



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Kulinarische Mathematik“

verfasst von / submitted by

Silvia Pointner

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet

A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet

Lehramtstudium UF Mathematik UF Physik

Betreuer / Supervisor

Mag. Dr. Andreas Ulovec

Danksagung

Ich möchte die Gelegenheit nutzen und mich an dieser Stelle bei meinem Diplomarbeitsbetreuer Dr. Andreas Ulovec bedanken, der mir jederzeit als Ansprechpartner unkompliziert, kompetent und immer gut gelaunt mit Rat und Tat zur Seite stand. Seine Offenheit meinen Ideen gegenüber ermöglichte es mir, meine Arbeit auf diese Art und Weise zu gestalten.

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie, die mich in meinem Studium von der ersten bis zur letzten Sekunde stets unterstützt hat. Danke Papa, dass du immer unser Bestes möchtest und mich im Studium finanziell unterstützt hast. Danke Mama für deine endlose Liebe, die zahlreichen Gespräche, schönen Ausflüge und dein Vertrauen in mich. Danke auch für die Stunden, in denen du diese Arbeit Korrektur gelesen hast. Ich danke meinen großen Brüdern Wolfgang und Reinhard, dass sie mit mir die Welt von klein auf entdeckt haben und ich immer stolz auf sie sein kann. Ich danke auch meiner lieben Oma Franziska, die für mich wie eine zweite Mutter ist und mein ganzes Leben mit Gesprächen, ihrer Lebensfreude und den besten Mahlzeiten der Welt bereichert.

Besonderen Dank möchte ich auch meinen Mädels Andi, Karo, Uschi, Lisa, Sandra, Babsi und Annemarie aus der Schulzeit aussprechen. Wir haben uns während der Schulzeit und auch jetzt immer weiter gebracht und in unseren Stärken gefördert. Danke, dass wir immer ein offenes Ohr füreinander haben. Andi – vor allem an dich nochmal tausend Dank einfach für alles!

Ein ganz besonderer Dank gilt auch meinen Studienkollegen und Studienkolleginnen, mit denen ich die letzten Jahre an der Universität verbringen durfte. Diese Menschen sind es, die das Studium zu einem unvergesslichen Abschnitt meines Lebens gemacht haben. Die Schreibstunden in der Bibliothek wurden stets belohnt durch lustige Ge-

sprache und Geschichten im Studierendenzentrum oder einem gelegentlichen Gang ins Clash, wofür ich den Physikerinnen und Physikern endlos dankbar bin! An dieser Stelle möchte ich besonders meinem guten Freund Antonio danken, dass er, seit wir uns kennen, wirklich immer für mich da ist.

Sage es mir – Ich werde es vergessen
Erkläre es mir – Ich werde mich erinnern
Lass es mich selber tun – Ich werde verstehen

Konfuzius

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort.....	1
2	Einleitung.....	5
2.1	Das Mathematikbild in unserer Gesellschaft – von der Schwierigkeit der Vermittlung zwischen zwei Welten.....	5
2.2	Mathematik und Allgemeinbildung.....	8
2.3	Das Relevanzparadoxon	10
3	Arbeitsplan.....	13
4	Realitätsbezogener Mathematikunterricht	15
4.1	Bildungswert des Mathematikunterrichts	15
4.2	Lehrplanbezug	20
4.3	Bildungsstandards	30
4.4	Ziele eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts	35
4.4.1	Motivationsförderung	38
4.4.2	SchülerInnenorientierung	40
4.5	Kulinarische Naturwissenschaften	43
5	Realteil.....	46
5.1	Kochen mit quadratischen Gleichungen	46
5.2	Eine sehr schnelle kulinarische Angelegenheit	58
5.3	Kaustik in der Kaffeetasse	61
5.4	Exponentieller Zerfall des Bierschaums	71
5.5	Die exponentielle Veranlagung des Blätterteigs	80
5.6	Das Cake - Cutting Problem	83
5.7	Die perfekte Weihnachtsgans	94
6	Resümee	102
7	Literaturverzeichnis	106
8	Abstract	115

1 Vorwort

Auf einer Social Media Plattform bin ich einmal einer Gruppe mit dem Namen „Wie, ich soll erwachsen werden? Nein, nein, ich werd lieber Physiker!“ beigetreten. Abgesehen davon, dass ich automatisch davon ausgehe, dass hier natürlich auch alle Physikerinnen gemeint sind, könnte man diese Gruppe auch jederzeit für Mathematikerinnen und Mathematiker, wahrscheinlich für alle in den Naturwissenschaften forschende Menschen, ausweiten. Physik und Mathematik betreiben besteht für mich aus vielen Aspekten, die man als Mensch in der Kindheit mit großem Eifer verfolgt hat: Die Welt entdecken und erforschen, Gesetzmäßigkeiten herausfinden, Strategien ausprobieren – eventuell scheitern – erneut ausprobieren mit einer adaptierten Strategie und vieles mehr. Was für ein Kind eine selbstverständliche Methode der Weltaneignung ist, wird in der Pädagogik und Didaktik „Entdeckendes Lernen“ genannt und hat einen großen Wert für den naturwissenschaftlichen Unterricht.

Leider deckt sich meine Einstellung zu Mathematik und Physik nur wenig mit der eher negativen besetzten Einstellung der breiten Masse. Auch ich schöpfte meine Begeisterung während meiner Schulzeit mehr von populärwissenschaftlichen Büchern (hier seien vor allem erwähnt: Anton Zeilinger, Steven Hawking, Robert Wolke, Rudolf Taschner, Roger Penrose und die großartige WAS IST WAS Kinderbücher-Serie), YouTube Videos und Dokumentationen als vom Schulunterricht. Erstere schafften es durch Verknüpfungen und Querverbindungen zu meiner direkten Lebenswelt, die naturwissenschaftlichen Themen so aufzubereiten, dass ich mir etwas darunter vorstellen konnte und die Phänomene auch in meinem Alltag wiederentdeckte. Aus eigener Erfahrung habe ich somit für den späteren Lehrberuf gelernt, wie wichtig das Herstellen dieser Querverbindungen und Realitätsbezüge für die Lernmotivation der Schülerinnen und Schüler ist.

Als ich mit meiner Mutter während meiner Studienzeit eine Vorstellung der Science Busters besuchte, stand für mich ab diesem Zeitpunkt fest, dass ich unbedingt Elemen-

te der Show später im Unterricht verwenden will. Spielerisch und mit Humor schafften es Werner Gruber, Heinz Oberhummer und Martin Puntigam wichtige Prinzipien der Thermodynamik anschaulich an ein großes Publikum weiterzugeben und es auch noch zu begeistern. Natürlich steckt hinter dieser Show viel Planung und Zeit, die man als Lehrperson definitiv nicht für jede Schulstunde aufwenden kann. Ich fand die Idee aber extrem spannend, Gesetze der Physik mit einer alltäglichen Beschäftigung wie dem Kochen zu verbinden. Manche Menschen kochen mit großer Freude, manche aus Notwendigkeit, aber ganz auskommen wird man dieser Tätigkeit nicht. Und ein Besucher oder eine Besucherin, die während der Show von Werner Gruber über die Physik des perfekten Schweinsbratens aufgeklärt wurde, wird vielleicht bei der nächsten Zubereitung des Schweinsbratens an Tipps und Tricks aus der Physik denken. Wäre das nicht das Hoch einer Physiklehrerin, wenn Schülerinnen und Schüler in ihrem Alltag das in der Schule Gelernte, wiederentdecken? Mal abgesehen vom Lerneffekt, den dieses Erlebnis hätte!

Da ich schon immer meine Fächer Physik und Mathematik sehr verbunden miteinander sah (ihre Verbindung ist ja auch schwer abzustreiten), war ich sehr interessiert an einem fächerübergreifenden Thema für meine Diplomarbeit. Da der Bereich der kulinarischen Physik zwar bei weitem noch nicht vollständig ausgebaut ist, aber mir Werner Gruber doch schon einiges vorgelegt hatte, wollte ich mir den Bereich der kulinarischen Mathematik näher ansehen. Es war mir klar, dass eine Verbindung der Themen Kochen und Mathematik auch für den Schulunterricht möglich sein muss und nach kurzer Recherche fand ich bereits die ersten unglaublich spannenden Umsetzungsmöglichkeiten. Interessant fand ich auch die Reaktion meiner Nicht-Mathematiker-Freundinnen und Freunde, als ich ihnen von meinem Vorhaben erzählte. Sie waren alle gleich ganz begeistert und überlegten ohne meine Aufforderung, welche Lebensmittel nicht etwas mit Mathematik zu tun haben könnten. Diese Reaktion hatte ich nicht erwartet, es ging doch um etwas Mathematisches (ein Thema, das meist auf sehr wenig bis keine Begeisterung in diesem Freundeskreis stößt). Die Reaktion hat mich so sehr gefreut und in meinem Vorhaben bestärkt, mathematische Themen mit dem kulina-

schen Bereich zu verknüpfen. Das Ergebnis meiner Recherche habe ich nun in dieser Diplomarbeit zusammengefasst.

2 Einleitung

2.1 Das Mathematikbild in unserer Gesellschaft – von der Schwierigkeit der Vermittlung zwischen zwei Welten

Das Bild der Mathematik in der Gesellschaft ist ein äußerst widersprüchliches: Zum Einen herrscht eine breite Anerkennung über den Nutzen mathematischer Fertigkeiten für Wirtschaft, Industrie und Dienstleistungen.¹ Dieses Bild wird verdeutlicht durch den hohen Stellenwert, den die Mathematik international im schulischen Fächerkanon einnimmt. Tatsächlich wird Mathematik weltweit an allgemeinbildenden Schulen als Kern- und Pflichtfach unterrichtet. Kulturübergreifend herrscht also Einigkeit darüber, dass Schülerinnen und Schüler ein Grundwerkzeug an mathematischen Fertigkeiten und Denkweisen erlernen sollen.² Man ist offenbar der Meinung, dass „Mathematikunterricht in ganz spezifischer aber wichtiger Weise zur Erziehung und zum vollen Menschsein beiträgt.“³ Als allgemeinbildendes Fach soll es die Persönlichkeit bereichern, sowie unsere Eigenschaften und Denkweisen erweitern, sodass sich dieses Wissen für den weiteren Lebensverlauf als nützlich erweist.⁴

Heinrich Winter wiederum beschreibt in seinem Artikel „Mathematikunterricht und Allgemeinbildung“ die Einschätzung der Mathematik in der breiten Öffentlichkeit folgendermaßen:

¹ Vgl. Loos & Ziegler 2015, S. 8.

² Vgl. Heymann 2013: S. 7.

³ Reichel & Resel 2002: S. 85.

⁴ Vgl. Reichel & Resel 2002: S. 85.

„Es ist eine Art höheres Schachspiel, schön und spannend für dafür eigens begabte Menschen. Und der Nutzen der Mathematik ist bedeutsam für die, die ihn beruflich ausschöpfen, Experten verschiedener Art (Ingenieure, Ökonomen, Physiker usw.).“⁵

Es kristallisiert sich allmählich ein Widerspruch heraus. Einerseits wird weltweit ein großer Wert darauf gelegt, dass sich alle Schülerinnen und Schüler an allgemeinbildenden Schulen mit Mathematik beschäftigen, andererseits wird ihr intellektueller Anspruch „als etwas gedeutet, was nur Spezialbegabungen zugänglich ist und als für die breite Masse von Natur aus uninteressant sein muß.“⁶. Tatsächlich haben viele Schülerinnen und Schüler, aber auch Erwachsene, Schwierigkeiten mit der abstrakten Natur der Mathematik und nehmen sie als „undurchschaubares, unverstehbares Begriffsgefüge und Regelwerk“⁷ wahr. Nicht selten wird die Schulmathematik gleichgestellt mit einer schriftlichen Abfrage von Rechenmethoden, die nach bestandener Prüfung für die Lernenden und ihren weiteren Lebensweg nicht mehr relevant sind.^{8, 9} Nach Heymann bekommen Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht häufig den Eindruck, Mathematik sei etwas Starres und Abgeschlossenes:

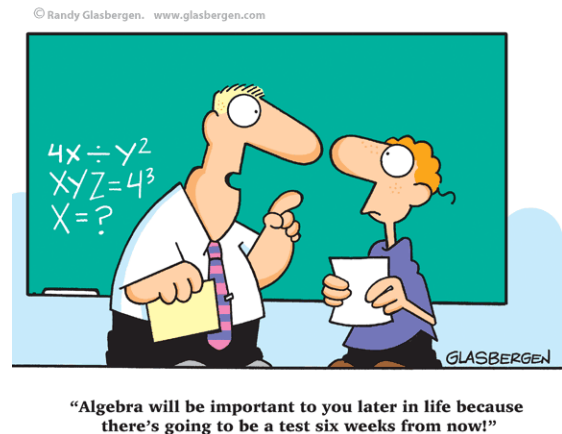


Abbildung 1 –
Comic zu „Lebenslangem Lernen“

⁵ Winter 1996: S. 39.

⁶ Winter 1996: S. 39.

⁷ Heymann 2013: S. 7.

⁸ Vgl. Heymann 2013: S. 7.

⁹ Vgl. Abbildung 1: Cartoon

„Es [Mathematisches Wissen; d.V.] ist in Lehrbüchern fixiert. Auf jede mathematisch zulässige Frage gibt es genau eine richtige Antwort. Meinungen zählen nicht. Mathematik scheint unbestechlich, streng und objektiv zu sein. Richtig gelöste Aufgaben signalisieren gelungene Aneignung des ‚fertig‘ gefundenen Wissens, falsch gelöste legen das eigene Ungenügen unbarmherzig bloß.“¹⁰

Ganz im Kontrast dazu steht die Ansicht schöpferischer Mathematikerinnen und Mathematikern, die immer wieder neue Zusammenhänge und neue Fragestellungen, die neue mathematische Modelle erfordern, in ihrem Fach erkennen. Für sie ist die Mathematik eine Welt voller Fragen, Geheimnisse und Überraschungen.¹¹ Der französischen Mathematiker Jean-Baptiste le Rond D’Alembert hat seine Sicht zur Mathematik folgendermaßen ausgedrückt: „Die Fantasie arbeitet in einem schöpferischen Mathematiker nicht weniger als in einem dichtenden Poeten“.¹² Es scheint allerdings meist eine breite Lücke zu bestehen, zwischen dem, was akademische Mathematikerinnen und Mathematiker bewegt und was allgemein als interessant und bedeutsam betrachtet wird.¹³

Vor allem in der medialen Berichterstattung führt die Mathematik ein Schattendasein. Die Leserinnen und Leser einer Zeitung begegnen auf den Politik- und Kulturseiten täglich verschiedenen Inhalten der Geistes- und Sozialwissenschaften. Themen der Mathematik finden allerdings selten einen Weg in den öffentlichen Diskurs und gehören in diesem Sinne nicht zur expliziten Kultur.¹⁴

¹⁰ Heymann 2013: S. 255.

¹¹ Vgl. Heymann 2013: S. 254.

¹² Zitat aus Texas Instruments – Education Technology Homepage, URL: <https://education.ti.com/de/deutschland/nonproductmulti/zitate/mathematik-aktiv> [25.8.2015]

¹³ Vgl. Wille 1996: S. 41.

¹⁴ Vgl. Fischer 2006: S. 111-116

2.2 Mathematik und Allgemeinbildung

Es ist nicht so, dass die Bedeutung und Nutzen von Mathematik und Naturwissenschaften für den technologischen Fortschritt von der Gesellschaft nicht erkannt worden wäre. Für naturwissenschaftliche Studienplätze an österreichischen Universitäten wird deutlich mehr Geld pro Student und Studentin ausgegeben als für geisteswissenschaftliche.¹⁵

Es würde den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen, alle wissenschaftlichen Positionen zu der Frage, was einen gebildeten Menschen heutzutage ausmacht, zu diskutieren. Es scheint allerdings, als würde die Mehrheit der Bevölkerung Wissen über die Mathematik bzw. Naturwissenschaften generell nicht zum allgemeinbildenden Wissen zählen.

Ich kann aus eigener Erfahrung bestätigen, was sowohl Winter in seinem Artikel „Mathematik und Allgemeinbildung“ als auch Taschner in seinem Essay „Wie Mathematik in der Schule noch zu retten ist“ zur Akzeptanz von mathematischem Wissen als Teil von Allgemeinwissen in der Gesellschaft schreiben. So gilt es zum Beispiel als blamabel, Rechtschreibfehler zu machen, kein Englisch zu können, wichtige Hauptstädte oder bestimmte Persönlichkeiten der Literatur (z.B. Goethe), Geschichte (z.B. Maria Theresia), Musik (z.B. Mozart) oder der Politik (z.B. den amtierenden Bundeskanzler / die amtierende Bundeskanzlerin des eigenen Landes) nicht zu kennen.¹⁶ Gibt man aber offen zu, dass man noch nie etwas vom zweiten Hauptsatz der Thermodynamik oder von der Eulerschen Zahl gehört habe, kann man mit wesentlich mehr Verständnis für diese Wissenslücke rechnen. Wohingegen niemand gerne Schwächen in Deutsch oder Englisch zugibt, gilt es offenbar als normal oder sogar als schick, in Mathematik nichts verstanden zu haben bzw. zu verstehen.^{17, 18, 19}

¹⁵ Gemäß der österreichischen Tageszeitung „Die Presse“, URL:

http://diepresse.com/home/bildung/universitaet/1285562/Finanzierung_Bis-zu-29500-Euro-pro-Student [28.8.2015]

¹⁶ Vgl. die Wochenzeitung „DIE ZEIT“, URL: <http://www.zeit.de/1983/15/fetisch-allgemeinbildung> [31.08.2015]

¹⁷ Vgl. Winter 1996: S. 39-40

Winter schreibt dazu:

*„Es wird eher als erheiternd hingenommen, wenn ein Bundeswirtschaftsminister nicht weiß, wie viele Nullen eine Milliarde hat, oder wenn ein hochbezahlter Quizmaster die Lösung der Aufgabe $30 : 0,5'$, die der Kandidat nicht beantworten kann, vom Zettel abliest mit der Bemerkung ‚60, aber fragen sie mich nicht warum!‘, was mit großem Beifall honoriert wird“.*²⁰

Ein Interview in der österreichischen Tageszeitung mit dem Mathematiker Rudolf Taschner beginnt folgendermaßen:

„KURIER: Mathe ist nicht sexy. Politiker prahlen damit, dass sie in dem Fach eine Niete waren.

Rudolf Taschner: Christoph Leitl macht das noch immer. Es ist eine Methode, um sich beim Volk einzuschmeicheln.“²¹

Rudolf Taschner spielt auf die Äußerung des Präsidenten der Wirtschaftskammer Österreich, Christoph Leitl, an, „er sei ein glanzvolles Beispiel eines Erfolgsmenschen, der es trotz mathematischen Unvermögens in der Schule ‚zu etwas gebracht‘ hat“.²² Es stellt sich die Frage, woher diese Grundhaltungen, Einstellungen und Weltansichten von Mathematik als weltfremde Wissenschaft, die für das eigene Leben kaum persönliche Relevanz oder Bereicherung bringt, in den Köpfen vieler Menschen kommen.

¹⁸ Vgl. Taschner 2004: S. 2

¹⁹ Vgl. Engel 2010: S. 3.

²⁰ Winter 1996: S. 40.

²¹ Vgl. die österreichische Tageszeitung „Kurier“, URL:

<http://kurier.at/politik/inland/rudolf-taschner-ueber-lehrer-fehler-machen-ist-keine-schande/1.901.338> [01.09.2015]

²² Taschner 2004: S. 2.

Heymann bezeichnet die Schule und den Unterricht als grundlegende Begegnung der Gesellschaft mit der Mathematik und meint dazu: „Das Bild von der Mathematik, das für die meisten Mitbürger ein Leben lang bestimmend bleibt, wird durch ihre schulischen Erfahrungen bestimmt.“²³

Ich möchte abschließend zu diesem Kapitel eine Schülerin der 11. Klasse zitieren, die meiner Meinung nach sehr gut auf einige Probleme in der Gestaltung des herkömmlichen Mathematikunterrichts hinweist.

„Das [Mathematik; d.V.] ist so ein Fach, das für mich überhaupt nicht anschaulich ist. Da jagen ein paar Schüler irgendwelchen Problemstellungen hinterher, die sowieso irgendwo schon eine Lösung haben, die ja auch als Ideallösung gehandelt wird. Ich empfinde Mathe als wenig kreativ, denn es lässt so wenig Freiraum für eigene Gedanken. Mathe ist so eine tote Materie. Man hantiert mit Zahlen, von denen man nicht weiß, was sie überhaupt sind. Zahlen machen mir Angst, weil sie irgendwie so undurchsichtig und doch so eindeutig definiert und belegt sind.“²⁴

2.3 Das Relevanzparadoxon

Engel spricht in seinem Buch „Anwendungsorientierte Mathematik“ vom sogenannten Relevanz-Paradoxon der Mathematik. Obwohl Mathematik die Grundlage unserer Informations- und Wissensgesellschaft ist, ist sie für die Anwenderin und den Anwender meist unsichtbar. Weite Teile der Öffentlichkeit denken deshalb, Mathematik wäre für sie nutzlos, obwohl quasi jede technische Anwendung (z.B. GPS, Verschlüsselungen, industrielle Produktion und Verkehr), die unseren angenehmen Lebensstil erst ermöglicht, auf Mathematik basiert. Engel schlägt hier scherzweise vor, man könnte auf je-

²³ Heymann 2013: S. 255.

²⁴ Kollosche 2014, S. 39.

dem technischen Gerät einen Aufkleber „mathematics inside“ (angelehnt an das Computerlabel „Intel inside“) anbringen. Köhler schreibt in diesem Zusammenhang:

„Je mehr Mathematik in einen Apparat oder eine Sache (schon) eingegangen ist, desto weniger braucht man gewöhnlich für deren Handhabung. [...] Es ist gleichzeitig immer mehr mathematische Kompetenz zur Herstellung unserer Gebrauchsprodukte nötig und immer weniger zu ihrer Benutzung.“²⁵

Die beste Eigenschaft der Mathematik, nämlich ihre objektive Gültigkeit und Verlässlichkeit, wird ihr zum Verhängnis. Ein technisches Gerät, ein mathematischer Algorithmus, funktioniert, ohne dass sich die meisten Menschen damit auseinandersetzen müssen. Anders als ein Theaterstück, das von den persönlichen Positionen und Emotionen der Zuseherinnen und Zuseher lebt, funktionieren die Gesetze der Strömungslehre, wenn man im Flugzeug sitzt, auch unabhängig von den Fluggästen. Fischer schreibt: „Etwas, mit dem ich mich persönlich nicht einbringen kann, oder, das sozusagen mit mir nichts zu tun hat, braucht mich auch nicht zu interessieren. [...] Etwas, das bloß objektiv ist, [...], benötigt mich eigentlich nicht, und ich kann darauf verzichten, mich damit auseinanderzusetzen“.²⁶ Ist man der Meinung, dass Kultur und Bildung ein lebendiger Prozess sind, so ist Konfliktpotential eine Voraussetzung für kulturelle Relevanz. In den Medien wird es deutlich: Die Leserinnen und Leser beteiligen sich am meisten an Inhalten, die verschiedene Meinungen erfordern und Themen ihres täglichen Lebens ansprechen bzw. darauf Einfluss haben könnten.²⁷ Was bedeutet das nun für den Schulunterricht? Oftmals von der Didaktik der Naturwissenschaften gefordert, sollte ein stärkerer Fokus auf „Anwendungsfelder und Bezüge zu interessanten Phänomenen aus der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler“²⁸ gelegt werden. Da-

²⁵ Köhler 2002: S. 7.

²⁶ Fischer 2006: S. 113

²⁷ Vgl. Vgl. Fischer 2006: S. 112-116.

²⁸ Schecker & Ralle 2009: S. 84.

rüber hinaus werden das aktive Experimentieren und vor allem das Sprechen über Mathematik und Naturwissenschaften und deren Nutzen im Unterricht sowohl von den Schülerinnen und Schülern als auch von den Didaktikerinnen und Didaktikern gewünscht.²⁹

Heymann schlägt vor, man könnte den Mathematikunterricht inhaltlich einmal ganz anders gestalten: „[...] offene Probleme bearbeiten zu lassen, über Mathematik zu philosophieren, mit mathematischen Fragen experimentell umzugehen, Alltagsprobleme aufzugreifen“³⁰. Die Reaktion der meisten Schülerinnen und Schüler wäre wahrscheinlich „Ist das überhaupt richtige Mathe?“, da der Mathematikunterricht im Allgemeinen von formalen und algorithmischen Zügen gekennzeichnet ist. Die verfestigten Erwartungen gegenüber dem Fach könnten noch erfolgreicher mit Methoden, die für den Mathematikunterricht eher untypisch sind, wie überwiegendes Arbeiten in Gruppen, Schülerdiskussionen und aufsatzartige Auseinandersetzungen mit dem gerade aktuellen mathematischen Thema, gelockert werden. Die Lernenden würden einen ganz anderen Umgang mit Mathematik kennenlernen.³¹

Nach Heymann müsse eine „Brücke vom (objektiven) Weltbezug des Faches zur (subjektiven) Welt der Schüler“ geschlagen werden.³²

²⁹ Vgl. Schecker & Ralle 2009: S. 84-85.

³⁰ Heymann 2013: S. 255.

³¹ Vgl. Heymann 2013: S. 254-255

³² Vgl. Heymann 2013: S. 183.

3 **Arbeitsplan**

In den folgenden Kapiteln des theoretischen Teils meiner Diplomarbeit möchte ich den Zusammenhang einiger Kritikpunkte des Abschlusszitates aus Kapitel 2.2 und dem Wesen der Mathematik mit Hilfe der Literatur näher beleuchten. Dadurch wird verständlicher, weshalb der Lehrplan und die didaktische Forschung immer mehr Wert auf Mathematik im anwendungsorientierten Kontext legen, worauf ich in Kapitel 4 näher eingehen möchte. Der Einfluss von realitätsnahen und sinnstiftenden Aufgaben auf die Motivation von Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht ist zugleich auch meine Motivation für den Titel dieser Arbeit: „Kulinarische Mathematik“. Der bekannte österreichische Physiker Werner Gruber, der neben dem kürzlich verstorbenen Physiker Heinz Oberhummer und dem Kabarettisten Martin Puntigam Mitglied des beliebten österreichischen Wissenskabarets „Science Busters“ ist, zeigt mit seinem Bestseller „Die Genussformel: Kulinarische Physik“, dass sich Themen rund ums Kochen ausgezeichnet mit Inhalten der Physik und anderer Naturwissenschaften verbinden lassen und Menschen aller Altersgruppen begeistern können. Das unbeliebte Schulfach Physik erfreut sich normalerweise noch geringerer Beliebtheit als alle anderen naturwissenschaftlichen Fächer³³, dennoch informieren sich viele Leserinnen und Leser freiwillig über wichtige Prinzipien der Thermodynamik, wenn sie ihnen im Kontext der Zubereitung des idealen Schweinsbratens „serviert“ werden. Das Thema wird für die Leserin und den Leser auf einmal persönlich relevant, denn wer ist nicht tagtäglich mit der Zubereitung oder dem Verzehr von Speisen (ob selbst oder im engeren Umfeld) konfrontiert?

Das gesteigerte Interesse der Menschen für physikalische Inhalte, wenn sie im Kontext der Kochkunst eingebunden sind, habe ich mir als Anreiz genommen, auch eine Verbindung von mathematischen Inhalten mit Themen aus dem kulinarischen Bereich zu versuchen. Das Resultat findet sich im praktischen Teil der Arbeit und ist eine Samm-

³³ Vgl. Fruböse 2010, S. 388.

lung von kleineren Aufgaben bis zu größeren Projekten für den Unterricht, die zu ausgewählten Themen des oftmals theoretischen Kernstoffes eine für den Lernprozess wertvolle Beziehung mit der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler aufbauen sollen.

4 Realitätsbezogener Mathematikunterricht

4.1 Bildungswert des Mathematikunterrichts

Schülerinnen und Schüler und junge Erwachsene sind mit einer Vielzahl an Herausforderungen konfrontiert: Verschiedene Wandlungsprozesse in Wirtschaft und Gesellschaft, sowie weltweite Probleme (sozialer Ausgleich, Umweltschutz, weltweite Ernährungssituation, Friedenssicherung) erfordern einen hohen Grad an Flexibilität und eine fundierte Allgemeinbildung³⁴, um als selbstständig denkende Bürgerinnen und Bürger an demokratischen Prozessen teilnehmen zu können.³⁵

Welchen Beitrag kann nun der Mathematikunterricht an allgemeinbildenden Schulen dazu leisten?

Mathematikunterricht im allgemeinbildenden Sinn ist nach Heinrich Winter durch drei Grunderfahrungen, die in vielerlei Hinsicht miteinander verknüpft sind, gekennzeichnet:

„(G1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

³⁴ „Zur Allgemeinbildung soll hier das an Wissen, Fertigkeiten, Fähigkeiten, und Einstellungen gezählt werden, was jeden Menschen als Individuum und Mitglied von Gesellschaften in einer wesentlichen Weise betrifft, was für jeden Menschen unabhängig von Beruf, Geschlecht, Religion u.a. von Bedeutung ist.“ Zitat nach Winter 1996: S. 35.

³⁵ Vgl. Winter 1996: S. 35.

(G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“³⁶

Winter spricht bewusst von Grunderfahrungen statt zum Beispiel von Grundkenntnissen oder Grundwissen, um noch stärker hervorzuheben, dass Mathematik bewusst vom Lernenden erlebt (erfahren) und nicht lediglich als Information entgegengenommen und abgespeichert werden soll.

In (G1) spricht Winter von einer nützlichen und brauchbaren Mathematik, wobei nicht die Notwendigkeit der Berufsbildung die Bedeutung für Allgemeinbildung mit sich bringt.

„Interessant und wirklich unentbehrlich für Allgemeinbildung sind Anwendungen der Mathematik erst, wenn in Beispielen aus dem gelebten Leben erfahren wird, wie mathematische Modellbildung funktioniert und welche Art von Aufklärung durch sie zustande kommen kann,...“³⁷

Der Lernende soll mit Hilfe der angeeigneten mathematischen Fähigkeiten (sie dienen ihm als Werkzeug) befähigt werden, große Wissensbereiche seiner Welt zu erschließen. Auch das scheinbar recht lebensnahe Bürgerliche Rechnen wirkt nur allgemeinbildend, wenn der Lebenszusammenhang deutlich ist. Themenkreise wie „Grundfragen der Bevölkerungskunde, der Altersversorgung, des Versicherungs- und Steuerwesens“

³⁶ Winter 1996: S. 35.

³⁷ Winter 1996: S. 36.

sollten als „Bestandteil einer politisch-aufklärerischen Arithmetik (und nicht etwa als Fachrechnen für Versicherungskaufleute oder Finanzbeamte)“ verstanden werden.³⁸ Im weiteren Zusammenhang nennt Winter „die Anwendung der Bewegungslehre auf die Fahrphysik“ als „unentbehrlicher Bestandteil von Aufklärung und Handlungsanweisung im Hinblick auf den motorisierten Straßenverkehr“. Die Schulung der Rauman-schauung durch Elemente der Darstellenden Geometrie, um Beziehungen zu Kunst, Design, Architektur und Symmetrie herzustellen, hat ebenso notwendigen allgemein-bildenden Charakter wie das Verständnis von exponentiellem Wachstum und Zerfall, um ein Bewusstsein für ökologische und ökonomische Zusammenhänge zu bekommen.³⁹

Während im 19. Jahrhundert Anwendungen in der Mathematik vorrangig Fragen der Physik, Astronomie und Finanzgeschäften behandelten, so gewannen mathematische Konzepte in den letzten Jahrzehnten vor allem durch die Weiterentwicklung von Gebieten wie der Numerik, diskreter Mathematik, Informatik und Stochastik stark an Bedeutung für fast alle Wissensbereiche. Mathematik spielt zunehmend eine bedeutende Rolle als Basis vieler Wissenschaften. Diese Entwicklung hat auch unabwendbare Konsequenzen für den Mathematikunterricht in der Schule.⁴⁰

Die zweite Grunderfahrung (G2) spricht die „innere Welt der Mathematik“⁴¹ als strenge Wissenschaft mit ihrem formalen und abstrakten Charakter an. Auf Basis genau vereinbarter Argumentation ist es möglich, zu gesicherten Erkenntnissen zu gelangen, was eine breite Anwendung erst möglich macht.⁴²

Wichtige Schritte in der Mathematik erfordern ein „Mindestmaß an algebraischen Fertigkeiten“.

³⁸ Winter 1996: S. 36.

³⁹ Vgl. Winter 1996: S. 36.

⁴⁰ Vgl. Engel 2010: S. 3.

⁴¹ Winter 1996: S. 37.

⁴² Borneleit et al. 2001: S. 2.

„Variable, Terme, Formeln, Gleichungen gebrauchen zu lernen, ist eines der wichtigsten allgemeinbildenden Ziele des Mathematikunterrichts. Zugespitzt: Die mathematische Allgemeinbildung ist nicht durch das definiert, was ohne Formeln ‚geht‘, sondern ist nur etwas wert, wenn sie den verständigen Gebrauch von Formeln nachdrücklich anstrebt. [...] Deduktive Ordnung zwischen Aussagen zu entdecken und auszudrücken ist hier das allgemeinbildende Ziel.“⁴³

Die dritte Grunderfahrung (G3) spricht den formalen Bildungswert der Mathematik als „Schule des Denkens“⁴⁴ an. Der Unterricht soll vor allem Problemlösefähigkeiten fördern. Schülerinnen und Schüler sollen sich darin üben, heuristische Strategien wie das Ausnutzen von Analogien und mentale Techniken (wie etwa Klassifizieren und Anordnen) zu nutzen.

Die Reflexion über das eigene Tun bildet aber erst die Grundlage für einen Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung.^{45, 46}

„Da wird eine Aufgabe nicht nur gelöst [...] vielmehr kommt es [...] zu Vor- und Nachfragen etwa der folgenden Art: Was macht die Aufgabe so schwierig? [...] Komme ich mit Probieren weiter? Hilft eine Zeichnung? Hilft eine andere Beziehungsweise? Kann ich die Aufgabe in Teilaufgaben zerlegen? Kann ich rückwärts arbeiten? [...] War das Ergebnis zu erwarten? [...] Gibt es womöglich einen kürzeren, eleganteren Lösungsweg? [...] Was weiß ich jetzt besser, genauer als vorher? Usw.“⁴⁷

⁴³ Winter 1996: S. 37.

⁴⁴ Winter 1996: S. 38.

⁴⁵ Winter 1996: S. 39.

⁴⁶ Bruder et al. 2015: S. 69.

⁴⁷ Winter 1996: S. 38.

Heuristische Fähigkeiten heranbilden bedeutet also eine intellektuelle Bereitschaft zu trainieren, sich einer gedanklichen Herausforderung frei, kreativ und positiv gestimmt zu stellen.⁴⁸ Die Schülerinnen und Schüler lernen mit Hilfe von logischen Schlussfolgerungen (Hypothesen) Aussagen über ein System (ihrer Welt) zu treffen.⁴⁹

Folgen für den Unterricht

Borneleit, Danckwerts, Henn und Weigand kritisieren in ihrer 2001 veröffentlichten Abhandlung zum Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, dass sich der Unterricht überwiegend an der Grunderfahrung (G2), also am Kalkülaspekt der Mathematik, orientiert und die beiden anderen Grunderfahrungen (G1) und (G3) oftmals nur unzureichend berücksichtigt werden.^{50, 51} Nach Henn und Filler werden viele Schülerinnen und Schüler zu der Überzeugung erzogen, Mathematik erlernen bedeute, das Abarbeiten bestimmter Aufgabentypen einzuüben (vor allem jene, die mit hoher Wahrscheinlichkeit bei der nächsten Schularbeit zu erwarten sind). Der Mathematikunterricht sei nach wie vor fixiert auf Routineaufgaben.⁵² Bereits 1973 meinte der Pionier der Mathematikdidaktik Hans Freudenthal: „Wenn unser Unterricht heute darin besteht, dass wir Kindern Dinge beibringen, die in einem oder zwei Jahrzehnten besser von Maschinen erledigt werden, beschwören wir Katastrophen herauf.“

Um den allgemeinbildenden Charakter des Mathematikunterrichts wieder zu stärken, schlagen Borneleit, Danckwerts, Henn und Weigand folgende inhaltliche Maßnahmen

⁴⁸ Borneleit et al. 2001: S. 2.

⁴⁹ „Heuristik“. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 26. August 2015, 15:49 UTC. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Heuristik&oldid=145435405> (Abgerufen: 8. September 2015, 17:31 UTC)

⁵⁰ Henn und Filler merken in ihrem Buch „Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra“ (Henn & Filler 2015: S. 2.) an, dass die Vernachlässigung von G1 und G3 nicht gleichzeitig bedeutet, dass dem Anspruch der Grunderfahrung G2 in befriedigender Form nachgekommen wird. Auch hier gibt es laut den Autoren Defizite im konzeptuellen Verständnis von Begriffen und Zusammenhängen sowie im Begründen von Aussagen.

⁵¹ Borneleit et al. 2001: S. 7-11.

⁵² Henn & Filler 2015: S. 3.

vor: die Orientierung an fundamentalen Ideen, der Grundgedanke inhaltlicher Vernetzung als Orientierungsgrundlage, die Trennung von mathematischen Grundvorstellungen und kalkülhaftem Arbeiten, sowie verstärkte Anwendungsorientierung. Unterrichtsmethoden sollen außerdem danach beurteilt werden, wieweit die Eigenaktivität der Schülerinnen und Schüler angeregt wird. Gefordert wird eine Balance zwischen Instruktion und Konstruktion, die Öffnung von Aufgaben, Vervielfachung von Lösungswegen, Integration neuer Technologien und konsequente Schülerorientierung des Unterrichts.⁵³

4.2 Lehrplanbezug

Lehrplan der AHS

Die derzeitige Version des Lehrplans für Allgemeinbildende Höhere Schulen wurde für die Unterstufe am 11. Mai 2000 und für die Oberstufe am 8. Juli 2004 veröffentlicht.⁵⁴ Darin zu finden ist jeweils ein allgemeiner Teil, bestehend aus Bildungs- und Lehrgaben, Unterrichtszielen und Unterrichtsinhalten und Beiträgen zu den Bildungsbereichen, außerdem eine Beschreibung verschiedener didaktischer Grundsätze für die Unterrichtsgestaltung. Des Weiteren schreibt ein spezifischer Teil für jedes Unterrichtsfach vor, welche Themen in welcher Schulstufe zu behandeln sind. Es ist wichtig hier

⁵³ Borneleit et al. 2001: S. 13-20.

⁵⁴ Zu finden sind die Lehrpläne für die Unter- und Oberstufe auf der Internetseite des Bundesministeriums für Bildung und Frauen. URL: <https://www.bmbf.gv.at/>

- Lehrplan der AHS Unterstufe für den Pflichtgegenstand Mathematik:
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2 [21.09.2015]
- Lehrplan der AHS Oberstufe für den Pflichtgegenstand Mathematik:
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf [21.09.2015]

anzumerken, dass der Lehrplan vor allem als Orientierungshilfe für die Jahresplanung des jeweiligen Unterrichtsfaches dient, er muss nicht eins zu eins befolgt werden. Der Lehrer/Die Lehrerin kann innerhalb des Lehrplans individuelle Schwerpunkte setzen. Man spricht hier von einem Kern-Lehrplan und autonomem Gestaltungsraum.⁵⁵

In den nächsten Unterkapiteln möchte ich sowohl den allgemeinen Teil als auch den fachspezifischen Teil des Lehrplans näher betrachten und jene Punkte herausgreifen, die die Einbindung des Alltagsbezuges in das Unterrichtsgeschehen fordern. Zudem möchte ich die Kompetenzen herausgreifen, die laut Lehrplan speziell durch Realitätsbezüge und vernetzende Aufgaben im Unterricht entwickelt werden.

Allgemeiner Teil des AHS-Lehrplans

Im ersten Teil des AHS-Lehrplans wird direkt zu den allgemeinen Bildungszielen der AHS Stellung genommen. Alle Zitate dieses Abschnitts stammen aus dem allgemeinen Teil des AHS Lehrplans, der auf der Homepage des Bundesministeriums für Bildung und Frauen veröffentlicht ist.⁵⁶

Laut Lehrplan haben die Allgemeinbildenden Höheren Schulen neben dem gesetzlichen Auftrag den Schülerinnen und Schülern „eine umfassende und vertiefte Allgemeinbildung zu vermitteln und sie zugleich zur Hochschulreife zu führen“ auch folgende Verpflichtung:

„Die allgemeinbildende höhere Schule hat [...] an der Heranbildung der jungen Menschen mitzuwirken, nämlich beim Erwerb von Wissen, bei

⁵⁵ Vgl. Broschüre des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur. URL: ftp://ftp.vobs.at/neuer_lp/ahs_lp_broschuere.pdf [21.09.2015]

⁵⁶ Siehe dazu Website des Bundesministeriums für Bildung und Frauen. URL: <https://www.bmbf.gv.at/>
Direkter Link zum Allgemeinen Teil des AHS Lehrplans:
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/11668_11668.pdf?4dzgm2

der Entwicklung von Kompetenzen und bei der Vermittlung von Werten. Dabei ist die Bereitschaft zum selbstständigen Denken und zur kritischen Reflexion besonders zu fördern. Die Schülerinnen und Schüler sind in ihrem Entwicklungsprozess zu einer sozial orientierten und positiven Lebensgestaltung zu unterstützen.“

Eine weitere für das Thema dieser Arbeit relevante Leitvorstellung aus dem allgemeinen Teil des AHS-Lehrplans ist, dass sich der Unterricht „sowohl an wissenschaftlichen Erkenntnissen als auch an den Erfahrungen und Möglichkeiten, die die Schülerinnen und Schüler aus ihrer Lebenswelt mitbringen“ zu orientieren hat.

Es wird gefordert, dass die Schülerinnen und Schüler sogenannte „dynamische Fähigkeiten“ entwickeln. Die Intention dahinter ist, dass im realen Leben der Schülerinnen und Schüler oftmals Situationen auftreten werden, die sie allein mit abrufbarem Wissen und erworbenen Erfahrungen nicht bewältigen können. Ziel der Allgemeinbildenden Höheren Schule ist es, die Schülerinnen und Schüler soweit zu schulen, dass sie in diesen Situationen neue und vor allem eigene Lösungswege entwickeln können.

Aus den didaktischen Grundsätzen des allgemeinen österreichischen Lehrplans für Allgemeinbildende Höhere Schulen für Unter- und Oberstufe, die Lehrerinnen und Lehrer in ihren Unterricht einbeziehen sollen, möchte ich folgenden Grundsatz, der mir für diese Arbeit am relevantesten erscheint, exemplarisch herausnehmen:

- **Herstellen von Bezügen zur Lebenswelt**

- Im Sinne des exemplarischen Lernens sind möglichst zeit- und lebensnahe Themen zu wählen, durch deren Bearbeitung Einsichten, Kenntnisse, Fähigkeiten, Fertigkeiten und Methoden gewonnen werden. Die Materialien und Medien, die im Unterricht eingesetzt werden, haben möglichst aktuell und anschaulich zu sein, um die Schülerinnen und Schüler zu aktiver Mitarbeit anzuregen.

Der letzte Punkt, den ich aus dem allgemeinen Lehrplan besonders hervorheben möchte, bezieht sich auf einen fächerübergreifenden Unterricht. Dieser Teilbereich der Leitvorstellungen hebt hervor, dass die Vernetzung der einzelnen Disziplinen den Schülerinnen und Schülern „bei der Bewältigung von Herausforderungen des täglichen Lebens helfen“ kann. Die Realität der Schülerinnen und Schüler ist schließlich auch nicht in Schulfächer eingeteilt, in denen sie eine Stunde lang dieses Wissen und eine Stunde lang ein anderes Wissen einsetzen müssen. Es wird ständig die Vernetzung verschiedener Erfahrungen und Wissensbereiche erfordert. Ein fächerübergreifender Unterricht könnte den Schülerinnen und Schüler ein Bewusstsein für verschiedene interdisziplinäre Zusammenhänge vermitteln, neue Möglichkeiten der Motivation schaffen, sowie den Kompetenzerwerb nachhaltig fördern.

Bildungsziele des Mathematik-Lehrplans der AHS-Oberstufe

Alle Zitate in diesem Abschnitt stammen aus dem Mathematik-Lehrplan der AHS Oberstufe.

Laut Lehrplan soll der Mathematikunterricht die Schülerinnen und Schüler beim Prozess des lebensbegleitenden Lernens so gut wie möglich unterstützen. Es sollen deshalb das analytisch-folgerichtige Denken sowie „mathematische Kompetenzen, die für viele Lebensbereiche grundlegende Bedeutung haben“ geschult werden.

Wörtlich kann man dem Lehrplan entnehmen: „Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts.“

Der neue Lehrplan fordert die Lehrerinnen und Lehrer mit einer gewissen Selbstverständlichkeit auf, Bezüge zwischen der Realität und der Mathematik herzustellen. Realitätsbezüge sollen die Schülerinnen und Schülern dabei unterstützen die mathemati-

schen Kompetenzen zu entwickeln, die verschiedenen Aspekte der Mathematik zu erkennen und Anteil an ihrem Beitrag zu den Bildungsbereichen zu nehmen.

Dazu möchte ich exemplarisch folgende Ansprüche an den Mathematikunterricht aus dem Lehrplan der AHS Oberstufe zitieren:

Bildungs- und Lehraufgabe:

- **Mathematische Kompetenzen, die sich auf Begriffe beziehen**

- Sie äußern sich in der Fähigkeit, mathematische Begriffe mit adäquaten Grundvorstellungen zu verknüpfen. Die Schülerinnen und Schüler sollen Mathematik als spezifische Sprache zur Beschreibung von Strukturen und Mustern, zur Erfassung von Quantifizierbarem und logischen Beziehungen sowie zur Untersuchung von Naturphänomenen erkennen.

- **Aspekte der Mathematik**

- Erkenntnistheoretischer Aspekt:

Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt; sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen; Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen.

- Pragmatisch- anwendungsorientierter Aspekt:

Mathematik ist ein nützliches Werkzeug und Methodenreservoir für viele Disziplinen und Voraussetzung für viele Studien bzw. Berufsfelder.

- Schöpferisch-kreativer Aspekt:

Mathematik ist eine Schulung des Denkens, in der Arbeitstechniken vermittelt, Strategien aufgebaut, Phantasie angeregt und Kreativität gefördert werden.

- **Beiträge zu den Bildungsbereichen**

- Mensch und Gesellschaft:

Der Unterricht soll aufzeigen, dass Mathematik in vielen Bereichen des Lebens (Finanzwirtschaft, Soziologie, Medizin usw.) eine wichtige Rolle spielt.

- Natur und Technik:

Viele Naturphänomene lassen sich mit Hilfe der Mathematik adäquat beschreiben und damit auch verstehen; Die Mathematik stellt eine Fülle von Lösungsmethoden zur Verfügung, mit denen Probleme bearbeitbar werden.

- Kreativität und Gestaltung:

Mathematik besitzt neben der deduktiven auch eine induktive Seite; vor allem das Experimentieren mit neuen Aufgabenstellungen und Problemen macht diese Seite sichtbar, bei der Kreativität und Einfallsreichtum gefördert werden.

- Gesundheit und Bewegung:

Durch die Bearbeitung mathematisch beschreibbarer Phänomene aus dem Gesundheitswesen und dem Sport können Beiträge zu diesem Bildungsbereich geleistet werden.

Didaktische Grundsätze:

Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen durch eigene Tätigkeiten Einsichten gewinnen und so mathematische Begriffe und Methoden in ihr Wissenssystem einbauen. Zur Sicherung des Unterrichtsertrages bieten sich Einzel-, Team- und Gruppenarbeiten und Projektarbeiten an.

- **Lernen in anwendungsorientierten Kontexten**

- Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. Vernetzungen der Inhalte innerhalb der Mathematik durch geeignete fächerübergreifende Unterrichtssequenzen sind anzustreben. Die minimale Realisierung besteht in der Thematisierung mathematischer Anwendungen bei ausgewählten Inhalten, die maximale Realisierung in der ständigen Einbeziehung anwendungsorientierter Aufgaben- und Problemstellungen zusammen mit einer Reflexion des jeweiligen Modellbildungsprozesses hinsichtlich seiner Vorteile und seiner Grenzen.

- **Lernen unter vielfältigen Aspekten**

- Einzelne Inhalte und Probleme sind aus verschiedenen Blickwinkeln zu sehen und aus verschiedenen Richtungen zu beleuchten. Vielfältige Sichtweisen sichern eine große Flexibilität bei der Anwendung des Gelernten. Die minimale Realisierung besteht in der gelegentlichen Verdeutlichung verschiedener Sichtweisen bei der Behandlung neuer Inhalte, die maximale Realisierung im konsequenten Herausarbeiten der Vor- und Nachteile ver-

schiedener Zugänge. Damit wird ein vielschichtiges und ausgewogenes Bild der Mathematik gewonnen.

Der Lehrplan fordert also ganz offensichtlich die Lehrerinnen und Lehrer dazu auf, mehr Sachverhalte und Aufgaben aus dem Alltag und den Interessensgebieten der Schülerinnen und Schüler in den Unterricht mit einzubeziehen. Wenn die Schülerinnen und Schüler einen Sinn hinter den zu bearbeitenden Aufgaben erkennen können, kann dies bewirken, dass sie ihr mathematisches Wissen aus eigenem Antrieb weiter ausbauen wollen.

Der reale Mathematikunterricht hat sich allerdings noch zu wenig in die Richtung eines anwendungsorientierten Unterrichts verändert. Die Mathematik-Didaktikerin Katja Maaß ist der Meinung, dass „Realitätsbezüge (...) in der alltäglichen Schulpraxis trotz einer langjährigen didaktischen Diskussion und der Entwicklung vieler Unterrichtsbeispiele ein Schattendasein“⁵⁷ führen.

Bildungsziele des Mathematik-Lehrplans der AHS-Unterstufe

Alle Zitate in diesem Abschnitt stammen aus dem Mathematik-Lehrplan der AHS Unterstufe.

Übereinstimmend mit dem allgemeinen Teil und dem Mathematik-Lehrplan der AHS Oberstufe wird auch im Lehrplan für die AHS Unterstufe ein Bezug zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler gefordert.

Konkret findet man in den Bildungs- und Lehraufgaben die Forderung, dass die Schülerinnen und Schüler „mathematisches Können und Wissen aus verschiedenen Bereichen ihrer Erlebnis- und Wissenswelt nutzen sowie durch Verwenden von Informationsquellen weiter entwickeln“ sollen. Die Intention dahinter ist unter anderem, dass

⁵⁷ Maaß 2004, S. 14.

sich die Schülerinnen und Schüler der Bedeutung des Mathematikunterrichts für die eigene Person bewusst werden.

Der Mathematikunterricht soll auch so geplant sein, dass er den Schülerinnen und Schülern wichtige Grunderfahrungen ermöglicht. Zwei Erfahrungen erachte ich für das Thema meiner Arbeit als besonders relevant. Zum einen sollen die Lernenden Erscheinungen der Welt in fachbezogener Art wahrnehmen und verstehen. Es ist aber auch notwendig, dass Schülerinnen und Schüler Problemlösefähigkeiten erwerben, die über die Mathematik hinaus gehen.

Außerdem sieht die Behandlung des Kernbereiches des Lehrstoffes im Lehrplan vor, dass die Schülerinnen und Schüler „von ihrer unmittelbaren Erlebniswelt ausgehen und ihre Erfahrungen auch in fächerübergreifende Vorhaben einbringen“.

Der Mathematikunterricht in der AHS Unterstufe soll ebenso wie in der Oberstufe verschiedene Beiträge zu den Bildungsbereichen zum Ziel haben. Einige relevante Verbindungen sowie didaktische Grundsätze möchte ich hier nennen.

- Mensch und Gesellschaft
 - Untersuchen von Situationen und Problemen mit Hilfe rationalen Denkens.

- Kreativität und Gestaltung
 - Entwickeln verschiedener Lösungswege zu mathematischen Fragestellungen; Nutzen heuristischer Strategien.

- Gesundheit und Bewegung
 - Berechnungen, Statistiken und Auswertungen im Gesundheits- und Ernährungsbereich (Energieverbrauch, Nährwerttabellen, Belastungskurven).

Didaktische Grundsätze:

- **Unterrichten in Phasen, Vernetzung, Querverbindungen**

- Unter Beachtung der Vorkenntnisse sollen Inhalte in einer ersten Phase nur um einige Gesichtspunkte erweitert, bei einfachen Anwendungen erprobt und erst in einer späteren Phase vertieft und ergänzt werden. Vernetzungen der Inhalte durch geeignete Unterrichtssequenzen und Aufgabenstellungen sind anzustreben. Querverbindungen zu anderen Unterrichtsgegenständen sowie zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler sind herzustellen.

- **Motivierung der Schülerinnen und Schüler**

- Mit Hilfe von Problemstellungen aus Themenkreisen, die den Erfahrungen und Interessen der Schülerinnen und Schüler entsprechen, sollen mathematisches Wissen und Können entwickelt und gefestigt werden. Dabei soll die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebens- und Wissensbereichen erfahren werden. Wünschenswert für diese Phase ist eine Mitverantwortung durch die Schülerinnen und Schüler. Hilfen oder Informationen sollen dann erfolgen, wenn sie verlangt oder benötigt werden. Selbstständiges Entdecken und Erfolgserlebnisse sind ein wesentlicher Beitrag zur Motivation.

4.3 Bildungsstandards

Das Konzept

Die Unterrichtsinhalte und Ziele werden nicht nur durch den Lehrplan gelenkt, sondern auch durch die sogenannten Bildungsstandards, die durch eine Verordnung im Jänner 2009 eingeführt wurden. Sie definieren, über welche Kompetenzen Schülerinnen und Schüler nach der 4. und 8. Schulstufe verfügen sollen. Auslöser für die Einführung einheitlicher Bildungsstandards und deren Überprüfung waren unter anderem die unbefriedigenden Ergebnisse bei internationalen Schülerleistungs-Studien wie PISA⁵⁸. Da Kompetenzen in diesem Kapitel eine wichtige Rolle spielen, möchte ich kurz beschreiben, wie das Bifie⁵⁹ den Kompetenzbegriff definiert. Laut Bifie sind Kompetenzen

„die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösung in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können.“⁶⁰

Ein wesentliches Merkmal des Konzepts der Bildungsstandards ist die Erlebnisorientierung. Kompetenzen sollen in der Auseinandersetzung mit der Umwelt erworben werden und umfassen neben kognitiven Fähigkeiten auch sozial-kommunikative und motivationale Elemente. Sie sollen die Schülerinnen und Schülern befähigen, in variierenden Aufgaben- und Lebenssituationen erfolgreich zu handeln und ihr Wissen zielge-

⁵⁸ PISA steht für „Programme for International Student Assessment“ (Programm zur internationalen Schülerbewertung)

⁵⁹ Bifie steht für „Bundesinstituts für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung“

⁶⁰ Das Bifie beruft sich dabei auf die Definition des Kompetenzbegriffs von Franz E. Weinert

richtet einzusetzen.⁶¹ Das Konzept der Bildungsstandards soll ganz besonders auf eine Alltags- und Berufsvorbereitung abzielen.

Das Kompetenzmodell für Mathematik

Die in diesem Abschnitt vorgefundenen Inhalte stützen sich vor allem auf Informationen der Website des Bifie.

Eine mathematische Kompetenz wird modellhaft durch drei Dimensionen beschrieben:

- Handlungsdimension (Was wird getan?)
- Inhaltsdimension (Womit wird etwas getan?)
- Komplexitätsdimension (Art und Grad der Vernetzung)

Diese Dimensionen sind außerdem unterteilt in verschiedene Ausprägungen. Man unterscheidet:

Mathematischer Inhalt	Mathematische Handlung	Komplexität
• I1: • Zahlen und Maße	• H1: Darstellen, Modellbilden	• K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten
• I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten	• H2: Rechnen, Operieren	• K2: Herstellen von Verbindungen

⁶¹ Die Informationen sind der Website der Institution des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur entnommen. URL: <https://www.bifie.at/>

I3: Geometrische Figuren und Körper	H3: Interpretieren	K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren
I4: Statistische Darstellung und Kenngrößen	H4: Argumentieren, Begründen	

Tabelle 1 – Darstellung der 3 Dimensionen des Kompetenzmodells

Da jede mathematische Kompetenz nach dem dreidimensionalen Kompetenzmodell durch einen bestimmten Handlungsbereich, einen bestimmten Inhaltsbereich und einen bestimmten Komplexitätsbereich festgelegt ist, ist sie als ein Tripel zu verstehen. Eine Aufgabe kann so zum Beispiel charakterisiert sein durch das Tripel (H3, I2, K2), wenn sie auf die Kompetenz (H3, I2, K2) abzielt (Abb. 2).

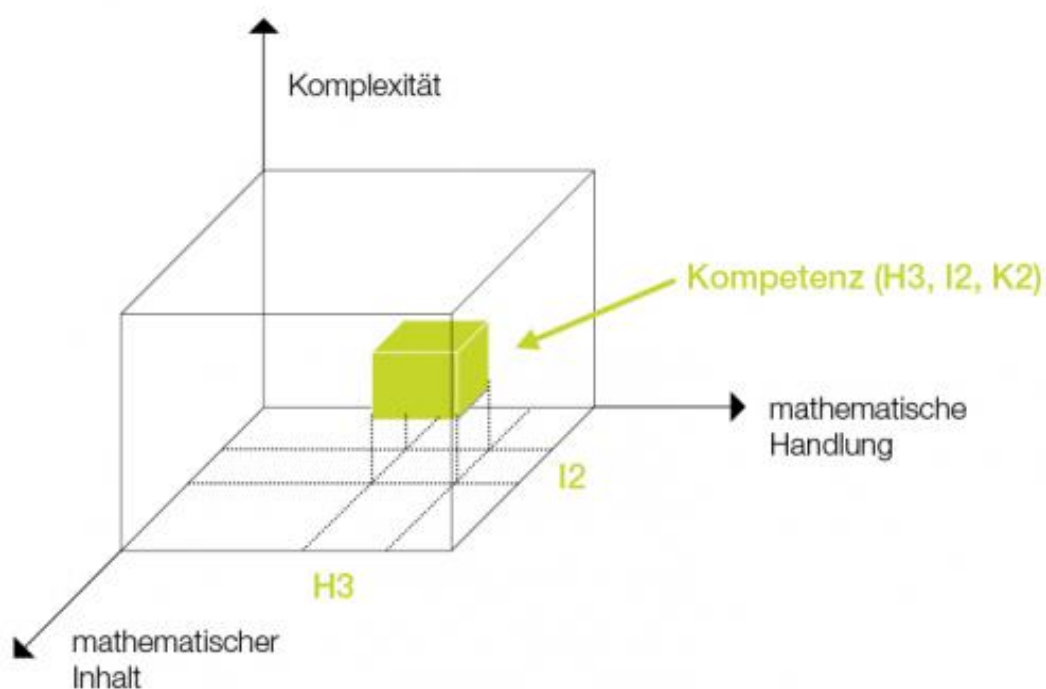


Abbildung 2 – Graphische Darstellung des Kompetenzmodells

Damit umfasst das Modell in Summe 48 mathematische Kompetenzen.

Das Institut für Mathematik-Didaktik der Universität Klagenfurt, das wesentlich an der Entwicklung und Formulierung der Bildungsstandards beteiligt war, orientierte sich vor allem an 2 bildungstheoretischen Anforderungen: Lebensvorbereitung und Anschlussfähigkeit. Mathematik begegnet uns fast täglich und überall, ob bewusst oder unbewusst, und nur ein kleiner Teil betrifft dabei wirklich das aktive Rechnen. Oftmals sind es kommunikative Aspekte der Mathematik wie etwa Darstellen, Interpretieren und Begründen, die die Schülerinnen und Schüler für die aktive Teilnahme am Leben in der Gesellschaft benötigen. Dies findet sich in der Gewichtung der Handlungsbereiche wieder, denn nur H2 (Rechnen, Operieren) hat tatsächlich einen rein operativen Charakter.⁶²

Das Mathematikdidaktik-Institut der Universität Klagenfurt fordert für mathematische Standards, die sich an der Lebensvorbereitung orientieren, weniger „spezifisches Wissen und Können (...) als die flexible Anwendung grundlegenden Wissens und Könnens auf vielfältige, auch weniger vertraute Situationen.“⁶³ Des Weiteren müssen „Problemstellungen und –lösungen (...) nicht notwendigerweise unverändert realen (Alltags-)Situationen bzw. den lebensweltlichen Erfahrungen der S&S entnommen werden, entsprechende Bezüge sollten aber herstellbar sein.“⁶⁴

Standardisierte Reifeprüfung in Mathematik

Die Informationen dieses Abschnitts wurden der Website des Bundesinstituts für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens⁶⁵, so-

⁶² Vgl. Konzept der Bildungsstandards 2007, S. 7-8

⁶³ Konzept der Bildungsstandards 2007, S. 7.

⁶⁴ Konzept der Bildungsstandards 2007, S. 7.

⁶⁵ <https://www.bifie.at/>

wie dem Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe – auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung⁶⁶ – entnommen.

Im Schuljahr 2014/15 wurde an den österreichischen AHS die neue standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung in Mathematik flächendeckend eingeführt. Sie bezieht sich auf den im vorherigen Abschnitt angeführten mathematischen Grundkompetenzkatalog und hat als Ziel, diesen Kernbereich aufgrund fachlicher und gesellschaftlicher Relevanz nachhaltig zu sichern.

Die Reifeprüfung beinhaltet 2 verschiedene Arten von Aufgabenstellungen:

- Typ-1-Aufgaben erfordern den direkten Einsatz von Grundkompetenzen. Es wird mehr ein Fokus auf Grundwissen und Grundfertigkeiten gelegt, ohne darüber hinausgehende Eigenständigkeit beweisen zu müssen.
- Typ-2-Aufgaben erfordern die Anwendung und Vernetzung von Grundkompetenzen. Die Aufgabenstellung und Bearbeitung ist meist umfassender und aufwändiger gestaltet. Die Aufgaben zielen auf Reflexion, Vernetzung und selbstständige Anwendung in nicht vertrauten Situationen/Fragestellungen ab.

Vor allem Typ-2-Aufgaben verlangen „Eigenständigkeit und selbstständige Anwendung des Wissens und Könnens in neuartigen Situationen“. Den Schülerinnen und Schülern können zwar Aufgaben dieses Typs vertraut sein, aber „in Hinblick auf die Eigenständigkeit, Selbstständigkeit und Neuartigkeit“ soll es nicht möglich sein analoge Aufgaben, also „Aufgaben mit gleichartiger Aufgabenstellung und direkt übertragbarem Lösungsweg“, zu trainieren.

Ich denke, dass die Mathematikaufgaben meiner Diplomarbeit vor allem für Typ-2-Aufgaben Lehrerinnen und Lehrern sowie Schülerinnen und Schülern eine Hilfestellung

⁶⁶ Online Version zu finden unter der URL:

http://193.170.220.124/Wordpress/wp-content/uploads/2014/01/srdp_ma_praxishandbuch_mathematik_teil2_2013-12-23.pdf
[25.09.2015]

bieten können, um für die standardisierte neue Reifeprüfung erforderliche Problemlösefähigkeiten im Unterricht zu üben. Bisher wurden im Mathematikunterricht vorrangig Themen aus der Kochkunst mit mathematischen Inhalten verknüpft, die vor allem operative Fähigkeiten üben. Hier zu nennen wären zum Beispiel Einheiten umrechnen, Zutatenmengen in Rezepten verändern oder Lebensmittel (wie Pizza) auf eine gewisse Anzahl an Personen aufteilen. Es finden sich im kulinarischen Bereich aber viel komplexere und umfassendere Aufgaben, die den Schülerinnen und Schülern dabei helfen können, Problemlösefähigkeiten zu entwickeln und tragfähiges Wissen zu erwerben. Eine Vernetzung der Grundkompetenzen mit eher für den Mathematikunterricht ungewohnten aber dennoch realitätsnahen Themen erscheint mir notwendig, um die Schülerinnen und Schüler immer wieder mit ungewohnten Fragestellungen zu konfrontieren und sie mit dem Lösen von „neuen“ mathematischen Problemen mit Kontexten aus verschiedenen Wissensgebieten vertraut zu machen.

4.4 Ziele eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts

"Ich möchte, daß der Schüler nicht angewandte Mathematik lernt, sondern lernt, wie man Mathematik anwendet."⁶⁷

Im vorhergehenden Kapitel wird klar, dass sowohl der Lehrplan und das Konzept der Bildungsstandards und der neuen standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung ganz klar die Lehrerinnen und Lehrer auffordern, Bezüge zwischen der Realität und der Mathematik in ihren Unterricht so oft wie möglich einzubauen. Aufgaben mit Alltagsbezug können hierbei zum Beispiel inhaltlich sein (realitätsbezogene Sach- oder Textaufgaben) oder Aufgaben umfassen, die in der geforderten Tätigkeit speziell an

⁶⁷ Freudenthal 1973, S. 76.

außerschulische Lebenswelten der Schülerinnen und Schüler angebunden sind (z.B. Schätzaufgaben).

In diesem Kapitel möchte ich speziell darauf eingehen, welche Motive hinter dem Drängen der Bildungspolitik und der Mathematikdidaktik auf mehr Alltagsbezug im Mathematikunterricht stecken. Weshalb wird so ein großer Wert auf einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht gelegt und welchen Einfluss könnte ein jener auf die Motivation und den nachhaltigen Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler haben?

Betrachtet man die letzten dreißig Jahre der internationalen fachdidaktischen Diskussionen, so findet man eine weitgefächerte Begründungspalette für Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht. Nach Werner Blum lassen sich vier Argumente für Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht zusammenfassen^{68, 69}:

- **Pragmatische Argumente:**

Durch geeignete Anwendungsbezüge soll der Mathematikunterricht den Schülerinnen und Schülern helfen, Situationen aus ihrer derzeitigen oder absehbar zukünftigen Umwelt besser verstehen und bewältigen zu können und sie zu mündigen Bürgerinnen und Bürger einer demokratischen Gesellschaft auszubilden. Diese Art der Umwelterschließung erfolgt nur durch entsprechende Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht gekoppelt mit der gleichzeitigen Vermittlung entsprechender mathematischer Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten.

- **Formale Argumente:**

Der Mathematikunterricht soll Schülerinnen und Schülern allgemeine Qualifikationen wie Problemlösen oder Argumentieren vermitteln und sie dazu befähigen, in neuartigen Situationen flexibel und angemessen zu reagieren. Sie sollen lernen nicht einfach in richtig oder falsch zu unterscheiden, sondern Vorliegendes teil- und schrittweise verbessern. Es ist schwer vorhersehbar, welche be-

⁶⁸ Blum 1996, S. 21 sowie Blum 1985, S. 210-215

⁶⁹ Tietze et al. 2013, S. 131-132

stimmten Situationen dem Schüler und der Schülerin im Alltag begegnen. Anhand von speziellen Anwendungsbeispielen sollen Schülerinnen und Schüler Problemlösefähigkeiten erwerben, die sie auf unvorhersehbare Situationen übertragen können.

- **Kulturbezogene / Wissenschaftstheoretische Argumente:**

Ein Ziel des Mathematikunterrichts besteht darin, den Schülerinnen und Schülern ein möglichst ausgewogenes Bild von Mathematik als gesellschaftliches und kulturelles Gesamtphänomen zu illustrieren. Es soll unter anderem das Relevanz-Paradoxon der Mathematik thematisiert werden, damit Schülerinnen und Schüler über den subjektiv wahrgenommenen Bedeutungsverlust der Mathematik und der tatsächlich zunehmenden Mathematisierung unserer Umwelt reflektieren und sie eine realistische Einschätzung der Rolle von Mathematik in Ihrer Lebenswelt treffen können. Zur Erreichung dieses Zieles muss der Mathematikunterricht realitätsnahe Anwendungen beinhalten.

- **Lernpsychologische Argumente:**

Realitätsbezogene Aufgaben können eine Hilfe für Schülerinnen und Schüler sein, mathematische Inhalte nachhaltiger und tiefergehender zu verstehen. Durch den resultierenden verstärkten Sinnbezug kann dadurch auch die Einstellung der Lernenden zur Mathematik und mathematischen Themen positiv beeinflusst werden.

Etwas kürzer, aber nicht weniger aussagekräftig, hat Katja Maaß vier Aspekte, die mit der Integration von Realitätsbezügen in den Mathematikunterricht erreicht werden sollen, formuliert. Realitätsbezogene Aufgaben sollen den Schülerinnen und Schülern

- *„Kompetenzen zum Anwenden von Mathematik in einfachen und komplexen sowie in bekannten und unbekannten Situationen vermitteln und ihnen helfen, Umweltsituationen zu verstehen und zu bewältigen.“*

- *Ein ausgewogenes Bild von Mathematik als Wissenschaft und ihrer Bedeutung für unsere Kultur und Gesellschaft vermitteln. Die Lernenden sollen Bezüge zwischen Mathematik und Realität erkennen, Kenntnisse über den Gebrauch und Missbrauch von Mathematik erwerben und die Grenzen der Mathematisierbarkeit erfahren.*
- *Heuristische Strategien, Problemlöse- und Argumentationsfähigkeiten sowie kreatives Verhalten vermitteln.*
- *Motivation zur Beschäftigung mit Mathematik vermitteln und das Behalten und Verstehen von mathematischen Inhalten unterstützen.*⁷⁰

Maaß und Blum drücken ihre Ziele in manchen Aspekten auf unterschiedliche Art und Weise aus, aber ich denke, die wesentlichen Gemeinsamkeiten sind klar zu erkennen.

Ich möchte zwei zentrale Begriffe in Bezug auf realitätsbezogenen Mathematikunterricht herausnehmen und näher besprechen, da sie mir für meine Arbeit besonders wichtig erscheinen: Motivationsförderung und Schülerorientierung.

4.4.1 Motivationsförderung

Schülerinnen und Schüler haben oftmals Probleme mit der Abstraktheit der Mathematik. Durch das Einbinden von lebensnahen Anwendungen im Unterricht erhoffen sich Lehrerinnen und Lehrer dadurch das Interesse der Schülerinnen und Schüler wecken zu können und werden oftmals enttäuscht, wenn die erwartete Euphorie seitens der Schülerinnen und Schüler dennoch ausbleibt. Man muss die Motivationssteigerung durch Anwendungen differenzierter betrachten. Realitätsbezüge allein sind keine Ga-

⁷⁰ Maaß 2007, S. 15-16.

rantie für wachsendes und lang anhaltendes Interesse und es erleichtert den Schülerinnen und Schülern auch nicht automatisch das Lernen.⁷¹ Oftmals sind die Lernenden durch den üblichen Mathematikunterricht schon darauf konditioniert, zu jedem Aufgabentyp einen passenden Algorithmus parat zu haben. Die Umstellung, plötzlich eigene Lösungsstrategien entwickeln und plötzlich vor Realsituationen gestellt zu werden, kann für Schülerinnen und Schüler sogar anstrengender und fordernder sein als einen eingeübten Algorithmus anzuwenden.⁷² Nach Blum ist dies allerdings ein intellektueller Aufwand, der den Schülerinnen und Schülern zugemutet werden kann und soll. Für ihn wird der Mehraufwand durch den mit Anwendungen erzielten Gewinn an Kenntnissen und Einsichten und eines stärkeren Sinnbezuges aufgewogen.⁷³ Anwendungsbezüge sind eine Möglichkeit, dass Schülerinnen und Schüler Mathematik nicht nur als formales Spiel mit bedeutungslosen Symbolen wahrnehmen sondern einen Sinn dahinter erkennen. Der Fachdidaktiker Tietze beruft sich auf zahlreiche Untersuchungen, die ergeben haben, dass Realitätsbezüge tatsächlich Effekte im Sinne der vorher genannten Aspekte und Ziele eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts haben können.

Anwendungsbezüge können großen Einfluss auf die Einstellung der Schülerinnen und Schüler zur Mathematik haben. Es zeigt sich langfristig „eine aufgeschlossener Einstellung gegenüber der Mathematik, bei gleichzeitiger Ge-

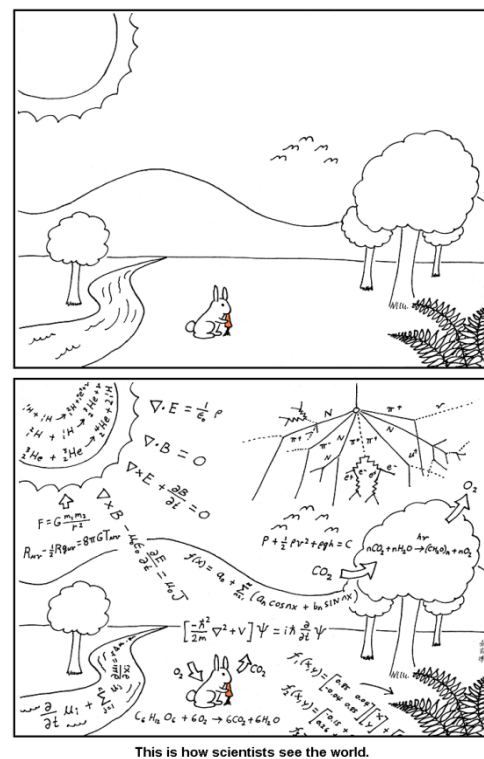


Abbildung 3 – ein neuer Blick auf die Welt

⁷¹ Vgl. Tietze et al. 2013, S. 132.

⁷² Vgl. Maaß 2007, S. 16.

⁷³ Vgl. Blum 1985, S. 217.

wöhnung an außermathematische Beispiele.“⁷⁴ Schülerinnen und Schüler, die zuvor der Mathematik keine große Bedeutung für Alltag und Gesellschaft beigemessen haben, ändern diese Einstellung im Verlauf der Studien. Tatsächlich kommt es durch den Einbezug von lebensnahen Beispielen nicht zwingend zu einer steigenden Motivation, es kann das Mathematikbild der Schülerinnen und Schüler allerdings positiv beeinflusst werden, was in weiterer Folge zu mehr Begeisterung für das Fach Mathematik führen kann. Vielleicht gelingt den Schülerinnen und Schülern ein neuer Blick auf die Welt (siehe Abbildung 3).

Eine Steigerung der Motivation hängt vor allem davon ab, wieweit außermathematische Interessen der Schülerinnen und Schüler bei der Aufgabenstellung berücksichtigt werden.⁷⁵ Diesen wichtigen Aspekt möchte ich im folgenden Kapitel deshalb näher diskutieren.

4.4.2 SchülerInnenorientierung

In „Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe“ zitieren die Autoren die Fachdidaktikerin Elisabeth Moser, die in einer umfangreichen Untersuchung an Schülerinnen und Schülern erhob, welche Faktoren zur Beliebtheit eines Schulfaches beitragen können.⁷⁶ Sie kam zu dem Ergebnis, dass sich vor allem das Interesse an der Sache und die Lebensrelevanz der Mathematik auf eine positive Beurteilung auswirken, wohingegen vor allem negative Erlebnisse im Mathematikunterricht für eine negative Beurteilung des Faches verantwortlich sind.⁷⁷

Indem sich die Mathematikaufgaben an der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler orientieren, soll Interesse geweckt werden. Da eine Klasse allerdings keine homogene

⁷⁴ Tietze et al. 2013, S. 133.

⁷⁵ Vgl. Tietze et al. 1997, S. 132-133.

⁷⁶ Vgl. Moser Opitz 2009

⁷⁷ Vgl. Vollrath et al. 2012, S. 2.

Einheit ist und alle Schülerinnen und Schüler je nach biographischem Hintergrund und Erfahrungshorizont unterschiedliche Interessensgebiete mitbringen – die sich auch mit der Zeit relativ schnell ändern können – ist dieses Vorhaben gar nicht so einfach. Zudem bringen Schülerinnen und Schüler Erinnerungen, Gefühle und Ansichten mit, die ein dogmatischer Mathematikunterricht bestehend aus dem starren Anwenden von Algorithmen und Formeln unberücksichtigt lässt. Es gibt Bestrebungen manche Mathematikaufgaben mit realen Anwendungen zu verknüpfen, allerdings interessieren sich die wenigsten 12-14 – Jährigen tatsächlich für Versicherungsfragen.

Legt man den Fokus nicht auf die zahlreichen individuellen Neigungen der Schülerinnen und Schüler, sondern betrachtet die großen gemeinsamen Themenschwerpunkte in den Interessen, so ergeben sich nach den Ergebnisse eines EU-Projekts zum Thema „Realitätsbezogene Aufgaben“ folgende Themenschwerpunkte in den Interessen beziehungsweise Desinteressen der Lernenden:⁷⁸

Was Schülerinnen und Schüler interessiert	Was Schülerinnen und Schüler <u>nicht</u> interessiert
Musik	Schule (das werden wir in der x. Klasse wieder brauchen)
Umwelt	Einkaufen von Lebensmitteln
Beruf und Berufswahl	(Kontextlose) Geometrische Objekte
Kleidung	Briefmarkensammeln
Technik	Lotto und anderes mit „ziehe aus einer Urne“ – Kontext
Rätsel lösen	

Tabelle 2 – Übersicht der (Des-)Interessen von Schülerinnen und Schülern

⁷⁸ Ulovec 2010

Da viele Mathematikaufgaben mit Realitätsbezug einen physikalischen Bezug haben, möchte ich hier auch kurz die Ergebnisse der Interessen der Schülerinnen und Schüler der physikdidaktischen Forschung erwähnen. Interessant ist dabei vor allem das geschlechtsspezifische Interesse. So existieren Themen aus dem Alltag der Lernenden, die Lehrerinnen und Lehrer als Vorlage für realitätsnahe Aufgaben verwenden können, die speziell die Interessen von Mädchen ansprechen, ohne die Jungen zu benachteiligen.⁷⁹ Studien zeigen, dass dadurch auch für Jungen der Unterricht noch interessanter werden würde. So könnte man dem frühen Rückzug der Mädchen aus Mathematik und Naturwissenschaften in der Schule, der oft gekoppelt ist mit einer Entscheidung gegen eine Berufswahl im mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Bereich, entgegenwirken, indem gezielt die Lebenswelt der Mädchen stärker in die Inhalte des Unterrichts einfließen. Es geht dabei nicht um die Erstellung spezieller Mädchen- und Jungenaufgaben, sondern für Beispiele und Aufgaben solche Gebiete und Themen auszuwählen, die beide Geschlechter gleichermaßen interessieren.

Die Informationen des folgenden Abschnitts sind dem Kölner Bildungsportal entnommen. Der Schwerpunkt des angeführten Kompetenzzentrums ist die berufliche Mädchenförderung, die durch das Bundesministerium für Wirtschaft und Arbeit aus Mitteln des Europäischen Sozialfonds zur Bekämpfung von Diskriminierung und Ungleichheiten auf dem Arbeitsmarkt gefördert wird.⁸⁰

Das Kompetenzzentrum Berufliche Mädchenförderung nennt folgende Themenschwerpunkte: „Mädchen zeigen ein sehr hohes Interesse an beobachtbaren Naturphänomenen (Farbe des Himmels, Gewitter, Brownsche Bewegung), an Anwendungen in der Medizin oder im Umweltschutz. Mädchen befassen sich bevorzugt mit Themen, die direkte Bezüge zum Menschen aufweisen oder praktische Anwendbarkeit aufweisen“. Für das Schulfach Mathematik stellt das Kompetenzzentrum fest: „Mädchen scheint es beispielweise entgegen zu kommen, wenn Sinn und Bedeutung der gerade anstehenden Mathematik thematisiert werden. Zudem arbeiten Mädchen gern in

⁷⁹ Häußler & Hoffmann 1998, S. 51-67

⁸⁰ URL: http://www.bildung.koeln.de/equal_1/dokumentation/tp8/downloads/QBM_Text_3.pdf
[07.10.2015]

selbst gewählten Arbeitsgruppen an klar umgrenzten, jedoch offen gehaltenen Problemstellungen.“ Gerade diese Kontexte, kommen allerdings im herkömmlichen Mathematik- beziehungsweise naturwissenschaftlichen Unterricht noch zu selten vor.

4.5 Kulinarische Naturwissenschaften

Es gibt schon viele Bücher und Unterrichtsvorschläge zur Molekularküche beziehungsweise zur Molekulargastronomie, die sich mit biochemischen Prozessen bei der Zubereitung von Speisen und Getränken beschäftigen. Schon deutlich weniger Material ist vorhanden, sobald es um „culinary physics“ (zu Deutsch „Physik der Kochkunst“) geht. Der Trend und die Nachfrage ist allerdings eindeutig da, Themen der Naturwissenschaften mit dem kulinarischen Bereich zu verbinden, und diese Verbindung erfreut sich immer größerer Beliebtheit in der populärwissenschaftlichen Literatur, im Unterhaltungsbereich a la Science Busters, in Nachschlagewerken für professionelle Küchenchefs und Hobbyköche⁸¹ und auch als praxisnahe Hilfe für den Unterricht. So hat die Lehrkräftefortbildung „Küche als Lernort für naturwissenschaftliche Erfahrungen“ der Landesinitiative Bewusste Kinderernährung gemeinsam mit dem Staatlichen Seminar für Didaktik und Lehrerbildung Schwäbisch Gmünd ein 90-seitiges Handbuch für Lehrkräfte veröffentlicht, das Schülerinnen und Schülern ermöglichen soll, mit Dingen aus ihrem Alltag (Lebensmittel, Küchenwerkzeug) naturwissenschaftliche Zusammenhänge zu bestaunen, begreifen und zu verstehen.⁸² Um nur ein Beispiel eines erfolgreichen Erlebnis- und anwendungsorientierten Unterrichts in Zusammenhang mit der Kochkunst zu nennen.

⁸¹ In 6 Bänden mit insgesamt 2440 Seiten erschien zum Beispiel gerade ein umfangreiches Kompendium mit wissenschaftlich inspirierten Zubereitungsmethoden für Hobbyköche aber auch professionelle Köche, die ihr Repertoire auf Basis wissenschaftlicher Erkenntnisse erweitern wollen.

URL: <http://modernistcuisine.com/> [08.10.2015]

⁸² URL: https://mlr.baden-wuerttemberg.de/fileadmin/redaktion/mlr/intern/dateien/publikationen/Die_Kueche_als_Lernort.pdf [08.10.2015]

„Wer naturwissenschaftliche Fragen ohne Hilfe der Mathematik lösen will, unternimmt Undurchführbares.“

So hat der berühmte Wissenschaftler Galileo Galilei die Bedeutung der Mathematik hochgepriesen. Ganz nach diesem Grundsatz denke ich, dass Fragen aus der Kochkunst auch mit Inhalten aus der Schulmathematik verknüpft werden können und zu einem schülerorientierten Mathematikunterricht positiv beitragen können. Denn „Die Bedeutung der Mathematik besteht nicht allein darin, ausgefeilte Rechen- und Beweismethoden zu entwickeln, sondern auch darin, der Gestaltung der Welt in den verschiedenen Bereichen dienlich zu sein.“⁸³

⁸³ Ankündigung eines Vortrages von Rudolf Taschner zum Thema „Wozu Mathematik?“ URL: <http://math.space.or.at/veranst3/wozu.php> [08.10.2015]

5 Realteil

5.1 Kochen mit quadratischen Gleichungen

Menüplan: Nachspeise



Gaumenfreude: Marshmallow

Die Idee zu diesem Unterrichtsvorschlag stammt von Luajean N. Bryan, veröffentlicht 2010 in der 104. Ausgabe des Fachjournals „The Mathematics Teacher“.⁸⁴ Anregungen zur Verknüpfung mit anderen Unterrichtsgegenständen entstammen dem Unterrichtsvorschlag von Tilman Langner, publiziert in „Die Fundgrube für den Umweltschutz in der Sekundarstufe I“.⁸⁵



⁸⁴ Vgl. Bryan 2010: S. 308-314.

⁸⁵ Vgl. Langner 2000

Ziel:	Planung, Konstruktion und Verwendung eines Solarkochers durch Anwendung quadratischer Gleichungen und der Berücksichtigung grundlegender Eigenschaften der Parabel.
Voraussetzung:	Parabelgleichung, Eigenschaften einer Parabel, Grundkenntnisse in der Optik (Hohlspiegel, Parabolspiegel, Brennpunkt, Reflexion)
Material:	Zum Beispiel Holz, Karton, Pappmaché, Aluminium, Metall-Folie, Draht, Klebstoff, Schere, Millimeterpapier
Zeitungsfang:	4-5 Einheiten
Arbeitsform:	Projektunterricht, Gruppenarbeit

Überblick:

Solarkochen ist eine Nutzungsform der Sonnenenergie, die relativ einfach und kostensparend im Bereich der Schule zu verwirklichen ist, und den Schülerinnen und Schülern neben dem Lerneffekt auch noch einen kulinarischen Genuss ermöglicht. In Gruppen planen die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe von quadratischen Gleichungen den Entwurf ihrer



Abbildung 4 – ein „S'More“

Parabolschüssel und wählen die für den Bau nötigen Materialien aus. Mittels mathematischer Berechnung und empirischer Überprüfung bestimmen sie den Fokus und positionieren an dieser Stelle einen Marshmallow. Die Sonnenenergie kann den Marshmallow soweit erhitzen, dass er zu schmelzen beginnt und sich ausgezeichnet für S'Mores oder andere Leckereien (je nach Kreativität der Schülerinnen und Schüler) verwenden lässt.

Der Schritt von einer Parabelgleichung am Papier zu einer dreidimensionalen Parabolschüssel zu gelangen, erfordert von den Schülerinnen und Schülern kreative Problemlösestrategien.

Durchführung:

1. Auswahl der Parabelgleichung

Die Klasse wird zuerst aufgeteilt in Gruppen zu je 3-4 Schülerinnen und Schülern. Diese Gruppengröße sollte allen Mitgliedern die Möglichkeit geben, einen Input beizusteuern. Im Vorfeld sollen mit der Klasse bereits Definition und grundlegende Eigenschaften der Parabel besprochen worden sein:

Exkurs: Definition der Parabel:

Eine Parabel ist der geometrischer Ort aller Punkte P , deren Abstand $d(P,F)$ zu einem speziellen festen Punkt, dem Brennpunkt F , gleich dem Abstand $d(P,l)$ zu einer festen Geraden, Leitlinie l genannt, ist.

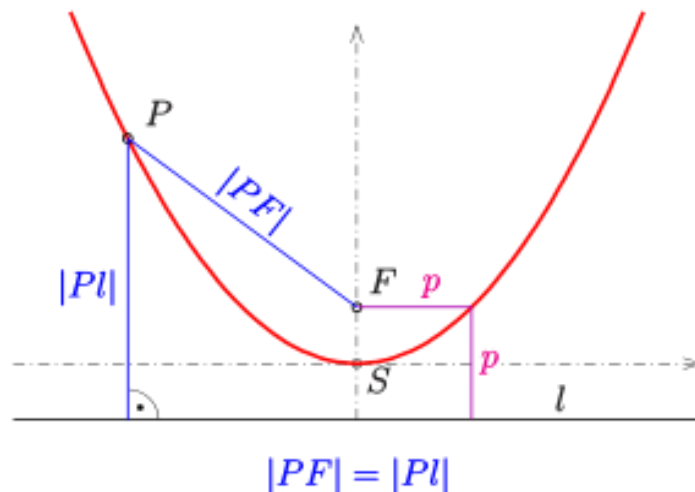


Abbildung 5 - Parabel: Definition mit Brennpunkt und Leitlinie, Halbparameter p

S ist der Scheitel bzw. Scheitelpunkt der Parabel. Er liegt in der Mitte zwischen Brennpunkt und Leitgerade. F ist der Brennpunkt mit Brennweite $f = \overline{FS} = \frac{|p|}{2}$. Die Parabel hat mit der Verbindungsgeraden von Brennpunkt und Scheitel nur eine Symmetrieachse.

Eine nach oben geöffnete Parabelgleichung, die ihren Scheitel im Ursprung und deren Leitlinie beschrieben wird durch $y = -f$, nimmt folgende Form an: $y = \frac{1}{4f}x^2$. Bei einer Parabel ist der Halbparameter $p = 2f$ außerdem der Abstand des Brennpunktes zur Leitlinie. Die Parabelgleichung lässt sich somit auch in dieser Form schreiben: $x^2 = 2py$.

Weiter sollte gemeinsam besprochen werden, dass ein Paraboloid entsteht, wenn man eine Parabel im Raum um ihre Achse rotieren lässt. Dies gibt den Schülerinnen und Schülern zudem eine Vorschau in die Mathematikgebiete der nächsten Schulstufen. Mithilfe des Physikunterrichts könnte noch im Unterricht besprochen werden, dass beim Parabolspiegel alle Lichtstrahlen, die parallel zur optischen Achse einfallen, exakt im Brennpunkt gebündelt werden.

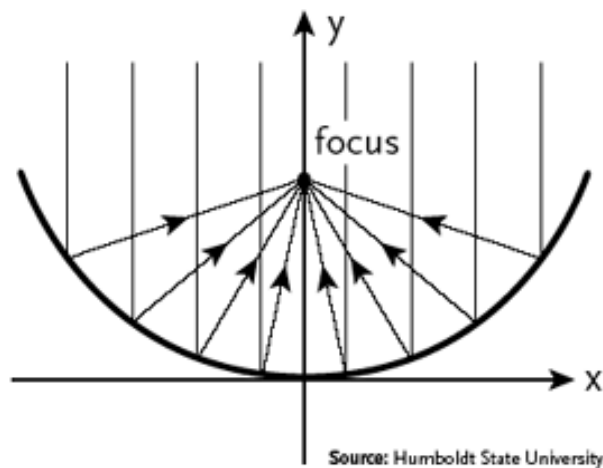


Abbildung 6 - der Parabolspiegel bündelt parallel einfallenden Lichtstrahlen exakt im Brennpunkt

Mit dieser Vorinformation sind die Gruppen nun in der Lage, eine für das Projekt geeignete Parabelgleichung zu überlegen und aufzustellen. Die Lehrperson kann hierbei auch Rahmenbedingungen festlegen, falls der Fokus zum Beispiel noch innerhalb der Parabolschüssel liegen soll.

2. Planung und Durchführung

Die Lehrperson kann natürlich Materialien wie zum Beispiel Holz, Karton, Pappmaché, Aluminium, Metall-Folie, Draht, Klebstoff, Schere, Millimeterpapier und weiteres für die Konstruktion vorschlagen und Tipps für die Planung und Durchführung geben. Allerdings sollte vor allem die eigene Kreativität der Schülerinnen und Schüler angeregt werden. Diese sollen möglichst selbstständig überlegen, wie eine Parabolschüssel am besten zu realisieren ist und welche Materialien dafür benötigt werden könnten. Die Gruppenmitglieder sollen dazu angeregt werden, Materialien und Pläne auszuprobieren, eventuell eine neue Strategie zu versuchen oder die ursprüngliche Idee an das reale Problem anzupassen falls nötig. Eine Möglichkeit wäre, die Entwürfe in der Klasse

vorstellen zu lassen, mit der Klasse die Vor- und Nachteile der Ideen zu besprechen und bei Bedarf unterstützend einzugreifen.

Wenn die Lehrperson das Gefühl hat, dass allen Gruppen klar ist, wie sie vorgehen wollen, können sie sich mit den notwendigen Materialien versorgen und mit der Konstruktion beginnen. Bei der Beschaffung könnte eine obere Grenze der Ausgaben (zum Beispiel 12 Euro) festgelegt werden beziehungsweise manche Materialien könnten für die ganze Klasse gemeinsam angeschafft werden.

Luajean N. Bryan gibt in ihrem Unterrichtsvorschlag einen Einblick in den Projektbericht eines Schülers:

“We chose to model our marshmallow parabola cooker after the equation $y = x^2/48$. We chose this equation because we had decided to use aluminum siding for inside the cooker, and this equation, being approximately 52 cm tall at 1 m wide, would require less aluminum siding than a parabola that is 1 m tall when it's 1 m wide. We had no trouble graphing our parabola, or determining the focus or vertex algebraically. We did have several construction problems though: how would we get straight, flat pieces of aluminum to fit the parabola, and how should we get the graph onto wood to cut out a frame? To transfer the graph onto the wood, we graphed all of the even integral values of the equation from 0 to 50. Then we cut out that half of the graph and used it as a stencil to mark where to cut, we only had to cut out half of the graph because the graph is symmetric about the y-axis. To solve the other problem, Tyler and I came up with the idea to cut the aluminum into identical squares and place them around the parabola so they would curve and overlap and provide the right shape. We restricted our domain to values of x from -50 to 50.

Die Beschreibung des Schülers zeigt sowohl Teamwork als auch einen guten Umgang mit den Proportionen einer Parabel.

Der Auszug aus dem Projektbericht eines zweiten Schülers zeigt eine sehr gute Umsetzung und Anwendung von Lerninhalten, sowie kreatives Problemlösen:

„It was important to find the focus of the parabola because the marshmallow was placed at that point. When sunlight shines into the parabola, the light strikes the sides of the parabola and reflects to the focus. Since the focus receives the most sunlight, placing a marshmallow there would make the marshmallow heat up very quickly. We used the graph of the equation as a template to build our parabola around. [...] We used a cardboard box as a base. Our parabola fit on top of it nicely, and we could adjust the angle of the parabola to direct its focus toward the sun.”

3. Der Solarkocher in Aktion

Sobald der Solarkocher aufgebaut ist, kann er an einem sonnigen Tag zum Einsatz kommen. Jede Gruppe bringt im Fokus ihrer Parabolschüssel einen Marshmallow an. Der Fokus wird zuvor berechnet, und mit einem Stück Papier (an dem gesuchten Punkt sammeln sich alle Lichtstrahlen) empirisch überprüft. Mittels Sonnenenergie bringen die Gruppen den Marshmallow zum Schmelzen. Im Anschluss können die Schülerinnen und Schüler den Marshmallow auf die ihnen bevorzugte Art genießen (zum Beispiel S'Mores). Natürlich können nach Belieben auch andere Esswaren erhitzt werden, zum Beispiel Schokolade oder kleine Würstchen.



Abbildung 7 - nachgebauter Solar-Kocher



Abbildung 8 - eine professionellere Variante

Variation:

Wenn vorhanden empfiehlt es sich die Temperatursteigerung im Marshmallow mit digitalen Haushalts-Thermometern (werden im Haushalt zum Backen oder Braten verwendet) bis zum Schmelzen aufzuzeichnen und die Daten auf dem Papier oder noch besser mittels geeigneter Software (z.B.



Abbildung 9 – Haushalts-Thermometer

QtiPlot⁸⁶) in den Gruppen und in der Klasse auszuwerten. Die Schülerinnen und Schüler sollen hierbei die Temperatur in Abhängigkeit der Zeit darstellen, und überlegen, welche Kurve den Zusammenhang am ehesten beschreibt (linear, quadratische, kubische, logistische Funktion, ...). Sobald sie eine geeignete Kurve gefunden haben, können weitere Eigenschaften der Kurve besprochen werden wie zum Beispiel Definitionsbereich, Extremstellen, Monotonieverhalten, Krümmung, mittlere Änderungsrate der Temperatur. In Abbildung 10 ist ein Beispiel für eine Funktion $T(t)$ des Marshmallows dargestellt.

Die Auswertung des Graphen kann auch als Wettbewerb durchgeführt werden. Welcher Marshmallow erhitzt sich am schnellsten? Welches Team erreicht die höchste Temperatur?

Spezielle Hinweise:

Bei sehr gut konstruierten Reflektoren ab 1m Durchmesser bündelt sich das Sonnenlicht sehr stark. Schaut man ungeschützt in den Reflektor, kann das Auge geschädigt werden.

Die Inbetriebnahme des Solarkochers kann natürlich nur bei Sonnenlicht erfolgen, was bei der zeitlichen Planung der Lehrperson berücksichtigt werden muss.

⁸⁶ Näheres zu QtiPlot findet man auf <http://www.qtiplot.com/> [20.11.2015]

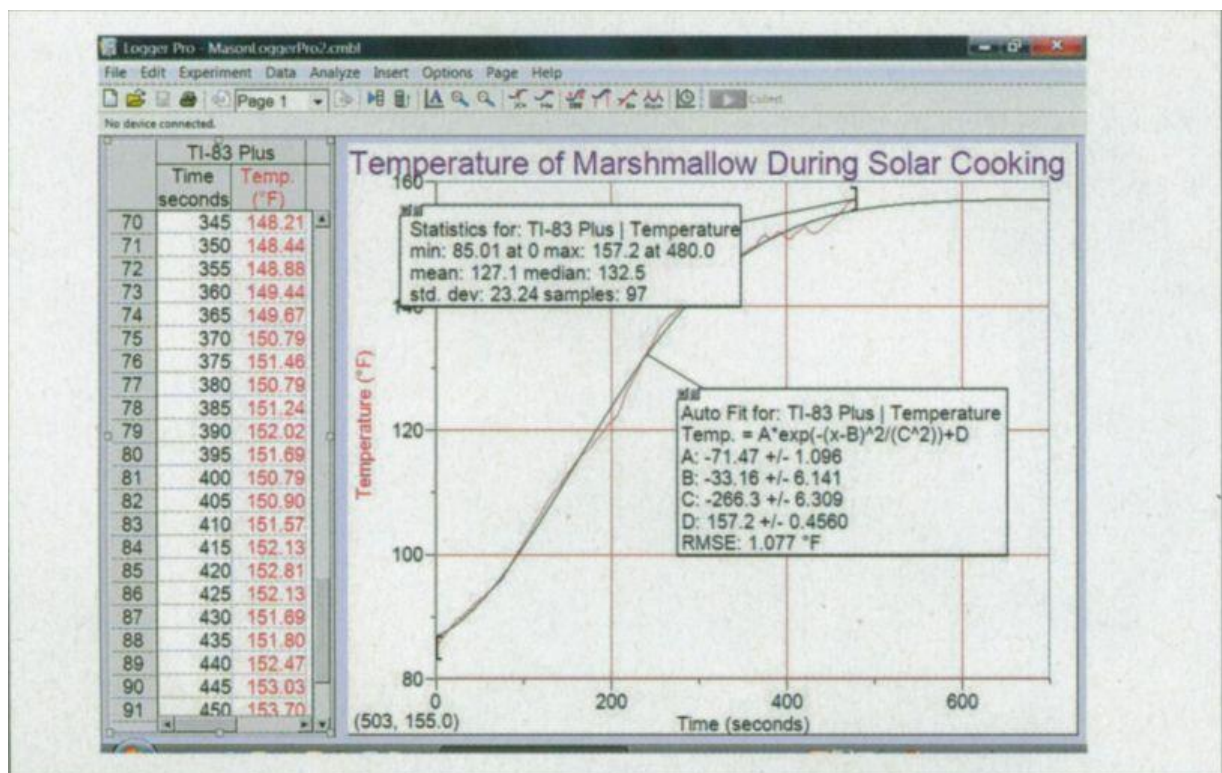


Abbildung 10 – Temperatur des Marshmallow während
des Kochvorgangs in Abhängigkeit von der Zeit

Weiterführende Links:

Ich empfehle dieses Privatvideo auf YouTube, das eine Möglichkeit der Konstruktion eines Solarkochers wunderbar wiedergibt: https://www.youtube.com/watch?v=bL_Z-F3pU18⁸⁷

Verknüpfung mit anderen Unterrichtsgegenständen

Das Projekt lässt sich ideal mit anderen Unterrichtsgegenständen und Themen verknüpfen: Am Beispiel des Solarkochers können mit den Schülerinnen und Schülern

⁸⁷ [25.11.2015]

Techniken, Herausforderungen und naturwissenschaftliche Hintergründe der Wärme-gewinnung aus Sonnenenergie besprochen werden.

In **Physik** kann ein Bezug zum Thema Energie und Umwelt, Strahlenoptik und Wärme-lehre hergestellt werden. In **Biologie** und **Geographie** können nachwachsende Rohstof-fe thematisiert werden beziehungsweise allgemein die Sonne als Quelle des Lebens besprochen werden. In sonnenreichen Entwicklungsländern kann durch Projekte mit Solarkochen und Solaröfen die Bevölkerung unterstützt werden. Zum Beispiel wird in der größten Solarküche der Welt in Rajasthan für bis zu 18.000 Besucher eines Yoga – Zentrums gekocht.⁸⁸

Kompetenzen:

Das Projekt „Kochen mit Quadratzahlen“ fördert vor allem Kreativität und Problemlö-sekompetenzen. PISA definiert Problemlösekompetenzen folgendermaßen und ich finde, dass das Projekt alle diese Kompetenzen trainiert:

- *Individuelle Kapazität, komplexe Problemstellungen aus der Realität zu verstehen und zu lösen, deren Lösungsweg nicht auf den ersten Blick offensichtlich ist.*
- *Ausgehend von gegebenen Informationen und Werkzeugen trotz Hindernissen Wege zur Lösung finden.*
- *Die Motivation, sich mit solchen Situationen auseinanderzusetzen und mit den eigenen Möglichkeiten zu lösen.*⁸⁹

⁸⁸ Näheres unter der Website:

http://www.buch-der-synergie.de/c_neu_html/c_04_25_sonne_3_welt_1.htm [25.11.2015]

⁸⁹ Entnommen der Website <http://www.pisa.tum.de/kompetenzbereiche/problemloesekompetenz/> [25.11.2015]

Auf das österreichische Kompetenzmodell bezogen, werden meiner Meinung nach folgende Kompetenzen durch das Projekt gefördert:

- **Modellbilden, Darstellen:**

Sachverhalte werden in verschiedene Darstellungsformen umgesetzt und Zeichnungen geometrischer Figuren werden angefertigt (Skizze und Plan am Papier wird zu dreidimensionalem Gebilde, die Temperaturwerte werden von der Tabelle zu einem Graphen umgewandelt). Zudem werden geeignete mathematische Mittel und Lösungswege ausgewählt

- **Rechnen, Operieren:**

Beim Berechnen des Fokus wird die Kompetenz am meisten geschult. Gleichzeitig müssen Ergebnisse der Parabel berechnet und interpretiert werden, um die Ausmaße des Paraboloids zu planen. Zur Konstruktion muss die Parabel gezeichnet werden und bei der Auswertung mit Tabelle operiert werden.

- **Interpretieren:**

Die Temperaturkurve muss interpretiert und beschrieben werden. Ergebnisse der Parabel müssen im Kontext gedeutet werden (wie groß wäre das Paraboloid in der Wirklichkeit)

- **Argumentieren, Begründen:**

Die Temperaturmesswerte müssen interpretiert und eine passende Kurve gefunden werden. Die Kinder müssen begründen, weshalb sie sich für ihr Modell und ihren Lösungsweg des Projekts entschieden haben.

5.2 Eine sehr schnelle kulinarische Angelegenheit

Menüplan:

Nachspeise



Gaumenfreude:

Marshmallows, Tafel Schokolade

Ziel:

Berechnung der Lichtgeschwindigkeit in der Mikrowelle mittels kulinarischer Hilfe

Voraussetzung:

Schwingungen und Wellen sollten bereits im Physikunterricht thematisiert worden sein

Material:

Mikrowelle, Lineal, Geschirr als Unterlage, Taschenrechner, Marshmallows oder Tafel Schokolade

Zeitungfang:

1 Einheit

Arbeitsform:

Hausaufgabe, Experiment in der Klasse

Überblick:

Mit Hilfe einer Tafel Schokolade oder einer Packung Marshmallows (aneinander gereiht) und einer Mikrowelle kann man mit etwas Vorwissen eine gute Näherung der Lichtgeschwindigkeit berechnen.

Im eingeschalteten Mikrowellenherd erhitzen nämlich stehende Mikrowellen die Speise. Stehend heißt die Maxima und Minima der Intensität sind im Allgemeinen immer an derselben Stelle. An diesen Stellen erwärmt sich die Speise. Deshalb befindet sich in der Mikrowelle normalerweise ein Drehteller, damit sich die Speise gleichmäßig erwärmt und nicht nur punktuell. Ohne Drehteller bilden sich punktuelle Hot Spots und der Abstand zwischen zwei solcher Hot Spots entspricht dem Abstand zwischen Maxi-

mum und Minimum der Mikrowelle und somit ihrer halben Wellenlänge. Durch geschickte Berechnung erhalten wir daraus die Lichtgeschwindigkeit.

Durchführung:

Die Schülerinnen und Schüler entfernen den Drehteller aus der Mikrowelle und legen die Tafel Schokolade auf ein mikrowellengeeignetes Geschirr. Hat sich der Schüler / die Schülerin für Marshmallows entschieden, reiht sie die Marshmallows in einem Ofengeschirr dicht aneinander und gibt dies in die Mikrowelle. Die Mikrowelle wird eingeschaltet und sofort ausgeschaltet, sobald die ersten Schmelzpunkte entstehen und sichtbar werden. Nun misst die Schülerin / der Schüler den Abstand zwischen 2 Hotspots mit dem Lineal. Der gemessene Wert ergibt die halbe Wellenlänge. Zur Berechnung der Lichtgeschwindigkeit benötigen wir noch die Frequenz der Wellen. Der Wert befindet sich meist auf der Rückseite des Mikrowellenofens, ist meist genormt und beträgt deshalb wahrscheinlich 2450 MHz. Die Welle schwingt also 2450 Millionen Mal pro Sekunde auf und ab.

Durch den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit v , Frequenz f und Wellenlänge λ lässt sich die Lichtgeschwindigkeit berechnen:

$$v = f \lambda$$

Beispiel:

Nehmen wir an die Hot Spots liegen 6cm voneinander entfernt. Dann beträgt die ganze Wellenlänge 12cm = 0.12m. Unser Mikrowellenherd hat die Frequenz 2450MHz. Eingesetzt in die Formel ergibt es: 294000km km/s.

Da Mikrowellen genauso elektromagnetische Strahlung wie das Licht ist, sollte dieselbe Geschwindigkeit auch für das Licht gelten. Der Wert aus der Literatur für die Lichtgeschwindigkeit beträgt 299792,458 km/s.



Abbildung 11 – nach kurzer Zeit in der Mikrowelle
entstehen Hot Spots in der Schokolade

Die Schülerinnen und Schüler können berechnen um wie viel Prozent ihr gefundener Wert vom tatsächlichen abweicht, es wird meist unter 5% sein. Anschließend können sie das von ihnen verwendete Material verspeisen.

Der Versuch eignet sich wegen der Einfachheit als Projekt für zu Hause mit gemeinsamer Auswertung der Ergebnisse in der Schule.

Kompetenzen:

- **Rechnen und Operieren:**

Die Schülerinnen und Schüler üben Maßeinheiten umzurechnen, mit Gleichungen aus der Welt der Physik umzugehen und sie anzuwenden, Ergebnisse abzuschätzen, die prozentuelle Abweichung vom Literaturwert zu deuten und sinnvoll zu runden.

5.3 Kaustik in der Kaffeetasse

“Once you have written an article about caustics you start to see them everywhere. [...] Mathematics is indeed everywhere.”⁹⁰

Menüplan: Kaffee und Kuchen



Gaumenfreude: Eine Tasse Kaffee

Die Idee zu diesem Unterrichtsvorschlag stammt von Benno Grabinger, veröffentlicht 1997 in „Praxis der Mathematik in der Schule 2“⁹¹. Weiteren Einfluss hat der Beitrag „Kaustik in der Kaffeetasse“ von Christian Ucke und Christoph Engelhardt, veröffentlicht 1998 in der Fachzeitschrift „Physik in unserer Zeit 29“.⁹² Außerdem bediene ich mich mancher Überlegungen von Bernhard Nietrost, Professor an der HTL Steyr und Mitarbeiter im Projektmanagement für Angewandte Mathematik für das Department Standardisierte kompetenzorientierte Reife- und Diplomprüfung an AHS und BHS des Bifie, der das Phänomen der Kaustik in der Kaffeetasse als Lern- und Vorbereitungsmaterial für die Reifeprüfung online zur Verfügung stellt.⁹³

⁹⁰ Zitat von Sander Wildmann auf der Website <https://www.geogebra.org/m/PDzXyAkC> [05.01.16]

⁹¹ Vgl. Grabinger 1997: S. 68-70.

⁹² Vgl. Ucke, Engelhardt 1998: S. 120-122.

⁹³ Das Übungsbeispiel lässt sich unter folgender URL finden:

http://www.math-tech.at/Beispiele/upload/nie_Kaustik.pdf [08.12.15]

Ziel:	Die Schülerinnen und Schüler sehen, wie eine alltägliche Beobachtung mathematisch formuliert und mittels GeoGebra dargestellt werden kann. Es ergibt sich dadurch für sie ein praktischer Bezug zur Problemstellung.
Voraussetzung:	Winkelfunktionen, Einheitskreis, Geradengleichung, Kenntnisse im Umgang mit GeoGebra, Grundkenntnisse der Strahlenoptik (Reflexion, Brennpunkt)
Material:	GeoGebra, Zugang zu Internet / Computer, eventuell eine Tasse Kaffee
Zeitungsumfang:	2 Unterrichtseinheiten
Arbeitsform:	Einzelarbeit, Partnerarbeit

Überblick:

Der Effekt einer sphärischen Abberation bei Konkavspiegeln bzw. Hohlspiegeln ist unter Physikerinnen und Physikern ein bekanntes Phänomen. Die meisten Menschen konnten dieses Naturereignis bereits beobachten, auch wenn ihnen der naturwissenschaftliche Hintergrund meist unbekannt ist.

Wenn Sonnenstrahlen schräg auf die reflektierende, glänzende Innenseite einer Kaffeetasse einfallen, so kann ein Kaffeetrinker unter geeigneten Bedingungen eine helle, herzförmige Lichtkonzentration auf der Kaffeeoberfläche beobachten. Mit Hilfe einer Dynamischen Geometrie-Software (DGS) wie der im Mathematikunterricht immer häufiger benutzten Open Source Anwendung GeoGebra können die Schülerinnen und Schüler in Einzel- oder Partnerarbeit die einfallenden, parallelen Strahlen der Sonne am Computer simulieren. Das herzförmige Naturphänomen lässt sich anschließend durch die Schnittpunkte der Strahlen darstellen. Als Kaustik wird die Einhüllende der reflektierten Strahlen bezeichnet.



Abbildung 12 – Kaffeetassen Kaustik

Die Unterrichtseinheit kann erweitert und vertieft werden, indem die Lehrperson näher auf das Prinzip von Kaustiken als optische Erscheinung eingeht oder den Schwerpunkt mehr auf die mathematische Beschreibung der Erscheinung legt. Letztere Idee wurde bereits von Bernhard Nietrost aufgenommen und in einen Unterrichtsvorschlag umgewandelt, der online frei zur Verfügung steht.⁹⁴ Diese Alternative benötigt auch die Anwendung weiterer mathematischer Gebiete: Summensätze für Winkelfunktionen, Parameter, Grenzwerte und Differentialrechnung. Der naturwissenschaftliche Hintergrund von Kaustiken lässt sich hervorragend mit dem Physikunterricht fächerübergreifend verbinden.

Grundlagen: Kaustiken als optische Phänomene

Um die Problemstellung bearbeiten zu können, sollten die Schülerinnen und Schüler folgende Kenntnisse aus der Strahlenoptik mitbringen:

Obwohl sich Licht prinzipiell geradlinig in alle Richtungen ausbreitet, erreichen uns die Lichtstrahlen der Sonne aufgrund der weiten Entfernung als parallele Lichtstrahlen. Wenn nun die parallelen Lichtstrahlen der Sonne auf eine reflektierende Oberfläche, in

⁹⁴ URL: http://www.math-tech.at/Beispiele/upload/nie_Kaustik.pdf [02.01.16]

unserem Fall der Innenseite einer Kaffeetasse, fallen, so verhalten sie sich gemäß dem Reflexionsgesetz. Das heißt, der Ausfallswinkel (Reflexionswinkel) ist gleich groß wie der Einfallswinkel und beide liegen mit dem Lot in einer Ebene, der Einfallsebene.

Der Verlauf eines solchen Strahls ist in Abbildung 13 nachgebildet.

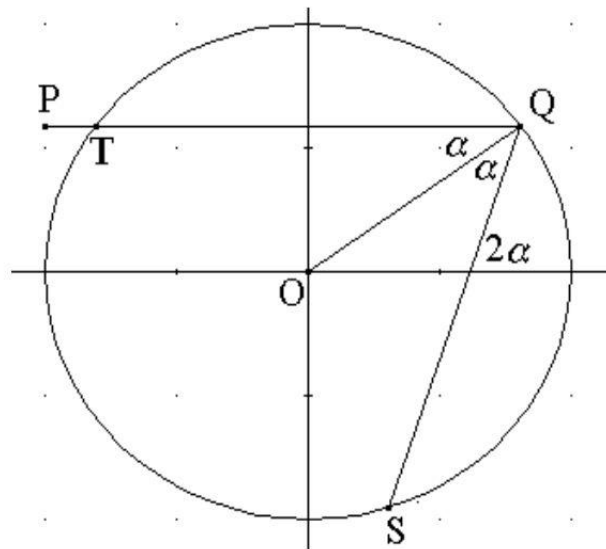


Abbildung 13 – der einfallende Strahl wird gemäß der Gleichheit von Einfalls- und Ausfallswinkel reflektiert

Optionale Vertiefung:

Bereits im 17. Jahrhundert interessierten sich bekannte Physiker und Mathematiker wie Christian Huygens oder Johann Bernoulli für das Phänomen der Kaustiken. Vor allem Bernoulli untersuchte sie mathematisch ausführlich und in zahlreichen Beispielen.⁹⁵

Das Bild einer klassischen Kaustik tritt auf, wenn ein paralleles Lichtbündel mit einem bestimmten Einfallswinkel einfach an einem Hohlspiegel reflektiert wird (Abbildung 14a). Je nach Stand der Sonne oder Lage der Tasse kann sich der Einfallswinkel der Lichtstrahlen ändern, wodurch sich auch das Bild der Kaustik in charakteristischer Wei-

⁹⁵ Vgl. Ucke & Schlichting 2011: S. 117.

se verändert. Auch die Füllmenge (durch Trinken des Kaffees oder Nachgießen) beeinflusst das Ergebnis. Fallen die Lichtstrahlen nun flacher ein, so erscheint eine herzförmige Brennnlinie (Abbildung 14b). Die Lichtstrahlen wurden nun zweimal an der Innenseite des Hohlspiegels reflektiert. Bei noch flacherem Lichteinfall lassen sich auch dreifache oder höhere Reflexionen beobachten, die noch kompliziertere (aber auch lichtschwächere) Figuren zum Ergebnis haben. Romantisch veranlagte Physikerinnen und Physiker könnten an dem Herz innerhalb ihres Hohlzylinders bei dreifacher Reflexion Gefallen finden (Abbildung 14c).

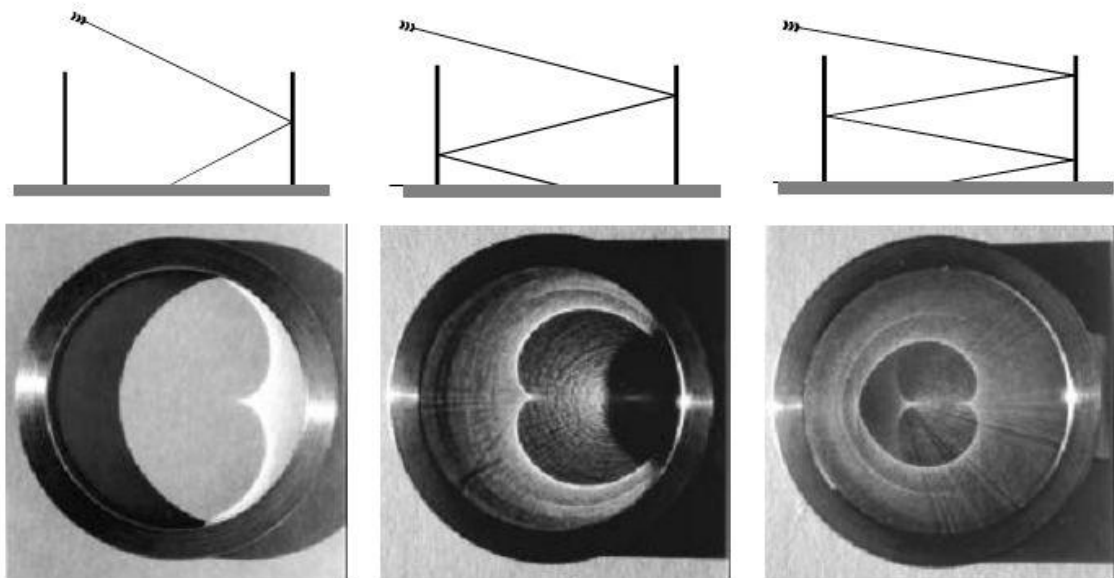


Abbildung 14: (a) Klassische Kaustik bei einfacher Reflexion der parallelen Lichtstrahlen an der Innenseite eines polierten Hohlzylinders. (b) Herzförmige Brennnlinie bei zweifacher Reflexion. (c) Romantisches Herz bei dreifacher Reflexion der Lichtstrahlen am Zylinderrand.

Mathematisch interessant ist auch, dass es sich bei der Begrenzungslinie der Kaustik um eine Epizykloide handelt, die beim Abrollen eines Kreises auf einem anderen entsteht. Weshalb Kurven wie die Epizykloide im Mathematikunterricht vorkommen sollten, beantwortet Florian Wakolbinger ausführlich und sehr aufschlussreich in seiner

Diplomarbeit „Kurven im Mathematikunterricht“. Ich gehe an dieser Stelle deshalb nicht näher darauf ein.⁹⁶

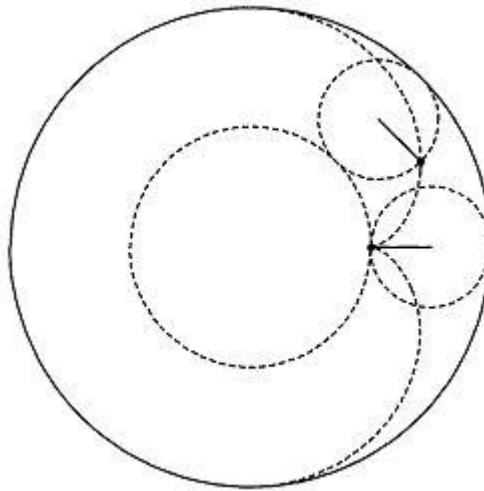


Abbildung 15 – Eine Epizykloide erzeugt durch das Abrollen des einen Kreises auf dem anderen

Man muss natürlich nicht unbedingt zum Kaffeetrinker werden, um das herzförmige Naturphänomen in seiner Tasse beobachten zu können. Auch als Teetrinker kann man die Erscheinung beobachten, wenn man etwas Milch in den Tee schüttet, sodass die Lichtreflexe auf der Oberfläche sichtbar werden. Die gleiche Erscheinung zeigt auch ein zylindrischer, gut polierter (Ehe-)ring. So könnte man unter bestimmten Bedingungen ein romantisches Herz in seinem Ehering entstehen lassen.

Durchführung:

Nach gemeinsamer Erarbeitung der Grundlagen sollen die Schülerinnen und Schüler nun in Partnerarbeit so selbstständig wie möglich das Naturphänomen der Kaustik in einer kreisförmigen Kaffeetasse mit Hilfe von GeoGebra simulieren. Die Lehrperson kann der Klasse Abbildung 16.a-c als Starthilfe geben, anhand deren sich die Teams in ihrer Vorgehensweise orientieren können.

⁹⁶ Wakolbinger 2013

Es bietet sich an mit der Beschreibung eines einzelnen einfallenden Sonnenstrahls zu beginnen (Abbildung 16.a). Dafür müssen die Teams die Punkte P, Q und S in Abhängigkeit des Winkels α ausdrücken.

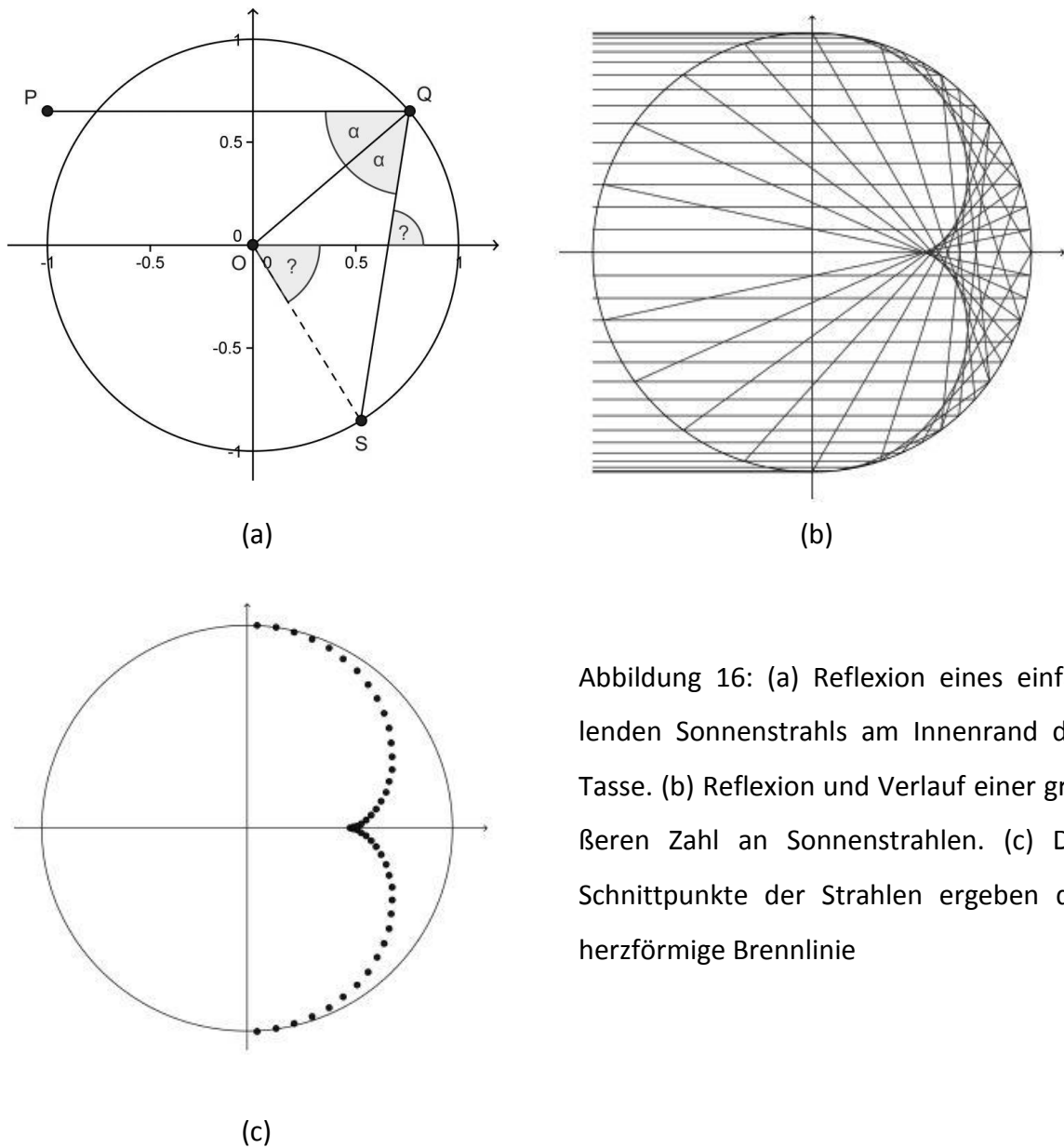


Abbildung 16: (a) Reflexion eines einfallenden Sonnenstrahls am Innenrand der Tasse. (b) Reflexion und Verlauf einer größeren Zahl an Sonnenstrahlen. (c) Die Schnittpunkte der Strahlen ergeben die herzförmige Brennnlinie

Es empfiehlt sich für diese Aufgabe den Radius des Kreises auf 1 zu setzen. Die x-Koordinate des Punktes P ist ebenso frei wählbar, da die Sonnenstrahlen aus dem (in unserem Fall negativen) Unendlichen kommen, praktischerweise wählen wir

$x_P = -1$. Somit ergeben sich für Punkt P und Q die Koordinaten $P = (-1, \sin(\alpha))$, $Q = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Die Bestimmung des Punktes S erfordert etwas mehr mathematisches Geschick. Die Schülerinnen und Schüler müssen erkennen, dass das Dreieck SOQ gleichschenkelig ist und folglich gilt $\beta = \pi - 2\alpha$ also auch $\varphi = \beta - \alpha = \pi - 3\alpha$. Der Punkt S hat somit die Koordinaten $S = (\cos(\pi - 3\alpha), -\sin(\pi - 3\alpha))$.

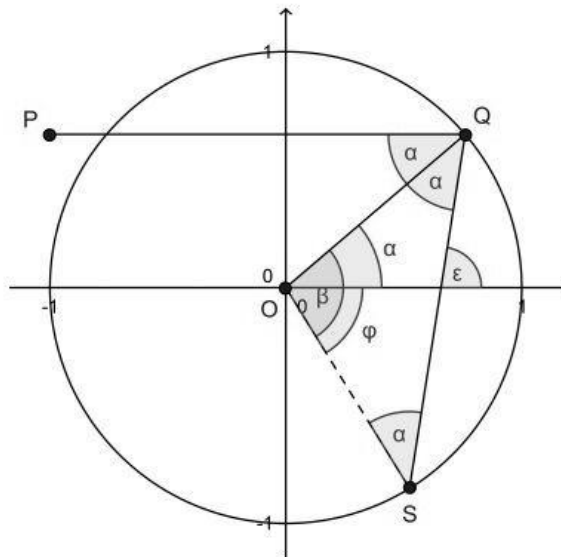


Abbildung 17 – Anschauliche Hilfe zur Bestimmung der Koordinaten

Erstellt man nun mit dem Befehl *Polygonzug* [⁹⁷] einen Streckenzug PQS in Abhängigkeit des Winkels α , so erhält man die Reflexion eines Sonnenstrahls. Eine Folge von Polygonzügen PQS in Abhängigkeit des Winkels α lässt sich in GeoGebra mit dem nützlichen Befehl *Folge* [⁹⁸] erzeugen. Mit der Ergänzung, dass sich α zwischen $-\frac{\pi}{2}$ für den untersten Strahl und $+\frac{\pi}{2}$ für den obersten Strahl bewegt, erzeugt man mit dem folgenden Befehl eine variable Anzahl simulierter Sonnenstrahlen:

⁹⁷ Befehl Polygonzug: https://www.geogebra.org/wiki/de/Polygonzug_%28Befehl%29 [07.01.16]

⁹⁸ Befehl Folge: https://www.geogebra.org/wiki/de/Folge_%28Befehl%29 [08.01.16]

Folge[*Polygonzug*[(-1, sin(α)), (cos(α), sin(α)), (cos($\pi - 3\alpha$), -sin($\pi - 3\alpha$))], α ,
 (- π) / 2, π / 2, π / 30]

Das letzte Argument im Befehl gibt die Schrittweite der Variablen an. Mit diesem konkreten Befehl zeichnen wir 31 Streckenzüge, die Herzkurve lässt sich damit schon sehr gut erahnen. Die Schülerinnen und Schüler könnten nun bereits vermuten, dass sich die Herzkurve durch die Schnittpunkte der reflektierten Strahlen ergibt. Um die reflektierten Strahlen miteinander schneiden zu können, müssen die Teams allerdings zuerst deren Geradengleichungen aufstellen. Die GeoGebra Konstruktion in Abbildung 17 zeigt, dass man zur Berechnung der Steigung k aber zuerst den Winkel ε bestimmen muss. Da für den Supplementärwinkel von ε gleich $\pi - 2\alpha$ gilt, ist $\varepsilon = 2\alpha$. Für k gilt somit $k = \tan(2\alpha)$. Durch Einsetzen von Punkt Q in die Geradengleichung $y = kx + d$ erhält man

$$\sin(\alpha) = \tan(2\alpha) * \cos(\alpha) + d.$$

Umgeformt ergibt sich $d = \sin(\alpha) - \tan(2\alpha) * \cos(\alpha)$. Somit erhält man für die Geradengleichung:

$$y = \tan(2\alpha) * x + \sin(\alpha) - \tan(2\alpha) * \cos(\alpha).$$

Erneut eignet sich der Befehl *Folge* [] dazu eine Liste der reflektierten Geraden zu erstellen, in diesem Beispiel nenne ich die Liste „Geraden“. Sie umfasst 51 Geraden.

Geraden:=Folge[$y = \tan(2\alpha) x + \sin(\alpha) - \tan(2\alpha) \cos(\alpha)$, α , (- π) / 2, π / 2, π / 50].

Die gesuchte Herzkurve ergibt sich anschließend aus den Schnittpunkten jeweils zwei benachbarter Geraden miteinander. Mit dem Befehl *Element* [] kann ein Element einer Liste angegeben werden. Wir schneiden jeweils das k -te Element mit dem $(k+1)$ -ten Element der zuvor benannten Liste „Geraden“ und erzeugen anschließend wieder eine Folge von Schnittpunkten mit dem Befehl *Folge* [].

Der Befehl, der in GeoGebra einzugeben ist, sieht folgendermaßen aus:

SchnittPunkte:=Folge[Schneide[Element[Geraden, k], Element[Geraden, k+1]],k,1,50,1]

Wenn die Schülerinnen und Schüler alle Schritte bearbeitet haben, sollte nun eine Simulation der Kaffeetassenkaustik in GeoGebra erstellt worden sein.⁹⁹

Kompetenzen:

- **Modellbilden, Darstellen:**

Die Simulation und Übersetzung eines Naturphänomens in eine mathematische Repräsentationsform bildet charakteristischerweise die Kompetenz des Modellbildens. Die Schülerinnen und Schüler müssen Annahmen, Vereinfachungen und Idealisierungen vornehmen (Sonnenstrahlen fallen parallel ein, Auswahl einer geeigneten Anzahl an Sonnenstrahlen um das Phänomen darzustellen, die Kaffeetasse als idealer Kreis). Die Teams müssen außerdem geeignete mathematische Mittel und Lösungswege auswählen, um die Problemstellung zu bearbeiten.

- **Rechnen, Operieren:**

Die Schülerinnen und Schüler müssen überlegen, welche Berechnungen sie im Vorfeld durchführen müssen, um die Kaffeetassenkaustik in GeoGebra darstellen zu können. Die Teams müssen dafür die Koordinaten der Punkte P, Q und S berechnen und die Geradengleichung der reflektierten Strahlen herleiten.

⁹⁹ Meine Ausarbeitung aller Schritte ist zum besseren Nachvollziehen in einer interaktiven Web umgebung unter folgender URL erreichbar: <http://ggbtu.be/m2538833> [27.01.16]

- **Interpretieren:**

Die Schülerinnen und Schüler deuten mathematische Sachverhalte und Beziehungen im jeweiligen Kontext. So müssen die Teams die konstruierten Sonnenstrahlen als Streckenzüge interpretieren, um die Problemstellung bearbeiten zu können.

- **Argumentieren:**

Die Schülerinnen und Schüler werden zwar nicht direkt nach einer Begründung für ihren Lösungsweg gefragt, allerdings müssen sie ihre Problemlösestrategie im Team diskutieren und eine zielführende Vorgehensweise argumentieren und wählen.

5.4 Exponentieller Zerfall des Bierschaums

Menüplan:

Getränk



Gaumenfreude:

(Alkoholfreies) Bier

Ziel:

Planung eines Experiments, mit dem der zeitliche Verlauf des Zerfalls von Bierschaum untersucht werden kann. Erstellung eines geeigneten mathematischen Modells.

Voraussetzung:

Definition, Eigenschaften und Darstellung von Exponentialfunktion

Material:

Alkoholfreies Bier (Marke je nach Wunsch der Lehrperson oder der Schülerinnen und Schüler), Messzylinder, Stoppuhr,

Zeitumfang: 1-2 Einheiten

Arbeitsform: Hausaufgabe, Gruppenarbeit, Teil eines Stationenbetriebes

Die Idee zu diesem Unterrichtsvorschlag stammt einerseits von Gerhard Rath, Physik Fachdidaktiker an der Universität Graz, der für das IMST¹⁰⁰ Projekt „Mathematik und Physik koordiniert unterrichten“ die Unterrichtssequenz „Zerfall von Bierschaum“¹⁰¹ entwickelte, zum anderen war der Unterrichtsvorschlag „Zerfall von Bierschaum“ von Ulla Schmidt in der Ausgabe „T³-Akzente... aller Anfang ist leicht“¹⁰² eine wesentliche Inspiration. Für weiteren Input sorgte die kritische Auseinandersetzung „Bierschaumzerfall – Modelle und Realität im Vergleich“ von Thomas Wilhelm und Wolfgang Ossau erschienen 2009 in „Praxis der Naturwissenschaften“¹⁰³, sowie die 2002 veröffentlichte Abhandlung des deutschen Physikers Arnd Leike über den Zerfall des Bierschaums¹⁰⁴.

Überblick:

Die Schülerinnen und Schüler sollen ein Experiment planen, mit dem sie die Bierschaumhöhe in Abhängigkeit von der Zeit untersuchen können. Die Ergebnisse sollen die Teams anschließend durch eine geeignete Funktion modellieren. Davon ausgehend kann die Kurve auf verschiedene Aspekte untersucht und vor allem auch kritisch hinterfragt werden.

Es empfiehlt sich den Versuch im Mathematikunterricht bei der Einführung der Exponentialfunktion einzusetzen, ebenso kann er fächerübergreifend mit Unterrichtseinheiten der Chemie oder der Physik gekoppelt werden.

¹⁰⁰ IMST steht für „Innovationen Machen Schulen Top!“, URL: <https://www.imst.ac.at/> [13.01.16]

¹⁰¹ Den Unterrichtsvorschlag findet man unter folgender URL:

http://www.brgkepler.at/~rath/imst/koordination_M_Ph_Beispiele.pdf [13.01.16]

¹⁰² Pallack&Barzel 2008: S. 26.

¹⁰³ Wilhelm & Ossau 2009, S. 19-26.

¹⁰⁴ Leike 2002

Motivation:

Wenn im Mathematikunterricht die Themen exponentieller Zerfall und Wachstum behandelt werden, bearbeiten die Schülerinnen und Schüler meist Aufgaben, die nur schwer direkt von ihnen beobachtet werden können. Zum Beispiel zerfällt eine radioaktive Substanz in einer bestimmten Zeit oder eine Bakterienkultur wächst exponentiell an. Der Nachteil dieser Beispiele aus der Praxis ist, dass die Schülerinnen und Schüler die Anzahl radioaktiver Kerne nicht direkt sehen können (wenn überhaupt könnte man die Zerfallsrate mit einem Messgerät erfassen) und auch die Zu- und Abnahme von Bakterien lässt sich nur unter bestimmten Bedingungen im Labor beobachten.

Die Attraktivität des Bierschaum-Versuches liegt darin, dass der Zerfall von Bierschaum den meisten Schülerinnen und Schülern aus dem Alltag bekannt ist und der Versuch sehr einfach mit Materialien aus dem Supermarkt zu Hause oder in der Schule durchgeführt werden kann. In einem zylindrischen Gefäß ist die Höhe des Schaumes als Maß für das Volumen der unzerfallenen Bierschaumbläschen außerdem sehr gut sichtbar. Zudem ist Bier für viele Schülerinnen und Schüler in der Oberstufe ein interessantes, reizvolles und positiv besetztes Thema. Die Arbeit mit einem alltäglichen Gegenstand wie Bierschaum birgt für die Schülerinnen und Schüler ein hohes Motivationspotential, was vor allem auch für eine fächerübergreifende Arbeit in der Oberstufe interessant ist.¹⁰⁵

Durch die experimentelle Untersuchung und das Modellieren des Zerfallsprozesses können die Schülerinnen und Schüler Zusammenhänge und mathematische Sachverhalte selbstständig entdecken. Es ist hohe Kreativität der Teams gefragt, da Vorgehensweise und Ergebnis im Idealfall nicht vorgegeben sind.

Fachliche Vertiefung:

Die Schülerinnen und Schüler begegnen Schäumen häufig in ihrem Alltag: Milchschaum auf dem Cappuccino, schäumendes Shampoo und Schaumbad, Löschschaum, Schaum-

¹⁰⁵ Wilhelm & Ossau 2009, S. 19.

partys, Getränkeschaum. Fächerübergreifend könnte man die Fragen klären, woraus Schaum eigentlich besteht und was eigentlich beim Prozess des Zerfallens passiert.

Da speziell der Bierschaum als einer der wichtigsten Qualitätsparameter des Bieres gilt, beschäftigen sich die industrielle Forschung und Brauereien mit seiner Konsistenz und seinem Zerfall.¹⁰⁶

Beim Brauprozess (Fermentation) bildet sich Kohlendioxid, das im Bier gelöst bleibt. Durch den Prozess des Einschenkens des Bieres treffen die entbundenen Kohlendioxid Gasbläschen auf oberflächenaktive Moleküle (Tenside) wie Proteine, Hefe- und Hopfenrückstände. Diese bilden um das Kohlendioxid eine elastische Hülle (chemische Dispersion) und eine (beständige) Schaumkrone entsteht. Die Schaumbildung ist zum

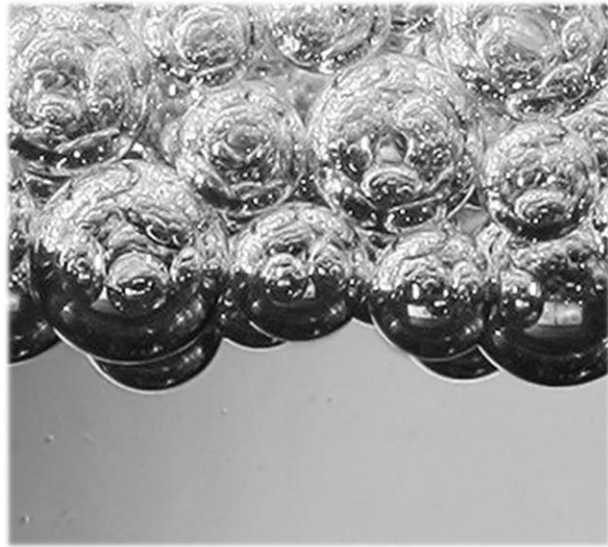


Abbildung 18 – Blasenbildung beim Bierschaum

Beispiel abhängig von der Beschaffenheit und Temperatur des Gefäßes, von der Art des Einschenkens, vom Alter und der Herstellung des Bieres sowie vom Luftdruck. Auch der Zerfall des Bierschaums kann unterschiedlich schnell erfolgen, je nach Form des Gefäßes, Verunreinigungen an der Glaswand, Herstellung und Inhaltsstoffe des Bieres.

2002 veröffentlichte der deutsche Physiker Arnd Leike im „European Journal of Physics“ einen Artikel über den Zerfall von Bierschaum. Er fand heraus, dass es sich

¹⁰⁶ So ist zum Beispiel einer der Arbeitsschwerpunkte der Arbeitsgruppe Brau- und Getränketechnologie der Technischen Universität München laut Angabe auf ihrer Website: „Im Forschungsprojekt sollen schaumstabilisierende sowie schauminhibierende Bierinhaltsstoffe identifiziert werden und ihr Zusammenspiel und ihr Einfluss auf die Schaumrheologie und die Aromastofffreisetzung im Bier erforscht werden. So soll der Brauindustrie neue Einflussmöglichkeiten zur gezielten technologischen Beeinflussung der Schaumstruktur und -stabilität an die Hand gegeben werden.“ URL: <http://lbgt.wzw.tum.de/index.php?id=21> [12.01.2016]

beim Zerfall des Bierschaums um einen exponentiellen Zerfall mit unterschiedlicher Zerfallskonstante je nach Biersorte handelt. Somit kann dies als Maß für die Güte eines Bieres genutzt werden. Im selben Jahr wurde ihm für den veröffentlichten Artikel der Ig-Nobelpreis verliehen.^{107, 108} Die meisten Messungen wurden übrigens mit Erdinger Weißbier durchgeführt, dem Lieblingsbier des Autors.

Beim Zerfall des Bierschaums spielen 3 Mechanismen eine Rolle. Der Effekt der Entwässerung des Schaums läuft am schnellsten ab. Aufgrund der Schwerkraft fließt die die Kohlendioxid-Blasen umgebende Flüssigkeit nach unten, weshalb die Wände der Bläschen immer dünner werden und zerplatzen. Der zweite Effekt wird als Oswaldsche Blasenreifung bezeichnet. Da in kleineren Blasen größere Drücke herrschen, diffundiert Kohlendioxid von kleineren in größere Blasen. Somit werden kleine Blasen immer kleiner bis sie verschwinden. Große Blasen können allerdings aufgrund des großen Gasvolumens ebenso platzen und verschwinden. Der dritte Effekt ist bedingt durch Verdunstung an der oberen Seite des Schaums.¹⁰⁹ Da man den dritten Einfluss durch Abdecken des Glases relativ gut minimieren kann, nehmen vor allem Phase 1 und 2 in unterschiedlicher Gewichtung je nach Rahmenbedingungen Einfluss auf den Zerfall des Bierschaums. Dieser Einfluss soll bei der Diskussion verschiedener Gruppenergebnisse berücksichtigt werden.

¹⁰⁷ Der Ig-Nobelpreis ist eine satirische Auszeichnung, um wissenschaftliche Leistungen zu ehren, die „Menschen zuerst zum Lachen, dann zum Nachdenken bringen“. Eine Liste der bisher vergebenen Ig-Nobelpreise findet sich unter https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_Tr%C3%A4ger_des_Ig-Nobelpreises [12.01.16]

¹⁰⁸ Siehe „Bierschaum“ in Wikipedia:

„<https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Bierschaum&oldid=149031306>“ [12.01.16]

¹⁰⁹ Wilhelm & Ossau 2009

Durchführung:

Möglichst selbstständig sollen sich die Schülerinnen und Schüler ein Experiment zur Messung der Höhe einer Bierschaumkrone in Abhängigkeit der Zeit überlegen. Es obliegt der Lehrperson, welche Rahmenbedingungen sie den Schülerinnen und Schülern vorgeben möchte (zeitlicher Rahmen, Materialien, Einsatz von vorhandener Computer-Software). Eine Schulklasse des Gymnasiums Rodenkirchen baute zum Beispiel zuerst eine Biereingieß-Maschine, sodass das Bier mit konstanter Kippgeschwindigkeit eingegossen werden kann.¹¹⁰ Bei entsprechender Vereinfachung des Experiments kann es auch eine Station in einem Lernzirkel zum Thema Anwendungen von Exponentialfunktionen sein.

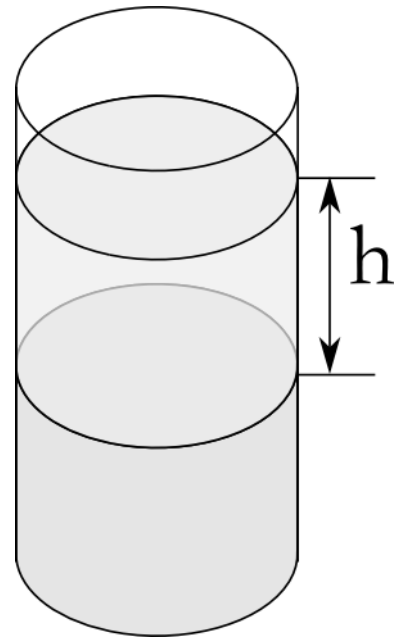


Abbildung 19 – Messung der Höhe des Bierschaums in Abhängigkeit von der Zeit

Die Schülerinnen und Schüler können vor Beginn des Experiments Vermutungen aufstellen: Wie könnte das Absinken mit der Zeit verlaufen? Wird der Zerfall des Bierschaums gleichmäßig, anfangs schneller und später langsamer verlaufen? Oder hält er sich anfangs stabil und zerfällt dann sehr schnell?

Für die Planung des Experiments können sich die Teams außerdem überlegen, in welchen Zeitabständen es sinnvoll wäre, die Schaumhöhe zu messen. Zudem würde es sich empfehlen einen Messzylinder als Schankgefäß zu verwenden, da hier bereits eine Skala eingezeichnet ist. Alternativ eignet sich zum Ablesen auch ein Lineal.

Wenn vorhanden kann der Versuchsaufbau in regelmäßigen Zeitabständen mit einer Digitalkamera fotografiert werden, sodass die Höhe der Bierschaumkrone nach dem Versuch in Ruhe auf dem Computer abgelesen werden kann. Die Teams können den Zerfallsprozess auch mit einer Videokamera filmen und das Experiment mittels Video-

¹¹⁰ Mehr Informationen finden sich auf der Website des Gymnasiums:

http://www.gymnasium-rodenkirchen.de/physik/inhalte/Das_Bierschaum_Experiment.htm
[13.01.16]

analyse auswerten. Auf die Vorteile einer Videoanalyse gehen insbesondere Wilhelm & Ossau¹¹¹ näher ein.

Nach Sammlung der Messwerte sollen die Schülerinnen und Schüler ein mathematisches Modell für den Vorgang erstellen. Dabei gilt es zu klären, welche Funktion(en) die Abnahme am besten beschreibt (beschreiben). Dies kann zunächst durch eine Funktionsanpassung von Hand vorgenommen werden, noch besser wäre allerdings zusätzlich eine Regressionsrechnung von einem Programm (z.B. Excel, QtiPlot, geeigneter Taschenrechner) durchführen zu lassen.

Basierend auf den Ergebnissen aus dem Experiment können weitere Fragestellungen an das Experiment und an das Modell bearbeitet werden:

- Wann ist der Bierschaum nur noch halb so hoch wie zu Beginn?
 - Bier sehr guter Qualität bildet nach einer Einteilung von Hudson¹¹² Bierschaum mit einer Halbwertszeit von >110 Sekunden. Von akzeptablem bzw. gutem Bier spricht man bei einer Halbwertszeit von 91-110 Sekunden und ausreichend ist die Qualität noch bei einer Halbwertszeit von 71-90 Sekunden. Wenn mit unterschiedlichen Biersorten experimentiert wird, können die Schülerinnen und Schüler anhand der Halbwertszeiten die Qualität des untersuchten Bieres beurteilen.
- Wie viel Prozent des Bierschaums sind zum Beispiel nach 7 Minuten zerfallen?
- Verunreinigungen des Glases beeinflussen die Bierschaumbildung. Welchen Einfluss hat leichtes Einfetten des Glases auf das Experiment und das Ergebnis?
- Woraus besteht Bierschaum und warum entsteht er? Wie erfolgt der Zerfall im Detail? Was wurde bereits dazu herausgefunden?



Abbildung 20 - Bierschaumzerfall in einem leicht eingefetteten Glas (links) und einem sauberen Glas.

¹¹¹ Wilhelm & Ossau 2009

¹¹² Hudson 1968: S. 275-285

den und wie wurden diese Untersuchungen durchgeführt? Welche Relevanz haben diese Studien?

- Die Schülerinnen und Schüler können sich auch eigene Fragen an das Experiment bzw. an das Modell einfallen lassen.

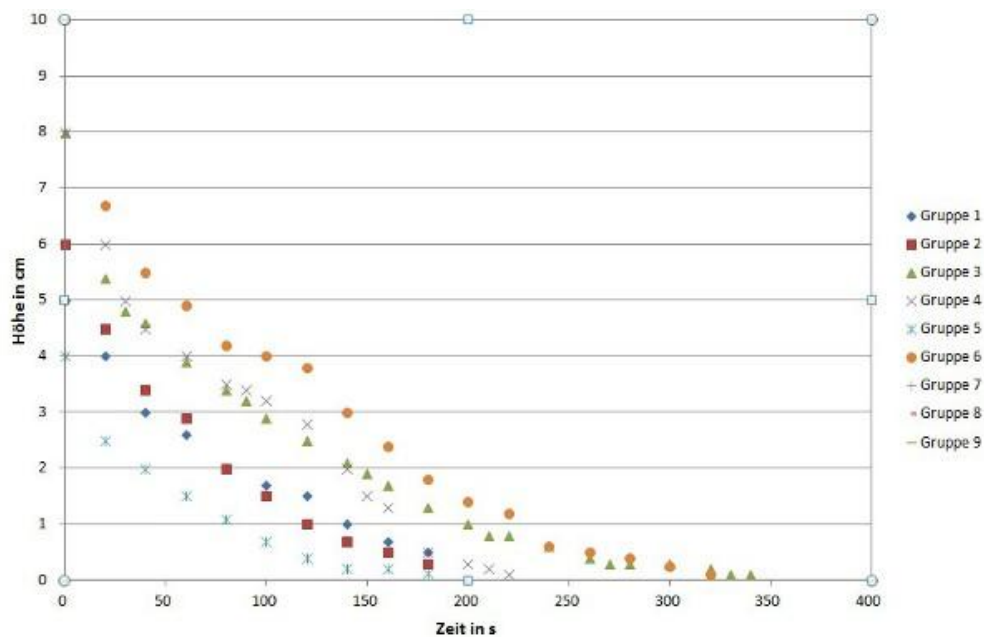


Abbildung 21 – Sammlung der Messergebnisse der Schülerinnen und Schüler des Ubbo-Emmius Gymansiums, durchgeführt mit alkoholfreiem Malzbier.

Bei dem Versuch ist eine Modellkritik lohnend, da höchstwahrscheinlich der Punkteplot der Messwerte und der Regressionskurve nicht vollständig übereinstimmen werden. Bei der exponentiellen Regression mit dem Computer tritt dies öfter auf. Durch das Hängenbleiben des Bierschaumes an der Glaswand können vor allem die letzten Werte mit höheren Fehlern behaftet sein. Zudem sind Bierschaumentstehung und Zerfall, wie in den fachlichen Grundlagen besprochen, von vielfältigen Faktoren abhängig, sodass die Gruppen wahrscheinlich auch voneinander abweichende Halbwertszeiten ermitteln werden.

Kompetenzen:

- **Modellbilden, Darstellen:**

Die Bearbeitung der Aufgabe fördert prozessbezogene Kompetenzen wie die Planung eines Versuchs und die Übersetzung einer Realsituation in ein mathematisches Modell. Darüber hinaus müssen die Schülerinnen und Schüler die Wahl und die Güte ihres Modells begründen. Sie lernen dabei, dass beim Bilden eines mathematischen Modells nicht nur ein einzelner, sondern verschiedene Aspekte betrachtet werden müssen. Es gilt dabei die Grenzen der Mathematisierung auszuloten, da ein Modell nicht hundertprozentig die Realität beschreiben kann. Die Kompetenz Darstellen wird gefördert, indem die Schülerinnen und Schüler Exponentialfunktionen sowohl als Wertetabelle, als auch als Graph und Term darstellen müssen.

- **Rechnen, Operieren:**

Die Schülerinnen und Schüler müssen Rechenoperationen mit Exponentialfunktionen durchführen können (Berechnen der Halbwertszeit und je nach Wahl der Lehrperson Bearbeiten verschiedener anderer Aufgabenstellungen). Die Teams müssen mit Wertetabellen und Diagrammen umgehen. Gegebenenfalls müssen sie ein Tabellenkalkulationsprogramm bedienen können

- **Interpretieren:**

Die Schülerinnen und Schüler müssen die Daten anhand einer Ausgleichsfunktion interpretieren. Sie müssen eine Fehlerabschätzung durchführen und anhand derer die Güte beziehungsweise die Grenzen ihres Modells evaluieren und abschätzen können.

- **Argumentieren:**

Die Schülerinnen und Schüler müssen mathematische Argumente nennen, weshalb sie sich für oder gegen die Verwendung eines bestimmten mathematischen Modells entschieden haben. Sie müssen argumentieren, weshalb ihre gefundene Ausgleichsfunktion die ermittelten Daten am besten beschreibt.

Politischer Bildungswert der Aufgabe:

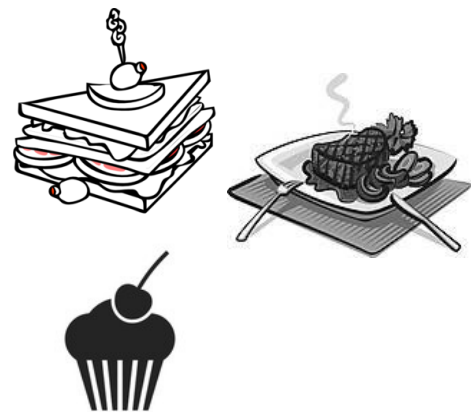
Für Menschen ist es oft schwer, Effekte exponentieller Entwicklungen korrekt abzuschätzen. Wir sind es gewohnt, den Ablauf von Ereignissen linear in die Zukunft zu übertragen. Viele Variablen in der Umweltpolitik (z.B. klimatische Veränderungen durch Abholzung von Wäldern, Verschmutzung der Luft durch Schadstoffemissionen) entwickelt sich jedoch nicht linear und wir neigen dazu, gewisse Gefahren nicht rechtzeitig zu erkennen beziehungsweise zu unterschätzen. Erich Kirchler ist der Meinung, dass sich die meisten Menschen erheblich verschätzen, wenn sie gefragt werden, wie oft man ein Blatt Papier von 0.1mm Dicke falten müsste, bis es die Höhe eines Kirchturms von 160m überragen würde. Nach 5-maliger Faltung ist das Blatt Papier gerade einmal 1.6mm hoch. 22-mal gefaltet überragt es den Turm bereits um einiges.¹¹³

Es sollte deshalb ein wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts sein, den Schülerinnen und Schülern ein Gefühl für exponentielles Wachstum und Zerfall zu vermitteln, um Prognosen und Entwicklungen in ihrer Welt kritisch zu hinterfragen.

5.5 Die exponentielle Veranlagung des Blätterteigs

Menüplan:

Appetizer, Hauptspeise,
Nachspeise



¹¹³ Kirchler 2011: S. 56.

Gaumenfreude: Alles mit Blätterteig: Schinken-Käse-Stangen, Pikanter Strudel (Spinatstrudel, Gemüsestrudel), Süßer Strudel (Apfelstrudel), Schaumrollen, Nutella Taschen, und viele weitere kulinarische Köstlichkeiten.¹¹⁴

Ziel: Die Schülerinnen und Schüler sollen anhand der Herstellung ein Gefühl für exponentielles Wachstum bekommen

Voraussetzung: Definieren von Potenzen mit rationalem Exponenten, Exponentielles Wachstum

Material: Mehl, Wasser, Salz, Butter, Nudelholz zum Ausrollen des Teiges

Zeitumfang: 1 Einheit

Arbeitsform: Hausaufgabe

Rezeptzubereitung:

Der Blätterteig ist sowohl in der süßen als auch in der pikanten und herzhaften Küche vielseitig einsetzbar. Jede Person konnte schon einmal in seinen Genuss in Form von kleinen Snacks wie Käsestangen, aufwendigen Gerichten wie dem Filet Wellington oder süßen Klassikern wie dem österreichischen Apfel- oder Topfenstrudel kommen. Das besondere am Blätterteig ist, dass er aus un-



Abbildung 22 – „Vol-au-vent“

¹¹⁴ Viele weitere kulinarische Anregungen findet man zum Beispiel unter:
<http://www.chefkoch.de/rs/s0/bl%C3%A4tterteig/Rezepte.html> [14.01.16]

zähligen Schichten zu bestehen scheint. Es erscheint auf den ersten Blick extrem mühsam, wenn man all diese Schichten manuell ausrollen und übereinander schichten müsste. Allerdings ist der Blätterteig „exponentiell veranlagt“, weshalb man ihn bei richtiger Technik nur sechs Mal ausrollen und fallen muss um 729 Blätter / Schichten zu erhalten.

Die Herstellung beginnt damit, dass Wasser und Mehl zu einem glatten Teig geknetet werden. Im Anschluss rollt man den Teig auf ein Rechteck aus und verteilt darauf eine Schicht Butter. Der Teig wird wie in Abbildung in 3 Lagen übereinander geschlagen und 20-30 Minuten im Kühlschrank gekühlt. Man hat nun 3 übereinander liegende Blätter. Danach wird er wieder ausgerollt, wieder in drei Lagen zusammengefaltet und wieder im Kühlschrank zum Rasten platziert.



Abbildung 23 – Faltechnik bei der Herstellung von Blätterteig

Durch das Falten hat man nun bereits übereinander liegende Schichten. Wird das Verfahren sechs Mal angewandt, so erhält man $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6 = 729$ Schichten / Blätter. Hat man den Teig richtig zubereitet, geht er Teig beim Backvorgang locker und blättrig auf. Die Backhitze lässt das Wasser im Teig verdampfen, sodass der Dampf das Gebäck durch die Volumsvergrößerung anhebt. Dabei wirken die Fettschichten wie eine Sperrschicht, durch die der Dampf in der Teigschicht gehalten wird bis das Teiggerüst stabil gebacken ist. Man benötigt für das Aufgehen keinerlei zusätzliche Triebmittel oder Hefe, was ihn von den meisten anderen Teigen unterscheidet.

Didaktischer Kommentar:

Die Schülerinnen und Schüler schulen bei dieser Aufgabe vor allem die Kompetenz Rechnen und Operieren, da sie die Regeln für das Rechnen mit rationalen Exponenten anwenden müssen, um die Anzahl der Blätter nach dem Falten und Ausrollen theoretisch zu ermitteln. Viel wichtiger ist, dass das Experiment den Schülerinnen und Schülern ein Gespür für exponentielles Wachstum gibt und das Stoffgebiet der Potenzen durch den Einbezug von lebensnahen Beispielen weniger abstrakt erscheinen lässt.

5.6 Das Cake - Cutting Problem

Menüplan: Kaffee und Kuchen

Gaumenfreude: Kuchen, Torte



Ziel: Ein Kuchen oder eine Torte soll auf beliebig viele Personen so aufgeteilt werden, sodass jeder mit seinem Stück zufrieden ist und auf keine andere Person neidisch sein muss.

Voraussetzung: Bruchrechnen, Prozentrechnung

Material: Ein Kuchen oder eine Torte, Küchenmesser zum Teilen

Zeitungfang: 1-3 Unterrichtseinheiten (je nach gewünschter Intensivität)

Arbeitsform: Gruppenarbeit, Projektunterricht,

Überblick:

Das Beispiel behandelt die Realsituation, wie ein Gut (in unserem Fall ein Kuchen oder eine Torte) auf eine beliebige Anzahl von Personen proportional und neidfrei aufgeteilt werden kann. Die Schülerinnen und Schüler müssen dabei selbstständig Lösungswege entwickeln oder recherchieren und kritisch überprüfen.

Die Idee und Theorie zu diesem Unterrichtsvorschlag stammt wesentlich von der Zusammenfassung von Malte Wunschs Vortrag „Kuchen gerecht teilen“ an der Universität Bonn¹¹⁵, sowie einer Zusammenfassung des Vortrags von Heike Stolle „Faires Teilen“ von der Freien Universität Berlin¹¹⁶. Forschungsergebnisse zur Einbindung von Spieltheorie für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II wurde der Diplomarbeit „Ist das Leben ein Spiel“ von Manuel Graf¹¹⁷, der Publikation von Ableitinger & Typpelt „Spieltheorie im Mathematikunterricht – Kann es das spielen?“¹¹⁸ sowie einem Programmpunkt der Europäischen Talent Akademie Lindau 2012 für begabte Jugendliche entnommen¹¹⁹.

Motivation:

Ableitinger und Hauer-Typelt sehen einen der wesentlichen Vorteile, dem mathematischen Teilgebiet „Spieltheorie“ im Unterricht mehr Bedeutung zu schenken, darin, dass grundlegende Elemente dieses Themenbereichs vergleichsweise rasch von den Schülerinnen und Schülern verstanden werden können. Viele Basis-Begriffe lassen sich mit möglichst wenig Formalismus, dafür aber anhand altersgemäßer, realitätsnaher Beispiele entwickeln. Zudem benötigen die Lernenden meist keinerlei großer mathematischer Vorkenntnisse, weshalb ein Einstieg ins Thema bereits ab der fünften Klasse AHS möglich ist. Die Einbindung von einem Beispiel aus der Spieltheorie kann eine gute Möglichkeit darstellen, Mathematik in die direkte Lebenswelt der Schülerinnen und

¹¹⁵ Wunsch 2008

¹¹⁶ Stolle 2008

¹¹⁷ Graf 2011

¹¹⁸ Ableitinger & Hauer-Typelt 2007

¹¹⁹ Breitenbach 2012

Schüler zu übertragen. Täglich treffen wir unzählige Entscheidungen, deren Konsequenzen manchmal stärker, manchmal weniger bedeutsam unser Leben mitbestimmen. Zahlt es sich aus ein Ticket für die U-Bahn zu kaufen? Soll ich meine Hausaufgabe machen? Soll ich Mathematik studieren oder doch lieber Soziologie? Manche dieser Entscheidungssituationen des Alltags lassen sich mit spieltheoretischen Methoden modellieren und auf rationaler Ebene analysieren.

Je nach Interesse der Schülerinnen und Schüler, aber auch der Lehrperson, ist es möglich Spieltheorie in die unterschiedlichsten Lebensbereiche zu transferieren. So ist es auch wunderbar möglich, gewisse Aspekte der Spieltheorie mit dem Bereich der kulinaren Mathematik zu verbinden.

Durchführung:

Das klassische „Cake-Cutting-Problem“ („Kuchenproblem“) wurde als erstes vom polnischen Mathematiker Hugo Steinhaus untersucht und ist dem spieltheoretischen Teilgebiet „Fair Division“ („Faires Teilen“) zuordenbar.

Das aufzuteilende Gut ist meist durch einen Kuchen, der verschiedene Toppings haben kann, dargestellt. Ein Kuchen ist auf verschiedene Personen aufteilbar, wobei manche Personen zum Beispiel lieber ein Kuchenstück mit Schokoladestreusel und andere Personen ein Stück mit Früchten bevorzugen. Auf diese Art können die einzelnen Kuchenstücke unterschiedlich von den jeweiligen Personen bewertet werden. Wichtig ist, dass der subjektive Wert eines Kuchenstücks für die einzelnen Personen ausschlaggebend für ihre Zufriedenheit ist. Bei einem fairen Aufteilen des Kuchens unter n Personen bekommt jede Person (subjektiv gesehen) zumindest ein n -tel des Kuchenwerts, wodurch die Summe der Bewertungen der erhaltenen Stücke größer oder gleich Eins ist.

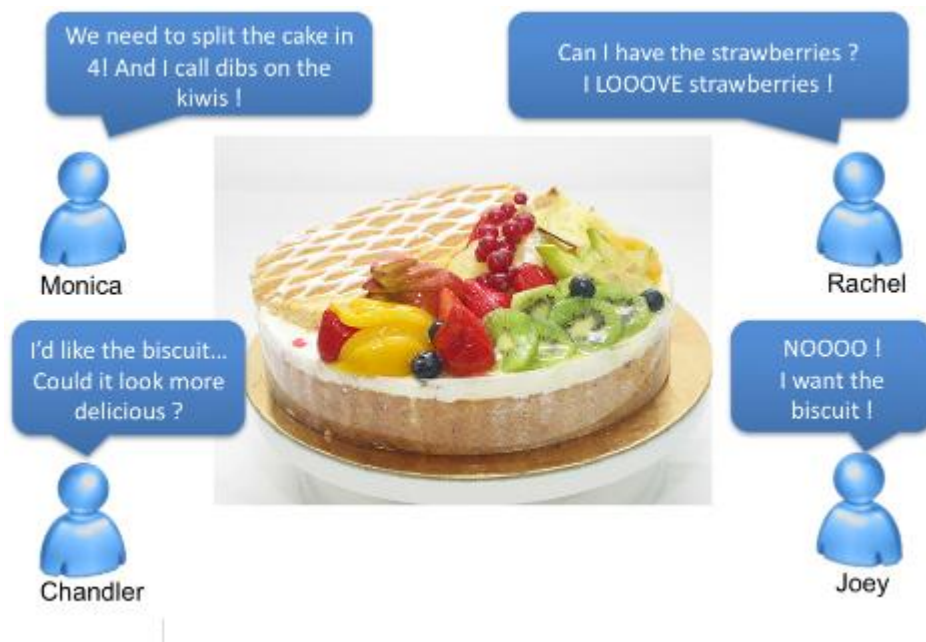


Abbildung 24– Wie teilt man diesen Kuchen gerecht auf?

Viele Schülerinnen und Schüler kennen vielleicht schon intuitiv einen Algorithmus für die „gerechte“ Aufteilung eines Kuchens unter zwei Personen:

- **Vorgehensweise für 2 Personen**

- Prinzip „Ich schneide – du wählst“:

Lukas und Philina haben einen Kuchen gebacken und wollen diesen gerecht untereinander aufteilen. Lukas schneidet den Kuchen in zwei seiner Meinung nach gleich große Teile. Er muss sich dabei um zwei gleich große Hälften bemühen, da Philina sich zuerst ein Stück aussuchen darf und Lukas das übrige nehmen muss.

- ➔ Philina ist zufrieden, da sie sich als erste ein Stück Kuchen ihrer Wahl aussuchen darf.
- ➔ Lukas ist mit dem übrigen Stück zufrieden, da seiner Meinung nach beide Kuchenteile gleich groß sind.

Diese Aufteilung ist sowohl proportional-gerecht, als auch neidfrei-gerecht. Mit diesem Hintergrund möchte ich gleich auf die Begriffe neidfrei-gerecht und proportional-gerecht eingehen:

Proportional-gerecht (proportional fairness):= Eine Aufteilung ist proportional-gerecht, wenn mit ihr jeder Spieler/jede Spielerin der Meinung ist, dass er/sie mindestens $1/n$ des Kuchenwerts erhält. („ n “ ist dabei die Anzahl der Spielerinnen und Spieler).

Neidfrei-gerecht (envy-free fairness):= Eine Aufteilung ist dann neidfrei-gerecht, wenn kein Spieler/keine Spielerin mehr den Tausch seines/ihres gesamten Stücks gegen ein anderes initiieren möchte.

Einen Kuchen gerecht unter 3 oder mehr Personen zu teilen, ist wesentlich schwieriger:

- **Rekursiv (eine Vorgehensweise für $n \geq 3$ Personen)**

Ein Kuchen soll durch n Personen gerecht geteilt werden. Jede der n Personen markiert am Kuchen die subjektiv wahrgenommene Grenze $1/n$. Nun wird das erste Stück zwischen der 1. und der 2. Markierung abgeschnitten. Derjenige, der die 1. Markierung gemacht hat (ihm erscheint das Teilstück als fair), bekommt dieses Kuchenstück. Die erste Person ist zufrieden, da sie ihrer Meinung nach mindestens $1/n$ des Kuchens bekommen hat. Nach der Meinung der anderen $n-1$ Personen hat die erste Person weniger als $1/n$ des Kuchens bekommen, für die restlichen Personen ist also noch mindestens $1/(n-1)$ des Kuchens vorhanden. Das Prozedere wiederholt man für $n-1$ Personen etc. (Rekursion), bis nur noch 2 Personen übrig bleiben. Diese wenden das zuvor besprochene Prinzip „Ich schneide, du wählst“ an.

- **Das proportionale Steinhaus – Protokoll für $n = 3$ Personen**

Steinhaus fand eine Folge von 7 Schritten, um einen Kuchen zwischen 3 Personen proportional aufzuteilen:

1. Philina schneidet den Kuchen in, ihrer Meinung nach, gleich große Teile.
2. Lukas hat nun die Wahl: Entweder er setzt aus (wenn er zumindest 2 der Stücke für fair hält) oder er kennzeichnet 2 Stücke als schlecht (die er für unfair hält).
3. Wenn Lukas aussetzt, nimmt Ben ein Kuchenstück, das er für fair hält. Dann nimmt Lukas ein für ihn gerechtes Stück. Zuletzt nimmt sich Philina das letzte Stück.
4. Entscheidet sich Lukas dafür, 2 Stücke als schlecht zu kennzeichnen, so hat Ben dieselbe Entscheidungsmöglichkeiten wie Lukas: entweder er setzt aus, oder er kennzeichnet 2 Stücke als schlecht (nach derselben Strategie). Lukas' Beurteilung spielt dabei keine Rolle.
5. Wenn Ben aussetzt, nehmen die Spielerinnen und Spieler Kuchenstücke in der Reihenfolge Lukas, Ben, Philina (gemäß der Strategie wie in Schritt 3).
6. Wenn Ben nicht aussetzt, haben Lukas und Ben je zwei Stücke als schlecht gekennzeichnet. Demzufolge gibt es mindestens eines, das beide für schlecht halten. Dieses Stück bekommt Philina (die ja, da sie die Stücke zu Beginn geteilt hat, alle Stücke für fair hält und sich nicht beklagen kann).
7. Die beiden übrig gebliebenen Stücke werden wieder vereinigt. Ben und Lukas glauben beide, dass diese Stücke zusammen zumindest zwei Drittel des Kuchens ausmachen). Nun wenden Lukas und Ben das bereits bekannte Verfahren „Ich schneide, du wählst“ an, um den restlichen Kuchen unter sich aufzuteilen. So bekommt jeder, was er oder sie für einen fairen Anteil hält.

Dieses Verfahren ist allerdings nur proportional gerecht, und nicht neidfrei gerecht. Das heißt, es kann sein, dass eine Person glaubt, sie habe zwar einen fairen Anteil erhalten, aber eine andere Person sei besser behandelt worden. Angenommen, Lukas bewertet die drei Kuchenstücke mit $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$. Also setzt er aus, denn es sind seiner Ansicht nach 2 faire Stücke dabei. Ben hat dieselbe Einschätzung wie Lukas, nimmt sich also das $\frac{1}{2}$ Stück. Dann nimmt Lukas das $\frac{1}{3}$ Stück und Philina das $\frac{1}{6}$ Stück, das sie selber für ein $\frac{1}{3}$ Stück hält. Weil alle drei meinen, ihr Stück habe zumindest die Größe $\frac{1}{3}$, ist die Zuordnung proportional-gerecht. Trotzdem wird Lukas neidisch auf Ben sein.

- **Das Banach-Knaster-Protokoll – für n Personen ($P_1, P_2, \dots, P_n$)**

Steinhaus beschäftigte sich noch gar nicht mit der Neidfreiheit. Stattdessen suchte er ein Protokoll für eine proportionale Teilung unter vier oder mehr Personen. Die Mathematiker Banach und Knaster waren dabei sehr erfolgreich.

Das Banach-Knaster Protokoll für n Personen $P_1, P_2, \dots, P_n$ besteht aus diesen Schritten:

1. P_1 schneidet ein für sie faires Stück X vom Kuchen ab. Das Stück hat also mindestens $1/n$ vom ganzen Kuchen.
2. P_2 setzt entweder aus (wenn sie X für unfair oder gerade noch fair hält) oder sie schneidet von X etwas ab (falls sie X für zu groß hält; sie macht also aus X eine nach ihrer Auffassung gerade noch faires Stück, das wir weiter mit X bezeichnen). Das abgeschnittene Stück wird wieder zum restlichen Kuchen zurückgelegt.
3. P_3 hat nun dieselben Entscheidungs- und Wahlmöglichkeiten wie P_2 , allerdings mit dem neuen Stück X . Dann kommt P_4 an die Reihe, und so weiter, bis alle Spieler außer P_1 die Gelegenheit zur Korrektur hatten.
4. Wenn keine Person von X etwas abgeschnitten hat, so geht das Stück an P_1 . Ansonsten geht es an die letzte Person, die etwas abgeschnitten hat (sie hält das Stück nun für fair). Diese Person scheidet mitsamt dem Anteil aus dem Spiel aus.
5. Nun wird der restliche Kuchen mit den abgeschnittenen Teilen wieder vereinigt. Die restlichen $n-1$ Personen (die alle der Meinung sind, dass noch mindestens $(n-1)/n$ vom Kuchen übrig ist) wiederholen das Prozedere.
6. Das Verfahren wird so lange fortgeführt, bis nur noch zwei Personen übrig sind. Diese zwei Personen teilen den Rest vom Kuchen nach dem bereits bekannten Prinzip „Ich schneide, du wählst“ auf.

Auch das Banach-Knaster-Verfahren ist proportional-gerecht, aber nicht neidfrei-gerecht. Das größte Problem dieser Methode ist, dass die hinten eingereihten Spielerinnen und Spieler nur jene Stücke bekommen, die die Personen vor ihnen nach deren Meinung in $1/n$ geteilt haben. Es kann leicht passieren, dass ein Kuchenstück kleiner als $1/n$ ist, wenn es bis zur letzten Person kommt.

- **Das Selfridge-Conway- Protokoll für $n = 3$ Personen**

Das erste neidfreie Aufteilen des Kuchens für 3 Personen in endlich vielen Schritten wurde 1960 von den Mathematikern Selfridge und Conway gefunden. Es verläuft folgendermaßen:

1. Philina schneidet den Kuchen in drei ihres Erachtens nach faire Teile.
 2. Lukas kann aussetzen wenn er glaubt, dass zumindest zwei Kuchenstücke gleich groß sind und nicht kleiner als das dritte, oder er schneidet von dem größten Stück etwas ab, um Fall 1 herbeizuführen. Abgeschnittene Stücke werden zur Seite gelegt.
 3. Ben, Lukas und Philina nehmen sich nun in dieser Reihenfolge jeweils ein Kuchenstück, von dem sie glauben, es sei das größte oder ein größtes, also eines von mehreren gleich großen, und es gibt kein größeres). Falls Lukas im zweiten Schritt ein Stück beschnitten hat, muss er es nehmen – außer Ben hat es schon gewählt. Der Kuchen ist nun bis auf die Schnipsel neidfrei verteilt.
 4. Falls Lukas im zweiten Schritt ausgesetzt hat, gibt es keine Reste und die Aufteilung wäre fertig. Wenn dem nicht so ist, ernennt man die Person, die nicht das beschnittene Stück genommen hat, also entweder Lukas oder Ben, zum Schneider. Dieser teilt den Rest in seiner Meinung nach faire Teile. Die andere Person ist der Nicht-Schneider. Philina hat gegenüber dem Nicht-Schneider einen uneinholbaren Vorsprung: Der Nicht-Schneider hat ein beschnittenes Stück erhalten. Selbst wenn er den Rest komplett bekommen würde, hätte er Philinas Einschätzung nach nicht mehr als einen fairen Anteil erhalten, weil sie die ursprünglichen drei Stücke alle für gleich groß hielt. Es ist also einerlei, wie die Überbleibsel jetzt verteilt werden, Philina wird nicht neidisch auf den Nicht-Schneider sein.
 5. Die Personen greifen sich die 3 Restteile in der Reihenfolge Nicht-Schneider, Philina, Schneider, wobei jeder natürlich das seines Erachtens größte Reststück nimmt.
- ➔ Der Nicht-Schneider wählt zuerst, er hat also keinen Grund neidisch zu sein.

- ➔ Philina ist ebenfalls nicht neidisch auf den Nicht-Schneider wegen ihres oben beschriebenen uneinholbaren Vorsprungs. Auf den Schneider ist sie auch nicht neidisch, weil sie vor ihm wählen durfte.
- ➔ Der Schneider ist ebenso nicht neidisch, weil er die Häufchen eingeteilt hat.

Auch der Mathematiker Brams fand unabhängig von Selfridge und Conway ein neid-freies Aufteilungs-Verfahren für 3 Personen, scheiterte jedoch an einem Protokoll für 4 Personen. Erst gemeinsam mit den Kollegen Taylor, Zwicker und Galvin wurde 1997 ein Protokoll gefunden, sodass der Kuchen stets nach endlich vielen Schritten restlos unter 4 Personen verteilt war. Das Protokoll ist allerdings für 4 Personen schon äußerst komplex und umfasst bereits 20 Schritte. Die Anzahl der notwendigen Schritte für noch mehr Personen ist zwar endlich, aber sehr groß.

Parallel dazu entwickelte sich seit den 60er Jahren das sogenannte „Moving Knife“ Verfahren, das im Kontrast zu den diskutierten Algorithmen nicht diskreter, sondern stetiger Natur ist. Dabei wird meist von einem rechteckigen Kuchen ausgegangen, über den ein Messer von einem Ende des Kuchens zum anderen gleitet, bis eine(r) der Mitspieler / Mitspielerinnen „Stop“ sagt. Bei mehreren Personen sind kompliziertere Algorithmen und mehrere Schiedsrichter involviert, ebenso schweben mehrere Messer gleichzeitig über dem Kuchen. Ein nach dem „Moving Knife“ Schema stetiges, neidfreies Verfahren wurde erst für höchstens 4 Personen konstruiert.

Die hier mehr oder weniger ausführlich erwähnten Protokolle gehören zu den bekanntesten und anschaulichsten aus der Entwicklungsgeschichte der Cake-Cutting-Verfahren, umfassen aber bei weitem nicht alle Möglichkeiten des Fairen Teilens. Das Gebiet lässt noch viele Fragen und Optimierungsmöglichkeiten offen, was es zu einem sehr aktuellen und spannenden Forschungsgebiet der Mathematik macht.

Didaktischer Kommentar:

„Wenn die Formel für menschliches Verhalten entdeckt würde, würde gerade dies die Menschen dazu bewegen von dieser Formel abzuweichen.“¹²⁰

Das angeführte Zitat stammt vom bekannten Schriftsteller Fjodor M. Dostojewski und beschreibt das Wesen der Spieltheorie meines Erachtens äußerst treffend. Anhand spieltheoretischer Strategien können mathematische Methoden als nützliches Werkzeug, um verschiedene Entscheidungen in Politik (z.B. Aufteilung Deutschlands in Besatzungszonen der Alliierten nach dem Zweiten Weltkrieg), Wirtschaft, Recht (z.B. Aufteilung des gemeinsamen Besitzes von Ehepartnern bei Scheidungen) und Umwelt zu beschreiben und zu analysieren, diskutiert werden. Ebenso ist es aber auch notwendig auf die Grenzen eines mathematischen Modells einzugehen. Es gibt keine allmächtige mathematische Möglichkeit, menschliche Entscheidungen in ihrer ganzen Komplexität (unter Einbezug von Emotionen, persönlichem sozialem Bezug, Ängsten, unvorhersehbare Spontanität) zu erfassen. Dennoch kann im Unterricht ein Gefühl dafür entwickelt werden, die Welt zu erfassen und rationaler zu durchdenken.

Nach Ableitinger und Hauer-Typelt ist dieses Fachgebiet der Mathematik auch besonders geeignet für einen fächerübergreifenden Unterricht: „Fächer wie Informatik, PPP, der wirtschaftskundliche Bereich (BHS-Relevanz) aber auch Religion im Sinne eines Ethikunterrichts bietet sich an. Was bedeutet Fairness überhaupt? Wie soll man entscheiden? Wie steht es mit der Diskrepanz zwischen optimalen Entscheidungen im spieltheoretischen Sinn und Entscheidungen unter Berücksichtigung moralischer Werte? Eine Möglichkeit der Umsetzung sind fächerübergreifende Projektstage.“¹²¹ Mit dem Kapitel „Von Torten und Kuchen“ hat der Physiker Werner Gruber in seinem Buch „Die

¹²⁰ Vorlesungsmitschrift LMU München:

<http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~spielth/lektionen/lektion13.pdf> [25.01.16]

¹²¹ Ableitunger & Hauer-Typelt 2007: S. 11.

Genussformel – Kulinarische Physik“ dieser Nachspeise sogar ein eigenes Kapitel gewidmet und physikalische Besonderheiten hervorgehoben.¹²² So könnte der Kuchen als Thema eine gute Brücke zwischen dem Physik- und Mathematikunterricht darstellen.

Auch im Sinne der Methodenvielfalt und Lernen in unterschiedlichen Sozialformen bietet die Bearbeitung des „Cake-Cutting-Problems“ zahlreiche Möglichkeiten. In Gruppenarbeit können die Schülerinnen und Schüler diverse Medien nach geeigneten Strategien zur Lösung des Problems durchsuchen und diese direkt mit einem Kuchen im Unterricht oder zu Hause durchspielen. Die Schülerinnen und Schüler können auch eigene Strategien überlegen und sie nah proportional-gerecht und neidfrei-gerecht untersuchen. Auch bieten sich Diskussionen im Mathematikunterricht über das rationale Verhalten der einzelnen Spieler und die Realitätsnähe diverser Modelle an. Wie könnte man zum Beispiel bei der Zuteilung von nicht teilbaren Gütern wie etw Kindern oder Häusern bei einer Scheidung verfahren? Die Bearbeitung eines spieltheoretischen Themas wie dem „Cake-Cutting-Problem“ kann also einen wertvollen Beitrag zur Entwicklung wichtiger Kompetenzen durch den Mathematikunterricht darstellen.

Kompetenzen:

- **Modellbilden, Darstellen:**

Ausgehend von einer realen Entscheidungssituation (Aufteilen eines Kuchens oder zwei oder mehreren Personen) müssen die Schülerinnen und Schüler ein mathematisches Modell konstruieren und mit Hilfe mathematischer Verfahren analysieren, sowie die Ergebnisse kritisch beurteilen und abschätzen. Es müssen Realsituationen aus der Alltagssprache in die Sprache und analytische Methoden der Mathematik übersetzt werden.

¹²² Gruber 2008: S. 241 – 247.

- **Rechnen, Operieren:**

Je nach Komplexität der Strategie müssen die Schülerinnen und Schüler keine oder wenige (Bruchrechnen) Rechenoperationen durchführen.

- **Interpretieren:**

Die Schülerinnen und Schüler müssen die Güte beziehungsweise die Grenzen ihres Modells evaluieren und abschätzen können.

- **Argumentieren:**

Die Schülerinnen und Schüler müssen mathematische Argumente nennen, weshalb sie sich für oder gegen eine Lösungsstrategie entschieden haben. Handelt es sich überhaupt um ein realistisches Modell? Handelt es sich bei der Lösung wirklich um ein rationales Vorgehen? Sie müssen zudem argumentieren welche Vor- und Nachteile die jeweiligen Strategien für die Spielerinnen und Spieler bringen.

5.7 Die perfekte Weihnachtsgans

Menüplan: Hauptspeise

Gaumenfreude: Eine Gans



Ziel: Berechnung der idealen Bratzeit für eine Weihnachtsgans

Voraussetzung: Rechnen mit Potenzen, Bruchrechnen, Kugelvolumen

Material: Gans, Backrohr, eventuell Füllung

Zeitumfang: 1 Einheit

Arbeitsform: Klassenprojekt, Hausübung

Durchführung

Die Mathematik hinter der Zubereitung der perfekten Weihnachtsgans ergibt sich beim Problem der Bratdauer. Diese hängt von der Größe der Gans und der Temperatur des Backrohrs ab. Die Innentemperatur der Gans sollte laut Werner Gruber bei 75°C (zumindest zwischen 70°C - 80°C) liegen. Das Kollagen, das die Fleischfasern umhüllt und eine Zähigkeit des Fleisches verursacht, beginnt sich bei dieser Temperatur aufzulösen. Allerdings darf die Temperatur im Gansinneren auch nicht zu hoch sein, sonst würden sich die restlichen Kollagenfasern, die sich nicht in Gelatine umgewandelt haben, zusammenziehen und den Fleischsaft herauspressen. Die Gans würde trocken werden.

Gruber nimmt die Gans in erster Näherung als kugelförmig an. Der Radius wäre dann proportional zur dritten Wurzel der Masse:

$$V_{Kugel} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Die Bratdauer t ist proportional zu

$$t \propto r^2.$$

Daraus folgt, dass der Radius r proportional zur dritten Wurzel der Masse m ist:

$$r \propto \sqrt[3]{m}.$$

Unter weiterer Berücksichtigung der Backrohrtemperatur, der gewünschten Innentemperatur und mithilfe einer Näherungsformel aus der Thermodynamik lässt sich eine Bratdauer berechnen:

$$t = \left(\frac{\sqrt[3]{m}}{\kappa \times (T_{BA} - T_{Zentrum})} \right)^2 \text{ mit } \kappa = 0,0008526 \left[\frac{kg^{\frac{1}{3}}}{min^{\frac{1}{2}} \text{ } ^\circ C} \right]$$

$T_{Zentrum}$ ist dabei die gewünschte Innentemperatur von 75°C. Die Konstante κ wurde von Werner Gruber durch das Braten von verschiedenen Weihnachtsgänsen ermittelt. Wenn dem Koch / der Köchin der Radius beziehungsweise das Gewicht, die gewünschte Innentemperatur und die Backrohrtemperatur bekannt sind, so kann er / sie in die Formel einsetzen und die maximale Bratdauer von gefülltem Geflügel in Minuten ermitteln. Bei einer ungefüllten Gans verringert sich die Bratdauer um ungefähr ein Drittel.

Einige berechnete Bratzeiten zum Vergleich:

	$T_{BA} = 220^\circ C$	$T_{BA} = 200^\circ C$	$T_{BA} = 180^\circ C$
1.0kg	65 min	88min	125min
3.0kg	136 min	183 min	259 min
4.5kg	178 min	240 min	340 min
6.0kg	216 min	291 min	412 min

Didaktischer Kommentar:

Die Aufgabe ist bereits in der Unterstufe nach Kennenlernen des Kugelvolumens, Rechnen mit Potenzen und Bruchrechnen durchführbar. Die ablaufenden thermodynamischen Prozesse könnten parallel dazu im Physikunterricht diskutiert werden. Wie viele Kochvorgänge ist es einem realen physikalischen Versuchsaufbau sehr ähnlich. Zum einen muss die Klasse einen (mathematischen) Zusammenhang zwischen den gegebenen Anfangsbedingungen (Masse der Gans, Füllung oder keine Füllung) und der

gesuchten Bratdauer herstellen. Ausgehend davon wird das Backrohr dementsprechend kalibriert (Temperatur und Backdauer einstellen). Auch während des Experiments müssen in regelmäßigen Zeitabständen Temperaturmessungen im Inneren der Gans mit einem Kochthermometer durchgeführt werden, um eine durchgehende Temperatur zwischen 70°C und 80°C zu garantieren. Die anschließende Verkostung kann natürlich ebenfalls als Überprüfung gesehen werden, ob das Experiment gelungen ist oder welche Einstellungen noch verbessert werden müssen. In Deutschland führen etwa 27 Prozent der Bevölkerung diese Qualitätsüberprüfung an Heiligabend durch, meist ohne bisher dabei an Mathematik oder Physik gedacht zu haben.¹²³

Am 18.12.2009 strahlte das 3sat Wissensmagazin „Nano“ auch eine Sendung mit Werner Gruber aus, in der er mit Beiträgen aus der Thermodynamik, Biophysik und Elastizitätslehre vor der Kamera eine perfekte Weihnachtsgans zubereitet. Die Sendung wurde auf YouTube hochgeladen und könnte für die Vor- oder Nachbereitung in den Unterricht eingebunden werden.¹²⁴

Erweiterung: Das perfekte Frühstücksei

Ebenso wie mit der perfekten Weihnachtsgans hat sich Werner Gruber auch im Kapitel „Das Spiegelei schlägt zurück“ seines Buches „Die Genussformel – Kulinarische Physik“, mit der Kunst des Eierkochens beschäftigt.¹²⁵ Ähnlich wie bei der Weihnachtsgans gibt es auch hier gewisse Parameter, die in eine Formel für die Kochdauer des perfekten Frühstückseis mit einbezogen werden müssen.

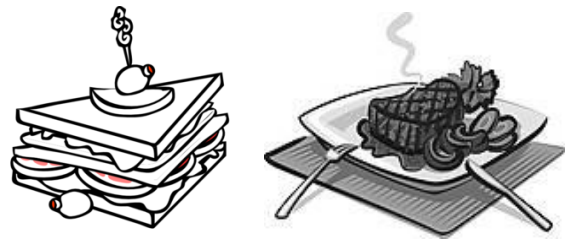
¹²³ Nachzulesen in „Der Tagesspiegel“ vom 6.12.2015, URL:
<http://www.tagesspiegel.de/wirtschaft/das-geschaef-mit-der-weihnachtsgans-gans-schoen-beliebt/12684396.html> [27.01.16]

¹²⁴ YouTube Link zum Clip „Perfekte Weihnachtsgans dank Physik“:
<https://www.youtube.com/watch?v=k9PFQ1xjT-c> [27.01.16]

¹²⁵ Gruber 2008: S. 73 – 92.

Menüplan:

Vorspeise ,
Hauptspeise



Gaumenfreude: Ein Ei (oder ein leckerer Eiersalat)

Ziel: Berechnung der idealen Kochzeit für ein weiches oder hartes Ei

Voraussetzung: Rechnen mit Potenzen, Bruchrechnen, Logarithmusfunktion,

Material: Ei, Topf, Herdplatte

Zeitumfang: 1 Einheit

Arbeitsform: Klassenprojekt, Hausübung

Durchführung:

Ein Ei besteht in grober Unterteilung aus Eiklar und dem Dotter. Das Eiklar besteht aus verschiedenen Proteinen: Das Wichtigste mit einem Anteil von 54 Prozent ist das Ovalbumin. Es erstarrt erst bei einer Temperatur von 84.5°C . Einen Anteil von Prozent 12 macht das Conalbumin aus, es erstarrt bei einer Temperatur von 62.5°C . Vernachlässigbar bei der Erwärmung ist zwar das Protein Ovomucin, da es nur einen Anteil von dreieinhalb Prozent des Eiklars aufweist und bei 70°C erstarrt, allerdings ist es essentiell für die Schaumbildung beim Eischnee und deshalb ebenso erwähnenswert. Der Dotter besteht aus Wasser, Proteinen und Fett und wird bei einer Temperatur von 65°C hart und fest. Das Eiklar wird erst bei einer Temperatur von 82.5°C vollständig hart und fest.

Im Volksmund wird ein weiches Ei auch Drei-Minuten-Ei genannt. Eine ideale Kochzeit von drei Minuten stimmte laut Gruber vor 100 Jahren als die Eier noch kleiner waren. Heutzutage verwenden wir im Schnitt größere Eier, weshalb das Eiweiß nach 3 Minuten meist noch nicht vollständig geronnen.

Welche Einflüsse spielen nun bei der Bestimmung der idealen Kochdauer eine Rolle? Zum einen hat die Lagertemperatur einen wichtigen Einfluss. Kommt das Ei direkt aus dem Kühlschrank oder hat es bereits Raumtemperatur? Weitere Einflüsse sind der Durchmesser (an der schmalsten möglichen Stelle) und die gewünschte Endtemperatur des Eies. Außerdem muss das Ei unbedingt in bereits kochendes Wasser gelegt werden. Gibt man es in kaltes Wasser und erhitzt dieses allmählich, kann sich die Kochdauer wesentlich verfälschen. Aus den genannten Einflüssen ergibt sich diese Berechnung:

$$t = 0.0016 \times d^2 \times \ln \left(\frac{2 \times (T_{Wasser} - T_{Starttemperatur})}{T_{Wasser} - T_{Innentemperatur}} \right)$$

Der Durchmesser d des Eies wird in Millimeter angegeben, T_{Wasser} ist die Temperatur des kochenden Wassers (also etwa 100°C). Stammt das Ei aus dem Kühlschrank, so beträgt die Starttemperatur etwa 4°C, wird das Ei bei Raumtemperatur gelagert so startet man in etwa bei einer Temperatur von 20°C. Der Wert der Endtemperatur $T_{Innentemperatur}$ hängt davon ab, ob man ein weiches Ei oder ein hartes Ei kochen möchte. Für ein weiches Ei sollte der Wert $T_{Innentemperatur} = 62^\circ\text{C}$ und bei einem harten Ei $T_{Innentemperatur} = 82^\circ\text{C}$ betragen.

Einige berechnete Kochzeiten zum Vergleich:

d [mm]	Raumtemperatur (20°C)		Kühlschranktemperatur (4°C)	
	Weich	Hart	Weich	Hart
52.5	6'10''	9'50''	7'00''	10'10''
42.5	4'10''	6'50''	4'40''	6'50''
35.0	3'00''	4'20''	3'10''	4'40''

Wie an der Tabelle zu erkennen ist, stimmt die Drei-Minuten-Ei Regel in der Tat für kleine Eier, wie sie in früheren Zeiten üblicherweise erhältlich waren.

Didaktischer Kommentar:

Auch hier kann wieder eine ausgezeichnete Verknüpfung zum Physikunterricht (Thermodynamik) und vor allem zum Chemieunterricht gemacht werden. Gruber behandelt im weiteren Verlauf des Kapitels Fragen wie: Wieso springt ein Ei beim Kochen und wie kann man dem entgegen wirken? Wie erkennt man ganz frische und abgelegene Eier? Wie gewinnt man beim Eierpecken zu Ostern? Woher stammt der grüne Rand zwischen Dotter und Eiklar bei sehr hart gekochten Eiern (Stichwort Schwefelwasserstoff)? Das Ei wäre ein gutes Thema für einen fächerübergreifenden Projektunterricht.

Kompetenzen:

- **Modellbilden, Darstellen:**

Die Schülerinnen müssen Vereinfachungen, Näherungen und Annahmen treffen, um von einer realen Ausgangssituation (z.B. eine reale Gans) zu einem vereinfachten mathematischen Modell (ideal kugelförmigen Gans) zu gelangen.

- **Rechnen, Operieren:**

Neben konkreten Rechenoperationen fördern die Aufgaben auch ein Verständnis für Einheiten verschiedener Größen und deren Umwandlung.

- **Interpretieren:**

Die Verknüpfung zwischen physikalischen und mathematischen Inhalten kann bei den Schülerinnen und Schülern ein tieferes Formelverständnis fördern. Sie müssen dabei die Komponenten in der theoretischen Formel im Zusammenspiel mit dem realen Experiment deuten können. Die Abhängigkeit einer Formel von temporären Setzungen im Experiment erfordert zusätzliche Abstraktionsleistung.

- **Argumentieren:**

Von den Schülerinnen und Schülern wird verlangt, die Komponenten der Formeln, ihre Einheiten und die Bedingungen der Anwendbarkeit zu beschreiben und einschätzen zu können. Grenzfälle können diskutiert und interpretiert sowie die physikalische Bedeutung der Formel näher erklärt werden.

6 Resümee

„Jedes Mal Kochen ein Experiment, jedes Mal Essen eine Messung“

Mit dieser Aussage stellt der Physiker Werner Gruber erstmals einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen der alltäglichen Tätigkeit des Kochens und gebräuchlichen Begriffen aus der Wissenschaft. Ausgehend von aufschlussreichen Argumenten der mathematikdidaktischen Forschung für mehr Anwendungsorientierung und realitätsnahen und sinnstiftenden Aufgaben im Mathematikunterricht, sowie einem fächerübergreifenden Unterricht, wollte ich folgendes Ziel für meine Diplomarbeit setzen:

Kreation eines kulinarischen mathematischen Menüplans mit Themenbereichen („mathematischen Schmankerl“), die auch im Unterricht umsetzbar sind. Auf diese Weise wollte ich zu ausgewählten Themen des oftmals theoretischen Kernstoffs eine für den Lernprozess und im Sinne der Erlebnisorientierung wertvolle Beziehung zu der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler herstellen.

Die ausgewählten Experimente, Themengebiete und Lebensmittel stellen nur eine kleine Auswahl aus den meiner Meinung nach sehr zahlreichen kulinarisch-mathematischen Möglichkeiten dar. Zum Beispiel würde sich das Braten eines Steaks beziehungsweise generell das Mischen von Flüssigkeiten ausgezeichnet mit dem statistischen Gebiet des Random Walk und somit dem physikalischen Stoffgebiet der Diffusion kombinieren lassen. Eine andere interessante Fragestellung ergibt sich bei näherer Betrachtung der beliebten Knabberei Pringles: Kann die Form eines Pringle mathematisch beschrieben werden? Finden sich im Bereich der Architektur sogar Gebäude mit einer typischen Pringle Form? Auch das ideale Schichten und Verpacken von Lebensmitteln (z.B. Kekse, Orangen, M&Ms) hat einen mathematischen Hintergrund im

Sinne der optimalen Raumausnutzung und könnte auch mit dem chemischen Gebiet der dichtesten Kugelpackung kombiniert werden. Man könnte diskutieren, dass die Form vieler Produkte nicht zufällig gewählt wurde. Die ausführliche Bearbeitung aller Themen hätte den Rahmen einer Abschlussarbeit bei weitem gesprengt, man merkt allerdings, dass im Bereich der kulinarischen Mathematik noch viel Potential für eine kulinarische Bereicherung des Mathematikunterrichts steckt.

Ich lade die Leserin und den Leser nun herzlich ein, das von mir im Rahmen dieser Diplomarbeit erstellte kulinarisch-mathematische Menü zu betrachten, sich davon inspirieren zu lassen (oder auf gut österreichisch: „sich einen Guster zu holen“) und den ein oder anderen Menüpunkt mathematisch-kulinarisch im Unterricht oder auch privat nachzukochen.



APPETIZER

Blätterteig-Lachs-Törtchen

Eiersalat mit Pilzen und Spargel

HAUPTSPEISE

Ofenfrische, knusprige Martinsgans
mit Apfelrotkohl

Spinatstrudel mit würzigem Schafkäse
und gerösteten Zwiebel

Bier aus eigener Brauerei (alkoholfrei!)

DESSERT

Obsttorte mit 3 verschieden Obstbelägen

S' Mores

Warmer Apfelstrudel

Kaffee

Ich wünsche einen guten Appetit

und viel Spaß!

7 Literaturverzeichnis

Ableitinger, Ch., and P. Hauer-Typelt

2008 Spieltheorie im Unterricht - kann es das spielen? Didaktik-Reihe der ÖMG (40):1-12.

Blum, Werner

1985 Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. Mathematische Semesterberichte. Zur Pflege des Zusammenhangs zwischen Schule und Universität 32:195 - 232.

—

1996 Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht—Trends und perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik 23:15-38.

Bruder, R., et al.

2015 Handbuch der Mathematikdidaktik: Springer Berlin Heidelberg.

Bryan, Luajean N.

2010 Cooking with Quadratics. Mathematics Teacher 104(4):308-314.

Engel, Joachim

2010 Anwendungsorientierte Mathematik: von Daten zur Funktion: eine Einführung in die mathematische Modellbildung für Lehramtsstudierende: Springer-Verlag.

Fischer, Roland

2006 Materialisierung und Organisation: zur kulturellen Bedeutung der Mathematik: Profil-Verlag.

Förster, F., et al.

2013 Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II: Vieweg+Teubner Verlag.

Freudenthal, Hans

1973 Mathematik als pädagogische Aufgabe. Volume 2: Klett Stuttgart.

Fruböse, Christian

2010 Der ungebliebte Physikunterricht. Ein Blick in die Fachliteratur und einige Anmerkungen aus der Praxis. MNU - Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht. 63(7):388-392.

Grabinger, Benno

- 1997 Mathematik in der Kaffeetasse. Praxis der Mathematik in der Schule 2:68-70.
- Gruber, Werner
- 2008 Die Genussformel: Kulinarische Physik: Ecowin Verlag.
- Hartmut, Köhler
- 2002 Sich ein Bild davon machen! Die gesellschaftliche Dringlichkeit tragfähiger Vorstellungen zur Mathematik. *In* Mathematik - unsichtbar, doch allgegenwärtig. R. Karl, ed. Pp. 7-24. Eichstätt: Polygon.
- Henn, Hans-Wolfgang, and Andreas Filler
- 2015 Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra: Algebraisch verstehen–Geometrisch veranschaulichen und anwenden: Springer-Verlag.
- Heymann, Hans Werner
- 2013 Allgemeinbildung und Mathematik: Beltz Weinheim.
- Hudson, J. R.
- 1968 INSTITUTE OF BREWING: ANALYSIS COMMITTEE MEASUREMENT OF HEAD-RETENTION IN BOTTLED BEER. *Journal of the Institute of Brewing* 74(3):275-285.
- Katja, Maaß
- 2004 Mathematisches Modellieren im Unterricht – Ergebnisse einer empirischen Studie: Verlag Franzbecker.
- Kirchler, E.
- 2011 Wirtschaftspsychologie: Individuen, Gruppen, Märkte, Staat: Hogrefe Verlag.
- Kollosche, D.
- 2014 Gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts: Ein soziologischer Beitrag zum kritischen Verständnis mathematischer Bildung: Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Leike, Arnd
- 2002 Demonstration of the exponential decay law using beer froth. *European Journal of Physics* 23(1):21.
- Loos, Andreas, and Günter M. Ziegler
- 2015 Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik. *In* Handbuch der Mathematikdidaktik. R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, and H.-G. Weigand, eds. Pp. 3-17: Springer Berlin Heidelberg.
- Moser Opitz, Elisabeth

- 2009 "Ich liebe es einfach, mit Zahlen und Brücken zu jonglieren."
Begründungsmuster zur Einstellung zum Fach Mathematik in der Klasse 5 und 8. Journal für Mathematik-Didaktik (30):181-205.
- Pallack, A., and B. Barzel
- 2008... aller Anfang ist leicht. Aufgaben mit TI-Nspire (TM) /TI-Nspire CAS (TM).
Münster: Westfälische Wilhelms-Universität.
- Reichel, Hans- Christian, and Robert Resel
- 2002 Der Beitrag der Mathematik und des Mathematikunterrichts zur
Persönlichkeitsbildung. ÖMG Didaktik Reihe (34):85-100.
- Schecker, Horst, and Bernd Ralle
- 2009 Naturwissenschaftsdidaktik und Lehrerbildung-Chancen und Risiken
aktueller Entwicklungen. PhyDid A-Physik und Didaktik in Schule und
Hochschule 2(9):73-83.
- Tietze, U.P., et al.
- 2013 Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II: Vieweg+Teubner Verlag.
- Tietze, Uwe-Peter, Manfred Klika, and Hans Wolpers
- 1997 Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II: Vieweg+Teubner Verlag
- Ucke, C., and H.J. Schlichting
- 2011 Spiel, Physik und Spaß: Physik zum Mitdenken und Nachmachen: Wiley-
VCH-Verlag.
- Ucke, Christian, and Christoph Engelhardt
- 1998 Kaustik in der Kaffeetasse. Physik in unserer Zeit 29(3):120-122.
- Vollrath, Hans-Joachim, and Jürgen Roth
- 2012 Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.
Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Wakolbinger, Florian
- 2013 Kurven im Mathematikunterricht, Johannes Kepler Universität.
- Wilhelm, Thomas, and Wolfgang Ossau
- 2009 Bierschaumzerfall–Modelle und Realität im Vergleich–In: Praxis der
Naturwissenschaften–Physik in der Schule 58. Nr 8:19-26.
- Wille, Rudolf
- 1996 Allgemeine Mathematik als Bildungskonzept für die Schule. IDM-Reihe:
Mathematik allgemeinbildend unterrichten. Impulse für Lehrerinnenbildung
und Schule 21(2):S. 41 - 55.
- Winter, Heinrich

1996 Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (2):35-41.

Internetquellen:

Borneleit, P., Danckwerts, R., Henn, H.-W. and Weigand, H.-G.

2001 Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: H.-E. Tenorth (Hrsg.): Kerncurriculum Oberstufe. – Weinheim: Beltz (2001), S. 26 – 53.
URL: <http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/expertise-mu-s2.pdf>, am 28.01.2016

Breitenbach, Gerd

2012 Programmpunkt der Europäischen Talent Akademie Lindau 2012 für begabte Jugendliche: URL: http://gerdbreitenbach.de/Fraunhofer_Spielekurs_2012.pdf, am 28.01.2016

Graf, Manuel

2011 Diplomarbeit: Ist das Leben ein Spiel? Spieltheorie für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II mit besonderer Berücksichtigung der extensiven Spielform. Universität Wien. URL: http://othes.univie.ac.at/13259/1/2011-02-17_0600074.pdf, am 28.01.2016

Häußler, P. and Hoffmann, L.

1998 Chancengleichheit für Mädchen im Physikunterricht – Ergebnisse eines erweiterten BLK-Modellversuchs. In: Didaktik der Naturwissenschaften 4 (1): S. 51 – 67.
URL: <http://lise.univie.ac.at/artikel/hoffmann.htm>, am 28.01.2016

Langner, Tilman

2000 Die Fundgrube für den Umweltschutz in der Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen Scriptor. URL: <http://www.umweltschulen.de/energie/solarkocher1.html>, am 28.01.2016

Standardkonzept

2007 Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe. Version 4/07, Hrsg.: Institut für Didaktik der Mathematik – Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik. Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung. Alpen-Adria-Universität Klagenfurt.

URL: http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept_Version_4-07.pdf, am 28.01.2016

Stolle, Heike

2008 Vortrag im Zuge der Lehrveranstaltung „Proseminar über Algorithmen“ von Prof. Helmut Alt. Freie Universität Berlin. URL: <http://page.mi.fu-berlin.de/broser/lehre/proseminar08/ausarbeitungsteilen.doc>, am 28.01.2016

Taschner, Rudolf

2004 Wie Mathematik in der Schule noch zu retten ist, Wien. URL: <http://www.oemg.ac.at/LS/ErziehungUnterricht.pdf>, am 28.01.2016

Ulovec, Andreas

2010 Realitätsbezogene Aufgaben – Ergebnisse eines EU-Projekts. In: Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 43. URL: <http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2010%20Band%2043/VortragUlovec.pdf>, am 28.01.2016

Wakolbinger, Florian

2013 Diplomarbeit: Kurven im Mathematikunterricht. Johannes Kepler Universität. URL: http://idmthemen.pbworks.com/w/file/fetch/63332516/DIPLOMARBEIT_FlorianWakolbinger.pdf, am 28.01.2016

Wunsch, Malte

2008 Zusammenfassung des Vortrags „Kuchen gerecht teilen“. Universität Bonn. URL: <http://tizian.cs.uni-bonn.de/Lehre/Seminare/PSAchilles08/Ausarbeitungen/KuchenTeilen.pdf>, am 28.01.2016

Abbildungsquellen

Abb. 1: Comic zu „Lebenslangem Lernen“.

Quelle: <http://misscaseymath.blogspot.co.at/>

Abb. 2: Graphische Darstellung des Kompetenzmodells.

Quelle:

https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_sek1_kompetenzbereiche_m8_2013-03-28.pdf

Abb. 3: Ein neuer Blick auf die Welt.

Quelle: <http://abstrusegoose.com/275>

Abb. 4: Ein „S'More“.

Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/S%E2%80%99More>

Abb. 5: Parabel: Definition mit Brennpunkt und Leitlinie, Halbparameter p .

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Parabel_%28Mathematik%29

Abb. 6: Der Parabolspiegel bündelt parallel einfallenden Lichtstrahlen exakt im Brennpunkt.

Quelle: <http://www.ccathsu.com/files/uploads/Parabolic-Solar-Cookers.pdf>

Abb. 7: Nachgebauter Solar-Kocher

Quelle: https://www.youtube.com/watch?v=bL_Z-F3pU18

Abb. 8: Eine professionellere Variante.

Quelle:

[http://www.idn.unibremen.de/cvpmm/content/spiegel/show.php?modul=11&file=61
&right=201000spiegel_solarenergie05solarkocher.html](http://www.idn.unibremen.de/cvpmm/content/spiegel/show.php?modul=11&file=61&right=201000spiegel_solarenergie05solarkocher.html)

Abb. 9: Haushalts-Thermometer.

Quelle: [http://www.amazon.de/Sunartis-E514-Digitales-Universales-
Haushaltsthermometer/dp/B001BROO](http://www.amazon.de/Sunartis-E514-Digitales-Universales-Haushaltsthermometer/dp/B001BROO)

Abb. 10: Temperatur des Marshmallow während des Kochvorgangs in Abhängigkeit von der Zeit.

Quelle: Bryan, Luajean N. (2010): Cooking with Quadratics. Mathematics Teacher 104(4):308-314.

Abb. 11: Nach kurzer Zeit in der Mikrowelle entstehen Hot Spots in der Schokolade.

Quelle: [http://scienceblogs.de/astrodicticum-simplex/2009/03/26/wie-man-mit-
schokolade-die-lichtgeschwindigkeit-bestimmt/](http://scienceblogs.de/astrodicticum-simplex/2009/03/26/wie-man-mit-schokolade-die-lichtgeschwindigkeit-bestimmt/)

Abb. 12: Kaffeetassen Kaustik.

Quelle: <http://www.gebr-grimm.de/cucke/seite5.htm>

Abb. 13: der einfallende Strahl wird gemäß der Gleichheit von Einfalls- und Ausfallswinkel reflektiert.

Quelle:

[http://idmthemen.pbworks.com/w/file/fetch/63332516/DIPLOMARBEIT_FlorianWakol
binger.pdf](http://idmthemen.pbworks.com/w/file/fetch/63332516/DIPLOMARBEIT_FlorianWakolbinger.pdf)

Abb. 14: (a) Klassische Kaustik bei einfacher Reflexion der parallelen Lichtstrahlen an der Innenseite eines polierten Hohlzylinders. (b) Herzförmige Brenmlinie bei zweifacher Reflexion. (c) Romantisches Herz bei dreifacher Reflexion der Lichtstrahlen am Zylinderrand.

Quelle: <http://www.ucke.de/christian/physik/ftp/lectures/kaustik3.pdf>

Abb. 15: (a) Reflexion eines einfallenden Sonnenstrahls am Innenrand der Tasse. (b) Reflexion und Verlauf einer größeren Zahl an Sonnenstrahlen. (c) Die Schnittpunkte der Strahlen ergeben die herzförmige Brenmlinie.

Quelle:

http://idmthemen.pbworks.com/w/file/fetch/63332516/DIPLOMARBEIT_FlorianWakolbinger.pdf

Abb. 16: (a) Reflexion eines einfallenden Sonnenstrahls am Innenrand der Tasse. (b) Reflexion und Verlauf einer größeren Zahl an Sonnenstrahlen. (c) Die Schnittpunkte der Strahlen ergeben die herzförmige Brenmlinie.

Quelle:

http://idmthemen.pbworks.com/w/file/fetch/63332516/DIPLOMARBEIT_FlorianWakolbinger.pdf

Abb. 17: Anschauliche Hilfe zur Bestimmung der Koordinaten

Quelle:

http://idmthemen.pbworks.com/w/file/fetch/63332516/DIPLOMARBEIT_FlorianWakolbinger.pdf

Abb. 18: Blasenbildung beim Bierschaum.

Quelle: <http://7-themes.com/7002248-beer-foam.html>

Abb. 19: Messung der Höhe des Bierschaums in Abhängigkeit von der Zeit

Quelle: <http://www.roro-seiten.de/uhu/index.php?page=449>

Abb. 20: Bierschaumzerfall in einem leicht eingefetteten Glas (links) und einem sauberen Glas.

Quelle: Wilhelm, Thomas, and Wolfgang Ossau (2009): Bierschaumzerfall–Modelle und Realität im Vergleich–In: Praxis der Naturwissenschaften–Physik in der Schule 58. Nr 8:19-26.

Abb. 21: Sammlung der Messergebnisse der Schülerinnen und Schüler des Ubbo-Emmius Gymansiums, durchgeführt mit alkoholfreiem Malzbier.

Quelle: <http://www.ueg-leer.de/informationen/fer-schulprofil-99/mathematik-schulprofil-139/1581-bierschaum-zerfaellt-exponentiell>

Abb. 22: „Vol-au-vent“.

Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Vol-au-vent>

Abb. 23: Faltechnik bei der Herstellung von Blätterteig.

Quelle: <http://www.wildeisen.ch/rezepte/grundrezept-blaetterteig>

Abb. 24: Wie teilt man diesen Kuchen gerecht auf?

Quelle: <http://www.science4all.org/article/fair-division/>

8 Abstract

Die zentrale Idee dieser Diplomarbeit ist es, eine Verbindung der Themengebiete Kulinarik und Lebensmittel mit ausgewählten Inhalten aus der Schulmathematik herzustellen. Die sogenannte Kulinarische Mathematik soll Schülerinnen und Schülern ermöglichen, mit Dingen aus ihrem Alltag (verschiedene Lebensmittel, Küchenwerkzeuge) mathematische und naturwissenschaftliche Zusammenhänge zu beobachten, begreifen, zu verstehen und zu modellieren. Auf diese Weise soll eine für den Lernprozess und im Sinne der Erlebnisorientierung wertvolle Beziehung zu der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler hergestellt werden.

Der erste Teil der Arbeit umfasst zunächst eine Gegenüberstellung der subjektiv in unserer Gesellschaft wahrgenommenen und der tatsächlichen Bedeutung der Mathematik für sämtliche Bereiche unserer Lebenswelt. Zudem werden die Rolle von Realitätsbezügen im Mathematikunterricht und die mit der Behandlung von Realitätsbezügen im Unterricht erwarteten Ziele diskutiert. Es werden dazu auch der Lehrplan und die Bildungsstandards bezüglich darin enthaltener Forderungen nach Lebensbezügen im Unterricht untersucht.

Nachdem im ersten Teil eine theoretische Grundlage gelegt wurde, umfasst der praktische Teil konkrete kulinarisch-mathematische Aufgaben- und Unterrichtsvorschläge für die AHS Ober- und Unterstufe. Die Aufgabenstellungen beinhalten Durchführungsanleitungen- und tipps, geeignete Sozialformen, zeitliche Rahmenbedingungen, benötigtes Vorwissen und Material, sowie die durch die Aufgabe zu erwerbende Kompetenzen.