



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Wie sehen Schülerinnen und Schüler den
Wahrscheinlichkeitsbegriff?

verfasst von

Lena Isabella FENZ

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

Wien, im Juli 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 406 299

Studienrichtung lt. Studienblatt: Lehramtsstudium UF Mathematik UF Psychologie und Philosophie

Betreuerin / Betreuer: Univ.-Prof. Dr. Peter Raith

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Kreisegg, am 1. Juli 2015

Unterschrift

Danksagung

Danken möchte ich in erster Linie meinem Betreuer, Herrn Univ.-Prof. Dr. Peter Raith, für die Unterstützung. Durch konstruktive Kritik verhalfen Sie mir zu einer durchdachten These und Fragestellung. Vielen Dank für Zeit und Mühen, die Sie in meine Arbeit investiert haben.

Die Diplomarbeit ist die interessanteste Zeit des Studiums. So kann man endlich sehen, ob sich die letzten Jahre des Studierens gelohnt haben. Allerdings wäre es niemals so weit gekommen, wenn meine Familie mich nicht unterstützt hätte.

Christopher, vielen Dank für deine Unterstützung und dafür, dass du immer an mich geglaubt hast.

Ein weiterer Dank gilt allen Schülerinnen und Schülern, die bei meiner Untersuchung mitgemacht haben. Vielen Dank dafür!

Besonders bedanken möchte ich mich bei meinem Vater, Reinhold Fenz, welcher mir in jeder Stunde meines Studiums den Rücken gestärkt hat. Ich danke Dir für deine Hilfestellungen beim Verfassen dieser Arbeit und dafür, dass du immer für mich da bist.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	8
1. Was ist die Stochastik?	9
1.1. Kombinatorik.....	9
1.2. Statistik.....	13
1.3. Wahrscheinlichkeitsrechnung	16
2. Zufall und Zufallsexperiment	18
3. Die geschichtliche Entwicklung der Stochastik.....	19
3.1. Die historische Entwicklung der Statistik	19
3.2. Die historische Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung	19
4. Das Paradoxon des Chevalier de Méré.....	22
5. Pierre Simon Laplace	24
6. Diskrete Zufallsvariablen	26
7. Erwartungswert	29
8. Stromkreise.....	33
8.1. Serien- und Parallelschaltung.....	33
8.2. Das k -von- n -System.....	38
9. Kirchhoff'sche Gesetz	41
10. Grundvorstellungen	45
11. Empirische Untersuchung.....	51
11.1. Elternbrief.....	52
11.2. Fragebogen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff	53
11.3. Durchführung der Befragung.....	55
11.4. Auswertungsverfahren	57
11.5. Analyse.....	60
11.5.1. Auswertung der ersten Frage	61
11.5.2. Auswertung der zweiten Frage	64
11.5.3. Auswertung der dritten Frage	66
11.5.4. Auswertung der vierten Frage	68
11.5.5. Auswertung der fünften Frage.....	70
11.5.6. Auswertung der sechsten Frage	71

11.5.7. Die Punktzahl aller Fragebögen nach aufsteigender Reihenfolge.....	74
11.6. Schlussfolgerungen.....	81
Anhang.....	87
Abbildungsverzeichnis.....	87
Literaturverzeichnis.....	88
Abstract	91
Zusammenfassung.....	92
Lebenslauf	94

Vorwort

In meiner Schulzeit wurde der Bereich Stochastik im Mathematikunterricht nur in sehr geringem Umfang vermittelt. Für mich war dieser aber immer ein spannender Bereich der Mathematik.

In meiner Schulzeit habe ich die Erfahrung gemacht, dass sich viele Schülerinnen und Schüler mit dieser Thematik schwer getan haben. Dies hat sich auch in den Folgejahren, beim Nachhilfeunterricht, bestätigt. Kinder haben ein Problem Aufgaben zu verstehen und diese dann zu Lösen.

Speziell im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden Aufgaben fast ausschließlich anhand von Beispielen mit Kugeln und Würfeln vermittelt.

Durch diese persönliche Erfahrung, stellte ich die Hypothese *Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird als unnütz beziehungsweise nicht notwendig wahrgenommen und daher tun sich Schülerinnen und Schüler schwer diese Thematik zu erlernen* auf.

Als wissenschaftliche Methode diese Hypothese zu bestätigen habe ich eine empirische Untersuchung an knapp 300 Schülerinnen und Schüler anhand eines Fragebogens durchgeführt.

Ziel war es herauszufinden, ob es tatsächlich einen Zusammenhang zwischen dem subjektiven Empfinden der Sinnhaftigkeit eines Schülers/ einer Schülerin zur Thematik und der Lösungskompetenz gibt.

Ich kann jetzt schon überraschende Ergebnisse versprechen.

1. Was ist die Stochastik?

Der Begriff Stochastik kommt aus dem Altgriechischen („STOCHOS“) und bedeutet Vermutung. Der Überbegriff Stochastik umfasst die Bereiche der Kombinatorik, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die der Statistik. In den folgenden Kapiteln werde ich auf diese Teilgebiete näher eingehen.

1.1. Kombinatorik

Die Kombinatorik entstand aus Abzählproblemen von diskreten Strukturen die im 17. Jahrhundert bei der Wahrscheinlichkeitsanalyse von Glücksspielen auftraten. Dieser klassische Bereich der Kombinatorik wird zusammenfassend als abzählende Kombinatorik bezeichnet. Lange Zeit spielte die Kombinatorik eine Außenseiterrolle in der Mathematik.¹

In der Kombinatorik wird untersucht, auf welche und auf wie viel verschiedene Arten gewisse Mengen von Dingen angeordnet und zusammengefasst werden können.

Wobei das Grundproblem der Kombinatorik das Abzählen der Elemente einer gegebenen Menge ist. Die Elemente dieser Menge werden kombinatorische Objekte genannt. Anordnungen (Permutationen), Auswahlen (Kombinationen, Variationen) und Verteilungen und Zerlegungen (Partitionen) ist eine Auswahl dieser Objekte. Am einfachsten eignet sich für Anzahlprobleme das explizite Auflisten aller Objekte der Menge.²

- Didaktische Bemerkungen:

³Ein möglicher Einstieg in dieses Teilgebiet der Mathematik, kann mit vier bunten Legosteinen

Abbildung 1 :
Legosteine



¹ <http://de.wikipedia.org/wiki/Kombinatorik>

² (Tittmann, 2014) S. 1

verdeutlicht werden. Die Schüler erhalten die Anweisung daraus Türme zu bauen. Innerhalb eines Turmes dürfen sich die Farben nicht wiederholen.⁴ Mit Hilfe dieser Methoden können Schülerinnen und Schüler den Umgang mit dieser Disziplin spielerisch lernen und bekommen so das Gefühl für eine Permutation ohne Wiederholung. Dazu habe ich ein passendes Zitat gefunden:

"Das Kombinieren [...] gehört zu den allerleichtesten und vieles erleichternden Übungen, recht eigentlich für Kinder. Dass zwei Dinge ihre Stellung rechts und links wechseln können, ist der Anfang. Dass drei Dinge sich sechsfach (in einer Linie) versetzen lassen, ist die nächste Folge. Wie viele Paare man aus einer Menge vorliegender Dinge nehmen könne, ist eine der leichtesten Fragen. Wie weit man fortzuschreiten habe, müssen die Umstände bestimmen. Nur sind nicht Buchstaben, sondern Dinge und die Kinder selbst zu versetzen, zu kombinieren und zu variieren. So etwas muss man zum Teil scheinbar spielend lernen."⁵⁶

Im Zentrum der vorliegenden Unterrichtsanregungen stehen kombinatorische Aufgabenstellungen, die anschaulich lösbar sind und unterschiedliche kombinatorische Zählprinzipien erfordern (Variation/Permutation/Kombination).

Variation (Auswahlen mit Wiederholungen): Die Anzahl der geordneten Auswahlen von k Elementen aus einer n -elementigen Menge mit Wiederholung nennt man n^k . Man versteht unter einer *Auswahl mit Wiederholungen* eine Auswahl, bei der jedes Element beliebig oft vorkommen kann. Zur Berechnung der Anzahl der *geordneten Auswahlen* (oder *Variationen*) ist die Reihenfolge der gewählten Elemente wichtig.⁷

Permutation: z. B.: n -Permutation ohne Wiederholung aus n Zeichen

³ (MyHeritage Blog)

⁴ <http://www.lehrer-online.de/594387.php?sid=15601469579007345942321932193190>

⁵ Johann Friedrich Herbart: Umriß pädagogischer Vorlesungen. Kritisch durchgesehene Ausgabe mit Einleitung und Anmerkungen von Dr. Hans Zimmer, Verlag von Otto Hendel, Halle a.S., 1900

⁶ <http://www.lehrer-online.de/594387.php?sid=15601469579007345942321932193190>

⁷ (Tittmann, 2014) S. 7

„Unter einer n -Permutation ohne Wiederholung aus einer Menge von n Zeichen (Elementen), versteht man jede Anordnung, die sämtliche n Zeichen (Elemente) in irgendeiner Reihenfolge genau einmal enthält.“⁸

Kombination: z. B.: Kombination ohne Wiederholung

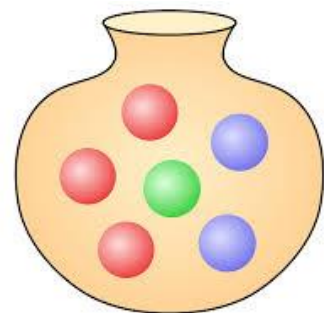
Gegeben seien n Zeichen $a_1, a_2, \dots, a_n$. jede k -gliedrige Sequenz mit den Bedingungen, dass Sequenzen/Zusammenstellungen als gleich angesehen werden, die die gleichen Zeichen in verschiedener Anordnung enthalten und, dass sämtliche Zeichen in den Sequenzen voneinander verschieden sind heißt

- Ungeordnete Sequenz ohne Wiederholung der Länge k aus n Zeichen/ n Elementen. Kurz: Kombination ohne Wiederholung
- Eine ungeordnete (Stich-)Probe ohne Zurücklegen vom Umfang k aus einer Urne mit n unterschiedlichen Kugeln⁹

- Didaktische Anmerkung:

In einer Urne mit n unterschiedlichen Kugeln wird k -mal nacheinander eine Kugel ohne Zurücklegen gezogen. Da die Reihenfolge keine Rolle spielt, kann man die k Kugeln auch gleichzeitig mit einem Griff ziehen.¹⁰

Abbildung 2:
Urne



⁸ (Kütting & Sauer, 2011) S. 139

⁹ „Urn problem qtl1“ von Quartl - Eigenes Werk. Lizenziert unter CC BY-SA 3.0 über Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Urn_problem_qtl1.svg#/media/File:Urn_problem_qtl1.svg

¹⁰ (Kütting & Sauer, 2011) S. 146

Zusammenstellung der kombinatorischen Figuren / Anzahlen:

Ziehen von k Kugeln aus n Kugeln	ohne Zurücklegen	mit Zurücklegen
Mit Berücksichtigung der Reihenfolge	Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen vom Umfang k aus n Elementen: $\frac{n!}{(n-k)!}; k \leq n$ Möglichkeiten. Sonderfall: $k = n$ Permutation ohne Wiederholung von n Elementen: $P_n = n!$ Möglichkeiten.	Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen vom Umfang k aus n Elementen: n^k Möglichkeiten.
Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen vom Umfang k aus n Elementen: $\binom{n}{k}; k \leq n$ Möglichkeiten.	Ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen vom Umfang k aus n Elementen: $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten.

1.2. Statistik

Die Statistik ist nicht nur ein Teilgebiet der Mathematik, sondern auch eine eigenständige mathematische Disziplin. Sie sammelt, analysiert und interpretiert Daten. Graphische Darstellungen und statistische Methoden sind aus dem heutigen Leben nicht mehr wegzudenken. Sie eignen sich hervorragend um mathematische Verfahren, die in allen Stufen des Mathematikunterrichts auftreten, zu erlernen. Schülerinnen und Schüler werden dadurch angeregt, eigenständig Erlerntes einzuüben. Die Statistik wird in die folgenden drei Teilbereiche eingeteilt:

- Die deskriptive Statistik

In der beschreibenden Statistik geht es um Datenerfassung in Sachsituationen, um die Datenaufbereitung und um eine erste vorsichtige Dateninterpretation.¹¹ Die Aufbereitung von (erhobenen) Daten ist dabei sehr wichtig. Diese werden zu Anfang geordnet, in Tabellen und Grafiken zusammengefasst und anschließend dargestellt.¹²

- Die induktive Statistik

Sie ist unter dem Namen „schließende“ Statistik besser bekannt und befasst sich damit, dass man aus Daten einer Stichprobe die Eigenschaften einer Grundgesamtheit ableitet.

- Die explorative Statistik

Sie stellt methodisch eine Zwischenform der Teilbereiche deskriptive Statistik und schließende Statistik dar. Das Ziel ist die Annahme über die Ursache und den Grund der beobachteten Daten zu bilden.

Einige wichtige Begriffe müssen in der Schule eingeführt werden um den Schülerinnen und Schülern den Umgang mit diesem Themengebiet zu erleichtern.

¹¹ (Kütting & Sauer, 2011) S.7

¹² (Reichel, 1987) S. 11

- Statistische Masse (empirische Grundgesamtheit)

Die empirische Grundgesamtheit ist die Menge, die durch Identifikationsmerkmale und abgegrenzten Mengen von Einheiten ausgezeichnet ist. In dieser Menge kann eine Erhebung eines oder mehrerer Merkmale durchgeführt werden

- Statistische Einheit (Beobachtungseinheit, Merkmalsträger)

Wird als Einzelobjekt einer statistischen Untersuchung verstanden. Sie muss eindeutig abgrenzbar sein.

- Identifikationsmerkmalen
- Merkmal

Merkmale sind interessierende Eigenschaften einer statistischen Untersuchung. Welche Werte ein Merkmal annehmen kann nennt man Merkmalsausprägungen. Des Weiteren unterscheidet man auch die beiden folgenden Typen eines Merkmals.¹³

Qualitative Merkmale: Sie werden auch noch nominalskalierte „artmäßige“ Merkmale genannt. Vom lateinischen Wort *Nomen* kommend, welches übersetzt Namenwort heißt. Die Merkmalsausprägungen sind nicht messbar, da sie nur Beschreibungen sind und sie lassen sich auch nicht in eine Reihenfolge bringen, sie stehen gleichberechtigt nebeneinander. Ein Beispiel dafür wäre die Haarfarbe einer Person, man kann nur feststellen, ob diese bei einer statistischen Einheit zutreffen oder nicht. Eine Codierung der Merkmalsausprägung im Computer ist daher völlig willkürlich.¹⁴ Diese sind Merkmale, die in Worten oder in Zahlen beschrieben werden können (Beispielsweise 0=rot, 1=grün).¹⁵

„Qualitative Merkmale sind immer diskret, da sie von Natur aus nur eine abzählbare Menge möglicher Merkmalswerte (Kategorien) haben.“¹⁶

Weiters kann man Rangmerkmale unterscheiden. Diese werden auch ordinalskalierte Merkmale genannt. Die Merkmalsausprägungen lassen sich in eine Reihenfolge bringen.

¹³ (Kütting & Sauer, 2011) S. 9f

¹⁴ (Kütting & Sauer, 2011) S. 11

¹⁵ (Wikipedia, 2015)

¹⁶ (Meißner, 2004) S. 19

Quantitative Merkmale: auch metrischskalierte Merkmale genannt. Ihre Ausprägungen sind angeordnet und die Abstände zwischen den Merkmalsausprägungen sind mathematisch interpretierbar. Als Ausprägungen haben sie reelle Zahlen.¹⁷ Hier unterscheidet man zwischen diskreten (isolierte Zahlenwerte) und stetigen Merkmalen.¹⁸

Eine der wichtigsten Definitionen der Statistik sind die der absoluten und relativen Häufigkeit:

Es sein n die Anzahl der statistischen Einheiten, und es sein x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) mögliche Merkmalsausprägungen. Die Anzahl der statistischen Einheiten mit der Merkmalsausprägung x_i heißt dann die absolute Häufigkeit $H_n(x_i)$ der Merkmalsausprägung x_i . Es entsteht eine Häufigkeitsverteilung. Die Anzahl der statistischen Einheiten mit der Merkmalsausprägung x_i an der Gesamtzahl n der statistischen Einheiten heißt relative Häufigkeit $h_n(x_i)$ der Merkmalsausprägung x_i , also $h_n(x_i) := \frac{H_n(x_i)}{n}$.¹⁹

- Didaktische Bemerkungen:

Die Bezeichnungen qualitativ und quantitativ sind griffig, doch das Wort qualitativ kann auch falsche Assoziationen hervorrufen. Denn dieses Wort bezeichnet etwas hinsichtlich seiner Qualität und beinhaltet in der Umgangssprache nicht nur die Beschaffenheit.²⁰

¹⁷ (Kütting & Sauer, 2011) S. 11

¹⁸ (Henze, 2000) S. 25

¹⁹ (Kütting & Sauer, 2011) S.12

²⁰ (Kütting & Sauer, 2011) S.12

1.3. Wahrscheinlichkeitsrechnung

21

Abbildung 3: Kolmogoroff



Auf die Frage, was Wahrscheinlichkeit eigentlich bedeutet, bekommt man von einem Laien folgende mögliche Antwort: „Ereignisse, die eine große Wahrscheinlichkeit besitzen, treten häufig ein, Ereignisse mit einer kleinen Wahrscheinlichkeit dagegen selten.“ Kolmogoroff führte 1933 den Wahrscheinlichkeitsbegriff axiomatisch ein.²²

Definition nach Kolmogoroff:

Eine auf ein System von Ereignissen definierte Funktion P heißt Wahrscheinlichkeit, wenn sie folgende Axiome erfüllt:

Axiom 1: Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A ist eine eindeutig bestimmte, nichtnegative reelle Zahl, die höchstens gleich Eins sein kann, d.h. es gilt $0 \leq P(A) \leq 1$.

Axiom 2: Das sichere Ereignis besitzt die Wahrscheinlichkeit Eins, $P(\Omega) = 1$.

Axiom 3: Für zwei unverträgliche Ereignisse A, B (also mit $A \cap B = \emptyset$) gilt

$$P(A+B) = P(A) + P(B).^{23}$$

Dieses Axiomensystem diente bis heute fast ausschließlich als Basis für wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchungen. Es nimmt für den Spezialfall einer endlichen Ergebnismenge folgende Gestalt an:

²¹ http://de.wikipedia.org/wiki/Andrei_Nikolajewitsch_Kolmogorow

²² (Bosch, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1976) S.8

²³ (Bosch, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1976) S.9

Definition:

Ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar (Ω, P) , wobei Ω ($\Omega \neq \emptyset$) eine endliche Menge und P eine auf den Teilmengen von Ω definierte reellwertige Funktion mit folgenden Eigenschaften ist:

- a) $P(A) \geq 0$ für $A \subseteq \Omega$, (Nichtnegativität)
- b) $P(\Omega) = 1$, (Normiertheit)
- c) $P(A + B) = P(A) + P(B)$, falls $A \cap B = \emptyset$. (Additivität)

P heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung oder auch Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω . $P(A)$ heißt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A .²⁴

²⁴ (Henze, 2000) S.41-42

2. Zufall und Zufallsexperiment

Von manchen Dingen sagen wir, dass sie zufällig passieren. Aber was meinen wir damit? Wir können den Ausgang eines Ereignisses nicht mit 100%iger Sicherheit vorherbestimmen. Schlichte Unkenntnis wäre ein Grund dafür. Im Gebiet der Mathematik benötigt man Modelle von Situationen, deren Ausgang unsicher ist und die sich mit ihren Mitteln beschreiben lassen. Diese Modelle werden Zufallsversuche oder Zufallsexperimente genannt. Das Paradebeispiel eines Zufallsexperiments ist das Werfen einer Münze oder das Würfeln mit einem idealen Würfel. Somit besitzt jedes Zufallsexperiment eine Menge möglicher Versuchsausgänge. Diese Menge wird Ereignisraum genannt.

Genau aus diesem Grund habe ich meinen Fragebogen für Schülerinnen und Schüler entwickelt. Ich bin der Meinung, dass sie sich hinsichtlich dieser Vorstellungen sehr schwer tun und oft nicht wissen, wofür man die Wahrscheinlichkeitsrechnung braucht.

3. Die geschichtliche Entwicklung der Stochastik

3.1. Die historische Entwicklung der Statistik

Aus verschiedenen Entwicklungen entstand die Statistik. Im Laufe des 19. und 20. Jahrhunderts ist sie zur heutigen Statistik zusammengewachsen. Zu ihren Anfängen zählt die amtliche Statistik, Universitätsstatistik und die politische Arithmetik. Bis vor Christi Geburt reichen die Anfänge der amtlichen Statistik zurück.²⁵ Volkszählungen und Informationen darüber, wie eine organisierte Gesellschaft am besten verwaltet werden kann, zählen zu den damals wichtigsten Aufgabenbereichen der amtlichen Statistik.²⁶ Bereits in der Bibel (2. Buch Moses) wurden Volkszählungen erwähnt. Mit dem Terminus Universitätsstatistik ist eine etablierte wissenschaftliche Disziplin gemeint. Im 17. Jahrhundert entstand ein Lehr- und Ausbildungsangebot. Diese Personen wurden dann in der Verwaltung von Staaten eingesetzt. Es betraf die Lehre von den Staatsmerkwürdigkeiten. Mit der politischen Arithmetik und ihrem englischen Begründer John Graunt und Sir William Petty versuchte man mit Hilfe von Geburtenzahlen und Sterbefälle die Bevölkerungszahlen zu beobachten.²⁷

3.2. Die historische Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Circa 30000 vor Christi Geburt verwendeten die Menschen den Astragalos zur Durchführung eines Zufallsexperiments. Man fand diese Sprungbeine von Paarhufern wie Schafen oder Ziegen bereits in Gräbern aus prähistorischer Zeit. Diese dienten sowohl zur Vorhersage bei Orakeln als auch zum Spielen. Mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten

Abbildung 4: Astragaloi



²⁵ (Wikipedia, 2015)

²⁶ (Kütting & Sauer, 2011) S.2

²⁷ (Kütting & Sauer, 2011) S.5

fielen sie auf jede ihrer Seiten. Meistens wurden den Seiten die Werte 1, 3, 4 und 6 zugeordnet.²⁸

In anderen Büchern wird als Ursprung der Wahrscheinlichkeitstheorie die Beschäftigung mit den Problemen des Glücksspiels angesehen. Kaiser und Nöbauer sind aber der Meinung, dass dies ein weitverbreitetes Fehltriteil sei. Eine Reihe von Problemen führte zur Ausbildung der Methoden und der Begriffswelt der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine mögliche Wurzel der Wahrscheinlichkeitsrechnung liegt in den Problemen der Verarbeitung von numerischem Datenmaterial. Die ersten Versicherungsgesellschaften wurden bereits im 14. Jahrhundert gegründet. Schiffe waren die ersten Objekte, welche versichert wurden.²⁹

In der Geschichte der Mathematik fand zwischen Pascal und Fermat einer der erfolgreichsten und bedeutendsten Briefwechsel statt. In vielen Schriften wurde somit auch das Jahr 1654 als Geburtsjahr der Stochastik angesehen. Im Briefwechsel sprechen Pascal und Fermat nicht von Wahrscheinlichkeit sondern von Zufall. Der französische Nobelman und Spieler Antoine Gombaud hatte damals ein großes Problem mit Würfelspielen. Er verlor viel Geld damit. Gombaud suchte Hilfe bei den beiden Mathematikern. Der Briefwechsel der beiden Rechenkünstler über diese Probleme gilt als die Geburtsstunde der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung. Antoine Gombaud, genannt Chevalier de Méré, wollte von den beiden Mathe-Genies zunächst folgendes wissen:

Man wirft ein Paar Würfel 24 Mal. Lohnt es sich, darauf Geld zu wetten, dass dabei mindestens einmal eine Doppel-Sechs kommt oder nicht?

Gombaud wusste, dass die Chance, mit einem Würfel in vier Versuchen mindestens eine Sechs zu werfen, knapp mehr als 50 Prozent beträgt. Wenn man also nur eine 1 zu 36 Chance hat, mit einem Wurf eine Doppel-Sechs zu würfeln, muss man einfach sechs Mal so oft würfeln wie mit nur einem Würfel, sprich 24 Mal. Leider verlor er mit dieser Taktik viel Geld und wollte von Fermat und Pascal wissen, warum. Fermat und Pascal erkannten, dass die Berechnung von Gombaud falsch war. Sein Proportionalitätsansatz,

²⁸ (Haller & Barth, 2014) S. 1/2

²⁹ (Kaiser & Nöbauer, 1998) S.279

d. h. sechs Mal niedrigere Wahrscheinlichkeit, also sechs Mal so viele Versuche für gleiche Siegchancen, war naheliegend aber inkorrekt. Man muss vielmehr alle möglichen Ausgänge mit positivem Ergebnis für Gombaudo denen mit negativem Ausgang gegenüberstellen. Dabei ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von knapp unter 50 Prozent – und deswegen verlor Gombaudo auch Geld. Ein neuer, genialer Ansatz der beiden Forscher.³⁰

³⁰ (Poker Olymp, 2015)

4. Das Paradoxon des Chevalier de Méré

Abbildung 5: Chevalier de Méré

Bei diesem Paradoxon treten zwei Glücksspiele in Konkurrenz zueinander. Das Paradoxon kann man folgendermaßen beschreiben: Wirft man einmal einen Würfel, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine 6 zu würfeln, ein Sechstel. Wirft man einmal zwei Würfel, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Doppelsechs zu würfeln, im Vergleich zur vorher genannten Wahrscheinlichkeit sechsmal geringer, sie beträgt nämlich $1/36$. Wirft man 4



mal einen Würfel, so liegt die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine 6 zu würfeln, über 50 %. Wirft man 24-mal zwei Würfel so liegt die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens einmal eine Doppelsechs zu würfeln, unter 50%.

Das Paradoxon ist, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit pro Wurf beim letzten Experiment um den Faktor 6 kleiner als die Erfolgswahrscheinlichkeit pro Wurf beim vorletzten Experiment, die Anzahl der Würfe hingegen 6 mal so groß. Bei oberflächlicher Betrachtung könnte man daher annehmen, dass sich dies kompensiert und die Erfolgswahrscheinlichkeiten bei den beiden letzten Experimenten gleich sind. Bei genauerer Betrachtung ist dies jedoch nicht der Fall.

Beim 1. Versuch ist

$$P(\text{mind. einen Sechser}) = 1 - P(\text{keinen Sechser}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,5177 \approx 52\%$$

Beim 2. Versuch ist

$$P(\text{mind. einen Doppelsechser}) = 1 - P(\text{keinen Doppelsechser}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914 \approx 49\%$$

Dies überraschte und befriedigte de Méré nicht, weil er dieses Ergebnis schon kannte. Er wollte den Widerspruch gelöst haben, warum sich die Ergebnisse nicht proportional wie

4 : 6 = 24 : 36 verhielten. In dem 1718 erschienenen Buch „Doctrine of Chances“ wies Abraham de Moivre darauf hin, dass die „Proportionalitätsregel der kritischen Werte nicht weit von der Wahrheit entfernt ist“. Mit „kritischem Wert“ ist die Mindestanzahl n an Würfeln gemeint, die nötig ist, damit die Versuchs-Erfolgswahrscheinlichkeit über 50 % liegt. Der kritische Wert n ist die kleinste natürliche Zahl so, dass gilt:

$$1 - (1 - p)^n > \frac{1}{2}, \text{ gleichbedeutend mit } n > \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln(1-p)} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-p - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{3}p^3 - \dots} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{p + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3}p^3 + \dots}.$$

Hierbei wurde die Logarithmus-Potenzreihenentwicklung verwendet.³¹

Kütting und Saurer versuchten eine Antwort auf die Kernfrage dieses Problems, wie viele Würfe mit einem Würfel/ mit zwei Würfeln man mindestens machen muss, damit die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Auftreten der 6 mind. einmal“/„Auftreten der Doppelsechs mind. Einmal“ größer als 0,5 ist. Man fand heraus, dass dieser kritische Wert bei dem Glücksspiel mit einem Würfel tatsächlich bei 4 liegt, bei dem Glücksspiel mit zwei Würfeln allerdings bei 25. 24 Versuche reichen deshalb nicht aus.³²

³¹ (Büchter & Henn, 2005) S.221-223

³² (Kütting & Sauer, 2011) S.82

5. Pierre Simon Laplace

Abbildung 6: Pierre Simon Laplace



Laplace war ein französischer Mathematiker und Physiker. Er verfasste im Jahre 1812 ein Buch, welchem wir eine umfassende Darstellung der damaligen wahrscheinlichkeitstheoretischen Kenntnisse verdanken. Laplace schrieb damals:

„Die Theorie des Zufalls ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch Zurückfindung aller Ereignisse derselben Art auf eine gewisse Anzahl gleich möglicher Fälle, d.h. solcher, über deren Existenz wir in gleicher Weise unschlüssig sind und durch Bestimmung der dem Ereignis günstigen Fälle. Das Verhältnis dieser Zahl zu aller möglichen Fälle, ist das Maß dieser Wahrscheinlichkeit, die also nichts anderes als ein Bruch ist, dessen Zähler die Zahl der günstigen Fälle und dessen Nenner die Zahl aller möglichen Fälle ist.“³³

In der heutigen Zeit bezeichnen wir dieses Maß als klassische Wahrscheinlichkeit oder sogenannte Laplace-Wahrscheinlichkeit. Obwohl es sich bei dieser Wahrscheinlichkeit eigentlich nicht um eine Definition handelt, wird diese sehr oft als Definition gebraucht und weitergegeben.

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit nach Laplace

Bei einem Würfel tritt jede Augenzahl mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ auf. Alle sechs Elementarereignisse besitzen dieselbe Wahrscheinlichkeit. Daraus kann abgeleitet werden, dass für eine Laplace—Wahrscheinlichkeit folgendes gilt:

Wir betrachten ein Zufallsexperiment, bei dem Ω aus n verschiedenen Versuchsergebnissen besteht, bei dem sich also das sichere Ereignis darstellen lässt als

³³ (Laplace, 1932)

$\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, (n endlich) , wobei jedes Ereignis dieselbe Wahrscheinlichkeit aufweist

$$P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = P(\{a_3\}) = \dots = P(\{a_n\}) = p.$$

Aus

$$\Omega = \{a_1\} + \{a_2\} + \dots + \{a_n\}$$

folgt

$$1 = P\{\Omega\} = P(\{a_1\}) + \dots + P(\{a_n\}) = p + p + \dots + p = n * p$$

und hieraus wiederum

$$p = \frac{1}{n}.$$

Ein Ereignis, welches aus r verschiedenen Versuchsergebnissen besteht, besitzt die Darstellung $A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\}$.

Daraus folgt

$$P(A) = P(\{a_{i_1}\}) + P(\{a_{i_2}\}) + \dots + P(\{a_{i_r}\}) = r * p = \frac{r}{n}$$

Für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ erhalten wir somit

$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der insgesamt möglichen Fälle}} = \frac{ A }{ \Omega }$
--

6. Diskrete Zufallsvariablen

In sehr vielen Fällen von Zufallsexperimenten und Fragestellungen sind Zahlen die Ergebnisse. Als Beispiel der Würfel mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Es können aber auch die Anzahlen der in einem bestimmten Zeitintervall eingehenden Telefonanrufe.

Nun können aber bei vielen Zufallsexperimenten keine Zahlen auftreten. Beim Münzwurf treten als Ergebnisse Kopf/Zahl oder Wappen auf. Bei Werfen zweier Würfel treten als Ergebnisse Zahlenpaare auf. Die Ergebnismenge

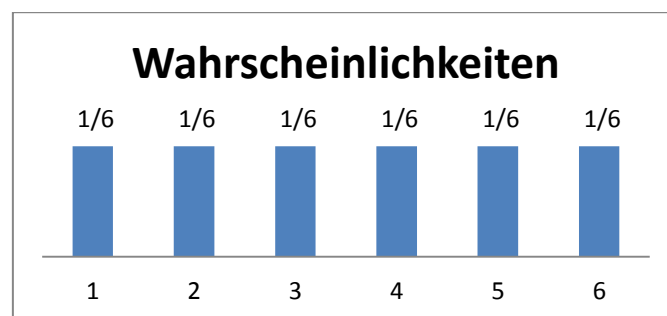
$$\Omega = \{(x, y) \mid x \text{ und } y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

hat 36 Elemente. Ist nun aber die Augensumme oder das Produkt der geworfenen Augenzahlen interessant, treten statt der Zahlenpaare Zahlen in den Mittelpunkt.

Für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten ist aber im Allgemeinen das Besondere der Ergebnismenge ohne Bedeutung, entscheidend ist in der Regel die Zuordnung der Wahrscheinlichkeiten zu den Ereignissen.³⁴

Beispiel: Man hat einen Würfel und würfelt damit. Sei X die geworfene Augenzahl. X hat den Wertevorrat {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Die Wahrscheinlichkeiten werden wie folgt beschrieben:

Werte von X	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeiten	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



³⁴ (Kütting & Sauer, 2011) S.229

Definition einer diskreten Zufallsvariable:

Eine Zufallsvariable X , deren Wertevorrat nur endlich oder abzählbar unendlich viele verschiedene Werte enthält, heißt diskret. Die Gesamtheit aller Zahlenpaare $(x_i, P(X=x_i))$, $x_i \in W$ heißt Verteilung der diskreten Zufallsvariablen X . Sind x_i und x_j zwei verschiedene Werte aus W , so sind die beiden Ereignisse

$$A_{x_i} = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\} \text{ und } A_{x_j} = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_j\}$$

unvereinbar, da der Funktionswert $X(\omega)$ für jedes ω eindeutig bestimmt ist. Damit sind die Ereignisse $A_{x_1}, A_{x_2}, \dots$ paarweise unvereinbar. Da die diskrete Zufallsvariable X aber einen ihrer Werte annehmen muss, erhalten wir aus $\Omega = \sum_i A_{x_i}$ die Identität

$$1 = \sum_i P(X = x_i),$$

wobei über alle Werte $x_i \in W$ summiert werden muss.

Bemerkung: Wir bezeichnen allgemein die Verteilung einer diskreten Zufallsvariable mit $(x_i, P(X=x_i))$, ($i = 1, 2, \dots$). Dabei läuft der Index i bis zu einer Zahl m , falls der Wertevorrat endlich ist. Im abzählbar unendlichen Fall durchläuft i alle natürlichen Zahlen.

Aus $A_{(a,b)} = \{\omega \in \Omega / a < X(\omega) \leq b\} = \sum_{a < x_i \leq b} A_{x_i}$ folgt für eine diskrete Zufallsvariable

$$P(a < X \leq b) = \sum_{a < x_i \leq b} P(X = x_i).$$

Entsprechend erhält man

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x_i \leq b} P(X = x_i).$$

Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen eine diskrete Zufallsvariable X Werte aus einem Intervall annimmt, können also unmittelbar aus der Verteilung von X berechnet werden. Die Ereignisse $A_{(a,b)}$ bzw. $A_{[a,b]}$ müssen dazu nicht untersucht

werden. Durch welches Zufallsexperiment die diskrete Zufallsvariable X entstanden ist, spielt dabei keine Rolle. Wichtig sind nur die Werte der Zufallsvariablen X und die Wahrscheinlichkeiten, mit denen sie angenommen werden.³⁵

³⁵ (Bosch, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2011) S.57

7. Erwartungswert

Norbert Henze hat in seinem Buch *Stochastik für Einsteiger* den Erwartungswert mit einem Beispiel gut beschrieben:

„Stellen Sie sich vor, Sie dürften gegen einen noch festzulegenden Einsatz ein Glücksrad mit den Sektoren $\omega_1, \dots, \omega_s$ drehen. Bleibt dabei ein Zeiger im Sektor ω_j stehen (dies geschieht mit der Wahrscheinlichkeit $P(\{\omega_j\})$), so gewinnt man $X(\omega_j)$ Euro. Wie viel wäre Ihnen dieses Spiel wert, wenn Sie es oftmals wiederholt spielen müssten?

Zur Beantwortung dieser Frage stellen wir folgende Überlegung an: Für den Fall, dass der Zeiger des Glücksrades nach n -maliger Wiederholung des Spieles h_j mal im Sektor ω_j stehen geblieben ist ($h_j \geq 0, h_1 + \dots + h_s = n$), erhalten wir insgesamt

$$\sum_{j=1}^s X(\omega_j) \cdot h_j$$

Euro ausbezahlt. Teilt man diesen Wert durch die Anzahl n der durchgeführten Spiele, so ergibt sich die *durchschnittliche Auszahlung pro Spiel* zu

$$\sum_{j=1}^s X(\omega_j) \cdot \frac{h_j}{n}$$

Euro. Da sich nach dem empirischen Gesetz über die Stabilisierung relativer Häufigkeiten der Quotient $\frac{h_j}{n}$ bei wachsendem n der Wahrscheinlichkeit $P(\{\omega_j\})$ annähern sollte, müsste der Ausdruck

$$\sum_{j=1}^s X(\omega_j) \cdot P(\{\omega_j\})$$

die *auf lange Sicht erwartete Auszahlung pro Spiel* und somit einen fairen Einsatz darstellen.³⁶

Definition:

Sei X eine diskrete Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, P(\Omega), P)$.

1. Falls X endlich viele Werte $x_1, \dots, x_n$ annimmt, heißt

³⁶ (Henze, 2000) S.79

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i).$$

der Erwartungswert von X .

2. Falls X abzählbar-unendlich viele Werte x_i ($i \in \mathbb{N}$) annimmt und falls

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \cdot P(X = x_i)$$

konvergiert, heißt

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i).$$

der Erwartungswert von X .³⁷

Nach den vorangegangenen Überlegungen kann man $E(X)$ als *durchschnittliche Auszahlung pro Spiel auf lange Sicht* ansehen, wenn wiederholt ein Glücksspiel mit den möglichen Ausgängen $\omega \in \Omega$ und einer durch die Zufallsvariable X festgelegten Auszahlungsfunktion gespielt wird.³⁸

○ Didaktische Bemerkungen:

Man kann den Erwartungswert einer Zufallsvariable auch mit μ bezeichnen. In der nachfolgenden empirischen Untersuchung war interessant zu sehen, dass sowohl Schülerinnen und Schüler der sechsten Klasse AHS das Beispiel mit dem Erwartungswert lösen konnten, obwohl die Definition des Erwartungswertes erst in der siebten Klasse gelehrt wird. Man konnte sehen, dass diese Kinder die Grundvorstellung beherrschen und durch einfache Addition der einzelnen Wahrscheinlichkeiten zu einem richtigen Ergebnis gekommen sind. Im Schulbuch *mathematik verstehen 7* wird der Erwartungswert folgendermaßen definiert:

„Es sei X eine Zufallsvariable mit den Werten $a_1, a_2, \dots, a_k$, die mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \dots, p_k$ angenommen werden. Dann nennt man $\mu = E(X) = a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \dots + a_k \cdot p_k$ den Erwartungswert von X .“³⁹

³⁷ (Kütting & Sauer, 2011) S.240f

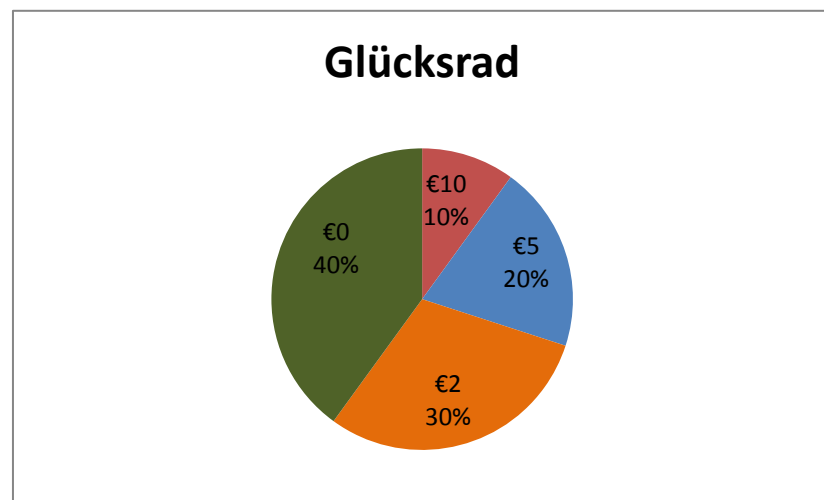
³⁸ (Henze, 2000)S.80

³⁹ (Malle, Koth, Woschitz, Malle, Salzger, & Ulovec, 2013) S.195

Hierzu ein Beispiel aus dem Schulbuch *mathematik verstehen 7*:

Das Glücksrad ist in 4 Sektoren unterteilt. Der relative Anteil jedes Sektors am gesamten Kreisflächeninhalt ist in jedem Sektor eingetragen. Bleibt der Zeiger in einem bestimmten Sektor stehen, bekommt man so viel Euro ausbezahlt, wie im jeweiligen Sektor angegeben ist. Jemand dreht das Glücksrad sehr oft (etwa 100-mal). Wie groß wird sein mittlerer Gewinn pro Drehung sein?

Abbildung 7: Glücksrad



Lösung:

Die Zufallsvariable „Gewinn“ kann die Werte 0, 2, 5, 10 annehmen. Wird das Glücksrad n -mal gedreht, dann wird jeder dieser Werte mit einer bestimmten relativen Häufigkeit auftreten. Wir bezeichnen diese relative Häufigkeit mit $h_n(0), h_n(2), h_n(5)$ und $h_n(10)$. Der Mittelwert $\bar{x}$ der Gewinne aller Spiele ist dann:

$$\bar{x} = 0 \cdot h_n(0) + 2 \cdot h_n(2) + 5 \cdot h_n(5) + 10 \cdot h_n(10)$$

Da n groß ist, stimmen die relativen Häufigkeiten näherungsweise mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten überein:

$$h_n(0) \approx 0,4 ; h_n(2) \approx 0,3 ; h_n(5) \approx 0,2 ; h_n(10) \approx 0,1$$

Daraus folgt:

$$\bar{x} \approx 0 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,1 = 2,6$$

Der mittlere Gewinn pro Drehung wird also ca. 2,60 € betragen.⁴⁰

Somit ist der Erwartungswert eine Zufallsvariable näherungsweise gleich dem Mittelwert einer Liste mit sehr vielen Werten.

- Geschichtliche Bemerkung:

Das Wort Erwartungswert geht auf den niederländischen Astronomen Christiaan Huygens zurück.

Ist P die Verteilung der Gewinne, dann ist der Erwartungswert von P der – im langfristigen Durchschnitt – zu erwartende Gewinn. Dieser Begriff wird benötigt um beurteilen zu können, welcher Einsatz für die Teilnahme an einem Spiel angemessen ist. Spiele bei denen der geforderte Einsatz gleich dem Erwartungswert des Gewinnes ist, heißen „fair“.

Verwendet wurde dieser Begriff von Huygens bei der Beantwortung der folgenden, bereits im Mittelalter (erfolglos) diskutierten Frage: Wenn ein Glücksspiel vor Beendigung abgebrochen werden muss – wie ist dann der im Talon liegende Betrag B aufzuteilen? Die Antwort von Huygens in seinem Buch „De Ratiociniis in Ludo Aleae“ (1657): Es ist fair, jedem Spieler den Erwartungswert des Gewinnes auszubezahlen. Wenn Spieler 1 mit der Wahrscheinlichkeit p_1 den gesamten im Talon liegenden Betrag B bekommt, mit der Wahrscheinlichkeit $p_2=1-p_1$ nichts, dann soll er den Betrag p_1B bekommen, Spieler 2 den Betrag p_2B ⁴¹

⁴⁰ (Malle, Koth, Woschitz, Malle, Salzger, & Ulovec, 2013) S.195

⁴¹ (Pfanzagl, 1991) S.126

8. Stromkreise

8.1. Serien- und Parallelschaltung

Die Zuverlässigkeitstheorie befasst sich mit der Bestimmung des Ausfallsrisikos eines Systems. Dazu wird vorausgesetzt, dass wir das Ausfallsverhalten der einzelnen Komponenten kennen. Die Unabhängigkeit wird dabei vorausgesetzt. Hier bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, dass ein System in einem Zeitintervall $[0,t]$ nicht ausfällt, als Zuverlässigkeit. Dabei kann man in das Reihensystem und das Parallelsystem unterschieden. Natürlich kommen auch Kombinationen vor.⁴²

Wenn z.B. Strom in Serien geschaltet ist, fällt dieser aus, sobald eine Komponente ausfällt. Beim Parallelsystem wiederum, führt nur der Ausfall aller Komponenten zum Totalausfall.

Somit kann man auf folgende Definition schließen:

„Unter einem Seriensystem aus n Komponenten versteht man ein System, das genau dann intakt ist, wenn alle seine n Komponenten intakt sind. Unter einem Parallelsystem aus n Komponenten versteht man ein System, das genau dann intakt ist, wenn mindestens eine seiner Komponenten intakt ist.“⁴³

In den meisten Fällen werden die Komponenten als Elemente betrachtet. Zwei Zustände können angenommen werden, entweder wird Strom durchgelassen oder Strom wird nicht durchgelassen.

„Wir nennen ein System redundant, wenn es intakt sein kann, ohne dass alle seine Komponenten intakt sind. Das Parallelsystem ist also redundant, während das Seriensystem nicht redundant ist.“

Wir berechnen nun die Intaktwahrscheinlichkeit der beiden Systemarten aus den Intaktwahrscheinlichkeiten p_i der n Komponenten K_i ($i=1,2,3,\dots,n$) des jeweiligen Systems.

⁴² (Müller & Denecke, 2013) S.165

⁴³ (Gaede, 1977) S.12

Aus der vorherigen Definition folgt sofort für die Intaktwahrscheinlichkeit p_{Serie} des Seriensystems

$$p_{\text{serie}} = \begin{cases} P \{ \text{Seriensystem mit den Komponenten } K_1, K_2, \dots, K_n \text{ ist intakt} \} \\ P \{ \{K_1 \text{ intakt}\} \text{ und } \{K_2 \text{ intakt}\} \text{ und } \dots \{K_n \text{ intakt}\} \} \end{cases}$$

Wir machen nun die Annahme:

Die Ereignisse $\{K_i \text{ ist intakt}\}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, sind unabhängig.

Für diesen Sachverhalt sagt man auch anschaulich, die n Komponenten sind unabhängig.

Dann liefert die Produktregel für unabhängige Ereignisse

$$p_{\text{serie}} = P\{K_1 \text{ intakt}\} P\{K_2 \text{ intakt}\} \dots P\{K_n \text{ intakt}\}.$$

Mit $p_i := P\{K_i \text{ intakt}\}$ erhält man also für die Intaktwahrscheinlichkeiten p_{Serie} eines Seriensystems mit den n unabhängigen Komponenten $K_1, K_2, \dots, K_n$

$$p_{\text{serie}} = p_1, p_2, \dots, p_n.$$

Für $0 < p_i < 1$ wird p_{serie} mit wachsenden n immer kleiner. Besteht ein nicht redundantes System aus vielen Teilen, so können schon kleine Ausfallwahrscheinlichkeiten der einzelnen Komponenten zu großen Ausfallwahrscheinlichkeiten des Systems führen.

Ein Parallelsystem ist genau dann defekt, wenn alle Komponenten

$K_1, K_2, \dots, K_n$ defekt sind. Damit wird bei unabhängigen Komponenten

$$\begin{aligned} P \{ \text{Parallelsystem defekt} \} \\ = \begin{cases} P \{ \{K_1 \text{ defekt}\} \text{ und } \{K_2 \text{ defekt}\} \text{ und } \dots \{K_n \text{ defekt}\} \} \\ P \{ K_1 \text{ defekt} \} P \{ K_2 \text{ defekt} \} \dots P \{ K_n \text{ defekt} \} \end{cases} \end{aligned}$$

Es gilt stets

$$P\{\text{System defekt}\} = 1 - P\{\text{System intakt}\},$$

$$P\{K_i \text{ defekt}\} = 1 - P\{K_i \text{ intakt}\}$$

Für die Intaktwahrscheinlichkeit p_{Par} eines Parallelsystems mit den n unabhängigen Komponenten $K_1, \dots, K_n$ erhält man also

$$1 - p_{\text{par}} = (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n) \text{ oder}$$

$$p_{\text{par}} = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n).$$

Ist $0 < p_i < 1$, also auch $0 < 1 - p_i < 1$, so gilt für jede Komponente K_j , ($j=1,2,\dots,n$),

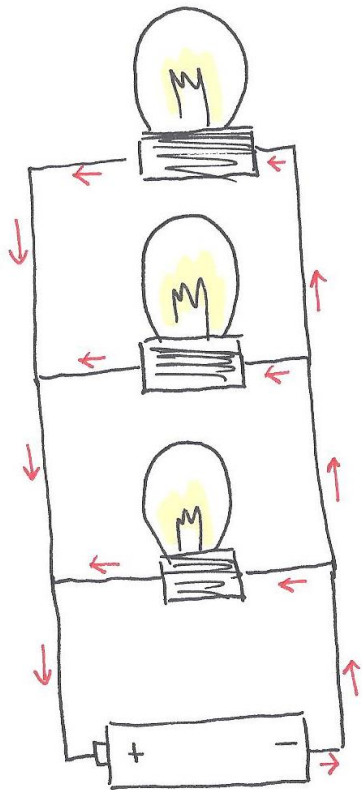
$$p_{\text{Serie}} = p_1 p_2 \dots p_n < p_j = 1 - (1 - p_j)$$

$$< 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n) = p_{\text{Par}}.$$

Dies drückt den anschaulich evidenten Sachverhalt aus, dass ein Seriensystem eine geringere, ein Parallelsystem eine größere Intaktwahrscheinlichkeit besitzt als jede der Komponenten.⁴⁴

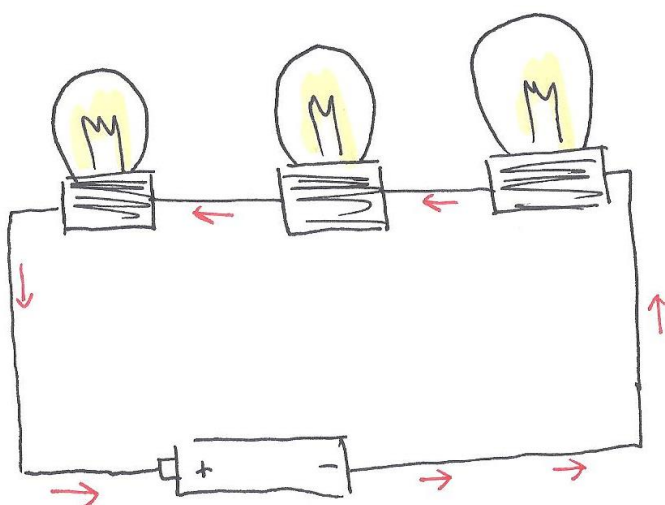
⁴⁴ (Gaede, 1977) S.12-14

Auf den folgenden Bildern werden diese Systeme veranschaulicht.



Strom wird in diesem Fall durchgelassen, wenn alle drei Glühlampen Strom durchlassen, also intakt sind.

Parallelschaltung

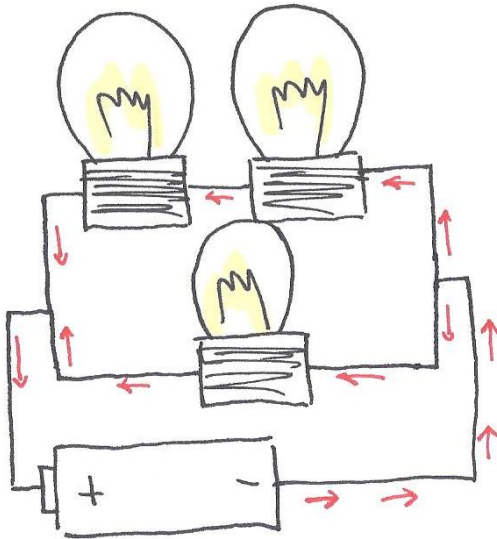


In diesem Fall wird genau dann Strom durchgelassen, wenn eine Glühlampe Strom durchlässt. Hier wird ein System dargestellt, das genau dann intakt ist, wenn mindestens eine seiner Komponenten intakt ist. Analog dazu der Fall, dass dieses System nicht intakt ist, sobald eine seiner Komponenten nicht intakt ist.

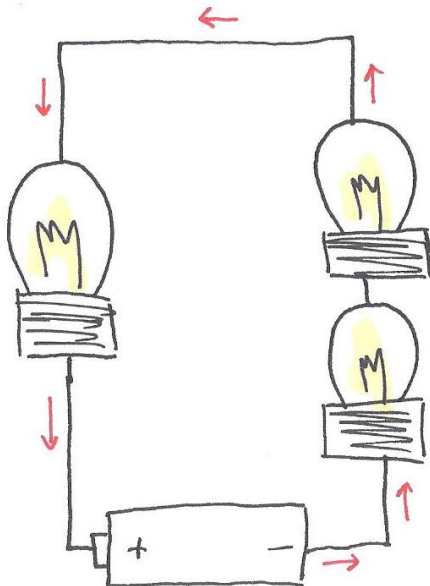
Serienschaltung

Gemischte Schaltungen

Eine Schaltung, die aus einer Serienschaltung und einer Parallelschaltung besteht, nennt man gemischte Schaltung. Hin und wieder wird auch der Begriff Gruppenschaltung verwendet.



erweiterte Parallelschaltung



erweiterte Serienschaltung

8.2. Das k -von- n -System

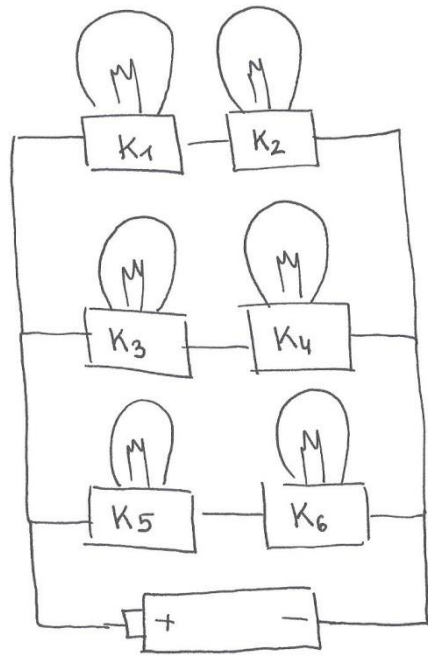
Unter einem k -von- n -System verstehen wir ein System von n Komponenten $K_1, K_2, \dots, K_n$, das genau dann intakt ist, wenn mindestens k der Komponenten intakt sind.

Mit $p_i := P\{K_i \text{ intakt}\}$ bezeichnen wir die Intaktwahrscheinlichkeit von K_i und setzen voraus, dass die Komponenten K_i unabhängig seien $i = (1, 2, \dots, n)$.

Folgendes Bild zeigt ein 2-von-3-System dargestellt als Parallelschaltung von Serienschaltungen, in denen allerdings alle Komponenten jeweils zweimal auftreten. Zwar kann man in diesem 2-von-3-Systemen die Intaktwahrscheinlichkeit der drei Serienschaltungen $S_{1,2}$ aus K_1 und K_2 , $S_{1,3}$ aus K_1 und K_3 sowie $S_{2,3}$ aus K_2 und K_3 berechnen. Jedoch sind diese drei Teilsysteme nicht mehr unabhängig, weil sie jeweils eine gemeinsame Komponente haben. Das ist anschaulich klar und ergibt sich auch durch Rechnung gemäß

$$\begin{aligned} P\{S_{1,2} \text{ intakt}\} &= p_1 p_2, P\{S_{2,3} \text{ intakt}\} = p_2 p_3 \\ P(\{S_{1,2} \text{ intakt}\} \text{ und } \{S_{2,3} \text{ intakt}\}) &= p_1 p_2 p_3 \neq (p_1 p_2)(p_2 p_3) \\ &= P\{S_{1,2} \text{ intakt}\} P\{S_{2,3} \text{ intakt}\}, \end{aligned}$$

falls $0 < p_i < 1$ ist.



2-von-3-System

Wir wollen zunächst die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass genau m der Komponenten intakt sind.

Wir zerlegen dazu die Menge $K_1, K_2, \dots, K_n$ der Komponenten in zwei Teilmengen vom Umfang m und $n-m$

$$M_m := \{K_{i_1}, K_{i_2}, \dots, K_{i_m}\} \text{ und } \bar{M}_m := \{K_{i_{m+1}}, \dots, K_{i_n}\}.$$

Die in M_m erhaltenen Komponenten seien intakt, während die in $\bar{M}_m$ enthaltenen Komponenten nicht intakt seien. Dieses Ergebnis hat die Wahrscheinlichkeit

$$p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_m} (1 - p_{i_{m+1}}) \dots (1 - p_{i_n}).$$

Vereinigt man nun alle diese unvereinbarlichen Ereignisse, die durch derartige Zerlegungen der Komponentenmenge in Mengen von m intakten und $n-m$ nicht intakten Komponenten entstehen – wir nenne diese Zerlegung $Z(m, n)$ – so erhält man offenbar das Ergebnis {genau m der n Komponenten sind intakt}. Seine Wahrscheinlichkeit ergibt sich durch Summieren der oben aufgeschriebenen Wahrscheinlichkeiten als

$P\{\text{genau } m \text{ von } n \text{ Komponenten intakt}\} =$

$$= \sum_{Z(m, n)} p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_m} (1 - p_{i_{m+1}}) \dots (1 - p_{i_n}).$$

Da das k -von- n -System genau dann intakt ist, wenn genau k oder $k+1$ oder ... oder genau n Komponenten intakt sind und diese Ergebnisse unvereinbar sind, erhalten wir nach der Additionsregel aus der letzten Gleichung

$P\{k\text{-von-}n\text{-System ist intakt}\}$

$$= \sum_{m=k}^n P\{\text{genau } m \text{ von } n \text{ Komponenten intakt}\}$$

$$= \sum_{m=k}^n \sum_{Z(m,n)} p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_m} (1 - p_{i_{m+1}}) \dots (1 - p_{i_n}),$$

wobei die innere Summe über alle oben beschriebenen Zerlegungen der Komponentenmenge in m intakte und $n-m$ nicht intakte Komponenten zu erstrecken ist.

Haben speziell alle Komponenten dieselbe Verfügbarkeit

$$p_j := p, (j = 1, \dots, n),$$

so wird aus der Gleichung oberhalb

$$P\{k - \text{ von } - n - \text{ Systemen intakt}\} = \sum_{m=k}^n \sum_{Z(m,n)} p^m (1 - p)^{n-m}$$

$$= \sum_{m=k}^n \binom{n}{m} p^m (1 - p)^{n-m},$$

letzteres, weil die Anzahl der Zerlegungen einer Menge von n Komponenten in zwei Teilmengen des Umfangs m und $n-m$ bekanntlich

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m! (n - m)!} \quad (\text{mit } 0! := 1, k! := 1 \cdot 2 \dots \cdot k)$$

beträgt.⁴⁵

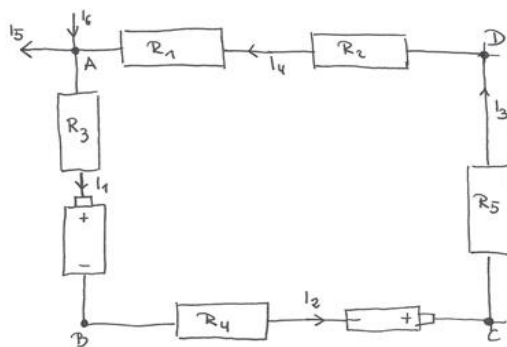
⁴⁵ (Gaede, 1977) S.17/18

9. Kirchhoff'sche Gesetz

Für kompliziertere Stromkreise als die bisher dargestellten verwendet man die Kirchhoff'schen Regeln. Diese wurden von Gustav R. Kirchhoff Mitte des neunzehnten Jahrhunderts ausgearbeitet.

Gustav Robert Kirchhoff wurde am 12. März 1824 in Preußen geboren und verstarb am 17. Oktober 1887 in Berlin. Er studierte Physik und wurde dafür bekannt, dass er Regeln der elektrischen Stromkreise zur Beschreibung der Abhängigkeit von elektrischer Spannung, elektrischen Strom und elektrischem Widerstand formulierte. Diese sogenannten Kirchhoff'sche Regeln sind fundamental für Aufbau und Analyse elektrischer Schaltungen sowie die Elektrotechnik allgemein.⁴⁶

Abbildung 8: Masche



Ausschnitt aus einem Netzwerk:

A, B, C, D sind Knoten und AB, BC, CD, DA sind Zweige, die zusammen eine Masche bilden.

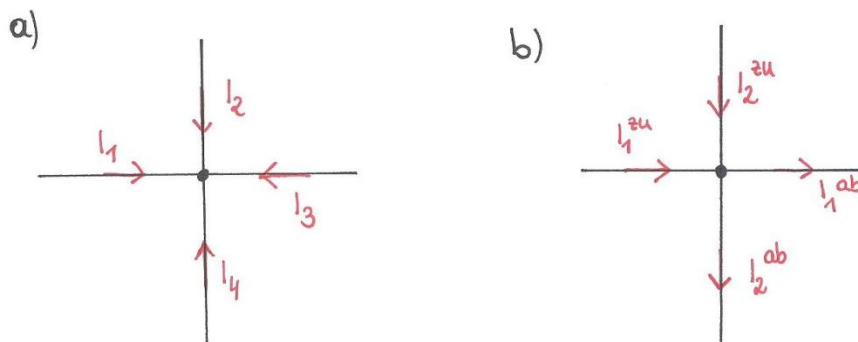
⁴⁶ (Wikipedia)

Das 1. Kirchhoff'sche Gesetz bezieht sich auf die Ströme, die sich in den Knoten treffen. Es wird daher auch Knotengesetz genannt:

1. Kirchhoff'sche Gesetz: (Zwei gleichwertige Formulierungen)

- a) In einem Knoten ist die algebraische Summe der eintreffenden Ströme gleich Null.*
- b) Die Summe aller zufließenden Ströme ist gleich der Summe aller abfließenden Ströme*

Abbildung 9: Knotenregel



Dieses Gesetz folgt aus der Ladungserhaltung: An einem Knotenpunkt kann Ladung weder erzeugt noch vernichtet werden. Das Wort „algebraisch“ bedeutet, dass man die Vorzeichen genau beachten muss. Rechnet man alle Ströme, die zu einem Knoten hin fließen, als positiv, muss man die Ströme, die vom Knoten weg fließen, mit einem negativen Vorzeichen versehen (oder umgekehrt). Dies bedeutet für den Knoten A im Bild oberhalb, mit den dort durch Pfeile angezeigten Stromrichtungen:

$$-I_1 + I_4 - I_5 + I_6 = 0.$$

2. Kirchhoff'sche Gesetz:

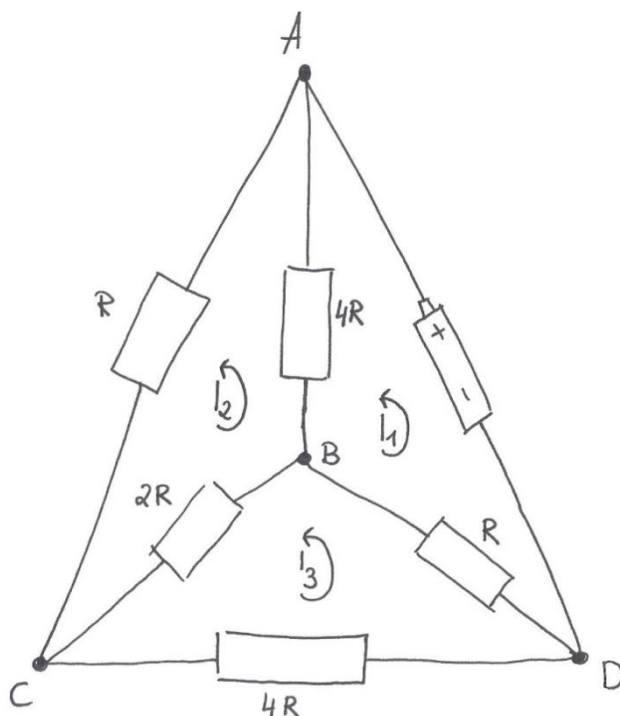
Die algebraische Summe aller Spannungsabfälle in einer Masche ist Null.

Das 2. Kirchhoff'sche Gesetz ergibt sich aus der Tatsache, dass die Summe aller Spannungen auf einem geschlossenen Weg immer Null sein muss. Kirchhoff wandte dies auf eine Masche an, darum heißt dieses Gesetz auch Maschengesetz:

Um das 2. Kirchhoff'sche Gesetz auf eine Masche anzuwenden, müssen wir eine Umlaufrichtung festlegen und die Spannungsabfälle aufaddieren. Der Spannungsabfall über einen Widerstand R der den Strom I führt, ist $I R$ in Stromrichtung bzw. $-I R$ entgegen der Stromrichtung. Der Spannungsabfall über eine Batterie mit der Spannung U ist U von plus nach minus und umgekehrt $-U$. Für eine Masche ABCDA wie in der Abbildung oberhalb gilt also:

$$I_1 R_3 + U_1 + I_1 R_4 - U_2 + I_3 R_5 + I_4 (R_1 + R_2) = 0.$$

Abbildung 10: Netzwerk



Beispiel für ein Netzwerk mit 4 Knoten und 4 Maschen

Als Beispiel für die Anwendung der Kirchhoff'schen Gesetze zeigt die Abbildung 17 ein Netzwerk aus 4 Knoten (A, B, C, D) und 6 Zweigen. Ein Zweig ist mit einer Batterie mit der Spannung U , die übrigen mit Widerständen der angegebenen Werte besetzt.

Nun wollen wir die Ströme in diesen Zweigen bestimmen, somit muss es 6 Unbekannte geben. Mit einem einfachen Trick können wir aber die Anzahl der Unbekannten reduzieren, wobei das 1. Kirchhoff'sche Gesetz automatisch erfüllt wird: Wir stellen den Stromfluss als Kreisströme I_1, I_2, I_3 in den 3 Maschen ABC, ACB bzw. BCD dar. Der Strom I_1 fließt durch alle drei Zweige AB, BD und DA, der Strom I_2 fließt durch AC, CB und BA, und der Strom I_3 fließt durch BC, CD und DB. Solche Kreisströme erfüllen offensichtlich das 1. Kirchhoff'sche Gesetz, so dass wir nur noch das zweite berücksichtigen müssen. In den Zweigen, die zu zwei Maschen gehören, ergibt sich der tatsächliche Strom aus der algebraischen Summe der entsprechenden Kreisströme. Die in den 6 Zweigen fließenden Ströme sind also:

$$\begin{array}{lll} AB: I_1 - I_2 & BC: I_3 - I_2 & BD: I_1 - I_3 \\ DA: I_1 & AC: I_2 & CD: I_3 \end{array}$$

Das Problem ist vollständig gelöst, wenn wir die 3 Unbekannten I_1, I_2, I_3 bestimmt haben. Hierfür benötigen wir 3 lineare Gleichungen, die wir durch Anwendung des 3. Kirchhoff'schen Gesetzes auf die 3 Maschen ABC, ACB und BCD erhalten:

$$\begin{array}{ll} ABD: & 4R(I_1 - I_2) + R(I_1 - I_3) - U = 0 \\ ACB: & RI_2 + 2R(I_2 - I_3) + 4R(I_2 - I_1) = 0 \\ BCD: & 2R(I_3 - I_2) + 4RI_3 + R(I_3 - I_1) = 0 \end{array}$$

Durch Umformen erhalten wir die Gleichung

$$\begin{array}{l} 5I_1 - 4I_2 - I_3 = \frac{U}{R} \\ 4I_1 - 7I_2 + 2I_3 = 0 \\ I_1 + 2I_2 - 7I_3 = 0 \end{array}$$

Mit den Lösungen:

$$I_1 = \frac{U}{2R}; I_2 = \frac{U}{3R}; I_3 = \frac{U}{6R} .^{47}$$

⁴⁷ (Ryder, 2004) S. 77ff.

10.Grundvorstellungen

„Grundvorstellungen sind für (mathematische) Allgemeinbildung in erster Linie deshalb wichtig, weil sie unverzichtbar für das mathematische Problemlösen und für das Anwenden von Mathematik sind.“

Günther Malle

Eines der Hauptthemengebiete in der Didaktik für Mathematik sind die Grundvorstellungen. Intuitive Vorstellungen spielen hierbei eine große Rolle. Ohne jegliche Vorstellungen wäre ein Denken nicht möglich. Das Konzept wurde von Rudolf vom Hofe entwickelt. Durch vorhandene und korrekte Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler werden neue Vorstellungen erfahrbar gemacht. Das Ziel ist ein verständnisorientierter Erwerb von mathematischen Begriffen und Verfahrensweisen. Ausgegangen wird hierbei von wenigen Vorstellungen des sogenannten „Grundvorstellungen“. Schülerinnen und Schüler sollen durch den stetigen Ausbau von Grundkompetenzen in der Mathematik konkrete Vorstellungen machen können.⁴⁸

Ein wichtiges Ziel des Stochastik-Unterrichts sollte sein, Schülerinnen und Schüler zu befähigen, Situationen, in denen Stochastik angewendet werden kann, als solche zu erkennen. Üblicherweise wird dazu im Unterricht gelehrt, dass zufällige Ereignisse automatisch stochastisch modellierbare Ereignisse sind und umgekehrt. Meines Erachtens sollte den Lernenden deutlich gemacht werden, dass Stochastik als Beschreibungswerkzeug für unvorhersagbare Phänomene eingesetzt werden kann. Ob die Verwendung stochastischer Methoden in der jeweiligen Situation sinnvoll ist oder nicht, hängt vom „Erfolg“ dieser Methode ab, nicht davon, ob die Situation als zufällig charakterisiert wird oder nicht.

Günther Malle entwickelte Grundvorstellungen und Grundwissen zur Wahrscheinlichkeit, welche in der Schulbuchreihe *Mathematik verstehen* vollständig

⁴⁸ (Wikipedia:Grundvorstellungen, 2015)

eingeflossen sind. Er erläutert in einem Artikel in der Zeitschrift *mathematik lehren* diese sehr genau.

Grundvorstellung 1: Wahrscheinlichkeit als Maß für eine Erwartung

Eine Wahrscheinlichkeit ist ein Maß für eine Erwartung. Der Grad der Erwartung wird durch eine Zahl von 0 bis 1 ausgedrückt.

Grundvorstellung 2: Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil

Als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann der relative Anteil der zum Ereignis gehörenden Versuchsausfälle an allen möglichen Versuchsausfällen angenommen werden.

Grundvorstellung 3: Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit

Als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann die relative Häufigkeit des Eintretens des Ereignisses in einer Versuchsserie genommen werden.

Grundvorstellung 4: Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen

Als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses kann der Grad des subjektiven Vertrauens in das Eintreten des Ereignisses genommen werden.

Grundwissen 1: Unsicherheit einer Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeiten sind stets unsicher.

Grundwissen 2: Abhängigkeit vom Informationsstand

Wahrscheinlichkeiten hängen stets vom Informationsstand ab.

Grundwissen 3: Subjektivität einer Wahrscheinlichkeit

Objektive Wahrscheinlichkeiten gibt es möglicherweise nicht, doch bilden sie häufig nützliche Funktionen.

⁴⁹ (Malle & Malle, Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen, 2003) S.53

In diesem Zusammenhang habe ich mir 4 Schulbücher, welche in *Allgemein bildenden höheren Schulen* verwendet werden, zur Hand genommen und die Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes näher angesehen.

Folgende Bücher habe ich herangezogen:

- Malle Mathematik verstehen ⁵⁰
- Dimensionen Mathematik ⁵¹
- Thema Mathematik ⁵²
- Reichel/Götz Mathematik ⁵³

Bei bestimmten Vorgängen spielt der Zufall eine entscheidende Rolle. Wir können etwa nicht exakt vorhersagen, wie das Wetter in zwei Monaten sein wird. Zu viele Faktoren, die man zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht oder nur ungenau kennt, beeinflussen das zukünftige Wettergeschehen. Ebenso wenig lässt sich im Voraus bestimmen, welche Nummern im Lotto gezogen werden oder wie viele Schülerinnen und Schüler in einer Woche fehlen werden.

Für solche Vorgänge definieren wir:

Definition: Ein *Zufallsversuch* ist ein Vorgang, dessen Ergebnis so stark von zufälligen Faktoren abhängt, dass es nicht vorhergesagt werden kann.

Beispiele für Zufallsversuche:

1. Ein Würfel wird geworfen. Welche Augenzahl wird geworfen?
2. Man kommt zu einer ampelgeregelten Kreuzung. Was zeigt die Ampel?

Thema Mathematik 6

Abbildung 11: Thema Mathematik 6

„Bei bestimmten Vorgängen spielt der Zufall eine entscheidende Rolle. Wir können etwa nicht exakt vorhersagen, wie das Wetter in 2 Monaten sein wird. Zu viele Faktoren, die man zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht oder nur ungenau kennt, beeinflussen das zukünftige Wettergeschehen. Ebenso wenig lässt sich im

⁵⁰ (Malle, Ramharter, Ulovec, & Kandl, 2012)

⁵¹ (Bleier, Lindenberg, Lindner, & Stepancik, 2010)

⁵² (Brand, Dorfmayr, Lechner, Mistlbacher, & Nussbaumer, 2012)

⁵³ (Götz, Reichel, Müller, & Hanisch, 2010)

Voraus bestimmen, welche Nummern im Lotto gezogen werden oder wie viele Schülerinnen und Schüler in einer Woche fehlen werden.

Für solche Vorgänge definieren wir:

Ein **Zufallsversuch** ist ein Vorgang, dessen Ereignis so stark von zufälligen Faktoren abhängt, dass es nicht vorhergesagt werden kann.⁵⁴

Abbildung 12: Thema Mathematik 6

Allgemein können wir sagen:

1. $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \subseteq \Omega$
2. Unmögliches Ereignis: $P(\emptyset) = 0$
3. Sicheres Ereignis: $P(\Omega) = 1$
4. Gegenereignis: $P(A') = 1 - P(A)$

Grundvorstellung: Ein Zufallsversuch wird sehr oft durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines Ereignisses E ist dann ungefähr gleich der relativen Häufigkeit von E in der Versuchsreihe.

Reichel Mathematik 6

Abbildung 13: Reichel Mathematik 6

2. Wahrscheinlichkeit als Maß für subjektives Vertrauen intuitiv verstehen

Vielfach ist es aber nicht möglich Wahrscheinlichkeiten über Experimente zu bestimmen, weil diese zu gefährlich oder zu kostspielig sind bzw. nicht (genügend oft) wiederholt werden können. **Erläutere!** Hier nun ist Wahrscheinlichkeit ein Maß für unser subjektives Vertrauen in das Eintreten oder Nichteintreten eines bestimmten Ereignisses, wie es sich zahlenmäßig in „Wettquoten“ oder „Abstimmungsergebnissen“ von Geschworenen äußert.

„.....nun ist Wahrscheinlichkeit ein Maß für unser subjektives Vertrauen in das Eintreten oder Nichteintreten eines bestimmten Ereignisses, wie es sich zahlenmäßig in „Wettquoten“ oder „Abstimmungsergebnissen“ von Geschworenen äußert.“⁵⁵

Mathematik verstehen 6

Abbildung 14: Mathematik verstehen 6

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet man so genannte **Zufallsversuche** wie etwa das Werfen einer Münze, das Werfen eines Würfels, das Ziehen aus einer Urne, das Drehen eines Glücksrads, die zufällige Auswahl einer Person aus einer bestimmten Personengruppe und vieles andere. Bei jedem Zufallsversuch gibt es verschiedene **Versuchsausfälle** (Versuchsausgänge), wobei man jedoch im Vorhinein nicht weiß, welcher Ausfall eintreten wird. Dazu einige Beispiele:

⁵⁴ (Brand, Dorfmayr, Lechner, Mistlbacher, & Nussbaumer, 2012)

⁵⁵ (Götz, Reichel, Müller, & Hanisch, 2010)

„Bei jedem Zufallsversuch gibt es verschiedene Versuchsausfälle (Versuchsausgänge), wobei man jedoch im Vorhinein nicht weiß, welcher Ausfall eintreten wird.“

Abbildung 15: Mathematik verstehen 6

Zufällige Auswahl

Jeder Zufallsversuch kann als **zufällige Auswahl** eines Elements aus einer bestimmten Menge aufgefasst werden. Zum Beispiel entspricht der Münzwurf der zufälligen Auswahl eines Elements aus der Menge {Zahl, Kopf} oder der Wurf eines Würfels der zufälligen Auswahl einer Zahl aus der Menge {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Wichtig ist dabei, dass jedes Element der Menge die gleiche Chance hat ausgewählt zu werden. Dies ist nicht immer leicht zu erfüllen. ZB kann es bei einer Meinungsumfrage leicht passieren, dass ungewollt Personen einer bestimmten Region, eines bestimmten Alters, einer bestimmten Berufsgruppe oder eines bestimmten Geschlechts bevorzugt werden. Wenn man etwa eine Hausbefragung vormittags durchführt, wird man vorwiegend nicht berufstätige Personen antreffen. Wir vereinbaren:

Wenn nichts anderes hinzugesagt wird, verstehen wir unter einer **zufälligen Auswahl** stets eine Auswahl, bei der alle in Frage kommenden Elemente die **gleiche Chance** haben, ausgewählt zu werden. Zufällige Auswahl wird stets angenommen, solange kein Grund vorliegt, etwas anderes anzunehmen.

„Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bezeichnen wir mit $P(E)$...“⁵⁶

Eine Wahrscheinlichkeit ist ein Maß für eine Erwartung. In der Mathematik drückt man den Grad der Erwartung durch eine reelle Zahl aus dem Intervall $[0;1]$ aus.“⁵⁷

Abbildung 16: Mathematik verstehen 6

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist man bemüht, einem Ereignis E eine Wahrscheinlichkeit zuzuordnen. Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E** bezeichnen wir mit **$P(E)$** [lies: „Wahrscheinlichkeit von E “ oder „Wahrscheinlichkeit, dass E eintritt“]. Der Buchstabe P kommt vom lateinischen Wort „probabilitas“ für Wahrscheinlichkeit.

Was kann man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen?

Wenn man beispielsweise sagt: „Morgen wird es wahrscheinlich regnen“, drückt man eine gewisse **Erwartung** aus. Den Grad dieser Erwartung kann man noch deutlicher ausdrücken, indem man sagt: „Morgen wird es sehr wahrscheinlich regnen“ oder „Morgen wird es mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit regnen“. In der Mathematik geht man noch einen Schritt weiter und drückt den Grad der Erwartung durch eine reelle Zahl aus dem Intervall $[0;1]$ aus. Dabei steht 0 für die geringste und 1 für die höchste Erwartung.

Eine **Wahrscheinlichkeit** ist ein **Maß für eine Erwartung**. In der Mathematik drückt man den Grad der Erwartung durch eine reelle Zahl aus dem Intervall $[0;1]$ aus.

Wie kann man konkret zu einem Zahlenwert kommen, der sich als Maß für eine Erwartung eignet?

Im Wesentlichen gibt es dafür drei Methoden, die wir im Folgenden darstellen:

⁵⁶ (Malle, Ramharter, Ulovec, & Kandl, 2012)

⁵⁷ (Malle, Ramharter, Ulovec, & Kandl, 2012)

„Ein Zufallsversuch ist ein Experiment mit mehreren möglichen Ausgängen. Den Ausgang eines solchen Zufallsversuches kann man vor seiner Durchführung nicht vorhersagen.“⁵⁸

Abbildung 18: Dimensionen Mathematik 6

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Das Wort *Stochastik* stammt aus dem Griechischen und bedeutet *Kunst des geschickten Vermutens* oder *Kunst des Mutmaßens*. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik) beschäftigt sich damit, wie mithilfe der Mathematik *geschickt vermutet* oder *gemutmaß*t werden kann.

1 Zufallsversuche

Bei Glücksspielen, wie zum Beispiel *Mensch ärgere dich nicht*, kann nicht vorhergesagt werden, wer gewinnt, weil der Spielausgang vom Zufall oder vom Glück abhängt. Schon der berühmte italienische Abenteurer **Giacomo Casanova** (1725–1798) interessierte sich für Fragen rund um das Glücksspiel. Aus Beobachtungen und Fragestellungen in Zusammenhang mit derartigen Spielen entwickelte sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Du erwirbst folgende Grundkompetenzen:

- Grundraum und Ereignisse in angemessenen Situationen verbal bzw. formal angeben
- Die Begriffe „Zufallsversuch“ und „Ereignis“ kennen; wissen, dass Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden können
- Sichere und unmögliche Ereignisse sowie Gegenereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten angeben



Definition

Ein **Zufallsversuch** ist ein Experiment mit mehreren möglichen Ausgängen. Den Ausgang eines solchen Zufallsversuches kann man vor seiner Durchführung nicht vorhersagen.

Die **Ergebnismenge** umfasst alle möglichen Versuchsausgänge (Ergebnisse) und wird mit Ω bezeichnet.

Ein **Ereignis** ist eine gewisse Teilmenge von Ω . Interessant ist vor allem jenes Ereignis, das die für die Fragestellung günstigen **Versuchsausgänge** enthält.

„Das Maß für die Erwartung, mit der ein Ereignis eintritt, wird als **Wahrscheinlichkeit** bezeichnet und durch eine Zahl von 0 bis 1 beschrieben.“⁵⁹

In der Schule braucht der Wahrscheinlichkeitsbegriff gar nicht allzu genau definiert werden, es ist viel wichtiger, dass zugehörige Grundvorstellungen etabliert werden:

- Zusammenhang mit relativen Häufigkeiten in einer langen Versuchsserie
- Subjektive Wahrscheinlichkeiten
- Wahrscheinlichkeiten als relative Anteile (z.B.: La Place'scher Wahrscheinlichkeitsbegriff)

⁵⁸ (Bleier, Lindenberg, Lindner, & Stepancik, 2010)

⁵⁹ (Bleier, Lindenberg, Lindner, & Stepancik, 2010)

11. Empirische Untersuchung

Um herauszufinden wie Schülerinnen und Schüler den Wahrscheinlichkeitsbegriff sehen, habe ich einen Fragebogen entwickelt. Ich habe mir sechs Fragen dazu ausgedacht, bei denen ich der Meinung bin, dass sie Schülerinnen und Schülern der 6. bis 8. Klasse lösen können sollten. Mein Hauptaugenmerk liegt dabei bei den sinngemäß richtigen Definitionen von Wahrscheinlichkeit und Zufall.

Ich möchte mit dieser empirischen Untersuchung herausfinden, ob Schülerinnen und Schüler mit dem Themengebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung vertraut sind, die Grundvorstellung beherrschen und ob sie einfache Probleme lösen können.

Hypothese: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird als unnütz/ nicht notwendig wahrgenommen und daher tun sich Schülerinnen und Schüler schwer diese Thematik zu erlernen.

Mit dem folgenden Fragebogen will ich diese Hypothese belegen oder widerlegen.

11.1. Elternbrief

Sehr geehrte Eltern,

ich bin Studentin an der Universität Wien. Im Sommer werde ich mein Studium mit einer Diplomarbeit in diesem Fach abschließen. In meiner Diplomarbeit wird es einen Forschungsteil geben. Dazu habe ich die Gelegenheit bekommen, Schülerinnen und Schüler zum Thema „Wahrscheinlichkeitsbegriff – Wie sehen Schülerinnen und Schüler diesen Begriff?“ zu befragen. In den nächsten Tagen soll in der Klasse, die ihr Kind besucht, die Befragung durchgeführt werden. Diese Befragung bezweckt die Erhebung wissenschaftlicher Daten für meine Diplomarbeit. Der Fragebogen wird anonym auszufüllen sein und die erhobenen Daten nur zur Forschung für meine Arbeit verwendet.

Ich bitte Sie, den unten angefügten Abschnitt auszufüllen und dem Klassenvorstand zukommen zu lassen.

Vielen Dank für Ihre Mithilfe!

Lena Fenz

Ich bestätige, dass mein Kind _____ an der Befragung teilnehmen darf:

☐ ja

☐ nein

Datum, Unterschrift des/der Erziehungsberechtigten:

11.2. Fragebogen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff

1. Warum lernst du mit Wahrscheinlichkeiten zu rechnen? Brauchst du diese in deinem späteren Leben?

2. Kannst du dir eine Welt ohne Wahrscheinlichkeit vorstellen? Wenn ja/nein, warum?

3. Welche Aussage(n) hat/haben mit Wahrscheinlichkeit zu tun?

- ☐ Gestern hat es geschneit.
- ☐ Morgen wird es regnen.
- ☐ In 2 Stunden geht die Sonne unter.

4. Was verstehst du unter dem Begriff „Zufall“?

5. In deine Klasse gehen 30 Schülerinnen und Schüler. Jeder hat einen Würfel und würfelt genau einmal. Wie viele 6er werden erwartet?

6. Löse folgendes Problem:

Von drei elektrischen Geräten G_1 , G_2 , G_3 fällt jedes mit der Wahrscheinlichkeit 0,05 aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Stromkreis unterbrochen, wenn die Geräte **a)** in Reihe wie in Abb. 14.3 a, **b)** parallel wie in Abb. 14.3 b, **c)** wie in Abb. 14.3 c, **d)** wie in Abb. 14.3 d geschaltet sind?

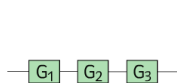


Abb. 14.3 a

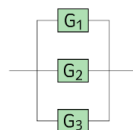


Abb. 14.3 b

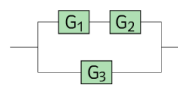


Abb. 14.3 c

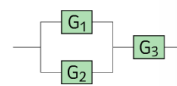


Abb. 14.3 d

Quelle: Mathematik verstehen 6, Malle

Vielen Dank für deine Mitarbeit

Neben den einschlägigen Berufen, wie Wahlanalyst, Statistiker und Mathematiker, wo der Einsatz und die Notwendigkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung offensichtlich benötigt werden, findet die Wahrscheinlichkeitsrechnung im täglichen Leben jedes Einzelnen statt.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann in vielen Lebenssituationen zumindest eine Entscheidungshilfe sein. Dies reicht von Gesellschaftsspielen (z.B.: Kartenspiele oder Würfelspiele) bis zur Bestimmung eines Firmenstandortes (z.B.: erwartetes Einkaufsverhalten anhand des soziologischen Umfeldes)

Für mich war es nun interessant zu wissen, ob Schülerinnen und Schüler nur die Methode der Berechnung lernen oder auch ihre Anwendung. Somit formulierte ich die erste und zweite Frage.

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff ist als Maß für die Erwartung definiert. Dies wird oft mit dem Beispiel „Morgen wird es wahrscheinlich regnen“ verbunden.

Der Begriff Zufall wird im üblichen Sprachgebrauch anders definiert als in der Mathematik. In der Mathematik spricht man genau dann von Zufall, wenn alle möglichen Versuchsausgänge mit der Wahrscheinlichkeit auftreten.

Die fünfte Frage ist eine relativ einfache Frage, welche man natürlich mathematisch, aber auch mit dem „Hausverstand“, lösen kann. Diese Frage deckt eine Grundkompetenz der Wahrscheinlichkeitsrechnung ab.

Mit der letzten Frage wollte ich die Grundkompetenz WS 2.3. „Wahrscheinlichkeit unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, Additionsregel und Multiplikationsregel anwenden und interpretieren können.“⁶⁰ überprüfen. Weiter habe ich aus eigener Erfahrung (Schule und Nachhilfeunterricht) festgestellt, dass derartige Aufgabenstellungen große Schwierigkeiten machen.

Um ein aussagekräftiges Ergebnis zu erzielen, habe ich 268 Schülerinnen und Schüler der sechsten, siebten und achten Klasse befragt.

⁶⁰ https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_2013-03-11.pdf

11.3. Durchführung der Befragung

Um meinen Fragebogen an Schülerinnen und Schüler durchführen zu können, musste ich mir eine Genehmigung vom Landesschulrat für das Burgenland einholen.

Ich vereinbarte mit Herrn Dir. Gottfried Wurm vom *Wimmergymnasium* in Oberschützen und mit Frau Dir. Ingrid Weltler-Müller vom *BG/BRG/BORG Oberschützen Tage*, an denen ich meinen Fragebogen durchführen könnte. Die Kommunikation mit den jeweiligen Standorten folgte weitgehend über Telefon und Mail.

Die Befragung war freiwillig und es wurde darauf geachtet, die Anonymität der Schüler zu bewahren, um möglichst ehrliche Antworten zu erhalten.

Ich vereinbarte mit den Direktoren, dass alle Schülerinnen und Schüler einen Informationszettel (Elternbrief) über meine empirische Untersuchung bekommen würden.

Da die Schülerinnen und Schüler der achten Klassen beider Schulen kurz vor der schriftlichen Matura standen, befragte ich sie früher. Aufgrund der Volljährigkeit, war dies auch kein Problem. Somit konnte ich in den letzten Apriltagen alle Maturanten erfolgreich befragen.

Nach einer kurzen Vorstellung meiner Person und meiner Arbeit, teilte ich ihnen den Fragebogen aus. Dies verlief reibungslos und so konnte ich die Befragung nach ca. 20 Minuten abschließen

Alle anderen Schülerinnen und Schüler befragte ich nachdem ihre Eltern oder Erziehungsberechtigten informiert waren.

Herr Wurm organisierte meine Befragung in den sechsten und siebten Klassen sehr gut. Nach Absprache mit jedem Klassenlehrer musste ich meinen Fragebogen nur mehr austeilten und konnte sie danach gleich ausgefüllt wieder mitnehmen.

Frau Weltler-Müller und das Sekretariat dem BG/BRG/BORG Oberschützen half mit bei der Organisation der Fragebogen. Ich musste lediglich meine Fragebögen und die Elternbriefe in die Schule bringen. Die Erhebungen wurden von Lehrkräften vor, nach

oder während dem Unterricht durchgeführt. Ein paar Tage später konnte ich alle ausgefüllten Unterlagen wieder mitnehmen.

11.4. Auswertungsverfahren

Mit den gewählten Fragen erwartete ich mir folgende Erkenntnisse:

- Hat es der Lehrer geschafft, die Sinnhaftigkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu vermitteln bzw. haben die Kinder die Sinnhaftigkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung begriffen. (Frage 1 und 2)
- Können Schülerinnen und Schüler mit den Begrifflichkeiten „Wahrscheinlichkeit“ und „Zufall“ im mathematischen Sinn umgehen.
- Besitzen Schülerinnen und Schüler Grundkompetenzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Frage 5 und 6). Von der Gesamtbetrachtung meiner empirischen Untersuchung ist mir dies der wichtigste Punkt. Aus diesem Grund konnten mit der Frage 6 die meisten Punkte erreicht werden.

Ob Grundvorstellungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung vorhanden sind, wird mit der Frage 3 ermittelt. Da Grundkompetenzen Voraussetzungen für das Verstehen und Erarbeiten der Aufgaben sind, wurde bei diesen Fragen bei falschen Antworten auch negative Punkte vergeben.

Prozentgewichtung der Fragen anhand der maximal erreichbaren Punkteanzahl:

Frage	Gewichtung
1	16,13
2	9,68
3	9,68
4	16,13
5	9,68
6	38,71

100

Ich überlegte lange, welches Verfahren ich für meine Auswertung anwenden sollte. Letztendlich entschloss ich mich dazu, dass ein Punktesystem am sinnvollsten ist.

Bei der ersten Frage „Warum lernst du mit Wahrscheinlichkeiten zu rechnen? Brauchst du diese in deinem späteren Leben?“ vergab ich für eine sinnvolle Antwort 5 Punkte. Für eine falsche Antwort oder keine Antwort vergab ich 0 Punkte. Antworten wie: „Das lerne ich für die Matura“ wertete ich als falsch, da meiner Meinung nach der Verfasser nicht weiß, wofür er die Wahrscheinlichkeitsrechnung braucht.

Bei der zweiten Frage „Kannst du dir eine Welt ohne Wahrscheinlichkeit vorstellen? Wenn ja/nein, warum?“ Vergab ich für die Antwort *Nein* 3 Punkte. Für eine positive Antwort vergab ich 0 Punkte.

Die dritte Frage „Welche Aussage(n) hat/haben mit Wahrscheinlichkeit zu tun?“

- ☐ Gestern hat es geschneit.
- ☐ Morgen wird es regnen.
- ☐ In 2 Stunden geht die Sonne unter.

Bewertete ich mit 3 Punkten, falls die richtige Antwort angekreuzt wurde. Falls eine oder zwei falsche Antworten angekreuzt wurden, zog ich je 2 Punkte ab.

Auf die vierte Frage „Was verstehst du unter dem Begriff „Zufall“?“ gab es 5 Punkte bei einer sinnvollen Antwort. Für eine falsche oder keine Antwort vergab ich 0 Punkte. Den ersten Begriff, welchen man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung lernt ist „Zufall“. Immer wieder wird in Schulbüchern von „Zufallsexperiment“ oder „Zufallsversuch“ gesprochen.

Da die fünfte Frage „In deine Klasse gehen 30 Schülerinnen und Schüler. Jeder hat einen Würfel und würfelt genau einmal. Wie viele 6er werden erwartet?“ ein Beispiel aus dem Katalog der Grundkompetenzen ist, vergab ich für eine richtige Antwort 3 Punkte. Bei einer falschen Antwort wurden aber 5 Punkte abgezogen.

Von drei elektrischen Geräten G_1, G_2, G_3 fällt jedes mit der Wahrscheinlichkeit 0,05 aus.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Stromkreis unterbrochen, wenn die Geräte **a)** in Reihe wie in Abb. 14.3 a, **b)** parallel wie in Abb. 14.3 b, **c)** wie in Abb. 14.3 c, **d)** wie in Abb. 14.3 d geschaltet sind?

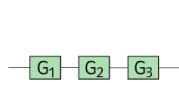


Abb. 14.3 a

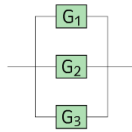


Abb. 14.3 b

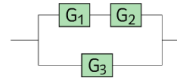


Abb. 14.3 c

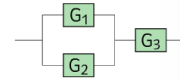


Abb. 14.3 d

Quelle: Mathematik verstehen 6, Malle

Das Problem bei Frage 6 wertete ich folgendermaßen: für eine richtige Teilaufgabe (a, b, c oder d) bekommt man je 3 Punkte. Konnten die Schülerinnen und Schüler keine Aufgabe richtig lösen, vergab ich 0 Punkte.

Aus diesem Grund konnte man bei richtiger Beantwortung aller Fragen 31 Punkte erreichen.

11.5. Analyse

Im folgenden Abschnitt werden die Daten wiedergegeben.

An der Befragung nahmen insgesamt 268 Schülerinnen und Schüler der sechsten, siebten und achten Klasse teil. Der Anteil der männlichen und weiblichen Teilnehmerinnen und Teilnehmer verhielt sich fast 1:1.

Bei der Analyse der Daten habe ich jede einzelne Frage genau unter die Lupe genommen und ausgewertet.

In einem anschließenden Kapitel habe ich alle erreichten Punkte in einer Tabelle aufgelistet.

11.5.1. Auswertung der ersten Frage

Zur Frage, warum Schülerinnen und Schüler mit Wahrscheinlichkeiten zu arbeiten lernen, kamen folgende gute Antworten.

„Produktion eines Produkts durch Nachfrage (Wie wahrscheinlich es ist, dass Kunden das Produkt kaufen) Gewinnausschüttung (Lotto)“

„Ja ich glaube schon, weil man im Leben öfters Entscheidungen treffen muss und es bestimmt sinnvoll ist, wenigstens zu wissen wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist das ein bestimmtes eintritt“

„Für Statistiken sind Wahrscheinlichkeiten wichtig. Anhand einer bestimmten Anzahl von Befragten, kann man auf ein weitgehendes Ergebnis schließen.“

„Um strategisch vorgehen zu können. Man lernt nie aus im Leben.“

„Mein Leben ist nicht auf jede Minute genau geplant, deshalb muss ich verschiedene Möglichkeiten in Betracht ziehen, die auf mich zukommen können. Dadurch hat mein Leben Individualität und es hat immer „Überraschungen“ für mich bereit.“

Die folgenden Antworten sind meiner Meinung nach sehr originell und lustig. In manchen Situationen musste ich beim Lesen lachen.

„Um mir das Leben auszuschnücken, ja geht aber mit Sicherheit auch ohne.“

„Derweil sehe ich keinen praktischen Nutzen dahinter, aber vielleicht macht das im Nachhinein doch noch Sinn“

„Da haben wir schon unnötigeres Gelernt, als Wahrscheinlichkeiten. Ja, ich glaube schon“

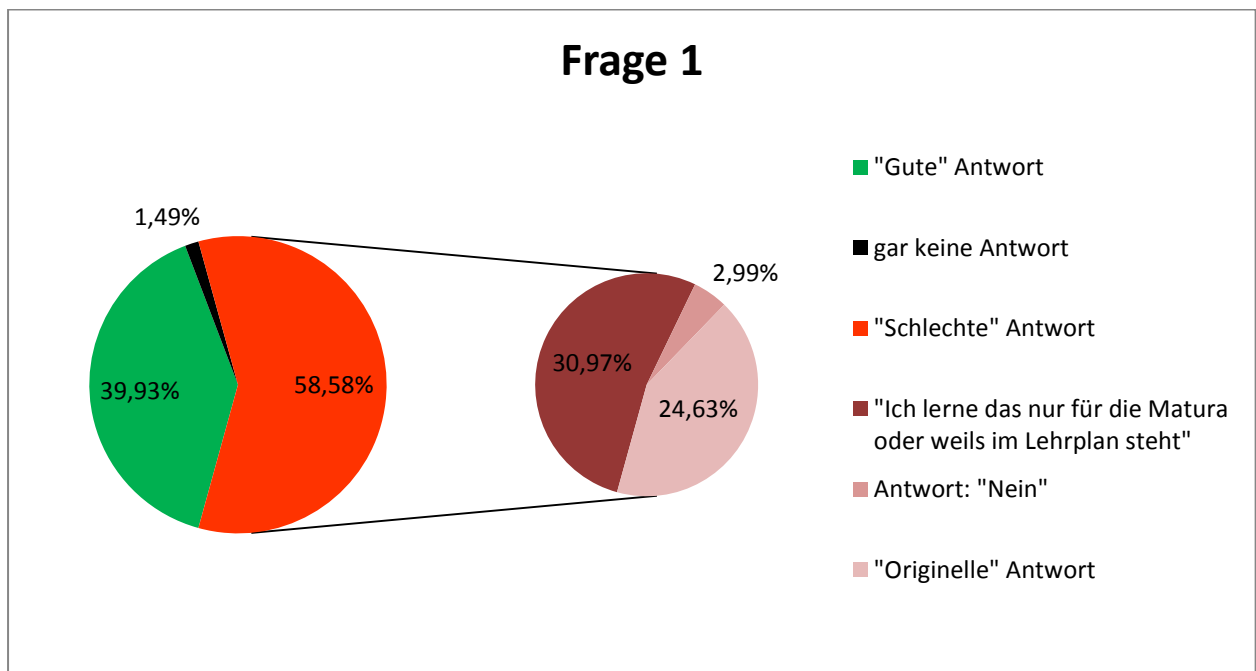
„Möglicherweise. Es ist sicher mehr nützlich als andere Themen in Mathe. Man braucht das sicher für den Hausverstand“

„Weil die Schule das logische Denken testet?“

„Ja. Beispielsweise in Führungspositionen von Unternehmen.“

*„Um als gebildet zu gelten sollten Wahrscheinlichkeiten verstanden werden.
Kommt ganz auf den Beruf bzw Interessen an. Ja z.B. bei Sportwetten,Lotto“*

Die Wahrscheinlichkeit ist öfters hoch oder nieder, das heißt man hat Glück oder Pech. Und Glück braucht jeder einmal.“



Eine „gute“ Antwort konnten mir 107 Schülerinnen und Schüler liefern. Bei diesen Antworten hatte ich das Gefühl, dass sie verstanden hätten, worauf es bei dieser Frage ankommt.

4 Schülerinnen und Schüler konnten oder wollten diese Frage nicht beantworten.

157 der Antworten fasste ich unter dem Titel „schlechte“ Antworten zusammen. Wie man in der Grafik oben erkennen kann, unterteilten sich diese in drei Kategorien.

Man kann erkennen, dass fast 31% der befragten Schülerinnen und Schüler, das sind 83 Jugendliche, der Meinung sind, dass sie die Wahrscheinlichkeitsrechnung ausschließlich für die Matura lernen. 3% beantworteten die Frage mit einem einfachen *Nein*.

11.5.2. Auswertung der zweiten Frage

Beim Auswerten der zweiten Frage „Kannst du dir eine Welt ohne Wahrscheinlichkeit vorstellen?“ gefielen mir zwei Antworten besonders gut:

„Nein, denn die ganze Welt ist auf dem Zufallsprinzip aufgebaut („Schmetterlingsprinzip“)"

„Wir treffen überall auf Wahrscheinlichkeiten, egal ob beim Wetter oder in der Lotterie. Sie ermöglichen uns das vorausschauende Denken & lassen uns verschiedene Möglichkeiten betrachten“.

Bei den folgenden Antworten, ist zu sehen wie einfallsreich manche Schülerinnen und Schüler diese Frage beantwortet haben:

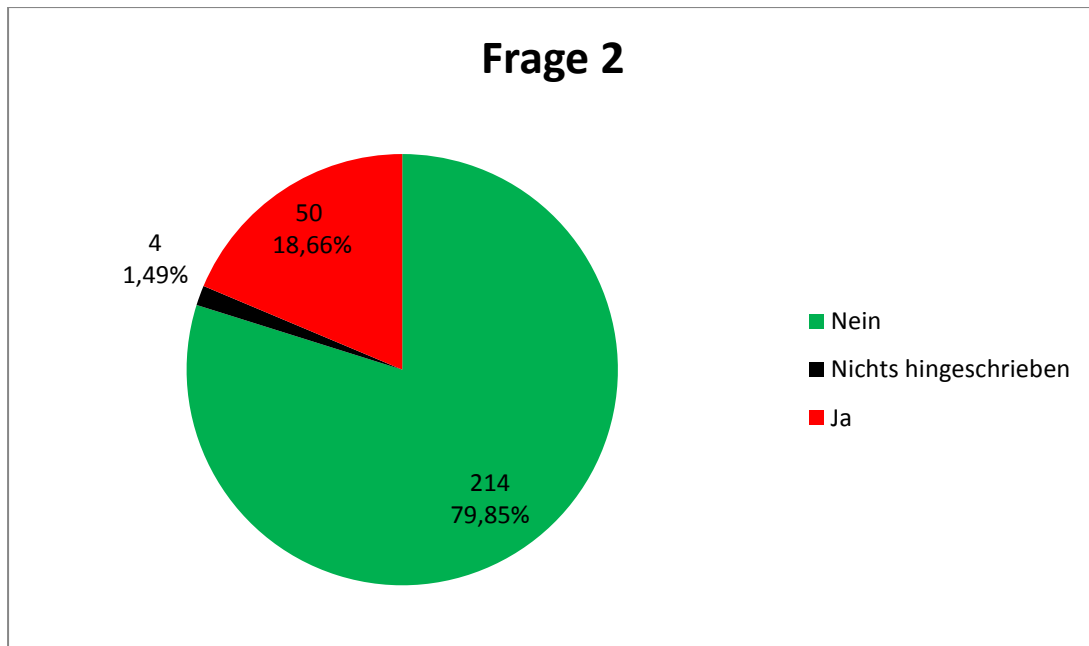
„Ja, wenn Mensch dumm wäre.“

„Ja, kann ich, weil Wahrscheinlichkeit eigentlich nur da ist, um Zeit zu sparen.“

„Nein, weil sonst der Lehrplan wesentlich kürzer wäre.“

„Eigentlich nicht, ohne Wahrscheinlichkeit wäre das Leben irgendwie langweilig.“

„Nein, weil ich Sportwetten abschlieÙe.“

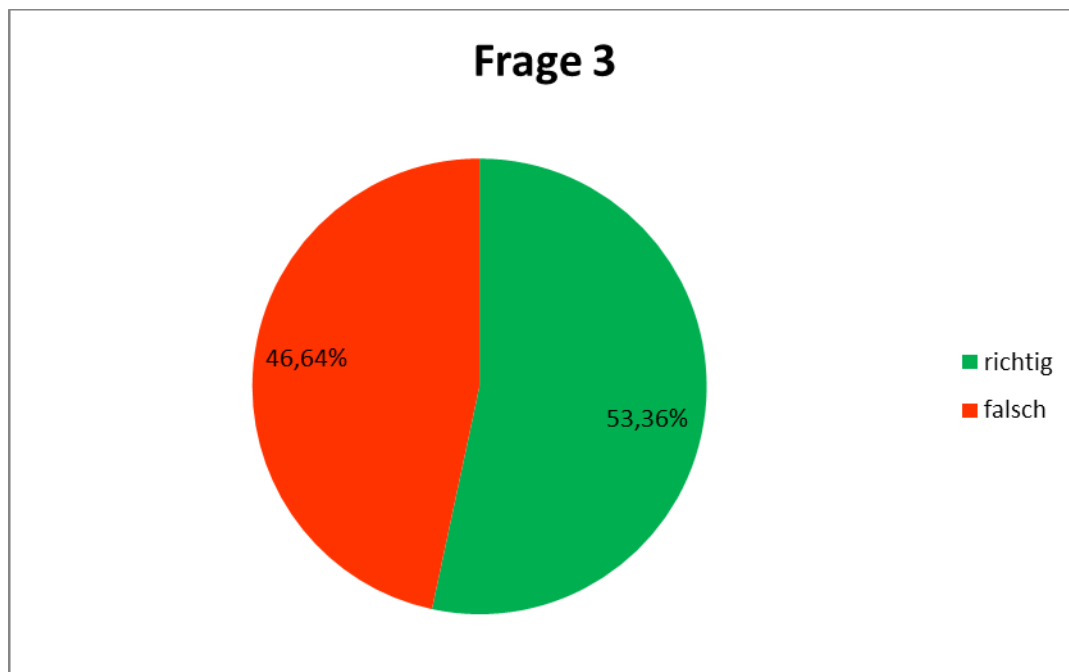


214 Schülerinnen und Schüler können sich eine Welt ohne Wahrscheinlichkeit nicht vorstellen. Das sind knapp 80 Prozent der befragten Jugendlichen. Im Gegensatz dazu, konnten sich 50 Schülerinnen und Schüler eine Welt ohne Wahrscheinlichkeit vorstellen. Viele von ihnen sind der Meinung, dass dieses Themengebiet unnötig sei.

11.5.3. Auswertung der dritten Frage

Die dritte Frage wurde folgendermaßen beantwortet:	Anzahl der Fragebögen
3. Welche Aussage(n) hat/haben mit Wahrscheinlichkeit zu tun?	142
☐ Gestern hat es geschneit.	
☒ Morgen wird es regnen.	
☐ In 2 Stunden geht die Sonne unter.	
3. Welche Aussage(n) hat/haben mit Wahrscheinlichkeit zu tun?	4
☒ Gestern hat es geschneit.	
☒ Morgen wird es regnen.	
☐ In 2 Stunden geht die Sonne unter.	
3. Welche Aussage(n) hat/haben mit Wahrscheinlichkeit zu tun?	118
☐ Gestern hat es geschneit.	
☒ Morgen wird es regnen.	
☒ In 2 Stunden geht die Sonne unter.	
3. Welche Aussage(n) hat/haben mit Wahrscheinlichkeit zu tun?	3
☒ Gestern hat es geschneit.	
☒ Morgen wird es regnen.	
☒ In 2 Stunden geht die Sonne unter.	
3. Welche Aussage(n) hat/haben mit Wahrscheinlichkeit zu tun?	1
☐ Gestern hat es geschneit.	
☐ Morgen wird es regnen.	
☒ In 2 Stunden geht die Sonne unter.	

Die dritte Frage wurde lediglich von 143 Schülerinnen und Schülern richtig angekreuzt.
122 kreuzten die richtige und eine falsche Antwort an.



11.5.4. Auswertung der vierten Frage

Diese Frage stellte mich vor ein paar Herausforderungen. Auf der einen Seite bekam ich gute Antworten von den Schülerinnen und Schülern, auf der anderen Seite war es schwer zu beurteilen, ob sie meine Frage verstanden hatten und mir folglich eine mathematisch richtige Definition liefern können.

Besonders gut gefielen mir folgenden Aussagen:

„-> ein Versuch der unter gleichen Bedingungen durchgeführt wird (Zufallsversuch)“

„Glück oder Pech!/Wenn unerwartete Dinge geschehen.“

Ich merkte beim Lesen der Antworten, dass es für sehr viele schwierig war, eine geeignete mathematische Definition zu schreiben.

Bei der Auswahl der folgenden Antworten, war ich mir sicher, dass der Autor die Frage (im mathematischen Sinne) nicht verstanden hat.

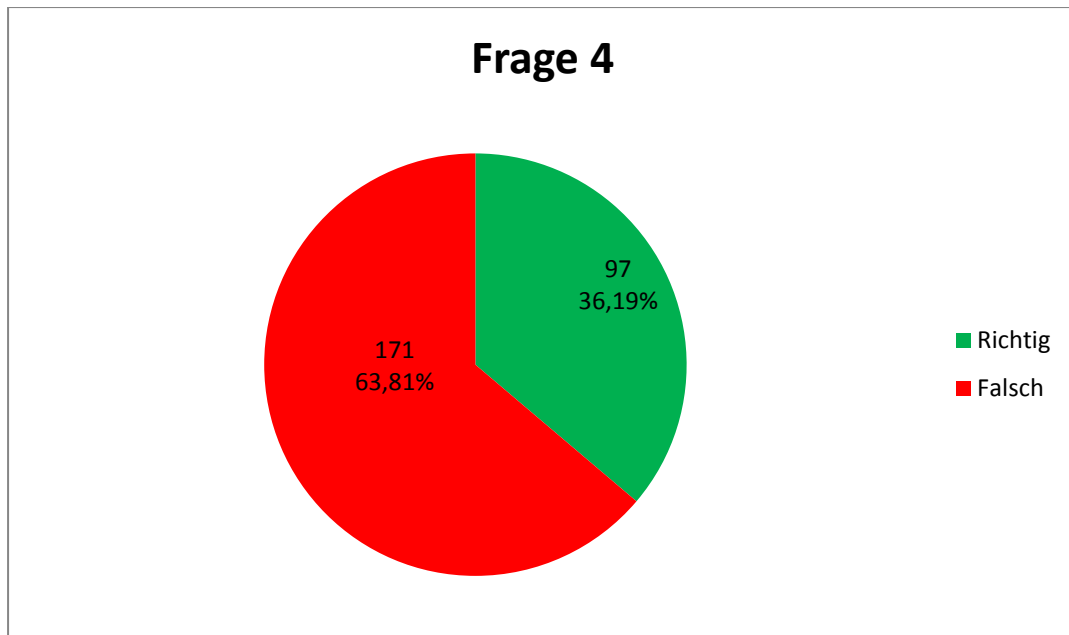
„Wenn etwas eintritt, mit dem du nie gerechnet hättest. z.B. du schwänzt die Schule und gehst auf einer Straße, auf der du nie gehst und dann triffst du dort ausgerechnet deine Eltern, die aber auch noch nie auf dieser Straße waren.“

„Ein geglückter Torschuss, obwohl die Wahrscheinlichkeit sehr gering ist.“

„Zufall gibt es meiner Meinung nach nicht es gibt nur das Schicksal“

„Man kann sagen, dass es sich hierbei um ein unerwartetes Ereignis handelt. Ich persönlich stelle mir in diesem Zusammenhang immer die Frage, ob es überhaupt Zufälle geben kann, oder ob jedes Ereignis bereits geplant und vorhergesehen war.“

„ein Faktor, über den keine Vorhersagen oder Planungen gemacht werden können und das Fundament kryptographischer Sicherheit bildet.“



171 Schülerinnen und Schüler beantworteten die vierte Frage nicht richtig. Sie konnten keine mathematische Definition wiedergeben.

Bei über 36% der ausgewerteten Fragebögen, war ich der Meinung, dass der Verfasser verstanden hat, was man unter dem Begriff „Zufall“ versteht.

11.5.5. Auswertung der fünften Frage

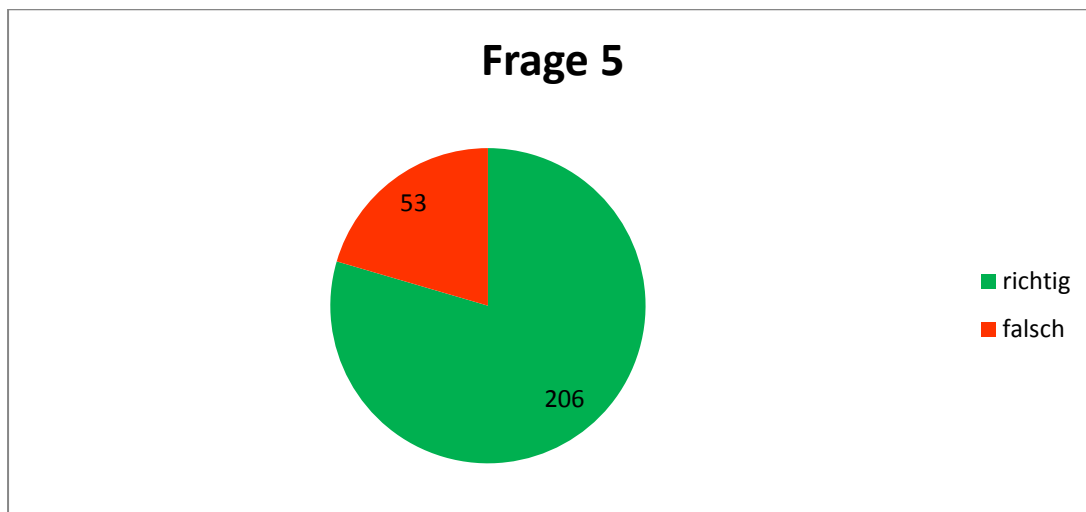
Wie schon oben erwähnt, legte ich auf diese Frage besonders viel Wert. Ich bin der Meinung, dass alle Schülerinnen und Schüler ab dem Zeitpunkt der Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung diese Aufgabenstellung beherrschen müssen.

Diese Aufgabe zählt zu den Grundkompetenzen im Stochastikunterricht.

Leider kann man in der Auswertung meiner Befragung erkennen, dass diese Aufgabe 53 Schülerinnen und Schüler nicht richtig beantworten konnten.

Die theoretischen Maximalpunkte, die alle Jugendlichen bei dieser Aufgabe erreichen konnten, waren 804. Lediglich 313 Punkte wurden erreicht. Das sind knapp 39% der zu erreichenden Punkte.

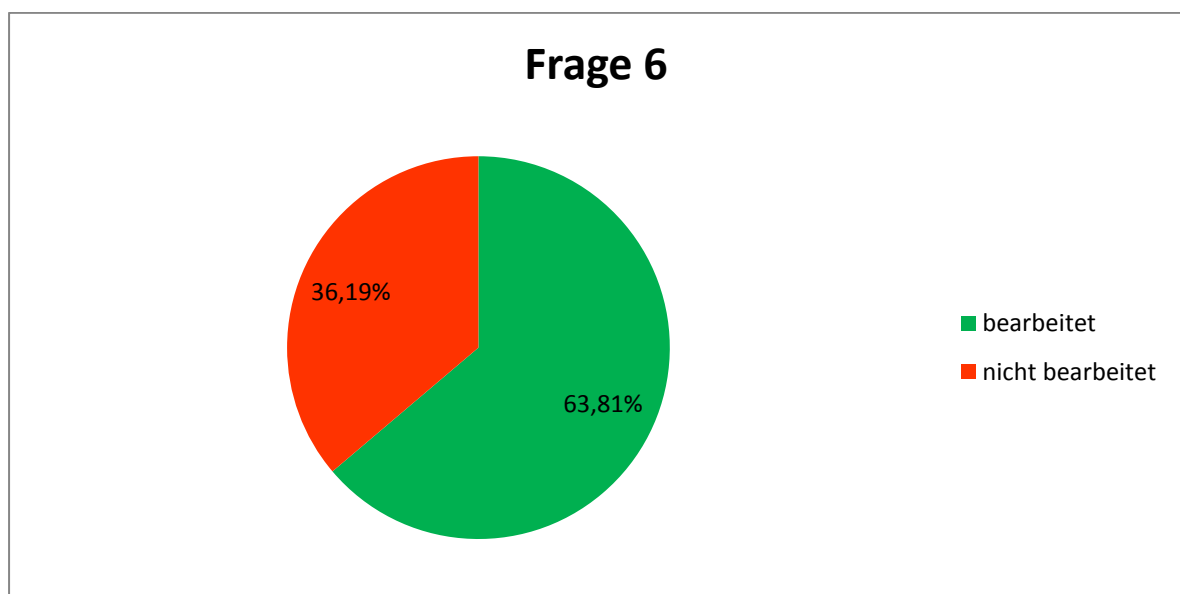
Knapp 80% konnten diese Frage richtig beantworten.



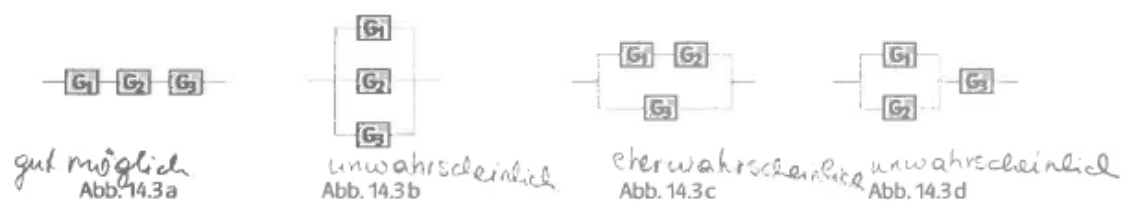
11.5.6. Auswertung der sechsten Frage

Bei der sechsten Frage konnten alle Kinder gemeinsam 3216 Punkte erreichen. Leider erreichten sie nur 135 Punkte.

63,81% der befragten Schülerinnen und Schüler haben diese Aufgaben „versucht“ zu lösen. Der Rest (97 Kinder) bearbeiteten diese Frage nicht einmal.



Auf den folgenden 2 Bildern kann man erkennen, wie weit die Antworten auseinander liegen.





a) $1 - P(\text{alle fkt.}) = 1 - 0,95^3 = 1 - 0,857375 = 0,142625$

Quelle: Mathematik verstehen 6, Malle

b) $0,05^3$

Vielen Dank für deine Mitarbeit

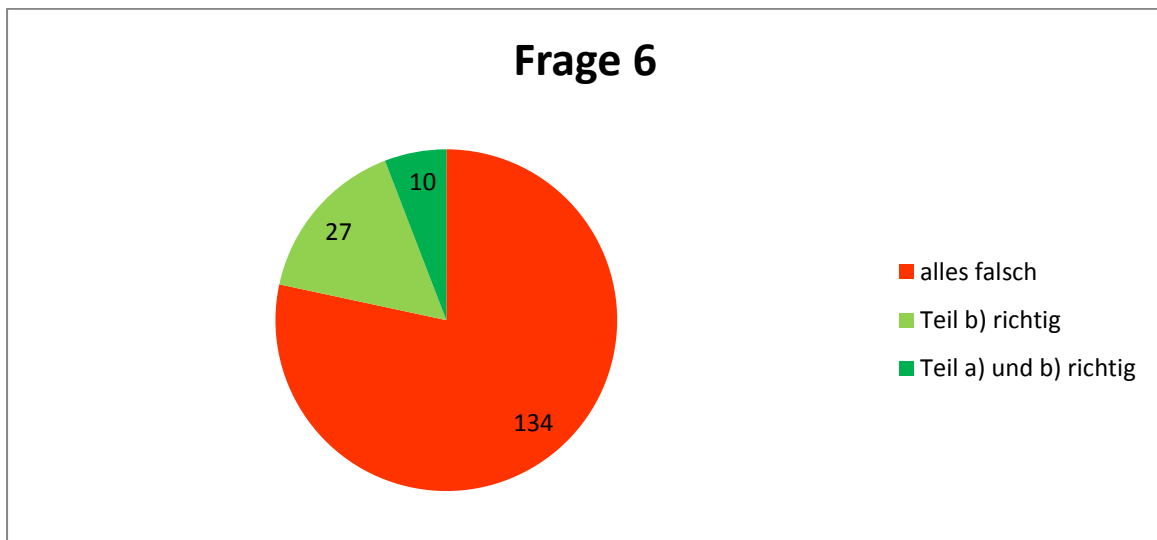
c) $(1 - 0,95^2) + 0,05$

d) $0,05^2 + 0,05$

134 Schülerinnen und Schüler lösten alle Teilaufgaben der letzten Frage falsch. Hin und wieder waren gute Ansätze erkennbar.

37 der befragten Jugendlichen konnten einen Teil der Aufgaben lösen.

10 von ihnen konnten den Teil a) und b) richtig ausrechnen. 27 bewiesen, dass sie den Teil b) richtig rechnen konnten.



Als richtig gewertet habe ich folgende Möglichkeiten:

$$\text{Teil a) : } P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) = 1 - P(x = 0) = 0,142625$$

$$\text{Teil b) : } P(x = 3) = 0,05^3 = 0,000125$$

$$\text{Teil c) : } (0,05^2 * 0,95) * 2 + 0,05^3 = 0,004875$$

$$\text{Teil d) : } (0,05^2 * 0,95) + 0,05 = 0,052375$$

11.5.7. Die Punktzahl aller Fragebögen nach aufsteigender Reihenfolge

1. Frage	2. Frage	3. Frage	4. Frage	5. Frage	6. Frage	Summe
0	0	1	0	-5	0	-4
0	0	1	0	-5	0	-4
0	0	1	0	-5	0	-4
0	0	1	0	-5	0	-4
0	0	1	0	-5	0	-4
0	0	1	0	-5	0	-4
0	3	-1	0	-5	0	-3
0	3	1	0	-5	0	-1
0	3	1	0	-5	0	-1
0	3	1	0	-5	0	-1
0	3	1	0	-5	0	-1
0	3	1	0	-5	0	-1
0	3	1	0	-5	0	-1
0	3	1	0	-5	0	-1
0	3	1	0	-5	0	-1
0	3	3	0	-5	0	1
0	3	3	0	-5	0	1
0	3	3	0	-5	0	1
0	3	3	0	-5	0	1
0	3	3	0	-5	0	1
0	3	3	0	-5	0	1
0	0	1	5	-5	0	1
0	0	1	5	-5	0	1
3	3	1	0	-5	0	2
0	3	1	0	-5	3	2
5	0	3	0	-5	0	3
5	0	3	0	-5	0	3
0	0	3	5	-5	0	3
0	0	3	5	-5	0	3
0	0	3	5	-5	0	3
0	0	3	5	-5	0	3
0	0	3	5	-5	0	3
0	0	1	0	3	0	4
0	0	1	0	3	0	4
0	0	1	0	3	0	4
0	0	1	0	3	0	4
5	3	1	0	-5	0	4

5	3	1	0	3	0	12
5	3	1	0	3	0	12
5	3	1	0	3	0	12
5	3	1	0	3	0	12
5	3	1	0	3	0	12
5	3	1	0	3	0	12
0	3	1	5	3	0	12
0	3	1	5	3	0	12
0	3	1	5	3	0	12
0	3	1	5	3	0	12
0	3	1	5	3	0	12
0	3	1	5	3	0	12
0	3	1	5	3	0	12
0	3	1	5	3	0	12
0	3	1	5	3	0	12
0	3	1	5	3	0	12
0	3	1	5	3	0	12
0	3	1	5	3	0	12
0	3	1	5	3	0	12
0	3	3	0	3	3	12
5	0	1	0	3	3	12
0	0	3	0	3	6	12
5	3	-1	0	3	3	13
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	3	3	0	3	0	14
5	0	1	5	3	0	14
0	3	3	5	3	0	14

5	3	3	5	3	0	19
5	3	3	5	3	0	19
5	3	1	5	3	3	20
5	3	1	5	3	3	20
5	3	3	0	3	6	20
0	3	3	5	3	6	20
0	3	3	5	3	6	20
0	3	3	5	3	6	20
5	3	3	5	3	3	22
5	3	3	5	3	6	25

11.6. Schlussfolgerungen

Schlussfolgerung 1: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird von Schülerinnen und Schülern als nicht notwendig empfunden!

Man konnte an den Antworten erkennen, dass sehr viele Schülerinnen und Schüler der Meinung sind, dass sie die Wahrscheinlichkeitsrechnung ausschließlich für die Matura lernen.

Knapp 60% lieferten mir eine schlechte oder falsche Antwort. Praxisbeispiele oder Anwendungsbeispiele suchte man leider vergeblich in den Antworten. Hin und wieder waren gute Ansätze erkennbar, aber niemand konnte ein konkretes Beispiel nennen, für die man die Wahrscheinlichkeitsrechnung tatsächlich braucht.

In den Schulbüchern wird dieser Teil der Mathematik oft nur mit Würfelbeispielen oder Kugelproblemen erklärt. Erst viel später werden dezidierte Anwenderbeispiele eingeführt.

Aufgaben wie in der Frage 6 im Fragebogen sucht man in Schulbüchern vergebens, lediglich in einem der im Kapitel 8 herangezogenen Schulbücher findet man dieses Beispiel.

Meine Erwartungen an diese Fragen wurden zum größten Teil erfüllt. Ich war mir sicher, dass nur ein Teil der Schülerinnen und Schüler eine gute Antwort liefern könnten. Anwenderbeispiele oder Antworten mit Praxisbezug hätte ich mir bei der einen oder anderen Antwort erwartet. Diese Erwartungshaltung wurde aber nicht erfüllt.

Schlussfolgerung 2: Grundvorstellungen sind zum Großteil nicht vorhanden!

Nach der Auswertung des Fragebogens bin ich zur Erkenntnis gekommen, dass sehr vielen Schülerinnen und Schülern die Grundvorstellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung fehlen.

Ich hätte mir bei den Fragen zu den Grundvorstellungen ein Ergebnis mit über 90% gewünscht beziehungsweise erwartet. Welches mit der Antwort 1 und 2 auch erreicht wurde. Umso überraschter bin ich bei der Auswertung der Antwort 3 gewesen. 118 Schülerinnen und Schüler sind der Meinung, dass der Satz „In 2 Stunden geht die Sonne unter“ mit Wahrscheinlichkeit zu tun hat. Fast 50 % der Jugendlichen fehlen diese Grundvorstellungen.

Schlussfolgerung 3: Der mathematische Begriff „Zufall“ ist für die meisten Schülerinnen und Schüler eine Unbekannte!

Mehr als 63% der befragten Schülerinnen und Schüler konnte mir keine mathematisch sinnvolle Definition des Begriffs „Zufall“ geben. Somit bestätigte die empirische Untersuchung zur Gänze meine Erwartungshaltung.

Nachdem in Schulbüchern die Begriffe wie „Zufallsversuch“ oder „Zufallsexperiment“ sehr präsente Wörter sind, bin ich davon ausgegangen, dass mir fast alle Schülerinnen und Schüler eine sinnvolle Definition liefern könnten.

Schlussfolgerung 4: Die Schülerinnen und Schüler besitzen keine Grundkompetenzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung!

Ich erwartete mir bei der Frage 5 ein nahezu 100% richtiges Ergebnis, weil diese Frage auch ohne mathematische Vorkenntnisse mit dem Hausverstand zu lösen gewesen wäre.

Bei der Frage 6 habe ich mir ein schlechtes Ergebnis erwartet, dass es so schlecht ausgefallen ist, hat mich trotz meiner Erwartungshaltung, überrascht.

Nicht eine einzige Schülerin oder ein Schüler war in der Lage alle Teilaufgaben zu lösen.

Lediglich 10 Schülerinnen und Schüler konnten die Teilaufgaben a) und b) lösen.

In den folgenden Tabellen kann man die Maximalpunkte und die einzelnen Punkte der Schülerinnen und Schüler des Fragebogens ablesen:

Auswertung Punkte/Prozente über alle Kinder

	Frage 1	Frage 2	Frage 3	Frage 4	Frage 5	Frage 6	Summe
theor. Maximalpunkte	1340	804	804	1340	804	3216	8308
erreichte Punkte	540	639	537	485	313	135	2649
erreichter Prozentsatz	40,30%	79,48%	66,79%	36,19%	38,93%	4,20%	31,88%

Auswertung Punkte/Prozente durchschnittlich für ein Kind

	Frage 1	Frage 2	Frage 3	Frage 4	Frage 5	Frage 6	Summe
theor. Maximalpkte	5,00	3,00	3,00	5,00	3,00	12,00	31,00
erreichte Punkte	2,01	2,38	2,00	1,81	1,17	0,50	9,88
erreichter Prozentsatz	40,30%	79,48%	66,79%	36,19%	38,93%	4,20%	31,88%

Um auf meine Hypothese: „Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird als unnütz beziehungsweise nicht notwendig wahrgenommen und daher tun sich Schülerinnen und Schüler schwer diese Thematik zu erlernen.“, zurückzukommen, habe ich mir die Fragen 1,2 und 3 in Kombination mit den Fragen 5 und 6 angesehen.

Fragenbezug auf die einzelnen Fragen:

Frage 1 → Nutzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Frage 2 → Anwendungsfelder der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Frage 3 → Grundvorstellungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Frage 5 und 6 → konkrete Rechenaufgaben

- Ich untersuchte im ersten Zug die Frage 1 in Kombination mit Frage 5 und 6.

	Frage 5 +	Frage 6 +
Frage 1 +	82	16
Frage 1 -	124	20
+ ... Frage wurde richtig beantwortet		
- ... Frage wurde falsch beantwortet		

Es konnten mehr Schülerinnen und Schüler die Frage 5 beantworten, welche keine sinnvolle Antwort bei der Frage 1 gegeben haben. Ebenso konnten mehr Schülerinnen und Schüler die Frage 6 beantworten, welche keine sinnvolle Antwort bei der Frage 1 gegeben haben.

→ Aus diesem Zusammenhang, ist meine Hypothese eindeutig widerlegt.

- Im nächsten Schritt nahm ich die Frage 2 in Kombination mit Frage 5 und 6 genauer unter die Lupe.

	Frage 5 +	Frage 6 +
Frage 2 +	167	30
Frage 2 -	117	6
+ ... Frage wurde richtig beantwortet		
- ... Frage wurde falsch beantwortet		

Bei der Auswertung sieht man, dass die Zahl bei Frage 2 der richtig/sinnvoll beantworteten Antworten in Kombination mit den Fragen 5 und 6 höher war, als bei einer negativ beantworteten Frage 2.

➔ Aus diesem Zusammenhang, ist meine Hypothese eindeutig belegt.

- Das Ergebnis, als ich mir die Frage 3 in Kombination mit den beiden letzten Fragen angesehen habe, war sehr ausgeglichen.

	Frage 5 +	Frage 6 +
Frage 3 +	106	18
Frage 3 -	100	18
+ ... Frage wurde richtig beantwortet		
- ... Frage wurde falsch beantwortet		

➔ Aus diesem Zusammenhang, kann ich meine Hypothese weder belegen noch widerlegen.

Ich bin bei meiner empirischen Untersuchung zu dem Schluss gekommen, dass es keinen Zusammenhang zwischen subjektivem Empfinden für den Nutzen und dem richtigen Anwenden bei Beispielen gibt.

Dies lässt einen vermuten, dass sehr viele Schülerinnen und Schüler Anwendungsbeispiele und ihre Schemata stur auswendig lernen. Um die Richtigkeit dieser Vermutung zu belegen, wären weitere Untersuchungen erforderlich.

Anhang

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 : Legosteine	9
Abbildung 2: Urne.....	11
Abbildung 3: Kolmogoroff.....	16
Abbildung 4: Astragaloï	19
Abbildung 5: Chevalier de Méré.....	22
Abbildung 6: Pierre Simon Laplace.....	24
Abbildung 7:Thema Mathematik 6.....	47
Abbildung 8: Thema Mathematik 6.....	48
Abbildung 9:Reichel Mathematik 6	48
Abbildung 10: Mathematik verstehen 6.....	48
Abbildung 11: Mathematik verstehen 6.....	49
Abbildung 12: Mathematik verstehen 6.....	49
Abbildung 13: Dimensionen Mathematik 6	50
Abbildung 14: Dimensionen Mathematik 6	50
Abbildung 15: Masche.....	41
Abbildung 16: Knotenregel.....	42
Abbildung 17: Netzwerk	43

Literaturverzeichnis

- Bleier, G., Lindenberg, J., Lindner, A., & Stepancik, E. (2010). *Dimensionen Mathematik 6*. Wien: Verlag E. DORNER GmbH.
- Bosch, K. (1976). *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH.
- Bosch, K. (2011). *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Wiesbaden: Wieweg+Teubner Verlag.
- Brand, C., Dorfmayr, A., Lechner, J., Mistlbacher, J., & Nussbaumer, A. (2012). *thema mathematik 6*. Linz: Veritas-Verlag.
- Büchter, A., & Henn, H.-W. (2005). *Elementare Stochastik: Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Gaede, K.-W. (1977). *Zuverlässigkeit Mathematische Modelle*. Wien, München: Carl Hanser Verlag München Wien 1977.
- Götz, S., Reichel, H.-C., Müller, R., & Hanisch, G. (2010). *Mathematik 6*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH&Co.KG.
- Haller, R., & Barth, F. (2014). *Berühmte Aufgaben der Stochastik - Von den Anfängen bis heute*. München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH.
- Henze, N. (2000). *Stochastik für Einsteiger. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*. Braunschweig/Karlsruhe: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH.
- Kaiser, H., & Nöbauer, W. (1998). *Geschichte der Mathematik*. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.
- Küttinig, H., & Sauer, M. (2011). *Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte*. Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.
- Laplace, P. S. (1932). *Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit*. Leipzig: Reprint.
- Malle, G., & Malle, S. (2003). Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen. *mathematik lehren*, S. 52-56.
- Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B., & Ulovec, A. (2013). *mathematik verstehen 7*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co KG.
- Malle, G., Ramharter, E., Ulovec, A., & Kendl, S. (2012). *Mathematik verstehen 6*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH&Co. KG.
- Meißner, J. (2004). *Statistik verstehen und sinnvoll nutzen. Anwendungsorientierte Einführung für Wirtschaftler*. München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag.
- Müller, C., & Denecke, L. (2013). *Stochastik in den Ingenieurwissenschaften*. Berlin Heidelberg: Springer Vieweg.

- MyHeritage Blog*. (kein Datum). Abgerufen am 4. 4 2015 von
<http://blog.myheritage.de/2012/08/alles-gute-zum-80-geburtstag-lego/lego/>
- Pfanzagl, J. (1991). *Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin: De Gruyter.
- Poker Olymp*. (2015). Abgerufen am 9. 4 2015 von
<http://www.pokerolymp.com/articles/show/news/14619/als-pascal-und-fermat-im-jahr-1654-einem-gambler-halfen-die-wunderliche-welt-der-wahrscheinlichkeiten#.VSZmXllcTwo>
- Reichel, H.-C. (1987). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik* (Bd. 1). Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.
- Ryder, P. (2004). *Einführung in die Elektrodynamik und die spezielle Relativitätstheorie*. Achen: Shaker Verlag.
- Tittmann, P. (2014). *Einführung in die Kombinatorik*. Berlin Heidelberg: Springer Verlag.
- Wikipedia*. (kein Datum). Abgerufen am 15. 6 2015 von
http://de.wikipedia.org/wiki/Gustav_Robert_Kirchhoff
- Wikipedia*. (2015). Abgerufen am 2. 4 2015 von
http://de.wikipedia.org/wiki/Merkmal#Statistik_und_Empirik
- Wikipedia*. (30. 3 2015). Abgerufen am 4. 4 2015 von
<http://de.wikipedia.org/wiki/Statistik#Geschichte>
- Wikipedia:Grundvorstellungen*. (2015). Abgerufen am 17. 5 2015 von
http://de.wikipedia.org/wiki/Grundvorstellungen_in_der_Mathematik
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Urn_problem_qtl1.svg#/media/File:Urn_problem_qtl1.svg
- http://de.wikipedia.org/wiki/Andrei_Nikolajewitsch_Kolmogorow
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kempton_Astragaloι.jpg#/media/File:Kempton_Astragaloι.jpg
- <http://www.pokerolymp.com/articles/show/news/14619/als-pascal-und-fermat-im-jahr-1654-einem-gambler-halfen-die-wunderliche-welt-der-wahrscheinlichkeiten#.VSZmXllcTwo>
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chevalier_de_M%C3%A9r%C3%A9.jpg

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre-Simon Laplace.jpg#/media/File:Pierre-Simon Laplace.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre-Simon_Laplace.jpg#/media/File:Pierre-Simon_Laplace.jpg)

<http://m.simplyscience.ch/teens-liesnach-archiv/articles/wie-unterscheiden-sich-parallel-und-serienschaltung.html>

Abstract

In our society a basic knowledge about probability theory and statistics is very important for many careers.

Stochastic systems are relevant to many fields of science and economics as for instance communications engineering or finance and insurance. Furthermore everyone is exposed to statistical information on a daily basis.

At the beginning of my thesis I have tried to give an overview about stochastic and what it deals with, about the development of stochastic and about some very important mathematicians.

The main part deals with my empirical study and “Grundvorstellungen”/basic ideas.

I wanted to find out, if there is a correlation between understanding basic definitions and mathematical practice.

The hypothesis, probability calculation is perceived as useless or unnecessary by students, therefore they have difficulties to deal with the subject matter, should be tested.

To check my hypothesis/theory I developed a questionnaire for students.

Zusammenfassung

In unserer heutigen Zeit braucht man ein Basiswissen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Daher ist die Aneignung wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundfertigkeiten unumstößlich.

In meiner vorliegenden Arbeit wird zu Beginn auf die Definition und ihre Teilgebiete der Stochastik eingegangen. Ein Kapitel widmet sich der geschichtlichen Entwicklung.

Der Hauptteil meiner Arbeit beschäftigt sich mit meiner empirischen Untersuchung.

Ich wollte herausfinden, ob es einen Zusammenhang zwischen dem Verstehen von mathematischen Definitionen und der Anwendung von Problemen gibt. Dazu stellte ich die Hypothese „Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird als unnütz beziehungsweise nicht notwendig wahrgenommen und daher tun sich Schülerinnen und Schüler schwer diese Thematik zu erlernen.“ auf. Um meine Hypothese zu belegen entwickelte ich einen Fragebogen. Dieser wurde von über 250 Schülerinnen und Schüler erfolgreich beantwortet.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Vornamen:	Lena Isabella
Zuname:	Fenz
Geburtsdatum:	21. Oktober 1990
Adresse:	7423 Kroisegg 81
Telefonnummer:	0664/8349717
E-Mail:	lena@fenz.at

Schulausbildung

Sept. 1997 bis Juni 2001:	Volksschule in Pinkafeld
Sept. 2001 bis Juni 2009:	BG/BRG/BORG Oberschützen; Abschluss: Matura

Weitere Qualifikationen

Fremdsprachenkenntnisse: Englisch

Zusätzliche Informationen

Zertifikat: Reflexions- und Handlungslernen

5-jährige Tätigkeit als Nachhilfelehrerin in einem Nachhilfeinstitut