



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Realitätsbezogener Mathematikunterricht -
Unterrichtsvorschläge für die 8. Schulstufe“

verfasst von

Nadine Bauer

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

Wien, 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt:

A 190 406 456

Studienrichtung lt. Studienblatt:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Geographie
und Wirtschaftskunde

Betreut von:

Prof. Mag. Dr. Maria Koth

Vorwort

Für den positiven Abschluss meines Lehramtsstudiums musste ich zum Schluss eine wissenschaftliche Arbeit verfassen. Das Themengebiet war relativ rasch gefunden, da ich bereits in der letzten Phase meines Studiums an einem Gymnasium in Niederösterreich unterrichtet und daher einen Einblick in den Bereich der Fachdidaktik gewonnen habe. Das Thema meiner Diplomarbeit verdanke ich meinen Schüler/inne/n, die manchmal mit mathematischen Inhalten überfordert sind und sich daher die Frage stellen: „Wozu brauche ich das im späteren Leben?“ Ich wollte mich darum mit Vorschlägen, Gründen sowie Umsetzungsmöglichkeiten für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht befassen, um in Zukunft diese Frage nicht mehr von meinen Schüler/inne/n gestellt zu bekommen, sondern dass sie bereits im Unterricht erkennen, wie wichtig die Mathematik ist.

Es sei erwähnt, dass natürlich in allen Schulstufen realitätsbezogener Mathematikunterricht gelehrt werden soll. Die Gründe, weshalb ich aber die Unterrichtsvorschläge speziell für die 8. Schulstufe gewählt habe, sind die, dass ich meine Arbeit für eine bestimmte Schulstufe konkretisieren wollte, ich diese Schulstufe bereits unterrichtet habe und mit den Themen vertraut bin. Aber auch darum, weil sich viele Schüler/innen erst in der 8. Schulstufe erste Gedanken über ihre weitere Ausbildung, über ihren späteren Beruf und Werdegang machen.

Für die Leser/innen meiner Diplomarbeit sei angemerkt, dass die Quellen der zitierten Bilder erst im Darstellungsverzeichnis angegeben werden, damit der Lesefluss der Rechenbeispiele nicht gestört wird.

Außerdem sei erwähnt, dass im Text Abkürzungen verwendet werden. Die Auflistung der verwendeten Abkürzungen soll Unklarheit beim Lesen vermeiden.

Abb. = Abbildung

ebd. = ebenda

bzw. = beziehungsweise

et al. = et alia

ca. = circa

etc. = et cetera

d.h. = das heißt

f = folgende

Hrsg. = Herausgeber

u. Ä. = und Ähnliches

o. J. = ohne Jahresangabe

usw. = und so weiter

o. V. = ohne Verfasser

uvm. = und vieles mehr

S. = Seite

vgl. = vergleiche

Tab. = Tabelle

z.B. = zum Beispiel

u.a. = unter anderem

zit.n. = zitiert nach

Zum Schluss möchte ich mich bei einigen Personen bedanken.

Mein größter Dank gebührt meinen Eltern, die mir mein Studium erst ermöglicht haben und mich in schwierigen Zeiten unterstützt und ermuntert haben, mein Vorhaben fortzusetzen. Sie haben immer ein offenes Ohr für mich und stellen stets die positiven Erfahrungen meines Lebens in den Vordergrund. Danke dafür, dass ihr an mich geglaubt habt.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Arbeitskollege/inne/n, die mich in der Zeit meines Schreibens der Arbeit immer wieder motiviert haben weiter zu machen. Insbesondere richte ich ein großes Dankeschön an Frau Mag. Ursula Bucher, die meine Arbeit korrekturgelesen und den englischen Abstract mit mir formuliert hat.

Danke sagen möchte ich auch Frau Prof. Mag. Dr. Maria Koth, die trotz ihres arbeitsintensiven Alltags Zeit gefunden hat, meine Arbeit zu betreuen.

Ein Dankeschön geht auch an meine Studienkollege/inne/n, die während meines Studiums, beim Lösen von Proseminarbeispielen und beim Lernen für Vorlesungsprüfungen eine große Hilfe waren.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei all jenen bedanken, die mir Mut zugesprochen und Kraft gegeben haben weiter zu machen. Danke dafür auch, dass ihr Verständnis gezeigt habt, wenn ich einmal keine Zeit für euch hatte, weil ich mit meiner Diplomarbeit oder für das Lernen der Diplomprüfung beschäftigt war.

Dankeschön!

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1. Realitätsbezogener Mathematikunterricht - Begriffserklärung	4
1.1. Der Begriff „Realitätsbezug“	5
1.2. Der Begriff „Sachrechnen“	7
1.3. Der Begriff „Modellieren“	13
2. Argumente für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht	19
3. Realitätsbezogener Mathematikunterricht nach dem Lehrplan und den Bildungsstandards.....	24
3.1. Lehrplan.....	24
3.1.1. Allgemeines Bildungsziel	25
3.1.2. Allgemeine didaktische Grundsätze	26
3.1.3. Schul- und Unterrichtsplanung	27
3.1.4. Lehrplan der Mathematik.....	28
3.2. Bildungsstandards	29
4. Möglichkeiten zur Umsetzung eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts.....	37
4.1. Einige Aufgabentypen für realitätsbezogenen Mathematikunterricht.....	38
4.1.1. Klassische Sachaufgaben.....	40
4.1.2. Modellierungsaufgaben.....	42
4.1.2.1. Überbestimmte Aufgaben	42
4.1.2.2. Unterbestimmte Aufgaben	44
4.1.2.3. Fermi – Aufgaben	46

4.1.2.4. Aufgaben zum Bilden eines Modells	47
4.1.2.5. Aufgaben zum Interpretieren einer Lösung	49
4.1.2.6. Aufgaben zum Validieren	51
4.1.2.7. Aufgaben zum gesamten Modellierungsprozess.....	53
4.1.3. Aufgaben (Modellierungsaufgaben und Ähnliches) selbst entwerfen.....	55
4.2. Schwierigkeiten und Probleme für Lehrer/innen und Schüler/innen mit realitätsbezogenen Aufgaben	60
4.2.1. Schwierigkeiten und Probleme für Lehrer/innen.....	61
4.2.2. Schwierigkeiten und Probleme für Schüler/innen	63
4.2.3. Mögliche Bearbeitungshilfen für realitätsbezogene Aufgaben.....	68
4.3. Außerschulische Lernorte.....	72
4.3.1. Definition außerschulischer Lernorte	72
4.3.2. Ziele außerschulischer Lernorte.....	79
4.3.3. Vorteile außerschulischer Lernorte.....	80
4.3.4. Nachteile außerschulischer Lernorte.....	83
4.3.5. Planung außerschulischer Lernorte.....	84
 5. Resümee.....	88
 6. Selbstgestaltete Unterrichtsvorschläge	90
6.1. Öffentlicher Verkehr	90
6.1.1. Beispiel zum Inhaltsbereich „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“	91
6.1.2. Beispiel zum Inhaltsbereich „Arbeiten mit Variablen“	97
6.1.3. Beispiel zum Inhaltsbereich „Arbeiten mit Figuren und Körpern“	103
6.1.4. Beispiel zum Inhaltsbereich „Arbeiten mit Modellen, Statistik“	107
6.1.5. Außerschulischer Lernort.....	111
6.2. Bauwerke.....	115
6.2.1. Beispiel zum Inhaltsbereich „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“	116
6.2.2. Beispiel zum Inhaltsbereich „Arbeiten mit Variablen“	120
6.2.3. Beispiel zum Inhaltsbereich „Arbeiten mit Figuren und Körpern“	124
6.2.4. Beispiel zum Inhaltsbereich „Arbeiten mit Modellen, Statistik“	128
6.2.5. Außerschulischer Lernort.....	132

Quellenverzeichnis	136
Darstellungsverzeichnis	143
Abstract.....	148
Abstract (English Version)	150

Einleitung

„Der Mathematikunterricht soll [...] ermöglichen, Erscheinungen der Welt um uns in fachbezogener Art wahrzunehmen und zu verstehen.“¹ Das Schulfach Mathematik soll laut dieser Aussage realitätsbezogen unterrichtet werden und den Schüler/inne/n zahlreiche Einblicke in ihre Umwelt gewähren. Diese Aufgabe mag für manche Außenstehende einfach klingen, doch je intensiver man sich mit der Thematik eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts auseinandersetzt, umso mehr Probleme und Schwierigkeiten zeigen sich für den Lehrer / die Lehrerin. In meiner Unterrichtspraxis habe ich diese Erfahrung gemacht. Meine Aufgabe bestand darin, den Strahlensatz in einer 3. Klasse einzuarbeiten. Anhand eines einfachen, kleinen Beweises versuchte ich den Schüler/inne/n den Strahlensatz zu erklären. Dies scheiterte jedoch, denn sie konnten trotz ihrer Erfahrungen und ihres Vorwissens dem Beweis nicht folgen, die Quintessenz des Strahlensatzes nicht verstehen und die anschließenden Aufgaben nicht lösen. Meine Betreuungslehrerin meinte in der Nachbesprechung dieser Unterrichtseinheit, dass es besser gewesen wäre, den Strahlensatz mit einem Beispiel aus der Realität einzuleiten. Jedoch konnte ich damit nur sehr wenig anfangen, da ich nicht genau wusste, welches Beispiel sich dafür am besten eignen würde, um dann an das eigentliche Thema „Strahlensatz“ anknüpfen zu können. Diese Erfahrung war ein wesentlicher Grund, weshalb ich das Thema „Realitätsbezogener Mathematikunterricht - Unterrichtsvorschläge für die 8. Schulstufe“ für meine Diplomarbeit gewählt habe.

Ein weiterer Aspekt für die Wahl meines Themas ist jener, dass ich meinen Schüler/inne/n den Mathematikunterricht möglichst anschaulich präsentieren möchte, um auch Fragen wie „Wozu brauche ich das?“ aus dem Weg zu gehen. Als angehende Mathematiklehrerin möchte ich daher in meiner Arbeit die Problematik eines realitätsbezogenen Unterrichts darstellen und konkrete Beispiele vorstellen bzw. Möglichkeiten eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts in der 8. Schulstufe aufzeigen. Speziell werde ich in meiner Arbeit folgende Fragen und Themen genauer betrachten.

¹ Lehrplan der Mathematik. Bundesministerium für Bildung und Frauen, S. 1 [Zugriff am 29.6.2015]

- Was ist ein realitätsbezogener Mathematikunterricht? Gibt es eine eindeutige Definition dafür? Wenn nein, wie könnte eine dafür lauten?
- Welche Funktionen / Ziele hat ein realitätsbezogener Mathematikunterricht?
- Warum und wie werden wir Lehrer/innen, insbesondere im Lehrplan und nach den Bildungsstandards, aufgefordert Mathematikunterricht anwendungsorientiert / realitätsbezogen zu gestalten?
- Gibt es ein „Rezept“ für Lehrer/innen, wie man realitätsbezogenen Unterricht gestaltet und durchführt? Wie sollten die Aufgaben formuliert sein? Wie können die Bezüge zwischen Mathematik und Realität in der Sekundarstufe vermittelt werden?
- Wie gehen Schüler/innen mit realitätsbezogenem Mathematikunterricht um?
- In wie weit können Schulbücher zu einem realitätsbezogenen Unterricht beitragen?

Meine Arbeit gliedert sich in sechs Kapitel, die sich auf die einzelnen Fragen bzw. Aspekte konzentrieren.

Im ersten Kapitel werde ich mich mit dem Begriff „realitätsbezogener Mathematikunterricht“ auseinandersetzen und versuchen herauszufinden, worum es sich dabei handelt. Diesbezüglich werde ich konkret auf die Begriffe „Realitätsbezug“, „Sachrechnen“ und „Modellieren“ eingehen und diese erläutern. Im Zuge dessen werde ich Merkmale eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts darbringen und eine mögliche Definition geben.

Im zweiten Kapitel meiner Arbeit nenne ich Argumente für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Damit soll die Frage „Welche Funktionen / Ziele hat ein realitätsbezogener Mathematikunterricht?“ beantwortet werden.

Im dritten Teil werde ich konkret auf die Forderungen und Aufgaben eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts im österreichischen Lehrplan und nach den Bildungsstandards eingehen. Insbesondere versuche ich, eine Antwort auf meine dritte Frage (siehe oben) zu finden.

Im vierten Kapitel werde ich Möglichkeiten eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts vorstellen. Dabei werde ich zum einen unterschiedliche

Aufgabentypen erläutern und deren Bezug zur Realität offenlegen. In diesem Zusammenhang werde ich auch einige Tipps und Hinweise geben, wie man selbst realitätsbezogene Aufgaben erstellen kann. Ebenso werden Probleme und Schwierigkeiten beschrieben, die besonders bei Modellierungsaufgaben seitens der Lehrer/innen als auch der Schüler/innen auftreten können. Zum anderen werde ich auf außerschulische Lernorte eingehen, sowie Vor- und Nachteile dieser Unterrichtsmethode aufzählen.

Kapitel fünf wird eine Zusammenfassung meiner ersten vier Teile sein, bevor im sechsten und letzten Teil meiner Arbeit selbstgestaltete Unterrichtsvorschläge für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht in der 8. Schulstufe ausgearbeitet werden.

1. Realitätsbezogener Mathematikunterricht - Begriffserklärung

„Realität“ wird in vielen Lexika als Synonym für Umwelt, Tatsache und Wahrheit verwendet. Doch was haben nun diese Begriffe mit der Mathematik zu tun? Beruht die Mathematik auf Tatsachen, Wahrheit und Umwelt? Während meines Studiums wurde mir bewusst, dass man vieles in der Mathematik einfach nicht annehmen darf, sondern immer wieder hinterfragen bzw. beweisen muss. Viele Vorlesungen und Seminare legten ihren Schwerpunkt auf das Beweisen von mathematischen Sätzen. Man fragt ständig nach Richtigkeit und Eindeutigkeit. Demnach hängen Wahrheit, Tatsache und Mathematik eng miteinander zusammen.

Welchen Zusammenhang haben hingegen die Umwelt und die Mathematik? Ob innerhalb eines Raumes oder im Freien, man findet keinen Gegenstand oder kein Symbol, das nicht mit Mathematik in Verbindung gebracht werden kann. Egal ob es römische Zahlen auf einer Anschlagtafel eines Gebäudes sind, geometrische Formen oder Diagramme, vieles hängt in gewisser Art und Weise mit Mathematik zusammen. Auch in den verschiedensten Berufen benötigt man die Mathematik, sei es als Verkäufer/in, Krankenpfleger/in oder als Bankangestellte/r.

Katja Maaß fasst zusammen, dass die Mathematik daher nicht nur eine zunehmend bedeutende Rolle als Basis für viele Wissenschaften spielt, nein, sie ist auch Grundlage vieler alltäglicher Vorgänge und Errungenschaften. Beispiele hierfür sind der Umgang mit Zahlenangaben, Maßeinheiten, Koordinaten und grafischen Darstellungen sowie Prozesse in der Wirtschaft oder die Funktionsweise vieler technischer Geräte.¹

Auch Gilbert Greefrath weist darauf hin, dass Umwelt und Mathematik sich nicht getrennt betrachten lassen und die Beziehung von Umwelt und Mathematik daher genau untersucht und in den Unterricht einbezogen werden muss.²

¹ vgl. Maaß, 2007, S. 7

² vgl. Greefrath, 2010, S. 12

Mathematik und Realität haben daher viele Gemeinsamkeiten, was viele Schüler/innen während ihrer Schulzeit nicht erkennen. „Für die meisten ist Mathematik nur etwas sehr Schwieriges, das man für die Schule lernen muss und danach wieder vergessen kann. [sic]“¹ Um den Schüler/innen diese Vorstellung von Mathematik zu nehmen, gewinnt ein realitätsbezogener Mathematikunterricht immer mehr an Bedeutung und weist bereits eine lange Tradition auf. Doch was kann man sich unter einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht vorstellen? Geht es hier um das Beweisen, das Suchen nach Wahrheit, oder um das Miteinbeziehen von Lebens- und Umwelterfahrungen der Schüler/innen im Unterricht? Es stellt sich daher die Frage, wie realitätsbezogener Mathematikunterricht aussehen muss!

Um diese Fragen zu beantworten, wird zunächst nach einer Begriffserklärung für einen „realitätsbezogenen Mathematikunterricht“ gesucht. Dabei wird auch auf die geschichtliche Entwicklung des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts eingegangen, die aber nicht im Vordergrund stehen soll. Daher wird nur auf wesentliche Aspekte aus der Vergangenheit zurückgegriffen, die für die Begriffserklärung relevant sind. Des Weiteren werden bei der Suche nach einer geeigneten Definition drei verschiedene Zugänge gewählt, die in enger Verbindung mit einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht stehen.

1.1. Der Begriff „Realitätsbezug“

Der Begriff „Realitätsbezug“ wurde und wird auch immer noch kritisch diskutiert. Mitte der sechziger Jahre versuchte man, den Mathematikunterricht neu zu strukturieren, indem man realitätsnahe Anwendungsbeispiele und Aufgaben, die nicht nur physikalische Themen beinhalteten, in den Unterricht einbrachte. Das Ziel bestand darin, Mathematik so zu unterrichten, dass sie nützlich und anwendbar wird. Im darauffolgenden Jahrzehnt wurde das Interesse der Diskussion um einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht auf die Aktivitäten der Lernenden sowie auf

¹ Maaß, 2007, S. 7

die Fähigkeiten im Anwenden und Modellieren gesetzt. In den neunziger Jahren wurde der Schwerpunkt auf die Entwicklung einer breiteren Sichtweise von Anwendungen, umfassenderer Begründung für Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht, die Forderung nach mehr Schülerorientierung, den Einbezug von Anwendungsorientierung in die Leistungsmessung und den Einsatz des Computers gelegt.¹ Die Diskussionen um den Begriff „Realitätsbezug“ in der Mathematik sind natürlich heute noch immer nicht beendet. Kaiser unterscheidet daher vier Arten von Realitätsbezügen:

- „*Einkleidungen* [sic] mathematischer Probleme in die Sprache des Alltags oder anderer Disziplinen; [...]“²
- „*Veranschaulichungen* [sic] mathematischer Begriffe, wie z.B. die Verwendung von Schulden oder Temperaturen bei der Einführung negativer Zahlen.“³
- „*Anwendung* mathematischer *Standardverfahren* [sic], d.h. Anwendung wohlbekannter Algorithmen zur Lösung realer Probleme, [...]“⁴
- „*Modellbildungen* [sic], d.h. komplexe Problemlöseprozesse, basierend auf einer *Modellauffassung* [sic] des Verhältnisses von Realität und Mathematik.“⁵

Auch im Lehrplan und in den Bildungsstandards wird mit verschiedenartigen Ausdrücken bzw. Begriffen auf einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht hingewiesen, wie man später noch sehen wird. Auch die sogenannten Modellierungskompetenzen stehen im Zentrum der aktuellen didaktischen Diskussion um Realitätsbezüge, die im Bereich der Bildungsstandards integriert sind.⁶ Diesem Aspekt möchte ich ein eigenes Kapitel widmen und daher hier nicht mehr im Detail behandeln.

Man könnte aber, wie Katja Maaß, den Begriff „Realitätsbezug“ so definieren, dass sich ein Realitätsbezug auf außermathematische Bezüge von Mathematik bezieht.⁷

¹ vgl. Maaß, 2004, S. 14f und Kaiser, 1995, S. 66f

² Kaiser, 1995, S. 67

³ ebd., S. 67

⁴ ebd., S. 67

⁵ ebd., S. 67

⁶ vgl. Maaß, 2004, S. 31

⁷ vgl. ebd., S. 16

Letztendlich klingt diese Definition von Katja Maaß zu dem Begriff „Realitätsbezug“ sehr einfach und plausibel. Eine klare Definition von realitätsbezogenem Mathematikunterricht ist damit aber nicht gegeben, da einerseits diese Definition die Frage aufwirft „Was sind außermathematische Bezüge?“ und andererseits auch andere Autoren/innen einen Zugang zu diesem Unterricht sehen, die nicht unberücksichtigt bleiben dürfen. Infolgedessen werden weitere Bereiche eines sogenannten realitätsbezogenen Mathematikunterrichts behandelt und erläutert.

1.2. Der Begriff „Sachrechnen“

Mit einem anderen Zugang zu realitätsbezogenem Mathematikunterricht befasst sich Gilbert Greefrath. Zur Verwirklichung der Aussage aus dem Lehrplan der Mathematik „Der Mathematikunterricht soll [...] ermöglichen, Erscheinungen der Welt um uns in fachbezogener Art wahrzunehmen und zu verstehen“, ¹ ist die Einbeziehung von realen Problemen und Anwendungen in Mathematik unbedingt notwendig. Nach Gilbert Greefrath will diesen Beitrag zur mathematischen Bildung das Sachrechnen leisten. „Der Begriff Sachrechnen wird häufig mit Inhalten der Grundschule oder mit eher ungeeigneten Textaufgaben zu Beginn der Sekundarstufe I in Verbindung gebracht.“ ² Doch welcher Zusammenhang besteht zwischen einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht und dem Sachrechnen? „Da Sachrechnen bereits in seinem Namen auf den Bezug zur realen Welt (*Sache*) [sic] und zur Mathematik (*Rechnen*) [sic] hinweist, können diese beiden Aspekte [...]“ ³ eine Verbindung zu realitätsbezogenem Mathematikunterricht darstellen.

Neben Greefrath setzten sich auch andere Autoren/innen intensiv mit dem Begriff des „Sachrechnens“ auseinander und stellten folgende Definitionen auf:

¹ Lehrplan der Mathematik. Bundesministerium für Bildung und Frauen, S. 1 [Zugriff am 29.6.2015]

² Greefrath, 2010, S. 1

³ ebd., S. 9

- „Sachrechnen ist der Oberbegriff für die Auseinandersetzung mit Aufgaben, die einen Bezug zur Wirklichkeit aufweisen.“¹
- „Sachrechnen [ist] das Bearbeiten von Aufgaben, die eine Situation des realen Lebens aus dem Erfahrungsbereich der Schüler und Schülerinnen beschreiben.“²
- „Sachrechnen befasst sich mit Aufgaben, die von außermathematischen Sachverhalten handeln und über die mit mathematischen Mitteln Aussagen gemacht werden.“³
- „Sachrechnen ist der Teil der Angewandten Mathematik, der Schülern bis zur 10. Klasse zugänglich ist.“⁴
- „Sachrechnen ist Anwendung von Mathematik auf vorgegebene Sachprobleme und Mathematisierung konkreter Erfahrungen und Sachzusammenhänge vorwiegend unter numerischem Aspekt.“⁵
- „Sachrechnen im weiteren Sinne bezeichnet die Auseinandersetzung mit der Umwelt sowie die Beschäftigung mit wirklichkeitsbezogenen Aufgaben im Mathematikunterricht.“⁶

Obwohl die Definitionen sehr unterschiedlich klingen, haben sie eines gemeinsam. Alle Autoren/innen sehen das Sachrechnen als ein Wechselspiel zwischen Mathematik, Umwelt und der Schülerin/ des Schülers an. Einerseits steht der Bezug zur Wirklichkeit und die Schulrealität im Vordergrund, andererseits das Sachrechnen als Anwendung von Mathematik. Letztendlich lässt sich hier nochmals die Aussage bestätigen, dass Umwelt und Mathematik nicht getrennt betrachtet werden können.

Der Übergang von der realen Umwelt zur Mathematik wird mit dem mathematischen Modellieren vollzogen. Modellieren kann als moderner Begriff in den Kontext des Sachrechnens eingeordnet und als zentraler Kern betrachtet werden.⁷ Auffallend bei der Definition von Sachrechnen ist natürlich, dass das Sachrechnen vordergründig eine

¹ Spiegel et al., 2006, zit.n. Greefrath, 2010, S. 10

² Franke und Ruwisch, 2010, S. 5

³ Fricke, 1987, zit.n. Greefrath, 2010, S. 10

⁴ ebd., S. 11

⁵ Strehl, 1979, S. 24

⁶ Greefrath, 2010, S. 12

⁷ vgl. ebd., S. 1

Bearbeitung von Aufgaben darstellt und das Verstehen von Phänomenen und Erscheinungen des Alltags unterstützen sollte.¹ Es ist daher in weiterer Folge auch wichtig, wesentliche Funktionen des Sachrechnens zu erläutern.

Wie bei den unterschiedlichen Definitionen des Sachrechnens, gibt es auch verschiedene Funktionen des Sachrechnens. Diese Funktionen lassen sich im Unterricht nicht klar trennen, sondern überschneiden sich teilweise. Dennoch werden hier in Anlehnung an Heinrich Winter folgende Funktionen des Sachrechnens unterschieden und getrennt betrachtet.

- **Sachrechnen als Lernstoff:**

Bei dieser Funktion stehen die mathematischen Inhalte des Sachrechnens, wie z.B. Größen, Prozentrechnung oder die Statistik, im Vordergrund. Diese Inhalte sind allerdings nicht klar abzugrenzen, da man beispielsweise für die Statistik Grundkenntnisse der Prozentrechnung benötigt und umgekehrt. Weitere Inhalte ergeben sich daraus, wie der Mathematikunterricht gestaltet wird, denn im Prinzip können nahezu alle mathematischen Inhalte in realitätsbezogenen Kontexten unterrichtet werden.² Die wesentlichen Aufgaben des Sachrechnens als Lernstoff liegen einerseits darin, Methoden zum Gewinnen von Daten (Zählen, Messen und Schätzen) kennen zu lernen und Kenntnisse über Maßsysteme, wie Einheiten und Repräsentanten für Einheiten und Zahlen, zu erwerben. Andererseits soll das Sachrechnen als Lernstoff auch Methoden zur Darstellung von Daten (Modellieren, Symbolisieren, Zeichnen) beinhalten und Formen der Verarbeitung von Daten (Sortieren, Vergleichen, Anordnen, Rechnen, Umwandeln) in den Mittelpunkt stellen.³

- **Sachrechnen als Lernprinzip:**

Da die Kinder ihre Erfahrungen und ihr Wissen in den Unterricht einbringen wollen, „[...] werden Sachsituationen beispielsweise zur Motivation, Veranschaulichung oder zur Übung mathematischer Lernprozesse genutzt.“⁴

¹ vgl. Franke und Ruwisch, 2010, S. 5

² vgl. Winter, 2003, zit.n. Greefrath, 2010, S. 13

³ vgl. Winter, 2003, zit.n. Franke, 2003, S. 27

⁴ Greefrath, 2010, S. 13

Sachsituationen sind damit Ausgangspunkte für neues mathematisches Wissen und Anwendungen für bereits erworbenes mathematisches Wissen. Hier steht also die Arbeit der Schülerin/ des Schülers im Vordergrund. „Insgesamt bedeutet Sachrechnen als Lernprinzip, dass Bezüge zur Realität gesetzt werden, um die Schülerinnen und Schüler für mathematische Inhalte aufzuschließen, ihr mathematisches Verständnis [...] zu fördern und gelernte mathematische Operationen und Verfahren in Anwendungen zu üben.“¹

- **Sachrechnen als Lernziel (Umwelterschließung):**

Dies ist die allgemeinste Funktion des Sachrechnens. „Sachrechnen ist im Unterricht nicht nur als Mittel zum Üben und als Rahmen zum Vermitteln von mathematischem Wissen und von Größenvorstellungen zu sehen, sondern es ist selbst der Stoff des Mathematikunterrichts.“² Hier steht also nicht das Rechnen im Vordergrund, sondern die Umwelt, unter Einbeziehung mathematischer Mittel und Methoden, zu verstehen und zu erklären.³

Sachrechnen hat daher die Aufgabe, mathematische Inhalte in einen realitätsnahen Kontext zu stellen, die Schüler/innen zu motivieren, zum besseren Verständnis beizutragen und außermathematische Themen zu behandeln, damit die Schüler/innen auch sehen können, wozu man die Mathematik im Alltag benötigt.

Die Ziele des Sachrechnens orientieren sich an den Funktionen des Sachrechnens und bestätigen nochmals die Bedeutung des Sachrechnens. Die Funktion des Sachrechnens als Lernstoff führt zu inhaltsorientierten Zielen des Sachrechnens, während das Sachrechnen als Lernprinzip zu prozessorientierten Zielen führt.

Sachrechnen als Lernziel lässt sich in zwei Bereiche unterteilen. Zuerst ist der Prozess des Entdeckens zu erwähnen, der im Folgenden im Bereich der prozessorientierten Ziele beschrieben ist. Sekundär ist es die Kenntnis der Umwelt, die als inhaltsorientiertes Ziel beschrieben werden kann.

¹ Franke und Ruwisch, 2010, S. 26

² Franke, 2003, S. 29

³ vgl. Winter, 2003, zit.n. Greefrath, 2010, S. 15

Zusätzlich hat Sachrechnen noch allgemeine Ziele, die aber durch die Funktionen des Sachrechnens nicht direkt abgedeckt sind.

- **Inhaltsorientierte Ziele:**

Die inhaltsorientierten Ziele des Sachrechnens lassen sich für zwei Bereiche des Sachrechnens anwenden. Zum einen ist es das Erlernen von mathematischen Begriffen und Strukturen und zum anderen die Kenntnis der Umwelt. Die klassischen Inhalte des Sachrechnens, wie Größen und Zinsrechnung, tragen dazu bei, die inhaltsorientierten Ziele beider Kategorien zu erfüllen. Zum Beispiel fordert das Arbeiten mit Größen eine Beschäftigung mit der Umwelt. Die Aufgabe im Mathematikunterricht besteht darin, den Schüler/inne/n Vorstellungen über Größen zu geben, damit sie ihre Ergebnisse auf Plausibilität überprüfen können. Für das Berechnen des Volumens könnten etwa folgende Vorstellungen in den Unterricht einbezogen werden: 1 Liter ist eine Milchpackung, 10 Liter ein Putzeimer und 100 Liter eine halb gefüllte Badewanne.¹ Dasselbe kann man für andere Größen machen, sei es Längeneinheiten, Masseinheiten usw.

- **Prozessorientierte Ziele:**

Bei diesem Ziel stehen Diskussionen und Analysen der Umwelt mit mathematischen Mitteln im Vordergrund. Das Erreichen von Modellierungskompetenz, also die Fähigkeit, Probleme aus der Realität geeignet in die Mathematik zu übertragen, zu bearbeiten und zu lösen ist hierbei von großer Bedeutung. Besonders der Schritt des Mathematisierens, also das Finden bzw. Erkennen eines geeigneten mathematischen Modells, ist ein wichtiges Ziel des Sachrechnens. Ein zusätzliches Ziel des Sachrechnenunterrichts ist die Fähigkeit, Probleme zu lösen und damit die Problemlösekompetenz zu fördern. Weitere prozessorientierte Ziele, die im Sachrechnen erreicht werden können, sind das Begründen und Argumentieren, das Reflektieren und der Einsatz geeigneter Werkzeuge wie Messgeräte und Computer.²

¹ vgl. Greefrath, 2010, S. 16f

² vgl. ebd., S. 17f

- **Allgemeine Ziele:**

Dazu gehören jene Ziele, die nicht spezifisch für Inhalte und Prozesse des Sachrechnenunterrichts gedacht sind, sondern darüber hinausgehen und daher auch in anderen Fächern erreicht werden können. Sachrechnen kann beispielsweise die Motivation steigern. Im Rahmen des Sachrechnens als Lernprinzip, bei dem die Eigenerfahrung im Mittelpunkt steht, können Sachprobleme zu Beginn eines Lernprozesses dieses Ziel besonders gut erfüllen. Da auch durch das Sachrechnen besonders Alltagsprobleme mathematisch bearbeitet werden können, wird der Sinn des Faches Mathematik für die Schüler/innen verdeutlicht. Der Realitätsbezug von Sachrechnenproblemen legt es nahe, sich intensiver mit den zugehörigen Wissenschaften zu beschäftigen. Daher ist das Sachrechnen ein guter Anknüpfungspunkt, fächerübergreifende Projekte durchzuführen. Die Schüler/innen beschäftigen sich im Rahmen des Sachrechnens auch mit Problemen aus der Gesellschaft. Durch die realen Anwendungen des Sachrechnens wird daher auch auf eine spätere Beschäftigung mit politischen, gesellschaftlichen oder ökonomischen Problemen vorbereitet. Beispielsweise ist die Diskussion von Steuermodellen ein möglicher gesellschaftsrelevanter Inhalt des Sachrechnens.¹

Zusammenfassend kann man sagen, dass beim Sachrechnen jene Aufgaben behandelt werden, die vor allem einen Bezug zur Umwelt haben, sich an den Erfahrungen der Schüler/innen orientieren, Modellierungs- und Problemlösekompetenz trainieren und die Schüler/innen auf ihre Zukunft vorbereiten und ihnen daher Einblicke in die Gesellschaft gewähren.

Wie man nun erkennen kann, gibt es sowohl im Bereich des Realitätsbezuges sowie des Sachrechnens keine eindeutigen Definitionen. Viel mehr sind es zahlreiche Aspekte, die bei beiden Zugängen herangezogen werden. Sowohl bei Katja Maaß als auch bei Gilbert Greefrath wird realitätsbezogener Mathematikunterricht mit Anwendungsbezügen aus der Mathematik verglichen und das Modellieren als neuer und moderner Bereich eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts gesehen. Beide sind auch der Ansicht, dass

¹ vgl. Greefrath, 2010, S. 18f

dieser Unterricht an den Erfahrungsbereich der Schüler/innen andocken soll und somit die Schülerorientierung in einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht eine entscheidende Rolle spielt. Um abschließend eine Definition für realitätsbezogenen Mathematikunterricht zu geben, werde ich noch auf den Begriff des „Modellierens“ eingehen, da dieser, wie bereits zu erkennen war, eine wichtige Bedeutung für die Begriffserklärung darstellt.

1.3. Der Begriff „Modellieren“

Wie bereits erwähnt, ist nach Greefrath das „Modellieren“ ein zentraler Teil des Sachrechnens. Der Unterschied zwischen Sachrechnen und Modellieren liegt darin, dass man beim Modellieren von einem Problem in der Realität ausgeht und dieses mit mathematischen Methoden zu lösen beginnt, während beim Sachrechnen häufig in Richtung der mathematischen Inhalte gedacht wird und der Anteil der Realität nebensächlich ist.¹

Anders ausgedrückt könnte man, wie Blum, den Begriff „Modellieren“ als „[...] Bearbeitung realitätsbezogener Problemstellungen mithilfe mathematischer Mittel [...]“² erklären.

Prinzipiell findet beim Modellieren die Schaffung eines mathematischen Modells statt,³ das für die Lösung des Problems herangezogen wird.

Daraus ergibt sich die Frage: Was versteht man unter einem Modell? Die folgenden Erklärungen sollen eine Antwort auf diese Fragen geben.

- „Ein Modell ist eine vereinfachende, nur gewisse, einigermaßen objektivierbare Teilaspekte berücksichtigende Darstellung der Realität.“⁴

¹ vgl. Greefrath, 2010, S. 41f

² Blum, 2007, zit.n. Leiss und Tropper, 2014, S. 23

³ vgl. Greefrath, 2010, S. 42

⁴ Henn und Maaß, 2003, zit.n. Greefrath, 2010, S. 42

- „Ein mathematisches Modell ist eine Darstellung eines Sachverhaltes, auf die mathematische Methoden angewandt werden können, um ein mathematisches Resultat zu erhalten.“¹
- „Modelle sind Abbildungen bzw. Repräsentationen von natürlichen oder künstlichen Originalen. [...] Es enthält nicht alle Merkmale des repräsentierten Originals, sondern nur diejenigen, die als relevant erachtet werden.“²
- „Ein Modell ist eine vereinfachende Darstellung des realen Sachverhaltes, die nur gewisse, für die jeweilige Fragestellung relevante Teilaspekte der Situation berücksichtigt.“³
- „Ein mathematisches Modell ist [...] eine isolierte Darstellung der Welt, die vereinfacht worden ist, dem ursprünglichen Prototyp entspricht und zur Anwendung von Mathematik geeignet ist.“⁴

Es lässt sich also zusammenfassend sagen, dass ein mathematisches Modell eine vereinfachte Darstellung der Welt ist, das zur Anwendung von Mathematik geeignet ist. Diese Modelle sind aber nicht eindeutig, da es häufig auf unterschiedliche Weise möglich ist, Vereinfachungen vorzunehmen. Jedoch sollten Modelle widerspruchsfrei, richtig und zweckmäßig sein.⁵ Modelle bilden die Grundlage mathematischen Modellierens.

Für das mathematische Modellieren „[...] liegt eine Situation aus dem realen Leben vor, die mit einem Problem oder einer Aufgabe verbunden ist. Diese Situation wird mit Hilfe der Mathematik so beschrieben, dass sie mit mathematischen Mitteln erfolgreich bearbeitet werden kann. [Dabei entsteht ein Modell.] Übersetzt man die mathematische Lösung zurück in die reale Welt, so bekommt man schließlich die reale Lösung.“⁶ Dieser Prozess stellt einen Kreislauf des Modellierens dar. Es gibt wiederum eine große Vielzahl an Modellbildungskreisläufen, die den Prozess des Modellierens darzustellen versuchen.

¹ Zais und Grund, 1991, zit. n. Greefrath, 2010, S. 43

² Böhm, 2013, S. 22

³ Maaß, 2009, S. 12

⁴ Greefrath, 2010, S. 43

⁵ vgl. ebd., S. 43f

⁶ Reiss & Hammer, 2013, S. 59f

Ich werde in diesem Zusammenhang auf die Kreislaufdarstellung von Blum und die daraus abgeleitete Darstellung von Katja Maaß eingehen, da diese den Prozess des Modellierens am einfachsten darstellen und daher auch im Rahmen des Unterrichts unterstützend eingesetzt werden können. Außerdem sind sie die bekanntesten Modellbildungskreisläufe. Die Abbildungen 1 und 2 repräsentieren die Modellierungskreisläufe graphisch. Beide Kreisläufe legen ihren Schwerpunkt in die Bildung eines Realmodells, das in ein mathematisches Modell übergeführt wird. Dies ist exakt die Aufgabe des Modellierens.

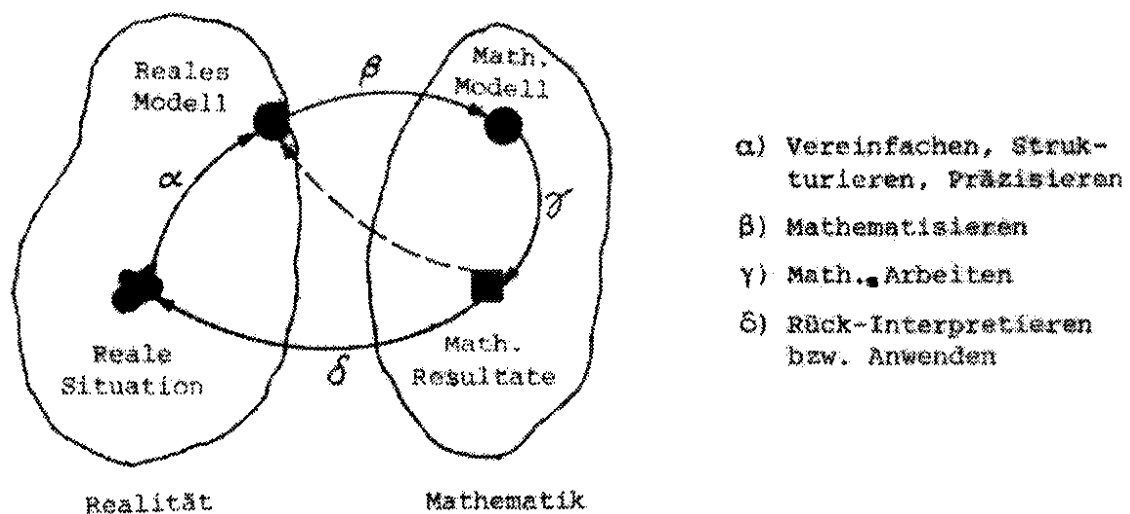


Abbildung 1: Modellierungskreislauf von Blum (Quelle: Blum, 1985, zit.n. Borromeo Ferri et al. (Hrsg.), 2013, S. 11)

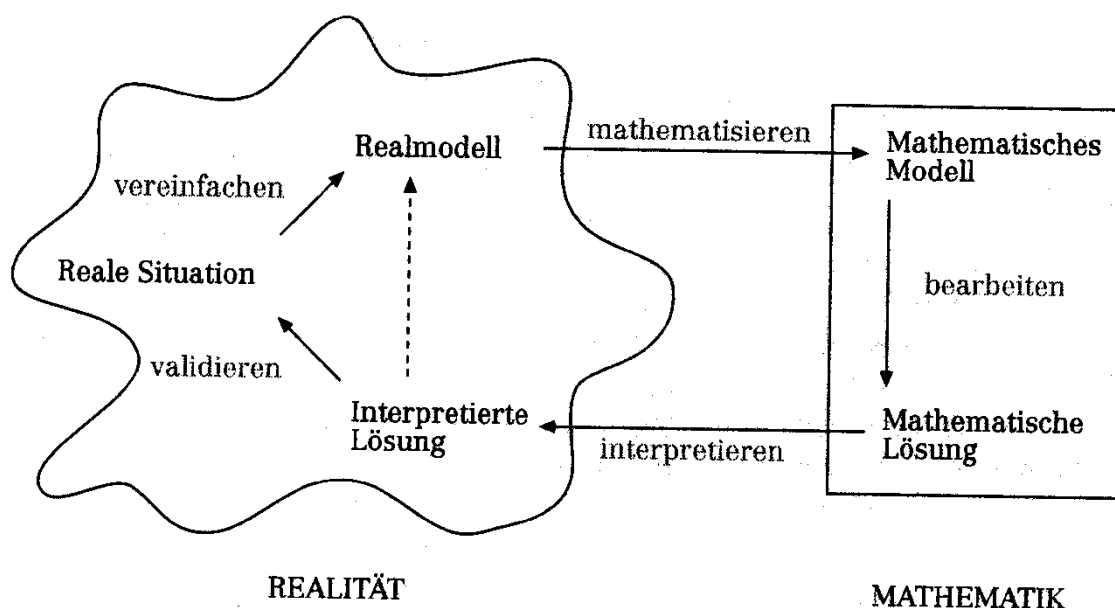


Abbildung 2: Modellierungsprozess von Maaß (Quelle: Maaß, 2009, S. 12)

Der Ausgangspunkt des Modellierens ist eine komplexe, problemhaltige, reale Situation, für die eine Lösung gefunden werden soll. Die vorgegebene Situation muss zunächst vereinfacht, idealisiert und strukturiert werden. Dadurch entsteht ein Modell der Realität, das sogenannte Realmodell. Das Mathematisieren des Realmodells, also die Übersetzung der Modellbeschreibung aus der Sprache des Alltags in die Sprache der Mathematik, führt zum mathematischen Modell. In dem mathematischen Modell können nun heuristische Strategien und mathematische Algorithmen angewandt werden. Man erhält eine mathematische Lösung. Dieses Ergebnis muss im Hinblick auf die Realsituation und Fragestellung interpretiert werden. Man erhält daraus die interpretierte Lösung. Das Modellieren ist mit der Interpretation noch nicht beendet. Vielmehr muss über die gesamte Modellierung kritisch reflektiert werden. Dabei sollte das Ergebnis durch das Vergleichen mit geeigneten Werten überprüft (validiert) werden. Erweist sich im Rahmen der Validierung die gefundene Lösung oder das gewählte Vorgehen als der Realität nicht angemessen, so müssen einzelne Schritte oder auch der gesamte Modellierungsprozess erneut durchgeführt werden, sei es mit veränderten vereinfachenden Annahmen oder mit anderen mathematischen Strategien. Die Entscheidung, welches Vorgehen als geeignet angesehen wird, liegt beim Modellierer. Das Modellieren enthält somit eine wesentliche subjektive Komponente.¹

Die beiden Modelle unterscheiden sich nur in so mancher Wortwahl. Außerdem gibt es bei Maaß zusätzlich den Zwischenschritt der „Interpretierten Lösung“², die bei Blum weggelassen wurde und im Übergang von den mathematischen Resultaten zur realen Situation enthalten ist.

Ein neueres Modell von Blum und seinen Mitarbeiter/inne/n (Abb. 3) wurde im Vergleich zum alten Modell (Abb. 1), um das Situationsmodell und um die realen Resultate mit der interpretierten Lösung gleichzusetzen, erweitert und detaillierter betrachtet. Das Situationsmodell beschreibt dabei die mentale Darstellung der Situation durch das Individuum.³ Demzufolge wurde das Modell auf sieben Schritte, die im Modellierungskreislauf eingehalten werden können, ausgebaut. Hinzugekommen sind der erste Schritt, das Verstehen, und der letzte Schritt, das Darlegen/ Erklären. Im ersten

¹ vgl. Maaß, 2009, S. 13f

² Abb. 2, Maaß, 2009, S. 12

³ vgl. Greefrath, 2010, S. 50f

Schritt soll die beschriebene Realsituation verstanden werden. Beim Lesen der Aufgabenstellung wird ein Situationsmodell konstruiert, das unterschiedliche und teilweise für die Lösung irrelevante Angaben enthält. Danach werden die bereits bekannten Schritte, Vereinfachen, Mathematisieren, mathematisch Arbeiten, Interpretieren und Validieren auf das Situationsmodell aufbauend durchgeführt. Nachdem das gewonnene Resultat an Hand des Situationsmodells überprüft wurde, werden abschließend die erhaltenen Ergebnisse dargelegt und erklärt.¹

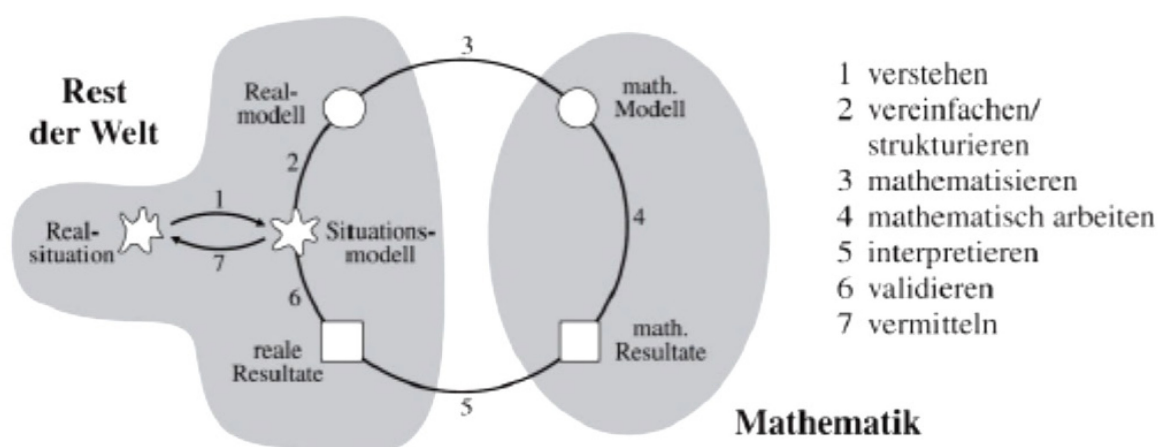


Abbildung 3: Siebenschrittiger Modellbildungskreislauf von Blum (Quelle: Blum, 2010, zit.n. Borromeo Ferri et al. (Hrsg.), 2013, S. 18)

Der dargestellte und beschriebene siebenstufige Modellierungskreislauf gibt die einzelnen Schritte des Modellierens wieder. Dabei scheinen die einzelnen Bearbeitungsschritte beim Lösen von Modellierungsaufgaben aufeinander zu folgen. In den seltensten Fällen wird aber dieser Kreislauf wie ein Algorithmus durchlaufen. In der Regel wird man zum Beispiel schon bei der Bildung des mathematischen Modells überlegen, inwieweit man überhaupt über die nötigen mathematischen Kompetenzen zur Bearbeitung des Modells verfügt. Oder man bemerkt bereits beim Berechnen, dass das Modell nicht geeignet ist und sucht nach neuen Möglichkeiten. Insgesamt ist Modellieren ein komplexer Prozess, bei dem immer wieder zwischen verschiedenen Verfahren gewechselt wird und das Sachrechnen und der Realitätsbezug indirekt involviert sind.² Denn die reale Situation ist nichts anderes als ein außermathematischer Bezug, der in mehreren Schritten, sei es das Vereinfachen, Mathematisieren,

¹ vgl. Leiss & Tropper, 2014, S. 24f

² vgl. Maaß, 2009, S. 12

Interpretieren und Validieren, behandelt wird. All diese Schritte spiegeln sich auch in den Zielen und Funktionen des Sachrechnens wider. Katja Maaß und Gilbert Greefrath haben also Recht. Modellieren hängt eng mit den Realitätsbezügen und dem Sachrechnen zusammen.

Das Modellieren wird auch in den Bildungsstandards als eine Kompetenz für realitätsbezogenen Mathematikunterricht herangezogen. Daher wird auch noch im Laufe dieser Arbeit konkret auf die Modellierungskompetenzen eingegangen und dargestellt werden, welche Ziele sie verfolgen. Da aber in diesem Abschnitt nach einer klaren Definition von realitätsbezogenem Mathematikunterricht gesucht wird, wird dieser Bereich im nächsten Kapitel ausführlich behandelt.

Als Abschluss des ersten Kapitels lässt sich also feststellen, dass keine klare Definition von einem „Realitätsbezogenen Mathematikunterricht“ in der Literatur zu finden ist. Mit Hilfe der beschriebenen, unterschiedlichen Zugänge konnte man jedoch einen Einblick gewinnen, sowie die Merkmale eines realitätsbezogenen Unterrichts deutlich machen. Um dennoch meine erste Frage beantworten zu können, definiere ich nach diesem theoretischen Input „realitätsbezogener Mathematikunterricht“ wie folgt: Unter realitätsbezogenem Mathematikunterricht versteht man die Auseinandersetzung mit außermathematischen Problemen, die aus dem realen Leben der Schüler/innen entnommen werden. Der Schwerpunkt bei der Auseinandersetzung mit diesen Problemen liegt in der Erschaffung eines Modells. Realitätsbezogener Mathematikunterricht nimmt daher Bezug auf die Wirklichkeit, auf die Umwelt bzw. auf außermathematische Inhalte und stellt ein Problem aus der Realität ins Zentrum, das mit Hilfe von Modellbildungen und mathematische Methoden gelöst werden kann.

2. Argumente für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht

Aufgrund der Begriffserklärung stellt sich nun die Frage, warum man überhaupt Realitätsbezüge und Modellierungen in den Mathematikunterricht einbringen soll. Eine Vielzahl von Argumenten für Realitätsbezüge und Modellierungen im Mathematikunterricht werden hier vorgestellt und dazu Stellung genommen.

Blum zeigt vier wesentliche Gründe auf:

- **Pragmatische Gründe:** „Nur mit Realitätsbezügen kann der Mathematikunterricht zum Umweltverstehen, zur Alltagsbewältigung und zur Berufsvorbereitung beitragen.“¹
- **Formale Gründe:** Die Schüler/innen sollen im Mathematikunterricht allgemeine Qualifikationen wie z.B. die Fähigkeiten, Probleme zu lösen und sich kritisch mit der Umwelt auseinanderzusetzen, erwerben. Realitätsbezüge bieten eine Möglichkeit zu dieser Kompetenzentwicklung und sind insbesondere für die Förderung der Kompetenz des Modellierens unentbehrlich.²
- **Lernpsychologische Gründe:** Realitätsbezüge unterstützen Schüler/innen beim Mathematiklernen, sie dienen zum besseren Verstehen und Behalten von mathematischen Inhalten. Geeignete Anwendungen können auch zur Motivation mathematischer Inhalte verwendet werden.³
- **Kulturbezogene Gründe:** „Nur mit Realitätsbezügen lässt sich ein adäquates Mathematikbild bei Schülern aufbauen.“⁴

¹ Blum, 2006, S. 11

² vgl. ebd., S. 11

³ vgl. ebd., S. 11

⁴ ebd., S. 11

Um die Gründe auch umsetzen zu können, „[...] ist hierzu die Behandlung eines breiten Spektrums von realitätsbezogenen Beispielen und Aufgaben, von eingekleideten Textaufgaben bis hin zu authentischen Modellierungsaufgaben [...]“¹ nötig.

Kaiser nennt ähnliche Argumente für Realitätsbezüge im Mathematikunterricht wie Blum. Sie unterteilt sie ebenfalls in vier Ziele:

- **Stoffbezogene Ziele:**

„Realitätsbezüge in Mathematik sollen ...

- ... als Ausgangspunkt von Lernprozessen dienen und damit an die Erfahrungsbereiche der Schülerinnen und Schüler anknüpfen. [...]
- ... der Veranschaulichung und Verdeutlichung mathematischer Begriffe und Methoden dienen und damit zu einem ‚adäquaten‘ und umfassenden Verständnis mathematischer Inhalte beitragen. [...]
- ... der Übung mathematischer Methoden und Begriffsbildungen dienen. [...]
- ... das länger Behalten mathematischer Inhalte fördern. [...]“²

- **Pädagogische Ziele:**

„Realitätsbezogener Mathematikunterricht soll den Schülerinnen und Schülern Fähigkeiten und Fertigkeiten vermitteln, wichtige Erscheinungen unserer Welt bewusster und kritischer zu sehen und praktische Nutzungsmöglichkeiten der Mathematik für das aktuelle und spätere Leben zu erfahren. [...] Darüber hinaus sollen Realitätsbezüge ein angemessenes Bild vom Verhältnis Mathematik und Realität vermitteln und sie dazu befähigen, über das Anwenden von Mathematik kritisch zu reflektieren, d.h. über die Notwendigkeit von Vereinfachungen, Grenzen der Aussagekraft von Modellen etc.“³

¹ Blum, 2006, S. 11

² Kaiser, 1995, S. 69

³ ebd., S. 69f

- **Psychologische Ziele:**

„Realitätsbezüge sollen ...

- ... die Motivation der Lernenden zur Auseinandersetzung mit der Mathematik steigern, ein größeres Interesse an der Mathematik wecken und damit Einsicht in den Sinn mathematischer Inhalte fördern. [...]
- ... den Schülerinnen und Schülern eine aufgeschlossene Einstellung gegenüber der Mathematik vermitteln. [...]“¹

- **Wissenschaftsorientierte Ziele:**

„Realitätsbezüge im Mathematikunterricht sollen den Schülerinnen und Schülern ein realistisches und angemessenes Bild von der Mathematik als Wissenschaft darbieten; [...] Des weiteren sollen Realitätsbezüge kritisches Denken über die verschiedenen Verwendungen von Mathematik sowie über die soziale Praxis von Mathematik anregen.“²

Nach W. Schlöglmann und J. Maaß sollen folgende Forderungen an den Mathematikunterricht gestellt werden:

- „Mathematikunterricht soll ein möglichst umfassendes und ausgewogenes Bild von Mathematik vermitteln. Alle Aspekte, auch historische, systematische, algorithmische etc. sind wichtig, damit die AbsolventInnen später ein die Realität besser treffendes Bild von Mathematik als besondere Art von Wissenschaft, von ihrer Anwendbarkeit auf bestimmte Problemtypen und der Auswirkungen dieser Anwendungen auf die Gesellschaft haben.“³
- „Für das Leben lernen: Mathematikunterricht soll die AbsolventInnen dazu befähigen, auch ohne Studium der Industriemathematik gewisse einfache Probleme ihres Lebens mit Mathematik besser zu lösen. Sie sollen darüber hinaus Mathematik auch als Konstruktion von Wirklichkeit sehen lernen.“⁴

¹ Kaiser, 1995, S. 70

² ebd., S. 70

³ Maaß & Schlöglmann, 1993, S. 77

⁴ ebd., S. 77

- Für den Beruf lernen: z.B. Mathematikunterricht an höheren Schulen soll in gewissem Umfang auf ein Studium vorbereiten.“¹

Auch Katja Maaß formuliert ähnliche Ziele und Antworten auf die Frage „Warum Realitätsbezüge und Modellierungen?“. Die Schüler/innen sollen ...

- ... Kompetenzen zum Anwenden von Mathematik in Zusammenhängen, die ihnen helfen, Umweltsituationen zu verstehen und zu bewältigen, kennenlernen.
- ... ein ausgewogenes Bild von Mathematik als Wissenschaft und ihrer Bedeutung für unsere Kultur und Gesellschaft bekommen.
- ... heuristische Strategien, Problemlöse- und Argumentationsfähigkeiten sowie kreatives Verhalten vermittelt bekommen.
- ... zur Beschäftigung mit Mathematik motiviert werden.
- ... Verständnis mathematischer Inhalte bekommen.²

Obwohl jeder Autor/ jede Autorin seine/ ihre eigenen Gründe bzw. Argumente für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht formuliert, überschneiden diese sich inhaltlich. Sie sehen das Einbeziehen der Realität in den Mathematikunterricht als eine wichtige Vorbereitung für das spätere Leben der Schüler/innen, sei es im Alltag oder im Beruf. Auch trägt ein realitätsbezogener Mathematikunterricht zu einem besseren Verständnis bei und motiviert die Schüler/innen. Da Mathematik ohnehin von vielen Schüler/inne/n nicht als Lieblingsfach gesehen wird, ist es daher noch wichtiger, die Schüler/innen im Unterricht zu motivieren. Aufgaben, in denen die Realität im Vordergrund steht, sollen dies ermöglichen. Des Weiteren wird erwähnt, dass durch Einbezug der Realität Nachhaltigkeit erreicht werden kann, was ein wesentlicher Grund für realitätsbezogenen Mathematikunterricht ist. Denn als Lehrer/in möchte man die Schüler/innen auf ihre Zukunft vorbereiten und ihnen das Gefühl geben, dass sie nichts umsonst lernen und sie auch nach Jahren das Gelernte noch immer in Erinnerung haben. Als letztes Argument für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht wird von den Autor/inne/n erwähnt, dass man den Schüler/inne/n vermitteln soll, wie wichtig die Mathematik in anderen Wissenschaften ist.

¹ Maaß & Schlöglmann, 1993, S. 77

² vgl. Maaß, 2009, S. 20

Die soeben genannten Argumente, die für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht stehen, stellen eine Herausforderung an den Lehrer / die Lehrerin bei der Planung und Gestaltung des Unterrichts. Denn er / sie hat die Aufgabe, all diese Forderungen größtenteils zu erfüllen. Fraglich ist nur, wie man das macht. Laut Lehrplan, wie man dann noch später lesen wird, soll der Bezug zur Realität im Mathematikunterricht nicht nur anhand von Aufgaben gegeben sein, sondern auch mit außerschulischen Lernorten kann man gezielt die Realität in den Unterricht miteinbringen und somit auch Abwechslung in der Unterrichtsform schaffen. Das steigert natürlich wieder die Motivation, Nachhaltigkeit und trägt zu einem besseren Verständnis bei.

Um gleich an diesen Aspekt anzuschließen, wird der österreichische Lehrplan genauer erläutert und auf die Bereiche eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts eingegangen.

3. Realitätsbezogener Mathematikunterricht nach dem Lehrplan und den Bildungsstandards

Wie in den Kapiteln zuvor erwähnt worden ist, sind der Lehrplan und die Bildungsstandards wichtige Bestandteile für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, daher widmet sich dieses Kapitel ausschließlich diesen beiden Bereichen. Warum Realitätsbezug in Mathematik unterrichtet werden soll und wie die Lehrer/innen die Realität bestmöglich in den Unterricht einbeziehen können, wird in diesem Abschnitt erläutert. Es werden mögliche Forderungen, Inhalte und Aufgaben vorgestellt, die im Lehrplan und in den Bildungsstandards zu finden sind und für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht eine wesentliche Rolle spielen.

3.1. Lehrplan

Der Lehrplan stellt für das österreichische Schulwesen notwendige Vorgaben dar und legt verschiedene Grundlagen für den Unterricht fest, wie beispielsweise die Planung und Steuerung des Unterrichts in inhaltlicher und in methodischer Hinsicht.¹ Er ist in einen allgemeinen und in einen fachbezogenen Teil unterteilt. Im erstgenannten wird nach Forderungen für einen realitätsbezogenen Unterricht gesucht, beginnend beim allgemeinen Bildungsziel über allgemeine didaktische Grundsätze bis hin zur Schul- und Unterrichtsplanung. Im anschließenden fachbezogenen Abschnitt steht der Realitätsbezug im Unterrichtsfach Mathematik der Sekundarstufe I im Vordergrund.

Ziel dieser Analyse soll sein, wie realitätsbezogener Mathematikunterricht im österreichischen Lehrplan gesehen wird und für welche Inhalte sich der Bezug zum realen Leben am besten eignet. Auch die Umsetzung eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts soll theoretisch betrachtet werden, das heißt wie der Lehrer/ die Lehrerin Realitätsbezüge in den Unterricht einbringen kann.

¹ vgl. Allgemeiner Lehrplan. Bundesministerium für Bildung und Frauen [Zugriff am 6.7.2015]

3.1.1. Allgemeines Bildungsziel

Im ersten Absatz der allgemeinen Bildungsziele des Lehrplans wird darauf hingewiesen, dass der Lehrplan als Grundlage „[...] für die Berücksichtigung der individuellen Interessen und persönlichen Lebensrealität der SchülerInnen [...]“¹ dient. Das bedeutet, dass der Lehrplan nach den individuellen Interessen sowie Lebensrealitäten aufgebaut ist und darauf seine Unterrichtsinhalte bezieht. Mit dieser Grundlage wird man bereits im ersten Teil des Lehrplans immer wieder konfrontiert, und sie spiegelt sich in folgenden Aussagen wider:

- Der Lehrer / die Lehrerin soll den Schüler/inne/n Möglichkeiten anbieten, wo sie „[...] eigene weltanschauliche Konzepte entwerfen und eigene Lebenspläne sowie Vorstellungen von beruflichen Möglichkeiten entwickeln [...]“² können.
- Da innovative Technologien der Information und Kommunikation sowie die Massenmedien immer stärker in alle Lebensbereiche vordringen,³ soll im Unterricht ebenfalls auf diesen Aspekt eingegangen werden und ein realitätsbezogener Unterricht stattfinden.
- „Der Unterricht hat sich [...] sowohl an wissenschaftlichen Erkenntnissen als auch an den Erfahrungen und Möglichkeiten, die die Schülerinnen und Schüler aus ihrer Lebenswelt mitbringen, zu orientieren.“⁴
- „Die Schülerinnen und Schüler sollen im Sinne eines lebensbegleitenden Lernens zur selbstständigen, aktiven Aneignung, aber auch zu einer kritisch-prüfenden Auseinandersetzung mit dem verfügbaren Wissen befähigt und ermutigt werden.“⁵
- „Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, in altersadäquater Form Problemstellungen zu definieren, zu bearbeiten und ihren Erfolg dabei zu kontrollieren.“⁶

¹ Allgemeiner Lehrplan. Bundesministerium für Bildung und Frauen [Zugriff am 6.7.2015]

² ebd.

³ vgl. ebd.

⁴ ebd.

⁵ ebd.

⁶ ebd.

- „Die Schülerinnen und Schüler sind zu befähigen, sich mit Wertvorstellungen und ethnischen Fragen im Zusammenhang mit Natur und Technik sowie Mensch und Umwelt auseinander zu setzen.“¹
- „Für die Analyse und Lösung von Problemen sind Formalisierung, Modellbildung, Abstraktions- und Raumvorstellungsvermögen zu vermitteln.“²

Bereits im Abschnitt „allgemeines Bildungsziel“ wird vermehrt den Lehrer/inne/n deutlich gemacht, wie wichtig es ist, sich im Unterricht mit den Lebenserfahrungen der Schüler/innen auseinanderzusetzen. Denn in Form eines realitätsbezogenen Unterrichts sollen die Schüler/innen auf ihr Leben sowie auf ein eigenverantwortliches und kritisches Denken vorbereitet werden. Auch die Modellbildung wird in diesem Bereich bereits erwähnt. Diese Bildungsziele reflektieren teilweise die Funktionen und Ziele des Sachrechnens³ und weisen auf die Wichtigkeit eines realitätsbezogenen Unterrichts hin. Doch wie kann ein realitätsbezogener Unterricht stattfinden? Die Antwort auf diese Frage wird im nächsten Teil gesucht.

3.1.2. Allgemeine didaktische Grundsätze

Bei den didaktischen Grundsätzen wird speziell auf die Aufgabe des Lehrers/ der Lehrerin eingegangen. Diesbezüglich werden Vorschläge für den Lehrer/ die Lehrerin einen realitätsbezogenen Unterricht zu gestalten, betrachtet. Der Lehrer/ die Lehrerin soll ...

- ... „an die Vorkenntnisse, Vorerfahrungen und an die Vorstellungswelt der Schülerinnen und Schüler anknüpfen.“⁴
- ... „Themen, Arbeits- und Sozialformen [...] unter Einbeziehung der Schülerinnen und Schüler“⁵ festlegen.
- ... Bezüge zur Lebenswelt herstellen. „Es sind möglichst zeit- und lebensnahe Themen zu wählen, durch deren Bearbeitung Einsichten, Kenntnisse,

¹ Allgemeiner Lehrplan. Bundesministerium für Bildung und Frauen [Zugriff am 6.7.2015]

² ebd.

³ vgl. Kapitel 1.2

⁴ Allgemeiner Lehrplan. Bundesministerium für Bildung und Frauen [Zugriff am 6.7.2015]

⁵ ebd.

Fähigkeiten, Fertigkeiten und Methoden gewonnen werden, die eigenständig auf andere strukturverwandte Probleme und Aufgaben übertragen werden können.“

¹

- ... Fachleute in den Unterricht einladen sowie außerschulischer Lernorte einbeziehen oder den lehrplanmäßigen Unterricht durch Schulveranstaltungen ergänzen. ²

Auch diese Aussagen aus dem Lehrplan stellen die Wichtigkeit eines realitätsbezogenen Unterrichts in den Vordergrund. Der Lehrer/ die Lehrerin soll immer wieder an die Erfahrungswelt der Schüler/innen sowie an das Vorwissen anknüpfen und den Unterricht lebensnah gestalten, was zum Beispiel durch Fachleute oder außerschulische Lernorte besonders gut erreicht werden kann. Auch die Gewinnung von mathematischen Methoden, wie sie bereits bei der Funktion des Sachrechnens als Lernstoff erwähnt worden sind, soll der Lehrer/ die Lehrerin in realitätsnahen Aufgaben verarbeiten, damit die Schüler/innen eigenständig diese auf ähnliche Probleme übertragen können.

3.1.3. Schul- und Unterrichtsplanung

Im letzten Abschnitt des allgemeinen Teils des Lehrplans wird nochmals darauf hingewiesen, das Umfeld in den Unterricht miteinzubeziehen, um die darin liegenden Lernchancen zu nutzen. Die Öffnung der Schule nach außen und nach innen, wie im Lehrplan geschrieben wird, kann in Form von Schulveranstaltungen, sei es die Erkundung von Betrieben, öffentlichen Einrichtungen, Lernorten, oder auch durch die Einladung von Personen in die Schule stattfinden. ³

Zusammengefasst kann man also sagen, dass bereits im allgemeinen Teil des Lehrplans vermehrt darauf aufmerksam gemacht wird und immer wieder wiederholt wird, dass der Bezug zur realen Welt im Unterricht eine bedeutende Rolle spielt. Dieser Bezug kann unterschiedlich aussehen, entweder durch die Bearbeitung lebensnaher Themen und

¹ Allgemeiner Lehrplan. Bundesministerium für Bildung und Frauen [Zugriff am 6.7.2015]

² vgl. ebd.

³ vgl. ebd.

Aufgaben, durch Schulveranstaltungen, durch die verschiedenen Medien oder auch durch die Behandlung unterschiedlicher Methoden bis hin zur Modellbildung. Auf diese Vorschläge wird dann im praktischen Teil nochmals eingegangen, indem Beispiele und außerschulische Lernorte für einen realitätsbezogenen Unterricht vorgestellt werden.

Doch wie verankert ist der Realitätsbezug im Fachlehrplan? Um diese Frage zu beantworten, wird nun auf den Lehrplan der Mathematik eingegangen.

3.1.4. Lehrplan der Mathematik

Nach diesem allgemeinen Teil wird nun im Lehrplan des Unterrichtsgegenstandes Mathematik nach Merkmalen und besonderen Inhalten für einen realitätsbezogenen Unterricht gesucht. Vor allem was die Schüler/innen aus dem Unterricht mitnehmen sollen und in welchen Bereichen sie gefördert werden, wird hier nun genauer erläutert.

Die Schüler/innen sollen ...

- ... „[...] mathematisches Können und Wissen aus verschiedenen Bereichen ihrer Erlebnis- und Wissenswelt nutzen sowie durch Verwenden von Informationsquellen weiter entwickeln. Das Bilden mathematischer Modelle und das Erkennen ihrer Grenzen sollen zu einem verantwortungsvollen Umgang mit Aussagen führen, die mittels mathematischer Methoden entstanden sind.“¹
- ... „[...] Erscheinungen der Welt um [sich] in fachbezogener Art wahrnehmen und verstehen.“²
- ... „[...] mit Hilfe von Problemstellungen aus Themenkreisen, die den Erfahrungen und Interessen der Schülerinnen und Schüler entsprechen, [...] mathematisches Wissen und Können [entwickeln und festigen]. Dabei soll die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebens- und Wissensbereichen erfahren werden.“³
- ... „[...] praxisorientierte Aufgaben unter dem Aspekt der Modellbildung möglichst oft rechnerisch, geometrisch und graphisch darstellen, lösen und

¹ Lehrplan der Mathematik. Bundesministerium für Bildung und Frauen, S. 1 [Zugriff am 6.7.2015]

² ebd., S. 1

³ ebd., S. 3

kritisch betrachten können. Dabei sollen sie von ihrer unmittelbaren Erlebniswelt ausgehen und ihre Erfahrungen auch in fächerübergreifende Vorhaben einbringen.“¹

Auch hier wird klar gemacht, dass der Unterricht, in der Sekundarstufe I großteils auf der Basis von Realitätsbezügen basieren soll, um darauf aufbauend mathematisches Wissen und Können zu entwickeln. Den Schüler/inne/n soll in einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht vor Augen gehalten werden, dass Mathematik in vielen Lebensbereichen wichtig ist und daher Mathematik ein Gegenstand ist, der auch noch im späteren Leben relevant ist. Des Weiteren sollen die Schüler/innen Modelle bilden und hinterfragen, um ihr kritisches Denken zu fördern.

Alles im Allem wird im österreichischen Lehrplan den Lehrer/inne/n die Bedeutung und Umsetzung eines realitätsbezogenen Unterrichts nahegelegt. Als Hilfestellung werden einige Vorschläge gebracht, wie der Realitätsbezug in einem Unterricht eingesetzt werden könnte.

3.2. Bildungsstandards

Bis dato wurde nur erwähnt, welche Merkmale realitätsbezogener Mathematikunterricht haben soll, wie solch eine Unterrichtsform aussehen kann und was Schüler/innen lernen sollen. Doch nun stellt sich auch in einer Zeit, in der Bildungsstandards im Unterricht eine entscheidende Rolle spielen, die Frage: „Wie wird realitätsbezogener Mathematikunterricht in den Bildungsstandards dargestellt?“. Um auf diese Frage genauer einzugehen, muss zunächst geklärt werden, was der Begriff „Bildungsstandards“ bedeutet.

„ ‚Bildungsstandards‘ [sind] konkret formulierte Lernergebnisse in den einzelnen oder den in fachlichem Zusammenhang stehenden Pflichtgegenständen, die sich aus den Lehrplänen der [einzelnen] Schularten und Schulstufen ableiten lassen. Diese

¹ Lehrplan der Mathematik. Bundesministerium für Bildung und Frauen, S. 4 [Zugriff am 6.7.2015]

Lernergebnisse basieren auf grundlegenden Kompetenzen, über die die Schülerinnen und Schüler bis zum Ende der jeweiligen Schulstufe in der Regel verfügen sollen.“¹

Diese sogenannten Kompetenzen sind „[...] längerfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die von Lernenden entwickelt werden und die sie befähigen, Aufgaben in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsbewusst zu lösen und die damit verbundene motivationale und soziale Bereitschaft zu zeigen.“²

Bildungsstandards verfolgen auch bestimmte Funktionen. Sie sollen nämlich ...

- ... „Aufschlüsse über den Erfolg des Unterrichts und über Entwicklungspotentiale des österreichischen Schulwesens liefern.
- ... eine nachhaltige Ergebnisorientierung in der Planung und Durchführung von Unterricht bewirken.
- ... durch konkrete Vergleichsmaßstäbe die bestmögliche Diagnostik als Grundlage für individuelle Förderung sicherstellen.
- ... wesentlich zur Qualitätsentwicklung in der Schule beitragen.“³

Wie nun nach der Verordnung der Bundesministerin für Unterricht, Kunst und Kultur ersichtlich ist, fordern/ beschreiben Bildungsstandards Kompetenzen, die „[...] sich auf ein aus dem jeweiligen Lehrplan abgeleitetes fachbezogenes bzw. fächerübergreifendes Kompetenzmodell [beziehen] und [...] damit die gesamte inhaltliche Breite des jeweiligen Unterrichtsgegenstandes [...] abdecken.“⁴ Das Kompetenzmodell für Mathematik (Abb. 4) bezieht sich auf mathematische Tätigkeiten (Handlungsdimension), auf mathematische Inhalte (Inhaltsdimension) sowie auf die Art und Komplexität der erforderlichen Vernetzungen (Komplexitätsdimension).⁵

¹ Gesamte Rechtsvorschrift für Bildungsstandards im Schulwesen, Fassung vom 06.07.2015. Begriffsbestimmungen § 2/ Abs. 1, S. 1 [Zugriff am 6.7.2015]

² ebd. Abs. 2, S. 1

³ ebd. Abs. 1-3, S. 2

⁴ ebd., Bildungsstandards und Kompetenzmodelle, S. 3

⁵ vgl. Peschek: „Was sind und wozu dienen Standards im Mathematikunterricht?“, 2011, S. 9

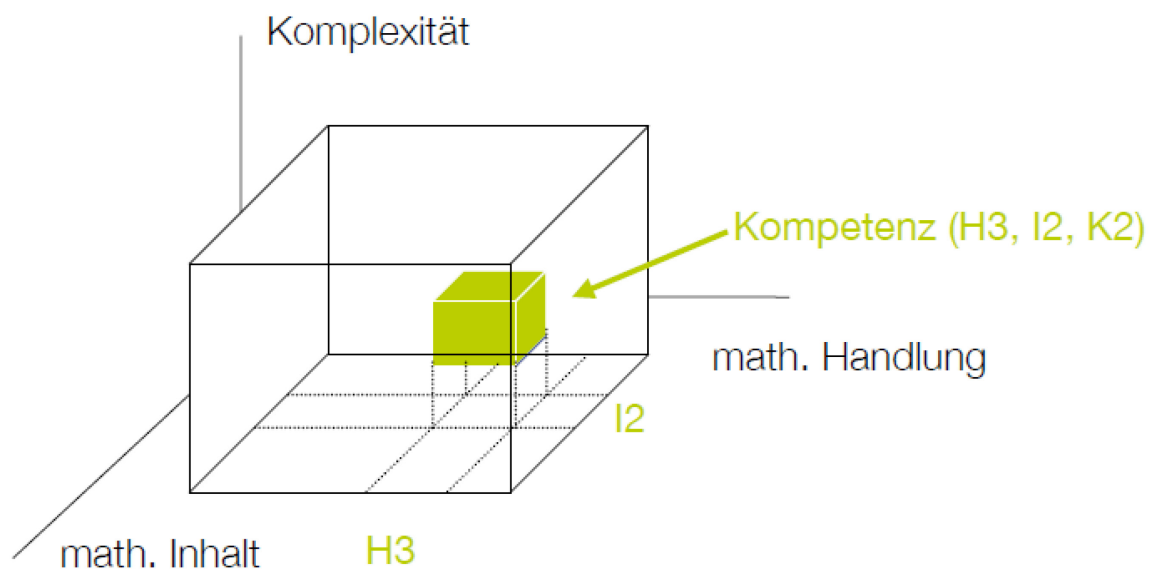


Abbildung 4: Ein Modell mathematischer Kompetenzen (Quelle: Peschek: „Was sind und wozu dienen Standards im Mathematikunterricht?“, 2011, S. 9)

Für das dreidimensionale Modell „[...] sind unterschiedliche Ausprägungen vorstellbar: unterschiedliche mathematische Handlungen, unterschiedliche mathematische Inhalte sowie unterschiedliche Arten und Grade der Komplexität. Im hier verwendeten Modell [...] werden ‚verwandte‘ Handlungen zu Handlungsbereichen (H1, H2, ...), ‚verwandte‘ Inhalte zu Inhaltsbereichen (I1, I2, ...) und ‚verwandte‘ Arten bzw. Grade von Vernetzungen zu Komplexitätsbereichen (K1, K2, ...) zusammengefasst.“

Die Handlungsbereiche basieren auf der Grundlage der vier zentralen mathematischen Tätigkeiten bzw. Tätigkeitsbereichen.

- „H1 Darstellen, Modellbilden: Darstellen meint die Übertragung gegebener mathematischer Sachverhalte in eine (andere) mathematische Repräsentation bzw. Repräsentationsform. Modellbilden erfordert über das Darstellen hinaus, in einem gegebenen Sachverhalt die relevanten mathematischen Beziehungen zu erkennen (um diese dann in mathematischer Form darzustellen), allenfalls Annahmen zu treffen, Vereinfachungen bzw. Idealisierungen vorzunehmen u. Ä.

¹ Peschek: „Was sind und wozu dienen Standards im Mathematikunterricht?“, 2011, S. 9

- H2 Rechnen, Operieren: Rechnen im engeren Sinn meint die Durchführung elementarer Rechenoperationen mit konkreten Zahlen, Rechnen in einem weiteren Sinn meint die regelhafte Umformung symbolisch dargestellter mathematischer Sachverhalte. Operieren meint allgemeiner und umfassender die Planung sowie die korrekte, sinnvolle und effiziente Durchführung von Rechen- oder Konstruktionsabläufen und schließt z. B. geometrisches Konstruieren oder auch das Arbeiten mit bzw. in Tabellen und Grafiken mit ein.
- H3 Interpretieren: Interpretieren meint, aus mathematischen Darstellungen Fakten, Zusammenhänge oder Sachverhalte zu erkennen und darzulegen sowie mathematische Sachverhalte und Beziehungen im jeweiligen Kontext zu deuten.
- H4 Argumentieren, Begründen: Argumentieren meint die Angabe von mathematischen Aspekten, die für oder gegen eine bestimmte Sichtweise/Entscheidung sprechen. Argumentieren erfordert eine korrekte und adäquate Verwendung mathematischer Eigenschaften/ Beziehungen, mathematischer Regeln sowie der mathematischen Fachsprache. Begründen meint die Angabe einer Argumentation(skette), die zu bestimmten Schlussfolgerungen/Entscheidungen führt.“¹

Auch die Inhaltsbereiche sind in vier mathematische Themen unterteilt, die sich auf den derzeit gültigen Lehrplan beziehen.

- „I1 Zahlen und Maße:
 - natürliche, ganze, rationale und irrationale Zahlen
 - Bruch- und Dezimaldarstellung rationaler Zahlen; Potenzschreibweise (mit ganzzahligen Exponenten), Wurzeln
 - Rechenoperationen, Rechengesetze und –regeln
 - Anteile, Prozente, Zinsen
 - Maßeinheiten (für Längen, Flächeninhalte, Volumina, Massen, Zeiten und zusammengesetzte Größen)

¹ Peschek: „Was sind und wozu dienen Standards im Mathematikunterricht?“, 2011, S. 10

- I2 Variable, funktionale Abhängigkeiten Variable, Terme und (Un-) Gleichungen; verschiedene Darstellungen funktionaler Zusammenhänge
 - Variable und Terme
 - einfache Gleichungen (Formeln) und Ungleichungen
 - lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen
 - verbale, tabellarische, grafische und symbolische Darstellung funktionaler Zusammenhänge; lineare Funktionen; direkte und indirekte Proportionalität

- I3 Geometrische Figuren und Körper
 - Punkt, Gerade, Ebene; Strecke, Winkel; Parallele, Normale
 - Symmetrie, Ähnlichkeit
 - Dreiecke, Vierecke, Kreis
 - Würfel, Quader, Prismen, Pyramiden, Zylinder, Kegel, Kugel
 - Satz von Pythagoras
 - Umfangs-, Flächen-, Oberflächen- und Volumsformeln

- I4 Statistische Darstellungen und Kenngrößen
 - tabellarische Darstellung statistischer Daten
 - Stabdiagramm, Kreisdiagramm, Streifendiagramm, Piktogramm, Liniendiagramm; Streudiagramm
 - absolute und relative Häufigkeiten
 - arithmetisches Mittel, Median, Quartile
 - Spannweite, Quartilsabstand.“¹

Die Komplexitätsdimension versucht die unterschiedlichen Anforderungen in drei Komplexitätsbereiche zu unterteilen.

- „K1 Einsetzen von Grundkenntnissen und –fertigkeiten meint die Wiedergabe oder direkte Anwendung von grundlegenden mathematischen Begriffen, Sätzen, Verfahren und Darstellungen. In der Regel ist nur reproduktives mathematisches Wissen und Können oder die aus dem Kontext unmittelbar erkennbare direkte

¹ Peschek, „Was sind und wozu dienen Standards im Mathematikunterricht?“, 2011, S. 10f

Anwendung von mathematischen Kenntnissen bzw. Fertigkeiten geringer Komplexität erforderlich.

- K2 Herstellen von Verbindungen: Dieser Komplexitätsbereich ist erforderlich, wenn der mathematische Sachverhalt und die Problemlösung komplexer sind, sodass mehrere Begriffe, Sätze, Verfahren, Darstellungen bzw. Darstellungsformen oder auch verschiedene mathematische Tätigkeiten in geeigneter Weise miteinander verbunden werden müssen.
- K3 Einsetzen von Reflexionswissen. Reflektieren meint das Nachdenken über Zusammenhänge die aus dem dargelegten mathematischen Sachverhalt nicht unmittelbar ablesbar sind. Reflektieren umfasst das Nachdenken über eine mathematische Vorgehensweise, über Vor- und Nachteile von Darstellungen/Darstellungsformen bzw. über mathematische Modelle im jeweiligen Kontext sowie das Nachdenken über Interpretationen, Argumentation oder Begründungen.“¹

Dieses Kompetenzmodell (Abb. 4) repräsentiert die Grundlage mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten, die im Mathematikunterricht erworben bzw. gefördert werden sollten. Doch wo findet sich der realitätsbezogene Mathematikunterricht tatsächlich? Die Antwort auf die Frage findet man nicht in den Inhaltsbereichen, sondern im Handlungsbereich H1 „Darstellen und Modellbilden“. Wie bereits in den Kapiteln zuvor erwähnt worden ist, ist das „Modellieren“ jener Kompetenzbereich der Bildungsstandards, der einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht als Grundlage benötigt. Denn im Mittelpunkt des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts steht die Fähigkeit, mithilfe von Mathematik die Umwelt zu erschließen und diese Fähigkeit wird im Kompetenzbereich Modellieren gefordert.² „[Die] Kompetenz [des] Modellierens bedeutet [nämlich], mathematische Modelle von realen Situationen zu bilden, diese mathematisch weiterzuführen und bezogen auf die Wirklichkeit zu interpretieren.“³

¹ Peschek, „Was sind und wozu dienen Standards im Mathematikunterricht?“, 2011, S. 11

² vgl. Themenheft Mathematik „Modellieren“. BIFIE (Hrsg.), 2012, S. 5

³ ebd., S. 5

Wie auch schon bei der Begriffserklärung zu einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht erwähnt worden ist, ist auch in den Bildungsstandards eindeutig erkennbar, dass Mathematik und Realität in Form von sogenannten Modellierungsprozessen miteinander verknüpft sind. „Modellieren verlangt daher immer einen direkten Realitätsbezug.“¹ Des Weiteren ermöglicht „Modellieren“ auch andere Kompetenzen zu trainieren. „Denn Kinder, die modellieren, müssen auch Probleme lösen, argumentieren, ihre Lösungen darstellen und sie kommunizieren [...]“², wie im Modellbildungskreislauf deutlich gemacht wird. Beim Modellierungsprozess müssen die Schüler/innen einzelne Teilschritte des Modellierens ausführen und miteinander verbinden. Dabei erwerben sie natürlich weitere Kompetenzen, wie die „Kompetenzen ...

- ... zum Verständnis eines realen Problems.
- ... zum Vereinfachen und Strukturieren einer Situation (d.h. zum Aufstellen eines Realmodells).
- ... zum Übersetzen der Situation in die Sprache der Mathematik (d.h. zum Aufstellen eines mathematischen Modells).
- ... zur Lösung mathematischer Fragestellungen innerhalb eines mathematischen Modells.
- ... die Bedeutung eines mathematischen Ergebnisses für die Realität zu erkennen (d.h. zur Interpretation mathematischer Resultate).
- ... kritisch über eine Lösung nachzudenken (d.h. sie zu validieren).“³

Je nach Sachkontext einer Modellierungsaufgabe werden damit unterschiedliche mathematische Kompetenzen angesprochen.

Nach diesen vorangegangenen Überlegungen zeigt sich, dass Modellierungsaufgaben wesentliche Teile der Bildungsstandards abdecken und es sicher durchaus wichtig ist, sie immer wieder in den Unterricht einzubauen. Katja Maaß merkt aber an, dass „[...]

¹ Themenheft Mathematik „Modellieren“. BIFIE (Hrsg.), 2012, S. 6

² Maaß, 2009, S. 22

³ ebd., S. 24

Modellierungsaufgaben [...] sicherlich kein ‚Allheilmittel‘ [sind]“.¹ und daher nicht der einzige Bestandteil eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts sein sollten.

Nach dem Lehrplan und den Bildungsstandards zeigt sich, dass ein Realitätsbezug im Unterricht zur Selbstständigkeit beim Lösen von Aufgaben und zum kritischen Prüfen von Fach- und Allgemeinwissen anregen soll. Dabei soll die Nützlichkeit der Mathematik in den verschiedensten Lebensbereichen für die Schüler/innen erkennbar werden. Des Weiteren soll ein Realitätsbezug im Unterricht ein langfristiges Behalten von mathematischen Inhalten bewirken und zur Qualitätsentwicklung beitragen. Diese wesentlichen Gründe für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht sollen die Lehrer/innen dazu auffordern, den Unterricht so lebensnah wie möglich zu gestalten. Das kann, wie bereits erwähnt, in Form von unterschiedlichen Themen, Arbeits- und Sozialformen, außerschulischen Lernorten sowie realitätsnaher Mathematikbeispiele erfolgen.

¹ Maaß, 2009, S. 23

4. Möglichkeiten zur Umsetzung eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts

Wie man nun aus dem Lehrplan und den Bildungsstandards entnehmen kann, muss ein Mathematikunterricht bestimmte Anforderungen erfüllen, damit die Ziele für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht erreicht und die Kompetenzen im Modellieren erworben werden können. Der dafür passende Unterricht muss von den Lehrer/inne/n geplant und durchgeführt werden. Doch welche Möglichkeiten hat ein Lehrer / eine Lehrerin und was sind seine / ihre Aufgaben für die entsprechende Umsetzung? Die Antwort darauf hat teilweise schon der Lehrplan im Abschnitt „didaktische Grundsätze“ gegeben.

Im folgenden Kapitel wird auf die wesentlichen Aspekte nochmals zurückgegriffen und nach einem „Rezept“ für die Planung und Umsetzung eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts gesucht.

In einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht sollen die Lebenswelt der Schüler/innen und das aktive, selbstständige Arbeiten im Vordergrund stehen. Dabei soll der Lehrer/ die Lehrerin die Aufgaben immer so wählen, dass sie an das Vorwissen und an die Erfahrungen der Kinder anknüpfen. Die Aufgaben müssen jedoch so gestellt werden, dass verschiedene Lösungsroutinen angeregt und auch zugelassen werden können, um den Schüler/inne/n das Entwerfen von eigenen Konzepten und Lösungswegen zu ermöglichen. Der Einsatz von Technologien und Medien in der heutigen Zeit darf natürlich in einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht nicht fehlen, sei es der Computer, das Handy oder die Printmedien. Im Unterricht darf auch der Bereich der Kompetenzbildung nicht vernachlässigt werden. Vor allem ist das Modellbilden in einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht von großer Bedeutung und soll von der Lehrperson gelehrt und gefördert werden. Diesbezüglich müssen die Aufgaben entsprechend formuliert werden, damit Schüler/innen Modelle überhaupt erst bilden und interpretieren können. Welche Aufgaben sich am besten für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht und für das Modellbilden eignen, wird noch erörtert.

Damit die Schüler/innen das Modellieren lernen, muss auch der Unterricht methodisch entsprechend gestaltet werden. Realitätsbezogener Mathematikunterricht soll daher nicht nur innerschulisch stattfinden und nicht nur in Aufgaben / Beispielen zum Vorschein kommen, sondern soll auch außerhalb der Schule zu einem positiven Erlebnis für die Schüler/innen beitragen. Daher soll der Lehrer / die Lehrerin außerschulische Lernorte und Schulveranstaltungen in Anspruch nehmen, um einerseits noch stärker einen Realitätsbezug zu erhalten und um andererseits die Motivation und Freude am Unterrichtsfach Mathematik zu steigern. Natürlich kann man auch Fachleute in seinem regulären Unterricht mit einbeziehen, um damit eine Abwechslung im Schulalltag zu schaffen.

Infolge dieser kurzen Vorstellung, was zu einem realitätsbezogenen Unterricht nochmals gehört, wird auf zwei Bereiche detailliert eingegangen.

Erstens auf die richtige Bildung von Beispielen eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts und infolgedessen auf die Modellierungsaufgaben. Wie sollen die Aufgaben aussehen bzw. wie soll man in einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht mit Modellierungsaufgaben umgehen.

Zweitens wird der Begriff des außerschulischen Lernortes erläutert und es werden Beispiele angeführt, die in einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht in Österreich einbezogen werden können.

Beginnen möchte ich mit dem Erstgenannten, da es an das vorhergehende Kapitel anschließt.

4.1. Einige Aufgabentypen für realitätsbezogenen Mathematikunterricht

Für einen guten realitätsbezogenen Mathematikunterricht ist die Wahl der Aufgaben entscheidend. Im Folgenden werden daher unterschiedliche Aufgabentypen vorgestellt, die in einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht eingesetzt werden können. Es fällt jedoch schwer, Beispiele den verschiedenen Aufgabekategorien zuzuordnen, da

sie oftmals Mischformen darstellen oder aufgrund der Unterrichtssituation durch die Art der Bearbeitung bzw. durch die lernende Person in der Aufgabenstellung beeinflusst werden. Auch gibt es in der Literatur unterschiedliche Bezeichnungen und Klassifikationssysteme, die eine eindeutige Zuordnung der Aufgabentypen erschweren.¹

Sobald in einer Aufgabe eine Verbindung zwischen Realität und Mathematik gegeben ist, kann man von einer sogenannten „realitätsbezogenen Aufgabe“ sprechen.² Dieser Begriff wird vor allem im deutschsprachigen Raum verwendet und fasst verschiedene Arten von Aufgaben zusammen, die sich im Sachkontext unterscheiden. Um eine sinnvolle Strukturierung realitätsbezogener Aufgaben darzustellen, werden Klassifizierungen vorgenommen.³ „Das Spektrum der Klassifizierungen reicht von einer Ordnung nach der Nützlichkeit und Relevanz des Sachkontextes für das Leben der Lernenden bis zu einer Ordnung nach den Bearbeitungshilfen, die in den Aufgabenstellungen zur Modellierung gegeben sind.“⁴ Bei der Klassifizierung der Aufgaben wird auf die Art der Realitätsbezüge Rücksicht genommen.⁵ Realitätsbezogene Aufgaben sollten daher stets ein Problem aus dem Alltag/ der Umwelt in den Vordergrund stellen und das Anwenden mathematischer Standardverfahren sowie das Modellbilden bevorzugen.⁶

Grundsätzlich unterscheidet man zwei Arten von realitätsbezogenen Aufgaben im Mathematikunterricht, nämlich die klassischen Sachaufgaben und die Modellierungsaufgaben. Diese werden wieder in einzelne Kategorien unterteilt.

¹ vgl. Borromeo Ferri et al. (Hrsg.), 2013, S. 23

² vgl. Wiegand, 2000, S. 38

³ vgl. Maaß, 2004, S. 16

⁴ ebd., S. 16

⁵ vgl. Kapitel 1.1

⁶ vgl. Maaß, 2004, S. 16f

4.1.1. Klassische Sachaufgaben

Zunächst werden einige klassische Sachaufgaben vorgestellt. Die Unterteilung der Sachaufgaben erfolgt in sogenannte eingekleidete Aufgaben, Textaufgaben und Sachprobleme.¹

- **Eingekleidete Aufgaben:** „Bei eingekleideten Aufgaben handelt es sich um Rechnungen ohne wirklichen Realitätsbezug. Der Sachkontext spielt für die Lösung der Aufgaben keine Rolle und kann beliebig ausgetauscht werden. Das Ziel eingekleideter Aufgaben ist die Anwendung und Übung von Rechenfertigkeiten.“²
- **Textaufgaben:** „Textaufgaben bestehen aus Aufgaben in Textform – teilweise auch ergänzt durch ein Bild. Die Sache ist – ähnlich wie bei den eingekleideten Aufgaben – im Prinzip austauschbar, und die Realität ist häufig sehr vereinfacht dargestellt.“³ Das Ziel ist die Förderung mathematischer Fähigkeiten, wie dem Übersetzen des Textes in Terme oder Gleichungen, dem Rechnen und Interpretieren.⁴
- **Sachprobleme:** Dieser Aufgabentyp wird oftmals auch als Sachaufgabe bezeichnet. Im Vordergrund steht ein Problem aus der Umwelt, das mit realen Daten vorgegeben ist, zu denen authentische Fragen gestellt werden. Zusätzlich müssen oftmals Informationen zu dem Sachverhalt eingeholt und verarbeitet werden, da die Aufgabe sehr offen gestellt ist. Demnach sind Recherchieren, Vereinfachen, Mathematisieren, Rechnen, Interpretieren und Validieren notwendig. Diese Tätigkeiten findet man im Modellierungskreislauf wieder, daher können in diesem Sinne Sachprobleme auch als Modellierungsaufgaben angesehen werden.⁵

¹ vgl. Borromeo Ferri et al. (Hrsg.), 2013, S. 23

² ebd., S. 23f

³ ebd., S. 24

⁴ vgl. ebd., S. 24f

⁵ vgl. ebd., S. 24f

Demzufolge können Sachaufgaben Modellierungsaufgaben sein, müssen es aber nicht, wenn man die drei Unterteilungen berücksichtigt. Zwei einfache Beispiele sollen dies kurz verdeutlichen.

Beispiel 1:

„Jana hat 2 Bonbons. Tabea hat 5 Bonbons mehr. Wie viel hat Tabea?“¹

Beispiel 2:

„Max will an seinem 8. Geburtstag mit seinen Gästen Schokoküsse essen. Wie viele Schachteln muss er mit seiner Mutter einkaufen?“²

Beide Aufgaben sind realitätsbezogen, doch bei der ersten handelt es sich um eine klassische Sachaufgabe (Textaufgabe), bei der anderen um eine Modellierungsaufgabe.

Bei Beispiel 1 handelt es sich um eine klassische Sachaufgabe, bei der eine mathematische Operation im Mittelpunkt steht. Die Mathematikaufgabe wird hier in einen Sachkontext eingekleidet, der austauschbar ist. Es gibt genau eine Lösung und die zur Lösung benötigten Daten sind gegeben. Für das Lösen dieser Aufgabe reichen einfache Grundrechnungsarten bzw. der vorher gelernte mathematische Inhalt.³

Bei Beispiel 2 handelt es sich um eine Modellierungsaufgabe. Das Beispiel lässt sich nicht lösen, ohne den Sachkontext zu berücksichtigen. Hier wird ein Problem betrachtet, das sich im Alltag der Kinder wirklich stellen könnte, denn Geburtstagspartys sind in der Welt von Kindern etwas Besonderes. Die Kinder helfen manchmal mit beim Planen eines Kindergeburtstags und stellen sich Fragen wie „Wie viele Kinder werden wohl kommen?“, „Isst jeder gerne Schokoküsse und wie viele denn?“ usw. Natürlich gibt es hier keine eindeutige Lösung und auch keinen eindeutigen Rechenweg, aber die Schüler/innen lernen bei einer solchen Aufgabenstellung, sich mit einer realistischen Sachsituation auseinanderzusetzen, Fragen zu stellen, nach Lösungen zu suchen und mit der Offenheit der Situation umzugehen. Weiteres sehen sie auch, dass Mathematik im Leben nützlich sein kann. Demnach sollten Modellierungsaufgaben offen, komplex,

¹ Maaß, 2009, S. 10

² ebd., S. 11

³ vgl. Blum, 2007, S. 4

realistisch, authentisch, problemhaltig und durch das Ausführen eines Modellierungsprozesses lösbar sein.¹

4.1.2. Modellierungsaufgaben

Lehrer/innen sollten beim Bilden von Modellierungsaufgaben die zuvor genannten Eigenschaften berücksichtigen, um die nötige Kompetenz zu fördern. Da jedoch das Modellieren bzw. Sachrechnen ein komplexer Prozess ist, ist es sicher nicht Sinn und Zweck, stets Aufgaben im Unterricht zu behandeln, bei denen der gesamte Modellierungsprozess durchlaufen werden muss. So scheint es natürlich sinnvoll nur Teilaspekte des Modellierens zu bearbeiten. Das Zerlegen in Teilaufgaben erleichtert den Schüler/innen den Einblick in den Sachzusammenhang und in die Verlaufsstruktur.²

Daher können neben den Sachaufgaben auch die Modellierungsaufgaben in einzelne Aufgabentypen unterteilt werden. Einerseits in „überbestimmte“ und „unterbestimmte“ Aufgaben, andererseits in Aufgaben, die Teilkompetenzen wie Bilden eines Modells, Interpretieren einer Lösung und Validieren enthalten.

Im Folgenden wird zunächst immer ein theoretischer Input zu einem jeweiligen Aufgabentyp gegeben und anschließend mit einem Beispiel, das in der 8. Schulstufe behandelt werden kann, veranschaulicht.

4.1.2.1. Überbestimmte Aufgaben

„Aufgabentexte oder Aufgabenstellungen können Angaben enthalten, die zur Lösung der Aufgabe nicht erforderlich sind. In einem solchen Fall spricht man von einer überbestimmten Aufgabe.“³ „Die SchülerInnen müssen [bei diesem Aufgabentext] erst überlegen, welche Angaben zur Lösung der Problemfrage beachtet werden müssen und sich somit mit dem Sachkontext auseinandersetzen.“⁴ Ziel dieses Aufgabentyps ist es,

¹ vgl. Maaß, 2009, S. 10f

² vgl. Themenheft Mathematik „Modellieren“. BIFIE (Hrsg.), 2012, S. 38

³ Greefrath, 2010, S. 76

⁴ Maaß, 2007, S. 43

für das Lösen des Beispiels relevante Informationen aus den vorgegebenen Daten entnehmen zu können. Folgendes Beispiel soll dies kurz veranschaulichen.

Beispiel 3:

„Hannah aus Freiburg möchte ihre Freundin Maria in Oxford (England) für eine Woche besuchen. Der Flug von Basel nach London Heathrow kostet hin und zurück 176 €, darin sind bereits 19 € Buchungsgebühr enthalten.

Der Bus von Freiburg nach Basel kostet pro Strecke 16 €, die Karte für die Hin- und

Rückfahrt kostet 30 €. Die PKW-Parkgebühren am Flughafen in Basel liegen bei 3,60 € pro Stunde, 8 Tage kosten 43 €. Der Bus von London-Heathrow nach Oxford kostet hin- und zurück 20 £, eine Gruppenkarte für 15 Personen kostet 270 £. Wie hoch sind die Fahrtkosten für Hannah?“¹



Bild 1: Reisekosten – Aufgabe

Um dieses Beispiel zu lösen, muss man sich zunächst intensiv mit dem Text auseinandersetzen und herausfiltern, welche Angaben für die Lösung notwendig sind. Die relevanten Größen sind hier die Flugkosten (176 €), die Buskosten von Freiburg nach Basel und retour (30 €) sowie die Buskosten von London nach Oxford (20 £ $\approx$ 30 €). Die Gesamtkosten für Hannah betragen daher $176 + 30 + 30 = 236$ €. Alle anderen Angaben wie Parkgebühr sind für die Lösung nicht brauchbar. Für leistungsschwache Schüler/innen wird dieses Beispiel eine Herausforderung darstellen, da es sehr viele überflüssige Informationen enthält. Die eigentliche Schwierigkeit bei dieser Aufgabe besteht daher darin, die richtigen Zahlen für das Lösen des Problems herauslesen zu können, denn das bloße Addieren stellt in einer 8. Schulstufe keine großen Schwierigkeiten mehr dar. Schüler/innen mit Sprachproblemen könnten ebenfalls bei diesem längeren Text erhebliche Probleme bekommen. Als eine mögliche Hilfestellung könnte man die Schüler/innen die Situation nacherzählen lassen oder auch den Text in einzelne Teile zerlegen. Doch in einer 8. Schulstufe, wo man bereits einige Erfahrungen mit Modellierungsaufgaben gemacht hat und auch sprachlich

¹ Maaß, 2007, S. 49

fortgeschritten ist, dürfte dies kaum eine Rolle spielen. Ansonsten ist diese Aufgabenstellung für Schüler/innen sehr realistisch und offen. Auch die Umrechnung von Pfund in Euro stellt zusätzlich einen Realitätsbezug her. Schüler/innen, die nicht den Umrechnungsfaktor von Pfund in Euro wissen, müssen sich zunächst in den Medien schlau machen. Man könnte des Weiteren den Schüler/innen als Zusatzaufgaben die Suche nach billigeren Flugverbindungen im Internet geben und somit auch Vergleiche anstellen, welche Fluglinie günstiger ist.¹

Alles in Allem soll diese überbestimmte Aufgabe zeigen, dass in vielen realitätsbezogenen Beispielen genaues Lesen im Vordergrund steht und nur die relevanten Angaben betrachtet werden dürfen.

4.1.2.2. Unterbestimmte Aufgaben

„Unterbestimmte Textaufgaben sind solche, denen eine oder mehrere Angaben fehlen. Die fehlenden Daten müssen von den Schülern entweder durch sinnvolles Schätzen oder durch das Einholen von Informationen ergänzt werden.“² Viele Schüler/innen sehen solche Aufgaben zuerst als nicht lösbar und müssen vielfach erst motiviert werden es trotzdem zu versuchen und ein ungefähres Ergebnis zu akzeptieren. Sie empfinden unterbestimmte Aufgaben auch oftmals schwieriger als überbestimmte Aufgaben, bei denen sie nur erkennen müssen, welche Angaben für das Lösen der Aufgabe benötigt werden.³

Dazu wieder ein Beispiel, um diesen Aufgabentyp kurz zu erläutern.

¹ vgl. Maaß, 2007, S. 50

² ebd., S. 54

³ vgl. ebd., S. 54

Beispiel 4:

Das Rauchen verkürzt die durchschnittliche Lebensdauer. Jährlich sterben etwa 10000 bis 14000 Menschen in Österreich an den Folgen des Tabakkonsums.¹ Die Lebenserwartung eines Rauchers ist in etwa um zehn Jahre geringer als die eines Nichtraucher. Trotzdem ist der Zigarettenkonsum groß und auch viele Jugendliche



Bild 2: Rauchen - Aufgabe

rauchen. Im Jahr 2008 rauchten 31 % der männlichen Österreicher und 26 % der österreichischen Frauen.² Im Internet findet man die Angabe, dass pro gerauchte Zigarette das Leben um fünf Minuten verkürzt wird. Stell dir einen rauchenden Jugendlichen in deinem Alter vor. Um wie viel Tage würde sich sein Leben gemäß dieser Regel verkürzen? Ist das wirklich so?³

Um dieses Beispiel zu lösen, müssen mehrere Annahmen getroffen werden. „Der Jugendliche ist 14 Jahre alt und raucht seit einem Jahr. Er hört mit 47 wieder mit dem Rauchen auf, d.h. er raucht insgesamt 35 Jahre. Er raucht durchschnittlich täglich 20 Zigaretten. Gemäß der obigen Regel würde dies bedeuten, dass sich das Leben um $5 \cdot 20 \cdot 365 \cdot 35 = 1277500$ Minuten ≈ 887 Tage verkürzt, das entspricht ca. 2,5 Jahren. Das muss natürlich nicht sein, da es sich nur um eine Faustregel handelt, die auf durchschnittliche Angaben beruht.“⁴

Obwohl letztendlich die Berechnung dieses Beispiels sehr einfach und logisch erscheint, ist es wahrscheinlich für viele Schüler/innen eine Herausforderung dieses Beispiel zu lösen. „Zum Berechnen der Antwort [...] sind nur die Grundrechnungsarten nötig [und auch die benötigten Angaben sind leicht zu schätzen]. Anspruchsvoll wird die Aufgabe dadurch, dass hier zumindest andiskutiert wird, welche Aussagekraft eine solche Angabe, die auf Schätzungen und Berechnungen von durchschnittlichen Lebenserwartungen von Rauchern beruht, hat.“⁵ Auch dass zu viel unnötiger Text in

¹ vgl. ORF, 2007, *Weltnichtrauchertag* [Zugriff am 28.7.2015]

² vgl. Ludwig-Blotzmann-Institut für Suchtforschung, 2008, S. 2 [Zugriff am 28.7.2015]

³ vgl. Maaß, 2007, S. 63

⁴ ebd., S. 63

⁵ ebd., S. 64

der Angabe steckt, der nicht zum Lösen des eigentlichen Problems gebraucht wird, stellt eine Schwierigkeit für das Lösen dar. „Diese Aufgabe kann aber gut verdeutlichen, wie schwierig es sein kann, über Sachverhalte statistische Aussagen zu treffen und wie wenig nachvollziehbar Angaben im Internet sein können.“¹

4.1.2.3. Fermi – Aufgaben

Sogenannte Fermi – Aufgaben sind unterbestimmte offene Aufgaben mit klarem Endzustand aber unklarem Anfangszustand, bei denen die Datenbeschaffung im Vordergrund steht. Diese Aufgaben sind nach dem Physiker Enrico Fermi benannt und scheinen zunächst unlösbar zu sein, weil kaum Informationen angegeben sind. Fermi – Aufgaben zeichnen sich durch ihre Offenheit und durch ihren Realitätsbezug aus. Meistens besteht die Aufgabenstellung aus einer einzigen Frage. Bei Fermi – Aufgaben steht weniger das Rechnen im Vordergrund sondern viel mehr das Schätzen, Recherchieren, Experimentieren, Vereinfachen und Validieren. Die Schüler/innen lernen zudem, selbst Fragen zu stellen und mit heuristischen Strategien zu arbeiten. Um daher eine Fermi – Aufgabe lösen zu können, muss ein passendes, einfaches mathematisches Modell entworfen und plausible Abschätzungen getroffen werden.² Das bekannteste Beispiel für diesen Aufgabentyp ist folgendes:

Beispiel 5:

„Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?“³

Bei diesem relativ kurzen Beispiel liegen zunächst keine Informationen vor. Man kann aber die Frage schrittweise durch sinnvolle Annahmen zerlegen.

„Chicago hat etwa drei Millionen Einwohner/innen, eine Durchschnittsfamilie besteht aus vier Personen und ein Drittel aller Familien besitzt ein Klavier. Also gibt es 250 000 Klaviere in der Stadt. Wenn jedes Klavier angenommen alle zehn Jahre gestimmt wird, ergibt das $250\,000 : 10 = 25\,000$ Stimmungen im Jahr. Wenn nun jeder Klavierstimmer

¹ Maaß, 2007, S. 64

² vgl. Borromeo Ferri et al. (Hrsg.), 2013, S. 29f

³ Themenheft Mathematik „Modellieren“. BIFIE (Hrsg.), 2012, S. 62

pro Tag zehn Klaviere stimmt, dann kommt er an ungefähr 250 Arbeitstagen im Jahr auf 1000 Stimmungen. Es muss daher ca. 25 Klavierstimmer in Chicago geben.“¹

Die Antwort wird also durch geeignete Auswahl und sinnvolles Schätzen von Zwischenangaben bestimmt. Sie ist selbstverständlich nicht genau. Es könnten genauso gut weniger oder viel mehr Klavierstimmer sein. „Wichtig ist hier jedoch die Erkenntnis, dass man auf unterschiedlichsten Wegen zu Annäherungen an die Lösung kommt, die durchaus ‚im richtigen Bereich‘ liegen.“²

4.1.2.4. Aufgaben zum Bilden eines Modells

„Möchte man das Bilden eines Modells trainieren, so muss man den Schüler/innen eine Problemsituation vorlegen, die modelliert werden soll. Die Aufgabe der Schüler ist dann nicht das Lösen des Problems, sondern nur das Aufstellen eines Modells.“³ Man sollte jedoch bedenken, dass das Üben dieser Teilkompetenz des Modellierens für manche Schüler/innen unbefriedigend sein könnte, da man die Problembearbeitung mittendrin abbricht und daher keine Lösung erhält. Um diese Angelegenheit zu umgehen, könnte man im Unterricht, nachdem die Schüler/innen Modelle entwickelt haben, diese besprechen, vergleichen und auf der Basis eines gemeinsamen Modells fortfahren.⁴

Eine mögliche Umsetzung im Unterricht wird anhand der Weltjugendtag-Aufgabe vorgestellt.

¹ Themenheft Mathematik „Modellieren“. BIFIE (Hrsg.), 2012, S. 62

² ebd., S. 62

³ Maaß, 2007, S. 73

⁴ vgl. ebd., S. 73

Beispiel 6:

„Am 16.8.2005 war der Weltjugendtag der Katholischen Kirche in Köln. Jugendliche aus aller Welt kamen dort zusammen, um über ihren Glauben zu sprechen. Am 18.8.2005 kam auch Papst Benedikt XVI. nach Köln. An der Abschlussmesse am 22.8.2005 auf dem



Marienveld nahmen nach Schätzungen 0,8 bis 1,2 Millionen Jugendliche teil. Ein Zusammentreffen so vieler Menschen versetzt eine Stadt in den Ausnahmezustand und erfordert eine gute Organisation. Die Jugendlichen müssen gepflegt und untergebracht werden. In der letzten Woche des Weltjugendtages 2005 haben ca. 400 000 Jugendliche in Köln übernachtet. Sie schliefen in mitgebrachten Zelten, bei Gastfamilien und in Turnhallen, Schulen und öffentlichen Gebäuden, die zu Massenunterkünften umfunktioniert wurden. Für die Verpflegung beauftragte das Organisationskomitee eine Firma, die drei Mahlzeiten am Tag anbot. Welche Lebensmittel musste diese Firma einkaufen und in welchen Mengen? Wie viel Platz wird allein zum Zelten benötigt? Bilde ein geeignetes Modell!“¹

Viele Schüler/innen könnten aufgrund der Länge der Angabe zunächst unmotiviert sein, sich mit diesem Beispiel genauer auseinandersetzen zu wollen. Doch die eigentliche Aufgabe besteht hier nur darin, eine Annahme zu treffen um anschließend ein passendes Modell aufzustellen. Annahme: „Etwa die Hälfte der Jugendlichen schläft im Zelt, die anderen in Turnhallen und bei Gastfamilien. Zwei Jugendliche schlafen in einem Zelt, das benötigt 4 m² Stellfläche. Da man nicht direkt ein Zelt neben das nächste setzen kann, können pro Zelt 9 m² Fläche kalkuliert werden. Geschätzt wird, dass zusätzlich zu dieser Fläche ca. 20 % für Wege benötigt werden.“²

Da es bei diesem Aufgabentyp nur um das Bilden eines Modells geht, ist hiermit der erste Teil der Aufgabe erledigt.

¹ Maaß, 2007, S. 75

² ebd., S. 76

Für die Versorgung kann man folgendes Modell aufstellen. „Pro Teilnehmer werden pro Tag 4 Brötchen, 6 Scheiben Wurst und Käse und 2 Portionen Marmelade (à 20 g) sowie 150 g Nudeln (oder Reis oder Kartoffeln), 2 Äpfel, 2 Liter Wasser, 0,5 l Tee und 100 g Fleisch sowie 0,1 l Soße benötigt.“¹

Für viele Schüler/innen wird es schwierig sein solche Angaben zu schätzen. Aber wenn sie Übung im Modellieren haben, sind die Kinder in der Regel sehr kreativ. Vor allem in einer 8. Schulstufe kann dieses Beispiel ohne weiteres herangezogen werden, da die Schüler/innen sich oftmals schon selbst gut einschätzen können, wieviel sie an einem Tag etwa essen und auch beim Zelten bereits Erfahrungen gesammelt haben. Diese Aufgabe ist sehr realistisch und problemnah. Schade ist jedoch, dass hier nur das Bilden eines Modells im Vordergrund steht, denn gerade das Ausrechnen verdeutlicht letztendlich, welche Menge an Lebensmittel man organisieren muss und wie viel Platz man für das Zelten benötigt.²

4.1.2.5. Aufgaben zum Interpretieren einer Lösung

Die Ergebnisse eines mathematischen Beispiels sind oftmals nicht nur Zahlen sondern auch Tabellen oder Graphen. Es kann also sein, dass es beim Lösen einer Aufgabe mehrere verschiedene mathematische Resultate gibt, von denen aber nicht alle für das Modell in Frage kommen. Die Schüler/innen müssen daher die Resultate mit der ursprünglichen Fragestellung in Zusammenhang bringen und deuten, also interpretieren.³

Um das Interpretieren gesondert zu üben, kann man den Schüler/inne/n Graphen oder Tabellen aus der Umwelt geben, die sie beschreiben bzw. deuten müssen. Dazu folgende Aufgabe.

¹ Maaß, 2007, S. 76

² vgl. ebd., S. 76

³ vgl. Hinrichs, 2008, S. 89 und Themenheft Mathematik „Modellieren“. BIFIE (Hrsg.), 2012, S. 8

Beispiel 7:

„Joana und Magnus machen Urlaub auf La Réunion, einer zu Frankreich gehörenden Insel, die vorwiegend von der Air France angeflogen wird. Beschreibe die Hinreise von Göttingen nach La Réunion mithilfe der Grafik. Schau

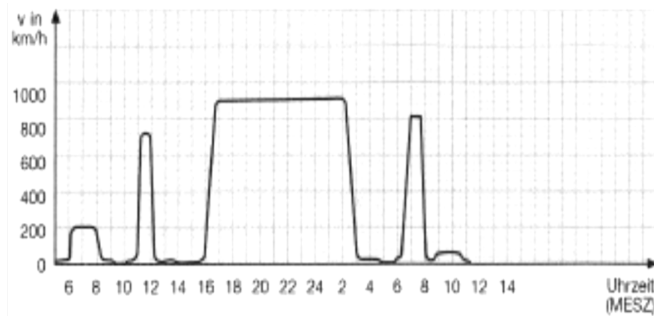


Bild 4: La Réunion - Aufgabe

dazu auch in einen Atlas: Wo liegt La Réunion und wie kann man es erreichen?“¹

„La Réunion liegt im Indischen Ozean bei Madagaskar. Joana und Magnus müssen also nach La Réunion fliegen, wenn sie nicht Wochen unterwegs sein wollen. Ein Flugzeug fliegt ca. 800 km/h. Die Grafik zeigt, dass die beiden wahrscheinlich zunächst zu Fuß oder mit Bus zum Bahnhof gefahren sind. Das kann durch den leichten Anstieg bis 6 Uhr vermutet werden. Dann sind sie in den Zug gestiegen, wahrscheinlich ein ICE, nach der Geschwindigkeit zu beurteilen. Gegen 8 Uhr sind sie am Flughafen bzw. in der Nähe angekommen. Um ca. 11 Uhr haben sie ein Flugzeug für einen kurzen Flug bestiegen, eventuell nach Paris. Dort hatten sie ca. 3 - 4 Stunden Aufenthalt und sind um 16 Uhr weiter geflogen. Der Flug ist ein Übernachtflug. Um 3 Uhr sind sie nach 12 Stunden Flugzeit gelandet, leider noch immer nicht am Zielort, eventuell auf Madagaskar oder Mauritius. Nach 3 Stunden weiteren Wartens ging der Flug weiter zum Zielort La Réunion. Auf der Insel sind sie mit Bus oder PKW zum Hotel gefahren und haben so nach 30 Stunden Fahrt ihr Ziel erreicht.“²

Diese Aufgabe stellt also eine reale Situation dar. Wichtig ist es aber, den Schüler/innen klar zu machen, dass hier im Vordergrund das Interpretieren eines Funktionsgraphen liegt und nicht die Suche nach einem bestimmten Ort oder wie man diesen Ort erreicht. Problematisch wird für viele Schüler/innen wahrscheinlich das Diagramm sein. Allein was dieses Diagramm darstellen soll, könnte für manche schwierig werden zu verstehen. Da sie auch keinen realen Bezug zu Geschwindigkeiten haben, wird es herausfordernd sein die einzelnen Stellen des Graphen den

¹ Maaß, 2007, S. 80

² vgl. ebd., S. 80

unterschiedlichen Transportmitteln zuzuordnen. Wichtig ist aber, dass die Schüler/innen erkennen, dass die Geschwindigkeiten Hinweise auf unterschiedliche Transportmittel geben. Die Geschwindigkeiten der verschiedenen Transportmittel und um welches Transportmittel es sich konkret handelt, kann anschließend im Plenum diskutiert werden.¹

4.1.2.6. Aufgaben zum Validieren

„Validieren heißt auf Gültigkeit überprüfen. Beim Lösen von Sachproblemen gilt es, die erhaltenen Ergebnisse (Lösungen) an der Ausgangssituation zu messen und auf ihre Plausibilität zu überprüfen.“²

Die Aufgabe der Schüler/innen besteht nun darin, das Ergebnis auf Richtigkeit zu überprüfen.

Beispiel 8:

„Anna und Paul haben den Wasserbehälter im Wasserturm unterschiedlich modelliert. Anna: ‚Mein Modell ist besser, denn meine Zahlen passen besser als Pauls!‘ Überprüfe und nimm Stellung.“³

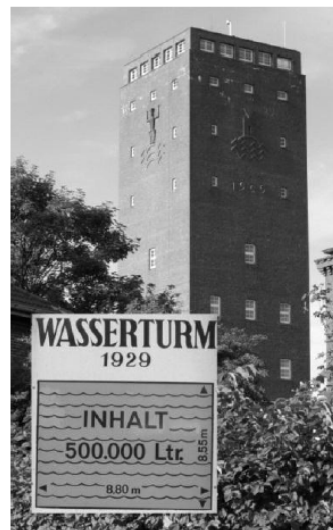
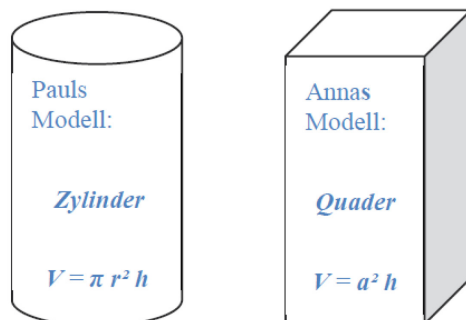


Bild 5: Wasserturm - Aufgabe

Auf den ersten Blick scheint es, dass aufgrund des Fotos mit dem Turm Annas Modell besser ist. Doch um tatsächlich herauszufinden, wer von den beiden Recht hat, ist es

¹ vgl. Maaß, 2007, S. 80f

² Themenheft Mathematik „Modellieren“. BIFIE (Hrsg.), 2012, S. 9

³ Greefrath, 2012, S. 133

notwendig, die Volumina beider Körper zu berechnen. Da für beide Modelle bereits die Formeln zur Berechnung des Volumens angegeben sind, stellt diese mathematische Operation keine Herausforderung dar. Eine zusätzliche Anschlagtafel beim Wasserturm könnte eine mögliche Annahme für den Radius ($r = 4,40 \text{ m}$), die Seitenkantenlänge ($a = 8,80 \text{ m}$) sowie die Höhe ($h = 8,55 \text{ m}$) der einzelnen Modelle liefern, sodass die Werte nur in die Formeln eingesetzt werden müssen, um die Volumina zu erhalten.

Für Pauls Modell ergibt sich ein Volumen von ca. $520,022 \text{ m}^3 \approx 520022 \text{ L}$.

Annas Modell liefert ein Volumen von ca. $662,112 \text{ m}^3 \approx 662112 \text{ L}$.

Die Schüler/innen sollten nun feststellen, dass man in keinem Fall das angegebene Volumen von 500000 L erhält. Es zeigt sich auch, dass das Volumen von Annas Modell deutlich mehr vom angegebenen Wert abweicht als Pauls Modell. Doch welche Modellierung scheint besser zu sein? An dieser Stelle könnten im Unterricht weitere Fragen wie „Gibt es versteckte Informationen?“, „Ist das mathematische Ergebnis für die Lösung der Aufgabe geeignet?“ oder „Kann ich meine mathematische Lösung plausibel erklären?“ behandelt werden.¹ Für die Antwort dieses Beispiels ist abschließend eine nachvollziehbare Begründung für die getroffene Entscheidung zu formulieren. Ein möglicher Antwortsatz könnte wie folgt lauten: *„Der Wasserbehälter ist mit den angegebenen Werten weder ein Quader mit quadratischem Boden noch ein Zylinder, da die Ergebnisse nicht zum angegebenen Volumen passen. Er könnte z.B. ein Quader mit den Maßen $8,80 \text{ m} \times 6,65 \text{ m} \times 8,55 \text{ m}$ sein. Denkbar wäre aber auch ein Zylinder mit der Höhe $8,20 \text{ m}$ statt $8,55$ oder mit einer Wandstärke von jeweils 5 cm . Die Angaben auf dem Schild sind widersprüchlich.“* [sic]²

Diese Aufgabe schließt zwar nicht unbedingt an die Lebenserfahrungen der Schüler/innen an, aber sie fördert die Kompetenz des Validierens. Sie müssen nämlich verschiedene mathematische Modelle vergleichen sowie bewerten und an der realen Situation überprüfen. Das Rechnen an sich wird keine große Schwierigkeit für die Schüler/innen darstellen, jedoch das Argumentieren und Begründen könnte für manche Schüler/innen ein Problem werden. Daher ist es wichtig, dass die Förderung dieser Kompetenzen einen entsprechenden Stellenwert im Unterricht hat.

¹ vgl. Greefrath, 2012, S. 133

² ebd. S. 134

4.1.2.7. Aufgaben zum gesamten Modellierungsprozess

Aufgaben, die das Durchlaufen eines ganzen Modellierungsprozesses erfordern, nehmen deutlich mehr Zeit in Anspruch, weil mehrere Schritte, wie bereits theoretisch ersichtlich wurde, notwendig sind, bis man die endgültige Lösung erhält. Aufgaben zum gesamten Modellierungsprozess werden häufig in längere Angaben eingebettet, da es ansonsten sehr schwierig ist, realistische Sachkontexte herauszulesen und zu verstehen. ¹ Im Folgenden wird nochmals der gesamte Modellierungsprozess anhand eines Beispiels durchlaufen und näher gebracht.

Beispiel 9:

„Zucker versüßt Menschen auf der ganzen Welt das Leben. Zucker wird nicht nur aus der Zuckerrübe gewonnen, sondern auch aus Zuckerrohr. Die größten Anbauggebiete von Zuckerrohr sind Indien und Brasilien, er wird zum Beispiel aber auch auf Mauritius und La Réunion angebaut. In der Erntezeit sieht man



Bild 6: Zuckerrohr - Aufgabe

allerorts die großen LKWs auf den Straßen, die das geerntete Zuckerrohr zu den Fabriken bringen, wie man auf dem Bild erkennen kann.

Zuckerrohr wird bis zu 7 m hoch, die Halme haben 2 - 7 cm Durchmesser. Nach der Ernte wird das Zuckerrohr in der Fabrik zerkleinert und anschließend gepresst. Der gepresste Saft muss mehrfach erhitzt werden, um schließlich Zuckerkristalle zu erhalten. Eine Tonne Zuckerrohr ergibt nach diesem komplexen Prozess ca. 110 kg Zucker. Auf einem Hektar Feld können 50 bis 150 Tonnen Zuckerrohr angebaut werden. Wie viele LKWs benötigt man, um das Zuckerrohr von einem Hektar Feld zur Fabrik zu transportieren? Wie viel Zucker kann aus der Zuckerrohrmenge eines LKWs gewonnen werden?“ ²

¹ vgl. Maaß, 2007, S. 99

² ebd., S. 123

Ausgangspunkt dieser Modellierungsaufgabe ist eine problemhaltige Situation aus der Realität, nämlich wie viele LKWs man für den Transport von einer bestimmten Menge an Zuckerrohr benötigt. Das reale Problem ist demnach wie viel kg Zuckerrohr passt in einen LKW hinein? Dieses Problem wird zunächst vereinfacht, idealisiert und strukturiert, dadurch entsteht das Realmodell, welches in weiterer Folge durch das Mathematisieren zum mathematischen Modell führt. Folgende vereinfachende Annahmen werden in diesem Schritt getroffen:

Mit Hilfe des Fotos kann man zunächst das Ladevolumen des LKW'S abschätzen, das ca. $12\text{ m} \times 3\text{ m} \times 2\text{ m} = 72\text{ m}^3$ beträgt. „Wenn man bei einer Zuckerrohrstange von einem Durchmesser von 5 cm und einer Höhe von 5 m ausgeht, so hat eine Stange ein Volumen von ca. $0,01\text{ m}^3$. Nimmt man weiter an, dass der Abstand zur nächsten Stange ca. 15 cm beträgt, so kann man davon ausgehen, dass auf einem Quadratmeter ca. 25 Stangen stehen können. Diese haben ein ungefähres Ladevolumen von $0,25\text{ m}^3$. Ein Hektar hat $10\,000\text{ m}^2$. [Unter diesen Annahmen] ergibt sich, dass pro Hektar ein Ladevolumen von 2500 m^3 entsteht.“¹ Da ein LKW etwa 72 m^3 fassen kann, braucht man also $2500 : 72 \approx 35$ LKWs.

Dieses Ergebnis ist nur als Richtwert anzusehen, da es auf vereinfachten Annahmen beruht. Da es aber durchaus der Realität entspricht, ist damit der Modellierungsprozess für die erste Frage abgeschlossen. Um die Lösung der zweiten Frage zu erhalten, ist es nicht notwendig, nochmals ein Modell aufzustellen. Man kann für die Rechnung bereits das Ergebnis der Frage 1 verwenden.

„Auf einem Hektar Feld werden nach Text ca. 100 t Zuckerrohr mit einem Ladevolumen von 2500 m^3 produziert. Daraus entstehen ca. 11000 kg Zucker.“² Da insgesamt etwa 35 LKWs notwendig sind, ergibt sich durch einfache Division, dass pro Ladevolumen eines LKWs etwa 300 kg Zucker hergestellt werden können.

Obwohl diese Aufgabe mathematisch nicht sehr anspruchsvoll ist, kann sie dennoch eine Schwierigkeit für viele Schüler/innen sein, da der Sachkontext sehr komplex ist, der Text sehr lang ist und viele Zahlen in einen Zusammenhang gebracht werden müssen. Auch das Treffen unterschiedlicher Annahmen stellt vermutlich für viele

¹ Maaß, 2007, S. 124

² ebd., S. 124

Schüler/innen eine Herausforderung dar. Dennoch ist die Fragestellung realistisch und gibt einen Einblick in die Welt des Zuckerrohrs.¹

Zusammenfassend kann man sagen, dass Beispiele mit Realitätsbezug, sei es eine Sachaufgabe oder eine Modellierungsaufgabe, stets einen Bezug zur Realität haben, der durch Bilder und viel Inhalt verstärkt wird. Die Bilder sollen manchmal eine Hilfestellung für das Lösen dieser Aufgabe sein. Auffallend ist auch noch, dass die Schüler/innen selbst sehr viele Annahmen treffen müssen, um solche Aufgaben zu lösen. Dabei kommt der Aspekt, dass es kein richtiges oder falsches Modell gibt, zum Tragen. Im Vordergrund steht, ob die Schüler/innen das reale Problem verstanden haben und realitätsgetreu in ein Modell umwandeln und dann lösen können.² Realitätsbezogene Aufgaben sind demnach für viele Schüler/innen sehr komplex, daher müssen Modellierungsaufgaben und Ähnliches mehrmals im Unterricht geübt werden, bis man tatsächlich mit solchen Aufgaben problemlos umgehen kann. Doch woher nimmt man als Lehrer/in diese Aufgaben? Es gibt bereits eine große Anzahl an Zeitschriften und Büchern, die sich mit Modellierungsaufgaben beschäftigen und Beispiele für jede Schulstufe entwickelt haben. Doch oftmals benötigt man als Lehrer/in genau jene Aufgaben zu einer bestimmten Thematik, die in der Literatur fehlen. Daher möchte ich in diesem Zusammenhang auch auf die Frage „Wie können Modellierungsaufgaben bzw. einfache offene Aufgaben selbst erstellt werden?“, eingehen. So widmet sich ein Absatz dieses Kapitels dem Erstellen von offenen Aufgaben / Modellierungsaufgaben.

4.1.3. Aufgaben (Modellierungsaufgaben und Ähnliches) selbst entwerfen

Viele Modellierungsaufgaben und Beispiele mit Realitätsbezug findet man in aktuellen Fachzeitschriften wie „Mathematik lehren“, „Praxis der Mathematik“ oder in der Schriftenreihe der ISTRON – Gruppe „Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht“. Doch, wie bereits erwähnt, reichen diese Beispiele oft nicht aus,

¹ vgl. Maaß, 2007, S. 124

² vgl. Henning & Freise, 2011, S. 5

oder passen nicht zu einem bestimmten Thema, dann wird man als Lehrer/in vor die Herausforderung gestellt, selbst Aufgaben zu konstruieren. Beim eigenen Erfinden von Beispielen sollte man stets aktuelle Angaben aus dem Zeitgeschehen heranziehen und sich an den Bedürfnissen der Schüler/innen orientieren. Dabei ist es sehr hilfreich, sich entweder Anregungen aus Schulbüchern oder aus dem Alltag zu holen. ¹ Diese zwei Zugänge werden nun anhand von konkreten Beispielen erläutert.

Anregungen aus Schulbüchern

Schulbuchaufgaben sprechen oft interessante Sachkontexte an, jedoch geht ihre Problemhaltigkeit aufgrund zu enger Vorgaben verloren. Um eine Schulbuchaufgabe in eine Modellierungsaufgabe umzustrukturieren, muss sie geöffnet werden. ² Folgende zwei Beispiele sollen diesen Vorgang beschreiben.

Beispiel 10:

„Irene und Martin wohnen 77 km voneinander entfernt in Hollersbach bzw. in Unken (Land Salzburg). Sie fahren gerne Fahrrad und planen, einander an einem bestimmten Tag mit den Fahrrädern zu treffen. Dabei fährt Irene von Hollersbach aus in Richtung Unken mit einer mittleren Geschwindigkeit von 15 km/h, Martin fährt von Unken aus in umgekehrter Richtung mit 18 km/h (→ Figur rechts).“ ³ Ermittle rechnerisch



Bild 7: Geschwindigkeitsbeispiel

und graphisch, um wie viel Uhr sie einander treffen, wenn beide um 8:00 Uhr starten. ⁴

Jeder Schüler / jede Schülerin wird schon einmal mit seinem Freund bzw. seiner Freundin eine Radtour gemacht haben, bei der sie gleichzeitig oder zeitversetzt gestartet sind. Daher ist diese Aufgabe realitätsbezogen, jedoch sind alle Modellierungsschritte schon vorgegeben. Die Lernenden müssen nicht nachdenken, wie schnell die beiden

¹ vgl. Maaß, 2007, S. 20

² vgl. Maaß, 2009, S. 75

³ Reichel & Humenberger (Hrsg.), 2012, S. 118

⁴ vgl. ebd., S. 118

Kinder fahren, ob sie gleichzeitig oder versetzt starten und schon gar nicht, wie sie die Aufgabe lösen sollen. Es wird bereits eine mögliche Variante vorgegeben. Das einzige, was durchaus vorteilhaft erscheint und die Schüler/innen zu einem Vergleich der Ergebnisse anregt, ist, dass man die Aufgabe auf zwei Varianten lösen muss, nämlich rechnerisch und graphisch.

Öffnet man hingegen diese Schulbuchaufgabe und lässt den Schüler/inne/n mehr Möglichkeiten zum Lösen des Problems zu, so könnte derselbe Sachkontext in eine Modellierungsaufgabe gepackt werden, wie Beispiel 11 zeigt.

Beispiel 11:

Irene und Martin fahren gerne Fahrrad und planen, einander an einem bestimmten Tag mit den Fahrrädern zu treffen. Irene wohnt in Hollersbach und fährt in Richtung Unken, wo Martin zuhause ist (→ Figur rechts). Sie wollen sich etwa in der Mitte der Fahrstrecke treffen. Irene fährt um 8:00 mit einer mittleren Geschwindigkeit von 15 km/h los. Um wie viel Uhr muss Martin - der schnellere von beiden - starten, damit sie gleichzeitig an dem vereinbarten Treffpunkt ankommen? Erläutere und begründe dein gesamtes Vorgehen ausführlich.



Bei dieser Variante ist der Lösungsweg nicht eindeutig vorgegeben. Ob die Schüler/innen graphisch oder rechnerisch das Beispiel lösen, bleibt ihnen überlassen. Auch ist die Entfernung der beiden Orte nicht angegeben, sodass die Schüler/innen zunächst Recherchen vornehmen müssen. Ebenfalls bleibt den Schüler/inne/n freigestellt, wie schnell Martin fährt. So können sie beispielsweise annehmen, dass Martin 18 km/h oder sogar 20 km/h fährt, auf alle Fälle schneller als Irene. Die Fragestellung regt natürlich auch zur Reflexion an, warum Martin schneller fährt. Sind Jungs tatsächlich sportlicher als Mädchen, könnte es am Fahrrad oder am Radweg liegen? Auf jeden Fall lässt diese Aufgabenstellung mehr Eigenständigkeit der Schüler/innen zu als Beispiel 10. Natürlich darf man als Lehrer/in bei dieser

Aufgabenstellung keine Lösung erwarten, die detailliert den eigenen Vorstellungen entspricht.

Diese zwei ähnlichen Beispiele zeigen, dass man aus einfachen Schulbuchaufgaben offene Aufgaben selbst entwickeln kann. Das Öffnen von Aufgaben kann durch ...

- ... das Weglassen von Informationen
 - ... das Weglassen von kleinschrittigen Anleitungen
 - ... das Anfügen reflexionsanregenden Fragen („Vergleiche die Aufgaben!“ oder „Was meinst du dazu?“)
 - ... das Umkehren von Aufgabenstellungen (Aus „Löse die lineare Gleichung!“ wird „Finde lineare Gleichungen mit $x = 3$ als Lösung!“)
 - ... das Einfordern mathematischer Aufsätze („Beschreibe, wie man zwei Bruchzahlen multipliziert und begründe!“, „Schreibe einen Leserbrief (zu einem Zeitungsartikel, der mathematisch nicht korrekt ist!“)
 - ... das Stellen von Aufgaben, in denen Fehler entdeckt und begründet werden müssen
 - ... das Selbsterfinden von Aufgaben Schüler/innen (zu vorgegebenen mathematischen Inhalten, Ausdrücke, zu vorgegebenen Sachkontexten ...)
- erfolgen.¹

Anregungen aus dem Alltag

Wie aus den vorherigen Kapiteln bereits hervorgegangen ist, ist Mathematik eigentlich überall. „Man muss nur die ‚Mathe-Brille‘ aufsetzen und mit offenen Aufgaben durch die Welt gehen und lernen, mathematische Fragen zu stellen.“² Denn dann ist es relativ einfach, Modellierungsaufgaben zu bekommen. Zwei einfache Fragen aus dem Alltag sollen dies veranschaulichen:

- „Wie viel Wasser kann man pro Jahr sparen, wenn man beim Zähneputzen das Wasser abstellt?
- Wie viele Stunden schaue ich pro Jahr fern?“³

¹ vgl. Maaß, 2007, S. 22

² ebd., S. 22

³ Maaß, 2009, S. 76

Um diese Fragen beantworten zu können, müssen die Schüler/innen selbst Informationen einholen. Sie ermuntern auch die Schüler/innen zu unterschiedlichen Zugangsweisen, wie dem Probieren, Experimentieren, Messen, Skizzieren, usw. und bieten die Möglichkeit zum Durchlaufen eines gesamten Modellierungsprozesses.

Auch kann man Zeitungen und andere Medien zum Entwickeln von Aufgaben verwenden. Oftmals findet man dort Angaben, beispielsweise zu bestimmtem Konsumverhalten, die zu mathematischen Fragestellungen einladen.

Diese zwei vorgestellten Zugänge erleichtern das Konstruieren von Modellierungsaufgaben. Doch um tatsächlich „gute“ Aufgaben zu schaffen, bedarf es aber mehr. Schukajlow nennt fünf Anforderungen an Modellierungsaufgaben.

- „Die Aufgaben sollen eine Lösungskonstruktion ermöglichen und nicht nur fertiges Wissen abfragen. Die eigenständige Lösungskonstruktion fördert den Wissensaufbau und schafft kognitive Voraussetzungen für die Beobachtung der Lernprozesse [...].
- Die Aufgaben sollen so konzipiert werden, dass ihre Lösungen einen Transfer von erworbenem Wissen und Fähigkeiten auf alltägliche Probleme erleichtern. [...]
- Die Aufgaben sollen motivierend gestaltet werden und Interesse bei Schülern wecken. Motivation und Interesse hängen positiv mit der Lernbereitschaft von Schülern, deren Kreativität, Selbstständigkeit und schließlich auch mit deren Leistungen zusammen.
- Die Schüler sollen im Unterricht sinnvolle Fragestellungen bearbeiten. Oft enthalten Schulaufgaben Fragestellungen, die ausschließlich für die Übung einer bestimmten Operation entwickelt wurden – so genannte ‚eingekleidete‘ Aufgaben. [...]
- Die Aufgaben sollen mehrere Lösungswege zulassen und dadurch innere Konstruktionsprozesse unterstützen. [...]“¹

Demzufolge dürfen Modellierungsaufgaben nicht zu offen und auch nicht zu eindeutig sein. Ein Mittelmaß ist für eine „gute“ Aufgabe notwendig. Ist die Aufgabe zu eindeutig

¹ Schukajlow, 2011, S. 73f

gestellt, wird den Schüler/inne/n ein Teil des Konstruktionsprozesses und damit eine Teilkompetenz aus dem Bereich des Modellierens weggenommen. Wird das Beispiel andererseits zu offen formuliert, kann keine befriedigende Lösung gefunden werden. Für eine sinnvolle Bearbeitung solcher Aufgaben sind dann mehrere Informationsrecherchen notwendig.¹

Es lässt sich vermuten, dass das Erstellen von ersten Aufgaben sehr zeitaufwändig ist, bis passende Aufgabenstellungen gefunden wurden. Das ist eine erdenkliche Herausforderung für manche Lehrer/innen. Aber auch für die Schüler/innen stellen diese Aufgaben, falls sie wenig Erfahrung damit haben, eine Schwierigkeit dar. Infolgedessen werde ich im nächsten Abschnitt auf etwaige Schwierigkeiten und Probleme für Schüler/innen und Lehrer/innen mit realitätsbezogenen Aufgaben eingehen, da es wichtig ist, diese zu kennen, um „Stolpersteine“ zu vermeiden.

4.2. Schwierigkeiten und Probleme für Lehrer/innen und Schüler/innen mit realitätsbezogenen Aufgaben

Untersuchungen zeigen, dass realitätsbezogene Aufgaben, vor allem Modellierungsaufgaben, selten im Mathematikunterricht vorkommen. Wenn Realitätsbezüge behandelt werden, dann sind es vorwiegend sogenannte „eingekleidete Aufgaben“ oder „Textaufgaben“² zu einem mathematischen Inhalt, der für die nächste Überprüfung eingeübt wird.³ Doch welche Gründe gibt es dafür, dass Modellierungsaufgaben kaum im Mathematikunterricht behandelt werden? Die Antwort darauf liefern folgende Schwierigkeiten und Probleme seitens der Lehrer/innen und Schüler/innen.

¹ vgl. Schukajlow, 2011, S. 74

² vgl. Kapitel 4.1.1

³ vgl. Blum, 2007, S. 5

4.2.1. Schwierigkeiten und Probleme für Lehrer/innen

Seitens der Lehrer/innen stellt sich das Problem, dass realitätsbezogene Aufgaben oft längere Bearbeitungszeit benötigen, als dies in einer Schulstunde möglich ist. Denn häufig ist, wie auch in den angeführten Beispielen 3 bis 9 ersichtlich wurde, die Durchführung von Experimenten oder einer Recherche notwendig, die viel Zeit in Anspruch nehmen.¹ „[...] außerdem sei der Stoffdruck so groß und die letzte Schularbeit so schlecht ausgefallen, dass die Zeit genutzt werden müsse, um zu mehr üben.“² Daher werden nur sehr wenige oder kaum Modellierungsaufgaben im Unterricht eingesetzt, damit man alle vorgegebenen Themen aus dem Lehrplan in einem Schuljahr unterbringt.

Auch ist es schwierig, entsprechend umfangreiche Aufgaben in Schularbeiten oder Prüfungen zu verwenden, da der dafür vorgesehene Zeitrahmen eingehalten werden muss. Daraus ergibt sich für Lehrer/innen wiederum die Frage, warum man dann offene Aufgaben bzw. Modellierungsaufgaben im Unterricht einsetzen soll.³

Aus der Sicht der Lehrer/innen stellt auch die Kompetenz Modellieren ein Problem an sich dar. Durch das Modellieren wird der Unterricht komplexer, weniger vorhersagbar und es ist außermathematisches Sachwissen nötig.⁴ Denn bei Modellierungsaufgaben müssen Lehrer/innen sich auf Diskussionen von Sinnfragen sowie auf ihre Schüler/innen einlassen und fühlen sich unsicher, weshalb solche Aufgaben im Unterricht gemieden werden.⁵

Ein weiteres Problem, das sich durch die Verwendung von realitätsbezogenen Aufgaben ergibt, ist die Frage nach der Beurteilung. Vor allem bei Modellierungsaufgaben, die mehrere Teilkompetenzen erfordern und häufig mehrere Lösungswege zulassen, ist es für Lehrer/innen schwierig eine einheitliche Beurteilung zu finden. Denn es soll nicht nur die mathematische Bearbeitung einbezogen werden, sondern auch der Modellierungsprozess. Katja Maaß hat dazu ein Beurteilungsschema erstellt (Abb. 5).

¹ vgl. Greefrath, 2010, S. 201

² Maaß J., 2013, S. 176

³ vgl. Greefrath, 2010, S. 201

⁴ vgl. Blum, 2007, S. 5

⁵ vgl. Maaß J., 2013, S. 176

1	Bildung des Realmodells: ■ Sind die getroffenen Annahmen sinnvoll? ■ Ist der Grad der Vereinfachung der Problemfrage angemessen?	0 – 10 Punkte
2	Mathematische Bearbeitung: ■ Wurden die relevanten Größen und Beziehungen richtig mathematisiert? ■ Wurde eine adäquate mathematische Notation gewählt? ■ Wurden mathematisches Wissen und heuristische Strategien zur Lösung des mathematisierten Problems richtig angewendet? ■ Ist die Lösung mathematisch korrekt?	0 – 15 Punkte
3	Interpretation der Lösung: ■ Wird die mathematische Lösung bezogen auf die Realität interpretiert? ■ Ist die Interpretation korrekt?	0 – 5 Punkte
4	Kritische Reflexion: ■ Werden alle nötigen Aspekte berücksichtigt? ■ Bleibt die Reflexion oberflächlich? ■ Werden Vergleichswerte hinzugezogen?	0 – 10 Punkte
5	Dokumentation des Vorgehens: ■ Werden die einzelnen Schritte des Vorgehens beschrieben und erläutert?	0 – 15 Punkte
6	Zielgerichtetes Vorgehen: ■ Geht der Lernende zielgerichtet beim Modellieren vor oder verliert er sich in Details, ohne ein Ergebnis zu erreichen?	0 – 5 Punkte
		max. 60 Punkte

Abbildung 5: Bewertungsschema (Quelle: Maaß, 2007, S. 40)

„Sie schlägt vor, die Bildung des Realmodells, die Interpretation der Lösung, die kritische Reflexion, die Dokumentation und die Art des Vorgehens zusätzlich zur mathematischen Bearbeitung in die Beurteilung einzubeziehen.“¹ Dabei vergibt sie pro Beurteilungskategorie Punkte, die unterschiedlich gewichtet sind. Laut ihrem Bewertungsschema sind ihr die mathematische Bearbeitung sowie die Dokumentation des Vorgehens in einem Modellierungsprozess sehr wichtig. Für die Beurteilung weniger bedeutend scheint nach Maaß die Interpretation der Lösung sowie das zielgerichtete Vorgehen. Für jeden Bereich gibt sie des Weiteren Aspekte an, die bei der Beurteilung dieses Teilbereiches im Vordergrund stehen sollen. Es müssen die Bildung des Realmodells, die sinnvollen Annahmen und die angemessene Vereinfachung oder die Interpretation der Lösung, der Realitätsbezug und die Korrektheit der Interpretation herangezogen werden. Dieses Beurteilungsmodell ist jedoch nur ein Vorschlag und muss nicht unbedingt bei Modellierungsaufgaben verwendet werden.

Modellierungsaufgaben bereiten nicht nur den Lehrer/inne/n Schwierigkeiten, auch die Schüler/innen stehen meistens bei solchen Aufgabentypen vor großen Herausforderungen. Folgende Schwierigkeiten können sich bei Schüler/innen zeigen.

¹ Greefrath, 2010, S. 202

4.2.2. Schwierigkeiten und Probleme für Schüler/innen

Sobald im Mathematikunterricht Aufgaben mit Realitätsbezug erarbeitet werden, wird die Mathematik für viele Schüler/innen interessant, da man dabei die Bedeutung von Mathematik im Leben und in der Gesellschaft erkennt. Dies bewirkt auch eine positivere Einstellung zur Mathematik und erhöht die Bereitschaft zur Auseinandersetzung mit dem Fach.¹ Doch Studien haben gezeigt, dass viele Schüler/innen mit realitätsbezogenen Aufgaben, vor allem mit Modellierungsaufgaben, große Probleme haben. Jeder Schritt im Modellierungskreislauf stellt eine potentielle Hürde dar.² Denn viele Schüler/innen bevorzugen stereotype Rechnungen nach vorgegebener Regel und weniger die offenen Aufgaben oder Modellierungsaufgaben, die aber in einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht von großer Bedeutung sind.³

Welche Schwierigkeiten sich im Durchlaufen eines Modellierungsprozesses für Schüler/innen ergeben könnten, zeigt die Abbildung 6.

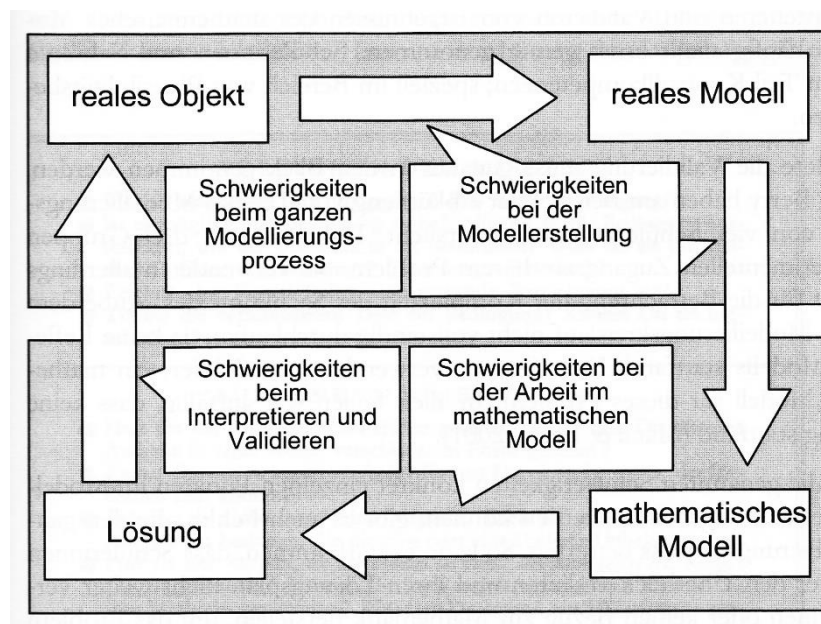


Abbildung 6: Mögliche Schwierigkeiten bei Modellierungsaufgaben

(Quelle: Greefrath, 2010, S. 203)

¹ vgl. Maaß, 2007, S. 19

² vgl. Borromeo Ferri, Leiss & Blum, 2006, S. 54

³ vgl. Maaß, 2009, S. 73

Die Abbildung zeigt, dass sich bereits beim realen Objekt bis hin zur Bildung des realen Modells erste Probleme bei den Schüler/innen ergeben könnten. In diesen Abschnitt fallen die Bearbeitungsschritte „Konstruieren / Verstehen“ der Angabe und das „Vereinfachen / Strukturieren“ der Situation aus dem Modellierungskreislauf von Blum.¹ Konkret können in Anlehnung an Gerd Hinrichs folgende Schwierigkeiten diesbezüglich auftreten.

- Wenn die Aufgabe aufgrund zu langer Sätze für die Schüler/innen zu anspruchsvoll formuliert ist oder unbekannte Fremdwörter enthalten sind, dann sind Schwierigkeiten denkbar.²
- Irreführend können auch Signalwörter sein, die auf bestimmte Rechenoperationen hindeuten, wie z.B. der Begriff „weniger“, der von vielen Schüler/innen mit einer Subtraktionsaufgabe assoziiert wird, aber im Sprachgebrauch auch anderswertig verwendet werden kann.³ z.B. *„Im Winterschlussverkauf hat Firma Hackenspiel 340 Strumpfpaaire verkauft. Das sind 65 Strumpfpaaire weniger als vor einem Jahr. [sic]“*⁴
- „Geht die Modellierung von einem Bild aus, kann es passieren, dass Schüler nicht alle wesentlichen Aspekte entnehmen können.“⁵
- Manche Schüler/innen können sich nicht lange genug auf eine Aufgabe konzentrieren und die wesentlichen Angaben zu Beginn nicht herausfiltern, sondern rechnen einfach „drauf los“. Dabei kann es passieren, dass Informationen übersehen, Aspekte vernachlässigt oder aber alle verfügbaren Daten herangezogen werden.⁶
- Häufig kommt es auch vor, dass Schüler/innen falsch oder zu grob abschätzen und das Ergebnis dadurch ungenau wird.⁷
- Bei Modellierungsaufgaben können auch mathematische Inhalte vorkommen, die bereits länger zurückliegen. Viele Schüler/innen können damit nicht mehr arbeiten, weil sie sie vergessen haben.⁸

¹ vgl. Abb. 3, Blum, 2010, zit.n. Borromeo Ferri et al. (Hrsg.), 2013, S. 18

² vgl. Hinrichs, 2008, S. 65

³ vgl. ebd., S. 65

⁴ ebd., S. 65

⁵ ebd., 66

⁶ vgl. ebd., S. 67f

⁷ vgl. ebd., S. 67

⁸ vgl. ebd., S. 68

„Beim Übertragen des Realmodells in das mathematische Modell können ebenfalls Probleme auftreten, [wie in Abb. 6 ersichtlich ist]. [...] Hier können beispielsweise falsche Symbole und Algorithmen ausgewählt werden oder Fehler in Formeln gemacht werden.“¹

Auch beim mathematischen Arbeiten sind Fehler möglich.

- „Manchmal fallen den Schülern erforderliche Lösungsstrategien/ mathematische Verfahren nicht ein. [...]
- Innerhalb des mathematischen Modells kann es zu Fehlern beim Umrechnen von Einheiten kommen, teilweise wird schlicht mit Zahlenwerten gerechnet und Maßeinheiten völlig ignoriert. [...]
- Ist das mathematische Modell kompliziert oder unübersichtlich und sind viele Zwischenschritte zur Lösung notwendig, können Schüler den Überblick verlieren.“²

Hat man dann letztendlich eine Lösung gefunden, die noch interpretiert und validiert werden muss, so stolpern viele Schüler/innen auch über diese Hürde. Denn oftmals fehlt es den Schüler/innen an Kontrollkompetenz und sie bemerken ihre Fehler nicht oder überprüfen das Ergebnis nur oberflächlich und bezeichnen es lediglich als „ungenau“. Die Reflexion des gebildeten Modells bleibt ebenfalls häufig unberücksichtigt, obwohl vielleicht eine Verbesserung des Modells notwendig gewesen wäre.³

Im letzten Schritt des Modellierungsprozesses, dem „Darlegen / Erklären“, „[...]geht es schwerpunktmäßig um kommunikative Kompetenzen. [...] Dabei kommt es nicht selten vor, dass Schüler bestimmte Aspekte unterschlagen oder für andere unverständlich aufschreiben bzw. veranschaulichende Skizzen vernachlässigen.“⁴

Betrachtet man also den gesamten Modellierungsprozess, so kann es passieren, „[...] dass Schülerinnen und Schüler den Überblick verlieren und ihren Lösungsplan nicht weiter verfolgen können oder keinen Bezug zur Mathematik herstellen, um das Problem weiter zu bearbeiten. Ebenfalls problematisch ist, wenn Schülerinnen und Schüler ihre

¹ Greefrath, 2010, S. 203

² Hinrichs, 2008, S. 70f

³ vgl. Greefrath, 2010, S. 204 und Hinrichs, 2008, S. 73

⁴ Hinrichs, 2008, S. 74

Bearbeitung nicht darstellen können. Dann ist eine Beurteilung ihrer Leistungen kaum möglich.“¹

Zusammenfassend ist festzustellen, dass die genannten möglichen Fehler, sowohl beim Lösen von Modellierungsaufgaben als auch beim Lösen von realitätsbezogenen Aufgaben im Mathematikunterricht vorkommen können. Franke fasst daher zusammen, dass sich diese Fehler in vier Fehlertypen niederschlagen.

- **Identifikationsfehler** sind Fehler, die sich durch falsche Rechenoperationen oder irrelevante Angaben bilden können. „Diese entstehen, weil
 - alle Aufgaben so gelöst werden,
 - die Operation im Unterricht gerade behandelt wurde,
 - sich die Zahlen gut durch die betreffende Operation verknüpfen lassen,
 - das Sachproblem semantisch anders interpretiert wird als erwartet,
 - Signalwörter als Hinweis auf eine Rechenoperation verstanden werdenoder
 - irrelevante Angaben in die Rechnung einbezogen werden.“²
- **Fehler beim Strukturieren und Übertragen des Situationsmodells in ein mathematisches Modell:** „Diese entstehen durch
 - die nicht lösungskonforme Reihenfolge der Angaben im Aufgabentext,
 - Einbeziehen bzw. Nichteinbeziehen von Teillösungen oder
 - regelwidrige Verknüpfung von Angaben.“³

¹ Greefrath, 2010, S. 204

² Franke & Ruwisch, 2010, S. 95

³ ebd., S. 95f

- **Fehlerhafte Verkürzungen bei mehrschrittigen Aufgaben:** „Diese entstehen aufgrund von
 - Verlesen oder Überlesen,
 - durch unvollständiges Erfassen der Situation,
 - Vergessen von in der Aufgabe ausgewiesenen Beziehungen (z.B. relevante Angaben) oder
 - frühzeitigem Beenden nach erzielten Teillösungen.“¹

- **Fehler bei der verbalen Antwort:** „Diese basieren auf
 - Nichtbeachten der Fragestellung (die Antwort kann eine richtige Interpretation von Zwischenergebnissen sein, aber die gestellte Frage wird damit nicht beantwortet),
 - fehlender Interpretation der mathematischen Lösung aufgrund von mangelndem Alltags- und Sachwissen oder
 - dem fehlenden oder falschen Bezug zur Sachsituation.“²

Es zeigt sich, dass es eine große Vielzahl an Fehlern gibt, die bei realitätsbezogenen Aufgaben von Schüler/innen gemacht werden. Man sollte jedoch Fehler beim Modellierungskreislauf nicht als Problem sehen, sondern als Chance zum Lernen. Sie sind wichtig sowohl für die Schüler/innen als auch für die Lehrer/innen. Einerseits, um immer wieder die Schüler/innen auf bestimmte Fehler aufmerksam zu machen, damit sie lernen, später einmal selbst Fehler zu erkennen. Andererseits ist es als Lehrer/in gut, die Fehler seiner/ihrer Schüler/innen zu wissen, um mit den passenden Lösungsstrategien und Hilfestellungen diese Fehlertypen zu meiden und mögliche Schwierigkeiten zu vermindern.³

Im Folgenden werden demnach Bearbeitungshilfen bzw. Vorschläge erläutert, die den Umgang mit Modellierungsaufgaben für Lehrer/innen und Schüler/innen erleichtern sollen.

¹ Franke & Ruwisch, 2010, S. 96

² ebd., S. 96

³ vgl. Franke, 2003, S. 115

4.2.3. Mögliche Bearbeitungshilfen für realitätsbezogene Aufgaben

In einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht sollte der Schwerpunkt nicht in der Problematik der Modellierungsaufgaben liegen und ihre Schwierigkeit und Komplexität in den Vordergrund gestellt werden, sondern vielmehr sollte man sich als Lehrer/in fragen, „[...] wie man Mathematikunterricht so gestalten kann, dass man eine Förderung der Modellierungskompetenz der Schüler erwarten kann.“¹

Prinzipiell sollen im Unterricht öfters Modellierungsaufgaben, oder auch nur jene Aufgaben, die gezielt eine Teilkompetenz des Modellierens ansprechen,² behandelt werden.³ Denn dadurch kann gezielt auf mögliche Schwierigkeiten an bestimmten Stellen im Modellierungskreislauf eingegangen werden. Dabei ist zu berücksichtigen, dass Modellierungskompetenz langfristig und gestuft aufgebaut werden muss, was u.a. durch eine allmähliche Steigerung der Komplexität von Aufgaben erzielt werden kann.⁴

„Günstig zur Herausforderung von Modellierungsaktivitäten ist ein Wechsel zwischen Plenums-, Einzel- und Gruppenarbeit.“⁵ Während Plenumsarbeiten häufig als Einstieg für ein neues Thema sinnvoll erscheinen, so dienen Einzel- und Gruppenarbeiten doch zur Festigung und Sicherung von Lerninhalten. Denn in Einzel- oder Gruppenarbeitsphasen „[...] sind deutlich mehr Schüler aktiv als im Frontalunterricht, sie können angstfrei mitarbeiten und man kann sich als Lehrer einfach weniger einmischen. Mehr noch: Auf Probleme kann individuell eingegangen werden.“⁶

Des Weiteren ist zu bedenken, dass dadurch das Erlernen einer Kompetenz durch Eigenständigkeit gefördert wird. Deshalb „[...] muss stets die Balance zwischen größtmöglicher Schülerselbstständigkeit und geringstmöglicher Lehreranleitung gewahrt werden.“⁷ Stoßen die Schüler/innen beim Modellierungsprozess auf Probleme, so sollte man als Lehrer/in bloß strategische Hilfe geben.⁸ Katja Maaß unterscheidet zwischen

¹ Blum, 2006, S. 19

² vgl. Kapitel 4.1.2

³ vgl. Blum, 2006, S. 19

⁴ vgl. Blum, 2007, S. 9

⁵ Blum, 2006, S. 19

⁶ Maaß, 2007, S. 26

⁷ Blum, 2007, S. 9

⁸ vgl. ebd., S. 7

allgemein-strategische Hilfen und inhaltsorientierten strategische Hilfen. Zu der ersten Art von Hilfe zählen Beispiele wie „Lies dir die Aufgabe genau durch!“, „Mache dir eine Skizze!“, „Schreib dir die gegebenen Daten heraus!“¹ etc. Zu der zweiten gehören Fragen bzw. Aufforderungen wie z.B. „Welche Werte fehlen dir? Versuche, Angaben dafür zu schätzen!“, „Welche Bedeutung hat dieser Wert für das Lösen der Aufgabe?“ oder „Überlege dir, ob dieses Ergebnis bezogen auf das Ausgangsproblem sinnvoll ist!“² Zu guter Letzt bleibt noch zu erwähnen, dass es sowohl für Schüler/innen als auch für Lehrer/innen hilfreich sein kann, wenn Lösungsstrategien für Modellierungsaufgaben verwendet werden. Eine der bekanntesten Lösungsstrategien, genannt „Lösungsplan“, wurde im Rahmen des Forschungsprojekts DISUM (Didaktische Interventionsformen für einen selbständigkeitsorientierten aufgabensteuerten Unterricht am Beispiel Mathematik) entwickelt. Der „Lösungsplan“ (Abb. 7) soll den Bearbeitungsprozess von Modellierungsaufgaben begleiten sowie steuern und ist für Schüler/innen aller Schulformen handhabbar.³ Die sieben Schritte des Modellierungskreislaufes werden auf vier Schritte zusammengefasst und somit dessen Komplexität reduziert. Damit soll den Schüler/innen der Umgang mit Modellierungsaufgaben erleichtert werden, da auch zu jedem Schritt statt abstrakter Schlagwörter für Schüler/innen verständliche Aufträge verwendet werden.⁴

¹ Maaß, 2007, S. 31

² ebd., S. 32

³ vgl. Blum, 2006, S. 20

⁴ vgl. Hinrichs, 2008, S. 32

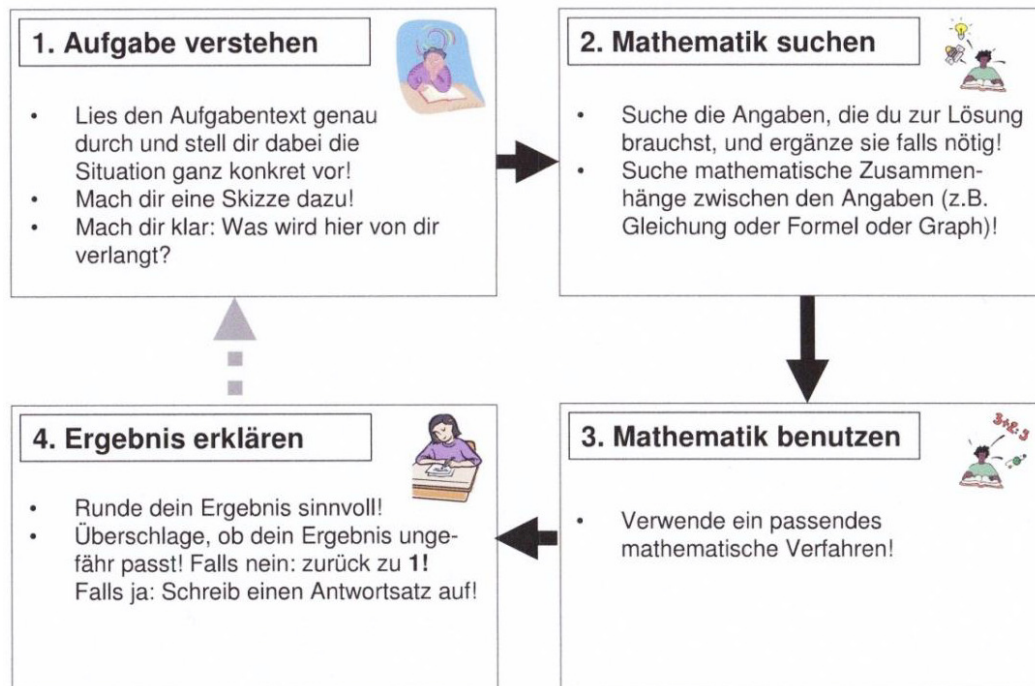


Abbildung 7: „Lösungsplan“ für Modellierungsaufgaben (Quelle: Blum, 2010, *Kann mathematisches Modellieren selbständig gelernt werden? Ergebnisse aus der Lehr-/Lernforschung*. [Zugriff am 5.8.2015])

Der erste Schritt „Aufgabe verstehen“ aus dem Lösungsplan entspricht genau dem ersten Schritt „Verstehen“ im Modellierungskreislauf von Blum / Leiss.¹ Das Augenmerk wird auf das Verstehen und das sinnentnehmende Lesen der Aufgabenstellung gelegt. Der zweite Schritt „Mathematik suchen“ fasst die Schritte zwei („Vereinfachen/Strukturieren“) und drei („Mathematisieren“) zusammen. Die Aufgabe liegt darin, Annahmen und Schätzungen durchzuführen, die für die Lösung relevant sein könnten und diese dann in mathematische Zusammenhänge, Formeln bzw. Gleichungen, zu bringen. Im dritten Schritt „Mathematik benutzen“ wird analog zum Schritt vier im Modellierungskreislauf („Mathematisches Arbeiten“) ein mathematisches Resultat durch Anwendung geeigneter mathematischer Kenntnisse und Verfahren erzeugt. Der letzte Schritt „Ergebnis erklären“ vereint die Schritte fünf bis sieben („Interpretieren“, „Validieren“ und „Darlegen/Erklären“). Hier sollen die Schüler/innen nochmals überlegen, ob ihr Ergebnis plausibel ist und der Realität entspricht. „Der Pfeil von Schritt 4. zum Schritt 1., der ein erneutes Durchlaufen des Modellierungskreislaufs andeutet, ist schwächer gedruckt als andere Pfeile, weil im

¹ vgl. Abb. 3, Blum, 2010, zit.n. Borreomo Ferri et al. (Hrsg.), 2013, S. 18

Unterricht sicherlich nur in besonderen Ausnahmefällen ein zweites Durchlaufen des Modellierungskreislaufes möglich und nötig ist.“¹

Man sollte jedoch diesen Lösungsplan den Schüler/inne/n nicht als Rezept und nicht vor dem ersten Bearbeiten einer Modellierungsaufgabe geben. Es ist zunächst nämlich wichtig, dass die Schüler/innen sich selbständig mit derartigen Aufgaben auseinandersetzen und in Folge dessen ein Leitfaden mit den Schüler/inne/n gemeinsam im Unterricht erarbeitet wird.²

Abschließend kann man sagen, dass realitätsbezogene Aufgaben sehr viele Schwierigkeiten und Herausforderungen für Schüler/innen und Lehrer/innen darstellen, diese aber bewältigt werden können. Eine gute Kooperation von Lehrer/in und Schüler/inne/n spielt dabei eine große Rolle.

Für das Formulieren von realitätsbezogenen Aufgaben sind die Interessen und Erfahrungen, sowie das Denken der Schüler/innen notwendig. Die Lehrer/innen müssen diese dann dem Aufgabentyp entsprechend konstruieren.

Um aber Aufgaben aus der Realität lösen zu können, bedarf es vieler Übungen, vor allem was das Lösen von Modellierungsaufgaben betrifft. Da diese Aufgaben sehr offen und komplex sind, ist der Gewöhnungsprozess der Schüler/innen an solchen Aufgaben sehr lange. Es ist daher von Vorteil, zeitig mit den Kindern Modellierungsaufgaben zu erarbeiten, sie immer wieder auf mögliche Fehler hinzuweisen und gezielt diese Fehler zuzulassen und darüber zu diskutieren.

¹ Hinrichs, 2008, S. 33

² vgl. Maaß, 2009, S. 38

4.3. Außerschulische Lernorte

Eine weitere Methode, realitätsbezogenen Mathematikunterricht zu betreiben, kann durch außerschulische Lernorte erfolgen. Durch das Verlassen des Klassenzimmers wird ermöglicht, die Mathematik in der Umwelt zu entdecken und zu erfahren.¹ Den Schätzungen zufolge vollziehen sich ca. 70 % aller Lernprozesse außerhalb von Bildungsinstitutionen.² Auch im Lehrplan sind außerschulische Lernorte erwähnt,³ die vor allem für die Lehrer/innen eine Anregung für ihren Unterricht darstellen sollten. Vermutlich sind jedoch viele Lehrer/innen mit dem Begriff nicht vertraut und wenden diese Methode in ihrem Unterricht nur sehr selten an.

In weiterer Folge möchte ich daher einen Überblick über den Begriff außerschulische Lernorte sowie die Vor- und Nachteile dieser Unterrichtsmethode darlegen und Beispiele bringen.

4.3.1. Definition außerschulischer Lernorte

Der Begriff „Lernort“ kann sehr vielfältig betrachtet werden. Man unterscheidet zwischen sogenannten primären und sekundären Lernorten sowie den Lernstandorten und den Lernwegen.

- **Primäre Lernorte:** „Als *primäre Lernorte* [sic] werden [...] jene Einrichtungen bezeichnet, die in erster Linie dem Lernen dienen. Neben den allgemeinbildenden Schulen zählen hierzu Berufsschulen und Fachschulen sowie Hochschulen und Universitäten. Innerhalb des primären Lernortes Schule lassen sich verschiedene Lernbereiche [...] ausmachen. Das beginnt bereits mit dem Klassenraum, der sich mit einer Lesecke, Experimentier- und Maltischen, einem Computerarbeitsplatz und Materialsammlungen für individualisierte Arbeitsphasen in einzelne Lernbereiche untergliedert. Aber nicht nur der

¹ vgl. Kleine, Ludwig & Schelldorfer, 2012, S. 2

² vgl. Rasfeld & Scherer, 2010, S. 4

³ vgl. Allgemeiner Lehrplan. Bundesministerium für Bildung und Frauen [Zugriff am 6.7.2015]

Klassenraum, sondern auch das Schulgebäude selbst bietet vielfältige Lernbereiche [...]“¹ z.B.: Schulaula mit Arbeitsecken oder der Schulhof.

- **Sekundäre Lernorte:** „Sekundäre Lernorte sind Stätten oder Einrichtungen, die außerpädagogischen Zwecken dienen und die erst durch Einbezug in den Unterricht zu Lernorten werden.“² „Prinzipiell kann damit jeder Ort zu einem außerschulischen Lernort werden - die Wiese, der Handwerksbetrieb, die Post, die Baustelle auf der Straße.“³ Viele Autoren/innen setzen daher außerschulische Lernorte mit sekundären Lernorten gleich.

Primäre und sekundäre Lernorte können auch als Lernorte mit oder ohne direktem Bildungsauftrag bezeichnet werden.

„Bei Lernorten mit direktem Bildungsauftrag sind Ziele und Inhalte vorgegeben und sollten mit denen des eigenen Unterrichts abgeglichen werden.“⁴ Dazu zählen Schülerlabore oder Workshops für Schüler/innen zu bestimmten Themen. Der Schwerpunkt dieses Lernortes liegt im forschenden Lernen und eigenständigen Arbeiten der Schüler/innen. Das Vermitteln des Inhaltes und die Durchführung von Experimenten liegen nicht in der Hand des Lehrers / der Lehrerin sondern werden von Personen vor Ort übernommen. Den Lehrer/inne/n öffnen sich dadurch Möglichkeiten der Schülerbeobachtung.⁵ Lernorte ohne direkten Bildungsauftrag werden in der Regel vom Fachlehrer / von der Fachlehrerin geleitet und „[...] erhalten den Bildungsauftrag durch die Einbindung des Besuchs eines Lernortes zu einem bestimmten Unterrichtsthema oder Projekt, wie etwa Vermessungen im Gelände.“⁶ Der Inhalt ist daher durch die Vorbereitung des Lehrers / der Lehrerin sehr stark mit dem regulären Unterricht verbunden. Ein naheliegendes Beispiel für diesen Lernort könnten Vermessungsprojekte in der Natur sein. „Es macht einen Unterschied, ob man den Anwendungskontext des ‚Försterdreiecks‘ bei der Behandlung der Strahlensätze anhand

¹ Dühlmeier, 2008, S. 17

² Rasfeld & Scherer, 2010, S. 5

³ Dühlmeier, 2008, S. 17

⁴ Rasfeld & Scherer, 2010, S. 5

⁵ vgl. ebd., S. 6f

⁶ ebd., S. 5

von Schulbuchabbildungen und –aufgaben vornimmt oder im Freien tatsächlich die Höhe von Bäumen, Gebäuden oder Felswänden bestimmt.“¹

- **Lernstandorte** werden zu Lernorten dann, „[...] wenn [sie] durch gezielte pädagogisch-didaktischen Bemühungen adressatengerecht aufbereitet und für aktive Erkundungs- und Lernprozesse interessierter Gruppen von Kindern, Jugendlichen und Erwachsenen erschlossen [werden] und auf Dauer zur Verfügung [stehen].“² Diese Lernstandorte sind bereits weit verbreitet. Viele Museen bieten Führungen mit anschließenden Workshops für Schulklassen an.³ In diesen Lernorten spiegeln sich die Merkmale eines außerschulischen Lernortes mit direktem Bildungsauftrag wider. Daher werden in der Literatur Lernstandorte als Synonym für Lernorte mit direktem Bildungsauftrag verwendet. In Wien gibt es zwei mögliche Lernstandorte, die sich für die Sekundarstufe I anbieten würden. Zum einen ist es „Das Haus der Mathematik“, zum anderen „mathspace“. Diese zwei Orte möchte ich kurz vorstellen und ihr Programm näher bringen.

Das **Haus der Mathematik** befindet sich im 10. Wiener Gemeindebezirk und sieht seine Aufgabe darin, den Schüler/inne/n einen anderen Stellenwert der Mathematik in unserer Gesellschaft zu vermitteln. Die negativen Erfahrungen, die im Schulbereich im Fach Mathematik vorkommen und das Fach daher unbeliebt scheinen lassen, sollen hier schwinden. Im Haus der Mathematik gibt es zwei Bereiche, die von den Kindern erforscht werden können, nämlich die Geschichte der Mathematik und die Erlebniswelt. Im Erstgenannten begeben sich die Schüler/innen auf eine Zeitreise, wo sie die Geschichte der Mathematik in Form von Informationstafeln und alten Rechen- und Zeichenhilfen jeglicher Epoche entdecken und kennenlernen. Durch diesen Museumsbereich werden die Kinder von Mitarbeiter/innen geführt und dürfen die alten Rechenhilfen testen. Im Dokumentationszentrum erfahren die Schüler/innen über die Leistungen österreichischer Mathematiker und können in deren Biografien lesen.

¹ Rasfeld & Scherer, 2010, S. 7

² Dühlmeier, 2008, S. 17

³ vgl. ebd., S. 17

In der Erlebniswelt erleben die Schüler/innen Mathematik spielerisch. Es sind 60 Spiele mit mathematischem Hintergrund vorhanden, die von den Schüler/innen selbst ausprobiert werden können. Meistens beinhalten diese Spiele ein Training des räumlichen Vorstellungsvermögens und die Visualisierung von mathematischen Formeln,¹ wie zum Beispiel der Binomischen Formel:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Die Schüler/innen erhalten acht Bauteile (siehe Bild 8), die zu einem Würfel



Bild 8: Binomischer Würfel

zusammengesetzt werden können, der eine Kantenlänge von $a + b$ ergibt. Damit kann geometrisch die Formel $(a + b)^3$ interpretiert werden.²

Im Museumsquartier, 7. Wiener Gemeindebezirk, befindet sich das **mathspace**, das von Rudolf Taschner gegründet wurde. Hier werden Vorträge und Workshops zum Thema Mathematik für alle Altersklassen angeboten. Für die Sekundarstufe I gibt es die Programme „Mathematik zum Be – Greifen“, „Mathematische Erfindungen“ und „Mathematische Koryphäen“. Während „Mathematik zum Be – Greifen“ sehr spielerisch aufgebaut ist, sind die anderen Veranstaltungen Vortragsreihen, die informationsgeladen und weniger handlungsorientiert sind. Im Programm „Mathematik zum Be – Greifen“ lernen die Schüler/innen durch selbstständiges Arbeiten und Legen von Zahlenkärtchen das Sierpinski Dreieck, das Pascalsche Dreieck, selbstähnliche Figuren und den Begriff „mathematischer Grenzwert“ kennen und können über deren Zusammenhänge diskutieren. Bei den „Mathematischen Erfindungen“ werden den Schüler/innen allgemeine Erfindungen vorgestellt. Das Ziel dieser Veranstaltung ist, dass die jungen Menschen ihre Umwelt neu erfahren und aus mathematischer Sicht kennenlernen. Die Veranstaltung „Mathematische Koryphäen“ ist eine Dokumentationsreihe, worin hervorragende Mathematiker/innen vorgestellt werden und die mathematischen Leistungen

¹ vgl. Lindbichler, Haus der Mathematik [Zugriff am 10.8.2015]

² vgl. Biermann, 2010, S. 83

dieser Persönlichkeiten im Kontext zu den sich daraus ergebenden Errungenschaften der modernen Gegenwart anschaulich nahegebracht werden.¹

Wie sinnvoll diese Lernstandorte sind, hängt vom Programm und dem Interesse der Schüler/innen ab. Aber sie sind Anregungen für Lehrer/innen, Exkursionen bzw. Vorträge mit mathematischen Hintergründen zu planen und durchzuführen.

Eine weitere Möglichkeit für einen außerschulischen Lernort sind Lernwege.

- **Lernwege:** Mathematische Lernwege oder auch Lernpfade genannt, sind grundsätzlich Wege, auf welchen Mathematik entdeckt wird. Lernwege sind ähnlich zu sekundären Lernorten ohne direkten Bildungsauftrag. „Ein mathematischer Lernpfad kann sich überall befinden: In der Schulanlage, im Wohnquartier, im Einkaufszentrum, auf dem Spielplatz usw. Ein mathematischer Lernpfad kann alleine, gruppenweise oder mit der ganzen Klasse begangen werden. [...] An interessanten Orten werden mathematische Fragestellungen untersucht und diskutiert [...].“² Ob der Lernweg von Lehrer/innen erstellt wird, oder von Lernenden für sich selbst oder anderen Schüler/innen bleibt frei gestellt.³

Zusammengefasst lässt sich erkennen, dass es nicht nur den einen außerschulischen Lernort gibt sondern eine Vielzahl, die sich nicht nur durch den Ort selber unterscheiden, sondern auch durch die Aufgaben und Ausführungen. Ackermann definiert den Begriff „außerschulischer Lernort“ letztendlich als „[...] einen Ort außerhalb des Schulgebäudes, wo ein so genanntes ‚Lernen vor Ort‘ ermöglicht wird, d.h. dass bestimmte Inhalte und Probleme an der Stelle bearbeitet werden, wo sie direkt wahrgenommen, erlebt und studiert werden können.“⁴ Dieser Ort kann vom Lehrer / von der Lehrerin oder von außenstehenden Personen pädagogisch und didaktisch aufbereitet werden.

¹ vgl. Taschner et al., mathspace [Zugriff am 11.August 2015]

² Kleine, Ludwig & Schelldorfer, 2012, S. 7

³ vgl. ebd., S. 7

⁴ Ackermann, Politik und Unterricht [Zugriff am 11.August 2015]

In weiterer Folge wird der Begriff „außerschulischer Lernort“ mit der Definition von Ackermann gleichgesetzt.

Außerschulische Lernorte kann man in vier Themenbereiche unterteilen:

- Lernorte in der Natur (z.B. Wald, Teich, Wiese, ...)
- Lernorte in Arbeits- und Produktionsstätten (z.B. Bäckerei, Tischlerei, ...)
- Lernorte in öffentlichen Einrichtungen (z.B. Museum, Bibliothek, Krankenhaus, ...)
- Bauwerke (z.B. Schloss, Kirche, ...) ¹

Fraglich ist nun, welche mathematischen Inhalte aus dem Fachlehrplan den einzelnen Themen zugeordnet werden können, um ein außerschulisches Lernen überhaupt zu ermöglichen. Die folgende Tabelle (Tab. 1) zeigt Vorschläge für außerschulische Lernorte zu den unterschiedlichen Inhalten und Themen für die Sekundarstufe I. Die Tabelle ist in drei Spalten geteilt. In der ersten Spalte wird die Schulstufe, in der zweiten der Inhalt nach dem österreichischen Lehrplan und in der dritten der außerschulische Lernort angegeben.

Schulstufe	Inhalt nach dem Lehrplan	außerschulischer Lernort ²
5. / 6.	<u>Arbeiten mit Zahlen und Maßen:</u> mit natürlichen und „[...] positiven rationalen Zahlen Rechnungen mit leicht abschätzbaren Ergebnissen durchführen und zur Lösung von Problemen in Sachsituationen vielfältig anwenden können. [...] grundlegende Sicherheit im Kopfrechnen gewinnen.“ ³ (zählen, vorteilhaftes Rechnen, Kopfrechnen, Überschlagsrechnen)	<u>Arbeitsstätte – Supermarkt:</u> Beim Einkauf einen Warenbestand (geschickt) zählen, den Warenwert im Einkaufskorb überschlägig bestimmen und den Rückgabebetrag flexibel berechnen.

¹ vgl. Dühlmeier, 2008, S. 19f

² vgl. Rasfeld & Scherer, 2010, S. 8

³ Lehrplan der Mathematik. Bundesministerium für Bildung und Frauen, S. 5 [Zugriff am 29.6.2015]

5. / 6.	<u>Arbeiten mit Zahlen und Maßen:</u> „Maße verwenden und Umwandlungen durchführen können in dem Ausmaß, wie es die Bearbeitung von Sachaufgaben und geometrischen Aufgaben erfordert und es dem Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler entspricht.“ ¹ (Messen, Schätzen und Berechnen von Größen)	<u>Produktionsstätte – Betriebsbesichtigung:</u> Berechnungen und Mengenschätzungen durchführen z.B.: in einer Tischlerei, Kläranlage, ... <u>Natur – Sportplatz:</u> Zeiten stoppen und Längen messen
5. / 6.	<u>Arbeiten mit Figuren und Körpern:</u> „[...] ausgehend von Objekten der Umwelt durch Idealisierung und Abstraktion geometrische Figuren und Körper sowie ihre Eigenschaften erkennen und beschreiben können.“ ²	<u>Bauwerke – Stadtrundgang:</u> Geometrische Formen und Körper entdecken, skizzieren und Berechnungen durchführen.
5. / 6.	<u>Arbeiten mit Figuren und Körpern:</u> „[...] einfache symmetrische Figuren erkennen und herstellen können.“ ³	<u>Bauwerke – Kirchenfenster:</u> Symmetrien in Maßwerken von Kirchenfenstern erforschen und selbst konstruieren.
5. / 6.	<u>Arbeiten mit Modellen, Statistik:</u> Tabellen und graphische Darstellungen zum Erfassen von Datenmengen verwenden, lesen, anfertigen können. Entsprechende Fragestellungen finden und Berechnungen durchführen. ⁴	<u>Öffentliche Einrichtung – Bahnhof:</u> Die Fahrtmöglichkeiten an Fahrplänen sowie Liniennetzen erkunden.
7. / 8.	<u>Arbeiten mit Modellen, Statistik:</u> Funktionale Abhängigkeiten erkennen, untersuchen und darstellen können. ⁵	<u>Natur – Gelände:</u> Die Laufzeit des Schalls (zwischen dem optischen Signal der Startklappe und dem akustischen Signal) untersuchen.

¹ Lehrplan der Mathematik. Bundesministerium für Bildung und Frauen, S. 6 [Zugriff am 29.6.2015]

² ebd., S. 5

³ ebd., S. 5

⁴ vgl. ebd., S. 5f

⁵ vgl. ebd., S. 7f

7.	<u>Arbeiten mit Figuren und Körpern:</u> „Vergrößern und Verkleinern von Figuren, ähnliche Figuren erkennen und beschreiben.“ ¹ → Strahlensätze	<u>Natur – Gelände:</u> Höhen von Bäumen, Gebäuden, ... mit Hilfe des Försterdreiecks bestimmen.
8.	<u>Arbeiten mit Modellen, Statistik:</u> „Untersuchen und Darstellen von Datenmengen unter Verwendung statistischer Kennzahlen (zB Mittelwert, Median, Quartil, relative Häufigkeit, Streudiagramm)“ ²	<u>Natur – Sportplatz:</u> Längen und Zeitspannen untersuchen und messen; Probleme der Messgenauigkeit und Messfehler erörtern; über Fragen nach der besten und konstantesten Leistung zur Berechnung von Kennwerten gelangen

Tabelle 1: Beispiele für außerschulische Lernorte in Mathematik

Diese Tabelle ist jedoch nicht vollständig, sondern soll nur einen Einblick in mögliche außerschulische Lernorte im Fach Mathematik geben.

Doch warum soll man überhaupt außerschulische Lernorte in den Unterricht einbringen? Nur weil es der Lehrplan vorschreibt, oder gibt es durchaus Vorteile für Schüler/innen und Lehrer/innen? Auf diese Frage wird im kommenden Abschnitt eingegangen.

4.3.2. Ziele außerschulischer Lernorte

Die Antwort auf die Fragen nach dem „Warum“ kann durch folgende Ziele außerschulischer Lernorte beantwortet werden.

¹ Lehrplan der Mathematik. Bundesministerium für Bildung und Frauen, S. 7 [Zugriff am 29.6.2015]

² ebd., S. 8

Außerschulische Lernorte sollen

- ... den Schüler/inne/n zeigen, „[...] dass Mathematik nicht nur im Klassenzimmer, sondern auch ‚draußen‘ stattfindet.“¹ Dabei soll das Bild der Mathematik gestärkt werden, der Realitätsbezug dargestellt und zu Fragestellungen aus der Lebenswelt angeregt werden.²
- ... die Schüler/innen dazu bewegen, die Natur der ländlichen und städtischen Umwelt zu erkunden und aktiv zu erschließen,
- ... Eigenständigkeit und Flexibilität bei den Schüler/inne/n anregen,
- ... die Schüler/innen zur Mündigkeit und Eigenorganisation hinführen,
- ... zum analytischen sowie zum vernetzten bzw. vernetzenden Denken bei Arbeitsprozessen beitragen,
- selbstständiges Handeln fördern,
- ... die Schüler/innen zum kritischen Hinterfragen von gesellschaftlichen Prozessen ermutigen.³

Das Suchen und Aufsuchen von Lernorten außerhalb des Klassenzimmers ist daher ein Weg der Schule, die Lern- und Erfahrungsmöglichkeiten der Kinder zu erweitern und so die Defizite der veränderten Umwelt zu vermindern. Denn wie schon J. W. von Goethe meinte: „[...] die beste Bildung findet ein gescheiter Mensch auf Reisen.“⁴ Aus diesen Zielen folgend, können die nachstehenden Vorteile dieser Unterrichtsmethode abgeleitet werden.

4.3.3. Vorteile außerschulischer Lernorte

Werden im Unterricht außerschulische Lernorte eingesetzt, sollte man bei der Auswahl des Lernortes die Interessen der Schüler/innen berücksichtigen, nur so wird ein aktives Lernengagement geweckt und die Aufmerksamkeit der Schüler/innen erhöht.⁵ Denn

¹ Kleine, Ludwig & Schelldorfer, 2012, S. 7

² vgl. ebd., S. 7f

³ vgl. Brühne & Sauerborn, 2010, S. 44f

⁴ Goethe: Wilhelm Meisters Lehrjahre – Kapitel 67, Spiegel online [Zugriff am 12.8.2015]

⁵ vgl. Dühlmeier, 2008, S. 20f

„Menschen lernen explizit das und nur das ..., was aufmerksam wahrgenommen wird, und jenes, womit man sich intensiv auseinander setzt.“¹ Darauf aufbauend können verschiedene Kompetenzen gefördert und ein positiver Lernerfolg erreicht werden.

„Das Bearbeiten realitätsnaher Probleme [...] außerhalb des Klassenzimmers motiviert erfahrungsgemäß besser, als dies Fotografien von Sachsituationen in Klassenzimmern können.“² Daher kann durch außerschulisches Lernen das Lernbedürfnis, etwas wissen zu wollen, die Freude darauf, neue Einsichten zu gewinnen, unterstützt werden. Daraus ergibt sich „[...] die Chance, bei Kindern, eine fragende Haltung gegenüber der Welt zu entwickeln.“³

Verzichtet man bei außerschulischen Lernorten auf Führungen und gibt stattdessen den Schüler/innen die Möglichkeit selbst tätig zu werden, so steigert sich damit die Lernintensität und man sammelt weitere Erfahrungen. Die Lernenden gehen mit dem was sie theoretisch im Unterricht anhand von Textaufgaben, Diagrammen etc. über die Realität vermittelt bekommen, hinaus und versuchen auf der Grundlage ihres theoretischen Wissens die Wirklichkeit so, wie sie erscheint, zu dokumentieren, zu interpretieren und zu deuten. Lernen an außerschulischen Lernorten ist in der Regel daher handlungsorientiert und kann bei der Bewältigung von Alltagsproblemen helfen, denn durch die eigenen Erfahrungen werden die Schüler/innen problemsichtiger gemacht und zum eigenverantwortlichen Handeln bewegt. Auch das eigenständige Beobachten von Phänomenen, das Interpretieren, das Planen und Durchführen von selbstständigen Tätigkeiten werden gefördert und tragen zur Entwicklung sozialer Kompetenzen bei. Durch das Demonstrieren, Herstellen, Untersuchen, Ausprobieren usw. werden das Interesse und die Motivation der Schüler/innen wieder geweckt, damit sie nicht im Laufe des Lernprozesses abreißt. Denn wo Schüler/innen unter Einbezug vieler Sinne tätig sind, wächst das Interesse und die Motivation kann im Verlauf der Handlung durch Zweifel, Verblüffung und Widersprüche wieder aktiv werden.⁴

„Gesteigerte Motivation und die Bemühungen, etwas richtig zu verstehen, führen zu längerfristigen Behaltungsleistungen.“⁵ Durch das Einbeziehen der Mathematik in den

¹ Dühlmeier, 2008, S. 20

² Kleine, Ludwig & Schelldorfer, 2012, S. 2

³ Dühlmeier, 2008, S. 24

⁴ vgl. Brühne & Sauerborn, 2010, S. 44ff und Dühlmeier, 2008, S. 24f und Rasfeld & Scherer, 2010, S. 5f

⁵ Flury & Juon, 2012, S. 12

Alltag können sich Schüler/innen länger an Daten oder mathematische Tätigkeiten erinnern.

„Außerschulische Lernorte unterstützen [ebenfalls] soziales Lernen. [...] Das Arbeiten in Gruppen vor Ort kann Eigenschaften wie Kooperationsfähigkeit, Toleranz, Hilfsbereitschaft, Rücksicht, Höflichkeit und Solidarität verbessern.“¹ Auch die Selbstständigkeit sowie das verantwortungsvolle Handeln in der Öffentlichkeit werden durch das außerschulische Lernen gefördert.

Ein weiterer Vorteil, der sich durch das Einbeziehen außerschulischer Lernorte ergibt, ist, dass es vielfältige Ansätze für fächerübergreifendes Lernen mit sich bringt. Mathematik kann mit fast jedem naturwissenschaftlichen Unterrichtsgegenstand kombiniert werden, sei es im Zusammenhang mit der Geographie zu den Themen Maßstab und relative Höhe oder mit der Physik zu Beschleunigung und Geschwindigkeit von Körpern. Dadurch wird nochmals aufgezeigt, wo die Mathematik auch in anderen Wissenschaften an Bedeutung findet.

„Erkundungen und Aktivitäten außerhalb des Klassenzimmers leisten einen wesentlichen Beitrag zum mathematischen Modellieren.“² Dadurch werden auch die Teilkompetenzen des Modellierens angesprochen.

Zu guter Letzt sei noch erwähnt, dass außerschulische Lernorte „[...] Möglichkeiten zu Perspektivenwechseln, die insbesondere motorischen und visuellen Lerntypen zugutekommen [...]“³ bieten.

Es zeigt sich, dass außerschulisches Lernen, vor allem für die Lernenden, nicht nur in der Erarbeitung von Themen sondern auch in der Ergebnissicherung Vorteile bringt. Längeres Behalten und Verstehen der Inhalte trägt aber auch zur Freude der Lehrer/innen bei.

¹ Dühlmeier, 2008, S. 25

² Kleine, Ludwig & Schelldorfer, 2012, S. 2

³ ebd., S. 2

4.3.4. Nachteile außerschulischer Lernorte

Trotz dieser vielen Vorteile dürfen die Nachteile dieser Unterrichtsmethode nicht unberücksichtigt bleiben. Insbesondere bedarf es einer intensiven Vor- und Nachbereitung seitens der Lehrer/innen. Denn viele außerschulische Lernorte haben häufig einen projektartigen Charakter und „[...] bedeuten für die Lehrkraft einen erhöhten organisatorischen und zeitlichen Aufwand.“¹ Nicht nur in der Unterrichtsplanung, sondern auch im Einholen „[...] der notwendigen innerschulischen Abstimmung und Genehmigung durch den Rektor, den Schulelternbeirat oder die Eltern.“²

Der enge Zeitrahmen im Fachunterricht wirkt demnach auch hemmend auf diese Unterrichtsmethode und stellt das größte Problem außerschulischen Lernens dar.³ Viele Lehrer/ Lehrerinnen befürchten mit solchen „kleinen“ Projekten mit ihrer Jahresplanung in Verzug zu geraten und mit den vorgegebenen Inhalten des Lehrplans in einer Schulstufe nicht fertig zu werden. Daher verzichten viele Lehrenden auf diese, für Schüler/innen recht vorteilhafte, Methode.

Außerschulische Lernorte regen, wie bereits erwähnt, zu mathematischen Fragestellungen an. Lehrer/innen „[...] könnten befürchten, dass ihre fachliche Kompetenz für einen Lernort mit vielfältigen Lerngelegenheiten nicht ausreichend sei, um auf Schülerfragen zu antworten.“⁴ Ein weiterer Grund, weshalb diese Unterrichtsmethode selten eingesetzt wird.

Am Lernort existieren oft wesentliche und unwesentliche Lerngelegenheiten nebeneinander, sodass die Schüler/innen plötzlich andere Interessen zeigen und das von der Lehrkraft im Zentrum ihrer Planungsüberlegungen stehende Thema in den Hintergrund gedrängt wird. Die Aufmerksamkeit der Schüler/innen schwindet und der Lernerfolg bleibt teilweise aus.⁵

Auch können außerschulische Lernorte eine Überforderung mancher Schüler/innen darstellen, wenn ihr Vorwissen aus der Vorbereitungsphase nicht ausreichend ist, um

¹ Dühlmeier, 2008, S. 27

² Brühne & Sauerborn, 2010, S. 17

³ vgl. ebd., S. 14

⁴ Dühlmeier, 2008, S. 27

⁵ vgl. ebd., S. 27

den Bezug zur Wirklichkeit zu erschließen. Denkfehler und falsche Folgerungen sind Fehler, die den Denk- und Lernprozess beeinflussen.¹

Ein weiterer Nachteil könnte sich durch das Einbeziehen von Experten/innen vor Ort ergeben. Es hängt viel von der Fähigkeit der Experten/innen ab, wie sie ihr Wissen den Schüler/innen näherbringen. Das Fachwissen auf die Verstehensebene der Schüler/innen zu reduzieren, stellt eine Herausforderung dar. Es ist daher unerlässlich, im Vorfeld der Exkursion mit außerschulischen Experten/innen Kontakt aufzunehmen.²

Im zunehmenden Alter könnte aufgrund der Pubertät und Adoleszenz ein geringeres Interesse der Lernenden hinzukommen, welches sich ebenfalls negativ auf das Lernen in Bezug mit außerschulischen Lernorten auswirkt. Wenig Interesse führt zu niedriger Motivation und das wiederum beeinträchtigt den Lernprozess sowie den Lernerfolg.

Während außerschulische Lernorte viele Vorteile für die Schüler/innen haben, konzentrieren sich die Nachteile hingegen auf den Lehrer / die Lehrerin, was auf den ersten Blick sehr schnell zu einer skeptischen Haltung dieser Unterrichtsmethode führt. Einen guten Unterricht macht aber nicht nur außerschulisches Lernen aus, sondern auch die Vielfalt der Methoden. Ich denke, dass daher die außerschulischen Lernorte nicht Hauptbestandteil des Unterrichts sein sollten. Schüler/innen lernen unterschiedlich, demnach hat der Lehrer / die Lehrerin die Aufgabe, das Fachwissen den Lernenden auf verschiedenartige Weise beizubringen. Lernorte außerhalb des Klassenzimmers sollen und müssen daher in einem gewissen Rahmen eingebaut werden.

Die nachstehende mögliche Planung eines außerschulischen Lernortes soll ein Checkpoint für Lehrer/innen sein, was zu berücksichtigen ist, damit diese Methode die gewünschten Ziele erreicht.

4.3.5. Planung außerschulischer Lernorte

Die didaktisch-methodische Aufbereitung eines außerschulischen Lernorts sollte sich an drei Schritten orientieren. Die folgende Abbildung (Abb. 8) soll dies veranschaulichen.

¹ vgl. Dühlmeier, 2008, S.27

² vgl., S. 27

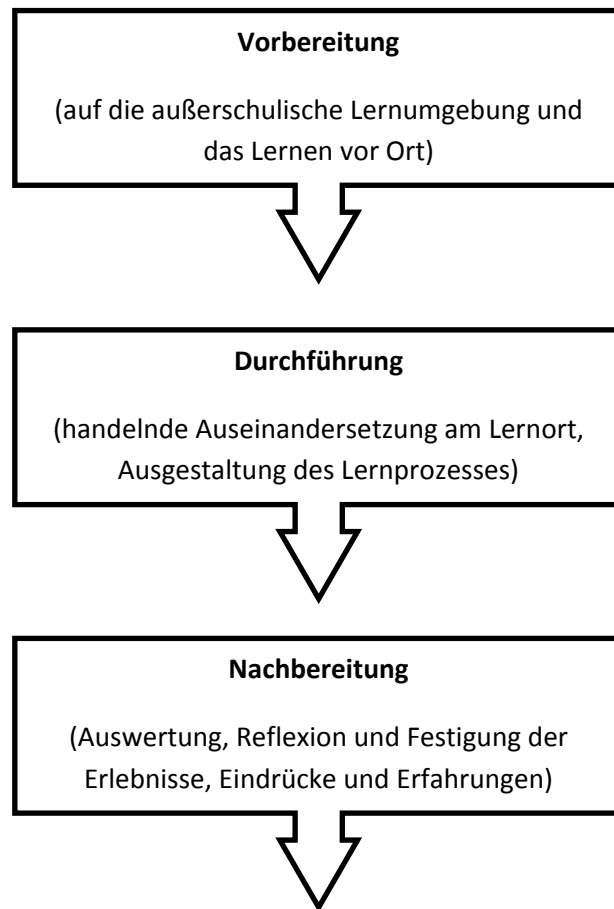


Abbildung 8: Der methodische Dreischritt zur Didaktik des außerschulischen Lernens.
(Quelle: Brühne & Sauerborn, 2010, S. 91)

Die Phase der **Vorbereitung** beschränkt sich zunächst auf den Klassenraum, wo es um die Entscheidung von organisatorischen Abläufen geht und wo Vorkenntnisse bzw. Vorerfahrungen der Schüler/innen zum Lernort vermittelt werden.¹ Die nachstehende Aufzählung soll als Checkliste für Lehrer/innen dienen, in der die wesentlichen Aufgaben in der Vorbereitungsphase genannt werden.

- Die Schüler/innen sollen ihre Erwartungen, Ideen und Wünsche in Bezug auf den Lernort bzw. das Thema des Unterrichtsvorhabens äußern.
- Die Ermittlung des Vorwissens, der Vorstellungen und Einstellungen der Schüler/innen können zum Beispiel in Form eines Brainstormings erfolgen.

¹ vgl. Brühne & Sauerborn, 2010, S. 92

- Die für das Erfassen der Wirklichkeitsausschnitte erforderlichen Sachinformationen und fachspezifische Arbeitsmethoden sollten erarbeitet und eingeführt werden.
- Das für den Lernort benötigte Material soll zusammengestellt werden.
- Möglichkeiten der Dokumentation, wie Fotoapparat oder Diktiergerät und der Präsentation, zum Beispiel eine Ausstellung oder ein Lernplakat, sollen festgelegt werden.
- Wichtige Verhaltensregeln und eindeutige Abmachungen am Ort des Geschehens sollen den Schüler/innen näher gebracht werden, um Unfälle oder Verletzungen zu vermeiden.
- Die Erlaubnis der Eltern und der Schulleitung muss eingeholt werden.
- Der Zeitbedarf soll bestimmt werden und ein Zeitplan erstellt werden.
- Die Experten des Lernortes, sofern der Lernort eine Führung erfordert, sollen in einem Vorgespräch über das Unterrichtsthema, die Ziele und die Lerngruppe informiert werden.¹

Sind alle Schritte der Vorbereitungsphase erledigt, steht der Begegnung mit dem außerschulischen Lernort (**Durchführung**) nichts mehr im Weg. Hier soll stets die handelnde Auseinandersetzung mit dem Ort im Vordergrund stehen. Bei Lernorten mit Bildungsauftrag, wie Museen oder Betrieben, würde das vereinbarte Programm durch den Veranstalter vorgetragen und durchgeführt werden. Unter Umständen können auch die Schüler/innen freie Erkundungen innerhalb des Museums / Betriebs machen und sich dabei auf ihre zusätzlichen Interessen spezialisieren. Bei Lernorten ohne Bildungsauftrag müssen die Schüler/innen die seitens des Lehrers / der Lehrerin geplanten Erkundungs- und Arbeitsaufträge bearbeiten. Durch das eigene Entdecken, Forschen und Gestalten steigern sich die Motivation und die Konzentration seitens der Lernenden. Auch ein Beitrag zum kreativen Lernen ist dadurch gegeben.²

Die **Nachbereitungsphase** des Besuchs soll sich auf das Auswerten der gesammelten Daten konzentrieren. Tabellen, Grafiken und Diagramme sollen erstellt werden. Die Präsentation der Ergebnisse bildet den Abschluss dieser Unterrichtsmethode. Das Ziel

¹ vgl. Brühne & Sauerborn, 2010, S. 92f und Dühlmeier, 2008, S. 31 und Rasfeld & Scherer, 2010, S. 10

² vgl. Brühne & Sauerborn, 2010, S. 95f und Rasfeld & Scherer, 2010, S. 10

dieser Phase ist vor allem, dass die Schüler/innen Erlebtes reflektieren und neu gewonnenes Wissen in ihren bisherigen Erfahrungen einordnen. Jeder Schüler / jede Schülerin hat sich nun aktiv und handelnd mit dem Lernort beschäftigt und kann vermutlich eine Auseinandersetzung mit komplexen verwandten Themen leichter nachvollziehen.¹

Abschließend sei erwähnt, dass das Heranziehen von außerschulischen Lernorten, seien es primäre, sekundäre Lernorte oder Lernstandorte sowie Lernwege Vor- und Nachteile sowohl für Schüler/innen als auch Lehrer/innen mit sich bringen. Eine sorgfältige Planung dieser Methode ist daher unerlässlich, da ansonsten der Lernerfolg ausbleibt.

¹ vgl. Brühne & Sauerborn, 2010, S. 95 und Rasfeld & Scherer, 2010, S. 10

5. Resümee

Der Alltagsbezug im Mathematikunterricht sollte ein wesentlicher Bestandteil in den Schulstunden sein, weil er nicht nur im österreichischen Lehrplan und in den Bildungsstandards mehrfach angeführt wird, sondern weil dadurch auch die Zukunft der Schüler/innen positiv beeinflusst werden kann. Denn durch das Einbeziehen unserer Umwelt / Realität steigt nicht nur die Motivation der Schüler/innen für das Fach Mathematik, das bessere Verständnis von mathematischen Algorithmen bzw. Inhalten und die Nachhaltigkeit, sondern stellt auch das Fach direkt in einen anderen Blickwinkel und zeigt dessen besondere Bedeutung für andere Wissenschaften und unsere Kultur. Unabhängig davon, wie der Realitätsbezug im Unterricht stattfindet, sei es durch unterschiedliche Aufgaben, Methoden oder durch Exkursionen, darf er keinesfalls fehlen.

Es gibt aber kein „Rezept“ für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Das Modellieren alleine würde nicht ausreichen, um die wesentlichen Kompetenzen, die in einem realitätsbezogenen Unterricht gefördert werden sollen, zu erzielen. Auch das Einsetzen außerschulischer Lernorte sollte nicht alleiniger Bestandteil eines realitätsbezogenen Unterrichts sein. Eine gute Kombination jeglicher Umsetzungsmöglichkeiten¹ für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht wäre daher von Vorteil, um die wesentlichen Ziele und Funktionen eines solchen Unterrichts zu erreichen.

Für welche Typen von Arbeitsaufgaben und Durchführung von außerschulischen Lernorten man sich schließlich entscheidet, obliegt alleine den Fachlehrer/innen. Selbstverständlich verlangt sowohl das eine als auch das andere zahlreiche Vorbereitungs- und Nachbereitungsstunden. Doch die Schüler/innen werden einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht positiv aufnehmen, da dadurch vor allem die gängige Frage der Kinder „Wozu brauche ich das?“ beantwortet werden kann. Durch außerschulische Lernorte werden auch der Unterricht aufgelockert, Möglichkeiten zu verschiedenen Sozialformen geöffnet und unterschiedliche Lerntypen gefördert. Bezüglich der Modellierungsaufgaben werden die Meinungen der Schüler/innen

¹ vgl. Kapitel 4

auseinandergehen. Manche werden es als Herausforderung ansehen und Versuche durchführen um auf eine realitätsnahe Lösung zu kommen. Andere werden diese anfangs als schwierig oder unlösbar einstufen und Probleme bei der Bearbeitung solcher Aufgabentypen haben. Dennoch denke ich, dass durch ständiges Üben dieser Aufgaben oder das Einsetzen von Lösungsstrategien die Probleme reduziert werden können. Letztendlich sollte den Schüler/inne/n bewusst gemacht werden, wie wichtig die Mathematik im Leben ist.

Nach diesem theoretischen Input rund um den realitätsbezogenen Mathematikunterricht, seinen Vor- und Nachteilen, Zielen und Funktionen sowie Umsetzungsmöglichkeiten werde ich zwei Themenbereiche für die 8. Schulstufe aufgreifen, sie nach den Gesichtspunkten eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts aufarbeiten und damit meinen Fachkollegen/innen Anregungen für diesen Unterrichtstyp geben.

6. Selbstgestaltete Unterrichtsvorschläge

Wie bereits aus dem theoretischen Input hervor geht, ist eine Verbindung von Mathematik und Realität in der Schule unvermeidlich. Daher werde ich in diesem Kapitel zwei Themen aus der Realität (Öffentlicher Verkehr und Bauwerke) mit Modellierungsaufgaben und außerschulischen Lernorten für die Sekundarstufe I aufarbeiten.

Zu jedem Inhaltsbereich aus dem Lehrplan der 8. Schulstufe werde ich Aufgaben für den Unterricht vorstellen, die in den Handlungsbereich H1 „Darstellen und Modellbilden“¹ fallen. Im Folgenden werden zuerst die Beispiele vorgestellt und nach dem Modellierungskreislauf von Blum² bearbeitet. Zu Beginn jeder Aufgabe werden die zu diesem Inhaltsbereich passenden Lernziele, dem österreichischen Lehrplan entsprechend, angeführt. Anschließend wird ein außerschulischer Lernort, passend zu dem jeweiligen Thema, erläutert.

6.1. Öffentlicher Verkehr

Der öffentliche Verkehr hat eine bedeutende Stellung im Alltag der Österreicher/innen eingenommen. Ob beruflich oder privat, die öffentlichen Verkehrsmittel werden von allen Berufs- und Altersgruppen genutzt. Sie sind umweltfreundlicher, verkehrssicherer und kostengünstiger als die Benutzung des eigenen Fahrzeugs. Zu den öffentlichen Verkehrsmitteln zählen nicht nur die Bahn und der Bus, sondern auch Flugzeuge und Schiffe fallen in diese Kategorie. Der öffentliche Verkehr ist auch bei den Schüler/inne/n zu einem wesentlichen Bestandteil in ihrem Leben geworden. Manche nutzen ihn regelmäßig für die Fahrt zur Schule, oder für den Besuch von Freizeitangeboten und einige für die Fahrt in den Urlaub. Aus diesem Grund habe ich das Thema „öffentlicher Verkehr“ als Grundlage für vier Modellierungsbeispiele zu den einzelnen Inhaltsbereichen des Lehrplans gewählt.

¹ vgl. Kapitel 3.2

² vgl. Abb. 3, Blum, 2010, zit.n. Borromeo Ferri et al. (Hrsg.), 2013, S. 18

6.1.1. Beispiel zum Inhaltsbereich „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“

Arbeiten mit Zahlen und Maßen:

Die Schüler/innen sollen ...

- ... „[...] durch zusammenfassendes Betrachten das Zahlenverständnis vertiefen, [...]
- ... bei Anwendungen Überlegungen zur sinnvollen Genauigkeit anstellen.“¹

Beispiel 12:

Die Stadt Wien verfügt über ein umfassendes öffentliches Verkehrsnetz, das U-Bahn, Straßenbahn, Autobus und Schnellbahn umfasst. Das beliebteste öffentliche Verkehrsmittel ist aber die U-Bahn, mit der ca. 439,8 Mio. Menschen jährlich von einem Ort zum anderen gebracht werden. Alle fünf Minuten fährt die U-Bahn mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 32,5 km/h los.² Du willst mit der U Bahn auf dem schnellsten Weg von der Aspernstraße U2 zum Gasometer U3 gelangen. Wie fährst du? Begründe deine Antwort!



Bild 9: Netzplan der Wiener U-Bahn

¹ Lehrplan der Mathematik. Bundesministerium für Bildung und Frauen, S. 7 [Zugriff am 29.6.2015]

² vgl. Wiener Linien GmbH & Co Kg, 2014 [Zugriff am 9.9.2015]

Diese Aufgabe erfüllt durchaus die fünf Anforderungen an Modellierungsaufgaben von Schukajlow¹. Die Schüler/innen müssen eigenständig eine Lösung finden, wofür sie nur geringe Informationen zur Verfügung haben. Welchen Zugang die Schüler/innen wählen, bleibt ihnen überlassen, denn das Beispiel lässt mehrere Lösungswege zu. Ob die Schüler/innen Recherchen zum Finden des schnellsten Weges anstellen oder ihre eigenen Erfahrungen einbringen und die nötigen Stationen zählen, um eine mögliche Begründung für den schnellsten Weg zu erhalten, wird den Schüler/innen frei gestellt. Des Weiteren ist die Aufgabe anhand eines alltäglichen Problems konzipiert, denn jeder wird sich schon einmal die Frage gestellt haben: „Wie komme ich am schnellsten zu meinem gewünschten Ziel?“. Das Beispiel ist daher motivierend gestaltet und führt zu einer positiven Lernbereitschaft der Schüler/innen, da auch ihre Kreativität und Selbstständigkeit gefördert werden. Das mögliche Ergebnis kann seitens der Schüler/innen auch dann relativ einfach in einer Art „Wettrennen“ überprüft werden.

Eine mögliche Lösung für diese Aufgabe wird nun mithilfe des Modellierungskreislaufes vorgestellt.

Modellierungskreislauf:

Repräsentation des Problems (reale Situation): In der Aufgabe ist eine authentische Situation beschrieben und mit einem Netzplan der Wiener U-Bahnlinien veranschaulicht. Im Text sind neben der allgemeinen Beschreibung der Situation und der für die Aufgabenlösung notwendigen Zahlen auch Informationen angeführt, die für die Bearbeitung des Beispiels irrelevant sind. Der Aufgabentext und die Abbildung des Netzplans sind somit wichtige Informationsträger und repräsentieren gemeinsam ein Problem.² Die Informationen daraus betreffen die Wahl der U-Bahnlinie und die Fahrzeiten beeinflussenden Faktoren, wie die Anzahl an Stationen, die Länge des Weges oder das Umsteigen.

Situationsmodell: Die Lösung der Aufgabe beginnt mit der Konstruktion eines Modells der Situation. Die Schüler/innen erkennen nach dem Lesen des Textes und Betrachten des Netzplanes vier alternative Wege, die man mit der U-Bahn von der Aspernstraße bis

¹ vgl. Kapitel 4.1.3.

² vgl. Schukajlow, 2011, S. 88

zum Gasometer wählen kann. Es ist die Aufgabe der Schüler/innen zu entscheiden, welcher dieser vier Wege, der schnellere ist.

Weg 1: U2 – Aspernstraße bis Volkstheater

U3 – Volkstheater bis Gasometer

Weg 2: U2 – Aspernstraße bis Schottenring

U4 – Schottenring bis Landstraße

U3 – Landstraße bis Gasometer

Weg 3: U2 – Aspernstraße bis Praterstern

U1 – Praterstern bis Stephansplatz

U3 – Stephansplatz bis Gasometer

Weg 4: U2 – Aspernstraße bis Praterstern

U1 – Praterstern bis Schwedenplatz

U4 – Schwedenplatz bis Landstraße

U3 – Landstraße bis Gasometer

Wählt man den erstgenannten Weg, muss man zwar nur einmal umsteigen, aber 23 Stationen anfahren, während beim zweiten und dritten Weg die Haltestellen mit 18 bzw. 19 Stationen weniger sind, aber dafür ein Umstieg hinzukommt. Der vierte Weg hat allerdings die wenigsten Stationen zum Anfahren, hingegen muss man dreimal umsteigen.

Bei der Konstruktion des Situationsmodells wird ein Teil von den für die Lösung irrelevanten Informationen bereits gefiltert. Zum Beispiel kann die Anzahl an Personen, die jährlich mit der U-Bahn unterwegs sind, schon beim ersten Lesen aus dem Situationsmodell ausgeschlossen werden.

Um eine genau begründete Entscheidung für den einen oder anderen Fahrweg treffen zu können, muss die Komplexität der Situation reduziert werden. Dies geschieht durch die Konstruktion des Realmodells. Beim Aufbau des Realmodells aus dem Situationsmodell wird von den Schüler/innen einer der vier Wege als der schnellere identifiziert. Die Identifikation des schnellsten Weges wird durch das Wissen der Schüler/innen geleitet. Das Wissen gründet in diesem Fall auf der Erfahrung, dass, je kürzer der Weg und je weniger Wartezeiten es gibt, desto schneller man am

gewünschten Ort ist. Im einfachsten Realmodell kann angenommen werden, dass die U-Bahnen mit einer unveränderten Geschwindigkeit von 32,5 km/h unterwegs sind und es beim Umsteigen keine Wartezeiten gibt. Die Annahme setzt auch voraus, dass keine Hindernisse die Fahrt beeinflussen, wie ein längerer Aufenthalt in einer Station.

Mathematisches Modell: „Das Realmodell wird mathematisiert, indem mathematische Operationen, Begriffe und Grundvorstellungen auf das Realmodell übertragen werden.“¹ Mit Hilfe einer Internetrecherche oder dem Besuchen der jeweiligen U-Bahn-Stationen stoßen die Schüler/innen auf Abbildungen, die die einzelnen U-Bahnlinien mit ihren Zeitangaben zeigen (siehe Bild 10 – 13). Diese Bilder könnten die Schüler/innen für eine mögliche Begründung des schnellsten Weges heranziehen, indem sie die Minuten für die jeweiligen Fahrten addieren und zum Schluss die Gesamtfahrzeiten der vier verschiedenen Wege miteinander vergleichen.

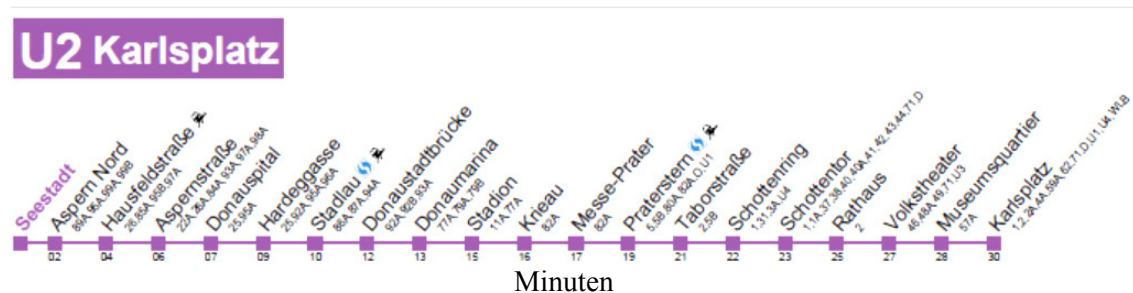


Bild 10: Stationen und Zeitangaben der U-Bahn Linie 2



Bild 11: Stationen und Zeitangaben der U-Bahn Linie 3

¹ Schukajlow, 2011, S. 90

U1 Leopoldau



Bild 12: Stationen und Zeitangaben der U-Bahn Linie 1

U4 Heiligenstadt



Bild 13: Stationen und Zeitangaben der U-Bahn Linie 4

Mathematisches Resultat: Die Verwendung der vier Bilder führt zu folgenden Summen.

Weg 1: U2 – Aspernstraße bis Volkstheater → 22 Minuten

U3 – Volkstheater bis Gasometer → 12 Minuten

Gesamtfahrzeit: 34 Minuten

Weg 2: U2 – Aspernstraße bis Schottenring → 16 Minuten

U4 – Schottenring bis Landstraße → 3 Minuten

U3 – Landstraße bis Gasometer → 7 Minuten

Gesamtfahrzeit: 26 Minuten

Weg 3: U2 – Aspernstraße bis Praterstern → 13 Minuten

U1 – Praterstern bis Stephansplatz → 3 Minuten

U3 – Stephansplatz bis Gasometer → 9 Minuten

Gesamtfahrzeit: 25 Minuten

Weg 4: U2 – Aspernstraße bis Praterstern → 13 Minuten

U1 – Praterstern bis Schwedenplatz → 2 Minuten

U4 – Schwedenplatz bis Landstraße → 3 Minuten

U3 – Landstraße bis Gasometer → 7 Minuten

Gesamtfahrzeit: 25 Minuten

Es zeigt sich, dass es zwei mögliche Wege gibt, um am schnellsten von der Aspernstraße bis zum Gasometer zu gelangen.

Resultat im Real- und Situationsmodell: Unter der Annahme des Realmodells ergibt sich folgende Antwort auf die in der Aufgabe gestellte Frage: Die Wege 3 und 4 sind schneller.

Im Situationsmodell kann der zeitliche Unterschied zwischen 34, 26 und 25 Minuten unter der möglichen Ungenauigkeit der Modellannahme validiert werden. Schon durch eine geringe Abweichung der Gegebenheit der Situation - wie z.B. das Umsteigen, die Wartezeiten, die Aufenthalte in den Stationen -, die einen wesentlichen Einfluss auf die Zeit haben, können die Fahrzeiten stark variieren. Berücksichtigt man zusätzlich das Umsteigen, bei dem etwa 5 Minuten verloren gehen, ergibt sich eine Fahrzeit für Weg 1 von 39 Minuten, für Weg 2 von 36 Minuten, für Weg 3 von 35 Minuten und für Weg 4 von 40 Minuten. Unter der Annahme des Situationsmodells ist demnach der schnellsten Weg mit der U2 bis Praterstern, dann weiter mit der U1 bis zum Stephansplatz und anschließend die restlichen Stationen mit der U3 bis zum Gasometer.

Für die Entscheidung des einen oder des anderen Weges spielen neben der reinen Fahrzeit auch die Einstellung des Fahrgastes oder ein Ausfall einer U-Bahn eine große Rolle.

Die Aufgabe steht also in einem einfachen Sachkontext und gibt Einblicke in die Welt des öffentlichen Verkehrs. Eine mögliche Schwierigkeit diesbezüglich könnte darin bestehen, tatsächlich alle Aspekte, die in diesem Zusammenhang vorkommen, in die Begründung einfließen zu lassen. Auch die richtige Verwendung der Zeitangaben und die dafür nötige Recherche könnten eine Herausforderung für manche Schüler/innen sein.

6.1.2. Beispiel zum Inhaltsbereich „Arbeiten mit Variablen“

Arbeiten mit Variablen:

Die Schüler/innen sollen ...

- ... „[...] Sicherheit beim Arbeiten mit Variablen, Termen, Formeln und Gleichungen steigern, [...]
- ... durch das Arbeiten mit funktionalen Abhängigkeiten einen intuitiven Funktionsbegriff erarbeiten.“¹

Beispiel 13:

Familie Term möchte ihren nächsten Urlaub in Kärnten am Klopeinersee verbringen. Da sie kein Auto besitzt, wird sie mit den öffentlichen Verkehrsmitteln an- und abreisen. Familie Term wohnt in einer kleinen Stadt namens Mistelbach im niederösterreichischen Weinviertel. Ihre Reise beginnt mit einem 10-minütigen Fußmarsch zum Bahnhof in Mistelbach. Gegen 8:35 Uhr fahren sie mit der Schnellbahn ca. eine Stunde und 25 Minuten nach Wien Meidling. Dort angekommen haben sie einen Aufenthalt von einer halben Stunde, bevor sie dann um 10:30 ihre Reise mit dem Railjet nach Villach Hauptbahnhof fortsetzen. Nach fast vier Stunden steigen sie in Klagenfurt um und fahren mit einem Schnellzug, auf den sie 15 Minuten warten müssen, nach Völkermarkt, wo sie dann um 15:15 Uhr ankommen. Den letzten Teil ihrer Anreise verbringen sie in einem Bus, der sie nach St. Kanzian am Klopeinersee direkt zu ihrem Hotel bringt. Um 15:30 Uhr erreichen sie letztendlich ihre Unterkunft.²

- a) Erstelle ein Geschwindigkeits- Zeit- Diagramm für die Anreise der Familie Term von ihrer Heimat bis zu ihrem Hotel.
- b) Stelle eine Formel für die Gesamtkosten K der Reise auf, wenn Familie Term, bestehend aus zwei Erwachsenen und den beiden Kindern, für die Hinfahrt 140 € zahlen muss und das Hotel der Familie 240 € pro Tag kostet.

Diese Aufgabe umfasst den gesamten Handlungsbereich „Darstellen und Modellbilden“. Der erste Teil des Beispiels verlangt nämlich die Fähigkeit des

¹ Lehrplan der Mathematik. Bundesministerium für Bildung und Frauen, S. 7 [Zugriff am 29.6.2015]

² vgl. ÖBB Scotty - der Routenplaner für Öffis, 2015 [Zugriff am 9.9.2015]

Darstellens. Eine reale Situation soll gezeichnet werden, d.h. in eine andere Darstellungsform gebracht werden. Die verlangte Darstellung ist ein Graph einer Funktion, der die Geschwindigkeit pro Zeit darstellt. Wenn man den Umgang mit einem Koordinatensystem gut beherrscht, den Sachkontext in die mathematische Sprache transferiert und die graphische Darstellung von Wartezeiten sowie Fahrzeiten zeichnen kann, dürfte die erste Aufgabe keine Schwierigkeit sein. Einzig und allein die umfangreiche Angabe könnte für leseschwache Schüler/innen ein Hindernis darstellen.

Modellierungskreislauf zu Aufgabe a:

Reale Situation: Die Situation wird im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel ausschließlich durch den Text dargestellt. Ein Bild bietet hier keine Hilfe bei der Beschaffung von Informationen.

Situationsmodell: Die Schüler/innen sollen anhand der Angabe ein Diagramm erstellen, das die Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit darstellt. Dabei müssen die Schüler/innen selbst entscheiden, wie sie die unterschiedlichen Angaben über die Geschwindigkeiten und Wartezeiten graphisch interpretieren. Auch die Wahl des Verkehrsmittels spielt eine wesentliche Rolle im Diagramm. Auf ihrer Reise können auch einige unerwartete Ereignisse ihre Geschwindigkeit bzw. die vorgesehene Zeit beeinflussen, z.B. die Verspätung eines Zuges, das Verpassen eines Anschlusszuges, eine längere Wartezeit in einer Station uvm.

Realmodell: Durch das Vereinfachen und Strukturieren wird das Situationsmodell auf seine Komplexität reduziert und das Realmodell entwickelt. Folgende Vereinfachungen und Annahmen können die Schüler/innen vornehmen:

- Zu einer bestimmten Zeit wird stets eine Geschwindigkeit gemessen, die in Zusammenhang mit dem Verkehrsmittel einmal höher oder einmal niedriger ist. Dies lässt die Schüler/innen vermuten, dass für die Darstellung des Diagramms Punkte notwendig sind, die die Uhrzeit (X-Achse) in Abhängigkeit der Geschwindigkeit (Y-Achse) repräsentieren.
- Für die Berechnung der Geschwindigkeiten müssen die Schüler/innen die Fahrtstrecke der verwendeten Verkehrsmittel durch die jeweilige Fahrzeit dividieren. Die Längenangaben für die einzelnen Fahrten erhalten die

Schüler/innen mittels Recherche oder durch Abschätzen und einbringen eigener Erfahrungen. Die Fahrzeiten sind aus der Angabe zu entnehmen. Die Fahrt mit dem Railjet ist wohl jene, bei der die höchste Geschwindigkeit erreicht werden kann. Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Railjets für die Strecke Wien Meidling – Klagenfurt beträgt nach obiger Überlegung 75 km/h. Die Geschwindigkeiten der S-Bahnen (Schnellzüge) hingegen sind deutlich geringer. Die Durchschnittsgeschwindigkeit der S-Bahn für die Strecke Mistelbach – Wien Meidling liegt bei ca. 45 km/h, für die Strecke Klagenfurt – Völkermarkt bei 54km/h. Zu den langsamsten Verkehrsmitteln auf der Reise von Familie Term zählt der Bus, der mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von rund 41 km/h unterwegs ist. Ein Erwachsener besitzt ein Schrittempo von etwa 7 – 10 km/h. Da Familie Term zwei Kinder hat, liegt die Annahme ihrer Schrittempo bei etwa 6 km/h.

- Bei den Wartezeiten ist die Geschwindigkeit stets 0 km/h.
- Die Verkehrsmittel fahren mit einer konstanten Durchschnittsgeschwindigkeit.
- Mögliche Hindernisse, die während der Fahrt auftreten könnten, werden im Realmodell vernachlässigt.

Mathematisches Modell: Die Schüler/innen können nun eine Tabelle anlegen, in der die Geschwindigkeiten pro Uhrzeit dargestellt sind.

Uhrzeit	Geschwindigkeit in km/h
8:25-8:35	6
8:35-10:00	45
10:00-10:30	0
10:30-14:30	75
14:30-14:45	0
14:45-15:15	54
15:15-15:30	41
15:30	0

Mathematisches Resultat: Die Verwendung dieser Tabelle als Wertetabelle für ein Koordinatensystem lässt ein Geschwindigkeits- Zeit- Diagramm einfach darstellen. Bevor die einzelnen Werte eingetragen werden, muss die Skalierung der Achsen festgelegt werden. Den Schüler/inne/n muss auch bewusst sein, dass die einzelnen Werte nicht sprunghaft miteinander verbunden werden können und die Fahr- und Wartezeiten berücksichtigt werden müssen. Daher ergibt sich folgendes Diagramm für die Anreise der Familie Term.

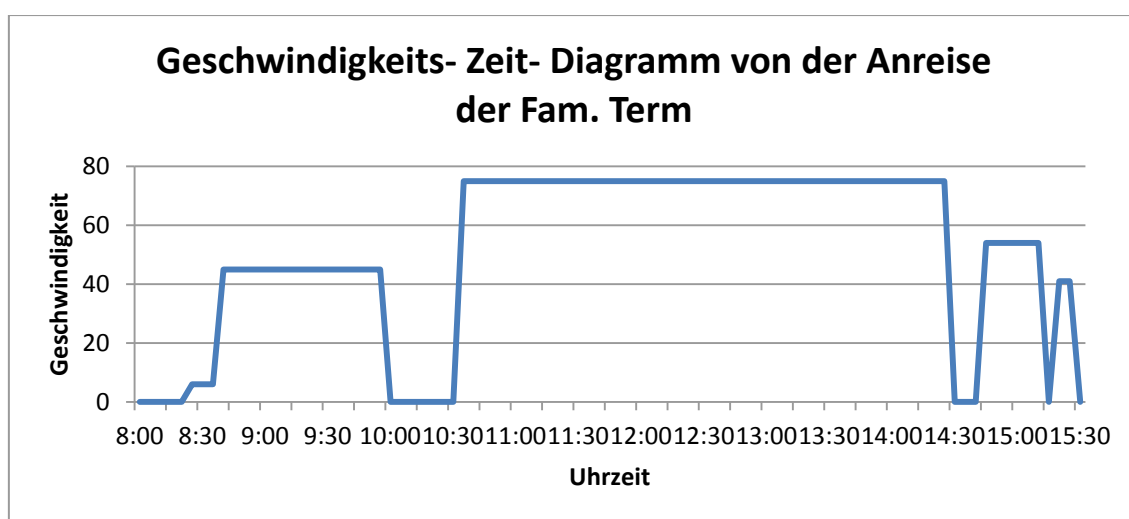


Abbildung 9: Geschwindigkeits- Zeit- Diagramm

Resultat im Real- und Situationsmodell: Nachdem mathematische Anwendungen zu dieser graphischen Darstellung geführt haben, müssen die Schüler/innen die Lösung interpretieren und validieren. Beides erfolgt mit Hilfe des Realmodells und des Situationsmodells. Dabei wird die Angabe mit dem Diagramm verglichen, ob die Uhrzeiten auch mit den möglichen Geschwindigkeiten übereinstimmen könnten. Die im Realmodell vereinfachten Annahmen sind auch im Diagramm ersichtlich. Wartezeiten weisen ein konstante Geschwindigkeit von 0 km/h auf. Die Fahrt mit dem Railjet ist deutlich länger und die Geschwindigkeit liegt ebenfalls über den der anderen Verkehrsmittel. In Bezug auf das Situationsmodell kann das Diagramm unter möglichen Ungenauigkeiten der Modellannahmen variieren. Denn schon eine geringe Abweichung der Situation, sei es eine Verspätung, ein technischer Defekt etc. übt einen wesentlichen Einfluss auf die graphische Darstellung der Anreise aus.

Der zweite Teil des Beispiels verlangt die Tätigkeit des Modellbildens, weil aus dem gegebenen Text ein funktionaler Zusammenhang zu erkennen und als Formel darzustellen ist. Die Schwierigkeit bei dieser Aufgabe könnte darin liegen, dass die Schüler/innen die Variable, die für die Anzahl der Tage steht, unberücksichtigt lassen und ihre Formel daher nur als Summe der beiden Zahlenwerte anschreiben.

Modellierungskreislauf zu Aufgabe b:

Repräsentation des Problems: Die Fragestellung ist einzig und allein ein Informationsträger für das Problem, denn der Aufgabentext steht nur in indirekter Verbindung zur eigentlichen Frage. Daher sind die Hinweise aus dem Informationstext und dem ersten Teil der Aufgabe für die Lösung des zweiten Problems bedeutungslos.

Situationsmodell: Die Aufgabe der Schüler/innen liegt darin, eine Formel zu finden, die die Gesamtkosten der Reise darstellt. Zu diesen Gesamtkosten zählen die Fahrtkosten für die An- und Abreise sowie die Hotelkosten für den Aufenthalt der Familie Term. Ferner können aber auch andere Faktoren, wie zum Beispiel Ausgaben für Essen und Trinken, Souvenirs oder die Fahrt mit dem Taxi die Gesamtkosten deutlich erhöhen. Denn aus der Fragestellung kann man nicht herauslesen, ob sie in ihrem Hotel nur übernachten oder Vollpension beziehen, da nur die Hotelgesamtkosten für die Familie, 240 € pro Tag, bekannt sind.

Realmodell: Es wird angenommen, dass die Gesamtkosten sich allein aus den Fahrtkosten und den Hotelkosten ergeben, weil der Preis für das Hotel mit 240 € pro Tag vermuten lässt, dass die Familie in einem Hotel mit Vollpension ihren Urlaub macht. Bezüglich der Fahrtkosten wird für die Aufgabe vereinfacht angenommen, dass die Hin- und Rückfahrt gleich viel kostet und daher bei 280 € liegen. Das Wissen der Schüler/innen gründet daher nun auf der Erfahrung, dass die Summe der einzelnen Kosten die Gesamtkosten darstellt.

Mathematisches Modell: Die Kosten für die Fahrt mit den öffentlichen Verkehrsmitteln liegen bei 280 € und die Hotelkosten pro Tag betragen 240 € für die Familie. Da in der Fragestellung die Information fehlt, wie viele Tage die Familie Term im Hotel

verbringt, muss für die Anzahl an Tagen eine Variable eingeführt werden. Das Produkt aus 240 und der Variable stellen die Kosten für den gesamten Aufenthalt im Hotel dar.

Mathematisches Resultat: Die Verbindung des mathematischen Modells mit dem Wissen der Schüler/innen führt zu einer mathematischen Lösung des Problems und damit zu einer Formel, die die Gesamtkosten der Reise wiedergibt.

$$K = 280 + 240 \cdot x$$

Resultat im Real- und Situationsmodell: Die Gesamtkosten sind von der Anzahl an Tagen im Hotel abhängig und können daher höher oder niedriger ausfallen. Im Realmodell setzen sich also die Gesamtkosten aus den Fixkosten für die Fahrt mit den öffentlichen Verkehrsmitteln und den Variablenkosten für das Hotel zusammen. Im Situationsmodell können die Gesamtkosten unter möglichen Ungenauigkeiten in der Modellannahme zu einer Falschaussage führen. Denn schon eine geringe Abweichung der Bedingungen, sei es ein Ausflug nach Klagenfurt oder die Kosten für zusätzliches Essen und Trinken, beeinflussen die Gesamtkosten.

Dieses Beispiel ist sehr umfangreich und anspruchsvoll. Viele Informationen aus dem Text sowie die mathematische Umsetzungen könnten für manche Schüler/innen zu einem Problem werden und sie am Lösen der Aufgabe hindern. Auch für die zwei, unabhängig voneinander, gestellten Fragen bedarf es jede Menge an Vorerfahrungen und einem gut zusammenhängendes mathematisches Verständnis.

6.1.3. Beispiel zum Inhaltsbereich „Arbeiten mit Figuren und Körpern“

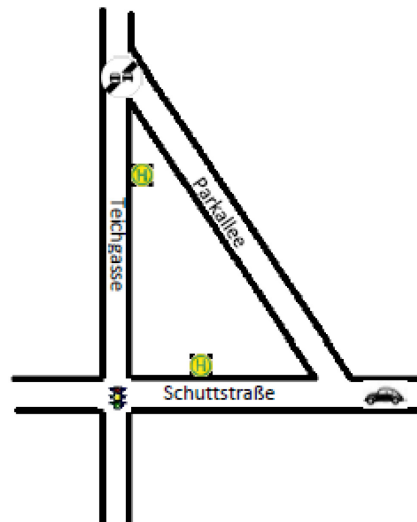
Arbeiten mit Figuren und Körpern:

Die Schüler/innen sollen ...

- ... „[...] den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren nutzen können.“¹

Beispiel 14:

Wer ist schneller, Autobus oder Auto? Herr Wiesinger ist mit seinem Sohn Tom auf der „Schuttstraße“ zu einem wichtigen Fußballmatch seines Sohnes unterwegs. Da sie ohnehin schon zu spät sind, kommt jetzt noch zu ihrem Unglück hinzu, dass vor ihrem PKW ein Autobus fährt, den sie nicht überholen können, da neben einem Überholverbot zusätzlich die Straßenbreite zu eng ist, um problemlos an dem Bus vorbei zu kommen. Bei der nächsten Kreuzung könnten aber Herr Wiesinger und sein Sohn



nach rechts auf die Wohnstraße „Parkallee“ abbiegen. Normalerweise müssten sie nach der Abbiegemöglichkeit noch 720 m auf der Schuttstraße weiter fahren, dann bei der Ampel rechts auf die Teichgasse abbiegen und noch 960 m geradeaus fahren, um dann schließlich nach der Kreuzung den Bus überholen zu können. Obwohl sie hinter dem Bus 50 km/h fahren dürfen aber zusätzlich zwei Haltestellen abwarten müssen, überlegen sie, eine Abkürzung durch die Wohnstraße mit einer Schrittgeschwindigkeit von max. 20 km/h zu nehmen. Lohnt sich die Abkürzung durchs Wohngebiet für Herrn Wiesinger und seinem Sohn? Begründe deine Entscheidung!²

Dieses Beispiel ist ebenfalls sehr realitätsnah, denn oft müssen die Schüler/innen zu einem Termin ihres Vereins gebracht werden, wo die Eltern als Chauffeure/innen im Einsatz sind und aufgrund von diversen Verkehrseinflüssen verspätet erscheinen.

¹ Lehrplan der Mathematik. Bundesministerium für Bildung und Frauen, S. 8 [Zugriff am 29.6.2015]

² vgl. Schukajlow, 2011, S. 92

Modellierungskreislauf:

Auch hier ist die reale Situation durch das Bild und den Text vertreten. Informationen müssen aus dem Text und der modellartigen Darstellungen entnommen werden. Sie betreffen den Verlauf der Straße und andere, die Fahrzeit beeinflussende Faktoren, wie Ampel und Haltestellen des Autobusses.

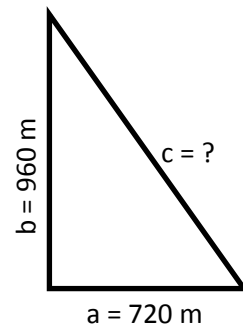
Situationsmodell: Die Schüler/innen erkennen, dass es hier zwei Fahrwege gibt, die Herr Wiesinger mit seinem Sohn auf dem Weg zum Fußballmatch nehmen kann. Es obliegt wieder den Schüler/innen zu entscheiden, ob sich eher die Abkürzung oder der Weg über die „Schuttstraße“ und „Teichgasse“ für die beiden lohnt. Zusätzlich können jedoch einige „Behinderungen“ die Fahrzeit beeinträchtigen. Auf dem Weg über die „Schuttstraße“ zur „Teichgasse“ steht eine Ampel, die unter Umständen rot sein könnte. Beim Weg über die Wohnstraße können vermutlich Fußgänger die Straße überqueren und die Fahrt behindern. Auch könnte ein möglicher Stau nach dem Rechtsabbiegen die Fahrzeit erheblich erhöhen. Weiteres könnte von den Schüler/innen die Belastung der Anrainer durch Lärm und Abgase berücksichtigt werden.

Realmodell: Wegen der Komplexität des Situationsmodells muss zuerst ein Realmodell konstruiert werden, das eine strukturelle Ähnlichkeit zum Situationsmodell beibehält, sich aber zugleich mathematisieren lässt. Die Schüler/innen können beim Bilden des Realmodells unter anderem annehmen, dass die möglichen Hindernisse vernachlässigbar sind und die Länge des Weges mit der zugehörigen Geschwindigkeitsbeschränkung Hauptentscheidungsträger für die richtige Wahl des Weges ist. Aus dem Wissen der Schüler/innen wird vermutet, dass eine zwei Punkte verbindende gerade Strecke kürzer als eine krumme Linie ist.¹ Die Abkürzung und der Weg über die „Schuttstraße“ und „Teichgasse“ sind in der Abbildung so angeordnet, dass die Schüler/innen ein rechtwinkeliges Dreieck erkennen können. Das lässt natürlich vermuten, dass der pythagoreische Lehrsatz für das Lösen dieser Aufgabe eine wesentliche Rolle spielt. Des Weiteren wird angenommen, dass beide Fahrwege mit einer unveränderten Geschwindigkeit von 50 km/h bzw. 20 km/h befahren werden. Das setzt voraus, dass es keine Blockaden bei der Fahrt gibt. Wird also die Entscheidung allein aufgrund der Fahrzeit getroffen, kommt es darauf an, ob die kürzere Fahrstrecke

¹ vgl. Schukajlow, 2011, S. 93

über die „Parkallee“ die höhere Geschwindigkeitsbegrenzung durch die Wohnstraße ausgleichen kann.

Das mathematische Modell ist ein rechtwinkeliges Dreieck. Der Weg über die „Parkallee“ bildet die Hypotenuse und die „Schuttstraße“ sowie „Teichgasse“ entsprechen den Katheten im rechtwinkelligen Dreieck.



mathematisches Resultat: Die Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das rechtwinkelige Dreieck erlaubt es, die Hypotenusenlänge im Dreieck zu berechnen:

$$720^2 + 960^2 = c^2$$

$$\sqrt{518400 + 921600} = c$$

$$\sqrt{1440000} = c$$

$$1200 = c$$

Die Hypotenuse im Dreieck ist somit 1200 m lang. Die Länge der beiden Katheten wird mit Hilfe der Addition bestimmt: $720 + 960 = 1680$ m

Nun kann die Zeit, die notwendig ist, um 1200 m mit der Geschwindigkeit von 20 km/h bzw. 1680 m mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h zurückzulegen, unter der Verwendung eines Dreisatzes oder der Formel $t = \frac{s}{v}$ berechnet werden. Jedoch sind die verschiedenen Längeneinheiten zu berücksichtigen. Es wird daher empfohlen, die Längen in km umzuwandeln.

Für die Geschwindigkeit von 20 km/h und einer Strecklänge von 1,2 Kilometern:

20 km 60 Minuten

1 km 3 Minuten

1,2 km 3,6 Minuten

Für die Geschwindigkeit von 50 km/h und einer Streckenlänge von 1,68 Kilometern:

50 km 60 Minuten

1 km1,2 Minuten

1,68 km 2,016 Minuten

Die Fahrt durch die „Parkallee“ (Hypotenuse des Dreiecks) dauert demnach 3,6 Minuten und die Fahrt über die Katheten, angesichts der höheren Geschwindigkeit, ca. 2 Minuten. Da 2 Minuten weniger als 3,6 Minuten sind, lohnt es sich anscheinend nicht, den kürzeren Weg entlang der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck zu wählen.

Resultat im Real- und Situationsmodell: Es lohnt sich nicht, die Abkürzung zu nehmen, weil die Fahrt durch die Wohnstraße, unter Annahme des Realmodells, länger ist, als die Fahrt über die „Schuttstraße“ und „Teichgasse“. Wie man auf der Abbildung sieht, kann der dadurch entstehende Zeitverlust nicht über den Unterschied in der Länge des Fahrweges ausgeglichen werden. Im Situationsmodell kann der zeitliche Unterschied zwischen 3,6 und 2 Minuten unter der möglichen Ungenauigkeit der Modellannahmen validiert werden. Denn durch eine geringe Abweichung der gegebenen Situation, wie z.B. die rote Ampel an der Kreuzung, oder das Abwarten der Busaufenthalte bei den zwei Haltestellen, könnten die Fahrzeiten variieren. Bei der Entscheidung für den einen oder den anderen Weg spielen neben der reinen Fahrzeit aber auch Fahrsicherheit, Umweltbelastung sowie Zustand der Fahrbahn eine große Rolle.¹

¹ vgl. Schukajlow, 2011, S. 95f

6.1.4. Beispiel zum Inhaltsbereich „Arbeiten mit Modellen, Statistik“

Arbeiten mit Modellen, Statistik:

Die Schüler/innen sollen das ...

- ... „[...] Untersuchen und Darstellen von Datenmengen unter Verwendung statistischer Kennzahlen [...]“¹ erlernen.

Beispiel 15:

In der Schülerzeitung wird ein Bericht über die Nutzung des öffentlichen Verkehrs an deiner Schule publiziert. Deine Schule liegt an der östlichen Grenze von Wien, in Groß Enzersdorf, und kann mit der Buslinie 26A von Wien aus erreicht werden. Schüler/innen, die aus Niederösterreich die Schule besuchen, werden von privaten Busunternehmen oder von den Eltern zur Schule gebracht. Wenige von ihnen gehen zu Fuß oder fahren mit dem Rad. Für den Bericht hast du eine Umfrage erstellt, die folgende Ergebnisse lieferte: An deiner Schule wurden 450 Schüler/innen zum Thema „Nutzung des öffentlichen Verkehrs“ interviewt. $\frac{1}{3}$ der Schüler/innen gab an, dass sie die öffentlichen Verkehrsmittel nur für ihren Schulweg regelmäßig benutzen. Hingegen behaupteten 42 % der Schüler/innen, dass sie die Öffis nicht nur für ihren Schulweg, sondern auch privat regelmäßig benutzen. $\frac{1}{5}$ deiner Schulkolleg/innen fahren nur privat mit den öffentlichen Verkehrsmitteln. Neun Schüler/innen meinten, dass sie nie mit den Öffis unterwegs sind. Die restlichen Schüler/innen gaben kein Statement zur Umfrage ab. Erstelle mit Hilfe eines Computerprogramms ein passendes Diagramm für die Schülerzeitung, das die Wichtigkeit des öffentlichen Verkehrs an deiner Schule in den Vordergrund stellt.

Modellierungskreislauf:

Repräsentation des Problems: Die Informationen erhält man aus dem Text, der sehr lang ist und viele Zahlen beinhaltet. Bilder, Diagramme oder Tabellen fehlen hier und erhöhen daher den komplexen Sachkontext.

¹ Lehrplan der Mathematik. Bundesministerium für Bildung und Frauen, S. 8 [Zugriff am 29.6.2015]

Situationsmodell: Die Schüler/innen sollen ein Diagramm am Computer erstellen, das die Wichtigkeit des öffentlichen Verkehrs an der Schule widerspiegelt. Es ist die Aufgabe der Schüler/innen zu entscheiden, welches Diagramm sich am besten für die Darstellung eignet. Auch welche Ergebnisse sie aus der Umfrage heranziehen, bleibt den Schüler/innen selbst überlassen.

Kritisch zu hinterfragen gilt die Anzahl der Schüler/innen an der Umfrage. Erfasst die Zahl 450 alle Schüler/innen der Schule oder nur einen bestimmten Teil, der bei dieser Umfrage interviewt wurde? Das wirft dann Fragen auf, die das Ergebnis verändern könnten. Warum wurden nur jene Schüler/innen ausgewählt? Welche Fragen wurden den Schüler/innen gestellt? Auch die bereits erfassten Werte aus der Umfrage könnten ungenau sein und Fragen wie „Wurden diese Werte gerundet?“, „Durften die Schüler/innen nur jeweils eine Antwort geben oder mehrere?“, „Sind manche Schüler/innen mehrfach befragt worden?“ usw. aufwerfen. Es gilt daher, das Modell zu vereinfachen und mögliche Einflüsse unberücksichtigt zu lassen.

Realmodell: Für das Realmodell werden diese kritischen Fragen nicht beachtet. Es wird angenommen, dass jeder der 450 Schüler/innen einmal befragt wurde und genau eine Antwort geben durfte. Ob die Schüler/innen falsche Angaben machten, wird hier ausgeschlossen. Eine mögliche Darstellung des Problems könnte ein Kreisdiagramm sein, in dem alle Ergebnisse erfasst werden. Die Erfahrungen der Schüler/innen würden zum Fazit führen, wenn mehr als die Hälfte der Schüler/innen mit den öffentlichen Verkehrsmitteln regelmäßig unterwegs sind, dann wird damit auch die Wichtigkeit der „Öffis“ an dieser Schule aufgezeigt. Denn mehr als die Hälfte würde bedeuten, fast jeder fährt öffentlich zur Schule oder benützt den öffentlichen Verkehr in der Freizeit.

Mathematisches Modell: Die Schüler/innen müssen nun für das Diagramm die nötigen Werte in den richtigen Dimensionen angeben. Für ein Kreisdiagramm sollten die Schüler/innen nämlich wissen, dass sie relative Häufigkeiten benötigen. In der Aufgabenstellung sind manche Werte als absolute, andere bereits als relative Häufigkeiten in Prozent angegeben. Die Umrechnung der absoluten in relative Häufigkeiten folgt durch die Divisionen des absoluten Werts durch den Gesamtwert. Auch eine Tabelle muss erstellt werden, um letztendlich das Diagramm am Computer zu erhalten. Excel bietet sich als Computerprogramm für das Zeichnen von Diagrammen sehr gut an. Sind die Schüler/innen auch mit anderen Computerprogrammen vertraut,

können auch diese verwendet werden, da die mögliche Verwendung des Programms in der Angabe offen ist.

Mathematisches Resultat:

Die Umrechnung der absoluten Häufigkeiten in die relativen führt dann zu folgender Tabelle:

Schulweg und Privat	nur Schulweg	nur Privat	keine Angabe	Nie
0,42	0,33	0,2	0,03	0,02

Um das Kreisdiagramm zu erstellen, sind die Markierung der Tabelle sowie das Klicken auf „Kreisdiagramm erstellen“ notwendig.

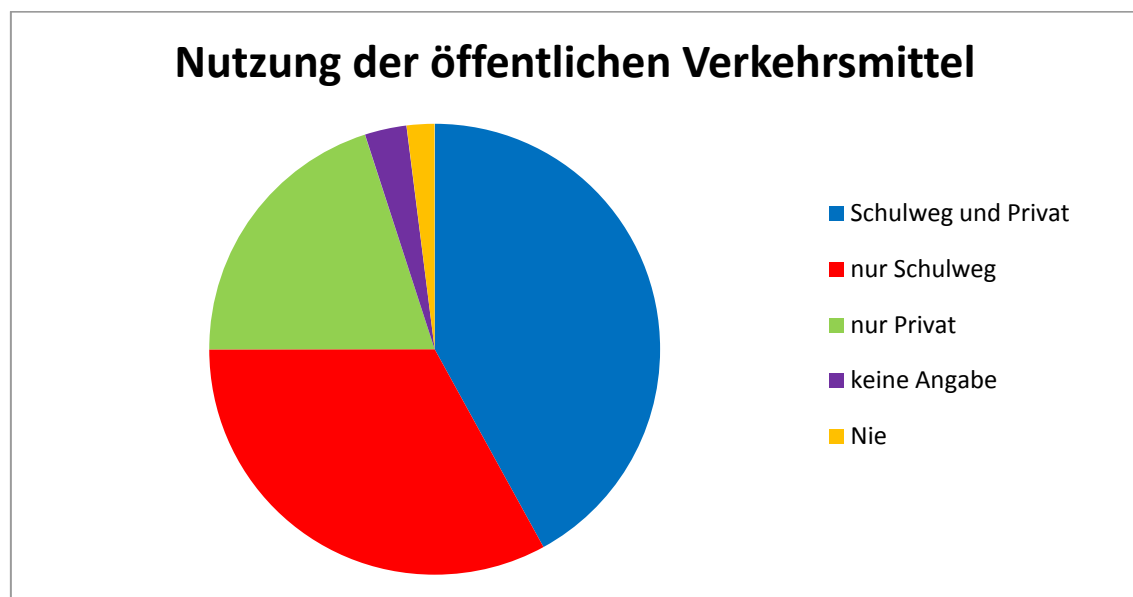


Abbildung 10: Kreisdiagramm „Nutzung der öffentlichen Verkehrsmittel“

Das Kreisdiagramm zeigt, dass mehr als $\frac{3}{4}$ der Schüler/innen die öffentlichen Verkehrsmittel, sei es nur für die Schule, privat oder für beides nutzen. Für den Weg zur Schule werden am häufigsten die Öffis gebraucht. Daher sind diese für die Schüler/innen nicht mehr wegzudenken, sondern bereits zu einem wesentlichen Bestandteil geworden.

Resultat im Real- und Situationsmodell: Im Realmodell kann das Ergebnis des Diagramms kontrolliert werden. Bereits in der Angabe wird deutlich, dass beinahe jeder Schüler / jede Schülerin regelmäßig die öffentlichen Verkehrsmittel benützt. Manche mehr, andere weniger. Es sind nämlich nur neun Schüler/innen an der Schule, die nie mit den öffentlichen Verkehrsmitteln unterwegs sind. Auch bereits die Information über den Standort der Schule lässt vermuten, dass die „Öffis“ von großer Bedeutung für die Schüler/innen sind. Im Situationsmodell kann das Diagramm oder einige Teile davon verworfen werden, denn schon durch den Ausschluss von einigen Schüler/inne/n bei der Befragung könnten kleine Unterschiede auftreten. Auch die Frage, warum sie die öffentlichen Verkehrsmittel benützen, könnte letztendlich Einfluss auf das Ergebnis und damit auf das Diagramm haben.

Diese Aufgabe ist sehr realitätsnah. Viele Schulen geben am Ende des Schuljahres eine Schülerzeitung / einen Jahresbericht heraus, in dem auch die Schüler/innen einen Artikel verfassen können. Oft wird dieser dann mit Fotos oder Diagrammen veröffentlicht. Das Arbeiten am Computer ist ebenfalls für viele Schüler/innen zu einem festen Bestandteil in ihrem Alltag geworden. Auch in der Schule wird / soll der Einsatz von Technologien immer mehr an Bedeutung gewinnen.¹ Daher habe ich dieses Beispiel gewählt, um auch in diesem Bereich die Anforderungen des Lehrplans zu erfüllen. Zwar könnte diese Modellierungsaufgabe manchen Schüler/inne/n Schwierigkeiten bereiten, da sehr viele Zahlen im Aufgabentext vorkommen und diese für das Diagramm verwendet werden sollen. Ebenfalls könnte das Erstellen des Diagramms am Computer zu einem Problem werden. Schüler/innen, die im Umgang mit Excel oder sonstigen Computerprogrammen weniger vertraut sind, könnten an diesem Beispiel letztendlich scheitern. Jedoch können diese Herausforderung durch ständiges Üben im Unterricht verringert werden.

¹ vgl. Kapitel 3.1

6.1.5. Außerschulischer Lernort

Zu dem Thema „öffentlicher Verkehr“ bietet sich als außerschulischer Lernort beispielsweise ein Bahnhof an. Dabei können mehrere Bereiche des Bahnhofs zum Lernort werden.

Zum einem könnte ein Besuch der zentralen Leitstelle angedacht werden. Dort können die Schüler/innen die Erfahrung machen, wie wichtig die Mathematik beim Erstellen von Verkehrsnetzen, Fahrplänen oder besonderen Einsatzplänen ist. Zum Beispiel bedarf es, aufgrund eines Popkonzerts in Wien, wenn nach dem Ende innerhalb eines sehr kurzen Zeitraumes viele Menschen befördert werden müssen, eines passenden mathematischen Modells / Verfahrens. Dieses Modell wird eingesetzt, um relativ unkompliziert in kürzester Zeit viele zusätzlich benötigte Fahrzeuge bereitzustellen, passende Dienstpläne zu konstruieren und den Verkehr auf den Schienen so zu regeln, dass trotz des erhöhten Verkehrsaufkommens keine Unfälle oder Verzögerungen passieren. Dass das mathematische Verfahren auf der Grundlage der mit Bussen und Bahnen ausgestattete GPS (das mit Methoden der Geometrie arbeitet) basiert, kann den Schüler/innen in der zentralen Leitstelle deutlich gemacht werden.¹

Dieser außerschulische Lernort wäre ein Lernstandort mit direktem Bildungsauftrag. Ein außenstehender Experte übernimmt die Aufgabe des Lehrers / der Lehrerin und vermittelt den Jugendlichen pädagogisch aufbereitete Informationen / Fakten über die zentrale Leitstelle.

Im Gegensatz dazu kann der außerschulische Lernort „Bahnhof“ auch zu einem sekundären Lernort ohne direkten Bildungsauftrag werden. Das Wissen wird demnach von den Lehrer/innen an den Schüler/innen weitergegeben. Im Zuge eines längeren Unterrichtsprojekts können die Schüler/innen am Bahnhof selbst die Mathematik sichtbar machen, indem sie die Umsteigemöglichkeiten erfassen und darauf aufbauend ein mathematisches Modell schaffen. Dazu müssen die Schüler/innen zuerst den Bahnhof erkunden und sich Informationen zu den Fragen „Wie viele Ebenen hat der Bahnhof?“ und „Welche Verkehrsmittel fahren wo?“ holen. Diese Erkundigungen dienen als Grundlage für ein schematisches BahnhofsmodeLL. Das Modell soll alle Ebenen und die dort vorhandenen Verkehrsmittel mit der Angabe aller dort

¹ vgl. Lutz-Westphal, 2010, S. 45

verkehrenden Linien zeigen. Auch Informationsbüros, Einkaufsmöglichkeiten und Wegverbindungen müssen in das Modell eingezeichnet werden. Diese Aufgabe soll exemplarisch zeigen, dass ein Bahnhof nicht nur Kreuzungspunkt für Verkehrslinien ist, sondern selbst ein kompliziertes (Umsteige-) Wegnetz enthält. Nachdem die Schüler/innen den Querschnitt eines Bahnhofs konstruiert haben, müssen sie im nächsten Schritt die Umsteigemöglichkeiten im Bahnhof mit Stiften oder Fäden eintragen. Um ihre Bahnhofsmodelle zu schützen, wäre ein Transparentpapier für diese Aufgabe vorteilhaft. Die Schüler/innen müssen zunächst die Umsteigemöglichkeiten zwischen den einzelnen U- und S- Bahnlinien einzeichnen. Bei diesem Schritt der Aufgabe werden Fragen auftauchen, wie z.B.: „Sollen die verschiedenen Fahrtrichtungen einzeln eingezeichnet werden?“, „Steigt denn jemand von der einen Fahrtrichtung einer Linie in die Gegenrichtung um?“, „Sollen die Straßenbahn- und Buslinien außerhalb des Bahnhofsgebäudes auch berücksichtigt werden?“ uvm. Je nach Schwierigkeitsgrad und Altersstufe der Schüler/innen können natürlich einige dieser Fragen in das Modell miteinfließen. Auf der bereits abstrahierten Darstellung des Bahnhofs findet nun eine weitere Abstraktion statt. Die Verbindungslinien bilden letztendlich einen Graphen der Umsteigemöglichkeiten, der ganz abstrakt und dennoch leicht fassbar die hohe Komplexität der Situation beschreibt. Eine sogenannte kombinatorische Explosion, die immer dann stattfindet, wenn sich aus einer kleinen Grundmenge eine riesige Anzahl von Kombinationsmöglichkeiten ergibt, wird für die Schüler/innen direkt erfahrbar. Ist n die Anzahl der zu berücksichtigenden Bahnlinien bzw. Linienrichtungen, so ergeben sich $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Umsteigemöglichkeiten. Anhand konkreter Beispiele kann man diese Formel durch einfaches Abzählen gemeinsam erarbeiten: Von jeder Verkehrslinie kann man in jede andere umsteigen. Vorab muss natürlich entschieden werden, ob man bei jeder Linie beide Fahrtrichtungen berücksichtigen will oder nicht. Für jede Linie bzw. jede Fahrtrichtung zeichnet man einen Punkt an die Tafel (Knoten des Graphen), für jede Umsteigemöglichkeit eine Linie (Kante). Nun kann man den vollständigen Graphen zeichnen und die Umsteigemöglichkeiten abzählen. Von jedem Knoten gehen $n-1$ Kanten aus, das wären dann $n \cdot (n-1)$ Kanten. Damit zählt man aber jede Kante doppelt (von jedem Endknoten aus je einmal). Also muss man das Ergebnis noch durch zwei teilen. Die

Schüler/innen haben also damit ein Umsteigemodell geschaffen, das auch in der Praxis eingesetzt werden kann.¹

Zu guter Letzt kann man auch einfach den Informatiksaal als einen außerschulischen Lernort heranziehen und zum Beispiel die Wegoptimierung der Routenplaner im Internet hinterfragen. Dies würde dann als primärer Lernort bezeichnet werden. Die Schüler/innen können mit Hilfe von Informationen aus Fahrplanbüchern Fahrzeiten für verschiedene Wegmöglichkeiten berechnen. Durch die Kontrolle mit dem Internet werden die Schüler/innen nicht immer auf dasselbe Ergebnis wie der Routenplaner kommen. Die Frage nach dem „Warum“ ist berechtigt. Überlegungen wie „Was passiert, wenn man dieselben Start- und Zielorte zu anderen Tageszeiten oder Wochentagen eingibt?“, „Warum werden unterschiedliche Routen vorgeschlagen?“, „Wie berechnet ein Routenplaner die kürzesten Verbindungen?“ etc. können zusätzlich angestrebt werden. In weiteren Gesprächen können solche Fragen geklärt werden. Mein Hauptbestreben ist es allerdings zu erarbeiten, wie der Computer den schnellsten und optimalsten Weg berechnet. Dazu wird auf einem großen U-Bahnnetz nachgespielt, wie der sogenannte „Breitensuche-Algorithmus“ funktioniert, denn die Breitensuche bietet die Grundideen für die in der Praxis ablaufenden Algorithmen, um kürzeste Wege zu berechnen.²

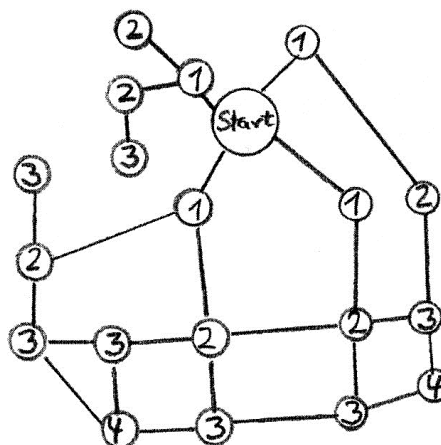
¹ vgl. Lutz-Westphal, 2010, S. 46f

² vgl. ebd., S. 47

Erklärung zum Spiel „Breitensuche“

Material

Ein DIN-A4-Zettel mit Beschriftung: „Start“;
je etwa 10 Zettel mit „1“, „2“, „3“ ... (bei farbigem Papier sollten alle „1“en eine Farbe haben, alle „2“en eine andere Farbe etc.);
ein großes, auf den Boden geklebtes Liniennetz der U-Bahn



Spielverlauf

„Wählt einen Startpunkt. Ein Kind stellt sich dorthin mit dem ‚Start‘-Schild in der Hand. Das ‚Start‘-Kind sieht sich um: Wie viele Nachbarkreuzungen habe ich? Auf jede dieser Kreuzungen stellt sich nun ein weiteres Kind, jeweils mit einer ‚1‘ in der Hand. Nach einander werden die ‚1‘er –Kinder befragt: Hast du noch freie Nachbarkreuzungen? Wenn ja, so stellen sich auf alle dieser Nachbarkreuzungen je ein Kind mit einer ‚2‘ auf. Nun sind die ‚2‘er –Kinder nacheinander dran: Hast du noch freie Nachbarkreuzungen? Wenn ja, so stellen sich dort weitere Kinder mit jeweils einer ‚3‘ auf. Macht weiter so, bis auf allen Kreuzungen ein Kind steht. Legt die Blätter mit den Zahlen und das ‚Start‘-Schild auf die Kreuzungen, auf denen ihr gestanden habt und geht an den Rand. Nun können vom Startpunkt aus kürzeste Wege (d.h. mit minimaler Anzahl der Stationen) zu allen anderen ‚Stationen‘ direkt abgelesen werden.“¹

Diese drei Beispiele an außerschulischen Lernorten können miteinander verknüpft werden und im Zuge eines größeren Projekts durchgeführt oder auch einzeln als Auflockerung / Abwechslung für den Unterricht eingesetzt werden. Es zeigt sich, dass mit solchen Aufgaben ein unmittelbarer Bezug zur Alltagsumgebung der Schüler/innen hergestellt wird. Sie lernen einen Bahnhof als zentralen Ort besser kennen, der strukturell noch viel komplexer ist, als er auf den ersten Blick erscheint. Ebenfalls

¹ Lutz-Westphal, 2010, S. 48

erfahren die Schüler/innen, dass sich diese Komplexität mit Hilfe geeigneter Modelle vereinfachen lässt und in Grafiken und Zahlen gefasst werden kann.¹

Der öffentliche Verkehr bietet sich demnach hervorragend für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht an. Gewiss bieten sich noch mehrere Aspekte des öffentlichen Verkehrs an, die im Unterricht behandelt werden können. Jedoch sollen diese Beispiele nur eine Anregung sein, wie man die Realität im Unterricht einbeziehen kann.

Ähnlich zum Thema „öffentlicher Verkehr“ wird nun das Thema „Bauwerke“ aufgearbeitet.

6.2. Bauwerke

Das Thema „Bauwerke“ ist sehr fassettenreich und bietet unterschiedliche Zugänge zu den vier Inhaltsbereichen der Mathematik. Jedoch steht im Vordergrund stets die Geometrie. Der Ursprung der Geometrie liegt in der Erschließung der Welt. „Geometrie“ kommt aus dem Griechischen und bedeutet „die Erde vermessen“ und mit Vermessen werden heutzutage in gleicher Weise Begriffe wie „analysieren, erkennen, erschließen, erleben“ verbunden. Die Umwelt kann daher mit einem „geometrischen Auge“ betrachtet werden.² Die Verbindung von Mathematik und Alltag ist damit gegeben.

¹ vgl. Lutz-Westphal, 2010, S. 48

² vgl. Weigand & Wörler, 2010, S. 49

6.2.1. Beispiel zum Inhaltsbereich „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“

Arbeiten mit Zahlen und Maßen:

Die Schüler/innen sollen ...

- ... durch zusammenfassendes Betrachten das Zahlenverständnis vertiefen,
- ... Näherungswerte angeben können,
- ... bei Anwendungen Überlegungen zur sinnvollen Genauigkeit anstellen.¹

Beispiel 16:

Die Restaurierung des Stephansdoms ist eine sehr aufwändige Detailarbeit. Während deiner Volksschulzeit wurden bereits mehrere Teile des Stephansdoms restauriert. Drei Arbeiter brauchten für die Erneuerung der Südfassade zwei Jahre. Jetzt steht die Restaurierung der Nordfassade an. In den ersten drei Wochen sahst du vier Arbeiter, wobei einer davon ein Auszubildender war, der doppelt so lang für die Arbeit benötigte, wie ein Profi. Danach waren für etwa sechs Wochen nur mehr zwei Angestellte anwesend, ein Profi und der Lehrling.

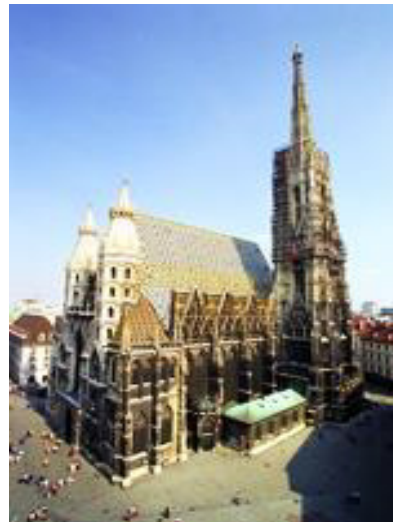


Bild 14: Stephansdom - Aufgabe

In der restlichen Zeit der Restaurierung waren fünf Profis an der Arbeit beteiligt. Du fragst dich, wie lange wird die Restaurierung insgesamt dauern?

Modellierungskreislauf:

Repräsentation des Problems: Wie in den Beispielen zuvor ist auch hier ein Problem aus dem Alltag dargestellt. Denn sehr häufig sieht man Restaurierungsarbeiten an alten Gebäuden und jeder Schüler/ jede Schülerin kennt den Stephansdom in Wien. Die Situation ist durch Text und Bild beschrieben, wobei das Bild für das Lösen der Aufgabe nicht relevant ist. Der Aufgabentext beinhaltet wesentliche Informationen über die Dauer der Restaurierung sowie über die Anzahl an Arbeitskräften.

¹ vgl. Lehrplan der Mathematik. Bundesministerium für Bildung und Frauen, S. 7 [Zugriff am 29.6.2015]

Situationsmodell: Für das Lösen dieser Aufgabe müssen die Schüler/innen einige Entscheidungen sowie Annahmen treffen und mehrere Möglichkeiten in Betracht ziehen. Die erste Entscheidung betrifft die Gesamtdauer der Restaurierung für die Nordfassade des Stephansdoms. Aus dem Aufgabentext geht nicht heraus, wie lange die Restaurierungsarbeiten insgesamt dauern werden. Jedoch ist bekannt, dass an der Südfassade zwei Jahre lang gearbeitet wurde. Man könnte demnach annehmen, dass für die Arbeiten an der Nordfassade ebenfalls zwei Jahre geplant sind. Da in der Angabe aber die Rede von Wochen ist, wäre es für die Schüler/innen von Vorteil, die Gesamtdauer in Wochen umzuwandeln. Dafür müssen sie bereits die nächste Annahme tätigen. Ein Jahr hat in etwa 52 Wochen, das würde dann für zwei Jahre 104 Wochen bedeuten, vorausgesetzt es kann in jeder Woche täglich gearbeitet werden. Denn nicht nur witterungsbedingt, sondern auch bei fehlendem Material für die Restaurierung, kann es zu einem kurzen oder längeren Arbeitsstillstand kommen. Einen weiteren Einfluss auf das Ergebnis könnte auch die unterschiedliche Arbeitsschnelligkeit der Bauarbeiter haben. Wobei aus der Angabe bekannt ist, dass ein Auszubildender doppelt so lange benötigt wie ein Profi.

Realmodell: Um dieses Situationsmodell substanziell nicht zu verändern, bedarf es der Hilfe des Realmodells. Für das Lösen des Problems werden Vereinfachungen vorgenommen. Es kann angenommen werden, dass die Gesamtarbeitszeit bei 104 Wochen liegt und in jeder Woche gearbeitet wird, sowie die Profis gleichmäßig bei der Restaurierung vorankommen und der Lehrling als halbe Arbeitskraft eingestuft werden kann.

Mathematisches Modell: Für die richtige Beantwortung der Frage nach der Gesamtarbeitszeit müssen die Schüler/innen die Summe der bisherigen Arbeitszeit und der restlichen Arbeitszeit bilden. Für die Berechnung der Restarbeitszeit gibt es mehrere Möglichkeiten. Die Schüler/innen könnten einerseits die restliche Arbeitszeit mit Hilfe eines Dreisatzes und der indirekten Proportionalität lösen. Denn je mehr Arbeiter zur Verfügung stehen umso schneller ist der Stephansdom restauriert. Andererseits könnten sie auch die physikalische Formel $Leistung = Arbeit : Zeit$ für das Lösen des Problems verwenden und eine passende Gleichung aufstellen, um die Restarbeitszeit berechnen zu können.

Im Folgenden wird nun die erste Variante (Dreisatz) verwendet. Die Schüler/innen müssen aber bedenken, dass für das Lösen der Aufgabe stets die Restarbeitszeiten der einzelnen Arbeitsgruppen wichtig sind. Tabellen sollen diesen Aspekt veranschaulichen.

Mathematisches Resultat:

Ausgehend von den Restaurierungsarbeiten der Südfassade des Stephansdoms muss zunächst die Arbeitszeit für $3\frac{1}{2}$ Arbeiter berechnet werden.

Arbeiter	Zeit (in Wochen)
3	104
$3\frac{1}{2}$	$\sim 89,14$

Da $3\frac{1}{2}$ Arbeiter aber nur drei Wochen für die Restaurierung zuständig sind, würde bei gleichbleibender Arbeitszahl die Restarbeitszeit bei ca. 86 Wochen liegen.

Ausgehend von der Restarbeitszeit werden die Zeiten für die restlichen Arbeitsgruppen berechnet.

Arbeiter	Zeit (in Wochen)
$3\frac{1}{2}$	$\sim 86,14$
$1\frac{1}{2}$	~ 201

$1\frac{1}{2}$ Arbeiter würden in insgesamt 201 Wochen fertig sein, da sie aber nur sechs Wochen tätig sind, beträgt ihre restliche Arbeitszeit 195 Wochen.

Arbeiter	Zeit (in Wochen)
$1\frac{1}{2}$	195
5	58,5

Die letzte Arbeitsgruppe von fünf Mitarbeitern wird für die Fertigstellung der Nordfassade des Stephansdoms noch 58,5 Wochen benötigen.

Resultat im Real- und Situationsmodell: Unter den Annahmen im Realmodell ist die sinnvolle Genauigkeit des Resultats zu beachten. Die Gesamtarbeitszeit der Nordfassade des Stephansdoms beträgt $(3 + 6 + 58,5 =) 67,5$ Wochen. Für das Situationsmodell hingegen könnte dieses Ergebnis Fehler aufweisen. Eine andere Voraussetzung der Gesamtdauer oder der Einfluss des Wetters würden zu einem anderen Ergebnis führen.

Dieses Beispiel kann mit einfachen mathematischen Methoden gelöst werden und bereits zu Beginn der 8. Schulstufe bearbeitet werden, da das Wissen aus den vorangegangenen Schulstufen für das Lösen der Aufgabe ausreichend ist. Jedoch werden auf den ersten Blick manche Schüler/innen mit dem Aufgabentext überfordert sein, was auf die Angabengänge und die unterschiedlichen Arbeitsgruppen zurückzuführen sein könnte. Aber bei mehrmaligem Durchlesen und genauem Herausarbeiten von Informationen sollten die Schüler/innen die Aufgabe lösen können. Sie müssen jedoch daran denken, dass die Restarbeitszeiten der einzelnen Gruppen zu berücksichtigen sind.

6.2.2. Beispiel zum Inhaltsbereich „Arbeiten mit Variablen“

Arbeiten mit Variablen:

Die Schüler/innen sollen ...

- ... „[...] Sicherheit beim Arbeiten mit Variablen, Termen, Formeln und Gleichungen steigern, [...]
- ... lineare Gleichungen mit zwei Variablen graphisch darstellen und Lösungen angeben können,
- ... Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen (zwei Gleichungen mit zwei Variablen) nutzen können,
- ... durch das Arbeiten mit funktionalen Abhängigkeiten einen intuitiven Funktionsbegriff erarbeiten.“¹

Beispiel 17:

Das Wiener Riesenrad, ein Wahrzeichen der österreichischen Bundeshauptstadt und ein Symbol für den weltberühmten Wiener Prater, gehört zu den faszinierendsten Baumwerken Wiens und bietet einen unverwechselbaren Blick über die Stadt. Leider sind Reparaturarbeiten notwendig, die ca. drei Tage andauern. Frau Lamac, Privatbesitzerin des Riesenrades, holt sich zwei Angebote von Firmen und vergleicht diese miteinander. Die Reparaturfirma Falk würde stets die Arbeitszeit



Bild 15: Riesenrad - Aufgabe

verrechnen, die bei 50 € pro Stunde liegt. Zusätzlich hätte die Firma gerne fünf Freifahrtgutscheine mit dem Riesenrad für ihre Angestellten. Die Reparaturfirma Droß hingegen würde für die An- und Abreise der Arbeiter insgesamt 240 € verlangen und die Stundenbezahlung würde 40 € betragen. Für welches Angebot soll sich Frau Lamac entscheiden? Hilf ihr dabei und begründe deine Wahl.

¹ Lehrplan der Mathematik. Bundesministerium für Bildung und Frauen, S. 7 [Zugriff am 29.6.2015]

Modellierungskreislauf:

Repräsentation des Problems: Die reale Situation ist in dieser Aufgabe durch den Text und das Bild charakterisiert. Während das Bild des Riesenrads keine bedeutenden Auskünfte für die Lösung des Problems liefert, sind hingegen im Text Informationen angegeben, die zur Bildung des Modells herangezogen werden müssen. Diese Hinweise betreffen die Kosten der beiden Firmen und die Arbeitszeit.

Situationsmodell: Es werden zwei Firmenangebote im Aufgabentext beschrieben, die Reparaturarbeiten am Riesenrad durchführen sollen. Die Schüler/innen müssen entscheiden, welche Firma kostengünstiger ist. Die Firma Falk würde pro Arbeitsstunde 50 € verlangen und sich fünf Freifahrten mit dem Riesenrad wünschen. Die Kosten für eine Fahrkarte liegen bei 9 € pro Person. Diese Information müssen sich die Schüler/innen zunächst beschaffen. Demnach hätte Frau Lamac zusätzlich 45 € an die Firma Falk zu zahlen, die in Form von Freifahrten mit dem Riesenrad ausfallen. Die Firma Droß würde pro Arbeitsstunde 40 € und einen Fixkostenbetrag von 240 € fordern. In welchem Ausschlussverfahren die Schüler/innen für die eine oder andere Firma appellieren, obliegt ihnen. Auch müssen sie mögliche Barrieren berücksichtigen, die im Laufe der Reparaturarbeiten auftreten könnten, wie z.B.: „Welche Firma ist günstiger, wenn die Arbeiten weniger/länger als drei Tage dauern?“, „Könnten bei einer Firma Zusatzkosten entstehen?“.

Realmodell: Die Schüler/innen nehmen möglicherweise an, dass die Arbeitszeit von drei Tagen nicht überschritten wird und beide Firmen innerhalb der vorgegebenen Zeit mit den Reparaturen fertig werden. Dabei legen sie fest, dass ein Arbeitstag aus acht Arbeitsstunden besteht. Das heißt, die beiden Firmen haben insgesamt 24 Stunden Zeit, um die Ausbesserungen zu beenden. Auch zählen die Schüler/innen die Fahrtkosten für das Riesenrad zu den Gesamtkosten hinzu, um das Situationsmodell zu vereinfachen. Die Schüler/innen stellen nun dazu ein Modell auf, das die Kosten in Abhängigkeit der Zeit darstellt. Dies kann durch eine lineare Funktion geschehen. Die Reparaturkosten beider Firmen werden als lineare Funktion verkörpert und in einem entsprechenden Koordinatensystem eingezeichnet. Durch das richtige Ablesen dieser Darstellung können die Schüler/innen eine Entscheidung finden, mit der sie eine mögliche Begründung aufstellen können, welche der beiden Firmen die günstigere ist.

Mathematisches Modell: Die Kosten für die beiden Firmen bestehen jeweils aus sogenannten Fixkosten und den variablen Kosten, die von der Arbeitszeit abhängen. Die Arbeitszeit wird als unbekannt angegeben und daher als Variable interpretiert. Die Addition der beiden Kostenanteile ergibt die Gesamtkosten pro Firma. Die Schüler/innen stellen eine Formel der beiden Firmen auf und zeichnen sie im Koordinatensystem als lineare Funktion ein.

Mathematisches Resultat: Die Gesamtkosten K_F der Firma Falk betragen $K_F = 45 + 50 \cdot x$ wobei die Variable x für die Arbeitsstunden steht. Die Gesamtkosten K_D der Firma Droß liegen bei $K_D = 240 + 40 \cdot x$. Mithilfe dieser beiden Funktionen kann eine graphische Darstellung erfolgen.

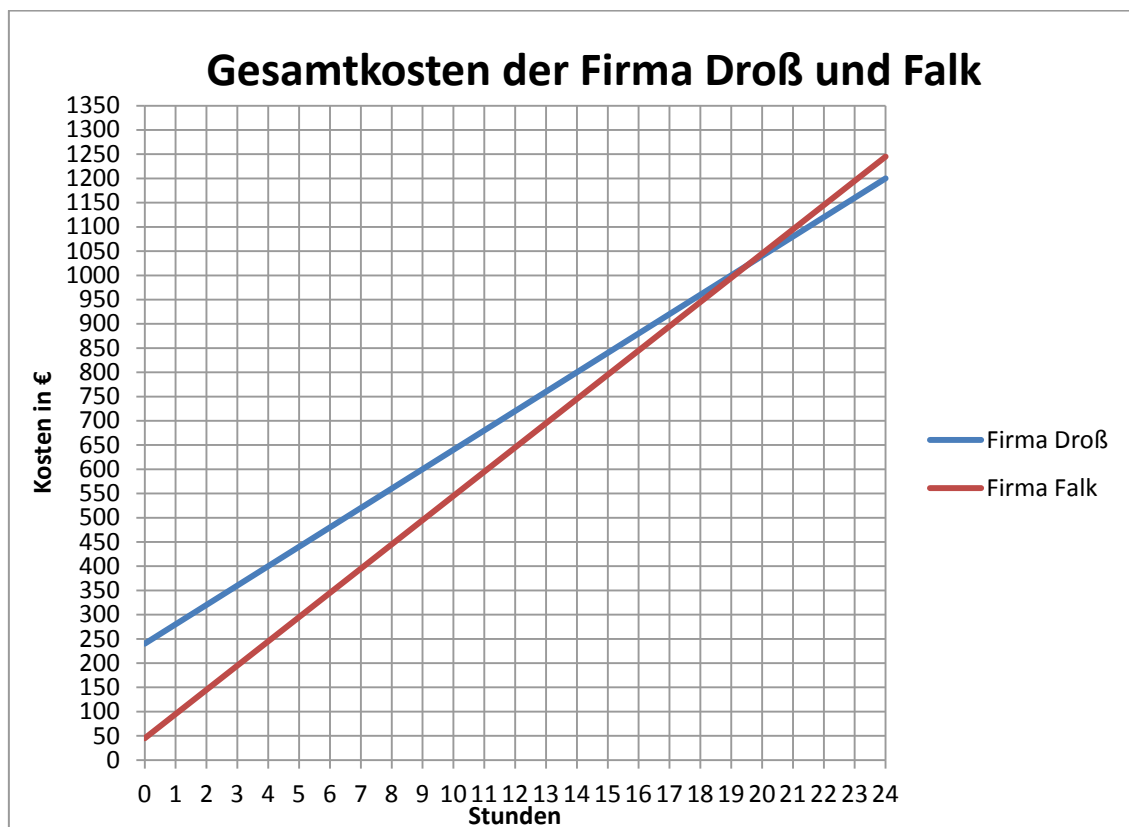


Abbildung 11: Kosten – Stunden – Diagramm der Riesenrad – Aufgabe

Das Diagramm zeigt, dass die Firma Falk günstiger wäre, wenn die Arbeitszeit unter 19,5 Stunden liegt. Ansonsten sollte Frau Lamac das Angebot der Firma Droß annehmen, wenn sie tatsächlich 24 Stunden (= drei volle Arbeitstage) benötigen. Dieses Ergebnis kann aber auch aus einer Gleichung ermittelt werden. Durch das Gleichsetzen

der beiden Formeln kann berechnet werden, ab welcher Arbeitszeit die Kosten der beiden Firmen ident sind.

$$240 + 40 \cdot x = 45 + 50 \cdot x \quad | - 45$$

$$195 + 40 \cdot x = 50 \cdot x \quad | - 40 \cdot x$$

$$195 = 10 \cdot x \quad | : 10$$

$$x = 19,5 \text{ Stunden}$$

Wird für die Variable x nun ein Wert unter 19,5 in den beiden Formeln eingesetzt, so kann auch hier ermittelt werden, welche Firma unter 19,5 Stunden billiger ist.

Resultat im Situations- und Realmodell: Frau Lamac sollte das Angebot der Firma Droß nehmen, wenn die Arbeitszeit insgesamt bei 24 Stunden liegt. Sobald sich aber aus dem Situationsmodell Änderungen bei der Reparaturarbeit ergeben, könnte das positive oder negative Auswirkungen für die Zahlung von Frau Lamac haben und sie das falsche Angebot gewählt haben.

Bei dieser Aufgabe müssen die Schüler/innen einige Entscheidungen selbst treffen, was für manche Kinder problematisch sein könnte und das Lösen des Beispiels erschwert. Sie müssen zunächst beschließen, mithilfe welcher mathematischen Algorithmen und Begriffe sie eine Begründung für das günstigere Angebot finden. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Beim Modellierungsprozess wurden zwei Wege vorgestellt, die auch seitens der Schüler/innen gewählt werden könnten. Entweder in Form einer Gleichung oder graphisch kann eine Begründung für das eine oder andere Angebot gegeben werden. Auch müssen die Schüler/innen festlegen, ob sie die Fahrtkosten für das Riesenrad berücksichtigen und sich dabei Informationen über die Kosten holen. Eine Recherche zu diesem Beispiel ist daher notwendig. Ansonsten ist diese Aufgabe relativ eindeutig formuliert und enthält keine weiteren Hindernisse. In der 8. Schulstufe kann dieses Beispiel daher ohne weiteres im Unterricht oder als Hausaufgabe behandelt werden.

6.2.3. Beispiel zum Inhaltsbereich „Arbeiten mit Figuren und Körpern“

Arbeiten mit Figuren und Körpern:

Die Schüler/innen sollen ...

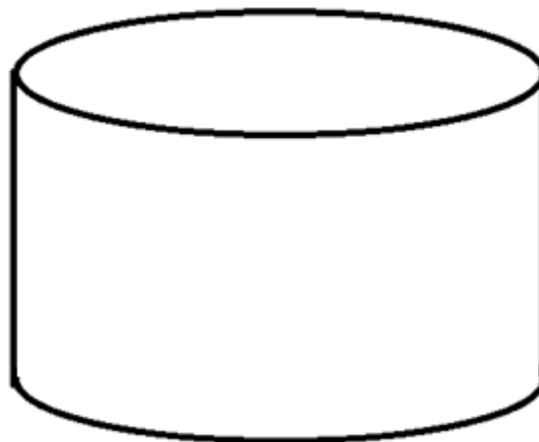
- ... Formeln für die Berechnung von Flächeninhalt des Kreises wissen und anwenden können,
- ... Formel für die Berechnung des Volumens von Drehzylinder erarbeiten und nutzen können.¹

Beispiel 18:

Die Sommersaison ist eröffnet und euer Pool, der 8000 Liter Wasser fasst, gehört gefüllt. Für die Füllung verwendest du euren 5cm dünnen Gartenschlauch, in dem das Wasser mit einer Geschwindigkeit von 0,849 m/s fließt. Nach 40 Minuten muss dein Vorhaben leider abgebrochen werden, da du zu einem wichtigen Termin fahren musst. Du beschließt den Pool am nächsten Tag weiter zu füllen. Wie hoch steht das Wasser im Pool nach deiner ersten Füllung? Markiere den Stand der Wassermenge im abgebildeten Pool.



Bild 16: Pool - Aufgabe



¹ vgl. Lehrplan der Mathematik. Bundesministerium für Bildung und Frauen, S. 8 [Zugriff am 29.6.2015]

Modellierungskreislauf:

Repräsentation des Problems: Die wichtigsten Informationen für die Lösung des Problems können aus dem Text entnommen werden, wie das Fassungsvermögen des Pools und die Fließgeschwindigkeit des Wassers im Gartenschlauch. Auch die Abbildung des Pools ist sehr hilfreich, da die Form des Pools damit festgelegt ist.

Situationsmodell: Die Schüler/innen wissen, dass der Pool insgesamt 8000 Liter Wasser fasst, der Gartenschlauch einen Durchmesser von 5 cm hat und das Wasser pro Sekunde 0,849 m im Schlauch zurücklegt. Sie sollen nun aufgrund dieser Informationen den Wasserstand des Pools nach 40 Minuten einschätzen und in der Abbildung einzeichnen. Dass bei der Füllung des Pools einige Probleme auftauchen könnten, sollten die Schüler/innen ebenfalls bedenken. Ein Loch im Gartenschlauch oder im Pool könnte sofort den Wasserstand verringern. Auch ein kurzes Abschalten der Wasserzufuhr beeinflusst das Ergebnis.

Bei der Konstruktion des Realmodells werden aber diese Probleme ignoriert. Ein gut präparierter Schlauch bzw. Pool wird vorausgesetzt, um damit das Situationsmodell zu vereinfachen. Dass der Gartenschlauch die Form eines Zylinders hat, so wie der Pool, muss den Schüler/innen klar sein.

Daraus bildet sich nun das mathematische Modell. Für die Lösung muss zunächst das Strömungsvolumen des Gartenschlauchs bestimmt werden. Wenn die Schüler/innen wissen, wie viel Liter Wasser pro Minute aus dem Gartenschlauch fließt, kann auch das Volumen des Pools ermittelt werden. Das Ergebnis mit 40 multipliziert, ergibt die Wassermenge im Pool. Darauf aufbauend müssen die Schüler/innen den möglichen Wasserstand in der Abbildung einzeichnen. Da sie aus dem Text wissen, wie viel Liter Wasser insgesamt in den Pool passen, können sie mit Hilfe eines Dreisatzes die Höhe des Wassers im Pool bestimmen. Die Gesamthöhe des abgebildeten Poolmodells beträgt nämlich, laut Abmessung, 4cm. Des Weiteren müssen die Schüler/innen die Einheiten überprüfen. Da diese unterschiedlich sind, müssen zunächst Umwandlungen durchgeführt werden.

Mathematisches Resultat: Die Schüler/innen könnten zum Beispiel alle Einheiten in dm (Dezimeter) umwandeln, da 1 Liter einem Kubikdezimeter entspricht. Der Durchmesser des Gartenschlauchs beträgt demnach $d = 0,5 \text{ dm}$ und die Fließgeschwindigkeit

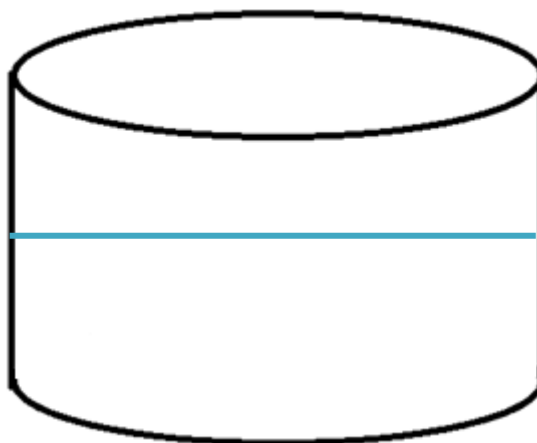
$v = 509,4 \text{ dm/min}$. Da der Schlauch die Form eines Zylinders hat und die Grundfläche daher ein Kreis ist, ergibt sich das Strömungsvolumen durch die Multiplikation der Grundfläche des Gartenschlauchs mit der Fließgeschwindigkeit.

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v$$

$$V = 0,25^2 \cdot \pi \cdot 509,4$$

$$V = 100,02 \frac{\text{dm}^3}{\text{min}} \approx 100 \text{ l/min}$$

Pro Minute fließen, nach dieser Berechnung, 100 Liter Wasser aus dem Gartenschlauch. Bei 40 Minuten wären 4000 Liter Wasser im Pool. Das bedeutet, dass bei einem Gesamtvolumen von 8000 Liter der Pool nach 40 Minuten bis zur Hälfte gefüllt ist. Der Abbildung nach beträgt die Wasserhöhe also 2 cm.



Resultat im Real- und Situationsmodell: Laut dem Realmodell kann man sagen, dass der Pool nach 40 Minuten zur Hälfte gefüllt ist. Im Situationsmodell, wo die Wasserzufuhr durch ein Loch im Schlauch oder durch eine Unterbrechung beeinflusst wird, muss das Ergebnis kritisch hinterfragt werden. Die Wasserhöhe würde bei geringerer Wasserzufuhr im Modell unter 2 cm liegen.

Diese Aufgabe zeigt, dass man mit relativ einfachen Rechenmethoden nicht nur die Wasserhöhe bestimmen kann, sondern auch die Dauer für das Füllen eines Pools berechnet werden kann. Das Beispiel ist für die Schüler/innen sehr realitätsnah. Denn, wie oft hat man sich nicht als Kind gefragt: „Wann kann ich endlich den Pool benutzen?“ Zwar hat nicht jeder Schüler / jede Schülerin zu Hause ein Pool, jedoch

zeigt sich heutzutage, dass die Anzahl an Poolbesitzern stark zunimmt und viele Kinder mit einem Pool bereits aufwachsen. Für das Lösen dieser Aufgabe sind keine zusätzlichen Annahmen notwendig und vielen Schüler/innen wird auch bald klar sein, welche Informationen sie benötigen. Die Schüler/innen werden daher schnell verstehen, warum es bei dieser Aufgabe geht und sie ohne weiteres lösen können. Einzig und allein könnte die Berechnung des Strömungsvolumens eine Schwierigkeit darstellen. Die Formel für die Berechnung des Volumens sollte aber bekannt sein.

6.2.4. Beispiel zum Inhaltsbereich „Arbeiten mit Modellen, Statistik“

Arbeiten mit Modellen, Statistik:

Die Schüler/innen sollen ...

- ... Wachstums- und Abnahmeprozesse mit verschiedenen Annahmen untersuchen können,
- ... funktionale Abhängigkeiten untersuchen. ¹

Beispiel 19:

Bei deiner Urlaubsreise nach Ägypten macht ihr einen Ausflug zur Cheops - Pyramide. Auf einer Informationstafel erfährst du interessante Daten und Fakten über die 2580 vor Christus errichtete Pyramide. Besonders die Angaben über den Zerfall der Pyramide wecken Interesse bei dir.



Bild 17: Pyramiden - Aufgabe

Dass die Pyramide bereits an Breite und Höhe verloren hat, macht dich nachdenklich. Du fragst dich, ob diese Werte problematisch für das Bestehen der Pyramide sein könnten. Denn dir ist bekannt, dass in der Natur ein bestimmter Abnahmeprozess stattfindet. Stelle eine Rechnung auf, die zeigt, dass der Zerfall der Pyramide allerdings von geringer Bedeutung ist.

Die Cheops - Pyramide wurde vom Pharao Cheops 2580 vor Christus erbaut. Er nannte seine Pyramide „Achet Chufu“, was „Horizont des Cheops“ bedeutet.

Sie hatte eine Grundfläche von 230,36 m mal 230,36 m und war 146,59 m hoch. Heute ist sie nur noch 138,75 m hoch und die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche ist ebenfalls um ca. 5 m geschrumpft.

Etwa 6700 Arbeiter waren am Bau der Pyramide, der etwa 23 Jahre dauerte, beteiligt und mussten insgesamt 2,5 Millionen Steine transportieren.

Informationstafel: Cheops - Pyramide ²

¹ vgl. Lehrplan der Mathematik. Bundesministerium für Bildung und Frauen, S. 8 [Zugriff am 29.6.2015]

² vgl. Löhner, 2006, Die Cheops - Pyramide [Zugriff am 16.9.2015]

Modellierungskreislauf:

Repräsentation des Problems: Wie auch in den Beispielen zuvor wird ein Problem durch Text und Bild verkörpert. Im Gegensatz zu den anderen Beispielen werden in dieser Aufgabe Hinweise, die für das Modellieren der Situation relevant sein könnten, zusätzlich in einer Informationstafel zusammengefasst. Das Bild scheint hier kein wesentlicher Informationsträger zu sein. Es soll die Situation hauptsächlich realitätsnaher erscheinen lassen. Die vielen Angaben zum Gebäude könnten anfangs Schwierigkeiten beim Lösen des Problems bereiten, daher ist das Situationsmodell notwendig, um die brauchbaren Mitteilungen herauszufiltern.

Situationsmodell: Es ist Aufgabe der Schüler/innen herauszufinden, ob der Zerfall der Pyramide aus den letzten tausend Jahren negative Folgen für den Bestand der Cheops - Pyramide haben könnte und ihre Größe immer schneller abnimmt. Um eine Antwort auf die Frage nach der Existenz der Pyramide geben zu können, müssen die Schüler/innen mathematische Methoden heranziehen. Dabei sollen sie selbst entscheiden, mit Hilfe welcher mathematischen Begriffe, Formeln etc. sie dieses Problem zu lösen versuchen. Für diese Aufgabe müssen sich die Schüler/innen auf zwei mögliche Abnahmeprozesse konzentrieren, lineare oder exponentielle Abnahme. In beiden Prozessen spielt die Zeit eine wichtige Rolle. Ein linearer Zerfall zeichnet sich dadurch aus, dass in gleichen Zeitspannen die Pyramide immer um denselben Wert schrumpft. Die Abnahme ist unabhängig von der aktuellen Größe der Pyramide. Hingegen bedeutet eine exponentielle Abnahme, dass sich zu gleichgroßen Zeitspannen die Cheops - Pyramide mit demselben Abnahmefaktor verkleinert. Daher ist die Abnahme abhängig vom jeweils momentanen Bestand.¹ Für die richtige Entscheidung des Abnahmeprozesses sind einige Informationen aus dem Angabentext hilfreich, andere hingegen bedeutungslos. Schon beim ersten Lesen werden die Schüler/innen feststellen, dass die Angaben über den Namen der Pyramide, die Anzahl an Arbeiter/inne/n und Steinen für die Erklärung unwichtig sind. Allerdings sind die Abmessungen der Pyramide sowie das Jahr der Erbauung für das Lösen dieser Aufgabe erforderlich. Ebenfalls müssen im Situationsmodell Faktoren berücksichtigt werden, die das Resultat verändern könnten: zum Beispiel wetterbedingte und menschliche Einflüsse oder dass bei der

¹ vgl. Kraker, Plattner, & Preis, 2013, S. 136

Cheops - Pyramide die Spitze bereits zum Teil fehlt und es sich daher bei genauerer Betrachtung um einen Pyramidenstumpf handelt.

Realmodell: Für das Realmodell werden die möglichen Einflussfaktoren nicht beachtet. Die Schüler/innen reduzieren die Komplexität der Situation. Sie identifizieren den Zerfall der Pyramide als einen exponentiellen Zerfall und nicht als einen linearen, da die Cheops - Pyramide immer langsamer zerfällt und nicht gleichmäßig. Auch hängt die Abnahme stets vom aktuellen Wert ab. Für diesen Abnahmeprozess sind ein Startwert, der Abnahmefaktor und die Zeiteinheit notwendig. Eine Berechnung, die zeigt, dass die Existenz der Pyramide nicht gefährdet ist, kann durch die Bestimmung des jährlichen Abnahmefaktors gewährleistet werden. Dieser gibt an, um wie viel Prozent die Cheops - Pyramide jährlich schrumpft.

Mathematisches Modell: Die Formel für die exponentielle Abnahme lautet $y = b \cdot a^x$. Dabei ist b der Startwert, a der Abnahmefaktor und x die Anzahl der Zeiteinheiten. Bei dem Startwert b handelt es sich um das Volumen der ursprünglichen Pyramide. y ist das Volumen der jetzigen Pyramide und x die Zeit, die seit der Erbauung vergangen ist, 4595 Jahre. Durch das Umformen der Gleichung kann, der Abnahmefaktor a, bestimmt werden.

Mathematisches Resultat: Das Volumen V_u der ursprünglichen Pyramide ergibt sich aus dem Produkt der Grundfläche und Höhe dividiert durch 3.

$$V_u = \frac{G \cdot h}{3}$$

$$V_u = \frac{230,36^2 \cdot 146,59}{3}$$

$$V_u = 2592968,43 \text{ m}^3$$

Heute fasst die Pyramide aufgrund des Zerfalls folgendes Volumen:

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{225,36^2 \cdot 138,75}{3}$$

$$V = 2348904,74 \text{ m}^3$$

Setzt man nun diese beiden Werte in die Formel des exponentiellen Zerfalls ein, so kann durch Umformen der Abnahmefaktor bestimmt werden. b entspricht dem Volumen der ursprünglichen Pyramide, y dem Volumen der jetzigen Pyramide und x der 4595 Jahre.

$$y = b \cdot a^x$$

$$2348904,74 = 2592968,43 \cdot a^{4595} \quad | : 2592968,43$$

$$0,9058747493 = a^{4595} \quad | \sqrt[4595]{}$$

$$a = 0,999978487 \approx 99,99785 \%$$

Bei diesem Ergebnis handelt es sich nicht um den tatsächlichen Abnahmefaktor. Die jährliche prozentuelle Abnahme ergibt sich aus einer Subtraktion von $100 - 99,99785 = 0,00215 \%$.

Resultat im Situations- und Realmodell: Die Cheops - Pyramide schrumpft mit einer jährlichen prozentuellen Abnahme von $0,00215 \%$. Die Pyramide verliert zwar an Größe, jedoch ist das Ausmaß so gering, dass auch noch in den nächsten tausenden von Jahren diese Sehenswürdigkeit in Ägypten zu bestaunen sein wird. Dieser Abnahmeprozess kann jedoch durch menschlichen Einfluss oder Klimaveränderungen beschleunigt oder reduziert werden.

Für diese Aufgabe scheinen zunächst mehrere Lösungswege zugelassen zu sein, jedoch zeigt sich, dass es letztendlich nur eine mögliche Lösung gibt. Die Schüler/innen müssen für die Lösungskonstruktion bereits genügend Wissen im Bereich der Volumsberechnung für Pyramiden und dem exponentiellen wie linearen Verfall besitzen, sonst wird das Beispiel für manche Jugendliche unlösbar. Diese Aufgabe ist

sehr anspruchsvoll, kann aber durchaus in der 8.Schulstufe behandelt werden, wenn die dafür nötigen Voraussetzungen bereits im Unterricht durchgenommen worden sind.

6.2.5. Außerschulischer Lernort

Für eine mögliche Exkursion könnte eine Stadt, in der geeignete Bauwerke zu finden sind, herangezogen werden, die so zu einem sekundären Lernort wird. Durch das Finden und Erkennen mathematischer Objekte in der Stadt wird ein bewusstes Suchen seitens der Schüler/innen gefördert. Die gefundenen Objekte lassen sich dann nach verschiedenen Aspekten bzw. unterschiedlichen Tätigkeiten und Aufgabenstellungen in den Unterricht integrieren.¹

Zuerst werden bestimmte Gebäude erkundet und diese auf diverse Bereiche der Geometrie untersucht. Dabei könnten folgende Erkundungsaufträge an die Schüler/innen formuliert werden:

- „Achte bei einem Spaziergang durch die Stadt darauf, welche Vielecke du entdeckst.
- Wo erkennst du Kreise?
- Welche Körper fallen dir auf?
- Welche Symmetrien findest du bei den entdeckten Figuren und Körpern?“²

Bei der Erkundung werden die gefundenen Objekte mit der Kamera fotografiert und im Unterricht dann nach Eigenschaften klassifiziert, beschrieben und den geometrischen Begriffen zugeordnet. Beim Klassifizieren sind Tätigkeiten notwendig, wie sie üblicherweise beim Modellieren von Sachsituationen auftreten: Abstrahieren, Vereinfachen, Idealisieren.³

Anschließend lassen sich die gefundenen und klassifizierten Objekte genauer analysieren:

- „Welchen Flächeninhalt haben die Vielecke?

¹ vgl. Weigand & Wörler, 2010, S. 49

² ebd., S. 49

³ vgl. ebd., S. 49 & 52

- Welches Volumen haben die entdeckten Körper?
- Welche Symmetrien liegen den Objekten zugrunde?“¹

Zur Beantwortung dieser Fragen sind im Vorhinein eventuell auch Methoden zu überlegen, wie die wahren Längen bestimmt werden können.

Ferner lassen sich die gefundenen Objekte nun zeichnerisch in der Ebene oder in räumlicher Form mit Pappe, Holz, Schaumstoff, etc. darstellen. Auch eine Rekonstruktion mit einem Computerprogramm ist möglich.

Zu guter Letzt könnten die rekonstruierten Objekte mit Hilfe computergestützter Darstellungen in alternative Formen umgewandelt werden. Dabei werden kreative Aspekte angesprochen.²

Nicht bei jedem Objekt müssen bzw. können alle diese Aspekte auftreten und im Unterricht behandelt werden. Daher soll folgendes Beispiel diesen theoretischen Input veranschaulichen und eine mögliche Umsetzung zu diesem außerschulischen Lernort liefern. Zuerst werden die Arbeitsaufträge zu den einzelnen Tätigkeiten angegeben und anschließend eine mögliche Lösung in kursiv gedruckter Schrift vorgestellt.

Runde Bauwerke - am Beispiel „Atomium“ in Brüssel

Erkunden & Klassifizieren: Suche Bauwerke, die aus runden Körpern bestehen und informiere dich über ihre Geschichte. Klassifiziere die Bauwerke nach geometrischen runden Körpern und beschreibe ihr Aussehen.

Das Atomium in Brüssel wurde von dem Architekten André Waterkeyn als Symbol für die friedliche Nutzung der Atomenergie entworfen. Es entstand anlässlich der Weltausstellung im Jahr 1958 und soll die 165milliardenfache Vergrößerung eines Eisenkristallmoleküls darstellen. Das Bauwerk ist 102 m hoch und präsentiert sich in Form eines Würfels. Das Atomium besteht aus 9 Kugeln (eine an



Bild 18: Atomium

¹ Weigand & Wörler, 2010, S. 52

² vgl. ebd., S. 52

jeder Ecke des Würfels und eine in seinem Zentrum), die durch 20 Zylinderröhren verbunden sind. Zusätzlich sind an drei Kugeln Stützen angebracht, um die Stabilität des Gebäudes zu gewährleisten.¹

Analysieren: Das Atomium baut sich aus 9 Hohlkugeln und 20 Zylindern auf. Welchen Durchmesser haben die Kugeln? Wie lang und breit sind die einzelnen Zylindergänge? Wie viel Kilogramm wiegt eine Hohlkugel, wenn sie eine 89 cm dicke Stahlverkleidung besitzt, die eine Dichte von etwa 7800 kg/m^3 hat?² Welche geometrische Figur bildet sich, wenn ein Verbindungsgang aufgeschnitten und in der Ebene ausgebreitet wird?

Die Maße des Atomiums können durch Abschätzen ermittelt oder aufgrund einer zusätzlichen Recherche bestimmt werden. Der Durchmesser der Kugeln beträgt 18 m. Die Zylinderröhren sind zwar unterschiedlich lang und dick, aber es kann im Durchschnitt angenommen werden, dass sie ca. 3,3 m Durchmesser haben und 29 m lang sind.³

Für die Berechnung des Gewichts einer Hohlkugel müssen die benötigten Formeln aus dem Unterricht bekannt sein. Dazu muss zunächst das Volumen einer Hohlkugel bestimmt werden, welches in diesem Fall ca. $2,953 \text{ m}^3$ beträgt. Die Berechnung der Masse folgt durch das Produkt von Volumen und Dichte. Die Kugel wäre etwa 23033,4 kg schwer.

Das Aufschneiden eines Verbindungsrohrs würde ein Rechteck bilden und die Mantelfläche des Zylinders repräsentieren.

Rekonstruieren: Fertige Modelle des Atomiums aus den verschiedensten Materialien, die dir im Alltag begegnen, an. Stelle des Weiteren Kugeln und Zylinder auf der zeichnerischen Ebene dar.

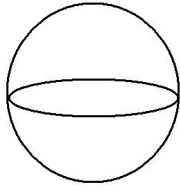
Für die Modelle kann von Styroporkugeln bis Holzkugeln, von Drähten bis Holzstäbchen alles verwendet werden und der Kreativität dabei freier Lauf gelassen werden. Eine mögliche zeichnerische Darstellung der Körper könnte wie folgt aussehen:

¹ vgl. Euro Inox, 2007, S. 1f [Zugriff am 16.9.2015]

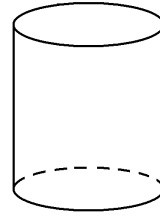
² vgl. Reichel & Humenberger (Hrsg.), 2012, S. 182

³ vgl. Euro Inox, 2007, S. 1 [Zugriff am 16.9.2015]

Kugel:



Zylinder:



Variieren: Variiere den Radius und die Höhe der Zylinder sowie den Durchmesser der Kugeln. Wie ändert sich das Volumen einer Kugel, wenn der Durchmesser halbiert bzw. verdoppelt wird? Entwirf ein Bauwerk aus runden geometrischen Körpern.

Auch hier wird die Kreativität der Schüler/innen gefördert und verschiedene Variationen des Atomiums entstehen. Aber auch das mathematische Verständnis wird durch die Änderung des Volumens einer Kugel in Abhängigkeit des Durchmessers geschult. Eine Halbierung des Durchmessers bewirkt, dass das Volumen auf ein Achtel sinkt. Dies kann einfach durch mathematische Algorithmen veranschaulicht werden.

$$V = \frac{4 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot \pi}{3}$$

$$V = \frac{4 \cdot \left(\frac{d}{4}\right)^3 \cdot \pi}{3}$$

$$V = \frac{4 \cdot \frac{d^3}{8} \cdot \pi}{3}$$

$$V = \frac{4 \cdot \frac{d^3}{64} \cdot \pi}{3}$$

$$V = \frac{d^3 \cdot \pi}{6}$$

$$V = \frac{d^3 \cdot \pi}{48}$$

Analog dazu kann auch eine Verdopplung des Durchmessers, die eine 8-fache Vergrößerung des Volumens liefert, dargestellt werden.

Dieses Beispiel einer möglichen Auf- und Ausarbeitung eines außerschulischen Lernorts rund um Gebäude / Bauwerke kann ohne weiteres ausgebaut werden und soll, so wie die Beispiele zuvor, nur als Anregung dienen.

Quellenverzeichnis

Literatur

- Biermann, H. R. (2010). *Praxis des Mathematikunterrichts 1750 - 1930, Längsschnittstudie zur Implementation und geschichtlichen Entwicklung des Mathematikunterrichts am Ratsgymnasium Bielefeld*. Berlin: Logos Verlag.
- Blum, W. (2006). Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht - Herausforderung für Schüler und Lehrer. In A. Büchter, *Realitätsnaher Mathematikunterricht - vom Fach aus und für die Praxis* (S. 8-21). Hildesheim: Franzbecker.
- Blum, W. (2007). Mathematisches Modellieren - zu schwer für Schüler und Lehrer? In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007: Vorträge auf der 41. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 26. bis 30. März 2007 in Berlin. 1* (S. 3-12). Hildesheim u.a.: Franzbecker.
- Böhm, U. (2013). *Modellierungskompetenzen langfristig und kumulativ fördern: Tätigkeitstheoretische Analyse des mathematischen Modellierens in der Sekundarstufe I*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Borromeo Ferri, R., Leiss, D., & Blum, W. (2006). Der Modellierungskreislauf unter kognitionspsychologischer Perspektive. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006: Vorträge auf der 40. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 6. 3. bis 10. 3. 2006 in Osnabrück*. (S. 53-55). Hildesheim u.a.: Franzbecker.
- Borromeo Ferri, Rita et al. (Hrsg.). (2013). *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule: Theoretische und didaktische Hintergründe*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Brühne, T., & Sauerborn, P. (2010). *Didaktik des außerschulischen Lernens*. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.
- Dühlmeier, B. (2008). *Außerschulische Lernorte in der Grundschule*. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

- Flury, P., & Juon, T. (2012). Mathematische Lernorte im Freien. *Praxis Mathematik: Mathematik draußen machen - Outdoor Mathematics* 47, S. 9-12.
- Franke, M. (2003). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.
- Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Greefrath, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Greefrath, G. (2012). Aufgaben zu Teilkompetenzen des Modellierens. In W. Blum et al. (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität: Festschrift für Gabriele Kaiser* (S. 129-137). Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.
- Henning, H., & Freise, F. (2011). *Realität und Modell - Mathematik in Anwendungssituationen*. Münster: Verlag für Wissenschaftliche Texte und Medien.
- Hinrichs, G. (2008). *Modellierung im Mathematikunterricht*. Heidelberg: Springer.
- Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht - Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann et al. (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (S. 66-81). Hildesheim: Franzbecker.
- Kleine, M., Ludwig, M., & Schelldorfer, R. (2012). Mathematik draußen machen - Outdoor Mathematics. *Praxis Mathematik / Thema: Mathematik draußen machen - Outdoor Mathematics* 47, S. 2-8.
- Kraker, M., Plattner, G., & Preis, C. (2013). *Expedition Mathematik 4*. Wien: E. Dörner GmbH.
- Leiss, D., & Tropper, N. (2014). *Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht: Adaptives Lehrerhandeln beim Modellieren*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg.

- Lutz-Westphal, B. (Juni 2010). Großer Bahnhof für die Mathematik. *Mathematik lehren 160 - Außerschulische Lernorte*, S. 45-48. Seelze: Friedrich Verlag.
- Maaß, J. (2013). Kompetent Modellieren im Mathematikunterricht - eine umfassende Kompetenz. In I. Bausch, G. Pinkernell, & O. Schmitt (Hrsg.), *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung - Festschrift für Regina Bruder* (S. 173-182). Münster: Verlag für Wissenschaftliche Texte und Medien.
- Maaß, J., & Schlöglmann, W. (1993). Der Stoßofen - Ein Beispiel für Industriemathematik als Unterrichtsthema. In W. Blum (Hrsg.), *Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht* (S. 74-81). Hildesheim: Franzbecker.
- Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht - Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker Verlag.
- Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren - Aufgaben für die Sekundarstufe I*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- Maaß, K. (2009). *Mathematikunterricht weiterentwickeln*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.
- o. V. (2012). Modellieren im Mathematikunterricht der Grundschule. In BIFIE (Hrsg.), *Themenheft Mathematik "Modellieren", Volksschule Grundstufe I + II* (S. 5-6). Graz: Leykam.
- o.V. (2012). Möglichkeiten zur Umsetzung im Unterricht. In BIFIE (Hrsg.), *Themenheft Mathematik "Modellieren", Volksschule Grundstufe I + II* (S. 38-64). Graz: Leykam.
- Peschek, W. (2011). Was sind und wozu dienen Standards für den Mathematikunterricht? In BIFIE (Hrsg.), *Praxishandbuch für "Mathematik" 8. Schulstufe* (S. 5-12). Graz: Leykam.
- Rasfeld, P., & Scherer, P. (Juni 2010). Außerschulische Lernorte - Chancen und Möglichkeiten für den Mathematikunterricht. *Mathematik lehren 160 - Außerschulische Lernorte*, S. 4-10. Seelze: Friedrich Verlag.

- Reichel, H. C., & Humenberger (Hrsg.), H. (2012). *Das ist Mathematik 4 - Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 4. Klasse der allgemein bildenden höheren Schulen und der Hauptschulen*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co.
- Reiss, K., & Hammer, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik*. Basel: Springer Basel.
- Schukajlow, S. (2011). *Mathematisches Modellieren - Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabekultur*. Münster: Waxmann.
- Strehl, R. (1979). *Grundprobleme des Sachrechnens*. Freiburg im Breisgau: Herder.
- Weigand, H.-G., & Wörler, J. (Juni 2010). Die Stadt mit "geometrischen" Augen sehen. *Mathematik lehren 160 - Außerschulische Lernorte*, S. 49-52. Seelze: Friedrich Verlag.
- Wiegand, B. (2000). *Mathematische Anwendungsfähigkeiten - Detailanalysen von TIMSS und Kassel-Exeter-Studie*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Internetquellen

- "Unser Stephansdom" - Verein zur Erhaltung des Stephansdoms. (o. J.). Abgerufen am 22. September 2015 von http://www.stephansdom.at/verein_ueber.htm
- Ackermann, P. (o. J.). *Politik und Unterricht, Einleitung: Außerschulische Lernorte in der politischen Bildung*. Abgerufen am 11. August 2015 von http://www.politikundunterricht.de/2_98/puu982e.htm
- Ärzte Zeitung. (30. Mai 2014). Abgerufen am 22. September 2015 von <http://www.aerztezeitung.de/panorama/article/861977/rauchen-oesterreich-aschenbecher-europas.html>
- Augenblick mal! (20. August 2015). Abgerufen am 22. September 2015 von <http://www.augenblickmalonline.de/am/10-jahre-wjt-das-traegt-noch.php>

Blum, W. (29. April 2010). *Kann mathematisches Modellieren selbständig gelernt werden? Ergebnisse aus der Lehr-/Lernforschung*. Abgerufen am 5. August 2015 von http://www.mathematik-sehen.uni-paderborn.de/fileadmin/Mathematik/JdM/Lehrerseminar/Vortrag_Blum_Apr2010.pdf

British Airways. (o. J.). Abgerufen am 22. September 2015 von <http://www.britishairways.com/en-us/information/about-ba/fleet-facts/airbus-320-200>

Bundesministerium für Bildung und Frauen. (o. J.). *Allgemeiner Lehrplan*. Abgerufen am 6. Juli 2015 von https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2

Bundesministerium für Bildung und Frauen. (o. J.). *Lehrplan der Mathematik*. Abgerufen am 6. Juli 2015 von https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/11668_11668.pdf?4dzgm2

Euro Inox. (2007). *The European Stainless Steel Development Association - Sanierung des Atomiums in Brüssel*. Abgerufen am 3. Dezember 2015 von http://www.edelstahl-rostfrei.de/downloads/iser/Atomium_DE_2007.pdf

Goethe, J. W. (o. J.). *Spiegel online*. Abgerufen am 8. September 2015 von <http://gutenberg.spiegel.de/buch/wilhelm-meisters-lehrjahre-3669/67>

Hofmann, E. (o. J.). *BauService Hofmann*. Abgerufen am 22. September 2015 von <http://www.bauservice-hofmann.de/pflasterbau.html>

HolidayCheck. (o. J.). Abgerufen am 22. September 2015 von http://www.holidaycheck.de/vollbild-Sphinx+von+Gizeh+Cheopspyramide+Sphinx-ch_ub-id_1157525121.html

Lindbichler, G. P. (2015). *Haus der Mathematik*. Abgerufen am 10. August 2015 von <http://www.hausdermathematik.at/index.html>

Löhner, F. (2006). *Die Cheops - Pyramide*. Abgerufen am 16. September 2015 von <http://www.cheops-pyramide.ch/grosse-pyramide.html>

Ludwig-Blotzmann-Institut für Suchtforschung. (2008). *Bundesministerium für Gesundheit*. Abgerufen am 28. Juli 2015 von http://bmg.gv.at/cms/home/attachments/1/8/7/CH1038/CMS1166785817949/factsheet__rauchverhalten_in_oesterreich.pdf

ÖBB. *ÖBB Scotty - der Routenplaner für Öffis*. (2015). Abgerufen am 9. September 2015 von <http://fahrplan.oebb.at/bin/query.exe/dn?ld=23&seqnr=2&ident=ne.021453176.1441792568&REQ0HafasScrollDir=1>

ORF. (22. November 2007). *Weltnichtrauchertag 2007*. Abgerufen am 28. Juli 2015 von <http://oesv1.orf.at/stories/196638>

Prater. (o. J.). Abgerufen am 22. September 2015 von <http://prater.at/Berichte/Ansicht.php?Id=1498204>

Schülerfirma MZA - Mathe Zum Anfassen, Drawehn - Schule KGS Clenze. (o. J.). Abgerufen am 22. September 2015 von <http://www.drawehn-schule.de/mza/produkte.htm>

Stadler, T. (2009). *Wiener Untergrund*. Abgerufen am 9. September 2015 von <http://wiener-untergrund.at/netzplan.shtml>

Taschner, B., Taschner, R., Mehlmann, A., & Winkler, R. (o. J.). *math.space - Verein für Mathematik als kulturelle Errungenschaft*. Abgerufen am 11. August 2015 von <http://math.space.or.at/veranst3/>

Technische Universität Wien. (2011). *Das Riesenatom*. Abgerufen am 22. September 2015 von http://www.tuwien.ac.at/dle/pr/aktuelles/downloads/2008/das_riesenatom_pa4408/

- Verordnung der Bundesministerin für Unterricht, Kunst und Kultur über Bildungsstandards im Schulwesen. StF: BGBl. II Nr. 1/2009. Gesamte Rechtsvorschrift für Bildungsstandards im Schulwesen, Fassung vom 06.07.2015.* (2015). Abgerufen am 6. Juli 2015 von <http://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung/Bundesnormen/20006166/Bildungsstandards%20im%20Schulwesen%2c%20Fassung%20vom%2006.07.2015.pdf>
- Wiener Linien GmbH & Co KG. *Fahrpläne U-Bahn Linie 1.* (2015). Abgerufen am 15. November 2015 von http://www.wienerlinien.at/media/download/2015/Linie_U1_159029.pdf
- Wiener Linien GmbH & Co KG. *Fahrpläne U-Bahn Linie 2.* (2015). Abgerufen am 15. November 2015 von http://www.wienerlinien.at/media/download/2015/Linie_U2_159031.pdf
- Wiener Linien GmbH & Co KG. *Fahrpläne U-Bahn Linie 3.* (2015). Abgerufen am 15. November 2015 von http://www.wienerlinien.at/media/download/2015/Linie_U3_159032.pdf
- Wiener Linien GmbH & Co KG. *Fahrpläne U-Bahn Linie 4.* (2015). Abgerufen am 15. November 2015 von http://www.wienerlinien.at/media/download/2015/Linie_U4_159033.pdf
- Wiener Linien GmbH & Co KG. (2014). *Wiener Linien 2014, Zahlen Daten Fakten.* Abgerufen am 9. September 2015 von http://www.wienerlinien.at/media/files/2015/betriebsangaben_2014_151135.pdf

Darstellungsverzeichnis

Abbildungen

Abbildung 1: Modellierungskreislauf von Blum	15
---	----

Borromeo Ferri, Rita et al. (Hrsg.). (2013). *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule: Theoretische und didaktische Hintergründe*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Abbildung 2: Modellierungsprozess von Maaß	15
---	----

Maaß, K. (2009). *Mathematikunterricht weiterentwickeln*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Abbildung 3: Siebenschrittiger Modellbildungskreislauf von Blum	17
--	----

Borromeo Ferri, Rita et al. (Hrsg.). (2013). *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule: Theoretische und didaktische Hintergründe*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Abbildung 4: Ein Modell mathematischer Kompetenzen	31
---	----

Peschek, W. (2011). Was sind und wozu dienen Standards für den Mathematikunterricht? In BIFIE (Hrsg.), *Praxishandbuch für "Mathematik" 8. Schulstufe* (S. 5-12). Graz: Leykam.

Abbildung 5: Bewertungsschema	62
--	----

Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren - Aufgaben für die Sekundarstufe I*. Berlin: Cornelsen Verlag.

Abbildung 6: Mögliche Schwierigkeiten bei Modellierungsaufgaben.....	63
---	----

Greefrath, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Abbildung 7: „Lösungsplan“ für Modellierungsaufgaben	70
Blum, W. (29. April 2010). <i>Kann mathematisches Modellieren selbständig gelernt werden? Ergebnisse aus der Lehr-/Lernforschung</i> . Abgerufen am 5. August 2015 von http://www.mathematik-sehen.uni-paderborn.de/fileadmin/Mathematik/JdM/Lehrerseminar/Vortrag_Blum_Apr2010.pdf	
Abbildung 8: Der methodische Dreischritt zur Didaktik des außerschulischen Lernens.....	85
Brühne, T., & Sauerborn, P. (2010). <i>Didaktik des außerschulischen Lernens</i> . Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.	
Abbildung 9: Geschwindigkeits- Zeit- Diagramm	100
Abbildung 10: Kreisdiagramm „Nutzung der öffentlichen Verkehrsmitteln“	109
Abbildung 11: Kosten – Stunden – Diagramm der Riesenrad – Aufgabe	122

Tabellen

Tabelle 1: Beispiele für außerschulische Lernorte in Mathematik	77 - 79
--	---------

Bilder

Ich habe mich bemüht, alle Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und habe versucht, ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder einzuholen. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich den Betroffenen, sich bei mir zu melden.

Bild 1: Reisekosten - Aufgabe	43
<i>British Airways</i> . (o. J.). Abgerufen am 22. September 2015 von http://www.britishairways.com/en-us/information/about-ba/fleet-facts/airbus-320-200 ,	

Bild 2: Rauchen - Aufgabe.....	45
<i>Ärzte Zeitung</i> . (30. Mai 2014). Abgerufen am 22. September 2015 von http://www.aerztezeitung.de/panorama/article/861977/rauchen-oesterreich-aschenbecher-europas.html ,	
Bild 3: Weltjugendtag - Aufgabe	48
<i>Augenblick mal!</i> (20. August 2015). Abgerufen am 22. September 2015 von http://www.augenblickmalonline.de/am/10-jahre-wjt-das-traegt-noch.php	
Bild 4: La Réunion - Aufgabe	50
Maaß, K. (2007). <i>Mathematisches Modellieren - Aufgaben für die Sekundarstufe I</i> . Berlin: Cornelsen Verlag.	
Bild 5: Wasserturm - Aufgabe	51
Greefrath, G. (2012). Aufgaben zu Teilkompetenzen des Modellierens. In W. Blum et al. (Hrsg.), <i>Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität: Festschrift für Gabriele Kaiser</i> (S. 129-137). Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.	
Bild 6: Zuckerrohr - Aufgabe.....	53
Maaß, K. (2007). <i>Mathematisches Modellieren - Aufgaben für die Sekundarstufe I</i> . Berlin: Cornelsen Verlag.	
Bild 7: Geschwindigkeitsbeispiel.....	56
Reichel, H. C., & Humenberger (Hrsg.), H. (2012). <i>Das ist Mathematik 4 - Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 4. Klasse der allgemein bildenden höheren Schulen und der Hauptschulen</i> . Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co.	
Bild 8: Binomischer Würfel	75
<i>Schülerfirma MZA – Mathe zum Anfassen, Drawehn – Schule KGS Clenze</i> . (o. J.). Abgerufen am 22. September 2015 von http://www.drawehn-schule.de/mza/produkte.htm	
Bild 9: Netzplan der Wiener U-Bahn.....	91
Stadler, T. (2009). <i>Wiener Untergrund</i> . Abgerufen am 9. September 2015 von http://wiener-untergrund.at/netzplan.shtml	

Bild 10: Stationen und Zeitangaben der U-Bahn Linie 2.....	94
Wiener Linien GmbH & Co Kg. <i>Fahrpläne U-Bahn Linie 2.</i> (2015). Abgerufen am 15. November 2015 von http://www.wienerlinien.at/media/download/2015/Linie_U2_159031.pdf	
Bild 11: Stationen und Zeitangaben der U-Bahn Linie 3.....	94
Wiener Linien GmbH & Co Kg. <i>Fahrpläne U-Bahn Linie 3.</i> (2015). Abgerufen am 15. November 2015 von http://www.wienerlinien.at/media/download/2015/Linie_U3_159032.pdf	
Bild 12: Stationen und Zeitangaben der U-Bahn Linie 1.....	95
Wiener Linien GmbH & Co Kg. <i>Fahrpläne U-Bahn Linie 1.</i> (2015). Abgerufen am 15. November 2015 von http://www.wienerlinien.at/media/download/2015/Linie_U1_159029.pdf	
Bild 13: Stationen und Zeitangaben der U-Bahn Linie 4.....	95
Wiener Linien GmbH & Co Kg. <i>Fahrpläne U-Bahn Linie 4.</i> (2015). Abgerufen am 15. November 2015 von http://www.wienerlinien.at/media/download/2015/Linie_U4_159033.pdf	
Bild 14: Stephansdom - Aufgabe	116
„Unser Stephansdom“ – Verein zur Erhaltung des Stephansdoms. (o. J.). Abgerufen am 22. September 2015 von http://www.stephansdom.at/verein_ueber.htm	
Bild 15: Riesenrad - Aufgabe.....	120
<i>Prater.</i> (o. J.). Abgerufen am 22. September 2015 von http://prater.at/Berichte/Ansicht.php?Id=1498204	
Bild 16: Pool - Aufgabe	124
Hofmann, E. <i>BauService Hofmann.</i> (o. J.). Abgerufen am 22. September 2015 von http://www.bauservice-hofmann.de/pflasterbau.html	
Bild 17: Pyramiden - Aufgabe	128
<i>HolidayCheck.</i> (o. J.). Abgerufen am 22. September 2015 von http://www.holidaycheck.de/vollbild-Sphinx+von+Gizeh+Cheopspyramide+Sphinx-ch_ub-id_1157525121.html	

Bild 18: Atomium.....133

Technische Universität Wien. (2011). *Das Riesenatom*. Abgerufen am 22. September

2015 von

http://www.tuwien.ac.at/dle/pr/aktuelles/downloads/2008/das_riesenatom_pa440

8/

Abstract

Da der Bezug zum Alltag im Fach Mathematik oft nur sehr gering stattfindet und viele Schüler/innen sich bei den verschiedensten mathematischen Inhalten die Frage stellen: „Wozu brauche ich das?“, ist es ein großes Anliegen von mir gewesen, die Problematik eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts zu erläutern. Als angehende Mathematiklehrerin möchte ich nämlich meinen Schüler/innen im Unterricht zeigen, wie wichtig die Mathematik im Leben ist und wofür gewisse mathematische Vorgehensweisen auch später im Alltag gebraucht werden. Meine Arbeit beschäftigt sich daher mit den Aspekten eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts und konzentriert sich auf die 8. Schulstufe.

Die Arbeit gliedert sich in sechs Kapitel und umfasst nicht nur einen theoretischen Teil, der sich mit dem Begriff „realitätsbezogener Mathematikunterricht“ befasst, sondern auch einen praktischen Teil, der Unterrichtsvorschläge für die 8. Schulstufe beinhaltet.

Das erste Kapitel widmet sich der Begriffserklärung eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts. Dazu habe ich drei Zugänge gewählt, die Merkmale eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts aufzeigen. Die Begriffe „Realitätsbezug“, „Sachrechnen“ und „Modellieren“ fassen einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht als eine Auseinandersetzung mit außermathematischen Problemen zusammen, die aus dem realen Leben der Schüler/innen stammen.

Im zweiten Kapitel sind Argumente aufgelistet, weshalb es wichtig ist Mathematikunterricht realitätsbezogen zu gestalten. Denn dadurch wird nicht nur besseres Verstehen und Behalten mathematischer Inhalte gefördert sondern auch die Kompetenzentwicklung im Bereich des Modellierens unterstützt.

Im dritten Kapitel meiner Arbeit geht es darum, ob und wie der österreichische Lehrplan und die Bildungsstandards Mathematik M8 Lehrer/innen dazu auffordern realitätsbezogenen Unterricht zu betreiben. Dabei sollen sowohl Beispiele im Unterricht behandelt werden, die an die Erfahrungen und an das Wissen der Schüler/innen anknüpfen sowie zum selbstständigen Entwickeln von Modellen anregen, als auch Fachleute eingeladen und außerschulische Lernorte besucht werden.

Das vierte Kapitel konzentriert sich auf die Möglichkeiten zur Umsetzung eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts. Aufgabentypen, wie Sachaufgaben oder Modellierungsaufgaben, werden in diesem Abschnitt vorgestellt und anhand konkreter Beispiele aus der 8. Schulstufe erläutert. Das eigenständige Entwerfen von Aufgaben, bei denen man sich Anregungen aus den Schulbüchern oder aus dem Alltag holen kann, ist ebenfalls in diesem Kapitel beschrieben. Denn ein einfaches Beispiel aus dem Schulbuch kann durch Weglassen von Informationen oder durch eine offen gestellte Frage sofort in eine Modellierungsaufgabe umgewandelt werden. Auch das Öffnen des Klassenraumes durch außerschulische Lernorte wird hier vorgestellt. Das Besuchen eines Museums oder eines Workshops, bei dem mathematische Inhalte spielerisch als auch theoretisch vermittelt werden, zählen zu einem außerschulischen Lernort. Aber auch eine Exkursion durch die Innenstadt, bei der geometrische Begriffe wie die „Symmetrie“ erarbeitet werden, gehört dazu.

Das fünfte Kapitel ist eine Zusammenfassung der ersten Kapitel und liefert den Übergang zum praktischen Teil, der im sechsten und letzten Kapitel meiner Diplomarbeit enthalten ist.

Im letzten Kapitel habe ich acht Modellierungsaufgaben selbst entworfen und nach dem Modellierungskreislauf bearbeitet. Diese Aufgaben spezialisieren sich auf die Themen „öffentlicher Verkehr“ und „Bauwerke“ und sind nach den jeweiligen Inhaltsbereichen des Mathematik Lehrplans gegliedert. Ebenfalls sind Beispiele für außerschulische Lernorte angeführt, wie der Bahnhof oder das Atomium in Brüssel, und für den Unterricht so konzipiert, dass sie einsatzbereit sind.

Abstract (English Version)

As there is hardly any reference between the subject “Mathematics” at school and everyday life, I have tried to explain and show different ways of how to make lessons more reality-related. I am convinced that teachers should show their students how important Math is in real life and that mathematical operations are of further importance in everyday life. The examples presented in my thesis focus on the eighth grade.

The thesis is divided into six units. A part of them deals with theoretical hypotheses, the other shows suggestions for the lessons.

The first part of my paper defines “realitätsbezogener Mathematikunterricht”. I have chosen three different ways to show the features of reality-related lessons. The terms “Realitätsbezug”, “Sachrechnen” and “Modellieren” show that the problems which are dealt with in Math are problems in real life as well.

The second part lists arguments why it is so important to make Math lessons more reality-related. In such a way it becomes easier for the students to understand and to remember mathematical operations. By doing so, the students’ competence in the field of “Modellieren” is supported.

The third chapter analyses if the Austrian curriculum encourages teachers to teach in a more reality-related way. I think that the samples dealt with in the lessons should have a certain relation to the students’ experiences in everyday – life. Furthermore, students should be encouraged to develop samples themselves. Another important aspect is that scientists should be invited from time to time and excursions should take place.

In the fourth chapter I list samples of “Modellierungsaufgaben” suitable for the eighth grade. I also describe how teachers can develop such samples themselves with the help of school books. It is quite easy to change an established sample into a “Modellierungsaufgabe” if some information is added or left out. Moreover, I stress once more how important it is to visit museums or workshops to widen the students’ knowledge. If young people walk through the inner districts of Vienna, for example, they will get in contact with laws of symmetry quite frequently.

The fifth part is a summary of the previous four and bridges the gap to the last part of my thesis which lists examples of “Modellierungsaufgaben”. I created these samples myself and they deal with the topics “public transport” and “buildings”. I also mention places for learning outside school, such as a train station and the Atomium in Brussels. The samples have been developed in such a way that they can be used anytime.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name: Nadine Bauer
Geburtsdatum: 6. August 1988
Geburtsort: Mistelbach, Niederösterreich
Nationalität: Österreich

Bildungsweg:

1994 – 1998: Volksschule, Zistersdorf
1998 – 2002: Hauptschule, Zistersdorf
2002 – 2006: Bundesoberstufenrealgymnasium, Mistelbach
seit 2006: Lehramtsstudium Mathematik und Geographie und
Wirtschaftskunde, Universität Wien

Berufliche Tätigkeiten:

2003 – 2009: diverse Feriapraktika bei inländischen Firmen
August 2010: Begleitperson / Mathematiklehrerin am Lerncamp des
Niederösterreichischen Jugendherbergswerk in Annaberg
seit 2011: Lehrtätigkeit am Bundesgymnasium und Bundesrealgymnasium,
Groß Enzersdorf