DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Sprache und Mathematik – Textschwierigkeit bei den Typ-2-Aufgaben der zRP Mathematik“

verfasst von / submitted by

Caroline Atschreiter

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 190 406 313
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Geschichte, Sozialkunde, Polit. Bildung
Betreut von / Supervisor:	Univ.-Prof. Dr. Hans Humenberger

Abstract

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit dem im Zusammenhang mit der neuen zentralen Reifeprüfung im Fach Mathematik häufig zu vernehmenden Vorwurf, dass die Mathematikaufgaben besonders textlastig und sprachlich komplex wären. Dazu werden zuerst in einem allgemeinen Teil die verschiedenen Facetten des Themas Sprache und Mathematik zusammengefasst und die Merkmale und Herausforderungen der mathematischen Fachsprache im Unterricht und die Rolle des Textverständnisses beim Lösen von Textaufgaben behandelt. Durch das Entwickeln einer Methode, die die Bewertung der Textschwierigkeit mathematischer Textaufgaben ermöglichen soll, wird schließlich untersucht ob und welche sprachlichen Herausforderungen den Schülerinnen und Schülern bei den Typ-2-Aufgaben begegnen und inwiefern daher eine besondere Berücksichtigung des Faktors Sprache im Mathematikunterricht vonnöten ist.

The linguistic complexity of the tasks of the standardized final exams in mathematics are often criticized by the media or by frustrated pupils or teachers. This diploma thesis attends to these accusations and deals with the topic of language in mathematics. It discusses the characteristics of mathematical language in school, its difficulties and possible challenges for the students and especially focusses on text understanding with regard to text-based tasks. Depending on the theory of this first part of the thesis, a method is developed in order to evaluate the level of difficulty of the four text-based tasks of the final exams of May 2015 (*"Typ-2-Aufgaben"*). This method will be used to locate and analyse the linguistic problems within the mathematics exam. Furthermore it will be discussed whether the issue of language in mathematics should be included into the mathematic lessons more frequently than is done at the moment.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Beim Lösen komplexerer Textaufgaben fällt auf, dass viele Schülerinnen und Schüler, aber auch Studierende, häufig Probleme mit den Formulierungen der Aufgabentexte und Fragestellungen haben. So auch bei den Aufgaben der neuen zentralen schriftlichen Reifeprüfung im Fach Mathematik. Das betrifft sowohl die „kürzeren“ Typ-1-Aufgaben, bei denen vor allem raffinierte Formulierungen und sprachliche „Fallen“ Schwierigkeiten bereiten, als auch die Typ-2-Aufgaben, die teilweise mit sehr viel Text und für das Lösen irrelevanten Zusatzinformationen aufwarten.

In dieser Diplomarbeit soll versucht werden zu bestimmen, ob die von manchen als „kompliziert formuliert“ oder „schwer verständlich“ empfundenen Aufgaben, wirklich ein höheres Textverständnis, eine erhöhte Lesekompetenz von den Maturantinnen und Maturanten erfordern.
Dazu soll zuerst die Bedeutung der Sprache im Mathematikunterricht thematisiert werden, die Rolle der Fachsprache im Unterricht, sowie mögliche Schwierigkeiten und Chancen für das Mathematiklernen, die sich auf sprachlicher Ebene ergeben können. Daran anschließend soll ein allgemeiner Blick auf die „Sprache der Mathematik“ geworfen werden, die Funktionen der mathematischen Fachsprache, sowie ihre Charakteristika im Bereich des Fachwortschatzes, der Symbole und Formalismen und der Syntax und Semantik erläutert werden.
Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich, an das vorherige Kapiel anschließend, mit einem speziellen Aspekt von Sprache und Mathematikunterricht: dem Textverstehen. Nach einer kurzen Übersicht über für den Unterricht relevante mathematische Textsorten und die Rolle mathematischer Fachtexte im Unterricht wird auf den Spezialfall der „Textaufgabe“ näher eingegangen werden. Dazu sollen Zielsetzung und Aufgabe von Textbeispielen in der Schule erläutert werden und schließlich Kriterien für Lesbarkeit, Verständlichkeit und Textschwierigkeit derartiger Aufaben untersucht werden, sowie Methoden zur Erhebung der Schwierigkeit eines Textes vorgestellt werden.
Schlussendlich sollen die im vorigen Kapitel erlangten Erkenntnisse auf die Aufgaben

der zentralen schriftlichen Reifeprüfung angewandt werden. Bei der im Jahr 2015 erstmals österreichweit durchgeführten Zentralmatura in Mathematik erfolgt eine Unterteilung der Klausur in zwei Teile mit jeweils verschiedenen Aufgabentypen, wobei die Aufgaben des „Typs 2", der die Vernetzung verschiedener mathematischer Kompetenzen erfordern soll, umfangreiche Textaufgaben darstellen. Diese „Typ-2-Aufgaben" sollen unter dem Blickpunkt des Textverständnisses betrachtet werden. Textkomplexität und -schwierigkeit der Maturaaufgaben sollen mit der im vorigen Kapitel vorgestellten Methode zur Bestimmung der Textschwierigkeit analysiert werden. Dadurch soll ein Eindruck von der sprachlichen Komplexität der Aufgaben erlangt werden, wodurch wiederum Rückschlüsse auf die nötigen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler im Bereich des Textverständnisses im Mathematikunterricht gezogen werden können.

1 Sprache und Mathematik(unterricht)

1.1 Die Rolle der Sprache im Mathematikunterricht

„Muss ich jetzt auch noch Sprache unterrichten?“ [LEISEN 2005]

So betitelt Josef Leisen einen Aufsatz zum Thema Sprache und Fachunterricht aus der Sicht des Physikunterrichts. Er beantwortet diese Frage mit einem klaren Nein, denn Physikunterricht sei keine Deutsch-Stunde. Allerdings relativiert sich dieses Nein bereits im nächsten Absatz und die Schlussfolgerungen seiner plakativen Frage lassen sich auch auf den Mathematikunterricht übertragen: Am Thema Sprache kommt man nicht vorbei.[LEISEN 2005, vgl. 4] Ein Großteil des Unterrichts erfolgt durch verbale Kommunikation und auch im Mathematikunterricht stellt Sprache das wohl wichtigste Instrument für Kommunikation und Vermittlung, für das Verstehen und das Anregen mathematischer Denkprozesse dar. Insofern sollte man meinen, dass sprachliche Fähigkeiten auch den Erfolg des Mathematik-Lernens beeinflussen. Dennoch werden die mathematischen Fähigkeiten gerne von den sprachlichen getrennt, man „ist eben eher gut in Sprachen“ oder man ist „eher der mathematische Typ“. [RÖSCH/PAETSCH 2011, vgl. 58-59]

Die sprachlichen Fähigkeiten von den mathematischen zu trennen ist allerdings problematisch, denn Sprachkompetenz, Leseverständnis und Textproduktion werden auch im Mathematikunterricht von den Schülerinnen und Schülern gefordert und sollten demnach auch gefördert werden.

1.1.1 Sprachliche Anforderungen an die Lernenden

Ein Blick auf den Unterricht macht deutlich: Die Lernenden sind stets mit verschiedensten Formen von Sprache konfrontiert: Beim Lesen von Sachtexten im Mathematikbuch, beim Lösen von Rechenaufgaben und Argumentieren von Lösungswegen, beim Interpretieren von Graphiken oder beim Verwenden von Formeln, beim Verfassen einer

vorwissenschaftlichen Arbeit im Fach Mathematik und der Präsentation ihrer Inhalte – Schülerinnen und Schüler müssen über fachliche Inhalte kommunizieren können, Sachtexte verstehen, Aufgabenstellungen deuten und erfolgreich bearbeiten können und selbst Fachtexte verfassen.
Dorfmayr unterscheidet folgende Elemente der schulmathematischen Fachsprache, die von den Lernenden beherrscht werden sollen:

- Fachbegriffe
- Phraseologie und typische Formulierungen
- Symbolische Elemente
- Tabellen und grafische Darstellungen
- Arbeitsanweisungen, wie z.B. „Untersuchen Sie ...“, „Begründen Sie ...“

[DORFMAYR 2012, vgl. 19]

Sprache wird im Mathematikunterricht also auf mehrfache Weise verwendet, man kann drei (miteinander verschränkte) Funktionen abgrenzen: Sprache als Mittel zur *Kommunikation*, als *Trägerin mathematischer Bedeutung* und als *Lerninhalt*. [STAMPE 1984, vgl. 95f] Die Rolle der Sprache für die Kommunikation im Unterricht ist offensichtlich, in ihrer Funktion als Bedeutungsträgerin ist die Sprache äußerst wesentlich für die Begriffsbildung und das mathematische Verständnis, während Fachsprache als Lerninhalt wohl oft vordergründig für Lernende und manchmal auch Lehrende erscheint.
Bei zentralen Prüfungen etwa wird eine Fülle von Fachbegriffen als Grundwissen vorausgesetzt und im Unterricht werden zahllose Fremdwörter und Bezeichnungen erwähnt und definiert, die in der Folge kaum oder auch nie wieder vorkommen. [DORFMAYR 2012, vgl. 19f] Im Mathematikunterricht müssen also wie im Fremdsprachenunterricht neue „Vokabeln“ gelernt werden. Im Unterschied zum Sprachunterricht, orientieren sich die Themen, in deren Zusammenhang die neuen Wörter auftauchen, aber nicht an der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler, sondern bewegen sich oft in abstrakten innermathematischen Gebieten. Wenn dann einmal „Anwendungsorientierung“ hergestellt wird, so entsprechen die „Anwendungen der Mathematik“ ebenfalls oft Bereichen, die sehr weit weg von der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler liegen. Demnach ist es kein Wunder, dass die Motivation, die „Sprache des Fachs“ zu erlernen bei Fremdsprachen und Mathematik sehr unterschiedlich ist: Das Ziel beim Fremdsprachenlernen ist meist die Fähigkeit zur Kommunikation, das des Mathematiklernens häufig nur das Bestehen der nächsten Prüfung. [DORFMAYR 2012, vgl. 19ff] Diese Zugangsweise aufzubrechen stellt meiner Meinung nach eine wichtige Aufgabe des Mathematikunterrichts dar.

1.1.2 Sprachebenen im Mathematikunterricht

Die Anforderungen und Charakteristika der „Sprache“ gestalten sich von Fach zu Fach unterschiedlich, denn jede Disziplin hat eine spezifische „Sprachwelt“ entwickelt und die Einführung in diese Sprachkultur stellt eine wichtige Aufgabe des jeweiligen Fachunterrichts dar. „Sprache“ umfasst dabei weit mehr als nur die gesprochene Form. Josef Leisen identifiziert folgende Sprachformen, die in Fachsprache und Fachtexten im Unterricht auftreten und die *Bildungssprache*[1] spezifizieren:

- gegenständliche Ebene (noverbale Sprache)
- bildliche Ebene (Bildsprache)
- sprachliche Ebene (Verbalsprache)
  - Alltagssprache
  - Unterrichtssprache
  - Fachsprache
- symbolische Ebene (Symbolsprache)
- mathematische Ebene (mathematische Sprache) bzw. Formelsprache[2]

Die Beherrschung dieser „Bildungssprache“ ist notwendig, um am Unterricht sinnvoll teilhaben zu können. Der Abstraktionsgrad steigt dabei von der gegenständlichen Ebene bis hin zur Formelsprache an. [LEISEN 2010, vgl. 46ff] Der hohe Abstraktionsgrad der mathematischen Sprache, die große Zahl spezifischer Sprech- und Schreibweisen, erfordern hohe sprachliche Fähigkeiten und Kenntnisse von den Lernenden, die es sich im Laufe des Unterrichts anzueignen gilt.
Die reine Fachsprache stellt aber nicht das einzige Kommunikationsmittel im Fachunterricht oder gar die Sprache des Fachunterrichts dar. Rose Vogel geht sogar so weit, die Sprache des Unterrichts überhaupt nicht als Fachsprache der jeweiligen Disziplin zu bezeichnen. Sie sieht den Mathematikunterricht als einen „Ort der Begegnung mit Mathematik“ und einen „Ort der mathematischen Sprachentwicklung“ an dem sich aus der

---

[1] Bildungssprache beschreibt

> *“...zum einen die schulbezogenen kognitiven Sprachkenntnisse, die im kognitiv akademischen Bereich gebraucht werden. Zum anderen beschreibt sie aber auch die sogenannten CALP-Fähigkeiten (Cognitive Academic Language Proficiency)[...] die zur Bewältigung der Schriftlichkeit erforderlich sind [...]“* [LEISEN 2010, 48]

[2] Leisen bezieht sich in seiner Darstellung ganz allgemein auf Fachunterricht, er bezeichnet mit „mathematischer Sprache“ die reine Formelsprache. Im Bezug auf den Mathematikunterricht gilt es hier zu differenzieren, denn auch in der „mathematischen Sprache“ gibt es alle von ihm genannten Sprachebenen, die Formelsprache ist nur eine davon.

Sprachwelt der Lernenden heraus der Gebrauch von Fachsprache entwickelt. Die Lehrperson hat dabei die Vermittlungsrolle im Spannungsfeld Alltagssprache - Fachsprache inne. [VOGEL 2006, vgl. 82]

Alltagssprache - Unterrichtssprache - Fachsprache

Betrachtet man die Kommunikation im Unterricht bzw. in Lehr- und Lernsituationen, so kann man drei Sprachformen unterscheiden, deren Grenzen aber häufig verschwimmen:

- Alltagssprache (Umgangssprache, „natürliche Sprache“)
- Unterrichtssprache (Arbeitssprache): Alltagssprache durchsetzt von fachsprachlichen „Versatzstücken“
- Fachsprache

Die Verwendung und Beherrschung der Fachsprache stellt ein wichtiges Ziel des Unterrichts dar, dennoch kann die Verwendung von Fachsprache allein nicht zielführend für das Lernen sein, eine Anknüpfung an die Umgangssprache, die Sprache der Lernenden, ist unumgänglich, denn Schülerinnen und Schüler sind oftmals überfordert mit den speziellen Anforderungen der Fachsprache in Kombination mit neu zu erlernenden Inhalten. Empirisch gewonnene Erkenntnisse zeigen aber, dass Lernende dem Gebrauch der Fachsprache keineswegs vollkommen abgeneigt sind. Oft wird die Fachsprache vor allem für schriftliche Darstellungen von Inhalten verwendet, während in der mündlichen Kommunikation der allgemeine Sprachschatz überwiegt. [SCHREIBER 2006, vgl. 485]
Grundsätzlich ist die Alltagssprache bereits von Begriffen und Bezeichnungen aus der Mathematik durchdrungen (z.B. Produkt, Gerade, Pyramide, Menge...). Die Lernenden besitzen also bereits Vorstellungen zu gewissen Begriffen. Diese Vorkenntnisse aufgreifend muss die Lehrperson versuchen, die Bedeutung der Begriffe in der Mathematik zu verdeutlichen und so in die Fachsprache einzuführen. [FERTL/LITERACY, vgl. 5] Die Verwendung von Umgangssprache im Unterricht ist also insofern förderlich, als auf bereits vorhandene Vorstellungen aufgebaut werden kann. Die mangelnde Exaktheit der Umgangssprache in Kombination mit verschiedenen Bedeutungsvorstellungen kann die Diskussion des Bedeutungsumfangs mathematischer Begriffe befördern. Leisen empfiehlt sogar die Verwendung „vager Begriffe“ im Unterricht, da diese Kommmunikation förmlich erzwingen würden und demnach „lerngemäß“ sind und daher der Fachsprache in ihrer Bedeutung nicht nachgereiht werden sollten. [LEISEN 2010, vgl. 54]

Es stellt sich die Frage, wie viel Fachsprache der Mathematikunterricht überhaupt nötig hat und welche Vorteile sich aus der Verwendung von Fachsprache ergeben, wenn man

denn auch mit „Ersatzwörtern“ aus der Alltagssprache arbeiten könnte.
Abgesehen davon, dass letztendlich nur die Fachsprache den Notwendigkeiten der jeweiligen Fachrichtung genügt, die geforderte Exaktheit erfüllt und auch im Unterricht sich viele Sachverhalte nur sehr umständlich und unzulänglich ohne ihre Verwendung darstellen lassen, so hat Fachsprache auch didaktische Vorteile. Das Neue und Unbekannte an Fremd- und Fachwörtern kann bei den Lernenden erhöhte Aufmerksamkeit erzeugen. Bei Fremdwörtern, die aus der Umgangssprache unbekannt sind, wird den Lernenden unmittelbar klar, dass zum Begriff eine neue Bedeutung aufzubauen ist, bei bereits bekannten Ausdrücken ist den Lernenden oft nicht bewusst, dass es neue Bedeutungszuweisungen zu lernen gibt. Bei aus der Alltagssprache bekannten Lehnwörtern bringen Lernende oftmals irreführendes Vorwissen mit. Dies kann zu störenden Bedeutungsüberlagerungen führen, Maier und Schweiger bezeichnen dies an die Physik angelehnt als *„Bedeutungsinterferenz“*. Diese Interferenzen gilt es im Unterricht offenzulegen und aufzubrechen, um Verständnisschwierigkeiten zu vermeiden. [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 56, 122]

Bei Fachtermini, die in der Alltagssprache nicht vorkommen, muss die Bedeutungsvorstellung erst im Unterricht gebildet werden. Die Lehrkraft kann das „neue Wort“ mit mathematischem Bedeutungsinhalt füllen. Derartige Fachwörter stellen im Unterricht allerdings die Minderheit dar. Ein Großteil der Fachwörter ist bereits aus der Alltagssprache bekannt, gehört teilweise sogar zum Grundwortschatz der Umgangssprache (z.B. Höhe, Dreieck, die Zahlwörter,...) Nur die wenigsten dieser Wörter werden allerdings in Alltag und Fachsprache bedeutungsgleich verwendet. Damit tritt die Bedeutungszuweisung im Mathematikunterricht in Konflikt mit den bereits vorhandenen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler. Die Bedeutungsinterferenzen können dabei von verschiedener Art sein, so können die Bedeutungszuweisungen in der Alltagssprache:

- *weiter bzw. allgemeiner* als in der Fachsprache sein, z.B. „Seite“: bezeichnet in der Mathematik nur Strecken, die n-Ecke begrenzen
- *enger bzw. spezieller* als in der Fachsprache sein, „Viereck“ meint im Alltag z.B. meist nur Rechteck und Quadrat
- einer *anderen Systematik* folgen: Die Verwendung von „Breite-Höhe-Tiefe“ bei Möbeln entspricht nicht der von „Länge-Höhe-Breite“ bei Quadern
- eine vollkommen *andere Bedeutung* haben, z.B. „Ring“, „Betrag“, „Mantel“,...

[MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 120f]
Auch bei zusammengesetzten Begriffen können Bedeutungsinterferenzen entstehen, denn der Sinn zusammengesetzter mathematischer Fachausdrücke ergibt sich häufig nicht aus

der Kombination der umgangssprachlichen Bedeutung der einzelnen Wörter. Das Gegenstück zu einem „rechtwinkligen Dreieck“ ist kein „linkswinkliges Dreieck“, wie Maier und Schweiger in einem Beispiel von Pimm anschaulich darstellen. Weitere Beispiele wären etwa „gewöhnliche Brüche“ oder „ebene Flächen“, Ausdrücke, deren Bedeutung aus der Alltassprache heraus unverständlich ist. [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 121f]

Bei der Verwendung von Fachtermini gilt es also vor allem die Frage der Begriffsbildung und Bedeutungszuweisung zu beachten und das richtige Maß beim Einsatz neuer Fachausdrücke zu finden. Sehr häufig wird im Unterricht und in Lehrtexten eine viel zu große Anzahl von Fachvokabeln verwendet und eingeführt, von denen die meisten danach jedoch nie wieder vorkommen. [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 199]
Maier hält daher folgende Richtlinien für den sinnvollen Einsatz von Fachsprache im Unterricht für notwendig [MAIER 2004, vgl. 162ff]:
Fachtermini sollten nur eingeführt werden, wenn sie

- die Unterrichtssprache wirklich vereinfachen
- eine eindeutige Bedeutungszuweisung gewährleisten
- im weiteren Unterricht wiederverwendbar sind
- keine Synonyme bereits eingeführter Begriffe darstellen

Gleichermaßen sollte auch die Verwendung von Symbolen und Formelsprache auf ein sinnvolles Maß beschränkt werden. So steigt die Wahrscheinlichkeit, dass die Lernenden auch ein Verständnis zum verwendeten Symbol aufbauen können. Um eine Überfrachtung mit Symbolsprache zu vermeiden sollten Symbole also, wo es geht, durch sprachliche Explikation ersetzt werden (z.B. bei Definitionen oder Beweisen).

Im Unterricht gilt es also, die Lernenden nicht durch ein Übermaß an komplexer Fachsprache zu überfordern oder abzuschrecken, aber dennoch in wesentliche Aspekte des Fachvokabulars einzuführen. Um eine sinnvolle Begriffsbildung und die Entwicklung von Verständnis zu gewährleisten, gilt es, die Sprachform zu wählen, die der Situation angemessen ist, und *„in der das fachliche Handeln, Erleben und Verstehen sinnvoll wird.“* [LEISEN 2009, 6] Der didaktische Ort der reinen Fachsprache sollte dabei nicht im Lernprozess selbst sein, sondern erst am Ende des Verstehensprozesses stehen. Denn die reine Fachsprache ist eigentlich nicht kommunikativ ausgerichtet, sie dient eher der Verschriftlichung gewonnener Erkenntnisse. Die Kommunikation hingegen findet in der Unterrichtssprache statt, einer Alltagssprache durchsetzt von fachsprachlichen Versatzstücken. [LEISEN 2010, vgl. 54]

Die „natürliche Sprache“ spielt für das Mathematiklernen eine zentrale Rolle, mehr noch, sie stellt eine Basis für die Symbolsprache der Mathematik dar und liefert einen Zugang zu mathematischem Wissen, der ohne die Verwendung der Alltagssprache nicht, oder nur schwer möglich wäre. [BERGER 2013, vgl. 8-10]
Darauf aufbauend ist aber ein Kennenlernen und Erlernen der spezifischen Fachsprache unerlässlich. Die Besonderheiten der mathematischen Fachsprache stellen dabei häufig Hürden für die Lernenden dar. Diese Spezifika der „Sprache der Mathematik“ sollen im folgenden Kapitel erörtert werden.

1.2 Die mathematische Fachsprache

Betrachtet man das Tafelbild einer Mathematikstunde oder lauscht man einem mathematischen Fachgespräch, so ist unschwer festzustellen, dass sich die Fachsprache der Mathematik von den Fachsprachen anderer Schulfächer und im Besonderen von der Alltagssprache unterscheidet und ihre besonderen Merkmale Schwierigkeiten für die Lernenden darstellen können.
Eine große Barriere, die sich zur Sprache der Mathematik im Unterricht auftut, ist, dass es sich bei der Fachsprache um eine *Sprache der Schriftlichkeit* handelt, während die Schülerinnen und Schüler die *Sprache der Mündlichkeit* gewohnt sind. „Schriftlichkeit“ und „Mündlichkeit“ beschreiben dabei zwei Formen der mündlichen und schriftlichen Kommunikation, die sich durch sprachliche und strukturelle Merkmale unterscheiden. „Mündlichkeit“ meint dabei eine gesprochene und geschriebene Sprache, die *„die Merkmale einer mündlichen Kommunikation trägt, also privat, spontan und situationsgebunden, affektiv und subjektiv gefärbt, [...] weitschweifig, wenig komplex und kaum elaboriert“* [LEISEN 2010, 54] ist. Sprachliche Richtigkeit ist nicht erforderlich und Sprachfehler können mehr oder weniger hingenommen werden. „Schriftlichkeit“ hingegen bezeichnet eine „Sprache der Distanz“; die Kommunizierenden sind einander häufig fremd und räumlich und zeitlich voneinander getrennt. Diese Kommunikationsform ist *„monologisch, öffentlich und reflektiert, knapp, kompakt, komplex und elaboriert. Sie weist eine hohe Informationsdichte auf und erweckt den Eindruck von Objektivität und Endgültigkeit“* [LEISEN 2010, 54]. Sprachfehler können nicht akzeptiert werden.

Die Sprache der Mathematik weist in hohem Maße die Merkmale der Schriftlichkeit auf, unterscheidet sich aber doch auch noch von anderen elaborierten Fachsprachen. Bevor auf ihre Besonderheiten eingegangen wird, soll kurz ihre Funktion erläutert werden.

1.2.1 Funktionen der mathematischen Fachsprache

Grundsätzlich können der Sprache zumindest zwei Grundfunktionen zugeordnet werden, die auch für die Sprache der Mathematik wesentlich sind: Die *kommunikative* und die *kognitive* Funktion. Erstere dient der Verständigung, zweitere dem Erkenntnisgewinn, und zwischen beiden Funktionen besteht eine enge Wechselbeziehung.
Die kognitive Leistung der Sprache ermöglicht Bedeutungszuweisung und den Gewinn neuer Einsichten, ermöglicht das „(Er-)Schaffen von Bedeutungen“. In einem Wort werden verschiedene Eigenschaften des bezeichneten Objekts gebündelt und diesem Wort wird somit eine Bedeutung zugewiesen. In einem kognitiven Prozess wird dadurch also ein Zusammenhang zwischen „Bezeichnendem“ und „Bezeichnetem“ hergestellt. Dies geschieht durch *Verdichtung des Informationstransports durch begriffliche Repräsentation* [MAIER/SCHWEIGER 1999, 18].
Maier und Schweiger nennen in diesem Zusammenhang den mathematischen Begriff der „Gruppe“ als Beispiel: Zahlreiche Informationen und Konzepte werden hier in einem einzigen Wort gebündelt. Der Satz „Die Drehungen um einen festen Punkt bilden eine Gruppe.“ liefert somit eine Fülle an Informationen über die Eigenschaften der Drehungen um einen festen Punkt, realisiert über das Konzept, das dem Begriff „Gruppe“ innewohnt. Durch die Informationsverdichtung wird der Austausch von Informationen und das Durchdringen neuer Wissensgebiete erleichtert und neuer Erkenntnisgewinn ist möglich. [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 17-18]
Für den Austausch und die Verständigung über diese verschiedenen Bedeutungszuweisungen ist schließlich die kommunikative Funktion der Sprache wesentlich. Durch den Austausch verschiedener Bedeutungskonzepte ergibt sich die enge Wechselbeziehung zwischen Kommunikation und Kognition: Kommunikation hat einen verstärkenden Effekt auf die kognitive Funktion. [HUSSMANN 2003, vgl. 61-64], [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 17-18]
Im Sinne dieser Verflechtung kognitiver und kommunikativer Funktion ermöglicht Sprache somit *„nicht nur die Kommunikation mathematischen Wissens, sondern wird zugleich zum Werkzeug des mathematischen Denkens und mathematischer Wissenskonstruktion per se.“* [BERGER 2013, 12]

Die Schöpfung neuer Begriffe geht – gerade in der Mathematik – stark mit dem Ziel zu klassifizieren und zu abstrahieren einher. Daraus ergibt sich eine enorme Informationsverdichtung und die Notwendigkeit einer präzisen Bedeutungszuweisung und einer exakten Abgrenzung der Begriffe, um die komplexen abstrakten Konzepte, über die in

der Mathematik kommuniziert wird, auch sprachlich repräsentieren zu können.
In der Mathematik als „exakter Wissenschaft“ soll also auch die Sprache der Forderung nach Exaktheit und Präzision genügen, was sich zumeist in einer enormen Informationsverdichtung äußert. Stephan Hußmann nennt fünf Intentionen der Verwendung mathematischer Fachsprache. Dabei fällt auf, dass einige dieser Punkte ineinander greifen und einander bedingen. So lassen sich daraus folgende Hauptfunktionen herausfiltern:

1. Verdichtung des Informationstransports durch Entfernen von Bedeutungsüberschüssen der Alltagssprache

2. Strukturierung und Hierarchisierung der Informationen und somit Maximierung der Verständlichkeit mathematischer Argumente

3. Formalisierung, um operativen mechanischen Umgang mit Informationen zu ermöglichen [HUSSMANN 2003, vgl. 61]

Diese Funktionen lassen sich alle dem Ziel der Exaktheit, Eindeutigkeit und Präzision von Aussagen unterordnen. Ob auf dieses Ziel aber auch das Hauptaugenmerk der Sprache des Mathematik*unterrichts* und des Mathematiklernens gelegt werden sollte, ist zu bezweifeln. Dennoch ist es naheliegend, dass der Wunsch nach Präzision und, in gewissem Sinne, einfachstmöglicher Formulierung von Aussagen sich auch in den Charakteristika der mathematischen Fachsprache widerspiegelt, die nun im folgenden Kapitel erarbeitet werden sollen.

1.2.2 Charakteristika der mathematischen Fachsprache

Jede Fachsprache hat ihre Merkmale und typischen Elemente, so auch die „Sprache der Mathematik“. Im Allgemeinen unterscheiden sich Fachsprachen durch ihre Besonderheiten in den Bereichen Phonetik, Morphologie, Syntax, Semantik, Pragmatik und Lexikon, [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 15] anderen sprachwissenschaftlichen Theorien folgend, kann man noch Unterschiede in den üblichen Textsorten hinzufügen. [VOGEL 2006, vgl. 82]
Für die mathematische Fachsprache gibt es in den Bereichen Phonologie und Morphologie keine nennenswerten Unterschiede zur Alltagssprache, diese bewegen sich eher in den anderen Bereichen, speziell im Bereich des verwendeten Vokabulars, der Syntax und der Semantik.

Diese bereits auf den ersten Blick wahrnehmbaren Besonderheiten werden in folgender Aussage von Cornelia Niederdrenk-Felgner auf den Punkt gebracht:

> *„Die Mathematik verwendet eine stark formalisierte Fachsprache, die sich sowohl in ihrem Vokabular als auch in ihren grammatikalischen Regeln von der Umgangssprache deutlich unterscheidet.“*
> [NIEDERDRENK-FELGNER 2000, 4]

Man kann mehrere „mathematische Sprachen“ unterscheiden: Innerhalb der *Fachsprache* selbst, wie sie in jeder Wissenschaft existiert, gibt es eine *Symbolsprache*, die das Darstellen von Inhalten in nochmals komprimierterer und strukturierterer Form ermöglicht. Weiters bedient sich gerade der Mathematikunterricht zusätzlich einer *mathematischen Umgangssprache*, der Alltagssprache, durchsetzt mit „mathematischem Vokabuar“. Fach- und Umgangssprache sind dabei nicht immer exakt voneinander zu trennen, sie unterscheiden sich aber prinzipiell in:

- Wortschatz und Grammatik
- Abstraktionsgrad (insbesondere: Verwendung von Symbolen in der Fachsprache)
- Eindeutigkeit von (Wort-)bedeutungen

[BARZEL/EHRET 2009, vgl. 4-5]

Anhand dieser verschiedenen Merkmale und Unterschiede von Alltags- und Fachsprache bietet sich eine Gliederung der Kennzeichen der mathematischen Fachsprache in drei Bereiche an:

1. Verwendung von Fachtermini
2. Verwendung von Symbolen
3. Verwendung einer speziellen „sprachlichen Gestalt“: Grammatik, Syntax und Semantik

[HUSSMANN 2003, vgl. 60], [MAIER 2004, vgl. 154f]

Weiters können außerdem noch die Verwendung von Tabellen und graphischen Darstellungsformen, sowie typische Phrasen, Formulierungen und Arbeitsanweisungen als wesentliche Kennzeichen der (schul-)mathematischen Fachsprache aufgeführt werden. [DORFMAYR 2012, vgl. 19]

Im Folgenden soll nun anhand dieser groben Gliederung auf die speziellen Eigenschaften der mathematischen Fachsprache eingegangen werden.

Mathematische Fachbegriffe

Die mathematischen Fachbegriffe lassen sich anhand ihrer Beziehung zur Alltagssprache grundsätzlich in zwei Gruppen unterteilen:

- Fachwörter, die in der Alltagssprache nicht vorkommen
- Fachwörter, die auch in der Alltagssprache verwendet werden

Gerade zur ersten Gruppe gehören viele Fremdwörter aus der lateinischen oder griechischen Sprache, etwa „addieren“, „Logarithmus“, etc. aber auch neue „Wortschöpfungen“ der deutschen Sprache, wie z.B. „Streckenzug“, denen erst im Zuge ihres mathematischen Kontextes eine Bedeutung zugewiesen wird.
Betrachtet man die zweite Gruppe, so stehen Alltagssprache und mathematische Fachsprache gewissermaßen im Austausch: Einerseits werden Wörter der Fachsprache in den Alltag übernommen (wie z.B. die Maßeinheiten, „Gleichung“, „parallel“,...) , andererseits werden Begriffe aus der Alltagssprache in die Fachsprache aufgenommen (z.B. „Gruppe“, „Körper“, „Ebene“,...). Oft kann die Richtung dieses Austauschs gar nicht mehr bestimmt werden, wie etwa bei Bezeichnungen wie „Seite“, „Strecke“, „Pyramide“, etc. und viele Wörter der Fachsprache gehören ganz selbstverständlich zum „Grundwortschatz des Alltags“, wie z.B. die Zahlwörter, oder Bezeichnungen wie „Kreis“, „Dreieck“.

Diese Fachausdrücke, die auch Teil der Alltagssprach sind, können wiederum in zwei Gruppen unterteilt werden:

- Wörter mit gleicher Verwendung in Alltags- und Fachsprache
- Wörter mit anderer, oder nur ähnlicher Verwendung in Alltags- und Fachsprache

Werden Fachtermini in der Alltagsprache in anderer Bedeutung verwendet als im mathematischen Kontext, so können diese Unterschiede verschiedene Ausprägung haben:
Es kann sich um eine vollkommen andere Bedeutungszuschreibung handeln, wie z.B. beim Begriff „Gruppe“, „Wurzel“, oder „Betrag“. Oder aber, der „Bedeutungsumfang“ unterscheidet sich: Der Begriff kann in der Alltagssprache enger, oder weiter gefasst sein als in der Fachsprache. So wird der Ausdruck „ähnlich“ im Alltag wesentlich allgemeiner verwendet als in der Geometrie. Die Bezeichnung „Viereck“ hingegen umfasst im Sprachgebrauch des Alltags zumeist nur Rechtecke bzw. noch spezieller Quadrate, in der mathematischen Fachsprache hat sie allerdings eine viel weitere Bedeutung.

Oft ist es nicht ausreichend, die Bedeutung eines Fachwortes allein zu kennen, sondern auch der jeweilige Kontext entscheidet über die notwendige Bedeutungszuweisung. Vielfach werden fachspezifische Vokabel und Wörter der Alltagssprache zu zusammengesetzten Fachausdrücken kombiniert, welche dann für ein neues mathematisches Konzept stehen, das in diesem Kontext gedeutet werden muss. Beispiele dafür wären etwa „negativer Exponent“ oder „kleinstes gemeinsames Vielfaches“. [BERGER 2013, vgl. 18-22]
Durch die Verdichtung der begrifflichen Vorstellung mithilfe der Fachsprache ergibt sich eine exakte Bedeutungsfestlegung auf den Fachterminus, vermeintlich frei von häufigen Mehrdeutigkeiten der Alltagssprache. [MAIER 2004, 156-157] Diese äußerst präzise Bedeutungszuweiseung zeichnet das mathematische Fachvokabular besonders aus. Gerade bei Begriffen, die auch in der Alltagssprache vorkommen, kann diese unterschiedliche Exaktheit in der Bedeutungszuweisung jedoch zu Schwierigkeiten für die Lernenden führen, vor allem, wenn sich gewisse Bedeutungsbereiche überschneiden.
Bei Fachtermini, die in der Alltagssprache nicht vorkommen, müssen die dazugehörigen Bedeutungsvorstellungen klarerweise erst im Unterricht gebildet werden. Die Lehrkraft kann das „neue Wort“ mit mathematischem Bedeutungsinhalt füllen.
Anders verhält es sich bei Wörtern, die auch Teil der Alltagssprache sind. Hier gibt es schon „Vorwissen“, Bedeutungsvorstellungen, die aus außerschulischen, alltagssprachlichen Erfahrungen resultieren. Diese Alltagsvorstellungen können zu störenden Bedeutungsüberlagerungen führen, die die Zuschreibung der „mathematischen Bedeutung“ erschweren. Auf diese bereits erwähnten " *„(Bedeutungs-)Interferenz“* wird im Abschnitt 1.1.2 noch konkreter eingegangen werden.

Mathematische Symbolsprache

Während mathematische Fachausdrücke sowohl in der gesprochenen, als auch in der geschriebenen Sprache auftreten, so stellt die Verwendung von Symbolen scheinbar *das* Charakteristikum mathematischer Texte dar. Das geht so weit, dass sogar fremdsprachige mathematische Texte als solche erkennbar sind, wenn sie nur genügend „mathematische Symbole“ enthalten. [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 28]
Wesentliche Inhalte und komplexe Zusammenhänge lassen sich „nonverbal“, durch Formeln und Symbole, oft leichter ausdrücken, als das durch versprachlichte Formulierungen möglich wäre. Maier nennt als Beispiel die Beschreibung des Flächeninhalts eines Dreiecks in verbaler und symbolischer Schreibweise:
„Der Flächeninhalt im Dreieck ist gleich halbe Länge einer Seite mal (Länge der) Höhe auf diese Seite.“

verkürzt sich in formaler Schreibweise zu: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ [MAIER 2004, 159]
Interessant ist, dass diese formale Repräsentation des obigen Satzes auch in anderer Form, z.B. als $F = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$, zu erkennen wäre. Ab einem bestimmten Abstraktionsgrad sind also nicht einmal mehr die „Namen" entscheidend, sondern ihre Kombination, die Syntax, enthält die wesentliche Information und Bedeutung. Ein zu häufiges Wechseln der „Namen" kann aber zu Verwirrung führen, insbesondere gibt es in unserem Beispiel Zeichen, die nicht einfach ausgetauscht werden können (z.B. =).

Die verschiedenen mathematischen Symbole lassen sich demnach in unterschiedliche Gruppen einteilen. Zuoberst steht eine Unterscheidung in *Konstanten* und *Variablen.*
Während die Konstanten Symbole sind, denen eine feste Bedeutung zugeordnet ist, so haben die Variablen für sich keine selbstständige Bedeutung. Sie können als „Platzhalter" für die Elemente einer bestimmten Menge oder Klasse betrachtet werden.
Diese Konstanten oder Variablen können entweder einzeln für sich stehen, oder zu komplexen Symbolsystemen kombiniert werden, für die dann spezielle syntaktische und formale, „ästhetische",[3] Regeln und Konventionen gelten. [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 39-41] Die Zeichen, die als mathematische Symbole verwendet werden, entstammen teilweise anderssprachigen Alphabeten, wie z.B. dem Griechischen, oder sie stellen eigenständige Zeichen aus einem „mathematischen Symbolvorrat" dar.
Die zahllosen in der Mathematik verwendeten Symbole nach ihrer Verwendung und Funktion zu ordnen und zu systematisieren stellt sich als schwierig dar. Auch in der einschlägigen Literatur finden sich keine konkreten Versuche einer derartigen Darstellung. Die hier vorgenommene Gliederung der mathematischen Symbole soll versuchen einen Einblick in die verschiedenen Verwendungsweisen und syntaktischen Möglichkeiten der mathematischen Formelsprache zu ermöglichen. Diese Einteilung erhebt aber keinesfalls Anspruch auf Vollständigkeit und auch in der funktionalen Trennung der Symbole ergeben sich einige Überschneidungen.

[3] „ästhetisch" bezieht sich hier auf das „Schriftbild" und meint Konventionen wie z.B., dass bei Termen mit Brüchen Bruchstrich und Rechen- oder Gleichheitszeichen auf der selben Höhe stehen, usw.

Verwendungsweisen mathematischer Symbole

1. Zahlzeichen und Zahlen, z.B: 1; 2; 3;...; 42; 3,1415; etc.
2. Symbole als Stellvertreter
   a) für Zahlen (hier kann man wieder zwischen „Konstanten“, wie z.B. π, oder e und „Variablen“ unterscheiden)[4]
   b) für mathematische Objekte, spezielle „Konzepte“, z.B.: δ, ϵ, ∞, Zahlenmengen: N, R,...
   c) Abkürzungen, z.B. $ln, log, sin, ..., \angle, \square, \triangle, \|, \perp$,...)
3. Operationszeichen und Klammern
   a) Rechenzeichen: z.B. $+, -, \cdot, :, \sqrt{}$ aber auch $\sum, \prod, \int$,...
   b) logische Operatoren: z.B. $\wedge, \vee, \neg, ...$
   c) Klammern: $(,), \{,\}, [,]$
   d) Rechenvorschriften, z.B. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2, \|v\|, \langle a, b\rangle, |v|, v \times w$,...
4. Relationszeichen
   a) $\leq, \geq, \neq, \equiv, \approx$,...
   b) Quantoren und Junktoren: $\Leftrightarrow, \Rightarrow, ..., \forall, \exists, \exists!, ...$
5. Mengenlehre: $\in, \notin, \cup, \cap, \subseteq, \supseteq, ...$
6. zusammengesetze Symbole, z.B. Matrizen oder Vektoren: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Diese Auflistung zeigt die umfassenden Möglichkeiten, die sich durch die mathematische Symbolsprache auftun: Komplexe Konstrukte und Konzepte können durch ein einzelnes Symbol dargestellt werden, die Zusammensetzung von Symbolen zu Termen und formalen Ausdrücken ermöglicht es, komplizierte Sachverhalte durch wenige Zeichen widerspruchsfrei darzustellen. Wiederum wird eine Verdichtung und Präzision der Information ermöglicht, die ein formalisiertes Arbeiten erleichtern soll.
Es zeigt sich aber auch gleich ganz anschaulich, dass die Einheitlichkeit der Verwendung von „sprachneutralen“ Symbolen keinesfalls sprachraumübergreifend gegeben ist.

[4] Hierbei sei auf die große Rolle von Konventionen hingewiesen: So werden griechische Buchstaben zumeist als Platzhalter für Winkel verwendet, während lateinische Kleinbuchstaben als Variablen für Zahlen eingesetzt werden, Großbuchstaben werden oft als Platzhalter für eine bestimmte (physikalische) Größe verwendet, z.B. F für die Kraft, U für die elektrische Spannung etc., weiters werden für die Bezeichnung von Zufallsvariablen Großbuchstaben verwendet

So wird im Deutschen das Komma durch ein „,“ symbolisiert, im englischen Sprachraum hingegen ist ein „.“ als Komma üblich. Oben zeigt sich bei Punkt 1, welche Schwierigkeit sich aus der deutschen Konvention beim Auflisten von Zahlen ergeben kann: Im deutschsprachigen Raum besteht stets die „Gefahr“ der Verwechslung von Komma und trennendem Beistrich. Als Trennungszeichen wird demnach bei Auflistungen meist der Strichpunkt „;“ verwendet. Im Englischen entfällt dies, da „.“ als Komma vom Beistrich leicht unterschieden werden kann.
Einheitlichkeit und Eindeutigkeit sind also auch bei der Symbolsprache nicht immer gegeben und so praktisch die komprimierte Symbolschreibweise für die Mathematik ist, „Sätze“ in Formelsprache sind für Schülerinnen und Schüler zumeist schwieriger zu erfassen, als Sätze in „normaler Sprache“. Es lässt sich nicht sofort feststellen, ob ein Satz richtig oder falsch ist und inhaltliche Bezüge sind oft schwieriger nachzuvollziehen. Aufgrund der Prägnanz und Knappheit einer Aussage in Symbolschreibweise ist jedes Zeichen bedeutsam, bereits die kleinste Veränderung kann der Formel eine ganz andere Bedeutung verleihen. [FERTL/LITERACY, vgl. 8]
Auch die „Übersetzung“ in Formelsprache birgt ihre Hürden: Oft kommt es vor, dass die Syntax der gesprochenen und der symbolischen Sprache voneinander abweichen, die symbolische Darstellung also nicht immer eins-zu-eins verbalisiert werden kann. Als Beispiel sei die Formulierung *„das Quadrat des Quotienten von a und b“* genannt. In Symbolschreibweise: $(\frac{a}{b})^2$. Der Ausdruck „das Quadrat“ steht in der verbalen Form zu Beginn, sein Pendant in der Symbolschreibweise jedoch am Ende des Ausdrucks. [BERGER 2013, vgl. 18-19]

Maier fasst die Schwierigkeiten für Lernende in einem Beitrag im Journal für Mathematikdidaktik sehr treffend zusammen:

> *“Es sind offenbar gerade der sehr dichte Bedeutungsgehalt der Symbole und der Generalisierungsgrad der Variablen, die manche Schüler nicht angemessen zu erfassen vermögen und sie daran hindern, die Bedeutung von Symbolen bzw. Symbolsystemen zu entschlüsseln, geschweige denn selbst sinnvolle symbolhaltige Texte zu erstellen. ARZARELLO (1998) fand, dass die Schüler die Algebra als formales Werkzeug auffassen, mit Variablenausdrücken keine semantischen Vorstellungen verbinden und sie nicht in spezifischen Situationen konkret als Methode des Nachweises und der Verallgemeinerung benutzen. Sie geraten in große Schwierigkeiten, wenn sie Symbole verwenden sollen, um allgemeine Lösungen auszudrücken: zum Entdecken, Generalisieren und Be-*

> *weisen allgemeiner Gesetze hinter numerischen Beziehungen. Diese müssen sich natürlich verstärken, wenn Symbole in sehr umfangreichem Maße verwendet oder Texte nahezu ausschließlich in Symbolsprache verfasst werden.“*
> [MAIER 2004, 159]

Es gibt also zahlreiche Schwierigkeiten mit der Symbolsprache für die Lernenden, im Mathematikunterricht begegnet man aber von Anfang an symbolischen Schreibweisen. Je größer der Lernfortschritt, umso mehr Raum nimmt die Formelschreibweise ein. Um die Vorteile dieser formalen Ausdrucksweise nutzen zu können ist es also unbedingt notwendig, den Umgang mit der Symbolsprache ausreichend zu erlernen und zu üben, die Symbole lesen und deuten zu können und diverse Konventionen zu kennen. Neben dem formalen Operieren mit Symbolausdrücken muss also stets auch ein Übersetzungsprozess zwischen Symbolsprache und Fach- bzw. Umgangssprache stattfinden. Es gilt zu verhindern, dass das „Verstehen“ von Formelsprache nur auf das Abarbeiten bestimmter Strategien und Regeln hinausläuft und kein Begreifen der Sinnzusammenhänge stattfindet. Die verschiedenen Symbole und ihre Einbettung in syntaktische Strukturen müssen gedeutet, richtig miteinander in Beziehung gesetzt und die dahinterliegenden mathematischen Konzepte und Prozesse müssen herausgelesen und zugeordnet werden.

Sprachliche Gestalt - Grammatik, Syntax und Semantik

Die Besonderheiten einer Fachsprache beschränken sich nicht nur auf die Verwendung eines spezifischen Fachvokabulars, sondern beinhalten auch einen gewissen sprachlichen „Stil“, also Wendungen, linguistische Konstruktionen und Strukturen, die sich von der Alltagssprache unterscheiden. Um die Sprache der Mathematik zu beherrschen, reicht die Kenntnis der Bedeutung der Fachwörter und Symbole allein nicht aus. Man muss zusätzlich die Zusammenhänge zwischen Symbolen, Fachwörtern, Sätzen und Satzelementen deuten können, um so das dahinterliegende mathematische Konzept zu erkennen. Dazu ist es wichtig, mit den von der Alltagsprache abweichenden Spezifika in Grammatik, Syntax und Semantik umgehen zu können, den speziellen „Stil“ der mathematischen Fachsprache zu beherrschen. [RÖSCH/PAETSCH 2011, vgl. 57]
Hier sollen nun die auffälligsten Spezifika der mathematischen Sprache zusammengefasst werden. Für eine detailliertere Erläuterung sei auf [MAIER/SCHWEIGER 1999] verwiesen.

Grammatikalische und syntaktische Besonderheiten[5]

Sowohl in der geschriebenen als auch in der gesprochenen mathematischen Sprache treten häufig Phrasen und Konstruktionen auf, die in der Alltagssprache unüblich sind, ja oft als schwierig und „sperrig“ erachtet werden. Dazu gehören:

- „Nominalstil“: häufige Verwendung substantivierter Verben sowie Nomina im allgemeinen
- „unpersönliche Sprachformen“: Passiv-, Reflexiv- und Infinitivkonstruktionen
- häufige Bildung von Komposita, ungewohnte Prä- und Suffixbildungen
- vermehrte Verwendung von Zustands- und Modalverben
- weniger Glied- und Attributsätze, stattdessen erweiterte Nominalphrasen/Satzglieder und komplexe Attribute
- Konstruktionen mit „logischem Subjekt“: z.B.: „Es gibt eine Zahl, für die gilt...“. Das Wort „es“ steht im Nominativ, ist demnach formal Subjekt des Satzes, das eigentliche logische Subjekt folgt aber erst danach und steht im Akkusativ („eine Zahl“)

[RÖSCH/PAETSCH 2011, vgl. 57-60], [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 30], [BERGER 2013, vgl. 19], [LEISEN 2010, vgl. 52], [FERTL/LITERACY, vgl. 7]

Während im Bereich der Verben und Substantive also vor allem die „Deverbalisierung der Sprache“, das vermehrte Auftreten von Substantiven und Nominalkonstruktionen und die Bevorzugung ganz spezieller Verbformen auffällig ist, so spielen laut [AUSTIN/HOWSON 1979] Adjektive in der mathematischen Sprache eher eine geringe Rolle. Vergleicht man diese Aussage jedoch mit dem Kapitel zum Thema Adjektive bei [MAIER/SCHWEIGER 1999], so dürfte dies aber nur für die explizierend verwendeten Adjektive[6] gelten. Denn als Bezeichnung von Eigenschaften mathematischer Objekte (z.B. kommutativ, differenzierbar, rational,...), skalenbildend[7] oder spezifizierend[8] verwendet, haben Adjektive große Bedeutung für die mathematische Sprache.

---

[5] Die Begriffe „Grammatik“ und „Syntax“ sind hier folgendermaßen zu verstehen:
Grammatik einerseits als Sprachtheorie, also die Auffassungen, ob die Sprache eine Struktur hat, wie diese aussehen könnte und wie man sie wissenschaftliche beschreiben kann, sowie Grammatik als Beschreibung der Strukturen der Sprache selbst, Syntax hingegen als Befassung mit der Struktur bzw. Ordnung in Sätzen. [ERNST 2011, vgl. 60, 123]

[6] Explizierende Adjektive drücken etwas aus, das eigentlich in der Bedeutung des Nomens bereits enthalten ist, z.B.: „der weite Ozean“. [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 31]

[7] Adjektive, die im Zusammenhang mit messbaren Eigenschaften verwendet werden können, wie z.B. groß, dünn, teuer, ...

[8] spezifizierende Adjektive konkretisieren eine „Teilklasse“, so ist eine „gerade Zahl“ etwa eine spezielle natürliche Zahl

Der Stil der mathematischen Fachsprache verwendet demnach viele sprachliche Konstruktionen, die in der Alltagssprache nur selten vorkommen. Diese Sprachmittel erzeugen eine sprachliche Distanz für Jugendliche, die Nutzung und Verständnis der Fachsprache sowie das Arbeiten mit mathematischen Texten erschwert. Entscheidend ist, dass die Schwierigkeiten hier nicht primär von einzelnen Fachwörtern ausgehen, sondern der „Jargon“, das Zusammenspiel mit anderen Wörtern, Präpositionen und Objekten entscheidend für das Verständnis ist. [RINCKE 2010, vgl. 49] Ungewohntes tritt in der mathematischen Fachsprache aber nicht nur in Bezug auf Wort- und Satzbildung auf, Unterschiede zwischen Fachsprache und Alltagssprache werden noch deutlicher, wenn man die Semantik, die Bedeutungszuweisung in der Sprache, betrachtet.

Semantische Besonderheiten[9]

Bedeutungszuschreibung und Bedeutungsumfang

Die semantischen Besonderheiten begründen sich darin, dass in der Mathematik prinzipiell mit Aussagen bzw. Aussagenverknüpfungen gearbeitet wird, denen auf Basis eines Zweiwertigkeitsprinzips ein Wahrheitswert zugeordnet wird. Die Entscheidung des Wahrheitswerts von Aussagen erfordert zwei Dinge:

- die *exakte* Festlegung der beteiligten Elemente
- ein geordnetes Verfahren der Argumentation

In der mathematischen Sprache müssen demnach alle Elemente eindeutig bestimmt werden („Determinierung“). Dies geschieht durch Definitionen, welche extensiv und explizit angelegt sind: Was nicht ausdrücklich genannt wird, kann nicht als gegeben angenommen werden – ein wesentlicher Unterschied zur Alltagssprache. Die genaue Bestimmung der beteiligten Elemente umfasst auch die Bildung von Strukturen von Substantiven (Klassen, Hierarchien), wie z.B. die „Hierarchie der Vierecke“. [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 15-30].

Diese Hierarchien, die, wegen der damit verbundenen „Vererbung“ von Eigenschaften, ganz wesentlich für die Bestimmung des Bedeutungsumfangs sind, stehen oft im Wider-

[9] Semantik, die Lehre von der Bedeutung sprachlicher Zeichen. Man kann in „Wortsemantik“ (Bedeutung einzelner Wörter) und „Satzsemantik“ (Untersuchung der Bedeutungszuschreibung aus dem Kontext) untergliedern [ERNST 2011, vgl. 188, 197, 211]

spruch zu der Wahrnehmung, die man aus dem Alltag gewohnt ist: In der Umgangssprache werden Wörter „kontrastiv" verwendet: Eine Ellipse ist kein Kreis, ein Rechteck kein Quadrat. In der Mathematik aber ist ein Kreis ein Spezialfall einer Ellipse, so wie das Quadrat ein spezielles Rechteck ist. [SCHWEIGER 2010, vgl. 17]
Die Bedeutungszuschreibung, der Umfang der mathematischen Begriffe, wird also viel strenger gehandhabt als in der natürlichen Sprache. Das betrifft auch die Auslegung grammatikalischer Konstruktionen, die Verwendung von Präpositionen, Konjunktionen und Artikeln. Grammatik und Syntax sind in der mathematischen Fachsprache weniger flexibel, als in der natürlichen Sprache. [AUSTIN/HOWSON 1979, vgl. 171] Sprachliche Elemente müssen also aus der jeweiligen Situation heraus interpretiert werden, außerdem kann eine Veränderung ihrer Position im Satz zu einer Veränderung der Bedeutung des Satzes führen. Diese logischen Zusammenhänge zwischen Sätzen und Satzelementen müssen in der Fachsprache erkannt und interpretiert werden, damit die korrekte mathematische Bedeutung abgeleitet werden kann. [BERGER 2013, vgl.18-19] Die Unterschiede zur Alltagssprache werden im Folgenden an der Verwendung von Konjunktionen, Quantoren, Implikationen und der Negation verdeutlicht.

Konjunktionen und Junktoren

Der Einsatz von Konjunktionen erzeugt in der Alltagssprache oftmals eine andere Satzbedeutung als in der mathematischen Fachsprache, wo für „und" bzw. „oder" auch die Bedeutungszuschreibung aus der Aussagenlogik eine Rolle spielt. Hier seien nun einige Beispiele genannt, wo diese Differenzen zu Fehlerquellen werden können:

Die Konjunktion *„und"* kann sowohl als logischer Operator als auch als additive Konjunktion verwendet werden. In der deutschen Sprache wird die additive Konjunktion „und" meist zur Verbindung und Verkürzung von Sätzen verwendet. Dies erzeugt aber nicht immer korrekte Aussagen im Sinne der Mathematik:
Die Sätze *„Die Zahl 2 ist gerade."* sowie *„Die Zahl 2 ist eine Primzahl."* können mit „und" zu *„Die Zahl 2 ist gerade und eine Primzahl."* verbunden werden, man erhält dadurch auch eine mathematisch korrekte Aussage.
Anders verhält sich dies z.B. bei *„Es gibt Dreiecke mit einem rechten Winkel."* und *„Es gibt Dreiecke mit einem stupfen Winkel."*. Die Konstruktion *„Es gibt Dreiecke mit einem rechten Winkel und mit einem stumpfen Winkel."* ist sprachlich korrekt, mathematisch aber falsch, denn in einem Dreieck kann es nicht gleichzeit einen rechten sowie eine stumpfen Winkel geben.

Bei derartigen Sätzen, wie *„Es gibt rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke.“*, tritt zusätzlich das Phänomen auf, dass „und“ in Kombination mit „es gibt“ häufig im Sinne einer Allaussage gelesen wird, was zu Verwirrung bei der Bestimmung des Wahrheitsgehalts eines Satzes führen kann. [SCHWEIGER 2005, vgl. 43-44]
Außerdem stellt die logische Konjunktion „und“ ($\wedge$) in der Mathematik einen kommutativen Operator dar ($A \wedge B = B \wedge A$) während „und“ in der deutschen Sprache jedoch oft die Bedeutung von „und dann“ hat, also eine zeitliche Abfolge beinhaltet: „Ich kitzelte ihn und er lachte.“ ist nicht gleichbedeutend mit „Er lachte und ich kitzelte ihn.“ [MALLE 2009, vgl. 14]

Bei der disjunktiven Konjunktion *„oder“* gilt es zuallererst den ausschließlichen („entweder ... oder“) und den nicht-ausschließlichen Gebrauch zu unterscheiden. Die logische Konjunktion „oder“ wird dabei nicht als ausschließliches Oder verwendet, im Sprachgebrauch verhält es sich allerdings genau anders.
Der Satz *„Es gibt Dreiecke mit einem rechten oder einem stumpfen Winkel“* ist mathematisch gesehen - also nicht als exklusives Oder - demnach korrekt. Aus der Alltagssprache heraus ergibt sich aber beinahe automatisch die Leseart *„Es gibt entweder Dreiecke mit einem rechten oder einem stumpfen Winkel.“*, was aber eine unzutreffende mathematische Aussage ergibt. [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 23, 34ff]

Ähnliche Unterschiede in der Bedeutungszuweisung gibt es auch bei anderen Typen von Konjunktionen. Erwähnt seien hier noch die finalen (*damit, um zu*) und die kausalen Konjunktionen (*weil, da*), da diese wesentlich für die Formulierung mathematischer Begründungen sind. Bei der Verwendung von *„weil“* wird zusätzlich außerdem häufig eine Implikation ausgedrückt, welche beim Übergang zwischen Alltags- und Fachsprache oft eine Problemquelle darstellt.
Durch konditionale Konjunktionen (*wenn, falls, sofern, dann und nur dann wenn, genau dann wenn, nur wenn*) werden in der Fachsprache verschiedene logische Zusammenhänge ausgedrückt, damit werden Bedeutungsunterschiede ausgedrückt, die aus der Alltagssprache heraus nicht als solche wahrgenommen werden. Maier und Schweiger verdeutlichen dies an folgendem Beispiel:
1. Wenn es morgen regnet, dann gehe ich ins Kino.
2. Nur wenn es morgen regnet, gehe ich ins Kino.
3. Genau dann, wenn es morgen regnet, gehe ich ins Kino.
Betrachtet man also die Aussagen $\alpha :=$ *Es regnet morgen* und $\beta :=$ *Ich gehe ins Kino*, so ergibt sich aus den obigen Sätzen folgende logische Gestalt:

1. $\alpha \Rightarrow \beta$
2. $\beta \Rightarrow \alpha$
3. $\alpha \Leftrightarrow \beta$

Sehr häufig wird die in 1. durch *„wenn … dann"* ausgedrückte Implikation in der Alltagssprache als Äquivalenz wahrgenommen, ein für die Mathematik fataler Fehler. Auch der in 3. enthaltene Umkehrschluss wird aus den Gewohnheiten der Alltagssprache heraus gerne vergessen. [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl.36f]
Die strenge Deutung von Konjunktionen im Sinne der Logik im Vergleich zu ihrer Verwendung in der Alltagssprache kann also im Unterricht vielfach zu Schwierigkeiten führen.

Quantoren
Quantoren spielen für das Festlegen des Geltungsbereichs einer Aussage eine wichtige Rolle in der Sprache der Mathematik. Die dabei wichtigsten Quantoren sind der Existenz- und der Allquantor mit ihren Enstprechungen in Symbolschreibweise $\exists$ und $\forall$. Aber auch Indefinitpronomen (z.B.: „einige", „kein(e)", „jede", „alle",...) und Adverbien (z.B.: „überall", „mindestens ein", „ höchstens ein", ...) repräsentieren Quantoren. Außerdem können Quantoren auch über Artikel, das Passiv oder bestimmte Formulierungen (z.B. „für alle" oder „es gibt ein") auftreten. Bei der Bedeutungszuschreibung gibt es wieder einige Unterschiede zwischen Alltags- und Fachsprache, wie folgende Beispiele zeigen:[10]

„alle" und „einige"
Die Sätze „Alle Bälle sind blau." und „Einige Bälle sind blau." werden im alltäglichen Sprachgebrauch als unvereinbar verstanden. In der Mathematik bedeutet „einige" nämlich „einige, möglicherweise alle", in der Alltagssprache hingegen „einige, nicht alle".

Artikel
Bestimmte Artikel werden in der Fachsprache häufig generisch verwendet, das heißt es wird eine Allaussage signalisiert. Bsp.: „*Die* Ellipse ist ein Kegelschnitt." ist gleichbedeutend mit „*Alle* Ellipsen sind Kegelschnitte".
Unbestimmte Artikel, im Speziellen *„ein"*, hat im Gegensatz zur Umgangssprache stets

[10] Die folgenden Beispiele basieren allesamt auf den Ausführungen von Maier und Schweiger [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 33ff, 52], bzw. Schweiger [SCHWEIGER 2005, vgl. 41-44] und Malle [MALLE 2009, vgl. 14]

die Bedeutung „mindestens ein“. Im Alltag wird „Herr Meier hat eine blonde Tochter.“ wohl so verstanden, dass seine anderen Töchter – falls er welche hat – nicht blond sind. Der Satz „Die Zahl 20 besitzt einen geraden Teiler.“ hingegen bedeutet nicht, dass 20 nur einen einzigen geraden Teiler hat.

„es gibt“ als Allaussage

Wie bereits im Abschnitt zu den Konjunktionen erwähnt, können Aussagen wie „Es gibt rote und grüne Äpfel.“ in der Mathematik als Allaussagen interpretiert werden, während die Alltagssprache die Option auf z.B. gelbe Äpfel offen lässt.

„für alle ... existiert“ und „es existiert ... für alle“

Die Reihenfolge von Quantoren beeinflusst die Bedeutung einer Aussage in der Fachsprache enorm. Insofern können Satzglieder nicht wie in der deutschen Sprache eigentlich erlaubt frei vertauscht werden, ohne die Bedeutung zu ändern. Dies wird an folgendem Beispiel deutlich: Die Sätze *„Für alle Kinder gibt es ein Geschenk.“* und *„Es gibt ein Geschenk für alle Kinder.“* sind zwar syntaktisch gleichwertig, semantisch heißt das eine aber, dass jedes Kind sein eigenes Geschenk bekommt, das andere jedoch, dass sich die Kinder ein Geschenk teilen müssen. Bei derart plakativen Beispielsätzen wird der Unterschied schnell deutlich, bei der Formulierung komplizierter Definitionen geht dieser Unterschied aber oftmals verloren und führt zu fachsprachlichen Fehlern.

Passiv und Quantoren

Prinzipiell hat ein Satz nach seiner Transformation ins Passiv gleiche Bedeutung wie zuvor (Vergleiche: „Der Löwe frisst den Mann.“ und „Der Mann wird vom Löwen gefressen.“) In Verbindung mit Quantoren kann sich die Bedeutung einer Aussage aber verändern, wenn diese ins Passiv gestellt wird, denn bei der Passivtransformation treten oftmal Quantoren explizit zu Tage, die zuvor nur implizit vorhanden waren. Maier und Schweiger verwenden zur Demonstration folgendes Beispiel:

1. Biber bauen Dämme.

2. Dämme werden von Bibern gebaut.

Satz 1 bedeutet „Alle Biber bauen Dämme.“ und Satz 2 „Alle Dämme werden von Bibern gebaut.“, diese Sätze sind aber nicht bedeutungsgleich! Die Bedeutung kann nur behalten werden, wenn man Wörter einbaut, die Quantoren blockieren. In unserem Beispiel würde das für Satz 2 „Dämme werden *auch* von Bibern gebaut.“ ergeben, eine Aussage, die gleichbedeutend mit Satz 1 wäre.

Passivformulierungen werden in der mathematischen Sprache äußerst häufig verwendet. Das liegt einerseits daran, weil sie erlauben, das handelnde Subjekt im Satz wegzulassen, wenn es für den Inhalt der Aussage nicht relevant ist. Außerdem gibt die Verwendung des Passivs einer Aussage den Anschein einer verbindlichen Norm, von Allgemeingültigkeit. Die korrekte Verwendung und die richtige Deutung von Passiv-Konstruktionen ist also besonders wichtig für das Verständnis der Fachsprache.

Negation

Auch bei der Veneinung von Sätzen bzw. Aussagen ergeben sich Unterschiede zwischen der Negation im alltagssprachlichen und im mathematischen Sinn. Die Aufforderung „Verneine den Satz...!“ kann stets verschieden interpretiert werden. In der deutschen Sprache hat man die Möglichkeit die Negation zu den einzelnen Satzgliedern wandern zu lassen. Stets ist die Aufgabe „Verneine den Satz“ dadurch sprachlich gesehen erfüllt. Betrachtet man den Satz *„Die Gerade schneidet den Kreis.“*, so ergeben sich syntaktisch also folgende Möglichkeiten der Verneinung:
1.: Die Gerade schneidet den Kreis nicht. – korrekte Verneinung im mathematischen Sinn
2.: Nicht die Gerade schneidet den Kreis. (sondern das Dreieck schneidet den Kreis)
3.: Die Gerade schneidet nicht den Kreis. (sondern sie schneidet das Quadrat)
Satz 1 würde im mathematischen Sinne die Negation von „Die Gerade schneidet den Kreis“ darstellen. Aber auch 2. und 3. sind syntaktisch korrekt, durch das geänderte Platzieren der Verneinung werden aber verschiedene semantische Ergebnisse erzielt. Die Verneinung lässt also syntaktisch viele Möglichkeiten offen, im mathematischen Sinn hat aber zumeist nur eine dieser Möglichkeiten den gewünschten Effekt. [SCHWEIGER 2005, vgl. 42] [FERTL/LITERACY, vgl. 7]

Besonders deutlich werden die verschiedenen Bedeutungen bei der Verneinung von Sätzen in denen Quantoren vorkommen: Betrachtet man den Satz *„Alle Kugeln sind rot.“*, so können folgende Verneinungen konstruiert werden:
1. „Nicht alle Kugeln sind rot.”
2. „Keine Kugel ist rot.“
3. „Alle Kugeln sind nicht rot.“
Mathematisch gesehen stellt Satz 1 die korrekte Verneinung dar, denn Ausgangssatz und Verneinung haben entgegengesetzten Wahrheitswert und beschreiben zusammen alle möglichen Zustände (nur rote Kugeln – ein paar rote Kugeln – keine roten Kugeln).

Satz 2 und 3 erfüllen dieses Kriterium nicht, denn die Möglichkeit, dass nur ein paar Kugeln rot sind, wird nicht abgebildet. Allgemein gilt, dass bei der Negation der Allquantor stets zum Existenzquantor wird, dies ist in der Umgangssprache nicht immer der Fall. Gerade im Dialekt wird die Aussage des ersten Satzes oft gleichgesetzt mit der Formulierung des dritten Satzes, hier spielt dann v.a. auch die Betonung eine Rolle. („*Alle* Kugeln sind *nicht* rot.“) [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 53]

Die *doppelte Verneinung*, die im Alltag in vielen Sprachen einer Verneinung entspricht, bedeutet in der Mathematik hingegen eine Bejahung.

Größenbezeichnungen
Die Wörter „größer“ bzw. „kleiner“ werden in der Mathematik im Bezug auf Zahlen metaphorisch verwendet, während sie im Alltag räumliche Ausdehnung beschreiben. Ähnlich verhält es sich mit „liegt über“ bzw. „liegt unter“. Bleibt man an der zugrundeliegenden Alltagsbedeutung hängen, kann die folgende Aufgabe zu Konflikten führen: Welche Zahl ist größer? $\Huge 3$ $\quad$ 5

„Mindestens“ und „höchstens“ meinen in der Mathematik stets „größer oder gleich *einer* unteren Schranke“ bzw. „kleiner oder gleich *einer* oberen Schranke“, beziehen sich also auf eine beliebige untere/obere Schranke, während im Alltag meist die kleinste untere bzw. die größte obere Schranke gemeint ist. Der mathematisch korrekte Satz „Ein Dreieck hat mindestens einen spitzen Winkel.“ kann also als falsch angesehen werden, da Dreiecke stets mehr als einen spitzen Winkel haben. [MALLE 2009, vgl. 14]

Synonyme und Polysemie
An den zuvor erläuterten Beispielen wird deutlich, dass neben der großen Menge an Fachvokabular ein wesentlicher Unterschied zwischen Fach- und Alltagssprache vor allem auf der Ebene der sprachlichen Redundanz und der Eindeutigkeit der Bedeutungszuweisung besteht. [AUSTIN/HOWSON 1979, vgl. 172] Begriffe werden mithilfe mathematischer Verfahren definiert. Man sollte meinen, dass damit alle Fachwörter eindeutig festgelegt wären, dem ist aber nicht so.
Auch in der mathematischen Fachsprache treten *Polysemie (homonymer Wortgebrauch)*, also das Zuordnen unterschiedlicher Bedeutungen zu gleichen Ausdrücken/Symbolen, und *Synonyme*, verschiedene Bezeichnungen für ein- und dieselbe Sache, auf.

Beispiele für Synonyme, die auch im Mathematikunterricht oft vorkommen sind etwa „addieren“ – „dazuzählen“ bzw. „subtrahieren“ – „wegnehmen“, „Rauminhalt“ – „Volumen“ oder „Raute“ – „Rhombus“. Bedeutungsgleich gebraucht werden dabei häufig ein Fremdwort und sein Pendant in der Alltagssprache. Welche Vor- und Nachteile sich daraus ergeben, wird im Abschnitt 1.1.2 näher behandelt.
Beim Auftreten von Polysemie, also Abweichungen von der Eindeutigkeit von Begriffen, ist zumeinst der Kontext ausreichend, um die gewünschte Bedeutung erkennen zu können. Dennoch kann dieses Auftreten von Mehrdeutigkeiten zu Verständnisschwierigkeiten führen. Dies wird etwa bei den scheinbar simplen Begriffen „plus“ und „minus“ bzw. „+“ und „–“ deutlich. Diese können bekannterweise mehr als nur Rechenzeichen darstellen, was vor allem beim Minus zu Verwirrung führen kann: Es kann für die Subtraktion stehen, anzeigen, dass eine Zahl negativ ist und außerdem die Bildung des Inversen zur Addition bezeichnen. Somit gilt $-3 < 0$ aber es kann auch $-a > 0$ eine wahre Aussage darstellen, falls $a < 0$.
Abgesehen davon, dass *„Körper“* ein homonym gebrauchtes Wort ist (vgl. „Körper“ in der Algebra und „Körper“ in der Geometrie), stellen auch viele Bezeichnungen der Elementargeometrie Polysemien dar: So kann z.B. *„Kreis“* sowohl die Kreislinie, als auch die Kreisfläche bezeichnen, ähnlich ist es bei *„Dreieck“* oder etwa beim Begriff „Fläche“, der einerseits ein geometrisches Gebilde bezeichnen kann, andererseits aber auch den Flächeninhalt, eine Zahl. Es lassen sich noch viele ähnliche Beispiele für Mehrdeutigkeiten finden, manchmal fällt die homonyme Verwendung von Begriffen gar nicht auf, teilweise kann sie aber für Verwirrung sorgen. [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 55-59]

Metaphern und Prototypen

Metaphern, also Wörter bzw. Wendungen mit übertragener Bedeutung, kommen in der Sprache der Mathematik sehr häufig vor. Günther Malle geht sogar so weit, in allen Bezeichnungen in der Mathematik Metaphern aus der Alltagssprache zu sehen. Die Ursprungswörter können dabei aus der eigenen Sprache (Wurzel, teilen, ähnlich,...) oder auch aus anderen Sprachen stammen (z.B.: Tangente: tangere – berühren, Hyperbel: hyperballein – übersteigen...), stets sind alle Ausdrücke aus dem Alltag entlehnt. Die ureigenste Eigenschaft von Metaphern ist, dass stets ein gewisser Aspekt der Ursprungsbedeutung auch bei metaphorischer Verwendung erhalten bleibt. So verhält es sich auch bei der Sprache der Mathematik, die Ursprungsbedeutung ist teilweise aber nur mehr schwer wiederzufinden. Dennoch hilft das Zurückgreifen auf bereits bekannte Ausdrücke sehr bei der Begriffserfassung. Wären alle Fachbegriffe rein willkürliche Kunstwörter,

wäre das Lernen einer Fachsprache immens erschwert.
Das Übertragen von Alltagsbedeutungen auf die Mathematik ist also einerseits hilfreich für das Erlernen von Mathematik, andererseits werden so aber auch unerwünschte Bedeutungen übertragen, was zu Verständnisproblemen führen kann.
Ein Beispiel dafür ist das Wort „Diagonale“. Aus dem Alltag heraus versteht man darunter eine „schräge Linie“, eine Vorstellung, die beim Einzeichnen von Diagonalen in Rechtecken noch hilfreich ist. Bei anderen Vielecken versagt die Alltagsvorstellung allerdings und kann zur Fehlerquelle werden. [MALLE 2009, vgl. 10ff]
Für dieses Problem der Bedeutungsübertragung lassen sich noch zahlreiche andere Beispiele finden, falsche Bedeutungsübertragung findet aber nicht nur bei als Fachausdrücken erkennbaren Wörtern statt.
Im Zusammenhang mit Metaphern spielt auch die Bildung von **Prototypen** eine Rolle. Viele Begriffe werden durch Erfahrung an Beispielen erworben, so können auch mathematische Konstrukte an beispielhaften Objekten leichter erfahrbar und begreifbar werden, Prototypen also als Verstehenshilfe dienen. Es besteht aber die Gefahr, dass ein so aufgebautes Begriffsbild nicht zu sehr am Prototyp orientiert ist, dieser also hinderlich für den Begriffsaufbau ist: Viele Lernende erkennen z.B. ein Quadrat nur in spezieller Lage, da sie zu sehr an einer einzigen Vorstellung festhalten. Das Überwinden prototypischer Vorstellungen kann also ein Ziel des Mathematikunterrichts darstellen. [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 60f]

Zusammenfassung

Die in diesem Abschnitt genannten Beispiele sollen verschiedene Kennzeichen der Sprache der Mathematik und die zahlreichen kleinen und großen Unterschiede zur Alltagssprache verdeutlichen und so etwaige sprachliche Problemquellen für Lernende aufzeigen.
Wie bereits in den vorhergehenden Kapiteln erarbeitet, dient die mathematische Sprache dazu, *Sachverhalte inhaltlich eindeutig und nachvollziehbar, sowie argumentativ schlüssig und überzeugend zu kommunizieren* [MAIER 2004, 160]. Die Besonderheiten der mathematischen Sprache in Satzbau und Sprachstil laufen mehr oder weniger darauf hinaus, dies zu ermöglichen.
Die Eigenschaften dieser Fachsprache finden sich natürlich auch in Sachtexten wieder, ein weiteres Feld, in denen Schülerinnen und Schüler mit der Sprache der Mathematik konfrontiert sind. Dem Thema Textverständnis widmet sich das nächste Kapitel.

2 Textverständnis und Mathematikunterricht

Im vorhergehenden Kapitel wurde einerseits analysiert, welche Bedeutung Sprache in der Mathematik und im Speziellen im Mathematikunterricht hat, andererseits, welche Besonderheiten die „Sprache der Mathematik“ ausmachen und welche Schwierigkeiten sich für Lernende dabei ergeben können.
Sprache umfasst nun aber nicht nur Gesprochenes, sondern auch Geschriebenes. Die zuvor über mathematische Sprache erlangten Erkenntnisse können im Grunde genommen auch auf „mathematische Texte“ übertragen werden, dennoch gibt es bei Texten weitere Bereiche, die Beachtung verdienen, vor allem, was den Umgang mit „geschriebener Mathematik“, Lesekompetenz und erforderliches Textverständnis betrifft.

2.1 Lesekompetenz und Textverständnis

Textverständnis scheint im schulischen Umfeld auf den ersten Blick eher für die „sprachlichen Fächer“ von Bedeutung zu sein, Studien zeigen jedoch die Wichtigkeit von Textverständnis auch in „nichtsprachlichen Fächern“ wie dem Mathematikunterricht.
[DUARTE/GOGOLIN/KAISER 2011, vgl. 38]

2.1.1 Definitionsversuch

Was genau macht jetzt die „Lesekompetenz“ und das „Textverständnis“ im Mathematikunterricht aus? Was bedeuten diese vielbemühten Begriffe überhaupt?
Josef Leisen erläutert dies auf Basis der Auffassung der PISA-Studie. Der Lesebegriff ist hier als „Reading Literacy“ fächerübergreifend zu verstehen und Lesekompetenz wird als *„grundlegende Form des kommunikaitven Umgangs mit der Welt“* betrachtet:
„Lesen“, das umfasst die Bereiche *Lesenkönnen, Leseverstehen* und *Lesekompetenz*. „Lesenkönnen“ meint dabei nicht nur das Erkennen und richtige Aussprechen von geschriebenen Wörtern, sondern bedeutet bereits *verstehendes* Lesen. „Lesekompetenz“ umfasst

darüber hinaus auch den weiteren Umgang mit dem Gelesenen, die Fähigkeit die Texte in einen größeren Zusammenhang einzuordnen, zu reflektieren und für verschiedene Zwecke nutzen zu können. [LEISEN 2010, vgl. 112]

> *"Nach diesem Verständnis ist eine lesekompetente Person dazu befähigt, bestimmte Arten von text- und lesebezogenen Anforderungen erfolgreich zu bewältigen."* [LEISEN 2010, 112]

Die text- bzw. lesebezogene Anforderung im Zusammenhang mit mathematischen Textaufgaben ist folglich das Erfassen der Problemstellung sowie der gegebenen Informationen zum erfolgreichen Lösen der Aufgabe.
PISA definiert fünf Lesekompetenzstufen, die die fortschreitende Komplexität des Leseverständnisses abbilden sollen:

1. Oberflächliches Verständnis einfacher Texte und elementare Lesefähigkeit
2. Herstellen einfacher Verknüpfungen und grobes Textverständnis
3. Integration von Textelementen und logische Schlussfolgerungen
4. Detailliertes Verständnis komplexer Texte und externe Kenntnisse
5. Flexible Nutzung unvertrauter und komplexer Texte

[FENKART 2010, vgl. 203]
Versucht man den Anspruch an die Lernenden bezüglich text- und lesebezogenen Anforderungen bei Textaufgaben in den fünf Lesekompetenzstufen nach PISA zu verorten, so wird deutlich, dass sich Lesekompetenz im Bereich Mathematik über alle Stufen erstrecken kann bzw. meist auch erstreckt. Weiters werden auch die drei Kompetenzbereiche der PISA-Lesekompetenz-Matrix, „Informationen ermitteln“, „textbezogen Interpretieren“ und „Reflektieren und Bewerten“ – gerade in höheren Schulstufen und bei komplexeren Aufgaben – stets abgedeckt. [LEISEN 2010, vgl. 112]
Es wird also deutlich, dass anspruchsvolle mathematische (Aufgaben-)Texte, gemessen an den Kompetenzkriterien nach PISA, ein hohes Level an „Lesekompetenz“ von den Schülerinnen und Schülern einfordern.
Gabriele Fenkart fasst die Anforderungen der Lesekompetenz auf vier Ebenen zusammen:

- Textebene: Form, Struktur, Komplexität, sprachliche Nuancen
- Inhaltliche Ebene: Wissen, Sach- und Fachwissen, Alltagswissen, Vorwissen, Weltwissen
- Kognitive Ebene: Schlussfolgern, Erschließen, Vergleichen, Hinterfragen, Analysieren, Interpretieren

- Ebene der Verknüpfung und Anwendung: Kritische Bewertung und kritischer Vergleich, Anwendung bzw. Nutzung in Bereichen, die auch über das Sachgebiet hinausgehen

[FENKART 2010, 204]

Durch Leskompetenz kann schließlich „Textverständnis“ erfolgen. Portmann-Tselikas definieren diesen Begriff als *die rezeptive Komponente von Textkompetenz, also die Fähigkeit, „Texte eigenständig [zu] lesen und damit erworbene Informationen für sein weiteres Denken, Sprechen oder Schreiben [zu] nutzen.“* [PORTMANN-TSELIKAS 2002] zitiert in: [STEINHARDT 2013, 13]. Groeben versteht darunter darüber hinaus *„sowohl den Prozeß, als auch das Produkt des Textverstehens [...] er gibt den Zusammenhang zwischen zwei Instanzen an, der Text- und der Leserinstanz.“* [GROEBEN 1982, 15] Die Frage des Textverständnisses setzt bei Groeben auf Leserseite an und fragt nach Teilfähigkeiten, die beim Leser vorhanden sein sollten, um ein erfolgreiches Verstehen des Textes zu gewährleisten. Er nennt schließlich folgende Voraussetzungen, die für das Verstehen mathematischer Texte notwendig sind und somit „Textverständnis“ befördern: (zitiert in: [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 239])

- Zugang zu speziellen mathematischen Bedeutungen der im Text vorkommenden Wörter und Sätze
- Verarbeitung komplexerer grammatikalischer Strukturen mathematischer Texte
- Erfassen des Konzepts, welches durch mathematische Sätze gegeben ist (Ereignisse, räumliche oder zeitliche Beziehungen, Teilmengenbeziehung, ...)
- Erfassen des Kontexts einer Aussage (benötigt umfangreiches Wissen!)
- Umgang mit Begriffsdichte, minimaler Redundanz und der speziellen Form der „mathematischen Prosa“
- gutes Kurzzeitgedächntis

Aus diesen Ausführungen wird deutlich, welche breite Palette an Fähigkeiten „Lesekompetenz“ und „Textverständnis“ von den Schülerinnen und Schülern einfordern. Dies wird auch deutlich, wenn man die Anforderungen in den Bildungsstandards und Kompetenzdefinitionen im Bereich der Mathematik betrachtet.

2.1.2 Sprachkompetenz und Bildungsstandards in der Mathematik

Bereits in den 1970er-Jahren gab es in der Mathematik-Didaktik eine gesteigerte Beschäftigung mit (literarischen) Texten mit mathematischem Inhalt. Der Weg in die Unterrichtspraxis wird jedoch nur langsam gefunden. Im Laufe der Entwicklung der Bil-

dungsstandards gewinnen Sachtexte wieder vermehrt an Bedeutung. [FENKART 2010, vgl. 197-198]
Die Notwendigkeit der Sprachkompetenz und insbesondere auch der Lesekompetenz widerspiegelt sich etwa in den Formulierungen von Kompetenzmodellen und Bildungsstandards im Bereich Mathematik. So enthält das „Kompetenzmodell Mathematik 4. Schulstufe“ die Kompetenz „AK3: Kommunizieren“, bzw. das Modell für die 8. Schulstufe die Handlungsbereiche „H1: Darstellen, Modellbilden“ und „H4: Argumentieren, Begründen“ mit charakteristischen Handlungen wie z.B. „alltagssprachliche Formulierungen in die Sprache/Darstellung der Mathematik übersetzen“ (H1). (vgl. [BMUKK 2013] und [BIFIE]) Die Kompetenz des „Modellierens“ fordert die Übersetzung von Sachproblemen in die Sprache der Mathematik. Dieses Einbeziehen außermathematischer, bereichsübergreifender Problemstellungen in den Mathematikunterricht erlangte in den letzten Jahren vermehrt an Bedeutung. Die „außermathematischen Problemsituationen“ die es mathematisch zu modellieren gilt, sind zumeist in Textform dargestellt, das Verstehen dieses Textes ist also zentral für das Gelingen des Modellierungsprozesses. Duarte, Gogolin und Kaiser fassen die Konsequenzen wie folgt zusammen:

> *„In all diesen Ausführungen wird deutlich, dass die kompetente Verwendung von Sprache (sowohl von allgemeiner Bildungssprache als auch von mathematikspezifischer Fachsprache als ein Element der Bildungssprache) sowie das Verstehen entsprechender Texte und der kompetente produktive Umgang damit zentrale Voraussetzungen für einen mathematischen Kompetenzerwerb sind.“* [DUARTE/GOGOLIN/KAISER 2011, 39]

2.2 Charateristika mathematischer Texte

Klarerweise unterscheiden sich Form und Verwendung von Sprache, je nachdem ob sie schriftlich oder mündlich gebraucht wird. Dies betrifft Alltagssprache und Fachsprache gleichermaßen.
Die mündliche Kommunikation bzw. verbale Vermittlung, sei es im Gespräch oder bei einem Vortrag, birgt stets die Möglichkeit der Rückfrage, weiters ist man sich zumeist recht gut über die Adressaten im Klaren, das Maß an Vorkenntnis bei der Zuhörerschaft ist bekannt, man kann von einem gemeinsamen Kenntnisstand ausgehen und diverse Konventionen voraussetzen. Daher kann man oft auf eine exakte Definition diverser Begriffe verzichten oder Details nur vage andeuten. Außerdem ermöglicht das Gespräch zusätzlichen Informationstransport auf der nonverbalen Ebene, etwa durch Mimik und

Gestik und den zusätzlichen Einsatz von Gezeichnetem, Geschriebenem oder realen Objekten, auf die verwiesen und gezeigt werden kann. Die Gesprächssituation ist also zumeist flexibel und vor allem bi-polar, Interaktion mit dem Gegenüber ist möglich. Dies lässt einen großzügigeren Umgang mit fachlicher Prägnanz zu, die Inhalte werden meist ausführlicher und mit einem höheren Maß an Redundanz vermittelt als bei geschriebener Sprache, die gesprochene Fachsprache enthält damit eher Charakteristika der Alltagssprache.
Bei geschriebener Sprache kann zwar eine gewisse Adressatengruppe angenommen werden – bei einem wissenschaftlichen Artikel im Bereich der komplexen Analysis darf man wohl die Kenntnis von Grundbegriffen der Analysis bei der Leserschaft voraussetzen – dennoch kennt man die Adressaten nicht genau und es besteht keine Möglichkeit zur direkten Interaktion mit dem Leser. Es können also weniger Vorannahmen getroffen werden und der Schreiber ist gezwungen, sich um größtmögliche Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit zu bemühen, Ziel ist, dass der Text „aus sich heraus verstanden werden kann“. Weiters unterliegt man bei schriftlichen Ausführungen noch mehr gewissen Einschränkungen, was den Umfang angeht, gerade bei mathematischen Texten wird also nach Möglichkeit alles verwendet, was erhöhte Prägnanz und Kürze in den Ausführungen fördert. Der Text kann dadurch ungemein dicht und komplex werden, was das Verständnis beim Leser erschweren kann. [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 61-62]
Es lässt sich also feststellen, dass mathematische Texte sich insbesondere durch eine hohe Informationsdichte, Prägnanz und Komprimiertheit, geringe Redundanz, eine strenglogische Abfolge von Einzelschritten, Eindeutigkeit und Objektivität, sowie einen deskriptiven, analytischen Charakter auszeichnen. Sie dienen hauptsächlich der Informationsvermittlung und sind nicht vorrangig ästhetisch oder stilistisch strukturiert, sondern genügen vor allem den fachlichen bzw. fachsprachlichen Anforderungen. Aus der Kompaktheit ergibt sich, dass unscheinbare Elemente ganz wesentlich für die Aussage sein können. [LEISEN 2010a, vgl. 213] sowie [BARZEL/EHRET 2009, vgl. 5] und [BERGUNDE 2010, vgl. 243]
Im Vergleich zu Sachtexten anderer Disziplinen weisen mathematische Texte zusätzlich noch weitere Charakteristika auf, die sie besonders auszeichnen. Diese werden in einer Aussendung des BMUKK gegenübergestellt, was in Tabelle 2.1 wiedergegeben wird. Aus dieser Darstellung wird deutlich, dass mathematische Texte im Verleich zu anderen Sachtexten weniger Gliederungs- und Orientierungshilfen, wie etwa Überschriften und Absätze, aber auch Bilder oder Namen, für die Leserschaft bieten und sich dadurch – und

auch durch ihre hohe Dichtheit und Prägnanz – besonders von den Lesegewohnheiten des Alltags unterscheiden.

Sachtexte	**mathematische Sachtexte**

• Orientierung an Überschriften und Bildern: erleichtertes Anknüpfen an Vorwissen/Bekanntes
• Aufbau einer Leseerwartung (bereits vor dem Lesen möglich)
  – (Teil-)Überschriften
  – Gliederung in Textabschnitte
  – Illustrationen, Bilder
• Namen sind sehr wichtig
• Schlüsselwörter
	• sehr kurz und komprimiert
	• viel Information – beinahe jedes Wort ist wichtig
	• kaum Bilder
	• selten Teilüberschriften, keine Gliederung in Absätze
	• Imperativ-Aufforderungen (z.B. „miss“, „berechne“,...)
	• Namen haben meist keine Bedeutung und sind austauschbar
	• Schlüsselwörter eher kontraproduktiv[1]
	• Abwandlung von Nomen zu Adjektiven

Tabelle 2.1: Gegenüberstellung Sachtexte – mathematische Texte [FERTL/LITERACY, vgl. 6]

Aus den oben aufgezeigten Charakteristika mathematischer Texte ergibt sich, dass das Bearbeiten mathematischer Sachtexte über die allgemeine Lesekompetenz hinaus noch eine mathematisch-spezifische Lesekompetenz erfordert. [FERTL/LITERACY, vgl. 6]

2.3 Umgang mit mathematischen Texten

Wie kann nun ein mathematischer Text möglichst effizient sinnerfassend gelesen werden und welche Tricks und Techniken könnten im Unterrich an die Schülerinnen und Schüler zur Hilfestellung vermittelt werden?
Die Spezifika mathematischer Texte erfordern in gewisser Weise eine „Lesetechnik“, die sich vom Lesen im Alltag unterscheidet, Maier und Schweiger gehen sogar so weit, zu sagen, dass Lesegewohnheiten des Alltags das Verstehen mathematischer Texte erschweren. [MAIER/SCHWEIGER 1999, vgl. 65] So wie man mit fortschreitender Lesekenntnis anfangs Buchstabe für Buchstabe, dann Silbe für Silbe, Wörter zusammensetzt, bis man schließlich beim Lesen ganze Wörter und Wortgruppen auf einmal erfasst, so liest man

[1] Näheres dazu in Abschnitt 3.3

als geübter Leser Texte eben nicht mehr Wort für Wort, sondern stellt beim Lesen des Satzanfangs sofort Hypothesen über den Fortgang des Textabschnittes auf. Alltagserfahrung und Vorwissen, sowie die zumeist hohe Redundanz bei Alltagslektüre helfen dabei, ein rasches Erfassen des Textinhaltes zu gewährleisten. Durch ein *„intuitives syntaktisches Wissen“* wird das Leseverständnis bei Alltagstexten befördert, man muss nicht mehr „genau“ lesen, kann sogar Teile des Textes „überlesen“ und dennoch den Sinn korrekt erfassen. Durch die hohe Dichte und Prägnanz bei mathematischen Texten und die zumeist geringeren fachlichen Vorkenntnisse ist dieses angelernte „Antizipieren“ beim Verstehen mathematischer Sachtexte allerdings eher hinderlich als hilfreich. Zusätzlich erschwert die schon im vorangehenden Kapitel besprochene „Bedeutungsinterferenz“ zwischen Alltags- und Fachsprache das Verständnis und im Vergleich zu Texten des Alltags gibt es bei mathematischer Lektüre nur sehr beschränkten Interpretationsspielraum, ist doch die Eindeutigkeit der Darstellung ein wichtiges Ziel der Mathematik. Beim Lesen und Sinnzuweisen werden dadurch auch erhöhte Anforderungen an das Kurzzeitgedächtnis gestellt. Maier und Schweiger formulieren dies wie folgt:

> *„Der Leser muß bei mathematischen Texten also den anstrengenden Versuch unternehmen, die Bedeutung von Fachausdrücken bzw. die geänderte Bedeutung der als Fachausdrücke verwendeten Ausdrücke der Alltagssprache zutreffend zu erfassen. In jedem Fall zwingt ihn die höhere Prägnanz bzw. Informationsdichte mathematischer Texte dazu, Wort für Wort zu lesen, um den Sinn komplett aufzunehmen.“* [MAIER/SCHWEIGER 1999, 65]

In diesem Sinne fordert auch Heiner Willenberg für das Lesen mathematischer Texte und die Lektüre von Textaufgaben einen *„kleinräumigen Fokus“*, genaues, schrittweises Lesen und besonders langsames Lesetempo: *„... nur in der Langsamkeit des Lesens können die Schlüsselwörter mit Bedeutung aufgeladen und miteinander verbunden werden.“* [WILLENBERG 1999, 189]
Maier und Schweiger fordern weiter:

> *„Es bedarf eines permanent reflektierenden, oftmals auf frühere Textestellen zurückgreifenden, intensiven Lesens, durchsetzt von Pausen der Vergegenwärtigung, der Exemplifizierung und der Andwendung. Wiederholtes Lesen der gleichen Textestellen ist oftmals für ein volles Verstehen unverzichtbar.“* [MAIER/SCHWEIGER 1999, 66]

Der Einsatz von Lesehilfen, *„aktives Lesen“*, unterstützt das Verstehen: Mitrechnen, das Anfertigen von Skizzen, Markieren von Textstellen oder das Zusammenfassen des Gelesenen hilft beim Sinnerfassen. Derartige Techniken sind beim Lesen im Alltag jedoch äußerst unüblich und werden daher auch beim Lesen mathematischer Texte bzw. Aufgabentexte zu selten eingesetzt. Gerade bei Texten, die viel Symbolschreibweise enthalten, gilt es auch, sich vom strengen zeilenweisen Lesen, stets von links nach rechts, zu entfernen und flexibler mit der Leserichtung umzugehen, sozusagen auf mehreren Wegen zu lesen. Der von Maier und Schweiger verwendete Begriff *„intensives Lesen“* fasst meiner Meinung nach sehr gut zusammen, was beim Lesen mathematischer Sachtexte und auch mathematischer Aufgabentexte unverzichtbar ist:

- genaues, langsames Lesen – „Wort für Wort“
- reflektierendes Lesen – Rückgriff auf frühere Textstellen, Sinnzuweisung, mehrmals Lesen
- aktives Lesen – Unterstützung des Verständnisses durch Skizzen, Exzerpieren, Mitrechnen, Beispiele erfinden (Exemplifizierung)

2.4 Textsorten im Mathematikunterricht

Denkt man an Texte und Lesen im Mathematikunterricht, so wird bei vielen die allererste Assoziation die „Textaufgabe“ sein. Dieser Typus macht auch tatsächlich einen wesentlichen Anteil dessen aus, was „Lesekompetenz“ und „Leseverständnis“ von den Mathematiklernenden erfordert. „Sachtexte“ im Bereich der Mathematik umfassen aber einen weit größeren Bereich, auch abseits der Fachliteratur, man denke nur an populärwissenschaftliche Schriften, mit Autoren wie Simon Singh oder Rudolf Taschner, die in den letzten Jahren große Beliebtheit erlangt haben. [FENKART 2010, vgl. 198] Schülerinnen und Schüler können demnach mit verschiedensten „mathematischen Textsorten“ in Kontakt kommen:

- Sachtexte in Lehr- und Schulbüchern
- Sachtexte in „authentischen Medien“ (z.B. Fachbücher, Nachschlagewerke, Lexika, Fachmagazine, Online-Artikel,...)
- Merksätze, Definitionen, „Sätze“ im Mathematikunterricht (im Heft bzw. an der Tafel)
- Aufgabentexte
- Beispiele
- populärwissenschaftliche Veröffentlichungen

[LEISEN 2010a, vgl. 213]

Alle diese Texte weisen unterschiedliche Merkmale und verschiedene Grade der „Fachlichkeit“ auf und erfordern von den Lernenden unterschiedliche Fähigkeiten beim Umgang mit ihnen. Die Häufigkeit ihres Vorkommens im Unterricht hängt bestimmt von Stil und Vorlieben der Lehrkraft ab, dennoch ist zu erwarten, dass Schülerinnen und Schüler mit allen oben genannten Textformen in Berührung kommen, insbesondere, weil seit dem Einzug von Bildungsstandards und kompetenzorientiertem Unterrichten auch die Bedeutung von Fach- und Sachtexten im Unterricht wächst. Zumindest an einem Typus von „mathematischem Text“ kommen Schülerinnen und Schüler wohl nicht vorbei: der Textaufgabe. Wegen ihrer großen Rolle im Mathematikunterricht und in Form der „Typ-2-Aufgaben“ der zentralen Reifeprüfung als Untersuchungsgegenstand dieser Diplomarbeit wird nun im folgenden Kapitel die Textsorte „Textaufgabe“ genauer betracht werden.

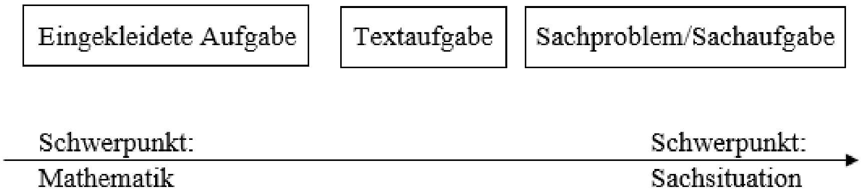
3 Textaufgaben

Textaufgaben stellen ein wesentliches Element des Mathematikunterrichts dar. Sie begleiten die Lernenden von Schuleintritt an, angefangen in der Volksschule mit Aufgaben über äpfelkaufende Kinder bis hin zu komplexen Modellierungsaufgaben in der Oberstufe. Historisch gesehen haben sie bereits eine lange Geschichte: Erste mathematische Textbeispiele finden sich bereits auf ägyptischen Papyrusrollen, in altchinesischen und indischen Rechenbüchern, sowie im antiken Griechenland und Rom. In Schulbüchern kommen Textbeispiele bereits im 16. Jahrhundert mit dem ersten Druck derartiger Werke vor. [BINDER 2012, vgl. 8]

3.1 Begriffsklärung

In der Sprache gibt es verschiedenste Bezeichnungen für Aufgaben im Umkreis des „Sachrechnens", daher soll vorerst eine Klärung der Begrifflichkeiten im Themenfeld „Textaufgabe"[1] erfolgen, gestützt auf die Ausführungen von [SCHNEEBERGER 2009].
Schneeberger nennt zu Beginn eine ganze Reihe von Bezeichnungen für „Textrechnen": Anwendungsaufgabe, Problemaufgabe, Denkaufgabe, eingekleidete Aufgabe, Textaufgabe, Rechengeschichte, Projekt, usw. In verschiedenen fachdidaktischen Arbeiten werden diese Begriffe oft unterschiedlich verwendet, so wird häufig in drei Kategorien zwischen eingekleideter Aufgabe, Sachproblem/-aufgabe und Textaufgabe unterschieden, manchmal wird „Textaufgabe" und „Sachaufgabe" aber auch gleichbedeutend verwendet.
Hier soll Martin Schneeberger folgend eine Kategorisierung in drei Gruppen vorgenommen werden, abhängig davon, ob der Schwerpunkt der Aufgabe auf Seiten der Mathematik oder „der Sachsituation" liegt: [SCHNEEBERGER 2009, vgl. 38-40]

[1] An dieser Stelle soll auch auf den Unterschied zwischen „Aufgabe" und „Beispiel" hingewiesen werden, zwei Begriffe die im österreichischen Sprachraum meist synonym verwendet werden, aber eigentlich etwas vollkommen anderes ausdrücken: Ein *Beispiel* dient der Veranschaulichung, etwa zur Demonstration eines Lösungsweges – es handelt sich dabei also z.B. um eine bereits gelöste Rechenaufgabe. Eine *Aufgabe* hingegen soll von den Lernenden selbst gelöst werden.



Die Grenzen bei dieser Einteilung können jedoch nich immer eindeutig bestimmt werden.

Eingekleidete Aufgabe:

Eine „eingekleidete Aufgabe“ dient in erster Linie dem Üben eines mathematischen Verfahrens. Eingekleidete Aufgaben *„sollen die formale Mathematik durch anschaulichen, konkret fassbaren Beispielvorrat stabilisieren und die Bedeutung von Mathematik für die Lebenswelt signalisieren.“* [SCHNEEBERGER 2009, 39] Ihr Ziel ist *„das Anwenden von Rechenverfahren, das Festigen mathematischer Begriffe und das Erfassen von Zahlbeziehungen.“* [SCHNEEBERGER 2009, 39] Zumeist ist aus der Formulierung der Aufgabe bereits erkennbar, wie gerechnet werden soll. Eigentlich kann der Sachtext beliebig ausgetauscht werden, der Kontext ist für die Aufgabe unwichtig. [SCHNEEBERGER 2009, vgl. 38-39]

Textaufgaben:

Bei Textaufgaben hat der Kontext bereits eine höhere Bedeutung als bei eingekleideten Aufgaben, die Realität wird allerdings vereinfacht dargestellt, so werden häufig „schöne Zahlen“ verwendet, der Text enthält nie zu viele oder zu wenig Angaben, es gibt immer genau eine Lösung, etc. Textaufgaben haben – trotz ihrer offensichtlichen Konstruiertheit – einen wesentlichen Stellenwert im Mathematikunterricht: Sie sollen *„den verständigen Umgang mit Sachinformationen und die Übersetzung von sprachlichen Texten in mathematische Formulierungen üben [sic]. Sie sollen zeigen, dass Mathematik ein Mittel zur Lösung von Sachproblemen ist.“* [SCHNEEBERGER 2009, 39ff]

Sachprobleme:

Sachprobleme stellen schließlich eine Fragestellung dar, deren Wurzel wirklich in der Lebenswelt, d.h. in der beschriebenen Sachsituation liegt. Das Rechnen und Operieren, die Zahlen und Verfahren stehen dabei im Hintergrund. *„Sachaufgaben stellen die Auseinandersetzung mit Sachsituationen in den Vordergrund und zeigen, dass durch Einsatz mathematischer Methoden zusätzliche Einsichten gewonnen und Sacherfahrungen vertieft werden können“.* [SCHNEEBERGER 2009, 39] Die Mathematik ist hierbei also mehr Mittel zum Zweck, einen Weg zur Lösung der Problemsituation zu finden steht im Vordergrund.

Zusätzlich zu der oben beschriebenen Unterscheidung in drei Gruppen erscheint für die folgende Arbeit folgende Begriffsverwendung sinnvoll:
Sachaufgabe: verwendet im Sinne des „Sachproblems“, als umwelterschließende Aufgabe, mit induktiv-entdeckendem Hintergrund
Textaufgabe: verwendet für die Gesamtheit eingekleideter Aufgaben und Textaufgaben wie oben beschrieben, ihr Hintergrund ist eher deduktiv-vermittelnd
[SCHNEEBERGER 2009, vgl. 42-43]

3.2 Funktionen textbasierter Aufgaben

Die Einteilung der Aufgaben anhand des präsentierten Kontexts kann also anhand der Fragestellung „Dient der reale Kontext dazu, die Mathematik verständlich zu machen oder hilft hier die Mathematik die Realität zu verstehen?“ geschehen. Je nachdem kann eine Einordnung in den Bereich des Text- oder des Sachrechnens getroffen werden.
Beide Aufgabentypen haben ihre Berechtigung, allerdings werden dabei verschiedene Tätigkeiten von den Lernenden gefordert und unterschiedliches Lernen angeregt. Aufgaben mit „echtem“ Realitätsbezug können vermitteln, dass die Mathematik ein geeignetes Intrument ist, um die reale Welt zu beschreiben und zu bewältigen. [BARZEL 2011, vgl. 71] Mit diesen Aufgaben kann *„Mathematical Literacy“* gefördert werden, nämlich dann, wenn das Sachrechnen selbst zum Inhalt des Unterrichts wird: Die Schülerinnen und Schüler sollen befähigt werden *„umweltliche Situationen durch mathematisches Modellieren klarer, bewusster und kritischer zu sehen.“* [SCHNEEBERGER 2009, 41]
Aufgaben mit „Pseudokontext“ hingegen verwenden frei erfundene Kontexte, die nur dazu dienen, mathematische Aktivitäten anzuregen und Verfahren einzuüben. Der Realitätsbezug ist suggeriert, es kommt zu didaktischen Vereinfachungen und damit einhergehenden Verfälschungen der Realsituation. [BARZEL 2011, vgl. 73]

Laut H. Winter umfasst das „echte Sachrechnen“ weit mehr als „nur Rechnen“: Er sieht im Sachrechnen Lernstoff, Lernprinzip und Lerninhalt: Verschiedenste Themen können beim Sachrechnen integriert behandelt werden, Wissen aus unterschiedlichen Bereichen kann vernetzt werden: So sind etwa Kenntnisse über Größen, Maße und Einheiten, Messen aber auch Schätzen, das Darstellen und Verarbeiten von Daten und damit

Verfahren der Statistik und Kombinatorik wesentlich für das Arbeiten mit Sachaufgaben. Winter bezeichnet dies als „Lernstoff" beim Sachrechnen. [WINTER] zitiert in: [SCHNEEBERGER 2009, vgl. 40-41]
Sachrechnen als „Lernprinzip" meint, dass Mathematik auf die Realität und den Erfahrungshorizont der Lernenden bezogen sein soll und nicht nur im Abstrakten stattfinden sollte. *„...[D]urch Anknüpfung an und Einbettung in Sachsituationen können mathematische Begriffe, Operationen und Zusammenhänge veranschaulicht und damit besser verstanden, gelernt und gefestigt werden."* [SCHNEEBERGER 2009, 40] Sachprobleme als Ausgangspunkt von Lernprozessen können außerdem motivierend wirken.
Sachrechnen als Lernziel meint schließlich, die bereits oben genannte „Mathematical Literacy". [SCHNEEBERGER 2009, vgl. 40-41]

Schneeberger fasst folgende Funktionen textbasierter Aufgaben zusammen:

- Anwendung bzw. Transfer von Wissen
- Motivation: mathematisches Wissen kann auch außerhalb der Schule relevant sein
- Anregung zum Nachdenken
- Lieferung eines Kontexts zum Aufbau neuer mathematischer Begriffe und Fertigkeiten
- Selektionsinstument

[SCHNEEBERGER 2009, 41]

Das Rechnen mit Aufgaben in Textform kann als *„Bindeglied zwischen Alltagssituationen und Mathematik"* [SCHNEEBERGER 2009, 40] angesehen werden. Ob diese Beschreibung auch auf die eingekleideten Aufgaben zutrifft, ist diskussionswürdig, denn ein konstruierter „Pseudokontext" stellt meiner Meinung nach kein besonders tragfähiges Bindeglied dar. Dennoch haben auch eingekleidete Aufgaben ihre Berechtigung im Unterricht und es gilt den richtigen Aufgabentyp für die spezielle Unterrichtssituation auszuwählen.
Als weitere Kategorie bietet eine Unterscheidung anhand der intendierten unterrichtlichen Situation: Dienen die Aufgaben dem Fördern von Lernprozessen oder dem Überprüfen von Fähigkeiten – handelt es sich um „Aufgaben zum Lernen" oder um „Aufgaben zum Leisten"? Dieser Zweck beeinflusst Aufbau, Gestaltung und Merkmale der Aufgabe wesentlich. Für eine Schularbeitsaufgabe etwa sind eingekleidete Augaben weit praktikabler als eine langes, zeitintensives Sachproblem. Natürlich handelt es sich aber auch hier nicht um zwei disjunkte Mengen, eine Aufgabe kann durchaus sowohl „zum Lernen" als auch „zum Überprüfen" eingesetzt werden. [BARZEL 2011, 69-70]

Vor allem die „Aufgaben zum Leisten“ treten natürlich auch im Zusammenhang mit zentralen Tests und Bildungsstandards auf. Im Hinblick auf kompetenzorienterten Unterricht und demnach auch daraufhin orientierte Testungen, mit der Tendenz weg vom „sturen Auswendiglernen“ hin zu „verständnisorientierten“ Aufgaben und „aktivem Wissen“, erlangt aber auch bei Testaufgaben das Sachrechnen immer mehr an Bedeutung. Im Zusammenhang mit PISA wird dabei in Deutschland von der „Mathematischen Grundbildung“, im angelsächsischen Bereich von „Mathematical Literacy“ gesprochen, diese beschreibt die Fähigkeit

> *„die Rolle, die Mathematik in der Welt spielt, zu erkennen und zu verstehen, begründete mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens einer Person als eines konstruktiven, engagierten und reflektierenden Bürgers entspricht.“* [SCHNEEBERGER 2009, 62]

„Mathematical Literacy“ und „Mathematische Grundbildung“ beschreiben zwar nicht genau dasselbe Konzept, dienen aber beide dazu, mathematische Fähigkeiten über die elementaren Grundfertigkeiten hinaus zu beschreiben. Es geht um die Fähigkeit, mathematische Kenntnisse verstehend auf inner- und außermathematische Situationen anwenden zu können und um das Kommunizieren über Mathematik. Diese Anforderungen an die Lernenden können u.a. durch Textaufgaben – im Sinne Schneebergers Unterteilung – eingefordert werden. Studien haben ergeben, dass das Entwickeln eines elaborierten mathematischen Verständnisses eng mit dem Bearbeiten mathematischer Problemstellungen in Form von Textaufgaben zusammenhängt. Sachrechnen und Modellierungsaufgaben in Form von Textaufgaben fördern damit eine dynamische Unterrichtskultur, bei der der Anwendungs- und der Prozessaspekt der Mathematik an Bedeutung gewinnen, und die Bedeutung von Formalismen und Schemata abnimmt. [SCHNEEBERGER 2009, 62-63]

3.3 Kritik am Sachrechnen

Im Zusammenhang mit Kritik an Textaufgaben bzw. am Sachrechnen werden oft die bekannten „Kapitänsaufgaben“ genannt. Es handelt sich hierbei um Aufgaben, bei denen die numerischen Angaben im Text nichts mit der eigentlichen Fragestellung zu tun haben. Die meisten Schülerinnen und Schüler versuchen aber dennoch etwas zu berechnen – immerhin handelt es sich um eine Textaufgabe, da muss man ja etwas ausrechnen

können. Die Berechnungen und Antworten, die diese Aufgabenstellung hervorruft sind an sich recht unterhaltsam, was dahintersteckt, ist allerdings eher besorgniserregend: Das „sture Rechnen“, ohne jedes Verständnis für die Situation oder Nachdenken über Kontext und Sinnhaftigkeit der Aufgabenstellung und der daraus gezogenen Schlussfolgerungen scheint an der Tagesordnung zu stehen. Es stellt sich die Frage, warum das so ist. Anscheinend erzeugt die Kultur des Sachrechnens im Unterricht ein Verhalten bei den Lernenden, das ein Abkoppeln des Kontexts von der Mathematik begünstigt und „hirnloses Drauflosrechnen“ bewirkt.
Zwei wesentliche Faktoren dabei sollen hier nun näher behandelt werden: Einerseits die starke Fokussierung auf *Schlüsselwörter*, aufgrund derer bestimmte Rechenoperationen in Gang gesetzt werden und die oft zum bestimmenden Element einer Aufgabe werden. Andererseits die Folgen der bereits im vorigen Abschnitt angesprochenen *Künstlichkeit* von Sachaufgaben: Um die Lösbarkeit von Aufgaben aus der Praxis zu ermöglichen bzw. ein gewisses didaktisches Ziel zu erreichen, werden die Sachsituationen in Textaufgaben angepasst, verändert und vereinfacht. Es entsteht eine konstruierte „Sachsituation“, die bei den Lernenden falsche Eindrücke und Auffassungen über das Sachrechnen im Allgemeinen bewirken können. Auf diese beiden Kritikpunkte soll nun etwas näher eingegangen werden, bevor die sprachliche Perspektive bei Textaufgaben näher betrachtet wird.

Konstruierte Sachsituationen

Abgesehen davon, dass Textaufgaben nicht nur dazu dienen sollten, den „Nutzen der Mathematik für das wirkliche Leben zu demonstrieren“, stellt sich die Frage, ob dieser Anspruch überhaupt erfüllt werden kann, denn die Aufgaben, die im Mathematikunterricht behandelt werden, stellen sich meist nur in wenigen Fällen auch genau so in der Realität. Bei Sachaufgaben lässt sich jedoch die Tendenz erkennen, dass mit steigender Authentizität der Aufgabe auch die Schwierigkeit steigt – folglich gilt der Umkehrschluss: Je künstlicher, konstruierter und „banaler“ eine Aufgabe ist, umso eher ist sie lösbar. Die Lösbarkeit stellt einen wichtigen Aspekt für den Unterricht dar, sei es das Üben, Anwenden, Demonstrieren aber natürlich auch das Überprüfen betreffend. Natürlich müssen Sachsituationen adaptiert und der Unterrichtsrealität angepasst werden, aus diesen Vereinfachungen heraus ergeben sich aber unrealistische Annahmen über das Sachrechnen allgemein, eine „Textaufgabenkultur“ bildet sich heraus, die sich laut H. Winter durch folgende Einstellungen kennzeichnet:

- jede Textaufgabe ist lösbar
- Textaufgaben enthalten keine fehlenden oder überflüssigen Informationen
- lieber irgendetwas rechnen als gar nichts tun
- das Ergebnis muss immer eine „schöne Zahl“ sein
- kommen drei größere Zahlen vor, muss addiert werden, kommen zwei kleinere Zahlen vor, dann wird multipliziert
- schwer verständliche Aufgaben erfordern meistens Subtraktionen oder Divisionen

[WINTER] zitiert in: [SCHNEEBERGER 2009, vgl. 59-60]
Diese Grundeinstellungen beim Aufgabenlösen könnten darin begründet sein, dass offensichtlich unrealistische „Hüllen“ bei Aufgaben die Schülerinnen und Schüler förmlich dazu zwingen, den Kontext schlichtweg zu ignorieren und nicht ernst zu nehmen. Dies fördert zusammenhangloses „Drauflosrechnen“ ohne Analyse der Sachsituation oder kritische Reflexion. Zusätzlich besteht die Gefahr der Schlussfolgerung „Mathematik ist nur nützlich, um Schulbuchaufgaben zu lösen”. [BARZEL 2011, vgl. 72]
Es gilt also der Gefahr entgegenzuwirken, dass Textaufgaben eher die Entstehung eines sinnentleerten Umgangs der Lernenden mit Rechnen in Sachkontexten fördern, anstatt eine realitätsbezogene Vorbereitung auf außerschulische Anforderungen zu sein.

Schlüssel- bzw. Signalwörter
Eng im Zusammenhang mit dem Wunsch nach Lösbarkeit der Schulaufgaben steht die Platzierung von „Schlüsselwörtern“ in Aufgabentexten, die bestimmte mathematische Operationen auslösen und mehr oder weniger eindeutig auf die auszuführenden Berechnungen hinweisen. Die Lernenden sind quasi darauf konditioniert, auf gewisse Signalwörter hin bestimmte Berechnungen durchzuführen. Beispiele für derartige Zuweisungen können sein: „je“ – Multiplikation, „verlieren“ – Subtraktion, „und“ – Addition, etc. Diese immer wieder auftretenden „Muster“ beim Lösen von Textaufgaben werden den Lernenden natürlich schnell bewusst und führen dazu, dass bereits beim Lesen der ersten Worte Rückschlüsse auf die durchzuführenden Berechnungen gezogen werden. Empirische Studien zeigen, dass die „Schlüsselwort-Strategie“ sogar zu signifikant besseren Ergebnissen beim Lösen von Textaufgaben führen kann. Eine Motivation dafür, „Schlüsselwort-Training“ zu betreiben und das lexikalisch-syntaktische Übersetzen zur Taktik beim Lösen von Textaufgaben zu machen. Die Folgen sind, dass die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben dann nurmehr anhand der Signalwörter lösen, Text und Situation werden gar nicht mehr wahrgenommen. [SCHNEEBERGER 2009, vgl. 57ff] Aber alleine, da viele Wörter in Kombination mit verschiedenen Präpositionen ihre Bedeu-

tung verändern (z.B. „erhöhe um“ und „erhöhe auf“), können diese Zuweisungen schnell in eine falsche Richtung führen. [BERGUNDE 2010, vgl. 245] Weiters verstärkt dieses lexikalisch-syntaktische Übersetzen strukturblinde Reaktionen enorm und Textaufgaben werden dadurch zu nichts anderem als sprachlich kodierten Rechenaufgaben degradiert. Aber, die Dosis macht das Gift: Signalwörter können durchaus als Hinweise in Texaufgaben dienen, es gilt aber stets die Notwendigkeit des Überdenkens dieses „Übersetzungsprozesses“ zu betonen, die Übersetzung muss semantisch begründet sein. [SCHNEEBERGER 2009, vgl. 57ff]

Die „Kapitänsaufgabe“

Das wohl prominenteste Beispiel für die Problematik bei Textaufgaben, das sowohl die Folgen von Künstlichkeit des Kontexts und lexikalisch-syntaktischem Übersetzen vereint, ist die „Kapitänsaufgabe“. Die „Urform“ dieser Aufgaben lautet in etwa wie folgt:

> *„Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?“*

Diese unlösbare Aufgabe im Kleide einer „typischen Textaufgabe“ bringt die meisten Schülerinnen und Schüler zu dem Ergebnis, dass der Kapitän 36 Jahre alt ist. Die Lernenden tappen in die Signalwort-Falle: Zwei Zahlen und das Wörtchen „und“ – die Lösung *muss* durch Addition erhalten werden. Die Tendenz der Kinder, das Alter des Kapitäns durch Addieren der Anzahl seiner Tiere zu berechnen, ist ein Indiz für den starken Einfluss von Schlüsselwörtern. Als andere Erklärung für den Drang der Lernenden, bei der Kapitänsaufgabe eine Lösung zu berechnen, wird vermutet, dass das „Lösen“ schlicht das Verhalten ist, das ständig im Unterricht erwartet wird. In der Schule ist jede Aufgabe lösbar, also muss es auch diese sein. Der Kontext wird von den meisten kaum bedacht und die Schülerinnen und Schüler rechnen einfach drauflos.
Gerade die Ergebnisse von Erhebungen unter Verwendung der Kapitänsaufgabe haben zu Diskussionen über Aufbau und Umgang mit Textaufgaben im Unterricht geführt, vor allem was die Verwendung von Schlüsselwörtern angeht. Gefordert wird dabei zumeist eine Kultur der Textaufgaben, die die Fähigkeiten zum Modellbilden anregt. Eine mögliche Folgerung wäre die Forderung nach anspruchsvolleren Aufgaben, die „echte“ Problemstituationen widerspiegeln und einen reflektierten Umgang mit dem Sachrechnen anregen. [SCHNEEBERGER 2009, vgl. 57ff]
Die Forderung nach „schwierigeren“ Aufgaben mit „echten“ Sachsituationen bringt aber wiederum Schwierigkeiten für die Didaktik mit sich. Es scheint unrealistisch, im Unterricht ständig mit „echten Problemsituationen“ zu arbeiten – was bedeutet eigent-

lich „echt“ in diesem Zusammenhang? Weiters bringen realistische Ausgangsprobleme auch eine steigende Schwierigkeit der Aufgabenlösung mit sich. Das beginnt mit dem Verstehen der Problemsituation bis hin zum Modellieren und Lösen der Aufgabe – je „realistischer“ die Aufgabe wird, umso höhere und vor allem breiter gefächerte Anforderungen stellt sie an die Lernenden. Da Sachaufgaben zumeist in Textform präsentiert werden, betrifft eine dieser Anforderungen ganz stark die Lese- und Sprachkompetenz der Schülerinnen und Schüler. Auf diese soll nun detaillierter eingegangen werden.

3.4 Anforderungen beim Sachrechnen

Für viele Schülerinnen und Schüler zählen Textaufgaben zu den großen Schwierigkeiten im Unterricht, werden als schwieriger empfunden, als „normale Rechnungen“ und sind gefürchtete Schularbeitsaufgaben. Studien in den 80er-Jahren haben ergeben, dass Lernende beim Sachrechnen um bis zu 30 Prozent schlechter abschneiden, als bei vergleichbaren isomorphen numerischen Aufgaben. [SCHNEEBERGER 2009, vgl. 38], [MÄDL 2013, vgl. 5]
Ein Erklärungsversuch für die anscheinend höhere Schwierigkeit von Textaufgaben im Vergleich zu numerischen Aufgaben könnte die Menge an Anforderungen sein, die Textaufgaben von den Schülerinnen und Schülern abverlangen. Martin Schneeberger nennt in seiner Dissertation folgende Fähigkeiten, die von den Lernenden beim Sachrechnen gefordert werden: [SCHNEEBERGER 2009, 38]

1. verstehendes, sinnerfassendes Lesen
2. gut entwickeltes Zahlenverständnis
3. Erkennen und Herstellen von Zahlenbeziehungen
4. Beherrschung von Rechenverfahren
5. Flexibilität im Umgang mit Größenbereichen
6. erkennende und herstellende Anwendung von Weltwissen
7. Vorstellungsvermögen für imaginäre Welten

Diese Aufzählung verdeutlicht, dass Lernende beim Sachrechnen weit mehr als nur mathematische Fähigkeiten beherrschen sollten. Ja, sie müssen sogar bereits recht souverän über die mathematischen Basisfertigkeiten bzw. darüber hinaus über das entsprechende mathematische Werkzeug verfügen können, um es flexibel in der gegegbenen Sachsituation einsetzen und verknüpfen zu können. Darüber hinaus werden aber auch andere, außermathematische Fähigkeiten gefordert.

In dieser Diplomarbeit soll nun vor allem auf den ersten Punkt dieser Liste eingegangen werden: Die Anforderungen im Hinblick auf Lesekompetenz und Textverständnis. Studien haben ergeben, dass bereits kleine Umformulierungen am Text die Erfolgswahrscheinlichkeit beim Lösen massiv beeinflussen können, ohne dass an der mathematischen Grundstruktur etwas verändert wurde. Beim Bearbeiten von Textaufgaben spielt also nicht nur logisch-mathematisches Wissen eine Rolle, sondern auch linguistisch-handlungstheoretische Faktoren, das Text- und Situationsverständnis hat wesentlichen Einfluss auf den Erfolg beim Bearbeiten einer Textaufgabe. [BINDER 2012, vgl. 18-19]
Auch wenn Textaufgaben zumeist außermathematische Situationen beschreiben, so unterscheidet sich die bei ihnen verwendete Sprache doch von der Alltagssprache. Man trifft auch beim Sachrechnen auf mathematisches Vokabular, insbesondere wenn die Textaufgaben innermathematische Probleme beschreiben. Außerdem entbehrt auch die Beschreibung einer anspruchsvollen Problemsituation nicht einer gewissen Komplexität: Häufig kommen Fachwörter aus anderen Wissenschaften oder spezifisches Vokabular im Zusammenhang mit der jeweiligen Aufgabenstellung in den Textaufgaben vor. Erneut ergeben sich also alle Schwierigkeiten, die das Thema „mathematische Fachsprache – Alltagssprache“ mit sich bringt, wie sie bereits im vorhergehenden Kapitel beschrieben wurden. Der Faktor Sprache spielt demnach in vielerlei Hinsicht bei Textaufgaben eine große Rolle und kann die Lösungswahrscheinlichkeit beeinflussen. Im nächsten Abschnitt sollen daher die „Typ-2-Aufgaben“ des ersten Termins der neuen schriftlichen Reifeprüfung aus dem Jahr 2015 auf ihre Schwierigkeit hinsichtlich Sprache bzw. Text untersucht werden.

4 Analyse der Typ-2-Aufgaben

Nachdem in den vorhergegangenen Kapiteln versucht wurde mit einem sehr breiten Blick das weite Feld „mathematische Fachsprache“ in seinen verschiedenen Facetten und seiner Komplexität auszuleuchten, soll nun ein konkretes Beispiel betrachtet werden: Die Typ-2-Aufgaben der zentralen Reifeprüfung. Untersucht werden also umfangreichere mathematische Aufgabentexte der abschließenden Schulstufe, bei denen zu erwarten ist, sowohl mathematische Fachsprache als auch – im Zusammenhang mit fächerübergreifenden Aufgabenstellungen – Fachsprache aus anderen Wissenschaften oder lebensweltlichen Bereichen (z.B. Physik, Biologie, Wirtschaft, ...) anzutreffen. Dies alles auf einem der höchsten Schulstufe angemessenen sprachlichen Niveau, bei dem also durchaus auch anspruchsvollere Formulierungen vertreten sein könnten.
Im folgenden Teil soll also versucht werden festzumachen, welche (fach-)sprachlichen Aspekte die Aufgaben der zentralen schriftlichen Reifeprüfung 2015 charakterisieren und ob „Sprache“ einen wesentlicher Faktor für Anspruch und Schwierigkeit dieser Aufgaben darstellt.

4.1 Motivation

Ein grundsätzlicher Anstoß für die Themenwahl dieser Arbeit waren die – meiner Meinung nach – häufigen Diskussionen und Kontroversen über die Texte und Formulierungen der Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die neue zentrale Reifeprüfung im Fach Mathematik, sowohl im Umfeld des Studiums und bei Schülerinnen und Schülern, aber auch in den Medien. Sehr oft entstanden Gespräche über „den Text an sich“, über Aufbau und Inhalt, Wortwahl und die Aufgabenformulierung im Allgemeinen. Dabei wurden Fragen der Länge und sprachlichen Komplexität der Texte angesprochen, aber auch Fragen wie z.B. wie viel für den Rechenvorgang eigentlich „irrelevante“ Information eine Aufgabe enthalten soll, etc.
Dies betrifft natürlich beide bei der zentralen Reifeprüfung auftretenden Aufgabentypen. Im Zuge dieser Arbeit wird aber auf eine Betrachtung der kürzeren Typ-1-Aufgaben

verzichtet, da diese nach Meinung der Autorin andere Parameter bei der Analyse der Formulierungen bedürfen als die Typ-2-Aufgaben, bedingt durch z.B. die verschiedenen Antwortformate aber auch durch die Konzeption der beiden Aufgabentypen.
Festzumachen, ob die Aufgaben aus dem Jahr 2015 „textlich schwierig“ waren, ist nicht so einfach, die Frage der Methode wird in einem späteren Kapitel behandelt werden. Der öffentliche Diskurs dazu bringt aber verschiedenste Meinungen mit sich. Aufgrund des hohen Medienechos, das die Einführung der zentralen Reifeprüfungen in Österreich mit sich brachte, gibt es in den Medien zahlreiche Berichte zur Mathematikprüfung. Die veröffentlichten Aussagen differieren dabei teilweise stark: Rudolf Taschner, Professor für Mathematik an der TU Wien, beurteilt in einem Interview am Tag nach der Mathematik-Reifeprüfung im Mai 2015 die Typ-1-Aufgaben als *„wirklich sehr leicht“*, den zweiten Teil bewertet er als aufwändiger:

> *„Es wird schon einiges von den Kindern verlangt“, sagt Taschner. Allerdings weniger vom Mathematischen als vom Textlichen her. „Den Text gut zu lesen ist eine Anstrengung“, sagt Taschner. Für ihn ist deshalb auch die Frage interessant, wie Migranten mit der Mathematik-Klausur zurechtkamen.“* [PRESSE 2015a]

Im Gegensatz dazu steht die Aussage von Hans Humenberger, Professor für Mathematikdidaktik an der Universität Wien, der im selben Artikel die Aufgaben als *„nicht zu textlastig“* bezeichnet und die Fragen – bis auf Details in den Formulierungen – als *„sinnvoll gestellt“* ansieht. [PRESSE 2015a] In einem Schülerinterview nach der Prüfung wurde die Aussage einer Maturantin veröffentlicht, die wiederum die Typ-2-Aufgaben als schwierig empfand und sich anscheinend mit dem positiven Absolvieren der Typ-1-Aufgaben zufrieden gab:

> *Mit Teil 2 wollte sie sich dann gar nicht mehr länger beschäftigen: „Die Aufgaben waren so lange und schwer. Ich habe sie gar nicht mehr fertig gelesen. Positiv sollte ich auch so sein“* [PRESSE 2015b]

„Die Aufgaben waren so lang, ich habe sie gar nicht ganz gelesen.“ Ob diese Formulierung überspitzt und polemisch ist, sei dahingestellt. Es wäre jedoch fatal, wenn viele Schülerinnen und Schüler diese Ansicht teilten. So soll dieses Zitat als eine Art Anstoß für die folgenden Betrachtungen dienen: Betont wird die *Länge* der Aufgaben, es soll daher untersucht werden, ob die Textaufgaben wirklich „so lang“ sind. Darauf aufbauend soll untersucht werden, welche (fach-)sprachlichen Faktoren die Aufgaben „schwierig“

gemacht haben könnten. Hierfür einen passenden Ansatz bzw. eine sinnvolle Methode zu finden, soll den Inhalt des nächsten Abschnitts darstellen.

4.2 Methode

Abseits von oft kurzsichtigen, stimmungsmachenden Medienberichten möglichst objektiv die Schwierigkeit einer Aufgabe zu bewerten, stellt sich prinzipiell als schwierig dar. Bei den hier zu untersuchenden Aufgaben handelt es sich um die letzte Prüfung der mathematischen Schullaufbahn, deren Abschluss berechtigt zum Studium, ein gewisses Niveau sollte also durchaus verlangt werden können – sinnerfassendes Lesen auch von fachspezifischen Texten könnte man als Grundvoraussetzung fordern. Auch die kompetenzorientierte Konzeption der Mathematikausbildung fordert Fähigkeiten ein, die fächerübergreifendes Denken, Vernetzung verschiedener mathematischer Methoden und Anwendung in realitätsbezogenen Kontexten beinhaltet. Das Erfassen einer mathematischen Problemstellung aus einem Kontext heraus zählt wohl dazu, der erforderliche Kontext kann nur durch einen entsprechenden Text bereitgestellt werden. Diese Anforderungen sind auch bei der Definition der Typ-2-Aufgaben durch das BIFIE erkennbar:

„Typ-2-Aufgaben sind Aufgaben zur Anwendung und Vernetzung der Grundkompetenzen in definierten Kontexten und Anwendungsbereichen. Es handelt sich dabei um umfangreichere kontextbezogene oder auch innermathematische Aufgabenstellungen, bei denen eine selbstständige Anwendung von Wissen und Können erforderlich ist." [BIFIE zRP]
Es ist naheliegend, dass dies die Beschäftigung mit einem komplexeren Aufgabentext umfasst, was Fähigkeiten wie etwa das Herausfiltern von relevanten und irrelevanten Informationen und den Umgang mit bzw. das Entschlüsseln von fachsprachlichen Formulierungen beinhaltet. Eine gewisse „Schwierigkeit" darf bei Maturaaufgaben also durchaus gegeben sein, so wie auch das BIFIE in den Typ-2-Aufgaben die *„(weit) über das Wesentliche hinausgehenden Bereiche"* in der Leistungsbeurteilung verortet. [BIFIE zRP]
Nichtsdestotrotz können die Aufgaben mehr oder weniger schwierig sein – ein dabei mitbestimmender Parameter ist die sprachliche Komponente. Diese wiederum umfasst fachsprachliche sowie allgemeinsprachliche Aspekte. Spannend ist nun die Frage, wie viel Gewicht der „Faktor Sprache" bei den Aufgaben der zentralen schriftlichen Reifeprüfung der AHS aus dem Jahr 2015 hatte. Die Messung dessen ist schwierig, und weiters lässt sich kaum feststellen inwiefern etwaige Ergebnisse zur sprachlichen Schwierigkeit der Aufgabentexte mit den Lösungshäufigkeiten der einzelnen Typ-2-Aufgaben korrelieren. Insofern lässt sich z.B. nicht sagen, ob eine Aufgabe besonders selten/häufig

richtig gelöst wurde, weil ihre sprachliche Formulierung besonders schwierig/einfach war. Dennoch ist eine Untersuchung dieser sprachlichen Schwierigkeit nicht unbedingt irrelevant, kann sie doch z.B. Anstoß für eine verstärkte Behandlung des Themas Sprache im Mathematikunterricht sein.

4.2.1 Kriterien zur Schwierigkeitseinschätzung

Bei der Analyse der Sprache der Aufgabentexte lassen sich im Großen und Ganzen zwei Ebenen unterscheiden: die fachsprachliche und die allgemeinsprachliche Ebene. Durch diese zwei „Brillen“ könnte die Sprache der Aufgabentexte betrachtet werden. Im folgenden wird versucht, verschiedene Kriterien zu definieren, die die sprachliche Schwierigkeit der Aufgabentexte beeinflussen und deren Auftreten im Aufgabentext anschließend untersucht werden soll. Im fachsprachlichen Bereich wird dabei vor allem auf die in den vorhergegangenen Kapiteln festgestellten Aspekte Bezug genommen.

Fachsprachliche Aspekte

Im ersten Teil der Arbeit wurden zahlreiche Merkmale der mathematischen Fachsprache vorgestellt, die unter Umständen für Verständnisschwierigkeiten bei der Bearbeitung von Aufgabentexten führen können. Das Auftreten der hier aufgezählten Kriterien kann in den Angabetexten der zentralen Reifeprüfung erhoben werden:

1. mathematisches Fachvokabular
2. Symbolsprache
3. fachsprachenspezifische grammatikalische Konstruktionen
    a) Nominalisierungen
    b) Passivkonstruktionen
    c) Infinitivkonstruktionen
    d) Reflexivkonstruktionen
4. syntaktische Besonderheiten
    a) Quantoren
    b) Junktoren, Konjunktionen
    c) Negationen

Auch wenn das Auftreten fachsprachlicher Merkmale in Aufgabentexten natürlich nicht automatisch zu einer Erschwernis des Verständnisses führt, ist davon auszugehen, dass im Allgemeinen gilt: Je häufiger die genannten Phänomene in den Aufgabentexten auftreten, umso höher sind die Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler.

Allgemeinsprachliche Aspekte

Fragt man sich, was einen Text schwierig zu lesen machen könnte, so kommen schnell Aspekte wie lange Wörter, komplizierte, verschachtelte Sätze u.ä. in den Sinn. Nur weil ein Text lange Sätze enthält, heißt das aber nicht, dass er per se schwierig zu verstehen ist. Wenn ein langer Satz syntaktisch einfach ist, ist er dennoch leicht zu lesen (z.B. ein Satz mit einer langen Aufzählung). Auch können schwierig messbare Aspekte wie etwa Schreibstil und Schlüssigkeit der Ausführungen die Lesbarkeit eines Textes beeinflussen, während das Auftreten von im Sprachschatz selten anzutreffender Wörter das Textverstehen erschwert. Je nach Textsorte (Prosa, Lyrik, Sachtext,...) sollten eigentlich verschiedene Kriterien zur Anwendung kommen. [PSYCHOMETRICA 2011-15]
In der Lesbarkeitsforschung wurden dennoch sogenannte „Lesbarkeitsformeln" entwickelt, die die Schwierigkeit eines Textes numerisch bestimmbar machen sollen. Diese Indizes stützen sich auf leicht quantifizierbare Merkmale eines Textes und liefern als Ergebnis eine Zahl, die einen Gradmesser für die Schwierigkeit liefern soll. Neben den objektiv „auszählbaren" Textmerkmalen werden dabei jedoch subjektive Stilaspekte außen vor gelassen. Die Formeln behandeln nur formale Schwierigkeiten, Aspekte wie Anschaulichkeit, kognitive Organisation, Vertrautheit des Lesers mit dem Thema des Textes u.ä. fließen nicht in die Berechnung ein. Die Indizes beschränken sich damit *also auf den formal-stilistischen Aspekt der sprachlichen Oberflächenstruktur von Informationstexten.* [GROEBEN 1982, 184] Insofern kann es sich nicht um exakte Messungen handeln, die Ergebnisse sind viel mehr Richtwerte, eine ungefähre Einschätzung der Schwierigkeit. Außerdem sind die verschiedenen Lesbarkeitsformeln natürlich immer von der Sprache abhängig, da z.B. die durchschnittliche Wortlänge im Englischen und im Deutschen generell stark differiert. Formeln aus der englischsprachigen Lesbarkeitsforschung wurden daher teilweise einfach durch Anpassung der Bewertungsskala oder durch Einführung zusätzlicher Faktoren an die deutsche Sprache angepasst. Natürlich gibt es aber auch Indizes, die sich original auf die deutsche Sprache beziehen. [PSYCHOMETRICA 2011-15] sowie [GROEBEN 1982, vgl. 183f]

Trotz naheliegender Zweifel an der Aussagekraft der Indizes sind diverse Lesbarkeitsformeln in der Forschung sehr etabliert, so wurde u.a. auch belegt, dass die Reduzierung auf die Texteigenschaften Wort- und Satzlänge indirekt Rückschlüsse auf andere Textmerkmale zulässt und somit eine Beschränkung auf diese beiden Ausprägungen durchaus ihre Berechtigung hat. [BEST, vgl. 21ff] Auffallend ist auch, dass das Zustandekommen der diversen Formeln schwer nachvollziehbar ist, insbesondere die darin vorkommenden

Zahlen (Gewichtungen u.ä.) wirken sehr willkürlich. Die Vermutung liegt nahe, dass die Werte so gewählt wurden, um eine möglichst gute „Passung“ an das Bewertungsschema zu erreichen.
Insofern sind die Ergebnisse der verschiedenen Lesbarkeitsformeln nur mit Einschränkungen verwendbar, dennoch kann ihrer Verwendung etwas abgewonnen werden: Sie erlauben die *ungefähre* Einordnung eines Textes auf einer Schwierigkeitsskala und liefern einen Vergleichswert. Deshalb sollen nun zwei Lesbarkeitsformeln kurz vorgestellt werden, die besonders häufig in der Literatur anzufinden sind.

Reading-Ease nach Flesch

Der am häufigsten auftretende Index ist der *„Reading-Ease-Wert“* RE nach Flesch (1948). Er berechnet sich wie folgt:

$$RE = 206.835 - 0.846wl - 1.015sl$$

wobei gilt: wl ... durchschnittliche Silbenzahl pro Wort $(= \frac{Gesamt-Silbenzahl}{Anz.\ Wörter})$
sl ... durchschnittliche Anzahl von Wörtern pro Satz $(= \frac{Anz.\ Wörter}{Anz.\ Sätze})$

Der Wert bezieht sich auf englischsprachige Texte und bewegt sich zwischen 0 (praktisch unlesbar) und 100 (maximale Lesbarkeit). Um die Formel auch für die deutsche Sprache anwenden zu können, ist eine Verschiebung des Bewertungsrahmens notwendig, da Wörter in der deutschen Sprache im Durchschnitt eine höhere Silbenzahl haben als im Englischen. Eine derart modifizierte Bewertungstabelle erstellte Mimh, der Rahmen wird dabei um den Wert -20 verschoben (siehe Abb. 4.1). [GROEBEN 1982, vgl. 176f] sowie [STADLER 2009, vgl. 103-105]

Reading Ease für englische Texte	Reading Ease für deutsche Texte	Charakter	Typischer Text	Mittlere Wortlänge	Mittlere Satzlänge
0 bis 30	- 20 bis 10	sehr schwer	Wissenschaftl. Abhandlung	über 2,20	über 30
30 bis 50	10 bis 30	schwierig	Fachliteratur	1,90	25
50 bis 60	30 bis 40	anspruchs-voll	Sachbuch	1,78	21
60 bis 70	40 bis 50	normal	Roman	1,70	17
70 bis 80	50 bis 60	einfach	Unterhaltungs-literatur	1,62	14
80 bis 90	60 bis 70	leicht	Heftchenroman	1,54	11
90 bis 100	70 bis 80	sehr leicht	Comics	unter 1,45	unter 9

Abbildung 4.1: Reading-Ease-Bewertungstabelle nach Mihm (1973) [GROEBEN 1982, vgl. 179] zitiert in: [STADLER 2009, 105]

Lesbarkeitsindex nach Björnsson

Eine weitere noch heute häufig angewandte Formel ist der „Lesbarkeitsindex" von Hugo Björnsson, entwickelt im Jahr 1968. Der Lesbarkeitsindex *LIX* soll eine Bestimmung der Schwierigkeitsstufe eines Textes erlauben. Erhoben werden dabei:

SL ... durchschnittliche Satzlänge ($=\frac{Gesamtzahl\ Wörter}{Anz.\ Sätze}$)
LW ... prozentueller Anteil langer Wörter (mehr als sechs Buchstaben) ($=\frac{Anz.\ langer\ Wörter}{Gesamtzahl\ Wörter}$)

Der Lesbarkeitsindex LIX ergibt sich dann aus:

$$LIX = SL + LW$$

Die Einordnung der Textschwierigkeit erfolgt anhand der in Abb. 4.2 gezeigten Tabelle.

Textarten	Kinder-/Jugendliteratur				Belletristik		Sachliteratur		Fachliteratur		
LIX	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
Textschwierigkeit	sehr leicht		leicht		mittelschwer		schwierig		sehr schwierig		

Abbildung 4.2: LIX nach Björnsson – Auswertungstabelle [BAMBERGER/VANECEK] zitiert in: [DIDAKTIKDEUTSCH, vgl. 2]

Beide genannten Formeln stützen sich also auf die Werte Satzlänge und Wortlänge, wobei Björnsson vor allem „lange Wörter“ miteinbezieht. Neben den Lesbarkeitsformeln wurde in den 70er-Jahren – teils um die Schwächen der Formeln auszugleichen – das *Hamburger Verständlichkeitsmodell* entwickelt, das eine subjektive Einschätzung der Textschwierigkeit ermöglicht.

Hamburger Verständlichkeitsmodell

Das Hamburger Verständlichkeitsmodell, entwickelt von den Psychologen Langer, Schulz von Thun und Tausch, definiert vier Verständlichkeitsdimensionen:

1. Einfachheit
2. Gliederung/Ordnung
3. Kürze/Prägnanz
4. Anregende Zusätze (z.B. Abbildungen)

Die Komponente „Einfachheit“ wird dabei als am wichigsten angesehen. Zu jeder Dimension können auf einer fünfstufigen Skala ($--, -, 0, +, ++$) zueinander gegensätzliche Begriffspaare bewertet werden. Die Ausprägungen sind in Abbildung 4.3 ersichtlich. [LANGER 1987] zitiert in: [DOCTIMA] sowie [GROEBEN 1982, vgl. 188-193] und [LUZERN].

1. Einfachheit einfache Darstellung – komplizierte Darstellung kurze, einfache Sätze – lange, verschachtelte Sätze geläufige Wörter – ungeläufige Wörter Fachwörter erklärt – Fachwörter nicht erklärt konkret – abstrakt anschaulich – unanschaulich	**2. Gliederung und Ordnung** gegliedert – ungegliedert folgerichtig – zusammenhanglos/wirr übersichtlich – unübersichtlich gute Unterscheidung Wesentliches/Unwesentliches – schlechte Unterscheidung roter Faden erkennbar – kein roter Faden erkennbar alles kommt der Reihe nach – alles geht durcheinander
3. Kürze und Prägnanz zu kurz – zu lang aufs Wesentliche beschränkt – viel Unwesentliches Gedrängt – breit Konzentriert – abschweifend knapp – ausführlich jedes Wort notwendig – vieles hätte man weglassen können	**4. anregende Zusätze** anregend – nüchtern interessant – farblos abwechslungsreich – gleichbleibend neutral persönlich – unpersönlich

Abbildung 4.3: Ausprägungen der vier Verständlichkeitsdimensionen des Hamburger Modells [GROEBEN 1982, vgl. 191-192]

Im Gegensatz zu den Verständlichkeitsformeln, bei denen objektiv messbare Kriterien erhoben werden, steht hier eine subjektive Einordnung im Vordergrund, die Einschätzung des Textverständnisses erfolgt mittels einer Bewertung durch den Leser bzw. die Leserin. Die abgegebenen Bewertungen wurden schließlich mit den Ergebnissen von Verstehens- und Behaltenstests bei den Leserinnen und Lesern abgeglichen. Aus diesen Untersuchungen wurde schließlich das optimale Bewertungsergebnis eines verständlichen Textes abgeleitet. [STADLER 2009, vgl. 109f]
Ein Text ist demnach besonders verständlich, wenn die Bewertung der Ausprägungen der vier Dimensionen folgenden Durchschnittswert ergibt:

Einfachheit: ++, Gliederung/Ordnung: ++,
Kürze/Prägnanz: 0 oder +, Anregende Zusätze: 0 oder +
[LUZERN, vgl. 3]

Als wenig förderlich für die Verständlichkeit können folgende Faktoren angesehen werden:

- Unübliche Wortverwendung, unerklärte Fachwörter oder Abkürzungen, unverständliche Metaphern, „Insiderbegriffe"
- Nominal- und Attribut-Konstruktionen
- Verschachtelte Sätze mit zu viel Information
- „Klammersätze", bei denen Zusammengehörendes weit auseinander liegt
- Sätze, die mit dem Nebensatz oder einem unnötigen Vorspann beginnen
- Texte, bei denen Titel und Anfang nicht schnell klar machen, worauf Schreibende hinaus wollen
- Texte ohne roten Faden und ohne Gliederungs- und Strukturierungshilfen
- Texte mit abstrakten Fakten und Verallgemeinerungen, ohne Beispiele und „betroffene Menschen"

[LUZERN, vgl. 3]

Das Modell und Ergebnisse aus der Bewertungsskala sollen vor allem verwendet werden, um Texte hinsichtlich ihrer Lesbarkeit zu optimieren.

4.2.2 Schlussfolgerungen

Anhand der obigen Ausführungen und den üblichen Methoden in der Lesbarkeitsforschung werden für die Untersuchung der Typ-2-Aufgaben folgende Kriterien ausgewählt:

Auftreten von Merkmalen der mathematischen Fachsprache
Auf der einen Seite wird eine Untersuchung hinsichtlich der mathematischen Fachsprache, wie im Abschnitt 4.2.1 beschrieben, durchgeführt. Dabei sollen schlicht Auftreten und Häufigkeit „typisch mathematischer“ Forumlierungen untersucht werden. Weiters soll eine Analyse anhand allgemeinsprachlicher Kriterien erfolgen, bei der folgende Merkmale untersucht werden:

Allgemeine Textparameter
Vor allem für den Vergleich der einzelnen Aufgabentexte untereinander sollen ganz allgemeine „objektive“ Parameter der Texte bestimmt werden:

- Anzahl der Wörter
- Anzahl der Sätze
- Anzahl der Buchstaben/Zeichen
- durchschnittliche Wortlänge
- durchschnittliche Satzlänge
- durchschnittliche Lesezeit[1] in Min: $\frac{Wortanzahl}{300}$
- Seitenanzahl im Aufgabenheft

Anmerkung: Die Bestimmung der oben genannten Merkmale erfolgt auf dreierlei Art: Durch die Analyse-Tools der Online-Programme für die Lesbarkeitsindizes LIX und RE (siehe unten), sowie die „Wörterzählen-Funktion“ von Microsoft Word. Zumeist ergeben die Zählungen der drei Programme unterschiedliche Ergebnisse. Dies liegt u.a. daran, dass die auftretenden Formeln und Sonderzeichen von den Programmen unterschiedlich bewertet werden. Word etwa zählt die mittels „Formeleditor“ eingegebene Formel als ein Wort, jedes dabei vorkommende Zeichen als ein Zeichen. Das Tool zur Berechnung des RE-Wertes hingegen zählt eine Formel oftmals als mehrere Wörter.
Dennoch werden die Werte der einzelnen Programme herangezogen, um die Lesbarkeits-

[1] Die durchschnittliche Lesegeschwindigkeit wird in Wörtern pro Minute angegeben. Für Schülerinnen und Schüler der letzten Schulstufe wird angenommen, dass es sich um „gute Leser“ handelt, diese also zwischen 250 und 350 Wörter pro Minute lesen können. Hier wird als Richtwert 300 Wörter pro Minute verwendet [HUNZIKER], zitiert in: [HUNZIKER-ONLINE] sowie [RITTER 2003-14]. Die durchschnittliche Lesezeit berechnet sich also mittels Anzahl der Wörter durch 300.

indizes zu berechnen. Eine händische Auswertung – v.a. der Silbenanzahl – wäre viel zu fehleranfällig und die Programme für den LIX geben die Silbenzahl zumeist nicht aus, somit ist eine Durchschnittsberechnung auch nicht möglich. Weiters interpretieren die Programme oftmals Abkürzungen, die Punkte enthalten (etwa „z.B.“, „u.a.“ oder „usw.“) fälschlicherweise als eigenen Satz. Daher wurden bei der Eingabe der Texte in die Programme derartige Punkte entfernt. (aus „z.B.“ wird dann „zB“). Für alle Berechnungen abseits der Lesbarkeitsindizes werden die Werte aus Word verwendet.

Lesbarkeitsindex
Die Werte nach Flesch und Björnsson werden mithilfe von Online-Tools errechnet und die Ergebnisse verglichen, um einen ungefähren „Richtwert“ für die Schwierigkeit des Aufgabentextes zu erhalten. Dabei wird auf folgende Tools zurückgegriffen:

- RE: `https://readability-score.com/`
- LIX: `http://www.psychometrica.de/lix.html`

Satzanalyse
Durch eine Analyse des Satzbaues soll ermittelt werden, wie das Verhältnis einfache Sätze – zusammmengesetzte Sätze aussieht. Weiters wird die Länge und Komplexität von Attributen beachtet und untersucht, ob besonders verschachtelte Nebensatzkonstruktionen („Klammersätze“) auftreten. So soll ein allgemeiner Eindruck über die Komplexität des Satzbaues erhalten werden.

Fremdwörter
Hier wird die Anzahl von Fremdwörtern bzw. unüblichen Wörter erhoben. Aus der Häufigkeit des Auftretens eines Wortes in der gesprochenen bzw. geschriebenen Sprache können Rückschlüsse auf die Wahrscheinlichkeit, dass das Wort „verstanden“ wird, gezogen werden. Ob ein Wort üblich oder unüblich ist, soll anhand der im Online-Duden angezeigten Einordnung eines jeden Worts in einer fünfstufigen Häufigkeitsskala überprüft werden. (vgl. `www.duden.de`). Erhält das Wort weniger als 3 Punkte, wird es als „unüblich“ eingeschätzt.

Wesentliches und Unwesentliches
Im Zusammenhang mit Aufgabentexten stellt „Unwesentliches“ wohl Informationen dar, die nicht direkt für die Lösung der Aufgabe relevant sind. Die Lernenden sollten natürlich

in der Lage sein, die wesentlichen Informationen aus dem Aufgabentext herauszufiltern. Ein Zuviel an „Distraktoren“ kann das Lösen einer Aufgabe aber erheblich erschweren. Hier wird untersucht, welchen Anteil diese „irrelevanten Informationen“ bei den Aufgaben ausmachen.

Anregende Zusätze
Als „anregende Zusätze“ werden im Zusammenhang mit den Aufgaben das Auftreten zweier Faktoren untersucht:
- das Bereitstellen von Graphiken oder Abbildungen
- das Bereitstellen eines „persönlichen“ Kontexts (etwa das „Einkleiden der Aufgabe“ in einen Themenbereich aus der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler o.ä.)

Aus all diesen Kriterien wird am Ende jeder Aufgabenanalyse schließlich eine Gesamteinschätzung der Textschwierigkeit der Aufgabe vorgenommen.

4.3 Aufgabenanalyse

Es werden nun die vier Aufgaben der schriftlichen zentralen Reifeprüfung Mathematik vom 11. Mai 2015 nach den im vorigen Abschnitt beschriebenen Kriterien analysiert. Die originalen Aufgabentexte sind unter `https://www.bifie.at/node/3014` abrufbar und finden sich jeweils zu Beginn einer jeden Aufgabenanalyse sowie geschlossen im Anhang dieser Arbeit.

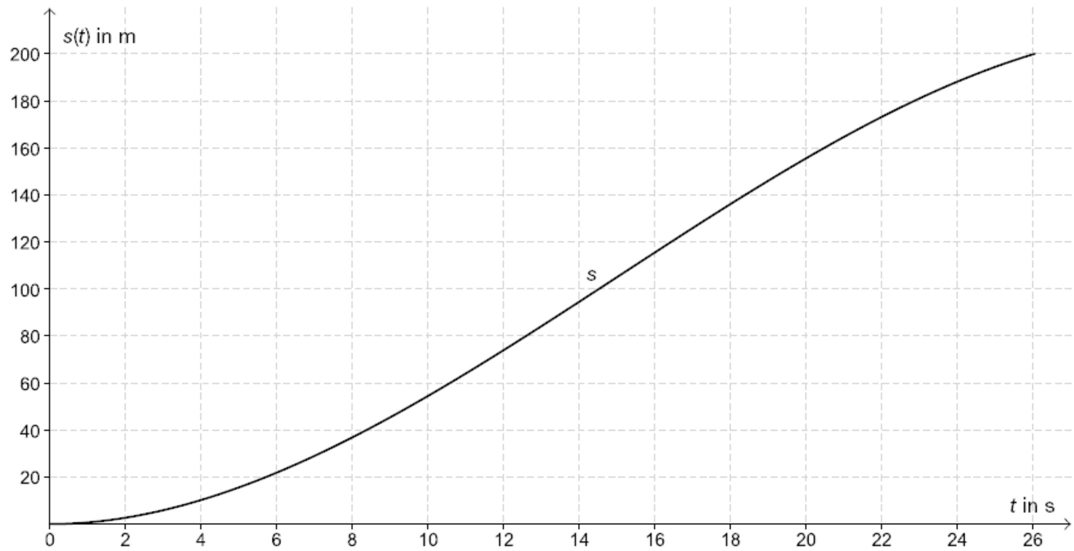
Trotz der vorherigen Festlegung von Kriterien und Bemessungsgrundlagen sind die vorgenommenen Einschätzungen natürlich stets subjektiv geprägt. Dies beginnt mit etwas so Simplem, wie dem Zählen von Wörtern – ist ein Variablenname als Wort zu zählen, zählt eine Formel als Wort? Zählt sie als Satz? – und geht weiter bei der Einstufung, ob ein Wort ein Fremdwort ist oder nicht oder wo eine (fachsprachliche) Phrase beginnt und endet, bis hin zur subjektiven Bewertung, ab wann ein zusammengesetzter Satz „komplex“ ist und wann noch nicht. Insofern ist die vorliegende Untersuchung also nur *eine* Sichtweise auf die Schwierigkeit der Aufgabentexte. Dennoch wird versucht, eine möglichst begründete Einschätzung abzugeben und gerade der Vergleich der vorliegenden Beispiele macht deutlich, wie unterschiedlich die Schwierigkeit unter dem Blickwinkel der hier verwendeten Kriterien bei den vier Aufgaben teilweise ist.

4.3.1 Aufgabe 1 – 200m-Lauf

In der Leichtathletik gibt es für Läufer/innen spezielle Trainingsmethoden. Dazu werden Trainingspläne erstellt. Es ist dabei sinnvoll, bei Trainingsläufen Teilzeiten zu stoppen, um Stärken und Schwächen der Läuferin/des Läufers zu analysieren.

Zur Erstellung eines Trainingsplans für eine Läuferin wurden die Teilzeiten während eines Trainingslaufs gestoppt. Für die 200 Meter lange Laufstrecke wurden bei diesem Trainingslauf 26,04 Sekunden gemessen. Im nachstehenden Diagramm ist der zurückgelegte Weg $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t für diesen Trainingslauf mithilfe einer Polynomfunktion s vom Grad 3 modellhaft dargestellt.

Für die Funktion s gilt die Gleichung $s(t) = -\frac{7}{450}t^3 + 0{,}7t^2$ ($s(t)$ in Metern, t in Sekunden).



Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Wendestelle der Funktion s!

Interpretieren Sie die Bedeutung der Wendestelle in Bezug auf die Geschwindigkeit der Läuferin!

b) $\boxed{\text{A}}$ Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit der Läuferin für die 200 Meter lange Laufstrecke in Metern pro Sekunde!

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung besagt, dass unter bestimmten Voraussetzungen in einem Intervall $[a; b]$ für eine Funktion f mindestens ein $x_0 \in (a; b)$ existiert, sodass $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ gilt. Interpretieren Sie diese Aussage im vorliegenden Kontext für die Funktion s im Zeitintervall [0; 26,04]!

Allgemeine Parameter:

	Word	**LIX**	**RE**
Wortanzahl:	182	173	204
Zeichenanzahl:	1140	–	1038
Satzanzahl:	–	12	12
durchschnittliche Wortlänge:	6,2	–	5,1
durchschnittliche Satzlänge:	15,2	14	17
durchschnittliche Lesezeit $[Min]$:	0,61	0,57	0,68
Seitenzahl:	1		

Lesbarkeitsindex

Die Auswertung des *LIX* ergibt, wie in Abb. 4.4 gezeigt, einen Wert von 52.72, was einem Text „mittlerer Komplexität“ gleichkommt.

Anzahl an Wörtern	Anzahl an Sätzen	Durch-schnittliche Satzlänge	Anteil langer Wörter	Lesbarkeits-index (LIX)	Komplexi-tät
173	12	14 Wörter	38.72 %	52.72	mittel

Abbildung 4.4: LIX von Aufgabe 1 laut `http://www.psychometrica.de/lix.html`

Wie in Abb. 4.5 ersichtlich, ergibt die Berechnung des *Reading-Ease-Index* einen Wert von 38.6. Dies bedeutet laut Auswertungstabelle nach Mihm, dass es sich um einen „anspruchsvollen“ Text (RE zwischen 30 und 40) handelt.

Text Statistics

Character Count	1,038
Syllable Count	364
Word Count	204
Sentence Count	12
Characters per Word	5.1
Syllables per Word	1.8
Words per Sentence	17.0

Reading Ease

A higher score indicates easier readability; scores usually range between 0 and 100.

Readability Formula	Score
Flesch-Kincaid Reading Ease	38.6

Abbildung 4.5: RE-Auswertung von Aufgabe 1 laut `https://readability-score.com/`

Satzbau

Die durschnittliche Satzlänge bewegt sich bei dieser Aufgabe – je nach Auswertungs-Tool – zwischen 14 und 17 Wörtern pro Satz. Nach Mimh entspricht dies der mittleren Satzlänge eines einfachen bis normalen Textes. (vgl. Abb. 4.1)
Betrachtet man nun den Aufbau der einzelnen Sätze genauer, ergibt sich folgendes Bild:

Nur zwei der zwölf Sätze sind zusammengesetzte Sätze, enthalten also Nebensatzkonstruktionen. Diese sind jedoch nicht sonderlich komplex. Vor allem im zweiten Satzgefüge, das die Beschreibung des Mittelwertsatzes darstellt, ergibt sich die Schwierigkeit des Satzes eher durch den Inhalt, nicht durch den Satzbau. Andererseits könnte man auf den Infinitivsatz *„um Stärken und Schwächen der Läuferin/des Läufers zu analysieren“* im Satz *„Es ist dabei sinnvoll, bei Trainingsläufen Teilzeiten zu stoppen, um Stärken und Schwächen der Läuferin/des Läufers zu analysieren.“* getrost auch verzichten.
Die weiteren „einfachen Hauptsätze“ gestalten sich recht unterschiedlich. Einerseits gibt es drei Sätze, die nach dem simplen Schema „Subjekt–Prädikat–Objekt“ aufgebaut sind und kurz und leicht nachzuvollziehen sind. Andere Sätze enthalten wiederum mehrere Objekte, was ihre Länge erhöht, sie aber nicht sonderlich komplexer macht. Dann gibt es Sätze, die viele Attribute und Objekte enthalten und dadurch schwieriger zu verstehen sind. Teilweise hätte man diese längeren Sätze vereinfachen können, indem man ihre Informationen auf mehrere Sätze aufteilt. *„Im nachstehenden Diagramm ist der zurückgelegte Weg s(t) in Abhängigkeit von der Zeit t für diesen Trainingslauf mithilfe einer Polynomfunktion s vom Grad 3 modellhaft dargestellt.“* könnte z.B. zu *„Im nachstehenden Diagramm ist der zurückgelegte Weg s(t) in Abhängigkeit von der Zeit t für diesen Trainingslauf dargestellt. Es handelt sich dabei um eine Polynomfunktion vom Grad 3.“* vereinfacht werden. Manchmal werden auch Informationen dargeboten die für das Verständnis nicht notwendig gewesen wären. Eine Verkürzung des Satzes *„Zur Erstellung eines Trainingsplans für eine Läuferin wurden die Teilzeiten während eines Trainingslaufs gestoppt.“* um das Präpositionalobjekt *„für eine Läuferin“* würde z.B. keinen wesentlichen Informationsverlust bringen.
Die Komplexität dieser Sätze spielt sich aber auf einem recht niedrigem Niveau ab. Nach der Einschätzung durch die Satzanalyse kann also durchaus gesagt werden, dass es sich um Sätze von geringer Komplexität handelt.

Fremdwörter

Abgesehen von den mathematischen Fachausdrücken enthält der Text keine nennenswerten Fremdwörter (außer zum bildungssprachlichen Wortschatz gehörende Wörter, wie etwa „analysieren“, „Diagramm“, „interpretieren“ und „Kontext“).
Der Text enthält einige Wörter, die laut Häufigkeitsbewertung des Duden nur einen Wert kleiner gleich zwei (von fünf) erhalten. Das sind vor allem Wörter aus dem Gebiet Sport/Training: *Trainingsmethode, Trainingsplan, Teilzeit, Laufstrecke, modellhaft*
Da bei diesem Themengebiet allerdings davon ausgegangen werden kann, dass die meisten Schülerinnen und Schüler eine gewisse Vorstellung dazu haben, stellen die auftretenden „seltenen Wörter“ wohl keine Erschwernis für das Verständnis dar.

Wesentliches/Unwesentliches

In Abb. 4.6 sind die Teile des Aufgabentextes grau hinterlegt, die für das Lösen der Aufgabe eigentlich nicht notwendig wären. Insgesamt sind 46 von 182 Wörtern „unwesentlich“, das sind ca. 25% des Textes.

200-m-Lauf

In der Leichtathletik gibt es für Läufer/innen spezielle Trainingsmethoden.
Dazu werden Trainingspläne erstellt.
Es ist dabei sinnvoll, bei Trainingsläufen Teilzeiten zu stoppen, um Stärken und Schwächen der Läuferin/des Läufers zu analysieren.
Zur Erstellung eines Trainingsplans für eine Läuferin wurden die Teilzeiten während eines Trainingslaufs gestoppt.
Für die 200 Meter lange Laufstrecke wurden bei diesem Trainingslauf 26,04 Sekunden gemessen.

Im nachstehenden Diagramm ist der zurückgelegte Weg *s*(*t*) in Abhängigkeit von der Zeit *t* für diesen Trainingslauf mithilfe einer Polynomfunktion *s* vom Grad 3 modellhaft dargestellt.
Für die Funktion *s* gilt die Gleichung $s(t) = -\frac{7}{450}t^3 + 0{,}7t^2$
(*s*(*t*) in Metern, *t* in Sekunden).

Aufgabenstellung:
a) Berechnen Sie die Wendestelle der Funktion *s*!
Interpretieren Sie die Bedeutung der Wendestelle in Bezug auf die Geschwindigkeit der Läuferin!
b) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit der Läuferin für die 200 Meter lange Laufstrecke in Metern pro Sekunde!
Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung besagt, dass unter bestimmten Voraussetzungen in einem Intervall [*a*; *b*] für eine Funktion *f* mindestens ein $x_0 \in$ (*a*; *b*) existiert, sodass $f'(x0) = \frac{f(b)+f(a)}{b-a}$ gilt.
Interpretieren Sie diese Aussage im vorliegenden Kontext für die Funktion *s* im Zeitintervall [0; 26,04]!

Abbildung 4.6: Für das Lösen der Aufgabe unwesentliche Textstellen (grau unterlegt)

Es ist dabei auffällig, dass der „irrelevante“ Text geballt am Anfang der Aufgabe steht, die „wesentlichen“ Informationen erst mit dem Satz beginnen, der die ersten Zahlen enthält.
Neben den Textstellen ist auch der abgebildete Funktionsgraph eigentlich nicht essentiell, um die Aufgabe lösen zu können. Er stellt aber natürlich eine Veranschaulichung dar, die als Erleichterung gewertet werden kann.
Insgesamt stellen irrelevante Informationen, die herausgefiltert werden müssten, hier also keine Erschwernis dar.

Anregende Zusätze

Der Kontext der Aufgabe, Sport und Training, kann als „schülernah“ bezeichnet werden. Es ist zu erwarten, dass die Schülerinnen und Schüler sich etwas unter Laufsport, Trainingsläufen und Teilzeiten vorstellen können. Die beschriebene Situation kann also zu einer Erleichterung beim Textverständnis beitragen.
Auch eine Abbildung in Form eines Funktionsgraphen ist vorhanden. Diese stellt einerseits eine Hilfestellung dar, da sie die Vorstellung für die Weg-Funktion unterstützt, andererseits ist sie für das Lösen der Aufgabe eigentlich nicht vonnöten, ihr Auftreten könnte also auch zu Verwirrungen führen.

Fachsprachliche Merkmale

Fachvokabular:
Der Text enthält zwölf unterschiedliche Fachbegriffe und zwei längere „fachsprachliche Phrasen“. In Abb. 4.7 sind diese gelb markiert, Formeln und Symbolschreibweisen rot. Die auftretenden Fachbegriffe sollten alle aus dem Schulunterricht bekannt sein. Die Phrasen erfordern aufmerksames Lesen und die entsprechende Dekodierung, v.a. die Angabe des Mittelwertsatzes könnte eine Herausforderung darstellen.

Symbolsprache:
Der Text enthält Symbole als Variablen im Zusammenhang mit der Wegfunktion: $s, t, s(t)$, weiters eine Gleichung der Wegfunktion selbst: $s(t) = -\frac{7}{450}t^3 + 0,7t^2$.
Beim Mittelwertsatz der Differentialrechnung treten die Intervallschreibweise $[a;b]$, $[0;26,04]$ bzw. $(a;b)$, die Variablen a, b, f, x_0, sowie die Gleichung $f'(x_0) = \frac{f(b)+f(a)}{b-a}$ auf.

Weitere fachsprachliche Besonderheiten:

Die Beschreibung des Mittelwertsatzes enthält – naheliegenderweise – besonders viele fachsprachliche Eigenheiten:

„[...] dass unter bestimmten Voraussetzungen in einem Intervall $[a; b]$ für eine Funktion f mindestens ein $x_0 \in (a; b)$ existiert, sodass $f'(x_0) = \frac{f(b)+f(a)}{b-a}$ gilt.“

Neben den Formeln und Symbolen finden sich Existenzquantoren (es gibt mindestens ein x_0), eine Implikation und die verschiedenen Elemente des Satzes müssen korrekt in Zusammenhang gebracht werden, um die Aussage des Satzes zu verstehen. Dies stellt wohl eine der fachsprachlich schwierigsten Stellen in der Aufgabe dar.

Insgesamt sind 56 der 182 Wörter im Text „fachsprachlich belegt“, das macht 43.75% des Aufgabentextes aus.

200-m-Lauf

In der Leichtathletik gibt es für Läufer/innen spezielle Trainingsmethoden.
Dazu werden Trainingspläne erstellt.
Es ist dabei sinnvoll, bei Trainingsläufen Teilzeiten zu stoppen, um Stärken und Schwächen der Läuferin/des Läufers zu analysieren.
Zur Erstellung eines Trainingsplans für eine Läuferin wurden die Teilzeiten während eines Trainingslaufs gestoppt.
Für die 200 Meter lange Laufstrecke wurden bei diesem Trainingslauf 26,04 Sekunden gemessen.

Im nachstehenden Diagramm ist der zurückgelegte Weg $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t für diesen Trainingslauf mithilfe einer Polynomfunktion s vom Grad 3 modellhaft dargestellt.
Für die Funktion s gilt die Gleichung $s(t) = -\frac{7}{450}t^3 + 0{,}7t^2$
($s(t)$ in Metern, t in Sekunden).

Aufgabenstellung:
a) Berechnen Sie die Wendestelle der Funktion s!
Interpretieren Sie die Bedeutung der Wendestelle in Bezug auf die Geschwindigkeit der Läuferin!
b) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit der Läuferin für die 200 Meter lange Laufstrecke in Metern pro Sekunde!
Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung besagt, dass unter bestimmten Voraussetzungen in einem Intervall $[a; b]$ für eine Funktion f mindestens ein $x_0 \in (a; b)$ existiert, sodass $f'(x_0) = \frac{f(b)+f(a)}{b-a}$ gilt.
Interpretieren Sie diese Aussage im vorliegenden Kontext für die Funktion s im Zeitintervall $[0; 26{,}04]$!

Abbildung 4.7: Fachsprachliche Formulierungen (gelb) und Symbolschreibweisen (rot) bei Aufgabe 1

Zusammenfassung

Betrachtet man alle Kriterien, so ergibt sich als Einschätzung für Aufgabe 1, dass sich keine besonderen Schwierigkeiten auf textueller Ebene finden. Die Auswertung der Lesbarkeitsindizes ergibt zwar einen mittleren bis schwierigen Text, Satzbau und Wortschatz sind allerdings nicht sonderlich komplex, das beschriebene Thema ist allgemeinverständlich und auch die fachsprachlichen Elemente sollten zu keiner nennenswerten Erschwernis führen, auch wenn sie prozentuell einen großen Anteil des Aufgabentextes ausmachen. Außer bei der Definition des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung gibt es keine besoneren „mathematischen Hürden“ in der Sprache. Insgesamt kann demnach gesagt werden, dass es sich nach den oben getroffenen Einschätzungen um eine Aufgabe mit geringer sprachlicher Komplexität handelt.

4.3.2 Aufgabe 2 – Altersbestimmung

Die Radiokohlenstoffdatierung, auch ^{14}C-Methode genannt, ist ein Verfahren zur Altersbestimmung von kohlenstoffhaltigen Materialien. Das Verfahren beruht darauf, dass in abgestorbenen Organismen die Menge an gebundenen radioaktiven ^{14}C-Atomen gemäß dem Zerfallsgesetz exponentiell abnimmt, während der Anteil an ^{12}C-Atomen gleich bleibt. Lebende Organismen sind von diesem Effekt nicht betroffen, da sie ständig neuen Kohlenstoff aus der Umwelt aufnehmen, sodass der ^{14}C-Anteil nahezu konstant bleibt und somit auch das Verhältnis zwischen ^{14}C und ^{12}C.

Die Anzahl der noch vorhandenen ^{14}C-Atome in einem abgestorbenen Organismus wird durch die Funktion N beschrieben. Für diese Anzahl $N(t)$ der ^{14}C-Atome t Jahre nach dem Tod des Organismus gilt daher näherungsweise die Gleichung $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, wobei N_0 die Anzahl der ^{14}C-Atome zum Zeitpunkt $t = 0$ angibt und die Zerfallskonstante für ^{14}C den Wert $\lambda = 1{,}21 \cdot 10^{-4}$ pro Jahr hat.

Eine frische Probe enthält pro Billion (10^{12}) Kohlenstoffatomen nur ein ^{14}C-Atom. Die Nachweisgrenze von ^{14}C liegt bei einem Atom pro Billiarde (10^{15}) Kohlenstoffatomen (also einem Tausendstel der frischen Probe).

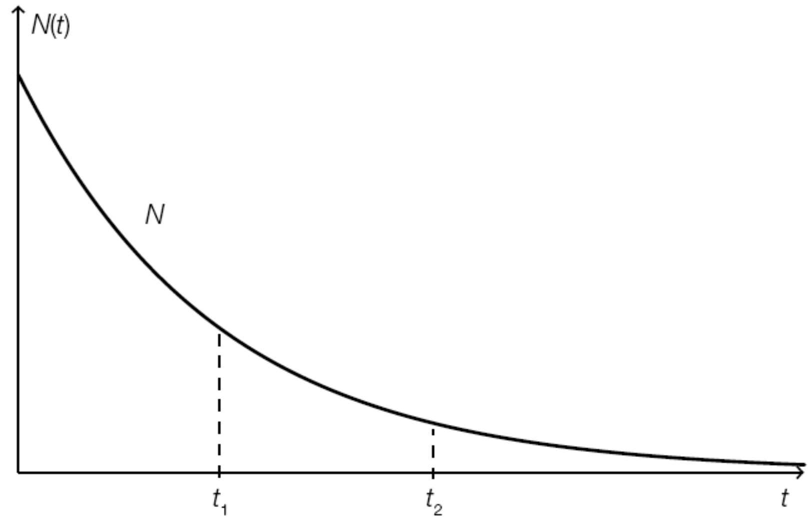
Aufgabenstellung:

a) $\boxed{\text{A}}$ Berechnen Sie die Halbwertszeit von ^{14}C!

Zeigen Sie, dass nach zehn Halbwertszeiten die Nachweisgrenze von ^{14}C unterschritten ist!

b) Im Jahr 1991 wurde in den Ötztaler Alpen von Wanderern die Gletschermumie „Ötzi“ entdeckt. Die ^{14}C-Methode ergab, dass bereits 47 % ± 0,5 % der ursprünglich vorhandenen ^{14}C-Atome zerfallen waren (d. h., das Messverfahren hat einen Fehler von ± 0,5 % der in der frischen Probe vorhandenen Anzahl an ^{14}C-Atomen).
Berechnen Sie ein Intervall für das Alter der Gletschermumie zum Zeitpunkt ihres Auffindens!

Angenommen, Ötzi wäre nicht im Jahr $t_1 = 1991$, sondern zu einem späteren Zeitpunkt t_2 gefunden worden.
Geben Sie an, welche Auswirkung auf die Breite des für das Alter der Gletschermumie ermittelten Intervalls dies hat (den gleichen Messfehler vorausgesetzt)!
Begründen Sie Ihre Aussage anhand der unten abgebildeten Grafik!



c) $N(t)$ beschreibt die Anzahl der ^{14}C-Atome zum Zeitpunkt t.
Interpretieren Sie $N'(t)$ im Hinblick auf den radioaktiven Zerfallsprozess!

Nach den Gesetzmäßigkeiten des radioaktiven Zerfalls zerfällt pro Zeiteinheit ein konstanter Prozentsatz p der vorhandenen Menge an ^{14}C-Atomen.
Welche der folgenden Differenzengleichungen beschreibt diese Gesetzmäßigkeit? Kreuzen Sie die zutreffende Differenzengleichung an!

$N(t+1) - N(t) = p$	☐
$N(t+1) - N(t) = -p$	☐
$N(t+1) - N(t) = p \cdot t$	☐
$N(t+1) - N(t) = -p \cdot t$	☐
$N(t+1) - N(t) = p \cdot N(t)$	☐
$N(t+1) - N(t) = -p \cdot N(t)$	☐

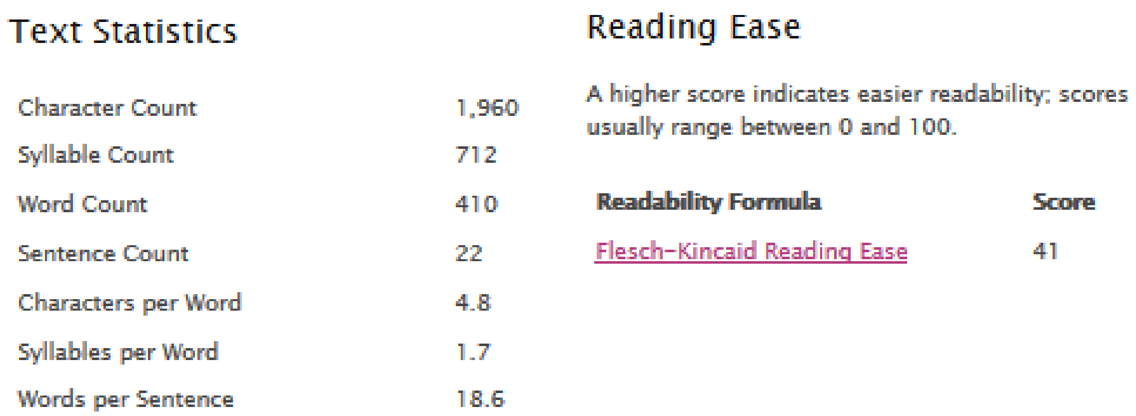
Allgemeine Parameter:

	Word	LIX	RE
Wortanzahl:	359	339	410
Zeichenanzahl:	2176	–	1960
Satzanzahl:	–	21	22
durchschnittliche Wortlänge:	6,1	–	4,8
durchschnittliche Satzlänge:	17	16	18,6
durchschnittliche Lesezeit $[Min]$:	1,2	1,13	1,37
Seitenzahl:	2		

Anmerkung: Die Satzanzahl variiert bei dieser Auswertung, da RE die Differenzengleichungen am Ende der Aufgabe als einen Satz zählt, die tatsächliche Satzanzahl beträgt 21.

Lesbarkeitsindizes

Die Berechnung des *Reading-Ease-Index* ergibt einen Wert von 41, was einem „normal“ schwierigen Text (RE zwischen 40 und 50) gleichkommt.


Text Statistics

Character Count	1,960
Syllable Count	712
Word Count	410
Sentence Count	22
Characters per Word	4.8
Syllables per Word	1.7
Words per Sentence	18.6

Reading Ease

A higher score indicates easier readability; scores usually range between 0 and 100.

Readability Formula	Score
Flesch-Kincaid Reading Ease	41

Abbildung 4.8: Reading-Ease-Auswertung von Aufgabe 2 laut `https://readability-score.com/`

Entfernt man den falsch gezählten „Satz“ (Die Formeln am Ende der Aufgabe), so ergibt sich eine Wortanzahl von 375, eine durchschnittliche Satzlänge von 17.9 und daraus als Wert für den RE 36, was einem „anspruchsvollen“ Text entspricht. Da die obige Auswertung mit dem Ergebnis 41 bereits sehr nahe der Grenze zu „anspruchsvoll“ liegt, kann insgesamt also wohl von einem „eher anspruchsvollen“ Text gesprochen werden.

Für den *LIX* ergibt sich 49.92 („mittlere Komplexität“) – siehe Abb. 4.9.

Anzahl an Wörtern	Anzahl an Sätzen	Durch-schnittliche Satzlänge	Anteil langer Wörter	Lesbarkeits-index (LIX)	Komplexi-tät
339	21	16 Wörter	33.92 %	49.92	mittel

Abbildung 4.9: LIX von Aufgabe 2 laut `http://www.psychometrica.de/lix.html`

Satzbau

Aufgabe 2 enthält bei 21 Sätzen zwölf einfache Hauptsätze und neun zusammengesetzte Sätze. Mit einer durchschnittlichen Satzlänge von 18.6 Wörtern pro Satz bewegt sich die Satzlänge im Bereich eines „normal Textes“ (vgl. Abb. 4.1 – Satzlänge zwischen 17 und 21). Eine genauere Satzanalyse zeigt jedoch, dass die Sätze teilweise recht komplex sind: Bei den einfachen Hauptsätzen gibt es vier Sätze, die nach dem Schema Subjekt – Prädikat – Objekt aufgebaut sind und demnach kurz und leicht verständlich sind. Darüber hinaus gibt es vier einfache Hauptsätze, die noch einige wenige zusätzliche Objekte (z.B. Ort- oder Zeitangaben) enthalten, somit etwas länger aber immer noch leicht nachvollziehbar sind. Schließlich gibt es noch drei einfache Hauptsätze, die in ihren Satzgliedern Erweiterungen bzw. Partizip-Konstruktionen enthalten, welche wesentliche Informationen beinhalten (z.B.: „die Anzahl der *noch vorhandenen* C-14-Atome“ im vierten Satz oder „der *in der frischen Probe vorhandenen Anzahl“* im zwölften Satz) und Bezug auf einen anderen Teil des Satzes nehmen. Verknüpft mit der inhaltlichen Komponente der Sätze gehen vor allem diese drei (Satz 4, 12 und 9) über die Komplexität eines „normalen Textes“ hinaus und können durchaus als anspruchsvoll bezeichnet werden.
Teilweise könnte der Satzbau vereinfacht werden, indem man manche Satzglieder weglässt, ohne wichige Informationen zu verlieren: Im Satz *„Nach den Gesetzmäßigkeiten des radioaktiven Zerfalls zerfällt pro Zeiteinheit ein konstanter Prozentsatz p der vorhandenen Menge an C-14-Atomen.“* könnte man etwa auf *„Pro Zeiteinheit zerfällt ein konstanter Prozentsatz p der vorhandenen Menge an C-14-Atomen.“* verkürzen, ohne den Sinn grob zu verändern.

Bei den Satzgefügen gibt es vier, die nur aus jeweils zwei Teilsätzen bestehen und beim Lesen einfach „der Reihe nach“ ausgewertet werden können. Diese stellen keine große Herausforderung für das Verständnis dar. Weiters gibt es drei Satzgefüge mit drei oder vier Teilsätzen (Satz 2, 3 und 5). Die Sätze 2 und 3 sind zwar lang, die Information ihrer einzelnen Teilsätze kann aber gut nacheinander ausgewertet werden, nur aufgrund ihrer Länge besteht also nicht unbedingt erhöhte Schwierigkeit. Bei Satz 5 ist dies nicht mehr so einfach:
„Für diese Anzahl $N(t)$ der C-14-Atome t Jahre nach dem Tod des Organismus gilt daher näherungsweise die Gleichung $N(t) = N_0 e^{-\lambda \cdot t}$, wobei N_0 die Anzahl der C-14-Atome zum Zeitpunkt t=0 angibt und die Zerfallskonstante für C-14 den Wert $\lambda = 1,21 \cdot 10^{-4}$ pro Jahr hat.“.
Abgesehen davon, dass der Satz viele fachsprachliche Elemente enthält, finden sich einerseits viele Erweiterungen (z.B. „Für diese Anzahl $N(t)$ *der C-14-Atome t Jahre nach dem Tod des Organismus* gilt [...]“) weiters nimmt der weiterführende Nebensatz Bezug auf die zuvor gegebenen Informationen. Der Satz gestaltet sich in seinem Aufbau sehr dicht und ist dadurch insgesamt eher schwierig zu verstehen. Ein Aufteilen auf mehrere Sätze würde eine erhebliche Erleichterung mit sich bringen, möglich wäre z.B.:
„N(t) beschreibt die Anzahl der C-14-Atome t Jahre nach dem Tod des Organismus. Für diese Anzahl gilt die Gleichung $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. N_0 beschreibt dabei die Anzahl der C-14-Atome zum Zeitpunkt t=0 und die Zerfallskonstante für C-14 hat den Wert $\lambda = 1,21 \cdot 10^{-4}$ pro Jahr.“
Auch Satz 15 ist eher komplex:
„Geben Sie an, welche Auswirkung auf die Breite des für das Alter der Gletschermumie ermittelten Intervalls dies hat (den gleichen Messfehler vorausgesetzt)!“
Das Satzgefüge an sich ist dabei nicht für die Komplexität verwantwortlich, aber das Attribut *„des für das Alter der Gletschermumie ermittelten Intervalls“* erschwert den Lesefluss. Bereits eine Reduzierung auf *„des zuvor ermittelten Intervalls“* würde eine wesentliche Vereinfachung darstellen. Weiters nimmt der Satz Bezug auf den vorhergehenden Satz (*„dies“* bezieht sich auf die im vorigen Satz genannte Änderung des Fundjahres) und die in Klammer hinzugefügte Anmerkung, die man auch als weiteren Teilsatz interpretieren könnte, erhöht die Komplexität des Satzes zusätzlich.
Insgesamt gibt es also zumindest vier Sätze bzw. Satzgefüge, bei denen man von einem komplexen Satzbau sprechen kann. Gleichzeitig hält sich die Zahl der einfach gebauten Sätze in Grenzen. Eine Einschätzung des Textes aus Sicht des Satzbaus als „schwierig“ scheint also durchaus plausibel.

Fremdwörter

Da sich die Aufgabe thematisch im Bereich der Biologie bzw. Chemie bewegt, kommen natürlich Fachbegriffe aus diesen beiden Wissenschaften vor. Sie sind aber nicht dermaßen spezifisch, dass sie nicht Teil des Wortschatzes eines Maturanten bzw. einer Maturantin sein sollten. Noch dazu ist „Ötzi" ein recht bekanntes und somit vermutlich anregendes Thema. Dennoch macht es natürlich einen Unterschied, ob es sich um einen ganz simplen Kontext mit Situationen oder Anwendungen aus dem Alltag oder um eine Aufgabe aus dem Bereich einer anderen Wissenschaft handelt. Gerade im vorliegenden Aufgabentext ist auch die Dichte an Fachbegriffen und -phrasen, zusätzlich auch noch aus dem Bereich der Mathematik, sehr hoch.
Der Anteil an „unüblichen" Wörtern ist in dieser Aufgabe ebenso recht hoch. Insgesamt haben 27 Wörter im Online-Duden eine Häufigkeitsbewertung von 1 oder 2. Es handelt sich dabei neben Fachbegriffen auch häufig um anscheinend selten verwendete Wörter der Alltagssprache:
Häufigkeit 1 von 5: Zerfallskonstante, (Radiokohlenstoffdatierung, C-14-Methode, kohlenstoffhaltig, Gletschermumie)
Häufigkeit 2 von 5: Altersbestimmung, abgestorben, (Zerfallsgesetz), exponentiell, Kohlenstoff, näherungsweise, Gleichung, Kohlenstoffatom, Tausendstel, Halbwertszeit, Nachweisgrenze, unterschritten, (Ötztaler Alpen), Messverfahren, Intervall, (Auffinden), angenommen, Messfehler, Hinblick, Zerfallsprozess, Gesetzmäßigkeit, (Differenzengleichung)[2]
Die genannten Wörter sollten zwar alle Teil des Sprachschatzes eines gebildeten Menschen sein, insofern keine große Erschwernis beim Lesen darstellen. Dennoch ist die hohe Dichte der Fachwörter bzw. unüblichen Wörter auffällig, weshalb der Aufgabentext von der Wortwahl her im mittleren Schwierigkeitsbereich angesiedelt werden kann.

Wesentliches/Unwesentliches

Eigentlich würde es zum Lösen der Aufgabe reichen, wenn man erst ab dem Satz, der die Formel des Zerfallsgesetzes enthält, zu lesen beginnt. Alle Informationen zuvor beschreiben zwar die Umstände, unter denen das Zerfallsgesetz gilt, können aber zum Lösen der Fragestellung vernachlässigt werden. In Abb. 4.10 sieht man die unwesentlichen Textstellen grau hinterlegt.

[2] für die eingeklammerten Wörter gilt: Das Wort selbst findet sich nicht im Online-Duden, jedoch haben Wortteile eine Bewertung von 1 oder 2, weshalb davon ausgegangen werden kann, dass die Häufigkeit des zusammengesetzten Wortes eher niedriger ist.

Altersbestimmung

Die Radiokohlenstoffdatierung, auch ^{14}C-Methode genannt, ist ein Verfahren zur Altersbestimmung von kohlenstoffhaltigen Materialien.
Das Verfahren beruht darauf, dass in abgestorbenen Organismen die Menge an gebundenen radioaktiven ^{14}C-Atomen gemäß dem Zerfallsgesetz exponentiell abnimmt, während der Anteil an ^{12}C-Atomen gleich bleibt.
Lebende Organismen sind von diesem Effekt nicht betroffen, da sie ständig neuen Kohlenstoff aus der Umwelt aufnehmen, sodass der ^{14}C-Anteil nahezu konstant bleibt und somit auch das Verhältnis zwischen ^{14}C und ^{12}C.
Die Anzahl der noch vorhandenen ^{14}C-Atome in einem abgestorbenen Organismus wird durch die Funktion N beschrieben.
Für diese Anzahl $N(t)$ der ^{14}C-Atome t Jahre nach dem Tod des Organismus gilt daher näherungsweise die Gleichung $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, wobei N_0 die Anzahl der ^{14}C-Atome zum Zeitpunkt t=0 angibt und die Zerfallskonstante für ^{14}C den Wert $\lambda = 1{,}21 \cdot 10^{-4}$ pro Jahr hat.
Eine frische Probe enthält pro Billion (10^{12}) Kohlenstoffatomen nur ein ^{14}C-Atom.
Die Nachweisgrenze von $_{14}C$ liegt bei einem Atom pro Billiarde (10^{15}) Kohlenstoffatomen (also einem Tausendstel der frischen Probe).

Aufgabenstellung:
a) Berechnen Sie die Halbwertszeit von ^{14}C! Zeigen Sie, dass nach zehn Halbwertszeiten die Nachweisgrenze von ^{14}C unterschritten ist!
b) Im Jahr 1991 wurde in den Ötztaler Alpen von Wanderern die Gletschermumie „Ötzi" entdeckt.
Die ^{14}C-Methode ergab, dass bereits 47 % ± 0,5 % der ursprünglich vorhandenen ^{14}C–Atome zerfallen waren (d.h., das Messverfahren hat einen Fehler von ± 0,5 % der in der frischen Probe vorhandenen Anzahl an ^{14}C-Atomen).
Berechnen Sie ein Intervall für das Alter der Gletschermumie zum Zeitpunkt ihres Auffindens!
Angenommen, Ötzi wäre nicht im Jahr t_1 = 1991, sondern zu einem späteren Zeitpunkt t_2 gefunden worden. Geben Sie an, welche Auswirkung auf die Breite des für das Alter der Gletschermumie ermittelten Intervalls dies hat (den gleichen Messfehler vorausgesetzt)! Begründen Sie Ihre Aussage anhand der unten abgebildeten Grafik!
c) $N(t)$ beschreibt die Anzahl der ^{14}C-Atome zum Zeitpunkt t. Interpretieren Sie $N'(t)$ im Hinblick auf den radioaktiven Zerfallsprozess!
Nach den Gesetzmäßigkeiten des radioaktiven Zerfalls zerfällt pro Zeiteinheit ein konstanter Prozentsatz p der vorhandenen Menge an ^{14}C-Atomen.
Welche der folgenden Differenzengleichungen beschreibt diese Gesetzmäßigkeit? Kreuzen Sie die zutreffende Differenzengleichung an!
$N(t+1) - N(t) = p$
$N(t+1) - N(t) = -p$
$N(t+1) - N(t) = p \cdot t$
$N(t+1) - N(t) = -p \cdot t$
$N(t+1) - N(t) = p \cdot N(t)$
$N(t+1) - N(t) = -p \cdot N(t)$

Abbildung 4.10: Für die Aufgabenlösung unwesentliche Textstellen (grau hinterlegt)

Auffällig ist, dass sie sich bis auf einen Satz alle am Beginn des Aufgabentextes befinden. Insofern können sie leicht „herausgefiltert" werden und stellen keine Erschwernis für das Lösen der Aufgabe dar. Der Satz *„Eine frische Probe enthält pro Billion (*10^{12}*) Kohlenstoffatomen nur ein C-14-Atom."* enthält Informationen über N_0, die eigentlich auch nicht benötigt werden, aber vielleicht für Verwirrung sorgen könnten. Die Angabe „ein Tausendstel der frischen Probe" (=N_0) würde für die Lösung von a) reichen.

Insgesamt sind damit 102 von 359 Wörtern „unwesentlich“ für die Aufgabenlösung, das sind etwa 28% des Textes.

Anregende Zusätze

Das Thema Altersbestimmung mittels Radiokohlenstoffdatierung entspringt zwar nicht der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler, ist aber ein Thema, das in der Schule vermutlich einmal zur Sprache gekommen ist. Insofern sollte es geläufig sein und vielleicht sogar einen anregenden Kontext für den Aufgabenkreis Zerfallsprozesse darstellen. Natürlich stellen die damit verbundenen Fachausdrücke aber – wie bereits oben erwähnt – eine gewisse Erschwernis für das Textverständnis dar.
Im Bereich der Graphiken und Abbildungen findet sich eine Abbildung des Funktionsgraphen der Zerfallsfunktion mit dem Zeitintervall $[t_1, t_2]$. In einer Frage wird explizit auf den Graphen Bezug genommen, insofern ist die Abbildung äußerst hilfreich, da die Schülerinnen und Schüler nicht selbst eine Skizze anhand der gegebenen Exponentialfunktion anfertigen müssen.

Fachsprachliche Merkmale

Fachvokabular:
Die mathematischen Fachbegriffe bei Aufgabe 2 stammen großteils aus dem Umkreis der Zerfallsprozesse bzw. der funktionalen Abhängigkeiten: *Zerfallsgesetz, exponentiell, Funktion, Gleichung, Zerfallskonstante, Halbwertszeit, Intervall, Messfehler, konstanter Prozentsatz, Differenzengleichung.* Sie sollten jedem Schüler bzw. jeder Schülerin auf Maturaniveau geläufig sein.

Symbolsprache:
Symbole und Formeln beschränken sich auf die Variablen zur Bezeichnung der Zerfallsfunktion, die Exponentialfunktion selbst, ihre Ableitung und einige Zahlen- und Prozentwerte. Weiters ist eine Reihe von Differenzengleichungen angegeben. In der letzten Fragestellung muss die richtige Gleichung zu einem zuvor wörtlich formulierten Zusammenhang gefunden werden. Es gilt hierbei richtig zuzuordnen:
ein konstanter Prozentsatz p der vorhandenen Menge: $\rightarrow p \cdot N(t)$
pro Zeiteinheit $\rightarrow$ die Antwort muss $\cdot t$ enthalten
Zerfallsprozess $\rightarrow$ negatives Vorzeichen, da $N(t) > N(t+1)$

Im Verhältnis zur Länge der Aufgabe ist der Anteil an Formeln und Symbolsprache eher gering, es handelt sich um Ausdrücke, die alle häufig im Unterricht vorkommen. Wie bereits angesprochen, ist vor allem bei der letzten Fragestellung, der Zuordnung der richtigen Differenzengleichung, ein genaues Interpretieren der Terme gefragt, da es hier auf Details ankommt, um die richtige Lösung zu finden. Demnach muss die Bedeutung der einzelnen Zeichen wirklich verstanden worden sein.

Weitere fachsprachliche Besonderheiten:
Zusätzlich zu Fachbegriffen und Symbolen treten einige Phrasen auf, die wesentliche mathematische Informationen vermitteln und entsprechend gedeutet werden müssen. Teilweise sind diese Formulierungen aber im Endeffekt für das Lösen der Aufgabe nicht relevant, da z.B. die Gleichung zu einem zuvor wörtlich formulierten Zusammenhang ebenfalls angegeben ist. Solche Phrasen wären etwa:
„die Menge nimmt gemäß dem Zerfallsgesetz exponentiell ab“
„der Anteil an C-12-Atomen bleibt gleich“
„der C-14-Anteil bleibt konstant“
„somit auch das Verhältnis zwischen ...“
„pro Billion“ bzw. „pro Billiarde“ bzw. „ein Tausendstel von“
„47% $\pm 0,5\%$ *der ursprünglich vorhandenen Menge“*
„$\pm 0,5\%$ *der [...] Anzahl“*
„Auswirkung auf die Breite“ → hier ist eine Beschreibung der Änderung gefragt, nicht das neue Intervall!
„zerfällt pro Zeiteinheit ein konstanter Prozentsatz p der vorhandenen Menge“

Außerdem bilden Satz 14 und 15 eine Kombination, wie sie in der Alltagssprache wohl eher nicht auftreten würde: *„Angenommen, Ötzi wäre nicht im Jahr* $t_1 = 1991$*, sondern zu einem späteren Zeitpunkt* t_2 *gefunden worden. Geben Sie an, welche Auswirkung auf die Breite des für das Alter der Gletschermumie ermittelten Intervalls dies hat (den gleichen Messfehler vorausgesetzt)!“*
Der erste Satz wirkt in gewissem Sinne „unvollständig“ und hat nur im Zusammenhang mit dem nachfolgenden Satz, der „Aufgabe“, die unter der genannten Annahme erfüllt werden soll, Sinn. In der Alltagssprache würde eine derartige Aussage wohl eher in einem Satz kombieniert auftreten, z.B. als Konditionalsatz: *„Geben Sie an, welche Auswirkung es auf die Breite des für das Alter der Gletschermumie ermittelten Intervalls hat, wenn Ötzi nicht im Jahr* $t_1 = 1991$*, sondern zu einem späteren Zeitpunkt* t_2 *gefunden worden*

wäre.“ Eine besondere Erschwernis sollte diese in gewissem Sinne „typisch mathematische“ Ausdrucksform aber eher nicht darstellen.

Altersbestimmung

Die Radiokohlenstoffdatierung, auch ^{14}C-Methode genannt, ist ein Verfahren zur Altersbestimmung von kohlenstoffhaltigen Materialien. Das Verfahren beruht darauf, dass in abgestorbenen Organismen die Menge an gebundenen radioaktiven ^{14}C -Atomen gemäß dem Zerfallsgesetz exponentiell abnimmt, während der Anteil an ^{12}C -Atomen gleich bleibt. Lebende Organismen sind von diesem Effekt nicht betroffen, da sie ständig neuen Kohlenstoff aus der Umwelt aufnehmen, sodass der ^{14}C -Anteil nahezu konstant bleibt und somit auch das Verhältnis zwischen ^{14}C und ^{12}C. Die Anzahl der noch vorhandenen ^{14}C-Atome in einem abgestorbenen Organismus wird durch die Funktion N beschrieben.
Für diese Anzahl $N(t)$ der ^{14}C-Atome t Jahre nach dem Tod des Organismus gilt daher näherungsweise die Gleichung $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, wobei N_0 die Anzahl der ^{14}C-Atome zum Zeitpunkt $t=0$ angibt und die Zerfallskonstante für ^{14}C den Wert $\lambda = 1{,}21 \cdot 10^{-4}$ pro Jahr hat.

Eine frische Probe enthält pro Billion (10^{12}) Kohlenstoffatomen nur ein ^{14}C-Atom.
Die Nachweisgrenze von $_{14}C$ liegt bei einem Atom pro Billiarde (10^{15}) Kohlenstoffatomen (also einem Tausendstel der frischen Probe).

Aufgabenstellung:
a) Berechnen Sie die Halbwertszeit von ^{14}C! Zeigen Sie, dass nach zehn Halbwertszeiten die Nachweisgrenze von ^{14}C unterschritten ist!

b) Im Jahr 1991 wurde in den Ötztaler Alpen von Wanderern die Gletschermumie „Ötzi“ entdeckt. Die ^{14}C -Methode ergab, dass bereits $47\,\% \pm 0{,}5\%$ der ursprünglich vorhandenen ^{14}C –Atome zerfallen waren (d.h., das Messverfahren hat einen Fehler von ±0,5% der in der frischen Probe vorhandenen Anzahl an ^{14}C-Atomen). Berechnen Sie ein Intervall für das Alter der Gletschermumie zum Zeitpunkt ihres Auffindens!
Angenommen, Ötzi wäre nicht im Jahr $t_1 = 1991$, sondern zu einem späteren Zeitpunkt t_2 gefunden worden. Geben Sie an, welche Auswirkung auf die Breite des für das Alter der Gletschermumie ermittelten Intervalls dies hat (den gleichen Messfehler vorausgesetzt)! Begründen Sie Ihre Aussage anhand der unten abgebildeten Grafik!

c) $N(t)$ beschreibt die Anzahl der ^{14}C-Atome zum Zeitpunkt t. Interpretieren Sie $N'(t)$ im Hinblick auf den radioaktiven Zerfallsprozess! Nach den Gesetzmäßigkeiten des radioaktiven Zerfalls zerfällt pro Zeiteinheit ein konstanter Prozentsatz p der vorhandenen Menge an ^{14}C -Atomen.
Welche der folgenden Differenzengleichungen beschreibt diese Gesetzmäßigkeit? Kreuzen Sie die zutreffende Differenzengleichung an!

$N(t+1) - N(t) = p$

$N(t+1) - N(t) = -p$

$N(t+1) - N(t) = p \cdot t$

$N(t+1) - N(t) = -p \cdot t$

$N(t+1) - N(t) = p \cdot N(t)$

$N(t+1) - N(t) = -p \cdot N(t)$

Abbildung 4.11: Fachsprachliche Elemente in Aufgabe 2: Fachbegriffe/-phrasen in gelb, Formeln/Symbolschreibweisen in rot

Bezieht man alle diese Phrasen in die Auswertung mit ein, so sind etwa 28% des Aufgabentextes fachsprachlich belegt, das sind 99 von 359 Wörter. In Abb. 4.11 sind Fachvokabular bzw. fachsprachliche Phrasen gelb und Symbolschreibweisen rot markiert.

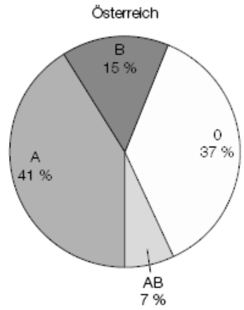
Zusammenfassung

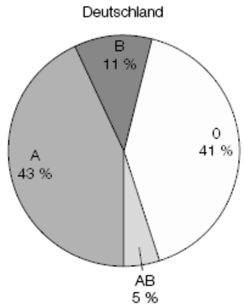
Betrachtet man alle Kriterien und vergleicht man vor allem mit Aufgabe 1 direkt davor, so wirkt der vorliegende Aufgabentext bereits recht komplex. Die Lesbarkeitsindizes liefern eine eher gemäßigte Einschätzung: Der Text bewegt sich im mittleren bis anspruchsvollen Bereich. Unter Einbeziehung der anderen Kriterien erscheint aber „anspruchsvoll" weit angemessener. Schon rein optisch handelt es sich um eine umfangreiche Aufgabe (zwei Seiten Angabe). Der Kontext ist ein recht spezifischer, insofern treten einige themenbezogene Fachtermini auf. In Kombination mit dem mathematischen Fachvokabular, das sich vom Schwierigkeitsgrad zwar in Grenzen hält, aber in Verbindung mit den fachsprachlichen Phrasen doch einen wesentlichen Teil des Textes ausmacht und „entschlüsselt" werden will, ergibt sich eine Erhöhung der Textschwierigkeit. Zusätzlich stellt ein recht komplexer Satzbau eine Herausforderung dar. Insofern kann man bei Aufgabe 2 auf jeden Fall von einem anspruchsvollen, ja sogar schwierigen Aufgabentext sprechen.

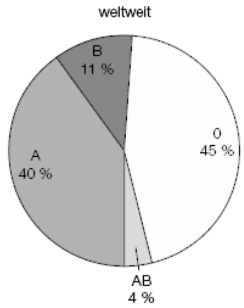
4.3.3 Aufgabe 3 – Blutgruppen

Die wichtigsten Blutgruppensysteme beim Menschen sind das AB0-System und das Rhesussystem. Es werden dabei die vier Blutgruppen A, B, AB und 0 unterschieden. Je nach Vorliegen eines bestimmten Antikörpers, den man erstmals bei Rhesusaffen entdeckt hat, wird bei jeder Blutgruppe noch zwischen *Rhesus-positiv* (+) und *Rhesus-negativ* (–) unterschieden. A– bedeutet z. B. Blutgruppe A mit Rhesusfaktor negativ.

In den nachstehenden Diagrammen sind die relativen Häufigkeiten der vier Blutgruppen in Österreich und Deutschland und im weltweiten Durchschnitt ohne Berücksichtigung des Rhesusfaktors dargestellt.







Die nachstehende Tabelle enthält die relativen Häufigkeiten der Blutgruppen in Deutschland und Österreich zusätzlich aufgeschlüsselt nach den Rhesusfaktoren.

	A+	A–	B+	B–	0+	0–	AB+	AB–
Deutschland	37 %	6 %	9 %	2 %	35 %	6 %	4 %	1 %
Österreich	33 %	8 %	12 %	3 %	30 %	7 %	6 %	1 %

Aufgrund von Unverträglichkeiten kann für eine Bluttransfusion nicht Blut einer beliebigen Blutgruppe verwendet werden. Jedes Kreuz (X) in der nachstehenden Tabelle bedeutet, dass eine Transfusion vom Spender zum Empfänger möglich ist.

	Spender							
Empfänger	0–	0+	B–	B+	A–	A+	AB–	AB+
AB+	X	X	X	X	X	X	X	X
AB–	X		X		X		X	
A+	X	X			X	X		
A–	X				X			
B+	X	X	X	X				
B–	X		X					
0+	X	X						
0–	X							

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Blutgruppe [26.11.2014]

Aufgabenstellung:

a) $\boxed{A}$ Geben Sie diejenigen Blutgruppen an, die laut der abgebildeten Diagramme sowohl in Österreich als auch in Deutschland häufiger anzutreffen sind als im weltweiten Durchschnitt!

Jemand argumentiert anhand der gegebenen Diagramme, dass die Blutgruppe B in Deutschland und Österreich zusammen eine relative Häufigkeit von 13 % hat.
Entscheiden Sie, ob diese Aussage richtig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

b) Eine in Österreich lebende Person X hat Blutgruppe A–.

Geben Sie anhand der in der Einleitung angeführten Daten und Informationen die Wahrscheinlichkeit an, mit der diese Person X als Blutspender/in für eine zufällig ausgewählte, in Österreich lebende Person Y geeignet ist!

Wie viele von 100 zufällig ausgewählten Österreicherinnen/Österreichern kommen als Blutspender/in für die Person X in Frage? Geben Sie für die Anzahl der potenziellen Blutspender/innen näherungsweise ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall mit 90 % Wahrscheinlichkeit an!

c) In einer österreichischen Gemeinde, in der 1 800 Einwohner/innen Blut spenden könnten, nahmen 150 Personen an einer freiwilligen Blutspendeaktion teil. Es wird angenommen, dass die Blutspender/innen eine Zufallsstichprobe darstellen. 72 Blutspender/innen hatten Blutgruppe A.

Berechnen Sie aufgrund dieses Stichprobenergebnisses ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den tatsächlichen (relativen) Anteil p der Einwohner/innen dieser Gemeinde mit Blutgruppe A, die Blut spenden könnten!

Die Breite des Konfidenzintervalls wird vom Konfidenzniveau (Sicherheitsniveau) und vom Umfang der Stichprobe bestimmt. Geben Sie an, wie jeweils einer der beiden Parameter geändert werden müsste, um eine Verringerung der Breite des Konfidenzintervalls zu erreichen! Gehen Sie dabei von einem unveränderten (gleichbleibenden) Stichprobenergebnis aus.

d) Blutgruppenmerkmale werden von den Eltern an ihre Kinder weitervererbt. Dabei sind die Wahrscheinlichkeiten in der nachstehenden Tabelle angeführt.

Blutgruppe der Eltern	mögliche Blutgruppe des Kindes			
	A	B	AB	0
A und A	93,75 %	–	–	6,25 %
A und B	18,75 %	18,75 %	56,25 %	6,25 %
A und AB	50 %	12,5 %	37,5 %	–
A und 0	75 %	–	–	25 %
B und B	–	93,75 %	–	6,25 %
B und AB	12,5 %	50 %	37,5 %	–
B und 0	–	75 %	–	25 %
AB und AB	25 %	25 %	50 %	–
AB und 0	50 %	50 %	–	–
0 und 0	–	–	–	100 %

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/AB0-System [26.11.2014]

Eine Frau mit Blutgruppe A und ein Mann mit Blutgruppe 0 haben zwei (gemeinsame) leibliche Kinder.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder die gleiche Blutgruppe haben!

Ein Kind aus der Nachbarschaft dieser Familie hat Blutgruppe 0.
Gibt es eine Blutgruppe bzw. Blutgruppen, die der leibliche Vater dieses Kindes sicher nicht haben kann? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der gegebenen Daten!

Allgemeine Parameter

	Word	LIX	RE
Wortanzahl:	455	435	473
Zeichenanzahl:	2961	–	2808
Satzanzahl:	–	29	29
durchschnittliche Wortlänge:	6.5	–	5.9
durchschnittliche Satzlänge:	16.25	15	16.3
durchschnittliche Lesezeit [Min]:	1.5	1.4	1.6
Seitenzahl:	3		

Lesbarkeitsindizes

Die Auswertung des *LIX* ergibt, wie in Abb. 4.12 ersichtlich, einen Wert von 54.54, was einem Text „mittlerer Komplexität“ entspricht.

Anzahl an Wörtern	Anzahl an Sätzen	Durch- schnittliche Satzlänge	Anteil langer Wörter	Lesbarkeits- index (LIX)	Komplexi- tät
435	29	15 Wörter	39.54 %	54.54	mittel

Abbildung 4.12: LIX von Aufgabe 3 laut `http://www.psychometrica.de/lix.html`

Die Ergebnisse beim *Reading-Ease-Wert* sind in Abb. 4.13 zu sehen. Es ergibt sich ein Wert von 27.5, was nach Mihm einem „schwierigen“ Text entspricht.

Text Statistics

Character Count	2,808
Syllable Count	910
Word Count	473
Sentence Count	29
Characters per Word	5.9
Syllables per Word	1.9
Words per Sentence	16.3

Reading Ease

A higher score indicates easier readability; scores usually range between 0 and 100.

Readability Formula	Score
Flesch-Kincaid Reading Ease	27.5

Abbildung 4.13: Reading-Ease-Auswertung von Aufgabe 3

Satzbau

Die vorliegende Aufgabe ist mit 29 Sätzen und 455 Wörtern mit Abstand die längste Aufgabe des zweiten Aufgabenhefts. Die durchschnittliche Satzlänge beträgt etwa 16 Wörter pro Satz, was einem „einfachen Text“ (14-17 Wörter pro Satz) entspricht. (vgl. Abb. 4.1)

Betrachtet man den Aufbau der Sätze genauer, so ergibt sich folgendes Bild: Von den 29 Sätzen sind zwölf Satzgefüge, die restlichen siebzehn sind einfache Hauptsätze. Die einfachen Hauptsätze treten in verschiedener Komplexität auf. So sind drei Sätze nach dem Schema Subjekt-Prädikat-Objekt aufgebaut (Satz 4, 12 und 18), elf weitere enthalten noch ein bis zwei zusätzliche Objekte oder beinhalten eine einfache Aufzählung. Diese Sätze sind wenig komplex und leicht verständlich. Die anderen einfachen Hauptsätze gestalten sich jedoch komplizierter: Dies liegt zumeist am Auftreten langer Satzglieder mit vielen Ergänzungen, die das Erfassen der Satzaussage erschweren.

Auch bei den Satzgefügen gibt es sowohl simple als auch komplexe Konstruktionen: Sechs Satzgefüge stellen einfache Zusammensetzungen, wie z.B. mit einem Relativsatz, dar und enthalten wenige Attribute. Sie sind eher kurz und können Schritt für Schritt erfasst werden. Zwei weitere Satzgefüge haben mittlere Schwierigkeit, da sie eingeschobene Nebensätze enthalten, die eine gewisse Hinderung des Leseflusses darstellen, insbesondere da die Einschübe jeweils nicht unbedingt von Belang sind:

„Je nach Vorliegen eines bestimmten Antikörpers, [den man erstmals bei Rhesusaffen entdeckt hat], wird bei jeder Blutgruppe noch zwischen Rhesus-positiv (+) und Rhesus-negativ (–) unterschieden.“ bzw. *„In einer österreichischen Gemeinde, [in der 1 800 Einwohner/innen Blut spenden könnten], nahmen 150 Personen an einer freiwilligen Blutspendeaktion teil.“*

Die eingeklammerten Einschübe unterbrechen die Aussage der Sätze und erschweren so das Leseverständnis.

Schließlich treten noch vier eher schwierige Satzgefüge auf, bei denen es sich interessanterweise in allen Fällen um Imperativsätze handelt (Satz 9, 13, 19 und 21). Zwar können diese Sätze „Schritt für Schritt“ gelesen werden, viele und lange Attribute, somit lange Satzglieder, stellen jedoch eine Schwierigkeit beim Lesen dar. Da es sich zusätzlich bei diesen Sätzen um eine zu beantwortende Fragestellung handelt, ist es essentiell deren Aussage zu verstehen. Die hohe Komplexität gerade dieser Sätze stellt also eine besondere Erschwernis für das Lösen der Aufgabe dar.

Insgesamt treten mit 19 von 29 Sätzen überwiegend leicht verständliche Sätze in dieser

Aufgabe auf. Da die schwierigen Sätze allerdings in gewissem Sinne „Schlüsselpositionen“ einnehmen, kommt ihnen viel Gewicht zu. Demnach ist der Aufgabentext aus Sicht des Satzbaues wohl eher auf der mittleren bis schwierigen Seite einzuordnen.

Fremdwörter

Bedingt durch den Kontext der Aufgabe kommen einige Fachbegriffe aus der Biologie vor, wie etwa *„Rhesus-Faktor“*, *„AB0-System“*, *„Antikörper“*, etc. Das Themengebiet sollte für einen Maturanten bzw. eine Maturantin aber nicht vollkommen unbekannt sein. Insgesamt ist der Anteil an „unüblichen“ Wörtern (Häufigkeit in der deutschen Sprache kleiner oder gleich 2 von 5 bzw. nicht im Online-Duden verzeichnet) bei dieser Aufgabe aber recht hoch. Dies liegt u.a. aber auch daran, dass sich manche Wörter oft wiederholen (z.B. *„Blutgruppe“*). Bei den „unüblichen“ Wörtern handelt es sich zumeist um Fachbegriffe aus der Biologie oder Mathematik, eher selten um Fremdwörter der deutschen Sprache:
Häufigkeit 2 von 5: Blutgruppensysteme, Blutgruppe, Antikörper, Rhesusaffe, nachstehend, Diagramm, aufgeschlüsselt, Unverträglichkeit, Bluttransfusion, Transfusion, Blutspender/in, näherungsweise, symmetrisch, Intervall, Stichprobe, gleichbleibend, weitervererbt, leiblich
Häufigkeit 1 von 5: Rhesusfaktor
nicht im Online-Duden: AB0-System, Rhesus-System, rhesus-positiv, rhesus-negativ, Erwartungswert, Blutspendeaktion, Zufallsstichprobe, Stichprobenergebnis, Konfidenzintervall, Konfidenzniveau, Sicherheitsniveau

Insgesamt kommen 33 verschiedene „unübliche“ Wörter vor.[3] Zählt man die Wortwiederholungen mit, so sind 65 der 455 Wörter „unüblich“, das sind rund 14% des Textes. Im Vergleich dazu liegt der Anteil an unüblichen Wörtern bei den anderen Aufgaben stets im einstelligen Prozentbereich. Auch wenn sich einige Fremdwörter wiederholen und thematisch durchaus im Wissensbereich einer Maturantin bzw. eines Maturanten liegen sollten, so ist Aufgabe 3 hinsichtlich der hohen Dichte an Fremdwörtern im mittleren Schwierigkeitsbereich anzusiedeln.

[3] Beschriftungen innerhalb der Tabellen/Diagramme wurden hier mitgezählt.

Wesentliches/Unwesentliches

Bei dieser Aufgabe ist es schwierig für die Lösung wesentliche und unwesentliche Textstellen zu trennenn, da viele Textteile wichtige Informationen über die danach folgenden Daten beinhalten. So könnte zwar Aufgabe a) auch nur anhand der Fragestellung und der Beschriftung direkt an den Tortendiagrammen richtig gelöst werden. Dennoch ist die Beschreibung der Diagramme eine wesentliche Hilfe bei der richtigen Deutung. Dies lässt sich auch auf die anderen Diagramme bzw. Tabellen übertragen, weiters auch auf den einleitenden Text. Insbesondere bei der Tabelle zur Spender-Empfänger-Verträglichkeit ist die richtige Deutung der Kreuze ohne erklärenden Text um einiges schwieriger als mit Erklärung. Bei der Auswertung werden also die Grafiken erläuternde Textstellen als „wesentlich“ gedeutet, auch wenn die Aufgabe unter Umständen auch ohne diese Erklärungen gelöst werden könnten. Die Aufgabeneinführung hingegen wird als unwesentlich angesehen, da die Beschreibungen der Grafiken ausreichen sollten, um den Kontext zu verdeutlichen. In Aufgabe c) handelt es sich bei der Angabe der Gesamteinwohnerzahl um eine eigentlich überflüssige Zahlenangabe, die eine Erschwernis darstellen könnte.
Damit wären 67 von 455 Wörtern im Text unwesentlich für das Lösen der Aufgabe. Das sind etwa 15%, was im Vergleich mit den anderen Aufgaben eher wenig ist.
Zusätzlich zum Text können natürlich auch Informationen in den Tabellen bzw. Diagrammen „überflüssig“ sein. Dies ist bei der ersten Tabelle der Fall: Die Daten für Deutschland sind für die Lösung der Aufgabe nicht notwendig und könnten zu Verwirrung bei den Schülerinnen und Schülern führen. Da aber ein wesentlicher Teil der Fragestellung das korrekte Ablesen von Daten aus Tabellen ist, sind derartige „Distraktoren“ wohl kein Wunder. In diesem Fall sollte die zusätzliche Zeile keine große Schwierigkeit darstellen.

Insgesamt lässt sich sagen, dass bei Aufgabe 3 nur wenig „ablenkende“ Textstellen vorkommen. Bei einer derartig langen Aufgabe bedeutet das aber natürlich auch, dass viel Text gelesen werden muss, der wichtig für das Bewältigen der Aufgabenstellung ist.

Anregende Zusätze

In Aufgabe 3 sind die graphischen Zusätze ein wesentlicher Bestandteil der Fragestellungen. Es gilt, Daten aus verschiedenen Darstellungsformen (Tortendiagramme und Tabellen) abzulesen. Da das Wiedergeben der Informationen aus den Tabellen in Textform aber höchst unübersichtlich wäre, stellen die Diagramme und Tabellen gleichzeitig

eine Erleichterung für das Lösen der Aufgabe dar.
Das Thema „Blutspenden“ wird im Aufgabentext aus verschiedenen Blickwinkeln (Häufigkeit verschiedener Blutgruppen, Spenderwahrscheinlichkeit, Vererbung) betrachtet und das Thema sollte den Schülerinnen und Schülern sowohl aus dem Unterricht aber vielleicht auch aus dem Alltag bekannt sein. Die gegebenen Statistiken könnten bei den Prüflingen sogar persönliches Interesse wecken (z.B.: „Wie häufig ist eigentlich meine Blutgruppe?“) Insofern kann von einem „anregenden Kontext“ im besten Sinne gesprochen werden. Man kann den Bereich „anregende Zusätze“ gemäß dem Hamburger Verständlichkeitskonzept also mit einem „+“ bewerten.

Fachsprachliche Merkmale

In der vorliegenden Aufgabe sind 54 von 455 Wörtern fachsprachlich belegt, das sind etwa 12% des Textes, was im Vergleich mit den anderen Aufgaben nur ein sehr geringer Anteil ist. In Abb. 4.14 sind die fachsprachlichen Begriffe/Phrasen gelb und Formel- und Symbolschreibweisen blau hinterlegt eingezeichnet.

Fachvokabular:
Es treten nur wenige Fachbegriffe auf, die naheliegenderweise großteils aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung stammen. Einige, wie z.B. *„Wahrscheinlichkeit“*, *„zufällig ausgewählt“*, *„Durchschnitt“* oder *„Stichprobe“* sind wohl auch aus der Alltagssprache bekannt. Andere sind typische „Vokabel“ des Mathematikunterrichts, wie etwa *„Erwartungswert“*, *„95%-Konfidenzintervall“* oder *„Sicherheitsniveau“*.
Insgesamt sollte das Fachvokabular bei dieser Aufgabe keine Erschwernis darstellen, da nur wenige Fachbegriffe auftreten und diese alle Teil des Schulunterrichts sind.

Symbolsprache:
Auch die Menge an Formel- und Symbolsprache ist bei dieser Aufgabe sehr klein: Es treten einige wenige Zahlen und Prozentangaben und nur eine Variable (p) als Bezeichnung für einen relativen Anteil, auf.

Weitere fachsprachliche Besonderheiten:
Auch was fachsprachliche Phrasen oder andere Merkmale der mathematischen Fachsprache betrifft, enthält diese Aufgabe nichts Auffälliges. Der geringe Anteil an Fachsprache kann nun einerseits eine Erleichterung beim Lesen darstellen. Andererseits ist es vielleicht auch ungewohnt, dass eine Aufgabe mit so wenig Fachsprache auskommt.

Blutgruppen

Die wichtigsten Blutgruppensysteme beim Menschen sind das AB0-System und das Rhesussystem. Es werden dabei die vier Blutgruppen A, B, AB und 0 unterschieden.
Je nach Vorliegen eines bestimmten Antikörpers, den man erstmals bei Rhesusaffen entdeckt hat, wird bei jeder Blutgruppe noch zwischen *Rhesus-positiv* (+) und *Rhesus-negativ* (–) unterschieden. A– bedeutet z. B. Blutgruppe A mit Rhesusfaktor negativ.
In den nachstehenden Diagrammen sind die relativen Häufigkeiten der vier Blutgruppen in Österreich und Deutschland und im weltweiten Durchschnitt ohne Berücksichtigung des Rhesusfaktors dargestellt.
Die nachstehende Tabelle enthält die relativen Häufigkeiten der Blutgruppen in Deutschland und Österreich zusätzlich aufgeschlüsselt nach den Rhesusfaktoren.
Aufgrund von Unverträglichkeiten kann für eine Bluttransfusion nicht Blut einer beliebigen Blutgruppe verwendet werden. Jedes Kreuz (X) in der nachstehenden Tabelle bedeutet, dass eine Transfusion vom Spender zum Empfänger möglich ist.

Aufgabenstellung:

a) A Geben Sie diejenigen Blutgruppen an, die laut der abgebildeten Diagramme sowohl in Österreich als auch in Deutschland häufiger anzutreffen sind als im weltweiten Durchschnitt!
Jemand argumentiert anhand der gegebenen Diagramme, dass die Blutgruppe B in Deutschland und Österreich zusammen eine relative Häufigkeit von 13 % hat.
Entscheiden Sie, ob diese Aussage richtig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

b) Eine in Österreich lebende Person *X* hat Blutgruppe A–. Geben Sie anhand der in der Einleitung angeführten Daten und Informationen die Wahrscheinlichkeit an, mit der diese Person *X* als Blutspender/in für eine zufällig ausgewählte, in Österreich lebende Person *Y* geeignet ist!
Wie viele von 100 zufällig ausgewählten Österreicherinnen/Österreichern kommen als Blutspender/in für die Person *X* in Frage?
Geben Sie für die Anzahl der potenziellen Blutspender/innen näherungsweise ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall mit 90% Wahrscheinlichkeit an!

c) In einer österreichischen Gemeinde, in der 1 800 Einwohner/innen Blut spenden könnten, nahmen 150 Personen an einer freiwilligen Blutspendeaktion teil. Es wird angenommen, dass die Blutspender/innen eine Zufallsstichprobe darstellen.
72 Blutspender/innen hatten Blutgruppe A. Berechnen Sie aufgrund dieses Stichprobenergebnisses ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den tatsächlichen (relativen) Anteil p der Einwohner/innen dieser Gemeinde mit Blutgruppe A, die Blut spenden könnten!
Die Breite des Konfidenzintervalls wird vom Konfidenzniveau (Sicherheitsniveau) und vom Umfang der Stichprobe bestimmt. Geben Sie an, wie jeweils einer der beiden Parameter geändert werden müsste, um eine Verringerung der Breite des Konfidenzintervalls zu erreichen! Gehen Sie dabei von einem unveränderten (gleichbleibenden) Stichprobenergebnis aus.

d) Blutgruppenmerkmale werden von den Eltern an ihre Kinder weitervererbt.
Dabei sind die Wahrscheinlichkeiten in der nachstehenden Tabelle angeführt.
Eine Frau mit Blutgruppe A und ein Mann mit Blutgruppe 0 haben zwei (gemeinsame) leibliche Kinder. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder die gleiche Blutgruppe haben!
Ein Kind aus der Nachbarschaft dieser Familie hat Blutgruppe 0. Gibt es eine Blutgruppe bzw. Blutgruppen, die der leibliche Vater dieses Kindes sicher nicht haben kann?
Begründen Sie Ihre Antwort anhand der gegebenen Daten!

Abbildung 4.14: Fachsprachliche Ausdrücke in Aufgabe 3 (Fachbegriffe/-phrasen gelb, Formeln/Symbole blau)

Neben der Sprache gilt es bei Aufgabe 3 aber noch andere Darstellungsformen zu entschlüsseln: Tortendiagramme und Tabellen. Wie bereits erwähnt, stellt die Aufbereitung der Daten in graphischer bzw. tabellarischer Form einerseits eine Erleichertung dar. Andererseits müssen diese Darstellungsweisen auch beherrscht werden. Einige Unterpunkte dieser Aufgabe können durch reines Ablesen beantwortet werden. Die Fähigkeit Tabellen und Tortendiagramme richtig zu lesen und zu deuten ist also äußerst wesentlich, die Aufgabe zielt eindeutig auch auf diese Kompetenz ab. Die dargestellten Zahlen müssen dabei auch mit ihrem „mathematischen Zustandekommen“ verknüpft werden, wie etwa in Unterpunkt a) – relative Häufigkeit in Deutschland und Österreich zusammen. Die Tabellen/Diagramme sind gut in den Text eingebettet und mit Erläuterungen versehen, was ihre Interpretation erleichtert.

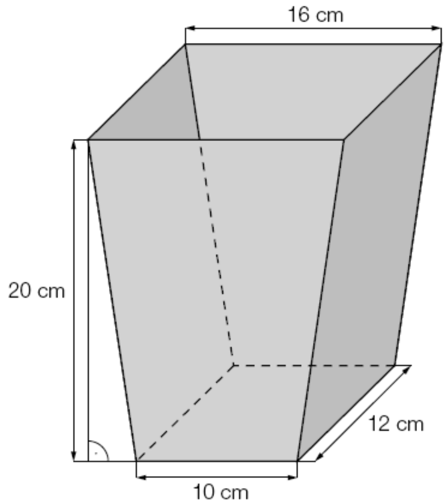
Insgesamt kann aufgrund des geringen fachsprachlichen Anteils, da keine völlig neuen Fachbegriffe verwendet werden, keine komplexe Symbolsprache auftritt und auch die Auswertung der Tortendiagramme und Tabellen keine besonderen Schwierigkeiten birgt, die Aufgabe als fachsprachlich einfach eingestuft werden.

Zusammenfassung

Betrachtet man alle Kriterien, so wird deutlich, dass bei dieser Aufgabe der fachsprachliche und der allgemeinsprachliche Anspruch auseinanderklaffen. Nach den Lesbarkeitsindizes handelt es sich um einen mittleren bis schwierigen Text, die Analyse des Satzbaues bestätigt dieses Bild und es treten viele Fremdwörter und „unübliche“ Wörter auf. Die mathematische Fachsprache bewegt sich allerdings stets im Bereich der „Schulsprache“ und stellt auch nur einen kleinen Teil des Textes dar, Symbolsprache tritt so gut wie gar nicht auf. Der gegebene Kontext bettet die Fragestellungen und auch die Tabellen und Diagramme in ein anregendes Umfeld, das das Verständnis befördern kann. Die verschiedenen Faktoren halten sich also die Waage. Es bleibt die vergleichsweise große Länge des Aufgabentextes: Bis zur Aufgabenstellung allein ist eine ganze Seite Information zu erfassen. Weiters beinhaltet so gut wie jeder Satz wichtige Inhalte. Insofern scheint eine Einordnung des Aufgabentextes bei einem mittleren Schwierigkeitsgrad als gerechtfertigt.

4.3.4 Aufgabe 4 – Füllen eines Gefäßes

Der Innenraum eines 20 cm hohen Gefäßes hat in jeder Höhe h eine rechteckige, horizontale Querschnittsfläche. Ihre Länge beträgt am Boden 10 cm und nimmt dann mit der Höhe linear bis auf 16 cm zu, ihre Breite beträgt in jeder Höhe 12 cm.



Aufgabenstellung:

a) $\boxed{\text{A}}$ Geben Sie eine Formel für die Länge $a(h)$ der rechteckigen Querschnittsfläche in der Höhe h an!

In das Gefäß wird Flüssigkeit gefüllt.
Geben Sie an, was der Ausdruck $12 \cdot \int_0^{15} a(h)\,\mathrm{d}h$ in diesem Zusammenhang bedeutet!

b) Das leere Gefäß wird bis zum Rand mit Flüssigkeit gefüllt.
Nach t Sekunden befindet sich die Wassermenge $q(t)$ (in ml) im Gefäß. Die Füllung dauert 39 Sekunden. Für $t \in [0; 39]$ gilt: $q'(t) = 80$.

Interpretieren Sie $q'(t) = 80$ im gegebenen Zusammenhang!

Ermitteln Sie $\frac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1}$ für beliebige t_1, t_2 mit $t_1 < t_2$ aus dem gegebenen Zeitintervall!

c) Das Fassungsvermögen des Gefäßes (in ml) bis zur Höhe x kann durch das Integral $\int_0^x (3{,}6 \cdot h + 120)\,\mathrm{d}h$ dargestellt werden.

Ermitteln Sie, bei welcher Höhe x das Wasser im Gefäß steht, wenn man 2,5 Liter Wasser in das Gefäß gießt!

Interpretieren Sie den im Integral vorkommenden Wert 3,6 im gegebenen Kontext!

Allgemeine Parameter

	Word	LIX	RE
Wortanzahl:	193	178	208
Zeichenanzahl:	959	–	816
Satzanzahl:	–	14	14
durchschnittliche Wortlänge:	5	–	3,9
durchschnittliche Satzlänge:	13,8	12	14,9
durchschnittliche Lesezeit [Min]:	0,6	0,6	0,7
Seitenzahl:	1		

Lesbarkeitsindizes

Die Auswertung des LIX ergibt, wie in Abb. 4.15 ersichtlich, einen Wert von 36.15, was einem Text „niedriger Komplexität“ entspricht.

Anzahl an Wörtern	Anzahl an Sätzen	Durch-schnittliche Satzlänge	Anteil langer Wörter	Lesbarkeits-index (LIX)	Komplexi-tät
178	14	12 Wörter	24.15 %	36.15	niedrig

Abbildung 4.15: LIX von Aufgabe 4 laut `http://www.psychometrica.de/lix.html`

Die Ergebnisse beim *Reading-Ease-Wert* sind in Abb. 4.16 zu sehen, es ergibt sich ein Wert von 71, was laut Mihm einem „sehr leichten“ Text, auf dem Niveau eines Comics, entspricht (siehe Abb. 4.1).

Text Statistics

Character Count	816
Syllable Count	297
Word Count	208
Sentence Count	14
Characters per Word	3.9
Syllables per Word	1.4
Words per Sentence	14.9

Reading Ease

A higher score indicates easier readability; scores usually range between 0 and 100.

Readability Formula	Score
Flesch-Kincaid Reading Ease	71

Abbildung 4.16: Reading-Ease-Auswertung von Aufgabe 4

Satzbau

Der vorliegende Aufgabentext enthält bei 14 Sätzen drei Satzgefüge und ansonsten einfache Hauptsätze. Diese einfachen Hauptsätze sind von unterschiedlicher Komplexität: Drei sind besonders kurz und simpel aufgebaut (Subjekt – Prädikat – Objekt), vier weitere sind ebenfalls recht einfach gebaut und enthalten nur ein, maximal zwei, weitere Objekte oder Attribute. Die restlichen längeren einfachen Hauptsätze gestalten sich etwas komplexer. Sie enthalten mehrere Objekte und weiters mehr Adverbiale und Attribute und somit längere Satzglieder. Die dabei gegebenen Informationen sind jedoch nicht irrelevant und können somit nicht zur Vereinfachung des Satzbaus einfach weggelassen werden. Allerdings könnte ihr Inhalt auf mehrere Sätze aufgeteilt werden, z.B. beim ersten Satz: *„Der Innenraum eines 20 cm hohen Gefäßes hat in jeder Höhe h eine rechteckige, horizontale Querschnittsfläche.“* könnte zu *„Ein Gefäß ist 20cm hoch. In jeder Höhe h hat es eine rechteckige, horizontale Querschnittsfläche.“* umformuliert werden.
Die drei Satzgefüge bestehen aus je zwei bzw. drei Teilsätzen und sind nicht verschachtelt, sondern lassen sich gut hintereinander „auswerten“. Insofern stellen sie keine besondere Erschwernis im Vergleich zu den langen einfachen Hauptsätzen dar.
Alles in allem lässt die Satzanalyse erkennen, dass sich die Sätze zwar nur im Bereich niedriger bis mittlerer Komplexität bewegen, sie inhaltlich aber sehr dicht sind und viel Information enthalten. Es gilt daher auch bei den kürzeren Sätzen konzentriert zu lesen, um die Aussage richtig erfassen zu können, da keine redundanten Informationen enthalten sind. Aus dieser Sicht kann man also durchaus von einem Text mittlerer Komplexität sprechen.

Fremdwörter

Abseits von Begriffen aus dem Bereich der Mathematik enthält der Text keine Fremdwörter, die nicht zum bildungssprachlichen Niveau zu zählen sind. Interessant ist, dass einige Wörter in den Bereich der „wenig häufigen“ Wörter fallen: Neun Wörter erhalten bei der Häufigkeitsauswertung des Online-Duden nur den Wert 2 von 5. Dass dazu auch Wörter wie „Wassermenge“ zählen, zeigt, dass die Häufigkeit eines Wortes bestimmt nicht der einzige Faktor für die Schwierigkeit und Verständlichkeit darstellt. Besonders unerwartet bei dieser Auswertung ist, dass in der deutschen Sprache das Adjektiv „linear“ (3 von 5) anscheinend häufiger verwendet wird als „rechteckig“ (2 von 5).
Die auftretenden „unüblichen“ Wörter (Häufigkeit 2 von 5) sind:

Gefäß, rechteckig, horizontal, Querschnittsfläche[4]*, Wassermenge, Füllung, Zeitintervall, Fassungsvermögen, Integral*
Die Auflistung verdeutlicht, dass es sich dennoch um keine „exotischen“ oder besonders fachspezifische Wörter handelt, die Erschwernis für das Textverständnis wird sich also eher in Grenzen halten.

Wesentliches/Unwesentliches

Wie bereits im vorigen Abschnitt festgestellt, enthält der Text kaum irrelevante Information. Eine Auswertung, welche Elemente der Aufgabenstellung für das Lösen der Aufgabe unwesentlich sind, bestätigt dieses Bild auch aus diesem Blickwinkel: Kein einziger Satz, keine Phrase kann weggelassen werden, ohne eine wichtige Information für die Lösung der Aufgabe zu verlieren. Demnach gibt es einerseits keine „Distraktoren“, Irrelevantes, das für Verwirrung sorgen könnte. Andererseits ist dadurch der Text sehr dicht und komprimiert und erfordert hohe Aufmerksamkeit beim Lesen.

Anregende Zusätze

Die Aufgabe bietet keinen sonderlich ausführlichen Kontext, keine „Geschichte“ an, dennoch findet man eine „Anwendung“ vor, die jedem geläufig ist: der Rauminhalt eines Gefäßes. Insofern handelt es sich um eine recht klassische „Einkleidung“ einer Aufgabe, die für die Schülerinnen und Schüler wohl weder eine große Hilfe noch eine Schwierigkeit bei der Lösung der Aufgabe darstellt. Eigentlich ist ja sogar gerade die Verbindung zwischen Formel und „Realkontext“ ein Teil der Fragestellung.
Die Aufgabe enthält eine Skizze des Behältnisses, inklusive Bemaßung (siehe Abb. 4.17), was eine große Hilfestellung für das Lösen der Aufgabe darstellt. Begleitend zum einleitenden Aufgabentext mit der Beschreibung des Gefäßes wird sogleich eine Vorstellung vom Objekt gegeben, die Schülerinnen und Schüler müssen sich nicht erst selbst eine Skizze aus den Angaben herleiten, was wohl eine gefährliche Fehlerquelle und entscheidend für die ganze restliche Aufgabe wäre. Hier stellt die Graphik also eine große Unterstützung dar.

[4] Das zusammengesetzte Wort „Querschnittsfläche“ ist nicht Teil des Online-Dudens, da aber „Querschnitt“ alleine bereits eine Häufigkeitsbewertung von 2 von 5 erhält, kann davon ausgegangen werden, dass „Querschnittsfläche“ eine ähnliche, wenn nicht noch geringere Häufigkeit aufweist.

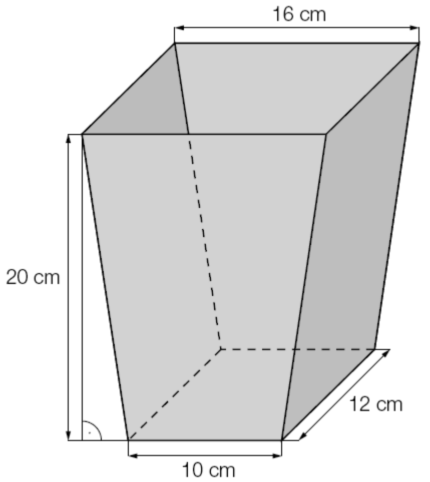


Abbildung 4.17: Skizze des Gefäßes bei Aufgabe 4

Fachsprachliche Merkmale

Fachvokabular:
Der Text enthält acht unterschiedliche Fachbegriffe (wobei auch „Höhe“, „Länge“ und „Breite“ in diesem Zusammenhang zum Fachvokabular gezählt wurden) und drei Phrasen, die es zu entschlüsseln gilt. In Abb. 4.18 sind die fachsprachlichen Elemente gelb, Formeln und Symbolschreibweisen rot eingezeichnet.
Gerade das richtige Entschlüsseln der Phrasen ist wesentlich zum Lösen der ersten Teilaufgabe: Nur wenn man *„nimmt mit der Höhe linear zu“* und *„beträgt in jeder Höhe“* richtig deuten kann, kann die entsprechende Formel korrekt aufgestellt werden. In diesem Zusammenhang ist die Skizze des Gefäßes als Unterstüzung hilfreich.

Symbolsprache:
Der Text enthält Variablen zur Bezeichnung der Höhe, der Zeit, der Formel für die Länge der Querschnittsfläche und der Wassermenge: $h, x, t, a(h), q(t)$, sowie die Ableitung $q'(t)$ und t_1, t_2 zur Bezeichnung des Zeitintervalls. Beachtenswert ist, dass in dieser Aufgabe zwei unterschiedliche Variablennamen für die Höhe vorkommen: h und x, der Sinn dahinter muss entsprechend verstanden werden.
Weiters kommen verschiedene Formeln und zusammengesetzte Symbole vor: zwei Integrale, Zeitintervall sowie der Differenzenquotient und die Angabe von Funktionswerten. Bei dieser Aufgabe ist es wesentlich, die Verbindung der Symbole und Zahlen zum geometrischen Objekt herzustellen, die Formeln mit der Befüllung und dem Volumen zu verknüpfen.

Füllen eines Gefäßes

Der Innenraum eines 20 cm hohen Gefäßes hat in jeder Höhe h eine rechteckige, horizontale Querschnittsfläche.
Ihre Länge beträgt am Boden 10 cm und nimmt dann mit der Höhe linear bis auf 16 cm zu, ihre Breite beträgt in jeder Höhe 12 cm.

Aufgabenstellung:
a) Geben Sie eine Formel für die Länge $a(h)$ der rechteckigen Querschnittsfläche in der Höhe h an!
In das Gefäß wird Flüssigkeit gefüllt.
Geben Sie an, was der Ausdruck $12 \cdot \int_0^{15} a(h)\,dh$ in diesem Zusammenhang bedeutet!

b) Das leere Gefäß wird bis zum Rand mit Flüssigkeit gefüllt.
Nach t Sekunden befindet sich die Wassermenge $q(t)$ (in ml) im Gefäß.
Die Füllung dauert 39 Sekunden. Für $t \in [0; 39]$ gilt: $q'(t) = 80$.
Interpretieren Sie $q'(t) = 80$ im gegebenen Zusammenhang!
Ermitteln Sie $\frac{q(t_2)-q(t_1)}{t_2-t_1}$ für beliebige t_1, t_2 mit $t_1 < t_2$ aus dem gegebenen Zeitintervall!

c) Das Fassungsvermögen des Gefäßes (in ml) bis zur Höhe x kann durch das Integral $\int_0^x (3{,}6 \cdot h + 120)\,dh$ dargestellt werden.
Ermitteln Sie, bei welcher Höhe x das Wasser im Gefäß steht, wenn man 2,5 Liter Wasser in das Gefäß gießt!
Interpretieren Sie den im Integral vorkommenden Wert 3,6 im gegebenen Kontext!

Abbildung 4.18: Fachvokabular (gelb) und Formeln (rot) in Aufgabe 4.

Weitere fachsprachliche Besonderheiten:
Auch wenn es im ganzen Aufgabentext nur zwei Sätze ohne fachsprachliche Elemente gibt, drückt sich die Fachsprache hier stärker durch die Formel- und Symbolschreibweise aus als durch spezielle grammatikalische oder syntaktische Phänomene. Die vorliegende Aufgabe enthält einige Passiv-Formulierungen, was sich wohl aus dem Kontext herleitet: Ein Gefäß *wird befüllt*. Daher ist anzunehmen, dass sie in diesem Fall keine besondere Schwierigkeit darstellen, da in diesem Zusammenhang das Passiv durchaus gängig ist. In einigen wenigen Formulierungen sind Quantoren „versteckt“ (*„für $t \in [0;39]$ gilt: …“* meint *für alle t*, die im Intervall liegen; ebenso *„für beliebige t mit $t_1 < t_2$“*). Weiters gilt es die bereits zuvor genannten Phrasen richtig zu deuten.
Weiters ist der Aufgabentext sehr dicht und komprimiert: Jeder Satz enthält wesentliche Information zur Aufgabenlösung, die Schritt für Schritt gedeutet werden müssen. Ein Merkmal, das in der mathematischen Fachsprache sehr häufig ist.

Insgesamt sind 70 der 193 Wörter fachsprachlich belegt, das sind ca. 36% des Textes.

Zusammenfassung

Auf den ersten Blick, gemessen an den Ergebnissen der Lesbarkeitsindizes, wirkt es, als würde es sich bei Aufgabe 4 um einen äußerst einfachen Text handeln. In der Auswertung nach Mihm belaufen sich Texte mit dem vorliegenden RE-Wert gar auf das „Niveau eines Comics“. Bei genauerer Betrachtung und unter Einbezug der anderen Faktoren, stellt sich aber heraus, dass der Text – zwar nicht sonderlich komplex – aber auf jeden Fall auch nicht „sehr leicht“ ist. Die Sätze sind zwar großteils recht simpel gebaut, und auch was an mathematischer Fach- bzw. Symbolsprache vorkommt, ist nicht sonderlich schwierig. Dennoch erfordert der Text beim Lesen eine gewisse Aufmerksamkeit, da die Dichte der gegebenen Informationen sehr hoch ist und die Angaben richtig interpretiert werden wollen. Das Thema der Aufgabe – die Befüllung eines Gefäßes – ist nicht abstrakt, aber auch nicht so stark in ein Szenario verankert, wie es bei den anderen Aufgaben der Fall ist. Der Text kann sehr gut Schritt für Schritt abgearbeitet werden. Nach Abwägung aller betrachteten Faktoren kann man sagen, dass es sich zwar nicht um einen „sehr einfachen“ Text handelt, die sprachliche Komplexität aber doch eher niedrig ist.

4.4 Zusammenfassung

Nach der Analyse der vier Aufgabentexte anhand der zuvor beschriebenen Kriterien wird deutlich, dass der Versuch einer objektiven Bewertung der Textschwierigkeit viele Fragen aufwirft und stets von subjektiven Einschätzungen beeiflusst wird. Weiters zeigt die Untersuchung der verschiedenen Parameter, wie sehr die Schwierigkeit in den einzelnen Bereichen innerhalb einer Aufgabe schwankt (z.B. hochkomplexer Satzau bei gleichzeitig sehr simpler Wortwahl o.ä.). Diese Zusammenfassung und Gesamteinschätzung stellt also nur *eine* Möglichkeit dar. Auch die gewählten Untersuchungskriterien stellen nur ein Modell von vielen dar, Textschwierigkeit bei Aufgabentexten zu erheben.[5] In Tabelle 4.1 sind nochmals die Ergebnisse bei den einzelnen Aufgaben, aufgeschlüsselt nach den einzelnen Bewertungsbereichen, sowie die „Gesamteinschätzung" zusammengefasst.[6]
Es wird deutlich, dass die verschienenen Bewertungsbereiche oft sehr unterschiedliche Ergebnisse innerhalb einer Aufgabe bringen. Auffallend ist auch, dass die Ergebnisse der Lesbarkeitsindizes oft nur wenig mit dem Gesamteindruck der Schwierigkeit eines Aufgabentextes korrelieren. Diese sind augenscheinlich für die Anwendung bei mathematischen Aufgabentexten eher ungeeignet. Es ist aber erkennbar, dass vor allem die allgemeinsprachlichen Aspekte ausschlaggebend für die Gesamteinschätzung sind. Die Anforderungen durch die mathematische Fachsprache stellen keine außergewöhnliche Erschwernis dar, die Schwierigkeit im Bereich „Fachsprache" geht nie über einfach bis mittel hinaus. Die auf den ersten Blick naheliegende Annahme, dass es sich bei den langen Aufgaben auch um die schwierigsten Aufgaben handelt, konnte mehr oder weniger bestätigt werden. Hier spielt vor allem die Komplexität des Satzbaus eine Rolle. Es ist jedoch auch nicht so, dass die längste Aufgabe (Aufgabe 3) auch die schwierigste ist. Ganz generell sind die allgemeinen Textparameter, wie Wortanzahl, Satzlänge, Seitenzahl etc. nicht unbedingt ausschlaggebend für die Textschwierigkeit, diese liegt sozusagen „tiefer vergraben".
Auffallend ist auch, dass die Auswertung, was an den Texten „wesentlich" und was „unwesentlich" für die Aufgabenlösung ist, als Ergebnis brachte, dass die meisten irrelevanten Textstellen geballt am Anfang der Aufgabentexte, sozusagen als „Einleitung"

[5] Ein anderes Modell zur Bewertung von Aufgabenschwierigkeit publizierte Jan Iluk im Jahr 2014, nachzulesen in: Jan ILUK: Der Einfluss des terminologischen und syntaktischen Schwierigkeitsgrades von Lehrwerktexten auf die Lehr- und Lerneffizienz, in: KNECHT Petr u.a. (Hrsg): Methodologie und Methoden der Schulbuch- und Lehrmittelforschung, Bad Heilbronn 2014, 303-314.

[6] Dabei wurde bei LIX und RE deren Nomenklatur übernommen, bei den „anregenden Zusätzen" das Hamburger Schema ($--$, $-$, 0, $+$, $++$) und bei allen anderen Bereichen eine Bewertung mit „einfach – mittel – anspruchsvoll – schwierig".

stehen. Insofern stellt sich selten die Aufgabe, herausfiltern zu müssen, was an Angaben wichtig ist und was nicht. Dies birgt die Gefahr, dass ganz pauschal die ersten Absätze nur grob überflogen werden, weil „das Wichtige“ ja ohnehin erst später kommt.

Aufgabe 1:		**Aufgabe 2:**	
LIX:	mittel	LIX:	mittel
RE:	anspruchsvoll	RE:	normal
Satzbau:	einfach	Satzbau:	schwierig
Fremdwörter:	einfach	Fremdwörter:	mittel
Wesentliches:	einfach	Wesentliches:	mittel
anregende Zusätze:	0	anregende Zusätze:	0
Fachsprache:	mittel	Fachsprache:	mittel
Gesamteinschätzung:	einfach	Gesamteinschätzung:	anspruchsvoll
Aufgabe 3:		**Aufgabe 4:**	
LIX:	mittel	LIX:	niedrig
RE:	schwierig	RE:	sehr leicht
Satzbau:	mittel – schwer	Satzbau:	mittel
Fremdwörter:	mittel	Fremdwörter:	einfach
Wesentliches:	einfach	Wesentliches:	mittel
anregende Zusätze:	+	anregende Zusätze:	+
Fachsprache:	einfach	Fachsprache:	einfach
Gesamteinschätzung:	mittel	Gesamteinschätzung:	einfach

Tabelle 4.1: Zusammenfassung der Aufgabenanalyse

Betrachtet man die Ergebnisse der Analyse, so kann man feststellen, dass sich die Schwierigkeit des zweiten Aufgabenteils auf textueller Ebene im mittleren Bereich bewegt. Nur eine Aufgabe kann nach obiger Auswertung als „schwierig“ bezeichnet werden. Angesichts der Tatsache, dass es sich hierbei aber um Aufgaben der Abschlussprüfung der letzten Schulstufe handelt, ist es durchaus angemessen schwierige Aufgaben zu stellen. Die Aufgaben dienen schließlich auch dazu, das mathematische Wissen und Können der Schülerinnen und Schüler beim Übertragen der Basiskompetenzen auf spezifische Aufgabenbereiche und Kontexte abzuprüfen. Der Umgang mit schwierigeren Texten und komplexerem Vokabular ist dabei insofern auch Teil der Prüfungsaufgaben. Alles in allem kann man also von einer für den Prüfungskontext durchaus angemessenen Textschwierigkeit sprechen. Ein negativer Einfluss der textlichen Beschaffenheit auf die

Lösungswahrscheinlichkeit ist demnach nicht zu erwarten.[7] Auch wenn die Aufgaben sprachlich keine unbewältigbaren Schwierigkeiten für die Schülerinnen und Schüler darstellen, scheint es dennoch sinnvoll im Unterricht die sprachliche Komponente von Aufgabentexten mitzuberücksichtigen und zu „üben“. Denn auch wenn die Texte insgesamt nicht schwierig sind, so lohnt es sich stets den Faktor Sprache nicht aus den Augen zu verlieren.

[7] Dies müsste natürlich empirisch erhoben werden, die Erhebung der erforderlichen Daten und der Abgleich mit den Ergebnissen der Textschwierigkeitsanalyse sprengt jedoch den Rahmen dieser Diplomarbeit. Ergänzend wäre auch interessant, einen Vergleich mit „alten“ Maturaaufgaben zu stellen und zu analysieren, ob Unterschiede in der sprachlichen Schwierigkeit auftreten. Da jedoch die Maturaaufgaben der vorigen Jahre alle sehr lehrer- und schulspezifisch waren, ist ein aussagekräftiger Vergleich wohl auch eher schwierig bzw. mit der Erhebung und dem Vergleich vieler verschiedener Aufgaben verbunden, was in dieser Arbeit nicht mehr geleistet werden kann.

5 Fazit

Im Zuge dieser Arbeit konnten mehrere Bereiche näher beleuchtet werden: Einerseits und allem voran wird die große Breite des Themas „Sprache und Mathematik“ bewusst. Es gibt zahlreiche Fragestellungen, die bezüglich der mathematischen Fachsprache und der Rolle von Sprache im Mathematikunterricht beachtenswert sind und deren Berücksichtigung im Unterricht wünschenswert wären. Mit dem Blick auf die Textaufgaben wird deutlich, was für eine wichtige Rolle diese im Unterricht einnehmen und dass es auch hier viele Kriterien aus dem Bereich „Sprache“ zu beachten gibt, die ausschlaggebend für die Qualität einer Textaufgabe sein können.
Diese allgemeinen Erkenntnisse konnten schließlich auf das aktuelle Thema „neue zentrale Reifeprüfung“, konkret auf die häufig anzutreffende Aussage „die neuen Aufgaben wären sprachlich besonders schwierig“, umgelegt werden. Es wurde ein Bewertungsmodell entwickelt, anhand dessen die fachsprachliche und allgemeinsprachliche Textschwierigkeit der Typ-2-Aufgaben eingeschätzt wurde. Dabei wird erneut die Komplexität von „Textschwierigkeit“ und die Menge an einflussnehmenden Faktoren deutlich. In der Auswertung wird ersichtlich, dass die Behauptung der außergewöhnlich hohen sprachlichen Schwierigkeit der Aufgaben nicht zu halten ist. Die Angabetexte bewegen sich in einem mittleren bis anspruchsvollen sprachlichen Niveau, stellen also durchaus eine Herausforderung für die Lese- und Sprachkompetenz der Maturantinnen und Maturanten dar, sind aber auch nicht unnötig schwierig, sondern einer abschließenden Prüfung durchaus angemessen.
Textverständnis und Sprachkompetenz spielen eindeutig auch im Mathematikunterricht eine wesentliche Rolle. Für die Lehrperson hat es demnach Sinn, sich mit den verschiedenen Ebenen von Textverstehen und (Fach-)Sprache im Unterricht auseinanderzusetzen. Nicht nur, aber auch in Hinblick auf die Aufgaben der zentralen Schriftlichen Reifeprüfung.

Literaturverzeichnis

AUSTIN J.L., HOWSON A.G.: Language and mathematical education, in: Educational Studies in Mathematics, Vol. 10(2), 1979, 161-197.

BAMBERGER Richard, VANECEK Erich: Lesen – Verstehen – Lernen – Schreiben. Die Schwierigkeitsstufen von Texten in deutscher Sprache, o.V., Wien 1984.

BARZEL Bärbel: Mathematik unterrichten: planen, durchführen, reflektieren. Cornelsen Scriptor, Berlin 2011.

BARZEL Bärbel, EHRET Carola: Mathematische Sprache entwickeln, in: mathematik lehren 156, Friedrich-Verlag, 2009, 4-9.

BERGER Angela Susanne: Mathematiklernen im bilingualen Diskurs. Ein integriertes Sprache-Mathematik-Modell des Lösens von Textaufgaben mit Englisch als Arbeitssprache, Dissertation an der Universität Wien, Wien 2013.

BERGUNDE Manfred: Von Subjekt zu Subjekt. Unterrichtspraktische Anregungen für die fachspezifische Sprachförderung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht, in: FENKART Gabriele, LEMBENS Anja, ERLACHER-ZEITLINGER Edith (Hrsg.): Sprache, Mathematik und Naturwissenschaften (= Saxalber-Tetter Annemarie, Wintersteiner Werner (Hrsg.): ide-extra, Eine deutschdidaktische Publikationsreihe, Bd. 16), StudienVerlag, Innsbruck 2010, 232-249.

BEST Karl-Heinz: Sind Wort- und Satzlänge brauchbare Kriterien der Lesbarkeit von Texten? in: WICHTER Sigurd, BUSCH Alberg (Hrsg.): Wissenstransfer – Erfolgskontrolle und Rückmeldungen aus der Praxis. Lang, Frankfurt/Main u.a. 2006, 21-31.

BINDER-KRIEGLSTEIN Verena: Mathematische Fähigkeiten und interindividuelle Unterschiede beim Bearbeiten von Textaufgaben, Diplomarbeit an der Universität Wien, Wien 2012.

DORFMAYR Anita: Die Rolle der Fachsprache bei zentralen Prüfungen, in: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 45, 2012, 19–28.

DUARTE Joana, GOGOLIN Ingrid, KAISER Gabriele: Sprachlich bedingte Schwierigkeiten von mehrsprachigen Schülerinnen und Schülern bei Textaufgaben, in: PREDIGER Susanne, ÖZDIL Erkan (Hrsg.): Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland (= Wilhelm Grießhaber, Jochen Rehbein (Hrsg.): Reihe Mehrsprachigkeit, Bd. 32), Waxmann, Münster 2011, 35-53.

ERNST Peter: Germanistische Sprachwissenschaft. Eine Einführung in die synchrone Sprachwissenschaft des Deutschen, Facultas, Wien 2011.

FENKART Gabriele: Sachtexte und Sachbücher im Unterricht aller Fächer, in: FENKART Gabriele, LEMBENS Anja, ERLACHER-ZEITLINGER Edith (Hrsg.): Sprache, Mathematik und Naturwissenschaften (= Saxalber-Tetter Annemarie, Wintersteiner Werner (Hrsg.): ide-extra, Eine deutschdidaktische Publikationsreihe, Bd. 16), Studien-Verlag, Innsbruck 2010, 195-211.

GROEBEN Norbert: Leserpsychologie: Textverständnis - Textverständlichkeit. (= GROEBEN Norbert: Leserpsychologie, Bd. 1), Aschendorff, Münster/Westfalen 1982.

HUNZIKER Hans-Werner, Im Auge des Lesers. Foveale und periphere Wahrnehmung: Vom Buchstabieren zur Lesefreude, Transmedia Verlag, Zürich 2006.

HUßMANN Stephan: Umgangssprache – Fachsprache, in: LEUDERS Timo (Hrsg.): Mathematik-Didaktik: Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II, Cornelsen Scriptor, Berlin 2003, 60-75.

LANGER Inghard, SCHULZ VON THUN Friedemann, TAUSCH Reinhard: Sich verständlich ausdrücken, o.V., München 1987 (3. Auflage).

LEISEN Josef: Muss ich jetzt auch noch Sprache unterrichten? - Sprache und Physikunterricht, abrufbar unter: http://www.josefleisen.de/uploads2/04%20Sprache%20im%20Fachunterricht%20-%20Bilingualer%20Fachunterricht/01%20Muss%20ich%20jetzt%20auch%20noch%20Sprache%20unterrichten.pdf (21.3.2015), erschienen in: Unterricht Physik 3, 2005, 4-9.

LEISEN Josef (Hrsg.): Methoden-Handbuch deutschsprachiger Fachunterricht (DFU). Varus, Bonn, 1999.

LEISEN Josef: Handbuch Sprachförderung im Fach: sprachsensibler Fachunterricht in der Praxis. Grundlagenwissen, Anregungen und Beispiele für die Unterstützung von sprachschwachen Lernern und Lernern mit Zuwanderungsgeschichte beim Sprechen, Lesen, Schreiben und Üben im Fach, Varus, Bonn 2010.

LEISEN Josef: Leseverstehen und Leseförderung in den Naturwissenschaften, in: FENKART Gabriele, LEMBENS Anja, ERLACHER-ZEITLINGER Edith (Hrsg.): Sprache, Mathematik und Naturwissenschaften (= Saxalber-Tetter Annemarie, Wintersteiner Werner (Hrsg.): ide-extra, Eine deutschdidaktische Publikationsreihe, Bd. 16), StudienVerlag, Innsbruck 2010, 212-232.

MÄDL Judith Beatrix: Textaufgaben – Der Schrecken vieler Schülerinnen und Schüler, Diplomarbeit an der Universität Wien, Wien 2013.

MAIER Hermann: Zu fachsprachlicher Hyper- und Hypotrophie im Fach Mathematik oder Wie viel Fachsprache brauchen Schüler im Mathematikunterricht, in: Journal für Mathematik-Didaktik (JMD) 25, Heft 2, 2004, 153-166.

MAIER Hermann, SCHWEIGER Fritz: Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht (= Hans-Christian Reichel (Hrsg.): Mathematik für Schule und Praxis, Bd.4), öbv&hpt, Wien 1999. Abrufbar unter: `http://www.math.uni-muenster.de/reine/u/mollerh/data/MaierSchweig11.pdf` (2.4.2015)

MALLE Günther: Mathematiker reden in Metaphern, in: mathematik lehren 156, Friedrich-Verlag, 2009, 10-15.

NIEDERDRENK-FELGNER Cornelia: Algebra oder Abrakadabra? Das Thema „Mathematik und Sprache“ aus didaktischer Sicht, in: mathematik lehren 99, Friedrich-Verlag, 2000, 4-9.

PORTMANN-TSELIKAS, Paul R.: Textkompetenz und unterrichtlicher Spracherwerb, in: PORTMANN-TSELIKAS Paul R., SCHMÖLZER-EIBINGER Sabine (Hrsg.): Textkompetenz. Neue Perspektiven für das Lernen und Lehren. Studien-Verlag, Innsbruck 2002.

RINCKE Karsten: Von der Alltagssprache zur Fachsprache, in: FENKART Gabriele, LEMBENS Anja, ERLACHER-ZEITLINGER Edith (Hrsg.): Sprache, Mathematik und Naturwissenschaften (= Annemarie Saxalber-Tetter, Werner Wintersteiner (Hrsg.): ide-extra. Eine deutschdidaktische Publikationsreihe, Band 16), StudienVerlag, Innsbruck/Wien/Bozen, 2010, 47-62.

RÖSCH Heidi, PAETSCH Jennifer: Sach- und Textaufgaben im Mathematikunterricht als Herausforderung für mehrsprachige Kinder, in: Prediger Susanne, Özdil Erkan (Hrsg.): Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland (= Wilhelm Grießhaber, Jochen Rehbein (Hrsg.): Reihe Mehrsprachigkeit, Bd. 32), Waxmann, Münster 2011, 55-76.

SCHNEEBERGER Martin: Verstehen und Lösen von mathematischen Textaufgaben im Dialog. Der Erwerb von Mathematisierkompetenz als Initiation in eine spezielle Diskurspraxis (=Internationale Hochschulschriften Bd. 529), Waxmann, Münster 2009.

SCHREIBER Katja: „Ich fand das gut, dann hab ich da wenigstens was mit Zahlen“. Analysen zum Fachsprachengebrauch von Schülerinnen und Schülern, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006. Vorträge auf der 40. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 6.3. bis 10.3.2005 in Osnabrück, 2006, 485-488.

SCHWEIGER Fritz: Sprache und Mathematik, in: MAAß Jürgen, LARCHER Gerhard (Hrsg.): Kepler Symposium Philosophie und Geschichte der Mathematik. Vorträge aus dem Johannes Kepler Symposium 1995 bis 2005 (= Schriftenreihe Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, JKU Linz, Bd. 5), Universitätsverlag Rudolf Trauner, Linz 2005, 38-50.

SCHWEIGER Fritz: (Fast) alles ist Zahl. Eine kleine Kulturgeschichte der Mathematik und ihrer Sprache, in: FENKART Gabriele, LEMBENS Anja, ERLACHER-ZEITLINGER Edith (Hrsg.): Sprache, Mathematik und Naturwissenschaften (= Annemarie Saxalber-Tetter, Werner Wintersteiner (Hrsg.): ide-extra, Band 16), StudienVerlag, Innsbruck/Wien/Bozen, 2010, 11-20.

STADLER Martin: Verständliche Gestaltung Allgemeiner Versicherungsbedingungen am Beispiel der AKB, (= Dissertation an der Freien Universität Berlin, 2007), Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe 2009.

STAMPE Eckart: Repetitorium Fachdidaktik Mathematik, Klinkhardt, Bad Heilbrunn/Obb. 1984.

STEINHARDT Nina: Die (Un)Gerechtigkeit der Zentralmatura in Mathematik. Eine empirische Untersuchung der Auswirkungen unterschiedlicher erstsprachlicher Voraussetzungen auf Textverständnis und Aufgabenlösung in der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung, Diplomarbeit an der Universität Wien, 2013.

VOGEL Rose: Mathmatische Sprachentwicklung - eine erste Annäherung, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006. Vorträge auf der 40. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 6.3. bis 10.3.2005 in Osnabrück, 2006, 82-85.

WILLENBERG Heiner: Lesen und Lernen. Eine Einführung in die Neuropsychologie des Textverstehehns, Spektrum akademischer Verlag, Heidelberg/Berlin, 1999.

Internetquellen

BIFIE: Kompetenzen und Modelle, abrufbar unter: `https://www.bifie.at/node/49` (17.10.2015).

BIFIE: Standardisierte Reife- und Diplomprüfung Mathematik, abrufbar unter: `https://www.bifie.at/node/80` (31.1.2016).

BMUKK/bifie (Hrsg.): Bildungsstandards für Mathematik 8. Schulstufe, abrufbar unter: `https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_sek1_kompetenzbereiche_m8_2013-03-28.pdf` (17.10.2015).

ohne Autor: Workshop Aufgabengestaltung, abrufbar unter: `http://www.didaktikdeutsch.de/data/_uploaded/vortraege/Goettingen_Workshop1.pdf` (2.2.2016).

DOCTIMA GmbH: Verständlichkeitstheorie, abrufbar unter: `http://www.doctima.de/Verstaendlichkeitstheorie.150.0.html` (1.2.2016).

FERTL Ingrid: Textverständnis in allen Fächern. Lesestrategien im Unterrichtsgegenstand Mathematik, Pädagogische Hochschule Wien und BMUKK, Bundeskoordinationsstelle LITERACY, Wien, o.J. abrufbar unter:
http://www.literacy.at/fileadmin/literacy/redaktion/pdf/Mathe_Lesestrategien.pdf (14.7.2015).

HUNZIKER Hans-Werner: Lesegeschwindigkeits-Test online, abrufbar unter: http://www.learning-systems.ch/multimedia/lesetestDeutsch.html (3.2.2016).

ohne Autor: Hochschule Luzern, Technick und Architektur: Handout zum Thema „Das Hamburger Verständlichkeitsmodell“, abrufbar unter: http://www.hslu.blz.ch/CAS%20Industriedesgin/HandoutHamburgerl.pdf (1.2.2016).

ohne Autor, DiePresse.com: Mathematik-Zentralmatura: Äufgaben sind sehr textlastig”, Online-Artikel vom 12.5.2015, abrufbar unter: http://diepresse.com/home/bildung/schule/4729653/MathematikMatura_Aufgaben-sehr-textlastig (31.1.2016).

NEUHAUSER Julia, DiePresse.com: Zentralmatura: Mathematikmatura ”war machbar”, Online-Artikel vom 11.5.2015, abrufbar unter:http://diepresse.com/home/bildung/schule/4729435/Zentralmatura_Mathematikmatura-war-machbar (31.1.2016).

LENHARD Alexandra und Wolfgang: Lexbarkeitsindex (LIX), abrufbar unter: http://www.psychometrica.de/lix.html (1.2.2016).

RITTER Jonas: Ritter Speedreading - Lesegeschwindigkeitstest, abrufbar unter: http://www.ritterspeedreading.de/speedreading-online-test.htm (3.2.2016).

Anhang

Name:	
Klasse:	

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

11. Mai 2015

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

Sehr geehrte Kandidatin! Sehr geehrter Kandidat!

Das vorliegende Aufgabenheft zu Teil 2 enthält vier Aufgaben mit je zwei bis vier Teilaufgaben, wobei alle Teilaufgaben unabhängig voneinander bearbeitbar sind. Ihnen stehen dafür insgesamt *150 Minuten* an reiner Arbeitszeit zur Verfügung.

Verwenden Sie einen nicht radierbaren, blau oder schwarz schreibenden Stift! Bei Konstruktionsaufgaben ist auch die Verwendung eines Bleistifts möglich.

Verwenden Sie zur Bearbeitung dieser Aufgaben dieses Aufgabenheft und die Ihnen zur Verfügung gestellten Blätter! Schreiben Sie Ihren Namen auf der ersten Seite des Aufgabenheftes in das dafür vorgesehene Feld und auf jedes verwendete Blatt! Geben Sie bei der Beantwortung jeder Teilaufgabe deren Bezeichnung an!

In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist. Die Lösung muss dabei klar ersichtlich sein. Wenn die Lösung nicht klar ersichtlich ist oder verschiedene Lösungen angegeben sind, gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Streichen Sie Ihre Notizen durch.

Sie dürfen eine approbierte Formelsammlung sowie die gewohnten elektronischen Hilfsmittel verwenden.

Abzugeben sind das Aufgabenheft und alle von Ihnen verwendeten Blätter.

Beurteilung

Jede Aufgabe in Teil 1 wird mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet, jede Teilaufgabe in Teil 2 mit 0, 1 oder 2 Punkten. Die mit $\boxed{A}$ gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet.

– Werden im Teil 1 mindestens 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit positiv bewertet.
– Werden im Teil 1 weniger als 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst, werden mit $\boxed{A}$ markierte Aufgabenstellungen aus Teil 2 zum Ausgleich (für den laut LBVO „wesentlichen Bereich“) herangezogen.
  Werden unter Berücksichtigung der mit $\boxed{A}$ markierten Aufgabenstellungen aus Teil 2 mindestens 16 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit positiv bewertet.
  Werden auch unter Berücksichtigung der mit $\boxed{A}$ markierten Aufgabenstellungen aus Teil 2 weniger als 16 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit mit „Nicht genügend“ beurteilt.
– Werden im Teil 1 mindestens 16 Punkte (mit Berücksichtigung der Ausgleichspunkte $\boxed{A}$) erreicht, so gilt folgender Beurteilungsschlüssel:

Genügend	16–23 Punkte
Befriedigend	24–32 Punkte
Gut	33–40 Punkte
Sehr gut	41–48 Punkte

Erläuterung der Antwortformate

Die Aufgaben haben einerseits *freie Antwortformate*; dabei schreiben Sie Ihre Antwort direkt unter die jeweilige Aufgabenstellung in das Aufgabenheft oder auf die zur Verfügung gestellten Blätter. Weitere Antwortformate, die in der Klausur zum Einsatz kommen können, werden im Folgenden vorgestellt:

Zuordnungsformat: Dieses Antwortformat ist durch mehrere Aussagen (bzw. Tabellen oder Abbildungen) gekennzeichnet, denen mehrere Antwortmöglichkeiten gegenüberstehen. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die Antwortmöglichkeiten durch Eintragen der **entsprechenden Buchstaben** den jeweils zutreffenden Aussagen zuordnen!

Beispiel:
Gegeben sind zwei Gleichungen.

Aufgabenstellung:
Ordnen Sie den zwei Gleichungen jeweils die entsprechende Bezeichnung (aus A bis D) zu!

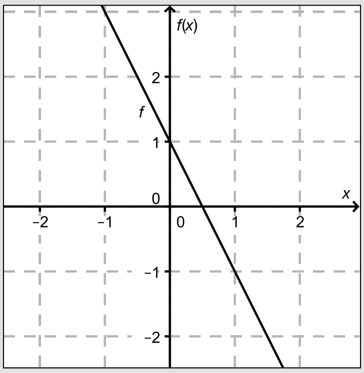
1 + 1 = 2	A
2 · 2 = 4	C

A	Addition
B	Division
C	Multiplikation
D	Subtraktion

Konstruktionsformat: Eine Aufgabe und deren Aufgabenstellung sind vorgegeben. Die Aufgabe erfordert die Ergänzung von Punkten, Geraden und/oder Kurven im Aufgabenheft.

Beispiel:
Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$.

Aufgabenstellung:
Zeichnen Sie den Graphen einer linearen Funktion mit den Bedingungen $k = -2$ und $d > 0$ in das vorgegebene Koordinatensystem ein!



Multiple-Choice-Format in der Variante „1 aus 6“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und sechs Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **eine Antwortmöglichkeit** auszuwählen ist. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die einzige zutreffende Antwortmöglichkeit ankreuzen!

Beispiel:
Welche Gleichung ist korrekt?

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an!

1 + 1 = 1	☐
2 + 2 = 2	☐
3 + 3 = 3	☐
4 + 4 = 8	☒
5 + 5 = 5	☐
6 + 6 = 6	☐

Multiple-Choice-Format in der Variante „2 aus 5“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **zwei Antwortmöglichkeiten** auszuwählen sind. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten ankreuzen!

Beispiel:
Welche Gleichungen sind korrekt?

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

1 + 1 = 1	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 3	☐
4 + 4 = 8	☒
5 + 5 = 5	☐

Multiple-Choice-Format in der Variante „x aus 5“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei eine, zwei, drei, vier *oder* fünf Antwortmöglichkeiten auszuwählen sind. In der Aufgabenstellung finden Sie stets die Aufforderung „Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n)/ Gleichung(en)/... an!“. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die zutreffende Antwortmöglichkeit/die zutreffenden Antwortmöglichkeiten ankreuzen!

Beispiel:
Welche der gegebenen Gleichungen ist/sind korrekt?

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Gleichung(en) an!

1 + 1 = 2	☒
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 6	☒
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 10	☒

Lückentext: Dieses Antwortformat ist durch einen Satz mit zwei Lücken gekennzeichnet, das heißt, im Aufgabentext sind zwei Stellen ausgewiesen, die ergänzt werden müssen. Für jede Lücke werden je drei Antwortmöglichkeiten vorgegeben. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die Lücken durch Ankreuzen der beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten füllen!

Beispiel:
Gegeben sind 3 Gleichungen.

Aufgabenstellung:
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die Gleichung ____①____ wird als Zusammenzählung oder ____②____ bezeichnet.

①	
1 – 1 = 0	☐
1 + 1 = 2	☒
1 · 1 = 1	☐

②	
Multiplikation	☐
Subtraktion	☐
Addition	☒

So ändern Sie Ihre Antwort bei Aufgaben zum Ankreuzen:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreuzen Sie dann das gewünschte Kästchen an.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Hier wurde zuerst die Antwort „5 + 5 = 9“ gewählt und dann auf „2 + 2 = 4“ geändert.

So wählen Sie eine bereits übermalte Antwort:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreisen Sie das gewünschte übermalte Kästchen ein.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Hier wurde zuerst die Antwort „2 + 2 = 4“ übermalt und dann wieder gewählt.

Wenn Sie jetzt noch Fragen haben, wenden Sie sich bitte an Ihre Lehrerin/Ihren Lehrer!

Viel Erfolg bei der Bearbeitung!

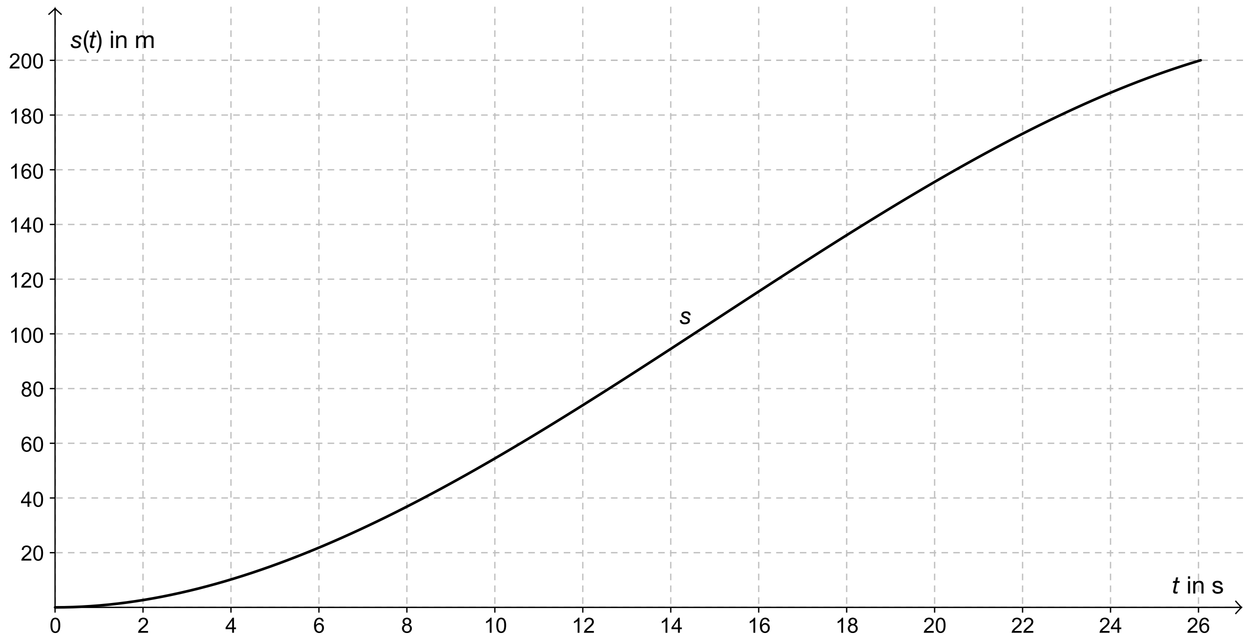
Aufgabe 1

200-m-Lauf

In der Leichtathletik gibt es für Läufer/innen spezielle Trainingsmethoden. Dazu werden Trainingspläne erstellt. Es ist dabei sinnvoll, bei Trainingsläufen Teilzeiten zu stoppen, um Stärken und Schwächen der Läuferin/des Läufers zu analysieren.

Zur Erstellung eines Trainingsplans für eine Läuferin wurden die Teilzeiten während eines Trainingslaufs gestoppt. Für die 200 Meter lange Laufstrecke wurden bei diesem Trainingslauf 26,04 Sekunden gemessen. Im nachstehenden Diagramm ist der zurückgelegte Weg $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t für diesen Trainingslauf mithilfe einer Polynomfunktion s vom Grad 3 modellhaft dargestellt.

Für die Funktion s gilt die Gleichung $s(t) = -\frac{7}{450}t^3 + 0{,}7t^2$ ($s(t)$ in Metern, t in Sekunden).



Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Wendestelle der Funktion s!

Interpretieren Sie die Bedeutung der Wendestelle in Bezug auf die Geschwindigkeit der Läuferin!

b) $\boxed{\text{A}}$ Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit der Läuferin für die 200 Meter lange Laufstrecke in Metern pro Sekunde!

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung besagt, dass unter bestimmten Voraussetzungen in einem Intervall $[a; b]$ für eine Funktion f mindestens ein $x_0 \in (a; b)$ existiert, sodass $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ gilt. Interpretieren Sie diese Aussage im vorliegenden Kontext für die Funktion s im Zeitintervall $[0; 26{,}04]$!

Aufgabe 2

Altersbestimmung

Die Radiokohlenstoffdatierung, auch ^{14}C-Methode genannt, ist ein Verfahren zur Altersbestimmung von kohlenstoffhaltigen Materialien. Das Verfahren beruht darauf, dass in abgestorbenen Organismen die Menge an gebundenen radioaktiven ^{14}C-Atomen gemäß dem Zerfallsgesetz exponentiell abnimmt, während der Anteil an ^{12}C-Atomen gleich bleibt. Lebende Organismen sind von diesem Effekt nicht betroffen, da sie ständig neuen Kohlenstoff aus der Umwelt aufnehmen, sodass der ^{14}C-Anteil nahezu konstant bleibt und somit auch das Verhältnis zwischen ^{14}C und ^{12}C.

Die Anzahl der noch vorhandenen ^{14}C-Atome in einem abgestorbenen Organismus wird durch die Funktion N beschrieben. Für diese Anzahl $N(t)$ der ^{14}C-Atome t Jahre nach dem Tod des Organismus gilt daher näherungsweise die Gleichung $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, wobei N_0 die Anzahl der ^{14}C-Atome zum Zeitpunkt $t = 0$ angibt und die Zerfallskonstante für ^{14}C den Wert $\lambda = 1{,}21 \cdot 10^{-4}$ pro Jahr hat.

Eine frische Probe enthält pro Billion (10^{12}) Kohlenstoffatomen nur ein ^{14}C-Atom. Die Nachweisgrenze von ^{14}C liegt bei einem Atom pro Billiarde (10^{15}) Kohlenstoffatomen (also einem Tausendstel der frischen Probe).

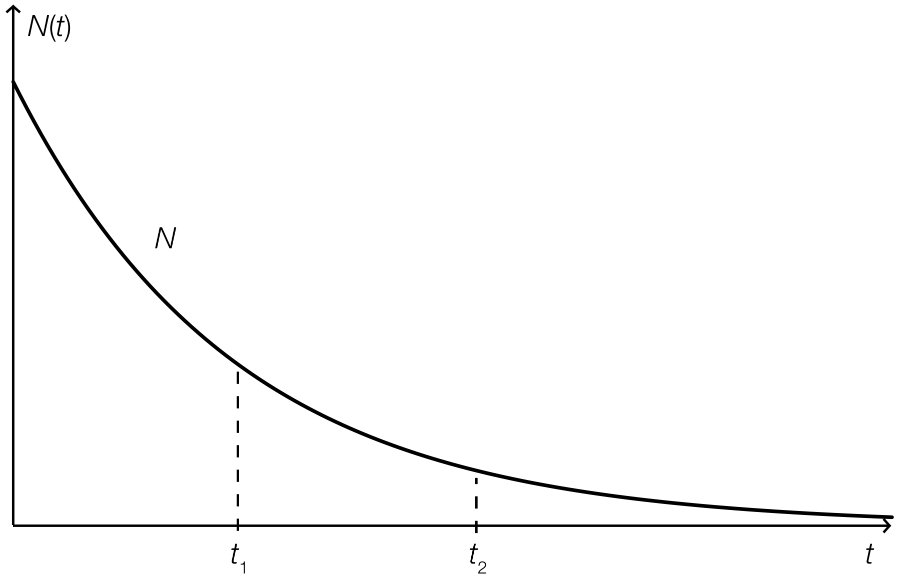
Aufgabenstellung:

a) $\boxed{\text{A}}$ Berechnen Sie die Halbwertszeit von ^{14}C!

Zeigen Sie, dass nach zehn Halbwertszeiten die Nachweisgrenze von ^{14}C unterschritten ist!

b) Im Jahr 1991 wurde in den Ötztaler Alpen von Wanderern die Gletschermumie „Ötzi" entdeckt. Die ^{14}C-Methode ergab, dass bereits 47 % ± 0,5 % der ursprünglich vorhandenen ^{14}C-Atome zerfallen waren (d. h., das Messverfahren hat einen Fehler von ± 0,5 % der in der frischen Probe vorhandenen Anzahl an ^{14}C-Atomen).
Berechnen Sie ein Intervall für das Alter der Gletschermumie zum Zeitpunkt ihres Auffindens!

Angenommen, Ötzi wäre nicht im Jahr $t_1 = 1991$, sondern zu einem späteren Zeitpunkt t_2 gefunden worden.
Geben Sie an, welche Auswirkung auf die Breite des für das Alter der Gletschermumie ermittelten Intervalls dies hat (den gleichen Messfehler vorausgesetzt)!
Begründen Sie Ihre Aussage anhand der unten abgebildeten Grafik!



c) $N(t)$ beschreibt die Anzahl der ^{14}C-Atome zum Zeitpunkt t.
Interpretieren Sie $N'(t)$ im Hinblick auf den radioaktiven Zerfallsprozess!

Nach den Gesetzmäßigkeiten des radioaktiven Zerfalls zerfällt pro Zeiteinheit ein konstanter Prozentsatz p der vorhandenen Menge an ^{14}C-Atomen.
Welche der folgenden Differenzengleichungen beschreibt diese Gesetzmäßigkeit? Kreuzen Sie die zutreffende Differenzengleichung an!

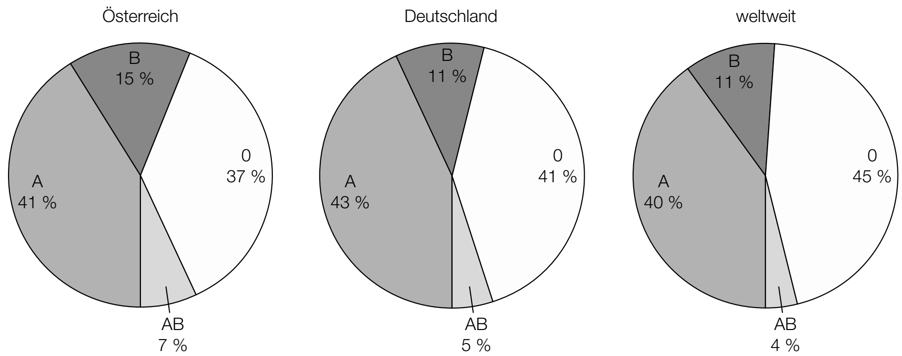
$N(t+1) - N(t) = p$	☐
$N(t+1) - N(t) = -p$	☐
$N(t+1) - N(t) = p \cdot t$	☐
$N(t+1) - N(t) = -p \cdot t$	☐
$N(t+1) - N(t) = p \cdot N(t)$	☐
$N(t+1) - N(t) = -p \cdot N(t)$	☐

Aufgabe 3

Blutgruppen

Die wichtigsten Blutgruppensysteme beim Menschen sind das AB0-System und das Rhesussystem. Es werden dabei die vier Blutgruppen A, B, AB und 0 unterschieden. Je nach Vorliegen eines bestimmten Antikörpers, den man erstmals bei Rhesusaffen entdeckt hat, wird bei jeder Blutgruppe noch zwischen *Rhesus-positiv* (+) und *Rhesus-negativ* (–) unterschieden. A– bedeutet z. B. Blutgruppe A mit Rhesusfaktor negativ.

In den nachstehenden Diagrammen sind die relativen Häufigkeiten der vier Blutgruppen in Österreich und Deutschland und im weltweiten Durchschnitt ohne Berücksichtigung des Rhesusfaktors dargestellt.



Die nachstehende Tabelle enthält die relativen Häufigkeiten der Blutgruppen in Deutschland und Österreich zusätzlich aufgeschlüsselt nach den Rhesusfaktoren.

	A+	A–	B+	B–	0+	0–	AB+	AB–
Deutschland	37 %	6 %	9 %	2 %	35 %	6 %	4 %	1 %
Österreich	33 %	8 %	12 %	3 %	30 %	7 %	6 %	1 %

Aufgrund von Unverträglichkeiten kann für eine Bluttransfusion nicht Blut einer beliebigen Blutgruppe verwendet werden. Jedes Kreuz (X) in der nachstehenden Tabelle bedeutet, dass eine Transfusion vom Spender zum Empfänger möglich ist.

	Spender							
Empfänger	0–	0+	B–	B+	A–	A+	AB–	AB+
AB+	X	X	X	X	X	X	X	X
AB–	X		X		X		X	
A+	X	X			X	X		
A–	X				X			
B+	X	X	X	X				
B–	X		X					
0+	X	X						
0–	X							

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Blutgruppe [26.11.2014]

Aufgabenstellung:

a) $\boxed{\text{A}}$ Geben Sie diejenigen Blutgruppen an, die laut der abgebildeten Diagramme sowohl in Österreich als auch in Deutschland häufiger anzutreffen sind als im weltweiten Durchschnitt!

Jemand argumentiert anhand der gegebenen Diagramme, dass die Blutgruppe B in Deutschland und Österreich zusammen eine relative Häufigkeit von 13 % hat.
Entscheiden Sie, ob diese Aussage richtig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

b) Eine in Österreich lebende Person *X* hat Blutgruppe A–.

Geben Sie anhand der in der Einleitung angeführten Daten und Informationen die Wahrscheinlichkeit an, mit der diese Person *X* als Blutspender/in für eine zufällig ausgewählte, in Österreich lebende Person *Y* geeignet ist!

Wie viele von 100 zufällig ausgewählten Österreicherinnen/Österreichern kommen als Blutspender/in für die Person *X* in Frage? Geben Sie für die Anzahl der potenziellen Blutspender/innen näherungsweise ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall mit 90 % Wahrscheinlichkeit an!

c) In einer österreichischen Gemeinde, in der 1 800 Einwohner/innen Blut spenden könnten, nahmen 150 Personen an einer freiwilligen Blutspendeaktion teil. Es wird angenommen, dass die Blutspender/innen eine Zufallsstichprobe darstellen. 72 Blutspender/innen hatten Blutgruppe A.

Berechnen Sie aufgrund dieses Stichprobenergebnisses ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den tatsächlichen (relativen) Anteil p der Einwohner/innen dieser Gemeinde mit Blutgruppe A, die Blut spenden könnten!

Die Breite des Konfidenzintervalls wird vom Konfidenzniveau (Sicherheitsniveau) und vom Umfang der Stichprobe bestimmt. Geben Sie an, wie jeweils einer der beiden Parameter geändert werden müsste, um eine Verringerung der Breite des Konfidenzintervalls zu erreichen! Gehen Sie dabei von einem unveränderten (gleichbleibenden) Stichprobenergebnis aus.

Bitte umblättern!

d) Blutgruppenmerkmale werden von den Eltern an ihre Kinder weitervererbt. Dabei sind die Wahrscheinlichkeiten in der nachstehenden Tabelle angeführt.

Blutgruppe der Eltern	mögliche Blutgruppe des Kindes			
	A	B	AB	0
A und A	93,75 %	–	–	6,25 %
A und B	18,75 %	18,75 %	56,25 %	6,25 %
A und AB	50 %	12,5 %	37,5 %	–
A und 0	75 %	–	–	25 %
B und B	–	93,75 %	–	6,25 %
B und AB	12,5 %	50 %	37,5 %	–
B und 0	–	75 %	–	25 %
AB und AB	25 %	25 %	50 %	–
AB und 0	50 %	50 %	–	–
0 und 0	–	–	–	100 %

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/AB0-System [26.11.2014]

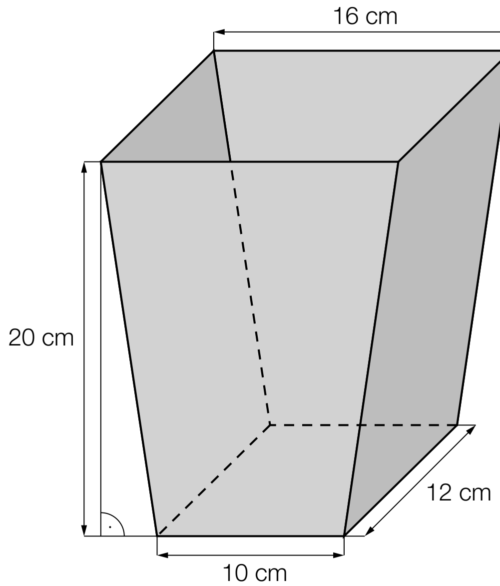
Eine Frau mit Blutgruppe A und ein Mann mit Blutgruppe 0 haben zwei (gemeinsame) leibliche Kinder.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder die gleiche Blutgruppe haben!

Ein Kind aus der Nachbarschaft dieser Familie hat Blutgruppe 0.
Gibt es eine Blutgruppe bzw. Blutgruppen, die der leibliche Vater dieses Kindes sicher nicht haben kann? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der gegebenen Daten!

Aufgabe 4

Füllen eines Gefäßes

Der Innenraum eines 20 cm hohen Gefäßes hat in jeder Höhe h eine rechteckige, horizontale Querschnittsfläche. Ihre Länge beträgt am Boden 10 cm und nimmt dann mit der Höhe linear bis auf 16 cm zu, ihre Breite beträgt in jeder Höhe 12 cm.



Aufgabenstellung:

a) $\boxed{\text{A}}$ Geben Sie eine Formel für die Länge $a(h)$ der rechteckigen Querschnittsfläche in der Höhe h an!

In das Gefäß wird Flüssigkeit gefüllt.
Geben Sie an, was der Ausdruck $12 \cdot \int_0^{15} a(h)\,\mathrm{d}h$ in diesem Zusammenhang bedeutet!

b) Das leere Gefäß wird bis zum Rand mit Flüssigkeit gefüllt.
Nach t Sekunden befindet sich die Wassermenge $q(t)$ (in ml) im Gefäß. Die Füllung dauert 39 Sekunden. Für $t \in [0; 39]$ gilt: $q'(t) = 80$.

Interpretieren Sie $q'(t) = 80$ im gegebenen Zusammenhang!

Ermitteln Sie $\frac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1}$ für beliebige t_1, t_2 mit $t_1 < t_2$ aus dem gegebenen Zeitintervall!

c) Das Fassungsvermögen des Gefäßes (in ml) bis zur Höhe x kann durch das Integral $\int_0^x (3{,}6 \cdot h + 120)\,\mathrm{d}h$ dargestellt werden.

Ermitteln Sie, bei welcher Höhe x das Wasser im Gefäß steht, wenn man 2,5 Liter Wasser in das Gefäß gießt!

Interpretieren Sie den im Integral vorkommenden Wert 3,6 im gegebenen Kontext!