

Diplomarbeit

Titel der Diplomarbeit

**„Vom Zählen zur Mathematik- Die Mathematik in
den alten Hochkulturen“**

Verfasserin

Denise Jäger

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

Wien, 2014

Studienkennzahl lt. Studienblatt : A 190 406 299

Studienrichtung lt. Studienblatt : Lehramtsstudium UF Mathematik UF Psychologie und
Philosophie

Betreuer : ao. Univ.- Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Inhaltsverzeichnis

1.	EINLEITUNG	1
1.1	ZUR GESCHICHTE DER ZAHLEN - ZAHLEN, ZÄHLEN, FIGUREN	2
2.	WESHALB MATHEMATIK - AUS WELCHEN GRÜNDEN SICH DIE MATHEMATIK ENTWICKELTE	6
3.	DIE MATHEMATIK IN DEN ALTEN STROMTALKULTUREN	9
3.1	MESOPOTAMIEN	9
3.1.1	Historische Einführung und die Entwicklung der Keilschrift	9
3.1.2	Zahlschrift - Zahlssystem	16
3.1.3	Algebra und Arithmetik in Mesopotamien	22
3.1.4	Geometrie in Mesopotamien	25
3.2	DAS ALTE ÄGYPTEN	29
3.2.1	Historische Einführung und die Entwicklung der Hieroglyphen	29
3.2.2	Zahlschrift - Zahlssystem	35
3.2.3	Algebra und Arithmetik im alten Ägypten	41
3.2.4	Geometrie in Ägypten	45
4.	DIE MATHEMATIK IN DEN ASIATISCHEN KULTUREN	50
4.1	CHINA IM ALTERTUM	51
4.1.1	Historische Einführung in das chinesische Altertum - Zhoubi suanjing und Jiuzhang suanshu	51
4.1.2	Zahlendarstellung und Rechenbrett	57

4.1.3	Algebra und Arithmetik im chinesischen Altertum	62
4.1.4	Geometrie im chinesischen Altertum	65
4.2	INDIEN IM ALTERTUM	71
4.2.1	Historische Einführung in das indische Altertum	72
4.2.2	Zahlschrift - Zahlssystem	74
4.2.3	Arithmetik und Algebra im indischen Altertum	76
4.2.4	Geometrie im indischen Altertum - Die Sulbasutras	78
 5.	ZUSAMMENFASSUNG	84
 6.	DIE WEITERENTWICKLUNG DER ALGEBRA	87
 7.	ABSTRACT	93
	ABBILDUNGSVERZEICHNIS	96
	LITERATURVERZEICHNIS	99

1. Einleitung

Die moderne Mathematik ist universell und ihre Anwendungen sind in den Naturwissenschaften, der Kunst, der Industrie usw. zu finden. Schon lange beschränkt sich die Mathematik nicht mehr auf das „bloße Rechnen“. Stewarts schreibt diesbezüglich: *„Gegenstand der modernen Mathematik ist weniger die Manipulation von Ziffern als die Beschreibung von Strukturen, Formen und Mustern“* (Stewarts, 2010, S. 9).

Doch bis heute beruht sie auf der Zahl, womit sie auch begann. Mathematiker unterschiedlichster Kulturen entwickelten über die Zeit hinweg eine markante Anzahl an mathematischen Disziplinen, die sich wiederum in viele Unterdisziplinen bzw. Unterthemen aufspalten: Analysis, Algebra, Geometrie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Topologie u.v.m. Heute gibt es weltweit über 50 000 forschende Mathematiker, die die Welt der Mathematik Jahr für Jahr mit neuen Erkenntnissen aus allen Disziplinen bereichern. Doch was ist die Zahl eigentlich? Bekanntlich ist es viel einfacher mit Zahlen zu arbeiten, als erklären zu müssen, was eine Zahl genau ist. Zahlen sind keine Dinge, denn ich kann sie nicht „anfassen“, aber sie beschreiben Dinge, die man doch sehr wohl anfassen kann, beispielsweise „zwei Tassen“. Nichtsdestotrotz beruht unsere Welt, das Funktionieren unserer Gesellschaft darauf (vgl. Stewarts, 2010, S. 9). In den folgenden Kapiteln wird die Geschichte der Mathematik im Altertum erzählt, genauer gesagt die Entwicklungsgeschichte der Mathematik, deren Ursprünge in den alten Hochkulturen Mesopotamiens, Ägyptens, Chinas und Indiens liegen. Diese Menschen waren die Wegbereiter, leisteten Pionierarbeit und so wurde im Laufe vieler tausend Jahre ein „Schema“ erschaffen, dass wir heute Mathematik nennen. Die Mathematik ist aus den unterschiedlichsten Bedürfnissen, Notwendigkeiten und Motiven heraus entstanden, wobei die Entwicklung keineswegs gleichmäßig stattfand und auch nie zum Erliegen kam. Auch heute ist

die Mathematik ein Prozess der weiterhin anhält und ständig erweitert und verfeinert wird. (vgl. Stewarts, 2010, S. 278) Wo aber befinden sich die Wurzeln eigentlichen mathematischen Denkens? Was hat die Menschen der Hochkulturen angetrieben Mathematik zu betreiben und welchen wissenschaftlichen Stand hat die Mathematik zu jener Zeit erreicht? Dies sind Fragen, denen ich im Zuge dieser Arbeit auf den Grund zu gehen versuche. Doch zu allererst ist wichtig, dem Ursprung des Ganzen nachzugehen. Das folgende Kapitel beschäftigt sich, natürlich nur überblicksmäßig, mit der prähistorischen Menschheitsgeschichte, über das Leben der Menschen in der Steinzeit bis zum Werdegang zum sesshaften Menschen und der damit verbundenen Geschichte bzw. Entstehung der Zahlen und des Zahlbegriffs.

1.1 Zur Geschichte der Zahlen - Zahlen, Zählen, Figuren

Die Wiege der Menschheit liegt wie bekanntlich in Zentralafrika, wo die Menschen bereits vor 20 000 Jahren und mehr eine Vorstufe des Zählens und Rechnens betrieben. Das heißt also, dass der Mensch bereits in prähistorischer Zeit erste Vorstellungen von Zahl und Form entwickelte, wobei er vermutlich nur „zwei“ und „viele Dinge“ zählte. Heute geht man davon aus, dass die ersten Entwicklungen von Zahlen und Zählen 20 000 bis 30 000 Jahre zurückliegen, also ihre ersten Anfänge in der älteren Steinzeit nahmen. Zu jener Zeit waren die Menschen noch Höhlenmenschen und die Bedingungen unter denen sie lebten, unterschieden sich kaum oder nur wenig von denen der Tiere. Sie waren Jäger und Sammler und jagten ihre Beute mit Keulen oder Wurfspeeren. Bei archäologischen Funden fand man geometrische Ornamente, Figuren oder Malereien, die in die spätere Steinzeit datiert werden. Besonderes Aufsehen erregten beispielsweise die Höhlenmalereien in Spanien und Frankreich, welche ungefähr vor 15 000 Jahren entstanden sind. Vor etwa 10 000 Jahren begann die mittlere Steinzeit, welche auch den Beginn der Sesshaftigkeit kennzeichnet. Dieser

Prozess könnte durch das Schmelzen des Eises über Asien und Europa bedingt worden sein. Menschen wurden zu Bauern, errichteten erste Dörfer und begannen mit dem Ackerbau. Sie legten Dämme und Gräben mit einfachsten Werkzeugen an und entwickelten hierbei bereits erste geometrische Kenntnisse. Durch die Erfordernisse und Handlungen des Alltags wurden immer mehr Kenntnisse erforderlich und das Verständnis von Zahl und Form wuchs und entwickelte sich weiter. Mit dem Übergang der Altsteinzeit in die Jungsteinzeit, welche als neolithische Revolution bezeichnet wird, begann die Viehzucht. Schafe, Schweine, Pferde und Rinder wurden domestiziert, wobei Letzteres als Pflugtier für den Ackerbau eingesetzt wurde. Die Bauwerke der Megalithkulturen aus jener Zeit, welche im Westen und Süden Europas angesiedelt waren, zeugen von einem hohen Stand geometrischer, technischer und astronomischer Kenntnisse.



Abbildung 1: Stonehenge (Südengland): das größte erhaltene Steindenkmal Europas aus dem 3./2. Jahrtausend (Quelle: Scriba/Schreiber, 2001, S. 9)

„Der berühmte Steinkreis von Stonehenge (Abb. 1), der weniger bekannte Ring of Brogar und die Steinzeitsiedlung Skara Brae auf den Orkney- Inseln, die Kuppel- und Ganggräber mit Spiralmotiven in Irland und Frankreich, die Steinsetzungen in der Bretagne, die Taulas und Talayots auf Menorca und die Steinzeittempel auf Malta“ (Alten, Naini, Folkerts, Schlosser, Schlote, Wußing, 2003, S.2). Mit dem Bau dieser Werke gehen auch die Entwicklung des Zahlbegriffs und die Einführung von Zahlzeichen

einher. Die Fähigkeit des Zählens ist eines der Fähigkeiten, die nur uns Menschen eigen ist. Aus Beobachtungen haben Forscher jedoch herausgefunden, dass einige Säugetiere (z.B. Vögel) kleinere Unterschiede bei Futtermengen oder bei der Anzahl ihrer Nachkommen differenzieren können. Fehlt also eine Futtermenge oder sogar eines ihrer Nachkommen, kann es kurzfristig zur Aufruhr der Tiere kommen. Forscher gehen davon aus, dass auch zu Beginn beim Menschen diese Fähigkeit entwickelt war. Sie konnten also Unterschiede in den Mengen konkreter Gegenstände erfassen (vgl. Wußing, 2008, S. 7). Wußing schreibt außerdem: *„Ethnografen berichteten zu Anfang des 20. Jahrhunderts von Expeditionen zu Völkerstämmen, die sich noch auf der Stufe der Steinzeitkultur befanden, in Zentralafrika, Ozeanien, Zentralamerika. Man zählte dort „eins“, „zwei“, „einige“, „viel““* (Wußing, 2008, S.7).

Der Wandel des gesellschaftlichen Lebens im Laufe der Zeit führte zu Handel und Austausch verschiedenster Güter zwischen Menschen und Völkern und somit war das Erfordernis von Zahlen und Zahlwörtern gegeben. Die Menschen kannten zwar keine Symbole für Zahlen oder eine Schriftsprache, doch auf irgendeine Art und Weise musste die Güterteilung stattfinden. Auch damals gab es schon Buchhalter, die „Buch darüber führen mussten“, wem was gehörte. Sie hatten verschiedenste Gegenstände aus Ton wie Scheibchen, Kugeln, Kegeln, Zylinder oder Pyramiden, welche die unterschiedlichsten Handelsgüter darstellten (vgl. Stewarts, 2010, S.10).

„Die Archäologin Denise Schmandt-Besserat stellte fest, dass diese Zählsteine oder „Tokens“ die wichtigsten Handelsgüter symbolisierten, eine Kugel vielleicht einen Scheffel Getreide, die Zylinder das Vieh und die eiförmigen Stücke Krüge mit Öl“ (Stewarts, 2010, S. 10) Die Zählsteine wurden über die Zeit hinweg mit vielen kleinen Details versehen, so standen kleine Verzierungen beispielsweise für einzelne Brotlaibe. Die Tonfiguren dienten vor allem den Tempelbeamten zur Regelung der finanziellen Angelegenheiten wie das Steuersystem oder die Aufteilung und

Regelung von Besitztümern. Diese Methode des Zählens hatte seine Vor- und Nachteile. Zu den wichtigen Vorteilen gehörte, dass man den Ton problemlos zu Mustern und Figuren formen konnte und diese dann Aussagekraft darüber hatten, wie viel Vieh oder Brot einem gehörte, oder wie viel Schulden jemand hatte. Ein Nachteil war, dass man die getrockneten Tonfiguren leicht fälschen bzw. nachformen konnte. Um das zu verhindern, wurden die Zählsteine in Tonhüllen aufbewahrt. Zur Einsicht in die Tonhüllen, wurden die Gefäße zerbrochen und zur erneuten Archivierung der Gegenstände wurden neue Hüllen angefertigt. Mit der Zeit erkannten die Tempelbeamten in Mesopotamien diesen Vorgang des Zerbrechens und Neuankertigens als einen lästigen und aufwendigen an und begannen, die Außenhülle der Tongefäße einzukerben. Wenn der Inhalt beispielsweise sieben Kugeln umfasste, wurden sieben Kreise an die Außenhülle eingezeichnet. Früher oder später haben die Schreiber begriffen, dass der Inhalt der Tongefäße überflüssig geworden war, da alles Notwendige bereits außen eingezeichnet war (vgl. Stewarts, 2010, S. 10,11).

Stewarts schreibt in seinem Buch „Meilensteine der Mathematik“ diesbezüglich: *„Der Ersatz von Tonfiguren kann sogar als Anbeginn der Schriftsprache selbst gelten“* (Stewarts, 2010, S. 11).

„Die Ursprünge eigentlich mathematischen Denkens- die Bildung abstrakter mathematischer Begriffe und die Herstellung von Beziehungen zwischen ihnen- reichen jedoch auch bei großzügiger Beurteilung nur ca. 6000 Jahre zurück. Sie finden sich in den Hochkulturen, die im 4. Jahrtausend v. Chr. in den Stromtälern des Hoangho, des Indus, des Nils und im Land zwischen Euphrat und Tigris, also in Mesopotamien, entstanden“ (Wußing, 2008, S.6). In dieser Arbeit geht es genau um jene Kulturen, die sich tausende Jahre v. Chr. an den Stromtälern niederließen, als Hochkulturen aufblühten und Erstaunliches auf dem Gebiet der Mathematik vollbrachten. Im Zuge der Arbeit möchte ich außerdem darlegen, welche mathematischen Leistungen die Menschen im Altertum in den Bereichen Arithmetik, Algebra und

Geometrie zu Stande gebracht haben. Das nächste Kapitel soll unter anderem Aufschluss darüber geben, weshalb die Mathematik damals gebraucht wurde, aus welchen Bedürfnissen heraus sie entstand und für das Leben in der Gemeinschaft unbedingt notwendig war.

2. Weshalb Mathematik - Aus welchen Gründen sich die Mathematik entwickelte

In diesem Kapitel versuche ich die anfänglichen Wege der Mathematik zu behandeln. Ich versuche der Frage nachzugehen, aus welchen Gründen, Motiven bzw. Bedürfnissen heraus, sich die Mathematik bereits vor über 5000 Jahren in den erwähnten Hochkulturen entwickelt hat. Das folgende Kapitel wird zunächst nichts über die mathematischen Errungenschaften der Hochkulturen im Altertum zum Inhalt haben, sondern lediglich die ursprünglichen Beweggründe aller vier Hochkulturen beinhalten, weshalb Mathematik „betrieben“ wurde. In den Kapiteln drei und vier wird anschließend ein genauer geschichtlicher Grundriss der Hochkulturen mit ihren jeweiligen mathematischen Errungenschaften bzw. Leistungen gegeben. Im Vordergrund stehen hier die Entwicklung der Schrift und die damit verbundenen Zahlzeichen und im weiteren Sinne die Zahlssysteme. Wir werden erfahren, wie und womit die Menschen in den unterschiedlichen Regionen rechneten und auf welche Weise sie ihre Leistungen der Nachwelt zugänglich machten. Die meisten Hochkulturen hatten gut überlegte Zahlssysteme, womit sie ungehindert alle Grundrechenarten ausüben konnten. Man kann sich kaum vorstellen, dass Menschen bereits vor 5000 Jahren auf hohem Niveau Mathematik betrieben und in schnellem Tempo weiter entwickelten und verbreiteten. Rechenregeln, Algorithmen oder die uns heute so bekannten Sätze wie der „Satz des Pythagoras“ oder „Satz von Thales“ wenden wir heute ohne viel darüber nachzudenken an, ohne uns im Klaren zu sein, dass diese Tatsachen bereits vor 5000 Jahren ihre Anfänge nahmen und damals nicht so

selbstverständlich waren. Die Hochkulturen leisteten Pionierarbeit und waren Wegbereiter für eine Wissenschaft, die heute fast überall zum Einsatz kommt. Heute weiß man, dass der mehrheitliche Teil mathematischer Quellen aus Mesopotamien stammt, das vor ungefähr 3000 v. Chr. im Gebiet des heutigen Irak aufblühte. In Mesopotamien entwickelte sich auch die allererste Schrift unserer Geschichte, welche zunächst als Bilderschrift begann und sich nach und nach zur Keilschrift herausbildete. Darauf wird im nächsten Kapitel genauer eingegangen. Den eigentlichen Inhalt dieses Kapitels möchte ich mit einem Zitat von Hein einleiten: *„Dass weite Teile unserer Gesellschaft durch Mathematik geprägt sind, braucht kaum erwähnt zu werden. Umgekehrt haben Anforderungen der Gesellschaft die Mathematik nicht nur geprägt, sie dürfen wohl, wenn man in die Geschichte blickt, geradezu als Ursprung und entscheidende Triebfeder mathematischer Tätigkeit und Erfindungsgabe angesehen werden“* (Hein, 2012, S. 25). Die Menschen im Altertum standen einer Vielzahl von technischen Problemen gegenüber. Die Menschen mussten in der Gemeinschaft als Einheit zusammenwirken um anfallende komplexe und aufwendige Erfordernisse bewältigen zu können. Die Wirtschaft musste durch Arbeitsteilung organisiert werden, Menschen mussten versorgt und Steuern auferlegt werden. Es ist heute kaum vorstellbar, dass eine Verwaltung ohne Schrift und Mathematik diesen Anforderungen nachgehen könnte. So beweisen uns beispielsweise schriftliche Quellen aus Mesopotamien, dass damals bereits über viele wichtige Angelegenheiten Buch geführt wurde. Zur Buchführung reichen zwar lediglich Kenntnisse über einfache Grundrechenarten, doch andere Aufgaben wie Verteilungsaufgaben erfordern hingegen kompliziertere Rechenverfahren. Die frühen Hochkulturen in den Flusstälern waren auch mit unumgänglichen wirtschaftlichen Problemen und Aufgaben konfrontiert. Beispielsweise kam es am Nil jährlich zu Überschwemmungen, was eine alljährliche Neuvermessung des Landes erforderte. Weitere Aufgaben, die die Menschen im Altertum zu bewältigen hatten, waren beispielsweise die Errichtung von Dämmen und Kanälen, der Bau von Aquädukten oder die Erhebung des

Bedarfs an Arbeitskräften und Material zur Errichtung verschiedenster Bauten. In den mathematischen Quellen der Hochkulturen finden sich jedoch keine Beweise, wie wir sie heute kennen, ausschließlich numerische Regeln, die die damaligen Mathematiker einmal aufstellten und stets verfolgten. Die Mathematik, die die Menschen im Altertum betrieben, war eher praktischer Natur und so gab es damals auch keinen Bedarf, Rechenregeln zu beweisen. Sie mussten lediglich zielführend sein. Einige der Kulturen konnten allerdings erstaunlich genaue Näherungswerte berechnen, wie etwa für die Wurzel aus 2 oder die Zahl π . Ein weiterer Grund weshalb mathematische Berechnungen von Nöten waren zeigt sich in der Astronomie, die eine sehr große Rolle spielte und in der Kalenderrechnung, worauf ich aber sehr beschränkt eingehen möchte. Sowohl die Babylonier, als auch die Ägypter, Chinesen und Inder haben in systematischen und kontinuierlichen Beobachtungen die Bewegungen der Planeten, des Mondes und der Sonne aufgezeichnet und konnten mit Hilfe mathematischer Berechnungen diverse Voraussagen machen. Wir haben nun festgestellt, dass die wesentlichen Ursprünge und Motive der altertümlichen Mathematik in praktischen Erfordernissen liegen, die der Alltag und das Leben in der Gemeinschaft mit sich bringen. Ich werde nun in folgenden Kapiteln näher auf die erwähnten Hochkulturen eingehen und deren mathematische Erfolge und Leistungen in den Bereichen der Algebra, Arithmetik und der Geometrie so genau wie möglich darlegen. Es werden zunächst ein geschichtlicher Überblick und ein Einblick in das Schriftsystem jeder einzelnen Kultur gegeben. Danach werden die Zahlzeichen und Zahlssysteme besprochen und anschließend werden die Leistungen in den bereits erwähnten mathematischen Teilgebieten dargelegt. Wir werden sehen, dass es viele Überschneidungen und Parallelen zwischen der Mathematik der einzelnen Hochkulturen gibt, was auf einen kulturellen Austausch zwischen ihnen deutet. In allen vier Kulturen waren Grundrechenarten oder Brüche bekannt und auch der Satz des Pythagoras wurde vielfach angewandt, natürlich ohne einen Beweis für diesen zu liefern. In der

altchinesischen Mathematik jedoch findet sich eine Art „Beweis“ des Satzes, was auch als allererster „Beweis“ in der Geschichte der Mathematik bezeichnet werden kann. Im letzten und abschließenden Kapitel geht es um die Weiterentwicklung der Algebra, angefangen von den alten Griechen, über die Algebra in den islamischen Ländern bis zum bedeutenden Mathematiker Galois, welcher im 19. Jahrhundert lebte.

3. Die Mathematik in den alten Stromtalkulturen

In diesem Kapitel werden die Anfänge der Mathematik in den beiden Stromtalkulturen Mesopotamien und Ägypten behandelt und eine kurze Übersicht zur Geschichte und die Entwicklung der jeweiligen Schrift gegeben.

3.1 Mesopotamien

Das Kapitel beginnt mit einer kurzen Einführung der Geschichte Mesopotamiens und schafft einen Überblick über die Entwicklung der Keilschrift. Anschließend werden das mesopotamische Zahlssystem, die Arithmetik und Algebra und abschließend die Geometrie dieser alten Hochkultur bearbeitet.

3.1.1 Historische Einführung und die Entwicklung der Keilschrift

Zu Beginn dieses Kapitels wird ein kurzer Überblick über die politische und geografische Geschichte Mesopotamiens gegeben. Anschließend erfolgt eine kurze Übersicht über die Entwicklung der Keilschrift, wobei die Abbildungen über Tontafeln mit Keilschrifttext der Veranschaulichung dienen.

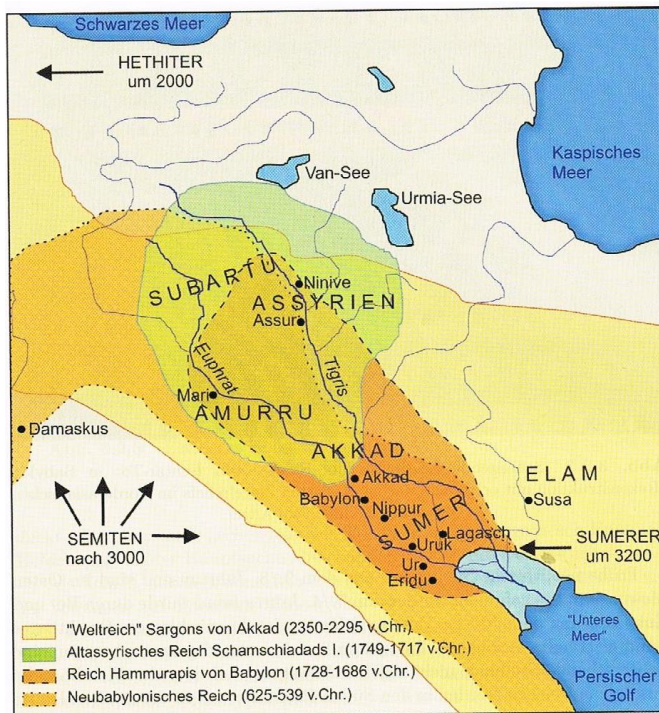


Abbildung 2: Mesopotamien (Quelle: Wußing, 2008, 122)

In Mesopotamien liegt die Mehrheit der mathematischen Funde der frühen Hochkulturen. Die Schriften, die hier gefunden wurden, reichen bis in die Zeit um 3500 v. Chr. zurück. Mesopotamien wurde von den Griechen das Land „zwischen den Strömen“ Euphrat und Tigris genannt und liegt im heutigen Irak. „Im verallgemeinerten Sinne wird die Bezeichnung „Mesopotamien in der Archäologie auch für das erweiterte Gebiet von den beiden Strömen bis zu den Bergen im Iran nach Osten hin, im Norden bis in die Südtürkei und nach Westen hin bis zur syrisch- arabischen Wüste verstanden“ (Wußing, 2008,S.123). In der sehr langen historischen Geschichte Mesopotamiens kamen viele Herrscher, Völker und Städte an die Macht und erlangten somit politischen Einfluss. Völker, Herrscher und Städte wie die Sumerer, Assyrier, Akkader, Nubukadnezar II, Hammurabi und Sumer, Akkad, Nippur und Babylon sind heute noch Termini, die Bedeutung haben (vgl. Wußing, 2008, S. 123).

„Auch wurzeln Teile des Alten Testaments in der Geschichte Mesopotamiens, beispielsweise die Berichte von der babylonischen Gefangenschaft des jüdischen Volkes oder die Geschichte der Sintflut, die sich in einer Urform in mesopotamischen Texten vorfindet“

(Wußing, 2008, S. 123). Obwohl die politische Geschichte Mesopotamiens ziemlich komplex ist, da unterschiedlichste Völker und Herrscher ihre Blütezeiten hatten und gestürzt wurden, ist über die damalige Geschichte der Technik, Wissenschaft und Mathematik relativ viel in Form von auf Tontafeln geschriebenen Texten erhalten geblieben. *„Ganze Bibliotheken wurden entdeckt, darunter auch „schöngestige“ Werke wie das Gilgamesch-Epos“* (Wußing, 2008, S. 124, 125).

Die Tontafel (Abb. 3) ist einer der ältesten überlieferten literarischen Dichtungen der Menschheit und hat seinen Ursprung im sumerischen Reich. Die Schrift auf den Tontafeln, die sogenannte Keilschrift, hat eine lange und verworrene Historie und geht bis ins 3. Jahrtausend vor Chr. zurück. Sie war jahrhundertlang vorherrschende Schrift und wurde von vielen Völkern unterschiedlichster Sprachtypen übernommen (vgl. Wußing, 2008, S. 125).



Abbildung 3: Tontafel mit dem Gilgamesch - Epos (Quelle: <http://anthrowiki.at/Gilgamesch-Epos>)

Zur Blütezeit der Sumerer um das 4. Jahrtausend v. Chr. gehörten die Städte Uruk und Ur zu den einflussreichsten Zentren und *„von Uruk stammen die ältesten schriftlichen Zeugnisse unserer Geschichte“* (Hein, 2012, S. 17). Die gängige Schrift die zu jener Zeit in Gebrauch war, war die Bilderschrift, welche die Menschen *„ohne Kenntnis der Sprache“* verstehen konnten (Hein, 2012, S. 17). Diese wandelte sich im Laufe der Zeit zur Keilschrift. *„Verschiedenförmige Keile entstanden, indem man*

einen Griffel, etwa das zugeschnittene Ende eines trockenen Strohhalms, mit verschiedenen Seiten in den weichen Ton drückte“ (Stewarts, 2010, S12). Hein schreibt dazu: „Der dreieckige Querschnitt des Griffels bewirkte, dass beim Eindrücken in den weichen Ton eine keilförmige Kerbe oder eine Art Winkelhaken erzeugt wurde“ (Hein, 2012, S. 17). Jene Tontafeln, die mit wichtigen Information versehen waren, wurden gebrannt um sie erhalten zu können (vgl. Wußing, 2008, S.84). Auf diesen beiden Bestandteilen beruht auch die gesamte Keilschrift, einschließlich der Zahlzeichen (vgl. Hein, 2012, S.18).



Abbildung 4: Tontafel der Sumerer

(Quelle:http://www.masche24.de/masche24/2/tex_weste_waschen-inhalt.htm)

Abbildung 4 zeigt eine Tontafel aus sumerischer Zeit, die Informationen zum Wäschewaschen enthält. Sie stammt aus dem Jahr 2500 v. Chr. und ist im Gebiet von Euphrat und Tigris entstanden. Es ist das älteste Dokument, das in sumerischer Schrift zum Waschen mit Seife überliefert wurde und die Seife zu einem der ältesten Chemieprodukte auszeichnet. (Quelle: http://www.masche24.de/masche24/2/tex_weste_waschen-inhalt.htm)

Im Jahre 1626 wurden die ersten Keilschrifttexte von Pietro de la Valle aus Persepolis nach Europa gebracht. „Die Bezeichnung Keilschrift wird dem deutschen

Arzt und Forschungsreisenden Engelbert Kämpfer (1651-1716) zugeschrieben“ (Wußing, 2008, S. 125). Die Entzifferung der Keilschrift gelang 1793 Georg Friedrich Grotefend (1775-1863), einem Göttinger Lehrer (vgl. Wußing, S. 2008, S. 126). Wußing schreibt: „Grotefend beschreibt 1793 in seinem erst 1893 wieder aufgefundenen Originalaufsatz *Praevia de cuneatis quas vocant inscriptionibus Persepolitanis legendis et explicandis relatio* seine Entzifferung der (auf dem Wege vom Bild zum Buchstaben) schon alphabetischen altpersischen Keilschrift“ (Wußing, 2008, S. 126).

Um ca. 2250-2200 v. Chr. erhob sich Sargon 1, Akkader und der „Herrscher der 4 Weltteile“, gegen die Sumerer und gründete den ersten Großstaat. Die Akkader hatten keine eigene Schrift und nahmen die Schrift der Sumerer ein, wobei sie sie an ihre Sprache anpassten. Wußing schreibt: “[...] sahen die Akkader keine Veranlassung, die hoch entwickelte Keilschrift, die sich durch Linearisierung von Ideogrammen herausgebildet hat, zu verwerfen und ebenso lebte bei den akkadischen und anderen semitischen Eroberern die sumerische Sprache als Fachsprache fort“ (Wußing, 2008, S.126).

Nach dem Tod Sargons zerfiel das Reich in kleinere Städte, welche die Macht erhielten, bis ca. 2000. v. Chr., die Akkader und Sumerer zum letzten Mal für etwa 100 Jahre an die Macht kamen. Die Sprachen beider Reiche blieben nach dem erneuten Zerfall erhalten, wobei die Akkadische Sprache als Verkehrssprache und die Sumerische Sprache als Kultsprache weiterlebte (vgl. Hein, 2012, S. 18).



Abbildung 5: Babylon: (Quelle: http://www.fu-berlin.de/presse/publikationen/fundiert/2009_01/03_cancik-kirschbaum/index.html)

1900 v.Chr. entstand das Babylonische Reich (vgl. Mankiewicz, 2000, S.10) und eine Blütezeit erlebten die Babylonier unter der Herrschaft des Königs Hammurabi um 1700 v. Chr. (vgl. Kropp, 1994, S. 14). Die Mathematik erlebte in dieser Periode ihren Höhepunkt (vgl. Hein, 2012, S.19). Babylonische Tontäfelchen, welche von Archäologen im Wüstensand Mesopotamiens gefunden wurden, bestätigen, dass die Babylonier in unterschiedlichsten Gegenständen sehr erfahren und gebildet waren. Mehrere hundert Tontäfelchen befassen sich mit mathematischen Inhalten sowie Himmelsbeobachtungen, die auf den hohen mathematischen Wissensstand verweisen (vgl. Stewarts, 2010, S.13).



Abbildung 6: Weltkarte aus babylonischer Zeit (Quelle: http://www.kartobase.de/Grundlagen_Geschichte.html)

Abbildung 6 zeigt eine Tontafel, die um 600 v. Chr., also in babylonischer Zeit entstanden ist und eine Weltkarte darstellt. Sie ist die einzige Weltkarte, die aus dem Altertum erhalten ist (vgl. http://www.kartobase.de/Grundlagen_Geschichte.html).

Wichtige und bedeutungsvolle Keilschrifttexte zu mathematischen Inhalten stammen aus der Stadt Susa, das auf dem heutigen Gebiet des Iran liegt. Vor allem dem britischen Archäologen W.K. Loftus und französischen Archäologen aus dem 19. und 20. Jahrhundert sind diese wertvollen Ausgrabungen gelungen. *„Spektakulär war die Entdeckung der Gesetzestafel des babylonischen Königs Hammurabi (ca. 1750 v. Chr.). Der Stein, eine Stele aus schwarzem Basalt, war als Zeugnis des Sieges über Babylon nach Susa gebracht worden. Auf der 2,25m hohen Stele sind 285 Gesetze festgehalten, die teils recht modern anmuten, aber auch barbarische Strafen anordnen“* (Wußing, 2008, S. 128; zitiert nach: Burton 1985, S. 82). Hier sind einige Auszüge aus dem Codex Hammurabi:



Abbildung 7: Stele mit dem Codex Hammurabi

(http://employees.oneonta.edu/farberas/arth/Images/ARTH200/politics/hammurabi_det.jpg)

„Als Marduk mich beauftragte, die Menschen zu lenken und dem Lande Sitte angeideihen zu lassen, legte ich Recht und Gerechtigkeit in den Mund des Landes und

trug Sorge für das Wohlergehen der Menschen. Ich, der König, der unter den Königen hervorragt- meine Worte sind erlesen, meine Tüchtigkeit hat nicht ihresgleichen. Auf Befehl des Sonnengottes, des großen Richters des Himmels und der Erde, möge meine Gerechtigkeit im Lande sichtbar werden, auf das Wort meines Herrn Marduk mögen meine Aufzeichnungen keinen finden, der sie beseitigt (...). Damals (gab ich folgende Gesetze): Wenn ein Bürger einen anderen Bürger bezichtigt und ihm Mord vorwirft, ihn jedoch nicht überführt, so wird derjenige, der ihn bezichtigt hat, getötet (...). Wenn ein Bürger vor Gericht zu falschem Zeugnis auftritt und seine Aussage nicht beweist, so wird, wenn dieses Gericht ein Halsgericht ist, dieser Bürger getötet“ (Wußing, 2008, S. 128; zitiert nach: Borger 1982, S. 44 ff).

Nach den Babyloniern gewannen die Assyrer, mit ihren Hauptstädten Assur und Ninive die Regentschaft und König Assurbanipal (ca. 650 v. Chr.) errichtete in Ninive eine bedeutende und mächtige Bibliothek. Mehr als hundert Jahre später konnte Perserkönig Kyros das Land bezwingen, allerdings hatte die babylonische Kultur bis in die hellenistische Zeit Oberhand (vgl. Kropp, 1994, S. 14).

3.1.2 Zahlschrift - Zahlssystem

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Zahlschrift Mesopotamiens und soll einen Einblick in das mesopotamische Zahlssystem geben.



Abbildung 8: piktografische Schrift aus Uruk (Quelle: <http://kultgeschichte.blogspot.co.at/p/alter-orient.html>)

Die ältesten ausgegrabenen Schriftdenkmäler führen bis 3 300 v. Chr. in die altsumerische Stadt Uruk zurück. Die Abbildung 8 zeigt eine Tontafel aus der

altsumerischen Stadt Uruk, die auf 3300 v.Chr. datiert ist. (Quelle: <http://kultgeschichte.blogspot.co.at/p/alter-orient.html>)

Hierbei wurden für die Zahlen zwei Griffeln, ein Griffel mit kleinerem und ein Griffel mit größerem kreisförmigen Querschnitt verwendet. Diese wurden in weichen Ton eingedrückt, wobei diese kreisförmigen Zahlzeichen zustande kamen (vgl. Hein, 2012, S. 39).

	1		$\frac{1}{2}$
	10		$\frac{1}{4}$
	60		$\frac{3}{4}$
	100		$\frac{1}{8}$
	120		$\frac{1}{16}$
	600		$\frac{1}{32}$
	1200		$\frac{1}{64}$
	3600		

Abbildung 9: Altsumerische Zahlzeichen (Quelle: <http://gutenberg.spiegel.de/buch/7440/2>)

Bevor sich die Keilschrift mit ihren Keilschriftziffern ab Mitte des 3. Jahrtausends entwickelte, war eine ältere Form der Zahlschrift jahrhundertlang in Gebrauch. In Abbildung 9 ist die altsumerische Zahlschrift abgebildet. Der Unterschied zum Keilschriftsystem besteht darin, dass es sich hierbei um ein gemischtes Dezimal- und Sexagesimalsystem handelt (vgl. Hein, 2012, S 39,40).

„Die Bedeutung der Zahlzeichen variierte anfangs noch mit der Art der gezählten Gegenstände. Womit deutlich wird, dass in dieser frühen Phase von einem allgemeinen, abstrakten Zahlbegriff noch keine Rede sein kann“ (Hein, 2012, S 39). In den folgenden Jahrhunderten haben es die Babylonier, als einziges Volk der frühen Hochkulturen geschafft, ein Positionssystem zu entwickeln. Somit wurde ihnen ermöglicht, kleine und große Zahlen mit wenigen Zahlzeichen darzustellen. Andere Hochkulturen hingegen haben lediglich die Entwicklung eines additiven oder multiplikativen Zahlsystems zustande gebracht. Einige Kulturen hatten auch eine

Mischung beider Systeme, welches Hybridsystem genannt wird (vgl. Hein, 2012, S.39).

𐎶 1	𐎶𐎶 11	𐎶𐎶𐎶 21	𐎶𐎶𐎶𐎶 31	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 41	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 51
𐎶𐎶 2	𐎶𐎶𐎶 12	𐎶𐎶𐎶𐎶 22	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 32	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 42	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 52
𐎶𐎶𐎶 3	𐎶𐎶𐎶𐎶 13	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 23	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 33	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 43	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 53
𐎶𐎶𐎶𐎶 4	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 14	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 24	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 34	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 44	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 54
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 5	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 15	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 25	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 35	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 45	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 55
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 6	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 16	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 26	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 36	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 46	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 56
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 7	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 17	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 27	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 37	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 47	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 57
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 8	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 18	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 28	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 38	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 48	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 58
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 9	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 19	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 29	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 39	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 49	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 59
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 10	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 20	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 30	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 40	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 50	

Abbildung 10: Sumerisch-akkadische Keilschriftzeichen (Quelle:

<http://www.technikimbuero.at/Museum/Computer.php>)

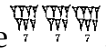
Die Abbildung 10 zeigt die babylonischen Keilschriftzeichen für die Zahlen 1 bis 59. Es waren zwei Arten von Keilen von Bedeutung. Die dünnen, senkrechten Keile dienten zur Darstellung der 1 und die dickeren, waagrechten Keile dienten zur Darstellung der Zahl 10 (vgl. Stewarts, 2010, S.13).

„Die frühesten uns bekannten schriftlichen Überlieferungen belegen, dass die Babylonier ein Sexagesimalsystem verwendeten, das auf der Zahl 60 basiert“ (Stewarts, 2010, S.11), „(...)jedoch mit dezimaler Komponente in Gestalt des Winkelhakens“ (Wußing, 2008, S 128).

Der Keil 𐎶 konnte für 1, 60, 60² usw. und für 60⁻¹, 60⁻² usw. stehen. Der Winkelhaken 𐎶𐎶 wurde für 10, 10·60, 10·60² usw. genutzt (vgl. Wußing, 2008, S. 128).

„Einem Symbol wird darin, abhängig von seiner Position, ein Wert, das 60-fache des Werts, das 60-mal-60 fache dieses Werts und so weiter zugewiesen“ (Mankiewicz, 2000, S.13,14). Unser modernes Dezimalsystem ist auf der Basis 10 aufgebaut und ist ein sogenanntes Stellenwert- oder Positionssystem (vgl. Stewarts, 2010, S 10). Nehmen wir die Zahl 777 als Beispiel, um das Prinzip des Dezimalsystems zu erläutern.

Hier werden die einzelnen Ziffern, abhängig von ihrer Position, mit 10, 100 oder 1000 multipliziert. Bei höheren Zahlen werden die Ziffern mit weiteren Potenzen von 10 multipliziert. Hier hat die erste 7 von links den Wert „siebenhundert“, die mittlere 7 den Wert „siebzig“ und die letzte 7 den Wert „sieben“. Wie bereits erwähnt, beruht das babylonische Stellenwertsystem auf der Basis 60.

Analog wird ein im Sexagesimalsystem geschriebenes 777 analysiert, die in babylonischer Schreibweise folgendermaßen dargestellt wurde .

Das linke Symbol steht für $7 \cdot 60 \cdot 60$, was 25 200 ergibt. Das mittlere Symbol ergibt $7 \cdot 60$ mit dem Endwert 420 und das letzte Symbol wäre 7. Nach unserem modernen System hätten wir also die Zahl 25 627 (vgl. Stewarts, 2010, S 14). Unser heutiges Dezimalsystem ist so aufgebaut, dass wir beliebig große und kleine Zahlen darstellen können. Die ganzen Zahlen trennen wir mittels Komma von den Bruchteilen ganzer Zahlen. Hier kommt es wieder auf die Position der Ziffer an, ob sie mit einem Zehntel, einem Hundertstel, einem Tausendstel usw. multipliziert wird. Dieses System wandten auch die babylonischen Astronomen an.

Das Sexagesimalkomma wird heute von Forschern als Semikolon angeschrieben, wobei die Ziffern, oder auch nach-Semikolon-Stellen, mit $\frac{1}{60}$, ($\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60}$), usw. multipliziert werden. Die babylonische Zahl 12,59; 57,17 würden wir heute demnach folgendermaßen lesen: $12 \cdot 60 + 59 \cdot 1 + \frac{57}{60} + \frac{17}{3600} \cong 779,955$ (vgl. Stewarts, 2010, S. 14,15). Bezüglich der Größenordnung der Zahlen schreibt Wußing: „Die Größenordnung einer Zahl kann aus dem Zusammenhang erschlossen werden oder sie ist vorher bekannt“ (vgl. Wußing, 2008, S.130).

Die Sexagesimalzahl  kann in unserem Dezimalsystem zwei unterschiedliche Bedeutungen haben.

- „ $1 \cdot 60^3 + 54 \cdot 60^2 + 1 \cdot 60 + 22 = 1,54,1,22$ “

- $1 \cdot 60^2 + 54 \cdot 60^1 + 1 \cdot 60^0 + 22 \cdot 60^{-1} = 1,54,1,22$ „ (Wußing, 2008, S. 130)

Das Einmaleins der Mesopotamier ging bis 60 mal 60. Dieser Umstand war auch einer der Nachteile der Keilschriftzahl beim Rechnen und in Folge dessen hat man zahlreiche Multiplikationstabellen zur Hilfestellung angefertigt. *„Dieser Nachteil wird aber ausgeglichen durch den Umstand, dass die Bruchrechnung sozusagen größtenteils im ganzzahligen Bereich ausgeführt werden kann“* (Wußing, 2008, S.130).

Die oben angeführte Sexagesimalzahl kann in unserem Dezimalsystem gelesen werden als:

- $„0;0,1,54,1,22 = 1 \cdot 60^2 + 54 \cdot 60^{-3} + 1 \cdot 60^{-4} + 22 \cdot 60^{-5}$
- $1,54,1,22 = 60^3 + 54 \cdot 60^2 + 60 + 22“$ (Wußing, 2008, S. 130)

Neben dem oben erwähnten Nachteil weist dieses System eine weitere Schwäche auf und zwar das Fehlen der Zahl 0 (vgl. Hein 2012, S.38). Eine Stelle die nicht besetzt war, wurde lediglich durch eine größere Lücke gekennzeichnet, was aber zu Unsicherheiten bzgl. der Nennung der Zahl führt, denn am Ende einer Zahl kann man keine Lücke lassen (vgl. Wußing 2008, S. 128).

Das Positionssystem der Mesopotamier war dennoch sehr gut aufgebaut und allen folgenden Zahlensystemen anderer Hochkulturen weit voraus. Griechisch-Hellenistische Mathematiker wandten das mesopotamische System vor allem in der Astronomie an. Der Hellenistische Mathematiker und Astronom Ptolemaios, der um das 2. Jahrhundert n. Chr. lebte, äußerte sich gegenüber dem sexagesimal System auf folgender Weise: *„Im allgemeinen werden wir die Ansätze der Zahlen nach dem Sexagesimalsystem machen, weil die Anwendung der Brüche (d.h. der gewöhnlichen, im griechischen Zahlssystem bezeichneten Brüche) unpraktisch ist“* (Wußing, 2008, S. 130; zitiert nach: Ptolemaios 1912, Bd.1, S. 25). Durch die Griechen gelangte das Sexagesimalsystem nach Europa und aus jener Zeit stammen unsere Vollwinkeleinteilung in 360° oder die Stundenteilung in 60 Minuten von je 60 Sekunden (vgl. Wußing,2008, S.130).

Grundrechenarten: Hinsichtlich der Addition und Subtraktion von Sexagesimalzahlen wurde in überlieferten Quellen nichts gefunden, da diese beiden Grundrechenarten möglicherweise als Basiswissen festgesetzt wurden und sie deshalb keiner schriftlichen Erklärung bedurften. Für die Multiplikation wurden, wie bereits erwähnt, Multiplikationstabellen angefertigt um das schnellere und einfache Rechnen zu gewährleisten. Was die Division anging, waren die Babylonier mit ihrem Positionssystem gegenüber anderen Kulturen im Vorteil. Die Division war lediglich eine Multiplikation mit dem Inversen, somit $m : n = m \cdot \frac{1}{n}$. Infolgedessen wurden die Inversen von einigen natürlichen Zahlen berechnet und in einer „Reziprokentabelle“ zusammengefasst (vgl. Hein, 2012, S.49). Ein Beispiel der Division, wie sie die Babylonier durchgeführt haben, wäre: $5 : 2 = 5 \cdot 0;30 = 2;30$, denn das Inverse von 2 ist $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$ und sexagesimal somit 0;30. Ein Vorteil des Sexagesimalsystems tritt bei der Division zum Vorschein (vgl. Hein, 2012, S.48). *„Da die Zahl 60 mehr Teiler besitzt als 10, führen „mehr“ Brüche zu endlichen Entwicklungen, nämlich genau diejenigen, deren Nenner keine anderen Primteiler besitzen als 2,3 und 5“* (Hein 2012, S.48). Nehmen wir $\frac{1}{3}$ als Beispiel: der Bruch hat unendliche, periodische Dezimalstellen, im Sexagesimalsystem hingegen eine endliche Anzahl von Dezimalstellen. Der Bruch $\frac{1}{7}$ hingegen hätte im Sexagesimalsystem unendliche Dezimalstellen, die dann Näherungsweise angegeben wurden, so wie das heute noch auch der Fall ist (vgl. Hein, 2012, S.48).

Die folgenden beiden Abschnitte behandeln die Algebra und Arithmetik und Geometrie in Mesopotamien. Wir werden erfahren welche Notwendigkeiten die Mesopotamier dazu brachten Mathematik zu betreiben. Welche Art von Gleichungen konnten sie bereits lösen? Dieser Abschnitt geht auch der Frage nach, wie weit die Geometrie ausgereift war und ob sie Pythagoras seinen heute bekanntesten Satz vorweggenommen haben.

3.1.3 Algebra und Arithmetik in Mesopotamien

*„In der Einleitung in seinem Werk *Length, widths, surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra* and ist Kin von 2002 wirft J. Høyrup einen Blick auf die Geschichte der Entdeckung, dass die mesopotamische Mathematik in beachtlichen Teilen einen echt algebraischen Charakter hat“ (Wußing, 2008, S.139; zitiert nach: Hoyrup 2002, S1, englisch). J. Høyrup ist ein Mathematikhistoriker der sich mit mathematikgeschichtlichen Themen auseinandersetzt und als Experte für babylonische Mathematik gilt. (Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Jens_H%C3%B8yrup).*

Folgen und Reihen: Alle früheren Hochkulturen haben laut überlieferter Quellen bereits mit endlichen Folgen und Reihen gerechnet, wobei es sich fast ausschließlich um Einsatz arithmetischer Folgen der Form $a, a+d, a+2d, \dots$ handelt. A ist das Anfangsglied und d die Differenz. Geometrische Folgen der Form $a, aq, aq^2, \dots$ kommen eher selten vor und werden vor allem durch Addition der einzelnen Glieder ausgerechnet (vgl. Hein, 2012, S.55).

Über die Geschichte der quadratischen Gleichung sagt Wußing folgendes: *„Die Geschichte der quadratischen Gleichung reicht bis zur babylonischen Mathematik zurück. Dort gab es keine systematische abstrakte Behandlung von Gleichungen. Die einzelnen Probleme wurden rezeptartig (stets nach dem gleichen Muster der Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat und darauf folgendes Wurzelziehen) gelöst“* (Wußing, 2008, S.125).

Gleichungen: Um eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten zu lösen, bringen wir die Variablen auf die eine und die Zahlen auf die andere Seite. Wir formen auf die „Normalform“ $ax = b$ um, wobei a und b meistens Zahlen und x die Unbekannte ist, für die man einen Wert zu bestimmen versucht. Durch die Division $x = \frac{b}{a}$ findet man anschließend jene Zahl, die die Gleichung erfüllt. Auf diese Art und Weise rechneten auch die Babylonier, wobei ihnen lineare

Gleichungen keinerlei Schwierigkeiten bereiteten. Sie waren Meister darin Probleme und Hürden verbal in Gleichungen zu fassen und diese anschließend in Normalformen zu bringen (vgl. Hein, 2012, S.58). Dem Keilschrifttext BM 13 901, wobei BM für den Aufbewahrungsort Britisch Museum steht, sind zwei einfache Beispiele zu entnehmen (vgl. Wußing, 2008, S. 139):

„The surface and my confrontation i have accu[mulated]: 45' is it“ (Wußing, 2008, S. 140; zitiert nach: Hoyrup 2002, S. 50, englisch).

Dies heißt übersetzt so viel wie:

„Den Flächeninhalt und meine Gegenüberstellung (d.h. Seite) hab ich angehäuft und so entsteht 0; 45“ (Wußing, 2008, S. 140).

Heute würden wir diese Gleichung so anschreiben: „ $x^2 + x = \frac{45}{60}$ “ (Wußing, 2008, S. 140). Beispiel zwei aus BM 13 901 wurde folgendermaßen übersetzt:

„Die Flächen meiner beiden Seiten habe ich addiert und zu 0; 25, 25. Die eine Seite beträgt $\frac{2}{3}$ der anderen Seite und (= plus) 0;5“ (Wußing, 2008, S. 140).

Wir fassen diese Angaben zu einem Gleichungssystem zusammen: „ $x^2 + y^2 = \frac{61}{144}$, $y = \frac{2}{3} x + \frac{1}{12}$ “ (Hein, 2012, S. 63) und erhalten die Lösungen $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{5}{12}$ (vgl. Hein, 2012, S. 63).

Grundsätzlich hatten die Babylonier keine Schwierigkeiten hinsichtlich des Zahlensystems oder der Grundrechenarten. Dies war einer der Gründe, weshalb sie sich mit weiteren, komplexeren Rechenarten beschäftigten. *„Bemerkenswert ist das Verfahren bei einer Rechenart, die man für das Auflösen von quadratischen Gleichungen, einem der Glanzstücke babylonischer Mathematik, unbedingt benötigt: dem Ausziehen der Quadratwurzel“* (Hein, 2012, S. 63).

Die folgende Formel $\sqrt{a^2 \pm r} \approx a \pm \frac{r}{2a}$ entspricht einem fast schon modernen Annäherungsverfahren für die $\sqrt{2}$, wenn $a = \frac{3}{2}$ und $r = \frac{1}{4}$. Eingesetzt in die Formel ergibt „ $\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \approx \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = 1,416 \dots = 1; 25$ “ (Hein, 2012, S. 63).

Dieser Wert entspricht auf zwei Dezimalzahlen genau dem Wert $\sqrt{2} = 1,4142$ (vgl. Hein, 2012, S.63). Die oben angeführte Formel diene weiters auch zur Bestimmung der Diagonalen eines Rechtecks, wobei die Näherungsformel hierfür lautet:

$$„\sqrt{x} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{x}{a} \right)“ \text{ (Kropp, 1994, S. 17).}$$

Der pythagoreische Lehrsatz war also schon vor der Formulierung von Pythagoras selbst bekannt (vgl. Kropp, 1994, S. 17).

Wie bereits erwähnt waren die Babylonier im Stande lineare Gleichungen mit standardisierten Verfahren zu lösen (vgl. Hein, 2012, S.64). Ein weiteres häufig zitiertes Beispiel aus einem Keilschrifttext lautet:

“Länge, Breite. Länge und Breite habe ich multipliziert und so die Fläche gemacht. Wiederum was die Länge über die Breite hinausgeht zur Fläche habe ich addiert und es gibt 183. Wiederum Länge und Breite addiert gibt 27. Länge, Breite und Fläche ist was?” (Hein, 2012, S. 64; zitiert nach: van der Waerden, S. 128 f).

Es geht darum, ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten und zwei Gleichungen zu lösen. In zahlreichen Keilschrifttexten finden sich ähnliche Aufgaben in unterschiedlichsten Variationen. Nicht immer sind Lösungswege verzeichnet, doch bei diesem angeführten Beispiel ist ein durchgerechneter Lösungsweg mit Rechenprobe angeführt (vgl. Hein, 2012, S. 64). Im Keilschrifttext heißt es:

“Du bei deinem Verfahren, 27, die Summe von Länge und Breite, zu 183 addiere; es gibt 210. 2 zu 27 addiere; es gibt 29” (Hein, 2012, S. 64; zitiert nach: van der Waerden, S. 128 f).

Die Ausgangsbedingungen in unserer heutigen Terminologie wären: $l \cdot b + (l - b) = 183$ und $l + b = 27$. Den Keilschrifttexten ist zu entnehmen: „ $(l + b) + (l \cdot b + (l - b)) = 27 + 183 = 210$ und $(l + b) + 2 = 27 + 2 = 29$ “ (Hein, 2012, S. 65). Weiters steht geschrieben: $l \cdot (b + 2) = 210$ und $l + (b + 2) = 29$. Im nächsten

Schritt wird $b + 2$ als neue Unbekannte eingeführt. Der babylonische Mathematiker setzt $x = l$ und $y = b + 2$ und erhält $x \cdot y = 210$, $x + y = 29$. Die Babylonier hatten damals bereits eine Art „binomische Formel“ die sie anwandten und die in unserer Terminologie lautet: „ $(\frac{x+y}{2})^2 = (\frac{x-y}{2})^2 + x \cdot y$ “ (Hein, 2012, S. 64). Durch Einsetzen, Umformen und Wurzelziehen erhält man schließlich x und y (vgl. Hein, 2012, S. 65). Die babylonische Gleichungslehre enthält neben linearen Gleichungen auch quadratische und gelegentlich auch kubische Gleichungen. Für die Lösung von kubischen Gleichungen der Form $x^3 + x^2 = a$ wurde eine spezielle Tafel mit den Werten für $(n^3 + n^2)$ geschaffen. Ein Beispiel einer quadratischen Gleichung, wie sie damals zur Zeit Hammurabis aufgestellt wurde, lautet:

„Die Summe zweier Quadrate betrage 1000. Wie groß sind die Quadratseiten, wenn die eine zwei Drittel der anderen abzüglich 10 beträgt?“ (Kropp, 1994, S. 16).

Die Gleichung lautet „ $13x^2 - 120x = 8100$ “ (Kropp, 1994, S. 16) und man erhält die Lösung $x = 30$. Auch hier wird der Rechenvorgang nur rezeptartig angeführt. Für die Lösung von Gleichungen mit mehr als einer Unbekannten wurde die Formel $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$ angewandt. Formeln zur Berechnung ganzzahliger Seitenlängen rechtwinkliger Dreiecke („Pythagoreische Zahlen“) erstellten die Babylonier in der Form: „ $x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right), y = 1, z = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)^2$ “ (Kropp, 1994, S. 16), t ist hier entweder eine natürliche Zahl mit den Teilern 2, 3, 5 oder ein Quotient zweier solcher Zahlen (vgl. Kropp, 1994, S. 16).

3.1.4 Geometrie in Mesopotamien

Die babylonische Geometrie entstand größtenteils aus praktischen und anwendungsorientierten Bedürfnissen wie beispielsweise durch die Bedürfnisse der Feldmesser oder der Bautechniker (vgl. Kropp, 1994, S. 17). Viele erhaltene Keilschrifttexte geben Aufschluss darüber, welchen geometrischen Problemen und Hürden die Babylonier gegenüberstanden. Der Keilschrifttext BM 85 194, der aus

dem 7. Jahrhundert stammt, enthält viele praktische Probleme wie Berechnungen zu den unterschiedlichsten Bauten (Dämme, Kanäle, Tempelfundamente...), wie viele Arbeiter für den Bau einer bestimmten Konstruktion bei einer festgesetzten Arbeitsleistung eingesetzt werden mussten oder auch Sehnennrechnungen (vgl. Wußing, 2008, S.133). Ein Auszug aus dem Text BM 85 194 lautet:

„Ein Ringbau sechzig als Umfang hab ich gekrümmt. (Um) je 5 ist er hinausgegangen. Eine Grabung habe ich gebaut, 6 die Tiefe; 1,7,30 (als) Erdmassen ist entfernt. Je 5 über die Grabung (hinaus) einen Damm habe ich gebaut. Selbiger Damm (hat) 1 Elle Böschungswert. Basis, Kopf und Höhe ist was und der Umfang des Dammes ist was? Du: Wenn sechzig der Umfang (ist), was ist der Durchmesser? Der 3-te Teil von sechzig, dem Umfang, ist entfernt. 20 siehst Du. 20 (ist) der Durchmesser. 5 die Erweiterung (?), verdopple; 10 siehst Du. 10 zu 20, dem Durchmesser, addiere; 30 siehst Du. Den Durchmesser verdreifache; 1, 30 siehst Du; 1,30 (ist) der Umfang der Grabung“ (Wußing, 2008, S. 133; zitiert nach: Neugebauer 1935, Teil1, S. 153).

Aus der Untersuchung der Rechenvorgänge wird deutlich, dass die Babylonier Proportionalitäten am Dreieck ausnutzten und, dass ein „Böschungswert“ bekannt gewesen war. Diese damals schon bekannten Werte laufen heute auf den trigonometrischen Kotangens hinaus (vgl. Wußing, 2008, S. 134).

Weiters setzten die Babylonier für π die Näherungswerte 3 oder $3\frac{1}{8}$ ein. Auf verschiedenen Keilschrifttexten sind Formeln für Inhaltsbestimmung von Quadrat, Rechteck und Trapez wie auch für Prismen unterschiedlichster Art. Das Berechnungsverfahren für den Inhalt eines geraden quadratischen Pyramidenstumpfes erfolgt nach der Formel „ $V = h \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right]$ “ (Wußing, 2008, S. 134), h ist die Länge der Höhe, a die Länge der Grundkante und b die Länge der Deckkante.

Die Annäherung an die $\sqrt{2}$ und der Satz von Pythagoras: Ein weiterer Keilschrifttext bzw. Tontafel (Abb. 11), der YBC 7289 (Yale Babylonian Collection,

New Haven), enthält eine sehr präzise Annäherung an die $\sqrt{2}$. In einem Quadrat mit Seitenlänge 0; 30 (also $\frac{1}{2}$) sind Oberhalb der waagrechten Diagonale die Zahlen (sexagesimal) 1; 24; 51, 10 angegeben. Diese Zahlen entsprechen dem Wert: „ $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1 + 0,4 + 0,014166\ 6 + 0,000\ 046\ 3 = 1,414\ 212\ 9$ und $\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 562\ \dots$ “ (Wußing, 2008, S. 134).

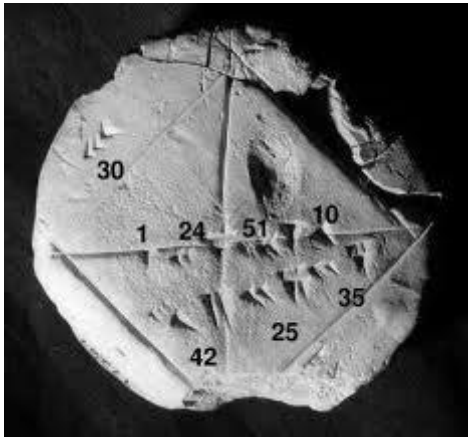


Abbildung 11: Tontafel zur Berechnung der Wurzel aus 2: (Quelle: http://www.khoahoc.com.vn/khampha/khao-co-hoc/30551_Di-san-toan-hoc-co-dai.aspx)

Weiters kann man diesem Keilschrifttext entnehmen, dass der Satz von Pythagoras bereits im Altertum den Babyloniern bekannt war. Wie bereits erwähnt ergeben die Zahlen oberhalb der waagrechten Diagonale einen Näherungswert für $\sqrt{2}$. Die Zahlen im Sexagesimalsystem unterhalb der Diagonale lauten 42, 25, 35. Oben wurde erwähnt, dass die Quadratseite 0; 30 ist. Wenn man nun den Satz des Pythagoras anwendet, kommt man auf jene Zahlen, die unterhalb der Diagonale zu finden sind, nämlich 42, 25, 35.

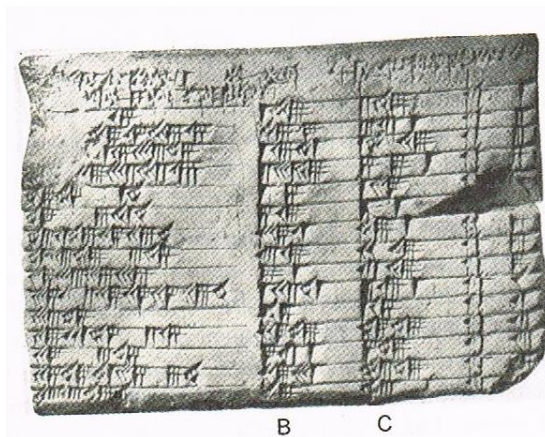


Abbildung 12: Plimpton 322 (Quelle: Hein, 2012, S.79)

In diesem Zusammenhang steht auch die „Plimpton 322“ (Abb. 12) eine altbabylonische Tafel, die 1945 von Otto Neugebauer entziffert wurde und pythagoreische Tripel darstellt (vgl. Wußing, 2008, S. 134).

B $p^2 - q^2$	C $p^2 + q^2$	Nicht auf der Tafel		
		$2pq$	p	q
119	169	120	12	5
3367	4825	3456	64	27
4601	6649	4800	75	32
12709	18541	13500	125	54
65	97	72	9	4
319	481	360	20	9
2291	3541	2700	54	25
799	1249	960	32	15
481	769	600	25	12
4961	8161	6480	81	40
45	75	60	2	1
1679	2929	2400	48	25
161	289	240	15	8
1771	3229	2700	50	27
56	106	90	9	5

Abbildung 13: "Vervollständigte" Plimpton 322 (Quelle: Hein, 2012, S. 80)

Die linke Seite der Plimpton Tafel ist abgebrochen und somit hat man keine endgültige Gewissheit, wie die beiden Spalten B und C (Abb. 13) zustande kamen bzw. berechnet wurden. Die Zahlen, die in den beiden Spalten B, C aufgelistet sind, stellen die kürzere Kathete und die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks dar. In Abbildung 12 sieht man die „vervollständigte“ Version der „Plimpton 322“, hier wurden die fehlenden Katheten p und q zu einem pythagoreischen Zahlentripel ergänzt. Bis heute kann man nicht mit Sicherheit

sagen, wie die Babylonier diese Zahlen berechnet oder wofür sie sie verwendet haben. Es wird jedoch angenommen, dass sie nicht ausschließlich zu Übungszwecken berechnet worden sind, sondern zum Lösen konkreter Probleme zusammengestellt wurden (vgl. Hein, 2012, S. 80). Im nächsten Kapitel folgt die Ausarbeitung der zweiten Stromtalkultur, die des alten Ägypten.

3.2 Das alte Ägypten

Dieser Abschnitt behandelt zunächst die Geschichte des alten Ägypten und hat weiters die Entwicklung der Hieroglyphen zum Inhalt. Darüber hinaus werden analog zum vorigen Kapitel über Mesopotamien die mathematischen Teilbereiche der Algebra, Arithmetik und der Geometrie behandelt.

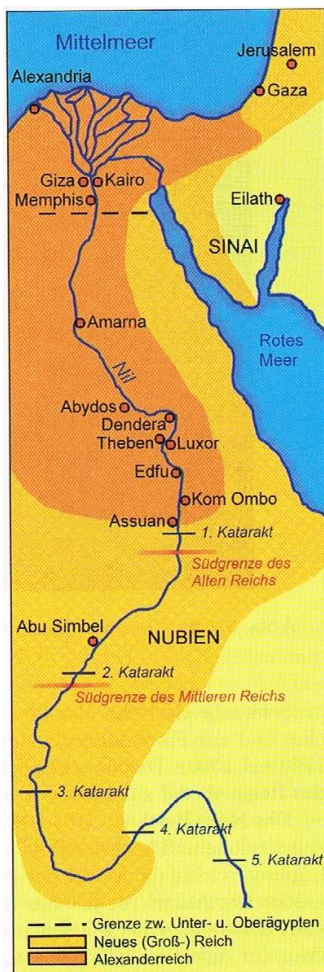


Abbildung 14: Ägypten im Altertum (Quelle: Wußing, 2008, S. 105)

3.2.1 Historische Einführung und die Entwicklung der Hieroglyphen

Vor etwa 5000 Jahren bildete sich im Niltal eine der einzigartigsten und prächtigsten Hochkulturen unserer Zeit, die ägyptische Hochkultur. Der Anfang der Kultur ist etwa gleichzusetzen mit dem Beginn der sumerischen Besiedlung des Zweistromlandes (vgl. Hein, 2012, S. 19). Die Frühgeschichte Ägyptens wurde einst zu 31 Dynastien zusammengefasst, wobei Ägyptologen heute dazu tendieren, die Makedonen als 32., die Ptolemäer als 33. Dynastie dazu zuzählen. Prinzipiell kann man drei Höhepunkte der ägyptischen Hochkultur nennen: Altes

Reich (ca. 2700-2170), Mittleres Reich (ca. 2040- 1790) und das Neue Reich (ca.

1550-1070) (vgl. Silverman, 2001, S. 20). Die frühdynastische Periode Ägyptens beginnt um 3100 v. Chr. mit König Menes der Unterägypten unterwarf, Ober- und Unterägypten vereinigte und die erste Hauptstadt Memphis gründete. Bereits um diese Zeit herum kam die Hieroglyphenschrift in Gebrauch.

Die Entstehung des Alten Reiches um 2700 v. Chr. wird als der eigentliche Beginn der altägyptischen Geschichte gesehen (vgl. Wußing, 2008, S. 104,105). In dieser Zeit entstanden beispielsweise die Stufenpyramide des Pharaos Djoser, die Cheops- und die Chephren-Pyramide von Giseh (vgl. Hein, 2012, S. 20). Aus der Zeit des Alten Reiches sind keine mathematischen Texte überliefert (vgl. Wußing, 2008, S. 105). Das Mittlere Reich entstand mit der 12. Dynastie um 2040 v. Chr. mit Amenemhet an der Spitze (vgl. Silverman, 2001, S. 28). Unter der 12. Dynastie erlebte Ägypten ein Goldenes Zeitalter und der kulturelle Einfluss reichte bis zum griechischen Festland (vgl. Wußing, 2008, S. 105). In dieser Zeit entstanden, bis auf eine Ausnahme, alle wichtigen schriftlichen mathematischen Quellen, die sogenannten Papyri. Der Papyrus Rhind ist die bedeutendste unter diesen Quellen. Sie wurde 1858 vom Engländer Henry Rhind in Ägypten gekauft und wird heute im Britischen Museum aufbewahrt. Ebenfalls bedeutend sind der Moskauer Papyrus und eine Lederrolle, die heute im Puschkin-Museum in Moskau und im Britischen Museum aufbewahrt werden. Weitere weniger bedeutende Quellen sind der Papyrus Kahun in London, der Berliner Papyrus aus Theben und zwei Holztafeln, die in Kairo verwahrt werden (vgl. Hein, 2012, S. 20). Kropp sagt folgendes zur Beschaffenheit der Papyri: *„Papyri sind in passende Form gebrachte gepresste Pflanzenteile, auf die mit einem in Tusche getauchten gespaltenen Rohr geschrieben wurde“* (Kropp, 1994, S. 9). Nach dem Zerfall des Mittleren Reiches, das durch schwache Herrscher der 13. Dynastie bedingt war, entstand ca. 1550 v. Chr. das Neue Reich und war unter den Herrschern der 18. Dynastie gekennzeichnet durch Pracht- und Machtentfaltung. Das fast 500 Jahre andauernde Reich ist geprägt von prachtvollen Bauwerken, Tempeln und

Gräbern. Auf die Glanzzeit unter Ramses 2, der in der 19. Dynastie herrschte, folgte eine Zeit des Niedergangs (vgl. Wußing, 2008, S. 107). Wußing beschreibt dies folgendermaßen: *„Die Aufspaltung Ägyptens in ein „westliches“ Königreich mit Sitz in Tanis im östlichen Delta und den „Gottesstaat des Amun“ mit Sitz in Theben besiegeln das Ende des Neuen Reiches“* (Wußing, 2008, S. 107). Im Jahr 525 v. Chr. wurde Ägypten durch die Perser erobert, was das Ende der Selbstständigkeit Ägyptens bedeutete. Das Alte Ägypten lebte unter der 28.-30. Dynastie noch einmal auf und mit der Eroberung Ägyptens durch Alexander des Großen 332 v. Chr. endete die Zeit der Königsdynastien.



Abbildung 15: Die Schrift Ägyptens (Quelle: <http://www.sekemreisen.de/geschichte.htm>)

Wie bereits erwähnt, ist die Hieroglyphenschrift (Abb.15) sehr alt und geht bis ins 3. Jahrtausend v. Chr. zurück. Der Ausdruck Hieroglyphenschrift kommt aus dem Griechischen und bedeutet so viel wie heilige Skulptur (hieros = heilig, glyphe = Skulptur). Die Hieroglyphen dienten ausschließlich für Inschriften auf Monumenten und anderen Bauten. Man spricht zwar verallgemeinernd von Hieroglyphen, doch wurden einige Regulierungen vorgenommen. Zum Schreiben auf Papyrus war eine andere Schrift, die sogenannte hieratische Schrift (Abb.15) in

Gebrauch, die der Hieroglyphenschreibweise nachgebildet war, aber einer Schreibschrift ähnelte. Der hieratischen Schrift folgte die sogenannte demotische Schrift (Abb.15), welche die herkömmliche Urkundenschrift wurde und ungefähr 660. v. Chr. in Gebrauch kam (vgl. Hein, 2012, S. 19,29, 108). Wußing schreibt bezüglich der Entzifferung der Hieroglyphen folgendes: „Da man die Hieroglyphen für Zeichen bzw. Symbole hielt und deren phonetischen Charakter nicht erkannte, blieb ein Entzifferungsversuch u.a. des deutschen Gelehrten Athanasius Kircher (1602-1680) ergebnislos“ (Wußing, 2008, S. 108).



Abbildung 16: Der Stein von Rosetta (Quelle: <http://www.leifiphysik.de/themenbereiche/wellenmodell-des-lichts/geschichte>)

Der Stein von Rosetta, der sich heute im Britischen Museum befindet, wurde 1799 nahe der Stadt ar-Rashid (im nordwestlichen Nildelta) gefunden. Der Stein enthält drei Texte in drei verschiedenen Schriften: in hieroglyphischer, demotischer und griechischer Schrift (vgl. Wußing, 2008, S. 109). Der griechische Text war leicht zu entziffern und war eine Verordnung der altägyptischen Priester aus Memphis, vermutlich aus dem Jahr 196 v. Chr. Im griechischen Text hieß es, dass diese Verordnung in drei verschiedenen Schriften verfasst werden sollte und somit wurde angenommen, dass es sich um drei Texte mit identischem Inhalt handeln müsse (vgl. www.planetwissen.de/laender_leute/aegypten/hieroglyphen/der_stein_von_rosette.jsp). Zwei Jahrzehnte lang bemühten sich Gelehrte und Wissenschaftler um die Entzifferung der Hieroglyphen und schließlich gelang die

Dechiffrierung zwanzig Jahre nach dem sensationellen Fund. Der französische Sprachwissenschaftler Jean- Francois Champollion (1790-1832) machte die Hieroglyphen 1822 lesbar (vgl. Wußing, 2008, S. 109). Wußing ist zu entnehmen: *„Mit der Entzifferung der Hieroglyphen konnte eine Jahrtausende währende aufregende und glanzvolle Kultur erschlossen werden. Namen von Herrschern, Priestern und politische Ereignisse traten aus dem historischen Dunkel hervor“* (Wußing, 2008, S. 109). Wissenschaftler fanden durch Übersetzung der erhaltenen Papyri heraus, dass die Wissenschaft und Kultur im alten Ägypten bereits ein sehr hohes Niveau erreicht hatten. Beispielsweise die Metallverarbeitung, die bildende Kunst, Bautechnik und die Medizin waren auf hohem Stand. Doch nicht jedem war ein bequemes Leben gesichert und die schwere Situation eines Bauern, ist einem Papyri aus dem Neuen Reich zu entnehmen:

„Erinnerst du dich nicht an das Wesen des Feldarbeiters beim Registrieren der Ernte? Die Schlange hat die eine Hälfte der Ernte weggenommen. Die Nilpferde haben das andere vertilgt. Die Mäuse sind zahlreich im Feld. Die Hausschrecke fällt ein, das Kleinvieh frißt und die Vögel bringen Mangel für den Feldarbeiter. Das Restliche, das auf der Tenne ist, ist zu Ende wegen der Diebe, während der Wert des geliehenen Viehs verloren ist, weil das Gespann durch Dreschen und Pflügen verreckt ist. Und dann landet der Schreiber auf dem Ufer. Er wird die Ernte registrieren, wobei die Wächter Stöcke und die Nubier Palmzweige tragen. Sie sagen: Gib das Korn her. Wenn keines da ist, so verprügeln sie ihn furchtbar und er wird in ein Wasserloch geworfen“ (Wußing, 2008, S. 110; zitiert nach: Imhausen 2003, S. 158).

Auskunft über die Mathematik der alten Ägypter geben uns wie bereits erwähnt einige mathematische Papyri, die bedeutendsten zwei sind der Moskauer Papyrus und der Papyrus Rhind. Der Papyrus Rhind ist ein Rechenbuch und wurde nach seinem Schreiber Ahmes benannt (vgl. Kropp, 1994, S. 9). Der Beruf des Schreibers im alten Ägypten war sehr hoch angesehen und mit einer gewissen Machtbefugnis verbunden. Die Schreiber waren die Organe der Verwaltung des

Staates und hatten eine Reihe von Zuständigkeitsbereichen inne. Beispielsweise mussten die Felder jährlich, nach den Nilüberschwemmungen, neu vermessen werden, Steuern mussten berechnet und eingetrieben werden, Arbeitsheere mussten geführt und deren Proviant berechnet werden. All diese Dinge sollte ein erfahrener Schreiber meistern. Ein Brief eines solchen Schreibers aus dem Neuen Reich an einen anderen Schreiber ist heute erhalten, in welchem er Kritik an ihm ausübt, da dieser, ihm übertragene Aufgaben nicht ausführen und lösen kann:

“Es fällt auf meinen Nacken(...). Siehe, du kommst und füllst mich mit deinem Amt an. (Da will) ich Dir darlegen, was Dein Wesen ist, wenn du sagst: Ich bin der Befehlsschreiber des Heeres. Man gibt dir einen See auf, den du graben sollst. Da kommst Du zu mir, um Dich nach Proviant für die Soldaten zu erkundigen und sagst: Rechne ihn mir aus. Du läßt dein Amt im Stich und es fällt auf meinen Nacken, daß ich dir seine Ausübung lehren muß. (...) Denn sieh, Du bist ja der erfahrenen Schreiber, der an der Spitze des Heeres steht. Es soll also eine Rampe gemacht werden, 730 Ellen lang und 55 Ellen breit, die 120 Kisten enthält und mit Rohr und Balken gefüllt ist, oben 60 Ellen hoch, (...) Man erkundigt sich nun bei den Generälen nach dem Bedarf an Ziegeln für sie, und die Schreiber sind allesamt versammelt, ohne daß einer unter ihnen etwas weiß. Sie vertrauen alle auf Dich und sagen: Du bist ein erfahrener Schreiber, mein Freund, so entscheide das schnell für uns. Sieh, Du hast einen berühmten Namen; möge man einen in dieser Stätte finden, der die übrigen dreißig groß mache. Laß es nicht geschehen, daß man von Dir sage: Es gibt auch Dinge, die du nicht weißt“ (Wußing, 2008, S. 114; zitiert nach: Neugebauer 1969, S. 120).

Die mathematischen Papyri enthalten im Wesentlichen elementare arithmetische und geometrische Beispiele. Im Papyrus Rhind sind 84 und im Moskauer Papyrus 25 Aufgaben zu finden. Die Mathematik der Ägypter war eher als Hilfsmittel für Wirtschaft und Verwaltung gedacht und weniger als „Wissenschaft“. Die ökonomische Grundlage des alten Ägypten, der Nil, trat jedes Frühjahr über seine Ufer und zerstörte die Grenzen der Grundbesitzer und bedingte jedes Jahr eine erneute Landvermessung. So mussten sich die Ägypter durch die Geometrie,

wörtlich Erdmessung, Abhilfe verschaffen (vgl. Kropp, 1994, S. 11). Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit der Algebra, der Arithmetik und der Geometrie der alten Hochkultur und soll ebenfalls einen Einblick in das altägyptische Zahlssystem gewähren.

3.2.2 Zahlschrift - Zahlssystem

Die ägyptischen Zahlzeichen und Grundrechnungsarten: Wie bereits erwähnt, hatten die Babylonier ein Positionssystem mit der Zahl 60 als Basis. Das altägyptische Zahlssystem hingegen war kein Positionssystem, aber dezimal aufgebaut. Jede Zehnerpotenz hatte hier ein eigenes Symbol in hieroglyphischer Schrift wie in Abbildung 17 gezeigt wird (vgl. Wußing, 2008, S.114).

Hieroglyphe	Zahl	Beschreibung	Hieroglyphe	Zahl	Beschreibung
I	1	Strich		10.000	Finger
∩	10	Bogen		100.000	Kaulquappe
⊙	100	Kringel		1.000.000	sitzender Gott
	1000	Lotosblatt			

Abbildung 17: Ägyptische Zahlensymbole (Quelle: <http://www.medunetscher.de/3879138.asp?sektion=5049878.asp&language=1&templateid=997>)

Die bekannte Lotusblume beispielsweise stand für die Zahl 1000 und die Kaulquappe für 100 000. Die Zahlen wurden durch Aneinanderreihung der verschiedenen Symbole gebildet (vgl. Kropp 1994, S. 11).



Abbildung 18: Ägyptische Zahl (Quelle: Kropp, 1994, S. 11)

Wenn wir die Zahl 5724 (Abb. 18) in ägyptischer Schreibweise notieren möchten, nehmen wir fünf Symbole für die Zahl 1000, sieben Symbole für die Zahl 100, zwei Symbole für die Zahl 10 und vier für eins. Diese Schreibweise wurde mit der Zeit jedoch als zu umständlich und lang empfunden, deswegen schafften sich die Ägypter eine Abhilfe und modifizierten ihre übliche Zahlschreibweise. Sie ersetzten die mühsame Anreihung verschiedener Symbole durch eine multiplikative Schreibweise (vgl. Kropp, 1994, S. 11). Die Zahl 1 234 567 würde üblicherweise wie in Abbildung 18 dargestellt werden:



Abbildung 19: Ägyptische Zahl 1234567 (Quelle: Kaiser, 2006, S. 81)

Die neue Schreibweise sah eine Produktdarstellung großer Zahlen vor und so wurde die 2 800 000 wie in Abbildung 20 angeschrieben:



Abbildung 20: Ägyptische Zahl 2 800 000 als Produktdarstellung (Quelle: Kaiser, 2006, S.81)

Das bedeutet dann $28 \cdot 100\,000$. Die ägyptische Schreibweise erforderte auch kein Zeichen bzw. Symbol für die Null. Die vier Grundrechenarten waren den Ägyptern, wie auch den Babyloniern, bekannt. Bei der Addition haben sie die Einer, Zehner, Hunderter, welche nebeneinander aufgeschrieben wurden, abgezählt. Die Subtraktion erfolgte analog (vgl. Kaiser, 2006, S. 81). Die Multiplikation und die Division, wie sie die Ägypter handhabten, ist sehr interessant. Die Multiplikation beruht auf fortgesetztes Verdoppeln des Multiplikators und anschließendes Addieren der Ergebnisse (vgl. Kropp, 1994, S. 12).

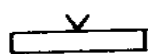
21	42	84	441 d m d
21	42	84	69
42	84	122	122
42	84	122	122

Abbildung 21: Aufgabe 32 aus dem Papyrus Rhind: (Quelle: http://sfabel.tripod.com/mathematik/themen_arithmetik.html)

Abbildung 21 zeigt eine Aufgabe aus dem Papyrus Rhind und zwar geht es um die Multiplikation von $12 \cdot 12$. Man kann das folgendermaßen veranschaulichen: Die Zahl 12 wird als Summe von 4 und 8 gedacht. Nun werden zwei Spalten eingezeichnet, wobei in die zweite Spalte die Vielfachen von 12 eingetragen werden.

1	12
2	24
4*	48
8*	96

Nun werden die Zahlen 4 und 8 gekennzeichnet, da ihre Addition den Multiplikanden 12 ergibt und deren Vielfache addiert, das Ergebnis ist 122. Die Ägypter hatten ein Symbol für die Summe und zwar die Buchrolle mit Siegel:



(vgl. Kaiser, 2006, S. 82). Die Division betrachteten die Ägypter als eine Art Multiplikation. Die Division der alten Ägypter soll an dem Beispiel $753 \div 26$ demonstriert werden. Es wird eine fortgesetzte Verdoppelung von 26 in eine

Spalte eingetragen und zwar sooft, bis man den Dividenden 753 durch ein weiteres Verdoppeln übersteigen würde.

1	26
2	52
4*	104
8*	208
16*	416

So haben sie angeschrieben: $753 = 416 + 337$ und 337 liegt zwischen 208 und 416. So zerlegten sie weiter in: $753 = 416 + 208 + 129$, wobei 129 zwischen 104 und 208 liegt. Eine weitere Zerlegung ergibt: $753 = 416 + 208 + 104 + 25$. Die Summe der verwendeten Zahlen aus der ersten Spalte ergibt: $16 + 8 + 4 = 28$ und diese ist gleichzeitig auch das Ergebnis der Division mit 25 Rest (Kaiser, 2006, S. 82,83).

Die Ägypter mussten für ihre Division und Multiplikation keine Tabellen, wie die Babylonier anfertigen, was ein erheblicher Vorteil war. Sie war auch sehr gut geeignet für das Rechnen am Abakus (Rechenbrett) (vgl. Kaiser, 2006, S. 82,83). „Der Divisionsalgorithmus funktioniert natürlich nur, wenn die Division aufgeht“ (Hein, 2012, S. 49). Wenn dies nicht der Fall ist, wird eine Bruchrechnung benötigt.

Die ägyptischen Bruchzahlen: Zunächst ist es wichtig zu erwähnen, dass die alten Ägypter zur Darstellung von Brüchen nur Stammbrüche verwendeten, d.h. Brüche mit dem Zähler 1 (vgl. Kaiser, 2006, S. 83). Das System zur Darstellung von Brüchen änderte sich mehrmals. Stewarts schreibt: „Im Alten Reich (2700-200 v. Chr.) ordnete man speziellen Brüchen, die durch fortgesetztes Halbieren entstanden- $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ - Symbole zu, die zusammengesetzt das „Auge des Horus“ oder „Wadjet- Auge“ ergeben“ (Stewarts, 2010, S. 16).

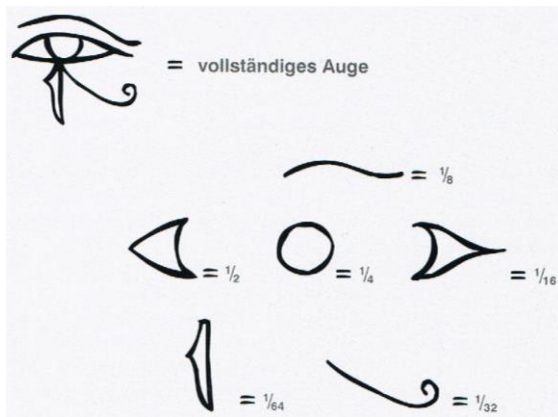


Abbildung 22: Das Auge des Horus (Quelle: Stewarts, 2010, S. 17)

Im mittleren Reich (2200- 1700 v. Chr.) wurden die Brüche durch das Symbol  welches auch gleichzeitig die Hieroglyphe für den Buchstaben R ist, dargestellt. Hier in Abbildung 23 sind einige Beispiele, wie sie die alten Ägypter anschraben:

$$\frac{1}{3} = \text{III} \text{ mit } \frac{1}{2}\text{-Symbol}; \quad \frac{1}{6} = \text{IIII} \text{ mit } \frac{1}{2}\text{-Symbol}; \quad \frac{1}{11} = \text{IIIIII} \text{ mit } \frac{1}{2}\text{-Symbol};$$

Abbildung 23: Bruchschreibweise im mittleren Reich (Quelle: http://sfabel.tripod.com/mathematik/themen_arithmetik.html)

Einige Brüche die besonders häufig vorkamen wie $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ hatten außerdem eigene Symbole (Abb. 24) (vgl. Stewarts, 2010, S. 16).

$$\frac{1}{2} = \text{Symbol}; \quad \frac{1}{4} = \text{Symbol}; \quad \frac{2}{3} = \text{Symbol};$$

Abbildung 24: Symbole für häufige Brüche (Quelle: http://sfabel.tripod.com/mathematik/themen_arithmetik.html)

Brüche wie beispielsweise $\frac{4}{5}$ gab es in dem Sinne nicht, diese wurden stets als Divisionsaufgabe aufgefasst und als Summe von Stammbrüchen dargestellt (vgl. Hein 2012, S. 49). Die Richtigkeit dieser „Vermutung“ wird durch eine Aufgabe aus dem Papyrus Rhind bestätigt, wo es darum geht, neun Brotlaibe unter 10 Personen gerecht aufzuteilen. Heute würden wir nicht viel herum rechnen, sondern angeben, dass neun Person genau $\frac{9}{10}$ eines Laibes und die zehnte Person

den Rest, also neunmal $\frac{1}{10}$ bekommt. Im Papyrus ist jedoch ein anderer Lösungsweg angegeben, nämlich „ $\frac{9}{10} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}$ “ (Man, 2006, S. 14).

Es wurde also stets in Stammbrüche zerlegt (vgl. Man, 2006, S. 14). Am Anfang des Papyrus Rhind finden wir eine Zerlegungstafel für $\frac{2}{n}$, die sogenannte „ $\frac{2}{n}$ -Tabelle“, die für ungerade n von 5 bis 101 eine Stammbruchzerlegung angibt (vgl. Kaiser 2006, S. 84). Einige Beispiele aus dieser Tabelle wären

$$„\frac{2}{23} = \frac{1}{12} + \frac{1}{276}, \frac{2}{83} = \frac{1}{60} + \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498}, \frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}“$$

(Hein, 2012, S. 50).

Den alten Ägyptern war es nun möglich, auch Divisionen ohne Rest durchzuführen. Der Papyrus Rhind enthält viele Aufgaben zur Bruchrechnung. Die Aufgabe 24 lautet, „man solle mit 8 rechnen, bis man 19 findet“ (Kaiser, 2006, S. 85). Sinngemäß übersetzt ist also die Division 19 durch 8 durchzuführen:

1	8
2*	16
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$ *	2
$\frac{1}{8}$ *	1

$19 = 16 + 2 + 1$ und der Quotient ist somit $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ (vgl. Kaiser, 2006, S. 84). Ein weiteres einfaches Beispiel zur Bruchrechnung wäre die Aufgabe 26 aus dem Papyrus Rhind:

„Eine Menge und ihr Viertel geben zusammen 15. Rechne mit 4, davon musst du ein Viertel nehmen, nämlich 1; zusammen 5“ (Kaiser, 2006, S. 111).

Bei diesem Beispiel wird das Lösungsrezept über die „Methode des falschen Ansatzes“ angegeben, es wird 15 durch 5 geteilt und das Ergebnis mit 4

multipliziert. Die gesuchte Menge ist also 12 (vgl. Kaiser, 2006, S. 112). Kaiser beschreibt diese Methode folgendermaßen: „Sei p ein Polynom und a eine gegebene Zahl. Sucht man einen Wert x mit $p(x) = a$, so wählt man einen Wert y , berechnet $p(y) = b$ und schließt aus dem Unterschied oder dem Verhältnis von a zu b auf den Wert x “ (Kaiser, 2006, S. 142).

Wie wir heute wissen, ist die Zerlegung eines Bruchs in Stammbrüche stets möglich, aber nicht eindeutig bestimmt. Den Bruch $2/15$ beispielsweise kann man auf drei unterschiedliche Arten in Stammbrüche zerlegen:

„ $2/15 = 1/8 + 1/120 = 1/9 + 1/45 = 1/10 + 1/30$ “ (Hein, 2012, S. 50). Im Papyrus Rhind ist nur Version drei angeführt und bis heute ist nicht klar, wie die Zerlegungen berechnet wurden (vgl. Hein, 2012, S. 50). Hein stellt folgende These diesbezüglich auf: „Ein System ist nur bei den Divisionen $2/3n$ zu erkennen; die hierfür gewählten Zerlegungen haben alle die Gestalt $2/3n = 1/2n + 1/6n$ “ (Hein, 2012, S. 50).

3.2.3 Algebra und Arithmetik im alten Ägypten

Folgen und Reihen: Wie bereits erwähnt, müssen endliche Folgen und Reihen in allen Hochkulturen bekannt gewesen sein, da diese in entsprechenden Quellen häufig vorkommen. Die Lösungswege der Aufgaben lassen sich häufig in eine uns heute bekannte Formel übertragen, jedoch wird angenommen, dass die Ägypter, wie auch die Babylonier und Chinesen nicht nach einer bestimmten Regel vorgegangen sind, sondern für jedes Beispiel neu überlegt haben. Die einzige Aufgabe zum Thema geometrische Reihen finden wir im Papyrus Rhind Nummer 79 (vgl. Hein, 2012, S. 55). Das berühmte Katzen- und Mäuse- Problem findet sich bis heute in vielen Büchern in unterschiedlichsten Einkleidungen. Frei übersetzt lautet die Aufgabe wie folgt:

„In sieben Häusern leben je sieben Katzen, jede Katze frisst sieben Mäuse, jede Maus frisst sieben Ähren Gerste, und aus jeder Ähre können sieben Scheffel

Körner entstehen. Wie viele Scheffel Getreide sind das insgesamt, die den Katzen zu verdanken sind? “ (Hemme, 2012, S. 12).

Eine Variante dieses Rätsels ist ein englisches Kindergedicht aus dem 19. Jahrhundert, das im Deutschen lautet:

„Als ich nach Saint Ives ging, kam mir ein Mann mit sieben Frauen entgegen. Jede Frau trug sieben Säcke, und in jedem Sack waren sieben Katzen, und jede Katze hatte sieben Kätzchen. Wie viele Kätzchen, Katzen, Säcke und Frauen gingen nach Saint Ives?“ (Hemme, 2012, S. 13).

Die wörtliche Übersetzung des altägyptischen Textes ist:

„Inventar eines Hauses: 7 Häuser, 49 Katzen, 343 Mäuse, 2401 Ähren, 16807 Scheffel“ (Hein, 2012, S. 55).

Im Papyrus Rhind wird als Lösung die Zahl 16807 angegeben und außerdem wird 2801 mit 7 multipliziert, was 19607 macht. Man geht davon aus, dass es sich um die Summation der geometrischen Reihe 7, 49, 343, 2401, 16807 handelt, wobei der Quotient 7 ist. Durch die Addition der 5 Folgenglieder wird 19607 ermittelt. Wenn man die Summenformel $7 \cdot \frac{7^5 - 1}{7 - 1}$ kennt, werden einem die angegebenen Zahlen klarer, denn in die Formel eingesetzt erhält man „ $7 \cdot \frac{16807 - 1}{7 - 1} = 19607$ “ (Hein, 2012, S. 56). Es ist aber unklar wie die Ägypter auf diese Zahlen und den Zusammenhang gekommen sind, diese Fragen bleiben uns die Quellen schuldig. Ein Beispiel zum Thema arithmetische Reihen finden wir im Papyrus Rhind, Nummer 64:

„Wenn man dir sagt, 10 hekat Gerste für 10 Personen, die Differenz von jeder Person zu seinem Nachbarn ist $\frac{1}{8}$ “ (Hein, 2012, S. 56; zitiert nach: Vogel Teil 1, S. 57).

Es sind also 10 Scheffel Gerste an 10 Leute zu verteilen, wobei die Anteile eine arithmetische Reihe mit $d = \frac{1}{8}$ bilden. Im Text steht geschrieben:

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot 9 = 1 + 9 \cdot \frac{1}{16} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right) \text{ (Hein, 2012, S. 56).}$$

Die heutige Vorgehensweise erfolgt gemäß der Formel:

„ $a_n = \frac{sn}{n} + \frac{1}{2}d(n-1) = \frac{10}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot 9$ “ (Hein, 2012, S. 56). Zunächst wird a_n berechnet und die übrigen Glieder durch sukzessives Subtrahieren von $\frac{1}{8}$ errechnet. Abschließend wird die Probe durchgeführt und die Summe von 10 (hekat) verifiziert (vgl. Hein, 2012, S. 56).

Gleichungen: Bei den Ägyptern war das Lösen von linearen Gleichungen in einer Unbekannten durchaus bekannt und diese Art von Rechnungen werden heute als „Hau-Rechnungen“ bezeichnet, wobei das ägyptische Wort „Hau“ Menge oder Haufen bedeuten kann (vgl. Kaiser, 2006, S. 142). Dieser Ausdruck übernimmt in gewissen ägyptischen Rechnungen die Rolle der unbekannten Größe, deshalb wird bei „Hau-Rechnungen“ heute von linearen Gleichungen gesprochen. Der Papyrus Rhind enthält eine Reihe solcher Aufgaben, genauer die Aufgaben 24 bis 34. Eine klar formulierte „Hau-Aufgabe“ findet man im Moskauer Papyrus:

„Form der Berechnung eines Haufens, gerechnet $1\frac{1}{2}$ mal zusammen mit 4. Er ist gekommen bis 10. Der Haufen nun nennt sich? Berechne du die Größe dieser 10 über dieser 4. Es entsteht 6. Rechne du mit $1\frac{1}{2}$, um zu finden 1. Es entsteht $\frac{2}{3}$. Berechne du $\frac{2}{3}$ von diesen 6. Es entsteht 4. Siehe: 4 nennt sich. Du hast richtig gefunden“ (Wußing, 2008, S. 117; zitiert nach: Struve 1930, S. 114).

Modern gesprochen soll also die Gleichung $\frac{3}{4}x + 4 = 10$ gelöst werden. (vgl. Wußing, 2008, S. 117) Ein weiteres Beispiel einer „Hau-Rechnung“ ist die Aufgabe 31 aus dem Rhind Papyrus:

„Eine Menge und $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{7}$ davon gibt zusammen 33“ (Kaiser, 2006, S. 142).

Nach unseren Quellen gab es keine komplizierteren Gleichungen oder Gleichungssysteme in der ägyptischen Mathematik, bis auf eine rein quadratische Gleichung, die im Berliner Papyrus vorkommt:

„Ein Quadrat und ein zweites, dessen Seite $\frac{3}{4}$ von der Seite des ersten Quadrats ist, haben zusammen den Flächeninhalt 100. Lass mich wissen!“ (Hein, 2012, S. 60).

Nach unserer heutigen Terminologie würden wir die Gleichung folgendermaßen aufschreiben: $x^2 + y^2 = 100, y = \frac{3}{4}x$. Die Werte eingesetzt ergibt $x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = 100$, daraus folgt $\frac{25}{16}x^2 = 100$, was äquivalent ist zu $x^2 = 100 \cdot \frac{16}{25}$. Durch Wurzelziehen erhalten wir die Lösung $x = 8$ (vgl. Hein, 2012, S. 62). Im ägyptischen Text wird die Lösung auf folgende Art beschrieben:

„Nimm ein Quadrat mit Seite 1; nimm $\frac{3}{4}$ von 1, das ist $\frac{3}{4}$, als Seite der anderen Fläche. Multipliziere $\frac{3}{4}$ mit sich selbst, das ergibt $\frac{9}{16}$. Wenn also die Seite der einen Fläche als 1, die der anderen als $\frac{3}{4}$ angenommen ist, addiere die beiden Flächen. Ergebnis $\frac{25}{16}$. Ziehe daraus die Wurzel, es ist $\frac{5}{4}$. Ziehe die Wurzel aus der gegebenen Zahl 100, es ist 10. Wie oft geht $\frac{5}{4}$ in 10? Es ist 8 mal (Hein, 2012, S. 62).

Die Seite des ersten Quadrats ist also 8 und gleichzeitig unser x . Diese Aufgabe wurde mit der „Methode des falsches Ansatzes“ gelöst, das heißt, dass für die Unbekannte x eine „Versuchszahl“ gedacht wurde, nämlich „ $x = 1: 1^2 + \left(\frac{3}{4} \cdot 1\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$ “ (Hein, 2012, S. 62). Nun werden die Wurzeln gezogen und eine Zahl a mit $a \cdot \frac{5}{4} = 10$ bestimmt und man erhält: „ $100 = a^2 \cdot \frac{25}{16} = a^2(1^2 + \left(\frac{3}{4} \cdot 1\right)^2) = a^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2$ “ (Hein, 2012, S. 62) So ist $x = a = 8$ eine Lösung der Gleichung. Wenn wir nun ein wenig weiter denken und die Lösungen $x(=8)$ und $y(=6)$ in den pythagoreischen Lehrsatz $z^2 = x^2 + y^2$ einsetzen, erhalten wir für $z = 10$. Sofort erkennt man, dass die Zahlen 6,8,10 ein pythagoreisches Zahlentripel (6,8,10) ergeben (vgl. Hein, 2012, S. 62). Dieser Abschnitt wird im folgenden Kapitel näher behandelt. Hier geht es um die Geometrie der alten Ägypter.

3.2.4 Geometrie in Ägypten

In diesem Kapitel wird die Geometrie im alten Ägypten behandelt, genauer die Ursprünge der Geometrie. Welchen Problemstellungen standen die alten Ägypter gegenüber und aus welchen Motiven heraus hat sich die Geometrie entwickelt? Auf diese und weitere Fragen versuche ich in diesem Abschnitt einzugehen.

Herodot, ein griechischer Geschichtsschreiber, berichtet über die Ursprünge der Geometrie in seiner Geschichte der Perserkriege:

„Dieser König, erzählten sie, hat auch das Land unter alle Ägypter aufgeteilt und gab jedem das gleiche rechtwinkelige Landstück, und daraus verschaffte er sich die Einnahmen, indem er eine Abgabe auferlegte, jährlich zu entrichten. Wenn aber der Fluss von einem Landstück einen Teil wegnahm, ging der Besitzer zu ihm und machte Anzeige von dem Vorfall. Er schickte dann die Leute hin, die das zu besichtigen hatten und auszumessen, wie viel kleiner das Stück geworden war, damit er für das übrige eine der festgesetzten genau entsprechenden Abgabe leistete. Und ich meine, auf die Art ist dort die Feldmesskunst, die Geometrie, erfunden worden und von dort nach Hellas gekommen“ (Hein, 2012, S. 73; zitiert nach: Herodot, 2. 109, S. 175f.).

Zweifellos war die Notwendigkeit der Geometrie, genauer der Feldvermessung, durch die jährlichen Nilüberschwemmungen gegeben. So wird angenommen, dass die Ursprünge der Geometrie in der Erledigung praktischer Aufgaben liegen. Messeile zählten damals zu den wichtigsten und unentbehrlichsten Werkzeugen für Vermessungsarbeiten, dies beweisen Abbildungen in und an Monumenten (vgl. Hein, 2012, S. 74,75). In den mathematischen Papyri befinden sich viele geometrische Probleme: Berechnung einer Kreisfläche, Volumina, Berechnung von Dreiecksinhalten oder rechtwinkelig begrenzten Flächenstücken.

Die Zahl π im alten Ägypten: Im Papyrus Rhind gibt es zwei Aufgaben, in denen es um die Berechnung einer Kreisfläche mit Durchmesser 9 geht. Die beiden

Aufgaben 48 und 50 sind im Wesentlichen ident und liefern einen erstaunlich genauen Näherungswert an die Zahl π .

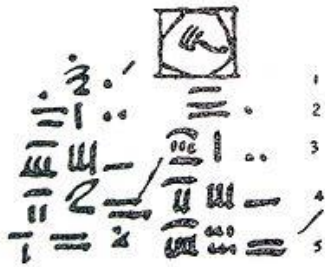


Abbildung 25: Beispiel 48 aus dem Papyrus Rhind (Quelle: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Probl%C3%A8me-R48-Papyrus-Rhind-texte.jpg>)

Abbildung 25 zeigt den Originaltext mit dem Originalbild der Aufgabe 48 aus dem Papyrus Rhind. Hier beschreibt der Schreiber Ahmes die Berechnung der Kreisfläche.

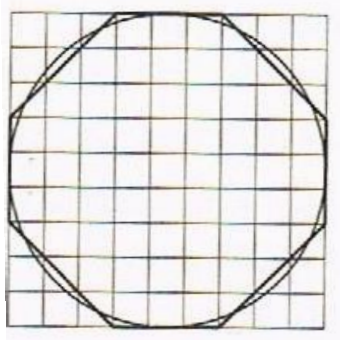


Abbildung 26: Quadrat mit Inkreis (Quelle: Hemme, 2012, S. 11)

Er unterteilt ein Quadrat in $9 \cdot 9 = 81$ gleich große Quadrate und zeichnet den Inkreis ein (Abb. 26). Er zeichnet ein Achteck ein, das sich aus 57 ganzen und 12 halben Unterquadraten zusammensetzt und erhält somit die selbe Fläche wie 63 Unterquadrate. Ahmes nimmt an, dass der Kreis und das Achteck denselben Flächeninhalt haben. Wenn ein Unterquadrat die Seitenlänge a hat, hat das Achteck eine Fläche von $63a^2$. Der Radius des Kreises beträgt $\frac{9}{2}a$ und hat folgende Fläche: „ $\pi(\frac{9}{2})^2 = \pi \frac{81}{4}a^2$ “ (Hemme, 2012, S. 83) Wenn man nun Kreis- und Achteckfläche gleichsetzt, erhält man $\pi \frac{81}{4}a^2 = 63a^2$ und daraus folgt für $\pi = 3\frac{1}{9} \approx 3,1111$, wobei der tatsächliche Wert für $\pi \approx 3,1416$ ist. Ahmes kommt

sogar zu einem noch genaueren Näherungswert von $\pi = 3\frac{13}{81} \approx 3,1605$, indem er einwenig schummelt und behauptet, die Fläche von $63a^2$ sei fast das gleiche wie die Fläche von $64a^2$ (vgl. Hemme, 2012, S.83).

Aufgabe 50 im Rhind Papyrus hat, wie bereits erwähnt, im Wesentlichen gleichen Inhalt, die Berechnung von π . Die Aufgabe lautet:

„Beispiel der Berechnung eines runden Feldes vom (Durchmesser) 9 ht (ein Längenmaß). Was ist der Betrag seiner Fläche? Nimm $\frac{1}{9}$ von ihm (dem Durchmesser) weg. Der Rest ist 8. Multipliziere 8 mal 8. Es wird 64“ (Wußing, 2008, S. 119; zitiert nach Gericke 1984, S. 55)

Wie der Text schon sagt, subtrahiert man $\frac{1}{9}d$ vom Durchmesser und quadriert anschließend, daraus folgt $(d - \frac{d}{9})^2$ und für π ergibt sich $\pi \approx \frac{56}{81} = 3,16 \dots$. Es ist bis heute nicht klar warum gerade $\frac{1}{9}d$ abgezogen wurde und nicht etwa $\frac{1}{8}$ oder $\frac{1}{9}$. Diese beiden Werte liefern schlechtere Näherungswerte an π (vgl. Wußing, 2008, S. 119).

Flächen- und Volumsberechnungen: Wie auch die Babylonier kannten die Ägypter einfache Methoden zu Flächen- und Volumsberechnungen (vgl. Kaiser, 2006, S. 202). Die Berechnung der Fläche von Vierecken, Dreiecken und Trapezen zählt zu den einfachsten Aufgaben, diese Figuren traten stets als Felder oder Baugrundstücke auf und nie als abstrakte Begriffe (vgl. Hein, 2012, S. 83). Zur Ermittlung der Fläche eines beliebigen Vierecks mit den Seiten a, b, c, d wurde die Näherungsformel $F = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ verwendet. Sie wurde am Horustempel in Edfu entdeckt und wird demnach als „Edfu-Formel“ bezeichnet. Hier erfolgt die Mittelbildung gegenüberliegender Seiten und der Fehler wird umso größer, je mehr sich das Viereck vom Rechteck entfernt. Diese Formel war in der Form auch in Babylon, Indien und China bekannt (vgl. Hein, 2012, S. 84). Die Berechnung der Kreisfläche erfolgte, wie oben erwähnt, gemäß der Formel $F = (\frac{8}{9}d)^2$ (vgl. Scriba/Schreiber, 2001, S. 14). Wie auch die Babylonier führten die Ägypter keine Beweise

durch, sondern überprüften die Rechnungen mittels Rechenproben (vgl. Hein, 2012, S. 83). In den ägyptischen Quellen kommen neben Flächenberechnungen auch Volumsberechnungen vor, beispielsweise wird das Fassungsvermögen von Gefäßen und Speichern ermittelt. Neben quaderförmigen Körpern kommen vorwiegend zylinderförmige Körper vor. Hierfür wird die Formel für die Kreisfläche eingesetzt. Bis heute gibt es keinen eindeutigen Beleg dafür, dass die alten Ägypter eine Inhaltsformel für Pyramiden kannten, obwohl die Pyramidenbauten diese Vermutung nahe legen (vgl. Scriba/Schreiber, 2001, S. 14). In Aufgabe 14 im Moskauer Papyrus findet sich jedoch eine Glanzleistung, die korrekte Berechnung des Volumens eines quadratischen Pyramidenstumpfes:

„Wenn man dir sagt, ein Pyramidenstumpf von 6 Ellen Höhe, Von 4 Ellen an der Basis und 2 Ellen an der Spitze, Rechne du mit 4, das Quadrat ist 16. Multipliziere diese 4 mit 2. Ergebnis 8. Rechne du mit dieser 2, sein Quadrat ist 4. Addiere zusammen diese 16, mit diesen 8 und mit diesen 4. Ergebnis 28. Rechne du $\frac{1}{3}$ von 6. Ergebnis 2. Rechne du zweimal mit 28. Resultat 56. Siehe. Es ist 56! Du hast es richtig gefunden“ (Wußing, 2008, S. 120; zitiert nach DSB Supplement 1978, S. 697).

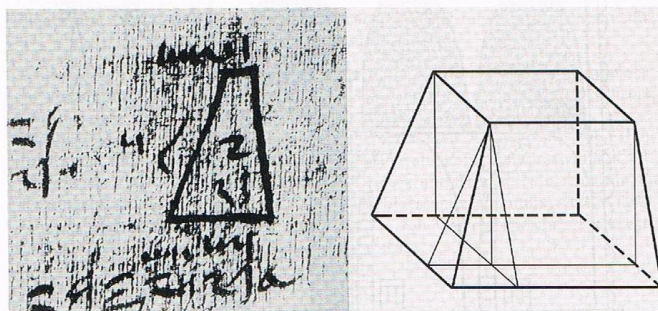


Abbildung 27: Pyramidenstumpf-Aufgabe 14 aus dem Moskauer Papyrus (Quelle: Wußing, 2008, S. 119)

Es ist also ein quadratischer Pyramidenstumpf (Abb. 27) mit der Seitenlänge 4 Ellen, Höhe 6 Ellen und 2 Ellen am Deckquadrat, wobei 1 Elle= 20,6 Zoll ist, gegeben. Die Rechnung ergibt folgende Volumsformel für den Pyramidenstumpf:

„ $V = \frac{h(a^2+ab+b^2)}{3}$ “ (Wußing, 2008, S.120). Die Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes war den Babyloniern nicht bekannt (vgl Hein, 2012, S. 85).

Sätze von Thales und Pythagoras: Es gibt viele Legenden darüber, dass die alten Ägypter den Satz von Pythagoras kannten, doch gibt es keine stichhaltigen Hinweise diesbezüglich. Hingegen waren der Satz von Pythagoras und von Thales bei den Babyloniern, Chinesen und Indern bekannt, was uns viele Quellen beweisen. Trotz fehlender Hinweise und Beweise kann man kaum behaupten, dass die alten Ägypter auch keine pythagoreischen Zahlentripel oder den Zusammenhang mit dem rechtwinkligen Dreieck kannten. Im Abschnitt „Gleichungen“ wurde eine quadratische Gleichung aus dem Berliner Papyrus genauestens behandelt und deren Lösung liefert uns das pythagoreische Tripel (6, 8, 10). Man geht davon aus, dass diese Lösung kein Zufall sein kann und die Zahlen 100 und $\frac{3}{4}$ vom Schreiber bewusst gewählt worden sind, um genau auf die Lösung zu kommen. Pythagoreische Zahlentripel werden immer wieder mit den Seilspannern in Verbindung gebracht. Hein schreibt diesbezüglich: *“Die mathematische Grundlage für die Arbeit der Seilspanner wäre demnach folgende Beobachtung: Es sei (a,b,c) ein pythagoreisches Zahlentripel. Markiert man, etwa durch Knoten, auf einem Seil der Länge a+b+c hintereinander die Strecken der Länge a,b,c, verbindet man die Seilenden und spannt das Seil so, dass die Markierungen die Ecken eines Dreiecks mit den Seitenlängen a,b,c bilden, so ist dieses Dreieck notwendig rechtwinklig”* (Hein, 2012, S. 82). Rechte Winkel sind bei Bau von Häusern, Altären und anderen Bauwerken von großer Bedeutung vermutlich kam diese Methode des Seilspannens im alten Ägypten beim Bau von kleineren Objekten in Gebrauch. Jedoch ist es sehr unwahrscheinlich, dass die Genauigkeit der Winkel der mächtigen ägyptischen Pyramiden mittels dieser Methode erreicht wurde. Bis heute ist nicht geklärt, wie diese großartigen Bauten so präzise konstruiert worden sind (vgl. Hein, 2012, S. 81,82).

Das folgende Kapitel beinhaltet die letzten beiden Hochkulturen des Altertums, das alte China und das alte Indien.

4. Die Mathematik in den asiatischen Kulturen

Das Kapitel beginnt mit einer Einführung in die altchinesische Geschichte und hat im Wesentlichen die beiden wichtigsten mathematischen Quellen des chinesischen Altertums, das Zhoubi suanjing und das Jiuzhang suanshu zum Inhalt. Im weiteren Verlauf wird die letzte Hochkultur, das alte Indien bearbeitet und die Sulbasutras, die wichtigste mathematische Quelle des indischen Altertums, so genau wie möglich ausgearbeitet und dargelegt.

4.1 China im Altertum

4.1.1 Historische Einführung in das chinesische Altertum - Zhoubi suanjing und Jiuzhang suanshu

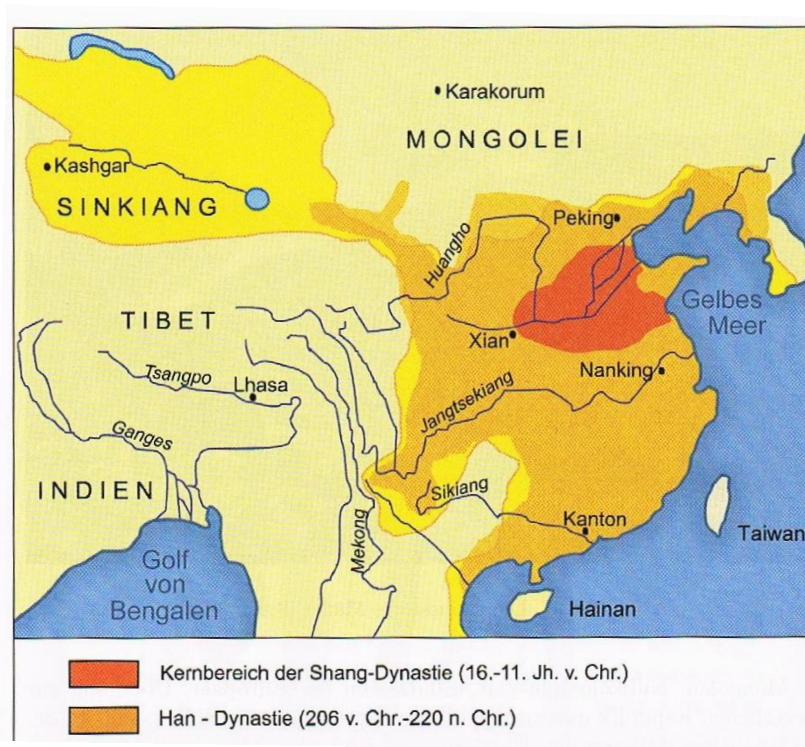


Abbildung 28: China im Altertum (Quelle: Wußing, 2008, S. 43)

Die Entwicklung bzw. Ausbildung des chinesischen Staates ist mehrheitlich aus Legenden und Geschichten bekannt und wurde ungefähr im 6. Jahrhundert v. Chr. niedergeschrieben. „500 Jahre später folgten rekonstruktive Aufzeichnungen zur Geschichte der Kaiser und zur Institution des Reiches durch das Werk *Shiji* von Sima Qian (145-73), dem Vater der chinesischen Geschichtsschreibung“ (Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 107). Bei archäologischen Ausgrabungen ist man auf Holz- und Bambustäfelchen gestoßen, die auf den Zeitraum von 770-221 v. Chr. datiert werden. Man geht davon aus, dass sich *Shiji* von Sima Qian bei seinen Aufzeichnungen auf diese Täfelchen bezogen haben könnte. Aus der Frühzeit gibt es nur sehr wenige schriftliche Zeugnisse, weil zum einen Holz und Bambus als Schriftmaterial die lange Zeit, aufgrund der schlechten

Qualität, nicht überdauerten und zum anderen wegen der Bücherverbrennung 213 v. Chr. durch den Herrscher der Chin-Dynastie. Die erste historische nachweisbare Dynastie ist die Shang- Dynastie (1650-1027), doch davor gab es bereits im Raum des Huangho Beckens eine weit entwickelte Gesellschaft, die als Bauern tätig waren und Viehzucht und Ackerbau betrieben (vgl. Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 107). Die Shang-Dynastie, die um 1650 v. Chr. begann, deckt sich mit dem Beginn der Bronzezeit (vgl. Hein, 2010, S. 23). Dieser Abschnitt ist vor allem gekennzeichnet durch den hohen Stand der Bronzeverarbeitung zu beispielsweise Waffen, Münzen, allgemein ausgedrückt zu Gütern des täglichen Lebens (Abb. 28).



Abbildung 29: Bronzegegenstände aus der Zeit der Shang-Dynastie (Quelle: Wußing, 2008, S. 45)

In dieser Zeit entfaltete sich eine Zeichenschrift, welche von Orakelpriestern genutzt wurde. Die Zeit war auch geprägt von Orakelwesen, Opferkult oder Natur- und Ahnengeistern.

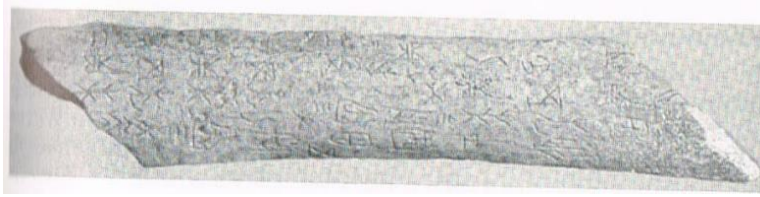


Abbildung 30: Orakelknochen aus dem 14.-bis 12. Jahrhundert (Quelle: Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 109)

Diese Zeichen wurden auf Tierknochen (Abb. 30) oder auf Panzer von Schildkröten geritzt und von Orakelpriestern zur Orakelbestimmung benutzt. Da die Shang Heerkönige waren, handelte die Mehrheit der Fragen, die sich an das Orakel richteten, über kriegерische Angelegenheiten oder über die Schuld bzw. Unschuld eines Menschen. *„Ein erhaltener Orakelknochen enthält die Anfrage, ob drei Schafe und zwei Rinder oder drei Schafe und fünf Rinder durch Ertränken oder Verbrennen vom Shang- König aus Dankbarkeit für eine gute Ernte bestimmten Göttern des Pantheons geopfert werden sollen“* (Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 108). Um nun Antworten auf die Fragen zu erhalten, warf man die eingeritzten Knochen ins Feuer und deutete die Antworten anhand der Risse, welche durch das Feuer verursacht wurden. Auch aus dieser Zeit stammt ein dezimales Zahlensystem, das aber kein Positionssystem war und dies bestand aus zehn Individualzeichen. Derartige Zahlenzeichen wurden auf Orakelknochen, Bronzemünzen und anderen Gegenständen aus Bronze gefunden. Die Organisation eines so großen und mächtigen Staates erforderte zwangsläufig ein Schrift- und Zahlssystem und somit konnten die Herrscher und Machthaber jederzeit alle Bestände überprüfen. Um ungefähr 1000. v. Chr. endete die Shang-Dynastie und die Chou (Zhou)-Dynastie begann. Die Chou waren damals die mächtigste Adelsfamilie und unter ihrer Herrschaft erhielt das Land in vielen Lebensbereichen großen Aufschwung. Es wurden beispielsweise Gewerbe, Warenaustausch und Verwaltung ausgebaut.



Abbildung 31: Laotse und Konfuzius (Quelle: Wußing, 2008, S. 46)

In diese Zeit kann man zwei, heute noch bekannte Philosophen bzw. Religionsstifter zuordnen: Konfuzius und Laotse. Um 481 v. Chr. führten die Auseinandersetzungen zwischen den Chou Fürsten um die Vorherrschaft zu sieben verfeindeten Staaten. Bis 221 v. Chr. gab es keine einheitliche Befehlsgewalt im Reich. Zu dieser Zeit hatte die Philosophie des Konfuzius großen Einfluss auf das Denken der Menschen. Seine Philosophie sagt aus, dass man Werte wie Respekt und Güte hoch halten und öfter reflektieren muss, sowohl privat mit sich selbst, als auch öffentlich in zwischenmenschlichen Beziehungen. Seine Lehre formte das chinesische Denken und die Staatsphilosophie einige Jahrtausende. Der zweite wichtige erwähnenswerte Philosoph war Laotse. Er gilt als Begründer des Taoismus, wobei Tao „der Weg“ bedeutet. *„Nach seiner Anschauung stellte das Tao die magische Kraft dar, aus der alles entspringt und von der die Welt in immer wechselnden Kombinationen des Gegensatzes von Yin und Yang zusammengehalten wird“* (Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 110). Die Überzeugung der Taoisten war ein Wegbereiter für den Buddhismus, der im 1. Jahrhundert n. Chr. aus Indien kam. Zu jener Zeit herrschte also eine kulturelle Beziehung zwischen den beiden Kulturen. Im Jahre 221 v. Chr. bildete sich die Chin- Dynastie, unter dem ersten Kaiser Cheng aus. Dieser trug den Titel Shi-Huang, das soviel bedeutet wie „Des Anfangs erhabener Kaiser der Chin-Dynastie“ (Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 110). Der Name China leitet sich von dieser Dynastie ab. Zu jener Zeit wurde auch mit dem Bau der chinesischen Mauer begonnen, der zunächst eine Länge von 2450 km

hatte und mit der Zeit auf 6000 km erweitert wurde. Cheng nahm viele Änderungen vor, dem Lehnssystem folgte ein Verwaltungssystem und darüber hinaus wurden Gesetze, die Sprache, die Schrift u.v.m. vereinheitlicht. Der Kaiser war jedoch unbittlich und duldete keine Form von Widerspruch.

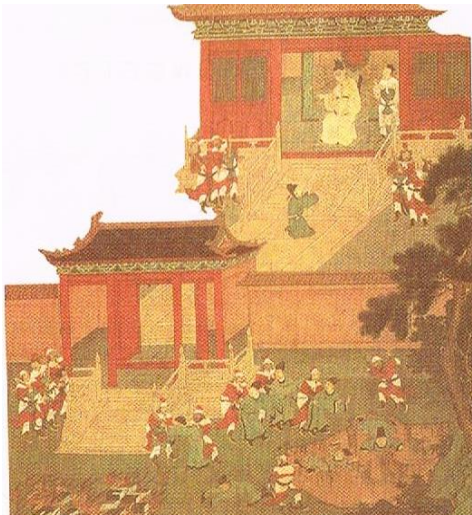


Abbildung 32: Bücherverbrennung im Jahre 213 v. Chr. (Quelle: Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 108)

Die zeigte sich auch in der Bücherverbrennung (Abb. 32) von 213 v. Chr., wo er alle Schriften, die nicht mit seiner Überzeugung und Politik harmonierten, verbrennen ließ. Verschont blieben beispielsweise einige medizinische Bücher und Bücher über das Orakel. Cheng wurde 207 v. Chr. von Gaozu und seiner Bauernarmee gestürzt und damit wurde Gaozu zum ersten Kaiser der Han-Dynastie. Das Beamtentum erlebte zu jener Zeit seine Hochblüte und über 2000 Jahre wurde das chinesische Reich von kaiserlichen Beamten geleitet. Es wurde eine Akademie für Beamte errichtet und die Absolventen mussten ein umfangreiches Lehrprogramm bewerkstelligen. Die Lehre des Konfuzius, die Mathematik und Astronomie zählten zu dem Pflichtfächern. In dieser Zeit entwickelte sich die Mathematik maßgeblich (vgl. Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 109, 110). Aus der Han-Dynastie stammen zwei Bücher, welche die altertümliche chinesische Mathematik und Astronomie darlegen. Man geht davon aus, dass sie um Christi Geburt

verfasst wurden, einige Teile der Bücher sind jedoch viel älter (vgl. Wulff, 2006, S. 157). Das älteste Werk ist das „Zhoubi suanjing“, der Gnomon der Zhou-Dynastie oder wörtlich übersetzt „Der mathematische Klassiker vom Gnomon und vom kreisförmigen Weg des Himmels“ (vgl. Wulff, 2006, S. 157; Scriba/ Schreiber, 2001, S. 111). Dieses Buch handelt im Wesentlichen über mathematische Astronomie und Kalenderrechnung. Die Mathematik, die in diesem Werk enthalten ist, dient nur als Hilfsmittel. Es ist in Dialogform verfasst und enthält unter anderem Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks, Kreises, Quadrats und den ersten „Beweis“ des pythagoreischen Lehrsatzes, auf den ich im Kapitel „Geometrie“ näher eingehen werde. Das zweitälteste Werk ist das „Jiuzhang suanshu“, wörtlich übersetzt „Die Neun Abschnitte arithmetischer Technik“ (vgl. Scriba/ Schreiber, 2001, S. 111,112). Im 3. Jahrhundert n. Chr. wurde dieses Werk von Liu Hui kommentiert und in dieser Fassung wurden die Neun Abschnitte auch überliefert (vgl. Wußing, 2008, S. 46). Die Neun Abschnitte enthalten 246 mathematische Problemstellungen inklusive Lösungen, jedoch ohne jeglichen Versuch, den beschriebenen Lösungsweg zu erläutern und auch ohne abstrakte Beweise. Die Beispiele in den neun Büchern sind nach Sachverhalten geordnet. Im ersten Buch geht es hauptsächlich um Flächenberechnungen von Dreiecken, Rechtecken, Trapezen und Kreisen. In Buch zwei finden wir hauptsächlich Schlussrechnungen. Buch drei befasst sich mit dem *„Ausgleich von Steuereinheiten in Geld oder Arbeitskraft- zwischen verschiedenen Regionen“* (Wußing, 2008, S. 56). Im vierten Buch geht es mehrheitlich um geometrische Probleme. In Buch fünf werden eine Vielzahl von Volumenberechnungen, beispielsweise von Pyramiden mit quadratischen, dreieckigen oder trapezförmigen Grundflächen durchgeführt. Es finden sich auch richtige Volumenberechnungen von Zylindern, einem Kegel oder einem Kegelstumpf, wobei $\pi = 3$ gesetzt wurde. Im sechsten Buch geht es um Steuerberechnungen. In Buch sieben finden wir unter anderem eine Anleitung zur Lösung linearer Gleichungen. Im achten Buch werden lineare Gleichungen durch eine Art Matrizenrechnung gelöst, wobei auch negative Zahlen auftreten. Das

letzte Buch behandelt das rechtwinkelige Dreieck und liefert einen „Beweis“ zum Satz von Pythagoras (vgl. Wußing, 2008, S. 55, 56).

Wulff schreibt über die Neun Abschnitte: *„Alles in allem stellten die Neun Abschnitte ein mathematisches System dar. Es ist allerdings kein theoretisches, deduktives System und kein in sich logisches und zusammenhängendes Gedankengebäude, wie die euklidische Geometrie. Es ist induktiv, an konkreten Beispielen orientiert“* (Wulff, 2006, S. 159). Die Neun Abschnitte wurden durch viele bedeutende chinesische Mathematiker kommentiert und galten Jahrhunderte lang als ein Standardwerk der Arithmetik und prägten bis in die Neuzeit das mathematische Denken (vgl. Wulff, 2006, S. 159).

4.1.2 Zahlendarstellung und Rechenbrett

Die Schreibweise der Zahlen hat aufgrund der Jahrtausende langen Geschichte Chinas eine lange Vergangenheit. Es gibt zahlreiche Hinweise dafür, dass in der Frühzeit Quipus, also Knotenschnüre und Kerbhölzer benutzt wurden. Bei archäologischen Funden, die seit Ende des 19. Jahrhunderts gemacht wurden, fand man tausende von Knochen mit eingeritzten Zeichen (vgl. Wußing, 2008, S. 52). Man geht davon aus, dass es sich bei diesen Knochen um Orakelknochen handelt und dass die alten Chinesen darauf ihre Fragen an das Orakel verzeichneten. *„Die Knochen wurden erhitzt, und aus den auftretenden Sprüngen leitete man die Antworten ab“* (Hein, 2012, S. 43).

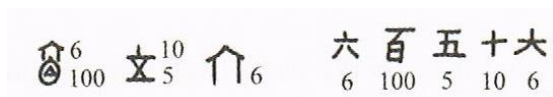


Abbildung 33: Die Zahl 656 in Orakelschrift (links) und moderner Schrift (rechts) (Quelle: Hein, 2012, S. 43)

In Abbildung 33 sieht man beispielsweise die Zahl 656 in „Orakelschrift“ und in moderner Schrift.

1	一	四	4
2	二		
3	三	萬	10000
4	四	一	1
5	五	千	1000
6	六		
7	七	九	9
8	八	百	100
9	九		
10	十	五	5
100	百	十	10
1000	千	七	7
10000	萬		

Abbildung 34: Chinesische Zahlzeichen (links) und Darstellung der Zahl 41957 (rechts) (Quelle: Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 117)

In Abbildung 34 sind chinesische Zahlzeichen als Hieroglyphenziffern abgebildet, sie wurden aus der Han- Zeit überliefert. Hier erkennt man, dass die Schreibweise im alten China dezimal, aber kein ganz durchgebildetes Positionssystem war. Die Einer, Zehner, Hunderter usw. wurden durch ein Zeichen und nicht durch ihre Stelle dargestellt (vgl. Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, S. 117). Die chinesischen Zahlzeichen waren aber nicht zum Rechnen geeignet und dienten ausschließlich der Zahlnotation (vgl. Hein, 2012, S. 43.) Erst ab dem 4. Jahrhundert v. Chr. entstanden einfache Zahlzeichen, aus denen sich die Stäbchenzahlen entwickelten. Diese Stäbchen bestanden aus den unterschiedlichsten Materialien wie Holz, Eisen oder Bambus, für Wohlhabende wurden sie sogar aus Jade oder Elfenbein angefertigt. Sie waren ca. 3 mm dick und 7-14 cm lang und mit ihnen konnten nun die Zahlenmuster der Ziffern gelegt werden (vgl. Wulff, 2006, S. 155). Zum Rechnen wurden diese Stäbchen auf ein Brett mit Feldern gelegt.



Abbildung 35: Stäbchendarstellung der Ziffern 1-9 (Quelle: Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 116)

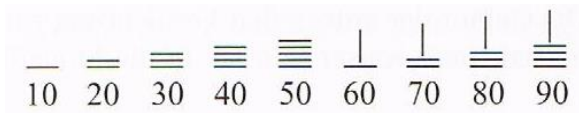


Abbildung 36: Stäbchendarstellung der Zehner (Quelle: Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 116)

Im chinesischen Zahlssystem gab es zwei Reihen von Ziffern, die vertikal und die horizontal gelegten Stäbchen (vgl. Wußing 2008, S. 52). Wußing ist zu entnehmen: „Die vertikal gelegten Stäbchen für die Ziffern 1 bis 9 wurden auf dem Zahlenschachbrett auch für entsprechend viele Hunderter, Zehntausender,(...) verwendet. Horizontal gelegt, (...) bezeichneten diese Stabziffern Zehner, Tausender,(...), also entsprechend viele Einheiten ungerader Zehnerpotenzen“ (Wußing, 2008, S. 52,53).

$$7928 = (7 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8) = \underline{\text{I}} \text{III} = \text{III}$$

Abbildung 37: Darstellung der Zahl 7928 (Quelle: Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 117)

In Abbildung 37 sehen wir die Zahl 7928 in chinesischer Zahlschreibweise. Auch die Verwendung der Zahl 0 ist in diesen Hybridsystemen nicht notwendig.

$$70316 = \text{II} \quad \text{III} - \text{I}$$

Abbildung 38: Darstellung der Zahl 70316 (Quelle: Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 117)

Die Darstellung der Zahl 70316 (Abb. 38) zeigt, dass statt der Zahl 0 eine Lücke gelassen wurde. Bis ins 8. Jahrhundert wurde die Zahl 0, wie auch in Babylon durch ein Lückenzeichen „eingeführt“ und im 13. Jahrhundert auch in gedruckter Form, zunächst als Punkt, anschließend als kleiner Kreis.

Die Grundrechnungsarten: Das Rechnen erfolgte ab dem 2. Jahrhundert v. Chr. mit Rechenbrett, worauf man die Stäbchen beliebig anlegen konnte (vgl. Hein, 2010, S. 51).

		≡	⊥	—		48 612
		=		≡		+ 2 078
			⊥	≡		= 50 690

Abbildung 39: Beispiel der Addition mit Stäbchen (Quelle: Wußing, 2008, S. 53)

Abbildung 39 zeigt ein Beispiel der Addition, wie sie im chinesischen Altertum durchgeführt wurde. Auf dem Brett wurden mit dieser Methode Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division durch Hinzufügen oder Wegnahme von Stäbchen ausgeführt. Die Zahlen wurden von links nach rechts geschrieben und am Rechenbrett wurden die Einer stets ganz rechts gelegt und das Feld für die Null wurde freigelassen. Für die Multiplikation verlief der Vorgang ähnlich. Der Multiplikator wurde oben und der Multiplikand unten im Brett ausgelegt und die Teilprodukte, die in den mittleren Zeilen zusammengelegt wurden, wurden schließlich addiert (vgl. Wußing, 2008, S. 53). Auch das Rechnen mit Brüchen war im alten China kein Problem, Brüche der Form $\frac{a}{b}$ wurden folgendermaßen angeschrieben: b 分之 a . Wörtlich bedeutet dies: „a Teile von b“ (Wulff, 2006, S. 158). Diese Bruchschreibweise hat sich in China bis in die Neuzeit gehalten (vgl. Wulff, 2006, S. 158).

Negative Zahlen: In den Neun Abschnitten findet man Beispiele zur Addition und Subtraktion von Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen, das heißt negative

Zahlen waren den alten Chinesen kein Fremdwort. Soweit wir heute wissen, sind in Indien die negativen Zahlen erst ungefähr 500 Jahre später aufgetreten, so stellt man sich heute die Frage, ob dieser „Begriff“ auf eigenständiger Leistung der alten Inder beruht, oder ob die negativen Zahlen doch aus China eingeführt wurden (vgl. Hein, 2012, S. 68). Im alten China kannte man zwar noch kein Minuszeichen, also keine algebraischen Zeichen, jedoch konnte man positive Zahlen von negativen gut unterscheiden. Positive Zahlen wurden nämlich mit roten und negative Zahlen mit schwarzen Stäbchen gekennzeichnet (vgl. Wulff, 2001, S. 158). Wie bereits erwähnt, finden sich in den Neun Abschnitten, genauer im Buch acht, Beispiele zu den negativen Zahlen. In Aufgabe 8 werden drei Bedingungen über Kauf und Verkauf genannt, wobei die erste davon lautet:

„Jetzt hat man 2 Rinder und 5 Schafe verkauft und damit 13 Schweine gekauft, wobei ein Rest von 1000 quian blieb“ (Hein, 2012, S. 69; zitiert nach: Juschkevitsch, S. 36).

Der Lösungsweg am Ende heißt übersetzt: „Lege hin die 2 Rinder als positiv, die 13 Schweine als negativ, die Anzahl des restlichen Geldes als positiv“ (Hein, 2012, S. 69). Positiv und negativ werden mit „zheng“ und „fu“ bezeichnet. Ersteres kann man auch mit richtig oder gerecht übersetzen und „fu“ bedeutet im übertragenen Sinn Fehlbetrag oder Schuld. In solchen Aufgaben sind negative Zahlen nie als unbekannte Größen, besser „abstrakte“ Größen zu finden, sondern stets als benannte Zahlen. In Aufgaben, in denen es um Kauf und Verkauf geht, deuten positive Zahlen meistens auf ein Guthaben hin und negative Zahlen signalisieren Schulden. Als Endergebnis sind negative Zahlen nie zu finden. Heute weiß man zwar, dass mit negativen Zahlen gerechnet wurde, aber es herrscht Uneinigkeit darüber, auf welche Art und Weise mit ihnen gerechnet wurde. Im obigen Beispiel lautet die Anleitung, dass man „Hinlegen“ soll, höchstwahrscheinlich meint damit das Hinlegen unterschiedlich gefärbter Zahlstäbchen auf das Rechenbrett, später kamen auch verschieden geformte Stäbchen hinzu und Stäbchen, die man quer

übereinanderlegte, erinnert fast an ein Minuszeichen. Addition und Subtraktion mit negativen Zahlen war im alten China üblich, die Multiplikation mit negativen Zahlen gab es erst ab dem 14. Jahrhundert (vgl. Hein, 2012, S. 69).

4.1.3 Algebra und Arithmetik im chinesischen Altertum

Gleichungen: Lineare Gleichungen waren wie auch bei den Babyloniern und den alten Ägyptern im chinesischen Altertum bekannt und wurden nach der „Methode des doppelten falschen Ansatzes“ gelöst. Wie weiter oben bereits erwähnt, wurde in Babylon mit der „Methode des einfachen falschen Ansatzes“ gearbeitet, wobei für x eine Versuchszahl gewählt wurde. Auf die Methode des doppelten falschen Ansatzes treffen wir im Buch sieben der Neun Abschnitte, wobei diese Methode auch oft als Regel zweier Fehler oder „Überschuss und Fehlbetrag“ überliefert wird. Es wurde von der linearen Gleichung der Form $ax = b$ oder $ax + b = d$ ausgegangen und für x zwei willkürlich gewählte Versuchszahlen x_1 und x_2 ($x_1 > x_2$) eingesetzt: $ax_1 = b + d_1$, $ax_2 = b - d_2$. Hier sind d_1 und d_2 der Überschuss und der Fehlbetrag.

Es folgt: „ $b(x_1 - x_2) = d_1x_2 + d_2x_1$, $a(x_1 - x_2) = d_1 + d_2$, $x = \frac{x_1d_2 + x_2d_1}{d_1 + d_2}$ “ (Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 121).

In den Neun Abschnitten wird in vier Schritten die Rechenmethode, welche auf dem Rechenbrett erfolgt, erläutert. Im ersten Schritt wird das Rechenbrett folgendermaßen belegt:

$$x_1 \ x_2$$

$$d_1 \ d_2$$

Im zweiten Schritt werden die Diagonale multipliziert und anschließend die Summe gebildet: $x_1 d_2 + x_2 d_1$. In Schritt drei wird die Summe von d_1 und d_2 gebildet: $d_1 + d_2$. Im vierten und letzten Schritt wird die zweite Summe durch die erste Summe geteilt (vgl. Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S.

120,121). Diese Methode wird beispielsweise in Aufgabe 10 aus dem siebenten Buch illustriert:

„Jetzt hat man eine Wand, 9 Fuß hoch. Eine Melone wächst an dieser nach oben kriechend und wird täglich 7 Zoll länger (1 Fuß = 10 Zoll). Ein Kürbis wächst an ihr nach unten kriechend und wird dabei täglich 1 Fuß länger. Frage: In wieviel Tagen treffen sie zusammen und wie lang ist dann jedes, die Melone und der Kürbis?“ (Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 121).

In moderner Schreibweise lautet die Lösungsmethode:

„Sei $7x$ die Länge der Melonenpflanze (in Zoll) nach x Tagen, $10x$ die Länge der Kürbispflanze (in Zoll) nach x Tagen“ (Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 121).

x ist so zu bestimmen, dass $90 - 10x = 7x$, umgeformt $17x = 90$. $x_1 = 6$ und $x_2 = 5$ sind die Versuchszahlen und somit ergibt sich $17x_1 = 102 = 90 + 12 = 90 + d_1$, daraus ergibt sich $d_1 = 12$. Weiters erhält man $17x_2 = 85 = 90 - 5 = 90 - d_2$, woraus folgt, dass $d_2 = 5$. Nach der Methode des doppelten falschen Ansatzes ergibt sich für $x = \frac{90}{17}$ (Tage). Die Länge der Melone und des Kürbis sind demnach $7x = \frac{70 \cdot 90}{17} = \frac{6300}{17}$ (Zoll) und $10x = \frac{10 \cdot 90}{17} = \frac{900}{17}$ (Zoll) (vgl. Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 121). Ein weiteres Beispiel aus den Neun Abschnitten hierzu lautet:

„Jetzt hat man eine Wand, 5 Fuß dick. Zwei Ratten graben sich gegeneinander durch die Wand; dabei macht die große Ratte am ersten Tag 1 Fuß; die kleine Ratte macht ebenfalls am ersten Tag 1 Fuß. Die große Ratte macht jetzt an jedem Tag das Doppelte, die kleine Ratte an jedem Tag die Hälfte der Leistung vom Vortag. Frage: In wieviel Tagen treffen sie sich und wieviel hat jede gegraben? Die Antwort sagt: Es sind $2\frac{2}{17}$ Tage. Die große Ratte gräbt 3 Fuß $4\frac{12}{17}$ Zoll. Die kleine Ratte gräbt 1 Fuß $5\frac{5}{17}$ Zoll“ (Wußing, 2008, S. 57; zitiert nach: Vogel (Ed.), Chiu Chang Suan Shu, 1968, S. 75).

Die Methode des falschen doppelten Ansatzes taucht zum ersten Mal bei den alten Chinesen auf. In Babylon und im alten Indien war nur die Methode des

einfachen falschen Ansatzes bekannt. Die Methode des doppelten falschen Ansatzes verbreitete sich später auch in den islamischen Ländern bei al-Hwarizmi oder Qusta ibn Luqa und wurde einige Jahrhunderte lang zur Lösung linearer Gleichungen angewandt und auch noch 1884 an österreichischen Gymnasien gelehrt (vgl. Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 121).

Buch acht der Neun Abschnitte enthält 18 Aufgabenstellungen zu linearen Gleichungssystemen mit bis zu 5 Unbekannten. Das Auflösungsverfahren solcher Beispiele entspricht unserem „Gaußschen Algorithmus“. In den Neun Abschnitten wird diese Lösungsmethode als Fangcheng - Methode (rechteckige Tabelle) bezeichnet (vgl. Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 122). Die erste Aufgabe im achten Buch lautet:

„Aus 3 Garben einer guten Ernte, 2 Garben einer mittelmäßigen Ernte und 1 Garbe einer schlechten Ernte erhält man den Ertrag von 39 Tou. Aus 2 Garben einer guten Ernte, 3 Garben einer mittelmäßigen Ernten und 1 Garbe einer schlechten Ernte erhält man 34 Tou. Aus 1 Garbe guter Ernte, 2 Garben mittelmäßiger und 3 Garben schlechter Ernte erhält man 26 Tou. Wie viel ist der Ertrag je einer Garbe?“ (Hein, 2012, S. 60).

Das Lösungsverfahren wird folgendermaßen beschrieben:

„Die Regel lautet: Lege auf der rechten Seite hin 3 Garben der guten Ernte, 2 Garben der mittelmäßigen Ernte, 1 Garbe er schlechten Ernte und den Ertrag, die 39 Tou. Die Reihen der mittelmäßigen und geringen Ernte lege hin wie auf der rechten Seite“ (Hein, 2012,S. 60).

Es entsteht die folgende Matrix:

„Garben der guten Ernte	1	2	3
Garben der mittelmäßigen Ernte	2	3	2
Garben der schlechten Ernte	3	1	1
Ertrag	26	34	39“ (Hein, 2012, S. 61)

Nach den Zeilen- und Spaltenumformungen erhält man diese Matrix:

„Garben der guten Ernte	0	0	3
Garben der mittelmäßigen Ernte	0	5	2
Garben der schlechten Ernte	36	1	1
Ertrag	99	24	39“ (Hein, 2012, S. 61)

Das Ergebnis lautet:

„36 Garben schlechter Ernte ergeben 99 Tou, 1 Garbe also $99/36$ Tou; 5 Garben mittelmäßiger Ernte = $24 - 99/36$ Tou, 1 Garbe demnach $17/4$ Tou; 3 Garben guter Ernte = $39 - 17/2 - 11/4$ Tou = $111/4$ Tou, 1 Garbe also $37/4$ Tou“ (Hein, 2012, S. 60,61).

4.1.4 Geometrie im chinesischen Altertum

Buch eins, vier, fünf und neun der Neun Abschnitte behandeln vor allem geometrische Angelegenheiten, wobei die übrigen Abschnitte eher mit praktischen und für damalige Beamte relevanten Fragestellungen zu tun haben. Im Vordergrund stehen hier Verteilungsaufgaben, Steuerrechnungen, Getreidemischungen usw.

Flächen- und Volumenberechnungen: Im ersten Buch geht es um Berechnungen ebener Figuren wie Dreiecke, Rechtecke, Kreise oder Trapeze.

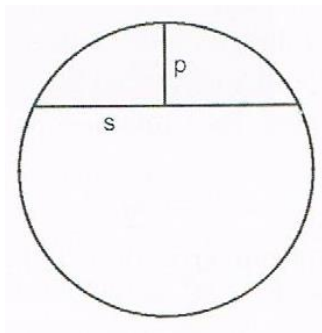


Abbildung 40: Kreissegment mit Sehne und Pfeil (Quelle: Scriba/Schreiber, 2001, S. 18)

Die Kreisfläche berechneten sie nach der Formel $3 \frac{d^2}{4}$ und für die Berechnung eines Kreissegments verwendeten sie die Formel „ $F = \frac{(s+p) \cdot p}{2}$ “ (Abb. 40) (Scriba/Schreiber, 2001, S. 114). Im vierten Buch geht es hauptsächlich um Flächenverwandlungen, es soll beispielsweise berechnet werden, um wieviel sich die Länge bei abnehmender Breite vergrößern soll, damit der Flächeninhalt gleich bleibt. Das fünfte Buch hat hauptsächlich Volumenberechnungen zum Thema, wobei Körper wie Pyramiden, Prismen, Zylinder oder Kreiskegel als Kanäle oder Mauern vorkommen und berechnet werden sollen (vgl. Scriba/Schreiber, 2001, S. 114). Neben Quadern und geraden Prismen werden auch kompliziertere Flächen unterschiedlichster Körper berechnet, „z.B. ansteigende Dämme mit abgeschrägten Seiten und pyramidenstumpffartige Gebilde“ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 119), wobei einige der Regeln an die babylonische Mathematik erinnern. Körper wurden in Teilkörper zerlegt und wenn nötig wurden auch Mittelbildungen verwendet. In Liu Huis Kommentar zum fünften Buch erläutert er seine Methode zur Volumenberechnung einer Pyramide. Mit Zerlegungen allein kam er nicht aus, sondern er musste Restpyramiden nochmals zerlegen und somit das Verfahren nochmals anwenden. Interessant sind die Volumenberechnungen der Körper mit gekrümmten Oberflächen, wie die von Kegeln, Kegelstümpfen oder Zylinder. Heute berechnen wir das Zylindervolumen, indem wir die Grundfläche mit der Höhe multiplizieren. Die alten Chinesen hingegen quadrierten den Umfang des Grundkreises, nahmen davon ein Zwölftel und multiplizierten das Ergebnis mit der Höhe. Nach dieser Regel wurde auch der Kegelinhalt bestimmt, wobei hier aber mit $\frac{h}{3}$ multipliziert wurde. Für das Kegelstumpfvolumen verwendeten sie die Formel: „ $V = \frac{U_1 U_2 + U_1^2 + U_2^2}{12} \cdot \frac{h}{3}$ “ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 119).

Im Kapitel neun, worauf ich im Anschluss näher eingehen werde, finden wir vermehrt Beispiele zu rechtwinkligen Dreiecken und einige davon gelangten einige Zeit später, vielleicht durch buddhistische Mönche, nach Indien.

Satz von Pythagoras: Im Abschnitt über Mesopotamien haben wir erfahren, dass der Satz von Pythagoras bereits in Babylon bekannt war und auch angewandt wurde. Es wurde auch erwähnt, dass es keine stichhaltigen Beweise dafür gibt, dass er im alten Ägypten beherrscht wurde. Im alten China jedoch, wie auch in Indien, waren sowohl der Satz von Pythagoras als auch der Satz von Thales bekannt und wurden in vielen Beispielen und Aufgaben verbreitet und angewandt (vgl. Hein, 2012, S. 75). Im altchinesischen Werk *Zhoubi suanjing* findet man eine „Herleitung“ des pythagoreischen Lehrsatzes, er wurde an einem konkreten Beispiel veranschaulicht. Man geht aber davon aus, dass er als allgemeingültig interpretiert wurde.

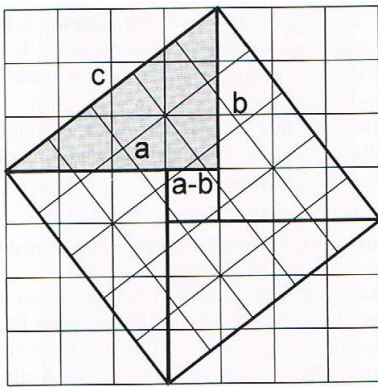


Abbildung 41: Figur zum Satz des Pythagoras (Quelle: Wußing, 2008, S. 56)

Abbildung 41 lässt sich folgendermaßen beschreiben:

„Man zeichne das rechtwinklige Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4, 5 über seiner Hypotenuse das Quadrat und ergänze und ergänze über dessen drei Seiten kongruente Dreiecke (3, 4, 5), so dass das Hypotenusenquadrat über Eck in ein Quadrat der Seitenlänge 7 eingepasst ist. In der beigegebenen Figur sind beide Quadrate durch zwei sich überkreuzende Netze 5 mal 5 bzw. 7 mal 7 Einheitsquadrate zerlegt. Das innere Quadrat ist 25 Einheitsquadrate groß, das äußere zerfällt in vier Rechtecke der Größe 3 mal 4 und das zentrale Einheitsquadrat“ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 112).

Allgemein ausgedrückt entspricht dies der Formel:

$$c^2 = 4 \frac{ab}{2} + (a - b)^2 = a^2 + b^2$$

Scriba und Schreiber schreiben diesbezüglich: „Dieser älteste chinesische „Beweis“ verbindet also eine anschauliche Konstruktion mit Überlegungen, die implizit algebraische Umformungen vornehmen. Damit ist auch die Richtung angedeutet, in der sich die Geometrie in China entwickelte: orientiert an der Praxis, wurde sie unter algebraischem Blickwinkel fortgebildet, man versuchte die geometrischen Fragestellungen auf Gleichungen zu reduzieren, um die Probleme mit Methoden der Gleichungslehre beantworten zu können“ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 112; zitiert nach: Needham 1959, 22-23/ Libbrecht 1973, 96ff.). Das neunte Buch der Neun Abschnitte besteht aus 24 Aufgaben, die ersten 16 wurden mithilfe des Satzes von Pythagoras gelöst.

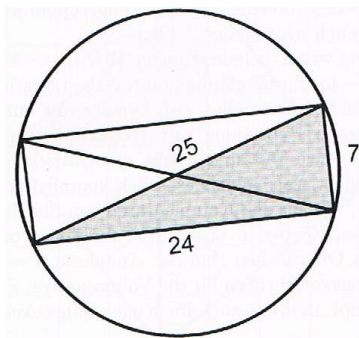


Abbildung 42: Figur zur Baumstammaufgabe (Quelle: Wußing, 2008, S. 58)

Ein Beispiel (Abb. 42) , das zusätzlich den Satz von Thales benutzt lautet sinngemäß übersetzt: „Es soll aus einem Baumstamm (Querschnitt kreisförmig angenommen, Durchmesser vorgegeben) ein Balken vorgegebener Breite herausgesägt werden. Die Lösung setzt voraus, dass der Umfangswinkel über dem Durchmesser ein rechter ist“ (Wußing, 2008, S. 58; zitiert nach: Vogel 1983). Hein beschreibt dieselbe Aufgabe wie folgt: „Hier soll aus einem Rundholz vom Durchmesser 25 Zoll ein Balken von 7 Zoll Dicke geschnitten werden und die Frage lautet, wie breit der Balken (höchstens) werden kann“ (Hein, 2012, S. 77).

Die Berechnung von π : Die Berechnung von π hat im alten China eine lange Tradition und wurde unter den Mathematikern als eine Art Sport angesehen. Man vermutet heute, dass die chinesischen Mathematiker durch indische Gelehrte angeregt wurden. Wie auch andere antike Kulturen setzten die Chinesen im Altertum π zunächst mit der Zahl 3 an (vgl. Wulff, 2006, S. 159). Der chinesische Philosoph und Astronom Zhang Heng, der vermutlich ca. 78 bis 139 nach Chr. lebte, behauptete, „dass sich das Quadrat des Kreisumfanges zum Umfang des dem Kreis umbeschriebenen Quadrates wie 5:8 verhält“ (Wußing, 2008, S. 59). Er berechnete für $\pi \approx 3,162$ (vgl. Wußing, 2008, S. 59). Ein Heerführer namens Wang Fan, der um 267 n. Chr. lebte, kam auf eine präzisere Näherung an den Wert π . Es ist heute zwar unbekannt, auf welche Art er rechnete, da die Quellen nichts darüber preisgeben, jedoch definierte er für $\pi \approx \frac{142}{45} \approx 3,15$ (vgl. Wußing, 2008, S. 59).

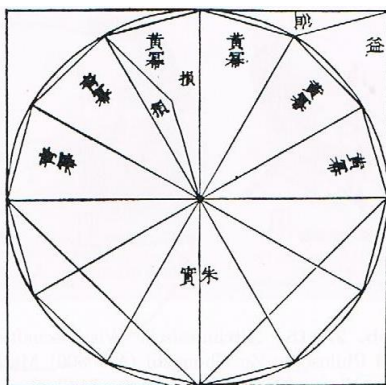


Abbildung 43: Liu Huis Verfahren zur Berechnung des Kreisinhaltes (Quelle: Wußing, 2008)

Eine weitere noch bessere Annäherung stammt von dem, bereits weiter oben erwähnten Mathematiker Liu Hui. Er „[...] benutzte die Annäherung an die Kreisfläche durch eine Folge eingeschriebener $k \cdot 2^n$ -Eck, beginnend mit dem Sechseck“ (Abb. 43) (Wußing, 2008, S. 59). Er erhielt für π den Wert $\pi \approx 3,14150$ und weiters formulierte er:

„Je feiner man teilt, umso geringer ist der Fehlbetrag. Teilt man immer weiter und weiter, so lange, bis die Teilung unmöglich wird, so erhält man eine Übereinstimmung mit der Kreisfläche, und ein Fehlbetrag tritt nicht mehr auf“ (Wußing, 2008, S. 59; zitiert nach: Juschkewitsch 1964, S. 58).

Es wurde bereits erwähnt, dass Liu Hui die Neun Abschnitte im 3. Jahrhundert n. Chr. kommentiert hat, zusätzlich fügte er einen eigenen Text hinzu, den er *Haidao suanjing* nannte. Dieser Text bedeutet wörtlich übersetzt soviel wie „Mathematisches Handbuch von der Insel im Meer“ (Wußing, 2008, S. 59) oder „Mathematische Inselsammlung“ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 15) und setzt sich aus neun Vermessungsaufgaben zusammen (vgl. Wußing, 2008, S. 59). Im Vordergrund stehen die Bestimmungen der Höhe und Breite nicht begehbarer Orte, wie etwa die Höhe eines Turms auf einer Anhöhe oder die einer Bergspitze.

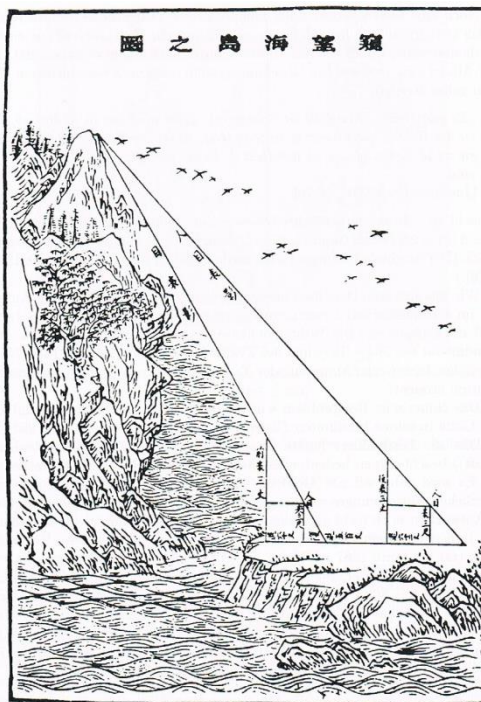


Abbildung 44: Illustration der Methode der doppelten Messungen (Quelle: Wußing, 2008, S. 61)

Es wurde folgendermaßen vorgegangen: „Die Vermessung beruht auf der Verwendung von zwei in einer Linie zum Objekt und auf gleicher Höhe senkrecht errichteten gleichlangen Messstäben, deren Abstände voneinander bekannt sind“

(Wußing, 2008, S. 60). Gesucht sind die Höhe der Bergspitze und die Entfernung zum vorderen Stäbchen. Es ist eine Strecke mit zwei anliegenden Winkeln bekannt und somit können das Dreieck und dessen Höhe konstruiert werden (vgl. Wußing, 2008, S. 60). Nun wird im folgenden Kapitel das alte Indien durchgenommen, beginnend mit einer historischen Einführung.

4.2 Indien im Altertum

Die letzte Kultur des Altertum, die ich im Rahmen dieser Arbeit durchnehmen werde ist das alte Indien. Auch hier werde ich mit einer kurzen historischen Einführung beginnen, anschließend das Zahlssystem, die Arithmetik, Algebra und die Geometrie der alten Hochkultur bearbeiten. Wir werden sehen, dass die altindischen Leistungen im Bereich der Algebra, im Vergleich zu jenen der vorher besprochenen Hochkulturen, eher mäßig sind. Was die geometrischen Errungenschaften anbelangt sind diese von größerer Bedeutung und wurden in den *Sulbasutras*, der wichtigsten altindischen mathematischen Quelle überliefert.

4.2.1 Historische Einführung in das indische Altertum

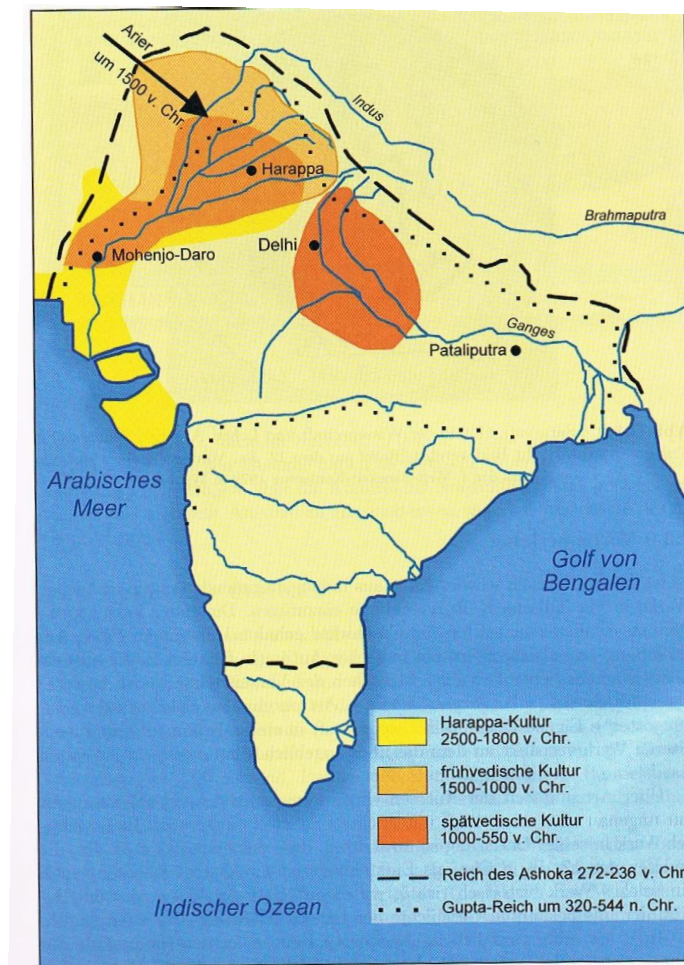


Abbildung 45: Indien im Altertum und im Mittelalter (Quelle: Wußing, 2008, S. 83)

Etwa zur Zeit der Besiedelung des Zweistromlandes und des Niltals bildete sich um die Mitte des 3. Jahrtausend v. Chr. eine hochentwickelte Stadtkultur im Indusdal aus, die sogenannte Induskultur. Heute geben die Ruinen der alten Städte Harappa und Mohenjo-Daro Aufschluss darüber, dass die alte Zivilisation bereits sehr hochentwickelt war. In archäologischen Ausgrabungen, welche seit 1925 in jener Region durchgeführt wurden, zeigen, dass es damals schon Steinhäuser mit Badezimmern, breit angelegte Straßen und Kanalisationssysteme gab. Bei Ausgrabungen fand man ebenfalls schriftliche Aufzeichnungen aus jener Zeit, die bis heute nicht entschlüsselt werden konnten. Dass der Induskultur mathematische Kenntnisse nicht ganz fremd waren, zeigt ein Lineal mit Dezimalteilung, das aus einer Muschel angefertigt worden war. In den Jahren 2000

bis 1500 v. Chr. ging die Induskultur nach und nach verloren, da arische Stämme in die Gebiete von Indus und Ganges einströmten. Die Sprache die von da an eingeführt und in den folgenden 1000 Jahren sowohl in Wort, als auch in Schrift verbreitet und verbessert wurde, war Sanskrit. Etwa um 1500 v. Chr. begann die „vedische Zeit“ und nach und nach begann unter Einfluss und Herrschaft der Eroberer die Teilung der Bevölkerung in die sogenannten Kasten, das heißt in unterschiedliche Gesellschaftsschichten. Aus dieser Zeit stammen „die Vedas“, die älteste indische Literatur, die vorwiegend aus Hymnen besteht, die an die arischen Götter gerichtet waren. Die vedische Periode war von wenig wissenschaftlicher Errungenschaft und Entwicklung geprägt und endete ca. 500 v. Chr, als Armeen des persischen Königs Darius nach Indien marschierten und einen Teil des Panjab, des Fünfstromlandes eroberten. In Ostindien blühte das Reich von Magadha auf, wo zur gleichen Zeit Buddha, „der Erleuchtete“ lebte. Buddhas Religion besagte, dass durch gutes und sittliches Handeln und durch Selbstvervollkommnung der Wiedergeburt eines Menschen ein Ende gesetzt werden und die Seele ins Nirvana übergehen konnte. Der Buddhismus fand auf Anhieb viele Anhänger und verbreitete sich sowohl in Indien, als auch in anderen asiatischen Ländern, unter anderem in China, sehr rasch. Zur vedischen Zeit in Indien entstanden die ersten mathematischen Schriften, hingegen waren in Babylon und in Ägypten die schöpferische Kraft verloren gegangen. Das Werk „Sulba-Sutras“, auch Schnurregeln genannt, werden in die Zeit zwischen dem 8. bis 3. Jahrhundert v. Chr. eingeordnet. Diese Zeugnisse, die in drei Versionen erhalten sind, sind in Versen abgefasst, wobei die Versform möglicherweise die Schüler/innen beim Lernen der Regeln unterstützen sollte. Das Werk enthält mathematische Regeln und basiert auf dem Satz des Pythagoras. *„Bemerkenswert sind die zur Konstruktion verwendeten Meßschnüre, wovon sich auch der Name des Werkes ableiten lässt“* (Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 130; zitiert nach: Scriba/Schreiber 2000, S. 144ff.). *„Sie dienten rituellen Zwecken wie dem Abstecken rechter Winkel mit Knotenschnüren und Bambusstäben zur Konstruktion von Altären“*

(Hein, 2012, S. 22; zitiert nach: Juschkevitsch, S. 92, 96). Diese mathematischen Kenntnisse waren in Mesopotamien bereits 1000 Jahre früher bekannt. 327 v. Chr. kam Alexander der Große nach Indien und mit ihm eine Reihe von Wissenschaftlern verschiedener Disziplinen. Seine Nachfolger im Osten, die Seleukiden verließen nach seinem Tod die indischen Gebiete und erstreckten sich über Mesopotamien, Syrien und einige Teile Mittelasiens, wodurch Kontakte mit babylonischem und ägyptischem Kulturgut entstanden. Unter König Ashoka bildete sich ab ca. 270 v. Chr. im Indus und im Ganges die Maurya-Dynastie, das erste indische Großreich. Das Reich umfasste fast ganz Indien und in jeder wichtigen Stadt wurden Steinfösten mit Inschriften errichtet, die auf Ashoka hinweisen. Die in diesen Inschriften enthaltenen Zeichen für Zahlen zeigen, dass die indische Zahlenschreibweise unserer modernen Schreibweise sehr ähnelt, deshalb werden unsere Ziffern auch als „indische“ Ziffern bezeichnet. Das Gupta Reich folgte 320 n. Chr. dem Maurya-Reich und hielt sich trotz vieler Invasionen und Unruhen bis zum Einmarsch der Araber 710 (vgl. Alten/Naini/Folkerts/Schlösser/Schlote/Wußing, 2003, S. 130, 131; Hein, 2012, S. 21,22).

4.2.2 Zahlschrift - Zahlssystem

Unsere Ziffern des Zahlssystems stammen ursprünglich aus Indien und werden auch als indoarabische Zahlen bezeichnet, weil die Araber an dieses System anknüpften und weiterentwickelten (vgl. Stewarts, 2010, S. 43). Im alten Indien finden wir zwei Zahlschriften, welche auf das 4. Jahrhundert v. Chr. datiert werden. Auf Inschriften des Kaisers Ashoka können beide Ziffernsysteme nachgewiesen werden.

1	2	3	4	5	6	8	10
			×	×	×	××	?
3	???	???	???	?	?	?	?
20	50	60	70	100	200		

Abbildung 46: Kharosti-Ziffern (Quelle: Wußing, 2008, S. 134)

Die Kharosthi- Schrift mit ihren Kharosti- Ziffern (Abb. 46) sind die ältesten uns bekannten Zahlzeichen und waren in Nordwestindien und dem heutigen Afghanistan vom 4. bis zum 3. Jahrhundert v. Chr. in Verwendung. Die altindischen Zahlssysteme waren sogenannte Hybridsysteme, waren demnach eine Mischung des additiven und multiplikativen Systems. Wie wir in Abbildung 46 sehen können, gab es für die Ziffer 1, 4 und 10 ein Individualzeichen und alle Zahlen bis 100 wurden additiv zusammengesetzt. Die 20 wird durch zwei übereinander geschriebenen Zehnern dargestellt. Die Hunderter wurden multiplikativ dargestellt, als beispielsweise hundert mal eins oder hundert mal zwei.

$$274 = \times ? ? ? ? ? \parallel = 4 + (10 + 20 + 20 + 20) + (100 \cdot 2)$$

Abbildung 47: Zahl 274 (Quelle: Wußing, 2008, S. 135)

In Abbildung 47 sieht man die Darstellung der Zahl 274 und zwar wurde diese von rechts nach links geschrieben. Ungefähr zur gleichen Zeit trat ein weiteres, viel bedeutenderes Ziffernsystem in Erscheinung, das vermutlich über 1000 Jahre verwendet wurde.

Einer	Ziffern	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{9}$
Zehner	Verzifferung	α	σ	π	$\times$	β	γ	δ	θ	ϕ
		10	20	30	40	50	60	70	80	90
Hunderter und Tausender	Stellenschrift	γ	γ	γ	γ	γ	γ	γ	γ	γ
		100	200	500	1000	4000	70000			

Abbildung 48: Brahmi- Ziffern (Quelle: Wußing, 2008, S. 135)

Die Brahmi-Ziffern (Abb. 48), benannt nach der gleichnamigen Schrift, können als Vorläufer unseres heutigen modernen Systems betrachtet werden, da es erste Anzeichen eines Dezimalsystem aufweist, denn die ersten neun Ziffern erhielten individuelle Zeichen. Die Brahmi-Schrift war von überregionaler Bedeutung und wurde in sehr vielen Varianten überliefert. Zwar war die Darstellung der Zehner im Vergleich zum Kharosti-System ein Rückschritt, doch die Individualzeichen für die ersten neun Ziffern ein riesen Fortschritt und Vorteil im Hinblick auf ein Dezimalsystem.

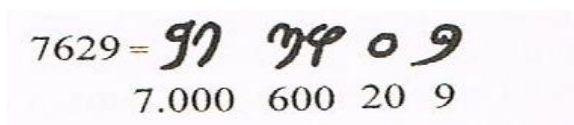


Abbildung 49: Die Zahl 7629 (Quelle: Hein, 2012, S. 44)

Auch hier wurden die Hunderter und Tausender multiplikativ dargestellt und die Zahlen von links nach rechts geschrieben (Abb. 49) (vgl. Hein, 2012, S. 43,44; vgl. Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 134,135) Hein ist bezüglich der Weiterentwicklung des altindischen Zahlensystems folgendes zu entnehmen: „Erst seit dem 5. Jahrhundert n. Chr. hat es sich eingebürgert, dass man die Sonderzeichen für die Zehner, Hunderter, Tausender usw. wegließ, wodurch der erste Schritt auf dem Weg zu einem dezimalen Positionssystem geschaffen war“ (Hein, 2010, S. 44).

4.2.3 Arithmetik und Algebra im indischen Altertum

Wie bereits erwähnt wurde in Ägypten auf Papier, in Babylon auf weichen Tontafeln und in China auf dem Rechenbrett gerechnet, wobei man sich im alten Indien einer sogenannten „Staubtafel“ bediente. Heute geht man davon aus, dass dies vermutlich durch die Kostbarkeit möglicher Schreibmaterialien wie Papier bedingt gewesen sein könnte. Eine Staubtafel war eine von Sand oder ähnlichem

Material bestreute Tafel, auf der man mit einem angespitzten Holzstäbchen rechnen konnte. Der Vorteil gegenüber Tontafeln oder Papier war der, dass man Zwischenrechnungen oder nicht benötigte Zahlen oder Ziffern wegwischen, also leicht entfernen konnte. Diese Tafeln waren nicht nur zum Rechnen, sondern auch zum Zeichnen geometrischer Figuren geeignet. Im alten Indien existierten einige schriftliche Rechenverfahren nebeneinander und eines davon hielt sich sogar in Europa bis in die Neuzeit hinein. An einem Beispiel der Multiplikation $135 \cdot 12$ soll das Rechenverfahren demonstriert werden.

	1	3	5	
1	1	3	5	1
2	2	6	10	2

Abbildung 50: Multiplikationstabelle (Quelle: Hein, 2012, S. 52)

Hierfür wurde eine Staubtafel wie in Abbildung 50 in Felder eingeteilt, so dass eine Tabelle entstand. Der Multiplikator wird ganz oben in der Tabelle und der Multiplikand seitlich der Tabelle eingeschrieben. Anschließend werden die Zwischenwerte ausgerechnet, eingetragen und die Zahlen in den Diagonalen werden zusammengezählt. In diesem Beispiel ergibt das 1/5/12/0 und nachdem der Übertrag bei der Zwölf gemacht wurde, erhielt man das Ergebnis 1620 (vgl. Hein, 2012, S. 46, 52). Im Kapitel über das alte China wurden unter anderem auch die negativen Zahlen behandelt und es wurde erwähnt, dass der Gebrauch von negativen Zahlen bei Addition und Subtraktion bis einige Jahrhunderte v. Chr. zurück datiert werden kann. In Indien hingegen tauchen die ersten negativen Zahlen erst ungefähr 500 n. Chr. bei Brahmagupta auf, wobei es sich auch hier um Größen wie Schulden handelt. Außerdem beschränken sich die Rechenregeln,

nicht wie in China, nur auf Addition und Subtraktion, sondern werden auf die Multiplikation, Division und das Quadrieren erweitert (vgl. Hein, 2012, S. 70).

In den *Sulbasutras*, der wichtigsten Quelle altindischer Mathematik, findet man, wie auch in den anderen besprochenen Hochkulturen, eine Annäherung an die $\sqrt{2}$: $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$ und entspricht in den ersten fünf Nachkommastellen der $\sqrt{2}$. Der Text gibt jedoch keinen Aufschluss darüber, wie dieser Wert berechnet worden ist. Der Näherungswert der alten Inder und der Babylonier unterscheiden sich erst in der sechsten Nachkommastelle, wobei der babylonische Näherungswert genauer errechnet wurde und dies 1800 Jahre früher. Mehr Errungenschaften auf dem Gebiet der Algebra und Arithmetik ist im indischen Altertum nicht zu verzeichnen. Aufgaben zu linearen Gleichungen in einer und mehrerer Unbekannten, wie sie in den bereits erwähnten Hochkulturen zusammengestellt und gerechnet wurden, gab es hier frühestens bei Aryabhata 1 im 5. Jh. n. Chr., der ein Buch über Mathematik und Astronomie in Versform verfasste, wo auch quadratische Gleichungen, arithmetische Reihen oder Näherungsverfahren für Kubikwurzeln erstmals auftauchen. Man nimmt lediglich an, dass es seit dem 3. Jh. v. Chr. eine Bezeichnung für eine Unbekannte in der altindischen Mathematik gegeben hat: „yavat-tavat“, das soviel wie „eine beliebige Menge“ bedeutet. Im Bereich der Geometrie hingegen waren die Erfolge eindrucksvoller, wie wir im folgenden Kapitel sehen werden.

4.2.4 Geometrie im indischen Altertum - Die Sulbasutras

Es wurde bereits erwähnt, dass aus dem indischen Altertum die *Sulbasutras*, also Schnurregeln überliefert wurden, welche der Sakralgeometrie angehören. Das Werk ist in mehreren Ausgaben erhalten und enthält im wesentlichen Anleitungen für vedische Priester, wie diese Opferaltäre auslegen und mit eigens geformten Ziegelsteinen mit Hilfe von Schnüren und Bambusstäben konstruieren

sollen, daher rührt auch der Name des Werkes. Je nach Ritual das sie vollzogen, benutzten sie Altäre unterschiedlicher geometrischer Formen, beispielsweise rechteckige, quadratische, kreis-oder halbkreisförmige.

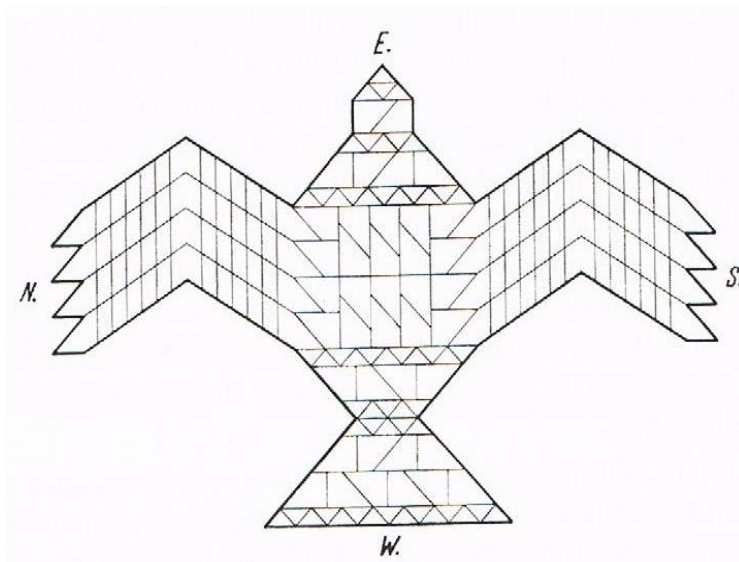


Abbildung 51: Ein Altar in Gestalt eines Falken (Quelle: Scriba/Schreiber, 2001, S. 144)

Für spezielle Zwecke bzw. Anlässe hatten sie Altäre in Form eines Falken (Abb. 51), der wiederum aus diesen geometrischen Formen zusammengesetzt wurde. Jeder Haushalt musste drei Feueraltäre unterschiedlicher Form enthalten und diese sollte aus Ziegelsteinen gemauert sein, wobei die Anzahl der Ziegelsteinschichten eine mythische Bedeutung hatte (vgl. Scriba/Schreiber, 2001, S. 144). In einer erhaltenen Ausgabe der *Sulbasutras* heißt es: „Wir wollen die Regeln für die Absteckung des Bodens für die Altäre beschreiben“ (Scriba/Schreiber, 2001, S.144). Hauptzweck der *Sulbasutras* ist demnach nicht die mathematische Aufklärung, sondern vielmehr die Erfüllung religiöser Gesetze bzw. Gebote und die Aneignung des damit verbundenen geometrischen Wissens: „Flächenverwandlungen, Ähnlichkeitsbeziehungen, der Satz vom Ergänzungsparell, der pythagoreische Lehrsatz“ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 144). Die Aufgabenstellungen weisen Ähnlichkeiten zu babylonischen Aufgaben auf, unterscheiden sich jedoch in der Durchführung. „Anklänge an die chinesische

Mathematik sind insofern spürbar, als Inder wie Chinesen eine Vorliebe für rechnerische Algorithmen erkennen lassen“ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 145). Wie auch in den bereits besprochenen Hochkulturen, werden hier nur Regeln gegeben, wie man bei der jeweiligen Aufgabe vorzugehen hat und keine verallgemeinernden Verfahren aufgestellt. *„Auf diesen in den frühen indischen Texten besonders deutlich aufscheinenden mythisch-religiösen Hintergrund gründet sich die These, die Geometrie habe sich weniger aus praktischen Bedürfnissen heraus entwickelt als aus rituellen Erfordernissen“* (Scriba/Schreiber, 2001, S. 145; zitiert nach: Seidenberg 1962). Eine Reihe von Sätzen behandelt beispielsweise die Vergrößerung von quadratischen Altarflächen, diese soll man verdoppeln, verdreifachen, etc. oder versechsfachen. Der Satz in den Sulbasutras der eine fundamentale Feststellung liefert lautet:

„Die quer über das Quadrat gelegte Schnur bringt die doppelt so große (Boden)fläche hervor“ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 145).

Inhaltlich gleicht diese Feststellung dem pythagoreischen Lehrsatz für das gleichschenkelig-rechtwinkelige Dreieck. Wenn man den Flächeninhalt a^2 des Ursprungsquadrats mit der neuen Fläche x^2 vergleicht, kommt man zur Gnomonfigur, also zur Restfläche der beiden Quadrate. *„Setzt man für die Differenz von Diagonale und Seite die Größe $y = x - a$, so hat man die beiden Rechtecke der Größe $a \cdot y$ und das kleine Eckquadrat y^2 anzulegen“* (Scriba/Schreiber, 2001, S. 145).

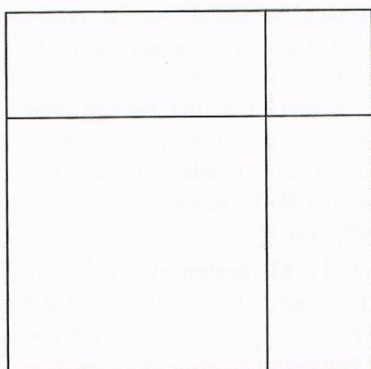


Abbildung 52: Gnomonfigur bei Quadratverdopplung (Quelle: Scriba/Schreiber, 2001, S. 146)

In den *Sulbasutras* steht diesbezüglich (Abb. 52):

„Nunmehr die allgemeine Anweisung: Das (Rechteck), welches man mit der Verlängerung (einer Quadratseite und ihr selbst) zweimal zeichnet, fügt man an zwei Seiten (des Quadrats) hinzu und das Quadrat, welches durch sie (dh. die Verlängerung) hergestellt wird, an einer Ecke“ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 145).

Damit lässt sich folgende Formel aufstellen: $a^2 + (2ay + y^2) = (a + y)^2$ “ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 145), wobei der Gnomon die Fläche $2ay + y^2$ “ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 145) besitzt. Die Verdopplung quadratischer Altarflächen könnte eine erste Anregung zur Beschreibung des Satzes von Pythagoras am gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck gewesen sein.

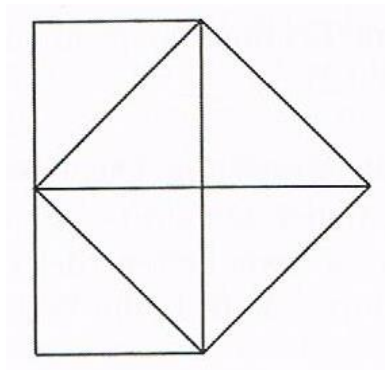


Abbildung 53: Pythagoreischer Lehrsatz am gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck (Quelle: Scriba/Schreiber, 2001, S. 146)

Man muss lediglich zwei identische Muster eines Quadrats nebeneinanderlegen, sodass ein Rechteck entsteht, je zwei Eckpunkte werden mit einer Diagonale verbunden. Zwei äußere Dreiecke werden umgelegt und es entsteht somit ein neues Quadrat (Abb. 53). Die Sulbasutras haben außerdem sechs pythagoreische Dreiecke zum Inhalt, und zwar sind das jene Dreiecke „mit den Seiten (3,4,5), (12,5,13), (5,8,17), (7,24,25), (12,35,37), (15,36,39)“ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 146), jedoch wird der Satz des Pythagoras nicht allgemein formuliert oder angesprochen. Obwohl der Satz nicht konkret erwähnt wird, wird er an einigen Stellen als Beweis herangezogen, der die Richtigkeit des Satzes für die Diagonale des Rechtecks erläutern soll. Weiters

wird in den Schnurregeln vom Quadrat auf ein beliebiges Rechteck verallgemeinert und dies wird folgendermaßen beschrieben:

„Die quer über das Rechteck (gelegte) Schnur bringt beides (d.h. beide Flächen zusammen) hervor, was die Längsseite und die Breitseite jede für sich hervorbringen“ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 147).

Soll die Altarfläche verdreifacht werden, sind das einfache und verdoppelte Quadrat zusammenzuzählen, in den Sulbasurtras wird es folgendermaßen ausgesprochen:

„Wünscht man zwei verschieden große Quadrate zu vereinigen, so reiße man mit der Seite des kleineren auf dem größeren einen (Parallel) streifen auf. Die quer über diesen Streifen (gelegte) Schnur ist die Seite der beiden vereinigten Quadrate“ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 147).

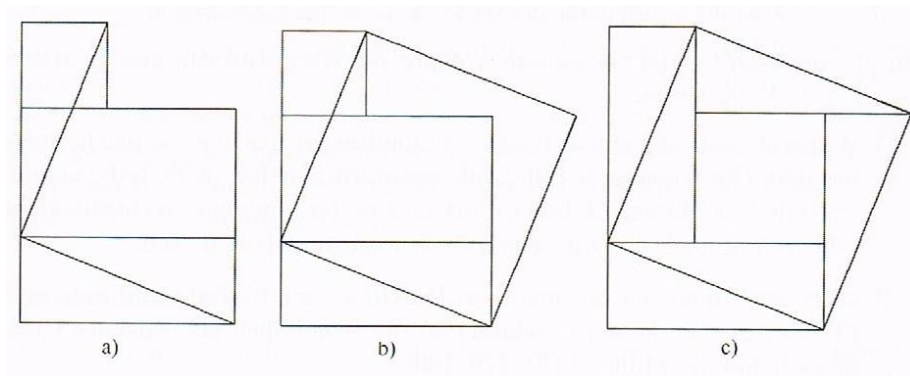


Abbildung 54: Addition zweier ungleicher Quadrate zu einem dritten Quadrat (Quelle: Scriba/Schreiber, 2001, S. 147)

In Abbildung 54 wird dies an einem Beispiel illustriert, hier ist das vervollständigte neue Quadrat abgebildet. Wenn die Hilfslinien verändert werden, erhält man eine bekannte Figur, die den Satz des Pythagoras folgendermaßen schildert: „ $c^2 = 2ab + (b - a)^2 [= a^2 + b^2]$ “ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 147). Für besondere Zwecke und Anlässe verlangten die Vorschriften, dass Altäre zu errichten waren, welche bei gleichem Flächeninhalt eine andere Form haben sollten.

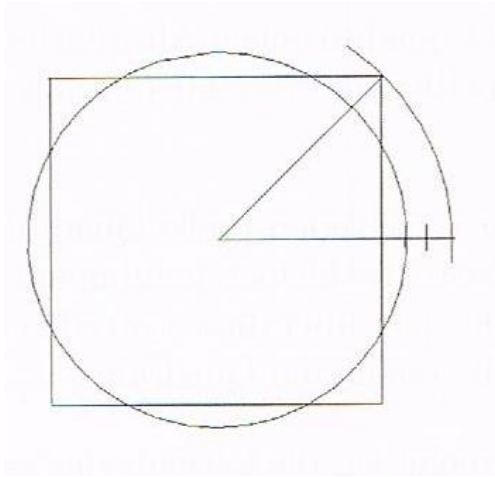


Abbildung 55: Zirkulatur des Quadrats nach den Schnurregeln (Quelle: Scriaba/Schreiber, 2001, S. 148)

„Daraus ergab sich das Problem der Zirkulatur des Quadrats (Abb. 55) d.h. die Ermittlung des Halbmessers eines zu einem gegebenen Quadrat flächengleichen Kreises“ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 147). Diesbezüglich lautet es in den *Sulbasutras*:

„Wünscht man aus einem Quadrat einen Kreis zu machen, so lege man von der Mitte des Quadrats aus nach einer Ecke (eine Schnur) und führe sie in Richtung einer Seite (des Quadrats) herum. Zusammen mit einem Drittel, was bei ihr übrig bleibt (was außerhalb des Quadrats liegt), beschreibe man den Kreis“ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 148).

In einer anderen Ausgabe wird folgendes ergänzt:

„Wieviel fortgenommen wird, soviel soll hinzukommen“ (Scriba/Schreiber, 2001, S. 148; zitiert nach: Jaggi 1986, 182).

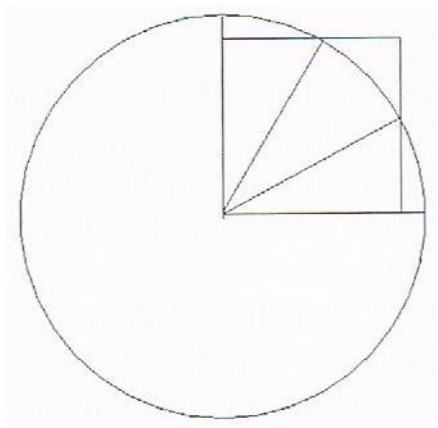


Abbildung 56: Quadratur des Kreises nach den Schnurregeln (Quelle: Scriba/Schreiber, 2001, S. 149)

Auch für die Quadratur des Kreises (Abb. 56) gibt es in den Schnurregeln zwei Vorschriften, die lauten:

„Wünscht man aus einem Kreis ein Quadrat zu machen, so mache man aus dem Durchmesser 8 Teile, teile einen solchen Teil in 29 Teile, nehme 28 Teile (von diesen 29 Teilen) fort und weiter von dem (verbleibendem einem) Teil noch den um seinen 8. Teil verminderten 6. Teil.

Oder auch man mache (aus dem Durchmesser) 15 Teile und nehme 2 (Teile) fort. Die letztere (Schnur) ist die gewöhnlich als Seite des Quadrats benutzte“ (Scriba/schreiber, 2001, S. 148; zitiert nach: Müller 1930, 179-190).

Es ist natürlich nicht geklärt, wie die Autoren der Schnurregeln diese angegebenen Bruchteile berechnet haben.

5. Zusammenfassung

Die Mathematik des Altertums ist, wie wir gesehen haben, sehr vielschichtig und nur schwer zu überblicken. Die mesopotamische Mathematik hat solch einen hohen Stand erreicht, so dass sie erst nach der griechisch-hellenistischen Antike übertroffen werden konnte. Wie wir auch zuvor in Kapitel 2 erfahren haben, haben sich mathematische Überlegungen und Fragestellungen aus praktischen

Bedürfnissen heraus gebildet, wie dem Bauwesen, der Wirtschaft, dem Handel oder der Landvermessung. Alle mathematischen Leistungen aus jener Zeit sind uns in Keilschrift auf Tontafeln überliefert, wobei diese heute in den Museen in London, Paris, New Haven, Berlin und in Straßburg aufbewahrt werden. Im Bereich der Arithmetik und Algebra haben die Mesopotamier, vor allem die Babylonier wichtige Erfolge erzielt. Es wurden beispielsweise Multiplikationstabellen angefertigt, um die Multiplikation zu beschleunigen, Näherungsverfahren für Quadratwurzeln wurden berechnet und die binomische Formel wurde auch angewandt. Sie waren im Stande lineare Gleichungen mit einfachem falschen Ansatz zu lösen, ebenso quadratische Gleichungen. Auch wurden eine ganze Reihe pythagoreischer Tripel berechnet, die uns heute auf der „Plimpton 322“ erhalten sind. In der Geometrie haben sie auch bedeutende Ergebnisse erzielt. Sätze von Thales und Pythagoras waren bekannt, auch konnten die Flächeninhalte von Rechteck, Dreieck, Trapez, Kreis (mit $\pi=3$) berechnet werden. Volumina von Zylindern und Prismen wurden berechnet und sogar eine (falsche) „Formel“ zur Berechnung eines Pyramidenstumpfes angegeben. Auch die ägyptische Mathematik entstand zunächst aus praktischen Bedürfnissen heraus wie der Landvermessung, dem Bau von Pyramiden oder Tempeln oder der Lohnabrechnung für Arbeiter. Die wichtigsten mathematischen Quellen sind hier der Rhind Papyrus, der Moskauer Papyrus, der Papyrus Kairo und die Londoner Lederrolle. Lineare Gleichungen mit einfachem falschen Ansatz und rein quadratische Gleichungen wurden gelöst und Näherungsverfahren für Quadratwurzeln angegeben. Wie auch in Mesopotamien konnten Flächeninhalte ebener Figuren ausgerechnet werden und es findet sich in den Quellen eine richtige Formel für die Inhaltsberechnung eines Pyramidenstumpfes. Im chinesischen Altertum gab es im Wesentlichen zwei wichtige mathematische Werke: das *Zhoubi suanjing* und das *Jiuzhang suanshu*. Wie die Mesopotamier und die alten Ägypter konnten die Chinesen im Altertum Flächeninhalte ebener Figuren berechnen und gaben Näherungswerte für π und Wurzel aus 2 an.

Lineare Gleichungen wurden mit Hilfe des doppelten falschen Ansatzes gelöst und auch Systeme linearer Gleichungen konnten mittels der *fangcheng*-Methode, was heute dem Gauß Algorithmus entspricht, gelöst werden. Auch Volumenberechnungen und Berechnungen der Kreisfläche und Kreissegmente waren nicht unbekannt. Die Inhalte altindischer Mathematik sind uns vor allem in den *Sulbasutras*, den Schnurregeln überliefert. Hier handelt es sich vorrangig um Vorschriften zur Konstruktion von (u.a. dreieckigen, quadratischen) Altären mittels Schnüren. Es werden der Satz von Pythagoras angewandt und Näherungswerte für Diagonallängen angegeben. Die alten Hochkulturen haben zwar in hohem Maße Mathematik betrieben, jedoch nie zu einer algebraischen oder arithmetischen Symbolik gefunden. Dies ist auch der Grund weshalb in den mathematischen Quellen stets bzw. „nur“ Zahlenbeispiele zu finden sind. Ohne jegliche Symbolik war es schlichtweg unmöglich Beweise zu formulieren oder allgemeine Aussagen niederzuschreiben. Es gibt allerdings eine Reihe von Aufgaben, die einer bestimmten Gruppe zugeordnet wurden, für die man bestimmte Lösungsvorschriften anwenden sollte bzw. konnte. Fachtermini für Unbekannte und für Operationen der Grundrechenarten gab es in Indien bereits Jahrhunderte v. Chr. Diese bestanden aber mehrheitlich aus Wortabkürzungen aus dem Sanskrit. Erst im 6. Jahrhundert n. Chr. kam bei Brahmagupta eine algebraische Symbolik inklusive Operationszeichen in Verwendung, wenn auch noch unsicher. Hein schreibt diesbezüglich: *„Die indischen Gelehrten haben bei der Entwicklung einer symbolischen Algebra einen großen Fortschritt erzielt, obwohl ihre Bezeichnungen umständlich und die zugehörigen Zeichen, das heißt die sanskritischen Buchstaben, kompliziert waren. Die Nachfolger der indischen Algebraiker, die Gelehrten der arabischen Länder und Zentralasiens haben nicht nur keinerlei Fortschritte auf diesem Gebiet erzielt, sondern haben jahrhundertlang die algebraischen Ausdrücke durch Worte umschrieben“* (Hein, 2012, S. 72; zitiert nach: Juschkevitsch, S. 126). Es sind jedoch nicht nur die Hochkulturen, die keinen geeigneten Formalismus gefunden haben, auch den alten hochbegabten Griechen ist es nicht gelungen eine algebraische

Symbolik zu finden. Ein entsprechender Formalismus nahm seinen Anfang erst viel später, nämlich im 16. und 17. Jahrhundert mit Descartes und Viète (vgl. Hein, 2012, S. 71,72).

6. Die Weiterentwicklung der Algebra

Die mathematischen Kenntnisse der alten Ägypter, Mesopotamier, Chinesen und Inder sind von großer Bedeutung und ihnen gebührt große Anerkennung, jedoch hat die Mathematik mit den Griechen einen ganz neuen und außergewöhnlichen Stand erreicht. Während in den Hochkulturen die Anwendung und die Nutzung der Mathematik in vorwiegend praktischen Problemen im Mittelpunkt standen, ging es den alten griechischen Mathematikern und Philosophen vielmehr um das „Warum“. Es genügte also nicht mehr die Erkenntnis, dass mithilfe der Mathematik praktische und technische Hindernisse bewältigt werden konnten, sondern eher darum, weshalb die Mathematik so funktionierte und welche Gesetzmäßigkeiten dem zugrunde lagen. Zwischen dem Aufblühen und dem Niedergang der griechisch-hellenistischen Mathematik liegt ein bisschen mehr als ein Jahrtausend. Diese Entwicklung wird auf den Zeitraum zwischen dem 7. Jahrhundert v. Chr. bis ungefähr zum 5. Jahrhundert n. Chr. datiert. Die Leitlinie hierbei ist die Gleichungslehre, wobei vor allem lineare, quadratische, sowie kubische und biquadratische Gleichungen im Vordergrund stehen. Besonders berühmt sind die drei klassischen Probleme der Antike. Diese sind die Winkeldreiteilung, die Würfelverdopplung und die Quadratur des Kreises, für die erst im 19. Jahrhundert Lösungswege mittels neuzeitlichen Methoden der Algebra und Arithmetik definiert wurden, *„(...) indem nachgewiesen wurde, dass ihre Lösung äquivalent zur Lösung kubischer bzw. transzendenter Gleichungen ist, deren Lösung nicht als Strecken mit Zirkel und Lineal allein (in endliche vielen Schritten) konstruiert werden können“* (Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 49). Die altgriechische Algebra wird auch „geometrische Algebra“ genannt, weil sie durch

die Geometrie begründet wurde. In Euklids „Elemente“ finden sich zahlreiche algebraische Behauptungen, die geometrisch dargestellt sind. Bei Euklid findet man daneben zum ersten Mal Beweise und Formulierungen, die auf Definitionen und Axiomen beruhen. Die Beweisführung der alten Griechen ist eines der richtungsweisenden Unterschiede zwischen der Mathematik in den besprochenen Hochkulturen und der klassischen griechischen Mathematik. Während in den Hochkulturen die rein praktische Anwendbarkeit Sinn und Zweck der Mathematik war, war für die alten griechischen Mathematiker der Beweis für die Klärung der Frage nach dem „Warum“ von größerer Bedeutung. Man geht davon aus, dass die Griechen zum einen aus ästhetischen, zum anderen aus praktischen Gründen geometrische Veranschaulichungen und Beziehungen bevorzugten. Eine große mathematische Leistung der Griechen, genauer gesagt der Pythagoreer besteht unter anderem in der Entdeckung der irrationalen Zahlen, das heißt in der Entdeckung, dass sich Streckenverhältnisse nicht immer durch das Verhältnis $a:b$ zweier natürlicher Zahlen formulieren lassen. Obwohl die alten Griechen Mathematik auf hohem Niveau betrieben haben, konnten sie algebraische Probleme durch Fehlen einer Formelsprache nur geometrisch darstellen, was aber teilweise sehr umständlich und kompliziert erfolgte. Schließlich brachte Diophant die griechische Mathematik auf einen neuen, bisher noch nie dagewesenen Stand, da in seinem Werk *Arithmetika* erste Anfänge einer algebraischen Symbolik zu entdecken sind. Sein Werk besteht aus 13 Büchern mit insgesamt 290 Beispielen arithmetischen Gehalts. Diese Bücher haben, bis auf eine Ausnahme, teils bestimmte teils unbestimmte Gleichungen bzw. Gleichungssysteme zum Inhalt. Dieser Teilbereich ist jener, der auch in allen Hochkulturen behandelt worden ist. Auch die alten Griechen haben sich damit auseinander gesetzt, aber im Unterschied zu Diophant, stand ihnen die Geometrie als einziges Werkzeug zur Verfügung. So gilt der bedeutende Mathematiker auch als erster Mathematiker, der einen algebraischen Symbolismus anstrebte und darum bemüht war. Im

Folgendes wird ein Beispiel inklusiver Lösung für eine unbestimmte Gleichung aus dem Zweiten Buch der *Arithmetika* zitiert:

„Eine gegebene Zahl, die die Summe zweier Quadrate ist, ist in zwei andere Quadrate zu zerlegen“ (Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 100).

Diophants Lösungsweg lautet:

„Die Zahl 13, die die Summe von 9 und 4 ist, ist in die Summe zweier anderer Quadrate zu zerlegen. Es werden die Wurzeln aus den gegebenen Summanden genommen, also 2 und 3. Die Wurzel des einen gesuchten Summanden setzen wir in der Form $x + 2$ an, die des anderen in der Form $ax - 3$, wobei a beliebig ist, also zum Beispiel $2x - 3$. Dann werden die Quadrate $x^2 + 4x + 4$ und $4x^2 - 12x + 9$ sein. Die Summe ist dann $5x^2 - 8x + 13$. Sie soll aber 13 sein. Also ist $x = \frac{8}{5}$. Die Wurzel des einen gesuchten Summanden ist also $x + 2 = \frac{18}{5}$, die des anderen

$2x - 3 = \frac{1}{5}$. Die Quadrate aber sind $\frac{324}{25}$ und $\frac{1}{25}$. Die Summe der beiden Quadrate ist $\frac{325}{25} = 13$, also gleich der gegebenen Zahl“ (Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 100).

In allen frühen Hochkulturen wurden lineare Gleichungen mit einer Unbekannten gelöst, in Ägypten waren dies die sogenannten „Hau-Aufgaben“. Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten und quadratische Gleichungen waren in Babylon besonders beliebt. Die alten Inder konnten unbestimmte lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten lösen, wobei Diophant all dieses Wissen aufgegriffen und erweitert hat. Diophant kann als erster Mathematiker angesehen werden, der die Bedeutung eines Formalismus für die Algebra als Fortschritt erfasst hat. Im Unterschied zu den alten Hochkulturen haben Diophants Gleichungen keine praktische „Einkleidung“, es geht lediglich um das Lösen der Gleichungen durch Äquivalenzumformungen, wobei bei Diophant als Lösungen nur rationale Zahlen in Frage kommen (vgl. Hein, 2012, S. 178). Diophants Werk wurde bis

ins 10. Jahrhundert ins Arabische übersetzt und beeinflusste die Entwicklung der Algebra und Arithmetik in den islamischen Ländern maßgeblich (vgl. Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 59, 60, 62, 63, 64, 97, 98). Vor allem die Beweisführung der Griechen haben muslimische Gelehrte, neben inhaltlichen Aussagen übernommen. Zu jener Zeit bildete sich in den islamischen Ländern eine unabhängige mathematische Kultur, da sie das altertümlich und antike mathematische Niveau durch eigenständige Arbeit bereicherten, vertieften und teils auch veränderten. Diese mathematische Kultur umfasste die Algebra, Arithmetik, Zahlentheorie, Geometrie, Trigonometrie und erste Anfänge der Analysis. Der Einfluss indischer und chinesischer Mathematik auf die Mathematik in islamischen Ländern ist vor allem durch zahlreiche praktische Aufgaben und Methoden ersichtlich. Im 16./17. Jahrhundert wurde die Algebra, neben der Geometrie zur zweiten selbstständigen Disziplin, bis zu einem gewissen Grad durch das wissenschaftliche Werk von Vieta. Bis zum 16. Jahrhundert war die Algebra lediglich eine Sammlung von Gesetzmäßigkeiten zur Auflösung von Gleichungen. *„Nun, mit einer ausgebildeten Symbolik, wird algebraisches Denken in Sätzen und mit algebraisch geführten Beweisen zu einem sich nach eigenen Problemstellungen entwickelnden Wissenszweig. Und bei Descartes wird man sehen, dass und wie die Geometrie sozusagen algebraisiert wird“* (Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 266). In Vietas Werk *Isagoge*, was sinngemäß mit „Einführung in die Algebra“ übersetzt werden kann, kommt der entscheidende Grundgedanke zum Vorschein, nämlich die Unterscheidung zwischen „Logistica numerosa“ und „Logistica speciosa“: *„Die Logistica numerosa ist die, die durch Zahlen, die Logistica speciosa die, die durch die species oder formae rerum ausgeführt wird, z.B. mit Hilfe der Elemente des Alphabets“* (Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 271; zitiert nach: Reich/Gericke, S. 44). Hier wird also die erstmalige Verwendung von Buchstaben angekündigt und der Unterschied zwischen bekannten und

gesuchten Größen definiert: „Damit die Arbeit durch ein schematisch anzuwendendes Verfahren unterstützt wird, mögen die gegebenen Größen von den gesuchten unbekannten unterschieden werden durch eine feste und immer gleichbleibende und einprägsame Bezeichnungsweise, wie etwa dadurch, dass man die gesuchten Größen mit dem Buchstaben A oder einem anderen Vokal E, I, O, U, Y, die gegebenen mit den Buchstaben B, G, D oder anderen Konsonanten bezeichnet“ (Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 272; zitiert nach: Reich/ Gericke, S. 52). Dies ist sein entscheidender Gedanke. Denn nun ist möglich allgemeine Formeln anzugeben und sich von den, im vorigen Kapitel erwähnten reinen „Zahlenbeispielen“ zu distanzieren. Vieta benutzte die Zeichen + und – und die Gleichheit zwischen zwei Ausdrücken formulierte er verbal mit *aequale* oder *aequabitur*. Er verwendete den Bruchstrich und bei einer Multiplikation gebrauchte er, nach alter Tradition das Wort „in“. Terme wurden untereinander geschrieben und mittels geschwungenen Klammern verbunden. Ein Beispiel eines Terms, wie ihn Vieta ausdrückt haben könnte, soll hier gezeigt werden. Den Ausdruck: $\frac{BA}{D} + \frac{BA-BH}{F} = B$ könnte er wie in der folgenden Abbildung 57 geschrieben :

$$\frac{\frac{B \text{ in } A}{D}}{D} + \left\{ \frac{\frac{B \text{ in } A}{F} - \frac{B \text{ in } H}{F}}{F} \right\} \text{aequale } B$$

Abbildung 57: Termdarstellung bei Vieta (Quelle: Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 272)

Darüber hinaus hat Vieta die Äquivalenzumformungen bzw. die Umformtechnik weit entwickelt wie beispielsweise das Faktorisieren, das Auflösen oder das Rationalmachen der Nenner. In seiner Aufgabensammlung

„Zeteticorum libri quinque“ schließt er an Diophant an, ist ihm aber durch seine Symbolik und seinen Formalismus weit überlegen. Diesbezüglich soll ein Beispiel aus dem ersten Buch der *Zetetica* gegeben werden:

„Gegeben ist die Differenz zweier Seiten und deren Summe. Gesucht sind die Seiten. Bezeichne B die Differenz, D die Summe und A die kleinere Seite. Dann ist $2A + B = D$. Mittels Antithesis erhält man $2A = D - B$, also ist $A = \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}B$. Für die größere Seite E erhält man $E = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}B$ “
(Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 273).

Von Diophant wurde diese Aufgabe ebenfalls formuliert: „Eine gegebene Zahl in zwei Teile zu teilen, deren Differenz gegeben ist“
(Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 273). Er rechnete stets mit vorgegebenen Zahlen, wie in diesem Fall mit der vorgegebenen Zahl 100 und der vorgegebenen Differenz 40. Zur Demonstration des Unterschiedes soll die Existenzaussage Vietas zitiert werden:

„Wenn also die Differenz zweier Seiten und deren Summe gegeben sind, dann können die Seiten gefunden werden. Denn, die halbe Summe minus der halben Differenz der Seiten ist gleich der kleineren Seite, plus derselben, gleich der größeren Seite. Das ist es, was die Zetesis zeigt“
(Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 273; zitiert nach: Reich/Gericke, S. 98).

Mit Descartes erreichten die Algebra und die algebraische Denkweise eine besonders wichtige Stellung in der Mathematik. Durch ihn wurden die Geometrie und die Algebra bis zu einem gewissen Grad miteinander verschmolzen, worauf teils die analytische Geometrie beruht (vgl. Alten/Naini/Folkerts/Schlosser/Schlote/Wußing, 2003, S. 274). Anfang des 19. Jahrhunderts konnte durch Evariste Galois, einem bedeutenden französischen Mathematiker und seiner nach ihm benannten Theorie, der Galoistheorie bewiesen werden, dass die klassischen griechischen Probleme- Winkeldreiteilung,

Quadratur des Kreises, Würfelverdopplung- nicht mit Zirkel und Lineal lösbar sind.

7. Abstract

Diese Arbeit behandelt, wie der Titel schon preisgibt, die Mathematik in den alten Hochkulturen. Genauer gesagt, geht es um die mathematischen Errungenschaften und Leistungen der Menschen im Altertum etwa 3000 v. Chr. bis 200 n. Chr. Ich habe mich bemüht in den ersten beiden Kapiteln einen ungefähren Überblick über den Verlauf der Arbeit zu geben. Die zentrale Fragestellung, die ich versuche im Rahmen dieser Arbeit zu durchforschen ist unter anderem, welchen Stand die altertümliche Mathematik in den beiden Stromtalkulturen Mesopotamien, Ägypten und in den beiden asiatischen Hochkulturen China und Indien erreichte. In Kapitel zwei beschäftige ich mich mit der Frage, wie und vor allem aus welchen Gründen und Motiven heraus sich die Mathematik in den Hochkulturen entwickelte. Ich versuche zunächst einen sehr kurzen Überblick über die Menschheitsgeschichte zu geben, genauer gesagt über den Werdegang des Menschen vom Höhlenmensch zum sesshaften Bauern. Hier soll auch erläutert werden wie und wann sich der „Zahlbegriff“ entwickelte und sich etablierte. Kapitel drei behandelt die Entstehung der Mathematik, genau genommen der Algebra, Arithmetik und Geometrie in Mesopotamien und im alten Ägypten. Beide Kapitel werden jeweils mit einem historischen Überblick eingeleitet und anschließend werden die Zahlssysteme, Zahlschriften und Leistungen in den oben erwähnten mathematischen Teilbereichen behandelt. In der Arbeit werden viele Originalaufgaben aus babylonischen Keilschrifttafeln und ägyptischen Papyri zitiert bzw. vorgestellt und die dazugehörigen Lösungswege, falls welche vorhanden, in moderne Terminologie übersetzt, angeführt. Kapitel vier hat die mathematischen Leistungen der asiatischen Hochkulturen China und Indien zum Inhalt. Der Aufbau hier ist ähnlich dem Aufbau des vorigen Kapitels. Einer

historischen Einführung folgen die jeweiligen mathematischen Errungenschaften in den erwähnten Bereichen. Auch hier werden Originalaufgaben angeführt und deren Lösungswege beschrieben. In Kapitel fünf versuche ich eine kurze Zusammenfassung des bisher Geschriebenen zu geben und auf die wichtigsten Punkte noch einmal einzugehen. Es ist mir sehr wichtig, auf Zusammenhänge zwischen den Hochkulturen aufmerksam zu machen und diese aufzulisten. Die mathematischen Leistungen der einzelnen Hochkulturen sind nicht vollkommen unabhängig voneinander zu betrachten, denn es herrschte reger kultureller Austausch, was zu einer Überscheidung in vielen mathematischen Bereichen führte. Im letzten Kapitel geht es um die Weiterentwicklung der Algebra nach den Niedergängen der hochbegabten Hochkulturen. Es wird kurz auf die alten Griechen und deren Beiträge zur Algebra eingegangen, danach wird kurz die Mathematik in den islamischen Ländern erwähnt und vor allem die Einflüsse chinesischer und indischer Mathematik aufgezeigt. Abschließend wird erwähnt, wie sich die Algebra mit dem bedeutenden Mathematiker Vieta im 16./17. Jahrhundert zur selbstständigen Disziplin herausbildete.

This paper investigates the mathematical methods and notations of ancient advanced civilizations between 3000 BC and 200 AD.

The central issue of the first two chapters of my study is the role of mathematics in Mesopotamia and Egypt, as well as the development of mathematical ideas in the old empires of Asia - China and India.

Chapter 2 analyzes the origin of mathematical discoveries and the most significant achievements in mathematics in the old civilized cultures, starting with an outline on the history of mankind, and the development of a hunter-gatherer society into a sedentary population. Furthermore I will try to explain why the idea of a number concept has evolved gradually over time, and when this idea of understanding numbers dates back to.

Chapter 3 provides a historical overview of the numerical linear algebra, arithmetic, and geometry, which is then followed by describing their numeral systems and their rules for the use of their operations over the years. This paper quotes a variety of written examples of Babylonian mathematical tablets and Egyptian papyrus, providing a current transcription into modern terminology.

Chapter 4 focuses on the mathematical achievements of the Asian advanced civilizations in China and India. A historical review, mathematical achievements, written examples and solutions are included in this part of the study.

Chapter 5 emphasizes the coherences between the mathematical concepts of these ancient societies, which, nevertheless, overlap in many areas due to buoyant cultural exchange.

Chapter 6 analyzes the advancement of algebra after the decline of the advanced civilizations. The extent of the influence of Greek mathematics, Islamic mathematics and the impact of Chinese and Indian mathematics are briefly outlined in the following. It was not until the 16th/17th century that algebra became an independent science under the renowned mathematician Vieta.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Stonehenge (Südengland)	3
Abbildung 2: Mesopotamien	10
Abbildung 3: Tontafel mit dem Gilgamesch - Epos	11
Abbildung 4: Tontafel der Sumerer	12
Abbildung 5: Babylon.....	14
Abbildung 6: Weltkarte aus babylonischer Zeit.....	14
Abbildung 7: Stele mit dem Codex Hammurabi	15
Abbildung 8: piktografische Schrift aus Uruk	16
Abbildung 9: Altsumerische Zahlzeichen.....	17
Abbildung 10: Sumerisch-akkadische Keilschriftzeichen	18
Abbildung 11: Tontafel zur Berechnung der Wurzel aus 2.....	27
Abbildung 12: Plimpton 322.....	28
Abbildung 13: "Vervollständigte" Plimpton 322	28
Abbildung 14: Ägypten im Altertum	29
Abbildung 15: Die Schrift Ägyptens.....	31
Abbildung 16: Der Stein von Rosetta.....	32
Abbildung 17: Ägyptische Zahlensymbole.....	35
Abbildung 18: Ägyptische Zahl.....	35
Abbildung 19: Ägyptische Zahl 1234567	36
Abbildung 20: Ägyptische Zahl 2 800 000 als Produktdarstellung	36
Abbildung 21: Aufgabe 32 aus dem Papyrus Rhind	37
Abbildung 22: Das Auge des Horus	39

Abbildung 23: Bruchschreibweise im mittleren Reich	39
Abbildung 24: Symbole für häufige Brüche.....	39
Abbildung 25: Beispiel 48 aus dem Papyrus Rhind	46
Abbildung 26: Quadrat mit Inkreis	46
Abbildung 27: Pyramidenstumpf-Aufgabe 14 aus dem Moskauer Papyrus.....	48
Abbildung 28: China im Altertum.....	51
Abbildung 29: Bronzegegenstände aus der Zeit der Shang-Dynastie	52
Abbildung 30: Orakelknochen aus dem 14.-bis 12. Jahrhundert.....	53
Abbildung 31: Laotse und Konfuzius	54
Abbildung 32: Bücherverbrennung im Jahre 213 v. Chr.	55
Abbildung 33: Die Zahl 656 in Orakelschrift (links) und moderner Schrift	57
Abbildung 34: Chinesische Zahlzeichen (links) und Darstellung der Zahl 41957 (rechts)	58
Abbildung 35: Stäbchendarstellung der Ziffern 1-9	59
Abbildung 36: Stäbchendarstellung der Zehner	59
Abbildung 37: Darstellung der Zahl 7928.....	59
Abbildung 38: Darstellung der Zahl 70316	59
Abbildung 39: Beispiel der Addition mit Stäbchen.....	60
Abbildung 40: Kreissegment mit Sehne und Pfeil	65
Abbildung 41: Figur zum Satz des Pythagoras.....	67
Abbildung 42: Figur zur Baumstammaufgabe	68
Abbildung 43: Liu Huis Verfahren zur Berechnung des Kreisinhaltes	69
Abbildung 44: Illustration der Methode der doppelten Messungen.....	70

Abbildung 45: Indien im Altertum und im Mittelalter	72
Abbildung 46: Kharosti-Ziffern	75
Abbildung 47: Zahl 274	75
Abbildung 48: Brahmi- Ziffern	75
Abbildung 49: Die Zahl 7629	76
Abbildung 50: Multiplikationstabelle	77
Abbildung 51: Ein Altar in Gestalt eines Falken	79
Abbildung 52: Gnomonfigur bei Quadratverdopplung	80
Abbildung 53: Pythagoreischer Lehrsatz am gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck	81
Abbildung 54: Addition zweier ungleicher Quadrate zu einem dritten Quadrat .	82
Abbildung 55: Zirkulatur des Quadrats nach den Schnurregeln	83
Abbildung 56: Quadratur des Kreises nach den Schnurregeln	84
Abbildung 57: Termdarstellung bei Vieta	91

Literaturverzeichnis

H.-Alten, A. Djafari Naini, M. Folkerts, H. Schlosser, K.-H. Schlote, H. Wußing
(2003): 4000 Jahre Algebra, Springer- Verlag, Berlin Heidelberg

C. Scriba, P. Schreiber (2001): 5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen,
Menschen, Springer- Verlag, Heidelberg

Dilke (1991): Mathematik Maße und Gewichte in der Antike, Philipp Reclam jun.
GmbH & Co, Stuttgart

W. Hein (2012): Mathematik im Altertum: Von Algebra bis Zinseszins,
Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt

H. Hemme (2012): 101 Mathematische Rätsel aus vier Jahrtausenden und fünf
Kontinenten, 2. Auflage, Verlag C. H. Beck oHG, München

H. Kaiser, W. Nöbauer (2006): Geschichte der Mathematik, 3. Auflage, Oldenbourg
Schulbuchverlag, München

G. Kropp (1994): Geschichte der Mathematik: Probleme und Gestalten, Quelle und
Meyer Verlag, Heidelberg

R. Mankiewicz (2000): Zeitreise Mathematik, vgs Verlagsgesellschaft, Köln

D. Silverman (2001): Das Alte Ägypten, 2. Auflage, Frederking und Thaler Verlag,
München

I. Stewart (2010): Meilensteine der Mathematik, Spektrum Akademischer Verlag,
Heidelberg

K. Wulff (2006): Naturwissenschaften im Kulturvergleich: Europa-Islam-China,
Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main

H. Wußing (2008): 6000 Jahre Mathematik: Eine kulturgeschichtliche Zeitreise-1.
Von den Anfängen bis Leibniz und Newton, Springer- Verlag, Berlin Heidelberg

Lebenslauf

Name: Jäger Denise

Geburtsdatum: 26.08.89

Geburtsort: Wr. Neustadt

Adresse: Waldgasse 5 7212 Forchtenstein

Telefon: 0699/10554630

E-Mail: denise.jaeger@hotmail.com

Staatsangehörigkeit: Österreich

Schulbildung:

2000-2008 BG/BRG Mattersburg

1996- 2000 Volksschule Forchtenstein

Studium:

WS 2009- SS 2014 Lehramtsstudium an der
Universität Wien, Fächerkombination:
Mathematik, Psychologie und Philosophie

Praktika:

Ferialpraktikum bei Firma Wiesbauer von
2006-2010

November 2012- Jänner 2013 Lernhilfe bei
Interface Wien

Freizeitinteressen:

Lesen, Sport, Kochen, Kino, Freunde

Forchtenstein, 2014