



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit:

Teilprozesse beim Lösen von Analysis-Übungsaufgaben
durch Studierende – eine qualitative Studie

Verfasserin:

Michaela Reichardt

angestrebter akademischer Grad:

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, Mai 2014

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A – 190 347 406

Studienrichtung lt. Studienblatt: Lehramtsstudium UF Französisch UF Mathematik

Betreuer: Dr. Christoph Ableitinger

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Verwendung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche gekennzeichnet.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt noch veröffentlicht.

Wien, am 15. Mai 2014

Michaela Reichardt

Kurzfassung

Viele Mathematikstudierende haben in den ersten Semestern Schwierigkeiten, sich den Lern- und Arbeitshabitus der Hochschulmathematik anzueignen. In der Fachdidaktik Mathematik wird der Übergang von der Schule in eine Hochschule daher mit „Diskontinuität“ (vgl. Ableitinger, Kramer & Prediger 2103) bezeichnet. Die Diskontinuität, die bei Lehramtsstudierenden sowohl beim Übertritt von der Schule in eine Universität als auch beim Schuleintritt nach der Ausbildung eintritt, beruht auf der unterschiedlichen Art und Weise, wie Mathematik an der Schule bzw. an der Hochschule gelehrt und gelernt wird.

In dieser Arbeit soll der Frage nachgegangen werden, inwiefern sich der Lösungsprozess von Analysis-Übungsaufgaben durch Studierendengruppen in Teilsequenzen unterteilen lässt. In Anlehnung an das Teilphasenmodell von Ableitinger und Herrmann (2011) sollen Bearbeitungsabschnitte auf ihre Funktion im Lösungsprozess untersucht werden. Das Modell wurde auf Grundlage von ausführlichen Musterlösungen, die von Dozentinnen und Dozenten erstellt wurden, als objektives Mittel zur Beschreibung von Schwierigkeiten beim Aufgabenlösen erstellt. Zur Beantwortung der Forschungsfrage wird eine qualitative Studie herangezogen, die nach dem Vorbild einer interpretativen Unterrichtsforschung, wie sie Krummheuer und Naujok (1999) beschreiben, durchgeführt wurde. Studierende der Universität Wien, die im Wintersemester 2013/14 die Übung „Einführung in die Analysis“ absolvierten, wurden in Kleingruppen bei der Bearbeitung ihrer Übungsaufgaben gefilmt. Das transkribierte Videomaterial ist Ausgangspunkt der Analyse auf Teilsequenzen. Tatsächlich lassen sich die von Ableitinger und Herrmann definierten Teilphasen auch in Lösungsprozessen, die von Studierenden durchgeführt wurden, erkennen.

Abstract

This thesis focuses on the difficulties which students face when solving problems at university level at the beginning of their mathematics studies. Ableitinger and Herrmann (2011) created a method to identify and describe these difficulties faced by students. They split up the detailed solutions used by lecturers into sub-sequences. The aim of this study is to find out whether these short sequences can also be found in students' problem solving. For this purpose, during the winter semester 2013/14, student groups of the University of Vienna were filmed while working on problems. The analysed transcription of the videos shows that the students' approaches to solving the problems consist indeed of the sub-sequences identified by Ableitinger and Herrmann.

Inhaltsverzeichnis

1. Rahmenbedingungen und theoretische Grundlagen	1
1.1. Standortbestimmung	1
1.2. Meine Motivation	3
1.3. Zielsetzung	5
1.4. Aufbau	6
1.5. Theoretische Grundlagen: Diskontinuität an der Schnittstelle Schule - Hochschule	7
1.5.1. Charakteristika der Schulmathematik	8
1.5.2. Charakteristika der Hochschulmathematik	10
1.5.3. Welche Probleme ergeben sich durch die Diskontinuität?	12
1.5.4. Umgang mit der Diskontinuität im deutschsprachigem Raum	13
1.5.5. Modell der Teilprozesse des Aufgabenlöses nach Ableitinger und Herrmann	14
1.5.5.1. Problembewusstsein schaffen	16
1.5.5.2. Klärung der Handlungsoptionen	17
1.5.5.3. Einen Zugriff herstellen, die Aufgabe handhabbar machen	17
1.5.5.4. Anpassen oder Prüfen der Passung	18
1.5.5.5. Anwendung von Handwerk	19
1.5.5.6. Tricks	19
1.5.5.7. Begleitende, strukturierende Kommentare und Erläuterungen	20

2. Forschungsmethode – Interpretative Unterrichtsforschung	21
2.1. Darstellung der interpretativen Unterrichtsforschung	21
2.2. Begründung zur Wahl einer qualitativen Methode.....	25
2.3. Transkriptionsverfahren	26
2.4. Transkriptionslegende	27
 3. Empirische Studie.....	 28
3.1. Rahmenbedingungen an der Universität Wien.....	29
3.2. Rahmenbedingungen der Datenerhebung	31
3.3. Durchführung der Studie	32
3.4. Erhobene Daten	33
3.4.1. Konvergenz einer Folge – Beate & Sarah (Aufgabe 8a)	34
3.4.2. Konvergenz einer Folge – Franz & Jan (Aufgabe 8a)	40
3.4.3. Beschränkte, divergente Folge – Beate & Sarah (Aufgabe 8b).....	44
3.4.4. Beschränkte, divergente Folge – Franz & Jan (Aufgabe 8b).....	47
3.4.5. Grenzwertberechnung (Aufgabe 16)	50
3.4.6. Für welche x konvergiert die Reihe? (Aufgabe 35)	64
3.4.7. Konvergenz einer Reihe (Aufgabe 36)	78
3.4.8. Veränderung von Funktionsgraphen (Aufgabe 37)	91
3.4.9. Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen (Aufgabe 42).....	105
3.4.10. Stetigkeit einer Funktion (Aufgabe 43)	113
3.5. Interpretation der Ergebnisse	122

4. Zusammenfassung und Ausblick	125
4.1. Kommentare zum Teilphasenmodell von Ableitinger und Herrmann	126
4.2. Darstellung des Forschungsprojektes und der gewonnenen Einsichten ...	127
4.3. Verbesserungsvorschläge	128
4.4. Ausblick und Diskussion	131
 5. Literaturverzeichnis	 134
5.1. Literatur	134
5.2. Internet	136
 6. Anhang	 137
6.0. Aufgabensammlung zur Einführung in die Analysis	137
6.1. Konvergenz einer Folge – Beate & Sarah (Aufgabe 8a)	150
6.2. Konvergenz einer Folge – Franz & Jan (Aufgabe 8a)	153
6.3. Beschränkte, divergente Folge – Beate & Sarah (Aufgabe 8b)	155
6.4. Beschränkte, divergente Folge – Franz & Jan (Aufgabe 8b)	158
6.5. Grenzwertberechnung (Aufgabe 16)	159
6.6. Für welche x konvergiert die Reihe? (Aufgabe 35)	171
6.7. Konvergenz einer Reihe (Aufgabe 36)	178
6.8. Veränderungen von Funktionsgraphen (Aufgabe 37)	189
6.9. Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen (Aufgabe 42)	197
6.10. Stetigkeit einer Funktion (Aufgabe 43)	204
6.11. Lebenslauf	215

Abbildungsverzeichnis

Abb.1 Teilprozesse in Aufgabenlösungen nach Ableitinger und Herrmann	16
Abb.2 Aufgabe 8a Nebenrechnung	37
Abb.3 Aufgabe 8a.....	37
Abb.4 Aufgabe 16 $A \cap B$	52
Abb.5 Aufgabe 35 Marie	73
Abb.6 Aufgabe 36 Flo	87
Abb.7 Aufgabe 37 Sinuskurve	101
Abb.8 Aufgabe 43.....	119
Abb.9 Aufgabe 8a Sarah	152
Abb.10 Aufgabe 8a Lösung	153
Abb.11 Aufgabe 8b Sarah	157
Abb.12 Aufgabe 8b Lösung	157
Abb.13 Aufgabe 16.....	170
Abb.14 Aufgabe 16 Lösung	170
Abb.15 Aufgabe 35 Marie	176
Abb.16 Aufgabe 35 Flo.....	177
Abb.17 Aufgabe 35 Lösung	177
Abb.18 Aufgabe 36 Marie	187
Abb.19 Aufgabe 36 Flo.....	188
Abb.20 Aufgabe 36 Lösung	188
Abb.21 Aufgabe 37 Flo.....	195
Abb.22 Aufgabe 37 Marie	196

Abb.23 Aufgabe 37 Lösung	196
Abb.24 Aufgabe 42	203
Abb.25 Aufgabe 42 Lösung	204
Abb.26 Aufgabe 43	213
Abb.27 Aufgabe 43 Lösung	214

Danksagungen:

Ich bedanke mich bei meinen Eltern für die Unterstützung während des Studiums und bei meinem Partner für die aufbauenden Worte.

Die Zusammenarbeit mit meinem Betreuer klappte hervorragend. Dafür danke ich Dr. Christoph Ableitinger.

Eine große Hilfe war mir Dr. Andreas Ulovec. Er stellte mir für die Durchführung der qualitativen Studie seine Digitalkamera zur Verfügung.

Weiters gilt mein Dank Dr. Michael Kunzinger und Frieder Simon, die mir mit ihren mathematischen Fachkenntnissen weiterhalfen.

Der Studienprogrammleiter der Fakultät für Mathematik, Dr. Günther Hörmann, lieferte mir Informationen, wie viele Mathematikstudierende innerhalb des ersten Jahres ihr Studium abbrechen.

Dr. Karlheinz Gröchenig unterstützte mich, Studierende für mein empirisches Forschungsprojekt zu gewinnen.

1. Rahmenbedingungen und theoretische Grundlagen

1.1. Standortbestimmung

„Aller Anfang ist schwer“ – dies gilt auch für viele Lehramtsstudierende, die ein Mathematikstudium an einer Hochschule inskribiert haben (siehe Hefendehl-Hebeker 2012; Fischer, Heinze & Wagner 2009). Gehörte man die letzten Jahre zu den „Älteren“ in der Schule, sprich zu den Absolventinnen und Absolventen der höheren Klassen, so ist man nach der Matura, an der Hochschule angekommen, doch wieder die „Anfängerin“ bzw. der „Anfänger“. Viele sind froh darüber, dass sie sich endlich dem Gebiet widmen können, welches sie schon immer interessiert hat und sich nicht mit den übrigen Fächern aus der Schule herumschlagen müssen. Jedoch ist manche Mathematikliebhaberin bzw. mancher Mathematikliebhaber erstaunt, wie stark sich die Mathematik, die an der Hochschule betrieben wird, von der unterscheidet, mit der man es in der Schule zu tun hat. Zwar beginnt die erste Vorlesung mit den natürlichen Zahlen oder einem ähnlich vertrauten Thema, doch bald merkt man, dass Hochschulmathematik nicht unmittelbar an der Schulmathematik ansetzt (vgl. Schichl & Steinbauer 2009).

Mit Schulmathematik wird im Folgenden Mathematik bezeichnet, wie sie an der Schule gelehrt und gelernt wird. Die Hochschulmathematik unterscheidet sich im Allgemeinen von der Schulmathematik und meint Mathematik, wie sie an einer Universität praktiziert wird.

An der Hochschule kommen andere mathematische Fähigkeiten als in der Schule zum Tragen. Die Lösungsprozesse bei der Bearbeitung von Aufgaben und deren Strategien zeichnen sich durch andere Schwerpunkte aus als man es aus der Schule gewohnt ist. Man nimmt Abstand von konkreten Aufgaben und konzentriert sich mehr auf allgemein gültige Aussagen, dadurch nimmt man immer wieder Bezug auf Definitionen, Sätze und kommt nicht um deren Beweise herum. Ein Großteil der Studienanfängerinnen und Studienanfänger in Mathematik ist überrascht, dass sie nun nicht mehr alle Aufgaben lösen können, wo sie doch immer die Besten in der Schule waren und ihre Mitschülerinnen und Mitschüler sie um Rat gefragt haben. Vor allem von den Anforderungen der ersten Prüfungen an der Hochschule zeigen sich etliche überfordert und von deren Ergebnissen erschüttert.

Die Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule in Bezug auf Mathematik, die von vielen als eine große Umstellung wahrgenommen wird, wird bereits seit längerem von der Fachdidaktik als problematisch erfasst und untersucht. In der Fachdidaktik spricht man von der sogenannten „Diskontinuität“, da die Tradition, wie Mathematik im Schulunterricht in der Regel ausgeübt wird, gebrochen wird (vgl. Hefendehl-Hebeker 2012). Die Lernenden müssen sich mit Hilfe der in der Schule erworbenen mathematischen Kenntnisse nach Vorbild ihrer Universitätsprofessorinnen und -professoren einen eigenen Zugang zur Hochschulmathematik schaffen.

Die Diskontinuität ist sogar um einen Aspekt reicher. Nicht nur zu Beginn sondern auch nach Beendigung des Studiums erfahren die Lehramtsstudierenden einen Bruch in ihrer mathematischen Arbeitshaltung. Viele von ihnen haben das Gefühl, im Laufe ihres Studiums nicht ausreichend auf ihren späteren Lehrberuf vorbereitet worden zu sein, da ihnen in der Hochschule der Bezug zum Schulstoff fehlt (siehe Hefendehl-Hebeker 2012). Viele Studierende werfen der Universität vor, sich im Zuge ihres Studiums zu viel mit der akademischen Mathematik auseinander setzen zu müssen, sie allerdings zu wenig darüber informiert werden, inwiefern das didaktische Wissen dazu beitragen kann, den Schulstoff zu strukturieren und geeignet didaktisch aufzubereiten. Diese Studierenden wünschen sich ein Curriculum, das mehr auf das Mathematiklehren ausgerichtet ist und weniger auf das wissenschaftliche mathematische Arbeiten. Deswegen ist in der Fachliteratur häufig von der doppelten Diskontinuität in der Lehrerinnen- und Lehrerbildung die Rede, etwa bei Ableitinger, Kramer und Prediger (2013). Einerseits erleben die Studienanfängerinnen und Studienanfänger einen Bruch zu ihrem vorangegangenen Mathematikunterricht, andererseits können die fertigen Hochschulabsolventinnen und -absolventen nur einen Teil von dem im Studium Erlerntem direkt in ihrem Beruf als Lehrerin bzw. Lehrer einsetzen.

Das Problem ist nicht neu, schließlich beschrieb es der berühmte Mathematiker Felix Klein bereits 1908 in seinem Vorlesungsskript „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“. Bis heute wurde keine zufriedenstellende Lösung gefunden, um diese Hürde zu Studienbeginn zu beseitigen und die Lehramtskandidatinnen und -kandidaten optimal auf ihr späteres

Berufsleben vorzubereiten. Es ist naheliegend, dass es die eine richtige Methode gar nicht gibt, um die Schwelle, die sich beim Übertritt erhebt, zu glätten, genauso wie es auch kein „Kochrezept“ für den perfekten Unterricht gibt. Einige Universitäten versuchen mittels neu konzipierter Brückenkurse und Studieneingangsphasen den Übergang von der Schule zur Hochschule zu erleichtern. Andere Dozentinnen und Dozenten wiederum nutzen bewusst die Diskrepanz zwischen Schule und Universität, um den Studierenden einen gezielten Einblick in die Wissenschaft und die Hochschullehre zu geben (etwa Kümmerer 2012).

1.2. *Meine Motivation*

Als ich mich nach der Matura entschlossen habe, das Lehramt Mathematik/Französisch zu studieren, setzte ich mir als oberstes Ziel, meine zukünftigen Schülerinnen und Schüler für die Mathematik zu begeistern. Schließlich kommt niemand im alltäglichen Leben ohne Mathematik aus, wenngleich das nicht immer offensichtlich ist. Ich möchte den Lernenden nicht nur mein Wissen vermitteln, sondern auch verstehen, wo ihre Schwierigkeiten liegen. Dazu ist es notwendig, sich in die Lage der Schülerinnen und Schüler zu versetzen und zu versuchen, ihre Gedankengänge zu rekonstruieren. Es darf nicht vergessen werden, dass die Lernenden im Gegensatz zu den Lehrenden oft nicht sofort sehen, wie sie am besten an eine Aufgabe herangehen und wo genau der Knackpunkt liegt. Der Lehrende muss folglich dort ansetzen, wo die Lernenden bei ihrem eigenen Lernprozess nicht mehr weiterkommen. Er steht ihnen mit individuellen Ratschlägen zur Seite, damit der Lernende schließlich sein Problem selbst lösen kann. In diesem Sinne ist der Lehrende nicht mehr der traditionelle Wissensvermittler, sondern viel mehr ein Trainer, der zum Lernen anregt.

Gerade so eine Mentorin bzw. einen Mentor habe ich zu Beginn meines Mathematikstudiums vermisst. Wenn ich an mein erstes Semester an der Universität Wien zurückdenke, ging es mir ähnlich wie den Schülerinnen und Schülern, die von der Volksschule in die Sekundarstufe kommen. Neben der ungewohnten Umgebung, den neuen Gesichtern, ist auch der Unterricht ein ganz anderer. Im Gegensatz zur Schule hat man es in Mathematik an der Hochschule fast ausschließlich mit

Definitionen, Sätzen, Beweisen und Korollaren zu tun. Wer glaubt, der Anfang des Mathematikstudiums ähnelt dem Schulunterricht, nur mit „komplizierteren“ Zahlen, der irrt. Viele Erstsemestrige sind zu Beginn mit der Arbeitsweise der Hochschulmathematik überfordert, weshalb sich die Anzahl der Studierenden nach dem ersten Semester deutlich reduziert, wie auch Schichl und Steinbauer (2009) erwähnen. Aus einem Gespräch mit dem Studienprogrammleiter der Fakultät für Mathematik, Dr. Günther Hörmann, ging hervor, dass zwei Drittel der Studierenden, die für ein Mathematikstudium inskribiert sind, bei der ersten Prüfung antreten. Ein Jahr nach Studienbeginn halbiert sich die Zahl der Inskribierten. Bei den Zahlen ist insofern Vorsicht geboten, da auch alle jene einbezogen werden, die sich zwar für ein Mathematikstudium angemeldet haben, jedoch nie bei den Lehrveranstaltungen anwesend waren. Die Höhersemestrigen meinen es gut und trösten die Studienanfängerinnen und -anfänger mit Worten wie diesen: „Der Anfang ist hart, aber da muss man durch. Wenn man einmal den Dreh heraus hat, geht alles viel leichter.“ Dasselbe sage ich nun selbst zu den Studierenden im ersten Studienjahr. Nicht nur die Studierenden sind um die Erstsemestrigen bemüht, sondern auch die Professorinnen und Professoren. Jedoch ist es für Letztere nicht einfach, die Probleme der Studienanfängerinnen und -anfänger zu verstehen, da sie als Expertinnen und Experten über ein größeres Repertoire an Techniken für das Aufgabenlösen verfügen als die Lernenden und sie die hochschulmathematische Arbeitshaltung bereits verinnerlicht haben. Was für die Lernenden eine große Herausforderung darstellt, ist für die Expertinnen und Experten oftmals Routine.

Da ich stets bemüht bin, Studienkolleginnen und -kollegen bei ihren Übungsaufgaben zu helfen, stellt sich für mich am Ende meines Studiums angelangt die Frage, inwiefern eine mangelnde fachmathematische Arbeitsweise Schwierigkeiten beim Aufgabenlösen erzeugt. Die Expertin bzw. der Experte schaut sich die Aufgabe an und sieht auf den ersten Blick, wonach gefragt ist und worauf man gegebenenfalls beim Lösen aufpassen muss. Viele Lernende hingegen plagen sich größtenteils schon mit der Angabe und scheitern im Lösungsprozess oft auf Grund fehlender mathematischer Hilfsmittel. Aus diesem Grund habe ich mich entschlossen, eine qualitative Studie an der Universität Wien durchzuführen, um die Lösungsprozesse von Studierenden bei der Bearbeitung von Übungsaufgaben aus der einführenden Analysis zu analysieren. Ziel ist es, herauszufinden, ob sich

bestimmte wiederkehrende Phasen feststellen lassen und diese kategorisiert werden können. Falls sich das Aufgabebearbeiten tatsächlich in Teilsequenzen unterteilen lässt, soll in weiterer Folge der Frage nachgegangen werden, inwiefern mangelhafte Teilprozesse gravierende Probleme beim Auflösen erzeugen. Abschließend sollen Möglichkeiten gefunden werden, wie man diesen Schwierigkeiten begegnen kann. Dadurch soll in Zukunft besser auf die Studierenden eingegangen und ihnen effizientere Hilfestellungen beim Lösungsprozess angeboten werden können. Schlussendlich drängt sich die Frage auf, ob eventuell Änderungen seitens der Hochschule erforderlich sind, damit Kontinuität und Kohärenz zwischen Schule und Universität besser gewährleistet werden können. Oder sollte die Diskontinuität eher thematisiert werden, sie genutzt und sogar noch verstärkt werden? Falls in der Tat Neuerungen und Adaptionen seitens der Universität von Vorteil sind, welche Änderungsvorschläge gibt es, die mit niedrigem Kostenaufwand umsetzbar wären?

1.3. Zielsetzung

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt bei der Diskontinuität, die durch den Übertritt von der Schule auf die Hochschule entsteht. Ausgehend von der Tatsache, dass Studienanfängerinnen und -anfänger Schwierigkeiten beim Lösen von hochschulmathematischen Aufgabestellungen haben, da sie mit solchen Aufgaben noch zu wenig vertraut sind, soll im Rahmen dieser Arbeit mittels einer qualitativen Studie untersucht werden, ob sich die einzelnen Phasen des Lösungsprozesses von Analysis-Aufgaben zu allgemeingültigen Teilsequenzen gruppieren lassen. Als Grundlage dafür dient das Modell der Teilprozesse bei Musterlösungen von Ableitinger und Herrmann (2011), das im Kapitel 1.5.5. ausführlich erläutert wird. In einem weiteren Schritt soll analysiert werden, inwiefern eine erfolgreiche Ausführung der Aufgabe nicht möglich ist, wenn Probleme in einzelnen Teilprozessen auftreten. Im Zuge der vorliegenden qualitativen Studie wird analysiert, welche Teilprozesse beim Lösen von Analysisaufgaben erkennbar sind und welche Schwierigkeiten dabei auftreten. Die Auswertung der durch die qualitative Studie gewonnenen Ergebnisse soll Auskunft geben, inwiefern das Auflösen so gestaltet werden kann, dass es den Studienanfängerinnen und -anfängern leichter fällt. Oberstes Ziel ist, die Schwierigkeiten beim Lösen von Übungsaufgaben zu erkennen, um den Studierenden in Zukunft adäquatere Hilfestellungen anbieten zu können.

Nach der Erläuterung des Forschungsinteresses soll im Folgenden der Aufbau der Arbeit sowie der Forschungsweg skizziert werden.

1.4. Aufbau

Eingehens soll die Problematik der Diskontinuität dargestellt werden, wie sie in der Fachdidaktik wahrgenommen wird. Dazu ist es notwendig, die Unterschiede zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik herauszuarbeiten. Überblicksmäßig wird vorgestellt, wie deutschsprachige Hochschulen mit dem Problem der Diskontinuität umgehen. Um die Anforderungen typischer Aufgaben aus Analysis und Linearer Algebra an Universitäten empirisch zu untersuchen, haben Ableitinger und Herrmann im Zuge des Projekts „Mathematik besser verstehen“ ein Modell von verschiedenen Teilprozessen entwickelt, die Musterlösungen auszeichnen (Ableitinger 2012). In Anlehnung an dieses deskriptive Modell soll im Rahmen dieser Arbeit analysiert werden, ob diese Teilsequenzen tatsächlich die Zusammensetzung des Aufgabenlösenden ausmachen, wenn die Studierenden ihre Übungsaufgaben in Kleingruppen lösen.

Die Wahl der Methode zur Untersuchung von Lösungsprozessen auf Teilsequenzen fällt auf eine empirische Analyse im Sinne der interpretativen Unterrichtsforschung. Das Konzept der interpretativen Unterrichtsforschung, wie es von Krummheuer und Naujok (1999) vorgestellt wurde, wird im Kapitel 2.1 skizziert.

Im Mittelpunkt der Arbeit steht die qualitative Studie rund um die Identifikation von Teilprozessen bei der Aufgabenbearbeitung. Die Auswertung und die Interpretation der Daten ermöglichen, Antwort auf die Forschungsfrage zu finden, ob sich der studentische Lösungsprozess von Analysis-Aufgaben nach dem Modell von Ableitinger und Herrmann (2011) in Teilsequenzen unterteilen lässt. Im Anschluss soll der Frage nachgegangen werden, welche Schritte Hochschulen setzen sollten, um den Übergang von der Schule zur Universität kontinuierlicher zu gestalten.

1.5. Theoretische Grundlagen: Diskontinuität an der Schnittstelle Schule - Hochschule

Der Übertritt in eine neue Schule stellt für die Schülerinnen und Schüler ein einschneidendes Erlebnis in ihrem Leben dar, ebenso der Eintritt in die Hochschule bzw. in das Berufsleben. Der Übergang von der Schule auf die Hochschule geht nicht nur mit dem Wechsel des sozialen Umfelds, der Lehrenden und dem Schulgebäude einher, sondern auch mit einer Änderung der Lern- und Arbeitskultur, wie Heinze & Grüßing (2009) beschreiben. Mathematik ist eine jener Disziplinen, bei denen die Herangehensweise und der Aufbau an der Universität sich stark von jener Art und Weise unterscheidet wie man sie aus der Schule kennt. In der mathematischen Fachdidaktik spricht man von der „doppelten Diskontinuität in der gymnasialen Lehrerinnen- und Lehrerbildung“ (Ableitinger, Kramer & Prediger 2013).

Einerseits haben die Lernenden den Eindruck, von der Schule nicht gut auf das Studium vorbereitet zu sein. Die Studienanfängerinnen und -anfänger fühlen sich mit den erwarteten Ansprüchen seitens der Hochschule überfordert. Hochschuldozentinnen und -dozenten wiederum sehen sich mit einer großen heterogenen Gruppe konfrontiert, bei der zum Teil die notwendigen mathematischen Grundvoraussetzungen nicht ausreichend vorhanden sind. Dies beschreiben unter anderem Hefendehl-Hebeker (2012) sowie Fischer, Heinze und Wagner (2009).

Um verstehen zu können, weshalb die Studierenden zu Beginn eines Studiums mit mathematischem Schwerpunkt eine große Hürde zu bewältigen haben, muss die Frage geklärt werden, inwiefern sich die Schulmathematik von der Hochschulmathematik unterscheidet.

Im Folgenden werden zunächst die Eigenschaften und Besonderheiten der Schulmathematik erläutert, anschließend wird auf die Merkmale der Hochschulmathematik eingegangen. Beim Erarbeiten der Unterschiede zeigen sich deutlich die Ursachen für die Diskontinuität. Auf Grund der Art und Weise, wie Schulmathematik aufgebaut ist, kann man sie allerdings nicht ohne Weiteres so umwandeln, dass sie der Hochschulmathematik gleicht und umgekehrt. Fischer, Heinze und Wagner (2009) arbeiten in ihrem Aufsatz „Mathematiklernen in der Schule – Mathematiklernen an der Hochschule: die Schwierigkeiten von Lernenden

beim Übergang ins Studium“ heraus, wie sich die Schulmathematik von der Hochschulmathematik unterscheidet. Ihre Überlegungen dienen als Grundlage für die im Folgenden beschriebenen Charakteristika der Schul- und Hochschulmathematik.

1.5.1. Charakteristika der Schulmathematik

Zweifelsohne kommt die Mathematik, wie sie an der Schule gelehrt und gelernt wird, nicht ohne Mathematik als Wissenschaft aus. Schließlich leitet sich erstere von ihrer akademischen Disziplin ab. Es versteht sich jedoch von selbst, dass Mathematik als Unterrichtsgegenstand, eingebettet in die Institution Schule und im Bildungsprozess, gewisse Besonderheiten hat. Der in der Gesellschaft weit verbreitete Glaube, dass Schulmathematik eine vereinfachte Version der Mathematik als Wissenschaft ist, wird von vielen Mathematikdidaktikern als Irrglaube bezeichnet, wie man bei Fischer, Heinze und Wagner (2009) nachlesen kann.

Im Allgemeinen wird man mit Mathematik zum ersten Mal an der Schule konfrontiert. Das wiederum bedeutet, dass man es mit Mathematik vor allem während seiner Entwicklung zu tun hat – insofern man sich nicht später für einen Beruf mit mathematischem Schwerpunkt entscheidet. Das heißt, Mathematikunterricht findet mitten im Reifeprozess der Lernenden statt. Daraus ergibt sich eine weitere Besonderheit, die auch von Fischer, Heinze und Wagner (2009) beschrieben wird: der weitläufige Interpretationsspielraum von Begriffen und Sachgebieten. In der akademischen Disziplin wird großer Wert auf Klarheit und präzise Verwendung von Begriffen gelegt. In der Schule ist man jedoch toleranter gegenüber umgangssprachlichen Ausdrücken. Schließlich befinden sich die Schülerinnen und Schüler mitten in der Lernspirale, wodurch andere Anforderungen an sie gestellt werden. Umgangssprachliche Ausdrücke sind zum Teil sogar gewollt, weil sie die Kommunikation mit den Lernenden zunächst erleichtert. In der Sekundarstufe I wird beispielsweise eine Zahlenstrahl mit einem Sonnenstrahl verglichen, der zwar einen fixen Anfangspunkt aber im Gegensatz zu einer Strecke keinen Endpunkt hat. Geometrische Körper werden mit Alltagsgegenständen in Verbindung gebracht, ein Quader zum Beispiel mit einem Schuhkarton. Mathematiklehrerinnen und -lehrer müssen deshalb neben den fachspezifischen

Kenntnissen auch darüber Bescheid wissen, wie Mathematiklernen funktioniert. Sie sollten schließlich darauf Rücksicht nehmen, dass die Lernenden ihr mathematisches Verständnis erst aufbauen und diese Mathematik höheren Standes noch nicht begreifen können. Neben der Fachkompetenz wird von der Lehrperson verlangt, dass sie den Schülerinnen und Schülern den Bezug zur außermathematischen Wirklichkeit zeigt. Mathematik an der Schule wird also nicht nur von der akademischen Mathematik beeinflusst, sondern auch vom Lernprozess und der im Unterricht eingesetzten Pädagogik (siehe Fischer, Heinze & Wagner 2009).

Ein weiteres wesentliches Merkmal der Schulmathematik ist die Zentrierung auf das Aufgabenlösen, merken Schichl und Steinbauer (2009) an. In der Schule sollen auch außermathematische Problemstellungen gelöst werden, während an der Universität Beispiele vor allem zur Illustrierung von Ideen dienen. Erklärtes Ziel des Unterrichts ist, dass sich die Lernenden an der Schule mathematische Grundkompetenzen sowie logisches Denken aneignen und diese erworbenen Fähigkeiten in möglichst vielen Alltagssituationen anwenden können. Im österreichischen Lehrplan der Sekundarstufe II wird ausdrücklich erwähnt, dass die Lernenden „zu analytisch-folgerichtigem Denken“ (österreichischer Lehrplan der Sekundarstufe II 2004, S. 1) erzogen und ihnen „mathematische(n) Kompetenzen, die für viele Lebensbereiche grundlegende Bedeutung haben“ (ebenda) vermittelt werden sollen. An der Universität hingegen beschäftigen sich die Mathematikerinnen und Mathematiker weniger mit konkreten Fällen als mit allgemeingültigen Aussagen.

Im Schulunterricht werden mathematische Sätze oft an Hand von konkreten Beispielen plausibel gemacht. Diese Beweise sind jedoch insofern gültig, als sie sich auf Beweise stützen, die in der Fachdisziplin längst auf ihre allgemeine Gültigkeit untersucht wurden. Die Mathematiklehrerinnen und -lehrer gebrauchen anschauliche Begründungen, da sie wissen, dass sie sich auf wissenschaftlich abgesichertes Terrain begeben, wie Fischer, Heinze und Wagner (2009) zu entnehmen ist.

Die Schulmathematik beeinflusst zudem die Haltung von Lernenden gegenüber der akademischen Mathematik, weil den Lernenden durch die Schule eine gewisse Vorstellung von Mathematik als Wissenschaft vermittelt wird. Je nachdem wie die Lehrperson das mathematische Weltbild vermittelt, wird der Lernende ein wertschätzendes bzw. ein ablehnendes Verhältnis zur akademischen

Mathematik haben. Die Schulmathematik kann man daher als eigenen Wissensbereich sehen, der in Wechselwirkung zur akademischen Fachdisziplin steht (ebenda).

1.5.2. Charakteristika der Hochschulmathematik

Ein wesentlicher Unterschied der Hochschulmathematik zur Schulmathematik ist der Zugang zur Mathematik. Während in der Schule stets von spiralförmigem Lernen die Rede ist – ein etappenweises Erarbeiten von Themenbereichen, wobei diese immer wieder aufgenommen, wiederholt und vertieft werden – sind an der Hochschule Axiome die Basis jegliches Wissens, die gleichsam als Fundament des Gebäudes Mathematik dienen (Schichl & Steinbauer 2009). An der Hochschule wird Mathematik großteils als fertiges Produkt präsentiert, während die Lernenden in der Schule schrittweise zu mehr Wissen gelangen. Das hängt natürlich vor allem mit dem Prozess der Wissensentwicklung bei den Schülerinnen und Schülern zusammen. Von Lernenden der Sekundarstufe I kann nicht erwartet werden, dass sie ausgehend von den Axiomen das Rechnen erlernen. Dies passiert viel mehr durch anwendungsorientierte Aufgaben, die für sie viel zugänglicher sind. Der Charakter der Schulmathematik nähert sich jedoch von Schulstufe zu Schulstufe dem der Hochschulmathematik (Fischer, Heinze & Wagner 2009). Dies kann man beispielsweise gut beim Begründen beobachten. Werden in der Sekundarstufe I Beispiele herangezogen, um Gesetzmäßigkeiten zu überprüfen, werden in der Sekundarstufe II durchaus auch formale Beweise durchgeführt.

Mathematische Begriffe werden an der Universität als fertige Produkte präsentiert, deren Entstehungsgeschichte den Studierenden großteils fremd bleibt. Darauf weisen unter anderem Fischer, Heinze und Wagner (2009) hin. Die Dozentinnen und Dozenten bringen den Studierenden knapp formulierte Beweise bei, wobei ihnen oft verborgen bleibt, wie eine Mathematikerin bzw. ein Mathematiker einmal auf diese Idee kam. Der Lösungsprozess wird im Nachhinein in einen linearen, logischen Ablauf gegliedert. Bei der Präsentation des Beweises werden daher viele Überlegungen nicht angeführt. Die Überlegungen und Irrwege, die während des Beweisens aufgetreten sind, sind nicht mehr ersichtlich. Mathematik ist schließlich eine deduktive Wissenschaft. Beim Aufschreiben eines Beweises

möchten die Mathematikerinnen und Mathematiker so objektiv wie möglich bleiben, weshalb sie versuchen, die dahinter steckende menschliche Handschrift zu minimieren (Heintz 2000).

In der Schule jedoch wird die Mathematik auf anschaulicher Ebene gelehrt. Deswegen die Lernenden in der Schule zu Beginn mit präformalen anschaulichen oder operativen Beweisen konfrontiert werden, wobei sie schrittweise zu wissenschaftlichen, formalen Beweisen hingeführt werden (Brunner 2014). Oft passiert das Beweisen in der Geometrie in der Schule auch durch prototypische Skizzen oder algebraische Beweise werden mittels anschaulicher Grundvorstellungen gelöst, wie beispielsweise die negativen Zahlen über die Minustemperaturen oder über die Schulden. Häufig werden dabei keine explizit definierten Begriffe verwendet, sondern man arbeitet mit Aussagen, die als allgemein gültig angenommen werden. Eine anschauliche Begriffsbildung ist für Schülerinnen und Schüler zugänglicher als eine formale Definition wie sie an der Universität zu finden ist (Fischer, Heinze & Wagner 2009). Brunner (2014) merkt jedoch an, dass sich selbst leistungsstarke Schülerinnen und Schüler beim Beweisen schwer tun.

Beweise haben in der Schulmathematik außerdem einen anderen Charakter als in der Hochschulmathematik. Die Mathematik als Wissenschaft möchte sich auf so wenige grundlegende Eigenschaften, sogenannte Axiome, wie möglich stützen. Beweise ermöglichen neu formulierte Sätze durch logische Überlegungen auf Grundlage dieser Axiome zu bekräftigen (Brunner 2014). In der Schule werden weiterführende Überlegungen oft an Hand eines konkreten Beispiels angestellt. Aus diesem Grund ist die abstrakte Vorgehensweise des Beweisens für die Studienanfängerinnen und -anfänger sehr befremdend.

Eine weitere Eigenschaft der Mathematik als Wissenschaft ist ihre spezifische Sprache. Exaktheit ist das oberste Gebot. Gerade deshalb ist es für Anfängerinnen und Anfänger schwierig, mathematische Texte beim ersten Durchlesen zu erfassen, wie Schichl und Steinbauer (2009) beschreiben. Es bedarf einer intensiven Auseinandersetzung mit den mathematischen Begriffen, um sie zu verstehen. Dabei ist es nicht nur wichtig, sich mit den entsprechenden Inhalten zu beschäftigen, sondern auch das Bearbeiten von Übungsaufgaben erfordert ein hohes Maß an Konzentration.

Auf Grund der unterschiedlichen Art und Weise, wie Schulmathematik beziehungsweise Hochschulmathematik aufgebaut sind, ergeben sich eine Diskontinuität und ein kognitiver Bruch mit dem Gewohnten beim Übertritt von der Schule an die Universität.

1.5.3. Welche Probleme ergeben sich durch die Diskontinuität?

Ein wesentlicher Aspekt ist, dass die Mathematik an der Universität als fertige Theorie gelehrt wird, ohne dass die Studierenden ausreichend Einblick in diese Gedankengänge bekommen. Dafür ist an den deutschsprachigen Universitäten häufig nur in den Übungseinheiten Platz. Allerdings bleiben viele Überlegungen beim Problemlösen und Beweisen implizit, da sie von Dozentinnen und Dozenten zwar gemacht, jedoch nicht explizit erwähnt werden. Für die Studierenden ist es oft nicht einfach, kurze, möglichst knapp formulierte Beweise nachzuvollziehen, da sie die dazugehörigen Gedankengänge nicht nachvollziehen können (vgl. Ableitinger 2012). Einerseits fehlen ihnen die fachlichen Grundlagen, welche Sätze verwendet wurden, andererseits verfügen sie noch nicht über dieselbe Routine wie Expertinnen und Experten. Außerdem bereitet den Lernenden die Generalisierung und Abstrahierung an der Hochschule Probleme, denn sie wissen oft nicht, bis zu welchem Grad generalisiert werden darf und welche Aspekte beim Verallgemeinern eventuell heikel sind (Fischer, Heinze & Wagner 2009).

Arbeiten auf Universitätsniveau – egal in welchem wissenschaftlichen Bereich – zeichnet sich durch Klarheit und Unterscheidung zwischen Wesentlichem und Nebensächlichem aus. In der Mathematik erreicht das präzise Arbeiten zweifelsohne ihren Höhepunkt durch ihr Verlangen nach Eindeutigkeit und Existenz sowie durch die Intoleranz gegenüber Widersprüchen (Fischer, Heinze & Wagner 2009). Darstellungen müssen immer exakt sein und in Argumentationsketten muss klar zwischen Voraussetzung und Behauptung unterschieden werden. Des Weiteren gehört zum wissenschaftlichen Intellekt das Bestreben, Neuerlerntes zu verstehen und damit umgehen zu lernen. Diese Fertigkeiten sind bei Schülerinnen und Schülern nur ansatzweise ausgeprägt wie Fischer, Heinze und Wagner (2009) betonen. Vor allem wenn die neuen Inhalte ihren bereits vorhandenen Ansichten und Vorstellungen widersprechen, das heißt, wenn die neuen Inhalte kognitive Konflikte

erzeugen, werden sie nur mit großen Bemühungen aufgenommen und weiterverarbeitet.

1.5.4. Umgang mit der Diskontinuität im deutschsprachigem Raum

Die Dozentinnen und Dozenten der Universitäten sind sich dessen bewusst, dass sich die Studienanfängerinnen und -anfänger erst ihren eigenen Zugang zur Mathematik auf Hochschulebene zulegen müssen. Um den Klagen der Hochschuldozentinnen und -dozenten und der hohen Abbruchrate in den ersten Semestern entgegenzuwirken, haben etliche Universitäten im deutschsprachigen Raum Brückenkurse geschaffen (Bausch et al. 2014).

Es gibt auch Stimmen, die für die bewusste Beibehaltung der Diskontinuität sind, damit den Studienanfängerinnen und -anfängern deutlich klar gemacht wird, dass die Hochschulmathematik anders ist als die Schulmathematik. Bernhard Kümmerer (2012) plädiert beispielsweise für eine ausführliche Auseinandersetzung mit der Hochschulmathematik zu Beginn des Studiums. Die Vertreterinnen und Vertreter dieser Ansicht erachten es als wichtig, dass die Studierenden den Beginn eines mathematisch orientierten Studiums als Einschnitt erleben.

Stellungnahmen von beiden Seiten sind bei Ableitinger, Kramer und Prediger (2013) zu finden. „Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung“ versteht sich als Sammelband von Aufsätzen von Dozentinnen und Dozenten zur Diskontinuität an deutschsprachigen Universitäten.

Exemplarisch soll das Projekt „Mathematik besser verstehen“ angeschnitten werden, im Zuge dessen den Studierenden im ersten Studienjahr besondere unterstützende Angebote zur Verfügung gestellt wurden. Aus diesem Projekt ist eine Methode entstanden, die zur Identifikation von fachlichen Schwierigkeiten beim Lösen hochschulmathematischer Aufgaben beitragen soll. Ableitinger und Herrmann (2011) zerlegen den Prozess des Aufgabenlöses in Teilsequenzen. Jeder dieser Teilsequenzen sind bestimmte Funktionen zugeordnet. Ein erfolgreiches Lösen von Aufgaben setzt sich aus mehreren solcher Teilprozesse zusammen, wobei sich jede Aufgabenbearbeitung unterscheidet. Es treten nicht immer alle Teilsequenzen auf. Die Reihenfolge sowie die Häufigkeit der einzelnen

Phasen sind variabel (Ableitinger 2012). Zunächst wird das Projekt „Mathematik besser verstehen“ vorgestellt, bevor das Teilphasenmodell erläutert werden soll.

1.5.5. Modell der Teilprozesse des Aufgabenlöses nach Ableitinger und Herrmann

An der Universität Duisburg-Essen wurde ab dem Wintersemester 2009/10 drei Jahre lang das Projekt „Mathematik besser verstehen“ durchgeführt. Ziel dieses Projekts war es, die Studierenden im ersten Studienjahr zu unterstützen, damit sie das mathematische Arbeiten, wie es an Hochschulen üblich ist, erlernen. Dabei sollte keineswegs in die Struktur der Lehrveranstaltungen eingegriffen, sondern mit den gegebenen Rahmenbedingungen gearbeitet werden. Das Projekt stützt sich auf folgende Aspekte: Die Studierenden sollten angeregt werden, sich zu Hause mit dem Vorlesungsstoff auseinanderzusetzen. Weiters sollten die Studierenden die Möglichkeit bekommen, sich sowohl untereinander als auch mit Expertinnen und Experten zu fixen Zeiten auszutauschen. Dazu wurden spezielle Tutorien eingerichtet. Eine dritte Förderungsmaßnahme des Projekts umfasste die Bereitstellung von ausführlichen Musteraufgaben zur Bearbeitung der Übungsaufgaben (Ableitinger 2013, S. 18). Auf den dritten Aspekt soll im Folgenden näher eingegangen werden. Alle Informationen zu dem Projekt „Mathematik besser verstehen“, im Speziellen zu dem Angebot von Musterlösungen wurden von Ableitinger (2013) entnommen.

Die wöchentliche Vorbereitung der Übungsaufgaben beansprucht viel Zeit im Stundenplan der Studierenden, weil ihnen die kompakten Aufgabenstellungen in knapper Formulierung, wie für die Hochschulmathematik üblich, oft Schwierigkeiten bereiten. Um den Studierenden hierbei eine Unterstützung zu bieten, wurden von den Übungsleiterinnen und Übungsleitern ausführliche Musterlösungen erstellt. Die Studierenden erhielten diese, nachdem sie die Aufgaben selbstständig bearbeitet hatten. Hintergedanke für das Angebot an Musterlösungen ist, dass die Studierenden den mathematischen Arbeitshabitus kennenlernen und sich diesen aneignen. Einerseits können die Studierenden ihre eigenen Lösungen mit jener einer Expertin bzw. eines Experten vergleichen. Andererseits soll die ausführliche Musterlösung all jenen eine Hilfestellung bieten, die die Aufgabe weniger erfolgreich bearbeitet haben.

Mit Hilfe der detaillierten Beschreibungen lassen sich die in der Lehrveranstaltung komprimiert vorgetragenen Lösungen im Nachhinein besser nachvollziehen.

Durch das Angebot an ausführlichen Musterlösungen soll den Studierenden ein besserer Einblick in die mathematische Arbeitsweise der Hochschule ermöglicht werden. Aus Zeitgründen schreiben üblicherweise die Dozentinnen und Dozenten in den herkömmlichen Übungsstunden, bei denen die Aufgaben im Plenum besprochen werden, nur knappe Lösungen an die Tafel. Für die Studierenden bedeutet dies, dass sie die einzelnen Schritte, die die Dozentin bzw. der Dozent beim Lösen bewältigt hat, selbst erarbeiten müssen. Oft bleiben den Studierenden dadurch einzelne Passagen der Lösung unverständlich.

Ableitinger und Herrmann von der Universität Duisburg-Essen haben im Zuge des Projekts „Mathematik besser verstehen“ ein Kategoriensystem erstellt, das die Anforderungen verdeutlichen soll, mit denen die Studierenden beim Lösen typischer Aufgaben aus Analysis und Linearer Algebra konfrontiert sind. Ihr Ziel war es, auf deskriptive Art auszumachen, mit welchen Schwierigkeiten die Studienanfängerinnen und -anfänger zu kämpfen haben. Ausgangspunkt ihrer Inhaltsanalyse waren die bereits erwähnten ausführlichen Musterlösungen der Übungsaufgaben, die in kurze Sequenzen unterteilt wurden. Diese Teilausschnitte wurden hinsichtlich ihrer Funktion im Lösungsprozess untersucht. Außerdem wurde erarbeitet, inwiefern sie den Studierenden Probleme bereiten könnten. Die daraus gewonnenen sieben Teilprozesse sollen nun vorgestellt werden. Dabei ist zu beachten, dass nicht immer alle sieben Phasen beim Aufgabenlösen auftreten. Einzelne Teilprozesse wiederum treten durchaus vermehrt im Lösungsprozess einer Aufgabe auf. Dadurch ergibt sich, dass die Reihenfolge keinesfalls als strenge Abfolge aufzufassen ist. Überblicksmäßig sind sie nachstehend aufgelistet, wobei die Reihenfolge jener von Ableitinger und Herrmann entspricht. Im Anschluss werden die einzelnen Teilprozesse beschrieben und durch Beispiele illustriert. Die Beispiele 1 bis 9 sind Ausschnitte aus den im Zuge der Diplomarbeit entstandenen Transkripten. Die an der Universität Wien durchgeführte qualitative Studie wird an späterer Stelle, in Kapitel 3, erläutert. Die genaue Darstellung zur Entstehung der Teilprozesse kann bei Ableitinger und Herrmann (2011) nachgelesen werden. Von dort wurde auch die Tabelle zur Übersicht der Teilsequenzen übernommen (ebenda, S. 28).

Kürzel	Bezeichnung
P	Problembewusstsein schaffen
K	Klärung der Handlungsoptionen
Z	Herstellung eines Zugriffs, die Aufgabe handhabbar machen
A	Anpassen oder Prüfen der Passung
H	Anwendung von Handwerk
T	Tricks
B	Begleitende, strukturierende Kommentare und Erläuterungen

Abb.1 Teilprozesse in Aufgabenlösungen nach Ableitinger und Herrmann

1.5.5.1. Problembewusstsein schaffen

In dieser Phase stellen sich die Studierenden folgende Fragen: In welchen Themenkreis ist die Aufgabe einzuordnen? Was genau ist gefragt? Ist die Frage eventuell trivial zu beantworten? Das tatsächliche Problem der Aufgabe soll erkannt, entschlüsselt und analysiert werden. Problembewusstsein schaffen meint aber auch, im Anschluss an die gelöste Aufgabe erkennen zu können, welchen Zweck die Aufgabe erfüllt und auf welchen Aspekt des Themengebiets sie abzielt. Am Ende des Lösungsprozesses sollte man nicht nur die einzelnen Schritte nachvollziehen können, sondern auch wissen, was man mit dieser Aufgabe gezeigt hat. Dieses Wissen hilft vor allem bei künftigen Aufgabenstellungen.

Das Problem wird identifiziert und analysiert, sowohl vorausschauend als auch abschließend rückwirkend. In dieser Phase werden aber keine Änderungen am Problem vorgenommen.

Beispiel 1: „Was ist denn da das Thema überhaupt?“ (Transkript Aufgabe 36, Zeile 24)

Beispiel 2: „Ich versteh nicht ganz, was die da von uns wollen. [...] Was wolln die da jetzt genau von uns bei Siebenunddreißig?“ (Transkript Aufgabe 37, Zeile 43)

1.5.5.2. Klärung der Handlungsoptionen

Wenn man an ein Problem herangeht, fragt man sich oft: Wie werde ich die Aufgabe lösen? Welche Methoden stehen mir zur Verfügung? Welcher Satz, welche Definition kommt in Frage? Diese Phase bezeichnen Ableitinger und Herrmann (2011, S. 15) mit *Klärung der Handlungsoptionen*. Man entscheidet sich für gewisse Optionen und andere, nicht zielführende, werden verworfen.

Diese Phase tritt üblicherweise mehrmals im gesamten Lösungsprozess auf. Steht man mit den gewählten Optionen an und kommt nicht mehr weiter, so werden andere Optionen bevorzugt. Ebenso wie beim *Problembewusstsein Schaffen* wird die Problemstellung in diesem Teilprozess nicht verändert.

Beispiel 3: „Schau ma mal, was ham ma da für Sätze überhaupt. (*blättert in ihrer Mitschrift, längere Pause*)?“ (Transkript Aufgabe 36, Zeile 3)

1.5.5.3. Einen Zugriff herstellen, die Aufgabe handhabbar machen

Experten schauen sich eine Aufgabe an und können auf Grund ihrer Erfahrung sofort einen geeigneten Zugriff herstellen, im Gegensatz zu den Studierenden, denen die nötige Routine dazu fehlt. Um die Aufgabe dennoch zu lösen, müssen die Studierenden einen Ansatz finden, damit der Lösungsprozess in Gang kommt und sie die angegebenen Informationen verarbeiten können. In dieser Phase wird die Aufgabe sozusagen zugänglicher gemacht. Dies kann durch eine andere Wahl der Darstellung oder einen Sichtweisenwechsel geschehen.

Beispiel 4: In der Aufgabe 8 soll der Grenzwert der Folge $a_n = \frac{(3-n)^3}{3n^3-1}$ ($n \in \mathbb{N}$) berechnet werden. Nachdem die Studierenden die Aufgabe durch Rechenoperationen in eine andere Form gebracht haben, hat Sarah eine Idee,

wie sie den Grenzwert ermitteln kann: „Also da kann man sagen, du schaust dir die höchste Potenz an. Das ist ja da n hoch drei und da n hoch drei.“ (Transkript Aufgabe 8a, Zeile 10 und 12)

Die Studentin hebt hervor, dass es beim Berechnen des Grenzwertes oft von Vorteil ist, durch die höchste vorkommende Potenz der Variable, die gegen Unendlich strebt, zu dividieren. Ihre Bemerkungen liefern einen wesentlichen Betrag dazu, wie sie den Grenzwert berechnen kann.

Dieser Teilprozess hat einen „öffnenden Charakter“ (Ableitinger & Herrmann 2011, S.17), da die Aufgabe zugänglicher gemacht wird.

1.5.5.4. Anpassen oder Prüfen der Passung

Hat man die zu verwendenden Handlungsoptionen festgesetzt, muss man oft die Angabe umformen oder in eine andere Notation bringen, um bekannte Sätze, Definitionen und Rechentechniken anwenden zu können. Bei der Verwendung eines Satzes muss beispielsweise immer beachtet werden, ob die Voraussetzungen eingehalten werden oder ob diese gegebenenfalls noch geschaffen werden müssen.

Beispiel 5: In der Aufgabe 8b ist gefragt, ob die gegebene Folge beschränkt, konvergent bzw. divergent ist. Im Falle der Konvergenz soll der Grenzwert bestimmt werden.

$$b_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}, \text{ wobei } n \in \mathbb{N}.$$

Hier muss dem Faktor $(-1)^n$ besondere Beachtung geschenkt und eine Fallunterscheidung durchgeführt werden. Man unterscheidet zwischen geraden und ungeraden Potenzen und berechnet die jeweiligen Grenzwerte. Gerade Potenzen liefern den Grenzwert Eins, wenn n gegen Unendlich geht. Bei den Potenzen der ungeraden Zahlen strebt die Folge gegen minus Eins. An dieser Stelle müssen sich die Studierenden in Erinnerung rufen, dass es einen Satz gibt, der besagt: *Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.* Somit handelt es sich um eine divergente, jedoch beschränkte Folge mit den Häufungswerten 1 und -1.

1.5.5.5. Anwendung von Handwerk

Unter Handwerk verstehen Ableitinger und Herrmann (2011, S.19) das kalkülhafte Rechnen und die Ausführung vertrauter Techniken. Dabei darf man nicht außer Acht lassen, dass man sich durch Erfahrung mehr und mehr Handwerke aneignet. Ist es am Anfang noch ein Trick bei der Grenzwertberechnung durch die höchste vorkommende Potenz der Variable, die gegen Unendlich strebt, zu dividieren, so wird es durch mehrmaliges Anwenden Routine. Ist einem eine Technik oder ein Lösungsverfahren sehr vertraut, dann kann man es zu seinem Handwerk zählen. Eine Tätigkeit, die einem beim ersten Kennenlernen kompliziert und mühsam erscheint, kann man sich durch mehrfache Verwendung aneignen und zur Routine machen.

Beispiel 6: „So(,) also ich hab zuerst oben mal die binomische Formel aufgelöst. Da ist mir rausgekommen: $n^3 - 9n^2 + 27n - 27$.“ (Transkript Aufgabe 8a, Zeile 6)

Zu Handwerk zählt unter anderem der Einsatz von der binomischen Formel (beispielsweise bei Aufgabe 8a und Aufgabe 36), die Anwendung der Rechenregeln von Brüchen (bei Aufgabe 36), „Ziehen einfacher Schlussfolgerungen“ und das „Anwenden eines Satzes nachdem er auf seine Anwendbarkeit überprüft wurde“ (Ableitinger & Herrmann 2011, S. 19).

1.5.5.6. Tricks

Beim Aufgabenlösen befindet man sich mitunter in einer Situation, in der nur mehr ein Trick hilft. Tricks sind geniale Ideen, die einem das Aufgabenlösen erleichtern. Manchmal kürzen Tricks auch den Lösungsweg ab bzw. lassen die Lösung eleganter ausschauen.

Beispiel 7: Der folgende Ausschnitt ist aus dem Transkript der Aufgabe 8a von Beate und Sarah entnommen:

7	Sarah	So(,) dann hab ich gefunden(,) also so Tricks, ja (?)
8	Beate	Ok.
9	Sarah	Ja. Also da kann man sagen, du schaust dir die höchste (-)
10	Beate	[Potenz an.]
11	Sarah	[Potenz an. Das is ja da n hoch Drei und da hast n hoch Drei. Jetzt könntest du sagen, wir könnten das Ergebnis ja mehr oder weniger mal abschätzen oder so, ja (?) Da kannst ja sehen, das könnte ein Drittel werden. Ja (?)

Sarah benutzt sogar den Begriff „Trick“ in Zeile < 7 >. Die Division durch die höchste vorkommende Potenz der Variable, die gegen Unendlich strebt, ist für die Studentinnen zu diesem Zeitpunkt ein *Trick*, da sie noch nicht oft Grenzwerte von Folgen berechnet haben. Nach mehrmaliger Anwendung dieses Tricks, wenn diese Handlungsoption zur Routine wird, zählt sie zur Teilphase *Handwerk*.

1.5.5.7. Begleitende, strukturierende Kommentare und Erläuterungen

Um während des Lösungsprozesses den Überblick zu bewahren, sind Zwischenresümees und begleitende Kommentare hilfreich. Mittels Erläuterungen und Kommentaren zieht man einen roten Faden durch den Lösungsprozess. Typisch hierfür ist beispielsweise: „Wir haben bis jetzt gezeigt, dass..., zu zeigen bleibt....“

Beispiel 8: Bei der Bearbeitung der Aufgabe 43 stellt eine Studentin folgende Überlegung an: „Können wir damit etwas anfangen? Schon oder?“ (Transkript Aufgabe 42, Zeile 161)

Sie fragt ihre Kolleginnen und Kollegen, ob das soeben Nachgewiesene aussagekräftig für die Behauptung ist, die sie zeigen wollten.

Beispiel 9: Moment, was hast du jetzt gemacht? (Transkript Aufgabe 35, Zeile 140)

Bei diesem Beispiel erkundigt sich die Studentin bei ihrem Kollegen, wie er vorgegangen ist, da sie nicht mitgekommen ist. Um nicht den Anschluss zu verlieren, fragt sie nach.

Die theoretischen Erklärungen zu den Teilprozessen wurden von Ableitinger (2012) sowie Ableitinger und Herrmann (2011) übernommen. In Letzterem befinden sich außerdem ausführlichere Ankeraufgaben sowie nach Teilsequenzen klassifizierte Musterlösungen.

An dieser Stelle soll hervorgehoben werden, dass bisher vor allem ausführliche Musterlösungen bzw. bearbeitete Aufgaben von Studierenden, die über solche Musterlösungen verfügten, auf die oben beschriebenen Teilprozesse untersucht wurden. Vor der Auswertung der Daten, die im Rahmen dieser Diplomarbeit entstanden sind, war nicht klar, ob sich diese Teilsequenzen auch in Aufgabenbearbeitungen zeigen, die ohne solche vorgefertigten Lösungen entstanden sind.

2. Forschungsmethode – Interpretative Unterrichtsforschung

In einem ersten Punkt wird die Theorie der interpretativen Unterrichtsforschung, wie sie Krummheuer und Naujok (1999) beschreiben, dargelegt. Es folgt die Begründung zur Wahl einer qualitativen Methode für das vorliegende Forschungsinteresse. Im Kapitel 2.3. wird das Transkriptionsverfahren erläutert, im Kapitel 2.4. das Layout der Transkripte. Dort ist auch die Transkriptionslegende zu finden.

2.1. Darstellung der interpretativen Unterrichtsforschung

Qualitative Studien gewinnen immer mehr Bedeutung in der Unterrichtsforschung, um Lehr- und Lernprozesse zu beobachten und zu analysieren. Die deutschsprachige Mathematikdidaktik forciert schon seit den 1980er Jahren qualitative Studien, wie beispielsweise bei Breidenstein (2002) nachgelesen werden kann. Ein wesentlicher Grund dafür ist, dass sich durch die technischen Aufzeichnungen andere Perspektiven auf den Lernprozess ergeben.

Eine Methode der qualitativen empirischen Unterrichtsforschung ist die interpretative Unterrichtsforschung, die in Anlehnung an die Theorie des Symbolischen Interaktionismus von Terhart 1978 ins Leben gerufen wurde

(Breidenstein 2002). Er schuf sie als Gegenpol zur damals etablierten standardisierten Unterrichtsbeobachtung. Interpretative Unterrichtsforschung beinhaltet, wie Breidenstein (2002) beschreibt, ein breit gefächertes Forschungsgebiet und konzentriert sich nicht auf eine übergeordnete zentrale Fragestellung. Grundlegende Forschungsmethoden und theoretische Denkansätze wurden 1999 von Krummheuer und Naujok in ihrem Werk „Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung“ präsentiert.

Interpretative Unterrichtsforschung zeichnet sich durch eine detaillierte Analyse von Unterrichtssituationen aus. Es ist als schaue man mit einer Lupe beziehungsweise einem Mikroskop in das Geschehen des Unterrichts hinein. Da sich die vorliegende Arbeit auf die interpretative Unterrichtsforschung stützt, wie sie von Krummheuer und Naujok (1999) beschrieben wurde, soll an dieser Stelle auf ihre grundlegenden Überlegungen eingegangen werden. Die theoretische Basis bilden der Konstruktivismus und der Interaktionismus. Man geht davon aus, dass schulischer Alltag durch die Interaktion der Beteiligten geschaffen wird. Lernen wird demnach auch von sozialen Komponenten, wie der Interaktion, beeinflusst (Krummheuer & Naujok 1999, S. 59 – 60). Die interpretative Unterrichtsforschung gewährt keinen psychologischen oder pädagogischen Blick auf den Lehr- und Lernprozess, sondern einen soziologischen, und weist nach Krummheuer und Naujok (ebenda, S. 13 – 16) gewisse Charakteristika auf. Die ersten beiden Punkte gelten für Unterrichtsforschung im Allgemeinen, während die letzten drei auf die interpretative Unterrichtsforschung im Speziellen zutreffen. Krummheuer und Naujok beschreiben folgende fünf Eigenschaften (ebenda, S. 13 – 16):

1. Die Ergebnisse von Studien der Unterrichtsforschung erwecken stets öffentliches Interesse, da jede bzw. jeder einmal die Schulbank drückte und dadurch meint, sie bzw. er habe genügend Kenntnisse, um bei Schuldebatten mitreden zu können. Des Weiteren haben die Studienergebnisse gewisse Erwartungen zu erfüllen, immerhin wird ein Großteil der Schulen mit öffentlichen Geldern finanziert. So wird von der Allgemeinheit gewünscht, dass die Studienautorinnen und -autoren nicht nur den Ist-Zustand erheben, sondern auch Verbesserungsvorschläge präsentieren. Die Öffentlichkeit fordert stets einen erhöhten Lernerfolg durch einen bestmöglichen Unterricht.

Das bedeutet, dass die Institution Schule im öffentlich-rechtlichen Auftrag unentwegt verbessert und optimiert werden soll. Dies wiederum heißt, dass sich die Unterrichtsforschung auch an einen Teil der beobachteten Personen richtet, nämlich an die Lehrerinnen und Lehrer.

2. Die Forschungsergebnisse involvieren nicht nur Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler, sondern alle Lehrpersonen sowie Lehramtsstudierende. Sie sind Betroffene der Analyse und gleichzeitig werden sie im Anschluss an die Forschungsergebnisse aufgefordert, an ihrem Unterricht etwas zu ändern. Die Gefahr, die sich laut Krummheuer und Naujok dahinter verbirgt, ist eine „Popularisierung der Publikation“ (ebenda, S.14), um ein möglichst großes Publikum zu erreichen.

Die Methode der interpretativen Unterrichtsforschung ist ein Teilgebiet der Unterrichtsforschung. Arbeiten, die sich in die interpretative Unterrichtsforschung einreihen, weisen zahlreiche Forschungsinteressen auf. Im Folgenden wird die Liste der Eigenschaften nach Krummheuer und Naujok fortgesetzt, wobei die kommenden drei speziell für die interpretative Unterrichtsforschung gelten, während die oben erwähnten der Unterrichtsforschung im Allgemeinen zugeschrieben werden können:

3. Interpretative Unterrichtsforschung interessiert sich für das Geschehen im Unterrichtsalltag. Der Hauptgrund, weshalb der Fokus beim Unterrichtsalltag liegt, ist die theoretische Grundhaltung, dass die Beteiligten den Interaktionsraum selbst gestalten. Durch die Analyse des Interaktionsraumes kann untersucht werden, inwiefern er von den Interakteuren kreiert wird. Daraus ergibt sich, dass der Unterrichtsalltag von den Beteiligten auch verändert werden kann, wenn dies erwünscht ist. Interpretative Unterrichtsforschung ermöglicht, Defizite zu orten und durch methodisch kontrollierte Analysen Handlungsalternativen zu präsentieren, die von den Betroffenen umgesetzt werden können. Naujok sieht den Begriff „Alltag“ außerdem im Gegensatz zu „Labor“ und meint, dass Aussagen über den Alltag nur dann ihre Gültigkeit haben können, wenn sie an Hand von Alltagssituationen gezogen wurden (ebenda, S. 17).

4. Um alltägliche Lehr- und Lernprozesse zu analysieren, ist es notwendig, diese zu rekonstruieren. Alltägliche Unterrichtssituationen werden in der interpretativen Unterrichtsforschung mit Hilfe von technischen Mitteln, wie Videokamera, Mikrophon und ähnlichem aufgezeichnet. Mit den erhobenen Daten werden die Analysen erstellt. Dadurch grenzt sie sich von der standardisierten Unterrichtsbeobachtung insofern ab, als dass sie auch nicht beobachtbare Aspekte der Interaktion berücksichtigt. Aufgezeichnetes Material kann bei Bedarf öfters angeschaut bzw. angehört werden, wenn beispielsweise Ungereimtheiten auftreten (Breidenstein, S. 12).
5. Der letzte Punkt umfasst die theoretische Grundeinstellung, dass der Lehr- und Lernprozess sowie die damit verbundene Interaktion „konstruktive Aktivitäten“ sind (Krummheuer & Naujok 1999, S.15). Krummheuer und Naujok (ebenda, S.16) gehen davon aus, dass sich Lernende ihr Wissen durch Interaktion aktiv aneignen. Der theoretische Standpunkt geht von der psychologischen Auffassung des individuellen Lernens hin zur interaktiven Sichtweise von Lernen.

Forschungsinteresse einer interpretativen Unterrichtsanalyse sind schließlich die „Interaktionsprozesse in Unterrichtssituationen im Hinblick auf die soziale Konstitution von Unterrichtsalltag (und Lernen)“ (Krummheuer & Naujok 1999, S. 16). Hauptaugenmerk ist dabei das interaktive Geschehen, das durch Rekonstruktion von alltäglichen Handlungsabläufen und des Interaktionsraumes analysiert wird. Dadurch grenzt sich die interpretative Unterrichtsforschung von der standardisierten Unterrichtsbeobachtung und -analyse ab, weil sich letztere Methode vor allem auf einzelne, isolierte Äußerungen bzw. das Hervorheben einzelner Handlungsstränge konzentriert, wie Breidenstein (2002) beschreibt. Des Weiteren ignoriert die interpretative Unterrichtsforschung nicht die räumlichen und örtlichen Gegebenheiten. Studien, die sich der interpretativen Unterrichtsforschung zuschreiben, weisen ein weites Forschungsfeld auf, folgende Gemeinsamkeiten sind nach Breidenstein (2002, S. 12) auszumachen:

- Es handelt sich in den meisten Fällen um ein Interaktionsgeschehen, bei dem sich die Betroffenen einander gegenüber befinden, eine sogenannte „face-to-face Interaktion“ (Breidenstein 2002, S. 12). Die

Teilnehmerinnen und Teilnehmer sehen sich und kommunizieren miteinander, wobei sie sich in der Regel im selben Raum befinden.

- Die Interaktion ist lokal und temporär begrenzt. Sie findet für gewöhnlich in einem geschlossenen Raum statt und ist durch den Stundenablauf in der Schule zeitlich eingeschränkt.
- Die Interakteure setzen sich aus vielen Kindern oder Jugendlichen zusammen, denen einzelne Erwachsene gegenüber stehen.
- Alle Beteiligten sehen als Sinn ihrer Aufgaben den Lernprozess. Das interaktive Geschehen wird von allen als „Lernen“ aufgefasst.

Wie unter anderem Breidenstein (2002) beschreibt, ist eine qualitative detaillierte Unterrichtsforschung insofern eine „methodische Herausforderung“ (ebenda, S. 12), da das interaktive Geschehen durch die gleichzeitig stattfindenden Prozesse auf mehreren Handlungsebenen sehr komplex ist. Die Interaktion im Unterricht wird technisch aufgezeichnet, entweder mittels eines Diktiergerätes oder einer Videokamera. Vor der Datenerhebung stellt sich folglich die Frage, ob für die Analyse nur das Gesprochene von Bedeutung ist oder auch Gestik und Mimik. Dafür wird wiederum eine Kamera benötigt. Allerdings hat auch die Videoaufzeichnung ihre Grenzen. Nicht alles kann erfasst und erhoben werden. Andernfalls würde man dafür eine Großzahl an Kameras brauchen. Auf die aufwändige Datenerhebung folgt eine zeitintensive Erarbeitung der detaillierten Transkription (ebenda, S. 12).

2.2. Begründung zur Wahl einer qualitativen Methode

Die Entscheidung für eine qualitative und gegen eine quantitative Methode wurde auf Grund der Forschungsfrage getroffen. Die Zielsetzung dieser Arbeit ist, herauszufinden, ob der Lösungsprozess von Studierenden mit Hilfe des Modells der Teilsequenzen nach Ableitinger und Herrmann beschrieben werden kann. Die interpretative Unterrichtsforschung ermöglicht die Erforschung der Bedeutung von Interaktion und Handlungen im Rahmen des Lernprozesses. Bei den meisten qualitativen Studien, so auch bei dieser, muss zuerst das Datenmaterial erhoben werden. Dazu wurden im Wintersemester 2013/14 Videos gedreht, die

Studierendengruppen beim Lösen von Übungsaufgaben aus der Einführung in die Analysis zeigen. Um die Bausteine des Bearbeitungsprozesses der Aufgaben zu analysieren, wurden ausgewählte Teile des aufgezeichneten Videomaterials transkribiert. Die Transkripte wiederum dienten als Ausgangspunkt für die Analyse und die anschließende Interpretation. Gegen eine quantitative Methode spricht, dass die zu untersuchenden Zusammenhänge nicht an Hand von Zahlen oder statistischen Mitteln verdeutlicht werden können.

2.3. Transkriptionsverfahren

Bei der interpretativen Unterrichtsforschung stützt man sich auf technische Aufzeichnungen von Interaktion. Daraus ergibt sich für die Arbeit, dass die Studierendengruppen während des Aufgabenlöseens gefilmt wurden. Anschließend wird die Interaktion transkribiert. Die Transkripte sind dann wiederum Ausgangspunkt für die Analyse hinsichtlich der Teilprozesse.

Im Folgenden wird beschrieben, wie die Transkripte entstanden sind, die sich im Anhang (Kapitel 6.) befinden. In Hinblick auf die Wahl der Forschungsmethode – der Interpretativen Unterrichtsforschung – ist die Entstehung der Transkripte an das Transkriptionsverfahren von Krummheuer und Naujok (1999, S. 64-66) angelehnt.

Mittels einer digitalen Kamera wurde die Studierendeninteraktion aufgenommen. Ausgehend von den Videoaufzeichnungen wurden ohne Verwendung einer speziellen Software die Transkripte erstellt. Die Vorgangsweise war die folgende:

An die Videokamera angeschlossene Lautsprecher gaben den Ton der Aufzeichnungen wieder. Beim Anhören wurde eine Auswahl an Situationen erstellt, die anschließend transkribiert wurden. Es wäre ein großer Mehraufwand gewesen, das gesamte gesammelte Material mit mehr als 500 Minuten zu transkribieren, deswegen musste eine Auswahl getroffen werden. Situationen, in denen über besondere Ereignisse im Studentenleben oder über Persönliches gesprochen wurde, wurden nicht transkribiert und sind mit [...] gekennzeichnet. Des Weiteren wurden Lösungsprozesse, die schon im Ansatz scheiterten, als irrelevant für die Analyse erachtet. Im nächsten Absatz wird das Layout der Transkripte erläutert.

2.4. Transkriptionslegende

Die vollständigen Transkripte, die zur Analyse der Teilprozesse verwendet werden, befinden sich im Anhang (Kapitel 6.). Jedes Transkript wird mit einer Beschreibung der Ausgangssituation eingeleitet. Nach einem Überblick über den Verlauf und der Aufgabenstellung folgt das Transkript. In der ersten Spalte befindet sich die Zeilennummerierung, wobei bei der Analyse stets die Zeilennummer aus der Gesamtversion übernommen wird, sodass die entsprechenden Aussagen leicht im Volltext der Transkription nachgelesen werden können. Die Aussagen sind vorlaufend nummeriert, wobei nicht der Zeilenum sprung entscheidend ist, sondern, wenn eine andere Person das Wort ergriffen bzw. die Interaktion vorangetrieben hat. Jeder Lösungsprozess wird separat analysiert, daher beginnt jedes Transkript mit der Zeile < 1 >.

Aus der zweiten Spalte sind die anonymisierten Namen der Beteiligten entnehmbar. Da alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Studie anonym bleiben sollten, wurden die Namen geändert. Es wurde bewusst auf allgemeine Abkürzungen wie beispielsweise „P1“ verzichtet, da man sich nur schlecht eine Person unter „P1“ vorstellen kann (Krummheuer & Naujok 1999, S.65).

In der dritten Spalte findet man sowohl die verbalen Äußerungen als auch beobachtbare nonverbale Aktivitäten, wie mit dem Finger auf eine bestimmte Stelle zeigen. Letztere sind in kursiver Schrift in Klammern gesetzt festgehalten, um sie von der verbalen Kommunikation zu unterscheiden. Des Weiteren werden Rechenschritte, die von den Studierenden aufgeschrieben wurden, in dieser Weise eingefügt. Da ausschließlich mit einer Kamera gefilmt wurde, ist manchmal im Nachhinein nicht mehr nachvollziehbar, worauf sich die Studierenden mit ihren Aussagen beziehen. In solchen Fällen findet man keine Anmerkungen. Sind einzelne Aussagen nicht eindeutig aus dem Videomaterial auszumachen, so stehen die vermuteten Worte zwischen zwei Fragezeichen, (?möglicher Wortlaut?). Vollkommen unverständliche Äußerungen werden durch (...) ausgedrückt. Diese Markierung darf nicht mit [...] verwechselt werden, die auf eine Zäsur in der Transkription hinweist. Im Laufe des Gesprächs wird immer wieder über die Lehrveranstaltungsleiterinnen und -leiter, Übungsgruppen und Sonstiges geredet. Unterhaltungen, die vom Lösungsprozess abweichen, wurden nicht transkribiert. Diese werden in Anlehnung

an die Zitierregeln mit [...] im Transkript gekennzeichnet. Reden mehrere Beteiligte gleichzeitig, dann kann man dies durch die im Transkript verwendeten eckigen Klammern („[]“) ablesen. Die nachstehende Transkriptionslegende ist angelehnt an Kallmeyer und Schütze (1976).

Legende:

(...)	unverständliches Wort bzw. unverständliche Wörter
(,)	Unterbrechung des Redeflusses, Pausen von weniger als drei Sekunden
(?)	Frageintonation
(!)	Ausrufeintonation
(-)	Stimme bleibt in Schwebe
(?Text?)	schlecht verständliche Wörter, vermuteter Wortlaut
aber	auffällige Betonung
o k a y	gedehnte Aussprache
[Text 1], [Text 2]	gleichzeitiges Sprechen
(Text)	nonverbale Informationen, Gesten, Erläuterungen, längere Pausen

3. Empirische Studie

Für die empirische Studie wurden Freiwillige, die im Wintersemester 2013/14 die Übung „Einführung in die Analysis“ an der Universität Wien absolvierten, rekrutiert. In Kleingruppen wurden die Studierenden beim gemeinsamen Erarbeiten der Übungsaufgaben gefilmt. Das transkribierte Videomaterial dient als Grundlage für die Analyse der Lösungsprozesse von Aufgaben durch Studierende auf Teilsequenzen, wie sie Ableitinger und Herrmann (2011) definierten. Den Studierenden ist das Modell der Teilprozesse, das im Kapitel 1.5.5 vorgestellt wurde,

nicht bekannt. Außerdem kennen sie die Musterlösungen nicht, die als Ausgangsmaterial zur Schaffung des Modells dienten.

Bevor die Durchführung der Studie sowie der Forschungsweg erläutert werden, soll aufgezeigt werden, wie die Studieneingangsphase in Mathematik an der Universität Wien aufgebaut ist.

3.1. Rahmenbedingungen an der Universität Wien

Schon vor Studienbeginn muss man sich entscheiden, ob man Mathematik auf Lehramt oder als Bachelorstudium absolvieren will. Im deutschsprachigen Raum ist es üblich, entweder ein reines Fachstudium oder ein Lehramtsstudium zu wählen. In anderen Ländern wiederum, beispielsweise in Frankreich, erfolgt die Lehramtsausbildung nach dem Abschluss eines Fachstudiums. An der Universität Wien werden bereits die Lehrveranstaltungen in der Studieneingangs- und Orientierungsphase (kurz: StEOP) getrennt angeboten. Das Curriculum für Studierende im Lehramtsstudium wird nachstehend skizziert.

Im Wintersemester 2013/14 wird den Studierenden, die mit Mathematik anfangen wollen, auf der Homepage der Fakultät für Mathematik (<http://plone.mat.univie.ac.at/studium/studienbeginn/ws1314/lehramtsstudium-ws/vorlesungen>, gesehen am 08.05.2014) empfohlen, nur die Vorlesung „Einführung in das mathematische Arbeiten“ zu besuchen, von der es eine spezielle Variante für Lehramtskandidatinnen und -kandidaten gibt. Da sich die Studieneingangsphase des Lehramts aus drei verschiedenen Bereichen zusammensetzt, den zwei Unterrichtsfächern sowie der allgemeinen pädagogischen Bildung, sind die Lehramtsstudierenden im ersten Semester mit „Einführung in das mathematische Arbeiten“ bereits ausreichend ausgelastet. Im Gegensatz zur Version für Bachelorstudierende findet diese Lehrveranstaltung einmal im Monat statt. In dieser Vorlesung sollen die grundlegenden Voraussetzungen für ein Mathematikstudium geschaffen werden, um die Studierenden, die von unterschiedlichen Schulen kommen und unterschiedliches Wissen haben, auf einen Nenner zu bringen. Diese Lehrveranstaltung sieht sich als Brücke zwischen der Schulmathematik und der Hochschulmathematik. Hier sind die Studierenden erstmals mit der formalen Sprache

der Hochschulmathematik konfrontiert und werden dahingehend gelenkt, von konkreten Beispielen Abstand zu nehmen und den Blick auf die allgemeine Gültigkeit zu richten. Begleitend zu der Vorlesung gibt es Workshops, die von Höhersemestrigen betreut werden, und deren Teilnahme auf freiwilliger Basis erfolgt (ebenda).

Die beiden nachfolgenden Vorlesungen „Einführung in die Analysis“ und „Einführung in die lineare Algebra“ werden gemeinsam von Lehramtsstudierenden und Fachstudierenden besucht. An diesen Vorlesungen nehmen die Lehramtsstudierenden in der Regel im zweiten bzw. dritten Semester teil, Absolventinnen und Absolventen des Bachelorstudiums hingegen schon im ersten Semester. Ergänzend zu den beiden Vorlesungen finden Übungen statt, für die die Studierenden Aufgaben vorbereiten müssen, um sie in der Übungseinheit zu präsentieren.

Das Programm für den Bachelorlehrgang im ersten Studienjahr ähnelt dem des Lehramtsstudiums. Dieses umfasst neben der einmonatigen Vorlesung „Einführung in das mathematische Arbeiten“ die Lehrveranstaltung „Einführung in die Analysis“ sowie „Einführung in die Lineare Algebra“. Das genaue Curriculum kann auf der Homepage der Fakultät für Mathematik der Universität Wien nachgelesen werden.

Der Fokus dieser qualitativen Studie liegt bei den Studierenden, die die Übung „Einführung in die Analysis“ absolvieren. In dieser Lehrveranstaltung sind sowohl Studierende des Lehramts als auch Bachelorstudierende vertreten. Da beide Studierendengruppen vergleichbare Voraussetzungen für die Übung „Einführung in die Analysis“ haben, wird bei den Studienteilnehmerinnen und -teilnehmern nicht zwischen Studierenden des Lehramts und jenen des Bachelorlehrganges unterschieden. An dieser Stelle soll nicht unerwähnt bleiben, dass die Übung immer parallel zur entsprechenden Vorlesung stattfindet. Die meisten Studierenden absolvieren die Übung auch im selben Semester wie die Vorlesung. Da das Lösen der Übungsaufgaben einen Großteil der Zeit außerhalb der Universität im alltäglichen Ablauf der Studierenden einnimmt, liegt der Fokus der Arbeit beim Lösungsprozess der Übungsaufgaben und nicht bei der Bewältigung der Vorlesung.

3.2. Rahmenbedingungen der Datenerhebung

Um Teilnehmerinnen und Teilnehmer für diese qualitative Studie zu gewinnen, wurde wiederholt Werbung in der Analysis-Vorlesung und den entsprechenden Übungsgruppen gemacht. Damit für die Studierenden möglichst wenig Aufwand entstand, wurde jede Woche ein Raum an der Fakultät für Mathematik organisiert, wo die Gruppe ungestört arbeiten konnte. Die Studierenden bekamen keine speziellen Aufgaben, sondern sie sollten die Aufgaben bearbeiten, die sie für ihre Übung vorbereiten mussten. Dies entspricht einem wesentlichen Charakterzug einer interpretativen Unterrichtsanalyse, nämlich alltägliche Lernsituationen zu analysieren und nicht Laborsituationen.

Zu Beginn hielt sich die Zahl der Freiwilligen in Grenzen. Im Gespräch mit den Studierenden ist vor allem zu Semesterbeginn immer wieder gefallen, dass sie die Übungsaufgaben nicht in Gruppen lösen, sondern eher jede bzw. jeder für sich. Ein möglicher Grund dafür ist vermutlich die Tatsache, dass sich die Studierenden im ersten Semester noch nicht gut untereinander kennen. Ab der ersten Hälfte des Semesters organisierten die Studierenden von sich aus Treffen, um gemeinsam Übungsaufgaben vorzubereiten. Es störte sie nicht, wenn bei ihren Diskussionen zu den Übungsaufgaben eine Kamera mitfilmte.

Um Videoaufnahmen vom Lösungsprozess aufzuzeichnen, wurden per Mail Verabredungen mit den Studierenden vereinbart. Oft kamen die Studierenden in einem der Gruppenräume der Fachbereichsbibliothek für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften zusammen, wo sie ungestört arbeiten konnten. Alle Aufnahmen entstanden im Wintersemester 2013/14 mit Studienanfängerinnen und -anfängern aus Mathematik, die in diesem Zeitraum die Übung „Einführung in die Analysis“ absolvierten. Die Treffen fanden größtenteils am Vormittag statt, wenn die Studierenden zwischen ihren Lehrveranstaltungen Zeit hatten oder unmittelbar nach ihrer Übung. Dies war insofern ein Vorteil für sie, als dass sie nicht extra deswegen zur Universität fahren mussten. Als Dankeschön für die Teilnahme bekamen die Studierenden Feedback über ihren Lösungsweg und weitere Tipps zum Studium.

3.3. Durchführung der Studie

Ein Semester lang wurden in regelmäßigen Abständen Studierende beim Aufgabenlösen gefilmt. Das Geschehen wurde mit einer Videokamera festgehalten. Im Anschluss wurden die Mitschriften teilweise abfotografiert. Mit dem Augenmerk auf das Forschungsinteresse wurden ausgewählte Abschnitte des Videomaterials transkribiert. Die daraus entstandene Transkription war Ausgangspunkt für die empirische Analyse. Deren Ziel ist, die Interaktion der Beteiligten zu rekonstruieren.

Um die Übungsaufgaben zu lösen, platzierten sich die Studierenden um einen Tisch. Die Kamera wurde mittels Stativ auf denselben Tisch gestellt, wenn dieser groß genug war, oder auf einen Tisch daneben. Ziel war es, die Kamera so zu positionieren, dass alle gewünschten Details gefilmt, andererseits die Studierenden aber dadurch nicht gestört wurden. Schließlich sollte der Lösungsprozess so wenig wie möglich durch die vorhandene Kamera gestört werden. Für die anschließende Transkription ist es von Bedeutung, dass einerseits die Sprecherinnen und Sprecher gut verständlich sind und ihre Aussagen auch im Nachhinein eindeutig zugeordnet werden können. Das wiederum bedeutet für die Kameraeinstellung, dass es von Vorteil ist, die Gesichter der Interakteure zu filmen. Andererseits ist es für die Analyse notwendig, das Geschriebene aufzuzeichnen, um nachvollziehen zu können, worauf sich die Studierenden im Gespräch beziehen, ohne es explizit zu nennen. Außerdem kann es für die Analyse interessant sein, ob sie ein Skript zur Hand nehmen, um Sätze nachzuschlagen. Aus diesem Grund sollten nicht nur die Gesichter, sondern auch das Geschehen am Tisch, die Notizen, die verwendeten Unterlagen sowie Gestiken gefilmt werden. Dies erfordert eine Großaufnahme. All die genannten Aspekte mit der Kamera einzufangen war insofern eine Herausforderung, als dass sich manche Studierendengruppen aus mehr als drei Personen zusammensetzten. Obwohl zwischen den Einstellungen Halbnah und Großaufnahme nach Möglichkeit gewechselt wurde, sind nicht alle gewünschten Details aufgezeichnet. In den Transkripten ergänzen nonverbale Aktivitäten die verbalen Äußerungen, soweit es das Datenmaterial erlaubte.

3.4. Erhobene Daten

Es sollen Teilabschnitte beim Erarbeiten der Aufgaben geortet und gemäß des Modells der Teilprozesse nach Ableitinger und Herrmann, das in Kapitel 1.5.5. vorgestellt wurde, in Kategorien eingeteilt werden. Die Auswertung der Daten ist folgendermaßen aufgebaut: Zuerst wird die aufgezeichnete Situation beschrieben, dann folgt die Aufgabenstellung und schließlich die Analyse. Darauf aufbauend erfolgt eine Interpretation, inwiefern die Teilsequenzen tatsächlich bei der Bearbeitung von Analysisaufgaben durch Studierendengruppen auftreten.

Alle Aufgaben sind der Aufgabensammlung zur Übung „Einführung in die Analysis“ aus dem Wintersemester 2013/14 entnommen, die von den Dozenten Günther Hörmann und Karlheinz Gröchenig der Universität Wien zusammengestellt wurden. Zehn Aufgaben werden exemplarisch auf Teilprozesse beim Lösen in Kleingruppen untersucht. Drei große Themenbereiche der Analysis umfassen die aufgezeichneten Videoaufnahmen: Konvergenz von Folgen, Konvergenz von Reihen und Stetigkeit von Funktionen. Diese drei Themen sind typischerweise in Analysis-Vorlesungen zu Studienbeginn zu finden, jedoch ist damit nicht das gesamte Spektrum an thematischen Schwerpunkten erfasst. Differentiation wäre in diesem Zusammenhang noch zu erwähnen. Dieses Teilgebiet der Analysis wurde gegen Ende des Semesters in der Lehrveranstaltung durchgenommen. Dies hatte zur Folge, dass keine Aufnahmen mehr entstanden, da sich die Studierenden auf die anstehenden Vorlesungsprüfungen konzentrierten und somit keine Zeit mehr fanden, gemeinsam Übungsaufgaben vorzubereiten. Jedoch ist im Laufe des Semesters genügend Videomaterial aufgezeichnet worden, das zur Analyse verwendet werden kann.

Die Aufgaben sind nach Themenbereichen geordnet, wobei die Nummerierung in Klammer mit jener der gesamten Aufgabensammlung der Analysis-Übungsaufgaben übereinstimmen. Diese befindet sich ebenso wie die vollständigen Transkripte im Anhang. Zur Analyse werden jeweils exemplarische Ausschnitte aus den Transkripten verwendet, wobei die Zeilennummerierung ident ist mit jener aus dem kompletten Transkript. Die ersten fünf Aufgaben lassen sich in das Themengebiet „Folgen und deren Grenzwerte“ einordnen. Den Auftakt bildet die Aufgabe 8, in der eine Folge auf Konvergenz bzw. Beschränktheit untersucht werden

soll. Dies ist die einzige Aufgabe, zu der es Aufzeichnungen von zwei unterschiedlichen Gruppen gibt. Um einen Vergleich zu haben, wie sich die Lösungsprozesse bei zwei Studierendengruppen unterscheiden, findet man die Aufgabe 8 bei den Analysen doppelt. 8a und 8b werden getrennt voneinander betrachtet. Zuerst wird die Bearbeitung der Aufgabe durch zwei Studentinnen beschrieben. Danach wird der Lösungsprozess derselben Aufgabe von zwei Studenten analysiert. Die Zusammensetzung der Gruppen ist rein zufällig und soll keineswegs Ausgangspunkt für eine genderspezifische Interpretation sein. Zur besseren Lesbarkeit der Analysen wird im Folgenden „Zeile x“ mit < x > abgekürzt.

3.4.1. Konvergenz einer Folge – Beate & Sarah (Aufgabe 8a)

3.4.1.1. Ausgangslage

Die beiden Studentinnen Beate und Sarah treffen sich häufig, um Aufgaben zu lösen oder Vorlesungen zu besprechen. Sie besuchen alle Mathematik-Lehrveranstaltungen gemeinsam. Bei der Bearbeitung der Aufgabe 8 sitzen sie nebeneinander, die ausgedruckte Angabe liegt zwischen ihnen. Sarah hat sich bereits zu Hause mit der Angabe beschäftigt. Sie weiß daher schon, wie sie bei der Grenzwertberechnung vorgehen wird. Beate hat sich noch nicht im Vorhinein mit den Aufgaben auseinandergesetzt. Das vollständige Transkript der Aufgabe 8a von Beate und Sarah befindet sich im Anhang.

3.4.1.2. Aufgabenstellung

Entscheiden Sie jeweils, welche der Eigenschaften *beschränkt*, *konvergent* bzw. *divergent* für die gegebene Folge vorliegt. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert:

$$a_n = \frac{(3-n)^3}{3n^3-1}, \text{ wobei } n \in \mathbb{N}.$$

3.4.1.3. Analyse

Zu Beginn widmen sich die beiden Studentinnen der Angabe. Sie wollen herausfinden, was gefragt ist. Beate stellt in < 3 > die Frage: „Was muss ma da machen?“ Dies ist eine typische Aussage für *Problembewusstsein Schaffen*. In dieser Phase gilt es, die Problematik der Aufgabenstellung zu identifizieren. Sarah streicht daraufhin die wesentlichen Punkte der Angabe hervor < 4 >.

3	Beate	Also. Was muss ma da machen?
4	Sarah	Da muss ma schauen, obs beschränkt, konvergent oder divergent is.
5	Beate	(liest Angabe vor) Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert, Limes. Ok. Wie geht das?
6	Sarah	Schreib ma mal auf. Beispiel Acht. (schreiben die Angabe ab, Pause) So(.) also ich hab zuerst oben mal die binomische Formel aufgelöst. Da ist mir rausgekommen: n hoch Drei(.) minus Neun n Quadrat(.) plus Siebenundzwanzig n minus Siebenundzwanzig ($n^3 - 9n^2 + 27n - 27$) und unten hab ichs einfach stehen lassen.

Die Phase des *Problembewusstsein Schaffens* lässt sich bei dieser Aufgabe sehr deutlich eingrenzen, weil den Studentinnen rasch klar ist, was gefragt ist. Sie beginnt in Zeile < 3 > und endet bei < 5 >. Anschließend stellt Sarah in < 6 > einen *Zugriff her*, indem sie mittels Anwendung der binomischen Formel den Zähler anders anschreibt. Durch die Umformung wird der Bruch *zugänglicher* für die Grenzwertberechnung. Die Anwendung der binomischen Formel wiederum fällt in die Kategorie *Handwerk*, da sie schon in der Schule mit der Formel operierten und keine Probleme bei deren Gebrauch haben. Allerdings unterläuft Sarah ein Vorzeichenfehler, den Beate nicht bemerkt. Der Term, den Sarah herausbekommt, entspricht erst nach der Multiplikation mit (-1) der tatsächlichen Lösung von $(3 - n)^3$. Der Fehler bleibt jedoch unbemerkt. Nun können sie in < 8 > einen *Trick anwenden*, um auf den Grenzwert zu kommen.

8	Sarah	So(.) dann hab ich gefunden(.) also so Tricks, ja (?)
9	Beate	Ok.
10	Sarah	Ja. Also da kann man sagen, du schaust dir die höchste (-)
11	Beate	[Potenz an]
12	Sarah	[Potenz an.] Das is ja da n hoch Drei und da hast n hoch Drei. Jetzt könntest du sagen wir könnten das Ergebnis ja mehr oder weniger mal abschätzen oder so, ja (?) Da kannst ja sehen, das könnte ein Drittel werden. Ja (?)

Da für sie die Methode – durch die höchste vorkommende Potenz von n zu dividieren – noch neu ist, kann man von einem *Trick* im Sinne von Ableitinger und Herrmann sprechen. So nennt Sarah es auch selbst in < 8 >. Der Trick vereinfacht in dem Fall den Lösungsprozess. Bei wiederholter Anwendung dieser Lösungsstrategie, wenn sie zur Routine geworden ist, spricht man eher von *Handwerk*. Des Weiteren stellt Sarah in < 12 > die Überlegung an, dass die Folge gegen Drei streben wird, wenn n nach Unendlich geht. Dies kann als *begleitender Kommentar* aufgefasst werden, da sie in < 14 > hinzufügt, dass dies noch zu beweisen ist. Sie streicht ihre Idee heraus und hält gleichzeitig fest, was zu zeigen bleibt.

14	Sarah	Das is aber nur eine Überlegung, die kannst jetzt nicht so hinschreiben, sonst schreibt dir der Professor hin, das ist ein Blödsinn.
15	Beate	Mhm.
16	Sarah	So, da mach ich da eine Nebenrechnung. Ja (?) So(,) also da heb ich jetzt die n hoch Drei raus. Ja (?)

Mittels Nebenrechnung *stellt* Sarah einen *Zugriff* her. Der Wechsel in die andere Darstellung erleichtert den Studentinnen das Voranschreiten im Lösungsprozess. Im Folgenden gebrauchen die beiden beim Herausheben von n^3 *Handwerk* < 18 >. Sarah rechtfertigt in < 20 > die Vorgangsweise durch *erläuternde Kommentare*.

18	Sarah	Dann steht da n hoch Drei in Klammer Eins minus Neun durch n (,) plus Siebenundzwanzig durch n Quadrat(,) minus Siebenundzwanzig durch n hoch Drei, ja (?) <i>(beide schreiben, während Sarah redet)</i>
19	Beate	Mhm. Genau.
20	Sarah	Würdest du das n hoch Drei wieder einsetzen, kommt dir dasselbe wieder heraus. Unten mach ich genau dasselbe. <i>(beide schreiben, Pause)</i> Bleibt dann über n hoch Drei(,) mal Drei minus Eins durch n hoch Drei.
21	Beate	<i>(Beate schaut auf Sarahs Block, was sie gerade geschrieben hat, Pause)</i> Genau.
22	Sarah	So jetzt kürz ich das Ganze weg. So jetzt geh ich wieder zu meiner Ausgangsrechnung. Die Nebenrechnung wär jetzt fertig und jetzt setz ich das Ganze in Limes von n nach Unendlich. Ja (?) Schreib mir [nur auf.]

Ergänzend zum Transkriptausschnitt ist die entsprechende Nebenrechnung abgebildet.

$$\text{L.R.: } \frac{n^3 - 9n^2 + 27n - 27}{3n^3 - 1} = \frac{n^3 \left(1 - \frac{9}{n} + \frac{27}{n^2} - \frac{27}{n^3}\right)}{n^3 \left(3 - \frac{1}{n^3}\right)}$$

$$= \frac{1 - \frac{9}{n} + \frac{27}{n^2} - \frac{27}{n^3}}{\left(3 - \frac{1}{n^3}\right)}$$

Abb.2 Aufgabe 8a Nebenrechnung

Im Allgemeinen ist der Lösungsprozess gekennzeichnet von *begleitenden Kommentaren*, vor allem von Sarahs Seite ausgehend. Ihre Anmerkungen bringen eine Struktur in die Bearbeitungssequenz. Sie formuliert ihre Überlegungen und erläutert, was zu zeigen ist. Ein Beispiel dafür ist < 22 >. Sarah schließt die Nebenrechnung ab und artikuliert dies auch. Einerseits bringt sie zum Ausdruck, was bereits erledigt ist, andererseits kündigt sie den nächsten Schritt an, nämlich „das Ganze in Limes n nach Unendlich“ einzusetzen. Ein weiteres Beispiel eines *begleitenden Kommentars* findet man in Zeile < 26 >.

26	Sarah	Genau. Dann steht da der Limes n nach Unendlich is Eins minus Neun durch n (,) plus Siebenundzwanzig durch n Quadrat(,) minus Siebenundzwanzig durch n hoch Drei(,) durch das durch das Ganze wieder. <i>(beide schreiben, Pause)</i>
27	Beate	<i>(Beate schaut zu Sarah)</i> Jetzt kannst du den Limes eben quasi aufsplitten. Limes von dem <i>(Anm.: sie meint den Zähler)</i> minus Limes von dem <i>(Anm.: sie meint den Nenner)</i> , oder (?)
28	Sarah	Nein, nein, nein. Du sagst jetzt(,) du nimmst den Limes im Zähler und im Nenner dazu. <i>(Sarah schreibt, Beate schaut ihr zu)</i> Also du hast den Limes von n nach Unendlich durch, ja (?) Unten haben wir auch Limes von n nach Unendlich und oben bleibt uns dasselbe wieder stehen. <i>(beide schreiben)</i>

Bsp 8) bestimme, konvergenz bzw. divergenz?

(a) $a_n = \frac{(3-n)^3}{3n^3-1} = \frac{n^3 - 9n^2 + 27n - 27}{3n^3 - 1} = \dots$

$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{Übergang} \right)$

L.R.: $\frac{n^3 - 9n^2 + 27n - 27}{3n^3 - 1} = \frac{n^3 \left(1 - \frac{9}{n} + \frac{27}{n^2} - \frac{27}{n^3}\right)}{n^3 \left(3 - \frac{1}{n^3}\right)}$

$= \frac{1 - \frac{9}{n} + \frac{27}{n^2} - \frac{27}{n^3}}{\left(3 - \frac{1}{n^3}\right)}$

$\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{9}{n} + \frac{27}{n^2} - \frac{27}{n^3}}{3 - \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{9}{n} + \frac{27}{n^2} - \frac{27}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \frac{1}{n^3}} = \frac{1 - 0 + 0 - 0}{3 - 0} = \frac{1}{3}$

Abb.3 Aufgabe 8a

Zur Veranschaulichung der Aussagen aus < 26 > bis < 28 > ist der schriftliche Lösungsweg abgebildet. Die Abbildung der Aufgabe 8a zeigt, wie die Studentin ihre Notizen gliedert. Die Angabe schreibt sie mit Kugelschreiber, ihre Rechnungen mit Bleistift. Ihre Abschätzung der Lösung steht in Klammern und ist mit „Überlegung“ gekennzeichnet. Diese ist ebenso wie die Nebenrechnung durch Linien von der tatsächlichen Rechnung getrennt.

In < 26 > wiederholt Sarah ihren letzten Rechenschritt, um ihn mit Beate abzugleichen. Danach soll der Grenzwert berechnet werden. Dazu ist es notwendig, dass sich die Studentinnen die *Aufgabe handhabbar machen*. Beate äußert in < 27 > den Vorschlag, von jedem einzelnen Ausdruck des Zählers bzw. des Nenners den Grenzwert zu berechnen. Dabei hat sie im Hinterkopf vermutlich die Idee, dass der Grenzwert einer Summe die Summe der Grenzwerte ist. Sarah missversteht Beates Aussage, wie man < 28 > entnehmen kann. Sie führt im Endeffekt aber dieselbe Methode durch. Die Lösung formuliert Sarah in < 30 >.

30	Sarah	So, und jetzt weiß ma, oder sollt ma wissen, dass der Limes von Eins durch n ist immer Null. Jetzt kannst du schreiben, Neun durch n ist Null (,) Siebenundzwanzig durch n Quadrat ist Null, und minus Siebenundzwanzig durch n hoch Drei sind Null. Eins bleibt Eins, ja (?) Das geht gegen Eins. Drei bleibt wieder Drei, unten bleibt uns wieder der Nuller. So jetzt kannst du schreiben, is ja dasselbe wie Eins minus Null plus Null minus Null durch Drei minus Null und das is ja eigentlich gleich wieder ein Drittel so wie vorher unsere Überlegung.
----	-------	---

Laut stellt die Studentin in < 30 > Überlegungen zu den einzelnen Grenzwerten an. Im ersten Satz betont sie, wie sie dabei vorgeht: Man muss wissen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Sie präsentiert diese Grundüberlegung mit einer solchen Verständlichkeit als ob jeder wisse, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Es ist davon auszugehen, dass für sie eine solche Grenzwertberechnung zum *Handwerk* zählt.

Beate fasst ihr Ergebnis in < 33 > zusammen. Sarah ist mit ihrer Formulierung nicht zufrieden und wählt einen anderen Ausdruck < 34 >. Sie geben gewissermaßen als *begleitende Kommentare* ihre Lösung wieder. In der Tat sind sowohl Beates als auch Sarahs Äußerung richtig. Bei der Grenzwertberechnung kann man sagen, der Ausdruck strebt in diesem Fall gegen ein Drittel. Genauso zulässig ist die Aussage, der Grenzwert lautet ein Drittel.

33	Beate	Und das strebt dann gegen ein Drittel, oder (?)
34	Sarah	Na, ich glaub der Grenzwert ist dann einfach ein Drittel.

Zum Schluss blicken die Studentinnen auf die Angabe zurück. Sie überprüfen gewissermaßen, ob sie das gezeigt haben, was die Angabe verlangt. Rückblickend überlegen sie, welche der in der Angabe angeführten Eigenschaften für die gegebene Folge zutreffen. Überlegungen dieser Art gehören zu der Teilphase *Problembewusstsein*, da sich die Studierenden vergegenwärtigen, inwiefern ihre Lösung die Problematik der Angabe beantwortet. Beate schließt in < 37 >, dass die Folge konvergent sei. Ihre Kollegin bekräftigt sie in < 38 > darin und unterscheidet konvergent von divergent. Die Eigenschaft „beschränkt“ bleibt unerwähnt.

37	Beate	Und das ist jetzt konvergent?
38	Sarah	Mhm. Divergent wärs zum Beispiel, wenn minus Unendlich oder so rauskommt.

3.4.1.4. Synthese

Insgesamt betrachtet bereitet Beate und Sarah diese Aufgabe keine Schwierigkeiten. Nach einer kurzen Teilsequenz des *Problembewusstsein Schaffens* – Zeile < 4 > und < 5 > – wählen sie eine andere Darstellung, die ihnen einen *Zugriff verschafft* < 6 >. Bei der Verwendung der binomischen Formel schleicht sich ein Vorzeichenfehler ein. Dieser bleibt von den Studierenden unbemerkt. Diese Ungenauigkeit liefert ihnen schlussendlich ein falsches Ergebnis. Man muss allerdings hervorheben, dass die restlichen Lösungsschritte korrekt sind. Das Endergebnis von Beate und Sarah unterscheidet sich von der richtigen Lösung nur durch diesen Faktor -1. Nachdem die Studierenden den Bruch im Zähler in < 6 > *handhabbar* gemacht haben, wenden sie in < 8 > einen *Trick* an. Durch den Trick – durch die höchste vorkommende Potenz von n zu dividieren – *knacken* sie gleichsam die *Problemstellung*. Die Nebenrechnung, die sie in < 16 > bis < 22 > durchführen, hat einen öffnenden Charakter. Alles in allem bringt die Analyse zum Vorschein, dass Sarah an Hand von *begleitenden Kommentaren* einen roten Faden durch den Lösungsprozess zieht. Beispiele für ihre *strukturierenden Kommentare* befinden sich in folgenden Zeilen: < 12 >, < 14 >, < 22 > und < 30 >. Gegen Ende fassen die Studentinnen ihre gewonnenen Erkenntnisse in < 33 > bis < 38 > zusammen. Sie

reflektieren, inwiefern die in der Angabe genannten Eigenschaften zutreffen. Dies zählt zum *Problembewusstsein*. Sie vergessen jedoch, zu überprüfen, ob die Folge „beschränkt“ ist. Diesen Aspekt lassen sie vollkommen außer Acht.

Der Unterpunkt b der Aufgabe 8 fällt Beate und Sarah beträchtlich schwerer. Vor dieser Analyse folgt nun eine andere der Aufgabe 8a. Ein Team aus zwei Studenten wurde ebenfalls beim Lösen der Aufgabe 8 gefilmt. Interessant ist, ob der Lösungsprozess der Studenten ähnlich aufgebaut ist wie jener von Beate und Sarah, wenn diese an Hand der Teilphasen miteinander verglichen werden.

Ursprünglich war bei der Planung der qualitativen Studie vorgesehen, mehrere Gruppen bei der Bearbeitung ein und desselben Beispiels zu filmen. Die Überlegung war, zu vergleichen, ob sich der Lösungsprozess zu einer Übungsaufgabe durch mehrere Studierendengruppen in Hinblick auf die Teilsequenzen unterscheidet. Mangelndes Interesse seitens der Studierenden und deren volle Terminpläne hatten zur Folge, dass ausschließlich von Aufgabe 8 und 9 Videoaufnahmen zweier Gruppen vorhanden sind. Die Aufgabe 9 ähnelt stark der Aufgabe 8. Aus diesem Grund wurde auf deren Analyse verzichtet. Stattdessen wird eine größere Bandbreite der Analysis-Aufgaben bei den Analysen repräsentiert. Nebenbei bemerkt ist mit den Themen „Konvergenz von Folgen“, „Konvergenz von Reihen“ und „Stetige Funktionen in einer Variable“ nicht das gesamte Spektrum der Lehrveranstaltung „Einführung in die Analysis“ abgedeckt. Ein weiterer wesentlicher Themenbereich wäre die Differentiation, wie im Kapitel „Erhobene Daten“ erwähnt wird.

3.4.2. Konvergenz einer Folge – Franz & Jan (Aufgabe 8a)

3.4.2.1. Ausgangslage

Franz und Jan setzen sich regelmäßig montags und donnerstags nach der Vorlesung zusammen und bereiten die Übungsaufgaben vor. Dies ist das erste Mal, dass sie dabei auch gefilmt werden. Sie haben keinen ausgedruckten Zettel mit der Angabe bei sich, sondern die Angabe in digitaler Form am Tablet-PC.

3.4.2.2. Aufgabenstellung

Entscheiden Sie jeweils, welche der Eigenschaften *beschränkt*, *konvergent* bzw. *divergent* für die gegebene Folge vorliegt. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

$$a_n = \frac{(3-n)^3}{3n^3-1}, \text{ wobei } n \in \mathbb{N}.$$

3.4.2.3. Analyse

Der Filmausschnitt zeigt die Studenten Franz und Jan zunächst mitten in der Diskussion der Aufgabe 3. Diese Aufgabe wird in der Diplomarbeit nicht analysiert. Es soll auch nicht näher auf die Aufgabe 3 eingegangen werden, doch ist interessant zu erwähnen, wie die beiden Studenten zur Bearbeitung der Aufgabe 8 kommen. Ihre Argumente bringen sie bei der Aufgabe 3 nicht weiter und sie entscheiden sich, eine andere Aufgabe anzufangen. Franz schaut sich die Aufgabensammlung an und bespricht mit Jan, welche Nummern für die Übung vorzubereiten sind. Franz schaut sich das Aufgabenblatt an und meint nach einer Weile: „Das Achter kommt ma mal machbar vor.“ Im Vergleich zu den anderen Aufgaben ist bei dieser keine allgemeingültige Aussage zu beweisen, sondern eine konkrete Folge vorgegeben, die auf gewisse Eigenschaften untersucht werden soll. Jan willigt ein < 2 >. Damit ist der Start für die Aufgabe 8 gesetzt. In einem ersten Schritt machen sich die Studenten die *Problematik* der Aufgabe *bewusst*, ohne darüber ein Wort zu verlieren. Keiner der beiden liest die Angabe vor oder erwähnt, was zu zeigen ist. Beide schauen wortlos auf die Angabe. Obwohl sie die Aufgabenstellung nicht erwähnen, ist anzunehmen, dass sie sie durchlesen, andernfalls wüssten sie nicht, was zu machen ist. Durch Auflösen des Klammerausdruckes, wie es Franz in < 3 > vorschlägt, verändern sie die Angabe, um besser hantieren zu können. Der Darstellungswechsel, sprich die *Schaffung eines Zuganges*, öffnet ihnen den Weg für das weitere Vorgehen.

1	Franz	Das Achter kommt ma mal machbar vor. (<i>beide blicken auf die Angabe</i>)
2	Jan	Ok. (<i>beide schreiben die Angabe ab</i>)
3	Franz	Jetzt lös ma mal diesen Dingsda.
4	Jan	Jo, tat i ah mochn. (<i>beide rechnen auf ihren Blöcken, längere Pause</i>)

5	Franz	Das ist Siebenundzwanzig n zur Dritten (...) Eins, Drei, Drei, Eins, minus Siebenundzwanzig(.) Drei n Quadrat.
---	-------	--

Für Franz gehört das Anwenden der binomischen Formel mit dem Exponenten Drei zum *Handwerk*, wie dem Transkript zu entnehmen ist. Jan hingegen merkt sich diese Formel nicht, wie er in < 6 > anmerkt. Franz unternimmt in < 7 > bis < 13 > einen Erklärungsversuch. Jan geht anders vor und löst die Klammer in mehreren Schritten auf:

$$(3 - n)^3 = (3 - n)^2 \cdot (3 - n) = (9 - 6n + n^2) \cdot (3 - n) = -n^3 + 9n^2 - 27 + 27$$

6	Jan	Ich habs mir(.) oje ich kann mir das nie merken.
7	Franz	Mit dem Pascalschen Dreieck, weißt eh. Das zur Dritten san Siebenundzwanzig minus, das is alternierend natürlich, weil das a minus drinnen is, das zum Quadrat san Neun (<i>beide reden während sie rechnen, hin und wieder sind einzelne Zahlen zu hören</i>)

Nachdem sie den Bruch in eine andere Darstellung gebracht haben, präsentiert Franz den nächsten Schritt, um an den Kern der Problemstellung zu gelangen. Er schlägt in < 15 > vor, durch die „höchste Potenz“ zu dividieren. Die Aussagen in < 15 > bis < 17 > markieren eine Sequenz die *Aufgabe handhabbar zu machen*. Dieser *Zugriff* erlaubt ihnen, den Grenzwert der Folge zu berechnen.

15	Franz	Dann war der nächste Schritt(.) äh durch die höchste Potenz.
16	Jan	Multiplizieren, äh zu [dividieren]
17	Franz	[Dividieren] Das heißt du hast dann Siebenundzwanzig durch n zur Dritten minus Siebenundzwanzig (...) plus (...) minus Eins durch Drei minus Eins durch n zur Dritten. Das geht gegen Null das geht das geht gegen Null. Die Frage ist, ob das jetzt schon alles ist.
18	Jan	Was ham ma (?) Konvergenz, oder (?)
19	Franz	Stellen Sie fest welche der Eigenschaften beschränkt, konvergiert.
20	Jan	Auf jeden Fall ist es konvergent mit Grenzwert. (<i>schreibt</i>)
21	Franz	Stellen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert fest. Das heißt konvergent mit Limes n gegen unendlich ist Eins. Muss ma das anders beweisen ah no?

Auffallend ist, dass weder Jan noch Franz ihr Ergebnis mitteilen. Im Gegensatz zu Beate und Sarah verwenden die beiden Studenten *begleitende Kommentare* sehr spärlich. Gerade einmal die Aussagen < 3 > und < 15 > könnten als solche aufgefasst werden. *Kommentare und Erläuterungen* spielen insofern eine wesentlich Rolle im Lösungsprozess, als dass sie wichtige Punkte unterstreichen und

die Studierenden sich gegenseitig darauf aufmerksam machen, welche Teilschritte besonderer Beachtung bedürfen (Ableitinger und Herrmann 2011, S. 20).

Abschließend gehen Jan und Franz in < 18 > bis < 21 > der Frage nach, was ihr Ergebnis für die Eigenschaften der Folge bedeute. Sie greifen die Angabe erneut auf und *machen sich bewusst*, welche Schlüsse sie für die Folge aus ihren Berechnungen ziehen können. Sie erkennen, dass die Folge konvergiert, wenn die Folge einen Grenzwert besitzt < 20 >. Franz ist sich nicht sicher, ob die Aufgabenstellung zufriedenstellend gelöst ist, wie er in < 21 > zum Ausdruck bringt. Er fragt sich, ob es eines weiteren Beweises bedarf. Ebenso wie Beate und Sarah vergessen sie, zu überlegen, ob neben „konvergent“ eine weitere Eigenschaft auf die Folge zutrifft.

3.4.2.4. Synthese

Im Vergleich zu der Bearbeitung derselben Aufgabe durch die zwei Studentinnen, wie sie im Kapitel 3.4.1. beschrieben wurde, fällt auf, dass die Studienkollegen Franz und Jan eine ähnliche Herangehensweise wählen. Beide Teams steigen mit der *Schaffung von Problembewusstsein* in den Lösungsprozess ein. Darauf folgen zwei Sequenzen mit der *Herstellung eines Zugriffs*. Zuerst wird die Klammer im Zähler mittels binomischer Formel aufgelöst, danach durch die höchste vorkommende Potenz von n dividiert. Die letzte Änderung der Darstellung führt sie zur Berechnung des Grenzwertes. Im Allgemeinen kann festgehalten werden, dass diese Aufgabe von zwei Gruppen getrennt bearbeitet, auf gleiche Art und Weise gelöst wurde. Sie konnten bei dieser Aufgabe analog zu den in der Vorlesung durchgeführten Grenzwertberechnungen vorgehen. Die Studierenden haben ihre Unterlagen beim Lösen nicht verwendet, das lässt darauf schließen, dass sie bereits mit Grenzwertberechnungen vertraut sind. Beide Teams kommen zielstrebig ohne Umwege ans gewünschte Ziel. Beate und Sarah erhalten ein falsches Ergebnis auf Grund eines Vorzeichenfehlers, der sich durchzieht. Sieht man darüber hinweg, verfolgen sie den richtigen Lösungsweg, der dem von Franz und Jan entspricht. Da die Folge einen Grenzwert besitzt, schließen die Studierenden, dass die Folge konvergiert. Beide Gruppen vergessen, zu überprüfen, ob die Eigenschaft „beschränkt“ auf die Folge zutrifft. Franz fragt in < 21 >, ob noch ein Beweis zur

Konvergenz fehle. Sie könnten beispielsweise zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt: $\left| \frac{(3-n)^3}{3n^3-1} + \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$. Zur vollständigen Lösung der Aufgabe ist dies jedoch nicht erforderlich. In Bezug auf die Eigenschaft „beschränkt“ wäre ein Verweis auf folgenden Satz, der sicherlich in der Vorlesung erwähnt wurde, am einfachsten: *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Ein wesentlicher Punkt, in dem sich beide Bearbeitungen unterscheiden, ist, dass Beate und Sarah häufiger *begleitende Kommentare* verwenden. Dies könnte leicht zum Erstellen der Hypothese verleiten, männliche Studierende kommen beim Lösen von Übungsaufgaben mit weniger Worten aus. Doch sollen keinerlei pauschale Aussagen daraus geschlossen werden. Es ist reiner Zufall, dass jeweils zwei Studentinnen bzw. zwei Studenten bei der Aufnahme dieser Aufgabe vertreten sind. Bei den späteren Aufzeichnungen sind die Gruppen größer und stets gemischt.

3.4.3. Beschränkte, divergente Folge – Beate & Sarah (Aufgabe 8b)

3.4.3.1. Ausgangslage

Interessant ist der Vergleich von Aufgabe 8a mit 8b. Analog zu 8a wird zuerst die Bearbeitung der Studentinnen vorgestellt bevor Franz und Jan an der Reihe sind. Diese Aufgabe lösen beide Teams unmittelbar nach 8a. Diesmal läuft das Gespräch von Beate und Sarah grundlegend anders ab als jenes der beiden Studenten.

3.4.3.2. Aufgabenstellung

Entscheiden Sie jeweils, welche der Eigenschaften *beschränkt*, *konvergent* bzw. *divergent* für die gegebene Folge vorliegen. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

$$b_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}, \text{ wobei } n \in \mathbb{N}.$$

3.4.3.3. Analyse

Vorweg muss unterstrichen werden, dass Sarah sich bereits daheim mit der Angabe auseinandergesetzt hat. Für die Studentinnen ist klar, worum es geht, weil sie soeben Aufgabe 8a gelöst haben. Die Phase des *Problembewusstsein Schaffens*, die meistens den Beginn des Lösungsprozesses markiert, findet schon bei Aufgabe 8a statt. Sarah findet für 8b keinen *Zugriff*, weil ihrer Meinung nach der Grenzwert von $(-1)^n$ mit n gegen Unendlich nicht existiert, wie sie in < 3 > bemerkt. Dies betont sie an mehreren Stellen, in Zeile < 3 >, < 9 > und < 11 >. Zur Suche nach der geeigneten *Wahl der Handlungsoption* recherchierte Sarah ihren Aussagen zufolge im Internet < 7 > und in Büchern < 11 >.

3	Sarah	Es steht ja minus Eins hoch n , das existiert nicht, gö (?) Das is so eine Rechenregel halt.
4	Beate	Aha.
5	Sarah	Ähm, wie ich da jetzt allerdings weiterrechne (-)
6	Beate	Gibt's da im Internet irgendwas? Hast geschaut?
7	Sarah	Ja, hab ich aber nichts mehr gefunden.
8	Beate	Und das geht nicht mit diesen minus Eins?
9	Sarah	Aber da steht ja mal und da existiert der Ganze nicht.
10	Beate	Warum existiert aber minus Eins hoch n nicht?
11	Sarah	Ja, das steht überall in den Büchern, den gibt's einfach nicht, da steht Limes minus Eins hoch n , das gibt's nicht, existiert nicht.
12	Beate	Aber steht da minus Eins hoch n mal n , is wurscht.
13	Sarah	Ja, das is ja wurscht, es geht ja um diesen Term und jetzt weiß ich nicht, ob ich mit Eins plus n Quadrat weiterrechnen darf ja (?) Durch Zwei plus drei n plus n Quadrat.
14	Beate	Mhm.
15	Sarah	Da bin ich eben hängen geblieben bei dem Beispiel. Und dasselbe haben wir bei Beispiel 10b, da ist auch minus Eins hoch n . Wenn das nicht existiert, ist das Ganze dann, weiß ich nicht, divergent, oder (?)

Sarah streicht in < 9 > hervor, dass auch $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n^2$ nicht existiere, wenn es $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ nicht gibt. Tatsächlich hat die Folge $(-1)^n$, mit n gegen Unendlich, keinen Grenzwert. Für alle geraden Potenzen strebt sie nämlich nach 1 und für alle ungerade nach -1. Diesen Aspekt erwähnen sie jedoch nicht in ihrer Diskussion. Bei der Betrachtung des Transkripts entsteht der Eindruck, dass Beate in < 10 > zwar seltsam vorkommt, dass man mit $(-1)^n$ nicht rechnen könne, allerdings glaubt sie ihrer Freundin. Sie selbst schlägt auch keine mögliche Handlungsoption vor.

An dieser Stelle ist zu betonen, dass die Folge $(-1)^n$ mit n gegen Unendlich zwar keinen Grenzwert hat, aber zwei Häufungswerte -1 und 1. Diesen Aspekt

lassen sie völlig außer Acht. Außerdem ist ihnen nicht klar, dass zum Beispiel die Folge $\frac{(-1)^n}{n}$, mit n gegen Unendlich, sehr wohl einen Grenzwert besitzt. Grenzwerte von Folgen, in denen $(-1)^n$ als Faktor vorkommt, sind durchaus berechenbar. Wie zuvor in 8a vergessen die Studentinnen auf die Beschränktheit. In < 15 > zieht Sarah den korrekten Schluss, dass eine Folge divergent ist, wenn sie nicht konvergent ist. Ihre vorige Argumentation, dass die Folge $(-1)^n$ nicht existiert ist jedoch falsch. Sie meint hier wohl, dass $(-1)^n$ keinen Grenzwert besitzt, wenn n gegen Unendlich geht.

3.4.3.4. Synthese

Diese beobachtete Situation, wo die Studierenden überhaupt keinen Ansatz finden, wie sie die Aufgabe lösen sollen, steht stellvertretend für mehrere gescheiterte Versuche, die aufgezeichnet wurden. Dieser Transkriptausschnitt soll verdeutlichen, dass nicht alle Lösungsversuche zu einem Ergebnis führten. Er spiegelt außerdem die im ersten Kapitel beschriebenen Schwierigkeiten der Studierenden wider. Sarah hat wohl in den Büchern gelesen, dass der Grenzwert der Folge $(-1)^n$ nicht existiert, wenn n gegen Unendlich strebt. Sie formuliert dies allerdings so, als ob die Folge $(-1)^n$ nicht existiere und man mit dem Ausdruck $(-1)^n n^2$ nicht rechnen könne. Auf die Darstellung weiterer solcher Szenen wird verzichtet, weil dies den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Es wäre durchaus interessant zu analysieren, weshalb die Studierenden keine Lösungsstrategie finden, ob dies auf ein mangelndes Repertoire an Zugängen oder lückenhaftes *Problembewusstsein* zurückzuführen ist. Doch das Ziel dieser Arbeit ist zu untersuchen, inwiefern die von Ableitinger und Herrmann beschriebenen Teilprozesse beim Lösen von Analysis-Aufgaben durch Studierende ohne Verwendung von Musterlösungen vorhanden sind.

3.4.4. Beschränkte, divergente Folge – Franz & Jan (Aufgabe 8b)

3.4.4.1. Ausgangslage

Franz und Jan lösen die Aufgabe 8b unmittelbar nach 8a. Für weitere Informationen siehe Kapitel 3.4.2..

3.4.4.2. Aufgabenstellung

Es ist gefragt, ob die gegebene Folge beschränkt, konvergent bzw. divergent ist. Im Falle der Konvergenz soll der Grenzwert berechnet werden.

$$b_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}, \text{ wobei } n \in \mathbb{N}.$$

3.4.4.3. Analyse

Franz und Jan gehen analog zu Beispiel 8a vor. Zuerst schreiben sie wortlos die Angabe ab und beginnen den Ausdruck umzuformen. Sie verschaffen sich einen *Zugriff*, indem sie durch die höchste vorkommende Potenz von n dividieren. In < 1 > und < 2 > bringen sie den Bruch in eine andere Darstellung. Dafür verwenden sie *Handwerk*. Sie erhalten folgenden Ausdruck: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} + (-1)^n}{\frac{2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} + \frac{n^2}{n^2}}$. Mit Ausnahme des Faktors $(-1)^n$ bestimmen sie, wogegen die einzelnen Glieder konvergieren, wenn n nach Unendlich strebt < 2 >.

1	Jan	Dann bleibt eh nur über minus Eins hoch n.
2	Franz	Das geht gegen Null, das geht gegen Null. Das heißt es bleibt über: minus Eins hoch n durch Eins. Minus Eins hoch n das ist alternierend.
3	Jan	Das ist alternierend, das hast eh gesagt.
4	Franz	Das ist eine alternierende Folge, divergent. Ist nach oben und unten beschränkt (?)

Übrig bleibt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{1}$, alle anderen Summanden streben gegen Null. Franz erkennt in < 2 >, dass dieser Ausdruck auf eine alternierende Folge hinausläuft. Seine nächste Überlegung ist, dass eine alternierende Folge divergent ist sowie nach oben und unten beschränkt < 4 >. In < 5 > bis < 7 > folgen *Erläuterungen*, wie sie das Resultat auffassen können. Jan ist sich in < 5 > unsicher, ob man tatsächlich

stets Ergebnisse zwischen -1 und 1 erhält, wenn man beliebige n aus den natürlichen Zahlen einsetzt. Franz hat auch Zweifel, ob noch Details zu zeigen sind < 6 >. Die Beurteilung von Handlungsoptionen, wie sie hier zu finden ist, fällt in die Kategorie *begleitende Kommentare und Erläuterungen*.

5	Jan	Najo, des Problem is, es steht ja net nur des do, sondern es is ja net des (-) Weil es is ja erst, wenn n gegen unendlich geht. Das heißt davor (-) (<i>beide schauen auf ihren Block</i>)
6	Franz	Divergent. Die Frage ist, von welcher Richtung sie sich nähert, gö (?)
7	Jan	Das hät ma oben ah machen müssen.
8	Franz	Gibt's da nicht eine Definition, die besagt, eine Folge muss beschränkt sein, wenn sie einen Grenzwert hat (?)
9	Jan	Genau, aber die Frage ist. Ob sich die Werte von rechts oder links nimmt.
10	Franz	Des is ja gor net gfragt, oder (?)
11	Jan	Es is ja gfragt, obs besch (-), oder (?)
12	Franz	Obs beschränkt ist und das ergibt sich aus der Definition, wenn sie konvergent ist, ist sie beschränkt. Es muss beschränkt sein, weils konvergent is.

Schließlich erinnert sich Franz in < 8 > an „eine Definition, die besagt, eine Folge muss beschränkt sein, wenn sie einen Grenzwert hat“. Eine Mathematikerin bzw. ein Mathematiker wird bei dieser Aussage sicherlich sofort darauf hinweisen, dass dies keine Definition, sondern ein Satz ist. Anscheinend ist Franz der Unterschied zwischen Satz und Definition nicht bewusst. Außerdem widerspricht sich Franz selbst. Zuerst meint er in < 4 >, die Folge sei divergent. Dann wiederum spricht er in < 12 > von einer konvergenten Folge. Er hat sich vermutlich vertan und vergessen, dass die Folge divergent ist. Hätten sich die Studierenden überzeugt, dass die Voraussetzung – die Konvergenz der Folge – nicht erfüllt ist, hätten sie die *Passung geprüft*, wäre ihnen vielleicht aufgefallen, dass sie zuvor von einer divergenten Folge gesprochen haben. Tatsächlich käme der in < 12 > erwähnte Satz – *Jede konvergente Folge ist beschränkt*. – bei 8a zum Tragen.

In den Zeilen < 10 > und < 11 > kehren die Studenten zur Aufgabenstellung zurück. Sie *rufen sich ins Bewusstsein*, was gefragt ist, indem sie wiederholen, dass sie der Folge bestimmte Eigenschaften zuordnen sollen. Franz kommt in < 12 > zu dem Schluss: „Es muss beschränkt sein, weils konvergent is.“ Jan überprüft das Ergebnis, indem er für n verschiedene Zahlenwerte einsetzt < 15 >. Er *schafft* sich einen *Zugriff*, um abzuschätzen, ob ihr Resultat stimmen könnte. Franz erwähnt in

< 16 > den Begriff Häufungspunkt und meint, dass sich die Werte zwischen den beiden Häufungswerten -1 und 1 „einpendeln“, wenn n gegen Unendlich strebt.

15	Jan	Zwa plus Zwölf plus Sechzehn, ah zwa plus Sechs.
16	Franz	Das heißt die pendelt zwischen plus und minus Eins, das heißt sie ist sicher beschränkt. Minus Acht durch Zwanzig. Die zwei Häufungspunkte.
17	Jan	Nachher is beschränkt.
18	Franz	Sie ist nach oben und unten beschränkt und divergent.
19	Jan	Also is einfach nur beschränkt.

In < 18 > fasst er die vorangegangene Diskussion über die Problematik mittels *begleitenden Kommentars* zusammen. Die Folge b_n ist „nach oben und unten beschränkt und divergent“, lautet ihre endgültige Lösung. Jan macht in < 19 > eine Bemerkung, die vermuten lässt, dass er „beschränkt“ als hinreichend für „divergent“ betrachtet, was jedoch nicht stimmt. Darauf gehen sie aber nicht mehr ein. Der Vollständigkeit halber soll angeführt werden, dass die Folge b_n divergent sowie nach oben und unten beschränkt ist. Eine konvergente Folge besitzt nämlich genau einen Grenzwert. Die Folge b_n hat zwei Häufungswerte, daher kann sie nicht konvergent sein. Somit ist sie divergent (Heuser 2009, S. 145).

3.4.4.4. Synthese

Der Lösungsprozess der Aufgabe 8b von Franz und Jan setzt sich aus folgenden Teilprozessen zusammen: Zu Beginn machen sie die Aufgabe *handhabbar*, indem sie durch die höchste vorkommende Potenz von n dividieren < 2 >. Es folgen *begleitende Kommentare* bevor sie sich in < 10 > bis < 12 > die Aufgabenstellung vergegenwärtigen – *Problembewusstsein Schaffen*. Zur Kontrolle setzt Jan in < 13 > bis < 15 > konkrete Werte für n ein und *schafft* einen *Zugriff*. Den Abschluss bildet Franz mit einem *begleitenden Kommentar*.

Vergleicht man den Lösungsprozess der Aufgabe 8b der beiden Studentinnen mit jenem von Jan und Franz, fällt sofort auf, dass letztere besser mit der Aufgabenstellung zurechtkommen. Die Studenten wählen ähnliche Handlungsstrategien wie bei 8a, während Beate und Sarah vom Faktor $(-1)^n$ irritiert

sind. Im Gegensatz zu 8a unterscheiden sich die Diskussionen der beiden Gruppen. Dies hat zur Folge, dass auch nicht dieselben Teilprozesse aufzufinden sind.

3.4.5. Grenzwertberechnung (Aufgabe 16)

3.4.5.1. Ausgangslage

Hanna, Lukas und Marie setzen sich nach der Lehrveranstaltung „Übung zur Einführung in die Analysis“ zusammen, um gemeinsam Ideen für die Bearbeitung der Aufgaben für die kommende Woche zu sammeln. Es ist das erste Mal, dass sie sich in dieser Konstellation treffen. Sie kennen einander nur aus der Übung. Außerdem muss hervorgehoben werden, dass die begleitende Analysis-Vorlesung erst drei Wochen zuvor begonnen hat. Die Grenzwertberechnung von Folgen ist ihr erstes großes Themengebiet in der Analysis. Nach einfachen Grenzwertberechnungen, wie bereits zuvor dargestellt (siehe Aufgabe 8), fordert die Aufgabe 16 die Studierenden heraus.

3.4.5.2. Aufgabenstellung

Sei (a_n) eine Nullfolge, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Sei b_n das arithmetische Mittel der ersten n Glieder von a_n ,

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}. \text{ Zeigen Sie, dass } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

3.4.5.3. Analyse

Nach dem ersten Durchlesen der Angabe gilt es, die Angabe zu entschlüsseln. Hanna kann mit dem auftretenden Begriff „arithmetisches Mittel“ nicht viel anfangen und fragt in < 14 > Lukas und Marie, was dies bedeute. Die Klärung der auftretenden Begriffe fällt in die Teilkategorie *Problembewusstsein Schaffen*, da sich die Studierenden mit den vorkommenden Ausdrücken auseinandersetzen.

14	Hanna	Was ist denn a_k arithmetisches Mittel (?)
15	Marie	Das ist der normale Durch(,) was Durchschnitt nein(,)
16	Lukas	[Ja, also]
17	Marie	[der Mittelwert], wenn du zum Beispiel in der Schule die Schularbeiten hattest und dann kam(,) und der Durchschnitt, nein es ist nicht der Durchschnitt, ähm(,) doch ich glaub, es ist der Durchschnitt.
18	Lukas	[ja, ich glaub schon]
19	Marie	[wenn du sagst,] der Durchschnitt ist diese und jene Note, wenn du sagst es gibt fünf Einser, sieben Zweier und (-)
20	Hanna	Das heißt das b_n ist eigentlich eine Teilmenge von a_n (?)
21	Marie	[ähm]
22	Lukas	[ähm] (Marie und Lukas lachen)
23	Marie	Wir nehmen alle(,) ja alle Werte und dann durch die Anzahl der Werte dividiert man.
24	Lukas	Genau, es ist mehr oder weniger die Reihe von a_k ähm(,) aber durch durch die Anzahl der Elemente halt.

Marie erläutert in < 17 > an Hand eines konkreten Beispiels, dass in der Schule beispielsweise der Notendurchschnitt einer Schularbeit mittels arithmetischem Mittel berechnet wird. Sie setzt dabei „arithmetisches Mittel“ mit „Durchschnitt“ gleich. Sie versucht neben einer plakativen Vorstellung durch das Beispiel den mathematischen Fachausdruck durch einen Alltagsbegriff zu ersetzen. Marie *schafft* somit einen *Zugriff* zur Aufgabenstellung. Die Klärung des Begriffes „arithmetisches Mittel“ dient dem Verständnis der Angabe. Daher kann man sagen, dass sich die Studierenden zu Beginn in der Phase des *Problembewusstsein Schaffens* befinden. Hanna versucht in < 20 > Maries Aussage wiederum in die mathematische Sprache zu übersetzen und greift das Wort „Teilmenge“ auf. Es ist unklar, was sie damit meint. Eine Mögliche Interpretation ihrer Aussage ist, dass sie an die Mengenlehre denkt. Es entsteht der Eindruck, dass sie eine Menge A beispielsweise im Kopf hat, die mit einer Menge B geschnitten wird (siehe Abb.4). $A \cap B$ ist der Durchschnitt der Mengen A und B und beinhaltet alle Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind. Sei nun A die Menge der Englisch-Schularbeitsnoten einer Schülerin bzw. eines Schülers und B die Menge der Mathematik-Schularbeitsnoten. Hannas Überlegung wäre in diesem Sinne, dass $A \cap B$ eine Teilmenge der Menge A bzw. der Menge B ist. Dieser Schluss ist korrekt, allerdings liefert diese nicht die durchschnittliche Schularbeitsnote der beiden Fächer des Lernenden.

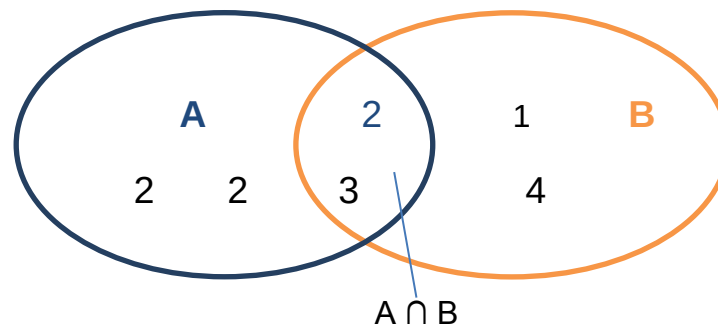


Abb.4 Aufgabe 16 $A \cap B$

Allerdings ist eine solche Verknüpfung hier fehl am Platz. Deshalb führt Marie in < 23 > an, wie man das arithmetische Mittel berechnet. Nachdem sich die Studierenden vor Augen geführt haben, was das arithmetische Mittel ist, muss der nächste auftretende mathematische Begriff geklärt werden: Was ist eine Nullfolge? Die Studierenden setzen sich in einer ersten Phase mit den vorkommenden mathematischen Fachausdrücken auseinander. Marie stellt in < 28 > Überlegungen zur Nullfolge an. Unmittelbar darauf hebt sie in < 31 > hervor, dass man beachten muss, zwischen Folge und Reihe zu unterscheiden. Genauer betrachtet ist eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Folge und zwar die Folge der Partialsummen $s_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$ (wobei $n = 0, 1, 2, \dots$) (Heuser 2009, S. 187).

28	Marie	Wenn aber a_n eine Nullfolge ist, heißt das doch, dass der Nenner gegen Null geht.
29	Lukas	Na, würd i net sagen, oder (?)
30	Hanna	Wenn a_n eine Nullfolge ist (?)
31	Marie	Folge und Reihe das war der Unterschied.

Die erste Phase des *Problembewusstsein Schaffens* setzt sich aus der Klärung der auftretenden Begriffe „arithmetisches Mittel“ (< 14 > bis < 24 >) und „Nullfolge“ (< 28 > bis < 30 > und < 37 > bis < 40 >) sowie der Unterscheidung zwischen Folge und Reihe (< 31 > und < 43 > bis < 47 >) zusammen. Diese Sequenz wird in < 34 > durch einen Gedankengang zur *Herstellung eines Zugriffs* von Lukas unterbrochen. Er meint, eine Idee zu haben, die *Aufgabe handhabbar zu machen*. Nachdem die Studierenden in einem ersten Schritt die Angabe durchleuchtet haben, fragen sie sich, welche *Handlungsmöglichkeiten* in Frage kämen.

34	Lukas	Also i glaub da Schmäh ist, das da heroben ist endlich, wenn a
----	-------	--

Lukas streicht heraus, dass der Zähler endlich ist. Dies könne seiner Meinung nach ein Anhaltspunkt für einen Beweis sein. Hanna überlegt in < 37 >, ob der Nenner einer Nullfolge gegen Null und der Zähler gegen Unendlich strebt. Diese Aussage ist jedoch falsch. Auch wenn sie die Ausdrücke „Zähler“ und „Nenner“ eventuell vertauscht hat, stimmt die Hypothese nicht. Die Folge $\frac{1}{n}$ strebt beispielsweise gegen Null. Bei der Grenzwertüberlegung geht man folgendermaßen vor: Im Zähler steht 1. Daran ändert sich nichts, wenn n gegen Unendlich geht. Der Nenner strebt jedoch gegen Unendlich. Daraus ergibt sich folgenden Überlegung: $\frac{1}{\infty} \rightarrow 0$.

Marie streicht in < 38 > hervor, dass bei der Nullfolge die einzelnen Glieder „immer kleiner werden“. Tatsächlich muss bei einer Nullfolge der Nenner stets stärker wachsen als der Zähler. Die Studierenden versuchen in einer weiteren Phase des *Problembewusstsein Schaffens* herauszufiltern, welche Eigenschaften eine Nullfolge hat. Marie macht in < 40 > darauf aufmerksam, dass eine Reihe eine Folge der Partialsummen ist, und daher die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht gegen denselben Grenzwert konvergieren müsse wie die Folge $(a_0, a_1, a_2, \dots)$. Zur Unterstreichung ihrer Überlegung nennt Lukas in < 41 > bis < 45 > die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

37	Hanna	[wenn a_n] Nullfolge ist, dann geht der Nenner gegen Null und der Zähler gegen Unendlich, oder na (?)
38	Marie	Aber ich mein, bei der Nullfolge hast du nur die einzelnen Glieder, die dann immer kleiner werden (-)
39	Hanna	Mhm.
40	Marie	Und bei der Reihe summierst du die auf und es könnte ja sein, dass es gegen eine andere Zahl geht(,) weil die ersten Glieder zum Beispiel so groß waren und die dann halt dazukommen immer kleiner werden.
41	Lukas	Aber wie is des (?) Zum Beispiel Eins durch n ist ja eine Nullfolge, oder (?)
42	Marie	Mhm.
43	Lukas	Aber Eins durch n ähm als (-)
44	Marie	Reihe
45	Lukas	Reihe ist trotzdem divergent, oder (?)
46	Marie	Ich denk schon, ja das ist die harmonische Reihe.
47	Lukas	Ja, ja genau die harmonische Reihe.

Marie packt ihr Analysis-Buch aus der Tasche aus, öffnet es aber erst zu einem späteren Zeitpunkt, weil Hanna, die das Buch ebenfalls kennt, es wenig hilfreich findet. Die Phase der *Klärung der Handlungsoptionen* setzt sich in < 56 > fort. Die Studierenden begeben sich im Folgenden auf die Suche nach Lösungsstrategien: Wie geht man am geschicktesten an die Aufgabe heran? Welche Lösungsmethoden stehen zur Verfügung? Zunächst sammeln die Studierenden ihre Ideen. Lukas liefert in < 56 > den Vorschlag, die Summanden einzeln anzuschreiben. Marie denkt an die Gaußsche Summenformel < 57 >.

56	Lukas	Aber dann(.) tät sichs ja trotzdem wieder ausgehen, oder (?) Weil wenn die Folgenglieder Eins durch n wären, dann wäre's ja dann könnt mas ja mit den Summen auseinander schreiben und sagen Eins durch n Quadrat, oder (?)
57	Marie	Oh, wart amal (<i>Pause</i>) Ist das nicht wie beim Gauß? Aber die können irgendwie sein(.) nein also ist es nicht wie bei Gauß.

Um eine effiziente Lösungsstrategie zu finden, wenden sich die Studierenden in < 60 > bis < 68 > noch einmal der Angabe zu. Bei der zweiten Auseinandersetzung mit der Angabe gehen sie nicht auf die auftretenden Begriffe ein, sondern beschäftigen sich damit, was genau aus der Angabe herauszulesen ist. Das wiederum fällt in die Kategorie *Problembewusstsein Schaffen*. Lukas streicht in < 64 > hervor, wie er die Reihe b_n auffasst, nämlich als „**unendliche** Partialsumme“ mit der Betonung auf die Unendlichkeit. Er liefert unmittelbar darauf auch schon eine *mögliche Handlungsoption*. Lukas meint, es sei wichtig, dass der Zähler endlich bleibt, wie er in < 64 > bzw. < 66 > zum Ausdruck bringt. Marie wendet in < 67 > ein, dass b_n das arithmetische Mittel der ersten n Glieder sei und damit nicht unendlich. Daraufhin erklärt ihr Lukas in < 68 > die Angabe: man muss beachten, dass n gegen Unendlich gehe. Das führt die Phase des *Problembewusstsein Schaffens* weiter.

64	Lukas	Also es ist sozusagen eine Partialsumme von a_k durch die Anzahl der Elemente der Partialsumme(.) und wir wollen aber die unendliche Partialsumme(.) äh sozusagen ausrechnen und dann wird unser Nenner Unendlich und ich glaub, wir müssen halt irgendwie belegen, dass der Zähler da heroben, ah wenn das unendlich viele Folgenglieder sind (-)
65	Marie	Oh.
66	Lukas	endlich bleibt, dann kann man behaupten, dass es eine Nullfolge ist.
67	Marie	Das könnte gehen, aber es steht, dass b_n das Mittel der ersten n Glieder ist, das heißt, das ist nicht Unendlich.
68	Lukas	Ja, aber wenn ma, ähm also beim Limes von b von n geht ja dann das

	n gegen Unendlich. Das ist heißt, es ist der Mittelwert der ersten unendlich vielen sozusagen.
--	--

Im nächsten Schritt klären die Studierenden, ob sie mit „Unendlich rechnen“ < 70 > dürfen. Marie erinnert sich zurück, wie sie in den Übungen vorgegangen sind, wenn es darum ging, den Grenzwert einer Folge zu berechnen.

70	Lukas	Ich glaub schon, dass wir das sagen dürfen, aber ich glaub halt, dass wir nicht mit Unendlich rechnen dürfen.
71	Marie	Was wir nämlich vorher auch schon ganze Zeit gemacht haben, ist, das Ganze aufzuteilen, sodass zum Beispiel a_1 plus a_2 plus was weiß ich was immer a_1 durch n plus a_2 durch n plus a_3 durch n (,) ähm und das ja auch immer kleiner werden dürfte.

Im Verlauf der Bearbeitung dieser Aufgabe versuchen sich die Studierenden immer wieder – beispielsweise in < 71 > oder in < 100 > – zurückzuerinnern, ob ähnliche Aufgaben bereits in der Übung oder in der Vorlesung durchgenommen wurden und wie sie dort vorgegangen sind. In dieser Sequenz gilt es Lösungsstrategien zu sichten. Das kann einerseits durch Nachschlagen in einer Vorlesungsmitschrift, mittels Internetrecherche, oder Ähnlichem erfolgen, andererseits durch Schaffen von Querverbindungen zu bereits gelösten ähnlichen Aufgabenstellungen. Auch bei Studienkolleginnen und -kollegen bzw. bei Dozentinnen und Dozenten kann Rat eingeholt werden. Sich ins Gedächtnis zu rufen, ob einem ähnliche Aufgaben bekannt sind, und sich an die Vorgangsweise zu erinnern, ist daher zweifelsohne zu *Klärung der Handlungsoptionen* zu zählen.

Marie nimmt in < 71 > Lukas Idee der Trennung der einzelnen Summanden erneut auf und fügt hinzu, dass die Summanden immer kleiner werden dürften. Sie wendet jedoch in < 75 > ein, dass der erste Summand „ur groß“ sein kann. Ein sehr großer Summand könne ihnen womöglich Probleme bereiten. Lukas relativiert Maries Befürchtungen in < 78 >. Er meint, dass sich immer eine größere Zahl finden ließe außerdem seien alle nachfolgenden Summanden kleiner. Infolgedessen greifen die Studierenden in < 76 > den Begriff der Nullfolge auf. Lukas ist überzeugt, dass eine Nullfolge fallend ist. Es geht nun darum, sich zu vergegenwärtigen, welche Eigenschaften eine Nullfolge besitzt. Mitten im Prozess zur *Klärung der Handlungsoptionen* kommen die Studierenden zurück auf das *Problembewusstsein*. Lukas bringt zur Sprache, dass man den Wert der Summe womöglich nicht zur

Lösung brauche. Um sich vor Augen zu führen, was genau gezeigt werden soll, wendet sich Marie in < 79 > der Angabe zu.

75	Marie	Das würde dann trotzdem nichts heißen, wenn das a_n ähm das a_1 trotzdem irgendwie ur groß wär, wär ja dann trotzdem blöd.
76	Lukas	Jaja, aber wir wissen, dass dass der dass es eine Nullfolge ist, die muss ja fallen, oder (?)
77	Marie	Mhm.
78	Lukas	Also und dann kann das a_1 aber nicht unendlich groß sein, weil du kannst dann immer was finden, das bissl größer ist, wenn das ein fixer Wert ist das a_1 , oder (?) Und von dort aus wirds immer kloaner(,) also wiss ma eigentlich, dass des a endliche Zahlen sind das a_1 bis a_n , wir wissen nur nicht, dass die Summe endlich ist, aber das brauch ma vielleicht gar nicht.
79	Marie	Ok. Wir sollen zeigen, dass der Limes von n nach Unendlich von b_n (-)
80	Lukas	Null ist genau.

Hanna versucht schließlich in < 85 > einen *Zugang* zu finden, indem sie konkrete Werte einsetzt. Zur Veranschaulichung der Reihe b_n verwenden Hanna und Marie *Handwerk*. Sie setzen Zahlen für die einzelnen Summanden ein. Lukas stoppt sie in < 90 >.

85	Hanna	Aber was heißt, das a_1 , das is ja dann eigentlich nur, wenn ma da a Beispiel nehmen, also wir ham jetzt die Folge a_n ist einfach des, dann is a_1 ist ja (-)
86	Marie	Eins.
87	Hanna	Eins(,) a_2 ist ein Halb und a_3 ist dann ein Drittel.
88	Marie	Aber wenn man Eins durch n durch n dividiert hat man ja (-)
89	Hanna	Eins durch n durch n. (<i>leise</i>)
90	Lukas	Ja, dann ham ma Eins durch n Quadrat aber ich glaub, dass ma sowas nicht annehmen dürfen, also was das da oben sein kann, weil wir müssen nicht feststellen, dass das eine konvergente Reihe ist. Wir müssen ja sagen, dass der Grenzwert der Folge Null ist. Das sollt eigentlich einfacher gehen.

Er weist seine beiden Kolleginnen darauf hin, dass man keine konkreten Zahlen einsetzen darf, sondern das Problem allgemein lösen soll. Weiters betont er, dass nicht gefragt ist, die Konvergenz der Reihe zu zeigen, sondern, „dass der **Grenzwert** der **Folge** Null ist“ < 90 >. An dieser Stelle ist anzumerken, dass die Grenzwertberechnung gerade die Konvergenz der Reihe zeigt.

93	Marie	Aber wenn ich(,) ich diese Angabe so lesen würde, würde ich nicht auf die Idee kommen, dass b_n auch eine Folge ist, weil da steht b_n ist gleich (-) Oh (!) Es ist die Folge von den arithmetischen Mitteln .
----	-------	--

Marie ist mit Lukas Einwand – den „Grenzwert der Folge“ berechnen zu müssen – nicht einverstanden und beruft sich in < 93 > auf die Angabe. Bei einer wiederholten Zuwendung zur Angabe fällt ihr auf, dass b_n „die **Folge von den arithmetischen Mitteln**“ ist. Die erneute Auseinandersetzung mit der Angabe, lässt sie neue Aspekte der Aufgabenstellung erkennen. Sie verschafft sich tieferes *Problembewusstsein*. Im Zuge der Phase des *Bewusstmachens* der Aufgabe hebt Lukas hervor, was zu zeigen ist: Der Grenzwert von b_n soll Null sein.

96	Lukas	Also eben, wir müssen den Grenzwert von b_n berechnen und halt schauen, dass der möglichst Null wird.
97	Marie	Ok(,) ok.
98	Hanna	Kinn ma des mit einer, mit da P a r t i a l bruchzerlegung mochen (?)
99	Lukas	Ähm(,) wie meinst (?)
100	Hanna	Na wir ham ja immer, wenn ma so so Reihen gehabt haben, so Summenzeichen, ham mas immer mit der Partialsummenzerlegung so hinkriegt, dass des immer a plus, a minus, a plus, a minus und dann kummt irgendwas ausa und des kannst dann ja (-)

Hanna erinnert sich in < 98 > an eine weitere, ihr schon bekannte *Lösungsstrategie* – an die Partialbruchzerlegung. Allerdings bringt sie ihre Überlegung, die eher an eine Teleskopsumme als an die Partialbruchzerlegung erinnert, bei dieser Aufgabe nicht weiter, wie die Studierenden bald bemerken.

Nachdem sie diese *Handlungsstrategie* ebenso wie die vorigen *verworfen* haben, bringt Lukas in < 105 > zur Sprache, dass von der Konvergenz einer Folge nicht auf die Konvergenz einer Reihe geschlossen werden kann. Dabei nennt er den klassischen Fall $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ ist ein Beispiel für eine Nullfolge doch die unendliche Reihe $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ist divergent.

105	Lukas	Eben, es is irgendwie(,) es is irgendwie(,) irgendwie schräg. Also heißt a_n wenn a Nullfolge ist, ist sie nicht zwangsläufig(,) äh ist die Reihe aus der net nicht zwangsläufig konvergent, oder (?) Eins durch n ist nicht konvergent, also die Reihe (?)
-----	-------	--

Diese Überlegung führt sie zu einer weiteren *Handlungsoption*, den Aufgriff der Definition des Grenzwertes für Folgen.

111	Lukas	Ooh(,) aso(,) ähm wir wissen ja, dass(,) dass unendlich viele Folgenglieder von a_n sich sehr nah an Null befinden, oder (?)
112	Marie	Ja.
113	Lukas	Ähm, und ab einem gewissen Grad, i mein, das n geht ja von(,) äh ist

114	Marie	ja offensichtlich größer oder gleich Eins [das heißt] [Ähm] ja das heißt (-)
115	Lukas	Das heißt also, dass das sehr schnell größer wird als das a_n , oder also (-)
116	Marie	Ja, ich denk auch. Also dieses große N ist ganz bestimmt größer als a_1 , würd ich sagen, dieses große N, wo immer steht, für jedes n größer als $N(,)$ für jedes kleine n, das größer als das große N gilt (-)

Die Studierenden nehmen dabei keine Unterlagen zur Hand, um die Grenzwertdefinition exakt aufzuschreiben, sondern erinnern sich zunächst einmal an die vorkommenden Variablen n , N und ε . Ihre Aussagen lassen darauf schließen, dass sie die Grenzwertdefinition einer Folge bereits verinnerlicht haben. Lukas meint in < 111 > nämlich, dass sich „unendlich viele Folgenglieder von a_n [...] beliebig nah an Null befinden.“ Lukas Bemerkung ist gewissermaßen ein Versuch, einen *Zugriff herzustellen*. Er ist bestrebt, an Hand von den Merkmalen einer Nullfolge die Aufgabe *handhabbarer* zu machen. Bevor sie sich für die *Handlungsoption* – mit der Grenzwertdefinition zu arbeiten – entscheiden, führen sich die Studierenden in < 122 > bis < 123 > vor Augen, was eine Reihe ist.

122	Hanna	Aber da steht ja(,) also a_n ist eine Nullfolge, aber das heißt ja eine Folge, das heißt da hab ich einen Wert Beistrich einen Wert und da zähl i des Ganze zom.
123	Lukas	Ma macht sozusagen die Reihe draus, aus den ersten n.
124	Hanna	Aber dann weiß ma ja net, ob die Reihe(,) wenn i ma da nur den Nenner anschau, ob die überhaupt konvergent ist (?)
125	Marie	Ich denke aber schon, dass sich das aus der Nullfolge ergibt.

Die Studierenden bemühen sich im Folgenden einen *Zugriff* zur Aufgabe zu *finden*, indem sie sich b_n bildhaft vorstellen. Für Hanna ist die Vorstellung wichtig, dass es sich um eine Summe handelt. Sie fügt in < 124 > hinzu, dass man nicht wisse, ob der Zähler aus $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ überhaupt konvergiere. Sie hat dabei anscheinend die harmonische Reihe im Hinterkopf. Marie *kommentiert* in < 125 > Hannas Aussage. Sie glaubt, dass sich die Konvergenz aus der Nullfolge ableiten lasse. Die Folge der Partialsummen einer Nullfolge ist im Allgemeinen nicht konvergent. Dies entgegnet ihr auch Lukas in < 128 > bzw. in < 130 >.

128	Lukas	[Aber es wird halt] schon immer a bissl größer, also eben Eins durch n ist halt nicht konvergent als Reihe.
129	Marie	Aber ich glaub, dass es insofern zum Beispiel nicht größer als Zwei wird, das heißt, wenn du zum Beispiel Eins durch Zwei hoch n ist (-)
130	Lukas	Ja, das schon, aber wir haben, halt in der Vorlesung war ja grad das Beispiel Eins durch n ist nicht konvergent, Eins durch n zum Quadrat

131	Marie	schon wieder zum Beispiel. Ja.
132	Lukas	Aber wir können nicht annehmen, glaub i, dass der obere Wert endlich ist.
133	Marie	Ich find das(,) aber seltsam, wenn wir doch von Eins bis n gehen, ist es doch endlich, besonders wenn (-)
134	Lukas	Ja net, wenn n gegen Unendlich geht.
135	Marie	Das das ist wirklich kompliziert.

Die größten Schwierigkeiten bereitet den Studierenden, dass n gegen Unendlich strebt, dies kommt in < 132 > bis < 135 > deutlich zum Ausdruck. Ihr Gespräch lässt schließen, dass ihnen die Erfahrung im Umgang mit unendlichen Folgen bzw. Reihen fehlt. Aus diesem Grund fällt es ihnen schwer, auf einen Vorrat aus möglichen Handlungsoptionen zurückzugreifen. Auffällig ist, dass sie immer wieder auf einzelne Aspekte zu sprechen kommen, bei denen sie anstehen, etwa: Wie geht man mit einer Nullfolge bzw. einer unendlichen Reihe um? Ihre Überlegungen führen sie immer wieder in eine Sackgasse, da sie mit den vorhandenen Informationen nichts anzufangen wissen. Daher kann festgehalten werden, dass sie mangels Routine Schwierigkeiten haben, geeignete Lösungsstrategien zu entwickeln. Die Studierenden werfen vereinzelt Schlagwörter und Ideen in die Runde, kommen aber auf keinen weiterführenden Weg, sie befinden sich über eine lange Zeitspanne hinweg in der Phase der *Klärung der Handlungsoptionen*. Eine erste Idee für einen Lösungsansatz liefert Lukas in < 33 >. Bis zur Zeile < 135 > haben die Studierenden noch keine Handlungsmethode gefunden, mit der sie weiterarbeiten. Diese lange Phase der *Klärung der Handlungsoptionen* wird sporadisch durch Sequenzen des *Problembewusstseins* unterbrochen.

Lukas versucht in einem neuen Ansatz in < 136 > die Aufgabe auf eine einfachere Ebene herunter zu brechen.

136	Lukas	Jaja, das stimmt schon, ja. Also es is eh nett, aber es is schon wirklich(,) kompliziert ja, weil wenn eben, weil wenn des da ein endlicher Wert wäre, das Summenzeichen, also da unser Zähler , dann wärs ja trivial, weil(,) oder trivial(,) dann könnt ma ja sagen der Limes von Eins durch n ist ja Null und der mal der Limes von einem andern endlich Wert wäre ja wieder Null.
-----	-------	--

Er spricht erneut das Problem an, dass sie nicht wissen, wie man mit der Folge a_n umgehen soll, wenn n gegen unendlich strebt. Seine Überlegung in < 136 >

ist, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} c = 0$, wobei c eine Konstante ist. Dieser Einfall bringt sie aber hierbei nicht weiter. Um die Beschränktheit von b_n zu zeigen, fällt Lukas schließlich noch eine weitere *Handlungsoption* ein, nämlich eine Abschätzung durchzuführen < 147 >.

147	Lukas	[genau, genau] und jetzt müsst ma uns eben glaub i, also i glaub jetzt müsst ma uns eine Abschätzung überlegen.
148	Marie	Oh.
149	Lukas	Von oben und von unten weil ähm(.) was ma schon annehmen können, is ja halt, dass das a ab einem gewissen n kleiner wird als das n unten.
150	Marie	Ja.
151	Lukas	Genau(.) und wenn nachher immer oben weniger dazukommt als herunten(.) oder es wird ja sogar kleiner als Eins, weil dann zähl i ja oben immer weniger als Eins dazu und unten immer Eins mehr sozusagen.
152	Marie	Ja.
153	Lukas	Und das wird dann Unendlich und das wird a Unendlich aber nicht so Unendlich.

Eine zentrale Überlegung von Lukas ist, „dass der Zähler langsamer wächst als der Nenner“ < 157 >. Seine vorgeschlagene Lösungsstrategie versucht Lukas in < 149 > und < 151 > plausibel zu machen. Er schafft sozusagen einen *Zugriff*. In den folgenden Minuten entsteht eine Diskussion rund um das Thema *die Aufgabe handhabbar* zu machen. Hauptaussage ihrer Argumentation ist, dass der Zähler kleiner bleibt als der Nenner.

170	Lukas	Ok, aber das ist eigentlich alles unerheblich, weil irgendwann eben diese a_n s so nah an Null sind, dass sie quasi den äh Zähler kaum mehr erhöhen aber eben der Nenner steigt immer um Eins.
-----	-------	--

Immer wieder kommen sie in ihrem Gespräch auf die Eigenschaften einer Nullfolge zu sprechen. Damit kehren sie zum *Problembewusstsein Schaffen* zurück, so zum Beispiel in < 167 >.

167	Marie	Weil sie eine Nullfolge ist, dürfte sie ja doch eher fallend sein.
-----	-------	--

Lukas fasst seinen Lösungsvorschlag in < 201 > zusammen. Schließlich beendet Marie in < 202 > ihre Debatte mit dem Verweis, dass man beweisen solle,

der Grenzwert von b_n sei Null, „argumentieren“ reiche nicht. Daraufhin greift Lukas in < 203 > die Grenzwertdefinition auf.

201	Lukas	Aber i glaub, dass ma das gut argumentieren können, dass unendlich viele Folgenglieder von den a_n eben kleiner gleich Eins werden, damit wächst der äh Nenner schneller als der Zähler,
202	Marie	Das blöde ist, dass wir argumentieren und nicht beweisen so verdammmt .
203	Lukas	Na wir könnens ja so hinschreiben, oder (?) Also äh es gibt ein N aus den natürlichen Zahlen, sodass gilt für alle n größer dem groß N, ist das a von k kleiner gleich Eins von mir aus.
204	Marie	Mhm.
205	Lukas	Und da das ja schon eine endliche Zahl ist, das groß N, san also unendlich viele von diese ns da, a von n. Sind das unendlich viele Glieder, die dann übrigbleiben und die dann kleiner als die Eins sind.

In der Gruppe findet sein Vorschlag für die Verwendung der Definition von Folgenkonvergenz als *Handlungsoption* Zustimmung. Die Studierenden *verschaffen* sich daraufhin in < 221 > einen *Zugriff*. Der Gebrauch der Definition hat einen *öffnenden Charakter*.

221	Lukas	Ja, na eh net, aber jetzt muss ma die Erkenntnis halt sozusagen übertragen in des da. Das heißt, es gibt also beim b von n gibt's dann eben so ein Epsilon, kann man für jedes n so ein Epsilon angeben, was kleiner wird, weil das untere immer kleiner wird, wenn das obere (-)
222	Marie	Versuchen wir das irgendwie (?)
223	Lukas	Ja. Ähm(,) (Marie lacht) Ok(,) für alle Epsilon größer Null, oder (?)
224	Marie	Ja, das ist immer so.
225	Lukas	(Lukas sagt an, alle schreiben mit) Gilt es, es gibt dann ein groß N aus N (natürlichen Zahlen), sodass gilt (-)
226	Marie	a minus a_n in Betragsstrichen ist größer, nein kleiner, als Epsilon (?)
227	Hanna	Es gilt für alle n größer gleich groß N.
228	Marie	In der Vorlesung kam das immer erst zum Schluss nachgeworfen. Ok, alle n größer gleich als N.
229	Lukas	Oder größer gleich N gilt dann, dass die Summe von a_k .
230	Marie	Aso, die Summe von a_k .
231	Lukas	Durch n(,) kleiner ist als das Epsilon, oder (?)
232	Marie	Das sollten wir jetzt zeigen(,) schätz ich mal. (Pause)

Lukas sagt die Definition für die Konvergenz einer Folge ohne Hilfenahme der Mitschrift oder eines Skriptes an. Dies lässt vermuten, dass er mit der Definition einigermaßen vertraut ist. Aus diesem Grund fällt der Gebrauch der Definition und dessen Umlegung auf die Angabe unter *Handwerk*. Er hat sie scheinbar nicht zum ersten Mal verwendet. Der folgende Transkriptausschnitt < 235 > bis < 237 > spiegelt ihre Überlegungen, die sie ausgehend von der Folgenkonvergenz anstellen, wider.

235	Lukas	Wir wissen aber, dass eben unendlich viele Elemente a von a_n kleiner sind als Eins, also der Betrag.
236	Marie	Aber wenn wir das Epsilon hatten, hatten wir immer die Folge minus ihrem Limes oder so was in Betragsstrichen (?)
237	Lukas	Mhm, aber wir können da quasi den Betrag umma machen, weil der Grenzwert wär ja Null in dem Fall.

Nachdem sie die Angabe in die Definition eingesetzt und umgeformt haben, stellt sich für sie die Frage, ob damit bewiesen ist, dass b_n gegen Null strebt, wenn n gegen Unendlich geht. Die Studierenden stellen sich die Frage, inwiefern sie die Aufgabe damit beantwortet haben. Aussagen wie die folgenden verdeutlichen ein rückschauendes *Problembewusstsein Schaffen*. Die Lernenden vergleichen den Beweis mit der Angabe und reflektieren, ob die Problematik der Angabe damit gezeigt wurde.

246	Marie	Ich glaub schon. (<i>längere Pause</i>) Ich weiß jetzt nicht, ob wir fertig sind oder nicht.
247	Lukas	Ja, es ist schwierig zu sagen. Es schaut auch komisch aus so.
248	Marie	Es wirkt so als würd etwas fehlen.
249	Hanna	Wir haben ja einfach die Definition vom Grenzwert hingeschrieben, also von der Folge. (<i>lacht</i>)
250	Lukas	Ja, das stimmt schon. Ja, i weiß net irgendwie mir kimmts halt vor, mit dem haben wir gezeigt, dass es eben langsamer wächst. Und damit kann ma behaupten, es hat den Grenzwert Null. (<i>Pause</i>)

Während Marie und Hanna nicht überzeugt sind, die Aufgabe zufriedenstellend gelöst zu haben, meint Lukas in < 250 >, dass ihre Argumentation stimme. Da die Mehrheit der Gruppe die Aufgabe als noch nicht vollständig gelöst ansieht, wird die bisherige Lösung nachgebessert. Ihre *Handlungsstrategie* bleibt dieselbe, wie man Lukas Aussage aus < 268 > entnehmen kann.

268	Lukas	Genau, wir könnten ja ah zum Beispiel sagen, dass es eben ein n gibt (<i>Pause</i>), sodass eben für alle n größer gleich dem N gilt, dass die Summe(.) also das ham ma eh da heroben gezeigt. Genau. (<i>radirt das zuletzt Geschriebene wieder aus</i>) Damit wird's dann glaub i klar, oder (?), dass das (-)
-----	-------	--

Die Studierenden verfeinern ihre Lösung. Ihre Argumentation beruht darauf, dass ab einem bestimmten Index der Zähler kleiner ist als der Nenner.

275	Marie	Also statt diesen kleingeschriebenen n könnte man ja hier das ist das große N und ab diesem großem N gilt für jedes weitere.
276	Lukas	Ja, aber für alle n größer, größer gleich N . Du kannst das groß N schon einsetzen, aber es gilt ja für alle weitem auch.
277	Marie	Oder also, wenn man die Summe von k ist Null bis groß N von a_k hat, ist gleich groß N , dann ist das, das n ab dem das gilt.

Beherrscht man eine Handlungsstrategie, so gehört nach Ableitinger und Herrmann deren Anwendung in die Kategorie *Handwerk*. Der Videoaufzeichnung nach ist den Lernenden die Konvergenzdefinition für Folgen bereits vertraut, sonst könnten sie sie nicht ohne Hilfenahme eines Skripts anschreiben. Letztendlich sind die Studierenden noch immer nicht sicher, ob die Aufgabe gelöst ist oder nicht. Dies zeigen die Aussagen des folgenden Transkriptausschnittes < 294 > bis < 296 >. Doch nach 40 Minuten brechen sie ihre Diskussion um die Aufgabe 16 ab.

294	Lukas	Ja, i glaub, ma muss das ein bissl sauberer ausformulieren schlussendlich. Sehen wir das als gelöst an? Oder wollts no?
295	Marie	Ich mein, vielleicht könnte man jetzt diese Sachen mit irgendwelchen Folgen oder Reihen vergleichen, die man kennt. Ich hab hier keine Ahnung.
296	Lukas	Ja, i glaub, wir ham alle ka Ahnung. Ah wenn mas mit a paar Folgen vergleichen, ham ma das no net bewiesen sozusagen. Also i glaub, da müss ma so abstrakt denken, wenn ma nix Konkretes haben. (längere Pause)

In < 294 > *kommentiert* Lukas ihr Ergebnis. Er meint, die Argumentation sei schlüssig, aber die formale Schreibweise sei noch etwas unpräzise. Marie erinnert sich in < 295 > noch an weitere *Handlungsoptionen*. Lukas bremst sie in < 296 > ein. Er ist überzeugt, die Problemstellung dieser Aufgabe sei so, dass sie nur abstrakt gelöst werden könne. Seine Aussage lässt sich zu *Problembewusstsein Schaffen* einordnen, da er erkennt, dass man die Aufgabe nur allgemein lösen kann.

3.4.5.4. Synthese

Die Bearbeitung der Aufgabe 16 dauert 40 Minuten. Ein Großteil der Zeit wird vom *Problembewusstsein Schaffen*, vom Analysieren und Identifizieren der Problematik der Angabe, in Anspruch genommen. Zuerst klären die Studierenden die vorkommenden Begriffe „arithmetisches Mittel“ (< 14 > bis < 25 >) sowie „Nullfolge“ (< 28 > bis < 47 >). Danach überlegen die Studierenden, welche *Handlungsstrategien* ihnen zur Verfügung stehen. Lukas denkt dabei an einen Darstellungswechsel der Summe < 56 >, Marie an die Gaußsche Summenformel $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ < 57 >. Lukas *ruft* in < 64 > die Angabe *ins Bewusstsein* und formuliert die Aufgabe in eigenen Worten. Er meint, zu zeigen sei, dass der

Zähler langsamer wachse als der Nenner. Dieser Grundgedanke ist der Leitfaden ihrer weiteren *Suche nach Handlungsoptionen* und ihrer Bestrebungen, *die Aufgabe handhabbar zu machen*. Marie äußert in < 71 > und Hanna in < 98 > eine mögliche *Lösungsstrategie*. Beide Ideen sind nicht zielführend und werden daher *verworfen*. *Zugriff schaffen* die Studierenden in < 85 > bis < 90 >, indem sie konkrete Zahlenwerte in die Reihe b_n einsetzen. Immer wieder markieren Teilphasen des *Problembewusstseins Schaffens* ihr Gespräch. Marie hält in < 79 > fest, was zu zeigen ist: „Wir wollen zeigen, dass der Limes von n nach Unendlich von b_n (-)“ Null ist. Ruft man sich die Angabe in Erinnerung, zählt dies zu *Problembewusstsein Schaffen*. In < 116 > nennt Marie erstmals die Definition der Folgenkonvergenz. Die Studierenden erklären diese als ihre endgültige *Handlungsmethode*. Nach Maries Einspruch in < 202 >, dass sie nicht nur argumentieren, sondern ihre Beweisideen formal festhalten sollten, verschriftlichen die Studierenden ihre Ideen. Ihre Argumentation wird bei der Verschriftlichung überarbeitet. Trotzdem sind sie am Ende nicht vollkommen zufrieden mit ihrer Lösung. Dies zeigt unter anderem Lukas *Kommentar* in < 294 >: „Ja, i glaub, ma muss das ein bissl sauberer ausformulieren schlussendlich. Sehen wir das als gelöst an? Oder wollts no?“ Nach einer 40-minütigen Diskussion betrachten die Studierenden die Aufgabe als gelöst.

Auf Grenzwertberechnungen von Folgen folgt die Konvergenz einer Potenzreihe.

3.4.6. Für welche x konvergiert die Reihe? (Aufgabe 35)

3.4.6.1. Ausgangslage

Die Studierendengruppe, die sich aus Flo, Kurt, Marie und Tina zusammensetzt, hat vor der Bearbeitung dieser Aufgabe bereits ein paar Übungsaufgaben rund um die Konvergenzkriterien für Reihen erfolgreich gelöst. Diese Aufgabe unterscheidet sich jedoch insofern von den vorangegangenen, als dass die Reihe nicht auf absolute Konvergenz untersucht werden soll. Es soll stattdessen herausgefunden werden, für welche x aus den reellen Zahlen die gegebene Reihe konvergiert. Zur Lösung dieser Aufgabe verwenden die Studierenden die Mathematiksoftware Wolfram Alpha am Smartphone. Mit deren

Hilfe erraten sie die Lösung. Danach machen sie sich auf die Suche nach einer geeigneten Lösungsstrategie, sowohl das Wurzel- als auch das Quotientenkriterium kommen für sie bei dieser Aufgabe in Frage. Um schlussendlich zum gewünschten Ziel zu gelangen, ihre erste Idee auch formal zu bekräftigen, setzen sie ein weiteres Mal ihr Smartphone ein. Es muss aber hervorgehoben werden, dass die Studierenden die Aufgabe selbstständig lösen und keine Musterlösung aus dem Internet kopieren. Das Smartphone wird lediglich als Taschenrechner gebraucht.

3.4.6.2. Aufgabenstellung

Die Studierenden sollen herausfinden, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{2^n}$ konvergiert.

3.4.6.3. Analyse

Unmittelbar nachdem Flo die Angabe vorgelesen hat, äußert er den Vorschlag, die Angabe anders anzuschreiben, um sie *handhabbar* zu machen. Wenn man bedenkt, dass die Studierenden zuvor schon ein paar Aufgaben zur Konvergenz von Reihen bearbeitet haben, ist es leicht nachvollziehbar, weshalb die Phase des *Problembewusstseins Schaffens* im Vergleich zu weiter unten beschriebenen Aufgaben sehr kurz ausfällt. Sie wissen bereits, in welches große Themengebiet die Übungsaufgabe einzuordnen ist und kennen die Konvergenzkriterien für Reihen. Daher *stellt* Flo in < 1 > sogleich einen *Zugriff her*. Seine Idee ist, die Reihe in eine andere Darstellung zu bringen. In < 3 > erläutert er, wie er dabei vorgeht. Dabei notiert er folgendes: $\sum \frac{n^3 x^n}{2^n} = \sum \frac{n^3}{2^n} \cdot \sum \frac{x^n}{2^n}$. Diese Umformung ist jedoch nach den Rechenregeln für Brüche nicht korrekt. Er stellt allerdings rasch fest, dass die Art und Weise, wie er die Aufgabe *handhabbar* machen wollte, nicht legitim ist < 20 >.

1	Flo	(liest die Angabe vor) Für welche x konvergiert die Reihe ? Kann ich das, das kann ich aber aufspalten, weil das is ja nur multiplikativ zusammengesetzt.
2	Marie	Ja, also.
3	Flo	Das is ja nichts anderes wie n hoch Drei durch Zwei hoch n mal x hoch n durch Zwei hoch n (schreibt auf, was er sagt:

		$\sum \frac{n^3 x^n}{2^n} = \sum \frac{n^3}{2^n} \cdot \sum \frac{x^n}{2^n}$
4	Tina	Moment, Moment. Äh, in was spaltest du das jetzt auf?
5	Flo	Ich hab den Bruch nur aufgespalten.
6	Marie	Und das n ist beliebig aber fest. Aso, nein das n ist ja im Index. (<i>lacht</i>)
7	Flo	Nein, da muss ma nur schauen für welches x dann [für welche x das dann konvergiert, genau.]
8	Marie	[Für welches x das konvergiert.]
9	Kurt	Na konvergierts net für olle kleiner als Zwei (?)

Tina fragt in < 4 > nach, wie Flo den Term aufspalten will. Sie hat vermutlich schon erkannt, dass seine Strategie nicht zulässig ist: $\sum \frac{n^3 x^n}{2^n} \neq \sum \frac{n^3}{2^n} \cdot \sum \frac{x^n}{2^n}$. Eine weitere Mutmaßung wäre, dass Tina gerade darauf konzentriert ist, die Problematik der Angabe zu verstehen. Marie ist in < 6 > damit beschäftigt die Angabe genau zu lesen. Flo wiederholt für sie in < 7 >, welche zentrale Fragestellung dahinter steckt. Während Marie sich die *Problematik* der Aufgabe *bewusst macht*, hat Kurt in < 9 > schon die Lösung parat. Jetzt gilt es zu *klären*, welche *Handlungsstrategien* in Frage kommen. Der wesentliche Unterschied zwischen der Phase *Klärung der Handlungsoptionen*, in < 10 > oder < 11 > beispielsweise, und der *Herstellung eines Zugriffes*, vergleiche < 1 > und < 3 >, ist, dass bei letzterer Phase die Angabe verändert wird, während sie bei *Klärung der Handlungsoptionen* unverändert bleibt.

10	Tina	Mh, ich überleg. Wir könnten uns das getrennt anschauen, ob es konvergiert. Also zuerst n hoch Drei durch Zwei hoch n und dann n hoch n (<i>Pause</i>). Vielleicht sieht ma da mehr (?)
11	Kurt	Was ist, wenn ma ins Quotientenkriterium einsetzen und dann die Ungleichung lösen?

Tina überlegt in < 10 >, die Summe wie folgt aufzuspalten: $\sum \frac{n^3 x^n}{2^n} = \sum \frac{n^3}{2^n} \cdot \sum x^n$. Das wäre für sie eine mögliche *Handlungsoption*. Damit schließt sie sich Flo an, den Term in eine andere Darstellung zu bringen. Im Gegensatz zu Flos Umformung, steht ihre in keinem Widerspruch zu den Rechenregeln für Brüche. Ihr Vorschlag ist jedoch problematisch, da das Produkt von zwei (konvergenten) Reihen nicht unbedingt konvergiert (Heuser 2009, S.199). Tinas Überlegung bleibt von den anderen Studierenden zunächst unkommentiert. Kurt greift sie in < 60 > erneut auf. Kurt bringt in < 11 > eine andere *Handlungsstrategie* ein, nämlich das Quotientenkriterium.

15	Kurt	Oben steht n plus Eins, oder (?)
16	Flo	Mhm.
17	Tina	Wo steht n plus Eins? Nein, n hoch Drei.
18	Kurt	Na beim Quotientenkriterium.

Die Studierenden müssen sich erst *bewusst machen*, wie das Quotientenkriterium lautet und wie man damit hantiert. Kurt ist sich nicht mehr sicher, ob er sich richtig an das Quotientenkriterium erinnert, daher fragt er in < 15 > seine Kolleginnen und seinen Kollegen. Tina bekommt nur einen Teil mit, wodurch es zu einem Missverständnis kommt. Sie meint, es stehe n^3 statt $n + 1$, wobei sie sich auf die Angabe und nicht auf das Quotientenkriterium bezieht.

Währenddessen sind Flo und Marie, die nebeneinander sitzen, mit dem Umformen des Bruchs beschäftigt. Bei genauer Betrachtung von Flos *Zugriffs* bemerken sie den Irrtum < 23 >. Flo erkennt, dass die Umformung, wie er sie in < 3 > vorschlägt, nicht stimmt: $\sum \frac{n^3 x^n}{2^n} \neq \sum \frac{n^3}{2^n} \cdot \sum \frac{x^n}{2^n}$. Die Studierenden stellen in < 23 > fest, dass die Rechenregel, die sie im Hinterkopf hatten, folgendermaßen lautet: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$. Daraufhin radiert Flo seine bisherigen Notizen aus. Dieser Zugriff wird somit ad acta gelegt.

21	Marie	Wann spaltet man? Wann funktioniert das? Wenn oben mal steht und und unten (-)
22	Flo	Du kannst es zum Beispiel aufspalten, wenn da steht ab durch (-)
23	Marie	Nein, a plus b durch c. [Das ist dann a durch c plus b durch c]
24	Flo	[a durch c plus b durch c] (<i>schreibt gleichzeitig mit</i>)
25	Marie	Jetzt haben wirs. Unsere Aufspaltung. Was war noch mal das Quotientenkriterium?

Marie greift in < 25 > Kurts Idee auf. Sie kann sich nicht sofort an das Quotientenkriterium erinnern und fragt nach. Bevor die Studierenden mit dem Quotientenkriterium zu arbeiten beginnen, wiederholen sie dieses. Entscheidet man sich dafür, eine Definition, einen Satz oder ein Korollar zu verwenden, so fällt dies in die Kategorie *Klärung der Handlungsoptionen*. Zu dieser Phase gehört auch das Nachschlagen einer Definition beispielsweise in einem Skript, einem Fachbuch oder ähnlichem, um herauszufinden, ob diese tatsächlich für diese Problemstellung geeignet ist. So macht es Flo in < 29 >. Er schaut in seinem Skript nach, wie sie in der Vorlesung das Quotientenkriterium formuliert haben.

26	Kurt	$n, x \approx x_n$ plus a_n plus Eins durch a_n ist kleiner als Eins, oder (?) bzw. muss kleiner als q sein und q muss kleiner als Eins sein, wobei i den Sinn davon net ganz versteh, warum owa (-)
27	Marie	Aso, wir nehmen irgendein a_n , oder (?) Und schauen uns das dann an. (Pause)
28	Tina	Mach ma jetzt das Wurzel- oder das Quotientenkriterium (?) Quotienten oder (?)
29	Kurt	Das Quotientenkriterium schaut da besser aus, aber ma kann, wenn des net funktioniert, amal des Wurzel probieren. (Flo blättert in seiner Mappe bis er das Quotientenkriterium findet) [...]

In < 26 > gibt Kurt das Quotientenkriterium aus seinem Gedächtnis wieder. Er spricht zugleich an, dass er dessen Sinn nicht verstehe. Diese Aussage ist typisch für Studienanfängerinnen und -anfänger in Mathematik. Auf Grund der im ersten Teil der Arbeit beschriebenen Diskontinuität kommen den Studierenden viele Definitionen, Sätze und deren Beweise abstrakt vor. Dennoch hindert das mangelnde Verständnis die Studierenden nicht daran, diese Sätze und Korollare zu gebrauchen. Tina gibt in < 28 > zu bedenken, man könnte auch das Wurzelkriterium verwenden. Sie ist sich nicht sicher, ob das Quotientenkriterium die richtige *Wahl einer Handlungsoption* ist. Für Kurt kommt in erster Linie das Quotientenkriterium als *Lösungsstrategie* in Frage, nennt aber keine überzeugenden Argumente < 29 >.

Ebenso wie Tina ist Flo nicht von Kurts gewählter Methode überzeugt < 30 >. Sein Vorschlag wäre, den Grenzwert zu berechnen. Tina bekräftigt ihn in < 31 > darin. Kurt lehnt diesen Plan entschieden ab. Er meint in < 32 >, dass es offensichtlich sei, dass die Folge $\frac{n^3}{2^n}$ gegen Null konvergiere. Kurt scheint der Einzige der Gruppe zu sein, dem tatsächlich die *Problematik* der Aufgabenstellung *bewusst* ist. Die übrigen Studierenden haben noch nicht erfasst, dass nicht der Grenzwert der Folge der Partialsummen gesucht ist. Es geht darum, zu überprüfen, wann die Reihe konvergent ist. Hierfür eignen sich die Konvergenzkriterien, wie Kurt erkannt hat.

30	Flo	Können wir nicht einfach zeigen, wohin das konvergiert u n d dann bleibt uns sowieso nur mehr dieses x hoch n übrig(,) oder wie ist das (?)
31	Tina	Ja, das hab ich mir auch überlegt.
32	Kurt	Ja, des konvergiert gegen Null. Das sieht man ja aso.
33	Flo	Für mich konvergiert Eins durch n auch gegen Null, aber in einer Reihe ist das nicht mehr so. (Flo und Marie lachen)
34	Kurt	Ja, aber das wird trotzdem gegen Null konvergieren.
35	Marie	Wir sind nicht bei einer Folge, wir sind bei einer Reihe .
36	Kurt	Ja, aber wenn irgendwas im Exponenten steht, das ist dann so(,) das strebt dann so stark gegen Null.

Die Studierenden führen sich in < 33 > und < 35 > vor Augen, dass die Folge $\frac{1}{n}$ gegen Null strebt ($n \rightarrow \infty$). Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, die auf den ersten Blick vielleicht an die vorige Nullfolge erinnert, ist aber divergent. Kurt ist überzeugt, „wenn **irgendwas** im Exponenten steht, das ist dann so(.) das strebt dann so stark gegen Null“. Er will damit in < 36 > hervorheben, wie man bei der Grenzwertberechnung zur Folge $\frac{n^3}{2^n}$ vorgeht. Folgende Überlegungen können angestellt werden: der Nenner von $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n}$ wächst schneller als der Zähler, da im Nenner n im Exponenten steht, während im Zähler n als Basis vorkommt. Mit seinen Überlegungen *stellt* Kurt *einen Zugriff* zur Grenzwertberechnung her.

41	Kurt	Jo, angenommen du hast jetzt da einen Grenzwert .
42	Tina	Ja, ich hätt das auch so probiert.
43	Kurt	Wie bringst dann das x hoch n da da eini?

Im nächsten Schritt bemüht sich Kurt in < 41 > und < 43 >, seine Studienkolleginnen und -kollegen von ihrer vorgeschlagenen *Handlungsoption* abzubringen und sie von seiner zu *überzeugen*. Tina zeigt sich in < 45 > umgestimmt. Daraufhin willigt auch Flo in < 46 > ein, Kurts Strategie zu wählen.

45	Tina	Aber du kannst auch gleich in ein Kriterium einsetzen.
46	Flo	Ja, das könnt ihr auch machen, ich hab keine Ahnung, wies geht.
47	Tina	Hast du das offen, das Quotientenkriterium?
48	Flo	Ja, (<i>Flo gibt Tina seine Mitschrift</i>) aber es konvergiert ja nicht gegen Null.
49	Tina	(<i>liest aus der Mitschrift vor</i>) Angenommen es gibt eine Nullfolge (-)
50	Flo	(<i>rechnet</i>) Drei (...) Siebenundzwanzig(.) (...) Vier hoch Drei sind (<i>Pause</i>).

Tina möchte an Hand der Vorlesungsmitschrift *überprüfen*, ob das Quotientenkriterium geeignet ist. Sie bittet Flo in < 47 >, ihr seine Mitschrift zu überreichen. Flo wendet in < 48 > ein, dass die benötigten Bedingungen nicht erfüllt sind. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ konvergiere nicht gegen Null. Um festzustellen, ob die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ gegen Null konvergiert, wendet Flo in < 50 > *Handwerk* an. Er setzt ein paar Werte ein, um eine Idee zu bekommen, wogegen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ konvergiert. Dabei hat Flo

womöglich folgenden Satz im Hinterkopf: „Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (Forster 2013, S. 70). Erfüllt eine Folge a_n diese Bedingung, heißt das nicht, dass die entsprechende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ auf jeden Fall konvergiert. Es gilt zum Beispiel: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert allerdings.

Kurt ist ähnlich wie Flo vorgegangen, nur hat er sein Smartphone zu Hilfe genommen, um sich einen *Zugriff* zum Grenzwert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ zu verschaffen < 57 >. Ableitinger und Herrmann kommen in ihrem Modell der Teilphasen nicht auf die Verwendung von Computer, Taschenrechner, Smartphones oder Tablets im Lösungsprozess zu sprechen. Dies lässt sich vielleicht einerseits damit erklären, dass ein digitales Skript aus dem Internet ähnliche Zwecke bei der Bearbeitung von Übungsaufgaben erfüllt wie ein selbstgeschriebenes Skript oder ein einschlägiges Fachbuch. Um einen Rechner jeglicher Art sinnvoll einzusetzen, bedarf es des dafür notwendigen mathematischen Know-hows. Insofern macht es keinen Unterschied im Lösungsprozess, ob man im Kopf rechnet oder ein Smartphone beispielsweise als Rechner benutzt. Ausschlaggebend ist vor allem, dass die Studierenden ihr Tablet, Smartphone oder ihren Computer als Rechner oder zur Darstellung von Graphen gebrauchen, den Lösungsprozess aber aktiv gestalten und nicht die vorgerechnete Aufgabe aus dem Internet abschreiben. Der Computer bzw. das Smartphone wird dafür genutzt, einen der Teilprozesse in Gang zu setzen. Technische Hilfsmittel leiten Teilphasen ein, sind aber keine eigenen Teilprozesse, wie an diesem Beispiel zu sehen ist.

57	Kurt	Das konvergiert gegen Sechszwanzig(,) beim Quotiententest.
58	Flo	Ernsthaft (?)
59	Tina	Hast du das in Wolfram Alpha eingegeben?
60	Kurt	Ja. <i>(lacht, zeigt den anderen, was er im Handy eingegeben hat)</i> Ich hab das x hoch n jetzt weggelassen, um zu zeigen, dass das sicher konvergiert. Ich probier das amal mit Eins Komma Neunundneunzig durch n, weil ich glaub, dass das einfach nur kleiner als Zwei sein muss. <i>(tippt in sein Handy)</i> Ja, also mit Eins Komma Neunundneunzig funktioniert noch.
61	Tina	Probiers mal mit Zwei (?)
62	Kurt	Na mit Zwei wird's nicht funktionieren, weil da kannst kürzen, oder (?). Zwei hoch n durch Zwei hoch n ist dann n zur Dritten. Aber es wird einfach, wenns im Exponenten ist, s o stark is, wirds mit olle x kleiner als Zwei funktionieren.

Kurt *schafft* einen *Zugriff*, indem er den Grenzwert von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ berechnet < 60 >. Einen *Zugriff herzustellen* bzw. die *Aufgabe handhabbar* zu machen bedeutet, die harte Schale der Aufgabe zu knacken. Diese Phase hat einen öffnenden Charakter. Um die Summe zu berechnen, verwendet er die Software Wolfram Alpha auf seinem Smartphone als *Handwerk* < 59 >. Das Ergebnis lautet $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = 26$. Seine Überlegung ist, dass die Reihe für alle $x < 2$ konvergiert < 60 >. Da an Hand der Videoaufzeichnungen nicht ersichtlich ist, was Kurt in das Programm eingegeben hat, bleibt ungeklärt, wie er zu diesem Schluss kommt. Zur Prüfung seiner Aussage setzt Kurt 1,99 für x ein < 60 >. Kurt begründet in < 62 > seine Entscheidung, dass x nicht 2 sein kann, folgendermaßen: „Na mit Zwei wird's nicht funktionieren, weil da kannst kürzen, oder (?).“ Er ist überzeugt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{2^n}$ konvergiert, wenn x ein Element der reellen Zahlen kleiner als 2 ist. Allerdings ist im Nachhinein aus dem Videomaterial nicht nachvollziehbar, auf Grundlage welcher Tatsache er zu der Überlegung kommt, dass $x < 2$ sein muss und nicht $x > 2$ sein darf, damit die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{2^n}$ konvergiert.

Für die Studierenden ist die *Aufgabe* nun *zugänglicher*. Jetzt müssen sie einen Weg finden, wie sie ihre Vermutung beweisen können. Marie ist der Meinung, dass es für einen Beweis nicht reiche, verschiedene Beispiele mit dem Computer zu berechnen. Dies bringt sie in < 65 > zum Ausdruck.

65	Marie	Aber ich glaub halt nicht, dass ma das nicht wirklich sagen darf: ich hab das in einen Computer eingegeben.
66	Kurt	Jo, des is ma scho klar(,) oba i mein, ich hab nur geschaut, in welche Richtung wir gehen müssen.
67	Flo	Das heißt x muss immer kleiner sein als Zwei.
68	Tina	Also mit dem Konvergenzkriterium würden wir dann wahrscheinlich ans Ziel kommen, oder (?) Würd i jetzt sagen(,) mit dem Quotientenkriterium.
69	Flo	Wenn das größer als Zwei (-)
70	Kurt	Was?
71	Flo	Was is, wenn x größer als Zwei is?
72	Kurt	Ja, dann konvergierts net, weil schau da einfach des an (<i>zeigt auf Flos Block</i>), dann konvergiert net amol die Folge (<i>längere Pause</i>)
73	Flo	Und wie funktioniert jetzt der Beweis?

In < 66 > stimmt Kurt Marie zu, dass dies noch nicht die Lösung sei, aber sie bereits einen guten Ansatz dafür gefunden haben. Flo wiederholt in < 66 > als

begleitenden Kommentar ihre Annahme, dass die Reihe vermutlich für alle x kleiner Zwei konvergiert. Tina greift in < 68 > den Vorschlag, das Quotientenkriterium zu verwenden, erneut auf. Die Gruppe steckt noch mitten in der Phase der *Klärung der Handlungsoptionen*. Es tauchen immer wieder dieselben Vorschläge auf. Sie haben sich aber noch nicht auf eine bestimmte Methode geeinigt. Bevor die Studierenden ein Konvergenzkriterium wählen, mit dem sie weiterarbeiten, erkundigt sich Flo in < 71 >, was passiere, wenn x größer als Zwei sei. Kurt argumentiert in < 72 > mit der Divergenz der Folge $\frac{n^3 x^n}{2^n}$, wenn $n > 2$. Er erkennt richtigerweise, dass eine Reihe $\sum a_n$ divergiert, wenn die Folge (s_n) divergent ist, wobei $s_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Flos Aussage in < 73 > – „Und wie funktioniert jetzt der Beweis?“ – leitet den formalen Beweis ein. Diese Frage strukturiert den Aufbau ihres Lösungsprozesses, da somit allen Beteiligten klar ist, dass sie sich dem Beweis zuwenden. Insofern hat sie die Funktion eines *strukturierenden Kommentars*. Marie wählt, ohne mit den Kolleginnen und Kollegen darüber zu diskutieren, das Wurzelkriterium als *Handlungsoption* < 75 >.

75	Marie	Also ich hab das gemacht, aber ich weiß nicht, obs stimmt. (<i>gibt Flo ihren Block</i>) Außerdem find ich das seltsam, dass da (-) (<i>Flo und Kurt schauen sich Maries Rechnung an</i>)
76	Kurt	Ja, schon sehr seltsam. (<i>Pause</i>) Also ich glaub nicht, dass ma mit dem [Quotientenkriterium] weiterkommt, i waß net.
77	Flo	[Wurzelkriterium] (...) n-te Wurzel aus n der Dritten kleiner als Eins, dann hast du das aufgelöst. (...)
78	Marie	Kann man schauen, wonach die n-te Wurzel von n hoch Drei konvergiert?
79	Kurt	Mh. (<i>nimmt Handy in die Hand, längere Pause</i>)

35) für welche x konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n$$

Wurzelkriterium

fragen

$$\left\{ \begin{array}{l} |a_n|^{1/n} \leq \theta < 1 \quad \forall n \geq n_0 \\ \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n} \cdot x^n}{2^n}} < 1 \\ \frac{\sqrt[n]{n}}{2} < 1 \\ \sqrt[n]{n} < 2 \\ x < \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \end{array} \right.$$

Quotiententest

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta < 1$$

Abb.5 Aufgabe 35 Marie

Marie hat die gegebene Reihe in das Wurzelkriterium eingesetzt, wie obiger Abbildung zu entnehmen ist. Dies war für sie keine Herausforderung, deshalb man von der Phase *Handwerk* sprechen kann. Bei der letzten Umformung der Ungleichung angelangt, bittet sie Kurt in < 78 >, den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3}$ mit Hilfe von Wolfram Alpha zu berechnen. Während Kurt versucht, den Ausdruck in sein Smartphone zu tippen, stellen Flo und er Überlegungen an, wogegen die Folge konvergiert. Flo vermutet in < 86 >, dass sie gegen Null konvergiert, wenn n gegen Unendlich strebt. Kurt ist überzeugt, dass der Limes Eins beträgt < 87 >. Zur Lösung dieser Problematik stellt Kurt einen Zugriff her, indem er sich auf eine bereits gelöste Aufgabe beruft, nämlich genau auf $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3} = 1$.

86	Flo	Ich hätt gesagt, das konvergiert gegen Null, weil das geht ja gegen Null oder, weil dann is da ein Unendlich größer (...)
87	Kurt	Na ich würd sagen, das konvergiert gegen Eins.
88	Flo	Voll (!) Stimmt, weil das da konvergiert gegen Null und eine Zahl hoch Null ist ja immer Eins.
89	Marie	Ah, ok und Zwei durch Eins.
90	Kurt	Na, owa des derf ma glaub i net so sagen.
91	Marie	Wirklich (?) verdammt. Es wär aber sehr praktisch.
92	Kurt	Irgendwo hab ich gelesen, dass (Pause) na dass(.) wir ham ja grad bewiesen auf den vorigen Zeddl, dass die n-te Wurzel aus n hoch Drei gegen Eins konvergiert.

Marie übernimmt in < 89 > Kurts Lösung $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3} = 1$ und folgert daraus: $x < \frac{2}{1}$. Kurt bremst sie sogleich ein, dass diese Schlussfolgerung nicht zulässig ist < 90 >. Nun gilt es ab < 96 > eine neu aufgetauchte Problematik zu diskutieren: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = ?$

94	Kurt	Na, die n-te Wurzel aus n hoch Drei, owa da war dann irgendwas glaub i, dass ma so was net machen derf, (Pause) weil gleichzeitig ändert sie ja a der(,) (Pause) des was unten steht. Zum Beispiel (-)
95	Flo	Aber du musst ja ein unendlich großes n nehmen. Da steht dann Unendlich hoch Drei durch Unendlich. [...]
96	Kurt	Na, da is dann irgendwas gestanden, was eben net geht, halt das net konvergiert. Des ma aber genauso aufschreiben kann. Ma kann ja zum Beispiel n hoch n in Klammer hoch Eins durch n.
97	Marie	Das is dann n(,) n hoch n hoch Eins durch n ist n.
98	Kurt	Na aber wenn ma rein der Argumentation folgt, dann kann ma zum Beispiel schreiben (-)
99	Flo	Willst einen Bleistift (?) (streckt Kurt einen Bleistift entgegen)
100	Kurt	n hoch n. Ja, bitte n hoch n hoch Eins durch n. Das konvergiert gegen Null also muss das Eins sein. (Pause)
101	Marie	Aber ich mein, Eins durch n mal n.
102	Flo	Stimmt aber oder (?)
103	Kurt	Na stimmt net, weil n hoch n. Das konvergiert einfach nur gegen n beziehungsweise ist n.

Kurt stellt einen Zugriff her, indem er sich an eine frühere Diskussion rund um die Konvergenz von $\sqrt[n]{n^n}$ erinnert. Schlussendlich kommen sie auf zwei mögliche Lösungen: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{n \cdot \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^1 = n$ oder 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{n \cdot \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^0 = n$. Bei beiden Überlegungen vergessen die Studierenden, dass n in einem letzten Schritt gegen Unendlich strebt. Die korrekte Lösung lautet: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \infty$. Die zweite Lösungsvariante der Lernenden ist jedoch nicht zulässig, da alle Grenzwertübergänge immer gleichzeitig durchgeführt werden müssen. Da sie auf keinen grünen Zweig kommen, verwerfen sie die Handlungsoption Wurzelkriterium und wenden sich dem Quotientenkriterium zu. Eigentlich wären die Studierenden an dieser Stelle schon fertig. Die Aufgabe ist bereits gelöst, da sie gezeigt haben, dass $\sqrt[n]{\frac{n^3 x^n}{2^n}} \rightarrow \frac{x}{2}$, wenn $n \rightarrow \infty$. Aus dieser Überlegung lässt sich folgern, dass $|x| < 2$ gelten muss, damit nach dem Wurzelkriterium $\left| \frac{x}{2} \right| < q$ mit $0 < q < 1$ und die Reihe (absolut) konvergent ist.

Da die Studierenden nicht erkennen, dass die Aufgabe gelöst ist, wählen sie das Quotientenkriterium als weitere *Lösungsstrategie*. Mit dieser Handlungsoption kommen die Studierenden erneut ans Ziel.

105 | Marie | Egal, ich versuchs mal mit dem **Quotiententest**. (Pause)

Nachdem Kurt Bedenken bei der Lösung mit dem Wurzelkriterium geäußert hat, setzt Marie die gegebene Reihe in das Quotientenkriterium ein < 105 >. Tina, die neben Marie sitzt, schaut ihr zu, kann aber zunächst nicht viel mit dem Kriterium anfangen. Aus diesem Grund erkundigt sie sich in < 110 > bei Marie, wie es anzuwenden ist. Marie erklärt es ihr in < 111 >. Während das Einsetzen der Reihe in das Quotientenkriterium Tina Schwierigkeiten bereitet, bedeutet es für Marie eine einfache *Anwendung von Handwerk*. Flo ist sich nicht mehr sicher, wie das Quotientenkriterium lautet < 116 >.

110	Tina	Ich versteh grad nicht, wie das Quotientenkriterium funktionieren soll (?)
111	Marie	Ich weiß nicht, ob ichs richtig mach, aber ich hab einfach in den Nenner n durch n plus Eins ersetzt und eben im Zähler hab ich (-)
112	Tina	Genau du musst zeigen, dass das kleiner Null ist.
113	Marie	Ja, und jetzt würd ich mal sagen, kann man das kürzen.
114	Tina	Du hast das mal ausmultiplizieren, oder (?)
115	Marie	Ja, das (-)
116	Flo	Warte, du gibst's in den Zähler (-) Was gibst du in den Zähler, was gibst du in den Nenner? Noch mal.
117	Marie	$a_{n+1} a_n$.
118	Flo	Aso, ja ok ok ok.
119	Tina	Und jetzt löst(,) also schaust du dir den Doppelbruch wieder an, oder (?) Dann tust du da kürzen aber der Zweier bleibt, oder (?)

Das Auflösen des Doppelbruchs und Kürzen fällt ebenso wie das Umformen der Ungleichung oder das Aufsuchen des Grenzwertes in die Teilphase *Anwendung von Handwerk*. In den Zeilen < 111 > bis < 140 > tritt vermehrt der *Gebrauch von Handwerk* auf. Zuerst setzen die Studierenden die Reihe in das Quotientenkriterium ein. An dieser Stelle ist anzumerken, dass Tina in < 112 > davon spricht, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 0$ sein soll. Da liegt ein Irrtum vor. Das Quotientenkriterium besagt, dass eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, wenn es ein q mit $0 < q < 1$ gibt, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$ für fast alle n , wobei $a_n \neq 0$ für fast alle n . Für die Studierenden drängt

sich in < 124 > bzw. < 125 > die Frage auf, ob der Quotient tatsächlich kleiner als Eins ist.

124	Marie	(Marie und Tina rechnen, Marie schreibt und spricht leise mit) (...) Ein mal n mal x Halbe. Das muss kleiner als Eins sein, oder (?)
125	Kurt	Es muss ab einem bestimmten n kleiner als Eins sein, aber das is ja net, oder (?)
126	Marie	Aber ich mein, hier würd ich dann wieder zu x ist kleiner als Zwei mal n hoch Drei durch n plus Eins hoch Drei ham ($x < \frac{2n^3}{(n+1)^3}$). Und dann würd ich wieder schauen, dass das n gegen Unendlich geht.
127	Tina	Moment, was hast du jetzt gemacht?
128	Flo	Das umgedreht, nach x aufgelöst. Und wenn das n gegen Unendlich geht, dann geht's irgendwann gegen Null wieder, oder (?)
129	Marie	Aber ich würd sagen, n hoch Drei und n plus Eins hoch Drei dürften ziemlich das gleiche sein, also es dürfte gegen Eins gehen.

Um herauszufinden, welche Werte x annehmen kann, damit die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{2^n}$ konvergiert, ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(n+1)^3}$ zu berechnen, schlägt Marie in < 126 > vor. Flo und Marie kommen auf unterschiedliche Lösungen. Während Flo meint, der Term konvergiere gegen Null < 128 >, ist Marie überzeugt, dass er gegen Eins strebt < 129 >. Marie macht das Aufsuchen des Grenzwertes *handhabbar*, indem sie den Term getrennt anschreibt < 135 > und ausmultipliziert < 137 >. Den Grenzwert erhält sie, indem sie Zähler und Nenner durch die höchste vorkommende Potenz von n dividiert. Der letzte Schritt, die Berechnung des Grenzwertes, war für die Studierenden zu Beginn des Semesters noch ein *Trick*, inzwischen gehört er zu ihrem Repertoire an *Handwerk*.

132	Kurt	Jetzt kann man sagen, glaub i, dass des gegen Eins konvergiert.
133	Tina	Das kann ma einfach so sagen?
134	Kurt	Das weiß ma. Da kannst ja den Limes von n plus Eins zur Dritten durch n zur Dritten konvergiert gegen Eins.
135	Marie	Der Limes von n hoch Drei durch n plus Eins hoch Drei (schreibt, was sie sagt).
136	Flo	Das würd ich sogar verstehen.
137	Marie	Ich weiß nicht, soll ich auflösen (?)
138	Flo	Ja, (...) beziehungsweise es steht irgendwas mit n zur Dritten.
139	Marie	n hoch Drei durch n hoch Drei plus Drei n hoch Drei durch Drei n hoch Drei plus was weiß ich was, aber es immer kleiner als n hoch Drei und wenn wir jetzt durch (-)
140	Flo	Wenn du jetzt durch das Höchste durchpotenzierst, dann hast du n hoch Drei, ok.
141	Marie	Eins durch Eins plus irgendwas.

Abschließend kommt Marie in < 145 > noch einmal auf das Wurzelkriterium zu sprechen. Die Gruppe ist mit der Lösung an Hand des Quotientenkriteriums so zufrieden, dass sie es dabei bleiben lässt.

145	Marie	Bei dem Wurzelkriterium haben wir auch etwas wo das n gegen Unendlich geht, aber das scheint hier nicht sein zu dürfen laut Kurt.
146	Kurt	Ja, i glaub, wir müssatn uns des konkret nu amoi ausrechnen und (-)
147	Tina	Na mir passt das Quotientenkriterium. [...]
148	Flo	Jetzt versteh ich dieses Kriterium auch. <i>(Tina und Flo schreiben von Marie ab)</i>
149	Marie	Ich weiß nicht, ob ichs ganz richtig hab, aber es kommt was Schönes raus.
150	Kurt	I glaub, es is mathematisch net Hundertprozentig korrekt, aber es steht ja ah net beweise oder so was, es steht ja nur für welche . Ich glaub, da kann ma schon ein bissl schlampig sein.

Die Studierenden sind sich einig, dass sie die Aufgabe als gelöst betrachten, allerdings gibt es Zweifel, ob die Lösung den Ansprüchen der Hochschulmathematik genügt. Dies bringen Marie und Kurt in < 149 > bzw. < 150 > zum Ausdruck. Ihre Unsicherheit spiegelt ein unvollständiges *Problembewusstsein* wider. Sie sind sich nicht sicher, ob sie alles gezeigt haben, was bei der Aufgabe zu zeigen ist.

3.4.6.4. Synthese

Der Lösungsprozess der Aufgabe 35 ist geprägt durch den Einsatz des Smartphones als erweiterter Taschenrechner, um die *Aufgabe handhabbar* zu machen. Dies unterscheidet diese Aufgabe von den anderen. Andererseits gleicht diese Aufgabe insofern nicht den übrigen Aufgaben zur (absoluten) Konvergenz von

Reihen, da nicht überprüft werden soll, ob die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{2^n}$ (absolut) konvergiert,

sondern für welche x aus den reellen Zahlen sie konvergiert. Die Studierenden führen sich dies in einem ersten Schritt vor Augen. Herauszufinden, was tatsächlich bei der Aufgabenstellung gefragt ist, zählt zur Teilphase *Problembewusstsein Schaffen*. Dieser Abschnitt ist zunächst nur von kurzer Dauer. Unmittelbar nach dem ersten Lesen der Angabe *präsentiert* Flo in < 1 > eine *Handlungsoption*. Es stellt sich heraus, dass dies zu schnell passiert, noch bevor er sich *bewusst* gemacht hat, dass

nicht der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{2^n}$ berechnet werden soll. Stattdessen soll

nachgewiesen werden, für welche x aus den reellen Zahlen die gegebene Reihe konvergiert. Kurt verrät in < 9 > die Lösung, hat aber keine Erklärung dafür parat, wie er darauf kommt. Es bleibt unklar, ob Kurt sich zuvor bereits mit der Angabe beschäftigt hat, oder ob er erraten hat, dass x kleiner als Zwei sein muss. Kurt ist danach mit der Klärung der Handlungsoptionen beschäftigt (< 11 > bis < 29 >). Er plädiert für die Verwendung des Quotientenkriteriums. Währenddessen versuchen die Studierenden durch einen Darstellungswechsel einen *Zugriff herzustellen*. Um die Aufgabe *handhabbarer* zu machen, setzt Kurt sein Handy ein < 60 >. Er liefert der Gruppe somit einen Anhaltspunkt, was zu zeigen ist. Marie versucht es ab < 75 > mit dem Wurzelkriterium. Bereits bei der Lösung angekommen ($\sqrt[n]{\frac{n^3 x^n}{2^n}} \rightarrow \frac{x}{2}, (n \rightarrow \infty)$) *verwirft* sie in < 105 > diese *Handlungsstrategie* wieder und greift das Quotientenkriterium auf, das Kurt bereits zu Beginn als *Lösungsmethode* vorgeschlagen hat. Dieses Kriterium erweist sich als zielführende Handlungsoption. Die Studierenden wenden von Zeile < 111 > bis < 140 > *Handwerk* an und erhalten die Ungleichung $|x| < 2$. Dieses Ergebnis stimmt mit ihrer Vermutung überein. Trotzdem sind sie sich nicht sicher, ob sie alles gezeigt haben, was die Angabe verlangt. Dies fällt unter die Kategorie *Problembewusstsein*. Diese impliziert nicht nur das Verständnis der Problematik, was gezeigt werden soll, sondern auch den rückblickenden Aspekt, ob die Problemstellung vollkommen gelöst wurde.

3.4.7. Konvergenz einer Reihe (Aufgabe 36)

3.4.7.1. Ausgangslage

Die Studierenden sollen den Wert der Summe einer Reihe bestimmen, wobei sie den Grenzwert einer anderen Reihe gegeben haben.

Drei Studierende begeben sich zu Beginn des vorliegenden Transkripts auf die Suche nach möglichen Lösungsansätzen, indem sie sich in Erinnerung rufen, was sie zu diesem Kapitel in der Vorlesung gehört bzw. wie sie ähnliche Aufgaben bereits gelöst haben. Eine vierte Studentin gesellt sich im Laufe des Gesprächs zur Gruppe dazu. Nach einigen Überlegungen, die sie nicht weiterbringen, gelangt das Team schließlich zur Lösung. Die Videoaufzeichnung gibt Einblick in ihren Arbeitsstil,

der einen unsicheren Charakter hat, da sie anfangs nicht wissen, wie man den Grenzwert einer unendlichen Reihe berechnet. Des Weiteren zeigt das Transkript, dass der Ablauf der einzelnen Phasen des Aufgabenlösungsprozesses keineswegs starr ist, sondern in vielen Varianten zum Vorschein kommt. Immer wieder müssen die Studierenden ihre bereits gefundenen Handlungsoptionen verwerfen und nach neuen Lösungsstrategien suchen, das heißt, sie befinden sich vermehrt im Teilprozess der *Klärung der Handlungsoptionen*.

3.4.7.2. Aufgabenstellung

Die Studierenden sollen zeigen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$, wenn man bereits weiß, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Es wird explizit von den Studierenden gefordert, anzugeben, welche Sätze sie beim Lösen verwendet haben.

3.4.7.3. Analyse

Um einen möglichen Lösungsweg zu finden, gilt es zuerst einmal zu klären, wo der Knackpunkt der Aufgabe liegt. Die Studierenden scheinen sich zu fragen, welche Anhaltspunkte es gibt. Marie erkennt in < 1 > richtigerweise, dass es sich bei $(2n + 1)^2$ um die ungeraden Quadratzahlen handelt.

1	Marie	Aber ich mein, man sieht ja, dass es hier (<i>zeigt mit dem Stift auf die Angabe</i>) nur um die ungeraden Quadrate geht. Vielleicht können wir damit etwas a n fangen.
2	Flo	N n nein. (<i>Pause</i>) Oja. (<i>längere Pause</i>)
3	Hanna	Schau ma mal, was ham ma da für Sätze überhaupt. (<i>blättert in ihrer Mitschrift, längere Pause</i>)

Diese Erkenntnis ist wesentlich für die endgültige Lösungsstrategie, jedoch geht die Gruppe zu Beginn nicht näher darauf ein. Die Studierenden versuchen zunächst einmal Ideen zu sammeln, wie sie an die Aufgabe herangehen können. Dabei stellt Hanna in < 3 > die Frage, welche Sätze für diese Aufgabe eventuell relevant sind. Diese Frage ist typisch für die Phase *Klärung der Handlungsoptionen*. Es gilt zu klären, welche Sätze, Definitionen und Korollare bei der Aufgabe eine Rolle

spielen könnten. Allerdings beantwortet Hannas Frage niemand. Erst zu einem späteren Zeitpunkt < 26 > schlägt Flo in seiner Mitschrift nach und schaut, welche Sätze zu diesem Themengebiet notiert wurden.

Die Studierenden erkennen anfangs nicht, inwiefern Maries Aussage < 1 > von Bedeutung ist. Sie *entscheiden* sich für die *Option*, die Reihe aufzuspalten, wie sie es bei den Grenzwertberechnungen von Folgen gemacht haben. Hannas Idee ist, den Bruch $\frac{1}{4n^2+4n+1}$ in eine andere Darstellung zu bringen, um die *Aufgabe handhabbar zu machen*. Ihre Umformung lautet: $\frac{1}{4n^2+4n+1} = \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{1}$. Dieser Umformungsschritt ist nicht erlaubt, wie Marie in < 11 > bemerkt. Flo stimmt Marie in < 18 > zu. Danach liefert er in < 22 > einen weiteren Vorschlag, *einen Zugriff zu schaffen*. Er hat die Idee, sich die Folge $\frac{1}{(2n+1)^2}$ an Hand von ein paar konkreten Werten zu veranschaulichen, doch setzt er dies erst zu einem späteren Zeitpunkt < 75 > um.

22	Flo	Machen wir das so. a_n ist die Folge mal Zwei n plus Eins Quadrat ohne Summen einmal.
23	Marie	Ok.
24	Flo	U n d, ach Gott, und jetzt kann ma (-) (<i>längere Pause</i>) Was ist denn da das Thema überhaupt?
25	Marie	(<i>liest die Überschrift des Kapitels der Übungsaufgaben vor</i>) Konvergenzkriterien für Reihen. Paragraph Vier.
26	Flo	(<i>blättert in seiner Mitschrift</i>) Das waren dann die Konvergenztests, das Majorantenkriterium. Das war dann hier irgendwo. Da hatten wir einen Satz. Kautschiprodukt. (<i>sic, veränderte Aussprache von „Cauchyprodukt“</i>)

Dieser *Zugriff* hilft ihnen im Lösungsprozess jedoch nicht weiter. Die Studierenden begeben sich daher auf die *Suche nach erfolgreicheren Handlungsoptionen*. Ihre nächste Überlegung ist die Verwendung eines Konvergenztests. Auf diese Idee kommen sie, nachdem sie sich mit der Frage auseinandergesetzt haben, zu welchem Kapitel die Aufgabe gehört. In < 24 > fragt Flo, zu welchem Thema die Aufgabe gestellt wurde. Marie beantwortet ihm die Frage, indem sie die Überschrift des Kapitels vom Angabenzettel vorliest. Flos Frage lässt sich eindeutig zu *Problembewusstsein schaffen* zuordnen. Die Studierenden stellen die grundsätzliche Überlegung an, in welches große Themengebiet die Aufgabe einzureihen ist. Selbstverständlich ist klar, dass es sich um eine Analysis-Aufgabe handelt, die sie als entsprechende Übungsaufgabe vor sich haben. Es ist

auch leicht herauszufinden, welchem Thema die Aufgabe untergeordnet ist, da die Übungsbeispiele durch Überschriften in Kapitel eingeteilt sind. Die zur Aufgabe dazugehörige Überschrift lautet „Konvergenzkriterien für Reihen“. Überschriften sind sicherlich hilfreich, damit die Studierenden die Aufgaben besser den entsprechenden Aussagen im Skript zuordnen können, jedoch können sie auch irreführend sein, wie bei dem aufgezeichneten Gespräch zu erkennen ist. Die Überschrift „Konvergenzkriterien für Reihen“ suggeriert für die Studierenden, dass sie hier mit Konvergenzkriterien arbeiten müssen. Zu diesem Kapitel findet Flo in seiner Mitschrift nämlich eine Sammlung von Konvergenztests. Sowohl Flo als auch Hanna glauben, eines der Konvergenzkriterien wählen zu müssen, wie < 26 > und < 29 > zu entnehmen ist.

29	Hanna	I glaub, dass mitm Majorantenkriterium geht, weil beim M a j(.) Majorantenkriterium hat man c_n ist größer gleich Null. Unser c_n könnte ja die Summe sein, was ma da oben angegeben ham, wo ma schon wissen, dass es konvergiert und die Summe is sicher größer als die Summe, was ma zeigen müssen.
30	Marie	Aber mit dem Majorantenkriterium (?)
31	Flo	Da zeigt ma, obs konvergiert.
32	Hanna	Na, des sagt ma, obs absolut konvergiert. Aber jede Reihe, die was absolut konvergiert, konvergiert ja sowieso.
33	Flo	Ja, aber wir müssen zeigen, dass es nach, nach Dreiviertel, nach dem konvergiert. (zeigt mit dem Finger auf $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6}$ in der Angabe)
34	Marie	Also ich hätte auch gedacht, dass wir das ausrechnen (?müssen?). Ich weiß nicht, aber wie haben wir das immer herausgefunden?
35	Flo	Ob es konvergiert oder nicht (?)
36	Marie	Nein, wohin es konvergiert.

Nachdem die Studierenden mit der ersten *Option*, der Zerlegung der Reihe, nicht weitergekommen sind, *verwerfen* sie ihre erste Lösungsstrategie und wählen eine neue Handlungsoption, nämlich die Verwendung eines Konvergenztests. Wie schon zuvor sind sie wieder auf der *Suche nach der richtigen Strategie*, die sie weiterbringt. Allerdings führt auch diese Wahl in eine Sackgasse. Hanna erkennt in < 32 > richtigerweise, dass das Majorantenkriterium Aussagen über die absolute Konvergenz liefern kann. Des Weiteren erinnert sie sich in < 32 >, dass jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Ihrer Überlegung liegt jedoch die Fehlvorstellung zu Grunde, dass hier die Konvergenz bewiesen werden soll. Hanna hat die Aufgabenstellung noch nicht zur Gänze verstanden. Flo und Marie hingegen haben bereits erkannt, dass nicht die Konvergenz gezeigt, sondern der Grenzwert

berechnet werden soll, wie sie in < 33 > und < 34 > zum Ausdruck bringen. Marie stellt in < 34 > explizit die Frage: „Ich weiß nicht, aber wie haben wir das immer herausgefunden?“ Sie will von den anderen wissen, wie sie bis jetzt Grenzwerte von Reihen berechnet haben. Flo versteht sie nicht ganz und fragt nach: „Ob es konvergiert oder nicht?“ Marie streicht infolgedessen in < 36 > hervor: „Nein, **wohin** es konvergiert.“ Ihre Frage, wie sie bis dahin die Summe einer unendlichen Reihe berechnet haben, spiegelt die zentrale Fragestellung der Aufgabe wider. Die Studentin *sucht nach Handlungsoptionen* und streicht gleichzeitig die Problemstellung der Angabe hervor. Es ist nachzurechnen, dass der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ wie angegeben $\frac{\pi^2}{8}$ ist. Insofern lässt sich ihre Aussage auch dem *Problembewusstsein Schaffen* zuordnen.

Flo und Marie versuchen sich anschließend in < 37 > bis < 48 > zu erinnern, wie Grenzwerte einer Reihe in der Übung bzw. Vorlesung berechnet wurden. Bei der Betrachtung der transkribierten Gespräche von den Lösungsversuchen der Analysis-Aufgaben fällt auf, dass sich die Studierenden immer wieder bereits Gelerntes und Erprobtes ins Gedächtnis rufen, da sie die Aufgaben auf ähnliche Art und Weise lösen wollen. Überlegungen zu möglichen Lösungsstrategien fallen in die Kategorie *Klärung von Handlungsoptionen*.

Weiterhin steht noch nicht fest, welche Handlungsstrategie die beste ist. Alle bisherigen Einfälle wurden verworfen, neue Gedankengänge werden angestellt. Flo fragt sich, ob es sich um eine Exponentialfunktion < 49 > bis < 52 > handelt, Marie schlägt das Cauchy-Kriterium < 56 > vor, während Hanna der Meinung ist, mit Hilfe von Partialsummen zur Lösung zu gelangen < 59 >. Es ist interessant, dass Flo in < 49 > die „Exponentialfunktion“ anspricht. Seine Querverbindung kann dahingehend interpretiert werden, dass er an die Exponentialreihe denkt und die gegebene Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$ mit der Exponentialreihe $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ vergleicht, wobei er $x = 1$ wählt: $\exp(1) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots$. Die Exponentialreihe ist nämlich für jedes x aus den reellen Zahlen absolut konvergent (Forster 2013, S. 83). Marie merkt in < 52 > an, dass das „n in der Basis und nicht im Exponenten“ steht, woraufhin Flo seine Überlegung fallen lässt.

49	Flo	Warte, ist das hier eigentlich eine Exponentialfunktion? Nein, ist es nicht. Doch. (längere Pause)
50	Marie	Aber (-)
51	Flo	Oder (?) Weil es ist ja ein Exponent.
52	Marie	Aber unser n ist in der Basis und nicht im Exponenten (zeigt gleichzeitig mit ihrem Stift auf das n in der Angabe)
53	Flo	Aso (!) (längere Pause, Flo blättert in seiner Mitschrift)
54	Marie	Das ist keine alternierende Reihe, verdammt. (längere Pause)
55	Flo	Wir sind nach dem ersten Beispiel schon am Verzweifeln.
56	Marie	Wie immer (lacht). Vielleicht das Cauchy -Kriterium (?) Der Cauchy ist doch immer gern gesehen.
57	Hanna	Beim Cauchy-Kriterium, das sagt da, dass es konvergiert, aber da findest net den Grenzwert heraus.
58	Marie	Aber es war doch irgendwann mal etwas von wegen: das kann einem dann helfen.
59	Hanna	Was is, wenn ma die Partialsummen machen. Das zeigt uns oft den Grenzwert, meistens. Glaub i zumindest. (längere Pause, Flo blättert in seiner Mitschrift, Tina kommt zur Gruppe dazu, begrüßt die anderen, nimmt sich einen Sessel und setzt sich zu den anderen an den Tisch, die Gruppe plaudert über ihre Übungsgruppen) [...] Also die ganzen Kriterien, was ma glernt ham, bringen uns nix, weil die sagen nur, obs konvergiert oder net, aber net gegen wos.

Schließlich legen die Studierenden ihre Vorschläge ad acta, da ihnen bewusst wird, dass sie mit den Konvergenzkriterien nicht ans Ziel gelangen < 60 >. Auf der Suche nach geeigneten Handlungsstrategien ist es auch wichtig, zu erkennen, welche Strategien den Lösungsprozess nicht vorantreiben. Insofern markiert die Erkenntnis, dass die Konvergenzkriterien keine zielführenden Handlungsoptionen sind, einen essentiellen Schritt im Lösungsprozess. Da die bisher gefundenen *Lösungsansätze* die Studierenden nicht weitergebracht haben, werden sie *verworfen*. Der Vorgang zur *Klärung der Handlungsoptionen* ist somit noch nicht abgeschlossen. Marie beleuchtet in Zeile < 74 > von Neuem die Angabe. Sie versucht einen *Zugriff*

herzustellen, indem sie auf die bereits bekannte Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ verweist. Sie meint, diese Information sei womöglich wichtig, um im Lösungsprozess voranzuschreiten.

74	Marie	Aber irgendwie müssen wir doch verwenden können, dass wir die eine Konvergenz kennen. (längere Pause)
----	-------	---

Die Studierendengruppe kann noch immer wenig mit der Angabe anfangen, deshalb kommt Flo auf die Idee, sich die Reihe zu veranschaulichen, indem er die

ersten paar Werte einsetzt $\langle 75 \rangle$ bis $\langle 90 \rangle$. Flo setzt für n in $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ beginnend bei 1 Zahlen ein und erhält: $\frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \frac{1}{81}, \frac{1}{121}$, usw. Im Folgenden stellt sich heraus, dass sie mit konkreten Zahlen mehr anfangen können. Die Aufgabe wird ihnen dadurch *handhabbar*. Sie erkennen an Hand dieses *Zugriffs* zu einem späteren Zeitpunkt $\langle 115 \rangle$, dass sich die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ aus den ungeraden Quadratzahlen zusammensetzt und ihnen die Summe aller Quadrate $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ schon bekannt ist. Diese Bemerkung, dass bei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ alle ungeraden Quadratzahlen vorkommen, hat Marie bereits zu Beginn in $\langle 1 \rangle$ geäußert.

Während Flo und Marie damit beschäftigt sind, die Summanden zu berechnen, stellt sich für Hanna und Tina, die sich inzwischen zur Gruppe gesellt hat, die Frage, ob der Grenzwert einer Reihe gleich ihrer Summe ist.

93	Hanna	Nein. Also, wir wissen, dass die Reihe nach dem konvergiert (<i>zeigt auf $\frac{\pi^2}{8}$ in der Angabe</i>). Na, die Reihe konvergiert nach dem (<i>zeigt diesmal auf $\frac{\pi^2}{6}$</i>), des wiss ma.
94	Tina	Aber da steht ist und nicht konvergiert gegen .
95	Hanna	Ja, aber haßt des net konvergiert (?) Würd i schon sagen, oder (?)
96	Tina	Ich würds annehmen, weil wir bei der Konvergenz für Reihen sind, aber (-)
97	Hanna	Sie können ja nicht ist gleich hinschreiben. Das geht ja gegen unendlich , da gib'ts ja kein Ergebnis.
98	Marie	Wie meinst du das?
99	Hanna	Wir sind uns sicher, dass des (<i>zeigt auf $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$</i>) gegen des (<i>zeigt auf die rechte Seite der Gleichung: $\frac{\pi^2}{6}$</i>) konvergiert und net des gleiche ist wie des.
100	Marie	Aber wird(,) es geht immer näher ran, sodass es praktisch Pi Quadrat Sechstel ist.

Dieser Transkriptausschnitt zeigt, dass Hanna und Tina den Grenzwertbegriff an sich noch nicht verstanden haben. Tina streicht in $\langle 94 \rangle$ heraus, dass in der Angabe ein Gleichheitszeichen verwendet wird und nicht „konvergiert gegen“. Hanna meint, dass dies nicht dasselbe sei. Sie vertritt in $\langle 97 \rangle$ die Meinung, dass eine unendliche Reihe gar kein Ergebnis habe. Das zeigt, dass sie den Begriff einer unendlichen Reihe noch nicht verstanden hat. Dazu ist zu sagen, dass eine Reihe sowohl als Folge der Partialsummen als auch als ihr Grenzwert aufgefasst werden kann. Diese Vorstellung ist bei den Studentinnen noch nicht vorhanden. Marie

scheint die Notation zu akzeptieren. Sie argumentiert in < 100 >, dass sich der Wert der Summe immer stärker $\frac{\pi^2}{6}$ nähert, je mehr Summanden man zur Berechnung verwendet. An dieser Stelle ist hervorzuheben, dass die Studierenden die auftretenden Begriffe zwar kennen, jedoch mangelt es an konkreten Vorstellungen und der Kenntnis wichtiger Eigenschaften. Dies erschwert natürlich das Lösen der Aufgaben, da ein Teil des Lesens der Angabe darin besteht, die vorkommenden Begriffe nicht nur dem richtigen Themengebiet zuzuordnen, sondern auch deren spezifische Eigenschaften zu kennen. Insofern kann die Klärung der in der Angabe enthaltenen mathematischen Begriffe dem Teilprozess *Problembewusstsein schaffen* untergeordnet werden. Sagen einem die mathematischen Fachausdrücke nichts, so fängt man auch nichts mit der Angabe an. Die Studierenden konzentrieren sich nicht länger auf diese Problematik, sondern setzen ihre Bemühungen fort, die *Angabe handhabbarer* zu machen.

112	Flo	Ein Viertel, ein Neuntel, was ham ma dann (?)
113	Marie	Ein Sechszehntel, ein Fünfundzwanzigstel
114	Flo	Ein Sechszehntel, ein Fünfundzwanzigstel, das ham wir wieder.
115	Marie	Wir haben jedes Zweite, weil wir bei den ungeraden Zahlen sind, ohne Eins.
116	Hanna	Was tats es da?
117	Flo	Wir ham uns grad gedacht (<i>nimmt seinen Block und legt ihn in die Tischmitte</i>) eben die Summe von a_n , ich hab jetzt die Folge aufgeschrieben. Eins durch n Quadrat ist dann jedes Zweite, ein Neuntel, ein Fünfundzwanzigstel und so weiter, dann wieder in der Reihe drinnen.

Durch das Einsetzen von Zahlen erkennen Flo und Marie, dass die gesuchte Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ jeden zweiten Summanden von der gegebenen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ enthält. Die Studierenden haben so einen Ansatz gefunden, um den Lösungsprozess voranzutreiben. Die Angabe ist ihnen nun *zugänglicher*. Dieser Abschnitt fällt daher in die Kategorie *die Aufgabe handhabbar machen*. Das Berechnen der einzelnen Summanden kann außerdem als *Handwerk* bezeichnet werden. Das bloße Einsetzen erfordert keinerlei hochschulmathematische Kenntnisse, jedoch gewinnen die Studierenden dadurch einen anderen Blickwinkel auf die Angaben.

Ein Angabefehler hat sich eingeschlichen, das macht das Lösen nicht gerade einfacher. Marie bemerkt ihn in < 119 >. Glücklicherweise kann sie sich erinnern, dass ihnen der Übungsgruppenleiter gesagt hat, den Summationsindex anzupassen.

119	Marie	Es macht mich so fertig, dass da nur bei der ersten Summe der Einser dabei ist, aber bei uns hieß es, wir müssen Sechsenddreißig ausbessern, weil die Summe bei Null beginnt, weil wir sonst glaub ich nicht (-)
120	Flo	Aso, dass wir da bei Null beginnen. <i>(bessert die Angabe aus)</i>
121	Marie	Ja, weil dann haben wir hier den Einser dabei. Ich hab mir schon gedacht, das ist seltsam.
122	Flo	Ok.
123	Marie	Na bei dem stehts eh, bei der über überarbeiteten Angabe. <i>(deutet auf Hannas Angabezettel)</i>
124	Flo	Ja ok, das passt dann eh so. Dann haben wir den Term auch drinnen. Das heißt jeden geraden Term können wir wieder rausschreiben, <i>(nimmt seinen Block, der in der Tischmitte liegt)</i> weil das ist ja (-)

Es ist insofern wichtig für die erfolgreiche Lösung der Aufgabe, dass die Reihe bei Null beginnt, weil somit alle ungeraden Potenzen in der Folge der Partialsummen der bereits bekannten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ auftreten. Nach der ursprünglichen Angabe fehlt die Zahl Eins, wie Marie in < 119 > richtigerweise bemerkt. Flo erkennt nun in < 124 > den springenden Punkt der Aufgabe, die bekannte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ gilt es in gerade und ungerade Potenzen zu trennen.

135	Marie	Immerhin ist doch die Summe von Eins durch n Quadrat <i>(schreibt, Pause)</i> minus die Summe von Eins durch Zwei n Quadrat(.) die Summe von Eins durch Zwei n plus Eins zum Quadrat, oder (?) <i>(schreibt während sie spricht)</i>
136	Flo	Das ist dann zwei n-tel Quadrat. Nein, aso so.
137	Marie	Vielleicht können wir damit was machen. Und (-)
138	Flo	Das heißt, dass daraus folgt, Summe von Eins durch n Quadrat, ja, minus Eins durch Zwei n Quadrat. Wenn ich da jetzt einsetz Eins, Zwei, das sind Vier. Passt. Eins, Eins, Zwei, sind Vier, sind Sechzehn. Passt auch. Ja, stimmt. He, das ist gut.

Die Abbildung Aufgabe 36 zeigt die Notizen von Flo. Zunächst erkennen die Studierenden, dass jeder zweite Summand von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ in $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ enthalten ist. Dies hebt Flo hervor, indem er die Summanden 1 , $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{25}$ unterstreicht. Die vorletzte Zeile seiner Notiz entspricht der Aussage < 138 >. Die Probe, die er durch Einsetzen von konkreten Zahlenwerten in < 138 > durchführt, nimmt Flo ausschließlich mündlich vor.

$$\boxed{36} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{z.z.: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\sum a_n = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \frac{1}{121} + \frac{1}{161} + \frac{1}{225} + \dots$$

$$\sum \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

Abb.6 Aufgabe 36 Flo

In Zeile < 135 > benennt Marie den Knackpunkt der Aufgabe. Die Studierendengruppe hat einen zielführenden Lösungsweg gefunden. Nun haben die Lernenden die *richtige Lösungsstrategie* in der Hand und brauchen sich nicht mehr auf die Suche nach anderen Handlungsoptionen machen. Mit Hilfe von *Handwerk* < 138 >, einer einfachen Probe mittels konkreter Zahlen, *prüft* Flo Maries Vorschlag. Tatsächlich gibt er ihr grünes Licht für die Weiterverfolgung der Idee.

154	Flo	Und wir wissen, dass Eins durch n Quadrat konvergiert gegen Pi Quadrat Sechstel. (zeigt auf die Angabe)
155	Tina	Aso, von Eins durch n Quadrat habts ihr das abgezogen.
156	Flo	Die Geraden abgezogen und dann kommt das raus, was wir wollen, die Ungeraden, weil das ist ja jeder Term minus den Geraden ist ungerade.
157	Tina	Aso. Alles klar.
158	Marie	Gerade minus Ungeraden. Und ich glaub, dass wir bei den Geraden den Grenzwert einfacher herausfinden können, weil da kann man ja mindestens Zwei herausheben. Also ein Halb.

Flo formuliert in < 154 > und in < 156 > noch einmal die endgültige Lösungsstrategie, damit die beiden Kolleginnen, Hanna und Tina, der Idee folgen können. Für eine erfolgreiche Bewältigung einer Aufgabe ist es hilfreich, immer wieder zu artikulieren, was bereits erreicht wurde, beziehungsweise welche

Überlegungen noch anzustellen sind. Diese Tätigkeiten können dem Teilprozess *begleitende und strukturierende Kommentare* zuordnet werden. Solche Bemerkungen dienen nicht nur dazu, den restlichen Gruppenmitgliedern den Lösungsvorschlag zu unterbreiten, sondern auch sich selbst den Gedankengang vor Augen zu führen.

162	Marie	Aber wir dürfen bei dieser Summe nicht bei Null beginnen. Sonst würden wir bei Null beginnen, aber wenn wir Eins durch (-)
163	Tina	Warum dürfen wir nicht bei Null beginnen?
164	Marie	Eins durch Zwei n zum Quadrat. Wenn man statt Null n, nein statt n Null einsetzt (-)
165	Flo	Hat man Eins durch Null.
166	Marie	Und das ist immer ein Problem.
167	Flo	Dann müssen wir bei n ist gleich Eins beginnen, genauso wie hier: n ist gleich Eins.

Marie überprüft < 162 >, weshalb der Summationsindex n bei der ersten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nicht bei Null beginnen darf. Diese Überlegung fällt in die Kategorie *Prüfung der Passung*. Es ist vielleicht erstaunlich, dass die beiden Reihen nicht bei derselben Zahl beginnen, doch die Erklärung dazu liefert Marie unmittelbar < 164 >. Das entscheidende Argument ist, dass man nicht durch Null dividieren darf.

180	Tina	Mhm, mhm. Aber wenn wir schon wissen, dass das da da (<i>zeigt mit dem Finger auf $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ auf Flos Block</i>) gegen Pi Sechstel konvergiert.
181	Marie	Ja.
182	Tina	Müssen wir vielleicht nur mehr schauen, gegen was das da konvergiert (<i>meint: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$</i>) und dann (-)
183	Marie	Das hätte ich mir auch gedacht.
184	Tina	Und dann hoffen, dass was Gutes rauskommt.

Tina verweist in < 180 > auf die Angabe. Im Laufe des Lösungsprozesses ist es immer wieder wichtig, sich an die Angabe zu erinnern. Die Studentin formuliert in < 182 > die grundlegende Idee ihrer Lösungsstrategie. Dies kann durchaus als *Problembewusstsein* interpretiert werden, da die Studentin zum Ausdruck bringt, welcher Überlegung sie jetzt nachgeht, um die Aufgabe zu lösen. Der Grenzwert von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist bekannt, nun will die Gruppe den Grenzwert von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ berechnen, um auf das Ergebnis der gesuchten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ zu kommen. Um ans Ziel zu gelangen, bedarf es noch einiger Rechenschritte, die in < 191 > bis < 214 >

ausgeführt werden. Tätigkeiten wie das kalkülhafte Rechnen zählen nach Ableitinger und Herrmann (2011, S. 19) zum *Handwerk*. Nach ein paar falschen Rechnungen gelangen sie schließlich in $\langle 216 \rangle$ zum gewünschten Ergebnis der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}.$$

215	Flo	Ja, klar. Ah, ah. Das kann man anders schreiben: ein Viertel mal, so war das ja, mal Eins durch n Quadrat. (<i>schreibt</i>) Und n Quadrat konvergiert ja wieder gegen Pi Quadrat Sechstel.
216	Marie	Und Pi Quadrat Sechstel mal ein Viertel ist ein Vierundzwanzigstel (!)

Im Folgenden wiederholen Flo und Marie ihre Lösungsstrategie für die beiden Kolleginnen, die bis dahin nicht mitgeschrieben haben. Flo und Marie fassen ihre Überlegungen abschließend zusammen, damit alle die Lösung verstehen. Dies wiederum bedeutet, dass sie über ihre Vorgangsweise *Resümee* ziehen. Das ist insofern von Bedeutung, wie auch Ableitinger und Herrmann (2011, S. 14) beschreiben, dass sie wissen, was sie gezeigt haben. Diese Sequenz fällt in die Kategorie *Problembewusstsein Schaffen*. Sie sind sich darüber bewusst, dass sie genau das bewiesen haben, was die Angabe verlangte. Marie stellt in $\langle 229 \rangle$ nebenbei auch Reflexionen über die Indizes an. Sie überlegt, inwiefern die Änderung des Index in der Angabe die Aufgabe beeinflusst. Solche Äußerungen fallen in die Kategorie *Problembewusstsein*.

229	Marie	Ich weiß nicht, ob ma noch irgendwas zu den Indizes sagen soll (?) Aber da beginnen wir ja bei Eins und um hier bei Eins zu beginnen, müssen wir halt den Index anpassen.
230	Flo	Unendlich plus Eins wäre ja dann divergent.
231	Marie	Eins durch Null geht ja nicht. Das ist verboten.

Noch einmal betont sie, dass es wichtig ist, dass der Index n bei der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nicht bei Null beginnen darf wie bei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, da die Division durch Null nicht erlaubt ist. Diese Rechenregel hebt sie des Öfteren im Gespräch hervor. In der Angabe wird von den Studierenden ausdrücklich gefordert, die verwendeten Sätze anzugeben. Darauf kommt die Gruppe in $\langle 234 \rangle$ zu sprechen. Es ist lobenswert, dass sich die Studierenden die Angabe nach Berechnung des Grenzwertes noch einmal durchlesen, andernfalls hätten sie wahrscheinlich auf diese Frage vergessen.

Der Rückblick auf die Aufgabenstellung zur Kontrolle, ob alle Aussagen gezeigt und Fragen beantwortet wurden, gehört in die Kategorie *Problembewusstsein Schaffen*.

234	Marie	Haben wir irgendeinen Satz verwendet?
235	Flo	Wahrscheinlich.
236	Marie	Ich glaub, den Satz der konvergenten Reihen.
237	Tina	Es ist auf jeden Fall so, wenn eine Reihe konvergiert und die andere Reihe konvergiert, dann konvergiert auch die Summe.
238	Marie	Ja, eben und die Summe. Minus ist dasselbe wie plus. <i>(Tina und Hanna schreiben noch)</i>
239	Flo	Na. <i>(Marie lacht)</i>
240	Marie	Ich bin grad so stolz auf uns. <i>(Marie lacht, längere Pause)</i>
241	Hanna	Mhm, und was ham wir da für Sätze angewendet?
242	Marie	Die Summe von konvergenten Reihen, irgendwas so was dürfte es geben.
243	Flo	Zwei konvergente Reihen ergeben wieder eine konvergente Reihe.
244	Hanna	Stimmt(.) Rechenregeln für konvergente Reihen.

Die Studierenden erkennen, welcher Satz hinter ihren Rechenoperationen steckt. Marie formuliert in < 242 > in eigenen Worten den verwendeten Satz: die Summe zweier konvergenter Summen konvergiert ebenfalls. Ihre Aussagen lassen darauf schließen, dass die Studierenden erkannt haben, welche mathematischen Überlegungen hinter der Aufgabe stecken. Ihre Diskussionsbeiträge in < 237 > bis < 243 > zeigen, dass die Studierenden verstanden haben, welchen Zweck die Aufgabe innerhalb des Themenbereichs erfüllt. Das nachträgliche Identifizieren der Kernaussage einer Aufgabe gehört ebenso wie die vorausschauende Analyse der Aufgabenstellung zur Teilkategorie *Problembewusstsein*. Da sie den Sinn der Aufgabe erkannt haben, werden sie sich für folgenden Aufgabenstellungen merken, in denen Rechenregeln für konvergente Reihen gefragt sind, dass die Summe (bzw. die Differenz) von konvergenten Reihen wieder konvergent ist. Ableitinger und Herrmann betonen, wie wichtig das rückblickende Identifizieren der Bedeutung einer Aufgabe innerhalb einer Thematik ist (Ableitinger & Herrmann 2011, S. 15).

3.4.7.4. Synthese

Nach der ausführlichen Analyse der Aufgabe sollen rückblickend die erkannten Teilprozesse aufgelistet werden. Anders als bei den übrigen Aufgabenstellungen ist der zu berechnende Wert der Reihe schon gegeben.

Zusätzlich ist angeführt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Ihre Aufgabe ist es, rechnerisch zu überprüfen, dass es sich dabei um den richtigen Wert handelt. Man kann jedoch davon ausgehen, dass der Wert stimmt. Für die Studierenden ist das insofern eine Erleichterung, als dass sie sich zu diesem Wert hinarbeiten können.

Im Allgemeinen lässt sich beim Lösen dieser Aufgabe feststellen, dass die Studierenden lange in der Phase der *Klärung der Handlungsoptionen* bleiben, da sie immer wieder in Sackgassen geraten. Die grundsätzliche Überlegung, zu welchem Themengebiet diese Aufgabe gehört, *Problembewusstsein schaffen*, findet nicht ganz am Anfang statt, sondern erst ab Zeile < 24 >. Durch Einsetzen von Zahlen finden sie im Endeffekt einen *Zugang* zur Aufgabe. Es folgt eine weitere Phase, in der es um die *Klärung der Handlungsoptionen* geht. Die Studierenden erkennen, dass sie mit den Konvergenzkriterien bei dieser Aufgabe nicht weiterkommen. Infolgedessen konzentrieren sie sich erneut auf die Aufgabenstellung. In einem weiteren Schritt machen sie vom *Handwerk* Gebrauch. Zur Veranschaulichung der Reihe berechnen sie die ersten paar Summanden. Dies verhilft ihnen zur Erkenntnis, dass sich $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ aus $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ und aus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ zusammensetzen lässt. Dafür ist außerdem eine Anpassung der Indizes notwendig, da ein Angabefehler vorliegt. Beim erwünschten Ergebnis angelangt, erläutern Marie und Flo ihren Kolleginnen ihre Vorgangsweise, da letztere nicht mitgeschrieben haben. Sie lassen ihre erfolgreiche Lösungsstrategie Revue passieren und gehen auf die in der Angabe gestellte Frage ein, welche Sätze verwendet wurden. Dies gehört zum *Problembewusstsein Schaffen*, da sie sich überzeugen, die Aufgabe vollständig ausgeführt zu haben.

3.4.8. Veränderung von Funktionsgraphen (Aufgabe 37)

3.4.8.1. Ausgangslage

Die Studierenden bemerken bei der Bearbeitung der Aufgabe 37, dass es das erste Beispiel des Kapitels „Stetige Funktionen einer Variable“ ist und zum Unterpunkt „Stetigkeit“ gehört. Obwohl in der Angabe der Begriff „stetig“ nicht vorkommt, wiederholen sie, was Stetigkeit bedeutet und schlagen dazu in ihrer

Mitschrift bzw. einem Analysis-Skript die genaue Definition nach. Zu Beginn setzt sich die Studierendengruppe aus drei Studentinnen und einem Studenten zusammen, nach ca. fünf Minuten kommt der Studienkollege Kurt hinzu. Er hat sich bereits im Vorfeld mit der Aufgabe beschäftigt und präsentiert seine Lösungsansätze der Gruppe. Kurts Überlegungen sind den Studierenden nicht sofort klar und es entsteht eine Diskussion, im Zuge derer die Aufgabe gemeinsam gelöst wird.

3.4.8.2. Aufgabenstellung

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wie sehen die Graphen der folgenden Funktionen im Vergleich zu jenem von f aus? Veranschaulichen Sie Ihre Aussagen in Skizzen.

(a) $\check{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(-x)$

(b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(2x)$ (allgemeiner: $x \mapsto f(\lambda x)$ mit $\lambda > 0$)

(c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x - 1)$ (allgemeiner: $x \mapsto f(x - a)$ mit $a \in \mathbb{R}$)

3.4.8.3. Analyse

Die Kapitelüberschrift veranlasst die Studierenden, den Begriff der Stetigkeit zu wiederholen, bevor sie sich der Aufgabe widmen. Dies hat zur Folge, dass sich Tina vergegenwärtigen möchte, was genau „stetig“ bedeutet. Sie richtet die Frage an die Gruppe < 4 >. Außerdem sucht sie die Definition der Stetigkeit in ihrer Vorlesungsmitschrift und liest sie vor < 8 >. Mit dieser gibt sie sich nicht zufrieden und liest zusätzlich in einem ausgedruckten Skript < 10 > beziehungsweise in einem Analysis-Buch < 43 > die Definition nach. Das Klären von auftretenden Begriffen gehört zur Teilphase *Problembewusstsein Schaffen*. Nur wenn man alle Ausdrücke versteht, kann man die Problematik der Aufgabe erfassen. Anzumerken ist, dass der Begriff „Stetigkeit“ zwar in der Überschrift jedoch nicht in der Angabe auftaucht.

2	Tina	Siebenunddreißig. Stetige Funktionen (<i>liest leise weiter</i>).
3	Hanna	Was heißt im Vergleich zu f was?
4	Tina	Wart a mal, ich muss ma erst einmal Stetigkeit wieder wiederholen. (<i>blättert in ihrer Vorlesungsmitschrift</i>) Was ist stetig genau?
5	Hanna	Na stetig ist, wennst in einem durchzeichnen kannst, die Funktion.

6	Tina	Aber das ist nicht genau .
7	Marie	Aber ich glaub, das ist nicht genau mathematisch definiert.
8	Tina	(liest Definition aus der Vorlesungsmitschrift vor) Eine Funktion f ist stetig im Punkt a aus der Definitionsmenge, wenn es ein Epsilon größer Null gibt, sodass es ein Delta größer Null gibt, sodass x minus a , x aus der Definitionsmenge, kleiner als dem Delta und f von x minus f von a kleiner als Epsilon.

Hanna hat sich gemerkt, dass eine Funktion dann stetig ist, wenn sie ohne Absetzen gezeichnet werden kann < 5 >. Dies ist eine anschauliche Idee von Stetigkeit, allerdings mathematisch nicht ganz korrekt, wie Tina und Marie sofort anmerken < 6 > und < 7 >. Hier kann die Vermutung aufgestellt werden, dass diese Problematik bereits in der Vorlesung angesprochen wurde. Viele Studierende verbinden zweifellos Stetigkeit mit Hannas Idee. Man muss jedoch beachten, dass dies im Allgemeinen nicht stimmt. Oft hilft die Vorstellung, „stetige Funktionen können mit einem Bleistift ohne Absetzen“ gezeichnet werden. Sie ist insofern unpräzise, als dass ein Bleistift eine gewisse Dicke hat und der Graph einer Funktion nur in einem bestimmten Intervall gezeichnet werden kann und nicht unendlich weit (<http://www.mathe-online.at/mathint/stet/i.html>, gesehen am 05.05.2014). Außerdem gibt es Funktionen, die zwar stetig sind, jedoch dieser Vorstellung widersprechen. Beispielsweise ist die Funktion $f: [-1,1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ stetig, obwohl ihr Graph bei Null „eine Lücke“ hat.

Tina liest in < 8 > die Definition, wie sie sie in der Vorlesung notiert hatten, vor: „Eine Funktion f ist stetig im Punkt a aus der Definitionsmenge, wenn es ein Epsilon größer Null gibt, sodass es ein Delta größer Null gibt, sodass x minus a , x aus der Definitionsmenge, kleiner als dem Delta und f von x minus f von a kleiner als Epsilon.“ Sie interpretiert jedoch die Quantoren nicht richtig. Die korrekte ε - δ -Definition der Stetigkeit lautet: Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Die Funktion f heißt stetig im Punkt a , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in D$, die $|x - a| < \delta$ erfüllen, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ gilt. Zur Verdeutlichung ihres Fehlers ist die entsprechende Stelle unterstrichen. Wichtig bei der Stetigkeitsdefinition ist, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein geeignetes $\delta > 0$ gibt, sodass die Bedingungen erfüllt sind. Auf die richtige Verwendung der Quantoren muss stets Acht genommen werden. Von den Kolleginnen und dem Kollegen bleibt Tinas Fehler unbemerkt.

Die Studierenden setzen sich eingangs damit auseinander, zu welchem Themengebiet die Aufgabe gehört, ohne genauer die Angabe zu lesen. Die Frage nach der Themenzugehörigkeit ist ein Aspekt des *Problembewusstsein Schaffens*. Um einen Lösungsansatz zu finden, ist es meistens hilfreich, sich zu vergegenwärtigen, welchen Schwerpunkt die Aufgabe hat. In diesem Fall haben es die Studierenden scheinbar besonders leicht, da die Aufgabe direkt unter der fett gedruckten Überschrift „**Zu §5: Stetigkeit**“ steht. Um die Aufgabenstellung zu lösen, benötigt man aber keine Definition der Stetigkeit, wie sich später herausstellt. Die Überschrift ist ihnen hier keine Hilfe, sondern führt sie zunächst auf die falsche Fährte.

Die Studierenden setzen nämlich zu Beginn den Schwerpunkt auf die Stetigkeit. Tina liest anfangs zwei Definitionen von Stetigkeit vor, siehe < 8 > und < 43 >. Diese bleiben unkommentiert. Beim Durchschauen des Skripts auf der Suche nach Informationen zur Stetigkeit stößt Tina auf das Kapitel „metrische Räume“ < 13 >. Sie entscheidet, dass dies nicht relevant für die Aufgabe ist. Das ausgedruckte Skript legt sie zur Seite. Sie hat entschieden, dass es ihnen bei dieser Aufgabenstellung nicht weiterhilft. Nach der Wiederholung von Stetigkeit, konzentrieren sich die Studierenden auf die genaue Lektüre der Angabe.

16	Marie	Ok, wir haben f, g und h.
17	Hanna	Na wir ham f, f i (-) Was haben wir da? f Dach.
18	Marie	Oh, ja, richtig oder ist das nicht so ein Hatschek (?)
19	Hanna	Aber das ist eine komische Notation, x nach f minus x.
20	Flo	Mhm, aber was isn da f?
21	Hanna	Schreibt ma das normalerweise net so? nach minus x (?)
22	Marie	Vielleicht geht's gerade darum, dass wir das f nicht kennen.
23	Hanna	Oder ma schreibt überhaupt f minus (<i>schreibt x nach minus x</i>)
24	Tina	Nein, nein, nein. Weil das ist nicht das gleiche, weil wenn du schreibst, minus x ist das nicht das gleiche wie f von minus x. Das heißt einfach, dass egal wie die Funktion aussieht, das weißt du nicht. Das ist einfach, dass x zu einem minus x eingesetzt wird.
25	Marie	Aber was ist zum Beispiel, wenn (-)
26	Tina	Das Minus x setzt du für ein positives x ein, aber du weißt nicht, wie die Funktion aussieht.

Erst im zweiten Schritt konzentrieren sich die Studierenden auf die tatsächliche Angabe. Marie hält in < 16 > fest, was bekannt ist. Für Hanna ist die Notation $x \mapsto f(-x)$ ungewöhnlich < 19 >. Flo fragt sich in < 20 >, wie die Funktion ausschaue. Jedem der drei ist etwas anderes der Angabe unklar. Ihre Aussagen

verdeutlichen, dass sie erst die zentrale Aufgabenstellung aus dem Text herauslesen müssen. Sie befinden sich mitten im Prozess des *Problembewusstsein Schaffens*. Was genau sagt die Angabe? Die Studierenden müssen zunächst den Text entschlüsseln. Marie erkennt richtigerweise, dass die Funktion f nicht bekannt ist, wie sie es in < 22 > zum Ausdruck bringt: „Vielleicht geht’s gerade darum, dass wir f nicht kennen.“ Hanna versteht die Notation $x \mapsto f(-x)$ weiterhin nicht, wie man an ihren Aussagen in < 21 > beziehungsweise < 23 > entnehmen kann. Während Marie bereits erkannt hat, wie die Angabe zu lesen ist, spricht sich das *Problem* bereits *bewusst* gemacht hat, ist Hanna noch mitten in dieser Phase. Tina versucht, es ihr in < 24 > und < 26 > klar zu machen und *stellt* mit ihren Erklärungsversuchen einen ersten *Zugriff her*. Ebenso wie Marie hat Tina die Notation in der Angabe verstanden, wie man ihren Erläuterungen entnehmen kann. Marie setzt in < 27 > damit fort, die *Aufgabe handhabbar* zu machen. Sie stellt fest, dass x^2 denselben Wert hat wie $(-x)^2$ für ein beliebiges x aus den reellen Zahlen.

27	Marie	Aber wenn zum Beispiel die Funktion x geht über in x Quadrat ist, machts ja keinen Unterschied.
28	Tina	Nein.
29	Flo	Ja, aber wir wissen nicht (-)
30	Tina	Aber wir wissen nicht, was die Funktion ist. Ich schau da noch mal Stetigkeit nach (<i>schlägt ein Analysis-Buch auf, das auf dem Tisch liegt</i>)

Die Fokussierung auf die Stetigkeit hat zur Folge, dass Tina eine weitere Definition nachschlägt und in < 43 > vorliest. Die Studierenden wissen nicht, inwiefern sie mit der Definition arbeiten müssen. Auf Grund der Kapitelüberschrift haben sie anscheinend das Gefühl, die Definition für die Bearbeitung verwenden zu müssen. Das bedeutet wiederum, dass ihnen noch nicht klar ist, welche Handlungsoptionen ihnen zu Verfügung stehen und am besten zu wählen sind. Daher kann man an dieser Stelle auch von *Klärung der Handlungsoptionen* sprechen. Es wird in der Angabe nicht verlangt nachzuweisen, ob die Funktionen stetig sind oder nicht. Andererseits fällt diese Teilsequenz auch unter den Aspekt des *Problembewusstsein Schaffens*, da sie die Angabe unter dem Blickwinkel der Kapitelüberschrift sehen, jedoch den Angabetext zunächst vernachlässigen. Sie sind sich also nicht bewusst, dass in den gegebenen Informationen nicht von Stetigkeit die Rede ist. Das heißt, sie haben noch nicht realisiert, was genau verlangt wird. Dies bringt Tinas Aussage in < 43 > deutlich zum Ausdruck.

43	Tina	Was soll man da jetzt genau machen bei Siebenunddreißig? (<i>liest Angabe vor</i>) Wie sehen die Graphen der folgenden Funktionen im Vergleich zu jenem vom f aus? (<i>Pause</i>) Ich versteh nicht ganz, was die da von uns wollen. [...] Was wolln die da jetzt genau von uns bei Siebenunddreißig?
----	------	---

Der Studierendengruppe ist nicht klar, was genau gefragt ist. Sie können mit der Angabe zunächst wenig anfangen. Kurt, der nach etwa fünf Minuten zur Gruppe dazu stößt, schafft schließlich einen Perspektivenwechsel. Für ihn ist bereits klar, welche *Handlungsstrategie* zu wählen ist.

44	Kurt	Ich hab mir gedacht, dass beim Ersten wird der Graph an der y-Achse gespiegelt.
----	------	---

Er stellt einen anderen *Zugriff* zur Aufgabe her, indem er sich überlegt, wie der neue Graph im Vergleich zum ursprünglichem aussieht. Kurt hat bereits zu allen drei Unterpunkten der Aufgabe konkrete Lösungen < 50 >.

50	Kurt	Beim b wird der Graph irgendwie so gestaucht, steigt er halt schneller beziehungsweise(.) und beim c wird's um ähm(.) um Eins auf(.) parallel zur x-Achse verschoben, also um Eins nach links, je nachdem wie (-). Ich glaub, des wollns hörn.
51	Tina	Okay. (<i>lacht</i>)
52	Hanna	Ich glaub, reicht das net, wenn ma das hinzeichnet, wie des aussieht (?)
53	Marie	Aber ich mein, das find ich dann so (...)
54	Kurt	Das find ich auch ganz (?blöd?) das Beispiel
55	Flo	Vielleicht sollen wir das einfach nur hinzeichnen.

Da die Gruppe bis zu dem Zeitpunkt einen anderen Ansatz verfolgte, ist den Studierenden diese Methode der graphischen Darstellung zunächst etwas vage. Hanna stellt in < 52 > die Frage, ob eine Zeichnung als Lösung akzeptabel sei. Den Studierenden ist zunächst nicht klar, ob die Aufgabe an Hand von Skizzen gelöst werden darf. Sie fragen sich, inwiefern eine Skizze in der Fachmathematik als Lösung zulässig ist. Die Ungewissheit spiegelt sich in ihren Aussagen von < 52 > bis < 55 > wider. Schließlich *entscheiden* sie sich für diese *Handlungsoption* < 55 >. An dieser Stelle ist hervorzuheben, dass in der Angabe gefordert wird, die Aussagen in Skizzen zu veranschaulichen.

Nach der *Klärung der Handlungsstrategie*, den Graph einer beliebigen Funktion zu zeichnen, finden die Studierenden den Knackpunkt der Aufgabe.

56	Hanna	Ja, beim Einser zeichnest einfach so a y-Achse, so a x-Achse und dann machst so einen Strich durch. Fertig. (<i>Marie lacht auf</i>) Ja, das ist so.
57	Marie	Aber ich glaub, du brauchst mindestens zwei Skizzen, eine von f und eine von f Hatschek oder wie auch immer das Ding heißt (-)
58	Hanna	Das is ja das gleiche. Das f Ding is gleich das f(.) in dem Fall.
59	Marie	Wieso?
60	Hanna	Wieso net?
61	Marie	Wenn du zum Beispiel x geht über in x hast, dann hast du die erste Meri d i ane und (-)
62	Tina	Ah, jetzt glaub ich, weiß ich auch, wie sie das meinen.
63	Marie	Also es wird an der y-Achse gespiegelt.

Sie machen die *Aufgabe handhabbar*, indem sie den Graph einer beliebigen Funktion, nämlich der linearen Funktion durch den Ursprung mit Steigung 1 in das Koordinatensystem zeichnen (Anmerkung: $f(x) = x$). Marie erkennt in < 57 >, dass zwei Graphen zu zeichnen sind, um die beiden relevanten Funktionen miteinander zu vergleichen. Sie schafft damit einen *Zugang* zur Aufgabe. Tina verhilft diese Idee zum Verständnis von Kurts Aussage, dass der neue Graph eine Spiegelung des ursprünglichen an der y-Achse ist. Hanna jedoch hat noch nicht den springenden Punkt der Aufgabenstellung erkannt, wie ihren Äußerungen in < 56 >, < 58 >, < 66 > und < 68 > entnommen werden kann. Tina unternimmt daraufhin einen erneuten Versuch, es Hanna zu erklären. Während die Studierenden die *Aufgabe handhabbar* machen, steckt Hanna in der Phase des *Problembewusstsein Schaffens*. Sie hat die Angabe noch nicht hundertprozentig erschlossen.

65	Tina	[Aber du] weißt ja nicht, wie die Funktion aussieht. Du musst ja irgendeine Funktion nehmen. Das f kann ja irgendwas sein.
66	Hanna	Nana, das ist ja gegeben.
67	Tina	Nein. Es ist nicht so, dass du sagst, f von x ist gleich minus x, sondern f also das x übergeht in f von minus x. Weißt was ich mein?
68	Hanna	Nein.
69	Tina	Schau (<i>nimmt ihren Block</i>), es ist nicht so, dass du sagst, f von x ist gleich minus x. Das f von x, was immer das auch ist, is dann f von minus x. Das x wird da als minus x eingesetzt.

An dieser Stelle wird deutlich, wie wichtig es ist, mit den in der Angabe vorkommenden Informationen umgehen zu können. Für das Lösen ist es unerlässlich, die auftretenden mathematischen Notationen zu entziffern, sonst ist man zum Scheitern verurteilt. Kurt schlägt in < 70 > vor, ein weiteres konkretes Beispiel zu nehmen, um den Sachverhalt zu veranschaulichen.

70	Kurt	[Aber wenn ma das zeichnen will, braucht ma a Beispiel.]
----	------	--

71	Marie	[Als erstes braucht man irgendein f , um dann ein Vergleichs- f hinzuzeichnen. Dazu braucht man mindestens zwei Graphen.]
72	Tina	Was passiert mit der Funktion, wenn die jetzt wirklich irgendein Polynom ist?
73	Kurt	Ja, zum Beispiel x Quadrat ist symmetrisch zur y -Achse.

In einem nächsten Schritt *prüfen* die Studierenden Kurts Überlegung aus < 44 >, indem sie einen *Zugriff* herstellen. Dazu wählen sie die quadratische Funktion f mit $f(x) = x^2$. In diesem Fall zweifeln sie nicht, dass die Funktion achsensymmetrisch ist. Dann stellt Tina in < 72 > die Frage, wie es bei allgemeinen Polynomen höheren Grades aussieht. Sie unterziehen sozusagen ihre Überlegungen einer Prüfung, ob sie auch bei Polynomen höherer Ordnung stimmig sind. Die Gruppe befindet sich mitten in der Teilphase *Prüfung der Passung*. Nachdem sie eine Lösungsidee gefunden haben, kontrollieren sie, ob ihre Aussage Allgemeingültigkeit hat.

82	Tina	Ja, das heißt, die bleiben dann gleich, die geraden(.) Polynome, die Polynome mit geraden Potenzen.
----	------	---

Tina hat in < 82 > erkannt, dass die Überlegung von $f(x) = x^2$ auf alle Polynome mit geraden Potenzen übertragbar ist. Es bleibt zu klären, was bei Polynomen mit ungeraden Potenzen passiert, nicht zu vergessen alle anderen Funktionstypen. Exponential-, Logarithmus-, Winkelfunktionen, lineare und rationale Funktionen haben die Studierenden bis zu diesem Zeitpunkt außer Acht gelassen. Zunächst *prüfen* sie inwieweit ihre gefasste Hypothese Allgemeingültigkeit besitzt. Dabei gehen sie in zwei Schritten vor. Sie überlegen sich zuerst, welche Auswirkung gerade Potenzen auf das Minus in der Basis haben, bevor sie sich dies für ungerade Exponenten überlegen. Für Letzteres hat Marie in < 87 > eine Antwort parat.

86	Tina	Ok und was passiert mit den anderen (?Buchstaben?) (?)
87	Marie	Die werden genau gespiegelt, wo halt vorher plus war, wird's dann zum Minus.

Davon wird Tina aber nicht überzeugt, sie *schafft* einen *Zugang*, indem sie sich eine Funktion ausdenkt, nämlich $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 5$. Diese schreibt sie auf ihren Block. Von dieser Funktion möchte sie nun zu allererst den Wert an der Stelle $x=2$ berechnen. Ihre Idee dahinter ist, dass für $x=-2$ „genau das Gespiegelte herauskommen“ sollte < 99 >. Tina ist an dieser Stelle nicht bewusst, dass für reelle

Funktionen im Allgemeinen nicht gilt: $f(x) = -f(-x)$. Auf dieser Annahme baut sie jedoch ihre Begründung auf.

99	Tina	Wenn ich jetzt irgendeine Funktion mal annehme, x hoch Drei plus Zwei x hoch Zwei plus x plus Fünf ($f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 5$) oder so. Und dann müsste für den Minuswert genau das Gespiegelte herauskommen. Setzen wir zum Beispiel Zwei ein.
100	Flo	Sind Acht plus (-)
101	Tina	Acht plus Zwei plus Fünf, Zehn, sind Achtzehn, Dreiundzwanzig. Und wenn ich mir jetzt minus f anschau, hab ich minus Acht plus Acht minus Zwei plus Fünf, dann hab ich Drei.

Ihre Studienkolleginnen und ihr Studienkollege erkennen nicht sofort, dass Tinas Vorschlag zu keiner aussagekräftigen Erkenntnis führt. Flo, der bisher wenig gesagt hat, beginnt zu rechnen < 100 >. Tina setzt seine Rechnung fort. Diese Rechnung wird nur mündlich durchgeführt und nicht verschriftlicht. Für die Studierenden stellt es keine Herausforderung dar, den Wert der Funktion an einer Stelle zu berechnen, da sie dies bereits in der Schule oft geübt hatten. Aus diesem Grund kann hier gesagt werden, dass sie in < 101 > *Handwerk* gebrauchen. Nachdem sie den Funktionswert an der Stelle $x = -2$ berechnet haben, erkennen sie, dass sie diese *Handlungsoption* nicht weiterbringt und sie *verwerfen* sie. Flo stellt in <110 > die Überlegung an, den Limes zur Hilfe zu nehmen. Dieser Lösungsstrategie gehen sie nicht weiter nach, denn Kurt präsentiert in < 122 > eine neue.

122	Kurt	Na , es kann ja eigentlich nur so sein. Tschuldigung, dass i di unterbrechen darf. Wennst du dir vorstellst, du gehst jetzt einfach von links nach rechts, schaust dir die Funktion an, alle Funktionswerte, dann hast du die Funktionswerte von minus x, wie wennst von rechts nach links gehen tatst.
123	Tina	Hm, ja stimmt.
124	Kurt	So kanns ja eigentlich nur sein.
125	Tina	Ok, ja das stimmt.
126	Marie	Es ist eigentlich bloß so(,) dass die positiven und negativen Werte vertauscht werden, wenn man sich das so anschaut, dann wird minus x zu x.

Kurt schlägt in < 122 > eine anschauliche Lösung vor, sprich er *schafft* einen anderen *Zugriff*. Er meint, man müsse sich das so vorstellen, dass man einmal den Funktionsgraphen im Ursprung beginnend zeichnet und ihn anschließend in die andere Richtung spiegelverkehrt aufträgt. Marie fasst in < 126 > noch einmal Kurts Vorschlag in eigenen Worten zusammen. Dies fällt in die Kategorie *begleitende*

Kommentare. Mit dieser Lösung geben sich die Studierenden zufrieden. Tina kommt in < 129 > auf die Angabe zurück, um zu überprüfen, ob damit die Aufgabenstellung für erledigt angesehen werden kann.

129	Tina	Und müssen wir sonst noch(,) wie sehen die Graphen Funktionen im Vergleich zu jenem aus? (<i>liest die Angabe vor</i>) Müssen wir dann echt nur Skizzen machen?
-----	------	---

Tina hat nach wie vor Zweifel, ob die angefertigte Skizze die Aufgabenstellung ausreichend beantwortet. Der Rückgriff auf die Angabe im Anschluss an den Lösungsprozess fällt in die Kategorie *Problembewusstsein Schaffen*. Die Studierenden vergewissern sich am Ende, ob sie das gezeigt haben, was die Aufgabe verlangt. Flo zieht in < 132 > *Resümee* und betont, dass der Unterpunkt a) der Aufgabe somit erledigt ist und sie sich dem nächsten zuwenden werden.

132	Flo	Ok, das war unser a. [...] Bei b haben wir gesagt,
133	Marie	es wird um den Faktor Lambda gestaucht.
134	Kurt	Also bei Zwei (-) Wenn Lambda größer als Eins ist, dann steigt halt schneller. Oder sinkt halt schneller je nachdem was (?man macht?)
135	Marie	Ich weiß nicht, muss man auch schreiben in welche Richtung? (<i>Pause</i>) Aber ich mein, es ist mathematisch nicht ganz korrekt, weil es auch so gestaucht werden könnte (<i>macht mit den Händen eine Bewegung, indem sie die Hände von oben und unten einander annähert</i>).

Kurt teilt in < 134 > der Gruppe seine Überlegungen zum Unterpunkt b mit. Marie greift seine Idee auf und meint, dass man das allerdings präziser formulieren sollte. Eine Stauchung beziehungsweise Streckung kann sowohl entlang der x-Achse als auch der y-Achse erfolgen. Das Präzisieren ihrer Aussagen fällt in die Kategorie *Problembewusstsein Schaffen*, da die Studierenden eine treffende Antwort auf die in der Aufgabe formulierte Frage geben wollen.

137	Flo	Na warte, wenn man jetzt zum Beispiel eine Sinuskurve hat.
138	Kurt	In welche Richtung sie gestaucht wird, willst jetzt sagen? Entlang der x(.) in Richtung y Achse.
139	Flo	Sinus beginnt oben, gö (?)
140	Kurt	Nein, der Sinus beginnt unten.
141	Flo	Das heißt der Sinus beginnt bei minus Eins?
142	Marie	(<i>lacht</i>) Sinus von Null ist Null.

Flo *schafft* einen *Zugriff* zur Aufgabe, indem er die Idee an Hand einer Sinusfunktion überprüfen will < 137 >. Mit Hilfe einer Skizze will er herausfinden, in welche Richtung die Funktion gestaucht bzw. gestreckt wird. Eine Zeichnung macht für ihn die Überlegung anschaulicher. Allerdings steht er zunächst vor dem Problem, wo er bei der Sinusfunktion zu zeichnen beginnt. Marie hilft ihm weiter. Seine an Hand der Skizze gewonnenen Einsichten bringt er in < 143 > zum Ausdruck: „Und wenn ich das stauch (*veranschaulicht seine Idee mit den Händen, indem er sie schnell zueinander bewegt, als würde er klatschen*), dann ist das die doppelte(,) die doppelte Geschwindigkeit, oder (?).“ Flo erkennt, dass $\sin(2x)$ die doppelte Frequenz von $\sin(x)$ besitzt, das heißt $\sin(2x)$ durchläuft in derselben Zeit die doppelte Anzahl an Schwingungen im Vergleich zu $\sin(x)$.

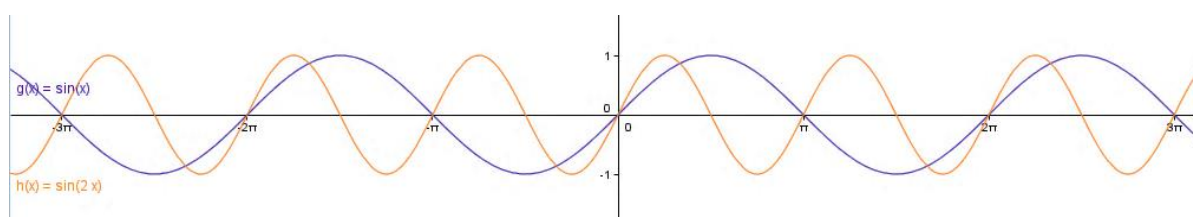


Abb.7 Aufgabe 37 Sinuskurve

143	Flo	Da geht's rauf bei Eins und geht dann runter. (<i>fertigt eine Skizze einer Sinusfunktion an</i>) Und hier hab ich dann Zwei Pi, oder (?) Dann hab ich hier Zwei Pi. Dann ist ein Durchgang hier fertig. Und wenn ich das stauch (<i>veranschaulicht seine Idee mit den Händen, indem er sie schnell zueinander bewegt, als würde er klatschen</i>), dann ist das die doppelte(,) die doppelte Geschwindigkeit, oder (?). Das heißt, dann hab ich bei Zwei Pi schon zwei Durchläufe. Warte, das beginnt dann bei Null. Hier haben wir Zwei Pi und hier haben wir Pi, oder (?) (<i>längere Pause</i>) Und da schreib ich dann zur y-Achse, nein zur x-Achse wird gestaucht.
144	Marie	Es wird in Richtung y-Achse gestaucht.
145	Flo	Ah, wird in Richtung um Lambda gestaucht.

Infolgedessen kommt Marie zu dem Schluss, dass „in Richtung der y-Achse gestaucht“ wird < 144 >. Flo ergänzt in < 145 > daraufhin, dass nicht nur die Richtung, sondern auch der Faktor angegeben werden muss. Die beiden letzten Aussagen von Marie und Flo fallen unter *begleitende Kommentare und Erläuterungen* ihrer Erkenntnisse. Aus dem aufgezeichneten Gespräch ist zu entnehmen, dass die Studierenden Probleme haben, präzise auszudrücken, in welche Richtung der Funktionsgraph gestaucht wird. Anzumerken ist, dass der

Funktionsgraph $x \mapsto f(\lambda x)$ entlang der x-Achse gestaucht wird. Die Studierenden meinen zwar das Richtige, bringen es aber falsch zum Ausdruck.

147	Marie	Ich hab auch noch dazugeschrieben, dass Zwei auch Lambda sein kann. (Pause) Aber bei minus x, nein bei minus Eins bewegt sichs doch, nein bei minus Eins bewegt sich doch nach rechts. x minus Eins ist um Eins verschoben.
148	Kurt	Eins nach links. Stell dir mal vor den Graph x Quadrat minus Eins.
149	Marie	Na zum Beispiel f von x ist Null. Dann ist bei Eins minus Eins Null.
150	Kurt	Aso wart amal. Ja, genau, das verwechsel ich immer.
151	Marie	Ich hab mir immer gedacht, warum in die falsche Richtung (?) Man denkt sich ja bei minus geht's Richtung links.

Marie meint in < 147 >, dass es reicht, eine allgemeingültige Aussage anzuschreiben, mit der Bemerkung, dass Lambda auch die Zahl Zwei sein kann, wie in dem gegebenen Fall. Ihre Feststellung fällt in die Kategorie *begleitende Kommentare*, da sie keine neue Idee enthält, sondern kompakter zusammenfasst. Dies ist zugleich die endgültige Lösung der Studierendengruppe für den Unterpunkt b).

Ohne Überleitung geht Marie zum Unterpunkt c) über < 147 >. Laut überlegt sie, welche Auswirkungen die Veränderung des Funktionsterms $x \mapsto f(x - 1)$ auf den Graphen der Funktion hat. Sie kommt zu dem Schluss, dass der Graph nach rechts verschoben wird. Kurt ist jedoch vom Gegenteil überzeugt. Er meint, dass der Graph um „Eins nach links“ wandert < 148 >. Um dies zu klären, *schaffen* sich beide einen *Zugriff*. Kurt kommt mit dem Vorschlag, eine quadratische Funktion zu nehmen. Marie geht in < 149 > einen anderen Weg, um die *Aufgabe handhabbarer* zu machen. Sie meint, wenn eine Funktion an der Stelle x den Wert Null hat, dann muss man herausfinden, an welcher Stelle $f(x - 1)$ den Wert Null hat. Im Nachhinein ist ihr Gedankengang auf Grundlage des Transkripts nicht vollständig nachvollziehbar. Aus ihren Aussagen ist zu schließen, dass ihre Überlegungen in die richtige Richtung gehen. Ihre Formulierung ist allerdings mathematisch gesehen nicht korrekt. Es entsteht der Eindruck, dass sie folgende Umformungen durchführen: $f(x - 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$. Hierbei handelt es sich jedoch um eine Fehlvorstellung. Die Äquivalenz $f(x - 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) - 1 = 0$ gilt im Allgemeinen nicht. In den Zeilen < 154 > bis < 158 > wiederholen Marie und Kurt für Flo ihre Überlegung, *einen Zugriff herzustellen*. Dabei korrigieren sie ihre Formulierung.

153	Flo	Ok, das heißt ich geh nach rechts. Und warum noch mal? Kannst du mir das erklären?
154	Kurt	Du musst einen Funktionswert am besten ausrechnen, also am besten du sagst äh (-)
155	Flo	f von Null ist Null.
156	Marie	Also f von x ist Null. Dann um f von, nein, g von x ist Null herauszufinden ist das ja f von x minus Eins. Weil f von x minus Eins ist Null ist gleich (-)
157	Flo	Ist gleich f von x minus Eins.
158	Marie	Ist Null. Das heißt, x ist in diesem Fall?
159	Flo	Ah, verstehe, kann man das so, darf ma das so einfach rüber ziehen?
160	Marie	Ich glaub die Notation passt nicht ganz.

Es wäre anschaulicher, wenn sie Maries Überlegungen für einen Zugang mit denen von Kurt kombinieren würden. Kurt hatte in < 148 > die Idee, sich die Veränderung an Hand eines konkreten Beispiels anzuschauen. Sein Vorschlag war, f als quadratische Funktion anzunehmen, mit $f(x) = x^2$. Dann kann man sich anschauen, was passiert, wenn die Funktion verändert wird. Der neue Funktionsterm lautet $g(x) = f(x - 1)$, also $g(x) = (x - 1)^2$. An dieser Stelle kommt wiederum Maries guter Einfall, die Funktion g Null zu setzen, vom Tragen. Mit Hilfe von einfachem *Handwerk*, Wurzelziehen, erhält man durch Umformen: $x = 1$.

Es ist anzunehmen, dass Maries Äußerungen in den Zeilen < 149 >, < 156 > und < 158 > ähnliche Gedanken zu Grunde liegen. Ihre Aussagen lassen aber Fehlinterpretationen zu. Diesen Einwand hat auch Flo in < 159 >. Er erkennt richtigerweise, dass $f(x - 1) = 0$ nicht ohne Weiteres auf $x - 1 = 0$ umgeformt werden darf, was er aber gewissermaßen gemacht hat. Marie gibt in < 160 > zu, dass die Notation nicht passt. Man hat den Eindruck, dass es für sie auf einen Blick ersichtlich ist, wie sich die Funktion ändert, wenn $x \mapsto f(x - a)$. Ihre Aussage in < 151 > verdeutlicht, dass sie sich schon einmal, wahrscheinlich in der Schule, damit beschäftigt hat. Sie meint nämlich, intuitiv würde man annehmen, bei $x \mapsto f(x - a)$ wandere die Funktion nach links, weil ein Minus vor a steht.

3.4.8.4. Synthese

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Studierenden zu Beginn Schwierigkeiten hatten, den Angabentext zu erfassen, da sie sich durch die Kapitelüberschrift zu sehr beeinflussen ließen. Sie haben die eigentliche Problematik

nicht sofort erkannt. Das Einordnen einer Aufgabe in ein bestimmtes Kapitel und das korrekte Verständnis zählt zu der Teilphase des *Problembewusstsein Schaffens*. „Ich versteh nicht ganz, was die da von uns wollen“, gibt Tina in < 43 > zu. Problembewusstsein schaffen meint gerade, die Aussage der Angabe zu verstehen. Dass es oft – gerade für Novizen – schwierig ist, die Quintessenz einer Angabe herauszulesen, spiegelt auch Maries Aussage in < 31 > wider: „Manchmal hasse ich Angaben“. Man muss sich an dieser Stelle erneut vor Augen führen, dass die Mathematik doch eine eigene Sprache besitzt.

Zu dem *Problembewusstsein* gesellt sich außerdem die *Klärung der Handlungsoptionen*. Die Studierenden wissen nicht, welche Mittel ihnen zur Verfügung stehen. Ihre erste Idee ist, eine für sie brauchbare Definition der Stetigkeit von Funktionen zu finden. Im Zuge dieser Teilphase liest Tina zwei Definition von Stetigkeit vor, einmal aus der Mitschrift < 8 >, danach aus einem Analysis-Buch < 43 >. Mit dieser Handlungsstrategie kommen sie jedoch nicht weiter. Kurt, der im Verlauf der Diskussion zur Gruppe stößt, beleuchtet die Angabe von einem anderen Blickwinkel < 44 >. Er bringt den Vorschlag, die Graphen der Funktionen zu vergleichen. Diese *Änderung der Handlungsoptionen* schafft sogleich die Grundlage, die *Aufgabe* mittels Überlegungen zu den Potenzen *handhabbarer* zu machen. Dies geschieht in < 47 > und < 48 >. Unmittelbar darauf stellen sich die Studierenden die Frage, ob Kurts Lösungsansatz zulässig ist. Im Speziellen müssen sie klären, ob Skizzen ausreichen, um eine Übungsaufgabe ausreichend zu beantworten, das heißt sie *klären* die *Handlungsoptionen* < 52 > bis < 55 >. Anschließend ist erneut von Bedeutung, einen *Zugang* zur Aufgabe zu *finden*. Marie liefert in < 56 > den entscheidenden Beitrag dazu: Zwei Skizzen sind erforderlich. Bevor sie beginnen, Funktionsgraphen zu zeichnen, bedarf es noch einiger Erklärungen, Hanna die Angabe verständlich zu machen. Sie kann mit der Notation nichts anfangen. Ihre Studienkolleginnen Marie und Tina versuchen, ihr die wesentlichen Aussagen der Aufgabe *bewusst* zu machen. Das bedeutet wiederum, dass sie das eigentliche Problem noch nicht erfasst hat. Den Schlüssel zur erfolgreichen Bearbeitung der Aufgabe liefert Kurt in < 70 >: man wählt eine beliebige Funktion. Marie ergänzt in < 71 >, dass man den Graph einer beliebigen Funktion zeichnet und diesen mit der veränderten Funktion vergleicht. Damit haben sie den Lösungsansatz für die gesamte Aufgabe gefunden. Kurt lieferte in < 44 > und < 50 > bereits die Lösungen

für alle Unterpunkte mit. Zur Überprüfung seiner Überlegungen gehen die Studierenden bei allen Punkten ähnlich vor. Sie *verschaffen* sich einen *Zugriff* durch Wahl einer Funktion und machen durch den Gebrauch von *Handwerk* Kurts Vorstellungen plausibel. Begleitende Kommentare und Erläuterungen runden ihre Diskussion ab, siehe < 132 >, < 144 > und < 164 >.

3.4.9. Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen (Aufgabe 42)

3.4.9.1. Ausgangslage

Die Gruppe, bestehend aus Anna, Flo, Ildiko, Lisa, Marie und Steffi, trifft sich um 8:00 im Universitätsgebäude, um die nächsten Übungsaufgaben vorzubereiten. Sie sitzen knappe zwei Stunden zusammen, danach beginnt ihre Vorlesung. In der Zeit lösen sie drei Aufgaben. Bei der ersten – Aufgabe 41 (siehe Anhang) – ist der Grenzwert einer Funktion zu berechnen, deren Bearbeitung wurde jedoch nicht aufgezeichnet. Die meiste Zeit beanspruchen die folgenden Aufgaben 42 und 43, die in das Themengebiet „Stetigkeit einer Funktion“ einzuordnen sind. Beide werden im Folgenden analysiert. Die Aufgabe 42 bereitet den Studierenden große Schwierigkeiten, da eine allgemein gültige Aussage zu beweisen ist. Zur Lösung der Aufgabe verwenden sie ihre Vorlesungsmitschrift sowie Notizen aus der Übung. Die Gruppe ist mit sechs Studierenden die größte, die gefilmt wurde. Auf Grund der Tatsache, dass ausschließlich eine Kamera zur Aufzeichnung verwendet wurde, sind leider nicht alle Studierenden in den Aufnahmen vollständig sichtbar. Dadurch ergibt sich, dass möglicherweise einzelne Gestiken im Transkript unerwähnt bleiben. Die Studierenden sitzen um einen Tisch, wobei jeweils drei Studierende den anderen gegenüber sitzen. Eine Studentin wurde mit einem Namen anonymisiert, der nicht typisch österreichisch ist, um zu kennzeichnen, dass sie nicht Deutsch als Muttersprache hat. Leider sind manche ihrer Aussagen an Hand des Tonmaterials nicht vollständig rekonstruierbar. Das liegt neben ihrer Unsicherheit beim Sprechen an der Kameraposition. Die Kamera hätte direkt neben ihr platziert werden müssen, da sie im Vergleich zu den anderen Studierenden sehr leise spricht. Diese Anmerkung gilt sowohl für das Transkript von Aufgabe 42 als auch von Aufgabe 43.

3.4.9.2. Aufgabenstellung

Es sei $\xi \in]a, b[, f:]a, b[\setminus \{\xi\} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x \searrow \xi} f(x) = \gamma = \lim_{x \nearrow \xi} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \gamma$$

(insbesondere existiert der Limes).

3.4.9.3. Analyse

Als Einstieg liest Lisa in < 5 > bzw. < 7 > die Angabe vor. Für die Studierenden stellt sich die Frage, was zu zeigen ist. In einem ersten Schritt versuchen sie, die dahintersteckende Problematik zu erfassen. Sie *schaffen Problembewusstsein*.

5	Lisa	Ich bin mir nicht sicher, ob das (?ein griechischer Buchstabe?) Egal. Ähm, die Funktion schaut eben so aus, das komische Intervall ohne diesem Zeta wird auf die reellen Zahlen abgebildet und dieses (-)
6	Steffi	Gamma.
7	Lisa	Ok, dann hatte ich das richtig. (<i>Flo lacht</i>) Gamma ist aus den reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass der linksseitige Grenzwert(,) äh von f von x ist Gamma gleich der rechtsseitige Grenzwert von f von x ist und das ist äquivalent zu dem Grenzwert von f von x ist gleich Gamma. Es ist eigentlich find ich schon logisch, weil der linksseitige und der rechtsseitige dasselbe sind. Aber ich weiß nicht, wie ich das beweisen soll. Ich hab mir ein paar Beweise im Internet angeschaut und es ist ur undurchsichtig. Für mich halt. Ich habs nicht verstanden.
8	Flo	Ist das (-) Das ist der linksseitige und das ist der rechtsseitige?
9	Lisa	Alles was runter geht, ist der rechtsseitige und rauf ist der linksseitige.
10	Flo	Ok. Da haben wir wieder ein x was gegen Zeta geht. (<i>zeigt mit dem Stift auf die Angabe</i>) Das heißt wir können einfach das Zeta einsetzen in die Funktion. Das heißt das f von Zeta ist gleich Gamma. Das ist ja das, was wir vorher gehabt haben.

Es soll hier betont werden, dass die Studierenden bei der Bearbeitung der Aufgabe stets von „Zeta“ sprechen, obwohl sie damit den griechischen Buchstaben ξ „Xi“ meinen. Sie verwechseln dabei ζ mit ξ . Dies ist aber unwesentlich für den Lösungsprozess. In < 7 > merkt Lisa an, dass ihr die Aussage logisch erscheint, sie aber nicht weiß, wie sie dies beweisen soll. Sie liest die Aufgabenstellung in < 7 > so vor, als hätte sie es mit einem Prosatext zu tun: „Zeigen Sie, dass der linksseitige Grenzwert(,) äh von f von x ist Gamma gleich der rechtsseitige Grenzwert von f von x ist und das ist äquivalent zu dem Grenzwert von f von x ist gleich Gamma.“ Es entsteht der Eindruck, zu zeigen sei, dass der linksseitige gleich dem rechtsseitigen Grenzwert sei, was aber nicht zu beweisen ist. Stattdessen ist die Äquivalenz der

beiden Aussagen nachzuweisen. Sie verwendet zwar „das ist äquivalent zu“, doch es entsteht der Eindruck, dass die Studentin mit der mathematischen Fachsprache nicht vertraut ist. Die Art und Weise wie sie die Aufgabe vorliest, zeigt, dass sie keine Ahnung hat, was das Besondere an Äquivalenzaussagen sowie -beweisen ist. Um die Problematik hervorzuheben, sollte sie die Äquivalenz betonen. Eine Möglichkeit, die Angabe vorzulesen, wäre: „ $\lim_{x \searrow \xi} f(x) = \gamma = \lim_{x \nearrow \xi} f(x)$ gilt genau dann, wenn $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \gamma$ gilt.“

Sie informiert ihre Kolleginnen und Kollegen, dass sie im Internet recherchiert hat, sie aber keine brauchbaren Denkanstöße erhalten hat. Für Flo ist die Bedeutung der Pfeile im Ausdruck $\lim_{x \searrow \xi} f(x) = \gamma = \lim_{x \nearrow \xi} f(x)$ unklar, wie er in < 8 > einräumt. Er ist mit dieser Notation nicht vertraut. Dies erschwert natürlich das *Verständnis der Angabe*. Nachdem ihm Lisa in < 9 > über die Aussage der Pfeile aufgeklärt hat, schlägt Flo eine *Handlungsoption* vor < 10 >. Er liefert folgenden Vorschlag: „Das heißt wir können einfach das Zeta einsetzen in die Funktion. Das heißt das f von Zeta ist gleich Gamma. Das ist ja das, was wir vorher gehabt haben.“ Doch genau das darf eben nicht gemacht werden. Bei der Prüfung, ob $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ existiert, sowie beim Aufsuchen des Grenzwertes darf der Punkt ξ nicht betreten werden. Bei der Untersuchung von $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ spielt es keine Rolle, welchen Wert die Funktion f im Punkt ξ annimmt und ob sie dort überhaupt definiert ist (vgl. Heuser 2009, S. 236).

Bevor Lösungsstrategien gesichtet werden können, gilt es, sich die *Problematik* der Aufgabe bewusst zu machen, und zu klären, was zu zeigen ist. Während Anna in < 13 > davon ausgeht, dass die Existenz des Grenzwertes eindeutig ist, ist Marie überzeugt, dass dies erst bewiesen werden müsse, wie sie in < 14 > herausstreicht. Sie bezieht sich in ihrer Aussage auf die Information in der Angabe: „insbesondere existiert der Limes“. Für die Studierenden ist anscheinend nicht klar, was damit gemeint ist. Diese Anmerkung soll bedeuten, dass die Studierenden beim Beweis davon ausgehen können, dass die Grenzwerte existieren, das heißt die Existenz der Grenzwerte muss nicht gezeigt werden. Anna liegt mit ihrer Aussage in < 13 > richtig.

12	Flo	Das ist ja ok, weil der Grenzwert existiert und da gibt's keine Problemstelle.
13	Anna	Ja, dass er existiert, das steht ja schon. Das muss ma net beweisen.

14	Marie	Also ich glaub schon, dass das zu zeigen ist. Ich glaub sogar, dass es besonders wichtig ist.
----	-------	---

Es folgen weitere Aussagen, bei denen es um das *Problembewusstsein Schaffen* geht. In < 19 > interpretiert Flo den Äquivalenzpfeil. Seine Idee – „die eine Seite beweisen und dann auf die andere rückschließen“ – basiert auf einer Fehlvorstellung. Stößt man auf eine Behauptung mit „... gilt genau dann, wenn...“ bzw. mit einem Äquivalenzpfeil, so nimmt man eine Seite als Voraussetzung und schließt im Beweis auf die andere Seite. Danach geht man umgekehrt vor. Ein solcher Äquivalenzbeweis besteht immer aus zwei Teilen.

Es stellt sich im Laufe der Gesprächsrunde heraus, dass bis zum Ende Unklarheit herrscht, was tatsächlich zu zeigen ist. Zunächst *klären* sie ab, welche *Handlungsoptionen* ihnen zur Verfügung stehen. Lisa verweist in < 18 > auf die Vorlesung. Flo hält beim Durchblättern seiner Vorlesungsmitschrift Ausschau nach Anregungen < 19 >. Ildiko liefert in < 20 > den Vorschlag, zu zeigen, dass Zeta ein Häufungspunkt ist.

18	Lisa	Ich hab mir gedacht, dass man das mit logischen Argumenten zeigen soll, so wie wir (?bis jetzt/Gesetze?) bewiesen haben. Einfach eine Äquivalenz zeigen sollen. Das dachte ich mir. So wie wir das in der Vorlesung gemacht haben.
19	Flo	Naja, wir müssen die eine Seite beweisen und dann auf die andere rückschließen, oder (?) Oder wir beginnen mit dem einen und gehen auf das andere rüber. (<i>längere Pause</i>) Ich schau mal, was wir dazu aufgeschrieben haben. (<i>blättert in seiner Vorlesungsmitschrift, längere Pause</i>) rechtsseitiger Grenzwert, Häufungspunkt, Berührungspunkt, Grenzwert.
20	Ildiko	Ich glaub, wir müssen zeigen, dass dieses komische Zeichen, dass die Häufungspunkt von (-) Wenn ich es um diesen Punkt entwickle, dann ist (-)

Lisa bekräftigt Ildikos Idee in < 28 >. Die Gruppe *entscheidet* sich, die Definition des linksseitigen Grenzwertes, die Lisa in < 28 > vorliest, als *Lösungsmethode* zu verwenden. Lisa ist beim Vorlesen jedoch ungenau. Sie nennt a den linksseitigen Grenzwert von $\lim_{x \nearrow a} f(x) = c$. Allerdings ist c der linksseitige Grenzwert von der Funktion f. Lisa spricht in < 28 > folgende Definition an: Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. $c \in \mathbb{R}$ heißt linksseitiger Grenzwert von f, $\lim_{x \nearrow a} f(x) = c$, genau dann, wenn a Häufungspunkt von $] - \infty, a[\cap D$ und für alle Folgen (x_n) mit $x_n \in D$, $x_n < a \forall n$ und $x_n \rightarrow a$ gilt: $f(x_n) \rightarrow c$. Marie zweifelt in < 29 >, ob sie diese Definition

für diese Aufgabe verwenden können. Daraufhin überlegen die Studierenden, ob Zeta ein Häufungspunkt sein kann, wenn er nicht in der Definitionsmenge liegt.

28	Lisa	Das hab ich da aufgeschrieben: <i>(liest aus ihrer Mitschrift vor)</i> Der Limes von f von x ist gleich c mit x ist der $(,)$ äh $(,)$ x gegen a und a ist der linksseitige Grenzwert also <i>(macht eine Bewegung mit der rechten Hand schräg nach rechts oben)</i> , wenn a der Häufungspunkt von D ist, vom Definitionsbereich. Das heißt das Zeta muss der Häufungspunkt von dem Intervall a b sein.
29	Marie	Aber kann er der Häufungspunkt sein, wenn er nicht einmal im Intervall drin ist?
30	Ildiko	Ja, das kann sein.
31	Lisa	Das ham ma, glaub ich, irgendwo aufgeschrieben. Ok, <i>(liest aus Mitschrift vor)</i> Beispiel: f von x ist gleich Betrag von x , der Definitionsbereich sind die reellen Zahlen und a ist gleich Eins. Das heißt die Folge muss größer als der äh als Zeta sein. <i>(blickt auf ihre Mitschrift, Pause)</i> Wie war das noch mal? <i>(Pause)</i>
32	Ildiko	(? x ist ein Häufungspunkt, wenn rundherum unendlich viele Punkte konvergieren?)
33	Lisa	Ja, das stimmt eh.

Die Studierenden einigen sich, dass Zeta „der Häufungspunkt“ (< 29 >) sei, auch wenn dieser nicht im Definitionsbereich enthalten ist < 30 >. Die Verwendung des bestimmten Artikels lässt darauf schließen, dass die Fehlvorstellung unter den Studierenden herrscht, es gäbe genau einen Häufungspunkt. Eine Menge kann jedoch mehrere Häufungspunkte besitzen.

Flo formuliert in < 35 > zwei Fragen, die zur *Klärung der Handlungsoptionen* beitragen sollen. Er erkundigt sich, wie man zeigen könne, dass Zeta ein Häufungspunkt sei. Ildiko *stellt* daraufhin in < 36 > einen *Zugriff* her. Ihre Ideen, wie man die *Aufgabe handhabbar* machen kann, bleiben den Kolleginnen und dem Kollegen unklar.

35	Flo	Und wie zeigen wir, dass es ein Häufungspunkt ist? Da müssen wir eine Teilfolge kreieren, oder (?)
36	Ildiko	Wenn das x Häufungspunkt ist, dann konvergiert gegen Gamma (<i>sic</i>). Dann haben wir die zwei (?Beweishälften?). Aber man kann direkt $(,)$ also a heißt Häufungspunkt, wenn es eine Folge x_n gibt, die gegen a konvergiert, weil wir wieder unter (?Gamma?) sind und das ist genau, weil wir haben den Definitionsbereich ohne Zeta. So die Folge konvergiert, wenn wir zeigen, dass sie gegen Zeta konvergiert, aber Zeta ist nicht drinnen. Dann ist Zeta Häufungspunkt.

Lisa fasst in < 41 > als *erläuternden Kommentar* zusammen, was sie zeigen wollen. Zur *Sichtung von Handlungsoptionen* schlägt Lisa in ihrer Mitschrift aus der

Vorlesung nach < 43 >. Sie stellt sich gewissermaßen die Frage, welche Sätze zur Lösung der Aufgabe in Frage kommen. Flo hilft ihr in < 44 > auf die Sprünge, indem er das Kapitel nennt, bei dem sie Häufungspunkte durchgenommen haben.

41	Lisa	Was, wir müssen jetzt zeigen, dass dieses Zeta ein Häufungspunkt von a b ist oder wie (?)
42	Ildiko	Ja.
43	Lisa	Häufungspunkt. <i>(blättert in ihrer Mitschrift)</i>
44	Flo	Das haben wir bei den Reihen gemacht.
45	Lisa	<i>(blättert weiterhin in ihrer Mitschrift)</i> Ich such die Häufungswerte, Häufungspunkte. Ah warte, ein Punkt a Element heißt Häufungspunkt a , wenn es eine Teilmenge a_{n_k} gibt, sodass (-) Ok.
46	Flo	Genau, dass die Teilfolge gegen diesen Punkt konvergiert.

Die Studentin wird schließlich fündig < 45 >. Sie findet die Definition zu Häufungspunkte. An dieser Stelle muss angemerkt werden, dass die Studierenden den falschen Begriff nachgeschlagen haben. Es gilt, zwischen Häufungswert und Häufungspunkt zu unterscheiden. Von Häufungspunkten ist im Zusammenhang mit Mengen zu sprechen. Bei Folgen gibt es keine Häufungspunkte, sondern Häufungswerte. Lisa versucht die Aussage des Satzes auf ihre Angabe zu übertragen, indem sie die Variablen austauscht. Diese Tätigkeit fällt nach Ableitinger und Herrmann in die Kategorie *Anpassen*. Die Phase des *Angleichens der Notation* erstreckt sich über fünf Zeilen. Lisas Wortmeldung in < 51 > veranschaulicht, dass sie keine Ahnung hat, wovon sie redet. Sie jongliert mit den Begriffen „linksseitiger Grenzwert“, „Häufungspunkt“ und „Teilfolge“, ohne genau zu wissen, was sie damit anfangen soll. Gegen Ende gibt Lisa zu, dass sie ansteht. Aussagen wie – „Ich weiß jetzt da grad nicht weiter.“ – verlangen oftmals die *Herstellung eines Zugriffs*.

51	Lisa	Ich schreib nur das an so wie in der Angabe. x_n gegen a als linksseitigen Grenzwert und wenn a der Häufungspunkt ist, dann wär Limes von x_n gleich Zeta. Und wenn ich jetzt die Teilfolge bilde, weil ich noch nicht weiß, ob Zeta der Häufungspunkt ist, muss ich x_{n_k} also eine Teilfolge bilden. Ok. <i>(längere Pause)</i> Heißt Häufungspunkt $x_{n(,)}$ Teilfolge x_{n_k} mit k Element der natürlichen Zahlen. <i>(längere Pause, Flo liest in seiner Mitschrift)</i> Ich weiß jetzt da grad nicht weiter.
----	------	--

Flo findet in seinen Übungsunterlagen einen vermeintlichen Ankerpunkt, um Lisa aus der Sackgasse zu helfen < 54 >.

54	Flo	<i>(legt seine Mappe mit der Vorlesungsmitschrift auf den Tisch)</i> Wir haben das so aufgeschrieben in der Übung: Zeta Häufungspunkt einer
----	-----	---

	Folge a_n , wenn eine Teilfolge existiert a_{n_k} mit a_{n_k} geht gegen Zeta. (liest aus seiner Mitschrift vor)
--	---

Lisa fragt sich in < 57 >, was sie mit dieser Information anfangen soll. Leider muss Flo passen, er hat zwar in der Lehrveranstaltung mitgeschrieben, allerdings konnte er der Argumentation nicht folgen. Dieser Versuch von Flo, die *Aufgabe handhabbar zu machen*, missglückt, da er selbst nicht verstanden hat, wie in der Übung argumentiert wurde, wie er in < 58 > mitteilt. Der gescheiterte Versuch, einen Zugriff aufzubauen, gibt Lisa den Anstoß, in ihrer Mitschrift nach einer ε -Definition Ausschau zu halten < 59 >.

57	Lisa	Aber wie hantier ich jetzt damit?
58	Flo	Das haben wir dann so gemacht (<i>blättert eine Seite um</i>) und das war mir zu kompliziert. Das haben wir mit hunderttausend verschiedenen Sachen gemacht. Dann war das kleiner Epsilon, weil wir ein großes N hatten und dann haben wir daraus geschlossen, dass es eine Teilfolge ist.
59	Lisa	Ok. (<i>Pause, liest aus ihrer Vorlesungsmitschrift vor</i>) Das heißt zu beliebigen Epsilon größer Null existiert ein n Element aus den natürlichen Zahlen, sodass die Teilfolge a_{n_k} minus a minus unserem Zeta, weil das a ist ja unser Zeta, kleiner Epsilon ist für alle k größer gleich N. Ok, ich schreib das einmal auf.
60	Ildiko	Ich glaub, die Definition ist eine andere. Das war aber bei den Folgen und hier haben wir Funktionen.

Auf der Suche nach Handlungsoptionen springt Lisa ein Satz aus der Vorlesung ins Auge < 59 >. Es ist nicht genau nachzuvollziehen, was sie in < 59 > meint. Anscheinend handelt es sich dabei um einen Ausschnitt aus dem Beweis des Satzes – „Zeta ist Häufungspunkt einer Folge a_n , wenn eine Teilfolge a_{n_k} mit a_{n_k} strebt gegen Zeta“ –, den Flo in < 54 > vorgelesen hat. Man hat den Eindruck, sie wisse selbst nicht genau, warum sie diesen Abschnitt aus dem Skript abschreibt. Ildiko entgegnet ihr in < 60 >, dass Lisa beim falschen Kapitel der Vorlesung suche, weil sie es hier mit einer Funktion und nicht mit einer Folge zu tun haben. Niemand reagiert darauf. Lisa wagt in < 66 > einen neuen Versuch an Hand eines Beispiels von der Vorlesung *einen Zugriff herzustellen*. Dies hilft ihr ebenfalls nicht weiter, weil die Ausgangssituation eine andere war, wie ihr Flo in < 67 > vermittelt.

66	Lisa	Zum Beispiel, hier (<i>bezieht sich auf die Vorlesungsmitschrift</i>) haben wir ein Beispiel genommen mit a_{2n} ist gleich n, das heißt a_{2n+1} ist minus Eins und ich weiß jetzt nicht, was ich einsetzen kann, weil da kann ich auch x_n , x_{n+1}
67	Flo	Na, das war gegeben.

68	Lisa	Eben und ich frag mich, wie (-)
69	Flo	Das geht halt mit einer Funktion gar nicht.
70	Ildiko	Also angenommen, dass x_n gegen Zeta konvergiert mit x_n gegen Zeta, dann ist ein Häufungspunkt, dann folgt, dass der Limes von diese Folge ist Gamma, wenn n gegen Unendlich konvergiert und daraus folgt, dass Limes ist Gamma.

Ildiko präsentiert in < 70 > einen Lösungsvorschlag. Den anderen Studierenden bleibt er rätselhaft, aber sie schreiben ihn ab. Im Folgenden < 92 > fasst Flo Ildikos Überlegungen als *Resümee* zusammen.

92	Flo	Die Ildiko meint eben, dass die Folge gegen Zeta konvergiert und die Folge nicht drinnen ist.
93	Lisa	Die Folge nicht Zeta enthält.
94	Flo	Ja, und dann ist per Definition Zeta ein Häufungspunkt und deswegen muss Zeta ein Häufungspunkt sein. Das ist jetzt damit bewiesen.
95	Lisa	Laut Angabe halt, weil es nicht im Intervall ist. Zeta ist nicht in der Folge enthalten.
96	Flo	Ja, genau.
97	Lisa	Ok, gut.
98	Flo	U n d dann hab ich das abgeschrieben. (<i>lacht</i>) Und damit ist es ja schon gezeigt, weil wir mussten ja zeigen, dass Zeta ein Häufungspunkt ist, dann stimmt das halt.
99	Ildiko	f von dieser Folge konvergiert gegen c und das ist wie dieses c(.) f von x ist in diesem Fall Gamma.
100	Anna	Und ihr glaubt, das genügt dann schon?

In < 98 > gibt Flo zu verstehen, dass bereits alles gezeigt ist, was sie zeigen mussten. Dieses Urteil ist insofern von Bedeutung, als dass es entscheidet, ob der Beweis zu Ende ist oder noch fortzuführen ist. Aussagen wie diese gehören in die Kategorie *begleitende Kommentare und Erläuterungen*. Streicht man den Aspekt der Überprüfung, ob die Angabe damit bewiesen ist, hervor, so handelt es sich um *Problembewusstsein Schaffen*. Die Studierenden sind sich nicht einig, was sie überhaupt gezeigt haben. Es entbrennt eine Diskussion darüber, die sich von < 104 > bis < 110 > erstreckt. Auch im weiteren Gespräch finden sie keinen Zugang mehr zu der Problematik der Ausgangssituation. Daher endet die Analyse an dieser Stelle. Im vollständigen Transkript der Aufgabe 42, das sich im Anhang befindet, ist die gesamte Interaktion in Teilphasen gegliedert. Da die Studierenden sich im Gespräch weit von der Aufgabenstellung entfernt haben, ist im Anschluss an das komplette Transkript eine Lösung angehängt. An Hand dieser kann man feststellen, dass die Studierenden die Aufgabe schon aus dem Grund nicht lösen konnten, da sie die Problematik nicht erfassten.

3.4.9.4. Synthese

Nach einem ersten Kontakt mit der Aufgabe widmen sich die Studierenden in einer langen Phase dem *Problembewusstsein Schaffen*. Jedoch schaffen sie es nicht, die Problematik der Aufgabe zu erfassen. Sie verkennen, dass sie es hier mit einer Äquivalenzaussage zu tun haben bzw. wissen nicht, wie sie damit umgehen sollen. Mit Ausnahme von einigen Aussagen – < 10 >, < 18 > und < 19 > – erstreckt sich diese Teilphase von Beginn bis zur Zeile < 20 >. In diesem Abschnitt geben sie sich Mühe, die Angabe richtig zu interpretieren und die Problematik zu erfassen. Nachdem sich die Gruppe sinnloserweise entschlossen hat, zu zeigen, Zeta sei ein Häufungspunkt von $]a, b[$ folgt von < 26 > bis < 28 > eine Sequenz der *Klärung der Handlungsoptionen*. Da nicht alle mit der von Lisa vorgeschlagenen Strategie einverstanden sind, *prüfen* die Studierenden den Satz auf dessen Anwendbarkeit bei der gegebenen Problemstellung, < 29 > bis < 33 >. Der anschließende Abschnitt – < 34 > bis < 58 > – zeichnet sich aus durch Phasen der *Sichtung von Lösungsstrategien*, auf die Versuche folgen, *die Aufgabe handhabbar zu machen*. Die Studierenden haben sich bei ihrem Beweis so weit von der Angabe entfernt, dass sie die Aufgabe nicht mehr lösen können. Auffallend bei der Bearbeitung der Aufgabe 42 ist, dass die Studierenden den Begriff „Häufungspunkt“ oft im Zusammenhang mit Folgen erwähnen. Allerdings spricht man in der Analysis üblicherweise von einem „Häufungswert einer Folge“. Dieser ist vom „Häufungspunkt einer Menge“ zu unterscheiden (Heuser 2009, S. 235).

3.4.10. Stetigkeit einer Funktion (Aufgabe 43)

3.4.10.1. Ausgangslage

Nachdem der Sechsergruppe, bestehend aus Anna, Flo, Ildiko, Lisa, Marie und Steffi, nichts mehr zu Aufgabe 42 einfällt, wenden sich die Studierenden der Aufgabe 43 zu. Genauere Informationen zur Konstellation der Gruppe sind in der Beschreibung der Ausgangslage der vorigen Aufgabe zu finden. Bei der Bearbeitung dieser Übungsaufgabe stützen sich die Lernenden auf ihre Mitschrift aus der Vorlesung. Der Lösungsprozess ist geprägt von einer langen Phase des

Problembewusstsein Schaffens. Es bedarf einer intensiven Auseinandersetzung mit der Angabe, damit sie herausfinden, was zu zeigen ist.

3.4.10.2. Aufgabenstellung

Gegeben sei die stetige Funktion $f: [-1,1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$. Begründen Sie, warum f nicht als stetige Funktion auf ganz $[-1,1]$ fortgesetzt werden kann, d.h. es gibt keine stetige Funktion $g: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$.

3.4.10.3. Analyse

Der Einstieg zeichnet sich durch eine genaue Lektüre der Angabe aus, um ihr die dahintersteckende Problematik zu entlocken. Den Studierenden leuchtet sofort ein, dass die Funktion $g: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$ nicht stetig ist. Ihnen ist zunächst unklar, was zu zeigen ist. Sie sind der Meinung, dass die Angabe selbsterklärend ist, wie Flo in < 3 > zum Ausdruck bringt.

1	Flo	Wir haben eine stetige Funktion und wir sollen zeigen, warum das nicht als stetige Funktion auf ganz(,) fortgesetzt werden kann.
2	Lisa	Naja, weil für x durch Null kein Wert vorhanden ist. Die geht ja von unten (-) oder wie geht die (?)
3	Flo	Das impliziert ja das schon, oder (?) Wenn da steht ohne Null, das heißt ja praktisch schon, dass es nicht stetig auf diesen Bereich ist.

Zunächst gilt es die Problematik der Aufgabe zu identifizieren, *Problembewusstsein zu schaffen*. Welche Fragestellung verbirgt sich hinter der prägnanten Formulierung der Angabe? Flo streicht in < 7 > hervor, eine Funktion sei stetig, wenn sie „in jedem Punkt definiert ist“. Lisa ergänzt in < 8 >, dass die Division durch Null „noch nicht definiert wurde“. Daher kann die Funktion $g: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$ nicht stetig sein. Marie lenkt in < 10 > die Aufmerksamkeit der Gruppe auf die Funktion g . Für sie ist unverständlich, was der letzte Satz der Angabe ausdrückt.

7	Flo	Wenns in jedem Punkt definiert ist, die Funktion.
8	Lisa	Und da Eins durch Null oder irgendeine Zahl durch Null noch nicht definiert wurde oder so.
9	Flo	Das sollten wir noch. (Lisa lacht)

10	Marie	Aber ich mein, es steht ganz am Ende, dass es keine Funktion gibt, für alle x ungleich Null.
11	Flo	Also es gibt keine stetige Funktion g im Intervall auf $\mathbb{R}$ mit g ist gleich $f(\cdot)$ für alle x (-)
12	Anna	Ja, wir müssen das begründen. Dass es so ist, wissen wir ja.

Anna meint lediglich in < 12 >, dass die Aussage logisch sei, die Begründung dafür fehle noch. Flo hilft Marie, die sich mit der Angabe nicht anfreunden kann, auf die Sprünge, indem er die Angabe umformuliert < 20 >. Die Angabe für alle Gruppenmitglieder verständlich zu machen, ist ein wesentlicher Aspekt des *Problembewusstseins Schaffens*, andernfalls können nicht alle den kommenden Argumentationen folgen.

20	Flo	Das heißt, es gibt keine stetige Funktion (-) Naja für alle x ungleich Null innerhalb diesen Intervalls gibt's keine richtige Funktion, weil da die Null vorkommt. Da ist sie nicht definiert, das wäre es eine Sprungstelle. (<i>längere Pause</i>) Aber ich wüsste nicht, wie man das beweisen soll, wenn man (-)
21	Anna	Wir müssen das nur begründen und das ham ma eigentlich schon. Begründen und Beweisen ist nicht dasselbe.
22	Marie	Ja, das Begründen ist (...)
23	Flo	Das heißt, ich kann einfach hinschreiben, da x nicht Null sein darf.
24	Marie	Weil Eins durch Null nicht definiert ist.
25	Lisa	Ja, das hab ich auch hingeschrieben. Aber ich weiß nicht, ob man das überhaupt hinschreiben darf. (<i>Pause</i>) Eine Funktion heißt stetig, wenn sie für jeden Wert x_0 , für jedes x_0 eben einen Wert bekommt.

Flo meint in < 20 >, die Kernaussage der Angabe verstanden zu haben, allerdings ist er ratlos, wie man das beweisen soll. Anna hebt in < 21 > hervor, dass man „begründen“ soll. „Begründen und Beweisen ist nicht dasselbe“, meint sie. An dieser Stelle ist anzumerken, dass die Mathematikdidaktik tatsächlich zwischen den beiden Begriffen unterscheidet. Handelt es sich um hochschulmathematische Aufgaben, so ist „begründen“ gewissermaßen mit „beweisen“ gleichzusetzen. Insofern reicht es nicht zu sagen, die Division durch Null ist nicht erlaubt wie Flo in < 23 > vorschlägt. Lisa äußert in < 25 > Zweifel, ob dies reiche und versucht selbst erfolglos, eine Definition der Stetigkeit zu erstellen. Daraufhin entfacht eine Diskussion um die Stetigkeit von Funktionen. Marie *schafft* in < 26 > einen *Zugriff* zum Begriff der Stetigkeit an Hand einer Treppenfunktion. Diese wurde anscheinend als Beispiel für eine unstetige Funktion in der Vorlesung erwähnt.

26	Marie	Nein, es ist nicht stetig, es können ja irgendwelche Werte rauskommen, irgendwo, weil die Treppenfunktion ist auch nicht stetig.
----	-------	--

27	Lisa	Ja, aber wenn sie für jedes x einen Wert bekommt. Die Treppenfunktion hat ja auch nicht überall, eben weil der Graph nicht durchgeht.
28	Marie	Doch, ich glaub schon, dass sie überall einen Wert hat, die Treppenfunktion.

Das Aufgreifen einer Treppenfunktion bringt keine Klarheit über den Stetigkeitsbegriff. Aus diesem Grund schlägt Flo die Stetigkeitsdefinition in seinem Skript nach < 33 >. Stoßen die Studierenden auf einen Ausdruck in der Angabe, mit dem sie zu wenig vertraut sind und suchen diesen in ihrer Mitschrift oder einem einschlägigen Fachbuch heraus, so gehört dieser Teilprozess zum *Problembewusstsein Schaffen*. Sie können nur dann die Aufgabe erfassen, wenn sie alle auftretenden Begriffe kennen. Marie ist überzeugt, dass Stetigkeit mehr verlange als dass jedem Wert aus dem Definitionsbereich genau ein Wert aus der Zielmenge zugeordnet ist < 34 >.

33	Flo	Schau ma uns noch mal Stetigkeit an (<i>nimmt eine Mappe mit der Vorlesungsmitschrift aus seiner Tasche</i>). Ich glaub auch, dass es in jedem Punkt definiert sein muss.
34	Marie	Aber das ist nicht genug, du kannst ja nicht (-) Die Treppenfunktion hat für jeden Wert ein Argument, aber sie ist trotzdem nicht stetig. (<i>Flo blättert in seiner Mappe</i>)
35	Ildiko	Ja, wenn wir zeigen, dass x minus a ist kleiner als Delta, aber f von x minus f von a ist nicht kleiner Epsilon, dann ist die Funktion nicht stetig.

In Hinblick auf die Stetigkeit schlägt Ildiko in < 35 > vor, die ε - δ -Definition zu verwenden. Sie *nennt* eine *Handlungsmethode*, wie man überprüfen kann, ob eine Funktion stetig ist. Die Kolleginnen gehen auf ihren Vorschlag nicht ein. Flo sucht unterdessen in seinem Skript nach Beispielen für stetige Funktionen. Er *schafft einen Zugriff*, indem er die gegebene Funktion mit der Skizze eines Funktionsgraphen aus der Mitschrift vergleicht. Es handelt sich dabei um eine Treppenfunktion.

38	Flo	Ja, die Treppenfunktion dürfte stetig sein.
39	Anna	Nein. Die Treppenfunktion ist nicht stetig.
40	Flo	Da haben wir Beispiele: Stetigkeit von Funktionen.
41	Anna	Die hat überall Sprungstellen, da ist sie nicht stetig.
42	Marie	Sie ist zwar überall definiert, aber sie hat Sprungstellen.
43	Anna	Und dann ist sie nicht stetig. (<i>Lisa schreibt, längere Pause</i>)

Anna, die rechte Sitznachbarin von Flo, schaut sich in < 41 > die Skizze dieser Treppenfunktion an und meint, „die hat überall Sprungstellen, da ist sie nicht stetig.“ Lisa notiert nach dem Gespräch: „zu zeigen: g ist nicht stetig“. Ihre Aussage < 45 > kann man einerseits als *strukturierenden Kommentar* auffassen, da sie den weiteren Verlauf ankündigt, andererseits als *Problembewusstsein*, weil die Studentin den zentralen Punkt der Aufgabe benennt. Sie erkennt allerdings nicht, dass die Stelle Null zu untersuchen ist, um zu zeigen, dass die Funktion g unstetig ist. Während Flo in < 46 > mit der Aufgabe schon abschließen will, präsentiert Marie in < 47 > eine *Lösungsstrategie*.

45	Lisa	Es ist zu zeigen, sie ist nicht stetig.
46	Flo	Ich glaub, mehr können wir dazu nicht sagen.
47	Marie	Aber zum Beispiel der rechtsseitige Limes gegen Null und der linksseitige Limes gegen Null sind ja beide Unendlich. Und dadurch, dass (?die sozusagen getrennt sind?).
48	Flo	Der rechtsseitige und der linksseitige gegen Null sind Unendlich.
49	Marie	Von der positiven Seite kommend, geht's dann in, nein. Verdammt.
50	Steffi	Aber das brauchen wir ja gar nicht, wir haben da den Grenzwert von minus Eins bis Eins. (<i>längere Pause</i>)

Marie schlägt in < 47 > vor, die Berechnung des einseitigen Grenzwerts als *Handlungsmethode* zu wählen. Sie erkennt richtigerweise, dass $g(x) = \frac{1}{x}$ gegen Unendlich strebt, wenn x von rechtskommend gegen Null geht. Dies wäre schon ein guter Ansatz, um die Aufgabe zu lösen. Steffi meint in < 50 >, Marie liege falsch, man müsse sich das gesamte Intervall von $[-1,1]$ anschauen und nicht $g(0)$. Dieser *Kommentar* hat zur Folge, dass Maries Lösungsoption verworfen wird und sie zweifelt, ob sie die Angabe richtig verstanden hat. Hinter Steffis Bemerkung steckt jedoch eine Fehlvorstellung der Problematik der Aufgabe, sprich ein *mangelhaftes Problembewusstsein*. Marie bringt in < 54 > zum Ausdruck, dass ihr somit die Aufgabenstellung vollkommen unverständlich sei. Es folgt eine Phase des *Problembewusstsein Schaffens*, in der die Studierenden versuchen, ein adäquates Verständnis der Aufgabe aufzubauen. Sie stellen sich erneut die Frage, was Stetigkeit bedeutet. Lisa gibt in < 66 > die Angabe in eigenen Worten wider. Marie stellt in < 70 > in Frage, ob sie die Problematik richtig erfasst haben. Die Schwierigkeiten der korrekten Interpretation der Aufgabenstellung verdeutlicht Flos Aussage in < 71 >.

66	Lisa	Die zwei Funktionen können als stetig angesehen werden, aber diese zwei in eines, in einen Definitionsbereich verpackt, können nicht als stetig angesehen werden. Wenn du das, diese zwei f, nur f, dann ist das nicht stetig, aber dass eben f von minus Eins bis eben kurz vor Null. Ich weiß es auch nicht. Ab kurz vor Null bis Eins, dann kann es als stetig angesehen werden, nein als unstetig, oder was war das jetzt? Wenn das quasi verbunden ist.
67	Flo	Wenn es verbunden ist, ist es unstetig. Und was hat das jetzt mit dieser Funktion g hier zu tun?
68	Lisa	Da haben wir (-)
69	Steffi	Na das sagt genau die Zeile aus (Anm.: $g(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$). Es steht auch das gleiche. Da ist nur noch mal erklärt, dass die Null ausgelassen wird.
70	Marie	Ich bin mir nicht sicher, ob wir das richtig verstanden haben.
71	Flo	Ja, das ist ja auch nur so eine Wischiwaschi-Frage. (Lachen)

Der *Kommentar* des Studenten in < 71 > veranschaulicht, dass die prägnante Formulierung der hochschulmathematischen Aufgaben die Lernenden oftmals herausfordert. Marie versucht in < 73 > an Hand einer graphischen Vorstellung die *Aufgabe handhabbar zu machen*.

73	Marie	Ja, weil ma nicht genau weiß (-) Aber wir gehen so, dass man von minus Eins kommt, dann gegen minus Unendlich geht. Und dann plötzlich plus Unendlich ist, weil oft ist es so, dass (-)
----	-------	---

Maries *Zugriff* in < 73 > wäre der richtige Ansatz, die Aufgabe zu lösen, doch Lisa geht darauf nicht ein, sondern sucht in ihrer Mitschrift nach *Handlungsoptionen*. Sie schlägt in < 78 > und < 81 > vor, mit Hilfe der gleichmäßigen Stetigkeit zu arbeiten.

81	Lisa	Und der Satz, wenn das Intervall $[a, b]$ ist beschränkt und abgeschlossen, dann ist f gleichmäßig stetig. Insofern gesehen ist unsere Funktion gleichmäßig stetig.
82	Flo	Richtig.
83	Lisa	Weil wir ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall haben und indirekt: Angenommen die Funktion ist nicht gleichmäßig stetig, existiert ein Epsilon Null, das größer Null ist für alle (-)
84	Flo	Vielleicht hätten wir das so machen sollen.
85	Lisa	Ja, ich glaub, dass wir da etwas (-)

In < 82 > *prüft* Lisa, ob der soeben vorgelesene Satz bei ihrer Aufgabe anwendbar ist. Lisas *Handlungsoption* findet bei ihren Kolleginnen und ihrem Kollegen Zustimmung < 84 >. Die Gruppe wendet sich in < 92 > der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit zu, um sich deren Bedeutung *bewusst zu machen*. Flo verweist in < 97 > auf die Skizze, die sie zur Veranschaulichung in der Vorlesung

angefertigt haben. Er *schafft einen Zugriff* zu ihrer Aufgabenstellung, indem er eine ähnliche Skizze anfertigt, siehe Abbildung Aufgabe 43.

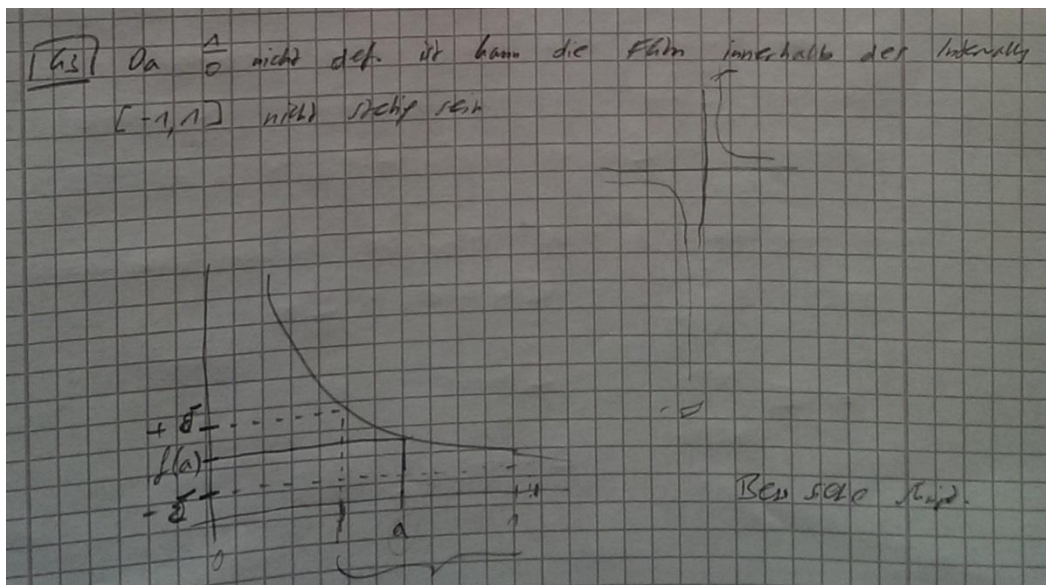


Abb.8 Aufgabe 43

Flos angefertigte Skizze bringt Lisa in < 106 > auf die Idee, die Funktion f in zwei Funktionen zu unterteilen, einerseits $f_1: [-1, 0[\rightarrow \mathbb{R}$, andererseits $f_2:] 0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Während Lisa damit beschäftigt ist, ihre Idee umzusetzen, herrscht bei Marie weiterhin Unklarheit über die Problemstellung < 118 >. Der Studentin leuchtet nicht ein, warum die Funktion $f: [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ stetig ist. Sie kann sich mit der Angabe nicht anfreunden und findet deshalb keinen für sie zufriedenstellenden Zugang. Flo versucht für sie auf einer anschaulichen Ebene die *Aufgabe handhabbar* zu machen. Er liefert in < 120 > folgenden Vorschlag: „Da kannst du dir praktisch vorstellen, dass da noch eine Stricherlinie ist, weil da Null aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen ist und da gehst dann wieder weiter.“ Er meint also, sie solle sich im Koordinatenursprung eine „Stricherlinie“ denken, sodass die Stelle $x = 0$ aus der Skizze ausgenommen ist.

118	Marie	Ja, aber ich weiß nicht, wenn es doch stetig ist und plötzlich bin ich an einem ganz anderen Ort.
119	Lisa	Wenn du die Null nicht ausgeschlossen hättest, dann wärs eh nicht stetig.
120	Flo	Da kannst du dir praktisch vorstellen, dass da noch eine Stricherlinie ist, weil da Null aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen ist und da gehst dann wieder weiter.

Marie bereitet die Angabe offensichtlich Schwierigkeiten, weil sie eine stetige Funktion mit einer Funktion verbindet, deren Graphen man in einer Linie ohne Unterbrechung zeichnen kann. Dies bringt sie in < 63 > zum Ausdruck.

63	Marie	Aber stetig ist ja, so ganz einfach betrachtet, wenn man es in einem Graphen zeichnen kann.
----	-------	---

Immer wieder betont sie, dass $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty$ bzw. $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty$, so auch in < 125 >. Dies wäre der richtige Zugriff, um die Aufgabe erfolgreich zu lösen. Die Studierenden erkennen jedoch nicht, inwiefern Maries Überlegungen zielführend sind. Der Prozess des *Problembewusstseins Schaffens* ist für sie noch nicht abgeschlossen.

125	Marie	Mein Problem ist, dass die Werte, die Funktionswerte einen großen Unterschied, also einen großen Abstand voneinander haben. Ich bin ganz nah bei Null eine riesengroße negative Zahl und dann geh ich weiter und bin plötzlich bei einer riesengroßen positiven Zahl. Da ist doch ein Abstand.
-----	-------	--

Ab < 129 > wählt Lisa die ε - δ -Definition der gleichmäßigen Stetigkeit als *Handlungsoption*. Die Studierenden versuchen sich von < 130 > bis < 159 > die Problematik über eine Skizze wie Flo sie bereits in < 97 > aufgezeichnet hat, handhabbar zu machen. Lisas Kommentar in < 161 > schließt die Phase der *Schaffung eines Zugriffs*: „Können wir damit etwas anfangen? Schon oder?“. Flo erinnert in < 162 >, was sie damit zeigen wollten, die gleichmäßige Stetigkeit. An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, dass in der Aufgabenstellung gar nicht von gleichmäßiger Stetigkeit die Rede ist, sondern von Stetigkeit. Die Gruppe hat sich in ihrer Diskussion von der Angabe entfernt. Hier sieht man, wie wichtig es bei der Bearbeitung von Aufgaben ist, sich wiederholt vor Augen zu führen, was gefragt ist. Die Studierenden erkennen nicht, dass sie einen falschen Lösungsweg eingeschlagen haben und setzen unbeirrt fort. Sie stoßen auf den Satz von Bolzano-Weierstraß und wollen konvergente Teilfolgen bilden. Da die Studierendengruppe in ihrem Gespräch nicht mehr auf die ursprüngliche Angabe zurückfinden, wird die Analyse hier beendet. Im Transkript der Aufgabe 43, das im Anhang zu finden ist, ist auch die übrige Interaktion in Teilphasen unterteilt.

3.4.10.4. Synthese

Der Beginn des Bearbeitungsprozesses ist geprägt von einer langen Sequenz des *Problembewusstseins Schaffens*. Die Studierenden versuchen in den Zeilen < 1 > bis < 25 > die Problematik zu identifizieren. Im Zuge dessen bringt Marie in < 26 > den Vergleich mit einer Treppenfunktion ins Spiel, um den Begriff der Stetigkeit *zugänglich zu machen*. Zum *Bewusstmachen* der Bedeutung des Stetigkeitsbegriffes schlagen sie in ihrer Vorlesungsmitschrift nach < 33 >. Die Gegenüberstellung einer Treppenfunktion mit der gegebenen Funktion f bringt Verwirrung mit sich. Die Lernenden sind sich nicht einig, ob eine Treppenfunktion im Allgemeinen „unstetig“ < 31 > oder „stetig“ < 38 > ist. Es folgt eine Phase der intensiven Auseinandersetzung mit der Angabe. Die Studierenden formulieren beispielsweise in < 66 > die Aufgabe in eigenen Worten, um das eigentliche Problem herauszufiltern. Dies entspricht dem *Erlangen von Problembewusstsein*. Lisa stößt in ihrer Mitschrift in Zeile < 81 > auf folgenden Satz: „Und der Satz (*liest weiter vor*), wenn das Intervall $[a, b]$ ist beschränkt und abgeschlossen, dann ist f gleichmäßig stetig.“ Die Gruppe wählt diesen Satz als *Handlungsoption* und somit als Ausgangspunkt für ihren weiteren Lösungsprozess. Mit einer Skizze, die die ε - δ -Definition der Stetigkeit von Funktionen veranschaulicht, schaffen sie sich einen *Zugriff* < 97 >. Marie findet nach wie vor keinen Zugang zur Aufgabenstellung, wie sie unter anderem in < 125 > äußert. Lisa arbeitet unterdessen mit dem Satz von < 81 > weiter. Als ersten Schritt *passt* sie die Informationen der Angabe an den Satz *an*. Sie schafft sich einen *Zugriff* über eine Skizze. Danach geht sie analog zum Beweis des Satzes, den sie in der Vorlesung notiert hat, vor. Im Folgenden geht es eher um das Verständnis des Beweises aus der Mitschrift als um das Lösen der Übungsaufgaben. Da sich die Studierenden strikt an den Beweis halten, schreiben sie diesen mit ein paar *Änderungen in der Notation* ab. Festzuhalten bleibt, dass die Lernenden vor allem am Verständnis der Aufgabenstellung gescheitert sind. Wiederholt bringen sie dies zum Ausdruck, unter anderem in < 71 >, < 213 > und < 214 >.

212	Lisa	Ich bin einfach zu blöd, das zu kapieren. (<i>Marie lacht</i>) Dass ich das jemals behirn.
213	Flo	Wir verstehens ja, was gemeint ist, aber das zu zeigen (-)
214	Marie	Aber bei mir, ich bin mir dann oft nicht mehr sicher, ob ich wirklich versteh, was gemeint ist. (<i>lacht</i>)

Dieser Transkriptausschnitt zeigt einerseits, dass die Lernenden oft Schwierigkeiten haben, die knapp formulierten Angaben zu verstehen. Andererseits ist dies ein Beispiel dafür, dass sich Studierende schwer tun, eigene Beweise zu formulieren.

3.5. Interpretation der Ergebnisse

Die qualitative Studie hat gezeigt, dass sich das Phasenmodell der Teilsequenzen nach Ableitinger und Herrmann auf den Lösungsprozess der Analysis-Aufgaben durch Studierende übertragen lässt. Die von den Autoren beschriebenen Teilphasen, die sie bei ausführlichen Musterlösungen von Dozentinnen und Dozenten erkannt haben, finden sich ebenfalls bei Lösungen von Studierenden wieder, die weder das Phasenmodell noch die genannten Musterlösungen kannten.

Die Analyse der Transkripte bestätigt zudem, dass die Reihenfolge der Teilprozesse beliebig ist. Ebenso ist die Häufigkeit des Auftretens einzelner Teilphasen variabel. Ein erfolgreicher Lösungsprozess zeichnet sich nicht dadurch aus, dass alle Teilprozesse vorkommen, sondern viel mehr dadurch, dass die einzelnen Teilphasen erfolgreich durchlaufen werden. Um eine Aufgabe zu lösen, ist es wichtig, die Problematik der Angabe zu erfassen, sprich *Problembewusstsein zu schaffen*. Gelingt es nicht, die wesentlichen Aspekte der Angabe herauszuarbeiten, so scheitert der Lösungsprozess von Beginn an. Die Analyse der Aufgabe 37 veranschaulicht, dass sich manche Studierende zunächst zu sehr von der Überschrift ablenken lassen und daher nicht darauf achten, was in der Angabe verlangt wird. Ein Kollege, der mitten in der Diskussion zur Gruppe hinstößt, bringt schließlich einen Perspektivenwechsel.

Auffallend ist, dass sechs der zehn analysierten Lösungen mit der Phase *Problembewusstsein schaffen* beginnen. Die Studierenden fragen sich in einem ersten Schritt: Was sagt die Angabe? Sie versuchen, die zentrale Fragestellung der Angabe zu identifizieren und zu entschlüsseln. Bei der Betrachtung der Analyse der Aufgabe 8a von Franz und Jan ist zu bemerken, dass keinerlei verbale Äußerungen in Bezug auf die Angabe fallen, lediglich folgende: „Das Achter kommt ma mal

machbar vor.“ (Transkript Aufgabe 8a Franz und Jan, Zeile 1) Die beiden Studenten lesen weder die Angabe vor, noch besprechen sie, was die Angabe verlangt. Nichtsdestoweniger lässt die soeben zitierte Aussage darauf schließen, dass sich der Student mit der Angabe auseinander gesetzt hat. Andernfalls könnte er nicht behaupten, dass ihm diese Aufgabe machbar erscheint. Insofern fängt auch der Lösungsprozess der Aufgabe 8a von Franz und Jan mit *Problembewusstsein* an, wenngleich dies nur indirekt aus dem Transkript zu entnehmen ist.

Des Weiteren ist bei der Analyse der Aufgabe 8b, mit der sich sowohl Beate und Sarah als auch Franz und Jan im Anschluss an die Aufgabe 8a auseinandergesetzt haben, zu beachten, dass den Studierenden die Aufgabenstellung bereits bekannt ist. Die Aufgabenformulierung gilt für die gesamte Aufgabe 8. Es ändert sich jeweils nur die Folge, die man auf die angeführten Eigenschaften untersuchen soll. Aus diesem Grund kann gefolgert werden, dass sich die Studierenden bereits zuvor die *Problematik bewusst* gemacht haben. Dieser Prozess findet zwar zeitlich gesehen früher statt, ist aber trotzdem nicht vom Lösungsverlauf der Aufgabe 8b zu trennen. Aus dieser Perspektive betrachtet beginnen neun der zehn Aufgaben mit dem *Problembewusstsein Schaffen*.

Eine Ausnahme bildet die Aufgabe 36. Aus dem Transkript ist nicht zu entnehmen, dass die Studierenden in einem ersten Schritt die Angabe genau durchlesen und auf die zentrale Problematik untersuchen. Hier muss allerdings hervorgehoben werden, dass die Studierenden bereits während des Aufbaus der Kamera diskutieren, welche Aufgaben sie lösen werden. Dies ist vermutlich der Grund, weshalb die Studierenden am Anfang des Transkriptes schon mit der *Klärung der Handlungsoptionen* beschäftigt sind.

Interessant ist zu beobachten, in welchen Teilphasen die Studierenden scheitern. Insgesamt betrachtet sind die Bearbeitungen der Aufgaben 8b von Beate und Sarah und 16 sowie beide Aufgaben zur Stetigkeit – die Aufgaben 42 und 43 – ohne Endergebnis geblieben. Bei der genaueren Betrachtung der Transkripte ist zu erkennen, in welchen Teilprozessen die Studierenden in eine falsche Richtung bzw. in eine Sackgasse kommen. Beate und Sarah finden *keinen Zugriff* zur Aufgabe 8b. Obwohl diese ähnlich zu lösen ist wie Aufgabe 8a, die sie erfolgreich bearbeitet haben, scheitern sie daran, die Aufgabe handhabbar zu machen. Sarah betont

mehrmals, dass $(-1)^n$ nicht existiere. Sie hat anscheinend gelesen, dass der Grenzwert von $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ nicht existiert und daraus einen falschen Schluss gezogen. Sie meint, die Aufgabe sei unlösbar. Ihrer Kollegin kommt dies seltsam vor, wie man ihren Aussagen entnehmen kann. Trotzdem schenkt sie Sarah Glauben, ohne selbst Versuche zu starten, die Aufgabe handhabbar zu machen.

Die Diskussion um Aufgabe 16 ist eine der längsten der aufgezeichneten. Die Studierenden bleiben stets bei der Aufgabenstellung und weichen nicht von ihr ab. Trotzdem gelangen sie zu keinem vollständigen Beweis. In diesem Fall liegt es nicht am mangelnden Zugriff, sondern an der Verschriftlichung ihrer Ideen. Die Aussagen < 203 > bis < 237 > sowie < 270 > bis < 277 > sind entscheidende Eckpunkte für einen Beweis. Allerdings schaffen die Studierenden nicht, ihre Gedanken so niederzuschreiben, dass der Beweis komplett ist.

Die Bearbeitungen der Aufgaben 42 und 43 scheitern vollkommen. Bei ersterer haben die Studierenden nicht wirklich eine Ahnung, was zu zeigen ist. Sie wissen nicht, wie eine Äquivalenzaussage zu beweisen ist, wie folgende Aussage zeigt: „Naja, wir müssen die eine Seite beweisen und dann auf die andere rückschließen, oder (?) Oder wir beginnen mit dem einen und gehen auf das andere rüber“ (Transkript Aufgabe 42, Zeile 19). Im Allgemeinen wird bei solchen Beweisen eine Seite der Äquivalenz als gegeben angesehen, von dieser soll auf die andere geschlossen werden. Anschließend gilt es die Gegenrichtung zu zeigen. Dann ist die andere Seite Ausgangspunkt des Beweises. Wie man eine Äquivalenzaussage beweist, fällt in die Teilkategorie *Problembewusstsein*, da dies ein wesentlicher Aspekt für die Identifikation der Ausgangsproblematik ist. Des Weiteren scheitert der Lösungsprozess daran, dass die Studierenden zwar die Aussage der Angabe verstehen, jedoch keinen Zugriff finden. Sie meinen, beweisen zu müssen, dass ξ Häufungspunkt einer Folge sei, wobei sie nicht zwischen Häufungspunkt einer Menge und Häufungswert einer Folge unterscheiden. Mit dieser Wahl als *Handlungsoption* schlagen sie einen falschen Weg ein. Die Studierenden finden einen Satz in ihrer Mitschrift, der Häufungspunkte anspricht. Den Beweis dieses Satzes verwenden sie als Vorlage für ihre Aufgabe. Die Studierenden kommen vom Lösen ihrer Aufgabe ab, da sie den springenden Punkt für ihren Beweis nicht erkennen.

Der Lösungsprozess zur Aufgabe 43 ist gekennzeichnet von vielen Phasen der *Herstellung eines Zugriffs*. Die Studierenden der Gruppe haben unterschiedliche Ansichten, die *Aufgabe handhabbar* zu machen. Marie erkennt richtigerweise, dass die Stelle Null insofern problematisch für die Funktion $g: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \neq 0$ ist, weil $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty$ bzw. $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty$. Die übrigen Gruppenmitglieder verkennen Maries Ideen und lassen sich nicht von den Argumenten ihrer Kollegin überzeugen. Stattdessen wählen sie andere Handlungsoptionen, die sie allerdings in eine falsche Richtung lenken. Dies führt dazu, dass sie die Aufgabe nicht lösen können. Der Grund des Scheiterns liegt in diesem Fall bei einem *mangelhaften Zugriff*.

Die Analyse der vier Aufgaben, deren Bearbeitung nicht erfolgreich zu Ende geführt wurde, zeigt, dass die Studierenden vor allem daran scheitern, einen geeigneten Zugang zur Aufgabenstellung zu finden. Erkennen sie nicht, wie sie an die Aufgabe herangehen sollen, so schaffen sie es auch nicht die Aufgabe zu lösen. Die Nachforschung, weshalb sie gerade bei diesen Aufgaben keinen Zugriff fanden, könnte Ausgangspunkt für weitere Forschung sein. Eine Ausnahme stellt der Bearbeitungsprozess der Aufgabe 16 dar. Die Studierenden finden zwar einen Zugang, jedoch können sie ihre Argumente nur teilweise schriftlich festhalten.

4. Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel sind Bemerkungen zum Teilphasenmodell von Ableitinger und Herrmann angeführt, bevor Resümee über die gewonnenen Einsichten gezogen wird. Im Anschluss daran befinden sich Vorschläge, welche Maßnahmen die Hochschulen setzen könnten, um den Studierenden das Aufgabenlösen zu erleichtern.

Dem Kapitel 4. folgt das Literaturverzeichnis (Kapitel 5.). Das Kapitel 6. beinhaltet den Anhang: Kapitel 6.0. enthält die vollständige Aufgabensammlung der Übung „Einführung in die Analysis“ aus dem Wintersemester 2013/14, die von den Dozenten Dr. Gröchenig und Dr. Kunzinger zusammengestellt wurde. In den Kapiteln 6.1. bis 6.10. folgen die kompletten Transkripte.

4.1. Kommentare zum Teilphasenmodell von Ableitinger und Herrmann

Das Phasenmodell von Ableitinger und Herrmann kann auf den Lösungsprozess der Übungsaufgaben durch Studierende ebenso angewendet werden wie auf Modelllösungen von Dozentinnen und Dozenten. Im Vorfeld der Analysen war nicht klar, ob sich das Teilphasenmodell vollständig auf die Bearbeitung von Aufgaben durch Studierende übertragen lässt oder ob es gegebenenfalls erweitert werden sollte. Aus der Analyse ist ersichtlich, dass das Modell ohne Anpassungen übernommen werden kann. Im Folgenden sollen einige Anmerkungen zum Teilphasenmodell von Ableitinger und Herrmann angeführt werden.

Die Phase *Anpassen und Prüfung der Passung* taucht in den Analysen selten auf. Ein Grund dafür ist, dass die Studierenden selten überprüfen, ob die Bedingungen vorhanden sind, um einen Satz anwenden zu dürfen. In den meisten Fällen treffen sie die Entscheidung darüber, ob ein Satz für die Bearbeitung in Frage kommt oder nicht, auf Grund der im Satz vorkommenden Begriffe, wie die Aufgaben 42 und 43 zeigen. Prüfen die Lernenden ihre gewählte Handlungsoption auf deren Tauglichkeit, geschieht dies meist an Hand einer Probe mittels konkreten Zahlen. Dabei überprüfen sie in erster Linie ihre Lösungsstrategie. Vereinzelt kontrollieren sie damit Sätze auf deren Anwendbarkeit. Die Studierenden testen beispielsweise bei der Bearbeitung der Aufgabe 36 durch Einsetzen von Zahlenwerten, ob ihre Idee stimmt, dass sich $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ aus $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ und aus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ zusammensetzen lässt. Sie verschaffen sich dadurch einen Zugriff zur Aufgabe.

Bei der Bearbeitung der Aufgabe 35 benutzt ein Student sein Smartphone, um die Aufgabe handhabbar zu machen. Ableitinger und Herrmann erwähnen in ihren Ausführungen zu ihrem Modell nicht den Einsatz von technischen Hilfsmitteln. Ein Grund dafür ist wahrscheinlich, dass sie als Auslöser von Teilphasen dienen, jedoch keine eigene Funktion haben, um den Lösungsprozess voranzutreiben, wie es sich bei der Analyse der Aufgabe 35 herausgestellt hat. Bei der Bearbeitung dieser Übungsaufgabe haben die Studierenden das Smartphone verwendet, um einen Zugriff herzustellen. Insofern hat das Smartphone denselben Stellenwert im

Lösungsprozess wie beispielsweise Kopfrechnen. Hinsichtlich der Teilphasen integriert sich der Gebrauch von technischen Hilfsmitteln als eine Möglichkeit, die Aufgabe handhabbar zu machen. Der Einsatz eines Taschenrechner oder einer Computersoftware nimmt keine eigene Funktion im Lösungsprozess ein, sondern dient den Studierenden zum Beispiel als Hilfestellung, einen Zugriff zu erlangen. Wie aus dem Lösungsprozess der Aufgabe 35 hervorgeht, kann auch Handwerk dadurch geleistet werden.

Gesamt betrachtet ist das Teilphasenmodell eine gute Möglichkeit, die Schwierigkeiten der Studierenden beim Aufgabenlösen zu orten und zu analysieren, wie die obigen Analysen zeigen. Die in Teilphasen gegliederten Transkripte könnten in einem nächsten Schritt für weiterführende Untersuchungen verwendet werden, beispielsweise bleibt zu klären, weshalb einige Aufgaben von den Studierenden erfolgreich gelöst wurden, andere nicht. Die Analyse der Lösungsprozesse auf die Teilphasen verdeutlicht, dass die Studierenden oft viel Zeit aufwenden, um Übungsaufgaben zu bearbeiten, ohne zielführende Lösungsstrategien zu sichten. Oft bedarf es mehrerer Ideen möglicher Handlungsoptionen, um eine erfolgversprechende zu finden. Im Kapitel 4.3. werden Vorschläge präsentiert, wie seitens der Hochschulen den Studierenden bei der Bearbeitung der Übungsaufgaben Hilfestellungen geboten werden können.

4.2. Darstellung des Forschungsprojektes und der gewonnenen Einsichten

In der Fachdidaktik Mathematik ist der Umgang mit der Diskontinuität beim Übertritt von der Schule in eine Hochschule in den letzten Jahren ein oft diskutiertes Thema gewesen (vgl. Ableitinger, Kramer & Prediger 2013, Bausch et al. 2014, Beutelspacher et al. 2011, Heinze & Grüßing 2009). In Hinblick auf die Schwierigkeiten der Studierenden beim Erarbeiten von Übungsaufgaben wurden mittels einer qualitativen Studie studentische Lösungsprozesse zu solchen Aufgaben untersucht. Dazu wurden im Wintersemester 2013/14 Studierende der Universität Wien beim Lösen von Aufgaben zur Übung Einführung in die Analysis gefilmt. Alle Studierenden befanden sich in ihrem ersten oder dritten Semester des

Mathematikstudiums. Das aufgezeichnete Material wurde transkribiert und die Lösungsprozesse in Teilsequenzen unterteilt. Diese wurden in Anlehnung an das Teilphasenmodell von Ableitinger und Herrmann (2011) hinsichtlich ihrer Funktionen in der gesamten Bearbeitung untersucht.

Forschungsinteresse dieser Arbeit war, mittels qualitativer Methoden aufzuzeigen, inwiefern sich der Erarbeitungsprozess zu Analysis-Übungsaufgaben durch Studierende in die Teilphasen, wie sie Ableitinger und Herrmann beschrieben haben, gliedern lässt. Die qualitative Studie zeigt darüber hinaus auf, wie die Studierenden an Aufgaben herangehen und in welchen Phasen Schwierigkeiten auftreten. Aus den gewonnenen Einsichten lassen sich Vorschläge ableiten, wie Hochschulen ihren Studierenden beim Lösen von Übungsaufgaben unter die Arme greifen könnten.

4.3. Verbesserungsvorschläge

Die Analyse der Bearbeitungsprozesse der Analysis-Übungsaufgaben hat gezeigt, dass das Modell der Teilphasen nach Ableitinger und Herrmann auch beim Aufgabenlösen durch Studierende Gültigkeit hat. Es stellt sich die Frage, welche Auswirkungen diese Erkenntnis auf die Einführungsphase des Mathematikstudiums hat. Lassen sich Vorschläge zur Unterstützung der Studienanfängerinnen und -anfänger beim Lösen von Übungsaufgaben aus den gewonnenen Einsichten ableiten?

Auf Grund der Tatsache, dass sich der Lösungsprozess der Übungsaufgaben durch Studierende tatsächlich aus den Teilphasen zusammensetzt, kann gefolgert werden, dass diese Teilphasen trainiert werden sollten. Dies bedeutet aber nicht, dass die Studierenden dieses Modell kennen oder gar auswendig lernen sollen. Es gilt viel mehr, die einzelnen Aspekte herauszupicken und diese mit den Studierenden einzuüben. Im Folgenden sollen Lösungsvorschläge präsentiert werden, die keine personellen, räumlichen und finanziellen Änderungen im Studienbetrieb erfordern.

In erster Linie sollen sich die Dozentinnen und Dozenten, vor allem jene, die Lehrveranstaltungen zu Studienbeginn abhalten, bewusst machen, dass eine Diskontinuität zwischen Schul- und Hochschulmathematik vorliegt. Ihre Aufgabe

wäre, die Studierenden in die hochschulmathematische Arbeitshaltung einzuführen und sich beim Lösen von Übungsaufgaben über die Schultern schauen zu lassen. Es wäre durchaus erwünscht, dass sich die Vortragenden nicht vorbereiten und den Studierenden in der Übungsgruppe demonstrieren, wie sie eine Aufgabe lösen. Diese Ideen sind an „Cognitive Apprenticeship“, einem Ansatz der Bildungswissenschaften angelehnt. Ableitinger (2013, S. 19-21) beschreibt, inwiefern „Cognitive Apprenticeship“ beim Lernen aus Musterlösungen zum Tragen kommt. In Anlehnung an diese Theorie geht Ableitinger davon aus, dass die Studierenden das Aufgabenlösen ebenso wie Mechanikerlehrlinge von ihrem Meister lernen können, indem sie Expertinnen und Experten bei der Arbeit beobachten.

Bei den Analysen der Übungsaufgaben hat sich gezeigt, dass die Studierenden oft Schwierigkeiten beim Interpretieren der Angabe haben. Manchmal schaffen sie nicht, die eigentliche Problematik zu identifizieren (vgl. Aufgaben 42 und 43). Dem könnte Abhilfe geschaffen werden, indem die Aufgaben für die kommende Woche in der Lehrveranstaltung kurz besprochen werden, ohne jedoch Lösungswege zu präsentieren. Dies wäre eine Möglichkeit, um Verständnisschwierigkeiten zu klären.

Die Transkripte haben außerdem gezeigt, dass der Dozent der Vorlesung und die Übungsleiter, in dem Fall waren es ausschließlich Männer, große Vorbildwirkung haben. Die Studierenden erinnern sich, wie ihnen die Universitätsprofessoren die Aufgaben erklärt haben. Dies wäre ein guter Ansatzpunkt, um die Phase *Anpassen und Prüfung der Passung* zu trainieren. Es wäre wichtig, dass die Dozentin bzw. der Dozent beim Lösen eines Beispiels betont, dass sie bzw. er sich auf einen bestimmten Satz bezieht. Bevor man sich sicher sein kann, dass dieser Satz verwendet werden darf, muss man überprüfen, ob die Voraussetzungen erfüllt sind. Wenn die bzw. der Vortragende hervorhebt, dass man vor dem Gebrauch eines Satzes oder eines Korollars stets beachten muss, ob die Bedingungen dafür erfüllt sind, wäre schon ein Schritt gesetzt.

Eine weitere Maßnahme zur Unterstützung der Lernenden zu Studienbeginn wäre ein Leitfaden in Anlehnung an das Phasenmodell, wie die Studierenden an die Aufgabe herangehen können. Dieser kann beispielsweise aus orientierungsgebenden Fragen bestehen wie sie im Folgenden aufgelistet sind. Beim

Bearbeitungsprozess der Aufgaben sollen die Studierenden die Fragen mit Hilfe ihrer Unterlagen (Skript, Mitschrift, Angabeblatt, bereits gelöste Aufgaben, Fachbücher, Internet etc.) beantworten.

- ◆ In welches große Themengebiet lässt sich die Aufgabe einordnen?
- ◆ Was ist die zentrale Aussage der Angabe? Formuliere die Angabe in eigenen Worten!
- ◆ Welche Definitionen, Sätze, Korollare, Bemerkungen könnten beim Lösen helfen? Ich will einen Satz verwenden: Erfüllt die Angabe die Voraussetzung des Satzes, damit ich ihn benutzen kann? Muss ich die Notation anpassen?
- ◆ Welche ähnlichen Aufgaben sind mir bekannt? Finde ich dort einen Anhaltspunkt?
- ◆ Kann ich die Angabe in eine Darstellung bringen, mit der ich besser hantieren kann?
- ◆ Lassen Rechenoperationen den Lösungsprozess voranschreiten?
- ◆ Kenne ich einen Trick, der mir weiterhilft?
- ◆ Was habe ich bereits gezeigt? Was bleibt nachzuweisen?
- ◆ Wozu dienen die einzelnen Argumentationsschritte?
- ◆ Inwiefern beantwortet meine Lösung die Problematik der Aufgabe?

Diese Fragen sollen den Studierenden helfen, Handlungsoptionen zu sichten und dabei nicht auf die Überprüfung der Voraussetzungen zu vergessen. Beim Lösen der Aufgabe stößt man immer wieder auf neue Probleme. Insofern kann der Fragenkatalog nur als Anregung verstanden werden und lässt sich nicht uneingeschränkt auf jeden Lösungsprozess übertragen. Jeder Bearbeitungsprozess hat einen anderen Aufbau, weshalb die Reihenfolge der Bausteine keineswegs vorgegeben, sondern variabel ist.

Eine dritte Idee zur Förderung der Studierenden beim Aufgabenlösen ist, den Lernenden ausführliche Musterlösungen – wie sie auch Ableitinger und Herrmann (2011) verwendeten – zur Verfügung zu stellen. Eine ideale Möglichkeit diese einzusetzen bieten die Tutorien, die bereits an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien angeboten werden. Aufgaben aus der Übung, die für die

Studierenden auch nach der Besprechung in der Übung unklar sind, könnten in der Gruppe ausführlich erläutert werden und zwar so, dass alle Schritte erwähnt und aufgeschrieben werden. Durch die detaillierte Besprechung der Aufgabe bekommen die Studierenden einen Einblick, wie Expertinnen und Experten an eine Aufgabe herangehen. Die Betonung liegt darauf, dass die ausführlichen Lösungen erst nach der Präsentation in der Übung im Tutorium besprochen werden.

4.4. Ausblick und Diskussion

In Anlehnung an die Methode der interpretativen Unterrichtsforschung wurde die Bearbeitung der Analysis-Übungsaufgaben durch Studierendengruppen auf Teilphasen analysiert. Ziel war es, den Lösungsprozess und die mit den Aufgaben verbundenen Anforderungen an die Studierenden zu veranschaulichen. Bei der Analyse der Transkripte fällt auf, dass die Studierenden immer wieder Äußerungen tätigen, dass ihnen die Aufgaben schwer fallen. Exemplarisch werden ein paar Aussagen angeführt. Diese verdeutlichen mitunter, mit welchen Schwierigkeiten die Studierenden bei den analysierten Übungsaufgaben zu kämpfen hatten.

Beispiel 1: Marie: „Manchmal hasse ich Angaben.“ (Aufgabe 37, Zeile 31)

Beispiel 2:

Marie: „Ich bin mir nicht sicher, ob wir das richtig verstanden haben.“

Flo: „Ja, das is ja auch nur so eine Wischiwaschi-Frage. *(Lachen)*“

Steffi: „Nur zum Verwirren.“ (Aufgabe 43, Zeile 70-72)

Diese beiden Ausschnitte streichen hervor, dass die Aufgabenstellungen den Studierenden manchmal Probleme bereiten. Die knapp formulierten Angaben sind bei den Aufgaben 37, 42 und 43 Anlass für eine längere Diskussion, um die Problematik zu erfassen.

Beispiel 3: Flo: „Ich hab ein Problem, weil wir keine Funktionen gegeben haben, sondern nur so ein allgemeines Ding *(schaut die Angabe an)*.“ (Aufgabe 42, Zeile 40)

Der Student verdeutlicht an dieser Stelle, dass es ihm schwer fällt, allgemeine Aussagen zu beweisen. Die Studierenden scheitern bei der Bearbeitung der Aufgabe 42 daran, dass sie keine konkrete Funktion vor Augen haben.

Beispiel 4: Flo: „Das haben wir dann so gemacht (*blättert eine Seite um*) und das war mir zu kompliziert. Das haben wir mit hunderttausend verschieden Sachen gemacht. Dann war das kleiner Epsilon, weil wir ein großes N hatten und dann haben wir daraus geschlossen, dass es eine Teilfolge ist.“ (Aufgabe 42, Zeile 58)

Beispiel 5: Lisa: „Ich bin einfach zu blöd, das zu kapieren. (*Marie lacht*) Dass ich das jemals behirn.“ Flo: „Wir verstehens ja, was gemeint ist, aber das zu zeigen (-)“ Marie: „Aber bei mir, ich bin mir dann oft nicht mehr sicher, ob ich wirklich versteh, was gemeint ist. (*lacht*)“ (Aufgabe 43, Zeile 215-217)

Die Beispiele 5 und 6 zeigen Verständnisprobleme von Beweisen und deren Argumentationen auf. Flo möchte mit der Aussage aus Beispiel 4 seinen Kolleginnen den Beweis eines Satzes erklären. Er muss jedoch passen, da er den Erklärungen des Dozenten nicht folgen konnte. Diese waren ihm „zu kompliziert“. Lisa verzweifelt in Beispiel 5 wiederum an der Aufgabenstellung. Sie gibt sich selbst die Schuld. Flo ist jedoch überzeugt, dass nicht das Verständnis der Aufgabenstellung das Problem ist, sondern wie der Beweis dazu ausschauen könnte. Marie ist sich nach der mehr als 30-minütigen Diskussion allerdings nicht mehr sicher, die Aufgabe korrekt verstanden zu haben.

Beispiel 6: Marie: „Aber das war mein erstes Semester, ich war einfach nur verloren.“ (Aufgabe 43, Zeile 185)

Das letzte Beispiel ist besonders drastisch. Es zeigt auf, wie hilflos sich diese Studentin im Laufe ihres ersten Semesters gefühlt hat.

Diese Ausschnitte veranschaulichen, dass die vorliegenden Transkripte in einem weiteren Schritt auf Aussagen des Scheiterns und der Verzweiflung untersucht werden könnten, um einen Einblick zu bekommen, inwieweit die

Studierenden die Diskontinuität wahrnehmen und dies beim Aufgabenlösen äußern. Im Zuge dessen könnte herausgefiltert werden, welche Schwierigkeiten die Studierenden explizit benennen. Im Anschluss daran könnte der Frage nachgegangen werden, wie die Studierenden reagieren, wenn sie merken, dass der Lösungsprozess ins Stocken bzw. in eine Sackgasse geraten ist. Welche Hilfsmittel wählen sie zur Sichtung anderer Handlungsstrategien? Wann ist der Punkt erreicht, wo sie aufgeben.

Eine weitere Untersuchung könnte angestellt werden, um Gründe zu benennen, weshalb den Studierenden einige Aufgaben leichter fallen als andere. Dabei spielen unter anderem folgende Faktoren eine Rolle: Stellt die Aufgabe einen Konnex zu Aufgaben aus der Schule her? Wurden bereits ähnliche Aufgaben gelöst? Ist eine allgemeingültige Aussage zu zeigen oder etwas zu berechnen?

5. Literaturverzeichnis

5.1. Literatur

- Ableitinger, C. (2013). Demonstrationsaufgaben im Projekt „Mathematik besser verstehen“. In: Ableitinger, C., Kramer, J. & Prediger, S. (Hrsg.) (2013). *Zur Doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zu Verknüpfung der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen* (S. 17 – 38). Wiesbaden: Springer Spektrum
- Ableitinger, C., Kramer, J. & Prediger, S. (Hrsg.) (2013). *Zur Doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zu Verknüpfung der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen*. Wiesbaden: Springer Spektrum
- Ableitinger, C. (2012). Typische Teilprozesse beim Lösen hochschulmathematischer Aufgaben: Kategoriebildung und Ankerbeispiele. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 33(1), (S. 87 – 111)
- Ableitinger, C. & Herrmann, A. (2011). *Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra. Ein Arbeits- und Übungsbuch*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner
- Bausch, I., Bruder, R., Hochmuth, R. & Schreiber, S. (2014). *Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven*. Wiesbaden: Springer Verlag
- Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S. & Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten* (S. 1 – 30). Wiesbaden: Vieweg+Teubner
- Breidenstein, G. (2002). Interpretative Unterrichtsforschung – eine Zwischenbilanz und einige Zwischenfragen. In: Breidenstein, G., Combe, A., Helsper, W. & Stelmaszyk, B. (Hrsg.) (2002). *Forum Qualitative Schulforschung 2. Interpretative Unterrichts- und Schulbegleitforschung* (S. 11 – 25). Opladen: Leske+Budrich
- Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum

- Fischer, A., Heinze, A. & Wagner, D. (2009). Mathematiklernen in der Schule – Mathematiklernen an der Hochschule: die Schwierigkeiten von Lernenden beim Übergang ins Studium. In: Heinze, A. & Grüßing, M. (Hrsg.) (2009), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 245 – 264). Münster: Waxmann Verlag
- Forster, O. (2013). *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung in einer Veränderlichen*, 11. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum
- Hefendehl-Hebeker, L. (2012). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In: Ableitinger, C., Kramer, J. & Prediger, S. (Hrsg.) (2013). *Zur Doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zu Verknüpfung der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen* (S. 1 – 15). Wiesbaden: Springer Spektrum
- Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin* (S. 162 – 176). Wien: Springer-Verlag
- Heinze, A. & Grüßing, M. (2009). Institutionelle Übergänge im individuellen Bildungsverlauf. In: Heinze, A. & Grüßing, M. (Hrsg.) (2009), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 11 – 13). Münster: Waxmann Verlag
- Heuser, H. (2009). *Lehrbuch der Analysis*. 17. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner
- Kallmeyer, W. & Schütze, F. (1976). Konversationsanalyse. In: *Studium Linguistik*, (1), (S. 1 – 28)
- Klein, F. (1911). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Bd. I. Arithmetik, Algebra, Analysis: Vorlesung gehalten im Wintersemester 1907-08*, 2. Aufl. Leipzig: Teubner
- Krummheuer, G. & Naujok, N. (1999). *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung*. Opladen: Leske+Budrich

- Kümmerer, B. (2012). Wenn du wenig Zeit hast, nimm' dir viel davon am Anfang: Ein Einstieg in die Analysis. In: Ableitinger, C., Kramer, J. & Prediger, S. (Hrsg.) (2013). *Zur Doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zu Verknüpfung der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen* (S. 135 – 150). Wiesbaden: Springer Spektrum
- Schichl, H. & Steinbauer, R. (2009). *Einführung in das mathematische Arbeiten* (S. 4 – 12). Berlin: Springer-Verlag

5.2. Internet

Aufgabensammlung zur Einführung in die Analysis WS 2013/14:

<http://homepage.univie.ac.at/karlheinz.groeche/nig/EinfAnUe13.pdf>, gesehen am 09.05.2014

Homepage der Fakultät für Mathematik der Universität Wien:

<http://plone.mat.univie.ac.at/studium/studienbeginn/ws1314/lehramtsstudium-ws/vorlesungen>, gesehen am 08.05.2014

<http://plone.mat.univie.ac.at/studium/studienbeginn/ws1314/bachelorstudium-ws/vorlesungen>, gesehen am 09.05.2014

Lehrplan Mathematik der Sekundarstufe II (AHS) 2004:

http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf, gesehen am 30.04.2014

mathe online:

<http://www.mathe-online.at/mathint/stet/i.html>, gesehen am 05.05.2014

6. Anhang

6.0. Aufgabensammlung zur Einführung in die Analysis

Übungen zu Einführung in die Analysis

(Nach Zusammengestellungen von Günther Hörmann und Karlheinz Gröchenig)

Wintersemester 2013/14

Vor den folgenden Aufgaben werden in den ersten fünf Wochen der Übungen noch jene zur *Einführung in das mathematische Arbeiten* durchgenommen.

I. FOLGEN, REIHEN UND TEILMENGEN REELLER ZAHLEN
--

Zu §1: $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ und die Archimedische Eigenschaft

1 Zeigen Sie:

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists! n \in \mathbb{Z} : n \leq x < n + 1.$$

Wir setzen dann $[x] := n$ (oft auch als $\lfloor x \rfloor$ notiert, die sog. Gaußklammer) und nennen $[x]$ das *größte Ganze von x* . Damit definieren wir eine Funktion $\text{floor} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto [x]$. Skizzieren Sie ihren Graphen.

2 Definition: Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heiße *unendlich groß*, wenn gilt: für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x > n$. Gibt es unendlich große reelle Zahlen?

3 (a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: es existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall n \geq n_1 : (n - k) > \left(\frac{n}{2}\right).$$

Insbesondere ist dann auch $(n - k)^{k+1} > (n/2)^{k+1}$.

(b) Sei $x > 0$. Zeigen Sie: es existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall n \geq n_2 : (1 + x)^n > n^k.$$

(Hinweis: Binomischer Lehrsatz, (a) und archimedische Eigenschaft.)

Zu §2: Folgen und Grenzwerte

4 Sei $b > 1$.

(a) Folgern Sie aus Aufg. 3: zu $m \in \mathbb{N}$ beliebig existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall n \geq n_0 : b^n > n^m.$$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{b^n} = 0$. (Hinweis: ähnlich wie Beisp.2.4.5) in der V)

5 Zeigen Sie:

(a) $\lim a_n = a$ ist äquivalent zu $\lim |a_n - a| = 0$.

(b) Ändert man endlich viele Glieder einer konvergenten Folge ab, so ändern sich weder Konvergenzverhalten noch Grenzwert.

6 Sei $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent? Beweisen Sie Ihre Behauptung direkt durch Rückgriff auf die Definition der Konvergenz.

7 Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) mit $a_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$ ($n \geq 1$) gegen 1 konvergiert. Finden Sie zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ explizit ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$ stets $|a_n - 1| < \varepsilon$ gilt.

(Hinweis: Bernoulli-Ungleichung.)

8 Entscheiden Sie jeweils welche der Eigenschaften *beschränkt*, *konvergent* bzw. *divergent* für die gegebene Folge vorliegen. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

$$(a) a_n = \frac{(3-n)^3}{3n^3-1} \quad (b) b_n = \frac{1+(-1)^n n^2}{2+3n+n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$9 (a) a_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(3n^2+2n+1)(2n-1)}$$

$$(b) a_n = \frac{n^3+4}{2n^2+n+1}$$

$$10 (a) a_n = \frac{(n+1)^k - n^k}{n^{k-1}}, \text{ wobei } k \in \mathbb{N}, k \geq 1 \text{ fest}$$

$$(b) a_n = \frac{(-1)^n n^2}{3n^2+4n+5}$$

11 Zeigen Sie, dass $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$.

(Hinweis: $\sqrt[n]{n} = 1 + b_n \Rightarrow n = (1 + b_n)^n$.)

12 Zeigen Sie jeweils, dass es sich um Nullfolgen handelt:

$$(a) a_n = \frac{n!}{n^n} \quad (b) b_n = \frac{2^n}{n!}$$

13 Richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

(a) $(a_{n+1} - a_n)$ ist Nullfolge $\iff (a_n)$ ist konvergent

(b) Sei $0 < q < 1$ und $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < a_{n+1} \leq q \cdot a_n$. Dann ist (a_n) eine Nullfolge.

14 Sei $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$. Zeigen Sie, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/2$. (Hinweis: was ist $\sum_{k=1}^n k$?)

15 Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit Grenzwerten a und b . Zeigen Sie, daß die Folge $c_n = \max(a_n, b_n)$ konvergiert und daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max(a_n, b_n) = \max(a, b).$$

16 Sei (a_n) eine Nullfolge, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Sei b_n das arithmetische Mittel der ersten n Glieder von a_n ,

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Zeigen Sie, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

17 (a) Zeigen Sie: Ist (a_n) konvergent mit $a := \lim a_n > 0$ und (b_n) bestimmt divergent gegen $+\infty$, dann ist $(a_n \cdot b_n)$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

(b) Gilt die Aussage aus (a) auch im Fall $a = 0$?

18 Geben Sie jeweils ein Beispiel für Folgen (a_n) und (b_n) an, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$ ist und

(a) $\lim a_n = +\infty$

(b) $\lim a_n = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(c) (a_n) divergent, aber nicht bestimmt divergent.

19 Beweisen Sie: Sei (a_n) eine Nullfolge mit $a_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$), dann gilt $\lim \frac{1}{a_n} = +\infty$.

Zu §3: Vollständigkeit und Konvergenzprinzipien

20 Bestimmen Sie jeweils alle Häufungswerte der Folge (a_n) , insbesondere den Limes superior und Limes inferior. Vergleichen Sie stets mit dem Infimum und Supremum der Menge $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

(a) $a_n = (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

(b) $a_{3n-2} = 3 + \frac{1}{n}$, $a_{3n-1} = \frac{2}{n}$, $a_{3n} = -\frac{1}{n^2}$ ($n = 1, 2, \dots$)

(c) $a_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}$

21 Sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge. Zeigen Sie, daß (a_n) genau dann konvergiert, wenn (a_n) beschränkt ist und genau einen Häufungswert besitzt.

22 Sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und für $n = 2, 3, \dots$ sei a_n durch die Rekursion

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

definiert. Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist, indem Sie zum Beispiel zunächst induktiv die Formel $a_{n+1} - a_n = (-1)^n / 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$) nachweisen. Letzteres erlaubt auch die explizite Bestimmung des Grenzwertes. Was ist sein Wert?

23 Es sei (a_n) eine Folge mit der Eigenschaft, dass für ein (festes) $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ gilt:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}| \quad (n \geq 1).$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Konvergenzprinzips von Cauchy, dass (a_n) konvergent ist.

Zusatzfrage: Lässt sich die Konvergenz auch beweisen, wenn $|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}|$ gilt?

24 Übertragen Sie die Überlegungen aus der VO auf den folgenden Fall: sei $a > 0$, $x_0 > 0$

(a) zeigen Sie, dass durch die Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

eine reelle Folge (x_n) definiert wird, für die $x_n^2 \geq a$ ($n \geq 1$) gilt. Insbesondere ist (x_n) nach unten beschränkt.

(b) zeigen Sie, dass (x_n) ab $n \geq 1$ monoton fallend ist;

(c) schließen Sie, dass (x_n) gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

25 Zeigen Sie: eine nach oben beschränkte monoton wachsende Folge (a_n) konvergiert gegen das Supremum der Menge $A := \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$.

26 Sei $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{1+a_1}$, $a_n = \sqrt{1+a_{n-1}}$. Zeigen Sie, daß die Folge a_n nach oben beschränkt ist. Geben Sie explizit eine obere Schranke an. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

27 Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Wenn die Ungleichung $a_n \leq c$ für unendlich viele n gilt, dann besitzt die Folge einen Häufungswert $\leq c$. Wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß die Ungleichung $a_n \leq c$ für alle $n \geq N$ gilt, dann ist der größte Häufungswert $\leq c$.

28 Bestimmen Sie jeweils alle Berührungspunkte und Häufungspunkte der angegebenen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(a) $A := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ (b) $B := ([1, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, 2]) \cap \mathbb{Q}$

(c) C eine beliebige endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$

29 Man ermittle für die Mengen $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ alle inneren Punkte, die Randpunkte und die Häufungspunkte. Falls vorhanden, bestimmen Sie auch Infimum und Supremum dieser Mengen.

$$A =]0, 1[\cup]1, 2[, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x = 0\}, \quad C = \{1, 1.1, 1.11, 1.111, \dots\}$$

Zu §4: Konvergenzkriterien für Reihen

[30] Untersuchen Sie jeweils, ob $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert für

(a) $c_n = \frac{(-1)^n n}{(n+1)(n+2)}$ (b) $c_n = \frac{1}{n(n+1)}$

(c) Wie sieht es mit absoluter Konvergenz aus?

Aufgaben 31-32: Welche der folgenden Reihen sind absolut konvergent?

[31] (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

[32] (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

[33] Zeigen Sie folgenden Spezialfall des Wurzelkriteriums und des Quotientenkriteriums:

Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \theta$ existiert und $\theta < 1$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \theta$ existiert und $\theta < 1$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

[34] Sei $a_{2n} = 1/n$ und $a_{2n-1} = 1/\sqrt{n}$ für $n = 1, 2, 3, \dots$. Untersuchen Sie die Konvergenz und absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{6} + \dots$$

[35] Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{2^n}$?

[36] Angenommen, Sie wissen bereits, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Zeigen Sie, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

Welche Sätze verwenden Sie?

II. STETIGE FUNKTIONEN EINER VARIABLE

Zu §5: Stetigkeit

[37] Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wie sehen die Graphen der folgenden Funktionen im Vergleich zu jenem von f aus? Veranschaulichen Sie Ihre Aussagen in Skizzen.

- (a) $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(-x)$
 (b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(2x)$ (allgemeiner: $x \mapsto f(\lambda x)$ mit $\lambda > 0$)
 (c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x-1)$ (allgemeiner: $x \mapsto f(x-a)$ mit $a \in \mathbb{R}$)

38 An welchen Stellen sind die gegebenen Funktionen stetig?

- (a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{1}{x}$
 (b) $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{sgn}(x) := \frac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$ und $\operatorname{sgn}(0) := 0$ (Signum-Funktion).

39 Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 3x^2 + 2x & \text{für } x \leq 1 \\ 8x - 3 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Ist f stetig auf $\mathbb{R}$?

40 Die Funktionen $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (Cosinus Hyperbolicus) und $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (Sinus Hyperbolicus) sind definiert durch

$$\cosh(x) := \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(x) := \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}.$$

Wiederholen Sie, warum die Funktionen $\cosh$ und $\sinh$ stetig auf $\mathbb{R}$ sind. Zeigen Sie die Formel

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{daher also 'Hyperbelfunktionen'})$$

und eines der beiden (sogenannten) Additionstheoreme (für $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig)

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y) \\ \sinh(x+y) &= \cosh(x) \sinh(y) + \sinh(x) \cosh(y). \end{aligned}$$

41 Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren und, wenn ja, berechnen Sie diese:

$$(a) \lim_{x \searrow 1} \frac{1+x}{1-x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x^2 - 1}{1 - x^3} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{x^2 - 131x - 97}{(x+17)(x+1)}\right).$$

42 Es sei $\xi \in]a, b[, f :]a, b[\setminus \{\xi\} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x \searrow \xi} f(x) = \gamma = \lim_{x \nearrow \xi} f(x) \iff \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \gamma$$

(insbesondere existiert der Limes).

43 Gegeben sei die stetige Funktion $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$. Begründen Sie, warum f nicht *als stetige Funktion auf ganz $[-1, 1]$ fortgesetzt* werden kann, d.h. es gibt keine stetige Funktion $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$.

44 Sei g auf $[0, 1]$ definiert und beschränkt. Zeigen Sie mithilfe der Definition von Stetigkeit, daß die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xg(x)$ stetig in 0 ist.

45 Zeigen Sie direkt mittels Rückgriff auf die Definition, dass die Funktion $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x^2$, stetig ist.

Ist die Funktion f gleichmäßig stetig auf $]0, \infty[$?

Ist die Einschränkung von f auf $[1, \infty[$ gleichmäßig stetig?

46 Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetigen Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, daß $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

47 Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$.

(a) Hat f eine Nullstelle in $]0, 1[$?

(b) Gibt es eine stetige Umkehrfunktion zu f ?

48 Beweisen Sie den folgenden “Fixpunktsatz”: Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion auf $[0, 1]$. Dann gibt es ein $a \in [0, 1]$, sodaß $f(a) = a$.

Geben Sie eine graphische Interpretation dieses Satzes. Gilt der Satz noch, wenn f nicht überall stetig ist?

49 Es sei $D := [-2, -1[\cup]1, 2]$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{für } -2 \leq x < -1 \\ x - 1 & \text{für } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f als Abbildung $D \rightarrow [-1, 1]$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv ist. Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $g : [-1, 1] \rightarrow D$ explizit (Skizze!) und begründen Sie, warum g im Punkt 0 nicht stetig ist.

Zu §6: Elementar-transzendente Funktionen

50 Es sei $a > 1$ und $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ gegeben durch $x \mapsto a^x$ (wobei $\mathbb{R}^+ :=]0, \infty[$). Zeigen Sie:

- (a) f_a ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv
- (b) die Umkehrfunktion ${}^a\log := f_a^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend
- (c) $\forall x \in \mathbb{R}^+ : {}^a\log(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$.

51 Zeigen Sie: $\log(1+x) = x + o(|x|)$ ($x \rightarrow 0$).

52 Stellen Sie fest, wo die folgenden Funktionen definiert und stetig sind:

$$\frac{\sqrt{e^x}}{x}, \quad \log(x^2 - 2x + 1), \quad \frac{e^{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2+1}}}{\log(\sqrt{x})}$$

53 Sind die folgenden Reihen konvergent in $\mathbb{C}$?

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{i}{n} \right)$
- (b) $z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (Hinweis: Fallunterscheidung für $|z|$)

54 Man beweise den Satz von Bolzano-Weierstraß für komplexe Folgen: Sei $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen (das heißt, daß es ein $M \geq 0$, sodaß $|z_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Dann gibt es eine konvergente Teilfolge $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

55 Es sei $\alpha \in]-\pi, \pi[$. Zeigen Sie:

- (i) für $\alpha \neq 0$ gilt $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$
- (ii) die Abbildung $\alpha \mapsto t := \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2}$ ist bijektiv $] -\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$
- (iii) es gelten die Formeln $\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$

Bemerkung: somit erhalten wir $\{(\cos \alpha, \sin \alpha) : -\pi < \alpha < \pi\} = \left\{ \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$, was einer Parametrisierung des Einheitskreises (im $\mathbb{R}^2$) durch rationale Funktionen entspricht; Sie werden diese Formeln vor allem in der klassischen Trickkiste für Techniken der Integration finden.

56 Beweisen Sie aus den Additionstheoremen mit Hilfe der Definition von π , dass $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2π -periodische Funktion ist, d.h. $\forall x \in \mathbb{R} : \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

57 Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

Zeigen Sie, dass f stetig (auf $\mathbb{R}$) ist.

Können Sie - kann irgend jemand - den Graphen der Funktion f „ganz durchzeichnen“?

III. DIFFERENTIATION

Zu §7: Differenzierbarkeit und Ableitung

Untersuchen Sie folgende Funktionen jeweils hinsichtlich Differenzierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung:

[58] (a) $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, allerdings direkt durch Rückgriff auf die Definition der Differenzierbarkeit reeller Funktionen

(b) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot \log(x) - x$

(c) $h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x} \cdot \arcsin(\sqrt{x})$

[59] (a) $r : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$

(b) $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^x$

(c) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{1/3}$ (also die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^3, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

[60] Untersuchen Sie, wo die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie die Ableitung:

$$\frac{1}{\log(x)}, \quad x^x, \quad \log \sqrt{1 + \cos^2(x)}$$

[61] Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Ist $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig?

[62] Sei f differenzierbar, berechnen Sie die Ableitung der Funktionen $g(x) = \sqrt{f(x)}$ und $\log(f(x))$.

[63] Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a \in I$. Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit folgenden Eigenschaften: f ist differenzierbar in a und $f(a) = 0$, g ist stetig in a . Dann ist die Funktion $fg : I \rightarrow \mathbb{R}$ in a differenzierbar und $(fg)'(a) = f'(a)g(a)$.

[64] Seien f und g differenzierbaren Funktionen. Beweisen Sie durch Induktion die Leibnizsche Formel für die n -te Ableitung des Produkts:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Zu §8: Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

[65] Zeigen Sie, dass die Funktion f aus Aufgabe 39 differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Bestimmen Sie die lokalen Extrema und untersuchen Sie die Monotonieeigenschaften. Gibt es ein globales

Minimum bzw. Maximum? Ist f zweimal differenzierbar auf $\mathbb{R}$?

[66] Sei $a \geq 0$ und $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Polynomfunktion $p(x) = x^4 - 4ax^3$. Untersuchen Sie p bezüglich Monotonie und Extrema in Abhängigkeit vom Parameter a .

[67] Untersuchen Sie die Funktion $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\log(x)}{x}$ hinsichtlich Extrema und geben Sie maximale Intervalle an, in denen f konvex bzw. konkav ist.

[68] Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \qquad (b) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}.$$

[69] Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x - x + 1}{(x-1)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left(\frac{\cos x - 1}{x^2} \right)$$

[70] Man beweise die beiden Identitäten:

$$\begin{aligned} 2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} &= \pi \quad \text{für } x > 1 \\ 2 \arctan x - \arcsin \frac{2x}{1+x^2} &= 0 \quad \text{für } |x| < 1. \end{aligned}$$

Hinweis: man differenziere die Gleichungen.

IV. Zusatzübungen

Wer Zeit, Energie und Lernwillen hat, der sollte so viele Probleme wie möglich lösen. Im folgenden eine kleine Auswahl. Mehr Aufgaben finden sich in den angegebenen Lehrbüchern.

71 Man beweise: für alle $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt

$$(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4}x^2.$$

(Hinweis: binomischer Lehrsatz)

72 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$a_0 = a, a_1 = b, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für } n \geq 2$$

definiert. Zeigen Sie, daß $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

73 Sei (f_n) die Fibonacci-Folge, $f_0 = 1, f_1 = 1, f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie, daß

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

für alle $n \geq 1$, und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}f_{n-1}}{f_n^2} = 1.$$

(Mehr dazu in der Vorlesung "Zahlentheorie")

74 Man zeige, daß jede Folge reeller Zahlen eine monotone (wachsend oder fallende) Teilfolge enthält.

75 Betrachte die drei Folgen

$$a_n = \sqrt{n+1000} - \sqrt{n}$$

$$b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$$

$$c_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}$$

Man zeige, daß für alle $n < 10^6$ gilt, daß $c_n < b_n < a_n$, daß aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty.$$

76 Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und definiere die Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $A_0 = a_0/2$ und für $k \geq 1$

$$A_k = \frac{1}{2}a_{2k-2} + a_{2k-1} + \frac{1}{2}a_{2k}.$$

Dann gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ konvergiert. Im Fall der Konvergenz haben beide Reihen denselben Grenzwert.

77 (a)* Man beweise mithilfe der Axiome für die reellen Zahlen folgende Aussage (das *Dedekindsche Schnittaxiom*): Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ zwei nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$, sodaß $A \cup B = \mathbb{R}$ und $x < y$ für alle $x \in A$ und $y \in B$. Dann gibt es ein $s \in \mathbb{R}$, sodaß

$$x \leq s \leq y \quad \text{für alle } x \in A, y \in B$$

gilt.

(b)* Man zeige: Sei K ein geordneter Körper, in dem das Dedekindsche Schnittaxiom gilt. Dann gilt in K auch das Archimedische Axiom und das Vollständigkeits-Axiom.

(Was läßt sich dann über K folgern?)

78 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) heißt Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$, wenn für alle $x, y \in D$ gilt, daß

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

(a) Man zeige, daß jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

(b) Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz stetig.

79 Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos(x^2)$, nicht gleichmäßig stetig ist. An welcher Eigenschaft des Graphen von f ist dies erkennbar?

(Hinweis: Betrachten Sie $f(\sqrt{k\pi})$ für $k \in \mathbb{Z}$)

80 Man beweise: Eine auf einem beschränkten offenen Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ stetige Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn sie sich zu einer stetigen und beschränkten Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ fortsetzen läßt.

81 Sei $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Man zeige, daß es eine Konstante $M > 0$ gibt, sodaß

$$|f(x)| \leq M(1 + |x|) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+$$

gilt.

82 Sei $a > 0$, $x_0 = a$ und zwei Folgen rekursiv durch

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}, \quad y_n = 2^n(x_n - 1)$$

definiert. Zeigen Sie, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

(Hinweis: man verwende $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.)

83 Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\log x)^n}{x^{1+\alpha}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{\sqrt{x}}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{e^{\alpha x}} = 0$$

(Formulieren Sie diese Grenzwerte mit der $o(\cdot)$ Notation.)

84 Man untersuche die Konvergenz der folgenden Reihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n)} \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} N^2 \left(\frac{1-i}{2+i} \right)^n,$$

85 Man berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen $f_j : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $a > 0$ eine Konstante ist:

$$f_0(x) = x^x, \quad f_1(x) = x^{(x^x)}, \quad f_2(x) = (x^x)^x$$

$$f_3(x) = x^{(x^a)}, \quad f_4(x) = x^{(a^x)}, \quad f_5(x) = a^{(x^x)}$$

86 Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $F_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -|x|^\alpha & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Für welche α ist F_α im Nullpunkt stetig, für welche α ist F_α differenzierbar in Null?

87 Man untersuche die Funktion $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ auf lokale Extrema in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

88 Man zeige, daß die Limiten

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\tan x + \frac{1}{x - \pi/2} \right), \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - \frac{\pi}{2}) \tan x$$

existieren und berechne ihren Wert.

89 Berechnen Sie die Umkehrfunktionen von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ und deren Ableitung. (Lösung $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$)

90 Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: a ist Häufungspunkt von A genau dann, wenn a Berührungspunkt von $A \setminus \{a\}$ ist.

(<http://homepage.univie.ac.at/karlheinz.groechenig/EinfAnUe13.pdf>, gesehen am 09.05.2014)

6.1. Konvergenz einer Folge – Beate & Sarah (Aufgabe 8a)

Dauer der Szene: ca. 5 Minuten

Involvierte Gegenstände und allgemeine Beschreibung:

Die Aufzeichnung zeigt eine Partnerarbeit der Lehramtsstudentinnen Beate und Sarah. Sie sitzen nebeneinander. Jede hat einen Block und Stifte vor sich liegen. Die ausgedruckte Angabe liegt zwischen ihnen. Sarah hat sich die Aufgabe schon daheim angeschaut und Ideen gesammelt. Sie erklärt Beate, die sich nicht im Vorhinein mit den Aufgaben auseinandergesetzt hat, was sie herausgefunden hat. Anzumerken ist, dass sie gute Freundinnen sind und alle Kurse auf dem Mathematik-Institut gemeinsam besuchen.

Grobe Gliederung:

- < 1 – 5 > Klärung der Aufgabenstellung
- < 6 – 15 > Sarahs Lösungsvorschlag
- < 16 – 22 > Nebenrechnung
- < 22 – 39 > Endgültige Lösung

Aufgabenstellung:

Entscheiden Sie jeweils, welche der Eigenschaften *beschränkt*, *konvergent* bzw. *divergent* für die gegebene Folge vorliegt. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert:

$$a_n = \frac{(3-n)^3}{3n^3 - 1}, \text{ wobei } n \text{ Element aus den natürlichen Zahlen ist.}$$

Zeile	Name		Teilphase
1	Beate	Ja fang ma an bei Acht.	Problem- bewusstsein schaffen
2	Sarah	Ok.	
3	Beate	Also. Was muss ma da machen?	
4	Sarah	Da muss ma schauen, obs beschränkt, konvergent oder divergent is.	
5	Beate	(liest Angabe vor) Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert, Limes. Ok. Wie geht das?	einen Zugriff herstellen, Handwerk
6	Sarah	Schreib ma mal auf. Beispiel Acht. (schreiben die Angabe ab, Pause) So(,) also ich hab zuerst oben mal die binomische Formel aufgelöst. Da ist mir rausgekommen: n hoch Drei(,) minus Neun n Quadrat(,) plus Siebenundzwanzig n minus Siebenundzwanzig ($n^3 - 9n^2 + 27n - 27$) und unten hab ichs	

7	Beate	einfach stehen lassen. Mhm. <i>(Sarah und Beate schreiben auf, was Sarah soeben gesagt hat, Pause)</i>	
8	Sarah	So(,) dann hab ich gefunden. Also so Tricks, ja?!	Trick
9	Beate	Ok.	
10	Sarah	Ja. Also da kann man sagen, du schaust dir die höchste (-)	
11	Beate	[Potenz an.]	einen Zugriff herstellen
12	Sarah	[Potenz an.] Das is ja da n hoch Drei und da hast n hoch Drei. Jetzt könntest du sagen, wir könnten das Ergebnis ja mehr oder weniger mal abschätzen oder so, ja (?) Da kannst ja sehen, das könnte ein Drittel werden. Ja (?)	
13	Beate	Ja.	
14	Sarah	Das is aber nur eine Überlegung, die kannst jetzt nicht so hinschreiben, sonst schreibt dir der Professor hin, das ist ein Blödsinn.	begleitender Kommentar
15	Beate	Mhm.	
16	Sarah	So, da mach ich da eine Nebenrechnung. Ja (?) So(,) also da heb ich jetzt die n hoch Drei raus. Ja (?)	Zugriff
17	Beate	Ja.	
18	Sarah	Dann steht da n hoch Drei in Klammer Eins minus Neun durch n(,) plus Siebenundzwanzig durch n Quadrat(,) minus Siebenundzwanzig durch n hoch Drei, ja (?) $(n^3(1 - \frac{9}{n} + \frac{27}{n^2} - \frac{27}{n^3}))$, beide schreiben, während Sarah redet)	Handwerk
19	Beate	Mhm. Genau.	
20	Sarah	Würdest du das n hoch Drei wieder einsetzen, kommt dir dasselbe wieder heraus. Unten mach ich genau dasselbe. <i>(beide schreiben, Pause)</i> Bleibt dann über n hoch Drei(,) mal Drei minus Eins durch n hoch Drei $(n^3(3 - \frac{1}{n^3}))$.	Kommentar
21	Beate	<i>(Beate schaut auf Sarahs Block, was sie gerade geschrieben hat, Pause)</i> Genau.	Handwerk
22	Sarah	So jetzt kürz ich das Ganze weg. So jetzt geh ich wieder zu meiner Ausgangsrechnung. Die Nebenrechnung wär jetzt fertig und jetzt setz ich das Ganze in Limes von n nach Unendlich. Ja (?) Schreib mir [nur auf]	begleitende Kommentare
23	Beate	[Ins untere oder ins obere (?)]	
24	Sarah	Beides. Das schreibst du jetzt nimmer auf.	
25	Beate	Mit dem?	
26	Sarah	Genau. Dann steht da der Limes n nach Unendlich is Eins minus Neun durch n(,) plus Siebenundzwanzig durch n Quadrat(,) minus Siebenundzwanzig durch n hoch Drei(,) durch das durch das Ganze wieder. $(\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{9}{n} + \frac{27}{n^2} - \frac{27}{n^3}) / (n^3(3 - \frac{1}{n^3})))$, beide schreiben, Pause)	Handwerk
27	Beate	<i>(Beate schaut zu Sarah)</i> Jetzt kannst du den Limes eben quasi aufsplitten. Limes von dem <i>(meint den Zähler)</i> minus Limes von dem <i>(meint den Nenner)</i> , oder (?)	Zugriff Fehl-vorstellung
28	Sarah	Nein, nein, nein. Du sagst jetzt(,) du nimmst den Limes im Zähler und im Nenner dazu. <i>(Sarah schreibt, Beate schaut ihr zu)</i> Also du hast den Limes von n nach Unendlich durch, ja (?) Unten haben wir auch Limes von n nach Unendlich und oben bleibt uns dasselbe wieder stehen. <i>(beide schreiben)</i>	Zugriff
29	Beate	Mhm.	
30	Sarah	So, und jetzt weiß ma, oder sollt ma wissen, dass der Limes von Eins durch n ist immer Null. Jetzt kannst du schreiben, Neun durch n ist Null (,) Siebenundzwanzig durch n Quadrat ist Null, und minus Siebenundzwanzig durch n hoch Drei sind	Handwerk

		Null. Eins bleibt Eins, ja (?) Das geht gegen Eins. Drei bleibt wieder Drei, unten bleibt uns wieder der Nuller. So jetzt kannst du schreiben, is ja dasselbe wie Eins minus Null plus Null minus Null durch Drei minus Null und das is ja eigentlich gleich wieder ein Drittel so wie vorher unsere Überlegung.	
31	Beate	Aber den Limes (Beate zeigt auf Sarahs Block) musst trotzdem noch hin oder nicht (?)	Kommentare
32	Sarah	Ja, genau.	
33	Beate	Und das strebt dann gegen ein Drittel, oder (?)	
34	Sarah	Na, ich glaub der Grenzwert ist dann einfach ein Drittel.	
35	Beate	Aso.	
36	Sarah	Ja (?)	Problem- bewusstsein schaffen
37	Beate	Und das ist jetzt konvergent?	
38	Sarah	Mhm. Divergent wärs zum Beispiel, wenn minus Unendlich oder so rauskommt.	
39	Beate	Ok.	

Bsp 8) beschränkt, konvergent bzw. divergent?

(a) $a_n = \frac{(3-n)^3}{3n^3-1} = \frac{n^3 - 9n^2 + 27n - 27}{3n^3-1} = \dots$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{Überlegung}$

N.R.: $\frac{n^3 - 9n^2 + 27n - 27}{3n^3-1} = \frac{n^3 \left(1 - \frac{9}{n} + \frac{27}{n^2} - \frac{27}{n^3}\right)}{n^3 \left(3 - \frac{1}{n^3}\right)}$

$= \frac{1 - \frac{9}{n} + \frac{27}{n^2} - \frac{27}{n^3}}{\left(3 - \frac{1}{n^3}\right)}$

$\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{9}{n} + \frac{27}{n^2} - \frac{27}{n^3}}{3 - \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{9}{n} + \frac{27}{n^2} - \frac{27}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \frac{1}{n^3}} =$

$= \frac{1 - 0 + 0 - 0}{3 - 0} = \frac{1}{3}$

Jede konvergente Folge ist beschränkt?

Abb.9 Aufgabe 8a Sarah

8)a) $a_n = \frac{(3-n)^3}{3n^3-1}$

$$= \frac{(3-n)^2(3-n)}{3n^3-1} = \frac{(9-6n+n^2)(3-n)}{3n^3-1} = \frac{-n^3+27-18n+3n^2-9n+6n^2}{3n^3-1}$$

$$= \frac{27-27n+9n^2-n^3}{3n^3-1}$$

Trick, dividieren Zähler und Nenner des Bruchs durch die größte vorkommende Potenz von n .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\frac{27}{n^3} - \frac{27n}{n^3} + \frac{9n^2}{n^3} - \frac{n^3}{n^3}}{\frac{3n^3}{n^3} - \frac{1}{n^3}} = \frac{-1}{3}$$

a_n ist konvergent und beschränkt, da jede konvergente Folge beschränkt ist.

Abb.10 Aufgabe 8a Lösung

6.2. Konvergenz einer Folge – Franz & Jan (Aufgabe 8a)

Dauer der Szene: ca. 5 Minuten

Involvierte Gegenstände und allgemeine Beschreibung:

Die zweite Zweiergruppe, die bei der Bearbeitung der Aufgabe 8 gefilmt wurde, setzt sich zusammen aus Jan und Franz. Die beiden Studenten treffen einander regelmäßig nach den Vorlesungen, um die Übungsaufgaben gemeinsam vorzubereiten. Franz hat ein Tablet mit der Angabe vor sich. Jeder der beiden hat einen Block und einen Stift vor sich auf dem Tisch liegen. Geschrieben wird ausschließlich auf den Blöcken und nicht am Tablet. Der Lösungsprozess von Jan und Franz ist in Hinblick auf die Anordnung der Teilphasen ähnlich aufgebaut wie jener der beiden Studentinnen Beate und Sarah.

Grobe Gliederung:

< 1 – 14 > Umformen der Angabe

< 15 – 22 > Lösung der Aufgabe

Aufgabenstellung:

Entscheiden Sie jeweils, welche der Eigenschaften *beschränkt*, *konvergent* bzw. *divergent* für die gegebene Folge vorliegt. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

$$a_n = \frac{(3-n)^3}{3n^3-1}, \text{ wobei } n \text{ Element aus den natürlichen Zahlen ist.}$$

Zeile	Name		Teilphase
1	Franz	Das Achter kommt ma mal machbar vor. <i>(beide blicken auf die Angabe)</i>	Kommentar
2	Jan	Ok. <i>(beide schreiben die Angabe ab)</i>	
3	Franz	Jetzt lös ma mal diesen Dingsda.	Zugriff
4	Jan	Jo, tat i ah mochn. <i>(beide rechnen auf ihren Blöcken, längere Pause)</i>	
5	Franz	Das ist Siebenundzwanzig n zur Dritten (...) Eins, Drei, Drei, Eins, minus Siebenundzwanzig(,) Drei n Quadrat.	Handwerk
6	Jan	Ich habs mir(,) oje ich kann mir das nie merken.	
7	Franz	Mit dem Pascalschen Dreieck, weißt eh. Das zur Dritten san Siebenundzwanzig minus, das is alternierend natürlich, weil das a minus drinnen is, das zum Quadrat san Neun <i>(beide reden während sie rechnen, hin und wieder sind einzelne Zahlen zu hören)</i>	
8	Jan	Wieso? a plus, also a mal. <i>(beide rechnen)</i>	
9	Franz	a plus (-)	
10	Jan	Ah. Jaja, du hast des schon zamgefasst. Jaja, genau. I machs (-) <i>(beide rechnen weiter, längere Pause)</i> Wieso hast du da minus Siebenundzwanzig n?	
11	Franz	Schau im Allgemeinen hast du fallende Potenzen von a und steigende Potenzen von b.	
12	Jan	Mhm.	
13	Franz	Wennst hast a minus b zur Dritten host fallende Potenzen von a und steigende Potenzen von b, das heißt anfangen tust mit a zur Dritten, das ist der Einser(,) dann hab i minus Drei mal fallend von a, a Quadrat b plus Drei a b Quadrat plus b zur Dritten, irgendwas stimmt jetzt net, minus b zur Dritten. Weilst Drei a b Quadrat hast(,) minus Drei a b Quadrat a mal b Quadrat sind Drei n Quadrat mal Drei mal (-) $((a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$	
14	Jan	Siebenundzwanzig minus Drei a Quadrat b, hat ma, Neun minus Neun n san minus Siebenundzwanzig n, p l u s n Quadrat Drei n Quadrat sind Neun n Quadrat und minus n hoch Drei.	
15	Franz	Dann war der nächste Schritt(,) äh durch die höchste Potenz.	
16	Jan	Multiplizieren, äh zu [dividieren]	Zugriff

17	Franz	[Dividieren] Das heißt du hast dann Siebenundzwanzig durch n zur Dritten minus Siebenundzwanzig (...) plus (...) minus Eins durch Drei minus Eins durch n zur Dritten. Das geht gegen Null, das geht gegen Null, das geht gegen Null. Die Frage ist, ob das jetzt schon alles ist.	Problem- bewusstsein
18	Jan	Was ham ma (?) Konvergenz, oder (?)	
19	Franz	Stellen Sie fest welche der Eigenschaften beschränkt, konvergiert.	
20	Jan	Auf jeden Fall ist es konvergent mit Grenzwert. (<i>schreibt</i>)	
21	Franz	Stellen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert fest. Das heißt konvergent mit Limes n gegen unendlich ist minus ein Drittel. Muss ma das anders beweisen ah no?	
22	Jan	Wieso? Es steht eh nur, welche der Eigenschaften gelten.	

6.3. *Beschränkte, divergente Folge – Beate & Sarah (Aufgabe 8b)*

Dauer der Szene: ca. 3 Minuten

Allgemeine Beschreibung:

Die Lösung der Aufgabe 8b folgt unmittelbar nach der Bearbeitung der Aufgabe 8a. Die Situation ist dieselbe wie bei Aufgabe 8a. Sarah hat sich zu Hause vorbereitet und Ideen zum Lösen der ersten zehn Analysis-Aufgaben gesammelt. Sie berichtet Beate, was sie zur Aufgabe 8b gefunden hat. Allerdings ist ihr nicht klar, wie der Grenzwert der gegebenen Folge berechnet wird, wenn der Grenzwert der Folge $(-1)^n$ nicht existiert. Die Studentinnen geben nach drei Minuten die Aufgabe auf und widmen sich einer anderen.

Grobe Gliederung:

< 1 – 15 > Was macht man mit minus Eins hoch n?

Aufgabenstellung:

Es ist gefragt, ob die gegeben Folge beschränkt, konvergent bzw. divergent ist. Im Falle der Konvergenz soll der Grenzwert berechnet werden.

$$b_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}, \text{ wobei } n \in \mathbb{N}.$$

Zeile	Name		Teilphase
1	Sarah	Da hab ich rausgefunden (-)	Zugriff scheitert
2	Beate	(schreibt Angabe ab)	
3	Sarah	Es steht ja minus Eins hoch n, das existiert nicht, gö (?) Das is so eine Rechenregel halt.	
4	Beate	Aha.	
5	Sarah	Ähm, wie ich da jetzt allerdings weiterrechne (-)	Klärung der Handlungs- optionen scheitert
6	Beate	Gibt's da im Internet irgendwas? Hast geschaut?	
7	Sarah	Ja, hab ich aber nichts mehr gefunden.	
8	Beate	Und das geht nicht mit diesen minus Eins?	
9	Sarah	Aber da steht ja mal und da existiert der Ganze nicht.	Problem- bewusstsein
10	Beate	Warum existiert aber minus Eins hoch n nicht?	
11	Sarah	Ja, das steht überall in den Büchern, den gibt's einfach nicht, da steht Limes minus Eins hoch n, das gibt's nicht, existiert nicht.	
12	Beate	Aber steht da minus Eins hoch n mal n, is wurscht.	
13	Sarah	Ja, das is ja wurscht, es geht ja um diesen Term und jetzt weiß ich nicht, ob ich mit Eins plus n Quadrat weiterrechnen darf ja (?) Durch Zwei plus drei n plus n Quadrat.	Klärung der Handlungs- optionen
14	Beate	Mhm.	Kommentar
15	Sarah	Da bin ich eben hängen geblieben bei dem Beispiel. Und dasselbe haben wir bei Beispiel 10b, da ist auch minus Eins hoch n. Wenn das nicht existiert, ist das Ganze dann, weiß ich nicht, divergent, oder (?)	
16	Beate	Hm.	Resümee

Nachdem die Studierenden ein paar Tipps bekommen haben, lösen sie die Aufgabe wie unten abgebildet. Ohne Hilfestellung fanden sie jedoch keinen Zugang zur Aufgabe wie das Transkript zeigt.

(b) $b_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ existiert nicht

Werten einsetzen:

$n=1: \frac{1 + (-1)^1 \cdot 1}{2 + 3 \cdot 1 + 1} = \frac{0}{6} = 0$

$n=2: \frac{1 + (-1)^2 \cdot 2^2}{2 + 6 + 4} = \frac{5}{12} = 0,41\bar{6}$

$n=50: \frac{1 + (-1)^{50} \cdot 50^2}{2 + 150 + 50^2} = \frac{2501}{2652} = 0,94$

$n=3: \frac{1 + (-1)^3 \cdot 3^2}{2 + 9 + 9} = \frac{-8}{20} = -0,4$

$n=71: \frac{1 + (-1)^{71} \cdot 71^2}{2 + 213 + 5041} = \frac{-5040}{5256} = -0,9589$

n gerade $\rightarrow 1$

n ungerade $\rightarrow -1$

$\Rightarrow$ divergent + beschränkt

Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert

Häufungswerte $-1, 1$

Allgemein:

Gerade $n=2k: \frac{1 + (-1)^{2k} (2k)^2}{2 + 3 \cdot 2k + (2k)^2} = \frac{1 + 4k^2}{2 + 6k + 4k^2} = \frac{k^2 (\frac{1}{k^2} + 4)}{k^2 (\frac{2}{k^2} + \frac{6}{k} + 4)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2} + 4}{\frac{2}{k^2} + \frac{6}{k} + 4} = 1$

Ungerade $n=2k+1: \frac{1 + (-1)^{2k+1} (2k+1)^2}{2 + 3(2k+1) + (2k+1)^2} = \frac{-4k^2 - 4k}{4k^2 + 10k + 6} = \frac{k^2 (-4 - \frac{4}{k})}{k^2 (4 + \frac{10}{k} + \frac{6}{k^2})} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-4 - \frac{4}{k}}{4 + \frac{10}{k} + \frac{6}{k^2}} = -1$

Abb.11 Aufgabe 8b Sarah

8)b) $b_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}$ $(-1)^n$ ist divergent

n gerade

$b_n = \frac{1 + n^2}{2 + 3n + n^2}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{n^2}{n^2}}{\frac{2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} + \frac{n^2}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1$

n ungerade

$b_n = \frac{1 - n^2}{2 + 3n + n^2}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$

Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert. Daher folgt b_n ist divergent.

b_n ist aber beschränkt, untere Schranke -1 , obere Schranke $+1$

(b_{2n}) und (b_{2n+1}) sind zwei konvergente Teilfolgen

b_n hat Häufungswerte $-1, +1$

Abb.12 Aufgabe 8b Lösung

6.4. Beschränkte, divergente Folge – Franz & Jan (Aufgabe 8b)

Dauer der Szene: ca. 4 Minuten

Involvierte Gegenstände und allgemeine Beschreibung:

Franz und Jan lösen die Aufgabe 8b im Anschluss an 8a. Sie gehen dabei analog wie bei 8a vor. Sie bringen den Bruch in eine andere Darstellung und dividieren durch die höchste vorkommende Potenz von n . Danach überlegen sie sich, welche Auswirkungen $(-1)^n$ auf die Grenzwertbestimmung hat.

Grobe Gliederung:

< 1 – 19 > Was bedeutet beschränkt?

Aufgabenstellung:

Es ist gefragt, ob die gegebene Folge beschränkt, konvergent bzw. divergent ist. Im Falle der Konvergenz soll der Grenzwert berechnet werden.

$$b_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}, \text{ wobei } n \in \mathbb{N}.$$

Zeile	Name		Teilphase
1	Jan	Dann bleibt eh nur über minus Eins hoch n.	Handwerk
2	Franz	Das geht gegen Null, das geht gegen Null. Das heißt es bleibt über: minus Eins hoch n durch Eins. Minus Eins hoch n das ist alternierend.	
3	Jan	Das is alternierend, das hast eh gsagt.	Problem-bewusstsein schaffen
4	Franz	Das is eine alternierende Folge, divergent. Ist nach oben und unten beschränkt (?)	
5	Jan	Najo, des Problem is, es steht ja net nur des do, sondern es is ja net des (-) Weil es is ja erst, wenn n gegen unendlich geht. Das heißt davor (-) <i>(beide schauen auf ihren Block)</i>	Kommentar
6	Franz	Divergent. Die Frage ist, von welcher Richtung sie sich nähert, gö (?)	
7	Jan	Das hät ma oben ah machen müssen.	Klärung der Handlungsoptionen
8	Franz	Gibt's da nicht eine Definition, die besagt, eine Folge muss beschränkt sein, wenn sie einen Grenzwert hat (?)	
9	Jan	Genau, aber die Frage ist. Ob sich die Werte von rechts oder links nimmt.	Problem-bewusstsein Schaffen
10	Franz	Des is ja gor net gfragt, oder (?)	
11	Jan	Es is ja gfragt, obs besch (-), oder (?)	Klärung der Handlungs-
12	Franz	Obs beschränkt ist und das ergibt sich aus der Definition, wenn sie konvergent ist, ist sie beschränkt. Es muss	

13	Jan	beschränkt sein, weils konvergent is. Jo, stimmt scho. <i>(beide schauen ihren Block an, längere Pause)</i> Auf Null is Eins, oder (?)	optionen
14	Franz	Bei Zwei, Fünf durch Zwölf.	Zugriff
15	Jan	Zwa plus Zwölf plus Sechzehn, ah zwa plus Sechs.	
16	Franz	Das heißt die pendelt zwischen plus und minus Eins, das heißt sie ist sicher beschränkt. Minus Acht durch Zwanzig. Die zwei Häufungspunkte.	
17	Jan	Nachher is beschränkt.	Problem- bewusstsein schaffen
18	Franz	Sie ist nach oben und unten beschränkt und divergent.	
19	Jan	Also is einfach nur beschränkt.	

6.5. Grenzwertberechnung (Aufgabe 16)

Dauer der Szene: ca. 40 Minuten

Involvierte Gegenstände und allgemeine Beschreibung: Das Team setzt sich zusammen aus Hanna, Lukas und Marie. Die drei Studierenden besuchen dieselbe Übungsgruppe. Es ist das erste Mal, dass sie gemeinsam die Aufgaben vorbereiten. Dazu treffen sie sich unmittelbar nach ihrer gemeinsamen Lehrveranstaltung. Hanna hat ihre Vorlesungsmitschrift bei sich, Marie ein bei Mathematikstudentinnen und -studenten bekanntes Analysisbuch von H. Heuser. Dies ist eines jener Bücher, die den Studierenden in der Analysis-Vorlesung vom Dozenten nahe gelegt wurde, wie man aus dem Gespräch entnehmen kann.

Grobe Gliederung:

- < 1 – 41 > Welche Eigenschaften hat eine Nullfolge?
- < 42 – 104 > Erste Überlegungen zu Handlungsoptionen
- < 105 – 202 > Aufgriff der Definition von Folgenkonvergenz
- < 203 – 299 > Überarbeitung der Lösung

Aufgabenstellung:

Sei (a_n) eine Nullfolge, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Sei b_n das arithmetische Mittel der ersten n Glieder von a_n ,

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}. \text{ Zeigen Sie, dass } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Zeile	Name		Teilphase
1	Marie	Ich weiß nicht(,) ich hab in einem Buch nachgeschlagen und dann war Rechenregeln von konvergenten Reihen und dann ist eine davon nicht konvergent(,) Folgen	Kommentare
2	Hanna	Von was redts es grad (?) Von wos fürn Beispiel (?)	
3	Marie	Ich glaub von 17 red ich.	
4	Hanna	Ok.	
5	Lukas	Mhm(.) ah ok, aso ja die waren ja im Skriptum, oder (?) die Rechenarten.[Ja, genau.]	
6	Marie	[Ja, glaub auch.]	
7	Lukas	Na dann (-)	
8	Marie	Sechzehn.	
9	Lukas	Beispiel 16. <i>(länger Pause)</i>	
10	Lukas	Ok, das hab ich wahrscheinlich eh wieder nicht richtig, weils schon wieder so Unendlich mal mal irgendwas.	
11	Marie	<i>(lacht)</i> Ja.	
12	Hanna	Sei a_n eine Nullfolge. <i>(liest den Beginn der Angabe vor)</i>	Problem- bewusstsein schaffen
13	Lukas	Mhm.	
14	Hanna	Was ist denn a_k arithmetisches Mittel (?)	
15	Marie	Das ist der normale Durch(,) was Durchschnitt nein(,)	
16	Lukas	[Ja, also (-)]	
17	Marie	[der Mittelwert], wenn du zum Beispiel in der Schule die Schularbeiten hattest und dann kam(,) und der Durchschnitt, nein es ist nicht der Durchschnitt, ähm(,) doch ich glaub, es ist der Durchschnitt.	
18	Lukas	[Ja, ich glaub schon.]	
19	Marie	[Wenn du sagst,] der Durchschnitt ist diese und jene Note, wenn du sagst es gibt fünf Einser, sieben Zweier und (-)	
20	Hanna	Das heißt das b_n ist eigentlich eine Teilmenge von a_n (?)	
21	Marie	[ähm]	
22	Lukas	[ähm] <i>(Marie und Lukas lachen)</i>	
23	Marie	Wir nehmen alle(,) ja alle Werte und dann durch die Anzahl der Werte dividiert man.	Kommentare
24	Lukas	Genau, es ist mehr oder weniger die Reihe von a_k ähm(,) aber durch(,) durch die Anzahl der Elemente halt.	
25	Marie	Ja.	
26	Hanna	Ok.	
27	Lukas	Ok.	
28	Marie	Wenn aber a_n eine Nullfolge ist, heißt das doch, dass der Nenner gegen Null geht.	
29	Lukas	Na, würd i net sagen, oder (?)	
30	Hanna	Wenn a_n eine Nullfolge ist (?)	
31	Marie	Folge und Reihe das war der Unterschied.	
32	Lukas	Also weil eben das is ja die Summe der einzelnen Folgenglieder das heißt, das strebt vielleicht dem Grenzwert zu, oder (?)	
33	Marie	Ja.	Zugriff herstellen
34	Lukas	Also i glaub da Schmah ist, das da heroben ist endlich, wenn a Nullfolge ist, oder (?) Kann das sein (?)	
35	Marie	Es ist endlich (?)	
36	Lukas	[Ja also.]	
37	Hanna	[Wenn a_n] Nullfolge ist, dann geht der Nenner gegen Null und der Zähler gegen Unendlich, oder na (?)	
38	Marie	Aber ich mein, bei der Nullfolge hast du nur die einzelnen Glieder, die dann immer kleiner werden (-)	

39	Hanna	Mhm.	
40	Marie	Und bei der Reihe summierst du die auf und es könnte ja sein, dass es gegen eine andere Zahl geht(,) weil die ersten Glieder zum Beispiel so groß waren und die dann halt dazukommen immer kleiner werden.	
41	Lukas	Aber wie is des (?) Zum Beispiel Eins durch n ist ja eine Nullfolge, oder (?)	
42	Marie	Mhm.	
43	Lukas	Aber Eins durch n ähm als (-)	
44	Marie	Reihe.	
45	Lukas	Reihe ist trotzdem divergent, oder (?)	
46	Marie	Ich denk schon, ja das ist die harmonische Reihe.	
47	Lukas	Ja, ja genau die harmonische Reihe.	Kommentare
48	Marie	Und ich habe ein Buch da. Ich weiß zwar nicht, warum ich das mit mir rumschlepp aber (-) (<i>Marie nimmt das Analysisbuch von Heuser aus ihrer Tasche</i>).	
49	Hanna	Des hab i mir a gekauft, aber des hab ich wieder zurückgegeben müssen.	
50	Marie	Zurückgeben (?)	
51	Hanna	Taugt dir das Buch (?) I mag des überhaupt net. Das ist so kompliziert.	
52	Lukas	Der Heuser (...)	
53	Marie	Ich muss zugeben, ich habe gestern angefangen zum Lesen und oha es ist so lustig. (<i>lacht</i>)	
54	Lukas	Des steht ja a glaub i im Vorlesungsverzeichnis, dass es sehr unterhaltsam zum Lesen ist oder (?)	
55	Marie	Ja, aber ich glaub, das ist nur ein Mathematiker(,) Mathematiker, der das sagt ähm ok(,) Eins durch n.	Klärung der Handlungsoptionen
56	Lukas	Aber dann(,) tät sichs ja trotzdem wieder ausgehen, oder (?) Weil wenn die Folgenglieder Eins durch n wären, dann wärens ja dann könnt mas ja mit den Summen auseinander schreiben und sagen Eins durch n Quadrat, oder (?)	
57	Marie	Oh, wart amal (<i>Pause</i>) Ist das nicht wie beim Gauß? Aber die können irgendwie sein(,) nein also ist es nicht wie bei Gauß.	
58	Lukas	Mh.	
59	Marie	Ich hätte jetzt nämlich vorgeschlagen, das könnt ja a mal a plus Eins Halbe ($\frac{a(a+1)}{2}$) sein aber (-)	
60	Lukas	Ja ok, mhm. (<i>Pause</i>) Na eben, i glaub wir müssen uns das grad mal bissl vergegenwärtigen, oder(?) Weil es soll ja der Ausdruck, das is ja nachher, der besteht zwar eben aus den ersten n Folgengliedern von a von n durch n, aber ist seinerseits nur ein Folgenglied von b von n.	
61	Marie	Ok (?)	
62	Lukas	Oder (?)	
63	Marie	Ich weiß nicht genau (?)	
64	Lukas	Also es ist sozusagen eine Partialsumme von a_k durch die Anzahl der Elemente der Partialsumme(,) und wir wollen aber die unendliche Partialsumme(,) äh sozusagen ausrechnen und dann wird unser Nenner Unendlich und ich glaub, wir müssen halt irgendwie belegen, dass der Zähler da heroben, ah wenn das unendlich viele Folgenglieder sind (-)	Problem- bewusstsein schaffen
65	Marie	Oh.	Klärung der Handlungsoptionen
66	Lukas	endlich bleibt, dann kann man behaupten, dass es eine Nullfolge ist.	
67	Marie	Das könnte gehen, aber es steht, dass b_n das Mittel der ersten n Glieder ist, das heißt, das ist nicht Unendlich.	Problem- bewusstsein
68	Lukas	Ja, aber wenn ma, ähm also beim Limes von b von n geht ja dann das n gegen Unendlich. Das ist heißt, es ist der	

69	Marie	Mittelwert der ersten unendlich vielen sozusagen. Oh, wir hatten das grad. Dürfen wir das sagen oder dürfen wir das nicht sagen (?)	Kommentar
70	Lukas	Ich glaub schon, dass wir das sagen dürfen, aber ich glaub halt, dass wir nicht mit Unendlich rechnen dürfen.	Problem- bewusstsein
71	Marie	Was wir nämlich vorher auch schon ganze Zeit gemacht haben ist, das Ganze aufzuteilen, sodass zum Beispiel a_1 plus a_2 plus was weiß ich was immer a_1 durch n plus a_2 durch n plus a_3 durch n (,) ähm und das ja auch immer kleiner werden dürfte.	Klärung der Handlungs- optionen
72	Lukas	Aso ja das is wahr.	
73	Marie	Ja.	
74	Lukas	Das geht aber schon.	
75	Marie	Das würde dann trotzdem nichts heißen, wenn das a_n ähm das a_1 trotzdem irgendwie ur groß wär, wär ja dann trotzdem blöd.	
76	Lukas	Jaja, aber wir wissen, dass das der, dass es eine Nullfolge ist, die muss ja fallen, oder (?)	Zugriff herstellen
77	Marie	Mhm.	
78	Lukas	Also und dann kann das a_1 aber nicht unendlich groß sein, weil du kannst dann immer was finden, das bissl größer ist, wenn das ein fixer Wert ist das a_1 , oder (?) Und von dort aus wirds immer kloaner(,) also wiss ma eigentlich, dass des a endliche Zahlen sind, das a_1 bis a_n , wir wissen nur nicht, dass die Summe endlich ist, aber das brauch ma vielleicht gar nicht.	
79	Marie	Ok. Wir sollen zeigen, dass der Limes von n nach Unendlich von b_n (-)	
80	Lukas	Null ist genau.	
81	Marie	Ja. <i>(lacht)</i> Ach. <i>(Pause)</i>	Kommentare
82	Lukas	Also i weiß net, eben das war jetzt mein großer Fehler bei anscheinend vielen Beispielen, aber i glaub da geht's fast.	
83	Marie	Ja(,) das kann sein.	Zugriff herstellen
84	Lukas	Weil wir eben kane <i>(Pause)</i>	
85	Hanna	Aber was heißt, das a_1 , das is ja dann eigentlich nur, wenn ma da a Beispiel nehmen, also wir ham jetzt die Folge a_n ist einfach des $(\frac{1}{n})$, dann is a_1 ist ja (-)	
86	Marie	Eins.	
87	Hanna	Eins(,) a_2 ist ein Halb und a_3 ist dann ein Drittel.	
88	Marie	Aber wenn man Eins durch n durch n dividiert, hat man ja (-)	Problem- bewusstsein schaffen
89	Hanna	Eins durch n durch n . <i>(leise)</i>	
90	Lukas	Ja, dann ham ma Eins durch n Quadrat aber ich glaub, dass ma sowas nicht annehmen dürfen, also was das da oben sein kann, weil wir müssen nicht feststellen, dass das eine konvergente Reihe ist. Wir müssen ja sagen, dass der Grenzwert der Folge Null ist. Das sollt eigentlich einfacher gehen.	Kommentare
91	Marie	Ok also (-) Wir reden jetzt über die Folge a_n (?)	
92	Lukas	Na, b_n [...]	Problem- bewusstsein schaffen
93	Marie	Aber wenn ich(,) ich diese Angabe so lesen würde, würde ich nicht auf die Idee kommen, dass b_n auch eine Folge ist, weil da steht b_n ist gleich (-) Oh (!) Es ist die Folge von den arithmetischen Mitteln .	
94	Lukas	Genau, ja von den ersten n Folgenglieder.	
95	Marie	Verdammt.	
96	Lukas	Also eben, wir müssen den Grenzwert von b_n berechnen und halt schauen, dass der möglichst Null wird.	

97	Marie	Ok(,) ok.	Klärung der Handlungsoptionen
98	Hanna	Kinn ma des mit einer, mit da P a r t i a l bruchzerlegung mochen (?)	
99	Lukas	Ähm(,) wie meinst (?)	
100	Hanna	Na wir ham ja immer, wenn ma so so Reihen gehabt haben, so Summenzeichen, ham mas immer mit der Partialsummenzerlegung so hinkriegt, dass des immer a plus, a minus, a plus, a minus und dann kummt irgendwas ausa und des kannst dann ja (-)	
101	Lukas	[Ok.]	
102	Marie	[und] das mach ma grad eben in der Vorlesung (?)	
103	Hanna	Na na, es ham ma irgendwann vorher schon gmocht. Na is egal, na es geht eh net wahrscheinlich. <i>(blättert in der Vorlesungsmitschrift)</i>	Problem-bewusstsein
104	Marie	<i>(hält ihr Analysisbuch in der Hand)</i> Partialbruchzerlegung Seite 401. <i>(blättert im Buch)</i>	
105	Lukas	Eben, es is irgendwie(,) es is irgendwie(,) irgendwie schräg. Also heißt a_n wenn a Nullfolge ist, ist sie nicht zwangsläufig(,) äh ist die Reihe aus der net nicht zwangsläufig konvergent, oder (?) Eins durch n ist nicht konvergent, also die Reihe (?)	
106	Marie	Ja.	
107	Lukas	Ok.	
108	Marie	Aber wir ham ja eine Folge von diesen Reihen.	
109	Lukas	Mhm.	Zugriff herstellen
110	Marie	Oha(,) das ist kompliziert.	
111	Lukas	Ooh(,) aso(,) ähm wir wissen ja, dass(,) dass unendlich viele Folgenglieder von a_n sich sehr nah an Null befinden, oder (?)	
112	Marie	Ja.	
113	Lukas	Ähm, und ab einem gewissen Grad, i mein, das n geht ja von(,) äh ist ja offensichtlich größer oder gleich Eins [das heißt]	
114	Marie	[Ähm] ja das heißt (-)	
115	Lukas	Das heißt also, dass das sehr schnell größer wird als das a_n , oder also (-)	Klärung der Handlungsoptionen
116	Marie	Ja, ich denk auch. Also dieses große N ist ganz bestimmt größer als a_1 , würd ich sagen, dieses große N, wo immer steht, für jedes n größer als N(,) für jedes kleine n, das größer als das große N gilt (-)	
117	Lukas	Ok, ok(,) mhm. <i>(Pause)</i>	
118	Marie	Was haltet ihr davon?	
119	Lukas	Da mussten wir auch ein jeweiliges Epsilon bestimmen,	
120	Marie	Ok.	
121	Lukas	damit das(,) damit das sinnvoll ist, glaub i. <i>(Pause)</i> Ja eben, ich finds ehrlich gesagt bissl schräg, dass oben endlich viele Glieder sind, da bin ich jetzt immer eingefahren in den Übungen(,) offensichtlich das is (-) <i>(längere Pause)</i>	Problem-bewusstsein schaffen
122	Hanna	Aber da steht ja(,) also a_n ist eine Nullfolge, aber das heißt ja eine Folge, das heißt da hab ich einen Wert Beistrich einen Wert und da zähl i des Ganze zom.	
123	Lukas	Ma macht sozusagen die Reihe draus, aus den ersten n.	Zugriff herstellen
124	Hanna	Aber dann weiß ma ja net, ob die Reihe(,) wenn i ma da nur den Nenner anschau, ob die überhaupt konvergent ist (?)	
125	Marie	Ich denke aber schon, dass sich das aus der Nullfolge ergibt,	
126	Hanna	Ok.	
127	Marie	weil die Terme, die dazugezählt werden, immer unendlich klein werden. Das heißt das ändert vielleicht die letzten so und so vielen Kommastellen aber [es wird nie größer].	
128	Lukas	[Aber es wird halt] schon immer a bissl größer, also eben	

129	Marie	Eins durch n ist halt nicht konvergent als Reihe. Aber ich glaub, dass es insofern zum Beispiel nicht größer als Zwei wird, das heißt, wenn du zum Beispiel Eins durch Zwei hoch n ist (-)	
130	Lukas	Ja, das schon, aber wir haben, halt in der Vorlesung war ja grad das Beispiel Eins durch n ist nicht konvergent, Eins durch n zum Quadrat schon wieder zum Beispiel.	
131	Marie	Ja.	
132	Lukas	Aber wir können nicht annehmen, glaub i, dass der obere Wert endlich ist.	
133	Marie	Ich find das(,) aber seltsam, wenn wir doch von Eins bis n gehen, ist es doch endlich, besonders wenn (-)	
134	Lukas	Ja net, wenn n gegen Unendlich geht.	
135	Marie	Das das ist wirklich kompliziert.	Kommentar
136	Lukas	Jaja, das stimmt schon, ja. Also es is eh nett, aber es is schon wirklich(,) kompliziert ja, weil wenn eben, weil wenn des da ein endlicher Wert wäre, das Summenzeichen, also da unser Zähler , dann wärs ja trivial, weil(,) oder trivial(,) dann könnt ma ja sagen der Limes von Eins durch n ist ja Null und der mal der Limes von einem andern endlich Wert wäre ja wieder Null.	Zugriff
137	Marie	Ja.	
138	Lukas	Nur wir wissen ja nicht, dass das net Unendlich is.	Problem- bewusstsein
139	Hanna	Aber das hat er gesagt heute, des derf ma net mochen, des muss (-)	
140	Lukas	Genau ja.	
141	Hanna	Ok.	
142	Lukas	Aber das hab i eben ständig gemacht.	Kommentare
143	Hanna	Ah.	
144	Lukas	Aber das funktioniert halt nicht so.	
145	Marie	Ja und jetzt (-)	
146	Hanna	Weils von n abhängig is das Ganze [darum darf mans nicht machen].	Problem- bewusstsein
147	Lukas	[genau, genau] und jetzt muss ma uns eben glaub i, also i glaub, jetzt muss ma uns eine Abschätzung überlegen.	Klärung der Handlungs- optionen
148	Marie	Oh.	
149	Lukas	Von oben und von unten weil ähm(,) was ma schon annehmen können, is ja halt, dass das a ab einem gewissen n kleiner wird als das n unten.	
150	Marie	Ja.	
151	Lukas	Genau(,) und wenn nachher immer oben weniger dazukommt als herunten(,) oder es wird ja sogar kleiner als Eins, weil dann zähl i ja oben immer weniger als Eins dazu und unten immer Eins mehr sozusagen.	Zugriff herstellen
152	Marie	Ja.	
153	Lukas	Und das (<i>meint den Nenner</i>) wird dann Unendlich und das (<i>Anmmeint den Zähler</i>) wird a Unendlich aber nicht so Unendlich.	
154	Marie	(<i>lacht</i>) Was (?) Oha.	
155	Lukas	Also das heroben ist sicher wesentlich kleiner als das von unten.	
156	Marie	Mhm.	
157	Lukas	Und wenn ma des zeigen können, dann glaub i, kann ma sagen, dass das n, also dass der Limes von b von n Null ist (<i>längere Pause</i>). Also wir können sozusagen zeigen, dass der Zähler langsamer wächst als der Nenner.	Resümee
158	Marie	Aber das alleine reicht ja auch nicht (-)	Kommentare

159	Lukas	Ja wohl, aber er hat glei heut gesagt mit der Exponentialfunktion dürf ma das no net machen, weil ma das ham ma no net glernt. (<i>lachen</i>)	
160	Lukas	Weil da wars eben ah so, dass oben der Logarithmus war von n durch n.	
161	Marie	Aber wer kam auf diese Idee? Also hätte man das irgendwo sehen müssen? Ich hatte keine Ahnung, woher das kam. Das ist irgendwie so vom Himmel gefallen.	Erklärung
162	Lukas	I weiß a net, i glaub, es is gleich so dagestanden: Logarithmus von n. Ich glaub, er hat gemeint, also er hat gesagt, dass der Logarithmus von n weniger schnell wächst als die lineare Funktion quasi von n und dadurch wird das irgendwann Null, wenn n gegen Unendlich geht und e hoch Null ist wieder Eins ($e^0 = 1$), so war glaub i die Argumentation und ich glaub, das könn ma da schon so ähnlich machen, also weil plus kenn ma ja schon(.) plus ham ma schon glernt.	
163	Marie	Ja, also irgendwas mit (-)	Klärung der Handlungsoptionen
164	Lukas	Hm (?) (<i>länger Pause</i>) Also mei Argumentation wäre die folgende, dass ma sagt, egal wie groß das a_1 ist, von dort an wird a_n eigentlich immer kleiner (-)	
165	Marie	Ja, also (-)	
166	Lukas	Beziehungsweise (-)	
167	Marie	Weil sie eine Nullfolge ist, dürfte sie ja doch eher fallend sein.	
168	Lukas	Ja genau, i mein sie kann ah, kann sie ah steigend sein (?)	
169	Marie	Uh, vielleicht könnt sie irgendwie negativ beginnen (?) Aber ich mein, das ist dann alternierend, dass sie um einen bestimmten Wert herumspringt.	Problembewusstsein schaffen
170	Lukas	Ok, aber das ist eigentlich alles unerheblich, weil irgendwann eben diese a_n s so nah an Null sind, dass sie quasi den äh Zähler kaum mehr erhöhen, aber eben der Nenner steigt immer um Eins.	
171	Marie	Ja, ich denk auch so. Man kann das zum Beispiel für n ist Eins machen und dann ist es noch ein großer Wert und irgendwann wird's dann schlagartig kleiner und kleiner oder auch nicht schlagartig , sondern es wird von Anfang an immer kleiner .	
172	Lukas	Genau, ja, also, so so glaub i kanns gut gehen. Also wir müssen nur eben sagen, dass eben unendlich viele Glieder von der oberen Reihe äh(.) eben kleiner san als das(.) n da oder ja. Ah das is so blöd, weil ma a unten net dazuzählt unten.	
173	Marie	Unten ist zum Beispiel die Summe von a_1 von (-)	Zugriff herstellen
174	Lukas	Ja, genau, k ist (-)	
175	Marie	[von Eins bis n]	
176	Lukas	[ja genau], ja genau (<i>Pause</i>) unten ist die Summe von, mach ma mal einen Bruchstrich (<i>schreibt</i>) a_k und unten ham ma die Summe.	
177	Marie	Eins (-)	
178	Lukas	Eins bis n und so.	
179	Hanna	n ist ein fixer Wert, oder (?)	
180	Marie	[Also eigentlich (-)]	
181	Lukas	[Ja, i glaub ah] aber das is sozusagen ein Mal n oder n mal Eins(.) also i hab jetzt nur sozusagen, ich addier jetzt so viele Einser wies n halt is. So ist die Idee.	Zugriff schaffen
182	Hanna	Mhm.	
183	Lukas	Und wenn ich das unendlich oft mach, wenn das n gegen Unendlich geht dann hab i da heroben unendlich viele	

184	Hanna	Glieder, die kleiner sind als der Einser. Das heißt es wird immer kleiner, da Nenner wird ab dann immer um mehr größer als der Zähler(.) weil ah wenn i bei a_1 bei Hunderttausend bin, bin i, bei Fünfhundertzwanzig bin i dann irgendwo bei Null Komma Acht. Weil irgendwann muss i dann im Intervall von minus Eins und Eins landen.	
185	Lukas	Also glaubst, dass der Nenner auch immer zamzählt wird, also Eins plus Eins plus punkti punkti plus Eins. Ja, genau, als Veranschaulichung quasi (<i>Pause</i>), weil da hab i dann heroben, da fang i an mit Zehn Komma Neun, Sieben Komma Drei dann plaplapla und das geht so halt weiter und irgendwann hab i halt Null Komma Null Sieben und nachher plus Null Komma Null Drei und unten steht da halt immer Eins.	
186	Hanna	Aber i glaub, des derfst net. I glaub, dass n ein fixer Wert ist, zum Beispiel n ist Eins.	Problem- bewusstsein
187	Marie	[Ähm] das is ja eigentlich eh was wir hingeschrieben ham.	
188	Lukas	[Ja, eh].	
189	Hanna	Aber es wird nicht zamzählt. Es steht ja nicht in der Summe drin.	
190	Marie	Das ist eh leicht was anderes als was wir meinen. Wenn du das n verändert, als wenn du sagst, dass n Fünf ist, dann hast du hier Fünfmal einen Einser, den du zum vorigen Einser dazuzählst sozusagen, dann hast du Fünf mal Eins plus(.) und wenn (-)	
191	Hanna	Ok, wart i muss ma das kurz. (<i>schreibt ab</i>)	Kommentare
192	Marie	Oder was wir hier auch haben ist, dass die Indizes gleich sind das heißt es sind genauso viele Einser.	
193	Lukas	Genau.	
194	Marie	Im Nenner, nein im Zähler . Ich weiß nicht, warum ich Mathe studier, ich verwechsle das Kleiner-gleich- und Größer-gleich-Zeichen. Das ist ziemlich unangenehm.	
195	Lukas	Mhm, aber die sind schon recht grafisch, oder (?)	
196	Marie	Ja, aber ich.	Klärung der Handlungs- optionen
197	Lukas	Das is scho größer einfach die Seite.	
198	Marie	Ja, aber ich brauch da immer etwas länger.	
199	Lukas	Ja, na eh, i verstehs eh voll.	
200	Hanna	Ach. Ok ja(.) das Summenzeichen im Nenner hat mi jetzt voll verwirrt, aber des einfach des doda.	
201	Lukas	Aber i glaub, dass ma das gut argumentieren können, dass unendlich viele Folgenglieder von den a_n eben kleiner gleich Eins werden, damit wachst der äh Nenner schneller als der Zähler.	Kommentar
202	Marie	Das blöde ist, dass wir argumentieren und nicht beweisen so verdammt .	
203	Lukas	Na wir könnens ja so hinschreiben, oder (?) Also äh es gibt ein N aus den natürlichen Zahlen, sodass gilt für alle n größer dem groß N, ist das a von k kleiner gleich Eins von mir aus.	Zugriff herstellen
204	Marie	Mhm.	
205	Lukas	Und da das ja schon eine endliche Zahl ist, das groß N, san also unendlich viele von diese n's da, a von n. Sind das unendlich viele Glieder, die dann übrigbleiben und die dann kleiner als die Eins sind.	
206	Marie	Und irgendwas Kleineres durch n wird immer größer sein, na wird noch kleiner (?)	
207	Lukas	Ja, also (-)	
208	Hanna	Aber die Eins hast jetzt von da genommen, oder (?) Des is	

		des (?)	
209	Marie	Nein, es geht darum, dass der Wert da immer kleiner wird.	
210	Hanna	Jaja.	
211	Lukas	Also irgendwann wird halt sozusagen (-)	
212	Hanna	Des klaner Eins, ja (?)	
213	Lukas	der Nenner so groß, dass er sogar mögliche riesige Zahlen am Anfang oben kompensiert so in der Richtung, oder (?)	
		Wenn also das, also da könn ma dann sagen, dass a von n. Kleiner gleich Epsilon ist.	
214	Marie		
215	Lukas	Ja, es wächst einmal langsamer als immer Eins dazuzählen sozusagen, oder (?)	
216	Marie	Also ich befürchte ja, dass das a_n nicht wächst, sondern fällt, aber ich weiß nicht, ob (-)	
217	Lukas	Na aber i mein, aso i hab eigentlich gemeint die Reihe. Also das da heroben wächst langsamer als das da herunter. Und darauf würd i das halt aufbauen die Argumentation, also (-)	
218	Marie	Ich stell mir da auch so schön Funktionen vor, die sich irgendwann schneiden, sodass ma sieht, da ist der Zeitpunkt, wo sichs verändert aber (-)	
219	Lukas	Ja, aber das gib't's ja da net. Also eben die Summe von (<i>längere Pause, schreibt</i>). Also so würd ich das hinschreiben.	
220	Marie	Ich weiß halt wirklich nicht, ob das reicht.	Kommentar
221	Lukas	Ja, na eh net, aber jetzt muss ma die Erkenntnis halt sozusagen übertragen in des da. Das heißt, es gibt also beim b von n gib't's dann eben so ein Epsilon, kann man für jedes n so ein Epsilon angeben, wos kleiner wird, weil das untere immer kleiner wird, wenn das obere (-)	Zugriff herstellen
222	Marie	Versuchen wir das irgendwie (?)	
223	Lukas	Ja. Ähm(,) (<i>Marie lacht</i>) Ok(,) für alle Epsilon größer Null, oder (?)	
224	Marie	Ja, das ist immer so.	
225	Lukas	(<i>Lukas sagt an, alle schreiben mit</i>) Gilt es, es gibt dann ein groß N aus N (<i>Anm.: natürlichen Zahlen</i>), sodass gilt (-)	Handwerk
226	Marie	a minus a_n in Betragsstrichen ist größer, nein kleiner, als Epsilon (?)	
227	Hanna	Es gilt für alle n größer gleich groß N.	
228	Marie	In der Vorlesung kam das immer erst zum Schluss nachgeworfen. Ok, alle n größer gleich als N.	
229	Lukas	Oder größer gleich N gilt dann, dass die Summe von a_k .	Problem-bewusstsein
230	Marie	Aso, die Summe von a_k .	
231	Lukas	Durch $n(,)$ kleiner ist als das Epsilon, oder (?)	
232	Marie	Das sollten wir jetzt zeigen(,) schätz ich mal. (<i>Pause</i>)	
233	Lukas	Ok. (<i>Pause</i>) Es wär natürlich cool(,) also richtig konkret sagen, könn ma das halt net, weil wir ja die as net wissen (-) a_k nicht wissen.	
234	Marie		
235	Lukas	Wir wissen aber, dass eben unendlich viele Elemente a von a_n kleiner sind als Eins, also der Betrag.	Zugriff schaffen
236	Marie	Aber wenn wir das Epsilon hatten, hatten wir immer die Folge minus ihrem Limes oder so was in Betragsstrichen (?)	
237	Lukas	Mhm, aber wir können da quasi den Betrag umma machen, weil der Grenzwert wär ja Null in dem Fall.	
238	Marie	Aso, o k a y.	
239	Lukas	Da heroben haben wir das Epsilon sozusagen als Eins angegeben, weils uns hilft zu sehen, dass das äh dann in der Unendlichkeit sozusagen kleiner wird als der Nenner, der ja nur aus Einsen besteht.	
240	Marie	Aber eigentlich würde es dann auch reichen zu zeigen, a_n ist	Problem-

241	Lukas	kleiner als n . Aber das kenn ma net wirklich sagen. Des kenn ma für n net wirklich sagen, also es gibt ein n für des das dann gilt. Aber eben a_1 kann ja Hunderttausend sein eigentlich.	bewusstsein
242	Marie	Aso, ok.	Zugriff
243	Lukas	Wir könnten als Nullfolge haben Hunderttausend durch n .	
244	Marie	Dann haben wir die Summe von Hunderttausend durch n durch n . (<i>lacht</i>)	
245	Lukas	Jaja, schon ja, stimmt. Des is a Nullfolge, also das a von n ist sicher a Nullfolge und das b von n dann dementsprechend ah, aber eben des des(,) da muss ma sich das N noch suchen für das a von n kleiner wird als das n . Ok. Ist das irgendwie klar, wie wir das argumentieren? Kann man das so sagen, in der Übung dann?	Kommentar, Problem- bewusstsein
246	Marie	Ich glaub schon. (<i>längere Pause</i>) Ich weiß jetzt nicht, ob wir fertig sind oder nicht.	
247	Lukas	Ja, es ist schwierig zu sagen. Es schaut auch komisch aus so.	
248	Marie	Es wirkt so als würd etwas fehlen.	
249	Hanna	Wir haben ja einfach die Definition vom Grenzwert hingeschrieben, also von der Folge. (<i>lacht</i>)	
250	Lukas	Ja, das stimmt schon. Ja, i weiß net irgendwie mir kimmts halt vor, mit dem haben wir gezeigt, dass es eben langsamer wächst. Und damit kann ma behaupten, es hat den Grenzwert Null. (<i>Pause</i>)	Kommentar
251	Marie	Ich weiß nicht, ich würd mittlerweile alles neben.	
252	Hanna	Was i net versteh, können wir einfach annehmen, dass wenn die Folge konvergent is, dass dann ah die Reihe konvergent is? Also betrachten wir da einfach (-)	Problem- bewusstsein
253	Lukas	Aber das könn ma ja nicht eigentlich.	
254	Marie	Aber es gibt ja zum Beispiel Eins durch n als Folge, das geht gegen Unendlich. Aber Eins durch n als Reihe.	
255	Hanna	Na, Eins durch n als Folge geht gegen Null.	Handwerk
256	Lukas	Genau. Nur aber wenn ma das nachher wieder durch n dividieren würd, dann hat ma (-)	
257	Hanna	[Dann hast Eins.]	
258	Marie	[Dann sollt ma Eins] haben, glaub ich.	
259	Lukas	Na.	
260	Marie	Also Eins durch n durch n ergibt Eins, aber wir haben ja aber wir haben Eins durch, nein wir haben nicht Eins durch n , sondern Eins durch n plus (-)	
261	Hanna	Eins durch n dividiert durch des (<i>schreibt</i>). Des is a Doppelbruch.	
262	Lukas	Genau, das ist Eins durch n Quadrat.	Resümee
263	Marie	Aja(,) ups.	
264	Lukas	Und dann hätt ma wieder, also wenn ma für das a von n das Eins durch n Einsetzen würden dann hat ma das Eins durch n Quadrat als Folge, äh als Reihe, und das ist nachher wieder konvergent eben.	
265	Marie	Aber Eins durch n ist ja keine Reihe. Das wär die Summe von n ist Eins bis m von Eins durch n , oder (?)	Zugriff
266	Lukas	Ähm. (<i>Pause</i>) Lass mi mal überlegen. Ja, ok. Na hast eh Recht. Aber wen ma Eins durch n haben, dann ist das heroben Unendlich, wenn das n Unendlich wird, nur es ist halt trotzdem kleiner als das unten. Na wir ham unten a höhere Ordnung von n oder so, ja (<i>länger Pause</i>).	
267	Hanna	Das heißt a_n ist kleiner n , oder (?)	
268	Lukas	Genau, wir könnten ja ah zum Beispiel sagen, dass es eben	

269	Hanna	ein N gibt (<i>Pause</i>), sodass eben für alle n größer gleich dem N gilt, dass die Summe(,) also das ham ma eh da heroben gezeigt. Genau. (<i>radiert das zuletzt Geschriebene wieder aus</i>) Damit wird's dann glaub i klar, oder (?), dass das (-) Also die komplette Summe muss eigentlich kleiner n sein.	
270	Lukas	Die Summe von den ks muss irgendwann kleiner n werden, genau.	
271	Hanna	Ok, das is ja scho mal cool. (<i>längere Pause</i>)	Kommentare
272	Marie	Das dürfte ja dieses große N sein. (<i>Pause</i>)	
273	Hanna	Stimmt.	
274	Lukas	Hm (?)	
275	Marie	Also statt diesen kleingeschriebenen n könnte man ja hier das ist das große N und ab diesem großem N gilt für jedes weitere.	Handwerk
276	Lukas	Ja, aber für alle n größer, größer gleich N. Du kannst das groß N schon einsetzen, aber es gilt ja für alle weitem auch.	
277	Marie	Oder also, wenn man die Summe von k ist Null bis groß N von a_k hat, ist gleich groß N, dann ist das, das n ab dem das gilt.	
278	Lukas	J a a a, das wiss ma eben net wirklich, ob das hinhaut.	Kommentare
279	Marie	Ja, ich glaub auch nicht.	
280	Lukas	Ob ma das wirklich genau trifft, das is recht.	
281	Marie	Es kommt auf die Folge an.	
282	Lukas	Genau.	Zugriff herstellen
283	Marie	Aber man könnt da ein Größer-gleich-Zeichen drausmachen, aber das is ja eigentlich eh egal.	
284	Lukas	Aber zum Beispiel bei den Eins durch n ein genaues(,) kleiner gleich ist sicher eine gute Variante.	
285	Marie	Aber dieses definitiv größer(,) ich weiß nicht, wie sehr es uns hilft, wenn man sich jetzt n durch n plus Eins anschaut, aber ich mein, es ist ja auch definitiv größer als (-)	
286	Hanna	Als was?	
287	Marie	Also da ist der Nenner immer definitiv größer als der Zähler,	
288	Hanna	Aso, ja.	
289	Marie	Das geht gegen Eins oder bin ich wo falsch?	
290	Lukas	Ja, das stimmt schon, aber also er wächst net schneller sozusagen. Also i glaub darum geht's.	
291	Marie	Aso.	
292	Lukas	Eben wenn du des, also dass Eins sozusagen immer weiter bei Unendlich ist sozusagen, weil du könntest ja sagen äh Zwei n Quadrat plus Zwei durch äh Drei n hoch Drei. Da sieht ma ja ah, des geht vermutlich gegen Null(,) obwohl sozusagen das Zwei n Quadrat, wenn ma das n Unendlich werden lasst, sowohl ah Unendlich wird, es wird halt nur langsamer Unendlich als das Drei n hoch Drei da unten, oder (?)	
293	Marie	Ja, schon . Das ist eben das von den ersten paar Beispielen, die wir heute gemacht haben.	Kommentar
294	Lukas	Ja, i glaub, ma muss das ein bissl sauberer ausformulieren schlussendlich. Sehen wir das als gelöst an? Oder wollts no?	
295	Marie	Ich mein, vielleicht könnte man jetzt diese Sachen mit irgendwelchen Folgen oder Reihen vergleichen, die man kennt. Ich hab hier keine Ahnung.	Klärung der Handlungsoptionen
296	Lukas	Ja, i glaub, wir ham alle ka Ahnung. Ah wenn mas mit a paar Folgen vergleichen, ham ma das no net bewiesen sozusagen. Also i glaub, da muss ma so abstrakt denken, wenn ma nix Konkretes haben. (<i>längere Pause</i>)	Problem-bewusstsein

297	Marie	Heißt das jetzt, dass wir zu Siebzehn übergehen, oder nicht (?)
298	Lukas	Ja, oder wollts da no drüber reden (?)
299	Maire	Ich glaub, mir fällt langsam nichts mehr ein.

Kommentare

Die Studierenden notieren Folgendes:

Handwritten student notes on grid paper:

$$\exists n \in \mathbb{N}, \text{ sd gilt } \forall n > N : a_k \leq 1$$

$$a_n \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |a - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\left| \frac{\sum a_k}{n} \right| < \varepsilon$$

Abb.13 Aufgabe 16

Aus Gründen der Lesbarkeit wurden die Notizen der Studenten neu geschrieben. Ihre Ideen zur Lösung der Aufgabe entsprechen der tatsächlichen Lösung. Der Vollständigkeit wird eine Lösung der Aufgabe angehängt:

Handwritten student solution on grid paper:

16) $a_n \rightarrow 0$ $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

zz: $b_n \rightarrow 0$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1$, sd $\forall k > N_1 : |a_k - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow |b_n| \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{N_1} |a_k| \right) + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=N_1+1}^n |a_k| \right)$$

$$\leq \frac{1}{n} (n - N_1) \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$\exists N_2$, sd $\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{N_1} |a_k| \right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_2$

$\Rightarrow \forall n > \max(N_1, N_2)$ ist $|b_n| < \varepsilon$

Abb.14 Aufgabe 16 Lösung

6.6. Für welche x konvergiert die Reihe? (Aufgabe 35)

Dauer der Szene: ca. 20 Minuten

Involvierte Gegenstände und allgemeine Beschreibung:

Flo, Kurt, Marie und Tina sitzen L-förmig um einen Tisch, die Namen sind von links beginnend aufgelistet. Am Tisch liegt neben dem ausgedruckten Zettel mit der Aufgabenstellung Flos Mappe mit der Vorlesungsmitschrift. Vor jedem Studierenden liegen Schreibutensilien. Zur Lösung der Aufgabe nimmt Kurt sein Smartphone zur Hand, das er zuvor im Hosensäckel eingesteckt hat. Dies ist die einzige aufgezeichnete Aufnahme, bei der sich die Studierenden des Smartphones bedienen. Vorweg ist festzuhalten, dass das Smartphone als erweiterter Taschenrechner gebraucht wird, um den Grenzwert zu berechnen. Die Bearbeitung der Aufgabe ist keineswegs von bereits gelösten Musteraufgaben geleitet. Die Studierenden kommen selbstständig zur Lösung.

Grobe Gliederung:

- < 1 – 8 > Auseinandersetzung mit der Angabe
- < 9 > Erraten der Lösung
- < 10 – 74 > Aufsuchen von Lösungsstrategien: Quotientenkriterium,
Schaffen eines Zugriffs mittels Wolfram Alpha (Smartphone)
- < 75 – 104 > Zweite Handlungsoption: Wurzelkriterium
- < 105 – 150 > Endgültige Lösung mit Hilfe des Quotientenkriteriums

Aufgabenstellung:

Die Studierenden sollen herausfinden, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{2^n}$ konvergiert.

Zeile	Name		Teilphase
1	Flo	(liest die Angabe vor) Für welche x konvergiert die Reihe ? Kann ich das, das kann ich aber aufspalten, weil das is ja nur multiplikativ zusammengesetzt.	Problem- bewusstsein
2	Marie	Ja, also.	Zugriff
3	Flo	Das is ja nichts anderes wie n hoch Drei durch Zwei hoch n	

		mal x hoch n durch Zwei hoch n (<i>schreibt auf, was er sagt:</i> $\sum \frac{n^3 x^n}{2^n} = \sum \frac{n^3}{2^n} \cdot \sum \frac{x^n}{2^n}$)	
4	Tina	Moment, Moment. Äh, in was spaltetest du das jetzt auf?	
5	Flo	Ich hab den Bruch nur aufgespalten.	
6	Marie	Und das n ist beliebig aber fest. Aso, nein das n ist ja im Index. (<i>lacht</i>)	Problem- bewusstsein
7	Flo	Nein, da muss ma nur schauen für welches x dann [für welche x das dann konvergiert, genau.]	
8	Marie	[Für welches x das konvergiert.]	
9	Kurt	Na konvergierts net für olle kleiner als Zwei (?)	Kommentar
10	Tina	Mh, ich überleg. Wir könnten uns das getrennt anschauen, ob es konvergiert. Also zuerst n hoch Drei durch Zwei hoch n und dann x hoch n (<i>Pause</i>). Vielleicht sieht ma da mehr (?)	Klärung der Handlungs- optionen
11	Kurt	Was ist, wenn ma ins Quotientenkriterium einsetzen und dann die Ungleichung lösen?	
12	Marie	Oh, ich find das schon(.) (<i>Pause</i>) ja, machen wir das.	
13	Kurt	Kommt da was außē (?) I waß net, ob da des ah jetzt so is.	Kommentare
14	Flo	Du kannst mal beginnen.	
15	Kurt	Oben steht n plus Eins, oder (?)	
16	Flo	Mhm.	Problem- bewusstsein
17	Tina	Wo steht n plus Eins? Nein, n hoch Drei.	Schaffen
18	Kurt	Na beim Quotientenkriterium.	
19	Tina	Aso.	
20	Flo	Da kannst du das gar nicht aufspalten.	
21	Marie	Wann spaltet man? Wann funktioniert das? Wenn oben mal steht und unten (-)	Klärung der Handlungs- optionen
22	Flo	Du kannst es zum Beispiel aufspalten, wenn da steht ab durch (-)	
23	Marie	Nein, a plus b durch c. [Das ist dann a durch c plus b durch c]	
24	Flo	[a durch c plus b durch c] (<i>schreibt gleichzeitig mit</i>)	
25	Marie	Jetzt haben wirs. Unsere Aufspaltung. Was war noch mal das Quotientenkriterium?	
26	Kurt	n, x äh x _n plus, a _n plus Eins durch a _n ist kleiner als Eins, oder (?) bzw. muss kleiner als q sein und q muss kleiner als Eins sein, wobei i den Sinn davon net ganz versteh, warum owa (-)	Problem- bewusstsein
27	Marie	Aso, wir nehmen irgendein a _n , oder (?) Und schauen uns das dann an. (<i>Pause</i>)	Schaffen
28	Tina	Mach ma jetzt das Wurzel- oder das Quotientenkriterium (?) Quotienten oder (?)	
29	Kurt	Das Quotientenkriterium schaut da besser aus, aber ma kann, wenn des net funktioniert, amal des Wurzel probieren. (<i>Flo blättert in seiner Mappe bis er das Quotientenkriterium findet</i>) [...]	Klärung der Handlungs- optionen
30	Flo	Können wir nicht einfach zeigen, wohin das konvergiert u n d dann bleibt uns sowieso nur mehr dieses x hoch n übrig(.) oder wie ist das (?)	
31	Tina	Ja, das hab ich mir auch überlegt.	
32	Kurt	Ja, des konvergiert gegen Null. Das sieht man ja aso.	
33	Flo	Für mich konvergiert Eins durch n auch gegen Null, aber in einer Reihe ist das nicht mehr so. (<i>Flo und Marie lachen</i>)	Kommentare
34	Kurt	Ja, aber das wird trotzdem gegen Null konvergieren.	
35	Marie	Wir sind nicht bei einer Folge, wir sind bei einer Reihe .	
36	Kurt	Ja, aber wenn irgendwas im Exponenten steht, das ist dann so(.) das strebt dann so stark gegen Null.	Problem- bewusstsein
37	Tina	Ja, aber trotzdem.	

38	Flo	Aber da steht Summe und da steht auch mal Summe. (<i>zeigt auf seinen Block</i>)	Klärung der Handlungsoptionen
39	Marie	Ah, so wolltest du das machen.	
40	Flo	Ja und dann kann ich ja das zeigen, weil das is ja nix anderes als die Summe n (-)	
41	Kurt	Jo, angenommen du hast jetzt da einen Grenzwert .	
42	Tina	Ja, ich hät das auch so probiert.	
43	Kurt	Wie bringst dann das x hoch n da da eini?	
44	Marie	Angenommen, du hast keinen Grenzwert. Also ich weiß nicht, ob das zu etwas führt. (<i>Pause</i>)	Kommentar
45	Tina	Aber du kannst auch gleich in ein Kriterium einsetzen.	
46	Flo	Ja, das könnt ihr auch machen, ich hab keine Ahnung wies geht.	Prüfung der Passung
47	Tina	Hast du das offen, das Quotientenkriterium?	
48	Flo	Ja, (<i>Flo gibt Tina seine Mitschrift</i>) aber es konvergiert ja nicht gegen Null.	Zugriff schaffen
49	Tina	(<i>liest aus der Mitschrift vor</i>) Angenommen es gibt eine Nullfolge (-)	
50	Flo	(<i>rechnet</i>) Drei (...) Siebenundzwanzig(,) (...) Vier hoch Drei sind (<i>Pause</i>).	
51	Marie	Vierundsechzig.	
52	Flo	Das kann ja sein, das wird immer mehr.	
53	Kurt	Das kann nicht immer mehr werden, am Anfang vielleicht aber (-)	
54	Flo	Ok ok ok, Zwei hoch Vier sind Acht(,) Sechzehn.	
55	Tina	Was machts ihr da jetzt?	
56	Flo	Ich schau ma noch mal an, gegen was das konvergiert.	
57	Kurt	Das konvergiert gegen Sechszundzwanzig(,) beim Quotiententest.	
58	Flo	Ernsthaft (?)	
59	Tina	Hast du das in Wolfram Alpha eingegeben?	
60	Kurt	Ja (<i>lacht, zeigt den anderen, was er im Handy eingegeben hat</i>). Ich hab das x hoch n jetzt weggelassen, um zu zeigen, dass das sicher konvergiert. Ich probier das amal mit Eins Komma Neunundneunzig durch n, weil ich glaub, dass das einfach nur kleiner als Zwei sein muss. (<i>tippt in sein Handy</i>)	
61	Tina	Ja, also mit Eins Komma Neunundneunzig funktioniert's noch. Probiers mal mit Zwei (?)	
62	Kurt	Na mit Zwei wird's nicht funktionieren, weil da kannst kürzen, oder (?) Zwei hoch n durch Zwei hoch n ist dann n zur Dritten. Aber es wird einfach, wenns im Exponenten ist, s o stark is, wirds mit olle x kleiner als Zwei funktionieren.	Erläuterung
63	Marie	Also hast du es mit Eins Komma Neun Neun Neun und so probiert?	
64	Kurt	Es kommt dann ausi Neun Komma fünf mal Zehn hoch Neun, aber es konvergiert und i glaub, wenns mit Eins Komma Neunundneunzig funktioniert (<i>Pause</i>)	Zugriff
65	Marie	Aber ich glaub halt, dass ma das nicht wirklich sagen darf: ich hab das in einen Computer eingegeben.	
66	Kurt	Jo, des is ma scho klor(,) oba i mein, ich hab nur geschaut, in welche Richtung wir gehen müssen.	Klärung der Handlungsoptionen
67	Flo	Das heißt x muss immer kleiner sein als Zwei.	
68	Tina	Also mit dem Konvergenzkriterium würden wir dann wahrscheinlich ans Ziel kommen, oder (?) Würd i jetzt sagen(,) mit dem Quotientenkriterium.	begleitende Kommentare
69	Flo	Wenn das größer als Zwei (-)	
70	Kurt	Was?	Prüfung der Passung

71	Flo	Was is, wenn x größer als Zwei is?	
72	Kurt	Ja, dann konvergierts net, weil schau da einfach des an (<i>zeigt auf Flos Block</i>), dann konvergiert net amol die Folge (<i>längere Pause</i>)	
73	Flo	Und wie funktioniert jetzt der Beweis?	Klärung der Handlungsoptionen
74	Kurt	Mh, wart amal. (<i>längere Pause</i>) Des waß i a net.	
75	Marie	Also ich hab das gemacht, aber ich weiß nicht, obs stimmt. (<i>gibt Flo ihren Block</i>) Außerdem find ich das seltsam, dass da (-) (<i>Flo und Kurt schauen sich Maries Rechnung an</i>)	Zugriff
76	Kurt	Ja, schon sehr seltsam. (<i>Pause</i>) Also ich glaub nicht, dass ma mit dem [Quotientenkriterium] weiterkommt, i waß net.	Kommentare
77	Flo	[Wurzelkriterium] (...) n-te Wurzel aus n der Dritten kleiner als Eins, dann hast du das aufgelöst (...)	
78	Marie	Kann man schauen, wonach die n-te Wurzel von n hoch Drei konvergiert?	Zugriff herstellen
79	Kurt	Mh. (<i>nimmt Handy in die Hand, längere Pause</i>)	
80	Flo	n hoch Drei durch n(,) n hoch Drei n-tel.	
81	Kurt	No amoi.	
82	Flo	n hoch Drei durch n. (<i>schreibt $n^{\frac{3}{n}}$ auf seinen Block</i>)	
83	Kurt	(<i>schaut was Flo schreibt</i>) Ah, ok.	
84	Marie	Aber als Folge diesmal.	
85	Kurt	Ja, als Folge. [...]	
86	Flo	Ich hätt gesagt, das konvergiert gegen Null, weil das geht ja gegen Null oder, weil dann is da ein Unendlich größer (...)	
87	Kurt	Na ich würd sagen, das konvergiert gegen Eins.	
88	Flo	Voll (!) Stimmt, weil das da konvergiert gegen Null und eine Zahl hoch Null ist ja immer Eins.	Kommentare
89	Marie	Ah, ok und Zwei durch Eins.	
90	Kurt	Na, owa des derf ma glaub i net so sagen.	
91	Marie	Wirklich (?) verdammt. Es wär aber sehr praktisch.	
92	Kurt	Irgendwo hab ich gelesen, dass (<i>Pause</i>) na dass(,) wir ham ja grad bewiesen auf den vorigen Zeddl, dass die n-te Wurzel aus n hoch Drei gegen Eins konvergiert.	Zugriff schaffen
93	Flo	Die n-te Wurzel aus n.	
94	Kurt	Na, die n-te Wurzel aus n hoch Drei, owa da war dann irgendwas glaub i, dass ma so was net machen derf, (<i>Pause</i>) weil gleichzeitig ändert sie ja a der(,) (<i>Pause</i>) des was unten steht. Zum Beispiel (-)	
95	Flo	Aber du musst ja ein unendlich großes n nehmen. Da steht dann Unendlich hoch Drei durch Unendlich. [...]	
96	Kurt	Na, da is dann irgendwas gestanden, was eben net geht, halt das net konvergiert. Des ma aber genauso aufschreiben kann. Ma kann ja zum Beispiel n hoch n in Klammer hoch Eins durch n.	
97	Marie	Das is dann n(,) n hoch n hoch Eins durch n ist n ($n^{\frac{1}{n}} = n$).	
98	Kurt	Na aber wenn ma rein der Argumentation folgt, dann kann ma zum Beispiel schreiben (-)	
99	Flo	Willst einen Bleistift (?) (<i>streckt Kurt einen Bleistift entgegen</i>)	
100	Kurt	n hoch n. Ja, bitte n hoch n hoch Eins durch n. Das konvergiert gegen Null also muss das Eins sein. (<i>Pause</i>)	
101	Marie	Aber ich mein, Eins durch n mal n.	
102	Flo	Stimmt aber oder (?)	
103	Kurt	Na stimmt net, weil n hoch n. Das konvergiert einfach nur gegen n beziehungsweise ist n.	
104	Flo	Aber kann ma in dem Fall nicht(,) da kann ma ja die	

105	Marie	Hochzahlen, nein kann man nicht. Egal, ich versuchs mal mit dem Quotiententest . (Pause)	Handlungs- option
106	Flo	Aber das wird doch auch nur eine unendlich große Zahl, die noch mal potenziert wird(,) hoch(,) dann is halt noch einmal Null(,) im Prinzip dann.	Zugriff, Handwerk
107	Kurt	Owa des is dasselbe wie n (Pause)	
108	Marie	Ja, wenn man das reinmultipliziert bekommt man ja eh n.	
109	Flo	Na dann darf man das eben nicht machen. Aaaa, a Schäß. (radiert Überlegung weg, Pause)	
110	Tina	Ich versteh grad nicht, wie das Quotientenkriterium funktionieren soll (?)	Problem- bewusstsein
111	Marie	Ich weiß nicht, ob ichs richtig mach, aber ich hab einfach in den Nenner n durch n plus Eins ersetzt und eben im Zähler hab ich (-)	
112	Tina	Genau du musst zeigen, dass das kleiner Null ist.	Handwerk
113	Marie	Ja, und jetzt würd ich mal sagen, kann man das kürzen.	
114	Tina	Du hast das mal ausmultipliziert, oder (?)	Problem- bewusstsein
115	Marie	Ja, das (-)	
116	Flo	Warte, du gibst's in den Zähler (-) Was gibst du in den Zähler, was gibst du in den Nenner? Noch mal.	Handwerk
117	Marie	$a_{n+1} a_n$.	
118	Flo	Aso, ja ok ok ok.	
119	Tina	Und jetzt löst(,) also schaust du dir den Doppelbruch wieder an, oder (?) Dann tust du da kürzen, aber der Zweier bleibt, oder (?)	
120	Marie	Ja und hier ist das weg.	Handwerk
121	Tina	Was steht da für eine Zahl? Entschuldigung.	
122	Flo	[x hoch n.]	
123	Marie	[x hoch n.]	
124	Marie	(Marie und Tina rechnen, Marie schreibt und spricht leise mit) (...) Einmal n mal x Halbe. Das muss kleiner als Eins sein, oder (?) ($\frac{nx}{2} < 1$)	
125	Kurt	Es muss ab einem bestimmten n kleiner als Eins sein, aber das is ja net, oder (?)	Zugriff herstellen
126	Marie	Aber ich mein, hier würd ich dann wieder zu x ist kleiner als Zwei mal n hoch Drei durch n plus Eins hoch Drei ham ($x < \frac{2n^3}{(n+1)^3}$). Und dann würd ich wieder schauen, dass das n gegen Unendlich geht.	
127	Tina	Moment, was hast du jetzt gemacht?	Handwerk
128	Flo	Das umgedreht, nach x aufgelöst. Und wenn das n gegen Unendlich geht, dann geht's irgendwann gegen Null wieder, oder (?)	
129	Marie	Aber ich würd sagen, n hoch Drei und n plus Eins hoch Drei dürften ziemlich das gleiche sein, also es dürfte gegen Eins gehen.	Zugriff schaffen
130	Kurt	I glaub, jetzt kann ma sagen.	
131	Marie	Jetzt darf man den Limes (?)	
132	Kurt	Jetzt kann man sagen, glaub i, dass des gegen Eins konvergiert.	
133	Tina	Das kann ma einfach so sagen?	
134	Kurt	Das weiß ma. Da kannst ja den Limes von n plus Eins zur Dritten durch n zur Dritten konvergiert gegen Eins ($\frac{(n+1)^3}{n^3} \rightarrow 1$).	Handwerk
135	Marie	Der Limes von n hoch Drei durch n plus Eins hoch Drei	

		(schreibt, was sie sagt).	
136	Flo	Das würd ich sogar verstehen.	
137	Marie	Ich weiß nicht, soll ich auflösen (?)	
138	Flo	Ja, (...) beziehungsweise es steht irgendwas mit n zur Dritten.	
139	Marie	n hoch Drei durch n hoch Drei plus Drei n hoch Drei durch Drei n hoch Drei plus was weiß ich was, aber es immer kleiner als n hoch Drei und wenn wir jetzt durch (-)	
140	Flo	Wenn du jetzt durch das Höchste durchpotenzierst, dann hast du n hoch Drei, ok.	Handwerk, Zugriff
141	Marie	Eins durch Eins plus irgendwas.	
142	Tina	Ok, dann weiß ich, dass das gegen Eins konvergiert und dann weiß ich, dass x grö äh kleiner gleich (-)	Resümee
143	Marie	Genau kleiner als Zwei sein.	
144	Tina	Voll gut, also das Wurzel äh Quotientenkriterium.	
145	Marie	Bei dem Wurzelkriterium haben wir auch etwas, wo das n gegen Unendlich geht, aber das scheint hier nicht sein zu dürfen laut Kurt.	
146	Kurt	Ja, i glaub, wir müssatn uns des konkret nu amoi ausrechnen und (-)	
147	Tina	Na mir passt das Quotientenkriterium. [...]	
148	Flo	Jetzt versteh ich dieses Kriterium auch. (Tina und Flo schreiben von Marie ab)	Kommentare
149	Marie	Ich weiß nicht, ob ichs ganz richtig hab, aber es kommt was Schönes raus.	
150	Kurt	I glaub, es is mathematisch net Hundertprozentig korrekt, aber es steht ja ah net beweise oder so was, es steht ja nur für welche . Ich glaub, da kann ma schon ein bissl schlampiger sein.	

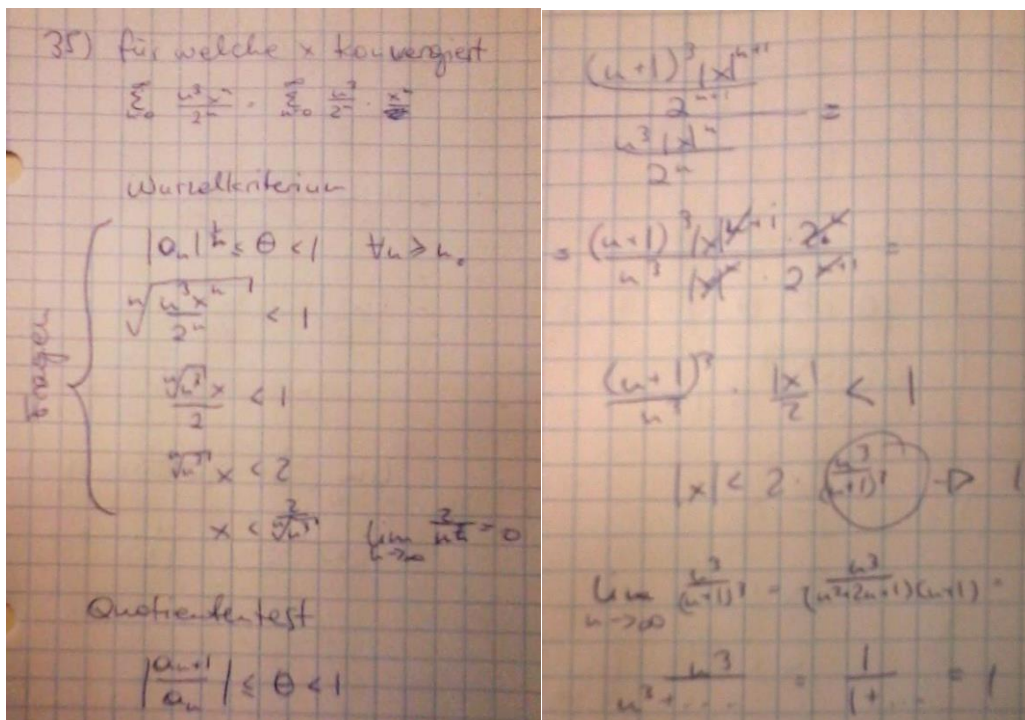


Abb.15 Aufgabe 35 Marie

35) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{2^n}$

$$\frac{(n+1)^3 |x|^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^3 |x|^n} = \frac{(n+1)^3 |x|^{n+1} \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^3 |x|^n} =$$

$$= \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{|x|}{2} < 1$$

1) $|x| < 2 \cdot \frac{n^3}{(n+1)^3} \rightarrow 1 \Rightarrow \underline{|x| < 2}$
 2) $|x| > 2$ div
 3) $x = 2$ $\sum n^3$
 4) $x = -2$ $\sum (-1)^n n^3$

Abb.16 Aufgabe 35 Flo

35) $\frac{(n+1)^3 |x|^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^3 |x|^n} = \frac{(n+1)^3 |x|}{2 n^3} =$

$$= \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{|x|}{2} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{|x|}{2}$$

$\underline{|x| < 2} : \Rightarrow \frac{|x|}{2} < 1$ also konvergent
 $\underline{|x| > 2} : \Rightarrow \frac{|x|}{2} > 1$ also divergent
 $x = 2 : \sum n^3$ divergent $x = -2 : \sum (-1)^n n^3$ divergent

Abb.17 Aufgabe 35 Lösung

6.7. Konvergenz einer Reihe (Aufgabe 36)

Dauer der Szene: ca. 32 Minuten

Involvierte Gegenstände und allgemeine Beschreibung: Das Team setzt sich zusammen aus drei Studentinnen und einem Studenten: Hanna, Marie, Tina und Flo. Alle Studierenden haben einen Block und einen Stift auf dem Tisch vor sich liegen. Auf dem Tisch befinden sich die ausgedruckten Übungszettel mit den Aufgabenstellungen. Im Laufe des Gesprächs stellt sich heraus, dass zwei verschiedene Versionen vorhanden sind, wobei eine einen Fehler in der Angabe enthält. Flo und Hanna haben ihre Vorlesungsmitschrift in einer Mappe neben sich liegen, wobei Hanna noch zusätzlich zwei Analysis-Bücher mitgebracht hat, die sie während des Gesprächs manchmal zur Hand nimmt. Zu Beginn haben wir es mit einem Dreierteam zu tun. Tina betritt in < 59 > den Raum und setzt sich zur Gruppe dazu. Sie hat neben ihren Schreibunterlagen auch ein ausgedrucktes Skript mit, das bei diesem Lösungsprozess aber nicht verwendet wird.

Grobe Gliederung:

< 1 – 74 >	Klärung der Handlungsoptionen, erste Lösungsansätze
< 75 – 92 >	Zahlen Einsetzen, Zugang zur Aufgabe finden
< 93 – 100 >	Klärung des Begriffs „Konvergenz“ bei Reihen
< 101 – 134 >	Weitere Lösungsansätze
< 135 – 218 >	Endgültige Lösung
< 219 – 256 >	Wiederholung der Lösung zum Mitschreiben, Reflexion

Aufgabenstellung:

Angenommen, Sie wissen bereits, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Zeigen Sie, dass

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$. Welche Sätze verwenden Sie?

Anmerkung: In der Angabe ist ein Fehler. Der Index der zweiten Reihe sollte bei Null beginnen. Die Angabe wurde vom zuständigen Professor nachträglich überarbeitet. Die Studierenden haben in ihrer ausgedruckten Übungsangabe jedoch noch die ältere Version, wie sie oben angeführt ist. In Zeile < 119 > kommt dies erstmals zur Sprache. Eine Studentin erinnert sich, dass ihnen gesagt wurde, diese Angabe gehöre ausgebessert. Es ist für die Studiengruppe ersichtlich, dass dies die Aufgabe überhaupt erst ermöglicht. Die korrekte Aufgabe lautet wie folgt:

Zeigen Sie, dass
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Zeile	Name		Teilphase
1	Marie	Aber ich mein, man sieht ja, dass es hier (<i>zeigt mit dem Stift auf die Angabe</i>) nur um die ungeraden Quadrate geht. Vielleicht können wir damit etwas anfangen.	Zugriff
2	Flo	N n nein. (<i>Pause</i>) Oja. (<i>längere Pause</i>)	Klärung der Handlungsoptionen
3	Hanna	Schau mal, was ham ma da für Sätze überhaupt. (<i>blättert in ihrer Mitschrift, längere Pause</i>)	
4	Flo	Irgendwie muss Dreiviertel überbleiben dann.	
5	Hanna	Was muss überbleiben? Dreiviertel (?)	Zugriff schaffen
6	Flo	Ja, als Grenzwert dann, also das Eins durch n und das andere dann (-) (<i>längere Pause, Marie und Hanna schreiben</i>)	
7	Marie	Wir ham Vier n Quadrat plus Vier n plus Eins. Wenn man Vier heraushebt, hat man (-)	
8	Flo	Aso, ja oja, ich kenn mich aus.	
9	Hanna	Des kann i schon so machen, dass i des so hinschreib (?)	
10	Flo	Ja.	
11	Marie	Das geht dann nicht mehr.	
12	Hanna	Also bis daher stimmts und warum geht das net (?)	Kommentare
13	Marie	Weil (-)	
14	Flo	Aja, die Summe kannst du nicht, ahm (-)	
15	Marie	Trennen.	
16	Flo	Ja.	
17	Hanna	Man darf ja über Summen auch nicht kürzen. Ich glaub, das ist dasselbe Prinzip. (<i>Hanna streicht ihre Rechnung am Block durch</i>)	
18	Flo	Das hat unsere Lehrerin immer gesagt: Summen kürzen nur die Dummen.	Zugriff schaffen
19	Marie	Ich hab das so lang nicht verstanden, das ist traurig. (<i>Flo lacht</i>) Aber ich hab irgendwie selten im Zusammenhang mit Brüchen gehört. Ja. (<i>Pause</i>) Aber wenn wir jetzt zum Beispiel diesen(.) diese Folge(.) ich mein, diese Reihe(.) in Zweierreihen aufspalten, wo halt eben der eine Grenzwert Dreiviertel ist und der andere Grenzwert Pi Quadrat Sechstel. Richtig.	
20	Flo	Dann können wir daraus schließen, dass das also (-), ok.	
21	Marie	Machen wir das so. a_n ist die Folge mal Zwei n plus Eins Quadrat ohne Summen einmal.	
22	Flo	Ok.	
23	Marie	U n d, ach Gott, und jetzt kann ma (-) (<i>längere Pause</i>) Was ist denn da das Thema überhaupt?	
24	Flo		Problem-bewusstsein

25	Marie	(liest die Überschrift des Kapitels der Übungsaufgaben vor)	schaffen
26	Flo	(blättert in seiner Mitschrift) Das waren dann die	Klärung der Handlungs- optionen
		Konvergenztests, das Majorantenkriterium. Das war dann hier	
		irgendwo. Da hatten wir einen Satz. Kautschiprodukt (sic,	
		veränderte Aussprache von „Cauchyprodukt“)	
27	Marie	Kautsch (lacht)	
28	Flo	Cauchyprodukt.	Problem- bewusstsein schaffen
29	Hanna	I glaub, dass mitm Majorantenkriterium geht, weil beim M a j(.)	
		Majorantenkriterium hat man c_n ist größer gleich Null. Unser	
		c_n könnte ja die Summe sein, was ma da oben angegeben	
		ham, wo ma schon wissen, dass es konvergiert und die	
		Summe is sicher größer als die Summe, was ma zeigen	Zugriff finden
		müssen.	
30	Marie	Aber mit dem Majorantenkriterium (?)	
31	Flo	Da zeigt ma, obs konvergiert.	
32	Hanna	Na, des sagt ma, obs absolut konvergiert. Aber jede Reihe,	
		die was absolut konvergiert, konvergiert ja sowieso.	Klärung der Handlungs- optionen, Zugriff schaffen
33	Flo	Ja, aber wir müssen zeigen, dass es nach, nach Dreiviertel,	
		nach dem konvergiert. (zeigt mit dem Finger auf die Angabe)	
34	Marie	Also ich hätte auch gedacht, dass wir das ausrechnen	
		(?müssen?). Ich weiß nicht, aber wie haben wir das immer	
		herausgefunden?	Kommentar
35	Flo	Ob es konvergiert oder nicht (?)	
36	Marie	Nein, wohin es konvergiert.	
37	Flo	Äh, ja, w e i l Eins durch n, wenn wir ein großes N einsetzen,	
		konvergiert gegen Null. So was meinst du?	
38	Marie	Aber das war ja nur bei Folgen, und bei Reihen (?)	Klärung der Handlungs- optionen,
39	Flo	Reihen sind ja nur zusammengesetzte Folgen, das kann dir	
		egal sein.	
40	Marie	Aso. (lacht)	
41	Flo	Weil das konvergiert nämlich auch gegen Null, weil wenn ich	
		da ein großes N einsetz (-)	Zugriff schaffen
42	Marie	Aber die (-)	
43	Flo	Und das dann auch noch quadrier. Eins durch ein großes N	
		zum Quadrat.	
44	Marie	Aber war nicht der Grenzwert von einer geometrischen Reihe	
		oder wie auch immer die heißen zum Beispiel Zwei.	Klärung der Handlungs- optionen,
45	Flo	Ja, ja.	
46	Marie	Wie haben wir das herausgefunden?	
47	Flo	Das haben wir da so immer herausgehoben und dann war	
		dann Eins plus irgendwas und das ist dann gegen Zwei	
		gegangen, glaub ich.	Zugriff schaffen
48	Marie	Weil das kleiner gleich und größer gleich Zwei war, oder so (?)	
		Ich glaub, an so was kann ich mich erinnern. Ach, ich kenn	
		mich gar nicht aus.	
49	Flo	Warte, ist das hier eigentlich eine Exponentialfunktion? Nein,	
		ist es nicht. Doch . (längere Pause)	Kommentar
50	Marie	Aber (-)	
51	Flo	Oder (?) Weil es ist ja ein Exponent.	
52	Marie	Aber unser n ist in der Basis und nicht im Exponenten (zeigt	
		gleichzeitig mit ihrem Stift auf das n in der Angabe)	Klärung der Handlungs- optionen,
53	Flo	Aso (!) (längere Pause, Flo blättert in seiner Mitschrift)	
54	Marie	Das ist keine alternierende Reihe, verdammt. (längere Pause)	
55	Flo	Wir sind nach dem ersten Beispiel schon am Verzweifeln.	
56	Marie	Wie immer (lacht). Vielleicht das Cauchy -Kriterium (?) Der	
		Cauchy ist doch immer gern gesehen.	Klärung der Handlungs-

57	Hanna	Beim Cauchy Kriterium, das sagt da, dass es konvergiert, aber da findest net den Grenzwert heraus.	optionen
58	Marie	Aber es war doch irgendwann mal etwas von wegen: das kann einem dann helfen.	
59	Hanna	Was is, wenn ma die Partialsummen machen. Das zeigt uns oft den Grenzwert, meistens. Glaub i zumindest. <i>(längere Pause, Flo blättert in seiner Mitschrift, Tina kommt zur Gruppe dazu, begrüßt die anderen, nimmt sich einen Sessel und setzt sich zu den anderen an den Tisch, die Gruppe plaudert über ihre Übungsgruppen)</i> [...] Also die ganzen Kriterien, was ma gelernt ham, bringen uns nix, weil die sagen nur, obs konvergiert oder net, aber net gegen wos.	
60	Marie	Ja, dieses Gefühl hab ich auch.	
61	Hanna	Das haßt, wir müssen jetzt irgendwas finden(,) schau ma mal. <i>(blättert in ihrem Analysis-Buch, längere Pause)</i>	
62	Tina	<i>(schlägt ihren Block auf, nimmt einen Stift in die Hand)</i> Was macht ihr grad?	
63	Hanna	Bei Sechsenddreißig sind wir grad.	
64	Tina	Sechsenddreißig. Habts die vorigen schon alle gerechnet? <i>(zeigt auf den Angabezettel)</i>	
65	Hanna	Na des Fünfunddreißig müss ma net, des Vierunddreißig check ma net und die restlichen ham wir schon in der Übung gemacht, ja.	begleitende Kommentare
66	Tina	Ah, ok. [...]	
67	Hanna	Irgendwie bringen die ganzn Bicha net, wenn da nix drin steht. <i>(sie hat zwei Analysis Bücher mitgebracht, die am Tisch liegen)</i>	
68	Tina	Ah, ich hab das Skript vom Krön mit. Vielleicht bringt uns das was. Und ich hab ein gutes Buch, was ich euch empfehlen kann, aber ich weiß grad nicht, wies heißt. Ich schau das nächste Mal nach.	Klärung der Handlungs- optionen
69	Hanna	Das vom Heuser, oder wie heißt der (?)	
70	Tina	Ich weiß nicht, das heißt, T u t o r i u m (,) Analysis und (-)	
71	Hanna	<i>(klopft mit ihrem Finger auf eines der Bücher, das vor ihr liegt)</i> Das (?)	Kommentare
72	Tina	Ja, genau das da (!) Und da steht nix drin?	
73	Hanna	Ja, du kannst gern schauen.	
74	Marie	Aber irgendwie müssen wir doch verwenden können, dass wir die eine Konvergenz kennen. <i>(längere Pause)</i>	
75	Flo	Zeichnen wir uns das mal auf, oder (?) Für das Erste (-)	
76	Marie	Passt, ein paar Werte (-)	
77	Flo	Ja, genau. Das ist mal gut. Wenn wir da Eins einsetzen, Zwei, Drei, Neun, ein Neuntel plus und dann geht's weiter mit Eins durch Zwei, Drei, Vier, Fünf ein Fünfundzwanzigstel und dann geht's weiter mit (-)	
78	Marie	Neunundvierzig.	
79	Flo	<i>(schreibt)</i> Danke, dann Einundachtzig und jetzt wird's schwer.	Zugriff schaffen
80	Marie	Hunderteinundzwanzig.	
81	Flo	Du bist so arg. <i>(lacht)</i> Ok, Ende.	
82	Marie	Wieso? Dreizehn zum Quadrat ist Hundertneunundsechzig.	
83	Flo	Und Fünfzehn (?)	
84	Marie	Zweihundertfünfundzwanzig, glaub ich. Da bin ich mir aber nicht mehr sicher.	
85	Flo	Ok, das reicht dann. Plus, plus, plus.	
86	Marie	Das war (...)	
87	Flo	Und jetzt können wir ein Drittel herausheben. Nein, können wir nicht.	Zugriff, Handwerk

88	Marie	Manche ungerade Zahlen sind ja Primzahlen. <i>(Pause)</i> Wir können Eins herausheben. <i>(lacht)</i>	begleitende Kommentare
89	Flo	Sehr gut.	
90	Tina	Ihr habt einfach versucht, die Reihe aufzuschreiben (?)	
91	Hanna	Ja, aufgespalten ham mas.	
92	Tina	Aber hat sich das was bracht (?)	
93	Hanna	Nein. Also, wir wissen, dass die Reihe nach dem konvergiert <i>(zeigt auf $\frac{\pi^2}{8}$)</i> . Na, die Reihe konvergiert nach dem <i>(zeigt diesmal auf die $\frac{\pi^2}{6}$)</i> , des wiss ma.	Problem- bewusstsein schaffen
94	Tina	Aber da steht ist und nicht konvergiert gegen .	
95	Hanna	Ja, aber haßt des net konvergiert (?) Würd i schon sagen, oder (?)	
96	Tina	Ich würds annehmen, weil wir bei der Konvergenz für Reihen sind, aber (-)	
97	Hanna	Sie können ja nicht ist gleich hinschreiben. Das geht ja gegen unendlich , da gibt's ja kein Ergebnis.	
98	Marie	Wie meinst du das?	
99	Hanna	Wir sind uns sicher, dass des <i>(zeigt auf $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$)</i> gegen des <i>(zeigt auf die rechte Seite der Gleichung: $\frac{\pi^2}{6}$)</i> konvergiert und net des gleiche ist wie des.	
100	Marie	Aber wird(,) es geht immer näher ran, sodass es praktisch Pi Quadrat Sechstel ist.	
101	Tina	<i>(blättert im Analysisbuch)</i>	
102	Flo	Aber hatten wir das nicht, dass wir die Terme zusammenfassen u n d dann haben wir da etwas herausgehoben und der Teil hat dann dominiert und das war dann größer gleich und so haben wir das bei jeden Term gemacht bis zum n-ten Term (?)	Klärung der Handlungs- optionen, Zugriff schaffen
103	Tina	Mhm.	
104	Flo	U n d d a n n sind wir auf ein Ergebnis gekommen.	
105	Hanna	Also du hast dann ein Neuntel, plus ein Fünfundzwanzigstel, plus ein (-)	Zugriff herstellen
106	Flo	Plus ein Neunundvierzigstel, plus ein Einundachtzigstel, dann steht Hunderteinundzwanzig, Eins durch Hundertneunundsechzig, plus plus plus.	
107	Marie	Ich mein, ich bin mir zwar da immer unsicher, weil bei Reihen es ja heißt, bei unendlichen, dass man auf die Reihenfolge achten muss. Aber man könnte ja zum Beispiel alle Vielfachen von Drei anschauen und da ein Drittel herausheben oder so, oder ein Neuntel eben, wenn das drin ist.	
108	Flo	Oja, das kann man schon machen.	
109	Marie	Aber ich weiß nicht, ob man das darf. Und ich glaub, das ist eh aufwendig. Es gibt ja unendlich viele Zahlen. Aber ich weiß nicht.	
110	Flo	Aber (-) Ja, oja. Wenn wir jetzt einsetzen: Eins durch Eins Quadrat ist das eben Eins in dem Fall. Das haben wir halt nicht. Wenn wir einsetzen Zwei, haben wir, wart mal kurz. Die Summe von Eins durch n Quadrat ist gleich Eins plus (-) <i>(schreibt)</i>	
111	Marie	Ein Viertel, ein Neuntel,	
112	Flo	Ein Viertel, ein Neuntel, was ham ma dann (?)	Handwerk
113	Marie	Ein Sechzehntel, ein Fünfundzwanzigstel (-)	
114	Flo	Ein Sechzehntel, ein Fünfundzwanzigstel, das ham wir wieder.	

115	Marie	Wir haben jedes Zweite, weil wir bei den ungeraden Zahlen sind, ohne Eins.	begleitende Kommentare
116	Hanna	Was tats es da?	
117	Flo	Wir ham uns grad gedacht (<i>nimmt seinen Block und legt ihn in die Tischmitte</i>) eben die Summe von a_n , ich hab jetzt die Folge aufgeschrieben. Eins durch n Quadrat ist dann jedes Zweite, ein Neuntel, ein Fünfundzwanzigstel und so weiter, dann wieder in der Reihe drinnen.	Zugriff schaffen
118	Hanna	Ja.	
119	Marie	Es macht mich so fertig, dass da nur bei der ersten Summe der Einser dabei ist, aber bei uns hieß es, wir müssen Sechsuunddreißig ausbessern, weil die Summe bei Null beginnt, weil wir sonst glaub ich nicht (-)	Problem- bewusstsein
120	Flo	Aso, dass wir da bei Null beginnen. (<i>bessert die Angabe aus</i>)	
121	Marie	Ja, weil dann haben wir hier den Einser dabei. Ich hab mir schon gedacht, das ist seltsam.	
122	Flo	Ok.	
123	Marie	Na bei dem stehts eh bei der über überarbeiteten Angabe. (<i>deutet auf Hannas Angabezettel</i>)	
124	Flo	Ja ok, das passt dann eh so. Dann haben wir den Term auch drinnen. Das heißt jeden geraden Term können wir wieder rausschreiben, (<i>nimmt seinen Block, der in der Tischmitte liegt</i>) weil das ist ja (-)	Zugriff herstellen
125	Marie	Ah, ok. (<i>nimmt ihren Stift in die Hand</i>)	
126	Flo	Das ist ja dann praktisch Pi Quadrat Sechstel plus, und dann geht's weiter mit ein Viertel, plus ein Sechzehntel plus (-)	
127	Marie	Wieso plus?	Zugriff schaffen,
128	Flo	Na weil ja die noch fehlen. Ein Viertel, ein Sechzehntel.	
129	Marie	Aber wir sind grad bei Eins durch n Quadrat (<i>zeigt mit dem Stift auf die Angabe</i>) und das ist schon Pi Quadrat Sechstel.	Hand- werkzeug
130	Flo	Aso, ja voll (!) Stimmt, stimmt.	
131	Marie	Vielleicht können wir die abziehen. Vielleicht könntest du statt dem plus immer ein minus schreiben. So Pi Quadrat Sechstel, minus ein Viertel, minus ein Sechzehntel, minus so und so viel ist dann Pi Quadrat Achtel. Weißt, was ich mein?	
132	Flo	Ja.	begleitende Kommentare
133	Marie	Was hältst du davon?	
134	Flo	Ja, (<i>?solang wir das aufschreiben, halt ich viel davon?</i>)	
135	Marie	Immerhin ist doch die Summe von Eins durch n Quadrat (<i>schreibt, Pause</i>) minus die Summe von Eins durch Zwei n Quadrat(,) die Summe von Eins durch Zwei n plus Eins zum Quadrat, oder (?) (<i>schreibt während sie spricht</i>)	Zugriff schaffen
136	Flo	Das ist dann Zwei n-tel Quadrat. Nein, aso so.	
137	Marie	Vielleicht können wir damit was machen. Und (-)	
138	Flo	Das heißt, dass daraus folgt, Summe von Eins durch n Quadrat, ja, minus Eins durch Zwei n Quadrat. Wenn ich da jetzt einsetz Eins, Zwei, das sind Vier. Passt. Eins, Eins, Zwei, sind Vier, sind Sechzehn. Passt auch. Ja, stimmt. He, das ist gut.	Prüfen der Passung
139	Marie	Aber da darf man nicht bei Null beginnen.	
140	Tina	Was habt ihr jetzt gemacht?	Kommentar
141	Marie	Wir wissen die Summe von Eins durch n Quadrat (<i>zeigt mit dem Stift auf $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ am Angabezettel</i>) und wir wissen die Summe von Eins durch Zwei n plus Eins zum Quadrat. (<i>zeigt mit dem Stift auf die entsprechende Stelle der Angabe</i>) Und	Zugriff herstellen

142	Flo	wir können das (Anm.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$), als das (Anm.: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$) darstellen, wenn wir die ungeraden Terme, nein [die geraden] [die geraden] Terme abziehen. Weil schau, die Reihe, da haben wir ein Neuntel plus ein Fünfundzwanzigstel. Die sind alle ungerade, weil da ja plus Eins ist. Und bei Eins durch n Quadrat sind wir dann ein Viertel, ein Sechstel und so weiter. Und da ist jeder zweite Term in unserem enthalten. Und wenn wir jetzt immer die geraden abziehen, ein Viertel, ein Sechzehntel, ein Sechsenddreißigstel und dann geht's weiter, dann kommen wir wieder auf das.	
143	Marie	Aber ich komm grad drauf (-)	
144	Tina	Aber warum? Ihr ziehts das einfach so ab (?) Einfach so, oder (?)	
145	Flo	Ja.	
146	Marie	Ja, wieso nicht (?)	
147	Flo	Wir schauen einfach. (lacht)	
148	Tina	Ja, ich mein, es is eh ok, wenn ihr das abzieht. Wir wollen ja zeigen, dass das da da (zeigt mit dem Stift auf $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ auf ihren Block) das da (zeigt auf Pi Quadrat Achtel) ist.	
149	Marie	Ja.	Zugriff schaffen
150	Tina	Wenn ich von dem was abzieh, dann ist es ja nimmer das.	
151	Marie	Aber von (-)	
152	Flo	Von Eins durch n Quadrat haben wir das abgezogen und dann kommt wieder das hinaus.	
153	Tina	Aso.	
154	Flo	Und wir wissen, dass Eins durch n Quadrat konvergiert gegen Pi Quadrat (zeigt auf die Angabe) Sechstel.	
155	Tina	Aso, von Eins durch n Quadrat habts ihr das abgezogen.	
156	Flo	Die Geraden abgezogen und dann kommt das raus, was wir wollen, die Ungeraden, weil das ist ja jeder Term minus den Geraden ist ungerade.	Hand-werkzeug,
157	Tina	Aso. Alles klar.	
158	Marie	Gerade minus Ungeraden. Und ich glaub, dass wir bei den Geraden den Grenzwert einfacher herausfinden können, weil da kann man ja mindestens Zwei herausheben. Also ein Halb.	
159	Flo	Wir brauchen Dreiviertel.	Zugriff schaffen
160	Marie	Ja, [das könnte sich noch ergeben.]	
161	Flo	[Das kommt noch.]	
162	Marie	Aber wir dürfen bei dieser Summe nicht bei Null beginnen. Sonst würden wir bei Null beginnen, aber wenn wir Eins durch (-)	
163	Tina	Warum dürfen wir nicht bei Null beginnen?	
164	Marie	Eins durch Zwei n zum Quadrat. Wenn man statt Null n, nein statt n Null Einsetzt (-)	Problem-bewusstsein
165	Flo	Hat man Eins durch Null.	
166	Marie	Und das ist immer ein Problem.	
167	Flo	Dann müssen wir bei n ist gleich Eins beginnen, genauso wie hier: n ist gleich Eins.	
168	Marie	Dann ist aber der Grenzwert, glaub ich, ein anderer. Dann ist es: Pi Quadrat Sechstel minus Eins. (Pause) Oder wir schreiben die Summe als Zwei n Quadrat plus Zwei zum Quadrat. Nein, ich weiß nicht, ob das geht.	
169	Flo	Na, da komm ma nicht mehr auf die Terme. Der erste stimmt,	Zugriff schaffen

170	Marie	der zweite stimmt schon nicht mehr. Zwei mal Zwei sind Vier plus Zwei sind Sechs. Sechs zum Quadrat sind Sechsunddreißig. Dann hast du ein Sechzehntel übersprungen. Nein, doch nicht, ein Viertel und ein Sechzehntel übersprungen.	begleitende Kommentare
171	Flo	Vielleicht kann man da noch irgendwas herumoperieren, sodass (-) Schau mal , da steht nämlich auch n ist gleich Eins. <i>(zeigt auf die Angabe)</i> Oder ist das auch falsch (?) Was ist bei dir? <i>(schaut auf Hannas Angabezettel)</i>	
172	Hanna	Siebenunddreißig?	
173	Flo	Na schau, da ist auch n ist gleich Eins.	
174	Marie	Oh, ok.	Zugriff schaffen
175	Tina	Ja, eben wenn wir wissen, dass das das ist. (Anmerkung: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)	
176	Flo	Das kann man praktisch schreiben, das konvergiert gegen Pi Quadrat Sechstel minus. Aber das ist blöd, weil wir wollen ja kein minus . Wir wollen ein mal haben.	
177	Marie	Na aber vielleicht kann man irgendwie so schön was abziehen.	
178	Tina	Was für Reihen habts ihr davor verwendet? Darf ich mal schauen? <i>(Flo gibt Tina seinen Block, sie schaut sich an, was er bereits geschrieben hat)</i>	Kommentare
179	Flo	Bitte. <i>(Pause)</i> Und dann die Geraden immer <i>(zeigt mit dem Finger auf seinen Block)</i> .	
180	Tina	Mhm, mhm. Aber wenn wir schon wissen, dass das da da <i>(zeigt mit dem Finger auf $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ auf Flos Block)</i> gegen Pi Sechstel konvergiert.	Zugriff schaffen
181	Marie	Ja.	
182	Tina	Müssen wir vielleicht nur mehr schauen, gegen was das da konvergiert <i>(Anm.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$)</i> und dann (-)	
183	Marie	Das hätte ich mir auch gedacht.	
184	Tina	Und dann hoffen, dass was Gutes rauskommt.	
185	Flo	Das Problem ist, da ist ein minus und wir bräuchten etwas mit mal.	
186	Tina	Probieren kann mans ja trotzdem mal. Ma weiß ja nicht, was rauskommt. Vielleicht kommt ja genau so was raus.	
187	Marie	Pi Sechstel minus irgendwas <i>(schreibt, was sie sagt)</i> ist Pi Quadrat Achtel.	
188	Tina	Moment, ich schreib ma das noch auf.	
189	Marie	<i>(schreibt, Pause)</i> Ja, das ergibt eh Sinn.	
190	Tina	Was kommt da raus?	Hand- werkzeug
191	Marie	Ich muss noch im Kopf rechnen, aber ich machs mit Schritten. <i>(Marie rechnet, längere Pause)</i>	
192	Flo	<i>(Flo rechnet auch)</i> Zwei.	
193	Marie	Zwei Pi Quadrat.	
194	Flo	<i>(schaut, was Marie aufgeschrieben hat)</i> Aso, minus.	
195	Marie	Moment, machen wir die Probe. Ich vertrau mir nicht. Pi Quadrat Sechstel minus Zwölf Pi Quadrat Sechstel <i>(schreibt)</i> .	
196	Flo	Zwölf? Ja.	
197	Marie	Das sind dann doch minus elf Pi Quadrat Sechstel. Ich sollte	

		nicht Mathematik studieren, wenn ich so was rausbekomm. (lacht)	
198	Tina	Darf ich mal, was habts bei der Reihe für einen Anfangswert genommen? (nimmt Flos Block)	begleitende Kommentare
199	Marie	Oh, ich weiß, was ich falsch gemacht hab. Ja, das ist dann (-) (schreibt, Pause)	
200	Tina	Was schaut du jetzt genau? Gegen was die andere Reihe konvergiert?	
201	Marie	Konvergieren sollte oder was ein schönes Ergebnis wär. Ich hab Pi Quadrat Vierundzwanzigstel.	
202	Tina	Pi Quadrat, wo Achtundvierzigstel.	Zugriff schaffen,
203	Marie	Ja, also ich hab im Kopf gekürzt. Das hab ich noch geschafft.	
204	Flo	Wenn du Pi Quadrat Vierundzwanzigstel abziehst. Schau, ob das funktioniert.	
205	Marie	Also Vier Pi Quadrat Vierundzwanzigstel minus Pi Quadrat Vierundzwanzigstel sind ja Pi Quadrat Achtel.	
206	Hanna	Dann konvergierts gegen ein Halb, oder (?)	
207	Marie	Nein, es muss gegen Pi Quadrat Vierundzwanzigstel konvergieren.	
208	Hanna	Aber ich mein, da kannst ja ein Halbes ausziehen, da weißt, dass das gegen was konvergiert? Gegen Pi Quadrat Sechstel. Und dann tust du das mal ein Halb. Dann hast ja das Ergebnis oder net (?) (Pause)	
209	Tina	Na, dann hast aber Pi Quadrat Zwölftel. (zeigt auf Hannas Block)	
210	Marie	Zwei n wären ja in Klammern beziehungsweise ein Viertel, wenn man keine Klammern setzt.	
211	Tina	Wo jetzt? (Marie und Hanna zeigen auf die entsprechende Stelle auf Tinas Block) Also gehört da eigentlich a Klammer?	
212	Marie	Ja, sicher.	
213	Tina	Wo genau?	
214	Marie	Bei Zwei n (Tina schreibt Klammern um $(2n)^2$). Ah, das Quadrat sollte raus.	
215	Flo	Ja, klar. Ah, ah . Das kann man anders schreiben: ein Viertel mal, so war das ja, mal Eins durch n Quadrat (schreibt). Und n Quadrat konvergiert ja wieder gegen Pi Quadrat Sechstel.	Hand- werkzeug
216	Marie	Und Pi Quadrat Sechstel mal ein Viertel ist ein Vierundzwanzigstel (!)	
217	Flo	Yes (!) (Marie freut sich und klatscht in die Hände)	
218	Tina	Jetzt noch einmal langsam.	
219	Flo	Ich hab das wirklich verstanden (!) (Marie lacht)	begleitende Kommentare
220	Tina	Also wir wissen, dass das da da (Anm.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) gegen Pi	
		ahm (-)	Resümee der Lösungs- strategie
221	Flo	Gegen Pi Quadrat Sechstel konvergiert.	
222	Hanna	Warum wissen wir das?	
223	Flo	Das ist [ja in der Angabe so]	
224	Tina	[Das ist wie in der Angabe] (Tina zeigt auf die Stelle in der Angabe) Gut, und das ist dann(.) und das ist dann Pi Quadrat Vierundzwanzigstel. Und dann habts ihr die eine minus der anderen gerechnet, gö (?)	
225	Flo	Ja.	
226	Tina	Und zwar habts ihr Gerade nein, die Ungeraden minus der Geraden (-)	
227	Flo	So. (gibt Tina seinen Block) Alle minus den Geraden.	
228	Tina	Alles klar. Das heißt (-) Voll gut.	

229	Marie	Ich weiß nicht, ob ma noch irgendwas zu den Indizes sagen soll (?) Aber da beginnen wir ja bei Eins und um hier bei Eins zu beginnen, müssen wir halt den Index anpassen.	Problem- bewusstsein
230	Flo	Unendlich plus Eins wäre ja dann divergent.	
231	Marie	Eins durch Null geht ja nicht. Das ist verboten.	
232	Flo	Hier kann mans ja Null setzen.	
233	Marie	Ja, ich mein nur, dass mans da halt nicht schreiben darf. [...]	
234	Marie	Haben wir irgendeinen Satz verwendet?	
235	Flo	Wahrscheinlich.	
236	Marie	Ich glaub, den Satz der konvergenten Reihen.	Kommentar
237	Tina	Es ist auf jeden Fall so, wenn eine Reihe konvergiert und die andere Reihe konvergiert, dann konvergiert auch die Summe.	
238	Marie	Ja, eben und die Summe. Minus ist dasselbe wie plus. <i>(Tina und Hanna schreiben noch)</i>	Problem- bewusstsein
239	Flo	Na. <i>(Marie lacht)</i>	
240	Marie	Ich bin grad so stolz auf uns. <i>(Marie lacht, längere Pause)</i>	
241	Hanna	Mhm, und was ham wir da für Sätze angewendet?	
242	Marie	Die Summe von konvergenten Reihen, irgendwas so was dürfte es geben.	
243	Flo	Zwei konvergente Reihen ergeben wieder eine konvergente Reihe.	
244	Hanna	Stimmt(,) Rechenregeln für konvergente Reihen.	
245	Marie	Ja. <i>(Pause)</i>	Kommentare zur Notation
246	Hanna	Das ist ja cool, total. Na allein wär ich da nicht draufgekommen.	
247	Flo	Nein.	
248	Marie	Ich glaub, ich auch nicht. [...]	
249	Tina	Irgendwie gefällt mir unsere Notation nicht so ganz, wie man das aufschreibt, dass das jetzt der Limes ist.	
250	Flo	Aso ja, musst dann (-)	
251	Tina	Das ist dann so, jaaa.	
252	Marie	Ich würd dann sagen, du sagst, die Summe heißt a_n und schreibst du der Limes von a_n von n geht gegen unendlich mit einem einstrichigen Pfeil (<i>meint: $\rightarrow$</i>)	
253	Tina	So ein geht gegen.	
254	Marie	Es gibt einen Indikationspfeil, es gibt den Pfeil (<i>malt $\rightarrow$</i>) und den Pfeil (<i>malt $\Rightarrow$</i>)	

36) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Z.z. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Beweis:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Abb.18 Aufgabe 36 Marie

36 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

zz: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$

$a_n = \frac{1}{(2n+1)^2}$

$\sum a_n = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \frac{1}{121} + \frac{1}{169} + \frac{1}{225} + \dots$

$\sum \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

$\downarrow$
 $\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$

Abb.19 Aufgabe 36 Flo

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4n^2} \right)$

$\sum \frac{1}{(2n)^2} = \sum \frac{1}{2^2 n^2} = \frac{1}{2^2} \cdot \sum \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$

$\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{4\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{3\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$

Abb.20 Aufgabe 36 Lösung

6.8. Veränderungen von Funktionsgraphen (Aufgabe 37)

Dauer der Szene: ca. 23 Minuten

Involvierte Gegenstände und allgemeine Beschreibung:

Flo, Hanna, Marie und Tina wenden sich nach der erfolgreichen Bearbeitung von Aufgabe 36 der Aufgabe 37 zu. Zur Wiederholung der Definition von Stetigkeit greifen die Studierenden auf ihre Vorlesungsmitschrift, ein ausgedrucktes Skript, sowie ein Analysis-Buch zurück. Kurt stößt nach etwa fünf Minuten zur Gruppe. Er hat sich die Aufgabe schon daheim angeschaut und Lösungen gefunden. Diese präsentiert er den anderen Studierenden. Allerdings hat er noch keine Skizzen angefertigt. Diese entstehen in der Diskussion rund um Kurts Überlegungen in der Gruppe.

Grobe Gliederung:

- < 1 – 43 > Wiederholung und Klärung des Begriffs „Stetigkeit“, erste Auseinandersetzung mit der Angabe
- < 44 – 50 > Kurts Lösungsvorschlag
- < 51 – 132 > Diskussion zum Unterpunkt (a)
- < 133 – 146 > Diskussion zum Unterpunkt (b)
- < 147 – 167 > Lösung des Unterpunktes (c)

Aufgabenstellung:

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wie sehen die Graphen der folgenden Funktionen im Vergleich zu jenem von f aus? Veranschaulichen Sie Ihre Aussagen in Skizzen.

(a) $\check{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(-x)$

(b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(2x)$ (allgemeiner: $x \mapsto f(\lambda x)$ mit $\lambda > 0$)

(c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x - 1)$ (allgemeiner: $x \mapsto f(x - a)$ mit $a \in \mathbb{R}$)

Zeile	Name		Teilphase
1	Hanna	Stetigkeit, neues Kapitel. [...]	Problem- bewusstsein
2	Tina	Siebenunddreißig. Stetige Funktionen (<i>liest leise weiter</i>)	

3	Hanna	Was heißt im Vergleich zu f was?	schaffen
4	Tina	Wart a mal, ich muss ma erst einmal Stetigkeit wieder wiederholen. <i>(blättert in ihrer Vorlesungsmitschrift)</i> Was ist stetig genau?	
5	Hanna	Na stetig ist, wennst in einem durchzeichnen kannst, die Funktion.	
6	Tina	Aber das ist nicht genau .	
7	Marie	Aber ich glaub, das ist nicht genau mathematisch definiert.	
8	Tina	<i>(liest Definition aus der Vorlesungsmitschrift vor)</i> Eine Funktion f ist stetig im Punkt a aus der Definitionsmenge, wenn es ein Epsilon größer Null gibt, sodass es ein Delta größer Null gibt, sodass x minus a, x aus der Definitionsmenge, kleiner als dem Delta und f von x minus f von a kleiner als Epsilon.	
9	Hanna	Also mir gfallt das besser.	
10	Tina	Ich schau jetzt noch mal im Krön-Skriptum nach, vielleicht stehts da besser drin. <i>(nimmt das Skript in die Hand und blättert darin)</i>	
11	Marie	Aber ich glaub das wird nicht viel anders formuliert sein.	
12	Flo	Ja.	
13	Tina	Ja, aber, ich hab nämlich (-) die Konvergenz hab ich mir gestern da <i>(meint das Skript)</i> noch mal angeschaut und die ist da auch viel einfacher. [...] <i>(Tina blättert weiterhin im Skript)</i> Ok, metrische Räume, das brauchen wir nicht.	
14	Marie	<i>(schaut auf die Angabe)</i> Also f geht von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (-) <i>(sie schreibt auf: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)</i>	
15	Tina	Wo ist denn die Stetigkeit? Der machts halt allgemein a bissl anders.	
16	Marie	Ok, wir haben f, g und h.	
17	Hanna	Na wir ham f, f i (-) Was haben wir da? f Dach.	
18	Marie	Oh, ja, richtig oder ist das nicht so ein Hatschek (?)	
19	Hanna	Aber das ist eine komische Notation, x nach f minus x.	
20	Flo	Mhm, aber was isn da f?	
21	Hanna	Schreibt ma das normalerweise net so? nach minus x (?)	
22	Marie	Vielleicht geht's gerade darum, dass wir das f nicht kennen.	
23	Hanna	Oder ma schreibt überhaupt f minus (?)	
24	Tina	Nein, nein, nein. Weil das ist nicht das gleiche, weil wenn du schreibst, minus x ist das nicht das gleiche wie f von minus x. Das heißt einfach, dass egal wie die Funktion aussieht, das weißt du nicht. Das ist einfach, dass x zu einem minus x eingesetzt wird.	
25	Marie	Aber was ist zum Beispiel, wenn (-)	Zugriff herstellen
26	Tina	Das minus x setzt du für ein positives x ein, aber du weißt nicht, wie die Funktion aussieht.	
27	Marie	Aber wenn zum Beispiel die Funktion x geht über in x Quadrat ist, machts ja keinen Unterschied.	
28	Tina	Nein.	Problem- bewusstsein schaffen
29	Flo	Ja, aber wir wissen nicht (-)	
30	Tina	Aber wir wissen nicht, was die Funktion ist. Ich schau da noch mal Stetigkeit nach <i>(schlägt ein Analysis-Buch auf, das auf dem Tisch liegt)</i>	
31	Marie	Manchmal hasse ich Angaben.	Kommentare
32	Hanna	Ah, ich versteh des.	
33	Marie	Du verstehst das (?)	
34	Hanna	Mhm, ich glaub zumindest.	Problem-
35	Tina	Wo ist denn da die Stetigkeit drin? <i>(blättert im Analysisbuch)</i>	

36	Hanna	Also gehört das f eigentlich zu dem nach vorn (?) f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.	bewusstsein schaffen
37	Flo	Ja.	
38	Hanna	Ok. Das heißt, wenn ma das anwenden, drahn sich die einfach die Vorzeichen um. (<i>Kurt betritt den Raum, begrüßt die Gruppe und setzt sich dazu</i>)	Zugriff herstellen
39	Tina	Also es gibt zwei Stetigkeitsdefinitionen. Die eine ist die komplizierte mit diesem Delta und Epsilon eben. Und die andere (-) Wollts ihr die andere Definition mal hören? [...]	
40	Flo zu Kurt	Wir sind grad bei Siebenunddreißig. (<i>Flo erzählt Kurt, welche Aufgaben sie bereits gelöst haben</i>) [...]	Erläuterung
41	Tina	Ok, da (<i>im Bezug auf das Analysisbuch</i>) stehts ein bissl anders.	
42	Marie	Nämlich (?)	
43	Tina	Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt x_0 aus D , wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und gleich diesem $f(x_0)$ ist. Das heißt der Limes, wenn du einen Punkt hast, und der Limes geht eben gegen diesen Punkt, und der ist gleich diesem Punkt in die Funktion eingesetzt, dann heißts stetig beziehungsweise punktweise stetig in D . Falls die Funktion in jedem Punkt x_0 aus D stetig ist, ist eine Funktion stetig. (<i>Lachen</i>) Vielleicht ist das ein bisschen besser (?) (<i>Pause</i>) Was soll man da jetzt genau machen bei Siebenunddreißig? (<i>liest Angabe vor</i>) Wie sehen die Graphen der folgenden Funktionen im Vergleich zu jenem vom f aus? (<i>Pause</i>) Ich versteh nicht ganz, was die da von uns wollen. [...] Was wolln die da jetzt genau von uns bei Siebenunddreißig?	Klärung der Handlungsoptionen
44	Kurt	Ich hab mir gedacht, dass beim Ersten wird der Graph an der y-Achse gespiegelt.	
45	Marie	Aber es is ja nicht immer so, wenn man zum Beispiel (-)	
46	Kurt	Oja, das ist immer so.	
47	Marie	Wenn man aber ein Polynom hat, wirkt sich das minus x ja nur auf die ungeraden Exponenten aus.	
48	Kurt	Ja, genau und die geraden Exponenten sind, die sind ganz symmetrisch zur y-Achse, zum Beispiel x^2 minus (-)	Zugriff herstellen
49	Marie	[Ypsilon, ohh jetzt versteh ichs.]	
50	Kurt	Beim b wird der Graph irgendwie so gestaucht, steigt er halt schneller beziehungsweise(,) und beim c wird's um $\frac{1}{2}$ (,) um Eins auf(,) parallel zur x-Achse verschoben, also um Eins nach links, je nachdem wie (-). Ich glaub, des wollns hörn.	
51	Tina	Okay. (<i>lacht</i>)	
52	Hanna	Ich glaub, reicht das net, wenn ma das hinzeichnet, wie des ausschaut (?)	Klärung der Handlungsoptionen
53	Marie	Aber ich mein, das find ich dann so (...)	
54	Kurt	Das find ich auch ganz (?blöd?) das Beispiel	
55	Flo	Vielleicht sollen wir das einfach nur hinzeichnen.	
56	Hanna	Ja, beim Einser zeichnest einfach so a y-Achse, so a x-Achse und dann machst so einen Strich durch. Fertig. (<i>Marie lacht auf</i>) Ja, das ist so.	Zugriff (Fehlvorstellung)
57	Marie	Aber ich glaub, du brauchst mindestens zwei Skizzen, eine von f und eine von f Hatschek oder wie auch immer das Ding heißt (-)	
58	Hanna	Das is ja das gleiche. Das f Ding is gleich das f(,) in dem Fall.	Zugriff herstellen
59	Marie	Wieso?	
60	Hanna	Wieso net?	
61	Marie	Wenn du zum Beispiel x geht über in x hast, dann hast du die erste Meri d i ane und (-)	

62	Tina	Ah, jetzt glaub ich, weiß ich auch, wie sie das meinen.	Erläuterung
63	Marie	Also es wird an der y-Achse gespiegelt.	
64	Hanna	Aber wenn i des jetzt da do da vorn einsetz, dann hob i des da do, dann wird's gespiegelt. Und dann hab i [die ganze (-)]	Problem- bewusstsein schaffen
65	Tina	[Aber du] weißt ja nicht, wie die Funktion aussieht. Du musst ja irgendeine Funktion nehmen. Das f kann ja irgendwas sein.	
66	Hanna	Nana, das ist ja gegeben.	
67	Tina	Nein. Es ist nicht so, dass du sagst, f von x ist gleich minus x, sondern f also das x übergeht in f von minus x. Weißt was ich mein?	
68	Hanna	Nein.	
69	Tina	Schau (<i>nimmt ihren Block</i>), es ist nicht so, dass du sagst, f von x ist gleich minus x. Das f von x, was immer das auch ist, is dann f von minus x. Das x wird da als minus x eingesetzt.	Zugriff herstellen
70	Kurt	[Aber wenn ma das zeichnen will, braucht ma a Beispiel.]	
71	Marie	[Als erstes braucht man irgendein f, um dann ein Vergleichs-f hinzuzeichnen. Dazu braucht man mindestens zwei Graphen.]	
72	Tina	Was passiert mit der Funktion, wenn die jetzt wirklich irgendein Polynom ist?	
73	Kurt	Ja, zum Beispiel x Quadrat ist symmetrisch zur y-Achse.	
74	Tina	Genau, also das würd sich jetzt nicht verändern.	Prüfen der Passung,
75	Kurt	Aber überleg amal, x Quadrat is ja dasselbe wie minus x Quadrat.	
76	Tina	Ja, eben. Aber was is, wenn du jetzt größeres Polynom hast, vierten oder Fünften Grades (?)	
77	Kurt	[Das wird sich immer so ausgehen.]	
78	Marie	[Aber es wird trotzdem nur gespiegelt.]	
79	Tina	Wieso?	
80	Kurt	Waß i net, weils einfach so is.	
81	Marie	Weil die geraden Polynomen zum Beispiel, auf die sichs nicht auswirkt sowieso symmetrisch sind und die ungeraden (-)	
82	Tina	Ja, das heißt, die bleiben dann gleich, die geraden(.) Polynome, die Polynome mit geraden Potenzen.	
83	Marie	Aja.	
84	Hanna	Gespiegelt zur y-Achse oder?	
85	Marie	Ja.	
86	Tina	Ok und was passiert mit den anderen (?Buchstaben?) (?)	
87	Marie	Die werden genau gespiegelt, wo halt vorher plus war, wird's dann zum Minus.	
88	Hanna	Ok.	Zugriff herstellen
89	Tina	Aber verändert sich nicht trotzdem die ganze Funktion so irgendwie? Wenn ich da einen Wert hab, sag ma mal, mein Wert ist Zwei, ok an einer Stelle Zwei. Und ich hab ein Polynom, weiß nicht wievielten Grades.	
90	Marie	[x hoch Drei]	
91	Tina	[x hoch Vier] hoch Drei genau. Was passiert dann mit diesem Punkt? (<i>zeigt mit dem Finger auf das aufgezeichnete Koordinatensystem</i>) Dieser Punkt wird ja nicht genau gespiegelt, weil du hast dann ein hoch Drei und hoch Drei, nur ein x und vielleicht sogar noch eine Konstante drin. Das kann sich ja dann nicht einfach spiegeln (?)	
92	Kurt	Oja, das wird sich irgendwie ausgehen.	
93	Hanna	Du meinst, das kann irgendwas sein. Das kann x Quadrat plus Fünf oder irgendwas sein (?)	
94	Tina	J a a a.	

95	Hanna	Und dann werden einfach die Vorzeichen geändert (?)	
96	Tina	Genau. Das wär einfach jetzt statt f von minus x und dann wird's überall zu minus x und bei x zum Quadrat is ja wurscht, ja zum Beispiel, wenn wir jetzt wirklich irgendeine Funktion jetzt mal annehmen. <i>(zeichnet eine beliebige Funktion)</i>	
97	Marie	Dann können wir ja da davon ausgehen, dass zum Beispiel x positiv ist. <i>(markiert einen Punkt des Graphen)</i>	
98	Flo	Wenn wir hier jetzt zum Beispiel (-) Darf ich mal kurz (?) Da hast du da Fünf.	
99	Tina	Wenn ich jetzt irgendeine Funktion mal annehme, x hoch Drei plus Zwei x hoch Zwei plus x plus Fünf ($f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 5$) oder so. Und dann müsste für den Minuswert genau das Gespiegelte herauskommen. Setzen wir zum Beispiel Zwei ein.	
100	Flo	Sind Acht plus (-)	Handwerk- zeug
101	Tina	Acht plus Zwei plus Fünf, Zehn, sind Achtzehn, Dreiundzwanzig. Und wenn ich mir jetzt minus f anschau, hab ich minus Acht plus Acht minus Zwei plus Fünf, dann hab ich Drei.	
102	Marie	Ja, wenn du jetzt (-)	begleitende Kommentare
103	Tina	y-Wert, aber wie kann das genau gespiegelt sein?	
104	Marie	Aber wenn du jetzt minus f von x. [...]	
105	Tina	Also für mich ist das nicht so verständlich, warum sich das spiegeln muss.	
106	Hanna	Was mochts es do? Minus Acht minus(.) was ist das (?)	Zugriff herstellen
107	Tina	Nana, die Funktion is das da. x hoch Drei.	
108	Flo	Nach jedem Term ein Minus.	
109	Tina	Na ich glaub, da hats überall minus eingesetzt, oder (?)	
110	Flo	Ich hät gedacht, das wär die Funktion und dass ma das dann Limes setzt, aber das (-)	
111	Hanna	Das ist dann minus x hoch Drei minus Zwei x Quadrat minus x aber trotzdem noch plus Fünf, oder (?)	
112	Marie	Aber es is ja so. Wenn wir (-) <i>(Pause)</i>	
113	Hanna	Wart mal. <i>(Pause)</i> Is echt gespiegelt.	
114	Tina	Wieso?	
115	Marie	Wenn du minus Zwei einsetzt.	
116	Tina	Aber bei der y-Achse gespiegelt.	
117	Marie	Ja.	
118	Tina	Ok aber wieso?	
119	Marie	Ich find, das gibt keinen Sinn. Wenn du f von x, wenn du f von Zwei einsetzt, dann hat es an der Stelle den Wert Zwei und wenn du f von minus Zwei einsetzt und zwar in der neuen Funktion, wird das wieder zu Zwei.	
120	Tina	Aha.	Zugriff herstellen
121	Marie	Es muss nicht (-)	
122	Kurt	Na , es kann ja eigentlich nur so sein. Tschuldigung, dass i di unterbrechen darf. Wennst du dir vorstellst, du gehst jetzt einfach von links nach rechts, schau dir die Funktion an, alle Funktionswerte, dann hast du die Funktionswerte von minus x, wie wennst von rechts nach links gehen tatst.	
123	Tina	Hm, ja stimmt.	
124	Kurt	So kanns ja eigentlich nur sein.	
125	Tina	Ok, ja das stimmt.	
126	Marie	Es ist eigentlich bloß so(.) dass die positiven und negativen Werte vertauscht werden, wenn man sich das so anschaut, dann wird minus x zu x.	

127	Tina	Das heißt, das verhält sich zum Neuen (<i>blättert in ihren Unterlagen, liest vom Angabeblatt vor</i>) Veranschaulichen Sie Ihre Aussagen in Skizzen. (<i>lacht</i>) [Da können wir dann so was aufzeichnen]	Problem- bewusstsein schaffen
128	Flo	[Ja, genau.] (<i>nimmt seinen Block und zeigt Tina seine Skizze</i>) Wenn ich da einfach f von x nehme, das ist linear in dem Fall f Hakerl x.	Zugriff herstellen
129	Tina	Und müssen wir sonst noch(.) wie sehen die Graphen Funktionen im Vergleich zu jenem aus? (<i>liest die Angabe vor</i>) Müssen wir dann echt nur Skizzen machen?	Problem- bewusstsein schaffen
130	Flo	Ja und dann wahrscheinlich.	Resümee
131	Marie	Also ich glaub, damit sind wir auf der sicheren Seite. [...]	
132	Flo	Ok, das war unser a. [...] Bei b haben wir gesagt,	
133	Marie	es wird um den Faktor Lambda gestaucht.	
134	Kurt	Also bei Zwei (-) Wenn Lambda größer als Eins ist, dann steigt halt schneller. Oder sinkt halt schneller je nachdem was (?man macht?)	Zugriff herstellen
135	Marie	Ich weiß nicht, muss man auch schreiben in welche Richtung? (<i>Pause</i>) Aber ich mein, es ist mathematisch nicht ganz korrekt, weil es auch so gestaucht werden könnte (<i>macht mit den Händen eine Bewegung, indem sie die Hände von oben und unten einander annähert</i>).	Anpassen
136	Kurt	Ja, das stimmt schon. Aber das mit den Richtungen, da hab ich eh immer (-)	Zugriff schaffen
137	Flo	Na warte, wenn man jetzt zum Beispiel eine Sinuskurve hat.	
138	Kurt	In welche Richtung sie gestaucht wird, willst jetzt sagen? Entlang der x(.) in Richtung y Achse.	
139	Flo	Sinus beginnt oben, gö (?)	
140	Kurt	Nein, der Sinus beginnt unten.	
141	Flo	Das heißt der Sinus beginnt bei minus Eins?	
142	Marie	(<i>lacht</i>) Sinus von Null ist Null.	
143	Flo	Da geht's rauf bei Eins und geht dann runter. (<i>fertigt eine Skizze einer Sinusfunktion an</i>) Und hier hab ich dann Zwei Pi, oder (?) Dann hab ich hier Zwei Pi. Dann ist ein Durchgang hier fertig. Und wenn ich das stauch (<i>veranschaulicht seine Idee mit den Händen, indem er sie schnell zueinander bewegt, als würde er klatschen</i>), dann ist das die doppelte(.) die doppelte Geschwindigkeit, oder (?). Das heißt, dann hab ich bei Zwei Pi schon zwei Durchläufe. Warte, das beginnt dann bei Null. Hier haben wir Zwei Pi und hier haben wir Pi, oder (?) (<i>längere Pause</i>) Und da schreib ich dann zur y-Achse, nein zur x-Achse wird gestaucht.	
144	Marie	Es wird in Richtung y-Achse gestaucht.	begleitende Kommentare
145	Flo	Ah, wird in Richtung um Lambda gestaucht.	Resümee
146	Tina	Nein, wir schreiben in Richtung.	
147	Marie	Ich hab auch noch dazugeschrieben, dass Zwei auch Lambda sein kann. (<i>Pause</i>) Aber bei minus x, nein bei minus Eins bewegt sich doch, nein bei minus Eins bewegt sich doch nach rechts. x minus Eins ist um Eins verschoben.	Zugriff schaffen
148	Kurt	Eins nach links. Stell dir mal vor den Graph x Quadrat minus Eins.	
149	Marie	Na zum Beispiel f von x ist Null. Dann ist bei Eins minus Eins Null.	
150	Kurt	Aso wart amal. Ja, genau, das verwechsel ich immer.	
151	Marie	Ich hab mir immer gedacht, warum in die falsche Richtung (?) Man denkt sich ja bei minus geht's Richtung links.	
152	Kurt	Ja, genau.	

153	Flo	Ok, das heißt ich geh nach rechts. Und warum noch mal? Kannst du mir das erklären?	Kommentar
154	Kurt	Du musst einen Funktionswert am besten ausrechnen, also am besten du sagst äh (-)	Zugriff herstellen
155	Flo	f von Null ist Null.	
156	Marie	Also f von x ist Null. Dann um f von, nein, g von x ist Null herauszufinden ist das ja f von x minus Eins. Weil f von x minus Eins ist Null ist gleich (-)	
157	Flo	Ist gleich f von x minus Eins.	
158	Marie	Ist Null. Das heißt, x ist in diesem Fall?	
159	Flo	Ah, verstehe, kann man das so, darf ma das so einfach rüber ziehen?	Kommentare
160	Marie	Ich glaub, die Notation passt nicht ganz.	
161	Tina	Habts jetzt alle die Sinuskurve genommen für b?	
162	Marie	Das ist egal, es wird alles gestaucht.	Resümee
163	Hanna	Was habts bei c jetzt?	
164	Marie	Der Graph, den man nicht mit f schreibt, G r a p h, der wird um Eins nach rechts verschoben.	
165	Hanna	Mhm, ok.	

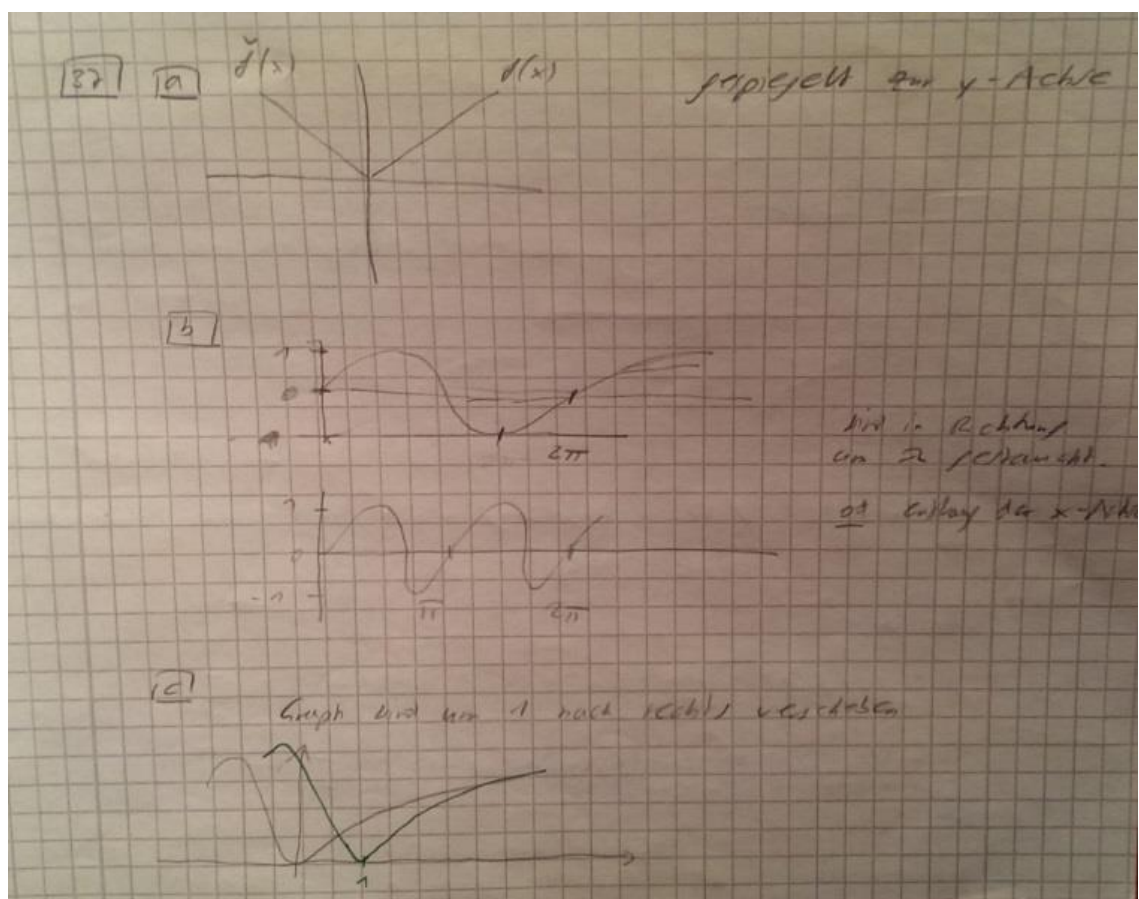


Abb.21 Aufgabe 37 Flo

37) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(-x)$
 gespiegelt an y-Achse
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(2x)$
 und um 2 in Richtung
 y-Achse gestaucht
 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x-1)$
 Graph wird um 1 nach rechts
 verschoben

Abb.22 Aufgabe 37 Marie

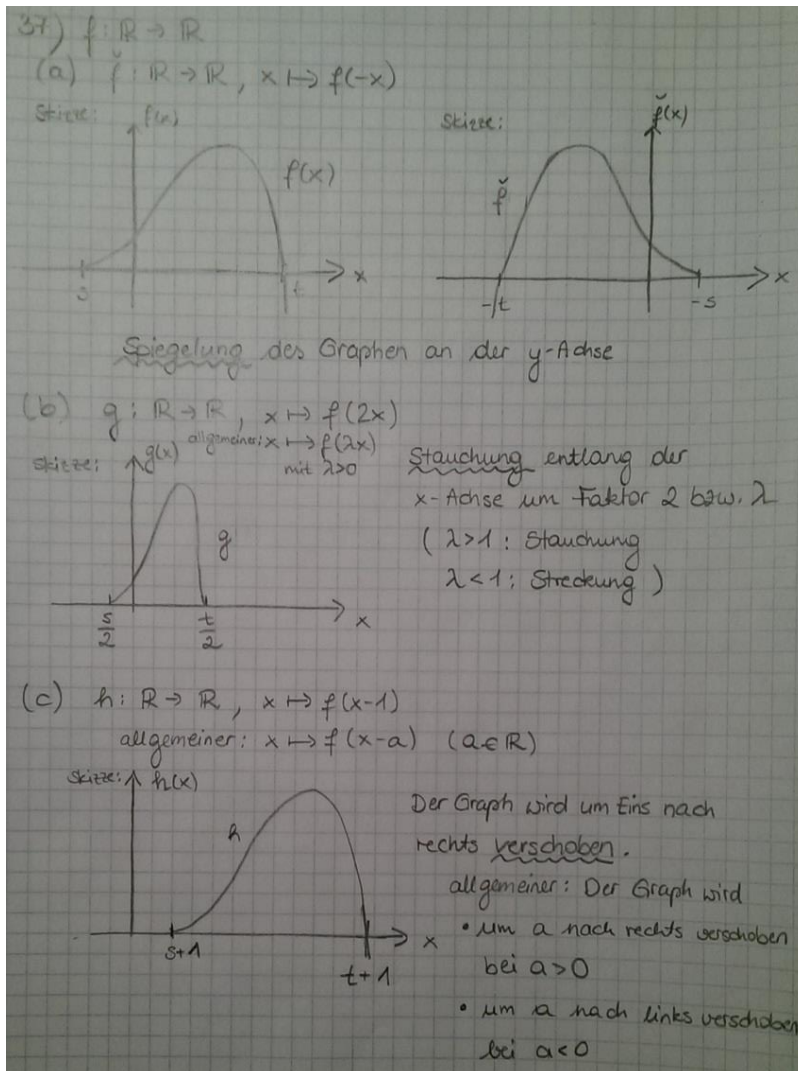


Abb.23 Aufgabe 37 Lösung

6.9. Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen (Aufgabe 42)

Dauer der Szene: ca. 31 Minuten

Involvierte Gegenstände und allgemeine Beschreibung:

Anna, Flo, Ildiko, Lisa, Marie und Steffi treffen sich um 8 Uhr vor einer Vorlesung, die sie gemeinsam besuchen, auf der Universität, um ihre Analysis-Übungsaufgaben für die kommende Woche vorzubereiten. Lisa hat sich die Aufgabe 42 schon daheim angeschaut und im Internet recherchiert, teilt sie ihren Kolleginnen und ihrem Kollegen mit. Allerdings hat sie keine Lösung gefunden, mit der sie etwas anfangen konnte. Flo und Lisa nehmen ihre Mitschriften zur Hand, um Ideen zu sammeln. Ildiko kommt daraufhin mit einem Lösungsvorschlag, der sie aber von der tatsächlichen Fragestellung der Angabe entfernt. An dieser Stelle ist anzumerken, dass Ildiko nicht Deutsch als Muttersprache hat. Dies spiegelt sich in ihren Wortmeldungen wider. Einige ihrer Aussagen sind leider auf der Aufnahme nicht mehr verständlich. Dies liegt vor allem daran, dass sie leise spricht.

Der Bearbeitungsprozess verläuft schlussendlich in eine andere Richtung und die Studierenden entfernen sich immer mehr von der Problematik der Aufgabe. Aus diesem Grund befindet sich im Anschluss an das Transkript eine korrekte Lösung der Aufgabe. Vergleicht man diese mit den Überlegungen der Studierenden, wird deutlich welche Schwierigkeiten ihnen die Aufgabe bereitet.

Grobe Gliederung:

- | | |
|--------------|---|
| < 1 – 19 > | Erste Überlegungen für einen Lösungsansatz |
| < 20 – 53 > | Lösungsstrategie: Häufungspunkt |
| < 54 – 69 > | Weiterführende Überlegung: Teilfolgen |
| < 70 – 137 > | Umlegung der gesammelten Ideen auf Funktionen |

Aufgabenstellung:

Es sei $\xi \in]a, b[$, $f :]a, b[\setminus \{\xi\} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x \searrow \xi} f(x) = \gamma = \lim_{x \nearrow \xi} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \gamma \text{ (insbesondere existiert der Limes).}$$

Zeile	Name		Teilphase
1	Flo	Das ist ein Zeta, oder (?)	Problem- bewusstsein schaffen
2	Marie	Ja, ich würd auch sagen, das ist ein Zeta.	
3	Lisa	Das ist ein Zeta?	
4	Flo	Mhm.	
5	Lisa	Ich bin mir nicht sicher, ob das (?ein griechischer Buchstabe?) Egal. Ähm, die Funktion schaut eben so aus, das komische Intervall ohne diesem Zeta wird auf die reellen Zahlen abgebildet und dieses (-)	
6	Steffi	Gamma.	
7	Lisa	Ok, dann hatte ich das richtig. (<i>Flo lacht</i>) Gamma ist aus den reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass der linksseitige Grenzwert(,) äh von f von x ist Gamma gleich der rechtsseitige Grenzwert von f von x ist und das ist äquivalent zu dem Grenzwert von f von x ist gleich Gamma. Es ist eigentlich find ich schon logisch, weil der linksseitige und der rechtsseitige dasselbe sind. Aber ich weiß nicht, wie ich das beweisen soll. Ich hab mir ein paar Beweise im Internet angeschaut und es ist ur undurchsichtig. Für mich halt. Ich habs nicht verstanden.	
8	Flo	Ist das (-) Das ist der linksseitige und das ist der rechtsseitige?	
9	Lisa	Alles was runter geht, ist der rechtsseitige und rauf ist der linksseitige.	
10	Flo	Ok. Da haben wir wieder ein x was gegen Zeta geht. (<i>zeigt mit dem Stift auf die Angabe</i>) Das heißt wir können einfach das Zeta einsetzen in die Funktion. Das heißt das f von Zeta ist gleich Gamma. Das ist ja das, was wir vorher gehabt haben.	Klärung der Handlungs- optionen
11	Lisa	Eigentlich schon.	Problem- bewusstsein schaffen
12	Flo	Das ist ja ok, weil der Grenzwert existiert und da gibt's keine Problemstelle.	
13	Anna	Ja, dass er existiert, das steht ja schon. Das muss ma net beweisen.	
14	Marie	Also ich glaub schon, dass das zu zeigen ist. Ich glaub sogar, dass es besonders wichtig ist.	
15	Steffi	Es steht ja drunter.	
16	Marie	Ja, insbesondere zu zeigen, dass der Limes auch existiert.	Zugriff
17	Flo	Aber es ist ja logisch , weil wenn er von der Seite hingeht (<i>macht mit der linken Hand eine Bewegung nach rechts oben</i>) und dann von der Seite hingeht (<i>macht mit der rechten Hand eine Bewegung nach links oben</i>), dann (-)	
18	Lisa	Ich hab mir gedacht, dass man das mit logischen Argumenten zeigen soll, so wie wir (?bis jetzt/Gesetze?) bewiesen haben. Einfach eine Äquivalenz zeigen sollen. Das dachte ich mir. So wie wir das in der Vorlesung gemacht haben.	Klärung der Handlungs- optionen
19	Flo	Naja, wir müssen die eine Seite beweisen und dann auf die andere rückschließen, oder (?) Oder wir beginnen mit dem einen und gehen auf das andere rüber. (<i>längere Pause</i>) Ich schau mal, was wir dazu aufgeschrieben haben. (<i>blättert in seiner Vorlesungsmitschrift, längere Pause</i>) rechtsseitiger Grenzwert, Häufungspunkt, Berührungspunkt, Grenzwert.	Problem- bewusstsein Schaffen
20	Ildiko	Ich glaub, wir müssen zeigen, dass dieses komische Zeichen, dass die Häufungspunkt von (-) Wenn ich es um diesen Punkt entwickle, dann ist (-)	Problem- bewusstsein schaffen
21	Flo	Häufungspunkt, das Gamma meinst du? [Oder das Zeta?]	
22	Ildiko	[Nein. Ja.]	

23	Anna	Das is ja ah Teilfolge, oder (?) Das rechtsseitige.	
24	Lisa	Du meinst, das Zeta ist der Häufungspunkt.	
25	Ildiko	Ja.	
26	Lisa	Genau, das hab ich da aufgeschrieben. <i>(zeigt auf ihre Mitschrift)</i>	
27	Flo	Echt?	
28	Lisa	Das hab ich da aufgeschrieben: <i>(liest aus ihrer Mitschrift vor)</i> Der Limes von f von x ist gleich c mit x ist der $(\cdot)$ äh $(\cdot)$ x gegen a und a ist der linksseitige Grenzwert also <i>(macht eine Bewegung mit der rechten Hand schräg nach rechts oben)</i> , wenn a der Häufungspunkt von D ist, vom Definitionsbereich. Das heißt das Zeta muss der Häufungspunkt von dem Intervall a b sein.	Klärung der Handlungsoptionen
29	Marie	Aber kann er der Häufungspunkt sein, wenn er nicht einmal im Intervall drin ist?	
30	Ildiko	Ja, das kann sein.	
31	Lisa	Das ham ma, glaub ich, irgendwo aufgeschrieben. Ok, <i>(liest aus Mitschrift vor)</i> Beispiel: f von x ist gleich Betrag von x , der Definitionsbereich sind die reellen Zahlen und a ist gleich Eins. Das heißt die Folge muss größer als der äh als Zeta sein. <i>(blickt auf ihre Mitschrift, Pause)</i> Wie war das noch mal? <i>(Pause)</i>	Prüfen
32	Ildiko	(? x ist ein Häufungspunkt, wenn rundherum unendlich viele Punkte konvergieren?)	
33	Lisa	Ja, das stimmt eh.	
34	Ildiko	Wenn wir das zeigen, dass es konvergiert in x .	Klärung der Handlungsoptionen
35	Flo	Und wie zeigen wir, dass es ein Häufungspunkt ist? Da müssen wir eine Teilfolge kreieren, oder (?)	
36	Ildiko	Wenn das x Häufungspunkt ist, dann konvergiert gegen Gamma <i>(sic)</i> . Dann haben wir die zwei (?Beweishälften?). Aber man kann direkt $(\cdot)$ also a heißt Häufungspunkt, wenn es eine Folge x_n gibt, die gegen a konvergiert, weil wir wieder unter (?Gamma?) sind und das ist genau, weil wir haben den Definitionsbereich ohne Zeta. So die Folge konvergiert, wenn wir zeigen, dass sie gegen Zeta konvergiert, aber Zeta ist nicht drinnen <i>(sic)</i> . Dann ist Zeta Häufungspunkt.	Zugriff herstellen
37	Flo	Ok und wie zeigen wir das?	
38	Ildiko	Niemand weiß. <i>(lacht)</i>	Klärung der Handlungsoptionen
39	Lisa	Also <i>(längere Pause)</i>	
40	Flo	Ich hab ein Problem, weil wir keine Funktionen gegeben haben, sondern nur so ein allgemeines Ding. <i>(schaut die Angabe an)</i>	Kommentar
41	Lisa	Was, wir müssen jetzt zeigen, dass dieses Zeta ein Häufungspunkt von a b ist oder wie (?)	Problem-bewusstsein
42	Ildiko	Ja.	
43	Lisa	Häufungspunkt. <i>(blättert in ihrer Mitschrift)</i>	
44	Flo	Das haben wir bei den Reihen gemacht.	
45	Lisa	<i>(blättert weiterhin in ihrer Mitschrift)</i> Ich such die Häufungswerte, Häufungspunkte. Ah warte, ein Punkt a Element heißt Häufungspunkt a , wenn es eine Teilmenge a_{n_k} gibt, sodass $(-)$ Ok.	Klärung der Handlungsoptionen
46	Flo	Genau, dass die Teilfolge gegen diesen Punkt konvergiert.	
47	Lisa	O k a y. <i>(Pause)</i> Also unser x , wir bilden ja eine Folge x_n muss dementsprechend größer sein als Zeta, damit Limes von x_n gleich Zeta ist, sowie da bei $(-)$ Ich hab gar keinen Fünf Punkt Neun.	Zugriff
48	Flo	Das war so eine Variation. Wenn du jetzt ein x_{n_k} , nein warte	

49	Lisa	das kann jetzt Zeta sein, oder (?) Das x_{n_k} muss Zeta sein, weil das ist ja eben der Häufungspunkt und das k ist ja nur eine Teilfolge, oder (?)	
50	Flo	Ja, wir wissen noch nicht, dass das der Häufungspunkt ist. Ich geh jetzt einfach mal davon aus.	
51	Lisa	Aso ok.	
		Ich schreib nur das an so wie in der Angabe. x_n gegen a als linksseitigen Grenzwert und wenn a der Häufungspunkt ist, dann wär Limes von x_n gleich Zeta. Und wenn ich jetzt die Teilfolge bilde, weil ich noch nicht weiß, ob Zeta der Häufungspunkt ist, muss ich x_{n_k} also eine Teilfolge bilden.	Anpassen
		Ok. <i>(längere Pause)</i> Heißt Häufungspunkt x_n , Teilfolge x_{n_k} mit k Element der natürlichen Zahlen. <i>(längere Pause, Flo liest in seiner Mitschrift)</i> Ich weiß jetzt da grad nicht weiter.	
52	Flo	Wo? Was? <i>(beugt sich zu Lisa)</i>	
53	Lisa	Eine aufsteigende Folge n_k . Da steht dann a. Ok, ich weiß, dass k gegen Unendlich geht, so wie da n gegen Unendlich geht, ja. Wurscht. Ahm, aber warum a? a heißt Häufungspunkt von der Folge a_n , das heißt Epsilon. Epsilon Element der reellen Zahlen heißt Häufungspunkt von der Folge x_n , wenn es eine Teilfolge x_{n_k} mit k Element der natürlichen Zahlen gibt, sodass Limes von x_{n_k} gleich Zeta ist. Hab ich vorher wieder Epsilon gesagt? Egal. Mit k gegen Unendlich.	Zugriff herstellen
54	Flo	<i>(legt seine Mappe mit der Vorlesungsmitschrift auf den Tisch)</i> Wir haben das so aufgeschrieben in der Übung: Zeta Häufungspunkt einer Folge a_n , wenn eine Teilfolge existiert a_{n_k} mit a_{n_k} geht gegen Zeta. <i>(liest aus seiner Mitschrift vor)</i>	
55	Lisa	Ok. Also stimmt das (?)	
56	Flo	Ja. Also das ist dasselbe, das a und das Zeta.	
57	Lisa	Aber wie hantier ich jetzt damit?	
58	Flo	Das haben wir dann so gemacht <i>(blättert eine Seite um)</i> und das war mir zu kompliziert. Das haben wir mit hunderttausend verschieden Sachen gemacht. Dann war das kleiner Epsilon, weil wir ein großes N hatten und dann haben wir daraus geschlossen, dass es eine Teilfolge ist.	
59	Lisa	Ok. <i>(Pause, liest aus ihrer Vorlesungsmitschrift vor)</i> Das heißt zu beliebigen Epsilon größer Null existiert ein n Element aus den natürlichen Zahlen, sodass die Teilfolge a_{n_k} minus a minus unserem Zeta, weil das a ist ja unser Zeta, kleiner Epsilon ist für alle k größer gleich N. Ok, ich schreib das einmal auf.	Klärung der Handlungsoptionen
60	Ildiko	Ich glaub, die Definition ist eine andere. Das war aber bei den Folgen und hier haben wir Funktionen.	Problem-bewusstsein
61	Lisa	Ja, aber (-) Ok, wenn wir (-)	
62	Marie	Hatten wir nicht je ein beliebiges Epsilon?	
63	Flo	Ja, genau.	
64	Lisa	x_n ist (?) Ich weiß aber nicht, was x_n ist. Ich weiß nur, dass es größer als Epsilon ist.	Kommentare
65	Flo	Na, x_n ist die Folge, gegen die (-) Na warte. Die den Häufungspunkt als Grenzwert hat.	
66	Lisa	Zum Beispiel, hier <i>(bezieht sich auf die Vorlesungsmitschrift)</i> haben wir ein Beispiel genommen mit a_{2n} ist gleich n, das heißt a_{2n+1} ist minus Eins und ich weiß jetzt nicht, was ich einsetzen kann, weil da kann ich auch x_n , x_{n+1}	Zugriff
67	Flo	Na, das war gegeben.	
68	Lisa	Eben und ich frag mich, wie (-)	Kommentar

69	Flo	Das geht halt mit einer Funktion gar nicht.	Zugriff
70	Ildiko	Also angenommen, dass x_n gegen Zeta konvergiert mit x_n gegen Zeta, dann ist ein Häufungspunkt, dann folgt, dass der Limes von diese Folge ist Gamma, wenn n gegen Unendlich konvergiert und daraus folgt, dass Limes ist Gamma.	
71	Lisa	Haben wir das schon in der Übung gemacht?	Erläuterung, Kommentare
72	Ildiko	Nein, ich hab es jetzt geschrieben.	
73	Lisa	Das hast du jetzt gerade geschrieben?	
74	Ildiko	Ja.	
75	Flo	Darf ich das mal sehen. <i>(Ildiko gibt Lisa ihren Zettel, Lisa und Flo beugen sich darüber)</i>	
76	Lisa	x_n muss auf jeden Fall größer sein als dieses Zeta.	
77	Ildiko	Das ist für, wenn es rechtsseitig konvergiert.	
78	Flo	Aber wie hast du da bewiesen, dass Zeta ein Häufungspunkt ist, nur weil das kein Element der Folge ist?	
79	Ildiko	Nur weil die Folge gegen Zeta konvergiert.	
80	Flo	Also, weil es gegen das konvergiert und kein Element ist, dann ist es automatisch ein Häufungspunkt.	
81	Ildiko	Mhm. Diese Definition war in der Übung.	
82	Flo	Aha.	
83	Lisa	Und da haben wir eigentlich eh ein Beispiel, genau für unseren rechtsseitigen. Weil er rechtsseitig ist, muss die Folge auf jeden Fall größer sein als unser Zeta.	
84	Ildiko	Wir zeigen, dass für jedes x größer und für jedes x kleiner. Weil es größer und auch kleiner ist, dann ist es ja genau gleich.	
85	Lisa	Aber wir wissen noch immer nicht, ob Epsilon eine Teilfolge ist, weil Epsilon einfach gar nicht (-)	
86	Ildiko	Die Häufungspunkt.	
87	Flo	Das is ja das, was sie gesagt hat: wenn x_n gegen Zeta konvergiert und aber nicht in der (-) und sie nicht enthält, dann ist sie ein Häufungspunkt. <i>(längere Pause)</i>	
88	Lisa	Wir haben das so gemacht: wenn ich den rechtsseitigen jetzt untersuch, muss x_n auf jeden Fall größer als Zeta sein, das heißt die Folge minus $x_n(,)$ und ich weiß nicht wogegen. Warum geht das jetzt gegen (-) also nein. Mit x gegen(,) Ja, ich hab das jetzt einfach blind abgeschrieben.	Resümee
89	Ildiko	(...) (?Ich glaub nur, wenn beides das gleiche ist?)	
90	Lisa	Oh, ok.	
91	Ildiko	Ich glaub,	
92	Flo	Die Ildiko meint eben, dass die Folge gegen Zeta konvergiert und die Folge nicht drinnen ist.	
93	Lisa	Die Folge nicht Zeta enthält.	
94	Flo	Ja, und dann ist per Definition Zeta ein Häufungspunkt und deswegen muss Zeta ein Häufungspunkt sein. Das ist jetzt damit bewiesen.	
95	Lisa	Laut Angabe halt, weil es nicht im Intervall ist. Zeta ist nicht in der Folge enthalten.	
96	Flo	Ja, genau.	
97	Lisa	Ok, gut.	
98	Flo	U n d dann hab ich das abgeschrieben. <i>(lacht)</i> Und damit ist es ja schon gezeigt, weil wir mussten ja zeigen, dass Zeta ein Häufungspunkt ist, dann stimmt das halt.	begleitende Kommentare
99	Ildiko	f von dieser Folge konvergiert gegen c und das ist wie dieses c(,) f von x ist in diesem Fall Gamma.	
100	Anna	Und ihr glaubt, das genügt dann schon?	
101	Ildiko	Ich hoffe. Man muss sowieso diese Bereiche nutzen, weil sie	

102	Lisa	schon gegeben sind.	
103	Flo	Limes von x_n ist gleich Gamma mit x nein mit n gegen Unendlich.	
104	Lisa	Limes f von x ist gleich Gamma mit x gegen Zeta. (<i>notiert, was sie sagt</i>) Ok, das war jetzt der rechtsseitige und jetzt probieren wir den linksseitigen.	Problem- bewusstsein
105	Ildiko	Nein, ich glaub, das war nicht der rechtsseitige.	
106	Flo	Nein, das war der rechte Term und jetzt müssen wir das (<i>tippt auf die Angabe</i>) zeigen, oder (?)	
107	Ildiko	Ja, wenn wir sagen, dass x größer Zeta ist und das gegen Gamma konvergiert und auch x ist kleiner als Zeta und es auch gegen Gamma konvergiert, ist es gleich.	
108	Lisa	Also, wir haben gerade das gezeigt, in die andere Richtung, oder (?) Wir haben gerade diese Seite der Äquivalenz bewiesen. (<i>zeigt mit dem Kugelschreiber auf die rechte Seite der Äquivalenz</i>)	
109	Ildiko	Wir haben nur überprüft, dass es einen Limes gibt.	
110	Flo	Wir haben das bewiesen. (<i>zeigt mit dem Finger auf die linke Seite der Äquivalenz</i>)	
111	Marie	Also ich mein, wenn der Limes existiert, dann sollte er ja (-) Also ich find das (-) Ich kann nichts sagen. (<i>Lachen</i>)	
112	Lisa	Ich mach das einfach aus der Vorlesung.	
113	Steffi	Wenn die ganze Folge, dann muss es ja für rechts und für links gelten, oder (?)	
114	Ildiko	Man muss das zuerst zeigen.	begleitende Kommentare
115	Steffi	Aber es ist schon logisch, oder (?)	
116	Ildiko	Ja, stimmt.	
117	Lisa	x_n muss größer Zeta sein oder größer Gamma (?)	
118	Ildiko	Nein, Zeta und Gamma. Wenn x_n gegen Zeta konvergiert, dann Limes von $(\cdot)$ die Funktion von x_n konvergiert gegen Gamma.	
119	Lisa	Also wär dann der Limes von x_n mit n gegen Unendlich gegen Zeta konjugiert (<i>sie meint „konvergiert“</i>), dann ist es der rechtsseitige Grenzwert.	Problem- bewusstsein
120	Ildiko	Aber müssen wir jetzt zeigen, dass x_n größer Zeta ist (?)	
121	Lisa	Das kann größer sein beziehungsweise liegt nicht in x_n . Zeta liegt ja nicht im Intervall a b . Ich hab keine Ahnung.	Kommentare
122	Flo	Ich weiß es auch nicht.	
123	Lisa	Das war jetzt der rechtsseitige.	
124	Flo	Aber das versteh ich auch nicht so ganz. Wenn x_n größer Zeta ist (-)	
125	Lisa	Es wäre leichter, wenn wir eine Funktion gegeben hätten, weil dann würden wir das sehen.	
126	Flo	Richtig. Du hast den Limes von der Funktion genommen. Das ist die Angabe.	
127	Lisa	Genau, das ist die Angabe. Und wenn ich jetzt davon ausgehe, dass es der rechtsseitige ist, muss die Folge x_n größer Zeta sein. Das heißt Limes von x_n , also von der Folge, ist gleich Zeta mit n gegen Unendlich. Das steht auf jeden Fall da.	
128	Flo	Das bringt uns aber nichts, oder (?)	
129	Lisa	Mir sagt das nichts. Limes von f von x gleich Gamma mit x gegen Zeta. Und da muss eben sein, dass x_n kleiner als Zeta ist.	
130	Flo	Wieso ist das Zeta und nicht Gamma? Also weils x_n ist, ok.	
131	Lisa	Ja. Mir sagt das nichts. Wenn ich da eine Funktion hätte, dann würd ichs ja sehen, das ist viel kleiner oder viel größer.	

132	Flo	Richtig.	
133	Lisa	Ich weiß es nicht. Das ist einfach das Intervall a b.	
134	Flo	Aber ich mein, die Aussage an sich ist ja logisch.	
135	Lisa	Ja.	
136	Ildiko	Ich glaube, wir müssen nur zeigen, dass x_n größer Zeta ist. Dann stimmt's. Weil wir wissen schon, dass Limes gegen Gamma konvergiert und x_n gegen (-)	Problem- bewusstsein
137	Lisa	Aber wie zeigt man das? x_n ist ja das Intervall a b und a b enthält nicht (-) Wenn es es nicht enthält, dann kann es ja nur größer oder kleiner sein. (längere Pause)	Klärung der Handlungs- optionen
138	Ildiko	Bei den Beispielen in der Vorlesung haben wir (?das nicht notiert?) vielleicht ist es so automatisch von dem Bereich, aus dem Definitionsbereich kommt es.	
139	Lisa	Okay, versuchen wir das nächste.	Kommentar

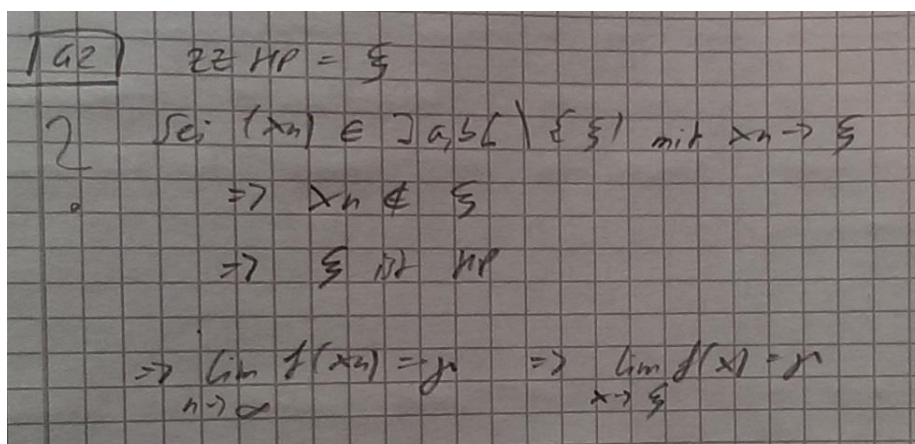


Abb.24 Aufgabe 42

Da die Studierenden die Aufgabe nicht lösen konnten, ist unten eine Lösungsmöglichkeit angeführt. Beim Vergleich der Bearbeitung der Studierenden und der angeführten Lösung ist zu erkennen, dass die Studierenden nicht das zeigen, was zu beweisen ist.

42) Es sei $\xi \in]a, b[$, $f:]a, b[\setminus \{\xi\} \rightarrow \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = y = \lim_{x \nearrow \xi} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \searrow \xi} f(x) = y$$

($\Leftarrow$) (x_n) beliebig mit $x_n \rightarrow \xi$ und $x_n > \xi \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = y$ impliziert $x_n \rightarrow \xi \Rightarrow f(x_n) \rightarrow y$.

Wegen $x_n > \xi \quad \forall n \in \mathbb{N}$ gilt daher $\lim_{x \searrow \xi} f(x) = y$.

analog: $\lim_{x \nearrow \xi} f(x) = y$.

($\Rightarrow$) (ε - δ -Definition)

$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = y$ heißt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in]\xi, b[: \xi < x < \delta \Rightarrow y - \varepsilon < f(x) < y + \varepsilon.$$

$\lim_{x \nearrow \xi} f(x) = y$ heißt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in]a, \xi[: -\delta < x < \xi \Rightarrow y - \varepsilon < f(x) < y + \varepsilon.$$

Beides ergibt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in]a, b[\setminus \{\xi\}: -\delta < x < \delta \Rightarrow y - \varepsilon < f(x) < y + \varepsilon.$$

Das heißt wiederum $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = y$ (laut Def.). $\square$

Abb.25 Aufgabe 42 Lösung

6.10. Stetigkeit einer Funktion (Aufgabe 43)

Dauer der Szene: ca. 46 Minuten

Involvierte Gegenstände und allgemeine Beschreibung:

Nach der Diskussion rund um die Aufgabe 42 wenden sich Anna, Flo, Ildiko, Lisa, Marie und Steffi der Aufgabe 43 zu. Sie verwenden dazu ausschließlich ihre Vorlesungsmitschriften. Die fünf Studentinnen und der Student sitzen um einen Tisch, die Unterlagen liegen am Tisch. Im Uhrzeigersinn aufgelistet sitzen sie wie folgt: Steffi, Flo, Lisa, Ildiko, Marie und Anna. Es stellt sich heraus, dass die Studierenden Schwierigkeiten haben, herauszufinden, was genau zu zeigen ist. An Hand der Definition für Stetigkeit, gleichmäßiger Stetigkeit und dem Satz von

Bolzano-Weierstraß versuchen sie die Aufgabe zu lösen. Schlussendlich brechen sie nach 46 Minuten ihren Lösungsprozess ohne Ergebnis ab.

Grobe Gliederung:

< 1 – 24 >	Auseinandersetzung mit Angabe, Klären der Problematik
< 25 – 46 >	Vergleich mit der Treppenfunktion
< 47 – 77 >	Problembewusstsein Schaffen, Begriff der Stetigkeit
< 78 – 181 >	Lösungsversuch Teil 1: gleichmäßige Stetigkeit
< 182 – 223 >	Lösungsversuch Teil 2: Verwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß

Aufgabenstellung:

Gegeben sei die stetige Funktion $f: [-1,1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$. Begründen Sie, warum f nicht als stetige Funktion auf ganz $[-1,1]$ fortgesetzt werden kann, d.h. es gibt keine stetige Funktion $g: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$.

Zeile	Name		Teilphase
1	Flo	Wir haben eine stetige Funktion und wir sollen zeigen, warum das nicht als stetige Funktion auf ganz(.) fortgesetzt werden kann.	Problem- bewusstsein schaffen
2	Lisa	Naja, weil für x durch Null kein Wert vorhanden ist. Die geht ja von unten (-) oder wie geht die (?)	Zugriff herstellen
3	Flo	Das impliziert ja das schon, oder (?) Wenn da steht ohne Null, das heißt ja praktisch schon, dass es nicht stetig auf diesen Bereich ist.	
4	Marie	Naja ich mein, ich glaub zum Beispiel, dass es ohne Null und ohne Zwei sein könnte.	
5	Flo	Ja, dann ist es auch nicht stetig, aber dieses ohne irgendetwas impliziert das ja schon. Und ohne Zwei geht schon gar nicht, weil das nicht im Intervall enthalten ist.	Problem- bewusstsein schaffen
6	Marie	Ohne ein Halb, im Definitionsbereich, wenn (-) Es ist ja stetig, wenn (-)	Zugriff herstellen
7	Flo	Wenns in jedem Punkt definiert ist, die Funktion.	
8	Lisa	Und da Eins durch Null oder irgendeine Zahl durch Null noch nicht definiert wurde oder so.	
9	Flo	Das sollten wir noch. (Lisa lacht)	Problem- bewusstsein schaffen
10	Marie	Aber ich mein, es steht ganz am Ende, dass es keine Funktion gibt, für alle x ungleich Null.	
11	Flo	Also es gibt keine stetige Funktion g im Intervall auf R mit g ist gleich f(.) für alle x (-)	
12	Anna	Ja, wir müssen das begründen. Dass es so ist, wissen wir ja.	Kommentar
13	Flo	Was hast du gesagt, ich hab das irgendwie nicht ganz gecheckt?	
14	Marie	Na es steht ja am Ende für alle x ungleich Null. Und das Null ist zwar im Definitionsbereich.	Problem- bewusstsein

15	Flo	Null ist eben nicht im Definitionsbereich, weils ja ohne ist.	schaffen
16	Lisa	Bei g schon.	
17	Marie	Ja, bei g schon.	
18	Flo	Ja, gut. Aber da steht ja auch, dass g gleich f ist. Aso, nein die Funktion.	
19	Marie	Ja, g von x ist gleich f von x. Aber ich mein, warum steht da am Ende für alle x ungleich Null (?) <i>(längere Pause)</i>	
20	Flo	Das heißt, es gibt keine stetige Funktion (-) Naja für alle x ungleich Null innerhalb diesen Intervalls gibt's keine richtige Funktion, weil da die Null vorkommt. Da ist sie nicht definiert, das wäre es eine Sprungstelle. <i>(längere Pause)</i> Aber ich wüsste nicht, wie man das beweisen soll, wenn man (-)	Zugriff herstellen
21	Anna	Wir müssen das nur begründen und das ham ma eigentlich schon. Begründen und Beweisen ist nicht dasselbe.	Problem- bewusstsein schaffen
22	Marie	Ja, das Begründen ist (...)	Zugriff
23	Flo	Das heißt, ich kann einfach hinschreiben, da x nicht Null sein darf.	
24	Marie	Weil Eins durch Null nicht definiert ist.	Problem- bewusstsein Schaffen
25	Lisa	Ja, das hab ich auch hingeschrieben. Aber ich weiß nicht, ob man das überhaupt hinschreiben darf. <i>(Pause)</i> Eine Funktion heißt stetig, wenn sie für jeden Wert x_0 , für jedes x_0 eben einen Wert bekommt.	
26	Marie	Nein, es ist nicht stetig, es können ja irgendwelche Werte rauskommen, irgendwo, weil die Treppenfunktion ist auch nicht stetig.	Zugriff schaffen
27	Lisa	Ja, aber wenn sie für jedes x einen Wert bekommt. Die Treppenfunktion hat ja auch nicht überall, eben weil der Graph nicht durchgeht.	
28	Marie	Doch, ich glaub schon, dass sie überall einen Wert hat, die Treppenfunktion.	
29	Flo	Welche Funktion?	
30	Marie	Die Treppenfunktion.	
31	Flo	D i e ist unstetig glaub ich.	
32	Marie	Ja, das heißt für jeden Wert, für jedes Argument hat sie einen Wert. Nein, ich weiß nicht. <i>(längere Pause)</i> Aber es war doch immer innerhalb eines Bereichs.	
33	Flo	Schau ma uns noch mal Stetigkeit an <i>(nimmt eine Mappe mit der Vorlesungsmitschrift aus seiner Tasche)</i> . Ich glaub auch, dass es in jedem Punkt definiert sein muss.	Problem- bewusstsein Schaffen
34	Marie	Aber das ist nicht genug, du kannst ja nicht (-) Die Treppenfunktion hat für jeden Wert ein Argument, aber sie ist trotzdem nicht stetig. <i>(Flo blättert in seiner Mappe)</i>	
35	Ildiko	Ja, wenn wir zeigen, dass x minus a ist kleiner als Delta, aber f von x minus f von a ist nicht kleiner Epsilon, dann ist die Funktion nicht stetig.	Klärung der Handlungs- optionen
36	Anna	Nochmal.	
37	Ildiko	Wenn x minus a kleiner Delta ist, aber f von x minus f von a nicht kleiner also größer Epsilon ist, dann ist die Funktion nicht stetig. Und das ist die Umkehrung. <i>(längere Pause)</i>	
38	Flo	Ja, die Treppenfunktion dürfte stetig sein.	Zugriff
39	Anna	Nein. Die Treppenfunktion ist nicht stetig.	
40	Flo	Da haben wir Beispiele: Stetigkeit von Funktionen.	
41	Anna	Die hat überall Sprungstellen, da ist sie nicht stetig.	
42	Marie	Sie ist zwar überall definiert, aber sie hat Sprungstellen.	
43	Anna	Und dann ist sie nicht stetig. <i>(Lisa schreibt, längere Pause)</i>	Problem- bewusstsein
44	Flo	Was schreibst du auf?	
45	Lisa	Es ist zu zeigen, sie ist nicht stetig.	

46	Flo	Ich glaub, mehr können wir dazu nicht sagen.	Kommentar
47	Marie	Aber zum Beispiel der rechtsseitige Limes gegen Null und der linksseitige Limes gegen Null sind ja beide Unendlich. Und dadurch, dass (?die sozusagen getrennt sind?).	Zugriff
48	Flo	Der rechtsseitige und der linksseitige gegen Null sind Unendlich.	
49	Marie	Von der positiven Seite kommend, geht's dann in, nein. Verdammt.	
50	Steffi	Aber das brauchen wir ja gar nicht, wir haben da den Grenzwert von minus Eins bis Eins. (<i>längere Pause</i>)	Kommentar
51	Marie	Also ich würd sagen, dass es gegen Unendlich geht.	Zugriff schaffen
52	Flo	Aber wieso geht das dann nach Unendlich?	
53	Anna	Na, in dem Fall geht das nicht gegen Unendlich. (<i>längere Pause</i>)	
54	Marie	So gesehen verstehe ich nicht, warum die Funktion f stetig ist.	Problem-bewusstsein
55	Anna	Weil da der Nuller ausgenommen ist.	Zugriff herstellen
56	Flo	Da steht ja, kann nicht als stetige Funktion angesehen werden.	
57	Steffi	Aber die Funktion f ist stetig, weil sie ohne Null ist.	
58	Marie	Da steht (<i>liest Angabe vor</i>) gegeben sei eine stetige Funktion f von minus Eins bis Eins ohne Null auf $\mathbb{R}$, wo x in die (?Einzelfolgen?)	
59	Flo	Aso.	
60	Marie	Und dann kann f nicht als stetige Funktion auf ganz minus Eins bis Eins fortgesetzt werden.	
61	Steffi	Weil da ist ja die Null dabei.	
62	Lisa	Als Ganzes ist sie eh nicht stetig, aber ohne Null ist das stetig (<i>zeigt auf den linken Definitionsbereich in der Angabe</i>) und das stetig (<i>zeigt auf den rechten Definitionsbereich in der Angabe</i>).	
63	Marie	Aber stetig ist ja, so ganz einfach betrachtet, wenn man es in einem Graphen zeichnen kann.	
64	Lisa	Ja, schon. Wenn du aber (-) Es gibt ja zwei Definitionswerte, der von minus Eins und der von plus Eins. Wenn man das so betrachtet, sind es dann zwei.	
65	Steffi	Minus Eins bis kurz vor Null und kurz nach Null bis plus Eins.	Erläuterung
66	Lisa	Die zwei Funktionen können als stetig angesehen werden, aber diese zwei in eines, in einen Definitionsbereich verpackt, können nicht als stetig angesehen werden. Wenn du das, diese zwei f, nur f, dann ist das nicht stetig, aber dass eben f von minus Eins bis eben kurz vor Null. Ich weiß es auch nicht. Ab kurz vor Null bis Eins, dann kann es als stetig angesehen werden, nein als unstetig, oder was war das jetzt? Wenn das quasi verbunden ist.	
67	Flo	Wenn es verbunden ist, ist es unstetig. Und was hat das jetzt mit dieser Funktion g hier zu tun?	Problem-bewusstsein Schaffen
68	Lisa	Da haben wir (-)	
69	Steffi	Na das sagt genau die Zeile aus (<i>Anm.: $g(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$</i>). Es steht auch das gleiche. Da ist nur noch mal erklärt, dass die Null ausgelassen wird.	
70	Marie	Ich bin mir nicht sicher, ob wir das richtig verstanden haben.	Kommentare
71	Flo	Ja, das is ja auch nur so eine Wischiwaschi-Frage. (<i>Lachen</i>)	
72	Steffi	Nur zum Verwirren.	Zugriff
73	Marie	Ja, weil ma nicht genau weiß (-) Aber wir gehen so, dass man von minus Eins kommt, dann gegen minus Unendlich geht. Und dann plötzlich plus Unendlich ist, weil oft ist es so,	

		dass (-)	
74	Steffi	Aber eigentlich geht da gar nix gegen Unendlich.	
75	Marie	Was? Na wenn minus Eins gegen Null geht.	
76	Flo	Da schau, es geht ja immer weiter runter und runter. Bei Null hat man quasi eine Asymptote.	
77	Marie	Aber es steht ja begründen, oder (?)	Kommentar
78	Lisa	Ja. (<i>liest aus ihrer Mitschrift vor</i>) Wenn f gleichmäßig stetig ist, dann ist f stetig in allen Elementen des Definitionsbereiches. Ja, das stimmt. Mit allen Elementen im Definitionsbereich ist f stetig.	Klärung der Handlungsoptionen
79	Flo	Ja, weil ja Null ausgeschlossen ist.	Prüfen
80	Anna	Ich glaub, das reicht.	Kommentar
81	Lisa	Und der Satz (<i>liest weiter vor</i>), wenn das Intervall $[a, b]$ ist beschränkt und abgeschlossen, dann ist f gleichmäßig stetig. Insofern gesehen ist unsere Funktion gleichmäßig stetig.	Klärung der Handlungsoptionen
82	Flo	Richtig.	Prüfen
83	Lisa	Weil wir ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall haben und indirekt: Angenommen die Funktion ist nicht gleichmäßig stetig, existiert ein Epsilon Null, das größer Null ist für alle (-)	Klärung der Handlungsoptionen
84	Flo	Vielleicht hätten wir das so machen sollen.	
85	Lisa	Ja, ich glaub, dass wir da etwas (-)	
86	Ildiko	Da haben wir indirekt, weil hier ist das Gegenteil.	
87	Lisa	Ja, dann müssen wir das für alle Epsilon größer Null existiert ein (-)	Anpassen
88	Ildiko	Ja, genau.	
89	Anna	Welche Vorlesung ist das?	
90	Lisa	Fünft Punkt Vierzehn: Gleichmäßige Stetigkeit.	
91	Marie	Also dieses x minus x Strich in diesen Bereich wird nicht funktionieren	Problem- bewusstsein schaffen
92	Lisa	Wir haben ja gesagt, dass Eins durch x keine stetige Funktion ist. Vierzehn: stetige Funktionen. (<i>blättert in ihrem Skript, längere Pause</i>) f ist stetig in a Element vom Definitionsbereich, wenn für alle Epsilon größer Null ein Delta größer Null existiert, sodass x auch ein Element ein Definitionsbereich, Betrag von x minus a kleiner Delta impliziert f von x minus f von a ist kleiner als Epsilon.	
93	Flo	Ja, das haben wir aufgezeichnet.	
94	Lisa	Ich glaub, ich weiß, was du meinst.	
95	Flo	(<i>schlägt auch seine Mitschrift auf und blättert darin</i>) Das hab ich verstanden von der Erklärung her.	
96	Ildiko	Also ich glaub, wir müssen Delta so wählen, dass f von x minus f von x Strich ist größer gleich dem Epsilon.	
97	Flo	Hier, das ist eine kleine Zeichnung gewesen. Ich kanns auch noch mal größer aufzeichnen (<i>zeichnet ein Koordinatensystem</i>). Da haben wir eine Funktion, die so ausschaut und dann hatten wir ein, wart einmal(,) ich kanns grad nicht lesen. Das ging dann da bei Eins und da war dann a laut Definition und hier haben wir ein $f(a)$ und wenn ich hier ein Epsilon mach. Also hier mein plus Epsilon und mein minus Epsilon nehm, dann muss das a innerhalb dieses Bereichs sein. a ist dann drinnen.	
98	Lisa	Ja, das ist dann die Epsilonumgebung.	Zugriff herstellen
99	Flo	Ja, weil du da ein beliebiges Epsilon wählst, muss die Funktion (?sich dort um Epsilon?), also $f(a)$ und was war das zweite?	
100	Lisa	Da haben wir eh gleichmäßige Stetigkeit. f von x ist gleich	

101	Flo	Eins durch x im Definitionsbereich von Null bis Eins stetig in a fordert in jedem Fall ein Delta größer (-) Kleiner a.	
102	Lisa	Stimmt, ich kann nicht mehr lesen.	
103	Flo	Stimmt, das ist ein Delta da oben kein Epsilon, tschuldigung. Das ist plus Delta.	
104	Marie	Und beim a ist das Epsilon.	
105	Flo	Ja, wenn du dann ein Delta auswählst (-)	
106	Lisa	Könnten wir quasi zwei Funktionen machen, f ist zum Beispiel ähm minus Eins bis Null und dann halt f Strich ist Null bis Eins, so ist es bei unserer Funktion, oder (?)	
107	Flo	Ähm, ist es dann offen?	
108	Lisa	Bitte?	
109	Marie	Das sind zwei halb offene Intervalle.	
110	Lisa	Es geht von (-)	
111	Flo	Ich versteh grad nicht, warum beim Nuller offen ist.	
112	Marie	Na weil (-)	
113	Flo	Ja, stimmt, stimmt (!)	
114	Marie	Aber ich find trotzdem (-) Mein Problem ist der Übergang von negativ zu positiv. Ich find, das ist blöd.	
115	Lisa	Was meinst du?	
116	Marie	Na weil es nach unten geht und man beim Zweiten halt von oben kommt. Aber ich (-)	
117	Anna	Aber Null wird ja ausgenommen.	
118	Marie	Ja, aber ich weiß nicht, wenn es doch stetig ist und plötzlich bin ich an einem ganz anderen Ort.	
119	Lisa	Wenn du die Null nicht ausgeschlossen hättest, dann wärs eh nicht stetig.	
120	Flo	Da kannst du dir praktisch vorstellen, dass da noch eine Stricherlinie ist, weil da Null aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen ist und da gehst dann wieder weiter.	
121	Marie	Aber ich find, das ist so wie eine Treppenfunktion. g hat bei Eins den Wert Eins und da ich bin dann plötzlich wo völlig anders.	
122	Anna	Aber da sind alle Werte dabei.	
123	Marie	Eben, wenn ich Null ausschließe aus dem Definitionsbereich, ist es ja genauso. Aber es ist nicht stetig.	
124	Anna	Es ist stetig, wenn die Null weg ist, weil alle anderen werden getroffen.	
125	Marie	Mein Problem ist, dass die Werte, die Funktionswerte einen großen Unterschied, also einen großen Abstand voneinander haben. Ich bin ganz nah bei Null eine riesengroße negative Zahl und dann geh ich weiter und bin plötzlich bei einer riesengroßen positiven Zahl. Da ist doch ein Abstand.	
126	Steffi	Na, des derf ma net so sagen.	
127	Marie	Also, ich kann (-) Für mich ergibt das keinen Sinn.	Kommentar
128	Flo	Sie findets blöd, dass wenn das g a n z weit unten ist (<i>macht eine Skizze auf seinem Block, Steffi, die neben ihm sitzt schaut zu</i>), dass dann praktisch der nächste Schritt g a n z weit oben ist. (...) Aber wenn Null ausgeschlossen ist, dann ist es stetig.	Resümee
129	Lisa	Muss ich dann, wenn ich ein anderes Intervall(,) muss Delta trotzdem kleiner a sein, oder (?) Ich hab das jetzt in f_1 und f_2 aufgespalten und Eins durch x muss im Definitionsbereich Null und Eins stetig sein in a.	Anpassen
130	Ildiko	Kann man nicht nur Delta wählen, zum Beispiel Ypsilon hoch Zwei. Dann ist sicher größer Epsilon.	Zugriff herstellen

131	Lisa	Sagen wir einmal Delta kleiner a. Also hier ist Eins, dann wähl ich hier mal mein a. Das ist quasi ein Halb bei mir. Dann hab ich hier f von a, f_2 von a.	
132	Marie	Aber angenommen, das Epsilon wäre so groß, dass man von hier bis hier geht.	
133	Flo	Das geht jetzt in dem Fall nicht, weil sie hier zwei Funktionen gemacht hat, da darfs da nicht rübergehen.	
134	Lisa	Dann wähl ich ein Delta.	
135	Flo	Was dann kleiner ist als a.	
136	Lisa	Was dann kleiner als mein a ist. Das heißt, es muss hier irgendwo sein.	Anpassen
137	Flo	Nein, größer als ein Halbes. Ein Halb in dem Fall.	
138	Marie	Das ist der Abstand.	
139	Lisa	Das heißt es muss kleiner als ein Halb sein.	
140	Flo	Nein, von hier (-) Null Komma Vier oder so.	
141	Marie	Nein, es muss weniger als dieser Abstand sein.	
142	Lisa	Warum?	
143	Marie	Hast du jetzt Null Komma Vier genommen?	
144	Lisa	Es muss kleiner sein. Null Komma Fünf darf ich nicht mehr nehmen?	Zugriff schaffen
145	Flo	Es muss streng kleiner sein. Genau, dann ist das a eingeschlossen.	
146	Lisa	Dann ist das eben Delta, dann ist das meine Deltaumgebung, oder wie (?)	
147	Flo	Epsilonumgebung.	
148	Lisa	Also quasi ist das Delta das Bild von der Epsilonumgebung.	
149	Flo	Das klingt gut, ja.	
150	Lisa	Ok, und das ist plus oder minus. Ich weiß nie, was jetzt plus und was jetzt minus ist. Alles, was kleiner ist als a, ist minus.	
151	Marie	Du hast einen Abstand, der Epsilon breit ist. Also du hast hier zum Beispiel a und dann einen Abstand. <i>(Lisa überreicht Marie, die vis-à-vis von ihr sitzt, ihren Block mit der Skizze, Marie schreibt Bemerkungen hinzu)</i> Der ganze Abstand ist Epsilon und das ist a plus Epsilon und das ist a minus Epsilon. <i>(Marie gibt Lisa ihren Block zurück)</i>	
152	Lisa	Ist das nicht umgekehrt?	
153	Marie	Ich schreib verkehrt, insofern keine Ahnung.	
154	Lisa	Aso ja, ok.	Prüfen
155	Flo	Aber was ist, wenn das größer ist als a? Warum muss es streng kleiner sein als a?	
156	Lisa	Ich hab keine Ahnung, das ist halt laut Definition.	
157	Ildiko	Na ich glaub, es ist nur in diesem Beispiel so, weil (...)	Zugriff herstellen
158	Lisa	Bei f_1 weiß ich nicht, ob a kleiner oder größer Delta sein soll. Da hab ich jetzt wieder meinen Einser. <i>(fertigt Skizze an)</i> Eins. Und dann wähl ich hier mein a. Dann hab ich da ein f_1 von a. Dann hab ich da Null Komma Fünf, das heißt ich wähl Null Komma Vier wieder. Ups, das ist jetzt schirch. Delta muss trotzdem kleiner a sein. Dann hab ich da Epsilon minus und Epsilon plus.	
159	Flo	Nein, weil wenn das zum Beispiel größer wär, zum Beispiel Null Komma Sechs, dann wärst du hier und dann wär praktisch ein weiterer Epsilonbereich gegeben, aber dann müsste es kleiner sein. Es könnte ja auch größer sein.	
160	Marie	Außerdem find ich, hätten sie da auch Betragsstriche einbauen können(,) sollen.	
161	Lisa	Können wir damit etwas anfangen? Schon oder?	begleitende Kommentare
162	Flo	Naja, wir müssten ja zeigen (-)	

163	Lisa	Jetzt mussten wir das zeigen, wenn f gleichmäßig stetig ist, dann ist f stetig in jedem a Element vom Definitionsbereich, das heißt für alle ϵ größer Null also für diese hier, da sind ja die ϵ s kleiner Null. Hier ist unser Minusbereich, hier unser Plusbereich. Also für alle ϵ größer Null existiert $(-)$	Erläuterung
164	Flo	Das heißt es ist egal ob minus oder plus, weil das ϵ ist in dem Fall auch größer Null.	
165	Marie	ϵ ist Abstand und ein negativer Abstand $(-)$	
166	Lisa	Ah, ok. Für mich ist ϵ komischerweise immer ein Zahlenwert. Für alle ϵ größer Null existiert ein δ größer Null, sodass für alle x und x Strich, aber was ist in unserem Fall x Strich?	
167	Flo	Da kannst ein zweites nehmen, ein zweites a zum Beispiel.	Anpassen
168	Lisa	Ok.	
169	Flo	Und das x Strich muss halt kleiner als x sein, oder (?) Sonst wäre $(-)$ Nein, ist eh der Betrag, das ist egal.	
170	Lisa	Ok.	
171	Flo	Das muss kleiner δ sein.	Kommentare
172	Lisa	x ist von der Funktion oder von wo (?) Also ist das unser x und nicht unser a . Das haben wir einfach nur vertauscht.	
173	Flo	Ja, ganz x und das heißt wir hätten praktisch schon zwei x . Wir müssen zeigen, dass es kleiner als δ ist.	
174	Ildiko	Müssen wir nicht a benutzen, weil man zeigt, dass es gibt keine stetige Funktion.	
175	Flo	Ja, wenn es gleichmäßig stetig ist, dann $(-)$	Anpassen
176	Lisa	Ok, ich wähle δ gleich Eins durch n . Das ist eine Folge in einem beschränkten Intervall. <i>(schreibt, längere Pause)</i> Ahm, und unser x und $(-)$ Können wir ϵ nehmen? Ich hasse x Strich.	
177	Flo	Na ϵ wäre blöd, weil wir brauchen einen zweiten x -Wert im Prinzip. Wir können es a nennen, so wie wir <i>(zeigt mit dem Finger auf des Skript)</i> das a gehabt haben. ϵ wär dann praktisch das b .	
178	Lisa	Ich hasse x Strich. Also x Strich ist Element aus dem Intervall. Und bei uns ist das, nennen wirs f_1 und dann ist das f_2 , sodass $(-)$ x_n minus x Strich n kleiner δ impliziert, dass f_2 von x minus f_2 von x Strich, der Betrag kleiner ϵ ist.	
179	Flo	In welcher Zeile bist du jetzt?	begleitende Kommentare
180	Lisa	Ich bin jetzt hier. <i>(zeigt mit dem Finger auf die entsprechende Zeile)</i>	
181	Flo	Und wie kommen die auf ein x_n ?	Klärung der Handlungs- optionen
182	Lisa	Das ist ja die Folge $(-)$ Äh, ich hab, ja nein, kein x_n . Dann hab ich eben das als Folge . Und wenn ich δ als Eins durch n nimm, dann ist das eine Folge in einem beschränkten Intervall und der Satz von Bolzano-Weierstraß sagt, dass jede beschränkte Folge x_n eine konvergente Teilfolge x_{n_k} hat.	
183	Flo	Und das k geht gegen x_0 .	Anpassen
184	Lisa	Ich weiß jetzt nicht, was das x_0 ist. [...]	
185	Marie	Aber das war mein erstes Semester, ich war einfach nur verloren. [...]	Kommentar
186	Lisa	δ ist Eins durch n . x_n minus x Strich n .	Anpassen
187	Flo	Im Prinzip schreibst du das jetzt ab.	
188	Lisa	Nein, nicht ganz im Prinzip. Und das impliziert, dass f von x_n minus f Strich von x_n kleiner ϵ ist. Also muss ich das x Strich n , also das x Strich kleiner sein, [nein muss nicht kleiner sein als x .]	

189	Flo	Das ist ein Betrag.	
190	Marie	Ja, das ist (...)	
191	Lisa	Ok. Was hat der Professor da auf die Tafel geschrieben? (<i>Flo lacht</i>) Ok, den Satz von Bolzano-Weierstraß.	Kommentare
192	Flo	Das ist dieses komische x_0 wieder, was wieder innerhalb des Intervalls liegt.	Erläuterung
193	Lisa	Hat jede beschränkte Folge, (<i>schreibt, Pause</i>) Folge x_n eine Teilfolge, x_{n_k} . Was sagt mir diese Teilfolge?	
194	Flo	Dass es wieder konvergiert, dass es ein Häufungspunkt ist das x_0 .	
195	Lisa	Mit den Limes x_{n_k} gleich x_0 mit k gegen Unendlich. Das sagt mir so viel, wow. Element vom Intervall Null bis Eins.	Zugriff schaffen
196	Flo	Aber das heißt ja, dass wir eine Teilfolge kriert haben und der Häufungspunkt x_0 ist. Das heißt, wenn wir eine Teilfolge haben, ist x_0 auch der Grenzwert von der Folge. Oder (?)	
197	Lisa	Und das war eben da der Widerspruch, das ging ja nicht. (<i>zeigt auf den Beweis des Satzes im Skript</i>)	
198	Ildiko	Wir müssen zeigen, dass es bei uns kein Widerspruch ist.	Problem- bewusstsein
199	Lisa	Warum ist es bei uns kein Widerspruch? Das ist die Frage.	
200	Flo	Ich bin grad bei der Zeile, ich verstehe nicht. Diese Teilfolge (<i>zeigt auf den Beweis vom Satz von Bolzano-Weierstraß in Lisas Skript, längere Pause</i>)	Kommentar
201	Ildiko	Ja, bei uns ist dieser Widerspruch, dass der Limes vielleicht f von x_0 ist und das ist Widerspruch zu f von x_{n_0} ist f von x_n kleiner Epsilon.	
202	Lisa	Wie meinst du?	
203	Ildiko	(...)	Zugriff schaffen
204	Lisa	Na das ist ja der Limes von f von x_{n_k} mit k gegen Unendlich ist f von x_0 , das ist ja dasselbe wie, wenn ich das da schreib, hm. Ok, das da. (<i>längere Pause</i>) Da haben wir eine Dreiecksungleichung gemacht, dann gilt auch Limes von x_{n_k} mit k gegen Unendlich ist gleich (-)	
205	Flo	Das ist kompliziert, wie er das hingeschrieben hat.	Kommentar
206	Lisa	Der Limes ändert sich ja nicht für dieses, eigentlich können wir uns das jetzt wegdenken, Limes x_{n_k} mit k gegen Unendlich ist gleich Limes von x_{n_k} Strich, x Strich n_k und k gegen Unendlich und das muss x_0 ergeben.	Zugriff herstellen
207	Flo	Na der erste da ergibt x_0 , das, was wir vorher aufgeschrieben ghabt haben und dieser ganze Teil ergibt Null. Das ist praktisch wieder Null auf komplizierte Art noch mal hingeschrieben.	Erläuterung
208	Lisa	Ok.	
209	Flo	Und wenn ma das dann umdreht, du kannst ja da das gleiche noch amal anwenden.	
210	Lisa	Ja.	Zugriff herstellen
211	Flo	Wart amal. (<i>längere Pause, Flo nimmt seine eigene Mitschrift aus seiner Tasche und schlägt sie auf</i>) Ich hab bei mir stehen, dass f in x_0 stetig ist, deswegen geht das.	
212	Lisa	Ich bin einfach zu blöd, das zu kapieren. (<i>Marie lacht</i>) Dass ich das jemals behirn.	
213	Flo	Wir verstehens ja, was gemeint ist, aber das zu zeigen (-)	Kommentare
214	Marie	Aber bei mir, ich bin mir dann oft nicht mehr sicher, ob ich wirklich versteh, was gemeint ist. (<i>lacht</i>)	
215	Ildiko	Wir wollen zeigen, dass diese Folge, die Funktion nicht gleichmäßig stetig is.	Problem- bewusstsein
216	Lisa	Wir machen das so, wir gehen das einfach indirekt an. Dann haben wir das so wie im Skript. Wir gehen einfach indirekt an	Klärung der Handlungs-

		das heran.	optionen
217	Flo	Aber du willst die ganze Funktion nehmen(,) auf dem gesamten Intervall?	
218	Ildiko	Ich glaub, man muss nur (?eine Teilfolge so wählen?), sodass es dort das x_0 ist.	
219	Marie	Man muss ja nur begründen, warum es, in dem Fall ist Null nicht im Definitionsbereich, stetig ist. Also wenns schon im Definitionsbereich ist, aber anscheinend nicht gewählt wird, nicht stetig ist. [...]	
220	Lisa	So wir beginnen also indirekt. (schreibt, längere Pause) [...] f_2 haben wir da.	Zugriff schaffen
221	Flo	Dann musst du das aber für f_1 auch zeigen.	
222	Lisa	Stimmt, das hab ich vergessen. (Flo lacht) Widerspruch zu (-)	
223	Flo	Das heißt, das ist eh wieder dasselbe. [...]	

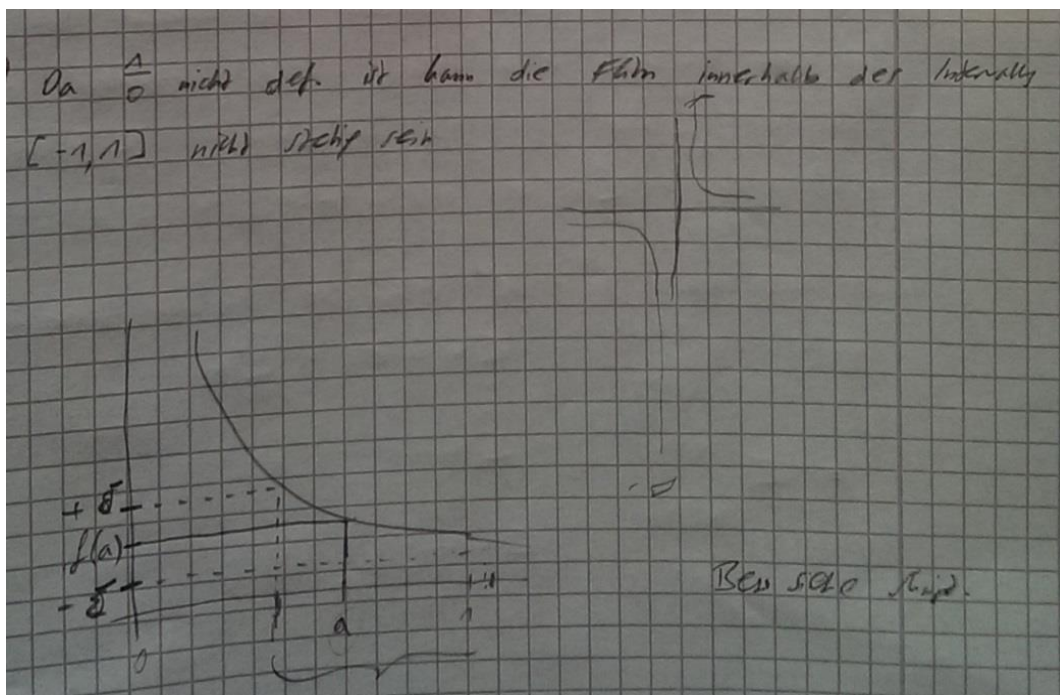


Abb.26 Aufgabe 43

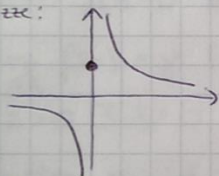
Die Studierenden finden keinen Zugang zur Aufgabe, daher scheitert ihr Lösungsversuch. Nachfolgend ist aus diesem Grund ein Lösungsvorschlag abgebildet.

43) Angenommen $\exists g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g(x) = f(x)$
 $\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.

g stetig in 0 $\stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [-1, 1] : -\delta < x < \delta$
 $\Rightarrow g(0) - \varepsilon < g(x) < g(0) + \varepsilon$

Insbesondere gilt also für ein beliebig gewähltes ε (z.B. $\varepsilon = 1$),
dass $\exists \delta > 0 \forall x \in (0, \delta) : 0 < x < \delta \Rightarrow g(x) < g(0) + \varepsilon$

Skizze:



$f(x)$
 $\frac{1}{x}$

Variante 1: Sei $(x_n)_{n \geq m}$, $x_n := \frac{1}{n}$, wobei m so groß ist,
dass $\frac{1}{m} < \delta$. Dann ist $\forall n \geq m : x_n \in (0, \delta)$, also muss
 $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{x_n} < g(0) + \varepsilon$ sein. Widerspruch, denn $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$),
also gilt $\frac{1}{\frac{1}{n}} = n \rightarrow \infty$.

Variante 2: $x_n := 0$. Dann $g(x_n) \rightarrow g(0)$
 $y_n := \frac{1}{n}$. Dann $g(y_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \rightarrow \infty$. $\square$

Abb.27 Aufgabe 43 Lösung

6.11. Lebenslauf

Angaben zur Person

Vor- und Nachname: **Michaela REICHARDT**

Staatsbürgerschaft: Österreich

Geburtsdatum, Geburtsort: 23. Dezember 1990, Eisenstadt, Österreich

Ausbildung

01.10.2009 – dato Universität Wien,
Lehramt Französisch Mathematik

01.02.2013 – 30.06.2013 Université de Sorbonne (Paris IV),
Auslandssemester mit Schwerpunkt Langue
Française und Littérature française

01.09.2000 – 30.06.2009 BG/BRG/BORG Eisenstadt, Kurzweise
Gymnasium mit Schwerpunkt Sprachen
Reifeprüfungszeugnis mit Auszeichnung

Berufserfahrung

07.10.2013 – 09.03.2014 Vertragslehrerin im BG/BRG/BORG
Eisenstadt, Kurzweise

Persönliche Eigenschaften

wissbegierig, zielstrebig, geduldig, teamfähig, kreativ, fair, Organisationstalent

Interessen

lesen, reisen, wandern, schwimmen, Rad fahren, Bodywork, kochen