



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Konsistente Kreise in Graphen“

verfasst von / submitted by

Julia Wessely

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 884

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Informatik
und Informatikmanagement

Betreut von / Supervisor:

Mag.Dr. Bernhard Krön, Privatdoz.

Danksagung

Ich möchte meinem Betreuer Bernhard Krön dafür danken, dass er mir bereits zum zweiten Mal als Betreuer meiner Diplomarbeit zur Verfügung steht. Für meine erste Diplomarbeit im Rahmen meines Diplomstudiums hat er mir ein spannendes Thema vorgeschlagen und sich viel Zeit genommen. Für Fragen stand er immer zur Verfügung und half mir geduldig bei den Forschungsaufgaben. Außerdem ermutigte er mich, unsere Forschungsergebnisse beim “25th LL-Seminar on Graph Theory” an der Montanuniversität Leoben in einem Vortrag zu präsentieren und gemeinsam ein Paper über unsere Ergebnisse zu verfassen. Um mein Lehramtsstudium abzuschließen, willigte er meinem Vorschlag, die erste Diplomarbeit ins Deutsche zu übersetzen, sie zu überarbeiten und Beispiele hinzuzufügen, ein.

Die Diplomarbeit wurde durch die Slovenian-Austrian Cooperation (Project SI-20/2009) unterstützt. Im Rahmen des Projekts wurde vom ÖAD (Österreichischer Austauschdienst) eine Reise nach Laibach finanziert.

Abstract

Consistent cycles in finite Graphs were introduced by J.H. Conway in 1971. He observed that if a subgroup G of the full automorphism group of a graph acts arc-transitively on it, then the number of orbits of non-trivial consistent cycles under the action of the group G on the graph is one less than the valence of the graph. A cycle is called consistent under a group of automorphisms G acting on the graph if there exists an element rotating the cycle by one step. In this diploma thesis we generalize this result of Conway to infinite graphs and groups of automorphisms acting vertex-transitively on finite and infinite graphs. In infinite graphs we also consider double-rays as cycles and define the multiplicity of orbits of consistent cycles. We state that the sum of multiplicities of orbits of consistent cycles is equal to the degree of the graph. Further we show for this conjecture that the automorphism group acting on a graph has to be closed in the full automorphism group. Therefor we consider groups of automorphisms as topological groups with the topology of point-wise convergence. For the proof of our main theorem we use Biggs' and Conway's idea of defining a symmetry tree that encodes all the information about the structure of congruence classes of consistent cycles in a given graph and for a given group of automorphisms. We show the bijective correspondence between the maximal walks in the tree and the congruence classes of consistent cycles in the graph. In a further section we discuss our results in the Diestel-Leader graph.

Zusammenfassung

Konsistente Kreise in endlichen Graphen wurden 1971 von J.H. Conway eingeführt. Ein Kreis wird konsistent unter der Aktion einer Automorphismengruppe genannt, wenn es ein Gruppenelement gibt, das den Kreis um einen Schritt rotiert. Er zeigte, dass die Anzahl der Orbits nichttrivialer konsistenter Kreise in einem endlichen Graphen um eins weniger als der Knotengrad des Graphen ist, wenn eine Untergruppe der vollen Automorphismengruppe bogentransitiv auf dem Graphen agiert. In der vorliegenden Diplomarbeit wird dieses Resultat von Conway auf unendliche Graphen und Automorphismengruppen, die knotentransitiv auf endlichen und unendlichen Graphen agieren, verallgemeinert. In unendlichen Graphen betrachten wir auch Doppelstrahlen als Kreise und definieren die Vielfachheit für Orbits konsistenter Kreise. Wir zeigen, dass die Summe der Vielfachheiten von Orbits konsistenter Kreise gleich dem Knotengrad des Graphen ist. Weiters zeigen wir, dass für diese Behauptung die Automorphismengruppe, die auf dem Graphen agiert, in der vollen Automorphismengruppe abgeschlossen sein muss. Hierfür betrachten wir Automorphismengruppen als topologische Gruppen bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz. Für den Beweis unseres Hauptsatzes verwenden wir die Idee von Biggs und Conway, einen Symmetriebaum zu definieren, der alle Informationen über die Struktur der Kongruenzklassen konsistenter Kreise eines gegebenen Graphen und einer gegebenen Automorphismengruppe enthält. Wir zeigen die bijektive Korrespondenz zwischen den maximalen Wegen im Baum und den Kongruenzklassen konsistenter Kreise im Graphen. In einem weiteren Kapitel diskutieren wir unser Resultat im Diestel-Leader-Graphen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Einführende Beispiele	1
1.2	Geschichtliches	3
1.3	Formulierung und Motivation	4
2	Konsistente Kreise	7
2.1	Definitionen	7
2.2	Konsistente Kreise in endlichen Graphen	12
2.3	Konsistente Kreise in unendlichen Graphen	15
2.4	Automorphismengruppen als topologische Gruppen	20
2.5	Der Baum konsistenter Kreise	27
3	Anwendung und Erweiterung	43
3.1	Der Diestel-Leader-Graph	43
3.2	Orbits $\frac{1}{k}$ -konsistenter Kreise	48
3.3	Konsistente Kreise in $\frac{1}{2}$ -bogentransitiven Graphen	53
	Literaturverzeichnis	57
	Curriculum Vitae	59

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführende Beispiele

Abbildung 1.1 zeigt den Graphen eines Würfels. In dem Kreis $[1, 2, 3, 4]$ gibt es einen Automorphismus, der diesen Kreis um einen Schritt weiterschiebt. Als zyklische Permutation könnte man diesen Automorphismus so schreiben: $(1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)$.

Wir verwenden das Wort *konsistent*, um so einen Kreis wie das Quadrat $[1, 2, 3, 4]$ in Abbildung 1.1 zu beschreiben. Das bedeutet, dass eine gewisse Symmetrie des Graphen konsistent bezüglich einer Rotation, die diesen Kreis um einen Schritt weiterschiebt, ist. Wie viele verschiedene Typen konsistenter Kreise hat ein symmetrischer Graph? Mit *Typen* sind hier Orbits von Kreisen gemeint. Ein Orbit ist eine Kongruenzklasse unter der Aktion einer Automorphismengruppe.

Gibt es in dem Graphen des Würfels noch andere Orbits kongruenter Kreise? Tatsächlich ist der Kreis $[1, 2, 6, 7, 8, 4]$ auch konsistent und zwar unter dem Automorphismus $(1, 2, 6, 7, 8, 4)(3, 5)$, als zyklische Permutation geschrieben.

Das Theorem von Conway besagt, dass wenn eine Automorphismengruppe bogentransitiv auf einem symmetrischen Graphen mit Knotengrad $d \geq 1$ agiert, dann existieren exakt $d-1$ Orbits nichttrivialer konsistenter Kreise unter der Aktion dieser Automorphismengruppe. Der Würfel in Abbildung 1.1 hat den Grad 3. Somit müssten exakt zwei Orbits konsistenter Kreise existieren. Tatsächlich gibt es keine weiteren konsistenten Kreise, die nicht in den Orbits der oben genannten Kreise der Längen 4 und 6 enthalten sind.

Man betrachte die Bilder des Dodekaeders in Abbildung 1.2 und Abbildung 1.3. Die äußeren Kreise bilden ein Zehneck und ein Neuneck. Im ersten Bild hat der Graph eine Symmetrie, die das äußere Zehneck um einen Schritt

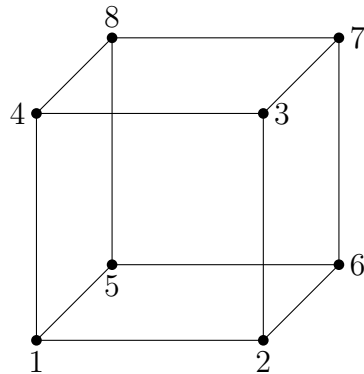


Abbildung 1.1: Würfel

rotiert, und zwar eine Rotation um 36° . Das zweite Bild ist auch symmetrisch und kann um 120° rotiert werden, aber es gibt keinen Automorphismus in dem Graphen, der das Neuneck nur einen einzigen Schritt rotiert.

Der Knotengrad des Dodekaeders beträgt 3. Nach dem Theorem von Conway gibt es in dem Graphen zwei Orbits nichttrivialer konsistenter Kreise.

Im ersten Bild sehen wir in der Mitte ein Fünfeck, das ebenfalls einen konsistenten Kreis darstellt. Wenn wir das Fünfeck um einen Schritt rotieren, entsteht eine Symmetrie des Graphen, und zwar eine 72° -Rotation. Somit repräsentieren das Zehneck und das Fünfeck jeweils einen Orbit konsistenter Kreise. Das Neuneck in Abbildung 1.3 ist nicht konsistent.

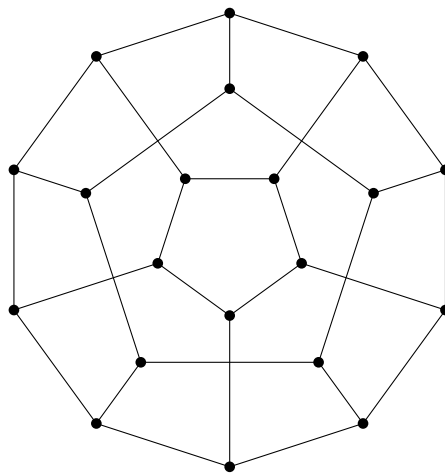


Abbildung 1.2: Dodekaeder

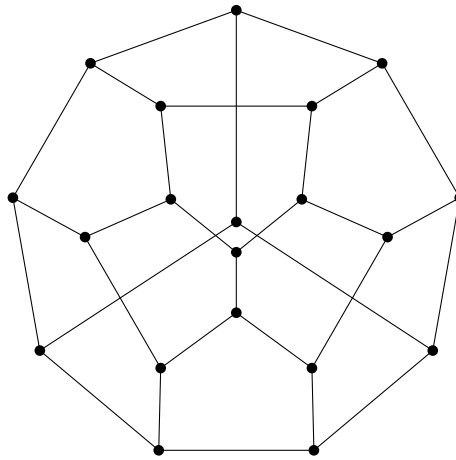


Abbildung 1.3: Dodekaeder

1.2 Geschichtliches

Konsistente Kreise in zusammenhängenden, endlichen (ungerichteten) Graphen wurden 1971 von J.H. Conway in seinen öffentlichen Vorlesungen in der “Second British Combinatorial Conference” eingeführt. Er zeigte, dass wenn eine Untergruppe der vollen Automorphismengruppe eines Graphen bogentransitiv darauf agiert, die Anzahl der Orbits nichttrivialer konsistenter Kreise unter der Aktion der Gruppe um eins weniger als der Knotengrad des Graphen ist.

J.H. Conway [4] präsentierte das folgende Resultat, welches die zwei Begriffe “Kreis” und “Zykel” miteinander in Beziehung setzt. Einerseits ist ein Kreis in einem Graphen ein zusammenhängender Teilgraph, in dem jeder Knoten den Grad 2 hat. Andererseits kann jedes Element einer Automorphismengruppe, die auf einem Graphen agiert, als Permutation in Zykelschreibweise geschrieben werden, wobei die einzelnen Zyklen Kreise darstellen können.

Theorem 1.2.1 (Conway [4]). *Sei G eine Gruppe von Automorphismen auf einem Graphen Γ mit Knotengrad $d \geq 2$. Angenommen G agiert transitiv auf der Menge aller geordneten Paare benachbarter Knoten. Sei X die Menge aller (geordneten) Kreise in Γ , wobei jeder auch als Zykel in einem Element aus G auftritt. Dann hat G genau $d - 1$ Orbits in seiner Aktion auf X .*

Wenn $\alpha = (v_0, v_1, \dots, v_r)$ ein Kreis in einem Graphen ist und auch ein Zykel, der in einem Element $g \in G$ vorkommt (in Zykelschreibweise als Permutation geschrieben), dann gilt $g(v_0) = v_1$, $g(v_1) = v_2, \dots$, $g(v_r) = v_0$. Dies

ist das, was wir einen konsistenten Kreis in einem Graphen nennen, wenn ein Element $g \in G$ existiert, welches den Kreis um einen Schritt rotiert.

So weit man weiß, existiert die einzige schriftliche Aufzeichnung des Resultats von Conway in einem Paper von Biggs [1]. Dort skizziert Biggs einen Beweis, indem er einen Symmetriebaum definiert. Dies ist ein gewurzelter Baum, in dem die Blätter zu G -konsistenten Erweiterungen G -konsistenter Wege eindeutig zugeordnet werden können. Dieser Baum bietet eine rekursive Methode, um eine abgeschlossene Menge maximaler konsistenter Wege zu konstruieren.

Im Paper [2] verallgemeinern Š. Miklavič, P. Potočnik und S. Wilson das Theorem von Conway auf beliebige Automorphismengruppen, die auf endlichen Digraphen (=gerichtete Graphen) agieren. Sie zeigten, dass die Anzahl G -konsistenter Kreise, die in einem Knoten v starten und enden, gleich der Anzahl von Nachfolgern von v geschnitten mit dem G -Orbit von v ist. In diesem Paper ist ein detaillierter Beweis, der die Idee von Conways Symmetriebaum verwendet, um die Struktur der Menge G -konsistenter Wege zu analysieren. In einer anderen Arbeit, siehe [3], verallgemeinern die oben genannten Autoren die Definition konsistenter Kreise zu jenen Kreisen, die eine Rotation um k Schritte zulassen und verallgemeinern das Theorem von Conway auf die sogenannten $\frac{1}{k}$ -konsistenten Kreise. Sie unterscheiden zwischen Orbits konsistenter Kreise, Orbits gerichteter Kreise und Orbits von Kreiswegen und geben Formeln, um diese jeweils zu zählen. Um diese Formeln zu beweisen, verwenden sie keinen Symmetriebaum, sondern definieren eine sogenannte “Overlapfunktion”.

1.3 Formulierung und Motivation

In dieser Diplomarbeit verallgemeinern wir das Theorem von Conway auf unendliche Graphen. Wir betrachten Automorphismengruppen, die knotentransitiv auf lokal endlichen Graphen agieren. Hierbei nehmen wir an, dass die auf dem Graphen agierende Gruppe in der vollen Automorphismengruppe abgeschlossen ist. Unser Hauptresultat besagt, dass die Summe der Vielfachheiten der Orbits konsistenter Kreise gleich dem Knotengrad des Graphen ist.

Kapitel 2.1 beinhaltet Basisdefinitionen bezüglich Graphen, Wegen, Kreisen, Automorphismen etc.

In Kapitel 2.2 definieren wir konsistente Kreiswege und Orbits konsistenter Kreise. Wir formulieren das Theorem von Conway und untersuchen dies in weiteren Beispielen endlicher, knotentransitiver Graphen.

Weiters betrachten wir einige Beispiele unendlicher, aber lokal endlicher, knotentransitiver Graphen in Kapitel 2.3 und analysieren, ob sich die Anzahl der Orbits konsistenter Kreise analog zum endlichen Fall verhält. Anschließend verallgemeinern wir das Theorem von Conway auf unendliche, lokal endliche Graphen und Automorphismengruppen, die knotentransitiv darauf agieren. In unendlichen Graphen erweitern wir die Definition von konsistenten Kreisen auf konsistente Doppelstrahlen und betrachten diese auch als konsistente Kreise. Auf diesen definieren wir die Vielfachheit konsistenter Kreise.

In Kapitel 2.4 betrachten wir Automorphismen als topologische Gruppen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Dazu definieren wir eine Metrik auf der Menge der Automorphismengruppen. Für unsere Annahme setzen wir voraus, dass die Gruppe, die auf dem Graphen agiert, abgeschlossen in der vollen Automorphismengruppe sein muss. Um das zu veranschaulichen, geben wir ein Gegenbeispiel eines unendlichen Graphen zusammen mit einer Automorphismengruppe, die nicht abgeschlossen ist. Schließlich formulieren wir unseren Hauptsatz, die Verallgemeinerung des Theorems von Conway auf lokal endliche Graphen.

Wir beginnen Kapitel 2.5 mit der Definition eines sogenannten “Baumes konsistenter Kreise”, welcher die ganze Information über die Struktur konsistenter Kreise in einem zugehörigen Graphen in sich trägt. Zuerst geben wir einige Lemmata über konsistente Wege, welche wir später für die Konstruktion des Baumes benötigen werden, gefolgt von Beispielen. Mit Hilfe des Baumes konsistenter Kreise beweisen wir die bijektive Korrespondenz zwischen den maximalen Wegen im Baum und den Orbits konsistenter Kreise im Graphen.

Kapitel 3.1 diskutiert den Hauptsatz im Diestel-Leader-Graphen. Wir zeigen ein Resultat bezüglich der Struktur und Längen der konsistenten Kreise in diesem Graphen.

In Kapitel 3.2 verallgemeinern wir die Definition konsistenter Kreise auf $\frac{1}{k}$ -konsistente Kreise und geben Formeln, um Orbits $\frac{1}{k}$ -von konsistenten Kreiswegen, Kreisen und gerichteten Kreisen zu zählen.

Das letzte Kapitel 3.3 handelt von Graphen, die knoten- und kantentransitiv, aber nicht bogentransitiv sind. Wir stellen Formeln auf, die die Orbits konsistenter Kreise in sogenannten $\frac{1}{2}$ -bogentransitiven Graphen zählen.

Kapitel 2

Konsistente Kreise

2.1 Definitionen

Ein *Graph* Γ ist ein Paar $(V\Gamma, E\Gamma)$, wobei $V\Gamma$ eine beliebige Menge ist, genannt Menge der *Knoten*, und

$$E\Gamma \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\Gamma, u \neq v\}$$

ist die Menge der (*ungerichteten*) *Kanten*. Ein *Bogen* ist ein geordnetes Paar (u, v) von Knoten, wobei $\{u, v\}$ eine Kante ist. Wir bezeichnen die Menge der Bögen mit $A\Gamma$. Ein *Digraph* ist ein Graph, in dem alle Kanten gerichtet sind. Wir betrachten in dieser Arbeit nur ungerichtete Graphen. Falls $\{u, v\}$ eine Kante in einem gerichteten Graphen ist, dann sind (u, v) und (v, u) jeweils Bögen.

Zwei Knoten u, v sind *benachbart*, wenn eine Kante $\{u, v\}$ existiert. In diesem Fall schreiben wir $u \sim v$ und sagen, dass u ein *Nachbar* von v ist.

Ein *Weg* der Länge r von u nach v in Γ ist eine Folge $(v_0, \dots, v_r)$ von Knoten $v_i \in V\Gamma$, sodass $u = v_0$, $v = v_r$ und $v_{i-1} \sim v_i$ für $1 \leq i \leq r$ und $v_{i-2} \neq v_i$ für $2 \leq i \leq r$, ausgenommen für den trivialen Weg (v_0, v_1, v_2) , wobei $v_2 = v_0$. Für jedes $v \in V\Gamma$ ist die Folge (v) ein Weg der Länge 0. Ein Weg $\alpha = (v_0, \dots, v_r)$ der Länge $r \geq 2$ ist *geschlossen*, wenn $v_r = v_0$ und *einfach*, wenn $v_i \neq v_j$ für alle $i \neq j$, ausgenommen für $(i, j) = (0, r)$.

Ein Graph Γ ist *zusammenhängend*, wenn für je zwei verschiedene Knoten u, v ein Weg von u nach v existiert. Wir betrachten nur zusammenhängende Graphen.

Die Anzahl der Nachbarn eines Knotens v wird *Grad* von v oder *Knoten-grad* genannt und mit $\deg(v)$ bezeichnet. Wenn alle Knoten eines Graphen den gleichen Grad haben, nennen wir den Graphen *regulär*. In diesem Fall nennen wir d den Grad des Graphen und bezeichnen ihn mit $\deg(\Gamma)$, wobei d

der Grad der Knoten ist. Für einen Knoten v in einem Digraphen definieren wir die *Nachfolgermenge von v* mit

$$\Gamma^+(v) = \{u \in V\Gamma \mid (v, u) \in A\Gamma\}$$

und die *Vorgängermenge von v* mit

$$\Gamma^-(v) = \{u \in V\Gamma \mid (u, v) \in A\Gamma\}.$$

Es bezeichnen

$$\deg^+(v) = |\Gamma^+(v)| \text{ und } \deg^-(v) = |\Gamma^-(v)|$$

den *Ausgangs-* beziehungsweise *Eingangsgrad* von v .

Ein *Kreisweg* $\alpha = (v_0, v_1, \dots, v_r)$ ist ein einfacher, geschlossener Weg in einem Graphen Γ . Wir definieren das *Inverse* von α als

$$\alpha^{-1} = (v_r, \dots, v_1, v_0)$$

und den *t -Shift* von α für $0 \leq t \leq r$ als

$$\alpha^t = (v_t, v_{1+t}, \dots, v_{r+t}),$$

den Index modulo r betrachtend. Ein *1-Shift* wird *Shift* genannt. Ein *Flip* des Weges $\alpha = (v_0, v_1, \dots, v_r)$ ist eine Transformation, die v_k nach v_{r-k} abbildet für $0 \leq k \leq r$.

Ein *gerichteter Kreis* $\vec{C}$ ist eine Äquivalenzklasse unter der Shiftrelation eines Kreisweges α und ein (*ungerichteter*) *Kreis* C ist eine Äquivalenzklasse unter der Inversen- und Shiftrelation von α . Ein Kreisweg ist verschieden von seinem Inversen und seinen t -Shifts. Die Länge eines Kreises ist durch die Anzahl seiner Knoten bestimmt. Kreise der Länge zwei werden *trivial* genannt. Wir betrachten einen gerichteten Kreis der Länge größer 2 als einen zusammenhängenden, gerichteten Teilgraphen von Γ , in dem jeder Knoten den Eingangs- und Ausgangsgrad 1 hat, wobei ein ungerichteter Kreis der Länge größer 2 ein zusammenhängender Teilgraph ist, in dem jeder Knoten Grad 2 hat. Ein Paar inverser gerichteter Kreise entspricht einem (ungerichteten) Kreis. Man bemerke, dass ein trivialer Kreis gleichzeitig gerichtet und ungerichtet ist. Wenn $\vec{C}$ ein gerichteter Kreis mit der Knotenfolge $\{v_0, \dots, v_{r-1}\}$ und den Bögen (v_i, v_{i+1}) , $i \in \mathbb{Z}_r$ ist, dann wird ein Kreisweg $(v_0, \dots, v_{r-1})$ ein *Repräsentant* von $\vec{C}$ genannt. Wir sagen, dass α ein unterliegender Kreisweg von $\vec{C}$ ist. Jeder Kreisweg ist ein Repräsentant eines eindeutigen gerichteten Kreises und jeder gerichtete Kreis der Länge r hat genau r Repräsentanten, wobei jeder ein t -Shift jedes anderen für ein gewisses t zwischen 1 und r

ist. Analog repräsentiert jeder Kreisweg $\alpha = (v_0, \dots, v_{r-1})$ einen eindeutigen Kreis und jeder nicht triviale Kreis der Länge r hat $2r$ Repräsentanten, wobei jeder ein t -Shift eines gewählten Repräsentanten $\alpha = (v_0, \dots, v_{r-1})$ oder ein t -Shift des Inversen α^{-1} ist. Wir werden einen Kreis der Länge r mit

$$C = [v_0, \dots, v_{r-1}], \quad v_i \in V\Gamma, \quad v_0 \sim v_{r-1}$$

bezeichnen.

Ein *Automorphismus* (oder auch *Symmetrie* genannt) eines Graphen Γ ist eine Funktion $f : V\Gamma \rightarrow V\Gamma$, sodass $f(v) \sim f(u)$ genau dann, wenn $v \sim u$. Dies ist eine Permutation der Knoten, die die Nachbarschaftsrelation erhält. Die Automorphismen von Γ bilden eine Gruppe, bezeichnet mit $\text{Aut}(\Gamma)$. Wir schreiben die Anwendung eines Automorphismus g auf einen Knoten v als v^g oder $g(v)$. Für eine Teilmenge $A = \{v_0, \dots, v_r\}$ von $V\Gamma$ bezeichnen wir das Bild unter einem Automorphismus g mit

$$A^g = \{v_0^g, \dots, v_r^g\}.$$

Daher wird das Bild eines Weges $\alpha = (v_0, \dots, v_r)$ unter einem Automorphismus g mit $\alpha^g = (v_0^g, \dots, v_r^g)$ beschrieben.

Für eine Untergruppe G von $\text{Aut}(\Gamma)$ bezeichnet der G -Orbit eines Knotens $v \in V\Gamma$ die Menge der Bilder unter den einzelnen Automorphismen

$$v^G = \{v^g \mid g \in G\}.$$

Weiters ist für eine Teilmenge A von $V\Gamma$ der G -Orbit von A die Menge

$$A^G = \{A^g \mid g \in G\}.$$

Eine Untergruppe G von $\text{Aut}(\Gamma)$ agiert auf der Menge der (gerichteten) Kreise. Zwei Kreise werden G -kongruent genannt, wenn sie zum selben G -Orbit gehören.

Für eine Untergruppe $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ sagen wir, dass G *bogentransitiv* auf Γ agiert (oder Γ ist G -bogentransitiv), wenn für je zwei Bögen (u, v) und (x, y) ein $g \in G$ existiert, sodass $u^g = x$ und $v^g = y$. Wenn $G = \text{Aut}(\Gamma)$, dann nennen wir den Graphen Γ bogentransitiv. Wir sagen, dass eine Untergruppe G von $\text{Aut}(\Gamma)$ *knotentransitiv* agiert, wenn für je zwei gegebene Knoten u und v ein $g \in G$ existiert, sodass $u^g = v$. Analog agiert die Gruppe G *kantentransitiv*, wenn G jede Kante auf jede andere Kante abbildet. Wenn $G = \text{Aut}(\Gamma)$ bogen-, knoten- beziehungsweise kantentransitiv auf Γ agiert, dann nennen wir Γ bogen-, knoten- beziehungsweise kantentransitiv. In knotentransitiven Graphen hat jeder Knoten den gleichen Grad.

Bemerkung 2.1.1. Wenn eine Automorphismengruppe G bogentransitiv auf einem Graphen agiert, dann agiert sie auch knoten- und kantentransitiv.

Wie sieht es jedoch mit der Umkehrung aus? Ist der Graph notwendigerweise G -bogentransitiv, wenn G knoten- und kantentransitiv agiert?

In endlichen Graphen ist dies der Fall, wenn der Grad des Graphen ungerade ist (Tutte zeigte dies anhand eines einfachen Zählarguments). Aber es stimmt nicht, wenn der Grad des Graphen gerade ist. Ein Gegenbeispiel ist der “Doyle-Holt-Graph” mit 27 Knoten und Knotengrad 4. Dieser ist der kleinste Graph bei dem die Umkehrung nicht zutrifft (siehe Kapitel 6 in [5]). Im Allgemeinen gelten die Behauptungen nicht für unendliche Graphen. Der “Diestel-Leader-Graph” $DL_{m,n}$ ist knoten- und kantentransitiv für alle m, n , aber er ist nicht bogentransitiv, falls $m \neq n$ (siehe Kapitel 3.1).

Sei G eine Automorphismengruppe, die auf einem Graphen Γ agiert. Ein Weg $\alpha = (v_0, \dots, v_r)$ wird *G -konsistent* genannt, wenn ein $g \in G$ existiert, sodass

$$v_i^g = v_{i+1}$$

für alle $i \in \mathbb{Z}_r$. So eine Symmetrie wird *Shunt(automorphismus)* für α genannt. Die Menge aller Shunts in G für α wird mit $\text{Sh}_G(\alpha)$ bezeichnet.

Bemerkung 2.1.2. Konsistente Wege sind einfach. Wenn $\alpha = (v_0, \dots, v_r)$ ein G -konsistenter Weg in Γ ist, sodass $v_{i_1} = v_{i_2}$ für einige $i_1 \neq i_2$, dann ist $(v_0, \dots, v_s)$ einfach und geschlossen für $0 \leq s \leq r$ und $v_i = v_j$, wenn $i \equiv j \pmod s$.

Für $g, h \in G$ bezeichnen wir mit

$$g^h = h^{-1}gh$$

die *h -Konjugierte* von g . Für $v \in V\Gamma$ und $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ sei

$$G_v = \{g \in G \mid v^g = v\}$$

der *Stabilisator* von v in G . Weiters definieren wir für eine Teilmenge $A \subseteq V\Gamma$ den *mengenweisen* Stabilisator als

$$G_A = \{g \in G \mid A^g = A\}$$

und den *punktweisen* Stabilisator als

$$G_{(A)} = \{g \in G \mid v^g = v, \forall v \in A\}.$$

Zwei Wege α und β werden G_v -kongruent, G_A -kongruent beziehungsweise $G_{(A)}$ -kongruent genannt, wenn $\alpha^{G_v} = \beta$ beziehungsweise $\alpha^{G_A} = \beta$ oder $\alpha^{G_{(A)}} = \beta$.

Sei α ein G -konsistenter Kreis mit einem Shuntautomorphismus $g \in G$, dann sind seine *zyklischen Shifts* Bilder von α unter Potenzen von g . Daraus folgt, dass wenn ein Repräsentant eines gerichteten Kreises $\vec{C}$ konsistent ist, alle Repräsentanten von $\vec{C}$ kongruent bezüglich G und somit G -konsistent sind.

Daher genügt es für einen G -konsistenten gerichteten Kreis einen Repräsentanten zu finden, der G -konsistent ist. Ein gerichteter Kreis $\vec{C}$ der Länge r ist genau dann G -konsistent, wenn der mengenweise Stabilisator $G_{\vec{C}}$ seiner Bögen als zyklische Gruppe der Ordnung r darauf agiert.

Analog gilt, wenn α ein G -konsistenter Repräsentant eines ungerichteten Kreises C ist, dann sind alle Repräsentanten G -konsistent, jeweils entweder bezüglich des selben Shunts g wie α oder bezüglich g^{-1} . Ein Kreis C wird G -konsistent genannt, wenn einer (und somit jeder) seiner Repräsentanten G -konsistent ist.

Lemma 2.1.3 (Kapitel 4 in [2]). *Für einen Graphen Γ und $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ sei H eine Untergruppe von G und $\alpha = (v_0, \dots, v_r)$ sei ein G -konsistenter Weg in Γ mit einem Shuntautomorphismus g . Wenn $h \in H$, dann ist $\alpha^h = (v_0^h, \dots, v_r^h)$ ein G -konsistenter Weg in Γ mit einem Shuntautomorphismus g^h . Somit entstehen durch H Partitionen der Menge G -konsistenter Wege in Γ in H -Kongruenzklassen.*

Beweis. Für einen Knoten v_i^h in α^h gilt

$$(v_i^h)^{g^h} = (v_i^h)^{h^{-1}gh} = v_i^{hh^{-1}gh} = v_i^{gh} = v_{i+1}^h$$

für alle $i \in \mathbb{Z}_r$. Somit ist α^h ein G -konsistenter Weg in Γ bezüglich eines Shunts g^h . $\square$

Eine Gruppe von Automorphismen eines Graphen agiert auf der Menge konsistenter (gerichteter) Kreise. Die Orbits dieser Aktion werden *G -Kongruenzklassen* konsistenter (gerichteter) Kreise genannt.

Man beachte, dass G -konsistente Kreise auch trivial sein können. Solche Kreise existieren dann, wenn es einen Automorphismus gibt, der zwei miteinander benachbarte Knoten vertauscht. Zum Beispiel existiert so ein Automorphismus dann, wenn G transitiv auf der Menge der Bögen agiert. In diesem Fall sind alle trivialen Kreise in Γ symmetrisch bezüglich G und daher G -kongruent.

2.2 Konsistente Kreise in endlichen Graphen

Theorem 2.2.1 (Conway). *Sei $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ eine Gruppe, die bogentransitiv auf einem endlichen Graphen Γ agiert, dann ist die Anzahl der G -Orbits nichttrivialer konsistenter Kreise um eins weniger als der Grad des Graphen.*

Theorem 2.2.2. *Sei $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ eine Gruppe, die knotentransitiv auf einem endlichen Graphen Γ agiert, dann ist die Anzahl der G -Orbits konsistenter Kreise gleich dem Grad des Graphen.*

Es ist zu bemerken, dass in bogentransitiven Graphen genau ein Orbit trivialer Kreise existiert und dieser konsistent ist.

Beispiel 2.2.3. Wir betrachten den Graphen des Ikosaeders zusammen mit der Aktion seiner vollen Automorphismengruppe. Dieser Graph ist regulär und von Grad 5. Theorem 2.2.1 besagt, dass hier vier G -Orbits nichttrivialer konsistenter Kreise existieren. Der Kreis $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$ der Länge 6 und der Kreis $[8, 10, 12]$ der Länge 3 in Abbildung 2.1 sind konsistent bezüglich der Rotation des Graphen um 60° beziehungsweise der Rotation um 120° . Der Kreis $[1, 9, 2, 3, 10, 4, 12, 5, 6, 7]$ der Länge 10 und der Kreis $[1, 2, 10, 12, 6]$ der Länge 5 in Abbildung 2.2 sind konsistent bezüglich der folgenden Shunts: die Rotation um 36° und die Rotation um 72° .

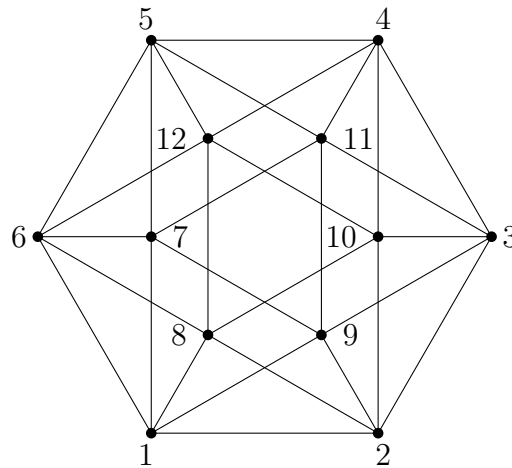


Abbildung 2.1: Ikosaeder

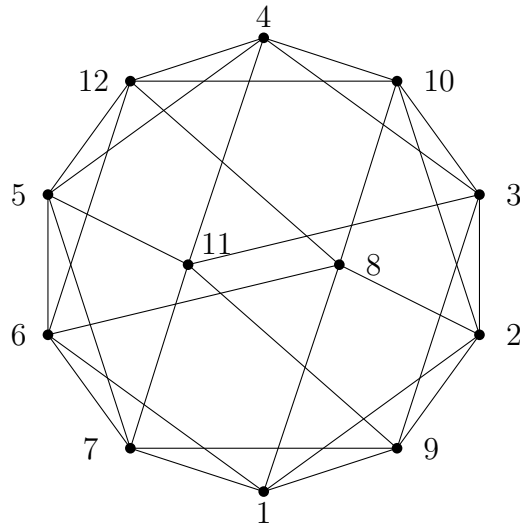


Abbildung 2.2: Ikosaeder

Beispiel 2.2.4. Der Graph $K_{4,4}$ in Abbildung 2.3 hat Grad 4. Sei G die volle Automorphismengruppe, die auf dem Graphen agiert. Nach Theorem 2.2.2 müsste es 4 Orbits G -konsistenter Kreise geben. Tatsächlich sind die folgenden Repräsentanten der Orbits konsistent: $[1, 2]$, $[1, 2, 3, 4]$, $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$ und $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$. Shunts für diese Kreise sind jeweils der Flip um die vertikale Symmetrieachse und die zyklische Permutation der Knoten (2) , $(2, 4)$, $(2, 4, 6)$ beziehungsweise $(2, 4, 6, 8)$.

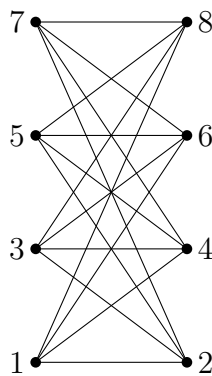


Abbildung 2.3: $K_{4,4}$

Beispiel 2.2.5. Wir untersuchen noch einmal den Graphen des $K_{4,4}$, aber diesmal sei die darauf agierende Gruppe die Index-2 Untergruppe von $\text{Aut}(\Gamma)$,

welche isomorph zu der alternierenden Gruppe $\mathcal{A}_4$ ist. Diese besteht aus den Permutationen der Knoten mit einer geraden Anzahl an Transpositionen.

Der Kreis $[1, 2]$ ist konsistent unter dem Shunt $(1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)$, welcher die Konkatenation von 4 Transpositionen der Knoten darstellt.

Auch der Kreis $[1, 2, 3, 4]$ ist konsistent unter der Aktion von G . Ein möglicher Shunt ist der Automorphismus $(1, 2, 3, 4)(5, 6)(7, 8)(7, 5)$, welcher eine gerade Anzahl an Transpositionen hat.

Der Kreis $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$ ist konsistent bezüglich des Shuntautomorphismus' $(1, 2, 3, 4, 5, 6)(7, 8)$. Die Kreise der Länge 8 sind nicht konsistent hier, weil es für sie keinen Shunt mit einer geraden Anzahl an Transpositionen gibt.

Dafür haben wir einen zweiten konsistenten Kreis der Länge 6, nämlich $[1, 2, 3, 4, 5, 8]$. Dieser ist nicht im gleichen Orbit wie $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$, weil die Transposition $(6, 8)$ nicht in G ist. Somit ist in diesem Beispiel das Theorem von Conway erfüllt.

Beispiel 2.2.6. Der “Wheelgraph”, der in Abbildung 2.4 zu sehen ist, ist knotentransitiv, aber nicht kantentransitiv unter der Aktion der vollen Automorphismengruppe. Die Kante $\{v_1, v_2\}$ kann nicht auf die Kante $\{v_1, v_9\}$ abgebildet werden. Der Grad des Graphen ist 3.

In diesem Beispiel gibt es nur einen Orbit nichttrivialer Kreise, den Orbit des Repräsentanten $[v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8]$. Weiters haben wir hier zwei Orbits trivialer konsistenter Kreise, nämlich jeweils den Orbit der Kreise $[v_1, v_2]$ und $[v_1, v_9]$. Der Kreis $[v_1, v_2, v_{10}, v_9]$ ist nicht konsistent hier. Also haben wir 3 Orbits konsistenter Kreise und somit gilt Theorem 2.2.2.

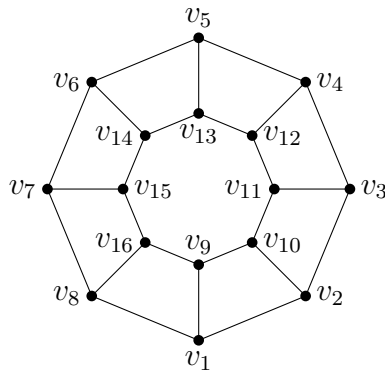


Abbildung 2.4: Wheelgraph

Theorem 2.2.1 gilt im Beispiel 2.2.6 nicht, weil der Graph Grad 3 hat, es aber nur einen Orbit nichttrivialer Kreise gibt.

2.3 Konsistente Kreise in unendlichen Graphen

In dieser Arbeit betrachten wir nur *lokal endliche* Graphen. Das bedeutet, dass jeder Knoten endlichen Grad hat.

In diesem Kapitel werden wir konsistente Kreise in unendlichen, zusammenhängenden Graphen analysieren und diskutieren, ob Theorem 2.2.1 und Theorem 2.2.2 wie im endlichen Fall gelten.

Definition 2.3.1. Ein *zwei-weg unendlicher Pfad* ist eine Folge von Knoten $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, sodass $(v_i, v_{i+1}) \in E\Gamma$ für alle i . Zwei Pfade $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ gelten als ident, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $v_{i+k} = w_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Ein *Doppelstrahl* $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ist ein zwei-weg unendlicher Pfad verschiedener Knoten. Ein *Strahl* $(v_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Doppelstrahl, der nur in eine Richtung unendlich ist.

In unendlichen Graphen betrachten wir zusätzlich zu endlichen Kreisen auch Doppelstrahlen als Kreise.

Nun wollen wir Beispiele knotentransitiver unendlicher Graphen ansehen und feststellen, ob das Theorem von Conway analog zu endlichen Graphen gilt.

Beispiel 2.3.2. Die volle Automorphismengruppe $G = \text{Aut}(\Gamma)$ agiere auf dem “Wabengitter” in Abbildung 2.5. Dieser Graph hat Grad 3. Die Repräsentanten der Orbits konsistenter Kreise sind: das Hexagon $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$ und der Doppelstrahl $[\dots, 7, 8, 9, 5, 6, 1, 10, 11, 12, \dots]$. Der Graph besitzt zwei Orbits nichttrivialer konsistenter Kreise unter der Aktion von G . Somit gilt Theorem 2.2.1 in diesem Beispiel.

Beispiel 2.3.3. Wir analysieren ein weiteres Beispiel eines unendlichen Graphen, das “Dreiecksgitter” in Abbildung 2.6. Der Grad dieses Graphen ist 6. Sei G die volle Automorphismengruppe, die auf dem Graphen agiert. Hier gibt es zwei G -Orbits endlicher konsistenter Kreise: das Dreieck $[13, 18, 14]$ und das Sechseck $[9, 8, 14, 18, 19, 12]$. Weiters befinden sich hier noch drei G -Orbits unendlicher konsistenter Kreise. Repräsentanten dafür sind die Kreise

$$[\dots, 11, 12, 13, 14, 15, \dots], [\dots, 1, 10, 9, 13, 14, 17, 16, \dots]$$

$$\text{und } [\dots, 11, 20, 12, 19, 13, 18, 14, 17, 15, 16, \dots].$$

Insgesamt sind also fünf Orbits nichttrivialer konsistenter Kreise vorhanden und so gilt Theorem 2.2.1 auch in diesem Beispiel.

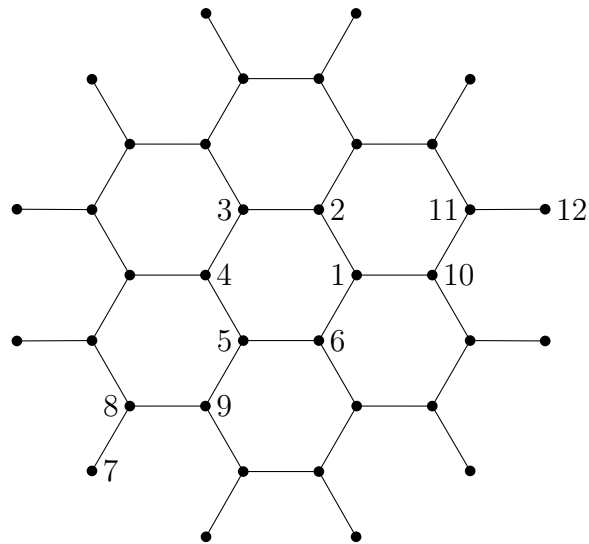


Abbildung 2.5: Wabengitter

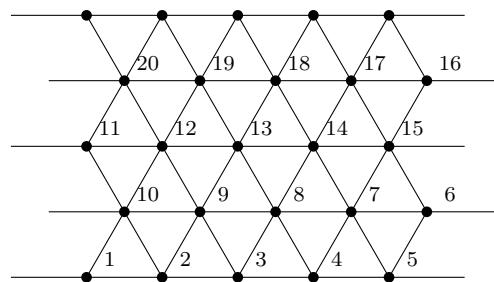


Abbildung 2.6: Dreiecksgitter

Beispiel 2.3.4. Der Graph “Unendliche Dreiecke” in Abbildung 2.7 ist knotentransitiv, aber nicht kantentransitiv unter der Aktion der vollen Automorphismengruppe. Der Graph besitzt zwei Sorten von Kanten, jene, die innerhalb eines Dreiecks sind und jene, die sich zwischen den Dreiecken befinden. Der Knotengrad des Graphen beträgt 3. Tatsächlich haben wir 3 Orbits konsistenter Kreise. Einer ist der Orbit der Dreiecke und die anderen beiden stellen die zwei Sorten der Kanten dar.

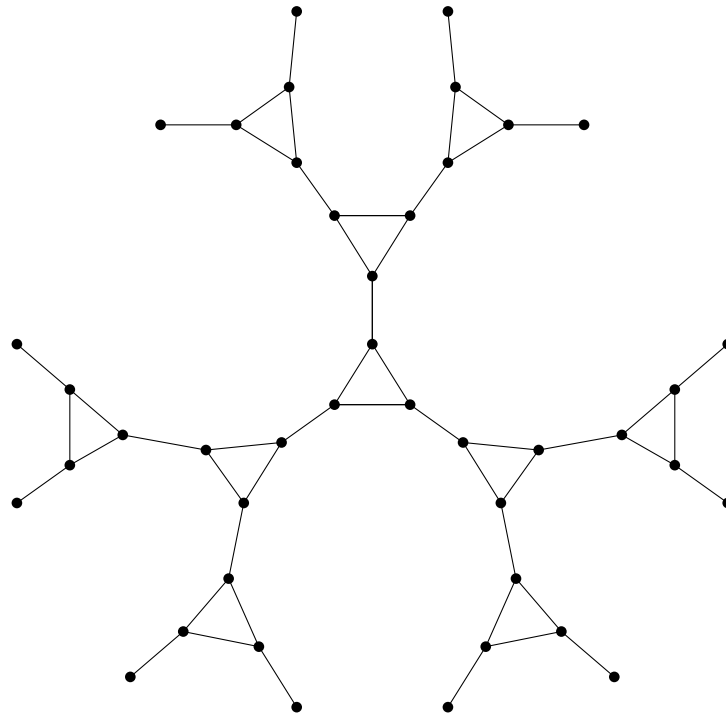


Abbildung 2.7: Unendliche Dreiecke

Beispiel 2.3.5. Das folgende Beispiel zeigt einen 3-regulären Baum in Abbildung 2.8 zusammen mit der Aktion von $\text{Aut}(\Gamma)$. Der Grad des Baumes ist 3, aber der Baum hat nur einen Orbit nichttrivialer konsistenter Kreise, nämlich den Doppelstrahl $[\dots, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots]$. Dieser ist isomorph zu allen anderen Doppelstrahlen in diesem Graphen. Der Graph ist bogentransitiv, aber das Theorem von Conway gilt hier nicht so wie in den anderen Fällen. Um es auch hier geltend zu machen, müssen wir eine sogenannte Vielfachheit von Kreisen definieren. Diese zählt die maximale Anzahl an Doppelstrahlen, die ein gemeinsames negatives Endstück haben, aber disjunkte positive Endstücke. In unserem Beispiel hat der Doppelstrahl Vielfachheit 2. Wir fixieren ein negatives Endstück $(\dots, 1, 2, 3, 4, 5)$, dann haben die Kreise

$$[\dots, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots] \text{ und } [\dots, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, \dots]$$

das gleiche negative Endstück, aber verschiedene positive Endstücke, und zwar $(6, 7, \dots)$ beziehungsweise $(8, 9, \dots)$. Das heißt, wir können sozusagen den Kreis als zwei Kreise zählen und haben somit um eins weniger konsistente Kreise als der Knotengrad des Graphen beträgt.

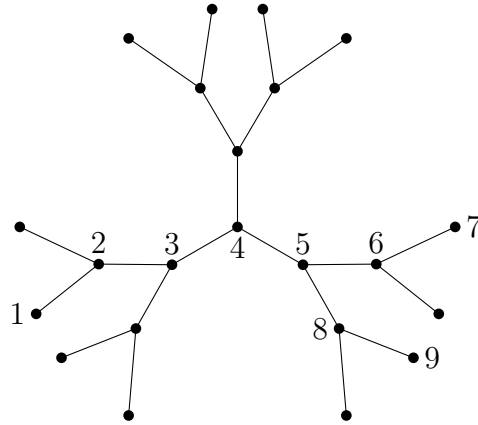


Abbildung 2.8: 3-regulärer Baum

Beispiel 2.3.6. Die volle Automorphismengruppe agiere auf dem Graphen “Unendlicher $K_{2,2}$ ” vom Knotengrad 4 in Abbildung 2.9. Hier befinden sich zwei endliche konsistente Kreise, nämlich $[v_0, v_1, w_0, w_1]$ und der triviale Kreis, sowie ein unendlicher konsistenter Kreis $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit Vielfachheit 2. Fixieren wir das negative Endstück $(w_i)_{i \leq 0}$, dann gibt es hier zwei Kreise, $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und $(\dots, w_{-1}, w_0, v_1, v_2, \dots)$, mit dem gleichen negativen Endstück, aber verschiedenen positiven Endstücken. In diesem Beispiel ist der Grad des Graphen gleich der Summe der Vielfachheiten der Orbits konsistenter Kreise.

Endliche konsistente Kreise haben Vielfachheit 1.

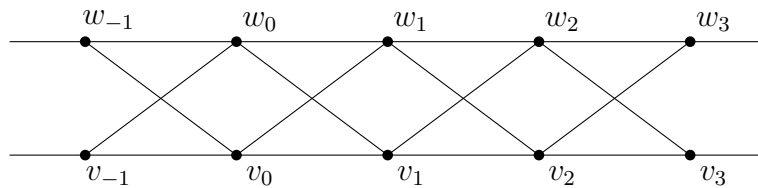


Abbildung 2.9: Unendlicher $K_{2,2}$

Sei Γ ein unendlicher Graph mit einer abzählbaren Menge an Knoten und sei $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ eine Gruppe von Automorphismen, die auf Γ agiert. Ein lokal endlicher Graph hat eine abzählbare Menge an Knoten.

Definition 2.3.7. Ein *konsistenter Kreis* ist ein Doppelstrahl

$$C = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$$

für den es ein $g \in G$ gibt, sodass $v_i^g = v_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ und für die agierende Gruppe G . Dieses $g \in G$ wird *Shunt* für C genannt.

In diesem Kapitel sehen wir einen endlichen konsistenten Kreis als unendlichen Weg $C = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ an, wobei ein $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ existiert, sodass $v_{i+k} = v_i$ für alle i .

Lemma 2.3.8. *Ein konsistenter Kreis ist entweder endlich oder ein Doppelstrahl.*

Beweis. Sei $C = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ein konsistenter Kreis. Wenn $v_{i_1} = v_{i_2}$ in C , dann gilt für einen Shunt g , dass $v_{i_1+1} = v_{i_1}^g = v_{i_2}^g = v_{i_2+1}$ und auch

$$v_{i_1+n} = v_{i_1}^{g^n} = v_{i_2}^{g^n} = v_{i_2+n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt, dass $v_i = v_j$ wann immer $i \equiv j \pmod k$, wobei $k = i_2 - i_1$. Daher ist C endlich. Wenn alle Knoten in C verschieden sind, dann ist C ein Doppelstrahl. $\square$

Die Begriffe Stabilisator, mengenweiser Stabilisator und punktweiser Stabilisator werden analog zum endlichen Fall für unendliche Teilmengen $A \subseteq VT$ verwendet. Auch die Begriffe G -kongruent, G_A -kongruent und $G_{(A)}$ -kongruent sind für unendliche Wege analog zum endlichen Fall.

Definition 2.3.9. Wir nennen $C^- = (v_i)_{i \leq 0}$ das *negative Endstück von C* und $C^+ = (v_i)_{i \geq 1}$ das *positive Endstück von C* .

Definition 2.3.10. Die *Vielfachheit $m(C)$* eines konsistenten Kreises C ist definiert als

$$m(C) = |v_1^{G_{(C^-)}}|.$$

Das heißt, die Vielfachheit ist die Anzahl möglicher Bilder von v_1 unter Elementen von G , welche das negative Endstück von C punktweise fixieren.

Sei g ein Shunt für C und $C^h = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ für gewisse $h \in G$. Dann

$$w_i^{g^h} = w_i^{h^{-1}gh} = v_i^{gh} = v_{i+1}^h = w_{i+1}.$$

Somit ist C^h ein konsistenter Kreis mit einem Shunt g^h .

Es bezeichne $\mathcal{C}$ die Menge aller Orbits konsistenter Kreise unter der Aktion von G .

Lemma 2.3.11. *Sei $O = C^G$ ein G -Orbit gewisser konsistenter Kreise, dann ist $m(O) = m(C)$ von der Wahl von $C \in O$ unabhängig.*

Beweis. Sei $D = C^h$ ein konsistenter Kreis, dann

$$m(D) = m(C^h) = |(w_1)^{G_{(C^h)^-}}| = |(v_1^h)^{G_{(C^h)^-}}| = |v_1^{G_{(C^-)}}| = m(C).$$

Somit ist $m(C)$ wohldefiniert. $\square$

2.4 Automorphismengruppen als topologische Gruppen

Beispiel 2.4.1. Sei Γ der “Unendliche $K_{2,2}$ ”, in Abbildung 2.9 gezeigt, und seien $A = \{v_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ und $B = \{w_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ Mengen. Anstatt der vollen Automorphismengruppe sei die agierende Gruppe G die Gruppe jener Automorphismen, die alle bis auf endlich viele Elemente von A nach A abbildet. Dies ist die Gruppe, die einerseits aus Automorphismen, die den Doppelstrahl $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ auf seine t -Shifts für $t \in \mathbb{Z}$ abbildet, andererseits aus dem Flip des Graphen um die Symmetrieachse durch (v_i, w_i) , $i \in \mathbb{Z}$ und schließlich aus den Transpositionen von v_i und w_i für endlich viele $i \in \mathbb{Z}$ besteht.

Die Gruppe G agiert bogentransitiv auf Γ . In diesem Beispiel gibt es zwei endliche G -konsistente Kreise. Der Kreis $[v_0, v_1]$ ist konsistent unter dem Shunt von $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und dem Flip um (v_1, w_1) . Für den Kreis $[v_0, v_1, w_0, w_1]$ besteht ein möglicher Shunt aus dem Shift von $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, dem Flip um die Kante (v_1, w_1) und der Transposition von v_0 und w_0 .

Weiters haben wir drei unendliche konsistente Kreise, nämlich $C_1 = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $C_2 = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und $C_3 = (\dots, v_{-1}, v_0, w_1, w_2, \dots)$. Der Kreis C_3 ist konsistent unter dem Shift von $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und der Transposition von v_0 und w_0 .

Diese drei unendlichen Kreise sind Repräsentanten dreier verschiedener Orbits, weil es kein Element in G gibt, das unendlich viele Elemente von A nach B abbildet.

In diesem Beispiel gibt es also fünf G -Orbits konsistenter Kreise. Dies ist mehr als der Grad des Graphen.

Bemerkung 2.4.2. Das Theorem von Conway gilt in diesem Beispiel nicht, weil G in $\text{Aut}(\Gamma)$ nicht abgeschlossen ist.

Die Automorphismengruppe eines unendlichen, lokal endlichen Graphen ist eine topologische Gruppe bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz (siehe [6]).

Wir betrachten Automorphismen als Funktionen von $V\Gamma$ nach $V\Gamma$. In diesem Kapitel werden wir das Bild eines Knotens v unter einem Gruppenelement g mit $g(v)$ bezeichnen.

Definition 2.4.3. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen mit $f_n \in G$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $g \in G$, wobei $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise* gegen g , wenn für alle $v \in V\Gamma$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$f_n(v) = g(v) \text{ für alle } n \geq N.$$

Definition 2.4.4. Eine $(*)$ -Folge in G ist eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass für alle $v \in V\Gamma$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$f_n(v) = f_m(v) \text{ für alle } n, m \geq N.$$

Definition 2.4.5. Die Gruppe G wird *abgeschlossen* in $\text{Aut}(\Gamma)$ genannt, wenn jede $(*)$ -Folge in G konvergiert.

Bemerkung 2.4.6. Wir können auch eine Metrik auf der auf dem Graphen Γ agierenden Gruppe G definieren. Sei $V\Gamma = \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$. Für $g, h \in G$ sei

$$d(g, h) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(g(v_i), h(v_i))}{2^i},$$

wobei δ die diskrete Metrik

$$\delta(v, w) = \begin{cases} 1, & \text{für } v \neq w \\ 0, & \text{für } v = w. \end{cases}$$

ist.

Wir wollen verifizieren, dass d eine Metrik ist:

(M1) Für alle $g, h \in G$ ist $d(g, h) \geq 0$. Wenn $d(g, h) = 0$, dann $\delta(g(v_i), h(v_i)) = 0$ für alle i und somit $g(v_i) = h(v_i)$ für alle i und daher folgt $g = h$.

(M2) Die Funktion $d(g, h)$ ist symmetrisch.

(M3) Wir zeigen die Dreiecksungleichung

$$d(f, g) + d(g, h) \geq d(f, h) \quad \forall f, g, h \in G.$$

$$d(f, g) + d(g, h) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(f(v_i), g(v_i))}{2^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(g(v_i), h(v_i))}{2^i} =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(f(v_i), g(v_i)) + \delta(g(v_i), h(v_i))}{2^i} \geq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(f(v_i), h(v_i))}{2^i} = d(f, h)$$

Für alle $v \in V\Gamma$ gilt

$$\delta(f(v), g(v)) + \delta(g(v), h(v)) \geq \delta(f(v), h(v)),$$

weil δ die diskrete Metrik ist.

Somit ist d eine Metrik und (G, d) wird zu einem metrischen Raum.

Definition 2.4.7. Eine *Cauchy-Folge* in (G, d) ist eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n \in G$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$d(f_n, f_m) < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$

Lemma 2.4.8. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen einer Gruppe $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$, die auf einem Graphen Γ agiert. Dann ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $(*)$ -Folge in G genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge in (G, d) ist.

Beweis. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $(*)$ -Folge in G . Für alle $v \in V\Gamma$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $f_n(v) = f_m(v)$ für alle $n, m \geq N$.

Sei $\epsilon = \frac{1}{2^k} > 0$. Für jedes $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ existiert ein $N_i \in \mathbb{N}$, sodass $f_n(v_i) = f_m(v_i)$ für alle $n, m \geq N_i$. Sei $N = \max\{N_i\}_{i \geq 0}$, dann $f_n(v_i) = f_m(v_i)$ für alle $0 \leq i \leq k$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} d(f_n, f_m) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(f_n(v_i), f_m(v_i))}{2^i} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\delta(f_n(v_i), f_m(v_i))}{2^i} = \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta(f_n(v_i), f_m(v_i))}{2^i} < \frac{1}{2^k} = \epsilon \end{aligned}$$

für alle $n, m \geq N$. Somit ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (G, d) .

Andererseits sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (G, d) . Für $\epsilon = \frac{1}{2^k} > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$d(f_n, f_m) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(f_n(v_i), f_m(v_i))}{2^i} < \frac{1}{2^k}, \quad \forall m, n > N.$$

Es folgt, dass

$$\sum_{i=0}^k \frac{\delta(f_n(v_i), f_m(v_i))}{2^i} = 0 \text{ und } \delta(f_n(v_i), f_m(v_i)) = 0$$

und somit $f_n(v_i) = f_m(v_i) \quad \forall 0 \leq i \leq k$.

Weil $k \in \mathbb{N}$ beliebig ist, folgt, dass für alle Knoten v_i , $i \geq 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $f_n(v_i) = f_m(v_i)$ für alle $n, m \geq N$, und somit ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $(*)$ -Folge in G . $\square$

Bemerkung 2.4.9. Nun wollen wir zeigen, dass die Gruppe G im vorherigen Beispiel 2.4.1 nicht abgeschlossen in $\text{Aut}(\Gamma)$ ist. Wir betrachten dazu die folgende Cauchy-Folge

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f_n(v_i) = \begin{cases} w_i, & \text{for } i \in \{0, \dots, n\} \\ v_i, & \text{for } i \notin \{0, \dots, n\}. \end{cases}$$

Für einen Knoten $v_s \in V\Gamma$ gilt $f_n(v_s) = f_m(v_s)$ für alle $n, m \geq s$. Somit ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, die aber nicht konvergiert, weil es keinen Automorphismus in G gibt, der unendlich viele Elemente von A nach B abbildet. Also ist G nicht abgeschlossen in $\text{Aut}(\Gamma)$.

Wir müssen für unsere Behauptung annehmen, dass die Gruppe, die auf dem Graphen agiert, in der vollen Automorphismengruppe abgeschlossen ist. Im Folgenden betrachten wir nur mehr Untergruppen der vollen Automorphismengruppe, die abgeschlossen sind.

Lemma 2.4.10 (Lemma 1 in [6]). *Sei G abgeschlossen in $\text{Aut}(\Gamma)$ und x ein fixierter Knoten in $V\Gamma$, dann ist der Stabilisator G_x kompakt.*

Beweis. Sei $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in G_x und sei $x_0 = x, x_1, x_2, \dots$ eine Nummerierung von $V\Gamma$; (dies ist möglich weil $V\Gamma$ abzählbar ist). Weil $g_n x = x$ für alle n und weil Γ lokal endlich und zusammenhängend ist, ist die Menge $\{g_n x_k \mid n \geq 0\}$ endlich für alle k . Somit gibt es eine Teilfolge $(\tau_1(n))$ von $\mathbb{N}$, in der alle $g_{\tau_1(n)} x_1$ übereinstimmen. Wir schreiben $g x_1$ für dieses gemeinsame Bild. Mit Hilfe der Induktion bekommen wir eine Teilfolge $(\tau_k(n))$ der vorigen Teilfolge $(\tau_{k-1}(n))$, sodass alle $g_{\tau_k(n)}$, $n \geq 0$, das Element x_k auf das gleiche Element von $V\Gamma$ abbilden, bezeichnet mit $g x_k$. Somit $g_{\tau_n(n)} \rightarrow g \in G$ punktweise. $\square$

Lemma 2.4.11. *Die Gruppe G sei abgeschlossen in $\text{Aut}(\Gamma)$ und $A, B \subseteq V\Gamma$ mit endlich vielen Elementen $|A| = |B|$, dann ist $G_{A,B} = \{g \in G \mid g(A) = B\}$ kompakt.*

Beweis. Sei $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ und $B = \{y_1, \dots, y_n\}$. Für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $g \in G$, sodass $g(x_i) = y_i$. Dann ist

$$G_{x_i, y_i} = \{g \in G \mid g(x_i) = y_i\} = gG_{x_i}$$

kompakt, weil aus Lemma 2.4.10 folgt, dass der Stabilisator kompakt ist. Weiters folgt, dass die Menge

$$G_{(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)} = \{g \in G \mid g(x_i) = y_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\} = \bigcap_{i=1}^n G_{x_i, y_i}$$

kompakt ist. Somit ist der punktweise Stabilisator $G_{(A)} = G_{(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)}$ auch kompakt. Es existieren höchstens $n!$ Automorphismen von A nach B . Seien $m = n!$ und $g_1, \dots, g_m$ verschiedene Bijektionen von $A \rightarrow B$. Somit ist

$$G_{A, B} = \{g \in G \mid g(A) = B\} = \bigcup_{i=1}^m G_{(x_1, \dots, x_n), (g_i(x_1), \dots, g_i(x_n))}$$

kompakt. □

Lemma 2.4.12. *Sei $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ eine Gruppe, die auf Γ agiert. Wenn zwei unendliche G -konsistente Kreise das gleiche negative Endstück haben, dann gehören sie zum gleichen G -Orbit, falls G in $\text{Aut}(\Gamma)$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Seien $C = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und $D = (w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ zwei G -konsistente Kreise mit

$$C^- = (v_i)_{i \leq 0} = (w_i)_{i \leq 0} = D^-.$$

Sei g ein Shunt für C und h sei ein Shunt für D . Man betrachte die folgende Cauchy-Folge

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } f_n = h^{-n}g^n.$$

Für einen Knoten w_k in D^+ , $k \geq 1$ und ein $n \geq k$ gilt

$$h^{-n}(w_k) = w_{k-n} \in D^-,$$

somit ist $w_{k-n} = v_{k-n}$ und

$$g^n(v_{k-n}) = v_k \in C^+.$$

Daher existiert für jeden $w_k \in D$ ein $N \in \mathbb{N}$, $N \geq k$ mit

$$f_n(w_k) = f_m(w_k) = v_k \in C \quad \forall n, m \geq N.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bildet die Funktion f_n den Weg $(w_i)_{i \leq n}$ auf den Weg $(v_i)_{i \leq n}$ ab. Weil G in $\text{Aut}(\Gamma)$ abgeschlossen ist, konvergiert die Cauchy-Folge zu einem Element in G , das D nach C abbildet. Daher sind C und D im gleichen G -Orbit. □

Bemerkung 2.4.13. Wir könnten auch $(v_i)_{i \leq n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ als negatives Endstück von C definieren und $(v_i)_{i > n}$ dann als das zugehörige positive Endstück.

Lemma 2.4.14. *Sei $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ eine Gruppe, die in $\text{Aut}(\Gamma)$ abgeschlossen ist und knotentransitiv auf Γ agiert. Wenn C ein konsistenter Kreis mit Vielfachheit n ist, dann existieren n konsistente Kreise, die das gleiche negative Endstück und disjunkte positive Endstücke haben.*

Beweis. Sei $C = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ein konsistenter Kreis mit negativem Endstück $C^- = (v_i)_{i \leq 0}$ und einem Shunt $g \in G$ und $m(C) = n$. Wir konstruieren einen konsistenten Kreis mit negativem Endstück C^- auf die folgende Art:

Die Anzahl der Nachfolger von v_0 , die im Orbit von v_1 unter dem Stabilisator $G_{(C^-)}$ sind, ist n . Sei $w_1 \in v_1^{G_{(C^-)}}$ und $w_1 = v_1^h$ für $h \in G_{(C^-)}$. Es existiert ein konsistenter Kreis $C^h = D = (\dots, v_0, w_1, w_2, \dots)$ mit dem Shunt g^h . Nach Lemma 2.3.11 gilt

$$n = m(C) = m(D^{g^h}) = |w_1^{G_{(D^{g^h}-)}}|,$$

wobei $G_{(D^{g^h}-)}$ ein negatives Endstück von $D^{g^h} = (\dots, v_0, w_1)$ ist. Somit ist die Anzahl der Nachfolger von w_1 , die im Orbit von w_2 unter dem Stabilisator $G_{(D^{g^h}-)}$ sind, auch gleich n .

Wähle einen Knoten u_2 aus diesem Orbit und $E = (\dots, v_0, w_1, u_2, u_3, \dots)$ sei ein konsistenter Kreis und so weiter.

In jedem Schritt haben wir n Möglichkeiten zur Auswahl von Knoten. Daher existieren n konsistente Kreise, die das gleiche negative Endstück und disjunkte positive Endstücke haben. $\square$

Wenn die Gruppe G , die auf einem Graphen Γ agiert, in $\text{Aut}(\Gamma)$ abgeschlossen ist und C ein konsistenter Kreis ist, dann ist die Vielfachheit von C die maximale Anzahl der konsistenten Kreise, die das gleiche negative Endstück wie C und disjunkte positive Endstücke haben.

Bemerkung 2.4.15. Dies ist nicht der Fall, wenn die Gruppe G nicht abgeschlossen in $\text{Aut}(\Gamma)$ ist, wie man im Beispiel 2.4.1 erkennen kann. Die Vielfachheit des Kreises C_1 ist per Definition

$$m(C_1) = |v_1^{G_{(C_1^-)}}| = |\{v_1, w_1\}| = 2,$$

aber die Anzahl von Kreisen, die kongruent zu C unter der Aktion des Stabilisators $G_{(C^-)}$ sind und disjunkte positive Endstücke haben, ist nur eins. Das bedeutet, dass C nicht G -kongruent zu irgendeinem anderen Kreis ist, der das gleiche negative Endstück wie C , aber ein zu C disjunktes positives Endstück hat.

Bemerkung 2.4.16. In einem endlichen Graphen ist jeder konsistente Kreis endlich. Endliche konsistente Kreise haben Vielfachheit 1. Sei $C = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit $v_i = v_{i+r}$ für gewisse $r \in \mathbb{N}$ ein konsistenter Kreis. Sei $C^- = (\dots, v_1, \dots, v_r)$ und $C^+ = (v_1, \dots, v_r, \dots)$. Weil C^- den Knoten v_1 stabilisiert, ist $v_1^{G(C^-)} = v_1$. Daher ist $m(C) = |v_1^{G(C^-)}| = 1$.

Theorem 2.4.17. *Sei Γ ein regulärer Graph und sei $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ eine Gruppe, die abgeschlossen in $\text{Aut}(\Gamma)$ ist und knotentransitiv auf Γ agiert. Die Menge von G -Kongruenzklassen wird mit $\mathcal{C}$ bezeichnet. Dann gilt*

$$\sum_{O \in \mathcal{C}} m(O) = \deg(\Gamma).$$

Die Vielfachheit jedes endlichen konsistenten Kreises ist 1 und daher gilt diese Verallgemeinerung des Theorems von Conway auch für endliche Graphen.

2.5 Der Baum konsistenter Kreise

In diesem Kapitel werden Lemmata über konsistente Wege, die wir für die Konstruktion des sogenannten Baumes konsistenter Kreise und somit für den Beweis unseres Hauptsatzes benötigen werden, eingeführt. Die Notationen in diesem Kapitel haben wir gleich wie in Kapitel 3 in [2] gewählt. Lemma 2.5.6 ist ähnlich zu Lemma 3.3 in [2]. Die Methode der Konstruktion des Baumes und Theorem 2.5.21 sind Verallgemeinerungen auf unendliche Graphen von der Konstruktion des Baumes in Kapitel 4 in [2] und Lemma 4.1 in [2]. In Lemma 2.5.22 finden sich zitierte Teile aus Theorem 5.1 in [2].

Lemma 2.5.1 (Lemma 3.1 in [2]). *Sei Γ ein Graph, $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ eine Automorphismengruppe und $\alpha = (v_0, v_1, \dots, v_r)$ ein G -konsistenter Weg in Γ . Dann ist $\text{Sh}_G(\alpha)$ invariant unter der Konjugation der Elemente aus $G_{(\alpha)}$.*

Beweis. Sei g ein Shuntautomorphismus für α und sei h ein Element von $G_{(\alpha)}$. Für jedes $i \in \{0, \dots, r-1\}$ gilt

$$v_i^{g^h} = v_i^{h^{-1}gh} = v_i^{gh} = v_{i+1}^h = v_{i+1}.$$

Daher ist g^h auch ein Shuntautomorphismus, der in G enthalten ist. □

Definition 2.5.2. Sei $\alpha = (w_0, w_1, \dots, w_r)$. Für $r \geq 1$ definieren wir

$$\hat{\alpha} = (w_0, w_1, \dots, w_{r-1}).$$

Für einen Graphen Γ , eine Untergruppe $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ und für einen G -konsistenten Weg $\alpha = (w_0, w_1, \dots, w_r), r \geq 1$ sei

$$R_G(\alpha) = w_r^{G_{(\hat{\alpha})}} \tag{2.1}$$

der Orbit des letzten Knotens von α unter dem Stabilisator von $\hat{\alpha}$.

Wir definieren die Menge

$$X_G(\alpha) = \{u^g \mid u \in R_G(\alpha), g \in \text{Sh}_G(\alpha)\}. \tag{2.2}$$

Lemma 2.5.3 (Kapitel 3 in [2]). *Die Menge $X_G(\alpha)$ ist unabhängig von der Wahl des Shunts $g \in \text{Sh}_G(\alpha)$. Daher kann sie auch so geschrieben werden:*

$$X_G(\alpha) = \{w_r^{hg} \mid h \in G_{(\hat{\alpha})}, g \in \text{Sh}_G(\alpha)\}. \tag{2.3}$$

Beweis. Angenommen $g_1, g_2 \in G$ sind zwei verschiedene Shunts für α . Wir betrachten die Mengen

$$X_G^1(\alpha) = \{u^{g_1} \mid u \in R_G(\alpha)\} \text{ und } X_G^2(\alpha) = \{u^{g_2} \mid u \in R_G(\alpha)\}.$$

Wenn $v \in X_G^2(\alpha)$, dann existiert ein Element $h \in G_{(\hat{\alpha})}$, sodass $v = w_r^{hg_2}$, weil $w_r^h \in R_G(\alpha)$. Aber dann ist

$$v = w_r^{hg_2} = w_r^{hg_2g_1^{-1}g_1} = u^{g_1}, \text{ wobei } u = w_r^{hg_2g_1^{-1}}.$$

Weil g_1 und g_2 Shunts für α sind, ist

$$\hat{\alpha}^{g_2g_1^{-1}} = (w_1, \dots, w_r)^{g_1^{-1}} = (w_0, \dots, w_{r-1}) = \hat{\alpha}.$$

Es folgt, dass $g_2g_1^{-1} \in G_{(\hat{\alpha})}$ und somit gilt $hg_2g_1^{-1} \in G_{(\hat{\alpha})}$. Daraus folgt $w_r^{hg_2g_1^{-1}} = u \in R_G(\alpha)$ und daher ist $v \in X_G^1$ und $X_G^2 \subseteq X_G^1$. Wir können das gleiche Argument verwenden, um zu zeigen, dass $X_G^1 \subseteq X_G^2$ und somit ist $X_G^1 = X_G^2$. $\square$

Die folgende Graphik wurde aus [1] entnommen.

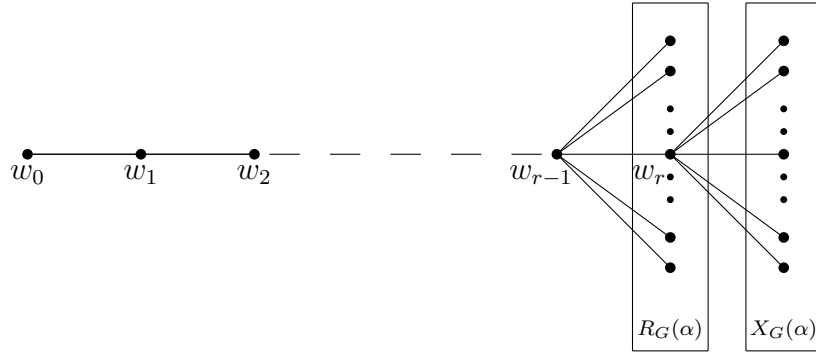


Abbildung 2.10

Lemma 2.5.4 (Lemma 3.2. in [2]). Sei Γ ein Graph, $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ eine Automorphismengruppe und $\alpha = (w_0, \dots, w_r)$ ein G -konsistenter Weg in Γ . Dann ist $X_G(\alpha)$ invariant unter der Aktion des Stabilisators $G_{(\alpha)}$.

Beweis. Sei $v \in X_G(\alpha)$ und $f \in G_{(\alpha)}$. Dann existieren nach der Definition in (2.3) Elemente $h \in G_{(\alpha)}$ und $g \in \text{Sh}_G(\alpha)$, sodass $v = w_r^{hg}$ und daher

$$v^f = w_r^{hgf} = w_r^{hff^{-1}gf} = w_r^{hfg^f}.$$

Ein Element von $G_{(\alpha)}$ stabilisiert auch $\hat{\alpha}$. Daher ist $hf \in G_{(\hat{\alpha})}$ und weil wegen Lemma 2.5.1 $g^f \in \text{Sh}_G(\alpha)$, impliziert (2.3), dass $v^f \in X_G(\alpha)$. $\square$

Definition 2.5.5. Sei $\alpha = (w_0, w_1, \dots, w_r)$ ein G -konsistenter Weg und sei w ein Knoten. Wenn $\beta = (w_0, w_1, \dots, w_r, w)$ auch ein G -konsistenter Weg ist, dann wird er als G -konsistente Erweiterung von α bezeichnet.

Lemma 2.5.6 (Lemma 3.3 in [2]). *Sei Γ ein Graph, $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ und $\alpha = (w_0, \dots, w_r)$ ein G -konsistenter Weg in Γ und sei $w \in V\Gamma$. Dann ist $w \in X_G(\alpha)$ genau dann, wenn $(w_0, w_1, \dots, w_r, w)$ konsistent bezüglich G ist. Die Anzahl G -konsistenter Erweiterungen von α ist*

$$|X_G(\alpha)| = |R_G(\alpha)|.$$

Der folgende Beweis ist dem Beweis von Lemma 3.3 in [2] ähnlich.

Beweis. Wenn $w \in X_G(\alpha)$, dann gilt $w = w_r^{hg}$ nach (2.3) für gewisse $h \in G_{(\hat{\alpha})}$ und gewisse Shuntautomorphismen g für α . Dann ist hg ein Shuntautomorphismus für $(w_0, w_1, \dots, w_r, w)$.

Andererseits, angenommen $(w_0, w_1, \dots, w_r, w)$ sei ein G -konsistenter Weg mit einem Shuntautomorphismus g' . Dann gilt $w = w_r^{g'}$ und weil $w_r \in R_G(\alpha)$, haben wir $w \in X_G(\alpha)$.

Für einen gewissen Shunt $g \in G$ sei die Menge $X_G(\alpha) = \{u^g \mid u \in R_G(\alpha)\}$. Wenn $u_1 \neq u_2 \in R_G(\alpha)$, dann ist $u_1^g \neq u_2^g$ für alle $u_1, u_2 \in R_G(\alpha)$. Daraus folgt

$$|X_G(\alpha)| = |R_G(\alpha)|.$$

□

Definition 2.5.7. Ein *Wurzelbaum* ist ein zusammenhängender Digraph T mit exakt einem Knoten ω vom Eingangsgrad 0, die *Wurzel von T* genannt, und mit der Eigenschaft, dass für jeden Knoten $v \in VT$ genau ein Weg von ω nach v existiert.

Bemerkung 2.5.8. Ein Wurzelbaum hat keine Kreise.

Für einen Knoten v werden wir einen Nachfolger von v mit v^+ notieren und einen Vorgänger mit v^- .

Bemerkung 2.5.9. In einem Wurzelbaum hat jeder Knoten, außer der Wurzel, exakt einen Vorgänger.

Definition 2.5.10. Ein *Blatt* eines Wurzelbaumes ist ein Knoten, der Ausgangsgrad 0 hat. Ein *innerer* Knoten eines Wurzelbaumes ist ein Knoten, der kein Blatt ist. Ein *maximaler Weg* in einem Wurzelbaum ist ein Weg, der in der Wurzel beginnt und entweder in einem Blatt endet oder unendlich ist. Die *Tiefe* eines Wurzelbaumes ist die Länge des längsten maximalen Weges.

Bemerkung 2.5.11. Ein Wurzelbaum mit einem unendlichen maximalen Weg hat unendliche Tiefe.

Conway hatte die Idee einen Wurzelbaum zu definieren, der all die Informationen über die Struktur von Kongruenzklassen konsistenter Kreise eines gegebenen Graphen zusammen mit einer gegebenen Automorphismengruppe in sich trägt (siehe Kapitel 4 in [2]).

Wir fixieren einen Graphen Γ , eine Gruppe $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ und einen Knoten $v \in V\Gamma$. Für einen Wurzelbaum T mit der Wurzel ω und gewissen $\nu \in VT$ sei α_ν ein eindeutiger Weg von ω nach ν .

Wir definieren die Funktionen $\iota : VT \rightarrow V\Gamma$ und $l : AT \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\iota(\omega) = v$, wobei ω die Wurzel in T ist. Für einen Weg $\alpha = (\nu_0, \dots, \nu_r)$ in T sei $\iota(\alpha) = (\iota(\nu_0), \dots, \iota(\nu_r))$ ein Weg in Γ . Wir definieren einen Wurzelbaum T mit der Wurzel ω und den Funktionen ι und l mit den folgenden Eigenschaften:

(T1) Für jedes $\nu \in VT$ ist $\iota(\alpha_\nu)$ ein G -konsistenter Weg in Γ .

(T2) Wenn $\iota(\alpha_\nu) = (v_0, \dots, v_r)$ für $\nu \in VT$ und $v_i = v_j$ für gewisse i, j ($0 \leq i < j \leq r$), dann $i = 0, j = r$ und ν ist ein Blatt von T .

(T3) Für $(\eta, \nu) \in AT$ gilt

$$l(\eta, \nu) = |R_G(\iota(\alpha_\nu))|.$$

(T4) Für jeden inneren Knoten $\nu \in VT$ und $\eta \in T^-(\nu)$ gilt

$$l(\eta, \nu) = \sum_{\xi \in T^+(\nu)} l(\nu, \xi).$$

Für zwei Knoten $\nu \in T$ und $v \in \Gamma$ mit $\iota(\nu) = v$ sagen wir, dass ν mit “ v ” gelabelt wird. Wir labeln auch einen Bogen in T mit seinem Bild unter der Funktion l .

Wir werden nun den Wurzelbaum T und die Funktionen ι und l rekursiv definieren, indem wir Tripel (T_r, ι_r, l_r) für $0 \leq r \leq s$ definieren, wobei s die Länge des längsten konsistenten Kreises in Γ ist. Wenn unendliche Kreise in Γ vorhanden sind, dann ist s unendlich. Der Baum T_r ist ein Wurzelbaum mit der Wurzel ω und der Tiefe r . Die Funktionen $\iota_r : VT_r \rightarrow V\Gamma$ und $l_r : AT_r \rightarrow \mathbb{N}$ erfüllen die folgenden Bedingungen:

(a) Für $r \geq 0$ gilt $T_r \leq T_{r+1}$ und T_{r+1} ist eine Erweiterung von T_r .

(b) Für $r \geq 0$ sind die Funktionen ι_r und l_r Einschränkungen von ι_{r+1} und l_{r+1} auf VT_r beziehungsweise AT_r .

(c) Die Tripel (T_r, ι_r, l_r) erfüllen (T1)–(T4).

Wegen Punkt (b) schreiben wir ι und l anstatt ι_r und l_r ($0 \leq r \leq s$).

Sei T_0 ein Wurzelbaum mit nur einem einzelnen Knoten ω , der mit $v_0 = \iota(\omega)$ gelabelt ist. Wir stellen fest, dass die Bedingungen (T1)–(T4) in diesem Fall erfüllt sind: $\iota(\omega) = v_0$ ist ein G -konsistenter Weg in Γ und ω ist ein Blatt, weil es keine Nachfolger hat. Die Bedingungen (T3) und (T4) sind trivialerweise erfüllt.

Für $r \geq 0$ konstruieren wir T_{r+1} folgendermaßen: Angenommen (T_r, ι, l) sei bereits definiert, sodass (T1)–(T4) erfüllt sind. Sei $\Lambda = \{\omega\}$, falls $r = 0$ und Λ sei die Menge aller Blättern $\nu \in T_r$, wobei $\iota(\nu) \neq v_0$, falls $r \geq 1$. Wenn ein Knoten $\nu \in T_r$, der nicht die Wurzel ist, mit v_0 gelabelt ist, dann ist ν ein Blatt von T . Wenn $\Lambda = \emptyset$, das heißt, dass alle Blätter in T_r schon mit v_0 gelabelt sind, dann ist $s = r$ und $T = T_s$. Somit ist die Konstruktion beendet.

Ansonsten definieren wir den Baum T_{r+1} und erweitern die Funktion ι und l auf T_{r+1} wie folgt. Für jedes $\mu \in \Lambda$ existiert ein eindeutiger Weg $\alpha_\mu = (\mu_0, \dots, \mu_r)$ in T_r von $\mu_0 = \omega$ nach $\mu_r = \mu$. Weil nach der Induktionsvoraussetzung $\iota(\alpha_\mu)$ ein G -konsistenter Weg in Γ ist, agiert der Stabilisator $G_{(\iota(\alpha_\mu))}$ auf der Menge

$$\{\iota(\mu_r)^g \mid g \in \text{Sh}_G(\iota(\alpha_\mu))\} = X_G(\iota(\alpha_\mu))$$

nach Lemma 2.5.4. Wir können eine Menge $\{w_1, \dots, w_m\}$ von Repräsentanten von $G_{(\iota(\alpha_\mu))}$ -Orbits auf $X_G(\iota(\alpha_\mu))$ wählen. Für jeden Repräsentanten w_i erstellen wir einen “neuen” Knoten μ_i^+ , der ein Nachfolger von μ ist, und einen “neuen” Bogen (μ, μ_i^+) von T_{r+1} . Weiters definieren wir $\iota(\mu_i^+) = w_i$ und $l(\mu, \mu_i^+)$ sei die Größe des w_i enthaltenden $G_{(\iota(\alpha_\mu))}$ -Orbits.

Nun wollen wir zeigen, dass T_{r+1} , $r \geq 1$ mit der Induktionsvoraussetzung (T1)–(T4) erfüllt.

Wir zeigen, dass (T4) in T_{r+1} für $\nu = \mu$ gilt: die Menge $\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq X_G(\iota(\alpha_\mu))$ besteht aus den Repräsentanten der $G_{(\iota(\alpha_\mu))}$ -Orbits auf $X_G(\iota(\alpha_\mu))$. Für $1 \leq i \leq m$ sei $\iota(\alpha_{w_i}) = (\iota(\mu_0), \dots, \iota(\mu_r), w_i)$. Weil

$$R_G(\iota(\alpha_{w_i})) = w_i^{G_{(\iota(\alpha_\mu))}}$$

der Orbit von w_i unter der Aktion vom Stabilisator $G_{(\iota(\alpha_\mu))}$ ist, folgt, dass

$$\sum_{\xi \in T^+(\mu)} l(\mu, \xi) = \sum_{1 \leq i \leq m} l(\mu, w_i) = \sum_{1 \leq i \leq m} |R_G(\iota(\alpha_{w_i}))| = |X_G(\iota(\alpha_\mu))|.$$

Die Bedingung (T3) gilt in T_{r+1} , vorausgesetzt sie gilt für alle “neuen” Bögen $(\eta, \nu) = (\mu, \mu_i^+)$. Weiters ist wegen der obigen Konstruktion $l(\mu, \mu_i^+)$

die Größe des $G_{(\iota(\alpha_\mu))}$ -Orbits $w_i^{G_{(\iota(\alpha_\mu))}}$, wobei $w_i = \iota(\mu_i^+)$. Weil

$$\iota(\alpha_\mu) = \widehat{\iota(\alpha_{\mu_i}^+)},$$

stimmt $w_i^{G_{(\iota(\alpha_\mu))}}$ mit $R_G(\iota(\alpha_{\mu_i}^+))$ nach (2.1) überein. Somit ist

$$l(\mu, \mu_i^+) = |R_G(\iota(\alpha_{\mu_i}^+))|$$

und (T3) gilt in T_{r+1} .

Um zu zeigen, dass (T1) in T_{r+1} gilt, sei ν ein Knoten in T_{r+1} und sei $\alpha_\nu = (\nu_0, \dots, \nu_t)$. Wenn $\nu = \nu_t \in VT_r$, dann gilt (T1) wegen der Induktionsvoraussetzung. Wenn $\nu = \mu_i^+$ für gewisse $\mu \in \Lambda$ und $i \in \{1, \dots, m\}$, dann folgt wegen der Definition von T_{r+1} , dass

$$\mu_i^+ \in X_G(\iota(\alpha_\mu)).$$

Somit ist $\iota(\alpha_{\mu_i}^+)$ wegen Lemma 2.5.6 G -konsistent.

Die Bedingung (T2) gilt in T_{r+1} , $r \geq 2$, weil $\iota(\alpha_\mu)$ ein G -konsistenter Weg in Γ für $v_i \neq v_j$ ist, ausgenommen für $(i, j) = (0, r)$, dann ist $\iota(\nu) = v_r = v_0$ und es folgt, dass ν ein Blatt von T ist.

Bemerkung 2.5.12. Es folgt, dass der Baum T mindestens Tiefe 2 und höchstens Tiefe s hat, was der Länge des längsten konsistenten Kreises in Γ entspricht. Die Tiefe eines Baumes konsistenter Kreise eines endlichen Graphen ist endlich, während die Tiefe eines zu einem unendlichen Graphen gehörigen Baumes unendlich ist, falls unendlich lange konsistente Kreise im Graphen existieren. In jedem Schritt der Konstruktion erhöht sich die Tiefe des Baumes um 1. Dies impliziert, dass der Baum nach höchstens s Schritten fertig sein muss. Das heißt, falls s unendlich ist, ist die Konstruktion niemals beendet. Wenn $T = T_r$ der letzte Baum, der konstruiert werden kann, ist, dann wird das Tripel (T_r, ι_r, l) *Baum konsistenter Kreise von Γ bezüglich G und v_0* genannt. Die Konstruktion eines endlichen Baumes ist fertig, wenn alle Blätter mit v_0 gelabelt sind.

Bemerkung 2.5.13. Aus (T2) folgt, dass für jeden Knoten ν in T , der nicht die Wurzel ist, $\iota(\nu) = v_0$ genau dann, wenn ν ein Blatt von T ist.

Lemma 2.5.14 (Teil (ii) von Lemma 4.1 in [2]). *Sei (T, ι, l) ein Baum konsistenter Kreise eines Graphen Γ bezüglich $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ und eines Knotens v . Wenn ν ein Blatt von T ist und $\eta \in T^-(\nu)$, dann ist $l(\eta, \nu) = 1$.*

Beweis. Nach Bemerkung 2.5.13 ist $\iota(\nu) = v$. Sei $\eta = \nu^-$ ein Vorgänger von ν und sei α_ν ein eindeutiger Weg in T von der Wurzel ω zum Blatt ν . Dann folgt aus (T3) und (2.1), dass

$$l(\eta, \nu) = |R_G(\iota(\alpha_\nu)F)| = |v^{G_{(\iota(\alpha_\nu))}}| = 1.$$

□

Bemerkung 2.5.15. Wenn $l(\nu_i, \nu_{i+1}) = 1$ für einen Bogen $(\nu_i, \nu_{i+1}) \in T$, dann hat der zugehörige Weg $(\iota(\nu_0), \dots, \iota(\nu_i), \iota(\nu_{i+1}))$ eine eindeutige G -konsistente Erweiterung.

Es bietet sich an, die Konstruktion des Weges $(\omega, \dots, \nu_i, \nu_{i+1})$ im Baum T zu beenden, wenn der letzte Bogen (ν_i, ν_{i+1}) mit 1 gelabelt ist.

Andererseits, falls ein Weg $(v_0, \dots, v_{r-1}, v_r)$ im Graph Γ eine eindeutige G -konsistente Erweiterung hat, dann wird der Bogen im Baum, der zum Bogen (v_{r-1}, v_r) zugehörig ist, mit 1 gelabelt.

In endlichen Graphen können wir der Einfachheit halber die Konstruktion des Baumes beenden, wenn die letzten Bögen (ν^-, ν) für jedes Blatt $\nu \in \Lambda$ mit 1 gelabelt sind.

Lemma 2.5.16. *Der Baum konsistenter Kreise hat eine endliche Anzahl von Wegen maximaler Länge.*

Beweis. Weil Γ lokal endlich ist, hat der Knoten $v_0 \in \Gamma$ endlich viele Nachbarn. Daher ist $l(\omega, \omega^+)$ endlich. Sei (η, ν) ein Bogen in T . Nach (T4) kann ν höchstens $l(\eta, \nu)$ Nachfolger haben. In jedem Schritt der Konstruktion können dem Baum nur endlich viele “neue” Bögen hinzugefügt werden. Also kann der Baum nur endlich viele Wege maximaler Länge besitzen. $\square$

Bemerkung 2.5.17. Es folgt, dass für jeden unendlichen Weg $\alpha = (v_0, v_1, v_2, \dots)$ in T ein minimaler Index N_α existiert, sodass $l(v_i, v_{i+1}) = l(v_{i+1}, v_{i+2})$ für alle $i \geq N_\alpha$ gilt. Sei $N = \max_\alpha \{N_\alpha\}$. Der Einfachheit halber können wir die Konstruktion des Baumes mit T_N beenden.

Beispiel 2.5.18. Nun wollen wir einen Baum konsistenter Kreise am Beispiel des Ikosaeders in Abbildung 2.1 konstruieren.

Wir fixieren den Bogen $(1, 2)$ im Graphen und labeln den ersten Bogen im Baum T mit $(1, 2)$. Die Bilder des Bogens $(1, 2)$ im Graphen unter seinen Shunts sind:

$$(2, 1), (2, 3), (2, 10), (2, 9), (2, 8).$$

Wir labeln den Bogen $(1, 2)$ in T mit 5, was der Anzahl dieser Bilder entspricht.

Die Menge der Bilder des Knotens 2 unter seinen Shunts ist $\{1, 3, 10, 9, 8\}$ und die Orbits dieser Menge unter dem Stabilisator von $(1, 2)$ sind $\{1\}, \{3, 10\}$ und $\{8, 9\}$. Aus jedem Orbit wählen wir einen Repräsentanten aus, zum Beispiel 1, 3 und 9. Für jeden Repräsentanten erschaffen wir einen neuen Knoten und einen neuen Bogen in T . Die Größe des Orbits, der 9 enthält, ist 2, also ist $l(2, 9) = 2$. Die Größe des Orbits, der 3 enthält, ist auch 2, also ist $l(2, 3) = 2$ und $l(2, 1) = 1$. Daher labeln wir die neuen Bögen mit 2, 2 und 1.

Die Bilder des Knotens 9 im Graphen unter den Shunts des Weges $(1, 2, 9)$ sind die Knoten 1 und 3. Sie gehören zu verschiedenen Orbits unter der Aktion des Stabilisators von $(1, 2, 9)$. Somit hat der Knoten 9 im Baum zwei Nachfolger, die mit 1 beziehungsweise 3 gelabelt werden. Wir konstruieren zwei Bögen $(9, 1)$ und $(9, 3)$ mit $l(9, 1) = 1$ beziehungsweise $l(9, 3) = 1$. Die Bilder des Knotens 3 unter dem Shunt des Weges $(1, 2, 3)$ sind die Knoten 11 und 4. Diese sind nicht im gleichen Orbit unter der Aktion des Stabilisators von $(1, 2, 3)$. Somit kreieren wir zwei neue Knoten und zwei Bögen mit $l(3, 4) = 1$ und $l(3, 11) = 1$.

Mit dem dadurch erhaltenen Baum können wir die Konstruktion beenden, weil jedes Blatt ν in T bereits $l(\nu^-, \nu) = 1$ hat, wobei ν^- der Vorgänger von ν ist.

Es ergeben sich folgende Zusammenhänge zwischen Wegen im Baum und Orbits konsistenter Kreise im Graphen:

- Der Weg $(1, 2, 9, 1)$ im Baum gehört zu dem Orbit, der den Kreis $[1, 2, 9]$ enthält.
- Der Weg $(1, 2, 9, 3)$ im Baum gehört zu dem Orbit konsistenter Kreise, der $[1, 2, 9, 3, 11, 4, 5, 12, 6, 8]$ enthält, welcher isomorph zum Kreis $[1, 9, 2, 3, 10, 4, 12, 5, 6, 7]$ ist (siehe Abbildung 2.1).
- Der Weg $(1, 2, 1)$ gehört zu dem Orbit trivialer Kreise im Graphen.
- Der Weg $(1, 2, 3, 11)$ gehört zu dem Orbit, der $[1, 2, 3, 11, 7]$ enthält, welcher isomorph zu $[1, 2, 10, 12, 6]$ ist (siehe Abbildung 2.1).
- Der Weg $(1, 2, 3, 4)$ gehört zu dem Orbit, der $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$ enthält.

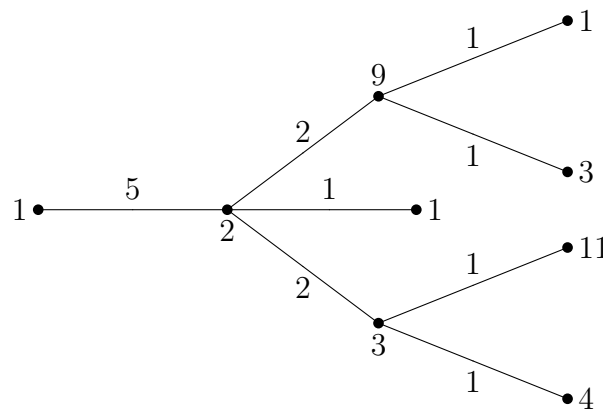


Abbildung 2.11: Baum konsistenter Kreise des Ikosaeders

Beispiel 2.5.19. Wir wollen einen Baum konsistenter Kreise des unendlichen Graphen “Unendlicher $K_{2,2}$ ” in Abbildung 2.9 konstruieren. Wir beginnen mit dem Bogen $(2, 3)$. Die Größe des Orbits des Knotens 3 unter dem Stabilisator des Knotens 2 ist 4. Somit gibt es 4 Bilder von $(2, 3)$ unter seinen Shunts: $(3, 2), (3, 4), (3, 7)$ und $(3, 9)$. Also wird der erste Bogen im Baum mit 4 gelabelt. Die Bögen $(3, 4)$ und $(3, 9)$ sind im gleichen Orbit unter der Aktion des Stabilisators von $(2, 3)$, also ist $l(3, 4) = 2$. Im Baum werden die Bögen $(3, 2)$ und $(3, 7)$ mit 1 gelabelt und der Bogen $(3, 4)$ mit 2.

Somit ergeben sich folgende Zusammenhänge:

- Der Weg $(2, 3, 2)$ gehört zum Orbit trivialer Kreise im Graphen.
- Der Weg $(2, 3, 7)$ gehört zum Orbit des konsistenten Kreises $[2, 3, 7, 8]$.
- Der Weg $(2, 3, 4)$ gehört zum Orbit konsistenter Doppelstrahlen, die Vielfachheit 2 haben.

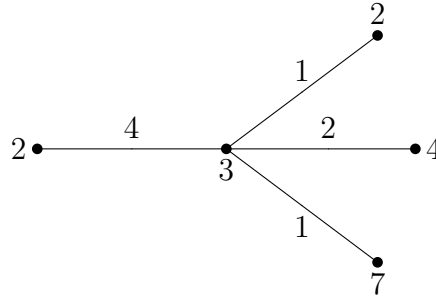


Abbildung 2.12: Baum konsistenter Kreise des Graphen “Unendlicher $K_{2,2}$ ”

Beispiel 2.5.20. Die folgende Graphik zeigt den Baum konsistenter Kreise des Graphen “ $K_{4,4}$ ” in Abbildung 2.3. Wir fixieren den Knoten $v = 1$ im Graphen und labeln die Wurzel in T mit 1. Der Knoten v hat 4 Nachbarn. Die Bögen $(1, 2), (1, 4), (1, 6)$ und $(1, 8)$ sind G_v -kongruent.

Also ist $R_G((1, 2)) = \{2, 4, 6, 8\}$ und hat 4 Elemente. Wir wählen einen Repräsentanten aus der Menge $R_G((1, 2))$, zum Beispiel den Knoten 2 und kreieren einen neuen Knoten in T , der mit 2 gelabelt ist, und einen neuen Bogen $(1, 2)$, der mit 4 gelabelt ist. Somit ist der Baum T_1 fertig. Wir wollen nun T_2 konstruieren. Die Menge $X_G((1, 2)) = \{1, 3, 5, 7\}$ spaltet sich in zwei Orbits, $\{1\}$ und $\{3, 5, 7\} = R_G((1, 2, 3))$. Wir erzeugen zwei neue Knoten in T_2 , die mit 1 und 3 gelabelt sind, und zwei neue Bögen, nämlich $(2, 1)$, der mit 1 gelabelt ist und $(2, 3)$, der mit 3 gelabelt ist, welches der Größe von $R_G((1, 2, 3))$ entspricht. Um T_3 zu konstruieren, erweitern wir den Weg $(1, 2, 3)$ im Graphen mit einem Knoten, der ein Element von $X_G((1, 2, 3)) = \{4, 6, 8\}$ ist.

Wir erschaffen einen neuen Knoten, Nummer 4, welcher ein Repräsentant von $X_G((1, 2, 3))$ ist, und einen neuen Bogen $(3, 4)$, der mit 3 gelabelt ist.

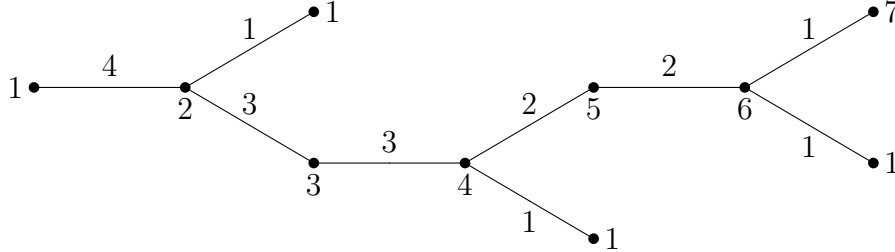


Abbildung 2.13: Baum konsistenter Kreise des “ $K_{4,4}$ ”

Für einen Weg $\alpha = (v_0, v_1, \dots)$ und ein $i \in \{0, \dots, n\}$ bezeichnen wir mit $\alpha[i] = (v_0, \dots, v_i)$ den Weg bis zum Knoten mit Index i .

Theorem 2.5.21. *Sei G abgeschlossen in $\text{Aut}(\Gamma)$ und sei (T, ι, l) ein Baum konsistenter Kreise eines Graphen Γ bezüglich G und v . Dann existiert eine bijektive Korrespondenz zwischen den maximalen Wegen in T , die in der Wurzel beginnen, und den G_v -Kongruenzklassen G -konsistenter Kreise in Γ , die in v beginnen.*

Der folgende Beweis ist an den Beweis von Lemma 4.1 in [2] angelehnt, mit dem Unterschied, dass wir auf unendliche Graphen verallgemeinern.

Beweis. Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller maximalen Wegen in T , die in der Wurzel starten und sei $\mathcal{C}$ die Menge von G_v -Kongruenzklassen von G -konsistenten Kreisen in Γ , die in v beginnen. Wir definieren ein Paar von Funktionen $\gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ und $\delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ und zeigen, dass eine Funktion die Inverse der anderen ist.

Die Funktion γ sei folgendermaßen definiert: Für einen Weg $\beta \in \mathcal{B}$ sei $\gamma(\beta)$ das Element von $\mathcal{C}$, das $\iota(\beta)$ enthält. Wenn β endlich ist, dann ist $\beta = \alpha_\nu$ für ein Blatt $\nu \in T$ und somit $\iota(\nu) = v$. Also ist der Weg $\iota(\alpha_\nu)$ geschlossen und startet in v . Er ist G -konsistent wegen (T1). Falls $\beta = (\nu_0, \nu_1, \dots)$ ein unendlicher maximaler Weg ist, dann werden wir zeigen, dass $\iota(\beta)$ ein G -konsistenter Strahl ist.

Für gewisse $n \in \mathbb{N}$ ist der Weg $\iota(\beta[n])$ konsistent wegen (T1). Die Menge aller Shunts für $\iota(\beta[n])$ ist

$$\begin{aligned} \text{Sh}_G(\beta[n]) &= G_{(\iota(\nu_0), \dots, \iota(\nu_n)), (\iota(\nu_1), \dots, \iota(\nu_{n+1}))} = \\ &= \{g \in G \mid g(\iota(\nu_i)) = \iota(\nu_{i+1}) \text{ für alle } 0 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Diese Menge ist kompakt wegen Lemma 2.4.10 für alle n . Weil

$$\text{Sh}_G(\beta[i+1]) \subseteq \text{Sh}_G(\beta[i])$$

für alle i , ist die Folge $(\text{Sh}_G(\beta[i]))_{i \in \mathbb{N}}$ eine absteigende Folge kompakter Mengen. Deswegen und weil der Durchschnitt einer absteigenden Folge kompakter Mengen nicht leer ist, existiert ein Element

$$g \in \bigcap_{n=0}^{\infty} (\text{Sh}_G(\beta[i]))_{i \in \mathbb{N}}.$$

Dieses g ist ein Shunt für $\iota(\beta)$. Somit ist der Strahl $\iota(\beta)$ konsistent. Nach Lemma 2.4.12 existiert ein eindeutiger Orbit konsistenter Kreise, der $\iota(\beta)$ enthält.

Die Funktion $\delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ sei folgendermaßen definiert: Für ein Element $O \in \mathcal{C}$ sei O der Orbit G_v -kongruenter G -konsistenter Kreise und $\alpha \in O$ sei ein G -konsistenter Kreis in Γ , der den Knoten v enthält.

Wenn $\alpha = (v_0, v_1, \dots, v_r)$, $v_0 = v_r = v$, ein endlicher Kreis der Länge r ist, dann definieren wir rekursiv eine Folge $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_r$ von Knoten in T und G -konsistenten Kreisen $\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r)}$, sodass die folgenden Bedingungen (P1) und (P2) für jedes $0 \leq s \leq r$ gelten.

Für einen unendlichen konsistenten Kreis sei $\alpha = (v_0, v_1, v_2, \dots)$ ein positives Endstück, das in $v_0 = v$ beginnt. Wir definieren eine unendliche Folge $\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots$, sodass für jedes $s \in \{0, 1, 2, \dots\}$ die folgenden Bedingungen gelten:

- (P1) Der Weg $\alpha^{(s)}$ ist G -konsistent in Γ und G_v -kongruent zu α .
- (P2) Die Folge $(\nu_0, \dots, \nu_s)$ ist ein Weg in T und $\iota(\nu_i) = \alpha^{(s)}[i]$ für jedes $i \in \{0, \dots, s\}$. Das heißt, dass $\alpha^{(s-1)}$ und $\alpha^{(s)}$ in den ersten $s-1$ Knoten übereinstimmen.

Wir werden diese zwei Bedingungen mittels Induktion beweisen:

Für $s = 0$ sei $\nu_0 = \omega$ und $\alpha^{(0)} = \alpha$. Der Kreis $\alpha^{(0)} = \alpha$ ist G_v -kongruent zu α , deswegen gilt (P1) trivialerweise und (P2) gilt, weil (v_0) ein Weg in T ist und $\iota(\nu_0) = \alpha^{(0)}[0] = \alpha[0] = v_0$.

Induktionsvoraussetzung: Angenommen für gewisse t kleiner als die Länge von α sind die Knoten $\nu_0, \dots, \nu_{t-1}$ und die Wege $\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(t-1)}$ bereits definiert, sodass (P1) und (P2) für alle $s \in \{0, \dots, t-1\}$ erfüllt sind. Dann sei

$$\alpha^* = (\iota(\nu_0), \dots, \iota(\nu_{t-1}))$$

der Weg in Γ , der aus den ersten t Knoten von $\alpha^{(t-1)}$ besteht und $u = \alpha^{(t-1)}[t]$ sei der $(t+1)$ -te Knoten von $\alpha^{(t-1)}$. Der Weg $\alpha^{(t-1)}$ ist G -konsistent nach (T1). Also ist die Erweiterung von α^* mit u auch G -konsistent und nach Lemma 2.5.6 haben wir $u \in X_G(\alpha^*)$. Nach der Konstruktion von T folgt, dass jeder Nachfolger von ν_{t-1} in T eindeutig zu einem Element aus den $G_{(\alpha^*)}$ -Orbits von $X_G(\alpha^*)$ gehört. Also existiert hier ein Knoten in $\nu_t \in \Gamma^+(\nu_{t-1})$, sodass u ein Element des $G_{(\alpha^*)}$ -Orbits von $\iota(\nu_t)$ ist. Daher existiert ein $g \in G_{(\alpha^*)}$, sodass $u^g = \iota(\nu_t)$ und $\alpha^{(t)} = (\alpha^{(t-1)})^g$. Weil $v \in \alpha^*$, ist der Stabilisator $G_{(\alpha^*)}$ eine Teilmenge von G_v . Der Kreis $\alpha^{(t)}$ ist $G_{(\alpha^*)}$ -kongruent zu $\alpha^{(t-1)}$ und somit sind sie G_v -kongruent. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt, $\alpha^{(t-1)}$ ist G_v -kongruent zu α . Daher ist $\alpha^{(t)}$ auch G_v -kongruent zu α und somit G -konsistent. Also ist (P1) für $s = t$ erfüllt.

Weil ν_t ein Nachfolger von ν_{t-1} ist, ist die Folge $(\nu_0, \dots, \nu_{t-1}, \nu_t)$ ein Weg in T .

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt

$$(\alpha^{(t-1)}) = \iota(\nu_i) \text{ für } i \in \{0, \dots, t-1\},$$

und $\alpha^{(t)} = (\alpha^{(t-1)})^g$ für ein Element $g \in G_{(\alpha^*)}$. Daher gilt

$$\iota(\nu_i) = \alpha^{(t-1)}[i] = \alpha^{(t)}[i] \text{ für } i \in \{0, \dots, t-1\}.$$

Weil $\alpha^{(t)}[t] = \iota(\nu_t)$, gilt auch $\alpha^{(t)}[i] = \iota(\nu_i)$ für $0 \leq i \leq t$. Somit ist (P2) für $s = t$ erfüllt.

Mit dem obigen rekursiven Verfahren haben wir einen Weg

$$\alpha_T = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_r) \text{ beziehungsweise } \alpha_T = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots)$$

konstruiert. Wir erhalten aus (P1) und (P2) das Ergebnis, dass $\iota(\alpha_T)$ konsistent in Γ und G_v -kongruent zu α ist. Speziell wenn α geschlossen ist und in v beginnt, ist auch $\iota(\alpha_T)$ geschlossen und beginnt in v . Falls α unendlich ist, dann ist $\alpha^{(s)}$ auch unendlich für alle $s \geq 1$ und α_T ist ein unendlicher maximaler Weg in T . Daher können wir das Bild unter δ der G_v -Kongruenzklasse α^{G_v} als den maximalen Weg α_T definieren. Es bleibt zu zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl des Repräsentanten von α^{G_v} abhängt.

Angenommen $\beta = \alpha^g$ für gewisse $g \in G_v$. Dann ist $\beta = (w_0, w_1, \dots)$ oder $\beta = (w_0, w_1, \dots, w_r)$ für $w_0 = w_r = v$. Sei $\beta_T = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ oder $\beta_T = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r)$ der Weg in T , der aus β auf gleiche Weise wie α_T aus α erhalten wird, dann gilt nach Definition $\delta(\beta) = \beta_T$. Falls $\mu_i = \nu_i$ für alle $i \geq 0$, dann bildet δ die G_v -Kongruenzklasse von α und β auf dasselbe Element ab. Daher nehmen wir an, dass ein Index $k \geq 1$ existiert, sodass $\mu_k \neq \nu_k$. Man bemerke, dass $k \geq 1$, weil $\mu_0 = \omega = \nu_0$ und k ist kleiner

gleich der Länge von β_T . Sei $t \in \{1, \dots, k\}$ die kleinste ganze Zahl, sodass $\mu_t \neq \nu_t$. Weil $\alpha[i] = \iota(\nu_i) = \iota(\mu_i) = \beta[i]$ für alle $i \in \{0, \dots, t-1\}$, folgt, dass der Automorphismus g , der α nach β abbildet, zu dem Stabilisator $G_{(\alpha^*)}$ des Weges $\alpha^*[t-1]$ gehört. Das heißt, dass v_t und w_t im gleichen $G_{(\alpha^*)}$ -Orbit sind. Nach der Konstruktion von T existiert ein eindeutiger Knoten ν_t in T , sodass $\alpha[t]$ kongruent bezüglich $G_{(\alpha^*)}$ zu $\iota(\nu_t)$ ist, und es existiert ein eindeutiger Knoten μ_t in T , sodass $\beta[t]$ im $G_{(\alpha^*)}$ -Orbit von $\iota(\mu_t)$ ist. Weil v_t und w_t in gleichen $G_{(\alpha^*)}$ -Orbit sind, folgt, dass $\nu_t = \mu_t$, was unserer Annahme über t widerspricht. Dies zeigt, dass δ eine wohldefinierte Funktion von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$ ist.

Nun fehlt uns noch zu zeigen, dass $\gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ und $\delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ invers zueinander sind. Jeder Weg $\beta \in \mathcal{B}$ ist das Bild unter δ der G_v -Kongruenzklasse von $\iota(\beta)$, wobei β ein eindeutiger Weg in T ist, der in der Wurzel ω beginnt. Weil δ surjektiv ist und γ ihr Inverses ist, ist es ihr Linksinverses. Sei α^{G_v} ein Element von $\mathcal{C}$ und sei $\alpha_T = (\nu_0, \nu_1, \dots)$ der zugehörige Weg in T . Nach der Definition von δ gilt $\delta(\alpha^{G_v}) = \alpha_T$. Weil nach der Definition $\gamma(\alpha_T)$ jenes Element von $\mathcal{C}$ ist, das $\iota(\alpha_T)$ enthält, folgt, dass

$$\gamma(\delta(\alpha^{G_v})) = \gamma(\alpha_T) = \iota(\alpha_T)^{G_v}.$$

□

Das folgende Lemma und sein Beweis besteht aus Teilen des Beweises des Theorems 5.1 in [2].

Lemma 2.5.22. *Sei Γ ein Graph, $v \in \Gamma$ ein Knoten und G ein Gruppe, die knotentransitiv auf Γ agiert. Es gibt einen bijektiven Zusammenhang zwischen der Menge $\mathcal{C}_v$ der G_v -Kongruenzklassen G -konsistenter Wege in Γ , die in v beginnen und der Menge $\mathcal{C}$ der G -Kongruenzklassen G -konsistenter Kreise in Γ .*

Beweis. Sei $\alpha = (\dots, v_{-1}, v, v_1, \dots)$ oder $\alpha = (v, v_1, \dots, v_{r-1}, v)$ ein konsistenter Kreis in Γ . Wir definieren eine Funktion

$$\phi : \mathcal{C}_v \rightarrow \mathcal{C} \text{ mit } \phi(\alpha^{G_v}) = \alpha^G.$$

Diese Funktion ist wohldefiniert, das heißt unabhängig von der Wahl des Repräsentanten aus α^{G_v} . Weil G knotentransitiv ist, hat jedes Element aus $\mathcal{C}$ einen Repräsentanten der Form α , wobei α den Knoten v enthält. Somit ist ϕ surjektiv. Nun wollen wir zeigen, dass ϕ auch injektiv ist. Angenommen $\phi(\alpha^{G_v}) = \phi(\beta^{G_v})$ für zwei G -konsistente Wege $\alpha = (\dots, v_{-1}, v_0, v_1, \dots)$ und $\beta = (\dots, w_{-1}, w_0, w_1, \dots)$, sodass $v_0 = w_0 = v$. Weil α und β zum selben G -Orbit gehören, existiert ein $g \in G$, sodass $\alpha^g = \beta$. Das heißt, dass

$$\alpha^g = (\dots, v_{-1}^g, v^g, v_1^g, \dots) = (\dots, w_{-1}, v, w_1, \dots) = \beta.$$

Es folgt, dass $v^g = v$ und somit $\alpha^{G_v} = \beta^{G_v}$. Dies zeigt, dass ϕ eine Bijektion ist. $\square$

Im Folgenden werden wir die verkürzte Version des Baumes konsistenter Kreise wie in Bemerkung 2.5.17 verwenden.

Lemma 2.5.23. *Sei T ein Baum konsistenter Kreise. Sei C ein konsistenter Kreis in Γ und sei ν_n das zugehörige Blatt in T . Außerdem sei $\alpha = (\nu_0, \dots, \nu_n)$ der eindeutige Weg von der Wurzel ν_0 zu dem Blatt ν_n . Dann gilt*

$$l(\nu_{n-1}, \nu_n) = m(C).$$

Beweis. Sei $C = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und $\iota(\alpha) = C[n] = (v_0, \dots, v_n)$ und $C[k] = (v_0, \dots, v_k)$ für $k \geq n$. Weil

$$l(\nu_{i-1}, \nu_i) = l(\nu_i, \nu_{i+1}) \quad \forall i \geq n,$$

folgt, dass

$$R_G(C[n]) = R_G(C[k]) \quad \forall k \geq n.$$

Sei g ein Shunt für C und sei $(C[k]^{g^{-k}})_{k \geq n}$ eine Folge von Wegen. Weil G abgeschlossen ist, konvergiert die Folge $(C[k]^{g^{-k}})_{k \geq n}$ nach $C^- = (v_i)_{i \leq 0}$. Für alle $k \geq n$ gilt

$$R_G(C[k]) = |v_k^{G_{(C[k-1])}}| = |v_1^{G_{(C[k-1]-k+1)}}| = |v_1^{G_{(C^-)}}| = m(C).$$

Somit ist

$$m(C) = R_G(C[n]) = l(\nu_{n-1}, \nu_n).$$

$\square$

Abschließend benötigen wir für den Beweis unseres Hauptsatzes folgendes Resultat.

Theorem 2.5.24. *Sei Γ ein regulärer Graph. Sei $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ eine Gruppe, die in $\text{Aut}(\Gamma)$ abgeschlossen ist und knotentransitiv auf Γ agiert. Sei $\mathcal{C}$ die Menge der Orbits G -konsistenter Kreise in Γ . Dann gilt*

$$\sum_{O \in \mathcal{C}} m(O) = \deg(\Gamma).$$

Beweis. Sei T der Baum konsistenter Kreise in Γ mit der verkürzten Konstruktion wie in Bemerkung 2.5.17. Sei L die Menge der Blätter in T und ω sei die Wurzel in T . Dann gilt nach (T4)

$$\sum_{\xi \in L} l(\xi^-, \xi) = \sum_{\xi \in T^+(\omega)} l(\omega, \xi),$$

wobei L die Menge der Blätter und ω die Wurzel in T ist.

Nach Lemma 2.5.23 gilt

$$\sum_{\xi \in L} l(\xi^-, \xi) = \sum_{O \in \mathcal{C}} m(O),$$

wobei $\mathcal{C}$ die Menge aller Orbits konsistenter Kreise ist. Weil $\sum_{\xi \in T^+(\omega)} l(\omega, \xi)$ die Summe der Größen der Orbits der Nachfolger eines fixierten Knotens unter seinem Stabilisator ist, ist sie gleich dem Grad des Graphen.

Somit gilt

$$\sum_{O \in \mathcal{C}} m(O) = \sum_{\xi \in L} l(\xi^-, \xi) = \sum_{\xi \in T^+(\omega)} l(\omega, \xi) = \deg(\Gamma).$$

□

Kapitel 3

Anwendung und Erweiterung

3.1 Der Diestel-Leader-Graph

Gegeben sei ein Paar unendlicher regulärer Bäume T_m und T_n für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$, wobei T_m den Grad $m + 1$ hat und T_n vom Grad $n + 1$ ist. Die Knoten seien in horizontalen Ebenen angeordnet. Diese Ebenen werden Horocycles $(H_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ genannt. Die Horocycles sind unendlich und für alle $i, j \in \mathbb{N}$ existiert ein Automorphismus des Graphen $T_{m,n}$, der H_i nach H_j abbildet.

Wir bezeichnen den Graphen, der aus T_n und T_m besteht, mit $T_{m,n}$. Teilgraphen von $T_{2,2}$ und $T_{2,3}$ sind in Abbildung 3.1 und Abbildung 3.3 dargestellt.

Ein Knoten im Diestel-Leader-Graphen $DL_{m,n}$ ist ein Paar von Knoten (u, v) , wobei $u \in T_n$ und $v \in T_m$. Zwei Knoten (u_1, v_1) und (u_2, v_2) in $DL_{m,n}$ sind genau dann benachbart, wenn $u_1 \sim u_2$ und $v_1 \sim v_2$.

Für jeden Knoten $(u, v) \in H_i$ in $DL_{m,n}$ hat der Knoten $u \in T_n$ einen Nachbarn in $H_{i-1} \in T_{m,n}$ und m Nachbarn in $H_{i+1} \in T_{m,n}$, und $v \in T_m$ hat n Nachbarn in $H_{i-1} \in T_{m,n}$ und einen in $H_{i+1} \in T_{m,n}$. Also existieren für einen Knoten (u, v) in H_i in $DL_{m,n}$ genau n Paare von Knoten in H_{i-1} und m Paare von Knoten in H_{i+1} , die zu (u, v) benachbart sind. Daher hat der Knoten (u, v) genau n Nachbarn in H_{i-1} und m Nachbarn in H_{i+1} . Somit hat $DL_{m,n}$ den Grad $m + n$.

Ein Automorphismus in $DL_{m,n}$ muss die Ordnung der Folge $(H_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von Horocycles entweder erhalten oder invertieren. Alle unendlichen konsistenten Kreise in $DL_{m,n}$ sind Doppelstrahlen $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, wobei für ein $k \in \mathbb{Z}$ die Knoten $v_i \in H_{i+k}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ sind. Ein Shunt für einen unendlichen konsistenten Kreis bildet H_i nach H_{i+1} für alle i ab.

Ein Flip eines unendlichen konsistenten Kreises ist in $DL_{m,n}$ nur dann ein möglicher Automorphismus, falls $m = n$, aber nicht für $m \neq n$. Dieser Auto-

morphismus erzeugt eine 180° -Rotation des Graphen. Falls $m \neq n$, existiert eine Transposition zweier Knoten nur innerhalb eines Horocycles.

Der Diestel-Leader-Graph ist knoten- und kantentransitiv. Für $m = n$ ist $DL_{m,n}$ auch bogentransitiv. Ein Automorphismus, der eine Transposition zweier benachbarter Knoten v in H_i und u in H_{i+1} ist, invertiert die gesamte Anordnung der Horocycles.

Der Flip von $(H_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ist ein Automorphismus, der zwei benachbarte Knoten vertauscht. Für $m \neq n$ ist der Graph $DL_{m,n}$ nicht bogentransitiv. In diesem Fall ist die 180° -Rotation nämlich kein Automorphismus.

Für $m \neq n$ ist der Diestel-Leader-Graph ein Beispiel für einen Graphen, der knoten- und kantentransitiv ist, aber nicht bogentransitiv. (siehe Bemerkung 2.1.1).

In den folgenden Beispielen betrachten wir konsistente Kreise in den Diestel-Leader-Graphen $DL_{2,2}$ und $DL_{2,3}$.

Beispiel 3.1.1. Der Graph $DL_{2,2}$ in Abbildung 3.2 hat Grad 4. Hier ist der 1-Bogen ein trivialer konsistenter Kreis, weil $DL_{2,2}$ bogentransitiv ist. Ein Doppelstrahl mit Knoten $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, wobei $w_i \in H_i$, $i \in \mathbb{Z}$, ist konsistent und hat Vielfachheit 2. Der endliche Kreis $[(u, x), (w, y), (u, z), (v, y)]$ der Länge 4 ist konsistent. Ein Automorphismus, der aus dem Flip des Graphen um die horizontale Achse durch die Kanten zwischen H_1 und H_2 und der Permutation der Knoten (u, x) und (u, z) besteht, ist ein Shunt für diesen Kreis. Die Menge der Nachbarn der Knoten (v, y) und (w, y) , welche in H_3 sind, permutieren mit der Menge der Nachbarn von (u, x) und (u, z) , die in H_0 liegen. Somit ist die Summe der Vielfachheiten der Orbits konsistenter Kreise gleich 4.

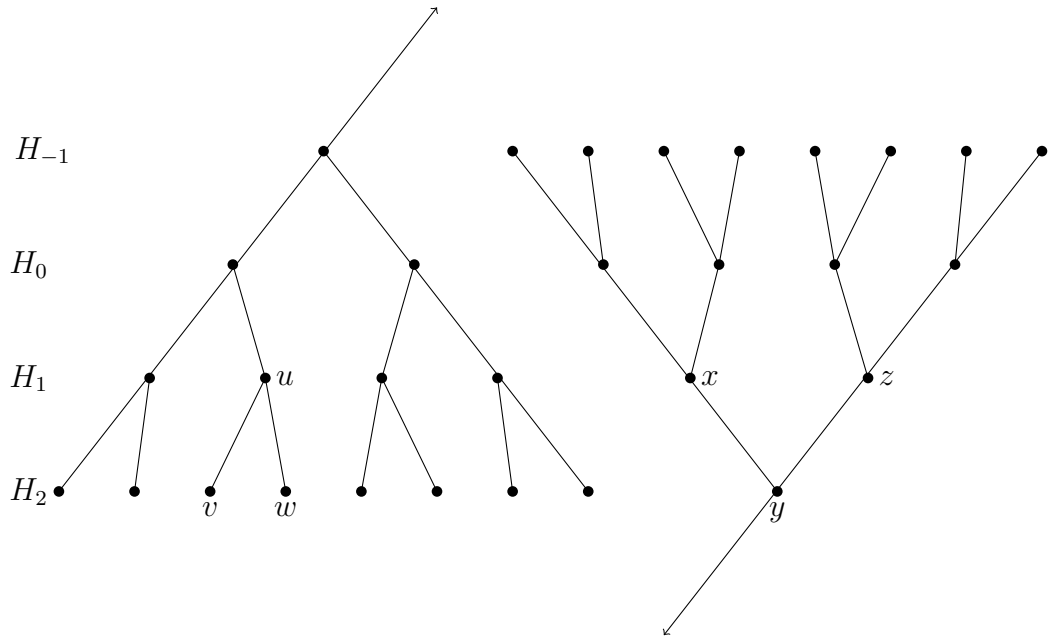


Abbildung 3.1: $T_{2,2}$

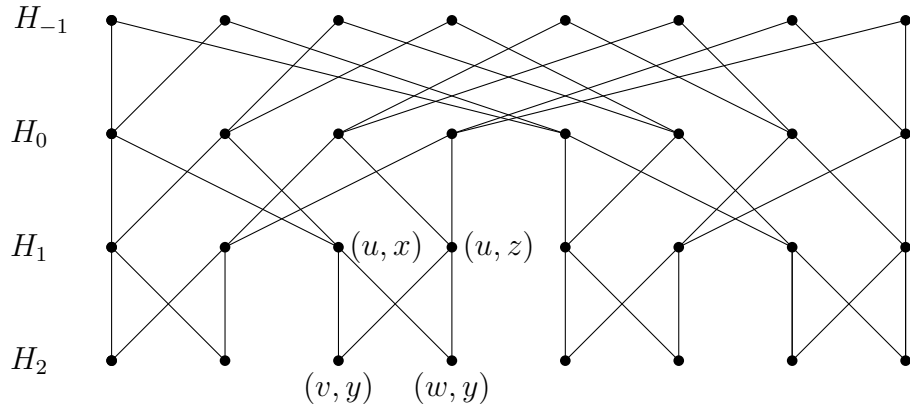


Abbildung 3.2: $DL_{2,2}$

Beispiel 3.1.2. Der Graph $DL_{2,3}$ in Abbildung 3.4 ist vom Grad 5. In Abbildung 3.4 sehen wir, dass der 1-Bogen nicht konsistent ist, weil der Graph keine horizontale Symmetrieachse hat. In diesem Beispiel gibt es keine endlichen konsistenten Kreise. Die endlichen Kreise der Längen 4 und 6, analog zum endlichen Kreis im vorigen Beispiel, sind nicht konsistent hier. Ein Doppelstrahl $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit $w_i \in H_i$, $i \in \mathbb{Z}$ ist konsistent und hat Vielfachheit 2.

Er ist nicht im gleichen Orbit wie sein Inverses, welches aber auch konsistent ist und Vielfachheit 3 hat. Somit ist auch in diesem Beispiel die Summe der Vielfachheiten der Orbits konsistenter Kreise gleich dem Grad des Graphen.

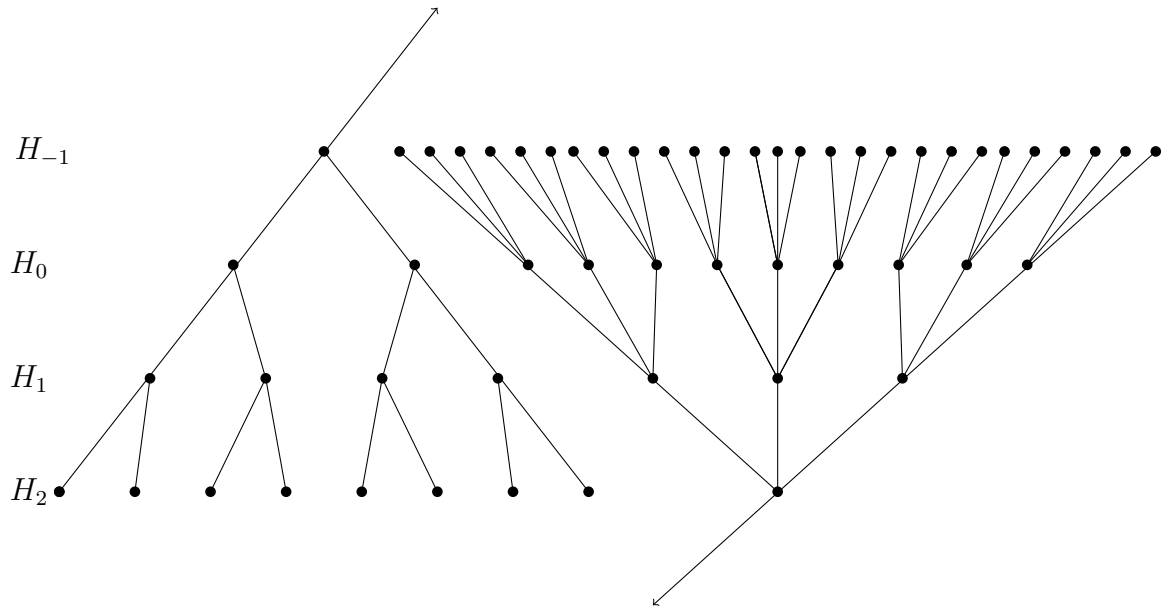


Abbildung 3.3: $T_{2,3}$

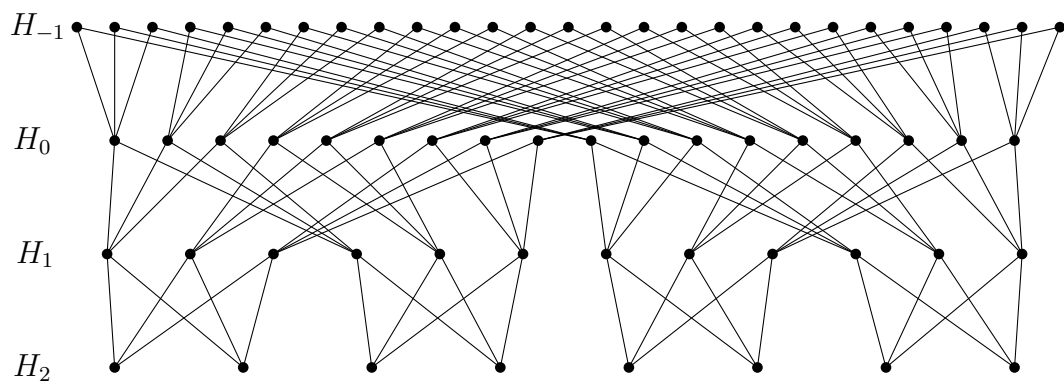


Abbildung 3.4: $DL_{2,3}$

Definition 3.1.3. Ein Graph wird bipartit genannt, falls sich die Menge der Knoten in zwei disjunkte Teilmengen aufteilen lässt, sodass innerhalb jeder Teilmenge keine zwei Knoten benachbart sind.

Definition 3.1.4. Der Graph $K_{m,n}$ ist ein bipartiter Graph mit einer Knotenmenge A aus m Knoten und einer Knotenmenge B aus n Knoten. Jeder Knoten in A ist zu allen Knoten in B benachbart und umgekehrt ist jeder Knoten in B zu allen Knoten in A benachbart.

Für $m \neq n$ haben die Knoten in A den Grad n und die Knoten in B den Grad m . Daher kann $K_{m,n}$ nicht knotentransitiv für $m \neq n$ sein und somit hat er keine konsistenten Kreise.

Für $m = n$ haben alle Knoten den gleichen Grad. Der Graph $K_{n,n}$ hat n konsistente Kreise, die die Längen $2, 4, 6, \dots, 2n$ unter der Aktion der vollen Automorphismengruppe haben. (Siehe zum Beispiel der Graph $K_{4,4}$ in Beispiel 2.2.4).

Lemma 3.1.5. *Im Diestel-Leader-Graphen $DL_{m,n}$ für beliebige m, n ist die Summe der Vielfachheiten der Orbits konsistenter Kreise unter der Aktion der vollen Automorphismengruppe gleich dem Grad des Graphen, nämlich $m + n$.*

- (i) *Für $m = n$ hat $DL_{m,n}$ genau n Orbits konsistenter Kreise der Längen $2, 4, 6, \dots, 2n$ und einen Orbit unendlicher konsistenter Kreise mit Vielfachheit n .*
- (ii) *Für $m \neq n$ hat $DL_{m,n}$ zwei Orbits unendlicher konsistenter Kreise. Einer hat Vielfachheit m und der andere hat Vielfachheit n .*

Beweis. Der $DL_{m,n}$, eingeschränkt auf zwei Horocycles H_i und H_{i+1} , spaltet sich in disjunkte Teilgraphen, die isomorph zu $K_{m,n}$ sind, auf. Jeder dieser zu $K_{m,n}$ isomorphen Graphen hat n Knoten $\{v_1, \dots, v_n\}$ im Horocycle H_i und m Knoten $\{w_1, \dots, w_m\}$ in H_{i+1} , während jeder dieser n Knoten in H_i genau n Nachbarn in H_{i-1} und m in H_{i+1} hat. Analog hat jeder der m Knoten in H_{i+1} m Nachbarn in H_{i+2} und n Nachbarn in H_i . Jeder Knoten in H_i gehört zusammen mit seinen Nachbarn in H_{i-1} zu einem zu $K_{m,n}$ isomorphen Graphen. Diese Graphen sind paarweise disjunkt für jeden dieser n Knoten in H_i , welche Nachbarn eines Knotens in H_{i+1} sind. Dasselbe gilt für die Knoten in H_{i+1} zusammen mit ihren Nachbarn in H_{i+2} .

- (i) Für $m = n$ hat $K_{m,n}$ unter der Aktion der vollen Automorphismengruppe genau n konsistente Kreise, jeweils einer mit der Länge $2, 4, 6, \dots, 2n$. Diese sind auch in $DL_{n,n}$ konsistente Kreise. Ein Automorphismus, der eine Transposition der Menge der Knoten $\{v_1, \dots, v_n\}$ in H_i und der

Menge $\{w_1, \dots, w_m\}$ in H_{i+1} enthält, ist auch eine Transposition der Horocycles H_i und H_{i+1} . Somit vertauscht dieser auch H_{i-k} mit H_{i+1+k} für alle $k \in \mathbb{Z}$. Weil alle Graphen, die isomorph zu $K_{n,n}$ zwischen zwei aufeinander folgenden Horocycles sind, disjunkt sind, können sie beliebig permutiert werden. Der Shuntautomorphismus bildet H_{i-k} auf H_{i+1+k} für alle $k \in \mathbb{Z}$ ab und permutiert die zu $K_{n,n}$ isomorphen Graphen zwischen den einzelnen Horocycles. Somit hat $DL_{n,n}$ genau n endliche konsistente Kreise. Der Doppelstrahl $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit $w_i \in H_i$ ist konsistent unter jenem Shunt, der H_i auf H_{i+1} für jedes $i \in \mathbb{Z}$ abbildet und die passende Permutation der Knoten veranlasst. Der Orbit dieser Doppelstrahlen hat Vielfachheit n .

- (ii) Für $m \neq n$ gibt es keine endlichen konsistenten Kreise in $DL_{m,n}$. Ein Automorphismus, der eine Transposition der Knoten $v_i \in H_i$ und $v_{i+1} \in H_{i+1}$ beinhaltet, bildet auch den Horocycle H_i auf H_{i+1} beziehungsweise H_{i-1} auf H_{i+2} ab. Der Knoten v_i hat n Nachbarn in H_{i-1} und v_{i+1} hat m Nachbarn in H_{i+2} . Somit gibt es hier keinen Automorphismus, der eine Transposition der Knoten v_i und v_{i+1} beinhaltet. Der Doppelstrahl $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit $w_i \in H_i$ ist auch konsistent in $DL_{m,n}$ für $m \neq n$ und hat Vielfachheit n . Er ist nicht im gleichen Orbit wie sein Inverses. Der Orbit des inversen Doppelstrahls hat Vielfachheit m .

□

3.2 Orbits $\frac{1}{k}$ -konsistenter Kreise

Definition 3.2.1. Sei Γ ein endlicher Graph und sei G eine Gruppe, die auf Γ transitiv agiert. Ein Kreisweg $\alpha = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ wird $\frac{1}{k}$ -konsistent für ein $k \in \mathbb{N}$ genannt, falls ein $g \in G$ existiert, sodass $v_i^g = v_{i+k}$ für alle i . So ein Automorphismus wird $\frac{1}{k}$ -Shunt für α genannt.

Lemma 3.2.2. *Sei α ein Kreisweg. Wenn dieser $\frac{1}{k}$ -konsistent ist, dann ist er auch $\frac{1}{nk}$ -konsistent für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei $g \in G$ ein $\frac{1}{k}$ -Shunt für α . Dann bildet g den Knoten v_i nach v_{i+k} ab und g^n bildet v_i nach v_{i+nk} für alle $n \in \mathbb{N}$ ab. Also ist g^n ein $\frac{1}{nk}$ -Shunt für α . □

Lemma 3.2.3. *Sei α ein Kreisweg, der $\frac{1}{k}$ -konsistent und $\frac{1}{l}$ -konsistent für $k, l \in \mathbb{N}$ und $j = \gcd(k, l)$ ist. Dann ist α auch $\frac{1}{j}$ -konsistent.*

Beweis. Sei $g \in G$ ein $\frac{1}{k}$ -Shunt und sei $h \in G$ ein $\frac{1}{l}$ -Shunt für α . Weil $j = \gcd(k, l)$, folgt, dass $j = nk + ml$ für bestimmte $n, m \in \mathbb{Z}$. Der Automorphismus $g^n h^m$ bildet v_i nach $v_{i+nk+ml} = v_{i+j}$ für alle i ab. Also ist $g^n h^m$ ein $\frac{1}{j}$ -Shunt für α . $\square$

Für einen endlichen Kreisweg der Länge r ist es nicht erforderlich, dass k ein Teiler von r ist.

Corollary 3.2.4 (Kapitel 2 in [3]). *Sei α ein Kreisweg der Länge r . Falls $k' = \gcd(k, r)$, ist α genau dann $\frac{1}{k}$ -konsistent, wenn er $\frac{1}{k'}$ -konsistent ist.*

Beweis. Weil α Länge r hat, ist er $\frac{1}{r}$ -konsistent. Wenn α auch $\frac{1}{k}$ -konsistent ist, ist er $\frac{1}{k'}$ -konsistent nach Lemma 3.2.2.

Andererseits, wenn $k' = \gcd(k, r)$, dann ist $k = k'n$ für $n \in \mathbb{N}$. Ein $\frac{1}{k'}$ -konsistenter Kreisweg ist nach Lemma 3.2.3 auch $\frac{1}{k}$ -konsistent. $\square$

Definition 3.2.5. Ein Kreisweg wird *präzise* $\frac{1}{k}$ -konsistent genannt, wenn er $\frac{1}{k}$ -konsistent, aber nicht $\frac{1}{l}$ -konsistent für jedes $l < k$ ist.

Aus Lemma 3.2.2 und Lemma 3.2.3 folgt, dass l ein Teiler von k ist, wenn ein Kreisweg $\frac{1}{k}$ -konsistent und präzise $\frac{1}{l}$ -konsistent ist.

Man beachte, dass alle Shifts und deren Inverse eines Kreisweges konsistent sind, wenn der Kreisweg $\frac{1}{k}$ -konsistent ist.

Ein Kreis besteht aus der Menge aller Shifts und deren Inversen eines unterliegenden Kreisweges, und ein gerichteter Kreis ist die Menge aller Shifts eines unterliegenden Kreisweges. Deswegen werden wir einen (gerichteten) Kreis als $\frac{1}{k}$ -konsistent definieren, wenn ein beliebiger (und somit jeder) unterliegende Kreisweg $\frac{1}{k}$ -konsistent ist.

Es folgt, dass die Anzahl der Orbits konsistenter Kreiswege gleich der Anzahl der Orbits konsistenter gerichteter Kreise ist. Diese ist wiederum gleich der Anzahl der Orbits konsistenter Kreise.

Definition 3.2.6. Ein $\frac{1}{k}$ -konsistenter gerichteter Kreis wird *G-bogentransitiv* genannt, wenn ein Automorphismus in G existiert, der ihn auf einen Inversen einer seiner Shifts abbildet. Ansonsten wird er *G-chiral* genannt.

Bemerkung 3.2.7. Nicht alle Repräsentanten eines G -konsistenten Kreises müssen auch G -kongruent sein. Es könnte nämlich passieren, dass ein Repräsentant α nicht G -kongruent zu seinem Inversen und somit zu jedem der zyklischen Shifts von α^{-1} ist. Ein G -konsistenter Kreis, in dem alle Repräsentanten G -kongruent sind, wird *G-symmetrisch* genannt. Ein G -konsistenter Kreis, der nicht G -symmetrisch ist, wird *G-chiral* genannt. Ein nichttrivialer Kreis der Länge r ist genau dann G -chiral, wenn der mengenweise Stabilisator seiner Kanten darauf als Diedergruppe der Ordnung r agiert. Er ist

genau dann G -symmetrisch, wenn der mengenweise Stabilisator darauf als Diedergruppe der Ordnung $2r$ agiert. Ein (ungerichteter) Kreis kann als Paar gerichteter Kreise gesehen werden. Wenn die gerichteten Kreise chiral sind, dann gehören die Orbits der gerichteten Kreise zu einem Orbit ungerichteter Kreise. Wenn die gerichteten Kreise symmetrisch sind, dann bedeutet “Orbits von Kreisen” und “Orbits gerichteter Kreise” dasselbe. Wir bezeichnen die Anzahl der Orbits chiraler gerichteter Kreise mit c und die Anzahl der Orbits symmetrischer gerichteter Kreise mit s . Die Anzahl der Orbits gerichteter Kreise ist $c + 2s$ und die Anzahl der Orbits ungerichteter Kreise ist $c + s$ (siehe Kapitel 7 in [3]).

Sei G eine Automorphismengruppe. Im Gegensatz zu einem konsistenten Kreisweg für $k > 1$ kann G einen präzisen $\frac{1}{k}$ -konsistenten Kreisweg nicht auf seinen t -Shift für $t < k$ abbilden, weil der Kreisweg dann auch $\frac{1}{t}$ -konsistent wäre. Wenn ein gerichteter Kreis α präzise $\frac{1}{k}$ -konsistent für $k > 1$ ist, sind die unterliegenden Kreiswege nicht alle im gleichen G -Orbit. Sie spalten sich in k Orbits präziser $\frac{1}{k}$ -konsistenter Kreise auf und die Shifts $\alpha, \alpha^1, \dots, \alpha^{k-1}$ bilden eine vollständige Menge von Repräsentanten der G -Orbits $\frac{1}{k}$ -konsistenter Kreiswege. Die Gruppe G agiert auf der Menge $\frac{1}{k}$ -konsistenter gerichteter Kreise natürlicherweise. Ein Orbit präziser $\frac{1}{k}$ -konsistenter gerichteter Kreise gehört zu k Orbits präziser $\frac{1}{k}$ -konsistenter Kreise. Somit ist hier, im Gegensatz zu konsistenten Kreisen, ein Unterschied zwischen “Orbits gerichteter Kreise” und “Orbits von Kreiswegen”. Die folgenden Sätze geben Formeln um jene Orbits zu zählen.

Definition 3.2.8. Die *Taillenweite* eines Graphen ist die Länge des kleinsten geschlossenen Weges.

In den folgenden Sätzen, die von Orbits $\frac{1}{k}$ -konsistenter Kreise handeln, nehmen wir an, dass die Taillenweite der Graphen mindestens $2k + 1$ beträgt. Daraus folgt, dass $\alpha = \beta$, wenn $\alpha = (v_0, \dots, v_r)$ ein Weg der Länge r ist und $\beta = (w_0, \dots, w_s)$ ein Weg der Länge s ist, wobei $r, s \leq k$ und $v_0 = w_0, u_r = u_s$.

Theorem 3.2.9 (Theorem 2.1 in [3]). *Sei $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ eine Gruppe, die bogentransitiv auf einem endlichen Graphen Γ mit Taillenweite mindestens $2k + 1$ für $k \in \mathbb{N}$ und Grad d agiert, dann ist die Anzahl der Orbits nichttrivialer $\frac{1}{k}$ -konsistenter Kreise exakt $(d - 1)^k$.*

Theorem 3.2.10 (Theorem 5.1 in [3]). *Sei k eine positive ganze Zahl, sei Γ ein endlicher Graph mit Taillenweite mindestens $2k + 1$ und sei G eine bogen-transitive Untergruppe $\text{Aut}(\Gamma)$. Dann ist die Anzahl der G -Orbits gerichteter*

$\frac{1}{k}$ -konsistenter Kreise in Γ gleich

$$\frac{1}{k} \sum_{l|k} \varphi\left(\frac{k}{l}\right) (d-1)^k,$$

wobei φ die Euler'sche Phi-Funktion bezeichnet (und die Summe über alle positiven Teiler von k genommen wird).

Bemerkung 3.2.11. In diesen zwei Theoremen werden die trivialen Kreise nicht mitgezählt. In bogentransitiven Graphen ist ein trivialer Kreis klarerweise $\frac{1}{k}$ -konsistent für alle k .

Beispiel 3.2.12. Abbildung 3.5 zeigt eine andere Sicht auf das Dodekaeder. Dieser Graph hat Tailenweite 5 und Grad 3. Nach Theorem 3.2.9 müssten hier 4 Orbits nichttrivialer $\frac{1}{2}$ -konsistenter Kreiswege unter der Aktion der vollen Automorphismengruppe sein.

Wir können sehen, dass die 60° -Rotation einen Automorphismus, der den äußeren Kreis C der Länge 12 um 2 Schritte weiterschiebt, darstellt. Somit ist dieser $\frac{1}{2}$ -konsistent. Weil er nicht konsistent ist, gibt es hier keinen Automorphismus, der den Kreisweg

$$\alpha = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$$

auf seinen Shift $\alpha^1 = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 1)$ abbildet. Somit spaltet sich der Kreis C in zwei Orbits von Kreiswegen auf. Einer besteht aus allen geraden t -Shifts von α und allen ungeraden t -Shifts von α^{-1} . Der andere hingegen besteht aus allen ungeraden t -Shifts von α und allen geraden t -Shifts von α^{-1} . Der Kreis C ist chiral, weil die Gruppe α nicht auf sein Inverses abbildet, sondern nur auf den Shift seines Inversen.

Die Orbits konsistenter Kreiswege der Länge 5 und 10 sind auch $\frac{1}{2}$ -konsistent. Somit haben wir 4 Orbits $\frac{1}{2}$ -konsistenter Kreise gefunden.

Nach der Formel in Theorem 3.2.10 gibt es 3 Orbits konsistenter gerichteter Kreise unter der Aktion der vollen Automorphismengruppe. Zusätzlich zu den Orbits gerichteter Kreise der Längen 5 und 10 repräsentiert der Kreis der Länge 12 nur einen Orbit in diesem Fall.

Beispiel 3.2.13. Wir betrachten ein Beispiel eines unendlichen Graphen. In Kapitel 2.3 haben wir konsistente Kreise im "Wabengitter" untersucht. Nun wollen wir in diesem Graphen $\frac{1}{2}$ -konsistente Kreise analysieren. Der Graph hat Tailenweite 6 und Grad 3. Die zwei konsistenten Kreise (siehe Abbildung 2.5) sind klarerweise auch $\frac{1}{2}$ -konsistent.

Der Kreis $[\dots, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots]$ in Abbildung 3.6 spaltet sich in zwei Orbits präziser $\frac{1}{2}$ -konsistenter Kreise auf. Einer besteht aus den geraden

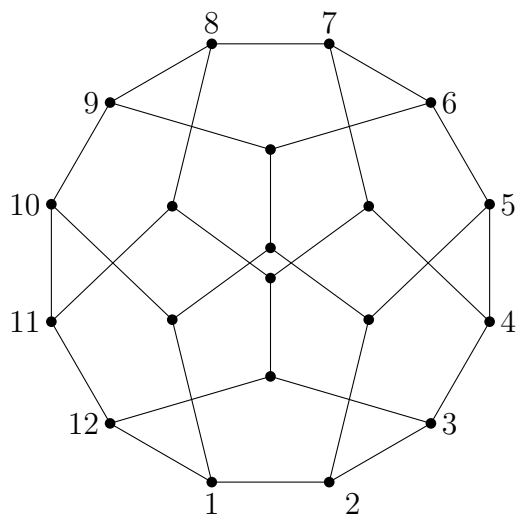


Abbildung 3.5: Dodekaeder

Shifts des Kreisweges $(\dots, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots)$, während der andere aus den ungeraden Shifts dieses Kreisweges besteht. Wir zählen 4 Orbits nichttrivialer konsistenter Kreise und Theorem 3.2.9 gilt hier wie im endlichen Fall.

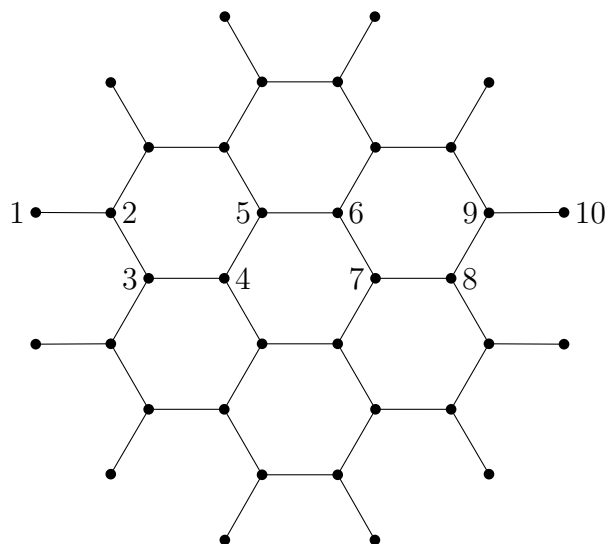


Abbildung 3.6: Wabengitter

Bemerkung 3.2.14. Wenn die obige Bedingung an die Tailenweite nicht erfüllt wird, gilt die Formel in Theorem 3.2.9 im Allgemeinen nicht. Zum Beispiel hat der Graph des Tetraeders in Abbildung 3.7 zwei konsistente Kreiswege,

nämlich $[1, 2, 3]$ und $[1, 2, 4, 3]$. Nach Theorem 3.2.9 wären hier 4 Orbits $\frac{1}{2}$ -konsistenter Kreise, aber es gibt keinen $\frac{1}{2}$ -konsistenten Kreisweg der nicht auch konsistent ist.

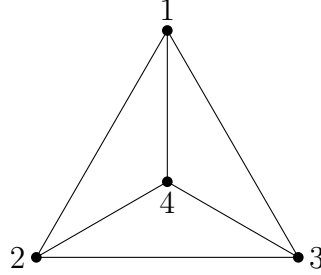


Abbildung 3.7: Tetraeder

3.3 Konsistente Kreise in $\frac{1}{2}$ -bogentransitiven Graphen

Definition 3.3.1. Sei G eine Untergruppe von $\text{Aut}(\Gamma)$. Die Gruppe G agiert $\frac{1}{2}$ -bogentransitiv auf Γ , falls sie transitiv auf der Menge der Knoten und Kanten, aber intransitiv auf der Menge der Bögen agiert.

Für eine Gruppe G , die $\frac{1}{2}$ -bogentransitiv agiert, ist jeder G -konsistente gerichtete Kreis chiral. Wir definieren einen $\frac{1}{k}$ -konsistenten (ungerichteten) Kreis als Paar der zwei unterliegenden $\frac{1}{k}$ -konsistenten gerichteten Kreise.

Proposition 3.3.2 (Proposition 5.3 in [5]). *Wenn Γ ein endlicher Graph von Grad d ist, der eine $\frac{1}{2}$ -bogentransitive Automorphismengruppe G zulässt, dann ist die Anzahl der G -Orbits konsistenter ungerichteter Kreise gleich $\frac{d}{2}$.*

Man bemerke, dass $\frac{1}{2}$ -bogentransitive endliche Graphen immer geraden Knotengrad haben (siehe Bemerkung 2.1.1).

Theorem 3.3.3 (Theorem 4.3 in [5]). *Sei k eine positive ganze Zahl, sei Γ ein endlicher Graph von Tailenweite mindestens $2k + 1$ und Grad d und sei G eine $\frac{1}{2}$ -bogentransitive Untergruppe $\text{Aut}(\Gamma)$. Dann existieren hier exakt $(d - 1)^k + 1$ G -Orbits $\frac{1}{k}$ -konsistenter Kreise in Γ .*

Bemerkung 3.3.4. Die trivialen Kreise können nicht konsistent sein, wenn G nicht bogentransitiv ist. Wenn wir in Theorem 3.2.9 triviale Kreise dazuzählen könnten, würden wir das gleiche Resultat wie für bogentransitive Gruppenaktionen bekommen.

Theorem 3.3.5 (Theorem 5.2 in [5]). *Sei k eine positive ganze Zahl, sei Γ ein endlicher Graph von der Taillenweite mindestens $2k + 1$ und Grad d und sei G eine $\frac{1}{2}$ -bogentransitive Untergruppe von $\text{Aut}(\Gamma)$. Dann ist die Anzahl der Orbits gerichteter $\frac{1}{k}$ -konsistenter Kreise exakt*

$$\frac{1}{k} \sum_{l|k} \varphi\left(\frac{k}{l}\right) ((d-1)^k + 1),$$

wobei φ die Euler'sche Phi-Funktion beschreibt (und die Summe über alle positiven Teiler von k gebildet wird).

Beispiel 3.3.6. Abbildung 3.8 zeigt einen Graphen von Grad 4. Die Gruppe, die auf dem Graphen agiert, sei jene Gruppe, die aus den Automorphismen, welche den Graphen rotieren und die Knoten vom inneren Kreis auf den äußeren Kreis abbilden. Diese Gruppe agiert knoten- und kantentransitiv, aber nicht bogentransitiv, weil es kein Element gibt, das zwei benachbarte Knoten vertauscht.

Nach Proposition 3.3.2 gibt es hier 2 Orbits konsistenter Kreise:

$$[v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8] \text{ und}$$

$$[v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}].$$

Der Kreis $[v_1, v_2, v_9, v_{10}]$, der konsistent unter der Aktion der vollen Automorphismengruppe ist, ist hier nicht konsistent.

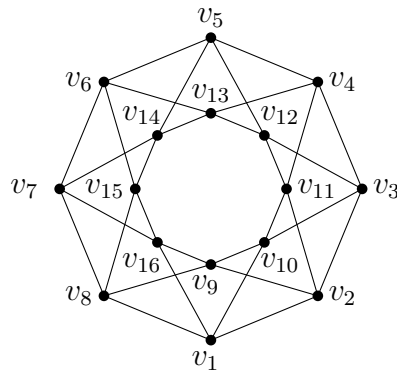


Abbildung 3.8

In Kapitel 6.1 in [5] untersuchen die Autoren endliche Graphen vom Grad 4. Nach Theorem 3.3.3 und Theorem 3.3.5 existieren genau vier Orbits konsistenter Kreise in solchen Graphen und die gleiche Anzahl der Orbits konsistenter gerichteter Kreise unter der Aktion einer $\frac{1}{2}$ -bogentransitiven Gruppe.

Weil G nicht bogentransitiv ist, ist keiner dieser Orbits symmetrisch. Daher gibt es hier genau zwei Orbits G -konsistenter Kreise. Im restlichen Kapitel beschreiben sie die Orbits konsistenter Kreise im Doyle-Holt-Graphen. Dieser ist mit seinen 27 Knoten der kleinste $\frac{1}{2}$ -bogentransitive Graph (unter der Aktion der vollen Automorphismengruppe). Auf den Seiten 8 und 9 in [5] sind Graphiken des Doyle-Holt-Graphen abgebildet.

Literaturverzeichnis

- [1] N. L. Biggs, Aspects of symmetry in graphs, in *Algebraic Methods in Graph Theory*, Vol. I, II (Szeged, 1978), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 25, North-Holland, Amsterdam-New York, 1981, 27–35.
- [2] Š. Miklavič, P. Potočník, and S. Wilson, Consistent cycles in graphs and digraphs, *Graphs Combin.* **23**, (2007), no. 2, 205–216.
- [3] Š. Miklavič, P. Potočník, and S. Wilson, Overlap in consistent cycles, *J. Graph theory* **55**, (2007), no. 1, 55–71.
- [4] W. M. Kantor, Cycles in graphs and groups, *Amer. Math. Monthly* **115** (2008), no. 6, 559–562.
- [5] M. Boben, S. Miklavič and P. Potočník, Consistent cycles in $\frac{1}{2}$ -arc-transitive graphs, *The electronic Journal of Combinatorics* **16**, (2009), no. 1, #R5
- [6] W. Woess, Topological groups and infinite graphs, *Discrete Mathematics* **95** (1991), no. 1–3, 373–384

Curriculum Vitae

Personal information

Name	Julia Wessely
Date of Birth	14th of March, 1984
Place of Birth	Vienna, Austria
Nationality	Austrian
email	a0404215@unet.univie.ac.at

Education

Since 10/2012	Teacher education programme in Computer Science, University of Vienna
Since 10/2006	Teacher education programme in Mathematics, University of Vienna
10/2004-09/2012	Diploma programme in Mathematics, University of Vienna
2002-2004	Kolleg für Mode und Bekleidungstechnik Wien XVI
06/2002	Matura
1994-2002	Realgymnasium mit sportlichem Schwerpunkt Wien XVII
1991-1994	Primary school Wien XVI

Employment

Since 09/2015	Teacher at “Islamisches Realgymnasium Wien XV”
Since 03/2010	Tutor at the Faculty of Scientific Computing, University of Vienna
03/2009	Co-worker at the exhibition “Imaginary”, Vienna
Since 2004	Private tuition at IFL Dr. Rampitsch and Lernquadrat

Other activities

- | | |
|---------|--|
| 09/2011 | Talk about <i>Consistent cycles</i> in the “25th LL-Seminar on Graph Theory”, Montanuniversität Leoben |
| 09/2012 | Participation in the “26th LL-Seminar on Graph Theory” in Bovec, Slovenia |