumina der ausgeschnittenen Teilwürfelchen $V_G(n)$. Da bei jedem Aushöhlungsschritt jeweils sieben Würfelchen in jedem verbliebenen Teilwürfelchen getilgt werden und diese jeweils das Volumen $V_w(n) = \left(\frac{a}{3^n}\right)^3$ besitzen, folgt, dass $V(n) = a^3 - \sum_{i=1}^n 7 \cdot 20^{i-1} \cdot \left(\frac{a}{3^i}\right)^3$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist. Die Summe ist auch hier wieder eine unendliche geometrische Reihe, wobei $b_1 = V_G(1) = 7 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3$ und $q = \frac{V_G(1)}{V_G(2)} = \frac{20}{27}$ sind. Die unendlich geometrische Reihe konvergiert, da $|q| < 1$. Ihre Summe ist $S = \frac{7 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3}{1 - \frac{20}{27}} = \frac{7 \cdot a^3 / 27}{7/27} = a^3$. Daraus folgt, dass die Grenzfläche das Volumen $\lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = a^3 - a^3 = 0$ besitzt. Somit hat der Würfel nach unendlich vielen Aushöhlungsschritten kein Volumen mehr, sondern besteht ausschließlich aus einer unendlich großen Fläche (Götz, 1990).

Um diese Ergebnisse zu veranschaulichen sollte man noch die fraktale Dimension betrachten. Da bei jedem Aushöhlungsschritt von den 27 Teilwürfelchen 20 übrig bleiben und diese immer um $\frac{1}{3}$ kleiner werden, ist die fraktale Dimension des Menger-Schwamms $D_F = \frac{\log(20)}{\log(3)} \approx 2,73$. Sie ist also weniger als die euklidische Dimension eines Würfels, was das Ergebnis des Volumens, das gegen Null konvergiert bestätigt (Schroeder, 1994).

Dies ist in der Natur keineswegs möglich. Bei einem Tafelschwamm beispielsweise kann man das Volumen trotz der vielen Löcher sehen und fühlen. Auch treten bei diesem nicht die Löcher aufgrund von Aushöhlungen auf, sondern aufgrund von Luftblasen, die im Schaumstoff enthalten sind. Die Löcher sind im Gegensatz zum Menger-Schwamm zufällig verteilt. In einem natürlich gewachsenen Schwamm ist auch der Verkleinerungsfaktor der Kammern beschränkt, da es aus biologischer Sicht weder möglich noch sinnvoll wäre, unendlich kleine Aushöhlungen zu besitzen, da immerhin Nahrung hindurchgelangen muss.

Tätigkeit	Zeit [min]	Materialien	Methode	Kompetenzen	Bemerkungen
Begrüßung und Wiederholung	5		frontal		Kontrollieren der Anwesenheit, Wiederholen der Ergebnisse der Vorstunde
Einführung über die Eigenschaften des Tafel- schwamms und Vergleich mit natürlichen Schwämmen	10	L: Computer, Bilder oder Schau- objekte S: Heft, Schreibstift	frontal		Lehrperson zeigt die natürlichen Schwammtypen vor, bespricht die Funktion des Körperbaus und vergleicht diesen mit dem Tafelschwamm.
Besprechung der Konstruktion des Menger- Schwamms	10	L: Tafel, Kreide, Rubikwürfel, Abbildungen S: Heft, Schreibstift	frontal		Die Konstruktions- schritte werden anhand eines Rubikwürfels erklärt.
Erarbeiten der Eigenschaften des Menger- Schwamms	20	S: Heft, Schreibstift	Partner- arbeit	H2 I1 K2 H2 I3 K2/3	Schülerinnen und Schüler sollen selbst mit Hilfe ihrer Vorkenntnisse Volumen und Dimension des Menger-Schwamms berechnen. Die Abschätzung für die Oberfläche erfolgt durch die Lehrperson.
Vergleichen der Ergebnisse	10	L: Tafel, Kreide S: Heft, Schreibstift	Lehrer- Schüler- Inter- aktion, Plenum	H3 I3 K2	Schülerinnen und Schüler sollen ihre Ergebnisse vergleichen und diskutieren. Die Lehrperson klärt Fragen.

8.3 Überprüfung durch Experimente

Um zu überprüfen wie groß nun das Aushöhlungsvolumen eines Tafelschwammes ist gibt es zwei unterschiedliche mögliche Vorgehensweisen.

Zum einen gibt es Tafelschwämme wie in Abbildung 18, die dünn gepresst erhältlich sind und sich erst nach einem Wasserbad voll entfalten. Von diesen ist das Luftvolumen relativ einfach zu bestimmen. Zuerst misst man die Längen-, Breiten- und Höhenmaße des Pressschwammes ab und berechnet sich so das Volumen. In meinem Fall wären die Abmessungen:

Länge l	12,5 cm
Breite b	3,5 cm
Höhe h	0,9 cm

Da die Form annähernd der eines Quaders entspricht, ergibt dies also ein Volumen von $36,38 \text{ cm}^3$. Dieses sollte nun dem Volumen der tatsächlich vorhandenen Masse ohne Aushöhlungen entsprechen. Legt man den Pressschwamm nun für wenige Sekunden in ein 2,5 Liter Wasserbad erhält man einen gewöhnlichen Tafelschwamm. Dieser besitzt nun folgende Abmessungen:

Länge l	14,1 cm
Breite b	8,9 cm
Höhe h	3,8 cm

Mittelt man dessen Seiten und nimmt ihn als quaderförmig an, ergibt dies ein Volumen von $476,89 \text{ cm}^3$. Das bedeutet, dass der Schwamm nach dem Wasserbad mehr als das 13fache seines Ursprungsvolumens besitzt. Mit anderen Worten, es scheint als würde der Tafelschwamm $440,51 \text{ cm}^3$ Luft beinhalten beziehungsweise zu über 92% aus Luft bestehen.

Vergleicht man dieses Ergebnis nun mit dem Menger-Schwamm folgt für dessen Volumen:

$$V(0) = 476,89 \text{ cm}^2$$

$$V(1) = 476,89 - 7 \cdot \frac{476,89}{3^3} = 353,25 \text{ cm}^3$$

$$V(2) = 476,89 - 7 \cdot \frac{476,89}{27} - 7 \cdot 20 \cdot \frac{476,89}{27^2} = 261,67 \text{ cm}^3$$

$$V(3) = 476,89 - 7 \cdot \frac{476,89}{27} - 7 \cdot 20 \cdot \frac{476,89}{27^2} - 7 \cdot 20^2 \cdot \frac{476,89}{27^3} = 193,83 \text{ cm}^3$$

$$V(4) = V(3) - 7 \cdot 20^3 \cdot \frac{476,89}{27^4} = 143,58 \text{ cm}^3$$

$$V(5) = V(4) - 7 \cdot 20^4 \cdot \frac{476,89}{27^5} = 106,35 \text{ cm}^3$$

$$V(6) = V(5) - 7 \cdot 20^5 \cdot \frac{476,89}{27^6} = 78,78 \text{ cm}^3$$

$$V(7) = V(6) - 7 \cdot 20^6 \cdot \frac{476,89}{27^7} = 58,36 \text{ cm}^3$$

$$V(8) = V(7) - 7 \cdot 20^7 \cdot \frac{476,89}{27^8} = 43,23 \text{ cm}^3$$

$$V(9) = V(8) - 7 \cdot 20^8 \cdot \frac{476,89}{27^9} = 32,02 \text{ cm}^3$$

Somit sind also beinahe neun Aushöhlungsschritte notwendig um das 13 mal geringere Volumen des Pressschwamms zu erhalten. Das Volumen eines Loches würde hierbei nur $6 \cdot 10^{-11} \text{ cm}^3$ beziehungsweise $60 \text{ } \mu\text{m}^3$ betragen. Die näherungsweise Oberfläche wäre hierbei:

$$O(0) = 2 \cdot 14,1 \cdot 8,9 + 2 \cdot 14,1 \cdot 3,8 + 2 \cdot 8,9 \cdot 3,8 = 425,78 \text{ cm}^2$$

$$O(9) > O(0) \cdot 20^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{18} = 562694,45 \text{ cm}^2 \approx 56,27 \text{ m}^2$$

Dies entspricht ungefähr der Fläche einer Zweizimmerwohnung und übertrifft die Fläche des Quaders um mehr als das 1300fache.

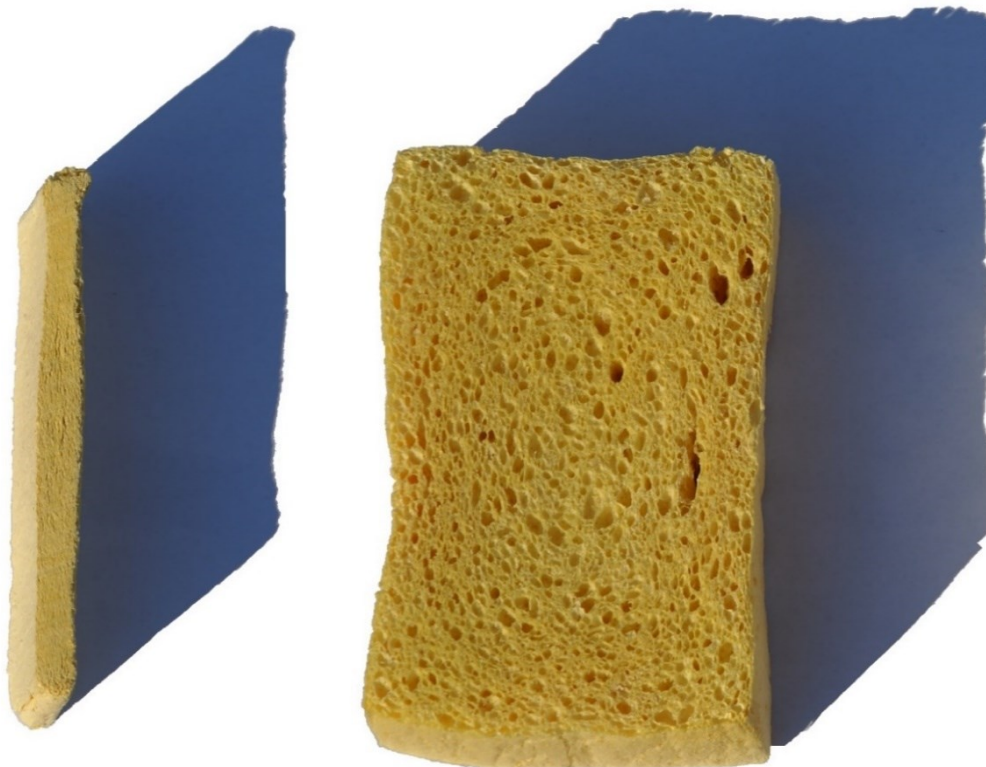


Abbildung 18: Der Pressschwamm vor und nach dem Wasserbad

Zum anderen kann man auch einen quaderförmigen Schaumstoffschwamm wie in Abbildung 19 kaufen und vermessen. In meinem Fall betragen die Maße:

Länge l	19,8 cm
Breite b	12,2 cm
Höhe h	7,8 cm

Dies entspricht einem Volumen von $1884,17 \text{ cm}^3$. Da man diese Art von Schwämmen nicht gepresst erhält, bedarf es einer anderen Methode zur Bestimmung des Luftvolumens. Beispielsweise kann man das aufgesogene Wasser als Luftvolumen annehmen. Hierfür taucht man den Schwamm zur Gänze in ein 5 Liter Wasserbad, presst unter Wasser den Großteil der Luft heraus, sodass keine Bläschen mehr aufsteigen, holt ihn schnell heraus und fängt das austretende Wasser so gut wie möglich in einem zweiten Behältnis auf. Nach dem ordentlichen Auswringen des Schwamms kann man das aufgefangene Wasser abmessen. Bei meinem Versuch konnte ich 1575 ml Wasser auffangen. Das angenommene Luftvolumen des Versuchsschwamms beträgt also ungefähr 1575 cm^3 , also über 83% des Quadervolumens. Somit hat der Schaumstoffschwamm ein tatsächliches Volumen von nur $309,17 \text{ cm}^3$.

Mit Hilfe der Aushöhlungs Schritte des Menger-Schwamms berechnet ergibt das:

$$V(0) = 1884,17 \text{ cm}^3$$

$$V(1) = V(0) - 7 \cdot \frac{1884,17}{3^3} = 1395,68 \text{ cm}^3$$

$$V(2) = V(1) - 7 \cdot 20 \cdot \frac{1884,17}{27^2} = 1033,84 \text{ cm}^3$$

$$V(3) = V(2) - 7 \cdot 20^2 \cdot \frac{1884,17}{27^3} = 765,80 \text{ cm}^3$$

$$V(4) = V(3) - 7 \cdot 20^3 \cdot \frac{1884,17}{27^4} = 567,26 \text{ cm}^3$$

$$V(5) = V(4) - 7 \cdot 20^4 \cdot \frac{1884,17}{27^5} = 420,19 \text{ cm}^3$$

$$V(6) = V(5) - 7 \cdot 20^5 \cdot \frac{1884,17}{27^6} = 311,25 \text{ cm}^3$$

Zum Erreichen des Volumens des Schaumstoffschwamms benötigt es daher theoretisch sechs Aushöhlungs Schritte. Die Löcher bei diesem Schritt hätten jeweils ein Volumen von $4863000 \mu\text{m}^3$.

Die Oberfläche des Schwammes wäre näherungsweise:

$$O(0) = 2 \cdot 19,8 \cdot 12,2 + 2 \cdot 19,8 \cdot 7,8 + 2 \cdot 12,2 \cdot 7,8 = 982,32 \text{ cm}^2$$

$$O(6) > O(0) \cdot 20^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} = 118298,14 \text{ cm}^2 \approx 11,38 \text{ m}^2$$

Sie würde die Quaderfläche um mehr als das 120fache übertreffen.

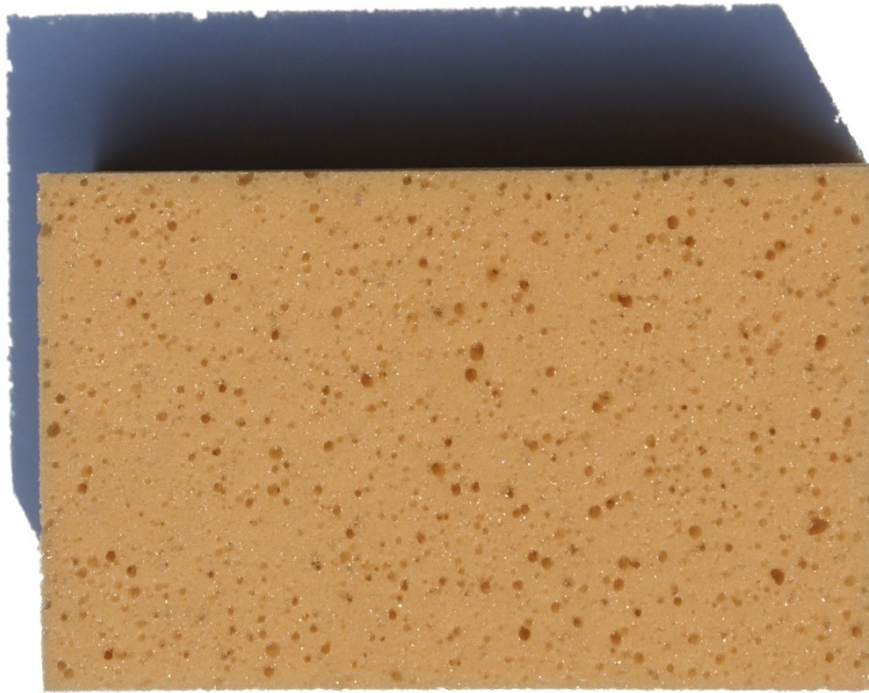


Abbildung 19: Ein Schwamm aus Schaumstoff

Für den obigen Pressschwamm kann man dieselbe Methode selbstredend auch verwenden. Hierbei erhielt ich eine Wassermenge von circa 400 ml. Das so erhaltene Luftvolumen betrug in diesem Fall also interessanterweise auch „nur“ knapp über 83% des Quadervolumens. Die näherungsweise Oberfläche wäre auch knapp ein Zehntel so groß wie bei der obigen Methode. Dies könnte mehrere Gründe haben. Einerseits könnte es an den nicht wirklich quaderförmigen Volumina der beiden Zustände des Pressschwammes liegen, die dennoch als solche angenommen wurden. Andererseits ist zu beachten, dass bei dieser Methode leider beim Herausholen des Schwammes sehr viel Wasser verloren gehen kann, das sich danach empfindlich auf die Messergebnisse auswirkt.

Dennoch empfinde ich diese zweite Methode zur Demonstration des enormen Luftvolumens eines Schwammes sehr einfach und anschaulich für Schülerinnen und Schüler.

Tätigkeit	Zeit [min]	Materialien	Methode	Kompetenzen	Bemerkungen
Begrüßung und Wiederholung	5		frontal		Kontrollieren der Anwesenheit, Wiederholen der Ergebnisse der Vorstunde
Überprüfung der fraktalen Eigenschaften des Menger-Schwamms und anschließende Besprechung der Ergebnisse	10	S: Heft, Schreibstift L: Tafel, Kreide	Einzelarbeit	H3 I3 K2	Jede Schülerin und jeder Schüler soll zuerst für sich alleine die fraktalen Eigenschaften des Menger-Schwamms überprüfen.
Überprüfung des mathematischen Modells	25	S: Messbecher, 5-10 Liter Kübel, Wasser, Tafel- schwamm, Lineal, Heft, Schreibstift	Gruppenarbeit	H4 I3 K2	Schülerinnen und Schüler sollen mit Hilfe einer detaillierten Anleitung das Modell überprüfen.
Besprechung der Diskrepanzen mit dem Modell	10	L: Tafel, Kreide S: Heft, Schreibstift	Lehrer-Schüler-Interaktion, Plenum	H1 I3 K3 H4 I3 K3	Schülerinnen und Schüler sollen eigenständig die Diskrepanzen des mathematischen Modells mit dem natürlichen Objekt besprechen.

8.4 Abschlussbemerkung

Dieses Beispiel ist trotz des erhöhten Komplexitätsniveaus durch die zusätzliche Dimension dennoch im Großen und Ganzen einfacher und bei weitem weniger zeitaufwendig. Besonders das praktische Experiment und seine extremen Ergebnisse sollten den Schülerinnen und Schülern Freude bereiten. Neben diesem kommt aber auch die Mathematik keineswegs zu kurz. Vor allem das Vorstellungsvermögen ist hierbei gefordert, wenn es darum geht, sich die Aushöhlungs-schritte des Menger-Schwamms vorzustellen.

9 Resümee

Wie die obigen zwei Modellierungsbeispiele zeigen, ist es kein Ding der Unmöglichkeit Fraktale im Mathematikunterricht einzuführen. Durch spannende Probleme aus der Realität kann Mathematik den Schülerinnen und Schülern gut näher gebracht werden. Für beide Beispiele wurde ein Phänomen aus der Natur genauer betrachtet und mit Hilfe von bereits bestehenden Fraktalen modelliert. Es musste kein Modell neu erfunden werden, was die Sache erheblich vereinfachte, sondern lediglich an die Bedingungen angepasst werden. So laufen die Modellierungsprozesse auch tatsächlich in der Forschung ab, wie Reinhard Oldenburg (2011), der selbst in einem gewinnorientierten Forschungsinstitut arbeitete, bestätigt. Die Schülerinnen und Schüler bekommen durch solche Beispiele mit, wie Mathematik im außerschulischen Leben zur Anwendung kommen kann. Dies untermauert hoffentlich die Sinnhaftigkeit dieses Gegenstandes.

Auch haben die Anwendungsbeispiele gemeinsam, dass die Schülerinnen und Schüler im Rahmen dieser vermehrt in Gruppen oder zu zweit arbeiten. Die Eigenaktivität und die verschiedenen Sozialformen sind essentiell für den Lernerfolg, da selbst erarbeitete Inhalte besser verstanden und längerfristig behalten werden. Bei Problemen, auftretenden Sackgassen oder Verständnisschwierigkeiten können sich die Lernenden gegenseitig unterstützen und gemeinsam Mittel und Wege zur Lösung dieser finden. So werden die Teamfähigkeit und Problemlösefähigkeit nachhaltig gestärkt. Die Lehrperson selbst sollte, wenn möglich, nur die Rahmenbedingungen vorgeben und bei unlösbaren Problemen durch detaillierte Fragen helfen diese zu analysieren. Wichtig ist bei alledem, dass genügend Zeit und Raum zur Bearbeitung der Beispiele zur Verfügung stehen, die leider immer schwerer zu entbehren sind. Jedoch bin ich der Ansicht, dass einige Übungsstunden, beispielsweise zum Thema Folgen und Reihen oder Logarithmus, durch solche Anwendungsbeispiele ersetzt werden können.

Im Falle meiner ersten Modellierungsaufgabe mit der Küstenlinie Großbritanniens ist der Computer unbedingt notwendig. Neben einem vermehrten Einsatz von GeoGebra und MSWLogo sollte auch recherchiert werden können um beispielsweise Ergebnisse auf ihre Richtigkeit zu überprüfen. Besonders der Einsatz der beiden Programme hilft auch bei der Erarbeitung von Problemlösestrategien, da sich die Schülerinnen und Schüler hierbei vieles selbst erarbeiten müssen.

Neben all diesen pädagogisch und fachdidaktisch wertvollen Gründen Fraktale in dieser Form in den Mathematikunterricht einzubinden kommt der Spaß an der Mathematik keineswegs zu kurz. Ganz im Gegenteil helfen die Sinnhaftigkeit, die verschiedenen Sozialformen und der Computer sogar essentiell dabei diese Lerninhalte positiv zu empfinden. Genau das macht Fraktale im Mathematikunterricht meiner Ansicht nach so einzigartig. Sie vermitteln Faszination, die schlussendlich dazu führt mit Freude den Problemen auf den Zahn zu fühlen und dies mit Hilfe verschiedenster Methoden, Programme und Sozialformen, wobei die sonst als so unangenehm empfundene Mathematik eine nicht zu unterschätzenden Rolle spielt.

Ich hoffe inständig, dass ich die Leserinnen und Leser dieser Arbeit überzeugen konnte und diese oder ähnliche Beispiele und Inhalte es früher oder später endlich in den Lehrplan oder zumindest in den Mathematikunterricht schaffen.

10 Anhang

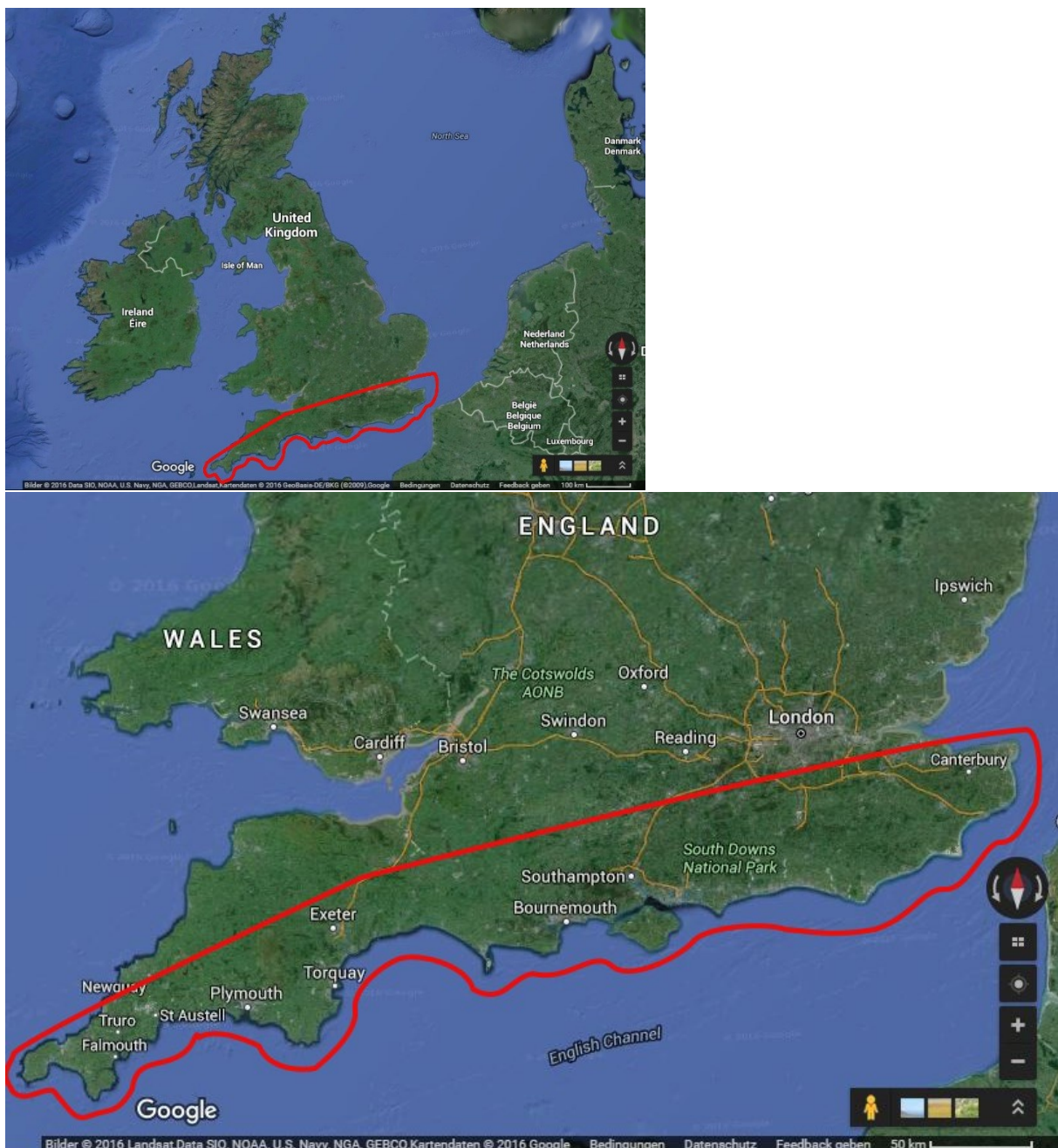
Die Länge der Küstenlinie Großbritanniens

Nimm die unten in der Karte angegebene Länge in den Zirkel und schlage diese entlang der Küstenlinie innerhalb des markierten Bereichs ab! Zähle anschließend, wie oft du diesen Streckenabschnitt abgeschlagen hast, und multipliziere die Anzahl mit der angegebenen Länge in (Kilo-)Metern! Solltest du nicht die gesamte Karte sehen, rechne deine Küstenlänge auf die Gesamtlänge der Küstenlinie mit Hilfe der Minikarte hoch, indem du wiederum mit dem Zirkel arbeitest! Wie lange ist die gemessene Küstenlinie ungefähr? Trage deine Ergebnisse in die Tabelle auf der Tafel ein!



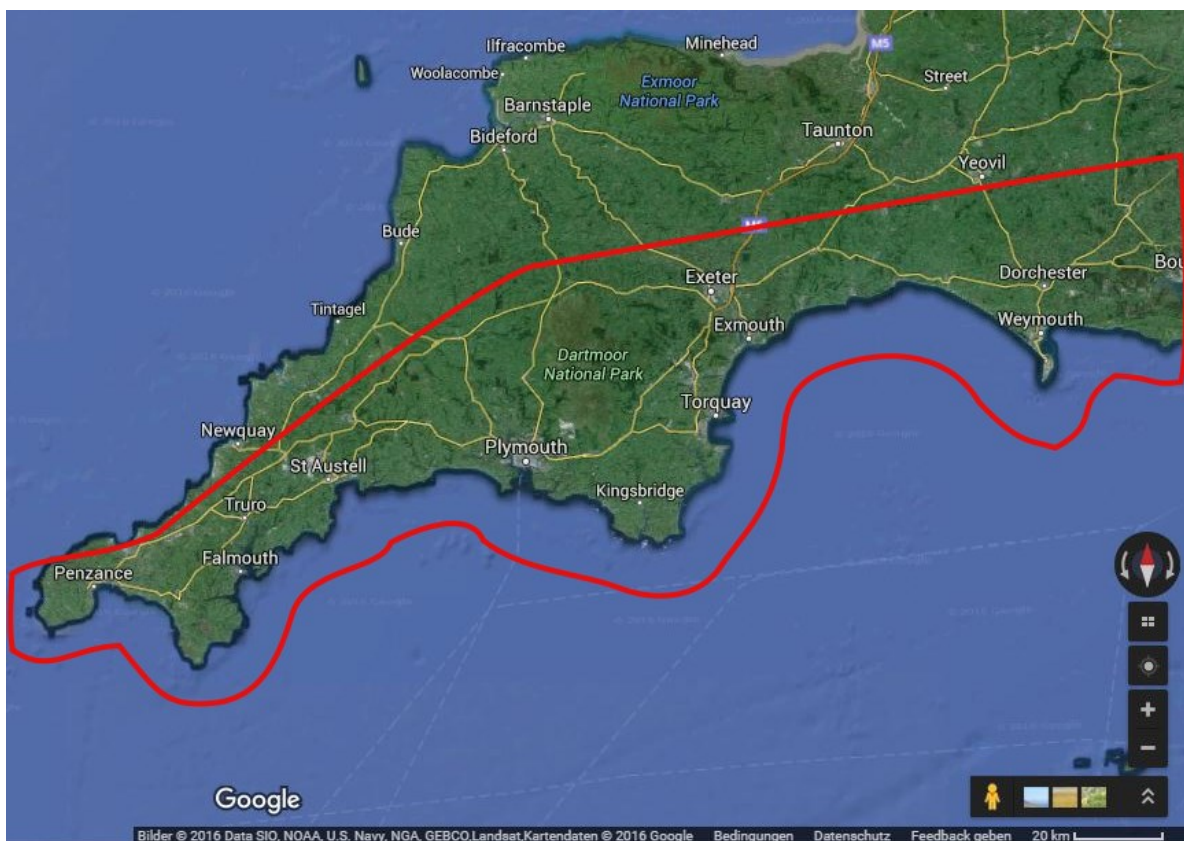
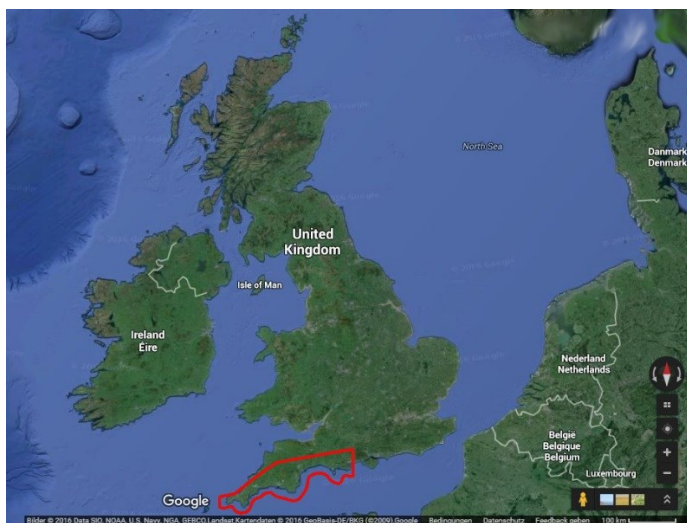
Die Länge der Küstenlinie Großbritanniens

Nimm die unten in der Karte angegebene Länge in den Zirkel und schlage diese entlang der Küstenlinie innerhalb des markierten Bereichs ab! Zähle anschließend, wie oft du diesen Streckenabschnitt abgeschlagen hast, und multipliziere die Anzahl mit der angegebenen Länge in (Kilo-)Metern! Solltest du nicht die gesamte Karte sehen, rechne deine Küstenlänge auf die Gesamtlänge der Küstenlinie mit Hilfe der Minikarte hoch, indem du wiederum mit dem Zirkel arbeitest! Wie lange ist die gemessene Küstenlinie ungefähr? Trage deine Ergebnisse in die Tabelle auf der Tafel ein!



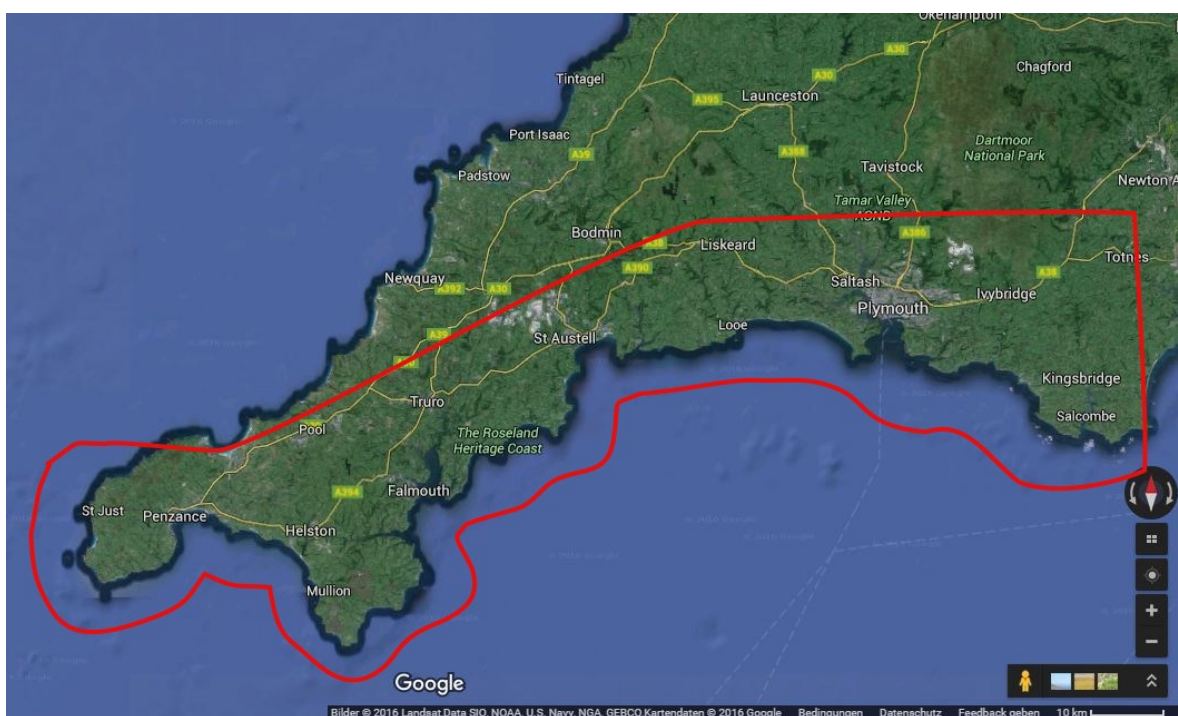
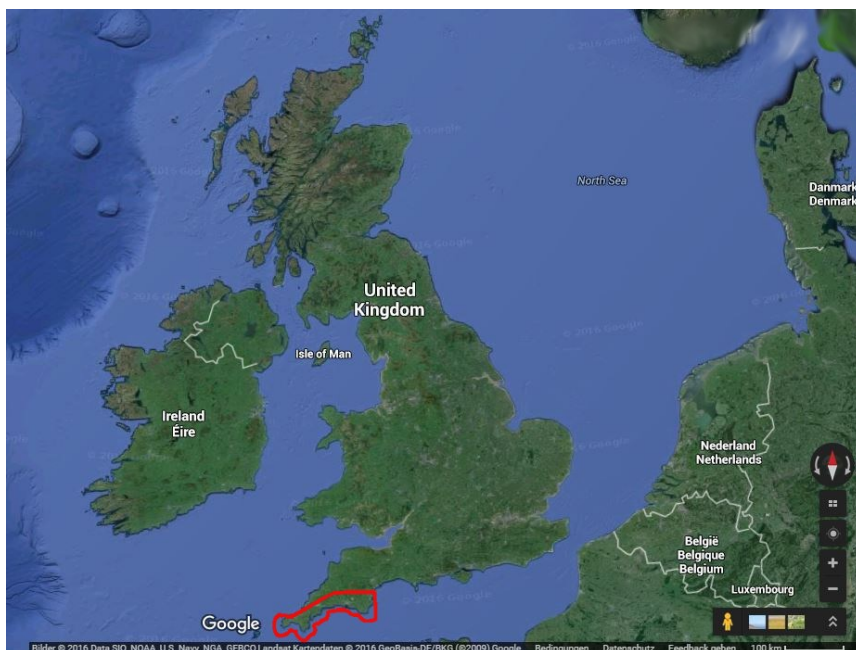
Die Länge der Küstenlinie Großbritanniens

Nimm die unten in der Karte angegebene Länge in den Zirkel und schlage diese entlang der Küstenlinie innerhalb des markierten Bereichs ab! Zähle anschließend, wie oft du diesen Streckenabschnitt abgeschlagen hast, und multipliziere die Anzahl mit der angegebenen Länge in (Kilo-)Metern! Solltest du nicht die gesamte Karte sehen, rechne deine Küstenlänge auf die Gesamtlänge der Küstenlinie mit Hilfe der Minikarte hoch, indem du wiederum mit dem Zirkel arbeitest! Wie lange ist die gemessene Küstenlinie ungefähr? Trage deine Ergebnisse in die Tabelle auf der Tafel ein!



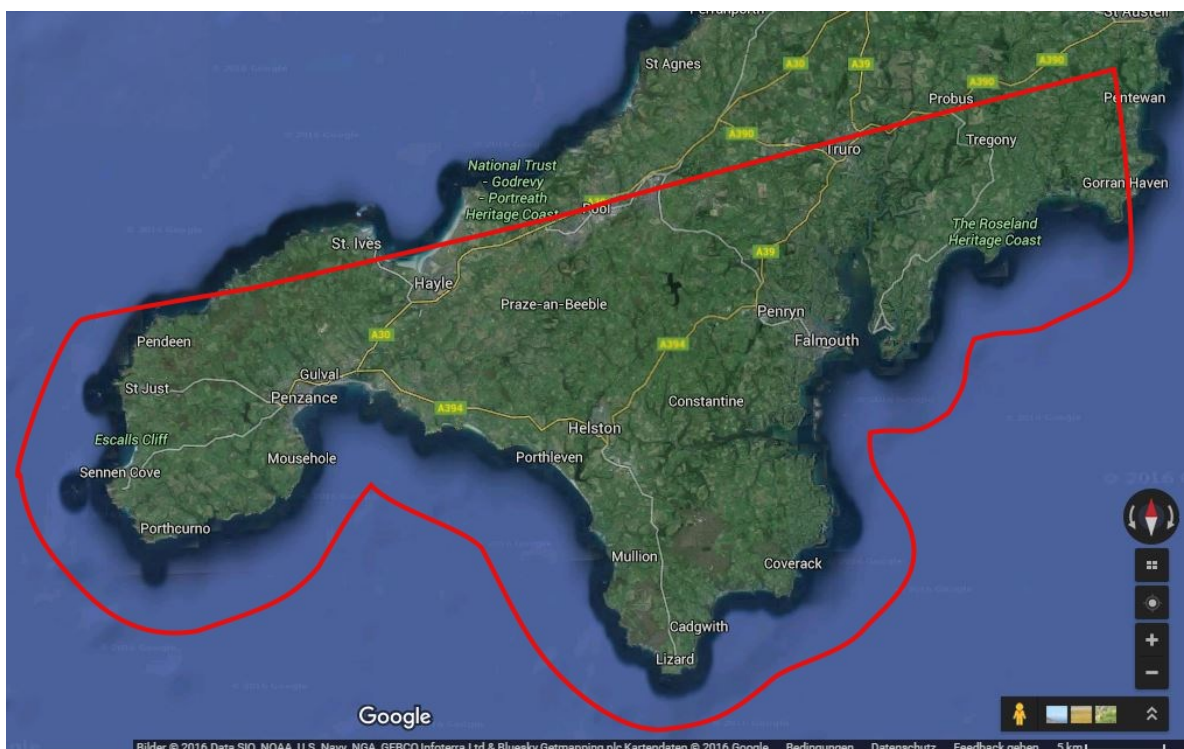
Die Länge der Küstenlinie Großbritanniens

Nimm die unten in der Karte angegebene Länge in den Zirkel und schlage diese entlang der Küstenlinie innerhalb des markierten Bereichs ab! Zähle anschließend, wie oft du diesen Streckenabschnitt abgeschlagen hast, und multipliziere die Anzahl mit der angegebenen Länge in (Kilo-)Metern! Solltest du nicht die gesamte Karte sehen, rechne deine Küstenlänge auf die Gesamtlänge der Küstenlinie mit Hilfe der Minikarte hoch, indem du wiederum mit dem Zirkel arbeitest! Wie lange ist die gemessene Küstenlinie ungefähr? Trage deine Ergebnisse in die Tabelle auf der Tafel ein!



Die Länge der Küstenlinie Großbritanniens

Nimm die unten in der Karte angegebene Länge in den Zirkel und schlage diese entlang der Küstenlinie innerhalb des markierten Bereichs ab! Zähle anschließend, wie oft du diesen Streckenabschnitt abgeschlagen hast, und multipliziere die Anzahl mit der angegebenen Länge in (Kilo-)Metern! Solltest du nicht die gesamte Karte sehen, rechne deine Küstenlänge auf die Gesamtlänge der Küstenlinie mit Hilfe der Minikarte hoch, indem du wiederum mit dem Zirkel arbeitest! Wie lange ist die gemessene Küstenlinie ungefähr? Trage deine Ergebnisse in die Tabelle auf der Tafel ein!



Die Länge der Küstenlinie Großbritanniens

Nimm die unten in der Karte angegebene Länge in den Zirkel und schlage diese entlang der Küstenlinie innerhalb des markierten Bereichs ab! Zähle anschließend, wie oft du diesen Streckenabschnitt abgeschlagen hast, und multipliziere die Anzahl mit der angegebenen Länge in (Kilo-)Metern! Solltest du nicht die gesamte Karte sehen, rechne deine Küstenlänge auf die Gesamtlänge der Küstenlinie mit Hilfe der Minikarte hoch, indem du wiederum mit dem Zirkel arbeitest! Wie lange ist die gemessene Küstenlinie ungefähr? Trage deine Ergebnisse in die Tabelle auf der Tafel ein!



Die Länge der Küstenlinie Großbritanniens

Nimm die unten in der Karte angegebene Länge in den Zirkel und schlage diese entlang der Küstenlinie innerhalb des markierten Bereichs ab! Zähle anschließend, wie oft du diesen Streckenabschnitt abgeschlagen hast, und multipliziere die Anzahl mit der angegebenen Länge in (Kilo-)Metern! Solltest du nicht die gesamte Karte sehen, rechne deine Küstenlänge auf die Gesamtlänge der Küstenlinie mit Hilfe der Minikarte hoch, indem du wiederum mit dem Zirkel arbeitest! Wie lange ist die gemessene Küstenlinie ungefähr? Trage deine Ergebnisse in die Tabelle auf der Tafel ein!



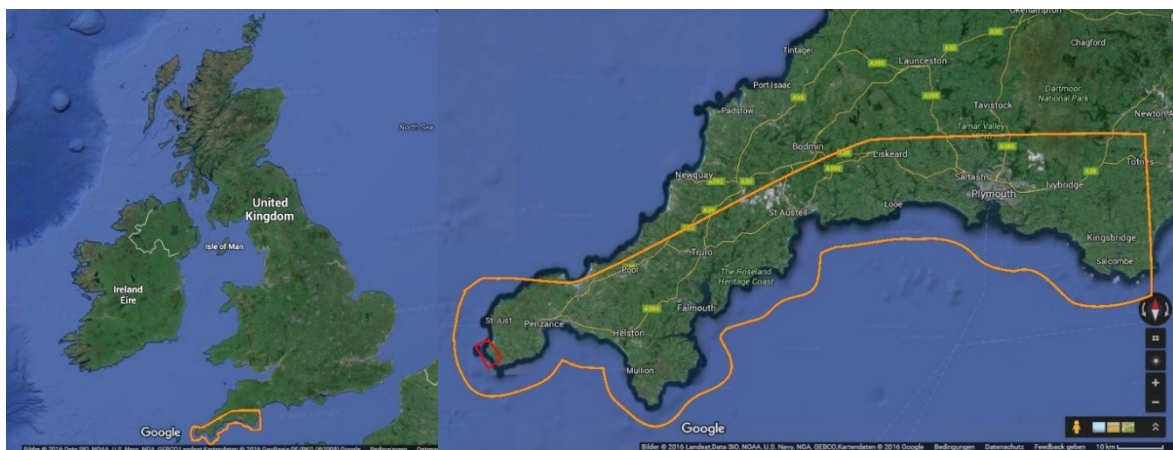
Die Länge der Küstenlinie Großbritanniens

Nimm die unten in der Karte angegebene Länge in den Zirkel und schlage diese entlang der Küstenlinie innerhalb des markierten Bereichs ab! Zähle anschließend, wie oft du diesen Streckenabschnitt abgeschlagen hast, und multipliziere die Anzahl mit der angegebenen Länge in (Kilo-)Metern! Solltest du nicht die gesamte Karte sehen, rechne deine Küstenlänge auf die Gesamtlänge der Küstenlinie mit Hilfe der Minikarte hoch, indem du wiederum mit dem Zirkel arbeitest! Wie lange ist die gemessene Küstenlinie ungefähr? Trage deine Ergebnisse in die Tabelle auf der Tafel ein!



Die Länge der Küstenlinie Großbritanniens

Nimm die unten in der Karte angegebene Länge in den Zirkel und schlage diese entlang der Küstenlinie innerhalb des markierten Bereichs ab! Zähle anschließend, wie oft du diesen Streckenabschnitt abgeschlagen hast, und multipliziere die Anzahl mit der angegebenen Länge in (Kilo-)Metern! Solltest du nicht die gesamte Karte sehen, rechne deine Küstenlänge auf die Gesamtlänge der Küstenlinie mit Hilfe der Minikarte hoch, indem du wiederum mit dem Zirkel arbeitest! Wie lange ist die gemessene Küstenlinie ungefähr? Trage deine Ergebnisse in die Tabelle auf der Tafel ein!

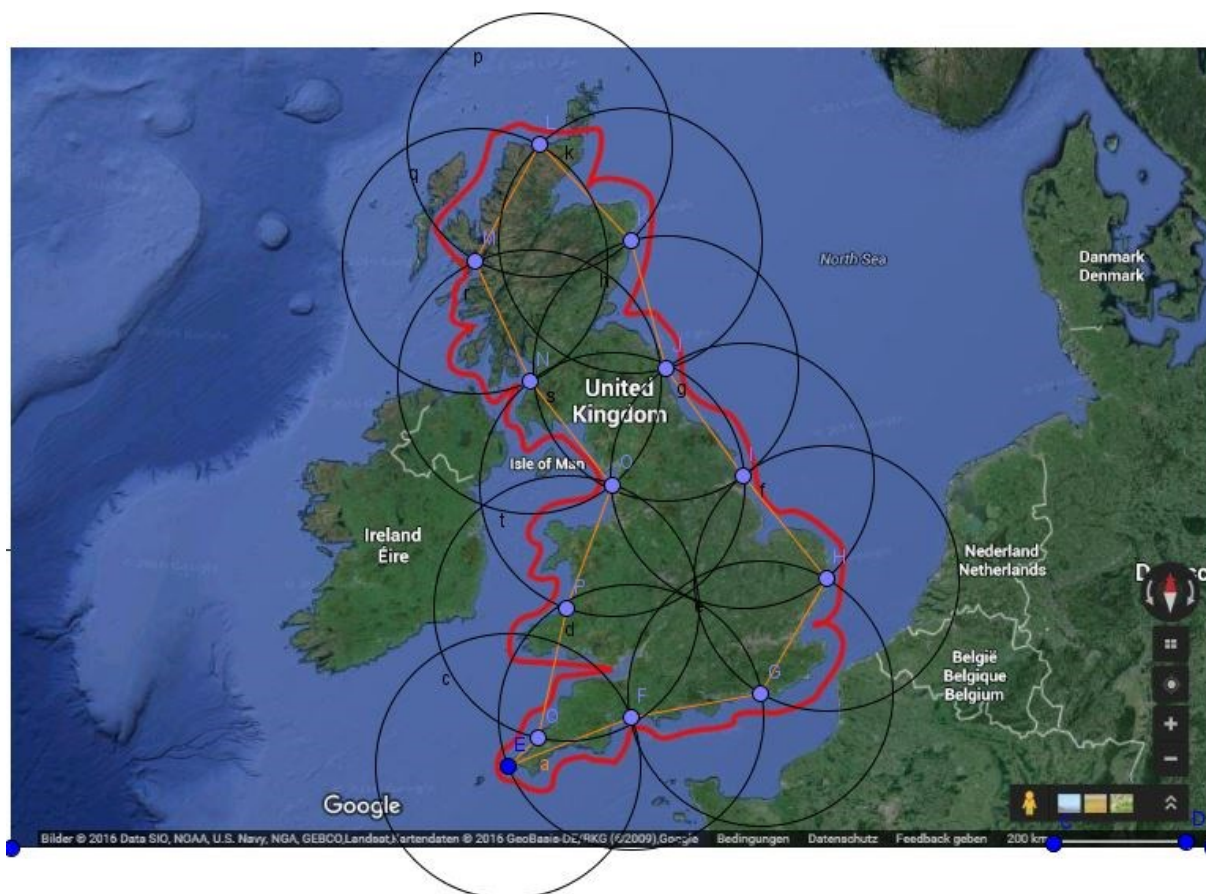


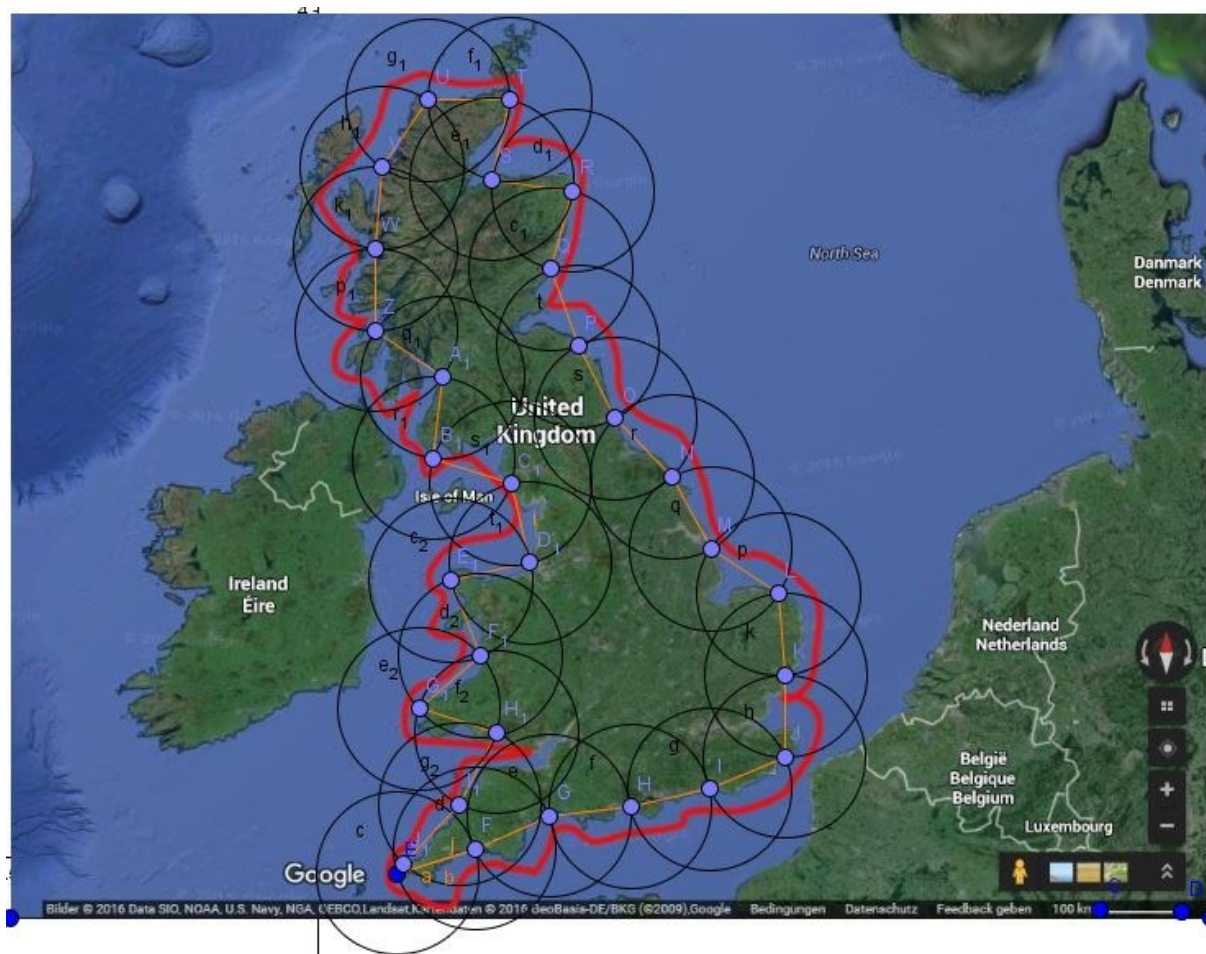
Die Länge der Küstenlinie Großbritanniens (Extremfälle)















Literaturverzeichnis

BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren“: Volksschule Grundstufe I + II*. Graz: Leykam.

Campbell, Neil A., Reece, Jane B. et al. (2009). *Biologie* (8.Auflage). München: Pearson.

Castellanos, Enís & Sacristán, Ana Isabel. (2005). A Fractal Geometry Logo-based microworld for Graphic Design graduate students. In *Plenary lectures and sessions*. Eurologo 2005, (23-32). Warsaw.

Codetta Raiteri, Adalberto. (2005). *An action reasearch on line to introduce fractals in the teaching an learning of mathematics from primary to secondary school*. Präsentation der CIEAEM 57.

Codetta Raiteri, Adalberto & Cambini, Renza. (2004). Fractals as a didactic material. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 14, (160-167). G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy).

Falconer, Kenneth J. (1993). *Fraktale Geometrie. Mathematische Grundlagen und Anwendungen. Aus dem Englischen übersetzt von Jens Meyer*. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum, Akademischer Verlag

Förster, Frank. (1997). Anwenden, Mathematisieren, Modellbilden. In Tietze, Uwe-Peter, Klika, Manfred & Wolpers, Hans. *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II* (Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis). Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH

Götz, Stefan & Reichel, Hans-Christian (Hrsg.). (2010). *Mathematik 6*. Wien: öbv

Götz, Stefan & Reichel, Hans-Christian. (1990). Fraktale Dimensionen - Über das Titelbild des Oberstufenlehrbuches Reichel-Müller-Laub. In *Didaktik-Reihe*. Heft 18. (S. 124-142). Wien: ÖMG

Haenisch, Hans. (1991). Schools change slower than churches. In Richard Gross, *Pädagogik*, 43, 5, (27-31). Stanford University.

Halling, Horst; Möller, Rolf. (1995). *Mathematik fürs Auge. Eine Einführung in die Welt der Fraktale*. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum, Akademischer Verlag

Hohenwarter, Hannes. (2012). *Fraktale: Nicht alle Brüche brauchen einen Gips*.

Hohenwarter, Hannes. (2007). *Fraktale im computergestützten Unterricht*. Diplomarbeit der Universität Wien

Malle, Günther, Koth, Maria, Woschitz, Helge, Malle, Sonja, Salzer, Bernhard & Ulovec, Andreas. (2014). *Mathematik verstehen 6*. Wien: öbv

Mandelbrot, Benoit B. (1987). *Die fraktale Geometrie der Natur*. Basel; Boston: Birkhäuser.

Oldenburg, Reinhard. (2011). Some thoughts on mathematics in the workplace and in school. *For the Learning of Mathematics* 31, 1(March, 2011), (28-30). Edmonton, Alberta, Canada: FLM Publishing Association.

Schauer, Helmut. (1985). *Einfach LOGO: Grundlagen des Programmierens in LOGO*. Wien: Jugend & Volk

Schauer, Helmut. (1988). *LOGO: Jenseits der Turtle*. Wien: Springer Verlag

Schroeder, Manfred. (1994). *Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit: Notizen aus dem Paradies der Unendlichkeit*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Steiner, Gerald F. & Novak, Johann. (2005). *Mathe Master 6: Mathematik für die 6. Klasse AHS*. Wien: Reniets Verlag

Turner, Martin J. (1998). *Modelling nature with fractals*. Millennium Mathematics Project, University of Cambridge.

Vanek, Vladimir. (2012). Fractal Geometry at Secondary Schools. In Martin Billich (Hrsg.), *Mathematica IV*, (183-189). Ruzomberok: Verbum.

Internetquellen

Berufsbildende Schulen. *Downloads*, 2015. Verfügbar unter <http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/de/dlcollection.asp> [18.12.2015]

Bundesministerium für Bildung und Frauen. *Lehrpläne der AHS-Oberstufe*, 2004. Verfügbar unter https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_oberstufe.html [30.11.2015]

Bundesministerium für Bildung und Frauen. *Lehrplan Mathematik*, 2004. Verfügbar unter https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2 [09.12.2015]

Bundesministerium für Bildung und Frauen. *Lehrplan Physik*, 2004. Verfügbar unter https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_10_11862.pdf?4dzgm2 [18.12.2015]

Bundesministerium für Bildung und Frauen. *Lehrplan des Wahlpflichtfaches Mathematik*, 2004. Verfügbar unter https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_29_11884.pdf?4dzgm2 [09.12.2015]

Bundesministerium für Bildung und Frauen. *Lehrplan des Wahlpflichtfaches Darstellende Geometrie*, 2004. Verfügbar unter https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_33_11888.pdf?4dzgm2 [09.12.2015]

Google.at. *Suchergebnis zu „Fläche Großbritannien“*. Verfügbar unter <https://www.google.at/search?client=opera&q=fläche+großbritannien&sourceid=opera&ie=UTF-8&oe=UTF-8> [14.03.2016]

HTL-Inovativ. *Lehrpläne*, 2015. Verfügbar unter http://www.htl.at/htlat/lehrplaene.html#anchor_search [18.12.2015]

The International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching (CIEAEM). Verfügbar unter <http://www.cieaem.org> [30.11.2015]

Wegner, Tim. The Fractint Development Team WWW pages. Verfügbar unter <http://www.fractint.org> [01.12.2015]

Wikipedia. Die freie Enzyklopädie. *Großbritannien (Insel)*. Verfügbar unter [https://de.wikipedia.org/wiki/Großbritannien_\(Insel\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Großbritannien_(Insel)) [14.03.2016]

Wikipedia. Die freie Enzyklopädie. *Königreich Großbritannien*. Verfügbar unter https://de.wikipedia.org/wiki/Königreich_Großbritannien [14.03.2016]

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 4: Götz, Stefan & Reichel, Hans-Christian. (1990). Fraktale Dimensionen - Über das Titelbild des Oberstufenlehrbuches Reichel-Müller-Laub. In *Didaktik-Reihe*. Heft 18. (S. 129). Wien: ÖMG; verändert durch die Verfasserin

Abbildungen 6 bis 12: Google Maps (2016). Verfügbar unter <https://www.google.at/maps/@54.5730683,0.6373409,1077216m/data=!3m1!1e3> [14.03.2016]; verändert durch die Verfasserin

Abbildung 15: Wikipedia Commons. *File:Porifera body structures 01.png*. Verfügbar unter https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Porifera_body_structures_01.png [26.03.2016]; verändert durch die Verfasserin

Abbildung 17: Wikipedia Commons. *File:Menger-Schwamm-Reihe.jpg*. Verfügbar unter <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Menger-Schwamm-Reihe.jpg> [26.03.2016]

Abbildungen des Anhangs: Google Maps (2016). Verfügbar unter <https://www.google.at/maps/@54.5730683,0.6373409,1077216m/data=!3m1!1e3> [14.03.2016] und <https://www.google.at/maps/@54.5730683,-0.6373409,5.99z> [23.03.2016]; verändert durch die Verfasserin

Alle weiteren Abbildungen wurden von der Verfasserin selbst gemacht.

Ich habe mich bemüht sämtliche InhaberInnen der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.