



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Die Neue Mathematik und was von ihr übrig blieb“

Verfasserin

Brigitte Bogensperger

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, im März 2014

Studienkennzahl lt.

A 190 406 884

Studienblatt:

Studienrichtung lt.

Lehramtsstudium Mathematik – Informatik u.

Studienblatt:

Informatikmanagement

Betreuer:

Privatdoz. Mag. Dr. Bernhard Krön

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	5
1.1	Motivation.....	5
1.2	Inhalt dieser Diplomarbeit	6
1.3	Neue Mathematik oder Moderne Mathematik.....	7
1.4	Der Versuch einer Definition des Begriffs „Neue Mathematik“	8
1.4.1	Die neuen Unterrichtsinhalte.....	8
1.4.2	Die neue Art der Vermittlung.....	8
1.5	Ausgangspunkt der Betrachtung – die didaktische Situation davor.....	9
2	Gründe für die Modernisierung des Mathematikunterrichts.....	10
2.1	Veränderungen in der Mathematik	10
2.1.1	Cantor und Hilbert.....	10
2.1.2	Nicolas Bourbaki.....	10
2.2	Politische, gesellschaftliche und wirtschaftliche Gründe	12
2.2.1	Sputnik Schock	12
2.2.2	Rechenmaschinen und die Entwicklung des Computers	13
2.2.3	Mathematisierung aller Lebensbereiche	15
2.2.4	Kluft Schulmathematik – Hochschulmathematik.....	16
2.2.5	Neue lernpsychologische Erkenntnisse.....	16
2.2.6	New Math – Die Entwicklung in den USA	17
3	Das Neue an der Neuen Mathematik	18
3.1	Die Didaktische Diskussion im deutschsprachigen Raum.....	18
3.1.1	„Bildungsnotstand“ – Modernisierung des Mathematikunterrichts	18
3.1.2	Mengenlehre als Fundament – bereits in der Volksschule	19
3.1.3	Weniger Rechnen, mehr Denken	21
3.1.4	Vom Rechenunterricht zur Mathematik	22
3.1.5	Mehr Axiomatik, Formale Mathematik.....	23
3.1.6	Überforderung der Kinder oder der Eltern?	24
3.2	Neue Lehrinhalte.....	26
3.3	Neue Methoden.....	27
3.4	Neue Unterrichtsmittel – die logischen Blöcke und anderes Unterrichtsmaterial.....	32
3.5	Konkrete Unterrichtsvorschläge	33
3.5.1	Die Grundrechnungsarten in der 5. Schulstufe.....	33
3.5.2	Vorschläge zur Einführung der Bruchrechnung	36
3.5.3	Erste Begegnung mit dem Gruppenaspekt	37
3.5.4	Verbindung Arithmetik – Geometrie.....	38
3.6	Ausbildung der Lehrpersonen.....	38
4	Lehrplanänderungen im Gymnasium.....	40
4.1	Die Situation vor der Neuen Mathematik.....	40
4.2	Allgemeine Änderungen im Mathematikunterricht	41
4.3	Umfang der Lehrpläne	43
4.4	Änderungen in der Bildungs- und Lehraufgabe	44
4.5	Änderungen im Lehrstoff.....	45
4.5.1	Gymnasium Unterstufe	45
4.5.2	Gymnasium Oberstufe	49
4.6	Änderungen in den didaktischen Grundsätzen.....	54
4.7	Zusammenfassung der Änderungen im Lehrplan.....	56
5	Änderungen in den Schulbüchern.....	57
5.1	Neue Inhalte.....	58
5.1.1	Mengenlehre, Aussagenlogik	59

5.1.2	Grundrechnungsarten in anderen Basen	63
5.1.3	Algebraische Strukturen	66
5.1.4	Veränderungen in der Geometrie	68
5.1.5	Ungleichungen	70
5.2	Vergleich der Veränderungen einzelner Inhalte	71
5.2.1	Einführung der natürlichen Zahlen in der fünften Schulstufe	71
5.2.2	Die Grundrechnungsarten in der fünften Schulstufe	72
5.2.3	Grundrechnungsarten und Zahlbereichserweiterungen in der Oberstufe	78
5.2.4	Einführung der Bruchrechnung	79
5.2.5	Die Definition des Kreises in der fünften Schulstufe	82
5.3	Allgemeine Veränderungen in den Schulbüchern	83
5.3.1	Trennung Arithmetik – Geometrie	83
5.3.2	Verwendung der Symbolsprache	85
5.3.3	Definition – Satz – Beweis	87
5.3.4	Lehrbuch – Arbeitsbuch	88
5.3.5	Die Gestaltung der Aufgaben	89
5.3.6	Differenzierung im Unterricht und bei den Aufgaben	92
5.3.7	Aufgaben für unterschiedliche Unterrichtsmethoden	93
5.4	Zusammenfassung der Änderungen in den Schulbüchern	94
6	Was blieb von der Neuen Mathematik	95
6.1	Das Ende der Neuen Mathematik	95
6.2	Kritik an der Reform	96
6.2.1	Kritik an New Math in den Vereinigten Staaten	96
6.2.2	Neue Mathematik für jeden – Mengenlehre in der Volksschule?	97
6.2.3	Zu abstrakt für den Unterricht im Gymnasium	98
6.2.4	Zuwenig Praxiserfahrung der Didaktiker	99
6.2.5	Didaktische Mängel	101
6.2.6	Mangelnde Ausbildung der LehrerInnen	102
6.2.7	Öffentliche Kritik an der Mengenlehre	103
6.3	Was blieb?	106
6.3.1	Welche Forderungen der Neuen Mathematik wurden erfüllt?	106
6.3.2	Welche Probleme sind heute genauso aktuell?	109
7	Zusammenfassung	112
7.1	Die Neue Mathematik – der Verlauf der Reform	112
7.2	Was blieb von der Neuen Mathematik im Lehrplan?	113
7.3	Was blieb in den Schulbüchern?	114
8	Anhang	116
	Deutscher Abstract	116
	Englischer Abstract	116
	„New Math“ von Tom Lehrer	117
9	Quellen	121
9.1	Didaktische Literatur	121
9.2	Schulbücher	123
9.3	Internetquellen	128
	Lebenslauf Brigitte Bogensperger	130

1 Einleitung

1.1 *Motivation*

Immer wieder wird Unterricht reformiert. Die Schulabgänger haben nicht das erwünschte Niveau, also muss sich am Unterricht etwas ändern. Wir erleben gerade jetzt mit der Kompetenzorientierung und Standardisierung wieder eine weitreichende Veränderung des Mathematikunterrichts. Wir brauchen neue Schulbücher, zusätzlich zum Lehrplan wird ein Kompetenzmodell für die Ausrichtung des Unterrichts verordnet. Die im aktiven Dienst stehenden Lehrpersonen müssen ihren Unterricht den neuen Anforderungen anpassen und eventuell Fortbildungen absolvieren. Und schließlich muss die Wirksamkeit der Reform in Evaluationsprojekten untersucht werden.

Solche Reformen haben einen ähnlichen Ablauf. Mangelhafte SchülerInnenleistungen oder veränderte gesellschaftliche Bedingungen bewirken einen Diskussionsprozess darüber, was an der Bildung/Ausbildung verbessert werden soll. Oder wissenschaftliche und technische Veränderungen verlangen eine andere Schwerpunktsetzung im Unterricht oder die Berücksichtigung gänzlich neuer Themen. Auch politische und wirtschaftliche Einflüsse können wir ausmachen.

Dabei werden meist Ziele und Forderungen aufgestellt, Theorien zur Erreichung dieser Ziele in einer didaktischen Diskussion vorgeschlagen, Forschungen sollen eine mögliche Umsetzung und deren Erfolg, nämlich das Erreichen der Zielvorgaben oder zumindest ein Annähern an diese belegen. Diese Diskussion mündet in eine Neugestaltung des Unterrichts, neue Unterrichtsmethoden oder -inhalte, vielleicht auch geänderte Rahmenbedingungen für den Unterricht (mehr Unterrichtsstunden für dieses Fach, andere Schwerpunkte, neue Lernmaterialien oder Hilfsmittel). Einige Zeit nach diesen Veränderungen kann man erkennen, welche Teile der Reform sinnvolle Umgestaltungen, Verbesserungen waren und welche Modifikationen nicht wie beabsichtigt wirkten, und welche Probleme bei der Umsetzung im Unterricht auftraten oder durch maßvolles Agieren der Lehrpersonen „entschärft“ werden mussten und welche Vorgaben wieder zurückgenommen werden mussten. Diese Phase der Evaluation der Veränderungen mischt sich oft bereits mit der nächsten Reform oder macht diese notwendig.

Jede Schwerpunktsetzung birgt die Gefahr, andere wichtige Aspekte zu vernachlässigen. Deshalb muss sich Unterricht immer wieder verändern. Jede Reform zieht eine gewisse Korrektur nach sich und es entsteht ein Kreislauf: Forschung – didaktische Diskussion – gesetzliche Vorgaben zur Veränderung des Unterrichts – Änderung der Ausbildung der Lehrenden – Umsetzung dieser Vorgaben im Unterricht – Evaluierung des Unterrichts durch Forscher...

Ein Unterbrechen dieses Kreislaufs oder unehrliche – vielleicht politisch motivierte – Evaluation stören dieses kontinuierliche Hinarbeiten auf ein besseres Unterrichtsergebnis.

Dieser Kreislauf einer Reform kann auch bei der Neuen Mathematik festgestellt werden. Die Veränderung der Wissenschaft Mathematik und die technologische Entwicklung hat eine Veränderung des Mathematikunterrichts verlangt. Im Diskussionsprozess der frühen 60iger Jahre des 20. Jahrhunderts der MathematikdidaktikerInnen kann man kaum eine kritische Stimme zur Modernisierung des Mathematikunterrichts feststellen. Man hatte große Pläne mit der Jugend und wollte schon VolksschülerInnen mit dem Gruppenbegriff vertraut machen. Doch nach einiger Zeit regte sich Widerstand, zuerst nur eine Verteidigung der Euklidischen Geometrie, später fragte der Spiegel „Macht die Mengenlehre krank“? Im Lehrplan konnte man dann relativ schnell eine Rücknahme eines Teils der Reformen feststellen. Neue Kritikpunkte führten zu einer andersgerichteten Reform mit anderen Zielen und Schwerpunkten.

1.2 *Inhalt dieser Diplomarbeit*

Diese Diplomarbeit möchte der Frage nachgehen: Was blieb von der Neuen Mathematik?

Dazu sollte zuerst geklärt werden, was ist die „Neue Mathematik“. Was waren die Auslöser und Beweggründe für diese Modernisierung des Mathematikunterrichts und welche Ziele verfolgte sie. Was erwartete man sich von ihr und welche ganz konkreten Verbesserungen des Unterrichts wollte man bewirken.

Die Veränderungen eines Mathematikunterrichts in der Vergangenheit können nicht unmittelbar erforscht werden, da man heute keine Unterrichtsbeobachtungen über einen Unterricht vor 40 oder mehr Jahren anstellen kann.

Daher soll zunächst die didaktische Literatur betrachtet werden. Diese lässt sich allerdings nicht auf Österreich begrenzen, im Gegenteil, es wird ein internationaler Einfluss, aber besonders der Einfluss Deutschlands auf Österreich sichtbar.

Dabei sollen auch damals vorgeschlagene Zugänge zu Unterrichtsinhalten beleuchtet werden, die die Eigenart dieser Reform verdeutlichen.

Der zweite Teil der Arbeit sollte sich den Veränderungen im Lehrplan widmen. Die didaktischen Grundsätze und die Veränderung der Lehrziele sind ein Spiegel dessen, was die didaktische Diskussion schlussendlich in der Schulpolitik auslöste. Am Vergleich mit den aktuellen Lehrplänen kann man erkennen, welche Teile der Reform als sinnvoll beurteilt wurden und weiterleben und welche Teile wieder verworfen wurden. Dabei möchte ich mich auf den Lehrplan des Gymnasiums beschränken.

Der dritte Teil will die Schulbücher als im Mathematikunterricht besonders wichtiges Medium untersuchen. Einerseits lässt der Lehrplan einen Gestaltungsspielraum für die Lehrbuchautoren, andererseits ist das Schulbuch auch gewissen Regeln des Marktes unterworfen. Die

LehrerInnen als „KundInnen“ wählen eines der vielen verschiedenen Schulbücher als Grundlage für ihren Unterricht.

Deshalb ist es von Interesse, die Schulbücher aus der Zeit dieser Reform untereinander zu vergleichen, aber auch mit Schulbüchern aus der Zeit davor zu vergleichen. Andererseits sollen auch die aktuellen Schulbücher auf die Frage hin betrachtet werden: Was blieb übrig von der Neuen Mathematik?

Abschließend soll hinterfragt werden, welche der Ziele der Neuen Mathematik erreicht wurden, welche Teile der Reform kritisiert wurden und warum. Schließlich soll eruiert werden, welche Inhalte der Neuen Mathematik bis heute wirksam geblieben sind. Welche Aspekte wurden wieder rückgängig gemacht oder sind von späteren Reformen verändert worden und welche Ziele sind bis heute aktuell, weil noch nicht erreicht. Besonders wichtig für spätere Reformen ist aber auch, zu hinterfragen, welche Probleme bei der Umsetzung auftraten und wie man diese hätte vermeiden können.

1.3 Neue Mathematik oder Moderne Mathematik

Der Begriff New Math ist in der Literatur eindeutig mit der Entwicklung der Schulmathematik in den Jahren um 1960 verknüpft. Im deutschsprachigen Raum werden die Begriffe „Neue Mathematik“¹ und „Moderne Mathematik“² verwendet.

Lenné verwendet den Begriff „Moderne Mathematik“ für die fachwissenschaftliche Entwicklung, „Neue Mathematik“ als die didaktische Formulierung dieser Strömung.³

Im Folgenden soll der Begriff „Neue Mathematik“ für die Veränderungen der Schulmathematik im deutschsprachigen Raum verwendet werden, da der Begriff „Moderne Mathematik“ auch mit anderer Bedeutung verwendet wurde und wird⁴.

Parallel dazu sprach man von der „Modernisierung des Mathematikunterrichts“, allerdings wurde auch dieser Begriff zB. von Tobies für die Bemühungen Felix Kleins um 1900 verwendet⁵. Da aber die Konferenz der Kultusminister⁶ 1968 ein Dokument über die Modernisierung des Mathematikunterrichts verfasste, wird dieser Begriff weitgehend mit der Reform im Sinne der Neuen Mathematik verbunden.

¹ vgl. Amstler 1975; Barker 1971, S. 5; Lauter 1974; Griesel 1971; Weis, Bauersfeld in: Steiner 1978, S. 246; Eckhardt 1972.

² vgl. Barker 1971; Schäfer 1971, S. 19; in: Lehrplan für die Oberstufe AHS, BGBl 146/1966, Lehrstoff 7. Klasse Arithmetik; BGBl 295/1967, Oberstufe: Lehrstoff, Allgemeiner Überblick; Münzinger 1971; Pollak in: Steiner 1978, S. 295; Meschkowski 1969, S. 12.

³ vgl. Lenné 1969, S. 77.

⁴ vgl. Peterson 1988: Der Titel „Mathematische Expeditionen. Ein Streifzug durch die moderne Mathematik“ ist ein populärwissenschaftliches Buch über „moderne“ Unterhaltungsmathematik: über Primzahlen, Chaostheorie, Turingmaschine, Computersimulationen, Fraktale und ähnliches.

⁵ vgl. Tobies 1981, S. 76 und S. 79.

⁶ Kultusminister wurden die Unterrichtsminister der Bundesländer der BRD genannt.

1.4 Der Versuch einer Definition des Begriffs „Neue Mathematik“

Dies kann nur ein Versuch sein, der um in den Bildern der Mengenlehre zu sprechen folgendermaßen erfolgen soll: Man nehme alle Vorschläge und Vorstellungen, die man in der Literatur zu diesem Thema findet und bilde die Durchschnittsmenge oder genauer jenen Durchschnitt jener Vorstellungen, die von den meisten AutorInnen vertreten werden. Das aber erlaubt keine exakte Abgrenzung (definitio aus dem Lateinischen: „de“ von herab und „finis“ die Grenze), was unter dem Begriff verstanden wird und was damit nicht gemeint sein soll. Dementsprechend vage nur kann dieser Begriff definiert werden, somit kann dies keine mathematisch exakte Abgrenzung sein.

1.4.1 Die neuen Unterrichtsinhalte

Als Grundlage der gesamten Mathematik und als erstes Kapitel sollte die Mengenlehre vermittelt werden, dazu die Aussagenlogik. Man wollte die gesamte Mathematik auf die Mengenlehre aufbauen: den Zahlbegriff über die Mächtigkeit einer Menge definieren, die geometrischen Grundbegriffe als Mengen betrachten, auch die Grundrechnungsarten sollen über die Mengenlehre erklärt und Funktionen als Abbildungen von einer Menge in eine andere eingeführt werden. Weiters sollten algebraische Strukturen (die Begriffe Gruppe, Ring und Körper) als Grundstruktur unterrichtet werden. Ein Fokus wurde auf die Abbildungsgeometrie gelegt. Ein vehementer Verfechter der Neuen Mathematik, Jean Dieudonné forderte gar: „Nieder mit Euclid! Tod den Dreiecken“⁷.

Als weitere Neuerung sollte die Symbolsprache als Sprache der Mathematik möglichst früh verwendet werden, beginnend mit dem ersten Kapitel Mengenlehre.

Das Kapitel der Relationen und die theoretische Betrachtung der Funktionen mit den Begriffen injektiv, surjektiv und bijektiv, aber auch Abbildungen von algebraischen Strukturen wie Homomorphismus und Isomorphismus sollten den SchülerInnen bereits in der Unterstufe vermittelt werden. In der Oberstufe wurde der Fokus auf Funktionen verstärkt. Die Betrachtung algebraischer Strukturen wurde natürlich fortgesetzt. Die Mathematik wurde auch in der Oberstufe als ein auf die Mengenlehre und Logik aufgebautes Gebäude gesehen, auch Inhalte, die heute dem Informatikunterricht zugerechnet werden wie zB. Schaltungen, wurden im Mathematikunterricht der Oberstufe behandelt.

1.4.2 Die neue Art der Vermittlung

Betrachtet man die Art der Vermittlung, so entfernt man sich vom genetischen Prinzip und von der Anschaulichkeit. Die neue Herangehensweise soll dem streng deduktiven Stil möglichst nahe kommen: also Definitionen von Begriffen möglichst früh verwenden und Strukturen

⁷ In Praxis der Mathematik 1967, S. 62 zitiert Herbert Zeitler J. Dieudonné: „A bas EUCLIDE, plus de triangles“.

möglichst allgemein betrachten, und erst danach Beispiele dazu behandeln. Allerdings lässt sich gerade diese Forderung im Schulunterricht nicht so einfach umsetzen, da die Abstraktionsfähigkeit gerade in der Sekundarstufe I bei den SchülerInnen noch nicht im notwendigen Maß ausgebildet ist. Diesen Widerspruch sollte nach Meinung der Didaktiker die Lehrperson durch einen „spannenden“ Unterricht ausgleichen.

Die Neue Mathematik hat „keine neuen, für sie typischen, unterrichtsmethodischen Vorstellungen entwickelt.“ schrieb Lenné. Andere wiederum meinten, die neuen Inhalte verlangten neue Unterrichtsmethoden, im speziellen eine Abkehr vom Frontalunterricht.

1.5 Ausgangspunkt der Betrachtung – die didaktische Situation davor

Die Kleinsche Reform

Um zu erkennen, was an der Neuen Mathematik im Schulunterricht wirklich neu war, und welche Forderungen neu waren, empfiehlt es sich, kurz die Situation davor zu betrachten.

Die letzte große Reform des Mathematikunterrichts vor der Neuen Mathematik war wohl die Kleinsche Reform. Klein als Anwendungsmathematiker forderte eine Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zum funktionalen Denken als wichtigste Aufgabe des Mathematikunterrichts.⁸ Weiters bemühte er sich um die Aufnahme der Differential- und Integralrechnung und der analytischen und darstellenden Geometrie in den Realschullehrplan⁹, es blieb aber beim „Verständnis für den Funktionsbegriff“ als offiziellen Lehrplaninhalt. Er sorgte dafür, dass in Göttingen (an seiner Wirkungsstätte) der erste Lehrstuhl für Didaktik der mathematischen Wissenschaften an einer deutschen Universität eingerichtet wurde¹⁰, weil er erkannte, dass es für einen guten Lehrenden nicht reicht, die mathematischen Inhalte selbst zu beherrschen, sondern auch die Aufbereitung und Vermittlung der Inhalte für einen erfolgreichen Lernprozess wichtig ist.

Wie auch bei der New Math-Bewegung waren diese Reformbestrebungen ein internationales Anliegen. 1908 wurde die Internationale Mathematische Unterrichtskommission gegründet¹¹ und Klein in Abwesenheit zum Vorsitzenden bestimmt. Diese Organisation forderte 1912 unter anderem auch die Einführung „*neuer Fundamentalbegriffe (wie Funktions-, Gruppen-, Mengenbegriff)*“ in den Schulunterricht, aber auch die Einführung der Differential- und Integralrechnung und der analytischen Geometrie. Der erste Weltkrieg sorgte für eine Unterbrechung der internationalen Zusammenarbeit und in der Zeit nach dem ersten Weltkrieg erfolgte in Deutschland (und wohl auch in Österreich) eine verstärkte Ideologisierung des

⁸ vgl. Tobies 1981, S. 81.

⁹ vgl. Die Naturwissenschaften 25. April 1919, S. 41.

¹⁰ vgl. Tobies 1981, S. 76.

¹¹ vgl. Tobies 1981, S. 83.

Unterrichts und eine Zuwendung zu geisteswissenschaftlichen Fächern und eine Zurücknahme der Anforderungen an den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht.¹²

Wagenschein — genetischer Unterricht

Wagenschein propagierte (noch stärker als Felix Klein) den genetischen Unterricht. Dabei sollte von einem Problem aus der Alltagswelt des Lernenden ausgehend die Motivation für den Lernprozess entstehen. Die bevorzugte Methode sollte das sokratische Gespräch sein. Diese didaktischen Überlegungen erreichten vorerst keine so große Beachtung. Sie standen ganz im Gegensatz zur Neuen Mathematik.

2 Gründe für die Modernisierung des Mathematikunterrichts

2.1 Veränderungen in der Mathematik

2.1.1 Cantor und Hilbert

Cantor ist es gelungen auch unendliche Mengen zum Gegenstand exakter Untersuchungen zu machen.¹³ Er erarbeitete Differenzierungen des Begriffes „unendlich“. Seine sogenannten „Antinomien“ der Mengenlehre teilte er Hilbert und auch anderen mit. Unruhe entstand durch die „Russelsche Antinomie“ über den Widerspruch, dass die Menge aller Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalte, sich doch selbst enthalten müsste. Dieser Widerspruch trieb Hilbert dazu, das mathematische Denken zu formalisieren, um Sicherheit vor Widersprüchen zu erlangen. Dabei wird die Mathematik zum Studium formaler Strukturen.¹⁴

So sagt Neunzig über die Neue Mathematik: *„Die Mengenlehre ist das entscheidende Ausdrucksmittel der heutigen mathematischen Denkweise. Das Studium von gemeinsamen Strukturen, die uns in den verschiedenen Darstellungen begegnen, bildet den wesentlichen Inhalt der heutigen Mathematik.“*¹⁵

2.1.2 Nicolas Bourbaki

Eine Gruppe von französischen Mathematikern begann den Versuch, die Mathematik in der von Hilbert für die Geometrie und von Emmy Noether und anderen für die Algebra verwendeten axiomatischen Form darzustellen. Basis dieser Darstellung sollte die Mengenlehre und die formale Logik sein. Dabei versuchten sie die Mathematik nicht nach Sach- oder Anwendungsbereichen, sondern nach Strukturen (sogenannten Mutterstrukturen wie etwa das Ordnungsprinzip, algebraische Strukturen oder topologische Strukturen) zu ordnen.¹⁶

¹² vgl. Tobies 1981, S. 85.

¹³ vgl. Meschkowski 1969, S. 113.

¹⁴ vgl. Schuberth 1971, S. 35 f.

¹⁵ Neunzig 1969, S. 9.

¹⁶ vgl. Schuberth 1971, S. 37.

Das Gemeinschaftswerk „Éléments de mathématique“, unter dem Pseudonym Nicolas Bourbaki¹⁷ veröffentlicht, sollte eine Gesamtdarstellung der wesentlichen Gebiete der Mathematik geben und die gemeinsamen Grundlagen dieser einzelnen Gebiete darstellen.¹⁸ Der Titel „Éléments de mathématique“ war bewusst angelehnt an die „Elemente“ von Euklid^{19,20}, er erinnert aber auch an die „Elemente der Geometrie“ von Hilbert.

Das Werk „gibt (in konsequenter Fortführung von Ideen der durch Hilbert begründeten formalistischen Schule) einen neuartigen Aufbau der Mathematik aus den ‚Grundstrukturen‘“²¹. Fischer schreibt in seiner Abhandlung „30 Jahre Bourbaki“: „Die Menge des Wissensstoffes hatte in der Mathematik in einzelnen ihrer Teildisziplinen derart zugenommen, daß es selbst den Mathematikern schwer wurde, das Gesamtgebiet noch zu überblicken. Es erwuchs daher in jener Zeit zugleich das Bedürfnis, nach einer Neugliederung der mathematischen Wissenschaften und zwar einer Gliederung, die [...] die Gesamtheit der Disziplinen nach neuen, umfassenden Prinzipien gliederte, die Querverbindungen erkennen ließen.“²²

Als Grundlage dieses neuen Aufbaus der Mathematik dient der Begriff der „Struktur“: eine Menge, zwischen deren Elementen bestimmte Relationen bestehen. Grundlegende Strukturtypen, sogenannte „Mutterstrukturen“ stehen dabei im Mittelpunkt der Mathematik. Die formalen Folgerungen aus der Untersuchung der Strukturen können je nach Abteilung der Mathematik verschieden gedeutet werden. Die wichtigsten Strukturtypen sind die Ordnungsstrukturen, algebraische Strukturen und topologische Strukturen. Erst bei der Behandlung der speziellen Theorien erhalten die Elemente ihre Individualität und hier trifft man erst die Theorien der klassischen Mathematik.²³

Henri Cartan, einer aus diesem Kreis der französischen Mathematiker, schreibt über Bourbakis Arbeitsweise: „Alle Bücher des ersten Teiles sind nach streng logischen Gesichtspunkten angeordnet. Ein Begriff und ein Resultat dürfen nur dann benutzt werden, wenn sie in einem früheren Buch oder Kapitel vorkommen. Nun ist leicht einzusehen, daß eine solche Strenge teuer

¹⁷ General Charles Denis Bourbaki hat im deutsch-französischen Krieg 1870/71 einen Teil der französischen Armee, als die Niederlage seines Auftrags bereits unvermeidbar und der Rückzugsweg unter harten winterlichen Bedingungen abgeschnitten war, über die französisch-schweizerische Grenze geführt, wo die Soldaten von den Schweizern entwaffnet wurden. Damit verhinderte er, dass die Soldaten in deutsche Kriegsgefangenschaft gerieten. Die Schweizerische Bevölkerung hat in einer beispiellosen Aktion 87000 französische Soldaten versorgt, wofür sie später Entschädigung verlangte. Es ist nicht belegt, wieso die Gruppe diesen Namen verwendete und ob sie sich auf General Bourbaki bezog.

Walter L. Fischer schreibt, dass eine Geschichte im Umlauf sei, die besagt, die Namensgebung gehe auf eine Faschingsvorlesung zurück, „der einige Gründer dieses Kreises beigewohnt hatten und in der der Vortragende einen widersprüchlichen Sachverhalt als ‚Lehrsatz von Bourbaki‘ zur allgemeinen Erheiterung recht überzeugend ‚bewiesen‘ hatte.“ (Praxis der Mathematik 1964, S. 284.)

¹⁸ vgl. Cartan 1959, S.8.

¹⁹ Cartan 1959, S. 12.

²⁰ Die Elemente Euklids (ca. 3. Jh. v. Chr.) sind eine Zusammenfassung des mathematischen Wissens jener Zeit. (vgl. Meschkowski 1969, S. 239).

²¹ Meschkowski 1969, S. 239.

²² Walter L. Fischer: 30 Jahre Bourbaki, in: Praxis der Mathematik 1964, S. 281.

²³ vgl. Fischer: „30 Jahre Bourbaki“ in: Praxis der Mathematik 1964, S. 284.

*bezahlt werden muß: sie zieht notwendig eine gewisse Schwerfälligkeit der Darstellung nach sich;*²⁴

Von 1940 an wurden unter dem Pseudonym Nicolas Bourbaki 40 Bücher veröffentlicht. Bourbaki, auch wenn er als Person nicht existierte²⁵, hatte großen Einfluss auf die Entwicklung von New Math genauso wie auch auf die Neue Mathematik bzw. die Modernisierung des Mathematikunterrichts im deutschsprachigen Raum.

Die „Éléments de mathématique“ waren ursprünglich als Lehrbuch für Studenten gedacht, der Einfluss auf die Hochschulmathematik übertrug sich aber auch auf die Schulmathematik. Besonders Jean Dieudonné, einer aus der Autorengruppe Bourbaki, befürwortete den Bourbakismus in der Schulmathematik.²⁶

2.2 Politische, gesellschaftliche und wirtschaftliche Gründe

2.2.1 Sputnik Schock

Ein wichtiger Grund oder der wichtigste Grund für die Modernisierung des Mathematikunterrichts in den Vereinigten Staaten war die (zumindest so empfundene) technologische Überlegenheit der UdSSR: *„Das Entwicklungstempo der Mathematik und des Mathematikunterrichts wurden nicht zuletzt durch den Hegemoniestreit der Supermächte bestimmt. Gerade das Rennen im Weltraum führte und führt noch dazu, daß die Mathematik in den sechziger Jahren des 20. Jahrhunderts weltweit einen Aufschwung erlebte wie nie zuvor. Auf den sogenannten ‚Sputnik-Schock‘ (gelungener Start des Sputnik I der UdSSR) reagierten die USA mit einer gewaltigen Ausweitung der Naturwissenschaften und der Mathematik.“* schreibt Amstler²⁷. Mit dem 1958 vom US-amerikanischen Kongress beschlossenen National Defense Education Act sollte mehr Geld für die Naturwissenschaften und die Mathematischausbildung zur Verfügung stehen um für den Wettlauf ins All besser gerüstet zu sein. Die Amerikanische Mathematische Gesellschaft gründete die School Mathematics Study Group (SMSG), die – wie viele andere derartige Studiengruppen auch, allerdings mit dem größten Einfluss – neue Lehrpläne für die High School, aber auch für die Grundschule ausarbeitete. Dabei sollte sich der Schwerpunkt von der grundlegenden Rechenfertigkeit auf das Verstehen verlagern.

Die Spannungen zwischen den Großmächten und die Bedrohung durch Atomwaffen hatten auch ihre Auswirkung auf die Bildungspolitik Europas. Meschkowski schreibt in „Mathematik als Bildungsgrundlage“:

„Unsere politische Zukunft hängt auch davon ab, ob wir genug Fachkräfte für die Wirtschaft ausbilden. Nehmen wir an, daß es in den nächsten Jahrzehnten zu keinem weltweiten Atomkrieg

²⁴ Cartan 1959, S. 13.

²⁵ vgl. Fischer: „30 Jahre Bourbaki“, in: Praxis der Mathematik 1964, S. 283.

²⁶ vgl. Lenné 1969, S. 77.

²⁷ Amstler 1975, S. 17.

kommt, daß immer wieder mindestens im letzten Augenblick die Probleme zwischen den Weltmächten friedlich gelöst werden. Damit sind doch die politischen und ideologischen Gegensätze nicht aus der Welt geschafft, und die Entscheidungen der jungen Völker werden nicht zuletzt durch die Wissenschaftler, Ingenieure und Lehrer bestimmt sein, die die alten Großmächte ihnen stellen. Es ist also eine für die politische Zukunft höchst bedeutsame Frage, ob wir wieder den Anschluß an die Forschung finden, ob wir genug Ingenieure und Techniker ausbilden, mit denen wir den Entwicklungsländern helfen können.“²⁸

Es war auch für Europa politisch und wirtschaftlich immens wichtig, in der technologischen Entwicklung vorne dabei zu sein und dafür brauchte es entsprechend gut ausgebildete Fachkräfte. Das zeigte sich auch darin, dass die OECD (damals noch OEEC) 1959 eine Versammlung zur Verbesserung des Mathematikunterrichts einberief. Dazu sollte jedes Mitgliedsland einen Mathematiklehrer, einen Didaktiker und einen Verantwortlichen der Schulverwaltung entsenden. Die Statements und Forderungen sowie auch ein Vergleich der Unterrichtssituation in den einzelnen Ländern und Forderungen an die LehrerInnenbildung wurden als Buch veröffentlicht.²⁹

2.2.2 Rechenmaschinen und die Entwicklung des Computers

Amstler führt als Begründung für die Modernisierung des Mathematikunterrichts an: „*Der zunehmende Einsatz des Handrechners und des Computers in Wirtschaft und Verwaltung führt dazu, daß immer mehr Menschen mit der Handhabung und Ausnützung dieser Geräte konfrontiert werden und bringt dadurch ebenfalls eine Verstärkung des Einflusses der Mathematik auf unser Leben. Die Anwendung dieser Geräte erfordert erhöhte Rechenfähigkeit und vermehrte Schulung des logischen Denkens. Nur die Rechenfertigkeit kann delegiert werden!*“³⁰ Diese Unterscheidung zwischen Rechenfähigkeit und Rechenfertigkeit ist insofern sehr bemerkenswert, da bis zu jenem Zeitpunkt der Schwerpunkt des Mathematikunterrichts im Pflichtschulbereich auf dem „Rechnen“ lag, das Fach wurde auch Rechnen genannt³¹. Man kann nun nicht argumentieren, mit der Einführung von Rechenmaschinen sei diese Qualifikation nicht mehr nötig. Dennoch wollte man den Schwerpunkt von einer durch Training perfektionierten Fertigkeit auf die intellektuelle Fähigkeit legen, diese Maschinen kontrollieren zu können, aber die Arbeit des Rechnens sollte diesen überlassen bleiben. Das elementare Rechnen in der Grundschule solle auch weiterhin gelehrt werden, aber es sollte nicht das Einzige und das Wichtigste sein. Damit wollte man Spielraum für Gestaltungsmöglichkeiten im Curriculum des Elementarunterrichts schaffen.

²⁸ Meschkowski 1965, S. 183.

²⁹ OEEC 1961: New Thinking in School Mathematics.

³⁰ Amstler 1975, S. 17.

³¹ vgl. Weyrich 1950: Der Rechenunterricht auf der Oberstufe der ländlicher Volksschulen, S. 3.; und Buxbaum 1931: Rechenbuch für Volksschulen.

Die rasante Entwicklung des mit Lochkarten programmierbaren Rechenautomaten, die Serienproduktion von Transistorrechnern in den 1950ern, die kommerzielle Produktion von immer kleiner werdenden Computern, die Speichermöglichkeiten auf Magnetband und die Verbreitung aller dieser technischen Entwicklungen im Fernsehen hatten wohl einen großen Einfluss auf die Zukunftssicht. Einerseits wollte man für den Computer gerüstet sein, andererseits ahnte man, dass damit auch ein großer gesellschaftlicher Wandel einhergehen würde. Deshalb erachtete man eine tiefgreifende Reform des Bildungswesens als eine wirtschaftliche Notwendigkeit: *„Die Kultusminister haben erkannt, die Berufsanforderungen an unsere Kinder sind nicht die einer bäuerlich-handwerklich-kaufmännischen Gesellschaft, sondern die einer rasch sich wandelnden Industriegesellschaft.“*³² Diese Aussage bezieht sich auf die Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen vom Oktober 1968, die von den deutschen Unterrichtsministern beschlossen worden war.

Man wollte so früh als möglich das zur Programmierung nötige Wissen vermitteln, die Logik: *„Die Kenntnisse einfacher logischer Gesetze ist [sic!] nötig, um die Sprache der Computer zu verstehen. Man kann dem Computer keine Anweisung ohne die Kenntnis logischer Gesetze geben, und um logische Gesetze zu verstehen, muss man die Grundlagen der Mengenlehre beherrschen.“*³³ war die vorherrschende Meinung nicht nur unter Wissenschaftlern.

Im Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen, IV. Teil (für die achte Klasse) zweites Heft, findet man im einleitenden Kapitel „§1 Warum betreiben wir Boolesche Algebra?“ eine Begründung für die Behandlung dieses Themas: *„Infolge der zunehmenden Komplexität der in Betracht zu ziehenden Zusammenhänge fallen mit wachsender Häufigkeit mathematische Probleme an, deren Lösung monate- wenn nicht jahrelanger intensiver Teamarbeit bester Fachkräfte bedürfte, gäbe es keine Rechenautomaten, die in erstaunlich kurzer Zeit dasselbe zu leisten vermögen und ohne die eine Bewältigung der Aufgaben aussichtslos erschiene. Ohne Computer wäre die Raumfahrt undenkbar, die Erforschung von Atomen und Elementarteilchen ginge in einem um Größenordnungen langsameren Tempo vor sich, ja sogar der Bedarf an Arbeitskräften für die Verwaltung von Großbetrieben, Gebietskörperschaften und staatlichen Einrichtungen ließe sich nicht im nötigen Ausmaß decken. Zu den mathematischen Grundlagen der Rechenmaschinen gehört die **Boolesche Algebra**. Die Zahl der Jugendlichen, die voraussichtlich später in irgendeiner Form mit Rechenanlagen beruflich in Berührung kommen werden – schon heute arbeiten Millionen Menschen direkt oder indirekt für diesen Industriezweig –, wächst ständig. Daher fällt der Schule die Aufgabe zu, im Mathematikunterricht auf diese Art der beruflichen Tätigkeit ein wenig vorzubereiten.“*³⁴

³² Schäfer 1971, S. 22.

³³ Schäfer 1971, S. 30.

³⁴ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe IV. Teil zweites Heft 1975, S. 1.

Das Erstaunliche dieser Einleitung liegt nicht nur in der Tatsache, dass die Behandlung eines Themas in einem Schulbuch begründet wird – wer würde begründen, warum man Kegelschnitte behandelt? – sondern auch in der Verantwortung für die Vorbereitung auf eine berufliche Tätigkeit, was nicht primär als Aufgabe des Gymnasiums galt, aber in dieser Zeit durchaus dem Mathematikunterricht zugeschrieben wurde. Weiters ist bemerkenswert, dass der Mathematikunterricht eigentlich der Vorläufer eines Informatikunterrichts war. Verglichen mit der Situation heute, muss man festhalten, dass die zwei Wochenstunden Informatikunterricht in den acht Jahren Gymnasium derzeit meist nur für die Vermittlung von Kenntnissen der Anwendungssoftware genützt werden und man damals weitaus mehr Grundlagen der Informatik unterrichtete als heute im „Computerzeitalter“.

2.2.3 Mathematisierung aller Lebensbereiche

Die Reise zum Mond, die Entwicklung der Atombombe, Computer, die schneller als der Mensch und fehlerfrei rechnen, die Entwicklung von Radio und Fernsehen, die Entwicklung vieler Haushaltsgeräte, und natürlich das Auto, das alles muss die Menschen auch verunsichert haben. Und für die Entwicklung all dieser Dinge benötigte es Ingenieure und Mathematiker.

Die damals vorherrschende Stimmung und die Zukunftsvisionen sollen von folgenden Zitaten eingefangen werden:

„Unsere heutige Zivilisation ist in wesentlichem Maße mit der Mathematik verbunden. Auf der Mathematik beruht unser Wirtschaftssystem (Handel, Geldwesen, Versicherungswesen usw.), auf ihr baut die Physik und Chemie auf, die wiederum die Grundlagen unserer modernen Technik sind. Mathematische Methoden finden immer mehr Eingang in die moderne Biologie, Medizin, Volkswirtschaftslehre und Statistik.“³⁵

„Im Verlauf der letzten 50 Jahre ist die Mathematik immer mehr zu einem allgemeinen Instrument der Bewältigung von Lebenssituationen überhaupt geworden.“³⁶

„Die Kinder, die in den nächsten Jahren zur Schule gehen, werden noch im 21. Jahrhundert berufstätig sein. Sie werden sich die Freizeit zu gestalten haben, die ihnen die automatisierte Industrie großzügig gewähren kann. Die Schule hat die Aufgabe, für den Beruf und – das ist mindestens ebenso wichtig! – für die Gestaltung des Lebens abseits vom Arbeitsplatz vorzubereiten. Wie wird sich das Leben im 21. Jahrhundert abspielen? Welche Forderungen ergeben sich aus den Bedürfnissen der Industrie von morgen für die Schule von heute?“³⁷

„Die fortschreitende Automation schafft Arbeitszeitverkürzungen für viele Berufe. Aber der Ausbau der Technik, die Behauptung im internationalen wirtschaftlichen Wettkampf

³⁵ Amstler 1975, S. 16.

³⁶ Schäfer 1971, S. 23.

³⁷ Meschkowski 1965, S. 182.

fordert gebieterisch die gediegene Ausbildung von Ingenieuren, Physikern, Mathematikern und Chemikern.“³⁸

Diese Zukunftssicht forderte von den Verantwortlichen eine entsprechende Anpassung des Bildungssystems, besonders des Mathematikunterrichts an die Erfordernisse der Wirtschaft, damit die Kinder am Arbeitsmarkt, aber auch im Alltag gerüstet seien.

2.2.4 Kluft Schulmathematik – Hochschulmathematik

Die große Entwicklung der Wissenschaft Mathematik im 19. Jahrhundert und in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts hat die Mathematik an der Universität von der Schulmathematik entfernt. Es wurden die Schwierigkeiten der Mathematikstudenten am Übergang vom Gymnasium zur Universität beklagt, Steiner nennt es gar den „Mathematikshock“³⁹: *„Die Mahnungen gingen naturgemäß zuerst von den Universitäten aus, die sich vor das ständig schwieriger werdende Problem gestellt sahen, mathematisch nicht in richtiger Weise vorgebildete Studenten in die neuen mathematischen Theorien einzuführen. Nur zu oft ist den Abiturienten von der Schule ein Bild der Mathematik mitgegeben worden, das ganz und gar nicht dem entspricht, was sich in den mathematischen Vorlesungen als Mathematik präsentiert.“⁴⁰*

Die Kluft zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik sollte verringert werden, nicht zuletzt um den Nachwuchs an Mathematikern und Mathematiklehrern zu sichern. *„Wenn sich die hier vorgeschlagene Arbeitsweise in den mathematischen Gymnasien durchsetzt, wird man die naturwissenschaftlichen und auch die mathematischen Anfängervorlesungen an den Universitäten umgestalten können.“⁴¹* hoffte Meschkowski bezüglich der Einführung der Neuen Mathematik.

Die SchülerInnen sollten sich bereits im Gymnasium an die Fachsprache gewöhnen, sie sollten mit dem streng axiomatischen Aufbau vertraut sein. Das Rechnen sollte in den Hintergrund treten. Manche sprachen von einer „Mathematisierung des Rechenunterrichts“.⁴²

2.2.5 Neue lernpsychologische Erkenntnisse

Besonders die Erkenntnisse Piagets, dass der Zahlbegriff beim Kind synthetisch entstehe und zwar von einer Mengenvorstellung ausgehend, wurde häufig als Rechtfertigung für die so frühe Einführung des eigentlich sehr abstrakten Konstrukts der Mengenlehre verwendet.

Man glaubte, dass die reformpädagogische Bewegung, die den Kindern ein kindgemäßes Lernen ermöglichen wollte, die SchülerInnen schlichtweg unterforderte.

³⁸ Meschkowski 1965, S. 183.

³⁹ Steiner 1978, S. 58.

⁴⁰ Steiner 1988, S. 13.

⁴¹ Meschkowski 1965, S. 192.

⁴² vgl. Steiner 1988, S. 193.

*„Beim Ausdenken mathematischer Lernsituationen mit Hilfe von anschaulichen Hilfsmitteln muß also berücksichtigt werden, daß Kinder viel früher, als man es bisher für möglich hielt, fähig sind, mathematische Begriffe zu bilden, auch wenn sie vielleicht noch nicht so weit sind, logische Entscheidungen treffen zu können. Die logische Untersuchung wird natürlich folgen, vielleicht aber erst nach Jahren.“*⁴³ meinte Zoltan P. Dienes, ein „Missionar der Neuen Mathematik“⁴⁴. Mit dieser Meinung stand Dienes aber nicht allein da: *„Wenn das Denken – wie die Forschung beweist – von ‚Strukturen‘ beherrscht ist, denen gewisse mathematische Strukturen entsprechen, dann liegt es nahe, dem Kind schon sehr früh Gelegenheit zu geben, solche Strukturen – natürlich in spielerischer, eigentätiger Weise – entdecken zu können.“*⁴⁵ schreibt Schäfer.

Es wurde damit argumentiert, dass abstrakte Sachverhalte schon früher als bisher vermittelt werden könnten und schon der Volksschulunterricht verändert werden sollte. Auch die Einführung logischer Konstrukte wie zB. der Gruppentheorie könnte von der Hochschule ins Gymnasium verlegt werden. Die (Volksschul-)Kinder sollten der Mengenlehre, Logik und Kombinatorik im spielerischen Lernen begegnen.⁴⁶

2.2.6 New Math – Die Entwicklung in den USA

Die Situation in den Vereinigten Staaten ist für die vorliegende Arbeit nur insofern von Bedeutung, als sich die mitteleuropäische Bewegung zur Modernisierung des Mathematikunterrichts auf die Veränderungen in den Vereinigten Staaten berief. So schreibt Meschkowski, dass in den Vereinigten Staaten bereits ab der Grundschule die Mengenlehre eingeführt wurde.⁴⁷

Das Buch „Grundschule und moderne Mathematik“ von Barker gibt einen Eindruck des „neuen“ Schulstoffes oder der neuen Herangehensweise. Im Vorwort wird angeführt, dass bereits im Kindergarten *„einfache geometrische Tatsachen“* gelehrt werden, *„ebenso elementare Abschnitte der Mengenlehre“*.⁴⁸ Die übrigen Inhalte decken sich mit der später dargestellten Argumentation für die Neue Mathematik im deutschsprachigen Raum. Die Grundbegriffe der Mengenlehre wie zB. Vereinigungsmenge, Teilmenge, die Aussagenlogik, andere Zahlensysteme, die Betrachtung geometrischer Gebilde als Punktmengen, und Statistik (Modus, Median) sind die behandelten Themen. Allerdings sind das nur jene Themen, die für Grundschüler gedacht waren.

⁴³ Dienes 1965, S. 42.

⁴⁴ So bezeichnete Der Spiegel Dienes in einem Artikel in den Sechzigerjahren:
http://einestages.spiegel.de/static/entry/der_klassen_kampf/7002/zoltan_p_dienes_erklaert_seine_logischen_blo_ecke.html, abgefragt am 3.3.2014.

⁴⁵ Schäfer 1971, S. 23.

⁴⁶ vgl. Schäfer 1971, S. 40.

⁴⁷ Meschkowski 1965, S. 110 Fußnote.

⁴⁸ Barker 1971, S. 5.

Die Modernisierung des Mathematikunterrichts darf aber nicht als ein Import einer amerikanischen Idee gesehen werden. Vielmehr war diese Reform ein Projekt zur Erneuerung des Mathematikunterrichts in vielen Ländern, das in diesen Ländern auch unterschiedlich ablief. Besonders französische Mathematiker beeinflussten die Neue Mathematik, aber jedes Land hatte seine spezielle politische und bildungspolitische Situation, die den Verlauf der Reform beeinflusste.

3 Das Neue an der Neuen Mathematik

3.1 Die Didaktische Diskussion im deutschsprachigen Raum

3.1.1 „Bildungsnotstand“ – Modernisierung des Mathematikunterrichts

Als Reaktion auf den in Demonstrationen und Protesten in Deutschland ausgerufenen Bildungsnotstand wurden von der Konferenz der Deutschen Kultusminister am 3.10.1968 „Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen“ veröffentlicht.

Es war zwar schon länger der Versuch einer Modernisierung des Mathematikunterrichts diskutiert worden und es gab auch bereits davor schon Ansätze in ausgewählten Schulen und Schulversuche, aber keine flächendeckende Durchsetzung von Reformen in Deutschland. Dieses Bild der Situation kann man wohl auch auf Österreich übertragen, da die didaktische Diskussion vor den Grenzen nicht Halt macht. Wie in den Ausführungen zum Lehrplan ersichtlich wird, waren zu diesem Zeitpunkt zum Teil bereits Inhalte der Neuen Mathematik im österreichischen Lehrplan vorgesehen, aber eine breite Wirkung der Veränderungen konnte zu diesem Zeitpunkt noch nicht festgestellt werden.

Diese Richtlinien sind ein aussagekräftiges Dokument über die geplante Modernisierung des Mathematikunterrichts. Die Begründungen und Zielsetzungen galten auch für Österreich. Deshalb sollen die Überschriften und grundlegenden Inhalte in Stichworten hier angeführt werden.⁴⁹

I. Gründe

- Der Fortschritt der Mathematik und das Eindringen der Mathematik in viele Lebensbereiche machen eine Modernisierung notwendig.
- Mathematik ist für das Lösen der Probleme und die Leistungsfähigkeit notwendig.
- Um den Lehrermangel in naturwissenschaftlichen Fächern zu beseitigen, muss die Kluft Schulmathematik – Hochschulmathematik geschlossen werden.
- Die Wirtschaft benötigt (technisch) gut ausgebildete Menschen.

II. Modernisierung des Mathematikunterrichts

- Neue mathematische Denkformen, Sprechweisen

⁴⁹ Eckhardt 1972, S. 165.

- Eine Zusammenschau der verschiedenen Teilgebiete ist notwendig um die Mathematik klarer zu machen.
- Neue Methodik: ein behutsames Heranführen an die Axiomatik

III. Mittel und Wege zur Modernisierung

- Rahmenlehrpläne zur Vereinheitlichung
- Fachliteratur, Herausgabe eines Lehrerhandbuchs
- Schulversuche

IV. Aus- und Fortbildung der Lehrer

- angepasste Aus- und Fortbildung der Lehrer aller Schulgattungen
- Studium für Gymnasiallehrer soll in 8 Semester bewältigbar sein.
- Fortbildung für diese Modernisierung auf breiter Front

Dazu soll angemerkt werden, dass der Einsatz von neuen Schulbüchern – nach den Kriterien der Modernisierung des Mathematikunterrichts – nicht aufgezählt wurde!

3.1.2 Mengenlehre als Fundament – bereits in der Volksschule

Noch lange vor der Modernisierung des Mathematikunterrichts schlägt Weyrich in seinem Lehrbuch für die Oberstufe der ländlichen Volksschule vor, „*wirkliches Mengeschauen, Mengeschätzen, Mengeerkennen und Mengeordnen*“⁵⁰ als Mittel zur Festigung und Klarheit der gedachten Zahlen einzusetzen. Das Rechnen solle erst „*so spät als möglich*“ einsetzen und durch die Gegenstandsvorstellung unterstützt werden. Damit ist die Menge noch nicht im Sinne der Mengenlehre gemeint, sondern nur der Zugang zur Zahl über die Menge. Suppantischitsch führt in seinem Lehrbuch der Arithmetik für Gymnasien bereits 1911 zu den natürlichen Zahlen, indem er Mengen vergleicht: „*Ein Nomade will von seiner Herde je ein Schaf gegen je eine Axt eintauschen. Er nimmt eine Axt und gibt dafür eine Schaf, [...] Auf diese Art vergleicht der die Menge der erhaltenen Äxte mit der Menge der gelieferten Schafe.*“⁵¹ Im Weiteren verwendet er aber keinerlei Begriffe der Mengenlehre.

Barker beschreibt in „Grundschule und moderne Mathematik“, dass Grundschüler [in den USA, Anm.] mit Dingen in Berührung kämen, die bisher auf die weiterführenden Schulen beschränkt blieben, wie etwa Koordinatengeometrie oder negative und rationale Zahlen. „*Einfache geometrische Tatsachen werden heute schon im Kindergarten anschaulich dargestellt, ebenso elementare Abschnitte der Mengenlehre.*“⁵²

Schäfer beschreibt die Lernsituation in der Grundschule: „*Wer dagegen heute die Kinder im ersten Schuljahr beobachtet, die mit den Grundlagen der Logik, Mengenlehre, Kombinatorik und Zahlentheorie beginnen, [...] ist immer wieder erstaunt über [...] die Begeisterung und die Leistungen, die dort sichtbar werden.*“⁵³

⁵⁰ Weyrich 1950, S. 15.

⁵¹ Suppantischitsch 1911, S. 1.

⁵² Barker 1971, S. 5.

⁵³ Schäfer 1971, S. 40.

Griesel meint dazu: „Welche Fähigkeiten werden vom Schüler verlangt, wenn er in einer Sachaufgabe die zur Lösung notwendigen Verknüpfungen erkennen soll? Antwort: Er muß die in der Sachaufgabe verborgene Mengensituation entdecken.“⁵⁴ Jeder, der diese Aufgaben lösen konnte, wäre sich vielleicht seines Tuns nicht bewusst, weil er nie darüber reflektiert hatte. Die Mengenlehre solle helfen die richtigen Mengensituationen zu erkennen.

„Um eine effektive Neuorientierung des Mathematikunterrichts in der Grundschule zu ermöglichen, darf die Grundschule nicht isoliert gesehen werden. Eine Konzeption muß entwickelt werden, die eine Vereinheitlichung der gesamten mathematischen Erziehung vom ersten bis zum letzten Schultag erlaubt. Denkweisen und Methoden des Gymnasiums bedürfen ihrer Vorbegründung in der Grundschule. Zwischen Grundschule und weiterführenden Schulen darf genauso wenig eine Kluft entstehen, wie sie leider heute zwischen Gymnasium und Universität aufgebrochen ist.“⁵⁵ meint der Didaktiker Neunzig.

Und weiter: „Die gemeinsame Sprache, die modernen Denkweisen ermöglicht, muß dort eingeführt werden, wo sie zum ersten Mal mathematische Zusammenhänge artikuliert. Jeder kennt die Schwierigkeit, die das Loslösen von eingefahrenen Denk- und Sprechweisen bedeutet. Wir schaden dem Kind, wenn wir ihm nicht dort, wo es zu denken beginnt, die Denkweisen ermöglichen, die es später benötigt. Diese Gesamtschau verlangt, daß in den Kanon des Mathematikunterrichts der Grundschule Mengenlehre und Logik aufgenommen werden, weil damit Mittel bereitgestellt werden, die sich später als roter Faden aller mathematischer Bildung erweisen. [...] Implizit setzt sich heute jedes Kind mit Mengenlehre, Logik, Strukturen, Geometrie auseinander, weil die Begriffe dieser Disziplinen untrennbare Bestandteile schlüssigen Denkens sind. Wir würden eine große Chance verpassen, wenn wir diesen Prozeß nicht dadurch erleichtern und intensivieren würden, daß wir den Stoffplan des Grundschulunterrichts darauf abstellen, diese implizit gewonnenen Erfahrungen zu artikulieren.“⁵⁶

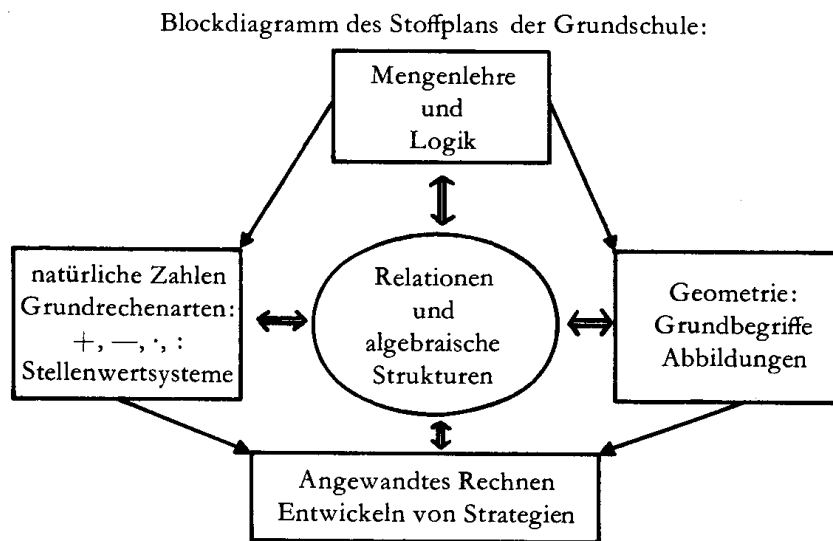
Neunzig führt im Stoffplan der Grundschule Folgendes an: „Mengenlehre und Logik liefern die übergreifende Sprechweise, auf der alle Gebiete aufbauen. Die natürlichen Zahlen und die Grundrechnungsoperationen werden durch die Mengenlehre begründet und im angewandten Rechnen geübt. Um den Zahlenaufbau einsichtig zu gestalten, wird der Frage der Stellenwertsysteme stärkeres Gewicht beigemessen, wobei die Diskussion nicht auf das Dezimalsystem beschränkt bleibt. [...] Parallel zur Behandlung der natürlichen Zahlen setzt die Geometrie ein. Neben Grundbegriffen wie Gebiet, Grenze, Inneres, Äußeres, Winkel, Gerade, konvex, nicht-konvex usw. kommt früh der Abbildungsstandpunkt zum Tragen, wobei Begriffe wie Translation, Drehung, Spiegelung die entscheidende Rolle spielen [...] Im Zentrum des

⁵⁴ Griesel 1971, S 299.

⁵⁵ Neunzig 1969, S. 12.

⁵⁶ Neunzig 1969, S. 13.

Unterrichts steht daher das Studium von Strukturen (vornehmlich algebraischer Strukturen) und von Relationen (vor allem Äquivalenz- und Ordnungsrelationen).“⁵⁷



aus Neunzig 1969, S. 20.

3.1.3 Weniger Rechnen, mehr Denken

Historisch gesehen war der Rechenunterricht vom Arithmetik- und Algebraunterricht streng getrennt. Er diente als Vorbereitung für den Mathematikunterricht und war auf die Volksschule beschränkt. Es war die vorherrschende Meinung unter den Befürwortern der Neuen Mathematik, dass der Rechenunterricht sich dem Betrachten allgemeiner mathematischer Strukturen unterzuordnen habe, und die Rechenfertigkeit nicht das erste und oberste Ziel des Rechenunterrichts sein solle.

Barker beschreibt die Veränderungen durch die New Math in den Vereinigten Staaten folgendermaßen: „Das bloße ‚Lernen‘, die gedächtnishafte Aneignung tritt zurück gegenüber dem Erfassen der jeweiligen Bedeutung innerhalb eines Sinnganzen.“⁵⁸

Schäfer meint: „Dem praktischen Rechnen braucht wesentlich weniger Raum zugestanden zu werden als bisher; es wäre sogar zu überlegen, ob nicht die Prinzipien des maschinellen Rechnens an seine Stelle treten sollten.“⁵⁹

und später: „Alle Mathematikprojekte [weltweit] tragen gemeinsame Züge, nämlich [...] daß die vier Grundrechnungsarten zugunsten zeitgemäßer Erfordernisse (wie Erkennen von Strukturen, Mengenlehre, Logik, Kombinatorik, Informatik) zurücktreten solle“.⁶⁰

⁵⁷ Neunzig 1969, S. 20.

⁵⁸ Barker 1971, S. 5.

⁵⁹ Schäfer 1971, S. 22.

⁶⁰ Schäfer 1971, S. 26.

Schäfer argumentiert in ihrem Buch „ABC der Mengenlehre – Keine Angst vor der Mengenlehre“, dass es in Hinkunft nicht mehr notwendig sei, dass SchülerInnen besondere Rechenfertigkeit erwerben, es gäbe ja in jedem Laden Rechenmaschinen: *„Schließlich hält sich auch kein Bauer ein Pferd im Stall für den Fall, daß sein Traktor versagt.“*⁶¹ Endloses Üben des Einmaleins sei Gedächtnisarbeit, aber keine Denkschulung. Es genüge ein Grundverständnis über das zu gewinnen, was addieren heißt. Das Addieren selbst dürfen wir getrost der Maschine überlassen; sie rechnet schneller und richtiger als der Mensch.⁶² Im Widerspruch dazu führt sie als Grund für die Modernisierung des Mathematikunterrichts aber genau diese nichtvorhandene Fähigkeit an, einfache Grundrechnungsaufgaben lösen zu können: *„Von 309 VolksschülerInnen⁶³ konnten 70 Prozent folgende Aufgaben gar nicht oder nicht richtig lösen: „ $1\frac{2}{5} : 2$ “ oder „6 DM von 18 DM sind wieviel Prozent?“*⁶⁴.

Ein Radioanrufer bei einem Gewinnspiel, ein Quintaner⁶⁵, konnte mit zur Hilfe versammelter Familie die Aufgabe „Eineinhalb Drittel von 7“ innerhalb von fünf Minuten nicht lösen.⁶⁶

Zum Vergleich: Max Simon führt 1908 in seiner Methodik des Rechnens und der Mathematik als Ziele für den Rechenunterricht an: *„die für das Fortkommen im Leben unentbehrliche Fertigkeit; die Ausbildung der Vernunft [...]; und endlich die Vorbereitung und Hilfe für den math. Unterricht“*⁶⁷ Er betont einerseits, dass *„die Schule keine Kassenbeamten auszubilden hat“*⁶⁸ (es *„haben sich Maschinen verfertigen lassen, welche die arith. Operationen auf das vollkommenste vorführen“*⁶⁹), und entgegnet andererseits den Kritikern des Rechenunterrichts, dass es ebenso logisch wäre, als hätte man nach Erfindung der Photographie die Malerei abschaffen wollen.⁷⁰

3.1.4 Vom Rechenunterricht zur Mathematik

Forderungen an die Neue Mathematik aus der didaktischen Literatur:

*„Gelegentlich stößt man immer noch auf die Ansicht, daß zuerst eine gewisse Rechenfertigkeit erworben werden mußte, bevor man mit Mathematik beginnen könnte: zuerst das Handwerkzeug und dann die Kunst! Diese Ansicht gründet in einer falschen Voraussetzung: Rechnung und Mathematik werden säuberlich getrennt. Dabei wird verkannt, daß Rechnen ein untrennbarer Bestandteil der Mathematik ist.“*⁷¹

⁶¹ Schäfer 1971, S. 39.

⁶² vgl. Schäfer 1971, S. 39.

⁶³ Man darf annehmen, dass eine achtklassige Volksschule betrachtet wurde, da Bruchrechnung und Prozentrechnung nicht in den ersten vier Jahren vermittelt wurden.

⁶⁴ vgl. Schäfer 1971, S. 21.

⁶⁵ Ein Schüler der sechsten Schulstufe.

⁶⁶ vgl. Schäfer 1971, S. 38.

⁶⁷ Simon 1908, S. IX 57.

⁶⁸ Simon 1908, S. IX 58.

⁶⁹ Simon 1908, S. IX 58.

⁷⁰ vgl. Simon 1908, S. IX 58.

⁷¹ Neunzig 1969, S. 13.

„Der bisherige Rechenunterricht der Grund- und Hauptschule soll in einen umfassenden Mathematikunterricht mit schärferer Begrifflichkeit integriert werden.“⁷²

Barker führt an, dass sich (im amerikanischen Raum) der Name des Faches gewandelt hat: *„Aus dem begrenzenden ‚Rechnen und Raumlehre‘ ist die umgreifendere und anspruchsvollere ‚Mathematik‘ geworden.“⁷³* Diese Umbenennung hat sich auch in Österreich schrittweise auf alle Schultypen einschließlich Volks- und Sonderschule ausgeweitet.

Mit *„Es gibt nur eine Mathematik und nicht eine Mathematik für Gebildete und ein Rechnen für die Masse.“⁷⁴* wird der ungleiche Lehrinhalt für die unterschiedlichen Schultypen (in Österreich: Hauptschule und Gymnasium) kritisiert. Es sollten alle Zugang zu mathematischer Bildung erhalten.

3.1.5 Mehr Axiomatik, Formale Mathematik

Eine der Forderungen der Modernisierung des Mathematikunterrichts war, die Kluft zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik zu schließen. Dazu sollten die SchülerInnen im Gymnasium bereits mit der Sprache der Mathematik im Mathematikunterricht des Gymnasiums vertraut werden. Ebenso sollten sie auf die Struktur Definition – Satz – Beweis vorbereitet werden.

„Es gibt in der Tat naheliegende Gründe, die Schüler unserer Gymnasien mit dem modernen mathematischen Formalismus vertraut zu machen. Bourbaki beginnt ja mit den einfachsten mathematischen Strukturen, deren Gesetze leicht durchschaubar sind. Freilich – wer zum erstenmal etwas von ‚Gruppen‘ und ‚Verbänden‘ hört, ist vielleicht verwirrt von den neuen Begriffen. Er wird aber bald herausfinden, daß der Umgang mit den Axiomen dieser Strukturen einfacher ist als ungeschickt angesetzte Dreisatzaufgaben und interessanter als Interpolationsprobleme beim logarithmischen Rechnen.“⁷⁵

Meschkowski beklagt beim Mathematikunterricht im Gymnasium: *„Die Grundlagenfragen werden sehr rasch abgetan, die Beherrschung des Kalküls ist alles“* und weiter in der Fußnote: *„Leider fordern auch heute gelegentlich Vertreter der Technischen Hochschulen gerade das von der Schule: Sie soll den Kalkül der Differentialrechnung einüben; die ‚Grundlagenfragen‘ behandelt später die Hochschule, die keine Lust hat, Rechenverfahren zu exerzieren.“⁷⁶*

Und er schlägt vor: *„Bei einer guten Planung unseres Schulwesens könnte etwa vom 5. Schuljahr an für die dafür geeigneten Schüler ein wissenschaftlich fundierter mathematischer Unterricht einsetzen. Wissenschaftlich fundiert: Das bedeutet nicht, daß man die Schüler mit Beweisen*

⁷² Amstler 1975, S. 15.

⁷³ Barker 1971, S. 5.

⁷⁴ Neunzig 1969, S. 13.

⁷⁵ Meschkowski 1965, S. 110.

⁷⁶ Meschkowski 1965, S. 25.

belasten sollte, die sie noch nicht verstehen können. Es kann aber der Grund gelegt werden zu einem Verständnis der mathematischen Strukturenlehre. Die Grundstrukturen sind ja so einfach, daß bereits Zehnjährige ihre elementaren Gesetze durchschauen können. Dabei wird das ‚Beweisbedürfnis‘ geweckt, und der Weg wird frei für einen wissenschaftlich sauberen Unterricht.“⁷⁷

Töpfer schreibt in einem Aufsatz in Praxis der Mathematik für die Modernisierung des Mathematikunterrichts: *„Die Hilbertsche formale Methode hat sich als ein gewaltiger Fortschritt für die mathematische Wissenschaft erwiesen; daran kann die aufgewiesene ontologische Beschränkung durch den Gödelschen Unvollständigkeitssatz nichts ändern. Diese Methode gehört mit in den Bereich jener Unterweisungen, die an einen jungen Menschen herangetragen werden müssen, der sich ein Umrißbild von der mathematischen Wissenschaft machen soll. Deshalb ist die Aufnahme der formalen Methode in die Schulmathematik ein unabdingbarer Bestandteil der Reform. Da sie wesentlich von logischen und mengentheoretischen Vorkenntnissen Gebrauch macht, gehören auch diese mit zum Schulstoff.“⁷⁸* Im Weiteren lehnt er aber den Bourbakismus als „Zerrbild der HILBERTschen Methode“ ab:

3.1.6 Überforderung der Kinder oder der Eltern?

Für das Gymnasium argumentiert Steiner: *„Diese Hineinnahme der modernen Denkweise schon in den Unterricht des Gymnasiums steht nicht im Widerspruch zu der Tatsache, daß eben diese Denkweise es ist, die den Studenten in den Anfangssemestern so außerordentlich Schwierigkeiten bereitet. Für die Studenten kommt sie nämlich im allgemeinen zu spät und in einer Form, die zu wenig auf konkrete Beispiele, auf motivierende Betrachtungen und Sinn- und Zielangaben gegründet ist.“⁷⁹*

Meschkowski schreibt: *„Die von der Sorge der Überforderung der Schüler geplagten konservativen Pädagogen können wir zunächst auf die Geschichte des mathematischen Unterrichts hinweisen. In den Tagen der Reformation galt das Multiplizieren und Dividieren mit ganzen Zahlen als ein für Studenten schwieriger Rechenprozeß. Im Anfang des 19. Jahrhunderts galt die analytische Geometrie und die Infinitesimalrechnung als ungeeignet für den Unterricht im Gymnasium. Als man sich dann doch zur Behandlung der Differentialrechnung in der Schule entschloß, verzichtete man auf die (zu schwierige!) saubere Fundierung dieser Disziplin. Inzwischen setzt sich die Ansicht durch, daß auch das korrekte Rechnen mit Grenzwerten Gegenstand der Schulmathematik sein kann. Wer will behaupten, daß man diese Entwicklung nicht fortsetzen kann bis zur Behandlung der Anfangsgründe der mathematischen Logik, der Verbandstheorie, der Axiomatik der Geometrie? Es ist interessant, daß die Psychologen heute im*

⁷⁷ Meschkowski 1965, S. 187.

⁷⁸ Töpfer: Modernisierung des Mathematikunterrichts auf halbem Wege, in: Praxis der Mathematik 1968, S. 70.

⁷⁹ Steiner 1978, S. 57.

allgemeinen die Pädagogik ‚vom Kinde her‘ und die Beschränkung der Schularbeit auf das Spielerisch-Anschauliche ablehnen.“⁸⁰

Der Vorwurf der Überforderung der Kinder wurde besonders bei der Einführung der Mengenlehre in der Volksschule laut.

Schäfer fasst in ihrem an Eltern gerichteten Buch „ABC der Mengenlehre – Keine Angst vor Mathematik“ die an einem Elternabend ausgesprochenen Fragen der Eltern so zusammen:

„Frage 1: Die Kinder werden mit der Einführung der Mengenlehre in der Grundschule überfordert. [...] Ist es vernünftig und ökonomisch, Kinder unter vielen Mühen etwas lernen zu lassen, das sie wenig später wahrscheinlich leichter lernen würden?“⁸¹

Sie erwidert unter Berufung auf Jerome S. Bruner, dass Kinder in diesem Alter mehr zuzutrauen wäre, als bisher von ihnen gefordert worden wäre und man die Kinder nicht künstlich dumm halten dürfe.⁸²

„2. Frage: Brauchen auch die Kinder das neue Rechnen [die neue Mathematik], die später einen praktischen Beruf erlernen werden?“⁸³

„Was das Gebrauchen-Können im späteren Leben betrifft, so steht ja schließlich fest, daß wir nicht mit der Postkutsche zum Mond fahren können.“ und weiter „Der Rechenunterricht muss vom Staub des 18. und 19. Jahrhunderts befreit werden. Heute zählen selbst in vielen praktischen Berufen nicht mehr das Beherrschen einfacher Rechenoperationen und Lösungstechniken, sondern die Denkkraft, das Erfassen von Zusammenhängen, das Selbständig-Probleme-anpacken-können sowie die Organisations- und Anpassungsfähigkeiten.“⁸⁴

Für viele Eltern hat die Lehrplanreform der Volksschule bedeutet, dass sie ihren Kindern nicht mehr bei den Hausaufgaben helfen konnten. Als Reaktion darauf wurden Ratgeber und Broschüren herausgegeben und Volkshochschulkurse zur Mengenlehre angeboten.

Nicht nur die für Eltern unbekannten Symbole der Mengenlehre stellten die Eltern vor teilweise unlösbare Hausaufgaben, auch das Rechnen in anderen Zahlensystemen.

Der folgende Auszug aus „Keine Angst vor der Mengenlehre – Ein Arbeitsbuch für Eltern, Kinder und Lehrer“⁸⁵ zeigt eine Aufgabe für VolksschülerInnen, allerdings für „Fortgeschrittene“:

⁸⁰ Meschkowski 1965, S. 167.

⁸¹ Schäfer 1971, S. 17.

⁸² vgl. Schäfer 1971, S. 18.

⁸³ Schäfer 1971, S. 17.

⁸⁴ Schäfer 1971, S. 19.

⁸⁵ Jarolim 1974, S. 59, 60.

Für Fortgeschrittene:

Aufgabe: Übertragen Sie Zahlenmengen aus dem dekadischen System in das Fünfersystem!

Beispiel: Aufgabe: Verwandle die Zahlen 25, 58 und 132 aus dem dekadischen System ins Fünfersystem!

1000 100 10 1				125 25 5 1			
T	H	Z	E	125er	25er	5er	E
		2	5		1	0	0
		5	8		2	1	3
1		3	2	1	0	1	2

Zehnersystem

Fünfersystem

Anleitung: Sie müssen sich vorstellen, es gibt für den Betrag 25 nur die Münzen 1 5 25 125. Wenn Sie also den Betrag 25 mit diesen Münzen zu bezahlen haben, nehmen Sie die Münze 25. Diese Münze kommt im Fünfersystem an die Hunderterstelle. Daher ergibt dies im Fünfersystem die Zahl 100.

Übungen:

L 19

Zehnersystem				Fünfersystem			
T	H	Z	E	125er	25er	5er	E
		6	3				
	1	2	4				
	4	0	0				
	5	3	1				
	2	2	6				
	6	2	4				

59

b) Zehnersystem

T	H	Z	E
		9	2
	1	4	5
	2	4	6
	4	5	1

Sechzersystem

(216)	(36)	(6)	E
	2	3	2

c) Zehnersystem

T	H	Z	E
		1	5
		9	6
	1	3	5
1	5	2	6

Elfersystem

(133)	(12)	(11)	E
		1	4

d) Zehnersystem

T	H	Z	E
		4	2
	1	7	5
	6	8	9
1	7	4	8

Achtersystem

(512)	(64)	(8)	E
		5	2

e) Zehnersystem

T	H	Z	E
		9	2
	1	7	5
	3	7	8
	5	1	2

Vierersystem

(64)	(16)	(4)	E
1	1	0	2

60

Die hier angeführten Sorgen entsprechen teilweise auch der im „Der Spiegel“ geäußerten Kritik (siehe 6.2.7). Der Einführung der Mengenlehre in der Volksschule dürfte die breite Bevölkerung äußerst kritisch gegenübergestanden sein. Diese oben angeführte Umrechnung einer Zahl in ein Zahlensystem mit Basis 11 wird mangelhaft erklärt. Solche Umwandlungen sind wohl für weite Teile der Bevölkerung zu schwierig, ganz abgesehen davon, dass nicht geklärt ist, wie die Ziffer „10“ in diesem Zahlensystem dargestellt werden soll.

3.2 Neue Lehrinhalte

Die Problemorientierung tritt zurück, die Anwendungsorientierung ist nicht so wichtig wie das Verstehen der Struktur der Mathematik. Das Rechnen soll gegenüber dem Verstehen von Zusammenhängen in den Hintergrund treten.

Einerseits wollte man neue Inhalte wie zB. Mengenlehre und algebraische Strukturen in den Schulstoff aufnehmen, andererseits gab es schon damals Klagen, dass die SchülerInnen mit dem Stoff überfordert wären. Deshalb schlug man eine intensivere Nutzung der Zeit vor. Wenn man nur (methodisch) richtig unterrichtete und auf das Wesentliche einging und sinnlose Übungen – besonders der Rechenfertigkeit – wegließe, so würde genug Zeit für neue Inhalte bleiben.

Außerdem gab es teilweise recht unterschiedliche Vorschläge und Vorstellungen, was nun im reformierten Mathematikunterricht gelehrt werden solle. In den Inhaltsverzeichnissen diverser Büchern zu den Inhalten der Neuen Mathematik, die an LehrerInnen gerichtet waren, findet man deshalb auch recht unterschiedliche Inhalte:

Meschkowski sieht in seiner Einführung in die moderne Mathematik folgende Themen vor: Axiome – Mengen – Rationale Zahlen (Axiomensystem der Ganzen Zahlen,...) – Relationen – Gruppen – Ringe und Körper – Verbände – Räume (Metrische R., Topologische R., ...) – Reelle Zahlen (Vollständigkeit, ..., Topologie in $\mathbb{R}$,) – Moderner Formalismus (Abstraktionsprozesse, ..., Mengentheoretische Begründung des Zahlbegriffs,...).⁸⁶

Griesel behandelt in „Neue Mathematik für Lehrer und Studenten“ sehr ausführlich die Mengen (Der Begriff der Menge und seine Verwendung im Unterricht, Menge und Zahl, Mengenalgebra, ...), Relationen und Begriffe aus der Topologie.⁸⁷

In den „didaktischen Themen aus der Neueren Mathematik“ von Stender findet man: Die naive Mengenlehre in der Unter – und Mittelstufe unserer Gymnasien [gemeint sind die Gymnasien der BRD] – Der mengentheoretische Funktionsbegriff – Mathematik und Logik im Schulunterricht – ... - Matrizen und Determinanten – Sinn und Aufgabe der modernen Algebra.⁸⁸

Bei Barker findet man in der deutschen Übersetzung als Stoff für die Grundschule: Mathematische Aussagen – Mengen – Zählsysteme – Zahlen – ... Andere Basen – Geometrie [Punktmengen] – ... – Statistik.⁸⁹

In der didaktischen Literatur wurde sehr wenig auf die Abbildungsgeometrie Bezug genommen, obwohl diese dann sowohl im Lehrplan als auch in den Schulbüchern sehr intensiv behandelt wurde. Die von Dieudonné, einem Verfechter des Bourbakismus im Gymnasium ausgerufene Forderung „Nieder mit Euklid – Tod den Dreiecken“ – also die Ablehnung der euklidischen Geometrie – kann man aber in den österreichischen Schulbüchern nicht feststellen. In der Unterstufe betrachtete man zuerst geometrische Gebilde als Punktmengen und beschäftigte sich mit Abbildungen (Spiegelung, Symmetrie, Drehung und Schiebung), aber auch mit kongruenten Dreiecken. Aber auch die analytische Geometrie wurde verstärkt berücksichtigt.

3.3 Neue Methoden

Betrachtet man als Ausgangspunkt für die Situation vor der Modernisierung des Mathematikunterrichts folgende Ausführungen eines Landschullehrers, so kann man sicher Aspekte erkennen, die der damals üblichen Situation – auch in den Gymnasien – entsprechen.

⁸⁶ Meschkowski 1971, Inhaltsverzeichnis.

⁸⁷ Griesel 1971, Inhaltsverzeichnis.

⁸⁸ Stender 1962, Inhaltsverzeichnis.

⁸⁹ Barker 1969, Inhaltsverzeichnis.

Weyrich empfiehlt für die Oberstufe ländlicher Volksschulen: *„Die allgemeinen unterrichtlichen Grundsätze über die Bodenständigkeit, die Wechselbeziehung zu anderen Lehrfächern haben sich in den letzten Jahrzehnten im Rechenunterricht durchgesetzt. Noch unerfüllt ist aber die Forderung über die Selbsttätigkeit der Schüler geblieben.“*⁹⁰ Er beklagt, dass der Lehrer nach wie vor stark im Mittelpunkt steht, da er das Problem aufwirft, das Ziel anzeigt und den Verlauf durch seine Fragen lenkt. Er kritisiert die Stillbeschäftigung: *„still soll's sein, und zu dem Zwecke muß für Beschäftigung gesorgt werden;“*⁹¹ Die durch den 2. Weltkrieg verursachte „buchlose Zeit“ machte das Leben zum Rechenbuch, jene Inhalte, die den Schülern im Alltag begegnen, sollten zum Rechenunterricht herangezogen werden. Er plädierte für die Verwirklichung der „Aktivitätspädagogik“ einerseits und forderte Rücksichtnahme auf die Eigenart der Schüler. Zur organisatorischen Umgestaltung schlug er den Gruppenunterricht vor.⁹² Der Arbeitsanstoß solle vom Arbeitsplan der Schüler ausgehen. Er verwies auf Maria Montessori und John Dewey und andere zur Einführung der „Problemmethode“. Der Lehrer stellt den Schülern Karteikarten als Material zur Arbeit bereit, die Schüler stellen Fragen, die sie aus diesen Angaben finden. Der Lehrer entscheidet, welche Probleme gelöst werden. Die vorgeschlagene Methode könnte man als Aufgabendidaktik bezeichnen.⁹³

Da man davon ausgehen kann, dass die LehrerInnen der Landschulen wohl konservativer waren als jene in der Stadt, so sind diese Ausführungen und die Verweise auf Reformpädagogen außerordentlich bemerkenswert. Die von Weyrich angesprochene innere Differenzierung, die Betonung der Eigenaktivität der SchülerInnen und die Gruppenarbeit sind Forderungen, die auch nach der Neuen Mathematik noch thematisiert wurden und auch heute noch aktuell sind.

Der Fokus der Modernisierung des Mathematikunterrichts lag eindeutig auf einer Veränderung des Inhalts. Es wurde aber die Schwierigkeit, sehr abstrakte Themen zu vermitteln, sehr wohl in der didaktischen Literatur angesprochen und dazu gab es unterschiedlichen Vorstellungen.

Es gab Vorschläge, die vertraut klingen: *„Kein starrer Frontalunterricht mehr, sondern Gruppenunterricht, kein Voranschreiten für alle im gleichen Marschschritt, sondern Schwierigkeitsabstufungen gemäß dem Leistungsvermögen und Begabungsschwerpunkt.“*⁹⁴

So plädierten einige für die Erstellung von sogenannten „Programmen“, die dem Lehrer schon fix und fertig zur Verfügung gestellt werden sollten. Diese Programme sollten auch eine Differenzierung des Unterrichtsinhaltes für unterschiedlich begabte SchülerInnen ermöglichen. Der Lehrer könne sich dann der individuellen Unterstützung widmen. Dieser Vorschlag wurde aber anscheinend nicht umgesetzt, es konnten keine solchen Unterrichtskonzepte gefunden werden.

⁹⁰ Weyrich 1950, S. 7.

⁹¹ Weyrich 1950, S. 8.

⁹² Weyrich 1950, S. 11.

⁹³ vgl. Lenné 1969, S. 50.

⁹⁴ Schäfer 1971, S. 23.

Andere meinten, wenn der Lehrer nur spannend genug unterrichte, dann werden die Schüler so von seinem Vortrag gefesselt sein, dass sie auch bei schwierigen Themen konzentriert dem Unterricht folgen würden.

Wieder andere meinten, dass man die Mengenlehre spielerisch behandeln müsste und dazu eben das passende Unterrichtsmaterial zum Spielen verwenden müsste. Dazu schreibt Griesel: *„Der Lehrer unterrichtet nur selten selbst; er überwacht und steuert den Lernprozeß, der sich an Arbeitsmaterialien vollzieht. Arbeit in kleinen Gruppen ist die häufigste Unterrichtsform. Dienes spricht in diesem Zusammenhang von Spielen der Kinder. Diese werden durch eine Arbeitsanweisung des Lehrers oder einer Arbeitskarte eingeleitet.“*⁹⁵ Er relativiert selbst: *„Es bleibt abzuwarten, welchen Einfluß diese Auffassungen auf die deutsche Didaktik der Mathematik haben. Es dürfte sehr schwer sein, die gesamte Lehrerschaft umlernen zu lassen. Auch sind keineswegs alle Ansichten der traditionellen deutschen Schulpädagogik überholt.“*⁹⁶

Einerseits standen das Formalisieren und die stärkere Betonung der Abstraktion im Widerspruch zu dem bereits früher geforderten genetischen Unterrichtsprinzip⁹⁷, andererseits sollte auch im modernen Mathematikunterricht das Entdecken als Motivation dienen. *„Alle Mathematikprojekte tragen gemeinsame Züge, nämlich [...] daß Kinder durch ‚Entdecken‘ lernen sollten“.*⁹⁸

Lenné stellt genetischen Unterricht (nach Wagenschein) dem programmierten Unterricht gegenüber. Er meint, der programmierte Unterricht – er nennt ihn Erläuterungsunterricht – ist einerseits als Gegenform zum genetischen Unterricht konzipiert worden, andererseits diesem auch ähnlich. Während der genetische Unterricht das Ziel über die Eigenerfahrung der SchülerInnen erreichen möchte, verwendet der Erläuterungsunterricht das Medium der Sprache und der Begriffe. Er hält beide Unterrichtsmethoden für eine gute Ergänzung, wenngleich der genetische Unterricht wegen des angestrebten Selbstauffindens der Probleme und deren Lösungen eine Vorwegnahme der Begriffe verbietet. Dadurch würde die Betonung korrekter Definitionen, ein Kennzeichen der Neuen Mathematik, erschwert.⁹⁹

In einem Frankfurter Unterrichtsprojekt wurden unter anderen folgende Methoden festgelegt: Fortsetzung kooperativer und entdeckender Arbeitsformen unter Zurückhaltung konkurrierender und frontal-belehrender Formen, Bevorzugung „intrinsischer“ Motivation durch neue Sachaufgaben-Typen, Einsatz „offener“ Aufgaben neben differenzierten Routine-Aufgaben.¹⁰⁰

⁹⁵ Griesel 1971, S. 297.

⁹⁶ ebenda.

⁹⁷ vgl. Steiner 1978, S.XXIII.

⁹⁸ Schäfer 1971, S. 26.

⁹⁹ vgl. Lenné 1969, S. 69.

¹⁰⁰ vgl. Weis, Valentin; Bauersfeld, Heinrich: Neue Mathematik und Rechenfertigkeit. in: Steiner 1978, S. 253.

Differenzierter Unterricht

Neben der äußeren Differenzierung (in Klassenzügen bzw. in Leistungsgruppen) wurde auch die innere Differenzierung (innerhalb des Klassenverbandes) von Amstler vorgeschlagen. Dabei wurde kritisiert, dass bisher meist nur in den Übungsphasen differenziert wurde. *„Da den leistungsschwächeren Schülern auf jeden Fall die einfacheren und damit reduzierten Beispiele zur Übung geboten werden, müßte in jedem einzelnen Stoffgebiet untersucht werden, ob diese Beispiele tatsächlich zu ihrer Lösung die vollständige Theorie verlangen und damit ausschalten, daß ein vom Schüler individuell ausgebautes Lösungsmodell ebenfalls zum Ergebnis führt.“*¹⁰¹ und weiter: *„Es darf damit prinzipiell bei der Differenzierung nicht von einer falsch bzw. halb verstandenen Theoriebildung ausgegangen werden und es dem Schüler überlassen bleiben, welches konkrete Gedankenmodell er sich aufgrund der Theorie bzw. durch Einübung reduzierter Beispiele erarbeitet hat. Vielmehr müssen dem Schüler in der Erarbeitungsphase des Unterrichts Erklärungen und Methoden entgegengebracht werden, die seinem Abstraktionsvermögen und seiner allgemeinen Lern- und Aufnahmefähigkeit entsprechen.“*¹⁰²

Es wird an dieser Stelle eine vielfache Differenzierung nach Vorwissen, Rechenfertigkeit, eine Differenzierung nach notwendiger Veranschaulichung, eine Differenzierung in der Übungsphase und eine solche in der Beweisführung, eine quantitative und eine stoffliche Differenzierung vorgeschlagen. Dabei wird eine intensivere Beobachtung und Überprüfung der SchülerInnen vorausgesetzt.

*„Zusammenfassend muss gesagt werden, daß differenzierende Maßnahmen im Unterricht eine genaue Kenntnis der mathematischen Begabung und Leistungsfähigkeit eines jeden Schülers voraussetzen, die durch Beobachtung und Überprüfung erreicht werden kann, die durch vermehrte Vorbereitung und Kontrollen zu leistende Arbeit durch den Lehrer hingegen eine hinreichende Förderung der Schüler bedeutet. Entsprechende Erfahrungen wird der Unterrichtende bereits nach kurzer Anwendung von Differenzierungsmaßnahmen erwerben. Die Arbeitsblätter als Lehrmittel werden dabei sicher manche Entlastung bieten.“*¹⁰³

Dienes schlägt noch eine viel weitergehende Individualisierung und Differenzierung vor, plädiert aber für das Zusammenfassen ungefähr gleich guter SchülerInnen: *„Um den individuellen Unterschieden der Kinder Rechnung zu tragen, sollte das Lernen individuell oder in kleinen Gruppen von zwei oder drei erfolgen. Es ist unwahrscheinlich, daß mehr als drei Kinder im selben Tempo und in ungefähr derselben Weise arbeiten werden. Das bedeutet, daß nicht jede Information vom Lehrer kommen kann, denn er würde einfach nicht die Zeit haben, herumzugehen und vielleicht vierzig Kinder getrennt zu ‚unterrichten‘, möglicherweise alle auf verschiedenen Stufen. Es muß andere Informationsquellen im Klassenzimmer geben und auch*

¹⁰¹ Amstler 1974, S. 59.

¹⁰² Amstler 1974, S. 59.

¹⁰³ Amstler 1974, S. 67.

Stellen wo zu erfahren ist, was als Nächstes getan werden soll und, soweit möglich, Stellen, wo die Genauigkeit und Richtigkeit einer Antwort kontrolliert wird, wenn dies geboten erscheint. Dementsprechend sollte ein System von Aufgabenkarten zur Verfügung stehen, mit denen die Kinder arbeiten können. Diese sollen in Serien angeordnet sein. [...] Eine beträchtliche Menge konkreten Materials ist nötig, um das Lernen möglichst konstruktiv zu machen.“¹⁰⁴

Spielerisch lernen

Die Mengenlehre sollte von den SchülerInnen spielerisch erlernt werden. So führt Schäfer als eine typische Frage bei Elternabenden an: Warum spielen unsere Kinder in der Schule und „pauken“ nicht?¹⁰⁵

„Es kam den Autoren vor allem darauf an, mit Hilfe der neuen Sichtweisen effektivere Lernprozesse zu erreichen. Charakteristisch ist vor allem, daß das Einüben von bestimmten Rechenverfahren und das Lösen längerer Aufgabenreihen zugunsten eines einsichtsvollen Umgehens mit mathematischen Strukturen zurücktreten solle. Durch aktives Lernen und selbständiges Entdecken sollen die Schüler zur Erkenntnis von mathematischen Gesetzmäßigkeiten gelangen. Die Formalisierung erfolgt im Anschluß daran als eine Art von Systematisierung. Durch einen derartigen handelnd-forschenden und entdeckend-fragenden Unterricht (auch im Sinn eines echten Arbeitsbuches) wird die kaum motivierende Monotonie von reinen ‚Drill-Aufgaben‘ bewußt verhindert. Diese Sicht der Neuen Mathematik, die auch auf den Ergebnissen der Lern- und Denkpsychologie aufbaut, will durch ein breites Handlungsangebot die schöpferischen Kräfte der Schüler anregen, Problemlösungsprozesse anbahnen und die Freude am selbständigen Arbeiten steigern.“¹⁰⁶

Diese sehr unterschiedlichen Positionen sollen die Bandbreite der Vorstellungen zur Gestaltung des Mathematikunterrichts zeigen. Wenn man bei der Neuen Mathematik auch hauptsächlich an eine Änderung der Lehrinhalte denkt, so erhoffte aber aufgrund des formalen Zugangs auch eine Änderung der Unterrichtsmethoden. Angesichts der Tatsache, dass auch heute noch SchülerInnen vorwiegend von Frontalunterricht berichten, obwohl im aktuellen Lehrplan ausdrücklich andere Forderungen und Empfehlungen angeführt sind¹⁰⁷, darf man annehmen, dass auch in der Zeit der Neuen Mathematik der Frontal- oder Vortragsunterricht die häufigste Unterrichtsmethode war.

¹⁰⁴ Dienes 1965, S. 45.

¹⁰⁵ Schäfer 1971, S. 17.

¹⁰⁶ Amstler 1975, S. 13.

¹⁰⁷ Didaktische Grundsätze im aktuellen Lehrplan der Unterstufe, Unterrichtsformen: „Einzelarbeit, Partnerarbeit, Gruppenarbeit und projektorientierter Unterricht sollen die bestimmenden Unterrichtsformen des Mathematikunterrichts sein.“

3.4 Neue Unterrichtsmittel – die logischen Blöcke und anderes Unterrichtsmaterial

Das Spielen der Kinder bezog sich auf das damals weitverbreitete Material, die logischen Blöcke¹⁰⁸. Dabei handelte es sich um einen Satz von Plastikplättchen in den Farben rot, blau, gelb, in den Formen Kreis, Rechteck, Quadrat, (gleichseitiges) Dreieck, jeweils eines groß und eines klein, und jeweils eines dicker ausgeführt und eines dünner, also insgesamt 48 Plättchen als Lernspielmaterial.



Logische Blöcke, Quelle: http://www.dusyma.de/shop/images/product_images/popup_images/520946_tif.jpg

Dieses oder ähnliches Material wurde in den 70iger Jahren an alle(!) Schulkinder im Rahmen der Schulbuchaktion kostenlos verteilt! Ich habe selbst eine kleine Schachtel mit ähnlichen Plastikplättchen erhalten. Diese Schachtel musste jeden Tag mitgenommen werden. Der Einsatz im Unterricht erfolgte aber sehr selten.

Weiters gab es sogenannte „Mehrsystemblöcke für Arithmetik“¹⁰⁹: Jeweils 4^0 , 4^1 , 4^2 , 4^3 und 4^4 Würfel, also ein Würfel, eine Stange bestehend aus vier Würfeln, eine Platte mit 4 mal 4 Würfeln, ein Würfel („Block“) mit Kantenlänge von 4 Würfeln, und schließlich eine Block-Stange bestehend aus 4 Blöcken mit einer Kantenlänge von je 4 Einzelwürfeln. Solche Mehrsystemblöcke wurden auch für die Basen 2, 3, 5, 6 und 10 angeboten und sollten die Vorstellung bei der Umwandlung in verschiedene Basen unterstützen. Auch eine Rechenwaage zur Veranschaulichung des distributiven Gesetzes kann man in der didaktischen Literatur finden.¹¹⁰

¹⁰⁸ Z.P. Dienes, Logische Blöcke ®, Merkmalklötze nach Prof. Dienes.

¹⁰⁹ vgl. Neunzig 1969, S. 26.

¹¹⁰ vgl. Neunzig 1969, S. 27.

Dienes schreibt dazu: „Es wird wahrscheinlich nötig sein, die gegenwärtige Methode des Schulunterrichts mit dem Lehrer in zentraler Machtposition fast völlig aufzugeben und durch individuelles Lernen oder Lernen in kleinen Gruppen zu ersetzen, wobei konkretes Anschauungsmaterial und schriftliche Anleitungen verwendet werden und der Lehrer als Führer und Ratgeber wirkt. Das Material und die Aufgaben müssen den Stufen, die die Kindern durchlaufen, angepaßt sein, und der Lehrer muß lernen, den Erfordernissen einer ständig wechselnden Situation zu entsprechen.“¹¹¹

Ein wichtiges Kriterium für den Einsatz solcher Unterrichtsmaterialien war sicherlich die „Schulbuchaktion“. 1972 wurde in Österreich¹¹² beschlossen, dass SchülerInnen unentgeltlich mit den notwendigen „Unterrichtsmitteln“ ausgestattet werden. Später wurde ein Selbstbehalt eingeführt, der zu einer Reduktion der „notwendigen“ Unterrichtsmittel führte, heute sind die Ausgaben je SchülerIn begrenzt.

3.5 Konkrete Unterrichtsvorschläge

Es können hier nicht alle Vorschläge für die Modernisierung des Mathematikunterrichts aufgezählt werden. Es wurden meist nur jene ausgewählt, die besonders eigenartig, ungewöhnlich oder komplex erscheinen.

3.5.1 Die Grundrechnungsarten in der 5. Schulstufe

Wiederholung des Volksschullehrstoffes

In den verschiedenen jeweils gültigen Lehrplänen der 5. Schulstufe ist und war jeweils ein Kapitel (sinnvollerweise das erste) für die Wiederholung des Volksschulstoffes vorgesehen. Dabei werden üblicherweise die Grundrechnungsarten im Bereich der natürlichen Zahlen wiederholt. Amstler schlägt vor, sich auf Körper, Flächen, Gebiete, Kreis einerseits, Behandlung der Maße (Zeitmaße, Gewichtsmaße, Unser Geld) andererseits zu beschränken. Weiters sieht er „Rechenspiele“ vor.¹¹³ Bereits in dieser Wiederholung des Lehrstoffes der Volksschule werden – nach seinen Vorschlägen – Begriffe wie inneres, äußeres Gebiet, geschlossene Linie, einfache Linie als bekannt vorausgesetzt.¹¹⁴ Auch Diagonalen in Flächen einzuzeichnen und die Anzahl der Diagonalen angeben zu können, zählt nach seiner Einschätzung zum Wiederholungsstoff, die dabei behandelten Flächen sind Viereck, Rechteck, Dreieck, Fünfeck und Sechseck. Auch das Lernziel, dass die Kinder wissen, dass jede Fläche eines Körpers die Grundfläche sein kann, erscheint sehr ambitioniert.¹¹⁵

¹¹¹ Dienes 1965, S. 30.

¹¹² In Deutschland ist die Gesetzgebung zur Bildung in den Ländern unterschiedlich geregelt. In einigen deutschen Bundesländern wurde ebenfalls 1972 die „Lernmittelfreiheit“ beschlossen.

¹¹³ Amstler 1974, S. 69.

¹¹⁴ Amstler 1974, S. 75.

¹¹⁵ Amstler 1974, S. 70.

Einführung der Mengenlehre

Nach dieser Wiederholung soll man sich zuerst dem Unterrichtsabschnitt Grundmenge – Teilmenge widmen. Da die Geometrie im gesamten Jahr mit der Arithmetik vermischt unterrichtet werden soll, gehören in diesen Unterrichtsabschnitt auch Teilmengen einer Geraden (Strecken und Halbgeraden) und Flächen als Teilmengen eines Körpers, aber auch die Themen Körper und Raum und Teilmengen einer Ebene.¹¹⁶

Weiters findet sich in Amstler et al. folgender Satz unter den Lernzielen: „...6. Wissen daß Elemente, die in einer Menge mehrmals auftreten, zumeist nur einmal aufgeschrieben werden.“¹¹⁷

Definition der natürlichen Zahlen

Postel führt die natürlichen Zahlen (so wie viele andere auch) als Mächtigkeit einer Menge ein, rät dabei ab, Mengen von Zahlen zu verwenden, damit die Zahl als Element und die Zahl als Mächtigkeit nicht verwirren. Später schlägt er aber vor, um den Kardinalzahlaspekt der Natürlichen Zahlen zu erarbeiten, die Elemente einer Menge (in seinem Fall sind es Äpfel) zu nummerieren: jedem Apfel der Menge wird eine Zahl zugeordnet, wobei dem ersten Apfel die Zahl 0 zugeordnet wird. Einer sechselementigen Menge teilt er die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 und 5 zu, „zur Unterscheidung von Kardinal- und Ordinalzahl“¹¹⁸. Man würde wohl kaum im täglichen Leben bei 0 zu zählen beginnen.

Addition natürlicher Zahlen

Die Addition wird in der Neuen Mathematik üblicherweise als Vereinigungsmenge erklärt¹¹⁹, wobei als Voraussetzung betont wird, dass die beiden Mengen elementfremd sein müssen. Das führt zu folgender Definition einer Summe:

„Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist die Zahleigenschaft der Vereinigungsmenge zweier entsprechender elementfremder Mengen.

In Zeichen: $z(A) + z(B) = z(A \cup B)$, falls $A \cap B = \{ \}$.

Sind die Mengen A und B nicht elementfremd, so gilt: $z(A \cup B) < z(A) + z(B)$.“¹²⁰

Diese Behandlung der Addition erinnert an den Cartoon der Peanuts, wo Lucy zwei und zwei addieren möchte (siehe 6.2.1).

Im Vergleich dazu die Erklärung der Addition aus einem Schulbuch von 1960:

„1. a) Zähle von 8 aus um 3 weiter: $8 + 3 = 11$.

b) Gib jene Zahl an, die so viele Einheiten hat wie 8 und 3 zusammen: $8 + 3 = 11$.

¹¹⁶ Amstler 1974, S. 98.

¹¹⁷ Amstler 1974, S. 107.

¹¹⁸ Eckhardt 1972, S. 89.

¹¹⁹ Eckhardt 1972, S. 90; Amstler 1974, S. 162.

¹²⁰ Eckhardt 1972, S. 90.

Eine Rechnung wie $8 + 3 = 11$ heißt eine **Addition**; die Glieder 8, 3 heißen **Summanden**, oder auch **Posten**; das Ergebnis heißt **Summe**.¹²¹

Multiplikation natürlicher Zahlen

Neunzig kritisiert die Einführung der Multiplikation als mehrfache Addition (wie es auch heute üblich ist). Konkret bemängelt er, dass in diesem Fall die Multiplikation nur als ein Sonderfall der Addition erscheint und dabei noch die Einschränkung der Vereinigung von jeweils gleichmächtigen Mengen gefordert wird.¹²² Er möchte die Multiplikation als eigenständige Operation, und zwar als eindeutige Zuordnung des Produkts zu zwei natürlichen Zahlen eingeführt sehen: $(2,8) \rightarrow 16$.

Die Einführung soll natürlich über tätigen Umgang mit Lernmaterial über Mengenoperationen führen. Dabei muss vorher der Begriff „Mengenmenge“, eine Menge von Mengen definiert werden. Dabei muss das Kind erkennen, dass die Menge, die Element der Mengenmenge ist, nicht Teilmenge dieser Menge ist!

$$\{23,29\} \in \{\{2,3,5,7\}, \{11,13,17,19\}, \{23,29\}\},$$

$$\text{es gilt aber nicht: } \{23,29\} \subset \{\{2,3,5,7\}, \{11,13,17,19\}, \{23,29\}\}$$

Nun soll man Mengenmengen mit Mengen gleicher Mächtigkeit betrachten, da diese zur Multiplikation führen. Mit den Fragen „Wie viele Mengen sind in der Mengenmenge?“, „Wie viele Dinge sind in jeder Menge?“ und „Wie viele Dinge sind es insgesamt?“ wird zum Produkt geführt. Die an der mehrfachen Addition kritisierte Einschränkung auf gleichmächtige Mengen ist auch in diesem Fall notwendig. Es wurde nur der Umweg über das Konstrukt der Mengenmenge genommen.

Als zweite Möglichkeit zur Einführung schlägt Neunzig vor, zuerst das kartesische Produkt zweier Mengen (Verbindungsmenge genannt) einzuführen. Es sollen Tanzpaare gebildet werden:

$$A = \{\text{Hans, Otto, Dieter, Lutz}\} \text{ und } B = \{\text{Rita, Ute, Petra}\}.$$

$$A \times B = \{(\text{Hans, Rita}), (\text{Hans, Ute}), (\text{Hans, Petra}), (\text{Otto, Rita}), (\text{Otto, Ute}), (\text{Otto, Petra}), (\text{Dieter, Rita}), (\text{Dieter, Ute}), (\text{Dieter, Petra}), (\text{Lutz, Rita}), (\text{Lutz, Ute}), (\text{Lutz, Petra})\}$$

„Es läßt sich zeigen, daß das auf diese Weise definierte Produkt zweier natürlicher Zahlen der auf andere Weise – z.B. über die Mengenmenge eingeführten Multiplikation zweier Zahlen entspricht.“ führt Neunzig kryptisch aus.¹²³ In der konkreten Durchführung führt dann Neunzig an, dass es schwierig sei, die Übersicht zu behalten, die Kontrolle des Ergebnisses langwierig sei

¹²¹ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1960, S. 16.

¹²² vgl. Neunzig 1969, S. 101.

¹²³ Neunzig 1969, S. 106.

und dass die Kinder einzelne Paare vergessen könnten.¹²⁴ Der Zusammenhang zwischen den beiden Betrachtungsweisen der Multiplikation wird ausschließlich mit dem Übereinstimmen des Ergebnisses begründet.

Auch Griesel führt die Multiplikation über gleichmächtige Mengen als Multiplikator und die Anzahl gleichmächtiger Mengen als Multiplikanden ein. Der Multiplikation entspricht dann die Vereinigung der gleichmächtigen, disjunkten Mengen. Die gleichmächtigen Mengen können dabei zeitlich nacheinander oder räumlich nebeneinander angeordnet vorliegen: zB. Bier holen aus dem Keller (jeweils gleich viele Flaschen) oder gleich hohe Tellerstapel oder 5 Tische mit je 4 Stühlen. Griesel geht davon aus, dass den SchülerInnen viele solche Beispiele bekannt sind. Bezüglich der Einführung der Multiplikation mit Hilfe des Cartesischen Produkts schreibt Griesel: *„Wir hatten in Übereinstimmung mit der traditionellen deutschen Rechendidaktik die Forderung erhoben, die Zahlverknüpfungen aus den Sachbezügen der Umwelt herauszulösen, damit sie der Schüler auch wieder selbständig auf die Wirklichkeit anwenden kann: Die Einführung der Multiplikation mit Hilfe des Cartesischen Produktes wäre also erst gerechtfertigt, falls es in der Umwelt genügend Beispiele für Anwendungen der Multiplikation auf der Grundlage des Cartesischen Produktes gäbe. Nun kommen tatsächlich solche Beispiele vor. Sie stammen ausnahmslos aus dem Bereich der sog. Kombinatorik.“* Er meint aber, dass es einerseits viel weniger solche Beispiele als jene der gleichmächtigen Mengen gäbe und dass sie auch wesentlich weniger anschaulich wären. Deshalb plädiert er ebenfalls, zuerst die gleichmächtigen Mengen zu betrachten und dann das Cartesische Produkt.¹²⁵

Division in $\mathbb{N}$

Die Einführung der Division ist zur heutigen recht ähnlich, es sollen die beiden Aspekte Aufteilen und Verteilen (heute Teilen und Messen) betrachtet werden. Allerdings werden wieder Mengen mit (gleichartigen) Elementen als Dividend betrachtet, und jede Teilmenge ist wieder gleichmächtig –und damit wieder auch als Teilmenge gleichartig (ident?). Die Problematik der Wohlunterscheidbarkeit der Elemente einer Menge wird nicht thematisiert, sondern immer als gegeben betrachtet.

3.5.2 Vorschläge zur Einführung der Bruchrechnung

Die Zahl wird bei Amstler als Mächtigkeit einer Menge betrachtet, die Bruchzahl, die ja nicht der Mächtigkeit einer Menge entsprechen kann, wird mittels Bruchoperatoren eingeführt.

$\frac{m}{n}$ entspricht den Operatoren „ $\cdot m$ “ und „ $: n$ “, die beide hintereinander ausgeführt werden und als Bruch verkürzt angeschrieben werden.¹²⁶

¹²⁴ vgl. Neunzig 1969, S. 111.

¹²⁵ Griesel 1971, S. 207.

¹²⁶ vgl. Amstler 1974, S. 258.

Weckesser führt die Brüche als Vergrößerungen bzw. Verkleinerungen ein: Eine Strecke wird in fünf gleich lange Teile zerlegt und zwei Teile davon ergeben das Ergebnis der Operation $\frac{2}{5}$. Für diese Operation soll das Symbol $\left(\frac{2}{5}\right)$ eingeführt werden – gelesen: 2 zu 5.

Zwei Fünftel soll man vermeiden um den Unterschied zum Bruch zu wahren.¹²⁷

Die Multiplikation zweier Brüche miteinander wird als Verkettung dieser zwei Operationen erklärt:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \circ \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a \cdot d}{b \cdot d}\right) \circ \left(\frac{a \cdot c}{a \cdot d}\right) = \left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right) \quad \text{für alle } a, b, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ und } c \in \mathbb{N}.^{128}$$

Man möge die Erweiterung beachten, die sich von der Erweiterung des Bruches bei der Addition unterscheidet!

Pickert schreibt zur Veranschaulichung der Brüche: „Zur Veranschaulichung der Brüche werden vielfach lieber Kreissektoren als Strecken benutzt, weil dabei – im Gegensatz zu den Strecken – ,die Einheit als Vollkreis dazu gesehen werden kann und auch Einheit wird’. Diese Begründung ist nur dann stichhaltig, wenn die Brüche eben nicht als Abbildungen aufgefaßt werden. [...] Bleibt man aber konsequent dabei, die Brüche als Abbildungen zu ,sehen’, so schadet die Existenz einer ,ausgezeichneten Einheit’ dem Verständnis eher, als daß sie es fördert.“ Er meint, betrachtet man Brüche als Abbildungen, dann betrachtet man eine Maschine, „die nach Eingabe eines jeden der für die Maschine ,zulässigen’ Objekts x ein Objekt hervorbringt, das durch die Maschine und das eingegebene Objekt völlig bestimmt ist, [...] Wir stellen uns hinsichtlich der Maschine auf den Standpunkt des Benutzers und nicht auf den des für die Herstellung und Wartung zuständigen Technikers: Es interessiert uns nicht, wie die Maschine gebaut ist, sondern nur, welches Ergebnis sie in jedem Eingabefall hervorbringt.“¹²⁹ Diese Veranschaulichung der Bruchrechnung mutet heute sehr abstrakt an und lässt sich in keinem aktuellen Unterrichtswerk finden. Heute wird im Gegenteil die oben angeführte „Einheit“ viel stärker betont und die Bruchrechnung möglichst anschaulich erarbeitet, da sie ohnehin schwer zu erfassen ist.

3.5.3 Erste Begegnung mit dem Gruppenaspekt

Ein Quadrat soll um seinen Mittelpunkt gedreht werden und dabei wieder in eine deckungsgleiche Lage übergeführt werden. Die vier verschiedenen Drehungen, Vierteldrehung rechts (V_r), Vierteldrehung links (V_l), halbe Drehung (H) und die ganze Drehung (G) werden zu einer endlichen Menge zusammengefasst. Dieser Menge soll eine Struktur gegeben werden. Die Verknüpfung ist das Hintereinanderausführen von Drehungen. Dabei sollen die Kinder spielerisch Begriffe wie Abgeschlossenheit, inverses Element (Umkehrelement) und neutrales

¹²⁷ vgl. Eckhard 1972. S. 135.

¹²⁸ vgl. Eckhardt 1972, S. 138.

¹²⁹ Pickert, Güner: Bruchrechnen als Operieren mit Abbildungen (1968), in Steiner: Didaktik der Mathematik 1978; S. 378.

Element (Einheitselement) erkennen und das Assoziativgesetz überprüfen. Sie sollen eine Gruppentafel für die Drehungsgruppe ausfüllen und dabei die Struktur entdecken.¹³⁰

3.5.4 Verbindung Arithmetik – Geometrie

„Das Erkennen von mathematischen Strukturen soll in zunehmendem Maße zum Aufzeigen der Beziehungen zwischen verschiedenen Bereichen der Mathematik führen.“¹³¹

Diese „Integration zwischen Arithmetik und Geometrie“¹³² sollte in jedem Unterrichtsabschnitt erfolgen. Zum Beispiel soll dem Durchschnitt von Zahlenmengen entsprechend auch der Schnitt von Geraden (als Punktmengen) im selben Unterrichtsabschnitt behandelt werden.¹³³ Das sollte sich somit auf die zeitliche Abfolge der Unterrichtsinhalte beziehen, aber es sollten auch Querverbindungen zwischen den Themen aufgezeigt werden.

Die Auswirkung auf heute zeigt sich unter anderem auch darin, wie im aktuellen Lehrplan die Bereiche der Mathematik eingeteilt werden: Bei den sehr allgemein beschriebenen Unterrichtszielen und Unterrichtsinhalten der Unterstufe werden drei Bereiche aufgezählt: Arithmetik, elementare Algebra und Geometrie. Bei der viel detaillierteren Beschreibung des Lehrstoffes für jede Klasse werden die vier Bereiche Arbeiten mit Zahlen und Maßen, mit Variablen, mit Figuren und Körpern, mit Modellen, Statistik aufgelistet. Abgesehen davon, dass damit die (elementare) Algebra gleichberechtigt neben Arithmetik und Geometrie tritt, wird damit auch der neue Schwerpunkt auf die Statistik ausgedrückt.

3.6 Ausbildung der Lehrpersonen

In einem Punkt ist sich die didaktische Literatur einig: Die Lehrer waren schlecht ausgebildet.

Die rasante Entwicklung der Wissenschaft Mathematik im 19. Jh. hat dazu geführt, dass sich Mathematiker auf ihren Forschungsbereich spezialisieren mussten, da es kaum mehr möglich war, das gesamte mathematische Wissen zu beherrschen – von wenigen Ausnahmen abgesehen. Diese Entwicklung und die widersprüchlichen Forderungen, einerseits angewandte, also vorwiegend ergebnisorientierte Mathematik oder andererseits formale Mathematik zu lehren, machten eine umfassende fachliche Ausbildung, die den zeitlichen Grenzen entsprach, nahezu unmöglich. Deshalb sollen die durchaus widersprüchlichen Vorstellungen und Meinungen verschiedener Mathematikdidaktiker zur LehrerInnenbildung angeführt werden:

„Erste Voraussetzung für jeden vom Verantwortungsbewußtsein des Lehrers getragenen Unterricht in einem wissenschaftlichen Fach sind ausreichende Kenntnisse bezüglich der wissenschaftlichen Einbettung des Lehrstoffes. Dem Lehrer müssen die

¹³⁰ vgl. Neunzig 1969, S. 121.

¹³¹ Amstler 1974, S. 30.

¹³² Amstler 1974, S. 29.

¹³³ vgl. Amstler 1974, S. 30f.

begrifflich-theoretischen und evtl. die empirisch-experimentellen Grundlagen vertraut sein. Er muß den weiteren Aufbau, dem die Ergebnisse des jeweiligen Unterrichtsabschnittes Unterbau sein sollen, überschauen. Früher brauchte der ‚Elementar-Lehrer‘ von der wissenschaftlichen Mathematik wenig Ahnung zu haben. Er brachte den Kindern der Grundstufe das Rechnen bei – und dafür gab es wirkliche Meister. Der moderne Mathematik-Unterricht soll [...] im 1.Grundschuljahr beginnen. Der Unterricht ist von Anfang an wissenschaftlich orientiert und verfolgt einen kontinuierlichen Aufbau. [...] Es dürfen aber unter gar keinen Umständen [...] sachwidrige Vereinfachungen vorgenommen werden, die später nur mit Mühe wieder ausgeräumt werden können oder gar wesentliche Einsichten verbauen.“¹³⁴

„Angesichts dieser Entwicklung [der Neuen Mathematik] und der Tatsache, daß sie nun auch in den vorgeschriebenen Stoffplänen stärker zu Geltung kommt, muß der Lehrer sein mathematisches Wissen überprüfen. Er muß das Fach in neuem Lichte sehen und sich mit einer moderneren Terminologie auseinandersetzen.“¹³⁵

Steiner beklagt didaktische Mängel: *„ Es ist bekannt, daß die übliche mathematische Ausbildung der Mathematiklehrer diese nicht zu einem genetischen, an Problemlösungen und Mathematisierungsprozessen orientierten Unterricht befähigt. Dazu ist die Ausbildung zu stark am mathematischen Fertigprodukt und an einer vorsystematisierten Mathematik ausgerichtet.“¹³⁶*

Meschkowski meint: *„Ein wissenschaftlich qualifizierter und didaktisch fähiger Lehrer ist schon immer in der Lage gewesen, im Klassenunterricht weit über das in den Lehrplänen gesteckte Ziel hinauszugehen, ohne daß die Schüler dabei versagten.“¹³⁷* und weiter *„Einen solchen mathematischen Anfangsunterricht kann nur ein Fachlehrer geben. Es ist natürlich nicht erforderlich, daß ein solcher Lehrer die moderne Funktionsanalysis beherrscht und partielle Differentialgleichungen lösen kann. Er muß aber (mindestens) Bescheid wissen über die Grundstrukturen, die für den Schulunterricht bedeutsam sind.“¹³⁸*

Töpfer, der Herausgeber der Zeitschrift „Praxis der Mathematik“ schreibt 1966: *„... müssen wir uns doch ehrlicherweise selber eingestehen, daß die Mengenlehre heute noch nicht einmal von allen durchaus ordnungsgemäß ausgebildeten und approbierten Lehrkräften für Mathematik echt assimiliert ist.“¹³⁹*

¹³⁴ Eckhardt . 1972, S. 7.

¹³⁵ Barker 1971, S. 6.

¹³⁶ Steiner 1988, S. 221.

¹³⁷ Meschkowski 1965, S. 168.

¹³⁸ Meschkowski 1965, S. 187.

¹³⁹ Töpfer, Hans (Hg.) Zum nachstehenden Beitrag von P.H.Harm, in: Praxis der Mathematik 1966, S. 261.

Und Besuden meint in seinem Vortrag auf der 9. Bundestagung für Didaktik 1975 in Saarbrücken: „*Hat die ‚New Math‘ in den Vereinigten Staaten versagt? [...] Nur etwa 50% der Lehrer haben vermutlich ‚New Math‘ unterrichtet.*“¹⁴⁰

Diese Aussagen lassen darauf schließen, dass es die verbreitete Meinung war, dass die LehrerInnen nur den „alten Stoff“ beherrschen und für die Modernisierung des Mathematikunterrichts selbst die Grundlage der Neuen Mathematik erst lernen müssten. Außerdem hätten sie nur Erfahrung mit dem Unterricht im herkömmlichen Stil, also Belehrung via Frontalunterricht. Der Einsatz moderner Unterrichtsformen fiel ihnen schwer. Diese Meinungen, die teilweise noch „vor der Rücknahme der Reform“ ausgesprochen worden waren, zeigen, dass Mängel bei der Lehrerbildung bekannt waren oder angenommen wurden.

Ein Grund für die mangelhafte Ausbildung dürfte in Österreich unter anderem im großen LehrerInnenmangel gelegen sein. Aus diesem Grund wurden in den 60iger Jahren die Kriterien für eine Anstellung als LehrerIn sehr großzügig ausgelegt.

4 Lehrplanänderungen im Gymnasium

Ein Vergleich der Lehrpläne aller Schulformen und Schulstufen würde den Umfang dieser Arbeit sprengen, deshalb soll nur auf die Lehrpläne des Gymnasiums eingegangen werden. Auch die eher geringfügigen Variationen der verschiedenen Formen des Gymnasiums (Realgymnasium, wirtschaftskundliches Gymnasium für Mädchen, Gymnasium für Slowenen etc.) werden nicht berücksichtigt. Es soll im Folgenden nur das Gymnasium und nach der Teilung 1962 in verschiedene Bereiche das neusprachliche Gymnasium betrachtet werden.

Die nicht mehr aktuellen Lehrpläne wurden den Verordnungen des Rechtsinformationssystems des Bundeskanzleramtes entnommen.¹⁴¹ Der aktuelle Lehrplan ist auf der Homepage des Unterrichtsministeriums zu finden.¹⁴² Die Informationen zur Situation vor 1962 sind der Diplomarbeit „Vergleich des Mathematikunterrichts in Österreich anhand der Lehrpläne von 1900 bis 1945“ entnommen.¹⁴³

4.1 Die Situation vor der Neuen Mathematik

Die Organisation des Schulwesens in Österreich weist in der Zeit vom Ende der Ersten Republik 1933 bis zum Ende des Zweiten Weltkriegs 1945 eine Zäsur auf. Die Lehrpläne wurden im autoritären Ständestaat stark ideologisiert und der Mathematikunterricht wurde eingeschränkt. Ab 1938 wurden die Lehrpläne des Deutschen Reiches übernommen, der Mathematikunterricht

¹⁴⁰ Bericht des Herausgebers über die 9. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Saarbrücken, in: Praxis der Mathematik 1975, S. 132.

¹⁴¹ <http://www.ris.bka.gv.at/>

¹⁴² http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_unterstufe.xml, abgefragt am 25.10.2013; und http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_oberstufe.xml, abgefragt am 25.10.2013; und http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf, abgefragt am 25.10.2013.

¹⁴³ Galla 2005.

konzentrierte sich ideologisch auf die Kriegsvorbereitung und die Vermittlung der Nazi-Ideologie¹⁴⁴. 1945 wurde auf die 1933 geltenden Gesetze, also auf die Schulgesetze von 1927 zurückgegriffen¹⁴⁵. Die Schultypen des Mittelschulgesetzes von 1927 wurden als Gymnasium, Realgymnasium, Realschule und Frauenoberschule mit versuchsweise eingeführten Lehrplänen organisiert¹⁴⁶. In den nächsten Jahren versuchte die von ÖVP und SPÖ dominierte Regierung die Schulgesetze zu reformieren. Da aber diese beiden Parteien so grundsätzlich entgegengesetzte Vorstellungen vertraten, dauerte es noch bis 1962, bis grundlegende Schulgesetze beschlossen werden konnten¹⁴⁷. Danach begann man mit der Neugestaltung der Lehrpläne.

4.2 Allgemeine Änderungen im Mathematikunterricht

Der Kampf um die neunte Klasse

Das Gymnasium wurde nach dem 2. Weltkrieg nach den Schulgesetzen von 1927 reorganisiert und als 8-klassige „Mittelschule“ mit provisorischen Lehrplänen eingerichtet. 1962 wurden endlich neue Schulgesetze und danach Lehrpläne erlassen, die eine neunklassige „allgemeinbildende höhere Schule“ vorsahen. Dabei wurden sechs Formen eingerichtet: das humanistische und das neusprachliche Gymnasium mit je insgesamt 26 Wochenstunden Mathematikunterricht (Unterstufe 4 4 3 3, Oberstufe 3 2 2 2 3) und das realistische mit 31 Wochenstunden (Unterstufe 4 4 3 3, Oberstufe 4 3 3 3 4), das naturwissenschaftliche und das mathematische Realgymnasium mit je 33 Wochenstunden (Unterstufe 4 4 4 4, Oberstufe 4 3 3 3 4) und das wirtschaftskundliche Realgymnasium für Mädchen mit 28 Wochenstunden (Unterstufe 4 4 3 3, Oberstufe 4 2 2 2 4).¹⁴⁸ Zum Vergleich: Das Mittelschulgesetz 1927 sah ebenfalls 26 Wochenstunden Mathematik für das Gymnasium verteilt auf acht Schuljahre vor (Unterstufe 4 4 4 3, Oberstufe 3 3 3 2).¹⁴⁹

Die neue geschaffene 9. Klasse sollte eine „*Zusammenfassung und Vertiefung der Bildungsstoffe zu einer Übersicht und zum Erkennen Ihrer Zusammenhänge*“ bieten und *auf den nächsten Lebensabschnitt, das Hochschulstudium oder die Berufslaufbahn*“ vorbereiten¹⁵⁰.

Erstaunlicherweise torpedierten gerade Teile der ÖVP selbst, deren Unterrichtsminister Piffli-Percevic für diese Reform verantwortlich zeichnete, dieses neunte Schuljahr. ÖVP-Landeshauptleute und Wirtschaftsvertreter, aber auch die Elternvereine und natürlich die SPÖ – damals in Opposition – waren gegen die Verlängerung des Gymnasiums. Ein im Mai 1969

¹⁴⁴ So wurden die Kosten für die deutschen „Krüppel“ berechnet und wieviele deutsche Familien davon leben könnten, oder wie lange ein feindlicher Bomber zur Erreichung einer bestimmten deutschen Stadt benötigt, wie viele Bomben zur Zerstörung der KRUPP-Werke nötig sind, wenn eine Bombe alles im Umkreis von 50 m zerstört (Galla 2005).

¹⁴⁵ Scheipl 1988, S. 13.

¹⁴⁶ Scheipl 1988, S. 36; Galla 2005, S. 46.

¹⁴⁷ Scheipl 1988, S. 43.

¹⁴⁸ vgl. Prowaznik, Franz: Der Mathematikunterricht an den Höheren Schulen Österreichs, S. 73. in Praxis der Mathematik 1970.

¹⁴⁹ Galla 2005, S. 46.

¹⁵⁰ Scheipl 1988, S. 59.

durchgeführtes Volksbegehren erreichte 340.000 Stimmen¹⁵¹, woraufhin Piffel-Percevic zurücktrat. Allerdings drückte dieses Volksbegehren eine allgemeine Unzufriedenheit mit der Schulsituation aus, die sich im LehrerInnenmangel und in einem Schulraummangel zeigte.¹⁵² Der Erfolg des Volksbegehrens könnte auch mit der Verwechslung der damals eingeführten Verlängerung der Pflichtschule auf neun Jahre zu tun haben.

In der 275. Verordnung des Jahres 1970 wird der Lehrplan der Oberstufe gültig ab dem Schuljahr 1970/71 geregelt und in diesem sind nur mehr vier Jahre für die Oberstufe vorgesehen.

Das neunte Schuljahr hätte gerade für die Neue Mathematik die Chance geboten, das gemeinsame Fundament der Mathematik intensiver zu betrachten, wie es auch im Lehrplan vorgesehen war (siehe VO 295/1967) und die algebraische Strukturen zu vertiefen. Deshalb mussten auch viele Inhalte, die in der neunklassigen Form vorgesehen waren, wieder aus dem Lehrplan gestrichen werden. Man muss allerdings festhalten, dass nicht mehr Wochenstunden für den Mathematikunterricht vorgesehen.

Hilfsmittel im Mathematikunterricht

Es gab noch eine weitere Veränderung im Mathematikunterricht: die Einführung des Rechenstabes¹⁵³, später des Taschenrechners.

„Nach Einführung in den Gebrauch des Rechenstabes ist für seine ständige Verwendung, also für ausreichende Übung, zu sorgen.“¹⁵⁴ wird im Lehrplan 1974 gefordert. Im Lehrstoff für die 3. Klasse AHS im Lehrplan 1977¹⁵⁵ wird erstmalig die Einführung in den Gebrauch des Rechenstabes „oder des Taschenrechners“ gefordert. Derzeit ist der Einsatz von technologischer Unterstützung von der ersten Klasse der AHS an vorgesehen.

Standardisierung des Mathematikunterrichts, internationale und nationale Vergleiche

Der (in Österreich verspätete) PISA-Schock 2003, das schlechte Abschneiden österreichischer SchülerInnen auch in Mathematik (verglichen mit SchülerInnen anderer Länder) verlangte nach einer neuerlichen Reform. Die aktuellen Lehrpläne betonen die Kompetenzorientierung. Festgelegt wird nicht (nur), was LehrerInnen unterrichten, sondern fokussiert, was SchülerInnen können sollen. Damit bewegt sich das österreichische Schulwesen in die Richtung des angloamerikanischen Systems, hin zu einem „Training to the Test“. Diese Veränderung sei hier nur der Vollständigkeit halber angeführt. Sie betrifft nicht die Zeit der Neuen Mathematik, sondern nur die aktuelle Situation.

¹⁵¹ Prowaznik, Franz: Der Mathematikunterricht an den Höheren Schulen Österreichs, S. 76. in Praxis der Mathematik, 1970.

¹⁵² Scheipl 1988, S. 77.

¹⁵³ Galla erwähnt allerdings, dass bereits 1927 der Einsatz des Rechenschiebers für die 5. Klasse der Realschule im Lehrplan vorgesehen war (Galla 2005, S. 51).

¹⁵⁴ Lehrplan 1974, BGBl 63/1974.

¹⁵⁵ BGBl 15/1977, S. 348.

4.3 Umfang der Lehrpläne

Bereits bei einer oberflächlichen Durchsicht der verschiedenen Lehrpläne fällt auf, dass der Umfang der Lehrpläne sehr stark variiert und zwar sowohl beim allgemeinen Teil „Bildungs- und Lehraufgabe“ als auch beim konkreten Lehrstoff für die jeweilige Schulstufe.

In der folgenden Tabelle sind von verschiedenen Lehrplänen die Angaben zur 1. Klasse bzw. zur 5. Klasse als Vergleich angeführt:

	Bildungs- und Lehraufgabe Unterstufe	Lehrstoff 1. Klasse	Bildungs- und Lehraufgabe Oberstufe	Lehrstoff 5. Klasse
Lehrplan 1964 (163.VO)	81 Wörter	202 Wörter		
Lehrplan 1966 (146.VO)			45 Wörter	161 Wörter
Lehrplan 1967 (295.VO)	87 Wörter	210 Wörter	114 Wörter	198 Wörter
Lehrplan 1970 (275.VO)			134 Wörter	151 Wörter
Lehrplan 1974 (63.VO)	58 Wörter	307 Wörter		
Lehrplan 1978 (114.VO)			102 Wörter	144 Wörter
Lehrplan 1985 (88.VO) nur 1. und 2. Klasse	627 Wörter	2384 Wörter		
Lehrplan 1989 (63.VO)			455 Wörter	1934 Wörter
aktueller Lehrplan	605 Wörter	363 Wörter	678 Wörter	260 Wörter

Bei diesen Angaben ist zu berücksichtigen, dass es zusätzlich noch didaktische Grundsätze gibt, die anfangs – falls überhaupt vorhanden – in wenigen Worten abgehandelt wurden und derzeit ebenfalls einen Umfang von 903 Wörtern aufweisen. Es scheint, als hätten das Experiment der Modernisierung des Mathematikunterrichts und besonders die dabei aufgetretenen Probleme zu einer besonders detaillierten Regulierung des Lehrauftrages geführt.

Besonders der Umfang des Lehrstoffes für die 1. Klasse im Lehrplan 1985 fällt auf. In diesem Lehrplan wurde nicht nur der Lehrstoff angeführt, sondern die jeweilige Zielvorgabe mit Hilfe eines Verbs ausgedrückt, was soll der Lernende am Ende mit dem Gelernten tun können: *„Kennen von Eigenschaften des dezimalen Stellenwertsystems. Lesen und allenfalls auch Schreiben von römischen Zahldarstellungen. Beschreiben von Beziehungen zwischen Zahlen durch Ungleichungen...“*¹⁵⁶. Außerdem finden sich genaue didaktische Vorgaben zu den Inhalten im Lehrplan: *„Deuten des Multiplizierens etwa als wiederholtes Addieren, als Vervielfachen, als maßstäbliches Vergrößern“*.¹⁵⁷

Man könnte diese genauen Vorgaben als Gegenreaktion auf die vielen verschiedenen didaktischen Vorstellungen zur Modernisierung des Mathematikunterrichts verstehen oder als Reaktion auf die Vermutung, dass viele LehrerInnen die Neue Mathematik und ihre speziellen didaktischen Erfordernisse ignoriert hätten. Wie auch immer diese Lenkung und Vereinheitlichung des LehrerInnenhandelns motiviert war, es war eine stärkere Einflussnahme

¹⁵⁶ BGBl 88/1985, S. 839.

¹⁵⁷ BGBl 88/1985, S. 839.

auf das Unterrichtsgeschehen, wenngleich man nicht feststellen kann, wie die Einhaltung im Schulalltag überprüft werden hätte sollen.

4.4 Änderungen in der Bildungs- und Lehraufgabe

Obwohl im Lehrplan von 1967¹⁵⁸ schon in der Unterstufe Lehrinhalte aus der Mengenlehre (1. Klasse) und Begriffe wie Ring und Körper (3.Klasse) eingeführt werden, und geometrische Grundbegriffe mit Hilfe des Mengenbegriffes erklärt werden sollen, findet sich in der Bildungs- und Lehraufgabe keine Forderung der Neuen Mathematik. Systematischer Aufbau der Zahlenbereiche, sichere Beherrschung des Rechnens, grundlegende Kenntnisse aus ebener und räumlicher Geometrie sollen vermittelt werden, Zusammenhänge aus dem Alltag sollen erfasst und berechnet werden, das funktionale Denken ist zu üben.

In der 577. Verordnung aus dem Jahr 1976¹⁵⁹ wird die Forderung nach einer Verbindung von Mathematik mit Kunst gestellt: *„Weckung der Freude an mathematischem Denken und an der Schönheit geometrischer Konstruktion“, „Erlebnis der Mathematik als Herausforderung an schöpferische Phantasie, ... Kenntnis einiger Querverbindungen zwischen Mathematik, Bildender Kunst, Musik und Kulturgeschichte“*, aber ebenfalls Forderungen der Neuen Mathematik: *„Wird auch der Einstieg in die mathematische Problematik meist aus der Anschauung und Alltagserfahrung zu erfolgen haben, so ist doch früh das Verständnis für abstrakte Methoden und Modelle zu wecken“*.¹⁶⁰

In der Bildungs- und Lehraufgabe des Lehrplans von 1985¹⁶¹ werden dann besonders die Handlungsdimensionen Operieren, Reflektieren, Argumentieren, Darstellen, Interpretieren hervorgehoben.

Als Reste der Neuen Mathematik findet man in der Bildungs- und Lehraufgabe des aktuellen Lehrplans der Unterstufe die Forderung, dass die SchülerInnen die Grundtätigkeit des Definierens und Beweisens entwickeln sollen, *„verbales, formales oder graphisches Darstellen von Sachverhalten“* ist ebenfalls zu entwickeln. Die Verwendung der Fachsprache wird gefordert.

In der Bildungs- und Lehraufgabe der Oberstufe des aktuellen Lehrplans findet man den Geist der Neuen Mathematik durchaus deutlicher als in der Unterstufe. Einerseits wird die Fach- und Symbolsprache betont, andererseits das Abstrahieren und logische Schließen als Spezifikum der Mathematik:

„Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, [...] sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts. [...]

¹⁵⁸ BGBl 195/1967.

¹⁵⁹ BGBl 577/1976.

¹⁶⁰ BGBl 577/1976, S. 2239.

¹⁶¹ BGBl 88/1985, S. 837.

Die SchülerInnen sollen Mathematik als spezifische Sprache zur Beschreibung von Strukturen und Mustern [...] erkennen.

... ein ständiges Bemühen um exakten Ausdruck [...] [soll] gefördert werden. [...] [Die Mathematik] ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen. [...] Mathematische Gegenstände und Sachverhalte bilden als geistige Schöpfungen eine deduktiv geordnete Welt eigener Art, in der Aussagen – von festgelegten Prämissen ausgehend – stringent abgeleitet werden können. [...]

Mathematik ergänzt und erweitert die Umgangssprache vor allem durch ihre Symbole und ihre Darstellungen, ... [dadurch] wird Mathematik so zu einer weiteren Art von Sprache.“

4.5 Änderungen im Lehrstoff

4.5.1 Gymnasium Unterstufe

VO 136/1963 bzw. VO 163/1964

Mit der 135. Verordnung im Jahr 1963 wurde der erste Lehrplan nach 1945 für allgemeinbildende höhere Schulen herausgegeben. Diese Verordnung regelt allerdings nur den Lehrplan für die ersten Klassen. Die 163. Verordnung aus dem Jahr 1964 zeigt kaum Abweichungen. Sie regelt den Lehrstoff der gesamten Unterstufe, aufgeteilt nach Schuljahren und darin wieder nach den Themen Arithmetik und Geometrie.

In diesem Lehrplan werden meist nur Substantive zur Beschreibung des Lehrstoffes verwendet: *„Einführungsaufgaben, [...]. Römische Zahlzeichen. Das dekadische Zahlensystem; die vier Grundrechnungsarten mit den natürlichen Zahlen...“*. Selten werden auch substantivisch verwendete Verben angeführt: *„Weckung und Schulung des funktionalen Denkens. Erziehung zum sorgfältigen Zeichnen...“*. Zusätzlich findet man didaktische Grundsätze jeweils zu Arithmetik und Geometrie getrennt (außer für die erste Klasse, da fehlen die Grundsätze für die Geometrie). Diese sind allerdings wie der gesamte Lehrplan recht knapp gehalten (zB. 105 Wörter für die erste Klasse).

Den Einfluss der Didaktik Wagenscheins findet man in der Formulierung *„Auf Anschauung beruhende Vorübungen für das Bruchrechnen, [...]. Der einfache direkte Schluß und seine Anwendung auf lebensnahe Aufgaben.“*¹⁶²

Der Begriff Menge wird im Lehrplan 1963 bereits erwähnt: *„...die vier Grundrechnungsarten über der Menge der natürlichen Zahlen...“*, während es im Lehrplan 1964 heißt: *„...die vier Grundrechnungsarten mit den natürlichen Zahlen und der Zahl Null, ...“*.

¹⁶² BGBl Nr 135/1963.

VO 295/1967

Im Lehrplan 1967 wird nach den Einführungsaufgaben die Mengenlehre angeführt: „*Erläuterung und Verwendung der Begriffe ‚Menge‘, ‚Teilmenge‘, ‚Durchschnitt‘ und ‚Vereinigung‘ von Mengen....*“ und im Geometrieteil findet sich: „*Einführung in weitere Begriffe mit Hilfe des Mengenbegriffes: Strahl, Gerade, Ebene, ...*“.

In der zweiten Klasse findet sich im Lehrplan von 1967 die Ergänzung zu größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches „*in Verbindung mit den Begriffen Durchschnitt und Vereinigung von Mengen*“, während die „*zusammengesetzte Schlußrechnung, beschränkt auf die Zinsenrechnung*“ dort und auch in späteren Lehrplänen fehlt.

Im Bereich der Geometrie hat sich 1967 in der zweiten Klasse auch ein wenig der Mengenbegriff eingeschleust: Lagebeziehungen zwischen Punkt, Gerader und Kreis werden nun „*unter Verwendung des Mengenbegriffes*“ behandelt, während der Peripherie- und Zentriwinkel in die vierte Klasse verschoben wurde, dafür sollen Abbildungen in der Ebene behandelt werden und zwar zusätzlich zur Axialen Symmetrie die Drehung und Parallelverschiebung.

In der dritten Klasse gab es die weitreichendsten Veränderungen: folgende Inhalte sind gegenüber dem Lehrplan 1964 eingefügt worden:

- bei der Addition und Subtraktion ganzer Zahlen die Veranschaulichung mit Hilfe von Vektoren, (das war bisher nur in den didaktischen Grundsätzen empfohlen worden)
- bei der Multiplikation ganzer Zahlen: „*die Abgeschlossenheit der Menge der ganzen Zahlen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation (Ring der ganzen Zahlen)*“,
- „*Die Abgeschlossenheit der Menge der rationalen Zahlen gegenüber den vier Grundrechnungsarten (Körper der rationalen Zahlen)*“,
- „*Begriff der unvollständigen Zahlen¹⁶³ und das Rechnen mit diesen Zahlen (Abgekürztes Rechnen)¹⁶⁴*“,
- Gebrauch des Rechenstabes
- im Bereich der Geometrie: „*Festlegen von Punkten in der Ebene durch rechtwinkelige Koordinaten, Anwendung bei ebenen Figuren*“.

Im Lehrstoff der vierten Klasse findet man wieder den Begriff der Menge: „*Erweiterung der Menge der rationalen Zahlen zur Menge der reellen Zahlen*“ und im Bereich Geometrie wird der Begriff der Ortslinie „*als Menge von Punkten*“ behandelt. Weitere Neuerungen sind die Behandlung von Ungleichungen, von Systemen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen und im Bereich der Geometrie die Abbildungsgeometrie: „*Zusammensetzung von*

¹⁶³ Zahlen, die aus Messungen gewonnen werden.

¹⁶⁴ ein Rechenverfahren, bei dem man die beteiligten Zahlen bei jedem Rechenschritt auf die sinnvolle (bzw. gewünschte) Anzahl von Dezimalstellen kürzt.

Schiebungen, Drehungen und Spiegelungen, Abbildungseigenschaften, Ähnlichkeitsabbildungen“.

Prowaznik schreibt dazu 1970: „Die Stoffpläne für die Unterstufe haben sich, wenn man vom Gebrauch etwas modernerer Vokabeln absieht, nicht allzu sehr geändert. Berücksichtigt man überdies, daß einige Lehrbücher schon 10 Jahre früher versuchten, modernere Gedanken zum Beispiel der Bewegungsgeometrie einzuführen, dann ist der nunmehrige Fortschritt nicht mehr so bedeutend.“¹⁶⁵

VO 63/1974

Die weitaus radikaleren Änderungen im Mathematikunterricht einerseits, ein Zurücknehmen mancher Inhalte der Neuen Mathematik andererseits findet man im Lehrplan 1974. Die Wochenstundenzahl wird von 4 – 4 – 3 – 3 auf 5 – 4 – 3 – 3 erhöht (also in der ersten Klasse um eine Wochenstunde erhöht). Die Aufteilung Arithmetik – Geometrie findet man nicht, im Gegenteil, es werden die Inhalte der Arithmetik und Geometrie verschränkt angeführt.

Weiters findet man im Lehrstoff der ersten Klasse einen ausführlichen Teil zur Mengenlehre: „Wiederholung und Vertiefung der in der Grundschule gewonnenen Grundbegriffe der Mengenlehre unter Verwendung von Diagrammen und in Verbindung mit der Einführung der entsprechenden Symbole: Menge ($\{ \dots \}$), Element einer Menge ($\in$), Grundmenge, Teilmenge ($\subset$), Komplementärmenge ($'$), Durchschnitt ($\cap$), Vereinigung ($\cup$) – auch nichtelementfremder Mengen, leere Menge ($\{ \}$); Zuordnung der Elemente zweier Mengen ($\rightarrow$), gleichmächtige ($\sim$) und ungleichmächtige Mengen.“

Relationen gehörten ab dann ebenso zum Lehrstoff der ersten Klasse: „Die Relationsbegriffe ‚gleich‘ ($=$), ‚ungleich‘ ($\neq$), ‚kleiner als‘ ($<$), ‚größer als‘ ($>$), ‚kleiner oder gleich‘ ($\leq$), ‚größer oder gleich‘ ($\geq$), unter Verwendung der entsprechenden Symbole; in Verbindung damit auch Bestimmen der Lösungsmenge einfacher Ungleichungen und Gleichungen durch Einsetzen der Zahlen einer endlichen Grundmenge unter Verwendung von ‚Platzhaltern‘ (z.B. $\square$, $\circ$, $\triangle$, a , x).“

Außerdem findet man nun bei der Behandlung der vier Grundrechnungsarten in $\mathbb{N}$ das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz namentlich erwähnt. Weiters wird mit der Einführung der Dezimalzahlen bereits in der ersten Klasse begonnen.

In der zweiten Klasse sollen die Lösungsmengen für Ungleichungen angegeben werden, und der Funktionsbegriff bei den Kongruenzabbildungen und bei den Schlussrechnungen erarbeitet werden. Die Statistik wird über das arithmetische Mittel hinaus mit Häufigkeitsverteilungen und Staffelnbildern dazu behandelt.

¹⁶⁵ Prowaznik, Franz: Der Mathematikunterricht an den Höheren Schulen Österreichs, S. 74. in Praxis der Mathematik, 1970.

In der dritten Klasse findet man nun die Begriffe „Äquivalenzumformung“, „Variable“ und „Term“. Die Begriffe Ring und Körper werden im Lehrstoff der 3. Klasse nicht mehr erwähnt, sehr wohl aber die Rechengesetze.

In der vierten Klasse wird die Betonung der Funktion weitergeführt und mit Wertetabelle und Graph intensiv behandelt, während dieser Inhalt im Lehrplan 1964 der vierten Klasse vollkommen fehlt. Die Abbildungsgeometrie, 1964 noch Stoff der vierten Klasse, wurde im Lehrplan 1974 in die zweite Klasse vorgezogen.

Als letzten Satz findet man für jede Klasse die Anweisung *„Anwendung des Lehrstoffs auf lebenspraktische Aufgaben“*. In der vierten Klasse findet man danach noch folgende Themen angeführt: *„Einblick in das Steuer-, Versicherungs-, Sparkassen- und Kreditwesen unter Verwendung einschlägiger Tafeln“*.

VO 88/1985 (für die erste und zweite Klasse AHS)

Der Lehrplan 1985 unterscheidet sich von den Lehrplänen davor grundsätzlich. Der Lehrstoff der ersten Klasse zB. wird in die Bereiche Natürliche Zahlen, Bruchzahlen, Gleichungen, Geometrie, Statistik, Mengen und Projektorientierter Unterricht geteilt, wobei der Abschnitt Mengen mit 40 Worten der mit Abstand kürzeste Teil ist.

Aber auch die Art der Formulierungen hat sich stark verändert. So lautet der Abschnitt zum Bruchrechnen 1974: *„Bruchrechnen: die Bruchfamilien Ganze-Halbe-Viertel-Achtel und Ganze-Zehntel-Hundertstel.“* (insgesamt 11 Worte) so heißt es 1985:

„Aufbauend auf Vorerfahrungen und auf anschaulichen Vorstellungen soll der Begriff der Bruchzahl (also der positiven rationalen Zahl) entwickelt werden. Dabei sollen die Schüler sowohl mit der Darstellung in Bruchschreibweise als auch bei den Bruchzahlen, bei denen dies möglich ist, mit der Darstellung in endlicher Dezimalschreibweise vertraut werden. [...]

Veranschaulichen, Darstellen und Vergleichen Bruchzahlen in Bruch- und Dezimalschreibweise: Anwenden zum Beschreiben von Teilen von Objekten und Größen. Deuten von Bruchzahlen als Teile von Objekten und Größen.

Beschreiben von Größenverhältnissen durch Bruchzahlen; Deuten von Bruchzahlen als Größenverhältnisse, als Quotienten. [...]“ (insgesamt 616 Worte)

Die Beschreibung von Inhalten durch Nomen wurde durch Verben ergänzt, die festlegen, wie die Lehrperson den Sachverhalt vorzustellen hat bzw. welche Tätigkeiten die SchülerInnen mit den mathematischen Objekten durchführen sollen: So sollen nun Bruchzahlen verglichen werden und Dezimalzahlen in Bruchzahlen übergeführt werden. Damit wird der Lehrstoff sehr detailliert abgegrenzt und didaktische Anweisungen werden bereits im Lehrstoff festgelegt.

Der Projektunterricht kann als Reaktion auf die zu starke Theoretisierung des Mathematikunterrichts in der Neuen Mathematik verstanden werden. Diese Form des Unterrichts sollte wohl die Lebensnähe mathematischer Aufgaben verdeutlichen.

Aktueller Lehrplan

Im aktuellen Lehrplan der Unterstufe kann man im Lehrstoff kaum Inhalte der Neuen Mathematik finden. Es mag sein, dass die Modernisierung des Mathematikunterrichts in der Präsentation der Inhalte noch ihren Niederschlag findet, und zwar insofern, als schon in der Unterstufe stärker Gesetzmäßigkeiten untersucht werden und der Rechenfertigkeit weniger Aufmerksamkeit geschenkt wird, aber die mit der Neuen Mathematik eingeführten Inhalte findet man im Lehrstoff der Unterstufe nicht mehr. Einzig die Schwerpunktsetzung im Bereich der Statistik begann mit der Modernisierung des Mathematikunterrichts, wurde aber besonders in den letzten Jahren weiter verstärkt.

4.5.2 Gymnasium Oberstufe

Provisorischer Lehrplan lt. Mittelschulgesetz 1927

Es findet sich bereits die Formulierung „*Anregung zum funktionalen Denken*“ in diesem Lehrplan des Mittelschulgesetzes von 1927. Funktionen sollen auch graphisch behandelt werden, ebenso sollen die Infinitesimalrechnung, der Differentialquotient und einfachste Fälle der Integration unterrichtet werden.¹⁶⁶ Mengenlehre, Logik und algebraischen Strukturen werden nicht erwähnt. Dieses Mittelschulgesetz wurde erlassmäßig 1946 weitergeführt, die vorgesehene Wochenstundenzahl für den Mathematikunterricht in der Oberstufe wurde 1946 mit 10 Stunden festgesetzt (3 – 3 – 2 – 2).¹⁶⁷ Der Lehrplan beinhaltete keine allgemeinen Bildungsziele und didaktischen Grundsätze.¹⁶⁸

VO 146/1966

In der 146. Verordnung des Jahres 1966 wurde der erste Lehrplan nach 1946 für die Oberstufe beschlossen. Dabei finden sich in der Bildungs- und Lehraufgabe schon Forderungen, die der Neuen Mathematik gerecht werden: „*Formallogische Schulung. ... Vermittlung eines tieferen Einblicks in die Struktur der Mathematik.*“

Hinsichtlich der Inhalte der Neuen Mathematik findet man im Stoff der fünften Klasse die vorsichtige Formulierung „*Erste Einführung von Grundbegriffen aus der naiven Mengenlehre*“, in der sechsten Klasse werden „*der Begriff der ‚Abgeschlossenheit‘ gegenüber bestimmten Rechenoperationen (Ringbegriff, Körperbegriff), - Vertiefung des Mengenbegriffs. Erste Einführung in den mengentheoretischen Funktionsbegriff; der Abbildungs- und Gruppenbegriff*“ als Inhalte der Neuen Mathematik angeführt.

In der siebten Klasse findet man die vage formulierten Inhalte „*Vertiefung der bisher erarbeiteten Grundbegriffe der modernen Mathematik anhand einsichtiger Beispiele*;

¹⁶⁶ Galla 2005, S. 51f.

¹⁶⁷ Scheipl 1988, S. 158.

¹⁶⁸ Scheipl 1988, S. 37.

Anbahnung des mathematischen Denkens in Strukturen.“, außerdem „allenfalls: Der Fundamentalsatz der Algebra“.

In der achten und neunten Klasse ist unter anderem die Differential- und Integralrechnung vorgesehen, aber keine weiteren Inhalte der Neuen Mathematik.

VO 295/1967

In diesem Lehrplan findet man in der Stundentafel für die Oberstufe die Mathematikwochenstunden mit 3 – 2 – 2 – 2 – 3, also insgesamt 12 Wochenstunden auf die fünf Klassen verteilt.

In der Bildungs- und Lehraufgabe findet man keine formallogische Schulung mehr, dafür ist bereits im allgemeinen Überblick zum Lehrstoff für die fünfte Klasse angeführt: *„Begriffe und Symbole der modernen Mathematik [sollen] ergänzt bzw. eingeführt“* werden, in der sechsten Klasse werden die SchülerInnen zum *„Körper der reellen Zahlen“* geführt, in *„der 9. Klasse soll vor allem eine Wiederholung und Zusammenfassung des gesamten Lehrstoffes unter Betonung des Strukturbegriffes erfolgen“*.

Diese Verordnung wurde aber – was das neunklassige Gymnasium betraf – noch vor Inkrafttreten wieder abgeschafft. Das Vorhaben, das Gymnasium auf neun Schuljahre zu verlängern, stieß auf Widerstand von Teilen der ÖVP, die selbst den Unterrichtsminister stellte. Ein diesbezügliches Volksbegehren im Mai 1969¹⁶⁹ erreichte über 300.000 Stimmen und bewirkte damit den Rücktritt des damaligen Unterrichtsministers Piffl-Percevic. Die SPÖ – damals in Opposition – unterstützte dieses Volksbegehren. Damit wurde diese Verordnung noch vor Inkrafttreten reformiert.

VO 53/1970

Mit dieser Verordnung wird das Gymnasium – wie im Volksbegehren gefordert – von neun Klassen auf acht verkürzt, die Wochenstundenzahl wird für die Klassen sieben und acht auf fünf für das neusprachliche und das humanistische Gymnasium festgelegt, und auf sechs für das realistische Gymnasium, das bedeutet eine Kürzung um zwei bzw. eine Wochenstunde.

Der Lehrstoff für die fünfte und sechste Klasse bleibt unverändert, der Stoff von siebte bis neunte Klasse auf siebte und achte verteilt. Diese Verordnung wird ebenso vor Inkrafttreten reformiert.

VO 275/1970

In dieser Verordnung vom September 1970, die nur sieben Monate nach der letzten veröffentlich wurde (nun unter dem sozialistischen Unterrichtsminister Leopold Gratz) und die

¹⁶⁹ http://www.parlament.gv.at/PAKT/VHG/XI/I/I_01374/imfname_313304.pdf, abgefragt am 13.12. 2013.

bereits für das Schuljahr 1970/71 in Kraft trat, werden die Wochenstundenzahlen für Mathematik wieder auf 12 Stunden für die Oberstufe im neusprachlichen und humanistischen Zweig des Gymnasiums und im wirtschaftskundlichen Realgymnasium für Mädchen und auf 17 Stunden für den realistischen Zweig des Gymnasiums und für das Realgymnasium erhöht.

Der Inhalt ist deutlich von der Neuen Mathematik geprägt, das als erstes angeführte Teilgebiet ist die Mengenlehre, gefolgt von Verknüpfungen, Begriff der Gruppe, des Ringes und des Körpers. Gleichungen und Ungleichungen werden über dem Körper der rationalen Zahlen betrachtet, in Klammer wird auf Grundmenge und Lösungsmenge verwiesen. Funktionen werden als Zuordnung von Elementen von Mengen eingeführt.

Die Momentangeschwindigkeit wird bereits in der sechsten Klasse im Rahmen der Infinitesimalrechnung behandelt, die quadratische Gleichung erst in der siebten Klasse.

In der siebten Klasse soll ebenfalls der Fundamentalsatz der Algebra behandelt werden.

In der achten Klasse findet sich die Neue Mathematik in der Wiederholung des Aufbaus der Zahlenbereiche mit Verwendung der strukturellen Begriffe Gruppe, Ring, Körper, bei der Behandlung des dem Gruppenbegriff zugrundeliegenden Axiomensystem, bei der Axiomatischen Behandlung des linearen Vektorraumes, aber ebenso bei der Behandlung der Kegelschnitte als Punktmengen „unter zusammenfassenden Gesichtspunkten“.

Wenn man bedenkt, dass in der achten Klasse auch der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung behandelt werden soll, so ist bereits ein guter Teil der Fachausbildung des heutigen Lehramtstudiums der Mathematik damit abgedeckt. Hat ein Schüler/ eine Schülerin damals diese Inhalte beherrscht, so war eine Kluft zwischen Hochschulmathematik und Mathematik des Gymnasiums wohl nicht mehr zu beklagen.

Im Realgymnasium ist noch eine Vertiefung in einem der vorgeschlagenen Themen vorgesehen, wobei Rechenanlagen und Wesen der Programmierung zwei der vorgeschlagenen Themen sind. Andere sind typisch für die Neue Mathematik: Grundgedanken der Topologie, Die Abbildungen der Hauptgruppe (konstruktive Behandlung, Überblick über ihre Struktur), Axiomatische Behandlung von endlichen ebenen Geometrien.

Prowaznik schreibt über den Lehrstoff der Oberstufe: *„Die Pläne für die Oberstufe sind grundsätzlich anders gestaltet, insofern sie den Reformgedanken eine recht weite Bahn eröffnen. Ein bei Lehrplänen neuer Gedanken beherrscht Auswahl und Anordnung der Stoffe dadurch, daß in jeder der 5. bis 9. Klasse dieselben neuen Stoffgebiete behandelt werden und zwar: Zahlen – Gleichungen – Funktionen – Infinitesimalrechnung – Kombinatorik, Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung – Geometrie ohne analytische Behandlung – Vektoren – Analytische Geometrie – Geschichte der Mathematik.“*¹⁷⁰ Dabei sollten die einzelnen Stoffgebiete nicht nacheinander, sondern in möglichst enger Verflechtung miteinander

¹⁷⁰ Prowaznik, Franz: Der Mathematikunterricht an den Höheren Schulen Österreichs, S. 74. in Praxis der Mathematik, 1970.

behandelt werden. Offensichtlich wurde der Artikel vor den Reformen von 1970 verfasst. Diese Behandlung aller Themen in jedem Schuljahr musste wieder aufgegeben werden, da dieses Vorhaben keine Zeit für die ausreichende Vertiefung zuließ und man gehetzt alle Themen in einem Jahr abarbeiten musste.

VO 113/1978

Der Lehrplan 1978 weist schon eine Abschwächung der Neuen Mathematik auf. Der erste Punkt im Lehrstoff der fünften Klasse ist nicht mehr Grundbegriffe der Mengenlehre, dieses Wort wird nicht mehr erwähnt, sondern lautet: „*Wiederholung der Zahlenmengen N, Z, Q, R ;*“. Die Begriffe Verknüpfungen, Gruppe, Ring, Körper fehlen hier. Stattdessen heißt es lapidar „*Rechengesetze, Anwendung beim Lösen von linearen Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen.*“ Die Grund- und Lösungsmenge sind wieder verschwunden. Die Begriffe Gruppen und Körper findet man unter dem Punkt „*Algebraische Operationen*“. Neu ist dort der Begriff „*Isomorphismen*.“

Die Abbildungsgeometrie wird zugunsten der Vektoren gestrichen. Neu sind das Thema Relationen und speziell Äquivalenzrelationen, die vorher in der Unterstufe vorgesehen waren.

Der größte Unterschied zum Lehrplan 1970 ist in der fünften Klasse aber der Schwerpunkt auf dem Thema Funktionen: 1970 hieß es in der fünften Klasse zum Stoffgebiet Funktionen: „*Begriff der Funktion als eindeutiger Zuordnung der Elemente von Mengen; Umkehrfunktion. Lineare Funktionen; graphische Darstellung.*“ 1978 wird dazu detailliert ausgeführt: „*Lineare Funktionen und einige nichtlineare Funktionen, insbesondere die Funktionen f mit $f(x) = x^2$, $f(x) = 1/x$, $f(x) = 1/x^2$, und deren graphische Darstellung. Beispiele für Sprungfunktionen. [...] Der allgemeine Funktionsbegriff. Zusammensetzung von Funktionen. Inverse Funktion. Bijektive Funktionen.*“

Die rationalen Zahlen und die Potenzen wurden von der sechsten Klasse in die fünfte Klasse vorgezogen. Die Kombinatorik wurde verschoben ohne später explizit genannt zu werden, dafür wurde der Kreis von der siebten Klasse in die sechste Klasse vorgezogen.

Die inhaltlichen Schwerpunkte der sechsten Klasse waren der Grenzwertbegriff, Konvergenz von Folgen, logarithmische Funktionen und Winkelfunktionen. Das vektorielle Produkt wurde nicht mehr angeführt, nur mehr das skalare Produkt.

In der siebten Klasse findet man neu die Kegelschnitte und Extremwertaufgaben als Anwendung der Differentialrechnung. Die Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird in die siebte Klasse vorgezogen und um die bedingte Wahrscheinlichkeit erweitert. Die im vorigen Lehrplan nicht näher ausgeführten „*Streuungsmaße*“ findet man erst in der achten Klasse.

Der Stoff der achten Klasse wurde stark gekürzt, und jene Inhalte, die man der Neuen Mathematik zuordnen würde, wurden gestrichen. Übrig blieb die Integralrechnung, die Funktionen $\ln x$ und e^x , und neu dazu kam in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die

Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert und Varianz. Mittelwert und Streuung wurden von der siebten Klasse hierher verschoben.

Die in älteren Lehrplänen vorgesehene Wiederholung hatte im letzten Lehrplan in der 8. Klasse nicht Platz gefunden, da die Kürzung um ein Schuljahr zu einem Stau in den letzten zwei Jahren geführt hatte. Diese Umverteilung der Inhalte erlaubte in diesem Lehrplan die Wendung: *„Zusammenfassende Wiederholung und Vertiefung des Lehrstoffes der Oberstufe.“*, allerdings waren viele Inhalte wohl wieder auf die Universität verschoben worden. Der Fundamentalsatz der Algebra wie ebenso der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wurden nicht mehr erwähnt.

VO 63/1989

Der Lehrstoff des Lehrplans von 1989 weist keinerlei typische Ausdrücke der Neuen Mathematik auf. Die Begriffe „axiomatisch“ oder „formal“ findet man nicht mehr im Lehrstoff. Dafür werden einzelne Inhalte nicht als Thema angeführt, sondern die konkrete Tätigkeit des Schülers, der Schülerin wird angeführt: *„In Verbindung mit einer Thematisierung des Funktionsbegriffes sollen die Schüler erkennen, daß der Begriff der reellen Funktion eine gemeinsame Sicht vieler Sachverhalte ermöglicht. Einige einfache Typen reeller Funktionen sollen untersucht werden, dabei kann der Einsatz von Rechengeräten zweckmäßig sein.“*

Wie auch im Lehrplan von 1985 wird damit der Lehrstoff nicht nur inhaltlich viel genauer abgegrenzt, sondern auch die Lernziele werden klarer definiert.

Der aktuelle Lehrplan der Oberstufe

Im aktuellen Lehrplan der Oberstufe wird der Begriff „Zahlenmengen“ genannt. Die nichtdekadischen Zahlensysteme sollen in der fünften Klasse behandelt werden. Weiters kann man weiterhin in der gesamten Oberstufe einen Fokus auf Funktionen und graphische Darstellungen feststellen. Allerdings benötigt man keine Lösungsmenge mehr. Als Erweiterungsstoff für das Wahlpflichtfach stehen algebraische Strukturen und Restklassenarithmetik unter vielen anderen Themen zur Wahl.

Die neue teilzentrierte standardisierte Form der Reifeprüfung verlangt eine klare Abgrenzung jenes Stoffes, der zum zentralisierten Teil der Matura geprüft wird. In den Beispielaufgaben und deren Musterlösungen erkennt man, dass die in der Neuen Mathematik forcierte Symbolsprache dabei nicht verwendet wird. Selbst „ $\in$ “ wird nicht zur Beschreibung der Zugehörigkeit zu einer Zahlenmenge verwendet. Ebenso findet man keine formale Beschreibung einer (Lösungs-)Menge in diesen Aufgaben. Demgegenüber wird aber die Kenntnis eines Boxplots als Darstellungsform von statistischen Daten sehr wohl vorausgesetzt.

Die Herangehensweise an mathematische Inhalte, das Prüfungsformat erinnert aber sehr wohl an die Intention der Modernisierung des Mathematikunterrichts „weniger Rechnen, mehr Denken“. Der erste Teil der Beispiele soll das theoretische Wissen zu den Inhalten überprüfen.

Das rezeptartige Herunterrechnen von typischen Maturaaufgaben wurde auf den zweiten Teil und die Gewichtung dieser Aufgaben damit ungefähr auf die Hälfte reduziert.

4.6 Änderungen in den didaktischen Grundsätzen

Unterstufe:

In den didaktischen Grundsätzen des Lehrplans von 1967¹⁷¹ für die Unterstufe findet man (neu gegenüber 1964) folgenden Passus über die Mengenlehre: *„Die einfachsten Begriffe der Mengenlehre sind von der 1. Klasse an allmählich einzuführen. Der Begriff der Abbildung soll möglichst frühzeitig im Geometrieunterricht zur Geltung kommen. Von der 3. Klasse an ist der Vektorbegriff zu verwenden.“* Der Rest der didaktischen Grundsätze ist mit jenen von 1964¹⁷² wortident.

Im Jahr 1974¹⁷³ fehlt der zitierte Ausschnitt wieder und der Rest des allgemeinen Teils ist nahezu wortident mit den vorigen Versionen. Die relativ kurzen Abschnitte zu den einzelnen Klassen sind entsprechend den Veränderungen des Lehrstoffes ebenfalls verändert.

Im Lehrplan 1976¹⁷⁴ wird in den didaktischen Grundsätzen folgendes eingefügt: *„Wird auch der Einstieg in die mathematische Problematik meist aus der Anschauung und Alltagserfahrung zu erfolgen haben, so ist doch früh das Verständnis für abstrakte Methoden und Modelle zu wecken, zunächst als Spiel mit selbstgegebenen Regeln (fallweise auch im Team), später als schrittweiser Aufbau eines umfassenden Systems.“*

1985¹⁷⁵ haben sich auch die didaktischen Grundsätze grundsätzlich verändert: So werden zuerst in einem allgemeinen Teil Unterrichtsformen vorgeschlagen (Einzelarbeit, Partnerarbeit und Gruppenarbeit), allgemeine Lernziele erläutert, wie etwa Abstrahieren und Interpretieren, Verallgemeinern, Darstellen, Argumentierung und Problemlösen. Der Grundtenor des neuen didaktischen Weges ist die Betonung der Selbsttätigkeit der SchülerInnen und der meist verbale Auseinandersetzung mit den Themen gegenüber dem reinen Operieren.

In den Hinweisen zur Behandlung einzelner Themen sind detaillierte didaktische Anweisungen angeführt, dementsprechend ausführlich ist auch dieser Teil verglichen mit den älteren Lehrplänen.

Im aktuellen Lehrplan der Unterstufe findet man in den didaktischen Grundsätzen der Unterstufe den Abschnitt „Lesen mathematischer Texte, Fachsprache“: *„... Elementare Begriff, Symbole und Darstellungsformen können zur Beschreibung mathematischer und außermathematischer Sachverhalte sinnvoll verwendet werden. Mit wachsender Geläufigkeit im*

¹⁷¹ BGBl 295/1967, S. 1789.

¹⁷² BGBl 163/1964, S. 1004.

¹⁷³ BGBl 63/1974, S. 705.

¹⁷⁴ BGBl 577/1976, S. 2239.

¹⁷⁵ BGBl 88/1985, S. 847.

Umgang mit mathematischer Sprache und Symbolik kann diese Verwendung auch zur Klärung von Begriffen und zur Klärung von logischen Zusammenhängen dienen. ...“

Diesen Passus könnte man als einzigen im Sinne der Neuen Mathematik verstehen. Das Abstrahieren wird in den didaktischen Grundsätzen nicht mehr betont, der Schwerpunkt hat sich auf den Bezug zur Lebenswelt der SchülerInnen verschoben.

Oberstufe

Im Lehrplan 1970¹⁷⁶ heißt es in den didaktischen Grundsätzen: *„Die wichtigsten mathematischen Beweisverfahren wie indirekter Beweis und Methode der vollständigen Induktion sind immer wieder an geeigneten Stellen durchzunehmen. Ihre Kenntnis ist ebenso vom Schüler zu fordern wie die klare Unterscheidung der Begriffe Axiom, Satz, Definition. Auf korrekten Gebrauch der mathematischen Symbolik [...] ist zu achten.“*

Und später: *„Bei der Wiederholung und Zusammenfassung in der 8. Klasse soll durch stärkere Betonung logischer und axiomatischer Gesichtspunkte“* das Verständnis für die modernen Denkweisen und Arbeitsmethoden [der Mathematik] geweckt werden.

Im Lehrplan 1978¹⁷⁷ werden noch vor der oben erwähnten Passage die Querverbindungen betont: die Inhalte aufeinanderfolgender Klassen sollen miteinander verbunden werden, ebenso wie verschiedene Stoffgebiete miteinander und die Querverbindungen zu anderen Wissenschaften sollen betont werden. *„Dem Schüler der Oberstufe soll ein ganzheitliches Bild der Mathematik geboten werden. Er soll Zusammenhänge und Wechselbeziehungen zwischen den einzelnen Stoffgebieten deutlich erfassen und daraus strukturelle Beziehungen erkennen können.“*

Im Lehrplan 1989¹⁷⁸ findet man in den didaktischen Grundsätzen keinen Bezug zur Neuen Mathematik. Die didaktischen Grundsätze widmen sich hauptsächlich der Gestaltung des Unterrichts und nicht didaktischen Anweisungen oder Vorschlägen zu konkreten Unterrichtsinhalten. Einzig der Passus über das Verständnis mathematischer Begriffe setzt das Lernziel, dass die SchülerInnen verschiedene Darstellungen (verbal, symbolisch, bildhaft) verwenden können sollten, und könnte so im weiteren Sinn der Neuen Mathematik interpretiert werden. Ansonsten liegt der Schwerpunkt in der Aktivierung und Motivation der SchülerInnen.

Im aktuellen Lehrplan findet man am Ende der didaktischen Grundsätze ein „Überbleibsel“ der Neuen Mathematik: *„Das Verwenden von Symbolen für logische Begriffe und Beziehungen und das Beschreiben von Gesamtheiten mit Hilfe von Mengen und Mengenoperationen hat die Basis für exaktes Formulieren und Arbeiten zu legen.“* Im Gegensatz zu den anderen Themen der didaktischen Grundsätze beschreibt dieser Satz einen konkreten Lehrinhalt. Bei den anderen

¹⁷⁶ BGBl 275/1970, S. 1496.

¹⁷⁷ BGBl 114/1978, S. 822.

¹⁷⁸ BGBl 63/1989, S. 769.

angeführten Aspekten („Lernen in Phasen, Lernen mit technologischer Unterstützung,...) steht die Lernsituation im Vordergrund, dabei sind jeweils minimale Realisierung und maximale Realisierung als Grenzen für die Unterrichtsgestaltung beschrieben. Deshalb wirkt dieser Satz stilistisch anders, er ist aber im Vergleich zum Lehrplan 1989 hinzugefügt worden.

4.7 Zusammenfassung der Änderungen im Lehrplan

Die Neue Mathematik bewirkte zuerst eine Hereinnahme neuer Inhalte. Dabei wurde die Mengenlehre in relativ moderater Form, stärker algebraische Strukturen und in der Oberstufe besonders stark die Logik mit Boolescher Logik aber auch mit Schaltalgebra berücksichtigt. In der Unterstufe wurde ein Schwerpunkt auf die Abbildungsgeometrie gelegt, außerdem wurde die Vektorrechnung verstärkt. Das betrifft die Lehrpläne, die 1966 bzw. 1967 erlassen wurden.

Im Unterstufenlehrplan von 1974 bekommt die Mengenlehre als Grundlage des Mathematikunterrichts breiten Raum. Die Gruppentheorie verschwindet, die Abbildungsgeometrie wird stark abgeschwächt behandelt. 1970 findet man im Oberstufenlehrplan den Fundamentalsatz der Algebra ebenso wie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Mit dem Lehrplan 1978 wurden Relationen, algebraische Strukturen, Vektoren in die Oberstufe verschoben, während die Abbildungsgeometrie und die Mengenlehre aus dem Oberstufenlehrplan verschwand. Mit den Lehrplänen von 1985 bzw. 1989 wurden die Inhalte der Neuen Mathematik großteils eliminiert. Man kann eine drastische Veränderung hin zu Anschaulichkeit und Anwendungsbezug und eine Abwendung von abstrakten Inhalten und formalem Zugang erkennen.

Die Auswirkung der Modernisierung auf die Bildungs- und Lehraufgabe war relativ moderat.

Aus der Forderung nach dem Verständnis für abstrakte Methoden wird in den didaktischen Grundsätzen die Forderung nach Selbsttätigkeit der SchülerInnen. Man könnte das Motto „weniger Rechnen, mehr Denken“ in „weniger Vordenkenlassen, mehr Entdecken und Selber-Tun“ ändern.

Von den Inhalten der Neuen Mathematik findet man heute sehr wenig im Lehrplan. In der Unterstufe wurde die Betonung der Statistik begonnen und bis heute fortgesetzt. Mengenlehre, Aussagenlogik und Abbildungsgeometrie wurden vollständig aus dem Unterstufenlehrplan entfernt. Abgesehen von der Zahlenbereichserweiterung über Mengen findet sich in den didaktischen Grundsätzen des aktuellen Oberstufenlehrplans der einsame Satz: *„Das Verwenden von Symbolen für logische Begriffe und Beziehungen und das Beschreiben von Gesamtheiten mit Hilfe von Mengen und Mengenoperationen hat die Basis für exaktes Formulieren und Arbeiten zu legen.“* Die jüngste Veränderung des Mathematikunterrichts betrifft die standardisierte teilzentrierte Matura. In den bisher dazu veröffentlichten Unterlagen werden keine Symbole verwendet.

5 Änderungen in den Schulbüchern

Hier soll keine umfassende Lehrbuchanalyse der Schulbücher von 1960 bis heute durchgeführt werden, das würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Beschränkt auf die besonderen Inhalte der Neuen Mathematik Mengenlehre, Logik und algebraische Strukturen und teilweise sogar Begriffe der Topologie, aber auch auf die Behandlung der Geometrie soll ein Überblick über die Veränderungen in Schulbüchern gegeben werden.

Außerdem soll die Art der Präsentation der mathematischen Inhalte bezüglich Formalismus, Symbolsprache und Gestaltung der Aufgaben betrachtet werden. Auch andere Aspekte wie zB. die Gestaltung der stark propagierten Differenzierung des Mathematikunterrichts und der gewählte didaktische Ansatz für spezielle Themen soll untersucht werden. Es können in dieser Untersuchung nur markante Unterschiede aufgezeigt werden, da kleinere Veränderungen nur in einer umfassenderen Analyse eindeutig festgestellt werden können.

Exemplarisch sollen ausgewählte Kapitel in verschiedenen Schulbüchern und verschiedenen Ausgaben verglichen werden. Dabei sollen die Veränderungen, die die Modernisierung des Mathematikunterrichts mit sich brachte, untersucht werden. Zu diesem Zweck sollen Schulbücher aus der Zeit vor der Modernisierung, Schulbücher aus der Zeit der Reform und aktuelle Schulbücher verglichen werden. Dabei soll auch eruiert werden, welche dieser Änderungen später wieder zurückgenommen wurden, welche bestehen blieben oder sich in anderer Weise entwickelten.

Man darf davon ausgehen, dass approbierte Schulbücher den jeweils geltenden Lehrplänen entsprechen und die im Lehrplan vorgesehenen Lehrinhalte aufweisen. Dennoch kann man durchaus feststellen, dass die einzelnen Schulbücher unterschiedliche Schwerpunktsetzungen aufweisen. Lehrplanänderungen können nicht eine sofortige, vollständige Neuausrichtung eines Schulbuches nach sich ziehen, da die Entwicklung von möglichst fehlerfreien Aufgaben (und deren Lösungen) und eine didaktisch neuartige Präsentation der Inhalte viel Zeit benötigt. Die Verständlichkeit und Freiheit von möglichen Missverständnissen, die verlangte Eindeutigkeit der Erklärungen und Skizzen wird nicht ohne eine längere Bearbeitung und gründliche Diskussion verschiedener AutorInnen erreicht werden können. Die Erfahrungen aus dem Einsatz eines Buches im Unterricht können sicher viel zur Verbesserung beitragen. Deshalb kann eine so grundlegende Lehrplanänderung wie es die Modernisierung des Mathematikunterrichts war, nicht zu einer sofortigen Bereitstellung von qualitativ hochwertigen, dem Lehrplan entsprechenden Schulbüchern führen.

Eine Schwierigkeit bei der Untersuchung der Schulbücher aus der Zeit der Neuen Mathematik ist die Tatsache, dass damals nicht das gesamte Schulbuch überarbeitet wurde, sondern Ergänzungshefte in das Buch eingelegt wurden. Diese nunmehr neuen Exemplare wurden aber in den Bibliotheken anscheinend nicht als solche gesehen. Denn solche Exemplare mit Ergänzungsheft wurden nicht in die Bibliothek aufgenommen oder die eingelegten Ergänzungshefte sind verloren gegangen. So standen mir zur Untersuchung das Schulbuch von

Ludwig und Laub für die 1. und 2. Klasse aus dem Jahren 1959, 1960 und 1963 aus der Universitätsbibliothek zur Verfügung, aus Privatbesitz ein Exemplar von 1965 mit einem Ergänzungsheft für die zweite Klasse von 1968, nicht aber ein Ergänzungsheft für die erste Klasse¹⁷⁹, und dann wieder ein Exemplar von Laub und Hruby einer überarbeiteten Version für die 1. Klasse von 1976 aus der Bibliothek zur Verfügung.

Auch die Intensität der Verwendung der Symbolsprache ebenso wie die Anzahl an Fachbegriffen und ihre Erklärung bzw. Definition sorgen für Unterschiede in den Schulbüchern. Der Einsatz unterschiedlicher Aufgabenformate und eine eventuelle Differenzierung sind nicht eindeutig und detailliert im Lehrplan vorgeschrieben und lassen den Schulbuchautoren Spielraum zur Gestaltung nach den eigenen didaktischen Vorstellungen.

Beim Vergleich wurden fast ausschließlich österreichische Schulbücher und nahezu ausschließlich Schulbücher der allgemeinbildenden höheren Schulen (früher „Mittelschulen“) verglichen. Zu Vergleichszwecken wurden selten aber auch Bücher anderer Schultypen verwendet. Für einen aussagekräftigen Vergleich über eine Änderung im Zuge der Modernisierung des Mathematikunterrichts ist es auch von Interesse, die Schulbücher der Zeit davor zu betrachten. In der Zeit vor der Schulbuchaktion war aber die Auswahl an Schulbüchern sehr klein, nicht zuletzt wegen der Unbrauchbarkeit der Schulbücher aus der Zeit des Nationalsozialismus^{180,181}. Soweit über Bibliotheken zugänglich wurden deshalb einzelne Bücher auch für andere Schultypen und Jahrgänge untersucht.

5.1 Neue Inhalte

Es soll nicht nur beschrieben werden, welche Themen im Zuge der Modernisierung des Mathematikunterrichts – dem Lehrplan entsprechend – in die Schulbücher aufgenommen wurden, sondern auch in welcher Form diese Inhalte behandelt wurden und wie das Schulbuch strukturiert war.

Als Ausgangspunkt könnte man Dr. Franz Ritter von Mocniks „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgabensammlung für die oberen Classen der Mittelschulen“ von 1898, ein „Klassiker“ unter den Schulbüchern vor der Modernisierung, betrachten. Es beginnt mit einer Erklärung von „Menge“ und „gleichen Mengen“: *„Indem man jeder Einheit einer gegebenen Menge einen Finger, ein Stäbchen oder schriftlich einen Punkt, einen Strich zuordnete, entstanden die natürlichen Zahlbilder. [...] Mengen von der Beschaffenheit, dass die*

¹⁷⁹ Aufgrund des Inhalts des Ergänzungsheftes für die zweite Klasse kann man auf die Existenz eines solchen schließen, da für das Verständnis notwendige Themen – die laut Lehrplan dann auch für die erste Klasse vorgesehen waren, den SchülerInnen ohne ein solches in der zweiten Klasse nicht bekannt wären.

¹⁸⁰ vgl. Scheipl 1988, S. 19: *„Die Bücher aus der nationalsozialistischen Zeit konnten nicht mehr verwendet werden und wurden zum Teil unter Aufsicht der Alliierten vernichtet. Neue Texte müssen erstellt und von der Alliierten Kontrollkommission approbiert werden. Die Ansichten der ‚Vier‘ waren begreiflicherweise auch vor dem ‚kalten Krieg‘ nicht immer leicht unter einen Hut zu bringen.“*

¹⁸¹ vgl. Weyrich 1950, S. 9: Weyrich bezeichnet die Unterrichtssituation nach dem Zweiten Weltkrieg als die „buchlose Zeit“.

*erste aus einem einzelnen Dinge besteht, jede folgende aber eine Einheit (ein Ding) mehr enthält als die vorangehende, entsprechen der Reihe nach die Zahlen: Eins, Zwei, Drei ... Diese Zahlen bilden die natürliche Zahlenreihe.*¹⁸². Dieser Zugang zu den natürlichen Zahlen entspricht genau der Neuen Mathematik. Auf Seite 2 werden weiters Definition, Grundsatz [Axiom] und Lehrsatz erklärt, ebenfalls ganz im Sinne der Neuen Mathematik.

Auf Seite 25 werden Zahlensysteme allgemein eingeführt, noch bevor das dekadische Zahlensystem thematisiert wurde. *„In dem Zahlensysteme mit der Basis b ist jede Zahl dargestellt als eine Summe von Gliedern, welche nach fallenden Potenzen der Basis b geordnet sind, und deren Coefficienten kleiner als die Basis sind. Somit ist die allgemeine Form für irgendeine Zahl in dem Zahlensysteme mit der Basis b:*

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0.$$

*Darin können die Coefficienten $a_0, a_1, \dots$ bis a_{n-1} die Werte 0,1,2,...bis b-1, a_n die Werte von 1 bis b-1 haben.*¹⁸³

Danach wird das dekadische Zahlensystem eingeführt und die *„Transformation aus einem Zahlensysteme in ein anderes“* behandelt – und das lange vor dem Bau des ersten Rechenautomaten! Diese Inhalte zeigen, dass nicht alle Inhalte, die man im Zuge der Modernisierung des Mathematikunterrichts in den Lehrplan aufnahm, vorher noch nicht behandelt worden waren. Siehe dazu die Forderungen Kleins im Kapitel 1.5, die Kleinsche Reform.

Das Buch behandelt unter anderem Barwertberechnung, Permutationen, Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten und „complexe Zahlen“, das Thema Funktionen wird allerdings sehr kurz gehalten und Differential- und Integralrechnung findet man keine. Es könnte allerdings sein, dass diese Inhalte in einem weiteren Buch behandelt wurden.

5.1.1 Mengenlehre, Aussagenlogik

Unterstufenbücher

In den Büchern von Ludwig und Laub von 1959, 1960 und 1963 findet man entsprechend dem Lehrplan keine Anzeichen von Mengenlehre. In der Ausgabe von 1965, die absolut ident zu den älteren Ausgaben zu sein scheint, findet sich das schon erwähnte Ergänzungsheft für die zweite Klasse, in dem Teilmengen gebildet werden und der Durchschnitt aus verschiedenen Teilmengen. Dabei werden die mengentheoretischen Inhalte nicht erklärt, sondern verwendet, was den Schluss zulässt, dass der Begriff Durchschnittsmenge bekannt sein müsste. Außerdem wird auf Seite 17 dieses Heftes auf das Ergänzungsheft für die erste Klasse verwiesen. Das bedeutet, es gab schon ein derartiges Ergänzungsheft für die erste Klasse, das

¹⁸² Mocnik 1898, S. 1.

¹⁸³ Mocnik 1898, S. 25.

leider verloren gegangen ist. Man darf annehmen, dass in diesem Heft grundlegende Begriffe der Mengenlehre erklärt wurden.

Entsprechend dem Lehrplan findet man im Mathematiklehrbuch der ersten Klasse von 1976 von Laub und Hruby die Grundbegriffe der Mengenlehre und Aussageformen, sogar als erstes Kapitel nach der Wiederholung. Ebenso werden geometrische Grundbegriffe mit Hilfe des Mengenbegriffes erklärt.¹⁸⁴ 1994 war das Kapitel „Mengen“ mit einem „+“ versehen als Erweiterungstoff gekennzeichnet.¹⁸⁵

Das ist Mathematik 1 von 2011 beginnt mit den natürlichen Zahlen. Ein Kapitel Mengenlehre ist im Lehrplan nicht vorgesehen, das Wort Menge kommt nur im Bereich Statistik in Datenmenge und Warenmenge vor. Dennoch findet man im Kapitel „Ungleichungen“ die Zusammenfassung von Lösungen zur Lösungsmenge und das Mengenbild, und die Durchschnittsmenge als gemeinsame Lösungsmenge mehrerer Ungleichungen.

Im Kapitel „Normale Gerade“ wird der Schnittpunkt zweier Geraden in der Mengenschreibweise angegeben: „ $g \cap h = \{S\}$ “ und als kleingedruckte Bemerkung die Gerade als Punktmenge interpretiert und der Schnittpunkt zweier Geraden als Durchschnittsmenge erklärt.¹⁸⁶

In der Reihe Mathe Buch findet man in der aktuellen Ausgabe als letzte Reste der Mengenlehre das Wort Lösungsmenge bei der Behandlung der Ungleichungen. „*Diese Ungleichung stimmt genau dann, wenn $H \leq 4$ ist. [...] Diese Zahlen fasst man zur Lösungsmenge L zusammen.*“¹⁸⁷ Es wird weder eine Durchschnittsmenge oder das Zeichen „ $\in$ “ verwendet. Die Übersetzung von „ $g \cap h = \{S\}$ “ wird ebenfalls als Randbemerkung angegeben, da aber eine Gerade nicht als Punktmenge gedeutet wird, bleibt die Erklärung ebenfalls recht vage: „*Das Symbol $\cap$ kommt aus der Mengenlehre. Es bedeutet hier: ‚Schneide g mit h‘, das ergibt den Punkt S.*“¹⁸⁸

Oberstufenbücher

In den untersuchten Lehrbüchern vor der Neuen Mathematik (außer im schon vorher erwähnten Mocnik)¹⁸⁹ finden sich keinerlei Hinweis auf die Mengenlehre und auf Aussagenlogik. Nicht nur, dass der Begriff einer Menge nicht behandelt wird, die natürlichen Zahlen werden vom „zählen“ abgeleitet. Werden Gleichungen gelöst, so findet man „Unbekannte“ und keine Lösungsmengen.

Bereits im Buch von Laub von 1970 finden sich Mengenlehre und die Anwendung der Mengenlehre auf die Geometrie der Ebene. Die besondere Prägung durch die Mengenlehre

¹⁸⁴ vgl. Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976; Rinderer – Laub: Mathematik 1 Arbeitsbuch 1976 und Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974.

¹⁸⁵ Laub Lehrbuch der Mathematik 1 1994.

¹⁸⁶ Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, S. 190.

¹⁸⁷ Dorfmayr Mathe Buch 1 2006, S. 42.

¹⁸⁸ Dorfmayr Mathe Buch 1 2006, S. 79.

¹⁸⁹ Hanxleden Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten Mittelstufe Arithmetik 1961; Hanxleden Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten Oberstufe Analysis 1963.

aber erkennt man beim Thema Funktionen, wo Funktionen als Mengen von Zahlenpaaren erklärt werden. Dabei werden Definitions- und Wertemenge im aufzählenden Verfahren angegeben. Erst dann wird die Wertetabelle eingeführt. Auch die graphische Darstellung mit Mengendiagrammen (Venn-Diagrammen) wird noch vor jener im Koordinatensystem verwendet.

Zum Vergleich: Heute beginnt das Thema Funktionen in der fünften Klasse mit dem Ablesen von zugeordneten Werten aus einem Graphen. Nur die „korrekte Angabe einer Funktion“ mit „f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ “ verwendet die Definitions- und Wertemenge. Die Darstellung einer Funktion über ein Venn-Diagramm kann man heute kaum mehr finden, sondern ausschließlich Graphen, Wertetabellen und Funktionsgleichungen.

Im ersten Heft des ersten Teils für die 5. Klasse AHS von Laub von 1970 wird die Mengenlehre sehr ausführlich behandelt einschließlich der Anwendung auf Punktmengen in der Geometrie.¹⁹⁰ Im Oberstufenbuch der achten Klasse von Laub von 1975 wird nicht nur Boolesche Algebra behandelt, sondern auch das Rechnen in solchen Verbänden.¹⁹¹ Aussagenlogik findet man ebenso wie Schaltalgebra. Diese Inhalte findet man heute nicht einmal im Informatikunterricht, es sei denn im Wahlpflichtfach Informatik. Im dritten Heft dieses Buches der achten Klasse wurden vor den Algebraischen Strukturen die Inhalte der Mengenlehre wiederholt.

Vergleicht man die Ausgaben des Oberstufenlehrbuches von Laub von 1970, 1978 und jenes von Götz-Reichel¹⁹² von 2010 für die fünfte Klasse AHS, so hat sich sehr viel verändert:

1970 findet man in der dreiteiligen Ausgabe kurz zusammengefasst folgende Kapitel: Mengenlehre, Verknüpfungen, Restklassen, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, Gruppe, Ring, Körper, Funktionen, Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen, Lineare Gleichungen und Ungleichungen in einer Variable, Lineare Gleichungen in zwei Variablen, Potenzen, Vektorraum, Folgen, Reihen und ein wenig Statistik.

1978¹⁹³ findet man zusätzlich Gesetze der Mengenalgebra, Relationen, Induktion und Deduktion, Schaltalgebra, Lineare Optimierung.

Im von Götz und Reichel herausgegebenen Buch von 2010 findet man keine Induktion, keine Relationen. Auch der Begriff Vektorraum wird nicht erklärt. Ebenso vermisst man die Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen und jene zusätzlichen Inhalte der Ausgabe von 1978 bis auf die Mengenalgebra. Die im Zuge der Modernisierung des Mathematikunterrichts neu eingeführten Inhalte machten einen Großteil der Ausgaben 1970 und 1978 aus, und bis auf die ersten 30 (von 260) Seiten (Mengenlehre und Mengenalgebra) ist dieser Teil wieder entfernt worden.

¹⁹⁰ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe I. Teil Erstes Heft, 1970.

¹⁹¹ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe IV. Teil Zweites Heft, 1975.

¹⁹² Götz Mathematik 5 2010.

¹⁹³ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe 1 1978.

Im aktuellen Lehrplan werden die Inhalte der Mengenlehre nicht einer Schulstufe zugeordnet, sondern sind in den didaktischen Grundsätzen als allgemeines Fundament der Mathematik angeführt: *„Das Verwenden von Symbolen für logische Begriffe und Beziehungen und das Beschreiben von Gesamtheiten mit Hilfe von Mengen und Mengenoperationen hat die Basis für exaktes Formulieren und Arbeiten zu legen.“*¹⁹⁴ Bei den Kompetenzen für die neue Reifeprüfung ist dazu noch eine Erläuterung angeführt: *„Die SchülerInnen sollen Teilmengenbeziehungen kennen und Elemente der Zahlenmengen angeben können.“*¹⁹⁵ Im Lehrstoff der fünften Klasse werden Zahlenmengen genannt. Die Aussagenlogik wird im Lehrplan nicht explizit erwähnt. In den aktuellen Schulbüchern findet man die Mengenlehre somit meist als erstes Kapitel in der fünften Klasse bei den Zahlenmengen behandelt. Die Aussagenlogik wird dabei mehr oder weniger intensiv durchgenommen.

Diese Forderungen sind nicht so eindeutige Anweisungen wie in den älteren Lehrplänen, bei denen klar angegeben worden war, welche Symbole gekannt werden sollten. Deshalb findet man in den Schulbüchern der Oberstufe auch unterschiedlich viele Symbole aus der Mengenlehre. Götz¹⁹⁶ führt in einer Übersicht auf den letzten Seiten 10 verschiedene Symbole aus der Mengenlehre an (auch „ist Teilmenge von“, ist echte Teilmenge von, Symmetrische Differenz, Komplementärmengen), während Geretschläger in Elemente der Mathematik 8¹⁹⁷ lediglich „ $\in$ “ und „ $\notin$ “ anführt.

In thema mathematik 5 werden – als Ergänzungsstoff für Realgymnasien markiert – Mengen, Venn-Diagramme, Aussagen, Implikation und Äquivalenz behandelt. Auch die Beweistechnik des indirekten Beweises wird demonstriert und erklärt¹⁹⁸.

Malle¹⁹⁹ behandelt zuerst die Aussagenlogik mit „ $\wedge$ “, „ $\vee$ “, „ $\neg$ “, „ $\implies$ “ und „ $\iff$ “. Auch die Quantoren „ $\exists$ “ und „ $\forall$ “ und deren Verneinung werden eingeführt und in Aufgaben verwendet. Erst danach werden Vereinigung, Durchschnitt, Komplement und Differenz von Mengen, Teilmengenbeziehungen und die Gleichheit von Mengen behandelt, nicht aber der Begriff Mächtigkeit einer Menge.

Die quadratischen Gleichungen haben daher bei Malle keine Lösungsmenge, sondern die Lösung „ $x=a$ “. Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung ist aber eine Gerade und die Gerade im $\mathbb{R}^2$ wird als Punktmenge gedeutet und auch in Mengenschreibweise angegeben:

¹⁹⁴ Didaktische Grundsätze des aktuellen Lehrplans für die Oberstufe S. 3:

http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf, abgefragt am 5.3.2014.

¹⁹⁵ Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe. Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung, S. 8: https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_praxishandbuch_mathematik_2013-11-05.pdf, abgefragt am 5.3.2014.

¹⁹⁶ Götz Mathematik 5 2010.

¹⁹⁷ Geretschläger Elemente der Mathematik 8 2007, S. 201.

¹⁹⁸ Brand thema mathematik 5 2012, S. 8.

¹⁹⁹ Malle Mathematik verstehen 5 2010, S. 22ff.

$$„g=\{(x|y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \cdot x + b \cdot y = c \wedge a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \text{ und } b \text{ nicht zugleich } 0\}“^{200}$$

Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen wiederum besitzen entweder „eine Lösung“ (der Schnittpunkt der beiden Geraden) oder „keine Lösung“ oder „unendlich viele Lösungen“.

Im Vergleich dazu – zur Mengendefinition konsistent – formuliert Götz die Fälle als „ $L=\{(8|69)\}$ “ oder „ $L = \{ \}$ “ oder „ $L = \{(x|y) \in G \mid y = -1/2 \cdot x + 225\}$ “²⁰¹, wobei er die Begriffe „eindeutlich lösbar“ mit „einelementige Lösungsmenge“ verknüpft und „unlösbar“ mit „leere Lösungsmenge“, „mehrdeutig lösbar“ mit „unendliche Lösungsmenge“. Zu jedem dieser Fälle führt er auch die Mengenschreibweise „ $g_1 \cap g_2 = \dots$ “ an. Die quadratischen Gleichungen haben Lösungen der Form $x_1 = 4 \quad x_2 = -4$, wobei später meist die Lösungsmenge (zB. $L = \{-1; 3\}$) angegeben wird. Bei den logischen Operatoren behandelt Götz in Mathematik 5 auch „nand“, „nor“ und „xor“.²⁰²

In Dimensionen 5²⁰³ werden Mengen nur als Zahlenmengen behandelt und keinerlei Aussagenlogik, nur die Symbole für Vereinigung, Durchschnitt und Komplement einer Menge werden angeführt. Die Symbole „ $\wedge$ “ und „ $\vee$ “, die für die beschreibende Mengendarstellung notwendig sind, werden in einer Fußnote erklärt. Dennoch ist die Mathematik vom Mengenbegriff durchdrungen, so wird der Graph einer Funktion als die Menge aller Paare $(x, f(x))$ gedeutet.²⁰⁴ Beim Lösen von Gleichungen werden gleich zu Beginn die Begriffe Grund-, Definitions- und Lösungsmenge erklärt.²⁰⁵ Auch die Lösung einer Gleichung wird dann als „ $L = \{3\}$ “ angegeben, und bei Gleichungssystemen in zwei Variablen werden die Fälle wie bei Götz als Lösungsmengen angegeben, nur bei quadratischen Gleichungen findet sich im Buch keine Lösungsmenge, sondern die Angabe „ $x_1 = 0$ “ und „ $x_2 = -5/3$ “²⁰⁶. Der Lesetext dazu lautet:
*„Ist $D > 0$, so hat die quadratische Gleichung zwei reelle Lösungen.
Ist $D = 0$, so hat die quadratische Gleichung eine reelle Lösung, auch Doppellösung genannt.
Ist $D < 0$, so hat die quadratische Gleichung keine Lösung aus den reellen Zahlen.“*²⁰⁷

5.1.2 Grundrechnungsarten in anderen Basen

Vor der Neuen Mathematik wurde von Ludwig und Laub nur das dekadische Zahlensystem und als Gegenbeispiel das Zahlensystem der Römer behandelt.²⁰⁸ Hanxleden²⁰⁹, ein deutsches Buch, dagegen behandelt im Lehrbuch für die 8. bis 10. Schulstufe sowohl das 60er System der Babylonier also auch das Darstellen und Rechnen im Dualsystem (ohne Division).

²⁰⁰ Malle Mathematik verstehen 5 2010, S. 195.

²⁰¹ Götz Mathematik 5 2010, S. 164.

²⁰² Götz Mathematik 5 2010, S. 26.

²⁰³ vgl. Bleier Dimensionen 5 2009.

²⁰⁴ Bleier Dimensionen 5 2009, S. 72.

²⁰⁵ Bleier Dimensionen 5 2009, S. 121.

²⁰⁶ Bleier Dimensionen 5 2009, S. 132.

²⁰⁷ Bleier Dimensionen 5 2009, S. 134.

²⁰⁸ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1959, S. 11.

²⁰⁹ vgl. Hanxleden Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten Mittelstufe Arithmetik 1961, S. 1ff.

Rath lässt in seinem Arbeitslehrbuch von 1974 die SchülerInnen Zahlen in andere Basen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) verwandeln und umgekehrt aus Zahlen anderer Systeme in Zahlen des dekadischen Systems verwandeln. Dabei führt der ohne nähere Erläuterung und Rechenregeln die Potenzen ein, er erklärt die Schreibweise „ 4^3 “ als $4 \cdot 4 \cdot 4$. Die Einheiten Dutzend und Gros werden eingeführt, aber die Verwandlung nur vom 12er System ins dekadische System behandelt. Damit vermeidet dieses Buch die Problematik um die fehlenden Ziffern für 10 und 11. Auch Addition und Subtraktion (durch Addition der Komplementärzahl) sollen ausgeführt werden, wobei sogar der Überlauf (eine Problematik, die bei Überschreitung der Speichergrenze in der Informatik auftritt) wird erklärt²¹⁰.

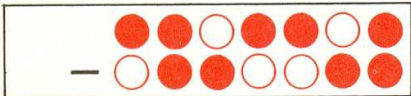
38 Subtrahiere wie ein Computer!

a) $\begin{array}{r} 1001101 \\ - 0111010 \\ \hline \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 11100101 \\ - 01010111 \\ \hline \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 10110110 \\ - 10001101 \\ \hline \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 110011101 \\ - 011101011 \\ \hline \end{array}$

39 Führe die folgenden Subtraktionen im Zehnersystem mit Hilfe der Addition der Komplementärzahl durch!

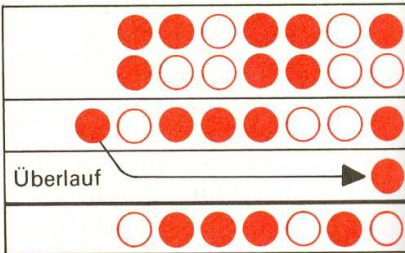
a) $\begin{array}{r} 32\,946 \\ - 26\,571 \\ \hline \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 65\,946 \\ - 6\,068 \\ \hline \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 39\,617 \\ - 24\,748 \\ \hline \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 471\,649 \\ - 7\,472 \\ \hline \end{array}$

Beim Computer bedeutet die Ziffer 1: (brennendes Lämpchen), die Ziffer 0: (nicht brennendes Lämpchen).
Wir stellen die Subtraktion $1101101 - 0110011$ mit Lämpchen dar (Abb. 254 und 254a).



Der Subtrahend wird umgeschaltet in einen Summanden.

Abb. 254



Überlauf

Abb. 254a

40 Stelle die Subtraktionen der Aufgabe 38 mit Hilfe unseres Lämpchencomputers dar!

Bemerkung:
Werden einem Computer zu große Zahlen eingegeben, so fallen die vorderen Stellen weg, oder der Computer streikt.

Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 164.

Dieser Stoff ist heute den Studenten der Informatik vorbehalten, er wird nicht einmal im Rahmen des Informatikunterrichts einer AHS gelehrt. Dieser Inhalt wird aber auch bei Rath als Ergänzungsstoff gekennzeichnet. Man findet in diesem Kapitel aber auch das Zahlensystem der Maya, der Ägypter, der Babylonier und der Römer erklärt. Die SchülerInnen sollen sogar ägyptische, babylonische und römische Zahlen lesen und dekadische Zahlen in diesen Systemen darstellen.

²¹⁰ vgl. Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 154ff.

In allen für diese Untersuchung betrachteten Unterstufenbüchern der Ludwig – Laub – Hruby – Serie²¹¹ und dann später in den Büchern von Reichel und Humenberger findet man nur das dekadische Zahlensystem und die römischen Zahlen. In den Oberstufenbüchern von Laub von 1970, aber auch in den anderen Unterstufenbüchern von Floderer von 1980²¹² und Rinderer Laub von 1985 werden keine nichtdekadischen Zahlensysteme behandelt.

Dafür findet man diesen Inhalt im Büchlein „Keine Angst vor der Mengenlehre“²¹³ (siehe 3.1.6). Dieses an die Eltern von VolksschülerInnen gerichtete Buch will den Eltern jenen Inhalt vermitteln, den die Kinder nun lernen, der aber den Eltern aus deren Schulzeit nicht bekannt ist. Dabei sollen die „Fortgeschrittenen“ Zahlen ins 5er, 6er, 11er, 8er und 4er System verwandeln. Es wird aber nicht erklärt, warum statt 1000, 100, 10 und 1 die neuen Stellenwerte 125, 25, 5 und 1 sind. Das Elfersystem mit den Stellenwerten 1331, 121, 11 und 1 müsste eigentlich besonders kompliziert sein, da keine Ziffer für 10 festgelegt wurde, für das 11er System bräuchte man ja für jeden möglichen Wert < 11 ein Symbol. Die Zahlen, die umgewandelt werden sollen, benötigen keine Ziffer „10“, was wäre aber, würde jemand zusätzlich üben wollen und versuchen, 21 ins 11er System übertragen zu wollen? Die Umrechnungen werden sehr verkürzt dargestellt und nicht ausreichend erklärt.

Obwohl nicht mehr im aktuellen Lehrplan der Unterstufe vorgesehen sind in vielen Unterstufenbüchern die römischen Zahlen erhalten geblieben²¹⁴, in „Das ist Mathematik 1“ von 2011 zB. als Einstieg! In „100% Mathematik 1“ von 2014 findet man sogar noch nichtdekadische Zahlensysteme erklärt, allerdings ohne Umwandlungen,²¹⁵ die SchülerInnen sollen sich nur die Zahlenfolge der nichtdekadischen Systeme der Reihe nach aufschreiben. Die abgebildeten Potenzen von 8 (nicht als solche bezeichnet, sonder zB. als „ $8 \cdot 8 \cdot 8$ “) erinnern an die logischen Blöcke von Dienes. In Expedition Mathematik 1 von 2007 wird sogar der Aufbau einer Zahl im „Zweiersystem“ erklärt und Umwandlungen einer Binärzahl ins Zehnersystem geübt. Es sind sogar Aufgaben vorgesehen, die den Weg in einem Labyrinth mit Binärzahlen kodieren lassen.²¹⁶ Auch das Mathe Buch 1 von 2006 behandelt ein nichtdekadisches Zahlensystem, und zwar das „quinäre“ Zahlensystem, dabei sollen Zahlen in beide Richtungen umgewandelt werden.²¹⁷

Die Darstellung von Zahlen in dekadischen und nichtdekadischen Zahlensystemen ist derzeit im Lehrplan für die 5. Klasse AHS vorgesehen. Dabei ist es vielleicht interessant, welche anderen nichtdekadischen Zahlensysteme in den einzelnen Schulbüchern behandelt werden. Die meisten Autoren erklären die in der Informatik gebräuchlichen Systeme mit der Basis 2 und

²¹¹ vgl. Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1959, 1963, 1965; Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976; Laub Lehrbuch der Mathematik 1 1994; Humenberger Das ist Mathematik 1 2011.

²¹² Floderer Mathematik 1 1980.

²¹³ Jarolim 1974, Übung L 19 S. 59.

²¹⁴ Eßletzbichler 100% Mathematik 1 2014, S. 52, Kraker Expedition Mathematik 1 2007, S. 28 und Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, S. 14.

²¹⁵ Eßletzbichler 100% Mathematik 1 2014, S. 55.

²¹⁶ Kraker Expedition Mathematik 1 2007, S. 17f.

²¹⁷ Dorfmayr Mathe Buch 1 2006, S. 18f.

16^{218,219,220,221}, manche widmen sich historischen Zahlensystemen der Ägypter oder Babylonier²²² oder anderen Zahlensystemen^{223, 224}.

Das Ausführen von Rechenoperationen in anderen Zahlensystemen ist im aktuellen Lehrplan nicht explizit vorgesehen. Dennoch wird es in einigen Buchreihen behandelt^{225,226,227}.

5.1.3 Algebraische Strukturen

In den älteren Büchern, also in der Zeit vor der Modernisierung des Mathematikunterrichts waren algebraische Strukturen in keiner Weise Thema. Es wurden weder die Inhalte noch die Begriffe behandelt.²²⁸

Das Kernthema der Neuen Mathematik wurde je nach geltendem Lehrplan sowohl in der dritten, fünften als auch in der achten Klasse der AHS behandelt. Entsprechend findet man sowohl die Definition von Gruppe, Ring und Körper als auch Aufgaben dazu in verschiedenen Büchern²²⁹, in der fünften Klasse wird auch die Anwendung von Gruppeneigenschaften auf lineare Gleichungen oder die Gruppe der Dreieckabbildungen eines gleichseitigen Dreiecks behandelt. Auch die Begriffe Ordnung einer Gruppe und Untergruppe werden eingeführt. In der achten Klasse werden weiters Vektorräume, der Verband und Rechnen in Strukturen abgehandelt.²³⁰ Aber auch in den anderen Jahrgängen sind algebraische Strukturen zu finden, so lautet das zweite Kapitel im ersten Heft des III. Teiles „*Der Körper der komplexen Zahlen*“ und das sechste Kapitel „*Der Ring der ganzrationalen Funktionen in einer Variablen*“.²³¹ In der sechsten Klasse lernt man nicht das Skalarprodukt oder das vektorielle Produkt, sondern die erste und zweite multiplikative Verknüpfung zweier Vektoren.²³² Im Buch der siebten Klasse werden die Strukturen in der Menge der Polynomfunktionen mit den Verknüpfungen „+“, „·“ und „o“ ausführlich behandelt.²³³

Der Vergleich von Strukturen erfolgt aber auch auf anderem Wege. So werden „Paarmengen“ verglichen: Bruchzahlen – Vektoren im $\mathbb{R}^2$ – Komplexe Zahlen. Bezüglich der

²¹⁸ Brand thema mathematik 5 2012, S. 30.

²¹⁹ Bleier Dimensionen Mathematik 5 2009, S. 34.

²²⁰ Götz Mathematik 5 2010, S. 62.

²²¹ Malle Mathematik verstehen 5 2010, S. 58.

²²² Bleier Dimensionen Mathematik 5 2009, S. 32, aber ohne Aufgaben dazu.

²²³ Bleier Dimensionen Mathematik 5 2009, S. 35, 3er System, 8er System.

²²⁴ Götz Mathematik 5 2010, S. 62, Basis 3, 4, 5, 6.

²²⁵ Bleier Dimensionen Mathematik 5 2009, S. 35, Addition, Subtraktion und Multiplikation im Binärsystem;

²²⁶ Götz Mathematik 5 2010, S. 63, Addition, Multiplikation im Dualsystem.

²²⁷ Brand thema mathematik 5 2012, S. 31.

²²⁸ Ludwig Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen 3A 1941; Hanxleden Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten Mittelstufe Arithmetik 1961; Hanxleden Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten Oberstufe Analysis 1963;

²²⁹ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe I. Teil erstes und zweites Heft 1970.

²³⁰ Laub: Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe IV. Teil drittes Heft 1976.

²³¹ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe III. Teil erstes Heft 1970.

²³² Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe II. Teil drittes Heft 1970.

²³³ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe III. Teil erstes Heft 1970, S. 112.

Verknüpfungen „+“ und „·“ werden die Ordnung und die Definition von Gleichheit eines Elements untersucht.²³⁴

Im Lehrbuch von Laub von 1978 für die 5. Klasse AHS²³⁵ werden ebenfalls noch ausführlich Gruppe, Ring und Körper behandelt. Außerdem werden der Isomorphismus von $(\mathbb{N}_0^+; +)$ auf $(\mathbb{Z}_0^+; +)$ und von $(\mathbb{N}_0^+; \cdot)$ auf $(\mathbb{Z}_0^+; \cdot)$ ²³⁶ und andere Isomorphismen erklärt, es sind aber keine Aufgaben dazu vorgesehen. Die Zahlenmengen werden zuerst als Mengen eingeführt, der Begriff Körper wird erst später erklärt, und dann die Eigenschaften des Körpers $(R, +, \cdot)$ betrachtet. Zu diesen Strukturbegriffen sind einige wenige Aufgaben vorgesehen, meist mit Restklassen als Mengen.

Im Lehrbuch von Reichel von 1992 für die 5. Klasse²³⁷ findet man weder Begriffe noch Inhalte zu den Algebraischen Strukturen außer einer kurzen Zusammenfassung (eine Seite) über die Rechengesetze der Addition und Multiplikation bei reellen Zahlen, bei der neutrales und inverses Element und Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz angeführt werden.²³⁸

Algebraische Strukturen findet man derzeit in fast keinem Schulbuch, das bedeutet, der Begriff „Gruppe“ oder der Begriff „Körper“ wird nicht erwähnt. In manchen Schulbüchern der 5. Klasse AHS werden aber die entsprechenden Axiome behandelt^{239,240}. Dazu muss man festhalten, dass diese Themen nicht im aktuellen Lehrplan vorgesehen sind, man findet „algebraische Strukturen“ nur unter den vielen möglichen Themen für die Vertiefung im Wahlpflichtfach Mathematik.

In einem Übungsbuch zur Vorbereitung speziell auf den ersten Teil der neuen standardisierten teilzentrierten Reifeprüfung findet man erstaunlicherweise Aufgaben zu algebraischen Strukturen ohne die Begriffe Gruppe, Ring und Körper zu erwähnen.²⁴¹ Dabei soll zB. untersucht werden, ob „ $(a-b)^2$ “ eine „Verknüpfung“ auf $\mathbb{Z}$ darstellt. Ebenso sind Aufgaben zu Abgeschlossenheit und neutralem Element vorgesehen.²⁴² Im Theorieteil werden als „Basiswissen – Algebraische Verknüpfungen“ Eigenschaften zweistelliger Verknüpfungen behandelt. Im Vorwort wird der Lehrplan der 5. Klasse AHS und das Kompetenzmodell als Grundlage der Stoffgebiete angeführt.

Als Beispiel für die Gestaltungsfreiheit bei Schulbüchern seien zwei aktuelle Lehrbücher für die achte Klasse erwähnt: Götz widmet der „modernen Algebra“ ein Kapitel unter „Wiederholung, Vertiefung und Ergänzung“. Dabei definiert er Gruppe und Körper, erwähnt aber auch andere Arten von Strukturmerkmalen wie zB. Ordnung. Außerdem sind auch Übungsaufgaben dazu

²³⁴ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe III. Teil erstes Heft 1970, S. 75.

²³⁵ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe 1 1978.

²³⁶ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe 1 1978, S. 61.

²³⁷ Reichel Lehrbuch der Mathematik 5 1992.

²³⁸ Reichel Lehrbuch der Mathematik 5 1992, S 63.

²³⁹ Götz Mathematik 5 2010, S. 50; hier werden die Axiome der reellen Zahlen behandelt.

²⁴⁰ Brand thema mathematik 5 2012, S. 16; hier werden die Axiome der ganzen Zahlen behandelt.

²⁴¹ Kuchlbacher Mathematik Alles im Griff! 1 2012, S. 8.

²⁴² Kuchlbacher Mathematik Alles im Griff! 1 2012, S. 7.

vorgesehen. In einem ausführlichen Informationstext zur Motivation des Themas wird der Begriff algebraische Struktur erklärt und andere Strukturen wie Mengenalgebra und Vektorraum angeführt.²⁴³

Bei Malle²⁴⁴ dagegen erschöpft sich die Behandlung der Grundbegriffe der („alten“) Algebra mit der Aufzählung der Begriffe Variable, Term, Formel, Lösbarkeit, Gleichung, Äquivalenz.

5.1.4 Veränderungen in der Geometrie

Im Lehrbuch von Hanxleden zur Geometrie²⁴⁵ findet man die Kapitel Trigonometrie, Sphärische Trigonometrie, Analytische Geometrie und Geometrische Behandlung der Kegelschnitte. Abgesehen von dem heute gänzlich unbekannten Thema sphärische Trigonometrie findet man in der analytischen Geometrie keine Vektoren, keine Ebenen und einen deutlichen Schwerpunkt auf den Kegelschnitten. Außerdem werden keine Bewegungen wie Spiegelung, Streckung, Stauchung und Drehung behandelt. Determinanten werden übrigens im Arithmetikteil behandelt.²⁴⁶

Auch im Mathematischen Unterrichtswerk für die 6. bis 8. Klasse von Ludwig von 1941²⁴⁷ findet man Trigonometrie, Kegelschnitte zeichnerisch und analytisch behandelt und sphärische Trigonometrie. Die sphärische Trigonometrie verschwindet ab den 60iger Jahren völlig aus den Schulbüchern.

Im Lehrbuch von Laub findet man bereits im Buch für die 3. und 4. Klasse ein Kapitel für Bewegungsgeometrie.²⁴⁸ Im Lehrbuch von Laub von 1970 für die 5. Klasse AHS werden Kongruenzabbildungen zeichnerisch durchgeführt, neu ist allerdings die Herleitung von Sätzen zu diesen Abbildungen, wobei diese Herleitungen nicht verbal, sondern in Symbolsprache notiert sind.

²⁴³ Götz Mathematik 8 2013, S. 212ff.

²⁴⁴ Malle Mathematik verstehen 8 2012, S. 178.

²⁴⁵ Hanxleden Mathematik für höhere Lehranstalten Oberstufe Geometrie 1959.

²⁴⁶ Hanxleden Mathematik für höhere Lehranstalten Mittelstufe Arithmetik 1961, S. 335.

²⁴⁷ Ludwig Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen 3A 1941.

²⁴⁸ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 3 und 4 1967.

Ist eine Translation T_v gegeben, so zerlegt man T_v in zwei Geraden-
spiegelungen an zueinander parallelen Achsen, deren Abstandsvektor $\frac{1}{2}v$
ist. Dann gilt (Abb. 152):

$$\begin{aligned} T_v &= S_g \circ S_h \\ &= S_g \circ I \circ S_h \\ &= S_g \circ (S_1 \circ S_1) \circ S_h \\ &= (S_g \circ S_1) \circ (S_1 \circ S_h) \\ &= S_{Z_1} \circ S_{Z_2} \end{aligned}$$

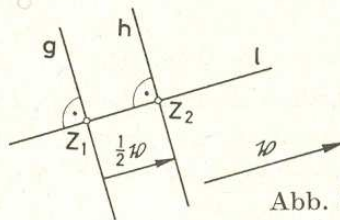


Abb. 152

**Jede Parallelverschiebung T_v kann auf unendlich viele Arten als ein
Produkt $S_{Z_1} \circ S_{Z_2}$ von zwei Punktspiegelungen S_{Z_1} und S_{Z_2} dargestellt
werden, wobei $\overrightarrow{Z_1 Z_2} = \frac{1}{2}v$.**

Bemerkung: Die Zwischenschaltung der identischen Abbildung I in Form
von $S_1 \circ S_1$ in der zweiten und dritten Zeile ist analog zur algebraischen
Umformung $a \cdot c = a \cdot b \cdot \frac{1}{b} \cdot c$.

Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe I. Teil zweites Heft 1970, S. 144.

Weiters ist das Rechnen mit Vektoren neu, dabei werden nicht nur Vektoren addiert, sondern es wird auch bewiesen, dass die Vektoren der Ebene bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe bilden. Die Gruppe der Punktspiegelungen und Translationen wird untersucht.

Folgende Aufgabe verdeutlicht die Modernisierung im Bereich Geometrie besonders deutlich: „Zeige den Isomorphismus zwischen der Gruppe der Drehungen um denselben Punkt mit den Drehwinkeln 0° , 120° , 240° und der multiplikativen Gruppe der Restklassen $1, 4, 7 \pmod{9}$!“²⁴⁹

Kegelschnitte werden erst in der 8. Klasse²⁵⁰ behandelt, sie bekommen im Vergleich zum restlichen Stoff einen relativ kleinen Raum. Ansonsten wird noch das skalare Produkt, das vektorielle Produkt zweier Vektoren, Geraden und Ebenen in Parameterdarstellung und Matrizen und Determinanten in der 6. Klasse behandelt²⁵¹ und in der 7. Klasse Kreis und Kugel²⁵².

Die Vektorrechnung hat sich bis heute gehalten, der Schwerpunkt auf die Bewegungsgeometrie bzw. die Kongruenzabbildungen in der Unterstufe wurde sehr schnell wieder zurückgenommen und findet sich heute in keinem Schulbuch mehr. Die Behandlung der Kegelschnitte wurde bis heute sukzessive verringert, derzeit sind sie nicht mehr als Stoff für die Zentralmatura vorgesehen. Die strukturelle Betrachtung geometrischer Begriffe ist vollkommen verschwunden. Als Stoff für das Realgymnasium bzw. als Vertiefungsthema sind in manchen Oberstufenbüchern noch Matrizen und Determinanten zu finden.²⁵³

²⁴⁹ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe I. Teil zweites Heft 1970, Aufgabe 499, S. 165.

²⁵⁰ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe VI. Teil erstes Heft 1975.

²⁵¹ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe II. Teil drittes Heft 1970.

²⁵² Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe III. Teil zweites Heft 1971.

²⁵³ meist in Büchern der 6. Klasse AHS, zB in Götz Mathematik 6 2010, S. 19.

5.1.5 Ungleichungen

Vor der Modernisierung des Mathematikunterrichts waren nur (lösbare) Gleichungen im Schulbuch zu finden.²⁵⁴ Der Schwerpunkt lag auf dem Lösen von Gleichungen oder auf dem Lösen von Aufgaben, die noch eine Übersetzung der Textaufgabe in eine Gleichung verlangten. Der Begriff Ungleichung findet sich bei Hanxleden zB. nur beim Eingrenzen eines Näherungswertes zwischen zwei Logarithmen.²⁵⁵

Obwohl Ungleichungen nicht zum Kernthema der Neuen Mathematik gehörte und zB. im von Dieudonné vorgeschlagenen Aufbau des Mathematikunterrichts an Gymnasien²⁵⁶ nicht angeführt werden, werden in den schon erwähnten Zusatzheften zu den Lehrbüchern von Ludwig und Laub die Ungleichungen eingeführt. Nach der Aussageform wird die lineare Ungleichung in einer Variable noch vor der Gleichung behandelt.²⁵⁷ Dabei sollen mögliche Lösungen aus einer Grundmenge ausgewählt werden, diese Elemente werden als Lösungsmenge bezeichnet. Im dazugehörigen Schulbuch von 1967 wurden nur Gleichungen gelöst und die Lösung mit „ $x = 18$ “ angegeben.²⁵⁸

Seither hat sich dieses Thema im Lehrplan gehalten²⁵⁹, wenngleich es in den Schulbüchern meist nur sehr kurz behandelt wird. Allerdings ist dieses Thema ein Beispiel für den Gestaltungsspielraum der Schulbuchautoren. Während Humenberger dem Thema ein eigenes Kapitel widmet²⁶⁰, Lösungen für eine Ungleichung mit „ $a \geq 9$ “ angibt, lässt er für zwei Ungleichungen die Durchschnittsmenge der Lösungen bilden und stellt diese „Lösungsmenge“ mit einem Venn-Diagramm dar.

In 100% Mathematik 1 soll der Schüler/die Schülerin die natürlichen Zahlen, die kleiner als 7 sind, (ohne Mengenklammer) aufschreiben. Bei der Aufgabe 225 soll die Menge S angegeben werden, die alle Zahlen der Siebenerreihe enthält, die größer als 10 und kleiner als 60 sind²⁶¹. Dabei findet der Lernende „ $S=\{...\}$ “ (mit ausreichendem Platz zum Einfügen) vorgedruckt. Die Begriffe „Lösungsmenge“ und „Ungleichung“ werden in diesem Buch nicht erwähnt. Das Thema Gleichungen wird erst 50 Seiten später behandelt. Dort wird die Lösung einer Gleichung mit „ $x=11$ “ angegeben²⁶².

²⁵⁴ Ludwig Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen 3A 1941.

²⁵⁵ Hanxleden Mathematik für höhere Lehranstalten Mittelstufe Arithmetik 1961, S. 279.

²⁵⁶ Stender 1962, S. 69.

²⁵⁷ Ergänzungsheft für die 3. Klasse 1970, S. 7: zu Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 3 und 4 1967.

²⁵⁸ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 3 und 4. 1967, S. 18.

²⁵⁹ Im aktuellen Lehrplan der ersten Klasse heißt es: „einfache Ungleichungen zum Einschränken benutzen“, während für Gleichungen gilt: „Lösungen zu einfachen linearen Gleichungen finden können“.

²⁶⁰ Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, S. 90.

²⁶¹ Eßletzbichler 100% Mathematik 1 2014, S. 67.

²⁶² Eßletzbichler 100% Mathematik 1 2014, S. 117.

5.2 Vergleich der Veränderungen einzelner Inhalte

5.2.1 Einführung der natürlichen Zahlen in der fünften Schulstufe

Im Lehrbuch für die LehrerInnenbildung von 1958 wird der Lernende aufgefordert Zahlen anzugeben. Dann wird die Zahl versteckt über den Mengenbegriff definiert: Verschiedene Dinge sollen durch Weglassen von unterscheidbaren Merkmalen zu einer Mehrheit von gleichartigen Dingen zusammengefasst werden. Dabei wird zwischen einer benannten Zahl (7 Stühle) und einer unbenannten Zahl (sieben) unterschieden. „Die Einheit der unbenannten Zahlen ist **Eins**. ... Das Bilden der aufeinanderfolgenden Zahlen durch fortgesetztes Hinzufügen der Einheit heißt **Zählen**. Man erhält dadurch die Reihe [!] der **natürlichen** oder **ganzen Zahlen**.“²⁶³

Im Lehrbuch von Ludwig und Laub von 1959²⁶⁴ wird der erste Abschnitt „Die ganzen Zahlen“ genannt, dabei wird – wie im gesamten Buch für die erste und zweite Klasse – ausschließlich mit positiven Zahlen gerechnet²⁶⁵. Es finden sich keine Hinweise auf Elemente der Mengenlehre, die Zahlen werden nicht definiert, sondern als bekannt vorausgesetzt und einfach verwendet.

Im Hauptschullehrbuch von 1965 von Schön findet man ebenfalls keine Hinweise auf die Mengenlehre: Die natürlichen Zahlen sind keine Menge²⁶⁶.

Die Reihenfolge in der Arithmetik im Buch von Laub-Hruby von 1976²⁶⁷ entspricht dem damals gebräuchlichen didaktischen Zugang: Nach den Grundbegriffen der Mengenlehre werden ausgehend von der Mächtigkeit der Mengen die Natürlichen Zahlen samt dem dekadischen Zahlensystem eingeführt. Dabei wird die Eigenschaft der Ordnung behandelt, gerechnet wird noch nicht. Auch bei Floderer im Mathematik 1 von 1980 ist es noch so.²⁶⁸ Im Mathematik Arbeitsbuch 1 von Rinderer²⁶⁹ von 1985 verläuft die Einführung etwas anders: zuerst wird das dekadische Zahlensystem erklärt, dann wird der Zahlenstrahl eingeführt, dabei ist die Strecke von 0 bis 1 eine Einheitsstrecke und jeder Zahl wird ein Punkt auf dem Zahlenstrahl zugeordnet. Dann werden Zahlen verglichen, geordnet, dann werden Mengen (von Zahlen) eingeführt: „Die roten Zahlen sind mit einer Schleife zu einer Menge zusammengefaßt.“, „ $\in$ “ und „ $\notin$ “ werden erklärt, dann erfolgt die „Definition“ der natürlichen Zahlen: „Die Zahlen 1, 2, 3, ..., 17, ..., 589, ... heißen natürliche Zahlen.“²⁷⁰ Die Mächtigkeit einer Menge wird nicht erwähnt. Auch im Buch von Laub von 1994²⁷¹ wird die Zahl nicht definiert, die

²⁶³ Konrath – Niederle: Arithmetik und Geometrie für Lehrer- und Lehrerinnenbildungsanstalten I 1958, S. 7.

²⁶⁴ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1959, S. 1.

²⁶⁵ Die negativen Zahlen werden erst in der dritten Klasse eingeführt, vgl. Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 3 und 4 1967, S. 39.

²⁶⁶ Schön Lehrbuch der Mathematik 1 1965, S. 40.

²⁶⁷ Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976.

²⁶⁸ Floderer Mathematik 1 1980, S. 58.

²⁶⁹ Rinderer Mathematik Arbeitsbuch 1 1985

²⁷⁰ Rinderer Mathematik 1 1985, S. 31.

²⁷¹ Laub Lehrbuch der Mathematik 1 1994, S. 22.

natürliche Zahl wird durch aufzählen („0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, . . .“) „erklärt“ und gegenüber anderen Zahlen (Brüche und Dezimalzahlen) abgegrenzt. Danach erst werden die Zahlen zu einer Menge zusammengefasst.

Das ist Mathematik 1 von Humenberger beginnt mit den natürlichen Zahlen. Die (natürliche) Zahl wird in einem Text eingeführt über das Zählen von Tieren bei unseren Vorfahren, die Zahlzeichen bei Sumerern. Danach kommt das Kapitel „Römische Zahlzeichen“, das dekadische Zahlensystem, die Ordnung der natürlichen Zahlen. Hier begegnet der Schüler/die Schülerin den Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_u$, $\mathbb{N}_g$.

Im Mathe Buch 1 beginnt das Kapitel „Die natürlichen Zahlen“ mit: *„Natürliche Zahlen verwendet man zuerst einmal zum Zählen. Sie beginnen bei Null und besitzen kein Ende: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$ Das Symbol $\mathbb{N}$ steht für die **Menge der natürlichen Zahlen**.“*²⁷²

In 100% Mathematik 1²⁷³ ist als erstes Kapitel Statistik vorgesehen, dann folgen geometrische Grundbegriffe (Strecke, Strahl, Symmetrie, Kreis, Winkel) und erst als drittes Kapitel folgen die natürlichen Zahlen. Dabei ist die erste „Idee“ das Bündeln von Zahlen. Über die römischen Zahlen und andere Zahlensysteme, zB. das der Babylonier aber auch Zahlensysteme mit anderer Basis als 10 nähert man sich dem dekadischen Zahlensystem, dem Runden, bis man schließlich zu $\mathbb{N}$ gelangt.

Die Einführung der Mengenlehre noch vor der Behandlung der natürlichen Zahlen im Zuge der Modernisierung des Mathematikunterrichts entsprach dem Wunsch, auch so etwas Triviales wie den Begriff „Zahl“ zu definieren. Die Neue Mathematik sah dafür die Mächtigkeit der Mengen vor. Nachdem nun die Mengenlehre aus dem Lehrplan der ersten Klasse AHS entfernt wurde, ist diese Möglichkeit der Definition einer natürlichen Zahl über die Mächtigkeit verloren gegangen. Viele Schulbuchautoren sehen eine Notwendigkeit, diesen Begriff näher zu betrachten, sondern bauen auf die intuitive Vorstellung der Lernenden zum Zahlbegriff.

5.2.2 Die Grundrechnungsarten in der fünften Schulstufe

Addition und Subtraktion

Im Lehrbuch der Mathematik für die 1. und 2. Klasse von 1959 wird das Rechnen mit den „ganzen Zahlen“ als von der Volksschule her bekannt angesehen und zuerst im Kapitel „Kopfrechnen“ praktisch geübt. Laub lässt gleich am Beginn des Kapitels „Addition“ die SchülerInnen „weiterzählen“: *„Zähle 10mal um je 10 weiter und schreibe die Zahlen an:...”*²⁷⁴ und führt damit zur Addition: *„Eine Rechnung wie $8 + 3 = 11$ heißt Addition“.*

²⁷² Dorfmayr Mathe Buch 1 2006, S. 6.

²⁷³ Eßletzbichler 100% Mathematik 1 2014.

²⁷⁴ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1959, S. 15.

Danach werden die Begriffe „Summand“ und „Summe“ und Rechenregeln behandelt: „Die Summe bleibt gleich, wenn man die Reihenfolge der Summanden ändert.“²⁷⁵

Das Kommutativgesetz wird als solches nicht genannt, nur die Rechenregel dazu wird formuliert, nachdem ein Einkauf von drei Artikeln auf sechs verschiedene Arten addiert wurde. Hoffentlich erhält der Lernende auch wirklich jedes Mal das gleiche Ergebnis. Abschließend wird ein „Rechenschieber“ angefertigt: zwei Maßstäbe (Lineale) mit einander zugekehrten Skalen sollen so nebeneinander (aufeinander) verschoben werden, dass die Null des oberen Teils auf dem ersten Summanden „eingestellt“ wird, und man am unteren Teil des „Rechenschiebers“ die Summe ablesen kann. Das folgende Beispiel soll die Rechnung $3 + 4 = 7$ zeigen:



Ludwig Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1959, S. 17.

In Lehrbuch der Mathematik von Schön von 1965 wird das Kapitel der Addition mit „Zuzählen“ bezeichnet und erst später der Begriff „Addition“ eingeführt.²⁷⁶ Nachdem der Zahlenstrahl eingeführt wurde, wird das „Vertauschen der Summanden“²⁷⁷ und das „Vertauschen der Abzugszahlen“²⁷⁸ am Zahlenstrahl dargestellt. Die Tatsache, dass man Subtrahend und Minuend nicht vertauschen darf, wird weder festgehalten noch dargestellt. Das Rechengesetz der Kommutativität der Addition wird ebenfalls nicht in Worten festgehalten, sondern nur mit dem illustrierten Rechenbeispiel vorgeführt.

Vergleichen wir die zwei Mathematik Arbeitsbücher von 1976 von Laub-Hruby und Rinder-Laub, so wird die Addition nahezu wortident behandelt. Sogar dieselben Abbildungen werden verwendet. Ein Unterschied aber besteht in der Überschrift: bei Laub-Hruby heißt es „Addition in $\mathbb{N}$ “²⁷⁹, bei Rinderer-Laub nur „Addition“²⁸⁰. Weiters wird bei Laub-Hruby im Kapitel „Die Addition als Verknüpfung“ folgendes ausgeführt:

²⁷⁵ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1959, S. 16.

²⁷⁶ Schön Lehrbuch der Mathematik 1 1965, S. 30.

²⁷⁷ Schön Lehrbuch der Mathematik 1 1965, S. 42.

²⁷⁸ Schön Lehrbuch der Mathematik 1 1965, S. 43.

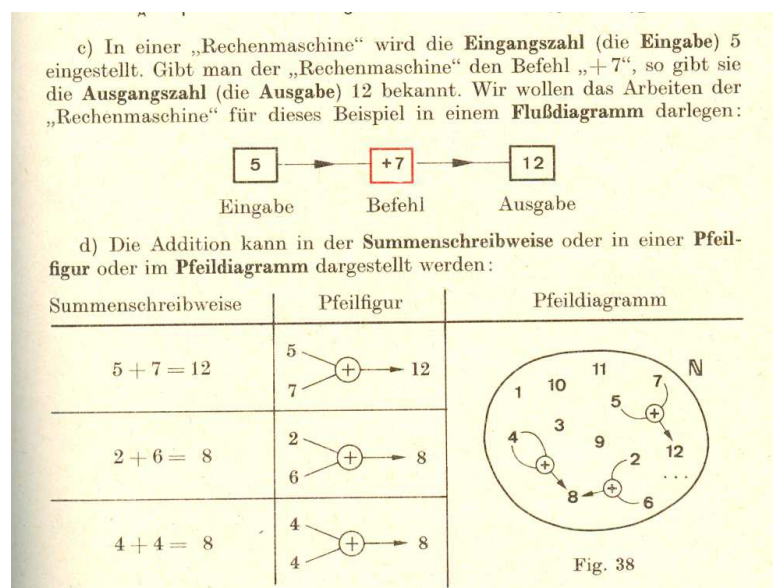
²⁷⁹ Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, S. 55.

„Beim Addieren zweier natürlicher Zahlen erhält man stets wieder eine natürliche Zahl. Allgemein gilt: [in einem rosa Kästchen hervorgehoben] Die Addition ist in der Menge N unbeschränkt ausführbar. Man sagt: [in einem rosa Kästchen hervorgehoben] Die Menge N ist bezüglich der Addition abgeschlossen.“²⁸¹ Als Gegenbeispiel wird die Menge N_u bezüglich der Addition als nicht abgeschlossen erklärt. Dieses Kapitel fehlt bei Rinderer-Laub. Dann werden Kommutativgesetz und Assoziativgesetz der Addition behandelt, wieder in beiden Büchern ident²⁸², danach folgen Aufgaben zur Addition.

Die Veranschaulichung der Addition erfolgt in beiden Büchern auf 4 Arten:

- auf dem Zahlenstrahl durch Weiterzählen,
- durch Addition von Strecken,
- durch ein „Flußdiagramm“: Eingabe (5), Befehl (+7), Ausgabe (12),
- durch eine Pfeilfigur,

mit teilweise identen Abbildungen.²⁸³



Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, S. 53.

Rath behandelt in seinem Arbeitslehrbuch von 1974 zuerst Mengenoperationen. Das darauffolgende Kapitel „Addition“ beginnt mit den Worten: „Die Addition natürlicher Zahlen kennen wir bereits [vermutlich aus der Volksschule, Anm. d. Vf.]. [...] Wir wollen nun erkennen lernen, wann eine Addition einer Aufgabe zugrunde liegt.“²⁸⁴ Dabei werden „zufällig“ nur elementfremde Mengen vereinigt. Die Veranschaulichung erfolgt über Additionstabellen, Verknüpfungsdiagramme und am Zahlenstrahl. Außerdem wird die Addition, später auch die

²⁸⁰ Rinderer – Laub Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, S. 93.

²⁸¹ Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, S. 55.

²⁸² Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, S. 57; Rinderer – Laub Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, S. 96.

²⁸³ Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, S. 53; Rinderer – Laub Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, S. 94.

²⁸⁴ Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 99.

Subtraktion von einem „Automaten“ durchgeführt (z.B. durch den +6-Automaten²⁸⁵). Kann ein Automat eine Aufgabe nicht lösen, so „*leuchtet ein rotes Lämpchen auf!*“ (zB. weil die Subtraktion in $\mathbb{N}$ nicht durchführbar ist.²⁸⁶) Bei der Untersuchung der Eigenschaften werden wieder zuerst die Eigenschaften der Vereinigung von Mengen untersucht und danach erst das Vertauschungsgesetz bei der Addition behandelt.

In Das ist Mathematik 1 von Humenberger von 2011 wird die Addition ebenfalls nach der Einführung der natürlichen Zahlen behandelt. Als Veranschaulichung findet man die Addition von Strecken und das Weiterzählen auf dem Zahlenstrahl. Das Operatormodell wird schon vorher als „Rechenanweisung“ eingeführt, aber nicht als Veranschaulichung verstanden²⁸⁷. Die verwendeten Erklärungen für die Addition sind das Zusammenzählen (Zustand + Zustand) und das Dazuzählen (Zustand + Veränderung) oder Weiterzählen (Veränderung + Veränderung).

Im Mathe Buch 1 von 2006 wird addieren als „zusammenzählen, vermehren, dazugeben, verlängern“ beschrieben.²⁸⁸ Die Veranschaulichung erfolgt über das Weiterzählen am Zahlenstrahl und als Addition von Flächen: Ein Rechteck entspricht einer Einheit, die Zahl 3 wird durch drei übereinander dargestellte Rechtecke dargestellt, nebeneinander stehende „Türme“ werden einfach zusammengezählt. Es wird aber kein Turm aus allen Rechtecken dargestellt.

Gegenüber der Situation vor der Modernisierung des Mathematikunterrichts ist heute die Behandlung von Rechengesetzen stärker vorhanden. So formuliert Humenberger die Addition der Zahl Null als eigenen Merksatz.²⁸⁹ Die Deutung der Subtraktion als Umkehroperation wird heute explizit formuliert, während sie 1959 lediglich als „Probe“ verwendet wurde. Die Begriffe Kommutativgesetz und Assoziativgesetz, die mit der Modernisierung des Mathematikunterrichts aufgenommen wurden, werden heute oft nur in Klammern^{290,291} oder Fußnoten²⁹² angegeben, und stattdessen die deutschen Begriffe Vertauschungsgesetz und Verbindungsgesetz verwendet. Dem Kapitel Addition natürlicher Zahlen wird insgesamt heute mehr Raum gegeben. Auch die Veranschaulichungen haben sich – nicht zuletzt durch die besseren drucktechnischen Möglichkeiten – vermehrt: So wird die Addition meist nicht nur als Weiterzählen oder als „schon bekannt“ behandelt, sondern als Addition von Strecken und als Weiterzählen auf dem Zahlenstrahl veranschaulicht.²⁹³ Die Vereinigungsmenge wird heute nicht mehr als Veranschaulichung verwendet, nicht zuletzt da ja die Mengenlehre nicht mehr vorgesehen ist.

²⁸⁵ Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 103.

²⁸⁶ Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 105.

²⁸⁷ vgl. Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, S. 34.

²⁸⁸ Dorfmayr Mathe Buch 1 2006, S. 34.

²⁸⁹ Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, S. 34.

²⁹⁰ Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, S. 48

²⁹¹ Kraker Expedition Mathematik 1 2007, S. 270.

²⁹² Lewisch Mathematik Verstehen – Üben – Anwenden 1 2005, S. 30.

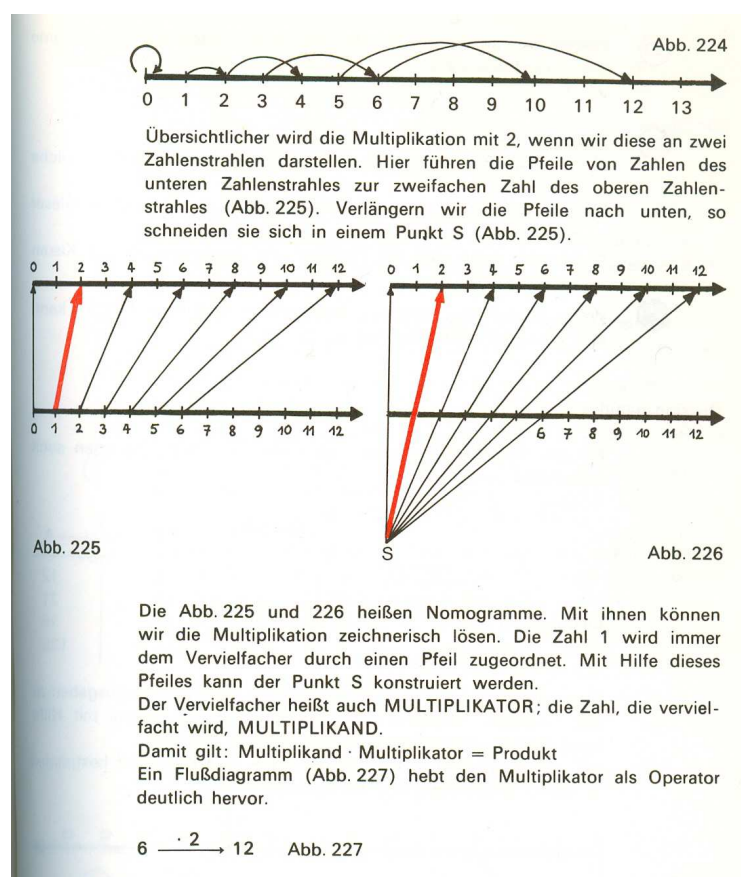
²⁹³ Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, S. 34.

Multiplikation und Division

„Von einem Stoffballen wurden siebenmal je 3 m Stoff abgeschnitten.“²⁹⁴ Diese Rechnung wird im Laub von 1959 vereinfacht zu „ $3m \cdot 7$ “. Danach werden die Bestandteile der Multiplikation und – wieder ohne Nennung des Begriffs – das Kommutativgesetz angeführt. Der Rechentechnik, zB. dem Einservorteil wird größerer Raum als den Rechengesetzen gegeben.

Die Division wird einerseits über das Messen (Wie oft lässt sich aus 24 l Traubensaft ein 3-Liter-Krug füllen?²⁹⁵) andererseits über das Teilen („In einer Schale liegen 63 Kugeln, die auf 7 Knaben gleichmäßig aufgeteilt werden sollen.“) erklärt.

In der Zeit der Neuen Mathematik wird die Multiplikation wie von manchen Didaktikern vorgeschlagen einerseits als Vereinigung gleichmächtiger Mengen^{296,297}, andererseits durch die Produktmenge²⁹⁸ über die Einführung von geordneten Paaren eingeführt. Visualisiert wird die Multiplikation aber auch über eine Darstellung am Zahlenstrahl.²⁹⁹



Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 133.

²⁹⁴ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1959. S. 27.

²⁹⁵ vgl. Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1959. S. 37.

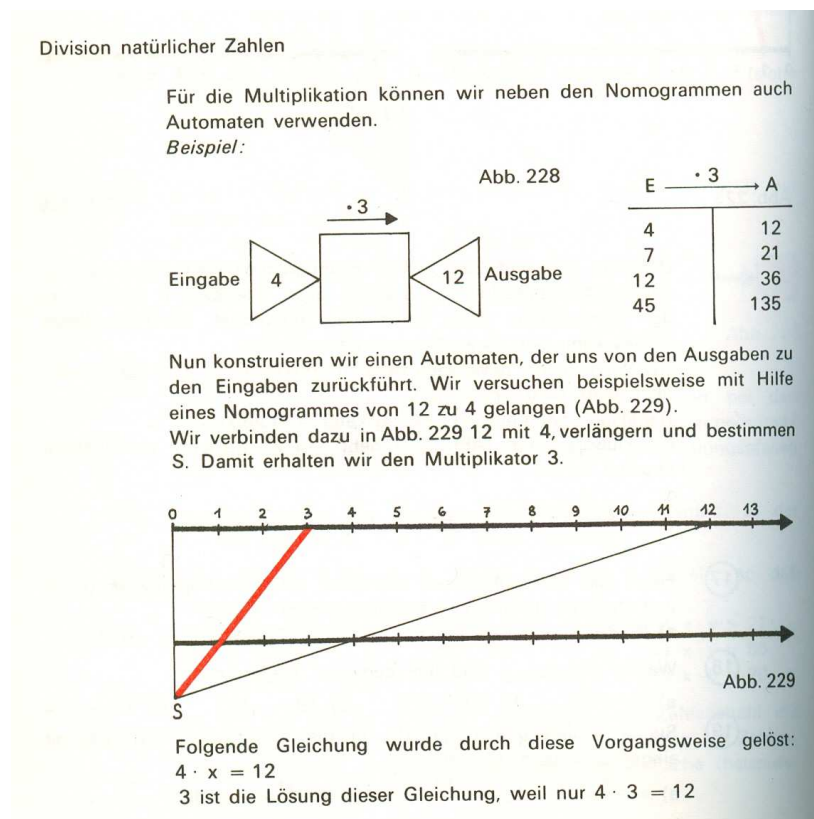
²⁹⁶ Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 129.

²⁹⁷ Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, S. 80.

²⁹⁸ Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 131.

²⁹⁹ Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 133.

Bei dieser sogenannten Darstellung als Nomogramm wird die Multiplikation durch einen Pfeil ausgehend vom Punkt S dargestellt. Diese Darstellung wird dann auch zur Lösung des Problems „ $4 \cdot x = 12$ “ verwendet. Eine andere Idee war die Erklärung der Rechenoperation als Automat, den man mit der Eingabe 4 füttert und der die Funktion „ $\cdot 3$ “ ausführt, in dem Sinne wie man sich einerseits Computer vorstellte, die man mit Lochkarten fütterte, die dann ihre Berechnungen anstellten, andererseits wie man sich Maschinen vorstellte, die man mit Rohstoffen bestückt, die dann ein Produkt liefern.



Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 134.

Die Division wird später als Verteilung auf gleichmächtige Mengen gedeutet. Dabei werden beide Aspekte (Teilen und Messen) durch die beiden Vorgaben (Anzahl der Teilmengen bzw. Mächtigkeit der Teilmengen) berücksichtigt.^{300 301}

Bereits 1980 findet man in Mathematik 1 von Floderer die Multiplikation mit dem Einsammeln von Äpfeln erklärt: „Drei Kinder holen aus dem Garten Äpfel. Jedes Kind bringt 5 Äpfel und legt sie in einen Korb.“³⁰² Damit ist die Idee der Vereinigung gleichmächtiger Mengen ohne Mengenlehre eingesetzt. Laub lässt 1994 Martin drei Hosen aus der Putzerei holen. „Die

³⁰⁰ vgl. Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 136.

³⁰¹ vgl. Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, S. 99.

³⁰² Floderer Mathematik 1 1980, S. 88.

*Reinigung einer Hose kostet 48 S.*³⁰³ Damit verwendet er die Multiplikation als wiederholte Addition.

Rinderer deutet die Division im Mathematikarbeitsbuch 1 von 1985 als Messen und Teilen und zusätzlich als „*wiederholte Subtraktion mit demselben Subtrahenden*“.³⁰⁴ Die meisten Schulbücher deuten die Division über die beiden Aspekte Messen und Teilen.³⁰⁵³⁰⁶

Humenberger behandelt zwar zuerst die Multiplikation ebenfalls recht kurz, er lässt die Kinder die Sitzplätze in einem Theater (9 Reihen mit je 16 Sitzplätzen) berechnen, nur die Multiplikation mit Null und mit 10 wird vorerst als Rechenregel behandelt. Nach dem Kapitel Direktes Verhältnis erst werden die Rechenregeln für Multiplizieren und Dividieren eingefügt. Dort findet man das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz. In einer Zusammenfassung werden dann die Konstanzgesetze der Ergebnisse der vier Grundrechnungsarten (teilweise nochmals) behandelt.

Damit wird den Rechengesetzen der Multiplikation heute ebenfalls meist viel größerer Raum gegeben als vor der Modernisierung des Mathematikunterrichts. Bei den Aufgaben steht nicht so sehr die Rechenfertigkeit im Vordergrund, sondern die Anwendung der Regeln: „*Zum Vergleich: Wie ändert sich das Ergebnis einer Multiplikation [...], wenn man einen Faktor verdreifacht?*“³⁰⁷

Lewisch fragt die SchülerInnen: „*Warum sind diese Aufgaben so einfach? Begründe!* (64:4) · 4=“ und lässt sie dabei die Konstanzgesetze selbst entdecken.³⁰⁸

Der großen Anzahl an Rechenübungen aus der Zeit vor der Modernisierung des Mathematikunterrichts stehen heute viele Aufgaben gegenüber, die langsam zur Verwendung von Variablen und zur Formulierung von Gleichungen hinführen sollen.

5.2.3 Grundrechnungsarten und Zahlbereichserweiterungen in der Oberstufe

Vor der Modernisierung des Mathematikunterrichts wurden die Grundrechnungsarten in der Oberstufe nicht mehr behandelt. In den Oberstufenbüchern aus der Zeit der Modernisierung des Mathematikunterrichts findet man diese Inhalte auf denselben didaktischen Ideen aufgebaut wie in der Unterstufe.

So wird die Multiplikation im Lehrbuch der Mathematik von Laub von 1970 als Drehstreckung³⁰⁹, die Division als inverse Operation zur Multiplikation gedeutet, dementsprechend wird die Division durch a als Drehkontraktion mit der Kontraktionszahl a interpretiert³¹⁰.

³⁰³ Laub Lehrbuch der Mathematik 1 1994, S. 76.

³⁰⁴ Rinderer Mathematik Arbeitsbuch 1 1985.

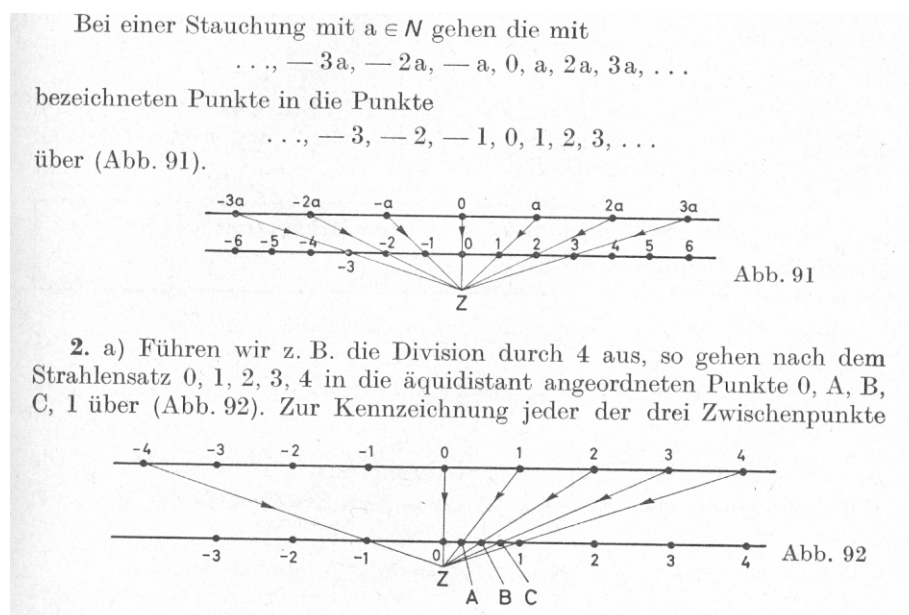
³⁰⁵ vgl. Laub Lehrbuch der Mathematik 1 1994, S. 85.

³⁰⁶ vgl. Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, S. 59.

³⁰⁷ Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, S. 79.

³⁰⁸ vgl. Lewisch Mathematik Verstehen – Üben – Anwenden 1 2005, S. 57.

³⁰⁹ vgl. Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe I. Teil erstes Heft 1970, S. 65.



Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe I. Teil zweites Heft, 1970, S. 81.

Im Lehrbuch der Mathematik von 1978 wird keine Deutung der Grundrechnungsarten angegeben, sondern die Verknüpfung vollkommen abstrakt untersucht: „Wenn in einer Menge M auf Grund einer Verknüpfung „ $\circ$ “ je zwei Elemente a, b aus M genau ein Element aus M zugeordnet wird, wo nennt man das Paar $M, \circ$ in Verknüpfungsgebilde und schreibt $(M, \circ)$.“³¹¹ Sodann wird festgestellt, dass $(\mathbb{N}_0; +)$ und $(\mathbb{N}_0; \cdot)$ Verknüpfungsgebilde sind. Es folgt eine kurze Tabelle mit den Rechengesetzen und die Monotoniegesetze. Bei Subtraktion und Division wird festgehalten, dass es sich in $\mathbb{N}_0$ nicht um Verknüpfungsgebilde handelt. Dieses Kapitel umfasst hier 2 ½ Seiten.

Heute werden die Grundrechnungsarten in der Oberstufe nicht mehr explizit behandelt, es werden in manchen Büchern lediglich die aus der Unterstufe bekannten Rechengesetze – meist beim Thema Rechnen mit Termen – wiederholt.^{312,313}

5.2.4 Einführung der Bruchrechnung

Vergleicht man mehrere Ausgaben des Buches „Lehrbuch der Aufgabensammlung Mathematik für die 1. und 2. Klasse“ von Ludwig und Laub³¹⁴, so findet man die Bruchrechnung als erstes Kapitel der zweiten Klasse. Der Bruch wird als Teil eines Ganzen eingeführt. Wird zuerst eine Strecke, eine Rechteck, ... geteilt, so teilt im zweiten Beispiel der Vater drei Tafeln Schokolade unter seinen fünf Kindern auf. Das tut er auf zwei Arten: einmal teilt er jede Tafel in 5 Teile, dann teilt der die drei Tafeln als Gesamtheit auf die fünf Kinder auf. Dieser zweifache Zugang

³¹⁰ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe I. Teil zweites Heft 1970, S. 81.

³¹¹ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe 1 1978, S. 46.

³¹² Bleier Dimensionen Mathematik 5 2009, S. 44.

³¹³ Götz Mathematik 5 2010, S. 50.

³¹⁴ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1959, 1960, 1963, 1965.

sollte Folgendes erklären: „ $\frac{3}{5}$ von 1' gibt dasselbe Ergebnis wie $\frac{1}{5}$ von 3'.“³¹⁵

Danach werden das Kürzen und Erweitern und vor Addition und Subtraktion von Bruchzahlen werden die Teilbarkeit, Primzahlen, das ggT und das kgV behandelt. Im Schulbuch angeführte Aufgaben lauten ungefähr so: „Welche der angegebenen Zahlen sind durch 5, 25, 125 teilbar?...“³¹⁶ oder „Ändere die Ziffer an der Einerstelle so ab, daß die neue Zahl durch 4 teilbar ist!“

Im Ergänzungsheft der Ausgabe von 1968 werden dazu folgende zusätzliche Aufgaben angeführt: „26. Schreibe die Menge der durch 3 teilbaren Zahlen an, ...“³¹⁷

Zum kgV gab es ebenfalls Veränderungen: In den Ausgaben von 1959, 1960 und 1963 heißt es dazu: „1. Schreibe die Vielfachen der Zahlen 3 und 4 an!

3: 6, 9, **12**, 15, 18, 21, **24**, 27, 30, 33, **36**, 39, ...

4: 8, **12**, 16, 20, **24**, 28, 32, **36**, 40, ...

Die Zahlen 12, 24, 36, ... sind gemeinsame Vielfache der Zahlen 3 und 4. Die Zahlenfolge kann beliebig weit fortgesetzt werden. Es gibt somit kein größtes, wohl aber ein **kleinstes gemeinsames Vielfaches**, nämlich 12.“³¹⁸

Im Ergänzungsheft für die 2. Klasse der allgemeinbildenden höheren Schulen heißt es dazu: „Die Menge der Vielfachen der Zahl 3 werde kurz mit $V(3)$ bezeichnet.

$$V(3) = \{3, 6, 9, \underline{12}, 15, 18, 21, \underline{24}, 27, 30, 33, \underline{36}, \dots\}$$

$$V(4) = \{4, 8, \underline{12}, 16, 20, \underline{24}, 28, 32, \underline{36}, 40, \dots\}$$

Beachte, daß $V(3)$ und $V(4)$ unendliche Zahlenmengen sind! Die drei Punkte nach dem letzten angeschriebenen Element sollen auf die unendliche Menge hinweisen.

$V(3,4)$, die Menge der gemeinsamen Vielfachen der Zahlen 3 und 4, ist der Durchschnitt der beiden Mengen $V(3)$ und $V(4)$:

$$V(3, 4) = V(3) \cap V(4) = \{12, 24, 36, \dots\}$$

Daraus erkennt man, daß die Zahl 12 das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Zahlen 3 und 4 ist: $kgV(3, 4) = 12$ ³¹⁹ Die Durchschnittsmenge wird noch als Venn-Diagramm dargestellt.

Die Einführung der Mengenlehre erfolgt also relativ moderat, aus Teilern wird die Menge der Teiler. Die Tatsache, dass es unendlich viele gemeinsame Vielfache gibt, wurde auch schon davor erwähnt. Dass die Menge der Vielfachen eine unendliche Menge ist, bereitet den SchülerInnen kein Kopfzerbrechen. Der Rest der Bruchrechnung bleibt unverändert.

³¹⁵ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1959, S. 101.

³¹⁶ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1959, 1960 und 1963, jeweils S. 111.

³¹⁷ Ergänzungsheft für die 2. Klasse der allgemeinbildenden höheren Schulen 1968, S. 12, zu Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2, 1965.

³¹⁸ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1959, 1960 und 1963, jeweils S. 115.

³¹⁹ Ergänzungsheft für die 2. Klasse der allgemeinbildenden höheren Schulen, 1968, S. 16, zu Ludwig-Laue Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung 1965.

Die in 3.5.2 vorgestellte Einführung der Bruchrechnung wird im Arbeitslehrbuch von Rath verwendet. Das erste Kapitel im Buch der 2. Klasse behandelt Stauch- und Streckoperatoren³²⁰. Später werden diese beiden verknüpft zu einem Bruchoperator³²¹. Gleichwertige Bruchoperatoren (Brüche) führen zu gleichen Endzuständen. Ein Kern-Bruchoperator ist ein Bruchoperator, dessen Zähler und Nenner teilerfremd sind.³²² Die Verknüpfung zweier Bruchoperatoren wird als Verknüpfung der beiden Stauchoperatoren und Verknüpfung der beiden Streckoperatoren eingeführt. Weiters wird das aus dem ersten Band bekannte Nomogramm (siehe 5.2.2) zur Darstellung gleichnamiger Bruchoperatoren (Brüche) verwendet.

In man in Laub-Hruby³²³ Mathematik Arbeitsbuch 2 von 1976 findet man die Bruchzahl in der zweiten Klasse ebenfalls in Anlehnung an den Operatorgedanken folgendermaßen erklärt: Der Bruch $\frac{3}{5}$ wird einerseits mit dem „Flußdiagramm“ $1 \rightarrow :5 \rightarrow \cdot 3 \rightarrow \frac{3}{5}$ erklärt, andererseits auch mit dem Flussdiagramm $1 \rightarrow \cdot 3 \rightarrow :5 \rightarrow \frac{3}{5}$. Das mündet in der Erkenntnis, „Bei der Bildung eines Bruches sind Multiplikation und Division vertauschbar.“

Nach der Behandlung der verschiedenen Arten der Brüche (Stammbruch, echter Bruch, unechter Bruch) und den gemischten Zahlen erst werden die Brüche als Teile eines Ganzen visualisiert. Im Mathematik Arbeitsbuch 2 von Rinderer-Laub³²⁴ werden sofort die Brüche mit Bildern als Teile eines Ganzen eingeführt.

In „Das ist Mathematik 1“ ist die Einführung der Bruchrechnung in der ersten Klasse sehr stark von Bildern zur Visualisierung des Teilens bestimmt³²⁵, ebenfalls im „Mathe Buch 1“³²⁶.

In der zweiten Klasse wird ein Bruch zuerst als Teil eines Ganzen visualisiert. Nach diesen Vorübungen wird der Bruch als Rechenbefehl zweifach interpretiert, als „nimm $\frac{3}{4}$ von“: einerseits wird das Ganze zuerst in vier Teile geteilt und drei solche Teile („3 Viertel des Ganzen“), andererseits als vierter Teil von drei Ganzen („1 Viertel von 3 Ganzen“).³²⁷ Der Vater, der Schokolade teilt, wurde durch eine Klasse von 24 SchülerInnen, von denen $\frac{3}{4}$ ein Eis kaufen, ersetzt. Ohne das Wort „Operator“ zu verwenden und ohne Stauchung und Streckung, wird ein Bruch als das Hintereinanderausführen der beiden Rechenoperationen wie schon 1959 eingeführt.

Damit ist jene didaktische Verirrung, die Entstehung eines Bruches durch einen „Operator“ zu erklären und visuell als Stauchung und Streckung zu deuten, wieder jener ursprünglichen

³²⁰ Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 2 1975, S. 3.

³²¹ Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 2 1975, S. 98.

³²² Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 2 1975, S. 111.

³²³ Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 2 1976, S. 53ff.

³²⁴ Rinderer – Laub Mathematik Arbeitsbuch 2 1976, S. 97.

³²⁵ Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, S. 154.

³²⁶ Dorfmayr Mathe Buch 1 2006, S. 262.

³²⁷ Humenberger Das ist Mathematik 2 2011, S. 37.

Anschaulichkeit des Teilens gewichen. Ich hoffe, die Lehrperson hatte dieser Erklärung des Schulbuches mit Operator und Nomogramm die Anschaulichkeit des Teilens danebengestellt.

5.2.5 Die Definition des Kreises in der fünften Schulstufe

In einem Unterrichtswerk für die LehrerInnenbildung von 1958 wird der Kreis folgendermaßen definiert: „*Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte, die in einer Ebene von einem gegebenen Punkte, dem Mittelpunkt, gleichen Abstand haben.*“³²⁸ Das ist deshalb für die vorliegende Betrachtung von Interesse, da die zum Zeitpunkt der Modernisierung unterrichtenden Lehrpersonen wohl mit dieser Definition ausgebildet worden waren.

Das Rechenbuch für die 7. und 8. Klasse der Volksschulen von 1931 beginnt das Kapitel „Der Kreis“ mit der Anweisung: „*Schneide eine Kreisscheibe mit 5 cm Breite aus festem Papier!*“³²⁹ Mit dieser Kreisscheibe soll der Lernende die Begriffe Kreisausschnitt, Kreisabschnitt, Sehne, Durchmesser und Ludolphsche Zahl (π) kennenlernen. Der Kreis selbst wird nicht erklärt, sondern als aus der Alltagserfahrung bekannt angesehen und auf dieser Erfahrung aufgebaut.

In einem Schulbuch für die Hauptschule von 1966 wird bei den Aufgaben zur Zeitmessung die Form des Ziffernblattes erwähnt: „... *Das Zifferblatt [sic!] einer Uhr kann verschiedenen Gestalt haben: viereckig, sechseckig, achteckig, rund ... - Meist ist es kreisrund, so rund wie ein Kreis. Auch die Spitzen der beiden Zeiger beschreiben auf ihrem Weg Kreise.*“³³⁰ Später folgt eine Definition: „*Alle Punkte der Kreislinie sind vom Mittelpunkt des Kreises gleich weit entfernt.*“³³¹ Die Begriffe Halbmesser, Radius und Durchmesser werden erklärt.

Im Lehrbuch der Mathematik von Laub von 1959 wird der Kreis so definiert: „*Die Punkte des Kreises sind vom Kreismittelpunkt gleich weit entfernt.*“³³² Dabei wird zwischen Kreis und Kreisfläche unterschieden. Die Punkte werden als Stellen im Gelände eingeführt, in deren Zentrum eine Stange aufgestellt wurde.

Die beiden sehr ähnlichen Bücher Mathematik Arbeitsbuch 1 von Laub-Hruby und Rinderer-Laub, beide von 1976, weisen die wortidentische Definition eines Kreises auf: „*Der Kreis ist die Menge aller Punkte einer Ebene E, die von einem Punkt M denselben Abstand r haben.*“³³³

Allerdings führen die beiden Schulbücher auf unterschiedlichem Weg zum Kreis. Laub-Hruby, lässt in einer Ebene E einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius k zeichnen, um festzustellen: „*Der Kreis k (die Kreislinie) ist eine unendliche Punktmenge;*“³³⁴. Rinderer-Laub teilt dem Lernenden mit, dass beim Zylinder (dazu findet man drei Abbildungen von Zylindern) die ebenen Flächen Kreisflächen sind und die Randlinien Kreise.

³²⁸ Konrath – Niederle Arithmetik und Geometrie für Lehrer- und Lehrerinnenbildungsanstalten I 1958, S. 295.

³²⁹ Buxbaum Rechenbuch für drei- und vierklassige Volksschulen für das 7. u. 8. Schuljahr 1931, S. 59.

³³⁰ Schön Lehrbuch der Mathematik I 1965 S. 180.

³³¹ Schön Lehrbuch der Mathematik I 1965 S. 180.

³³² Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1959, S. 217.

³³³ Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, S. 253; Rinderer – Laub Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, S. 257.

³³⁴ Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, S. 253.

Rath gibt keine hervorgehobene Definition eines Kreises an. Er erklärt ihn, beschreibt wie ein Gärtner ein kreisförmiges Blumenbeet anlegt: *„Die Eigenschaft der Punkte eines Kreises, von einem festen Punkt M gleich weit entfernt zu sein, benützt ein Gärtner, wenn er ein kreisförmiges Blumenbeet anlegt.“* Er beschreibt die Punktmenge in der Symbolsprache der Mengenlehre, unterscheidet dabei in der Mengenbeschreibung zwischen dem geschlossenen Gebiet der Kreisscheibe und der offenen Kreisscheibe und der Kreislinie.³³⁵

Die Einführung des Kreises in Das ist Mathematik 1³³⁶ beginnt mit einer praktischen Anleitung zum Ziehen eines Kreises auf einem Schulhof mit Kreide und Schnur. Dann folgen Begriffserklärungen samt Skizze eines Kreises. In einer hervorgehobenen Box folgt dann die Definition – ohne das Wort Definition – zu verwenden:

„Alle Punkte des Kreises k haben vom Mittelpunkt denselben Abstand, nämlich den Radius r. Es gilt z.B.: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r$

Es gilt auch umgekehrt:

Alle Punkte, die vom Punkt M denselben Abstand r haben, liegen auf dem Kreis k.“

Das Kapitel Kreis beginnt im Mathe Buch 1³³⁷ mit der Definition: *„Die Punkte einer Kreislinie sind vom Mittelpunkt des Kreises gleich weit entfernt. Diese Entfernung nennt man Radius des Kreises.“*

Es wird heute die Verwendung des Wortes „Menge“ vermieden und die Deutung geometrischer Begriffe als Punktmenge ist nicht mehr vorgesehen. Damit hat sich die Definition des Kreises „im Kreis bewegt“ und man ist zu jener Definition aus Laub von 1959 zurückgekehrt. Damals wie heute versucht man, den geometrischen Begriff durch ein Tätigwerden der SchülerInnen oder durch den Alltagsbezug zu veranschaulichen.

5.3 Allgemeine Veränderungen in den Schulbüchern

5.3.1 Trennung Arithmetik – Geometrie

Die Trennung Arithmetik – Geometrie ging in Schulbüchern vor der Modernisierung des Mathematikunterrichts so weit, dass es jeweils eigene Bücher für diese Bereiche gab.³³⁸ Allerdings galt diese Trennung nur für den Mathematikunterricht, also dem Unterricht in den

³³⁵ Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 226.

³³⁶ Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, S. 204.

³³⁷ Dorfmayr Mathe Buch 1 2006, S. 200.

³³⁸ vgl. Suppantischtsch Lehrbuch der Arithmetik 1911; Mocnik 1898; Hanxleden Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten Oberstufe Geometrie 1959; Hanxleden Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten Oberstufe Analysis 1963.

oberen Klassen des Gymnasiums und im Allgemeinen nicht für den Rechenunterricht in der Hauptschule³³⁹ und der achtklassigen Volksschule³⁴⁰.

Das Schulbuch „Mathematik Arbeitsbuch 1“ von Laub-Hruby von 1976 weist diese Trennung zwischen Arithmetik und Geometrie im Inhaltsverzeichnis auf³⁴¹. Die nächste Gliederungsstufe dieser Bücher sind dann die einzelnen Kapitel.

Das Schulbuch „Mathematik Arbeitsbuch 1“ von Rinderer-Laub von 1976 – in weiten Teilen wortident zum Buch von Laub-Hruby – weist diese Trennung nicht auf. Auf „A. Wiederholung“ folgt „B. Weiterbildung der Raumanschauung, C. Grundbegriffe der Mengenlehre, D. Einführung in Grundbegriffe der Geometrie mit Hilfe des Mengebegriffs...“.³⁴² Bei vielen anderen Büchern wurde diese Trennung aufgehoben³⁴³.

Teilweise wurden die Inhalte der Arithmetik und der Geometrie in den Büchern aus der Zeit der Neuen Mathematik so verschachtelt, dass man den Eindruck gewinnt, man wollte das gemeinsame Fundament der verschiedenen mathematischen Themen besonders betonen: Das Arbeitslehrbuch von Flick behandelt im Kapitel „3 Zuordnen, Vergleichen, Messen“ zuerst Zuordnungen, Mächtigkeit von Mengen, ... Das Stellenwertsystem einer Dezimalzahl, ... Längenmessung, ... Längenmessung am Kreis, Lagemöglichkeit zweier Kreise, Konzentrationsübung, Flächenmessung, ... Rauminhalte und Oberflächen von Quadern, ... Zeitmessung, ... Winkelmessung...³⁴⁴.

Auch die aktuelle Schulbuchreihe „Mathe Buch“³⁴⁵ vermischt die Kapitel der Arithmetik und der Geometrie. Die aktuelle, von Humenberger herausgegebene Reihe „Das ist Mathematik“³⁴⁶ ist das einzige Schulbuch oder eines der wenigen, das diese Trennung zwischen Arithmetik und Geometrie noch aufweist.

Die aktuellen Schulbücher der Oberstufe ordnen die Inhalte meist nach den Abschnitten des Lehrplans. In der 9. Schulstufe findet man z.B. im Lehrplan folgende Überschriften: Zahlen und Rechengesetze – Gleichungen und Gleichungssysteme – Funktionen – Trigonometrie – Vektoren und analytische Geometrie der Ebene. Eine Trennung nach Arithmetik und Geometrie findet man deshalb in diesen Schulbüchern nicht.

³³⁹ vgl. Schön Lehrbuch der Mathematik I 1965, sieht keine Trennung vor, die einzelnen Themen der Geometrie sind mit einem G gekennzeichnet und in den Verlauf eingebettet, manchmal sogar ohne eigene Überschrift (S. 41 „Strahl“ im Kapitel „Zu- und Wegzählen“); und Schön Lehrbuch der Mathematik II 1966, ist in zwei Teile geteilt (bis Seite 160 Arithmetik, danach Geometrie).

³⁴⁰ vgl. Buxbaum 1931 und Brauner 1927.

³⁴¹ Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976.

³⁴² Rinderer – Laub: Mathematik 1 Arbeitsbuch, S. 1.

³⁴³ siehe auch Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974; aber auch Dorfmayr Mathe Buch 1 2006.

³⁴⁴ Flick: Mathematik in unserer Welt 1 1977.

³⁴⁵ Dorfmayr Mathe Buch 1 2006.

³⁴⁶ Humenberger Das ist Mathematik 4 2012.

5.3.2 Verwendung der Symbolsprache

Dabei sollten wir zwischen Unterstufe und Oberstufe unterscheiden:

Bücher der Sekundarstufe I:

Jene Schulbücher, die Inhalte der Mengenlehre und Aussagenlogik beinhalteten, verwendeten natürlich dafür die Symbole der Mengenlehre und der Logik. Beim Vergleich der Definition eines Kreises (siehe 5.2.5) kann man die Verwendung der Symbolsprache erkennen.

Schon auf der ersten Seite nach dem Inhaltsverzeichnis findet man in Das ist Mathematik 1 von 2011³⁴⁷ grundlegende Symbole der Mengenlehre und logische Symbole, wie z.B. $\mathbb{N}$, „{“, „ $\cap$ “, „ $\in$ “, „ $\Rightarrow$ “, „ $\Leftrightarrow$ “ im Buch der 1. Klasse. In 100% Mathematik 1³⁴⁸ findet sich in der Liste der mathematischen Zeichen als Rest der Symbole der Mengenlehre „ $\in$ “ und „ $\notin$ “, logische Symbole werden nicht angeführt.

Im Mathe Buch 1 von 2006³⁴⁹ findet sich keine derartige Auflistung von Symbolen der Mengenlehre und Logik, diese werden auch kaum verwendet. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet und die Menge im aufzählenden Verfahren angegeben, allerdings wird der Mengenbegriff nach der Darstellung auf dem Zahlenstrahl ohne Begründung oder Erklärung verwendet. Die Lernenden sollen dann bestimmte Zahlen zu Mengen zusammenfassen, was man anscheinend so löst, dass man die Zahlen in Mengenklammern anschreibt. Im MatheMaster von 2000³⁵⁰ wird nicht einmal der Buchstabe $\mathbb{N}$ als Codierung für natürliche Zahlen verwendet. Im Kapitel Algebra scheint es einen anderen Autor/eine andere Autorin zu geben, da dort auf der Einführungsseite folgende Begriffe, erklärt werden: „ $\mathbb{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen { 0, 1, 2, 3, ... }“; „ G = Grundmenge“ „ L = Lösungsmenge“. ³⁵¹ Aus „2 ist die Lösung der Gleichung.“ folgt „ $L = \{2\}$ “.

Bücher der Sekundarstufe II:

Man könnte annehmen, dass die Verwendung der Symbolsprache besonders in der Oberstufe erfolgt. Im aktuellen Lehrplan heißt es dazu: „Das Verwenden von Symbolen für logische Begriffe und Beziehungen und das Beschreiben von Gesamtheiten mit Hilfe von Mengen und Mengenoperationen hat die Basis für exaktes Formulieren und Arbeiten zu legen.“³⁵² Dazu könnte man annehmen, dass einerseits Disjunktion und Konjunktion, Äquivalenz und Implikation gemeint sein müssten, andererseits unterschiedliche Mengendarstellungen und die die Verwendung von Quantoren.³⁵³ In Ganz klar Mathematik 1 ist im Merkkästchen³⁵⁴ über die

³⁴⁷ Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, S. 2.

³⁴⁸ Eßletzbichler 100% Mathematik 1 2014, S. 250.

³⁴⁹ Dorfmayr Mathe Buch 1 2006, S. 22.

³⁵⁰ Steiner MatheMaster 1 2000, S. 4.

³⁵¹ Achleitner Ganz Klar: Mathematik 1 2006, S. 78.

³⁵² Lehrplan der Oberstufe Mathematik, Didaktische Grundsätze.

³⁵³ vgl. Brand thema mathematik 5 2012, S. 34.

³⁵⁴ Achleitner Ganz klar: Mathematik 1 2006, S. 16.

natürlichen Zahlen nur das Wort „gerade“ und „ungerade“ bunt hervorgehoben, der Name der natürlichen Zahlen ist nicht hervorgehoben, ebenso wird weder das Symbol $\mathbb{N}$ noch eine Mengenschreibweise verwendet.

Thema mathematik 5 weist im Gegensatz zu den Bänden thema mathematik 6 und 7 ein Verzeichnis der verwendeten mathematischen Zeichen auf, das besonders die Zeichen der Mengenlehre und Logik zusammenfasst³⁵⁵. Diese Symbolsprache wird außerhalb des Kapitels Mengenlehre nicht immer verwendet. So wird zwar erklärt, was eine Lösungsmenge ist³⁵⁶, aber die Lösungen werden dann teilweise nicht in der Mengenschreibweise angeführt, sondern etwa so: „ $x_1 = 0$, $x_2 = -p$ “³⁵⁷. Für die Angabe einer Definitionsmenge wird aber sehr wohl die Mengenschreibweise verwendet³⁵⁸ und in thema mathematik 6 wird bei den Gleichungssystemen und bei den Ungleichungen sehr wohl eine Lösungsmenge in der Mengenschreibweise angegeben: „ $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$ “³⁵⁹.

In Mathematik 5 von Götz von 2010 werden die möglichen Lösungen einer Gleichung mit zwei Variablen formal in Mengenschreibweise angegeben. Dabei werden die Begriffe Lösungsmenge und Grundmenge nicht nur als Begriffe verwendet, sondern die SchülerInnen sollen Lösungsmengen im beschreibenden und im aufzählenden Verfahren angeben, aber auch graphisch im Koordinatensystem darstellen. Außerdem werden Grundmengen, die von $\mathbb{R}^2$ abweichen, z.B. „ $G = \{-5; -4; \dots; 4f; 5\} \times \{-5; -4; \dots; 4f; 5\}$ “³⁶⁰ oder $G = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ³⁶¹, angenommen. Die sich schneidenden Geraden werden als Punktmengen aufgefasst und mit Hilfe der Symbolsprache wird das Ergebnis beschrieben.³⁶²

Die Verwendung der „Sprache der Mathematik“ wird in der Buchreihe thema mathematik jeweils am Ende eines Kapitels mit einer etwas anderen Art von Aufgaben geübt. Im Folgenden seien einige aufgezählt:

„Worin unterscheiden sich Äquivalenzumformungen bei Gleichungen und Ungleichungen?“³⁶³

Ordne richtig zu (je vier Aussagen und formale Beschreibungen): zB. „Der Grenzwert einer Folge ist null.“ – „ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ “³⁶⁴

Zum Thema Lösen von Gleichungen höherer Ordnung – Fundamentalsatz der Algebra:
„Was ist eine algebraische Gleichung?“³⁶⁵

³⁵⁵ Brand thema mathematik 5 2012, S. 229.

³⁵⁶ Brand thema mathematik 5 2012, S. 66.

³⁵⁷ Brand thema mathematik 5 2012, S. 74.

³⁵⁸ Brand thema mathematik 5 2012, S. 50.

³⁵⁹ Brand thema mathematik 6 2012, S. 34.

³⁶⁰ Götz Mathematik 5 2010, S. 163

³⁶¹ Götz Mathematik 5 2010, S. 169.

³⁶² Götz Mathematik 5 2010, S. 165.

³⁶³ Brand thema mathematik 6 2012, S. 47.

³⁶⁴ Brand thema mathematik 6 2012, S. 89.

Mathematik 5 von Götz von 2010 weist in seinem Inhaltsverzeichnis ein Kapitel „Die Sprache der Mathematik“ auf, das Aussagen, Mengen, Beziehungen zwischen Mengen, Beziehungen zwischen Aussagen, Mengenalgebra und Aussagenalgebra behandelt.³⁶⁵

Dieser Vergleich zeigt sehr deutlich, dass es den Schulbuchautoren frei steht, wie intensiv sie die Symbolsprache einsetzen und verwenden, da es keine so konkrete Festlegung im Lehrplan gibt, wie zur Zeit der Modernisierung des Mathematikunterrichts, wo einerseits die Begriffe und andererseits die Symbole explizit angeführt waren. Das bedeutet, es war klar definiert, welche Symbole und Begriffe den SchülerInnen bekannt sein müssen.

Betrachtet man allerdings die vom Bifie³⁶⁷ zur Verfügung gestellten exemplarischen Schularbeiten³⁶⁸, die im Stil der Aufgaben der teilzentralisierten standardisierten Reifeprüfung gestaltet sind, so erkennt man, dass die Symbole der Mengenlehre und Logik nicht verwendet werden. Sogar für die Zuordnung einzelner Elemente zu den Zahlenmengen wurde das Symbol „ $\in$ “ nicht verwendet.

5.3.3 Definition – Satz – Beweis

Die Modernisierung des Mathematikunterrichts sollte unter anderem auch für klare Definitionen sorgen. Man wollte die SchülerInnen auf die an der Universität übliche Struktur Definition – Satz – Beweis der Mathematikvorlesungen vorbereiten. Auch Beweisstrategien sollten schon im Gymnasium vermittelt werden. Neben den vielen Rechenaufgaben sollten vermehrt Aufgaben des Typs „Zeige, dass...“ vorgesehen werden.

Hanxleden sieht im Oberstufenbuch Analysis bereits die vollständige Induktion vor³⁶⁹ und im Oberstufenbuch von Laub von 1970 findet man die vollständige Induktion³⁷⁰ und den indirekten Beweis³⁷¹. Während Hanxleden nur zwischen Text und Aufgaben unterscheidet und – wohl auch drucktechnisch bedingt – kaum Fettdruck, gesperrten Druck und sehr wenige „Kästchen“ als Hervorhebungen zeigt, findet man im Laub durchnummerierte Sätze und Definitionen, wobei die Sätze meist mit Herleitungen erarbeitet werden und seltener mit Beweisen.

Zusammenhänge werden in den aktuellen Schulbüchern der Sekundarstufe I in der Geometrie durch Anschauung und Messen „bewiesen“, in der Arithmetik werden Beispiele vorgerechnet und der Inhalt in einem Merksatz zusammengefasst.

³⁶⁵ Brand thema mathematik 7 2011, S. 105

³⁶⁶ Götz Mathematik 5 2010, S. 12.

³⁶⁷ Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung

³⁶⁸ http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung_ptsam.xml#ptsam, abgefragt am 28.2.2014.

³⁶⁹ Hanxleden Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten Oberstufe Analysis 1963, S. 55.

³⁷⁰ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe 1970 III. Teil erstes Heft, S. 117.

³⁷¹ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe 1968 II. Teil erstes Heft, S. 46.

In Das ist Mathematik 1 von Humenberger von 2011 findet man das Gesetz der Konstanz des Quotienten. Es wird ein Beispiel vorgerechnet, für das diese Konstanz gilt und danach der Satz verallgemeinert in einer bunt hervorgehobenen Box angeführt³⁷².

Das aktuelle Schulbuch thema Mathematik unterscheidet in den hervorgehobenen Bereichen klar zwischen Definitionen, Sätzen und anderen wichtigen Inhalten (Erklärungen, Regeln), indem der jeweilige Inhalt auch so mit „Definition:“ oder „Satz:“ bezeichnet wird oder eben keine derartige Bezeichnung trägt. Beweise folgen auf Sätze, es wird nicht jeder Satz bewiesen³⁷³.

Mathematik verstehen unterscheidet ebenfalls ganz klar zwischen Satz³⁷⁴ und Definition³⁷⁵ durch die entsprechenden Angaben. Beweise zu Sätzen werden allenfalls im Anschluss an den jeweiligen Satz angeführt.

Dimensionen Mathematik unterscheidet ebenfalls zwischen Definitionen, Sätzen und anderen wichtigen Inhalten, indem es „Satz“ oder „Definition“ anführt. Sätze werden meist hergeleitet³⁷⁶, seltener findet man einen Beweis³⁷⁷.

Die Reihe Mathematik von Götz verwendet ebenfalls die Kennzeichnung „Definition“ und „Satz“³⁷⁸. Außerdem bietet diese Schulbuchreihe auch den indirekten Beweis³⁷⁹ und die vollständige Induktion³⁸⁰, Malle in Mathematik verstehen führt einen indirekten Beweis vor³⁸¹, während in thema mathematik 6³⁸² die vollständige Induktion erklärt wird, es sind sogar Aufgaben dazu vorgesehen.

5.3.4 Lehrbuch – Arbeitsbuch

Die beiden Mathematik Arbeitsbücher von Laub-Hruby und von Rinderer-Laub von 1976 weisen im Gegensatz zu älteren Ausgaben die Neuerung auf, dass Schulbücher Aufgaben enthalten, deren Lösungen im Buch niedergeschrieben werden sollen. Es ist nach meiner Meinung bei den meisten Aufgaben kein pädagogischer Mehrwert zu erkennen, der sich daraus ergibt, dass die SchülerInnen die Aufgaben nicht in ihrem Hausübungsheft lösen. Selten gilt es, Skizzen zu vervollständigen, meist sind es Rechenbeispiele, bei denen sich der Lernende das Abschreiben der Angabe erspart. Die Tatsache, dass diese Ausfüllaufgaben vorgesehen sind, ist wohl der Tatsache geschuldet, dass im Jahr 1973 in Österreich die Schulbuchaktion eingeführt wurde,

³⁷² Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, S. 59.

³⁷³ vgl. Brand thema Mathematik 5 2012, S. 156 ohne Beweis, S. 8 mit Beweis.

³⁷⁴ vgl. Malle Mathematik verstehen 5 2010, S. 46.

³⁷⁵ vgl. Malle Mathematik verstehen 5 2010, S. 46.

³⁷⁶ Bleier Dimensionen Mathematik 5 2009, S. 178.

³⁷⁷ Bleier Dimensionen Mathematik 5 2009, S. 79.

³⁷⁸ Götz Mathematik 5 2010, S. 129.

³⁷⁹ Götz Mathematik 5 2010, S. 67.

³⁸⁰ Götz Mathematik 6 2010, S. 92.

³⁸¹ Malle Mathematik verstehen 5 2010, S. 37.

³⁸² Brand thema mathematik 6 2012, S. 82.

also die kostenlose Abgabe von Schulbüchern an die SchülerInnen. Es wurden teilweise aber nicht nur Aufgaben so gestaltet, sondern auch bei Herleitungen Zwischenschritte³⁸³ ausgelassen und Platz vorgesehen, dass der Lernende diese Zwischenschritte selbst ausfülle. Abgesehen, dass man eher mehr Platz als zuwenig frei lassen sollte und dadurch die Bücher besonders schwer wurden, gab es keine Lösung für einzelne Zwischenschritte.

Dabei geht es nicht nur darum, dass im Buch Platz für die Lösung einer Aufgabe vorgesehen ist, sondern auch bestimmte Zwischenschritte selbst berechnet werden sollen, und der Lernende mit Anleitung zu Teillösungen geführt werden soll. Auch der Lückentext muss „erraten“ werden.

Die Schulbuchreihe von Dorfmayr, Mistlbacher und Nussbaumer³⁸⁴, bezeichnet sich als Lehrbuch und Übungsbuch, also nicht als Arbeitsbuch, demgemäß findet man auch keine Ausfüllaufgaben. Die Reihe für die Oberstufe deklariert sich nicht als Arbeits- oder Lehrbuch, weist aber ebenso keine Ausfüllaufgaben aus³⁸⁵.

Alle hier beschriebenen Schulbuchreihen der Oberstufe weisen keine oder nahezu keine Ausfüllaufgaben auf. Von manchen Schulbuchreihen werden mittlerweile eigene Arbeitsbücher aufgelegt.³⁸⁶

5.3.5 Die Gestaltung der Aufgaben

Der Vergleich der unterschiedlichen Ausgaben des Lehrbuchs der Mathematik und Aufgabensammlung für die erste Klasse zeigt, dass Aufgaben ein langes Leben haben. In der Kurzwiederholung (als erstes Kapitel) wird die Blütezeit des Schneeglöckchens mit dem Flieder und der Robinie verglichen.³⁸⁷ Die Länge der Donau wird mit der Wolga und dem Rhein verglichen³⁸⁸, aber auch die Höhe des Montblanc wird mit dem Großglockner und dem Mount Everest verglichen³⁸⁹.

³⁸³ Szirucsek Arbeitslehrbuch Mathematik 7 1975, S. 127: Der „Beweis des Satzes von der Nullstelle“ weist 14 verschiedene Auslassungen auf.

³⁸⁴ Dorfmayr Mathe Buch 1 2006, Dorfmayr Mathe Buch 2 2006, Dorfmayr Mathe Buch 3 2007, Dorfmayr Mathe Buch 4 2009

³⁸⁵ vgl. Brand thema mathematik 5 2012.

³⁸⁶ Zu Mach mit 1 gibt es ein Heft mit „Ergänzungen und Vertiefungen in einfachen Schritten“, das zur Gänze aus Übungsaufgaben besteht, die aber nicht über den Stoff des Lehrbuches hinausgehen; ganz klar 1 Übungsbuch A ist eine Sammlung von Aufgaben und enthält auch Lernzielkontrollen.

³⁸⁷ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1960 und 1965, Aufgabe 72, S. 8; Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, Aufgabe 9, S. 3.

³⁸⁸ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1959 und 1965, Aufgabe 77, S. 9; Laub Lehrbuch der Mathematik 1 1994, Aufgabe 27, S. 12; Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, Aufgabe 28, S. 10.

³⁸⁹ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1960 und 1965, Aufgabe 79, S. 9; Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, Aufgabe 12, S. 3; Laub Lehrbuch der Mathematik 1 1994, Aufgabe 26, S. 12; Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, Aufgabe 31, S. 10.

Die Berechnung der Volumens eines Getreidespeichers³⁹⁰ oder eines Aquariums³⁹¹ findet man in allen betrachteten Ausgaben dieser Schulbuchreihe der ersten Klasse.

Andere Aufgabe, wie zum Beispiel der freie Mittagstisch für bedürftige Kinder³⁹² ist typisch für die Situation nach dem Krieg. Diese Aufgabe ist schon in der Ausgabe von 1976 verschwunden. Die größte Veränderung wird wohl die Einführung des Euro mit sich gebracht haben, da dann alle Währungsangaben verändert werden mussten.

Didaktisch verändert haben sich die Aufgaben besonders im Hinblick auf das Kompetenzmodell. Nun sollten mehr Aufgaben zum Argumentieren und Modellierung bereitgestellt werden. Allerdings ist die Einordnung in das Kompetenzmodell nicht ganz eindeutig. Wie in entsprechenden didaktischen Lehrveranstaltungen festgestellt werden kann, differiert die Einordnung dazu sehr. Andererseits ist auch heute ein großer Anteil der Aufgaben dem Rechnen, also dem Operieren zuzuordnen. Dabei stellt sich die Frage, ob nicht die Sicherheit im Operieren auf grundlegendem Niveau erst die Grundlage für andere Handlungsbereiche ist.

Rechne! – Zeige! – Begründe!

In den Mathematikbüchern aus der Zeit vor der Modernisierung des Mathematikunterrichts findet man kurze Erklärungen und dann viele, viele Übungen um das Gelernte zu perfektionieren. Der Unterricht war noch stärker auf das fehlerfreie Rechnen fokussiert und weniger auf das Verstehen der Theorie. Eines der Ziele der Modernisierung des Mathematikunterrichts war die Verlegung des Schwerpunktes von der Rechenfertigkeit auf das „mehr Denken“. Diese Tendenz zeigt sich auch in den Aufgaben.

Im Arbeitslehrbuch von Rath von 1974 findet man unter anderem folgende Aufgaben:

„Begründe mit Worten, warum gilt: $a) A \cap A' = \{ \}$ “³⁹³.

„Wie mußt du 6 Bleistifte legen, damit jeder Bleistift alle 5 anderen Bleistifte berührt?“³⁹⁴

„Bastle aus Stäben (Holzstäbchen, Strohhalmen usw.) folgende räumliche Netze: a) [Bild eines Würfels]...“³⁹⁵

„Untersuche die Beziehung zwischen Netzen, x ist topologisch gleichwertig zu y' auf ihre Eigenschaften!“³⁹⁶

„Warum kann eine Ordnungsbeziehung nicht symmetrisch sein?“³⁹⁷

³⁹⁰ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1960 und 1965, Aufgabe 1234, S. 215; Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, Aufgabe 1174, S. 251; Laub Lehrbuch der Mathematik 1 1994, Aufgabe 1330, S. 274; Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, Aufgabe 1332, S. 263 (statt 4 dm ist das Aquarium hier 38 cm hoch, und Wassermenge und Wassergewicht müssen nicht mehr berechnet werden).

³⁹¹ Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1960 und 1965, Aufgabe 1232, S. 215; Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976, Aufgabe 1172, S. 251; Laub Lehrbuch der Mathematik 1 1994, Aufgabe 1331, S. 274; Humenberger Das ist Mathematik 1 2011, Aufgabe 1333, S. 263.

³⁹² Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1959 und 1965, Aufgabe 693, S. 117.

³⁹³ Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 98.

³⁹⁴ Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 64.

³⁹⁵ Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 62.

³⁹⁶ Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 61

³⁹⁷ Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974, S. 37.

„Begründe: Jede Teilmenge ist auch Teilmenge von sich selbst“ ($A \subset A$) Die Teilmengenbeziehung ist reflexiv.“³⁹⁸

„Überlege, wie viele Dezimalzahlen zwischen 0,1 und 0,2 liegen könnten. Begründe deine Antwort!“³⁹⁹

„Beweise das Verteilungsgesetz (Distributivgesetz) für eine Differenz!“⁴⁰⁰

In Das ist Mathematik 1 2011 beginnen die Aufgabenstellungen meist mit „Schreibe...“, „Gib an...“, „Wie heißt/heißten ...“, „Berechne ...“, „Löse die Gleichung ...“, „Schätze ...“, „Wie viele...“, „Wie groß ...“, „Bilde ...“, „Ordne ...“, „Markiere ...“, „Zeichne ...“, „Vergleiche ...“, „Miss ...“.

Seltener beginnt eine Aufgabe mit: „Warum ...“, „Schreib auf, wie du vorgehst!“, „Was fällt dir auf?“, „Begründe deine Antwort!“, „Erfinde selbst ...“, „Was muss man an der Angabe ändern, dass...“.

Dieser Vergleich ist durchaus repräsentativ auch für andere Schulbücher. Die Art der Aufgabenstellung hat sich bleibend in Richtung Argumentieren, Analysieren, Beschreiben, Erklären verändert, aber selbstverständlich gibt es nach wie vor die „alten“ Rechenbeispiele. Es ist im Kompetenzmodell des neuen Unterstufenlehrplans ja nach wie vor der Handlungsbereich des Operierens vorgesehen. Viele Aufgaben mit den Kennzeichnungen nach dem Kompetenzmodell weisen „H2: Rechnen, Operieren“ auf, und die zahlenmäßig wenigsten Aufgaben gibt es für den Handlungsbereich „H4 Argumentieren Begründen“.⁴⁰¹

Eine neue Art der Fragestellung hat sich bei einigen neuen Schulbuchreihen herausgebildet: Sogenannten Kompetenzchecks fragen:

„Gegeben sind die Funktionen: ...

Welche ihrer Graphen sind symmetrisch zur y-Achse...?“⁴⁰²,

„Formulieren den Zusammenhang zwischen dem Gefälle bzw. der Steigung x in % und dem Steigungswinkel α als Formel!“⁴⁰³

Der Abschluss der Kapitel in der Reihe Thema Mathematik heißt „Teste dein Wissen!“ und enthält ebenfalls diese Art der Fragestellung:

„Wie viele Lösungen kann ein System dreier linearer Gleichungen in drei Unbekannten haben? [keine, genau zwei/ mehr als drei/ genau eine/ genau drei/unendlich viele]“⁴⁰⁴

Diese Art der Fragestellung will offensichtlich die SchülerInnen auf die derzeit so beliebten Testungen vorbereiten. Es wird sich zeigen, ob eine auf diesen Aufgaben basierender Unterricht

³⁹⁸ Rath Arbeitlehrbuch Mathematik 1 1974, S. 28.

³⁹⁹ Rath Arbeitlehrbuch Mathematik 1 1974, S. 178.

⁴⁰⁰ Rath Arbeitlehrbuch Mathematik 1 1974, S. 142.

⁴⁰¹ vgl. Humenberger Das ist Mathematik 1 2011.

⁴⁰² Götz Mathematik 5 2010, S. 157.

⁴⁰³ Götz Mathematik 5 2010, S. 223.

⁴⁰⁴ Brand thema mathematik 6 2012, S. 52.

zu besseren Leistungen in Mathematik führt oder zu besseren Testergebnissen oder zu beidem. Diese Veränderung des Mathematikunterrichts könnte aber auch zu einer neuen Reform führen.

5.3.6 Differenzierung im Unterricht und bei den Aufgaben

Die schrittweise Angleichung des Hauptschullehrplans an jenen des Gymnasiums, die eine bessere Durchlässigkeit des Bildungssystems, also einen leichteren Zugang von Arbeiterkindern zu höherer Bildung ermöglichen sollte, und das von der sozialistischen Alleinregierung ab 1970 angestrebte Gesamtschulmodell haben den Bedarf einer inneren Differenzierung, also einer Differenzierung des Unterrichtsgeschehens innerhalb einer Klasse zusätzlich verstärkt. Die Lehrplaninhalte von Hauptschule und Gymnasium sollten übereinstimmen und für Hauptschule und Gymnasium wurden – zumindest theoretisch dieselben Schulbücher zugelassen.⁴⁰⁵ Gerade die abstrakten Themen der Neuen Mathematik und der formalistische Zugang zur Präsentation der Lehrinhalte erfordern eine stärkere Differenzierung des zu vermittelnden Stoffes, da diese Veränderung für schwächere SchülerInnen schwerer zu bewältigen war.

In den Schulbüchern findet von 1970 findet man aber keine Differenzierungsvorschläge. In den späteren Ausgaben wird die Differenzierung fast überall nur über die Aufgaben vorgesehen, das bedeutet, dass jene Kinder, die sich mit komplexeren Inhalten schwer tun, dennoch das gesamte Gedankenkonstrukt zum jeweiligen Thema lernen müssen, nur die Aufgaben würden leichter sein. Die von Amstler (siehe 3.3) vorgeschlagene, weitergehende Differenzierung des gesamten Unterrichtsgeschehens blieb Wunschdenken. Es ist mir kein vollständiges Unterrichtskonzept mit differenzierten Lehr- und Lernzielen bekannt.⁴⁰⁶ So etwas müsste von der Lehrperson selbst erstellt werden. Dabei muss man bedenken, dass so ein Konzept wohlgedacht sein müsste, grundlegende Inhalte mit allen und für den weiteren Unterricht notwendigen Begriffen und Ideen abgestimmt sein. Eine Entwicklung durch Erfahrung und Zusammenarbeit verschiedener Pädagogen, wie es bei den Schulbüchern geschieht, wäre höchst wünschenswert, nicht zuletzt, da die Differenzierung des Unterrichtsgeschehens laut Lehrplan Pflicht ist. Dennoch findet sich in meisten Schulbüchern keine Anleitung bzw. keine Differenzierung des Inhalts, sondern wie schon zur Zeit der neuen Mathematik nur eine Differenzierung der Aufgaben mit verschiedenen Symbolen.

Eine Ausnahme bildet das Arbeitslehrbuch von Rath⁴⁰⁷, das zwischen Kernstoff und Stoff der 1. Erweiterung und Stoff der 2. Erweiterung und Ergänzungsstoff unterscheidet. Der Erweiterungs- und der Ergänzungsstoff wird mit verschiedenfarbigen Balken gekennzeichnet

⁴⁰⁵ Man kann an gewissen Besonderheiten aber erkennen, ob das Schulbuch ursprünglich eher für die Hauptschule oder fürs Gymnasium gedacht war, zB an den Kapiteln für geometrisches Zeichnen.

⁴⁰⁶ vgl. ÖBV bietet online-Arbeitsblätter für die Sekundarstufe I zum freien Download für unterschiedliche Leistungsstufen an: http://www.oebv.at/list.php?page=lehrwerk_extra&titelfamilie=Mach mit Mathematik&extra=Mach mit-Online&inhalt=kss_oebv01.c.350742.de&inhaltsammlung=Mach mit Mathematik 1&modul=inhaltsammlung&kapitel=350741, abgefragt am 13.2.2014.

⁴⁰⁷ Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974.

und ebenso die dazugehörigen Aufgaben. Diese Schulbuchreihe war aber sehr kurzlebig, in den Bibliotheken finden sich nur die Ausgaben von ungefähr 1974 und keine späteren.

Mit der Einführung des Kompetenzmodells wurden die Aufgaben in der Einordnung ebenso in Schwierigkeitsstufen unterteilt, für die es klare Definitionen gibt. Manche Schulbücher weisen diese Klassifizierung bei einigen Aufgaben auf.⁴⁰⁸ Bei der Einordnung von Aufgaben zu den einzelnen Schwierigkeitsstufen lassen sich aber immer wieder unterschiedlichen Interpretationen und Zuordnungen feststellen. Auch die aktuellen Schulbücher bieten aber bei der Behandlung der Lehr- und Lerninhalte keine derartige Abstufung.

5.3.7 Aufgaben für unterschiedliche Unterrichtsmethoden

Mit der Modernisierung des Mathematikunterrichts erwartete man sich auch eine Abkehr vom Frontalunterricht. Dem sollte auch das übliche Aufgabenformat Rechnung tragen. Allerdings sorgt wohl die Langlebigkeit mancher Aufgaben für eine relativ langsame Veränderung.

Betrachtet man die Aufgaben der Oberstufenbücher zu den Kernthemen der Neuen Mathematik, so wird man viele Aufgaben finden, die mit „Zeige, dass ...“ beginnen⁴⁰⁹.

Andererseits findet man nach 9 ½ Seiten Theorie über die ganzen Zahlen samt aller Rechengesetze ca. 30 Rechenbeispiele von der Art „ $(+6) \cdot [(-2) \cdot (+3) + (-7) \cdot (+5)] =$ “⁴¹⁰, für die weder die vorher behandelten Sätze noch die definierten Begriffe notwendig gewesen wären.

„Das ist Mathematik 1“ kennzeichnet in der aktuellen Ausgabe Aufgaben, die in Gruppen und Partnerarbeiten gelöst werden können. Ebenso findet man als solche gekennzeichnete Denksportaufgaben, englischsprachige Aufgaben und schwierigere und umfangreichere Aufgaben. Dazu eine kleine Aufstellung:

	Aufgaben- anzahl insgesamt	Team- oder Partner aufgaben	Denksport- aufgaben	schwierige oder umfangreiche Aufgaben	englischsprachige Aufgaben
Rechnen mit Dezimalzahlen	147	4	0	11	10
Gleichungen und Ungleichungen	58	0	2	17	1
Quader und Würfel	80	1	6	10	4

Man sieht, dass nur sehr wenige Aufgaben für eine Team- oder Partnerarbeit vorgesehen sind. Spezielle Aufgabenstellungen für andere Unterrichtsmethoden, wie z.B. Stationenbetrieb sind auch in aktuellen Lehrbuchausgaben im Allgemeinen nicht explizit so gekennzeichnet und gestaltet, es bleibt der Lehrperson überlassen, die vorhandenen Aufgaben zu adaptieren.

⁴⁰⁸ zB Humenberger Das ist Mathematik 2 2011, S. 7 Aufgabe 5, S. 9 Aufgabe 17...; Eßletzbichler 100% Mathematik 1 2014 bei fast jeder Aufgabe; Götz Mathematik 5 2010 weist mit einem „Ampelsystem“ das Komplexitätsniveau bei allen Aufgaben aus.

⁴⁰⁹ zB. Aufgaben zu Permutationen in den Ergänzungen zu Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe I. Teil drittes Heft, Aufgaben 1057ff, 1970, S. 12.

⁴¹⁰ Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe I. Teil erstes Heft 1970, S. 68.

Im „Mathe Buch“ werden ebenfalls Gruppenaufgaben durch ein Symbol gekennzeichnet, ebenso bereits von der ersten Klasse an auch Aufgaben die man mit dem Taschenrechner und getrennt davon Aufgaben zur Bearbeitung mit einem Computer. 1442-1384 Aufgaben für Quader und Würfel, Davon 1 Gruppenaufgabe, 1283-1203, davon 19 Gruppenaufgaben Multiplizieren und Dividieren von Dezimalzahlen⁴¹¹, was für diese Buchreihe eher repräsentativ ist.

Die Aufgaben haben sich erwartungsgemäß von den reinen Rechenaufgaben zu Aufgaben entwickelt, die eine Begründung verlangen. Während man früher von der Stille im Klassenraum als Idealzustand ausging, sind heute Aufgaben vorgesehen, bei denen die SchülerInnen miteinander reden sollen. Derzeit scheint es auch modern zu sein, englischsprachige Aufgaben in den Schulbüchern samt einem kleinen Vokabular dazu vorzusehen.⁴¹²

5.4 Zusammenfassung der Änderungen in den Schulbüchern

Die Gestaltung der Schulbücher hat im Allgemeinen eine große Veränderung erfahren, sowohl hinsichtlich der optischen Gestaltung als auch hinsichtlich des Inhalts. Die Forderung, die im Zuge der Modernisierung des Mathematikunterrichts gestellt wurde, dass die SchülerInnen mehr denken und weniger rechnen sollen, zeigt bis heute ihre Wirkung. Es gibt mehr Aufgaben, die eine Begründung verlangen. Auch das Kompetenzmodell kann als eine Fortführung dieser Forderung gesehen werden. Nicht nur das Operieren, sondern auch das Modellbilden und das Argumentieren sollen geübt werden und als Kompetenzen ausgebildet werden.

Die Forderung nach Differenzierung ist nach wie vor kaum verwirklicht worden. Die Veränderung der Unterrichtsmethoden, im speziellen die Abkehr vom Frontalunterricht kann im Schulbuch nur bedingt erkannt werden, da der Theorieteil, der eventuell zum Nachlesen oder als Informationsgrundlage für alternative Unterrichtsmethoden verwendet werden kann, die verwendete Unterrichtsmethode nicht zeigt. Nur bei den Aufgaben kann man eine leichte Veränderung feststellen, es sind auch Team- und Partneraufgaben oder kleine Experimente vorgesehen.

Didaktisch gesehen konnte man – wie schon in 3.5 angeführt – einige Verirrungen in manchen Büchern aus der „Blüte“ der Neuen Mathematik feststellen, die sich aber offensichtlich nicht hielten und mittlerweile wieder aus den Schulbüchern verschwunden sind bzw. diese Bücher sind vom Markt verschwunden.

Die Verwendung der Symbolsprache der Mathematik, die in den 70iger und 80iger Jahren auch in der Unterstufe stärker zum Einsatz kam, ist zurückgegangen, da ja das Fundament dazu, die Mengenlehre und die Logik, nicht gelehrt wird. In den Büchern der Oberstufe ist diese Notation größtenteils erhalten geblieben. Teilweise gibt es derzeit in manchen Schulbüchern Sinnbrüche,

⁴¹¹ Dorfmayr Mathe Buch 1 2006.

⁴¹² vgl. Kraker Expedition Mathematik 1 2007, S. 271; Humenberger kennzeichnet in Das ist Mathematik 1 von 2011 englischsprachige Aufgaben mit „E“.

wenn geometrische Grundbegriffe nicht als Punktmengen aufgefasst werden, aber die Notation der Mengenlehre für das Schneiden zweier Geraden verwendet wird.

Prinzipiell kann man erkennen, dass die Schulbücher über den Lehrplan hinausgehende Inhalte vorsehen und auf Lehrplanänderungen erst mit Verzögerung reagieren.

Eine Erkenntnis abseits der Neuen Mathematik: Beim Durchsehen der Schulbücher aus den 70iger Jahren konnte festgestellt werden, dass die gesetzliche Förderung der Durchlässigkeit des Bildungssystems sich positiv auf die Hauptschullehrbücher auswirkte. Mit der Tatsache, dass Schulbücher für die Hauptschule und das Gymnasium zugelassen wurden, verbesserte sich die didaktische Qualität der Hauptschulbücher enorm.

6 Was blieb von der Neuen Mathematik

„Eine Reform ist schon dann erfolgreich, wenn sie keinen allzu großen Schaden anrichtet.“⁴¹³

6.1 Das Ende der Neuen Mathematik

Der Höhepunkt der Neuen Mathematik scheint um das Jahr 1974 zu liegen. Einerseits wurde mit dem Lehrplan 1974⁴¹⁴ eine Anpassung der Reform vorgenommen, die die Modernisierung wieder abschwächte, andererseits erfolgte teilweise eine Verlagerung der Mengenlehre in die Volksschule. Diese Inhalte wurden dann später wieder aus dem Volksschullehrplan entfernt. Der Spiegel schreibt, dass die Mengenlehre 1984 aus dem deutschen Volksschullehrplan verschwand, die Neue Zürcher Zeitung berichtet erst 2010 von dieser Lehrplanänderung in der Deutschschweiz. In Österreich ist diese Änderung „geräuschlos“ erfolgt.

Die Modernisierung des Mathematikunterrichts setzte sich in den Lehrplänen von der Oberstufe zur Unterstufe fort, bis schließlich die Einführung der Mengenlehre in der Volksschule zum Widerstand in der Bevölkerung führte. Dabei wurden die ersten Korrekturen im Lehrplan sichtbar. Die algebraischen Strukturen wurden wieder aus dem Lehrplan der Unterstufe entfernt, die Betonung der Abbildungsgeometrie zurückgenommen, die Mengenlehre samt ihren Symbolen wurde in der Unterstufe breit behandelt. In der Oberstufe hielten sich die Kernthemen der Neuen Mathematik in der formalen Behandlung aber ebenfalls nur bis zur nächsten großen Reform 1989. Die Konzentration auf Lehr- und Lernziele löst die Betonung des formalen Zugangs ab. Die Forderung nach Abstraktion wird von jener nach Anschaulichkeit und Bezug zur Lebenswelt der SchülerInnen abgelöst.

In der Zeitschrift „Praxis der Mathematik – Monatsschrift der reinen und angewandten Mathematik im Unterricht“ wurde das Inhaltsverzeichnis vom Jahr 1974 auf das Jahr 1975 dergestalt angepasst, dass im Jahr 1975 eine eigene Rubrik „Grundlagen, Logik, Mengenlehre,

⁴¹³ Ein geflügeltes Wort, siehe auch <http://www.spiegel.de/unispiegel/jobundberuf/wissenschaftspolitik-was-sich-deutsche-spitzenforscher-wuenschen-a-618529-4.html>, abgefragt am 18.12.2013.

⁴¹⁴ siehe 4.5.1, VO 295/1974

Struktur“ eingefügt wurde. Andererseits schreibt Köhnen im Bericht von der 11. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Hamburg: „Fast überflüssig ist es, zu erwähnen, daß, die Mengenlehre‘ keinen Vortragenden beschäftigt hat.“⁴¹⁵ Dabei widerspricht er sich selbst, da er im selben Bericht den Vortrag von E. Sperner mit dem Titel „Geometrie und Mengenlehre“ rühmt, bei dem jener ausführte, „wie geometrische Beweise und Sachverhalte in die Mengensprache übertragen werden können“.⁴¹⁶

6.2 Kritik an der Reform

6.2.1 Kritik an New Math in den Vereinigten Staaten

Da die Einführung von New Math in den Vereinigten Staaten früher stattfand, wurde auch früher Kritik an New Math laut.

Die Kritik an New Math hat 1965 Tom Lehrer, einen Mathematiker und Songwriter und Satiriker zum Lied „New Math“⁴¹⁷ inspiriert, in dem er eine Subtraktion im Oktalsystem vorführt. Er singt die Rechnung in einem sehr schnellen Rhythmus, sodass die Zuhörer nicht wirklich folgen können, was die Schwierigkeit der Rechnung bestätigen soll. Da der Schwerpunkt auf dem Verstehen liegen soll, verrechnet sich das fiktive Kind und Tom Lehrer singt: „...and that leaves five, well, six actually, but the idea is the important thing“. Er kritisiert die Komplexität der Rechnung, der wie beabsichtigt im Lied auch die erwachsenen Zuhörer nicht folgen können.

Kline Morris kritisiert in seinem Buch „Why Johnny can’t add. The Failure of the New Math“ ebenso die Überforderung der Grundschüler mit Theorie, die sie auf das College vorbereiten soll. Er fordert darin – abgesehen von einem schülergerechten Unterricht – die Verbindung von Mathematik mit Science, zur Motivation der SchülerInnen.⁴¹⁸

Auch die Comicserie „Peanuts“ thematisiert in einigen Cartoons das Thema New Math:

Lucy möchte 2 und 2 addieren, dabei muss sie sich mit Begriffen wie Teilmengen, Vereinigungsmengen, einelementige Mengen, zweielementige Mengen, gleichmächtige Mengen und anderen auseinandersetzen. Der Cartoon drückt die Überforderung der Grundschulkinder durch die Fülle an mathematischen Begriffen aus.⁴¹⁹



⁴¹⁵ Praxis der Mathematik 1977, S. 185.

⁴¹⁶ Praxis der Mathematik 1977, S. 183.

⁴¹⁷ Der Text ist im Anhang nachzulesen.

⁴¹⁸ <http://www.marco-learningssystem.com/pages/kline/johnny.html>, abefragt am 18.9.2013.

⁴¹⁹ <http://www.gocomics.com/peanuts/1965/10/05#.UwsiZBswdLM>, abefragt am 24.2.2014.

Auch der Hund Snoopy – als eher einfacher Charakter angelegt – sagt im Cartoon, dass jemand, der nur die Stunden bis zur nächsten Mahlzeit zählt, keine New Math braucht. Darin versteckt sich die Meinung, dass nicht jedes Kind auf die Hochschulmathematik vorbereitet werden müsse.⁴²⁰



Amstler schreibt über die Situation in den Vereinigten Staaten: „... und unter dem Eindruck des Sputnik-Schocks stellte man den Mathematikunterricht in den USA auf eine neue Basis, nämlich auf eine rein theoretische, und ließ den Kind- und Sachbezug außer acht. Es wurden abstrakte Algebra, symbolische Logik, ja sogar Relativitätstheorie in die Inhalte einbezogen. Man könnte etwas hart etwa so urteilen: Amerika hat didaktisch und methodisch das falsch gemacht, was man falsch machen konnte. Zur verfrühten Einführung mathematischer Sachverhalte in den Schulen kam auch die Verstärkung des deduktiven Verfahrens.“⁴²¹

Offensichtlich war er als Befürworter der Neuen Mathematik der Meinung, dass diese Fehler im deutschsprachigen Raum nicht gemacht würden.

6.2.2 Neue Mathematik für jeden – Mengenlehre in der Volksschule?

Schon die ursprüngliche Argumentation für die Einführung der Neuen Mathematik birgt einen (recht offensichtlichen) Widerspruch: Die Kluft Hochschulmathematik – Schulmathematik sei zu groß und die Inhalte der algebraischen Strukturen für die Studenten schwer fassbar, deshalb müssten die SchülerInnen schon in der Schule auf diese Inhalte vorbereitet werden und – weil entwicklungspsychologisch von Piaget und Dienes begründet – zwar schon in der Grundschule. Demnach sollte der für Studenten zu schwierige Stoff VolksschülerInnen beigebracht werden. Das ist eine polemische Verkürzung, die aber einen wahren Kern besitzt.

Als Beispiel soll die Vermittlung des Begriffes Gruppe über die Drehung eines Quadrates betrachtet werden. Dieser Zugang erweist sich für Studenten als sehr anschaulich und ist ein gutes Beispiel für die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten der Theorie der algebraischen Strukturen, aber das zugrundeliegende Konzept einer Gruppe ist für VolksschülerInnen so komplex, dass beim Spiel kein Erkenntnisgewinn bezüglich der Struktur möglich ist. Schubert schreibt dazu sehr treffend: „Das Definieren von Begriffen ‚auf Vorrat‘, ihre Einführung, nur

⁴²⁰ <http://www.gocomics.com/peanuts/1965/10/09#.UwsiLxswdLM>, abgefragt am 24.2.2014.

⁴²¹ Amstler 1975, S. 18.

damit sie ‚bekannt‘ sind, ohne daß mit ihnen etwas geleistet wird, das Erzwingen einer auf dem Niveau kindlichen Verständnisses kunstvoll aufgebauchten Terminologie, scheinbare logische Strenge, wo noch kein Bedürfnis und kein Sinn für sie vorhanden sind, das sind Merkmale, die einem pädagogisch konzipierten Unterricht und dem Wesen der Mathematik eklatant widersprechen.“⁴²²

Dieser Kritikpunkt war sicher zutreffend und hat in Österreich ja auch zur Entfernung der Mengenlehre aus dem Volksschullehrplan geführt.

Betrachtet man den aktuellen österreichischen Volksschullehrplan, so findet man das Wort Menge immer wieder. („Veranschaulichen von Zahlen zB. durch Zahlbilder, Mengendarstellungen, Zahlenstrahl, symbolische Darstellung“⁴²³). Aber auch Klassifizieren und das Behandeln von Relationen ($=$, $<$, $>$) sollen die Kinder lernen, allerdings findet man auch den Passus „ohne Formalisieren“. Die Mengendarstellung ist immer an die Zahl gebunden, Mengenlehre wird nicht um ihrer selbst Willen betrieben, sondern als Grundlage des Rechenunterrichts. Vereinigungs- und Durchschnittsmenge sind kein Thema mehr. Die Mengenlehre mit Teilmenge und Mächtigkeit wurde aus dem Lehrplan gestrichen.

6.2.3 Zu abstrakt für den Unterricht im Gymnasium

Schon Henri Cartan selbst, ein Mitglied jener Runde an Mathematikern, die unter dem Pseudonym Bourbaki veröffentlichten, führte an, dass es bei der Abfassung der Elemente der Mathematik Probleme mit dem Aufbau gab: „Aus praktischen Gründen war es unmöglich, die chronologische Anordnung der Publikation der logischen Anordnung anzupassen. So ist zum Beispiel das erste Kapitel des ersten Buches, das eine vollständige Darstellung der formalen Mathematik gibt, erst als siebzehnter Band der Sammlung erschienen, da der Verfasser sich unbedingt einen klaren Überblick über die Bedürfnisse der weiteren Bände verschaffen mußte.“⁴²⁴

Dadurch muss der Leser der Elemente der Mathematik – genauso wie Schüler der Neuen Mathematik – einen beschwerlichen Weg auf sich nehmen und Grundlagen lernen um erst viel später zu erkennen, zu welchen Erkenntnissen diese Grundlagen verhelfen. Prof. Behnke führt dazu aus: „Es ist mehr unsere Aufgabe [der Universitätslehrer], in den Vorlesungen unsere Studenten von der Wichtigkeit als von der Richtigkeit des vorgetragenen Stoffes [...] zu überzeugen. Wie aber wollen Sie das machen, wenn Sie erst nach der Lektüre von 17 Bänden wissen, daß der im ersten Bande behandelte Stoff für das Spätere notwendig war?“⁴²⁵

⁴²² Schubert 1971, S. 87.

⁴²³ aktueller Volksschullehrplan: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/3996/VS7T_Mathematik.pdf, abgefragt am 13.2.2014.

⁴²⁴ Cartan 1959, S. 14.

⁴²⁵ Cartan 1959, S. 21.

Hanfried Lenz schreibt in einer Abhandlung: „Der Zweck des Mathematikstudiums ist die Ausbildung von 1) mathematischen Forschern, 2) Lehrern der Mathematik und Physik, 3) Physikern und Ingenieuren, einschl. Diplommathematikern. Zur Zeit [1963] wird m.E. der erste Zweck auf Kosten der beiden anderen überbetont. Für den ersten Zweck ist die Bourbakisierung unentbehrlich, für den zweiten und dritten überwiegt jedoch ihr Nutzen die Nachteile nur bei einer Minderheit begabter Studenten, die hinter den abstrakten Definitionen und Sätzen noch die vielen durch sie zusammengefaßten inhaltsreichen Theorien und Verfahren erkennen können.“⁴²⁶ Das bedeutet, die Neue Mathematik war nur als Vorbereitung für – wie man es heute nennt – das Diplomstudium der Mathematik interessant, für die Studenten der Technik oder anderer Naturwissenschaften sei es nicht nötig. Ich kann aus eigener Erfahrung festhalten, dass 1985 in der mathematischen Grundausbildung für Maschinenbauer, Elektrotechniker und Bauingenieure⁴²⁷ an der TU Graz algebraische Strukturen nicht erwähnt wurden.

Zur Mengenlehre führen die Autoren im Lehrbuch der Mathematik 1 in der Lehrerausgabe von 1994 im Begleitwort Folgendes an:

„Es ist bekannt und unbestritten, daß die Mengenlehre der sechziger und siebziger Jahre (Stichwort „Neue Mathematik“) auf der einen Seite durch Einbringen mathematisch bedeutender Denk- und Sprechweisen dem Mathematik-Unterricht damals zwar neue Impulse verlieh, daß aber andererseits vielfach ‚über das Ziel geschossen‘ wurde, und letztlich auch mathematische und pädagogische Sinnwidrigkeiten entstanden sind.

Der neue Lehrplan schafft aber Begriffe und Denkweisen der Mengensprache keinesfalls ab, wie vielfach kolportiert wird. Zur Dokumentation sei im folgenden der Originallautwort des Lehrplans angeführt: [...]

Dem ist an sich nichts hinzuzufügen, außer, daß wir diese Lehrplanforderung dadurch ernst genommen haben, daß wir ein entsprechendes Kapitel eingebaut haben, es aber mit einem ‚+‘ gekennzeichnet haben, um anzudeuten, daß dieses Kapitel ohne unmittelbare Verluste für das Weitere ausgelassen werden kann.“⁴²⁸

Man könnte diese Argumentation zusammenfassen mit den Worten: Die Neue Mathematik war nicht prinzipiell schlecht, aber die Inhalte sind entbehrlich.

6.2.4 Zuwenig Praxiserfahrung der Didaktiker

These: Die Befürworter der Modernisierung des Mathematikunterrichts waren selbst nicht mit dem Schulalltag vertraut. Nicht Lehrer, sondern Didaktikprofessoren entwickelten die didaktischen Vorschläge, ohne die Zielgruppe, die SchülerInnen und die Unterrichtssituation

⁴²⁶ Lenz, Hanfried: A bas Euclide – vive Bourbaki?, in Praxis der Mathematik 1963, S. 85.

⁴²⁷ Diese Grundausbildung umfasste über vier Semester verteilt ca. 28 Semesterwochenstunden.

⁴²⁸ Laub Lehrbuch der Mathematik 1 1994, Lehrerbegleitheft S. 7; die Unterstreichungen wurden aus dem Original übernommen.

realistisch einschätzen zu können und ohne die Probleme des Mathematikunterrichts zu kennen.

Frau Dorothee Schäfer, Autorin von „ABC der Mengenlehre – Keine Angst vor Mathematik“, „war zunächst Mathematiklehrerin an verschiedenen Kölner Schulen, wurde 1962 Assistentin am Seminar für Didaktik der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Köln“⁴²⁹. Wenn man annehmen darf, dass Frau Schäfer ungefähr mit 25 Jahren zu unterrichten begann, so war sie, 1927 geboren, mindestens 10 Jahre ausschließlich Lehrerin.

Über Anna und Josef Tille, die Autoren von „Ganzheitlicher Weg und Mengenlehre im Erstreckenunterricht, heißt es auf der Rückseite des Einband, sie hätten „langjährige Praxis im Schuldienst“⁴³⁰.

Über die Autoren der Bücher „Neue Mathematik auf der fünften Schulstufe“ und „... auf der sechsten Schulstufe“ schreibt Prof. Wingert in der Einleitung: „Die Autoren des Arbeitsbuches M 5 bzw. 6 und des dazugehörigen Handbuches stammen aus allen Bereichen der ‚Schulwirklichkeit‘. Einige unterrichten an Hauptschulen, einige an den allgemeinbildenden höheren Schulen, einige sind an Pädagogischen Akademien und als Lehrbeauftragte an Universitäten tätig.“⁴³¹ Danach folgt eine kurze Angabe über die Autoren. Dabei wird ersichtlich, dass von den sechs Autoren des Bandes für die fünfte Schulstufe zwei „ausschließlich“ Hauptschullehrer sind, ein Autor ist ausschließlich Hochschulassistent, bei ihm wird keine Schule angeführt, und bei drei Autoren wird zwar eine Schule angeführt, es wird aber nicht festgehalten, wie umfangreich ihre Unterrichtserfahrung ist.

DDr. Zoltan Paul Dienes hingegen, der Erfinder der logischen Blöcke, studierte Germanistik, Philologie und Mathematik. Von 1937 an führte er Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik, promovierte mit einer These über „Die logischen und philosophischen Grundlagen der Mathematik“. Von 1950 – 1955 studierte er Psychologie, von einer Lehrtätigkeit an einer Schule liest man auf der Umschlagrückseite seines Buches nichts: „Mathematik ist keine Geheimwissenschaft, sonder ein Betätigungsfeld lustvollen konstruktiven Denkens [...] Das ist die in vielen Versuchen bestätigte These des Verfassers. [...] Das Buch mit seinen vielen Beispielen ist für jeden Lehrer von Interesse. Hervorzuheben ist die gründliche Diagnose der Schwierigkeiten, die Kinder beim Erlernen der Mathematik haben.“⁴³² Gerade die Ideen Dienes, und dabei besonders die Verwendung der Merkmalklötze und anderer Materialien in lernorientierten Spielen prägten die Didaktik der Mathematik.⁴³³ Er hatte großen Einfluss auf die Curriculumentwicklung der Grundschulmathematik.⁴³⁴ Auf der Homepage von Prof. Dienes wird

⁴²⁹ Schäfer 1971, Umschlag: „Über die Autorin“, S. 4.

⁴³⁰ Tille 1974, Umschlagrückseite.

⁴³¹ Amstler 1975, S. 13; Amstler 1974, S. 14.

⁴³² Dienes 1965, Umschlagrückseite.

⁴³³ vgl. Griesel 1971, S. 7.

⁴³⁴ Steiner 1978, S. XXXVI.

er neben Jean Piaget und Jerome Bruners als der führende Lernforscher bezeichnet, dessen Forschung für die Entwicklung der Mathematikdidaktik so wichtige Beiträge lieferte.

Auch Herbert Meschkowski unterrichtete an einer Schule für schwererziehbare Kinder und später an einem Gymnasium, das bedeutet, er konnte auf mindestens sieben Jahre Unterrichtserfahrung zurückblicken (1932 – 1939).⁴³⁵ Allerdings sammelte er diese Unterrichtserfahrung vor dem 2. Weltkrieg, somit lag diese zur Zeit der Abfassung seiner vielen Bücher und der Einführung der Neuen Mathematik schon viele Jahre zurück.

Dieser Vergleich der Unterrichtserfahrung lässt keinen eindeutigen Schluss zu, ob die didaktische Aufbereitung der Neuen Mathematik wirklich von so unterrichtsunerfahrenen Didaktik-Lehrenden bestimmt war. Die Versuche von Dienes im Rahmen seiner Forschungstätigkeit werden als „Versuche“ bezeichnet, also liegt das Bild von Laborbedingungen nahe, und nicht so sehr die Erprobung in der Schulwirklichkeit. Auch die Aufnahmen zB. auf seiner Homepage vermitteln das Bilde des „netten Onkels“⁴³⁶, der in der Schule zu Besuch war, ein netter Vormittag, der ohne Leistungsdruck eher einem Event als dem Schulalltag entspricht. Es ist fraglich, wie LehrerInnen seine Ideen in den Unterricht einbauen konnten.

Töpfer kritisiert bereits 1968 in Praxis der Mathematik die Universitätsprofessoren: *„Die von mir kritisierten Vorschläge von Seiten einiger weniger Hochschullehrer sind zu stark an der Situation im Universitätsleben orientiert und nehmen zu wenig Bedacht auf die Situation des Schülers; diese Unkenntnis sollte etwas mehr Zurückhaltung ratsam erscheinen lassen“*.⁴³⁷

Es ist durchaus vorstellbar, dass die Meinungsführung der eher praxisunerfahrenen Didaktikprofessoren und Forscher⁴³⁸ die Äußerungen der praxiserprobten LehrerInnen bestimmt hatte und damit didaktische Verirrungen nicht kritisiert wurden.

6.2.5 Didaktische Mängel

Die Unterordnung der Vermittlungsstrategien unter den Bourbakismus führte zu Verrenkungen in der Aufbereitung der Inhalte. Als Beispiel sei das Bruchrechnen angeführt:

Die zugrunde liegende Rechenoperation des Dividierens ist von den vier Grundrechnungsarten diejenige, die den SchülerInnen am schwersten fällt. Die Vorstellungen dazu müssen deshalb besonders intensiv vermittelt werden und in vielerlei Gestalt angeboten werden. Die Zugänge zur Entstehung eines Bruchs über den Streck-/Stauchoperator sind denkbar unglücklich und wenig anschaulich verglichen mit dem Teilen einer Torte oder einer Pizza.

⁴³⁵ vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Herbert_Meschkowski, abgefragt am 21.2.2014.

⁴³⁶ vgl. <http://www.zoltandienes.com/>, abgefragt am 20.2.2014.

⁴³⁷ Töpfer: Modernisierung des Mathematikunterrichts auf halbem Wege, in: Praxis der Mathematik 1968, S. 71.

⁴³⁸ an dieser Stelle erübrigt es sich leider zu gendern.

Steiner, ein Befürworter der Neuen Mathematik schreibt: „In den Jahren 1973/74 setzt eine weltweite teils berechtigte, teils unberechtigte Kritik an den Reformen, insbesondere der Grundschule, ein. Die Praxis kommerzieller Lehrbucherstellung, eine Flut von Publikationen inkompetenter Autoren, unzureichende Vorbereitung der Lehrer, Vernachlässigung wichtiger Faktoren des Unterrichts, ungenügende Erprobung und Mangel an wissenschaftlichen Begleituntersuchungen sind einige der Ursachen für Fehlentwicklungen und Fehlschläge in der Bundesrepublik.“⁴³⁹ Er bekennt ebenso, dass es „in der Entwicklung der Lehrmaterialien zu Vereinseitigungen insbesondere in der Betonung der Mengenlehre und eines auf sie gegründeten Zahlenverständnisses“ kam.⁴⁴⁰ Außerdem kritisierte er „die Überbetonung der Mengen- und Strukturbegriffe und die Vernachlässigung der Anwendungen“, die zwar immer angeführt worden waren, aber weder im Unterricht noch in den Lehrbüchern berücksichtigt wurden.⁴⁴¹

Genau diesen Eindruck gewinnt man, wenn man die didaktischen Neuerungen mit den älteren Schulbüchern vergleicht. Es scheint als hätte man krampfhaft einen Bezug zur Mengenlehre herstellen müssen, und egal wie anschaulich die bisherigen Erklärungen auch waren, nun mussten Mengen als Grundlage der Erklärung dienen, vgl. die Mengenumenge bei der Multiplikation (siehe 3.5.1).

Betrachtet man die Umsetzung der didaktischen Vorschläge in den österreichischen Schulbüchern, so sieht man, dass manche Ideen der Didaktiker verwendet wurden, aber zusätzlich andere, erprobte Zugänge ebenfalls angeboten wurden⁴⁴² oder die neuen Ideen überhaupt nicht verwendet wurden⁴⁴³.

Fraglich ist, ob diese neuen Unterrichtsvorschläge damals von den Lehrenden überhaupt umgesetzt wurden. Das Schulbuch wurde und/oder wird oft nur als Aufgabensammlung genutzt. Viele LehrerInnen haben ihre Unterrichtsunterlagen vorbereitet und unterrichten unabhängig vom jeweiligen Schulbuch und nutzen die Möglichkeit der Schwerpunktsetzung des Lehrplans. Vor diesem Hintergrund ist auch der große Aufschrei angesichts der Umstellung bei der neuen zentralisierten Reifeprüfung zu verstehen. Nun müssen die eigenen Unterrichtsunterlagen an die Erfordernisse der Zentralmatura angepasst werden, sonst könnten verschiedene Inhalte im Unterricht fehlen.

6.2.6 Mangelnde Ausbildung der LehrerInnen

Griesel schreibt, dass die Modernisierung des Mathematikunterrichts durch die Aufnahme des lernorientierten Spiels in den Unterrichtsablauf bestimmt wurde.⁴⁴⁴ Wie weit wurde dieses Spiel von den Lehrpersonen als Teil des Unterrichts verstanden und – wie von den Forschern

⁴³⁹ Steiner 1978, S. XXXVII.

⁴⁴⁰ Steiner 1978, S. XXXVI.

⁴⁴¹ vgl. Steiner 1978, S. XXXVIII.

⁴⁴² vgl. Bruchoperatoren versus Visualisierung durch Teilen.

⁴⁴³ vgl. Erklärung der Multiplikation über die Mengenumenge, dieser Zugang findet sich nicht in allen Schulbüchern.

⁴⁴⁴ vgl. Griesel 1971, S. 8.

vorgesehen – eingesetzt? *„Diese Entwicklung [die Modernisierung des Mathematikunterrichts in der Grundschule] fand stärkeren Eingang in das Bewußtsein der Öffentlichkeit als die Modernisierung des Mathematikunterrichts an den Gymnasien, weil ... in der Lehrerschaft der Grundschule wegen des Fehlens einer fachlichen Ausbildung besondere Aufregung herrschte.“*⁴⁴⁵

Auch Steiner beschreibt die *„teils berechtigte, teils unberechtigte Kritik an den Reformen, insbesondere der Grundschule“* unter anderem mit der unzureichenden Vorbereitung der Lehrer.⁴⁴⁶

Angesichts der Kritik an der langen und intensiven Ausbildung der GymnasiallehrerInnen ist es fraglich, ob dieser Kritikpunkt auch auf diese LehrerInnen zutraf. Ob allerdings ein langes und intensives Studium der Mathematik auf die Vermittlung des Lehrstoffes des Gymnasiums vorbereitet, wäre ein wichtiges Forschungsthema.

6.2.7 Öffentliche Kritik an der Mengenlehre

In Deutschland gab es besonders großen Widerstand gegen die sogenannte „Mengenlehre“.

„Der Spiegel“ widmete diesem Thema 1974 mehrere Artikel. Im Folgenden soll eine kurze Zusammenfassung dieser Artikel als „Spiegel“ der damaligen Meinung wiedergegeben werden.

Im Artikel „Falsche Musik“⁴⁴⁷ beschreibt der Spiegel den Kampf von Eltern gegen den Unterricht der Mengenlehre. Das Ehepaar Kragler hatte sich an den Bayrischen Verfassungsgerichtshof gewandt, da sie meinten der Unterricht in Mengenlehre verstöße gegen die Verfassung des Freistaates, da er gegen Menschenwürde, Jugendschutz und Elternrecht verstöße. Dabei schreibt der Autor auch *„Und unbestritten wie die Tatsache, daß Mengenlehre das logische Denken fördert, ist auch, daß die neue Mathematik besser als traditionelles Rechnen geeignet ist auf das Berufsleben vorzubereiten.“*⁴⁴⁸

Einer der Hauptkritikpunkte war, dass die LehrerInnen nicht für den Unterricht der Mengenlehre ausgebildet waren. Nun versuchte man das mit Kursen nachzuholen: *„Kurse an denen Zehntausende von Lehrern teilnahmen, wurden oft so spät angesetzt, daß die Pädagogen ihren Schülern jeweils nur um eine Lektion voraus waren.“*⁴⁴⁹

Die Schulbuchverlage stellten sich dagegen schneller auf die neue Situation ein und überschwemmten den Markt mit Klötzen, Blöcken, Plättchen und Büchern für Schüler, Eltern und Lehrer, wobei auch die Bücher kritisiert wurden. Ein Mathematikprofessor (Hans

⁴⁴⁵ Griesel 1971, S. 8.

⁴⁴⁶ Steiner 1978, S. XXXVII.

⁴⁴⁷ Falsche Musik, Der Spiegel 10/1974 vom 4.3.1974: <http://www.spiegel.de/spiegel/print/d-41784205.html>, abgefragt am 18.12.2013.

⁴⁴⁸ Falsche Musik, Der Spiegel 10/1974 vom 4.3.1974: <http://www.spiegel.de/spiegel/print/d-41784205.html>, abgefragt am 18.12.2013.

⁴⁴⁹ ebenda.

Freudenthal) wird zitiert: „*das meiste zeugt von barbarischer Ignoranz und didaktischer Unfähigkeit*“.

Eine die Mengenlehre verteidigende Lehrerin sieht die Probleme an einer anderen Stelle: „*Das liegt doch bloß daran, daß viele Lehrer keine Ahnung haben, was sie alles weglassen müssen.*“ Den Elternprotesten begegneten Politiker auf unterschiedliche Weise, in Nordrhein-Westfalen gab es eine „Hausaufgabensperre“ (Es war untersagt, Aufgaben aus der Mengenlehre als Hausaufgabe zu geben), in Kiel ordnete man eine 15% Beschränkung für Inhalte der Mengenlehre im Jahresstoff an.

Im Artikel „ $3+5 = 5+3$ “⁴⁵⁰, ebenfalls im „Der Spiegel“ erschienen, werden Eltern zitiert, die beschreiben, dass es ihnen unmöglich sei, den Inhalten der Mengenlehre, die ihren Kindern gelehrt wird, zu folgen. In diesem Artikel wird bestätigt, dass es keinerlei Diskussion über die Modernisierung des Mathematikunterrichts im Gymnasium gäbe, nur um die Mengenlehre an den Grundschulen wird gestritten. Als Argument wird unter anderem angeführt, dass Kinder zu früh ihre Eltern hilflos und unwissend sehen. „*Damit schwindet die Achtung, die Kinder können nicht mehr ihre Eltern fragen, deren Vorbild verblaßt*“, wird ein Mengenlehre-Gegner zitiert.

In diesem Artikel wird die gegensätzliche Meinung von Universitätsprofessoren für Mathematik einerseits und Mathematik-Didaktikern andererseits folgendermaßen beschrieben: Die Universitätsprofessoren für Mathematik hielten nichts von der Art, wie Mengenlehre an deutschen Grundschulen betrieben würde. Mengenlehre sei für die Schule kaum geeignet. Dort könne es allenfalls eine „*Gebrauchsmengenlehre*“ geben, die „*eher eine Sprache als ein eigener mathematischer Stoff*“ sei, und deshalb „*allmählich und zwanglos eingeführt werden*“ solle.

Es wird auch die Hysterie beschrieben, die damals herrschte: Es gab Mütter, die klagten, dass die Mengenlehre Fieber, Bauch- und Kopfschmerzen, Brechreiz und Pickel (!) bei ihren Kindern durch die Überforderung im Mathematikunterricht ausgelöst hätte. Ärzte würden vor den Folgen des Mengenlehreunterrichts warnen (genannt wird zB. Kinderpsychiater Fritz Held).

Der Artikel wendet sich ab der Hälfte und beschreibt eine Studie des Didaktikers Bauersfeld, die zum Erscheinungszeitpunkt bereits vier Jahre gelaufen sei und mit einer Million Mark finanziert worden war. Fazit der Studie: „*beide Gruppen hatten im ganzen gesehen denselben Grad an Rechenfertigkeit erreicht*“. Das hatte damals offensichtlich schon gereicht um als Erfolg zu gelten. Es sei an das Zitat am Beginn dieses Kapitels erinnert.⁴⁵¹

Als Vorteil des modernisierten Mathematikunterrichts wurde unter anderem auch angeführt, dass die Mengenlehre einen Verzicht auf Frontalunterricht und neue Methoden des Unterrichts in Gruppen und mehr Selbsttätigkeit für die SchülerInnen mit sich bringe.

⁴⁵⁰ $3+5 = 5+3$, Der Spiegel 13/1974 vom 25.3.1974, <http://www.spiegel.de/spiegel/print/d-41784469.html>, abgefragt am 24.2.2014.

⁴⁵¹ „*Eine Reform ist schon dann erfolgreich, wenn sie keinen allzu großen Schaden anrichtet*“, ein geflügeltes Wort, siehe auch <http://www.spiegel.de/unispiegel/jobundberuf/wissenschaftspolitik-was-sich-deutsche-spitzenforscher-wuenschen-a-618529-4.html>, abgefragt am 18.12.2013.

Die Kritik, dass Eltern von ihren Kindern hilflos erlebt würden und dies zu einem nachhaltigen Autoritätsverlust führen würde, muss unter dem – man möchte fast sagen – historischen Umstand gesehen werden, dass das Verhältnis zwischen Kindern und Eltern noch weit stärker hierarchisch geprägt war. Heute klingt diese Argumentation anachronistisch, wenn man die Fähigkeiten der „digital natives“ mit denen ihrer Eltern vergleicht, wie kompetent benützen Kinder und Jugendliche PC, Laptop und Handy, und wie viele Eltern lassen sich Funktionen dieser Geräte von ihren Kindern erklären ohne einen Autoritätsverlust zu befürchten. Außerdem wird heute die Betreuung der Hausaufgaben nicht mehr als selbstverständliche Pflicht der Eltern, sondern oft als Pflicht der Schule gesehen.

Der Mengenlehre-Gegner Morris Kline, Autor des Buches „Why Johnny can't add“, verfasste einen Beitrag zu einem „Kongress über Mengenlehre“ in München. Ein Auszug davon wurde im Spiegel unter dem Titel „Mengenlehre – das ist Zeitverschwendung“⁴⁵² veröffentlicht. Darin findet sich die Aussage: *„Mengenlehre ist völlig unnütz, wenn es darum geht, die Grundlagen der Mathematik zu verstehen und mit ihnen arbeiten zu lernen. [...] In sehr fortgeschrittenen mathematischen Theorien spielt Mengenlehre allerdings eine Rolle. Aber es ist lächerlich, sie beim Elementar-Unterricht zu verwenden – mehr noch, es ist eine Travestie der Pädagogik. Für mich ist es fast sicher: Die Mengenlehre ist nur deshalb in die Neue Mathematik eingeführt worden, damit diese den Anstrich von Kultiviertheit und Fortschrittlichkeit bekommt – aber nicht, weil sie etwa nützlich wäre.“* Das Fazit dieses Artikels: *„Die Logik darf nur so streng sein, wie es dem Alter des Kindes entspricht.“* Kline plädiert für eine Abschaffung der Neuen Mathematik. Morris war bekannt als Gegner der Mengenlehre und er beschrieb bereits negative Erfahrungen in den USA über die schon 10 bis 15 Jahre dauernde Reform.

Diese Artikel dürften eine zutreffende Beschreibung der damaligen vorherrschenden Meinung sein. Ähnliche oder dieselbe Kritik findet man auch in der didaktischen Literatur, die allerdings meist erst später veröffentlicht wurde. Ein weiterer Kritikpunkt war die Tatsache, dass Didaktiker einerseits in Lehrplanreformen eingebunden waren und andererseits als Schulbuchautoren durch den Informationsvorsprung auch wirtschaftliche Vorteile hatten. Namentlich wurde vom Spiegel Prof. Neunzig in diesem Zusammenhang genannt. Dieser Informationsvorsprung dürfte wohl auch heute bei der Einführung der neuen teilzentralisierten Reifeprüfung und der Erstellung darauf abgestimmter Schulbücher ein wirtschaftlicher Vorteil sein. Auch die wirtschaftliche Komponente der neuen Unterrichtsmaterialien (Blöcke und Plättchen) die teilweise offensichtlich durch ein Patent geschützt waren, wurde vom Spiegel thematisiert.

In Österreich kann – nicht zuletzt mangels eines dazu geeigneten Printmediums als Sprachrohr – kein so großer Widerstand aus heutiger Sicht festgestellt werden. Nur in privaten Gesprächen und Internetforen über die damaligen Erfahrungen hört man von negativen Erfahrungen. Da zu

⁴⁵² Mengenlehre, das ist Zeitverschwendung, Spiegel 36/1974 vom 2.9.1974
<http://www.spiegel.de/spiegel/print/d-41667426.html>, abgefragt am 29.1.2014

dieser Zeit in Österreich aber die Gratisschulbuchaktion⁴⁵³ eingeführt worden war, könnte es sein, dass dies die Einführung der Mengenlehre als positives Gegengewicht überlagerte. In der Gratisschulbuchaktion waren ja auch die vielen bunten Plättchen für den Unterricht enthalten.

Erstaunlicherweise hielt sich die in Deutschland bereits 1984 aus der Grundschule verbannte Mengenlehre in der Deutschschweiz bis vor kurzem. In der Neuen Züricher Zeitung vom 7. November 2010 wird berichtet: „Jetzt wird die Mengenlehre an der Volksschule abgeschafft.“⁴⁵⁴

Die Mengenlehre sei vor allem in der Westschweiz sehr beliebt gewesen, da der Genfer Jean Piaget das didaktische Theoriegebäude dazu geliefert hatte. Der Didaktiker Beat Wälti wird zitiert mit: „Die Mengenlehre ist gerade auch für schwache Schüler verzichtbarer Ballast.“ Gregor Wieland, ein Schweizer Fachdidaktiker fragt: „Was soll denn ein Schreiner damit anfangen?“ Rene Schelldorfer, der Fachbereichsleiter für Mathematik an der Pädagogische Hochschule Zürich, erklärt in diesem Artikel, dass die Ziele des modernen Mathematikunterrichts darauf ausgerichtet seien, was zum Beispiel Lehrlinge in ihrem Beruf wirklich bräuchten. Als einziger Gegner der Abschaffung der Mengenlehre wird ein Genfer Mathematik-Didaktiker genannt, er fürchtet, dass nun der Graben zwischen der Mathematik, wie sie an der Schule gelehrt wird, und der Wissenschaft noch größer werde – das erinnert doch an die Ausgangssituation (siehe 2.2.4). Man muss aber betonen, dass es sich nur um eine Änderung des Volksschullehrplans handelt.

6.3 Was blieb?

6.3.1 Welche Forderungen der Neuen Mathematik wurden erfüllt?

Da wohl kein Ziel vollständig erreicht werden kann, sondern nur mehr oder weniger augenscheinliche Verbesserungen in Richtung dieses Ziels festgestellt werden können, kann hier kein klarer Erfolg angeführt werden.

Die SchülerInnen müssen auf die Nutzung von Rechenautomaten vorbereitet werden. (Ursprünglich: Zur Bedienung eines Rechenautomaten benötigt man eine intensivere mathematische Ausbildung.)

Das Ziel war die Vorbereitung auf den Umgang mit modernen Technologien. Dieses Ziel kann man eindeutig als erreicht betrachten. Die SchülerInnen verwenden heute den Taschenrechner und dabei oft nicht nur zum Ausführen der Grundrechnungsarten, sondern auch zur Darstellung von Funktionen oder zum Lösen von Gleichungssystemen, in vielen Schulen wird auch der Computer als Unterrichtsmittel im Mathematikunterricht eingesetzt. Dabei wird nicht nur eine schulspezifische Software, sondern oft auch Excel verwendet oder von LehrerInnen programmierte Lernumgebungen zur Übung oder Festigung. Leider findet eine weitreichendere

⁴⁵³ vgl. BGBl 284/1972 vom 9. Juli 1972.

⁴⁵⁴ Adieu Mengenlehre, Neue Züricher Zeitung vom 7.11.2010: <http://www.nzz.ch/aktuell/startseite/adieu-mengenlehre-1.8293063>, abgefragt am 28.1.2014.

Beschäftigung mit Informatik in der AHS kaum Platz, da der verpflichtende Informatikunterricht mit nur zwei Semesterwochenstunden in der gesamten Schullaufbahn gerade Grundlagen zu Anwendungssoftware und Hardwarekomponenten behandelt. Wer sich intensiver damit befassen will, wird eine berufsbildende Schule wählen oder ein Realgymnasium mit Schwerpunkt Informatik.

Betrachtet man den heutigen Informatikunterricht, und dabei nicht den Lehrplan, sondern die Realität, so besteht dieser Unterricht zum größten Teil aus „IKT“, informatischen Grundkompetenzen, wie zB. das Speichern und Wiederfinden von Dateien, die Kenntnis der wichtigsten Hardwarekomponenten für das Beheben kleinerer technischer Probleme und aus dem Benutzen von Anwendungssoftware. In der neunten Schulstufe lernen die meisten SchülerInnen die beiden OfficeProgramme Word und Excel bedienen. Sie lernen Mailprogramme und Browser und das Verwenden von Suchmaschinen kennen. Grundlegende Programmstrukturen wie Schleifen oder Entscheidungen, Graphen oder Suchstrategien werden in der Realität eventuell in einem Wahlpflichtfach vermittelt.

Der/die durchschnittliche österreichische Angestellte benötigt auch genau dieses Wissen von Anwendungssoftware und grundlegender Handhabung eines Computers. Das Installieren eines Druckers oder das Anpassen einer Software an die speziellen Bedürfnisse eines Unternehmens wird oft von Informatikern übernommen, die in berufsbildenden Schulen oder in Fachhochschulen oder Universitäten ausgebildet wurden.

Die Erwartung, dass jede/r eine Spezialausbildung zur Bedienung eines Rechenautomaten bräuchte, hat sich nicht bewahrheitet. Nur die Heerscharen von Informatikern sind für eine funktionierende Volkswirtschaft nötig. Diese brauchen aber heute weit mehr als nur algebraische Strukturen und Mathematik. Nicht die Menschen mussten sich dem Computer anpassen, sondern die Computer haben sich den Bedürfnissen der Menschen in vieler Hinsicht angepasst, die Programme wurden weitgehend intuitiv gestaltet, sodass Kinder sehr schnell damit umzugehen lernen, ohne Wissen um Gruppe, Ring und Körper.

Insofern hat sich diese Forderung der Neuen Mathematik nicht erfüllt, sondern erledigt.

Andererseits hat die Entwicklung von Mathematikprogrammen auch zu anderen Möglichkeiten im Unterricht geführt. Die Auswirkung von Parametern auf den Verlauf einer trigonometrischen Funktion kann sehr einfach demonstriert werden, es müssen nicht mehr mühsam viele verschiedene Funktionsgraphen händisch gezeichnet werden. Matrizen bzw. Gleichungssysteme können per Knopfdruck in Sekundenschnelle vom Computer gelöst werden, die entsprechenden Programme stehen kostenlos zur Verfügung. Viele Schulen verfügen über PC-Labore. Diese Entwicklung wurde zwar nicht von der Modernisierung des Mathematikunterrichts ausgelöst, aber sie entspricht den Zielen der Reform im folgenden Punkt:

Weniger Rechnen – mehr Denken bzw. Rechenfähigkeit statt Rechenfertigkeit.

In einem Aufsatz über die Veränderung des Mathematikunterrichts durch den Einsatz von Computer und Taschenrechner schreibt die Mathematiklehrerin Mag. Sieglinde Fürst: „Denke ich an meine Schulzeit zurück, so hatte jede Gleichung oder jedes Gleichungssystem ‚schöne‘ Lösungen. ... Unlösbares kam so gut wie nie vor. Es entspricht der Intention des Mathematiklehrplanes, mehr die Lösbarkeit oder die verschiedenen Lösungsfälle eines Problems zu bearbeiten, als mechanisch etwas auszurechnen. Diese Arbeit nimmt uns die Maschine ab, das mathematische Umfeld muß der Mensch überlegen. Probleme erkennen und exaktes Denken wird von den Schülern stärker gefordert als früher. Leichter ist die Mathematik durch den Einsatz von Computern nicht geworden!“⁴⁵⁵

Auch heute hört man den Vorwurf: „Die SchülerInnen rechnen nur nach Anleitung/Rezept ohne zu verstehen, was sie tun.“

Diesem Problem möchte auch die neue standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung entgegenwirken und die rezeptartigen Maturabeispiele durch theoretische Fragen ergänzen. Die SchülerInnen müssen im ersten Teil der neuen Reifeprüfung kurze Verständnisfragen zu mathematischen Grundlagen beantworten und Ergebnisse argumentieren. Da dieser Teil positiv absolviert werden muss⁴⁵⁶, reicht das „antrainierte Unverständnis“⁴⁵⁷ nicht mehr zur Erlangung der Matura. Man kann es als ein ständiges Bemühen sehen, dass der Mathematikunterricht den Schwerpunkt auf das Verstehen legt. Die Inhalte der Neuen Mathematik waren sicher auch nicht für diesen Vorwurf geeignet, da man diese Inhalte nicht ohne Verstehen anwenden konnte, allerdings kann bei algebraischen Strukturen von Anwendung im Sinne einer Alltagstauglichkeit überhaupt nicht gesprochen werden.

Die Veränderung der Unterrichtsinhalte zwingt zur Abwendung vom ausschließlich eingesetzten Frontalunterricht und zum Einsatz anderer Unterrichtsmethoden.

Die mit der Modernisierung einhergehende Veränderung der Unterrichtsmethoden geschah sicher nicht so schnell, wie erhofft, aber dennoch zeichnet sich langsam eine Veränderung ab. StudienkollegInnen berichtet, dass ein Großteil ihrer LehrerInnen vorwiegend Frontalunterricht wählte, der geschätzte Anteil am gesamten Unterricht sei etwa 80 % gewesen. Andererseits gibt es viele LehrerInnen, die mindestens einmal im Jahr einen Stationenunterricht einsetzen. Der Einsatz anderer Unterrichtsformen, die die Eigenaktivität der SchülerInnen fordern, wird von Eltern und LehrerkollegInnen positiv bewertet und nicht mehr als „alternativ“ und „exotisch“ betrachtet. Wie weit allerdings diese Unterrichtsformen gerade in den Mathematikunterricht Einzug hielten, wäre eine interessante Forschungsfrage.

Die Kluft Schulmathematik – Hochschulmathematik soll geschlossen bzw. verringert werden.

⁴⁵⁵ acdca.ac.at/material/vortrag/jahrb1.pdf, abgefragt am 21.2.2014.

⁴⁵⁶ nach derzeitigem Stand, allerdings könnte es in diesem Punkt noch Änderungen geben.

⁴⁵⁷ Zitat einer Lehrerin, sie spielte damit auf das „Herunterrechnen einer Kurvendiskussion oder Extremwertaufgabe“ ohne jegliche Einsicht bei der bisherigen Form der Matura an.

Diese Forderung wäre mit den ursprünglich vorgesehenen Lehrplänen⁴⁵⁸, sofern die SchülerInnen die darin vorgesehenen Inhalte wirklich beherrscht hätten, schon verwirklicht worden. Der Lehrplan von 1967 für das neunjährige Gymnasium sah einen Gutteil jenes Stoffes vor, der in den ersten Semestern des Mathematikstudiums gelehrt wird.

Zwei kritische Punkte wären aber die Folge dieses intensiven Mathematikunterrichts gewesen. Es könnte sein, dass einige junge Menschen, die im Allgemeinen durchaus talentiert wären und gute Historiker, Psychologen oder Juristen geworden wären, an den Anforderungen in Mathematik gescheitert wären und damit die Matura, also die Studienberechtigung nicht erlangt hätten.

Ein zweiter kritischer Punkt wäre, wenn man, um dem ersten Punkt zu begegnen, die Inhalte verkürzt unterrichtet hätte oder auf jene rezeptartige Struktur hingebogen hätte. Damit hätte man echtes Verstehen nicht erreicht. Es bleibt zu hinterfragen, ob die algebraischen Strukturen und der Fundamentalsatz der Algebra wirklich für jeden angehenden Akademiker als „Zugangsbeschränkung“ sinnvoll sind.

Da die Inhalte der Neuen Mathematik größtenteils wieder aus dem Lehrplan und dem Unterricht entfernt wurden, findet man diesen Punkt auch unter den nichterreichten Zielen wieder.

6.3.2 Welche Probleme sind heute genauso aktuell?

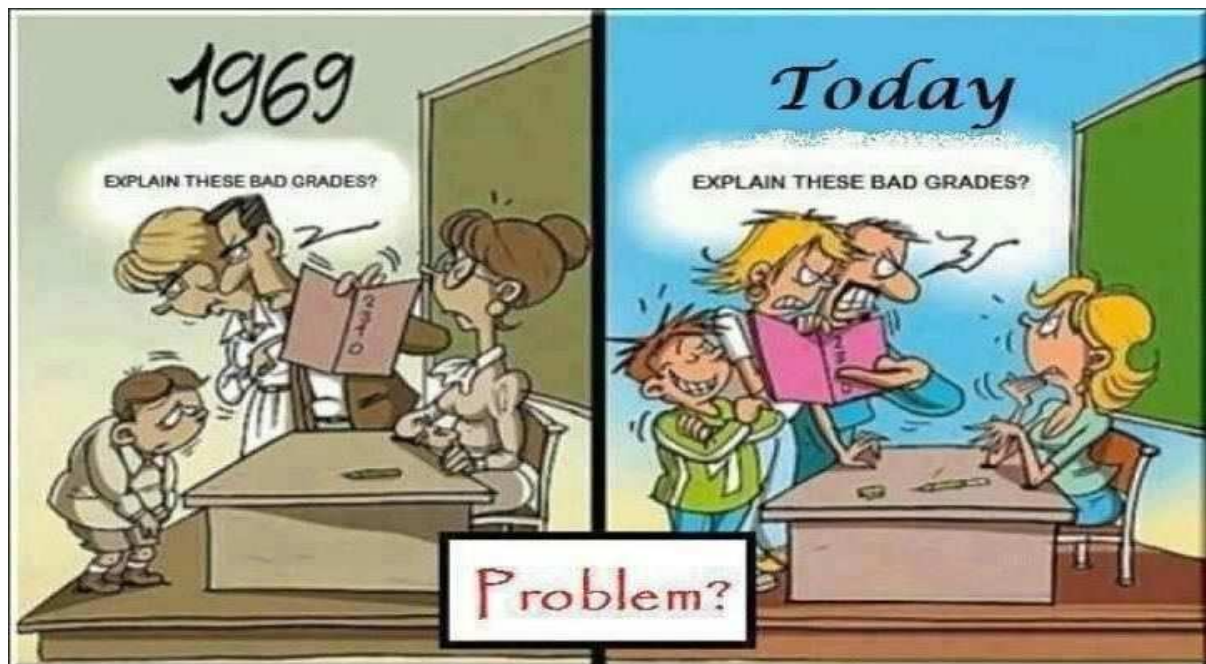
Die SchülerInnen können einfachste Rechenaufgaben nicht lösen.

Dank der frühen Verwendung des Taschenrechners ist es nicht mehr nötig, die Grundrechnungsarten ohne Taschenrechner zu beherrschen. Überschlagsrechnungen und das Abschätzen von Ergebnissen bleiben für viele aufgrund der mangelnden Rechenfertigkeit ein Buch mit sieben Siegeln. Genau dieser Umstand wurde aber schon als Grund für die Modernisierung des Mathematikunterrichts angeführt. Und bei der Welle der Kritik an der Einführung der Mengenlehre in der Grundschule wurde eben dieser Grund wieder angeführt. Dieses Ziel kann man eindeutig als nicht erreicht betrachten.

Der schlechte Unterricht der LehrerInnen ist schuld.

Früher: Die LehrerInnen sind schlecht ausgebildet, heute: die LehrerInnen machen schlechten Unterricht, wobei dieser Unterschied vielleicht auch auf die Veränderung der gesellschaftlichen Stellung der LehrerInnen zurückzuführen ist: Durfte man früher einen Lehrer nicht kritisieren, so gehört es heute schon fast zum guten Ton, sich am Lehrer-Bashing zu beteiligen. Deshalb wurde der schlechte Unterricht früher wohl eher mit einer schlechten Ausbildung begründet, während heute der Lehrer, die Lehrerin mit seinem/ihrem gesamten Tun und seiner/ihrer Person kritisiert wird und für schlechte SchülerInnenleistungen verantwortlich gemacht wird.

⁴⁵⁸ siehe 4.5.2, VO 295/1967 und VO 275/1970.



Quelle: <http://fruzzier.com/fruzz/1786/lehrer-frueherheute>, abgefragt am 29.1.2014.

Auch wenn es nicht offen ausgesprochen wird, so kann man die Überprüfung der Bildungsstandards in der 8. Schulstufe durchaus als versteckte Evaluation nicht nur des Unterrichts, sondern auch der LehrerInnen sehen.⁴⁵⁹ Andererseits ist gerade dieses Argument ein Motor für die ständige Weiterentwicklung und Reform des Unterrichts, die selbstverständlich Auswirkung auf die Aus- und Weiterbildung der LehrerInnen haben sollte. Einer der Kritikpunkte derzeit ist der Umgang mit ungeeigneten LehrerInnen und eines der Probleme, welche Instanz kann Eignung oder die Nichteignung feststellen, und nach welchen Kriterien wird diese Qualifikation getestet.

Die Kluft Schulmathematik – Hochschulmathematik besteht nach wie vor. Um dieser Kluft zu begegnen, wollte man jene Inhalte, die für die StudentInnen zu komplex waren, bereits im Gymnasium oder sogar in der Volksschule behandeln. Auch heute noch ist die Drop-out-Quote der Mathematikstudenten in den ersten beiden Semestern sehr hoch. Viele StudentInnen geben an, sie hätten sich etwas anderes unter dem Mathematik-Studium vorgestellt. Jene Inhalte, die zum Schließen der Kluft eingeführt wurden, wurden relativ schnell wieder aus dem Lehrplan entfernt. Das lässt zwei Annahmen zu: entweder waren die Inhalte für die damaligen Lehrpersonen zu komplex, also die LehrerInnen waren selbst nicht fundiert ausgebildet, oder die Inhalte überforderten die SchülerInnen derart, dass man die Inhalte in der vorgegebenen Zeit nicht wirklich sinnvoll unterrichten konnte.

Ist die Gesellschaft nicht gewillt oder hält man es bildungspolitisch nicht für sinnvoll, einen derart intensiven Mathematikunterricht im Gymnasium vorzusehen, dann kann die Kluft Schulmathematik – Hochschulmathematik nur auf der Universität geschlossen werden. Das

⁴⁵⁹ <https://www.bifie.at/node/53>, abgefragt am 16.12.2013.

würde bedeuten, die Professoren müssten die Inhalte der jeweiligen Einführungssemester didaktisch leichter fassbar aufbereiten und eventuell mit Unterstützung von Tutoren „schülerInnengerecht“ unterrichten, um die Drop-out-Quote zu senken.

Die Schule kann aber auch dann nicht ganz aus der Pflicht genommen werden. Die Vorbereitung auf die Sprache und die Schreibweise, die auf der Universität verwendet wird, kann während der Schulzeit schon geübt werden. Deshalb finde ich es besonders schade, dass die Verwendung der Symbolsprache als Sprache der Mathematik so beschränkt wird.

Die Wirtschaft braucht mathematisch gut ausgebildete Arbeitskräfte.

Auch derzeit sind die Berufschancen für technische Berufe überdurchschnittlich gut. In den letzten Jahren gab es die sogenannte MINT-Initiative: man wollte Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und technische Fächer besonders bewerben, allerdings ist für Studenten auf der Universität von einer Förderung nichts zu bemerken.

Ein anderes Thema ist die Frage, ob der Einfluss der Wirtschaft auf Bildungsinhalte nicht die Gefahr birgt, dass aus der Bildung Ausbildung wird, also aus einer wertfreien, unabhängigen Auseinandersetzung mit verschiedenen Inhalten eine Berufsvorbereitung ohne Behandlung wissenschaftlicher Grundlagen werden könnte.

Derzeit kennzeichnet eine Zweiteilung das österreichische Bildungssystem: Die Fachhochschulen und höhere berufsbildende Schulen, die oft von Unternehmen unterstützt werden, bieten eine Ausbildung im Sinne einer Berufsvorbereitung an. Oft werden Programme oder Maschinen von Unternehmen gesponsert, die damit erworbenen Kenntnisse der zukünftigen Arbeitnehmerinnen nutzen dem unterstützenden Unternehmen.⁴⁶⁰

Die wissenschaftliche Komponente ist an diesen Bildungsstätten zweitrangig, diese Bildung bleibt den Universitäten vorbehalten.

⁴⁶⁰ Die Zentrallehranstalt Spengergasse unterrichtet CISCO, eine (weitverbreitete) Software zur Programmierung Routern und Switches der Firma CISCO, Die „Graphische“ bildet an Druckmaschinen aus, die von den Druckmaschinenerzeugern (zB Heidelberg) zur Verfügung gestellt werden.

7 Zusammenfassung

7.1 *Die Neue Mathematik – der Verlauf der Reform*

Die Entwicklung der einzelnen Richtungen der Mathematik wurde von Bourbaki auf das gemeinsame Fundament der Mengenlehre und der Logik gestellt. Diese Idee eines gemeinsamen Fundaments der mathematischen Teilbereiche sollte auch in den Schulunterricht eingeführt werden.

Man erwartete, dass die Nutzung des Rechenautomaten besondere Mathematikkenntnisse verlangen würde. Die meisten Forscher, die an der Entwicklung der Rechenautomaten beteiligt waren, und die mit diesem Gerät forschten und arbeiteten, waren Mathematiker. Im amerikanischen Raum wurde diese Reform des Mathematikunterrichts sehr stark von der Rüstungsindustrie subventioniert. Im europäischen Raum war es der Wunsch der Wirtschaft, die sich vom technologischen Fortschritt wirtschaftliche Vorteile oder den Anschluss an die führenden Mächte erhoffte und deshalb die Bestrebungen zur Intensivierung des Mathematikunterrichts unterstützte.

New Math oder die Neue Mathematik war deshalb keine Reform, die nur Österreich oder den deutschsprachigen Raum betraf, sondern ein nahezu weltweites Phänomen war.

In Österreich wurden mit der Neuregelung der Schulgesetze und der Festlegung neuer Lehrpläne nach dem zweiten Weltkrieg auch die Inhalte der Neuen Mathematik aufgenommen. Das waren für die Unterstufe die Lehrpläne von 1967 und für die Oberstufe die Lehrpläne von 1966.

Die überstürzte Einführung der neuen Inhalte ließ keine Zeit zur Erprobung der Unterrichtsthemen und zur entsprechenden fachlichen Ausbildung der Lehrpersonen und Erprobung der didaktischen Vorschläge. Die einseitige Konzentration auf die Mengenlehre und die verfrühte Behandlung der abstrakten Themen in der Grundschule führten zu Kritik, die besonders in Deutschland, aber auch in Österreich zur relativ baldigen Rücknahme der Reform in vielen Punkten führte.

Mit den Lehrplänen von 1985 für die Unterstufe und 1989 für die Oberstufe wurden die meisten Inhalte der Neuen Mathematik wieder aus dem Lehrplan herausgenommen.

Der Wunsch nach einer Veränderung des Mathematikunterrichts hinsichtlich der Methoden, die als Begleiterscheinung der Modernisierung erwartet wurde, ist teilweise wahr geworden. Auch die nachfolgenden Reformen bewegten und bewegen sich in diese Richtung. Die Lehrpläne von 1985 bzw. 1989 legten einen stärkeren Fokus auf die Festlegung der Lehr- und Lernziele mit einer Formulierung bestehend aus dem Stoff, aber auch einem Verb zur Festlegung, zu welcher Aktivität der Lernende fähig sein sollte, aber auch die didaktischen Zugänge wurde detailliert festgelegt.

Die letzte Lehrplanänderung hat diesen extrem umfangreichen Lehrplan wieder verkürzt, aber das Ziel der genaueren Festlegung des Lernziels nicht aufgegeben, nur die didaktischen Vorgaben wurden allgemeiner und weniger detailliert formuliert.

Bezüglich der Ziele der Reform kann man folgendes feststellen: Der Mangel an MathematiklehrerInnen konnte durch diese Maßnahmen nicht behoben werden. Die damals vorherrschende Meinung, man müsse algebraische Strukturen und Logik beherrschen, um einen Computer bedienen zu können, hat sich mittlerweile als nicht zutreffend herausgestellt.

Die Anzahl an mathematisch gebildeten Personen als „Kapital“ für den Arbeitsmarkt regelt sich offensichtlich einerseits über die Einkommenserwartung als Preis dafür, sich durch ein Informatik- oder Technikstudium zu „qualen“. Andererseits ist die Einführung der Fachhochschulen die logische Konsequenz des Wunsches der Wirtschaft nach speziell ausgebildeten Arbeitskräften.

Das Wissen um die algebraischen Strukturen ist mittlerweile wieder den Mathematik- und Informatikstudenten vorbehalten. Heute begegnet einem Mathematikstudenten/einer Mathematikstudentin der Name Bourbaki im Laufe ihres Studiums nicht mehr.

7.2 Was blieb von der Neuen Mathematik im Lehrplan?

Die grundlegende Idee eines gemeinsamen Fundaments der Mathematik mit Mengenlehre und Logik ist vollkommen aus dem Lehrplan der Unterstufe verschwunden. Diese Inhalte werden jetzt in der 5. Klasse des Gymnasiums gehandelt.

Die Lernziele wurden wieder knapper formuliert (im Vergleich zu dem Lehrplan 1985), didaktische Überlegungen wurden aus dem Lehrstoff entfernt, es finden sich dort nur mehr explizit Lernziele, die mit Nomen und Verb formuliert werden, also nicht mehr Themen, sondern zusätzlich zu den vier im Kompetenzmodell formulierten Handlungsdimensionen Angaben wie etwa „entsprechende graphische Darstellungen lesen, anfertigen und kritisch betrachten können“.

Die behandelten Themen haben sich ebenfalls verändert, so wurde die Abbildungsgeometrie praktisch eliminiert, die Funktion wird nicht vor der vierten Klasse erwähnt oder als Interpretation für bestimmte Zusammenhänge verwendet. Die Rechengesetze für natürliche Zahlen in der ersten Klasse AHS werden in der leicht verschwommenen Formulierung „Kenntnisse und Fähigkeiten im Umgang mit natürlichen Zahlen vertiefen“ versteckt. Die Abgeschlossenheit der ganzen Zahlen bezüglich der Addition findet man in der 5. Klasse der AHS. Algebraische Strukturen sind nur als Stoff für den Wahlpflichtfachunterricht vorgesehen.

Einzig die Statistik wurde bis heute immer stärker im Lehrplan berücksichtigt, sie ist aber nicht eines der Kernthemen der Neuen Mathematik.

7.3 Was blieb in den Schulbüchern?

Einerseits muss man betrachten, was finden wir in den Schulbüchern, was steht im Lehrplan und was ist Stoff der Zentralmatura, das bedeutet, welche Inhalte sind verpflichtend und welche optional für den Wahlpflichtfachunterricht oder für die individuelle Schwerpunktsetzung durch den Unterrichtenden.

Andererseits geht es auch um die Darstellung der Inhalte, den Einsatz der in der Modernisierung des Mathematikunterrichts verstärkt eingesetzten Symbolsprache, die didaktische und die graphische Aufbereitung. Dabei muss man zwischen Unter- und Oberstufe unterscheiden.

Die Mengenlehre wird etwas zwiespältig behandelt. Einerseits ist sie laut Lehrplan nicht für die Unterstufe vorgesehen und Geraden werden oft nicht als Punktmengen eingeführt, dennoch findet sich noch „ $g \cap h = \{S\}$ “ als Beschreibung des Schnitts der Geraden g und h in manchen Unterstufenbüchern.

Die Zahlen werden nach wie vor als Mengen angegeben ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$), dabei werden in den meisten Büchern die Symbole „ $\cap$ “, „ $\cup$ “, „ $\in$ “, „ $\subseteq$ “ erklärt, aber es werden keine logischen Gesetze dazu behandelt (wie zB. De Morgan). Teilweise werden logische Operatoren und Wahrheitstafeln als Erweiterungstoff behandelt. In der Oberstufe wird unterschiedlich in manchen Büchern eine Lösungsmenge angegeben, andere Bücher geben zB. „ $x=2 \vee x=3$ “ als die beiden Lösungen einer quadratischen Gleichung an.

In manchen Schulbüchern der achten Klasse AHS werden als Erweiterung algebraische Strukturen behandelt. Dabei werden Gruppe, Ring und Körper definiert. Manchmal werden die Eigenschaften von Gruppen wie zB. inverses und neutrales Element behandelt, aber der Begriff Gruppe nicht genannt.

Relationen werden nur insofern behandelt, als man die Ordnung der natürlichen Zahlen erwähnt, aber Eigenschaften, wie Reflexivität oder Antisymmetrie werden nicht erwähnt.

Topologische Grundbegriffe dagegen konnten in keinem aktuellen Schulbuch gefunden werden. Bei der Durchsicht der Schulbücher konnten solche Inhalte nur in der „Hochphase“ der Neuen Mathematik festgestellt werden.

Die projektive Geometrie, also die Behandlung von Schiebung, Drehung und Spiegelung und die Kombination dieser Abbildungen samt den dazugehörigen Sätzen, ist ebenfalls vollkommen aus den Schulbüchern verschwunden. In der Oberstufe wird in ausgewählten Büchern die Abbildungsgeometrie mit Matrizen dargestellt.

Die Funktion wird verstärkt über den Graphen analysiert und nicht mehr als Abbildung von einer Menge in eine andere interpretiert.

Die Verwendung der Symbolsprache ist in den letzten Jahren zurückgegangen.

Eine Änderung, die aber nicht von Bourbaki herrührt, ist die Einführung und immer stärkere Betonung der Statistik. In diesem Bereich kann man kontinuierlich seit der Modernisierung des Mathematikunterrichts eine intensivere Behandlung im Schulbuch – entsprechend den Vorgaben durch den Lehrplan – feststellen.

Zusammenfassend kann man sagen, dass man in den Schulbüchern mehr Reste der Neuen Mathematik findet als im Lehrplan vorgesehen. Das wird wohl darin liegen, dass nach einer Reform des Lehrplans nicht alle Inhalte und Aufgaben völlig neu konzipiert werden, sondern nur Teile überarbeitet werden. Außerdem sind die Autoren der aktuellen Schulbücher eventuell auch von der Neuen Mathematik als Vortragende oder SchülerInnen geprägt. Allerdings sind viele dieser Inhalte als Erweiterungstoff vorgesehen.

8 Anhang

Deutscher Abstract

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Umsetzung der Neuen Mathematik im Gymnasium in der Zeit von 1959 bis 1985, die als „Modernisierung des Mathematikunterrichts“ bezeichnet wurde. Die wirtschaftlichen und politischen Gründe, aber auch die Argumente der Mathematikdidaktiker für diese Veränderungen werden angeführt. Die im Zuge dieser Modernisierung neu eingeführten Lehrinhalte und besonders ungewöhnliche oder speziell auf der Mengenlehre aufgebaute didaktische Zugänge werden beschrieben.

Anschließend werden die Veränderungen im Lehrplan des Gymnasiums im Zeitraum 1955 bis 1985 untersucht und die Reste der Inhalte der Reform im aktuellen Lehrplan angeführt. Auch die Veränderungen in den Schulbüchern, die diese Modernisierung auslöste, aber auch die Nachwirkungen der Modernisierung in den aktuellen Schulbüchern – wieder beschränkt auf das Gymnasium – werden dargestellt. Dabei werden auch die Auswirkungen von Lehrplanänderungen auf die Gestaltung der Schulbücher und der Übungsformate betrachtet. Die Umsetzung der ursprünglichen didaktischen Vorschläge bezüglich Differenzierung und Veränderung der Unterrichtsmethoden, aber auch die Verwendung der vorher beschriebenen ungewöhnlichen didaktischen Zugänge wird untersucht und mit der aktuellen Situation dazu verglichen.

Auch die Kritik von Didaktikern, Mathematikern an der Modernisierung des Mathematikunterrichts und ein Spiegel der gesellschaftlichen Reaktion auf die „Einführung der Mengenlehre“ werden beschrieben. Außerdem werden die Gründe für die weitestgehende Rücknahme dieser Reform durchleuchtet. Zum Abschluss wird analysiert, welche der Ziele dieser Modernisierung des Mathematikunterrichts zumindest teilweise erreicht wurden und welche nicht und welche in geänderter Form auch derzeit in Reformen des Mathematikunterrichts angestrebt werden.

Englischer Abstract

This master thesis deals with the implementation of New Math in highschools in the period 1959 to 1985, which was called “modernisation of teaching mathematics” (“Modernisierung des Mathematikunterrichts”). The economic and political reasons along with the arguments of professors of mathematical didactics are listed. The teaching contents, which were introduced in this phase of modernisation, and unusual or untypical approaches based on the set theory, are described.

Subsequently the changes in the curriculum of the Gymnasium in the period from 1959 to 1985 are examined and the leftovers of these contents in the current curriculum are listed. Also the

changes in the school books and the residuals of this modernisation in the actually used schoolbooks are presented (limited to those used in Gymnasiums). Furthermore the impact of curriculum changes on the design of schoolbooks for Mathematics and exercise formats are considered. The implementation of these proposals for differentiated teaching and new teaching methods, but also the use of unusual approaches described above are analysed and compared to the current situation.

Also the criticism of educational researchers and mathematicians and a mirror of the public response to the "introduction of set theory" are described. Moreover the reasons for the withdrawal of the most part of this reform are analysed. Finally the partial achievements of modernisation of teaching mathematics based on new math are analysed. Those objectives which were not achieved and those which are still pursued in a modified way in pending reforms of teaching mathematics are stated.

„New Math“ von Tom Lehrer

Some of you who have small children may have perhaps been put in the embarrassing position of being unable to do your child's arithmetic homework because of the current revolution in mathematics teaching known as the New Math.

So as a public service here tonight I thought I would offer a brief lesson in the New Math. Tonight we're going to cover subtraction. This is the first room I've worked for a while that didn't have a blackboard so we will have to make due with more primitive visual aids, as they say in the "ed biz." Consider the following subtraction problem, which I will put up here: $342 - 173$.

Now remember how we used to do that. three from two is nine; carry the one, and if you're under 35 or went to a private school you say seven from three is six, but if you're over 35 and went to a public school you say eight from four is six; carry the one so we have 169, but in the new approach, as you know, the important thing is to understand what you're doing rather than to get the right answer. Here's how they do it now.

*You can't take three from two,
Two is less than three,
So you look at the four in the tens place.
Now that's really four tens,
So you make it three tens,
Regroup, and you change a ten to ten ones,
And you add them to the two and get twelve,
And you take away three, that's nine.*

Is that clear?

*Now instead of four in the tens place
You've got three,
'Cause you added one,
That is to say, ten, to the two,
But you can't take seven from three,
So you look in the hundreds place.*

*From the three you then use one
To make ten ones...
(And you know why four plus minus one
Plus ten is fourteen minus one?
'Cause addition is commutative, right.)
And so you have thirteen tens,
And you take away seven,
And that leaves five...*

*Well, six actually.
But the idea is the important thing.*

*Now go back to the hundreds place,
And you're left with two.
And you take away one from two,
And that leaves...?*

*Everybody get one?
Not bad for the first day!*

*Hooray for new math,
New-hoo-hoo-math,
It won't do you a bit of good to review math.
It's so simple,
So very simple,
That only a child can do it!*

*Now that actually is not the answer that I had in mind, because the book that I
got this problem out of wants you to do it in **base eight**. But don't panic. Base
eight is just like base ten really - if you're missing two fingers. Shall we
have a go at it? Hang on.*

*You can't take three from two,
Two is less than three,
So you look at the four in the eights place.
Now that's really four eights,
So you make it three eights,
Regroup, and you change an eight to eight ones,
And you add them to the two,
and you get one-two base eight,
Which is ten base ten,
And you take away three, that's seven. Ok?*

*Now instead of four in the eights place
You've got three,
'Cause you added one,
That is to say, eight, to the two,
But you can't take seven from three,
So you look at the sixty-fours.*

*"Sixty-four? How did sixty-four get into it?" I hear you cry.
Well, sixty-four is eight squared, don't you see?
(Well, you ask a silly question, and you get a silly answer.)*

*From the three you then use one
To make eight ones,
And you add those ones to the three,
And you get one-three base eight,
Or, in other words,
In base ten you have eleven,
And you take away seven,
And seven from eleven is four.
Now go back to the sixty-fours,
And you're left with two,
And you take away one from two,
And that leaves...?*

*Now, let's not always see the same hands.
One, that's right!
Whoever got one can stay after the show and clean the erasers.*

Hooray for new math,

*New-hoo-hoo-math,
It won't do you a bit of good to review math.
It's so simple,
So very simple,
That only a child can do it!*

*Come back tomorrow night. We're gonna do fractions.
Now I've often thought I'd like to write a mathematics text book someday because I
have
a title that I know will sell a million copies. I'm gonna call it Tropic Of Calculus.⁴⁶¹*

⁴⁶¹ Tom Lehrer: New Math, http://www.lyricsfreak.com/t/tom+lehrer/new+math_20138395.html, abgefragt am 28.8.2013.

9 Quellen

9.1 Didaktische Literatur

Amstler 1974:

Amstler, Josef; Gierlinger, Hans; Mühlbauer, Johann; Parisot, Karl Josef; Wingert, Ortwin; Zorn, Hans: Neue Mathematik auf der fünften Schulstufe, Jugend und Volk Wien 1974

Amstler 1975:

Amstler, Josef; Gierlinger, Hans; Mühlbauer, Johann; Parisot, Karl Josef; Wingert, Ortwin; Zorn, Hans: Neue Mathematik auf der sechsten Schulstufe, Jugend und Volk Wien 1975.

Barker 1971:

Barker, Charles M.; Curran, Helen; Metcalf, Mary: Grundschule und moderne Mathematik, Verlag Julius Betz Weinheim 1971 2. Auflage.

Brauner 1927:

Brauner, Franz; Wertek, Karl: Rechenbuch für alpenländische Volksschulen. Abschlußband für das 6., 7. und 8. Schuljahr, Hölder-Pichler-Tempsky Wien 1927.

Buxbaum 1931:

Buxbaum, Eduard; Zimmer, Rudolf: Rechenbuch für drei- und vierklassige Volksschulen. 6. Teil für das 7. und 8. Schuljahr, Österreichischer Bundesverlag für Unterricht, Wissenschaft und Kunst Wien 1931.

Cartan 1959:

Cartan, Henri: Nicolas Bourbaki und die heutige Mathematik. Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hg.) Heft 76, Westdeutscher Verlag Köln und Opladen 1959.

Dienes 1965:

Dienes, Zoltan P: Aufbau der Mathematik, Herder Freiburg 1965.

Die Naturwissenschaften 25. April 1919:

Berliner, Arnold; Pütter, August (Hg.): Felix Klein zur Feier seines siebenzigsten Geburtstages, in: Die Naturwissenschaften. Wochenschrift für die Fortschritte der Naturwissenschaft, der Medizin und der Technik Heft 17, 25. April 1919, Verlag Julius Springer Berlin 1919.

Eckhardt 1972:

Eckhardt, Heinz (Hg.); Heidenreich, Georg; Postel, Helmut; Schäfer, Klaus; Schneider, Günther; Weckesser, Hans: Neue Mathematik in den Klassen 5 bis 7, Verlag Moritz Diesterweg Frankfurt am Main 1972.

Galla 2005:

Galla, Thomas: Vergleich des Mathematikunterrichts in Österreich anhand der Lehrpläne von 1900 bis 1945, Diplomarbeit betreut von Prof. Dr. Andreas Ulovec, Universität Wien 2005.

Griesel 1971:

Griesel, Heinz: Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten, Verlag Hermann Schroedel Hannover 1971.

Jarolim 1974:

Jarolim, Franz; Elmecker, Anneliese: Keine Angst vor der Mengenlehre. Ein Arbeitsbuch für Eltern, Kinder und Lehrer, Jugend und Volk Wien 1974.

Lauter 1974:

Lauter, Josef; Röhl, Emanuel: Kummer mit der Neuen Mathematik, Verlag Herder Freiburg 1974.

Lenné 1969:

Lenné, Helge: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Aus dem Nachlaß hrsg. von Walter Jung, Ernst Klett Verlag Stuttgart 1969.

Meschkowski 1965:

Meschkowski, Herbert: Mathematik als Bildungsgrundlage, Friedrich Vieweg Braunschweig 1965.

Meschkowski 1969:

Meschkowski, Herbert: Mathematik (Wernher von Braun, Hg: Das Wissen der Gegenwart), Carl Habel Verlagsbuchhandlung Berlin 1969.

Meschkowski 1971:

Meschkowski, Herbert: Einführung in die moderne Mathematik, B.I. Hochschultaschenbücher Band 75, Bibliographisches Institut Mannheim 1971.

Mocnik 1898:

Mocnik, Franz: Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgabensammlung für die oberen Classen der Mittelschulen, Verlag von F. Tempsky Wien 1898 25. Auflage.

Münzinger 1971:

Münzinger, Wolfgang: Moderne Mathematik, Gesellschaft und Unterricht. Zur soziologischen Begründung der modernen Mathematik in der Schule, Verlag Julius Beltz Weinheim 1971.

Neunzig 1969:

Neunzig, W.; Sorger, P.: Einstieg in die Mathematik. Aufriß eines systematischen Weges für die Grundschule, Verlag Herder Freiburg 1969.

OEEC 1961:

Organisation for European Economic Co-operation, Office for Scientific and Technical Personnel: New Thinking in School Mathematics 1961.

Praxis der Mathematik, Monatsschrift der reinen und angewandten Mathematik im Unterricht, Aulis Verlag Köln, diverse Ausgaben von 1963 bis 1975.

Peterson 1988:

Peterson, Ivars: Mathematische Expeditionen. Ein Streifzug durch die moderne Mathematik, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 1988.

Schäfer 1971:

Schäfer, Dorothee: ABC der Mengenlehre. Keine Angst vor Mathematik. Herderbücherei Band 414, Verlag Herder Freiburg 1971.

Scheipl 1988:

Scheipl, Josef; Seel, Helmut: Die Entwicklung des österreichischen Schulwesens in der Zweiten Republik 1945 – 1987, Leykam Verlag Graz 1988.

Simon 1908:

Simon, Max: Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik, Beck München 1908 2. Auflage.

Schuberth 1971:

Schuberth, Ernst: Die Modernisierung des mathematischen Unterrichts, Verlag Freies Geistesleben Stuttgart 1971.

Steiner 1978:

Steiner, Hans-Georg (Hg.): Didaktik der Mathematik (Wege der Forschung Bd 361), Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1978.

Steiner 1988:

Steiner, Hans-Georg: Das mathematische Denken und die Schulmathematik. Aufsätze zur Didaktik der Mathematik (Moderne Mathematik in elementarer Darstellung Band Nr. 22), Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen 1988.

Stender 1962:

Stender, Richard: Didaktische Themen aus der neueren Mathematik, Quelle & Meyer Heidelberg 1962.

Suppantschitsch 1911:

Suppantschitsch, Richard: Lehrbuch der Arithmetik für die IV. und V. Klasse der Gymnasien und Realgymnasien, Verlag F. Tempsky Wien 1911.

Tille 1974:

Tille, Josef; Tille, Anna: Ganzheitlicher Weg und Mengenlehre im Erstrechenunterricht, Jugend und Volk Wien 1974.

Tobies 1981:

Tobies, Renate: Felix Klein. Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner Bd 50, BSB Teubner Verlagsgesellschaft 1981.

Weyrich 1950:

Weyrich, Josef: Der Rechenunterricht auf der Oberstufe ländlicher Volksschulen. Österreichischer Bundesverlag Wien 1950.

9.2 Schulbücher

Achleitner ganz klar: Mathematik 1 2006:

Achleitner, Renate; Ratzberger-Klampfer, Anita: ganz klar: Mathematik 1, Jugend & Volk 2006.

Bleier Dimensionen Mathematik 5 2009:

Bleier, Gabriele; Lindenberg, Judith; Lindner, Andreas; Stepancik, Evelyn: Dimensionen Mathematik 5, Dornier Wien 2009.

Brand thema mathematik 5 2012:

Brand, Clemens; Dorfmayr, Anita; Lechner, Josef; Mistlbacher, August; Nussbaumer, Alfred: thema mathematik für die 5. Klasse AHS, Veritas Verlag Linz 2012 4. Auflage.

Brand thema mathematik 6 2012:

Brand, Clemens; Dorfmayr, Anita; Lechner, Josef; Mistlbacher, August; Nussbaumer, Alfred: thema mathematik für die 6. Klasse AHS, Veritas Verlag Linz 2012 2. Auflage.

Brand thema mathematik 7 2011:

Brand, Clemens; Dorfmayr, Anita; Lechner, Josef; Mistlbacher, August; Nussbaumer, Alfred: thema mathematik für die 7. Klasse AHS, Veritas Verlag Linz 2011 1. Auflage.

Buxbaum Rechenbuch für drei- und vierklassige Volksschulen für das 7. u. 8. Schuljahr 1931:

Buxbaum, Eduard; Zimmel, Rudolf: Rechenbuch für drei- und vierklassige Volksschulen. 6. Teil für das 7. und 8. Schuljahr, Österreichischer Bundesverlag für Unterricht, Wissenschaft und Kunst Wien 1931.

Dorfmayr Mathe Buch 1 2006:

Dorfmayr, Anita; Mistlbacher, August; Nussbaumer, Alfred: Mathe Buch 1 Lehrbuch und Übungsbuch für die 1. Klasse HS und AHS Verlag Neues Schulbuch 2006.

Dorfmayr Mathe Buch 2 2006:

Dorfmayr, Anita; Mistlbacher, August; Nussbaumer, Alfred: Mathe Buch 2 Lehrbuch und Übungsbuch für die 2. Klasse HS und AHS, Verlag Neues Schulbuch 2006.

Dorfmayr Mathe Buch 3 2007:

Dorfmayr, Anita; Mistlbacher, August; Nussbaumer, Alfred: Mathe Buch 3 Lehrbuch und Übungsbuch für die 3. Klasse HS und AHS Verlag Neues Schulbuch 2007.

Dorfmayr Mathe Buch 4 2009:

Dorfmayr, Anita; Mistlbacher, August; Nussbaumer, Alfred: Mathe Buch 4 Lehrbuch und Übungsbuch für die 4. Klasse HS und AHS Verlag Neues Schulbuch 2009.

Eßletzbichler 100% Mathematik 1 2014:

Eßletzbichler, Beate; Höller, Christine; Lechner, Peter; Luksch, Julia; Niedertscheider, Franz: 100% Mathematik 1 Österreichischer Bundesverlag Wien 2014.

Flick Mathematik in unserer Welt 1 1977:

Flick; Willi: Mathematik in unserer Welt. Arbeitslehrbuch Band 1. Verlag Schöningh Wien (vermutlich 1977).

Floderer Mathematik 1 1980:

Floderer, Manfred; Piffl, Herta; Hruby, Eugen; Riccabona, Felix: Mathematik 1 für die 1. Klasse der Hauptschulen und der allgemeinbildenden höheren Schulen Hölder-Pichler-Tempsky 1980.

Geretschläger Elemente der Mathematik 8 2007:

Geretschläger, Robert; Griesel, Heinz; Postel, Helmut: Elemente der Mathematik 8, 8. Klasse AHS E.Dorner Wien 2007.

Götz Mathematik 5 2010:

Götz, Stefan; Reichel, Hans-Christian (Hg.); Müller, Robert; Hanisch, Günter: Mathematik 5, Österreichischer Bundesverlag Wien 2010, 1. Auflage.

Götz Mathematik 6 2010:

Götz, Stefan; Reichel, Hans-Christian (Hg.); Müller, Robert; Hanisch, Günter: Mathematik 6, Österreichischer Bundesverlag Wien 2010, 1. Auflage.

Götz Mathematik 8 2013:

Götz, Stefan; Reichel, Hans-Christian (Hg.); Müller, Robert; Hanisch, Günter: Mathematik 8, Österreichischer Bundesverlag Wien 2013, 1. Auflage.

Hanxleden Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten Mittelstufe Arithmetik 1961:
Hanxleden, Eberhard von; Hentze, Rudolf: Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten
Mittelstufe: Arithmetik/Algebra/Analysis, Vieweg Braunschweig 1961 18. Auflage.

Hanxleden Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten Oberstufe Analysis 1963:
Hanxleden, Eberhard von; Hentze, Rudolf: Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten
Oberstufe: Arithmetik/Algebra/Analysis, Vieweg Braunschweig 1961 10. Auflage.

Hanxleden Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten Oberstufe Geometrie 1959:
Hanxleden, Eberhard von; Hentze, Rudolf: Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten
Oberstufe: Geometrie, Vieweg Braunschweig 1959 8. Auflage.

Humenberger Das ist Mathematik 1 2011:
Reichel, Hans-Christian; Humenberger, Hans; Litschauer, Dieter; Groß, Herbert; Aue, Vera: Das ist
Mathematik 1 Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 1. Klasse der allgemeinbildenden höheren
Schulen und der Hauptschulen. ÖBV Wien 2011, 1. Auflage.

Humenberger Das ist Mathematik 2 2011:
Reichel, Hans-Christian; Humenberger, Hans; Litschauer, Dieter; Groß, Herbert; Aue, Vera: Das ist
Mathematik 2 Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 2. Klasse der allgemeinbildenden höheren
Schulen und der Hauptschulen. ÖBV Wien 2011, 1. Auflage

Humenberger Das ist Mathematik 4 2012:
Reichel, Hans-Christian; Humenberger, Hans; Litschauer, Dieter; Groß, Herbert; Aue, Vera; Neuwirth,
Erich: Das ist Mathematik 4 Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 4. Klasse der allgemeinbildenden
höheren Schulen und der Hauptschulen. ÖBV Wien 2012, 1. Auflage

Kraker Expedition Mathematik 1 2007:
Kraker, Michaela; Plattner, G.; Preis, Christa; Schliegel, Eric: Expedition Mathematik 1, Dorner Wien 2007.

Konrath – Niederle Arithmetik und Geometrie für Lehrer- und Lehrerinnenbildungsanstalten 1 1958:
Konrath, Theodor; Niederle, Wilhelm: Arithmetik und Geometrie. Mathematisches Unterrichtswerk für
Lehrer- und Lehrerinnenbildungsanstalten I. Teil, Österreichischer Bundesverlag Wien 1958 4 Auflage.

Kuchlbacher Mathematik Alles im Griff! 1 2012:
Kuchlbacher, Rudolf; Schmid-Zartner, Rainer; Freiler, Philipp: Mathematik Alles im Griff!
Aufgabensammlung nach dem Kompetenzmodell 1, Braumüller Wien 2012.

Laub Lehrbuch der Mathematik 1 1994:
Laub, Josef; Hruby, Eugen; Reichel, Hans-Christian; Litschauer, Dieter; Groß, Herbert: Lehrbuch der
Mathematik und Aufgabensammlung für die 1. Klasse der allgemeinbildenden höheren Schulen und der
Hauptschulen. Hölder-Pichler-Tempsky Wien 1994.

Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe I. Teil 1970:
Laub, Josef; Hruby, Eugen; Körperth, Wilhelm; Kranzer, Walter; Vohla, Herbert: Lehrbuch der
Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen 1. Teil (in 3 Heften). Hölder-
Pichler-Tempsky Wien 1970.

Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe II. Teil 1968 bzw. 1970:
Laub, Josef; Alexander, Johann; Körperth, Wilhelm; Kranzer, Walter; Lewisch, Ingrid: Lehrbuch der
Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen II. Teil (in 3 Heften). Hölder-
Pichler-Tempsky Wien 1970 2. Auflage.

Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe III. Teil 1970:

Laub, Josef; Körperth, Wilhelm; Vohla, Herbert: Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen III. Teil (in 3 Heften). Hölder-Pichler-Tempsky Wien 1970.

Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe IV. Teil 1975 bzw. 1976:

Laub, Josef; Hruby, Eugen; Körperth, Wilhelm; Kranzer, Walter; Vohla, Herbert: Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen IV. Teil (in 3 Heften). Hölder-Pichler-Tempsky Wien 1975.

Laub Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe 1 1978:

Laub, Josef; Hruby, Eugen; Körperth, Wilhelm: Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen 1. Band Arbeitsbuch für die 5. Klasse. Hölder-Pichler-Tempsky Wien 1978.

Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 1 1976:

Laub, Josef; Hruby, Eugen: Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung. Arbeitsbuch für die 1. Klasse der allgemeinbildenden höheren Schulen und der Hauptschulen. Hölder-Pichler-Tempsky Wien 1976 2. Auflage.

Laub – Hruby Mathematik Arbeitsbuch 2 1976:

Laub, Josef; Hruby, Eugen: Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung. Arbeitsbuch für die 2. Klasse der allgemeinbildenden höheren Schulen und der Hauptschulen. Hölder-Pichler-Tempsky Wien 1976 2. Auflage.

Lewis Mathematik Verstehen – Üben – Anwenden 1 2005:

Lewis, Ingrid: Mathematik Verstehen – Üben – Anwenden 1 Oldenbourg Verlag Wien 2005 6. Auflage.

Ludwig Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen 3A 1941:

Bauer, Hans Adolf; Ludwig, Emil; Reuschel, Arnulf; Wunderlich, Walter: Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen Band 3A für Jungenschulen. Arithmetik u. Geometrie für die 6. bis 8. Klasse Hölder-Pichler-Tempsky Wien 1941.

Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1959:

Ludwig, Emil; Lauf, Josef: Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung für die 1. und 2. Klasse der Mittelschulen, Hölder-Pichler-Tempsky Wien 1959 2. Auflage.

Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1960:

Ludwig, Emil; Lauf, Josef: Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung für die 1. und 2. Klasse der Mittelschulen, Hölder-Pichler-Tempsky Wien 1960.

Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1963:

Ludwig, Emil; Lauf, Josef: Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung für die 1. und 2. Klasse der Mittelschulen, Hölder-Pichler-Tempsky Wien 1963 4. Auflage.

Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 1 und 2 1965:

Ludwig, Emil; Lauf, Josef: Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung für die 1. und 2. Klasse der Mittelschulen, mit Ergänzungsheft für die 2. Klasse (1968, 2. Auflage), Hölder-Pichler-Tempsky Wien 1965 6. Auflage.

Ludwig – Laub Lehrbuch der Mathematik 3 und 4 1967:

Ludwig, Emil; Lauf, Josef, Körperth, Wilhelm; Schondorfer, Ulrich: Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung für die 3. und 4. Klasse der Mittelschulen, mit Ergänzungsheft für die 3. Klasse (1970, 2. Auflage), Hölder-Pichler-Tempsky Wien 1967 6. Auflage.

Malle Mathematik verstehen 5 2010:

Malle, Günther; Koth, Maria; Woschitz, Helge; Malle, Sonja; Salzger, Bernhard; Ulovec, Andreas: Mathematik verstehen 5, Österreichischer Bundesverlag Wien 2010.

Malle Mathematik verstehen 8 2012:

Malle, Günther; Koth, Maria; Woschitz, Helge; Malle, Sonja; Salzger, Bernhard; Ulovec, Andreas: Mathematik verstehen 8, Österreichischer Bundesverlag Wien 2012.

Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 1 1974:

Rath, Ingo: Arbeitslehrbuch Mathematik 1, Verlag Carl Ueberreuter Wien 1974 (für AHS und HS zugelassen).

Rath Arbeitslehrbuch Mathematik 2 1975:

Rath, Ingo: Arbeitslehrbuch Mathematik 2, Verlag Carl Ueberreuter Wien 1975 (für AHS und HS zugelassen).

Reichel Lehrbuch der Mathematik 5 1992:

Reichel, Hans-Christian; Müller, Robert; Laub, Josef; Hanisch, Günther; Körperth, Wilhelm: Lehrbuch der Mathematik 5, Hölder-Pichler-Tempsky 1992 3. Auflage.

Rinderer Mathematik Arbeitsbuch 1 1985:

Rinderer, Leo; Laub, Josef: Mathematik Arbeitsbuch für die 1. Klasse der Hauptschulen und der allgemeinbildenden höheren Schulen Hölder-Pichler-Tempsky 1985.

Rinderer – Laub Mathematik 1 Arbeitsbuch 1976:

Rinderer, Leo; Laub, Josef: Mathematik für Hauptschulen und allgemeinbildende höhere Schulen. Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 1. Klasse, Hölder-Pichler-Tempsky Wien 1976 2. Auflage.

Rinderer – Laub Mathematik 2 Arbeitsbuch 1976:

Rinderer, Leo; Laub, Josef: Mathematik für Hauptschulen und allgemeinbildende höhere Schulen. Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 2. Klasse, Hölder-Pichler-Tempsky Wien 1976 2. Auflage.

Schön Lehrbuch der Mathematik I 1965:

Schön, Rudolf: Lehrbuch der Mathematik für Hauptschulen mit Aufgabensammlung, I. Teil für die erste Klasse, Franz Deuticke Wien 1965 2. Auflage.

Steiner MatheMaster 1 2000:

Steiner, Gerald: MatheMaster Band 1 Mathematik für die 5. Schulstufe, Reniets Verlag 2000

Schön Lehrbuch der Mathematik II 1966:

Schön, Rudolf: Lehrbuch der Mathematik für Hauptschulen mit Aufgabensammlung, II. Teil für die zweite Klasse, Franz Deuticke Wien 1966.

Suppantschitsch Lehrbuch der Arithmetik 1911:

Suppantschitsch, Richard: Lehrbuch der Arithmetik für die IV. und V. Klasse der Gymnasien und Realgymnasien. F. Tempsky Verlag Wien 1911.

Szirucsek Arbeitslehrbuch Mathematik 7 1975:

Szirucsek, Eduard; Unfried, Hubert: Arbeitslehrbuch Mathematik 7. Ueberreuter Verlag Wien 1975.

Weyrich Der Rechenunterricht auf der Oberstufe ländlicher Volksschulen 1950:

Weyrich, Josef: Der Rechenunterricht auf der Oberstufe ländlicher Volksschulen Band III, Österreichischer Bundesverlag Wien 1950.

9.3 Internetquellen

„ $3+5 = 5+3$ “, Der Spiegel 13/1974 vom 25.3.1974, <http://www.spiegel.de/spiegel/print/d-41784469.html>, abgefragt am 24.2.2014.

Adieu, Mengenlehre von Simone Schmid in der Neuen Zürcher Zeitung vom 7. November 2010: <http://www.nzz.ch/aktuell/startseite/adieu-mengenlehre-1.8293063>, abgefragt am 28.1.2014.

Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen (Stand: März 2013): https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_2013-03-11.pdf, abgefragt am 28.2.2014.

Fasche Musik, Der Spiegel Nr. 10/1974 vom 4.3. 1974, <http://www.spiegel.de/spiegel/print/d-41784205.html>, abgefragt am 28.1.2014.

Mengenlehre, das ist Zeitverschwendung, Der Spiegel 36/1974 vom 2.9.1974 <http://www.spiegel.de/spiegel/print/d-41667426.html>, abgefragt am 29.1.2014.

Oberstufenlehrplan Mathematik: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf, abgefragt am 25.10.2013.

Tom Lehrer: New Math: http://www.lyricsfreak.com/t/tom+lehrer/new+math_20138395.html, abgefragt am 28.8.2013.

Unterstufenlehrplan Mathematik:

http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_unterstufe.xml, abgefragt am 25.10.2013.

Volksschullehrplan: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/3996/VS7T_Mathematik.pdf, abgefragt am 13.2.2014.

Lebenslauf Brigitte Bogensperger

Geboren am	14. Februar 1967
Familienstand	verheiratet, 3 Kinder (geb. 1987, 1991, 1993)
1973 - 1977	Volksschule der Schulschwestern am Kaiser Franz Josef Kai, Graz
1977 -1985	Akademisches Gymnasium Graz, humanistischer Zweig
1985 – 1987	Studium Maschinenbau –Wirtschaftsingenieurwesen, TU Graz 1. Diplomprüfung
1999 – 2009	Berufstätigkeit als Bilanzbuchhalterin
2009 – 2014	Studium Mathematik und Informatik Lehramt, Universität Wien