



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Einführung der Differenzialrechnung in der Schule

Verfasser

Peter Jungbauer

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2015

Studienkennzahl lt.
Studienblatt:

A 190 406 412

Studienrichtung lt.
Studienblatt:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik

Betreuer:

Ao. Univ.-Prof. i. R. Günter Hanisch

Abstract

In this paper I'd like to show different ways to introduce differential in school and discuss them along specific criterions. It is very important for teachers to go into this subject discriminating, because it highly affects the understanding of their students.

For this we need to define these criterions.

Firstly the general principles of (math-) teaching are mentioned: the scientific background of mathematics is logic, which oftimes only implicitly enters the lessons, also it is the primary philosophy of european thinking.

It is also of importance, how effectiveness of learning may be supported, in contrast to what hampers it, for the student should learn thinking and learning for life.

Education can be seen as background- or foreground-knowledge, both of them important aspects.

On the one hand there should be taught thought patterns, on the other practical skills useable for daily life and job.

Secondly every introduction of differential has to be examined from the viewpoint of didactics: we need to discuss Mäeutic, the genetic and the spiral principle, the linear-gradual and the deductive structure. Also we should think carefully about which of these are active from the point of teacher or student.

Last but not least of course we can't neglect the curriculum, maybe the most important aspect from a practical point of view. To let the reader assess the various introductions to differential I not only provide a summary in chapter 3, but also a (slightly shortened) current version in the appendix. I think it is important not only because of the mathematical and didactical demands the curriculum holds, but also because of it's focus on the general education as preparation for life.

In chapter 4 I discuss the most important fields of differential in school. This is important, because the students have to have easy access from the introductions to these different fields of study. What good is the best introduction, if it ends in a dead end?

Now we can at last take a look at the 12 different introductions to differential I have provided in chapter 5. Some may be familiar from school, others may seem completely new and innovative to the dedicated reader. They differ not only in approach, but also in priorities. They center on different basic knowledge, in most cases this can't be separated from approach.

In chapter 6 I try to evaluate these approaches without prejudice with above-mentioned criteria. It is not for me to find the „best approach“, but to point out the different edges and hindrances, these approaches provide. It is up to the individual teacher, which introduction he or she prefers. But it has to be his or her decision, not chance, and this only comes from knowledge of different possibilities.

Also, if time allows, it would be preferable to use more than one approach. I think, the importance of the field of differential allows for this extra-time.

Last thing we do is look at different schoolbooks and see, what introduction they use. I close with some last assessments.

Danksagung

Ganz besonders möchte ich mich bei Herrn Univ. Doz. Dr. Günter Hanisch bedanken, für etliche wichtige Tipps, sowie auch, dass er mich und mein Thema unter seine Fittiche genommen hat, obwohl ich mir sehr viel Zeit gelassen hatte!

Des Weiteren gilt mein besonderer Dank meinen Eltern und meiner Tante, ohne die ich nie so weit gekommen wäre, und die mich immer unterstützt haben, egal, was kam!

Und auch meiner Freundin Silvia möchte ich Danke sagen, sie war mir besonders in der Endphase eine liebevolle Stütze!

Eine wichtige Bemerkung

Mir persönlich ist das Thema „gender“ ein großes Anliegen. Natürlich möchte ich Lehrerinnen und Lehrer gleichermaßen mit dieser Schrift ansprechen.

Wenn also in der vorliegenden Arbeit der Einfachheit halber „Schüler“ statt „SchülerInnen“, „Lehrer“ statt „LehrerInnen“ oder Ähnliches geschrieben steht, dann geschieht dies nur aus Gründen der Lesbarkeit und nicht der Diskriminierung.

Inhaltsverzeichnis

Abstract.....	3
Danksagung.....	5
Eine wichtige Bemerkung.....	5
Inhaltsverzeichnis.....	6
Kurzfassung.....	8
Einleitung.....	10
1. Prinzipien des Mathematikunterrichts.....	12
1.1 Logik als philosophischer Hintergrund.....	12
1.2 Lernen	14
1.3 Bildung als Hintergrundwissen.....	16
1.4 Bildung als Vordergrundwissen.....	18
2. Didaktische Prinzipien.....	20
2.1 Allgemeines zur Mathematikdidaktik.....	21
2.2 Fragend-entwickelnder Unterricht und Mäeutik.....	22
2.3 Das genetische Prinzip.....	23
2.4 Das Spiralprinzip.....	24
2.5 Linear-sukzessiver Aufbau und operatives Prinzip.....	26
2.6 Deduktiver Aufbau.....	27
2.7 Problemlösen im Mathematikunterricht.....	28
3. Die Differenzialrechnung im Lehrplan.....	31
3.1 Historisches.....	31
3.2 AHS.....	33
3.3 HAK + HTL.....	37
3.4 Das Kompetenzmodell.....	38
4. Die Differenzialrechnung in der Schule.....	40
4.1 Vorbedingungen.....	40
4.2 Differenzenquotient – Änderungsraten.....	42
4.3 Differenzialquotient.....	43
4.4 Differenzierbarkeit: Grenzwerte, Stetigkeit.....	45
4.5 Die Leibniz'sche Differenzialschreibweise.....	46
4.6 Ableitungsregeln.....	47
4.7 Die Ableitungsfunktion und mehrfache Ableitungen.....	48
4.8 Kurvendiskussionen.....	49
4.9 Extremwertberechnungen.....	53
4.10 Zentrale Sätze.....	54
4.11 Weitere Anwendungen.....	55

5. Verschiedene Zugänge zur Differenzialrechnung in der Schule	56
5.1 Axiomatischer Zugang: Definitionen und Sätze.....	56
5.2 Das Tangentenproblem.....	58
5.3 Das Geschwindigkeitsproblem.....	60
5.4 Das Koordinatensystem der Differenziale.....	62
5.5 Eigenschaften von Polynomfunktionen - Kurvendiskussion.....	65
5.6 Das unendlich Kleine – Zuwachs im Quadrat.....	67
5.7 Infinitesimalrechnung und Hyperreelle Zahlen.....	70
5.8 Differenzialrechnung als Umkehrung der Integralrechnung.....	71
5.9 Änderungsraten als Grundverständnis.....	72
5.10 Weitere Zugänge.....	73
5.11 Historisch: Höfler's Zugang.....	75
6. Fachdidaktische Analyse unter Berücksichtigung der allgemeinen Ziele des Lehrplans und der mathematischen Unterrichtsprinzipien.....	77
6.1 Axiomatischer Zugang: Definitionen und Sätze.....	77
6.2 Das Tangentenproblem.....	79
6.3 Das Geschwindigkeitsproblem.....	81
6.4 Das Koordinatensystem der Differenziale.....	83
6.5 Eigenschaften von Polynomfunktionen - Kurvendiskussion.....	84
6.6 Das unendlich Kleine – Zuwachs im Quadrat.....	86
6.7 Infinitesimalrechnung und Hyperreelle Zahlen.....	88
6.8 Differenzialrechnung als Umkehrung der Integralrechnung.....	89
6.9 Änderungsraten als Grundverständnis.....	91
6.10 Weitere Zugänge.....	92
6.11 Historisch: Höfler's Zugang.....	93
6.12 Abschließend: Mischformen.....	94
6.13 Zusammenfassung der Analyse der verschiedenen Zugänge.....	96
7. Verschiedene Lehrbücher im Vergleich.....	97
Abschlussbemerkungen.....	100
Anhang.....	101
A) Lehrplan AHS, allgemeiner Teil.....	101
B) Lehrplan AHS Mathematik.....	118
C) Lehrplan HAK Mathematik.....	128
D) Lehrplan HTL Mathematik.....	131
Literaturverzeichnis.....	137
Lebenslauf.....	143

Kurzfassung

Diese Arbeit möchte verschiedene Wege zur Einführung des Differenzials in der Schule aufzeigen und diese nach bestimmten Kriterien beurteilen. Es ist wichtig, sich als Lehrer kritisch damit auseinanderzusetzen, da verschiedene Zugänge das Verständnis der Schüler unterschiedlich beeinflussen.

Dazu ist es nötig, zuerst diese Kriterien zu definieren.

Als erstes seien die allgemeinen Prinzipien des (Mathematik-) Unterrichts genannt: Der wissenschaftstheoretische Hintergrund der Mathematik ist die Logik, die oftmals nur implizit in den Unterricht einfließt, obwohl diese Philosophie unser tägliches Denken stark beeinflusst. Wichtig ist auch, wie die Effektivität des Lernens gefördert werden kann, und was sie hemmt, denn im Endeffekt sollen die Schüler für ihr Leben Denken und Lernen erlernen. Bildung kann als Hintergrund- oder Vordergrundwissen betrachtet werden, beides sind wichtige Aspekte. Zum einen sollen Denkweisen, zum anderen Fähigkeiten, die für Beruf und Leben anwendbar sind, gelehrt werden.

Als zweites soll jeder Zugang dann auch vom Standpunkt der Didaktik geprüft werden, dafür sind die Mäeutik, das genetische und das Spiral-Prinzip zu erläutern, aber auch der linear-sukzessive und deduktive Aufbau. Auch sollte man sich überlegen, welche dieser Prinzipien eher lehrer- oder schüleraktiv sind.

Zuletzt ist es selbstverständlich notwendig, den in der Praxis vielleicht sogar wichtigsten Aspekt anzuführen, nämlich, was der Lehrplan fordert. Um dem geneigten Leser auch die Möglichkeit zu geben, nicht nur mittels der Zusammenfassung in Kapitel 3 die diversen Einführungen in die Differenzialrechnung zu beurteilen, wurde eine (etwas gekürzte) Fassung des Lehrplans auch im Anhang angeführt. Dies ist auch deshalb wichtig, weil der Lehrplan nicht nur fachliche und didaktische Forderungen stellt, sondern auch Schwerpunkte für die allgemeine Bildung als Vorbereitung für das Leben setzt.

In Kapitel 4 wird kurz auf die wichtigsten Gebiete der Differenzialrechnung im Schulunterricht eingegangen, da es notwendig ist, dass die Schüler von den einzelnen Einführungen ausgehend auch zwanglos zu diesen Gebieten geführt werden können. Denn was nützt der schönste Zugang, wenn er in einer Sackgasse endet?

Jetzt können wir uns endlich den 12 Einführungen in die Differenzialrechnung der Schule widmen, die in Kapitel 5 angeführt werden. Einige werden aus dem eigenen Schulunterricht bekannt sein, andere werden dem Leser neu und innovativ erscheinen. Sie unterscheiden sich nicht nur durch den Zugang, sondern auch durch ihre Prioritäten. Sie stellen verschiedene Grundvorstellungen in den Mittelpunkt, diese sind meist untrennbar mit dem Zugang verbunden.

In Kapitel 6 werden dann möglichst wertfrei diese Zugänge nach den oben genannten Kriterien beurteilt. Es soll hier darauf hingewiesen werden, dass es nicht darum geht, einen „besten Zugang“ zu finden, sondern dass alle Zugänge ihre Vor- und Nachteile haben, und dass es immer von der freien Entscheidung des einzelnen Lehrers abhängt, welcher Einführung er den Vorzug gibt. Freie Entscheidung aber kann nur aus der Kenntnis verschiedener Möglichkeiten erwachsen. Des Weiteren, so die Unterrichtszeit es erlaubt, wäre es natürlich günstig, den Schülern mehrere Zugänge zu erschließen. Die Bedeutung des Gebietes der Differenzialrechnung sollte diesen Zeitaufwand aber durchaus rechtfertigt.

Abschließend betrachtet diese Arbeit noch einige Schulbücher im Vergleich, welche Zugänge diese gewählt haben, und schließt mit einigen letzten Erkenntnissen.

Einleitung

„Einzelne Inhalte und Probleme sind aus verschiedenen Blickwinkeln zu sehen und aus verschiedenen Richtungen zu beleuchten ... die maximale Realisierung [besteht] im konsequenten Herausarbeiten der Vor- und Nachteile verschiedener Zugänge. Damit wird ein vielschichtiges und ausgewogenes Bild der Mathematik gewonnen.“

(S. Anhang, S.114, Lehrplan für AHS, 2014)

Besser als mit diesem Absatz aus dem Lehrplan hätte man kaum eine Begründung für die vorliegende Diplomarbeit formulieren können. Natürlich muss bewusst sein, dass dieses Ideal oft an der Praxis scheitert (z.B. an Zeitmangel), aber Lehrer haben die Verpflichtung, die verschiedenen Zugänge zumindest durchzudenken und vielleicht im einzelnen Kapitel, wie z.B. hier in der Differenzialrechnung auch ein oder zwei Zugänge in den Unterricht einzubringen.

Es ist ausgesprochen wichtig, und der Lehrplan verlangt es auch, dass man als Lehrer die verschiedenen Facetten der Mathematik den Schülern nahe bringt. Dazu gehören auch lebensnahe Beispiele, um die Relevanz der Mathematik in der Praxis herauszustreichen (z.B. in Physik und Wirtschaft). Mathematik (von den Zahlenbereichen der Algebra bis zu den Funktionen der Analysis) gehört gerade in Zeiten des Computers zur Schulbildung, doch warum ist dem so? Eine Antwort darauf findet man, wenn man sich bewusst macht, dass abstrakte, logische und kritische Denkweise durch die Mathematik sehr leicht vermittelt werden kann. Die Schüler sollen argumentieren, logische Strukturen erkennen und analysieren lernen. Die dem zu Grunde liegende Philosophie der Logik, auf der (neben dem Christentum) das gesamte abendländische Weltbild aufbaut, kann auch in der Schulmathematik bewusst gemacht werden. Viele Menschen verwechseln „Rechnen“ mit „Mathematik“ und fragen dann zu Recht, wozu sie das lernen sollen, wenn doch der Taschenrechner das viel besser kann. Dabei wird oft vergessen, dass dieser nicht selbstständig Probleme lösen kann. Mathematik heißt eben auch „Denken lernen“.

All dies gibt wenigstens teilweise eine Antwort auf die Schülerfrage „Wozu brauchen wir Mathematik überhaupt?“.

Doch nicht nur Schüler stellen diese Frage, auch die Eltern und in weiterer Folge ihre Vertreter im Parlament. Historisch gesehen war es auch lange umstritten, ob das Differenzial überhaupt in der Schule unterrichtet werden sollte. Gerade heute, wo man um jede Schulstunde im Lehrplan kämpfen muss (und zu Recht, denn es kommen immer wieder neue Gebiete hinzu, und auch die Zeit, die ein Schüler lernen kann, ist beschränkt), ist es wichtig, sowohl die Bedeutung der Mathematik als solche, als auch die der einzelnen Stoffgebiete zu argumentieren und zu untermauern. Der Mathematikunterricht erhält seine Legitimation durch die oben bereits genannte Wichtigkeit in verschiedenen Gebieten.

In dieser Arbeit wurde die Differenzialrechnung gewählt, da sie (nach Meinung des Autors) besser als andere Gebiete die verschiedenen Bedeutungen der Mathematik (sowohl als Anwendung, als auch als Denkweise) aufzeigt. Oft findet in der Schule hier erstmals bewusst der Übergang von „Rechnen“ zur eigentlichen „Mathematik“ statt.

Es werden verschiedene Wege der Einführung des Differenzials in der Schule betrachtet und nach den in den folgenden Kapiteln behandelten Prinzipien durchleuchtet. Dies soll keine Bewertung darstellen, jeder Lehrer darf natürlich seine eigenen Schwerpunkte setzen. Es ist aber immens wichtig, dass Lehrer sich bewusst machen, welchen Zugang sie wählen und welche Facette sie damit beleuchten.

Aus eigener Erfahrung in Nachhilfekursen kann der Autor nur bestätigen, dass verschiedene Zugänge für verschiedene Schüler geeignet sind, ihnen das Gebiet verständlich zu machen. Im Idealfall wäre es also günstig, sogar mehrere Pfade der Einführung zu wählen, doch sollte durchaus bewusst sein, dass dies aus Zeitgründen vielleicht nicht möglich ist.

Daher der Aufruf: Wählen wir bewusst, was wir lehren und auf welchem Weg wir das tun!

1. Prinzipien des Mathematikunterrichts

Um überhaupt Aussagen über die verschiedenen Zugänge zur Differenzialrechnung treffen zu können, müssen wir uns zuerst die allgemeinen Prinzipien ansehen, nach denen wir sie beurteilen wollen.

1.1 Logik als philosophischer Hintergrund

Ein in der heutigen Zeit oft vernachlässigter Punkt in der mathematischen Ausbildung der Schüler ist der Anspruch auf Bildung von Denkweisen. Die Logik ist die im Abendland vorherrschende Philosophie, sie befähigte erst zu den technischen Errungenschaften, die wir heute als selbstverständlich erachten. Sie wird aber in Europa eher emotional, nicht kognitiv vermittelt. Das Bewusstmachen dieser Prinzipien kann uns nun gerade in der Mathematik als jener Wissenschaft gelingen, welche die Logik in ihrer reinsten Form widerspiegelt.

Ob in den verschiedenen Zugängen zur Differenzialrechnung nun auf diese Denkweise, bzw. das Deutlichmachen derselben eingegangen wird oder werden kann, wird diese Arbeit in der Analyse derselben behandeln.

Dazu müssen wir aber zuerst einen kurzen Einblick in die Grundlagen dieser Philosophie nehmen (vgl. Pietschmann 1996, S.15-29): Logik ist nicht nur Philosophie, sondern auch Formalwissenschaft und als solche für die Wissenschaftstheorie unerlässlich. Ihre Grundlagen gehen auf Parmenides und Aristoteles zurück und lassen sich zu den 3 Axiomen der Logik zusammenfassen:

(1) Satz der Identität

Dieser „fordert die Eindeutigkeit von Begriffen. Jeder Begriff hat Umfang (das, was er meint) und Inhalt (das, wodurch der Umfang eingegrenzt wird).“

(S. Pietschmann, 1996, S.16)

Es muss klar sein, was ein Begriff bedeutet und umschließt. Was nicht eingeschlossen ist, ist automatisch ausgeschlossen. Dies mag für einen Europäer selbstverständlich sein, sollte aber auch bewusst gemacht werden.

(2) Satz vom (zu vermeidenden) Widerspruch

Dieser fordert Widerspruchsfreiheit einer Aussage. „Von zwei einander widersprechenden Behauptungen ist mindestens eine falsch.“ (s. Pietschmann, 1996, S.17) Wir sprechen hier nur vom einfachen Widerspruch. Auch dies ist (nur) im abendländischen Denken ein umfassendes Prinzip. Wir sollten aber nicht vergessen, dass im täglichen Leben diese Widerspruchsfreiheit eher selten vorkommt, da es nicht oft zu klar kontradiktorischen Aussagen in der Umgangssprache kommt. Allerdings ist dieses Axiom natürlich (wie die beiden anderen) Grundlage für eine exakte Beweisführung – also für die gesamte Mathematik!

(3) Satz vom ausgeschlossenen Dritten

Dieser stellt nun die Behauptung auf, von 2 einander vollständig widersprechenden Aussagen müsse eine richtig sein. „Tertium non datur.“ Er führt zum „Entweder–Oder–Denken“ des Abendlandes. Nur durch Negation erhalten wir einen solchen Widerspruch. (Ich atme oder ich atme nicht. Beides zugleich ist nicht möglich, eine der beiden Aussagen muss richtig sein.) Wir sprechen hier vom vollständigen logischen Widerspruch. Nur in unserem „logischen Denken“ ist dies selbstverständlich. In einem dualistischen Denken ist es durchaus möglich, z.B. Mann und Frau zugleich zu sein (Yin-Yang-Prinzip). (Vgl. Pietschmann, 1996, S.17-18)

Natürlich wird hier die Logik stark vereinfacht dargestellt, dennoch ist es wichtig, im Zuge einer Allgemeinbildung die Grundlage der mathematischen Denkweise auch kognitiv zu vermitteln.

Mathematik ist „jene Disziplin, die sich nichts anderes überlegt, als was alles mit den Axiomen der Logik vereinbart gedacht werden kann.“ (S. Pietschmann, 1996, S.19)

Mathematische Behauptungen können also nur bewiesen werden, wenn sie diese Axiome erfüllen. Es gibt drei Arten von Beweisen: Den direkten, den indirekten und den Beweis durch vollständige Induktion. (Vgl. Pietschmann, 1996, S.19 ff.)

Der direkte Beweis benötigt lediglich die Eindeutigkeit der Begriffe und Widerspruchsfreiheit.

Kommen wir z.B. zu unendlichen Mengen, so benötigen wir den indirekten Beweis: Auch hier wird zuerst die Eindeutigkeit der Begriffe geklärt (1. Axiom) und danach mittels doppelter Negation die Behauptung des Gegenteils als falsch gezeigt. Nach dem 3. Axiom muss also, da es keine dritte Möglichkeit gibt, unsere ursprüngliche Behauptung richtig sein.

Die spezielle, auf die Mathematik beschränkte Form der „Vollständigen Induktion“ ist eine der Logik genügende Schlussform (im Gegensatz zur Induktion der Erfahrungswissenschaften, die ja einen logisch unzulässigen aber notwendigen Schluss vom Einzelnen auf das Allgemeine führen), auf die aus Platzgründen nicht im Einzelnen eingegangen wird.

1.2 Lernen

Der Begriff des Lernens ist ein vieldiskutierter. In der Neurologie ist „das Verknüpfen von zwei verschiedenen bekannten Reizen für eine längere Dauer“ (s. Gruber, 2004, S.103) bzw. jede relativ stabile „Veränderung einer Verhaltensweise ein Lernprozess“ (s. Gruber, 2003/4, S.68). In der Psychologie wird „Lernen als auf Erfahrung beruhende relativ permanente Veränderung im Verhalten oder im Verhaltenspotential“ (s. Zimbardo, 1992, S.227, 265) definiert. Unter anderem vertrat John Locke (1632-1704) die Ansicht, dass Erkenntnis durch die Verbindung von Ideen, die ihren Ursprung in sensorischen Informationen aus der Umwelt haben, entstehe. Oft kann man Lernen an Verbesserungen der Leistung beurteilen, doch muss man auch bedenken, dass Prüfungsangst oder äußere Einflüsse diese verändern kann. Motivation ist ein ausgesprochen wichtiger Faktor.

Die Einsicht, das plötzliche Verständnis von Zusammenhängen, hängt nicht nur von der intellektuellen Kapazität, sondern auch davon ab, ob Beziehungen zwischen den Bestandteilen eines Problems überhaupt entdeckt werden können.

(Vgl. Zimbardo, 1992, S.228 ff.)

Regellernen, welches gerade in der Schule (oft auch aus Zeitgründen) häufig Verwendung findet, befähigt uns zu erkennen, wann Instruktionen, die uns in Situationen leiten, die wir nie selbst beobachten konnten, relevant sind. (Vgl. Zimbardo, 1992, S.264-267) In der Schulmathematik muss immer abgewogen werden, ob der Zeitaufwand für den Beweis eines Satzes gerechtfertigt ist, auch kann mancher Beweis den Wissensstand eines Schülers überfordern. Dies impliziert natürlich, dass der axiomatische Zugang durchaus auch seine Berechtigung hat.

Wichtig erscheint mir in Hinblick auf die Beurteilung der Zugänge zur Differenzialrechnung die Effektivität des Lernens:

Die Größe der Lernschritte soll möglichst der aufnehmbaren Informationsmenge entsprechen. Neues muss in bereits vorhandenes Wissen und Verständnis eingebettet werden.

Darbietung, Erarbeitung und selbstständige Entdeckung sollen sachgerecht kombiniert werden.

Das Gelernte soll wiederholt, übertragen und angewandt werden. (Vgl. Olechowski, 1991, S.1)

Die Wirksamkeit wird auch gesteigert, wenn der Schüler aktiver Teilnehmer am Prozess ist und nicht nur „Zuschauer“. (Vgl. Olechowski, 1991, S.5)

Da nach dem Gesetz von Ebbinghaus (vgl. Olechowski, 1994, S.2) die benötigte Lernzeit bei Vergrößerung der Stoffmenge unverhältnismäßig ansteigt, sollten die Lernschritte überschaubar bleiben. Dem Vergessen des Gelernten kann man mit ständigen Wiederholungen, aber auch durch Bezug zum Alltag, klarer Sinngebung und Überblick über das zu lernende Gebiet entgegenwirken. (Vgl. wikipedia, 2014, Vergessenskurve)

Lernen durch Verstehen und Strukturieren kann man in 3 Arten unterteilen: Blockbildung, Bildung von Oberbegriffen und Auffinden von Regeln. Hier kommt es zu Lernplateaus, d.h. ein Bremseffekt nach anfänglich guten Erfolgen, wenn elementare Fähigkeiten noch nicht ausreichend beherrscht werden. (Vgl. Olechowski, 1994, S.11-13)

1.3 Bildung als Hintergrundwissen

In diesem wie auch dem nächsten Kapitel (1.4) wird die Sinngebung der Mathematik als schulisches Unterrichtsfach im Allgemeinen diskutiert, um dann in den späteren Kapiteln anhand dieser Vorgaben die einzelnen Zugänge bewerten zu können.

Eine Frage, die wir uns hier stellen wollen, ist, was Mathematik für Menschen bedeuten kann (im Sinne eines Denkwerkzeuges, der vordergründige Nutzen wird im folgenden Kapitel analysiert).

„Für Nichtmathematiker soll Mathematik zu einem Denkwerkzeug werden. Mathematik wird in außermathematische bzw. in nicht rein innermathematische Situationen hineingedacht, um Beurteilungs- und Entscheidungshilfen zu gewinnen. Im Allgemeinen ist nicht zu erwarten, dass damit alles Wesentliche der Situation erfasst wird.“ (S. Führer, 1997, S.72)

Mathematik lehrt (universelles) Strukturdenken, um Übersicht und Klarheit in den verschiedensten Wissensgebieten zu erlangen. Dadurch soll man auf das technisch-abstrakte Gefüge einer hoch spezialisierten Arbeitswelt vorbereitet werden. Solch eine Bildung ist auch gut für die persönliche Entwicklung jedes Menschen. Man lernt dabei sachlich zu argumentieren, was man sogar als Vorbedingung für ein demokratisches Verständnis betrachten kann. (Vgl. Führer, 1997, S.73-81)

Verschiedene Herangehensweisen an die Stoffgebiete können all dies mehr oder weniger akzentuieren.

Lutz Führer wirft die Normenfrage auf: „Was kann und soll der Mathematikunterricht zur allgemeinen Bildung und Erziehung beisteuern?“ Er behauptet, dass dieses Problem zugleich gelöst werden muss, aber nicht allgemein lösbar ist. Es kann nur approximativ, lokal und temporär gelöst werden. Er zählt einige „fundamentale Ideen“ auf, d.h. Konzepte, die (vgl. Führer, 1997, S.84, dieser fasst Schweiger, 1992, S199-214 zusammen) zu Fragen beitragen, was Mathematik überhaupt bedeute, im alltäglichen Denken als Archetyp aufscheinen, Probleme durchsichtiger machen und die wesentlichen Inhalte bündeln:

Funktionale Variation (z.B. Termumformungen, Relativierung)

Induktion

Approximation (z.B. Schätzen, Modellcharakter der Mathematik in Anwendungen)

Algorithmisierung (z.B. Rekursion)

Symmetrie (z.B. Mittelwerte)

Der Mathematikunterricht sollte nach dem Spiralprinzip um einige Grundgedanken zentriert werden, um diese dann dem Schüler mit der Zeit immer bewusster und in ihrer Vielschichtigkeit deutlicher zu machen. (Vgl. Führer, 1997, S.81-89)

Nicht zuletzt sollten wir die sprachliche Schulung nicht vergessen, die mit mathematischer Bildung einhergeht. Genauigkeit in der Formulierung, aber auch Abstraktion in der Umgangssprache und natürlich auch das sachbezogene Ausdrucksvermögen werden gefördert.

Der Schüler soll lernen, Fragen zu stellen und auch Fragestellungen exakt zu verstehen und zu formulieren, damit eine Antwort überhaupt erst möglich wird. (Vgl. Führer, 1997, S.89-99)

„Die Mathematiker sind eine Art Franzosen; redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsbald etwas ganz anderes.“

(S. Führer, 1997, S.110, dieser zitiert J.W. Goethe, Gespräche mit Eckermann, 2.6.1823)

In gewisser Weise ist Mathematik eine eigene Sprache, die erst gelernt und immer wieder geübt werden muss. Des Weiteren „kanalisiert Mathematik nicht nur Sprech- und Denkweisen, sondern auch Wahrnehmungen und Perspektiven.“ (S. Führer, 1997, S.99)

„Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.“ (S. Führer, 1997, S.110, dieser zitiert A. Einstein, Geometrie und Erfahrung, Vortrag an der Preußischen Akademie der Wissenschaften, 27.1.1921)

Eine Dualität zeigt sich, wenn man die erstaunliche Gewissheit mathematischer Erkenntnisse im Verhältnis zur Relativität praktischer Anwendungen bedenkt:

„Mathematik ist nicht nur kreatives Problemlösen, sondern ein Beitrag zur Entwicklung eines humanen, nicht abergläubischen Verhältnisses der Menschen zur Wirklichkeit. Ein solches Verhältnis ist darauf angewiesen, dass in der Gesellschaft eine inhaltliche und persönliche Beziehung zum Wissen verbreitet ist. Wir erleben, wie durch die Formalisierung und Mathematisierung des Wissens und durch die darauf aufbauende Funktion der elektronischen Medien eine Disproportionalität entsteht, bei der die Konzentration auf hochtechnologische Spitzenleistungen im Bereich der Wissensentwicklung und Kommunikationstechnologie einhergeht mit einer verbreiteten Ignoranz und Beziehungslosigkeit gegenüber dem Wissen.“
(S. Führer, 1997, S.107, dieser zitiert Michael Otte, 1994)

Daraus können wir schließen, dass es nicht ausreicht, Mathematik durch anwendungsorientierten Unterricht zu motivieren, sondern sich auf ihre begriffs- und theorienbildende Kraft zu besinnen.

In diesem Sinne ist es also wichtig, mathematische Zugänge zu Problemen in der Schule auf ihre Durchsichtigkeit in Bezug auf die dahinter stehenden Denkweisen zu untersuchen.

1.4 Bildung als Vordergrundwissen

(Vgl. Führer, 1997, S.110-127)

Nun wollen wir uns der zweiten großen Motivation für den Mathematikunterricht zuwenden. Wieder werden wir Grundlagen schaffen, um in den folgenden Kapiteln die Zugänge zur Differenzialrechnung zu durchleuchten und zu beurteilen.

„Mathematik ist das Alphabet, mit dessen Hilfe Gott das Universum beschrieben hat.“
(S. Führer, 1997, S.110, dieser zitiert G. Galilei, 1632)

Kaum jemand stellt heute die Forderung nach Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht in Frage. Doch was bedeutet dies wirklich?

Mathematik wird als Werkzeug für konkrete Probleme (z.B. in der Physik) betrachtet, dies bringt auch eine Motivation durch „Lebensnähe“ mit sich.

Das ist natürlich richtig, doch darf man nicht vergessen, dass die Beispiele in der Schule meist starke Vereinfachungen darstellen und mit der Realität etwa so viel zu tun haben, wie die Marx'sche Wirtschaftstheorie. (Vgl. Führer, 1997, S.111-113) Das schmälert allerdings nicht die Bedeutung der Anwendungen, da man den Bezug auf konkrete Probleme damit dennoch aufzeigt. Es gilt natürlich, Vorsicht vor „Scheinbeispielen“ walten zu lassen.

Auch stellt sich die Frage, ob das „Arbeiten nach Rezept“, das reine Rechnen im Gegensatz zur Mathematik, zu rechtfertigen ist, selbst wenn man argumentiert, dass gewisse Rechenarten zur Allgemeinbildung gehören.

Die Schulausbildung soll auf ein Studium oder Berufsleben vorbereiten, d.h. die dafür nötigen Fertigkeiten lehren. Doch die später verlangten Stoffgebiete können sehr variieren. Wie soll man alle Gebiete abdecken? Dies ist aus Zeitgründen unmöglich. Welche Gebiete soll man nun vertiefen oder kürzen?

Die sinnvollste Lösung ist, die Anwendungen auf Zeitgemäßheit zu untersuchen. So ist z.B. Überschlagsrechnen seit der breiten Einführung des Taschenrechners noch wichtiger geworden, als es bereits davor war. Auch das Verständnis der Fehlerrechnung wird immer bedeutender, da die Genauigkeit in der Praxis mehr von Messungen, denn von Rechnungen abhängt.

Abschließend ist die Überprüfung der Anwendungsorientierung von Kapiteln nicht so einfach, wie es den Anschein hat. Doch gerade aus diesem Grund wurde für diese Arbeit die Differenzialrechnung gewählt, da ihre Anwendung, sowohl in der Physik, als auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, weitgehend als wesentlich angesehen wird. Umso wichtiger ist es, die verschiedenen Einführungen nach eben diesen Grundsätzen zu untersuchen.

2. Didaktische Prinzipien

Neben den allgemeinen Prinzipien ist die Tauglichkeit der verschiedenen Einführungen im Hinblick auf didaktische Methoden zu überprüfen. Hierfür müssen wir zuerst die Grundlagen schaffen und die wichtigsten Prinzipien betrachten.

Im Gegensatz zu den in Kapitel 1) besprochenen allgemeinen Prinzipien, die man in vielen Fällen auch als Lernziele bezeichnen könnte, wurden die didaktischen Prinzipien entwickelt, um mögliche unterrichtsmethodische Grundauffassungen zu charakterisieren. Diese geben Regeln vor, um im Unterricht möglichst optimale Lernbedingungen zu schaffen und damit auch Lernerfolge zu erzielen (welche natürlich von dem zugrunde liegenden didaktischen Prinzip abhängig sind).

Es geht im Folgenden nicht um klare Trennlinien zwischen den einzelnen Prinzipien, da die Praxis meist Mischformen hervorbringt. Außerdem ist die Variation der Prinzipien für einen guten Lehrer unumgänglich. (Vgl. Hauer-Typelt, 1998, S.118)

An Hand von vorab festgelegten Kriterien kann man zu einer möglichst objektiven Beurteilung der verschiedenen möglichen Zugänge zur Differenzialrechnung kommen. Man kann (im Gegensatz zu den allgemeinen Prinzipien in Kapitel 1)) durchaus unterschiedlicher Meinung sein, welches der folgenden didaktischen Prinzipien besser für den Unterricht geeignet sei. Es soll hier auch keine Methode bevorzugt, sondern nur aufgezeigt werden, bei welchem Zugang welche Methodik didaktisch umsetzbar ist.

2.1 Allgemeines zur Mathematikdidaktik

Die Mathematikdidaktik ist die Lehre vom Lehren und Lernen mathematischer Inhalte.

Die Aufgaben des Mathematikunterrichts werden von Heymann in folgende Bereiche unterteilt (vgl. wikipedia, 2014, Mathematikdidaktik):

-) Lebensvorbereitung, d.h. Schüler sollen elementare Anwendungen und auch Mathematik im Alltag kennen lernen.
-) Stiftung kultureller Kohärenz, d.h. Verständigung zwischen Generationen soll möglich bleiben, auch Eltern möchten noch die Mathematik ihrer Kinder verstehen. Außerdem sollen die Jugendlichen den Mathematikunterricht als Teil einer gewachsenen Kultur begreifen.
-) Weltorientierung, d.h. die Schüler sollen einen Überblick erhalten und auch die Einsicht, dass, auch wenn Mathematik im Alltag vielleicht nicht ständig vorkommt, ohne sie unsere Sicht der Welt nicht möglich wäre.
-) Anleiten zum kritischen Vernunftgebrauch, d.h. vernünftiges Argumentieren, Begründen, aber auch Anzweifeln soll gelernt werden.
-) Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft, d.h. die Jugendlichen müssen sich ihrer Kompetenzen und ihrer Verantwortung für sich und andere bewusst werden. Dieser Punkt ist meiner Meinung nach am schwersten einzubringen und nachzuprüfen.
-) Einübung von Verständigung und Kooperation, d.h. gemeinsames erarbeiten von Erkenntnissen durch Schüler und Lehrer
-) Stärkung des Schüler-Ichs, d.h. das Selbstbewusstsein soll gestärkt werden, dazu zählt auch der Mut, Fragen zu stellen.

Diese Bereiche können uns nun eine erste Orientierung ermöglichen.

Die folgenden Unterkapiteln werden auf die wichtigsten Prinzipien der Mathematikdidaktik eingehen und diese kurz erläutern.

2.2 Fragend-entwickelnder Unterricht und Mäeutik

Als fragend-entwickelnden Unterricht bezeichnet man das didaktische Prinzip des Herausarbeitens von Erkenntnissen im Gespräch. Man knüpft ergebniszentriert an Bekanntes an. Dies geht auf die Mäeutik (auch: Maieutik; griech. „Hebammenkunst“) zurück, wie Platon Sokrates' Gesprächsführung bezeichnete. Platon schrieb seine Philosophie hauptsächlich in der Form von Dialogen mit Sokrates nieder. (Vgl. Platon, 1997, S.38-41, S.119-169 u.A.)

Im Menon-Dialog (vgl. Platon, 1997, S.38-41, S.119-169) will Sokrates dem Menon zeigen, dass jeder über Neues richtig und falsch urteilen kann. Er befragt den Sklaven des Menon nach einem mathematischen Problem (die Seitenlänge eines Quadrats doppelter Fläche), worauf dieser zwar (erwartungsgemäß) falsch antwortet, aber durch Sokrates' Fragen zu Widersprüchen und im Endeffekt zur richtigen Erkenntnis hingeführt wird. Der Fragende gibt Unwissenheit vor, stellt aber gezielte Fragen, in denen die Antwort bereits verborgen liegt. Die Beteiligten werden in den Dialog miteinbezogen, so dass sie selbst zu Erkenntnissen gelangen. (Vgl. Führer, 1997, S.47)

Zuerst wird der Standpunkt des Gesprächspartners hinterfragt und dieser zu Widersprüchen (Aporien) geführt. Dadurch wächst die Bereitschaft zur Suche nach der wahren Erkenntnis, welche sich durch die Begutachtung weiterer Ideen zeigt.

Sokrates zieht daraus den Schluss, da die Fähigkeit, auch bei Neuem richtig und falsch zu beurteilen existiere, die Kenntnis des Richtigen vorausgesetzt werden kann, also nicht Neues gelernt werden kann, sondern es sich nur um eine (unterbewusste) Wiedererinnerung, Bewusstmachung des Wahren handelt. Der Schüler lernt also nicht vom Lehrer, sondern aus sich selbst. Der Lehrer ist also nichts anderes, als ein „Geburtshelfer des Wissens“.

(Vgl. Führer, 1997, S.47, Pietschmann 1997, 31.10.1997)

Im Unterricht bedeutet dies, dass der Lehrende durch sparsame Fragen, Einwände und Hinweise das Verständnis fördert, dem Schüler hilft, selbst Lösungen und Urteile zu finden, anstatt nur die Sache selbst zu lehren (Frontalunterricht). Er deckt Vorurteile, Unschärfen und Unwissen auf.

Die Mäeutik wird seit dem 18. Jahrhundert zum Vorbild für den Unterricht genommen, die Methode wird fragend-entwickelnder Unterricht genannt. (Vgl. wikipedia, 2014, Mäeutik)

2.3 Das genetische Prinzip

„Die Echtheit des mathematischen Unterrichts ... beginnt also genau dort, wo wirkliche Mathematik ihren Ursprung hat: Bei den Fragestellungen. Sind diese dem Schüler erst einmal zum Erlebnis geworden, so muss er sich mit ihnen in wahrhaft mathematischer Weise auseinandersetzen. Sie müssen – so elementar sie auch sein mögen – zum Gegenstand authentischer mathematischer Tätigkeit werden. Es muss sich also an ihnen dasjenige vollziehen, was für die Mathematik, wie für jedes wissenschaftliche Tun, charakteristisch ist, was aber für die Mathematik in der Schulstube vollumfänglich erfahren werden kann: Das allmählich zielsicher und zweckmäßig werdende Ringen des Geistes um seinen Gegenstand – die anfängliche Hilflosigkeit, die allmähliche Einsicht, das plötzliche Verstehen, das Ahnen verborgener Zusammenhänge, der verfängliche Irrtum, der scheinbar viel versprechende aber irreführende Versuch, die verführerische Verallgemeinerung,

das Erlebnis des zunächst Unbegreiflichen, das unüberwindlich Schwierige, das Selbstverständliche, die Entlarvung des nur scheinbar Selbstverständlichen; das Schmieden zweckmäßiger geistiger Werkzeuge, das Prägen adäquater Begriffe, das schöpferisch-kritische Neudurchdenken des bereits Erreichten; das allmähliche Zustandekommen des Überblicks, die Schaffung einer folgerichtigen, systematischen, in sich verhältnismäßig geschlossenen Theorie; das allmählich erstarkende Erleben des Besitzes geistiger Macht, die Fähigkeit zu eigener Einsicht im eigenen Denken. All das muss im Studium des Schülers zur Wirklichkeit werden, wie es im Tun des schöpferischen Mathematikers Wirklichkeit ist. Dann wird jenes Studium dem Ziel gerecht werden, den Schüler erfahren zu lassen, was Mathematik wirklich ist.“

(S. Führer 1997, S.56-57, dieser zitiert A.I. Wittenberg, 1963, S.60 f.)

Das genetische Prinzip ist heute kaum mehr aus dem Mathematikunterricht wegzudenken. Im Gegensatz zu den Prinzipien im vergangenen Kapitel (2.1) stellt der genetische Unterricht die Entwicklung (Genese) der Theorie über die Ergebnisse. Verstehen ist wichtiger als „Wissensansammlung“, denn Verständnis ist Menschenrecht und Menschenpflicht. (Vgl. Führer, 1997, S.46-57) Wessen Wissen nicht durch den Prozess des Erarbeitens verankert ist, dem bleiben die Ergebnisse fremd und flüchtig. „Nacherfindung“ unter Ideen fördernder (heuristischer) Führung erhöht das Interesse des Schülers.

Folgende Dinge sind beim genetischen Unterricht zu beachten (vgl. Malle, 2004, 31.3.2004):

-) Jeder Schritt muss sich aus dem vorangegangenen zwanglos ergeben.
-) Der Sinn jedes Schrittes muss eingesehen werden.
-) Es soll an das Vorwissen des Schülers angeknüpft werden.
-) Das Vorgehen muss „intellektuell ehrlich“ sein, d.h. Vereinfachungen dürfen nicht den Stoff verfälschen.
-) Begriffe und Theoreme sollen dem Lernenden nicht auf den Kopf geknallt werden, sondern aus Problemstellungen heraus entwickelt werden.
-) Begriffe und Theoreme sollen erst dann, wenn man sie braucht, eingeführt werden.
-) Aus Problemlösungen sollen möglichst wieder Problemstellungen entwickelt werden.
-) Verallgemeinerungen sollen schrittweise erfolgen.
-) Die Darstellung darf keine Sprünge aufweisen, da diese das Verständnis erschweren.

2.4 Das Spiralprinzip

Hier sollen Stoffinhalte immer wieder „spiralartig“ zurück zu Bekanntem geführt, aber auch erweitert und vertieft werden. Die „fundamentalen Ideen der Fachgebiete“ sollen altersgemäß immer wieder neu aufgegriffen, variiert und umformuliert werden, um die erworbenen Konzepte besser verstehen zu lernen und im Gedächtnis zu behalten. Bruner führte dieses Prinzip ein, welches auch unter dem Begriff „Prinzip der immanenten Wiederholung“ in den Lehrersprachgebrauch eingegangen ist. (Vgl. Führer, 1997, S.57-64)

„1. Das ‚Prinzip der immanenten Wiederholung‘ hat sich als Stoffreduktionsprinzip der Lehrplan- und Lehrgangskonstruktion bewährt. Dabei ist vorausgesetzt, dass das Auswahlproblem für exemplarische Lehrgegenstände anderweitig sinnvoll entschieden wurde.

2. Mit dem ‚Spiralprinzip‘ sollten aber nicht nur besonders bedeutende Stoffe, sondern auch wenige, ausgewählt lohnende Frageweisen, Strategien, Heuristiken und Methoden der Begriffsbildung entfaltet, bewusst gemacht, vertieft und verankert werden, die vernünftigerweise als fachspezifische oder allgemeine ‚fundamentale Ideen‘ in Frage kommen.“

(S. Führer, 1997, S. 64)

Der Begriff der „fundamentalen Ideen“ wurde ja bereits unter „1.3) Bildung als Hintergrundwissen“ erörtert.

Das „Spiralprinzip“ ist im Speziellen deshalb wichtig, weil die Schüler die mathematischen Grundgedanken (Denkweisen, Grundprinzipien, etc.) verinnerlichen sollen. Dies können sie umso besser, je öfter sie auf Altbekanntes stoßen, dieses dann erweitert besser verstehen lernen, in seiner Vielschichtigkeit bewusster und deutlicher erkennen können.

Auch kann man hier verhindern, in „Sackgassen“ zu landen. Stoffinhalte, die nie wieder aufgegriffen werden, werden von Schülern schnell wieder vergessen, auch fragen sie sich dann immer wieder (nach meiner eigenen Erfahrung in Gesprächen mit Nachhilfeschülern), wozu sie dieses „unnötige Sackgassenwissen denn überhaupt bräuchten, es käme ohnehin nie wieder vor“, was sich natürlich auch negativ auf die Lernmotivation auswirkt. Dies gilt es unbedingt zu vermeiden.

Wir wollen also auch im Weiteren zu beurteilen versuchen, ob wir mit den verschiedenen Herangehensweisen bekanntes Wissen erweitern und vertiefen.

2.5 Linear-sukzessiver Aufbau und operatives Prinzip

Unter linear-sukzessivem Aufbau des Unterrichts versteht man den traditionellen Ansatz, dass die Mathematik als logisch-systematische Wissenschaft nur in einem ebensolchen logisch-systematischen Ablauf des Lernprozesses dargebracht werden kann. Um dies zu erreichen, zerlegt man den Stoff in kleine Stücke oder Lernschritte und isoliert die Probleme.

(Vgl. Hauer-Typelt, 1998, S.118-119)

„Mathematiklernen sei vergleichbar mit dem Ersteigen einer Leiter oder Treppe, bei der man Stufe um Stufe erklimmt, und je kleiner und unmerklicher die Stufen aufeinander folgen, für umso wirksamer hält man die Steuerung des Lernprozesses. Danach wird also ein Lehrstoff in seine Teile zerlegt, diese werden in eine schwierigkeitsgradige und dem logischen Zusammenhang entsprechende Reihenfolge gebracht und schrittweise erarbeitet.“

(S. Hauer-Typelt, 1998, S.119, diese zitiert nach Bauer, 1978, S.34)

Als Kritik an diesem Prinzip kann man einwenden, dass es unweigerlich zu „Vorratslernen“ führt. Dieses wird aber bereits im genetischen Prinzip abgelehnt, wo wir fordern, dass Begriffe erst eingeführt werden, wenn sie wirklich gebraucht werden und nicht zuvor.

Auch kann man anzweifeln, dass der logische Aufbau der Mathematik auch im Lernprozess beibehalten werden muss. Aber eben genau dieser logische Aufbau hilft mit, eines der Grundprinzipien des abendländischen Denkens erkennen zu lernen, die Logik als Denkrichtung!

In einer Gegenbewegung zum linear-sukzessiven Aufbau wurde das operative Prinzip entwickelt, das davon ausgeht, dass man nicht die einzelnen Teile eines Komplexes erfassen kann, ohne gleichzeitig die verbindenden Zusammenhänge zu begreifen. Hierbei bemüht man sich um eine Gesamtbehandlung zusammengehöriger Einheiten unter Einbeziehung von Umkehrungen, Rückblicken und Vergleichen. (Vgl. Hauer-Typelt, 1998, S.119-120)

In einer Synthese dieser beiden Prinzipien sollte man also den logisch-strukturierten Aufbau der Mathematik als Wissenschaft und Ausfaltung der Logik beibehalten und dort wo es sinnvoll ist, in kleine Schritte zerlegen, um Probleme isoliert angehen zu können. Andererseits aber darf der Gesamtzusammenhang nicht aus den Augen verloren werden, man muss im Unterricht auf Sinnzusammenhänge hinarbeiten. Auch nach persönlicher Erfahrung mit Schülern kann nur bestätigt werden, dass das Verständnis der Mathematik durch Erkenntnis von Zusammenhängen deutlich steigt.

2.6 Deduktiver Aufbau

Bei diesem Ansatz wird noch wesentlich stärker als beim Prinzip des linear-sukzessiven Aufbaus die Verbindung zur Mathematik als exakte Wissenschaft beibehalten. Die mathematischen Theorien werden in logisch-systematischer Hierarchie über Axiome, Definitionen und Sätze an den Schüler weitergegeben. Alle weiteren Lehrinhalte leitet man als deduktive Folgerungen ab. Die Unterrichtsmethodik ergibt sich hier aus streng logischen Aspekten. (Vgl. Hauer-Typelt, 1998, S.124)

Man kann hier argumentieren, dass es sich nicht um ein eigentliches didaktisches Prinzip handelt, jedoch ist der deduktive Aufbau in Universität und Schule weit verbreitet, und hat auch viele Vorteile zu bieten: Man strebt nach möglichst großer Allgemeingültigkeit, expliziter und präziser Begriffsklärung und passender und sorgfältiger Bereitstellung von später benötigten Mitteln. Dem Schüler liegt der Stoff in eleganter, fertiger Form vor. Keine andere Methode schafft es in der Mathematik mit weniger Zeit und Aufwand das gleiche fachliche Ziel zu erreichen. (Vgl. Hauer-Typelt, 1998, S.125)

In vielen Fällen ist dieses Prinzip nicht wegzudenken, das theoretische Wissen wird in relativ kompakter Form dargeboten. Man kann sich danach um das handwerkliche Können kümmern, sei es beim Lösen von Gleichungen oder bei den Grundrechnungsarten. Bevor man ein Haus bauen kann, muss man zuerst lernen, einen Nagel einzuschlagen.

Auch auf Hochschulebene ist das deduktive Prinzip nicht wegzudenken, was alleine die Einführung dieser Methode auch in der Schule nötig macht, da diese ja auf die Universität vorbereiten soll.

Jedoch ist auch hier, wie im vorigen Kapitel die Kritik am „Vorratslernen“ angebracht. Es stellt sich hier die Frage, ob bei strikter Einhaltung des deduktiven Aufbaus in der Praxis der Schüler nicht eher zum „Auswendiglernen“, als zum Verständnis geführt wird.

Vier Hauptkritikpunkte lassen sich weiters zusammenfassen:

(S. Hauer-Typelt, 1998, S.126-127)

- „1) Mathematische Ideen lassen sich prinzipiell nicht richtig verstehen und erlernen, wenn sie nach einer streng logisch-systematischen Hierarchie als Fertigfabrikat präsentiert werden.
- 2) Die tatsächliche Vorgangsweise in der Mathematik als Wissenschaft und damit Forschungsfeld ist keineswegs immer nach logisch-systematischen Gesichtspunkten ausgerichtet, sondern vielmehr auf Tätigkeiten wie Vermuten, Experimentieren, Abändern, Prüfen, Zurückgehen aufgebaut. Diese heuristischen Aktivitäten werden bei einer deduktiven Vorgehensweise vollkommen ausgeklammert.
- 3) Entsprechend vollzog sich auch der geschichtliche Werdegang der Mathematik nicht nach einem deduktiv-axiomatischen Schema.
- 4) Auf Stadien der Denkentwicklung oder Beziehungen der Mathematik zu sonstigen Interessen der Lernenden wird kein Bezug genommen.“

2.7 Problemlösen im Mathematikunterricht

Eine noch nicht besprochene, aber dennoch wichtige Fragestellung ist, ob der Unterricht eher schüler- oder lehreraktiv sein soll.

Erhöhte Schüleraktivität beinhaltet über das passive Zuhören hinausgehende selbstständige Denkleistungen und Tätigkeiten. Dies könnte man auch als „entdeckendes Lernen“ im Gegensatz zum „rezeptiven Lernen“ bezeichnen. Diese Strategie erhöht die Motivation der Schüler und die allgemeine Problemlösebereitschaft.

Auch wird der Stoff dadurch besser verstanden und im Gedächtnis behalten. Dadurch, dass die Schüler ja selbst auf die Lösung bestimmter Probleme gekommen sind, steigt auch ihre Fähigkeit, bereits Gelerntes auf neue Situationen zu übertragen. Die erlernten Techniken des Problemlösens lassen sich auch in vielen außermathematischen Bereichen anwenden, was die Bedeutung der Mathematik im „richtigen Leben“ unterstützt.

Weiters trägt diese didaktische Methode der Kreativität und dem Ideenreichtum der Lernenden Rechnung. (Vgl. Hauer-Typpelt, 1998, S.130-136) Am meisten lernt man durch eigenes Entdecken, vor allem durch eigene Fehler.

„„Cuius vis hominis est errare, nullius nisi insipientis in errore perservare.“ (Cicero, Philipinische Reden 12/2), was in etwa bedeutet, dass es dem Menschen zu eigen ist zu irren, aber nur der Dumme im Irrtum verharrt.“ (S. Hanisch, 1998, S.48)

Hanisch ermutigt dazu, Fehler zuzulassen, da sie das Lernen fördern. Es ist sinnvoll, bereits bei der Erklärung des Lehrstoffes auf mögliche Fehler hinzuweisen, aber auch Fehler publik zu machen, offen anzusprechen. Für Letzteres ist es aber notwendig, ein „positives Fehlerklima“ zu schaffen, da diese Vorgehensweise sonst verletzend für die angesprochenen Schüler ist. Lehrer müssen aus Fehlern Lernsituationen statt Stresssituationen schaffen. Das Motto sollte „Erkenne Dich selbst“ sein, die Schüler sollen angehalten werden, ihre Rechnungen zu prüfen und selbst ihre eigenen Fehler zu erkennen. Auch Lehrer sollen ihre Fehler zugeben, nicht vertuschen. Im Gegensatz zu Fehlern im Straßenverkehr oder in der Medizin sind Fehler bei Mathematikaufgaben harmlos, und eine Chance zum Lernen.

(Vgl. Hanisch, 1982, S.85-87, 1998, S.48-53)

Für einen lehreraktiven Unterrichtsstil spricht, dass dieser mehr Sicherheit, besonders für den Lehrer bietet. Am Ende einer Unterrichtseinheit soll auch ein bestimmtes inhaltliches Ziel erreicht sein, denn ergebnislose Arbeit motiviert weder Schüler noch Lehrer. Natürlich erfordert es einen wesentlich größeren Zeitaufwand, wenn man die Schüler auf ihrem Forschungsweg auch in Sackgassen und Irrwege gelangen lässt, sie selbst Fehler entdecken lässt. Es ist wesentlich ökonomischer, auf den „sicheren Straßen“ der Mathematik zu wandeln, die verfeinerten und bewährten Ideen und Strategien etlicher Mathematikergenerationen an die Schüler weiterzugeben. Die kurzfristigen Lehrziele (Nahziele, fachliche Kenntnisse) werden so wesentlich sicherer und schneller erlangt. Ob man dadurch aber auch langfristige Ziele (eigenständige Denkstrukturen und Problemlösungsstrategien aufzubauen) erfolgreich erreicht, sei dahingestellt.

(Vgl. Hauer-Typelt, 1998, S.131-136)

Im Endeffekt wird es notwendig sein, sich der doppelten Zielsetzung bewusst zu sein, langfristig (durch schüleraktiven Unterricht) kognitive Strategien aufzubauen, aber auch kurzfristig, und da wird an einem eher lehreraktiven Unterricht nichts vorbeiführen, fachspezifische Kenntnisse nahe zu bringen. Ich denke auch, dass hier oft die Grenze verschwimmt, denn wie spezifisch die Hinweise sind, die der Lehrer dem Schüler gibt, damit dieser selbst die Lösung findet, entscheidet, welche Seite aktiver ist.

Dieses Kapitel möchte auch noch auf eine weitere Problematik hinweisen, die Aufgaben, die im Unterricht gestellt werden, selbst betreffend: Die Forderung nach „lebenspraktischen“ Beispielen und Anwendungsorientierung ist eine ausgesprochen wichtige, doch sollte man jede Aufgabe gründlich darauf untersuchen, ob es sich nicht um eine Scheinanwendung handelt. Intellektuelle Ehrlichkeit ist hier gefordert, um Schüler nicht zu demotivieren, wenn man ihnen abstrakte Beispiele als „realistisch“ vorgaukelt.

3. Die Differenzialrechnung im Lehrplan

Ein weiteres, möglicherweise in der Lehrpraxis sogar das wichtigste Kriterium stellt natürlich die Verankerung der Differenzialrechnung im Lehrplan dar. Dieses Kapitel bezieht sich auf den aktuellen österreichischen Oberstufenlehrplan der AHS, den mathematischen Teil des aktuellen HAK- Lehrplanes und den mathematischen Teil des aktuellen HTL-Lehrplanes der höheren Lehranstalt für Chemie, die auch im Anhang beigelegt sind. Zusätzlich soll auch noch ein kurzer Blick auf die historische Entwicklung der Differenzialrechnung im Lehrplan der Schule geworfen werden, zum einen, weil auch ein historischer Zugang betrachtet werden wird, zum anderen, weil gerade im Hinblick auf fächerübergreifenden Unterricht geschichtliche Fakten durchaus zur Allgemeinbildung beitragen.

3.1 Historisches

Die Differenzialrechnung ist (momentan) unbestritten ein wichtiges Teilgebiet der Schulmathematik. Dennoch sollte man immer wieder nach der Bedeutung solcher Teilgebiete für die Bildung junger Menschen suchen. Unter anderem deshalb ist es wesentlich, die Geschichte und Entwicklung von Mathematik und Mathematikunterricht zu betrachten. Auch wenn heute Differenzial- und Integralrechnung eine zentrale Rolle im Lehrplan der Höheren Schulen einnimmt, war das nicht immer so.

1849 wurde Mathematik als Hauptfach in der Mittelschule anerkannt. Der „Entwurf der Organisation der Gymnasien und Realschulen in Österreich“ von Franz S. Exner (1802-1853) und Hermann Bonitz (1814-1888) stellte die Weichen für das Unterrichtswesen Österreichs bis in die heutige Zeit. (Vgl. Kapper, 1998, S.7 ff.)

Die Infinitesimalrechnung wurde in der Schule erst Anfang des 20. Jahrhunderts eingeführt. Bereits im 19.Jahrhundert war dieses Fachgebiet in der Wissenschaft etabliert (1821 lieferte Cauchy die Begründung der Integral- und Differentialrechnung).

(Vgl. Kapper, 1998, S.3, S.82 ff.)

Im Gegensatz dazu gab es massive Bestrebungen, dieses Gebiet vom Unterricht fernzuhalten, ja teilweise geradezu krankhaftes Umgehen des Begriffes „Differenzial“, wobei man andererseits aber nicht auf die Behandlung von gewissen Problemen verzichten wollte, wie z.B. das der Momentangeschwindigkeit. (Vgl. Kapper, 1998, S.3-34)

Als einen der Hauptkritikpunkte führte man die Gefahr der Überbürdung ins Treffen, also die Steigerung des mathematischen Pensums auf Kosten der anderen Fächer. Der Göttinger Mathematiker Felix Klein aber wollte nur „Minderwichtiges durch Wertvolleres ersetzen“. Dieser Gedanke, immer zu prüfen, welcher Zugang zu welchem Problem das beste Ergebnis bringt, ist es auch, welcher dazu drängt, nun verschiedene Zugänge zur Differenzialrechnung im Vergleich zu betrachten. (Vgl. Kapper, 1998, S.35 ff.)

Um die Jahrhundertwende entstanden Reformbewegungen. 1905 arbeitete Felix Klein den berühmten „Meraner Lehrplan“ aus, in dem die Infinitesimalrechnung Beachtung fand. Parallel dazu führten die Bemühungen Alois Höflers in Österreich auch zu neuen Lehrplänen 1908/09. (Vgl. Kapper, 1998, S.76-81)

Allgemein sollten Funktionen nun verstärkt als roter Faden durch die Jahre des Mathematikunterrichtes (zumindest in der Oberstufe) zu finden sein.

Nicht nur die Teilgebiete wurden erweitert, auch die Zielsetzung des Mathematikunterrichts änderte sich: Nicht nur sei „die logische Ausbildung der Schüler der wesentlichste Zweck“, auch eine „Summe bleibenden Wissens und Könnens“ sei zu vermitteln. Also zwei Unterrichtsziele wurden gesteckt: Auf der einen Seite ist abstraktes Denken, auf der anderen praktisches Können gefragt. (Vgl. Kapper, 1998, S.12, S.43, f.)

3.2 AHS

Der Lehrplan (gültig seit 2004) gliedert sich grob in den allgemeinen und den fachspezifischen Teil. Im allgemeinen Teil werden das allgemeine Bildungsziel, die allgemeinen didaktischen Grundsätze und die Schul- und Unterrichtsplanung besprochen. All dies definiert die „Verbindlichkeiten, Verantwortlichkeiten und Freiräume“, die ein Lehrer bei der Umsetzung des Lehrplanes hat.

Das grundlegendste Ziel stellt sicherlich der gesetzliche Auftrag, umfangreiche Allgemeinbildung zu vermitteln und auf die Hochschule vorzubereiten. Das Erste mag bei den einzelnen Zugängen zur Differenzialrechnung schwer zu überprüfen sein, ist aber meiner Meinung nach die wesentlichste und vordringlichste Aufgabe der Schule: Die Vorbereitung auf das Leben. Das Zweite kann in Vergleichen durchaus einfach bewertet werden.

Ob „gender-mainstreaming“ und Integration im Zuge der Differenzialrechnung als Leitvorstellung angesehen werden können, ist zu bezweifeln. Aber die Forderung, Schüler eigene weltanschauliche Konzepte entwickeln zu lassen, sie in ihrer Sinnfindung und Eigenverantwortung zu fördern, kann hier durchaus unterstützt werden. Hierbei wird wieder die in (1.1) behandelte Logik betrachtet: Die dem abendländischen Weltbild zu Grunde liegende Philosophie muss bewusst gemacht werden, um sich mit ihr auseinandersetzen zu können! Auch soll man die fächerübergreifenden Aspekte verstärkt berücksichtigen, was konkret in der Mathematik mit Philosophie (Logik), Geschichte (historische Zugänge und Entwicklung) und natürlich Physik (Anwendungsorientierung) am leichtesten geschehen kann.

Als Aufgabenbereiche der Schule werden genannt:

Wissensvermittlung – die Schüler sollen selbstständig und kritisch Wissen aneignen, sie sollen lernen, Problemstellungen zu definieren und zu bearbeiten.

Kompetenzen – die Schüler sollen auch auf Situationen vorbereitet werden, für die rein abrufbares Wissen nicht ausreicht.

Religiös-ethisch-philosophische Bildungsdimension – zur umfassenden Bildung gehört auch das Kennen lernen verschiedener Denkweisen – wie z.B. der Logik

Die Bildungsbereiche umfassen die Förderung von Kommunikation, Kreativität, Entscheidungsfähigkeit, grundlegendem Wissen und Handlungskompetenz. „Als für die Analyse und Lösung von Problemen wesentliche Voraussetzungen sind Formalisierung, Modellbildung, Abstraktions- und Raumvorstellungsvermögen zu vermitteln.“

In den didaktischen Grundsätzen des Lehrplans wird Anknüpfen an die Vorkenntnisse der Schüler gefordert, sowie auch mehrfach „Förderung durch Differenzierung und Individualisierung“. Gerade Letzteres untermauert die Wichtigkeit, verschiedene Zugänge zu einem Gebiet (in diesem Fall die Differenzialrechnung) durchzudenken und vielleicht sogar, so die Unterrichtszeit es erlaubt, auch verschiedene Zugänge den Schülern nahe zu bringen. Jeder Schüler hat einen individuellen Zugang zum Verständnis, dem nach Möglichkeit Rechnung getragen werden sollte.

Im Mathematikunterricht der AHS-Oberstufe ist die Bildungs- und Lehraufgabe konkret formuliert: „Der Mathematikunterricht soll beitragen, dass Schülerinnen und Schülern ihrer Verantwortung für lebensbegleitendes Lernen besser nachkommen können. Dies geschieht vor allem durch die Erziehung zu analytisch-folgerichtigem Denken und durch die Vermittlung von mathematischen Kompetenzen, die für viele Lebensbereiche grundlegende Bedeutung haben. Beim Erwerben dieser Kompetenzen sollen die Schülerinnen und Schüler die vielfältigen Aspekte der Mathematik und die Beiträge des Gegenstandes zu verschiedenen Bildungsbereichen erkennen. Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts.“

Die Schüler sollen mit mathematischen Inhalten vertraut werden, aber auch die mathematischen Begriffe mit adäquaten Grundvorstellungen verknüpfen. Die Mathematik soll befähigen, dem eigenen Denken mehr zu vertrauen, als fremden Meinungen.

Sie fördert damit das kritische demokratische Verständnis eines mündigen Staatsbürgers, da freie Meinungsbildung nur durch eigenständiges Denken und Hinterfragen entstehen kann.

Dies ist immanent wichtig für einen echten demokratischen Prozess, denn die Entscheidungen der Regierung wollen „geprüft“ werden, eine schweigende Mehrheit würde auch eine Diktatur akzeptieren.

Sie lehrt präzise Ausdrucksfähigkeit und vertieft durch abstraktes Verstehen die Alltagserfahrung. Der Unterricht soll aber auch aufzeigen, dass sie in den verschiedensten Bereichen des Lebens eine wichtige Rolle spielt.

„Einzelne Inhalte und Probleme sind aus verschiedenen Blickwinkeln zu sehen und aus verschiedenen Richtungen zu beleuchten ... die maximale Realisierung [besteht] im konsequenten Herausarbeiten der Vor- und Nachteile verschiedener Zugänge. Damit wird ein vielschichtiges und ausgewogenes Bild der Mathematik gewonnen.“

Besser als mit diesem Absatz aus dem Lehrplan hätte keine Begründung für die vorliegende Diplomarbeit formuliert werden können. Natürlich scheitert dieses Ideal oft an der Praxis (z.B. an Zeitmangel), aber Lehrer haben zumindest die Verpflichtung, die verschiedenen Zugänge durchzudenken und vielleicht im einzelnen Kapitel, wie z.B. hier in der Differenzialrechnung auch ein oder zwei Zugänge in den Unterricht einzubringen.

Der Lehrstoff der AHS sieht die Einführung der Differenzialrechnung für die 7. Klasse vor. Doch bereits in der 5. Klasse werden die Vorbedingungen geschaffen: In dem Gebiet „Zahlen und Rechengesetze“ soll der Schüler mit Näherungswerten umgehen lernen, sowie Terme und Formeln aufstellen, begründen und interpretieren. Auch Funktionen und Geraden werden bereits in diesem Jahr behandelt. In der 6. Klasse begegnen wir bei den „Folgen“ bereits dem Grenzwert, in den „Reellen Funktionen“ wird der Funktionsbegriff vertieft und bereits Monotonie, lokale Extremstellen und der Differenzenquotient eingeführt. In der 7. Klasse können wir also auf einiges an Vorwissen aufbauen.

Die Differenzialrechnung der 7. Klasse sieht nun folgendes vor:

- „-) Definieren des Differenzialquotienten (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate), Deuten dieser Begriffe als Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung, weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen
-) Kennen des Begriffes Ableitungsfunktion, Berechnen von Ableitungen elementarer Funktionen
-) Deuten der zweiten Ableitung in inner- und außermathematischen Bereichen
-) Herleiten von Differentiationsregeln zur Ableitung von Polynomfunktionen, Kennen weiterer Differentiationsregeln (sofern sie für Funktionsuntersuchungen verwendet werden)
-) Untersuchen einfacher und im Hinblick auf Anwendungen sinnvoller Funktionen bezüglich Monotonie und Krümmungsverhalten, Ermitteln von Extrem- und Wendestellen
-) Lösen von Extremwertaufgaben
-) Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differenzialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit
-) Kennen lernen weiterer Anwendungen der Differenzialrechnung“

In der 8. Klasse wird schließlich der Begriff des Differenzials abgerundet, indem der Schüler einen Zusammenhang zwischen Differenzial und Integral herstellt, und auch einfache Differenzialgleichungen lösen können soll.

3.3 HAK + HTL

Der aktuelle HAK-Lehrplan (2006) legt seine Gewichtung auf wirtschaftliche Problemstellungen. Fundiertes mathematisches Grundwissen wird angestrebt, die Anwendbarkeit in der Berufspraxis und an der Universität aber an erste Stelle gestellt.

Auch hier soll allerdings analytisches und abstraktes Denken entwickelt werden.

Der Lehrstoff ist hier wesentlich kürzer gefasst, als Vorbedingung für die Differenzialrechnung wird im 2. Jahrgang der Funktionsbegriff betrachtet, im 4. Jahrgang wird nicht nur die Differenzialrechnung, sondern auch das Integral eingeführt: „Differenzialrechnung:

Grenzwert, Differenzen- und Differenzialquotient, Differenziationsregeln, Funktionsdiskussion, Extremwertaufgaben, Methode der kleinsten Quadrate. Integralrechnung:

Stammfunktion und bestimmtes Integral, Integrationsregeln, numerische Integration“

Auch im HTL-Lehrplan (2006, HL für Chemie, 2008, HL für Elektrotechnik, 2008, HL für Maschinenbau) wird das Hauptaugenmerk auf die Praxis gerichtet, wie sich bereits in der Namensgebung des Faches, „Angewandte Mathematik“, zeigt: Hier ist die Erwähnung des Differenzials noch kürzer, im 3. Jahrgang soll im Zuge der „Analysis“ Differenzialrechnung und Integralrechnung behandelt werden, im 4. Jahrgang kommt es zu Differenzialgleichungen. Im Lehrplan für Maschinenbau ist Mathematik im 5. Jahrgang nicht einmal mehr vorgesehen.

In HTL und HAK ist also weniger Spielraum vorgesehen als in der AHS, d.h. umso wichtiger ist die Wahl des geeigneten Zuganges. Dafür erhalten wir hier die Möglichkeit, Differenzial und Integral bereits von Anfang an im selben Zusammenhang zu erarbeiten.

3.4 Das Kompetenzmodell

Der Begriff der Bildungsstandards hat in den letzten Jahren an Bedeutung gewonnen und so wurden eben diese und das damit verbundene dreidimensionale Kompetenzmodell eingeführt. Die schulische mathematische Grundbildung soll die Fähigkeit umfassen, „die Rolle zu erkennen, die Mathematik in der Welt spielt, mathematisches Wissen funktional, flexibel, algorithmisch und mit Einsicht zu Bearbeitung vorhandener Probleme einzusetzen und begründete Urteile abzugeben.“ (S. Siller, 2014)

Diese Kompetenzen gliedern sich in drei Dimensionen:

- 1) Handlungsdimension („Was wird getan?“) - H
- 2) Inhaltsdimension („Womit wird es getan?“) - I
- 3) Komplexitätsdimension (Schwierigkeitsgrad) - K

Handlungsdimension und Inhaltsdimension gelten als „fachliche“ Dimensionen und gliedern sich wiederum in jeweils 4 Teilkompetenzen, die Komplexitätsdimension in 3.

Die Inhaltsdimension und die Komplexitätsdimension sollen nur kurz erwähnt werden, da diese beiden für die Betrachtungen in dieser Arbeit nur von nebensächlicher Bedeutung sind (die Inhaltsdimension, da das gesamte Kapitel klar in I3 einzuordnen ist, die Komplexitätsdimension, da jede Einführung im Weiteren alle 3 Bereiche umfasst).

Inhaltsdimension (für die Oberstufe):

- I1) Algebra und Geometrie
- I2) Funktionale Abhängigkeiten
- I3) Differential- und Integralrechnung
- I4) Wahrscheinlichkeit und Statistik

Komplexitätsdimension:

- K1) Einsetzen von Grundkenntnissen und Fertigkeiten
- K2) Herstellen von Verbindungen
- K3) Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

(Vgl. Siller, 2014, bifie, 2014)

Von besonderer Bedeutung für meine Betrachtungen ist jedoch die Handlungsdimension, da jeder Zugang auf Stärken und Schwächen hinsichtlich dieser untersucht werden muss:

H1) Darstellen, Modellbilden

„Darstellen meint die Übertragung gegebener mathematisierbarer Sachverhalte in eine (andere) mathematische Repräsentation bzw. Repräsentationsform. Modellbilden erfordert über das Darstellen hinaus, in einem gegebenen Sachverhalt die relevanten mathematischen Beziehungen zu erkennen (um diese dann in mathematischer Form darzustellen), allenfalls Annahmen zu treffen, Vereinfachungen bzw. Idealisierungen vorzunehmen u. Ä.“

(S. Siller 2014)

H2) Rechnen, Operieren

„Rechnen im engeren Sinn meint die Durchführung numerischer Rechenoperationen, Rechnen in einem weiteren Sinn meint regelhafte Umformungen symbolisch dargestellter mathematischer Sachverhalte. Operieren meint allgemeiner und umfassender die Planung sowie die korrekte, sinnvolle und effiziente Durchführung von Rechen- oder Konstruktionsabläufen und schließt z.B. geometrisches Konstruieren oder auch das Arbeiten mit bzw. in Tabellen und Grafiken mit ein.“

(S. Siller 2014)

H3) Interpretieren

„Interpretieren meint, aus mathematischen Darstellungen Fakten, Zusammenhänge oder Sachverhalte zu erkennen und darzulegen sowie mathematische Sachverhalte und Beziehungen im jeweiligen Kontext zu deuten.“ (S. Siller 2014)

H4) Argumentieren, Begründen

„Argumentieren meint die Angabe von mathematischen Aspekten, die für oder gegen eine bestimmte Sichtweise/Entscheidung sprechen. Argumentieren erfordert eine korrekte und adäquate Verwendung mathematischer Eigenschaften/Beziehungen, mathematischer Regeln sowie der mathematischen Fachsprache. Begründen meint die Angabe einer Argumentation(skette), die zu bestimmten Schlussfolgerungen/Entscheidungen führt.“ (S. Siller 2014)

4. Die Differenzialrechnung in der Schule

In diesem Kapitel wird ein Überblick erarbeitet, was in der Differenzialrechnung im Unterricht üblicherweise gemacht wird. Dies ist insofern wichtig, als wir auch beurteilen können wollen, ob ein Zugang schlüssig zu diesen Untergebieten weiterführen kann. Das Kapitel bezieht sich so weit wie möglich auf Definitionen aus Schulbüchern, um den Zusammenhang nicht aus den Augen zu verlieren.

4.1 Vorbedingungen

Als wichtige Vorbedingungen werden Funktionen und zumindest grundsätzlich auch der Grenzwert behandelt.

„Definition: Eine Zuordnung f , die jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ zuweist, heißt Funktion: $y = f(x)$.“ (wobei es sich bei A und B um Mengen handelt) (S. Götz, Reichel, Müller Hanisch, 2006, ML5, S.102)

„Definition: Die Menge der Zahlen, welche die unabhängig-veränderliche Größe x annehmen kann bzw. annehmen soll, nennt man Definitionsmenge D_f der Funktion. Die Menge aller Werte, welche die abhängig-veränderliche Größe y annimmt, nennt man die Wertemenge W_f – kurz W – der Funktion.“ (S. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML5, S.104)

„...Gesetzmäßigkeiten... werden im Allgemeinen durch eine Funktionsgleichung (auch „Zuordnungsvorschrift“ oder „Formel“ genannt) beschrieben. Die unabhängige Variable heißt hier Argument, die abhängige Variable Funktionswert. ... Der Geltungsbereich einer Funktionsgleichung wird durch die Definitionsmenge D_f und die (daraus resultierende) Wertemenge W eingegrenzt. ... Ist es unmöglich oder sehr schwierig, die Wertemenge einer Funktion explizit anzuschreiben, so begnügt man sich damit, eine möglichst einfache, die Wertemenge umfassende Menge anzugeben. Diese Obermenge der Wertemenge heißt Wertevorrat B . Analog gibt man häufig anstelle der Definitionsmenge eine diese umfassende Menge an, den so genannten Argumentevorrat A .“ (S. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML5, S.111)

„Definition: Eine Funktion f , deren Argumente- und Wertevorrat (echte) Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, heißt reelle Funktion.“ (S. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML6, S.228)

Es werden zunächst lineare Funktionen besprochen (deren Bild in einem kartesischen Koordinatensystem eine Gerade ist).

„Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $y = kx + d$ mit $k, d \in \mathbb{P}$ heißt lineare Funktion.“ (S. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML5, S.120) Die Zahl k heißt die Steigung der Funktion. Mit d wird die Strecke zwischen dem Nullpunkt und dem Schnittpunkt der Funktion mit der y -Achse bezeichnet.

Da für uns im Weiteren gerade die Steigung der Geraden (der Tangente) wichtig sein wird, sollten wir darauf besonderes Augenmerk legen.

„Stufenformel: Wächst in einer linearen Funktion $y = kx + d$ das Argument x um 1 (die Stufenbreite), so verändert sich der Funktionswert y um eine konstante Größe k (die Stufenhöhe), genannt Steigung: $y(x+1) = y(x) + k \quad x \in \mathbb{P}$ beliebig; $k \in \mathbb{R}$ fest“

(S. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML5, S.123)

oder auch:

„Satz: Ist f eine lineare Funktion mit $f(x) = kx + d$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}^*$:

$$(1) f(x+1) - f(x) = k$$

$$(2) f(x+h) - f(x) = k$$

$$(3) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \quad (\text{S. Malle, Ramharter, Ulovex, Kandl, 2004, S.124})$$

Nachdem Quadraten noch im selben Jahr behandelt werden, kommen wir zu den für die Differenzialrechnung der Schule wichtigen Polynomfunktionen, die definiert sind als Funktionen der Form:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

(Vgl. wikipedia, 2014, Polynomfunktion)

Der Grenzwert wird für gewöhnlich zuerst für Folgen definiert und erst später auch für Funktionen. Schüler sollten den Begriff des Limes als eine Möglichkeit sehen, mit dem Unendlichen zu rechnen, bzw. sich daran anzunähern. (siehe auch (4.5))

4.2 Differenzenquotient – Änderungsraten

Differenzenquotient ist der erste Schritt, um an das Problem der „Steigung einer beliebigen Kurve“ heranzugehen. Natürlich ist die Steigung nur für eine Gerade definiert, wir können aber etwas Ähnliches betrachten, die mittlere Änderungsrate oder die Sekantensteigung.

„Definition: Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $[a; b] \subseteq A$. Dann heißt die reelle Zahl

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ der Differenzenquotient oder die mittlere Änderungsrate von } f \text{ in } [a; b].\text{“}$$

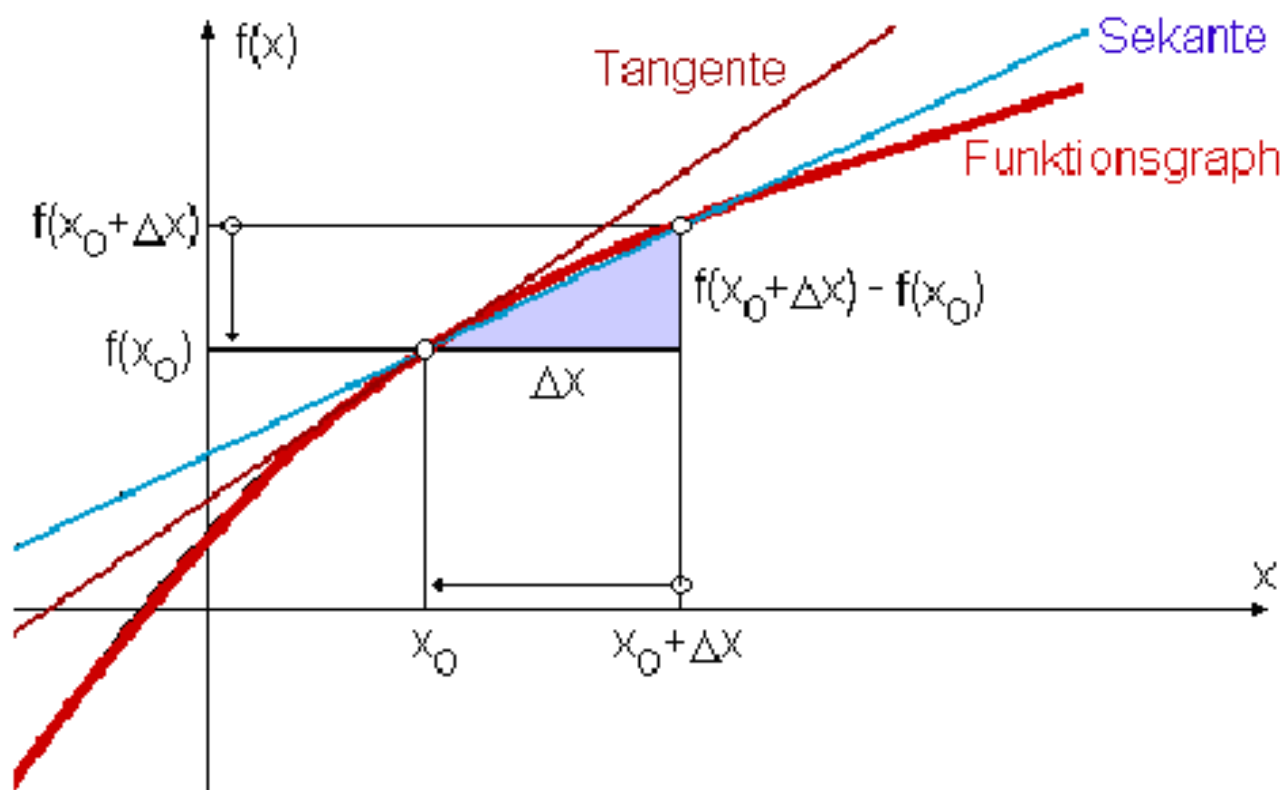
(S. Malle, Ramharter, Ulovex, Kandl, 2007, S.12)

Die mittlere Änderungsrate soll zu einem Grundverständnis werden, in vielen Fällen wird auch das Problem der Momentangeschwindigkeit behandelt, wobei der Begriff der Durchschnittsgeschwindigkeit oder mittleren Geschwindigkeit hiermit in Zusammenhang gebracht wird.

Wir benutzen das griechische Δ als eine kurze Schreibweise für eine Differenz, also z.B. Δx als Differenz zweier x -Werte.

Anders formuliert betrachten wir hier eine

$$\text{Sekantensteigung} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}$$



(S. wikipedia, 2014, Differentialrechnung)

4.3 Differenzialquotient

Damit haben wir aber noch nicht das Problem der Bestimmung der lokalen Änderungsraten, also der Änderungsrate in einem Punkt (die Momentangeschwindigkeit in einem Zeit-Weg-Diagramm), gelöst. Wir können dies auch als „Tangentenproblem“ bezeichnen.

Denn wenn wir Δx so klein machen, dass es praktisch ganz verschwindet, wir uns also nur mehr im Punkt x_0 befinden, so kommen wir rein anschaulich zur Steigung der Tangente in einem Punkt als mittlere Änderungsrate in diesem Punkt.

Das ist aber nichts anderes als mit dem Limes mit $\Delta x \rightarrow 0$ zu gehen:

Der Grenzwert $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ heißt Differenzialquotient der

Funktion f an der Stelle x , Änderungsrate der Funktion f an der Stelle x oder einfach Differenzial. (Vgl. Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl, 2007, S.21-24 und wikipedia, 2014, Differentialrechnung)

Die wichtigste anschauliche Vorstellung des Differenzials soll hier in den Köpfen der Schüler verankert werden, nämlich, dass das Differenzial die Steigung der Tangente in einem Punkt einer Kurve ist. Ohne dieses Verständnis wird es sonst große Probleme mit den folgenden Gebieten geben, außerdem gehört ein gewisses Grundverständnis zur Allgemeinbildung.

Wir können noch einmal zusammenfassen:

„Definition: Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Als Tangente an (den Graphen von) f im Punkt $P(x_0/f(x_0))$ bezeichnet man jene Gerade durch P , für deren Steigung k gilt:

$$k = \tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \text{ (sprich: f Strich bei x Null)}“$$

(S. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML7, S.44)

„Definition: Δy heißt Differenz, dy heißt Differenzial der Funktion f bei x_0 .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ heißt Differenzenquotient von } f \text{ bei } x_0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \text{ heißt Differenzialquotient von } f \text{ bei } x_0.“$$

(S. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML7, S.45)

4.4 Differenzierbarkeit: Grenzwerte, Stetigkeit

Der Begriff der Differenzierbarkeit ist mit dem Grenzwert und der Stetigkeit eng verknüpft, wird aber manchmal in der Schulpraxis gar nicht erwähnt, weswegen diese drei Begriffe auch erst jetzt geklärt werden und nicht schon bei den Vorbedingungen.

„Definition: Sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und p eine Häufungsstelle von A . Die Zahl q heißt Grenzwert von f an der Stelle p , geschrieben $\lim_{z \rightarrow p} f(z) = q$, wenn gilt: Zu jeder Umgebung $U_\varepsilon(q)$ gibt es eine Umgebung $U_\delta(p)$, sodass $f(z) \in U_\varepsilon(q)$ für alle $z \in U_\delta(p) \setminus \{p\}$.“
(S. Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl, 2007, S.109)

„Definition: Eine Funktion f heißt stetig bei x_0 , wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt. Eine Funktion f heißt stetig, wenn sie an allen Stellen x_0 ihres Definitionsbereiches stetig ist.“ (S. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML6, S.238)

„Definition: Als Funktionsgrenzwert von f bei x_0 bezeichnet man den Ausdruck

$$\lim_{(x_n) \rightarrow x_0} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x \pm \Delta x) \quad \text{wobei hier}$$

$\Delta x = |x - x_0|, \quad x \neq x_0$.“ (S. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML6, S.238)

„Definition: Gegeben sei die auf einem offenen Intervall D_f definierte reelle Funktion $f: y = f(x)$. Existiert bei jeder Stelle x_0 des Definitionsbereiches D_f von f der Differenzialquotient, so sagt man: Die Funktion f ist differenzierbar.“ (S. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML7, S.54)

Dies klingt natürlich sehr theoretisch, ist aber für ein grundlegendes Verständnis des Differenzials notwendig. Außerdem bringt es den Schülern die „Sprache Mathematik“ näher.

4.5 Die Leibniz'sche Differenzialschreibweise

(Vgl. Roupec, 1994, S.1 ff., S.23ff., Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML7, S. 42, 45, 62, Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl, 2007, S.28-29)

Bei unendlich kleinen Größen, also wenn z.B. Δx gegen 0 geht (und damit auch Δy) sollten wir nicht mehr im herkömmlichen Sinne von Differenzen reden, und damit auch nicht mehr das Symbol Δ benutzen.

Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) führte für den Differenzialquotienten deshalb die Schreibweise $\frac{dy}{dx}$ oder auch $\frac{df}{dx}$ ein. Dieser Ausdruck kann nicht als Bruch im üblichen Sinne angesehen werden, auch wenn man ihn in vielen Bereichen als solchen auffassen kann. Man sagt deshalb nicht „dx durch dy“, sondern „dx nach dy“.

Es handelt sich hierbei um einen äußerst leistungsstarken, genialen Formalismus, auf den allerdings in der Schule meist nicht weiter eingegangen wird.

Der Vorteil dieser Schreibweise liegt vor allem darin, dass er die ursprüngliche Definition des Differenzials als Grenzwert des Differenzenquotienten immer wieder bewusst macht.

In neueren Lehrbüchern (vgl. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML7, S. 42, 45, 49, 62) wird diese Schreibweise auch immer wieder verwendet, so z.B. in der anfänglichen Definition (S. 4.3), bei der Momentangeschwindigkeit oder auch bei der Kettenregel.

4.6 Ableitungsregeln

(Vgl. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML7, S. 54ff., Kraft, Hruby, Bürger, 1986, S.27f.)

Natürlich genügt es nicht, die theoretischen Grundlagen für das Differenzial zu schaffen, um damit auch praktisch umgehen zu können, müssen wir Rechenregeln aufstellen. Diese können einfach in einem Formelheft nachgelesen werden. Das Schöne an diesem Kapitel ist aber, dass die Schüler nicht nur die Anwendung derselben erlernen, sondern auch viele dieser allgemeinen Regeln selbstständig aus der Definition herleiten können.

Dies soll an Hand eines einfachen Beispieles erläutert werden:

(Vgl. Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl, 2007, S.34)

Nehmen wir eine konstante Funktion: $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$)

Dann ist natürlich auch $f(x_0 + \Delta x) = c$ und $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$

Damit ist das Differenzial von $f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$

Dies ist eine Rechnung, die jeder Schüler nachvollziehen und durchführen können sollte.

Auf ähnliche Art und Weise können dann andere wichtige Rechenregeln eingeführt werden:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(1) Potenzfunktion: $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$)

(2) Winkelfunktionen: $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$

(3) Summenregel: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

(4) Regel vom konstanten Faktor: sei c eine reelle Zahl: $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

(5) Produktregel: $(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$

(6) Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

(7) Kettenregel: $h(x) = g(f(x)) \rightarrow h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Durch Kombination dieser Regeln können die Schüler nun kompliziertere Funktionen ableiten.

4.7 Die Ableitungsfunktion und mehrfache Ableitungen

(Vgl. wikipedia, 2014, Differentialrechnung)

Man kann jedem x aus dem Definitionsbereich von f die Ableitung an dieser Stelle ($f'(x)$) zuordnen. Damit erhält man eine neue Funktion f' , die Ableitungsfunktion, deren Definitionsbereich jene Teilmenge der Definitionsmenge von f ist, wo f differenzierbar ist.

So ist z.B. für die Funktion $f: y = x^2$ die Funktion $f': y = 2x$ die Ableitungsfunktion.

Ist die Ableitung f' einer Funktion f wieder differenzierbar, so lässt sich die zweite Ableitung von f als Ableitung der ersten definieren. $\rightarrow f''(x) = f'(f'(x))$

Auf diese Art lässt sich dann auch eine dritte Ableitung und weitere definieren.

Eine Funktion kann somit mehrfach differenzierbar sein.

In einer grafischen Vorstellung sehen wir die Ableitungsfunktion als eine Funktion, wo die Steigungen der Tangenten in den x -Werten der ursprünglichen Funktion die y -Werte der Ableitungsfunktion darstellen.

Betrachten wir als typisches Beispiel für eine Polynomfunktion (das wir dann auch im folgenden Kapitel (4.8) Kurvendiskussionen benutzen werden) die Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \quad (\text{die schwarze Kurve})$$

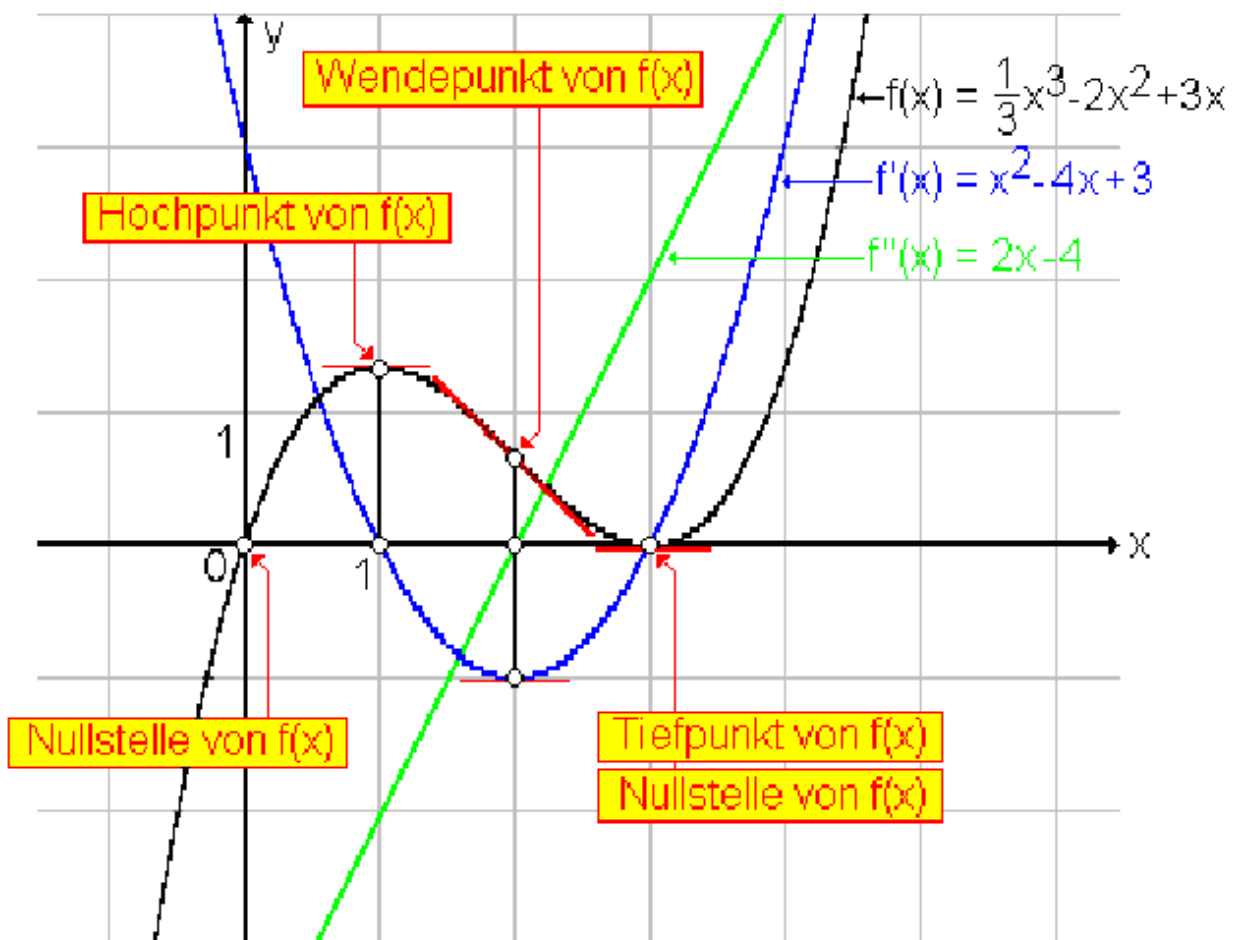
Ihre Ableitungsfunktion ist dann:

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 \quad (\text{die blaue Kurve}):$$

Die zweite Ableitungsfunktion ist dann (die grüne Kurve):

$$f''(x) = 2x - 4$$

(eine Gerade, dies muss aber natürlich nicht bei jeder Polynomfunktion der Fall sein)



(S. wikipedia, 2014, Differentialrechnung)

4.8 Kurvendiskussionen

(Vgl. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML7, S.90 ff., wikipedia, 2014, Extremwert, Differentialrechnung)

Geradezu klassisch und aus dem Unterricht kaum wegzudenken, laufen viele Problemstellungen auf Kurvendiskussionen hinaus, also das Untersuchen von Funktionen und das Erkennen ihrer Eigenschaften.

Dies wird meist zuerst und hauptsächlich an Polynomfunktionen geübt.

Alle folgenden Zusammenhänge werden aus dem obigen Beispiel abgelesen, aber nicht allgemein bewiesen, was in der Schule auch nicht angeraten wird. Diese Zusammenhänge sollten aber dafür für die Schüler klar erkennbar sein. Unter gewissen Voraussetzungen (Differenzierbarkeit von f , Stetigkeit der 1. und 2. Ableitung von f), die bei den in der Schule behandelten Funktionenklassen in deren Definitionsbereich gegeben sind, gelten diese Zusammenhänge.

Welche Eigenschaften einer Kurve erscheinen uns nun wichtig?

Welche Punkte stechen hervor?

Zuerst wird die Definitionsmenge ermittelt, danach werden die Nullstellen bestimmt, d.h. jene Punkte, wo die Kurve die x -Achse schneidet:

„Definition: Jene Argumente x , denen der Funktionwert $y = 0$ zugeordnet ist, heißen Nullstellen der Funktion f (bzw. des Funktionsterms $f(x)$).“ (S. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML5, S.114)

Eine Polynomfunktion n -ten Grades hat höchstens n verschiedene Nullstellen. ($n \in \mathbb{N}$)
(Vgl. Reinhard 1991, S.96)

Als nächstes erscheinen uns die Hoch- und Tiefpunkte (Minima und Maxima), also die Extremstellen wichtig. Damit sind jene Punkte gemeint, wo die Funktion ihre (lokal) höchsten bzw. tiefsten y -Werte haben.

„Definition: Der größte bzw. kleinste Wert der Wertemenge heißt Maximum bzw. Minimum der Funktion.“ (S. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML5, S.104)

Definition: Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. f hat an der Stelle $p \in A$

- 1) ein lokales Minimum, wenn es ein Intervall $I = [a, b]$ gibt, das p enthält, so dass $f(p) \leq f(x)$ für alle $x \in I$ und $x \in A$ gilt.
- 2) ein globales Minimum, wenn $f(p) \leq f(x)$ für alle $x \in A$ gilt.
- 3) ein lokales Maximum, wenn es ein Intervall $I = [a, b]$ gibt, das p enthält, so dass $f(p) \geq f(x)$ für alle $x \in I$ und $x \in A$ gilt.
- 4) ein globales Maximum, wenn $f(p) \geq f(x)$ für alle $x \in A$ gilt.

Wie wir aus der Grafik (zwei Seiten davor) leicht erkennen können, sind die lokalen Extremstellen jene Punkte, wo die Steigung der Tangente in einem Punkt der Funktion $= 0$ ist.

D.h. ist p lokale Extremstelle $\rightarrow f'(p) = 0$

Wie unterscheiden wir nun bei den Extremstellen zwischen lokalem Maximum und Minimum?

Wie wir aus der Grafik erkennen können, ist die Steigung der Tangente der Ableitungsfunktion im Maximum negativ und im Minimum positiv.

Also können wir sagen: Ist die zweite Ableitung der Funktion in einer Extremstelle negativ, haben wir an dieser Stelle ein Maximum, ist die zweite Ableitung in der Extremstelle positiv, so handelt es sich um ein Minimum.

- 1) $f'(p) = 0$ und $f''(p) < 0 \rightarrow p$ ist ein lokales Maximum von f
- 2) $f'(p) = 0$ und $f''(p) > 0 \rightarrow p$ ist ein lokales Minimum von f

In den Extremwerten ändert sich das Monotonieverhalten einer Funktion (welches wir in Bälde betrachten werden).

Betrachten wir nun die Wendepunkte (das Krümmungsverhalten wird danach behandelt):

„Definition: Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Eine Stelle $p \in A$ heißt Wendestelle von f , wenn sich an der Stelle p das Krümmungsverhalten von f ändert. Der Punkt $(p|f(p))$ heißt Wendepunkt des Graphen von f , die Tangente an den Graphen in diesem Punkt heißt Wendetangente.“ (S. Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl, 2007, S.53)

Auch hier können wir bereits wieder aus dem Grafen erkennen, dass im Wendepunkt die Steigung der Tangente der Ableitungsfunktion $= 0$ ist. D.h. p ist Wendestelle $\rightarrow f''(p) = 0$

Zusammenfassung:

„($f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \neq 0$) $\Rightarrow f$ hat bei x_0 ein lokales Extremum

($f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0$) $\Rightarrow f$ hat bei x_0 ein lokales Maximum

($f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0$) $\Rightarrow f$ hat bei x_0 ein lokales Minimum

($f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0$) $\Rightarrow f$ hat bei x_0 eine Wendestelle“

(S. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML7, S.92)

Nun wenden wir uns dem vorher bereits angesprochenen Monotonieverhalten und Krümmungsverhalten einer Funktion zu:

Definition: Eine reelle Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- 1) streng monoton steigend, wenn gilt: $\forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- 2) monoton steigend, wenn gilt: $\forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- 3) streng monoton fallend, wenn gilt: $\forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- 4) monoton fallend, wenn gilt: $\forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Für gewöhnlich betrachten wir die Monotonie in Intervallen einer Funktion. In den Extremstellen ändert sich das Monotonieverhalten, also stellen diese Grenzen der Intervalle dar. In der Grafik sehen wir, dass die Steigungen der Tangenten der Funktion positiv sind, wo die Funktion streng monoton steigt, und negativ sind, wo die Funktion streng monoton fällt.

Also:

Ist $f'(x) > 0$ für alle inneren Stellen eines Intervalls, dann ist die Funktion in dem Intervall streng monoton steigend.

Ist $f'(x) < 0$ für alle inneren Stellen eines Intervalls, dann ist die Funktion in dem Intervall streng monoton fallend.



Rechts gekrümmt



Links gekrümmt

Rein anschaulich kann man die Krümmung leicht erfassen.

Auch das Krümmungsverhalten betrachten wir in Intervallen einer Funktion. In den Wendestellen ändert sich das Krümmungsverhalten, also stellen diese Grenzen der Intervalle dar. In der Grafik sehen wir, dass die Ableitungsfunktion streng monoton steigt, wo die Funktion linksgekrümmt ist, und streng monoton fällt, wo die Funktion rechtsgekrümmt ist.

Also:

Ist $f''(x) > 0$ für alle inneren Stellen eines Intervalls, dann ist die Funktion in dem Intervall linksgekrümmt.

Ist $f''(x) < 0$ für alle inneren Stellen eines Intervalls, dann ist die Funktion in dem Intervall rechtsgekrümmt.

Mit all diesen Erkenntnissen über die Eigenschaften einer Funktion sollten Schüler nun eine gute Vorstellung darüber entwickeln, wie der Graf aussieht. Wir können also aus dem Grafen auf die Eigenschaften einer Funktion schließen und umgekehrt.

4.9 Extremwertberechnungen

(Vgl. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML7, S.137 ff.)

Kurvendiskussionen werden von vielen Schülern oft als ziemlich theoretisch und abstrakt empfunden. Eine etwas lebenspraktischere Anwendung derselben bieten die Extremwertberechnungen. Dabei werden größte (Maximum) und kleinste (Minimum) Werte (von Funktionen) gesucht, wobei meist bestimmte Nebenbedingungen erfüllt sein müssen, ohne die Funktion selbst näher zu diskutieren.

„Beispiel: Ein Landwirt möchte mit 60 Laufmetern Maschendraht einen rechteckigen Hühnerhof an eine Mauer von 40m Länge anbauen. Welche Abmessungen soll er wählen, damit der Flächeninhalt möglichst groß wird?“

(S. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML7, S.141)

Hierbei wird der Flächeninhalt als Funktion in Abhängigkeit der Seitenlänge aufgefasst: Es seien a und b die Seitenlängen des Rechtecks. $A(a, b) = a \cdot b$ Allerdings haben wir in dieser Funktion zwei abhängige Variablen. Durch die Nebenbedingung des Umfanges: $60 = 2a + b$ (da ja an einer Seite (b) bereits Mauer ist, an die angebaut werden soll) substituieren wir $b = 60 - 2a$: $A(a) = a \cdot (60 - 2a) = 60a - 2a^2$.

Nun müssen wir nur mehr mit Hilfe des Differenzials das Maximum dieser Funktion bestimmen und erhalten das Rechteck mit größtem Flächeninhalt bei vorgegebenem Umfang.

$$A'(a) = 60 - 4a ; A''(a) = -4$$

$$A'(a) = 0 \Rightarrow a = 15, b = 30$$

$$A''(15) = -4 < 0 \Rightarrow A \text{ hat bei } a = 15 \text{ ein Maximum}$$

Die Abmessungen 2 Seiten Maschendraht mit 15m, eine Seite mit 30m ergeben also den größten Flächeninhalt des Hühnerhofes.

Dieses Beispiel ist natürlich absichtlich sehr einfach gehalten, jedoch kann man sich vorstellen, dass praktische Aufgaben (z.B. aus Naturwissenschaft, Technik und Wirtschaft) auf ähnliche Art gelöst werden können.

4.10 Zentrale Sätze

(Vgl. wikipedia, 2014)

Zumindest zwei zentrale Sätze der Differenzialrechnung werden üblicherweise in der Schule besprochen. Der Mittelwertsatz (der von Cauchy bewiesen wurde) kommt oft in der 7. Klasse AHS vor, findet aber nach meiner Erfahrung meist keine Anwendungsbeispiele:

„Mittelwertsatz: Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ (mit $a < b$) definiert und stetig ist. Außerdem sei die Funktion f im offenen Intervall (a, b) differenzierbar. Unter diesen Voraussetzungen gibt es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$, sodass gilt.“

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{S. wikipedia, 2014, Differentialrechnung})$$

In der 8. Klasse AHS wird dann im Zuge der Integralrechnung noch der Fundamentalsatz der Analysis betrachtet, der auch jede Menge Anwendung findet. Dieser Satz wird hier erwähnt, da eine der Zugänge die Differenzialrechnung als Umkehrung der Integralrechnung einführt. (S. Kapitel (5.8)): „Die wesentliche Leistung von Leibniz war die Erkenntnis, dass Integration und Differentiation zusammenhängen. Diese formulierte er im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, auch Fundamentalsatz der Analysis genannt. Er besagt:

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in I$ ein beliebiger Punkt, so ist die

Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ stetig differenzierbar, und ihre Ableitung ist $F' = f$.

Hiermit ist also eine Anleitung zum Integrieren gegeben: Wir suchen eine Funktion, deren Ableitung der Integrand ist. Dann gilt: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ “

(S. wikipedia, 2014, Differentialrechnung)

4.11 Weitere Anwendungen

Natürlich kann hier keine vollständige Zusammenfassung der Differenzialrechnung in der Schule gegeben werden. Das Differenzial findet noch in vielen weiteren Gebieten in der Schule Anwendung. Ein paar sollen hier noch kurz erwähnt werden:

-) So wird es in der Physik, bzw. in physikalischen Beispielen in der Schulmathematik verwendet, z.B. bei der Berechnung der Momentangeschwindigkeit.
-) Beim Newton'schen Näherungsverfahren kann man mit Hilfe des Differenzials nicht-ganzzahlige Nullstellen berechnen und dieses Wissen auch benutzen, um beliebige Gleichungen zu lösen.
-) Und letztendlich ist das Integral auch in gewisser Weise eine (durch den Fundamentalsatz mit diesem untrennbar verbundene) Anwendung der Differenzialrechnung.

5. Verschiedene Zugänge zur Differenzialrechnung in der Schule

Nachdem wir nun alle Vorbedingungen betrachtet haben, wenden wir uns nun dem Kernstück dieser Arbeit zu, nämlich verschiedenen Möglichkeiten, wie man das Differenzial in der Schule einführen kann. Einige dieser Zugänge mögen ähnlich erscheinen, sie werden aber getrennt aufgelistet, weil sie unterschiedliche Schwerpunkte setzen.

Es soll hier unbedingt festgehalten werden, dass versucht wurde, möglichst objektiv und ohne persönliche Präferenzen diese Zugänge aufzulisten und zu beurteilen. Auch kann unmöglich eine komplette Auflistung gegeben werden, da es natürlich noch dem Autor unbekannte Zugänge geben kann. Allerdings werden im nächsten Kapitel die (didaktischen) Vor- und Nachteile vieler verschiedener Zugänge aufgezeigt, um damit die Möglichkeit zu schaffen, bewusst auszuwählen, wie man die Differenzialrechnung zu den Schülern bringt. Man kann dieses Kapitel als eine Art „mathematische Speisekarte“ sehen, aus der der geneigte Leser einen oder mehrere Zugänge für seinen Schulunterricht verwenden kann.

5.1 Axiomatischer Zugang: Definitionen und Sätze

Dieser Zugang wird (zumindest in Kombination mit anderen) tatsächlich häufiger verwendet, als viele zugeben wollen. Das Wort „axiomatisch“ mag hier ein wenig irreführend sein, das Differenzial wird rein durch mathematische Definitionen, Sätze und möglicherweise Beweise eingeführt. Es handelt sich um einen „enzyklopädischen“ Zugang.

Zuvor werden systematisch die Vorbedingungen definiert:

„Es besteht eine Relation zwischen den Mengen A und B, wenn die Elemente in ganz bestimmter Beziehung zueinander stehen, diese Beziehung ist im Allgemeinen durch eine mathematische Formel gegeben.“

Eine Relation ist Funktion, wenn jedem Element aus der Menge A genau ein Element der Menge B entspricht.

Eine Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle a einen Grenzwert g , wenn für jede beliebige Zahlenfolge $\{x_1, x_2, \dots\}$ mit dem Grenzwert a auch die entsprechende Folge der y -Werte gegen

einen Grenzwert g konvergiert. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$

Eine Funktion ist an einer Stelle a stetig, wenn der Grenzwert an dieser Stelle existiert und

mit dem Funktionswert b übereinstimmt. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ „

(aus meinem eigenen Schulübungsheft: S. Klein, 1989, 11.1.1989)

Nun kann direkt ohne lange Vorbereitung das Differenzial eingeführt werden. Man unterstützt möglicherweise mit Hilfe von Grafiken, wie sie auch in Kapitel (4) benutzt wurden.

„Gilt für jede Punktfolge $(P_1, P_2, \dots, P_n, \dots)$, für die P_n aus der Kurve K mit

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ist, stets $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta x_n}{\Delta y_n} = A$, dann heißt dieser Grenzwert A

Differenzialquotient oder Ableitung von $f(x)$ in x_0 . [...] Der Differenzialquotient von $f(x)$ in x_0 wird dann definiert als Grenzwert des Differenzenquotienten für $h = \Delta x \rightarrow 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Eine Funktion $f(x)$ ist in x_0 differenzierbar und hat den Differenzialquotienten $f'(x_0)$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle h mit $0 < |h| < \delta$ gilt:

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \epsilon$$

Existiert der rechtsseitige bzw. linksseitige Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Dann heißt $f(x)$ in x_0 [...] differenzierbar.“ (S. Gottwald, 1995, S.436)

Auf diese Weise geht man weiter vor, formuliert die Rechenregeln, Extremstellen, etc..

Nach jeder neuen Definition, Folgerung und Herleitung werden natürlich Beispiele geübt.

5.2 Das Tangentenproblem

(Vgl. wikipedia, 2014, Differentialrechnung, Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2000, S. 35-37, 2006, ML7, S.44-47)

Diesen Zugang möchte man schon beinahe als klassisch bezeichnen. Auch der Autor lernte in seiner Schulzeit das Differenzial auf diese Art kennen. Die Tangentensteigerung als geometrische Entsprechung der Ableitung ist eine der grundlegendsten Vorstellungen des Differenzials. Aus diesem Grund wird hier das Tangentenproblem in den Mittelpunkt gerückt, bzw. von dieser Problemstellung ausgegangen.

Auch historisch gesehen handelt es sich um eine grundlegende Problemstellung: Das Tangentenproblem ist bereits seit der Antike bekannt. Der Lösungsansatz war die Approximation der Tangente durch eine Sekante über einem beliebig kleinen Intervall.

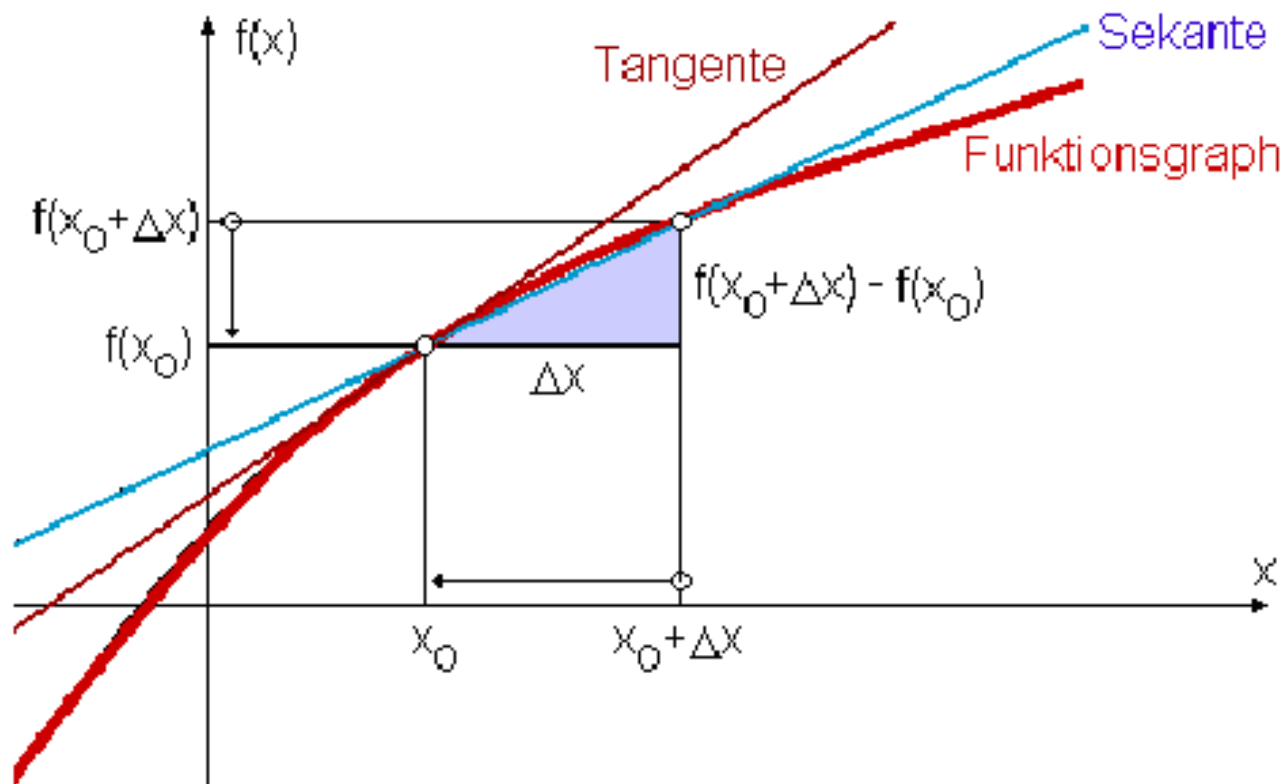
Die Differenzialrechnung wurde Ende des 17. Jahrhunderts unabhängig voneinander von Sir Isaac Newton (englischer Physiker und Mathematiker, 1643 – 1727) und Gottfried Wilhelm von Leibniz (deutscher Diplomat, Mathematiker und Philosoph, 1646 – 1716) entwickelt. Leibniz ging vom geometrischen Tangentenproblem aus. Ihre Arbeiten können als Beginn der Analysis betrachtet werden.

„In geometrischer Sprache ist die Ableitung eine verallgemeinerte Steigung. Der geometrische Begriff Steigung ist ursprünglich nur für lineare Funktionen definiert, deren Funktionsgraph eine Gerade ist. Die Ableitung einer beliebigen Funktion definiert man als die Steigung einer Tangente, die man an den Funktionsgraphen anlegt – wobei dieser Graph in der Regel an verschiedenen Stellen verschiedene Tangenten hat.“ (S. wikipedia, 2014, Differentialrechnung)

Anders ausgedrückt betrachten wir die Tangente als Grenzwert von Sekanten.

Man kann die Aufgabe so sehen, dass man eine Gerade in einem Punkt an eine Kurve so legt, dass man die Kurve durch die Gerade in einer kleinen Umgebung um den Punkt möglichst genau approximiert.

Wir gehen direkt von der Grafik aus, die wir bereits aus einem vorigen Kapitel kennen:



(S. wikipedia, 2014, Differentialrechnung)

Wir definieren zuerst die Tangente und deren Steigung:

„Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Als Tangente an (den Graphen von) f im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ bezeichnet man jene Gerade durch P , für deren Steigung $k = f'(x_0)$ gilt:

$$k = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad „$$

(S. Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2000, S.35)

Erst danach wird diese Steigung als Differenzial, bzw. Differenzialquotient bezeichnet und definiert. Davon ausgehend werden dann alle weiteren Kapitel der Differenzialrechnung ausgearbeitet.

Bei diesem Zugang wird das geometrische Problem der Tangente in einem Punkt in den Mittelpunkt gerückt, aber auch die Idee der linearen Approximation aufgegriffen.

5.3 Das Geschwindigkeitsproblem

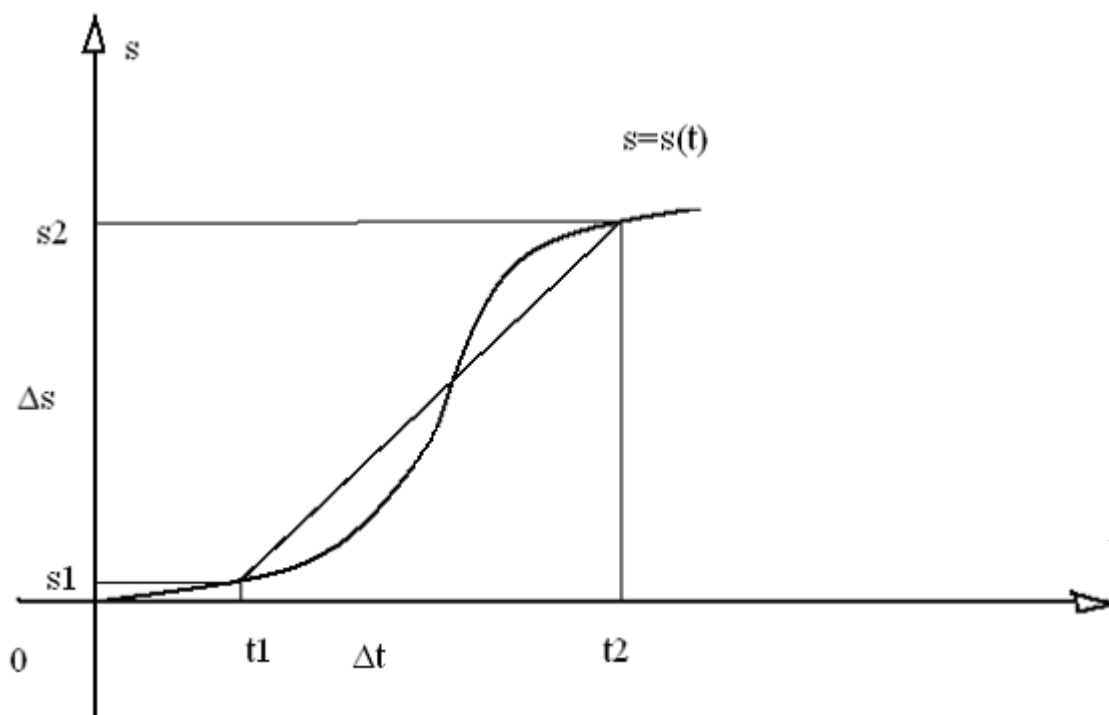
(Vgl. wikipedia, 2014, Differentialrechnung, Hanisch, Reichel, Müller, Schak, 2000, S.38-41, Götz, Reichel, Müller, Hanisch, 2006, ML7, S.48-53, Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl, 2007, S.11, 19-20)

Anders als Leibniz ging Newton (als Physiker) von einem anderen Grundproblem aus, dem physikalischen Problem der Momentangeschwindigkeit. Dieses Problem mag für den Leser ähnlich wirken wie das Tangentenproblem (und wird auch oft als zweiter Zugang verwendet). Dennoch ist dieser Zugang eigenständig zu betrachten. Er ist nicht nur von historischer Bedeutung (dies ist natürlich auch ein wichtiger Aspekt), er stellt auch bereits von Anfang an die lebenspraktische und fächerübergreifende Bedeutung des Differenzials in den Mittelpunkt.

Physikalisch gesehen versteht man unter der Geschwindigkeit eines Objektes die von ihm

zurückgelegte Wegstrecke s pro Zeiteinheit t :
$$v = \frac{s}{t}$$

Es ist üblich, die Bewegung in einem Zeit–Weg–Diagramm darzustellen. Mathematisch gesehen handelt es sich bei dem Graphen um eine Funktion: $s = s(t)$.



Würde es sich um eine Bewegung mit gleichmäßiger Geschwindigkeit handeln, wäre der Graf eine Gerade. Die Steigung entspricht dann genau der Geschwindigkeit.

In der obigen Zeichnung handelt es sich aber um eine ungleichförmige Bewegung.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit (oder mittlere Geschwindigkeit) in einem bestimmten Zeitintervall $[t_1, t_2]$ können wir über die Steigung der Sekante bestimmen:

$$v(t_1, t_2) = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Diese hat nun einen praktischen Nutzen z.B. für die Berechnung einer Reisedauer.

Will man aber z.B. die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt eines Unfalles berechnen (dies ist für Polizei und Versicherungen von Bedeutung), dann benötigen wir die augenblickliche Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt, also die Momentangeschwindigkeit. Dafür verkleinern wir Δt , rein mathematisch gehen wir also mit $\Delta t \rightarrow 0$.

Damit erhalten wir die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 und bezeichnen sie mit

$\frac{ds}{dt}$. (Da es sich nicht mehr um wirkliche Differenzen handeln kann, ersetzen wir Δ durch d .

Damit haben wir auch bereits den Formalismus von Leibniz eingeführt.)

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t}$$

Anschaulich handelt es sich dabei um die Steigung einer Tangente an die Bewegungskurve.

Daraus können wir rein mathematisch von $s(t)$ auf $f(x)$ verallgemeinern und den Ausdruck des Differenzials, bzw. der Ableitung einführen. Danach behandelt man die weiteren Kapitel der Differenzialrechnung.

Die Momentangeschwindigkeit entspricht also der Ableitung des Ortes nach der Zeit.

Die Momentanbeschleunigung entspricht der zweiten Ableitung des Ortes nach der Zeit:

$$a = s''(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Mittels dieses Zuganges erhalten wir also auch eine (weitere) praktische Deutung der zweiten Ableitung.

5.4 Das Koordinatensystem der Differenziale

(Vgl. Taschner, 2000, S.50-55) Dieser Zugang wird in der Schule vergleichsweise selten verwendet. Er legt besonderen Wert auf die Leibniz'sche Differenzialschreibweise und Taschner verwendet diese auch durchgehend.

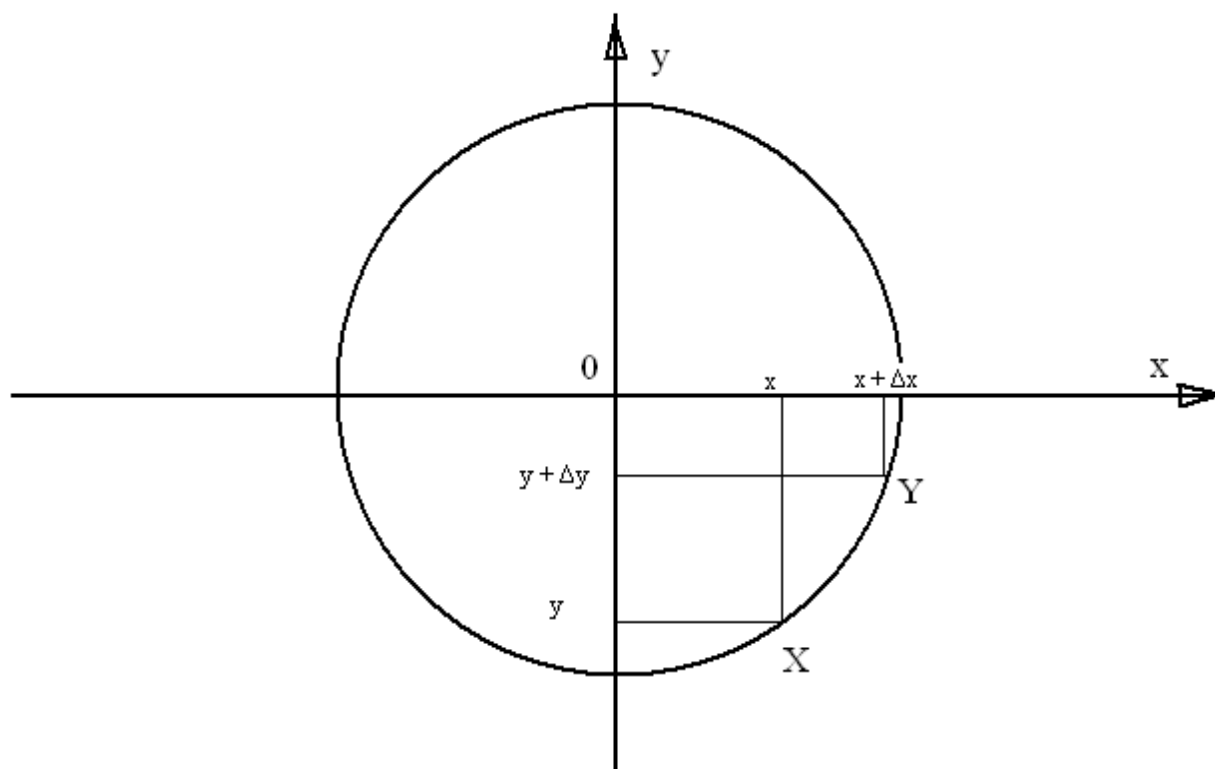
Die erste Frage, die hier gestellt wird (und mit der sich auch bereits Leibniz, Fermat und Newton befassten), ist: „Kurven selbst werden durch Gleichungen beschrieben. Wie aber erfasst man den Wechsel von einem Kurvenpunkt zu einem anderen in einer Gleichung?“

(S. Taschner, 2000, S.50)

„Wenn man vom Punkt $X = (x \mid y)$ zum Punkt $Y = (x + \Delta x \mid y + \Delta y)$ auf der durch die Gleichung $z(x, y) = c$ gegebenen Kurve wechselt, ergibt sich die Gleichung der Änderungen Δx und Δy aus der Differenz der beiden Gleichungen $z(x + \Delta x, y + \Delta y) = c$ und $z(x, y) = c$.

Die linke Seite dieser Differenz zerlegt Leibniz in einen linearen Anteil der Gestalt $u \cdot \Delta x + v \cdot \Delta y$ und in einen nichtlinearen Anteil.“ (S. Taschner, 2000, S.50)

Als Beispiel betrachten wir einen Kreis in Mittelpunktslage: $k: x^2 + y^2 = r^2$



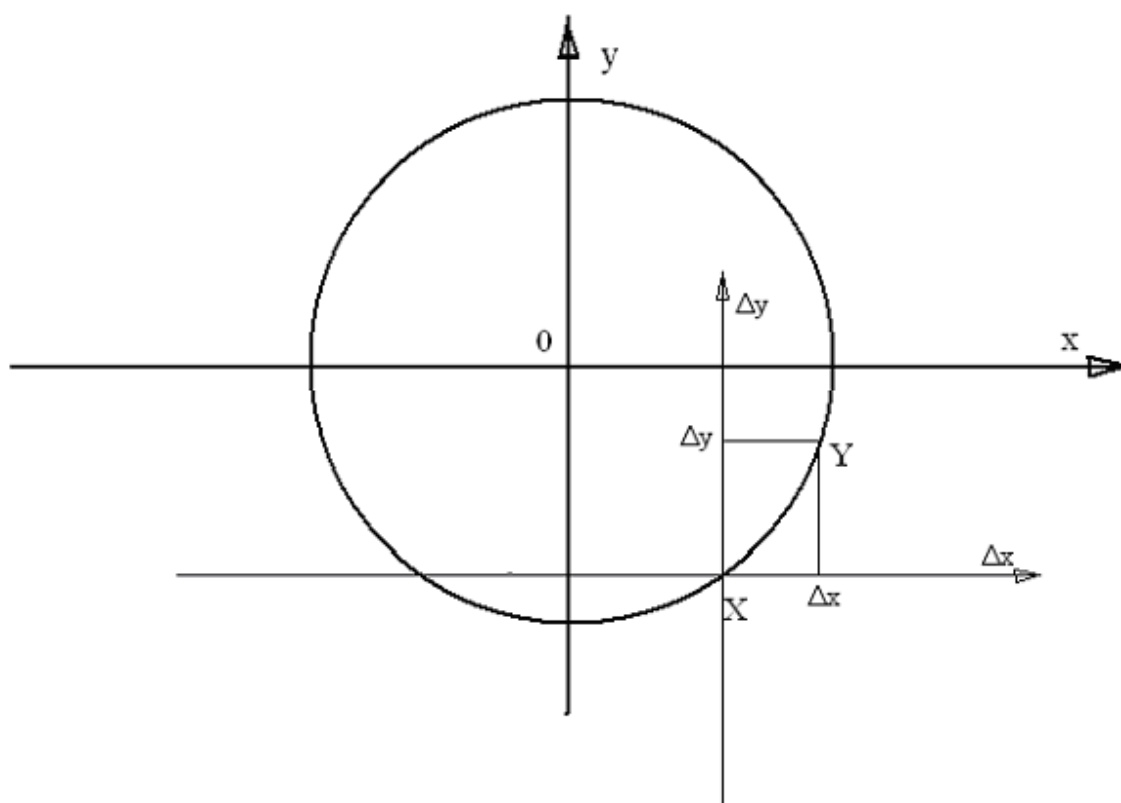
Wir wollen vom Punkt X zum Punkt Y auf dieser Kreislinie wechseln. Dabei heißen Δx und Δy die Änderungen von x und y bei diesem Wechsel. Da beide Punkte auf der Kurve liegen, gelten:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{und} \quad (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 = r^2$$

Durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten erhalten wir die Gleichung der Änderungen Δx und Δy : $(2x \cdot \Delta x + 2y \cdot \Delta y) + (\Delta x^2 + \Delta y^2) = 0$

$2x \cdot \Delta x + 2y \cdot \Delta y$ ist der lineare Teil und $\Delta x^2 + \Delta y^2$ der nichtlineare Teil.

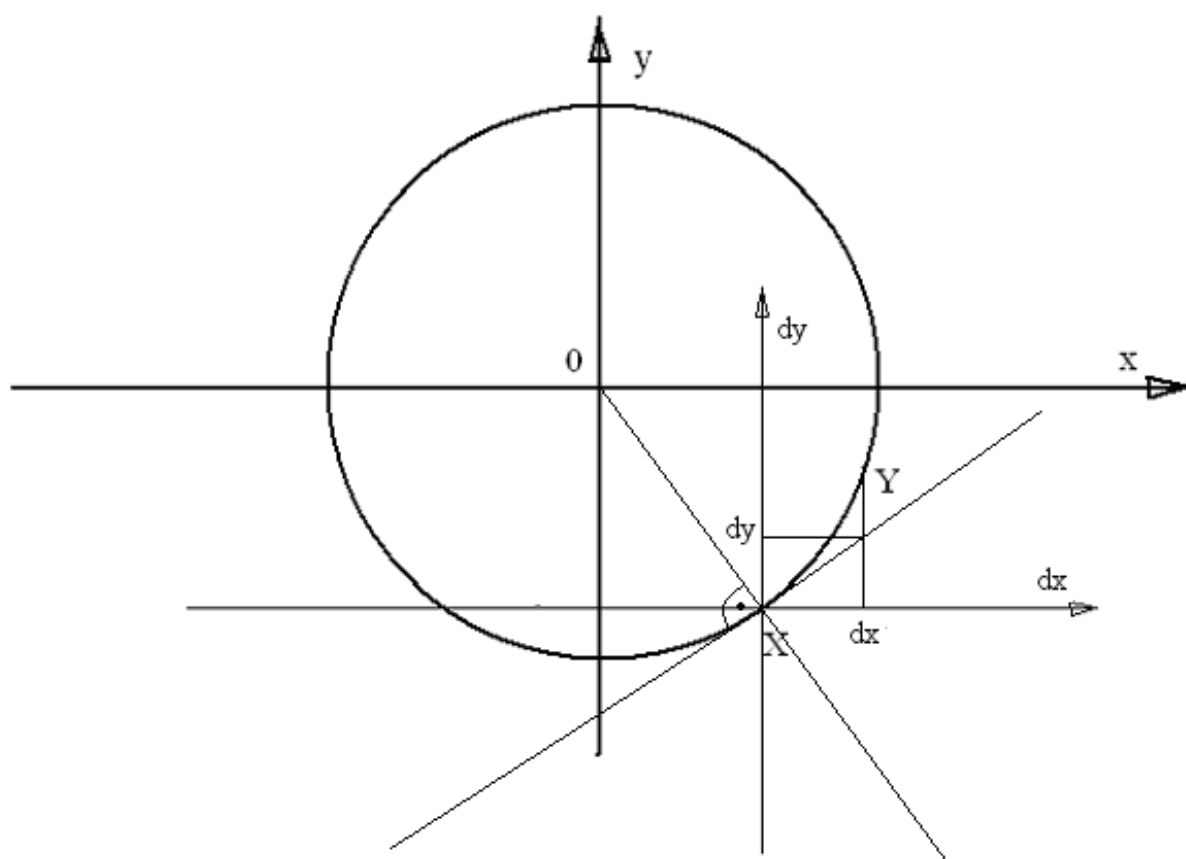
Nun definieren wir (bzw. Leibniz) das Koordinatensystem der Änderungen, um die Gleichung der Änderungen geometrisch beschreiben zu können: Der Punkt X dient als Ursprung, durch ihn geht parallel zur x -Achse nun die Δx -Achse und parallel zur y -Achse die Δy -Achse. In diesem neuen Koordinatensystem hat Y nun andere Koordinaten: Δx und Δy



Geometrisch beschreibt die Gleichung der Änderungen wieder eine Kreisgleichung:

$$(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 = x^2 + y^2 = r^2$$

Der wesentliche Kunstgriff, der nun verwendet wird, besteht allerdings nicht in einem Koordinatensystem der Änderungen, sondern in einem Koordinatensystem der Differenziale: Wir betrachten nun nicht die Gleichung der Änderungen, sondern setzen nur den linearen Anteil gleich Null. Leibniz erfindet das Kunstwort „Differenzial“. Statt Δx und Δy betrachtet er die Differenziale dx und dy . Die Idee besteht darin „die Punkte $(x + dx \mid y + dy)$ entlang jener Geraden laufen zu lassen, die sich unter allen durch $(x \mid y)$ führenden Geraden am besten an die Kurve schmiegt. Dabei stimmen die Δx -Achse und die dx -Achse überein, ebenso stimmen die Δy -Achse und die dy -Achse überein.“ (S. Taschner, 2000, S.53)



„Definition: Wenn der lineare Anteil in der Gleichung der Änderungen Δx und Δy : $u \cdot \Delta x + v \cdot \Delta y$ lautet, ersetzt Leibniz die Änderungen Δx , Δy durch die Differenziale dx , dy und betrachtet die sich hieraus ergebende Gleichung: $u \cdot dx + v \cdot dy = 0$. Dies ist – bezogen auf das $(dx - dy)$ – Koordinatensystem der Differenziale – die Gleichung einer Geraden durch den Ursprung des $(dx - dy)$ – Koordinatensystems, also durch den Kurvenpunkt X . Diese Gerade nennt Leibniz die Tangente an die gegebene Kurve. [...] [Dann] liefern die beiden Brüche $k = dy / dx = -u / v$ (im Fall $v \neq 0$) bzw. (im Fall $u \neq 0$) $k^\perp = -dx / dy = v / u$ den Anstieg k der Tangente bzw. den Anstieg $k^\perp$ der Normalen an die Kurve im Punkt X .“

(S. Taschner, 2000, S.53, 54)

Damit bleiben wir bei dem Leibniz'schen Formalismus und können die Rechenregeln des Differenzials betrachten, so z.B. die Summenregel: Eine Summe wird differenziert, indem man jeden Summanden einzeln differenziert: $z = x + y \rightarrow dz = dx + dy$

Erst später definieren wir: „Durch Differenziation der Gleichung $y = f(x)$ erhält man die Gleichung $dy = f'(x) dx$. Die der Funktion f zugeordnete Funktion f' heißt die Ableitung von f .“

Es ist klar ersichtlich, dass bei diesem Zugang die Leibniz'sche Differenzialschreibweise eine zentrale Rolle spielt. Dieser Zugang zeigt auch die Leistungsfähigkeit derselben gut auf.

5.5 Eigenschaften von Polynomfunktionen - Kurvendiskussion

Eine andere Möglichkeit besteht darin, gleich über eines der größten Kapitel der Differenzialrechnung in der Oberstufe einzusteigen. Funktionen und im Speziellen reelle Funktionen und Polynomfunktionen werden grafisch mittels geeigneter Beispiele an die Schüler herangebracht, danach auch die Begriffe des Grenzwertes und der Stetigkeit, und definiert:

„Es besteht eine Relation zwischen den Mengen A und B, wenn die Elemente in ganz bestimmter Beziehung zueinander stehen, diese Beziehung ist im allgemeinen durch eine mathematische Formel gegeben.

Eine Relation ist Funktion, wenn jedem Element aus der Menge A genau ein Element der Menge B entspricht.

Eine Funktion heißt reell, wenn alle Elemente der vorkommenden Mengen reelle Zahlen sind.

Eine Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle a einen Grenzwert g , wenn für jede beliebige Zahlenfolge $\{x_1, x_2, \dots\}$ mit dem Grenzwert a auch die entsprechende Folge der y -Werte gegen

einen Grenzwert g konvergiert. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$

Eine Funktion ist an einer Stelle a stetig, wenn der Grenzwert an dieser Stelle existiert und

mit dem Funktionswert b übereinstimmt. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ „

(aus meinem eigenen Schulübungsheft: S. Klein, 1989, 11.1.1989)

Natürlich wird auch die Polynomfunktion definiert:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

(Vgl. wikipedia, 2014, Polynomfunktion)

Daraus folgend ergibt sich das Problem der Ermittlung der Eigenschaften von Funktionen, bzw. ihrer Grafen. Damit sind wir bereits bei der Kurvendiskussion, diese wird wie in Kapitel (4.8) behandelt, nur dass bei der Behandlung der Extrem- und Wendestellen das Differenzial über die Frage, wie man die Steigung von Tangenten berechnen kann, eingebunden wird. Hierbei wird es dann natürlich notwendig, die Ableitung als Steigung der Tangente in einem Punkt an die Kurve zu definieren, und auch einige Rechenregeln aufzustellen.

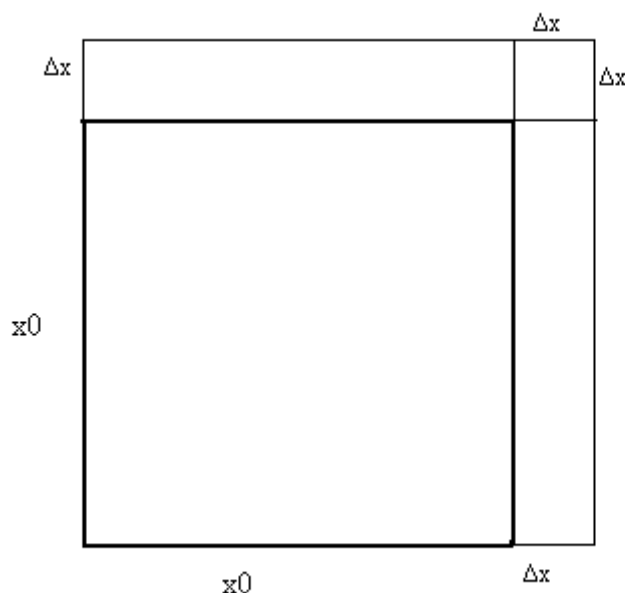
Beim Zugang über die Kurvendiskussion wird das Differenzial zu Anfang hauptsächlich als ein Werkzeug zur Auffindung von Hoch- und Tiefpunkten gesehen. Aber auch die Vorstellung der Ableitung als Änderungsrate ist hier eine sehr wichtige, da sie zur Beantwortung der Frage beiträgt, „wie eine Funktion ansteigt, wenn sie keine Gerade ist“.

Ein großer Vorteil dieses Zuganges ist, dass man keine neuen Problemstellungen aufwerfen muss, um zum Differenzial zu gelangen, sondern es sich nahtlos aus dem Vorhergehenden ergibt. Man verbleibt für die Schüler im Unterrichtskapitel „Funktionen“, allerdings kann dies natürlich auch das „Schubladendenken“ fördern.

5.6 Das unendlich Kleine – Zuwachs im Quadrat

(Vgl. Muth, 1990, S.241 ff.)

Hier handelt es sich um einen sehr interessanten Zugang, der zunächst einmal scheinbar nichts mit Funktionen zu tun hat. Wir stellen uns die Frage: Wenn ein Quadrat mit Seitenlänge x den Flächeninhalt $A = x^2$ hat, wie wirken sich kleine Änderungen der Seitenlänge auf den Flächeninhalt aus? Wenn es sich z.B. bei dem Quadrat um ein Feld handelt, wie viel gewinnt ein Bauer, der die Grenzsteine um einen Meter versetzt?



Delta Δ ist ein griechischer Buchstabe und steht für eine Differenz, nämlich zwischen der ursprünglichen Seitenlänge x_0 und der neuen Seitenlänge $x_1 = x_0 + \Delta x$ des großen Quadrats ($\Delta x = x_1 - x_0$).

Wenn wir den Flächeninhalt statt mit A mit y bezeichnen, können wir der Seitenlänge x den Flächeninhalt $y = x^2$ zuordnen, erhalten also eine Funktion, deren Graf der positive Arm einer Parabel ist.

Dieser Flächeninhalt wächst entsprechend von y_0 auf $y_1 = y_0 + \Delta y$.

Um zu bestimmen, wie stark der Flächeninhalt im Verhältnis zur Seitenlänge ansteigt,

betrachten wir das Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: Das ursprüngliche Quadrat vergrößert sich ja um 2 schmale Rechtecke mit jeweils der Fläche $x_0 * \Delta x$ und ein kleines Quadrat mit der Fläche $(\Delta x)^2$. Damit ist die Flächendifferenz $\Delta y = 2 * x_0 * \Delta x + (\Delta x)^2$ und

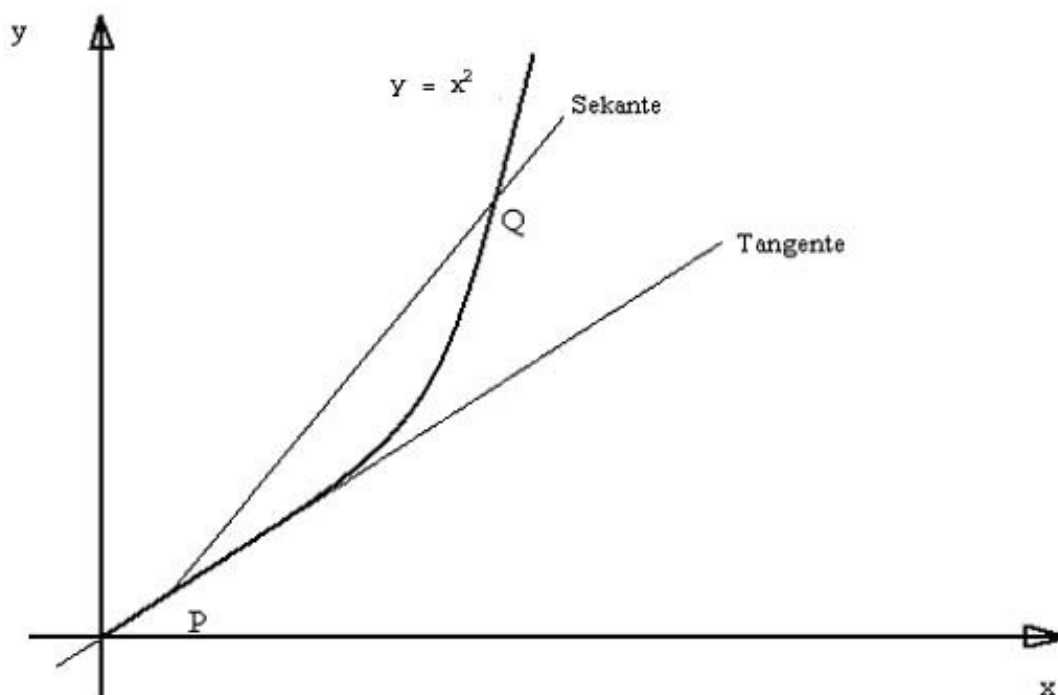
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 * x_0 * \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2 * x_0 + \Delta x$$

Ist der Zuwachs Δx sehr klein im Verhältnis zu x_0 , so liefert die Fläche des kleinen Quadrats $(\Delta x)^2$ kaum einen Beitrag zur Veränderung des Flächeninhalts und wir erhalten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 * x_0 * \Delta x}{\Delta x} = 2 * x_0$$

Der Flächeninhalt ändert sich also bei kleinem Zuwachs umso mehr, je größer die ursprüngliche Seitenlänge ist.

Wenn wir die Kurve $y = x^2$ betrachten, können wir die Veränderung des Funktionswertes y besser verfolgen und stellen uns die Frage, wie schnell sie von einem Punkt P aus ansteigt.



Annähern einer Kurve durch Sekanten und Tangenten

Verläuft eine Kurve durch P und Q, so lässt sie sich näherungsweise durch eine Gerade durch P und Q ersetzen. Diese Sekante hat die Steigung

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 * x_0 * \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2 * x_0 + \Delta x$$

Rücken wir den Punkt Q näher an P heran, erhalten wir immer bessere Näherungswerte, bis

im Grenzfall $\Delta x \rightarrow 0$ die Sekante zur Tangente wird mit der Steigung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 * x_0$.

Problematisch ist hier nur, dass wir ja nicht durch 0 dividieren dürfen. Daher deutete Leibniz den Übergang von kleinen, aber fassbaren Differenzen Δx und Δy zu beliebig kleinen Differenzen durch veränderte Schreibweise an: dy / dx und nennt dies nun Differenzial oder Ableitung der ursprünglichen Funktion.

Damit sind wir mitten in der Differenzialrechnung und müssen nur mehr Definitionen und Rechenregeln verallgemeinern.

5.7 Infinitesimalrechnung und Hyperreelle Zahlen

(Vgl. Roupec, 1994, S.67-92)

Einen etwas abstrakteren Zugang zeigt Ralf Roupec in seiner Diplomarbeit auf. Erfahrungen dazu wurden in den siebziger Jahren in den USA gesammelt, wobei dieser Zugang bei einer Untersuchung weder besser, noch schlechter als andere eingestuft wurde.

„Speziell die 7. und 8. Klasse bieten thematisch durch die Differenzial- und Integralrechnung einige natürliche Anwendungsmöglichkeiten für hyperreelle Zahlen, da etwa in der 7. Klasse der Differenzialquotient zunächst in der ersten Phase ohne einen exakten Grenzwertbegriff eingeführt und verwendet werden kann. Hierbei bieten infinitesimale Schlussweisen ein, wie mir scheinen mag, sehr kraftvolles und geeignetes Hilfsmittel, in Form einer positiven Heuristik einen verständigen Umgang mit den Werkzeugen der Analysis zu erlernen.“

(S. Roupec, 1994, S.84)

Zunächst soll mit Hilfe von Beispielen eine Sensibilisierung des Begriffes „infinitesimal“ bzw. „unendlich klein“ erfolgen. Nun bringt man die Idee von unendlich kleinen positiven Zahlen ins Spiel. Ähnlich, wie $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ erweitert wurde, soll nun $\mathbb{R}$ zu ${}^*\mathbb{R}$, den hyperreellen Zahlen, erweitert werden:

„Erweiterungsaxiom: Die Menge ${}^*\mathbb{R}$ aller hyperreellen Zahlen ist ein angeordneter Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, der von Null verschiedene Zahlen α enthält, sodass $-r > \alpha > r$ für jede positive reelle Zahl r gilt. Eine solche Zahl heißt eine Infinitesimalzahl.

Definition: Zwei hyperreelle Zahlen ξ , η heißen unendlich benachbart (oder unendlich nahe), wenn $\xi - \eta$ eine Infinitesimalzahl ist. Wir schreiben dann kurz: $\xi \sim \eta$.

Eine hyperreelle Zahl ζ heißt endlich (oder finit), wenn es eine natürliche Zahl n gibt, mit:

$-n < \zeta < n$. Gibt es kein $n \in \mathbb{N}$ mit dieser Eigenschaft, dann heißt ζ eine unendliche (oder infinite) Zahl.“ (S. Roupec, 1994, S.90)

Neben diversen wichtigen Folgerungen wird nun natürlich sinnvollerweise im Anschluss an diese Einführung die Stetigkeit und die Differenziation mit Hilfe infinitesimaler Schlussweisen hergeleitet.

„Definition: Sei $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $dx \sim 0$ ($dx \neq 0$), dann heißt $df := f(x + dx) - f(x)$ ein Differenzial der Funktion f und df / dx ein hyperreeller Differenzialquotient von f an der Stelle x .“ (S. Roupec, 1994, S.69)

In dieser Art und Weise können nun auch die Rechenregeln und wichtige Sätze eingeführt werden.

Dieser Ansatz richtet sein Hauptaugenmerk auf das Verständnis der Infinitesimalrechnung.

5.8 Differenzialrechnung als Umkehrung der Integralrechnung

(Vgl. Blum, 1983, S.156 ff.)

Zwar ist es eher üblich, die Differenzialrechnung vor der Integralrechnung zu behandeln, doch gibt es auch gute Gründe für einen umgekehrten Zugang. Auch der Autor hat in seinen Analysis–Einführungsvorlesungen von Prof. Mitsch das Differenzial aufbauend auf das Integral kennen gelernt.

Durch den Fundamentalsatz der Analysis, auch Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung genannt, sind diese beiden Gebiete untrennbar miteinander verbunden:

„(1) Ist f eine auf dem Intervall $[a; b]$ stetige Funktion, so existiert die Integralfunktion

$F: x \rightarrow \int_a^x f$ für $x \in [a; b]$; F ist differenzierbar und es gilt $F' = f$ auf $[a; b]$.

(„Differenzieren als Umkehrung des Integrierens“)

(2) Für eine auf dem Intervall $[a; b]$ stetige Funktion f gilt: $\int_a^b f = G(b) - G(a)$

($=: G(x)|_a^b$), wo G (irgendeine) Stammfunktion von f ist. („Integrieren als Umkehrung des Differenzierens““ (S. Blum, 1983, S.166-167)

Damit können wir also auch mit dem Integrieren beginnen und das Differenzial als Umkehrung des Integrals einführen. Zunächst wird das Integral geometrisch als Weiterführung der Flächen- und Volumenberechnungen den Schülern nahe gebracht. Aus Platzgründen kann hier leider nicht genauer auf die Behandlung des Integrals in der Schule eingegangen werden.

Schließlich wird aber über den Fundamentalsatz das Differenzial als Umkehrung des Integrals eingebracht. Daraus entwickeln sich dann ebenso aus Umkehrungsüberlegungen die Rechenregeln des Differenzials aus den Rechenregeln des Integrals. Danach kann man die weiteren Bedeutungen des Differenzials auf herkömmliche Art erläutern.

Historisch gesehen beginnt die Geschichte der Analysis bereits im 3. Jahrhundert vor Christus mit Flächen- und Volumenberechnungen, also mit dem Integral. Die historische Entwicklung setzt also das Integral vor dem Differenzial an.

Dieser Zugang untermauert die Bedeutung des Integrals und auch die des Fundamentalsatzes der Analysis, den Zusammenhang zwischen Integral und Differenzial.

5.9 Änderungsraten als Grundverständnis

(Vgl. Blum, 1983, S.91 ff., Grosser, 1994, S.69 und wikipedia, 2014, Änderungsrate)

Zwar mag dieser Zugang ähnlich dem des Tangentenproblems (5.2) (das Differenzial als Grenzwert von Sekantensteigungen) sein, jedoch wird hier die Ableitung primär als Zahl gedeutet (im Gegensatz zur geometrischen Bedeutung).

Wenn bei Anwendungsproblemen zwei Größen voneinander abhängen, dann interessieren uns meist nicht nur die Werte selbst, sondern auch deren Änderungen.

Man unterscheidet zwischen der mittleren Änderungsrate von einer Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ und der lokalen (oder momentanen) Änderungsrate als

Grenzwert der mittleren Änderungsrate: $f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Dieser Weg bietet einen natürlichen Zugang zur Differenzialrechnung.

Dieser Weg führt über etliche praktische Beispiele solcher Veränderungen, wie Temperatur, Geschwindigkeit oder Stromstärke.

Sehr oft handelt es sich dabei um eine Veränderung pro Zeiteinheit:

Änderungsraten einer zeitabhängigen Messgröße G beschreiben in Anwendungen der Mathematik wie der Experimentalphysik das Ausmaß der Veränderung von G in einem bestimmten Zeitraum im Verhältnis zur Dauer des Zeitraums.

(Vgl. wikipedia, 2014, Änderungsrate)

Dieser Zugang bietet lebensnahe Anwendungen, ohne notwendigerweise auf die Geometrie Bezug zu nehmen.

5.10 Weitere Zugänge

(Vgl. Grosser, 1994, S.69-71, Laub, 1980, S.113)

Weiters kann man auch über stetige Fortsetzung und die Lipschitz–Analysis einen Zugang zum Differenzial finden. Diese beiden Möglichkeiten sind in diesem Kapitel zusammengefasst, weil auch sie Erwähnung finden sollten und weil zumindest die stetige Fortsetzung in Schulbüchern um 1980 herum Verwendung fand (z.B. Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen, 3. Band, Laub).

Der Zugang über die stetige Fortsetzung hat auch den Vorteil, den Grenzwertbegriff ganz zu umgehen:

„Definition: Es sei f eine Funktion mit der Definitionsmenge D_f und a an eine Stelle, die nicht zu D_f gehört. Ist die Funktion f^* eine Fortsetzung von f in die Stelle a und ist f^* stetig an der Stelle a , so bezeichnet man f^* als eine stetige Fortsetzung von f in die Stelle a . Die Funktion f heißt stetig fortsetzbar in die Stelle a .“ (S. Laub, 1980, S. 113)

„Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine reelle Funktion und a ein Häufungspunkt von X . Die Funktion f heißt ableitbar an der Stelle a , wenn die zugehörige Sekantensteigungsfunktion

$k_a: X \setminus \{a\} \rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ in die Stelle a stetig fortsetzbar ist. Ist k_a die stetige Fortsetzung von k_a an der Stelle a , so heißt der Funktionswert $k_a^*(a)$ die Ableitung von f an der Stelle a und wird mit $f'(a)$ bezeichnet.“ (S. Grosser, 1994, S.70)

Natürlich ist es hier notwendig, Stetigkeit und Häufungspunkte zuvor genau zu erarbeiten.

Die Grundidee des zweiten Zuganges beruht darauf, dass mit Lipschitz-stetigen („gutartigen“) Funktionen gearbeitet wird. Diese sind nur eine Teilmenge der stetigen Funktionen.

Als Vorteile kann man nennen, dass „Sonderfunktionen“ (z.B. überall stetige, aber nirgends differenzierbare) ausgeschlossen werden und dass Beweisführungen durch die nennerfreie Form stark vereinfacht werden.

„Definition: Eine Funktion f heißt gutartig auf $[a, b]$, wenn es eine Zahl L gibt, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ gilt: $|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$.

Definition: Eine auf $[a, b]$ definierte Funktion f heißt bei $c \in [a, b]$ gutartig differenzierbar mit der Steigung m , wenn es eine Zahl $K \geq 0$ gibt, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$|f(x) - f(c) - m(x - c)| \leq K(x - c)^2$.“ (S. Grosser, 1994, S.71)

5.11 Historisch: Höfler's Zugang

(Vgl. Kapper, 1998, S.3 f., S.35 ff., S.66, S.70, S.110)

Ende des 19. Jahrhunderts kam es zu heftigen Diskussionen (in Preußen und Österreich), ob die Differenzialrechnung einen Platz im mathematischen Lehrstoff der Schulen haben sollte. Alois Höfler erklärte, dass diese bereits längst im Lehrplan vorhanden sei, allerdings so verdeckt, dass sie nicht explizit aufscheint. Ja, der Begriff „Differenzial“ wurde geradezu akribisch vermieden.

In der analytischen Geometrie wird die Gleichung der Tangente an eine Ellipse erarbeitet:

$M_1(x_1, y_1)$ und $M_2(x_2, y_2)$ sind zwei Punkte der Ellipse: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$ und $b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2$ voneinander erhält man: $b^2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + a^2(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 0$

Dies ergibt umgeformt:
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = - \frac{b^2 (x_2 + x_1)}{a^2 (y_2 + y_1)}$$

Die durch M_1 und M_2 bestimmte Sekante hat die Gleichung: $Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$

Daraus erhält man: $Y - Y_1 = - \frac{b^2 (x_2 + x_1)}{a^2 (y_2 + y_1)} (x - x_1)$ als Sekantengleichung.

Lässt man nun M_1 und M_2 zusammenfallen (also $x_2 \rightarrow x_1$ und $y_2 \rightarrow y_1$), so wird die Sekantengleichung zur Tangentengleichung:

$$Y - Y_1 = - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) \text{ bzw. } b^2 x x_1 + a^2 y y_1 = a^2 b^2$$

In diesem letzten Punkt wird über die eigentliche Schwierigkeit einfach hinweggegangen, nämlich über die Vorstellung des „unbegrenzten Annäherns“.

Alois Höfler wählt nun eine kleine Modifikation, nämlich das genauere Herausarbeiten und verständlich machen der Ermittlung des „Richtungskoeffizienten“ $-\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$.

Dazu wählt er Beispiele wie etwa aus der Mechanik, wo aus der mittleren Geschwindigkeit die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t wird. Er berechnet auch den Richtungskoeffizienten für verschiedene Funktionen, wie z.B. $y = x^2$ oder auch allgemein für die Parabel.

Wenn man mittels Beispielen die Bedeutung dieses Überganges hervorhebt, so bildet sich bei den Schülern eine Vorstellung über dieses „unbegrenzte Annähern“.

Damit wurde zwar weiter der Begriff des „Differenzials“ den Zeichen der damaligen Zeit entsprechend vermieden, doch wird die Grundidee auch ohne explizite Erwähnung des Namens vermittelt.

Dieser Zugang hat auch heute noch seine Berechtigung, auch wenn wir natürlich beim „Zusammenfallen lassen von M_1 und M_2 “ den Begriff und die Idee des Differenzials einführen.

6. Fachdidaktische Analyse unter Berücksichtigung der allgemeinen Ziele des Lehrplans und der mathematischen Unterrichtsprinzipien

In diesem Kapitel sollen möglichst objektiv die Vor- und Nachteile der verschiedenen Zugänge aufgezeigt werden. Es sollte aber jedem bewusst sein, dass vollkommene Objektivität ein Ding der Unmöglichkeit ist. Es werden die mögliche Einbindung der Zugänge in den Lehrplan, ihre didaktischen Hintergründe, aber auch ihre Sinnhaftigkeit in Hinblick auf die allgemeinen Prinzipien betrachtet.

6.1 Axiomatischer Zugang: Definitionen und Sätze

Die axiomatische Methode wird im 4. Mathematiklehrbuch für AHS von Dr. Josef Laub beschrieben (s. Laub, 1981, S.189): „In der Mathematik verwendet man zum Aufbau einer Theorie die axiomatische Methode: Am Beginn einer Theorie stehen nicht definierte Begriffe und nicht definierte Relationen. Ein Satz, der sich auf nicht definierte Begriffe und nicht definierte Relationen bezieht, heißt Grundsatz („Axiom“); seine Gültigkeit wird ohne Beweis vorausgesetzt. Durch Definitionen führt man neue Begriffe ein, und durch logische Schlüsse folgert man Aussagen, die als Sätze dieser Theorie bezeichnet werden.“

Zuerst muss einmal gesagt werden, dass es keinen anderen Zugang gibt, der schneller das fachliche Ziel erreicht. Deshalb wird er auch häufig in der Schule verwendet, bzw. in Mischformen mit verwendet. Allerdings ist er didaktisch fragwürdig, doch dazu später.

Vom Standpunkt der Logik ist an diesem Zugang nichts auszusetzen. Es ist durchaus möglich, die Art zu Denken den Schülern bewusst zu machen, da es sich auch um eine in der Wissenschaft übliche Methode handelt, die wissenschaftstheoretisch auf der Logik aufbaut.

Es handelt sich um reines Regellernen. Da sich die Schüler hier aber oft als „Zuschauer“ sehen und wenig bis nichts selbst entdecken können, stellt sich die Frage, wie lange das Gelernte im Gedächtnis bleibt. Strukturdenken und die „mathematische Sprache“ werden hier aber sehr gut weitergegeben. Die Verbindung zu lebensnahen Problemen wird stark vernachlässigt.

Man lernt am Besten aus eigenen Fehlern (vgl. Hanisch, 1998, S.48-55), und dazu hat man hier keine Gelegenheit.

Vom didaktischen Standpunkt gibt es viele Kritikpunkte: Der Lehrer erarbeitet hier keine Erkenntnisse mit den Schülern, er gibt sein Wissen an die Schüler weiter. Die Begriffe werden den Lernenden praktisch an den Kopf geknallt, es wird zwar an das Vorwissen angeknüpft, aber dass sich die Ergebnisse (aus Schülersicht) „zwanglos ergeben“, gilt zu bezweifeln.

Als Vorteil kann man aber anführen, dass hier dem Schüler der Stoff in eleganter, fertiger Form vorliegt, was zu präziser Begriffsklärung und Allgemeingültigkeit führt. Auch werden die Mittel, die man später (oder in einem anderen Fach) benötigt, so schnell wie in keinem anderen Zugang bereitgestellt, was besonders in HAK und HTL ein wichtiger Punkt sein kann.

Der deduktive Aufbau dieser Einführung lässt die Nähe zur Mathematik als Wissenschaft beibehalten. Allerdings kann man hier argumentieren, dass diese Nähe nur eine scheinbare ist, da in der praktischen Wissenschaft Erkenntnisse eben nicht als Fertigfabrikate präsentiert werden, sondern durch Vermuten, Experimentieren und Prüfen zustande kommen. Es soll auch darauf hingewiesen werden, dass der Unterricht bei diesem Zugang klar lehreraktiv zentriert ist, was aus Zeitgründen oft notwendig ist, aber weder Motivation noch Verständnis der Schüler fördert.

Der Lehrplan sieht auch prinzipielle Probleme an diesem Zugang: Er vermittelt zwar Allgemeinbildung und Wissen und bereitet auch auf die Hochschule vor, aber er bereitet Schüler nicht wirklich auf das Leben vor, trägt nicht zum kritischen Denken bei und fördert weder Kreativität noch Entscheidungsfähigkeit. Besonders bei HAK und HTL wird die Anwendbarkeit in der Berufspraxis gefordert, was bei diesem Zugang kaum gelernt wird.

Alle geforderten Unterkapitel der Differenzialrechnung in der Schule können mit diesem Zugang aufgebaut werden.

Aus Sicht des Kompetenzmodells ist H1) Modellbilden, sowie H2) Rechnen, Operieren durchaus vertreten. H3) Interpretieren fehlt hier vollkommen.

H4) Argumentieren, Begründen wird nur dann zufriedenstellend verwendet, wenn mathematische Beweise ausführlich behandelt werden, was aber in der Schulpraxis selten geschieht, bzw. auch die Fähigkeiten der Schüler oft übersteigt. Zusätzlich geht damit auch die Zeitersparnis größtenteils verloren.

Es ist wahrscheinlich abschnittsweise durchaus sinnvoll, diesen Zugang aus Zeitgründen zu verwenden. Auch kann man hier sehr schön einen Ausblick auf die wissenschaftlich-mathematische Sprache erhalten. Durch Beweisen von Sätzen kann man die Philosophie der Logik verdeutlichen. Durch anwendungsorientierte Beispiele kann man auch die Lebensnähe einbringen und damit zumindest die nachweisbaren Forderungen des Lehrplans erfüllen.

Aus lerntheoretischer und didaktischer Sicht kann man eine rein axiomatische Einführung des Differenzials nicht befürworten:

„Aus Fehlern wird man klug“ – und dies ist uns hier nicht gestattet.

6.2 Das Tangentenproblem

Dieser Zugang ist historisch einer der ältesten, und wird auch heute sehr häufig verwendet. Er bietet eine gute Einführung, weil er von einem geometrischen Problem (der Tangentensteigung) ausgeht, das für Schüler bildlich gut vorstellbar ist.

Da er von einem innermathematischen Problem ausgeht, ist es auch hier ziemlich leicht, die Philosophie der Logik den Schülern bewusst zu machen. Ausgehend von einem anschaulichen Problem kommen wir sehr bald zur Klärung der Eindeutigkeit der Begriffe. Die Lernenden können selbstständig versuchen, durch Kombination und eigenständige Schlüsse zu Erkenntnissen zu gelangen. Sie können Genauigkeit, Abstraktion und sachbezogenes Ausdrucksvermögen lernen, immer ausgehend von einer bildlichen Vorstellung. Man kann also sagen, dass logisch – mathematisches Denken hier gefördert wird. Alleine die lebensnahe Anwendungsorientierung wird nicht besonders beachtet, man kann diese aber problemlos über Beispiele den Schülern nahe bringen.

Didaktisch gesehen wird es bei diesem Zugang sicher einfach sein, mäeutisch die Schüler dazu zu bringen, selbstständig Lösungen und Urteile zu finden, auch wenn diese natürlich nicht immer richtig sein mögen (aber wie schon gesagt, am besten lernt man aus Fehlern).

Die Differenzialrechnung ergibt sich bei dieser Einführung genetisch, es wird an das Vorwissen angeknüpft (Kurven, Tangenten und Sekanten sind bekannt), jeder Schritt ergibt sich aus einer vorangegangenen Problemstellung schlüssig und führt zu weiteren Fragestellungen. Auch kommen wir bei diesem Zugang spiralig zu vorangegangenen Kapiteln (Lagebeziehung von Geraden) zurück, und werden auch später immer wieder auf das Konzept der „Steigung der Tangente in einem Punkt der Funktion“ zurückkommen (z.B. bei den Extremstellen). Der Lehrstoff wird kurzzeitig in Einzelprobleme zerlegt, die dann aber beinahe sofort wieder in den Gesamtzusammenhang einfließen. Der deduktive Aufbau spielt hier eine sehr sekundäre Rolle, da wir z.B. das Differenzial bereits erhalten, bevor wir seine Definition einführen. Man gibt „Erforschen“ des Weges klar den Vorzug gegenüber einer logisch-systematischen Hierarchie.

Auch bei dieser Einführung wird es lehreraktive Zeiten geben, aber der Unterricht sollte meist eher schüleraktiv sein.

Die Forderungen des Lehrplans werden klar erfüllt, er trägt zur Allgemeinbildung bei (geometrische Probleme lösen und mathematisch denken lernen) und bereitet sowohl auf die Hochschule, als auch auf des Leben bzw. den Berufsalltag vor, wenn auch in einer etwas abstrakten Weise (erst durch Beispiele wird der Lebensbezug hergestellt). Letzteres könnte in HAK und HTL zu (geringen) Problemen führen, da dort die Anwendbarkeit in der Berufspraxis an erster Stelle steht. Es wird nicht nur reines Wissen, sondern auch kritische Denkweise gefördert, sowie die Fähigkeiten zur Formalisierung, Modellbildung und zum räumlichen Vorstellungsvermögen. Der Forderung nach „Einsicht in die Zusammenhänge und das Lösen von Problemen“ wird klar nachgekommen.

Alle geforderten Unterkapitel der Differenzialrechnung in der Schule können von diesem Zugang aus aufgebaut werden.

Aus kompetenzorientierter Sicht werden hier alle Handlungsdimensionen ausreichend behandelt: H1) Darstellen, Modellbilden ist hier automatisch vorhanden, H2) Rechnen, Operieren genau so, H3) Interpretieren und H4) Argumentieren wird durch geometrische Vorstellungen ausgezeichnet unterstützt.

Zusammengefasst kann man also diesen Zugang nur gutheißen, wenn auch mit der Einschränkung, dass die innermathematische Bedeutung klar vor den Lebensbezug gestellt wird.

6.3 Das Geschwindigkeitsproblem

Wie schon erwähnt ähnelt dieser Zugang dem vorangegangenen Tangentenproblem. Allerdings stellt er ein wesentlich lebensnäheres physikalisches Problem an den Beginn: Die Ableitung (des Weges nach der Zeit) erhält ihre grundsätzliche Deutung als Momentangeschwindigkeit.

Die Philosophie der Logik tritt also scheinbar zunächst in den Hintergrund, doch kann man durch genauere Betrachtung der Methode problemlos die Denkweise bewusst machen. Die Anwendung als Vordergrundwissen motiviert die Schüler durch Lebensnähe zum Lernen. Das Erarbeiten des Strukturdenkens und der mathematischen Ausdrucksweise wird hier zweit gereiht, aber rückt dennoch nicht in den Hintergrund. Gerade durch den praktischen Bezug, der auch noch bildlich dargestellt wird, können die Schüler leicht zu aktiv entdeckenden Teilnehmern eines Erkenntnisprozesses werden. Das erhöht natürlich auch die Chance auf möglichst effektives Lernen.

Didaktisch kann gerade dieser Zugang zur Weltorientierung beitragen, d.h. die Schüler erhalten die Einsicht, dass Mathematik auch im täglichen Leben Bedeutung hat. Durch die eigene Erfahrung gestützt kann der Lehrer durch Fragen die Blüte der Erkenntnis im Lernenden aufkeimen lassen.

Aus einem praktischen Problem ergeben sich zwanglos mathematische Fragestellungen, jeder Begriff wird erst eingeführt, wenn er unabdingbar notwendig wird. Verallgemeinerungen (wie z.B. der Schluss von der Geschwindigkeitskurve auf allgemeine Funktionen) werden schrittweise eingeführt. Die Schüler werden gleich zu Beginn auf Bekanntes (die Geschwindigkeit muss bereits aus der Physik bekannt sein) zurückgeführt, und diese wird ihnen auch in späteren Beispielen immer wieder unterkommen.

Die gesamte Problematik wird in handliche kleine Stücke zerteilt, die dennoch nie den Bezug zum Gesamten verlieren. Auch hier wird, wie im vorigen Kapitel der deduktive Aufbau vernachlässigt, was auf eine wissenschaftlich-mathematische Weiterbildung vielleicht weniger vorbereitet, als andere Zugänge. Diese Einführung ist eher schüleraktiv, auch wenn der Lehrer natürlich die Entwicklung in eine bestimmte Richtung lenken sollte.

Gerade wegen dem fächerübergreifenden Aspekt (Mathematik und Physik) wird die wesentlichste und vordringlichste Aufgabe der Schule gut erfüllt: die Lebensvorbereitung. Wissensvermittlung, Erlernen von Denkweisen und das Erlangen der Kompetenz zu eigenständigen Problemlösungen werden bei dieser Einführung gefördert. Die Anwendbarkeit in der Berufspraxis, die in HTL und HAK gefordert wird, kann leicht vom Geschwindigkeitsproblem auf andere praktische Probleme (z.B. Gewinnmaximierung) übertragen werden, da die Schüler ja bereits die geistigen Trennwände zwischen den verschiedenen Gebieten niedergerissen haben.

Alle geforderten Unterkapitel der Differenzialrechnung in der Schule können von diesem Zugang aus aufgebaut werden.

Die Handlungsdimensionen werden hier genau wie in (6.2) vollständig verwendet.

Aus seiner persönlichen Erfahrung (z.B. in Volkshochschulkursen und Nachhilfe) hat der Autor den Eindruck, dass (zumindest seine Schüler) mit dieser Einführung am meisten anfangen konnten. Der größte Vorteil ist, dass von Anfang an das Differenzial nicht nur in die Schublade „Mathematik“ gesteckt wird, und somit die Möglichkeit der Anwendung im Bewusstsein der Lernenden verankert ist.

6.4 Das Koordinatensystem der Differenziale

Damit kommen wir zu den weniger häufig verwendeten Zugängen. Das soll aber nicht heißen, dass sie prinzipiell schlechter sind, als die standardmäßig verwendeten, obwohl das Koordinatensystem der Differenziale ein wenig zu abgehoben für den Schulunterricht erscheinen mag. Es hat dafür andere Vorteile.

Da diese Einführung von einem abstrakten geometrischen Problem ausgeht, werden automatisch zumindest implizit die Prinzipien der Logik verwendet. Von der Herangehensweise her wird das abstrakte Denken gefördert, wobei jedoch der bildlich-geometrische Aspekt es den Schülern erleichtert, sich tatsächliche Vorstellungen zu erarbeiten. Auch die durchgehende Verwendung der Leibniz'schen Schreibweise bekräftigt die Vorstellung des Differenzials als Grenzwert.

Die mathematische Denkweise als Hintergrundwissen steht im Mittelpunkt, dadurch verliert die Anwendungsorientierung etwas an Bedeutung. Dass das Neue in bereits vorhandenes Wissen eingebettet wird, erleichtert das Lernen, jedoch denke ich, dass wirkliches selbstständiges Entdecken durch die Schüler selbst eher unwahrscheinlich ist.

Es ist sicherlich möglich, wenn auch vielleicht etwas schwieriger als bei anderen Zugängen, die Schüler mäeutisch zur Erkenntnis zu führen. Das genetische Prinzip wird hier eingehalten, wenn auch möglicherweise der Sinn der einzelnen Schritte nicht immer direkt einsichtig ist. Warum plötzlich nur der lineare Anteil betrachtet wird, wird wohl kaum einem Schüler völlig klar sein. Ich glaube auch nicht, dass so ein Koordinatensystem im Unterricht jemals wieder vorkommen wird, also wird das Spiralprinzip nur ungenügend beachtet. Allerdings ist es natürlich sinnvoll, solche Koordinatentransformationen bereits in der Schule zu erlernen (was bei keiner anderen Einführung des Differenzials besprochen wird). Die Probleme werden in Lernschritten einzeln betrachtet, ohne jedoch auf den Gesamtzusammenhang zu vergessen. Die Verbindung zur Mathematik als Wissenschaft ist zwar nicht über einen klaren deduktiven Aufbau gegeben, aber dafür über den realen historischen Aspekt, dass Leibniz als Wissenschaftler ähnlich vorgegangen ist.

Wie schon erwähnt, wird diese Einführung durch ihre relativ abstrakte Natur wohl eher lehreraktiv sein.

Durch den sowohl abstrakten, also auch geometrischen Ansatz kommt dieser Zugang der Forderung des Lehrplanes nach Wissensvermittlung und Förderung von Denkweisen, Abstraktionsvermögen und Raumvorstellung sehr gut nach. Auch der fächerübergreifende Aspekt wird durch die historische Verbindung zu Leibniz unterstützt. Diese Einführung stellt sicherlich auch eine Vorbereitung für die Hochschule dar. Aber die besonders in HAK und HTL geforderte Anwendbarkeit in der Berufspraxis und im Leben wird stark vernachlässigt.

Alle geforderten Unterkapitel der Differenzialrechnung in der Schule können von diesem Zugang aus aufgebaut werden, wobei der Leibniz'sche Formalismus beibehalten werden kann.

Das Kompetenzmodell wird hier für H1) Modellbilden und H2) Rechnen gut unterstützt.

H3) Interpretieren wird hier aus Mangel an Realitätsnähe eher vernachlässigt.

H4) Begründen könnte die Schüler vor erhöhte Schwierigkeiten auf Grund des Grades der Abstraktion stellen.

Insgesamt gesehen handelt es sich um einen interessanten und für das mathematische Verständnis ausgesprochen sinnvollen Zugang, der allerdings für den Unterricht vielleicht etwas zu abstrakt ist und den Lebensbezug erst in Beispielen herstellt.

6.5 Eigenschaften von Polynomfunktionen - Kurvendiskussion

Diese Einführung ist aus der Überlegung entstanden, dass in der Lehrpraxis die Kurvendiskussion einen wichtigen Stellenwert (in der 7. und 8. Klasse AHS) einnimmt. Es erscheint also sinnvoll, die Einführung des Differenzials in so ein großes Gebiet einzubinden.

Die logische Fortsetzung der bereits in der Schule vorhandenen Anwendung von Funktionen ist natürlich die Betrachtung der Eigenschaften derselben.

Wenn wir nun auf dieses Verständnis aufbauend aus dem praktischen Problem des Aufsuchens von Extremstellen heraus auf das Differenzial kommen, so erscheint dies lerntheoretisch günstig, besonders, da die Schüler in diesen Prozess der Problemlösung leicht eingebunden werden können. Das Erkennen von Eigenschaften sowohl rechnerisch, als auch grafisch fördert das Strukturdenken, das Formulieren derselben eine exakte und mathematische Ausdrucksweise. Auf den ersten Blick erscheint dieser Zugang nicht sehr lebensnah. Wir wollen aber nicht vergessen, dass Grafen (von Funktionen) in unserem Leben und auch in der Berufspraxis ständig vorkommen. Das Auffinden der zentralen Eigenschaften solcher Kurven ist also auch für das Leben wichtig. Die Philosophie der Logik wird hier eher indirekt vermittelt, nämlich durch die Methodik.

Durch fragend-entwickelnden Unterricht sollte es hier über weite Strecken möglich sein, einen schüleraktiven Unterricht zu gestalten. Begriffe und Theoreme werden hier sparsam und erst, wenn sie eigentlich bereits notwendigerweise erarbeitet sind, eingeführt. Jede neue Fragestellung ergibt sich zwanglos aus den vorherigen. Die Lernmotivation wird alleine dadurch gestärkt, dass kein „neues Kapitel“ aus heiterem Himmel auftaucht, sondern dass alles noch zu den Funktionen gehört. Dadurch wird auch noch stärker bewusst gemacht, dass in der Mathematik, wie auch im Leben alles zusammenhängt und aufeinander aufbaut.

Die Gesamtheit der Problemstellung bleibt erhalten, obwohl sie in einzelne, bewältigbare Probleme aufgeteilt wird (Nullstellen, Extremwerte, etc.). Ein exakt deduktiver Aufbau ist hier nicht zu empfehlen.

Den Forderungen des Lehrplans wird hier in allen Punkten nachgekommen: Die Kenntnis und das Verständnis der Eigenschaften von Funktionen ist nicht nur ein eigenes Kapitel in der 7. Klasse AHS, sie ist auch essentiell für die Allgemeinbildung und für viele Berufe. Dieser Zugang regt zu kritischem und demokratischem Denken an, da man durch ihn befähigt wird, Grafiken zu interpretieren und nicht einfach nur hinzunehmen (z.B. wenn in den Nachrichten eine Kurve zum Klimawechsel gezeigt wird).

Alle geforderten Unterkapitel der Differenzialrechnung in der Schule können von diesem Zugang aus aufgebaut werden (z.B. die Extremwertaufgaben bauen direkt auf die Extremstellenberechnung der Kurvendiskussion auf).

Das kompetenzmodell findet in H1) Darstellen und H2) Operieren hier wieder sehr gute Unterstützung. Auch H3) Interpretieren wird durch den geometrischen Zugang gestärkt. H4) Begründen kann hier geometrisch argumentiert werden.

Der Autor hat noch keine praktischen Erfahrungen mit diesem Zugang machen können. Er erscheint aber durchaus geeignet, junge Menschen etwas zwangloser als üblich zum Begriff des Differenzials hinzuführen. Es soll auch noch angemerkt werden, dass in einer Mischform sich das Tangentenproblem hier geradezu aufdrängt, als zweiter Zugang verwendet zu werden.

6.6 Das unendlich Kleine – Zuwachs im Quadrat

Dies geht von einer ganz anderen Fragestellung aus, nämlich, was mit der Fläche passiert, wenn man die Seitenlänge eines Quadrates verändert. Dieser Zugang stammt nicht aus einem Schulbuch, sondern aus „Basiswissen Aktuell Mathematik“ und scheint trotz einiger kleiner Probleme sehr gut geeignet zu sein, im Unterricht verwendet zu werden.

Dass wir von einem speziellen Fall ($y = x^2$) auf die Allgemeinheit schließen, ist vom Standpunkt der Logik natürlich problematisch. Insofern ist diese Einführung nicht unbedingt gut geeignet, die philosophischen und wissenschaftstheoretischen Aspekte zu beleuchten. Dem Schüler aber hilft die anschauliche Herangehensweise, und auch, um erst einmal die richtige Fragestellung zu finden, ist die Induktion in der Praxis oft sinnvoll. Auch kann der Lernende aktiver Teilnehmer an diesem Prozess der Erkenntnisgewinnung sein. Die Idee kann hier sogar zunächst ohne den Funktionsbegriff erläutert werden, um dann zu zeigen, dass es mit einer Funktion und ihrem Grafen noch einfacher geht. Die Idee der Approximation wird auf einfachste Weise eingebracht.

Die mathematische Sprache erscheint inmitten dieser einfachen Erkenntnisse plötzlich gar nicht mehr so fremd. Fehlende Lebensnähe kann man diesem Zugang sicher nicht vorwerfen.

Didaktisch gesehen ist auch hier der schüleraktive, mäeutische Zugang zu empfehlen. Es sollte den Schülern möglich sein, aus ihrem Vorwissen selbstständig auf die einzelnen Problemlösungen zu kommen. Natürlich wird auch hier der Stoff in handliche Teile zerlegt (linear – sukzessiver Aufbau), die Fragestellungen entwickeln sich zwanglos. Als Kritik kann man anmerken, dass der Übergang vom Einzelnen auf das Allgemeine am Schluss dieser Einführung nicht ganz „intellektuell ehrlich“ ist. Auch dieser Zugang führt wieder auf Altbekanntes zurück, in dem Fall sogar ganz einfach auf das Quadrat und seine Fläche. Nachdem uns dies immer wieder begegnen wird, ist also dem Spiralprinzip genüge getan. Von einer logisch–systematischen Hierarchie der Axiome, Definitionen und Sätze ist hier freilich wenig zu bemerken.

Vom Lehrplan her spricht nichts gegen diesen Ansatz, da er definitiv die Lebensnähe und Kreativität, aber auch mathematische Denk- und Ausdrucksweisen fördert. Die Verknüpfung mit mathematischen Grundvorstellungen (z.B. die Steigung der Tangente als Grenzwert von Sekanten) erfolgt erst relativ spät. Auch für HAK und HTL kann dies ein sinnvoller Zugang sein.

Alle geforderten Unterkapitel der Differenzialrechnung in der Schule können von diesem Zugang aus aufgebaut werden.

Alle 4 Handlungsdimensionen des Kompetenzmodells werden hier berücksichtigt.

Dieser Ansatz sollte zumindest in Mischformen öfter Einzug in den Unterricht finden.

6.7 Infinitesimalrechnung und Hyperreelle Zahlen

Dieser Zugang wurde zumindest in Versuchsklassen in den USA bereits erprobt. Die Untersuchungen ergaben, dass er weder besser, noch schlechter als andere Zugänge eingestuft wurde. Er soll die Schüler für das unendlich Kleine sensibilisieren.

(Vgl. Roupec, 1994, S.93 ff.)

Die Denkweise der Mathematik (und damit auch der Logik) wird bei diesem Zugang definitiv geschult. Abstraktes Denken steht hier im Mittelpunkt. Dies geschieht allerdings stark auf Kosten der Lebensnähe und Anwendungsorientierung. Die Hyperreellen Zahlen werden in vorhandenes Wissen eingebettet und daraus ergibt sich dann auch die Definition des Differenzials. Positiv muss man auch vermerken, dass hier die Grundidee der Infinitesimalrechnung so stark in den Mittelpunkt gerückt wird, wie in keinem anderen Zugang. Auch um die theorienbildende Kraft der Mathematik zu erfahren, bietet dieser Zugang einzigartige Möglichkeiten.

Vom genetischen Prinzip her gesehen, muss man sich allerdings fragen, ob die Einführung der hyperreellen Zahlen nicht unnötigen Ballast darstellen, sozusagen eine lerntheoretische Sackgasse. Die einzelnen Schritte ergeben sich durchaus zwanglos, doch ist gesamt gesehen der Sinn der Einführung der hyperreellen Zahlen nicht ganz ersichtlich. Auch stellt sich die Frage, ob das Differenzial ohne diese nicht sogar einfacher und anschaulicher für die Schüler erscheint. Außerdem müssen wir diesen Zugang klar deduktiv aufbauen, was einen fragend-entwickelnden Unterricht praktisch ausschließt, und diesen eindeutig lehreraktiv macht. Dies erspart natürlich Zeit, die wir aber wiederum brauchen, um dieses zusätzliche Gedankengebilde einzuführen.

Der Lehrplan sieht die hyperreellen Zahlen nicht vor. Es gibt allerdings auch keinen Grund, sie nicht einzuführen. Dieser Zugang fördert die mathematischen Kompetenzen und das Abstraktionsvermögen der Schüler und bereitet sie auf die Universität vor. Die von HAK und HTL geforderte Anwendbarkeit in der Berufspraxis ist hier nicht zu erkennen, dieser Zugang wäre also dort auch nicht anzuraten.

Alle geforderten Unterkapitel der Differenzialrechnung in der Schule können von diesem Zugang aus aufgebaut werden, allerdings sinnvollerweise mit Hilfe infinitesimaler Schlussweisen.

Handlungskompetenzen H1), H2) und H4) können hier sinnvoll erarbeitet werden, jedoch fehlt mir für H3) Interpretieren der praxisnahe Zugang.

Diese Einführung ist möglicherweise zu abstrakt für die Schule. Ihr größter Vorteil ist, dass sie die infinitesimale Idee so stark einbringt, wie kein anderer Zugang. Allerdings wiegt das nicht die fehlende Anschaulichkeit und Lebensorientierung auf.

6.8 Differenzialrechnung als Umkehrung der Integralrechnung

Dieser Zugang ist zwar in der Schule unüblich, zeigt aber sogar die historische Entwicklung der Infinitesimalrechnung auf. Ein wichtiger fachspezifischer Aspekt ist, dass er die Bedeutung des Fundamentalsatzes der Analysis hervorhebt.

„Die in die Behandlung von infinitesimalen Prozessen stets hineinwirkenden Existenz- (und erkenntnistheoretischen) Fragen sind in der Integralrechnung beim Einstieg weniger gravierend als in der Differenzialrechnung; z.B. erscheinen Flächeninhalte als ‚zweidimensional repräsentierte‘ Größen unmittelbar zugänglich, während der infinitesimale Prozess im Gegensatz dazu beim Tangentenproblem noch durch die Begriffsentwicklung selbst belastet wird.“

(S. Blum, 1983, S.157)

Dem ist allerdings entgegenzuhalten, dass der Begriff des bestimmten Integrals relativ komplex ist. Auch sind Tangentenaufgaben leichter zu lösen, als Flächenberechnungen.

Mathematische Denkweisen (und die der Logik) können durch diesen Zugang genauso gut vermittelt werden, wie durch den umgekehrten. Auch die Anwendungen sind im Großen und Ganzen dieselben.

Ein deduktiver Aufbau ist zwar durchaus möglich, doch empfiehlt es sich auch hier, eher den schüleraktiven fragend–entwickelnden Unterrichtsstil zu benutzen. Alle Schritte folgen zwanglos aus den vorhergehenden, auch die Fragestellung nach dem Flächeninhalt einer beliebigen Figur ergibt sich aus vorhergehenden Problemstellungen (z.B. Was ist der Flächeninhalt eines Quadrats?). Spiralig wird auf Bekanntes immer wieder zurückgeführt. Wichtig ist, dass man das Differenzial schlüssig aus dem Integral entwickelt.

Probleme ergeben sich bei diesem Zugang eigentlich hauptsächlich dadurch, dass er nur in HAK und HTL wirklich durchführbar ist, da im Lehrplan der AHS das Differenzial fest in der 7. Klasse und damit vor dem Integral in der 8. Klasse verankert ist. Des Weiteren ist es in naturwissenschaftlichen Nachbarfächern (wie z.B. Physik) üblich, das Differenzial vor dem Integral zu reihen. Ansonsten fördert dieser Zugang genauso die Erziehung zu analytisch–folgerichtigem Denken, Wissen und mathematische Kompetenzen. Die Anwendungsorientierung ist hier sehr leicht zu argumentieren, da es mindestens so viele lebensnahe Flächen- wie Tangentenprobleme gibt.

Alle geforderten Unterkapitel der Differenzialrechnung und der Integralrechnung in der Schule können von diesem Zugang aus aufgebaut werden.

Alle 4 Handlungskompetenzen können bei diesem Zugang erarbeitet werden.

Einen Punkt möchte sollte noch erwähnt werden: Wenn man die Bedeutung des Integrals herausstreichen möchte, dann ist es sinnvoll, dieses auch vor dem Differenzial einzuführen. In der Praxis hat man (teilweise durch die Matura bedingt) in der 8. Klasse für die Integralrechnung weniger Zeit, als für die Differenzialrechnung in der 7. Klasse. In HAK und HTL werden beide Kapitel in einem Jahr eingeführt, aber auch hier hat man erfahrungsgemäß zu Anfang des Jahres mehr Zeit als am Ende.

6.9 Änderungsraten als Grundverständnis

Im Prinzip gilt für dieses Kapitel ähnliches, wie für „(6.2) Das Tangentenproblem“. Allerdings wird hier der Ableitung weniger geometrische Bedeutung beigemessen, sondern vielmehr diese als Zahl gedeutet (eben die Änderungsrate).

Von einem innermathematischen Problem ausgehend ist es hier natürlich leicht, die Philosophie der Logik, wie auch allgemein mathematische Denkweisen den Schülern bewusst zu machen. Aber auch praktische Anwendungen ergeben sich völlig zwanglos, wie z.B. Temperatur- Veränderungen. Leider fehlt hier größtenteils die bildliche Vorstellung, was sich negativ auf die Lerneffektivität auswirken kann. Genauigkeit, Abstraktion und die „mathematische Sprache“ können problemlos erlernt werden.

Mäeutischer Unterricht wird diesen Zugang schüleraktiv gestalten, und ist dem deduktiven Aufbau (lehreraktiv) vorzuziehen, so es die Unterrichtszeit erlaubt. Die Differenzialrechnung ergibt sich bei dieser Einführung genetisch, es wird an das Vorwissen angeknüpft (Relationen sind bekannt), jeder Schritt ergibt sich aus einer vorangegangenen Problemstellung schlüssig und führt zu weiteren Fragestellungen. Auch kommen wir bei diesem Zugang spiralig zu vorangegangenen Kapiteln zurück.

Auch diese Einführung erfüllt die Forderungen des Lehrplans, sie trägt zur Allgemeinbildung bei und bereitet auf Hochschule und Leben vor. Sie fördert sowohl mathematische Kompetenzen als auch deren Anwendung.

Alle geforderten Unterkapitel der Differenzialrechnung in der Schule können von diesem Zugang aus aufgebaut werden.

Beim Kompetenzmodell werden hier alle 4 Handlunsdimensionen berücksichtigt.

Müsste man sich für einen reinen Zugang entscheiden, so wäre das Tangentenproblem vor dieser Einführung zu wählen, weil geometrisches Verständnis einfach besser im Gedächtnis bleibt und einfacher zu durchschauen ist. In einer Mischform ist die Grundvorstellung des Differenzials als Änderungsrate allerdings essentiell.

6.10 Weitere Zugänge

Diese Zugänge sind zwar möglich und wurden deshalb auch der Vollständigkeit halber erwähnt, sie erscheinen für die Schule aber nicht besonders gut geeignet.

Bei der stetigen Fortsetzung müssen wir sowohl Stetigkeit, als auch den Begriff der Häufungspunkte zuvor genau erarbeiten. Dies bietet natürlich die Möglichkeit zu tiefer gehendem mathematischem Verständnis. Auf diesem aufgebaut, gibt es aber keinen Grund, warum man den Grenzwertbegriff umgehen wollen sollte. Es gibt also eigentlich keinen Vorteil gegenüber anderen Zugängen. Natürlich wäre es aber auch möglich, primär auf Stetigkeit aufbauend das Differenzial einzuführen.

Die Einschränkung auf gutartige Funktionen hat zwei große Vorteile: Bestimmte problematische Spezialfälle von Funktionen können von vornherein ausgeschlossen werden und weitere Beweisführungen werden durch die nennerfreie Form vereinfacht. Allerdings kommen diese Spezialfunktionen in der Schule selten vor, und andere, häufigere Funktionen, wie z.B. $y = \sqrt{x}$ sind nicht gutartig, und man müsste einen neuen Konvergenzbegriff einführen. Durch die ungewöhnliche Definition des Differenzials werden zudem gewisse Grundvorstellungen (wie die des Differenzials als Steigung der Tangente) schwierig einzuführen.

Logik und mathematische Denkweisen kann man mit beiden Zugängen den Schülern nahe bringen. Auch auf die mathematische Ausdrucksweise wird großen Wert gelegt, jedoch fehlen Lebensnähe und bildhafte Vorstellung, die beide für die Schule wichtig sind.

Beide Einführungen bedingen keine spezielle Fortführung des Unterrichts (d.h. im didaktischen Sinne wäre sowohl ein deduktiver Aufbau, wie auch ein fragend-entwickelnder Unterricht im Weiteren möglich). Beide Fälle sind prinzipiell genetisch aufbaubar, aber durch die fehlende geometrische Erklärung fallen die Definitionen der Gutartigkeit und dann im Weiteren die des „gutartigen Differenzials“ praktisch aus heiterem Himmel auf den Kopf. Durch die ziemlich abstrakte Herangehensweise wird der Unterricht eher lehreraktiv ablaufen.

Dem gesetzlichen Auftrag, Allgemeinbildung, Wissen und mathematische Kompetenzen zu vermitteln, sowie auf die Hochschule vorzubereiten, wird in beiden Fällen entsprochen. Allerdings kommt die Anwendungsorientierung und Lebensvorbereitung zu kurz.

Das Kompetenzmodell wird hier nur bezüglich H2) Rechnen zufriedenstellend erfüllt. H1) Modellbilden wird besonders Vereinfachungen betreffend verwendet, allerdings sehe ich hier nicht besonders geeignete Möglichkeiten, andere mathematische Darstellungen zu fördern. In H3) fehlt die Anwendungsorientierung und ich sehe praktische Probleme für die Schüler bei H4) bezüglich der Beweise.

Alle geforderten Unterkapitel der Differenzialrechnung in der Schule können von diesem Zugang aus aufgebaut werden, auch wenn dies durch die stark von üblichen Definitionen abweichende Lipschitz–Definition etwas schwieriger werden dürfte.

6.11 Historisch: Höfler's Zugang

Auch wenn es heute weder notwendig, noch sinnvoll erscheint, den Begriff des Differenzials zu vermeiden, so ist doch Höfler's Zugang im Unterricht gut durchführbar (natürlich mit der Modifikation, bei der unbegrenzten Annäherung von M_1 und M_2 den Begriff des Differenzials über die Tangentensteigung einzuführen).

Der Zugang ist logisch gut strukturiert und hat nur einen Stolperstein, der aber eben durch die explizite Einführung des Differenzials entfernt wird. Er vermittelt die Mathematik als Denkwerkzeug und Ausdrucksweise. Das Differenzial an sich wird ausgehend von lebensnahen Beispielen erklärt. Nicht nur dies steigert die Lernmotivation, das neue wird auch in altes Wissen eingebettet.

Man kann gerade diesen Zugang besser schüleraktiv – mäeutisch bringen, als lehreraktiv – deduktiv, auch wenn natürlich beide Möglichkeiten gegeben sind.

Mit eben der Erweiterung der expliziten Einführung des Differenzials kann nun auch der Sinn jedes Schrittes eingesehen werden, die Entwicklung erfolgt zwanglos und ohne Sprünge. Auch wird spiralig auf Bekanntes zurückgekommen (sofern die Ellipse schon bekannt ist, sonst muss man stattdessen den Kreis verwenden).

Durch den historischen Aspekt kann man hier leicht fächerübergreifend arbeiten. Den gesetzlichen Forderungen sowohl nach mathematischen Kompetenzen, Wissensvermittlung und Praxisorientierung (besonders in HAK und HTL) wird eindeutig nachgekommen. Alle geforderten Unterkapitel der Differenzialrechnung in der Schule können von diesem Zugang aus aufgebaut werden.

Auch die 4 Handlungsdimensionen können hier wieder erarbeitet werden.

Dieser Zugang wird am Besten in einer Mischform mit dem Tangentenproblem oder dem Geschwindigkeitsproblem verwendet. Ein Vorteil für den Unterricht ist auch, dass man die Entwicklung der Mathematik, bzw. des Mathematikunterrichts darin einbinden kann.

6.12 Abschließend: Mischformen

Dieses Kapitel ist wesentlich, weil Mischformen zu Recht am häufigsten verwendet werden. Manche Zugänge bedingen einander beinahe, wie z.B. Höfler's Zugang die Verwendung des Tangentenproblems. Andere Zugänge passen einfach gut zueinander und ergänzen einander, z.B. das Geschwindigkeitsproblem und das Tangentenproblem.

Sowohl die didaktischen, als auch die allgemeinen Prinzipien und die Forderungen der Lehrpläne können am besten durch Kombination verschiedener Zugänge erfüllt werden.

Per Definition erfüllen Mischformen natürlich sämtliche Dimensionen des Kompetenzmodells. Es ist nur eine Frage der Zeit, wie stark man auf die einzelnen Handlungskompetenzen eingehen kann.

„Einzelne Inhalte und Probleme sind aus verschiedenen Blickwinkeln zu sehen und aus verschiedenen Richtungen zu beleuchten ... die maximale Realisierung [besteht] im konsequenten Herausarbeiten der Vor- und Nachteile verschiedener Zugänge. Damit wird ein vielschichtiges und ausgewogenes Bild der Mathematik gewonnen.“

(S. Anhang, S. 114, Lehrplan für AHS, 2014)

Nicht nur der Lehrplan, auch die Didaktik befürwortet die Variation der Darstellung, also auch der Zugänge. Nicht zuletzt findet jeder Schüler durch einen anderen Zugang leichter seinen Weg zum Verständnis. D.h. dass durch Mischformen auch mehr Schüler motiviert und angesprochen werden können.

6.13 Zusammenfassung der Analyse der verschiedenen Zugänge

Dieses Kapitel soll nun noch einen kurzen Überblick über alle aufgeführten Zugänge bieten.

Methode	Zeit	Logik	Didaktik	bev. Pr.	Allg.b.	Denken
1. Axiomatisch	+	+	-	D	+	-
2. Tangente	-	+	+	M,G	+	+
3. Geschwindigkeit	-	-	+	M,S	+	+
4. Koord.sys. der Diff.	-	+	-	G	+	-
5. Kurvendiskussion	+	-	+	M,G	+	+
6. Zuwachs im Quadrat	-	-	+	M,S	+	-
7. Hyperreelle Zahlen	-	+	-	D	+	-
8. Umk. des Integrals	-	+	+	M,S	+	+
9. Änderungsraten	+	+	-	G,S	+	-
10. stet.Forts./Lipschitz	-	+	-	D,M	-	-
11. Historisch: Höfler	-	+	+	M,G,S	+	+
12. Mischformen	-	+	+	M,G,S	+	+

Methode	Praxisn.	Lehrplan	H1	H2	H3	H4
1. Axiomatisch	-	+	+	+	-	-
2. Tangente	-	+	+	+	+	+
3. Geschwindigkeit	+	+	+	+	+	+
4. Koord.sys. der Diff.	-	+	+	+	-	-
5. Kurvendiskussion	-	+	+	+	+	+
6. Zuwachs im Quadrat	+	+	+	+	+	+
7. Hyperreelle Zahlen	-	+	+	+	-	+
8. Umk. des Integrals	+	*	+	+	+	+
9. Änderungsraten	+	+	+	+	+	+
10. stet.Forts./Lipschitz	-	+	-	+	-	-
11. Historisch: Höfler	+	+	+	+	+	+
12. Mischformen	+	+	+	+	+	+

- + bedeutet, dass der Zugang das Ziel gut erfüllt
- bedeutet, dass der Zugang das Ziel weniger gut erfüllt
- * bedeutet, dass der Zugang nur in HAK und HTL den Lehrplan erfüllt
- D bedeutet, dass der Zugang das didaktische Prinzip des deduktiven Aufbaus bevorzugt
- M bedeutet, dass der Zugang die Mäeutik, den fragend-entwickelnden Unterricht fördert
- G bedeutet, dass der Zugang das genetische Prinzip verwendet
- S bedeutet, dass der Zugang das Spiralprinzip verwendet

Methode	bezieht sich auf den jeweiligen Zugang
Zeit	bezieht sich auf den Zeitaufwand des jeweiligen Zugangs
Logik	bezieht sich auf die Einbeziehung der Denkweise der Logik
Didaktik	bezieht sich darauf, wie didaktisch wertvoll der Zugang ist
Bev. Pr.	bezieht sich auf das bei dem Zugang bevorzugt verwendete didaktische Prinzip
Allg.b.	bezieht sich darauf, ob der Zugang die Allgemeinbildung fördert
Denken	bezieht sich darauf, ob der Zugang selbstständiges Denken fördert
Praxisn.	bezieht sich darauf, ob der Zugang praxisnahe, bzw. lebensnahe ist
Lehrplan	bezieht sich darauf, ob der Zugang den momentanen Lehrplan erfüllt

7. Verschiedene Lehrbücher im Vergleich

Dieses Kapitel soll zuletzt noch einen kurzen Überblick bieten, welche Zugänge in verschiedenen Schullehrbüchern realisiert werden. Es wurden 12 Schulbücher der Mathematik angesehen und der Autor möchte auch seinen eigenen Mathematikunterricht in der Schule anführen.

„Mathematik-Lehrbuch 7“ auf der Grundlage des Lehrplans 2004 von, Götz, Reichel, Müller und Hanisch (vgl. Götz, Reichel, Müller, Hanisch 2006, ML 7, S.42–90) führt das Differenzial zunächst über das Tangentenproblem (5.2) ein und behandelt sofort danach das Geschwindigkeitsproblem (5.3), verwendet also eine Mischform.

„Mathematik verstehen 7“ von Malle, Ramharter, Ulovec und Kandl (vgl. Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl, 2007, S. 11ff.) beginnt mit der Einführung über die Geschwindigkeit (5.3) und geht relativ schnell zum Verständnis der Änderungsrate (5.9) über, auf das besonderer Wert gelegt wird. Erst dann wird die geometrische Deutung des Differenzials als Steigung betrachtet (5.2). Das Buch verwendet also auch eine Mischform.

„Mathematik 7“ für AHS von Szirucsek, Dinauer, Unfried und Schatzl (vgl. Szirucsek, 1991, S.185 ff.) verwendet eine Mischform: Zunächst wird als Grundverständnis die Änderungsrate (5.9) eingeführt (auch wenn man hier argumentieren kann, dass es sich eher um eine geometrische Betrachtungsweise handelt, und damit nicht genau um die hier beschriebene Einführung), danach das Tangentenproblem (5.2) und schließlich das Geschwindigkeitsproblem (5.3) behandelt.

„Mathematik 3“, das Übungs- und Lehrbuch für die 7. Klasse AHS von Rudolf Taschner (vgl. Taschner, 2000, S.48 ff.) verwendet eindeutig den Zugang über das Koordinatensystem der Differenziale (5.4).

„Mathematik Oberstufe 3“ von Bürger, Fischer, Malle (vgl. Bürger, 1986, S.17 ff.) verwendet zunächst die Änderungsrate als Grundverständnis (5.9) und dann das Geschwindigkeitsproblem (5.3) als Mischform (natürlich wird das Tangentenproblem (5.2) später noch beleuchtet).

„Mathematik Oberstufe 3“ von Bürger, Fischer, Malle, Kronfellner, Mühlgassner, Schlöglhofer (vgl. Bürger, 1991, S.5 ff.) legt erhöhten Wert auf das Grundverständnis der Änderungsrate (5.9), führt dann über auf das Geschwindigkeitsproblem (5.3), um schlussendlich beim Tangentenproblem (5.2) zu landen. Auch hier handelt es sich um eine Mischform.

Das „Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der AHS, 3. Band“ von Laub (vgl. Laub, 1980, S.122 ff.) geht von einem axiomatischen Zugang (5.1) und der stetigen Fortsetzung (5.10) (Vgl. Laub, 1980, S.126) aus. Auch hier wird später noch das Tangentenproblem (5.2) behandelt.

Das „Arbeitslehrbuch Mathematik 7“ von Eduard Szirucsek und Hubert Unfried (vgl. Szirucsek, 1975, S.130 ff.) ist für die AHS, aber auch für die höheren landwirtschaftlichen Lehranstalten gedacht. Es ist hauptsächlich auf Beispiele aufgebaut, benutzt aber fachlich einen eher axiomatischen Zugang (5.1). Durch die wiederholte geometrische Deutung kann man auch einen Zugang über das Tangentenproblem (5.2) argumentieren.

„Ist gleich“, das Lehrbuch für Mathematik und angewandte Mathematik für HAK 3 von Hanisch, Reichel, Müller, Schak (vgl. Hanisch, Reichel, Müller, Schak, 2000, S.34 ff.) führt das Differenzial durch eine Mischform aus Tangentenproblem (5.2) und Geschwindigkeitsproblem (5.3) ein.

„Mathematik für HAK 3“ von Gerhard Steiner (vgl. Steiner, 1981, S.59 ff.) verwendet auch eine Mischung aus Tangentenproblem (5.2) und Geschwindigkeitsproblem (5.3).

„Mathematik für HTL 3“ von Dr. Julius Schärf wurden in den Versionen aus den Jahren 1982 und 1994 angesehen (vgl. Schärf, 1982, S.59 ff. und 1994, S.61 ff.). Es verwendet einen eher axiomatischen Zugang (5.1), kommt dann aber später auch zu dem Tangenten- (5.2) und dem Geschwindigkeitsproblem (5.3).

„Mathematik erleben, Band 3“ von Horst Malle (vgl. Malle, 1996, S.119ff.) verwendet die Änderungsraten (5.9) als Grundverständnis, beginnt aber gleich mit einem Geschwindigkeitsbeispiel (5.3), wobei auch das Tangentenproblem (5.2) rasch angesprochen wird, verwendet also ganz klar eine Mischform.

„Maturawissen Mathematik“ von Blanckenstein, Gut, Karajan (vgl. Blanckenstein, Gut, Karajan, 2012, S.151ff.) verwendet als Zugang das Tangentenproblem (5.2).

„Mathematik positiv! 7“ von Thorwartl, Wagner, Wagner (vgl. Thorwartl, Wagner, Wagner, 2012, S.108ff.) verwendet eine Mischform von Tangenten- und Geschwindigkeitsproblem (5.2 und 5.3) als Zugang.

„Mathematik für die Berufsreifeprüfung 2“ von Tinhof, Fischer, Grlinger, Paul (vgl. Tinhof, Fischer, Grlinger, Paul, 2013, S.78ff.) verwendet am ehesten den axiomatischen Zugang (5.1), widmet dann aber ein ganzes Kapitel der Kurvendiskussion (5.5).

Zu letzt möchte ich gerne noch einen Blick zurück auf meinen eigenen Mathematikunterricht werfen. Diesen habe ich übrigens als ausgezeichnet empfunden, und das dort gewonnene Verständnis und die Freude an der Mathematik brachten mich erst zu dem Entschluss, Mathematik als Lehramt zu studieren. (vgl. Klein, 1989, 21.2.1989 ff.) Hier wurde als Zugang eindeutig das Tangentenproblem gewählt.

Abschlussbemerkungen

Zum Ende dieser Arbeit kommt man zu dem Schluss, dass es sehr wohl (didaktisch) bessere und schlechtere Zugänge zur Differenzialrechnung geben mag (obwohl ja ursprünglich eigentlich nicht geurteilt werden sollte). Dennoch ist es immer noch wichtig, sich als Lehrender mit möglichst vielen verschiedenen Zugängen zur Differenzialrechnung zu beschäftigen, und sie auch auf ihre (didaktische) Tauglichkeit zu überprüfen.

Gerade die Differenzialrechnung bietet die Möglichkeit, den Unterricht über das reine „Rechnen“ zur „Mathematik“ zu erheben, ohne die Schüler damit zu überfordern. Damit kommt ihr eine Bedeutung wie wenigen anderen Kapiteln des Mathematikunterrichts zu (in der Unterstufe und auch bis zur 6. Klasse AHS hinauf herrscht meiner Erfahrung nach oft das „Rechnen“ vor). Nehmen wir uns also für die Differenzialrechnung Zeit und schenken ihr die Beachtung, die sie verdient.

Auch wenn sich manche Zugänge zu Recht durchgesetzt haben, so sind andere möglicherweise nur nicht bekannt genug, um Einzug in den Unterricht zu finden. Die „perfekte Einführung“ kann es nicht geben, man muss immer Prioritäten setzen, welche Ansätze Vorrang haben. Somit ist natürlich vieles Geschmackssache des Lehrers, und diese Arbeit gibt die nun die Möglichkeit, nicht nur „aus dem Bauch heraus“ zu entscheiden, sondern durch möglichst viele Zugänge und ihre Analyse zu einer echten und intellektuell ehrlichen freien Entscheidung zu gelangen.

Nur durch eine solche Auseinandersetzung mit dem Gebiet wird es uns schließlich gelingen, die Schönheit der Mathematik auch vor Kritikern zu verteidigen und eine Antwort auf die scheinbar einfache Frage zu finden, die so mancher Schüler (zumindest heimlich) stellt: „Wozu ist die Mathematik gut, und wofür brauche ich einzelne Unterkapitel, wie das Differenzial?“

Anhang

A) Lehrplan AHS, allgemeiner Teil

Es handelt sich dabei um den allgemeine Teil des AHS – Lehrplans für 2004 aufsteigend (entnommen der Homepage des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur).

Ich habe die Teile der Verordnung, die für meine Betrachtungen irrelevant sind heraus geschnitten, um Platz zu sparen.

ERSTER TEIL ALLGEMEINES BILDUNGSZIEL

1. Funktion und Gliederung des Lehrplans

Der vorliegende Lehrplan stellt einerseits die für die Einheitlichkeit und Durchlässigkeit des Schulwesens notwendigen Vorgaben dar und eröffnet andererseits Freiräume, die der Konkretisierung am Standort vorbehalten sind. Der Lehrplan dient als Grundlage für

- die Konkretisierung des Erziehungsauftrags der Schule,
- die Planung und Steuerung des Unterrichts in inhaltlicher und in methodischer Hinsicht,
- die Gestaltung des Erweiterungsbereichs und für schulautonome Lehrplanbestimmungen,
- die Planungen der schulpartnerschaftlichen Gremien,
- das standortbezogene Bildungsangebot,
- die Berücksichtigung der individuellen Interessen und persönlichen Lebensrealität der Schülerinnen und Schüler.

Der Lehrplan gliedert sich in das Allgemeine Bildungsziel, die Allgemeinen Didaktischen Grundsätze, den Teil Schul- und Unterrichtsplanung, die Stundentafeln und die Lehrpläne für die einzelnen Unterrichtsgegenstände.

Das Allgemeine Bildungsziel definiert gemeinsam mit den Allgemeinen Didaktischen Grundsätzen und dem Teil Schul- und Unterrichtsplanung Verbindlichkeiten, Verantwortlichkeiten und Freiräume bei der Umsetzung des Lehrplans.

Die Stundentafeln nennen Unterrichtsgegenstände und geben das Stundenausmaß der Unterrichtsgegenstände an, definieren die Freiräume für schulautonome Maßnahmen und sind maßgebend für den zeitlichen Umfang des Kernbereiches (in seiner jeweiligen Bedeutung; siehe dazu Z 2 des Dritten Teiles).

In den Lehrplänen der einzelnen Unterrichtsgegenstände wird die „Bildungs- und Lehraufgabe“ festgelegt, welche sich in der Unterstufe sowohl auf den Kern- als auch auf den Erweiterungsbereich bezieht. Außerdem werden Bezüge zum Allgemeinen Bildungsziel und insbesondere Beiträge zu den Bildungsbereichen angeführt. Im Abschnitt „Didaktische Grundsätze“ werden Anleitungen zur Gestaltung des Unterrichts gegeben und im Abschnitt „Lehrstoff“ werden die zu erreichenden Ziele bzw. Inhalte (in der Unterstufe für den Kernbereich) festgelegt.

2. Gesetzlicher Auftrag

Die allgemein bildende höhere Schule hat die Aufgabe, den Schülerinnen und Schülern eine umfassende und vertiefte Allgemeinbildung zu vermitteln und sie zugleich zur Hochschulreife zu führen (§ 34 des Schulorganisationsgesetzes).

Die allgemein bildende höhere Schule hat im Sinne des § 2 des Schulorganisationsgesetzes an der Heranbildung der jungen Menschen mitzuwirken, nämlich beim Erwerb von Wissen, bei der Entwicklung von Kompetenzen und bei der Vermittlung von Werten. Dabei ist die Bereitschaft zum selbstständigen Denken und zur kritischen Reflexion besonders zu fördern. Die Schülerinnen und Schüler sind in ihrem Entwicklungsprozess zu einer sozial orientierten und positiven Lebensgestaltung zu unterstützen.

3. Leitvorstellungen

Der Bildungs- und Erziehungsprozess erfolgt vor dem Hintergrund rascher gesellschaftlicher Veränderungen insbesondere in den Bereichen Kultur, Wissenschaft, Wirtschaft, Technik, Umwelt und Recht. Der europäische Integrationsprozess ist im Gange, die Internationalisierung der Wirtschaft schreitet voran, zunehmend stellen sich Fragen der interkulturellen Begegnung und Herausforderungen im Bereich Chancengleichheit und Gleichstellung der Geschlechter.

In diesem Zusammenhang kommt der Auseinandersetzung mit der regionalen, österreichischen und europäischen Identität unter dem Aspekt der Weltoffenheit besondere Bedeutung zu. Akzeptanz, Respekt und gegenseitige Achtung sind wichtige Erziehungsziele insbesondere im Rahmen des interkulturellen Lernens und des Umgangs der Geschlechter miteinander. Wenn Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichen kulturellen Hintergründen – zB unterschiedlichen Muttersprachen – gemeinsam unterrichtet werden,

ist neben der sicheren Verwendung der Unterrichtssprache der Begegnung der Kulturen im Alltagsleben besonderes Augenmerk zu widmen. Schulen sind im Zuge von „Gender Mainstreaming“ und Gleichstellung der Geschlechter angehalten, sich mit der Relevanz der Kategorie Geschlecht auf allen Ebenen des Lehrens und Lernens auseinanderzusetzen.

Die Wahrnehmung von demokratischen Mitsprache- und Mitgestaltungsmöglichkeiten in den unterschiedlichen Lebens- und Gesellschaftsbereichen erfordert die Befähigung zur sach- und wertbezogenen Urteilsbildung und zur Übernahme sozialer Verantwortung. Zur Entwicklung dieser Fähigkeiten ist in hohem Maße Selbstsicherheit sowie selbst bestimmtes und selbst organisiertes Lernen und Handeln zu fördern.

Die Schülerinnen und Schüler sollen eigene weltanschauliche Konzepte entwerfen und ihre eigenen Lebenspläne und eigenen Vorstellungen von beruflichen Möglichkeiten entwickeln. Die Schülerinnen und Schüler sind sowohl zum selbstständigen Handeln als auch zur Teilnahme am sozialen Geschehen anzuhalten. Im überschaubaren Rahmen der Schulgemeinschaft sollen Schülerinnen und Schüler Fähigkeiten erwerben, die später in Ausbildung und Beruf dringend gebraucht werden, etwa für die Bewältigung kommunikativer und kooperativer Aufgaben.

Den Fragen und dem Verlangen nach einem sinnerfüllten Leben in einer menschenwürdigen Zukunft hat der Unterricht mit einer auf ausreichende Information und Wissen aufbauenden Auseinandersetzung mit ethischen und moralischen Werten und der religiösen Dimension des Lebens zu begegnen. Die jungen Menschen sind bei der Entwicklung zu eigenverantwortlichen Persönlichkeiten zu fördern und in der Herausforderung, in ihrem Dasein einen Sinn zu finden, zu stützen. Die Würde jedes Menschen, seine Freiheit und Integrität, die Gleichheit aller Menschen sowie die Solidarität mit den Schwachen und am Rande Stehenden sind wichtige Werte und Erziehungsziele der Schule.

Innovative Technologien der Information und Kommunikation sowie die Massenmedien dringen immer stärker in alle Lebensbereiche vor. Besonders Multimedia und Telekommunikation sind zu Bestimmungsfaktoren für die sich fortentwickelnde Informationsgesellschaft geworden. Im Rahmen des Unterrichts ist diesen Entwicklungen Rechnung zu tragen und das didaktische Potenzial der Informationstechnologien bei gleichzeitiger kritischer rationaler Auseinandersetzung mit deren Wirkungsmechanismen in Wirtschaft und Gesellschaft nutzbar zu machen.

Den Schülerinnen und Schülern sind relevante Erfahrungsräume zu eröffnen und geeignete Methoden für eine gezielte Auswahl aus computergestützten Informations- und Wissensquellen zur Verfügung zu stellen.

Der Unterricht hat sich entsprechend § 17 des Schulunterrichtsgesetzes sowohl an wissenschaftlichen Erkenntnissen als auch an den Erfahrungen und Möglichkeiten, die die Schülerinnen und Schüler aus ihrer Lebenswelt mitbringen, zu orientieren.

Im Sinne der gemeinsamen Bildungswirkung aller Unterrichtsgegenstände hat der Unterricht die fachspezifischen Aspekte der einzelnen Unterrichtsgegenstände und damit vernetzt fächerübergreifende und fächerverbindende Aspekte zu berücksichtigen. Dies entspricht der Vernetzung und gegenseitigen Ergänzung der einzelnen Disziplinen und soll den Schülerinnen und Schülern bei der Bewältigung von Herausforderungen des täglichen Lebens helfen.

4. Aufgabenbereiche der Schule

Wissensvermittlung

Zur Vermittlung fundierten Wissens als zentraler Aufgabe der Schule sollen die Schülerinnen und Schüler im Sinne eines lebensbegleitenden Lernens zur selbstständigen, aktiven Aneignung, aber auch zu einer kritisch - prüfenden Auseinandersetzung mit dem verfügbaren Wissen befähigt und ermutigt werden.

Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, in altersadäquater Form Problemstellungen zu definieren, zu bearbeiten und ihren Erfolg dabei zu kontrollieren.

Kompetenzen

Eine so erworbene Sachkompetenz bedarf allerdings der Erweiterung und Ergänzung durch Selbst- und Sozialkompetenz. Die Entwicklung der eigenen Begabungen und Möglichkeiten, aber auch das Wissen um die eigenen Stärken und Schwächen sowie die Bereitschaft, sich selbst in neuen Situationen immer wieder kennen zu lernen und zu erproben, ist ebenso Ziel und Aufgabe des Lernens in der Schule wie die Fähigkeit und Bereitschaft, Verantwortung zu übernehmen, mit anderen zu kooperieren, Initiative zu entwickeln und an der Gestaltung des sozialen Lebens innerhalb und außerhalb der Schule mitzuwirken („dynamische Fähigkeiten“).

Die Förderung solcher dynamischer Fähigkeiten soll die Schülerinnen und Schüler auf Situationen vorbereiten, zu deren Bewältigung abrufbares Wissen und erworbene Erfahrungen allein nicht ausreichen, sondern in denen Lösungswege aktuell entwickelt werden müssen.

Es ist wichtig, dass Schülerinnen und Schüler lernen, mit Sachthemen, mit sich selbst und mit anderen auf eine für alle Beteiligten konstruktive Weise umzugehen. Sie sollen Sachkompetenz, Selbstkompetenz und Sozialkompetenz in einem ausgewogenen Verhältnis entwickeln.

Religiös-ethisch-philosophische Bildungsdimension

Die Schülerinnen und Schüler stehen vor den Fragen nach Sinn und Ziel und ihrem Verlangen nach einem sinnerfüllten Leben in einer menschenwürdigen Zukunft. Bei der Suche nach Orientierung bieten Religionen und Weltanschauungen ihre Antworten und Erklärungsmuster für eine eigenständige Auseinandersetzung an. In den Unterrichtsgegenständen ist auf philosophische und religiöse Erklärungs- und Begründungsversuche über Ursprung und Sinn der eigenen Existenz und der Welt einzugehen. Junge Menschen sollen Angebote zum Erwerb von Urteils- und Entscheidungskompetenz erhalten, um ihr Leben sinnerfüllt zu gestalten. Orientierungen zur Lebensgestaltung und Hilfen zur Bewältigung von Alltags- und Grenzsituationen sollen die Schülerinnen und Schüler zu einem eigenständigen und sozial verantwortlichen Leben ermutigen. Die Achtung vor Menschen, die dabei unterschiedliche Wege gehen, soll gefördert werden. Diese Zielsetzungen bilden die Grundlage für eine fächerübergreifende und vernetzte Zusammenarbeit und vervollständigen damit die Beiträge der Unterrichtsgegenstände und Bildungsbereiche zur umfassenden Bildung der jungen Menschen.

5. Bildungsbereiche

Bildung ist mehr als die Summe des Wissens, das in den einzelnen Unterrichtsgegenständen erworben werden kann. Im Folgenden werden daher weitere Ziele der Allgemeinbildung in fünf Bildungsbereichen näher erläutert. Sie sind als Benennung wichtiger Segmente im Bildungsprozess zu verstehen und bilden ebenso wie die religiös-ethisch-philosophische Bildungsdimension eine Grundlage für die fächerverbindende und fächerübergreifende Zusammenarbeit. Die Bildungsbereiche bieten gemeinsam mit den Zielen in den Abschnitten „Aufgabenbereiche der Schule“ und „Leitvorstellungen“ den Bezugsrahmen für die Einordnung jener Beiträge, die die einzelnen Unterrichtsgegenstände für den gesamten schulischen Bildungsprozess zu leisten haben.

In den Bildungsbereichen sind auch jene Zielsetzungen enthalten, die von folgenden Unterrichtsprinzipien vertreten werden: Gesundheitserziehung, Erziehung zur Gleichstellung von Frauen und Männern, Medienerziehung, Musische Erziehung, Politische Bildung,

Interkulturelles Lernen, Sexualerziehung, Lese- und Sprecherziehung, Umwelterziehung, Verkehrserziehung, Wirtschaftserziehung, Erziehung zur Anwendung neuer Technologien, Vorbereitung auf die Arbeits- und Berufswelt.

Bildungsbereich Sprache und Kommunikation

Ausdrucks-, Denk-, Kommunikations- und Handlungsfähigkeit sind in hohem Maße von der Sprachkompetenz abhängig. In jedem Unterrichtsgegenstand sind die Schülerinnen und Schüler mit und über Sprache – z.B. auch in Form von Bildsprache – zu befähigen, ihre kognitiven, emotionalen, sozialen und kreativen Kapazitäten zu nutzen und zu erweitern. Die Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Sozialisationsbedingungen ermöglicht die Einsicht, dass Weltansicht und Denkstrukturen in besonderer Weise sprachlich und kulturell geprägt sind. Wenn die Begegnung mit anderen Kulturen und Generationen sowie die sprachliche und kulturelle Vielfalt in unserer eigenen Gesellschaft als bereichernd erfahren wird, ist auch ein Grundstein für Offenheit und gegenseitige Achtung gelegt.

Ein kritischer Umgang mit und eine konstruktive Nutzung von Medien sind zu fördern.

Bildungsbereich Mensch und Gesellschaft

Das Verständnis für gesellschaftliche (insbesondere politische, wirtschaftliche, rechtliche, soziale, ökologische, kulturelle) Zusammenhänge ist eine wichtige Voraussetzung für ein befriedigendes Leben und für eine konstruktive Mitarbeit an gesellschaftlichen Aufgaben.

Die Schülerinnen und Schüler sind zu einem verantwortungsbewussten Umgang mit sich selbst und mit anderen anzuleiten, insbesondere in den Bereichen Geschlecht, Sexualität und Partnerschaft. Sie sollen lernen, Ursachen und Auswirkungen von Rollenbildern, die den Geschlechtern zugeordnet werden, zu erkennen und kritisch zu prüfen.

Die Verflochtenheit des Einzelnen in vielfältige Formen von Gemeinschaft ist bewusst zu machen; Wertschätzung sich selbst und anderen gegenüber sowie Achtung vor den unterschiedlichen menschlichen Wegen der Sinnfindung sind zu fördern. Es ist bewusst zu machen, dass gesellschaftliche Phänomene historisch bedingt und von Menschen geschaffen sind und dass es möglich und sinnvoll ist, auf gesellschaftliche Entwicklungen konstruktiv Einfluss zu nehmen. Aufgaben und Arbeitsweisen von gesellschaftlichen Institutionen und Interessengruppen sind zu vermitteln und mögliche Lösungen für Interessenskonflikte zu erarbeiten und abzuwägen. Der Unterricht hat aktiv zu einer den Menschenrechten verpflichteten Demokratie beizutragen. Urteils- und Kritikfähigkeit sowie Entscheidungs- und Handlungskompetenzen sind zu fördern, sie sind für die Stabilität pluralistischer und demokratischer Gesellschaften entscheidend.

Den Schülerinnen und Schülern ist in einer zunehmend internationalen Gesellschaft jene Weltoffenheit zu vermitteln, die vom Verständnis für die existenziellen Probleme der Menschheit und von Mitverantwortung getragen ist. Dabei sind Humanität, Solidarität, Toleranz, Frieden, Gerechtigkeit, Gleichberechtigung und Umweltbewusstsein handlungsleitende Werte.

Die Vorbereitung auf das private und öffentliche Leben (insbesondere die Arbeits- und Berufswelt) hat sich an wirtschaftlicher Leistungsfähigkeit, sozialem Zusammenhalt, einer für beide Geschlechter gleichen Partizipation und ökologischer Nachhaltigkeit zu orientieren. Dabei sind auch Risiken und Chancen der neuen Technologien zu berücksichtigen. Die Auseinandersetzung mit religiösen und philosophischen Erklärungs- und Begründungsversuchen über Ursprung und Sinn der eigenen Existenz und der Existenz der Welt ist eine wichtige Aufgabe der Schule.

Bildungsbereich Natur und Technik

Die Natur als Grundlage des menschlichen Lebens tritt in vielfältiger, auch technisch veränderter Gestalt in Erscheinung. Die Kenntnisse über die Wirkungszusammenhänge der Natur sind als Voraussetzung für einen bewussten Umgang und die Nutzung mit Hilfe der modernen Technik darzustellen.

Verständnis für Phänomene, Fragen und Problemstellungen aus den Bereichen Mathematik, Naturwissenschaft und Technik bilden die Grundlage für die Orientierung in der modernen, von Technologien geprägten Gesellschaft.

Der Unterricht hat daher grundlegendes Wissen, Entscheidungsfähigkeit und Handlungskompetenz zu vermitteln. Die Schülerinnen und Schüler sind zu befähigen, sich mit Wertvorstellungen und ethischen Fragen im Zusammenhang mit Natur und Technik sowie Mensch und Umwelt auseinander zu setzen. Als für die Analyse und Lösung von Problemen wesentliche Voraussetzungen sind Formalisierung, Modellbildung, Abstraktions- und Raumvorstellungsvermögen zu vermitteln.

Bildungsbereich Kreativität und Gestaltung

Gedanken und Gefühle verbal und nonverbal zum Ausdruck zu bringen, ist eine wesentliche Lebensform der Menschen. Den Schülerinnen und Schülern ist Gelegenheit zu geben, selbst Gestaltungserfahrungen zu machen und über Sinne führende Zugänge mit kognitiven Erkenntnissen zu verbinden. Dabei eröffnet sich für sie die Chance, individuelle Fähigkeiten zu entdecken und zu nutzen und sich mit den Ausdrucksformen ihrer Mitmenschen auseinander zu setzen.

Daraus sollen sich Impulse für das Denken in Alternativen, für die Relativierung eigener Standpunkte, für die Entwicklung eines kritischen Kunstverständnisses und für die Anerkennung von Vielfalt als kultureller Qualität ergeben. Die kreativ - gestaltende Arbeit soll im Spannungsfeld von Selbstverwirklichung und sozialer Verantwortung als individuell bereichernd und gemeinschaftsstiftend erlebt werden.

ZWEITER TEIL ALLGEMEINE DIDAKTISCHE GRUNDSÄTZE

Der Lehrplan gibt Ziele vor. Im Sinne ihrer eigenständigen und verantwortlichen Unterrichts- und

Erziehungsarbeit haben die Lehrerinnen und Lehrer

- die Auswahl der Unterrichtsinhalte und Unterrichtsverfahren zur Erreichung dieser Ziele vorzunehmen,
- im Unterricht Lernsituationen zu gestalten und Lernprozesse einzuleiten und zu unterstützen,
- vielfältige Zugänge zum Wissen zu eröffnen und auch selbst Informationen anzubieten,
- Gelegenheiten zu schaffen, Können zu entwickeln und anzuwenden sowie Erfahrungen und Eindrücke zu gewinnen.

Bei der Planung und Durchführung des Unterrichts sind insbesondere folgende Grundsätze zu beachten:

1. Anknüpfen an die Vorkenntnisse und Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler

Der Unterricht hat an die Vorkenntnisse, Vorerfahrungen und an die Vorstellungswelt der Schülerinnen und Schüler anzuknüpfen. Kontinuierliche Kontakte mit vorgelagerten und weiterführenden Schulen sind zweckmäßig.

2. Interkulturelles Lernen

Interkulturelles Lernen beschränkt sich nicht bloß darauf, andere Kulturen kennen zu lernen. Vielmehr geht es um das gemeinsame Lernen und das Begreifen, Erleben und Mitgestalten kultureller Werte. Aber es geht auch darum, Interesse und Neugier an kulturellen Unterschieden zu wecken, um nicht nur kulturelle Einheit, sondern auch Vielfalt als wertvoll erfahrbar zu machen.

Durch die identitätsbildende Wirkung des Erfahrens von Gemeinsamkeiten und Unterschieden der Kulturen, insbesondere in ihren alltäglichen Ausdrucksformen (Lebensgewohnheiten, Sprache, Brauchtum, Texte, Liedgut usw.), sind die Schülerinnen und Schüler zu Akzeptanz, Respekt und gegenseitiger Achtung zu führen. Die Auseinandersetzung mit dem Kulturgut der in Österreich lebenden Volksgruppen ist in allen Bundesländern wichtig, wobei sich jedoch bundeslandspezifische Schwerpunktsetzungen ergeben werden. Unterschiedliche Ausgangsbedingungen sind zu berücksichtigen. Eine allenfalls vorhandene Zwei- oder Mehrsprachigkeit soll positiv besetzt und die Schülerinnen und Schüler sollen ermuntert werden, Kenntnisse in der Muttersprache im Unterricht sinnvoll einzubringen.

4. Förderung durch Differenzierung und Individualisierung

Die Schülerinnen und Schüler haben vielfältige und unterschiedliche Fähigkeiten, die je nach deren Entwicklungsstand sowie nach Themenstellung und Herangehensweise im Unterricht in unterschiedlicher Weise zum Ausdruck kommen. Aufgabe der Schule ist es, die Schülerinnen und Schüler zur bestmöglichen Entfaltung ihrer individuellen Leistungspotenziale zu führen. Leistungsfähigkeit und besondere Begabungen sind dabei kontinuierlich zu fördern.

Für den Unterricht ergeben sich daraus folgende mögliche Aufgabenstellungen bzw. pädagogisch-didaktische Konsequenzen:

- Erstellung von differenzierten Lernangeboten, die individuelle Zugänge und auch immer wieder neue Einstiege und Anreize bieten,
- Eingehen auf die individuell notwendige Arbeitszeit, auf unterschiedliche Lerntypen, Vorkenntnisse, Vorerfahrungen und kulturelles Umfeld,
- Berücksichtigung des unterschiedlichen Betreuungsbedarfs,
- Bewusstmachen der Stärken und Schwächen im persönlichen Begabungsprofil der Schülerinnen und Schüler, wobei bevorzugt an die Stärken anzuknüpfen ist,
- Entwicklung von Rückmeldeverfahren, ob die Schülerinnen und Schüler tatsächlich ihr individuelles Leistungspotenzial optimal entfalten, Herstellung eines individuell förderlichen Lernklimas und Vermeidung von Demotivation.

Die methodisch-didaktische Gestaltung soll die Berücksichtigung der jeweils aktuellen Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler gestatten. Unterrichtsformen, durch die sich Differenzierung und Individualisierung verwirklichen lassen,

reichen von Einzelarbeit über Partnerarbeit bis zu den zahlreichen Möglichkeiten der Gruppenarbeit. Dazu gehören auch Phasen des offenen Lernens und Wahlmöglichkeiten für die Schülerinnen und Schüler.

6. Stärken von Selbsttätigkeit und Eigenverantwortung

Auch durch bloße Übernahme von Erfahrungen anderer können das Wissen, Können und Erleben erweitert werden. Im Unterricht ist durch das Schaffen einer entsprechenden Lernatmosphäre - nicht zuletzt auf Grund der wachsenden Bedeutung dynamischer Fähigkeiten - die selbsttätige und selbstständige Form des Lernens besonders zu fördern. Dafür bieten sich auch projektartige und offene Lernformen an.

Die Schülerinnen und Schüler sind ihrem Alter entsprechend zu kritischem und eigenverantwortlichem Denken zu führen. Es sind Impulse zu setzen, die die Entwicklung eigener Wert- und Normvorstellungen bei den Schülerinnen und Schülern anregen und fördern.

Den Schülerinnen und Schülern ist Lernen als Prozess verständlich zu machen. Sie sollen die an sie gestellten Anforderungen kennen, sich selbst einschätzen lernen und darin auch Motivation für ihre Arbeit finden.

Die Vermittlung von Lerntechniken ist eine unabdingbare Voraussetzung für selbsttätiges Erarbeiten von Kenntnissen und Fertigkeiten, dient aber auch dem Zweck, eine Basis für den lebensbegleitenden selbstständigen Bildungserwerb zu legen. Bei der Gestaltung des Unterrichts ist darauf zu achten, dass für die Präsentation individuellen Wissens Möglichkeiten geboten werden. Schülerinnen und Schüler sind in zunehmendem Ausmaß zu befähigen, adäquate Recherchestrategien anzuwenden und Schulbibliotheken, öffentliche Bibliotheken sowie andere Informationssysteme real und virtuell zur selbstständigen Erarbeitung von Themen in allen Gegenständen zu nutzen.

An der Oberstufe ist insbesondere in den Wahlpflichtgegenständen die Kompetenz der Schülerinnen und Schüler durch differenzierte und individuelle Unterrichtsformen sowie durch den Einsatz von Medien aller Art, durch Lehrausgänge und Exkursionen zu steigern.

Das Festlegen von Themen, Arbeits- und Sozialformen soll unter Einbeziehung der Schülerinnen und Schüler, aber auch unter Bedachtnahme regionaler oder schulautonomer Schwerpunkte erfolgen.

Im Sinne praxisnaher und aktueller Bildungsziele soll die Möglichkeit der Einbindung außerschulischer Fachleute beachtet werden.

In Hinblick auf die Reifeprüfung ist der Optimierung von Präsentationstechniken unter Einbeziehung moderner Technologien, aber auch unter Beachtung persönlichkeitsfördernder Maßnahmen entsprechende Bedeutung beizumessen. Dazu gehören projektorientierte Arbeitsformen in Kleingruppen sowie individualisierte Arbeits- und Lernprozesse. Bei der Informationserstellung ist der Einsatz des Computers, insbesondere die Anwendung des Internet zu fördern. Der in den Wahlpflichtgegenständen anzustrebenden Methodenvielfalt entsprechend sind in die Leistungsbeurteilung neben der fachlichen Kompetenz unter anderem Präsentationskompetenz und Teamfähigkeit einzubeziehen.

7. Herstellen von Bezügen zur Lebenswelt

Im Sinne des exemplarischen Lernens sind möglichst zeit- und lebensnahe Themen zu wählen, durch deren Bearbeitung Einsichten, Kenntnisse, Fähigkeiten, Fertigkeiten und Methoden gewonnen werden, die eigenständig auf andere strukturverwandte Probleme und Aufgaben übertragen werden können. Die Materialien und Medien, die im Unterricht eingesetzt werden, haben möglichst aktuell und anschaulich zu sein, um die Schülerinnen und Schüler zu aktiver Mitarbeit anzuregen. Begegnungen mit Fachleuten, die in den Unterricht eingeladen werden können, sowie die Einbeziehung außerschulischer Lernorte bzw. die Ergänzung des lehrplanmäßigen Unterrichts durch Schulveranstaltungen stellen wesentliche Bereicherungen dar. Den neuen Technologien kommt verstärkt Bedeutung zu.

Dies gilt in besonderem Maße für die Oberstufe der allgemein bildenden höheren Schule. Hier sind in allen Gegenständen Informationsmanagement sowie Lern- und Unterrichtsorganisation mit Mitteln der Informationstechnologie zu praktizieren. Dabei sind in kommunikativen und kooperativen Arbeitsformen Informationsquellen zu erschließen und unterschiedliche Informationsformen zu bearbeiten, Inhalte zu systematisieren und zu strukturieren und Arbeitsergebnisse zusammenzustellen und multimedial zu präsentieren. Die Ergebnisse und deren Interpretation sind stets kritisch zu hinterfragen und Auswirkungen auf den Einzelnen und die Gesellschaft zu reflektieren. Die Erstellung eigenständiger Arbeiten mit Mitteln der Informationstechnologie ist anzuregen. Dazu zählen: Recherche und Verarbeitung von Informationen mit einer Textverarbeitung oder einem Präsentationsprogramm, Erstellung von Kalkulationsmodellen, Durchführung und Auswertung von Befragungen und Experimenten, Gestaltung von Medien, dokumentierte Kommunikation und Kooperation auch in einer Fremdsprache, Dokumentation und Präsentation von Projektarbeiten, Modellierung und Simulation, Fachbereichsarbeiten.

8. Bewusste Koedukation und Geschlechtssensible Pädagogik

Koedukation beschränkt sich nicht auf gleichzeitiges Unterrichten von Schülerinnen und Schülern. Vielmehr ist eine bewusste Auseinandersetzung mit geschlechtsspezifischen Bildern und Vorurteilen zu führen. Es ist wesentlich, die Lerninhalte und Unterrichtsmethoden so auszuwählen, dass sie beide Geschlechter gleichermaßen ansprechen und den Unterricht so zu gestalten, dass er sozialisationsbedingt unterschiedlichen Vorerfahrungen entgegenzusteuern in der Lage ist. Lehrerinnen und Lehrer sind angehalten, ein (Lern-)Klima der gegenseitigen Achtung zu schaffen, eigene Erwartungshaltungen und Umgangsformen gegenüber Mädchen und Burschen zu reflektieren, sowie sich ein Grundwissen über geschlechtsspezifische Sozialisationsprozesse im Jugendalter anzueignen. Unterricht in geschlechtshomogenen Gruppen kann zu einer Erweiterung des Verhaltens- und Interessensspektrums von Mädchen und Burschen beitragen. Daher kann es im Zusammenhang mit speziellen Themen oder Situationen sinnvoll sein, unter Beachtung der im § 8a des Schulorganisationsgesetzes sowie der auf Grund dieser Bestimmung ergangenen Verordnung festgelegten Voraussetzungen den Unterricht nach Geschlechtern getrennt durchzuführen.

9. Sicherung des Unterrichtsertrages und Rückmeldungen; Leistungsbeurteilung

Für die Sicherstellung des Unterrichtsertrages sind im Unterricht ausreichende und gezielte Wiederholungen und Übungen vorzusehen, sodass eine außerschulische Lernunterstützung nicht nötig ist. Zur Festigung des Gelernten ist beizutragen, indem Zusammenhänge zwischen neu Gelerntem und bereits Bekanntem hergestellt werden und indem – soweit möglich – Neues in bekannte Systeme und Strukturen eingeordnet wird. Hausübungen sollen durch besondere Intentionen, wie z.B. Sammeln von Materialien und Informationen, Erkundungen, zusätzliche Übung und Festigung die Unterrichtsarbeit ergänzen. Dabei ist auf die Belastbarkeit der Schülerinnen und Schüler zu achten (siehe auch § 17 Abs. 2 des Schulunterrichtsgesetzes). Eine detaillierte Rückmeldung über die erreichte Leistung ist wichtig und soll auch bei der Leistungsbeurteilung im Vordergrund stehen. Klar definierte und bekannt gemachte Bewertungskriterien sollen Anleitung zur Selbsteinschätzung sein und Motivation, Ausdauer und Selbstvertrauen der Schülerinnen und Schüler positiv beeinflussen. Für die Bestimmung des Wesentlichen für die Leistungsbeurteilung sind bei den Lehrstoffangaben jedes Faches auch die jeweiligen Beiträge zu den Bildungsbereichen, zu den Aufgabenbereichen der Schule und zu den Leitvorstellungen zu beachten.

Im Rahmen der Bestimmungen über die Leistungsbeurteilung (Leistungsbeurteilungsverordnung) sind auch Methodenkompetenz und Teamkompetenz in die Leistungsbeurteilung so weit einzubeziehen, wie sie für den Unterrichtserfolg im jeweiligen Unterrichtsgegenstand relevant sind. Die Schülerinnen und Schüler sind in die Planung und Gestaltung, Kontrolle und Analyse ihrer Arbeitsprozesse und Arbeitsergebnisse in zunehmendem Maße aktiv einzubeziehen, damit sie schrittweise Verantwortung für die Entwicklung ihrer eigenen Kompetenzen übernehmen können. Besonders in der Oberstufe sind produktorientierte Arbeitsformen mit schriftlicher oder dokumentierender Komponente, wie z.B. Portfolio-Präsentationen oder (Projekt)Arbeiten unter Verwendung des Computers für die Entwicklung von Selbstkompetenz und Selbsteinschätzung geeignet. Besonderes Augenmerk ist dabei auf Präsentationskompetenz und die Einbeziehung moderner Technologien zu legen.

DRITTER TEIL SCHUL- UND UNTERRICHTSPLANUNG

Für die Qualität des Unterrichts ist wesentlich, dass standortspezifische Faktoren wie die regionalen Bedingungen und Bedürfnisse, spezielle Fähigkeiten von Lehrerinnen und Lehrern, Schülerinnen und Schülern oder besondere Formen der Ausstattung konstruktiv in die Unterrichtsarbeit eingebracht werden. Die Konkretisierung und Realisierung der Vorgaben des Lehrplans hat gemäß § 17 des Schulunterrichtsgesetzes nach Maßgabe der nachfolgenden Bestimmungen standortbezogen zu erfolgen.

Planungsvorgänge beziehen sich insbesondere auf:

- Konkretisierung der Kernbereiche (5. bis 8. Schulstufe) durch die einzelnen Lehrerinnen und Lehrer,
- Gestaltung der Erweiterungsbereiche (5. bis 8. Schulstufe) durch die einzelnen Lehrerinnen und Lehrer, -fächerverbindende und fächerübergreifende Maßnahmen, -Abstimmung der Leistungsfeststellungen auf die Unterrichtsarbeit durch die Lehrerin bzw. den Lehrer als Grundlage für die Beurteilung der Schülerleistungen, -Ergänzung des Unterrichts durch Schulveranstaltungen, -Gestaltung des Angebots an Wahlpflichtgegenständen, Freigegenständen und unverbindlichen Übungen,
- schulautonome Lehrplanbestimmungen.

Aspekte des Lehrens und Lernens wie Unterrichtsgestaltung, Erziehungsstil und individuelle Förderung sowie Rückmeldungen über das Unterrichts- und Schulgeschehen sind wichtige Bereiche von Qualität in der Schule.

Schulqualität umfasst weiters Elemente wie Schulklima, Schulmanagement, Außenbeziehungen und Professionalität sowie Personalentwicklung.

Die Entwicklung von Schulqualität wird auch durch geeignete Maßnahmen der Selbstevaluation gefördert.

1. Unterrichtsplanung der Lehrerinnen und Lehrer

Die Lehrerinnen und Lehrer haben ihre Unterrichts- und Erziehungsarbeit in verantwortungsbewusster und eigenständiger Weise auf der Grundlage des Lehrplans und schulautonomer Lehrplanbestimmungen zu planen.

Auf die Rechte der Schülerinnen und Schüler auf Beteiligung bei der Gestaltung des Unterrichts ist Bedacht zu nehmen (siehe § 17 und § 57a des Schulunterrichtsgesetzes).

Die Vorgaben im Abschnitt „Kernbereich“ der Lehrpläne der einzelnen Unterrichtsgegenstände (5. bis 8. Schulstufe) sind verbindlich. Ebenso sind jedenfalls das Allgemeine Bildungsziel und die Bildungs- und Lehraufgabe der einzelnen Unterrichtsgegenstände umzusetzen. Dabei ist zu berücksichtigen, wie viel Zeit für den Kernbereich (5. bis 8. Schulstufe) zur Verfügung steht. Die Festlegung insbesondere der konkreten Inhalte und Beispiele erfolgt durch die jeweiligen Lehrerinnen und Lehrer. Diese haben außerdem festzulegen, welche Teilziele im Erweiterungsbereich (5. bis 8. Schulstufe) behandelt werden und wie die beiden Bereiche zusammenwirken.

Die standortbezogene Gestaltung der Erweiterungsbereiche (5. bis 8. Schulstufe) bietet im Sinne der anzustrebenden gemeinsamen Bildungswirkung aller Unterrichtsgegenstände die Möglichkeit, sowohl mit jenen Lehrerinnen und Lehrern, die denselben Unterrichtsgegenstand unterrichten, als auch mit den Lehrerinnen und Lehrern der anderen Unterrichtsgegenstände in den jeweiligen Klassen Planungen und Abstimmungen durchzuführen. Auf diese Weise kann ein koordiniertes pädagogisches Vorgehen erwirkt werden.

Die Vorgaben (Lehrziele, Themenbereiche usw.) im Abschnitt „Lehrstoff“ der einzelnen Unterrichtsgegenstände der Oberstufe sind verbindlich umzusetzen; dies gilt auch für den Fall schulautonomer Stundenreduktionen. Die zeitliche Gewichtung und die konkrete Umsetzung der Vorgaben obliegen alleine den Lehrerinnen und Lehrern und ermöglichen somit eine flexible Anwendung.

Die Unterrichtsplanung umfasst die zeitliche Verteilung sowie die Gewichtung der Ziele und Inhalte.

Sie bezieht sich auch auf die Methoden, die zur Bearbeitung der Inhalte und zur Erreichung der Ziele angewendet werden sowie auf die Lehrmittel und Medien, die eingesetzt werden. Die Planung erfolgt in mehreren Schritten, als Jahresplanung sowie als ergänzende mittel- und kurzfristige Planung während des Schuljahres.

2. Kern- und Erweiterungsbereich

Kernbereich (ab der 9. Schulstufe)

Der Begriff des Kernbereichs an der Oberstufe unterscheidet sich deutlich von jenem an der Unterstufe. Während an der Unterstufe der Kernbereich auf der Ebene der Fachlehrpläne angesiedelt ist, ist der Begriff Kernbereich an der Oberstufe als die Summe der Pflichtgegenstände (Mindestangaben im zeitlichen Bereich) zu verstehen. Die Differenz zwischen dem auf die jeweilige Schulform bezogenen Kernbereich der Pflichtgegenstände und der Gesamtwochenstundenzahl ergibt den gestaltbaren autonomen Bereich.

3. Schulautonome Lehrplanbestimmungen

Der Lehrplan eröffnet besonders gekennzeichnete Freiräume, für deren Nutzung schulautonome Lehrplanbestimmungen erforderlich sind. Auszugehen ist von den spezifischen Bedarfs- und Problemsituationen in einzelnen Klassen oder an der gesamten Schule. Die Nutzung von Freiräumen im Rahmen der Schulautonomie soll sich nicht in isolierten Einzelmaßnahmen erschöpfen, sondern erfordert ein auch auf die Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler ausgerichtetes Gesamtkonzept. Dies ist in einer sachlich fundierten Auseinandersetzung, in die grundsätzlich alle am Schulleben Beteiligten einzubeziehen sind, unter Berücksichtigung der räumlichen, ausstattungsmäßigen und personellen Standortbedingungen sicherzustellen. Die schulautonomen Lehrplanbestimmungen haben den zur Verfügung stehenden Rahmen an Lehrerwochenstunden und die Möglichkeiten der räumlichen und ausstattungsmäßigen Gegebenheiten der Schule zu beachten.

Soweit schulautonom Unterrichtsgegenstände eingeführt werden, die in diesem Lehrplan nicht enthalten sind, müssen die schulautonomen Lehrplanbestimmungen neben Lehrstoffumschreibungen auch Bildungs- und Lehraufgaben und didaktische Grundsätze enthalten. Wird schulautonom das Stundenausmaß für einen bestehenden Unterrichtsgegenstand im Vergleich zur subsidiären Stundentafel erhöht, sind jedenfalls die Lehrstoffe und gegebenenfalls die Bildungs- und Lehraufgabe sowie die Didaktischen Grundsätze entsprechend zu ergänzen.

Bei der Festlegung schulautonomer Lehrplanbestimmungen ist auf Folgendes zu achten:

- Abstimmung der inhaltlichen Angebote und der angestrebten Kompetenzen mit den Aufgaben des allgemein bildenden Schulwesens und insbesondere mit dem Bildungsziel der allgemein bildenden höheren Schule
- Sicherstellung eines breit gefächerten Bildungsangebots, das die Vielfalt der Begabungen und Interessen berücksichtigt
- Vermeidung einer frühzeitigen Spezialisierung oder einer einengenden Ausrichtung auf bestimmte Schul- und Berufslaufbahnen
- Erhaltung der Berechtigungen und Übertrittsmöglichkeiten
- Vermeidung der Vorwegnahme von Bildungsinhalten anderer Schularten in wesentlichen Bereichen
- Einhaltung der Verfahrensbestimmungen (siehe § 64 des Schulunterrichtsgesetzes).

In der **Oberstufe (ab der 9. Schulstufe)** umfasst das über den jeweiligen Kernbereich hinausgehende Wochenstundenkontingent einen

- schülerautonomen Bereich (Wahlpflichtgegenstände) und einen
- schulautonomen Bereich (für zusätzliche schulspezifische und regionale Schwerpunktsetzung mit mindestens 8 Wochenstunden, beziehungsweise für die Ausweitung des Kernbereiches). Im Bereich der Wahlpflichtgegenstände (schülerautonomer Bereich) können durch schulautonome Lehrplanbestimmungen über die in der subsidiären Stundentafel (Vierter Teil) vorgesehenen Wahlpflichtgegenstände hinaus zusätzliche Wahlpflichtgegenstände (einschließlich Bildungs- und Lehraufgabe, Lehrstoff und didaktische Grundsätze) festgelegt werden bzw. kann das Stundenausmaß der Wahlpflichtgegenstände gegenüber dem in der subsidiären Stundentafel vorgesehenen Stundenausmaß erhöht bzw. vermindert werden. Dabei ist sicher zu stellen, dass die Wahl von Wahlpflichtgegenständen beginnend mit der 6. Klasse nur für zwei oder drei Schulstufen (6. und 7. Klasse, 6. und 8. Klasse oder 6. bis 8. Klasse) zulässig ist. Im schulautonomen Bereich können neben einer Erweiterung des Kernbereiches folgende, die jeweilige Form ergänzende Schwerpunkte (zusätzliche Schwerpunkte im Ausmaß von jeweils mindestens acht Wochenstunden) gesetzt werden:
- Fremdsprachen
- Mathematik, Naturwissenschaften
- humanistischer Schwerpunkt

- Informations- und Kommunikationstechnologie
- Ökologie
- Wirtschaft

Im Zusammenhang mit einer Schwerpunktsetzung haben die schulautonomen Lehrplanbestimmungen jedenfalls nachvollziehbar festzulegen, welche Lehrstoffbereiche dieser schulautonomen Lehrpläne über die im Sechsten Teil (Lehrpläne der einzelnen Unterrichtsgegenstände) festgelegten Inhalte hinausgehen.

5. Fächerverbindender und fächerübergreifender Unterricht

Die Tradition des Fachunterrichts trägt der Notwendigkeit zu systematischer Spezialisierung Rechnung. Gleichzeitig sind der Schule aber Aufgaben gestellt, die sich nicht einem einzigen Unterrichtsgegenstand zuordnen lassen, sondern nur im Zusammenwirken mehrerer Unterrichtsgegenstände zu bewältigen sind. Dieses Zusammenwirken erfolgt durch fächerverbindenden und fächerübergreifenden Unterricht. Dabei erfolgt eine Bündelung von allgemeinen und fachspezifischen Zielen unter einem speziellen Blickwinkel, wodurch es den Schülerinnen und Schülern eher ermöglicht wird, sich Wissen in größeren Zusammenhängen (siehe den Ersten Teil "Allgemeines Bildungsziel") selbstständig anzueignen. Anregungen bzw. Aufträge für fächerverbindenden und fächerübergreifenden Unterricht ergeben sich sowohl aus den Allgemeinen Bestimmungen als auch aus den Lehrplänen der einzelnen Unterrichtsgegenstände. Im fächerverbindenden Unterricht haben Lehrerinnen und Lehrer im Rahmen ihres Fachunterrichts mögliche, die Fächergrenzen überschreitende Sinnzusammenhänge herzustellen. Die Organisation des nach Fächern getrennten Unterrichts bleibt hier bestehen.

Bei fächerübergreifender Unterrichtsgestaltung steht ein komplexes, meist lebens- oder gesellschaftsrelevantes Thema oder Vorhaben im Mittelpunkt. Die einzelnen Unterrichtsgegenstände haben im integrativen Zusammenwirken – z.B. im Sinne des Projektunterrichts – ihren themenspezifischen Beitrag zu leisten. Dies bedingt eine aufgabenbezogene besondere Organisation des Fachunterrichts und des Stundenplans. Die Organisation kann über längere Zeiträume sowie klassen- und schulstufenübergreifend erfolgen.

B) Lehrplan AHS Mathematik

Es handelt sich dabei um den fachspezifischen Teil des AHS – Lehrplans für 2004 aufsteigend (entnommen der Homepage des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur).

MATHEMATIK

Bildungs- und Lehraufgabe:

Der Mathematikunterricht soll beitragen, dass Schülerinnen und Schülern ihrer Verantwortung für lebensbegleitendes Lernen besser nachkommen können. Dies geschieht vor allem durch die Erziehung zu analytisch-folgerichtigem Denken und durch die Vermittlung von mathematischen Kompetenzen, die für viele Lebensbereiche grundlegende Bedeutung haben. Beim Erwerben dieser Kompetenzen sollen die Schülerinnen und Schüler die vielfältigen Aspekte der Mathematik und die Beiträge des Gegenstandes zu verschiedenen Bildungsbereichen erkennen. Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts.

Mathematische Kompetenzen

Kompetenzen, die sich auf Kenntnisse beziehen:

Sie äußern sich im Vertrautsein mit mathematischen Inhalten aus den Bereichen Zahlen, Algebra, Analysis, Geometrie und Stochastik.

Kompetenzen, die sich auf Begriffe beziehen:

Sie äußern sich in der Fähigkeit, mathematische Begriffe mit adäquaten Grundvorstellungen zu verknüpfen. Die Schülerinnen und Schüler sollen Mathematik als spezifische Sprache zur Beschreibung von Strukturen und Mustern, zur Erfassung von Quantifizierbarem und logischen Beziehungen sowie zur Untersuchung von Naturphänomenen erkennen.

Kompetenzen, die sich auf mathematische Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen, äußern sich im Ausführen der folgenden mathematischen Aktivitäten:

-) Darstellend - interpretierendes Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit der Übersetzung von Situationen, Zuständen und Prozessen aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik und zurück zu tun haben; auch der innermathematische Wechsel von Darstellungsformen gehört zu diesen Aktivitäten

-) Formal -operatives Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die auf Kalkülen bzw. Algorithmen beruhen, also das Anwenden von Verfahren, Rechenmethoden oder Techniken
-) Experimentell - heuristisches Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die etwa mit zielgerichtetem Suchen nach Gesetzmäßigkeiten, mit Variation von Parametern oder dem Aufstellen von induktiv gewonnenen Vermutungen zu tun haben; auch das Ausführen von Simulationen, das Untersuchen von Grenz- und Spezialfällen sowie das Übergehen zu Verallgemeinerungen gehören in der experimentellen Phase zu diesen Aktivitäten
-) Kritisch - argumentatives Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, Hinterfragen, Ausloten von Grenzen und Begründen zu tun haben; das Beweisen heuristisch gewonnener Vermutungen ist ein Schwerpunkt dieses Tätigkeitsbereichs

Aspekte der Mathematik

Schöpferisch - kreativer Aspekt:

Mathematik ist eine Schulung des Denkens, in der Arbeitstechniken vermittelt, Strategien aufgebaut, Phantasie angeregt und Kreativität gefördert werden

Sprachlicher Aspekt:

Mathematik ist ein elaboriertes Begriffsnetz, ein ständiges Bemühen um exakten Ausdruck, in dem die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen entwickelt sowie die sprachliche Ausdrucksfähigkeit gefördert werden

Erkenntnistheoretischer Aspekt:

Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt; sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen; Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen

Pragmatisch - anwendungsorientierter Aspekt:

Mathematik ist ein nützliches Werkzeug und Methodenreservoir für viele Disziplinen und Voraussetzung für viele Studien bzw. Berufsfelder

Autonomer Aspekt:

Mathematische Gegenstände und Sachverhalte bilden als geistige Schöpfungen eine deduktiv geordnete Welt eigener Art, in der Aussagen - von festgelegten Prämissen ausgehend - stringent abgeleitet werden können; Mathematik befähigt damit, dem eigenen Denken mehr zu vertrauen als fremden Meinungsmachern und fördert so den demokratischen Prozess

Kulturell -historischer Aspekt:

Die maßgebliche Rolle mathematischer Erkenntnisse und Leistungen in der Entwicklung des europäischen Kultur- und Geisteslebens macht Mathematik zu einem unverzichtbaren Bestandteil der Allgemeinbildung

Beitrag zu den Aufgabenbereichen der Schule:

Die bereits im Lehrplan der Unterstufe definierten Beiträge sind altersadäquat weiter zu entwickeln und zu vertiefen.

Beiträge zu den Bildungsbereichen:

Sprache und Kommunikation:

Mathematik ergänzt und erweitert die Umgangssprache vor allem durch ihre Symbole und ihre Darstellungen, sie präzisiert Aussagen und verdichtet sie; neben der Muttersprache und den Fremdsprachen wird Mathematik so zu einer weiteren Art von Sprache

Mensch und Gesellschaft:

Der Unterricht soll aufzeigen, dass Mathematik in vielen Bereichen des Lebens (Finanzwirtschaft, Soziologie, Medizin usw.) eine wichtige Rolle spielt

Natur und Technik:

Viele Naturphänomene lassen sich mit Hilfe der Mathematik adäquat beschreiben und damit auch verstehen; Die Mathematik stellt eine Fülle von Lösungsmethoden zur Verfügung, mit denen Probleme bearbeitbar werden

Kreativität und Gestaltung:

Mathematik besitzt neben der deduktiven auch eine induktive Seite; vor allem das Experimentieren an neuen Aufgabenstellungen und Problemen macht diese Seite sichtbar, bei der Kreativität und Einfallsreichtum gefördert werden

Gesundheit und Bewegung:

Durch die Bearbeitung mathematisch beschreibbarer Phänomene aus dem Gesundheitswesen und dem Sport können Beiträge zu diesem Bildungsbereich geleistet werden

Didaktische Grundsätze:

Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen.

Die Schülerinnen und Schüler sollen durch eigene Tätigkeiten Einsichten gewinnen und so mathematische Begriffe und Methoden in ihr Wissenssystem einbauen. Zur Sicherung des Unterrichtsertrages bieten sich Einzel-, Team- und Gruppenarbeiten, Projektarbeiten und regelmäßige Hausübungen an. Der Zeitrahmen für Schularbeiten ist dem Abschnitt „Leistungsfeststellung“ des Dritten Teiles zu entnehmen. Im Sinne der Methodenvielfalt ist bei jedem der folgenden Grundsätze eine Bandbreite der Umsetzung angegeben, innerhalb der eine konkrete Realisierung - angepasst an die jeweilige Unterrichtssituation – zu erfolgen hat. Wenn von minimaler und maximaler Realisierung die Rede ist, ist dies nicht im Sinne einer Wertung zu verstehen.

Lernen in anwendungsorientierten Kontexten

Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. Vernetzungen der Inhalte innerhalb der Mathematik und durch geeignete fächerübergreifende Unterrichtssequenzen sind anzustreben. Die minimale Realisierung besteht in der Thematisierung mathematischer Anwendungen bei ausgewählten Inhalten, die maximale Realisierung in der ständigen Einbeziehung anwendungsorientierter Aufgaben- und Problemstellungen zusammen mit einer Reflexion des jeweiligen Modellbildungsprozesses hinsichtlich seiner Vorteile und seiner Grenzen.

Lernen in Phasen

Unter Beachtung der Vorkenntnisse sind Begriffe in der Regel in einer ersten Phase auf einer konkret anschaulichen, intuitiven oder heuristischen Ebene zu behandeln, bei einfachen Anwendungen zu erproben und erst in einer späteren Phase zu vertiefen, ergänzen, verallgemeinern oder exaktifizieren. Die minimale Realisierung besteht in der Orientierung am Vorwissen der Schülerinnen und Schüler und der Einführung von Begriffen über intuitive und heuristische Ansätze mit exemplarischen Exaktifizierungen, die maximale Realisierung in einer weit reichenden Präzisierung mathematischer Begriffe, Sätze und Methoden.

Lernen im sozialen Umfeld

Der Einsatz passender Sozialformen ist auf die angestrebten Lernziele, die Eigenart der Inhalte und auf die jeweilige Lerngruppe abzustimmen. Hilfreich für jeden Lernprozess ist ein konstruktives Klima zwischen den Schülerinnen und Schülern einerseits sowie den Lehrerinnen und Lehrern und Schülerinnen und Schülern andererseits. Die minimale Realisierung besteht im situationsbezogenen Wechsel der Sozialformen im Unterricht, die maximale Realisierung im Vermitteln elementarer Techniken und Regeln für gute Team- und Projektarbeit sowie in der Kooperation mit außerschulischen Expertinnen und Experten.

Lernen unter vielfältigen Aspekten

Einzelne Inhalte und Probleme sind aus verschiedenen Blickwinkeln zu sehen und aus verschiedenen Richtungen zu beleuchten. Vielfältige Sichtweisen sichern eine große Flexibilität bei der Anwendung des Gelernten. Die minimale Realisierung besteht in der gelegentlichen Verdeutlichung verschiedener Sichtweisen bei der Behandlung neuer Inhalte, die maximale Realisierung im konsequenten Herausarbeiten der Vor- und Nachteile verschiedener Zugänge. Damit wird ein vielschichtiges und ausgewogenes Bild der Mathematik gewonnen.

Lernen mit instruktionaler Unterstützung

Lernen ohne instruktionale Unterstützung ist in der Regel - insbesondere in Mathematik - ineffektiv und führt leicht zur Überforderung. Lehrerinnen und Lehrer müssen Schülerinnen und Schüler anleiten und insbesondere bei Problemen gezielt unterstützen. Die minimale Realisierung besteht in der Bereitstellung von schüleradäquaten Lernumgebungen und Lernangeboten, die maximale Realisierung in Differenzierungsmaßnahmen, durch die individuelle Begabungen, Fähigkeiten, Neigungen, Bedürfnisse und Interessen gefördert werden.

Lernen mit medialer Unterstützung

Die Beschaffung, Verarbeitung und Bewertung von Informationen hat auch mit Büchern (z.B. dem Schulbuch), Zeitschriften und mit Hilfe elektronischer Medien zu erfolgen. Nutzen und Problematik mathematischer Inhalte und Lernhilfen im Internet sind hier zu thematisieren. Die minimale Realisierung besteht in der gelegentlichen Einbeziehung derartiger Medien, die maximale Realisierung im gezielten Erwerb von Kompetenzen, die von der Informationsbeschaffung bis zur eigenständigen Abfassung und Präsentation mathematischer Texte und Facharbeiten reichen.

Lernen mit technologischer Unterstützung

Mathematiknahe Technologien wie Computeralgebra-Systeme, dynamische Geometrie-Software oder Tabellenkalkulationsprogramme sind im heutigen Mathematikunterricht unverzichtbar. Sachgerechtes und sinnvolles Nutzen der Programme durch geplantes Vorgehen ist sicherzustellen. Die minimale Realisierung besteht im Kennen lernen derartiger Technologien, das über exemplarische Einblicke hinausgeht und zumindest gelegentlich eine wesentliche Rolle beim Erarbeiten und Anwenden von Inhalten spielt. Bei der maximalen Realisierung ist der sinnvolle Einsatz derartiger Technologien ein ständiger und integraler Bestandteil des Unterrichts.

Der Lehrplan geht von drei Wochenstunden in jeder Schulstufe aus. Bei mehr als drei Wochenstunden ist vor allem eine vertiefte und aspektreichere Behandlung der Lerninhalte anzustreben. Die kursiv gesetzten Inhalte sind für alle Schulstufen mit mehr als drei Wochenstunden obligatorisch.

Das Verwenden von Symbolen für logische Begriffe und Beziehungen und das Beschreiben von Gesamtheiten mit Hilfe von Mengen und Mengenoperationen hat die Basis für exaktes Formulieren und Arbeiten zu legen.

Die im Lehrstoff formulierten Tätigkeiten und Inhalte sind zwar bestimmten Bereichen zugeordnet, können aber auch in anderen Bereichen angewendet werden.

Lehrstoff:

5. Klasse:

Zahlen und Rechengesetze

- Reflektieren über das Erweitern von Zahlenmengen an Hand von natürlichen, ganzen, rationalen und irrationalen Zahlen
- Darstellen von Zahlen im dekadischen und in einem nichtdekadischen Zahlensystem
- Verwenden von Zehnerpotenzen zum Erfassen von sehr kleinen und sehr großen Zahlen in anwendungsorientierten Bereichen
- bewusstes und sinnvolles Umgehen mit exakten Werten und Näherungswerten
- Aufstellen und Interpretieren von Termen und Formeln, Begründen von Umformungsschritten durch Rechengesetze

- Arbeiten mit Primzahlen und Teilern, Untersuchen von Teilbarkeitsfragen Gleichungen und Gleichungssysteme
- Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen in einer Variablen
- Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen, Untersuchen der Lösbarkeit dieser Gleichungssysteme, geometrische Interpretation
- Anwenden der oben genannten Gleichungen und Gleichungssysteme auf inner- und außermathematische Probleme

Funktionen

- Beschreiben von Abhängigkeiten, die durch reelle Funktionen in einer Variablen erfassbar sind (mittels Termen, Tabellen und Graphen), Reflektieren über den Modellcharakter von Funktionen
- Beschreiben und Untersuchen von linearen und einfachen nichtlinearen Funktionen (zB a/x , a/x^2 , ax^2+bx+c , abschnittsweise definierte Funktionen)
- Untersuchen von Formeln im Hinblick auf funktionale Aspekte, Beschreiben von direkten und indirekten Proportionalitäten mit Hilfe von Funktionen
- Arbeiten mit Funktionen in anwendungsorientierten Bereichen

Trigonometrie

- Definieren von $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ für $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$
- Durchführen von Berechnungen an rechtwinkligen und allgemeinen Dreiecken, an Figuren und Körpern (auch mittels Sinus-und Kosinussatz)
- Kennenlernen von Polarkoordinaten Vektoren und analytische Geometrie der Ebene
- Addieren von Vektoren und Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen, geometrisches Veranschaulichen dieser Rechenoperationen
- Ermitteln von Einheitsvektoren und Normalvektoren
- Arbeiten mit dem skalaren Produkt, Ermitteln des Winkels zweier Vektoren
- Beschreiben von Geraden durch Parameterdarstellungen und durch Gleichungen, Schneiden von Geraden
- Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie

6. Klasse:

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

- Definieren von Potenzen mit natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Exponenten, Definieren von Wurzeln und Logarithmen
- Formulieren und Beweisen von Rechengesetzen für Potenzen, Wurzeln und Logarithmen; Umformen entsprechender Terme

Folgen

- rekursives und explizites Darstellen von Folgen
- Untersuchen von Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz, intuitives Erfassen und Definieren des Begriffes Grenzwert
- Definieren der Eulerschen Zahl
- Arbeiten mit arithmetischen und geometrischen Folgen und Reihen, Erkennen des Zusammenhangs zwischen arithmetischen Folgen und linearen Funktionen sowie zwischen geometrischen Folgen und Exponentialfunktionen
- Verwenden von Folgen zur Beschreibung diskreter Prozesse in anwendungsorientierten Bereichen (insbesondere Geldwesen)

Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme

- Arbeiten mit einfachen Ungleichungen (Abschätzungen, Umformungen, Fallunterscheidungen)
- Lösen von linearen Gleichungssystemen mit drei Gleichungen in drei Variablen
- Kennen lernen von Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen

Reelle Funktionen

- Definieren, Darstellen und Untersuchen von Potenzfunktionen, von Exponential- und Logarithmusfunktionen sowie von Winkelfunktionen (Bogenmaß)
- Untersuchen von Eigenschaften reeller Funktionen (Monotonie, globale und lokale Extremstellen, Symmetrie, Periodizität) und von Beziehungen zwischen Funktionen (Umkehrfunktionen)
- Beschreiben von Änderungen durch Änderungsmaße (absolute und relative Änderung, Differenzenquotient)
- Anwenden von Funktionen zur Beschreibung kontinuierlicher Prozesse, Vergleichen von Modellen, Erkennen der Grenzen von Modellbildungen
- Kennen lernen von Verallgemeinerungen des Funktionsbegriffs
- Verkettungen von Funktionen

Analytische Geometrie des Raumes

- Übertragen bekannter Begriffe und Methoden aus der zweidimensionalen analytischen Geometrie, Erkennen der Grenzen dieser Übertragbarkeit
- Ermitteln von Normalvektoren, Definieren des vektoriellen Produkts
- Beschreiben von Geraden und Ebenen durch Parameterdarstellungen bzw. Gleichungen
- Schneiden von Geraden und Ebenen, Untersuchen von Lagebeziehungen
- Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie und der Trigonometrie

Stochastik

- Arbeiten mit Darstellungsformen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik
- Kennen des Begriffes Zufallsversuch, Beschreiben von Ereignissen durch Mengen
- Kennen der Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs; Auffassen von Wahrscheinlichkeiten als relative Anteile, als relative Häufigkeiten und als subjektives Vertrauen
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten; Arbeiten mit der Multiplikations- und der Additionsregel; Kennen des Begriffs der bedingten Wahrscheinlichkeit
- Arbeiten mit dem Satz von Bayes

7. Klasse:

Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen

- Abspalten reeller Linearfaktoren von Polynomen
- Reflektieren über die Zweckmäßigkeit des Erweiterns der reellen Zahlen -Rechnen mit komplexen Zahlen
- Kennenlernen des Fundamentalsatzes der Algebra

Differenzialrechnung

- Definieren des Differenzialquotienten (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate), Deuten dieser Begriffe als Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung, weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen
- Kennen des Begriffes Ableitungsfunktion, Berechnen von Ableitungen elementarer Funktionen
- Deuten der zweiten Ableitung in inner- und außermathematischen Bereichen

- Herleiten von Differentiationsregeln zur Ableitung von Polynomfunktionen, Kennen weiterer Differentiationsregeln (sofern sie für Funktionsuntersuchungen verwendet werden)
- Untersuchen einfacher und im Hinblick auf Anwendungen sinnvoller Funktionen bezüglich Monotonie und Krümmungsverhalten, Ermitteln von Extrem- und Wendestellen
- Lösen von Extremwertaufgaben
- Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differenzialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit
- Kennenlernen weiterer Anwendungen der Differenzialrechnung

Nichtlineare analytische Geometrie

- Beschreiben von Kreisen, Kugeln und Kegelschnittslinien durch Gleichungen
- Schneiden von Kreisen bzw. Kegelschnittslinien mit Geraden, Ermitteln von Tangenten
- Beschreiben von ebenen Kurven durch Parameterdarstellungen -Beschreiben von Raumkurven und Flächen durch Parameterdarstellungen

Stochastik

- Kennen der Begriffe diskrete Zufallsvariable und diskrete Verteilung
- Kennen der Zusammenhänge von relativen Häufigkeitsverteilungen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen; von Mittelwert und Erwartungswert sowie von empirischer Varianz und Varianz
- Arbeiten mit diskreten Verteilungen (insbesondere mit der Binomialverteilung) in anwendungsorientierten Bereichen

8. Klasse:

Integralrechnung

- Ermitteln von Stammfunktionen
- Definieren des bestimmten Integrals, Deuten einer Summe von „sehr kleinen Produkten“ der Form $f(x) \cdot \Delta x$ als Näherungswert des bestimmten Integrals
- Kennen des Zusammenhangs zwischen Differenzieren und Integrieren sowie des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung
- Berechnen von bestimmten Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln
- Arbeiten mit verschiedenen Deutungen des Integrals (insbesondere Flächeninhalt, Volumen, physikalische Deutungen)

Dynamische Prozesse

- Beschreiben von Systemen mit Hilfe von Wirkungsdiagrammen, Flussdiagrammen, Differenzengleichungen oder Differenzialgleichungen
- Untersuchen des dynamischen Verhaltens von Systemen
- Lösen von einfachen Differenzialgleichungen, insbesondere $y' = k \cdot y$

Stochastik

- Kennen der Begriffe stetige Zufallsvariable und stetige Verteilung
 - Arbeiten mit der Normalverteilung in anwendungsorientierten Bereichen
 - Kennen und Interpretieren von statistischen Hypothesentests und von Konfidenzintervallen
- Wiederholung
- umfassendes Wiederholen, Vertiefen und Vernetzen von Stoffgebieten

C) Lehrplan HAK Mathematik

Ich zeige hier nur den mathematischen Teil des aktuellen (2006) HAK-Lehrplanes (entnommen der Homepage des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur).

Der allgemeine Teil unterscheidet sich zwar von dem der AHS (durch vermehrte Berufsbezogenheit), doch kann ich ihn hier aus Platzgründen nicht einfügen.

Mathematik und angewandte Mathematik

Die Anwendung der mathematischen Verfahren auf wirtschaftliche Problemstellungen soll durchgehend in allen Jahrgängen behandelt werden. Kriterien für die Lehrstoffgewichtung sind die Erreichung eines fundierten mathematischen Grundwissens und dessen Anwendbarkeit im Studium und in der beruflichen Praxis. Begriffe und Inhalte, die im Lehrstoff nicht explizit angeführt werden, können bei der Erarbeitung des entsprechenden Kapitels eingeführt werden. Taschenrechner und Computer sind im Unterricht einzusetzen. Die computerunterstützte Lösung von Aufgabenstellungen bietet die Möglichkeit, mathematische Modelle auch bei komplexeren Problemstellungen zu erarbeiten. Große Bedeutung kommt dabei der kritischen Beurteilung und Interpretation der erarbeiteten Ergebnisse zu.

Bildungs- und Lehraufgabe:

Der Schüler soll

- die Mathematik in ihren Zusammenhängen begreifen und die von ihr bereitgestellten Techniken bei der Lösung von Problemen der Berufspraxis anwenden können,
- Vorgänge in Natur, Technik und Wirtschaft mit Hilfe von geeigneten mathematischen Modellen beschreiben können,
- bereit sein, mathematische Verfahren in der Berufspraxis einzusetzen,
- Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten in den mathematischen Fachgebieten besitzen sowie die dafür notwendigen algebraischen Methoden und numerischen Verfahren beherrschen, soweit sie für die Berufspraxis und für das Studium an einer Universität erforderlich sind,
- eine sorgfältige und zielorientierte mathematische Arbeitsweise auf außermathematische Problemstellungen und deren Lösungen anwenden können,
- abstrahieren, formalisieren, begründen, folgern können und
- analytisches Denken entwickeln und Kritikfähigkeit erwerben.

Lehrstoff:**II. J a h r g a n g :**

Integration von Vorkenntnissen:

Mengenlehre, Zahlenmengen, Potenzen, Rechnen mit Termen.

Aussagenlogik.

Funktionsbegriff, lineare Funktion.

Lineare Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen; lineare Gleichungssysteme und Ungleichungssysteme; lineare Optimierung.

Polynomfunktionen; Gleichungen höheren Grades.

Matrizenrechnung:

Addition, Multiplikation, Inverse.

Vier Schularbeiten.

III. J a h r g a n g :

Exponential- und logarithmische Funktionen; Wachstums- und Abnahmeprozesse; Simulationsverfahren in Form von Fallbeispielen; Exponentialgleichungen.

Finanzmathematik:

Zinseszins- und Rentenrechnung, Schuldtilgung, Investitionsrechnung, Kurs- und Rentabilitätsrechnung.

Geometrie:

Winkelmaße, Kreisfunktionen, Dreiecksberechnungen; Planimetrie, Stereometrie.
Vier Schularbeiten.

IV. J a h r g a n g :*Differenzialrechnung:*

Grenzwert, Differenzen- und Differenzialquotient, Differenziationsregeln; Funktionsdiskussion, Extremwertaufgaben, Methode der kleinsten Quadrate.

Integralrechnung:

Stammfunktion und bestimmtes Integral, Integrationsregeln; numerische Integration.

Kosten- und Preistheorie.

Drei Schularbeiten.

V. J a h r g a n g :*Beschreibende Statistik:*

Häufigkeitsverteilungen und ihre Darstellungen; Zentralmaße, Streuungsmaße; Regression, Korrelation und Kontingenz, Zeitreihen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Klassischer und statistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff, Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten; Darstellungen und Kenngrößen von diskreten und stetigen Verteilungen.

Beurteilende Statistik:

Schätzverfahren, Testen von Hypothesen.

Simulation:

Wirtschaftliche Modelle; Fallbeispiele unter Verwendung systemdynamischer beziehungsweise stochastischer Methoden.

Wiederholung und Vertiefung von Lehrstoffinhalten aller Jahrgänge.

Zwei Schularbeiten, jeweils zweistündig.

D) Lehrplan HTL Mathematik

Ich zeige hier nur den mathematischen Teil des aktuellen HTL-Lehrplanes der Höheren Lehranstalt für Chemie (2006), Maschinenbau (2008) und Elektrotechnik (2008) (entnommen der Homepage des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur). Der allgemeine Teil unterscheidet sich zwar von dem der AHS (durch vermehrte Berufsbezogenheit), doch kann ich ihn hier aus Platzgründen nicht einfügen.

Ich kann aus demselben Grund leider auch nicht auf alle unterschiedlichen Ausrichtungen der HTL in Österreich eingehen (Bautechnik, etc.).

ANGEWANDTE MATHEMATIK

Bildungs- und Lehraufgabe:

Der Schüler soll

- die für die Berufspraxis und für weiterführende Studien notwendigen mathematischen Begriffe, Denkweisen und Methoden kennen und anwenden können;
- einfache Sachverhalte in Natur, Technik und Wirtschaft mit mathematischen Modellen beschreiben und analysieren sowie Modellösungen gewinnen und interpretieren können;
- die Mathematik als Werkzeug zur Informationsgewinnung und zur Kommunikation im technisch-naturwissenschaftlichen und im kommerziellen Bereich einsetzen können;
- mathematische Sachverhalte darstellen und Verfahren begründen können;
- moderne Hilfsmittel zielführend einsetzen können.

Lehrstoff:

I. Jahrgang:

Algebra:

Zahlenbereiche; Rechnen mit Variablen und Termen; Vektoren (Darstellung, Betrag, Addition, Subtraktion, Multiplikation mit einem Skalar); lineare Gleichungen und Ungleichungen, Formelumwandlungen, lineare Gleichungssysteme.

Numerisches Rechnen:

Darstellung von Zahlen, Darstellungsfehler, Abschätzen von Ergebnissen.

Funktionen:

Begriff, Darstellung in Koordinatensystemen; lineare Funktion; Interpretieren von Tabellen, Interpolation; direkte und indirekte Proportionalität.

Geometrie:

Planimetrie (Ähnlichkeit; Dreieck, Viereck, Kreis; pythagoräische Lehrsatzgruppe); Stereometrie; Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks.

*II. Jahrgang:**Algebra und Geometrie:*

Vektoren (Skalarprodukt, Orthogonalität, vektorielles Produkt). Quadratische Gleichungen; Exponentialgleichungen. Komplexe Zahlen (Darstellung, Rechenoperationen). Trigonometrie des schiefwinkligen Dreiecks.

Funktionen:

Eigenschaften; Umkehrfunktionen; quadratische Funktionen, Potenz- und Wurzelfunktionen, Exponential- und logarithmische Funktionen; allgemeine Sinusfunktion, Scaffensätze; Interpretation von Funktionsgraphen und -gleichungen; Parameterdarstellung.

Wirtschaftsmathematik:

Zinseszinsrechnung; lineare Optimierung.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik:

Häufigkeitsverteilung; Kenngrößen; Wahrscheinlichkeit (Additions- und Multiplikationsregel).

I. und II. Jahrgang:

Anwendungen aus dem Fachgebiet; Gebrauch der in der Praxis üblichen Rechenhilfen, rechnerunterstütztes Arbeiten in der Mathematik.

Im I. und II. Jahrgang je vier Schularbeiten.

III. bis V. Jahrgang:

Siehe die Anlage der jeweiligen Fachrichtung

LEHRPLAN DER HÖHEREN LEHRANSTALT FÜR CHEMIE

III. Jahrgang:

Analysis:

Zahlenfolgen, Grenzwert, Stetigkeit. Differenzialrechnung (Differenzen- und Differenzialquotient, Ableitungsregeln, Anwendungen der Differenzialrechnung). Integralrechnung (bestimmtes und unbestimmtes Integral, Integration elementarer Funktionen, Anwendungen der Integralrechnung).

Numerische Mathematik:

Fehlerabschätzung und -fortpflanzung; Konditionsproblematik; numerische Methoden zum Lösen von Gleichungen, numerische Integration; Interpolation.

IV. Jahrgang:

Analysis:

Einfache Differenzen- und Differenzialgleichungen.

Lineare Algebra und analytische Geometrie:

Matrizen (Operationen, Anwendungen), Determinanten. Lineare Optimierung. Geraden und Ebenen; Kegelschnitte in Hauptlage.

V. Jahrgang:

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik:

Diskrete und stetige Verteilungen, induktive Statistik (Parameterschätzung, Signifikanzprüfung), Statistische Methoden des Qualitätsmanagements. Anwendungen.

Aktuelle Themen der angewandten Mathematik mit besonderer Berücksichtigung der Fachrichtung.

III. bis V. Jahrgang:

Anwendungen aus dem Fachgebiet; Gebrauch der in der Praxis üblichen Rechenhilfen, rechnerunterstütztes Arbeiten in der Mathematik.

In Jahrgängen mit mindestens drei Wochenstunden vier Schularbeiten, sonst zwei Schularbeiten.

LEHRPLAN DER HÖHEREN LEHRANSTALT FÜR ELEKTROTECHNIK

III. Jahrgang:

Analysis:

Differenzengleichungen, Zahlenfolgen, Grenzwert, Stetigkeit. Differenzialrechnung (Differenzen- und Differenzialquotient, Ableitungsregeln, Anwendungen der Differenzialrechnung); Integralrechnung (bestimmtes und unbestimmtes Integral, Integration elementarer Funktionen, Anwendungen der Integralrechnung). Funktionen in zwei unabhängigen Variablen, partielle Ableitung.

Numerische Mathematik:

Fehlerabschätzung und -fortpflanzung; Konditionsproblematik; numerische Methoden zum Lösen von Gleichungen, numerische Integration; Interpolation.

IV. Jahrgang:

Analysis:

Funktionenreihen (Potenzreihen, Fourierreihen). Gewöhnliche Differenzialgleichungen (einfache Differenzialgleichungen 1.Ordnung, Schwingungsgleichung); Integraltransformationen.

Lineare Algebra und analytische Geometrie:

Matrizen (Operationen, Anwendungen), Determinanten. Geraden und Ebenen; Kegelschnitte in Hauptlage. Algebraische Strukturen.

V. Jahrgang:

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik:

Diskrete und stetige Verteilungen, induktive Statistik (Parameterschätzung, Signifikanzprüfung); Zusammenhangsanalysen (Korrelation, Regression). Statistische Methoden des QualitätsmanagementS. Anwendungen.

Aktuelle Themen der angewandten Mathematik mit besonderer Berücksichtigung der Fachrichtung.

III. bis V. Jahrgang:

Anwendungen aus dem Fachgebiet; Gebrauch der in der Praxis üblichen Rechenhilfen, rechnerunterstütztes Arbeiten in der Mathematik.

LEHRPLAN DER HÖHEREN LEHRANSTALT FÜR MASCHINENBAU

III. Jahrgang:

Analysis:

Zahlenfolgen, Grenzwert, Stetigkeit. Differenzialrechnung (Differenzen- und Differenzialquotient, Ableitungsregeln, Anwendungen der Differenzialrechnung). Integralrechnung (bestimmtes und unbestimmtes Integral, Integration elementarer Funktionen, Anwendungen der Integralrechnung).

Numerische Mathematik:

Fehlerabschätzung und -fortpflanzung; Konditionierungsproblematik; numerische Methoden zum Lösen von Gleichungen, numerische Integration; Interpolation.

Lineare Algebra und analytische Geometrie:

Matrizen (Operationen, Anwendungen), Determinanten. Geraden und Ebenen; Kegelschnitte in Hauptlage.

IV. Jahrgang:

Analysis:

Potenzreihen. Gewöhnliche Differenzialgleichungen (Differenzialgleichungen 1. Ordnung; Schwingungsgleichung).

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik:

Diskrete und stetige Verteilungen, induktive Statistik (Parameterschätzung, Signifikanzprüfung). Zusammenhangsanalysen (Korrelation, Regression).

Statistische Methoden des Qualitätsmanagements:

Normalverteilung, Prüfverteilungen, Stichproben. Auswertungsverfahren.

Aktuelle Themen der angewandten Mathematik mit besonderer Berücksichtigung der Fachrichtung.

III. und IV. Jahrgang:

Anwendungen aus dem Fachgebiet; Gebrauch der in der Praxis üblichen Rechenhilfen, rechnerunterstütztes Arbeiten in der Mathematik.

Literaturverzeichnis

Bauer, L.: Mathematische Fähigkeiten, F.Schöningh. 1978, Paderborn

Bifie: Kompetenzen und Modelle, <https://www.bifie.at/node/49>, 2.11.2014

Blanckenstein, Gut, Karajan: Maturawissen Mathematik, Verlag Manz, 2012, Wien

Blum, Werner, Törner, Günter: Didaktik der Analysis, Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, 1983, Göttingen

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur,
<http://www.bmbwk.gv.at/schulen/index.xml>, 28.8.2014

Bürger, Fischer, Malle: Mathematik Oberstufe 3 Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1986, Wien

Bürger, Fischer, Malle, Kronfellner, Mühlgassner, Schlögelhofer: Mathematik Oberstufe 3 Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1991, Wien

Bürger, Fischer, Malle, Kronfellner, Mühlgassner, Schlögelhofer: Mathematik Oberstufe 4 Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1993, Wien

Führer, Prof. Dr. Lutz: Pädagogik des Mathematikunterrichts, Verlag Vieweg 1997, Braunschweig/Wiesbaden

Gottwald, Prof. Dr. Siegfried, hrsg.: Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik, Meyers Lexikonverlag, Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich, 1995

Götz, Reichel, Müller, Hanisch: Mathematik Lehrbuch 5, ÖBV&hpt, Wien, 2006

Götz, Reichel, Müller, Hanisch: Mathematik Lehrbuch 6, ÖBV&hpt, Wien, 2006

Götz, Reichel, Müller, Hanisch: Mathematik Lehrbuch 7, ÖBV&hpt, Wien, 2006

Götz, Reichel, Müller, Hanisch: Mathematik Lehrbuch 8, ÖBV&hpt, Wien, 2006

Grosser, o. Univ. Prof. Mag. Dr. S.K. unter Mitwirkung von Prof. Dr. Günther Hanisch:
Schulmathematik 1: Differenzialrechnung, Vorlesung an der Universität Wien 1994

Gruber, Mag. Werner: Brain Modelling I, Vorlesung am Institut für
Experimentalphysik, Universität Wien, 2003/4

Gruber, Mag. Werner: Brain Modelling II, Vorlesung am Institut für
Experimentalphysik, Universität Wien, 2004

Hanisch, Univ. Doz. Günter: Fehler – eine Chance zum Lernen,
ÖMG Didaktik Reihe, Heft 29, Wien, 1998
herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft,

Hanisch, Univ. Doz. Günter: Kreativitätsförderung im Mathematikunterricht,
ÖMG Didaktik Reihe, Heft 9, Wien, 1982
herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft,

Hanisch, Reichel, Müller, Schak: Ist gleich, HAK 3, Lehrbuch für Mathematik und
Angewandte Mathematik, ÖBV&hpt, Wien, 2000

Hauer-Typpelt, Mag. Dr. Petra: Zugänge zur Normalverteilung und ihre fachdidaktische
Analyse, Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Doktor der
Naturwissenschaften, Universität Wien, 1998

Heymann, Hans Werner: Allgemeinbildung und Mathematik. Belz-Verlag, Weinheim, 1996
(Verweis von wikipedia)

Kapper, Gerhard: Die mathematische Unterrichtsreform am Anfang des 20. Jahrhunderts in Österreich, Diplomarbeit zur Erlangung des akademischen Grades Magister der Naturwissenschaften, Universität Wien, 1998

Klein, Hortense: Schulübungsheft aus Mathematik, 7. Klasse AHS des Schülers Peter Jungbauer (der Autor dieser Diplomarbeit), Wien, 1989

Kraft, Hruby, Bürger, Unfried: Mathematische Formelsammlung
Verlag Hölder – Pichler - Tempisky, 1986, Wien

Laub, Dr. Josef: Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen, 3. Band, Verlag Hölder - Pichler - Tempisky, 1980, Wien

Laub, Dr. Josef: Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen, 4. Band, Verlag Hölder – Pichler - Tempisky, 1981, Wien

Lehrpläne für AHS, 2004 aufsteigend,
http://www.bmbwk.gv.at/schulen/unterricht/lp/Lehrplaene_der_Allgemein2102.xml,
28.8.2014

Lehrpläne für Berufsbildende Höhere Schulen,
http://www.bmbwk.gv.at/schulen/unterricht/lp/Lehrplaene_der_berufsbil3577.xml, 28.8.2014
http://www.bmukk.gv.at/schulen/bw/bbs/Berufsbildende_Schulen_H1745.xml, 28.8.2014

Malle, Univ.-Prof. Dr. Günther: Fachdidaktik der Mathematik,
Vorlesung an der Universität Wien, 2004

Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl: Mathematik verstehen 5
öbvht Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG, Wien, 2004

Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl: Mathematik verstehen 7,
öbvht Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG, Wien, 2007

Malle, Horst: Mathematik erleben: ein Lehr und Übungsbuch für Schule und Praxis, Band 3, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1996

Muth, Brigitte: Basiswissen Aktuell: Mathematik – eine Einführung, Gütersloh, Bertelsmann Lexikon Verlag GmbH, München, Orbis Verlag, 1990

Olechowski, O. Univ.-Prof. Dr. Richard: Theorie des Unterrichts, Vorlesung an der Universität Wien, 1991

Otte, M.: Das Formale, das Soziale und das Subjektive – Eine Einführung in die Philosophie und Didaktik der Mathematik, Frankfurt a.M., Suhrkamp TW, 1994

Pietschmann, Prof. Dr. Herbert: Phänomenologie der Naturwissenschaft, Springer-Verlag 1996, Berlin, Logische Grundlagen

Pietschmann, Prof. Dr. Herbert: Wissenschaftstheorie der Physik, Vorlesung an der Universität Wien 1997

Platon, ausgewählt und vorgestellt von Rafael Ferber: Philosophie jetzt!, München, dtv 1997

Reinhard, Fritz, Heinrich Soeder: dtv-Atlas zur Mathematik, Band 1, München, dtv 1991

Roupec, Ralf: Infinitesimalrechnung im Wandel der Zeit, Diplomarbeit zur Erlangung des akademischen Grades Magister der Naturwissenschaften, Universität Wien, 1994

Schärf, Ing. Dr. Julius: Mathematik für HTL 3, Wien, R. Oldenburg Verlag, 1982

Schärf, Ing. Dr. Julius: Mathematik für HTL 3, Wien, R. Oldenburg Verlag, 1994, S. 61-162

Siller, Mag. Dr. Hans-Stefan: Bildungsstandards im Fach Mathematik,
http://schule.salzburg.at/e3pi/ahs/ahshandreichungen/Bildungsstandards_in_Mathematik_V2.pdf, 2.11.2014

Steiner, Gerhard: Mathematik für Handelsakademien 3, Wien, Bohmann Verlag, 1981

Schweiger, F.: Fundamentale Ideen – Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik, Journal für Mathematikdidaktik, Heft 2/3, 1992

Szirucsek, Dinauer, Unfried, Schatzl: Mathematik 7, AHS, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1991, Wien

Szirucsek, Eduard, Unfried, Hubert: Arbeitslehrbuch Mathematik 7, Verlag Ueberreuter 1975, Wien

Taschner, Rudolf: Mathematik 3, Übungs- und Lehrbuch für die 7. Klasse AHS, Wien, R. Oldenbourg Verlag, 2000

Thorwartl, Wagner, Wagner: Mathematik positiv! Für die 7.Klasse AHS, Ggverlag, 20012

Tinhof, Fischer, Girlinger, Paul: Mathematik für die Berufsreifeprüfung (Teil 2), Wien Trauner Verlag, 2013

Wikipedia, <http://de.wikipedia.org/wiki/Mäeutik>, 28.8.2014

Wikipedia, <http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematikdidaktik>, 28.8.2014

Wikipedia, <http://de.wikipedia.org/wiki/Vergessenskurve>, 28.8.2014

Wikipedia, <http://de.wikipedia.org/wiki/Polynomfunktion>, 28.8.2014

Wikipedia, [http://de.wikipedia.org/wiki/Grenzwert_\(Funktion\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Grenzwert_(Funktion)), 28.8.2014

Wikipedia, <http://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung#Schulb.C3.BCcher>, 28.8.2014

Wikipedia, <http://de.wikipedia.org/wiki/Extremwert>, 28.8.2014

Wikipedia, <http://de.wikipedia.org/wiki/Änderungsrate>, 28.8.2014

Wittenberg, A.I.: Bildung und Mathematik, Klett 1963, Stuttgart

Zimbardo, Ph.D. Philip G.: Psychologie, 5.Auflage, Springer-Verlag 1992, Augsburg

Lebenslauf

Peter Jungbauer

wohnhaft in: 1070 Wien, Apollogasse 14/17

geboren am: 24. Juni 1972 in Wien/Österreich

Eltern: Peter Jungbauer, GenDion Telekom, Pension

Helga Jungbauer (geb. Pavlik), Hausfrau

Ausbildung:

1978 - 1982 Volksschule Schulschwestern von unserer lieben Frau, Friesgasse Wien 15

1982 – 1990 Privatgymnasium Schulschwestern von unserer lieben Frau, Friesg. Wien 15

1990 Matura mit gutem Erfolg

seit 1990: Studium an der Universität Wien (Lehramt für Mathematik und Physik)

1996 1. Diplomprüfung in Mathematik und Physik bestanden

2014 2. Diplomprüfung in Mathematik und Physik

WS 1994/5 Absolvierung der Einführungs- und Übungsphase Physik (AHS Hegelgasse und Wenzgasse) sowie Mathematik (AHS Friesgasse, Wien 15)

Berufserfahrung:

Sommer 1989 Schrack

Sommer 1990-1996 Tätigkeit bei der Post, Zusteller

2000-2006 selbstständig tätig: Dienstleistungen in der automatischen Datenverarbeitung und Informationstechnik

November 1993-2013 Mitarbeiter Spielefest Wien

1989-2014 private Nachhilfetätigkeit

1997-1999 Lehrtätigkeit an einem Privatinstitut (Studienkreis Mariahilf / Floridsdorf)

2013-2014 Lehrtätigkeit an einem Privatinstitut (Institut Dr. Rampitsch)

2000 Lehrtätigkeit VHS Favoriten

2001-2009 Lehrtätigkeit VHS Hietzing

2013-2014 Lehrtätigkeit als Kursleiter für den 2. Bildungsweg VHS Floridsdorf

2014 Lehrtätigkeit als Kursleiter für BRP Siemens