universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Politische Bildung im Mathematikunterricht"

Verfasserin

Lisa Hintersteiner

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 299
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Psychologie und Philosophie
Betreuer:	ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Abstract

Im Rahmen dieser Arbeit wird der Frage nachgegangen, inwieweit es Zusammenhänge zwischen den Disziplinen „Mathematik" und „Politik" gibt und wie sich diese im Mathematikunterricht in der Schule umsetzen lassen.

Die Notwendigkeit einer Vernetzung der beiden Disziplinen wird gleich zu Beginn der Arbeit aufgezeigt, und zwar durch den Anspruch des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung der SchülerInnen beizutragen. Bereits 1978 wurde die politische Bildung als Unterrichtsprinzip in den Lehrplänen verankert, wodurch auch eine rechtliche Verpflichtung für alle Unterrichtsfächer besteht. Um diesem Unterrichtsprinzip nachkommen zu können, muss sich das Verständnis von politischer Bildung aber zunächst von der theoretischen Staatsbürgerkunde hin zu einer kompetenzorientierten Entwicklung von Mündigkeit wenden. Erst dann lassen sich Verbindungen zu allen Disziplinen herstellen.

Anhand dreier Bereiche werden Verschränkungen von Mathematik und Politik aufgezeigt und hinsichtlich ihres Potenzials für die Umsetzung in der Schule analysiert.

Der erste solche Bereich ist die Wahlmathematik. Einleitend werden allgemeine Wahlmethoden, wie das Mehrheitsprinzip, sequentielle Wahlsysteme, das Condorcet-Verfahren und das Borda-Verfahren beschrieben und nach und nach wird aufgezeigt, dass die zugrunde liegende Wahlmethode das Ergebnis einer Wahl erheblich beeinflusst. Anschließend wird auf die Prinzipien der Mehrheits- und Verhältniswahl und insbesondere auf Probleme im Umgang mit ihnen eingegangen. So hat sich gezeigt, dass bei einer Wahl nach dem Mehrheitsprinzip eine hohe Disproportion zwischen Stimmen und Mandate in Kauf genommen werden muss. Dies kann sogar so weit gehen, dass der stimmenschwächere Kandidat die Mehrheit aller Mandate erhält. Das Hauptaugenmerk bei der Verhältniswahl liegt in der Übertragung der Stimmen auf Mandate, wobei hier anhand des Verfahrens bei österreichischen Nationalratswahlen eine Möglichkeit zur Umrechnung aufgezeigt wird.

Im zweiten Abschnitt wird das Thema „Steuern" hinsichtlich seiner mathematischen Aspekte untersucht. Hier ergibt sich eine Vielzahl an Möglichkeiten für den Mathematikunterricht. Vor allem im Bereich der Funktionen lässt sich Wissen über Steuertarife vermitteln und so zur politischen Bildung der SchülerInnen beitragen. Aber auch aktuelle Reformen können als Anlass zur Thematisierung genommen werden und aus mathematischer Sicht analysiert und bewertet werden, wie anhand der Einkommensteuerreform, die mit 2016 in Kraft tritt, gezeigt wird.

Der dritte und letzte Teilbereich behandelt die Statistik. Hier werden die Grundbegriffe geklärt und auf mögliche Fallen und manipulative Absichten hingewiesen. Vor allem grafische Darstellungen von Statistiken spielen eine große Rolle in der politischen Meinungsmache und bieten viele Möglichkeiten zur Beeinflussung. So kann beispielsweise ein und derselbe Trendverlauf durch geschickte Wahl der Achsenskalierung ganz unterschiedlich dargestellt werden. Eine kritische Betrachtung statistischer Aussagen liegt hier also im Fokus.

Insgesamt zeigt die Arbeit, dass es durchaus ein breites Spektrum an Möglichkeiten zur Verwirklichung von politischer Bildung im Rahmen eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts gibt.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die mir im Laufe meines Studiums und beim Anfertigen dieser Arbeit eine große Hilfe waren.

Zu Beginn möchte ich mich bei Mag. Dr. Stefan Götz für die hervorragende Betreuung der Arbeit bedanken. Auf ganz unkomplizierte Art und Weise hat er mich durch konstruktive Anregungen unterstützt und mir gleichzeitig den nötigen Freiraum gegeben, die Arbeit nach meinen Vorstellungen zu gestalten.

Ein Dank gilt außerdem meiner Familie und meinen FreundInnen für ihre stetige Unterstützung, sowie meinen StudienkollegInnen für den fachlichen Austausch und die gegenseitige Motivation. Hier möchte ich mich insbesondere bei meiner Schwester Margit bedanken, die mir bei allen Fragen rund um das Studium immer ein offenes Ohr geliehen und mir mit gutem Rat zur Seite gestanden hat.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

I Mathematik und Allgemeinbildung 2

2 Modellierungen im Mathematikunterricht **4**

3 Die WINTER'schen Grunderfahrungen **9**

II Zur Situation der politischen Bildung an Österreichs Schulen 11

III Zusammenhänge von Mathematik und Politik 16

4 Wahlmathematik **18**

4.1 Allgemeine Wahlmethoden 18

4.2 Mehrheits- und Verhältniswahl 24

4.3 Stimmverrechnung bei Nationalratswahlen in Österreich 29

4.4 Konkrete Unterrichtsvorschläge 33

5 Steuern **44**

5.1 Grundbegriffe der Steuerlehre 44

5.2 Formen progressiver Einkommensteuertarife 49

5.3 Der österreichische Einkommensteuertarif 57

5.4 Konkrete Unterrichtsvorschläge 64

6 Statistik **80**

6.1 Grundbegriffe der beschreibenden Statistik 82

6.2 Datenreduktion und Kennwerte 85

6.3 Grafische Darstellungen von Daten 98

6.4 Lineare Regression und Korrelation 113

6.5 Konkrete Unterrichtsvorschläge 123

1 Einleitung

Die Mathematik spielt in vielen Bereichen des Lebens eine sehr große Rolle. Manche dieser Zusammenhänge sind ganz deutlich und für jeden sofort erkennbar, wohingegen andere erst auf den zweiten Blick zu erkennen sind. Wie verhält es sich mit der Politik? Spielt die Mathematik auch in dieser Disziplin eine Rolle? Wo liegen mögliche Schnittstellen? Und welche Möglichkeiten ergeben sich daraus für den Mathematikunterricht in der Schule?

Diese Fragen habe ich mir zu Beginn meiner Diplomarbeit gestellt und nach der Reaktion all jener zu urteilen, denen ich mein Diplomarbeitsthema mitgeteilt habe, sind sie dem ersten Anschein nach nicht einfach zu beantworten. Doch der Zusammenhang mag nur zunächst unklar erscheinen, denn bei näherer Betrachtung wird ganz deutlich, dass auch die Politik nicht ohne Mathematik auskommt. Durch das Thematisieren genau dieser Schnittstellen zeigt diese Arbeit Möglichkeiten auf, dem Unterrichtsprinzip „Politische Bildung" im Mathematikunterricht nachzukommen.

In Teil I der Arbeit wird zunächst auf den allgemeinbildenden Wert des Mathematikunterrichts näher eingegangen, wodurch bereits die Unumgänglichkeit der Vernetzung von politischer Bildung und Mathematik deutlich wird.

Anschließend gibt Teil II einen kurzen Überblick über die historische Entwicklung der politischen Bildung an Österreichs Schulen und ihre aktuelle Situation, sowie über die Kompetenzen, die mittels politischer Bildung vermittelt werden sollen.

Der dritte Teil bildet den Hauptteil der Arbeit. Darin werden bestehende Zusammenhänge zwischen Mathematik und Politik anhand dreier Bereiche aufgezeigt. Dies ist zum einen die Wahlmathematik, wo sowohl auf allgemeine Wahlmethoden als auch auf das konkrete Wahlverfahren bei österreichischen Nationalratswahlen eingegangen wird. Ein weiterer Bereich ist die Steuergesetzgebung. Der dritte und letzte Abschnitt befasst sich mit dem politisch bildenden Wert der Statistik.

Am Ende eines jeden Teilbereichs werden konkrete Unterrichtsvorschläge zur Umsetzung im Mathematikunterricht gegeben.

Teil I

Mathematik und Allgemeinbildung

Der Unterricht an einer AHS, also einer Allgemeinbildenden höheren Schule, muss schon allein des Namens wegen zur Allgemeinbildung der SchülerInnen beitragen. Der Begriff der Allgemeinbildung ist ein sehr geläufiger und hat einen Platz in der Alltagssprache gefunden, dennoch fällt es schwer, zu sagen, was denn genau die „Allgemeinbildung“ sei. In der Wissenschaft existieren viele verschiedene Definitionen und Konzepte dazu. Für Heinrich WINTER soll zur Allgemeinbildung „das an Wissen, Fertigkeiten, Fähigkeiten und Einstellungen gezählt werden, was jeden Menschen als Individuum und Mitglied von Gesellschaften in einer wesentlichen Weise betrifft, was für jeden Menschen unabhängig von Beruf, Geschlecht, Religion u.a. von Bedeutung ist.“ (WINTER, 2003, S.6) Dies ist eine noch recht grobe Beschreibung, die nicht wirklich Auskunft darüber gibt, was konkret in den Bereich der Allgemeinbildung fällt.
H.W. HEYMANN (1996, S.50ff.) entwickelte ein schon etwas konkreteres Allgemeinbildungskonzept, in dessen Zentrum sieben Aufgaben der allgemeinbildenden Schule stehen. Diese sind:

- Lebensvorbereitung
  Hier meint HEYMANN einerseits die Vermittlung von Qualifikationen, die für die Bewältigung des Alltags notwendig sind, und andererseits die Anregung zur Auseinandersetzung mit herausfordernden Stoffen, um individuelle Fähigkeiten so weit wie möglich zu entfalten.

- Stiftung kultureller Kohärenz
  HEYMANN versteht darunter zum einen den Aufbau einer reflektierten kulturellen Identität, um so für kulturelle Kontinuität zu sorgen, und zum anderen die Verbindung zwischen unterschiedlichen Kulturen. Auch die Vermittlung von Wertvorstellungen gehört dazu.

- Weltorientierung
  Hier fordert HEYMANN, dass SchülerInnen die Erscheinungen in der Welt einordnen können, sie miteinander in Beziehung setzen können und auch über ihren begrenzten Erfahrungshorizont hinaus über die Welt Bescheid wissen sollen.

- Anleitung zu kritischem Vernunftgebrauch
  SchülerInnen sollen, so HEYMANN, zu einem kritisch-hinterfragenden Denken angeregt werden. Die Erziehung zur Mündigkeit und Emanzipation fällt ebenfalls hier hinein.

- Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft
  Lernen, die Folgen seines Handelns für sich und andere zu bedenken und für sie einzustehen, heißt für HEYMANN Verantwortungsbereitschaft auszubilden, wodurch die ethische Dimension der Schule gekennzeichnet ist.

- Einübung in Verständigung und Kooperation
  Die Schule besitzt klarerweise eine bedeutende Sozialisationsfunktion, wobei für HEYMANN die Ausbildung von Verständigung und Kooperation besonders in den Vordergrund zu heben sind.

- Stärkung des Schüler-Ichs
  Darunter versteht Heymann die Entwicklung eines Selbstbewusstseins und Selbstvertrauens, sowie die Fähigkeit, eigene Ziele und Wünsche zu verwirklichen und eigene Stärken und Schwächen zu kennen.

Da der Schulunterricht einer AHS immer ein Fachunterricht ist, muss somit jedes Fach der allgemeinbildenden Schule zur Allgemeinbildung der SchülerInnen beitragen. Die Frage, die sich stellt, ist, inwieweit der Mathematikunterricht das kann.

Auf den ersten Blick scheint er sich damit schwer zu tun. SchülerInnen beklagen mit Aussagen wie „Das brauch ich doch eh nie wieder!“ die „Lebensferne“. Nicht selten wird die „Abstraktheit“ der Mathematik beanstandet, und auch der häufig fehlende Bezug zu Anwendungen schürt eine negative Einstellung gegenüber diesem im Schulsystem so zentralen Fach. „Daß [sic] das in der Schule erworbene mathematische Wissen ihnen für ihr Leben nützlich sei, abgesehen von einigen sehr elementaren Fertigkeiten, können Schüler oder Erwachsene, sofern sie keinen mathematiknahen Beruf ausüben, kaum noch erfahren.“ (Heymann, 1996, S.8)

Somit ist es von besonderer Bedeutung den SchülerInnen die Nützlichkeit und die Anwendbarkeit von Mathematik näher zu bringen und ihnen so die Relevanz der Mathematik deutlich zu machen. Nur Realitätsbezüge können SchülerInnen ein adäquates Bild von Mathematik vermitteln und dienen außerdem dem besseren Verstehen und Behalten mathematischer Inhalte. Kaiser (1995, S.76) unterscheidet vier Arten von Realitätsbezügen:

- Eingekleidete mathematische Probleme: Hier werden mathematische Begriffe oder Verfahren in scheinbare Anwendungskontexte eingekleidet. Die Aufgabe der SchülerInnen ist es, die in Textform gegebenen Zusammenhänge in Terme oder Gleichungen zu übertragen.
- Veranschaulichungen mathematischer Begrifflichkeiten: Dies sind beispielsweise negative Temperaturen oder auch Schulden zur Veranschaulichung des negativen Zahlenraums.
- Anwendung mathematischer Standardverfahren zur Lösung realer Probleme: Bereits bekannte mathematische Verfahren werden zur Lösung realer Fragestellungen eingesetzt. Optimierungsaufgaben wären ein Beispiel dafür.
- Modellierungen: Im Rahmen komplexer Problemlösungsprozesse wird bewusst die Beziehung zwischen Realität und Modellebene ins Zentrum gestellt.

Auch gut gewählte eingekleidete Aufgaben haben im Unterricht durchaus ihre Berechtigung als Brücken zwischen der Schulmathematik und der Welt, so Heymann (1996, S.198), jedoch sollte unbedingt auf die Einkleidung hingewiesen werden, um nicht den Eindruck zu erwecken, die Problemstellung sei realistisch mathematisiert. Bedeutender jedoch, so Hinrichs (2008, S.4), sind Anwendungen und Modellierungen, um ein angemessenes Bild von Mathematik und ihrer Beziehung zur Welt zu verdeutlichen.

2 Modellierungen im Mathematikunterricht

In nahezu allen Bereichen unserer modernen Welt spielt die Mathematik eine große Rolle und ohne sie würden viele Dinge, die wir täglich benutzen, wie beispielsweise das Handy oder ein Routenplaner, nicht existieren. Gleichzeitig bleibt sie meist verborgen und kaum jemand weiß über diese Bedeutung Bescheid. Um einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht bieten zu können, muss nach Hinrichs (2008, S.v) also dieses „Relevanzparadoxon" betrachtet werden und genau hier liegt die Funktion der mathematischen Modellierung, denn sie bildet die Schnittstelle zwischen der Mathematik und der übrigen Welt.

Was ist überhaupt ein Modell?
„Ein Modell ist eine vereinfachende Darstellung der Realität, die nur gewisse, einigermaßen objektivierbare Teilaspekte berücksichtigt." (Hinrichs, 2008, S.8) Diese Definition ist recht offen formuliert und so kann man zwischen mehreren Arten von Modellen unterscheiden. Das sind einerseits deskriptive Modelle, welche versuchen bestimmte Aspekte der Realität darzustellen, wie etwa ein Stadtplan, und andererseits normative Modelle, welche einen Teil der Realität definieren. Zu den deskriptiven Modellen zählen also jene, die einen Sachverhalt vorhersagen, erklären oder beschreiben, wohingegen ein normatives Modell etwas vorschreibt. Außerdem muss man darauf hinweisen, dass es keine eindeutig richtigen oder falschen Modelle gibt, sondern bezogen auf die gegebenen Umstände angemessene und unangemessene Modelle unterschieden werden können.

Man könnte das Wesen der Modellierung folgendermaßen beschreiben: „Vereinfachen ist eine Tugend von Modellen, kein Nachteil." (Hinrichs, 2008, S.10) Man wählt diejenigen Größen aus, die zur Beschreibung der Thematik wichtig sind und vernachlässigt alle anderen.

Der Modellierungskreislauf

In der Schule versteht man als Modellieren den gesamten Prozess, der bei der Lösung des zu modellierenden Problems durchlaufen wird. Dieser Prozess lässt sich als eine Art Kreislauf darstellen, siehe Abbildung 1 (vgl. Blum, 2006, S.9).

Am Beginn steht das Lesen und *Verstehen* der Aufgabe. Dabei sollen die SchülerInnen die nötigen Informationen entnehmen und so eine Vorstellung von der Situation entwickeln. So gelangen sie zum *Situationsmodell*. Im zweiten Schritt wird dieses Situationsmodell dann *strukturiert und vereinfacht*, wobei zwischen für das Problem wichtigen und unwichtigen Informationen unterschieden werden soll. Auch Fragen wie „Welche Mathematik kenne ich in diesem Kontext?" oder „Welche Zusammenhänge kann ich erkennen?" und individuelle Kreativität spielen bei der Schaffung des *Realmodells* eine Rolle. Im Anschluss gilt es die relevanten Größen und Beziehungen zu *mathematisieren*, um so zu einem *mathematischen Modell* zu kommen. Der nächste Schritt ist dann das *mathematische Bearbeiten* der Aufgabe, also das Finden einer Lösung des Problems im mathematischen Modell. Mittels geeigneter mathematischer Methoden, beispielsweise heuristischen Strategien oder dem Einsatz von neuen Technologien, erzielen die SchülerInnen *mathematische Resultate*. Damit ist der Modellierungskreislauf aber noch nicht beendet. Nun ist noch wichtig, das mathematische Resultat wieder auf die Realsituation

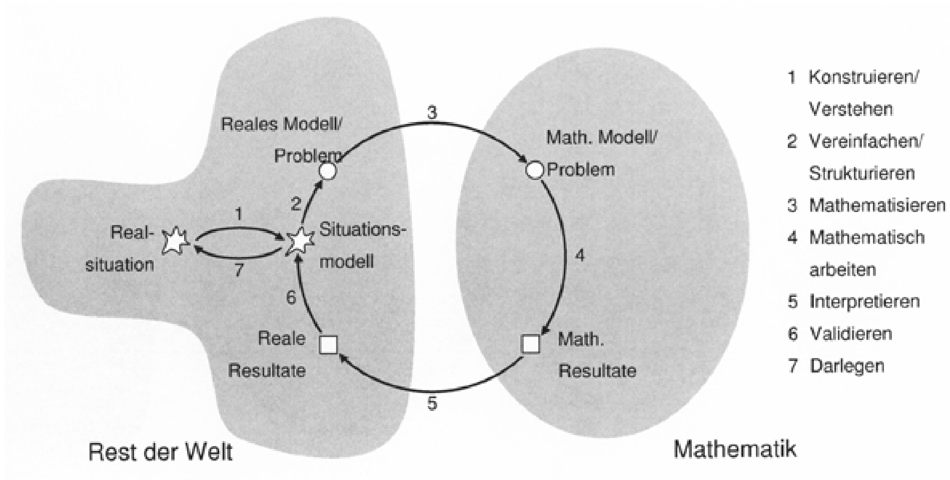


Abbildung 1: Modellierungskreislauf nach BLUM und LEISS

zu beziehen und somit zu *interpretieren*. Hier muss auf Einheiten und Größen geachtet werden und möglicherweise eine spezielle Lösung verallgemeinert werden. Das Ergebnis ist dann das *reale Resultat*. Dieses wird anschließend kritisch überprüft beziehungsweise *validiert*. Man kontrolliert, ob die Lösung angemessen und plausibel ist und ob die Größenordnungen übereinstimmen. Treten hier Unstimmigkeiten auf, überprüft man einzelne Teile des Modellierungskreislaufes und optimiert diese gegebenenfalls. Interessant wäre hier auch ein Vergleich von unterschiedlichen Modellen für dieselbe Realsituation. Sie werden aus verschiedenen Perspektiven durchgeführt, das heißt es werden verschiedene Einflussgrößen unterschiedlich bewertet oder verschiedene Zielsetzungen gesetzt, weshalb man auch zu unterschiedlichen Modellen gelangt. Eine Thematisierung, warum man sich nun für beziehungsweise gegen ein bestimmtes Modell entscheidet, ist von zentraler Bedeutung. So kann den SchülerInnen vermittelt werden, dass mathematische Methoden nicht verabsolutiert werden dürfen, wie es jedoch oft, vor allem in der Politik, passiert. Es werden Entscheidungen mit schlagkräftigen Zahlen begründet, deren Aussagekraft in Wahrheit aber oftmals sehr begrenzt ist. Somit ist der Einsatz von mathematischen Methoden, ohne nach Sinn und Bewertung zu fragen, häufig in Zweifel zu ziehen. Der letzte Schritt ist schließlich die Darlegung, welche hauptsächlich eine didaktische Funktion erfüllt. Getroffene Modellannahmen und Ergebnisse sollen von den SchülerInnen dokumentiert und dargestellt werden.

Je nach Wissenstand der SchülerInnen und Schulstufe kann beziehungsweise soll dieses Schema didaktisch reduziert werden (vgl. Hinrichs, 2008, S.8ff.). Die Abbildung 2 beschreibt ein einfacheres Schema, das als „Lösungsplan" für SchülerInnen dienen kann (vgl. Blum, 2006, S.21).

Heymann (1996, S.153) fand es schon 1996 von zentraler Bedeutung, dass sich das Verständnis von Mathematik in der Schule eher weg von „Mathematik als Werkzeug" und hin zu „Mathematik als Kommunikationsmedium" bewegt, da sie auf diese Weise auch in der Gesellschaft relevant ist. Das sture Abarbeiten von Algorithmen sollte zugunsten von beispielsweise Interpretation von Graphiken und Tabellen oder einfachen mathematischen Modellierungen im Unterricht und auch in den Lehrplänen vernachlässigt werden. Ein wichtiger Schritt in diese Richtung war die Einführung der

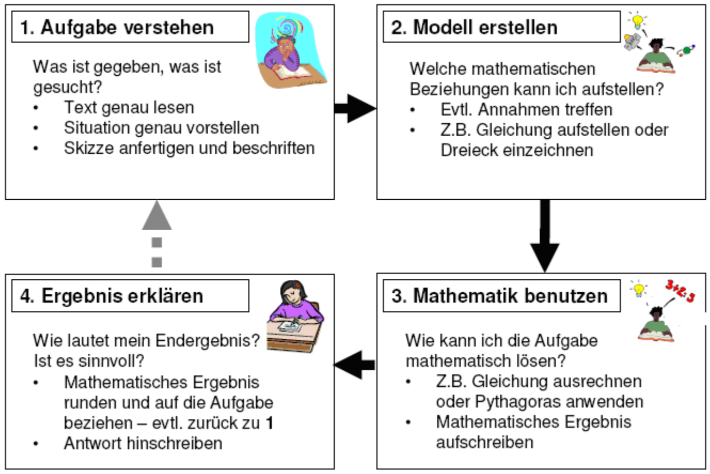


Abbildung 2: „Lösungsplan" für Modellierungsaufgaben nach BLUM

Bildungsstandards für die achte Schulstufe[1] und *der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung* für die AHS-Oberstufe[2] und dem damit einhergehenden *Kompetenzmodell.*

In den Bildungsstandards für die achte Schulstufe ist Modellbilden einer von vier Bereichen mathematischer Handlungen, wie in Tabelle 1 zu sehen ist, und ist somit schon von großer Bedeutung.

mathematischer Inhalt	mathematische Handlung	Komplexität
I1: Zahlen und Maße	H1: Darstellen, Modellbilden	K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten
I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten	H2: Rechnen, Operieren	K2: Herstellen von Verbindungen
I3: Geometrische Figuren und Körper	H3: Interpretieren	K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren
I4: Statistische Darstellung und Kenngrößen	H4: Argumentieren, Begründen	

Tabelle 1: Kompetenzmodell für die achte Schulstufe

Auch im Lehrplan der AHS-Unterstufe[3] ist das Modellieren fest verankert. So heißt es beispielsweise bei den Bildungs- und Lehraufgaben: „Das Bilden mathematischer Modelle und das Erkennen ihrer Grenzen soll zu einem verantwortungsvollen Umgang mit Aussagen führen, die mittels mathematischer Methoden entstanden sind."

Des Weiteren wird als mathematische Grundtätigkeit unter dem Punkt Unterrichtsziele und -inhalte unter anderem Folgendes genannt:

[1] vgl. Bundesinstitut bifie. Bildungsstandards.
https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_sek1_kompetenzbereiche_m8_2013-03-28.pdf
Stand: 06.11.2015

[2] vgl. Bundesministerium für Bildung und Frauen. Reifeprüfung.
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung.html
Stand: 06.11.2015

[3] vgl. Bundesministerium für Bildung und Frauen. Lehrplan AHS-Unterstufe.
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2
Stand: 06.11.2015

- „Kritisches Denken, insbesondere: Erkennen von Unzulänglichkeiten mathematischer Modelle“
- „Darstellen und Interpretieren, insbesondere: Erstellen und Interpretieren mathematischer Modelle außermathematischer Sachverhalte“

Beim konkreten Lehrstoff ist im Kernbereich außerdem noch vermerkt: „Die Schülerinnen und Schüler sollen praxisorientierte Aufgaben unter dem Aspekt der Modellbildung möglichst oft rechnerisch, geometrisch und graphisch darstellen, lösen und kritisch betrachten können. Dabei sollen sie von ihrer unmittelbaren Erlebniswelt ausgehen und ihre Erfahrungen auch in fächerübergreifende Vorhaben einbringen.“ Und schließlich bildet „*Arbeiten mit Modellen, Statistik*“ einen von vier Inhaltbereichen des Lehrstoffs.

Auch die Formulierungen des neuen Reifeprüfungskonzepts weisen stark auf eine Umorientierung im Sinne HEYMANNs hin. Darin wird von einer mathematischen Grundbildung im Sinne der OECD, welche sie als „die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektiertem Bürger entspricht“ (FUCHS/SILLER, 2010, S.130) beschreibt, ausgegangen. Die SchülerInnen sollen Grundkompetenzen erwerben, die sie dazu befähigen, die Mathematik als ein „sinnvolles und brauchbares Instrument ihrer unmittelbaren Lebenswelt“ zu erkennen beziehungsweise einzusetzen. Modellbildung konkret wird im Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten* und im Inhaltsbereich *Wahrscheinlichkeit und Statistik* bei den bildungstheoretischen Grundlagen hervorgehoben.

Im Lehrplan der AHS-Oberstufe wird als didaktischer Grundsatz das *Lernen in anwendungsorientierten Kontexten* angeführt, wobei hier auf die Aufgabe der „Reflexion des jeweiligen Modellbildungsprozesses hinsichtlich seiner Vorteile und seiner Grenzen“ verwiesen wird. Außerdem wird im Lehrstoff der fünften und sechsten Klasse (neunte beziehungsweise zehnte Schulstufe) jeweils im Bereich *Funktionen* das Reflektieren über Modelle beziehungsweise das Vergleichen von Modellen und das Erkennen der Grenzen von Modellbildungen genannt.

Zur Überprüfung der Legitimation aus allgemeindidaktischer Sicht kann das anfangs erwähnte Modell für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht von HEYMANN herangezogen werden. Der wesentliche Punkt hier ist die Weltorientierung. Weltorientierung heißt, dass SchülerInnen erkennen sollen, wo in der Welt Mathematik auftaucht, welche Rolle sie spielt und auch welche Grenzen sie hat. In der Natur von Modellierungsaufgaben liegt gerade der außermathematische Bezug, wodurch sie zur Weltorientierung beitragen können. Die anderen Punkte aus HEYMANNs Konzept[4] können mittels überlegter Auswahl der Aufgaben und vor allem einer entsprechenden Unterrichtskultur, in der unterschiedliche Lösungsideen konstruktiv genutzt werden, eine offene, wechselseitige Kommunikation ermöglicht wird, Fehler als Lernanlass gesehen werden und Verständnis im Vordergrund steht, trainiert werden.

[4]siehe S.2f.

Einsatz neuer Technologien

Um sich im Unterricht voll und ganz auf den tatsächlichen Modellierungsprozess konzentrieren zu können, kann es nach Hinrichs (2008, S.93ff.) oftmals hilfreich sein, neue Technologien, wie etwa ein Computeralgebrasystem (CAS) oder eine Tabellenkalkulation (TK), einzubinden. Dadurch ergeben sich einige Vorteile, von denen die wichtigsten hier angeführt sind.

- Die SchülerInnen können sich auf den Rechenweg und auf die Interpretation von einzelnen Ergebnissen konzentrieren, wodurch unliebsame Rechenfehler verhindert werden.
- Der tatsächliche Rechenvorgang wird von der Technologie übernommen und lenkt somit nicht vom eigentlichen Modellierungsprozess ab.
- Mittels einer dynamischen Geometriesoftware lassen sich auch dynamische Abhängigkeiten, beispielsweise mit einem Schieberegler, zeigen. So kann auch gut veranschaulicht werden, welchen Einfluss einzelne Parameter besitzen.
- Unzählige realitätsnahe Kontexte können behandelt werden, da die Verarbeitung realistischen Datenmaterials einfacher ist.

Diese Technologien können aber nur Hilfestellungen beim mathematischen Arbeiten geben, sie übernehmen jedoch nicht den Prozess des Modellbildens. „Für die Konstruktion von Modellen bzw. die Übersetzung von einem Realmodell zu einem mathematischen Modell sind kreative Ideen nötig, die technische Hilfsmittel nicht vollständig übernehmen können.“ (Hinrichs, 2008, S.95)

3 Die WINTER'schen Grunderfahrungen

Auch WINTER (2003, S.6) beschäftigte sich mit der Frage, was mathematische Allgemeinbildung sei und entwickelte dazu drei miteinander verknüpfte Grunderfahrungen, die WINTER'schen Grunderfahrungen, die ein Mathematikunterricht anstreben sollte.

(G1) „Erscheinungen in der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten (heuristische Fähigkeiten), die über die Mathematik hinaus gehen, zu erwerben."

Im ersten Punkt, (G1), wird die Mathematik als nützliches Instrument mit nahezu universeller Reichweite beschrieben. Er konkretisiert hier aber noch weiter: „Interessant und wirklich unentbehrlich für Allgemeinbildung sind Anwendungen der Mathematik erst, wenn in Beispielen aus dem gelebten Leben erfahren wird, wie mathematische Modellbildung funktioniert und welche Art von Aufklärung durch sie zustande kommen kann, und Aufklärung ist Bürgerrecht und Bürgerpflicht [...]." (WINTER, 2003, S.7) Von großer Bedeutung ist also auch bei ihm die Hervorhebung des Modellcharakters der Mathematik. Hier nennt er beispielsweise den Aufbau eines Verständnisses dafür, wie Kapital aufgrund von Zins und Zinseszins exponentiell wächst beziehungsweise schrumpft. Das heißt eine Vorstellung von exponentiellem Wachstum und Zerfall sind notwendig, um ökonomische Zusammenhänge zu erkennen. Neben Zinsberechnungen gibt er als weitere Beispiele für solche Erscheinungen in der Welt Fragen der Altersvorsorge, des Versicherungs- und Steuerwesens an. Dies soll keinesfalls als Fachrechnen für Finanzexperten gesehen werden, sondern als eine „politisch-aufklärerische Arithmetik". Auch die Besprechung von Modellen aus Technik und Naturwissenschaft, wie etwa dem Fallgesetz, ist unentbehrlich für einen allgemeinbildenden Unterricht. Schließlich äußert sich WINTER noch über die Geometrie, dessen primärer Wert es ist, als Modellierung unserer Welt zu dienen.

Die Grunderfahrung (G2) bezieht sich auf die innere Mathematik als strenge Wissenschaft. Ein Verständnis für den Begriff der Zahl und vor allem für die Erweiterbarkeit des Zahlenbegriffs zu entwickeln, ist hierbei von großem Interesse. Als eines der wichtigsten Ziele der mathematischen Allgemeinbildung versteht er den überlegten und kreativen Umgang mit Variablen, Termen, Formeln und Gleichungen. Aber auch der geometrische Bezug darf nicht außer Acht gelassen werden. So kann beispielsweise durch die Messung der Diagonale mit der Seite eines Quadrats nachentdeckt werden, dass es einerseits kein gemeinsames Maß für die beiden gibt, jedoch durch Wechselwegnahme eine Folge konstruiert werden kann (1, 3/2, 7/5, 17/12, ...), die schließlich gegen den Wert $\sqrt{2}$ strebt, woraus folgt, dass die Diagonale das $\sqrt{2}$- fache der Seite ist. Auch sollen die SchülerInnen Einsicht in die logische Schlüssigkeit von Argumentationen gewinnen.

Mit der dritten Grunderfahrung, (G3), ist die Mathematik in ihrer Funktion als „Schule des Denkens" angesprochen. Hier ist wesentlich, Problemlösefähigkeiten zu entwickeln und über den Lösungsprozess zu reflektieren, das heißt zu fragen, wo Schwierigkeiten oder Knackpunkte liegen, ob die Aufgabe in Teilaufgaben zerlegt werden kann oder ob Symmetrien erkannt werden können, beziehungsweise danach zu fragen, ob die Lösung kontrolliert werden kann, ob dieses Ergebnis zu erwarten war oder ob es einen einfacheren Lösungsweg gegeben hätte. Der Grundsatz „Fehler zum Lernen zu nutzen" hat dabei einen großen allgemeinbildenden Wert.

Das hier schon angesprochene reflexive Denken muss auch im Zusammenhang mit (G1) geschult werden. Der Modellierungsprozess ist erst dann abgeschlossen, wenn auch die Angemessenheit des Modells diskutiert worden ist. Besonders interessant ist das auch hinsichtlich der dahinterstehenden Interessen. Dies betrifft vor allem Modelle zu Erscheinungen in Wirtschaft, Staat und Gesellschaft, wie bei (G1) schon angesprochen. Aber auch scheinbar rein wissenschaftliche Modelle können später zu anderen Zwecken benutzt werden, so beschreibt beispielsweise die Wurfparabel sowohl die Bahn des Lobs im Tennis, sowie auch den Weg einer zerstörerischen Granate.

Tatsächlich ist es aber leider so, dass der Wert der mathematischen Allgemeinbildung in der breiten Masse kaum geschätzt wird. Die Mathematik wird als etwas gesehen, dass nur für besonders begabte Menschen oder Experten aus den Bereichen Physik oder Technik zugänglich ist, und für den Rest eher uninteressant erscheint. Es gilt sogar, so WINTER, fast als modern, trotz einer langen Schulausbildung nichts von Mathematik verstanden zu haben. „Ausgerechnet Mathematik als Musterfall absoluter Klarheit wird verbreitet als Musterfall besonderer Unverständlichkeit empfunden." (WINTER, 2003, S.13)

Auf die von WINTER schon angesprochene Notwendigkeit der Vernetzung von politischer Bildung und einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht, er nennt dies „politisch-aufklärerische Arithmetik", wird in dieser Arbeit nun näher eingegangen.

Teil II

Zur Situation der politischen Bildung an Österreichs Schulen

Geschichte der politischen Bildung seit 1945

Durch einen Erlass von 1949, der „Erlass zur staatsbürgerlichen Erziehung“, versuchte man an die Zeit vor dem Zweiten Weltkrieg anzuknüpfen. Im Mittelpunkt dabei standen die traditionelle staatsbürgerliche Erziehung und die Entwicklung eines ausgeprägten Nationalstolzes, vielmehr als eine Erziehung zum autonomen politischen Denken. Daran änderte sich auch so bald nichts. Erst das Schulorganisationsgesetz von 1962, im speziellen §2, zeigte eine Neuerung, die noch heute die Basis der politischen Bildung im schulischen Rahmen darstellt. Die Aufgabe der Schule ist darin folgendermaßen formuliert:

> „Die österreichische Schule hat die Aufgabe, an der Entwicklung der Anlagen der Jugend nach sittlichen, religiösen und sozialen Werten sowie nach den Werten des Wahren, Guten und Schönen durch einen ihrer Entwicklungsstufe und ihrem Bildungsweg entsprechenden Unterricht mitzuwirken. Sie hat die Jugend mit dem für das Leben und den künftigen Beruf erforderlichen Wissen und Können auszustatten und zum selbsttätigen Bildungserwerb zu erziehen. Die jungen Menschen sollen zu gesunden, arbeitstüchtigen, pflichttreuen und verantwortungsbewussten Gliedern der Gesellschaft und Bürgern der demokratischen und bundesstaatlichen Republik Österreich herangebildet werden. Sie sollen zu selbstständigem Urteil und sozialem Verständnis geführt, dem politischen und weltanschaulichen Denken anderer aufgeschlossen sowie befähigt werden, am Wirtschafts-und Kulturleben Österreichs, Europas und der Welt Anteil zu nehmen und in Freiheits- und Friedensliebe an den gemeinsamen Aufgaben der Menschheit mitzuwirken.“ [5]

In den 60er Jahren entwickelte sich zudem langsam eine ausgedehnte sozialwissenschaftliche Disziplin an den österreichischen Universitäten und 1968 wurde schließlich auch ein Lehrstuhl für Politikwissenschaft an der Universität Wien eingerichtet. Auswirkungen auf den Unterricht an den Schulen zeigten sich jedoch zu Beginn kaum. Die politische Bildung gewann aber immer mehr an Bedeutung, beispielsweise mit der Errichtung einer Arbeitsgemeinschaft „Geschichte und Sozialkunde - Geographie und Wirtschaftskunde“ im Jahr 1970, deren Aufgabe es auch war eine zeitgemäße Staatsbürgerkunde zu erarbeiten. Im selben Jahr schaffte sie als unverbindliche Übung den Sprung an die Schulen. Ziel dieser Übung war, den SchülerInnen Kenntnisse über Faktoren und Funktionszusammenhänge der Ordnungen und des Geschehens in Politik, Wirtschaft und Gesellschaft zu vermitteln. Sie sollten eine kritische Urteilsfähigkeit erlangen und rational kontrollierte Entscheidungen treffen können. Bemühungen politische Bildung als Pflichtgegenstand einzuführen, scheiterten jedoch aus den verschiedensten

[5] Bundeskanzleramt Rechtsinformationssystem.
https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10009265
Stand: 16.04.2015

Gründen am Widerstand der Parteien. Nur in den BMHS und Berufsschulen konnte „Politische Bildung“ als eigener Unterrichtsgegenstand früh Fuß fassen. In den AHS hingegen war dies ein langer Kampf. Nach langen Diskussionen und Überarbeitungen konnte aber schließlich am 11. April 1978 ein Grundsatzerlass zur Verankerung der politischen Bildung als Unterrichtsprinzip unterzeichnet werden. Dadurch wurde die politische Bildung ein Auftrag, der sich an alle Unterrichtsfächer richtet und LehrerInnen aller Gegenstände dazu auffordert, im Rahmen ihres Unterrichts einen Beitrag zur Erziehung der SchülerInnen zu politisch mündigen StaatsbürgerInnen zu leisten (vgl. WOLF, 1998, S.24ff.).

Der Grundsatzerlass

Im Grundsatzerlass wird zu Beginn die wesentliche Aufgabe der Politischen Bildung mit der Erziehung zu einem demokratisch fundierten Österreichbewusstsein, zu einem gesamteuropäischen Denken und zu einer Weltoffenheit, die vom Verständnis für die existentiellen Probleme der Menschheit getragen ist, beschrieben. Im Weiteren werden Wichtigkeit und Kennzeichen einer demokratischen Gesellschaft besprochen, und auf die Grundwerte Friede, Freiheit, Gleichheit und Gerechtigkeit verwiesen. Es werden drei einander wechselseitig beeinflussende Bereiche genannt, die politische Bildung kennzeichnen. Diese sind „Vermittlung von Wissen und Können“, „Entwicklung von Fähigkeiten und Kenntnissen“ und „Weckung von Bereitschaft zu verantwortungsbewusstem Handeln“. Sie spiegeln sich auch in den formulierten Zielen von politischer Bildung wider. Demnach soll politische Bildung dazu beitragen, dass SchülerInnen gesellschaftliche Strukturen erkennen, aktiv am politisch Leben teilhaben, eine tolerante Einstellung gegenüber anderen politischen Meinungen einnehmen, ein Verständnis für die Aufgaben der Landesverteidigung entwickeln und für unantastbare Grundwerte, wie Freiheit und Menschenwürde, eintreten.

Schließlich werden im Grundsatzerlass noch Hinweise für die Gestaltung des Unterrichts gegeben. Die Lehrperson soll besonders darauf achten, den Grundgedanken, dass Lernen auf Erfahrung und Einsicht beruht, zu berücksichtigen, und durch Übertragung verantwortungsvoller Tätigkeiten zur Förderung des Erlebens demokratischer Einstellungen und Verhaltensweisen beitragen. SchülerInnen sollen lernen, verschiedene Meinungen zu respektieren und Kompromisse im Dialog zu finden. Sind die persönlichen Ansichten der Lehrperson gefragt, sollte diese besonders darauf achten, andere Meinungen nicht herabzusetzen und den SchülerInnen Kritik daran zu ermöglichen.

Auch hier ist der Erfolg abhängig von einer guten Zusammenarbeit zwischen SchülerInnen, Eltern und LehrerInnen.[6]

Somit gilt nun das Unterrichtsprinzip politische Bildung, doch da daneben zum heutigen Zeitpunkt noch elf weitere Unterrichtsprinzipien existieren und das Ausmaß der Verwirklichung allein bei den LehrerInnen liegt, kann man die Bedeutung dieses Erlasses für die tatsächliche Unterrichtspraxis gerechtfertigterweise in Frage stellen. Erst 2001 wurde in den letzten beiden Schulstufen der AHS-Oberstufe das bisherige Unterrichtsfach „Geschichte und Sozialkunde“ durch das Fach „Geschichte und Politische

[6] vgl. Bundesministerium für Bildung und Frauen. Grundsatzerlass.
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/uek/pb_grundsatzerlass_1994_26943.pdf?4dzgm2
Stand: 04.03.2015

Bildung“ ersetzt, was jedoch erst 2004 in den Lehrplänen geregelt wurde. In der 4. Klasse der Sekundarstufe I passierte das 2008. Grund dafür war die im Juni 2007 beschlossene Senkung des aktiven Wahlrechts auf das vollendete sechzehnte Lebensjahr. Es entstand eine Diskussion darüber, ob die Jugendlichen dieses Alters schon die nötige Reife und das Reflexionsvermögen, um wählen zu gehen, haben, vor allem deshalb, weil die meisten Jugendlichen bis dahin kaum politische Bildung erhielten. Als Folge dessen wurde es nun auch in der Sekundarstufe I als Unterrichtsgegenstand etabliert (vgl. Ammerer, 2010, S.15f.).

Einen guten Überblick über die momentanen Gegebenheiten an Österreichs Schulen liefert die unten stehende Abbildung 3[7].

Politische Bildung in den Schulen – tabellarische Übersicht

Schulstufe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Schultyp	Unterrichtsprinzip Politische Bildung (gilt für alle Schultypen und Schulstufen)												
VS/VS – Oberstufe, Sonderschule						2 GSK/PB	2 GSK/PB	2 GSK/PB Schwerpunkt PB					
HS, AHS – Unterstufe, Neue Mittelschule						2 GSK/PB	2 GSK/PB	2 GSK/PB Schwerpunkt PB					
AHS – Oberstufe									1 GSK/PB	2 GSK/PB	2 GSK/PB	2 GSK/PB	
PTS – Polytechnische Schule									2 PB u. WiKu				
Berufsschule										PB (insgesamt 80 Wochenstunden)			
Technische und (kunst)-gewerbliche Fachschulen									2 G u. PB				
Handelsschule									2 PB u. Zeitgeschichte	2 PB u. Zeitgeschichte	1 PB u. Zeitgeschichte		
Fachschule für Mode											2 PB u. Recht		
Fachschule für Mode und Bekleidungstechnik											2 PB u. Recht		
Fachschule für wirtschaftliche Berufe											3 PB u. Recht		
Fachschule für Sozialberufe									1 PB u. Recht	1 PB u. Recht	1 PB u. Recht		
Höhere Technische Lehranstalt											2 G u. PB	2 G u. PB	
Höhere Technische Lehranstalt (Lehrplan 2011)									2 Geografie, G u. PB	2 Geografie, G u. PB	2 Geografie, G u. PB	2 Geografie, G u. PB	
Höhere Lehranstalt für wirtschaftliche Berufe												2 PB u. Recht	2 PB u. Recht
Handelsakademie										1 PB u. Geschichte	2 PB u. Geschichte	2 PB u. Geschichte	
Höhere land- und forstwirtschaftliche Schulen												2 G u. PB	3 G u. PB
Bildungsanstalt für Kindergartenpädagogik									2 GSK/PB	1 GSK/PB	2 GSK/PB		2 GSK/PB
Bildungsanstalt für Sozialpädagogik													2 Rechtskunde u. PB

Stand September 2014. Zur genauen Bezeichnungen der Schultypen und Gegenstände siehe S. 2 und 3

Abbildung 3: Übersicht: Politische Bildung an Österreichs Schulen

Unterrichtsprinzipien

Wie eben erwähnt, gibt es zurzeit zwölf Unterrichtsprinzipien, deren Zweck der Erwerb fächerübergreifender Kompetenzen ist, welche einerseits dazu dienen, fachspezifische Anforderungen zu unterstützen

[7] vgl. Zentrum Polis.
http://www.politik-lernen.at/content/site/basiswissen/politischebildung/lehrplaene/index.html
Stand: 04.03.2015

und andererseits wichtige individuelle beziehungsweise gesellschaftliche Angelegenheiten ansprechen (vgl. Weiglhofer, 2013, S.1). Sie leisten einen wesentlichen Beitrag zur Erfüllung der im Schulorganisationsgesetz formulierten Aufgabe der Schule[8]. Konkret lauten sie wie folgt[9]:

- Entwicklungspolitische Bildungsarbeit
- Erziehung zur Gleichstellung von Frauen und Männern
- Europapolitische Bildungsarbeit
- Gesundheitserziehung
- Interkulturelles Lernen
- Leseerziehung
- Medienbildung
- Politische Bildung
- Sexualerziehung
- Umweltbildung
- Verkehrserziehung
- Wirtschaftserziehung und Verbraucher/innenbildung

Auch wenn sich manche davon auf den ersten Blick bestimmten Fächern zuordnen lassen, wie beispielsweise Umweltbildung dem Fach „Biologie und Umweltkunde", sollen sie nicht auf einzelne Fächer beschränkt werden, sondern sich wie ein roter Faden durch alle Gegenstände ziehen.

Kompetenzen durch politische Bildung

Die Demokratie lebt von der Beteiligung der BürgerInnen. Um angemessen an diesen Prozessen der Meinungsbildung und politischer Entscheidungsfindung teilnehmen zu können, benötigt man gewisse Kompetenzen, welche durch politische Bildung erworben werden sollen. Grundlegend ist die Fähigkeit, selbstbestimmt politisch zu denken und an politischen Prozessen eigenverantwortlich teilzunehmen. Dies kann offensichtlich nicht durch bloße Wiedergabe von Wissen erfolgen, sondern benötigt Lehr- und Lernformen, in denen diese Kompetenzen selbst antrainiert werden können. Oberstes Ziel ist das „reflektierte und selbstreflexive politische Denken und Handeln" (vgl. Krammer, 2010, S.23).

Was erwartet nun unsere demokratische Gesellschaft von der politischen Bildung der Jugend im Bereich des Schulischen? Dieser Frage ging 2007 im Auftrag des BMfUK[10] eine Kommission, u. a. mit Reinhard Krammer, nach und entwickelte dazu ein Kompetenz-Strukturmodell.

[8] siehe S.11

[9] vgl. Bundesministerium für Bildung und Frauen. Unterrichtsprinzipien.
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/index.html
Stand: 04.03.2015

[10] Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur

Im erarbeiteten Modell werden vier verschiedene Kompetenzbereiche genannt, die jedoch nicht strikt voneinander getrennt betrachtet werden sollen, da sie einander oftmals überschneiden. Diese sind *die Urteilskompetenz, die Handlungskompetenz, die Methodenkompetenz* und *die Sachkompetenz.*

Die politische Urteilskompetenz beschreibt „die Fähigkeit, Fertigkeit und Bereitschaft zu einer selbstständigen, begründeten und möglichst sach- und/oder wertorientierten Beurteilung politischer Entscheidungen, Probleme und Kontroversen." (KRAMMER, 2010, S.26) Hierbei geht es sowohl um fertig vorliegende Urteile, also auch um selbst zu treffende Urteile. Ein Beispiel hierfür wäre, die Bindung vorliegender oder eigener politischer Entscheidungen und Urteile an vorgegebene Interessen zu erkennen.

Als politische Handlungskompetenz wird „die Fähigkeit, Fertigkeit und Bereitschaft, eigene Positionen in politischen Fragen zu formulieren und zu artikulieren, politische Positionen anderer zu verstehen und aufzugreifen, sowie an der Lösung von Problemen aus den Bereichen Politik, Wirtschaft und Gesellschaft unter Rücksichtnahme auf eigene und fremde Bedürfnisse mitzuwirken." (KRAMMER, 2010, S.28) Grundlegend hierbei sind die Bereitschaft zum Kompromiss, die Fähigkeit zur Kommunikation sowie Toleranz und Akzeptanz. Dies lässt sich in zwei Handlungsbereiche einteilen. Zum einen das Artikulieren, Vertreten und Durchsetzen von Interessen, Entscheidungen und Meinungen, und zum anderen das Nutzen von Angeboten verschiedener politischer Einrichtungen.

Unter politischer Methodenkompetenz versteht man zwei Dinge. Auf der einen Seite geht es um „das Verfügenkönnen über Verfahren und Methoden, die es erlauben, sich mündlich, schriftlich, visuell und/oder in modernen Medien politisch zu artikulieren und so im Idealfall auf reflektierte und (selbst)reflexive Weise eigene Manifestationen zu schaffen." (KRAMMER, 2010, S.29) und auf der anderen Seite umfasst sie „die Fähigkeiten, Fertigkeiten und Bereitschaften zum Entschlüsseln fertiger Manifestationen des Politischen (in unterschiedlichen Medien, in unterschiedlichen Textsorten, für unterschiedliche Adressaten ...)." (KRAMMER, 2010, S.29) Daher lassen sich auch hier zwei Bereiche nennen. Dies ist einerseits der kritische Umgang mit fertigen Manifestationen des Politischen und andererseits eigenständige politische Äußerungen zu tätigen.

Die politische Sachkompetenz umfasst „jene Fähigkeiten, Fertigkeiten und Bereitschaften, die Begriffe, Kategorien bzw. die Konzepte des Politischen zu verstehen, über sie zu verfügen sowie sie kritisch weiterentwickeln zu können." (KRAMMER, 2010, S.31) Es geht beispielsweise darum, die Unterschiede der Alltagssprache des Politischen und der wissenschaftsorientierten Fachsprache zu kennen (vgl. KRAMMER, 2010, S.22ff.).

Wie eben erläutert, ist also auch an der AHS Politische Bildung als Unterrichtsgegenstand kombiniert mit Geschichte und Sozialkunde verankert, dennoch bleibt das Unterrichtsprinzip für alle Fächer erhalten. Dies bietet eine großartige Möglichkeit aus verschiedensten Perspektiven wichtige politische Themen zu betrachten. „Kompetenzorientierte politische Bildung lässt sich in allen Fächern umsetzen, da sie das enge theoretische Feld der Staatsbürgerkunde hinter sich lässt und bewusst lebensweltliche Anknüpfungspunkte zu allen Disziplinen sucht." (AMMERER, 2010, S.18)
Im Folgenden möchte ich das am Unterrichtsfach Mathematik demonstrieren.

Teil III

Zusammenhänge von Mathematik und Politik

In den vorigen Kapiteln wurde schon ganz deutlich, dass die politische Bildung einen großen Stellenwert im Rahmen eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts einnimmt. Als Lehrperson kommt man also nicht umhin, die Zusammenhänge von Mathematik und Politik beziehungsweise die Rolle, die die Mathematik in der Politik spielt, aufzudecken und den SchülerInnen näher zu bringen.

Für viele Menschen, so Jürgen Maass (2010, S.122ff.), gilt gerade die Mathematik als Paradebeispiel einer unpolitischen, sachlichen und neutralen Wissenschaft. Die Rechnung „2+2=4" beziehungsweise geltende Rechengesetze sind in jedem Staat der Erde gültig, unabhängig vom politischen System oder von bestimmten PolitikerInnen. Dass dem nicht so ist, haben wir schon in Teil I gesehen. Er hat nun drei Grundbereiche vorgeschlagen, anhand derer die Verknüpfung der beiden Disziplinen verwirklicht werden kann.

Überzeugend ist der Zusammenhang von Mathematik und Politik am Beispiel der *Wahlmathematik*. Da prinzipiell jeder Staatsbürger, der das sechzehnte Lebensjahr vollendet hat, aktiv wahlberechtigt ist, betrifft dieses Thema eine/n jede/n und höchstwahrscheinlich jede/r Schüler/in hat sich schon einmal damit beschäftigt, sei es in Gesprächen mit Eltern oder Freunden, oder durch das Fernsehen, Zeitungen oder andere Medien. In erster Linie sind hier natürlich politische Wahlen, im Sinne von Gemeinderats-, Landtags- oder Nationalratswahlen, gemeint, aber auch in anderen Lebensbereichen spielen Wahlen eine Rolle. Gerade für SchülerInnen, die noch nicht aktiv wahlberechtigt sind, bieten Wahlen im Bereich der Schule, beispielsweise KlassensprecherInnenwahlen oder SchulsprecherInnenwahlen, einen guten Anknüpfungspunkt. Zur Diskussion stehen hier Fragen wie „Wie führen unterschiedliche Wahlmethoden zu unterschiedlichen Ergebnissen?", oder, konkret im Bezug auf politische Wahlen, „Wie werden abgegebene Stimmen in Sitze im Parlament umgerechnet?" oder „Weshalb wurde George Bush im Jahr 2000 Präsident der Vereinigten Staaten, obwohl sein Kontrahent Al Gore um etwa 500 000 Wählerstimmen mehr bekam?". Antworten auf diese Fragen und andere interessante Gegebenheiten zum Thema Wahlmathematik werden in Abschnitt 4 behandelt.

Ein weiterer Teilbereich, der die Vernetzung von Mathematik und Politik zweifelsohne aufzeigt, ist die *Wirtschaftsmathematik*.
Bei zahlreichen, wenn nicht fast allen, politischen Entscheidungen geht es um Geld. Dies betrifft Otto Normalverbraucher vor allem dann, wenn im Rahmen von Sparmaßnahmen Lohnkürzungen vorgenommen oder neue Steuern eingeführt werden. Zur Rechtfertigung solcher Sparprogramme werden oft mathematisch fundierte Argumente herangezogen, insbesondere Prozentangaben, als Beweis dafür, dass etwas gerade noch oder nicht mehr so weiter geht. Viele dieser Entscheidungen basieren außerdem auf Prognosen und Vorhersagen, die aufgrund mathematischer Modelle getroffen werden. SchülerInnen einen Einblick in die tatsächliche Aussagekraft solcher Prognosen und in die Modellbildung in der Wirtschaft zu geben, kann so auch zur politischen Bildung beitragen. Abschnitt 5 beleuchtet diesen Aspekt näher.

Das dritte und letzte Gebiet, anhand dessen die Möglichkeit zur Verknüpfung von Mathematik und

Politik gezeigt wird, ist die *Statistik*.
Diese spielt heutzutage eine große Rolle, wenn es um politische Diskussionen und vor allem deren Darstellung in den Medien geht. Nahezu ein jeder Vorschlag oder eine jede Maßnahme wird von einer untermauernden Statistik begleitet. Genauso haben aber auch deren KritikerInnen Statistiken parat, die wiederum ihre Meinung unterstützen. Meinungsumfragen in Bezug auf politische Themen sind aus den Medien nicht mehr wegzudenken, man denke nur an manche Printmedien, die fast jeden Tag eine neue Meinungsumfrage präsentieren. Sie sind zu einem wichtigen politischen Instrument geworden, um ein Bild von der Einstellung der Bevölkerung zu erhalten, aber auch um diese zu beeinflussen. Gerade aufgrund dieser Vielzahl an Statistiken und Meinungsumfragen ist es von besonderer Bedeutung, dass SchülerInnen lernen, diese richtig zu lesen, richtig zu interpretieren und eine möglicherweise dahinterstehende manipulative Absicht zu erkennen. Genaueres dazu wird in Abschnitt 6 besprochen.

4 Wahlmathematik

4.1 Allgemeine Wahlmethoden

Der Prozess der Entscheidungsfindung wird immer mehr von mathematischen Methoden beeinflusst, ja ganze Teilgebiete der Mathematik haben sich der Entscheidungstheorie verschrieben.

Die Ausgangsfrage hier ist, wie eine Gruppe von Personen, mit unterschiedlichen Einstellungen und Anschauungen, zu einer kollektiven Meinung kommt, wenn eine Reihe von Alternativen zur Wahl stehen. In einer demokratischen Gesellschaft müssen häufig Entscheidungen dieser Art, im Rahmen von Wahlen, getroffen werden. Es wird sich zeigen, dass alle Wahlsysteme gewisse Mängel aufweisen, und so nicht frei von Manipulation sind. Dessen sollte sich ein jeder Bürger und jede Bürgerin bewusst sein.

Das wesentliche Problem liegt also darin, aus den Entscheidungen einzelner Personen für verschiedene Alternativen, eine Gesamtentscheidung der Gruppe zu machen, so wie es etwa bei der Verabschiedung eines Gesetzes im Parlament oder bei der Aufstellung eines Schulelternbeirates der Fall ist. Überall beeinflusst das zugrundeliegende Wahlsystem ganz entscheidend den Wahlausgang.

Eine ganze Reihe von Wahlmethoden haben sich mittlerweile etabliert und finden Anwendung, unter anderem das absolute Mehrheitsprinzip, das relative Mehrheitsprinzip, verschiedene Eliminations- und Ausscheidungsverfahren, sequentielle paarweise Vergleiche, verschiedene Gewichts- und Punktesysteme und die Wahl durch Zustimmung. Aus dieser Vielzahl an Möglichkeiten ist nun ein der Situation entsprechendes System zu wählen, da keines universell einsetzbar ist. Oftmals bewährt hat sich dabei das absolute Mehrheitsprinzip. Wirklich gerecht ist dies aber nach näherer Betrachtung nur, wenn es nur zwei Auswahlmöglichkeiten beziehungsweise Kandidaten gibt, denn dann gewinnt derjenige mit den meisten Stimmen, welcher nun logischerweise auch die Stimmenmehrheit besitzt. Aber schon bei drei Kandidaten kann der Fall eintreten, dass keiner über 50 Prozent der Stimmen erhält, und so der Kandidat mit den meisten Stimmen keine Stimmenmehrheit hat. Nach dem absoluten Mehrheitsprinzip hat hier also niemand die Wahl gewonnen, weshalb in diesen Fällen meist auf das relative Mehrheitswahlrecht zurückgegriffen wird, bei dem auch weniger als die Hälfte der Stimmen für einen Sieg ausreichen.

Aber nicht nur das verwendete Wahlsystem wirkt sich auf das Ergebnis aus, sondern vieles mehr, wie beispielsweise die Formulierung oder die Anordnung von Wahlalternativen, Lucas (1989, S.127) fasst das unter dem Begriff *Wahltaktik* zusammen (vgl. Lucas, 1989, S.125f.), eine Rolle spielt.

Beispiel 1
Die eben erwähnte Wahltaktik lässt sich anhand eines historischen Beispiels zeigen.

Plinius der Jüngere, Senator im Römischen Reich, gilt offiziell als der erste, der sich vor fast 2000 Jahren mit der Frage nach der richtigen Stimmenauszählung beschäftigte. Ausgelöst wurde sein Interesse an diesem Thema durch den mysteriösen Tod des Senators Afranius Dexter. Dieser starb keines natürlichen Todes, weitere Umstände sind aber nicht bekannt. Es ergeben sich drei mögliche Szenarien für seinen Tod. Das ist zum Ersten Selbstmord, zum Zweiten Mord und zum Dritten von ihm selbst in Auftrag gegebener Mord, also quasi Tötung auf Verlangen, wobei hinsichtlich des Mordes und der Tötung auf Verlangen seine Sklaven verdächtigt wurden. Der Senat musste über deren Schuld (im Fall des Mordes), teilweiser Schuld (im Fall der Tötung auf Verlangen) oder Unschuld (im Fall des Selbstmordes) entscheiden. Das jeweilige Strafmaß dafür war Hinrichtung, Verbannung oder Freispruch.

Die Problematik bei dieser Entscheidung ist, dass es nicht zwei mögliche Alternativen (Schuld oder Unschuld) gibt, sondern dass noch eine dritte (teilweise Schuld) hinzukommt, weshalb verschiedene Intrigen und Manipulationen möglich waren (vgl. Szpiro, 2011, S.21ff.).

Im Senat bildeten sich drei Gruppen, die jeweils unterschiedlicher Meinung über das Strafmaß waren.

Gruppe A: Die Sklaven sind unschuldig und somit ist Freispruch das angemessene Strafmaß. Diese Gruppe machte 40 Prozent des Senats aus.

Gruppe B: Die Sklaven sind teilweise schuldig und somit ist Verbannung das angemessene Strafmaß. Dieser Gruppe waren 35 Prozent des Senats angehörig.

Gruppe C: Die Sklaven sind des Mordes schuldig und somit ist Hinrichtung das angemessene Strafmaß. Die restlichen 25 Prozent bildeten diese Gruppe.

Gruppe	A	B	C
Urteilsspruch	a	b	c
Prozentsatz	40	35	25

Im Folgenden sollen die Buchstaben A, B und C für die drei Gruppen stehen, und a, b und c für das zugehörige Strafmaß. Der Urteilsspruch hängt bei dieser Verhandlung sowohl vom Wahlsystem, als auch von den Informationen, die die Senatoren besitzen, und ihren taktischen Strategien ab.

Das relative Mehrheitsprinzip

Unterliegt die Abstimmung diesem Wahlsystem, so erhält man zunächst den Eindruck, dass die Sklaven freigesprochen werden würden, da die Gruppe A mit 40 Prozent die meisten Anhänger hat.

Unter der Annahme, die Senatoren wüssten im Vorfeld, dass 40 Prozent zu a, 35 Prozent zu b und 25 Prozent zu c neigen, könnte es jedoch ganz anders ausgehen. Höchstwahrscheinlich würde die Gruppe C dann von der Todesstrafe ablassen und zu Gruppe B wechseln, um mit den dann erreichten 60 Prozent die Mehrheit zu bilden und so zumindest eine Verbannung zu erzielen. Das heißt, weiß man über die weiteren Präferenzen einer Gruppe Bescheid, lässt sich dies zum eigenen Zweck nutzen. In

Gruppe	A	B	C
1. Präferenz	a	b	c
2. Präferenz	b	a	b
3. Präferenz	c	c	a
Prozentsatz	40	35	25

Tabelle 2: Präferenztabelle

diesem Fall würde sich die Präferenzen zum Beispiel wie in Tabelle 2 dargestellt ergeben.

Nun wählt Gruppe A immer a, für Gruppe B und C sollen jedoch alle Möglichkeiten offen bleiben. Es ergibt sich dadurch folgende Ergebnistabelle. Darin kann man sehen, dass bei ehrlicher Wahl, also wenn

		C stimmt für		
A stimmt für	a	a	b	c
	a	a	a	a
B stimmt für	b	a	b	**a**
	c	a	a	c

Tabelle 3: Ergebnistabelle

jeder seiner ersten Präferenz entsprechend wählt, das Ergebnis a sein wird. Bei genauerer Betrachtung ist zu sehen, dass die Gruppen B und C ein zufriedenstellenderes Ergebnis erzielen könnten, wenn die Gruppe C b statt c wählt. Das Wahlergebnis würde in diesem Fall b lauten, was der ersten Präferenz von B und der zweiten Präferenz von C entspricht. Das heißt, es ergibt sich für beide Gruppen eine Steigerung im Vergleich zum vorigen, ehrlichen Wahlergebnis. Sich gemeinsam gegen A zu verbünden ist sogar für die Gruppen B und C die beste aller Möglichkeiten, auch besser als die ehrliche Wahl.

Sequentielle Wahlsysteme

Gegen das relative Mehrheitsprinzip spricht die Tatsache, dass bei mehr als zwei Alternativen der Gewinner möglicherweise nur weniger als der Hälfte der Stimmen erhalten hat, wie es auch in diesem Beispiel unter der Annahme einer ehrlichen Wahl der Fall ist. Mithilfe eines sequentiellen Verfahrens, bei dem in jedem Schritt eine absolute Mehrheit entscheidet, kann dies umgangen werden.

In diesem Beispiel könnte der Senat zuerst über „Schuld" oder „Unschuld" entscheiden. Die Gruppe A, also 40 Prozent, würde dabei für „Unschuld" stimmen und die Gruppen B und C, also 60 Prozent, für „Schuld", was bedeutet, dass das Ergebnis „Schuld" lautet. Im zweiten Schritt muss nun über das Strafmaß, entweder b (Verbannung) oder c (Hinrichtung), entschieden werden. Hierbei wird sowohl die Gruppe A also auch die Gruppe B, das heißt insgesamt 75 Prozent, für b und die Gruppe C, also 25 Prozent, für c stimmen. Das Endergebnis hier ist also wie auch vorhin b, mit dem Unterschied, dass mit diesem Wahlsystem die ehrliche Wahl die beste Strategie für alle Gruppen ist, da kein Bündnis möglich ist, welches für A und C zu einem besseren Ergebnis führt.

Der Senat könnte im ersten Schritt aber auch über die Bestrafung im Fall der Schuld, und dann erst über die eigentliche Schuldfrage abstimmen. Das heißt zuerst wird zwischen den Alternativen b und c gewählt, wobei b mit 75 Prozent siegt. Im zweiten Schritt wird dann über „Unschuld", also a, und „Schuld", also b, da ja c im ersten Wahlgang ausgeschieden ist, entschieden. Aus dieser Wahl würde somit wieder b als Sieger hervorgehen. Bei dieser Wahlanordnung gäbe es aber nun für A sehr wohl eine Möglichkeit zu einem wünschenswerteren Ergebnis zu kommen. Diese Gruppe könnte im ersten Wahlgang unehrlich für c stimmen, um so gemeinsam mit Gruppe C und den damit erreichten 65 Prozent b zu eliminieren. Sie würde jedoch im zweiten Wahlgang, bei dem nun zwischen a und c entschieden wird, wieder zu seiner ersten Präferenz, a, zurückkehren und so gemeinsam mit Gruppe B über Gruppe C siegen. Das Endergebnis hier würde also a sein, was bedeutet, dass für A in diesem Fall eine unehrliche Wahl zu einem wünschenswerteren Ergebnis führt. Unter Umständen könnte jedoch

Gruppe C das Vorhaben von Gruppe A durchschauen, und deshalb im ersten Durchgang nicht für c, sondern für b stimmen, um das für sie unangenehmste Ergebnis a zu verhindern.

Condorcet-Sieger

Eine weitere Wahlmöglichkeit besteht darin, den Condorcet-Sieger zu bestimmen, das heißt jene Alternative, die jede andere Alternative im direkten Vergleich schlägt. Unter der Bedingung einer ehrlichen Wahl ergibt sich Folgendes: b schlägt a mit 60 : 40, b schlägt c mit 75 : 25, a schlägt c mit 75:25.

Somit ist auch mit dieser Wahlordnung die Alternative b der Sieger. Aber auch hier kann der Sieg von b durch geschickte Taktik verhindert werden. Angenommen die Gruppe A vertauscht die zweite und die dritte Präferenz, das heißt sie zieht c gegenüber b vor. Dann ergibt sich im direkten Vergleich folgendes Szenario: b schlägt a mit 60 : 40, c schlägt b mit 65 : 35, a schlägt c mit 75 : 25.

Dies führt, wie zu sehen ist, zum Zirkelschluss „b schlägt a schlägt c schlägt b". Obwohl also die Wähler bei ihrer Wahl das Transitivitätsgesetz beachten, also Präferenz eins gegenüber zwei gegenüber drei vorziehen, ist die Entscheidung der Wählergesamtheit nicht transitiv. Man nennt dies ein Condorcet-Paradoxon (vgl. LUCAS, 1989, S.129ff.).

Anhand dieser Ausführungen wird klar, dass das Urteil über die Sklaven, und somit der Ausgang der Wahl, ganz eindeutig von der taktischen Strategie der Wähler und von der Regelung, nach der die Entscheidung getroffen wird, abhängt. Es lässt sich zwar eine Häufigkeit der Alternative b feststellen, aber dennoch kann es auch ganz anders ausgehen.
In einem weiteren Beispiel, angelehnt an jenes von LUCAS (1989, S.135f.), wird diese Abhängigkeit noch extremer spürbar.

Beispiel 2
Im Rahmen eines Parteitages der Partei X soll ein neuer Obmann gewählt werden, wofür fünf Kandidaten, im Folgenden A, B, C, D und E genannt, nominiert wurden. Insgesamt stimmen 55 Mitglieder über den neuen Vorsitz ab. Diese sollen nun die Reihenfolge der fünf Kandidaten entsprechend ihrer Präferenz angeben. Aus mathematischer Sicht gäbe es dafür natürlich $5! = 120$ Möglichkeiten, in der realen politischen Praxis jedoch schließen sich meist mehrere Mitglieder zu einer Liste zusammen und vertreten ihrem Interesse zweckdienlich eine einheitliche Position beziehungsweise Reihenfolge. Angenommen es ergibt sich die in Tabelle 4 dargestellte Aufteilung.

Anzahl der Mitglieder	18	12	10	9	4	2
1. Präferenz	A	B	C	D	E	E
2. Präferenz	D	E	B	C	B	C
3. Präferenz	E	D	E	E	D	D
4. Präferenz	C	C	D	B	C	B
5. Präferenz	B	A	A	A	A	A

Tabelle 4: Präferenztabelle der Mitglieder

Der Tabelle zu entnehmen ist, dass zwar die größte Gruppe Kandidat A als neuen Obmann haben möchte, jedoch alle anderen diesen an letzter Stelle sehen. Der Kandidat E wird von sechs Mitgliedern als bester Kandidat gesehen, jedoch unterscheiden sich diese in ihren weiteren Präferenzen und bilden so zwei Gruppen. Im Folgenden werden nun verschiedene Wahlmethoden auf diese Ausgangslage angewandt, wobei eine ehrliche Wahl vorausgesetzt wird, das heißt mögliche Taktiken nicht besprochen werden.

- Mehrheitsprinzip
  Es ist schnell zu sehen, dass nach einem relativen Mehrheitsprinzip Kandidat A gewinnt, obwohl er nur 32,7% der Stimmen erhält und von allen anderen Listen an die letzte Stelle gereiht wurde.
  Sieger: A

- Sequentielles Verfahren
  1. Möglichkeit: Ausscheidung
  Im ersten Wahlgang werden nach dem relativen Mehrheitsprinzip die beiden besten Kandidaten bestimmt, unter denen im zweiten Wahlgang eine Stichwahl vorgenommen wird. Dabei gewinnen zuerst A und B, und schließlich siegt B mit 37 von 55 Stimmen.
  Sieger: B
  2. Möglichkeit: Elimination des Verlierers
  Es werden eine Reihe von Wahlgängen vorgenommen, wobei jeweils der Kandidat mit den wenigsten Stimmen ausscheidet. Im ersten Wahldurchgang scheidet E mit nur 6 Stimmen aus, worauf dieser Kandidat aus der Präferenzliste gestrichen wird und sich für die nächste Runde folgende erste Plätze ergeben:

A	B	C	D
18	12+4	10+2	9

  Daraus folgt, dass in der zweiten Runde Kandidat D verliert und ausgeschlossen wird. Seine Stimmen gehen nun an die zweite Präferenz, nämlich C. Es entsteht nun Folgendes:

A	B	C
18	16	12+9

  Kandidat B scheidet also im dritten Wahlgang aus, woraufhin seine Stimmen an Kandidat C übergehen und dieser die Wahl mit 37 von 55 Stimmen gegenüber A schließlich gewinnt.
  Sieger: C

- Borda-Verfahren
  Bei diesem Wahlsystem werden den einzelnen Präferenzen der Mitglieder Punkte zugeordnet, wobei jener mit der insgesamt höchsten Punktezahl als Sieger hervorgeht. Für einen ersten Platz erhält ein Kandidat fünf Punkte, für einen zweiten vier, einen dritten drei, einen vierten zwei und für einen letzten Platz einen Punkt. Damit ergibt sich für die einzelnen Kandidaten folgende Punktezahl:
  A: $18 \times 5 + 37 \times 1 = 127$
  B: $12 \times 5 + 14 \times 4 + 11 \times 2 + 18 \times 1 = 156$
  C: $10 \times 5 + 11 \times 4 + 34 \times 2 = 162$
  D: $9 \times 5 + 18 \times 4 + 18 \times 3 + 10 \times 2 = 191$
  E: $6 \times 5 + 12 \times 4 + 37 \times 3 = 189$
  Somit gewinnt bei diesem Verfahren Kandidat D knapp vor E.
  Sieger: D

- Condorcet-Verfahren
  Wie schon vorhin werden wieder alle Kandidaten paarweise miteinander verglichen. Da es fünf

Kandidaten gibt, muss es $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$ Vergleiche geben, welche wie folgt enden:
B schlägt A mit 37:18 Stimmen.
C schlägt A mit 37:18 Stimmen, C schlägt B mit 39:16 Stimmen.
D schlägt A mit 37:18 Stimmen, D schlägt B mit 29:26 Stimmen, D schlägt C mit 43:12 Stimmen.
E schlägt A mit 37:18 Stimmen, E schlägt B mit 33:22 Stimmen, E schlägt C mit 36:19 Stimmen, E schlägt D mit 28:27 Stimmen.
Kandidat E besiegt also alle anderen Kandidaten im direkten Vergleich und gewinnt somit die Wahl.
Sieger: E

Alles in allem ergeben sich also bei Anwendung von fünf verschiedenen Wahlsystemen auch fünf verschiedene Wahlsieger. Es lässt sich so eindrucksvoll zeigen, wie sehr die Spielregeln, nach denen gewählt wird, das Ergebnis mitbestimmen. Genau diese Spielregeln werden nun von jenen aufgestellt, die politische Macht besitzen, und so können diese das Ergebnis bis zu einem gewissen Grad beeinflussen. Natürlich ist das hier dargestellte ein konstruiertes Beispiel, doch solche Umstände können durchaus auch in der Realität vorkommen.
Ein nicht so extremes, aber dennoch interessantes Beispiel hierfür ist die Bundespräsidentenwahl in Österreich, bei der nach dem absoluten Mehrheitswahlrecht gewählt wird. Bei der Wahl im Jahr 1951, also der ersten Bundespräsidentenwahlen, die nach den Bestimmungen des Bundes-Verfassungsgesetzes abgehalten wurde, traten insgesamt sechs Kandidaten an und erhielten im ersten Wahlgang die in Tabelle 5 dargestellten Stimmen. Würde bei dieser Wahl das relative Mehrheitsprinzip angewandt, so

Kandidat	gültige Stimmen in %
Dr. Burghard Breitner	15,4
Gottlieb Fiala	5,1
Dr. Heinrich Gleißner (ÖVP)	40,1
Ludovica Hainisch	0,1
Dr. h.c. Theodor Körner (SPÖ)	39,2
Dr. Johannes Ude	0,1

Tabelle 5: Bundespräsidentenwahl 1951, 1. Wahlgang

hätte der Kandidat der ÖVP, Heinrich Gleißner, die Wahl gewonnen. Aufgrund des absoluten Mehrheitsprinzips wurde aber ein zweiter Wahlgang, bei der eine Stichwahl zwischen den beiden stimmenstärksten Kandidaten aus dem ersten Wahldurchgang stattfindet, nötig. Dabei kam es zu folgender Stimmenverteilung, siehe Tabelle 6. Bei diesem Wahlgang erhielt, wie in der Tabelle ersichtlich ist,

Kandidat	gütlige Stimmen in %
Dr. Heinrich Gleißner (ÖVP)	47,9
Dr. h.c. Theodor Körner (SPÖ)	52,1

Tabelle 6: Bundespräsidentenwahl 1951, 2. Wahlgang

Theodor Körner mehr als die Hälfte der Stimmen und wurde so Bundespräsident.

So ziemlich dasselbe Szenario ergab sich bei der Bundespräsidentenwahl im Jahr 1992. Es traten vier Kandidaten zur Wahl an, und auch hier erhielt keiner davon eine absolute Mehrheit, siehe Tabelle 7.

Kandidat	gültige Stimmen in %
Dr. Rudolf Streicher (SPÖ)	40,7
Dr. Thomas Klestil (ÖVP)	37,2
Dr. Heide Schmidt	16,4
Robert Jungk	5,7

Tabelle 7: Bundespräsidentenwahl 1992, 1. Wahlgang

Die meisten Stimmen erhielt in diesem ersten Wahlgang der Kandidat der SPÖ, nämlich Rudolf Streicher. Im notwendigen zweiten Wahlgang änderte sich dies jedoch recht deutlich und Thomas Klestil wurde Bundespräsident, siehe Tabelle 8.[11]

Kandidat	gültige Stimmen in %
Dr. Rudolf Streicher (SPÖ)	43,1
Dr. Thomas Klestil (ÖVP)	56,9

Tabelle 8: Bundespräsidentenwahl 1992, 2. Wahlgang

Es sollte also von besonderem Interesse sein, Schülerinnen und Schülern genau diese Abhängigkeit vor Augen zu führen und sie so sensibel gegenüber Machtansprüchen zu machen. Im Schulrahmen bietet sich dafür eine detaillierte Analyse, ähnlich zu jener aus Beispiel 2, einer Klassensprecherwahl an.

4.2 Mehrheits- und Verhältniswahl

Im Folgenden werden die zwei Wahlsysteme, nämlich Mehrheitswahl und Verhältniswahl, näher betrachtet, die im politischen Diskurs tatsächlich eine Rolle spielen und Anwendung finden. Ganz allgemein versteht man unter der Mehrheitswahl, oder auch Wahl nach Majorz genannt, eine Wahl, bei der derjenige gewinnt, der die (absolute oder relative) Mehrheit erreicht. Bei einer Verhältniswahl, beziehungsweise einer Wahl nach Proporz, hingegen geht es um eine möglichst genaue Verteilung der Stimmen auf die einzelnen Parteien. Dies sind aber, so Nohlen (2000, S122f.), keine geeigneten Definitionen um die Systeme miteinander zu vergleichen, da sie sich auf unterschiedliche Dinge beziehen. So geht es bei der Definition der Mehrheitswahl um eine Entscheidungsregel, wohingegen die Definition der Verhältniswahl auf das Wahlergebnis abzielt. Eine erfolgreiche Klassifikation für beide ist also nur möglich, wenn diese nach denselben Kriterien erfolgt. Für Nohlen gibt es zwei solche möglichen Kriterien. Das ist einerseits das Repräsentationsprinzip und andererseits die Entscheidungsregel. Nach der Entscheidungsregel erfolgt bei der Mehrheitswahl die Mandatsvergabe an denjenigen, der eine geforderte Mehrheit (absolut oder relativ) der Stimmen erzielt. Bei der Verhältniswahl erfolgt diese Vergabe nach dem Anteil der Stimmen, den eine Partei oder ein Kandidat erreicht hat.

Politisch bedeutsamer ist jedoch die Unterscheidung nach dem Repräsentationsprinzip, bei dem es um die Ziele politischer Repräsentation geht. Dabei wird bezogen auf die Mehrheitswahl die parlamentarische Mehrheit einer Partei angestrebt. Das heißt, es soll eine Mandatsmehrheit für eine Partei geben,

[11] vgl. Bundespräsident.
http://www.bundespraesident.at/historisches/wahlergebnisse-seit-1951/
Stand: 16.04.2015

auch wenn sie keine Stimmenmehrheit besitzt. Eine möglichst genaue parlamentarische Abbildung der bestehenden politischen Gruppen in der Bevölkerung ist das Ziel der Verhältniswahl. Es sollen also Stimmen- und Mandatsanteile so gut wie möglich übereinstimmen.

Ein besonders wichtiges Element, so NOHLEN (2000, S.77ff.), bei beiden Wahlsystemen ist die **Wahlkreiseinteilung**.
In den meisten Ländern, so auch in Österreich, wird das Wahlgebiet, das heißt, dasjenige geographische Gebiet, in dem gewählt wird, in kleinere Wahlkreise unterteilt. Die Wahlkreise werden meist in Übereinstimmung mit der administrativen Gliederung gebildet, wobei anschließend diesen nach einem Repräsentationsschlüssel entsprechend viele Mandate zugeteilt werden. Die Grundidee dahinter ist, dass jedes Mandat den gleichen Bevölkerungsanteil repräsentiert. Dazu wird je nach staatlicher Regelung die Bevölkerungsanzahl oder die Anzahl der Wahlberechtigten durch die Anzahl der insgesamt zu vergebenden Mandate dividiert. Die Größe der Wahlkreise gibt somit nicht über die Fläche Auskunft, sondern über die Anzahl der zu vergebenden Mandate. Dabei kann nun zwischen Einerwahlkreisen, das heißt nur ein Mandat kann vergeben werden, und Mehrpersonenwahlkreisen, das sind alle Wahlkreise, wo mehr als ein Mandat vergeben wird, unterschieden werden. Im Einerwahlkreis ist logischerweise die Mandatsvergabe nur nach dem Majorz, also dem Mehrheitsprinzip, möglich, da ja nur ein Mandat zu vergeben ist und dieses an die stimmenstärkste Partei beziehungsweise den stimmenstärksten Kandidaten geht. Bei Mehrpersonenwahlkreisen kann nach beiden Kriterien entschieden werden und hängt so vom verwendeten System ab.

In dieser Wahlkreiseinteilung liegen aber einige Tücken.

Zum Ersten wird in der Realität der Grundsatz „Jede Stimme soll den gleichen Zählwert haben“ oft nicht eingehalten. Aus möglicherweise guten Gründen wird manchen Teilen der Bevölkerung eine größere Repräsentation wie anderen zugesprochen. Oftmals passiert das aber auch, um günstigerere Bedingungen für die eigene Partei zu schaffen. So werden Toleranzgrenzen für die Abweichungen vom Gleichheitsgebot nicht selten überschritten, wodurch kaum mehr von einem gleichen Wahlrecht gesprochen werden kann, sondern ein manipuliertes Wahlergebnis vorliegt. Außerdem muss darauf geachtet werden, die Wahlkreise und deren Mandatzahl laufend an die Bevölkerungsentwicklung anzupassen.
Besonders für kleinere Parteien hat auch die Größe der Wahlkreise große Auswirkungen. Je kleiner der Wahlkreis ist, das heißt je weniger Mandate er zu vergeben hat, desto geringer sind die Chancen für kleinere Parteien, da die Prozenthürde zur Erreichung eines Mandats steigt.
Des weiteren kann durch eine politisch motivierte Wahlkreiseinteilung die Wahl manipuliert werden. Dies wird rückführend auf den Gouverneur von Massachusetts, Elbridge Gerry, der sich 1812 einen Wahlkreis, der einem Salamander glich, bastelte, um ein sicheres Mandat zu erhalten, auch *gerrymandering* genannt. Angestrebt wird dadurch entweder ein sicherer Wahlerfolg für einen bestimmten Kandidaten oder aber auch eine erhöhte oder begrenzte politische Repräsentation einer sozialen Gruppe. Konkret kann dazu die Wählerschaft gemischt werden, um so den Einfluss einer bestimmten Gruppe zu minimieren, oder aber eine Hochburg gebildet werden, um den Einfluss einer Gruppe zu maximieren. Ein einfaches Beispiel zeigt diesen Effekt deutlich.

Beispiel 3
Ein Wahlgebiet besteht aus insgesamt neun WählerInnen, wovon vier Anhänger der Partei A und

fünf Anhänger der Partei B sind. In jedem Wahlkreis sollen drei WählerInnen sein, welche jeweils ein Mandat vergeben können. Angenommen die Partei A ist an der Macht und hat die Aufgabe die Wahlkreise einzuteilen. Sie wird dies derart machen, dass sie ihre vier Anhänger gleichermaßen auf zwei Wahlkreise aufteilt, wodurch sie zwei mal mit 2:1 gewinnt und so zwei sichere Mandate erhält und eines mit 0:3 verliert. Das Resultat ist, dass die Partei A trotz einer Unterlegenheit gemessen an der Anhängerzahl eine Mehrheit im Parlament besitzt. Hat umgekehrt die Partei B die Macht wird sie die Wahlkreise so bestimmen, dass sie zwei sichere Mandate bekommt und so die Mehrheit im Parlament innehat.

Ist die Wahlkreiseinteilung somit nicht verfassungsmäßig geregelt, sondern wird von den regierenden Parteien vorgenommen, können diese offensichtlich das Ergebnis mitbeeinflussen. In etwas subtilerer Form als 1812 durch Gerry passiert dies durchaus auch noch heute.

Welche konkreten **Auswirkungen** hat nun die Verwendung der Majorz- beziehungsweise der Proporzregel?

Wird nach dem Majorzprinzip gewählt, zählen am Ende nur die Stimmen des stimmenstärksten Kandidaten, wohingegen alle anderen Stimmen unwichtig werden und quasi verloren gehen. Kleinere Parteien haben kaum die Möglichkeit ein Mandat zu erreichen. Dies kann auch dazu führen, dass in Parteihochburgen die Opposition an Motivation verliert und es so zu einer Eintönigkeit in der politischen Landschaft kommt und folglich zu einer Wahlbeteiligungsabnahme. Außerdem verlieren jene Stimmen, die über der geforderten Mehrheit liegen, ihren Wert. Hat eine Partei somit ihre Wähler nicht gleichermaßen über die Wahlkreise verteilt, sondern bildet Hochburgen, kann sich dies nachteilig auswirken. Es herrscht somit eine große Disproportion zwischen Stimmen und Mandaten.

Entscheidet hingegen die Proporzregel, so zählt tatsächlich jede Stimme, da diese möglicherweise einen Mandatsgewinn beziehungsweise -verlust für eine Partei bedeuten kann. Für einen größeren Anteil der Wahlberechtigten führt die Wahl somit zum Erfolg, was sich wiederum positiv auf die Wahlbeteiligung auswirkt. Hier haben auch kleine Parteien, mit beispielsweise nur vier Prozent Stimmenanteil, die Möglichkeit ein Mandat zu erlangen und auch neue politische Strömungen haben hier tatsächlich eine Chance, was bei der Mehrheitswahl nicht der Fall ist.

In Ländern, in denen nach Majorz entschieden wird, kristallisiert sich meist ein Zweiparteiensystem heraus, wobei die beiden Parteien häufig abwechselnd regieren, da schon kleinste Veränderung in der Stimmenverteilung große Mandatsveränderungen bedeuten können. Aufgrund der Regierung einer einzigen Partei sind diese Regierungen außerdem stabiler als Koalitionsregierungen, die häufig aus Verhältniswahlen folgen. Auch die Zuschreibung der politischen Verantwortung ist damit beim Majorzprinzip eindeutiger gegeben. Und die Verbindung zwischen Stimme und Wahlergebnis ist hier für den Wähler deutlicher zu sehen. Hinzu kommt, dass die Mehrheitswahl meist mit kleinen Wahlkreisen kombiniert wird, wodurch eher eine Person gewählt wird, die man tatsächlich kennt und der man vertraut. Bei der Verhältniswahl sind außerdem mathematische Verfahren notwendig, um Stimmen möglichst gerecht in Mandate umzurechnen.[12] Diese Stimmverrechnungsverfahren sind vielzählig und für den Großteil der Bevölkerung relativ schwer nachzuvollziehen, weshalb vielen nicht klar ist, was genau mit ihrer Stimme passiert (vgl. Nohlen, 2000, S.135ff.).

[12] siehe 4.3

Ein reales Beispiel soll nun die größte Problematik der Mehrheitswahl, nämlich die Disproportion zwischen Stimmen und Mandaten, verdeutlichen.

Am 7. November 2000 wurde in den USA ein neuer Präsident gewählt. Dabei kam es zu der Situation, dass der Kandidat der Demokraten, Al Gore, um etwa 500 000 Wählerstimmen mehr bekam als der republikanische Kandidat, George W. Bush, welcher aber dennoch die Wahl gewann und der 43. Präsident der Vereinigten Staaten von Amerika wurde.Wie lässt sich das erklären?
In den USA wird der Präsident nach einem relativen Mehrheitswahlrecht gewählt, wobei die Wähler nicht direkt den Präsidenten wählen, sondern Wahlmänner, die anschließend den Präsidenten wählen. Jeder Bundesstaat und das Bundesdistrikt District of Columbia entsendet eine bestimmte Anzahl an Wahlmännern proportional zur Bevölkerungsanzahl. Das relative Mehrheitswahlrecht bedeutet dann, dass die Partei des Kandidaten der die relative Mehrheit erhält, alle Wahlmännerstimmen des Staates bekommt, man nennt das auch das *winner-takes-all*-Prinzip.[13] Wie oben beschrieben sind am Ende also nur diejenigen Stimmen wichtig, welche die Mehrheit bilden. Das heißt gleichzeitig auch, dass der Stimmenunterschied belanglos wird. So hat beispielsweise George W. Bush im Bundesstaat New Hampshire mit einem Vorsprung von nur 11 711 Stimmen gewonnen, und deshalb nach dem Mehrheitswahlrecht alle vier Wahlmännerstimmen erhalten. Im Vergleich dazu hat Al Gore im Bundesstaat Rhode Island um 118 953 Stimmen mehr als G.W. Bush erhalten und so ebenfalls alle vier Wahlmännerstimmen für sich gewinnen können, jedoch mit einem deutlich größeren Unterschied.[14] Dies sind genau jene Stimmen, die über der geforderten Mehrheit liegen, und so wie oben erwähnt, ihren Wert verlieren. Aus diesem Grund kann es in grenzwertigen Situationen, wie es hier der Fall war, dazu kommen, dass ein Kandidat zwar mehr Stimmen als ein anderer erhält, viele davon aber ihren Wert verlieren, weshalb dennoch der andere Kandidat siegt. Von besonderem Interesse war bei dieser Wahl der Bundesstaat Florida. Dieser ist ein klassischer *Swing State*, das heißt das Ergebnis in diesem Staat ist immer verschieden von dem der letzten Wahl und meist relativ knapp. Er kann also keiner Partei von vornherein zugeschrieben werden, wie etwa Texas den Republikanern oder Kalifornien den Demokraten. Doch bei dieser Wahl war das Ergebnis hier besonders knapp und umstritten, denn Bush erhielt 2 912 790 Stimmen und Gore 2 912 253 Stimmen, was einen Unterschied von nur 537 Stimmen bedeutet. Diese 537 Stimmen entschieden letztlich über alle 25 zu vergebenden Wahlmännerstimmen. Das heißt ein Vorsprung von allein 537 Stimmen hieß gleichzeitig ein Vorsprung von 25 Wahlmännerstimmen für Bush, das sind 0,00051 Prozent der abgegebenen Stimmen, die über 4,65 Prozent der Wahlmännerstimmen entscheiden. Die angesprochene Disproportion ist hier deutlich zu sehen. Besonders heikel ist dieses Ergebnis auch deshalb, weil in Florida einige Ungereimtheiten auftraten. Trotz der Überprüfung durch den Supreme Court und Nachzählungen in einigen Wahlkreisen, wodurch die Auszählung schließlich über einen Monat dauerte, ist das Ergebnis bis heute umstritten.

[13] vgl. US-Präsidentenwahl.
http://www.wahlrecht.de/ausland/us-praesident.html
Stand: 09.04.2015

[14] siehe Tabelle 9. vgl. US-Präsidentenwahl 2000.
http://www.wahlrecht.de/ausland/us-wahl.html
Stand: 09.04.2015

Wählerstimmen			Wahlmännerstimmen		
Bundesstaat	Bush	Gore	Bush	Gore	Enthaltung
Alabama	941 173	692 611	9	0	0
Alaska	167 398	79 004	6	0	0
Arizona	781 652	682 341	8	0	0
Arkansas	472 940	422 768	3	0	0
California	4 567 429	5 861 203	0	54	0
Colorado	883 748	738 227	8	0	0
Conneticut	561 104	816 659	0	8	0
Delaware	137 288	180 068	0	3	0
District of Columbia	18 073	171 923	0	2	1
Florida	2 912 790	2 912 253	25	0	0
Georgia	1 419 720	1 116 230	13	0	0
Hawaii	137 845	205 286	0	4	0
Idaho	336 937	138 637	4	0	0
Illinois	2 019 421	2 589 026	0	22	0
Indiana	1 245 836	901 980	12	0	0
Iowa	634 373	638 517	0	7	0
Kansas	622 332	399 276	6	0	0
Kentucky	872 520	638 923	8	0	0
Lousiana	927 871	792 344	9	0	0
Maine	286 616	319 951	0	4	0
Maryland	813 724	1 143 888	0	10	0
Massachusetts	878 502	1 616 487	0	12	0
Michigan	1 953 139	2 170 418	0	18	0
Minnesota	1 109 659	1 168 266	0	10	0
Mississippi	572 844	404 614	7	0	0
Missouri	1 189 942	1 111 138	11	0	0
Montana	240 178	137 126	3	0	0
Nebraska	433 850	231 776	5	0	0
Nevada	301 575	279 978	4	0	0
New Hampshire	278 559	266 848	4	0	0
New Jersey	1 284 173	1 788 850	0	15	0
New Mexico	286 417	286 783	0	5	0
New York	2 403 374	4 107 697	0	33	0
North Carolina	1 631 163	1 257 692	14	0	0
North Dakota	174 852	95 284	3	0	0

Ohio	2 350 363	2 183 628	21	0	0
Oklahoma	744 337	474 276	8	0	0
Oregon	713 577	720 342	0	7	0
Pennsylvania	2 281 127	2 485 967	0	23	0
Rhode Island	130 555	249 508	0	4	0
South Carolina	786 892	566 037	8	0	0
South Dakota	190 700	118 804	3	0	0
Tennessee	1 061 949	981 720	11	0	0
Texas	3 799 639	2 433 746	32	0	0
Utah	515 096	203 053	5	0	0
Vermont	119 775	149 022	0	3	0
Virginia	1 437 490	1 217 290	13	0	0
Washington	1 108 864	1 247 652	0	11	0
West Virginia	336 473	295 497	5	0	0
Wisconsin	1 237 279	1 242 987	0	11	0
Wyoming	147 947	60 481	3	0	0
Gesamt	**50 461 080**	**50 994 082**	**271**	**266**	**1**
Stimmen für andere Kandidaten	3 910 654				

Tabelle 9: Ergebnis der Präsidentschaftswahlen der USA, 2000

4.3 Stimmverrechnung bei Nationalratswahlen in Österreich

Wie oben erwähnt, sind bei einer Verhältniswahl mathematische Verteilungsverfahren notwendig, um die Aufteilung der Mandate möglichst genau gemäß der Stimmenverteilung vorzunehmen. Angestrebt wird natürlich eine bestmögliche Übereinstimmung von Mandatsanteil und Stimmenanteil, was aber häufig Schwierigkeiten mit sich bringt, da die Übertragung der Stimmenanteile auf Mandatsanteile in den wenigsten Fällen ganzzahlig ist.

Beispiel 4
Ein Gremium mit 27 Mitgliedern soll durch Mitglieder dreier Parteien A, B und C besetzt werden. Von den insgesamt 365 gültigen Stimmen entfallen 128 auf Partei A, 187 auf Partei B und 50 auf Partei C. Der daraus resultierende proportionale Anteil im Gremium lässt sich für Partei A, und analog dazu für die anderen Parteien, wie folgt berechnen: $\frac{128}{365} \cdot 27 = 9,47$

Partei	Stimmen	Anteil im Gremium
A	128	9,468
B	187	13,833
C	50	3,699

Wie kann dabei nun dennoch die gewünschte Ganzzahligkeit erreicht werden? Im Folgenden wird die Stimmverrechnung bei Nationalratswahlen in Österreich als eine Möglichkeit der Stimmenübertragung näher erläutert. Genaue Beschreibungen anderer Verrechnungsverfahren finden sich in einschlägiger Fachliteratur, beispielsweise in „Wahlrecht und Parteiensysteme“ von Dieter Nohlen (Nohlen, 2000).

Geregelt wird die Wahl zum Nationalrat durch die Nationalrats-Wahlordnung von 1992.[15] Österreich wird dazu in neun Landeswahlkreise, die den Bundesländern entsprechen, unterteilt, welche sich wiederum in insgesamt 39 Regionalwahlkreise gliedern. Jeder dieser Landes- beziehungsweise Regionalwahlkreise hat eine festgesetzte Anzahl an Mandaten zu vergeben, insgesamt 183.

Nachdem alle Stimmen ausgezählt sind, wird im ersten Schritt die *Wahlzahl* eines Landeswahlkreises ermittelt. Dies ist jene Zahl, die sich gerundet auf die nächstgrößere ganze Zahl bei Division von den abgegebenen gültigen Stimmen im Landeswahlkreis durch die zu vergebenden Mandate im Landeswahlkreis ergibt. Man könnte also sagen, die Wahlzahl legt die Anzahl an Stimmen fest, die eine Partei im Landeswahlkreis für ein Mandat braucht. Dieses Verfahren wird einfaches Wahlzahlverfahren, oder auch *Hare-Quotaverfahren,* benannt nach Thomas Hare, genannt (vgl. Nohlen, 2000, S.107). Ist die Wahlzahl bestimmt, folgen drei weitere Ermittlungsverfahren.

Das erste Ermittlungsverfahren bezieht sich auf den Regionalwahlkreis. Jede Partei erhält nach §97 der Nationalratswahlordnung genau so viele Mandate, wie die Wahlzahl in den für die Partei abgegebenen gültigen Stimmen im Regionalwahlkreis enthalten ist. Das heißt, es werden die gültigen Stimmen einer Partei im Regionalwahlkreis durch die Wahlzahl dividiert und der Quotient wird abgerundet.

Beispiel 5a
Nach einer Wahl ergibt sich eine Stimmenaufteilung wie in unten stehender Tabelle beschrieben.
Im Landeswahlkreis 1 werden 8000 gültige Stimmen abgegeben und es sind insgesamt 4 Mandate zu vergeben, das heißt die Wahlzahl beträgt hier $\frac{8000}{4} = 2000$. Im Regionalwahlkreis 1a erhält die Partei A 2100 Stimmen, die Partei B 900 und die Partei C 500, im Regionalwahlkreis 1b erhält A 700, B 650 und C 1150 und im Regionalwahlkreis 1c erhält A 200 und B 1100 und C 700. Daraus folgt, dass die Partei A aufgrund der Stimmen im Regionalwahlkreis 1a bereits im ersten Ermittlungsverfahren ein Mandat erhält. Die restlichen Parteien gehen bei dieser ersten Verteilung leer aus. Analog dazu wird in allen anderen Landeswahlkreisen vorgegangen. Im Landeswahlkreis 2 ergibt sich dabei jeweils ein Mandat für B und C, und im Landeswahlkreis 3 noch eines für Partei A.

					Stimmen		
Landeswahlkreis	Mandate	Stimmen	Wahlzahl	Regionalwahlkreis	Partei A	Partei B	Partei C
1	4	8 000	2 000	1a	**2 100**	900	500
				1b	700	650	1 150
				1c	200	1 100	700
2	5	12 500	2 500	2a	2 100	**3 100**	900
				2b	1 800	1 900	**2 700**
3	6	14 500	2 417	3a	**4 300**	1 800	200
				3b	1 100	2 150	1 300
				3c	1 800	1 200	650
Gesamt	15	35 000			14 100	12 800	8 100

[15] vgl. Bundesministerium für Inneres. Wahlordnung.
http://www.bmi.gv.at/cms/BMI_wahlen/nationalrat/wahlordnung/start.aspx
Stand: 14.04.2015

Meist werden hier nur wenige Mandate, auch Grundmandate genannt, vergeben, da nur wirklich stimmenstarke Parteien beziehungsweise Parteien, die in Regionen eine Hochburg besitzen, davon profitieren können.
Im zweiten Ermittlungsverfahren werden die Stimmen in den Landeswahlkreisen betrachtet. An dieser Mandatsvergabe dürfen nun nur jene Parteien teilnehmen, die entweder im ersten Ermittlungsverfahren in zumindest einem der Regionalwahlkreise ein Grundmandat erhalten haben oder aber jene, die bundesweit mehr als vier Prozent der gültigen Stimmen erhalten haben. Die Verteilung erfolgt wieder nach demselben Schema wie in den Regionalwahlkreisen. Das heißt jede Partei erhält nach §101 der Nationalratswahlordnung so viele Mandate, wie die Wahlzahl in den für sie im Landeswahlkreis abgegebenen gültigen Stimmen vorkommt, wobei die möglicherweise erhaltenen Grundmandate abgezogen werden.

Beispiel 5b
Im Landeswahlkreis 1 erhält die Partei A insgesamt also 3000 Stimmen, die Partei B 2650 und die Partei C 2350. Die Partei A würde also hier ein Mandat erhalten, jedoch muss das bereits gewonnene Grundmandat abgezogen werden, das heißt es kommt kein weiteres Mandat hinzu. Die Parteien B und C erhalten bei diesem Schritt ebenfalls ein Mandat, und da sie vorher kein Grundmandat erhalten haben, wird davon nichts abgezogen. Wieder analog dazu wird in den anderen Landeswahlkreisen vorgegangen. Das führt im Landeswahlkreis 2 dazu, dass die Partei A ein Mandat gewinnt, ebenso die Partei B, die Partei C bekommt jedoch kein weiteres Mandat. Auch im Landeswahlkreis 3 erhalten die Parteien A und B jeweils ein zusätzliches Mandat, nicht aber die Partei C.
Bisher hat die Partei A somit vier Mandate, ebenso die Partei B und die Partei C steht bei zwei Mandaten.

Die bisher angewandten Verteilungsverfahren kann man in die Kategorie der Rundungsverfahren einordnen, das heißt die Mandate werden gerundet dem Stimmenanteil entsprechend vergeben. In diesem Fall bedeutet Runden immer Abrunden.

Für das dritte und letzte Ermittlungsverfahren sind die Stimmen auf Bundesebene entscheidend. Zur Ermittlung der restlichen Mandate wird nun eine modifizierte Version des *d'Hondtschen Verfahren* angewandt. Auch hier gilt wieder, dass nur Parteien, die entweder ein Grundmandat oder bundesweit mehr als vier Prozent der gültigen Stimmen erhalten haben, berücksichtigt werden.
Das d'Hondtsche Verfahren, benannt nach Viktor D'HONDT, zählt zu den sogenannten Divisorenverfahren (vgl. NOHLEN, 2000, S.104ff.). Diesen ist gemein, dass dabei die Stimmen einer Partei aufeinanderfolgend durch eine Divisorenreihe dividiert werden, und so für jede Partei eine abnehmende Zahlenreihe entsteht. Die Divisorenreihe ist durch das Verfahren festgelegt. Das bekannteste solcher Verfahren ist eben jenes nach d'Hondt. Er hat die Divisorenreihe folgendermaßen bestimmt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, und so weiter. Eine andere bekannte Divisorenreihe stammt von André Sainte-Lague, bei der nacheinander durch die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, et cetera dividiert wird. Die entstehenden Quotienten werden dann der Größe nach absteigend geordnet. Beim originalen d'Hondtschen Verfahren werden die Sitze der Reihe nach, beginnend beim größten Quotienten, verteilt, bis alle Mandate zugeteilt sind. Wie oben erwähnt wird bei der Wahl zum österreichischen Nationalrat eine modifizierte Version angewandt. Dabei wird im nächsten Schritt eine neue Wahlzahl definiert. Sind nun, wie im österreichischen Nationalrat, 183 Mandate zu vergeben, so wird diejenige Zahl, die an 183. Stelle steht als neue Wahlzahl bezeichnet. Anschließend werden wieder die gültigen Stimmen einer jeden Partei auf Bundesebene durch diese

	Partei A	Partei B	Partei C
:1	14 100 (1)	12 800 (2)	8 100 (3)
:2	7 050 (4)	6 400 (5)	4 050 (8)
:3	4 700 (6)	4 266,7 (7)	2 700 (12)
:4	3 525 (9)	3 200 (10)	2 025
:5	2 820 (11)	2 560 (13)	1 620
:6	2 350 (14)	2 133,3 (15)	1 350

Tabelle 10: Division nach d'Hondt

Wahlzahl dividiert, und das Ergebnis abgerundet. Dies liefert eine vorläufige Mandatsverteilung. Hat nun eine Partei durch die Berechnungen in den Regional- beziehungsweise Landeswahlkreises weniger Mandate erhalten, so werden ihr die fehlenden zugesprochen, und sie erhält somit so viele Mandate, wie ihr nach dem Verfahren nach d'Hondt zugewiesen wurden. Tritt der umgekehrte Fall ein und eine Partei hat beim ersten und zweiten Ermittlungsverfahren mehr Mandate erreicht, so werden ihr diese zuerkannt. Jedoch muss dann der dritte Ermittlungsschritt wiederholt werden, und zwar ohne Berücksichtigung dieser Partei und abzüglich deren bereits gewonnener Mandate.

Beispiel 5c
Auf Bundesebene sind also 35 000 Stimmen abgegeben worden und 15 Mandate zu vergeben. Die Partei A erhält davon 14 100 Stimmen, die Partei B 12 800 und die Partei C 8 100. Durch die Berechnungen auf Regional- beziehungsweise Landesebene haben die Parteien A und B schon 4 und die Partei C 2 Mandate erhalten. Nun wird nach d'Hondt durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, et cetera dividiert und die Quotienten werden der Größe nach geordnet, siehe Tabelle 10. Da 15 Mandate vergeben werden, ist jene Zahl, die an der 15. Stelle steht, die neue Wahlzahl, das ist hier 2133,3. Nun wird wieder der Quotient aus Stimmen und Wahlzahl gebildet. Für die Partei A ergibt das $\frac{14100}{2133{,}3} = 6,6$, für die Partei B $\frac{12800}{2133{,}3} = 6$ und für die Partei C $\frac{8100}{2133{,}3} = 3,8$, das heißt nach Abrunden ergeben sich für A sechs für B ebenfalls sechs und für C drei Mandate. Da keine der Parteien in den beiden ersten Ermittlungsschritten mehr Mandate erreicht hat, ist dies das endgültige Ergebnis. Man kann sich nun noch die Frage stellen, inwieweit diese Mandatsverteilung mit der Stimmenverteilung übereinstimmt. In diesem Fall würde das wie folgt aussehen:

	Stimmen	Stimmenanteil	Mandate	Mandatsanteil
Partei A	14 100	40,29 %	6	40 %
Partei B	12 800	36,57 %	6	40 %
Partei C	8 100	23,14 %	3	20 %

Man sieht, dass sich für die Partei B ein Vorteil, der sich für Partei C zum Nachteil auswirkt, ergibt.

4.4 Konkrete Unterrichtsvorschläge

Die Mathematik spielt also eine große Rolle im Bereich von Wahlen, wodurch dieses Thema auch für den Mathematikunterricht interessant ist. Außerdem bietet es sich gut für einen fächerübergreifenden Unterricht an. So kann gleichzeitig die Behandlung des Themas im Unterrichtsfach „Geschichte und Sozialkunde" und auch im Fremdsprachenunterricht erfolgen.

Es folgen nun zwei fertig geplante Unterrichtseinheiten, die beispielhaft zeigen sollen, wie eine Umsetzung in der Schule möglich ist.

4.4.1 Unterrichtseinheit „Allgemeine Wahlmethoden", ab der 1. Klasse

- *Lehrplanbezug*
  Bezogen auf den Lehrstoff der 1. Klasse AHS-Unterstufe, kann diese Stunde den Unterpunkten „Kenntnisse und Fähigkeiten im Umgang mit natürlichen Zahlen vertiefen, dabei auch große natürliche Zahlen verwenden und mehrstellige Multiplikationen und Divisionen durchführen können" und „die Regeln über die Reihenfolge von Rechenoperationen,... , anwenden können" aus dem Bereich „Arbeiten mit Zahlen und Maßen" zugeordnet werden[16]. Bezogen auf die Bildungsstandards wird hier der Inhaltsbereich I1 (Arbeiten mit Zahlen und Maßen) angesprochen. Die genauen Handlungs- und Komplexitätsbereiche sind bei den einzelnen Beispielen vermerkt.

- *Lernvoraussetzungen/Einbettung im Unterricht*
  Diese Stunde kann ab der 1. Klasse AHS-Unterstufe in allen Schulstufen durchgeführt werden. Eine mathematische Herausforderung ist dabei natürlich nur für die 1. und möglicherweise auch noch 2. Klasse AHS-Unterstufe gegeben, weshalb das Hauptaugenmerk in diesen Klassen auf der rechnerischen Komponente liegen soll. Sie hat aber auch durchaus ihre Berechtigung in höheren Klassen, wobei hier die Interpretation und Reflexion der Ergebnisse im Mittelpunkt stehen soll. Abgesehen vom Regelunterricht eignet sich diese Stunde außerdem sehr gut für das Wahlfach, besonders wenn sich das Thema aus aktuellen Anlässen, also stattfindenden Wahlen, anbietet. Je nachdem, in welcher Schulstufe sie dann zum Einsatz kommt, muss die vorgeschlagene Zeiteinteilung angepasst werden. Wird sie in der 1. Klasse AHS-Unterstufe eingesetzt, so müssen SchülerInnen im Vorfeld über Grundlegendes zu den natürlichen Zahlen, wie der Ordnung, Bescheid wissen und die vier Grundrechenarten auf die natürlichen Zahlen anwenden können.

[16] vgl. Bundesministerium für Bildung und Frauen. Lehrplan AHS-Unterstufe. S.4f
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2
Stand: 06.11.2015

- *Stundenbild*

<table>
<tr><th>Zeit</th><th>Stundenverlauf</th><th>Materialien /Medien</th><th>Sozialform</th></tr>
<tr><td>5 min</td><td>Einführung in das Thema „Wahlmethoden”
Fragen an die SuS:
Wo seid ihr mit Wahlen konfrontiert? (mögliche Antworten: Schule, Politik, Verein, Sport/Spiele)
Wie wird dort gewählt? Nach welchem Prinzip wird der Gewinner ermittelt? (mögliche Antworten: absolute oder relative Mehrheit, Elimination des Verlierers)</td><td>-</td><td>L-S-Gespräch</td></tr>
<tr><td>5 min</td><td>„Klassensprecherwahl” - Erster Teil:
Der/die L wählt fünf SuS aus, die für die Wahl kandidieren. (Anm.: Am besten passiert dies durch Losen. Von freiwilligen Meldungen oder der Auswahl der KandidatInnen durch die SuS ist abzuraten, damit Beliebtheit nicht schon im Vorfeld der Wahl eine Rolle spielt!) Diese stellen sich vor die Klasse.
Die restlichen SuS bilden nun je nach Klassengröße insgesamt vier bis zehn Gruppen mit jeweils höchstens vier Mitgliedern (Anm.: bei weniger als vier Gruppen wäre das Ergebnis zu einförmig, bei mehr als zehn zu unübersichtlich; mehr als vier Mitglieder pro Gruppe würde weniger differenzierte Ergebnisse zur Folge haben).
Der/die L erklärt, wie gewählt wird, nämlich mittels Präferenztabelle. Das heißt, die Kandidaten werden so angeordnet, dass der am meisten bevorzugte Kandidat an die erste Position gestellt wird, der nächstbeste an die zweite Position, und so weiter, bis schließlich der am wenigsten gewollte Kandidat an der fünften Position steht.
Die Gruppen einigen sich auf ihre Wahl und füllen die Tabelle aus (Zettel):
<table>
<tr><td>Anzahl der Gruppenmitglieder:</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Kandidat</td></tr>
<tr><td>1. Position</td><td></td></tr>
<tr><td>2. Position</td><td></td></tr>
<tr><td>3. Position</td><td></td></tr>
<tr><td>4. Position</td><td></td></tr>
<tr><td>5. Position</td><td></td></tr>
</table>
Diese werden von der Lehrperson abgesammelt.</td><td>Zettel (Präferenz-tabelle)</td><td>GA</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>5 min</td><td>Die bereits bestehenden Gruppen werden so umgeformt, dass sich nun insgesamt fünf Gruppen ergeben (alle SuS werden miteinbezogen). Jede Gruppe erhält ein AB zu einer von insgesamt fünf Wahlmethoden: Mehrheitsprinzip, Ausscheidungsverfahren, Elimination des Verlierers, Borda-Verfahren, Condorcet-Verfahren.
Auf dem AB wird das jeweilige Verfahren anhand von Beispiel 2 genau erklärt (siehe S.21ff.).
Während sich die SuS mit dem AB befassen, fasst der/die L die Ergebnisse der Wahl an der Tafel in einer Tabelle zusammen.
<table>
<tr><th></th><th>Gruppe 1</th><th>Gruppe 2</th><th>Gruppe 3</th><th>.....</th></tr>
<tr><td>1. Position</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Position</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. Position</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Position</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5. Position</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>AB[17]</td><td>GA</td></tr>
<tr><td>10 min</td><td>„Klassensprecherwahl" - Zweiter Teil:
Die einzelnen Gruppen ermitteln den Sieger der zu Beginn durchgeführten Wahl nach ihrer zugeteilten Wahlmethode.
(H2 K2)</td><td>Heft</td><td>GA</td></tr>
<tr><td>20 min</td><td>Die einzelnen Gruppen präsentieren vor der gesamten Klasse ihre Wahlmethode und das Ergebnis der Klassensprecherwahl nach ihrer Methode. Der Rest der Klasse schreibt mit.</td><td>Tafel, Heft</td><td>KA</td></tr>
<tr><td>5 min</td><td>Der/die L fasst die Ergebnisse nocheinmal zusammen und weist auf die Abhängigkeit des Ergebnisses von der Wahlmethode hin. (Falls das bei der durchgeführten Wahl nicht gut hervorkommt, kann es anhand des Beispiels auf den Arbeitsblättern demonstiert werden.)
Diskussion über die Frage, ob eine Mehrheitsentscheidung wirklich die beste Entscheidung für die jeweilige Gesamtheit ist.
Hausübung:
Arbeitsauftrag: Recherchiere noch einmal zu den eingangs gestellten Fragen (Wo, in deinem Umfeld, spielen Wahlen eine Rolle und wie wird dort gewählt?)! Welche Methode führt deiner Meinung nach zum besten Ergebnis für die Gesamtheit?</td><td>Tafel</td><td>L-S-Gesrpäch</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ziel: Aus mathematischer Sicht sollen die SuS Sicherheit bei der Anwendung der vier Grundrechenarten auf die natürlichen Zahlen gewinnen. Des Weiteren sollen die SuS verschiedene Wahlmethoden kennenlernen und ein kritisches Denken beim Umgang mit Wahlen, vor allem gegenüber Mehrheitsentscheidungen, entwickeln.</td></tr>
</table>

[17] AB = Arbeitsblatt

4.4.2 Unterrichtseinheiten „Nationalratswahlen in Österreich", ab der 2. Klasse

Für die Umsetzung des folgenden Vorschlags zum Thema „Nationalratswahlen in Österreich" müssen in etwa vier Unterrichtseinheiten eingeplant werden. Die erste Stunde kann dabei eher als Hinführung gesehen werden, während die restlichen drei die Stimmverrechnung bei österreichischen Nationalratswahlen im Detail behandeln.

- *Lehrplanbezug*
  Diese Einheiten behandeln die Punkte „Festigen und Vertiefen der Fähigkeiten beim Arbeiten mit positiven rationalen Zahlen, um vielfältige und komplexere Probleme in Sachsituationen bearbeiten zu können" und „Rechnen mit Prozenten in vielfältigen Zusammenhängen" aus dem Bereich „Arbeiten mit Zahlen und Maßen" aus dem Lehrplan der 2. Klasse AHS-Unterstufe. Auch hier wird hinsichtlich der Bildungsstandards der Inhaltsbereich I1 (Arbeiten mit Zahlen und Maßen) angesprochen, wobei die genauen Handlungs- und Komplexitätsbereiche bei den einzelnen Beispielen notiert sind.

- *Lernvoraussetzung/Einbettung im Unterricht*
  Was die Mathematik betrifft, sollen SchülerInnen bereits sicher sein im Umgang mit Prozenten, weshalb sich diese Stunden als Abschluss des Kapitels in der 2. Klasse oder eher zu Beginn des Kapitels in der 3. Klasse AHS-Unterstufe eignen würden. Jedoch ist der Gesetzestext doch recht kompliziert, und müsste, wenn die Stunden in der 2. Klasse zum Einsatz kommen, von der Lehrperson einfacher formuliert werden beziehungsweise noch mehr Zeit für das Verstehen eingeplant werden. Diese Stunden können aber durchaus auch in höheren Stufen behandelt werden, wobei dann auch hier wieder der Fokus eher auf der Interpretation und Reflexion als auf der rechnerischen Komponente liegt. Hier bietet sich die Bearbeitung dann besonders im Wahlfach an.

- *Verlauf der Stunden*
  Wie oben erwähnt, dient die erste Einheit der Hinführung zum Thema. Zu Beginn der Stunde wird den SchülerInnen Grundlegendes zur Verhältniswahl und deren Unterschied zur Mehrheitswahl[18] erklärt. Dabei wird besonders auf die Wahlkreiseinteilung als wichtiges Element eingegangen. Anhand des Beispiels 3[19] (H4 K1) wird die Abhängigkeit des Ergebnisses von dieser Einteilung demonstriert. Die Lösung wird gemeinsam mit den SchülerInnen an der Tafel erarbeitet, wobei zunächst alle möglichen Verteilungen aufgelistet werden und anschließend die Konsequenzen für eine Wahl und somit die Einteilung der Wahlkreise aus Sicht einer jeden Partei besprochen werden. Hier muss auch darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Reihenfolge der Wahlkreise keine Rolle spielt. Das heißt, die Fälle 3 - 1 - 0, 3 - 0 - 1, 1 - 3 - 0, 1 - 0 - 3, 0 - 3 - 1 und 0 - 1 - 3 werden alle in einem Fall zusammengefasst. Sinngemäß gilt das auch für 1 - 1 - 2 und 2 - 2 - 0.
  Folgende Aufgabe dazu sollen die SchülerInnen nun in Einzelarbeit lösen:
  Ein Wahlgebiet mit insgesamt fünfzehn WählerInnen soll in fünf gleich große Wahlkreise aufgeteilt werden. In diesem Wahlgebiet gehören neun WählerInnen der Partei A an und sechs WählerInnen der Partei B.

[18] siehe S.24ff.
[19] siehe S.25f.

Gibt es eine Wahlkreiseinteilung, welche zum Sieg von Partei B führt? (H4 K1)
Die SchülerInnen sollen dazu selbstständig mit den Daten experimentieren und so zu einer Antwort kommen. Zum Schluss werden gemeinsam mit den SchülerInnen alle möglichen Verteilungen und deren Auswirkungen besprochen werden.

Partei	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
Wahlkreis 1	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	2	1
Wahlkreis 2	3	0	3	0	3	0	2	1	2	1	2	1
Wahlkreis 3	3	0	2	1	1	2	2	1	2	1	2	1
Wahlkreis 4	0	3	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1
Wahlkreis 5	0	3	0	3	1	2	0	3	1	2	1	2
Sieger	A		A		B		A		A		A	

Anschließend wird den SchülerInnen ein zentrales Problem der Verhältniswahl, nämlich die Stimmverrechnung, näher gebracht. Ein leichtes Einstiegsbeispiel soll den SchülerInnen die Schwierigkeit der Übertragung der Stimmen auf Mandate verdeutlichen:
Ein Ausschuss mit 20 Mitgliedern soll durch Mitglieder der drei Parteien A, B und C besetzt werden. Insgesamt werden 365 Stimmen abgegeben, davon entfallen 128 auf Partei A, 187 auf Partei B und 50 auf Partei C. Wie viele Sitze im Ausschuss erhält jede Partei? (H2 K1)
Aus den absoluten Angaben wird zunächst der Stimmenanteil einer jeden Partei in Prozent berechnet. Sind die SchülerInnen schon gefestigt im Umgang Prozenten, kann dies in Einzelarbeit gemacht werden, ansonsten gemeinsam an der Tafel. Die Lehrperson erklärt, dass dieser Prozentsatz bestmöglich auch dem absoluten Anteil an Sitzen im Ausschuss entsprechen soll. Gemeinsam wird dieser absolute Anteil auf zwei Nachkommastellen genau berechnet.

Partei	Stimmenanteil	Anteil an Sitzen
A	35,07 %	7,01
B	51,23 %	10,25
C	13,70 %	2,74

Das Problem dabei ist, dass die Anzahlen der Sitze einer jeden Partei ganzzahlig sein muss. Die SchülerInnen werden dazu angeregt, Vorschläge zur Lösung dieses Problems zu bringen. Höchstwahrscheinlich wird ein Vorschlag „Runden" sein. In diesem konkreten Fall wäre das eine gute Möglichkeit, da sich die Sitze dann wie folgt aufteilen würden:

A	B	C	$\sum$
7	10	3	$= 20$

Mithilfe einer kleinen Abänderung des Beispiels wird deutlich, dass das nicht immer so einfach ist. Angenommen es liegt dieselbe Ausgangsituation vor, bloß, dass nun nur 19 statt 20 Sitze vergeben werden. Gemeinsam mit den SchülerInnen wird besprochen, was sich nun ändert und was gleich bleibt. Die Stimmenanteile in Prozent sind gleich, jedoch nicht die absoluten Anteile an Sitzen. Diese sollen die SchülerInnen in Einzelarbeit berechnen und anschließend. Es ergibt sich Folgendes:

A	B	C	$\sum$
6,66	9,73	2,60	
7	10	3	$= 20 > 19$

„Runden" führt hier also offensichtlich nicht zum Ziel, da ein Sitz zu viel vergeben wird. In Partnerarbeit sollen die SchülerInnen über andere Möglichkeiten zur Berechnung der Sitzanteile

nachdenken, welche anschließend gemeinsam besprochen werden. Abschließend fasst die Lehrperson noch einmal das Hauptproblem der Stimmverrechnung zusammen. Als Hausübung kann ein weiteres Beispiel zur Berechnung von Stimmen- und Mandatsanteilen gegeben werden.
Daran schließen nun die nächsten Stunden zum komplexen Vorgehen der Stimmverrechnung bei österreichischen Nationalratswahlen an. Ausgangspunkt ist dabei der Gesetzestext[20].
In der ersten Stunde wird der erste Teil des Textes Schritt für Schritt gemeinsam gelesen und vorkommende Begriffe und auftretende Verständnisfragen geklärt.

AB Stimmverrechnung bei österreichischen Nationalratswahlen *(Teil I)*
§2. (1) Das Bundesgebiet wird für Zwecke der Wahl in neun Landeswahlkreise eingeteilt; hierbei bildet jedes Bundesland einen Landeswahlkreis.
§3. (1) Die Stimmbezirke der Landeswahlkreise werden in einem oder mehreren Regionalwahlkreisen zusammengefasst.
§96. (4) Die Gesamtsumme der im Landeswahlkreis für die Parteien abgegebenen gültigen Stimmen wird anschließend durch die Anzahl der im Landeswahlkreis zu vergebenden Mandate geteilt. Die so gewonnene und in jedem Fall auf die nächstfolgende ganze Zahl zu erhöhende Zahl ist die Wahlzahl.
Erstes Ermittlungsverfahren
§97. Jede Partei erhält so viele Mandate, wie die Wahlzahl in ihrer Parteisumme im Regionalwahlkreis enthalten ist.

Je nachdem in welcher Schulstufe der Vorschlag umgesetzt wird, muss dafür unterschiedlich viel Zeit eingeplant werden. Es empfiehlt sich, nach jedem Paragraphen das Lesen zu unterbrechen und das Gelesene noch einmal mit eigenen Worten zu wiederholen beziehungsweise es sich von den SchülerInnen in ihren Worten wiederholen zu lassen. Außerdem soll das Gelesene in die mathematische Sprache übersetzt werden, das heißt die Wahlzahl wird als die nächstgrößte ganze Zahl des Quotienten von den insgesamt abgegebenen gültigen Stimmen und den zu vergebenden Mandaten definiert. Die entsprechende Notation hängt hier wieder von der Schulstufe ab. Kennen die SchülerInnen bereits die Aufrundungsfunktion, so kann die Wahlzahl mit ihrer Hilfe mathematisch dargestellt werden. Wenn dies nicht zutrifft, muss ein „aufgerundet" wörtlich hinzugefügt werden:

$$Wahlzahl = \lceil \frac{abgegebene\ gültige\ Stimmen}{zu\ vergebende\ Mandate} \rceil$$

Nach §96 wird das Arbeitsblatt zunächst zur Seite gelegt und eine Aufgabe zur Berechnung der Wahlzahl bearbeitet. Als Ausgangspunkt kann hier der Landeswahlkreis 3 aus Beispiel 5[21] dienen. Dieses Beispiel zieht sich als roter Faden durch die nächsten Stunden. Danach wird der Paragraph zum ersten Ermittlungsverfahren gelesen. Dieser ist schon sehr komplex, weshalb die SchülerInnen zunächst überfordert sein werden. Der Satz muss deshalb Stück für Stück gelesen und erklärt werden und auch wieder mathematisch dargestellt werden. Die Anzahl an Mandaten, die in diesem Ermittlungsschritt für eine Partei vergeben werden, kann als nächstkleinste ganze

[20] vgl. Bundesministerium für Inneres.
http://www.bmi.gv.at/cms/BMI_wahlen/nationalrat/wahlordnung/start.aspx
Stand: 13.10.2015
[21] siehe S.30f.

Zahl des Quotienten von den für ihn im Regionalwahlkreis abgegebenen gültigen Stimmen und der Wahlzahl definiert werden. Dargestellt werden kann das wie folgt:

$$Anzahl\ der\ Mandate\ im\ 1.\ Schritt = \lfloor \frac{Stimmen\ im\ Regionalwahlkreis}{Wahlzahl} \rfloor$$

Ist die Gaußklammer noch nicht bekannt, muss ein „abgerundet" wörtlich hinzugefügt werden. Zum besseren Verständnis sollte das wieder anhand eines Beispiels demonstriert werden, wie etwa mithilfe der Berechnung der Mandate für Partei A im Regionalwahlkreis 3a aus Beispiel 5. Die Schwierigkeit des Beispiels kann nun durch zusätzliche Informationen nach und nach erhöht werden. Dazu werden noch die Stimmen der anderen Parteien in diesem Regionalwahlkreis und die Stimmen der Parteien in den anderen Regionalwahlkreisen des Landeswahlkreises 3 angegeben. Am Ende erhält man die gesamte Mandatsverteilung in diesem Landeswahlkreis.
Diese Aufgabe wird gemeinsam mit den SchülerInnen erarbeitet, wobei die notwendigen aufeinanderfolgenden Schritte an der Tafel festgehalten werden. Die SchülerInnen notieren sich das ins Heft. Eine weitere ähnliche Aufgabe soll anschließend von den SchülerInnen selbstständig bearbeitet werden. Der Einfachheit halber kann diese am Arbeitsblatt abgebildet sein und so oder ähnlich lauten: (H2 K2)

Landeswahlkreis							
				Stimmen		Mandate	
Mandate	Stimmen	Wahlzahl	Regional-wahlkreis	Partei A	Partei B	Partei A	Partei B
12	223413	***18618***	a	36320	31851	***1***	***1***
			b	40355	33781	***2***	***1***
			c	39727	41379	***2***	***2***

Die fett und kursiv gedruckten Einträge sind von den SchülerInnen zu eruieren. Es sind also neun von zwölf Mandaten nach dem ersten Ermittlungsverfahren vergeben. Hier wird in etwa die erste Stunde zu Ende sein. Als Hausübung eignet sich eine weitere Aufgabe ähnlich zur letzten. In der nächsten Stunde wird der zweite Abschnitt des Gesetzestexts analog zum ersten Teil erarbeitet.

AB Stimmverrechnung bei österreichischen Nationalratswahlen *(Teil II)*
Zweites Ermittlungsverfahren
§ 101. Jede Partei erhält so viele Mandate, wie die Wahlzahl in ihrer Parteisumme im Landeswahlkreis enthalten ist, abzüglich allenfalls im ersten Ermittlungsverfahren erzielter Mandate.

Auch hier ist von besonderer Bedeutung die Übersetzung des Textes in eine mathematische Sprache. Für das zweite Ermittlungsverfahren kann das ganz analog zum ersten gemacht werden, woraus folgende „Formel" resultiert:

$$\begin{aligned} Anzahl\ der\ Mandate\ im\ 2.\ Schritt &= \lfloor \frac{Stimmen\ im\ Landeswahlkreis}{Wahlzahl} \rfloor \\ &- Anzahl\ der\ Mandate\ im\ 1.\ Schritt \end{aligned}$$

Wichtig ist dabei, auf den Unterschied zum vorigen Schritt aufmerksam zu machen, und zwar werden nun die Stimmen im Landeswahlkreis betrachtet. Zum besseren Verständnis soll auch hier das Lesen des Textes kurz unterbrochen und eine Aufgabe dazu bearbeitet werden. Um den roten Faden durch die Stunden aufrechtzuerhalten, bietet sich wieder die Bearbeitung des Landeswahlkreises 3 aus Beispiel 5 an. Gemeinsam mit den SchülerInnen soll das an der Tafel erarbeitet werden. Von Vorteil ist es außerdem, sich an dieser Stelle die bisher erreichten Mandate aller Parteien zu notieren. Haben die SchülerInnen das gut verstanden, so können sie selbiges nun alleine für die Aufgabe vom Arbeitsblatt machen. Sind sie noch eher unsicher, so sollte auch das im Plenum erarbeitet werden.

Partei A: $\frac{116402}{18618} - 5 \approx 6,25 - 5 = 1,25 \rightarrow$ *ein weiteres Mandat, insgesamt: sechs Mandate*

Partei B: $\frac{107011}{18618} - 4 \approx 5,75 - 4 = 1,75 \rightarrow$ *ein weiteres Mandat, insgesamt: fünf Mandate*

Das zweite Ermittlungsverfahren ist somit abgeschlossen und es kann weiter gelesen werden.

AB Stimmverrechnung bei österreichischen Nationalratswahlen *(Teil III)*

Drittes Ermittlungsverfahren

§107. (3) Auf die Parteien werden im dritten Ermittlungsverfahren alle 183 Mandate [...] mittels der Wahlzahl verteilt, die nach den Abs. 4 und 5 zu berechnen ist.

(4) Die Summen der Parteistimmen werden, nach ihrer Größe geordnet, nebeneinander geschrieben; unter jede Summe wird die Hälfte geschrieben, darunter das Drittel, das Viertel und die weiterfolgenden Teilzahlen.

(5) Als Wahlzahl gilt bei 183 zu vergebenden Mandaten die hundertdreiundachtziggrößte Zahl, bei 182 zu vergebenden Mandaten die hundertzweiundachtziggrößte, bei 181 die hunderteinundachtziggrößte usw. Zahl der so angeschriebenen Zahlen.

(6) Jede Partei erhält so viele Mandate, wie die Wahlzahl in ihrer Parteisumme enthalten ist.

Anmerkung: Hat eine Partei durch die Berechnungen in den Regional- beziehungsweise Landeswahlkreisen weniger Mandate erhalten, so werden ihr die fehlenden zugesprochen. Tritt der umgekehrte Fall ein und eine Partei hat beim ersten und zweiten Ermittlungsverfahren mehr Mandate erreicht, so werden ihr diese zuerkannt. Jedoch muss dann der dritte Ermittlungsschritt wiederholt werden, und zwar ohne Berücksichtigung dieser Partei und abzüglich deren bereits gewonnener Mandate.

Für die SchülerInnen möglicherweise verwirrend ist hier, dass in §107 (3) eine neue Wahlzahl gemeint ist. Wie diese zu berechnen ist, wird aber in (4) und (5) recht gut erklärt. Dennoch sollte nach (5) das Lesen wieder unterbrochen werden, um die letzten Punkte zusammenzufassen und eine Aufgabe dazu zu bearbeiten. Für diese neue Wahlzahl kann dabei keine mathematische „Formel" wie oben angegeben werden, die wörtliche Beschreibung muss hier ausreichen. Nicht ganz klar kommt hervor, dass mit „Parteisumme" nun die Anzahl der Stimmen auf Bundesebene gemeint ist. Das muss von der Lehrperson besonders betont werden. Gemeinsam mit den SchülerInnen wird an der Tafel eine Tabelle zur Bestimmung der neuen Wahlzahl aus Beispiel 5 angefertigt und dessen Bestimmung Schritt für Schritt erklärt[22]. Haben die SchülerInnen das verstanden, so kann der letzte Punkt gelesen werden. Das ist nun wahrscheinlich wieder leichter

[22]siehe S.31f.

verständlich, da das Schema analog zum ersten und zweiten Ermittlungsverfahren ist. An der Tafel muss wieder die Übersetzung in eine mathematische Formel festgehalten werden, nämlich:

$$Anzahl\ der\ Mandate\ im\ 3.\ Schritt = \lfloor \frac{Stimmen\ auf\ Bundesebene}{neue\ Wahlzahl} \rfloor$$

Mithilfe von Beispiel 5 kann auch dieser letzte Schritt angewandt werden. Um die Aufgabe ganz abzuschließen, muss zunächst noch die Anmerkung am Arbeitsblatt gelesen und nachvollzogen werden. Der erste Fall, nämlich dass keine Partei in den ersten beiden Schritten mehr Mandate erreicht hat, kann anhand von Beispiel 5 besprochen werden, woraus dann auch die endgültige Verteilung der Mandate bei dieser Aufgabe feststeht. Der zweite Fall kann folgendermaßen demonstriert werden:
Nach den ersten beiden Ermittlungsverfahren erhält die Partei A nach einer Wahl bei der elf Mandate zu vergeben sind sechs Mandate, Partei B drei Mandate und Partei C zwei Mandate. Nach dem dritten Schritt ergibt sich aber folgende Aufteilung: fünf Mandate für Partei A, drei Mandate für Partei B und drei Mandate für Partei C. Nach der Anmerkung oben, müssen Partei A sechs Mandate zugesprochen werden. Die anderen beiden Parteien müssen noch einmal den dritten Schritt durchlaufen, wobei nur noch fünf Mandate aufzuteilen sind. Das heißt, es wird wieder eine neue Wahlzahl bestimmt und die Mandate dementsprechend berechnet.
Das bildet den Abschluss dieser Unterrichtseinheit. Eine einfache Aufgabe mit zwei Landeswahlkreisen und zwei Parteien, wie beispielsweise folgende, eignet sich als Hausübung:
In einem Land X finden Wahlen zum Nationalrat statt. Die Mandatsverteilung erfolgt dabei nach österreichischem Vorbild. Das Land ist in zwei Landeswahlkreise und vier Regionalwahlkreise unterteilt. Insgesamt sind neun Mandate zu vergeben. Berechne die Mandate einer jeden Partei bei folgender Stimmenverteilung: (H2 K3)

				Stimmen	
Landeswahlkreis	Mandate	Stimmen	Regionalwahlkreis	Partei A	Partei B
1	4	11002	1a	3373	2264
			1b	2680	2685
2	5	14653	2a	3924	2841
			2b	3266	4622
Gesamt	9	25655		13243	12412

Die letzte Stunde zu diesem Thema dient hauptsächlich der Wiederholung und Vertiefung. Anhand der Hausübung werden noch einmal die wichtigsten Schritte bei der Berechnung der Mandatsverteilung gemeinsam wiederholt und offene Fragen geklärt. Am besten werden diese Schritte von der Lehrperson übersichtlich an der Tafel festgehalten. Anschließend sollen die SchülerInnen in Gruppenarbeit folgenden Arbeitsauftrag ausführen:
In Gruppen zu je vier SchülerInnen soll die Mandatsverteilung bei einer Stimmenverteilung wie in der Tabelle angegeben berechnet werden. (H2 K3)

				Stimmen		
Landes-wahlkreis	Mandate	Stimmen	Regional-wahlkreis	Partei A	Partei B	Partei C
1	8	15 000	1a	2 600	1 750	900
			1b	1 250	1 500	1 600
			1c	1 750	2 300	1 350
2	7	13 500	2a	1 800	3 550	1 800
			2b	2 950	1 850	1 550
3	7	12 000	3a	2 400	700	950
			3b	1 200	1 350	1 600
			3c	1 650	1 100	1 050
4	5	9 500	4a	1 750	2 300	850
			4b	1 500	1 000	2 100
Gesamt	27	50 000		18 850	17 400	13 750

Dazu wird jedem/r Schüler/in zuerst ein Landeswahlkreis zugeteilt, anhand dessen er/sie die ersten beiden Ermittlungsschritte selbstständig und alleine durchführen soll. Sind alle Gruppenmitglieder fertig, sollen die Ergebnisse gegenseitig überprüft werden. Im Anschluss wird gemeinsam der dritte Schritt durchgeführt. Ein Gruppenmitglied übernimmt dabei die Rolle des/der Schriftführers/Schriftführerin.

Für die Bearbeitung der Aufgabe müssen in etwa zwanzig Minuten eingeplant werden. Gruppen, die früher fertig sind, können ihre Ergebnisse noch grafisch darstellen. Die Lehrperson geht dabei durch den Klassenraum und gibt, falls nötig, Hilfestellungen. Sind alle Gruppen fertig, werden die Ergebnisse verglichen. Die Lehrperson kann dazu eine Gruppe bestimmen, die ihre Ergebnisse präsentieren soll. Abschließend soll noch etwas Zeit eingeplant werden um auf die Frage, inwieweit sich Stimmen- und Mandatsanteil entsprechen, näher einzugehen. Hier kann noch einmal auf Beispiel 5 zurückgegriffen werden[23] oder aber dieses Beispiel zur Hand genommen werden. Gemeinsam mit den SchülerInnen wird folgende Tabelle an der Tafel entworfen:

	Stimmen	Stimmenanteil	Mandate	Mandatsanteil
Partei A	18850	37,7 %	10	37,04 %
Partei B	17400	34,8 %	10	37,04 %
Partei C	13750	27,5 %	7	25,93 %

Im Plenum wird über die Fragen, für wen sich dadurch ein Vorteil und für wen sich ein Nachteil ergibt, gesprochen. Von großer Bedeutung ist, die SchülerInnen darauf aufmerksam zu machen, dass dieses System große gegenüber kleinen Parteien bevorzugt. Das kann auch an einem aktuellen Wahlergebnis noch einmal gezeigt werden, wie beispielsweise der Wien-Wahl 2015. Hier

[23] siehe S.30ff.

ergab sich folgende Stimmen- und Mandatsverteilung[24]:

Partei	Stimmenanteil in %	Mandatsanteil in %
SPÖ	39,6	44
FPÖ	30,8	34
Grüne	11,8	10
ÖVP	9,2	7
Neos	6,2	5

Eine mögliche Hausübung ist das Recherchieren von mehreren Wahlergebnissen österreichischer Wahlen und insbesondere das Vergleichen von Stimmen- und Mandatsanteilen bei diesen.

Ziel dieser Stunden ist, SchülerInnen die mathematischen Aspekte des Wahlverfahrens in Österreich kennen und hier insbesondere über das Problem der Übertragung von Stimmenanzahlen in ganzzahlige Mandatsanzahlen Bescheid wissen.

[24] vgl. Die Presse
http://diepresse.com/home/politik/innenpolitik/4841870/Endergebnis_Mandat-fur-Grune-Vizeburgermeister-fur-FPO
Stand: 13.10.2015

5 Steuern

Wirtschaft und Politik sind zwei eng miteinander verknüpfte Bereiche und das eine ist ohne den anderen nicht denkbar, denn „Geld regiert die Welt", wie auch ein Sprichwort sagt. In diesem Zusammenhang sorgt vor allem ein Thema heuer immer wieder für Diskussionen, und das ist die Steuerreform, die 2016 in Kraft treten soll.

Diese kann zum Anlass genommen werden, das Thema „Steuern" auch im Mathematikunterricht zu behandeln. Ein Steuergesetz beziehungsweise der darin beschlossene Steuertarif ist nämlich aus mathematischer Sicht nichts anderes als eine Funktion, die jeder Bemessungsgrundlage die zu bezahlende Steuerschuld zuordnet. Einem Vektor von Tatbeständen, hier sind alle einkommensteuerrelevanten Größen wie beispielsweise Einkommen und Familienstand gemeint, wird somit eine Zahl zugeordnet. Die Mathematik, genauer eine mathematische Funktion oder oftmals auch Zahlentabellen oder Diagramme, dient also dazu, den abstrakten Zusammenhang zwischen der Bemessungsgrundlage und der Höhe des geschuldeten Steuerbetrags darzustellen (vgl. Zouhar, 2008, S.19).

Die Erhebung von Steuern ist so alt wie das geregelte menschliche Zusammenleben. Erste Anzeichen dafür finden sich in sumerischen Keilschriften ab 2900 vor Christus, in denen der Zehnt erwähnt wird. Die Zehntsteuer war in Naturalien zu leisten, wobei von jedem Erntegut ein Zehnt abzugeben war. Generell hielt sich die Zahlung von Naturalabgaben als Steuer bis in die Neuzeit, aber auch Frondienste waren üblich. Im Mittelalter war die Kopfsteuer sehr verbreitet, bei der von jeder erwachsenen Person der gleiche Betrag eingefordert wurde. In England setzte sich im 18. Jahrhundert zum ersten Mal eine Besteuerung des Einkommens im modernen Stil durch und im 19. Jahrhundert wurde diese auch im deutschsprachigen Raum realisiert (vgl. Homburg, 2005, S.25ff.).

5.1 Grundbegriffe der Steuerlehre

5.1.1 Steuern

> „Steuern sind Geldleistungen an Gebietskörperschaften, denen eine unmittelbare Gegenleistung nicht gegenübersteht (zB Einkommensteuer, Körperschaftsteuer, Umsatzsteuer). Die Steuerpflicht entsteht somit unabhängig von der Nutzung öffentlicher Leistungen aufgrund der Verwirklichung des Steuertatbestandes." (Tumpel, 2010, S.14)

Neben Beiträgen und Gebühren sind Steuern eine Art von Abgaben. Wie schon aus der Definition hervorgeht, beinhalten sie keine Gegenleistung. Anders ist dies bei Beiträgen, da diese dann erhoben werden, wenn die Möglichkeit zur Nutzung öffentlicher Leistungen besteht, und bei Gebühren, welche nur bei tatsächlicher Nutzung öffentlicher Leistungen gefordert werden. Beispiele für Beiträge sind Kurtaxen oder auch Anliegerbeiträge und für Gebühren unter anderem Parkgebühren und Müllabfuhrgebühren (vgl. Tumpel, 2010, S.14).

Unterschieden werden kann nun außerdem noch zwischen direkten und indirekten Steuern. Direkte Steuern sind solche, die unmittelbar mit der wirtschaftlichen Leistungsfähigkeit in Zusammenhang stehen, das heißt direkt Einkommen und Vermögen betreffen. In diesem Fall stimmt der tatsächliche Steuerzahler mit dem vom Gesetz vorgesehenen Steuerzahler überein. Ein Beispiel hierfür ist die

Einkommensteuer. Im Gegensatz dazu zielen indirekte Steuern über Umwege auf wirtschaftliche Leistungsfähigkeit ab, da sie in Zusammenhang mit der Einkommensverwendung auftreten. Hier ist der tatsächliche Steuerzahler nicht gleich dem gesetzlichen. So muss beispielsweise von einem Unternehmer eine Umsatzsteuer gezahlt werden, welche im Endeffekt jedoch vom Verbraucher entrichtet wird (vgl. Homburg, 2005, S.11ff.).

5.1.2 Bemessungsgrundlage

> „Bemessungsgrundlage bezeichnet jene Wertgröße oder Menge, anhand derer durch Multiplikation mit dem festgelegten Steuersatz die Höhe der Steuerschuld ermittelt wird." (Tumpel, 2010, S.21)

Des Weiteren kann in den Steuergesetzen ein Freibetrag oder auch eine Freigrenze definiert sein. Als Freibetrag ist jener Betrag zu verstehen, der von der Bemessungsgrundlage abzuziehen ist und somit steuerfrei ist. Existiert eine Freigrenze, so ist die Bemessungsgrundlage bis zu einem festgelegten Betrag, der Freigrenze, steuerfrei, jedoch ist bei Überschreitung dieser Grenze der gesamte Betrag steuerpflichtig (vgl. Tumpel, 2010, S.22).

Betrachtet man beispielsweise die in Österreich geltenden Gesetze zur Einkommensteuer näher, so berechnet sich die Bemessungsgrundlage, oder auch das zu versteuernde Einkommen, folgendermaßen:

Gesamtbetrag der Einkünfte	Einkünfte aus Land- und Forstwirtschaft, Einkünfte aus selbständiger Arbeit, Einkünfte aus Gewerbebetrieb, Einkünfte aus nichtselbständiger Arbeit, Einkünfte aus Kapitalvermögen, Einkünfte aus Vermietung und Verpachtung, Sonstige Einkünfte
- **Sonderausgaben**, **außergewöhnliche Belastungen**, **Freibeträge**	
= **zu versteuerndes Einkommen** = **Bemessungsgrundlage**	

Aus der Summe aller jährlichen Einkünfte ergibt sich also ein Gesamtbetrag, der nach Abzug von Sonderausgaben, außergewöhnlichen Belastungen und Freibeträgen, die Bemessungsgrundlage bildet. Auf diese wird schließlich der Steuertarif angewendet und so ergibt sich die zu zahlende Einkommensteuer, die durch Veranlagung für ein bestimmtes Jahr erhoben wird. Bei Einkünften aus nichtselbständiger Arbeit wird diese als Lohnsteuer vom Arbeitgeber an das Finanzamt überwiesen und so bereits vom Lohn abgezogen. In diesem Fall ist eine Veranlagung nur dann notwendig, wenn andere Einkünfte von mehr als 730 € eingegangen sind oder man in mehreren Dienstverhältnissen gleichzeitig beschäftig war. Auch wenn dies nicht zutrifft, empfiehlt es sich dennoch eine Veranlagung durchzuführen, da so Sonderausgaben, außergewöhnliche Belastungen und Freibeträge geltend gemacht werden können und man möglicherweise eine Gutschrift erhält (vgl. Tumpel, 2010, S.43ff.).

5.1.3 Steuerzwecke

Die Erhebung von Steuern verfolgt drei Zwecke.

Der primäre und wohl auch offensichtlichste ist der Fiskalzweck, welcher Steuern als Mittel zur Beschaffung von Staatseinnahmen beschreibt. Daneben dienen sie aber noch einem Lenkungszweck und einem Umverteilungszweck.

Der Lenkungszweck besteht darin, beim Steuerzahler ein bestimmtes Verhalten hervorzurufen oder zu verhindern. So sollen Zölle beispielsweise inländische Verbraucher davon abbringen, ausländische Produkte zu kaufen oder hohe Umweltsteuern zu einem bewussteren Umgang mit unserer Umwelt führen.

Das Verständnis des Umverteilungszwecks hängt von der politischen Einstellung ab. Ausgehend von einer liberalen politischen Auffassung dienen Steuern nach dem Umverteilungszweck zur Lastenteilung entsprechend der wirtschaftlichen Leistungsfähigkeit. Hingegen sollen sie nach einer eher egalitaristischen politischen Einstellung zur Nivellierung von Einkommens- und Vermögensunterschieden beitragen. Jedenfalls geht es dabei aber um die Einkommensverteilung (vgl. Homburg, 2005, S.5ff.).

5.1.4 Steuertarife

Im Steuergesetz eines jeden Landes ist der Steuertarif T, der jeder Bemessungsgrundlage x genau einen Steuerbetrag $T(x)$ zuordnet, festgelegt. Wie schon eingangs erwähnt handelt es sich hierbei also um eine mathematische Funktion. Je nach Art des funktionalen Zusammenhangs zwischen Bemessungsgrundlage und Steuerbetrag lassen sich nun verschiedene Tarifformen unterscheiden, welche sich grob in drei Klassen gliedern: proportionale, regressive und progressive Tarife.

Zunächst ist noch die Klärung einiger für Überlegungen zu Steuertarifen essentieller Begriffe notwendig.

Von zentraler Bedeutung ist dabei unter anderem der Durchschnittssteuersatz. Er gibt das Verhältnis von Steuerbetrag und Bemessungsgrundlage wieder und lässt sich wie folgt definieren:

$$Durchschnittsteuersatz: \quad t(x) = \frac{T(x)}{x}$$

Dieser Wert entspricht also den für ein beliebiges Einkommen zu zahlenden Steuern pro verdientem Euro. Geometrisch interpretiert gibt er, ausgewertet an einem beliebigen Punkt, die Steigung des Ursprungsstrahls durch diesen Punkt an.

Ebenso wichtig ist der Grenzsteuersatz, welcher näherungsweise das Verhältnis der zusätzlichen Steuer ΔT zu einem Zuwachs Δx der Bemessungsgrundlage beschreibt und so definiert werden kann:

$$Grenzsteuersatz: \quad T'(x) = \frac{dT(x)}{dx} \approx \frac{\Delta T(x)}{\Delta x}$$

Das ist also jener Steuersatz, der auf die letzte Einheit der Bemessungsgrundlage angewandt wird. Auch dieser lässt sich geometrisch interpretieren, nämlich, ausgewertet über einem beliebigen Intervall, als durchschnittliche Steigung der Tariffunktion auf diesem Intervall. Ist die Tariffunktion T differenzierbar, so handelt es sich dabei um die Steigung der Tangente an die Funktion T an der Stelle x (vgl. Homburg, 2005, S.68f.).

Proportionale Steuertarife

Beim proportionalen Steuertarif liegt zwischen Bemessungsgrundlage und Steuerbetrag ein linearer Zusammenhang vor. Graphisch gesehen ist das also eine Gerade, die, da $b = 0$ ist, durch den Ursprung geht, siehe Abbildung 4.

$$proportionaler\ Tarif: \quad T(x) = a \cdot x \quad mit\ a > 0$$

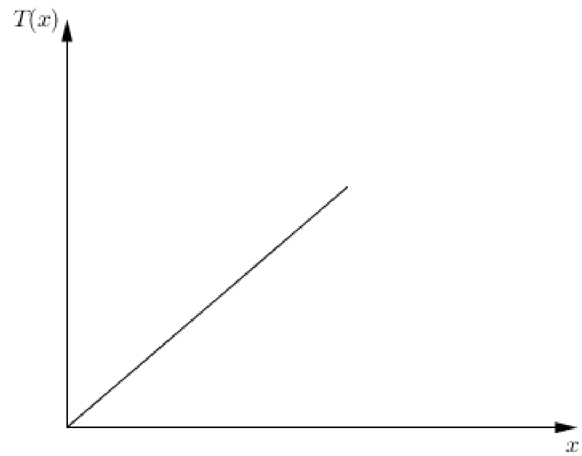


Abbildung 4: proportionaler Steuertarif

Aus der Definition leicht abzuleiten ist, dass Durchschnittssteuersatz und Grenzsteuersatz bei proportionalen Tarifen immer konstant gleich a sind, siehe Abbildung 5 (vgl. Homburg, 2005, S.69f.). Das

Abbildung 5: Durchschnittssteuersatz bei proportionalem Tarif

bedeutet, der Steuersatz hängt nicht von der Bemessungsgrundlage, also im weiteren Sinne dem Einkommen, ab, sondern alle bezahlen den gleichen prozentualen Anteil. Hier ist also nur die Höhe dieses Anteils festzulegen, ansonsten bedarf dieser Tarif keiner Gestaltung. Der proportionale Tarif ist auch unter dem Namen *flat tax* bekannt (vgl. SUTTMANN, 2007, S.57).

Regressive Steuertarife

Regressive Steuertarife haben die Eigenschaft, dass der Durchschnittsteuersatz streng abnimmt. Das kann entweder verzögert, gleichmäßig oder beschleunigt passieren, siehe Abbildung 6. Wie zu sehen

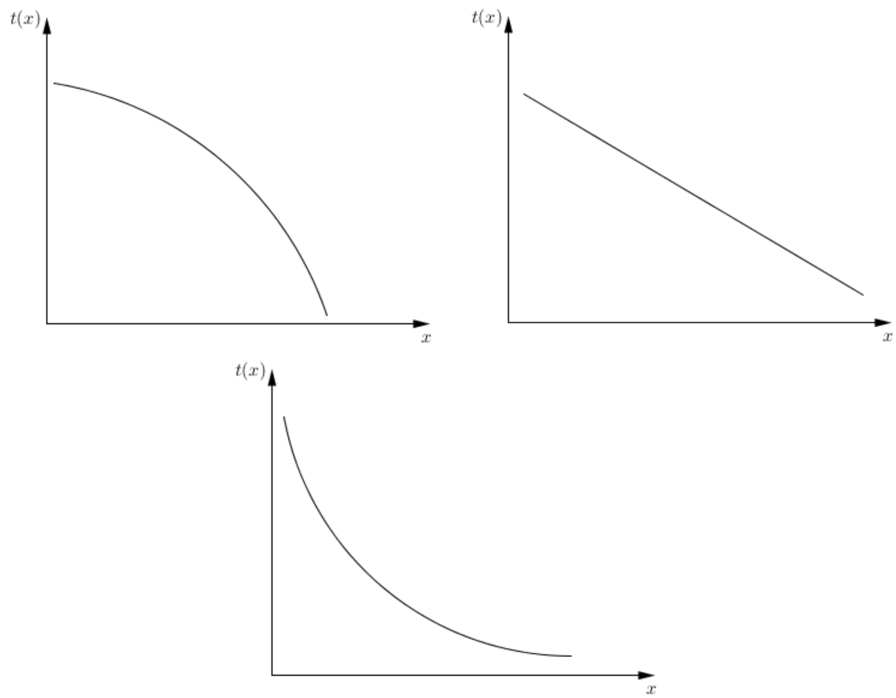


Abbildung 6: verzögerte, lineare und beschleunigte Regression

ist, kann die verzögerte und die beschleunigte Regression mithilfe einer quadratischen Funktion und die gleichmäßige mithilfe einer linearen Funktion beschrieben werden. Daraus folgt außerdem, dass der Grenzsteuersatz hier immer kleiner als der Durchschnittsteuersatz ist. Das heißt, es muss $t' < 0$ und $T' < t$ gelten (vgl. HOMBURG, 2005, S.72f.). Es ist also $\frac{dT(x)}{dx} < \frac{T(x)}{x}$, was im Hinblick auf die Steuerbetragsfunktion bedeutet, dass die Steigung der Tangente in einem Punkt immer kleiner ist als die Steigung der Ursprungsgeraden durch diesen Punkt, siehe Abbildung 7.

Progressive Steuertarife

Im Gegensatz zu den regressiven Tarifen nimmt beim progressiven Steuertarif der Durchschnittsteuersatz streng zu. Auch hier kann dieser entweder verzögert, gleichmäßig oder beschleunigt wachsen, wie in Abbildung 8 zu sehen ist, und äquivalent zu oben kann dies mittels quadratischer Funktionen für verzögert und beschleunigt progressive Tarife beziehungsweise mittels linearer Funktionen für gleichmäßig progressive Tarife dargestellt werden. Der Grenzsteuersatz ist dann immer größer als der

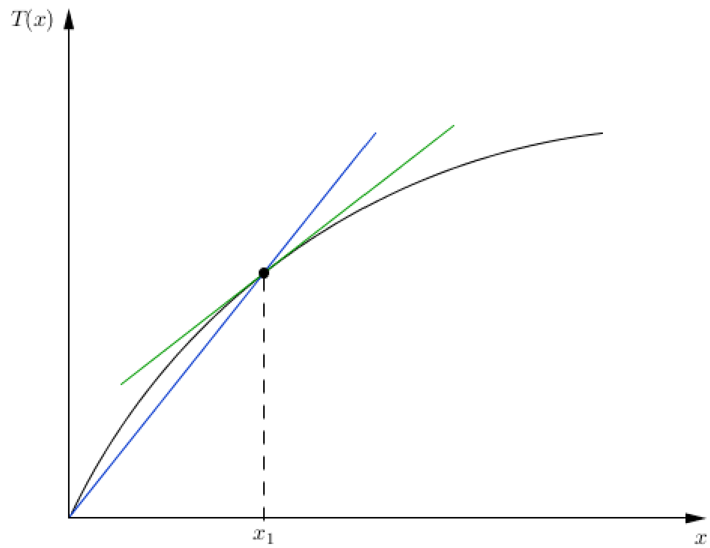


Abbildung 7: $\frac{dT(x_1)}{dx_1} < \frac{T(x_1)}{x_1}$

Durchschnittsteuersatz. Hier gilt also konträr zu oben, dass $t' > 0$ und $T' > t$ ist (vgl. HOMBURG, 2005, S.72f.). Bezogen auf die Steuerbetragsfunktion bedeutet das wiederum, dass $\frac{dT(x)}{dx} > \frac{T(x)}{x}$, also die Steigung der Tangente in einem Punkt immer größer als die Steigung der Ursprungsgeraden durch diesen Punkt ist, siehe Abbildung 9.

Im europäischen Raum hat sich im Zusammenhang mit einer gerechten Besteuerung ein progressiver Tarif durchgesetzt, also eine Besteuerung nach der Leistungsfähigkeit. Das heißt, wer mehr verdient, soll auch mehr Steuern zahlen, und das nicht nur absolut, sondern auch relativ. Daneben haben noch zwei weitere Grundsätze allgemein Anerkennung gefunden. Das ist einerseits die Belassung eines steuerfreien Existenzminimums, das heißt $t(x) = 0$ für $0 \leq x \leq x_{min}$, und andererseits die Berücksichtigung des Familienstandes (vgl. HENN, 2006, S.47).

5.2 Formen progressiver Einkommensteuertarife

Wie früher schon erwähnt ist der Steuertarif im Steuergesetz festgelegt. Dies kann auf drei Arten geschehen. Der Gesetzgeber hat die Möglichkeit den geschuldeten Steuerbetrag entweder durch einen Betragstarif $T(x)$, einen Durchschnittsatztarif $t(x)$ oder einen Grenzsatztarif $T'(x)$ anzugeben. Abgesehen von dieser Unterscheidung lassen sich im Allgemeinen zwei Grundformen progressiver Tarife anführen, das ist einerseits der Formeltarif und andererseits der Stufentarif (vgl. HOMBURG, 2005, S.85).

5.2.1 Formeltarife

Bei Formeltarifen wird der Steuertarif mithilfe einer stetigen Funktion angegeben. Dies hat den Vorteil, dass er sich besser theoretisch analysieren lässt. Zunächst muss eine Funktionenklasse, in den meisten Fällen Polynome, gewählt werden. Politisch festgelegte Eckdaten, wie das Existenzminimum, der

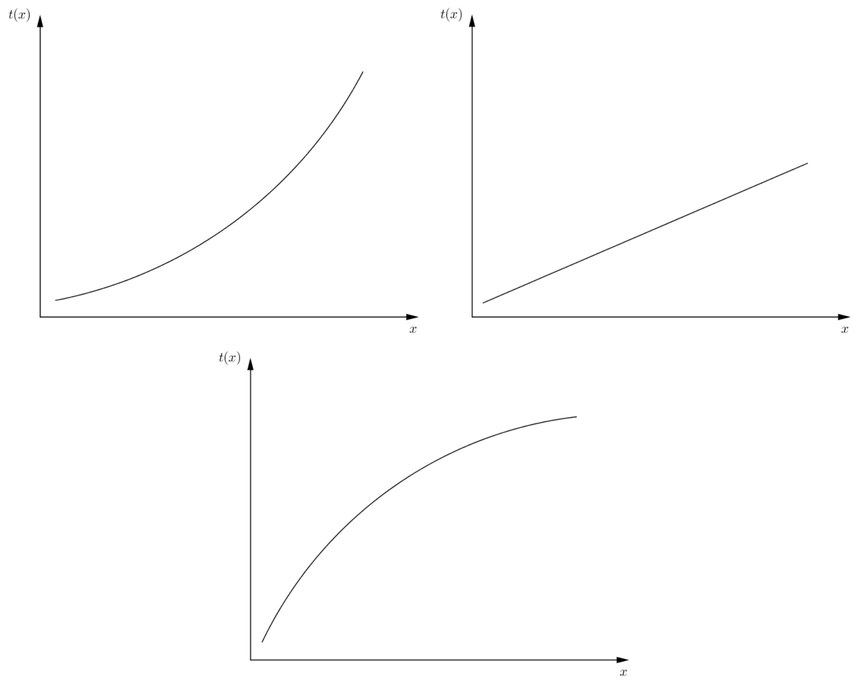


Abbildung 8: verzögerte, lineare und beschleunigte Progression

niedrigste vorkommende Steuersatz (Eingangssteuersatz) und der höchste vorkommende Steuersatz (Spitzensteuersatz), bilden dann die Grundlage, mittels derer man durch Ausgleichsrechnung schließlich die Tarifformel gewinnt. Damit lässt sich für jedes Einkommen die zu zahlende Steuer berechnen (vgl. Henn, 2006, S.48). Diese Art kommt zurzeit nur in Deutschland zur Anwendung und sieht wie folgt aus (vgl. deutsches EStG §32 a[25]):

$$T(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 8473 \\ (997,6 \cdot \frac{x-8472}{10000} + 1400) \cdot \frac{x-8472}{10000} & 8473 \leq x < 13470 \\ (228,74 \cdot \frac{x-13469}{10000} + 2397) \cdot \frac{x-13469}{10000} + 948,68 & 13470 \leq x < 52882 \\ 0,42 \cdot x - 8261,29 & 52882 \leq x < 250731 \\ 0,45 \cdot x - 15783,19 & 250731 \leq x \end{cases}$$

Der zugehörige Graph sieht dann wie in Abbildung 10 aus.

5.2.2 Stufentarife

Den Steuertarif mittels Stufentarif anzugeben heißt, dass dieser abschnittsweise durch eine Treppenfunktion definiert wird. Hier kommt nun auch die oben erwähnte Unterscheidung von Betragstarifen,

[25]siehe Bundesministerium der Justiz und für Verbraucherschutz.
http://www.gesetze-im-internet.de/estg/__32a.html
Stand: 17.09.2015

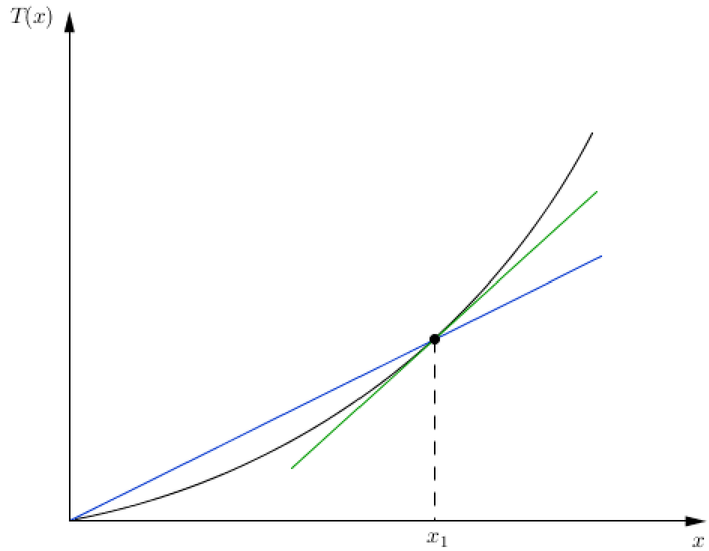


Abbildung 9: $\frac{dT(x_1)}{dx_1} > \frac{T(x_1)}{x_1}$

Durchschnittsatztarifen und Grenzsatztarifen zum Tragen. Allen dreien gemeinsam ist, dass zu Beginn Einkommensintervalle festgelegt werden.

Stufenbetragstarif

Beim Stufenbetragstarif wird dann ein fester, von Intervall zu Intervall steigender Steuerbetrag für jedes Einkommen, das in dieses Intervall fällt, bestimmt. Im Prinzip ist dieser Tarif also progressiv. Innerhalb einer Stufe nimmt der Durchschnittsteuersatz aber logischerweise ab, da der Steuerbetrag für ein Einkommen am unteren Ende einer Stufe gleich dem für ein Einkommen am oberen Ende ist, was für das Einkommen am oberen Ende einen insgesamt niedrigeren Steuersatz ergibt, siehe Abbildung 11 beziehungsweise Abbildung 12. Dieses Phänomen wird innere Regression genannt.

Diesem Problem kann man aber mit genügend schmalen Intervallen entgegen wirken, da dann die innere Regression vernachlässigbar wird. Ein weiterer kritischer Punkt bei dieser Art von Tarif ist die Reihenfolgeumkehr an den Sprungstellen. Anhand von Abbildung 11 ist gut zu sehen, dass bei einer Bemessungsgrundlage von etwas weniger als x_0 keine Steuer zu zahlen ist. Steigt jedoch das Einkommen bloß minimal auf x_0, so ist bereits eine Steuer zu zahlen und das verbleibende Nettoeinkommen beträgt $x_0 - T(x_0)$, wodurch nun möglicherweise weniger bleibt als vor der Einkommenserhöhung. Der Grenzsteuersatz innerhalb einer Stufe ist hierbei immer null.
Dieser Tarif wurde in der Geschichte oftmals angewandt, da Berechnungen damit recht simpel sind. Aufgrund der eben beschriebenen Fehler kommt er aber heute kaum noch vor (vgl. Homburg, 2005, S.85f.).

Beispiel 1
Im Land X werden Steuern nach folgendem Stufenbetragstarif berechnet:

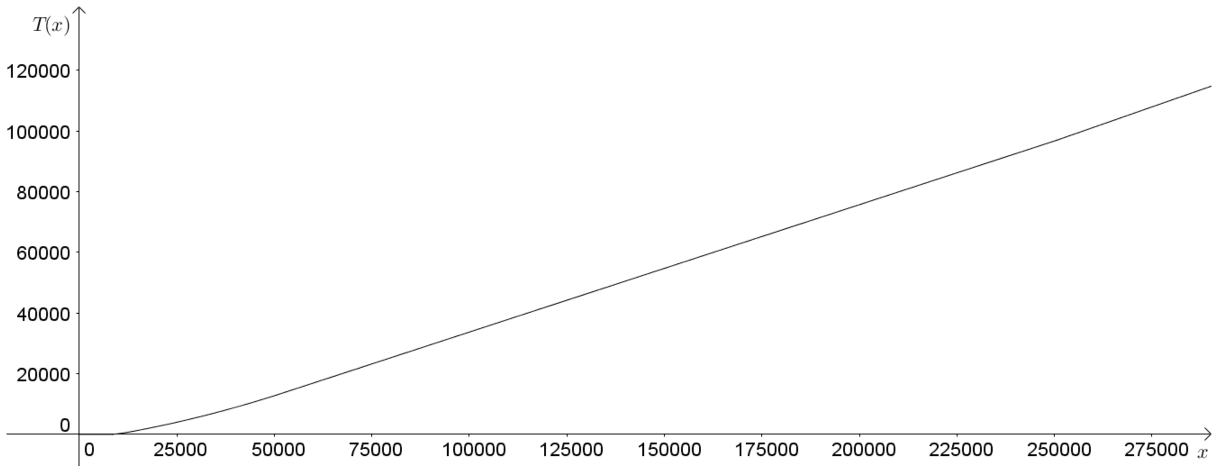


Abbildung 10: deutscher Steuertarif

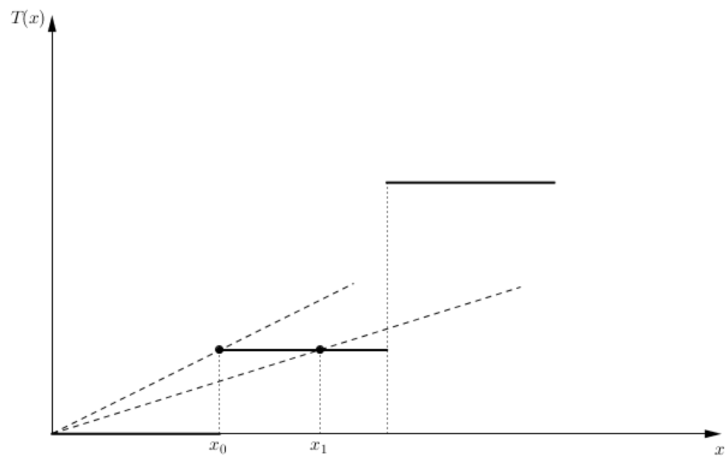


Abbildung 11: Steuerbetrag bei Stufenbetragstarif

Einkommen	Steuerbetrag
$x \leq 8000$	0
$8000 < x \leq 15000$	1800
$15000 < x \leq 28000$	4600
$28000 < x \leq 41000$	7800
$41000 < x$	15000

Der Steuerbetrag kann für ein beliebiges Einkommen schnell aus der Tabelle abgelesen werden. Der Durchschnittssteuersatz ergibt sich ebenso einfach durch Dividieren des Steuerbetrags durch das Einkommen. Der Vergleich einiger weniger Werte zeigt die Schwächen dieses System schnell auf. So ergibt sich für ein jährliches Einkommen von 14800 Euro ein Durchschnittssteuersatz $t(14800) = \frac{T(14800)}{14800} = \frac{1800}{14800} \approx 0,1216$, also rund 12,2 Prozent. Dem Steuerzahler bleiben hier 13000 Euro. Im Vergleich dazu gilt für ein Einkommen von 15200 Euro ein erheblich höherer Durchschnittssteuersatz von $t(15200) = \frac{4600}{15200} \approx 0,3026$, also rund 30,3 Prozent und diesem Steuerzahler bleiben bloß 10600

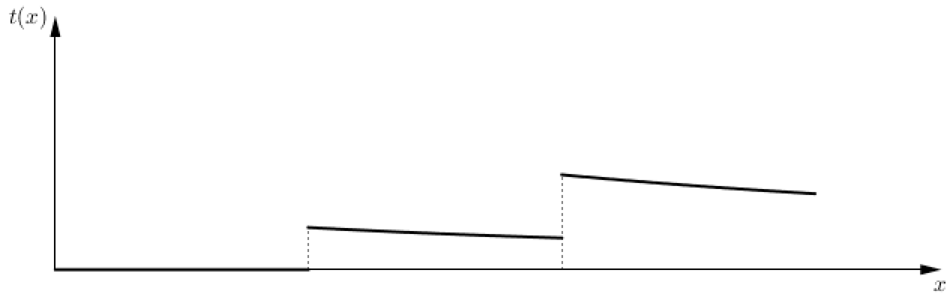


Abbildung 12: Durchschnittsteuersatz bei Stufenbetragstarif

Euro. Auf derselben Stufe, jedoch am oberen Ende, also angenommen bei einem Einkommen von 26500 Euro, ist der Durchschnittssteuersatz wieder deutlich geringer, nämlich$t(26500) = \frac{4600}{26500} \approx 0,1736$, also rund 17,4 Prozent. Nach Abzug der Steuern bleibt ein Einkommen von 21900 Euro.

Stufendurchschnittsatztarif

Dieser Tarif ist dem eben genannten recht ähnlich, bloß dass anstatt des Steuerbetrags hier für jedes Intervall ein fixer Durschnittsteuersatz festgelegt wird. Das heißt, dieser feste Steuersatz gilt immer für die gesamte Bemessungsgrundlage. Der Grenzsteuersatz innerhalb einer Stufe entspricht dann dem Durchschnittsteuersatz. Durch diesen Tarif wird eine innere Regression verhindert, wie auch Abbildung 13 zeigt. Ein anderes Problem wird aber verschärft, nämlich die Reihenfolgeumkehr an den

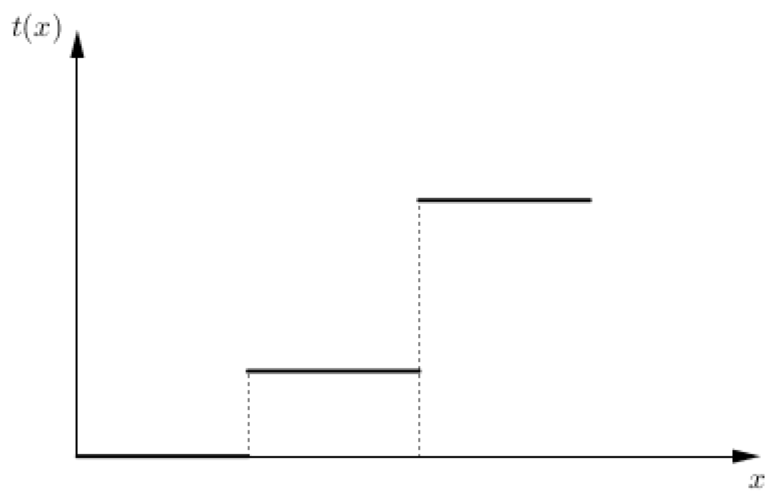


Abbildung 13: konstanter Durchschnittssteuersatz bei Stufendurchschnittsatztarif

Sprungstellen, wie anhand von Abbildung 14 gut zu sehen ist. Auch dieser Tarif ermöglicht eine sehr einfache Berechnung der Steuerschuld, nämlich durch Multiplikation von Steuersatz und Einkommen, also $T(x) = t(x) \cdot x$.

Um die Reihenfolgeumkehr zu vermeiden, müssen komplizierte Grenzberichtigungen vorgenommen

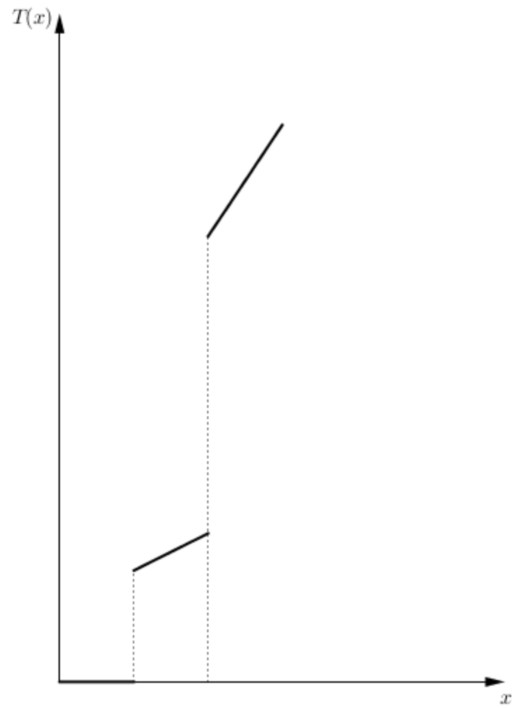


Abbildung 14: Steuerbetrag bei Stufendurchschnittsatztarif

werden, wie etwa im Zuge der Erhebung der Erbschaftsteuer, wo dieser Tarif noch heute angewandt wird[26] (vgl. Homburg, 2005, S.86).

Beispiel 2
Die Einkommensteuer im Land Y wird mittels folgenden Stufendurchschnittsatztarifs erhoben:

Einkommen	Durchschnittsteuersatz
$x \leq 12000$	0
$12000 < x \leq 19000$	0,18
$19000 < x \leq 31000$	0,24
$31000 < x \leq 55000$	0,32
$55000 < x$	0,45

Auch hier ist das größte Defizit dieses Systems, die Reihenfolgeumkehr, schnell anhand weniger Werte zu sehen. Eine Person mit einem Einkommen von 29500 Euro zahlt in diesem Land $T(29500) = t(29500) \cdot 29500 = 0,24 \cdot 29500 = 7080$ Euro Steuern, wonach 22420 Euro übrig bleiben. Nach einer Gehaltserhöhung um 2500 Euro auf 32000 Euro sind $T(32000) = 0,32 \cdot 32000 = 10240$ Euro an Steuern zu zahlen, und es bleiben nur noch 21760 Euro übrig.

[26] siehe §8 ErbStG
http://www.jusline.at/8_ErbStG.html
Stand: 21.09.2015

Stufengrenzsatztarif

Als Lösung zur Vermeidung von innerer Regression und Reihenfolgeumkehr bietet sich der Stufengrenzsatztarif an. Dabei werden für die einzelnen Intervalle feste, von Intervall zu Intervall steigende Grenzsteuersätze s angegeben. Anders ausgedrückt wird jede Tarifstufe ein fester, von Stufe zu Stufe steigender Steuersatz bestimmt, der aber nun im Gegensatz zum Stufendurchschnittstarif nur für die auf die jeweilige Tarifstufe entfallende Teilmenge der Bemessungsgrundlage gilt. Das heißt, es werden beispielsweise die ersten 1 000 Euro zu 10 % versteuert, die darüber hinausgehenden 1 000 Euro zu 15 %, und so weiter. Dieser Tarif wird auch Teilmengenstaffelung oder Anstoßtarif genannt. Der große Vorteil liegt nun darin, dass sowohl die Tariffunktion als auch die Durchschnittsteuersatzfunktion keine Sprünge aufweisen, sondern stetig sind, siehe Abbildungen 15, 16 und 17. Die beiden wichtigen Größen

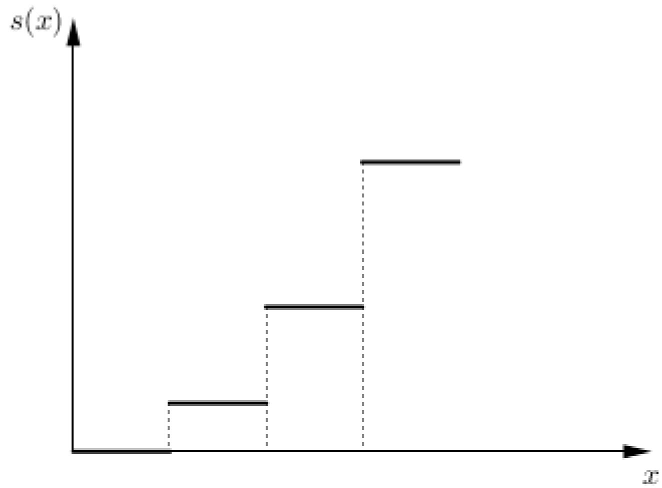


Abbildung 15: Grenzsteuersätze beim Stufengrenzsatztarif

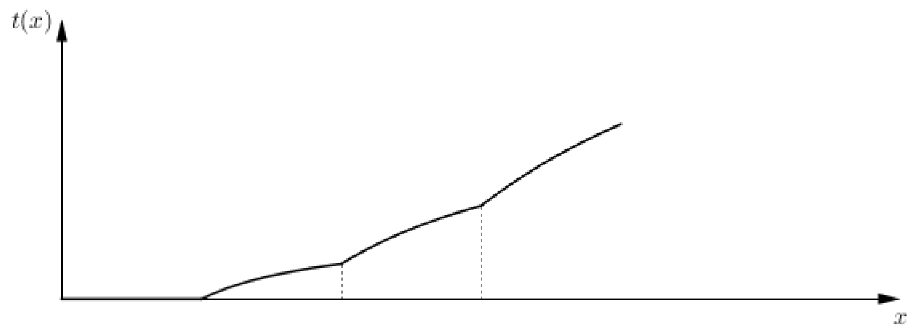


Abbildung 16: Durchschnittssteuersatz bei Stufengrenzsatztarif

Steuerbetrag und Durchschnittssteuersatz sind ab der Freibetragsgrenze niemals fallend oder konstant, sondern immer streng monoton steigend (vgl. HOMBURG, 2005, S.87f.).

Beispiel 3
Zur Berechnung der Einkommensteuer im Land Z wird folgender Stufengrenzsatztarif angewandt:

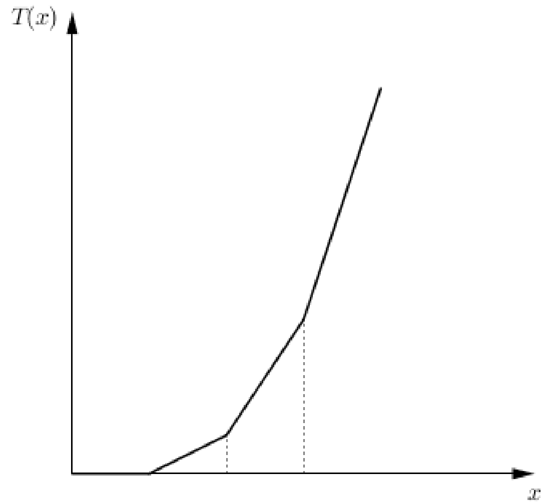


Abbildung 17: Steuerbetrag bei Stufengrenzsatztarif

Einkommen	Grenzsteuersatz
$x \leq 10000$	0
$10000 < x \leq 30000$	0,2
$30000 < x \leq 50000$	0,3
$50000 < x$	0,45

Die Berechnung der Steuerbeträge und der Durchschnittssteuersätze für verschiedene Einkommen ist hier nun nicht ganz so simpel wie bei den ersten beiden Stufentarifen. Hat man ein Einkommen von weniger als 10000 Euro, so sind keine Steuern zu zahlen. Liegt das Einkommen im zweiten Intervall, sind 10000 Euro steuerfrei und derjenige Teil des Einkommens, der über 10000 Euro hinausgeht, mit 20 Prozent zu versteuern. Eine Person mit einem jährlichen Einkommen von 24500 Euro zahlt demnach $T(24500) = (24500 - 10000) \cdot 0,2 = 14500 \cdot 0,2 = 2900$ Euro an Steuern und nach Abzug der Steuern bleiben 21600 Euro. Der durchschnittliche Steuersatz lässt sich nun wieder einfach berechnen, nämlich $t(24500) = \frac{2900}{24500} \approx 0,1184$, also rund 11,8 Prozent. Für ein Einkommen aus der nächsten Stufe, beispielsweise 44000 Euro, bleiben wieder 10000 Euro steuerfrei, die nächsten 20000 Euro werden zu 20 Prozent versteuert, und alles was darüber hinaus geht zu 30 Prozent. Der Steuerbetrag ist also $T(44000) = (44000 - 30000) \cdot 0,3 + 20000 \cdot 0,2 = 8200$ Euro, was ein Resteinkommen von 35800 Euro und einen Durchschnittsteuersatz von $t(44000) = \frac{8200}{44000} \approx 0,1864$, also rund 18,6 Prozent, bedeutet. Bei einem Einkommen der höchsten Stufe, beispielsweise 78000 Euro, ist ein Steuerbetrag von $T(78000) = (78000 - 50000) \cdot 0,45 + 20000 \cdot 0,3 + 20000 \cdot 0,2 = 22600$ Euro bei einem Durchschnittsteuersatz von $t(78000) = \frac{22600}{78000} \approx 0,2897$, also rund 29 Prozent, zu bezahlen. Diesem Steuerzahler bleiben 55400 Euro.

Dieser Tarif wird wegen seiner vermeintlich höheren „Gerechtigkeit" in den meisten europäischen Ländern angewandt, so auch in Österreich. Aufgrund der Aktualität wird im Folgenden nun näher auf die Steuerreform 2016, genauer auf die Veränderungen hinsichtlich der Einkommensteuer, eingegangen.

Einkommensstufen	Grenzsteuersätze
bis 11000	keine Steuer
ab 11000 bis 25000	36,500 %
ab 25000 bis 60000	43,214 %
ab 60000	50,000 %

Tabelle 12: Einkommensteuertarif seit 01.01.2009

5.3 Der österreichische Einkommensteuertarif

Wie eben erwähnt ist der in Österreich angewandte Einkommensteuertarif ein Stufengrenzsatztarif. Alle paar Jahre wird dieser einer Reform unterzogen, um ihn so an veränderte Verhältnisse, vor allem an die Inflation, anzupassen. Zurzeit gilt noch jener Tarif, der bei der letzten Steuerreform im Jahr 2009 beschlossen wurde. Doch schon mit 2016 ändert sich dieser. Dies bietet eine hervorragende Möglichkeit, dieses Thema im Mathematikunterricht aufzugreifen und die Veränderungen durch die Steuerreform aus mathematischer Sicht zu behandeln.

Im Folgenden wird unter „Einkommen” immer das „zu versteuernde Einkommen” verstanden.

Der bisher geltende Tarif sieht wie in Tabelle 12 beschrieben aus[27].

In diesem Tarif ist also ein Freibetrag von 11 000 Euro festgelegt, danach folgen drei Einkommensstufen mit Grenzsteuersätzen zwischen 36,5 und 50 Prozent. Zur besseren mathematischen Handhabung bezeichne $i = 1, .., 4$ die Rangordnung der Einkommensstufen, T_i' den auf einer Stufe geltenden Grenzsteuersatz, U_i die Untergrenze, ab der ein neuer Grenzsteuersatz gilt, und T_i die zu zahlende Einkommensteuer für ein Einkommen aus der i-ten Stufe.

Zuerst interessiert man sich für die Steuerbetragsfunktion dieses Tarifs. Wie im obigen einfachen Beispiels schon angedeutet wurde, ist

$$T_i(x) = (x - U_i) \cdot T_i' + \sum_{j=1}^{i-1} (U_{j+1} - U_j) \cdot T_j'$$

der Steuerbetrag für ein beliebiges Einkommen x (vgl. Homburg, 2005, S.89).

In Worten heißt das, die letzte überschrittene Untergrenze wird vom Einkommen abgezogen und das Ergebnis mit dem entsprechenden Grenzsteuersatz für das Einkommen multipliziert. Für das darunterliegende Einkommen muss nur noch die Spannweite einer jeden Einkommensstufe mit dem zugehörigen Grenzsteuersatz multipliziert werden und die Ergebnisse addiert (vgl. Homburg, 2005, S.89). Um die Funktion vereinfacht darzustellen, kann sie als stückweise definierte Funktion betrachtet werden:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 11000 \\ (x - 11000) \cdot 0,365 & 11000 < x \leq 25000 \\ (x - 25000) \cdot 0,43214 + 5110 & 25000 < x \leq 60000 \\ (x - 60000) \cdot 0,5 + 20235 & 60000 < x \end{cases}$$

[27] vgl. Bundesministerium für Finanzen
https://www.bmf.gv.at/steuern/selbststaendige-unternehmer/einkommensteuer/est-steuertarif.html
Stand: 22.09.2015

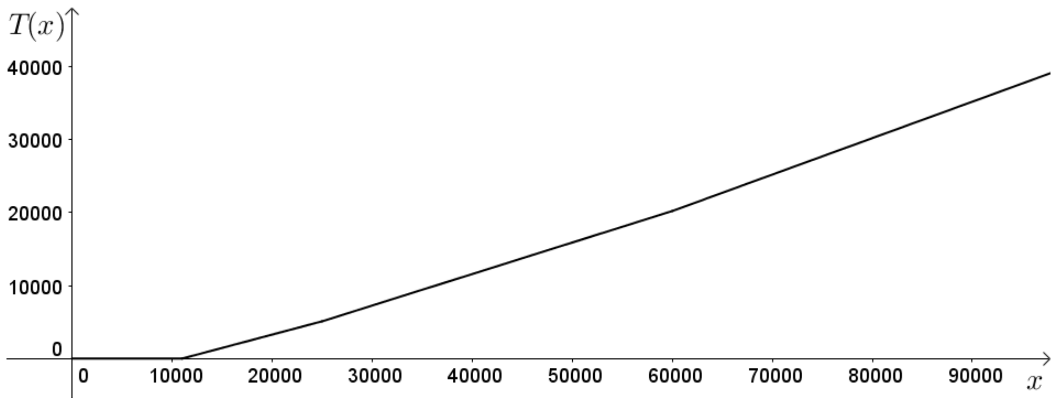


Abbildung 18: Steuerbetragsfunktion 2009

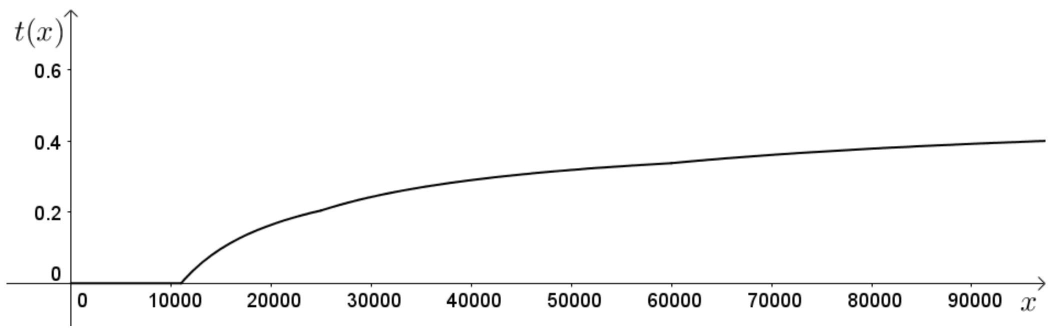


Abbildung 19: Durchschnittsteuersatzfunktion 2009

Graphisch veranschaulicht ist die Steuerbetragsfunktion in Abbildung 18. Da die Funktion stetig ist, spielt es keine Rolle, ob die Untergrenzen der kleineren oder der nächstgrößeren Einkommensstufe zugeordnet werden. Eine Frage, die man sich als Steuerzahler außerdem immer stellt, ist, wie viel Prozent des Einkommens als Steuer abgeführt werden. Hier ist also der Durchschnittsteuersatz t gesucht. Nach Definition $t(x) = \frac{T(x)}{x}$ ergibt sich dafür

$$t(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 11000 \\ 0,365 - \frac{4015}{x} & 11000 < x \leq 25000 \\ 0,43214 - \frac{5693,5}{x} & 25000 < x \leq 60000 \\ 0,5 - \frac{9765}{x} & 60000 < x \end{cases}.$$

Abbildung 19 zeigt den zugehörigen Graphen. Wie schon anhand der Formel ersichtlich war oder sonst spätestens am Graphen erkannt werden kann, steigt der Durchschnittsteuersatz nicht beliebig hoch an, sondern konvergiert gegen einen bestimmten Wert. Dieser lässt sich einfach berechnen, indem der Limes für $x \to \infty$ der Funktion für die höchste Tarifstufe gebildet wird, also $\lim\limits_{x\to\infty} t(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(0,5 - \frac{9765}{x}) = 0,5 - 0 = 0,5$. Kein Einkommen, sei es noch so hoch, wird also durchschnittlich mit einem höheren Steuersatz als 0,5 versteuert. Außerdem wird gut ersichtlich, dass es sich hierbei um eine verzögerte Progression handelt. Das bedeutet, dass der Durchschnittsteuersatz zwar steigt, was klar ist, da es sich um einen progressiven Tarif handelt, jedoch nimmt die Steigung mit zunehmendem Einkommen ab.

Einkommensstufen	Grenzsteuersätze
bis 11000	0
ab 11000 bis 18000	0,25
ab 18000 bis 31000	0,35
ab 31000 bis 60000	0,42
ab 60000 bis 90000	0,48
ab 90000 bis 1000000	0,5
ab 1000000	0,55 (befristet)

Tabelle 13: Einkommensteuertarif ab 01.01.2016

Es gilt also $\frac{dt}{dx} > 0$, aber $\frac{d^2t}{dx^2} < 0$. Das kann einfach nachgerechnet werden:

$$\frac{dt}{dx} = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 11000 \\ \frac{4015}{x^2} & 11000 < x \leq 25000 \\ \frac{5693{,}5}{x^2} & 25000 < x \leq 60000 \\ \frac{9765}{x^2} & 60000 < x \end{cases} \implies \frac{dt}{dx} \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 1000 \\ -\frac{8030}{x^3} & 11000 < x \leq 25000 \\ -\frac{11387}{x^3} & 25000 < x \leq 60000 \\ -\frac{19530}{x^3} & 60000 < x \end{cases} \implies \frac{d^2t}{dx^2} \leq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Für beide gilt, dass sie nur bezüglich der ersten Einkommensstufe gleich null sind, ab dann gilt jedoch immer ein echtes größer beziehungsweise kleiner. Die Durchschnittsteuersätze steigen also zu Beginn stärker an als gegen Ende. Das kann so interpretiert werden, dass die Progression „Kleinverdiener” stärker trifft als „Großverdiener”.

Was ändert sich nun mit der neu beschlossenen Steuerreform?

Der ab 2016 geltende Tarif sieht wie in Tabelle 13 dargestellt aus[28].

Wie bereits in der Tabelle angedeutet, beinhaltet dieser Tarif einen Zusatz, nachdem Einkommensteile über eine Million Euro zeitlich beschränkt, in den Jahren 2016 bis 2020, zu 55 Prozent versteuert werden. Danach soll diese Stufe wegfallen und der Spitzensteuersatz wieder bei 0,5 liegen.

Abgesehen von dieser zeitlich befristeten Versteuerung für Einkommen über eine Million Euro ist außerdem sofort auffällig ist, dass der neue Tarif viel differenzierter ist, also mehr Abstufungen enthält, als der vorige. Unter Einbeziehung der befristeten Stufe existieren nun sieben Stufen, wo vorher bloß vier waren. Ein starker Unterschied liegt auch im Eingangssteuersatz, welcher von 36,5 auf 25 Prozent gesenkt wurde.

[28] Bundesministerium für Finanzen
https://www.bmf.gv.at/steuern/BGBLA_2015_I_118.pdf?50o8xn, S.9
Stand: 22.09.2015

Bevor auf die Unterschiede noch genauer eingegangen wird, folgt zunächst noch die mathematische Darstellung dieses Tarifs. Auch hier lassen sich nach demselben Schema wie oben Steuerbetrags- und Durchschnittssteuersatzfunktion bilden.

$$T(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 11000 \\ (x-11000)\cdot 0,25 & 11000 < x \leq 18000 \\ (x-18000)\cdot 0,35+1750 & 18000 < x \leq 31000 \\ (x-31000)\cdot 0,42+6300 & 31000 < x \leq 60000 \\ (x-60000)\cdot 0,48+18480 & 60000 < x \leq 90000 \\ (x-90000)\cdot 0,5+32880 & 90000 < x \leq 1000000 \\ (x-1000000)\cdot 0,55+487880 & 1000000 < x \end{cases}$$

$$t(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 11000 \\ 0,25-\frac{2750}{x} & 11000 < x \leq 18000 \\ 0,35-\frac{4550}{x} & 18000 < x \leq 31000 \\ 0,42-\frac{6720}{x} & 31000 < x \leq 60000 \\ 0,48-\frac{10320}{x} & 60000 < x \leq 90000 \\ 0,5-\frac{12120}{x} & 90000 < x \leq 1000000 \\ 0,55-\frac{62120}{x} & 1000000 < x \end{cases}$$

Prinzipiell hat dieser Tarif natürlich dieselben Eigenschaften wie der vorige und auch die Graphen sind sehr ähnlich, weshalb sie hier ausgespart werden. Es wurde ja schließlich kein völlig neues Steuermodell entworfen, sondern bloß das alte etwas verändert. Jedoch ergeben sich bei genauer Betrachtung doch deutliche Unterschiede. So musste eine Person mit einem jährlichen Einkommen von beispielsweise 13000 Euro bisher 730 Euro Steuern zahlen, in Zukunft aber nur noch 500 Euro. Für ein Einkommen von 24000 Euro mussten bisher 4745 Euro an Steuern bezahlt werden werden, ab 2016 nur noch 3850 Euro. Ebenso sinkt der Steuerbetrag für ein Einkommen von 32000 Euro von 8134,98 Euro auf 6720 Euro. Verdient man jedoch über 1000000, also beispielsweise 1200000 Euro, so mussten dafür bisher 590235 Euro an Steuern bezahlt werden, was sich ab 2016 auf 597880 Euro erhöht. Der Spitzensteuersatz, also der höchste durchschnittliche Steuersatz der erreicht werden kann, liegt nun bei 55 Prozent. Anhand der eben errechneten einzelnen Werte wird schon sehr klar, dass der zu zahlende Steuerbetrag im Allgemeinen, bis auf die höchste Stufe, kleiner geworden ist. Doch für wen ist die Ersparnis am größten und für wen am geringsten?

Dazu werden nun die einzelnen Einkommensstufen, die sich aus dem alten und dem neuen Tarif ergeben, genauer betrachtet und mithilfe des Durchschnittsteuersatzes verglichen. Dabei sei t_1 der Durchschnittsteuersatz nach altem Tarif und t_2 der Durchschnittsteuersatz nach neuem Tarif.

Da sich der Freibetrag nicht geändert hat, bleibt auf der ersten Stufe, nämlich bis zu einem jährlichen Einkommen von 11000 Euro, alles unverändert mit $t_1 = t_2 = 0$, weshalb diese Stufe im Weiteren vernachlässigt wird. Für die anderen Stufen gelten die in Tabelle 14 beschriebenen Durchschnittsätze.

jährliches Einkommen	t_1	t_2
$11000 - 18000$	$0,365 - \frac{4015}{x}$	$0,25 - \frac{2750}{x}$
$18000 - 25000$	$0,365 - \frac{4015}{x}$	$0,35 - \frac{4550}{x}$
$25000 - 31000$	$0,43214 - \frac{5693{,}5}{x}$	$0,35 - \frac{4550}{x}$
$31000 - 60000$	$0,43214 - \frac{5693{,}5}{x}$	$0,42 - \frac{6720}{x}$
$60000 - 90000$	$0,5 - \frac{9765}{x}$	$0,48 - \frac{10320}{x}$
$90000 - 1000000$		$0,5 - \frac{12120}{x}$
ab 1000000		$0,55 - \frac{62120}{x}$

Tabelle 14: Durchschnittsätze nach altem und neuem Tarif

In Abbildung 20 sind diese bis zu einem Einkommen von 100000 Euro veranschaulicht. Bereits hier lässt sich erkennen, dass sie an manchen Stellen weiter auseinanderklaffen als an anderen. Um sie noch besser miteinander vergleichen zu können, bildet man das Verhältnis der beiden, also $t_1 : t_2$, was in Abbildung 21 zu sehen ist.

Jetzt können genauere Aussagen über tatsächliche Verbesserungen für einzelne Einkommensstufen gemacht werden. So sieht man deutlich, dass die erste Einkommensstufe, also von 11000 bis 18000 Euro, von der Tarifsenkung sehr stark profitiert, wohingegen in der nächsten Stufe, also von 18000 bis 25000 Euro, das Verhältnis rapide ansteigt. Diese Einkommensklasse, vor allem jene, an deren oberen Ende, spürt im Vergleich dazu viel weniger von der Steuersenkung. Danach fällt die Kurve wieder ganz leicht, das heißt, diese Stufe wird wieder etwas mehr entlastet. Danach steigt das Verhältnis langsam an. Aufgrund der zeitlich befristeten Steuer für Einkommen über eine Million Euro, übersteigt es an dieser Stelle sogar eins und für Personen dieser Einkommensklasse ergibt sich eine Steuererhöhung.

Noch erwähnenswert ist hier vielleicht, dass, so gewinnbringend diese Reform damit auch scheint, es durchaus auch Änderungen gibt, die sich negativ auswirken. So wurde beispielsweise die Kapitalertragsteuer für Erträge aus Aktien oder GmbH-Anteilen von 25 % auf 27,5 % angehoben oder auch eine neue Umsatzsteuer von 13 % eingeführt, welche zukünftig beispielsweise für Eintrittskarten für kulturelle Veranstaltungen oder Nächtigungen in Hotels oder Ähnlichem gilt. Bisher waren hier bloß 10 % Umsatzsteuer zu zahlen.[29]

[29] vgl. help.gv.at
https://www.help.gv.at/Portal.Node/hlpd/public/content/340/Seite.34060831.html#Tarif
Stand: 24.09.2015

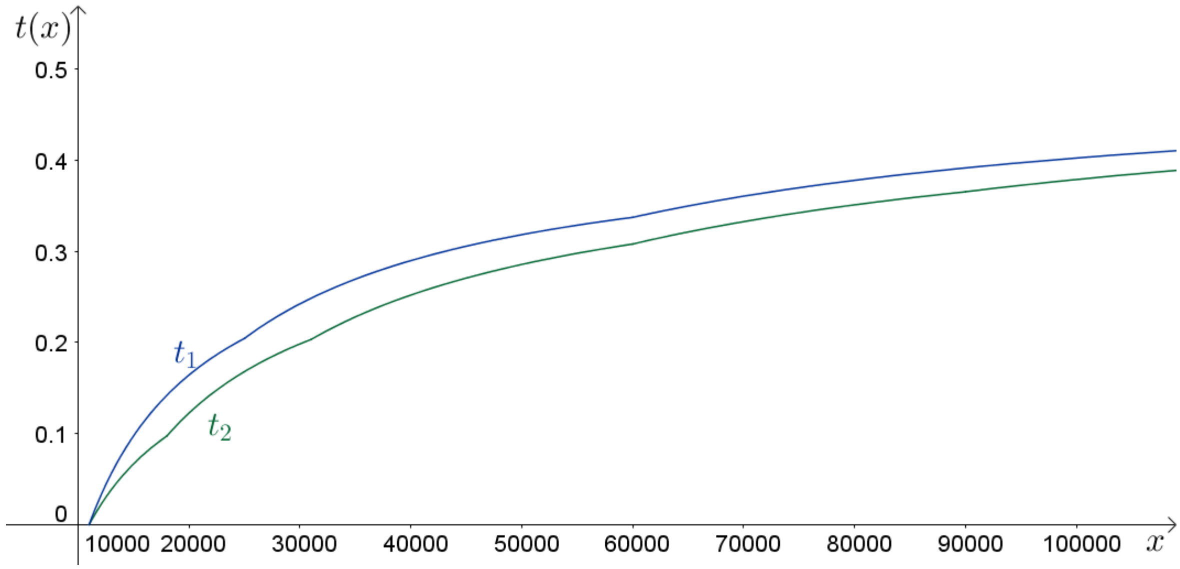


Abbildung 20: Vergleich der Durchschnittssteuersätze

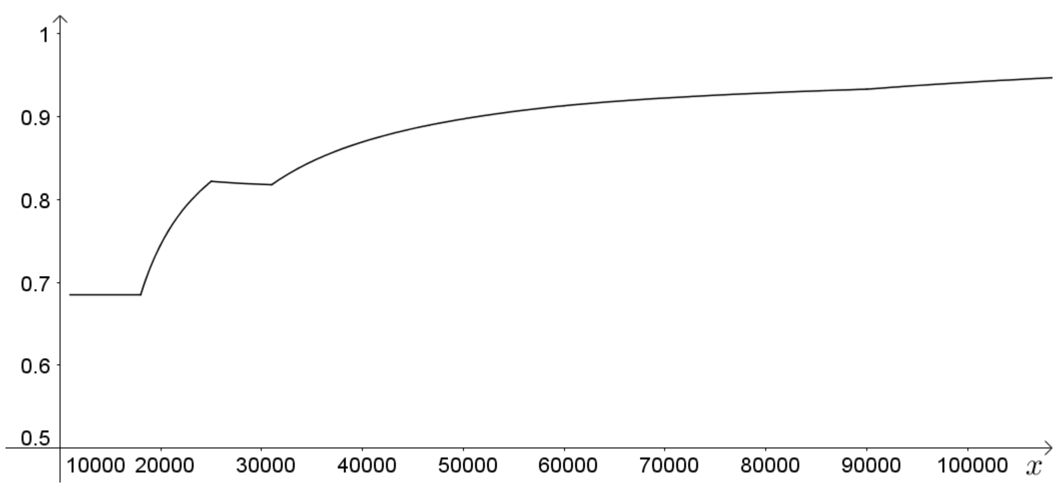


Abbildung 21: Verhältnis $t_1 : t_2$

Der mathematische Wert dieses Themas ist nun leicht erkennbar. So kann bereits in der Unterstufe unter dem Kapitel der Prozentrechnung allgemein an das Thema herangeführt werden. Eine genauere Bearbeitung kann natürlich erst in der Oberstufe erfolgen. Hier bietet sich eine Behandlung von Steuertarifen in erster Linie für den Bereich der Funktionen an. Wie zu sehen war, können sie aber auch im Zuge der Differentialrechnung noch einmal aufgegriffen und genauer untersucht werden.

Politisch bildend ist das Thema in zweierlei Hinsicht.

Erstens wird damit Wissen vermittelt. SchülerInnen lernen Begriffe, die in der Diskussion rund um das Steuersystem immer wieder auftauchen wie beispielsweise Flat tax, Progression oder Grenzsteuersatz, und deren Bedeutung kennen. Nur so können politische Entscheidungen rund um das Steuersystem verstanden und beurteilt werden.

Der zweite und ebenso wichtige Beitrag dieses Themas für die politische Bildung liegt in der Frage nach Gerechtigkeit. Was bedeutet Gerechtigkeit? Was muss ein Steuermodell leisten, um gerecht zu sein? Ein Grundsatz, der sich im Laufe der Geschichte in diesem Zusammenhang gebildet hat, ist die schon früher erwähnte Besteuerung nach der wirtschaftlichen Leistungsfähigkeit. Dieser lässt jedoch noch viele Möglichkeiten, wie das Steuermodell auszusehen hat, zu. Davon ausgehend haben sich zwei weitere Prinzipien entwickelt, nämlich das Prinzip der horizontalen und das Prinzip der vertikalen Steuergerechtigkeit. Die horizontale Gerechtigkeit besagt, dass Steuerpflichtige bei gleicher Leistungsfähigkeit gleich besteuert werden sollen. Das würde auch miteinschließen, dass alle gleich hoch besteuert werden. Nach dem Prinzip der vertikalen Steuergerechtigkeit sind Steuerpflichtige mit unterschiedlicher Leistungsfähigkeit unterschiedlich hoch zu besteuern. Damit ist nichts über die Besteuerung bei gleicher Leistungsfähigkeit ausgesagt. Aus dem zweiten Prinzip folgt aber nicht, dass ein progressiver Tarif der „gerechtere" ist. Denn auch beim proportionalen Tarif, also der flat tax, zahlen jene mit höherem Einkommen mehr, jedoch nur absolut und nicht relativ (vgl. SUTTMANN, 2007, S.42ff.). Solche Fragen, also ob ein progressiver oder ein proportionaler Tarif „gerechter" ist, und wenn progressiv, wie stark progressiv dieser sein soll, und vor allem auch die Frage, woran Gerechtigkeit hier gemessen wird, und ähnliche können damit im Unterricht diskutiert werden.

5.4 Konkrete Unterrichtsvorschläge

Wie eben zu sehen war, bietet das Thema „Steuern" viel an mathematischen Aspekten. Dieses Thema eignet sich außerdem hervorragend für einen fächerübergreifenden Unterricht, da hier Brücken zu den Fächern „Geographie und Wirtschaftskunde" und „Geschichte und Sozialkunde" geschlagen werden können.

Im Folgenden werden vier mögliche Unterrichtseinheiten für den Mathematikunterricht vorgestellt. Da es dabei aus mathematischer Sicht vorrangig um Funktionen geht, wird hier meist die 5. Klasse AHS-Oberstufe angesprochen. Eine Unterrichtseinheit ist für den Einsatz in der 6. Klasse AHS-Oberstufe gedacht, da sie in das Themenfeld der beschreibenden Statistik fällt. Nicht ganz so intensiv, aber dennoch möglich, ist eine Bearbeitung des Themas auch in der 2. und 3. Klasse AHS-Unterstufe im Rahmen der Prozentrechnung und in der 7. Klasse AHS-Oberstufe im Rahmen der Differentialrechnung. Beispielvorschläge dafür werden im Anschluss an die konkreten Unterrichtseinheiten präsentiert.

5.4.1 Unterrichtseinheit „Allgemeine Steuertarife", 5. Klasse

- *Lehrplanbezug und Grundkompetenzen*
  Diese Stunde kann im Lehrplan der 5. Klasse AHS-Oberstufe dem Punkt „Funktionen" zugeordnet werden. Genauer wird der Unterpunkt „Beschreiben von Abhängigkeiten, die durch reelle Funktionen in einer Variablen erfassbar sind (mittels Termen, Tabellen und Graphen)" behandelt[30].
  Es werden folgende Grundkompetenzen aus dem Bereich Funktionale Abhängigkeiten trainiert:
  „FA 1.4 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können"[31]
  „FA 1.5 Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können"[32]

- *Lernvoraussetzungen/Einbettung im Unterricht*
  Die Stunde eignet sich zur Einführung in das Kapitel „Funktionen" in der 5. Klasse AHS-Oberstufe. Aus der 4. Klasse ist bereits Grundlegendes dazu bekannt, wie beispielsweise Werte aus dem Graphen ablesen oder zu einer gegebenen Wertetabelle einen Graph zeichnen.

[30] vgl. Bundesministerium für Bildung und Frauen. Lehrplan AHS-Oberstufe. S.4
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2
Stand: 08.11.2015

[31] Bundesinstitut bifie. Grundkompetenzen. S.9
https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_neuauflage_2018_2015-10-19.pdf
Stand: 08.11.2015

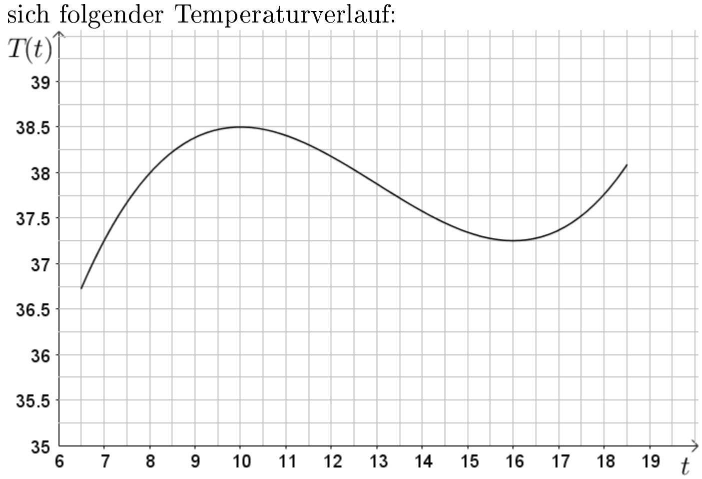
[32] ebenda

- *Stundenbild*

<table>
<tr><th>Zeit</th><th>Stundenverlauf</th><th>Materialien /Medien</th><th>Sozialform</th></tr>
<tr><td>10 min</td><td>

Wiederholung bzw. *Anknüpfen an Vorwissen* aus der 4. Klasse anhand folgenden Beispiels (L schreibt an die Tafel):

Die Körpertemperatur T (in °C) eines Menschen wird an einem Tag zu verschiedenen Uhrzeiten t (in h) gemessen. Es ergibt sich folgender Temperaturverlauf:



Lies aus dem Graphen die Temperatur zum Zeitpunkt 07.00, 08.00, 10.00, 16.00 und 18.00 Uhr ab! Erstelle eine Wertetabelle!

Lösung:

t	07	08	10	16	18
$T(t)$	37.25	38	38.5	37.25	37.75

</td><td>Tafel, Heft</td><td>L-S-Gespräch</td></tr>
</table>

20 min	Erklären neuer Begriffe (Definitionsmenge, Wertemenge, Extrema, Monotonie) mithilfe des Beispiels. SuS schreiben ins Heft: *Definitionsmenge* D_f: Die Menge der Zahlen, welche die unabhängig-veränderliche Größe x annehmen kann bzw. soll. Bsp.: $D_f = [6.5; 18.5]$ *Wertemenge* W_f : Die Menge aller Werte, welche die abhängig-veränderliche Größe y für $x \in D_f$ annimmt. Bsp.: $W_f = [36.75; 38.5]$ *Extrema*: Der größte bzw. kleinste Wert der Wertemenge heißt Maximum bzw. Minimum der Funktion. Man fasst sie unter dem Begriff Extremwerte zusammen. Bsp.: Maximum $M = 38.5$°C, Minimum $m = 36.75$°C *Monotonie*: Eine Funktion ist steigend, wenn mit zunehmenden x auch *f(x)* zunimmt. Sie ist fallend, wenn mit zunehmenden x der Funktionswert *f(x)* abnimmt. Bsp.: steigend im Intervall $[6.5; 10]$ und $[16; 18.5]$; fallend im Intervall $[10; 16]$	Tafel, Heft	L-S-Gespräch
15 min	Das AB wird von den SuS bearbeitet. L steht bei Fragen zur Verfügung.	AB	PA

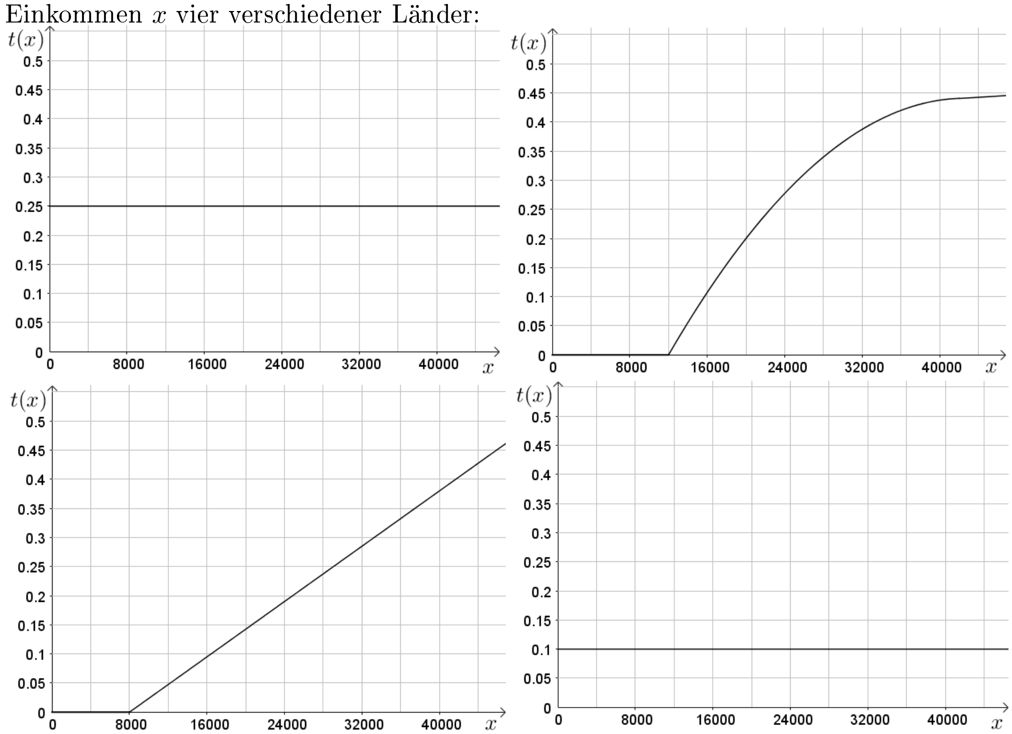
AB

Steuern

Steuertarif: Ein Steuertarif gibt für jedes Einkommen die zu bezahlende Steuerschuld an.

- proportionaler Tarif: Alle Personen bezahlen unabhängig von ihrem Einkommen den gleichen prozentualen Anteil an Steuern.
- progressiver Tarif: Mit steigendem Einkommen steigt auch der prozentuale Anteil an Steuern.

Durchschnittssteuersatz: Dies ist jener Prozentsatz, der vom gesamten zu versteuernden Einkommen als Steuer abzuführen ist.
Folgende Graphen beschreiben den Verlauf des Durchschnittssteuersatzes t für ein Einkommen x vier verschiedener Länder:

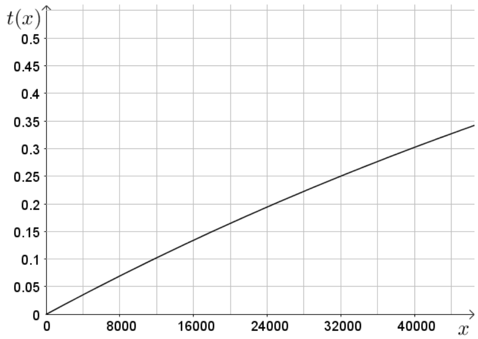


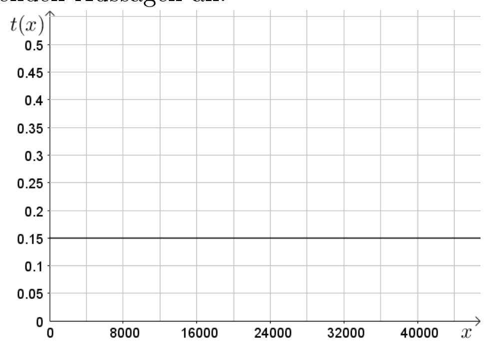
1. Lies aus den Graphen die Durchschnittssteuersätze für ein Einkommen von a) 8000 €, b) 16000 € und c) 44000 € ab.
2. Beschreibe den Verlauf des Durchschnittssteuersatzes von allen vier Ländern in Worten. Wie verändert sich die Steigung des Graphen? Deute das im Kontext.
3. Wie verändert sich der zu zahlende Steuerbetrag mit zunehmenden Einkommen in den vier Fällen? Beschreibe in Worten.

5 min	gemeinsame Kontrolle des AB (mündlich) Hausübung (AB)	AB	L-S-Gespräch

AB Hausübung

1. Folgende Graphen beschreiben den Verlauf des Durchschnittssteuersatzes zweier verschiedener Länder. Kreuze die zutreffenden Aussagen an!





	Land 1	Land 2
Für ein Einkommen von 8000 € muss weniger als 1000 € an Steuer bezahlt werden.		
Verdoppelt sich ein Einkommen, so verdoppelt sich auch der zu zahlende Steuerbetrag.		
Der Steuerbetrag wächst mit zunehmenden Einkommen.		
Für ein Einkommen von 32000 € muss ein Viertel als Steuer abgeführt werden.		
Der durchschnittliche Steuersatz wächst mit zunehmenden Einkommen.		

2. Zeichne den möglichen Verlauf eines durchschnittlichen Steuersatzes, der folgende Bedingungen erfüllt:
   Der durchschnittliche Steuersatz steigt mit zunehmendem Einkommen. Ist ein Einkommen genau doppelt so groß wie ein anderes, so verdoppelt sich auch der durchschnittliche Steuersatz.

Ziel: Die SchülerInnen sollen Werte aus Graphen von Funktionen ablesen und deren Verlauf beschreiben und interpretieren können.

5.4.2 Unterrichtseinheit „Formeltarife", 5. Klasse

- *Lehrplanbezug und Grundkompetenzen*
  Diese Stunde lässt sich im Lehrplan der 5. Klasse AHS-Oberstufe dem Punkt „Funktionen" zuordnen. Im Speziellen werden die Punkte „Beschreiben und Untersuchen von linearen und einfachen nichtlinearen Funktionen (zB a/x, a/x^2, ax^2+bx+c, abschnittweise definierte Funktionen)" und „Arbeiten mit Funktionen in anwendungsorientierten Bereichen" angesprochen[33].

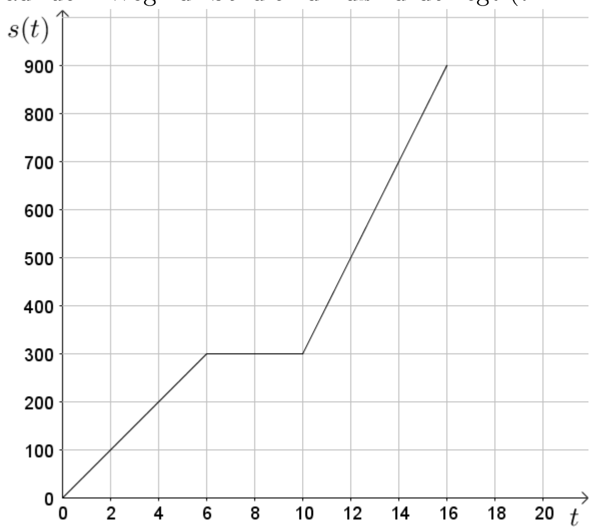
[33] vgl. Bundesministerium für Bildung und Frauen. Lehrplan AHS-Oberstufe. S.4
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2
Stand: 08.11.2015

Die Stunde dient der Vermittlung folgender Kompetenzen aus dem Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten:
„FA 1.2 Formeln als Darstellung von Funktionen interpretieren und dem Funktionstyp zuordnen können"[34]
„FA 1.4 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können"[35]

- *Lernvoraussetzungen/Einbettung im Unterricht*
  Die SchülerInnen sollen bereits über lineare und quadratische Funktionen Bescheid wissen. Diese Stunde dient zur Einführung in das Kapitel der abschnittweise definierten Funktionen.

[34]Bundesinstitut bifie. Grundkompetenzen. S.9
https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_neuauflage_2018_2015-10-19.pdf
Stand: 08.11.2015
[35]ebenda

- *Stundenbild*

<table>
<tr><td>Zeit</td><td>Stundenverlauf</td><td>Materialien /Medien</td><td>Sozialform</td></tr>
<tr><td>10 min</td><td>*Einführung stückweise definierter Funktionen:*
Bsp. (mit Beamer oder OHP an die Wand projizieren): Der untenstehende Graph beschreibt den Weg, den ein/e SchülerIn auf dem Weg zur Schule zu Fuß zurücklegt (t in min, *s(t)* in m):


gemeinsames Besprechen des Graphen (mögliche Interpretationen);
Aufstellen der Funktionsterme für die einzelnen Abschnitte:
$0 \leq t < 6 : s(t) = 50 \cdot t$
$6 \leq t < 10 : s(t) = 300$
$10 \leq t \leq 16 : s(t) = 100 \cdot t - 700$
Zusammenfassen zu einem Term:
$$s(t) = \begin{cases} 50t & 0 \leq t < 6 \\ 300 & 6 \leq t < 10 \\ 100t - 700 & 10 \leq t \leq 16 \end{cases}$$</td><td>Beamer od. OHP, Tafel, Heft</td><td>L-S-Gespräch</td></tr>
<tr><td>5 min</td><td>Bsp.: Zeichne den Graphen der Funktion $f : [-6; 4] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 4 & -6 \leq x < -2 \\ -2x & -2 \leq x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$
SuS zeichnen ins Heft.
ohne PC: Ein/e S zeichnet Lösung an die Tafel.
mit PC: L zeigt, wie abschnittweise definierte Funktionen in Geogebra gezeichnet werden können.</td><td>Heft, Tafel od. PC</td><td>EA</td></tr>
<tr><td>25 min</td><td>Das AB wird von den SuS bearbeitet, wenn möglich mithilfe von Geogebra oder einem grafikfähigen TR. L hilft bei Fragen.</td><td>AB, *PC oder TR*</td><td>PA</td></tr>
</table>

AB „Der deutsche Einkommensteuertarif"

Einkommensteuergesetz (EStG)

§ 32a Einkommensteuertarif

Die tarifliche Einkommensteuer im Veranlagungszeitraum 2015 bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §§ 32b, 32d, 34, 34a, 34b und 34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 8472 Euro (Grundfreibetrag):
   0;
2. von 8473 Euro bis 13469 Euro:
   $(997,6 \cdot y + 1400) \cdot y$;
3. von 13470 Euro bis 52881 Euro:
   $(228,74 \cdot z + 2397) \cdot z + 948,68$;
4. von 52882 Euro bis 250730 Euro:
   $0,42 \cdot x - 8261,29$;
5. von 250731 Euro an:
   $0,45 \cdot x - 15783,19$

Die Größe „y" ist ein Zehntausendstel des den Grundfreibetrag übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. Die Größe „z" ist ein Zehntausendstel des 13469 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. Die Größe „x" ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

Aufgaben:

a) Lies den Auszug aus dem Gesetzestext gut durch. Berechne die Einkommensteuer für ein Einkommen von (i) 9753 €, (ii) 31842 € und (iii) 67597 €. Stelle anschließend eine Funktion T für den Steuerbetrag auf.

b) Wie sieht der zugehörige Graph aus? Betrachte besonders die Übergänge der einzelnen Stufen. *(nur, wenn Geogebra oder ein grafikfähiger TR verwendet werden können)*

c) Wie viel Prozent des Einkommens muss bei den Einkommen aus a) als Steuer abgeführt werden? Gib eine allgemein Formel zur Berechnung des Prozentsatzes in Abhängigkeit des Steuerbetrags an. Stelle anschließend eine abschnittweise definierte Funktion t für den Prozentsatz in Abhängigkeit vom Einkommen auf!

10 min	Besprechen des AB, Hausübung *(Angabe an die Tafel schreiben):* Berechne für folgende Einkommen die zu zahlende Einkommensteuer und den zugehörigen durchschnittlichen Steuersatz! (i) 7500 €, (ii) 12800 €, (iii) 29600 €, (iv) 135800 € und (v) 370900 €	Tafel, *PC od. TR*	L-S-Gespräch
Ziel: Die SchülerInnen sollen zwischen Funktionsterm und graphischer Darstellung abschnittweiser definierter Funktionen wechseln können. Sie sollen ihr bisher erlerntes Wissen über Funktionen anwenden können und im Kontext deuten können.			

5.4.3 Unterrichtseinheiten „Der österreichische Einkommensteuertarif", 5. Klasse

Das Thema „Der österreichische Einkommensteuertarif" eignet sich besonders gut für die Bearbeitung im Rahmen eines Wochenprojekts. Der folgende Vorschlag zur Umsetzung lässt sich in drei Unterrichtseinheiten realisieren.

- *Lehrplanbezug und Grundkompetenzen*
  Diese Stunden behandeln einen Teil aus dem Bereich der „Funktionen" aus dem Lehrstoff der 5. Klasse AHS-Oberstufe, wobei besonders auf die Unterpunkte „Beschreiben und Untersuchen von linearen und einfachen nichtlinearen Funktionen (zB a/x,a/x^2, $ax^2 + bx + c$, abschnittweise definierte Funktionen)" und „Arbeiten mit Funktionen in anwendungsorientierten Bereichen" eingegangen wird[36]. Es werden vor allem die Grundkompetenzen
  „FA 1.3 Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge wechseln können"[37]
  „FA 1.4 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können"[38]
  angesprochen.
  Dieser Unterricht kann ausschließlich unter Verwendung von Computern mit Internetzugang und Geogebra (oder einem ähnlichen Programm) durchgeführt werden.

- *Lernvoraussetzungen/Einbettung im Unterricht*
  Im Vorfeld sollen lineare, quadratische und abschnittweise definierte Funktionen bereits behandelt worden sein. Diese Stunden sind als Abschluss des Kapitels „Funktionen" in der 5. Klasse AHS-Oberstufe besonders geeignet.

- *Verlauf*
  Zu Beginn wird den SchülerInnen der genaue Ablauf der folgenden drei Unterrichtseinheiten er-

[36] vgl. Bundesministerium für Bildung und Frauen. Lehrplan AHS-Oberstufe. S.4
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2
Stand: 08.11.2015
[37] Bundesinstitut bifie. Grundkompetenzen. S.9
https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_neuauflage_2018_2015-10-19.pdf
Stand: 08.11.2015
[38] ebenda

klärt:
Die ersten beiden der drei Unterrichtseinheiten dienen der Erarbeitung der wichtigsten Inhalte rund um den österreichischen Einkommensteuertarif beziehungsweise die Steuerreform 2016. Jede/r Schüler/in arbeitet selbstständig und alleine zunächst am PC (AB Internetrecherche) und dann in einer von drei Stationen, die am besten durch räumliche Abgrenzung gekennzeichnet sind. Zu beachten ist dabei bloß, dass für Station C der Zugang zu einem PC notwendig ist. Jede/r Schüler/in kann die Station, die er/sie bearbeiten möchten, frei wählen, jedoch sollen sich die SchülerInnen gleichmäßig auf alle Stationen verteilen. Hat ein/e Schüler/in diese beiden Punkte abgeschlossen, muss er/sie selbstständig jeweils eine/n Mitschüler/in der anderen Stationen finden, der/die ebenfalls fertig ist, und sich mit ihnen zu einer Dreiergruppe zusammenschließen. In einer Art Expertenrunde stellt jede/r Schüler/in ihre bearbeiteten Fragen vor und erklärt den beiden anderen SchülerInnen seine/ihre Lösungen. Falls keine gefunden wurde, kann nun gemeinsam daran gearbeitet werden. Am Ende sollen die Ergebnisse noch einmal von der Gruppe zusammengefasst werden und für eine Präsentation mit dem Titel „Die Einkommensteuerreform 2016" vor der gesamten Klasse aufbereitet werden. Damit ist diese selbstständige Arbeitsphase abgeschlossen und in etwa die dritte Unterrichtseinheit erreicht. In dieser werden zuerst im Plenum offene Fragen geklärt und abschließend präsentieren je nach verbleibender Zeit ein oder zwei Gruppen ihre Erkenntnisse.

Die dafür notwendigen Arbeitsblätter sind folgende:

AB Internetrecherche

1. Recherchiere im Internet:

- Welcher Einkommensteuertarif wird seit 2009 in Österreich angewandt? Wie ist dieser im Gesetz festgelegt?
- Welche Veränderungen treten mit der Steuerreform 2016 in Kraft?
- Erkläre folgende Begriffe: progressiver Steuersatz, Durchschnittsteuersatz, Grenzsteuersatz

2. Formuliere aus dem Gesetzestext eine mathematische Formel zur Berechnung der Einkommensteuer sowohl vor als auch nach der Steuerreform!

Station A

Was ist ein gerechter Steuertarif?

Gerechtigkeit spielt in Diskussionen rund um einen geltenden Steuertarif eine große Rolle. Im Laufe der Zeit haben sich unter anderem folgende zwei Grundsätze herausgebildet, um eine möglichst gerechte Besteuerung zu erreichen:

Belassung eines steuerfreien Existenzminimums

Besteuerung nach Leistungsfähigkeit

Inwieweit wurden diese Grundsätze beim österreichischen Steuertarif berücksichtigt? Wird ihnen durch die Reform ab 2016 mehr oder weniger entsprochen?

Stimmst du diesen Grundsätzen im Sinne der Gerechtigkeit zu? Soll diesen eher stark oder eher weniger stark nachgekommen werden?

Können diese auch bei Besteuerung durch eine flat tax eingehalten werden? (flat tax = proportionaler Tarif: Alle Personen bezahlen unabhängig von ihrem Einkommen den gleichen prozentualen Anteil an Steuern.)

Station B

Wie verteilt sich die steuerliche Belastung auf die Steuerzahler?

Vergleiche die zu zahlenden Steuerbeträge für Jahreseinkommen von (i) 12000 €, (ii) 24000 € und (iii) 48000 € (sowohl vor als auch nach der Reform) und berechne die zugehörigen Durchschnittssteuersätze. Verändern sich diese proportional zum Einkommen? Erläutere folgende Aussage anhand dieser drei Einkommen: „Die „Mittelschicht” wird sowohl gegenüber der „Unterschicht” als auch gegenüber der „Oberschicht” *überproportional* steuerlich belastet.” Hat sich diese Tatsache durch die Steuerreform verstärkt oder vermindert?

Station C (mit PC)

Stellt die Reform eine steuerliche Entlastung gleichermaßen für alle Einkommenstufen dar?

Stelle zunächst eine allgemeine Formel zur Berechnung der Durchschnittsteuersätze auf. Erstelle mithilfe von Geogebra eine Abbildung, anhand derer sich die alten und neuen Durchschnittsteuersätze gut vergleichen lassen. Wie lässt sich damit die Steuerreform für die einzelnen Einkommenstufen bewerten? Wer profitiert mehr, wer weniger? Für wen ergibt sich eine Erhöhung der Steuer? *(Hinweis: Stelle das Verhältnis $t_1 : t_2$ graphisch dar!)*

Auf rein fachlicher Ebene dienen diese Einheiten zur Festigung des Wissens rund um das Thema „Funktionen”. Der größere Wert liegt aber in der überfachlichen Dimension, die vor allem durch den stark anwendungsorientierten Kontext angesprochen wird. Die SchülerInnen haben es zu Beginn mit einem realen, gesellschaftspolitischen Problem zu tun und sollen dieses mithilfe der Mathematik beschreiben und untersuchen. Durch den Aufbau der Stunden beziehungsweise die verwendeten Sozialformen wird außerdem die Selbstständigkeit und die Selbstorganisation der SchülerInnen stark gefördert. Dabei ist aber zu bedenken, dass vor allem die erste Arbeitsphase, nämlich das Ausdrücken eines realen Problems durch die mathematische Sprache, für leistungsschwächere SchülerInnen eine große Herausforderung darstellt. Wenn nötig muss hier dann zur Partnerarbeit übergegangen werden, vorzugsweise wird einem/einer leistungsschwachen Schüler/in ein/e leistungsstarke/r Schüler/in zur Seite gestellt. Die Lehrperson fungiert dabei hauptsächlich als BeobachterIn und Anlaufstelle bei Problemen. Um eine gleichmäßige Verteilung der

SchülerInnen auf die Stationen zu erreichen, stimmt am besten die Anzahl der Arbeitsblätter pro Station mit einem Drittel der SchülerInnenanzahl überein. Da das Arbeitstempo weitgehend von den SchülerInnen selbst bestimmt wird, ist die Bereitstellung einer Zusatzaufgabe für schnelle Gruppen ratsam. Diese können beispielsweise mithilfe des Internets zusätzlich Vergleiche zu Einkommensteuertarifen anderer Länder anstellen oder Statistiken zum Jahreseinkommen der ÖsterreicherInnen suchen und mit dem Erarbeiteten in Beziehung setzen.

5.4.4 Unterrichtseinheit „ „Gerechte" Steuertarife", 6. Klasse

- *Lehrplanbezug und Grundkompetenzen*
  Im Lehrplan der 6. Klasse AHS-Oberstufe findet sich unter dem Kapitel „Stochastik" der Unterpunkt „Arbeiten mit Darstellungsformen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik", was diese Stunde zum Inhalt hat[39]. Die Stunde trägt zur Vermittlung der folgenden Grundkompetenzen aus dem Inhaltsbereich „Wahrscheinlichkeit und Statistik" bei:
  „WS 1.2 Tabellen und einfache statistische Grafiken erstellen, zwischen Darstellungsformen wechseln können"[40]
  „WS 1.3 Statistische Kennzahlen (absolute und relative Häufigkeiten; arithmetisches Mittel, Median, Modus, Quartile, Spannweite, empirische Varianz/Standardabweichung) im jeweiligen Kontext interpretieren können; die angeführten Kennzahlen für einfache Datensätze ermitteln können"[41]

- *Lernvoraussetzungen/Einbettung im Unterricht*
  Die SchülerInnen sollen die wichtigsten Kennzahlen der beschreibenden Statistik und auch grafische Darstellungsmöglichkeiten bereits kennen. In dieser Stunde steht die praktische Anwendung dieses Wissens im Vordergrund. Diese Stunde ist unter Verwendung von Computern durchzuführen.

[39] Bundesministerium für Bildung und Frauen. Lehrplan AHS-Oberstufe. S.5
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2
Stand: 08.11.2015

[40] Bundesinstitut bifie. Grundkompetenzen. S.16
https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_neuauflage_2018_2015-10-19.pdf
Stand: 08.11.2015

[41] ebenda

- *Stundenbild*

Zeit	Stundenverlauf	Materialien /Medien	Sozialform
5 min	*Erklären der Aufgabenstellung:* SuS übernehmen die Rolle des Finanzministers eines fiktiven Landes mit 100 EinwohnerInnen. Die 100 EinwohnerInnen verteilen sich auf 5 Einkommensgruppen. Am AB ist dann immer das durchschnittliche Monatseinkommen derer, die in diese Einkommensgruppe fallen, angegeben. Außerdem ist angegeben wie viele Personen in jeder Einkommensgruppe sind und wie viel diese zusammen verdienen. Als Finanzminister müssen die SuS nun eine fixe Steuersumme von 40000 Euro eintreiben. (vgl. Haferkamp/Fetchenhauer, 2007, S.50f.) Wie könnte eine gerechte Verteilung aussehen? (Excel-Mappe ausfüllen)		Frontal - unterricht
10 min	*Ausfüllen der Excel-Mappe:* (Anm.: der zu verbleibende Steuerbetrag berechnet während der Eingabe von Beträgen durch die SuS den Restbetrag auf 40000 €. In der Zelle G5 steht dazu folgende Formel: $\boxed{=40000\text{-Summe}(B5;C5;D5;E5;F5)}$)	PC (Excel)	EA

Excel-Mappe:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Einkommensstufe	1	2	3	4	5	
2	Durchschnittliches monatliches Einkommen in dieser Einkommensstufe (in €)	1100	2400	4500	8700	35200	
3	Anzahl der Personen, die in diese Einkommensstufe fallen	20	34	33	12	1	
4	Einkommenssumme aller Personen dieser Stufe pro Monat (in €)	22000	81600	148500	104400	35200	noch zu verteilender Steuerbetrag:
5	Wie viel der 40 000 Euro soll diese Einkommensstufe insgesamt beisteuern?						40000
6	Wie viel zahlt somit eine Person dieser Einkommensstufe an Steuern?						
7	Welcher durchschnittliche Steuersatz ergibt sich dadurch für eine Person dieser Stufe?						
8							

Zeit	Stundenverlauf	Materialien /Medien	Sozialform
5 min	SuS sagen der Reihe nach die von ihnen konstruierten durchschnittlichen Steuersätze an. L listet sie für jede Einkommensstufe untereinander auf und schickt diese Liste an alle PCs.	PC (Excel)	
25 min	SuS analysieren die entworfenen Steuertarife (AB).	AB, PC (Excel)	EA

<table>
<tr><td colspan="4">AB „Gerechter Steuertarif”
Arbeitsauftrag: Arbeite die von der Klasse entworfenen Steuertarife statistisch auf.
Bearbeite dazu folgende Punkte:
– Gib für die durchschnittlichen Steuersätze einer jeden Einkommensstufe Minimum, Maximum, Spannweite, Mittelwert, Median und das 1. und 3. Quartil an!
– Veranschauliche diese Kennzahlen mit einer geeigneten graphischen Darstellungsmöglichkeit deiner Wahl!
– Betrachte die Differenzen der Steuersätze für die 5. Einkommensstufe und die 1. Einkommensstufe. Berechne auch hier Minimum, Maximum und Mittelwert.
– Klassifiziere die entworfenen Tarife nach folgendem Kriterium:
(i) regressiver Steuertarif: Mit steigendem Einkommen sinkt der durchschnittliche Steuersatz.
(ii) proportionaler Tarif: Alle Personen bezahlen unabhängig von ihrem Einkommen den gleichen prozentualen Anteil an Steuern.
(iii) progressiver Tarif: Mit steigendem Einkommen steigt auch der durchschnittliche Steuersatz.
– Wie verteilen sich die Tarife auf diese drei Steuertariftypen?
– Vergleiche die Tarife mit dem österreichischen Einkommensteuertarif! Vergleiche dazu die Differenzen der durchschnittlichen Steuersätze bei einem monatlichen Einkommen von 35200 € und 1100 €.
Nach dem österreichischen Steuertarif ab 2016 liegt der Durchschnittsteuersatz für ein monatliches Einkommen von 35200 €, was ein jährliches Einkommen von 492800 € bedeutet, bei 47,54 %. Jener für ein monatliches Einkommen von 1100 €, das sind 15400 € jährlich, bei 7,14 %.</td></tr>
<tr><td>5 min</td><td>gemeinsames Besprechen der Ergebnisse des AB; Diskutieren über „Gerechtigkeit” des Steuertarifs: Warum haben sich die SuS für ihren Tarif entschieden? (wenn progressiv, wie stark und wie ist das zu rechtfertigen? oder warum nicht progressiv? muss der Steuersatz für alle gleich sein oder darf man ihn vom Einkommen abhängig machen? etc.)</td><td>-</td><td>L-S-Gespräch</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ziel: Aus mathematischer Sicht sollen die SchülerInnen statistische Kennzahlen in anwendungsorientierten Beispielen berechnen, darstellen und interpretieren können. Des Weiteren sollen sie sich mit der Frage der Gerechtigkeit im Hinblick auf Steuern kritisch auseinandersetzen.</td></tr>
</table>

5.4.5 Aufgaben für die 2. Klasse AHS-Unterstufe

Die folgenden Aufgaben sind für den Einsatz im Bereich der Prozentrechnung in der 2. Klasse AHS-Unterstufe gedacht. Es ist hier immer entweder der Grundwert G, der Prozentsatz p oder der Anteil A gesucht. Wenn nicht anders erwähnt, wird mit dem nach der Steuerreform 2016 geltenden Tarif gerechnet.

Aufgabe 1:
Sebastian verdient 21500 € pro Jahr, wobei er 2975 € an Steuern zahlen muss. Nach einer Lohnerhöhung verdient er 24000 € pro Jahr, wovon er 3850 € an Steuern zahlen muss.
a) Wie viel Prozent seines Einkommens musste er vor der Lohnerhöhung an Steuern zahlen?
b) Wie viel Prozent muss er nach der Lohnerhöhung an Steuern zahlen?

Aufgabe 2:
Herr Schmied verdient 28000 € im Jahr. Davon bleiben 11000 € unversteuert, für weitere 7000 € muss er 25 % Steuer zahlen und für die restlichen 10000 € muss er 35 % Steuer zahlen.
a) Wie viel Euro muss Herr Schmied an Steuern zahlen?
b) Wie viel Prozent vom gesamten Einkommen sind das?
c) Wie viel Euro bleibt ihm nach Abzug der Steuern übrig?

Aufgabe 3:
Frau Mahler hat ein jährliches Einkommen von 19000 €. Bisher musste sie für 11000 € davon keine Steuer zahlen und für die restlichen 8000 € musste sie 36 % an Steuern zahlen. Es wird eine Steuerreform vorgenommen. Danach bleiben weiterhin 11000 € unversteuert, jedoch sind nun 7000 € mit 25 % zu versteuern und die restlichen 1000 € mit 35 %.
a) Wie viel Euro hat Frau Mahler vor der Steuerreform an Steuern bezahlt?
b) Wie viel Euro muss Frau Mahler nach der Steuerreform an Steuern bezahlen?
c) Wie viel Euro spart Frau Mahler durch die Steuerreform?

Aufgabe 4:
Lucas Vater bezahlt für sein jährliches Einkommen 6720 € an Steuern. Das sind 21 % seines gesamten Einkommens. Wie viel verdient Lucas Vater im Jahr?

5.4.6 Aufgaben für die 3. Klasse AHS-Unterstufe

Auch diese Aufgaben sind Anwendungen der Prozentrechnung, jedoch etwas komplizierter als zuvor, weshalb sie sich besser für die 3. Klasse AHS-Unterstufe eignen.

Aufgabe 1:
Bei einem jährlichen Einkommen von 23500 € muss Herr Tanner 15,64 % an Steuern zahlen. Nach einer Lohnerhöhung um 19,2 % muss er um 3,11 Prozentpunkte mehr an Steuern zahlen.
a) Wie viel Euro musste er vor der Erhöhung an Steuern zahlen?
b) Wie viel Euro verdient er nach der Lohnerhöhung und wie viel Euro muss er dafür an Steuern zahlen?

Aufgabe 2:
Frau Gratzer verdient 42500 € pro Jahr, das ist um 19000 € mehr als ihr Mann jährlich verdient.

Die Prozentsatz für die zu zahlende Einkommensteuer ist in Abschnitte gegliedert. So muss man nach der neuen Steuerreform für Einkommensteile bis 11000 € keine Steuer zahlen, darüber hinaus gehende Einkommensteile bis 18000 € sind mit 25 % zu versteuern, alles weitere bis zu 31000 € mit 35 % und was darüber hinaus geht bis zu 60000 € mit 42 %.
a) Wie viel Euro muss Frau Gratzer an Steuern zahlen? Wie viel Herr Gratzer?
b) Um wie viel Prozent verdient Herr Gratzer weniger als seine Frau?
c) Um wie viel Prozent muss Herr Gratzer weniger an Steuern zahlen als seine Frau?

5.4.7 Aufgaben für die 7. Klasse AHS-Oberstufe

Wie eingangs erwähnt kann das Thema auch in der 7. Klasse AHS-Oberstufe aufgegriffen werden, und zwar beim Thema Differentialrechnung. Aufgaben dazu können wie folgt aussehen:
(Auch hier wird immer der ab 2016 geltende Steuertarif herangezogen.)

Aufgabe 1:
Folgende Funktion t beschreibt den in Österreich geltenden Steuertarif, wobei $t(x)$ der durchschnittliche Steuersatz bei einem Einkommen von x € ist.

$$t(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 11000 \\ 0,25 - \frac{2750}{x} & 11000 < x \leq 18000 \\ 0,35 - \frac{4550}{x} & 18000 < x \leq 31000 \\ 0,42 - \frac{6720}{x} & 31000 < x \leq 60000 \\ 0,48 - \frac{10320}{x} & 60000 < x \leq 90000 \\ 0,5 - \frac{12120}{x} & 90000 < x \leq 1000000 \\ 0,55 - \frac{62120}{x} & 1000000 < x \end{cases}$$

a) Berechne die erste und die zweite Ableitung der abschnittweise definierten Funktion!
b) Welche Aussagen über den Verlauf des Tarifs kannst du mithilfe von a) machen? Skizziere den Graphen grob.

Aufgabe 2:
Folgende Funktion T gibt den zu zahlenden Steuerbetrag $T(x)$ bei einem Einkommen von x € wieder:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq 11000 \\ (x - 11000) \cdot 0,25 & 11000 < x \leq 18000 \\ (x - 18000) \cdot 0,35 + 1750 & 18000 < x \leq 31000 \\ (x - 31000) \cdot 0,42 + 6300 & 31000 < x \leq 60000 \\ (x - 60000) \cdot 0,48 + 18480 & 60000 < x \leq 90000 \\ (x - 90000) \cdot 0,5 + 32880 & 90000 < x \leq 1000000 \\ (x - 1000000) \cdot 0,55 + 487880 & 1000000 < x \end{cases}$$

Der Grenzsteuersatz ist definiert als die erste Ableitung dieser Funktion. Gib die abschnittweise definierte Funktion für den Grenzsteuersatz an und interpretiere diesen Wert für eine Stelle x_1!

6 Statistik

„Trauen Sie keiner Statistik, die Sie nicht selbst gefälscht haben."
(Kütting/Sauer, 2011, S.1)

„Mit Zahlen kann man alles, und daher nichts beweisen."
(ebenda)

„Statistik ist die Kunst, mit richtigen Zahlen etwas Falsches zu beweisen."
(ebenda)

Im Rahmen politischer Untersuchungen spielen statistische Methoden eine bedeutende Rolle. Sie werden als Hilfsmittel in vielfacher Weise eingesetzt, sei es beispielsweise bei Wahlhochrechnungen, zur Erfassung der Einstellung der Bevölkerung bezüglich eines bestimmten Themas oder aber um geplante Maßnahmen mit Zahlen zu begründen. In vielen Fällen ist dies aber kritisch zu betrachten, da genau hier die Möglichkeit zur Manipulation gegeben ist. Dass die Statistik deshalb auch einen eher schlechten Ruf genießt, zeigen die oben angeführten Zitate.

Was hat die Behandlung des Themas „Statistik" im Mathematikunterricht nun aber konkret mit politischer Bildung zu tun?

Betrachtet man noch einmal die zu Beginn der Arbeit formulierten Kompetenzbereiche der politischen Bildung, so wird schnell klar, dass die Statistik einen wertvollen Beitrag zur Vermittlung der politischen Methodenkompetenz liefert. Wie eingangs schon definiert umfasst diese einerseits einen kritischen Umgang mit fertigen Manifestationen des Politischen. Krammer (2010, S.29f.) sagt hier weiter, dass dies nur durch eine kritische Analyse und Beurteilung der Erhebung von Daten und eine kritische Prüfung der medial vermittelten politischen Informationen und Kommentare möglich ist. Genauer nennt er unter anderem die Fähigkeiten,

- die Abhängigkeit der Ergebnisse von der Art der Datenerhebung wahrzunehmen,
- mögliche sachliche Aussagen, die aus der Analyse ableitbar sind, zu erfassen,
- zu erkennen, dass Daten vor dem Hintergrund unterschiedlicher politischer Vorstellungen auch verschieden verwendet werden können,
- Kommunikationsstrategien und -ziele des Urhebers der politischen Manifestation aufzudecken,
- zwischen sachlichen und bewertenden Elementen bei der medialen Präsentation von Daten unterscheiden zu können und
- unzulässige Vereinfachungen der möglichen Aussagen, wie etwa falsche oder fehlende Kontexte, zu erkennen.

Auf der anderen Seite geht es aber auch um den Aufbau eigener Manifestationen, wofür unter anderem Methoden der Informationsgewinnung erlernt und Darstellungsformen eigener Ergebnisse eingeübt werden müssen. Konkret versteht Krammer (2010, S.30f.) darunter beispielsweise

- die selbstständige Planung, Durchführung und Präsentation eigener Studien,
- die Anwendung verschiedener Methoden der politischen Informations- und Datengewinnung und Wissen um deren Vor- und Nachteile und
- die Wahrnehmung der Beeinflussbarkeit der Wirkung der Ergebnisse auf die Adressaten durch die Art der Präsentation und Darstellung.

Die zentrale Rolle der Statistik bei der Entwicklung politischer Methodenkompetenz ist damit wohl offensichtlich.

Statistik kann definiert werden als die methodische Auswertung von Daten, insbesondere

- deren Erhebung und Bereinigung,
- deren grafische Darstellung,
- deren Charakterisieren durch Kennzahlen,
- das Schätzen unbekannter Parameter,
- das Testen von Hypothesen,
- die Prognose künftiger Entwicklungen.

Dabei zählen die ersten drei Aufgaben zur beschreibenden Statistik und die letzten drei hauptsächlich zur beurteilenden Statistik (vgl. Mosler, 2009, S.5f.).
Nach Henze (2013, S.20) muss diese Einteilung in beschreibende und beurteilende Statistik jedoch mit Vorsicht genossen werden, da so der Eindruck entsteht, die beschreibende Statistik wäre frei von Beurteilungen. Natürlich liegen die Hauptaufgaben im Beschreiben und Darstellen, jedoch haben sie, auch im politischen Kontext, häufig eine Beeinflussung als Ziel. Im Folgenden wird genau darauf, also auf die Möglichkeiten der Manipulation mithilfe der beschreibenden Statistik, näher eingegangen.

6.1 Grundbegriffe der beschreibenden Statistik

Im Rahmen statistischer Untersuchungen wird an einer geeignet gewählten *Grundgesamtheit* der Wert eines oder mehrerer *Merkmale*, oder auch *Variablen* genannt, – meist auszugsweise (siehe unten) – festgestellt.
Die Grundgesamtheit, auch als Population bezeichnet, ist die Gesamtheit der Einheiten, über die eine Untersuchung etwas aussagen soll. Diese kann somit endlich oder auch unendlich groß sein. Eine solche Einheit wird *Merkmalsträger* genannt. Ein Merkmal ist eine zu untersuchende Größe und diejenigen Werte, die von Merkmalen angenommen werden können, nennt man *Merkmalsausprägungen*. Mit der folgenden Tabelle wird der Zusammenhang an einfachen Beispielen illustriert:

Grundgesamtheit	Merkmalsträger	Merkmale	Merkmalsausprägungen
Neugeborene	1 Neugeborenes	Größe (in cm)	..., 49, 49,5, 50, 50,5, 51, ...
SchülerInnen	1 Schülerin/Schüler	Geschlecht	weiblich, männlich
StudentInnen	1 Studentin/Student	Erwerbstätigkeit	keine, geringfügige, Teilzeit, Vollzeit

Ein weiterer wichtiger Begriff ist der der *Stichprobe*. Dies ist eine zufällig gewonnene endliche Teilmenge aus der Grundgesamtheit, die, bei einer Größe von n Elementen, *Stichprobe vom Umfang n* genannt wird, und anhand derer schließlich auf die Grundgesamtheit geschlossen wird.
Man könnte somit die Stichprobe als Menge aller untersuchten Merkmalsträger und die Grundgesamtheit als Menge aller potentiellen Merkmalsträger beschreiben.

Ein Merkmal beziehungsweise die Merkmalsausprägung wird anhand einer Skala gemessen, die unterschiedliche mathematische Qualitäten aufweisen kann. Die mathematische Verarbeitung der gewonnenen Daten erfolgt in unterschiedlicher Weise, je nachdem wie das Merkmal skaliert ist. Das wird rasch anhand eines einfachen Beispiels klar. Bei einer Umfrage von Marktforschungsinstituten wird oft nach der Muttersprache, der höchsten abgeschlossenen Schulbildung und nach dem Alter gefragt.
Das Merkmal „Muttersprache" hat die Ausprägungen „Deutsch", „Englisch", „Türkisch" und so weiter. Um die Daten auszuwerten, kann gezählt werden, wie oft welche Ausprägung vorkommt, jedoch lassen sich diese nicht sinnvoll mathematisch vergleichen oder in Beziehung setzten. Die Merkmalsausprägungen sind nur *qualitativ* verschieden, weshalb man von einem *qualitativen* oder auch *nominal skalierten Merkmal* spricht. Gemessen werden dieser an einer Nominalskala. In der obigen Tabelle wäre somit „Geschlecht" ein nominal skaliertes Merkmal. Weitere Beispiele sind Studienfach, Familienstand oder Religionszugehörigkeit.
Beim Merkmal „höchste abgeschlossene Schulbildung" finden sich Ausprägungen wie „kein Schulabschluss", „Allgemeinbildende Pflichtschule", „Lehre" und so weiter. Auch diese können nicht mathematisch sinnvoll miteinander verknüpft werden, jedoch lassen sie sich in Beziehung zueinander setzen und weisen eine natürliche Rangfolge auf. Die Merkmalsausprägungen lassen sich angemessen ordnen, weshalb diese Merkmale *ordinal skalierte Merkmale* genannt werden und mittels Ordinalskala gemessen werden. Bezogen auf obige Tabelle wäre also „Erwerbstätigkeit" ein ordinal skaliertes Merkmal, genauso wie beispielsweise Schulnoten oder der Schwierigkeitsgrad einer Klettertour.
Beim dritten angeführten Merkmal, dem Alter, ist schnell ersichtlich, dass mit den Merkmalsausprägungen sinnvoll mathematisch gerechnet werden kann. Sie lassen sich sowohl in eine Ordnung bringen,

also auch miteinander verknüpfen. Differenzen und Summen ergeben hier einen Sinn, da die Ausprägungen immer konkrete Zahlen sind. Solche Merkmale werden *quantitative* oder *metrisch skalierte Merkmale* genannt. Das Merkmal „Größe" aus der obigen Tabelle kann dieser Art zugeordnet werden. Diese können nun noch einmal unterschieden werden, und zwar in *intervallskalierte* und *proportionalskalierte Merkmale*, die anhand einer Intervallskala beziehungsweise einer Verhältnisskala gemessen werden. Der Unterschied dabei ist, dass bei intervallskalierten Merkmalen zwar Differenzen einen Sinn haben, das heißt Abstände zwischen zwei Merkmalsausprägungen miteinander verglichen werden können, jedoch lassen sich die Merkmalsausprägungen selbst nicht vergleichen. Ein typisches Beispiel dafür ist die Temperatur in °C. Hier können Aussagen wie „um 5 °C wärmer" durchaus getätigt werden, nicht aber „20°C ist doppelt so warm wie 10°C". Der Grund dafür ist, dass kein absoluter Nullpunkt existiert. Wohingegen dies bei proportionalskalierte Merkmale schon möglich ist, da es hier einen absoluten Nullpunkt gibt. Beispiele dafür wären das Alter oder das Gewicht (vgl. Büchter/Henn, 2005, S.15ff.).

Schon mit diesen auf den ersten Blick so klaren und vermeintlich eindeutigen Grundbegriffen muss sorgfältig umgegangen werden.

Das ist bereits am Beispiel der Grundgesamtheit schnell zu sehen. Die Grundgesamtheit wurde oben definiert als die Gesamtheit aller Einheiten, über die eine Untersuchung etwas aussagen soll. Eine eindeutige Festlegung der Grundgesamtheit ist klarerweise notwendig, doch nicht immer so einfach (vgl. Henze, 2001, S.22).
Anhand der Arbeitslosenstatistik kann dies leicht nachvollzogen werden. Die Arbeitslosigkeit spielt im politischen Geschehen und hier vor allem im politischen Wahlkampf eine große Rolle. Immer wieder werden neue Statistiken präsentiert und internationale Vergleiche angestellt, aufgrund derer politische Entscheidungen getroffen werden. Doch genau diese Vergleiche müssen mit Vorsicht genossen werden, denn oftmals basieren sie auf unterschiedlichen Grundgesamtheiten. So findet man beispielsweise auf der Seite der Statistik Austria folgende zwei Aussagen:

- „Im Jahr 2014 waren laut AMS rund 319.400 Personen von Arbeitslosigkeit betroffen [...]. Die Arbeitslosenquote betrug 8,4 % [...]."[42]
- „Durch eine weitere Zunahme von 13.600 Arbeitslosen erreichte die Arbeitslosenzahl mit 244.900 im Jahr 2014 einen neuen Höchstwert."[43] „Im Jahresdurchschnitt 2014 lag die Arbeitslosenquote bei 5,6 % [...]."[44]

Auf den ersten Blick erscheinen diese beiden Aussagen als paradox und praktisch unvereinbar. Sie sind jedoch beide richtig. Der Grund dafür liegt eben in der unterschiedlichen zugrundeliegenden Definition von Arbeitslosigkeit. Die erste Aussage geht von der nationalen Definition von Arbeitslosigkeit aus. „Die vom Arbeitsmarktservice (AMS) veröffentlichte nationale Arbeitslosenzahl und Arbeitslosenquote

[42] Statistik Austria. Nationale Definition.
http://www.statistik.at/web_de/statistiken/arbeitsmarkt/arbeitslose_arbeitssuchende/arbeitslose_nationale_definition/index.html
Stand: 19.05.2015

[43] Statistik Austria. Internationale Definition.
http://www.statistik.at/web_de/statistiken/arbeitsmarkt/arbeitslose_arbeitssuchende/arbeitslose_internationale_definition/index.html
Stand: 19.05.2015

[44] ebenda

basieren auf den beim Arbeitsamt vorgemerkten Arbeitslosen und den beim Hauptverband der Sozialversicherungsträger (HV) erfassten unselbständig Beschäftigten."[45] Das heißt, sie gibt Auskunft über den Anteil der beim AMS vorgemerkten Arbeitslosen an der Summe der unselbstständig Beschäftigten und den vorgemerkten Arbeitslosen. Als arbeitslos gilt dabei jeder, der innerhalb eines Jahres mindestens einen Tag als arbeitslos vorgemerkt war. Personen, die sich in Ausbildung oder einer Schulung befinden werden jedoch nicht berücksichtigt.

Die zweite Aussage entspricht Berechnungen anhand der internationalen Definition von Arbeitslosigkeit. Die Zahl der Arbeitslosen und der Erwerbstätigen entstammt dabei dem ILO[46]-Konzept. „Beim ILO-Konzept gilt eine Person als erwerbstätig, wenn sie in der Referenzwoche mindestens eine Stunde gearbeitet oder wegen Urlaub, Krankheit usw. nicht gearbeitet hat, aber normalerweise einer Beschäftigung nachgeht. Personen mit aufrechtem Dienstverhältnis, die Karenz- bzw. Kindergeld beziehen, sind bei den Erwerbstätigen inkludiert. Als arbeitslos gilt, wer in diesem Sinne nicht erwerbstätig ist, aktive Schritte zur Arbeitssuche tätigt und kurzfristig zu arbeiten beginnen kann."[47] Diese Definition fasst also etwas enger, da sie nur sofort verfügbare Arbeitslose berücksichtigt und jene, die in der Referenzwoche nur eine Stunde gearbeitet haben, zu den Erwerbstätigen zählt. Deshalb ist die Arbeitslosigkeit nach internationaler Definition meist niedriger als jene nach nationaler Definition. Genau auf diese Unterschiede zu achten ist also essentiell. Denn, so Henze (2001, S.22), „problematisch ist, dass durch politisch motivierte unterschiedliche Definitionen von Arbeitslosigkeit beim internationalen Vergleich von Arbeitslosenstatistiken gleichsam Äpfel und Birnen in einen Topf geworfen werden".

Fast noch kritischer muss mit dem Begriff der Stichprobe umgegangen werden, denn bloß aufgrund der Erhebungen in der Stichprobe wird schließlich auf die Allgemeinheit geschlossen, weshalb ihr eine große Bedeutung zukommt. Liegt das Interesse beispielsweise wie oben bei der Frage der Arbeitslosigkeit, so wäre eine Möglichkeit, in einer belebten Gegend Passanten zu fragen, ob diese zurzeit einen Arbeitsplatz haben. Warum kann aus dieser Stichprobe aber wohl kaum auf die Grundgesamtheit geschlossen werden? Einerseits würde man möglicherweise nur jene Passanten ansprechen, die einem sympathisch erscheinen, und so die Personen subjektiv selektieren. Außerdem spielen weitere Faktoren, wie der Ort und die Uhrzeit, eine große Rolle. Mitten am Tag wird man weniger Menschen mit Arbeit antreffen, denn diese sind höchstwahrscheinlich bei der Arbeit. Damit wird klar, dass durch die Auswahl der Stichprobe das Ergebnis in eine (gewünschte) Richtung gelenkt werden kann.

In der Statistik ist deshalb die Eigenschaft der Zufälligkeit ganz zentral. Wie auch in der Definition oben erwähnt, muss eine Stichprobe zufällig gewonnen werden, das heißt jedes Element der Grundgesamtheit muss dieselbe Chance haben, in die Stichprobe aufgenommen zu werden. In diesem Fall haben dann auch weitere statistische Berechnungen einen Sinn.

Umfragen, die in den Medien präsentiert werden, führen meist Institute durch, die auf ein Quotenverfahren zurückgreifen. Das heißt aufgrund der Struktur der Grundgesamtheit, wie beispielsweise den Anteilen an ArbeiterInnen, Angestellten und Selbstständigen, wird festgelegt, zu welchen Teilen diese auch in der Stichprobe vertreten sein soll. Den InterviewerInnen wird dafür genau vorgeschrieben, wie

[45] ebenda

[46] International Labour Organization

[47] Statistik Austria. Internationale Definition.
http://www.statistik.at/web_de/statistiken/arbeitsmarkt/arbeitslose_arbeitssuchende/arbeitslose_internationale_definition/index.html
Stand: 19.05.2015

viele Personen aus jeder Kategorie sie befragen müssen. Natürlich liefert das ein für die Bevölkerung repräsentatives Ergebnis, jedoch wird für diese Repräsentativität die Zufälligkeit und somit die Anwendung weiterer statistischer Methoden aufgegeben (vgl. NEUWIRTH, 1985, S.523ff.).
Bei diesem Verfahren wird die Auswahl also bewusst getroffen und die Stichprobe quasi konstruiert. Es gibt aber auch eine Möglichkeit, die Grundgesamtheit in Teilgruppen zu zerlegen und dennoch die Zufälligkeit und damit einhergehende mathematische Berechnungsmöglichkeiten aufrechtzuerhalten. Das ist die Verwendung geschichteter Zufallsstichproben. Dazu wird, wie schon angedeutet, die Grundgesamtheit in Schichten aufgeteilt, aus denen anschließend jeweils separate Stichproben gezogen werden (vgl. BEREKOVEN, 2006, S.53ff.). Möchte man beispielsweise aus einer Klasse mit insgesamt achtzehn Mädchen und sechs Buben eine Zufallsstichprobe bestehend aus vier SchülerInnen ziehen, in der jedoch das Geschlechterverhältnis aufrechterhalten bleiben soll, so teilt man die Klasse zuerst in zwei Gruppen (Mädchen und Buben). Anschließend zieht man entsprechend dem Verhältnis in der Grundgesamtheit Stichproben in den einzelnen Schichten, das heißt in diesem Beispiel würde man aus den achtzehn Mädchen drei und aus den sechs Buben einen zufällig ziehen.

Insgesamt muss man also sagen, dass die Auswahl der Stichprobe nicht so unproblematisch ist, wie es zuerst scheint und das Ergebnis dadurch natürlich ganz erheblich beeinflusst wird. Ein kritisches Hinterfragen, ob die Stichprobe geeignet gewählt wurde, ist also notwendig, um Umfrageergebnisse auf ihre Zuverlässigkeit hin zu überprüfen.

6.2 Datenreduktion und Kennwerte

Da bei aussagekräftigen statistischen Erhebungen meist eine große Menge an Daten zu bewältigen ist, ist es hilfreich, diese geschickt zu reduzieren und einige Kennwerte zu definieren, die über die Datenmenge möglichst genaue Aussagen machen. So wird der Umgang damit einfacher und übersichtlicher. So ist beispielsweise bei der Erhebung des Einkommens der ÖsterreicherInnen der durchschnittliche Wert interessant, genauso bei Schularbeiten und Tests. Aber auch die Streuung der Leistungen bei Tests hat eine gewisse Aussagekraft. Für einen verantwortungsvollen Umgang mit Statistiken ist es unbedingt notwendig, dass SchülerInnen über diese Bescheid wissen.

Die in diesem Abschnitt angeführten Definitionen sind entnommen aus BÜCHTER/HENN (2005, S.25ff.).

6.2.1 Absolute und relative Häufigkeiten

Definition: absolute und relative Häufigkeit
In einer Stichprobe vom Umfang n wird ein Merkmal X mit den Ausprägungen x_1, ..., x_k gemessen.

(i) Für jede Ausprägung x_i wird die Anzahl der Merkmalsträger mit dieser Ausprägung mit $H_n(x_i)$ bezeichnet und *absolute Häufigkeit* von x_i in einer Stichprobe vom Umfang n genannt.

(ii) Der Anteil eines Merkmals $h_n(x_i) := \frac{H_n(x_i)}{n}$ heißt *relative Häufigkeit* von x_i in einer Stichprobe vom Umfang n.

Häufig interessiert man sich in der Praxis nicht für die absolute oder relative Häufigkeit einer einzelnen Merkmalsausprägung, sondern für Häufigkeiten von Ausprägungen innerhalb ganzer Bereiche. Zum

Beispiel ist bei einer Schularbeit mit insgesamt 48 Punkten nicht unbedingt informativ, welche Häufigkeiten jede einzelne Punkteanzahl hat, sondern eher interessant sind Häufigkeiten für Punkteanzahlen zwischen 0 und 23 Punkte, da dies ein „Nicht genügend" bedeuten würde, oder Punkteanzahlen, die über 23 liegen, da dies aussagt, wie viele die Schularbeit bestanden haben. Solche Häufigkeiten, die über Häufigkeiten mehrerer Merkmalsausprägungen summieren, nennt man *kumulierte Häufigkeiten.*

Definition: kumulierte Häufigkeiten
In einer Stichprobe vom Umfang n wird ein Merkmal mit den Ausprägungen x_1, ..., x_k gemessen.

(i) Für $i = 1, ..., k$ heißt $\sum\limits_{x \leq x_i} H_n(x)$ die kumulierte absolute Häufigkeit von x_i.

(ii) Für $i = 1, ..., k$ heißt $\sum\limits_{x \leq x_i} h_n(x)$ die kumulierte relative Häufigkeit von x_i.

Beispiel 1
In Tabelle sind die Punktezahlen, die von den 64 SchülerInnen einer Schulstufe bei einem Test mit insgesamt 12 Punkten erreicht wurden und die dazugehörigen Häufigkeiten eingetragen.

Punkteanzahl	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	kumulierte absolute Häufigkeit	kumulierte relative Häufigkeit
0	1	1,6 %	1	1,6 %
1	3	4,7 %	4	6,3 %
2	2	3,1 %	6	9,4 %
3	5	7,8 %	11	17,2 %
4	3	4,7 %	14	21,9 %
5	8	12,5 %	22	34,4 %
6	7	10,9 %	29	45,3 %
7	9	14,1 %	38	59,4 %
8	11	17,2 %	49	76,6 %
9	5	7,8 %	54	84,4 %
10	6	9,4 %	60	93,8 %
11	1	1,6 %	61	95,3 %
12	3	4,7 %	64	100,0 %

Aus der kumulierten relativen Häufigkeit kann nun schön abgelesen werden, dass beispielsweise weniger als die Hälfte der SchülerInnen unter 6 Punkte erreicht haben, und somit den Test nicht bestanden haben, oder etwa ein Viertel der SchülerInnen im oberen Drittel liegt.

Solche Anteilsangaben sind sehr gebräuchliche und handliche Methoden bei der Beschreibung von Daten. Aussagen mittels Prozentsätzen finden sich auf nahezu jeder Seite einer Tageszeitung. Doch auch sie können irreführend und manipulierend oder schlicht und ergreifend falsch verwendet werden.

- So war beispielsweise in einer österreichischen Tageszeitung unter dem Titel „Geschenke werden immer häufiger weiterverkauft" der Untertitel „Jeder Vierte unzufrieden mit Weihnachtspräsenten" zu lesen. Im Artikel selbst hieß es dann jedoch „Vier von zehn Beschenkten sind zumindest mit einem der dieses Jahr erhaltenen Weihnachtspräsenten unzufrieden."[48] Wie viele Menschen sind nun tatsächlich unzufrieden? Jeder Vierte würde bedeuten 25 von 100 Befragten, das heißt 25 Prozent, wohingegen vier von zehn 40 Prozent heißt (vgl. Quatember, 2015, S.8).

- Ein weiteres Beispiel zur falschen Verwendung von Prozentangaben ebenfalls zum Thema Weihnachtsgeschenke findet sich in einer anderen österreichischen Tageszeitung. Angeblich fand hier ein Meinungsforschungsinstitut heraus, dass sich die Ausgaben für Weihnachtsgeschenke der ÖsterreicherInnen im Jahr 1998 folgendermaßen aufteilen: 48 Prozent für Bekleidung, 41 Prozent für Kinderspielzeug, dann kommen Schmuck und Sportartikel, 15 Prozent für Elektronik und 12 Prozent für Lebensmittel.[49] Offensichtlich ergibt dies in Summe mehr als 100 Prozent, was mathematisch nicht möglich ist (ebenda, S.16).

Die eben erwähnten Beispiele beziehen sich auf falsche Prozentangaben. Ebenso können aber auch mathematisch korrekte Prozentangaben irreführend verwendet werden.

So haben sie beispielsweise keinen Sinn, wenn die zugehörige Bezugsgröße nicht angegeben ist. Anhand folgender Beispiele wird dies schnell deutlich.

- Ein Parteivorsitzender der FDP[50] gab nach einer Wahl begeistert folgendes Statement ab: „Wir haben den Anteil unserer weiblichen Abgeordneten um 50 Prozent erhöht!"
  Was zunächst durchaus beeindruckend klingt, wird bei näherer Betrachtung relativiert. In absoluten Zahlen erhöhte sich der Frauenanteil nämlich bloß von vier auf sechs Frauen (vgl. Krämer, 2011, S.59).
  Hier drängt sich natürlich sofort die Frage auf, von wie vielen Abgeordneten insgesamt die Rede ist. Es macht nämlich durchaus einen Unterschied für den Wert der Aussage, ob sechs von zehn oder von hundert Abgeordneten Frauen sind. Leider wird das in der Literatur nicht erwähnt.
- Folgende Unfallstatistik, siehe Abbildung 22, wurde in einer oberösterreichischen Tageszeitung[51] publiziert.
  Laut Grafik sind in dieser Kalenderwoche also elf Prozent der tödlichen Verkehrsunfälle durch Geisterfahrer verursacht worden. Dies klingt wirklich erschreckend, da es den Eindruck vermittelt, dass auf Oberösterreichs Straßen viele Geisterfahrer fahren, die sich selbst und andere gefährden. Die dahintersteckenden absoluten Zahlen schwächen diesen Eindruck wieder ab. In der entsprechenden Kalenderwoche gab es insgesamt neun tödliche Verkehrsunfälle, von denen ein einziger durch einen Geisterfahrer verursacht wurde (vgl. Quatember, 2015, S.24).

Bei beiden Beispielen sind die Aussagen zwar korrekt, jedoch haben sie ohne Angabe von absoluten Zahlen oder Bezugsgrößen eine völlig andere Wirkung. Dieses Problem findet sich vor allem bei kleinen Grundgesamtheiten wieder. Hier wäre es oft sinnvoller absolute anstatt relativer Häufigkeiten anzugeben, da schon kleine absolute Veränderungen große relative Veränderungen bedeuten. Das heißt, sich die Frage „Prozent wovon?" zu stellen, kann viele erste Eindrücke relativieren und ist daher unumgänglich (vgl. Bosbach/Korff, 2011, S.85).

[48] Der Standard. 27.12.2013. S.9
[49] Kronen Zeitung. 13.12.1998. S.25
[50] Freie Demokratische Partei
[51] Oberösterreichische Nachrichten. 31.10.2006. S.25

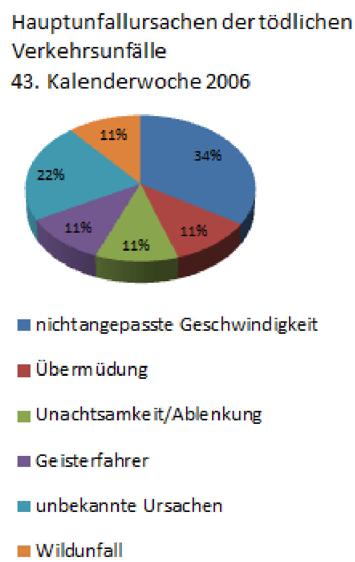


Abbildung 22: Unfallstatistik

In diesem Zusammenhang noch interessant ist die Unterscheidung von Prozenten und Prozentpunkten, vor allem im Hinblick auf politische Wahlen (vgl. Quatember, 2015, S.30f.).
Dazu werden mit folgender Tabelle die Ergebnisse der Landtagswahl in der Steiermark im Jahr 2015 im Vergleich zu jenen aus 2010 betrachtet.

Partei	Stimmen 2015 (in %)	Stimmen 2010 (in %)
SPÖ	29,29	38,26
ÖVP	28,45	37,19
FPÖ	26,76	10,66
Grüne	6,68	5,55
KPÖ	4,22	4,41
Neos	2,64	-
Team Stronach	1,74	-
Sonstige	0,22	3,94

[52]

Dazu hieß es in einer österreichischen Tageszeitung[53]: „Die SPÖ kam auf 29,19 Prozent, was ein Minus von 9,24 Prozent bedeutete, die ÖVP rettete knapp den zweiten Platz mit 28,54 Prozent (minus 8,60 Prozent), die FPÖ schnellte von 10,66 Prozent auf 27,13 Prozent hoch. Etwas zulegen konnten auch die Grünen auf 6,42 Prozent – ein Plus von 1,16 Prozentpunkten. Die KPÖ kommt auf 4,18 Prozent (minus 0,22 Prozent) und wird damit erneut in den Landtag einziehen." Tatsächlich ist also die SPÖ von 38,26 Prozent auf 29,29 Prozent der Stimmen gefallen. Um dieses „Fallen", also das Minus, zu beschreiben, hat man nun zwei Möglichkeiten. Einerseits kann man es als Verlust in Prozent basierend auf dem prozentualen Ergebnis der letzten Wahl angeben, woraus folgende Rechnung resultiert: $\frac{29,29-38,26}{38,26}$.

[52] Zahlen entnommen aus: Das Land Steiermark.
https://egov.stmk.gv.at/wahlen/LT2015/LT2015_60000.html
Stand: 02.06.2015

[53] Der Standard. 01.06.2015. vorläufiges Ergebnis (Zahlen stimmen nicht exakt mit jenen aus der Tabelle überein)

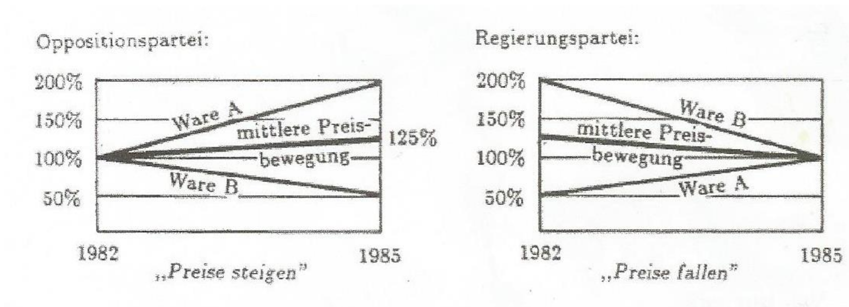


Abbildung 23: Preisentwicklung zweier Waren

$100 = -23,44$ Prozent. Das heißt, die SPÖ hat nicht 9,24 Prozent verloren, sondern ganze 23,44 Prozent ihrer Wähler. Ebenso hat die ÖVP nicht bloß 8,6 Prozent ihrer Wähler verloren, sondern ganze 23,5 Prozent. Am Deutlichsten macht sich diese korrekte Ausdrucksweise bei den Ergebnissen der FPÖ. Diese hat nämlich sage und schreibe um 151,03 Prozent mehr erhalten als bei der letzten Wahl, und nicht „nur" 16,1 Prozent gewonnen. Die Begründung liegt darin, dass es sich hier ja um „Prozent von Prozent" handelt, das heißt bezogen auf die SPÖ geht es um 9,24 Prozent von 38,26 Prozent. Dieses Detail wird in den Medien (siehe Zitat) häufig unterschlagen. Die zweite Möglichkeit besteht darin, die Unterschiede, also die Prozentanteile, in Prozentpunkten anzugeben, wie es oben korrekterweise bei den Grünen gemacht wurde.

Aber nicht nur ohne Bezugsgröße kann es hier zu Täuschungen kommen, sondern auch die Wahl der Bezugsgröße spielt eine große Rolle. Verkauft beispielsweise ein Händler ein Produkt, das er um 5 Euro eingekauft hat, um 10 Euro weiter, so könnte man sich als Kunde beschweren und sagen, dass dies einen Aufschlag von ganzen 100 Prozent bedeutet. Der Händler jedoch wird entgegnen, dass ein Verdienst von 50 Prozent nicht zu viel ist. Wer hat Recht? Richtig sind beide Aussagen, denn das Entscheidende ist die Bezugsgröße beziehungsweise die Grundgesamtheit, auf die man sich bezieht. Ein und dieselbe Sache kann, je nachdem womit man sie vergleicht, völlig unterschiedlich erscheinen (vgl. Krämer, 2011, S.29).
Dies wird auch mittels folgenden Beispiels klar.

- Der Preis einer Ware A hat sich innerhalb von drei Jahren verdoppelt, wohingegen der Preis einer Ware B auf die Hälfte gesunken ist. Die Regierungs- und die Oppositionspartei veröffentlichen dazu zwei unterschiedliche Grafiken, siehe Abbildung 23.
  Welche Grafik ist hier korrekt? Sie sagen ja beide offensichtlich etwas anderes aus und vermitteln ein völlig anderes Bild. Keine der beiden Abbildungen ist jedoch falsch. Der einzige Unterschied liegt hier in der Bezugsgröße. In der linken Darstellung werden die Preise vom Jahr 1982 als Bezugsgröße gewählt, weshalb richtigerweise der Preis für die Ware A von 100% auf 200% steigt und jener für die Ware B von 100% auf 50% sinkt. Man kann daraus also schließen, dass die Preise im Mittel gestiegen sind. Bei der rechten Darstellung wiederum gelten die Preise von 1985 als Bezugsgröße. Ist der Preis für die Ware A verdoppelt worden, so betrug dieser im Jahr 1982 50% vom Preis von 1985. Für die Ware B gilt analog, dass der Preis im Jahr 1982 200% vom Preis von 1985 ausmachte. Somit kann korrekt daraus geschlossen werden, dass die Preise gefallen sind. Je nachdem welchen Eindruck man erwecken möchte, wählt man die rechte oder die linke

Abbildung (vgl. REICHEL, 1987, S.21).

Zur Reduktion der Datenmengen trägt weiter eine *Klasseneinteilung* bei. Dazu werden mehrere Merkmalsausprägungen zusammengefasst, sodass die Darstellung der Daten zwar weniger genau, aber hinreichend informativ ist. Denn mit wachsender Zahl an Merkmalsausprägungen erhöht sich auch die Gefahr, dass der Informationsgehalt sinkt. Natürlich wird die Frage aufgeworfen, was im Einzelnen „hinreichend" ist. Wählt man zu viele Klassen, so zeigt sich der Effekt der Datenreduktion nicht, wohingegen bei zu wenigen Klassen zu viel an Information verloren geht. Im Allgemeinen hängt die Klassenanzahl von der Anzahl der Merkmalsträger, vom konkreten Merkmal und von der Anzahl der Merkmalsausprägungen, sowie vom Verwendungszweck und der Darstellung der Daten ab. Eine Faustregel dazu besagt, dass die Anzahl der Klassen $\approx \sqrt{n}$ sein soll (vgl. BÜCHTER/HENN, 2005, S.33).

Um mit großen Datenmengen umzugehen, sind außerdem bestimmte Kennwerte hilfreich. Diese können grob in zwei Kategorien unterteilt werden. Das sind einerseits die Mittelwerte und andererseits die Streuungsmaße. Mittelwerte beschreiben den Durchschnitt, die Mitte oder den Schwerpunkt einer Verteilung. Sie können somit als besonders typische Werte beschrieben werden. Dagegen machen Streuungsmaße Aussage darüber, wie breit ein Merkmal gestreut ist (vgl. BÜCHTER/HENN, 2005, S.50).

6.2.2 Mittelwerte

Wie eben erwähnt können Mittelwerte den Schwerpunkt einer Stichprobe, den mittleren Wert, der angenommen wird, oder den Wert, der am häufigsten vorkommt beschreiben. Welcher Mittelwert bei einer bestimmten Untersuchung anzuwenden ist, hängt von der Art des Merkmals und vom konkreten Erkenntnisinteresse ab.

Liegt ein nominal skaliertes Merkmal vor, wie beispielsweise die Marken der verkauften Mobiltelefone, so kann nur die Anzahl der verschiedenen Merkmalsausprägungen gezählt und ausgewertet werden.

Ein typischer Wert hier ist der *Modus*.

Definition: Modalwert
Gegeben sei eine Stichprobe vom Umfang n. Ein Datum x_i heißt *Modalwert* (oder *Mod*us) der Stichprobe, wenn gilt: $H_n(x_i) \geq H_n(x_j)$ für alle $1 \leq j \leq n$.

Beispiel 2
Bei der Erhebung der Farben von 20 vorbeifahrenden Autos ergab sich folgende Datenreihe: {blau, blau, blau, blau, blau, gelb, grau, grau, grau, grün, grün, rot, rot, rot, schwarz, schwarz, schwarz, schwarz, schwarz, schwarz} $\Rightarrow$ Modus: schwarz.

Der Modus ist also jene Merkmalsausprägung mit der höchsten absoluten und damit auch relativen Häufigkeit, also jener Wert, der am häufigsten auftritt. Dieser lässt sich für Merkmale aller Art im Allgemeinen bestimmen. Kommt aber beispielsweise jeder Wert nur einmal vor, so gibt es gar keinen Modus.

Handelt es sich bei einem untersuchten Merkmal um ein ordinal skaliertes, so können die Werte, wie oben erwähnt, in eine bestimmte Reihenfolge gebracht werden, weshalb sich dann, genauso wie bei quantitativen Merkmalen, auch hier ein mittlerer Wert bestimmen lässt.
Jener Wert, der genau in der Mitte einer Datenreihe liegt, heißt *Median*.

Definition: Median
Sei x_1, ..., x_n eine geordnete Stichprobe. Der *Median* (oder *Zentralwert*) $\tilde{x}$ ist dann definiert als

- $x_{\frac{n+1}{2}}$, wenn n ungerade ist, bzw.
- $x_{\frac{n}{2}}$ oder $x_{\frac{n}{2}+1}$,wenn n gerade ist.

In der Definition wird schon die erste Schwierigkeit ersichtlich, nämlich was passiert, wenn die Anzahl der Elemente in der Stichprobe gerade ist. Hier ist keine Eindeutigkeit gegeben.
In anderen Definitionen findet man häufig die Formulierung $\frac{1}{2} \cdot (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$ für den Fall, dass n gerade ist. Bei quantitativen Merkmalen ist dies natürlich möglich und auch vorteilhafter, da die Eindeutigkeit so wieder hergestellt ist, und der Wert auch einen Sinn ergibt. Handelt es sich jedoch um ein ordinal skaliertes Merkmal, wie beispielsweise die höchste abgeschlossene Schulbildung („0"= kein Schulabschluss, „1"= allgemeinbildende Pflichtschule, „2"= Lehre, „3"= berufsbildende mittlere Schule, etc.), so kann es passieren, dass für „n gerade" zwei unterschiedliche Merkmalsausprägungen in der Mitte liegen. In diesem Fall ergibt der Median mit dieser Definition dann keinen Sinn, da dem Mittel zwischen „Lehre" und „berufsbildende mittlere Schule" beispielsweise keine inhaltliche Bedeutung zukommt (vgl. Büchter/Henn, 2005, S.52).

Beispiel 3
Die Studiendauer von 20 zufällig ausgewählten StudentInnen desselben Studiengangs ergibt folgende geordnete Datenreihe: {6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10 , 10, 11, 11, 11, 11, 14, 16}
Der Stichprobenumfang ist hier zwar gerade, jedoch ist sowohl der zehnte also auch der elfte Wert 9 und somit ist der Median 9.

Der Median hat die Eigenschaft, die Datenreihe in zwei gleich große Hälften zu teilen. Dadurch ist er auch unempfindlich gegenüber Ausreißer. Bei einer ungeraden Anzahl an Daten wird der Median auch immer tatsächlich angenommen. Betrachtet man eine Datenreihe mit gerader Anzahl an Elementen, so hängt dies von der Definition ab. Bei der oben formulierten wird auch in diesem Fall der Median in der Reihe der Daten angenommen. Wird jedoch die zweite Formulierung verwendet, kann es passieren, dass der Median nicht in den Daten vorkommt.

Die beiden eben erwähnten Kennzahlen eignen sich für den Umgang mit nominalen beziehungsweise ordinalen Merkmalen.
Natürlich lassen sich Modus und Median auch für quantitative Merkmale bestimmen. Das Spektrum für diese Merkmale ist sogar noch größer, wie anhand folgender Mittelwerte zu sehen ist.

Bei vielen Erhebungen ist der durchschnittliche Wert, der sich durch Division der Summe der Daten durch ihre Anzahl ergibt, von Bedeutung. Dieser wird als *arithmetisches Mittel* bezeichnet. Im Alltag ist die Verwendung dieses Mittelwertes so geläufig, das im Allgemeinen immer an das arithmetische Mittel gedacht wird, wenn von einem Mittelwert die Rede ist.

Definition: arithmetisches Mittel
In einer Stichprobe vom Umfang n seien x_1, ..., x_n die erhobenen Merkmalsausprägungen eines quantitatives Merkmals. Dann heißt $\bar{x} := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ *arithmetisches Mittel* der Stichprobe.

Beispiel 4
Im Rahmen einer Umfrage wurden 21 SchülerInnen nach ihrem wöchentlichen außerschulischen Aufwand in Stunden für das Fach Mathematik gefragt. Daraus ergab sich folgende Datenreihe: {1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 9}. Der durchschnittliche wöchentliche Aufwand der SchülerInnen beträgt somit 4,904..., also rund 5, Stunden.

Aus der Definition geht hervor, dass das arithmetische Mittel nicht unbedingt auch in den Daten auftreten muss. Verändert sich ein Wert in der Datenreihe, so verändert sich auch das arithmetische Mittel. Um das arithmetische Mittel zu bestimmen, müssen außerdem nicht alle einzelnen Merkmalsausprägungen bekannt sein. Es reicht die Summe der Daten und die Stichprobengröße zu kennen, um Aussagen über das arithmetische Mittel zu machen. Dies ist in der Praxis oft vorteilhaft, falls man keinen Zugriff auf Einzeldaten hat, jedoch die Summe kennt. Der durchschnittliche Konsum von einzelnen Waren wird beispielsweise so berechnet.

Man könnte das arithmetische Mittel auch als Schwerpunkt der Datenreihe bezeichnen. Das heißt, die Summe der Abstände des arithmetischen Mittels zu den links vom ihm gelegenen Daten ist genauso groß wie die Summe der Abstände zu den rechts von ihm gelegenen Daten, oder anders ausgedrückt $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$.
Des Weiteren besitzt das arithmetische Mittel eine *Minimalitätseigenschaft*:
Für ein quantitatives Merkmal sei die Stichprobe x_1, ..., x_k mit arithmetischen Mittel $\bar{x}$ gegeben. Die Summe $\sum_{i=1}^{k} (x_i - c)^2$ der quadratischen Abweichungen der x_i von einem gegebenen Wert $c \in \mathbb{R}$ wird genau dann minimal, wenn $c = \bar{x}$ ist.

Für Daten, die nicht additiv, sondern multiplikativ miteinander verknüpft sind, wird eine andere Form der Mittelwertbildung benötigt, nämlich das *geometrische Mittel.*

Definition: geometrisches Mittel
Für ein quantitatives Merkmal, das auf einer Verhältnisskala gemessen wurde, sei die Datenreihe x_1, ..., x_n mit $x_i \geq 0$ für $i = 1, ..., n$ gegeben. Dann heißt $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$ das *geometrische Mittel* der Datenreihe.

Beispiel 5
Eine Bank wirbt Kunden mit dem Angebot eines Festgeldkontos über fünf Jahre. Dabei erhält der Kunde nach einer einmaligen Einlage von mindestens 10 000 Euro im ersten Jahr 2 % Zinsen, im zweiten Jahr 4 %, im dritten 6 %, im vierten 8 % und schließlich im fünften Jahr 10 % Zinsen. Wie hoch ist der durchschnittliche jährliche Zinssatz?
$\bar{x} = \sqrt[5]{1,02 \cdot 1,04 \cdot 1,06 \cdot 1,08 \cdot 1,10} = \sqrt[5]{1,3358} = 1,0596$
Der durchschnittliche jährliche Zinssatz beträgt somit 5,96 %.

Wie beim arithmetischen Mittel gilt auch hier, dass sich der Wert ändert, sobald sich ein Wert aus der Datenreihe ändert.

Seinen Namen hat das geometrische Mittel von folgender Interpretation.
Hat man eine Datenreihe mit zwei Werten a und b gegeben, so können diese als Seiten eines Rechtecks gesehen werden, die so gemittelt werden sollen, dass man ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt erhält. Logischerweise ist die Seitenlänge des Quadrats dann $\sqrt{a \cdot b}$, und somit das geometrische Mittel der zwei Daten. Bei drei Daten a, b und c fasst man diese als Kantenlängen eines Quaders auf und sucht die Kantenlänge eines Würfels mit gleichem Volumen, welche sich somit als $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$ ergibt. Dies kann auf n Daten verallgemeinert werden, indem die Daten $x_1, ..., x_n$ als Kantenlängen eines n-dimensionalen Quaders gesehen werden, die zur Kantenlänge eines n-dimensionalen Würfels mit gleichem n-dimensionalen Rauminhalt gemittelt werden sollen.

Ein weiterer oft verwendeter Mittelwert ist das *harmonische Mittel*.

Definition: harmonisches Mittel
Für ein quantitatives Merkmal, das auf einer Verhältnisskala gemessen wurde, sei die Datenreihe $x_1, ..., x_n$ mit $x_i > 0$ für $1 \leq i \leq n$ gegeben. Dann heißt $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$ das *harmonische Mittel* der Datenreihe.

Wie aus der Definition zu sehen ist, ist das harmonische Mittel der Kehrwert des arithmetischen Mittels der Kehrwerte. Anwendung findet es typischerweise bei der Mittelung von Geschwindigkeiten auf vorgegebenen Wegstrecken, oder bei der Mittelung von Preisen, die sich auf vorgegebene Ausgabensummen beziehen.

Beispiel 6
Ein Mann fährt mit seinem PKW eine Strecke von 300 Kilometern. Auf den ersten 100 km fährt er 95 km/h, auf den zweiten 100 km fährt er 110 km/h und auf den letzten 100 km fährt er 80 km/h.
Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist nun nicht 95 km/h, was sich aus dem arithmetischen Mittel ergeben würde, sondern lässt sich mit dem harmonischen Mittel berechnen, und beträgt somit $\frac{300}{\frac{100}{95}+\frac{100}{110}+\frac{100}{80}} = \frac{3}{\frac{1}{95}+\frac{1}{110}+\frac{1}{80}} = 93,4$ km/h. Das arithmetische Mittel ist deshalb hier nicht passend, weil er für die einzelnen Strecken unterschiedlich viel Zeit benötigt, und da sich die Durchschnittsgeschwindigkeit immer auf die Zeit bezieht, muss dies miteinberechnet werden. Wäre die Angabe so gegeben, dass er in der ersten Stunde 95 km/h, in der zweiten Stunde 110 km/h und in der dritten Stunde 80 km/h fährt, so wäre seine Durchschnittsgeschwindigkeit in den drei Stunden 95 km/h, also das arithmetische Mittel.

Der Modus, der Median und das arithmetische Mittel sind außerdem sogenannte Lagemaße, da sie Auskunft über die Lage der Daten am Zahlenstrahl geben. Sie sind die geläufigsten Lagemaße und beziehen sich alle auf die Mitte. Das ist auch durchaus nicht verwunderlich, ist der Alltag doch geprägt von Durchschnittsnormen. Jedoch gibt es noch andere Lagemaße, die ebenso interessant sein können. Folgendes Beispiel soll das demonstrieren: Für einen Lesetest, der die SchülerInnen einer Schulstufe testet, soll die dafür benötigte Zeit zur Beantwortung der Fragen mithilfe einer Stichprobe ermittelt werden. Würde man von den dadurch gewonnenen Bearbeitungszeiten das arithmetische Mittel bilden, würde ungefähr die Hälfte der SchülerInnen über dieser Zeit liegen. Da dies zu vielen die Chance auf ein gutes Abschneiden nimmt, muss ein anderer Wert gefunden werden. Der Median würde die Stichprobe in zwei gleichgroße Gruppen teilen, weshalb er ebenso unbrauchbar ist. Jedoch kann man sich an ihm orientieren. Genauso wie der Median zwei Gruppen bildet, möchte man nun diejenigen Werte finden, die die SchülerInnen beispielsweise in Fünftel einteilen. Das heißt es ist ein Maß gesucht, das die Stichprobe in die zwei Gruppen (p, 1-p) teilt. Dieses Maß nennt man *p-Quantile*.

Definition: p-Quantile

Für ein ordinal skaliertes Merkmal sei die geordnete Datenreihe x_1, ..., x_n gegeben. Dann heißt für $p \in [0;\, 1]$ ein Wert x_p, für den $\sum\limits_{x \leq x_p} h_n(x) \geq p$ und $\sum\limits_{x \geq x_p} h_n(x) \geq 1-p$ gilt, ein *p-Quantil* der Datenreihe.

Das heißt, die kumulierte relative Häufigkeit der Daten, die höchstens so groß wie x_p sind, muss mindestens p sein beziehungsweise umgekehrt muss die kumulierte relative Häufigkeit der Daten, die mindestens so groß wie x_p sind, mindestens $1-p$ sein. Rechnerisch ergibt sich das p-Quantil durch

$$x_p = \begin{cases} x_{[n \cdot p]+1} & \textit{für } n \cdot p \textit{ nicht ganzzahlig} \\ \frac{1}{2} \cdot (x_{n \cdot p} + x_{n \cdot p+1}) & \textit{für } n \cdot p \textit{ ganzzahlig} \end{cases}$$

Liegt beispielsweise eine geordnete Datenreihe vom Umfang $n = 12$ vor und ist $p = 25\%$, dann ist $n \cdot p = 12 \cdot 0,25 = 3$ ganzzahlig und nach obiger Formel ist somit $x_{0,25} = \frac{1}{2} \cdot (x_3 + x_4)$. Andererseits muss für $x_{0,25}$ nach Definition gelten, dass $\sum\limits_{x \leq x_{0,25}} h_{12}(x) \geq 0,25 = \frac{3}{12}$ und $\sum\limits_{x \geq x_{0,25}} h_{12}(x) \geq 0,75 = \frac{9}{12}$ ist, das heißt, es müssen mindestens drei Daten kleiner gleich als $x_{0,25}$ sein und gleichzeitig mindestens neun Daten größer gleich als $x_{0,25}$ sein. Da die Datenreihe geordnet ist, muss das 0,25-Quantil somit zwischen dem dritten und vierten Datum liegen, was auch jenem Wert entspricht, der sich aus obiger Formel ergibt.

Beispiel 7

Die erreichten Punkte von 15 SchülerInnen bei einem Test mit höchsten 12 Punkten sind durch folgende Datenreihe gegeben: $\{2, 2, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 9, 11, 11\}$

Wie viele Punkte haben 75 % der SchülerInnen mindestens erreicht? Da man wissen möchte, wie viele Punkte diese mindestens erreicht haben, ist hier nicht das 0,75-Quantil zu berechnen, sondern das 0,25-Quantil. Da $0,25 \cdot 15$ nicht ganzzahlig ist, ergibt sich $x_{0,25} = x_{[0,25 \cdot 15]+1} = x_4$. Das heißt der Wert $x_4 = 5$ ist das 0,25-Quantil und 75 % der SchülerInnen haben mindestens 5 Punkte erreicht.

In der Praxis besonders interessant ist die Viertelung einer Datenreihe, weshalb diese Quantile auch eigene Bezeichnungen haben. So heißt das 0,25-Quantil auch 1. Quartil, das 0,5-Quantil, also der Median, auch 2. Quartil und das 0,75-Quantil auch 3. Quartil. Als 0-Quantil wird das Minimum der Datenreihe bezeichnet und analog dazu das 1-Quantil als Maximum (vgl. Büchter/Henn, 2005, S.50ff.).

Wie schon erwähnt muss der verwendete Mittelwert der vorliegenden Situation entsprechen. In der Praxis ist das arithmetische Mittel wohl der am häufigsten verwendete. Nicht immer ist es aber auch der passendste, wie folgende Beispiele zeigen.

Schulnoten werden beispielsweise häufig wie quantitative Merkmale behandelt, weshalb auch der Durchschnittswert meist mit dem arithmetischen Mittel gebildet wird. Dies ist jedoch falsch, da Schulnoten ordinal skalierte Merkmale sind, weshalb das arithmetische Mittel nicht in Frage kommt. Will man einen Mittelwert angeben, so bietet sich hier der Median an.

Außerdem muss beim arithmetischen Mittel miteinbezogen werden, dass es sehr empfindlich gegenüber Ausreißern ist. Das heißt, einzelne vergleichsweise hohe beziehungsweise niedrige Werte beeinflussen

das arithmetische Mittel sehr stark. Haben beispielsweise in einem Betrieb vier von fünf ArbeitnehmerInnen ein Bruttoeinkommen von 15 000 Euro pro Jahr und ein Arbeitnehmer ein Bruttoeinkommen von 110 000 Euro pro Jahr, so ergibt sich ein Durchschnittseinkommen von 34 000 Euro pro Jahr. Dieser Wert repräsentiert aber nicht wirklich das mittlere Einkommen der ArbeitnehmerInnen. Extremwerte verzerren hier sehr stark. In solchen Fällen kann man nun entweder Ausreißer unter den Tisch fallen lassen und nicht miteinbeziehen oder man verwendet den Median, der in diesem Fall 15 000 Euro betragen würde. Auch der Modus wäre hier ein passender Mittelwert.
Speziell bei Einkommensvergleichen oder aber beispielsweise auch bei Preisvergleichen ist die Angabe des Medians der bessere Weg, denn dieser erfüllt, was man sich von einem guten Mittelwert wünscht, nämlich dass die Hälfte aller Werte darunter und die Hälfte aller Werte darüber liegen (vgl. Kütting, 1994, S.98f.).

Im Schulbuch „Das ist Mathematik 4" aus 2006 werden der kritischen Gegenüberstellung verschiedener Mittelwerte drei Seiten gewidmet. Dabei wird genau auf die eben erwähnte Problematik eingegangen, nämlich wie die Verwendung unterschiedlicher Mittelwerte zu unterschiedlichen Aussagen führt. Anhand folgendem Beispiel (Reichel et al., 2006, S.129) wird dies erläutert:

In je fünf (zufällig gewählten) Geschäften in Wien, Innsbruck, Graz und Linz sind (an einem bestimmten Tag) die folgenden Preise in € für 1 kg ausgelöste Schweinsschulter erhoben worden:

Wien:	$5,40$	$6,80$	$5,70$	$5,70$	$5,90$
Innsbruck:	$6,70$	$6,70$	$5,50$	$5,20$	$5,40$
Graz:	$6,60$	$5,70$	$5,50$	$6,60$	$5,60$
Linz:	$5,60$	$6,10$	$5,80$	$5,80$	$5,70$

Reihe die Städte
1) nach dem Zentralwert,
2) nach dem Modalwert,
3) nach dem arithmetischen Mittel!
Lösung: von der teuersten zur billigsten Stadt:
1) Linz - Wien/Graz - Innsbruck
2) Innsbruck - Graz - Linz - Wien
3) Graz - Wien/Innsbruck - Linz

Dieses Ergebnis soll nun diskutiert werden. Danach finden sich noch weitere Beispiele dazu. In der neueren Auflage des Schulbuches „Das ist Mathematik 4" aus 2012 wird darauf nicht mehr ganz so ausführlich eingegangen. Zwar wird auch hier die Auswahl des richtigen Mittelwertes betont, jedoch der kritischen Betrachtung nicht mehr so viel Aufmerksamkeit geschenkt (vgl. Reichel et al., 2012, S.137f.).

6.2.3 Streuungsmaße

Die eben besprochenen Mittelwerte sind bei statistischen Analysen meist im Vordergrund, obwohl sie mit Ausnahme der p-Quantile nur Auskunft über die „Mitte" der Daten geben. Ein Beispiel dazu soll die Problematik daran verdeutlichen: Im Rahmen von Schulleistungsuntersuchungen haben die SchülerInnen zweier Länder im Durchschnitt den gleichen Testwert erzielt. Was sagt das nun über das Schulsystem der Länder aus? Sind diese gleich gut? Anhand des Durchschnittswerts kann das eigentlich nicht ausgemacht werden, denn es kann sowohl sein, dass alle SchülerInnen in der Nähe des Mittelwerts liegen, als auch, dass es sehr viele sehr gute und sehr viele sehr schlechte SchülerInnen gibt. Das heißt, die Streuung muss unbedingt miteinbezogen werden, wie auch an folgendem Beispiel ersichtlich wird.

Beispiel 8
Über das Jahr gerechnet hat es in Plymouth in England eine mittlere Lufttemperatur von 13,6 °Celsius, was fast jenem Wert von Minneapolis in den USA entspricht, welcher bei 12,5 °Celsius liegt. Dennoch kann das Klima in diesem Städten wohl kaum miteinander verglichen werden. Denn während es in Plymouth im kältesten Monat, dem Februar, durchschnittlich immer noch 8°C hat, hat es Minneapolis im kältesten Monat, dem Januar, im Mittel -6,3 °C. Der Durchschnitt über die minimalsten Temperaturen liegt hier sogar bei nur noch -16,2°C, was im Vergleich zu Plymouth mit immer noch 3,5°C recht wenig ist. Genauso verhält es sich mit den Höchsttemperaturen. Im wärmsten Monat von Plymouth, dem August, hat es im Mittel 19,0 °C, wohingegen es in Minneapolis im Juli durchschnittlich 28,9 °C hat.
Das Klima ist in den beiden Städten also nicht ähnlich, die Durchschnittstemperatur jedoch schon (vgl. Krämer, 2011, S.68).

Das Beispiel zeigt, dass das arithmetische Mittel oder auch ein anderer Mittelwert allein nicht ausreichen, um etwas über die Verteilung von Daten auszusagen. Tatsächlich informativ ist dieses nur mit Angabe der Streuung. Diejenigen Maße, die diese erfassen, nennt man Streuungsmaße.

Eine naheliegende Möglichkeit die Streuung zu bestimmen, ist die Berechnung der Differenz des kleinsten und des größten Werts der Datenreihe, die *Spannweite* genannt wird.

Definition: Spannweite
Für ein quantitatives Merkmal sei die Datenreihe $x_1, ..., x_n$ gegeben. Dann heißt $\max\limits_{1\leq i\leq n} \{x_i\} - \min\limits_{1\leq i\leq n} \{x_i\}$ die *Spannweite* der Datenreihe.

Am einfachsten lässt sich diese somit berechnen, wenn die Datenreihe geordnet vorliegt, denn dann ergibt sie sich als Differenz $x_n - x_1$. Dadurch fällt noch deutlicher auf, dass die Spannweite sehr wenig Information über die vorliegenden Daten hergibt, da sie nur durch die beiden Extremwerte festgelegt ist, und alle anderen Werte vernachlässigt werden.

Beispiel 9a
Eine Umfrage zum täglichen Fernsehkonsum unter 15 Jugendlichen in Stunden ergab folgende Datenreihe $\{0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 8\}$. Die Spannweite ist somit $8 - 0 = 8$.

Eine schon etwas genauere Information über die Streuung der Daten liefert die Berechnung der mittleren absoluten Abweichung vom Median.

Definition: mittlere absolute Abweichung vom Median
Für ein quantitatives Merkmal sei die Datenreihe $x_1, ..., x_n$ mit Median $\tilde{x}$ gegeben. Dann heißt $\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \mid x_i - \tilde{x} \mid$ die *mittlere absolute Abweichung vom Median*.

Die Idee, die hinter dieser Art der Streuungsberechnung steckt, ist, alle Abstände zu einem gegebenen Punkt zu addieren und durch den Stichprobenumfang zu dividieren, um eine Vergleichbarkeit zu ermöglichen.

Beispiel 9b
Hier wird von der Datenreihe aus *Beispiel 8a* ausgegangen. Die mittlere absolute Abweichung vom Median, der in diesem Fall 4 beträgt, ist dann $\frac{1}{15} \cdot \sum_{i=1}^{15} | x_i - 4 | = \frac{1}{15} \cdot (4+3+2+2+1+1+1+0+1+1+1+2+2+2+4) = 1,8$

Dem ganz ähnlich ist ein weiteres, noch bedeutsameres Streuungsmaß, nämlich die Standardabweichung.

Definition: Varianz und Standardabweichung
Für ein quantitatives Merkmal sei die Datenreihe $x_1, ..., x_n$ mit arithmetischem Mittel $\bar{x}$ gegeben. Dann heißt

(i) $s^2 := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ die *Varianz* und

(ii) $s := \sqrt{s^2}$ die *Standardabweichung* der Datenreihe.

Die Varianz könnte man somit als arithmetisches Mittel der quadratischen Abweichungen vom arithmetischen Mittel beschreiben, und die Standardabweichung ergibt sich dann durch einfaches Wurzelziehen. Diese Paramter eignen sich besonders zum Vergleich der Streuung zweier Datenreihen. Diejenige Datenreihe, die eine größere Standardabweichung hat, streut stärker um das arithmetische Mittel. Aufgrund des Quadrierens der Abweichungen fließen Ausreißer besonders stark in die Streuung ein.
Die Standardabweichung ist wohl das wichtigste und am häufigsten verwendete Maß für die Streuung. So kommt sie auch im Rahmen von Korrelations- und Regressionsrechnungen und bei der Normalverteilung zum Einsatz.

Beispiel 9c
Aus der Datenreihe {0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 8} aus *Beispiel 9a* soll nun die Varianz und die Standardabweichung berechnet werden. Dazu wird das arithmetische Mittel benötigt, das hier 3,93 ist.
$s^2 = \frac{1}{15} \cdot \sum_{i=1}^{15} (x_i - 3,93)^2 = \frac{1}{15} \cdot 66,93 = 4,46$ und $s = \sqrt{4,46} = 2,11$
Die eben vorgestellten Streuungsmaße geben zwar teilweise schon sehr gute Auskünfte über die Verteilung der Daten, jedoch kann man daraus nicht sofort schließen, wie viel Prozent der Daten in diesem Bereich liegen, ausgenommen natürlich der Spannweite, in der sich definitionsgemäß 100 % der Daten befinden.
Um nun zum Beispiel angeben zu können, über welchen Bereich sich die mittleren 90 % der Daten verteilen, kann ein Quantilsabstand berechnet werden.

Definition: Quantilsabstand
Für ein quantitatives Merkmal sei die Datenreihe $x_1, ..., x_n$ gegeben. Dann heißt für den Wert $p \in [0; 0,5]$ die Differenz $Q_{1-p} - Q_p$, also von (1-p)-Quantil und p-Quantil, der *p-Quantilsabstand* der Datenreihe.

Besonders interessant ist hier die Differenz von drittem und ersten Quartil, also $Q_{0,75} - Q_{0,25}$, da dies die Spannweite für die mittleren 50 % der Daten angibt. Diese Differenz heißt auch *Quartilsabstand*.

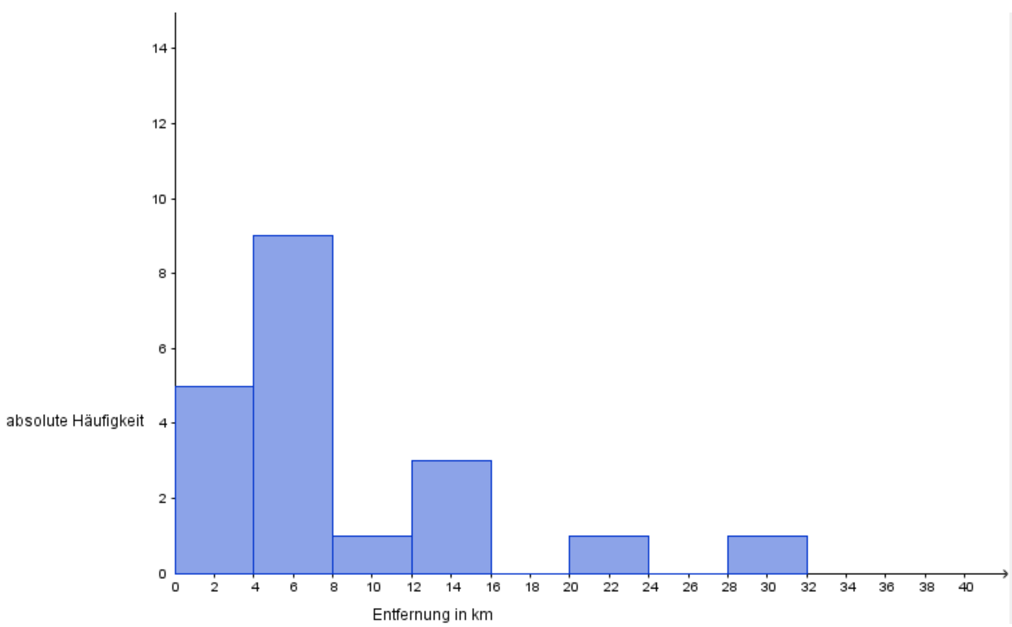
Welches Streuungsmaß nun in einer konkreten Situation angewandt werden soll, hängt von der Fragestellung und der weiteren Verarbeitung der Daten ab. Wie schon erwähnt wird die Standardabweichung am häufigsten eingesetzt. In manchen Fällen kann aber auch beispielsweise die Spannweite das geeignetere Maß sein (vgl. BÜCHTER/HENN, 2005, S.67ff.).

Beispiel 9d
Zur Datenreihe aus *Beispiel 9a* soll die Spannweite der mittleren 60 % angegeben werden, das heißt der 0,2-Quantilsabstand ist gesucht. Da die Datenreihe aus insgesamt 15 Daten besteht, lassen sich $Q_{0,2}$ und $Q_{0,8}$ schnell ablesen, das ist nämlich zum einen der dritte Wert und zum anderen der dreizehnte Wert der Datenreihe. Der 0,2-Quantilsabstand ist somit $Q_{0,8} - Q_{0,2} = 6 - 2 = 4$.

6.3 Grafische Darstellungen von Daten

Ein Bild sagt mehr als tausend Worte.

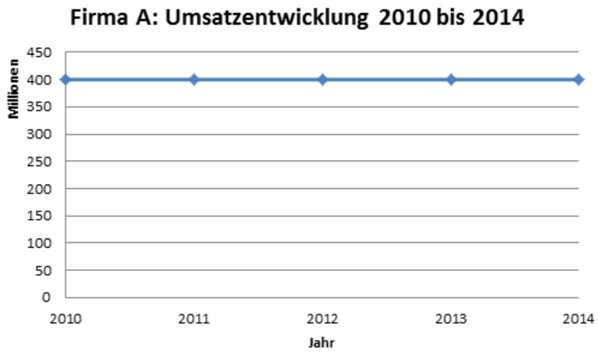
Zu einer empirischen Untersuchung, vor allem zu deren Publikation, gehört immer auch eine angemessene Darstellung der Daten. Gewonnene Informationen können auf diesem Weg ansprechend und verständlich kommuniziert werden und ermöglichen einen schnellen Einblick in die Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe. So vermittelt zum Beispiel bei der Erhebung der Entfernung von Wohn- und Studienort von 20 Studierenden mit Sicherheit die Grafik leichter einen Eindruck über die gewonnenen Daten als nebenstehende Tabelle, siehe Abbildung 24 (vgl. EICHLER/VOGEL, 2011, S.20f.).



1	Entfernung
2	0.8
3	3.8
4	6.1
5	4.1
6	12.4
7	5.1
8	2.6
9	9.7
10	1.9
11	7.3
12	5.3
13	15.2
14	4.8
15	4.6
16	28.1
17	6.1
18	2.6
19	13.5
20	4.5
21	21.3

Abbildung 24: Grafik (Histogramm mit acht jeweils vier km breiten Klassen) und Tabelle zur Entfernung von Wohn- und Studienort

Dadurch sind sie aber auch ein mächtiges Werkzeug und werden häufig für manipulative Zwecke missbraucht, weshalb ein verantwortungsbewusster und kritischer Umgang mit statistischen Grafiken unerlässlich ist. Dies wird sofort anhand folgenden Beispiels deutlich:



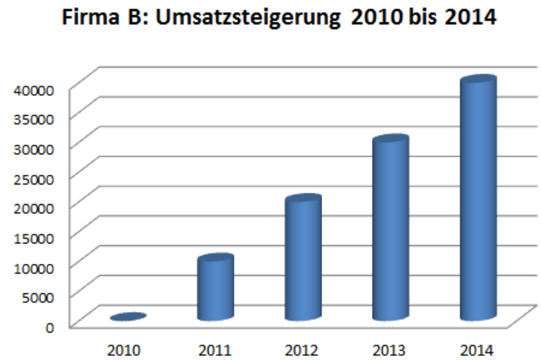


Abbildung 25: Umsatz zweier Firmen

Beispiel 10

Ein Kunde möchte Aktien kaufen. Es werden ihm die in Abbildung 25 gezeigten Grafiken präsentiert. In welche der beiden Firmen wird der Kunde wohl investieren? Die erste intuitive Antwort wäre hier sicherlich Firma B. Möglicherweise überraschend ist nun, dass die Grafiken aber auf denselben Werten basieren:

Jahr	Umsatz
2010	400 000 000
2011	400 010 000
2012	400 020 000
2013	400 030 000
2014	400 040 000

Der einzige Unterschied des Umsatzes der beiden Firmen liegt in dessen grafischer Darstellung. Im linken Diagramm, also jenes, das sich auf Firma A bezieht, wird der Gesamtumsatz der Firma in den einzelnen Jahren dargestellt. Die y-Achse startet bei 0 und steigert sich pro Intervall um 50 Millionen. Durch diese großen Schritte erscheint es für den Betrachter so, als ob praktisch keine Entwicklung stattgefunden hätte. Mathematisch ist diese Darstellungsform korrekt, jedoch ist sie wenig überzeugend und deshalb auch selten in den Medien zu finden. In der rechten Grafik werden die Umsätze von Firma B dargestellt, jedoch passiert dies nicht wie bei Firma A in absoluten Zahlen. Stattdessen beschränkt man sich auf den jährlichen Zuwachs, und zwar immer ausgehend vom Umsatz des Jahres 2010. Der Fokus auf die Veränderung spiegelt sich auch in der Einteilung der y-Achse wider, welche nun in Schritten von 5000 wächst, was verglichen mit den Schritten von 50 Millionen im linken Diagramm sehr wenig ist. Optisch wirkt dies eindeutig positiver. Hinzu kommt noch die Darstellung der Säulen als dreidimensionale Zylinder, wodurch diese dem Betrachter noch zusätzlich mächtiger erscheinen (vgl. Maass, 2006, S.50ff.).

Dieses Beispiel vermittelt einen ersten Eindruck über die Auswirkungen grafischer Darstellungsformen. Bevor näher auf deren Manipulationsmöglichkeiten eingegangen wird, werden zuerst die wichtigsten Typen besprochen.

6.3.1 Urliste, Tabelle

Um Daten weiter aufzubereiten, wird zunächst von der Urliste ausgegangen. Diese stellt alle ermittelten Daten $x_1, ..., x_n$, oft schon nach gewissen Kriterien gereiht, dar. Meist passiert dies in Form einer Tabelle:

Urliste

Merkmalsträger i	Merkmalsausprägung x_i
1	x_1
2	x_2
3	x_3
4	x_4

6.3.2 Säulen-, Balken- und Stabdiagramm

Diese drei Diagrammtypen sind wohl die am häufigsten verwendeten Darstellungsformen, da sie für jede Art von Merkmal anwendbar sind. Dabei gibt die Höhe der Säulen oder Stäbe beziehungsweise bei Balkendiagrammen die Breite die relative (oder absolute) Häufigkeit der Merkmalsausprägungen an, welche wiederum auf der anderen Achse aufgetragen werden. Ob relative oder absolute Häufigkeit verwendet wird, ist meist unwesentlich. Will man jedoch Vergleiche anstellen, so eignen sich dazu relative Häufigkeiten besser. Handelt es sich um ein qualitatives Merkmal, so kann die Einteilung auf der Achse der Merkmalsausprägungen willkürlich vorgenommen werden und auch die Reihenfolge spielt meist keine Rolle, jedoch sollten die Abstände zwischen den Ausprägungen gleich groß gewählt werden. Anders ist das meist bei ordinal und metrisch skalierten Merkmalen, bei denen es sich sehr wohl empfiehlt auf eine richtige Anordnung zu achten. Hier kann es aber auch Ausnahmen geben, da es beispielsweise oft sinnvoll ist, die Merkmalsausprägungen entsprechend ihrer relativen oder absoluten Häufigkeit fallend oder steigend zu ordnen.

Beispiel 10a
Im Rahmen der Gesundheitsbefragung 2006/07 der Statistik Austria wurden Personen im Alter von 15 und mehr Jahren zu ihrem subjektiven Gesundheitszustand befragt[54]. Dabei ergab sich folgende Verteilung:

„Wie gut ist Ihre Gesundheit im Allgemeinen?”				
Sehr gut	Gut	Mittelmäßig	Schlecht	Sehr schlecht
37,5 %	38,1 %	18,5 %	5,0 %	1,0 %

Die zugehörigen Säulen-, Stab- und Balkendiagramme sind in Abbildung 26 dargestellt.

Verbindet man die oberen Enden eines Stabdiagramms, so erhält man ein Polygonbild beziehungsweise ein Liniendiagramm. Diese eignet sich besonders zur Hervorhebung der Veränderung von Größen über eine bestimmte Zeitspanne.

[54] Daten entnommen aus: Statistik Austria.
http://www.statistik.at/web_de/statistiken/gesundheit/gesundheitszustand/subjektiver_gesundheitszustand/index.html
Stand: 12.06.2015

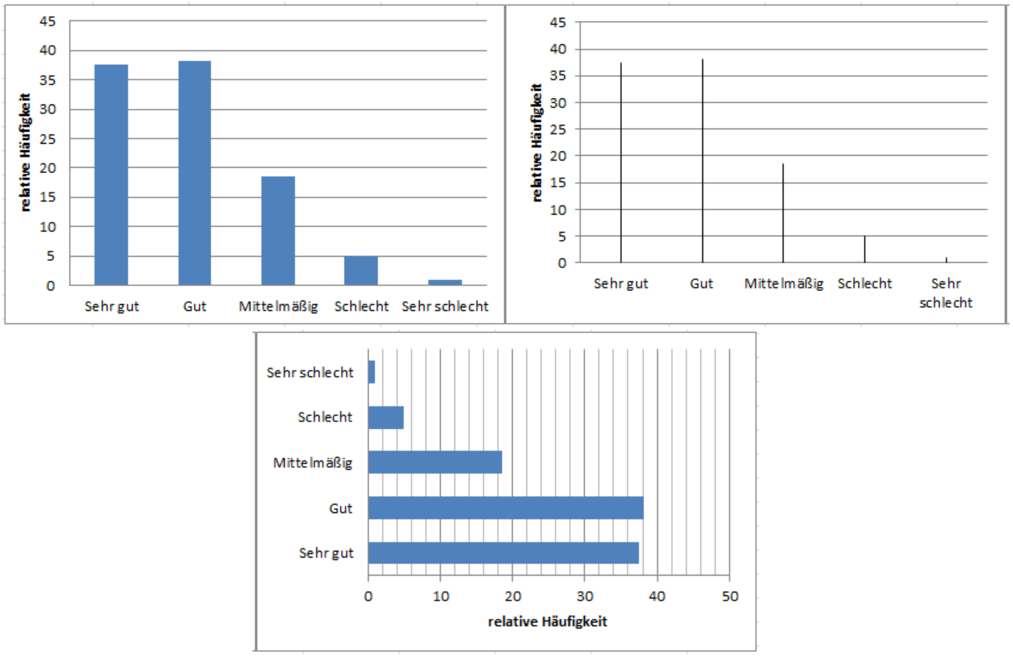


Abbildung 26: Säulen-, Stab- und Balkendiagramm zu Beispiel 10a

6.3.3 Kreisdiagramm

Ebenso für alle Skalierungsarten von Merkmalen anwendbar ist das Kreisdiagramm. Um eine gute Übersicht zu gewährleisten, ist diese Darstellungsform jedoch eher bei Merkmalen mit wenigen Ausprägungen zu empfehlen. Jeder solchen Merkmalsausprägung x_i wird dabei ein Kreissektor zugeordnet. Der zugehörige Mittelpunktswinkel α_i kann mittels $\alpha_i = 360° \cdot h_n(x_i)$ berechnet werden, wobei $h_n(x_i)$ die relative Häufigkeit von x_i bezeichnet.

Beispiel 10b
Für die Daten aus Beispiel 10a soll nun ein Kreisdiagramm konstruiert werden. Die zugehörigen Mittelpunktswinkel für das Kreisdiagramm lassen sich mit den gegebenen relativen Häufigkeiten einfach berechnen:
$\alpha_{Sehr\ gut} = 360 \cdot 0,375 = 135°$
$\alpha_{Gut} = 360 \cdot 0,381 = 137,16°$
$\alpha_{Mittelmäßig} = 360 \cdot 0,185 = 66,6°$
$\alpha_{Schlecht} = 360 \cdot 0,05 = 18°$
$\alpha_{Sehr\ schlecht} = 360 \cdot 0,01 = 3,6°$

Nun kann das Kreisdiagramm gezeichnet werden. In der Praxis ist die Berechnung der Mittelpunktswinkel jedoch nicht mehr notwendig, da moderne Technologien, beispielsweise Microsoft Excel, das Zeichnen der Grafiken übernehmen, und dafür Kenntnisse über die Häufigkeiten ausreichen. Folgendes Kreisdiagramm entsteht: siehe Abbildung 27.

Das Kreisdiagramm ist aufgrund seiner Form besonders geeignet, um Anteile einer Merkmalsausprägung, also die relative Häufigkeit, in einer Stichprobe darzustellen. Zur besseren Lesbarkeit sind zusätzliche Prozentangaben vorteilhaft. Manchmal werden noch weitere Angaben zur Datenmenge, wie

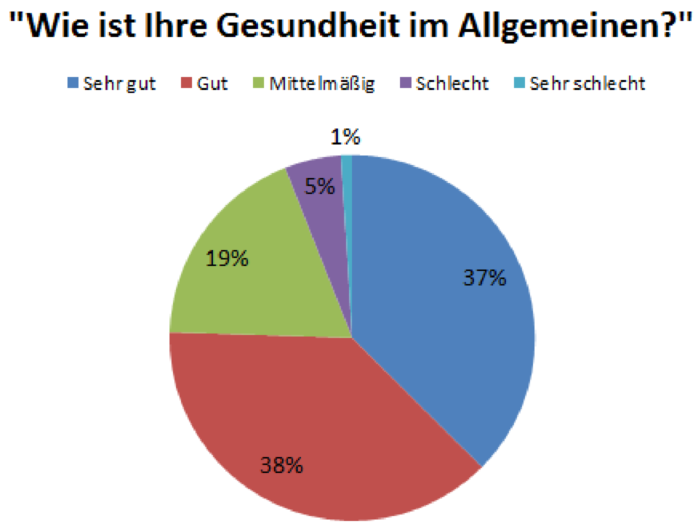


Abbildung 27: Kreisdiagramm zu Beispiel 10b

der Stichprobenumfang, dargestellt.

6.3.4 Histogramm

Um Daten mithilfe eines Histogramms zu präsentieren, müssen diese quantitativ sein. Die Merkmalsausprägungen werden zu Klassen zusammengefasst und deren Häufigkeiten mittels Säulen dargestellt. Man könnte es also als ein modifiziertes Säulendiagramm beschreiben. Vor allem bei Merkmalen mit einer großen Anzahl an Merkmalsausprägungen kommt diese Darstellungsart zum Einsatz, da so die Übersichtlichkeit verbessert werden kann. Anders als beim Säulendiagramm repräsentiert hier aber nicht die Höhe, sondern die Fläche die Häufigkeit einer Klasse. Sind die Klassen gleich breit, so macht das keinen Unterschied. Wichtig wird dies also erst, wenn Klassen verschiedener Breiten vorliegen. In diesem Fall ist die Bestimmung der zugehörigen Höhe ganz zentral. Anhand eines Beispiels wird dies deutlich.

Beispiel 11a
Im Rahmen einer Vorlesung an der Universität wird das Alter der insgesamt 69 anwesenden Studierenden untersucht, siehe Tabelle 18. Zur besseren Übersicht wird eine Klasseneinteilung vorgenommen, und zwar mit $K_1 = [19, 24)$, $K_2 = [24, 25)$, $K_3 = [25, 26)$ und $K_4 = [26, 53]$. Die relativen Häufigkeiten für die Klassen sind dann $h_{69}(K_1) = 0,333$, $h_{69}(K_2) = 0,232$, $h_{69}(K_3) = 0,203$ und $h_{69}(K_4) = 0,232$. Wie beim Säulendiagramm könnte man nun gleich breite Säulen mit den relativen Häufigkeiten als Höhen nehmen, woraus Abbildung 28 folgt. Obwohl die Gruppe der Studierenden, die 24 Jahre alt sind, die größte Gruppe ausmachen, sieht es in der Abbildung so aus, als wäre dieses Alter seltener aufgetreten, ähnlich bei 25. Was hier nämlich nicht berücksichtigt wurde, ist die unterschiedliche Breite der Klassen. Korrekterweise müsste man also die Breite der Säulen der Klassenbreite anpassen. Da die Flächeninhalte proportional zur relativen Häufigkeit sein sollen, ergeben sich die Höhen durch Division von relativer Häufigkeit durch Klassenbreite, also $h_i = h_n(x_i) : b_i$. Im vorliegenden Beispiel ist $b_1 = 5$,

Alter x_i	$H_{69}(x_i)$	$h_{69}(x_i)$
19	2	0,029
20	8	0,116
21	6	0,087
22	7	0,101
24	16	0,232
25	14	0,203
26	7	0,101
29	6	0,087
33	2	0,029
53	1	0,014
	69	~1

Tabelle 18: Beispiel 11a: Alter der anwesenden Personen

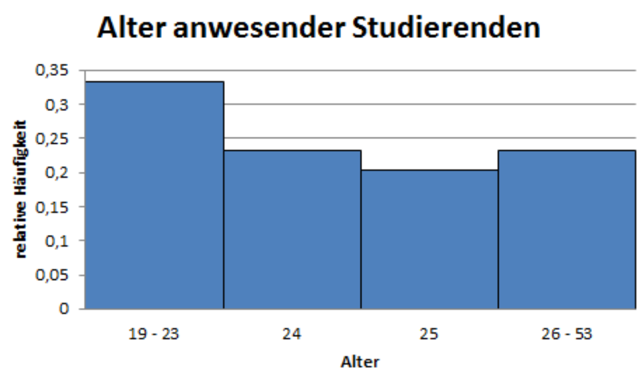


Abbildung 28: Histogramm mit Säulen gleicher Breite

$b_2 = 1$, $b_3 = 1$ und $b_4 = 28$ und somit $h_1 = 0,066$, $h_2 = 0,232$, $h_3 = 0,203$ und $h_4 = 0,008$, wodurch ein Histogramm wie in Abbildung 29 entsteht.

6.3.5 Stängel-Blatt-Diagramm

Eine übersichtliche Darstellungsart für Datensätze mit geringem Umfang ist das Stängel-Blatt-Diagramm. Dabei wird die kleinste gemessene Einheit als „Blatt” verwendet und die nächstgrößere Zehnerpotenz bildet in Klassen zerlegt den „Stängel”. Getrennt werden diese beiden durch einen senkrechten Strich. Die Werte, die im Stängel untereinander stehen, stellen somit die Klassen dar, die zugehörigen Blätter machen Aussagen über die Beobachtungswerte innerhalb einer Klasse. Dazu müssen natürlich quantitative Daten gegeben sein.

Beispiel 12
Die Messung der Körpergrößen von 25 SchülerInnen einer Klasse in cm ergab folgende Datenreihe: {148, 154, 156, 156, 158, 159, 160, 160, 162, 163, 164, 164, 164, 165, 166, 166, 166, 167, 169, 172, 172, 174, 176, 176, 178}. Die gewonnenen Daten sollen nun mithilfe eines Stängel-Blatt-Diagramms veranschaulicht werden. Die kleinste gemessene Einheit, also die Einerzahl, ist der Zentimeter, welcher somit das „Blatt” bildet. Die Ziffern davor, die Zehner- und Hunderterzahl, also die Dezimeter, legen den Stängel fest. Der Größe nach geordnet ergibt sich also folgendes Diagramm:

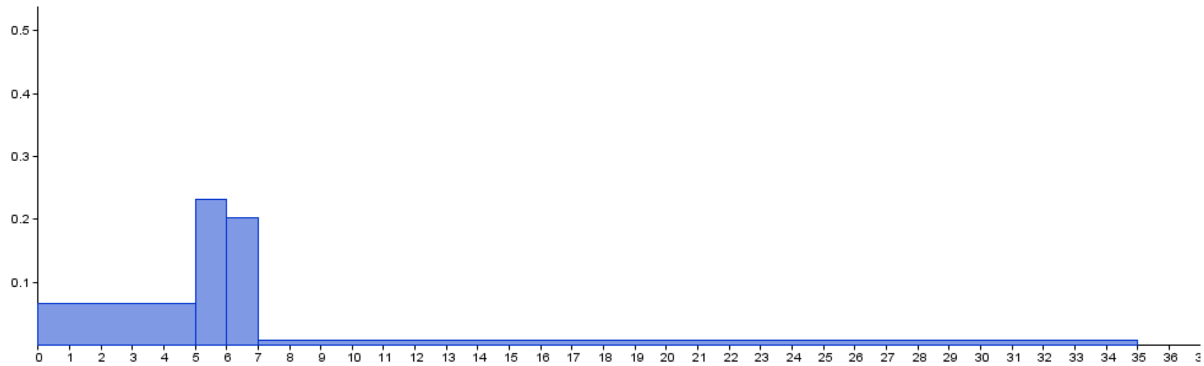


Abbildung 29: Histogramm mit angepassten Breiten und Höhen

Stängel (dm)	Blatt (cm)
14	8
15	4, 6, 6, 8, 9
16	0, 0, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 9
17	2, 2, 4, 6, 6, 8

Anhand des Beispiels wird auch deutlich, dass das Stängel-Blatt-Diagramm einem Balkendiagramm recht nahe kommt. Auch hier wird eine Klasseneinteilung mit gleich breiten Klassen vorgenommen, und man sieht sehr schön, in welcher Klasse sich die Daten konzentrieren. Aber auch Kennzahlen, wie in 1.1.2 besprochen, können dem Diagramm leicht entnommen werden: vor allem Quantile, insbesondere der Median, lassen sich schnell ablesen (vgl. Eichler/Vogel, 2011, S.21ff.).

6.3.6 Boxplot

Das Boxplot-Diagramm, auch Kastenschaubild genannt, bietet eine Möglichkeit der Visualisierung der Lageparameter Minimum, 1. Quartil, Median, 3. Quartil und Maximum. Der Boxplot besteht aus einer rechteckigen Box (Kasten), dessen Begrenzungen durch das erste und das dritte Quartil gegeben sind. Seine Länge beträgt somit $x_{0,75} - x_{0,25}$. Die Breite soll dabei proportional zum Stichprobenumfang gewählt werden (vgl. Kröpfl, 1994, S.84). Dieses Rechteck wird an der Stelle des Medians durch einen Strich in zwei Teile geteilt. Ausgehend von dieser Box führt an jeder Seite eine Linie weg. Jene, die in Richtung der kleineren Werte geht, endet beim kleinsten Wert, der größer als das erste Quartil minus dem Eineinhalbfachen des Quartilsabstandes, also größer als $x_{0,25} - 1,5 \cdot (x_{0,75} - x_{0,25})$ ist. Analog dazu endet die in Richtung der größeren Werte führende Linie beim größten Wert, der kleiner als das dritte Quartil plus dem Eineinhalbfachen des Quartilsabstandes, also kleiner als $x_{0,75} + 1,5 \cdot (x_{0,75} - x_{0,25})$ ist. Alle außerhalb dieser Grenzen liegenden Werte, die Ausreißer, werden schließlich durch einen Punkt gekennzeichnet (vgl. Eichler/Vogel, 2011, S.29f.).

Beispiel 11b
Zu den in Beispiel 11a erhobenen Werten soll nun ein Boxplot gezeichnet werden. Die benötigten

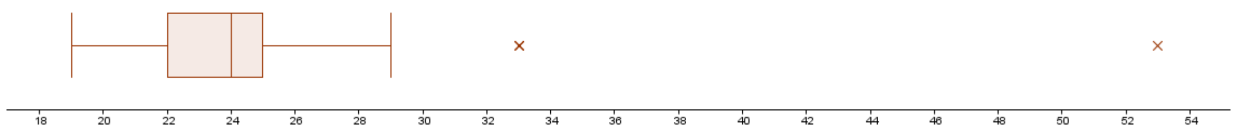


Abbildung 30: Boxplot: Beispiel 11b

Lagemaße ergeben sich dabei wie folgt:

Minimum	19
1. Quartil	22
Median	24
3. Quartil	25
Maximum	53
$x_{0,25} - 1,5 \cdot (x_{0,75} - x_{0,25})$	17,5 (<19)
$x_{0,75} + 1,5 \cdot (x_{0,75} - x_{0,25})$	29,5 (>29)

Der zugehörige Boxplot sieht wie in Abbildung 30 dargestellt aus, wobei der Eintrag bei 33 hier für zwei Werte steht.

6.3.7 Einsatz technologischer Hilfsmittel

Anhand der beiden Programme Microsoft Excel und Geogebra können diese Darstellungen sehr leicht im Unterricht von SchülerInnen selbst kreiert werden. In Excel finden sich eine Vielzahl an Darstellungsmöglichkeiten. Unter dem Menüpunkt Einfügen ▶ Diagramme kann zwischen den verschiedenen Typen gewählt werden, wobei einige eher als Spielerei anzusehen sind und sich nicht unbedingt für eine gute statistische Analyse eignen. Excel bietet sich wegen der leichten Handhabung vor allem bei Säulen-, Balken- und Kreisdiagrammen, sowie beim Zeichnen von Liniendiagrammen an. Die Berechnung statistischer Kennzahlen kann ebenfalls mithilfe einfacher Befehle erfolgen. Nicht möglich ist aber das Entwerfen von Histogrammen und Boxplots in Excel. Dafür kann jedoch Geogebra verwendet werden, denn auch dieses Programm bietet in diesem Bereich Einiges an. Hier kann entweder in der Algebra- und Grafik-Ansicht oder in der Tabellen-Ansicht gearbeitet werden. Zu Beginn ist es sicherlich vorteilhafter, wenn die Algebra- und Grafik-Ansicht verwendet wird. Erst später, wenn die SchülerInnen mit allen Begriffe und Kennzahlen bereits vertraut sind, kann zur Tabellen-Ansicht gewechselt werden. Bei Verwendung der Algebra-Ansicht kann zwischen den drei Darstellungsmöglichkeiten Balkendiagramm, Histogramm und Boxplot gewählt werden. Beim Histogramm kann die Klassenbreite frei gewählt werden, wobei mithilfe der Beifügung „true" in der Eingabe die Balkenhöhe entsprechend angepasst wird, siehe Abbildung 31. Zur Erstellung eines Boxplots ist es empfehlenswert, zunächst eine Urliste der Daten zu erstellen. Bei der Eingabe des Befehls kann dann die Position und Höhe des Boxplots bestimmt werden. Die fünf hier wichtigen Werte, nämlich Minimum, Maximum, Median und erstes und drittes Quartil, können dann klar abgelesen werden. Es kann aber auch umgekehrt ohne Kenntnis einer Urliste bloß aus diesen fünf Kennzahlen der Boxplot gezeichnet werden. In der Grafik-Ansicht können mehrere Boxplots gleichzeitig angezeigt werden, wodurch sich diese besonders einfach vergleichen lassen. In der CAS-Ansicht lassen sich außerdem alle wichtigen Kennzahlen mittels

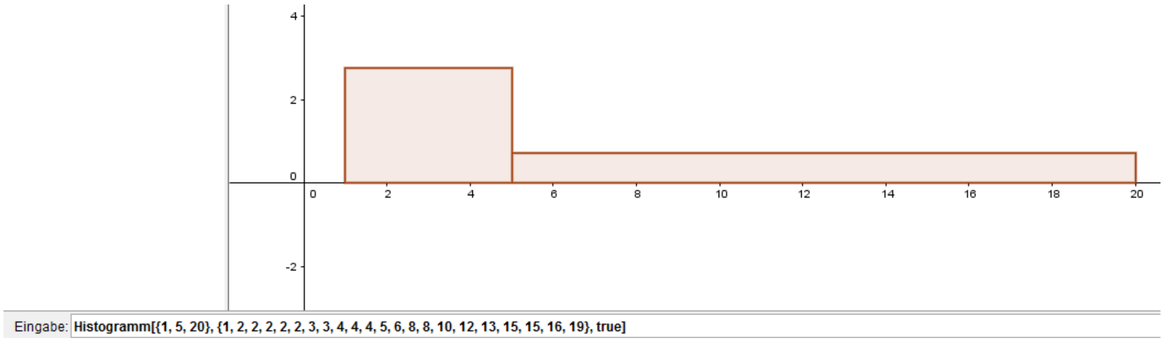


Abbildung 31: korrektes Histogramm mit Geogebra

einfacher Befehle berechnen. Wird die Tabellen-Ansicht verwendet, so können Daten in die Tabelle eingegeben werden und dann ohne Umschweife sowohl grafisch als auch rechnerisch analysiert werden. Für die grafische Darstellung stehen unter anderem ein Histogramm, Balkendiagramm, Stängel-Blatt-Diagramm und ein Boxplot zur Auswahl. Auch hier lässt sich bei der Erstellung eines Histogramms die Klassenbreite beliebig verändern. Unter dem Menüpunkt „Statistik anzeigen" werden sofort alle nützlichen Kennzahlen, wie etwa der arithmetische Mittelwert und alle Quartile, angezeigt.

6.3.8 Manipulationsmöglichkeiten bei grafischen Darstellungen von Daten

Im Bereich der grafischen Darstellung von Daten gibt es unzählige Möglichkeiten zur Manipulation.

Das beginnt bereits bei der Erstellung der Urliste. Hier werden oftmals Ausreißer ohne weiteres weggelassen und bei der weiteren Bearbeitung der Daten nicht berücksichtigt. Natürlich kann dies auch seine Berechtigung haben, beispielsweise falls Daten durch fehlerhafte Messung erhoben wurden. Der Grund für ein solches Vorgehen muss aber in jedem Fall stichhaltig sein. Ist dies nicht der Fall, könnte eine manipulative Absicht dahinter stehen. So können Mittelwerte aufgebessert beziehungsweise gedrückt werden, indem auffällig kleine beziehungsweise große Werte nicht in die Urliste aufgenommen werden (vgl. Kütting, 1994, S.126).

Eine der am häufigsten verwendeten Arten Daten entsprechend seiner Wünsche darzustellen ist die Manipulation der Achsen bei Säulen-, Balken-, Stab- oder Histogrammen oder auch bei Trendkurven. Je nachdem, wie die y-Achse skaliert wird, können die Unterschiede zwischen den Merkmalsausprägungen stärker oder schwächer angezeigt werden. Möchte man beispielsweise unterstreichen, dass ein Medikament besser wirkt als andere, ein Auto sicherer ist als andere oder die Kriminalität viel höher ist als im Vorjahr, so kann dazu die y-Achse abgeschnitten und der Ausschnitt, in dem die beiden Vergleichswerte liegen, vergrößert angezeigt werden. Dadurch entsteht der Eindruck, die Differenz zwischen zwei Werten sei viel größer als sie tatsächlich ist. Umgekehrt können Unterschiede verschleiert werden, indem ein möglichst großer Abschnitt gezeigt wird beziehungsweise die y-Achse in die Länge gezogen wird. Folgende Beispiele belegen diese Wirkung sehr treffend.

- Gesundheitsausgaben pro Kopf (in Euro)
  In einer deutschen Tageszeitung ist zu den steigenden Gesundheitskosten in Deutschland folgende Grafik erschienen, siehe Abbildung 33.

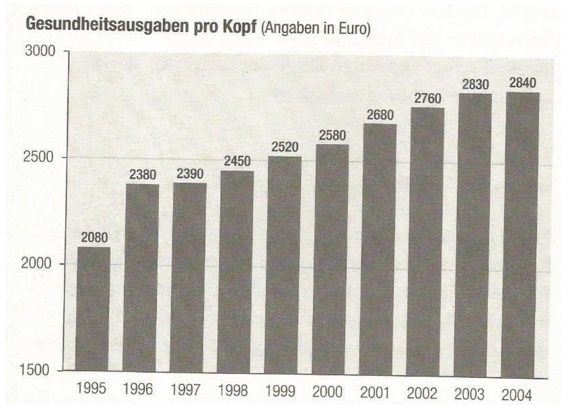


Abbildung 32: Kölner Stadt-Anzeiger, 27.10.2006

Sie zeigt einen drastischen Anstieg. Es wirkt so, als ob sich die Gesundheitskosten seit 1995 verdoppelt hätten.
Grund dafür ist die abgeschnittene y-Achse, die hier erst bei 1500 Euro beginnt, und nicht etwa bei null. Korrekterweise müsste die Grafik also so aussehen wie in Abbildung 33 (vgl. Bosbach/Korff, 2011, S.32f.).

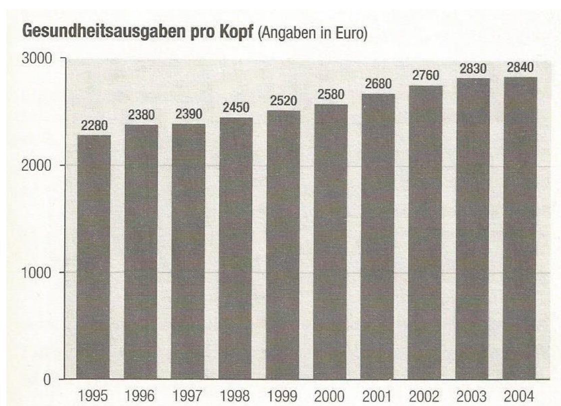


Abbildung 33: korrekte Darstellung der Gesundheitsausgaben

- Steigende Verkaufszahlen der Presse
  Die Presse konnte in den Jahren zwischen 1995 und 2000 einen moderaten Anstieg an täglich verkauften Zeitungen verzeichnen. Mit folgender Grafik, siehe Abbildung 34, wurde diese Tatsache veranschaulicht.

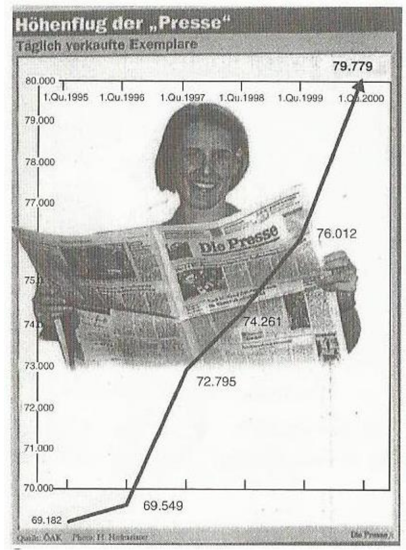


Abbildung 34: Die Presse, 25.Mai 2000

Wie auch beim vorigen Beispiel zeigt diese Grafik eine unvollständige y-Achse. Sie beginnt hier nicht bei null, sondern bei 70 000 und wandert in 1 000 Euro Schritten nach oben. Dadurch wirkt es, als ob die Verkaufszahlen sehr stark nach oben gegangen wären. Hinzu kommt hier, dass der Startwert, also die Verkaufszahlen von 1995, noch unter dem Beginn der Skala liegt, und so den Eindruck erweckt, als kämen die Verkaufszahlen aus dem Bodenlosen. Das Ende der Trendkurve liegt optisch bereits über dem Rand und soll das unbegrenzte Wachstum unterstreichen.
Stellt man diese Daten richtig dar, so würde das wie in Abbildung 35 gezeigt aussehen.

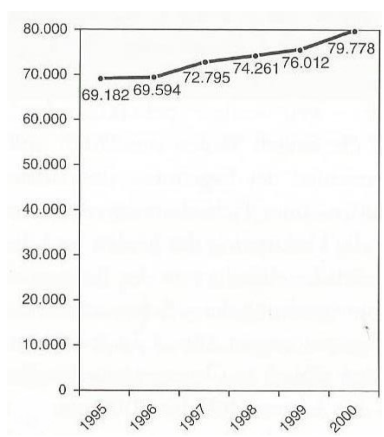


Abbildung 35: richtige Darstellung

(vgl. Quatember, 2015, S.73ff.)

Aber nicht nur die y-Achse kann manipuliert werden. Auch durch eine geschickte Wahl der x-Achse können Tatsachen verzerrt dargestellt werden. So können beispielsweise Zeitreihen gestreckt oder gestaucht werden, um einen Trend extremer wirken zu lassen, oder aber nur für seine Zwecke dienliche

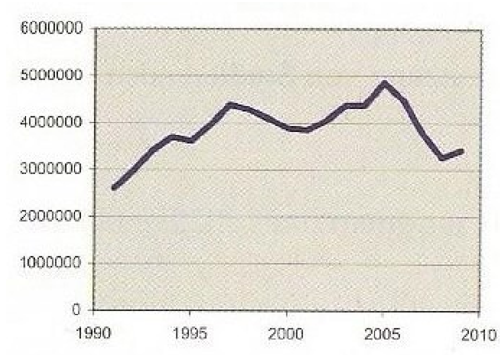


Abbildung 36: Arbeitslosigkeit 1990 - 2010

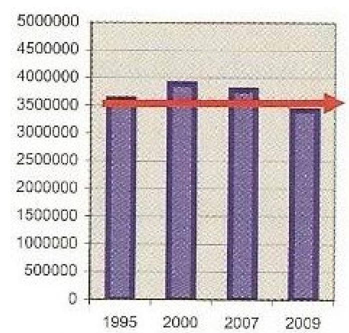


Abbildung 37: „erfolglose Regierungsarbeit"

Ausschnitte gezeigt werden. Dies wird anhand folgender Beispiele deutlich.

- Stagnierende oder fallende Arbeitslosenzahlen?
  Dieses Beispiel zeigt sehr deutlich, wie mithilfe ein und derselben Zahlen völlig unterschiedliche Aussagen transportiert werden können. Die tatsächliche Entwicklung der Arbeitslosenzahlen in Deutschland zwischen 1990 und 2010 kann wie folgt dargestellt werden: Abbildung 36.
  Möchte man das Argument unterstreichen, dass die Regierungsarbeit erfolglos ist und die Arbeitslosenzahlen seit Jahren stagnieren, so kann man die Daten folgendermaßen darstellen: Abbildung 37. In diesem Fall ist die y-Achse mathematisch korrekt angegeben worden. Problematisch ist jedoch die Einteilung der x-Achse beziehungsweise die Auswahl der Vergleichsjahre. Diese weisen nämlich nicht den gleichen Abstand auf, sondern wurden so gewählt, dass die Aussage, die Arbeitslosigkeit würde stagnieren, am besten transportiert werden kann. Man hat sich also Werte herausgepickt, die annähernd gleich sind, wodurch es so aussieht, als wären die Werte in den Jahren dazwischen ebenfalls in diesem Bereich gelegen und als hätte sich wirklich nichts verändert.
  Soll andererseits die gute Arbeit der Regierung betont werden, so wird man eher zu einer Darstellung der folgenden Art greifen: Abbildung 38. Bei dieser Abbildung wurde die y-Achse abgeschnitten und die Intervalllängen sehr klein gewählt, wodurch die zahlenmäßigen Unterschiede grafisch stark vergrößert werden. Hier stimmt zwar die Einteilung der x-Achse, das heißt es wurden Jahre gleichen Abstands gewählt, jedoch hat man, um die gewünschte Aussage zu un-

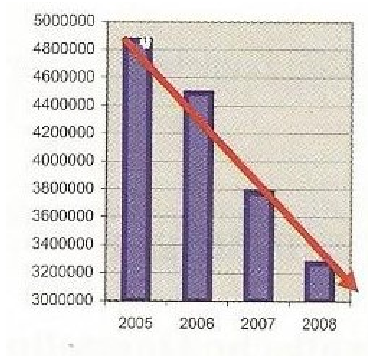


Abbildung 38: „erfolgreiche Regierungsarbeit"

terstreichen, als ersten Wert jenen von 2005 herangezogen, welcher der höchste der letzten Jahre ist, und als letzten jenen von 2008, also den tiefsten Wert seit 2005. Man hat also nur den Teil des Trends abgebildet, der für die gewünschte Aussage passend war (vgl. Eichler/Vogel, 2011, S.41f.).

- Arbeitslosenzahlen (Angaben in Millionen)
  Zu Beginn des Jahres 2008 wurde in einigen deutschen Zeitungen der Rückgang der Arbeitslosigkeit eindrucksvoll mit folgender Grafik, siehe Abbildung 39, bejubelt.

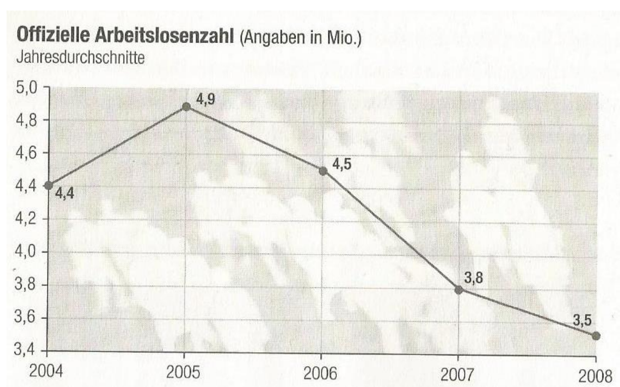


Abbildung 39: Rückgang der Arbeitslosigkeit

Korrekterweise müsste die Darstellung aber so aussehen, siehe Abbildung 40.

Abbildung 40: korrekte Darstellung

> In der in den Zeitungen gebrachten Darstellung liegen gleich zwei Tücken. Einerseits wurde der Ausschnitt auf der x-Achse so gewählt, dass es den Eindruck erweckt, als hätte man sich gerade von einer Krise erholt. Anfangs steigt die Kurve noch, dann jedoch fällt sie stark ab. Dass sich die Arbeitslosigkeit seit 1991 in diesem Auf und Ab befindet wird so geschickt ausgeblendet. Zusätzlich wird die y-Achse unvollständig angezeigt, und zwar beginnt sie nicht bei null, sondern erst bei 3,4. Dadurch wirken die Veränderungen viel größer. Außerdem vermittelt die Grafik so auch noch das Gefühl, als würde die Arbeitslosigkeit gegen null gehen, was tatsächlich nicht stimmt. Die drei Millionen Arbeitslose, die hier quasi abgeschnitten wurden, fallen so unter den Tisch (vgl. Bosbach/Korff, 2011, S.34f.).

Auch das Bundesinstitut bifie ist nicht vor solchen Fehlern geschützt. So sah eine Aufgabe aus den Modellschularbeiten für die neue standardisierte schriftliche Reifeprüfung[55] wie in Abbildung 41 dargestellt aus. Die Grafik wurde offensichtlich bei 500 000 abgeschnitten, wodurch die Unterschiede zwischen den einzelnen Werten viel größer wirken als sie eigentlich sind. Problematisch wird das dann vor allem im Zusammenhang mit der Aufgabenstellung. Die hier bereits durchgeführte Rechnung ermittelt die Veränderung der Kriminalität von 2010 im Vergleich zu 2009 und liefert das Ergebnis, dass diese um 9,4 % zurückgegangen ist. Betrachtet man aber die Grafik, so vermittelt diese den Eindruck, als wäre die Kriminalität um mehr als 50 % gesunken.

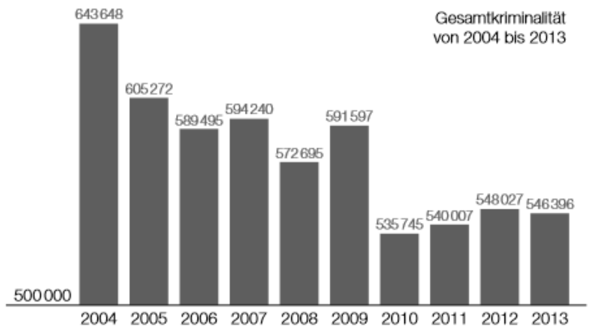
Vorsicht ist auch bei dreidimensionalen Darstellungen geboten, da hier durch entsprechende Blickwinkel schnell fehlerhafte Eindrücke vermittelt werden können. Außerdem muss dabei auf die Übereinstimmung der Proportionen geachtet werden, was vor allem im Zusammenhang mit Piktogrammen wichtig ist. Wird beispielsweise zur Darstellung des Doppelten eines Ausgangswertes jede Seite eines Quaders verdoppelt, so verachtfacht sich das Volumen. Man hat also nicht das Doppelte, sondern das Achtfache dargestellt. Genauso muss bei zweidimensionalen Piktogrammen die Fläche proportional zur Änderung wachsen oder schrumpfen und nicht etwa die Höhe (vgl. Bosbach/Korff, 2011, S.279).

Im Lehrbuch „Das ist Mathematik 2" und im Lehrbuch „Mathematik verstehen 6" wird dieses Thema bereits unter dem Kapitel „Interpretieren von graphischen Darstellungen" (vgl. Reichel et al., 2011,

[55] Bundesinstitut bifie
https://www.bifie.at/system/files/dl/MAT_MS_Aufgabenheft_Teil_1_2014-12-10.pdf
Stand: 16.10.2015

Kriminalstatistik

In der unten stehenden Grafik ist die Anzahl aller zur Anzeige gebrachten Kriminalfälle pro Jahr in Österreich („Gesamtkriminalität") im Zeitraum von 2004 bis 2013 dargestellt. Die angeführten Zahlen geben dabei an, wie viele Anzeigen im jeweiligen Jahr erstattet wurden.



Datenquelle: Bundeskriminalamt (Hrsg.) (2014). *Die Entwicklung der Kriminalität in Österreich 2004 bis 2013. Neue Herausforderungen für die Kriminalpolizei.* Wien. Verfügbar unter: http://www.bmi.gv.at/cms/BK/publikationen/krim_statistik/2013/2732014_KrimStat_2013_Broschuere.pdf [21.10.2014]. S. 7.

Aufgabenstellung:

Lena rechnet unter Einbeziehung der Grafik: $\frac{535\,745 - 591\,597}{591\,597} \approx -0{,}094$.

Interpretieren Sie das Ergebnis Ihrer Berechnung im gegebenen Kontext!

Abbildung 41: Modellschularbeit Dezember 2014, Aufgabe 8

S.152) beziehungsweise „Lügen mit Statistik" (vgl. Malle et al., 2015, S.208f.) angesprochen. Jedoch kann dies im Unterricht durchaus noch ausführlicher thematisiert werden. Vor allem unter Einbeziehung von Excel können Manipulationsmöglichkeiten für SchülerInnen erfahrbar gemacht werden. Hier können beispielsweise Achsen beliebig abgeschnitten oder gestaucht beziehungsweise in die Länge gezogen werden. So kann unter Rechtsklick ▶ Achse formatieren ▶ Achsenoptionen schnell aus einem geringen Vorsprung ein großer, siehe Abbildung 42, oder aus einem gleichmäßigen Auf-und-Ab-Verlauf ein steiler Anstieg, siehe Abbildung 43, gemacht werden.

Im ersten Fall wurde nur die vertikale Achse verändert, und zwar durch Erhöhen des Minimums auf den Wert 10. Beim zweiten Beispiel wurden beide Achsen verändert. Auf der vertikalen Achse wurde wie auch schon vorhin das Minimum erhöht, hier auf den Wert 5. Zusätzlich wurde noch die horizontale

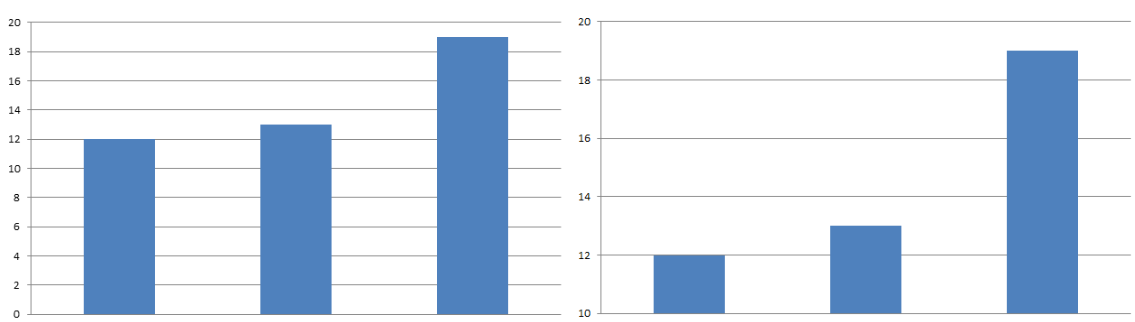


Abbildung 42: Manipulation der y-Achse

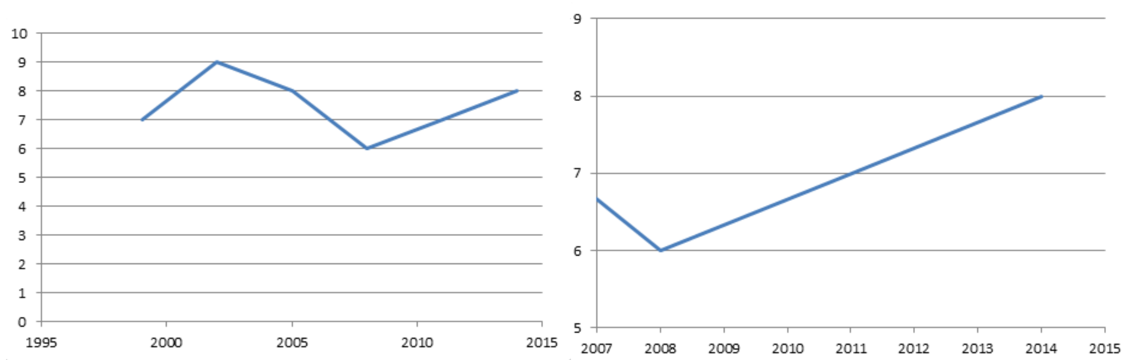


Abbildung 43: Manipulation beider Achsen

Achse abgeschnitten, indem auch hier das Minimum verändert wurde, nämlich von 1995 auf 2007.

In Geogebra ist eine Manipulation nicht ganz so einfach möglich. In der Tabellen-Ansicht gibt es keine Möglichkeiten die Darstellungen zu manipulieren, außer man manipuliert die Daten selbst. Arbeitet man in der Grafik-Ansicht, so kann die y-Achse durch Änderung des Achsenverhältnisses zwar beliebig gedehnt beziehungsweise gestaucht werden, jedoch nicht wie in Excel einfach abgeschnitten. Natürlich kann der Schnittpunkt der Achsen verändert werden, jedoch verändert sich das Diagramm dabei nicht mit.

6.4 Lineare Regression und Korrelation

Bei vielen empirischen Untersuchungen interessiert man sich nicht nur für die Auswertung einzelner Merkmale, sondern für Zusammenhänge zwischen den Merkmalen. So stehen Fragen wie beispielsweise „Gehen gute Leistungen in Mathematik mit guten Leistungen in den Naturwissenschaften, wie Physik, Chemie, etc. einher?” oder „Gibt es einen signifikanten Zusammenhang zwischen dem Bildungsgrad der Eltern und ihrer Anzahl an Kindern?” häufig im Mittelpunkt des Interesses. Fälschlicherweise wird dann in der Praxis oft auf einen kausalen Zusammenhang geschlossen, welcher aber tatsächlich nicht vorliegt.

6.4.1 Lineare Regression

Für die Schule relevant und deshalb hier besprochen wird nur jener Fall, bei dem zwei Merkmale X und Y, die gleichzeitig an einem Merkmalsträger erhoben worden sind, miteinander verglichen werden. Beispiele dafür sind Körpergröße und Körpergewicht bei Personen, Nettoeinkommen und Mietkosten für das Wohnen oder schulische Leistungen und Bildungsstand der Eltern. Diese hier beobachteten Werte werden durch Paare reeller Zahlen (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) dargestellt. Diese Datenpaare werden anschließend in ein Koordinatensystem eingezeichnet, wodurch eine Punktwolke entsteht, siehe Abbildung 44. Mithilfe einer mathematischen Funktion wird nun versucht, diese Punktwolke bestmöglich zu beschreiben. Die erste und die letzte Punktwolke legen beispielsweise einen linearen Zusammenhang nahe, wohingegen die dritte Punktwolke eher auf einen quadratischen Zusammenhang schließen lässt. Die zweite Punktwolke dagegen lässt überhaupt keinen Zusammenhang vermuten.

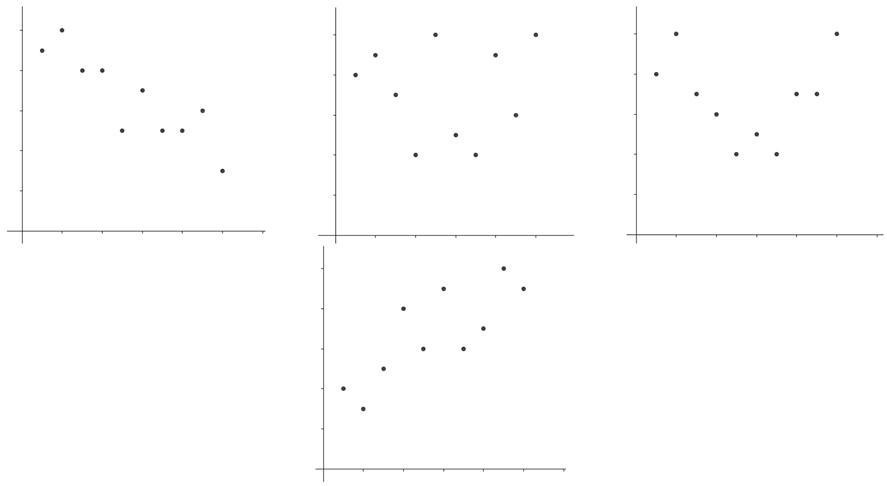


Abbildung 44: unterschiedliche Punktwolken

Im Folgenden wird nur der Fall eines linearen Zusammenhangs besprochen. Die entsprechende mathematische Funktion dabei ist dann natürlich eine lineare Funktion, auch Regressionsgerade genannt (vgl. KÜTTING, 1994, S.111ff.). Anhand eines Beispiels wird der Modellbildungsprozess gut ersichtlich.

Beispiel 12a
Gegeben sei die gemeinsame Verteilung der Merkmale Körpergröße X (in cm) und Körpergewicht Y (in kg) von 19 SchülerInnen. Die Urliste besteht aus folgenden 19 Datenpaaren (x_i, y_i): (140; 32), (148; 41), (139; 31), (146; 41), (145, 39), (152, 55), (153; 45), (149; 44), (151; 49), (144; 43), (146; 37), (143; 38), (147; 48), (142; 35), (148; 42), (151; 52), (145; 37), (142; 38), (149; 41)
Überträgt man diese in ein Koordinatensystem, so erhält man folgende Punktwolke: Abbildung 45.

Mithilfe dieser Punktwolke lässt sich rasch ein linearer Zusammenhang erkennen. Die Aufgabe liegt nun darin, eine Gerade der Form $y = ax + b$ zu bestimmen, die sich der Punktwolke möglichst genau anpasst. Als erste Annäherung kann diese frei, per Augenmaß, durch die Punktwolke gelegt werden und aus der Grafik a und b abgelesen werden.
Zur anschließenden genauen Berechnung muss man sich zunächst fragen, was nun „möglichst genau anpasst" tatsächlich bedeutet. Die Grundidee dabei ist, dass die Abweichungen der tatsächlich gemessenen Werte, also y_i, von den entsprechenden Werten auf der Geraden, also $\hat{y}_i = ax_i + b$, minimal sein sollen. Dazu gibt es verschiedene Methoden, die günstigste ist aber die „Methode der kleinsten Quadrate". Hier fordert man, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen der $\hat{y}_i$ von den y_i, also die Summe $\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2$, minimiert werden soll, siehe Abbildung 46, woraus sich schließlich eindeutige a und b ergeben (vgl. KÜTTING, 1994, S.114f.).
Für die Schule ist die exakte Herleitung der Formeln für die Bestimmungsstücke a und b meist zu komplex. Der Vollständigkeit halber jedoch wird sie im Folgenden angeführt.

Herleitung der Regressionsgeraden

Es ist also $\hat{y}_i = ax_i + b$, woraus $\hat{y}_i - y_i = ax_i + b - y_i$ folgt. Die Summe S der Quadrate, nämlich $S(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$, ist die nun zu minimierende Funktion. Bevor die

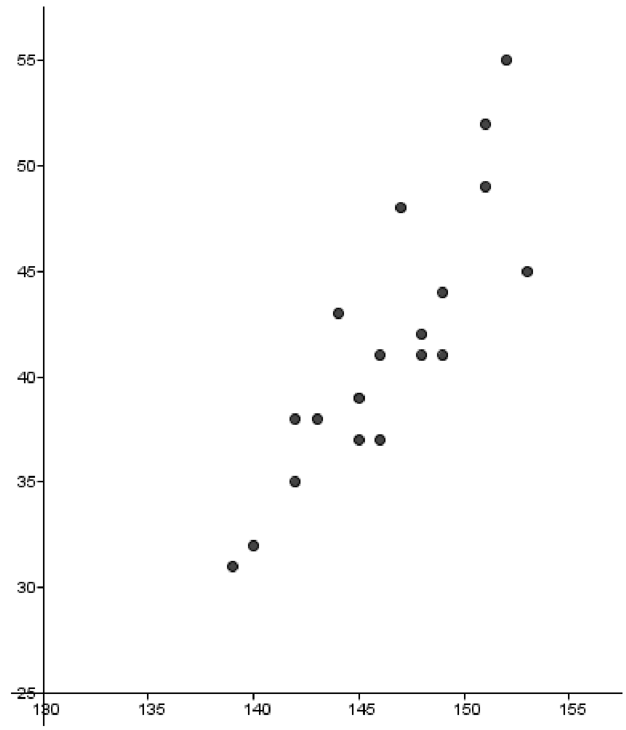


Abbildung 45: Punktwolke zu Beispiel 12a

partiellen Ableitungen gebildet werden, empfiehlt sich die Auflösung des quadratischen Terms mithilfe der binomischen Formel. Das heißt für S ergibt sich $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(a^2x_i^2+2abx_i-2ax_iy_i+b^2-2by_i+y_i^2)$. Nun bildet man die partielle Ableitung nach a und jene nach b.

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n}(2x_i^2a + 2bx_i - 2x_iy_i) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (ax_i + b - y_i)$$

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n}(2ax_i + 2b - 2y_i) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)$$

Um ein Minimum zu erhalten, werden nun die partiellen Ableitungen gleich null gesetzt. Für die partielle Ableitung nach b ergibt sich unter der Berücksichtigung, dass $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ ist, Folgendes:

$2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} ax_i + \sum_{i=1}^{n} b - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \Rightarrow a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot b - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \Rightarrow n \cdot b = \sum_{i=1}^{n} y_i - a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - a \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x}$

Das wird nun in die partielle Ableitung nach a eingesetzt, diese gleich 0 gesetzt und anschließend passend umgeformt.

$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (ax_i + \bar{y} - a\bar{x} - y_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + x_i\bar{y} - a\bar{x}x_i - x_iy_i) = 0 \Rightarrow a \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \bar{x}x_i) + \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y} - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = 0 \Rightarrow a \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \bar{x}x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y} \Rightarrow a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \bar{x}x_i)}$

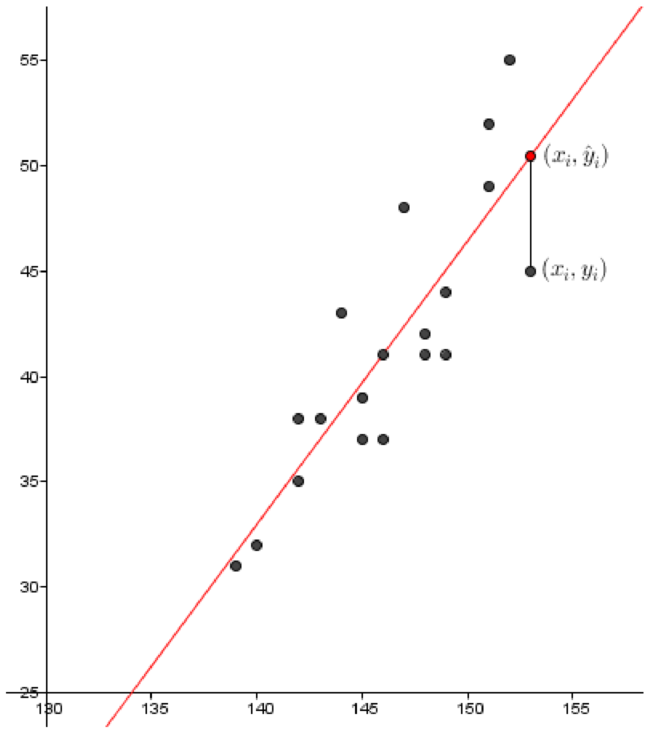


Abbildung 46: Abweichung von $\hat{y}_i$ von y_i

Dieser Term kann nun mithilfe von $n\bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ noch weiter vereinfacht werden.

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y} n \bar{x}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x} n \bar{x}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}$$

Somit erhält man eine eindeutige Formel zur Berechnung von a. Für b ergibt sich daraus: $b = \bar{y} - \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2} \cdot \bar{x}$.

Interessant ist hier noch, dass der Schwerpunkt, das ist $(\bar{x}, \bar{y})$, in jedem Fall auf der Regressionsgeraden liegt. Das kann schnell durch einfaches Einsetzen gezeigt werden, nämlich $a \cdot \bar{x} + (\bar{y} - a \cdot \bar{x}) = \bar{y}$.

Nun kann also die Regressionsgerade exakt berechnet werden. Dabei ergibt sich für $a = 1,35$ und für $b = -155,46$, was sich wie folgt darstellen lässt: Abbildung 47.

In der Praxis wird die Regressionsgerade oftmals dazu verwendet, Trends zu beschreiben. Vor allem im Hinblick auf Zeitreihen, also beispielsweise bei der Entwicklung der Geburtenzahl oder aber bei der Preisentwicklung eines bestimmten Produkts, ist sie ein hilfreiches Mittel. Doch daraus resultierende Vorhersagen müssen kritisch betrachtet werden. Grundlage für die Regressionsgerade sind nämlich immer gegebene Punktepaare aus einem bestimmten Wertebereich, beziehungsweise bei Zeitreihen aus einem bestimmten Zeitintervall. Deshalb liefert die Regressionsgerade auch nur für diesen Bereich eine korrekte Beschreibung des Zusammenhangs. Würden noch weitere Daten hinzukommen, könnte die

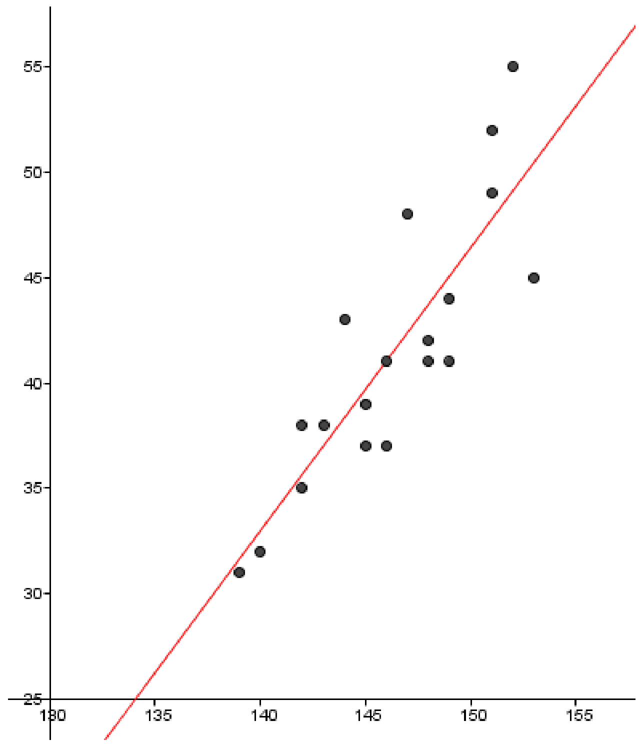


Abbildung 47: Regressionsgerade zu Beispiel 12a

Gerade ganz anders aussehen und würde so auch eine andere Vorhersage liefern (vgl. KÜTTING, 1994, S.117).

6.4.2 Korrelation

Wie aus den obigen Formeln für a und b außerdem ersichtlich ist, kann die Regressionsgerade immer aufgestellt werden. Das heißt, auch wenn kein linearer Zusammenhang gegeben ist, lässt sich aus rein mathematischer Sicht eine Regressionsgerade finden. Hat man also eine Regressionsgerade zu einem Sachproblem gegeben, ist für dessen richtige Interpretation eine Information darüber, wie gut die Geradengleichung das Sachproblem approximiert, unerlässlich. Dieses Maß für die Stärke des linearen Zusammenhangs wird durch den Korrelationskoeffizienten angegeben. Ähnlich wie bei der Bestimmung der Regressionsgeraden wurden auch hier verschiedene Methoden zur Berechnung der Korrelation entwickelt, jedoch hat sich eine besonders durchgesetzt: der **Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson**.[56]

Herleitung des Korrelationskoeffizienten

Die Idee hinter diesem ist, die Streuung der Punkte um die Regressionsgerade zu ermitteln. Das heißt, man vergleicht die Varianz der $\hat{y}_i$- Werte, also jenen auf der Regressionsgerade, mit der Varianz der

[56]August Bravais (1811-1863), Karl Pearson (1857-1936)

y_i- Werte, also den tatsächlich erhobenen Werten. Liegt nun ein starker linearer Zusammenhang vor, so müssen die Varianzen annähernd übereinstimmen.

Dafür ist aber zunächst noch die Klärung eines weiteren Begriffs nötig, nämlich der der *Kovarianz:*

Definition: Kovarianz
Für zwei Merkmale seien die beiden Datenreihen $x_1, ..., x_n$ und $y_1, ..., y_n$ mit arithmetischen Mitteln $\bar{x}$ und $\bar{y}$ gegeben. Dann heißt $s_{xy} := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$ die Kovarianz der beiden Datenreihen.

Durch geschickte Umformungen erhält man daraus

$s_{xy} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \bar{x} y_i + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \bar{x}\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i + \bar{x}\bar{y} \cdot \frac{1}{n} \cdot n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y}\bar{x} - \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}.$

Damit kann auch die Formel für a etwas schöner geschrieben werden, denn $a = \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}.$

Zur Herleitung des Korrelationskoeffizienten wird nun wieder von n Datenpaaren $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ mit dem Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ und der Regressionsgeraden $y = ax + b$ ausgegangen. Dann gilt:

$\hat{y}_i - \bar{y} = ax_i + b - a\bar{x} - b = a \cdot (x_i - \bar{x}) \Rightarrow \hat{y}_i = a \cdot (x_i - \bar{x}) + \bar{y} = ax_i - a\bar{x} + \bar{y}$

Die Varianz der $\hat{y}_i$- Werte um ihr arithmetisches Mittel $\bar{\hat{y}}$ ist $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2$.

Nun ist aber

$\bar{\hat{y}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (ax_i - a\bar{x} + \bar{y}) = \frac{1}{n} \cdot (\sum_{i=1}^{n} ax_i - na\bar{x} + n\bar{y}) = \frac{1}{n} \cdot (\sum_{i=1}^{n} ax_i - na \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{y}) = \frac{1}{n} \cdot n\bar{y} = \bar{y}.$

Das heißt, das arithmetische Mittel der Werte aus der Erhebung ist gleich dem arithmetischen Mittel der zugehörigen Werte auf der Regressionsgeraden. Für die Varianz der $\hat{y}_i$- Werte ergibt sich dadurch Folgendes:

$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (ax_i - a\bar{x} + \bar{y} - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a^2 \cdot (x_i - \bar{x})^2 = a^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = a^2 \cdot s_x^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_x^4} \cdot s_x^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2}$

Dieser Wert wird nun mit der Varianz der y_i- Werte, also s_y^2, verglichen, indem der Quotient gebildet wird:

$\frac{s_{xy}^2}{s_x^2} : s_y^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 \cdot s_y^2}$

Diese Zahl ist das Maß für die Stärke des linearen Zusammenhangs der beiden Variablen.

Definition: Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson
Die Zahl $r := \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$ mit $s_x \neq 0$ und $s_y \neq 0$ heißt der Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson.

Dabei wird die Zahl r^2 als Bestimmtheitsmaß bezeichnet.

Setzt man nun wieder die Werte für s_{xy}, s_x und s_y ein, so erhält man
$r = \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}.$
Für diesen Wert gilt stets: $-1 \leq r \leq 1$.

Dieser Korrelationskoeffizient ist, wie aus seiner Herleitung hervorgeht, nur für metrisch skalierte Merkmale und lineare Zusammenhänge anwendbar. Sein Vorzeichen gibt die Richtung des Zusammenhangs

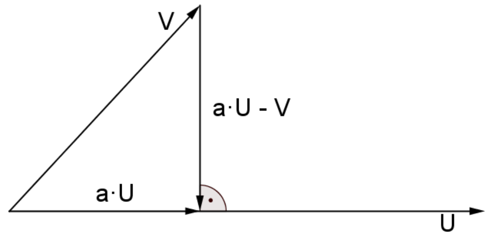


Abbildung 48: $a \cdot U - V \to Min.$

an, also ob die Merkmale positiv oder negativ miteinander korrelieren, und der absolute Betrag drückt die Stärke des Zusammenhangs aus. Liegt der Betrag zwischen 0 und 0,5, so spricht man von einer schwachen Korrelation, wohingegen Beträge zwischen 0,8 und 1 auf eine starke Korrelation hinweisen (vgl. KÜTTING, 1994, S.118ff.).

Beispiel 12b
Für die Daten aus *Beispiel 12a* kann nun auch der Korrelationskoeffizient berechnet werden: $r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{21{,}84}{4{,}03 \cdot 6{,}35} = 0,8533$
Zwischen den Merkmalen Körpergröße und Gewicht herrscht also ein starker linearer Zusammenhang. Man spricht von einer starken positiven Korrelation.

Alternativ zu diesen sehr analytischen Herleitungen der Regressionsgeraden und des Korrelationskoeffizienten kann auch ein geometrischer Zugang gewählt werden.

Es wird gefordert, dass die Summe der vertikalen Abstände verschwindet: $\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0$. Dazu ist zunächst eine günstige Wahl des Koordinatensystems hilfreich, und zwar so, dass der Schwerpunkt $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ der Datenpaare im Ursprung liegt. Dadurch ändern sich natürlich die Koordinaten der Datenpaare, nämlich zu $\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i - \bar{x} \\ y_i - \bar{y} \end{pmatrix}$, und es ist $\bar{u} = \bar{v} = 0$. Daraus folgt außerdem, dass$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} v_i = 0$.

Da $\sum_{i=1}^{n}(au_i + b - v_i) = a \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i + n \cdot b - \sum_{i=1}^{n} v_i = 0$ gelten soll, muss $n \cdot b = 0$ und somit $b = 0$ sein. Das heißt, die gesuchte Gerade geht durch den Schwerpunkt der Datenpaare. Zu minimieren ist nun zusätzlich die Summe der Abstandsquadrate, wobei $b = 0$ vorausgesetzt wird, also $\sum_{i=1}^{n}(au_i - v_i)^2$. Ist $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ und $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, dann wird, um die Summe zu minimieren, a so gesucht, dass der Vektor $a \cdot U - V$ möglichst kurz wird. Grafisch ist dies in Abbildung 48 veranschaulicht. Dies ist genau dann der Fall, wenn V auf U projiziert wird und so $a \cdot U - V$ normal auf $a \cdot U$ steht. Dann gilt:

$(a \cdot U - V) \cdot a \cdot U = 0 \;/ : \; a \,(\neq 0) \Rightarrow a \cdot U^2 - U \cdot V = 0 \Rightarrow a \cdot U^2 = U \cdot V \Rightarrow a = \frac{U \cdot V}{U^2}$

Wird das nun wieder mithilfe der ursprünglichen Koordinaten ausgedrückt, so ergibt sich für a Folgendes:

$$a = \frac{\begin{pmatrix} x_i - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_n - \bar{y} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{pmatrix}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i + \bar{x}\bar{y} \cdot n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + \bar{x}^2 \cdot n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y} \cdot n\bar{x} - \bar{x} \cdot n\bar{y} + n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}n\bar{x} + n\bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}$$

Das entspricht der Formel für a nach der analytischen Herleitung. Wie eingangs schon festgestellt wurde, muss die Gerade durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ gehen, woraus $b = \bar{y} - a\bar{x} = \bar{y} - \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2} \cdot \bar{x}$ folgt. Damit kann die Regressionsgerade aufgestellt werden.

Auch der Korrelationskoeffizient, der als Maß für die Stärke des linearen Zusammenhangs gilt, kann mithilfe geometrischer Überlegungen anschaulich hergeleitet werden. Liegen nämlich alle Daten auf einer Geraden, das heißt die Daten weichen minimal von der Geraden ab, so ist $V = a \cdot U$ und $\cos(U, V) = \pm 1$. Die maximale Abweichung der Daten von der Geraden ist dann gegeben, wenn U normal auf V steht beziehungsweise $\cos(U, V) = 0$ ist. Die Bestimmung von $\cos(U, V) = \frac{U \cdot V}{|U| \cdot |V|}$ liefert also ein gutes Maß für den linearen Zusammenhang.

Da $U = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{pmatrix}$ und $V = \begin{pmatrix} y_1 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_n - \bar{y} \end{pmatrix}$ ist, gilt für den Zähler $U \cdot V = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ und für den Nenner $\mid U \mid \cdot \mid V \mid = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}$. Daraus folgt: $\cos(U, V) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$.

Das entspricht dem Korrelationskoeffizienten nach der analytischen Herleitung[57].

Auch hier ist die korrekte Interpretation das Um und Auf. Wie schon eingangs erwähnt, tendieren Meinungsmacher häufig dazu, von einer Korrelation auf eine kausale Abhängigkeit zweier Größen zu schließen. Darüber, ob ein kausaler Zusammenhang zwischen zwei Größen besteht, kann jedoch das mathematische Modell nichts aussagen. Selbst bei einer sehr starken Korrelation lässt sich dies nicht ohne weiteres folgern. Nur das Sachproblem selbst kann die Frage der Kausalität beantworten.

Das klassische Lehrbuchbeispiel dazu ist, dass in schwedischen Landkreisen zur gleichen Zeit eine Abnahme der Störche und eine Abnahme der Geburten beobachtet wurden. Dass hier jedoch kein kausaler Zusammenhang vorliegt, ist wohl trotz hoher Korrelation für jede/n offensichtlich. Aber nicht immer ist das so.

[57] siehe S.118

Von Seiten mancher Politiker wird immer wieder auf die positive Korrelation von Ausländeranteil und Kriminalität verwiesen, mit der Absicht, den Eindruck einer Kausalität zu schaffen. Das passiert im Glauben, dieses Vorurteil statistisch untermauern zu können. Tatsächlich werden dabei aber wichtige Hintergrundvariablen vernachlässigt, wie etwa die Größe der Städte. Denn, und das ist leicht einzusehen, große Städte ziehen sowohl Ausländer, als auch Kriminelle an. Deshalb gehen mit zunehmender Größe der Stadt beide Variablen, Ausländeranteil und Kriminalität, gleichermaßen in die Höhe. Ob nun also tatsächlich ein kausaler Zusammenhang zwischen den beiden Faktoren besteht, darf daher keineswegs allein aus der Korrelation geschlossen werden.

Das hier aufgetretene Problem der vergessenen dritten Variable, der Hintergrundvariable, ist stark verbreitet. Oftmals gibt es eine Sache C, die als Ursache sowohl für eine Sache A, als auch eine Sache B, gilt. Zwischen A und B gibt es jedoch keinen kausalen Zusammenhang. Eine der wohl am häufigsten vergessene Variable ist die Zeit. Zeitreihendaten wie beispielsweise die Lebenserwartung, das Bruttoinlandsprodukt und die Erdbevölkerung oder die Anzahl der Fische im Meer und die Größe der Urwälder weisen meist aus verschiedensten Gründen einen eher monotonen Trend auf. Erstere steigen und letztere fallen mit der Zeit. Da diese Größen also alle einem dieser beiden Trends folgen, korrelieren sie auch automatisch positiv oder negativ miteinander. Keinesfalls darf aber aus dieser gleichen beziehungsweise gegengleichen zeitlichen Entwicklung auf einen kausalen Zusammenhang geschlossen werden. Genau so entstehen in der Praxis aber häufig beängstigende Schlagzeilen, wie „erhöhter Blutdruck durch Fluglärm", „erhöhtes Krebsrisiko bei Fleisch und Wurstessern", „Googeln mit Smartphone macht denkfaul" und viele mehr.

Tatsächlich kann eine Korrelation nämlich auf verschiedene Zusammenhänge hinweisen.
Entweder es tritt der schon besprochene Fall der dritten Variable als Verursacher ein, oder aber es liegt tatsächlich ein kausaler Zusammenhang vor. Dann stellt sich aber noch die Frage, welche Größe von welcher abhängt. So kann es sein, dass A die Ursache von B ist, oder aber B die Ursache von A, oder dass sich beide wechselseitig bedingen, also eine zweiseitige Kausalität herrscht. Und dann gibt es noch eine weitere Möglichkeit, wie sich die Korrelation erklären lässt, und das ist der Zufall (vgl. Bosbach/Korff, 2011, S.51ff.).

Abschließend soll noch angemerkt werden, dass es nicht immer einfach ist, Fehler und Manipulationen zu erkennen. Vieles bleibt dem Leser beziehungsweise der Leserin einer Statistik nämlich verborgen, wie etwa, wie die Daten erhoben wurden, wer die Umfrage in Auftrag gegeben hat oder auch die genaue Art der Fragestellung. All diese Dinge wirken sich maßgeblich auf das Ergebnis aus. Um Statistiken dennoch bestmöglich zu prüfen, kann man sich folgende vier Fragen stellen:

- Woher kommen die Daten?
  Hier ist einerseits gefragt, wer die Erhebung durchgeführt hat und welche Methode angewandt wurde und andererseits, wer die Studie in Auftrag gegeben hat.

- Können die Zahlen stimmen?
  Über einfache Überschlagsrechnungen können Fehler oftmals schnell entdeckt werden.

- Was genau wird beschrieben?
  Vor allem bei der Angabe von Häufigkeiten, sei es absolut oder prozentuell, ist es wichtig, zu

unterscheiden, ob sie Veränderungen oder absolute Werte beschreiben, wie anhand von Beispiel 10 zu sehen war.

- Was zeigt die Grafik?
  Grafiken sind ein besonders beliebtes Mittel zur Manipulation, weshalb diese immer genauestens hinsichtlich der Skalierung der Achsen oder möglichen optischen Effekten, wie 3D-Effekten, untersucht werden müssen.

6.5 Konkrete Unterrichtsvorschläge

In diesem Abschnitt werden ein paar mögliche Unterrichtseinheiten zu den eben besprochenen Inhalten präsentiert. Wie es auch schon bei den beiden vorigen Themen der Fall war, bietet sich auch dieses gut für einen fächerübergreifenden Unterricht an. So spielen Statistiken auch im Unterrichtsfach „Geographie und Wirtschaftskunde" eine wichtige Rolle, können im Deutschunterricht Zeitungsartikel mit statistischen Inhalten bearbeitet werden, und im Fach „Psychologie und Philosophie" kann zu den Themen Kommunikation und Wahrnehmungsbeeinflussung gearbeitet werden.

Die nun folgenden Unterrichtseinheiten betreffen hauptsächlich die Bereiche „Prozentangaben" und „Grafische Darstellungen", da diese im Zusammenhang mit politischer Bildung am Wesentlichsten sind. Zum Kapitel „Mittelwerte" findet sich bereits viel in den Schulbüchern, wie etwa in „Das ist Mathematik 4", wo unter anderem anhand von Einkommensdaten auf die Unterscheidung von Median und arithmetisches Mittel eingegangen wird (vgl. Reichel et al., 2012, S.138). Auch das Thema „Lineare Regression" ist schon gut erfasst, siehe „Mathematik verstehen 6", wo auch auf die Unrichtigkeit des Schließens auf einen kausalen Zuammenhang verwiesen wird (vgl. Malle et al., 2013, S.228f.). Das Hauptaugenmerk der hier präsentierten Unterrichtseinheiten liegt auf der Demonstration, wie Zahlen und Daten im Rahmen unterschiedlicher politischer Anschauungen verschieden verwendet und dargestellt werden können.

6.5.1 Unterrichtseinheit „Absolute und relative Häufigkeiten", 2. Klasse

- *Lehrplanbezug*
  Diese Stunde kann im Lehrplan der 2. Klasse AHS-Unterstufe den Unterpunkten „relative Häufigkeiten ermitteln können" und „Manipulationsmöglichkeiten erkennen" aus dem Bereich „Arbeiten mit Modellen, Statistik" zugeordnet werden[58]. Sie behandelt hinsichtlich der Bildungsstandards den Inhaltsbereich I4 (Arbeiten mit statistischen Darstellungen und Kenngrößen)[59].

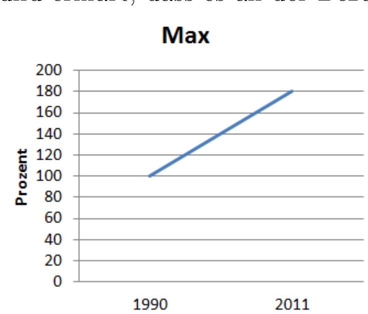
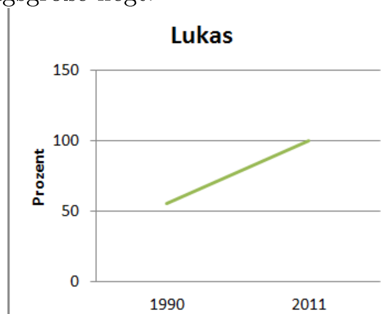
- *Lernvoraussetzungen/Einbettung im Unterricht*
  SchülerInnen sollen bereits sicher sein im Umgang mit Brüchen und Prozenten. Aus der 1. Klasse sind bereits einfache Diagramme bekannt, welche nur noch wiederholt werden müssen. Diese Stunde dient als Einführung in das Thema Statistik in der 2. Klasse.

[58] vgl. Bundesministerium für Bildung und Frauen. Lehrplan AHS-Unterstufe. S.6
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2
Stand: 08.11.2015

[59] vgl. Bundesinstitut bifie. Bildungsstandards. S.5
https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_sek1_kompetenzbereiche_m8_2013-03-28.pdf
Stand: 06.11.2015

- *Stundenbild*

Zeit	Stundenverlauf	Materialien /Medien	Sozialform
15 min	*Einführung „Absolute und relative Häufigkeiten" über Lieblingsfach der SuS* (Anm.: oder über Geburtsmonat, Anzahl der Geschwister, etc.) L erfragt nach der Reihe das Lieblingsfach der SuS. Mittels Stricherlliste wird die Anzahl der Nennungen eines Faches festgehalten, wie etwa hier: Sport: ||||... Deutsch: ||.. Musikerziehung: |||.. ⋮ ⋮ $\sum$ =Anzahl der SuS Anhand dieser wird der Begriff der absoluten Häufigkeit erklärt. Anschließend wird der Anteil eines Faches an der Gesamtanzahl berechnet (die ersten zwei gemeinsam, dann in EA), und als relative Häufigkeit, die entsprechende Angabe in Prozent als prozentuelle Häufigkeit definiert. Angenommen in der Klasse sind 26 SuS, dann könnte die Tabelle so aussehen: Lieblingsfach / absolute Häufigkeit / relative Häufigkeit / prozentuelle Häufigkeit Sport / 9 / $\frac{9}{26} \approx 0,346$ / 34,6 % Deutsch / 5 / $\frac{5}{26} \approx 0,192$ / 19,2 % Musikerziehung / 4 / $\frac{4}{26} \approx 0,154$ / 15,4 % ⋮ / ⋮ / ⋮ / ⋮	Tafel	L-S-Gespräch
10 min	*Wiederholung Säulen- und Balkendiagramm.* Zu den eben erhobenen absoluten Häufigkeiten wird gemeinsam mit den SuS ein Säulendiagramm angefertigt. SuS zeichnen selbstständig ein Balkendiagramm dazu ins Heft.	Tafel, Heft	L-S-Gespräch, EA
10 min	Beispiel: (H1 K1 und H2 K1) Bei einer Abstimmung über die Einführung einer Geschwindigkeitsbegrenzung in einem Wohnviertel gaben alle 120 BewohnerInnen ihre Stimme ab. 52,5 Prozent stimmten für eine Geschwindigkeitsbegrenzung von 30 km/h. Wie viele Personnen stimmten für eine Geschwindigkeitsbegrenzung? Wie viele stimmten dagegen? Stelle die Ergebnisse in einem Diagramm dar!	Tafel, Heft,	EA

15 min	*mögliche Probleme im Umgang mit Häufigkeiten:* Beispiel 1: (H4 K1) Sarah und Karin vergleichen die Noten der letzten Mathematikschularbeit ihrer Klassen. In Sarahs Klasse haben 4 SchülerInnen einen 1er, in Karins Klasse sind es 6. Karin folgert daraus, dass ihre Klasse besser abgeschnitten hat. Ist das richtig? Gemeinsam mit den SuS wird das Bsp besprochen. Die Aussage muss nicht stimmen, da man nichts über die GesamtschülerInnenzahl weiß. Möglicherweise sind in Sarahs Klasse weniger SuS als in Karins, wodurch der prozentuelle Anteil derer, die einen 1er haben, in Sarahs Klasse höher ist als in Karins. Beispiel 2: (H4 K1) Zwei Firmen vergleichen ihre Verkaufszahlen der letzten beiden Jahre. Firma A konnte seine Verkäufe um 80 % gegenüber dem Vorjahr steigern, Firma B nur um 15 %. Firma A ist also klar erfolgreicher. Ist das richtig? Mit SuS wird besprochen, warum auch dieses Aussage nicht immer stimmen muss. Problem hier ist, dass man keine Angaben über die absoluten Verkaufszahlen hat und deshalb nicht sagen kann, wer mehr verkauft hat. Beispiel 3: (H4 K1) Max und Lukas vergleichen Preise. Im Jahr 1990 hat eine Semmel umgerechnet 0,15 € gekostet, im Jahr 2011 sind es schon 0,27 €. Max sagt, der Preis hat sich um ganze 80 % erhöht. Lukas entgegnet ihm, dass das nicht stimme, sie kostete 1990 etwas mehr als die Hälfte vom Preis von 2011. Wer hat Recht? Gemeinsam mit den SuS wird geklärt, dass beide Aussagen richtig sind. Es wird der Frage nachgegangen, wo der Unterschied liegt. L zeichnet dazu zwei Diagramme an die Tafel und erklärt, dass es an der Bezugsgröße liegt.  Hausübung (AB)	Tafel, Heft	L-S-Gespräch

AB HAUSÜBUNG

1. Beispiel (H2 K1)
   Bei einer Umfrage zur Zufriedenheit mit ihrer Arbeitsstelle antworteten 117 der Befragten, das sind 26 %, mit „sehr zufrieden". 279 antworteten mit „mittelmäßig zufrieden" und der Rest antwortete mit „unzufrieden".

a) Wie viele Personen wurden insgesamt befragt?

b) Wie viel Prozent der Befragten sind „mittelmäßig zufrieden" und wie viel Prozent sind „unzufrieden"?

2. Beispiel (H1 K1 und H2 K1)
   Im Jahr 1990 kostete 1 l Benzin etwa 0,65 €. Im Jahr 2011 waren das schon 1,55 €. Berechne die prozentuelle Preisentwicklung auf zwei Arten und stelle beide grafisch dar! (Preis von 1990 = 100 % vs. Preis von 2011 = 100 %)

3. Beispiel (H4 K1)
   Bei der Schulsprecherwahl erhielt Tobias 43 Stimmen von den SchülerInnen der 1. Klassen und 32 von den SchülerInnen der 2. Klassen. Offensichtlich ist er in der 1. Klasse beliebter! Ist das immer richtig? Begründe deine Antwort!

Ziel: Die SchülerInnen können absolute, relative und prozentuelle Häufigkeiten berechnen und mit Säulen- und Balkendiagrammen darstellen. Insbesondere können sie bewerten, ob Häufigkeitsangaben korrekt sind, oder, ob wichtige Informationen fehlen.

6.5.2 Unterrichtseinheit „Prozentangaben", 3. Klasse

- *Lehrplanbezug*
  Diese Stunde spricht den Unterpunkt „Untersuchen und Darstellen von Datenmengen" aus dem Bereich „Arbeiten mit Modellen, Statstik" aus dem Lehrplan der 3. Klasse AHS-Unterstufe an[60]. Das entspricht wiederum dem Inhaltsbereich I4 (Arbeiten mit statistischen Darstellungen und Kenngrößen) der Bildungsstandards[61].

- *Lernvoraussetzungen/Einbettung im Unterricht*
  Die SchülerInnen sollen bereits mit negativen Zahlen rechnen können und sicher sein im Umgang mit Prozenten, darunter fallen auch Prozentpunkte. Aus der 2. Klasse können SchülerInnen schon mit Häufigkeiten und verschiedenen grafischen Darstellungsmöglichkeiten arbeiten. Die Stunde eignet sich als Einführung in das Thema Statistik in der 3. Klasse, da viel Bekanntes zunächst wiederholt und anschließend zu Neuem übergeleitet wird.

[60] vgl. Bundesministerium für Bildung und Frauen. Lehrplan AHS-Unterstufe. S.7
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2
Stand: 08.11.2015

[61] vgl. Bundesinstitut bifie. Bildungsstandards. S.5
https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_sek1_kompetenzbereiche_m8_2013-03-28.pdf
Stand: 06.11.2015

- *Stundenbild*

Zeit	Stundenverlauf	Materialien /Medien	Sozialform
15 min	*Wiederholung und Vertiefen* durch Bearbeitung des AB (Lärmbelästigung)	AB	EA

AB Lärmbelästigung

Bei einer Befragung im Vorjahr von 175 EinwohnerInnen einer Stadt zur Lärmbelästigung durch den Verkehr gaben 12 an, sich sehr stark belästigt zu fühlen, 43 fühlen sich eher stark belästigt, 92 fühlen sich kaum belästigt und 28 fühlen sich gar nicht belästigt.

1. Erstelle eine übersichtliche Tabelle mit den absoluten, relativen und prozentuellen Häufigkeiten zu den vier Kategorien! (H2 K1)

2. Kreuze die zutreffenden Aussagen an! (H3 K3)

Mehr als die Hälfte der Befragten fühlt sich durch den Verkehr sehr oder eher stark belästigt!	
Ungefähr 7 von 10 Befragten fühlen sich durch den Verkehr kaum oder gar nicht belästigt!	
Jeder Zwölfte fühlt sich durch den Verkehr sehr stark belästigt!	
Mehr als 80 % der Befragten fühlen sich durch den Verkehr belästigt!	
Nur etwa jeder Sechste fühlt sich durch den Verkehr gar nicht belästigt!	

Heuer wird eine neuerliche Befragung durchgeführt. Dabei stimmen von 175 Befragten nun 18 der Aussage zu, sich sehr stark belästigt zu fühlen, 51 fühlen sich eher stark belästigt, 75 fühlen sich kaum belästigt und 31 fühlen sich gar nicht belästigt.

1. Erstelle auch für diese Umfrage eine Tabelle mit dem absoluten, relativen und prozentuellen Häufigkeiten! Zeichne ein Säulendiagramm zu den prozentuellen Häufigkeiten aus dem Vorjahr und jenen aus dem heurigen Jahr. (Zeichne je zwei Säulen zu jeder Empfindung - eine, die den Wert aus dem Vorjahr anzeigt und eine, die den Wert aus diesem Jahr anzeigt.) (H1 K1 und H2 K1)

2. Berechne bei jeder Einschätzung die Differenz der absoluten Häufigkeiten. Gib diese sowohl als Veränderung in Prozentpunkten als auch als prozentuellen Anteil an der absoluten Häufigkeit aus dem Vorjahr an! (Achte auf das Vorzeichen!) (H2 K2)

<table>
<tr>
<td>15
min</td>
<td>Besprechung des AB
Zusatzaufgabe (gemeinsames Lösen): In dieser Stadt gibt es zwei große politische Parteien: Partei A möchte eine Umfahrung bauen, um den Lärm aus der Stadt zu bekommen. Partei B möchte keine Umfahrung.
Welche Zahlen würde Partei A präsentieren? Welche Partei B? (H3 K1)
kritische Auseinandersetzung mit der Frage, wie Daten abhängig von der politischen Einstellung unterschiedlich verwendet werden können.</td>
<td>Tafel</td>
<td>L-S-Gespräch</td>
</tr>
<tr>
<td>20
min</td>
<td>Einführung in Kreuztabellen
Anknüpfen an das AB durch folgenden Zusatz:
Es sind nun zusätzliche Infos zur heurigen Umfrage gegeben, nämlich das Geschlecht der Befragten. Das ist in folgender Tabelle dargestellt:
<table>
<tr><th></th><th>männlich</th><th>weiblich</th><th>insgesamt</th></tr>
<tr><td>„fühle mich sehr stark belästigt”</td><td>11</td><td>7</td><td>18</td></tr>
<tr><td>„fühle mich eher stark belästigt”</td><td>31</td><td>20</td><td>51</td></tr>
<tr><td>„fühle mich kaum belästigt”</td><td>32</td><td>43</td><td>75</td></tr>
<tr><td>„fühle mich gar nicht belästigt”</td><td>21</td><td>10</td><td>31</td></tr>
<tr><td>insgesamt</td><td>95</td><td>80</td><td>175</td></tr>
</table>
L zeichnet Tabelle an die Tafel (oder projiziert Tabelle mittels Beamer an die Wand) und erklärt Eintragungen.
gemeinsame Erarbeitung der Fragen: (H2 K1)

Wie viel Prozent der Frauen fühlen sich sehr stark belästigt? Wie viel Prozent der Männer?
Wie viel Prozent derer, die sich gar nicht belästigt fühlen, sind männlich?
Wie viel Prozent der insgesamt Befragten sind weiblich?
Wie viel Prozent der Männer fühlen sich kaum oder gar nicht belästigt? Wie viel Prozent der Frauen?

(Anmerkung: wichtig hierbei ist, bei jeder Frage genau festzuhalten (SuS notieren das auch im Heft), was der Grundwert ist und was der absolute Anteil)
Hausübung (AB)</td>
<td>Tafel, Heft</td>
<td>L-S-Gespräch</td>
</tr>
</table>

AB Hausübung

Anknüpfen an Beispiel aus der Stunde:

Zusätzlich zum Geschlecht ist nun auch noch bekannt, in welche Alterskategorie die einzelnen Befragten fallen. In der ersten Tabelle ist das für die weiblichen Befragten dargestellt, in der zweiten für die männlichen:

♀	unter 25	25 - 50	über 50
„fühle mich sehr stark belästigt”	0	2	5
„fühle mich eher stark belästigt”	3	6	11
„fühle mich kaum belästigt”	21	15	7
„fühle mich gar nicht belästigt”	4	2	4
insgesamt	28	25	27

♂	unter 25	25 - 50	über 50
„fühle mich sehr stark belästigt”	2	5	4
„fühle mich eher stark belästigt”	7	9	15
„fühle mich kaum belästigt”	14	11	7
„fühle mich gar nicht belästigt”	7	8	6
insgesamt	30	33	32

1. Beantworte folgende Fragen: (H2 K1)
   (Überlege zuerst, was der Grundwert ist und dann, was der absolute Anteil ist)

 – Wie viel Prozent der über 50-jährigen Frauen fühlen sich sehr oder eher stark belästigt? Auf wie viel Prozent der unter 25-jährigen Frauen trifft das zu?

 – Wie viel Prozent der Männer zwischen 25 und 50 Jahren fühlen sich kaum oder gar nicht belästigt?

 – Wie viel Prozent derer, die sich sehr stark belästigt fühlen sind über 50 Jahre alt?

 – Wie viel Prozent derer, die sich gar nicht belästigt fühlen sind jünger als 50 Jahre?

2. Fasse die Ergebnisse der Umfrage hinsichtlich Geschlecht und Alter in einem kurzen Text zusammen. Entwerfe mindestens eine kurze Schlagzeile aus Sicht von Partei A und eine aus Sicht von Partei B. (H1 K1)

Ziel: Die SchülerInnen sollen aus absoluten Häufigkeiten relative berechnen können, auch im Zusammenhang mit Kreuztabellen. Außerdem sollen sie erkennen, wie ein und dieselben Zahlen auf unterschiedliche Art bzw. für unterschiedliche Zwecke verwendet werden können, und so kritisch gegenüber solchen Angaben werden.

6.5.3 Unterrichtseinheit „Manipulation grafischer Darstellungen (unter Verwendung von Excel)”, 6. Klasse

- *Lehrplanbezug*
  Diese Stunde behandelt den Unterpunkt „Arbeiten mit Darstellungsformen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik” aus dem Bereich „Stochastik” des Lehrplans der 6. Klasse AHS-Oberstufe[62]. Bezüglich der Grundkompetenzen wird hauptsächlich
  WS 1.2 Tabellen und einfache statistische Grafiken erstellen, zwischen Darstellungsformen wechseln können
  angesprochen[63].
  Die Stunde ist nur unter Einsatz von Excel oder einem ähnlichen Programm durchführbar.

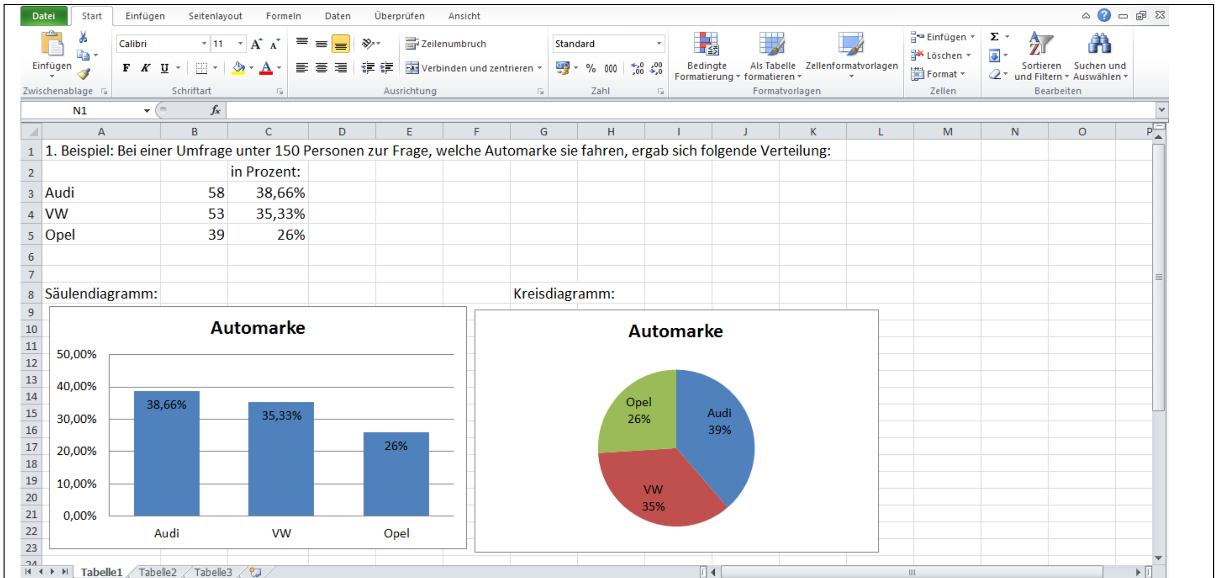
- *Lernvoraussetzungen/Einbettung im Unterricht*
  SchülerInnen kennen aus dem Unterstufenunterricht bereits grafische Darstellungsmöglichkeiten der Statistik. Mehr an mathematischem Wissen ist nicht notwendig, weshalb sich diese Stunde als Einführung in die beschreibende Statistik in der 6. Klasse eignet.
  Aus rein mathematischer Sicht kann sie auch schon in leistungsstarken Klassen in der Unterstufe durchgeführt werden, denn die Fähigkeit, Manipulationsmöglichkeiten bei grafischen Darstellungen zu erkennen, ist Teil des Lehrplans der 2. Klasse AHS-Unterstufe. Möchte man sie hier anwenden, muss jedoch etwas an Komplexität aus dem Beispiel genommen werden. Der reflexive Wert der Stunde ist aber in der Oberstufe sicherlich höher.

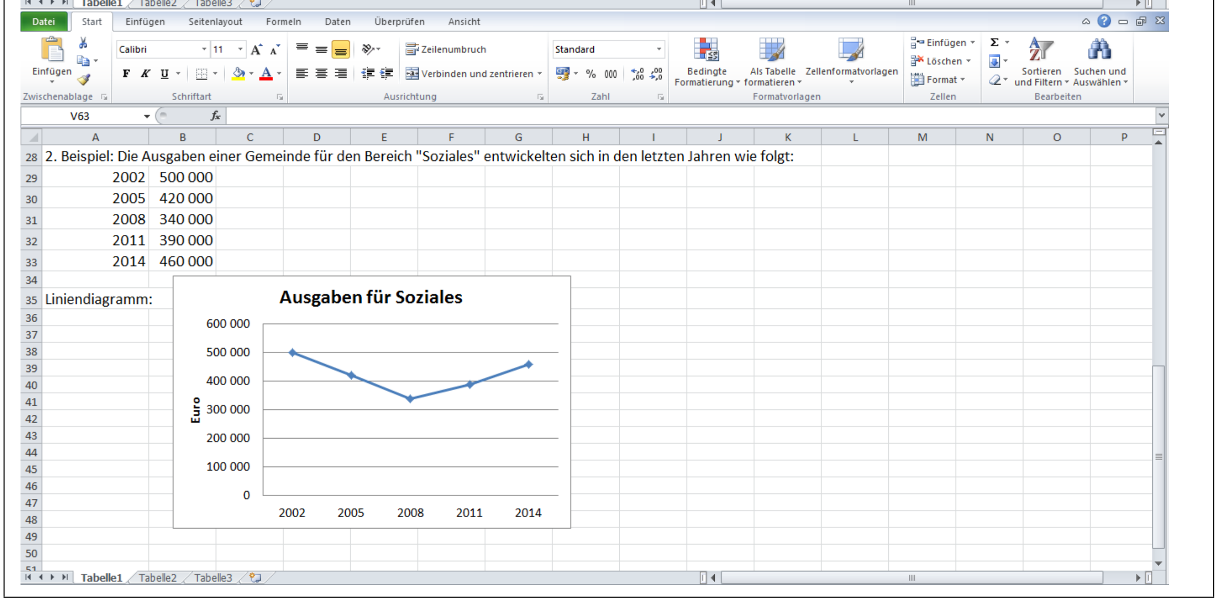
- *Stundenbild*

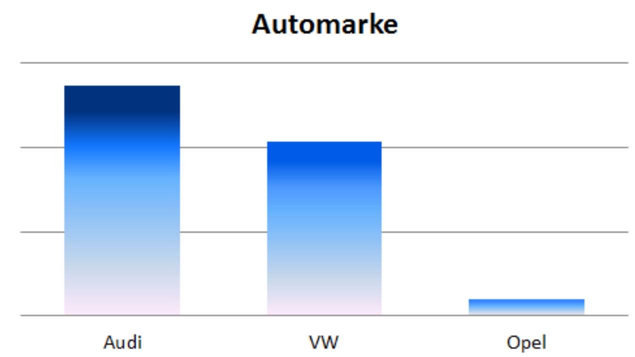
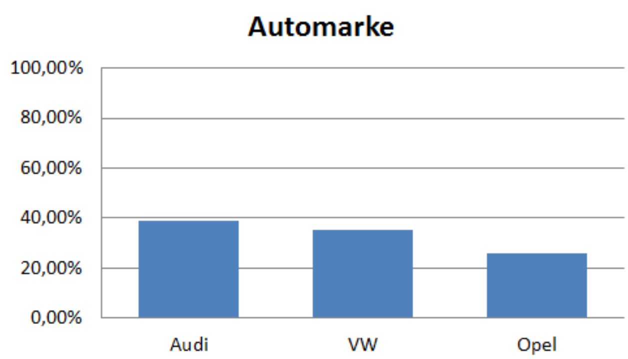
Zeit	Stundenverlauf	Materialien /Medien	Sozialform
10 min	*(Einführung) Grafische Darstellungen in Excel* L zeigt anhand zweier Beispiele vor, wie grafische Darstellungen in Excel entworfen werden können. Vorzüge unterschiedlicher Darstellungen besprechen: Säulen/Balken betonen die Rangfolge, Liniendiagramme stellen Veränderungen (Trends) gut dar:	PC (Excel)	L-S-Gespräch

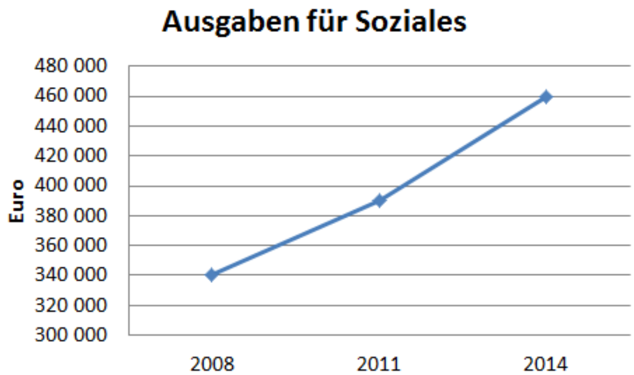
[62] vgl. Bundesministerium für Bildung und Frauen. Lehrplan AHS-Oberstufe. S.5
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2
Stand: 08.11.2015

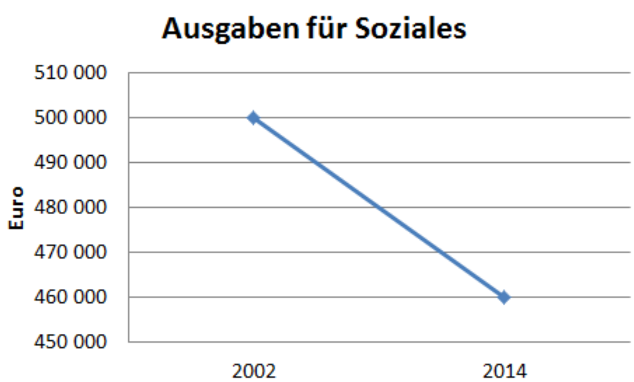
[63] vgl. Bundesinstitut bifie. Grundkompetenzen. S.16
https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_neuauflage_2018_2015-10-19.pdf
Stand: 08.11.2015


1. Beispiel: Bei einer Umfrage unter 150 Personen zur Frage, welche Automarke sie fahren, ergab sich folgende Verteilung:
in Prozent:
Audi 58 38,66%
VW 53 35,33%
Opel 39 26%
Säulendiagramm:
Kreisdiagramm:
Automarke
50,00%
40,00%
30,00%
20,00%
10,00%
0,00%
38,66%
35,33%
26%
Audi
VW
Opel
Automarke
Opel 26%
Audi 39%
VW 35%


2. Beispiel: Die Ausgaben einer Gemeinde für den Bereich "Soziales" entwickelten sich in den letzten Jahren wie folgt:
2002 500 000
2005 420 000
2008 340 000
2011 390 000
2014 460 000
Liniendiagramm:
Ausgaben für Soziales
600 000
500 000
400 000
300 000
200 000
100 000
0
Euro
2002
2005
2008
2011
2014

15 min	Intensives Besprechen der Manipulationsmöglichkeiten - Achsen abschneiden/stauchen/strecken, selektive Auswahl der Daten (nicht alles muss dargestellt werden), optische Zusatzeffekte - anhand der Beispiele: 1. Beispiel: – Audi ist klarer Sieger: y-Achse bei 25 % abschneiden, eventuell ohne Beschriftung und mit optischen Zusatzeffekten  – VW und Audi sind beinahe gleich auf: Vergrößern der Skalierung auf der y-Achse um Unterschiede zu verringern  	PC (Excel)	L-S-Gespräch

<table>
<tr>
<td></td>
<td>2. Beispiel:
– Aufwärtstrend – Werte erst ab 2008 darstellen
noch extremer: Abschneiden der y-Achse bei 300 000 und Verfeinerung der Sklarierung


– Abwärtstrend – Werte von 2005, 2008 und 2011 nicht darstellen
noch extremer: Abschneiden der y-Achse bei 450 000 und Verfeinerung der Skalierung

</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>10 min</td>
<td>Bearbeitung des AB (Wahlerfolg) in Excel
Arbeitsauftrag klären: Es fand eine Wahl zu der vier Parteien angetreten sind statt. Die Ergebnisse (und die Ergebnisse der letzten beiden Wahlen) stehen am AB. Es werden vier Gruppen gebildet, die jeweils eine Partei darstellen. SuS sollen nun das Ergebnis der eigenen Partei mithilfe der eben gezeigten Tricks als Erfolg darstellen.
Vier Gruppen bilden (SuS haben freie Wahl), AB austeilen</td>
<td>AB, PC (Excel)</td>
<td>GA</td>
</tr>
</table>

AB Wahlerfolg

Arbeitsauftrag:

1. Stellt das Ergebnis eurer Partei als „Erfolg" dar. Überlegt dazu genau, welche Daten ihr verwenden möchtet und welche nicht und welcher Diagrammtyp der geeignete ist. Gerne könnt ihr eurer Partei auch einen Namen geben.
2. Wie könnte ein Zeitungsbericht (Schlagzeile + kurzer Text + Grafik(en)) dazu aussehen?

Partei A			Partei B		
2015	2013	2008	2015	2013	2008
46,2 %	48,9 %	54,4 %	32,1 %	30,1 %	30,4 %

Partei C			Partei D		
2015	2013	2008	2015	2013	2008
20,5 %	20,4 %	13,9 %	1,2 %	0,6 %	1,3 %

10 min	Präsentation der Zeitungsberichte einer jeden Gruppe/Partei SuS erklären, was wie gemacht wurde.	PC (Excel)	Referat
5 min	Reflexion kritische Auseinandersetzung mit der Tatsache, dass dieselben Zahlen für unterschiedliche Zwecke ganz unterschiedlich dargestellt werden können und so völlig verschiedene Eindrücke hinterlassen. Hausübung: Suche im Internet nach den Ergebnissen der letzten beiden Nationalratswahlen (2013, 2008) und stelle diese für mindestens zwei Parteien als Erfolg dar!		L-S-Gespräch

Ziel: SchülerInnen sollen grafische Darstellungen in Excel erstellen können. Insbesondere sollen sie verschiedene Manipulationsmöglichkeiten dabei kennen und so eine kritische Haltung gegenüber grafischen Darstellungen einnehmen.

Literatur

[1] Ammerer, Heinrich, Krammer, Reinhard, Tanzer Ulrike (Hrsg.). Politisches Lernen. Der Beitrag der Unterrichtsfächer zur politischen Bildung. Innsbruck: Studienverlag 2010

[2] Berekoven, Ludwig, Eckert, Werner, Ellenrieder, Peter. Marktforschung. Methodische Grundlagen und praktische Anwendung. 11. Aufl. Wiesbaden: Gabler 2006

[3] Blum, Werner. Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht - Herausforderung für Schüler und Lehrer. In Büchter, Andreas, Humenberger, Hans, Hußmann, Stephan, Prediger, Susanne (Hrsg.): Realitätsnaher Mathematikunterricht - vom Fach aus und für die Praxis. Festschrift für Hans-Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag. Hildesheim: Franzbecker 2006

[4] Bosbach, Gerd, Korff, Jürgen. Lügen mit Zahlen. Wie wir mit Statistiken manipuliert werden. München: Wilhelm Heyne Verlag 2011

[5] Büchter, Andreas, Henn, Hans-Wolfgang. Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls. Berlin Heidelberg: Springer Verlag 2005

[6] Bundesinstitut bifie. Bildungsstandards.
https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_sek1_kompetenzbereiche_m8_2013-03-28.pdf
Stand: 06.11.2015

[7] Bundesinstitut bifie. Grundkompetenzen.
https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_neuauflage_2018_2015-10-19.pdf
Stand: 08.11.2015

[8] Bundesinstitut bifie. Modellschularbeit.
https://www.bifie.at/system/files/dl/MAT_MS_Aufgabenheft_Teil_1_2014-12-10.pdf
Stand: 16.10.2015

[9] Bundeskanzleramt Rechtsinformationssystem (RIS).
https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10009265
Stand: 16.04.2015

[10] Bundesministerium für Bildung und Frauen. Grundsatzerlass.
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/uek/pb_grundsatzerlass_1994_26943.pdf?4dzgm2
Stand: 04.03.2015

[11] Bundesministerium für Bildung und Frauen. Lehrplan AHS-Oberstufe.
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2
Stand: 08.11.2015

[12] Bundesministerium für Bildung und Frauen. Lehrplan AHS-Unterstufe.
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2
Stand: 06.11.2015

[13] Bundesministerium für Bildung und Frauen. Reifeprüfung.
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung.html
Stand: 06.11.2015

[14] Bundesministerium für Bildung und Frauen. Unterrichtsprinzipien.
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/index.html
Stand: 04.03.2015

[15] Bundesministerium für Inneres. Wahlordnung.
http://www.bmi.gv.at/cms/BMI_wahlen/nationalrat/wahlordnung/start.aspx
Stand: 14.04.2015

[16] Bundespräsident.
http://www.bundespraesident.at/historisches/wahlergebnisse-seit-1951/.
Stand: 16.04.2015

[17] Die Presse.
http://diepresse.com/home/politik/innenpolitik/4841870/Endergebnis_Mandat-fur-Grune-Vizeburgermeister-fur-FPO
Stand: 13.10.2015

[18] Eichler, Andreas, Vogel, Markus. Leitfaden Stochastik. Für Studierende und Ausübende des Lehramts. Wiesbaden: Vieweg+Teubner 2011

[19] Fuchs, Karl Josef, Siller, Hans-Stefan. Politikbewusstsein und politische Kompetenzen fördern - durch Mathematik- und Informatikunterricht. In Ammerer, Heinrich u.a. (Hrsg.): Politisches Lernen. Der Beitrag der Unterrichtsfächer zur politischen Bildung. Innsbruck: Studienverlag 2010

[20] Haferkamp, Alexandra, Fetchenhauer, Detlef. Gerechtigkeit und Steuersysteme - Wenn ökonomische Laien Finanzminister wären. In Fetchenhauer, Detlef, Fischer, Lorenz (Hrsg.): Wirtschaftspsychologie (2007), Nr. 4, Psychologie des Wohlfahrtsstaates, S.46-60

[21] Henn, Hans-Wolfgang. Durchblick im Steuerdschungel. Die Mathematik der Einkommensteuer. In Henn, Hans-Wolfgang (Hrsg.): mathematik lehren (2006), Nr. 134, S.22-51

[22] Henze, Norbert. Stochastik für Einsteiger. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls. 10. Aufl. Wiesbaden: Springer Fachmedien 2013

[23] Heymann, Hans Werner. Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim und Basel: Beltz Verlag 1996

[24] Hinrichs, Gerd. Modellierung im Mathematikunterricht. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag 2008

[25] Homburg, Stefan. Allgemeine Steuerlehre. 4. Aufl. München: Franz Vahlen GmbH 2005

[26] Kaiser, Gabriele. Realitätsbezüge im Mathematikunterricht - Einblick über die aktuelle und historische Diskussion. In Graumann, Günter (Hrsg.): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 2. Hildesheim: Franzbecker 1995

[27] Krammer, Reinhard. Kompetenzen durch politische Bildung. In Ammerer, Heinrich u.a. (Hrsg.): Politisches Lernen. Der Beitrag der Unterrichtsfächer zur politischen Bildung. Innsbruck: Studienverlag 2010

[28] Kröpfl, Bernhard et al. Angewandte Statistik. Eine Einführung für Wirtschaftswissenschaftler und Informatiker. München, Wien: Hanser 1994

[29] Kütting, Herbert. Beschreibende Statistik im Schulunterricht. Mannheim, Wien: Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag 1994

[30] Kütting, Herbert, Sauer, Martin. Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte. 3. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag 2011

[31] Lucas, William F. Alternativauswahl und Entscheidungstheorie. In Garfunkel, Solomon, Steen, Lynn (Hrsg.): Mathematik in der Praxis. Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft 1989

[32] Maaß, Jürgen. Manipulation durch Mathematik? In Sperl, Steiner (Hrsg.): Hirnverkehr. Wissenschaft treibt Wissenschaft. Auch die Zivilisation? Graz: Leykam Buchverlag 2006

[33] Maaß, Jürgen. Optionen der polititsche Bildung im Fach Mathematik. In Ammerer, Heinrich u.a. (Hrsg.): Politisches Lernen. Der Beitrag der Unterrichtsfächer zur politischen Bildung. Innsbruck: Studienverlag 2010

[34] Malle, Günther, Woschitz, Helge, Koth, Maria, Salzger, Bernhard. Mathematik verstehen 6. Wien: öbv 2015

[35] Mosler, Karl, Schmid, Friedrich. Beschreibende Statistik und Wirtschaftsstatistik. 4. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag 2009

[36] Neuwirth, Erich. Die Bedeutung der Statistik für politische Meinungsumfragen. In Frei, Norbert, Heintel, Peter (Hrsg.): Politische Bildung als Unterrichtsprinzip. Konsequenzen für die Universitäten. Wien: Österreichische Rektorenkonferenz 1985

[37] Nohlen, Dieter. Wahlrecht und Parteiensysteme. 3. Aufl. Opladen: Leske+Budrich 2000

[38] Quatember, Andreas. Statistischer Unsinn. Wenn Medien an der Prozenthürde scheitern. Berlin: Springer Spektrum 2015

[39] Reichel, Hans-Christian, Hanisch, Günter, Müller, Robert. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky 1987

[40] Reichel, Hans-Christian, Humenberger Hans (Hrsg.). Das ist Mathematik 2. Wien: öbv 2011

[41] Reichel, Hans-Christian, Litschauer, Dieter, Groß, Herbert. Das ist Mathematik 4. 2. Aufl. Wien: öbv 2006

[42] Reichel, Hans-Christian, Humenberger, Hans (Hrsg.). Das ist Mathematik 4. Wien: öbv 2012

[43] Statistik Austria. Internationale Definition.
http://www.statistik.at/web_de/statistiken/arbeitsmarkt/arbeitslose_arbeitssuchende/arbeitslose_internationale_definition/index.html
Stand: 19.05.2015

[44] Statistik Austria. Nationale Definition.
http://www.statistik.at/web_de/statistiken/arbeitsmarkt/arbeitslose_arbeitssuchende/arbeitslose_nationale_definition/index.html
Stand: 19.05.2015

[45] Suttmann, Christoph. Die Flat Tax. Bemessungsgrundlage und Tarif im Rahmen einer „flachen" Einkommensteuer: Effizienz, Gerechtigkeit und rechtliche Bewertung. Berlin: Duncker&Humblot 2007

[46] Szpiro, George G. Die verflixte Mathematik der Demokratie. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag 2011

[47] Tumpel, Michael. Steuern kompakt 2010. Eine Einführung in die Steuerlehre. Wien: Linde 2010

[48] US-Präsidentenwahl.
http://www.wahlrecht.de/ausland/us-praesident.html
Stand: 09.04.2015

[49] US-Präsidentenwahl 2000.
http://www.wahlrecht.de/ausland/us-wahl.html
Stand: 09.04.2015

[50] Weiglhofer, Hubert. Die Kompetenzlandkarte für Unterrichtsprinzipien und Bildungsanliegen, BMUKK 2013
https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/uek/kl_weiglhofer_25649.pdf?4kgkb5
Stand: 16.04.2015

[51] Winter, Heinrich. Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In Henn, Hans-Wolfgang (Hrsg.): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 8. Hildesheim, Berlin: Franzbecker 2003

[52] Wolf, Andrea (Hrsg.): Der lange Anfang. Zur Geschichte der Politischen Bildung an Österreichs Schulen. Wien: Sonderzahl 1998

[53] Zentrum polis.
http://www.politik-lernen.at/content/site/basiswissen/politischebildung/lehrplaene/index.html
Stand: 04.03.2015

[54] Zouhar, Karl. Politische Bildung im Mathematikunterricht durch Sozialreflexion über Steuern. Dissertation, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt 2008

Lebenslauf

Angaben zur Person

Name	Hintersteiner Lisa
Adresse	Sonnenhofgasse 4/6 1050 Wien
E-mail	lisa.hintersteiner@hotmail.com
Staatsangehörigkeit	Österreich
Geburtsdatum	23.11.1991

Schulbildung

2005 - 2009	Bundesrealgymnasium Waidhofen/Ybbs
2001 - 2005	Landhauptschule Gresten
1997 - 2001	Volksschule Gresten

Studium

seit März 2010	Lehramtsstudium an der Universität Wien UF Mathematik UF Psychologie und Philosophie

Jobs und Praktika

2014	Nachhilfelehrerin bei Humer - die Nachhilfe Mathematiknachhilfe
seit 2013	Lernunterstützerin bei „Offene Lernräume" - Projekt der Wiener Jugendzentren und der Jungen Volkshilfe beziehungsweise des Arbeiter-Samariterbund Wien ehrenamtliche Mitarbeiterin
August 2011	Ferialpraktikum bei NÖ Jugendherbergswerk Campbetreuerin
August 2010	Nachhilfelehrerin am Institut für Lernhilfe IFL Mathematiknachhilfe
August 2009 - Februar 2010	Au-pair in der französischen Schweiz