



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Heiratsproblem, Spielerfehlschluss und
Geburtstagsparadoxon – Mathematik in der
populärwissenschaftlichen Literatur

Verfasserin

Katharina Kern

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2014

Studienkennzahl lt. Studienblatt:

A 190 333 406

Studienrichtung lt. Studienblatt:

Lehramt: UF Deutsch und UF Mathematik

Betreuerin / Betreuer:

Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei allen Menschen bedanken, die mich während des Studiums und des Schreibens dieser Diplomarbeit unterstützt haben.

Ein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith, der jederzeit bei Fragen und Problemen für mich da war und der mir die Wahrscheinlichkeitsrechnung schmackhaft gemacht hat.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Studienkollegen. Ohne euch wäre mein Studium nur halb so erfolgreich und halb so lustig gewesen.

Ein ganz liebes Dankeschön an meinen Freund Robert, der während des Schreibens dieser Diplomarbeit all meine Launen klaglos ertragen hat, mich aufgeheitert hat, wenn ich nicht weiterwusste, und für Versuche zur Verfügung stehen musste. (102 Autos und 89 Ziegen sind nicht genug!)

Ganz besonders möchte ich mich beim Kollegium des BG/BRG Josefstraße in St. Pölten bedanken. Ihr habt mich alle so motiviert und vorangetrieben. Das tägliche „Bist schon fertig?“ wird mir fehlen.

Der größte Dank gebührt aber meiner Familie, allen voran meinen Eltern, die mir durch finanzielle und persönliche Unterstützung das Studium ermöglicht haben. Danke vor allem auch an meine Mama, die mich immer mit Büchern versorgt, meine Liebe zur Literatur geweckt und mir mein erstes populärwissenschaftliches Mathematikbuch geschenkt hat, was mich schlussendlich zum Thema meiner Diplomarbeit geführt hat.

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich diese Arbeit eigenständig verfasst habe. Dazu habe ich ausschließlich die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen verwendet. Bei indirekten sowie direkten Zitaten - diese werden unter Anführungszeichen angeführt - wird im Text unmittelbar auf deren Quelle verwiesen. Bei Quellen aus dem Internet wird zusätzlich zu dem Link der Internetseite noch das Zugriffsdatum angeführt.

Ich versichere hiermit außerdem, dass ich diese Arbeit noch nicht andernorts zur Beurteilung eingereicht habe.

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	8
2.	Das Heiratsproblem	11
	2.1 Die Wahrscheinlichkeit, den Besten zu wählen, nachdem schon drei Bewerber abgewiesen worden sind.....	16
	2.2 Ungenauigkeiten in der Berechnung.....	17
3.	Beschreibung der betrachteten Literatur.....	18
	3.1 Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer – Zahlenspiele für alle Lebenslagen“	19
	3.2 Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen – eine mathemagische Reise“	21
	3.3 Rudolf Taschner: „Zahl Zeit Zufall. Alles Erfindung?“	24
	3.4 Albrecht Beutelspachers „Kleines Mathematikum – Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik“	26
	3.5 Ian Stewart: „Professor Stewarts mathematisches Sammelsurium“ ...	27
	3.6 Christian Hesse: „Warum Mathematik glücklich macht – 151 verblüffende Geschichten“	28
	3.7 Gero von Randow: „Das Ziegenproblem – Denken in Wahrscheinlichkeiten“	30
4.	Die Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.....	32
	4.1 Das Teilungsproblem.....	33
	4.1.1 Das Teilungsproblem in der populärwissenschaftlichen Literatur	36
	4.1.2 Einwand zum Teilungsproblem	37
5.	Fairplay	39
	5.1 Roulette	39
	5.2 Martingale	45
	5.2.1 Martingale in Gero von Randows „Das Ziegenproblem“	45
	5.2.2 Martingale in Alex Bellos' „Im Wunderland der Zahlen“	46
	5.2.3 Martingale in Rudolf Taschners „Zahl Zeit Zufall“	48
	5.3 Der Erwartungswert.....	50

5.3.1	Der Erwartungswert in Alex Bellos' „Im Wunderland der Zahlen“	50
5.3.2	Der Erwartungswert in Gero von Randows „Das Ziegenproblem“	51
5.4	<i>Der Spielerfehlschluss</i>	52
5.4.1	Der Spielerfehlschluss in Alex Bellos „Im Wunderland der Zahlen“	52
5.4.2	Der Spielerfehlschluss in Rudolf Taschners „Zahl Zeit Zufall“	54
5.4.3	Der Spielerfehlschluss in Gero von Randows „Das Ziegenproblem“	56
5.5	<i>Das Gesetz der großen Zahlen</i>	58
5.5.1	Das Gesetz der großen Zahlen in Albrecht Beutelspachers „Kleines Mathematikum“	58
5.5.2	Das Gesetz der großen Zahlen in Gero von Randows „Das Ziegenproblem“	58
5.5.3	Das Gesetz der großen Zahlen in Alex Bellos „Im Wunderland der Zahlen“	59
6.	Das Geburtstagsparadoxon	61
6.1	<i>Das Geburtstagsparadoxon in der populärwissenschaftlichen mathematischen Literatur</i>	64
6.1.1	Das Geburtstagsparadoxon in Christoph Drössers „Der Mathematikverführer“	64
6.1.2	Das Geburtstagsparadoxon in Rudolf Taschners „Zahl Zeit Zufall“	64
6.1.3	Das Geburtstagsparadoxon in Gero von Randows „Das Ziegenproblem“	66
6.1.4	Das Geburtstagsparadoxon in Alex Bellos „Im Wunderland der Zahlen“	66
7.	Der Tankstellenmörder	68
7.1	<i>Bedingte Wahrscheinlichkeit</i>	71
7.2	<i>Medizinische Tests und deren Interpretation in der populärwissenschaftlichen Literatur</i>	73
7.2.1	Medizinische Tests in Christian Hesses „Warum Mathematik glücklich macht“	73
7.2.2	Medizinische Tests in Rudolf Taschners „Zahl Zeit Zufall“	79
7.2.3	Medizinische Tests in Gero von Randows „Das Ziegenproblem“	80
8.	Wie man Fische zählt, ohne sie zu fangen – Stochastisches Zählen ...	82

9.	Das Ziegenproblem	84
9.1	<i>Betrachtung der verschiedenen Möglichkeiten, eine Tür zu wählen</i>	85
9.1.1	Versuch zum Ziegenproblem	88
9.2	<i>Versuch mit mehr als drei Türen</i>	89
9.3	<i>Das Ziegenproblem in der populärwissenschaftlichen Literatur</i>	90
9.3.1	Das Ziegenproblem in Albrecht Beutelspachers „Kleines Mathematikum“	90
9.3.2	Das Ziegenproblem in „Professor Stewarts mathematisches Sammelsurium“	90
9.3.3	Das Ziegenproblem in Rudolf Taschners „Zahl Zeit Zufall“ ..	91
9.3.4	Das Ziegenproblem in Gero von Randows „Das Ziegenproblem“	93
10.	Lotto	98
10.1	<i>Berechnung der Wahrscheinlichkeit von sechs Richtigen beim Lotto „6 aus 49“</i>	99
10.2	<i>Berechnung der Wahrscheinlichkeit von sechs Richtigen beim Lotto „6 aus 45“</i>	100
10.3	<i>Lotto in der populärwissenschaftlichen Literatur</i>	101
10.3.1	Lotto in Christoph Drössers „Der Mathematikverführer“	101
10.3.2	Lotto in Albrecht Beutelspachers „Kleines Mathematikum“	102
10.3.3	Lotto in Christian Hesses „Warum Mathematik glücklich macht“	103
10.3.4	Lotto in Gero von Randows „Das Ziegenproblem“	104
10.3.5	Lotto in Alex Bellos' „Im Wunderland der Zahlen“	106
11.	Conclusio	109
12.	Abbildungsverzeichnis	111
13.	Tabellenverzeichnis	112
14.	Formelverzeichnis:	113
15.	Literaturverzeichnis	114
16.	Lebenslauf	115
17.	Zusammenfassung	117
18.	Abstract	118

1. Einleitung

Die „Nerds“ aus „The Big Bang Theory“ und die Physiker der „Science Busters“ haben es geschafft, Mathematik und Physik sind wieder *in*, Wissenschaft kann Spaß machen. Auch immer mehr literarische Werke kommen auf den Markt, die Mathematik nicht als trockene Materie behandeln, sondern versuchen, die Seiten der Mathematik zu zeigen, die Spaß machen können und die für die Menschen auch einen „Nutzen“ haben. Mathematik wird oft als zu theoretisch gesehen, viele Menschen und vor allem Schülerinnen und Schüler können nicht erkennen, wo Mathematik praktische Anwendung findet.

Die Literatur, mit der ich mich hier beschäftige, will eine andere Sichtweise auf die Mathematik erschließen, sie will zeigen, wo sich die Mathematik überall versteckt. Sie will zeigen, was ohne Mathematik alles nicht möglich wäre. Sie will zeigen, welche Schönheit sich in der Mathematik versteckt. Und vor allem will sie zeigen, dass Mathematik wirklich Spaß machen kann.

Da es mittlerweile so eine große Bandbreite an mathematischer Literatur gibt, die nicht nur Schulbücher, Lehrbücher, Vorlesungsskripten und für Mathematiker und andere Wissenschaftler gedachte Abhandlungen sind, und da auch die mathematischen Themen, die in diesen Büchern behandelt werden, so vielfältig wie die Mathematik selbst sind, werde ich mich in der vorliegenden Arbeit mit den Kapiteln befassen, die auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung eingehen.

Ich habe mich für die Thematik Wahrscheinlichkeitsrechnung entschieden, weil es sehr viele Menschen anspricht, da die Menschen darin einen praktischen Nutzen sehen. Wahrscheinlichkeitsrechnung geht Hand in Hand mit dem Glücksspiel, ja ist sogar aus Fragestellungen dazu entstanden. Glücksspiel und die Wege, sich dabei einen Vorteil zu verschaffen, haben

eine Anziehung auf viele Menschen. Da ist der praktische Nutzen offensichtlich: Man kann ja Geld damit gewinnen! Da gerade die Wahrscheinlichkeitsrechnung für so viele Menschen interessant ist, befindet sich in jedem der populärwissenschaftlichen Bücher, die ich gelesen habe, mindestens ein Kapitel, in dem auf Beispiele oder Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingegangen wird, es gibt sogar einige Bücher, die sich ausschließlich mit dieser Thematik befassen.

Außerdem ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung ein vergleichsweise junger Zweig der Mathematik und wird im Unterricht hauptsächlich in den Berufsbildenden Höheren Schulen oder in der Oberstufe der Allgemeinbildenden Höheren Schulen behandelt und auch das noch nicht besonders lange. Das bedeutet, dass viele Menschen mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung noch gar nie in Kontakt gekommen sind und daher sind die Problemstellungen und Beispiele, die in den Büchern gebracht werden, für viele Menschen neu.

Ein weiterer Aspekt, der die Wahrscheinlichkeitsrechnung so interessant macht, ist der, dass die Intuition der Menschen und die Wirklichkeit der Wahrscheinlichkeiten nicht immer Hand in Hand gehen. Auch dieser Aspekt wird in den meisten Werken behandelt, zum Beispiel das „Ziegenproblem“, welches sowohl die Intuition von Mathematikern als auch die von Laien auf eine harte Probe gestellt und viele Diskussionen ausgelöst hat, oder der „Spielerfehlschluss“, der so manchem schon eine ordentliche Menge Geld gekostet hat.

„Kognitionswissenschaftler haben festgestellt, dass das menschliche Gehirn große Fähigkeiten im Bereich der Mustererkennung hat. Im Laufe seiner Entwicklung musste es die Kompetenz entwickeln, Symmetrien, Regelmäßigkeiten und andere Formen der Systematik zu identifizieren und zu interpretieren. Muster in einem ganzen Ozean von Regellosigkeit zu erfassen, erleichterte dem menschlichen Gehirn

das Verständnis der Welt und die Orientierung in ihr. Es bietet ihm Ansatzpunkte, um durch Intelligenz in der Welt zu bestehen. Vergleichsweise schlecht ist es aber um den intellektuellen Filter des Menschen für das kompetente Handling von Unsicherheit, Zufall und Wahrscheinlichkeiten bestellt. Auf dem Gebiet des Wahrscheinlichen und Unwahrscheinlichen bietet uns die Welt viele Möglichkeiten, uns zu irren.“¹

¹ Christian Hesse: „Warum Mathematik glücklich macht“, Seite 29

2. Das Heiratsproblem

Im 5. Kapitel „Das Heiratsproblem oder ... ob sich nicht doch was Besseres findet“ (Seiten 47 – 59) aus Christoph Drössers „Der Mathematikverführer – Zahlenspiele für alle Lebenslagen“ erzählt Marina ihrer Freundin Julia, dass sie von Karsten einen Heiratsantrag bekommen habe, sie sich aber nicht sicher sei, ob sie nicht noch einen besseren Mann finde. Der Heiratsantrag von Karsten ist schon der fünfte, den Marina bekommt, doch nie war sie sich sicher, dass sich auch den Rest des Lebens mit dem jeweiligen Mann verbringen möchte. Julia erkennt durch Marinas Zögern, dass sie Karsten nicht wirklich heiraten will, weil sie glaubt, ihren wahren Traummann noch zu treffen, und rät ihr daher ausgehend von der Annahme, dass Julia insgesamt circa zehn Heiratsanträge bekommen würde, abzuwarten und beim nächsten Mann, der ihr besser erscheint als Karsten und sie heiraten möchte, „zuzuschlagen“.

„Ist die Strategie, die Julia empfohlen hat, wirklich die richtige? Es geht um das Problem, eine optimale Auswahl aus einer bestimmten Menge von Bewerbern zu treffen, von denen einige, die Künftigen, allerdings nicht bekannt sind. Wegen dieser Unbekannten kann man keine Gewissheit haben, die richtige Wahl zu treffen – aber es lässt sich, unter ein paar Voraussetzungen, zumindest die Wahrscheinlichkeit dafür angeben, dass man die beste Wahl trifft. Mathematiker nennen dieses spezielle Problem das „Sekretärinnenproblem“, weil es zuerst in eine Geschichte gekleidet wurde, bei der es um die Auswahl von Bewerberinnen um eine Sekretärinnenstelle ging. Keine sehr realistische Problemstellung – in der Wirklichkeit muss sich ein Chef ja erst entscheiden, wenn er alle Bewerberinnen gesehen hat. Deshalb ist Marinas Heiratsproblem eigentlich ein besseres Beispiel für dieses Auswahlproblem.“²

² Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 52

Bevor nun aber Marinas Problem berechnet wird, definiert Christoph Drösser die Wahrscheinlichkeit:

Formel 1: Laplace-Wahrscheinlichkeit

*„Die Definition der Wahrscheinlichkeit ist so einfach wie einleuchtend: **Teile die Zahl der „günstigen“ Ereignisse durch die Zahl aller möglichen Ereignisse.**“³*

Und er zeigt das anhand von Würfeln. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Wurf einen Sechser zu würfeln, ist ein günstiges Ereignis (nämlich der 6er) durch 6 mögliche Ereignisse (1er, 2er, 3er, 4er, 5er und 6er), also $\frac{1}{6} \approx 16,67 \%$. Schwieriger ist es da schon beim Würfeln mit zwei Würfeln: Für die Wahrscheinlichkeit einen Pasch (dieselbe Zahl bei beiden Würfeln) zu werfen, gibt es 6 günstige Ereignisse (zwei 1er, zwei 2er, zwei 3er, zwei 4er, zwei 5er und zwei 6er). Bei der Zahl der möglichen Ereignisse wird allerdings oft der Fehler gemacht, dass zum Beispiel das Ereignis 5/6 nicht vom Ereignis 6/5 unterschieden wird. Jede Augenzahl des ersten Würfels kann mit jeder Augenzahl des zweiten Würfels kombiniert werden, also gibt es $6 \cdot 6 = 36$ mögliche Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit für einen Pasch beträgt daher $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16,67 \%$.

Zurück zu Marinas Problem: Wir gehen davon aus, dass es unter den Bewerbern eine eindeutige Rangordnung gibt (Würde Marina alle kennen, wäre sie in der Lage eine Liste zu erstellen.). Außerdem nehmen wir an, dass nur der Zufall die Reihenfolge der Heiratsanträge bestimmt und dass es eine bestimmte Anzahl an Bewerbern (in unserem Fall 10) gibt.

Wir betrachten nun die Wahrscheinlichkeit, dass Marina mit Julias Strategie den besten Mann bekommt. Falls der Traummann nicht schon unter den ersten fünf Bewerbern war (in diesem Fall würde Marina gar keinen mehr

³ Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 53

abbekommen – es ist gleich wahrscheinlich, dass der Traummann unter den ersten fünf oder letzten fünf Bewerbern ist, jeweils $\frac{5}{10}$), kann er entweder an sechster, siebenter, achter, neunter oder zehnter Stelle kommen. Kommt der Traumprinz aber nicht an der sechsten Stelle, könnte ein Bewerber, der zwar nicht der beste, aber immerhin besser als Karsten ist, an der sechsten Stelle kommen, und den müsste Marina dann heiraten und hätte nicht den besten Mann ergattert. Wäre der zweitbeste Kandidat schon unter den ersten fünf Bewerbern, dann würde es nur der beste Bewerber schaffen, ihn zu übertreffen, und es wäre für Marina wieder eindeutig, welchen Mann sie wählen muss.

Die *Einzelwahrscheinlichkeiten* schauen folgendermaßen aus:

Der beste Kandidat an der 6. Stelle: $\frac{1}{10}$

Der beste Kandidat an der 7. Stelle und der zweitbeste nicht an der 6. Stelle: $\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6}$

Der beste Kandidat an der 8. Stelle und der zweitbeste nicht an der 6. oder 7. Stelle: $\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{7}$

Der beste Kandidat an der 9. Stelle und der zweitbeste nicht an der 6., 7. oder 8. Stelle: $\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{8}$

Der beste Kandidat an der 10. Stelle und der zweitbeste nicht an der 6., 7., 8. oder 9. Stelle: $\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9}$

Diese Einzelwahrscheinlichkeiten müssen jetzt noch addiert werden, um die *Gesamtwahrscheinlichkeit* zu erhalten: (Siehe Additionsregel, Kapitel 4.1, Seite 35)

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{7} + \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{504}{5040} + \frac{420}{5040} + \frac{360}{5040} + \frac{315}{5040} + \frac{280}{5040} =$$

$$\frac{1879}{5040} \approx \mathbf{0,3728} \approx \mathbf{37,28 \%}$$

Mit 37,28-prozentiger Wahrscheinlichkeit bekäme Marina den besten Kandidaten, wenn sie sich an Julias Empfehlung hielte. Wäre es ihr egal, ob sie den besten oder den zweitbesten Bewerber bekäme, betrüge die Wahrscheinlichkeit sogar fast 50 %.

„Gäbe es für Marina eine noch bessere Strategie, als die von Julia vorgeschlagenen? Jetzt nicht mehr – aber sie hätte ihre Chancen optimieren können, wenn sie früher auf den Rat ihrer Freundin gehört hätte! Wenn sie nur die ersten drei Bewerber abgewiesen und dann beim nächsten zugegriffen hätte, der besser als die drei war, so wäre ihre Chance, damit den Besten zu wählen, auf 39,9 Prozent gewachsen.“⁴

Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall wurde im „Mathematikverführer“ zwar nur angegeben, ich möchte sie hier aber später auch noch berechnen. (Siehe Kapitel 2.1, Seite 16)

Nun kann man natürlich nicht nur die Wahrscheinlichkeit berechnen, aus 10 Bewerbern den Besten auszuwählen, sondern kann die Berechnung für n Bewerber verallgemeinern. Außerdem muss auch die Zahl der bereits bekannten Bewerber nicht konstant sein, hierfür verwenden wir die Variable b . Damit kommt man zu folgender Formel für die Wahrscheinlichkeit aus n Bewerbern den besten auszuwählen, wenn bereits b Bewerber abgewiesen worden sind, also die Wahrscheinlichkeit dafür, den Traumprinzen zu bekommen, wenn man bereits b Frösche geküsst hat:

Formel 2: Wahrscheinlichkeit, den besten aus n Bewerbern auszuwählen, wenn bereits b Bewerber abgewiesen wurden

$$p = \frac{b}{n} \sum_{j=b}^{n-1} \frac{1}{j}$$

⁴ Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 55 f

Dies ist nur eine bequemere und kürzere Schreibweise für:

$$p = \frac{b}{n} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$$

In Marinas Fall war $n = 10$ und $b = 5$. Man kann aber nachweisen, dass der Wert p am größten wird, wenn b etwas mehr als ein Drittel von n beträgt, genauer gesagt: 36,7 Prozent. (Noch genauer gesagt: $\frac{n}{e}$. e ist die sogenannte Eulersche Zahl, [...].)

Bei 10 Kandidaten bestünde also die mathematisch optimale Strategie darin, die ersten 3 abzulehnen, bei 100 sollte man die ersten 36 ziehen lassen und dann den Nächsten erhören, der besser ist als alle Vorgänger.

Natürlich steht die gesamte Konstruktion des Beispiels auf wackeligen Füßen. Mal von der Objektivierbarkeit der Liebe abgesehen: Die Zahl von 10 Heiratskandidaten ist eine sehr grobe Abschätzung, und die ganze Rechnung, bei der es ja um sehr kleine Unterschiede geht, ist hinfällig, wenn sich diese Zahl im richtigen Leben ändert. Doch auch hier weiß die Mathematik Rat. Für den Fall, dass eine beliebige Zahl von Anträgen gestellt wird, gibt es eine erstaunlich einfache Lösung, die der Mathematiker F. Thomas Bruss entwickelt hat: Man muss nämlich nur eine Vorstellung über die zeitliche Verteilung der Heiratsanträge haben. Diese zeichnet man als Kurve und versucht dann abzuschätzen, welche senkrechte Linie etwa 36,7 Prozent der Fläche abteilt. An der waagrechten Zeitachse kann man nun den Punkt x ablesen, wann es Zeit ist, das Lotterleben sein zu lassen und sich einen Kandidaten fürs Leben zu suchen!“⁵

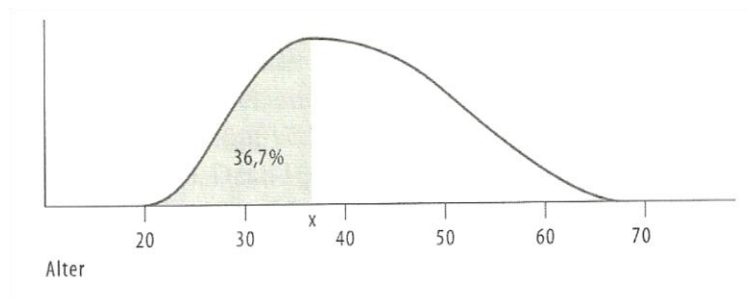


Abbildung 1: Verteilung der Heiratsanträge⁶

⁵ Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 56 f

⁶ Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 57

2.1 Die Wahrscheinlichkeit, den Besten zu wählen, nachdem schon drei Bewerber abgewiesen worden sind

Im „Mathematikverführer“ wurde die Wahrscheinlichkeit dafür, den besten Kandidaten zu wählen, nachdem schon 3 Bewerber abgewiesen worden sind, nur angegeben, ich möchte sie hier durch die Berechnung überprüfen. Wie schon zuvor werden zuerst die Einzelwahrscheinlichkeiten angegeben und dann, da es ja möglich ist, dass der beste Kandidat an der 4. Stelle auftritt, **oder**, dass der beste Kandidat an der 5. Stelle kommt und der zweitbeste Kandidat nicht an der 4. Stelle, **oder** der beste an der 6. Stelle und der zweitbeste nicht an der 4. oder 5. Stelle **oder** ... müssen die Einzelwahrscheinlichkeiten addiert werden um die gesamte Wahrscheinlichkeit zu bekommen. (Siehe Additionsregel, Kapitel 4.1, Seite 35)

Einzelwahrscheinlichkeiten:

Der beste Kandidat an der 4. Stelle: $\frac{1}{10}$

Der beste Kandidat an der 5. Stelle und der zweitbeste nicht an der 4. Stelle: $\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{4}$

Der beste Kandidat an der 6. Stelle und der zweitbeste nicht an der 4. oder 5. Stelle: $\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{5}$

Der beste Kandidat an der 7. Stelle und der zweitbeste nicht an der 4., 5. oder 6. Stelle: $\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{6}$

Der beste Kandidat an der 8. Stelle und der zweitbeste nicht an der 4., 5., 6. oder 7. Stelle: $\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{7}$

Der beste Kandidat an der 9. Stelle und der zweitbeste nicht an der 4., 5., 6., 7. oder 8. Stelle:

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{8}$$

Der beste Kandidat an der 10. Stelle und der zweitbeste nicht an der 4., 5., 6., 7., 8. oder 9. Stelle:

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9}$$

Gesamtwahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} = \\ & \frac{2520}{25200} + \frac{1890}{25200} + \frac{1512}{25200} + \frac{1260}{25200} + \frac{1080}{25200} + \frac{945}{25200} + \frac{840}{25200} = \\ & \frac{10047}{25200} \approx \mathbf{0,3987} \approx \mathbf{39,87 \%} \end{aligned}$$

2.2 Ungenauigkeiten in der Berechnung

Ich bin der Meinung, dass Christoph Drösser bei den Berechnungen der Wahrscheinlichkeit teilweise zu ungenau gearbeitet hat. Ich glaube, er hat hier bestimmte Möglichkeiten vernachlässigt. Zum Beispiel ist nach meinem Verständnis die Einzelwahrscheinlichkeit, wenn der beste Kandidat an 7., 8., 9. oder 10. Stelle kommt, nicht vollständig, da in diesem Fall ja auch der drittbeste Kandidat dem besten die Frau wegschnappen könnte, wenn er nicht an einer der ersten 5 Stellen, aber noch vor dem besten Kandidaten kommt. Ebenso ist es mit dem viertbesten und fünftbesten Kandidaten.

Noch ungenauer ist dann die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, den Besten zu wählen, nachdem schon 3 Bewerber abgewiesen worden sind, denn da könnten dem besten Kandidaten noch leichter der zweit-, dritt-, viert-, ...-beste Kandidat in die Quere kommen.

3. Beschreibung der betrachteten Literatur

Mittlerweile gibt es eine große Menge an populärwissenschaftlicher Literatur, die sich mit Mathematik beschäftigt. Ich habe schon ein ganzes Bücherregal voll davon und finde immer wieder neue Bücher, die Mathematik zum Thema haben.

Natürlich kann ich hier nicht alle diese Bücher behandeln. Ich habe einige Werke weggelassen, die sich mit mathematischen Spielen und Rätseln beschäftigen, und auch diejenigen, die nur ein bestimmtes Problem behandeln. So bleiben wunderbare Bücher wie Donal O'Sheas „Poincarés Vermutung – die Geschichte eines mathematischen Abenteuers“ und Simon Singhs „Fermats letzter Satz – die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels“ außen vor. Auch mit Simon Singhs äußerst humorvollem Buch „Homers letzter Satz – Die Simpsons und die Mathematik“ werde ich mich hier nicht auseinandersetzen. Dennoch gibt es noch viele Werke, die mir für diese Arbeit passend erschienen.

Im Folgenden möchte ich einen Überblick über die Autoren und Inhalte der populärwissenschaftlichen mathematischen Bücher geben, die in dieser Diplomarbeit betrachtet werden.

Außerdem zitiere ich die Klappentexte der jeweiligen Bücher, da diese Texte Lust auf ein Buch machen sollen, das sich mit Mathematik beschäftigt. Die meisten funktionieren nach demselben Prinzip: *Mathematik war in der Schule langweilig, aber der Autor des jeweiligen Buches zeigt, dass Mathematik auch Spaß machen kann*. Dabei ist es wichtig zu erwähnen, dass die Klappentexte nicht von den Autoren selbst verfasst werden, sondern von der jeweiligen Marketingabteilung der Verlage, die diese Bücher herausgeben. Ich glaube allerdings nicht, dass jemand, der mit Mathematik nichts anfangen kann, jemals ein Buch kaufen wird, das gerade die Mathematik zum Thema hat. Ich hoffe jedoch, dass ich das eine oder andere Beispiel oder Kapitel aus diesen

Büchern in meinem Unterricht verwenden kann, um meinen Schülerinnen und Schülern einen anderen Blickwinkel auf die Mathematik aufzuzeigen.

3.1 Christoph Drösner: „Der Mathematikverführer – Zahlenspiele für alle Lebenslagen“

„Christoph Drösner, geboren 1958, studierte in Bonn Mathematik und Philosophie. Er ist Redakteur im Bereich Wissen bei der „Zeit“. Von 2004 bis 2006 entwickelte er als Chefredakteur das Magazin „Zeit Wissen“. 2005 kürte ihn das Medium-Magazin zum „Wissenschaftsjournalisten des Jahres“.“⁷

In „Der Mathematikverführer – Zahlenspiele für alle Lebenslagen“ befasst sich Christoph Drösner mit mathematischen Problemstellungen, die in Alltagssituationen eingebettet sind. Er erzählt mathematische Anekdoten oder baut eine nette, witzige Geschichte um den mathematischen Kern auf, in die sich jeder hineinversetzen kann, auch wenn er oder sie mit der Mathematik nicht so viel am Hut hat.

Das Buch hat einen Umfang von 240 Seiten und behandelt in 17 Kapiteln die Bereiche

- Größenordnungen
- Bedingte Wahrscheinlichkeit
- Dreisatz – Schlussrechnungen
- Unterschiede und Vorteile von arithmetischem Mittelwert, Median und Modus
- La-Place-Wahrscheinlichkeit
- Wahl-Mathematik
- Benfords Gesetz
- Martingale beim Roulette, Erwartungswert, „Gesetz der Serie“

⁷ Christoph Drösner: „Der Mathematikverführer“, S. 2

- Goldener Schnitt
- Simpsons Paradoxon
- Extremwertaufgaben
- Lineares, quadratisches und exponentielles Wachstum
- Das Problem des Handlungsreisenden
- Pythagoräischer Lehrsatz
- Mathematik in Johann Sebastian Bachs „Wohltemperiertem Klavier“
- Lineare Gleichungssysteme
- Quadratur des Kreises.

Am Ende jedes Kapitels findet sich unter dem Titel „Ausgerechnet“ jeweils ein Beispiel oder eine Denksportaufgabe, wie etwa das Geburtstagsparadoxon, deren Lösungen und Erläuterungen auf der Internetseite des Verlages (www.rowohlt.de/mathematikverfuehrer) zu finden sind.

Im Anhang des „Mathematikverführers“ befindet sich außerdem eine Liste, die Formeln, Erläuterungen und teilweise Beweise zu den Binomischen Formeln, Quadratischen Gleichungen, Zahlbereichen, Potenzen und Logarithmen und Kombinatorik enthält.

Ich musste bei so manchem Kapitel im „Mathematikverführer“ schmunzeln oder lachen und auch Freunde und Verwandte, denen ich etwas erzählte oder daraus zu lesen „vorlegte“, fanden (und hier möchte ich meine Kollegin Verena zitieren, als wir uns per E-Mail über das Heiratsproblem unterhielten): *„cooles problem aber ;) also witzig für mathe ;)“* Ich hoffe, dass ich das eine oder andere Beispiel oder Kapitel in meinen Unterricht einbauen kann, um meinen Schülerinnen und Schülern zu zeigen, dass Mathematik auch aus „Alltagsproblemen“ entstehen oder diese lösen kann und dass dabei auch gelacht werden darf und soll.

„Mathematik muss kein nerviges und sperriges Zahlenwerksein, mit dem sich Schüler, Lehrer, Eltern und wir alle immer wieder abquälen – eigentlich kommen ihre Grundlagen ja aus dem praktischen Alltagsleben und die Beschäftigung damit kann richtig Spaß machen. Das beweist Christoph Drösner in diesem Buch. Viele der grundlegenden mathematischen Verfahren und Operationen sind einmal entstanden um ganz praktische Probleme zu lösen. Christoph Drösner nutzt dies aus und erklärt gängige Rechenverfahren wie den Dreisatz, die Bruchrechnung oder die Wahrscheinlichkeitsrechnung anhand von einleuchtenden und oft überraschenden Alltagsbeispielen.“⁸

3.2 Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen – eine mathemagische Reise“

„Alex Bellos studierte Mathematik und Philosophie, ehe er als Journalist in London und Rio de Janeiro arbeitete. „Alex im Wunderland der Zahlen“ war in Großbritannien ein Bestseller. Alex Bellos lebt in London.“⁹

Ganz in bester Journalisten-Manier reist Alex Bellos um die Welt, trifft viele bemerkenswerte Menschen, die auf die eine oder andere Art, laienhaft oder professionell Mathematik praktizieren, und spricht mit ihnen. Von Pierre Pica, einem Linguisten, der die Mundurucu, ein indigenes Volk im brasilianischen Amazonas-Gebiet, studiert hat, lässt er sich erzählen, dass dieses Volk keine Zahlwörter über fünf kennt. In Japan besucht er einen Sorban-Club, in dem Schüler nach der Schule das Rechnen mit Rechenschiebern üben und auch bei Wettkämpfen antreten. Jerome Carter, ein professioneller Numerologe klärt ihn über die Mystik von Zahlen, Geburtsdaten und Namen auf. Der vedische Mathematiker Nischalanand Saraswati, der Nachfolger Swami Bharatis, redet mit Alex Bellos in Indien

⁸ Klappentext zu Christoph Drösner: „Der Mathematikverführer“

⁹ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 2

über den Zusammenhang von Mathematik und Spiritualität und die Bedeutung der Zahl Null. In Leipzig beobachtet Alex Bellos die Weltmeisterschaft im Kopfrechnen. Peter Hopp, ein pensionierter Elektroingenieur, zeigt ihm eine der größten Rechenschiebersammlungen. Er besucht Maki Kaji, einen japanischen Rätselherausgeber, der daran beteiligt war, Sudokus so beliebt zu machen, und Martin Gardner, einen der bekanntesten Vertreter der Unterhaltungsmathematik. In Atlanta trifft er Neil Sloane, der Folgen sammelt. Aus dieser Sammlung hat sich die *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* entwickelt. Bellos erörtert mit dem pensionierten Zahnarzt Eddy Levin den Goldenen Schnitt und die Fibonacci-Folge, denn Levin war beim Anfertigen von künstlichen Gebissen darauf gekommen, dass diese am natürlichsten wirken, wenn die Proportionen dem Goldenen Schnitt folgen. In Reno redet er mit Anthony Baerlocher, einem Mathematiker, dessen Beruf es ist, als Entwicklungsleiter eines Spielautomatenherstellers die Gewinnchancen bei Spielautomaten zu bestimmen, über Erwartungswerte und Auszahlungsquoten. Außerdem lässt sich Alex Bellos von Daina Taimina ihre gehäkelten Modelle von hyperbolischen Flächen zeigen.

Alex Bellos berichtet mit einer bemerkenswerten Liebe zum Detail über diese Treffen und bettet diese Berichte in historische Abrisse, unterhaltsame Anekdoten und verständliche Erklärungen und Beweise.

„Im Wunderland der Zahlen“ beherbergt auf 480 Seiten 12 Kapitel, wobei diese von 0 bis 11 durchnummeriert sind. (*„Dieses Buch beginnt mit einem nullten Kapitel, was ausdrücken soll, dass es darin um ein prämathematisches Thema geht, nämlich darum, wie die Zahlen entstanden sind.“*¹⁰) Alex Bellos behandelt in diesem Buch unter anderem folgende Themen:

- Entstehung der Zahlen
- Zahlensysteme
- Numerologie

¹⁰ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 15

- Euklidische Geometrie
- Pythagoräer und Satz des Pythagoras
- Platonische Körper
- Primzahlen
- Origami
- Sierpinski-Teppich und Menger-Schwamm
- Zahlensymbole und die Bedeutung der Zahl Null
- Rechenmethoden für Multiplikationen
- Die Zahl π , ihre Dezimalstellenentwicklung und transzendente Zahlen
- Symbole in der Mathematik und deren Bedeutung für die Algebra
- Logarithmen und die daraus resultierende Vereinfachung von Multiplikationen, Divisionen, Potenzieren und Wurzelziehen
- Analytische Geometrie
- Unterhaltungsmathematik
- Folgen
- Goldener Schnitt und die Fibonacci-Folge
- Wahrscheinlichkeitsrechnung und Glücksspiel
- Statistik
- Hyperbolische Geometrie
- Abzählbare und nicht abzählbare Unendlichkeit und Hilberts Hotel

Im Anhang finden sich zusätzliche Beweise zum Satz des Pythagoras, der Beweis, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, ein magisches Quadrat von Benjamin Franklin mit der Seitenlänge 16, Erläuterungen zur *Gijswijt-Folge*, der Beweis, dass die harmonische Reihe divergiert, und die Darstellung des Goldenen Schnittes als Kettenbruch.

„Im Wunderland der Zahlen“ ist ein Juwel, in jedem Satz spürt man, mit welcher Liebe zur und Begeisterung für die Mathematik dieses Buch geschrieben wurde. Man kann gar nicht anders, als die Schönheit zu

bewundern, die sich in der Mathematik verbirgt, wenn Alex Bellos erzählt. Bei der Lektüre wurden mir noch einmal etliche Zusammenhänge klar und das Kapitel „*Etwas über das Nichts*“ war eine Offenbarung, wie wichtig die Einführung der Zahl Null für die Entwicklung der Mathematik war. Dieses großartige Buch hat den Ausschlag zur Wahl des Themas meiner Diplomarbeit gegeben.

„Erinnern wir uns nicht alle mit Schrecken an die ratlosen Momente vor der Tafel im Mathematikunterricht? Mit Kurvendiskussionen und Dreisatz dürften jedenfalls nur wenige Spaß und Spannung verbinden. Bis jetzt! Denn nun wagt sich Alex Bellos in den Kaninchenbau der Mathematik: in das Reich der Geometrie und Algebra, von Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und logischen Paradoxa. Mit seiner Mischung aus spannender Reportage, Wissenschaftsgeschichte und mathematischen Kabinettstückchen erbringt er souverän den Beweis, dass die Gleichung Mathematik = Langeweile eindeutig nicht wahr ist.“¹¹

3.3 Rudolf Taschner: „Zahl Zeit Zufall. Alles Erfindung?“

„Univ.-Prof. Dr. Rudolf Taschner, geboren 1953 südlich von Wien, studierte an der Universität Wien Mathematik und Physik. 1977 begann er an der Technischen Universität Wien zu arbeiten, an der er nach einem Zwischenaufenthalt in Stanford bis heute als Professor tätig ist. Rudolf Taschner gründete und betreibt zusammen mit seiner Frau und Kollegen der Technischen Universität Wien „math.space“, einen Veranstaltungsort im Wiener MuseumsQuartier, der Mathematik als kulturelle Errungenschaft präsentiert und mehr als 30.000 Besucher im Jahr anlockt. 2004 wurde Prof. Taschner vom Klub der Bildungs- und Wissenschaftsjournalisten zum Wissenschaftler des Jahres gewählt.“¹²

¹¹ Klappentext zu Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“

¹² Klappentext zu Rudolf Taschner: „Zahl Zeit Zufall“

„Zahl Zeit Zufall“ umfasst 190 Seiten und ist in folgende sechs Kapitel gegliedert:

- Alles ist Zahl
- Alles ist Zeit
- Alles ist Zufall
- Die Erfindung des Zufalls
- Die Erfindung der Zeit
- Die Erfindung der Zahl

Rudolf Taschner verpackt mit einer wunderbaren Leichtigkeit mathematische und andere wissenschaftliche Sachverhalte, wie etwa Chemie, Physik, Astronomie usw., in unterhaltsame Geschichten und erklärt sie so, dass auch die Menschen etwas damit anfangen können, die die Beschäftigung mit Mathematik sonst eher meiden. Eine liebe Freundin hat mir vor einiger Zeit erklärt, dass sie zwar nicht wirklich viel Ahnung von Mathematik hat, aber einmal einen Vortrag von Rudolf Taschner gehört hat und total davon fasziniert war, wie großartig er erzählt.

„Der blinde Zufall scheint unser Geschick zu leiten – aber was ist Zufall? Wir glauben uns dem Diktat der Zeit unterworfen – aber was ist Zeit? Nur was man mit Zahlen belegen kann, zählt – aber woher kommen die Zahlen?“

Rudolf Taschner nähert sich solch tiefgründigen Fragen mit heiterer Gelassenheit, verständlich und unterhaltsam zugleich. Unterstützt von anschaulichen Bildern, Geschichten und subtilen Anekdoten verführt er uns zu mathematischen Seitensprüngen, aber auch zur Einsicht: Immer, wenn man Zeit oder Zufall zu fassen vermeint, verflüchtigen sich beide blitzschnell ins unendliche Reich der Zahlen. Zahl, Zeit und Zufall sind untrennbar ineinander verwoben, und das Geflecht, das sie zusammenhält, ist nicht irgendwo „draußen“, „im Universum“, sondern in uns selbst, in unserem Denken und in unserem Bewusstsein.“¹³

¹³ Klappentext zu Rudolf Taschner: „Zahl Zeit Zufall“

3.4 Albrecht Beutelspachers „Kleines Mathematikum – Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik“

„Albrecht Beutelspacher, geb. 1950, ist seit 1988 Professor für Geometrie und Diskrete Mathematik am Mathematischen Institut von Gießen. Das von ihm gegründete Mathematikum, dem er seit 2002 als Direktor vorsteht, ist das erste mathematische Mitmachmuseum. Für seine Vermittlungsbemühungen in Sachen Mathematik wurde er vielfach ausgezeichnet, u.a. mit dem Communicator-Preis des Stifterverbands für die Deutsche Wissenschaft, dem Deutschen IQ-Preis und dem Hessischen Kulturpreis. Beutelspacher ist bekannt für die unterhaltsame und anschauliche Vermittlung seines Fachgebiets und begeistert damit nicht nur seine Studierenden, sondern auch die Leser seiner Bücher. Mit „Wie man durch eine Postkarte steigt“ und „Kleines Mathematikum“ eroberte er die Bestsellerlisten.“¹⁴

Albrecht Beutelspacher beantwortet in diesem Buch auf 192 Seiten 101 konkrete Fragestellungen zur Mathematik sehr einfach und klar verständlich. Die Fragen und Antworten sind in folgende Gebiete zusammengefasst:

- Grundlagen
- Zahlen
- Formen und Muster
- Formeln
- Zufall
- Infinitesimal
- Anwendungen
- Probleme
- Mathematiker
- Lehren und lernen
- Daneben und darüber hinaus

¹⁴ Albrecht Beutelspacher: „Kleines Mathematikum“, Seite 2

Dieses Buch ist ein kleiner Schatz, der gefüllt ist mit kurzen, prägnanten Erklärungen und kleinen Anekdoten. Ich habe mich selbst dabei erwisch, wie ich immer wieder bei meinen Unterrichtsvorbereitungen einen Blick in das „Kleine Mathematikum“ geworfen habe, um nach Antworten auf Fragen, die meine Schülerinnen und Schüler stellen könnten, zu suchen und mich inspirieren zu lassen.

„Warum ist $2 + 2 = 4$? Ist Null eine gerade Zahl? Warum sind Mathematiker so weltfremd? Können Außerirdische unsere Mathematik verstehen? Diese und viele andere Fragen rund um sein Fachgebiet hört Albrecht Beutelspacher, Direktor des einzigartigen Mitmachmuseums für Mathematik, von den Besuchern immer wieder. Die 101 interessantesten, originellsten und meistgestellten Fragen beantwortet der Mathematik-Erklärer in seinem „Kleinen Mathematikum“ verständlich, unterhaltsam – und ohne Formeln!“¹⁵

3.5 Ian Stewart: „Professor Stewarts mathematisches Sammelsurium“

„Ian Stewart, geboren 1945, ist der beliebteste Mathematik-Professor Großbritanniens. Seit Jahrzehnten bemüht er sich erfolgreich, seine Wissenschaft zu popularisieren. Er studierte Mathematik in Cambridge und promovierte an der Universität Warwick. Dort ist er heute Professor für Mathematik und Direktor des Mathematics Awareness Center. Seit 2001 ist Stewart zudem Mitglied der Royal Society. Er lebt mit seiner Familie in Coventry.“¹⁶

„Professor Stewarts mathematisches Sammelsurium“ ist nett und verständlich verfasst. Das 382 Seiten umfassende Buch enthält mathematische Anekdoten, Erläuterungen, Aufgabenstellungen,

¹⁵ Klappentext zu Albrecht Beutelspachers „Kleines Mathematikum“

¹⁶ Ian Stewart: „Professor Stewarts mathematisches Sammelsurium“, Seite 2

Denksportaufgaben und Witze. Circa das letzte Viertel des Buches umfasst die Lösungen zu den Aufgaben und Antworten zu den Fragen.

Was mir leider beim „Mathematischen Sammelsurium“ fehlt, ist ein roter Faden, der sich durchzieht. Ich konnte kein System entdecken, wie die einzelnen Beantwortungen der Fragestellungen und die Beispiele angeordnet sind, daher ist es auch schwierig, etwas Bestimmtes darin zu finden, selbst wenn man das Buch schon einmal gelesen hat.

„Er ist der beliebteste Mathematik-Professor Großbritanniens und auch in Deutschland längst Kult. Seit seinem 14. Lebensjahr hat IAN STEWART mathematische Kleinoden gesammelt, wie sie in der Schule nicht gelehrt werden: ein fabelhaftes Sammelsurium von Spielen, Rätseln, Kartentricks und Puzzles, von Anekdoten und Fakten. Auch mathematische Klassiker werden frisch und neu erklärt. Lassen Sie sich überraschen!“¹⁷

3.6 Christian Hesse: „Warum Mathematik glücklich macht – 151 verblüffende Geschichten“

„Christian Hesse promovierte an der Harvard University (USA) und lehrte an der University of California, Berkeley (USA). Seit 1991 ist er Professor für Mathematik an der Universität Stuttgart.“¹⁸

„Warum Mathematik glücklich macht“ umfasst 346 Seiten. Christian Hesse hat seine Geschichten in die folgenden Themen geordnet:

- Alltagsweltliches
- Spiel und Zauber
- Sprache und Literatur

¹⁷ Klappentext zu Ian Stewart: „Professor Stewarts mathematisches Sammelsurium“

¹⁸ Christian Hesse: „Warum Mathematik glücklich macht“, Seite 2

- Gesunder Menschenverstand
- Geschichte und Geschichten
- Philosophisches und Psychologisches
- Wissenschaft und Technik
- Menschen, Tiere, Sensationen
- Kunst, Kultur, Kommunikation
- Alles Mögliche

„Warum Mathematik glücklich macht“ ist nicht so einfach und leicht verständlich verfasst, wie etwa Albrecht Beutelspachers „Kleines Mathematikum“ und daher – meiner Meinung nach – nicht unbedingt etwas für Laien.

Zwischen den mathematischen Beiträgen finden sich immer wieder witzige Fundstücke aus den Medien, Witze und Bilder, welche aber in die einzelnen Beiträge eingeschoben sind, wohl um diese aufzulockern. Meiner Meinung nach unterbrechen diese Einschübe aber den Lesefluss und bringen den Leser – vor allem bei komplizierteren Sachverhalten – aus dem Konzept, zumindest ist es mir bei der Lektüre so gegangen.

„Wie die Liebe und die Musik hat Mathematik die Gabe, Menschen glücklich zu machen. Angesichts ihrer oft kargen Darreichungsform eine kühne Behauptung? Dafür, dass sie dennoch stimmt, tritt der Mathematiker und Mathematik-Belletrist Christian Hesse in diesem Buch den Beweis an – in 151 so verblüffenden wie gewitzten Geschichten.“¹⁹

¹⁹ Klappentext zu Christian Hesse: „Warum Mathematik glücklich macht“

3.7 Gero von Randow: „Das Ziegenproblem – Denken in Wahrscheinlichkeiten“

„Gero von Randow, Jahrgang 1953, ist Redakteur der Hamburger Wochenzeitung DIE ZEIT. Für seine Bücher und Artikel erhielt er zahlreiche Auszeichnungen, u.a. den Medienpreis der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Preise des Vereins Deutscher Ingenieure, der Society for News Design, des Deutschen Wein-Instituts, den Prix Lanson und den European Science Writers Award.“²⁰

In „Das Ziegenproblem“ rollt Gero von Randow anhand des Ziegenproblems die gesamte Wahrscheinlichkeitsrechnung auf. Das Ziegenproblem behandelt folgende vieldiskutierte Fragestellung: In einer Quizshow kann der Kandidat zwischen drei Türen wählen, hinter einer Tür steht der Hauptpreis, ein Auto, hinter den beiden anderen jeweils eine Ziege, die Niete. Nachdem der Kandidat eine Tür gewählt hat, lässt der Moderator eine der beiden anderen Türen öffnen, dahinter steht eine Ziege. Nun stellt der Moderator dem Kandidaten die Frage, ob er bei seiner Wahl bleibt, oder ob er doch zur anderen verbliebenen Tür wechseln möchte. Soll der Kandidat bei seiner Wahl bleiben, oder lieber die andere Tür wählen?

Zwischen einigen verschiedenen Erklärungen zum Ziegenproblem und Beweisen der Lösung des Ziegenproblems und verwandter Aufgaben- und Problemstellungen erklärt Gero von Randow die Wahrscheinlichkeitsrechnung von den Grundzügen, wie der Additions- und Multiplikationsregel, über die bedingte Wahrscheinlichkeit und philosophische und religiöse Ansätze, wie Pascals Berechnung des Erwartungswertes paradiesischer Freuden und dem Laplace'schen Dämon, bis hin zu den Zusammenhängen mit Ludwig Erhard Boltzmanns Entropiesatz, Markov-Ketten und der Quantenphysik.

²⁰ Gero von Randow: „Das Ziegenproblem“, Seite 2

Das Buch umfasst 208 Seiten, im Glossar werden einige Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung definiert, es dient also auch dazu, schnell den einen oder anderen Begriff nachzuschlagen.

„Die hellsten Köpfe scheitern, wenn es um Wahrscheinlichkeiten geht; unser Denken ist auf sie nicht eingestellt. Anlass genug, sich gründlich mit dem Ziegenproblem, aber auch mit dem Botendilemma, der Kontrollillusion, mit blinden Hühnern, Fehlersaat, Affen als Romanciers und anderen Wundern und Fallstricken der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu befassen. „Die Mathematik kann sehr, sehr komisch sein“, so der Autor im Vorwort der überarbeiteten Neuausgabe. „Komisch nicht im Sinne, dass das Fach komödiantisch wäre. Aber es hat Witz. Es gibt Beweise, die Kapriolen schlagen, die harmlos mit Kleinkram anfangen und auf einmal eine ganze Welt in Frage stellen. Und komisch ist es allemal, wenn großartige Behauptungen mit ein wenig Mathe ad absurdum geführt werden können.““²¹

²¹ Klappentext zu Gero von Randow: „Das Ziegenproblem – Denken in Wahrscheinlichkeiten“

4. Die Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

„Girolamo Cardano war der Erste, der Fortuna als Geisel nahm. Man könnte sogar behaupten, die Entdeckung der Wahrscheinlichkeit sei eine zentrale Ursache dafür, dass Aberglaube und Religion in den vergangenen Jahrhunderten zunehmend an Bedeutung verloren haben. Wenn sogar unvorhersehbare Ereignisse mathematischen Gesetzen gehorchen, so besteht keine Notwendigkeit, sie mit dem Vorhandensein einer Gottheit zu erklären. Meist wird die Säkularisierung der Welt zwar mit Denkern wie Charles Darwin und Friedrich Nietzsche assoziiert, doch möglicherweise war es niemand anders als Girolamo Cardano, der den Stein ins Rollen brachte.“²²

In „Im Wunderland der Zahlen“ erzählt Alex Bellos im neunten Kapitel: „Glück ist kein Zufall – oder doch?“ (Seiten 307 – 358) von Girolamo Cardano, der im 16. Jahrhundert mit dem *Liber de ludo aleae* das erste Mal die Wahrscheinlichkeit wissenschaftlich analysierte, und von Antoine Gombaud, dem Chevalier de Méré, der im 17. Jahrhundert durch das Teilungsproblem und andere Fragen zum Glücksspiel den Briefwechsel zwischen Blaise Pascal und Pierre de Fermat anregte, der das Fundament der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie schuf.

Auch Albrecht Beutelspacher erläutert in seinem „Kleinen Mathematikum“ in der Beantwortung der 54. Fragestellung „Wie hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung begonnen“ (Seiten 102 – 104) in kurzer aber prägnanter Form das Teilungsproblem.

Rudolf Taschner baut ebenfalls eine Geschichte rund um den Chevalier de Méré und die Frage der Gewinnaufteilung im Kapitel „Die höhere Gewalt“ (Seiten 106 – 110) in sein Buch „Zahl Zeit Zufall“ ein.

²² Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 309

Gero von Randow erwähnt das Teilungsproblem in dem Kapitel „Wir lernen raten“ (Seiten 19 – 55) in „Das Ziegenproblem“ ebenfalls zweimal.

Das Teilungsproblem und andere Fragen zum Glückspiel waren ausschlaggebend für die Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die auf der Korrespondenz zwischen Blaise Pascal und Pierre de Fermat fußt, und daher möchte ich das Teilungsproblem hier genauer betrachten.

4.1 Das Teilungsproblem

Zwei Spieler, nennen wir sie Robert und Josef, spielen folgendes Spiel: Sie werfen eine Münze. Kommt Kopf, gewinnt Robert die Runde, bei Zahl entscheidet Josef die Runde für sich. Derjenige, der zuerst zwei Runden für sich entschieden hat, gewinnt das Spiel. Nun muss das Spiel aber vorzeitig beim Stand 1 : 0 für Robert abgebrochen werden. Wie sollen die Einsätze auf Robert und Josef aufgeteilt werden? Robert argumentiert so, dass er in Führung sei und daher auch das ganze Geld gewinnen solle. Josef meint aber, dass das Spiel ja nicht beendet wurde und daher jeder seinen Einsatz zurückbekommen solle. Wer hat Recht?

Blaise Pascal war der Meinung, dass keiner von beiden Recht hatte. Man müsse nicht nur bedenken, was bisher geschehen ist, sondern auch die Ereignisse, die in der Zukunft noch passieren können in die Entscheidung miteinbeziehen. Würden Robert und Josef weiterspielen und in der nächsten Runde käme Kopf, so hätte Robert gewonnen, da er zwei Runden für sich entschieden hätte. Käme aber Zahl stünde es 1 : 1. In diesem Fall müsste noch eine Runde gespielt werden. Bei Kopf gewänne Robert, bei Zahl Josef. Wie müsste aufgrund dieser Überlegungen der Einsatz also aufgeteilt werden? Da es sich um eine faire Münze handelt, ist sowohl die Wahrscheinlichkeit für Kopf als auch die Wahrscheinlichkeit für Zahl jeweils $\frac{1}{2}$. Also gewänne

Robert in der Hälfte der Fälle die zweite Runde, in der anderen Hälfte der Fälle käme es zur dritten Runde, die wieder in der Hälfte der Fälle Robert und in der anderen Hälfte der Fälle Josef gewinnen würde, das sind jeweils $\frac{1}{4}$ aller möglichen Fälle. Zusammengefasst würde Robert in $\frac{3}{4}$ der Fälle gewinnen, Josef nur in $\frac{1}{4}$ der Fälle. Die Einsätze müssten also gerechterweise so aufgeteilt werden, dass Robert $\frac{3}{4}$ der Einsätze und Josef $\frac{1}{4}$ der Einsätze bekämen. Man kann das Ganze auch mit einem Baumdiagramm verdeutlichen:

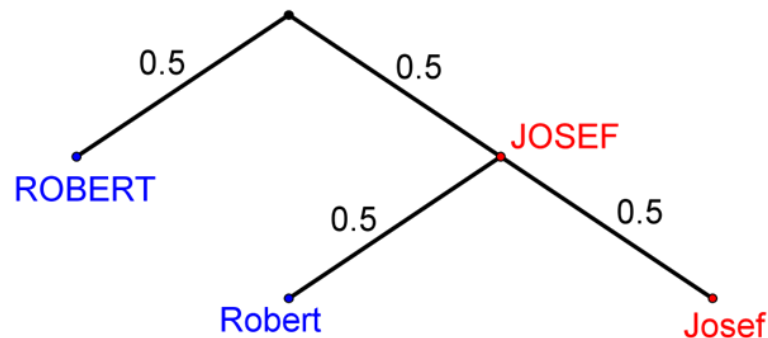


Abbildung 2: Baumdiagramm zum Teilungsproblem

Außerdem brauchen wir zu Berechnung zwei grundlegende Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung, nämlich die Multiplikationsregel und die Additionsregel.

Formel 3: Multiplikationsregel

Multiplikationsregel:

Treffen mehrere voneinander unabhängige Ereignisse zu, werden die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse multipliziert.

$$P(A \text{ und } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Formel 4: Additionsregel

Additionsregel:

Kann ein Ereignis durch mehrere verschiedene Möglichkeiten zustande kommen, werden die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Möglichkeiten addiert.

$$P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B)$$

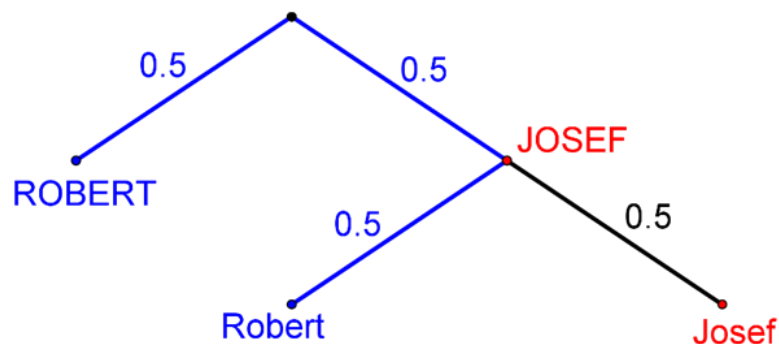


Abbildung 3: Baumdiagramm: Pfade zu Roberts Sieg

Die Fälle, in denen Robert das gesamte Spiel gewinnt (im Baumdiagramm blau markiert), sind, dass er entweder die nächste Runde gewinnt (die Wahrscheinlichkeit dafür ist 0,5) oder dass Robert zwar die nächste Runde verliert, aber die übernächste Runde wieder gewinnt (die Wahrscheinlichkeit dafür ist $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$, da ja beide Ereignisse [Robert verliert die nächste **und** gewinnt die übernächste Runde] zutreffen müssen). Da Robert in diesen beiden Fällen gewinnt (Robert gewinnt die nächste Runde **oder** er verliert die nächste und gewinnt die übernächste Runde), muss man diese beiden Einzelwahrscheinlichkeiten noch addieren: $0,5 + 0,25 = 0,75$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % würde Robert also das Spiel noch gewinnen, daher stehen ihm auch 75 % der Einsätze zu.

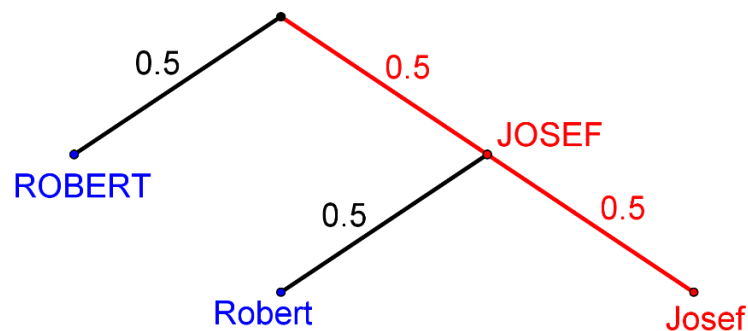


Abbildung 4: Baumdiagramm: Pfad zu Josefs Sieg

Josef hat nur noch eine Möglichkeit das Spiel noch zu gewinnen (im Baumdiagramm rot markiert), er müsste die beiden nächsten Runden (also die nächste **und** die übernächste Runde) gewinnen. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 25 % würde Josef das Spiel noch gewinnen und daher stehen ihm 25 % der Einsätze zu.

4.1.1 Das Teilungsproblem in der populärwissenschaftlichen Literatur

Bei jedem Autor wird das Spiel anders beschrieben: Bei Rudolf Taschner spielt der Chevalier de Méré mit einem unbekannten Gegner um ein Landgut, wobei derjenige gewinnt, der als Erster dreimal mit einem Würfel die höhere Augenzahl gewürfelt hat.

Bei Gero von Randow wird ebenfalls von zwei Spielern gewürfelt und der, der die höhere Augenzahl würfelt, bekommt einen Punkt, nur gewinnt in diesem Fall derjenige, der zuerst fünf Punkte hat.

Bei Alex Bellos und Albrecht Beutelspacher wird eine Münze geworfen, bei Alex Bellos gewinnt derjenige, der drei Runden für sich entscheidet, bei Albrecht Beutelspacher reichen zwei gewonnene Runden.

Aber egal, ob jetzt die höhere Augenzahl beim Würfeln oder die Münze entscheidet, und egal, wie viele Runden gewonnen werden müssen, in jedem

Fall wird das Spiel vorzeitig bei einem Spielstand abgebrochen, sodass einer der beiden Spieler nur noch eine Runde gewinnen müsste, der andere jedoch zwei, und in jedem Fall ist die gerechte Aufteilung der Einsätze dann 75 % : 25 %.

4.1.2 Einwand zum Teilungsproblem

Alle anderen Autoren belassen es bei der Erklärung, wie die Einsätze gerecht geteilt werden müssten, aber Rudolf Taschner geht noch einen Schritt weiter und behandelt auch einen Einwand, den der Chevalier de Méré in der Korrespondenz mit Blaise Pascal erhoben hat: Man könne ja auch folgendermaßen argumentieren: Eigentlich gibt es ja nur drei mögliche Ausgänge für das Spiel:

1. Robert gewinnt die nächste Runde und hat somit als Erster drei Runden und das Spiel gewonnen.
2. Josef gewinnt die nächste Runde, Robert die übernächste und wieder gewinnt Robert das Spiel.
3. Josef gewinnt sowohl die nächste als auch die übernächste Runde und ist somit der Sieger.

In zwei von drei möglichen Ausgängen gewinnt Robert das Spiel, in nur einem Josef, damit müssten also Robert $\frac{2}{3}$ der Einsätze, Josef nur $\frac{1}{3}$ der Einsätze zugesprochen werden.

Allerdings wird bei diesem Einwand nicht bedacht, dass die drei möglichen Ausgänge nicht gleich wahrscheinlich sind. Rudolf Taschner lässt es Blaise Pascal damit erklären, dass man sich nur anschauen müsse, welche Ausgänge möglich wären, wenn man das Spiel nicht beendet, wenn Robert die nächste Runde gewinnt, sondern auch dann die letzte Runde zu Ende spielt. (Im Folgenden habe ich eine Runde, die Robert für sich entscheidet,

mit R und eine Runde, die Josef gewinnt, mit J abgekürzt.) Die Möglichkeiten schauen folgendermaßen aus: RR RJ JR JJ

In drei der vier möglichen Ausgänge gewinnt Robert das Spiel (RR, RJ, JR) und nur im Fall JJ geht Josef als Sieger aus dem Spiel.

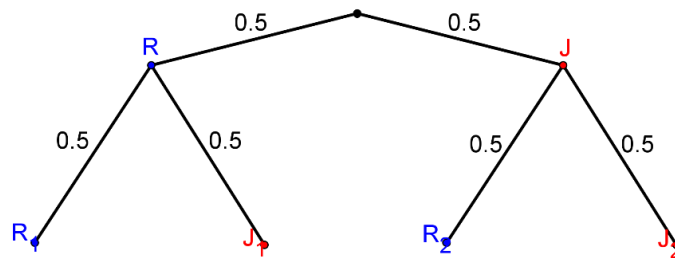


Abbildung 5: Baumdiagramm: zwei weitere Runden

Außerdem lässt sich auf diese Weise auch betrachten, wie das Spiel ausgehen könnte, wenn noch eine weitere Runde angehängt würde (nun gäbe es acht mögliche Ausgänge): RRR, RRJ, RJR, RJJ, JRR, JRJ, JJR, JJJ

In den Fällen RRR, RRJ, RJR, RJJ, JRR und JRJ würde wiederum Robert gewinnen, nur in den Fällen JJR und JJJ entschiede Josef das Spiel für sich, also gewänne Robert in $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ der Fälle, Josef nur in $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ aller möglichen Ausgänge, und daher müsste auch nun wieder der Einsatz $\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$ aufgeteilt werden.

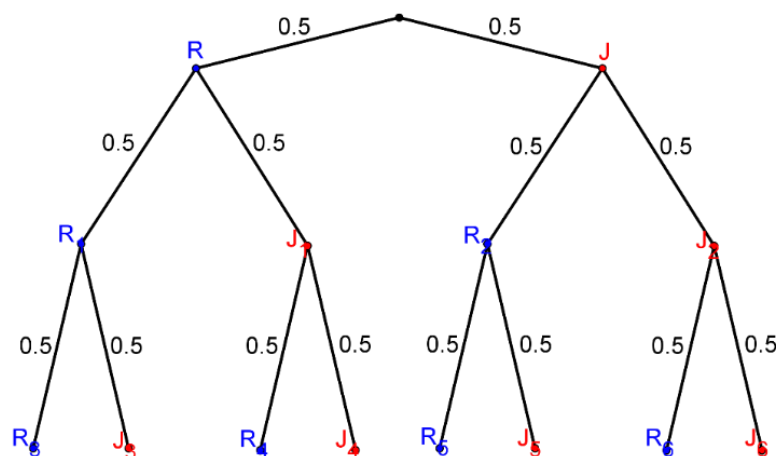


Abbildung 6: Baumdiagramm: drei weitere Runden

5. Fairplay

Das achte Kapitel „Fairplay oder Ein perfektes System“ (Seiten 82 – 95) aus Christoph Drössers „Der Mathematikverführer – Zahlenspiele für alle Lebenslagen“ handelt von zwei Freunden, die zum ersten Mal ein Kasino besuchen, um Roulette zu spielen.

5.1 Roulette

Der Roulettekessel hat 37 Fächer, die mit den Zahlen von 0 bis 36 beschriftet sind und in die die Kugel fallen kann, die der Croupier entgegen der Drehrichtung des Kessels hineinrollt. Jeder Zahl ist entweder die Farbe Rot oder Schwarz zugeordnet (18 rote und 18 schwarze Zahlen), außer der Zahl Null, diese ist grün. *„Beim Roulette kann man auf einzelne Zahlen setzen, aber auch auf Paare sowie Gruppen von vier oder sechs Zahlen; man kann auf gerade („pair“) und ungerade („impair“) Zahlen wetten, auf Rot („rouge“) und Schwarz („noir“) sowie auf die Ziffern bis 18 („manque“) und die ab 19 („passe“). Und es gibt die ärgerliche Null („zero“).“*²³ Außerdem kann man auch auf die Zahlen einer Kolonne setzen, das ist eine der senkrechten Spalten auf dem Spielfeld, oder auf das erste, das zweite oder das dritte Drittel („Dutzend“) der Zahlen.

Setzt man auf eine einzelne Zahl und kommt diese, so erhält man seinen Einsatz zurück und zusätzlich noch das 35-Fache des Einsatzes. Bei einem Paar bekommt man zum Einsatz noch das 17-Fache des Einsatzes dazu, bei vier Zahlen zum Einsatz noch das 8-Fache des Einsatzes und bei sechs Zahlen zum Einsatz noch das 5-Fache des Einsatzes. Setzt man auf eine Kolonne oder auf eines der Drittel, erhält man zusätzlich zu seinem Einsatz noch das Doppelte des Einsatzes zurück. Setzt man allerdings auf eine einfache

²³ Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 82 f

Chance – gerade oder ungerade, Rot oder Schwarz, die Ziffern bis 18 (ohne 0) oder die Ziffern ab 19 – erhält man zum Einsatz noch einmal den Einsatz dazu.

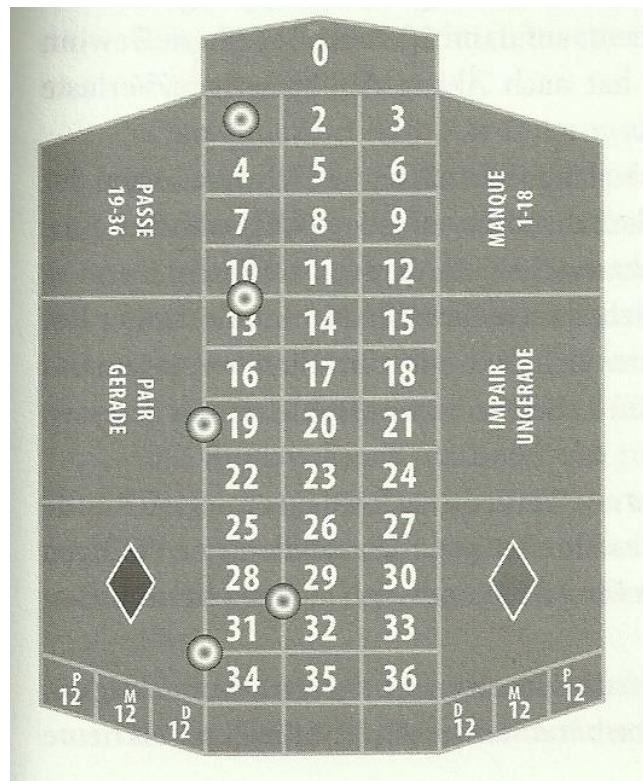


Abbildung 7: Roulettespielfeld²⁴

Gäbe es die Null („zero“) nicht, wäre Roulette ein faires Spiel. Man bekommt ja, wenn man auf eine Zahl setzt, den Einsatz plus das 35-fache des Einsatzes zurück, also den 36-fachen Einsatz. Allerdings gibt es ja wegen der Null 37 Zahlen und daher ist die Wahrscheinlichkeit, auf die richtige Zahl zu setzen, $\frac{1}{37} \approx 0,027 \approx 2,7\%$. Damit das Spiel fair wäre, müsste also der 37-fache Einsatz ausbezahlt werden. Von der Null lebt das Kasino – und das nicht zu schlecht.

²⁴ Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 83

In Europa ist die eben erklärte Roulettevariante üblich, in Amerika gibt es meist neben der einfachen Null noch die Doppelnull, somit gibt es nicht nur 37 sondern 38 Zahlen und die Wahrscheinlichkeit, die richtige Zahl zu erraten, fällt auf $\frac{1}{38} \approx 0,0263 \approx 2,63 \%$.

Nun aber zurück zu Christoph Drössers Geschichte:

Einer von beiden Freunden, Frank, ist davon überzeugt, mit der Strategie „*Martingale*“ (siehe auch Kapitel 5.2, ab Seite 45) beim Roulette zu gewinnen. Dabei setzt man auf eine einfache Chance, wie etwa auf Rot oder Ungerade, falls man richtig setzt, bekommt man den doppelten Einsatz zurück, liegt man aber falsch, verdoppelt man in der nächsten Runde den Einsatz, um den Verlust wettzumachen. Das macht man so lange, bis man gewinnt. Frank hat 20 475 Euro mit, die passende Summe, um mit einem Starteinsatz von 5 Euro elf Mal zu verlieren und noch ein zwölftes Mal setzen zu können. Die Freunde beginnen also zu spielen und Frank setzt auf Schwarz. Es kommt, wie es kommen muss, elf Mal hintereinander fällt die Roulettekugel auf Rot. Als Frank in der zwölften Runde 10 240 Euro setzen will, wird ihm vom Croupier eröffnet, dass für diesen Roulettetisch ein Einsatzmaximum von 7 000 Euro besteht. Frank bricht das Spiel ab und hat 10 235 Euro verloren.

Dass elf Mal hintereinander Schwarz kommt, ist keine Ausnahmesituation, der Autor hat sie bereits in der dritten Tagespermanenz²⁵, die er sich angesehen hat, gefunden. Menschen glauben, dass die Werte gleichmäßig verteilt sein müssen. Wenn man sich eine Liste von 100 Werten (Rot oder Schwarz) ausdenken soll, sieht sie in etwa so aus:

²⁵ Permanenzen werden die Zahlenreihen der Rouletteergebnisse genannt, die die Casinos im Internet veröffentlichen. (siehe z.B.: www.westspiel-casinos.info)

„R S RR S R SSS RR S R SS RR S R SSS R S RR SS R S RRR S R S R SSSS R SS
RR S RRR S R SS RR S R SS R S RR S RRR SS R S RR SSS R S RR S R SSS R S
RR SSS R S R S RR S“²⁶

*„Und das hier sind die letzten 100 Zahlen, die am 10. März 2007 am Tisch 10 in
Hohensyburg gefallen sind (die sechs Nullen habe ich herausgenommen):*

R SS R S RRR SSSS RR SS R S R SSSSS RRRRRRRRRRRR S RR SSS R SS R SSS
R S RRRR SSS RRR S R S RR SSSSS RRRR S RRR S RRR SS R SS RRR S RR
SS RR S R S“²⁷

Werte häufen sich beim echten Zufall sehr oft, was dem menschlichen Instinkt wiederum widerspricht, dieses Phänomen wird Spielerfehlschluss genannt. (siehe auch Kapitel 5.4, ab Seite 52)

Trotz allem ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel elf Mal hintereinander auf Schwarz fällt, nicht sehr groß. Für die Berechnung lässt Christoph Drösser die Null außer Acht und veranschlagt die Wahrscheinlichkeit für Rot und für Schwarz jeweils auf $\frac{1}{2}$. Davon ausgehend beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass bei zwei Runden zweimal Rot kommt, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$, die Wahrscheinlichkeit, dass bei drei Runden dreimal Rot kommt, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$, ..., die Wahrscheinlichkeit, dass bei elf Runden elfmal Rot kommt, $\frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2048} \approx 0,0005 \approx 0,05\%$. Das bedeutet, dass in 99,95 % das System funktioniert. Frank hatte also wirklich Pech und er hätte ohnehin nur 5 Euro gewonnen. Da schmerzt ein Verlust von 10 235 Euro besonders. Ob sich das Risiko auszahlt, kommt also auf den Gewinn an.

²⁶ Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 89

²⁷ Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 89 f

Ob ein Spiel als „fair“ angesehen werden kann, wird durch den *Erwartungswert* angegeben. (siehe auch Kapitel 5.3, ab Seite 50)

Formel 5: Erwartungswert

„Konkret ist der **Erwartungswert** so definiert:

Wenn es n mögliche Ereignisse gibt, dann multipliziert man für jedes Ereignis seine Wahrscheinlichkeit p mit dem Gewinn g und summiert das Ganze auf:

$$E = p_1 \cdot g_1 + p_2 \cdot g_2 + \dots + p_n \cdot g_n$$
²⁸

oder kurz:

Formel 6: Erwartungswert

$$E = \sum_{i=1}^n p_i \cdot g_i$$

Auch bei der Berechnung des Erwartungswertes des Roulettebeispiels vernachlässigt Christoph Drösser wieder die Null. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass elf Mal hintereinander Rot kommt, kennen wir ja schon, sie beträgt $\frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2048}$. Wenn das eintritt, verliert Frank 10 235 Euro. Kommt allerdings einmal Schwarz, so gewinnt er 5 Euro. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 11 Würfeln mindestens einmal Schwarz fällt, ist die Gegenwahrscheinlichkeit dazu, dass nie Schwarz (also nur Rot) kommt, daher $1 - \frac{1}{2048} = \frac{2047}{2048}$.

$$E = \frac{1}{2048} \cdot (-10\,235) + \frac{2047}{2048} \cdot 5 = \frac{-10\,235 + 10\,235}{2048} = 0$$

„Erwartungswert Null – das bedeutet, das Spiel ist fair für beide Parteien. Auf lange Sicht gleichen sich Gewinne und Verluste aus.“²⁹

²⁸ Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 91

²⁹ Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 93

Nun wurde aber bei der Berechnung des Erwartungswertes der Einfachheit halber die Null weggelassen. Fällt beim Roulette die Kugel auf die grüne Null, geht der Einsatz nicht verloren, sondern wird bis zur nächsten Runde, in der die Kugel wieder auf Rot oder Schwarz fällt, eingefroren. Kommt dann wieder Rot oder Schwarz, wird entweder der Gewinn ausgezahlt oder der Einsatz geht verloren. Durch die Null wird der Erwartungswert für die Spieler negativ und das Kasino gewinnt. Es gibt also kein System für einen sicheren Gewinn beim Roulette.

„Die winzigen Vorteile der Bank addieren sich am Abend (fast) jeden Tages zu einem hübschen Gewinn. Der beträgt zwar nur einen kleinen Prozentsatz der Spieler-Einsätze, ist aber groß genug, dass die Bank davon gut leben kann. Das „Gesetz der großen Zahl“ (siehe auch Kapitel 5.5, ab Seite 58) garantiert ihr, dass bei vielen Spielen (und jeder Einsatz jedes Spielers ist ein neues Spiel) sich der Gewinn tatsächlich dem Erwartungswert annähert.“³⁰

Was allerdings beim Gesetz der großen Zahl die Spieler verwirrt, ist, dass die meisten meinen, dass dementsprechend oft Schwarz kommen müsse, wenn oft hintereinander Rot gefallen ist, damit sich das Verhältnis ausgleicht. Allerdings wird die Differenz zwischen Rot und Schwarz nicht ernsthaft verkleinert, aber durch die zusätzlichen Werte gleicht sich das Verhältnis von Rot zu Schwarz immer mehr dem Verhältnis 1 : 1 an. Nach der Permanenz von vorhin ist nach 35 Runden 20-mal Rot gefallen und 15-mal Schwarz. Die Differenz beträgt 5. Nach 100 Runden ist 54-mal Rot und 46-mal Schwarz gefallen, die Differenz beträgt 9 und ist somit noch gewachsen. Das Verhältnis zwischen Rot und Schwarz beträgt nach 35 Runden 1,33 : 1; nach 100 Runden nur noch 1,17 : 1. Es verringert sich also nicht der absolute Abstand, sondern nur der relative. *„Es gibt keine ausgleichende Gerechtigkeit, jedenfalls nicht im Glücksspiel.“³¹*

³⁰ Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 93 f

³¹ Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 95

Christoph Drösser spricht in diesem Kapitel einige Themen an, die auch in anderen populärwissenschaftlichen mathematischen Büchern aufgegriffen werden:

5.2 Martingale

Die Martingale ist ein Wettsystem, bei dem nach einem Verlust der Einsatz verdoppelt wird. Martingale ist ursprünglich der Name eines Zaumzeuges für Pferde, das in der Stadt Martigues in der Camargue in Frankreich erfunden wurde.

5.2.1 Martingale in Gero von Randows „Das Ziegenproblem“

Auch in „Das Ziegenproblem – Denken in Wahrscheinlichkeiten“ von Gero von Randow wird im elften Kapitel „Ein blindes Huhn findet auch einmal ein Korn“ (Seiten 157 – 164) das „sichere“ Roulette-System „Martingale“ angesprochen. Gero von Randow erklärt, wie das System funktioniert, allerdings nur, dass man den Einsatz immer verdoppeln muss, um den Verlust wettzumachen, ohne anzugeben, worauf man überhaupt setzen muss. Gero von Randow erwähnt nur kurz und ohne genaue Erklärung, dass es nur in der Theorie funktioniert. *„Dennoch verdienen Casinos viel Geld mit Roulette – weil niemand das Martingale System durchhalten kann, es sei denn er habe unendlich viel Geld, um Verluste in beliebiger Höhe zwischendurch (und in der Hoffnung auf den nächsten Gewinn) verkraften zu können. Allenfalls Wahrscheinlichkeitsmathematiker verfügen über einen unbegrenzten Münzvorrat, und der ist bloße Illusion (was völlig in Ordnung ist, denn sie werfen ja auch nur in ihrer Vorstellung mit Geld um sich).“*³²

³² Gero von Randow: „Das Ziegenproblem“, Seite 157

5.2.2 Martingale in Alex Bellos' „Im Wunderland der Zahlen“

Alex Bellos beschäftigt sich im Kapitel „Glück ist kein Zufall – oder doch?“ (Seiten 307 – 358) seines Buches „Im Wunderland der Zahlen“ auch mit der Martingale und anderen Wettsystemen.

Alex Bellos erklärt die Martingale ganz knapp (*„Das Prinzip besteht schlicht und einfach darin, den Einsatz zu verdoppeln, wenn man verloren hat.“*³³) und befasst sich dann mit der Frage, ob es ratsamer sei, wenn man einen gewissen Geldbetrag zur Verfügung hat, beim Roulette alles auf eine einfache Chance zu setzen oder lieber vorsichtig zu sein und immer nur den kleinstmöglichen Betrag zu setzen. *„Mathematisch gesehen, ist es optimal, mutig zu spielen. Wenn wir ein wenig nachdenken, stellt sich bald heraus, warum: nach dem Gesetz der großen Zahlen ist langfristig mit einem Verlust zu rechnen. Die besten Chancen hat man daher, wenn man so kurz wie möglich spielt.“*³⁴

Nun wendet sich Alex Bellos einem anderen Spiel zu, dem Black Jack, denn dabei kann man, indem man Karten zählt, dem Kasino gegenüber im Vorteil sein (in Alex Bellos' Beispiel beträgt die Gewinnchance 55 %), und vergleicht vier verschiedene Strategien um zu sehen, mit welcher man den Gewinn maximieren kann.

1. Strategie: Alles setzen

Man setzt das gesamte Kapital, verliert man das Spiel, ist man pleite, gewinnt man, setzt man im nächsten Spiel wieder alles. Dies ist langfristig gesehen keine gute Strategie, denn sobald man ein Spiel verliert, ist das gesamte Geld weg. Diese Strategie kann – wie wir auch in unten stehender Abbildung sehen werden – nur kurzfristig zum Erfolg führen.

³³ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 350

³⁴ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 351

2. Strategie: Fixer Einsatz

Bei dieser Strategie setzt man in jedem Spiel denselben Betrag, sobald man gewinnt, erhält man diesen Betrag zu seinem Kapital dazu, verliert man ein Spiel, geht auch der Einsatz verloren. Da aufgrund der Gewinnchancen über 50 % auf Dauer mehr Spiele gewonnen als verloren werden, steigt das Kapital zwar insgesamt, allerdings nicht besonders schnell.

3. Strategie: Martingale

Bei jedem Spiel wird der Einsatz verdoppelt, das gleicht Verluste aus, und man häuft schneller Kapital an als mit der zweiten Strategie.

4. Strategie: Proportionaler Einsatz

„Hier setzt man einen bestimmten Bruchteil des Kapitals abhängig von dem Vorteil, den man hat. Es gibt verschiedene Varianten dieses Verfahrens, am schnellsten wächst das Kapital jedoch mit der Kelly-Strategie. Der jeweils eingesetzte Bruchteil wird durch die Formel Vorteil/Chance bestimmt. In unserem Fall haben wir einen Vorteil von 10 Prozent und die Chancen stehen fifty-fifty (oder 1 zu 1). Vorteil/Chance entspricht also 10 Prozent. Wir setzen also bei jeder Wette 10 Prozent unseres Kapitals. Gewinnen wir, wächst das Kapital um 10 Prozent, weshalb der nächste Einsatz 10 Prozent höher ist als der erste. Verlieren wir, schrumpft das Kapital um 10 Prozent, weshalb der zweite Einsatz 10 Prozent niedriger ist als der erste.“³⁵ Bei einer Pechsträhne nimmt also der Einsatz immer weiter ab, was den Verlust begrenzt, gewinnt man aber, wächst das Kapital exponentiell. Damit hat man bei dieser Strategie sowohl ein geringes Risiko als auch einen hohen Ertrag.

³⁵ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 353

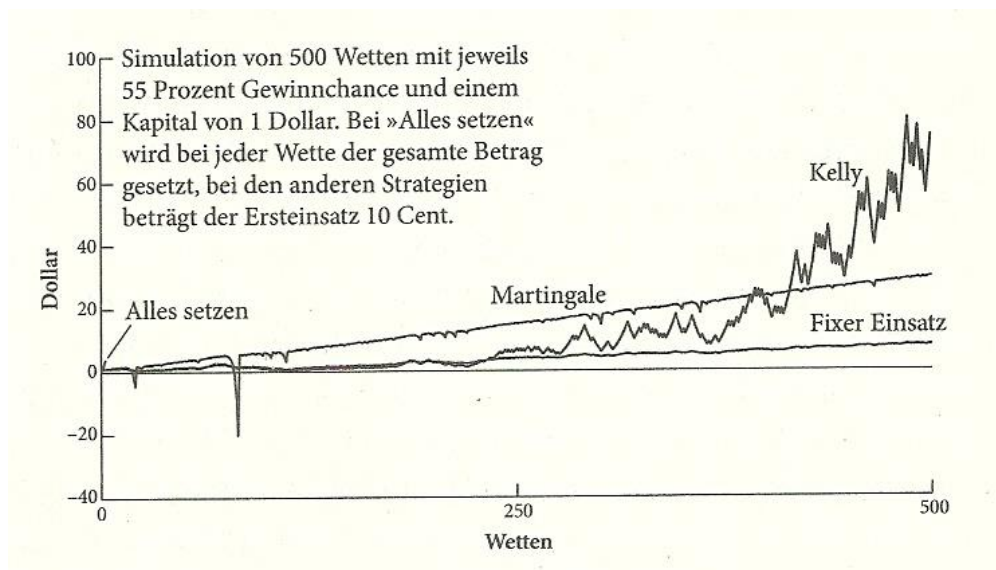


Abbildung 8: Vergleich der Wettstrategien³⁶

5.2.3 Martingale in Rudolf Taschners „Zahl Zeit Zufall“

Rudolf Taschner erzählt im Kapitel „Doublieren und gewinnen – oder alles verlieren“ (Seiten 114 – 118) in seinem Buch „Zahl Zeit Zufall“ eine kleine, erfundene Geschichte rund um den Chevalier de Méré, um das Prinzip der Martingale zu erklären:

„Chevalier de Méré, der Edelmann mit dem fast unermesslichen Vermögen, verbringt eine Nacht am Roulettetisch. Er setzt einen Dukaten auf rouge, gewinnt und erhält daher von der Spielbank seinen Einsatz, einen zusätzlichen Dukaten, ausgezahlt. Folglich hat er den Gewinn eines ganzen Dukaten erwirtschaftet.“

Nach einem Glas Champagner im benachbarten Salon kehrt er wieder zum Roulettetisch zurück, setzt wieder einen Dukaten auf rouge und verliert. Der Dukaten geht an die Bank. Nun verdoppelt de Méré seinen Einsatz und setzt zwei Dukaten auf rouge. Man nennt dies ein „Doublieren nach verlorenem Spiel“. Doch auch diesmal fällt die Kugel auf noir, und de Méré hat die zwei Dukaten verloren. Aber er doubliert noch einmal, setzt also jetzt vier Dukaten auf rouge und wartet auf das Fallen der Kugel in den Fächer des Kessels. Wieder fällt sie auf noir, die vier Dukaten sind verloren. De Méré behält einen kühlen Kopf, doubliert wieder und setzt acht Dukaten auf rouge. Die Kugel fällt auf zero, und sein Einsatz bleibt

³⁶ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 353

bis zum nächsten Spiel gesperrt. Bei diesem fällt die Kugel auf noir, und auch die acht Dukaten sind verloren.

Zur Erholung begibt sich nun der Chevalier in den Salon, zwei Gläser Champagner und ein wenig Kaviar beruhigen seine Nerven.

Er kehrt dann wieder zum Spieltisch zurück und hält an seiner Strategie fest: verdoppeln. Er legt 16 Dukaten auf rouge und verfolgt den Lauf der Kugel. Sie fällt auf noir, und der Chevalier beginnt im Kopf zu rechnen. Bisher hat er $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ Dukaten verspielt. Beim nochmaligen Doublieren setzt er 32 Dukaten auf rouge, aber die Kugel fällt auf noir. Jetzt sind insgesamt schon 63 Dukaten vom Chevalier zur Bank gewandert. Aber er bleibt gelassen und doubliert erneut: 64 Dukaten werden auf rouge gesetzt, die Kugel fällt auf 14 und der Croupier verkündet: „Quatorze, manque, pair, rouge.“ Endlich rouge. Chevalier de Méré darf den Einsatz behalten und die Bank zahlt ihm die gleiche Summe, also 64 Dukaten, als Gewinn aus. Nach seinem Verlust von 63 Dukaten bedeutet dies einen Dukaten Reingewinn. Mühsam ernährt sich das Eichhörnchen. Aber immerhin: Ein Dukaten ist mehr als kein Dukaten.“³⁷

Dann erklärt Rudolf Taschner, dass die Martingale eigentlich aufgrund des Gesetzes der großen Zahlen ein sicheres System sei, vorausgesetzt, der Spieler hat unendlich viel Geld und das Spiel dauert unendlich lange. Um das aber zu unterbinden, gibt es in den Kasinos an den Spieltischen im Normalfall ein Einsatzlimit. Über diese Maxima hinaus darf nicht gesetzt werden. „Dies klingt auf den ersten Blick wie ein moralisches Zugeständnis der Spielbanken, um allzu Spielwütigen die Möglichkeit zu rauben, horrendes Vermögen zu setzten und sich binnen weniger Stunden in den Ruin zu treiben.“³⁸ Allerdings wird damit der Chance der Spieler auf einen dauerhaften Gewinn entgegengewirkt. Meistens beträgt das Maximallimit bei einfachen Chancen das 1200-Fache des Mindesteinsatzes und wird bei den anderen Spielen so angesetzt, dass das Kasino bei Gewinnen höchstens das Maximum auszahlen muss. Wie schnell es geht, dass das Maximum überschritten wird, haben wir ja schon in Christoph Drössers Beispiel (siehe Kapitel 5, ab Seite 39) gesehen. Durch die Maxima sichert sich das Kasino also seinen Gewinn.

³⁷ Rudolf Taschner: „Zahl Zeit Zufall“, Seite 114 f

³⁸ Rudolf Taschner: „Zahl Zeit Zufall“, Seite 116

5.3 Der Erwartungswert

5.3.1 Der Erwartungswert in Alex Bellos' „Im Wunderland der Zahlen“

Den Erwartungswert erläutert auch Alex Bellos im neunten Kapitel „Glück ist kein Zufall – oder doch?“ (Seiten 307 – 358) seines Buches „Im Wunderland der Zahlen – eine mathemagische Reise“ anhand des Roulettespiels, dieses Mal aber beim Roulette mit der Doppelnull, dem ursprünglichen Roulettespiel, das in Amerika hauptsächlich gebräuchlich ist, im Gegensatz zu Europa, wo vorrangig Rouletteräder ohne Doppelnull in Verwendung sind, und mit dem Setzen auf eine bestimmte Zahl:

Formel 7: Erwartungswert

$$\begin{aligned} & \text{„(Chance, dass Kugel auf gewählter Zahl landet) } \times \text{ (was man gewinnt) } + \text{ (Chance,} \\ & \text{dass Kugel nicht auf gewählter Zahl landet) } \times \text{ (was man verliert) oder} \\ & \quad \left(\frac{1}{38} \times 350 \text{ €}\right) + \left(\frac{37}{38} \times -10 \text{ €}\right) = -0,526 \text{ €} \end{aligned}$$

Für jeweils 10 €, die man setzt, verliert man demnach knapp 53 Cent.“³⁹

Jedes Glücksspiel hat einen negativen Erwartungswert, ansonsten würden die Kasinos keinen Profit erzielen. Anstatt des Erwartungswertes kann man den voraussichtlichen Verlust beim Glücksspiel auch mit der Auszahlungsquote angeben. Beim Roulette bekommt man für 10 gesetzte Euro etwa 9,47 Euro zurück, also beträgt die Auszahlungsquote 94,7 Prozent. Eine Auszahlungsquote unter 100 Prozent gibt einen voraussichtlichen Verlust an, eine über 100 Prozent einen voraussichtlichen Gewinn.

Alex Bellos besucht in Reno Anthony Baerlocher, einen Mathematiker, dessen Beruf es ist, als Entwicklungsleiter eines Spielautomatenherstellers die Gewinnchancen bei Spielautomaten zu bestimmen. Anthony Baerlocher

³⁹ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 316

erzählt von den Auszahlungsquoten bei Spielautomaten und wie sie gewählt werden müssen, damit die Spieler am Ball bleiben. („Bei 87,5 oder 88 Prozent sind wir schon relativ erfolgreich, aber wenn die Quote auf 95 bis 97 Prozent steigt, macht die Sache erst richtig Spaß.“⁴⁰)

5.3.2 Der Erwartungswert in Gero von Randows „Das Ziegenproblem“

Gero von Randow behandelt den Erwartungswert ebenfalls im Kapitel „Wir lernen raten“ (Seiten 18 – 55) in „Das Ziegenproblem“. Er definiert den Erwartungswert folgendermaßen:

Formel 8: Erwartungswert

$$E = \text{erhoffter Wert} \cdot \text{dessen Wahrscheinlichkeit}^{41}$$

Als Beispiel bringt Gero von Randow das Bolitaspiel und wie man mit dem Erwartungswert den fairen Einsatz berechnet. Bolita ist eine Lotterie auf Puerto Rico, bei der aus hundert nummerierten Kugeln eine gezogen wird, also ist die Wahrscheinlichkeit die richtige Zahl zu haben $\frac{1}{100} = 0,01 = 1\%$. Wenn der Gewinn beim Bolitaspiel 1 000 \$ betrüge, kann man sich mit dem Erwartungswert den fairen Preis eines Loses berechnen, das wären dann $1\,000 \cdot 0,01 = 10 \$$.

⁴⁰ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 318

⁴¹ Gero von Randow: „Das Ziegenproblem“, Seite 52

5.4 Der Spielerfehlschluss

„Weil unser Gehirn nicht gut darin ist, mit zufälligen Phänomenen umzugehen, ist die Wahrscheinlichkeit jener Bereich der Mathematik, in dem man auf die meisten Paradoxe und Überraschungen stößt. Wir schreiben allen Situationen instinktiv Muster zu, selbst wenn wir eigentlich wissen, dass es gar keine Muster gibt. Man mag über Leute lächeln, die an Spielautomaten sitzen und meinen, nach einer Pechsträhne müsste es mit größerer Wahrscheinlichkeit zu einem Gewinn kommen, doch die psychologischen Faktoren, die für den Spielerfehlschluss verantwortlich sind, können jeden von uns treffen.“⁴²

5.4.1 Der Spielerfehlschluss in Alex Bellos „Im Wunderland der Zahlen“

Auch Alex Bellos geht im neunten Kapitel „Glück ist kein Zufall – oder doch?“ (Seiten 307 – 358) seines Buches „Im Wunderland der Zahlen – eine mathemagische Reise“ auf den Spielerfehlschluss ein. Er verdeutlicht den Spielerfehlschluss mit zwei Listen der Ergebnisse von dreißigmaligen Münzwürfen, einmal, wenn man sich den Münzwurf nur vorstellt:

K ZZ K Z K ZZZ KK Z KK Z KKKK Z K ZZ K Z K ZZ KK

Und einmal, wenn die Münze tatsächlich geworfen wurde:

ZZ KK ZZZZZ KK ZZZ K ZZ K Z KKKK Z KK Z K Z K

Alex Bellos erklärt, dass man erkennen kann, welche Münzwürfe ausgedacht und welche real sind, indem man sich Länge der Serien von Kopf und Zahl anschaut – fünf gleiche Ergebnisse hintereinander kommen den meisten

⁴² Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 327

Menschen sehr unwahrscheinlich vor – und indem man schaut, wie oft ein Wechsel zwischen Kopf und Zahl vorkommt – bei den ausgedachten Listen wird meist öfter gewechselt, als bei einem tatsächlichen Münzwurf. *„Echter Zufall hat keine Erinnerung daran, was vorher gekommen ist.“*⁴³

*„Der Zufall tritt nicht gleichmäßig auf. Er lässt leere Bereiche, Zeiträume, Flächen entstehen, und Bereiche, Zeiträume, Flächen, die sich überlappen.“*⁴⁴

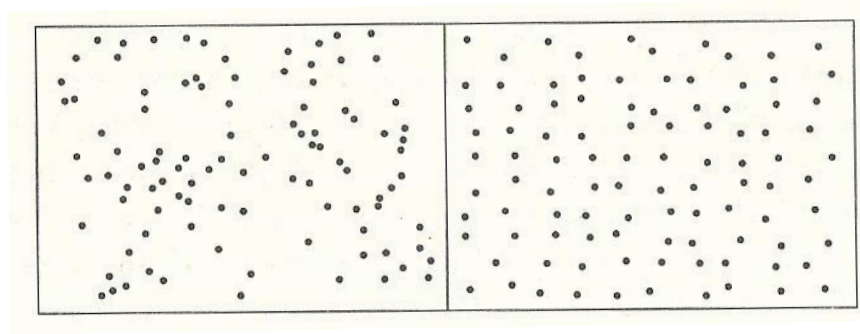


Abbildung 9: Zufällig und nicht zufällig verteilte Punkte⁴⁵

Außerdem erzählt Alex Bellos, dass der Spielerfehlschluss zu etlichen Beschwerden von Kunden der Firma Apple geführt habe, als der iPod auf den Markt gekommen sei. Ist bei einem iPod die Funktion „Shuffle“ eingestellt, spielt er zufällig Titel aus der Wiedergabeliste ab. Da die Lieder mancher Bands oft hintereinander abgespielt wurden, waren einige Menschen der Meinung, dass Apple manche Bands bevorzugen würde. *„Deshalb meinte Apple-Chef Steve Jobs es absolut ernst, als er im Hinblick auf die Kritik der Käufer bekannt gab: „Wir werden das Gerät weniger zufällig machen, damit es einen zufälligeren Eindruck erweckt.“*⁴⁶

⁴³ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 329

⁴⁴ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 330

⁴⁵ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 330

⁴⁶ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 329

Alex Bellos führt den Spielerfehlschluss auf das Bedürfnis der Menschen nach Kontrolle zurück. Er ist der Meinung, dass die Menschen evolutionär bedingt nach Mustern und Regelmäßigkeiten suchen, um ein Gefühl der Kontrolle über die Umwelt zu haben. Er verweist dabei auch auf ein Experiment, dass in den 1970er Jahren mit den Bewohnern eines Altenpflegeheims gemacht wurde: *„Ein Teil der Bewohner durfte selbst bestimmen, wie die Möbel in ihrem Zimmer angeordnet wurden. Außerdem durften sie eine Pflanze auswählen, um die sie sich kümmern sollten. Die anderen Bewohner durften weder bei der Einrichtung ihres Zimmers noch bei der Auswahl der Pflanze mitreden, und um die Pflanze kümmerte sich jemand anders. Das Ergebnis des nach 18 Monaten beendeten Experiments war eindeutig: Bei den Patienten, die ihre Umgebung unter Kontrolle hatten, lag die Sterblichkeit bei 15 Prozent, bei den anderen betrug sie 30 Prozent. Das Gefühl, alles unter Kontrolle zu haben, kann uns also regelrecht am Leben erhalten.“*⁴⁷

5.4.2 Der Spielerfehlschluss in Rudolf Taschners „Zahl Zeit Zufall“

Auch Rudolf Taschner behandelt den Spielerfehlschluss im Kapitel „Der berechenbare und der unberechenbare Zufall“ (Seiten 118 – 124) seines Buches „Zahl Zeit Zufall“. Er erzählt von dem Trugschluss, dem viele Spieler zum Beispiel beim Roulettespiel unterliegen, dass, wenn bei hundert vorangegangenen Spielen die Null nicht gekommen ist, sie nun überfällig sei und endlich kommen müsse, da sie ja im Schnitt bei einem von 37 Spielen fällt.

„Doch dieses Argument geht an der Aussage des Gesetzes der großen Zahl (Siehe Kapitel 5.4, ab Seite 58) völlig vorbei. Für seine Gültigkeit ist nämlich wesentlich, dass man so eben nicht denken darf, dass im Gegenteil jedes neue Roulettespiel unabhängig von den Spielausgängen der vorhergegangenen Spiele abläuft. Und

⁴⁷ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 330

selbst wenn tausendmal zuvor niemals die zero geworfen wurde (was bei einem symmetrisch konstruierten Roulettekessel praktisch nie eintreffen wird, aber nehmen wir es an), lautet auch bei jedem der folgenden Spiele die Wahrscheinlichkeit, die Kugel fällt auf zero, ein Siebenunddreißigstel, und sie wird nicht größer.“⁴⁸

Rudolf Taschner bringt auch das Beispiel des Wiener Mathematikers und Finanzexperten Professor Walter Schachermayer, der seine Hörschaft in zwei Gruppen aufteilt, von denen eine damit beauftragt wird, dass ein Mitglied der Gruppe eine Münze zweihundert Mal wirft und die Ziffer Null notiert, wenn Kopf fällt, und Eins, falls die Münze Zahl zeigt. Ein Mitglied der anderen Gruppe soll willkürlich zweihundert Mal die Zahlen Null oder Eins nennen, was ebenfalls schriftlich festgehalten wird. Nun bekommt Walter Schachermayer die beiden Listen, ohne zu wissen, welche Liste von welcher Gruppe stammt, und Professor Schachermayer findet fast immer heraus, welche Liste den Münzwurf darstellt und welche die willkürlich genannten Zahlen. Auch er kann den Unterschied zwischen tatsächlichem und ausgedachtem Zufall anhand der Längen der Nuller- und Einserkolonnen erkennen. Rudolf Taschner gibt auch wieder eine Liste der Ergebnisse eines Münzwurfs an und ein Beispiel dafür, wie sich die Unterhaltung der Gruppenmitglieder anhören könnte, die die Liste der zufälligen Zahlen aufstellen sollen. *„Jenes Gruppenmitglied, welches gewählt wurde, willkürlich die Ziffern Null oder Eins zu diktieren, sagt im Laufe seiner Ansage: „... null, eins, eins, null, null, eins, null, eins, eins, eins, eins“ – einige in der Gruppe werden schon unruhig – „eins“ – „Du kannst doch nicht lauter Einser diktieren!“ wirft ein anderes Mitglied der Gruppe ein. Wollte der Ansager noch einmal „eins“ diktieren, der Aufstand der anderen wäre ihm sicher. „Das kann doch nicht den Zufall nachahmen“, protestieren sie, „siebenmal hintereinander wird die Münze doch nie auf die gleiche Seite fallen!““⁴⁹* Das Gruppenmitglied irrt jedoch,

⁴⁸ Rudolf Taschner: „Zahl Zeit Zufall“, Seite 119

⁴⁹ Rudolf Taschner: „Zahl Zeit Zufall“, Seite 120

in Rudolf Taschners Münzwurf-Experiment kam sogar achtmal hintereinander die Eins.

„0000 1 0 11 0 11 0 111 0000 11 000 1 0 11111 0 1 0 1 000 1 0 1111 0 1 00 11 00000
1 0000 1 00 1 0000 1 000 1 0 1 0 1 0000 111 0 1 0 111 00 1111 000 11 0000 1 000 111
0 11 0 1 0 1111 0 1 0 1 0 1 0 11 0 1 00000 111 0 1 00 1 0 11 000 1 000 111 000000
11111 0 11 00 1 0 **11111111** 000 1 00 1 0 1 00 1 0 1 0“⁵⁰ (105 Nullen, 95 Einsen)

Die Chance, bei jedem weiteren Wurf Kopf oder Zahl zu werfen, steht immer noch bei 50 : 50, die Münze hat ja kein Gedächtnis.

5.4.3 Der Spielerfehlschluss in Gero von Randows „Das Ziegenproblem“

Gero von Randow behandelt den Spielerfehlschluss im Kapitel „Irren ist menschlich“ (Seiten 69 – 94) in „Das Ziegenproblem“ ebenfalls, allerdings beginnt er hier mit dem irrtümlicherweise angenommenen „Gesetz der kleinen Zahl“. Damit beschreibt er die falsche Annahme, dass *„sich Eigenschaften eines Zufallsprozesses auch in kurzen Sequenzen widerspiegeln oder sich eine statistische Verteilung auch aus kleinen Stichproben ablesen lässt.“*⁵¹

Als Beispiel dafür bringt er eine Befragung von Kahnemann und Tversky zu folgendem Sachverhalt: Betrachtet werden die Geburtsstationen zweier unterschiedlich großer Krankenhäuser. Im größeren Krankenhaus werden pro Tag circa 45 Säuglinge geboren, im kleineren etwa 15. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bub auf die Welt kommt, beträgt ungefähr 50 %. Natürlich kommen nicht jeden Tag genau 50 % Buben zur Welt, manchmal sind es mehr, manchmal weniger. Nun werden ein Jahr lang die Tage notiert, an denen mehr als 60 % der neugeborenen Babys Buben

⁵⁰ Rudolf Taschner: „Zahl Zeit Zufall“, Seite 120

⁵¹ Gero von Randow: „Das Ziegenproblem“, Seite 77

sind. In welchem der beiden Krankenhäuser werden mehr solcher Tage notiert?

Von 95 Befragten waren 21 der Meinung, dass mehr solcher Tage im größeren Krankenhaus notiert würden, 21 waren für das kleinere Krankenhaus und 53 glaubten, dass in beiden Krankenhäusern ungefähr gleich viele Tage notiert werden müssten. 74 von 95 Befragten, also rund 77,89 %, war also nicht bewusst, dass die Wahrscheinlichkeit für Abweichungen im kleineren Krankenhaus größer ist, *„denn je umfangreicher eine Stichprobe, desto wahrscheinlicher ist es, dass ihre Struktur der der Gesamtverteilung entspricht.“*⁵²

Ebenso ist es nach Gero von Randow auch bei Spielern, die glauben, wenn etwa beim Roulette oder Lotto eine bestimmte Zahl lange nicht mehr dran gewesen ist, sie nun endlich wieder kommen müsse. Aber egal, wie oft eine Zahl schon gekommen oder nicht gekommen ist, egal, wie oft der Würfel eine Sechs gezeigt hat, egal, wie oft die Münze mit Kopf nach oben gelandet ist, bei jedem neuen Versuch ist die Wahrscheinlichkeit nicht größer, denn die Münze, der Würfel, die Lottotrommel und die Roulettekugel haben kein Gedächtnis und keine Steuerung.

*„Auch der berühmte „Spieler-Irrtum“ beruht nach Ansicht von Kahnemann und Tversky letztlich auf der irrigen Annahme eines „Gesetzes der kleinen Zahl“, nämlich dass jede Sequenz eines Zufallsprozesses die Gesamtverteilung widerspiegeln müsse – und wenn sie das nicht tut, dann wird ein Ausgleichsmechanismus erwartet, der bald in die andere Richtung wirke. Das „Gesetz der großen Zahl“ hingegen verspricht nur, dass Stichproben der Gesamtverteilung umso besser entsprechen, je größer sie sind.“*⁵³

⁵² Gero von Randow: „Das Ziegenproblem“, Seite 79

⁵³ Gero von Randow: „Das Ziegenproblem“, Seite 80

5.5 Das Gesetz der großen Zahlen

5.5.1 Das Gesetz der großen Zahlen in Albrecht Beutelspachers „Kleines Mathematikum“

Das Gesetz der großen Zahlen wird auch in Albrecht Beutelspachers „Kleines Mathematikum – Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik“ behandelt. Albrecht Beutelspacher erklärt in der Antwort auf die 55. Frage „Wenn ich zehnmal würfle, habe ich dann garantiert eine Sechs?“ (Seiten 104 – 106) das Gesetz der großen Zahlen mithilfe von Würfelergebnissen. Auch er erklärt, dass sich die absoluten Unterschiede bei der Anzahl der gewürfelten Ergebnisse nicht vermindern, sondern, dass sich nur die relativen Häufigkeiten stabilisieren. *„Auch ein mathematisch perfekter Würfel liefert nicht nach sechzig Würfen genau zehn Einsen, zehn Zweien usw. Und auch von 6 Millionen Würfeln waren nicht genau 1 Million Einsen, 1 Million Zweien usw. Allerdings nähern sich die Verhältnisse der tatsächlichen Einsen relativ zur Gesamtzahl der Würfe immer mehr einem Sechstel. Genauer gesagt, wird die Wahrscheinlichkeit für „Ausreißer“, das heißt größere Abweichungen vom richtigen Verhältnis, mit wachsender Anzahl der Versuche immer kleiner.“*⁵⁴

5.5.2 Das Gesetz der großen Zahlen in Gero von Randows „Das Ziegenproblem“

Gero von Randow definiert das Gesetz der großen Zahlen in seinem Buch „Das Ziegenproblem – Denken in Wahrscheinlichkeiten“ im Glossar so: *„Je größer die Stichprobe, desto genauer entspricht die Verteilung der Werte in der Stichprobe der Verteilung in der Gesamtpopulation. Für Versuche mit einer Münze*

⁵⁴ Albrecht Beutelspacher: „Kleines Mathematikum“, Seite 106

lässt sich dieses Gesetz beispielsweise so formulieren: Je öfter ich die Münze werfe, desto genauer wird die Schätzung $p(\text{Kopf}) = 1/2$.“⁵⁵ Gero von Randow nimmt den Münzwurf als Beispiel. Auch er erklärt im zweiten Kapitel „Wir lernen raten“ (Seiten 18 – 55), dass der Wert $\frac{1}{2}$ für das Verhältnis von Kopf zu Zahl nicht in Stein gemeißelt ist, aber als sehr gute Schätzung angenommen werden kann, die umso genauer wird, je öfter die Münze geworfen wird.

5.5.3 Das Gesetz der großen Zahlen in Alex Bellos „Im Wunderland der Zahlen“

Auch Alex Bellos erörtert das Gesetz der großen Zahlen, das ein weiterer Grund für den Gewinn eines Kasinos ist: „Wie schon gesagt, ist der Erwartungswert ein Grundkonzept der Glücksspielindustrie. Hinzu kommt etwas, das in der Mathematik als „Gesetz der großen Zahlen“ bezeichnet wird. Spielt man lediglich einige wenige Male Roulette oder an einem Automaten, so kann man durchaus mit einem Plus nach Hause gehen. Aber je öfter man spielt, desto wahrscheinlicher wird es, dass man letztendlich verliert. Die Auszahlungsquote erweist sich also nur auf lange Sicht als gültig. Das Gesetz der großen Zahlen besagt: Wirft man eine Münze dreimal in die Luft, so zeigt sie bei der Landung womöglich kein einziges Mal Kopf. Wirft man sie jedoch drei Milliarden Mal in die Luft, ist ziemlich sicher anzunehmen, dass sich bei fast exakt 50 Prozent der Würfe Kopf ergibt.“⁵⁶

Im *Peppermill Casino*, dem Kasino, in dem Alex Bellos bei seinem Besuch in Reno abgestiegen ist, können an einem Spielautomat etwa 2000 Spiele an einem Tag gespielt werden, im Kasino befinden sich circa 2000 Spielautomaten, das ergibt ungefähr vier Millionen Spiele am Tag. Wenn

⁵⁵ Gero von Randow: „Das Ziegenproblem“, Seite 195

⁵⁶ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 319

man nun einen durchschnittlichen Einsatz von einem Dollar und die Auszahlungsquote von 95 Prozent annimmt, ergibt sich ein ungefähre Gewinn von 3,8 Millionen Dollar pro Tag.

$$2\,000 \cdot 2\,000 \cdot 0,95 = \mathbf{3\,800\,000\ \$}$$

6. Das Geburtstagsparadoxon

Wie viele Menschen müssen es mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 Prozent zwei davon am selben Tag Geburtstag haben?

Die Antwort auf diese Frage – es genügen nämlich schon 23 Personen – überrascht die meisten und daher wird das Geburtstagsparadoxon in jedem der hier betrachteten Bücher behandelt.

Für viele Menschen ist die Vorstellung, dass schon 23 Personen genügen, so paradox, weil sie sich nämlich (unbewusst) bei dieser Fragestellung vorstellen, wie wahrscheinlich es ist, dass jemand am selben Tag wie sie selbst Geburtstag hat.

Berechnung:

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit ist eigentlich ziemlich einfach, man muss dafür nur mit der *Gegenwahrscheinlichkeit* (*Negationsregel*) arbeiten:

Formel 9: Negationsregel

Gegenwahrscheinlichkeit/Negationsregel:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis nicht zutrifft, ist 1 minus der Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis zutrifft.

$$P(\neg A) = 1 - P(A)$$

Wir berechnen uns also, wie wahrscheinlich es ist, dass niemand am gleichen Tag Geburtstag hat (Schaltjahre lassen wir in diesem Fall außer Acht):

Einzelwahrscheinlichkeiten:

1. Person hat an irgendeinem Tag Geburtstag: $\frac{365}{365} = 1$

2. Person hat an einem anderen Tag Geburtstag: $\frac{364}{365}$

3. Person hat an beiden Tagen nicht Geburtstag: $\frac{363}{365}$

4. Person hat an den drei schon gewählten Tagen nicht Geburtstag: $\frac{362}{365}$

...

n. Person hat an den bisher schon gewählten Tagen nicht Geburtstag:

$$\frac{365-(n-1)}{365} = \frac{365-n+1}{365}$$

Da **alle** diese Ereignisse zutreffen müssen, muss man die Einzelwahrscheinlichkeiten miteinander multiplizieren:
(siehe Multiplikationsregel, Seite 34)

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365-n+1}{365}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 von n Personen am selben Tag Geburtstag haben, ist gleich Eins minus der Wahrscheinlichkeit, dass niemand von den n Personen am selben Tag Geburtstag hat.

Formel 10: Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 2 von n Personen am gleichen Tag Geburtstag haben

$$P(X \geq 2) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365-n+1}{365}$$

Einige Wahrscheinlichkeiten dafür, dass von n Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben, habe ich berechnet und in der folgenden Tabelle festgehalten:

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeiten dafür, dass mindestens zwei von n Personen am gleichen Tag Geburtstag haben

n	1	5	10	15	20	22	23
P(X≥2)	0 %	2,71 %	11,69 %	25,29 %	41,14 %	47,57 %	50,73 %

n	24	25	30	35	40	50
P(X≥2)	53,83 %	56,87 %	70,63 %	81,44 %	89,12 %	97,04 %

n	60	70	80	90	366
P(X≥2)	99,41 %	> 99,9 %	> 99,99%	> 99,999 %	100 %

Zum Beispiel: **n = 5:**

$$P(X \geq 2) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{361}{365} \approx 1 - 0,9729 \approx 0,0271$$

Für $n = 1$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben natürlich 0, bei $n = 366$ beträgt die Wahrscheinlichkeit 1, da das Jahr (Schaltjahre ausgenommen) nur 365 Tage hat, und somit bei 366 Personen auf jeden Fall zwei davon am gleichen Tag Geburtstag haben müssen.

6.1 Das Geburtstagsparadoxon in der populärwissenschaftlichen mathematischen Literatur

6.1.1 Das Geburtstagsparadoxon in Christoph Drössers „Der Mathematikverführer“

Christoph Drösser stellt in „Der Mathematikverführer“ das Geburtstagsparadoxon als Denksportaufgabe am Ende des zweiten Kapitels in der Rubrik „Ausgerechnet“ (Seite 26) dar.

Die Lösung findet man in knapper aber einleuchtender Form unter www.rowohlt.de/mathematikverfuehrer:

„Der Trick besteht darin, auszurechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass alle Geburtstage verschieden sind. Bei zwei Personen ist die Wahrscheinlichkeit, dass B an einem anderen Tag Geburtstag hat als A, 364/365. Wenn eine Person C dazu kommt, dann hat C in 363 von 365 Fällen einen Geburtstag, der von A und B verschieden ist. Und so weiter! Man multipliziert also

$$\frac{364 \cdot 363 \cdot 362 \dots}{365 \cdot 365 \cdot 365 \dots}$$

und das so lange, bis der Wert kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Das ist bei 23 Personen der Fall. Ab da ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Geburtstage verschieden sind, kleiner als 50 Prozent – also haben mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 Prozent zwei Personen am selben Tag Geburtstag!“⁵⁷

6.1.2 Das Geburtstagsparadoxon in Rudolf Taschners „Zahl Zeit Zufall“

In „Zahl Zeit Zufall“ erzählt Rudolf Taschner von dem „Geburtstagsparadoxon“ im Kapitel „Am gleichen Tag Geburtstag feiern“ (Seiten 71 – 74) anhand des Beispiels einer niederösterreichischen

⁵⁷ http://www.rowohlt.de/fm/140/Mathe_Loesungen.pdf, 15. Juni 2014

Volksschullehrerin, die Listen mit den Geburtstagen ihrer Schülerinnen und Schüler gemacht hat. In jeder der zehn Klassen, die sie unterrichtet hat, waren 25 Kinder. In sechs der zehn Klassen hatten zwei Kinder am gleichen Tag Geburtstag, in einer der sechs Klassen hatten sogar drei Kinder am gleichen Tag Geburtstag.

Aufgrund des Beispiels in „Zahl Zeit Zufall“ habe ich mir die Geburtstage der Schülerinnen und Schüler in den drei Klassen angeschaut, die ich zurzeit unterrichte. In einer meiner vierten Klassen haben von 25 Schülerinnen und Schülern keine am gleichen Tag Geburtstag, aber ein Schüler hat den gleichen Geburtstag wie ich. In meiner fünften Klasse haben von 23 Schülerinnen und Schülern zwei Schülerinnen am selben Tag Geburtstag, allerdings sind das Zwillinge. In meiner anderen vierten Klasse, die ich in diesem Schuljahr einige Wochen unterrichtet habe, gibt es unter den 22 Schülerinnen und Schülern zwei Pärchen von Schülern, die am selben Tag Geburtstag haben und in meiner ersten Klasse haben von 25 Kindern sogar drei Mädchen am gleichen Tag Geburtstag.

Eine Erklärung, warum gerade in Schulklassen, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei der Schülerinnen und Schüler am gleichen Tag Geburtstag haben, bringt Alex Bellos in „Im Wunderland der Zahlen“ (siehe auch Kapitel 6.1.4, ab Seite 66).

Ich habe auf jeden Fall vor, das Geburtstagsparadoxon während meiner beruflichen Laufbahn weiter zu verfolgen.

6.1.3 Das Geburtstagsparadoxon in Gero von Randows „Das Ziegenproblem“

Gero von Randow nimmt in „Das Ziegenproblem“ das „Geburtstagsparadoxon“ im zweiten Kapitel „Wir lernen raten“ (Seiten 18 – 55) als Beispiel dafür, wie schnell die Multiplikation echter Brüche zu sehr kleinen Ergebnissen führt. Außerdem erzählt er vom Wissenschaftsphilosophen Gerhard Vollmer, der annimmt, „dass wir glauben, die Wahrscheinlichkeit (p) des Zusammentreffens zweier Geburtstage wachse lediglich stetig mit der Gruppengröße (n) – und das ist falsch, wie die Abbildung zeigt.“⁵⁸

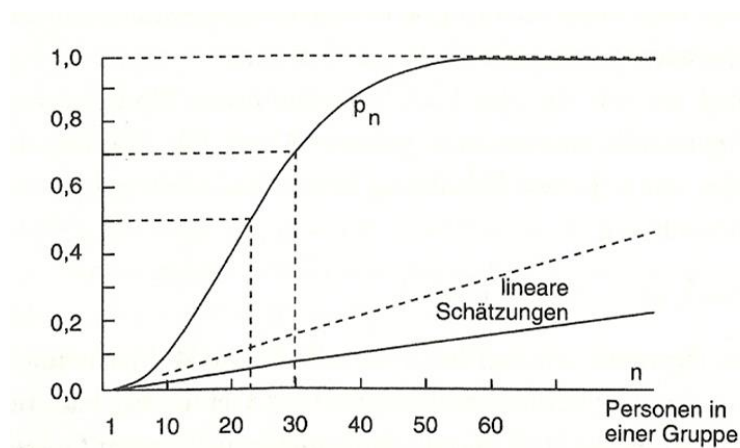


Abbildung 10: Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen von Geburtstagen und der Gruppengröße⁵⁹

6.1.4 Das Geburtstagsparadoxon in Alex Bellos „Im Wunderland der Zahlen“

Alex Bellos hat in „Im Wunderland der Zahlen“ im neunten Kapitel „Glück ist kein Zufall – oder doch?“ (Seiten 307 – 358) als Beweis für das

⁵⁸ Gero von Randow: „Das Ziegenproblem“, Seite 44

⁵⁹ Gero von Randow: „Das Ziegenproblem“, Seite 44

„Geburtstagsparadoxon“ die Geburtstage der Fußballmannschaften samt Schiedsrichter (also jeweils 23 Personen) betrachtet, die die letzten zehn Endspiele der Fußballweltmeisterschaften bestritten haben. Bei sieben von den zehn Gruppierungen hatten mindestens zwei Personen am selben Tag Geburtstag, wobei zwei Spieler aus den Niederlanden mit dem gleichen Geburtstag sowohl 1974 als auch 1978 im Endspiel aufliefen und 1978 zusätzlich noch ein Zwillingspärchen aus den Niederlanden mit dabei war. Alex Bellos ist der Meinung, dass das Geburtstagsparadoxon in diesem Fall fast schon zu gut funktioniert, da die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Personen mit dem gleichen Geburtstag bei einer Grundmenge von 23 Personen ja bei knapp über 50 % liegt, sich bei seinen Fußball-Recherchen aber eine Wahrscheinlichkeit von 70 % ergab. Diese höhere Trefferquote erklärt Alex Bellos aber mit dem „Gesetz der großen Zahlen“ (Siehe Kapitel 5.4, Seite 58) – wenn er alle Spiele sämtlicher Weltmeisterschaften betrachtet hätte, hätte sich das Ergebnis eher den 50,73 % angenähert – und damit, dass die Geburtstage von Fußballern nicht gleichmäßig übers Jahr verteilt sind. *„Laut statistischen Untersuchungen sind Profi-Kicker vermehrt zu bestimmten Jahreszeiten geboren, nämlich kurz nach dem Datum, an dem in ihrem Land Aufnahmeschluss für die Grundschule ist. Als Kind waren sie daher in ihrer Klasse häufig am größten und ältesten, weshalb sie im Sportunterricht bessere Leistungen erbracht haben.“*⁶⁰

Einen anderen Grund, warum die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zum Beispiel in Schulklassen zwei Kinder am gleichen Tag Geburtstag haben, mittlerweile deutlich höher als 50,7 % ist, sieht Alex Bellos darin, dass heutzutage Säuglinge vermehrt durch Geburtseinleitung und Kaiserschnitte zur Welt kommen und diese Eingriffe häufiger an Wochentagen durchgeführt werden.

⁶⁰ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 333

7. Der Tankstellenmörder

Im zweiten Kapitel „Der Tankstellenmörder oder Ein bedingt wahrscheinlicher Täter“ (Seiten 18 – 26) aus „Der Mathematikverführer“ behandelt Christoph Drösser die bedingte Wahrscheinlichkeit anhand einer kurzen Kriminalgeschichte, in der ein Polizeikommissar den Mord an einer Tankstellenkassiererin aufklären soll und schlussendlich aufgrund einer Probe vom Tatort und eines DNA-Tests einen bereits vorbestraften Verdächtigen festnimmt. Bei der Festnahme kommen dem Kommissar Zweifel, ob der Verdächtige wirklich der Täter sein kann, und er erörtert mit dem Gerichtsmediziner, ob zwei Personen dasselbe DNA-Profil haben können oder ob bei DNA-Tests auch Fehler vorkommen können.

Der Gerichtsmediziner erklärt, dass der Test es praktisch mit Sicherheit zeigt, wenn zwei DNA-Profile übereinstimmen, umgekehrt aber nur in 0,001 % der Fälle eine Übereinstimmung anzeigt, wenn die DNA-Profile unterschiedlich sind und dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das DNA-Profil eines beliebigen Mannes mit der Probe vom Tatort übereinstimmt, bei 0,0001 % liege. Er ist der Meinung, dass man sich da fast hundertprozentig sicher sein kann, dass es sich um den Täter handelt. Der Kommissar hat da noch immer seine Zweifel und das ist auch gut so.

Bevor nun der Sachverhalt betrachtet wird, bringt Christoph Drösser noch ein anderes (einfacheres) Beispiel, das zu einem ganz anderen Ergebnis führt, als es zunächst scheint:

Es wird davon berichtet, wie ein Tourist in einer fremden Stadt beobachtete, wie ein Taxifahrer ein parkendes Auto beschädigt und Fahrerflucht begeht. Der Tourist gibt an, ein blaues Auto beobachtet zu haben. In der Stadt gibt es ein Taxiunternehmen mit blauen und eines mit grünen Taxis. Die Polizei führt mit dem Zeugen einen Test durch, um seine Glaubwürdigkeit zu überprüfen, in dem er unter ähnlichen Sichtverhältnissen mit 80-prozentiger Sicherheit blaue und grüne Autos identifiziert, was zunächst ganz gut klingt.

Das Problem dabei ist jedoch, dass dabei nicht berücksichtigt wird, wie viele blaue und grüne Taxis es gibt. Hier kommt die bedingte Wahrscheinlichkeit ins Spiel: Das Taxiunternehmen mit den blauen Autos besitzt nur 5 Taxis, das mit den grünen hingegen 25 Taxis. Das lässt sich am besten in einer Vier-Felder-Tafel darstellen:

Tabelle 2: Vier-Felder-Tafel: Taxibeispiel

	Zeuge sagt: „Taxi ist blau.“	Zeuge sagt: „Taxi ist grün.“
Taxi ist blau.	4	1
Taxi ist grün.	5	20

61

Der Zeuge irrt sich in 20 % der Fälle, daher würde er von fünf blauen Autos eines als grünes und von 25 grünen Autos fünf als blaue erkennen. Das bedeutet, dass der Zeuge bei 30 Taxis - statistisch gesehen - neunmal sagen würde, dass das Taxi blau ist, aber nur in vier von diesen neun Fällen, das ist weniger als 50 %, hätte er damit Recht. Also hat diese Aussage keinen Wert. Aus der Wahrnehmungsfähigkeit lässt sich also keine Schlussfolgerung darüber machen, was von der Zeugenaussage zu halten ist.

Ebenso ist es auch bei medizinischen Tests: Aus der prozentuellen Fehlerwahrscheinlichkeit eines solchen Tests lässt sich nur dann urteilen, wenn man weiß, wie verbreitet eine Krankheit ist: *„Wenn eine Krankheit sehr selten ist, dann wird auch bei sehr guten Tests die Mehrheit der positiv Getesteten in Wirklichkeit gesund sein.“*⁶²

Auch den DNA-Test im Fall des Tankstellenmörders muss man auf diese Weise betrachten. Wenn man von ca. 10 Millionen Männern im Umkreis von 200 km rund um den Tatort als Verdächtige ausgeht, gibt es neben dem Täter

⁶¹ Nach Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 24

⁶² Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 25

selbst noch 10 Männer mit einem identischen DNA-Profil (die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das DNA-Profil eines beliebigen Mannes mit der Probe vom Tatort übereinstimmt, liegt bei 0,0001 %. $\Rightarrow 0,000\ 001 \cdot 10\ 000\ 000 = 10$). Da der Test eine Übereinstimmung des DNA-Profiles mit hundertprozentiger Wahrscheinlichkeit erkennt, gibt es also 11 Männer, die positiv getestet werden könnten. Weil nur in 0,001 % der Fälle eine Übereinstimmung angezeigt wird, wenn die DNA-Profile unterschiedlich sind, gibt es 100 Männer, die positiv getestet werden, obwohl die DNA-Profile in Wirklichkeit gar nicht übereinstimmen ($0,000\ 01 \cdot 10\ 000\ 000 = 100$). Der Test zeigt daher bei 111 Personen eine Übereinstimmung, beim Rest, also 9 999 889 Personen, keine Übereinstimmung. Es ergibt sich daher folgende Vier-Felder-Tafel:

Tabelle 3: Vier-Felder-Tafel: DNA-Test

	Test kommt zum Ergebnis: „DNA-Profil ist identisch.“	Test kommt zum Ergebnis: „DNA-Profil ist nicht identisch.“
DNA-Profil ist identisch.	11	0
DNA-Profil ist nicht identisch.	100	9 999 889

63

Obwohl nur eine Person der Täter ist, kommen durch den DNA-Test 110 unschuldige Personen in Verdacht. Die 100 Personen, deren DNA-Profil wirklich nicht identisch ist, obwohl der Test ein positives Ergebnis anzeigt, können ganz einfach durch einen zweiten Test ausgeschlossen werden, denn dass der Test zweimal ein falsches Ergebnis liefert, ist schon extrem unwahrscheinlich. Trotzdem bleiben neben dem Täter noch 10 Personen, deren DNA-Profil mit dem des Täters identisch ist, also reicht der DNA-Test allein nicht aus, den Täter zu überführen.

⁶³ Nach Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 26

7.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Christoph Drösser erklärt in diesem Kapitel die bedingte Wahrscheinlichkeit ohne – außer in der Überschrift – das Wort „bedingt“ überhaupt zu erwähnen und ohne Formeln zu verwenden. Bei den Beispielen, die Christoph Drösser in diesem Kapitel verwendet, reicht die Vier-Felder-Tafel auch aus. Es ist in diesen Fällen nicht notwendig, die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit zu benutzen, ich möchte es hier aber nochmal nachrechnen, denn beim Verwenden von Vier-Felder-Tafeln können sich auch Fehler einschleichen: Bei diesen Beispielen wird die Wahrscheinlichkeit aus einem Erwartungswert berechnet und das könnte zu Ungenauigkeiten führen.

Formel 11: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B \in \mathcal{A}$, $P(B) > 0$, dann heißt $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B. Wir erhalten: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

Anders ausgedrückt:

Wir dividieren die Wahrscheinlichkeit für den Ausgang A, der vom Ausgang B bedingt wird, durch die Summe aller Wahrscheinlichkeiten dafür, wie B zustande kommen kann.

Allgemein formuliert ist das im Satz von Bayes:

Formel 12: Satz von Bayes

Satz von Bayes:
$$\frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

7.1.1 Berechnung mit bedingter Wahrscheinlichkeit:

Taxi-Beispiel: A ... Taxi ist blau $P(A) = \frac{5}{30}$

Es gibt 30 Taxis, 5 davon sind blau.

B ... Zeuge sagt: „Taxi ist blau.“ $P(B) = \frac{4}{30} + \frac{5}{30} = \frac{9}{30}$

Es gibt 30 Taxis, 5 davon sind blau, bei 80 % sagt der Zeuge, dass das Taxi blau ist. $0,8 \cdot \frac{5}{30} = \frac{4}{30}$

Es gibt 30 Taxis, 25 davon sind grün, aber bei 20 % sagt der Zeuge, dass das Taxi blau ist. $0,2 \cdot \frac{25}{30} = \frac{5}{30}$

$$P(A|B) = \frac{\frac{5}{30}}{\frac{9}{30}} = \frac{5}{9} = 0,5 \approx 55,56 \%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 55,56 % ist das Taxi wirklich blau, wenn der Zeuge sagt, dass das Taxi blau ist.

DNA-Test: A ... DNA-Profil ist identisch

$$P(A) = \frac{11}{10000000}$$

Das Profil ist beim Täter selbst ($\frac{1}{10000000}$) und bei 0,0001 % der

10 000 000 Männer identisch. $0,000\ 001 \cdot 10\ 000\ 000 = 10$

$$\Rightarrow \frac{1}{10000000} + \frac{10}{10000000} = \frac{11}{10000000}$$

B ... Test kommt zum Ergebnis: „DNA-Profil ist identisch.“

$$P(B) = \frac{11}{10000000} + \frac{100}{10000000} = \frac{111}{10000000}$$

Der Test ergibt bei 100 % der identischen Profile ein positives

$$\text{Ergebnis.} \Rightarrow \frac{11}{10000000}$$

Der Test ergibt bei 0,001 % der nicht identischen Profile ein positives Ergebnis. $0,000\,01 \cdot 10\,000\,000 = 100 \Rightarrow \frac{100}{10000000}$

$$P(A|B) = \frac{\frac{11}{10000000}}{\frac{111}{10000000}} = \frac{11}{111} \approx 0,099\,099 \approx 9,9 \%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 9,9 % ist das DNA-Profil wirklich identisch, wenn der Test ein positives Ergebnis anzeigt.

7.2 Medizinische Tests und deren Interpretation in der populärwissenschaftlichen Literatur

Bei medizinischen Tests urteilen viele Menschen aus der Fehlerwahrscheinlichkeit falsch, daher wird auch dieses Thema in einigen populärwissenschaftlichen mathematischen Büchern behandelt:

7.2.1 Medizinische Tests in Christian Hesses „Warum Mathematik glücklich macht“

Christian Hesse behandelt es in seinem Buch „Warum Mathematik glücklich macht – 151 verblüffende Geschichten“ im Kapitel „Wissenschaft und Technik“ unter den Titeln „Die Fakten und die Toten“ (Seiten 199 – 203) und „So genau wie ein Test auf HIV“ (Seiten 203 – 209).

In „Die Fakten und die Toten“ erklärt Christian Hesse zuerst die Begriffe Sensitivität und Falsch-Positiv-Rate. Unter der Sensitivität versteht man den Prozentsatz der Genauigkeit, mit dem bei einem Test bei einer tatsächlichen Erkrankung ein positives Ergebnis zu erwarten ist. Die Falsch-Positiv-Rate

gibt den Prozentsatz an, mit dem trotz Nicht-Erkrankung der Test ein positives Resultat liefert. Als Beispiel verwendet Christian Hesse hier Mammographien, die als Tests auf Brustkrebs gemacht werden. Eine 50-jährige Frau hat nach verschiedenen Studien mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 % Brustkrebs. Die Sensitivität, also die Wahrscheinlichkeit, dass das Mammogramm positiv ist, wenn die Patientin tatsächlich Brustkrebs hat, liegt bei circa 90 %, die Falsch-Positiv-Rate bei etwa 7 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Patientin, deren Mammographie ein positives Resultat liefert, wirklich an Brustkrebs erkrankt ist, könnte man nun mit bedingter Wahrscheinlichkeit berechnen oder durch absolute Häufigkeiten ausdrücken, wobei die zweite Möglichkeit für Laien leichter verständlich ist.

Berechnung mit bedingter Wahrscheinlichkeit:

A ... Patientin hat Brustkrebs und das Mammogramm ist positiv

$$P(A) = 0,008 \cdot 0,9 = 0,0072$$

B ... Mammogramm ist positiv

$$P(B) = 0,9 \cdot 0,008 + 0,07 \cdot 0,992 = 0,07664$$

Mammogramm ist positiv und Patientin ist tatsächlich erkrankt

$$0,9 \cdot 0,008$$

Mammogramm ist positiv, aber Patientin ist nicht krank

$$0,07 \cdot 0,992$$

A|B ... Patientin hat tatsächlich Brustkrebs, wenn das Mammogramm positiv ist.

$$P(A|B) = \frac{0,0072}{0,07664} \approx 0,0939 \approx 9,39 \%$$

Also hat eine Patientin nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 9,39 % tatsächlich Brustkrebs, wenn das Mammogramm positiv ist.

Berechnung mit absoluten Häufigkeiten:

Wir nehmen eine Gruppe von 1000 50-jährigen Frauen an, da 0,8 % der Frauen an Brustkrebs erkranken, sind das $1000 \cdot 0,008 = 8$ Frauen. Demnach erkranken 992 Frauen nicht an Brustkrebs. Wird nun eine Mammographie gemacht, ergibt sie bei 7 von 8 erkrankten Frauen ($8 \cdot 0,9 = 7,2 \approx 7$ Frauen) und bei 70 nicht erkrankten Frauen ($992 \cdot 0,07 = 69,44 \approx 70$ Frauen) ein positives Resultat. Das bedeutet, dass von 1000 Frauen 77 ein positives Mammogramm bekommen, wobei aber von diesen 77 Frauen nur 7 tatsächlich erkrankt sind, das sind circa 9 % ($\frac{7}{77} = 0,09 \approx 9 \%$).

Das Erschreckende an Christian Hesses Erläuterungen ist aber die Tatsache, dass sehr viele Ärzte nicht wissen, wie nach Kenntnis der Sensitivität und der Falsch-Positiv-Rate die Wahrscheinlichkeit für eine tatsächliche Erkrankung bei einem positiven Mammogramm einzuschätzen wäre, und mit der Interpretation bedingter Wahrscheinlichkeiten überfordert sind. Nach einer Studie des Psychologieprofessors Gerg Gigerenzer glaubt ein Drittel der Ärzte mit mittlerer Berufserfahrung, dass die Wahrscheinlichkeit für eine tatsächliche Erkrankung bei einem positiven Mammogramm bei 90 % liegt, ein weiteres Drittel, meint, die Wahrscheinlichkeit liege zwischen 50 % und 80 %, und ein Drittel zwischen 1 % und 50 %. Außerdem erwähnt Christian Hesse, dass diese Fehlinterpretationen bedingter Wahrscheinlichkeiten von der Pharmaindustrie zu Werbezwecken noch begünstigt werden.

In „So genau wie ein Test auf HIV“ erläutert Christian Hesse, wie bei einem positiven HIV-Test die Wahrscheinlichkeit für eine tatsächliche Erkrankung einzuschätzen ist. In Deutschland wird üblicherweise der ELISA-Test verwendet, der eine Sensitivität von 99,5 % und eine Spezifität von ebenfalls 99,5 % hat. Die Spezifität besagt, mit welcher prozentuellen Wahrscheinlichkeit der Test bei einer negativen Probe auch ein negatives Ergebnis anzeigt. Die HIV-Prävalenz liegt in Deutschland bei den

Erwachsenen im Alter von 15 bis 50 Jahren bei 0,2 %, das bedeutet, dass von 1000 Erwachsenen im Schnitt zwei mit HIV infiziert sind.

Wir gehen bei der Berechnung von einer Grundmenge von 100 000 erwachsenen Menschen aus. Da die HIV-Prävalenz bei 0,2 % liegt, sind von den 100 000 Menschen 200 ($100\,000 \cdot 0,002 = 200$) mit HIV infiziert und 99 800 ($100\,000 - 200 = 99\,800$) sind nicht infiziert. Durch die Sensitivität von 99,5 % wird bei 199 der 200 Infizierten beim ELISA-Test ein positives Resultat gegeben ($200 \cdot 0,995 = 199$), bei einem Infizierten ein negatives Resultat ($200 \cdot 0,005 = 1$). Aufgrund der Spezifität von 99,5 % zeigt der ELISA-Test bei 499 der 99 800 Nichtinfizierten trotzdem ein positives Ergebnis ($99\,800 \cdot 0,005 = 499$) und bei 99 301 der Nichtinfizierten ein negatives Ergebnis ($99\,800 \cdot 0,995 = 99\,301$). Um das übersichtlicher darzustellen, hilft eine Tabelle (Die grauen Kästchen enthalten die Testergebnisse, die mit der tatsächlichen Erkrankung oder Nichterkrankung übereinstimmen.):

Tabelle 4: ELISA-Test, Prävalenz 0,2%

Prävalenz: 0,2 %		HIV-Infektion		
		vorhanden	nicht vorhanden	Gesamt
ELISA-Test	Positiv	199	499	698
	Negativ	1	99 301	99 302
	Gesamt	200	99 800	100 000

64

698 Personen bekommen daher ein positives Testresultat, obwohl nur 199 davon tatsächlich infiziert sind, also ist man nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{199}{698} \approx 0,2851 \approx 28,51\%$ bei einem positiven ELISA-Test-Ergebnis auch wirklich infiziert, beziehungsweise 71,49 % der Positiv-Getesteten sind gar nicht infiziert.

⁶⁴ mod. nach Christian Hesse: „Warum Mathematik glücklich macht“, Seite 205

Nur eine Person bekommt trotz Infektion ein negatives Testresultat, während 99 301 nicht infizierte Personen auch ein negatives Ergebnis erhalten, also ist man mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{99302} \approx 0,000\,010\,07 \approx 0,001\,07\%$ trotz eines negativen ELISA-Test-Ergebnisses infiziert, beziehungsweise ist man bei einem negativen Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,998 993 % auch tatsächlich nicht infiziert. Bei einem negativen Resultat kann man sich also so gut wie sicher sein, dass man nicht infiziert ist.

Erhält man beim ELISA-Test ein positives Resultat, wird noch zur Abklärung der Western-Blot-Test durchgeführt, dieser hat eine Sensitivität von praktisch 100 % und eine Spezifität von 99,9996 % und ist daher auch viel teurer. Da bereits der ELISA-Test gemacht wurde, steigt nun die HIV-Prävalenz auf 28,51 % = 0,2851. Um uns die Rechnung wieder zu vereinfachen, gehen wir von einer Grundmenge von einer Million Personen aus, die bereits positiv getestet wurden. 285 100 davon sind tatsächlich mit HIV infiziert, 714 900 nicht. Da die Sensitivität 100 % beträgt, werden alle Infizierten wiederum positiv getestet, keine Person erhält dieses Mal trotz Infektion ein negatives Testergebnis. Und aufgrund der Spezifität von 99,9996 % bekommen von den Nichtinfizierten dieses Mal rund drei Personen ein weiteres Mal ein positives Testresultat ($714\,900 \cdot 0,000\,004 = 2,8596 \approx 3$), und 714 897 Personen ein negatives Ergebnis ($714\,900 \cdot 0,999\,996 = 714\,897,1404 \approx 714\,897$). Zur vereinfachten Darstellung setzen wir die Werte wiederum in eine Tabelle ein:

Tabelle 5: Western-Blot-Bestätigungstest

Prävalenz: 28,51 %		HIV-Infektion		
		vorhanden	nicht vorhanden	Gesamt
Western-Blot-Test	Positiv	285 100	3	285 103
	Negativ	0	714 897	714 897
	Gesamt	285 100	714 900	1 000 000

Nun zeigt der Test bei 285 103 Personen ein positives Resultat an, 285 100 davon sind tatsächlich erkrankt, also zeigt der Western-Blot-Test – wenn er nach einem positiven Resultat beim ELISA-Test durchgeführt wird – mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{285\,100}{285\,103} \approx 0,999\,989\,477 \approx 99,999\,\%$ ein positives Ergebnis an, wenn die Person auch tatsächlich erkrankt ist. „Das Resultat des Western-Blot-Bestätigungstests ist demnach sehr ernst zu nehmen. Wenn er positiv reagiert, ist der Ernstfall da.“⁶⁵

Anders schaut die ganze Sache aus, wenn der ELISA-Test dort durchgeführt wird, wo die HIV-Prävalenz höher ist, beispielsweise in einigen afrikanischen Staaten, wo die HIV-Prävalenz durchaus bei circa einem Prozent liegen kann. In diesem Fall sind von 100 000 Personen 1 000 infiziert. Bei 995 Infizierten zeigt der ELISA-Test ein positives Resultat, bei 5 ein negatives, die Sensitivität des Testes ändert sich ja nicht und liegt immer noch bei 99,5 %. Da ja auch die Spezifität nach wie vor 99,5 % beträgt, bekommen von 99 000 Nichtinfizierten 495 ($99\,000 \cdot 0,005 = 495$) ein positives und 98 505 ($99\,000 \cdot 0,995 = 98\,505$) ein negatives Ergebnis. Zur Veranschaulichung wieder die Tabelle:

Tabelle 6: ELISA-Test, Prävalenz 1 %

Prävalenz: 1 %		HIV-Infektion		
		vorhanden	nicht vorhanden	Gesamt
ELISA-Test	Positiv	995	495	1 490
	Negativ	5	98 505	98 510
	Gesamt	1 000	99 000	100 000

⁶⁵ Christian Hesse: „Warum Mathematik glücklich macht“, Seite 209

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{995}{1490} \approx 0,6678 \approx 66,78\%$ ist man in diesem Fall bei einem positiven Testergebnis wirklich infiziert (mit 33,22 % nicht), mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{98\,510} \approx 0,000\,051 \approx 0,0051\%$ ist eine Person trotz eines negativen Resultats infiziert (mit 99,995 % nicht).

7.2.2 Medizinische Tests in Rudolf Taschners „Zahl Zeit Zufall“

Auch Rudolf Taschner behandelt dieses Thema in „Zahl Zeit Zufall“ im Kapitel „Alles ist Zufall“ unter dem Titel „Tests, die nichts besagen“ (Seiten 80 – 82). Er geht hier auf den „ersten österreichischen BSE-Fall“ Anfang 2001 in Schattwald, im Tiroler Außerfern, ein. Wir gehen von einer BSE-Prävalenz von 0,01 %, einer untersuchten Menge von einer Million Rindern, einer Sensitivität von 100 % und einer Spezifität von 99 % aus. Dann sind 100 von der Million der getesteten Rinder erkrankt und 999 900 nicht. Bei allen 100 zeigt der Test ein positives Resultat an. Bei 9 999 nichterkrankten Rindern liefert der Test trotzdem ein positives Resultat, bei 989 901 ein negatives. Auch dazu betrachten wir wieder die Tabelle:

Tabelle 7: BSE-Test

Prävalenz: 0,01 %		BSE-Erkrankung		
		vorhanden	nicht vorhanden	Gesamt
BSE-Test	Positiv	100	9 999	10 099
	Negativ	0	989 901	989 901
	Gesamt	100	999 900	1 000 000

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{100}{10\,099} \approx 0,009902 \approx 0,9902\%$ ist ein Rind, das positiv getestet wurde, auch tatsächlich erkrankt, das ist weniger als 1 %.

7.2.3 Medizinische Tests in Gero von Randows „Das Ziegenproblem“

Nachdem Gero von Randow im Kapitel „...dann schließen“ (Seiten 126 – 146) in „Das Ziegenproblem“ die bedingte Wahrscheinlichkeit behandelt hat, bringt auch er ein Beispiel zu medizinischen Tests. Er rechnet mit einem imaginären Test zur Diagnose der Krätze und geht von einer Zuverlässigkeit von 98 % in beide Richtungen (d. h. sowohl von einer Sensitivität als auch von einer Spezifität von 98 %) und einer Verbreitung von 0,1% der Krätze aus und berechnet nun die Gefahr, die Krätze wirklich zu haben, wenn ein Test positiv ausgefallen ist ($P(K|pos)$; K...an Krätze erkrankt, pos...positives Testresultat), mit dem Satz von Bayes (siehe Seite 71).

$$P(K|pos) = \frac{P(pos|K) \cdot P(K)}{P(pos|\neg K) \cdot P(\neg K) + P(pos|K) \cdot P(K)}$$

$$P(K|pos) = \frac{0,98 \cdot 0,001}{0,02 \cdot 0,999 + 0,98 \cdot 0,001}$$

$$P(K|pos) = \frac{0,00098}{0,01998 + 0,00098}$$

$$P(K|pos) = \frac{0,00098}{0,02096} \approx \mathbf{0,04676} \approx \mathbf{4,676\%}$$

Es ist also nicht besonders wahrscheinlich an der Krätze erkrankt zu sein, wenn man ein positives Testergebnis bekommt. Um die Berechnung anschaulicher zu machen, stelle ich wieder eine Tabelle auf, in der ich von 1000 000 getesteten Personen ausgehe.

Tabelle 8: Krätze-Test

Prävalenz: 0,1 %		Erkrankung an der Krätze		
		vorhanden	nicht vorhanden	Gesamt
Krätze-Test	Positiv	980	19 980	20 960
	Negativ	20	979 020	979 040
	Gesamt	1 000	999 000	1 000 000

Dividiert man nun wieder die Anzahl der Personen, die positiv getestet wurden und wirklich krank sind, durch die Anzahl aller positiv getesteten Personen, ergibt sich auch hier $\frac{980}{20\,960} \approx 0,046\,76 \approx 4,676\,\%$.

Außerdem schreibt auch Gero von Randow darüber, dass vermutet wird, dass viele Ärzte die Bedeutung der A-priori-Wahrscheinlichkeit medizinischer Tests unterschätzen, allerdings empfindet er das nicht als so tragisch wie Christian Hesse (siehe Kapitel 7.2.1, ab Seite 73), denn medizinische Tests werden ja meistens nicht ohne Grund gemacht, sondern bei vielen Menschen vor allem dann, wenn schon Symptome auf eine Erkrankung hinweisen.

8. Wie man Fische zählt, ohne sie zu fangen – Stochastisches Zählen

Sowohl im Kapitel „Zufallszählen“ (Seiten 273 – 274) in Christian Hesses „Warum Mathematik glücklich macht“ als auch in der Beantwortung auf die 59. Fragestellung „Wie zählt man Fische, ohne sie zu fangen?“ (Seite 111 – 112) in Albrecht Beutelspachers „Kleines Mathematikum“ wird erklärt, wie die „Methode des stochastischen Zählens“ funktioniert. Albrecht Beutelspacher verwendet dazu ein praktisches Beispiel, Christian Hesse erläutert es theoretisch.

Um die Anzahl der Fische in einem Teich zu bestimmen, könnte man sie alle fangen und zählen, was aber – außer beim Abfischen – durchaus schwierig sein kann. Nimmt man aber die Stochastik zu Hilfe und reicht einem ein ungefährender Wert, kann man die Anzahl der Fische ohne allzu großen Aufwand ermitteln. Ganz ohne einige Fische zu fangen, geht es allerdings nicht.

Zuerst fängt man eine bestimmte Menge an Fischen, zum Beispiel 100, markiert sie und wirft sie wieder in den Teich. Dann lässt man den Fischen genügend Zeit, um sich gut durchzumischen und fängt erneut Fische. Aus der Prozentzahl, wie viele Fische in der zweiten Stichprobe markiert sind, lässt sich nun auf den gesamten Bestand schließen. Werden beim zweiten Fang 5 % markierte Fische gefangen, bedeutet das, dass beim ersten Fang circa 5 % der Fische gefangen und markiert wurden, also, dass die 100 markierten Fische 5 % der Gesamtpopulation sind und die Gesamtpopulation daher $\frac{100}{0,05} = \frac{10\,000}{5} = 2\,000$ Fische beträgt.

Allgemein ausgedrückt: Werden von der Gesamtpopulation von N Fischen beim ersten Fang M Fische markiert und werden beim zweiten Fang von n

gefangenen Fischen m markierte Fische gezählt, kann man auf folgendes Verhältnis schließen:

$$M : N \approx m : n$$

Durch Umformen folgt:

$$m \cdot N \approx n \cdot M$$

Und:

Formel 13: Approximation der Populationsgröße durch das „mark-and-recapture-Verfahren“⁶⁶

$$N \approx \frac{n \cdot M}{m}$$

Diese Methode – im Englischen „mark and recapture“ genannt – kann man nicht nur für Fische, sondern für das Zählen aller möglichen Individuen in nur schwer abzählbaren Populationen verwenden. Albrecht Beutelspacher gibt als mögliche andere Anwendung das Ermitteln von Drogenabhängigen in einer Stadt durch „Markierung“ in einer Drogenberatungsstelle und mit einer Razzia als zweiter Stichprobe an.

⁶⁶ Siehe auch Christian Hesse: „Warum Mathematik glücklich macht“, Seite 274

9. Das Ziegenproblem

Das Ziegenproblem wird auch oft als Drei-Türen-Problem oder Monty-Hall-Dilemma bezeichnet, benannt nach dem Quizshow-Moderator Monty Hall, der in den Vereinigten Staaten die Show „Let's make a deal“ moderierte, die im deutschen Sprachraum unter dem Namen „Geh aufs Ganze!“ bekannt war und in deren Endrunde der Kandidat zwischen drei Türen wählen konnte. Hinter einer Tür stand der Hauptpreis, ein Auto, hinter den beiden anderen jeweils eine Ziege, die Niete. Nachdem der Kandidat eine Tür gewählt hatte (die Wahrscheinlichkeit, die Tür mit dem Auto zu wählen, beträgt $\frac{1}{3}$), ließ der Moderator, der wusste, was sich hinter welcher Tür befand, eine der beiden anderen Türen öffnen, dahinter stand eine Ziege. Nun stellte der Moderator dem Kandidaten die Frage, ob er bei seiner Wahl bleiben, oder ob er doch zur anderen verbliebenen Tür wechseln möchte. Sollte der Kandidat bei seiner Wahl bleiben oder lieber die andere Tür wählen?

(Es sind mehrere Varianten des Ziegenproblems im Umlauf, ich beschränke mich hier aber auf die Variante, dass der Moderator nur eine Tür öffnet, hinter der eine Ziege steht, alles andere macht ja für die Spannung, die in der Show aufgebaut werden soll, keinen Sinn. → „Monty-Hall-Standard-Problem“)

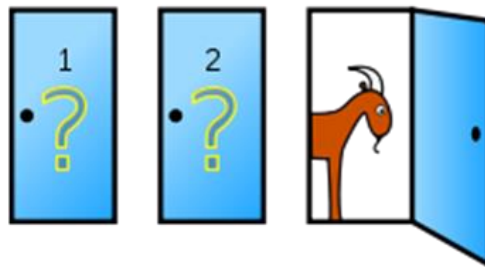


Abbildung 11: Ziegenproblem⁶⁷

⁶⁷ <http://de.wikipedia.org/wiki/Ziegenproblem> (1. Juni 2014)

Intuitiv würden nun die meisten Menschen sagen, dass es egal sei, ob man die Tür wechselt oder nicht, denn jetzt sind ja nur mehr 2 Türen da, hinter einer davon befindet sich das Auto, hinter der anderen eine Ziege, und die Wahrscheinlichkeit, die Tür mit dem Auto dahinter zu wählen, ist nun jeweils $\frac{1}{2}$, also ist es gleichgültig, ob man die Tür wechselt oder nicht. So ist es aber nicht! Da der Moderator auf jeden Fall eine Tür öffnet, hinter der eine Ziege steht, steigt die Wahrscheinlichkeit, das Auto zu bekommen auf $\frac{2}{3}$, wenn man wechselt.

9.1 Betrachtung der verschiedenen Möglichkeiten, eine Tür zu wählen

Im Folgenden wollen wir die Möglichkeiten betrachten, die unser Kandidat, nennen wir ihn Hannes, hat, wenn er immer bei seiner ursprünglichen Entscheidung bleibt:

1. Hannes wählt auf Anhieb die Tür mit dem Auto. Der Moderator öffnet irgendeine der beiden anderen Türen. Hannes bleibt bei seiner Entscheidung und gewinnt das Auto.

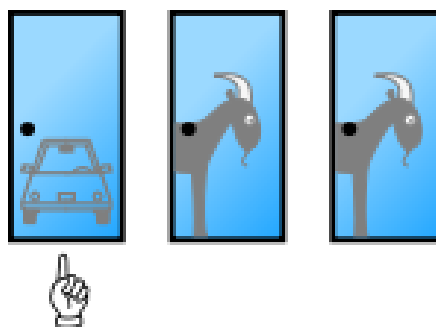


Abbildung 12: Kandidat wählt das Auto und bleibt bei seiner Entscheidung⁶⁸

⁶⁸ <http://de.wikipedia.org/wiki/Ziegenproblem> (1. Juni 2014)

2. Hannes wählt die Tür mit der ersten Ziege, der Moderator muss die Tür mit der zweiten Ziege öffnen, Hannes bleibt bei seiner Entscheidung und verliert.

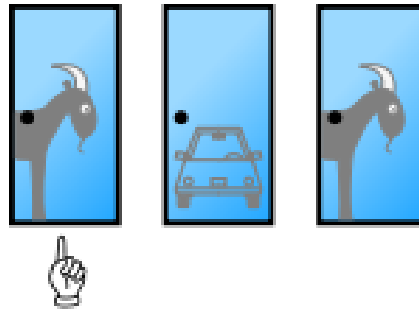


Abbildung 13: Kandidat wählt 1. Ziege und bleibt bei seiner Entscheidung⁶⁹

3. Hannes wählt die Tür mit der zweiten Ziege, wieder muss der Moderator die Tür mit der anderen Ziege öffnen und wieder verliert Hannes, weil er auf seiner ursprünglichen Entscheidung beharrt.

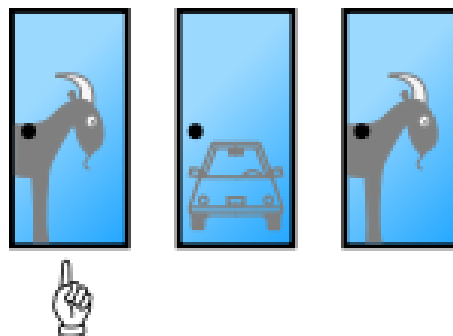


Abbildung 14: Kandidat wählt 2. Ziege und bleibt bei seiner Entscheidung⁷⁰

Hannes gewinnt das Auto also nur in einem von drei Fällen, daher ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn des Autos, wenn man bei der ursprünglichen Tür bleibt, $\frac{1}{3} = 0,3 = 33,3\%$.

⁶⁹ <http://de.wikipedia.org/wiki/Ziegenproblem> (1. Juni 2014)

⁷⁰ <http://de.wikipedia.org/wiki/Ziegenproblem> (1. Juni 2014)

Nun ist die Kandidatin Leni an der Reihe, sie wechselt in jedem Fall die Tür, nachdem der Moderator eine Ziegen-Tür geöffnet hat. Welche Möglichkeiten gibt es in Lenis Fall?

1. Leni wählt bei der ersten Entscheidung die Tür mit dem Auto, der Moderator öffnet eine der beiden Ziegen-Türen (welche von beiden ist in diesem Fall gleichgültig), Leni wechselt zur anderen Ziegentür und gewinnt nur eine Ziege.

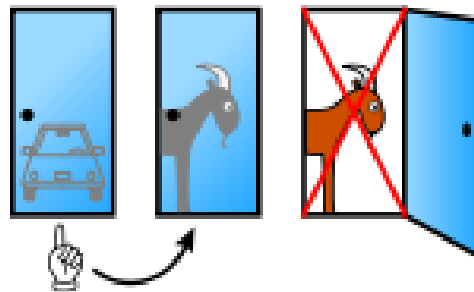


Abbildung 15: Kandidatin wählt Auto und wechselt⁷¹

2. Leni wählt die Tür mit der ersten Ziege, der Moderator öffnet die Tür, hinter der die andere Ziege steht, Leni schwenkt zur verbliebenen Tür um und gewinnt das Auto.

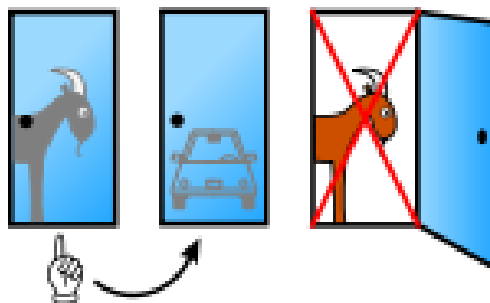


Abbildung 16: Kandidatin wählt 1. Ziege und wechselt⁷²

⁷¹ <http://de.wikipedia.org/wiki/Ziegenproblem> (1. Juni 2014)

⁷² <http://de.wikipedia.org/wiki/Ziegenproblem> (1. Juni 2014)

3. Leni wählt die Tür mit der zweiten Ziege, der Moderator muss die Tür mit der ersten Ziege öffnen, Leni wechselt wiederum zur übrigen Tür und gewinnt auch in diesem Fall das Auto.

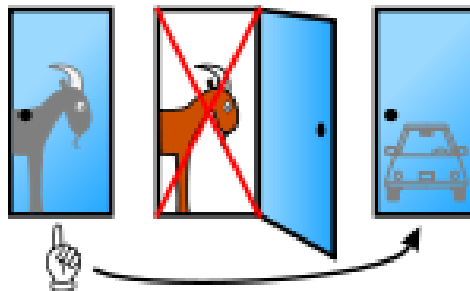


Abbildung 17: Kandidatin wählt 2. Ziege und wechselt⁷³

In zwei von drei Fällen gewinnt Leni das Auto, wenn sie die Tür wechselt. Lenis Strategie geht also in mehr Fällen auf als Hannes' Strategie.

9.1.1 Versuch zum Ziegenproblem

Ich habe selbst dazu einen Versuch durchgeführt und die Ziegentüren mit drei Spielkarten simuliert, zwei Zehner standen für die Ziegen und ein Ass war das Auto. Im ersten Teil des Versuches durfte/musste mein Freund eine Karte auswählen und bei seiner Entscheidung bleiben, nachdem ich einen Zehner aufgedeckt hatte. Dies wiederholten wir hundert Mal. Das Ergebnis sah folgendermaßen aus: (Z ... Zehner/Ziege, A ... Ass/Auto)

Z AAA Z A Z A ZZZ A ZZZZ A ZZ A Z A Z A Z A Z A Z A ZZ A Z A
 ZZZ A ZZZZZZ A Z A ZZZZ A ZZZZZ AAA ZZZ A ZZ AAAA ZZZZ A
 ZZZZ A Z A Z A ZZ AA ZZZZZZZZZ (66 Ziegen, 34 Autos)

⁷³ <http://de.wikipedia.org/wiki/Ziegenproblem> (1. Juni 2014)

Im zweiten Teil des Versuches wechselte mein Freund immer zur noch verbliebenen Karte, nachdem ich einen Zehner aufgedeckt hatte, und diesmal kam folgendes Ergebnis dabei heraus:

AAAAA Z AA Z AAA ZZ AAAAA Z AAAAA ZZ A Z A Z A Z AAA Z AA ZZ
AAA Z AAAAA Z AAA ZZ A Z AAAAAA Z A Z AA Z AA ZZ AAAAA ZZ
AAAAAAA Z A Z AA ZZZ AA ZZ A (32 Ziegen, 68 Autos)

Im ersten Versuch (Nicht-Wechseln) war das Verhältnis Ziegen : Autos = 66 % : 34 %, was sehr nahe an dem erwarteten Verhältnis von $66,6\% : 33,3\%$ lag und auch im zweiten Versuch (Wechseln) war das Verhältnis von Ziegen : Autos = 32 % : 68 % wieder sehr nahe an der Erwartung von $33,3\% : 66,6\%$. Dieser Versuch hat also die Annahme, dass es besser sei, zur verbliebenen Tür zu wechseln, untermauert. (Allerdings schulde ich meinem Freund jetzt 102 Autos und 98 Ziegen.)

9.2 Versuch mit mehr als drei Türen

Vielen ist diese Erklärung noch nicht deutlich genug, aber es wird offensichtlicher, wenn man die Zahl der Türen erhöht. Mein liebstes Beispiel dazu ist ein Kartendeck mit 52 Karten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, zufällig das Treff-Ass aus dem verdeckten Kartenstapel auszuwählen, beträgt $\frac{1}{52} \approx 0,0192 \approx 1,92\%$, es ist also nicht besonders wahrscheinlich, aus 52 Karten eine bestimmte rein zufällig zu ziehen. Werden jetzt aber der Reihe nach alle anderen Karten bis auf eine und die ursprünglich gewählte Karte aufgedeckt und zeigen alle diese Karten nicht das Treff-Ass, würde wahrscheinlich keiner mehr behaupten, dass die Chancen nun auch 50 : 50 stehen, dass die ursprünglich gewählte Karte oder die verbliebene Karte das Treff-Ass ist, und jeder würde höchstwahrscheinlich zur anderen verbliebenen Karte

wechseln und diese wäre mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{51}{52} \approx 0,9808 \approx 98,08\%$ das Treff-Ass.

9.3 Das Ziegenproblem in der populärwissenschaftlichen Literatur

In einigen Werken der populärwissenschaftlichen mathematischen Literatur wird das Ziegenproblem behandelt, eines – Gero von Randows „Das Ziegenproblem – Denken in Wahrscheinlichkeiten“ – ist ihm sogar komplett gewidmet.

9.3.1 Das Ziegenproblem in Albrecht Beutelspachers „Kleines Mathematikum“

Albrecht Beutelspacher behandelt es in der Beantwortung der 58. Fragestellung „Was ist das Ziegenproblem?“ (Seiten 109 – 111) in seinem „Kleinen Mathematikum“ in kurzer und einfacher Weise. Er erklärt, warum es besser ist, die Tür zu wechseln, dadurch, dass er – wie ich zu Beginn des Kapitels (siehe ab Seite 85) – die möglichen Ausgänge auflistet, falls man seine ursprüngliche Entscheidung ändert und falls nicht.

9.3.2 Das Ziegenproblem in „Professor Stewarts mathematisches Sammelsurium“

Auch Ian Stewart stellt in seinem Buch „Mathematisches Sammelsurium“ unter der Überschrift „Vorsicht, Ziege!“ (Seiten 244 – 245) die Frage, ob es besser ist, bei seiner anfänglichen Entscheidung zu bleiben, nachdem Monty Hall eine Ziegen-Tür geöffnet hat, oder ob man doch lieber zur anderen Tür

wechseln sollte. Im Antworten-Teil (auf den Seiten 362 – 365) löst er die Aufgabenstellung und erklärt, warum es besser ist, doch die andere Tür zu nehmen.

Eine Erklärung besteht darin, dass er das Beispiel einer Computersimulation bringt, die bei einer Million von Versuchen rund 333 300 mal einen Autogewinn anzeigte, wenn man auf seiner ursprünglichen Wahl blieb, und bei etwa 666 700 Versuchsausgängen zu einem Gewinn des Autos führte, wenn man sich doch anders entschied.

Die zweite Erklärung, die Ian Stewart anführt, ist die mit dem Kartendeck von 52 Karten, die ich schon auf Seite 89 angegeben habe.

9.3.3 Das Ziegenproblem in Rudolf Taschners „Zahl Zeit Zufall“

Unter dem Titel „Zwei Ziegen und ein Auto“ (Seiten 101 – 106) betrachtet auch Rudolf Taschner das Ziegenproblem in seinem Buch „Zahl Zeit Zufall“. Er beginnt allerdings nicht damit, von der Quizshow zu erzählen, sondern bettet das Problem – oder besser dessen Auflösung – in eine Geschichte aus „Tausendundeiner Nacht“, die so schön erzählt ist, dass ich sie hier nicht zusammenfassen, sondern gänzlich wiedergeben möchte. Dieses Märchen ist außerdem ein perfektes Beispiel, um zu zeigen, wie großartig Rudolf Taschner Mathematik in unterhaltsamen Erzählungen „versteckt“.

„Scheherazade, die Tochter des Wesirs von König Scharyar, war, so erzählt die Legende, über den König entsetzt: Jeden Tag heiratete dieser eine neue Frau, die er am nächsten Morgen hinrichten ließ. Seine Grausamkeit rührte von einer bitteren Erfahrung mit seiner ersten Frau her: Er entdeckte, dass sie ihn mit einem Sklaven betrog. Daraus zog er den Schluss, es gäbe keine treue Frau auf Erden. Um sicher zu gehen, sich nie wieder von einer Frau betrügen zu lassen, gönnte er keiner seiner Frauen mehr ein längeres Leben als einen Tag nach der Hochzeit.“

Scheherazade weiß, wie sie diesem grausamen Treiben ein Ende bereitet: Sie lässt sich von ihrem Vater dem König als Frau geben. In der Nacht beginnt sie, Scharyar eine Geschichte zu erzählen, deren Handlung am nächsten Morgen abbricht. Neugierig auf das Ende der Geschichte lässt Scharyar sie am Leben. Aber in der nächsten Nacht beendet sie nicht nur die vorher erzählte Geschichte, sondern beginnt wieder mit einer neuen, deren Ende beim Anbruch des Tages noch offen bleibt.

So erzählt sie 1001 Nächte lang. Am Ende ist König Scharyar von Scheherazades Klugheit so beeindruckt, dass er sie am Leben lässt, ja sich in sie unsterblich verliebt.

Am Tag nach der tausendundersten Nacht stelle ich mir das folgende Gespräch zwischen Scharyar und Scheherazade vor:

„Wie aber kann ich sicher sein, dass du mir treu bleibst?“, fragt der immer noch nicht von seinem Argwohn erlöste Scharyar. „Gewiss kannst du dessen nicht sein“, gibt Scheherazade unumwunden zu, „aber ich will dir zeigen, wie sehr du mir vertrauen kannst: Ein einziges meiner 1001 Märchen ist eine wahre Geschichte. So sicher, wie du erraten wirst, welches der 1001 Märchen wahr ist, so sicher kannst du sein, dass ich dich nie betrügen werde.“

„Aber das ist doch fast ausgeschlossen, dass ich die einzig wahre Geschichte unter deinen 1001 Märchen errate“, fuhr Scharyar sie an, „ich kann mich doch nur mehr dunkel an alle und überhaupt nicht mehr an deren Reihenfolge erinnern. Ich müsste blind raten. Es ist doch höchst unwahrscheinlich, dass ich die richtige treffe.“ „Versuch es trotzdem“, beruhigte ihn Scheherazade, „ich werde dir beim Raten helfen. Sag mir zuerst nur irgendeine Zahl zwischen eins und tausendundeins, es könnte die Nummer der wahren Geschichte sein.“

„Siebenhundertneunundzwanzig“, murmelte missmutig der König. „Jetzt will ich dir helfen“, flüstert nun Scheherazade ihm ins Ohr, „das 729. Märchen hast du ausgewählt, und ich sage dir, dass vielleicht diese, oder aber die 313. Geschichte wahr ist. Alle anderen sind bestimmt nur erfunden. Ich gebe dir noch einmal die Möglichkeit zu raten: Welche der Geschichten ist wahr, die siebenhundertneunundzwanzigste oder die dreihundertdreizehnte?“

Der König dachte ein wenig nach, dann begann er zu lächeln und umarmte erleichtert seine gewitzte Frau: „Jetzt begreife ich: Sicher wird die 313. Geschichte die wahre Geschichte sein, jedenfalls tausendmal sicherer, als dass es das 729. Märchen wäre. Du bist doch wirklich sehr, sehr klug. Denn damit hast du mich auch gelehrt: Zuvor hatte ich irgendwelche Frauen gewählt und konnte mich nie auf deren Treue verlassen. Du aber hast dann durch deinen

*Vater dafür gesorgt, dass ich genau dich wähle, und auf deine Treue kann ich mich tausendmal mehr verlassen, als bei irgendeiner anderen Frau.*⁷⁴

Mit dieser entzückenden Geschichte gibt Rudolf Taschner die Erklärung dafür, warum es besser ist, die Entscheidung nochmal zu überdenken und zur andern Tür zu wechseln. Wie schon zuvor das Beispiel mit den 52 Karten (siehe Seite 89), ist auch das Beispiel mit den 1001 Märchen eine besonders überspitzte Art von Erklärung. Es ist schon extrem unwahrscheinlich aus 52 Karten eine bestimmte zufällig zu erwischen. Noch unwahrscheinlicher ist es, aus 1001 Geschichten eine bestimmte zu erraten ($\frac{1}{1001} \approx 0,000\,999 \approx 0,099\,9\%$). Wenn dann alle anderen Möglichkeiten bis auf eine wegfallen, ist es ziemlich sicher, dass diese die richtige ist und nicht die ursprünglich gewählte. Bei den drei Türen der Quizshow ist es um einiges wahrscheinlicher, gleich auf Anhieb die richtige zu erraten, und daher ist es wahrscheinlich für so viele Menschen so schwierig zu verstehen, warum es besser wäre, die Tür zu wechseln.

9.3.4 Das Ziegenproblem in Gero von Randows „Das Ziegenproblem“

Natürlich wird auch in einem Buch, das diesen Titel trägt, das Ziegenproblem behandelt. Gero von Randow zeigt mehrere Möglichkeiten auf, wie es sich erklären lässt, dass es günstiger ist, die Tür zu wechseln, nachdem der Moderator eine Tür mit einer Ziege dahinter geöffnet hat.

Gero von Randow beginnt mit der Geschichte von Marilyn vos Savant, die als Mensch mit dem höchsten Intelligenzquotienten gilt und die Kolumne „Fragen Sie Marilyn“ schreibt, in der sie Denksportaufgaben löst. Von einem ihrer Leser bekam sie folgende Aufgabe gestellt:

⁷⁴ Rudolf Taschner: „Zahl Zeit Zufall“, Seiten 101 – 103

Sie nehmen an einer Spielshow im Fernsehen teil, bei der Sie eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet der Preis, ein Auto, hinter den beiden anderen stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir Nummer eins. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet; mit den Worten „Ich zeige Ihnen mal was“ öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer drei, und eine meckernde Ziege schaut ins Publikum. Er fragt: „Bleiben Sie bei Nummer eins, oder wählen Sie Nummer zwei?“⁷⁵

Marilyn vos Savant sagte, dass die Tür Nummer zwei bessere Chancen hätte, und löste damit einen Sturm der Entrüstung unter ihrer Leserschaft aus, der Intuition vieler Menschen, darunter Mathematikern, widersprach diese Antwort und sie brachten viele vermeintliche Beweise, warum diese Antwort falsch sei.

Auch Gero von Randow schrieb, nachdem er einen Artikel über Marilyn vos Savant und das Ziegenproblem gelesen hatte, einen Artikel für die *Zeit* über das Ziegenproblem und seine Lösung. Auch er bekam eine Unmenge an Leserbriefen, in denen geschrieben wurde, was für ein Schwachsinn diese Lösung denn sei.

Andererseits bekam er auch Briefe von Lesern, die das Ziegenproblem durchprobiert hatten und im Schnitt beim Wechseln der Tür in zwei von drei Fällen gewonnen hätten, wenn sie nicht wechselten, nur in einem von drei Fällen.

Ein anderer Leser brachte folgende Frage auf: Wenn das Spiel mit hundert statt mit drei Türen durchgeführt würde, sich der Kandidat eine Tür aussucht und der Moderator von den verbliebenen 99 Türen nun 98 öffnen muss, welche Tür würde der Kandidat nun wählen, die, die er sich ursprünglich ausgesucht hat, oder die einzige andere, die nun noch übriggeblieben ist? (Siehe Kapitel 9.2, Seite 89)

⁷⁵ Gero von Randow: „Das Ziegenproblem“, Seite 9

Auf alle Fälle hielt das Ziegenproblem sowohl Marilyn vos Savants als auch Gero von Randows Leserschaft auf Trab.

In „Das Ziegenproblem – Denken in Wahrscheinlichkeiten“ zeigt Gero von Randow nun auf verschiedenen Wegen, warum Marilyn vos Savants Lösung des Ziegenproblems die richtige ist.

Der erste Einwand mancher Leser, den Gero von Randow entkräftet, ist der, dass es für das Ziegenproblem nicht drei, sondern vier mögliche Fälle gibt. Angenommen, der Kandidat wählt die erste Tür, dann können folgende Fälle eintreten:

1. Auto hinter Tür 1, Moderator öffnet Tür 2
2. Auto hinter Tür 1, Moderator öffnet Tür 3
3. Auto hinter Tür 2, Moderator öffnet Tür 3
4. Auto hinter Tür 3, Moderator öffnet Tür 2

Manche mögen jetzt einwenden, dass der Kandidat in den ersten beiden Fällen gewinnt und in den Fällen 3 und 4 verliert, also in der Hälfte der Fälle gewinnt und in der anderen Hälfte verliert, somit ist es egal, ob der Kandidat die Tür wechselt oder nicht.

Es gibt zwar vier Fälle, aber diese sind nicht gleich wahrscheinlich, da die beiden ersten Fälle von derselben Ausgangssituation abhängig sind, hier hat der Moderator dann wiederum zwei verschiedenen Möglichkeiten, eine Tür zu wählen, aber in den Fällen 3 und 4 hat er nur eine Möglichkeit, eine Tür zu öffnen. Dies lässt sich mit einem Baumdiagramm leichter veranschaulichen.

(A1 bedeutet, dass das Auto hinter Tür Nummer 1 steht, bei A2, verbirgt sich das Auto hinter der 2. Tür und bei A3 hinter der 3. Tür; M1 heißt, dass der Moderator die 1. Tür öffnet, bei M2 die 2. und bei M3 die 3.)

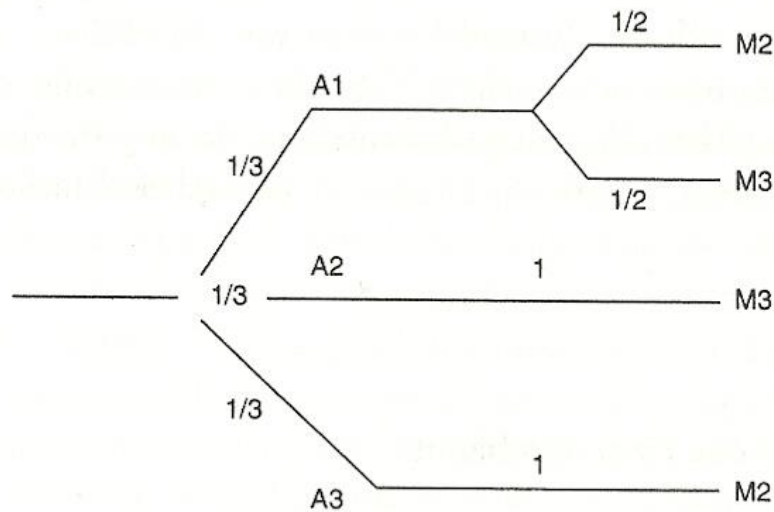


Abbildung 18: Baumdiagramm zum Ziegenproblem⁷⁶

Dadurch, dass das Baumdiagramm nicht symmetrisch ist, kann man erkennen, dass die vier Fälle nicht gleich wahrscheinlich sind.

Eine weitere Erklärung dafür, dass es besser ist, die Tür zu wechseln, nachdem der Moderator eine Ziegentür geöffnet hat, gibt Gero von Randow mittels bedingter Wahrscheinlichkeit und dem Satz von Bayes (Siehe Seite 71):

Angenommen, der Kandidat hat Tür 1 gewählt und der Moderator öffnet die 3. Tür, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter Tür Nummer 2 steht? $P(A2|M3)$

$$P(A1) = P(A2) = P(A3) = \frac{1}{3}$$

Unter welchen Umständen öffnet der Moderator die 3. Tür (M3)?

⁷⁶ Gero von Randow: „Das Ziegenproblem“, Seite 57

- Auto hinter Tür 1 (Moderator wählt Tür 3 zufällig aus – Tür 2 wäre auch möglich): $P(M3|A1) = \frac{1}{2}$
- Auto hinter Tür 2 (Der Moderator muss nun Tür 3 öffnen): $P(M3|A2) = 1$
- Auto hinter Tür 3 (Diese Tür darf der Moderator nicht öffnen!): $P(M3|A3) = 0$

Daher folgt:

$$P(A2|M3) = \frac{P(M3|A2) \cdot P(A2)}{P(M3|A1) \cdot P(A1) + P(M3|A2) \cdot P(A2) + P(M3|A3) \cdot P(A3)}$$

$$P(A2|M3) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}}$$

$$P(A2|M3) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + 0} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{2}{6}}$$

$$P(A2|M3) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{6}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Auch mit dieser Methode kommt man wieder zu dem Ergebnis, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, das Auto zu gewinnen, wenn man die Tür wechselt, bei $\frac{2}{3}$ liegt und es daher besser ist zu wechseln.

Die letzte Art, auf die Gero von Randow die Richtigkeit von Marilyn vos Savants Lösung bestätigt, ist mittels einer Computersimulation, deren Programmierung er in „Das Ziegenproblem“ auf den Seiten 165 – 166 festhält. Auch hier zeigt sich wieder, dass beim Wechseln der Tür im Schnitt in zwei von drei Fällen das Auto gewonnen wird, wenn nicht gewechselt wird, nur in einem von drei Fällen.

10. Lotto

Ein weiteres Thema, mit dem sich auch einige Werke der populärwissenschaftlichen mathematischen Literatur beschäftigen, ist das Lottospiel. Beim Lotto werden aus einer bestimmten Anzahl von Zahlen (in Österreich sind das 45, in Deutschland 49) bei einer regelmäßig stattfindenden Ziehung sechs Zahlen gezogen, wer diese Zahlen zuvor am Lottoschein richtig ausgefüllt hat, erhält eine bestimmte Menge Geld als Gewinn, die davon abhängig ist, wie viele Lotto-Tipps abgegeben wurden. Haben mehrere Menschen auf die sechs richtigen Zahlen getippt, wird der Gewinn unter ihnen aufgeteilt. Hat niemand die sechs richtigen Zahlen, bleibt der Gewinn im „Jackpot“ und der Gewinn bei der nächsten Ziehung erhöht sich. Außerdem gibt es auch kleinere Gewinne für fünf Richtige mit Zusatzzahl, fünf Richtige, vier Richtige und drei richtige Zahlen.

Mathematisch gesehen, ist die Teilnahme an einer Lotterie die bei weitem schlechteste legale Wette. Selbst der knauserigste Spielautomat hat eine Auszahlungsquote von etwa 85 Prozent. Beim deutschen Lotto 6 aus 49 werden hingegen lediglich 50 Prozent der Einsätze als Gewinnsumme ausgeschüttet. Für den Veranstalter sind Lotterien völlig risikolos, da es nur darum geht, die erhaltenen Einnahmen umzuverteilen – beziehungsweise, wie beim deutschen Zahlenlotto, deren Hälfte.“⁷⁷

Da die meisten Bücher, die ich hier betrachte, deutsche Publikationen oder von einem deutschen Verlag aus dem Englischen oder Amerikanischen übersetzt sind, werden Berechnungen auch immer zum deutschen Lotto „6 aus 49“ angestellt, ich werde im Anschluss aber auch berechnen, welche Chancen auf sechs richtige Zahlen man beim österreichischen „6 aus 45“ hat. (Siehe Kapitel 10.2, Seite 100)

⁷⁷ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 335

10.1 Berechnung der Wahrscheinlichkeit von sechs Richtigen beim Lotto „6 aus 49“

Hat man sechs Zahlen am Lottoschein angekreuzt, gibt es sechs aus 49 mögliche Zahlen, so dass die erste Zahl, die gezogen wird, eine richtige ist. Für die zweite Zahl bleiben jetzt nur noch fünf mögliche Zahlen am Tippschein, allerdings verbleiben auch nur mehr 48 Zahlen, aus denen gezogen wird. So geht es weiter, bis die letzte der sechs angekreuzten Zahlen gezogen wird. Da alle diese Zahlen gezogen werden müssen, muss man diese zum Schluss noch miteinander multiplizieren (siehe Multiplikationsregel, Seite 34).

- 1. Zahl richtig: $\frac{6}{49}$
- 2. Zahl richtig: $\frac{5}{48}$
- 3. Zahl richtig: $\frac{4}{47}$
- 4. Zahl richtig: $\frac{3}{46}$
- 5. Zahl richtig: $\frac{2}{45}$
- 6. Zahl richtig: $\frac{1}{44}$

Alle Zahlen richtig:

$$\frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} = \frac{720}{10\,068\,347\,520} = \frac{1}{13\,983\,816} \approx 0,000\,000\,072$$
$$\approx \mathbf{0,000\,007\,2\,\%}$$

Also gewinnt man beim deutschen Lotto „6 aus 49“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,000 007 2 %.

10.2 Berechnung der Wahrscheinlichkeit von sechs Richtigen beim Lotto „6 aus 45“

Die Berechnung beim österreichischen Lotto „6 aus 45“ sechs Richtige zu haben, folgt analog zur Berechnung bei „6 aus 49“. Da es aber nur 45 Zahlen zur Auswahl gibt, wird es wahrscheinlicher, die sechs richtigen Zahlen zu erraten.

- 1. Zahl richtig: $\frac{6}{45}$
- 2. Zahl richtig: $\frac{5}{44}$
- 3. Zahl richtig: $\frac{4}{43}$
- 4. Zahl richtig: $\frac{3}{42}$
- 5. Zahl richtig: $\frac{2}{41}$
- 6. Zahl richtig: $\frac{1}{40}$

Alle Zahlen richtig:

$$\frac{6}{45} \cdot \frac{5}{44} \cdot \frac{4}{43} \cdot \frac{3}{42} \cdot \frac{2}{41} \cdot \frac{1}{40} = \frac{720}{5\,864\,443\,200} = \frac{1}{8\,145\,060} \approx 0,000\,000\,123$$
$$\approx \mathbf{0,000\,012\,3\,\%}$$

Die Wahrscheinlichkeit, beim österreichischen Lotto „6 aus 45“ einen Sechser zu haben, beträgt also etwa 0,000 012 3 %, was geringfügig höher als beim deutschen Lotto ist.

10.3 Lotto in der populärwissenschaftlichen Literatur

Viele der populärwissenschaftlichen mathematischen Bücher behandeln das Lottospielen, weil es etwas ist, das sehr viele Menschen tun, wozu sie einen Bezug haben, aber meistens auch keine Ahnung, wie schlecht ihre Chancen, dabei zu gewinnen, wirklich stehen. Die meisten Autoren, die über Lotto schreiben, versuchen das auch ihrer Leserschaft nahe zu bringen. Was auch ein Gespräch beweist, das Alex Bellos mit Ed Thorp führte, einem Mathematiker, der sich mit Glücksspiel befasste, und durch Wettstrategien (siehe Kelly-Strategie, Seite 47), die er auf Hedgefonds anwandte, ein Vermögen verdiente. *„Ich fragte, ob er je Lotto spiele. „Sie meinen, ob ich schlechte Wetten eingehe?““⁷⁸*

10.3.1 Lotto in Christoph Drössers „Der Mathematikverführer“

Christoph Drösser erwähnt das Lottospiel nur kurz in dem Kapitel „Keine Angst vor großen Zahlen oder Sechs Moleküle von Goethe“ (Seiten 11 – 17) in „Der Mathematikverführer“, in dem es eigentlich auch gar nicht um Wahrscheinlichkeitsrechnung, sondern um das richtige Einschätzen von Größenordnungen geht:

„Stellen Sie sich – noch ein Beispiel – folgendes Spiel vor: Jemand hat am Rand der Autobahn von Hamburg nach Berlin eine zwei Zentimeter breite und zwei Meter hohe Latte in den Boden geschlagen. Irgendwo zwischen Hamburg und Berlin, Sie haben keine Ahnung, wo. Sie fahren die Strecke nachts mit dem Auto und haben eine Pistole dabei. Zu einem beliebigen Zeitpunkt, den Sie frei wählen können, kurbeln Sie die Fensterscheibe herunter und schießen in Richtung Straßenrand. Einmal. Wenn Sie die Latte treffen, haben Sie gewonnen.“

⁷⁸ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 357

Würden Sie auch nur einen Euro auf dieses Spiel wetten, selbst, wenn der Gewinn im Fall eines Treffers eine Million betrüge? Nein? Genau das machen aber Millionen von Menschen jede Woche, wenn sie einen Lottoschein ausfüllen. Die Chance, sechs Richtige zu tippen, ist nämlich genauso groß wie die Aussicht des nächtlichen Schützen, die Latte zu treffen, etwa 1 zu 14 Millionen. Viel Glück weiterhin!”⁷⁹

10.3.2 Lotto in Albrecht Beutelspachers „Kleines Mathematikum“

Lotto ist ebenfalls in der Beantwortung der 56. Fragestellung „Wie groß ist die Chance, einen Sechser im Lotto zu tippen?“ (Seiten 106 – 107) in Albrecht Beutelspachers „Kleines Mathematikum“ ein Thema.

Albrecht Beutelspacher berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, im Lotto „6 aus 49“ sechs Richtige zu tippen mit der La-Place-Wahrscheinlichkeit (günstige Fälle durch mögliche Fälle, siehe auch Seite 12), wobei er keine Formel verwendet.

Zuerst betrachtet er die möglichen Fälle, in diesem Fall sind es $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10\,068\,347\,520$ Möglichkeiten, da es für die erste Zahl 49 verschiedene, für die zweite Zahl nur mehr 48, für die dritte 47, ... und für die sechste Zahl noch 44 Eventualitäten gibt. Da es auch bei den günstigen Fällen nicht auf die Reihenfolge ankommt, gibt es für die erste Zahl 6, für die zweite 5, ... und für die sechste Zahl nur noch eine Möglichkeit, daher ist die Anzahl der Anordnungen der günstigen Tipps $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Nun werden die möglichen durch die günstigen Fälle dividiert, damit erhält man die Anzahl aller Tippreihen, wobei es nicht mehr auf die Reihenfolge ankommt. Hier ist es 13 983 816 – diese Zahl kennen wir ja bereits aus Kapitel 10.1 (siehe Seite 99). „Also knapp 14 Millionen Tippreihen, und nur wenn Sie die eine richtige tippen, haben Sie „sechs Richtige“.

⁷⁹ Christoph Drösser: „Der Mathematikverführer“, Seite 15 f

Die Wahrscheinlichkeit, die sechs Gewinnzahlen richtig vorherzuraten, ist 1 geteilt durch knapp 14 Millionen. Das ist 0,000 000 07. Anders gesagt: Nur in 0,000 007 % (in Worten: null Komma null null null null null sieben Prozent) aller Fälle gewinnen Sie!

Damit ist klar: Man kann Spaß haben am Lottospielen, aber zum Geldverdienen taugt es absolut nicht.“⁸⁰

10.3.3 Lotto in Christian Hesses „Warum Mathematik glücklich macht“

Auch Christian Hesse behandelt das Lottospielen im Kapitel „Bisschen Lottologie“ (Seiten 25 – 26) in „Warum Mathematik glücklich macht“, allerdings ohne Berechnungen dazu anzustellen.

„Beim Lotto 6 aus 49 hat jede Tippreihe die Chance von 1 : 13 983 816, um 6 Richtige zu erzielen. Das ist eine verschwindend geringe Wahrscheinlichkeit. Um dies anschaulich zu machen, benutze ich in meinen Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie bisweilen folgende Vergleiche. Wenn jemand knapp eine Viertelstunde zur Lottoannahmestelle zu Fuß unterwegs ist, um seinen Tippzettel einzureichen, dann ist die Wahrscheinlichkeit, während dieses Fußwegs bei einem Unfall tödlich zu verunglücken, etwa gleich der obigen Wahrscheinlichkeit. Man kann es auch noch drastischer herausarbeiten. Wenn jemand den Tippzettel am Tag vor der Ziehung in der Annahmestelle einreicht, dann ist die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit der Ziehung bereits verstorben zu sein, größer als die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige. Schöne Aussichten.“⁸¹

Außerdem gibt er einen Tipp, wie man nur fünf richtige Zahlen anstatt der sechs erraten muss:

⁸⁰ Albrecht Beutelspachers „Kleines Mathematikum“, Seite 107

⁸¹ Christian Hesse: „Warum Mathematik glücklich macht“, Seite 25

(Die Wahrscheinlichkeit für fünf Richtige beim deutschen Lotto beträgt

$$\frac{5}{49} \cdot \frac{4}{48} \cdot \frac{3}{47} \cdot \frac{2}{46} \cdot \frac{1}{45} \cdot \frac{44}{44} = \frac{120}{228\,826\,080} = \frac{1}{1\,906\,884} \approx 0,000\,000\,524 \approx$$

0,000 052 4 %)

„6 Richtige im Lotto zu erzielen ist für Sie und für mich also eine ausgesprochen unwahrscheinliche Angelegenheit. 5 Richtige sind dagegen schon um einiges leichter zu bewerkstelligen. Ich verrate Ihnen hier noch eine leicht umzusetzende Methode, bei der es tatsächlich ausreicht, 5 richtige Zahlen zu wählen, um den Volltreffer und einige Teiltreffer zu landen. Das geht so. Wählen Sie auf irgendeine Weise rein zufällig 5 von 49 Zahlen aus, sagen wir a, b, c, d, e. Als Nächstes füllen Sie 44 Tippzettel aus. Den ersten, indem Sie zu den Zahlen a, b, c, d, e die 1 hinzufügen, falls diese nicht schon unter den 5 Zahlen auftaucht. Beim zweiten, dritten, vierten usw. Zettel fügen Sie zu den Zahlen a, b, c, d, e dann die 2, die 3, die 4 usw. hinzu, also alle jene Zahlen, die nicht unter den 5 zufällig gewählten Zahlen vertreten sind. Wenn „Ihre“ 5 Zahlen kommen, dann haben Sie auf jeden Fall einmal 6 Richtige sowie auch einmal 5 richtige mit Zusatzzahl und 42-mal 5 Richtige. Nicht schlecht, oder?“⁸²

10.3.4 Lotto in Gero von Randows „Das Ziegenproblem“

Gero von Randow erklärt im Kapitel „Irren ist menschlich“ in „Das Ziegenproblem“ unter der Überschrift „Wie verbessere ich meine Lotto-Chance?“, zunächst nur, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser im Lotto $\frac{1}{13\,983\,816} = ca. 0,000\,000\,072$ und für einen Fünfer mit Zusatzzahl etwa 0,000 000 429 ist, und dass man seine Gewinnquote beim Lotto nur dadurch verbessern kann, indem man *seinen Schein entgegen den Gewohnheiten seiner Mitspieler ankreuzen*⁸³ solle. Da der Gewinn davon abhängig ist, wie viele andere Spieler ebenfalls gewinnen, solle man sich vermehrt an die Zahlen

⁸² Christian Hesse: „Warum Mathematik glücklich macht“, Seite 26

⁸³ Gero von Randow: „Das Ziegenproblem“, Seite 83

halten, die von anderen Spielern nicht so häufig gewählt werden, auf die Wahrscheinlichkeit eines Gewinns hat die Wahl der Zahlen ja keine Auswirkung, aber der Gewinn ist dann höher, wenn man ihn mit möglichst wenigen Menschen teilen muss. Als Hilfe gibt Gero von Randow auch einige Ergebnisse an, auf die Statistiker gekommen sind, die die veröffentlichten Gewinnquoten untersucht haben:

- *Die 19 ist beliebt, wohl weil sie zu jedem Geburtsdatum gehört; weitere Favoriten sind die 4 und die 9; unbeliebt hingegen sind 16, 40 und 41.*
- *Zahlen am Rand des Lottoscheins werden gemieden – vielleicht wird die Randlage für „abseitig“ und zu „extrem“ gehalten.*
- *Benachbarte Zahlen werden selten angekreuzt, wohl aber Kombinationen, die irgendwelche Muster ergeben.⁸⁴*

Im Kapitel „Erst kombinieren ...“ (Seiten 109 – 125) führt Gero von Randow dann die Formel zum Berechnen der Zahl ungeordneter Teilmengen mit s Elementen aus einer Menge von n Elementen ein:

Formel 14: n über s : Zahl ungeordneter Teilmengen mit s Elementen aus einer Menge von n Elementen

$$\binom{n}{s} = \frac{n!}{s! \cdot (n-s)!}$$

Damit wird die Anzahl aller möglichen Tippreihen noch einmal nachgerechnet und bewiesen, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser beim Lotto tatsächlich $\frac{1}{13\,983\,816}$ beträgt.

⁸⁴ Gero von Randow: „Das Ziegenproblem“, Seite 83

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot (49 - 6)!} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{720} =$$

13 983 816

„Die Lottochance beträgt also tatsächlich $\frac{1}{13\,983\,816}$ [...]. Da ist nichts zu machen.“⁸⁵

10.3.5 Lotto in Alex Bellos' „Im Wunderland der Zahlen“

Alex Bellos hält sich im Kapitel „Glück ist kein Zufall – oder doch?“ (Seiten 307 – 358) in „Im Wunderland der Zahlen“ ebenfalls nicht mit der Berechnung der Wahrscheinlichkeit für einen Sechser im Lotto auf, sondern betrachtet zunächst in Anlehnung an das Geburtstagsparadoxon (siehe Kapitel 6, ab Seite 61) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zweimal dieselben sechs Zahlen gezogen werden.

„Aus dem Geburtstagsparadoxon kann man lernen, dass Koinzidenzen – das zeitliche oder räumliche Zusammentreffen von Ereignissen – häufiger sind, als man meinen möchte. Im deutschen Zahlenlotto zum Beispiel hat jede Kombination aus 6 Zahlen eine Gewinnwahrscheinlichkeit von etwa 1 zu 14 Millionen in der Gewinnklasse 2 (6 Richtige ohne Superzahl). Dennoch war in den Jahren 1995 und 1986 eine Kombination zweimal erfolgreich: 15-25-27-30-42-48. Ist das so erstaunlich? Eigentlich nicht. Zwischen den beiden Malen, an denen diese Kombination gewann, fanden 3016 Ziehungen statt. Die Berechnung, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass zweimal dieselbe Kombination gewinnt, entspricht der Chance, dass in einer Gruppe aus 3016 Personen zwei Mitglieder am selben Tag Geburtstag haben. Auch hier beträgt die Gesamtzahl aller möglichen Kombinationen 14 Millionen. Die Wahrscheinlichkeit ist in beiden Fällen 0,28. Anders gesagt, bestand eine über 25-prozentige Chance, dass im betreffenden Zeitraum zweimal dieselbe Kombination

⁸⁵ Gero von Randow: „Das Ziegenproblem“, Seite 123

aus 6 Richtigen auftreten würde. Die vermeintlich merkwürdige Koinzidenz war also gar nicht so sensationell.“⁸⁶

Außerdem erzählt Alex Bellos von einer US-Amerikanerin, die in den 1980er Jahren innerhalb von 4 Monaten zweimal den Hauptgewinn der staatlichen Lotterie erzielt hat. In der Presse sei damals behauptet worden, dass die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis bei 1 : 17 Billionen liegen würde. Diese Berechnung betrachtet aber nur die Wahrscheinlichkeit, wenn die betreffende Person nur bei den beiden Ziehungen je einen Lottoschein gespielt und damit gewonnen hätte. *„Die Wahrscheinlichkeit aber, dass jemand irgendwo zweimal im gesamten Zeitraum das große Los zog, war gar nicht so klein – ganz im Gegenteil. Stephen Samuels und George McCabe von der Purdue University haben berechnet, dass innerhalb von sieben Jahren eine über 50-prozentige Chance besteht, dass jemand in den Vereinigten Staaten zweimal den Hauptgewinn einer Lotterie einstreicht. Innerhalb von vier Monaten ist die Chance eines doppelten Hauptgewinns in den USA größer als 1 zu 30. Die amerikanischen Statistiker Persi Diaconis und Frederick Mosteller sprechen hier vom „Gesetz der sehr großen Zahlen“. „Die Stichprobe muss nur groß genug sein“, schreiben sie, „dann geschehen die unglaublichsten Dinge.““⁸⁷*

Ein weiteres Thema rund ums Lottospielen, mit dem sich Alex Bellos beschäftigt, ist, wie man bei der *„bei weitem schlechtesten legalen Wette“⁸⁸* doch einen sicheren Gewinn erzielen kann. *„In seltenen Fällen kann eine Lotterie jedoch die beste Wette sein, die es gibt. Das ist der Fall, wenn mehrfach kein Jackpot ausgeschüttet wurde, wodurch die Gewinnsumme höher geworden ist, als es die Kosten wären, Lotteriescheine mit jeder möglichen Zahlenkombination zu erwerben. Tut man das, so besitzt man logischerweise auch die Gewinnkombination. Das Risiko besteht lediglich darin, dass jemand anders ebenfalls diese Kombination getippt hat,*

⁸⁶ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 334 f

⁸⁷ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 335

⁸⁸ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 335

wodurch man den Jackpot mit ihm teilen muss. Jede mögliche Kombination zu erwerben stellt jedoch eine theoretische und logistische Herausforderung dar, die nicht zu unterschätzen ist.“⁸⁹ Alex Bellos gibt zu bedenken, wie schwierig es ist, knapp 14 Millionen verschiedene Tipps zu erwerben und dabei nicht eine Tippreihe auszulassen oder doppelt zu haben.

Dann erzählt Alex Bellos von Stefan Mandel, einem rumänischen Mathematikgenie, der sich viele Jahre mit dem Problem beschäftigte, alle möglichen Tipps beim Lotto abzugeben und es 1964 tatsächlich schaffte, den Hauptgewinn zu erzielen, er kaufte allerdings nicht alle möglichen Tippreihen, sondern wandte eine Methode an, mit der er auf mindestens fünf der sechs Richtigen tippte, und hatte dabei das Glück auf Anhieb die sechs richtigen Zahlen dabei zu haben. Mandel brauchte 8000 Blatt Papier um den Algorithmus festzuhalten, den er verwendete um die Auswahl der Kombinationen zu erarbeiten. Nach dem Gewinn wanderte Stefan Mandel zuerst nach Israel und später nach Australien aus und gründete ein internationales Wettsyndikat, das genügend Geld zur Verfügung stellte, um im Falle eines lukrativen Jackpots alle möglichen Tippreihen erstehen zu können. Mandel beobachtete daraufhin weltweit die Lotterien und schlug zu, wenn er einen Jackpot entdeckte, der mindestens dreimal so hoch war wie die Kosten für den Erwerb aller infrage kommenden Tipps. Der größte Coup gelang ihm 1992 im US-Bundesstaat Virginia, bei dem er einen Jackpot von knapp 28 Millionen Dollar und neben dem Hauptgewinn noch 135 000 kleinere Gewinne abräumte, wobei er nur etwa 7 Millionen Dollar für die Lottoscheine hatte ausgeben müssen. CIA, FBI und die amerikanische Steuerbehörde untersuchten den Vorfall, jedoch konnte Stefan Mandel kein Betrug nachgewiesen werden, da es nicht illegal ist, alle möglichen Tippreihen zu spielen, man braucht nur genügend Startkapital.

⁸⁹ Alex Bellos: „Im Wunderland der Zahlen“, Seite 335 f

11. Conclusio

In der populärwissenschaftlichen mathematischen Literatur werden viele Sachverhalte aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung einfach und verständlich erklärt. Sie werden in unterhaltsame Geschichten oder nachvollziehbare Sachverhalte aus dem Alltagsleben verpackt und zwar meist, ohne dass dabei komplizierte Formeln verwendet werden. Bestimmt auch deshalb, weil viele Menschen, die mit der Mathematik schlechte Erfahrungen gemacht haben, vor Formeln zurückschrecken. Die meisten Autoren verzichten also auf Formeln und langwierige Rechenwege, um diese Art von Büchern einem breiteren Publikum zugänglich zu machen.

Die Berechnungen werden in den hier behandelten Büchern eher knapp und einfach gehalten, oft werden Sachverhalte vereinfacht dargestellt, um kompliziertere Rechnungen zu umgehen – wie etwa im Kapitel „Fairplay“ in Christoph Drössers „Der Mathematikverführer“ (siehe Kapitel 5, ab Seite 39), wo bei der Berechnung des Erwartungswertes beim Roulette die Null vernachlässigt wird, um die Berechnung einfacher zu gestalten. Hin und wieder wird der Rechenweg nicht Schritt für Schritt festgehalten, sondern nur das Ergebnis angegeben. Wenn das der Fall war, habe ich in der vorliegenden Diplomarbeit meist versucht, auch den Rechenweg – oder verschiedene Möglichkeiten der Berechnung – aufzuschlüsseln.

Ich hatte bei der Lektüre der Bücher das Gefühl, dass die Autoren wirklich auch zu einem Publikum durchdringen wollen, das sonst mit der Mathematik nicht so viel am Hut hat, und auch die Werbestrategien der Verlage zielen darauf ab. Dennoch glaube ich, dass auch diese Literatur in den meisten Fällen nur von Menschen gekauft wird, die sowieso eine Affinität zur Mathematik haben. Ich kann mir nicht vorstellen, dass jemand, der mit Mathematik nur Quälerei und Unverständnis verbindet, so ein Buch als Freizeitvergnügen lesen wird. Gerade auch deshalb habe ich vor, das eine

oder andere Kapitel aus diesen Büchern in meinen Unterricht einzubauen, vielleicht kann ja so manche Geschichte einen positiven Zugang zur Mathematik schaffen.

12. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Verteilung der Heiratsanträge	15
Abbildung 2: Baumdiagramm zum Teilungsproblem	34
Abbildung 3: Baumdiagramm: Pfade zu Roberts Sieg	35
Abbildung 4: Baumdiagramm: Pfad zu Josefs Sieg	36
Abbildung 5: Baumdiagramm: zwei weitere Runden	38
Abbildung 6: Baumdiagramm: drei weitere Runden	38
Abbildung 7: Roulettespielfeld	40
Abbildung 8: Vergleich der Wettstrategien	48
Abbildung 9: Zufällig und nicht zufällig verteilte Punkte	53
Abbildung 10: Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen von Geburtstagen und der Gruppengröße	66
Abbildung 11: Ziegenproblem	84
Abbildung 12: Kandidat wählt das Auto und bleibt bei seiner Entscheidung	85
Abbildung 13: Kandidat wählt 1. Ziege und bleibt bei seiner Entscheidung	86
Abbildung 14: Kandidat wählt 2. Ziege und bleibt bei seiner Entscheidung	86
Abbildung 15: Kandidatin wählt Auto und wechselt	87
Abbildung 16: Kandidatin wählt 1. Ziege und wechselt	87
Abbildung 17: Kandidatin wählt 2. Ziege und wechselt	88
Abbildung 18: Baumdiagramm zum Ziegenproblem	96

13. Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeiten dafür, dass mindestens zwei von n Personen am gleichen Tag Geburtstag haben	63
Tabelle 2: Vier-Felder-Tafel: Taxibeispiel.....	69
Tabelle 3: Vier-Felder-Tafel: DNA-Test.....	70
Tabelle 4: ELISA-Test, Prävalenz 0,2%	76
Tabelle 5: Western-Blot-Bestätigungstest.....	77
Tabelle 6: ELISA-Test, Prävalenz 1 %	78
Tabelle 7: BSE-Test.....	79
Tabelle 8: Krätze-Test.....	81

14. Formelverzeichnis:

Formel 1: Laplace-Wahrscheinlichkeit.....	12
Formel 2: Wahrscheinlichkeit, den besten aus n Bewerbern auszuwählen, wenn bereits b Bewerber abgewiesen wurden.....	14
Formel 3: Multiplikationsregel.....	34
Formel 4: Additionsregel	35
Formel 5: Erwartungswert.....	43
Formel 6: Erwartungswert.....	43
Formel 7: Erwartungswert.....	50
Formel 8: Erwartungswert.....	51
Formel 9: Negationsregel.....	61
Formel 10: Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 2 von n Personen am gleichen Tag Geburtstag haben	62
Formel 11: Bedingte Wahrscheinlichkeit.....	71
Formel 12: Satz von Bayes	71
Formel 13: Approximation der Populationsgröße durch das „mark-and- recapture-Verfahren“	83
Formel 14: n über s: Zahl ungeordneter Teilmengen mit s Elementen aus einer Menge von n Elementen	105

15. Literaturverzeichnis

- **Alex Bellos:** „*Im Wunderland der Zahlen – eine mathemagische Reise*“, aus dem Englischen von Bernhard Kleinschmidt, Originaltitel: „*Alex's Adventures in Numberland. Dispatches from the Wonderful World of Mathematics*“, Piper Verlag München, Taschenbuchausgabe November 2013
- **Albrecht Beutelspachers** „*Kleines Mathematikum – Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik*“, Wilhelm Goldmann Verlag München, 2. Auflage (Taschenbuchausgabe) Dezember 2011
- **Christoph Drösser:** „*Der Mathematikverführer – Zahlenspiele für alle Lebenslagen*“, Rowohlt Taschenbuch Verlag Reinbek bei Hamburg, 13. Auflage (Taschenbuchausgabe) Dezember 2010
- **Christian Hesse:** „*Warum Mathematik glücklich macht – 151 verblüffende Geschichten*“, Verlag C.H.Beck München, 3. durchgesehene Auflage 2011
- **Ian Stewart:** „*Professor Stewarts mathematisches Sammelsurium*“, aus dem Englischen von Monika Niehaus und Bernd Schuh, Originaltitel: „*Professor Stewart's Cabinet of Mathematical Curiosities*“, Rowohlt Taschenbuch Verlag Reinbek bei Hamburg, 2. Auflage (Taschenbuchausgabe) Januar 2013
- **Rudolf Taschner:** „*Zahl Zeit Zufall. Alles Erfindung?*“, Ecowin Verlag Salzburg, 5. Auflage 2009
- **Gero von Randow:** „*Das Ziegenproblem – Denken in Wahrscheinlichkeiten*“, Rowohlt Taschenbuch Verlag Reinbek bei Hamburg, 2. Auflage (Taschenbuchausgabe) Juni 2005
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Ziegenproblem> (1. Juni 2014)

16. Lebenslauf



Angaben zur Person:

Name: Katharina Kern
Adresse: Bachweg 1, 3385 Prinzersdorf
Telefon: 0680/2030094
E-Mail: kernkathi@hotmail.com
Staatsangehörigkeit: Österreich
Geburtsdatum und -ort: 1. Februar 1985, St. Pölten

Ausbildung:

Seit Oktober 2003 Lehramtsstudium Mathematik und Deutsch an der Universität Wien
Juni 2003 Matura mit ausgezeichnetem Erfolg
1999-2003 Oberstufenrealgymnasium mit musischem Schwerpunkt im Stiftsgymnasium Melk
1995-1999 Hauptschule Prinzersdorf
1991-1995 Volksschule Markersdorf

Berufserfahrung:

seit September 2013 Lehrerin im BG/BRG Josefstraße, St. Pölten
August/September 2011 Durchführung von „Start-up-Seminaren“ für HTL-Anfänger für den Fachbereich Deutsch für die Donaustadt Akademie an der HTL Donaustadt

<i>August 2009</i>	Betreuung von Kindern beim Projekt „Ferien(s)pass“ der Gemeinde Prinzersdorf
<i>seit 2008</i>	Mitarbeiterin in der Gemeindebücherei Prinzersdorf, Leitung seit 2012
<i>seit 2005</i>	Stadtführungen mit Schulklassen in St. Pölten bei der Aktion Landeshauptstadt
<i>August 2004</i>	Ferialpraktikum in der Raiffeisenbank Prinzersdorf
Fremdsprachen:	Englisch, Latein, Grundkenntnisse in Schwedisch
EDV-Kenntnisse:	Windows, Office, Littera

17. Zusammenfassung

Das Heiratsproblem, der Spielerfehlschluss und das Geburtstagsparadoxon sind Problemstellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die in der populärwissenschaftlichen mathematischen Literatur behandelt werden. In dieser Diplomarbeit befasse ich mich mit diesen und anderen Fragestellungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und zeige die verschiedenen Herangehensweisen auf, wie diese Fragestellungen in ausgewählten Werken der populärwissenschaftlichen mathematischen Literatur erklärt und berechnet werden.

18. Abstract

Among other areas, contemporary scientific literature deals with a wide range of problems of probability calculation. My diploma thesis covers this vast field and the various representations of calculations as well as solutions suggested in contemporary scientific literature.