



universität  
wien

# DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Didaktische Handlungsfähigkeit von Lehrpersonen in  
Bezug auf Fehlvorstellungen zu Vektoren“

Verfasserin

Christina Gahler

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2014

Studienkennzahl lt. Studienblatt:

A 190 482 406

Studienrichtung lt. Studienblatt:

Diplomstudium Lehramt UF Bewegung und Sport UF Mathematik

Betreuer:

MMag. Dr. Christoph Ableitinger



## **Danksagung**

Für die gesamte Unterstützung während meines Studiums möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken.

Darüber hinaus bin ich Herrn Dr. Christoph Ableitinger sehr dankbar für die freundliche und hilfreiche Betreuung dieser Diplomarbeit.

## **Inhalt**

|                                                        |    |
|--------------------------------------------------------|----|
| 1. Rahmenbedingungen und theoretische Grundlagen ..... | 6  |
| 1.1. Standortbestimmung des Themas .....               | 6  |
| 1.2. Motivation.....                                   | 6  |
| 1.3. Derzeitiger Forschungsstand.....                  | 7  |
| 1.3.1. Arithmetisch vs. geometrisch .....              | 8  |
| 1.3.2. Fehlvorstellungen.....                          | 13 |
| 2. Forschungsmethode .....                             | 15 |
| 3. Empirische Studie .....                             | 16 |
| 3.1. Rahmenbedingungen.....                            | 19 |
| 3.1.1. Videografie des Mathematikunterrichts.....      | 19 |
| 3.1.2. LehrerInneninterviews .....                     | 20 |
| 3.1.3. SchülerInneninterviews.....                     | 20 |
| 3.2. Darstellung der Daten.....                        | 23 |
| 3.2.1. Videografie des Mathematikunterrichts.....      | 23 |
| 3.2.2. LehrerInneninterviews .....                     | 29 |
| 3.2.2.1. Vektoraddition .....                          | 29 |
| 3.2.2.2 Verbindungsvektor .....                        | 33 |
| 3.2.2.3 Gleichheit von Vektoren.....                   | 38 |
| 3.2.2.4 Mittelpunkt einer Strecke .....                | 43 |
| 3.2.2.5 Zusammenfassung .....                          | 49 |
| 3.2.3. SchülerInneninterviews.....                     | 52 |
| 3.2.3.1. Georg und Lukas .....                         | 52 |
| 3.2.3.2. Thomas und Manuel .....                       | 57 |
| 3.2.3.3. Peter und Armin .....                         | 62 |

|                                          |     |
|------------------------------------------|-----|
| 3.2.3.4. Erich und Clemens .....         | 66  |
| 3.2.3.5. Markus und Dominik.....         | 70  |
| 3.2.3.6. Lara und Veronika .....         | 74  |
| 3.2.3.7. Max und Ben .....               | 77  |
| 3.2.3.8. Rene und Tobias .....           | 80  |
| 3.3. Interpretation der Ergebnisse ..... | 82  |
| 3.3.1. Videografie .....                 | 82  |
| 3.3.2. LehrerInneninterviews .....       | 86  |
| 3.3.2.1. Vektoraddition.....             | 87  |
| 3.3.2.2. Verbindungsvektor .....         | 90  |
| 3.3.2.3. Gleichheit von Vektoren.....    | 92  |
| 3.3.2.4. Mittelpunkt einer Strecke ..... | 93  |
| 3.3.2.5. Zusammenfassung .....           | 95  |
| 3.3.3. SchülerInneninterviews.....       | 95  |
| 3.3.3.1. Vektoraddition .....            | 95  |
| 3.3.3.2. Verbindungsvektor .....         | 101 |
| 3.3.3.3. Gleichheit von Vektoren.....    | 104 |
| 3.3.3.4. Mittelpunkt einer Strecke ..... | 107 |
| 3.3.3.5. Zusammenfassung .....           | 110 |
| 4. Zusammenfassung und Ausblick .....    | 117 |
| 5. Literaturverzeichnis .....            | 119 |
| 6. Abbildungsverzeichnis.....            | 121 |
| 7. Tabellenverzeichnis .....             | 122 |
| 8. Anhang: Transkript .....              | 123 |
| 9. Lebenslauf.....                       | 194 |

# **1. Rahmenbedingungen und theoretische Grundlagen**

## **1.1. Standortbestimmung des Themas**

Diese Diplomarbeit siedelt sich im Bereich der Mathematikdidaktik an. Die Arbeitsgruppe für Didaktik der Mathematik der Universität Wien versteht unter diesem Themenbereich Folgendes: „Fachdidaktik ist ein grundlegender Beitrag für den Prozess des fachbezogenen Lehrens und Lernens. Wesentliche Bestandteile sind unter anderem die Entwicklung neuer Unterrichtsinhalte, methodische Fragen und die Erforschung der Unterrichtspraxis.“.

Die „Erforschung der Unterrichtspraxis“ spielt in dieser Arbeit die Hauptrolle und wird in den folgenden Kapiteln erörtert.

## **1.2. Motivation**

„Betrachtet man die Vektorrechnung oberflächlich, so handelt es sich sicher nicht um das schwierigste Gebiet der Schulmathematik, dringt man aber tiefer in die Denkstrukturen der Schüler [sic!] ein, so entdeckt man, daß [sic!] die meisten von ihnen sie nur scheinbar verstehen.“ (Jarmer, 1995, Vorwort)

Einige Semester bevor ich mit dem Verfassen der Diplomarbeit begonnen hatte, entschied ich mich bereits dafür, die Vektorrechnung thematisieren zu wollen. Auf die Idee brachten mich die von mir gehaltenen Nachhilfestunden. Bei sämtlichen Schülern und Schülerinnen merkte ich immer wieder grobe Unklarheiten bzw. Verständnisprobleme bzgl. der Vektorrechnung. Typische Beispiele waren das Auffassen eines Vektors nur als Punkt bzw. nur als Pfeil. Darüber hinaus waren Fehlvorstellungen im Hinblick auf die geometrische Darstellung von Vektoraddition, Verbindungsvektoren oder allgemein von existierenden Formeln, wie zum Beispiel die des Mittelpunkts einer Strecke, vorherrschend. Dies brachte mich mehrmals zu der Überlegung, wie ich bereits vorherrschenden Fehlvorstellungen effektiv entgegenwirken könnte.

Auf Grund dessen kam ich zu dem Entschluss Fehlvorstellungen der SchülerInnen bzgl. der Vektorrechnung, insbesondere in der 9. Schulstufe, zu analysieren, wobei ich vor allem auf notwendige Lösungsvorschläge genauer eingehen möchte. In Absprache mit meinem

Diplomarbeitsbetreuer entschied ich mich dafür, dieses Vorhaben mittels qualitativen Interviews von Lehrpersonen zu erörtern.

Dieses Thema spielt sowohl für mich, aber ich denke auch für viele andere Lehramtskandidaten und –kandidatinnen, eine wichtige Rolle im zukünftigen Beruf. Darüber hinaus bin ich der Meinung, dass auch bereits ausgebildete MathematiklehrerInnen davon profitieren können, indem sie gegebenenfalls einen neuen Blickwinkel erhalten. Das Ziel dieser Diplomarbeit ist es, einige konkrete Hilfestellungen, aber auch Handlungskompetenzen von Lehrpersonen im Mathematikunterricht, aufzuzeigen.

Ich machte es mir zur Aufgabe die erhaltenen Therapievorschläge der Lehrpersonen an Hand von SchlerInnenengruppen zu testen, um entscheiden zu können, ob sich diese als effektiv herausstellen und dadurch Fehlvorstellungen beseitigt werden können.

### **1.3. Derzeitiger Forschungsstand**

Die in meiner Arbeit behandelten Themen lassen sich grob in drei Bereiche gliedern. Darunter fallen der Zugang zur Einführung der Vektorrechnung im Mathematikunterricht, insbesondere in der 5. Klasse AHS, SchülerInnenfehlvorstellungen bzgl. Vektoren und die didaktische Handlungskompetenz von Lehrkräften im Zuge auftretender Fehlvorstellungen.

Die unterschiedlichen Zugänge, die sich während meiner Forschungsarbeit mittels LehrerInneninterviews herauskristallisierten, beschränkten sich einerseits auf den geometrischen – durch Punkte und Pfeile - und andererseits auf den arithmetischen, der die Einführung in Form von Rechenoperationen durch n-Tupel vorsieht. Dabei stützte ich mich vor allem auf die Werke von Hartmann (1993) „Inhaltliche Vorstellungen von Vektoren“, Klasmann (1984) „Der Vektorbegriff im Mathematikunterricht“ und dem Artikel von Malle (2007) „Das Vektorkonzept in „Mathematik verstehen“ “.

Literarische Unterstützung hinsichtlich SchülerInnenfehlvorstellungen holte ich mir über Diplomarbeiten, einerseits wiederum von Hartmann (1993) „Inhaltliche Vorstellungen von Vektoren“, andererseits von Jarmer (1995) „Empirische Untersuchungen zur Vektorrechnung in der Schule“, aber auch von Klasmann (1984) „Der Vektorbegriff im Mathematikunterricht“. Die ersten beiden Werke enthalten Aufgaben bzgl. Vektorrechnung in der 9. Schulstufe, welche von SchülerInnen innerhalb Interviews bzw. in Form einer schriftlichen Abfrage bearbeitet wurden. Hervorgehoben wurden dabei sämtliche

Fehlvorstellungen der Befragten, welche wiederum die Grundlage meiner empirischen Forschung darstellten. In den Diplomarbeiten wurde allerdings nicht thematisiert, ob sich Lehrpersonen dieser Fehlvorstellungen von SchülerInnen bewusst sind, falls diese im Unterrichtsgeschehen zu Tage treten, wie Lehrpersonen damit umgehen bzw. handeln und ob diese Interventionen Fehlvorstellungen beseitigen können oder keine Hilfestellung bieten. Dies führt unweigerlich zu dem dritten und sogleich bedeutendsten Themenbereich meiner Diplomarbeit, nämlich die didaktische Handlungskompetenz von Lehrkräften im Zuge auftretender Fehlvorstellungen.

Mittels fünf Experteninterviews mit Lehrpersonen wurden mögliche Interventionen bzgl. diverser „typischer“ Fehlvorstellungen eruiert. Mit dem dadurch gewonnenen Material wurden diese Erfahrungswerte an Schülern und Schülerinnen im Zuge von PartnerInneninterviews angewandt und erprobt. Eine anschließende Überprüfung über das eventuell neu erworbene Wissen der SchülerInnen gab mir einen Einblick bzgl. der Handlungskompetenz von Lehrpersonen im Bereich der Vektorrechnung.

### **1.3.1. Arithmetisch vs. geometrisch**

Ein grundlegendes Thema im Hinblick auf die Einführung der Vektorrechnung in der Schule ist die Art des gewählten Zuganges. Einerseits ist es möglich diesen arithmetisch bzw. algebraisch mittels  $n$ -Tupel, andererseits geometrisch mit Punkten und Pfeilen zu gestalten. Da im aktuellen Lehrplan der 9. Schulstufe AHS, auf welchen ich in meiner Arbeit besondere Rücksicht genommen habe, keine Reihung vorgesehen ist, bleibt dies der Lehrkraft selbst überlassen (vgl. Lehrplan der AHS-Oberstufe Mathematik, 2007).

Klasmann (1984, S. 21) betrachtet die Einführung von Vektoren auf geometrischem Weg mit Pfeilklassen eher skeptisch. Hierbei wird eine Klasse gleich langer, gleich gerichteter und gleich orientierter Pfeile einer Ebene als Vektor bezeichnet. Als vorteilhaft bezeichnet Klasmann, dass „eine anschauliche Vorstellung bereits mitgeliefert wird“ (S. 21), jedoch kritisiert sie gleichzeitig, dass dadurch der Vektorbegriff „von Anfang an für höhere Dimensionen ( $>3$ ) nur mehr erschwert erschließbar“ (S. 21) sei.

Hartmann (1993) fasst fünf Punkte zusammen, die gegen die Verwendung des Pfeilklassenmodells in der Schulmathematik sprechen:

- „Das Modell der Pfeilklassen ist für die Probleme der Analytischen Geometrie eine inadäquate Theoriebildung. Der Schüler [sic!] denkt bei der Lösung konkreter Aufgaben ja nicht an Äquivalenzklassen, sondern denkt in Punkten und Pfeilen.
- Das Pfeilklassenmodell eignet sich nicht für die Physik. Fast alle Vektoren in der Physik sind keine Pfeilklassen (ausgenommen z. B. die Feldstärke im homogenen Feld.)
- Der bei allen Definitionen erforderliche Nachweis der Unabhängigkeit von den ausgewählten Repräsentanten bzw. Objekten ist aufwendig und lästig.
- Die geometrische Argumentation erweist sich gelegentlich als äußerst schwierig.
- Der Nachweis der Rechengesetze ist meist kompliziert. Häufig muß [sic!] man die Anschauung benutzen, manchmal müssen unbewiesene Sätze der Geometrie verwendet werden, zu deren Beweis ein tieferes Zurückgehen in die geometrische Axiomatik erforderlich wäre. Auch diese Schwierigkeiten sind nicht spezifisch für den Vektorbegriff, sondern spezifisch für Argumentationen in der Geometrie und können daher ebenfalls von den eigentlichen Problemen des Vektorbegriffs ablenken.“  
(Hartmann, 1993, S. 110-111)

Im Gegensatz zum geometrischen Pfeilklassenmodell befürwortet Klasmann (1984, S. 25) die Einführung der Vektoren mittels n-Tupel. Sie nennt vor allem die Wirtschaftsmathematik, insbesondere Preislisten, Einkaufslisten oder Warenbestandslisten, als besondere Motivation für die Einführung der Vektorrechnung im Mathematikunterricht mittels n-Tupel (vgl. Klasmann, 1984, S. 26). Ein Beispiel, das ich selbst in einer 5. Klasse AHS beobachten konnte, gestaltete sich wie folgt:

*Beispiel:*

Eine Firma bietet drei verschiedene Fertighaustypen an:

|                 | Typ 1 | Typ 2 | Typ 3 |
|-----------------|-------|-------|-------|
| Zement (Säcke)  | 600   | 400   | 800   |
| Ziegel (Stück)  | 1800  | 1500  | 2500  |
| Holz ( $m^3$ )  | 30    | 25    | 25    |
| Arbeitszeit (h) | 1400  | 2100  | 1800  |

Je ein Haus wird gebaut. Wie viel Material benötigt man?

Lösung:

$$H_{ges} = H_1 + H_2 + H_3 = \begin{pmatrix} 600 \\ 1800 \\ 30 \\ 1400 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 400 \\ 1500 \\ 25 \\ 2100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 800 \\ 2500 \\ 25 \\ 1800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 + 400 + 800 \\ 1800 + 1500 + 2500 \\ 30 + 25 + 25 \\ 1400 + 2100 + 1800 \end{pmatrix}$$

$$H_{ges} = \begin{pmatrix} 1800 \\ 5800 \\ 80 \\ 5300 \end{pmatrix}$$

Durch dieses anwendungsorientierte Beispiel aus dem Bereich Wirtschaft war es der Lehrperson möglich die Addition und im Anschluss daran die Subtraktion und die Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor in der ersten Stunde einzuführen.

Nach Hartmann (1993) erscheint das Modell der n-Tupel unproblematisch. Aus didaktischer Sicht bewertet sie die Rechenoperationen für leicht motivierbar, welche sich darüber hinaus aus einer naheliegenden „Verallgemeinerung vom Eindimensionalen ins Höherdimensionale“ ergeben (Hartmann, 1993, S. 124). Als trivial bezeichnet sie die Beweise und Rechengesetze mittels n-Tupel. Jedes Rechengesetz verläuft so, dass es „auf das entsprechende Rechengesetz in  $\mathbb{R}$  zurückgeführt wird“ (Hartmann, 1993, S. 125). In ihrer Diplomarbeit thematisiert sie weiters die oft kritisierte fehlende „Anschaulichkeit“ dieses Modells. Hartmann argumentiert damit, dass das Modell der n-Tupel über eine „andere Art als die geometrische Anschaulichkeit“ verfügt, nämlich über die strukturierte „Anordnung der Elemente“ sowie „deren Zusammenfassung durch eine Klammer“ (Hartmann, 1993, S. 125).

Profke (1978, S. 18; zit. n. Klasmann 1993, S. 28) sieht für die Bearbeitung von Sachproblemen hinsichtlich Vektoren in der Schule bloß die „Zusammenfassung geordneter n-tupel [sic!] zu neuen Rechengrößen, ihre komponentenweise Addition und Vervielfachung, die Zerlegung von Vektoren nach anderen, die Äquivalenz von Vektor- und Komponentengleichungen“ vor. Profke (1978) betont die Bedeutsamkeit „geometrische Probleme [...] rechnerisch zu erfassen und umgekehrt arithmetische Sachverhalte [...] geometrisch zu veranschaulichen“ (Klasmann, 1993, S. 28) im Setting Schule. Dadurch „soll ein frühzeitiger Wechsel zwischen Pfeil- und Koordinatendarstellung“ (Profke, 1978, S. 27) ermöglicht werden.

Wie auch Hartmann titulierte Malle (2007) in seinem Artikel „Das Vektorkonzept in „Mathematik verstehen“ “ den algebraischen Teil aus didaktischem Blickwinkel als „relativ

unproblematisch“, während er den geometrischen Zugang im Hinblick auf den Mathematikunterricht für weitaus komplexer empfindet.

Exemplarisch greife ich ab nun auf meine erhobenen Daten, die ausführlich unter Kapitel 8 zu finden sind, zurück, da eine der von mir interviewten Lehrpersonen anderer Meinung als Hartmann und Malle ist. Auf die Frage, welchen Zugang sie bevorzuge, meint sie „Eher auf dem geometrischen. Vor allem in der 5A, ist also eine Sprachklasse, und die haben einfach/ vom Vorstellungsvermögen her tun sie sich viel leichter mit Geogebra Unterstützung, geometrisch das ganze einzuführen.“ (Zeile 84-86). Auffällig ist hierbei die Erwähnung der Dynamischen Geometrie Software Geogebra, welche eine bessere Vorstellung bei den Schülern und Schülerinnen schaffe. Die Meinung, durch den geometrischen Zugang ein besseres Vorstellungsvermögen bei den Schülern und Schülerinnen zu bewirken, sieht eine andere Lehrperson ganz ähnlich: „Meistens auf dem geometrischen Weg, weil der für die Schüler anschaulicher und verständlicher ist, meiner Meinung nach. Also einfach im Koordinatensystem, als Punkt, als Pfeil/ einfach diese verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten.“ (Zeile 518-520). Als Grund dafür wurde das Kennenlernen des Koordinatensystems, das bereits in der 2. Klasse AHS stattgefunden hat, genannt (vgl. Zeile 522-524). Gleichzeitig wird aber auch der Nachteil thematisiert, dass sich die Klasse „aber dann (...) schwerer auf das Rechnerische“ (Zeile 93-94) umstellt.

Wie zuvor schon der Nachteil genannt wurde, dass den SchülerInnen das Operieren nach der geometrischen Einführung schwer fällt, wurde es auch hier als problematisch bezeichnet, „[...] dass sie es einfach wirklich nur mit diesen Pfeilen verbinden und diese Anwendungsbeispiele in Wirtschaft oder Physik oder da irgendwo eher weniger verstehen [...]“ (Zeile 529-530). Eine andere Lehrperson derselben Schule wählt den Weg, den auch Malle bevorzugt, „[...] am Anfang also arithmetisch, ganz kurz, und dann kommt der geometrische Zugang mit den Punkten und mit den Pfeilen.“ (Zeile 296-297). Begründet wurde dieses Vorgehen folgendermaßen: „Ich habe es früher eigentlich immer geometrisch gemacht, aber jetzt kommt die neue Matura und da gibt es diese/ (..) wie nennt man das/ Grundkompetenzen, da gibt es einen Grundkompetenzkatalog, und da steht eben darin, dass man die Vektoren nicht nur geometrisch interpre/ dass die Schüler die Vektoren nicht nur geometrisch interpretieren können sollen, sondern auch von der arithmetischen Seite her. Deswegen mache ich seit zwei Jahren, also seit vorherigem Jahr, mache ich das zuerst über das Arithmetische.“ (Zeile 299-304). Zu erkennen ist, dass sich diese Lehrperson mit der neuen Zentralmatura auseinandersetzt und daher auch den „gewohnten“ Mathematikunterricht umstrukturiert. Allerdings wurden bei der unterschiedlichen Einführung weder Vor- noch

Nachteile zur Kenntnis genommen. Eine dritte Variante die Vektorrechnung in der Schule einzuführen, beschrieb mir eine weitere Lehrperson. Auf die Frage hin, welchen Zugang sie wähle, antwortete sie „Beides gleichzeitig. Wobei ich sehr schlampig unterscheide zwischen Punkten und Pfeilen.“ (Zeile 701), wobei die „schlampige“ Unterscheidung zwischen Punkten und Pfeilen so begründet wurde, dass es völlig egal sei, da es sich um dasselbe handle (vgl. Zeile 703-706). Als Nachteil dieser Methode wird von der Lehrperson selbst erwähnt, dass es durch das Vereinheitlichen von Punkten und Pfeilen bereits bei der Berechnung des Mittelpunkts einer Strecke die ersten Schwierigkeiten auftreten (vgl. Zeile 716-719). Konträrer Ansicht zu dem Einführungsschema keine Unterscheidung zwischen Punkten und Pfeilen zu treffen, ist die zuletzt interviewte Lehrperson, die anfänglich auf Grund des bereits schon öfters erwähnten besseren Vorstellungsvermögens der SchülerInnen den geometrischen Zugang wählt (vgl. Zeile 865-868), aber sehr stark betont, „[...] dass es zwei wichtige Sachen gibt. Das ist die Unterscheidung zwischen Punkt und Vektor. Wenn die einmal sitzen, dann glaube ich, dass man gut weiterarbeiten kann.“ (Zeile 868-870). Auf die Frage hin, welche Schwierigkeiten man mit der geometrischen Einführung vermeiden möchte, erhielt ich die Antwort: „Wenn ich das über  $n$ -Tupel einführe, oder über irgendwelche Sachen von Zahlenaneinanderreihung oder über Listen, wie man es in der Informatik nimmt, dann hat man das Problem, dass es sehr abstrakt wird und nicht sehr konkret. Ich vermute, dass die konkrete Situation die ist, die den Menschen eher dazu motiviert, Begriffe zu festigen.“ (Zeile 917-921). Diese Aussage widerspricht der Meinung von Klasmann, die, wie schon zuvor erwähnt, vor allem die Wirtschaftsmathematik als große Motivation für die Einführung der Vektorrechnung mittels  $n$ -Tupel sieht (vgl. Klasmann 1984, S. 25).

Zusammenfassend bleibt zu sagen, dass bei den fünf interviewten Lehrpersonen ein Trend zu erkennen ist, welche Einführungsvariante beliebter ist. Drei Lehrkräfte bevorzugen den geometrischen Weg, eine den arithmetischen und eine weitere verwendet beide Zugänge zeitgleich. Es stellt sich heraus, dass bei dem geometrischen Zugang besonders das bessere Vorstellungsvermögen vorteilhaft bewertet wird und dieses Modell schon in der 2. Klasse AHS erstmalig vermittelt wird. Als Nachteil dieses Vektormodells wird der Transfer des Geometrischen zum Arithmetischen genannt. Hierbei haben die SchülerInnen laut Erfahrungswerten der LehrerInnen größere Schwierigkeiten. Schon bei den ersten Interviewfragen wurde erwähnt, dass der Einsatz des Computers eine erhebliche Hilfestellung für SchülerInnen bietet.

### 1.3.2. Fehlvorstellungen

„Sowohl Vorwissen als auch Schülervorstellungen [sic!] prägen ganz stark den individuellen Lernprozess. Ohne deren Berücksichtigung kann das Didaktische Prinzip, die Schüler [sic!] dort abzuholen, wo sie sich befinden, keinesfalls umgesetzt werden. Dabei bedeutet:

- Schülervorstellung [sic!] (Präkonzepte): Wissen, das Lernende aus dem Alltag mitbringen (nicht institutionalisiertes Lernen); der Begriff enthält die Fehlvorstellungen.
- Vorwissen: Wissen, das Lernende aus vorausgegangenen Jahrgangsstufen, also dem institutionalisierten Lernen, mitbringen. Auch hier kommt es zu Fehlvorstellungen ("lehrerinduzierte Lernschwierigkeiten").
- Eine Fehlvorstellung ist vermeintliches Wissen, das einem oder mehreren Grundsätzen naturwissenschaftlichen Denkens widerspricht. Sie kann im nicht institutionalisierten oder institutionalisierten Bereich erworben werden.“ (Wagner, 2013)

Die Kunst der Lehrperson besteht darin, SchülerInnenfehlvorstellungen zu bemerken, zu analysieren und in weiterer Folge entsprechend zu intervenieren. In den von mir gehaltenen LehrerInneninterviews wurde herausgefiltert, inwieweit Experten und Expertinnen diesen Kompetenzbereich abdecken.

Auf meine Frage, welche typischen Fehlvorstellungen bei SchülerInnen trotz des bevorzugten Vektormodells der Lehrpersonen auftreten, erhielt ich unterschiedlichste Antworten. Hinsichtlich der geometrischen Einführung ist eines der Probleme, „[...] dass sie oft  $x$  und  $y$  vertauschen. Und ob das eine Fehlvorstellung ist, weiß ich nicht, aber es hat einfach damit zu tun, dass sie sich  $x$  und  $y$  einfach überhaupt nicht vorstellen können.“ (Zeile 101-103). Das nicht vorhandene Vorstellungsvermögen wird in dieser wissenschaftlichen Arbeit ebenso als Fehlvorstellung bezeichnet. Die Lehrperson berichtet weiter, wie sie auf diese Schwierigkeit reagiert: „Naja ich versuche ihnen dann mehr oder weniger Hilfestellungen alphabetisch zu geben. Einfach nur, dass sie wissen,  $x$  kommt vor  $y$ . Einfach vom Zeichnen und vom Vorstellen her. Oder einfach noch viel mehr mit Geogebra das Ganze zu zeichnen, dass sie es wirklich richtig halt immer vor sich haben.“ (Zeile 121-124). Interventionen, die die Lehrperson anbietet, sind einerseits die alphabetische Hilfestellung, andererseits erneut der Einsatz einer Dynamischen Geometrie Software.

Trotz der geometrischen Einführung nennt eine andere Lehrperson „Die Fehlvorstellungen, dass sie sehr oft, eben in der Geometrie, Punkt und Vektor verwechseln. Und dann eben Punkte kürzen, also parallele Punkte oder so etwas aufstellen. Das kommt schon vor. Also die Falschinterpretierung.“ (Zeile 542-544). Gemeint ist hierbei die Fehlinterpretation zwischen Punkt und Pfeil, wobei andere Lehrkräfte – siehe Kapitel 1.3.1. *Arithmetisch vs. geometrisch* – hierbei bewusst keine Unterscheidung machen. Diese Fehlvorstellung soll anhand eines exemplarischen Beispiels im Koordinatensystem beseitigt werden (vgl. Zeile 547). „[...] schaut, das ist ein Punkt. Den kann ich/ wenn ich den verschiebe, dann ist das ganz woanders und ich habe eine ganz andere Ausgangssituation als bei einem Pfeil. Wenn ich den jetzt verschiebe, der ändert sich nicht. Also, dass sie das auch wieder optisch sehen und da ist für mich wieder der Vorteil, wenn ich es als geometrische Darstellung einführe.“ (Zeile 548-551). Die optische Darstellung ermöglicht somit den Schülerinnen und Schülern, diesen Sachverhalt zu begreifen und geometrisch zwischen Punkten und Pfeilen zu unterscheiden.

Eine dritte Lehrperson, die ebenfalls die geometrische Variante wählt, umschreibt typische Fehlvorstellungen, die im Zuge dessen auftreten können, allgemeiner: „Ich rechne genau damit, dass sie einfach/ es gibt ein paar Probleme, die darin stecken. Also die Situation Punkt und Vektor zu unterscheiden, dauert seine Zeit. Das ist einfach nicht leicht zu verstehen, dass ein Vektor nur ein Repräsentant von unendlich vielen Pfeilen ist mit selber Länge und mit selber Orientierung und selber Richtung, wobei das Problem der Orientierung schon ein echtes Problem ist. Die Richtung geht noch, aber die Orientierung ist schon eine schwierige/ von der Vorstellung her. Aber das Hauptproblem ist, dass die/ zum Beispiel die Addition zweier Vektoren, die häufig wieder als Punkt interpretiert wird und so weiter. Und das ist schwierig, nämlich weil sich dahinter auch noch ein Gedanke versteckt, der Ortsvektor, der zum Punkt führt vom Ursprung. Und irgendwann einmal wird man über die Situation sprechen müssen, dass eigentlich der Punkt selber auch durch einen Vektor darstellbar ist. Nur, das kann zu totalen Begriffsverwirrungen führen und dann hat man wieder die Situation, dass man etwa in irgendeinem geometrischen Gebilde zwei Vektoren addiert und glaubt, man ist an einer bestimmten Stelle.“ (Zeile 894-906). Konkreter wird die Lehrperson bei der Verwendung von Parametern. „Fehlvorstellungen gibt es jede Menge. Zum Beispiel die Bedeutung eines Parameters. Aber das ist schon weiter, das ist nicht am Anfang. Sozusagen die Vorstellung, was/ welche Bedeutung so ein Parameter hat und welche Auswirkungen es hat, wenn man dafür Zahlen einsetzt, beziehungsweise wenn man ganz allgemein denkt. Da gibt es sehr viele Fehlvorstellungen, beziehungsweise manchmal sogar gar keine Vorstellungen.“ (Zeile 908-912).

Bei der arithmetischen Einführung erhielt ich die Rückmeldung, dass der Lehrperson keine typischen Fehlvorstellungen bewusst wären. (vgl. Zeile 309-310). Es sei allerdings dahingestellt, was diese Lehrkraft persönlich unter einer Fehlvorstellung versteht. Weiters meint sie: „Ich glaube sie nehmen das recht schnell zur Kenntnis, dass das eben mehrere Zahlen geordnet sind und so. Da gibt es eigentlich keine Probleme.“ (Zeile 310-311).

Im Fall der zeitgleichen arithmetischen und geometrischen Vektoreinführung wurde zum Beispiel die Fehlvorstellung aufgezählt, „[...] dass der Vektor in die falsche Richtung zeigt, weil sie Schaft minus Spitze rechnen, falsch.“ (Zeile 715). Als mögliche Interventionsmaßnahme wurde zuerst genannt, dass es „[...] einige Grundvorstellungen“ gibt „die müssen automatisiert sein. Spitze minus Schaft muss automatisch sein. Das haben die Schüler üblicherweise auch, nur irren sie sich. Sobald man das Ganze veranschaulicht, und am einfachsten geht das mit einem CAS und dynamischer Geometrie, kommen sie drauf.“ (Zeile 723-726). Einerseits wird darauf verwiesen, dass SchülerInnen eine gewisse Zeit benötigen, um das Gelernte zu verinnerlichen, andererseits wird wiederum als optisches Hilfsmittel die Verwendung eines Computer Algebra Systems bzw. einer Dynamischen Geometrie Software erwähnt, wodurch es den Schülern und Schülerinnen leichter fallen soll, speziell die Problematik bzgl. „Spitze minus Schaft“ aus dem Weg zu räumen.

## **2. Forschungsmethode**

„Qualitative Methoden eignen sich nicht nur zu Explorationszwecken, sondern werden im Forschungsalltag oftmals mit quantitativen Verfahren kombiniert [...]“ (Bortz & Döring, 2006, S. 296). Diese Diplomarbeit ist hauptsächlich von einer qualitativen Forschungsmethode geprägt, wobei zum Veranschaulichen auch das Zählen von erhobenen Daten herangezogen wird.

Dabei spielt die interpretative Unterrichtsforschung eine große Rolle. Zuvor müssen aber noch die Daten qualitativ erhoben werden. „Die wichtigsten Grundtechniken zur Erhebung qualitativer Daten sind nichtstandardisierte oder teilstandardisierte Befragungen, Beobachtungen und nonreaktive Verfahren.“ (Bortz & Döring, 2006, S. 308)

Die chronologische Datenerhebung dieser Forschungsarbeit fand in einer Unterrichtsbeobachtung ihren Anfang, um unverfälschte Fakten sammeln und schlussendlich analysieren zu können. Insbesondere diente sie dazu, ob Fehlvorstellungen von Schülern und Schülerinnen explizit auch im Unterrichtsgeschehen zu Tage treten.

Der zweite große Bereich der Datenerhebung basierte auf teilstandardisierten Befragungen, die einerseits bei LehrerInneninterviews, andererseits bei SchülerInneninterviews verwendet wurden. Auf die teilstandardisierte Befragung wurde deshalb zurückgegriffen, um zum einen die Richtung des Gesprächs vorzugeben und zum anderen dazu diente sie dazu, den Befragten viel Spielraum beim Antworten zu lassen (vgl. Bortz & Döring, 2006, S. 309).

Die dadurch erhaltenen Daten wurden in Kapitel 8 transkribiert. Interessante Passagen wurden in Kapitel 3.2. dargestellt, um anschließend in Kapitel 3.3. analysiert und interpretiert zu werden.

### **3. Empirische Studie**

Die empirische Studie dieser Arbeit baut auf den drei Strängen Videografie des Einführungsunterrichts bzgl. Vektoren, LehrerInneninterviews und SchülerInneninterviews auf. Dies liegt dem Gedanken zugrunde, dass in die Realität des Mathematikunterrichts eingetaucht werden kann, um festzustellen, ob die Lehrperson während des Unterrichts Fehlvorstellungen der SchülerInnen aufdecken kann bzw. ob ihr diese bewusst werden. Darüber hinaus ist es ein Ziel der Videografie zu beobachten, ob und wie die Lehrkraft interveniert, wenn Fehlvorstellungen ersichtlich werden. Im selben Zeitraum finden die LehrerInneninterviews statt. Dabei sind die vier Themenbereiche Addition von Vektoren, Verbindungsvektor, Gleichheit von Vektoren und Mittelpunkt einer Strecke vorrangig. Für diese Gebiete habe ich mich deshalb entschieden, weil einerseits sie Grundbausteine der Vektorrechnung darstellen und andererseits, da Hartmann, Klasmann und Jarmer dazu schon Untersuchungen bzgl. Fehlvorstellungen unternommen haben, die wiederum die Basis meiner Studie bilden. Anhand der LehrerInneninterviews soll aufgedeckt werden, ob die einzelnen Lehrpersonen ihre didaktische Handlungsfähigkeit ausspielen und mögliche Therapievorschläge liefern können. Sollte dies nicht der Fall sein, werden eigens von mir kreierte Interventionsmaßnahmen zu Sprache gebracht, welche anschließend von der Lehrkraft bewertet werden sollen. Neben der Fähigkeit didaktisch zu handeln, spielt auch die Diagnosefähigkeit der Lehrkräfte eine Rolle. Dies bedeutet, ob Lehrpersonen Fehlvorstellungen der SchülerInnen wahrnehmen oder ob diese im Unterricht gar nicht bemerkt werden.

Der dritte Bereich der Studie befasst sich mit den anschließenden SchülerInneninterviews. Dieser hat vorerst die Aufgabe Fehlvorstellungen der SchülerInnen zu eruieren, um sie danach mittels jener Therapievorschläge zu behandeln, die in den LehrerInneninterviews genannt

wurden. Sollten dabei Fehlvorstellungen auftreten, die bei den LehrerInneninterviews nicht thematisiert wurden, muss ich als Interviewerin schnell handeln und spontan eine möglichst adäquate Therapie entwickeln. In der darauffolgenden Überprüfungsphase soll sichergestellt werden, ob die Interventionsmaßnahmen der Lehrpersonen Wirkung zeigten oder ob die Fehlvorstellungen der SchülerInnen immer noch vorhanden sind, wodurch die didaktische Handlungsfähigkeit der LehrerInnen bewertet werden kann. In Abb. 1 ist der strukturierte Fahrplan der Diplomarbeit zusammengefasst dargestellt.

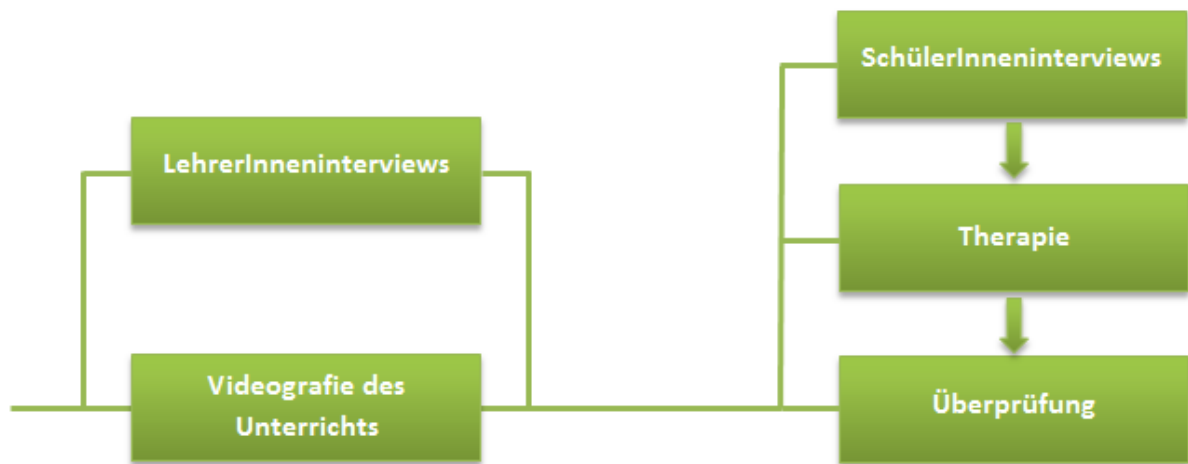


Abb. 1: Chronologischer Fahrplan der Studie

Besonders an dieser Studie ist die Tatsache, dass einerseits die Lehrperson, die während des Unterrichts beobachtet wurde, im Anschluss bei den LehrerInneninterviews als zweite befragt wurde. Andererseits sind es die SchülerInnen dieser Klasse, die sich in den SchülerInneninterviews wiederfinden. Das Vorgehen wird in Abb. 2 verdeutlicht.



Abb. 2: Fahrplan innerhalb der Klasse

Um nachfolgende Inhalte besser verstehen zu können, ist es entscheidend zu wissen, dass die Lehrperson, die sowohl bei der Unterrichtsbeobachtung als auch bei den LehrerInneninterviews eine wichtige Rolle spielt, immer wieder auf das Pfeilklassenmodell der Vektorrechnung zurückgreift. Malle (2007) kritisiert dieses und spricht von einer didaktischen Fehlentwicklung. Er untermauert dies mit sechs Gründen die gegen das Pfeilklassenmodell im Mathematikunterricht sprechen:

1. „Das Pfeilklassenmodell ist unbrauchbar für die Analytische Geometrie. Denn in der Analytischen Geometrie denkt man in Punkten und Pfeilen (Bewegungen) und nicht in Pfeilklassen.
2. Das Pfeilklassenmodell ist unbrauchbar für die Physik. Praktisch alle in der Physik (zumindest der Schulphysik) vorkommenden Vektoren sind keine Pfeilklassen.
3. Ein Spezifikum des Pfeilklassenmodells besteht darin, dass man zwischen Klassen und Repräsentanten unterscheiden muss. Dies erzeugt bei vielen Schülerinnen und Schülern den falschen Eindruck, dass dies eine notwendige Eigenschaft des Vektorbegriffs sei. Dies ist aber nur eine zufällige Eigenschaft des Pfeilklassenmodells und ansonsten überhaupt nicht typisch für Vektoren. In der Definition eines Vektorraums ist keine Rede von Klasse und Repräsentant und bei fast allen Vektoren, die in der Mathematik vorkommen, ergibt diese Unterscheidung auch keinen Sinn.
4. Während die algebraische Einführung der Rechenoperationen und die Beweise der Rechengesetze für Zahlenpaare und Zahlentripel sehr einfach sind, ist dies im Pfeilklassenmodell (wie in allen anderen geometrischen Modellen) nicht der Fall. Die Beweise sind im Pfeilklassenmodell vielfach sehr aufwendig, oft schon dadurch, dass viele Fälle unterschieden werden müssen.
5. In einigen deutschen Schulbüchern um 1960-1970 (z.B. K ÖHLER/ HÖWELMANN/ KRÄMER 1968) wurde das Pfeilklassenmodell mathematisch sauber behandelt. Bei der Übernahme dieses Modells durch andere Autoren sind jedoch häufig Verwässerungen eingetreten. Manchmal werden Vektoren als Pfeilklassen definiert, diese Definition hat aber nur eine Alibifunktion, weil später mit ihr nicht mehr gearbeitet wird.
6. Dass diese Widersprüchlichkeiten Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten bereiten, liegt auf der Hand. In der Tat haben empirische Untersuchungen gezeigt, dass die Schülerinnen und Schüler enorme Schwierigkeiten mit dem

Pfeilklassenmodell haben, die im Wesentlichen auf der Diskrepanz beruhen, dass Vektoren offiziell als Pfeilklassen eingeführt werden, beim praktischen Arbeiten jedoch als Einzelpfeile empfunden werden.“

(Malle, 2007)

Das Phänomen, das unter 5. erwähnt wird, findet sich auch im Schulbuch Dimensionen Mathematik 5 wieder, welches von der Lehrperson im Unterricht verwendet wird.

Weiters fällt auf, dass im Unterricht zwei Definitionen für einen Vektor verwendet werden. Entscheidend ist die Tatsache, dass die Lehrperson einen Vektor unterschiedlich definiert.

*1. Definition:*

Ein Vektor ist eine geordnete Liste von Zahlen:  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$ .  $v_1, v_2, \dots, v_N$  sind die Komponenten des Vektors.

*2. Definition:*

Die Menge aller Pfeile, die gleich lang, parallel und gleich orientiert sind, wird als Vektor bezeichnet. Ein Pfeil ist ein Repräsentant des Vektors.

### **3.1. Rahmenbedingungen**

Da sich die Forschung chronologisch in drei Bereiche - Videografie der Einführung der Vektorrechnung in einer 5. Klasse AHS, Interviews von fünf Lehrpersonen und acht Interviews mit 16 SchülerInnen - unterteilt, gestalteten sich die Rahmenbedingungen unterschiedlich.

#### **3.1.1. Videografie des Mathematikunterrichts**

Die Unterrichtbeobachtung wurde videografiert. Die dadurch entstandenen Materialien handelten von der Einführung der Vektorrechnung in einer 5. Klasse AHS. Genauer gesagt

beinhaltet die Videografie 12 Unterrichtsstunden, welche im Zeitraum vom 12. April 2013 bis 3. Mai 2013 stattfanden.

### **3.1.2. LehrerInneninterviews**

Nachdem der Kontakt zu fünf freiwilligen InterviewpartnerInnen hergestellt wurde, die allesamt derselben Schule angehören, erstreckten sich die Gespräche über einen Zeitraum vom 2. Mai 2013 bis 9. Mai 2013. Vier der fünf Interviews wurden im Sprechzimmer der Schule abgehalten, während das letzte in Spillern, bei einer Lehrperson zu Hause, stattfand. Die Befragungen verliefen unterschiedlich rasch, sie dauerten zwischen 20 bis 55 Minuten.

Die InterviewpartnerInnen wurden darüber informiert, dass die Daten anonym behandelt werden und die Anrede erfolgte, bis auf eine Person, per Sie.

In den Kapiteln 1.3.1., 1.3.2. und 3.2.2. werden nur Ausschnitte der Interviews verwendet. Die gesamte Transkription ist im Anhang unter *1. Interview* bis *5. Interview* nachzulesen.

### **3.1.3. SchülerInneninterviews**

Um meine Forschungsarbeit zu vervollständigen, wurden von 24. Mai 2013 bis 7. Juni 2013 SchülerInnenInterviews durchgeführt. Diese fanden immer paarweise statt, um einerseits nicht das Klima einer Prüfungssituation zu erzeugen und andererseits um das Gespräch zwischen den Schülern und Schülerinnen beobachten zu können. Insgesamt wurden 16 SchülerInnen befragt. Im Vorfeld wurde mein Vorhaben mit der Direktion abgeklärt und untenstehender Elternbrief ausgeteilt.

### Information über geplante Interviews

Sehr geehrte Eltern der ■■■,

im Rahmen meiner Diplomarbeit mit dem Titel "Didaktische Handlungsfähigkeit von Lehrpersonen in Bezug auf Fehlvorstellungen zu Vektoren" würde ich gerne in den kommenden Wochen an der Schule Ihrer Kinder eine Untersuchung durchführen. Die Untersuchung sieht folgendermaßen aus:

Ich möchte Interviews mit den Schülern und Schülerinnen der ■■■ in Zweiergruppen durchführen. Dabei wird ein Gespräch entstehen, in welchem über das erlernte Stoffgebiet der Vektorrechnung debattiert wird.

Ich versichere Ihnen, dass die Untersuchung vollkommen anonym durchgeführt wird und keine personenbezogenen Daten gespeichert werden. Darüber hinaus wird der Inhalt der Gespräche nicht an den Mathematiklehrer weitergegeben. Für Rückfragen stehe ich Ihnen unter meiner Mailadresse ■■■■ gerne zur Verfügung.

Mit bestem Dank und freundlichen Grüßen

Christina Gahler

-----  
Hiermit erkläre Ich, dass meine Tochter/ mein Sohn .....an dem Interview teilnehmen darf.

.....

.....

Ort, Datum

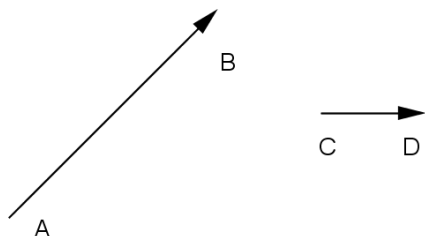
Unterschrift

Abb. 3: Elternbrief

Die Interviews fanden immer während des Unterrichts statt, von dem die entsprechenden SchülerInnen kurzzeitig befreit wurden. Die Länge der Interviews erstreckte sich über einen Zeitraum von 30 bis 63 Minuten. Die Befragungen an sich wurden in drei Teile gegliedert. Zu Beginn sollten vier Aufgaben von den Schülern und Schülerinnen bearbeitet bzw. besprochen werden, bei welchen laut Literatur häufig Fehlvorstellungen auftreten. Diese sind in Abb. 4 nachzulesen.

**a. Addition von Vektoren:**

Kann man  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{CD}$  addieren? Begründe deine Antwort!



(Jarmer, 1995, S. 34)

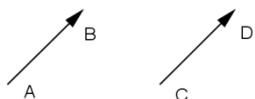
**b. Verbindungsvektor:**

Berechne den Vektor  $\overrightarrow{AB}$  und veranschauliche dies an einer Skizze:  $A = (5|2)$ ,  
 $B = (7|4)$

(Jarmer, 1995, S. 60)

**c. Gleichheit von Vektoren:**

Gilt  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ? Begründe deine Antwort.



(Jarmer, 1995, S.23)

**d. Mittelpunkt einer Strecke:**

Stelle eine Formel für den Mittelpunkt M einer Strecke [A, B] auf! Begründe!

(Hartmann, 1993, S. 100)

Abb. 4: SchülerInnenaufgaben

Sofern Fehlvorstellungen auftraten, wurden diese mittels Therapieanschlüssen, welche innerhalb der LehrerInneninterviews gewonnen wurden, behandelt. Ob diese erfolgreich wirkten, wurde in der anschließenden Überprüfungsphase eruiert. Hierbei sollten weitere vier Aufgaben von den Schülern und Schülerinnen bearbeitet werden:

1. Auf einen fallenden Körper wirken zwei Teilkräfte (Angaben in Newton):

Die Schwerkraft  $\vec{F}_S = (0|-12)$  und die vom Wind ausgeübte Kraft  $\vec{F}_W = (3|0)$ . Berechne den Gesamtkraftvektor, der auf ihn wirkt. Zeichne die beiden Teilkräfte und die Gesamtkraft.

(vgl. Bleier et al, 2009, S. 209)

2. Berechne den Vektor  $\vec{AB}$  und veranschauliche dies an einer Skizze:  $A = (-3|4)$ ,  $B = (4|1)$
3. Von einem Parallelogramm sind drei Eckpunkte gegeben. Berechne den vierten! (Fertige eine Skizze an und erläutere deinen Rechengang!)

$$A = (-1|2), B = (0|3), C = (7|-1)$$

(Jarmer, 1995, S.66)

4. Heute ist Schulbeginn. Lisa kommt in die erste Klasse des BG/BRG Stockerau. Sie hat lediglich die Information bekommen, dass sich die Schule genau zwischen dem Krankenhaus  $K = (7.5|1.5)$  und der Gabelung  $G = (3.5|7.8)$  der „Schaumannngasse“ und „Zur Aussichtswarte“ befindet. An welcher Position findet sie das Gymnasium?

Anhand der gewonnen Daten wurde ausgewertet, ob diverse Therapien erfolgreich wirkten. Therapien können in dieser Studie lokal bewertet werden, die Nachhaltigkeit kann jedoch nicht beurteilt werden.

## 3.2. Darstellung der Daten

Dargestellt werden Auszüge der gewonnen Daten der drei Bereiche Videografie des Mathematikunterrichts, LehrerInneninterviews und SchülerInneninterviews. Die gesamten Textpassagen können in Kapitel 8 nachgelesen werden.

### 3.2.1. Videografie des Mathematikunterrichts

Den Fokus legte ich dabei auf SchülerInnenfehlvorstellungen und ob diese im Unterrichtsgeschehen zu Tage treten. Falls diese erkenntlich werden sollten, analysierte ich die anschließende Reaktion bzw. Intervention der Lehrperson. Nach Rücksprache mit der Lehrkraft, konnte durch das Filmen der Unterrichtsstunden kein verändertes Verhalten der SchülerInnen zu anderen Mathematikstunden festgestellt werden, womit meine Dokumentationen, welche im Anhang unter der Rubrik *Unterrichtsbeobachtung* zu finden sind, einem nahezu natürlichen Unterrichtsgeschehen entsprechen. Interessant ist die Tatsache, dass in den 12 beobachteten Unterrichtsstunden, hinsichtlich der Einführung der

Vektorrechnung, lediglich fünf Situationen zu dokumentieren waren, bei denen SchülerInnenfehlvorstellungen oder Unklarheiten ersichtlich wurden. Zusätzlich wurden im Zeitraum der Beobachtung zwei Lernzielkontrollen, welche die Grundkompetenzen betrafen, durchgeführt. Unterrichtsausschnitte werden nach der Methode von Bauersfeld (1982) wiedergegeben und interpretiert, dabei bedeutet die Abkürzung L Lehrperson. Vollständige Interviewpassagen sind in Kapitel 8 nachzulesen, wobei nur jene Szenen transkribiert wurden, die nützlich für die Beantwortung der Forschungsfrage sind.

Die erste Situation (Zeile 1-5) ereignete sich in der dritten Stunde der Einführung. Peter wurde an die Tafel geholt, um Seitenvektoren eines Dreiecks mit angegebenen Eckpunkten zu berechnen:

L: Wie nennen wir in der Trigonometrie die Strecke zwischen A und B?

Peter: (schreibt a)

L: Jetzt hast du Strecken. Mach noch Pfeile daran.

Max: Wieso rechne ich B minus A und nicht A minus B?

L: Schau in der gestrigen Schulübung nach, da haben wir das gemacht.

Der Schüler versteht nicht, warum die Formel  $\overrightarrow{AB} = A - B$  für den Verbindungsvektor verwendet wird, worauf die Lehrperson nicht weiter eingeht.

Die erste Überprüfung der Grundkompetenzen fand in der fünften Unterrichtsstunde der Vektorrechnung statt. Die untenstehende Abbildung zeigt die Aufgaben der Gruppe A, die zu bearbeiten waren. Gruppe B enthielt inhaltlich dieselben Aufgaben.

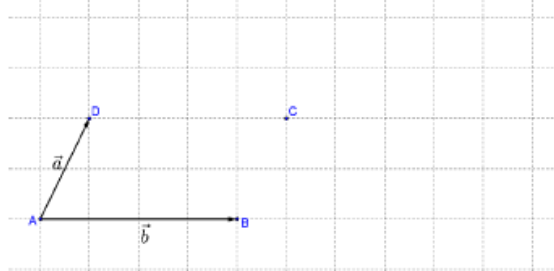
Name: .....

1. In einem Supermarkt werden 500 Waren angeboten. Für eine übersichtliche Buchhaltung wird jedes Produkt mit einer laufenden Nummer  $i$  zwischen 1 und 500 versehen. Wichtige Daten werden am Ende des Tages in Vektoren zusammengefasst:  
 Verkaufsvektor  $\vec{v} \dots v_i$  ist die Verkaufsmenge (in Stück) Stück der Ware  $i$  an einem Tag  
 Lagerbestandsvektor  $\vec{l} \dots l_i$  ist die im Lager oder auf der Verkaufsfläche vorhandene Menge (in Stück) der Ware  $i$  am Morgen

Was bedeutet in diesem Zusammenhang  $\vec{l} - \vec{v}$  ?

.....  
 .....

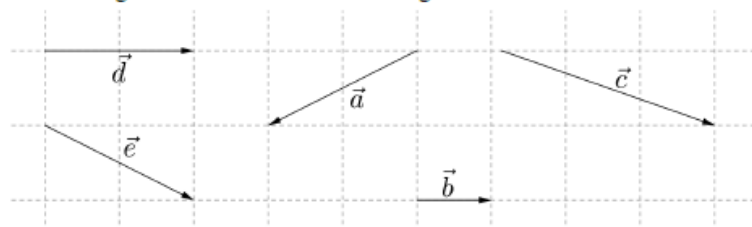
2. Gegeben sind die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , die in der untenstehenden Abbildung als Pfeile dargestellt sind. Stellen Sie  $\vec{b} - \vec{a}$  ausgehend vom Punkt C durch einen Pfeil dar!



3. Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten A(1|0), B(2|1) und C(3|2). Geben Sie die Seitenvektoren dieses Dreiecks an! Berechne die Länge einer dieser Seiten!

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad |\vec{AB}| = \dots$$

4. In der Abbildung sind fünf Vektoren als Pfeile dargestellt.



Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

|                       |                               |                             |                       |                               |
|-----------------------|-------------------------------|-----------------------------|-----------------------|-------------------------------|
| $\vec{a} = -\vec{e}$  | $\vec{b} + \vec{e} = \vec{c}$ | $\vec{d} = 2 \cdot \vec{b}$ | $\vec{c} = \vec{e}$   | $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$ |
| <input type="radio"/> | <input type="radio"/>         | <input type="radio"/>       | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>         |

Punkteverteilung: 2/4/6/2

Abb. 5: Überprüfung Grundkompetenzen 5. Stunde Vektoren

23 SchülerInnen bearbeiteten den Überprüfungsbogen. Dabei konnten rund 96% die Aufgabe 1. lösen. 20% der SchülerInnen konnten die zweite Aufgabe vollständig lösen und 32% erreichten zumindest Teilpunkte. Die dritte Aufgabe konnte von 32% der SchülerInnen exakt erfüllt werden und weitere 60% erhielten zwischen einen und fünf Punkte. Die letzte Aufgabe wurde nur dann mit Punkten bewertet, sobald beide Kreuze richtig gesetzt wurden. Dies schafften lediglich 12% der Jugendlichen.

In der siebenten Stunde der Vektorrechnung wurde die Parallelität von Vektoren behandelt (Zeile 6-18). Durch eine Schülermeldung kam schließlich auch der Begriff der Gleichheit ins Spiel:

Die Lehrperson schreibt die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 20 \\ 11 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e} = \begin{pmatrix} -6 \\ y \end{pmatrix}$  an das Smartboard. Anschließend fertigt sie folgende Skizze an:

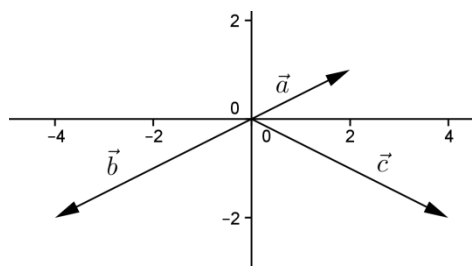


Abb. 6: Parallelität von Vektoren

L: Wir fangen mit einem Beispiel an. Und zwar mit dem Vektor a-Pfeil (schreibt). Und da schreibe ich jetzt noch weitere vier Vektoren dazu und ich möchte, dass ihr jetzt feststellt, ob die Vektoren zueinander parallel sind. Und wir fragen uns ganz einfach, wie kann man feststellen, ob zwei Vektoren zueinander parallel sind. Das werden wir mal gemeinsam machen und dann arbeitet ihr alleine (schreibt weitere vier Vektoren auf). Ich zeichne das ein Mal. Ich zeichne sie als Ortsvektoren, das heißt also, ich zeichne sie vom Nullpunkt weg. Man sieht jetzt sofort, a-Pfeil und b-Pfeil sind parallel. Das können wir jetzt auch hinschreiben.

Lukas: Die sind ja nicht gleich.

L: Ja, sie haben nicht die gleiche Orientierung, aber liegen auf einer Geraden, also sind sie parallel.

Lukas: Aber die Vektoren sind nicht gleich.

L: Nein, aber parallel.

Die nächste nennenswerte Situation (Zeile 19-30) fand in der neunten Stunde der Vektorrechnung statt. Dabei wiederholte die Lehrperson den Unterrichtsinhalt der vorangegangenen Mathematikstunde:

L: Überlegen wir uns kurz, was wir die letzte Stunde gemacht haben.

Max: Einheitsvektor.

L: Nicht herausschreien. Also gut, wir haben den Einheitsvektor besprochen. wozu braucht man denn den Einheitsvektor? **Flo**, sagst du mir das?

Flo: (schweigt)

Ralf: Um die Längen auszurechnen.

L: Nein, um die Längen auszurechnen, brauche ich den Einheitsvektor nicht. Sondern?  
Wenn ich irgendwo einen Punkt habe und die Richtung habe ich auch/

Alex: Um zu einem Endpunkt zu kommen.

L: Um den Endpunkt zu berechnen, in eine bestimmte Richtung und ich weiß wie weit ich da hinüber muss, dazu brauche ich dann den Einheitsvektor. Und da haben wir eine Formel aufgeschrieben.

Keine der befragten Schüler weiß über die Funktion eines Einheitsvektors Bescheid. Auf die falschen Rückmeldungen geht die Lehrperson nicht ein, erklärt aber eine Situation, in der der Einheitsvektor eine wichtige Rolle spielt.

In derselben Stunde wurde der Mittelpunkt einer Strecke erstmals thematisiert. Dazu wurde zuerst die Konstruktion mittels Zirkel und Lineal besprochen (vgl. Zeile 31-44). Danach folgte die Berechnung mittels Vektoren, welche in einer fragend-entwickelnden Unterrichtsform zwischen Lehrperson und Schülern stattfand (Zeile 45-65). Die Koordinaten der Punkte wurden angegeben:

$$A = (-1|-3), B = (7|1)$$

L: Ja gut, du rechnest dir die Koordinaten aus. Also minus eins plus sieben durch zwei und dann rechnest du auch minus drei plus eins durch zwei. Ja, aber jetzt mit Vektoren. Welchen Vektor gibt es da denn? Da kann man mal den Vektor AB-Pfeil aufzeichnen. Wie kann ich jetzt, wenn ich den Vektor AB-Pfeil habe, zu M kommen?

Alex: Den Vektor AB durch zwei teilen.

L: Den Vektor AB durch zwei teilen, ist der nächste Vorschlag. Na gut, schauen wir uns das einmal an. Rechnen wir uns den Vektor AB einmal aus (schreibt). Das ist B minus A. Das ist acht und vier. Alex, du hast gesagt, ich teile jetzt den Vektor durch zwei, das heißt ich nehme einhalb mal AB-Pfeil und dann kommt raus vier und zwei. Gut, jetzt haben wir den halben Vektor. Das ist aber bestimmt nicht der Mittelpunkt. Vier zwei liegt irgendwo da oben (zeigt auf Smartboard). Was fehlt noch? Es fehlt ja nur noch eine Kleinigkeit. Du hast den Vektor vier zwei ausgerechnet (zeichnet). Das ist ein Vektor, den kann man überall anfangen lassen. Wo würdest du ihn klugerweise anfangen lassen?

Alex: Bei A.

L: Gut, also wie bekommen wir den Mittelpunkt? Wir lassen den Vektor einhalb AB-Pfeil hier anfangen (zeichnet). Und bekommen M ist gleich, ich gehe von A weg und gebe einhalb mal AB-Pfeil dazu.

Alex berechnet den Mittelpunkt einer Strecke mit der Formel  $M = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$  und zeigt daher eine Fehlvorstellung auf die die Lehrperson eingeht und therapiert. Zusammenfassend wiederholt die Lehrkraft das Vorgehen beim Berechnen des Mittelpunkts.

Zu Beginn der elften Stunde wurde die Teilung einer Strecke mit Hilfe von Geogebra wiederholt. Dazu wurde Ralf nach vorne an den Computer geholt (Zeile 66-81).

L: Gib einmal den Punkt A mit minus vier und minus drei an und der Punkt B ist gleich fünf vier. So und jetzt teile die Strecke mit einem Befehl, mit **einem**. Nimm dazu fünf gleiche Teile.

Ralf: (probiert Befehle aus)

L: Wer gibt ihm denn einen Tipp für den Befehl?

Ralf: Folge.

L: Folge, ja gut.

Ralf: (versucht es wieder)

L: So, da sind jetzt irgendwo die Punkte, weil, welchen Fehler hast du jetzt gemacht? Wie rechnet man zum Beispiel den Mittelpunkt einer Strecke aus?

Ralf: Die Strecke durch zwei.

L: Ja, A plus B durch zwei. Aber man kann es ja auch so rechnen, man geht vom Punkt A weg und geht dann Richtung AB-Pfeil. Und bei dem Befehl bei dir fehlt noch, dass du von irgendwo weggehen musst.

Ralf: Also plus B.

L: Na ganz vorne. Du gehst vom Punkt A weg, also A plus. Gut, jetzt stimmt das.

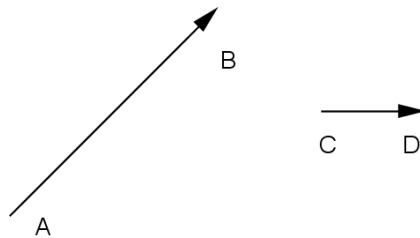
Die Lehrkraft stimmt bei offensichtlichen Fehlvorstellungen von Ralf vorerst zu bzw. lobt ihn. Im Grunde löst die Lehrperson die gegebene Aufgabe selbstständig.

### 3.2.2. LehrerInneninterviews

#### 3.2.2.1. Vektoraddition

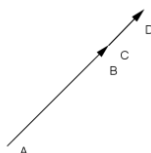
Hinsichtlich der Vektoraddition wurde den befragten Lehrpersonen folgende SchülerInnenaufgabe gezeigt:

Kann man  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{CD}$  addieren? Begründe deine Antwort!



(Jarmer, 1995, S. 34)

Nach einer ausgiebigen Literaturrecherche bzgl. typischer Fehlvorstellungen wurde ich bei Jarmer (1995) und Klasmann (1984) fündig. Die von mir gewählten SchülerInnenlösungen, welche die obige Aufgabe betreffen, wurden den Lehrpersonen vorgelegt und sahen wie folgt aus:

1. 
2. „Das geht nicht.“

##### 1. Lehrperson

Bei den durchgeführten LehrerInneninterviews kam heraus, man sollte „ihnen einfach vor Augen führen, das geht halt mit Geogebra wirklich gut, dass man sagt, man kann ja verschieben. Du kannst im Raum die Vektoren einfach hin und her schieben.“ (Zeile 134-136).. Darüber hinaus wurde nachdrücklich darauf hingewiesen, dass es wichtig sei zu betonen, „dieselbe Richtung und Länge“ (Zeile 136-137) beizubehalten. „Und dass man dann einfach ihnen zeigt, schaut parallel verschieben, wo kommt das hin und wie wird das Ganze dann addiert.“ (Zeile 137-138).

Als möglicher Therapievorschl ag wurde erwähnt, dass man zum Beispiel den Vektor CD aus der Angabe entlang einer Achse nehmen könnte (vgl. Zeile 148-149). „Dann ist es nämlich für die Schüler auch viel leichter nachvollziehbar.“ (Zeile 149). Weiters argumentiert die Lehrperson, dass sie glaube „dass das Grundproblem hier ja mit eines ist, dass sie nicht wissen wie man Vektoren addiert, grafisch. Das heißt sie sehen die/ das Parallelogramm einfach nicht.“ (Zeile 152-154). Die weitere Vorgehensweise könnte dann so aussehen, „Das Parallelogramm dazu“ zu „zeichnen und die Diagonale wirklich“ einzuzeichnen, „dass ihnen das klar ist.“ (Zeile 156-157). Auf meinen Vorschl ag hin, dieses Problem von der geometrischen in die arithmetische Sicht überzuführen, antwortete die Lehrkraft: „Das geht/ also sie würden wahrscheinlich sofort sagen, das ist kein Problem. Und sie addieren sicher auch sofort richtig, die x- und die y-Koordinaten. Nur stellen sie dann den Zusammenhang nicht her zum Grafischen. Weil das eine ist eine Rechenregel, die sie lernen, und das andere ist eine Vorstellung, die sie nicht haben.“ (Zeile 163-166).

## *2. Lehrperson*

Die nächste Lehrperson, der dasselbe Problem der Vektoraddition vorgelegt wurde, lieferte folgenden Vorschl ag: „[...] das kann man ja mit dem Smartboard ja schön machen. Da würde ich den Pfeil nehmen und sagen, schau den Pfeil kann man ja irgendwo hin verschieben, da herschieben, da herschieben, den kann man da auch verschieben. Und wir haben gelernt, Vektoren addiert man indem man sie aneinander hängt und jetzt kann man den Pfeil da dranhängen und damit geht das.“ (Zeile 346-350).

Hinsichtlich der ersten Fehlvorstellung würde die Lehrperson vor allem betonen, dass der Vektor, der verschoben und angehängt wurde, nicht mehr derselbe sei wie der ursprüngliche, „[...] der Vektor ist ja dann ein anderer, der ist ja gedreht worden“ (Zeile 353-354). „Also da muss man dann hinweisen, der Vektor ist falsch.“ (Zeile 356)

## *3. Lehrperson*

Die dritte Lehrperson ging vermehrt auf die erste Fehlvorstellung ein und erklärte: „[...] ich würde grundsätzlich wieder darauf hinweisen, das bespreche ich auch immer in der ersten Stunde, dass jeder Vektor drei Eigenschaften hat, eben Länge, Orientierung und Richtung und ich das nicht einfach ändern kann, sondern das ist fix und das muss beibehalten werden. Und damit kann ich nicht einfach die Richtung ändern“ (Zeile 558-561).

Die Lehrperson wurde darüber hinaus nach einem Beispiel gefragt, welches die SchülerInnen sofort erkennen lässt, sofern die erste Fehlvorstellung auftreten sollte, dass eine falsche Operation ausgeführt wurde. „[...] indem man sie in irgendeiner/ so eine Art Schatzkarte, wo sie Richtungen und Wege gehen müssen, also da gibt es ein Beispiel, wo sie einen Schatz suchen müssen und dann eben die Vektoren addieren müssen, damit sie zum richtigen Punkt kommen und zu dem kommen sie aber nicht, wenn sie die Vektoren alle in dieselbe Richtung schauen lassen, also das geht nicht“ (Zeile 566-569).

Danach wurde von mir die Möglichkeit aufgezeigt, den Kindern zuerst die arithmetische Addition anhand einer Aufgabe berechnen zu lassen, um anschließend diese Angaben und Ergebnisse in geometrischer Form zu interpretieren. Die Meinung der Lehrkraft sah wie folgt aus: „[...] ja, so kann man sicher auf die Lösung kommen und sagen, wo ist jetzt dieser Vektor, der diese Koordinaten aufweist. Ist sicher eine gute Möglichkeit, ja“ (Zeile 585-587).

#### *4. Lehrperson*

„Ehrlich gesagt ist mir das noch nie untergekommen.“ (Zeile 749), äußerte sich die nächste interviewte Lehrperson. Dennoch wurde der Therapieversuch „Kräfteparallelogramm zeigen, einfach auch physikalisch klar machen, wenn man in die eine Richtung zieht und dann in die andere, wo ist der Punkt, wo führt die Kraft hin.“ (Zeile 749-751) gemacht. Außerdem bat die Lehrperson die Möglichkeit an, die Koordinaten der Vektoren abzulesen, um sie folglich rechnerisch zu addieren. Die erste Fehlvorstellung betreffend würde die Lehrkraft den Schülerinnen und Schülern die Frage stellen „[...] was bedeutet das, dass zwei Kräfte genau in die gleiche Richtung wirken?“ (Zeile 767). „Das heißt, ein Beispiel, das ich sehr gerne mache, ein Flugzeug fliegt mit so und so viel KMH Richtung Nordosten, weil das (zeigt auf das Beispiel) ist Nordosten, und gleichzeitig haben wir einen Wind aus Westen. Was ist die tatsächliche Richtung und die tatsächliche Geschwindigkeit des Flugzeugs? Wobei bei der Geschwindigkeit müssen sie dann den Betrag ausrechnen. Und dann ist die Interpretation klar (zeigt auf Fehlvorstellung 1), das Flugzeug hat Rückenwind.“ (Zeile 769-773). Weiters wurde die Option vorgeschlagen die Vektoren parallel zu verschieben. „Die genauere Begründung wäre natürlich die, dass man sagt, ja, Vektoren sind die Menge aller Pfeile, das heißt ich kann mir den aussuchen, der da genau dran passt.“ (Zeile 761-763).

Bezüglich der zweiten Fehlvorstellung erhielt ich die Aussage: „Geht nicht, gibt es nicht (grinst).“ (Zeile 775). Die Lehrperson konnte sich nicht vorstellen, dass der gesamte

Klassenverband diese Fehlvorstellung hat (vgl. Zeile 779-780), aber „sobald einer glaubt es geht nicht und er sieht bei einem anderen es geht, ist zumindest diese Vorstellung, dass es nicht geht, weg. Er weiß noch nicht wie es geht. Aber damit sucht er einmal nach der Lösung, dann kann man ansetzen. Einfach zu sagen „Aber das geht ja nicht!“ so stur sind sie nicht.“ (Zeile 782-785).

### *5. Lehrperson*

Etwas überraschend reagierte die letzte von mir interviewte Lehrperson auf die erste Fehlvorstellung, „diese Fehlvorstellung habe ich noch nie erlebt im Unterricht (zeigt auf Fehlvorstellung 1). Und weil die/ zumindest die Richtung ist den meisten Schülerinnen und Schülern recht gut bekannt. Also dass die sich verändert während der Tätigkeit des Denkprozesses ist sehr unwahrscheinlich. Das heißt, dass man so einen Vektor so anhängt, halte ich für sehr unrealistisch und ist mir noch nie, ich glaube zumindest, ich sehe natürlich nicht alles, aber ist mir noch nie passiert. Die Addition von Vektoren liefert wieder einen Vektor und ist eine Grundvorstellung, die man sich vorstellen kann und was könnte ich dagegen tun, wenn jemand das so machen würde. Ich würde ihn daran erinnern, was/ wie ein Vektor definiert ist, was ihn ausmacht. Dann ist völlig klar, dass das nicht der Vektor sein kann. Da gehe ich gar nicht darauf ein, dass die Addition/ da ist ja nicht die Addition das Problem, sondern da ist das Problem, dass sich die Richtung verändert von einem Vektor während des Prozesses. Das erscheint mir, dass das eher selten ist.“ (Zeile 959-970). Die Lehrkraft empfand diese Fehlvorstellung als „sehr unrealistisch“ und konnte sich nicht erinnern sie jemals im Unterricht erlebt zu haben, räumte aber gleichzeitig ein, dass sie auch nicht alles wahrnehmen kann, was sich während der Mathematikstunden abspielt. Der Interventionsvorgang würde sich folgendermaßen gestalten: „Also ich vermute, dass ich versuchen würde ihm klar zu machen was einen Vektor ausmacht, seine Länge, seine Orientierung und seine Richtung und dass ich, erst dann, wenn ich das geklärt habe, kann ich darüber reden, dass man so nicht addieren kann. Aber das Problem ist ja nicht das Addieren, das Addieren wäre ja richtig, es fehlt nur der Summenvektor.“ (Zeile 972-975). Somit ließ sich festhalten, dass hierbei ebenfalls auf die Definition eines Vektors verwiesen wurde.

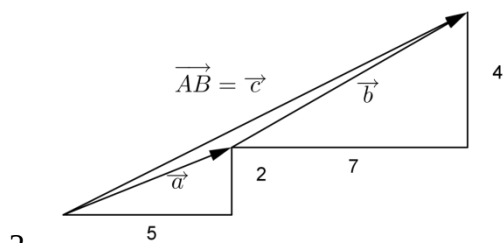
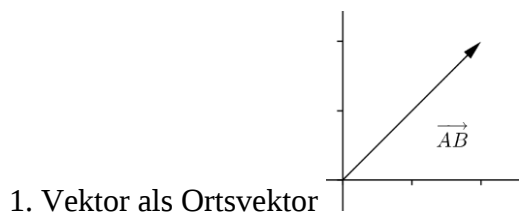
Sofern die zweite Fehlvorstellung im Unterricht auftreten würde, könnte sich die Lehrkraft vorstellen wie folgt zu argumentieren: „Dann würde ich ihm die Frage stellen, warum man zwei Vektoren nicht addieren können sollte. Ich meine, es ist etwas zweidimensionales, es sind zweidimensionale Vektoren. Die Grundsituation ist die, dass ich einfach die

Koordinate addiere und dann einfach einen Summenvektor bekomme. Vektor plus Vektor ist Vektor.“ (Zeile 977-980). Die Frage, warum die Addition zweier Vektoren nicht funktionieren sollte, wurde demnach als Therapiemöglichkeit vorgeschlagen, um anschließend die richtigen Schlüsse ziehen zu können. Eine arithmetische Therapie des Problems lehnte die Lehrperson eher ab (vgl. Zeile 982-983). „An sich reicht gefühlsmäßig die geometrische Vorstellung. Es bereitet auch wenige Probleme. Ich kenne wenige Schüler, die beim Addieren von zwei Vektoren ein Problem haben und speziell dieses (zeigt auf Fehlvorstellung 1) habe ich überhaupt noch nicht erlebt.“ (Zeile 987-990). Festzuhalten ist, dass die Lehrperson der Meinung ist, dass es bei der Vektoraddition in der Schule kaum Probleme gibt. In der Praxis würde die geometrische Intervention so aussehen, dass der Vektor verschoben und anschließend angehängt wird (vgl. Zeile 992). Dieses Vorgehen wird computerunterstützt behandelt. „In Geogebra ist es sehr leicht, weil man den Vektor sofort verschieben kann.“ (Zeile 994).

### 3.2.2.2 Verbindungsvektor

Berechne den Vektor  $\overrightarrow{AB}$  und veranschauliche dies an einer Skizze:  $A = (5|2)$ ,  $B = (7|4)$   
(Jarmer, 1995, S. 60)

Zwei weitere Fehlvorstellungen, die ich meinen InterviewpartnerInnen vorlegte, sahen folgendermaßen aus:



3. „Ich kann mir das nicht vorstellen.“

## 1. Lehrperson

Speziell die zweite Fehlvorstellung betreffend, würde die Lehrperson folgendermaßen handeln: „Sobald du ihnen einfach klar machst, dass eine Vektorberechnung eine Subtraktion ist, muss ihnen klar sein, dass sie mit dem nicht mehr weit kommen, so wie sie es da machen (zeigt auf die zweite Fehlvorstellung). Das heißt, man muss ihnen einfach den Unterschied klar machen zwischen Addition und Subtraktion. Und den Unterschied zwischen einem Punkt und einem Vektor.“ (Zeile 183-187). Aus dem Interview wurde nicht klar ersichtlich wie das „Klar-machen“, dass es sich um eine Subtraktion handele, im Unterricht realisiert werden soll, wobei zu vermuten ist, dass es durch verbale Erklärung erfolgt. Betont wurde der Unterschied zwischen einem Punkt und einem Vektor. „[...] also ich mache es immer so, dass sie in den Skizzen die Punkte wirklich immer mit Kreuze einzeichnen und nie, nie als Vektoren, nie als Ortsvektoren. Sondern immer mit Kreuze einfach als Punkt markieren, und dann ist klar, dass die Verbindung dessen dann ein Vektor ist, eine Minusrechnung.“ (Zeile 189-192). Es ließ sich heraushören, dass die Verwendung von Ortsvektoren zu Verwirrungen bei den Schülern und Schülerinnen führen kann und deshalb dieser Begriff nicht überstrapaziert werden soll.

Um der dritten Fehlvorstellung entgegenzuwirken, führt die Lehrperson den Verbindungsvektor geometrisch ein. „Zuerst geometrisch, das heißt ich zeichne die beiden Punkte ein und dann den Verbindungsvektor.“ (Zeile 198)

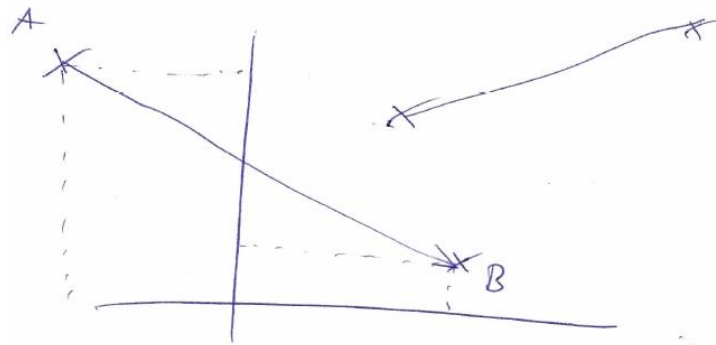


Abb. 7: Verbindungsvektor 1. Lehrperson

Die Lehrkraft zeichnete (Abb. 7) und erklärte: „Also, dass ich wirklich in einem Koordinatensystem/ egal, meistens mache ich es sogar Quadranten übergreifend, dass sie sehen, dass es vollkommen egal ist, wo das Ganze liegt. Und dass sie dann überlegen müssen, ok, ich habe hier die Koordinaten, die x-Koordinaten, die y-Koordinaten und ich verbinde die beiden jetzt miteinander. Wie könnte ich darauf kommen? Und dass sie einfach sehen, wenn ich da nach rechts gehe und hinunter gehe, heißt das, ich muss die beiden addieren, mehr oder weniger, und so weiter. Das heißt, dass sie einfach intuitiv

darauf kommen, was ich mit den Koordinaten machen muss, anhand der Skizze, die sie sehen. Das ist dann schon die zweite Dings (Anm. der Verfasserin: Gemeint ist die komplexere Variante). Die Einführung würde ich eher in einem Quadranten machen, dass sie einfach sehen, von den Koordinaten her, dass sie sofort subtrahieren müssen.“ (Zeile 200-208). Somit sollen die SchülerInnen anhand der Punkte und deren Koordinaten von selbst erkennen, dass eine Subtraktion erforderlich ist. Darüber hinaus wird die Einführung in einem Quadranten vorgeführt, während weiterführende Aufgaben quadrantenübergreifend stattfinden sollen. „Und dann die Regel aber sofort aufschreiben, einfach  $B$  minus  $A$ , und die Koordinaten subtrahieren, dass sie das sofort verbinden.“ (Zeile 211-212)

## 2. Lehrperson

Überrascht reagierte die Lehrperson auf die erste Fehlvorstellung. „Also ich würde/ ich glaube nicht, dass ein Schüler irgendwann einmal das so aufzeichnet (Fehlvorstellung 1). Das ist mir noch nie untergekommen, weil wenn da steht, veranschauliche dies an einer Skizze, dann wird er als erstes auf jeden Fall den Punkt fünf, zwei und den Punkt sieben, vier zeichnen, nehme ich einmal an. Also, dass er den Punkt hier zeichnet und den Punkt hier und dann glaube ich, kann er den Vektor machen. Also das (zeigt auf Fehlvorstellung 1) ist mir noch nie untergekommen, dass einer sagt, den Vektor  $AB$ -Pfeil von  $A$  nach  $B$  ist das, da muss er schon/ und genauso da (zeigt auf Fehlvorstellung 2).“ (Zeile 374-380). Somit ist dieser Lehrkraft bis jetzt noch nie im Unterrichtsgeschehen bewusst aufgefallen, dass SchülerInnen den Verbindungsvektor als Ortsvektor einzeichnen. Als Begründung nennt sie folgendes Faktum: „Vielleicht ist das auch deswegen, dass die mit Geogebra arbeiten oder so, weil da ist immer Punkt, Punkt und dann Pfeil, und dann haben sie es immer, sehr einfach.“ (Zeile 385-386). Die Verwendung von Geogebra ist der Lehrperson sehr wichtig, „**Ja**, auf jeden Fall. Das ist ganz wichtig, ja. Weil das sehr gut zwischen/ durch Punkt/ unter Punkte und Pfeile unterscheidet.“ (Zeile 388-389).

Sofern sich SchülerInnen nicht vorstellen können, wie diese Aufgabe zu lösen ist bzw. warum man  $B - A$  rechnet, würde die Lehrkraft folgendermaßen vorgehen: „Das sollte ja schon vorher klar sein, weil das haben sie ja schon ausgerechnet,  $B$  minus  $A$ . Aber das würde ich auch/ das kann man hier auch wieder erklären, allerdings würde ich es nicht an so einem komischen Beispiel machen, weil die Vektoren da sehr ungut liegen. Also das  $B$  minus  $A$  muss man schon so machen, dass man das sehr schön sieht/ die Koordinaten besser sieht. Die  $x$ -Koordinate geht ja mit sieben minus fünf, gut, naja, geht eigentlich

auch, aber trotzdem. Mit einfacheren und kleineren Zahlen, so wie ich es im Unterricht gemacht habe.“ (Zeile 410-415).

### 3. Lehrperson

Die nächste Lehrperson würde bei der ersten Fehlvorstellung wie folgt handeln: „Ich würde ihnen grundsätzlich sagen, dass sie den Vektor zwar richtig aufgestellt haben, den Vektor an sich, aber die Lage des Vektors natürlich verkehrt ist oder falsch ist, weil/ naja falsch, es ist der Ortsvektor und nicht an der Stelle von A nach B, der Verbindungsvektor AB ist. Dass sie zwar den richtigen Vektor, den ich natürlich auch als Ortsvektor darstellen kann, aufgestellt haben, aber wir wollten ja den Verbindungsvektor, das heißt, der muss auch immer von Punkt zu Punkt verlaufen. Aber im Endeffekt, der Vektor selber ist richtig.“ (Zeile 593-598). Wie auch schon eingangs erwähnt, schätzte die Lehrperson die exakte Berechnung des Vektors, lediglich die falsche Lage wurde kritisiert.

Als Überprüfungsaufgabebot die Lehrkraft ein Wanderkartenbeispiel an. „[...] man kann das zum Beispiel auch auf einer Karte wirklich schön veranschaulichen, auf einer Wanderkarte, man zeichnet ein Koordinatensystem ein, zeichnet die Punkte A und B ein und sagt jetzt, schaut, wenn ihr da beim Koordinatenursprung startet, dann kommt ihr nie beim Ziel heraus, sondern ihr sollt ja bei B herauskommen, da muss ich aber auch den richtigen Startpunkt eingeben.“ (Zeile 604-608). Hierbei sollen Schülerinnen und Schüler selbstständig merken, dass sie mit dem Ortsvektor nicht am entsprechenden Ziel ankommen und daher das Ergebnis falsch interpretiert haben.

Bezüglich der zweiten Fehlvorstellung sagte die Lehrperson: „[...] grundsätzlich würde ich darauf hinweisen, dass eben schon ein Unterschied ist zwischen Punkt und Vektor, das heißt, ob ich jetzt die Koordinaten des Punktes gegeben habe oder die Koordinaten des Vektors, des Ortsvektors zum Punkt. Und wenn man wiederum das Beispiel mit dem Wanderweg nimmt, ist auch da dann wieder klar, egal wo sie dieses Beispiel so ansetzten, sie werden nie beim Punkt B herauskommen. Sie werden nie den Punkt B erreichen, der ja vorgegeben ist.“ (Zeile 620-625). Für die Lehrperson ist es auch durchaus vorstellbar bei dieser Aufgabe arithmetisch zu arbeiten, da die Berechnung keine Probleme darstellen sollte (vgl. 628-631).

Betreffend der dritten Fehlvorstellung würde die Lehrkraft folgende Erklärung liefern: „[...] indem ich ihm erkläre, er soll diese beiden Punkte in ein Koordinatensystem einzeichnen. Und Verbindungsvektor/ also Punkte einzeichnen, das können sie seit der zweiten Klasse. Und Verbindungsvektor, indem ich jetzt sage, jetzt verbinde die beiden

Punkte von A nach B mit einem Vektor. Dann müsste eigentlich kein Problem mehr bestehen.“ (Zeile 645-648). Um das Verständnis der SchülerInnen für die Formel  $B - A$  zu gewinnen, würde die Lehrperson folgendermaßen vorgehen: „Dann würde ich ihnen zusätzlich noch die Koordinaten einzeichnen lassen, also von dem Vektor, also nicht die Koordinaten zum Ursprung, sondern den x- und y-Wert noch zusätzlich, dieses Dreieck konkret einzeichnen lassen, dass sie es wirklich bewusst auch sehen und vergleichen können.“ (Zeile 651-654).

#### *4. Lehrperson*

Die vierte Lehrperson analysierte die erste Fehlvorstellung wie folgt: „[...] man soll das Verbinden der Punkte veranschaulichen, damit ist es klar, dass die Punkte da sein müssen. In dem Fall sind die Punkte nicht da. Wenn nur verlangt wäre, veranschauliche den Vektor AB, könnte ich dagegen eigentlich nichts einwenden auch wenn es mir nicht gefällt.“ (Zeile 795-797). Interessant war, dass die Lehrkraft die Lösung der Aufgabe mittels Ortsvektor nicht als Fehlvorstellung titulieren würde. „Also im Prinzip Fehlvorstellung/ ich halte es nicht einmal für eine Fehlvorstellung sondern für eine unvollständige. Frage wäre, wo ist der Punkt A, wo ist der Punkt B und was hat dieser Vektor damit zu tun.“ (Zeile 798-800). Im Interview wurde die zweite Fehlvorstellung kaum diskutiert und ging im Gespräch unter.

Allerdings würde die Lehrperson bzgl. der dritten Fehlvorstellung folgendermaßen intervenieren: „Wenn der Schüler mir nur sagt „Ich kann mir das nicht vorstellen.“, ist das erste, zeichne die Punkte.“ (Zeile 814-815). Die nächste Maßnahme, die die Lehrkraft ergreifen würde, wäre die Frage: „Wo ist jetzt dieser Verbindungsvektor?“ (Zeile 817). Weitere Therapiemöglichkeiten wurden nicht genannt.

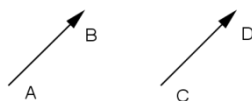
#### *5. Lehrperson*

Eine ähnliche Ansicht, wie die vierte Lehrperson, teilte auch die fünfte interviewte Lehrkraft in Bezug auf die erste Fehlvorstellung, die den Verbindungsvektor als Ortsvektor beinhaltet. „Ich sehe das nicht als Fehlvorstellung, weil es ist ja ein Repräsentant des Vektors AB-Pfeil.“ (Zeile 1000). „Ich verstehe schon, dass der Begriff des Ortsvektors immer wieder Probleme bereiten kann, nur ist er halt ein Repräsentant des Vektors AB. Das stimmt noch dazu, ich habe ihn mir gerade ausgerechnet. Das ist auch ein Beispiel für diesen Vektor AB.“ (Zeile 1003-1006).

Hinsichtlich der zweiten Fehlvorstellung äußerte sich die Lehrperson wie folgt: „Na gut, der Vektor B ist ja nicht der Punkt B, sondern der ist auf einmal ein Vektor geworden, der noch dazu nicht mal mehr ein Ortsvektor wäre. Wenn er ein Ortsvektor wäre, hätten wir noch eine Chance mit einem Dreieck oder irgendwie zu erkennen, was da vielleicht der Vektor AB sein könnte.“ (Zeile 1009-1012). Auf die Frage, was die Lehrkraft unternehmen würde, wenn dies im Unterricht vorkäme, antwortete sie: „Ich würde/ also grundlegend würde ich meinen, dass man einmal die beiden Punkte in einem Koordinatensystem einzeichnet und sich dann überlegt, wie liegt der Vektor, wohin ist er orientiert und welche Richtung hat er und das ist im Normalfall relativ leicht erkennbar, übrigens schon in der Unterstufe. Dieses Beispiel ist ja nicht ein Beispiel, das in der Oberstufe erst ist, sondern das passiert ja schon in der zweiten Klasse beim Koordinatensystem. Und es ist im Normalfall, auch für Zweitklässler, kein Problem hier die Differenzen zu berechnen und mathematisch zu erkennen, was dabei los sein sollte, wobei es in der Unterstufe noch keine Vektoren gibt. Aber sie wissen genau wie man da vorgehen würde.“ (Zeile 1016-1023). Somit liegt die Fehlvorstellung, nach Meinung der Lehrperson, tief verankert und sollte schon in der zweiten Klasse AHS beseitigt werden. Folgender Interventionsvorschlag wurde geliefert: „Ich würde wieder versuchen über die Unterscheidung zwischen Punkt und Vektor zu reden. Da gibt es ein Mismatch zwischen der Vorstellung von Punkten und Vektoren. Und Punkte sind eindeutig, eindeutig festgelegt im Koordinatensystem. Und dieser Vektor B entspricht nicht dem Punkt B.“ (Zeile 1025-1028).

### 3.2.2.3 Gleichheit von Vektoren

Gilt  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ?



(Jarmer, 1995, S.23)

Unter genauere Betrachtung stellte ich folgende Fehlvorstellungen von SchülerInnen, die im Zuge der Bearbeitung der obigen Aufgabe ersichtlich geworden sind:

- 1)  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{CD}$  sind zueinander parallel, aber nicht identisch. (vgl. Jarmer, 1995, S. 27)

- 2) „Sie sind zwar parallel, haben aber nicht denselben Anfangspunkt (A, C).“  
(Jarmer, 1995, S. 27)

### *1. Lehrperson*

„Na, es ist die Frage in welchem Stadium das Ganze passiert. Weil du machst ja dann relativ bald eigentlich das Parallelitätskriterium der Vektoren und ab dem Zeitpunkt, wissen die dann relativ schnell, ob Vektoren ident, oder parallel sind beziehungsweise Geraden parallel oder ident sind. Aber ich meine die Vorstellung, dass sie nur parallel aber nicht ident sind finde ich witzig. (...) Na oh ja, man kann versuchen ihnen klar zu machen, was kennzeichnet einen Vektor, die Länge und die Richtung. Wenn beides gleich ist, sind die Vektoren gleich. Dass man das über das macht.“ (Zeile 217-223). Diese Lehrperson würde den Schülern und Schülerinnen die Definition eines Vektors in Erinnerung rufen. Es fiel allerdings auf, dass zwar die Länge und Richtung entscheidend für die Lehrkraft waren, jedoch die Orientierung eines Vektors nicht beachtet wurde. Eine andere Variante diese Fehlvorstellung zu beseitigen, wäre für die Lehrkraft wenig vorstellbar. „Ich glaube, dass sie es anders nicht verstehen, weil wenn man eben verschiebt/ parallel verschiebt dann werden es für sie wahrscheinlich immer zwei verschiedene Vektoren sein, oder oft.“ (Zeile 225-227). Auf den von mir dargebotenen Vorschlag, diese Aufgabe arithmetisch zu behandeln, antwortete sie: „Also wenn man es arithmetisch macht, ist es leicht. Einfach ihnen klar zu machen dieselbe Länge, derselbe Vektor ist derselbe Vektor, mehr oder weniger. Aber du kannst es auch geometrisch machen, weil du hast gerade am Anfang oft Beispiele, wo ich ihnen dann (.) einfach versuche zu zeigen, wenn ich ihnen verschiedene Punkte angebe und das kommt ein/ den Verbindungsvektor zu berechnen und es kommt derselbe Vektor heraus, ob sie dann eben darauf kommen, ob es dasselbe ist oder nicht.“ (Zeile 230-235). Es wurde anschließend ein Beispiel besprochen, bei dem drei Eckpunkte eines Parallelogramms gegeben sind und der fehlende zu berechnen ist. Dabei ist das Wissen über die Gleichheit von Vektoren erforderlich, was die Lehrperson den SchülerInnen dadurch vermitteln möchte (vgl. Zeile 236-241).

### *2. Lehrperson*

„[...] also selbst ich würde sagen, AB-Pfeil und CD-Pfeil, ist wenn es so steht/ der Vektor ist gleich, die Pfeile aber nicht. Also ich versuche da zu unterscheiden zwischen einem Pfeil, der also von einem Punkt zum anderen geht, und ein Repräsentant des Vektors ist und zwischen dem Vektor selber. Also in dem Fall würde ich sagen, die Vektoren sind

gleich, also ich würde sagen, das ist jeweils der Vektor v-Pfeil und das ist auch der Vektor v-Pfeil, die Vektoren sind gleich, aber sie sind durch zwei unterschiedliche Pfeile repräsentiert. Das heißt, die erste Fehlvorstellung, muss man genau unterscheiden, ist es jetzt der Pfeil oder ist es jetzt der Vektor. Ist es der Pfeil als Repräsentant oder ist es ein Vektor. Das müsste man dann halt noch einmal genauer erklären, also die Vektoren sind gleich, aber es sind unterschiedliche Repräsentanten.“ (Zeile 420-428) Dieser Auffassung nach müsste im Mathematikunterricht eine genaue Unterscheidung zwischen Vektoren und Pfeilen getroffen werden. „Ein Vektor ist halt/ sind halt alle Pfeile die gleich lang, parallel und die gleiche Orientierung haben. Das heißt, das (zeigt auf Zettel) sind gleiche Vektoren, aber unterschiedliche Pfeile, als unterschiedliche Repräsentanten.“ (Zeile 430-432). Auf die Frage, ob die Lehrperson Beispiele wisse, bei denen die SchülerInnen selbstständig eine zufriedenstellende Lösung der Aufgabe erarbeiten könnten, antwortete sie: „Ja, ich glaube, dass die Schüler da alleine darauf kommen, geht da in dem Fall nicht. Das muss man ihnen ganz einfach sagen. Ich glaube, der Begriff Vektor ist ja sehr komplex und ich kann nicht sagen/ ich glaube, ich habe das eh in der Schule recht gut gemacht, finde ich. Dass man da schon genau unterscheidet was ist ein Pfeil, was ist ein Vektor. Oder was ist ein Repräsentant und was ist ein Vektor. Beispiele/ ich glaube das muss man vorführen, ganz einfach.“ (Zeile 436-440). Als gutes Anwendungsbeispiel bei dem die Gleichheit von Vektoren eine wichtige Rolle spielt, wurde ein Parallelogramm dessen fehlender Eckpunkt berechnet werden soll, bewertet.

Bzgl. der zweiten Fehlvorstellung und möglicher Interventionsmaßnahmen reagierte die Lehrperson wie folgt: „Ja, für die Pfeile stimmt es ja, aber für die Vektoren ist es egal.“ (Zeile 460). Eventuelle Handlungsmöglichkeiten wurden nicht erwähnt.

### *3. Lehrperson*

Die dritte Lehrperson gab zu beiden Fehlvorstellungen eine knappe und prägnante Auskunft. „[...] da kann ich grundsätzlich auch wieder zurückführen auf die Definition, dass eben Länge, Orientierung und Richtung sind gleich und damit sind sie ident. Und nicht denselben Anfangspunkt erklärt man eigentlich auch damit, weil sie ja nicht durch ihren Anfangspunkt festgelegt sind, sondern nur durch Länge, Richtung und Orientierung.“ (Zeile 658-661). Darüber hinaus wurde besprochen, dass es ebenso gut vorstellbar wäre diese Aufgabe arithmetisch zu gestalten, um den Sachverhalt den Schülern und Schülerinnen besser zu veranschaulichen.

#### 4. Lehrperson

„Ja, da muss er, sie, eben wissen, dass das nicht/ dass das Repräsentanten eines Vektors sind. Das heißt, dass der Vektor eigentlich die Menge von unendlich vielen Pfeilen ist und dass ich diese hin und her schieben kann. Einfachster Therapieversuch mit einer dynamischen Geometrie kann man beliebig viele zeichnen beziehungsweise einen Vektor nehmen und hin und her schieben und sie übereinander schieben. Dann sieht man, sie sind gleich. Ich kann beide nebeneinander zeichnen. Den einen nehme ich mit der Maus und schiebe ihn darüber. Der passt genau darüber, er zeigt auch in die gleiche Richtung, wobei die Richtung da überhaupt nicht vorkommt in den Fehlvorstellungen. Und nicht derselbe Anfangspunkt, das ist dasselbe Problem.“ (Zeile 822-829). Somit empfand die Lehrperson, dass beiden Fehlvorstellungen dieselben Problematik zu Grunde liegt. Sofern im Mathematikunterricht Fehlvorstellungen sichtbar werden, würde die Lehrkraft Geogebra verwenden, um diese zu beseitigen (vgl. 831-832).

#### 5. Lehrperson

Die fünfte Lehrperson hinterfragte das Wort „ident“ genau, um eine adäquate Therapie vorzuschlagen. „Da würde ich mich zuerst einmal fragen, wann sind zwei Vektoren identisch. Wie ist das mit den unendlich vielen Repräsentanten, sind die alle identisch? Oder sind sie alle Repräsentanten desselben Vektors? Was identisch sein kann, ist die Länge, was identisch sein kann, ist die Orientierung, aber wann sind zwei Vektoren identisch? Die Frage würde ich ihm einmal stellen. Das heißt, der Begriff scheint mir ein bisschen/ oder zumindest hinterfragbar. Dass die Vektoren gleich sind, gleiche Repräsentanten desselben Vektors, damit habe ich überhaupt kein Problem, aber ich denke das Wort identisch kommt mir sehr komisch vor, weil ich nicht weiß was, erstens einmal, ich damit verbinde und was Schülerinnen und Schüler damit verbinden weiß ich überhaupt nicht. Weil sie verbinden hauptsächlich/ sie sehen Längen, Orientierung und Richtung, hoffe ich. Das ist das was ich versuche/ oder was sinnvoll ist, scheint mir, klar zu machen, wenn ich einen Vektor anschau. Und in dem Augenblick wo sie alle drei Bedingungen gleich haben, dann sind sie gleich.“ (Zeile 1054-1065). Wichtig war der Lehrperson zu klären, was einen Vektor ausmacht. „Und dann schaue ich warum sind sie gleich, weil alles übereinstimmt, Länge, Richtung und Orientierung. Nur dann sind sie gleich. Das Wort identisch passt für mich nicht. Wenn es die Bedeutung von am selben Ort hat, dann hat es überhaupt keine Bedeutung. Das Wort hat für Vektoren, für mich, keine Bedeutung.“

Das ist ein Wort, das nicht zu Vektoren gehört. Bei Punkten schon, weil Punkte sind eindeutig festgelegt.“ (Zeile 1068-1072)

Auf die Aussage „Sie haben nicht denselben Anfangspunkt, daher sind sie nicht gleich“ reagierte die Lehrperson folgendermaßen: „[...] das ist realistischer, dass sie das so meinen. Wieder besteht, glaube ich, nur eine Chance, nämlich dass man sich auf das bezieht, was ist ein Vektor. Und es ist nicht wichtig der Anfangspunkt eines Vektors. Ja, um zu einem bestimmten Punkt zu kommen, brauche ich den Anfangspunkt, aber nicht um den Vektor selbst zu bestimmen. Das heißt, da geht es mir eher wieder um die Grundvorstellung, was ein Vektor ist. Und ich habe das Gefühl, wenn die drei Bedingungen im Kopf sind, die erfüllt sein müssen, damit ein Vektor festgelegt ist, dann ist auch das zu hinterfragen.“ (Zeile 1075-1081).

Grundsätzlich verwendete die Lehrperson in beiden Fällen dieselbe Therapie, nämlich den Schülerinnen und Schülern die Eigenschaften eines Vektors nahe zu legen. Weiters wäre es für sie vorstellbar diese Aufgabe mit Koordinaten zu bearbeiten oder Geogebra zu verwenden. Allerdings erwähnte die Lehrkraft auch Nachteile der dynamischen Geometrie Software. „Wobei Geogebra hat schon ein paar Probleme. Geogebra macht ja, wenn man nur einen Vektor eingibt, immer einen Ortsvektor. Und das ist natürlich schon/ das müsste man dann wegziehen, durch mögliche Punkte, die man vielleicht vorgegeben hat, besser wäre man hätte die Punkte vorgegeben und schaut dann, ob die beiden übereinander sind. Nehmen wir an der Vektor wäre eins Komma zwei und eins Komma zwei, ich sage jetzt einmal irgendwas, dann bekommt man jedes Mal einen Ortsvektor. Und aus denen sich die irgendwo hin verschieben und dann wieder übereinander legen, ist schon kompliziert. Geogebra hat natürlich auch eine bestimmte Philosophie, die dahinter sich versteckt und gerade in der Vektorrechnung ist die Philosophie eine gut praktische. Zum Beispiel, was man irrsinnig gut in Geogebra machen kann, ist, wenn man von Punkten weggeht und einen Vektor dazu zählt, dann wieder zu einem Punkt zu kommen und so weiter. Das wird sehr gut veranschaulicht. Auch bei Geraden. Da braucht man nur den Parameter verändern und man sieht genau, was da passiert. Also insofern ist Geogebra/ schult sehr gut die Vorstellung. Aber im Bereich der/ bei der Frage hilft es am Anfang nicht. Wenn man beide eingibt, sind beide am selben Platz sozusagen, was ja absurd ist, weil der Vektor ja nicht vom Platz abhängig ist.“ (Zeile 1091-1105).

### 3.2.2.4 Mittelpunkt einer Strecke

Stelle eine Formel für den Mittelpunkt M einer Strecke [A, B] auf! Begründe!

(Hartmann, 1993, S. 100)

Laut Hartmann (1993) sind folgende Fehlvorstellungen vorherrschend:

1. Formel:  $M = \frac{1}{2} * (A + B)$

„Wenn ich die Punkte A und B addiere, dann erhalte ich die ganze Strecke. Um den Mittelpunkt zu erhalten, muß [sic!] ich diese ganze Strecke durch 2 dividieren.“  
(Hartmann, 1993, S. 92)

2. Formel:  $\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$

„Wenn ich die Punkte A und B habe und diese verbinde, dann habe ich auch gleichzeitig den Vektor  $\overrightarrow{AB}$ . Wenn ich vom Vektor  $\overrightarrow{AB}$  die Hälfte nehme, komme ich zum Mittelpunkt.“ (Hartmann, 1993, S. 94)

#### 1. Lehrperson

Nach der Konfrontation mit der ersten Fehlvorstellung erläuterte die Lehrkraft, dass sie den Mittelpunkt einer Strecke im Unterricht mittels Vektoraddition einführt. „Wenn ich den Mittelpunkt zwischen zwei Punkten berechne, dann mache ich nie die Formel, sondern ich versuche über die Vektoren hin zu kommen, über Vektoraddition. Das heißt, ich gebe zum Anfangspunkt die Hälfte der Strecke hinzu und dann ergibt sich die Formel von alleine.“ (Zeile 253-256). Dadurch wird die Formel für den Mittelpunkt hergeleitet. „Weil da wissen sie ja vorher schon, wie komme ich von einem Punkt zum anderen mit Hilfe eines Vektors. Und dann kann ich, mit Hilfe von dem, leicht begründen wie man auf die Formel kommt. Und dann ist ihnen auch die Formel klar. Da gibt es keine Probleme mehr. Und dann haben sie auch keine Probleme zu formulieren, was sie da eigentlich tun. Dass sie eben zu einem Punkt den halben Vektor dazu geben.“ (Zeile 258-262). Auf die SchülerInnenenerklärung bzgl. der ersten Fehlvorstellung wurde dabei nicht eingegangen.

Die Interventionsmaßnahme der Lehrperson hinsichtlich der zweiten Fehlvorstellung sah wie folgt aus: „Ja, da müssen/ mehr oder weniger muss man ihnen klar machen, oder versuchen klar zu machen, dass das/ dass man einen Vektor halbiert und dass man ja eigentlich nirgends hin kommt damit. Also wenn man zu einem Punkt will, dann muss man

mit einem Vektor von irgendwo weggehen. Und das muss ihnen klar werden.“ (Zeile 269-272). Die Lehrperson betonte stark, dass man den Schülern und Schülerinnen deutlich klar machen muss, dass das vermeintlich richtige Ergebnis zum einen ein Vektor und kein Punkt ist und zum anderen nicht an einen bestimmten Ort gebunden ist (vgl. 274-277). „[...] womit du nämlich dann wieder bei dem ersten Problem wärst (nimmt Zettel mit Gleichheit von Vektoren), dass man Vektoren ja/ dass sie trotzdem gleich sind, auch wenn ich sie irgendwo anders hin zeichne. Aber ich gebe zu, dass das nämlich wirklich eine schwierige Sache ist, dass du es wegbekommst. Weil wenn er es irgendwann so in seinem Kopf drinnen hat, wird es meistens schwer, ihn davon wegzubekommen.“ (Zeile 279-283)

## 2. Lehrperson

„[...] sie verwechseln da die Strecke natürlich mit den Punkten, dass die ja Koordinaten haben. Andererseits ist es natürlich so, wenn man zwei Zahlen hat, und zum Beispiel nur die x-Koordinaten hernimmt, dann passiert ja eigentlich nichts anderes, als man nimmt den Mittelwert der x-Koordinaten und man nimmt den Mittelwert der y-Koordinaten. Das heißt, diese Begründung ist ja gar nicht so falsch. Man müsste es nur koordinatenweise machen. Also ich nehme sozusagen den Mittelwert der x-Koordinate und nehme den Mittelwert von der y-Koordinate und dadurch bekomme ich diese Formel.“ (Zeile 471-477). Diese Überlegungen stellt die Lehrperson hinsichtlich der ersten Fehlvorstellung an. „Also, wenn das kommt, würde ich ihnen das sagen, was ich jetzt gesagt habe, nämlich mit den x- und y-Koordinaten würde das stimmen. Ansonsten würde ich ihnen noch einmal sagen, wie wir auf die Formel gekommen sind.“ (Zeile 479-481). Wie die Lehrperson im Unterricht auf die Formel kam, erklärte sie anschließend. „[...] man geht vom Punkt A aus und nimmt die Hälfte des Vektors AB-Pfeil. A plus ein halb AB-Pfeil. Oder von mir aus auch von der anderen Seite, aber das ändert dann ja nichts. Und das ist da (zeigt auf Fehlvorstellung 2) genau dasselbe.“ (Zeile 483-485). Nachdem darauf hingewiesen wurde, dass bei der zweiten Fehlvorstellung die Formel zur Berechnung falsch ist, sagte die Lehrkraft lediglich: „Ja, da muss man halt wieder eine Skizze zeichnen und korrigieren.“ (Zeile 488). Was die Lehrperson damit genau meinte, erklärte sie danach. „Man könnte



Abb. 8: Therapie bzgl. Mittelpunkt 2. Lehrperson

sagen, schau einmal her da ist A (zeichnet), da ist B, da ist AB-Pfeil und was ist jetzt ein halb AB-Pfeil? Das ist ja ein Pfeil, der halt irgendwo liegt und der Vektor ein halb AB-Pfeil kann jetzt irgendwo sein. Nur wenn ich von A weggehe, komme ich zum richtigen Punkt.“ (Zeile 491-493).

Abschließend erwähnte die Lehrkraft, was sie sich genau unter einem Therapieversuch vorstellt. „Ein Therapieversuch ist immer, eine Skizze zu machen und zu schauen, so geht es richtig.“ (Zeile 498-499). „Ich finde, die Skizzen sind immer ganz wichtig und das ist dann sehr anschaulich bzw. dann mit Geogebra. In Geogebra nutzt es in dem Sinn natürlich nicht so viel, weil Geogebra den Befehl „Mittelpunkt“ hat, natürlich kann man es auch so eingeben.“ (Zeile 501-503). Dennoch erwähnte die Interviewperson die großen Vorzüge, die Geogebra mit sich bringt. „Es ist überhaupt kein Bedienungsproblem. Sie können sofort Punkte und Vektoren eingeben und man hat es innerhalb kürzester Zeit gezeichnet. Das nimmt ganz wenig Zeit weg und man hat es recht anschaulich.“ (Zeile 504-507)

### 3. Lehrperson

Allgemein erklärte die Lehrkraft: „Also grundsätzlich führe ich diese Formel immer/ also ich leite diese Formel immer her. Von dem her wissen sie/ also mit einer Skizze dabei, beide Punkte einzeichnen und dann wirklich Schritt für Schritt wirklich herleiten. Und dann im Endeffekt haben wir diese Formel, aber viele, gerade bei den Schularbeiten, bei den ersten Schularbeiten, wenn das ganz kurz ist, verwenden viele gar nicht diese Formel, sondern rechnen sich es aus.“ (Zeile 673-677). Auf die Frage, ob generell eher die Formel  $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  im Unterricht verwendet wird, antwortete die Lehrperson: „Dann, nachdem wir sie hergeleitet haben, verwende ich schon immer diese Formel und ich kann mir schon vorstellen, dass viele dann auch das nicht mehr interpretieren können, richtig, aber am Anfang leiten wir sie immer Schritt für Schritt her.“ (Zeile 681-683).

Betreffend der zweiten Fehlvorstellung, bei der eine falsche Formel zur Berechnung des Mittelpunkts angegeben wird, erklärte die Lehrkraft: „[...] da ist ganz wichtig, dass sie ja

vom Ausgangspunkt/ dass man ihnen immer klar machen muss, das ist zwar der Vektor den du gehen musst, aber du hast keinen Ausgangspunkt vorgegeben. Das heißt, man muss ihnen ja klar machen, dass das im Prinzip vom Ursprung weg geht und nicht vom Ausgangspunkt A. Die Strecke AB muss ich ja beachten.“ (Zeile 698-692). Dem Problem entgegenwirkend würde die Lehrkraft die vermeintliche Lösung geometrisch darstellen. „Indem ich es geometrisch darstelle und ihnen zeige, den Vektor, so wie ihr es berechnet, bin ich jetzt im Ursprung, gehe vom Ursprung weg, das heißt ich lande in dem Punkt (zeigt auf Zettel) und wir wollen aber zu dem Punkt, wo eben B gegeben ist. Also wieder mit Veranschaulichen im Koordinatensystem.“ (Zeile 695-698)

#### 4. Lehrperson

Die Lehrperson würde sich allgemein als Begründung, abgesehen davon ob die mündliche Erklärung richtig oder falsch ist, eine Skizze erwarten. „Gut, also erstens einmal/ auch wenn hier eine exakte Begründung steht, würde ich mir eine Skizze erwarten (zeichnet),

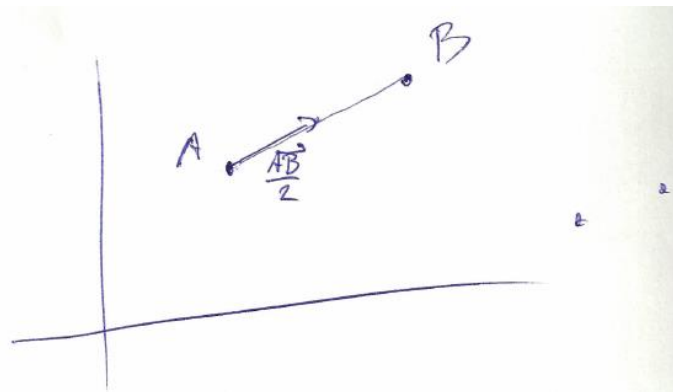


Abb. 9: Skizze Mittelpunkt einer Strecke

so ungefähr. (...) Erstens einmal kann man zwei Punkte nicht addieren. Das heißt, natürlich merken sie sich die Formel, A plus B, und ich nehme die Hälfte, aber das funktioniert nicht als Begründung. Das ist jetzt genau der Unterschied, ich kann an einen Punkt einen Vektor anhängen, aber nur zwei Punkte, das funktioniert nicht. Ja und das ist eigentlich der ausschlaggebende Punkt.“ (Zeile 837-842). Hinsichtlich der ersten Fehlvorstellung würde die Lehrkraft auf folgenden Umstand hinweisen: „[...] wir sind wieder beim Algebraischen, wenn ich den Punkt als Zahlenpaar habe, kann ich es addieren, nur wenn ich darüber nachdenke, was sie geometrisch bedeuten, ist es sinnlos Punkte zu addieren.“ (Zeile 845-847).

Die zweite Fehlvorstellung wurde folgendermaßen analysiert: „Ja, das ist das Typische, da fehlt der Ausgangspunkt. Also erstens, wenn ich zwei Punkte verbinde, habe ich keinen

Vektor sondern eine Strecke. Also ich brauche den Vektor von A nach B, das ist Spitze minus Schaft, und dann ist es einfach die halbe Strecke, die zurückgelegt wird. Das heißt, ich brauche noch den Punkt von dem aus ich ausgehe.“ (Zeile 849-852). In der Praxis würde die Lehrkraft wie folgt vorgehen: „Zunächst einmal ausrechnen lassen und zeichnen lassen, ruhig mit CAS. Zwei Punkte, jeder sieht, wo muss der Halbierungspunkt ungefähr liegen, also aufpassen, dass nicht zufällig gerade dasselbe herauskommt, dann den hier zeichnen lassen und dann merken sie, hoppla, der liegt ja gar nicht dort.“ (Zeile 855-858). Die Lehrkraft geht auf die Fehlvorstellung ein, indem sie bei der/dem SchülerIn einen Konflikt entstehen lässt, wodurch er /sietherapiert wird.

### *5. Lehrperson*

„In dem Augenblick wo die Punkte gegeben sind und wo eines festgelegt ist, das ist nämlich der grundlegende Begriff zwischen Punkt und Vektoren, Punkt plus Vektor ist Punkt, ist es relativ klar und ich glaube, dass über achtzig Prozent der Schüler es schaffen eine Formel zu entwickeln für den Halbierungspunkt. Nämlich, was muss ich machen, dass ich von einem Punkt weggehe um zu M zu kommen. Das ist Voraussetzung und das wird oft übersehen. Plus einhalb mal, warum einhalb mal, weil es einfach die Hälfte ist eines Vektors. Und wenn ich zu einem Punkt einen Vektor zähle, bekomme ich wieder einen Punkt. Und die Formel folgt dann.“ (Zeile 1113-1119). Die erste Fehlvorstellung analysierte die Lehrkraft wie folgt: „Wenn ich zwei Punkte addiere bekomme ich einen Vektor, gut. Wenn ich einen Vektor halbiere bekomme ich einen Vektor und keinen Punkt. Das ist einmal das, was die Grunddefinitionen betrifft. Gut, das ist ein bisschen blöd. Die Formate passen nicht zusammen. Andererseits wenn ich mein Ortsvektormodell nehme (zeichnet), wenn ich zu dem Vektor, den dazu nehme, bekomme ich einen neuen Ortsvektor, oder einen Vektor. Aber was ist die Strecke? Mit der Strecke ist die Länge von dem gemeint. Die Strecke ist ja kein Begriff der Vektorrechnung. Also in Wirklichkeit, was könnte ich halbieren? Halbieren könnte ich da nur den Ortsvektor. Dann komme ich genau da her. Das ist irgendwie schwierig. Also die Strecke ist ein Problem. Wenn da Ortsvektor stehen würde oder so irgendwas, könnte man sich das vorstellen. In Wirklichkeit gehe ich vom Ursprung weg und zähle den Vektor dazu und bekomme genau denselben Mittelpunkt. Also die Grundidee ist nicht schlecht, nur die Beschreibung ist mathematisch problematisch.“ (Zeile 1125-1135). Weiter erklärte die Lehrperson: „Die Skizze würde gut dazu passen:

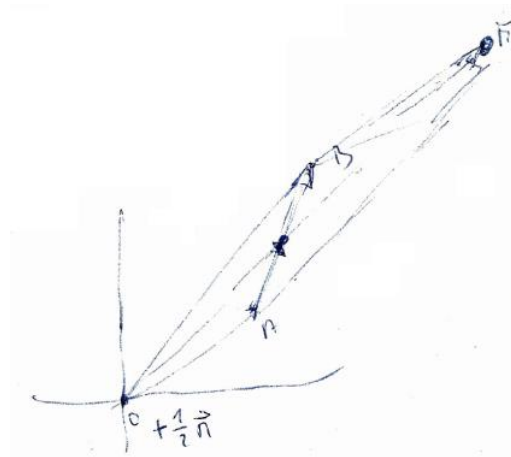


Abb. 10: Therapie Mittelpunkt

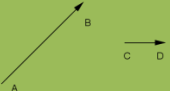
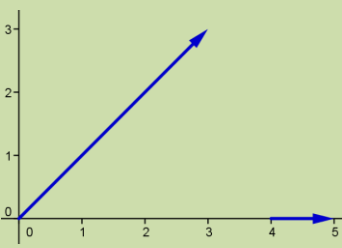
Und die Grundidee ist ja nicht schlecht. Es müsste nur erklärt werden, was das eigentlich bedeutet. Und ich sehe das Problem eher bei den Ortsvektoren, nämlich zu sehen, was da passiert, wenn ich zwei Ortsvektoren addiere, wenn ich dann einen neuen Ortsvektor halbiere, bekomme ich dann einen Vektor. Aber dann muss ich am Schluss sehr wohl mir bewusst sein, dass ich wieder vom Ursprung weggehe, dass ich wieder einen Punkt bekomme. Das ist sehr schwierig. Aber es fehlt nicht viel.“ (Zeile 1137-1142). Die Lehrkraft gab neben der Skizze eine weitere Möglichkeit an, den Schülern und Schülerinnen diesen Sachverhalt verständlich zu vermitteln. „[...] entscheidend ist, dass man dann vom Ursprung weggeht. Ob die Skizze dem Schüler was nutzt, ist die andere Frage. Das Problem ist, dass ich da einen Vektor bekomme, der nicht ortsgebunden ist. Das ist eines der größeren Probleme. Also ich würde den geometrischen Weg bevorzugen. Das Problem ist, wie erkläre ich einem Schüler, dass er hier vom Ursprung weggehen muss.“ (Zeile 1144-1148). Argumentieren würde die Lehrperson nicht mit „Punkt plus Punkt“ sondern mit „Punkt plus Vektor“, da diese Vorstellung auch leichter zu veranschaulichen ist (vgl. 1150-1151).

Auf die zweite Fehlvorstellung reagierte die Lehrkraft folgendermaßen: „Das ist ein logisches Problem. Und geometrisch kann man sich das relativ schnell aufzeichnen, dass das nicht stimmen kann.“ (Zeile 1158-1159). Da dieser halbe Vektor irgendwo in der Zeichenebene liegen kann, lässt es sich leicht dem/der SchülerIn verdeutlichen, dass diese Formel nicht entsprechend ist (vgl. Zeile 1161-1164).

### 3.2.2.5 Zusammenfassung

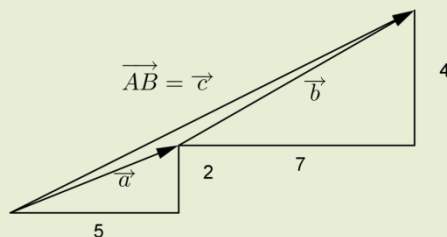
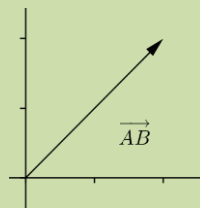
Zusammenfassend bietet die unten stehende Tabelle eine Übersicht über besprochene Fehlvorstellungen und mögliche Therapieansätze.

Tab. 1: Fehlvorstellungen und Therapien

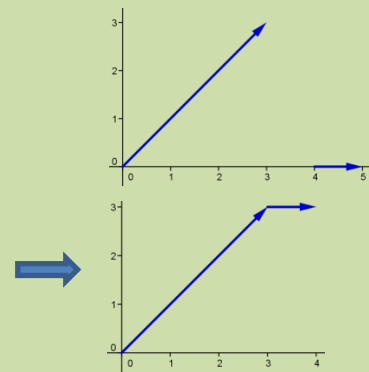
| Aufgabe                                                                                                                                                                                                   | Fehlvorstellung          | Therapie                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Kann man <math>\overrightarrow{AB}</math> und <math>\overrightarrow{CD}</math> addieren? Begründe deine Antwort!</p>  | <p>„Das geht nicht.“</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\overrightarrow{CD}</math> auf x-Achse verschieben → Geogebra:<br/> </li> <li>Parallelogramm mit Diagonale einzeichnen.</li> <li>Warum sollte man zwei Vektoren nicht addieren können?</li> <li>Arithmetisch<br/> z.B. Welche Koordinaten haben die Vektoren vermutlich?<br/> Nehmen wir an <math>\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}</math> und <math>\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}</math>. Kannst du sie jetzt addieren?</li> </ul> |

Berechne den Vektor  $\overrightarrow{AB}$  und veranschauliche dies an einer Skizze:  $A=(5 \mid 2)$ ,  $B=(7 \mid 4)$

Verbindungsvektor als Ortsvektor:



- Parallel verschieben → Geogebra:



- Definition: Ein Vektor wird durch seine Länge, Orientierung und Richtung festgelegt → nicht mehr derselbe Vektor.

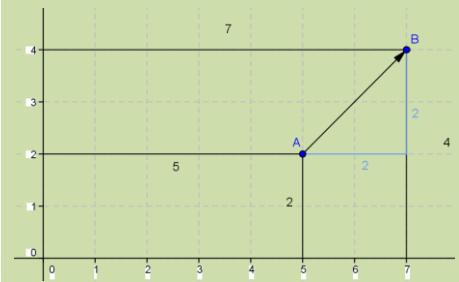
- Schatzsuche:  
Markus ist auf Schatzsuche. Dazu geht er vom Ort  $A=(5 \mid 2)$  zwei Kilometer in östliche Richtung und danach zwei Kilometer in nördliche Richtung. Dort angekommen findet er tatsächlich einen Schatz. Mit welchen Koordinaten trägt er seinen Fund in der Schatzkarte ein? Skizziere seinen zurückgelegten Weg.

- Verwendung der Subtraktion verdeutlichen.

„Ich kann mir das nicht vorstellen.“

- Geometrisch:

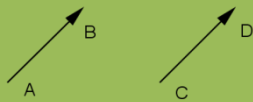
$$A = (5|2), \quad B = (7|4)$$



$$\text{x-Koordinate: } 7 - 5 = 2$$

$$\text{y-Koordinate: } 4 - 2 = 2$$

Gilt  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ? Begründe deine Antwort.



$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$$

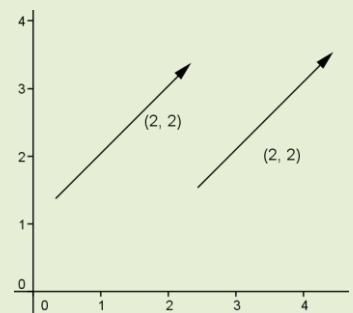
Sind nur parallel zueinander, aber nicht identisch.

- Definition: Was macht einen Vektor aus? Länge, Richtung und Orientierung, daher sind sie gleich.

- Ein Vektor ist die Gesamtheit der Pfeile die gleich lang, parallel und gleich orientiert sind.

- Welche Koordinaten haben die Vektoren vermutlich? Sind sie gleich?

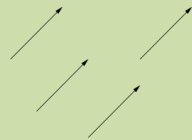
- Geogebra:



$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$$

Haben nicht denselben Anfangspunkt.

s.o.

|                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Stelle eine Formel für den<br>Mittelpunkt M einer<br>Strecke [A, B] auf!<br>Begründe! | $M = \frac{1}{2} * (A + B)$ <p>„Wenn ich die Punkte A und B addiere, dann erhalte ich die ganze Strecke. Um den Mittelpunkt zu erhalten, muss ich diese ganze Strecke durch 2 dividieren.“</p>                                                                                    | <ul style="list-style-type: none"> <li>Die Punkte koordinatenweise addieren.</li> <li>Herleitung: <math>M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = A + \frac{1}{2}\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B} = \frac{1}{2} * (A + B)</math></li> <li>Punkte als Ortsvektoren auffassen.</li> </ul> |
|                                                                                       | $M = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ <p>„Wenn ich die Punkte A und B habe und diese verbinde, dann habe ich auch gleichzeitig den Vektor <math>\overrightarrow{AB}</math>. Wenn ich vom Vektor <math>\overrightarrow{AB}</math> die Hälfte nehme, komme ich zum Mittelpunkt.“</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Parallel verschieben:</li> </ul>  <ul style="list-style-type: none"> <li>Anfangspunkt berücksichtigen.</li> </ul>                                                                                  |

### 3.2.3. SchülerInneninterviews

Die SchülerInneninterviews betreffend konnte man große Unterschiede feststellen, die sich einerseits in der Bearbeitungszeit der Aufgaben, andererseits hinsichtlich des Leistungsniveaus widerspiegeln. Einige Ausschnitte werden nun angeführt, wobei eine ausführliche Version im Anhang unter Kapitel 8 zu finden ist.

#### 3.2.3.1. Georg und Lukas

Georg und Lukas sind beide davon überzeugt, dass man die Vektoren, die sie auf dem Zettel vor ihnen sehen, addieren kann (vgl. Zeile 1167-1168). Georg begründet seine Entscheidung mit den Worten: „[...] man kann den da ja anhängen [...]“ (Zeile 1171). Lukas hingegen argumentiert: „Weil beide positiv sind [...]“ (Zeile 1170). Georg skizziert sofort ein entsprechendes Kräfteparallelogramm, während Lukas dies anfertigt:

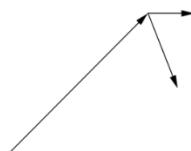


Abb. 11: Vektoraddition Lukas\_1

(vgl. Zeile 1176). Nachdem Georg seinen Schulkollegen darauf hinweist, dass ein Kräfteparallelogramm notwendig sei, vervollständigt Lukas seine Zeichnung:

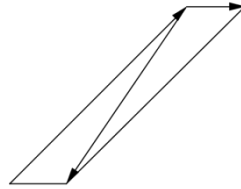


Abb. 12: Vektoraddition Lukas\_2

(vgl. Zeile 1177-1179). Da ich mit dieser Fehlvorstellung nicht rechnete, musste ich bzgl. der Therapie improvisieren:

I: [...] Das heißt, wir müssen uns jetzt die Frage stellen wohin die Resultierende zeigen muss. Lukas, wenn ich mir dein Kräfteparallelogramm anschau, könnte ich die Addition mit AB-Pfeil plus BD-Pfeil durchführen.

Lukas: Ja, das ist klar.

I: Genau. Schreib das einmal auf (..)

(Lukas schreibt  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ .)

I: Und was kann ich jetzt statt AB-Pfeil und BD-Pfeil hinschreiben?

Georg: B minus A und D minus B.

Lukas: (Ersetzt die Ausdrücke:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = B - A + D - B$ ) Ah und da fällt das B weg und dann bleibt nur mehr D minus A übrig.

I: Und was ist D minus A?

Lukas: AD-Pfeil, aso, dann habe ich das falsch gemacht.

(Zeile 1193-1204)

Bei der Bearbeitung des Verbindungsvektors wurde folgendermaßen argumentiert:

Georg: (Zeichnet) Naja, A ist da und B ist da, also ist das AB-Pfeil.

Lukas: Wir sollten uns zuerst die Strecke ausrechnen.

I: Die Strecke?

Lukas: Naja, den Vektor. Also rechnen wir B minus A.

(Zeile 1209-1212)

Die Ergebnisse sind bei beiden Schülern richtig. Die Probleme beginnen ab dem Zeitpunkt, als eine Begründung für diese Berechnung verlangt wird. Es fielen die Worte „Das haben wir so gelernt.“ (Zeile 1215). Lukas erklärt weiter: „Wenn man A minus B rechnen würde,

dann wäre das Vorzeichen vertauscht. Ich habe mir einfach die Formel gemerkt.“ (Zeile 1217-1218). Da keiner der beiden eine Begründung für die Formel  $\overrightarrow{AB} = B - A$  liefern konnte, erklärte ich anhand folgender Skizze das komponentenweise Vorgehen.

$$A = (5|2), B = (7|4)$$

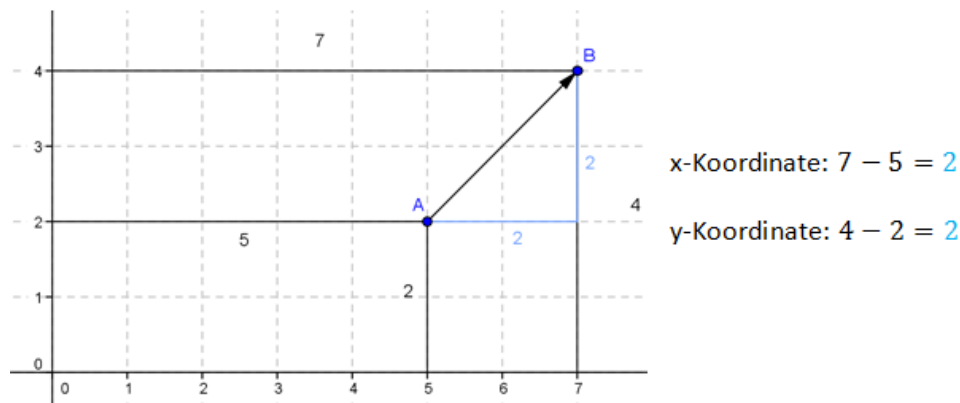


Abb. 13: Therapie Verbindungsvektor

Über die Gleichheit von Vektoren wurde folgendes Gespräch geführt:

I: Sind AB-Pfeil und CD-Pfeil gleich?

Lukas: Ja.

I: Warum?

Georg: Weil sie die gleiche Orientierung haben und gleich lang sind.

Lukas: Ja und sie sind parallel zueinander. Also wir könnten sagen, beide sind zwei, zwei.

I: Ok. Das heißt, welche Eigenschaften hat ein Vektor? Wie wird er definiert?

Georg: Orientierung.

Lukas: Länge.

I: Ja, was fehlt da noch?

(Schweigen)

I: Länge, Orientierung und Richtung.

Lukas: Ja, das habe ich mit der Orientierung eh gemeint.

I: Aha, das ist aber nicht dasselbe. Ist dir das klar?

Lukas: Ja, Orientierung ist, jetzt grob gesagt, in welche Richtung er schaut und Richtung/

Georg: Ob er jetzt da liegt oder da.

I: Genau, das stimmt. Lukas, kann man jetzt bei unserem Beispiel sagen, dass die Vektoren gleich gerichtet sind?

Lukas: Ja, sind sie.

(Zeile 1228-1245)

Für die Schüler ist es völlig eindeutig, dass die beiden Vektoren gleich sind, allerdings gibt es Unklarheiten bzgl. Orientierung und Richtung, die gemeinsam besprochen werden.

Die Formel für den Mittelpunkt einer Strecke ist für viele SchülerInnen schwer zu interpretieren bzw. haben viele Schwierigkeiten, überhaupt eine geeignete Vorgehensweise zu finden. Dies trifft auch bei Georg zu, der die Formel  $M = \frac{1}{2} * \overrightarrow{AB}$  aufschreibt (vgl. Zeile 1247). Folgender Therapieversuch wurde von mir unternommen:

I: Ok, Georg, du sagst, der Mittelpunkt einer Strecke ist einhalb mal AB-Pfeil. Nehmen wir einfach den Vektor zwei, zwei vom vorherigen Beispiel und gib den mal in Geogebra ein und gib gleich den halben Vektor ein.

(Georg operiert am Laptop)

I: Genau, da kommt jetzt der Vektor eins, eins heraus. Nimm mal den Vektor und verschieb ihn. (..) Was hat der Vektor jetzt für Koordinaten?

Georg: Immer noch eins, eins.

I: Richtig, du sagst aber, dass hier der Mittelpunkt liegt. Der könnte dann aber auch hier, hier oder hier liegen. Aber der Mittelpunkt ist doch ein ganz bestimmter Punkt, oder?

Georg: Ja, da stimmt was nicht.

Lukas: Wir brauchen doch immer einen Anfangs- und einen Endpunkt.

Georg: Ach **ja**, ich muss noch schreiben A plus.

I: Genau, das ist ganz wichtig, weil sonst, das haben wir ja gerade gesehen, könnte der Mittelpunkt irgendwo liegen.

(Zeile 1247-1260)

Lukas zeigt im Grunde dieselbe Fehlvorstellung wie Georg, versucht aber mit Punkten zu arbeiten und stellt die Formel  $M = \frac{B-A}{2}$  auf. Anhand der vorangegangenen Therapie erkennt er aber seinen Fehler:

Lukas: Ich habe eine andere Formel. Ich habe B minus A durch zwei.

I: Im Prinzip steht bei dir genau dasselbe wie bei Georg, denn B minus A ist ja wieder AB-Pfeil.

Lukas: Ja, stimmt. Ich habe auch den Anfangspunkt vergessen.

(Zeile 1261-1264)

Nun folgte die Überprüfungsphase bei der nochmals Aufgaben zur Vektoraddition, zum Verbindungsvektor, zur Gleichheit von Vektoren und zum Mittelpunkt einer Strecke gestellt wurden.

Lukas hat beim geometrischen Deuten der Vektoraddition keine Schwierigkeiten mehr und zeichnet sofort ein Kräfteparallelogramm mit richtig orientiertem Summenvektor ein (vgl. Zeile 1268-1271).

Lukas und Georg berechnen abermals den Verbindungsvektor richtig (vgl. Zeile 1274-1277). Als es danach zur Begründung der Formel für den Verbindungsvektor geht, erklären die Schüler folgendes:

Lukas: Das ist zuvor alles so schön da gestanden, weil das alles in dem Viertel war (zeigt auf den ersten Quadranten).

Georg: Man muss da/

(Beschriftet die Koordinaten der Punkte A und B.)

Georg: Also ich muss da auf die x-Koordinaten schauen. Da muss ich vier minus minus drei rechnen und dann komme ich auf sieben. Und genauso mache ich das bei der y-Koordinate.

Lukas: Aja, so ist das gegangen.

(Zeile 1279-1285)

Lukas und Georg bieten verschiedene Möglichkeiten an den fehlenden Eckpunkt des Parallelogramms zu eruieren. Darüber hinaus wenden sie bewusst eine Definition der Gleichheit von Vektoren an.

Georg: Man kann sich BC ausrechnen (gemeint ist der Vektor BC). Und D ist dann gleich A plus BC-Pfeil, weil BC hat dieselbe Richtung wie AD, es ist parallel, also man kann es verschieben, ja und so kommt man dann auf D.

I: Ja, Lukas was schreibst du? Du sagst/

Lukas: Also ich habe D ist gleich A plus C minus B (schreibt  $D = A + (C - B)$  ).

- Georg: Oder man kann sich auch ausrechnen BA (gemeint ist der Vektor BA) und dann plus C. Das ist dann dasselbe.
- I: So wie ihr das aufgeschrieben habt, würdet ihr sagen, dass der Vektor BC gleich dem Vektor AD ist?
- Lukas: Ja, weil sie die gleiche Richtung, Orientierung und Länge haben.
- Georg: Ja, genau.

(Zeile 1288-1298)

Georg und Lukas haben mit der letzten Überprüfungsaufgabe keine Schwierigkeiten und stellten richtige Formeln auf:

- Georg: Also M ist gleich K plus einhalb mal KG-Pfeil.
- Lukas: (Überlegt) Ich habe M ist gleich K plus einhalb mal G minus K. ich gehe also vom Krankenhaus weg in Richtung KG-Pfeil, weil das ist ja G minus K, und davon gehe ich halt nur die Hälfte.

(Zeile 1304-1307)

### 3.2.3.2. Thomas und Manuel

Im nächsten Interview mit Thomas und Manuel, war schnell zu erkennen, dass es sich bei Manuel um einen guten Mathematiker handelte, während Thomas eher im Hintergrund blieb und womöglich manche Aussagen von Manuel übernahm.

Nichtsdestoweniger stimmen beide zu, dass die Vektoren addierbar seien (vgl. Zeile 1308-1311). Thomas skizziert als Begründung folgendes:

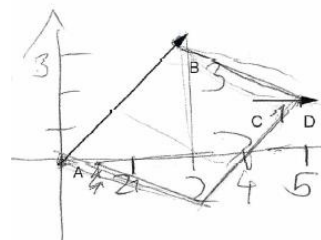


Abb. 14: Vektoraddition Thomas\_1

(vgl. Zeile 1318).

- I: Wo wäre bei dir das Addierte? Was addierst du?
- Thomas: Die Punkte. Aber ich habe keine Punkte, das ist das Problem.
- I: In der Angabe steht, kann man AB-Pfeil und CD-Pfeil addieren. Das sind ja Pfeile und keine Punkte. Also kann man die Pfeile miteinander addieren?

(Zeile 1319-1322)

Nun erklärt Manuel, dass er das grafisch mit einem Parallelogramm lösen würde, für ihn die rechnerische Variante aber viel angenehmer ist (vgl. Zeile 1323-1330).

I: Ok. Thomas, wie würdest du jetzt vorgehen?

(Thomas schweigt)

I: Also für dich ist es jetzt ein Problem, dass du die Koordinaten der Pfeile nicht gegeben hast?

Thomas: Genau.

I: Brauchen wir die Koordinaten überhaupt, dass wir die Pfeile addieren können?

Thomas: Nein.

I: Ok, die Frage ist jetzt nur noch, was ich dann mit den Pfeilen machen muss, um sie zu addieren?

Thomas: (Überlegt) Das kann man grafisch nicht lösen.

Manuel: **Doch.**

I: Ok, Thomas, schau einmal auf den Laptop. Hilft es dir etwas, wenn der CD-Pfeil auf der x-Achse liegt?

Thomas: Ja dann ist es ja ganz anders, weil dann kann ich ja quasi ein Dreieck machen

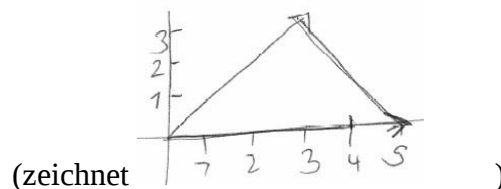


Abb. 15: Vektoraddition Thomas\_2

I: Also du verlängerst den CD-Pfeil und machst dann noch eine Verbindung zwischen den beiden Pfeilen. Warum machst du das?

Thomas: Weil (...)

I: Noch einmal die Frage, kann man sie überhaupt addieren?

Thomas: Man kann sie nicht addieren. Das geht nicht. Ohne Zahlen kann man das nicht.

I: Wenn wir uns an das erinnern, was der Manuel zu Beginn gemacht hat, nämlich die Koordinaten der Pfeile schätzen. Dann ist doch der Manuel zu dem Entschluss gekommen, man kann sie addieren und man kann sogar alle Pfeile addieren.

Thomas: Ja, ok, das geht schon.

I: Also gibst du mir Recht, dass ich rechnerisch zwei Pfeile immer addieren kann?

Thomas: Ja.

I: Wenn ich sie also rechnerisch addieren kann, muss ich sie logischerweise auch grafisch addieren können.

Thomas: Eigentlich schon.

Manuel: Parallel verschieben und anhängen.

Thomas: Ach ja, stimmt.

(Zeile 1331-1361)

Manuel erklärt anfangs bei der Aufgabe des Verbindungsvektors: „Weil wenn wir A minus B rechnen, gehen wir in die falsche Richtung.“ (Zeile 1378). Sein Vorgehen begründet er anschließend genauer: „Also ich stelle mir das so vor. Wenn ich von A in Richtung AB-Pfeil gehe, komme ich zum Punkt B. Und wenn ich das umforme, erhalte ich für AB-Pfeil gleich B minus A.“ (Zeile 1382-1383). Thomas hingegen argumentiert damit, dass er die Koordinaten des Vektors anhand der Zeichnung ablesen würde. Warum man dies allerdings mit der Formel  $\overrightarrow{AB} = B - A$  berechnet, kann er nicht erklären (vgl. Zeile 1386-1388). Die Therapie wurde abermals mit der mitgebrachten Skizze durchgeführt (vgl. Zeile 1398-1393).

Die Gleichheit der Vektoren wird im folgenden Interviewausschnitt behandelt:

Manuel: Die Frage ist, was ist mit Gleichheit gemeint? Länge, Orientierung und Richtung?

I: Ja, genau.

Thomas: Und wenn das gleich ist, würde ich einmal sagen, sind die Vektoren gleich.

I: Ja, trifft das jetzt bei denen zu?

Manuel: Ja, schon.

I: Thomas, was sagst du dazu? Ah, ich sehe schon, du zeichnest ein Koordinatensystem dazu.

Thomas: Ohne Zahlen das zu lösen ist ein Wahnsinn.

I: Also du tust dir schwer überhaupt Aufgaben ohne Zahlen zu lösen?

Thomas: Ja.

I: Verstehe. Naja, jetzt wo du das Koordinatensystem gezeichnet hast, kannst du ja auch die Koordinaten bestimmen.

Thomas: Eins, eins würde ich sagen.

I: Ok und sind die jetzt gleich?

Thomas: Ja, sie können gleich sein. In dem Fall sind sie gleich.

I: Wann sind zwei Vektoren immer gleich? Welche Eigenschaften müssen gleich sein?

Thomas: Länge, Richtung und Orientierung.

(Zeile 1395-1411)

Manuel hat mit der nächsten Aufgabe abermals keine Probleme und schreibt die Formel  $M = A + (B - A) * 0,5$  auf (vgl. Zeile 1413). „Also, ich gehe vom Punkt A weg und gehe den Vektor AB entlang, aber halt nur bis zur Hälfte und dann bin ich beim Mittelpunkt.“ (Zeile 1415-1416). Auch Thomas kann eine entsprechende Formel aufstellen, nämlich  $M = \frac{A+B}{2}$  (vgl. Zeile 1418), hat aber bei der Begründung Schwierigkeiten und lässt sich schließlich von seinem Weg abbringen:

I: Thomas, du streichst deine Formel wieder durch. Warum?

Thomas: Naja, ich weiß nicht ob das wirklich stimmt.

I: Was hast du dir dabei gedacht, als du die Formel aufgeschrieben hast?

Thomas: Naja, ich will die Strecke, also rechne ich A plus B und wegen dem Mittelpunkt rechne ich noch durch zwei.

I: Ich kann dir sagen, deine Formel stimmt. Allerdings gefällt mir die Interpretation nicht. Was meinst du mit der Strecke?

Thomas: Na das von A nach B.

I: Du meinst also den Vektor.

Thomas: Ja, den meine ich.

I: Aber wir haben ja zuvor gesagt, dass man sich den Vektor zwischen zwei Punkten mit der Differenz ausrechnet, also B minus A.

Thomas: Das habe ich mir ja dann auch gedacht und deshalb hab ich es durchgestrichen.

(Zeile 1419-1432)

Manuel wird gebeten die von ihm aufgeschriebene Formel so weit wie möglich zu vereinfachen. Dabei erkennt Thomas, dass seine Formel in der von Manuel enthalten ist (vgl. Zeile 1435-1437).

Manuel und Thomas haben bei der ersten Aufgabe innerhalb der Überprüfungsphase keine Probleme. Die Schüler erkennen schnell, dass eine Addition der Vektoren erforderlich ist (vgl. Zeile 1438-1440). Sie erklären ihr Vorgehen:

I: Wie kommt ihr jetzt auf das Ergebnis?

Manuel: Im Prinzip haben wir nur rechte Winkel also bekommen wir ein Rechteck.

Thomas: Ja, mit dem Kräfteparallelogramm.

I: Stimmt genau, weil ein Rechteck ist ja eine spezielle Form eines Parallelogramms. Thomas, wo wäre dann bei dir der Gesamtvektor?

Thomas: Ja, da wo die Resultierende ist.

(Zeile 1441-1446)

Thomas gibt schon vor der Bearbeitung der nächsten Aufgabe, die sich um den Verbindungsvektor dreht, auf und kann sich an die vorangegangene Therapie nicht mehr erinnern. Auch Manuel hat zu Beginn Schwierigkeiten, kann aber nach einigen Überlegungen die Aufgabe lösen.

Thomas: Ich kann nur die Formel. Das ist immer so in Mathe. Ich kann nie etwas beweisen.

Manuel: Das ist jetzt nur blöd, weil das da drüben liegt. (Rechnet) Also ich würde das wieder so wie vorher machen, nämlich B ist der Punkt A plus AB-Pfeil.

Thomas: Ja, ich muss wieder B minus A rechnen, weil wenn ich A minus B rechnen würde, dann wär die Orientierung anders.

I: Ja, das stimmt, aber warum rechne ich überhaupt minus? Wie komme ich auf sieben und minus drei?

Thomas: Ich finde das blöd, dass das jetzt da drüben liegt und nicht so wie vorher (Gemeint ist, dass der Vektor quadrantenübergreifend liegt.)

Manuel: Ah, ich weiß es schon. Das war das mit dem Steigungsdreieck. Also ich muss auf die x- und die y-Koordinaten schauen und die einzeln subtrahieren. Dann kann ich den Vektor ablesen. (Erklärt anhand seiner Skizze sein Vorgehen.)

Thomas: Ach, ja. So ist das gegangen.

(Zeile 1449-1461)

Thomas und Manuel zeigen ebenfalls ihr Können und mathematisches Verständnis beim Berechnen des fehlenden Eckpunkts eines Parallelogramms:

Manuel: Also ich rechne mir den Vektor AB aus und rechne den dann von C weg.

Thomas: Ich würde das so machen, BC kann ich mir ja ausrechnen. Und dann verschiebe ich das parallel und komme dann zu D (schreibt  $A + \overrightarrow{BC} = D$ ).  
(Während Thomas rechnet, wird Manuel separat befragt.)

I: Manuel, ist jetzt AB-Pfeil gleich dem DC-Pfeil?

Manuel: Ja, exakt, weil sie stimmen in allen Eigenschaften überein.

I: Die da wären?

Manuel: Orientierung, Richtung und Länge.

I: Ok, Thomas, jetzt an dich die Frage. Sind in deinem Fall BC-Pfeil und AD-Pfeil gleich?

Thomas: Ja, schon.

I: Und warum?

Thomas: Wegen der Richtung, der Länge, Betrag/

I: Mit dem Betrag meinst du die Länge?

Thomas: Ja. Und die Orientierung ist auch gleich.

(Zeile 1463-1476)

Manuel kann wie zuvor die Aufgabe problemlos lösen. Nun zeigt auch Thomas, dass er verstanden hat, was hinter der allgemeinen Mittelpunktsformel  $M = \frac{A+B}{2}$  steckt:

Manuel: Also das soll genau dazwischen liegen. Ich nenne das BG und das ist dann K, also das Krankenhaus und ich gehe Richtung der Gabelung, also muss ich da G minus K rechnen und weil ich ja nur bis zu Mitte gehe, muss ich das noch mal einhalb rechnen.

I: Gut, was sagt der Thomas?

Thomas: Ja, ich hätte das jetzt auch so gemacht, nur dass ich halt meine Formel verwenden würde. Also G plus K durch zwei. Aber das haben wir ja vorher eh besprochen, dass Manuel seine Formel, dasselbe wie meine ist. Also ich würde auch vom Krankenhaus weggehen und in die Richtung halt.

(Zeile 1478-1485)

### 3.2.3.3. Peter und Armin

Im darauffolgenden Interview mit Peter und Armin sind beide der Meinung, dass man die gegebenen Vektoren addieren kann (vgl. 1487-1488). Die Argumentation von Peter ist jedoch fraglich.

I: Warum kann ich die beiden Vektoren addieren?

Peter: Weil wenn ich den Betrag der beiden Vektoren habe, kann ich sie addieren.

I: Kannst du sie auch ohne den Betrag addieren?

Peter: Nein.

I: Warum nicht?

Peter: Oja (.) keine Ahnung.

I: Meinst du mit dem Betrag, dass du die Koordinaten der Vektoren kennen musst?

Peter: Ja, genau. Wenn ich die habe, kann ich sie addieren. Wobei (..) man kann das auch ohne dem, also einfach AB-Pfeil und CD-Pfeil addieren.

(Zeile 1489-1497)

Es scheint, dass Peter langsam auf den richtigen Weg kommt, von dem er sich aber schnell wieder abbringen lässt.

I: Ok, wie macht man das grafisch?

Peter: Ohne den Längen?

I: Meinst du damit die Koordinaten der Vektoren?

Peter: Ja, das meine ich eh. Aber ohne denen kann ich das ja nicht.

(Zeile 1497-1501)

Nicht nur Peter, sondern auch Armin bereitet diese Aufgabe Schwierigkeiten.

Armin: Also ich würde sie anhängen.

I: Ok, wie würdest du das machen?

Armin: Ich überlege noch, ob ich den Normalvektor davon nehmen soll.

I: Wäre das dann noch derselbe Vektor?

Armin: Nein.

(Armin und Peter schweigen)

(Zeile 1502-1507)

Daraufhin schlage ich den beiden vor, sich die Pfeile mit Koordinaten vorzustellen. Sofort erkennt Peter, dass man nun  $\overrightarrow{CD}$  verschieben und ihn an  $\overrightarrow{AB}$  anhängen kann. Armin bemerkt, dass man den Vektor deshalb nicht ändern darf (vgl. Zeile 1508-1514). Für Peter ist es nun auch kein Problem mehr die Addition rechnerisch zu lösen. „Erste Koordinate plus erste Koordinate und zweite plus zweite.“ (Zeile 1518). Zur grafischen Begründung

können beide Schüler allerdings nichts beitragen (vgl. Zeile 1519-1521). Deshalb greife ich auf den Therapieversuch zurück, bei dem  $\overrightarrow{CD}$  lediglich auf der x-Achse liegt. Armin erkennt, dass es möglich ist diesen Pfeil an den Anfangspunkt B anzuhängen und anschließend den Summenvektor zu bilden (vgl. Zeile 1524-1529).

Armin und Peter wissen zwar, mit welcher Formel der Verbindungsvektor berechnet wird, sie sind aber überfragt, warum genau diese Formel verwendet wird. Armin versucht zu begründen „[...] man muss minus rechnen, weil B größer ist als A.“ (Zeile 1544). Nachdem von mir ein Gegenbeispiel vorgeführt wird, wird die Therapie wieder mittels vorbereiteter Skizze begonnen (vgl. Zeile 1548-1554).

Armin und Peter zeigen bei der Gleichheit von Vektoren keinerlei Fehlvorstellungen. Erwähnenswert ist allerdings die Begrifflichkeit bzgl. der „Größe eines Vektors“:

Armin: Die Vektoren sind gleich, weil sie parallel sind, gleiche Größe haben/

I: Was meinst du mit gleicher Größe?

Peter: Na gleich lang.

(Zeile 1557-1559)

Obwohl es anfänglich so wirkt, als könnte Armin die Aufgabe nicht lösen, zeigen Peter und er nach wenigen Momenten, dass sie sehr wohl die Materie verstehen:

(Armin schreibt  $\frac{1}{2}(B - A)$  )

Armin: Ah, da fehlt noch was. Das ist erst die Strecke.

I: Die Strecke?

Armin: Ja, also das ist der Vektor und man muss ihn an A noch dranhängen.

I: Warum muss man ihn an A dranhängen?

Peter: Das ist ja nur der halbe Vektor vom Ganzen. Und der könnte sonst irgendwo sein.

(Zeile 1564-1569)

Die Überprüfungsphase wird mit der Addition von Vektoren eingeleitet. Armin und Peter zeigen keine Fehlvorstellungen mehr. Einzig und allein die Sinnhaftigkeit ihrer Skizzen lässt zu wünschen übrig. Peter entwirft:

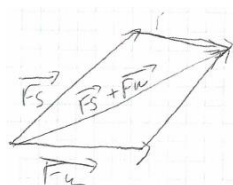


Abb. 16: 1. Überprüfungsaufgabe Peter

Während Armin Ähnliches skizziert:

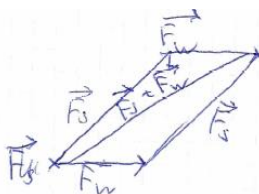


Abb. 17: 1. Überprüfungsaufgabe Armin

(vgl. Zeile 1571). Nach der gegebenen Hilfestellung, dass es sich um einen fallenden Körper handelt, bessern beide ihre Skizzen dementsprechend aus (vgl. Zeile 1572-1575).

Peter und Armin berechnen den Verbindungsvektor abermals richtig, allerdings haben beide überhaupt keine Idee, wie sie ihr Vorgehen begründen sollen (vgl. Zeile 1577-1581).

Peter berechnet den Eckpunkt D mit derselben Vorgehensweise, die zuvor auch schon Manuel gewählt hat, denn er geht den Weg  $D = C - \overrightarrow{AB}$ . Armin hingegen berechnet den fehlenden Eckpunkt indem er aufschreibt:  $D = A + \overrightarrow{BC}$  (vgl. Zeile 1585). Nachdem untereinander die verschiedenen Lösungswege analysiert werden, wird das Gespräch auf die Gleichheit der Vektoren gelenkt.

I: Jetzt frage ich euch, ist der Vektor BC derselbe Vektor wie der Vektor AD?

Peter: Ja, das ist derselbe.

Armin: Ja.

I: Ok, und warum ist es derselbe?

Peter: Richtung, Länge und Orientierung.

(Zeile 1586-1590)

Da Peter und Armin zuvor schon keine Schwierigkeiten mit der Formel des Mittelpunkts und deren Begründung hatten, war zu erwarten, dass dies bei der Überprüfungsaufgabe

beibehalten bleibt, was auch so war (vgl. 1592-1599). Hervorzuheben ist allerdings folgende Textpassage:

(Armin schreibt zuerst  $M = \frac{1}{2}(A + B)$ , streicht diese Formel anschließend durch und schreibt dann  $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}) + A$ )

I: Wieso hast du die erste Formel durchgestrichen?

Armin: Weil das andere für mich logischer ist.

(Zeile 1594-1597)

### 3.2.3.4. Erich und Clemens

Erich und Clemens haben ebenfalls Schwierigkeiten damit, dass zu den Pfeilen keine expliziten Koordinaten angegeben sind.

I: Kann man AB-Pfeil und CD-Pfeil addieren?

Erich: Ja, man kann sie addieren, wenn man weiß wie lang sie sind.

I: Das heißt, du bräuchtest unbedingt Koordinaten, um die Pfeile zu addieren?

Erich: Ja.

I: Könntest du sie grafisch auch addieren?

Erich: Ja, schon.

I: Clemens, was glaubst du?

Clemens: Ja, ich glaube auch. Weil man kann sie bestimmt irgendwie setzten, dass sie dann eine Größe ergeben.

I: Wie meinst du das genau?

Clemens: Ich würde den Pfeil einfach so raufsetzen, damit sich dann eine Strecke ergibt:

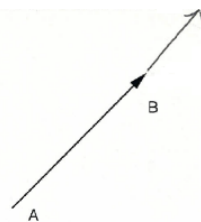


Abb. 18: Vektoraddition Clemens

Erich: Ich würde das auch so machen, weil wenn man die Länge (Anm. der Verfasserin: Gemeint sind die Koordinaten) nicht weiß, kann man es nicht anders machen.

Clemens: Und das Addierte ist dann das Ganze.

(Zeile 1600-1614)

Die Therapie wird damit begonnen, dass die Fragen „Wie wird ein Vektor überhaupt definiert?“ und „Welche Eigenschaften hat ein Vektor?“ gestellt werden. Gemeinsam erarbeiten die Schüler, dass ein Vektor durch seine Richtung, Länge und Orientierung definiert ist. Erich erkennt anschließend, dass diese Eigenschaften, insbesondere die Richtung des ursprünglichen Vektors, mit dem neuen Vektor nicht übereinstimmen (vgl. Zeile 1615-1639).

I: Richtig. Wie schaffe ich das jetzt, dass die Richtung gleich bleibt?

Clemens: Ich kann ihn einfach da oben dran hängen und dann bleibt die Richtung gleich. Also habe ich noch denselben Vektor.

(Zeile 1640-1642)

Anschließend kann die grafische Addition von beiden Schülern durchgeführt werden (vgl. Zeile 1643.1657).

Erich argumentiert ähnlich wie Armin bei der Frage, warum man für den Verbindungsvektor  $B - A$  berechnen muss: „Weil der Vektor in die Richtung geht, glaube ich (Zeigt am Vektor entlang). Naja (..) ich muss B minus A, weil B höher ist.“ (Zeile 1664-1665), während Clemens zugibt: „Ich habe mir einfach die Formel so gemerkt.“ (Zeile 1667). Anhand der mitgebrachten Skizze wird den Schülern der Vorgang erklärt (vgl. Zeile 1670).

Erich und Clemens haben mit der Entscheidung über die Gleichheit von Vektoren keine Schwierigkeiten und zeigen daher auch keine Fehlvorstellung:

I: Zur Gleichheit von Vektoren. Gilt AB-Pfeil ist gleich CD-Pfeil?

Erich: Ja.

I: Warum?

Erich: Weil es genau der gleiche Vektor ist mit genau der gleichen Richtung  
//Orientierung und Länge.//

Clemens: //Orientierung, Richtung und Länge.//

(Zeile 1671-1676)

Erich und Clemens schreiben beide die richtige Formel  $M = (A + B) * 0,5$  auf. Jedoch haben sie keine Idee, wie sie diese begründen können (vgl. Zeile 1678-1681). Erich versucht dennoch seine Formel zu beweisen:

Erich: Ja, weil das ist jetzt zum Beispiel der Vektor (zeigt in seiner Skizze auf den Vektor AB) und dann ist da der Mittelpunkt.

I: Aber warum rechnest du dann A plus B, wenn du den Vektor AB damit meinst?

Erich: Aja, dann B minus A mal null Komma fünf.

I: Das heißt du nimmst den ganzen Vektor und davon dann die Hälfte.

Erich: Ja.

I: Wenn du das so machst, dann/

Erich: Ah, ich weiß es schon. Da haben wir irgendwas hergeleitet und herausgekommen ist dann A plus B mal null Komma fünf.

I: Deine Formel ist auch richtig. Mich würde aber interessieren, wie man auf diese Formel kommt? Was steckt dahinter?

(Schweigen.)

I: Dein Ansatz war ja gar nicht schlecht. Aber was brauche ich unbedingt, um zu einem Punkt zu kommen?

(Schweigen.)

I: Also einerseits einen Vektor, den hast du ja eh schon aufgeschrieben und andererseits ein Punkt von dem ich weggehe.

Clemens: Einen Startpunkt.

Erich: Also B minus B minus A mal null Komma fünf (Erich schreibt  $M = B - (B - A) * 0.5$ )

I: Ja, so kann man es auch machen, ist aber meiner Meinung nach kompliziert. Was wäre, wenn du von A weggehen würdest?

Erich: Aso, dann hätte ich A plus den Rest halt.

I: Genau, das stimmt. Jetzt würde ich aber noch gerne wissen, wie man auf die Formel kommt, die ihr am Anfang aufgeschrieben habt, weil die war ja richtig. Was steckt dahinter?

(Zeile 1682-1706)

Auf der einen Seite wird die Therapie damit begonnen, dass die Frage gestellt wird „[...] was brauche ich unbedingt, um zu einem Punkt zu kommen?“ (Zeile 1694-1695).

Nachdem dies geklärt ist, kann von den Schülern eine richtige Vorgehensweise erarbeitet werden. Auf der anderen Seite wissen sie immer noch nicht, was hinter ihrer ursprünglich aufgestellten Formel steckt. Deshalb wird im Anschluss die Herleitung des Mittelpunkts einer Strecke Schritt für Schritt besprochen (vgl. Zeile 1709-1710).

Obwohl Erich zu Beginn des Interviews große Schwierigkeiten mit der grafischen Vorstellung von Vektoren zeigte, löst er die erste Überprüfungsaufgabe sofort mittels geometrischer Vektoraddition:

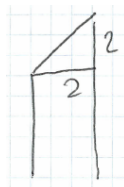
Erich: Ich würde einmal ein Koordinatensystem zeichnen. Und der Körper fliegt runter, aber auch in die Richtung (Zeigt nach Westen.), also habe ich wieder ein Parallelogramm.

I: Das stimmt. Das heißt, du hast das jetzt sofort grafisch gelöst und nicht rechnerisch. Eigentlich so, wie du es zuerst gar nicht wolltest.

Erich: Ja, genau.

(Zeile 1712-1716)

Erich und Clemens ergeht es wie dem zuvor interviewten Schülerpaar. Beide können den Vektor berechnen, haben aber keine Begründung parat (vgl. Zeile 1726-1731). Clemens kann sich noch vage an die vorangegangene Therapie erinnern und meint: „Das war das mit zwei zwei“ (Zeile 1725) und zeichnet das Steigungsdreieck mit den Koordinaten der



zuvor bearbeiteten Aufgabe:

Abb. 19: Steigungsdreieck Clemens

(Zeile 1725). Dieses Wissen kann er jedoch nicht auf die aktuelle Aufgabe ummünzen, weshalb die Therapie nochmals durchgeführt werden muss.

Bei der nächsten Aufgabe gelingt es Erich zwar zu erklären wie er vorgehen würde, er schafft aber nicht den Transfer seine Überlegungen mathematisch niederzuschreiben (vgl. Zeile 1738-1747). Währenddessen wirkt Clemens sehr unkonzentriert und desinteressiert und nimmt kaum am Gespräch teil. Erst als gemeinsam ein Lösungsweg der Aufgabe besprochen wird, kann die Gleichheit von Vektoren behandelt werden.

I: Ok, und jetzt noch eine andere Frage. Wenn ich den Vektor BC habe, ist das derselbe wie der AD?

Erich: Von der Richtung und der Orientierung, ja. Er ist halt weiter drüben. Aber von der Länge auch.

I: Heißt das jetzt, dass die Vektoren gleich sind?

Erich: Ja.

Clemens: Ja, die sind gleich.

(Zeile 1760-1766)

Erich und Clemens verwenden beide die Formel  $M = (K + G) * 0.5$  (vgl. Zeile 1768-1770). Anscheinend hat aber die vorangegangene Therapie nicht gewirkt, da keiner von beiden sie erklären kann. Erich versucht immerhin einen Weg zu finden:

I: Wie kommt man auf die Formel?

Erich: Bei dem Beispiel braucht man das ja nicht, da muss man einfach nur rechnen.

I: Das stimmt, ich frage aber trotzdem nach und will dadurch wissen, ob ihr das verstanden habt.

Erich: Also ich muss G minus K.

I: Dann erhalte ich was?

Erich: Die Strecke KG.

I: **Naja**, den Vektor KG.

Erich: Ja, ok. Dann muss ich KG durch zwei, oder mal null Komma fünf. Dann ist der Mittelpunkt KG mal null Komma fünf.

I: Wenn du diesen Vektor hast, kannst du den aber irgendwo hingeben (Dies wird mit einer Skizze veranschaulicht.). Woher soll ich dann wissen, dass ich gerade bei der Schule herauskomme?

Erich: Ich muss noch das K dazu rechnen.

(Zeile 1771-1784)

### 3.2.3.5. Markus und Dominik

Dominik und Markus sind beide davon überzeugt, dass die Addition der Vektoren nicht möglich ist (vgl. Zeile 1786-1788).

I: Warum glaubt ihr das?

Dominik: Weil der eine ist waagrecht und der andere geht so schräg hinauf.

I: Hilft es euch weiter, wenn der eine Vektor auf der x-Achse liegt? (Zeigt Therapiebeispiel am Laptop.) Kann man dann die beiden Vektoren addieren?

(Schweigen.)

I: Oder ist es genau dasselbe?

Dominik: Ja, ist dasselbe.

I: Warum sollte man zwei Vektoren nicht miteinander addieren können?

Dominik: Wenn sie eine andere Richtung haben, so wie da.

Markus: Ich glaube, man kann sie subtrahieren.

I: Also du sagst, man kann sie subtrahieren, aber nicht addieren.

Markus: Naja, dann wird man sie addieren auch können.

(Zeile 1789-1800)

Da Dominik noch immer der Meinung ist, dass man die beiden Vektoren nicht addieren kann, wird eine weitere Therapie angewendet. Demnach wird Dominik dazu aufgefordert sich Koordinaten für die gegebenen Vektoren zu überlegen, um anschließend nochmals die Frage zu beantworten, ob die Pfeile nun addierbar sind. Dominik bejaht diese Frage (vgl. Zeile 1801-1805).

I: Dann komme ich noch mal auf meine Frage zurück. Warum sollte man die nicht addieren können?

Markus: Weil es irgendwie verwirrend aussieht.

I: Gut, für dich ist das verwirrend. Wir haben aber jetzt herausgefunden, dass man die Vektoren addieren kann. Jetzt bleibt nur mehr die Frage, wie man sie grafisch addiert.

Dominik: Kann man das nicht mit einem Parallelogramm machen?

I: Ja, genau. Wie funktioniert das dann?

Dominik: Ich nehme den einen Pfeil und hänge ihn an den anderen dran. Dann spiegelt man das und die Diagonale ist dann das Addierte.

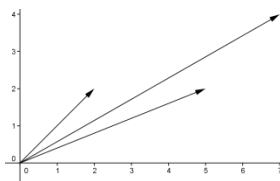
Markus: Ach ja, da muss man parallel verschieben.

I: Super. Und ist es egal, ob ich den Pfeil unten oder oben an den anderen anhänge?

Markus: Ja, ich glaube schon, dass das egal ist.

(Zeile 1812-1823)

Wie auch die Schüler zuvor, berechnen Dominik und Markus den Verbindungsvektor exakt. Beim Anfertigen der Skizze fällt auf, dass „[...] Markus nicht nur die Punkte, sondern auch den Verbindungsvektor als Ortsvektoren“ (Zeile 1831) einzeichnet. Dies



sieht wie folgt aus:

Abb. 20: Verbindungsvektor Markus.

Daraufhin wird mit der Therapie begonnen und Markus soll folgende Therapieaufgabe, welche mit Hilfe der Informationen, die im Vorfeld durch die LehrerInneninterviews gewonnen wurden, lösen:

Markus ist auf Schatzsuche. Dazu geht er vom Ort  $A=(5 \mid 2)$  zwei Kilometer in östliche Richtung und danach zwei Kilometer in nördliche Richtung. Dort angekommen findet er tatsächlich einen Schatz. Mit welchen Koordinaten trägt er seinen Fund in der Schatzkarte ein? Skizziere seinen zurückgelegten Weg.

Markus: Naja, ich müsste mir den Punkt einzeichnen und dann zwei nach Osten und zwei nach Norden gehen, dass ich zum Schatz komme.

I: Ja, genau. Was ist jetzt der Unterschied zu deiner vorherigen Version?

Markus: Dass ich jetzt keinen Ortsvektor mehr habe.

I: Richtig, das heißt, sobald du Punkte gegeben hast, solltest du den Verbindungsvektor nicht als Ortsvektor einzeichnen.

(Zeile 1837-1842)

Was allerdings der Formel  $\overrightarrow{AB} = B - A$  zugrunde liegt, wissen die Schüler nicht, weshalb mit der bereits bekannten Skizze die Therapie fortgeführt wird (vgl. Zeile 1842-1846).

Dominik kann seine Vermutung hinsichtlich der Gleichheit der Vektoren nicht mathematisch begründen, deshalb wird der Therapievorgang mittels Erarbeitung der Eigenschaften eines Vektors durchgeführt:

Dominik: Sie sind gleich, weil sie halt gleich ausschauen.

I: Was macht einen Vektor aus? Welche Eigenschaften hat ein Vektor?

(Zeile 1855-1856)

Dominik und Markus haben sich aus dem Unterricht die Formel  $M = \frac{A+B}{2}$  gemerkt. Dominik gibt sofort zu, dass er nicht wisse, was hinter dieser Formel steckt, während Markus zumindest erkennt, dass durch  $A + B$  nicht der Vektor  $\overrightarrow{AB}$  berechnet wird (vgl. Zeile 1861-1863).

I: Was bedeutet das A plus B?

Dominik: Ich weiß es nicht.

I: Warum rechne ich plus?

Markus: Da rechnet man sich nicht den Vektor aus, sondern die Koordinaten (..) also man will ja den Punkt.

(Zeile 1864-1868)

Anschließend wird abermals mit der Herleitung des Mittelpunkts einer Strecke therapiert (vgl. Zeile 1872-1876).

Sowohl Dominik als auch Markus berechnen den Gesamtvektor der ersten Überprüfungsaufgabe richtig. Die Skizze sieht allerdings dann wie folgt aus:

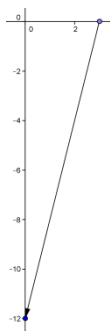


Abb. 21: 1. Überprüfungsaufgabe Dominik und Markus (vgl. Zeile 1878-1879)

„Schaut euch noch einmal die Koordinaten von eurem Vektor an. Stimmen die mit der Skizze überein?“ (Zeile 1880-1881). Sofort bemerken beide Schüler, dass der Gesamtvektor „verkehrt“ eingezeichnet ist (vgl. Zeile 1882).

Bei Dominik und Markus zeigt die Therapie bei der nächsten Aufgabe ihre positiven Auswirkungen.

Markus: Also wieder B minus A.

I: Ja, ihr habt das beide richtig berechnet. Warum rechne ich minus?

Markus: Wegen dem Steigungsdreieck. Also wenn ich da A und da B habe/

Dominik: Dann habe ich da oben sieben, weil ich ja vier minus minus drei rechnen muss und da habe ich minus drei, da gehe ich ja drei runter, wegen eins minus vier.

(Zeile 1885-1889)

Für Dominik und Markus stellt die Aufgabe des gegebenen Parallelogramms kein Hindernis dar. Beide erkennen schnell, dass der Vektor  $\overrightarrow{BC}$  parallel zu verschieben ist (vgl. Zeile 1891-1896). Für den Eckpunkt verwenden beide Schüler die Formel  $D = A + \overrightarrow{BC}$ . Die Frage, ob die Vektoren  $\overrightarrow{BC}$  und  $\overrightarrow{AD}$  gleich sind, bejahen die Buben und nennen als Begründung die Tatsache, dass sowohl Richtung, Orientierung wie auch Länge übereinstimmen (vgl. Zeile 1897-1901).

Markus und Dominik verwenden abermals  $M = \frac{1}{2} * (A + B)$  als Mittelpunktsformel. Dieses Mal können sie allerdings erklären bzw. begründen, wie sie bei dieser Formel vorgehen (vgl. Zeile 1903-1907).

### 3.2.3.6. Lara und Veronika

Lara hat mit der ersten Aufgabe keine Probleme. Sie erklärt: „Man legt das CD an den A Punkt an und dann zeichnet man so Parallele und dann ist die Diagonale das Ergebnis von der Addition. Oder man schreibt die Koordinaten auf und dann muss man die zwei ersten Koordinaten addieren und die zweiten Koordinaten.“ (Zeile 1912-1914). Veronika äußert sich zu dieser Aufgabe nicht. Die Frage, ob es einen Unterschied ausmacht  $\overrightarrow{CD}$  an den Punkt A oder den Punkt B anzuhängen, bereitet beiden anfangs Kopfzerbrechen. Nachdem sie aber eigenständig das Parallelogramm aufzeichnen, sind die Unsicherheiten beseitigt (vgl. Zeile 1915-1925).

Lara gibt als eine der wenigen Interviewten eine akzeptable Begründung für die Formel des Verbindungsvektors an. „Naja, ich habe B minus A deswegen, weil ich habe so das Dreieck. Und da gehe ich zwei rüber und zwei rauf. Also ich muss bei A, also von den sieben, fünf abziehen, um zu dem ersten zweier zu kommen (Zeigt dies anhand ihrer Skizze.). Und bei der zweiten Koordinate mache ich das ja dann auch so.“ (Zeile 1939-1942).

Bei der darauffolgenden Aufgabe kennt Lara zwar die Eigenschaften eines Vektors, ist sich aber trotzdem nicht im Klaren, ob man von zwei gleichen Vektoren sprechen kann:

Lara: Naja, sie haben dieselbe Richtung und dieselbe Länge, aber die Punkte heißen halt anders.

I: Ja, wobei Punkte sind da ja gar nicht eingezeichnet.

Lara: Achso, naja, wenn sie den gleichen Betrag haben, dieselbe Richtung und die gleiche Orientierung/

I: Was sagt uns das jetzt?

Veronika: Dass sie gleich sind.

I: Lara, was glaubst du?

Lara: Ja, also es kommt darauf an, ob sie genau identisch sind.

I: Was heißt für dich identisch?

Lara: Wenn sie übereinander liegen würden, wären sie gleich.

(Zeile 1947-1957)

Lara verwendet bei ihren Überlegungen das Wort identisch, erklärt aber auch zugleich was sie darunter versteht. Die Therapie wird wie folgt begonnen:

I: Ok, schau einmal auf das Beispiel am Laptop. Da siehst du zwei Vektoren, die jeweils die Koordinaten zwei und zwei haben. Lara, zieh mal bitte den einen Vektor über den anderen. (...) Hat sich jetzt was verändert?

Lara: Nein, es ist immer noch derselbe Vektor. Also sind sie gleich, ok.

I: Genau, es sind halt verschiedene Repräsentanten des Vektors, aber der Vektor an sich ist der gleiche.

(Zeile 1958-1963)

Lara hat mit der folgenden Aufgabe keine Probleme und kann eine geeignete Formel für den Mittelpunkt einer Strecke angeben. Veronika hingegen schreibt  $M = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ . Lara hilft ihr bei der anschließenden Therapie, bei der gezeigt wird, dass der Vektor  $\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$  irgendwo im Koordinatensystem liegen kann und auf keinen Fall den Mittelpunkt beschreibt:

Veronika: Ja, ich würde zuerst den AB-Pfeil ausrechnen und dann muss ich ja nur halb so weit gehen bis ich beim Mittelpunkt bin.

I: Ok, schau einmal auf meine Zeichnung. Du halbiert also deinen Pfeil, der schaut dann zirka so aus, und erhältst dadurch auch wieder einen **Pfeil** und keinen Punkt, das ist ganz wichtig. Und dieser Pfeil könnte irgendwo liegen. Weil wie wir vorher gesagt haben, sind diese alle gleich. Also der könnte da, da oder da liegen. Was muss ich machen, dass ich wirklich zum Mittelpunkt hinkomme?

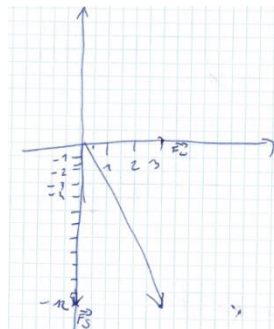
Lara: Also ich würde mir auch AB-Pfeil ausrechnen, damit ich weiß, in welche Richtung ich gehen muss. Und dann nehme ich davon die Hälfte und gehe vom Punkt A weg.

I: Genau, das ist ganz entscheidend, dass du vom Punkt A weggehen musst, Veronika. Das heißt, um zu einem Punkt zu gelangen, musst du auch von einem Punkt weggehen.

Veronika: Also da noch A plus (Ergänzt ihre Formel.).

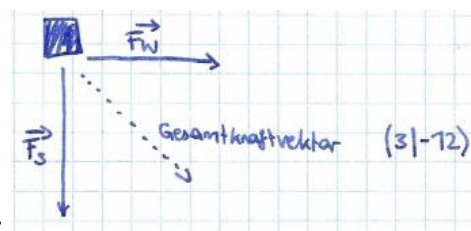
(Zeile 1967-1978)

Veronika und Lara haben mit der ersten Überprüfungsaufgabe keine Probleme sie zu lösen.



Veronika skizziert:

Abb. 22: 1. Überprüfungsaufgabe Veronika



Während Lara eine ähnliche Zeichnung anfertigt:

Abb. 23: 1. Überprüfungsaufgabe Lara

(vgl. Zeile 1981-1982).

I: Wie kommt ihr beiden jetzt auf die Addition?

Veronika: Also wieder mit dem Kräfteparallelogramm. Ich habe das zwar nicht eingezeichnet, aber das hat eh alles einen rechten Winkel.

Lara: Ja, ich habe es mir auch nur dazu gedacht.

(Zeile 1983-1986)

Obwohl Veronika in der ersten Bearbeitungsphase des Verbindungsvektors sehr passiv agierte und eher Lara das Sprechen überließ, zeigt sie nun ihr Können. Beide Schülerinnen fertigen eine Skizze an anhand derer sie ihr Vorgehen begründen (vgl. Zeile 1988-1989).

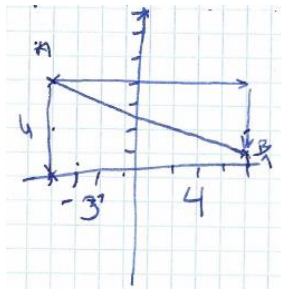


Abb. 24: 2. Überprüfungsaufgabe Veronika

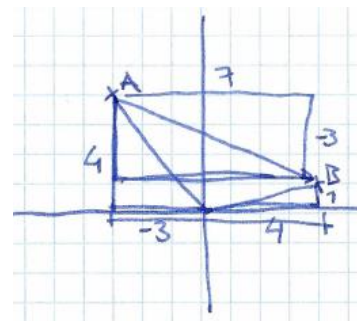


Abb. 25: 2. Überprüfungsaufgabe Lara

Lara: Also ich habe hier die Koordinaten von den Punkten eingezeichnet und dass ich dann auf den Vektor AB komme, muss ich zuerst vier minus minus drei rechnen und dann eins minus vier.

Veronika: Ja, ich habe das auch so, weil beim Vektor AB muss ich ja dann sieben hinüber und drei hinunter und deswegen habe ich da minus drei, weil ich hinunter muss.

(Zeile 1990-1994)

Obwohl Lara zuvor noch Schwierigkeiten hatte die Gleichheit zweier Vektoren zu erfassen, ist es nun überhaupt nicht mehr problematisch (vgl. 2001-2003).

Lara hat, wie zu erwarten war, auch bei der Überprüfungsaufgabe des Mittelpunkts keine Schwierigkeiten (vgl. Zeile 2007-2008). Erfreulich ist, dass Veronikas Fehlvorstellung beseitigt werden konnte. Sie verwendet die Formel  $M = K + \frac{\overrightarrow{KG}}{2}$  (vgl. Zeile 2006) und begründet ihr Vorgehen. „Ich gehe vom Krankenhaus weg, also das ist mein Start, und dann gehe ich in Richtung der Gabelung, aber nur bis zur Hälfte.“ (Zeile 2010-2011).

### 3.2.3.7. Max und Ben

Bei dem Interviewpartnern Ben und Max ist deutlich ersichtlich, dass Max eher die Rolle des Redners übernimmt, während sich Ben sehr stark im Hintergrund aufhält. Die Addition von zwei Vektoren bereitet Max keine Schwierigkeiten (vgl. Zeile 2020). Seine Skizze wird dazu verwendet, Ben den Sachverhalt zu erklären, da ich mir nicht sicher sein kann, dass auch er die Aufgabe selbstständig lösen hätte können. „Ben, wenn wir die Zeichnung jetzt noch auf ein Parallelogramm ergänzen, sieht man das dann noch besser. (Wird ergänzt.) Und dieses Kräfteparallelogramm bekommt man dadurch, indem man einen der beiden Vektoren parallel verschiebt und an den anderen anhängt, genauso wie der Max das hier gezeichnet hat.“ (Zeile 2028-2032).

Ben und Max haben ebenfalls wie ihre Schulkollegen keine passable Begründung für ihren Rechenvorgang. Dennoch versuchen sie ihr Vorgehen zu begründen.

Max: Endpunkt minus //Anfangspunkt//.

Ben: //Weil wir// das so gelernt haben.

(Zeile 2035-2036)

Die übliche Therapie wird gestartet (vgl. Zeile 2041-2042).

Bei der Gleichheit von Vektoren zeigen Ben und Max keinerlei Fehlvorstellungen. Es ist für sie offensichtlich, dass beide Vektoren in ihren Eigenschaften übereinstimmen (vgl. Zeile 2045-2048)

Bei der nächsten Aufgabe schreiben Ben und Max beide die Formel  $M = \frac{1}{2} * (A + B)$  auf. Sie schaffen es aber nicht eine Begründung zu liefern (vgl. Zeile 2051-2056). Max bietet nun eine weitere Möglichkeit an, den Mittelpunkt zu berechnen: „Man könnte auch noch den Vektor ausrechnen, also B minus A, und davon die Hälfte nehmen und dann zu A dazu geben. Oder dasselbe kann man von B aus auch machen.“ (Zeile 2060-2061). Ben äußert sich zu der neuen Idee seines Schulkollegen folgendermaßen: „Eigentlich ist es ja logisch.“ (Zeile 2063). Gemeinsam wird die neu gewonnene Formel umgeformt, wodurch die ursprüngliche Formel, die beide Schüler zu Beginn aufgeschrieben haben, hergeleitet wird (vgl. Zeile 2064-2065).

Ben und Max verstehen bei der ersten Überprüfungsaufgabe sofort was zu tun ist und addieren die Vektoren. In der anschließenden Skizze verwenden sie ein Kräfteparallelogramm (vgl. Zeile 2067-2069).

Ben und Max berechnen den Verbindungsvektor, wie auch ihre Schulkollegen und –kolleginnen zuvor exakt, sie bleiben aber jegliche Begründung schuldig (vgl. Zeile 2071-2074).

Ben wählt eine sehr interessante Möglichkeit den fehlenden Eckpunkt D des Parallelogramms zu berechnen. „Das geht mit parallel verschieben. Man könnte das so machen, dass man von B weggeht und BC und BA anstückelt. (Schreibt  $D = B + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ .) Also weil man ja ein Parallelogramm hat.“ (Zeile 2076-2078). Max geht wie folgt vor:

Max: Ich habe D ist gleich A plus die Strecke BC aufgeschrieben.

I: Was ist bei dir die Strecke?

Max: Naja, der Vektor.

(Zeile 2080-2082)

Von beiden wird sofort erkannt, dass es sich um gleiche Vektoren handelt, womit die Aufgabe richtig gelöst wird (vgl. Zeile 2083-2086).

Max nimmt an der Diskussion der letzten Aufgabe leider überhaupt nicht teil. Ben hingegen bemüht sich, macht allerdings einen schweren Fehler, den er aber durch eine Hilfestellung ausbessern kann:

Ben: Naja, das ist ganz einfach. Da kennt man die Punkte und man kann sie einzeichnen. Und dann kann ich mir die Strecke ausrechnen mit KG-Pfeil und durch zwei dividieren.

I: Naja, das stimmt nicht ganz. Du rechnest dir nur einen Vektor aus und der Vektor kann **irgendwo** liegen.

Ben: Also dann muss ich noch K plus schreiben.

(Zeile 2088-2092)

### 3.2.3.8. Rene und Tobias

Rene löst die Aufgabe und erklärt sein Vorgehen bei der Addition zweier Vektoren wie folgt einwandfrei: „Mit einem Kräfteparallelogramm. Also den Vektor hier dran zeichnen und auch hier oben, dann ist das ein Parallelogramm und hier ist dann die Addition.“ (Zeile 2099-2100). Tobias allerdings pflichtet der Meinung seines Schulkollegen lediglich bei und hält sich ansonsten zurück.

Die Formel des Verbindungsvektors begründet Rene ebenfalls wie Max:

Rene: Weil es Anfangspunkt minus Endpunkt ist.

I: Ja, schon, aber ich würde gerne wissen **warum** man das so macht.

Rene: Also wenn man B haben will rechnet man A plus den Vektor. (Schreibt  $B = A + \vec{a}$ , wobei  $\vec{a} = B - A$ .) Und wenn man das hat, zählt man einfach die Komponenten zusammen.

(Zeile 2112-2116)

Wie schon zuvor Armin, erwähnt auch Rene das Wort „groß“ in Zusammenhang mit der Gleichheit von Vektoren: „Sie sind gleich groß, also gleich lang.“ (Zeile 2122). Gemeinsam schaffen sie es, die Eigenschaften eines Vektors zu nennen, um anschließend zu untermauern, dass die beiden Vektoren gleich sind (vgl. Zeile 2123-2124).

Ein spannendes Gespräch bzgl. des Mittelpunkts entwickelt sich zwischen Rene und Tobias, während Tobias die Formel  $M = \frac{1}{2} * (A + B)$  verwendet und Rene zuerst  $B - A = \vec{a}$  berechnet und danach  $M = A + \frac{\vec{a}}{2}$  aufschreibt (vgl. Zeile 2127-2128):

I: Tobias, wie kommst du auf die Formel?

Tobias: Also wir haben zwei Vektoren, also A und B, und die Strecke AB wollen wir halbieren.

I: Warum addiert man da jetzt die Punkte und subtrahiert sie nicht?

Tobias: Also (...)

I: Rene, du darfst ihm gerne helfen.

Rene: Ja, aber ich mag die Formel nicht. Ich mache das immer so, wie ich es aufgeschrieben habe. Weil bei mir habe ich den Vektor a-Pfeil und wenn ich davon die Hälfte nehme ist er ja nur mehr halb so lang. Wenn ich den dann zum Punkt A dazuzähle, komme ich zum Mittelpunkt.

- I: Ja, das ist eine gute Begründung. Kommen wir zurück zur Formel vom Tobias. Warum rechne ich da die zwei Punkte zusammen?
- Rene: Ich kann ja auch die Punkte als Vektoren auffassen.
- I: Genau, als Ortsvektoren.
- Tobias: Aso, und wenn ich die Ortsvektoren dann addiere, bekomme ich den Vektor zwischen A und B. Und den halbiere ich dann und bin beim Mittelpunkt.
- I: Gut, das ist auch eine Begründung. Allerdings muss man aufpassen, da der Mittelpunkt dann auch wieder ein Ortsvektor ist. Aber sonst stimmt das.

(Zeile 2129-2145)

Bei der ersten Überprüfungsaufgabe haben Tobias und Rene keine Schwierigkeiten diese entsprechend zu lösen. Tobias erklärt: „Also der Körper liegt im Nullpunkt und da gehen auch die anderen Kräfte weg und die muss man addieren. Das macht man halt mit dem Kräfteparallelogramm.“ (Zeile 2148-2149)

Tobias, der zuvor eine Fehlvorstellung bzgl. des Verbindungsvektors zeigte, kann nun mit seinem gewonnenen Wissen glänzen. „Wegen dem Steigungsdreieck. Also auf der x-Achse/ man muss die x-Koordinaten anschauen, also bekomme ich die eine Seite von dem Dreieck, wenn ich die x-Koordinate von B minus der x-Koordinate von A rechne. Und bei der anderen Seite geht es genauso.“ (Zeile 2153-2155).

Rene berechnet in der nächsten Aufgabe den Punkt D mit der Formel  $D = C + \vec{a}$ , wobei  $\vec{a} = A - B$ . Tobias schreibt  $D = C + (-\overrightarrow{AB})$  (vgl. Zeile 2157-2158).

- I: Ist der Vektor AB derselbe Vektor wie der Vektor DC in eurer Skizze?
- Tobias: Ja, weil sie dieselbe Länge und Orientierung haben.
- I: Was fehlt da noch?
- Rene: Dieselbe Richtung.

(Zeile 2159-2162)

Bei der letzten Aufgabe gehe ich hauptsächlich auf Tobias ein, da er zuvor eine leichte Fehlvorstellung zeigte. Für die Überprüfungsaufgabe verwendet er die Formel  $M = \frac{1}{2} * (K + G)$  (vgl. Zeile 2164). Anschließend wird gemeinsam besprochen, was hinter dieser Formel steckt:

- I: Tobias, was bedeutet deine Formel?
- Tobias: Also, es sind Ortsvektoren und wenn ich die addiere, dann habe ich den Vektor dazwischen und das rechne ich dann durch zwei und hab den Mittelpunkt.
- I: Auf was muss man dabei aufpassen?
- Tobias: Dass der Mittelpunkt auch ein Ortsvektor ist.

(Zeile 2165-2169)

### **3.3. Interpretation der Ergebnisse**

Im Anschluss werden die Daten aus dem Kapitel 3.2. analysiert und interpretiert.

#### **3.3.1. Videografie**

Schon in Kapitel 3.2.1. wurde erwähnt, dass im Vergleich zu den beobachteten Unterrichtsstunden sehr wenige Situationen vorkamen, in denen ersichtlich wurde, dass SchülerInnen Fehlvorstellungen aufweisen. Möglicherweise ist dies abhängig vom Unterrichtsstil der Lehrperson, der vermehrt frontal geprägt ist. Dennoch wurden SchülerInnen von Stunde zu Stunde an die Tafel geholt bzw. in ein LehrerIn-SchülerIn-Gespräch miteinbezogen. Eine weitere Möglichkeit Fehlvorstellungen zu entdecken, bietet die Kontrolle der Hausübungen. Die Schwierigkeit dabei ist, mögliche Ursachen für Fehlvorstellungen zu eruieren und diese unmittelbar zu beseitigen. Der Themenbereich Hausübungen konnte allerdings in dieser Unterrichtsbeobachtung nicht beurteilt werden. Eine weitere Möglichkeit Fehlvorstellungen der SchülerInnen zu entdecken, liefert die regelmäßige Überprüfung der Grundkompetenzen, die in der beobachteten Klasse üblich ist. Innerhalb der ersten 12 Mathematikstunden mit dem Thema Vektorrechnung wurden zwei Testungen durchgeführt, wobei letztere für die Inhalte dieser Arbeit nicht relevant ist.

Max ist sich in den ersten Stunden der Vektorrechnung unsicher, was der Berechnung des Verbindungsvektors zugrunde liegt und erfragt dies im Zuge einer Aufgabe, zu der ein Schulkollege von der Lehrperson befragt wird. Max bekommt aber lediglich die Antwort in der letzten Schulübung nachzuschauen. Womöglich stand die Lehrperson unter Zeitdruck und intervenierte daher nicht oder wollte sich einfach auf den Schüler konzentrieren, der gerade eine Aufgabe lösen sollte. Da sich aber spätestens im Kapitel

3.3.4. zeigt, dass viele SchülerInnen ähnliche Probleme mit dem Verbindungsvektor haben, wäre es durchaus legitim gewesen auf Peters Frage mit einer entsprechenden Intervention zu reagieren.

Bei der Überprüfung der Grundkompetenzen ist für diese Arbeit vor allem die zweite Aufgabe sehr interessant.

2. Gegeben sind die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , die in der untenstehenden Abbildung als Pfeile dargestellt sind. Stellen Sie  $\vec{b} - \vec{a}$  ausgehend vom Punkt C durch einen Pfeil dar!

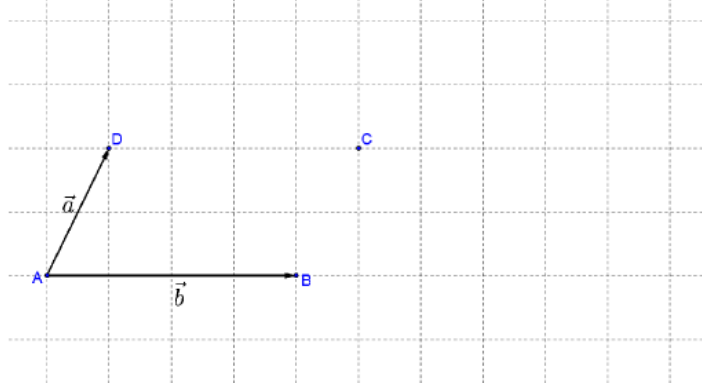


Abb. 26: Überprüfung Grundkompetenzen 2. Aufgabe

In Kapitel 3.2.1. wurde bereits erwähnt, dass lediglich 20% der SchülerInnen diese Aufgabe vollständig lösen konnten. Spannend ist dabei die Tatsache, dass davon alle die Subtraktion der Vektoren  $\vec{b} - \vec{a}$ , was im Grunde nichts weiter als eine Addition darstellt, nämlich  $\vec{b} + (-\vec{a})$ , rechnerisch gelöst haben, um anschließend den erhaltenen Vektor vom Punkt C aus einzuzeichnen. Unter den 32% der SchülerInnen, die nur Teilpunkte erhielten, versuchten 6 SchülerInnen die Aufgabe grafisch zu lösen, ein Schüler sowohl rechnerisch als auch grafisch und ein weiterer nur rechnerisch. Somit fällt auf, dass die rechnerische Variante weitaus erfolgreicher funktionierte, während das geometrische Lösen den Schülern und Schülerinnen schwerer zu fallen scheint.

All jene SchülerInnen, die keinerlei Punkte für deren Lösungsweg erhielten, versuchten dies ebenfalls auf drei verschiedene Arten:

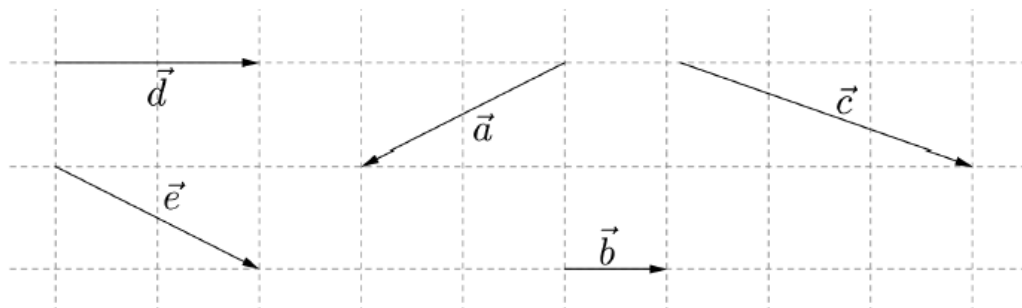
~30%..... grafisch

~8%..... rechnerisch

~4%..... grafisch und rechnerisch

Über das geometrische Vorstellungsvermögen sagt auch die vierte Aufgabe sehr viel aus. Diese wurde entweder mit richtig ( $\hat{=}$  2 Punkten) oder falsch ( $\hat{=}$  0 Punkte) bewertet.

4. In der Abbildung sind fünf Vektoren als Pfeile dargestellt.



Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

|                       |                               |                             |                       |                               |
|-----------------------|-------------------------------|-----------------------------|-----------------------|-------------------------------|
| $\vec{a} = -\vec{e}$  | $\vec{b} + \vec{e} = \vec{c}$ | $\vec{d} = 2 \cdot \vec{b}$ | $\vec{c} = \vec{e}$   | $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b}$ |
| <input type="radio"/> | <input type="radio"/>         | <input type="radio"/>       | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>         |

Abb. 27: Überprüfung Grundkompetenzen 4. Aufgabe

Nahezu erschreckend ist die Tatsache, dass nur 3 von 23 SchülerInnen die Aufgabe entsprechend lösen konnten.

Lukas bemerkt in einer weiteren Mathematikstunde, dass zwei Vektoren, die am Smartboard gezeigt werden, nicht gleich sind. Die Lehrperson fasst diese Meldung auf und bestätigt die Aussage von Lukas, da die Pfeile nicht gleich orientiert sind, weist aber gleichzeitig darauf hin, dass die Vektoren auf einer Geraden liegen und daher parallel sind. Lukas wiederholt im Anschluss seine Wortmeldung, da er offensichtlich für sich selbst die Eigenschaften der Gleichheit von Vektoren überprüft und abspeichert. Eventuell hätte die Lehrperson in dieser Situation noch die Frage stellen können: „Was müsste geändert werden, dass man von gleichen Vektoren sprechen kann?“. Somit hätte sofort geklärt werden können, welche Eigenschaften der Vektoren übereinstimmen müssen, sodass gleiche Pfeile entstehen.

In der neunten Unterrichtsstunde zu Vektoren findet ein Gespräch zwischen Max, Flo, Ralf und der Lehrperson statt. Die Inhalte der vorangegangenen Stunde werden wiederholt, welche sich um den Einheitsvektor drehen. Dabei wird zuerst Flo befragt, der sich aber nicht dazu äußert. Die Lehrperson lässt aber nicht locker und es wird deutlich ersichtlich, dass ihr die Wiederholung sehr wichtig ist. Ralf argumentiert nun, dass der Einheitsvektor dazu dient die Längen der Vektoren zu berechnen. Die Lehrperson negiert diese Aussage

und möchte erfragen, welches „Werkzeug“ zum Berechnen der Längen von Vektoren notwendig sei, was bedeutet, dass die Lehrperson auf die offensichtliche Fehlvorstellung von Ralf eingehen will. Dabei übergeht die Lehrkraft ihre eigene Frage und geht, ohne eine Antwort erhalten zu haben, sofort wieder zum Einheitsvektor über.

Hier wurde der Ansatz einer Therapie und daher die Handlungsfähigkeit der Lehrperson erkenntlich, die jedoch schließlich keine Wirkung zeigt.

Bei der Erarbeitung des Mittelpunkts fällt der Unterrichtsstil der Lehrperson sehr stark auf. Von ihr werden viele Fragen gestellt, die zum Teil gar nicht beantwortet werden bzw. bei denen die Lehrperson den Schülern und Schülerinnen gar keine Zeit lässt diese zu kommentieren. Daher werden die Formulierungen der Lehrerfragen enger und lassen kaum noch Spielraum für Antwortmöglichkeiten. Bauersfeld (1982, S. 162) spricht von dem sogenannten Trichter-Muster, da das Verlaufsschema des Gesprächs an eine „Handlungsverengung durch Antworterwartung“ erinnert. Fünf Phasen werden dabei nach Bauersfeld durchlaufen:

1. Der Schüler [sic!] erkennt die mathematische Operation nicht, mit der die gegebenen Größen zu verknüpfen sind, bzw. er ist nicht imstande, einen erforderlichen Schluß [sic!] zu ziehen.

Unerheblich ist dabei, ob eine direkte Lehrerfrage [sic!] diesen Zustand auslöst bzw. einleitet oder ob der Lehrer [sic!] auf andere Weise auf diese aktuelle Schwierigkeit des Schülers [sic!] aufmerksam wird, z.B. beim Durchgehen während der Gruppenarbeit.

2. Der Lehrer [sic!] setzt mit einer kurzen Frage nach der Operation bzw. dem zu ziehenden Schluß [sic!] ein. Die Frage wird vom Schüler [sic!] falsch oder gar nicht beantwortet.

Die Verstärkung für den Lehrer [sic!] bleibt aus, daher konzentriert er sich stärker auf die vom Schüler [sic!] erwartete Antwort.

3. Der Lehrer [sic!] setzt sein Bemühen um eine einsichtsvolle Antwort des Schülers [sic!] fort, indem er entweder Elemente der erwarteten Antwort erfragt oder indem er die Voraussetzungen des Denkschrittes (Schlusses) noch einmal betont hervorhebt. Beides geschieht in der Absicht, den Schüler [sic!] wenigstens einen Teil des erforderlichen Schlusses selbst ziehen zu lassen. Die Verständigungslücke

wird jedoch nicht mehr grundsätzlich angegangen, sondern nur noch aufgabenspezifisch.

4. Weiteres Ausbleiben der erwarteten Antwort führt zur Verengung der Lehrerbemühungen [sic!] auf das bloße Hersagen der erwarteten Antwort unter raschem Abbau der auf Selbstständigkeit und auf Einsicht des Schülers [sic!] gerichteten Handlungsziele und unter gleichzeitig wachsender Konfliktneigung bzw. Emotionalisierung.
5. Der Prozeß [sic!] endet, wenn die erwartete Antwort fällt, und zwar unabhängig davon, ob sie der Schüler [sic!] endlich gibt oder ob sie dem Lehrer [sic!] unterläuft bzw. von ihm absichtlich mitgeteilt wird. Auch in jedem Zwischenstadium kann z.B. der Schüler [sic!] das Abbrechen des Musters bewirken, indem er die erwartete Antwort einwirft („Ach, natürlich, das ist ...!“).

(Bauersfeld, 1982, S. 162)

Bei der letzten markanten Situation, bei der Fehlvorstellungen von Schülern und Schülerinnen ersichtlich werden und daher die didaktische Handlungsfähigkeit der Lehrperson gefragt ist, geht es in erster Linie um die Teilung einer Strecke, die mittels Geogebra wiederholt wird. Diese erfordert stets die Eingabe eines Anfangspunktes. Da der Schüler, der zur Bearbeitung der Aufgabe an der Reihe ist, eine Fehlvorstellung zeigt und den eben genannten Umstand nicht berücksichtigt, erscheint am Computer ein fragwürdiges Ergebnis. Daher handelt die Lehrperson und verweist auf die Berechnung des Mittelpunkts einer Strecke. Ralf kann die Formel  $M = \frac{1}{2} * (A + B)$  wiedergeben. Dies ist aber nicht das, worauf die Lehrperson hinaus will, denn sie möchte eine weitere Variante hören, bei der das Verwenden eines Anfangspunktes deutlicher wird, nämlich „man geht vom Punkt A weg und geht dann Richtung AB-Pfeil.“ (Zeile 77-78).

Der Ansatz, auf den Mittelpunkt zu verweisen, war geschickt gewählt. Schlussendlich wird das Erwartete von der Lehrperson selbst genannt wurde.

### **3.3.2. LehrerInneninterviews**

In den folgenden Unterkapiteln werden die LehrerInneninterviews interpretiert. Dabei wird unter anderem auf die Diagnosefähigkeit der Lehrpersonen eingegangen, was bedeutet, ob

Lehrkräften Fehlvorstellungen ihrer SchülerInnen bewusst sind oder nicht. Weiters werden die erhaltenen Therapiemöglichkeiten herausgefiltert.

### **3.3.2.1. Vektoraddition**

Die erste befragte Lehrperson sieht bei der Vektoraddition das große Problem darin, dass SchülerInnen keine Vorstellung der geometrischen Addition von Pfeilen haben. Eine Möglichkeit wäre es deshalb, Geogebra zu verwenden, um ihnen besser das parallele Verschieben der Vektoren verdeutlichen zu können. Diese Maßnahme soll beiden Fehlvorstellungen entgegenwirken. Die Lehrkraft erwähnt, dass man bei der Therapie stark auf die Länge und Richtung der Pfeile hinweisen solle. Die Orientierung wird dabei nicht erwähnt, was verwundert. Möglicherweise setzt die Lehrperson voraus, dass es für die SchülerInnen ohnehin klar sei diese nicht verändern zu dürfen. Dennoch wäre eine Thematisierung des Begriffs Orientierung im Zusammenhang mit der Richtung eines Vektors wünschenswert, da es nach Jarmer (1995, S. 152) bei SchülerInnen immer wieder auf Grund des Sprachgebrauchs zu Unklarheiten zwischen diesen Termini kommt. Wie die SchülerInnen schlussendlich die Bildung des Summenpfeils realisieren sollen, wurde nicht erwähnt.

Als ersten Therapieversuch lieferte die Lehrperson die Idee, einen der vorgegebenen Vektoren entlang einer Achse zu nehmen. Diese Variante soll es der/dem SchülerIn ermöglichen, leichter zu erkennen, dass der Vektor parallel zu verschieben ist. Eine weitere Möglichkeit SchülerInnen zu therapieren, wäre es, sobald die Vektoren aneinandergehängt wurden, das entstehende Parallelogramm, sowie die Diagonale, die dem Summenpfeil entspricht, deutlich einzuzeichnen. Weitere Interventionsmaßnahmen blieben aus, weshalb ich eine Therapiemöglichkeit vorschlug, die beinhaltet, die Aufgabe arithmetisch mit konkreten Zahlenwerten zu bearbeiten, um zumindest der Fehlvorstellung entgegenwirken zu können, dass die Addition nicht funktioniert. Diese Möglichkeit wurde von der Lehrperson für gut empfunden. Im selben Atemzug erwähnte sie aber auch das Problem des Transfers von der arithmetischen Berechnung zu der geometrischen Darstellung.

Die nächste Lehrperson schlug ebenfalls vor, den Schülern und Schülerinnen das Parallelverschieben mittels Computereinsatz vor Augen zu führen. Mit der Verwendung eines Smartboards, welche in dieser Schule in jeder Informatik-Oberstufenklasse zu finden sind, hilft sich diese Lehrperson, um den SchülerInnen zu verdeutlichen, dass sich jeder

Pfeil verschieben lässt, ohne dass sich dessen Koordinaten verändern. Sie ging anschließend konkret auf die erste, von mir thematisierte, Fehlvorstellung ein und würde dabei hinweisen, dass der verschobene Vektor nun nicht mehr derselbe sei. Eine Erklärung, wie die SchülerInnen schlussendlich den Summenvektor erhalten, bleibt aus. Es wurde zwar nicht erwähnt, aber es lässt sich vermuten, dass die zweite Fehlvorstellung durch das genannte Parallelverschieben von der Lehrperson therapiert wird.

Einen Therapieversuch für die erste Fehlvorstellung liefert sofort die dritte interviewte Lehrperson. Sie würde erstmals auf die Eigenschaften eines Vektors verweisen, nämlich Länge, Richtung und Orientierung. Diese Bestandteile eines Vektors dürfen nicht mutwillig geändert werden. Die Lehrperson machte sich auch Gedanken über eine adäquate Therapieaufgabe. Diese könnte eine Schatzsuche beinhalten, bei der Vektoren addiert werden müssen, um den Schatz zu finden. Die Aufgabe soll bewirken, dass SchülerInnen, die die erste Fehlvorstellung haben, erkennen, dass der Lösungsweg nicht stimmt, da sie den Schatz nicht finden und sie somit zumindest teilweise therapiert werden. Auf die zweite Fehlvorstellung ging die Lehrperson nicht ein, weshalb ich abermals die Therapiemöglichkeit vorschlug, welche die arithmetische Berechnung von Vektoren beinhaltet. Die Lehrkraft befand die Idee für gut und räumte ein, dass im Anschluss daran die SchülerInnen nach der Lage dieses berechneten Vektors befragt werden können. Mittels Parallelverschiebung wäre es dadurch möglich die geometrische Addition darzustellen.

Die vierte interviewte Lehrperson stellte zu Beginn gleich klar, dass ihr die zwei mitgebrachten Fehlvorstellungen noch nie untergekommen sind, was einen Einblick in die Diagnosefähigkeit der Lehrperson zulässt, da die wissenschaftliche Untersuchung der Arbeit sehr wohl die genannten Fehlvorstellungen zu Tage bringt.

Dies kann daran liegen, dass die Lehrkraft diese Fehlvorstellungen in ihrem Unterricht nicht aufkommen lässt. Wahrscheinlicher ist aber die Tatsache, dass diese falschen Vorstellungen einfach nicht im Unterricht ersichtlich werden. Nichtsdestotrotz bat die Lehrkraft bzgl. der ersten Fehlvorstellung eine Therapiemöglichkeit an, die den physikalischen Zugang zur Vektorrechnung betrifft und ein Kräfteparallelogramm verlangt. Bekommt man die SchülerInnen dazu sich zu überlegen was es bedeuten kann, wenn zwei Kräfte in dieselbe Richtung wirken, ist es möglich, falsche Vorstellungen zu beseitigen. Eine Aufgabe bei der die Kräfte eine wichtige Rolle spielen und die gleichzeitig

zur Fehlervermeidung dienen soll, wäre, wenn ein Flugzeug mit bestimmter Geschwindigkeit, während kräftiger Wind herrscht, fliegt und die tatsächlich Flugrichtung berechnet werden soll. Diese Aufgabe diene als Inspiration für die Überprüfungsaufgabe, welche die befragten SchülerInnen lösen sollten.

Um der Fehlvorstellung „Das geht nicht.“ entgegenzuwirken, schlägt die Lehrperson vor die Koordinaten der Vektoren ablesen zu lassen, um sie anschließend rechnerisch zu addieren.

Das parallele Verschieben der Vektoren wäre eine weitere Möglichkeit SchülerInnen zu therapieren, wobei die Lehrkraft dabei auf Repräsentanten eines Vektors und somit auf das Pfeilklassenmodell hinweisen würde.

Für die befragte Person ist es aber unvorstellbar, dass SchülerInnen behaupten, die Vektoren könne man nicht addieren, da sie sofort bei anderen Schülern oder Schülerinnen sehen, dass es doch funktionierte. Dennoch kam dies in meinen SchülerInneninterviews vor.

In weiterer Folge bedeutet das, dass SchülerInnen selbstständig die zweite Fehlvorstellung teilweise beseitigen, sobald sie das Gegenteil bei Schulkollegen oder –kolleginnen sehen, was impliziert, dass die Lehrperson nicht in diesen Lernprozess eingreifen würde.

Neben der zuvor interviewten Lehrperson erzählt auch die fünfte Lehrkraft, dass sie die erste Fehlvorstellung noch nie erlebt habe. Sie gibt allerdings auch zu, dass sie nicht alles sehen kann und daher die Option besteht, dass SchülerInnen diese Fehlvorstellung aufweisen. Dennoch geht die Lehrperson auf die erste Fehlvorstellung ein und würde bei gegebener Situation die SchülerInnen nach den Eigenschaften eines Vektors fragen. Diese dürfen natürlich nicht verändert werden und das muss der Klasse klar sein.

Sollten SchülerInnen der Meinung sein, dass man die Vektoren nicht addieren könne, würde die Lehrperson die Frage stellen, warum die Addition zweier Vektoren nicht funktionieren sollte. Als einzige der interviewten LehrerInnen ist diese Lehrperson gegen den Vorschlag einer arithmetischen Berechnung der Vektoren. Spannend ist auch die Aussage, dass die Lehrperson wenige SchülerInnen kenne, die Probleme beim geometrischen Addieren zweier Vektoren haben. Im Anschluss wird sich zeigen, dass mehr als die Hälfte der befragten SchülerInnen zumindest teilweise Fehlvorstellungen hinsichtlich der Vektoraddition zeigen.

Die zweite Fehlvorstellung würde so therapiert werden, indem einer der Vektoren verschoben und anschließend an den anderen angehängt wird. Bei diesem Vorgehen würde sich die Lehrkraft computerunterstützt mittel Geogebra behelfen.

### **3.3.2.2. Verbindungsvektor**

Die erste Lehrperson analysiert zuerst die zweite Fehlvorstellung, die ihr bis dato noch nie untergekommen war und auch in meiner Feldforschung nicht vorkam. Sie betont, dass es wichtig sei, den Schülern und Schülerinnen den Unterschied zwischen Addition und Subtraktion sowie zwischen Punkt und Vektor, gemeint ist aber vermutlich zwischen Punkt und Pfeil, zu verdeutlichen, um diese Fehlvorstellung zu vermeiden. Um Verwirrungen zu vermeiden lässt sie Punkte niemals als Ortsvektoren einzeichnen, sondern stellt diese mittels Kreuze dar, was wohl auch der ersten Fehlvorstellung entgegenwirken soll.

Anhand einer geometrischen Einführung mittels Skizze würde sie SchülerInnen therapieren, die die dritte Fehlvorstellung zeigen, um eine Vorstellung zu schaffen. Eine komplexere Aufgabe wäre es dann, wenn der Verbindungsvektor in mehreren Quadranten liegen würde. Diese Idee wurde für die Überprüfungsphase herangezogen.

Die anschließend interviewte Lehrperson kann sich nicht vorstellen, dass jemanden den Verbindungsvektor als Ortsvektor einzeichnet, was meine Studie, siehe Kapitel 3.3.3, widerlegt. Die Diagnosefähigkeit der Lehrkraft ist spätestens jetzt kritisch zu betrachten, da ein Schüler aus ihrer Mathematikklasse genau diese Fehlvorstellung zeigte. Für realistischer halte ich die Meinung der Lehrperson, dass die zweite Fehlvorstellung wahrscheinlich kaum bei Schülern und Schülerinnen vorhanden sein wird.

Sofern sich SchülerInnen nicht vorstellen können, wie die Berechnung bzw. Veranschaulichung des Verbindungsvektors aussehen könnte, würde die Lehrkraft auf ihr Einführungsschema zurückgreifen, nämlich die Punkte im Koordinatensystem einzeichnen, deren Koordinaten darstellen, um somit die Subtraktion nachvollziehen zu können.

Die Lehrperson empfindet den Gebrauch von Geogebra für sehr hilfreich, nicht nur wegen dem besseren Vorstellungsvermögen, sondern auch deshalb, weil das Programm gut zwischen Punkten und Pfeilen unterscheidet.

Die dritte Lehrperson sieht die Darstellung des Verbindungsvektors als Ortsvektor zwar als falsch an, kann sich aber vermutlich schwerwiegendere Fehlvorstellungen ausmalen. Als

Therapie würde sie lediglich darauf hinweisen, dass der Verbindungsvektor von gegebenen Punkt zu Punkt verlaufen muss. Mittel Wanderkartenbeispiel würde sie die SchülerInnen selbstständig bemerken lassen, dass sie mit dieser Vorgangsweise nicht ans Ziel gelangen. Der zweiten Fehlvorstellung würde sie mit einer Erklärung entgegenwirken, indem sie erwähnt, dass man zwischen Punkten und Pfeilen stark unterscheiden muss. Sollte jemand nicht wissen, was zu tun ist, würde die Lehrperson den/die SchülerIn Schritt für Schritt anleiten. Womöglich dient dies dazu, eine erste Vorstellung zu erhalten. Um die Formel  $B - A$  geometrisch transferieren zu können, wäre es erforderlich die Koordinaten einzuzeichnen, um das anschließend entstehende Dreieck zu erhalten.

Die vierte Lehrkraft würde die erste vorgegebene Fehlvorstellung nicht als solche benennen. Die Ausführung wäre laut ihr zwar nicht exakt, aber sie würde nicht von einer Fehlvorstellung besprechen. Interessant wäre es zu wissen, was die Lehrperson explizit unter einer Fehlvorstellung versteht.

Um die dritte Fehlvorstellung zu therapieren, würden die SchülerInnen, die diese Schwierigkeiten haben, ebenfalls angeleitet werden zuerst die Punkte einzuzeichnen, um im Anschluss daran den Verbindungsvektor darzustellen. Die Lehrperson geht dabei weder auf die arithmetische Berechnung noch auf die für viele schwierig zu interpretierende Formel  $B - A$  ein. Dies entspricht für mich nicht einer vielfältigen und ausreichenden didaktischen Handlungsfähigkeit.

Die erste SchülerInnenfehlvorstellung würde von der fünften Lehrkraft ebenso nicht als solche bezeichnet. Nichtsdestotrotz wird dabei die Aufgabe nicht erfüllt und der Ortsvektor mit dem Verbindungsvektor verwechselt. Der zweiten Fehlvorstellung würde die Lehrperson so entgegenwirken, indem sie die Punkte einzeichnen lassen würde, um anschließend zu fragen, wo nun der Vektor liegt, wohin er orientiert ist und welche Richtung er hat. Dieses Vorgehen sehe ich als gute Interventionsmöglichkeit, da die SchülerInnen nun nicht mehr Schritt für Schritt angeleitet werden, sondern angeregt werden selbst zu überlegen. Zur dritten Fehlvorstellung wird keine Therapie geliefert, wobei zu vermuten ist, dass die eben genannte Intervention ebenfalls hier angewendet werden würde.

### 3.3.2.3. Gleichheit von Vektoren

Einen Therapieversuch für die erste Fehlvorstellung liefert die erste Lehrperson. Sie würde die Eigenschaften eines Vektors erarbeiten, um anschließend festzustellen, ob es sich nun um gleiche Vektoren handelt. Erstaunlicherweise nennt sie wiederum nur Richtung und Länge als Merkmale eines Vektors. Eventuell wurde auf die Orientierung lediglich vergessen, sie ohnehin vorausgesetzt oder absichtlich außer Acht gelassen. Das Parallelverschieben ist für sie keine Option. Weitere Vorschläge blieben aus, weshalb ich eine meiner Ideen zu Diskussion stellte, nämlich explizite Koordinaten für die gegebenen Vektoren zu vermuten, um anschließend über die Gleichheit entscheiden zu können. Diese Vorgangsweise wurde honoriert. Auf die zweite Fehlvorstellung wurde nicht konkret Stellung genommen, was vermuten lässt, dass die Therapie mittels Definition eines Vektors auch für diese entsprechend ist. Im Anschluss schlug ich als Überprüfungsaufgabe, ob nun die SchülerInnen die Gleichheit verstanden wurde, ein Parallelogramm vor, dessen fehlender Eckpunkt berechnet werden soll. Die Lehrkraft empfand diese Aufgabe für gut, da bei der Berechnung, die Gleichheit zweier Vektoren erkannt werden muss.

Die zweite Lehrperson sieht die Begründung „Sie sind zwar parallel, haben aber nicht denselben Anfangspunkt (A, C)“ nicht als Fehlvorstellung. Sie ist zwar der Meinung, dass es sich um gleiche Vektoren handelt, die Pfeile aber unterschiedlich sind, da sie verschiedene Repräsentanten desselben Vektors sind. Daraus wird ersichtlich, dass die Lehrkraft mit dem bekannten Pfeilklassenmodell arbeitet.

Aufgaben, bei denen SchülerInnen selbstständig die Gleichheit von Vektoren erfahren, konnten nicht genannt werden. Allerdings wurde die Aufgabe, bei der ein fehlender Eckpunkt eines Parallelogramms berechnet werden soll, für gut empfunden.

Die dritte Lehrperson therapiert beide Fehlvorstellungen, indem sie auf die Definition eines Vektors verweist. Den Vorschlag das Problem arithmetisch zu behandeln könnte sich die Lehrkraft gut vorstellen.

Die vierte interviewte Lehrperson weist anfangs ebenfalls auf die Repräsentanten eines Vektors hin, liefert aber sofort eine Therapiemöglichkeit für beide Fehlvorstellungen, bei der eine dynamische Geometrie eine große Rolle spielt. Dabei sollen mit Hilfe von

Geogebra zwei Vektoren übereinander geschoben werden, um den Schülerinnen und Schülern veranschaulichen zu können, dass es sich um gleiche Vektoren handelt.

Bzgl. der ersten Fehlvorstellung würde die Lehrperson die Frage stellen, was mit dem Wort ident verbunden wird. Wie auch schon einige Befragte zuvor, würde auch diese Lehrkraft mit den Schülerinnen und Schülern klären, was einen Vektor ausmacht, um anschließend zu überprüfen, ob man von Gleichheit sprechen kann. Die zweite Fehlvorstellung würde die Lehrperson auch mit den Eigenschaften eines Vektors therapieren. Die Koordinaten der gegebenen Vektoren ablesen zu lassen, um im Anschluss daran die SchülerInnen zu fragen, ob es sich um gleiche Vektoren handelt, wäre ebenfalls eine Option. Die Verwendung von Geogebra ist für sie auch vorstellbar, was wiederum zeigt, dass das Computerprogramm Geogebra sehr beliebt ist und laut Erfahrung der Lehrpersonen die Vorstellungen der SchülerInnen hilfreich unterstützt. Genauso werden aber auch die Nachteile dieser Dynamischen Geometrie Software genannt.

#### **3.3.2.4. Mittelpunkt einer Strecke**

Die erste Lehrperson geht nicht explizit auf die erste Fehlvorstellung ein, sondern sucht einen Weg diese zu vermeiden. Im Unterricht geht sie so vor, dass sie mittels Vektoraddition, sprich „schrittweiser Mittelpunktformel“, den Mittelpunkt einer Strecke herleitet. Wie sie auf die Fehlvorstellung reagieren würde, wenn sie in späteren Mathematikstunden auftreten würde, erwähnt sie nicht.

Sollte die zweite Fehlvorstellung ersichtlich werden, würde sie den Schülern und Schülerinnen klar machen, dass es notwendig sei, von einem bestimmten Punkt wegzugehen, um zu einem anderen zu gelangen. Dabei deutet die Lehrkraft an, dass der berechnete Vektor  $\frac{1}{2} * \overrightarrow{AB}$  beliebig verschiebbar ist. Sie spricht aus Erfahrung, als sie schildert, dass es sehr schwer sei diese Fehlvorstellung bei SchülerInnen zu beseitigen.

Die zweite Lehrkraft würde hinsichtlich der ersten Fehlvorstellung lediglich auf ein komponentenweises Vorgehen hinweisen, was meiner Meinung nach eine effiziente Lösung des Problems bietet und in meiner Untersuchung positive Auswirkungen zeigte. Die Lehrperson gibt darüber hinaus einen Alternativplan an, sofern die erste Therapie nicht wirken sollte, nämlich die Herleitung der Mittelpunktsformel zu wiederholen.

Als Therapie für die zweite Fehlvorstellung zeigt die Lehrperson, dass dieser Vektor nicht an einen bestimmten Ort gebunden ist. Nur wenn von dem Anfangspunkt gestartet wird, kommt man auch zum gewünschten Mittelpunkt.

Als allgemeinen Therapievorschlagn erwähnt die Lehrkraft eine Skizze zu zeichnen, was sie gerne mit Geogebra macht. Weiters erwähnt sie die einfache Bedienung dieses Programms, wodurch es nur einen geringen Zeitaufwand darstellt.

Die dritte interviewte Lehrperson wirkt der ersten Fehlvorstellung ebenfalls entgegen, indem sie die Formel mittels typischer Herleitung einführt. Dennoch kann sie sich gut vorstellen, dass in einigen Mathematikstunden später, wenn nur noch die Formel  $M = \frac{1}{2} * (A + B)$  verwendet wird, diese oftmals nicht mehr interpretiert werden kann. Weshalb die Lehrkraft in ihrem Unterricht nicht die verständlichere Vorgehensweise mit  $M = A + \frac{1}{2} * \overrightarrow{AB}$  verwendet, wird nicht erwähnt.

Dass bei der zweiten Fehlvorstellung unbedingt ein Anfangspunkt von Nöten ist, demonstriert die Lehrkraft, indem sie den berechneten Vektor als Ortsvektor darstellt, um dadurch den Schülern und Schülerinnen zu vermitteln, dass auf diese Weise der Mittelpunkt nicht erreicht werden kann. Gegen die Verwendung von Ortsvektoren im Mathematikunterricht spricht Malle. Er bezeichnet sie sogar als „schädlich“ (vgl. Malle, 2007).

Ganz egal wie die SchülerInnen argumentieren und begründen, die vierte Lehrkraft erwartet sich der Vollständigkeit halber immer eine Skizze. Bzgl. der ersten Fehlvorstellung wird nicht ersichtlich wie die Lehrperson handeln würde. Sie bemerkt aber, dass die Formel zu einer falschen Interpretation verleiten kann.

Bei der zweiten Fehlvorstellung würde die Lehrkraft die Anweisung erteilen den Vektor zu zeichnen, gegebenenfalls mit CAS. Im Anschluss daran sollen die SchülerInnen erkennen, da sie schon ungefähr wissen wo der Mittelpunkt liegen wird, dass sie nicht zu dem gewünschten Ergebnis gelangen. Eine weitere Erklärung was der Fehler bei diesem Vorgehen war, bleibt aus.

Die fünfte Lehrperson ist davon überzeugt, dass es über 80% der SchülerInnen schaffen eine Formel für den Mittelpunkt einer Strecke aufzustellen. Dagegen spricht meine Forschung bei der nur 9 von 16 SchülerInnen (rund 56%) eine richtige Formel für den

Halbierungspunkt darbieten konnten. Die untersuchte Gruppe ist zwar relativ klein, gibt aber dennoch einen Richtwert an, der von der Vermutung der Lehrkraft weit entfernt ist. Hinsichtlich der ersten Fehlvorstellung würde die Lehrkraft die SchülerInnen mit der Argumentation über Ortsvektoren therapieren. Dennoch hat sie bei dieser Methode Bedenken, ebenso wie Malle (2007). Eine dazugehörige Skizze wäre eventuell hilfreich. Die zweite Fehlvorstellung würde die Lehrperson therapieren, indem sie den Schülern und Schülerinnen veranschaulicht, dass dieser Vektor irgendwo in der Zeichenebene liegen könnte. Es lässt sich vermuten, dass die Lehrkraft anschließend erklären würde, dass nur ein Punkt plus einen Vektor wieder einen Punkt ergibt.

### **3.3.2.5. Zusammenfassung**

Es konnte festgestellt werden, dass alle Lehrpersonen didaktische Handlungsfähigkeit zeigten, manche mehr, manche weniger. Es gab nicht eine Lehrkraft, die zu einem der vier Themengebiete keinen Therapievorschl ag parat hatte. Dies halte ich für lobenswert, da die einzelnen Interviews nur Momentaufnahmen darstellten. Die Lehrpersonen wurden darüber hinaus im Vorfeld willentlich nur über den Titel der Diplomarbeit informiert und wurden daher erst bei den Interviews mit den konkreten Fehlvorstellungen konfrontiert, was wiederum eine Situation herstellen sollte, die durchaus während des Unterrichtsgeschehens auftreten könnte. Manche lieferten sogar Aufgaben, die dazu dienen sollten zu überprüfen, ob die Fehlvorstellung nach der Therapie noch vorhanden ist oder bereits beseitigt werden konnte.

Im Gegensatz dazu ließ die Diagnosefähigkeit mancher Lehrkräfte Defizite aufscheinen. Einige haben bis dato noch keine der vorgegebenen Fehlvorstellungen im Unterricht erlebt, welche aber durchaus bei den Schülerinnen und Schülern vorhanden sind.

### **3.3.3. Sch ulerInneninterviews**

#### **3.3.3.1. Vektoraddition**

Nach Jarmer (1995) kann die Vektoraddition bei Sch ulerInnen zu großen Schwierigkeiten führen. Dabei spielt die arithmetische Berechnung eine geringe Rolle im Vergleich zur geometrischen Deutung. Selbst wenn das Aneinanderhängen der Pfeile erkannt wird, wird „sowohl bei der verbalen Beschreibung als auch bei der Skizzierung der geometrischen

Vektoraddition die Bildung des Summenpfeils nicht explizit erwähnt [...]“ (Jarmer, 1995, S. 46).

Die erste Fehlvorstellung, bei der die Vektoren zwar aneinander gehängt werden, allerdings kollinear, interpretiert Klasmann (1984) so, dass die Pfeile an jene auf der Zahlengerade erinnern, „wo ebenfalls ein Pfeil an den anderen in direkter Verlängerung angehängt“ wird, wodurch die Addition dargestellt werden soll.

Die zweite Fehlvorstellung zeigt, dass SchülerInnen ein fehlendes Vorstellungsvermögen bzgl. der geometrischen Addition haben. Es sei dahingestellt, ob diese Fehlvorstellung auch vorhanden wäre, wären die Vektoren in Koordinatenschreibweise angegeben. Jedoch lässt sich vermuten, dass spätestens bei dem Transfer von arithmetischer auf geometrische Form Schwierigkeiten auftreten würden.

Lukas ist zwar der Meinung, dass man die Vektoren addieren kann, seine Begründung „Weil beide positiv sind [...]“ (Zeile 1170), ist allerdings fraglich. Womöglich assoziiert er die Addition, die so genannte „Plus-Rechnung“ ausschließlich mit positiven Werten. Da nach dem Schätzen der Koordinaten der Vektoren alle Einträge positiv sind, zieht er vermutlich diesen Schluss.

Es ist weiters offensichtlich, dass Lukas von seinem Schulkollegen Georg Ideen übernimmt, da er bei der anschließenden Skizze nun doch einen Vektor parallel verschiebt und an den anderen anhängt. Jedoch zeigt sich seine Fehlvorstellung bzgl. der Vektoraddition spätestens beim Einzeichnen des Summenvektors unter Abb. 12.

Nach dem Hinweis von Georg, dass er doch ein Kräfteparallelogramm brauche, schafft es Lukas zwar eines anzufertigen, wobei aber die Resultierende falsch gerichtet ist. Möglicherweise machte sich der Schüler über die Richtung der Resultierenden keine Gedanken, was das rasche Skizzieren vermuten lässt.

Folglich war das Therapieren des Schülers notwendig, um seine Fehlvorstellung zu beseitigen. Dies passierte vorerst durch die Klärung, ob der parallel verschobene Vektor nur am Anfangs- oder nur am Endpunkt des anderen Pfeils angehängt werden darf, oder ob es egal sei. Danach folgte die Beschriftung der End- bzw. Anfangspunkte der Vektoren:

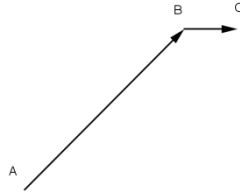


Abb. 28: Vektoraddition Therapie

Diese eigens von mir überlegte Therapievariante wurde gewählt, um Klarheit über die Richtung der Resultierenden zu schaffen. Für Lukas erschien es jetzt völlig klar, dass man die Addition in der Form  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$  aufschreiben kann. Mit Hilfe von Georg wurde  $\overrightarrow{AB}$  durch  $B - A$  und  $\overrightarrow{BD}$  durch  $D - B$  ersetzt. Schnell erkannte Lukas, dass nur mehr  $D - A$  übrig bleibt und das wiederum den Vektor  $\overrightarrow{AD}$  ergibt. Lukas machte nun den Eindruck verstanden zu haben, wie die Resultierende orientiert sein muss.

Bei der anschließenden Überprüfungsaufgabe weist Lukas keine Fehlvorstellung mehr auf und kann die Aufgabe geometrisch lösen.

Thomas zeigt eine schwerwiegende Fehlvorstellung hinsichtlich der Addition. Anfangs bejaht er, dass man die gegebenen Vektoren addieren kann und begründet dies mit der Skizze in Abb. 14.

Es lässt sich vermuten, dass Thomas die Addition zweier Vektoren mit einem Parallelogramm verknüpft, er zeichnet aber ein willkürliches. Somit begann die Therapie, welche als ersten Schritt die Vektoren am Laptop zeigte, wobei sich einer der beiden auf der x-Achse befand, um die Entstehung eines entsprechenden Parallelogramms zu unterstützen. Thomas ist ab nun überzeugt, die Aufgabe lösen zu können und skizziert ein Dreieck, welches unter Abb. 15 zu finden ist.

Nachdem er seine Zeichnung analysieren will, fällt ihm selbst auf, dass diese keinen Sinn ergibt. Nun behauptet er, dass die Vektoren nicht addierbar seien, da er keine „Zahlen“ gegeben hat.

Der nächste Therapieschritt wurde unternommen, indem Thomas die Koordinaten der Vektoren schätzen sollte, wodurch geklärt werden konnte, dass es doch möglich sei, die

Pfeile rechnerisch zu addieren, was wiederum bedeutet, dass sie auch geometrisch addiert werden können.

Manuel, der mit der Addition überhaupt keine Probleme zeigte, nahm mir den abschließenden Therapieschritt voraus und half Thomas mit den Worten „Parallel verschieben und anhängen.“ (Zeile 1360) auf die Sprünge.

Die Überprüfungsaufgabe stellte nun keine Hürde mehr für Thomas dar.

Das Interviewpaar Peter und Armin ist bei dieser Aufgabe überfragt. Peter gibt an, „[...] wenn ich den Betrag der beiden Vektoren habe, kann ich sie addieren.“ (Zeile 1490). Die Aussage könnte man so verstehen, dass Peter explizite Koordinaten für die Vektoren braucht, um eine Addition durchführen zu können. Somit ist es für ihn möglich arithmetisch zu arbeiten. Hinsichtlich der geometrischen Deutung hat er allerdings keine Idee wie er vorgehen könnte.

Armin ist vorerst am richtigen Weg und möchte die Vektoren aneinander anhängen, spielt aber gleichzeitig mit dem Gedanken, dafür den Normalvektor zu verwenden. Dadurch würde er die Richtung des Vektors ändern.

Somit begann die Therapie, speziell für Armin, mit der Frage „Wäre das dann noch derselbe Vektor?“ (Zeile 1505), um Klarheit zu schaffen, dass eine Vektordrehung nicht möglich ist. Schnell erkannte er, dass sein Vorgehen fehlerhaft ist. Die nächste Therapiemethode, die nun beide betraf, die Koordinaten der Vektoren schätzen zu lassen, um anschließend zu erfragen, ob man nun die Vektoren addieren könne, brachte Teilerfolge. Beiden Schülern war nun klar, dass es einerseits funktioniert, die Addition arithmetisch durchzuführen und andererseits deshalb auch eine geometrische Interpretation möglich sein muss. Als nächstes wurde beiden Schülern die Aufgabe gezeigt, bei der ein Vektor auf der x-Achse liegt, um das Parallelverschieben zu erleichtern. Plötzlich war es beiden möglich, den Summenvektor zu bilden. In der darauffolgenden Überprüfungsaufgabe traten keine Fehlvorstellungen mehr auf.

Erich und Clemens sind sich beide sicher, dass die Vektoren addierbar sind. Ohne Koordinaten bzw. Zahlenwerte fällt es ihnen aber besonders schwer, arithmetisch vorzugehen. Geometrisch würden sie die Addition so ausführen, dass sie die Pfeile kollinear aneinanderhängen (Abb. 18). „Und das Addierte ist dann das Ganze“ (Zeile 1614). Obwohl durch die LehrerInneninterviews deutlich wurde, dass man diese Fehlvorstellung bei Schülern und Schülerinnen nicht finden würde, sind Erich und

Clemens genauso vorgegangen. Dies zeigt wiederum, dass sowohl während des Unterrichtsgeschehens als auch bei Hausaufgaben oder Schularbeiten eindeutig nicht alle Fehlvorstellungen der SchülerInnen zu Tage treten. Die gemeinsame Erarbeitung, dass ein Vektor durch seine Länge, Richtung und Orientierung festgelegt ist öffnete den Schülern die Augen. Sie erkannten, dass sie die Richtung des Vektors nicht ändern dürfen und konnten anschließend ein Kräfteparallelogramm zeichnen.

In der Überprüfungsphase zeigte Erich, dass er nun die Vektoraddition verstanden hatte und konnte eine geometrische Interpretation abliefern. Ob die Therapie auch bei Clemens gewinnbringend war, ließ sich nicht nachvollziehen, da er sich an der Diskussion nicht beteiligte.

Eine schwerwiegende Fehlvorstellung zeigen Markus und Dominik. Beide sind davon überzeugt, dass man die beiden Vektoren nicht addieren kann. Dominiks Begründung lautet: „Weil der eine ist waagrecht und der andere geht so schräg hinauf“ (Zeile 1790). Die Frage bleibt offen, wie die Vektoren liegen müssten, sodass sie für Dominik addierbar wären.

Die Therapie wird dadurch begonnen, dass den Schülern ein Vektor vorgelegt wird, der entlang der x-Achse liegt, in der Hoffnung, dass durch die Lageänderung des einen Vektors die Addition für Dominik möglich wird.

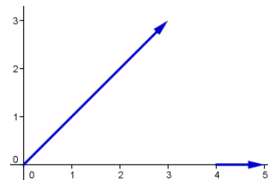


Abb. 29: Vektor entlang der x-Achse

Leider stellte sich diese Variante als nicht gewinnbringend dar. Die nächste Maßnahme, die unternommen wurde, beinhaltete die Frage „Warum sollte man zwei Vektoren nicht miteinander addieren können?“ (Zeile 1796). Nach einigem Nachdenken kam Markus zu der Erkenntnis, dass es sich doch um Vektoren handle, die man addieren kann. Erst nachdem Dominik aufgefordert wurde, sich passende Koordinaten für die gegebenen Vektoren zu überlegen, begriff auch er, dass man die Vektoren addieren kann. Wie die grafische Addition aussieht, verstanden die Schüler schnell, als sie sicher sein konnten, dass man dazu ein Parallelogramm verwenden kann.

Bei der Überprüfungsaufgabe berechnen Dominik und Markus den Summenvektor richtig, arbeiten mit einem Parallelogramm, zeichnen aber die Resultierende „verkehrt“ ein, was

sie allerdings schnell bemerken, weshalb man hier von einem Flüchtigkeitsfehler sprechen kann und die Therapie als erfolgreich gewertet wird.

Lara zeigt bzgl. der Vektoraddition keine Fehlvorstellungen. Das nervöse Verhalten von Veronika und der ständige hilfesuchende Blick zu ihrer Schulkollegin lassen allerdings vermuten, dass Veronika die Aufgabe alleine nicht lösen hätte können. Darüber hinaus trägt sie kaum etwas zum Gespräch bei. Sicherheitshalber wurde deshalb das parallele Verschieben des Vektors  $\overrightarrow{CD}$  anhand von Lauras Skizze erläutert, wonach das Kräfteparallelogramm eingezeichnet wurde. Daher war ich schon sehr gespannt, als die Überprüfungsaufgabe anstand. Zu meinem Erstaunen konnte Veronika diese Aufgabe einwandfrei lösen und begründet ihr Vorgehen anhand des Kräfteparallelogramms, welches zuvor erarbeitet wurde.

Selbiges spielte sich beim nächsten Interviewpaar Ben und Max ab. Max hatte keine Probleme, die Aufgabe zu lösen und dazu ein Kräfteparallelogramm verwendete. Ben hingegen machte den Eindruck, als würde er die Ideen seines Schulkollegen übernehmen, wodurch es für mich nicht eindeutig zu werten war, ob er eine Fehlvorstellung hinsichtlich dieser Aufgabe hat, oder nicht. Dennoch vermutete ich, dass der Schüler, würde er alleine befragt werden, die Aufgabe nicht hätte lösen können. Auf Grund dessen wird mit der Skizze von Max gearbeitet und das parallele Verschieben nochmals ausführlicher besprochen.

Während der Bearbeitung der Überprüfungsaufgabe wurden bei beiden Schülern keine Mängel ersichtlich.

Rene und Tobias wirkten während des gesamten Interviewverlaufs sehr zurückhaltend und wenig gesprächig. Nichtsdestoweniger konnte Rene die Aufgabe tadellos lösen. Bei Tobias vermute ich, ebenso wie bei Veronika und Ben, das bloße Übernehmen der Meinung des Schulkollegen. Deshalb konnte ich mir auch in diesem Fall nicht sicher sein, dass keine Fehlvorstellung vorliegt, weshalb ich die naheliegende Methode wählte und abermals anhand der richtigen Skizze des Partners das parallele Verschieben erklärte.

Die Überprüfungsaufgabe wurde fehlerfrei von beiden Schülern gelöst, weshalb die Therapievariante als positiv wirkend verbucht werden konnte.

### 3.3.3.2. Verbindungsvektor

„Grundlegend hat diese Frage“ nach dem Verbindungsvektor „keine Probleme gemacht. Bedenkt man allerdings, daß [sic!] diese Frage eine grundlegende im Umgang mit der Vektorrechnung ist, so sind es noch immer zu viele Schüler [sic!], die damit Schwierigkeiten haben.“ (Jarmer, 1995, S. 62)

Vor allem mit der Frage „Warum rechnet man  $B - A$ ?“ waren viele befragte SchülerInnen überfordert und konnten ihren Rechenschritt nicht interpretieren.

Jarmer (1995) spricht ihm Zuge dieser Aufgabe und der ersten Fehlvorstellung von einer „Neigung zum Ortsvektor“, was in meinen Interviews von manchen Lehrpersonen nicht nachvollzogen werden konnte und dennoch im Anschluss in den SchülerInneninterviews zum Vorschein trat. Der Vektor an sich wurde richtig berechnet, jedoch als Ortsvektor dargestellt.

Die zweite Fehlvorstellung würde ich persönlich als außergewöhnlich bezeichnen. Im Vorfeld wird zwar der Verbindungsvektor mit der Formel  $\overrightarrow{AB} = B - A$  richtig berechnet, allerdings wurde bei der darauffolgenden Zeichnung die Additionsregel skizziert, was Hartmann (1993) für mehr als einen bloßen Ausrutscher hält.

Mit der dritten Fehlvorstellung war prinzipiell kaum zu rechnen, jedoch war es mir wichtig, auch diese nicht außer Acht zu lassen.

Lukas und Georg zeigten hinsichtlich der Berechnung des Vektors keine Fehlvorstellungen. Die Schwierigkeiten traten bei der Interpretation ihres Vorgehens auf. Keiner der beiden konnte erklären, warum sie gerade so vorgegangen sind. Eine mögliche Ursache liefert Lukas: „Das haben wir so gelernt.“ (Zeile 1215) und „Ich habe mir einfach die Formel gemerkt.“ (Zeile 1217-1218). Hartmann (1993) thematisiert in ihrer Diplomarbeit das Phänomen „Learning without understanding“, bei dem SchülerInnen ein bestimmtes Vorgehen erlernen, den Sinn dahinter allerdings nicht erfassen. Dieses Verhalten zeigt somit Lukas. Damit ist er allerdings nicht alleine. Therapiert wurden sie, wie alle anderen, die keine Begründung für die verwendete Formel liefern konnten, mit der einzigen Methode, die durch die LehrerInneninterviews erfasst werden konnte, einer Skizze, bei der das Steigungsdreieck und die einzelnen Koordinaten der Vektoren verdeutlicht werden.

Die Überprüfungsaufgabe gestaltete sich zu Beginn für beide recht einfach. Das Vorgehen konnte allerdings nur von Georg begründet werden, weshalb bei ihm die angewandte Therapie Wirkung zeigte.

Zu erwähnen bleibt, dass die quadrantenübergreifende Überprüfungsaufgabe Lukas noch schwerer fiel, was wiederum bedeutet, dass ein schemenhaftes auswendig Merken der durchgeführten Therapie nicht ausreicht.

Manuel ist der erste Schüler, dem auffiel, dass man nicht  $\overrightarrow{AB} = A - B$  rechnen darf, da der Vektor die falsche Orientierung hätte. Nichtsdestoweniger lieferte diese Argumentation noch keine Begründung dafür, warum die Formel  $\overrightarrow{AB} = B - A$  verwendet wird. Schließlich erklärte Manuel seine Vorgehensweise mit dem Hintergedanken, dass „Punkt plus Pfeil ist gleich Punkt“, nämlich  $A + \overrightarrow{AB} = B$ . Dies ist äquivalent zu  $\overrightarrow{AB} = B - A$ . Thomas hingegen las lediglich die Koordinaten des Vektors aus seiner Skizze ab, wusste aber nicht, was seiner Formel zugrunde liegt. Daher wurde abermals bei ihm die Therapie (siehe Abb. 13) verwendet.

In der Überprüfungsphase bereitete die Aufgabe mit dem Verbindungsvektor Manuel anfänglich Kopfzerbrechen, da sich nun der Vektor über zwei Quadranten erstreckte. Nach kurzem Überlegen schaffte er es allerdings erneut, seine verwendete Formel zu begründen. Für Thomas stellte diese Aufgabe eine große Hürde dar und er vermittelte den Eindruck, als würde er diese nicht überwinden wollen, da er gleich zu Beginn aufgab. Die Therapie zeigte bei ihm keine positiven Auswirkungen.

Armin und Peter erging es wie den meisten Schulkollegen zuvor. Die Berechnung des Verbindungsvektors stellte keine Probleme dar, warum allerdings mit der Formel  $\overrightarrow{AB} = B - A$  gerechnet wird, wussten sie nicht. Armin versuchte seine Rechnung zu begründen „weil B größer ist als A“ (Zeile 1544). Möglicherweise assoziierte der Schüler diese Situation mit der Subtraktion innerhalb der Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$ , bei der stets „das Kleinere vom Größeren abgezogen“ wird. Nachdem ein Gegenbeispiel, bei dem B im vierten Quadranten und A im ersten Quadranten liegt, gezeigt wurde, konnte zumindest diese Fehlvorstellung ausgeräumt werden. Mittels vorgefertigter Skizze wurde die Therapie weitergeführt.

Leider zeigte die Intervention bei der Überprüfungsaufgabe keinen Erfolg.

Erich argumentierte genauso wie Armin und denkt, dass A von B subtrahiert wird, weil B „größer“ ist. Eine Verwechslung mit den Operationen in der Zahlenmenge  $\mathbb{N}$  könnte der Grund dafür sein. Clemens hingegen gab ehrlich zu, dass er sich bloß die Formel gemerkt habe. Nach Woolfolk (2008) ist das Auswendiglernen nur bei wenigen Dingen notwendig. Vielmehr sieht sie es als „große Herausforderung“ (Woolfolk, 2008, S. 337) für die Lehrerschaft, die SchülerInnen dabei zu unterstützen eigenständige Denkprozesse anzuregen, um ein Verstehen zu ermöglichen (vgl. Woolfolk, 2008, S. 337). Es wurde abermals die übliche Therapie angewendet.

Beide schafften es nicht, in der Überprüfungsphase eine adäquate Erklärung für den von ihnen richtig berechneten Verbindungsvektor zu liefern. Daher lässt sich festhalten, dass sich die Therapie, wie schon so oft, als erfolglos entpuppte.

Während Dominik die schon bekannte Fehlvorstellung zeigte, das Vorgehen bzgl. des richtig berechneten Verbindungsvektors nicht nachvollziehen zu können, trat bei Markus erstmalig eine andere Fehlvorstellung zu Tage. Der Schüler zeichnete in seiner Skizze vorerst die gegebenen Punkte A und B als Ortsvektoren ein, was absolut korrekt ist, stellte dann allerdings ebenso den Verbindungsvektor als Ortsvektor dar. Es ist zwar umstritten, ob dieses Vorgehen als Fehlvorstellung tituiert werden darf, da eine der fünf interviewten Lehrpersonen der Meinung ist: „[...] ich halte es nicht einmal für eine Fehlvorstellung sondern für eine unvollständige.“ (Zeile 798-799). Dennoch wäre diese Art der Deutung eine falsche Interpretation und somit für meine Begriffe eine Fehlvorstellung.

Im Anschluss wurde der erste Therapieschritt unternommen, der die Bearbeitung der Aufgabe „Schatzsuche“ (siehe Seite 68) vorsah. Schnell wurde ihm klar, dass das Verwenden des Ortsvektors nicht zielführend ist. Nun konnte der zweite Therapieschritt gestartet werden, bei dem das koordinatenweise Vorgehen anhand der Skizze (siehe Seite 50) verständlich gemacht wird.

Erfreulicherweise konnten erstmals zwei Schüler zugleich mit der gewählten Methode erfolgreich therapiert werden.

Lara war eine der wenigen, die eine korrekte Begründung hinsichtlich des Steigungsdreiecks abgeben konnte. Veronika hingegen äußerte sich nicht zu der Aufgabe und meinte lediglich zum Schluss: „Ja, schaut richtig aus.“ (Zeile 1944). Dies lässt vermuten, dass sie selbstständig die Aufgabe nicht lösen hätte können, weshalb sie therapiert wurde.

Erfreulicherweise zeigte die Therapie bei Veronika ihre Wirkung. Sie argumentierte einwandfrei mit ihrer Skizze aus Abb. 24. Deshalb konnte sie zu den erfolgreich therapierten Schülern und Schülerinnen gezählt werden.

Ben und Max schafften es beide, den Verbindungsvektor zu berechnen. Es zeigte sich aber erneut, dass für die meisten SchülerInnen, wie auch für diese beiden, die Begründung für ihr Vorgehen nicht erklärbar ist. Die Therapie mittels vorbereiteter Skizze wurde angewendet.

Leider zeigte sich im Anschluss, dass die Interventionsmaßnahme erfolglos blieb.

Rene begründete anfangs sein Vorgehen mit dem Merksatz „Endpunkt minus Anfangspunkt“, erklärte aber anschließend genauer:  $B = A + \vec{a}$ , wobei  $\vec{a} = B - A$ . Im Gegensatz dazu konnte Tobias nichts zu der Aufgabe beitragen. Deshalb wurde wieder mit der Skizze therapiert, die auch im Unterricht durchgenommen wurde.

In der Überprüfungsphase wurde bei dem Verbindungsvektor das Augenmerk deutlich mehr auf Tobias gelegt, da bei ihm im Vorfeld eine Fehlvorstellung ersichtlich wurde. Die durchgeführte Therapie zeigte ihre Wirkung und Tobias konnte mittels Steigungsdreieck, x-Koordinaten und y-Koordinaten seinen Rechengang nachvollziehen.

### **3.3.3.3. Gleichheit von Vektoren**

Prinzipiell war im Vorfeld damit zu rechnen, dass diese Aufgabe geringere Schwierigkeiten aufweisen würde, als die restlichen. Durch die später ausgewerteten Ergebnisse und anhand der geringen Dauer der Bearbeitung von Seiten der SchülerInnen und LehrerInnen wurde diese Vorahnung bestätigt. Dennoch fällt auf, dass es bei der Gleichheit von Vektoren oftmals Schwierigkeiten im Umgang mit den Begriffen „Orientierung“ und „Richtung“ gab. Jarmer (1995, S. 26) spricht von der Problematik, dass die Begriffe „in der alltäglichen Verwendung oft sinngemäß gleichgestellt und daher in ihrer Bedeutung nicht scharf voneinander getrennt“ werden.

Bei der Beurteilung der Gleichheit von Vektoren erwähnt Jarmer (1995, S. 145) weiters die Problematik der SchülerInnen, die „Lageunabhängigkeit der einen Vektor darstellenden Pfeile“ zu akzeptieren. Hartmann (1993, S. 170) verwendet in ihrer Arbeit für die Gleichheit von Vektoren folgende Definition:

$$\text{Für alle } a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R} \text{ gilt:}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_n = b_n$$

Hartmann spricht von einer einfachen Definition, denn „Der Schüler [sic!] muß [sic!] eigentlich nur Zahlen vergleichen und dabei auf die Reihenfolge der Zahlen achten“ (Hartmann, 1993, S. 170). Diese Tatsache spielt bei der Therapie eine wichtige Rolle.

Für Lukas und Georg war es wie für die meisten Befragten offensichtlich, dass die Vektoren gleich sind. Zusammen erarbeiteten sie die Eigenschaften eines Vektors, wobei es kurzzeitig zu einer Verwechslung zwischen Orientierung und Richtung kam, die sie aber gemeinsam beseitigen konnten. Eine weitere Interventionsmaßnahme, die nicht im Interview verwendet wurde, könnte durch die Fragen „Können zwei Vektoren die gleiche Orientierung haben, ohne die gleiche Richtung zu haben? Wie sähe das aus?“ formuliert werden. Eine Therapie war daher nicht erforderlich. Darüber hinaus zeigte sich, dass die beiden Schüler bei der entsprechenden Überprüfungsaufgabe bzgl. der Gleichheit der Vektoren ebenso keine Probleme hatten.

Manuel hatte schlussendlich auch mit dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten. Thomas hingegen gab sofort zu, dass er dieses Themengebiet nicht beherrsche. Gleich wurde mit der Therapie begonnen, die anfangs, mit Hilfe von Manuel, die Erarbeitung der Eigenschaften eines Vektors vorsah, um ein Verständnis für den Begriff Gleichheit zu schaffen. Im Anschluss daran skizzierte Thomas selbstständig ein Koordinatensystem, wodurch es für mich naheliegend war, den Schüler die Koordinaten der Vektoren ablesen zu lassen, da er ohnehin große Probleme hatte, abstrakte Sachverhalte zu erfassen. Schließlich konnte Thomas die Gleichheit der Vektoren feststellen.

Bei der Überprüfungsaufgabe war bei Thomas keine Fehlvorstellung mehr festzustellen.

Peter und Armin wiesen bei dieser Aufgabe keinerlei Fehlvorstellungen auf. Ein verwendeter Begriff passte allerdings nicht in das Metier der Vektorrechnung. Armin sprach nämlich von Vektoren, die gleich groß sind. Peter erklärte aber sofort, dass damit die Länge des Vektors gemeint ist.

Bei der Aufgabe, bei der es sich um das Aufsuchen des fehlenden Eckpunkts eines Parallelogramms handelte, wurde von den beiden Schülern die Gleichheit der vorgegeben Vektoren sofort erkannt.

Gemeinsam lösten auch Erich und Clemens fehlerfrei die Aufgabe zur Gleichheit der Vektoren. Beide bemerkten, dass die Vektoren dieselbe Richtung, Länge und Orientierung haben und daher gleich sind.

Die Berechnung des fehlenden Eckpunkts des Parallelogramms stellte für die zwei Schüler kein Problem dar. Im Anschluss wurde sofort Gleichheit der Vektoren erkannt und es konnte eine nachvollziehbare Begründung abgegeben werden.

Markus hatte mit dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten. Dominik war zwar ebenfalls der Meinung, dass die Vektoren gleich sind, konnte dies aber nicht mathematisch begründen. Therapiert wurde Dominik mit der Frage nach den Eigenschaften eines Vektors und der anschließenden Erarbeitung dieser, um ersichtlich zu machen, ob die Vektoren selbige Merkmale aufweisen.

Die Therapie erwies sich als erfolgreich, somit wurde die Fehlvorstellung beseitigt.

Veronika erkannte, dass die Vektoren dieselben Eigenschaften aufweisen und somit gleich sind. Für Lara war diese Tatsache alleine nicht sofort ausschlaggebend, dass man von gleichen Vektoren sprechen kann, da sie nicht „identisch“ sind. Auch hier wurde ein Begriff verwendet, der in Bezug auf Vektoren nicht vorkommt. Eine der befragten Lehrpersonen sagte sogar: „Das Wort hat für Vektoren, für mich, keine Bedeutung.“ (Zeile 1071). Vermuten lässt sich, dass Lara mit der unterschiedlichen Lage der Vektoren Schwierigkeiten hatte. Womöglich dachte sie dabei an verschiedene Repräsentanten desselben Vektors. Die Therapie wurde fortgesetzt, indem dieselben Vektoren in Geogebra gezeigt wurden und Lara die Aufgabe bekam, einen Vektor über den anderen zu ziehen. Ziel war es, dass sie dabei merkte, dass die Vektoren, egal welche Lage sie einnahmen, dieselben Einträge zeigten.

In der Überprüfungsphase erkannte Lara sofort, dass es sich um gleiche Vektoren handelte, womit die Fehlvorstellung nicht mehr vorhanden war.

Die Schüler Ben und Max hatten hinsichtlich der Gleichheit von Vektoren keine Fehlvorstellungen. Spannend war allerdings die Herangehensweise bei der Überprüfungs Aufgabe. Ben berechnete den fehlenden Eckpunkt folgendermaßen:  $D = B + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ . Es zeigte sich, dass der Schüler sein gewonnenes Wissen bei der Therapie bzgl. der Addition zweier Vektoren transferierte und zugleich erfolgreich anwendete.

Im Anschluss bemerkten beide Schüler, dass die Gleichheit innerhalb dieser Aufgabe eine wichtige Rolle spielte.

Abgesehen davon, dass Rene das Wort „groß“ benutzte, welches in Verbindung mit Vektoren nicht üblich ist, hatten er und sein Schulkollege Tobias keine Schwierigkeiten die Gleichheit der Vektoren zu erkennen und zu belegen.

Wie zu erwarten war, bereitete ihnen die Überprüfungsaufgabe ebenso keine Schwierigkeiten.

#### **3.3.3.4. Mittelpunkt einer Strecke**

„So wie viele Schüler [sic!] Schwierigkeiten mit dem Aufstellen und Interpretieren von (Zahlen-) Formeln haben, haben auch viele Schüler [sic!] Schwierigkeiten mit dem Aufstellen und Interpretieren von Vektorformeln.“ (Hartmann, 1993, S. 92)

Einerseits lässt sich feststellen, dass die Mehrheit der SchülerInnen in der Lage war, die Formel für den Mittelpunkt einer Strecke richtig aufzustellen, es jedoch bei der Begründung dieser zu Schwierigkeiten kam. Andererseits gingen SchülerInnen gedanklich richtig vor, hatten aber im Anschluss Probleme, dies in Vektorschreibweise umzusetzen.

Die erste Fehlvorstellung zeigte Georg und Lukas. Sie verwendeten beide zum Berechnen des Mittelpunkts die Vorgehensweise, dass sie lediglich den halben Richtungsvektor entlang gingen. Dabei vergaßen sie allerdings von einem „Startpunkt“ wegzugehen. Deshalb wurden beide therapiert. Lukas bekam die Aufgabe, seine vermeintliche Mittelpunktsformel in das Computerprogramm Geogebra einzugeben. Im Anschluss daran wurde er gebeten, den entstandenen Vektor mit der Maus zu verschieben und gleichzeitig sollte er beobachten, ob sich an den Eigenschaften des Vektors etwas verändert. Dadurch bemerkten er und Lukas, dass es egal ist, an welchem Ort sich der Vektor befindet, weshalb sie schlussfolgerten, dass daher auch dem Mittelpunkt in diesem Fall kein bestimmter Ort zugeteilt ist, was wiederum nicht stimmen konnte. Gemeinsam bemerkten sie nun, dass sie einen Anfangspunkt brauchen würden, um den Mittelpunkt „fixieren“ zu können.

In der Überprüfungsphase stellte der Mittelpunkt keine Hürde mehr dar, denn beide stellten einerseits eine richtige Formel auf und konnten andererseits ihr Vorgehen begründen.

Manuel verwendete die Formel  $M = A + (B - A) * 0,5$  und kann sein schrittweises Vorgehen sinnvoll erklären. Thomas schrieb die Formel  $M = \frac{A+B}{2}$  auf. Allerdings war er sich von Anfang an nicht sicher, ob er richtig liegt und zweifelte schließlich daran, da er die Punkte A und B in seiner Formel addierte, obwohl er zur Berechnung des Mittelpunkts in Richtung  $\overrightarrow{AB}$  gehen möchte, sich dieser Vektor durch eine Subtraktion darstellen lässt und so nicht in der Formel aufscheint. Dies war ein Indiz, das zeigte, dass Thomas vielleicht zum ersten Mal die Mittelpunktsformel genau betrachtete. Somit war Thomas im Zwiespalt, da er einerseits wusste, dass seine niedergeschriebene Formel stimmte, da er diese schon öfters verwendet hatte, andererseits ergab sie für ihn keinen Sinn, da ihm auch bewusst war, dass in der Formel der Vektor  $\overrightarrow{AB}$  enthalten sein sollte.

Manuel wurde aufgefordert durch seine Darstellung die „typische Mittelpunktsformel“ herzuleiten. Dies führte dazu, dass Thomas therapiert wurde, da er bemerkte, dass auch in seiner Formel der Verbindungsvektor enthalten ist.

Bei der Überprüfungsaufgabe zeigte Thomas nun keine Fehlvorstellung mehr, weshalb die Therapie erfolgreich war.

Armin und Peter verwendeten beide die Formel  $M = A + \frac{1}{2}(B - A)$  und konnten sie im Anschluss erklären. Eine Therapie war nicht notwendig.

Ebenso lösten sie die Überprüfungsaufgabe einwandfrei mit zugehöriger mündlicher Beschreibung. Sehr interessant war allerdings die Tatsache, dass Armin anfangs die „typische Mittelpunktsformel“  $M = \frac{1}{2}(A + B)$  verwendete, diese aber durchstrich, um danach zu seiner Anfangsformel  $M = A + \frac{1}{2}(B - A)$  zurückzukehren. Als Begründung für sein Vorgehen nannte er den Umstand, dass die „schrittweise Mittelpunktsformel“ schlichtweg logischer nachzuvollziehen sei.

Erich und Clemens benutzten die Formel  $M = (A + B) * 0,5$ , die wiederum eine Abwandlung der „typischen Mittelpunktsformel“ darstellt. Beide konnten keine zufriedenstellende Interpretation ihrer Formel liefern, weshalb eine adäquate Therapievariante von Nöten war, welche die Herleitung der „typischen Mittelpunktsformel“ vorsah.

Durch die Überprüfungsaufgabe kristallisierte sich heraus, dass die durchgeführte Therapie leider keinen Erfolg verbuchen konnte. Beide Schüler verwendeten erneut die „typische Mittelpunktsformel“ und konnten diese nicht erklären.

Wie schon bei den Interviewpaaren zuvor trat auch bei Markus und Dominik ein ähnliches Muster auf. Beide verwendeten die Formel  $M = \frac{A+B}{2}$ , also eine Art der „typischen Mittelpunktsformel“. Die zwei Schüler wussten allerdings nicht, was hinter dieser Formel steckte. Deshalb musste eine Therapie durchgeführt werden, welche die Herleitung der Mittelpunktsformel vorsah.

Die Überprüfungsaufgabe, welche den Mittelpunkt einer Strecke betraf, lösten nun beide ohne jegliche Probleme. Sie verwendeten abermals die schon zuvor gewählte Schreibweise, konnten aber im Vergleich zu Vorhin ihre Formel interpretieren.

Lara verwendete bei dieser Aufgabe die „schrittweise Mittelpunktsformel“ und schaffte es, diese sinngemäß zu erklären. Veronika hingegen schrieb lediglich  $M = \frac{\overline{AB}}{2}$  und berücksichtigte offenbar den Anfangspunkt nicht, von dem gestartet werden muss. Sie assoziierte den Mittelpunkt womöglich damit, die „Strecke“ zwischen den Punkten A und B zu halbieren, was allerdings nicht genügt. Es wurde Veronika demonstriert, dass der Vektor, der durch ihre Berechnung entstand, nicht an eine bestimmte Stelle im Koordinatensystem gebunden ist. Darüber hinaus wurde ihr erklärt, dass es notwendig sei, von einem Punkt wegzugehen, um zu einem Punkt zu gelangen.

Die Überprüfungsaufgabe meisterte Veronika schließlich einwandfrei.

Die Schüler Ben und Max schafften es beide, eine richtige Formel für den Mittelpunkt aufzustellen, nämlich  $M = \frac{1}{2} * (A + B)$ . Keiner von ihnen konnte aber erklären, was genau diese Formel aussagt. Schließlich kam Max auf die tolle Idee, eine andere Herangehensweise zum Auffinden des Mittelpunkts aufzustellen. Dies gelang ihm durch die „schrittweise Mittelpunktsformel“, die er einerseits vom Punkt A und andererseits vom Punkt B aus anwendete. Ben hatte zwar immer noch keine Begründung für seine ursprünglich aufgeschriebene Formel parat, empfand aber Max' neue Idee für weitaus logischer.

In der Überprüfungsphase wollte Ben mit seinem neu erworbenen Wissen glänzen und die „schrittweise Mittelpunktsformel“ verwenden. Leider vergaß er, dass er dazu von einem Anfangspunkt starten muss. Daher konnte er nicht vollständig therapiert werden.

Tobias verwendete die „typische Mittelpunktsformel“, während Rene eine Art der „schrittweisen Mittelpunktsformel“ niederschrieb. Nachdem Rene angehalten wurde Tobias bei der Begründung seiner Formel zu unterstützen, äußerte er seinen Unmut über diese Formel. Einfacher fiele es ihm, wenn er sich den Mittelpunkt Schritt für Schritt herleite. Erst als Rene Tobias darauf hinwies, dass er die verwendeten Punkte in der Mittelpunktsformel auch als Vektoren auffassen könne, schaffte es der Schüler mit Unterstützung eine Begründung mittels Ortsvektoren zu liefern.

Die Überprüfungsaufgabe fiel bei beiden Schülern ohne jedwede Fehlvorstellung aus.

### 3.3.3.5. Zusammenfassung

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sich die Therapien überwiegend erfolgreich erwiesen, wobei zu erwähnen ist, dass einige Varianten vorerst die vorhandene Fehlvorstellung beseitigten, es aber noch weitere Therapieschritte benötigte, um eine richtige Vorstellung zu ermöglichen. Hervorzuheben bleibt lediglich der Verbindungsvektor, der weiterhin vielen Schülern Schwierigkeiten bereitet.

Die unten stehende Tabelle verdeutlicht, welche SchülerInnen Fehlvorstellungen bzw. welche SchülerInnen teilweise Fehlvorstellungen zeigten. Unter einer teilweisen Fehlvorstellung wird bei der Vektoraddition das Fehlen der Begründung gewertet, dass die Vektoren addierbar sind. Beim Verbindungsvektor liegt eine teilweise Fehlvorstellung, wenn der Vektor exakt berechnet wird, aber eine Begründung für das Vorgehen ausbleibt. Unter einer teilweisen Fehlvorstellung bzgl. der Gleichheit von Vektoren wird das Bejahen der Frage „Gilt  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ?“ verstanden, obwohl keine Begründung dazu geliefert werden kann. Beim Mittelpunkt einer Strecke spricht man dann von einer teilweisen Fehlvorstellung, sobald eine entsprechende Formel aufgestellt, diese aber nicht begründet werden kann. Nicht eindeutige Aussagen werden mit einem Fragezeichen gekennzeichnet und in der Überprüfungsphase als Fehlvorstellung gewertet.

Tab. 2: Fehlvorstellungen von SchülerInnen

| Fehlvorstellung | Addition | Verbindungsvektor | Gleichheit | Mittelpunkt |
|-----------------|----------|-------------------|------------|-------------|
| Lukas           | ±        | ±                 | -          | +           |
| Georg           | -        | ±                 | -          | +           |
| Thomas          | +        | ±                 | -          | ±           |
| Manuel          | -        | -                 | -          | -           |
| Armin           | ±        | ±                 | -          | -           |
| Peter           | ±        | ±                 | -          | -           |
| Erich           | ±        | ±                 | -          | ±           |
| Clemens         | ±        | ±                 | -          | ±           |
| Markus          | +        | ±                 | -          | ±           |
| Dominik         | +        | ±                 | ±          | ±           |
| Lara            | -        | -                 | +          | -           |
| Veronika        | ?        | ?                 | -          | +           |
| Ben             | ?        | +                 | -          | ±           |
| Max             | -        | +                 | -          | -           |
| Rene            | -        | -                 | -          | -           |
| Tobias          | ?        | +                 | -          | ±           |

+ ..... Fehlvorstellung  
 ± ..... Teilweise Fehlvorstellung  
 - ..... Keine Fehlvorstellung  
 ? ..... Wurde nicht ersichtlich

Es konnte beobachtet werden, dass hinsichtlich der Aufgabe zur Berechnung des Mittelpunkts acht SchülerInnen mit der „typischen Mittelpunktsformel“ gearbeitet haben. Ein Schüler wechselte selbstständig auf die Darstellung der „schrittweisen Mittelpunktsformel“, da er die andere Variante nicht begründen konnte. Ein weiterer Schüler versuchte zumindest, die Formel mittels Ortsvektoren zu erklären, was er aber ohne Hilfe nicht schaffte. Alle anderen scheiterten an der Interpretation der Formel, was zu denken gibt, ob die Formel  $M = \frac{1}{2} * (A + B)$  im Vergleich zu  $M = A + \frac{1}{2} * \overrightarrow{AB}$  wirklich praktischer ist. Denn all jene, die die „schrittweise Mittelpunktsformel“ verwendeten, konnten ihr Vorgehen sinnvoll begründen. Ein „kurz gefasster Satz oder Ausdruck, in dem sich ein gedanklicher Zusammenhang erhellend fassen lässt“ wird laut Duden als Formel verstanden. Der gedankliche Zusammenhang der „typischen Mittelpunktsformel“ wird

allerdings nicht ersichtlich, weshalb die minimal kürzere Schreibweise für mich kein Argument liefert, diese Formel im Unterricht zu verwenden.

Im Anschluss folgt eine Tabelle anhand der ersichtlich wird, ob die Therapien erfolgreich waren oder nicht.

Tab. 3: Überprüfungsphase

| Überprüfung | Addition | Verbindungsvektor | Gleichheit | Mittelpunkt |
|-------------|----------|-------------------|------------|-------------|
| Lukas       | +        | -                 | /          | +           |
| Georg       | /        | +                 | /          | +           |
| Thomas      | +        | -                 | /          | +           |
| Manuel      | /        | /                 | /          | /           |
| Armin       | +        | -                 | /          | /           |
| Peter       | +        | -                 | /          | /           |
| Erich       | +        | -                 | /          | -           |
| Clemens     | +        | -                 | /          | -           |
| Markus      | ±        | +                 | /          | +           |
| Dominik     | -        | +                 | +          | +           |
| Lara        | /        | /                 | +          | /           |
| Veronika    | +        | +                 | /          | +           |
| Ben         | +        | -                 | /          | -           |
| Max         | /        | -                 | /          | /           |
| Rene        | /        | /                 | /          | /           |
| Tobias      | +        | +                 | /          | +           |

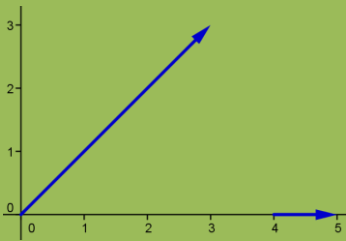
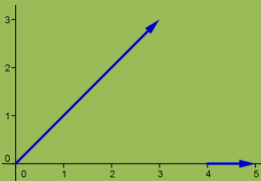
- ..... Therapie nicht wirksam  
 + ..... Therapie wirksam  
 / ..... Therapie nicht notwendig  
 ±..... Therapie teilweise erfolgreich

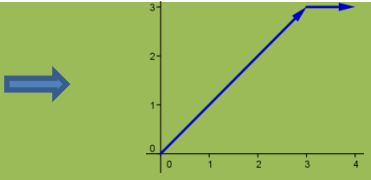
Tab. 3 lässt erkennen, dass die Therapien überwiegend wirkungsvoll waren, wobei über die Nachhaltigkeit nicht geurteilt werden kann. Lediglich der Verbindungsvektor bereitete den Schülern und Schülerinnen immer noch große Schwierigkeiten. Hier sollte man sich als Lehrperson zumindest eine alternative Therapiemöglichkeit überlegen.

Geht man genauer ins Detail, lässt sich auch erkennen, welche Interventionsmaßnahmen zu Erfolg führten und welche nicht. Dabei ist aber zu erwähnen, dass manche der Therapiemöglichkeiten wissentlich nur zu Teilerfolgen führten, weshalb weitere Schritte erforderlich waren.

In den folgenden Tabellen wird auf die Therapiemöglichkeiten aus Tab. 1 zurückgegriffen bzw. wird diese gegebenenfalls, auf Grund spontan erforderlicher Therapien, ergänzt.

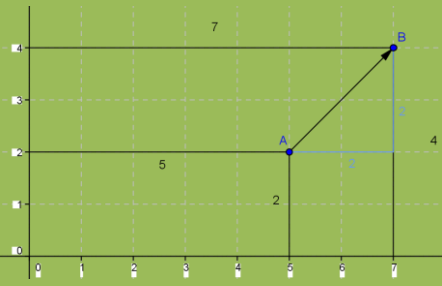
Tab. 4: Therapieeffektivität bzgl. der Addition von Vektoren

| Addition von Vektoren                                                                                                                                                                                                                                     | Angewendet | Erfolgreich | Erfolgsquote |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-------------|--------------|
| $\overrightarrow{CD}$ auf x-Achse verschieben →<br>Geogebra:<br>                                                                                                        | 5 Mal      | 2 Mal       | 40%          |
| Warum sollte man zwei Vektoren nicht addieren können?                                                                                                                                                                                                     | 2 Mal      | 2 Mal       | 100%         |
| Arithmetisch<br><br>z.B. Welche Koordinaten haben die Vektoren vermutlich?<br>Nehmen wir an $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Kannst du sie jetzt addieren? | 4 Mal      | 4 Mal       | 100%         |
| Parallel verschieben → Geogebra:<br>                                                                                                                                   | 4 Mal      | 4 Mal       | 100%         |

|                                                                                                                   |       |       |       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|
|                                  |       |       |       |
| Parallelogramm mit Diagonale einzeichnen.                                                                         | 5 Mal | 4 Mal | 80%   |
| $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$                                                 | 1 Mal | 1 Mal | 100%  |
| Definition: Ein Vektor wird durch seine Länge, Orientierung und Richtung festgelegt → nicht mehr derselbe Vektor. | 3 Mal | 2 Mal | ≈ 67% |

Die Erfolgsquoten der Therapien bzgl. des Verbindungsvektors werden in Tab. 5 dargestellt. Dabei war die zweite Therapie aber zu keinem Zeitpunkt erforderlich.

Tab. 5: Therapieeffektivität bzgl. des Verbindungsvektors

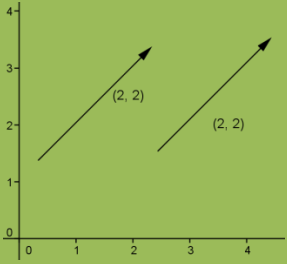
| Verbindungsvektor                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Angewendet | Erfolgreich | Erfolgsquote |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-------------|--------------|
| <b>Schatzsuche:</b><br>Markus ist auf Schatzsuche. Dazu geht er vom Ort $A=(5 2)$ zwei Kilometer in östlicher Richtung und danach zwei Kilometer in nördlich Richtung. Dort angekommen findet er tatsächlich einen Schatz. Mit welchen Koordinaten trägt er seinen Fund in der Schatzkarte ein? Skizziere seinen zurückgelegten Weg. | 1 Mal      | 1 Mal       | 100%         |
| Verwendung der Subtraktion verdeutlichen.                                                                                                                                                                                                                                                                                            | -          | -           | -            |
| <b>Geometrisch:</b><br>$A = (5 2), B = (7 4)$ <br>x-Koordinate: $7 - 5 = 2$<br>y-Koordinate: $4 - 2 = 2$                                                                                                                                          | 13 Mal     | 3 Mal       | ≈ 23%        |

Wie schon zuvor thematisiert, lassen die Therapiemöglichkeiten bei Fehlvorstellungen bzgl. des Verbindungsvektors zu wünschen übrig. Eine Alternative dazu wäre, mit einer schrittweisen Vorgehensweise zu argumentieren:

$$A + \overrightarrow{AB} = B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = B - A$$

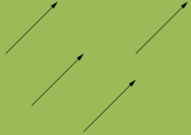
Die Gleichheit von Vektoren musste nicht oft therapiert werden. Diese verstehen die SchülerInnen anscheinend sehr rasch. Tab. 6 zeigt die Erfolgsquoten der einzelnen Therapiemöglichkeiten, wobei auch hier nicht alle zum Einsatz kamen.

Tab. 6: Therapieeffektivität bzgl. der Gleichheit von Vektoren

| Gleichheit                                                                                       | Angewendet | Erfolgreich | Erfolgsquote |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-------------|--------------|
| Definition: Was macht einen Vektor aus? Länge, Richtung und Orientierung, daher sind sie gleich. | 1 Mal      | 1 Mal       | 100%         |
| Ein Vektor ist die Gesamtheit der Pfeile die gleich lang, parallel und gleich orientiert sind.   | -          | -           | -            |
| Welche Koordinaten haben die Vektoren vermutlich? Sind sie gleich?                               | 1 Mal      | 1 Mal       | 100%         |
| Geogebra:<br> | 1 Mal      | 1 Mal       | 100%         |

Zum Abschluss wird nun noch die Wirksamkeit der erforderlichen Therapieschritte hinsichtlich des Mittelpunkts einer Strecke in der unten stehenden Tabelle dargestellt.

Tab. 7: Therapieeffektivität bzgl. des Mittelpunkts einer Strecke

| Mittelpunkt                                                                                                                                                                                                      | Angewendet | Erfolgreich | Ergebnis in % |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-------------|---------------|
| Die Punkte koordinatenweise addieren.                                                                                                                                                                            | -          | -           | -             |
| Herleitung: $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{B} - \frac{1}{2}\overrightarrow{A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B} = \frac{1}{2} * (A + B)$ | 6x         | 3x          | 50%           |
| Punkte als Ortsvektoren auffassen.                                                                                                                                                                               | 1x         | 1x          | 100%          |
| Parallel verschieben:<br>                                                                                                      | 3x         | 3x          | 100%          |
| Anfangspunkt                                                                                                                                                                                                     | 5x         | 3x          | 60%           |

#### **4. Zusammenfassung und Ausblick**

Den chronologischen Beginn machte die Unterrichtsbeobachtung, bei der auffiel, dass sehr wenige Situationen ersichtlich wurden, bei denen SchülerInnenfehlvorstellungen erkannt werden konnten. Womöglich ist dies dem Unterrichtsstil der Lehrkraft zuzuschreiben, wobei zu erwähnen ist, dass die Lehrperson verschiedene Sozialformen in Anspruch nahm. Trat jedoch eine Fehlvorstellung zu Tage, wurde einerseits das Problem gut behandelt und hinterfragt, andererseits wurde nicht durchwegs effektiv interveniert. Es bleibt zu überlegen, wie der Unterricht gestaltet werden kann, um individueller auf Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern einzugehen bzw. diese überhaupt wahrzunehmen. Intensive SchülerInnengespräche, so wie sie in der Studie gemacht wurden, sind realistisch betrachtet zu zeitintensiv, wären aber in einer abgespeckten Version ein erster Ansatzpunkt. Eine Möglichkeit wäre, dieses Vorgehen in Gruppengespräche zu verpacken, um Fehlvorstellungen zu sammeln und diese anschließend im Klassenverband zu thematisieren.

Durch die LehrerInneninterviews erhielt ich einige gute Therapievorschläge, die bestimmt auch für JunglehrerInnen einen Denkanstoß bieten, aber auch für erfahrene Lehrkräfte womöglich neue Herangehensweisen aufzeigen. Dennoch ging nicht jede Lehrperson innerhalb der Interviews auf alle Fehlvorstellungen explizit ein. Von manchen erhielt ich eher allgemeine Therapievorschläge, anderen setzten sich mit den Fehlinterpretationen von Schülern und Schülerinnen genau auseinander.

Ein Verbesserungsvorschlag, der mehr Vielfalt in die eigene didaktische Handlungsfähigkeit bringt, wäre das gegenseitige Hospitieren, um neue Anreize zu gewinnen. Ich habe bereits die Erfahrung gemacht, dass dies in manchen, aber eher in wenigen Schulen Österreichs praktiziert wird. Natürlich verlangt das Hospitieren einen zusätzlichen Zeitaufwand, der nicht immer leicht aufzubringen ist.

Ein weiterer Punkt, der durch die LehrerInneninterviews bemerkbar wurde, beinhaltet die unterschiedlichen Sichtweisen in manchen Bereich der Vektorrechnung. Ein Paradebeispiel dafür liefert die Unterscheidung zwischen Punkten und Pfeilen. Diese wird nicht von allen interviewten Lehrpersonen für wichtig empfunden. Diese Tatsache kann aber wiederum zur Verwirrung der SchülerInnen beitragen, was zu schwerwiegenden

Fehlern führen kann. Beispielsweise können die Fehlvorstellungen beim Interpretieren der Mittelpunktsformel einer Strecke ersichtlich werden.

Die schlussendlich durchgeführten SchülerInneninterviews lieferten im Gegensatz zu einigen LehrerInnenerwartungen, zahlreiche Fehlvorstellungen. Es fiel auf, dass vor allem die Verwendung der Mittelpunktsformel einer Strecke  $M = \frac{1}{2} * (A + B)$  bzw. äquivalente Umformungen kaum interpretiert werden konnten. Dies wirft für mich die Frage auf, ob es nicht sinnvoller wäre, eine schrittweise Variante, wie  $M = A + \frac{1}{2} * \overline{AB}$ , im Mathematikunterricht zu verwenden.

Einer der Hauptpunkte der Studie war es, die Fehlvorstellungen mittels gewonnener Daten der LehrerInneninterviews zu therapieren, was in Summe gut funktionierte. Dabei wurde ersichtlich, welche Maßnahmen wirkten und welche eher mit weniger positivem Feedback zu beurteilen sind. Am Ende konnten viele der SchülerInnenfehlvorstellungen beseitigt werden, was mich für meine Zukunft als Lehrerin sehr positiv stimmt.

Aussagen wie „Ich kann mir das nicht vorstellen.“ sollten weiterhin den Ansporn für alle LehrerInnen liefern, die eigene didaktische Handlungsfähigkeit auszuspielen bzw. zu verbessern und verschiedene Therapiemöglichkeiten anbieten zu können.

## 5. Literaturverzeichnis

- Bauersfeld, H. (1982). *Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht. Festschrift für Walter Breidenbach zum 85. Geburtstag, zugleich ein Beitrag zu didaktischen Unterrichtsforschung*. Hannover: Schroedel Verlag.
- Bleier, G., Lindenberg, J., Lindner, A., & Stepancik, E. (2009). *Dimensionen Mathematik* 5. Wien: E. Dorner.
- bmukk. (2007). *Lehrplan der AHS-Oberstufe Mathematik*. Abgerufen am 5. Dezember 2013 von [http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp\\_neu\\_ahs\\_07.pdf](http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf)
- Bortz, J., & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler*. Heidelberg: Springer Medizin Verlag.
- Didaktik der Mathematik*. (kein Datum). Abgerufen am 28. November 2013 von [http://www.univie.ac.at/mathematik\\_didaktik/index.php](http://www.univie.ac.at/mathematik_didaktik/index.php)
- Dresing, T., & Pehl, T. (2013). *Praxisbuch Interview, Transkription & Analyse. Aleitungen und Regelsysteme für qualitativ Forschende*. 5. Auflage. Marburg: Eigenverlag: Dr. Dresing und Pehl GmbH.
- Duden. (2013). Abgerufen am 21. November 2013 von <http://www.duden.de/rechtschreibung/Formel>
- Hartmann, K. (1993). *Inhaltliche Vorstellungen von Vektoren. Eine Mathematikdidaktische Untersuchung*. Universität Wien: Diplomarbeit.
- Jamer, M. (1995). *Empirische Untersuchungen zur Vektorrechnung in der Schule*. Universität Wien: Diplomarbeit.
- Klasmann, R. (1984). *Der Vektorbegriff im Mathematikunterricht*. Universität Wien: Diplomarbeit.
- Malle, G. (2007). *Das Vektorkonzept in „Mathematik verstehen“*. Abgerufen am 7. September 2013 von Universität Wien: <http://www.mat.univie.ac.at/~mv/dokumente/vektorkonzept.pdf>
- Profke, L. (1978). *Zur Behandlung der linearen Algebra in der Sekundarstufe II; Materialien zur linearen Algebra und Analytischen Geometrie in der Sekundarstufe II*. Bielefeld.
- Wagner, W. (16. April 2013). *Didaktik der Chemie der Universität Bayreuth*. Abgerufen am 12. September 2013 von [http://daten.didaktikchemie.uni-bayreuth.de/v\\_fachdidaktik/MM\\_SVO.htm](http://daten.didaktikchemie.uni-bayreuth.de/v_fachdidaktik/MM_SVO.htm)

Woolfolk, A. (2008). *Pädagogische Psychologie. 10. Auflage - bearbeitet und übersetzt von Prof. Dr. Ute Schönpflug*. München: Pearson Education Deutschland GmbH.

## 6. Abbildungsverzeichnis

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| Abb. 1: Chronologischer Fahrplan der Studie .....             | 17 |
| Abb. 2: Fahrplan innerhalb der Klasse .....                   | 17 |
| Abb. 3: Elternbrief .....                                     | 21 |
| Abb. 4: SchülerInnenaufgaben .....                            | 22 |
| Abb. 5: Überprüfung Grundkompetenzen 5. Stunde Vektoren ..... | 25 |
| Abb. 6: Parallelität von Vektoren .....                       | 26 |
| Abb. 7: Verbindungsvektor 1. Lehrperson .....                 | 34 |
| Abb. 8: Therapie bzgl. Mittelpunkt 2. Lehrperson .....        | 45 |
| Abb. 9: Skizze Mittelpunkt einer Strecke .....                | 46 |
| Abb. 10: Therapie Mittelpunkt .....                           | 48 |
| Abb. 11: Vektoraddition Lukas_1 .....                         | 52 |
| Abb. 12: Vektoraddition Lukas_2 .....                         | 53 |
| Abb. 13: Therapie Verbindungsvektor .....                     | 54 |
| Abb. 14: Vektoraddition Thomas_1 .....                        | 57 |
| Abb. 15: Vektoraddition Thomas_2 .....                        | 58 |
| Abb. 16: 1. Prüfungsaufgabe Peter .....                       | 65 |
| Abb. 17: 1. Prüfungsaufgabe Armin .....                       | 65 |
| Abb. 18: Vektoraddition Clemens .....                         | 66 |
| Abb. 19: Steigungsdreieck Clemens .....                       | 69 |
| Abb. 20: Verbindungsvektor Markus .....                       | 72 |
| Abb. 21: 1. Prüfungsaufgabe Dominik und Markus .....          | 73 |
| Abb. 22: 1. Prüfungsaufgabe Veronika .....                    | 76 |
| Abb. 23: 1. Prüfungsaufgabe Lara .....                        | 76 |
| Abb. 24: 2. Prüfungsaufgabe Veronika .....                    | 77 |
| Abb. 25: 2. Prüfungsaufgabe Lara .....                        | 77 |
| Abb. 26: Überprüfung Grundkompetenzen 2. Aufgabe .....        | 83 |
| Abb. 27: Überprüfung Grundkompetenzen 4. Aufgabe .....        | 84 |
| Abb. 28: Vektoraddition Therapie .....                        | 97 |
| Abb. 29: Vektor entlang der x-Achse .....                     | 99 |

## 7. Tabellenverzeichnis

|                                                                                |            |
|--------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <i>Tab. 1: Fehlvorstellungen und Therapien .....</i>                           | <i>49</i>  |
| <i>Tab. 2: Fehlvorstellungen von SchülerInnen .....</i>                        | <i>110</i> |
| <i>Tab. 3: Überprüfungsphase .....</i>                                         | <i>112</i> |
| <i>Tab. 4: Therapieeffektivität bzgl. der Addition von Vektoren .....</i>      | <i>113</i> |
| <i>Tab. 5: Therapieeffektivität bzgl. des Verbindungsvektors .....</i>         | <i>114</i> |
| <i>Tab. 6: Therapieeffektivität bzgl. der Gleichheit von Vektoren .....</i>    | <i>115</i> |
| <i>Tab. 7: Therapieeffektivität bzgl. des Mittelpunkts einer Strecke .....</i> | <i>116</i> |

## 8. Anhang: Transkript

Abkürzungen, die in der Transkription verwendet werden:

|            |                                      |
|------------|--------------------------------------|
| I:         | Interviewerin                        |
| B1 bis B5: | Erste bis fünfte befragte Lehrperson |
| CAS:       | Computer Algebra System              |
| WU:        | Wirtschaftsuniversität               |
| HAK:       | Handelsakademie                      |
| HTL:       | Höhere technische Lehranstalt        |

Transkriptionsregeln:

1. „Es wird wörtlich transkribiert, also nicht lautsprachlich oder zusammenfassend. Vorhandene Dialekte werden möglichst wortgenau ins Hochdeutsche übersetzt. Wenn keine eindeutige Übersetzung möglich ist, wird der Dialekt beibehalten“. (Dresing & Pehl, 2013)
2. „Die Satzform wird beibehalten, auch wenn sie syntaktische Fehler beinhaltet“. (Dresing & Pehl, 2013)
3. „Wort- und Satzabbrüche sowie Stottern werden geglättet bzw. ausgelassen, Wortdoppelungen nur erfasst, wenn sie als Stilmittel zur Betonung genutzt werden: „Das ist mir sehr, sehr wichtig.“. „Ganze“ Halbsätze, denen nur die Vollendung fehlt, werden jedoch erfasst und mit dem Abbruchzeichen / gekennzeichnet.“ (Dresing & Pehl, 2013)
4. Gleichzeitiges Sprechen wird mit dem Zeichen // verdeutlicht.
5. „Interpunktion wird zu Gunsten der Lesbarkeit geglättet, das heißt bei kurzem Senken der Stimme oder uneindeutiger Betonung wird eher ein Punkt als ein Komma gesetzt. Dabei sollen Sinneinheiten beibehalten werden.“ (Dresing & Pehl, 2013)
6. „Pausen werden durch Auslassungspunkte in Klammern (...) markiert.“ (Dresing & Pehl, 2013)  
Die Anzahl der Auslassungspunkte gibt die Länge der Pause an.
7. „Verständnissignale des gerade nicht Sprechenden wie „mhm, aha, ja, genau, ähm“ etc. werden nicht transkribiert. AUSNAHME: Eine Antwort besteht NUR aus „mhm“ ohne jegliche weitere Ausführung.“ (Dresing & Pehl, 2013)
8. Wörter oder Äußerungen, die besonders betont werden, werden durch Fettschreibung gekennzeichnet.
9. „Emotionale nonverbale Äußerungen der befragten Person und des Interviewers[sic!], die die Aussage unterstützen oder verdeutlichen (etwa wie lachen oder seufzen), werden beim Einsatz in Klammern notiert.“ (Dresing & Pehl, 2013)

10. „Die interviewende Person wird durch ein „I“, die befragte Person durch ein „B.“ gekennzeichnet. Bei mehreren Interviewpartnern (z.B. Gruppendiskussion) wird dem Kürzel „B“ eine entsprechende Kennnummer oder ein Name zugeordnet (z.B. „B1.“, „Peter.“).“ (Dresing & Pehl, 2013)

### Unterrichtsbeobachtung

17.04.2013

#### 3. Stunde Vektoren:

Peter wurde an die Tafel gerufen, um folgende Aufgabe zu lösen:

Gegeben ist das Dreieck  $A = (-2|-2)$ ,  $B = (5|1)$  und  $C = (1|7)$ . Berechne die Seitenvektoren, Seitenlängen und einen Innenwinkel. Überprüfe mit Geogebra.

Peter berechnet den Vektor  $\overrightarrow{AB}$ .

- 1 L: Wie nennen wir in der Trigonometrie die Strecke zwischen A und B?  
2 Peter: (schreibt a)  
3 L: Jetzt hast du Strecken. Mach noch Pfeile daran.  
4 Max: Wieso rechne ich B minus A und nicht A minus B?  
5 L: Schau in der gestrigen Schulübung nach, da haben wir das gemacht.

23.04.2013

#### 7. Stunde Vektoren:

Gerade wird die Parallelität zweier Vektoren im Unterricht behandelt. Dazu schreibt die Lehrperson die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 20 \\ 11 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e} = \begin{pmatrix} -6 \\ y \end{pmatrix}$  an das Smartboard.

- 6 L: Wir fangen mit einem Beispiel an. Und zwar mit dem Vektor a-Pfeil (schreibt). Und da  
7 schreib ich jetzt noch weitere vier Vektoren dazu und ich möchte, dass ihr jetzt feststellt,  
8 ob die Vektoren zueinander parallel sind. Und wir fragen uns ganz einfach, wie kann man  
9 feststellen, ob zwei Vektoren zueinander parallel sind. Das werden wir mal gemeinsam  
10 machen und dann arbeitet ihr alleine (schreibt weitere vier Vektoren auf). Ich zeichne das  
11 ein Mal. Ich zeichne sie als Ortsvektoren, das heißt also, ich zeichne sie vom Nullpunkt

- 12           weg. Man sieht jetzt sofort, a-Pfeil und b-Pfeil sind parallel. Das können wir jetzt auch  
13           hinschreiben.
- 14   Lukas: Die sind ja nicht gleich.
- 15   L:     Ja, sie haben nicht die gleiche Orientierung, aber liegen auf einer Geraden, also sind sie  
16           parallel.
- 17   Lukas: Aber die Vektoren sind nicht gleich.
- 18   L:     Nein, aber parallel.

26.04.2013

#### 9. Stunde Vektoren:

Die Stunde beginnt und die Lehrperson wiederholt die Inhalte der vergangenen Mathematikstunde.

- 19   L:     Überlegen wir uns kurz, was wir die letzte Stunde gemacht haben.
- 20   Max: Einheitsvektor.
- 21   L:     Nicht herausschreiben. Also gut, wir haben den Einheitsvektor besprochen. wozu braucht  
22           man denn den Einheitsvektor? **Flo**, sagst du mir das?
- 23   Flo:   (schweigt)
- 24   Ralf: Um die Längen auszurechnen.
- 25   L:     Nein, um die Längen auszurechnen, brauche ich den Einheitsvektor nicht. Sondern? Wenn  
26           ich irgendwo einen Punkt habe und die Richtung habe ich auch/
- 27   Alex: Um zu einem Endpunkt zu kommen.
- 28   L:     Um den Endpunkt zu berechnen, in eine bestimmte Richtung und ich weiß wie weit ich da  
29           hinüber muss, dazu brauche ich dann den Einheitsvektor. Und da haben wir eine Formel  
30           aufgeschrieben.

26.04.2013

#### 9. Stunde Vektoren

- 31   L:     Neue Überschrift, Mittelpunkt einer Strecke. Und zwar machen wir es so, wir fangen mit  
32           einem Beispiel an. Wir sagen es sind zwei Punkte gegeben. Gegeben ist der Punkt A mit

33 den Koordinaten minus eins und minus drei und der Punkt B mit den Koordinaten sieben  
 34 und eins (schreibt am Smartboard). Gesucht ist der Mittelpunkt der Strecke. So, zeichnet  
 35 einmal ein Koordinatensystem (zeichnet). Gut, und dann die zwei Punkte einzeichnen,  
 36 macht das einmal. (.....) Wir brauchen das eigentlich eh nur zur Kontrolle (zeichnet). Und  
 37 da sieht man jetzt schon wo der Mittelpunkt liegt. Wie müssten wir das konstruieren? Wie  
 38 würde das konstruktiv gehen?

39 Peter: Zirkel.

40 L: Genau. Einstechen, abschlagen, abschlagen. Was entsteht da? Wie nennt man das, Juli?

41 Juli: Streckensymmetrale.

42 L: Ok, das ist die Streckensymmetrale. Und man sieht ja jetzt schon wo der Mittelpunkt liegt,  
 43 nämlich?

44 Peter: Bei minus eins und plus sieben.

45 L: Ja. Jetzt überlegen wir uns wie man das mit Vektoren macht. Da gibt es mehrere  
 46 Möglichkeiten, zwei mindestens. Es ist aber naheliegend, dass man von A weggeht. So,  
 47 welche zwei Möglichkeiten gäbe es, dass man mit Vektoren zum Mittelpunkt hin kommt?

48 Ben: Minus eins plus sieben durch zwei.

49 L: Ja gut, du rechnest dir die Koordinaten aus. Also minus eins plus sieben durch zwei und  
 50 dann rechnest du auch minus drei plus eins durch zwei. Ja, aber jetzt mit Vektoren.  
 51 Welchen Vektor gibt es da denn? Da kann man mal den Vektor AB-Pfeil aufzeichnen. Wie  
 52 kann ich jetzt, wenn ich den Vektor AB-Pfeil habe, zu M kommen?

53 Alex: Den Vektor AB durch zwei teilen.

54 L: Den Vektor AB durch zwei teilen, ist der nächste Vorschlag. Na gut, schauen wir uns das  
 55 einmal an. Rechnen wir uns den Vektor AB einmal aus (schreibt). Das ist B minus A. Das  
 56 ist acht und vier. Alex, du hast gesagt, ich teile jetzt den Vektor durch zwei, das heißt ich  
 57 nehme einhalb mal AB-Pfeil und dann kommt raus vier und zwei. Gut, jetzt haben wir den  
 58 halben Vektor. Das ist aber bestimmt nicht der Mittelpunkt. Vier zwei liegt irgendwo da  
 59 oben (zeigt auf Smartboard). Was fehlt noch? Es fehlt ja nur noch eine Kleinigkeit. Du hast  
 60 den Vektor vier zwei ausgerechnet (zeichnet). Das ist ein Vektor, den kann man überall  
 61 anfangen lassen. Wo würdest du ihn klugerweise anfangen lassen?

62 Alex: Bei A.

63 L: Gut, also wie bekommen wir den Mittelpunkt? Wir lassen den Vektor einhalb AB-Pfeil  
 64 hier anfangen (zeichnet). Und bekommen M ist gleich, ich gehe von A weg und gebe  
 65 einhalb mal AB-Pfeil dazu.

02.05.2013

11. Stunde Vektor

Zu Beginn der Stunde wurde die Teilung einer Strecke mit Hilfe von Geogebra wiederholt. Dazu wurde Ralf nach vorne an den Computer geholt.

- 66 L: Gib einmal den Punkt A mit minus vier und minus drei an und der Punkt B ist gleich fünf  
67 vier. So und jetzt teile die Strecke mit einem Befehl, mit **einem**. Nimm dazu fünf gleiche  
68 Teile.
- 69 Ralf: (probiert Befehle aus)
- 70 L: Wer gibt ihm denn einen Tipp für den Befehl?
- 71 Ralf: Folge.
- 72 L: Folge, ja gut.
- 73 Ralf: (versucht es wieder)
- 74 L: So, da sind jetzt irgendwo die Punkte, weil, welchen Fehler hast du jetzt gemacht? Wie  
75 rechnet man zum Beispiel den Mittelpunkt einer Strecke aus?
- 76 Ralf: Die Strecke durch zwei.
- 77 L: Ja, A plus B durch zwei. Aber man kann es ja auch so rechnen, man geht vom Punkt A weg  
78 und geht dann Richtung AB-Pfeil. Und bei dem Befehl bei dir fehlt noch, dass du von  
79 irgendwo weggehen musst.
- 80 Ralf: Also plus B.
- 81 L: Na ganz vorne. Du gehst vom Punkt A weg, also A plus. Gut, jetzt stimmt das.

## LehrerInneninterviews

Im Vorfeld wurden sämtliche Rahmenbedingungen geklärt. Dazu zählte unter anderem, dass das Gespräch aufgezeichnet und die Anonymität der Daten gewährleistet wird.

Des Weiteren wurde das Thema der Diplomarbeit vorgestellt und kurz erläutert.

### 1. Interview

---

|                |                                |
|----------------|--------------------------------|
| Termin:        | Donnerstag, 02.05.2013         |
| Ort:           | BG/BRG Stockerau, Sprechzimmer |
| Dauer:         | 21 Minuten                     |
| Interviewerin: | Christina Gahler               |

---

- 82 I: Als erstes würde mich interessieren, wie Sie vorhaben, dass Sie die Vektorrechnung in der Schule  
83 einführen, eher auf dem arithmetischen oder auf dem geometrischen Weg.
- 84 B1: Eher auf dem geometrischen. Vor allem in der 5A, ist also eine Sprachklasse, und die haben  
85 einfach/ vom Vorstellungsvermögen her tun sie sich viel leichter mit Geogebra Unterstützung,  
86 geometrisch das ganze einzuführen.
- 87 I: Ok. Alles klar. Ist das auch auf Grund des Schulbuchs der Fall?
- 88 B1: (...) In dem Thema-Mathematik (Anm.: Schulbuch) ist das gemischt drinnen. Da ist es  
89 geometrisch und arithmetisch drinnen. Da ist es bunt gemischt.
- 90 I: Gut, aber trotzdem eher geometrisch.
- 91 B1: Ja.
- 92 I: Und was sind Vor- und Nachteile von dem geometrischen Weg?
- 93 B1: Die Vorstellung ist leichter, sie tun sich aber dann (...) schwerer auf das Rechnerische  
94 umzustellen. Aber das ist halt unterschiedlich. Das hängt halt sehr schwer/ also sehr stark davon  
95 ab, wie gut die Klasse ist. Wenn du prinzipiell eine bessere Klasse hast, ist das prinzipiell  
96 überhaupt kein Problem, dann ist es nämlich auch egal wie du einsteigst. Aber wenn die Klasse  
97 halt schwächer ist, ist der Vorteil einfach, dass sie es verstehen, aber der Nachteil, dass sie es  
98 nicht gescheit rechnen können.
- 99 I: Alles klar. Und wenn man es jetzt geometrisch einführt, was sind trotzdem typische  
100 Fehlvorstellungen der Schüler und Schülerinnen?
- 101 B1: Das große Problem ist, dass sie oft x und y vertauschen. Und ob das eine Fehlvorstellung ist, weiß  
102 ich nicht, aber es hat einfach damit zu tun, dass sie sich x und y einfach überhaupt nicht vorstellen  
103 können.
- 104 I: Trotz der geometrischen Einführung?

105 B1: Trotz der geometrischen Einführung. Weil sie auch die Koordinatensysteme teilweise falsch  
 106 zeichnen. Und sonst (...) wäre mir jetzt nie großartig was untergekommen, dass sie andere  
 107 falsche Vorstellungen hätten.

108 I: Ok. Weil man/ weil Sie jetzt sagen, Sie führen das geometrisch ein, was will man da im  
 109 Vorhinein vermeiden für Schwierigkeiten?

110 B1: Warum ich es geometrisch mach?

111 I: Genau.

112 B1: Vermeiden weiß ich nicht. Aber einfach (...) die Hinführung auf das Thema an sich ist leichter,  
 113 wenn sie sich das Ganze als Pfeile, als Vektoren einfach vorstellen können, als wenn sie einfach  
 114 nur sehen, ok das sind halt irgendwelche Koordinaten in einem Koordinatensystem. Und dann tun  
 115 sie sich mit dem Unterschied zwischen Punkt und Vektor wahnsinnig schwer. Und das sehen sie  
 116 halt viel schöner, wenn man es geometrisch macht.

117 I: Also quasi, Vektor auffassen als Punkt oder als Pfeil?

118 B1: Genau, ja.

119 I: Und wenn jetzt so eine Fehlvorstellung da ist, wie zum Beispiel, sie verwechseln die x und y  
 120 Koordinate, wie reagieren Sie dann darauf oder wie intervenieren Sie?

121 B1: Naja ich versuche ihnen dann mehr oder weniger Hilfestellungen alphabetisch zu geben. Einfach  
 122 nur, dass sie wissen, x kommt vor y. Einfach vom Zeichnen und vom Vorstellen her. Oder  
 123 einfach noch viel mehr mit Geogebra das Ganze zu zeichnen, dass sie es wirklich richtig halt  
 124 immer vor sich haben.

125 I: Also Computerunterstützt hilft viel?

126 B1: Ja. Hilft sehr viel.

127 I: Gut. Und ich hab jetzt ein paar typische Fehlvorstellungen von Kindern, also von Schüler und  
 128 Schülerinnen und mich würde jetzt interessieren, wie Sie darauf reagieren würden, was für  
 129 Therapievorschlüsse Sie hätte.

130 B1: Kann man AB-Pfeil und CD-Pfeil addieren? Begründe deine Antwort! Ok, dass sie es so  
 131 zusammenhängen (Anm.: Fehlvorstellung 1)

132 I: Genau. Dass sie sie in derselben Richtung zusammenhängen, oder dass sie von Vornherein sagen,  
 133 das geht gar nicht, das kann man nicht addieren.

134 B1: Naja es ist die Frage zu welchem Zeitpunkt das kommt, aber prinzipiell ihnen einfach vor Augen  
 135 führen, das geht halt mit Geogebra wirklich gut, dass man sagt, man kann ja verschieben. Du  
 136 kannst im Raum die Vektoren einfach hin und her schieben. Wichtig ist, dass sie dieselbe  
 137 Richtung und Länge beibehalten. Und dass man dann einfach ihnen zeigt, schaut parallel  
 138 verschieben, wo kommt das hin und wie wird das Ganze dann addiert.

139 I: Ok. Also auf das Parallelverschieben deutlich hinweisen.

140 B1: Genau.

141 I: Und hätten Sie da auch irgendwelche Beispiele, anhand derer man das sehen kann wie man es  
 142 richtig macht?

143 B1: Naja, Beispiele kann man sich ja jeder Zeit aus dem Ärmel schütteln, mehr oder weniger.

144 I: Zum Beispiel irgendein konkretes?

145 B1: Wie meinst (...)

146 I: So, dass sie das richtig/ dass man ihnen quasi nicht sagt, so geht es, sondern dass sie selber darauf  
 147 kommen.

148 B1: Na oh ja. Leicht geht es dann, wenn du eben, so wie der eine Vektor hier CD ist, entlang einer  
 149 Achse nimmst. Dann ist es nämlich für die Schüler auch viel leichter nachvollziehbar.

150 I: Entlang einer Achse.

151 B1: Entlang einer Achse, glaube ich, hilft ihnen schon, einfach vom Verschieben her und vom  
 152 Vorstellen her. Wobei ich glaube, dass das Grundproblem hier ja mit eines ist, dass sie nicht  
 153 wissen wie man Vektoren addiert, grafisch. Das heißt sie sehen die/ das Parallelogramm einfach  
 154 nicht.

155 I: Das heißt Sie würden ein Parallelogramm aufstellen.

156 B1: Genau. Das Parallelogramm dazu zeichnen und die Diagonale wirklich einzeichnen, dass ihnen  
 157 das klar ist.

158 I: Gut. Ich hab mir zum Beispiel auch gedacht, was ist, wenn man das Ganze von der geometrisch  
 159 Sicht auf die arithmetische überführt und einfach mal die Kinder schätzen lässt (...)

160 B1: Was da raus kommt.

161 I: Genau. Was für Koordinaten die Vektoren haben und ob man die dann addieren kann. Wäre das  
 162 auch (...)

163 B1: Das geht/ also sie würden wahrscheinlich sofort sagen, das ist kein Problem. Und sie addieren  
 164 sicher auch sofort richtig, die x- und die y-Koordinaten. Nur stellen sie dann den Zusammenhang  
 165 nicht her zum Grafischen. Weil das eine ist eine Rechenregel, die sie lernen, und das andere ist  
 166 eine Vorstellung, die sie nicht haben.

167 I: Aber zumindest, dass man dem entgegenwirken könnte, dass (...)

168 B1: Dass sie sagen, das geht nicht. Also das auf jeden Fall. Also das würden sie auf jeden Fall  
 169 einsehen.

170 I: Gut, dann, ich habe nämlich insgesamt vier Fehlvorstellungen. Das ist dann die zweite (übergibt  
 171 Zettel). Wenn man zum Beispiel den Verbindungsvektor AB-Pfeil ausrechnen soll. Ich hab in der  
 172 Literatur recherchiert, das Ausrechnen selber ist eigentlich weniger das Problem. Das schwierige  
 173 ist dann das Ganze zu skizzieren und zu interpretieren.

174 B1: Ist klar, ja.

175 I: Und jetzt haben wir da zum Beispiel die Fehlvorstellung, dass das als // Ortsvektor //

176 B1: // Vom Ursprung ist //

177 I: Genau. Eingezeichnet wird. Da ist dann die/ bei der zweiten ist die // Auffassung als //

178 B1: // Das ist auch interessant //

179 I: Als Pfeil ( $\cdot$ ), die dann addiert werden.

180 B1: Ja, was an sich schon ein Blödsinn ist.

181 I: Richtig, ja. Und jetzt wieder meine Frage, gibt es irgendwelche Beispiele, die man da anführen

182 kann?

183 B1: Na, oh ja. Das ist ganz einfach. Sobald du ihnen einfach klar machst, dass eine Vektorberechnung

184 eine Subtraktion ist, muss ihnen klar sein, dass sie mit dem nicht mehr weit kommen, so wie sie

185 es da machen (zeigt auf die zweite Fehlvorstellung). Das heißt, man muss ihnen einfach den

186 Unterschied klar machen zwischen Addition und Subtraktion. Und den Unterschied zwischen

187 einem Punkt und deinem Vektor.

188 I: Gut, zwischen einem Punkt und einem Vektor.

189 B1: Ja, also ich mache es immer so, dass sie in den Skizzen die Punkte wirklich immer mit Kreuze

190 einzeichnen und nie, nie als Vektoren, nie als Ortsvektoren. Sondern immer mit Kreuze einfach

191 als Punkt markieren, und dann ist klar, dass die Verbindung dessen dann ein Vektor ist, eine

192 Minusrechnung.

193 I: Eine Minusrechnung, ok.

194 B1: Aber die Vorstellung ist echt interessant (zeigt auf Fehlvorstellung 2). Das hab ich noch nie

195 gesehen. Das ist sehr kreativ, weil eigentlich haben sie gar keine Ahnung, was das Ganze tut.

196 Weil das ist eine Addition von zwei Vektoren, die nirgends vorkommen.

197 I: Stimmt. Und wie führen Sie das ein, dass man AB-Pfeil berechnet, in ihrem Unterricht?

198 B1: Zuerst geometrisch, das heißt ich zeichne die beiden Punkte ein und dann den Verbindungsvektor.

199 I: Ja, darf ich das sehen (reicht Zettel und Stift).

200 B1: (Zeichnet). Also, dass ich wirklich in einem Koordinatensystem/ egal, meistens mache ich es

201 sogar Quadranten übergreifend, dass sie sehen, dass es vollkommen egal ist, wo das Ganze liegt.

202 Und dass sie dann überlegen müssen, ok, ich habe hier die Koordinaten, die x-Koordinaten, die y-

203 Koordinaten und ich verbinde die beiden jetzt miteinander. Wie könnte ich darauf kommen? Und

204 dass sie einfach sehen, wenn ich da nach rechts gehe und hinunter gehe, heißt das, ich muss die

205 beiden addieren, mehr oder weniger, und so weiter. Das heißt, dass sie einfach intuitiv darauf

206 kommen, was ich mit den Koordinaten machen muss, anhand der Skizze, die sie sehen. Das ist

207 dann schon die zweite Dings. Die Einführung würde ich eher in einem Quadranten machen, dass

208 sie einfach sehen, von den Koordinaten her, dass sie sofort subtrahieren müssen.

209 I: Ok. Also das wär quasi auch ein Beispiel, was man noch ein Mal bringen kann // um das

210 Verständnis //

211 B1: // Genau, um das Ganze zu verstehen // Und dann die Regel aber sofort aufschreiben, einfach B

212 minus A, und die Koordinaten subtrahieren, dass sie das sofort verbinden.

213 I: Ok, alles klar, gut. Dann haben wir noch die Gleichheit von Vektoren. Die Frage ist jetzt, gilt AB-

214 Pfeil ist gleich CD-Pfeil. Fehlvorstellung, oft, ja, sie sind zwar parallel aber nicht ident, deshalb

215 nicht gleich. Oder, sie haben nicht denselben Anfangspunkt und sind deshalb nicht gleich. Was  
 216 kann man da machen?

217 B1: Na, es ist die Frage in welchem Stadium das Ganze passiert. Weil du machst ja dann relativ bald  
 218 eigentlich das Parallelitätskriterium der Vektoren und ab dem Zeitpunkt, wissen die dann relativ  
 219 schnell, ob Vektoren ident, oder parallel sind beziehungsweise Geraden parallel oder ident sind.  
 220 Aber ich meine die Vorstellung, dass sie nur parallel aber nicht ident sind finde ich witzig. (...)  
 221 Na oh ja, man kann versuchen ihnen klar zu machen, was kennzeichnet einen Vektor, die Länge  
 222 und die Richtung. Wenn beides gleich ist, sind die Vektoren gleich. Dass man das über das  
 223 macht.

224 I: Eher definitionsbezogen.

225 B1: Würde ich schon machen. Ich glaube, dass sie es anders nicht verstehen, weil wenn man eben  
 226 verschiebt/ parallel verschiebt dann werden es für sie wahrscheinlich immer zwei verschiedene  
 227 Vektoren sein, oder oft.

228 I: Ok. Was wäre, wenn wir jetzt das Ganze arithmetisch machen und wiederum sagen // was für  
 229 Koordinaten //

230 B1: // Ja, eh. Dann ist es leicht. // Also wenn man es arithmetisch macht, ist es leicht. Einfach ihnen  
 231 klar zu machen dieselbe Länge, derselbe Vektor ist derselbe Vektor, mehr oder weniger. Aber du  
 232 kannst es auch geometrisch machen, weil du hast gerade am Anfang oft Beispiele, wo ich ihnen  
 233 dann (.) einfach versuche zu zeigen, wenn ich ihnen verschiedene Punkte angebe und das kommt  
 234 ein/ den Verbindungsvektor zu berechnen und es kommt derselbe Vektor heraus, ob sie dann eben  
 235 darauf kommen, ob es Dasselbe ist oder nicht.

236 I: Zum Beispiel, bei so typischen Beispielen, ich habe ein Parallelogramm // und mir fehlt der vierte  
 237 Eckpunkt //

238 B1: // Ja, genau. // Und sie wissen es ist dieselbe Richtung. Der liegt dann an einem anderen Ort, aber  
 239 ist es derselbe Vektor, ja, oder nein. Ich glaube, dass ihnen das schon hilft.

240 I: Ok, also so könnte man das auch noch einmal festigen.

241 B1: Genau.

242 I: Gut, und dann zum Letzten, der Mittelpunkt. Also die Formel quasi aufstellen und begründen.  
 243 Die Formel selbst ist eigentlich den meisten Schülern recht bekannt, das ist nicht so schwierig für  
 244 sie. Das was schwierig ist dann das Begründen. Viele wollen das geometrisch darstellen. Und es  
 245 kommt dann eben so zu Aussagen wie, wenn ich die Punkte A und B addiere, dann erhalte ich die  
 246 ganze Strecke. Und danach muss ich die halbieren und erhalte den Mittelpunkt. Was kann man da  
 247 machen?

248 B1: Um ihnen die Formel begreiflich zu machen?

249 I: Ja, weil es ist ja so, zumindest habe ich das nachgelesen, viele können die Formeln, auch das //  
 250  $AB$  ist  $B$  minus  $A$  //

251 B1: // Ja, aber sie haben keine Ahnung. //

252 I: Aber sie wissen nicht, was das bedeutet, eigentlich. Oder wie ich darauf komme.

253 B1: Na ich mach zum Beispiel/ ich fange nie mit der Formel an. Wenn ich den Mittelpunkt zwischen  
254 zwei Punkten berechne, dann mache ich nie die Formel, sondern ich versuche über die Vektoren  
255 hin zu kommen, über Vektoraddition. Das heißt, ich gebe zum Anfangspunkt die Hälfte der  
256 Strecke hinzu und dann ergibt sich die Formel von alleine.

257 I: Also quasi die Formel herleiten?

258 B1: Ja, genau. Weil das ist ihnen dann auch klar. Weil da wissen sie ja vorher schon, wie komme ich  
259 von einem Punkt zum anderen mit Hilfe eines Vektors. Und dann kann ich, mit Hilfe von dem,  
260 leicht begründen wie man auf die Formel kommt. Und dann ist ihnen auch die Formel klar. Da  
261 gibt es keine Probleme mehr. Und dann haben sie auch keine Probleme zu formulieren, was sie da  
262 eigentlich tun. Dass sie eben zu einem Punkt den halben Vektor dazu geben.

263 I: Alles klar. Wenn aber jetzt so was kommt, AB-Pfeil halbe ist die Formel. Jetzt gehen sie ja quasi  
264 den halben Vektor/

265 B1: Ja, ja, aber von WO weg? // Keine Ahnung. //

266 I: // Von wo weg // (nickt) ist die Frage, ja. Sie fassen es aber trotzdem so auf, dass sie den  
267 Mittelpunkt haben. Also, das war das einzige Beispiel, wo Formeln falsch angegeben worden  
268 sind.

269 B1: Ja, da müssen/ mehr oder weniger muss man ihnen klar machen, oder versuchen klar zu machen,  
270 dass das/ dass man einen Vektor halbiert und dass man ja eigentlich nirgends hin kommt damit.  
271 Also wenn man zu einem Punkt will, dann muss man mit einem Vektor von irgendwo weggehen.  
272 Und das muss ihnen klar werden.

273 I: Gibt es da auch irgendein Beispiel anhand dessen man das gut sehen kann?

274 B1: Das würd ich ihnen aufzeichnen lassen. Ich muss dir eigentlich sagen, ich würde/ die Punkte A  
275 und B kann man zeichnen und jetzt soll/ und jetzt müssen sie sich überlegen, so jetzt wenn ich  
276 den Vektor von A nach B ausrechne und ich halbiere ihn, dann habe ich einen Vektor, den kann  
277 ich irgendwohin verschieben, der kann irgendwo liegen, aber ich komme nie zum Mittelpunkt.

278 I: Also darauf hindeuten, dass der irgendwo sein kann und er muss nicht unbedingt/

279 B1: Genau, womit du nämlich dann wieder bei dem ersten Problem wärst (nimmt Zettel mit  
280 Gleichheit von Vektoren), dass man Vektoren ja/ dass sie trotzdem gleich sind, auch wenn ich sie  
281 irgendwo anders hin zeichne. Aber ich gebe zu, dass das nämlich wirklich eine schwierige Sache  
282 ist, dass du es wegbekommst. Weil wenn er es irgendwann so in seinem Kopf drinnen hat, wird es  
283 meistens schwer, ihn davon wegzubekommen.

284 I: Das heißt, ich muss immer wieder darauf hinweisen, ich muss von wo weggehen (.) // dass ich wo  
285 anders hinkomme //

286 B1: // Genau, einfach dass ihnen klar ist // um einen Punkt zu erreichen, brauche ich einen  
287 Anfangspunkt und einen Vektor wie ich dort hinkomme, ohne den beiden geht es nicht. Das hilft  
288 aber wahrscheinlich auch, wenn du einfach die Definition einer Ger/ Parameterform einer

289 Geradengleichung dir anschaust, weil klar ist, alle Punkte X gehen von einem Punkt aus mit  
290 einem Vektor, der halt irgendeine Länge hat. Und wenn sie das verinnerlicht haben, ist es klar,  
291 dass sie jeden Punkt erreichen können auf der Geraden und damit halt auch den Mittelpunkt von  
292 irgendwas.  
293 I: Also die Geradengleichung würde da auch hilfreich sein.

Anschließend bedankte ich mich noch für die tolle Mithilfe an meiner Diplomarbeit, wonach das Gespräch beendet wurde.

## 2. Interview

---

|                |                                |
|----------------|--------------------------------|
| Termin:        | Freitag, 03.05.2013            |
| Ort:           | BG/BRG Stockerau, Sprechzimmer |
| Dauer:         | 20 Minuten                     |
| Interviewerin: | Christina Gahler               |

---

- 294 I: Meine erste Frage ist dann eigentlich, wie Sie die Vektorrechnung einführen, eher arithmetisch  
295 oder eher mit einem geometrischen Zugang?
- 296 B2: Ja, also am Anfang also arithmetisch, ganz kurz, und dann kommt der geometrische Zugang mit  
297 den Punkten und mit den Pfeilen.
- 298 I: Ok. Und warum haben Sie sich so entschieden, dass Sie das zuerst arithmetisch einführen?
- 299 B2: Ich habe es früher eigentlich immer geometrisch gemacht, aber jetzt kommt die neue Matura und  
300 da gibt es diese/ (..) wie nennt man das/ Grundkompetenzen, da gibt es einen  
301 Grundkompetenzkatalog, und da steht eben darin, dass man die Vektoren nicht nur geometrisch  
302 interpre/ dass die Schüler die Vektoren nicht nur geometrisch interpretieren können sollen,  
303 sondern auch von der arithmetischen Seite her. Deswegen mache ich seit zwei Jahren, also seit  
304 vorherigem Jahr, mache ich das zuerst über das Arithmetische.
- 305 I: Mhm (zustimmend). Und wo sind da jetzt Vor- und Nachteile des arithmetischen Weges?
- 306 B2: Es ist, glaube ich, relativ egal wie man es macht. Also ich habe keinen Unterschied bemerkt.
- 307 I: Was sind jetzt trotzdem typische Fehlvorstellungen, wenn man die Vektorrechnung arithmetisch  
308 einführt, bei den Schülern und Schülerinnen?
- 309 B2: Typische Fehlvorstellungen (...) würde ich keine jetzt schnell sagen können, was da eine  
310 Fehlvorstellung ist. Ich glaube sie nehmen das recht schnell zur Kenntnis, dass das eben mehrere  
311 Zahlen geordnet sind und so. Da gibt es eigentlich keine Probleme.
- 312 I: Keine // Probleme //
- 313 B2: // Vielleicht hast du // hast du Fehlvorstellungen bemerkt? (Anm.: Gemeint ist der von mir  
314 beobachtete Unterricht)
- 315 I: Naja, ich meine, ich komme zu typischen Fehlvorstellungen noch später, aber was mir zum  
316 Beispiel aufgefallen ist, den Verbindungsvektor AB-Pfeil auszurechnen, machen viele/ also  
317 sagen, das rechnet man aus mit A minus B, statt B minus A. Das ist mir aufgefallen. Das kommt  
318 auch in der Literatur vor.
- 319 B2: Ja, aber das ist am Anfang so.
- 320 I: Das ist einfach so.

321 B2: Ja. Naja das ist am Anfang so. das ist/ das wird/ das kommt dann so oft, dass sie das dann bald  
 322 verinnerlichen und immer B minus A sagen. Es war heute in der Stunde zum Beispiel auch  
 323 wieder, dass einer gesagt hat, A minus // B, statt //

324 I: Ja, genau.

325 B2: B minus A, aber das wird in/ ein paar Stunden ist das glaube ich weg.

326 I: Alles klar. Und dass man das jetzt arithmetisch/ dass Sie das jetzt arithmetisch einführen, ist das  
 327 jetzt wirklich nur wegen der Zentralmatura oder will man dadurch auch irgendwelche  
 328 Schwierigkeiten vermeiden, die zu Beginn auftreten könnten?

329 B2: (..) Also ich habe es nur wegen der Zentralmatura gemacht, ich gebe es offen zu (lacht), weil man  
 330 hat eigentlich beim Geometrischen eh alle Aspekte von Vektoren dabei und da braucht man nicht  
 331 extra das Arithmetische vorher noch machen.

332 I: Ok. Und wenn jetzt Fehlvorstellungen da sind, wie reagieren Sie darauf oder wie intervenieren  
 333 Sie?

334 B2: Ja, ausbessern (lacht).

335 I: Ausbessern einfach, ok. Also zurechtweisen quasi.

336 B2: Ja, zurechtweisen würde ich nicht sagen, das ist ein zu krasser Ausdruck, ich würde eher sagen,  
 337 ja, darauf hinweisen und korrigieren.

338 I: Gut, dann/ ich habe jetzt auch noch typische Fehlvorstellungen mitgebracht, nämlich vier Stück.  
 339 Und ich hätte jetzt gerne Therapievorschläge von Ihnen, wie Sie das therapieren würden, wenn so  
 340 eine Fehlvorstellung im Unterricht oder wo auch immer kommt oder auftritt. Zum Beispiel bei  
 341 der Addition von Vektoren

342 B2: (Liest) Kann man AB-Pfeil und CD-Pfeil addieren, begründe deine Antwort. Und die  
 343 Fehlvorstellung ist, dass sie den/ dass sie es so (zeigt auf Zettel) annehmen.

344 I: Genau. Dass sie es in gleicher Richtung anhängen. Oder, dass sie überhaupt sagen, dass das gar  
 345 nicht funktioniert.

346 B2: Ja, das würde ich folgendermaßen sagen, da würde ich/ das kann man ja mit dem Smartboard ja  
 347 schön machen. Da würde ich den Pfeil nehmen und sagen, schau den Pfeil kann man ja irgendwo  
 348 hin verschieben, da herschieben, da herschieben, den kann man da auch verschieben. Und wir  
 349 haben gelernt, Vektoren addiert man indem man sie aneinander hängt und jetzt kann man den  
 350 Pfeil da dranhängen und damit geht das.

351 I: Wenn jetzt wer sagt, ja gut Aneinanderhängen ist da (zeigt auf Fehlvorstellung 1) auch gemacht  
 352 worden.

353 B2: Ja, das ist schon richtig, aber das ist ja dann nicht mehr derselbe Vektor, das ist/ der Vektor ist ja  
 354 dann ein anderer, der ist ja gedreht worden.

355 I: Das heißt/

356 B2: Also da muss man dann hinweisen, der Vektor ist falsch.

357 I: // Der Vektor ist falsch. //

358 B2: // Der Vektor ist nicht // derselbe Vektor. Also wie gesagt, da herumschieben und dann rauf, dann  
359 bekommt/ ich meine, ich habe das nicht so genau gemacht, weil ich das schon in Physik gemacht  
360 habe. Da haben wir nämlich schon ein Kräfteparallelogramm gezeichnet, deshalb war es in der  
361 Stunde vielleicht ein bisschen flott.

362 I: Das macht überhaupt nichts. Das sind einfach so ganz typische Fehlvorstellungen, die ich in der  
363 Literatur gefunden habe. Gut, dann das nächste wäre dann der Verbindungsvektor.

364 B2: (Liest) Berechne den Vektor AB-Pfeil und veranschauliche dies an einer Skizze. A ist fünf, zwei  
365 und B ist sieben, vier.

366 I: Genau, also da haben wir zum Beispiel beim Ersten/ bei der ersten Fehlvorstellung wird der AB-  
367 Pfeil als Ortsvektor gezeichnet.

368 B2: (.) Was wird da überhaupt gezeichnet?

369 I: Ja, AB-Pfeil wird ausgerechnet, richtig ausgerechnet, das ist eigentlich weniger das Problem, also  
370 der ist dann zwei, zwei.

371 B2: Ok, AB-Pfeil ist zwei, zwei (schreibt). Und es wird jetzt der Ortsvektor/

372 I: Also das Berechnen ist laut Literatur nicht die Schwierigkeit, das Veranschaulichen ist eher  
373 problematisch.

374 B2: (...) Also ich würde/ ich glaube nicht, dass ein Schüler irgendwann einmal das so aufzeichnet(  
375 Fehlvorstellung 1). Das ist mir noch nie untergekommen, weil wenn da steht, veranschauliche  
376 dies an einer Skizze, dann wird er als erstes auf jeden Fall den Punkt fünf, zwei und den Punkt  
377 sieben, vier zeichnen, nehme ich einmal an. Also, dass er den Punkt hier zeichnet und den Punkt  
378 hier und dann glaube ich, kann er den Vektor machen. Also das (zeigt auf Fehlvorstellung 1) ist  
379 mir noch nie untergekommen, dass einer sagt, den Vektor AB-Pfeil von A nach B ist das, da muss  
380 er schon/ und genauso da (zeigt auf Fehlvorstellung 2).

381 I: // Wirklich? // Noch nie?

382 B2: Also, soweit ich mich erinnern kann/ also und das überhaupt nicht (zeigt auf Fehlvorstellung 2).

383 I: Ja, das ist sehr kreativ.

384 B2: Das habe ich aber noch nie gesehen, dass jemand den Vektor AB-Pfeil nicht richtig von A nach B  
385 zeichnet. Vielleicht ist das auch deswegen, dass die mit Geogebra arbeiten oder so, weil da ist  
386 immer Punkt, Punkt und dann Pfeil, und dann haben sie es immer, sehr einfach.

387 I: Das heißt, ein wichtiges Hilfsmittel ist schon Geogebra?

388 B2: **Ja**, auf jeden Fall. Das ist ganz wichtig, ja. Weil das sehr gut zwischen/ durch Punkt/ unter Punkte  
389 und Pfeile unterscheidet.

390 I: Und die erste Fehlvorstellung ist bis jetzt auch noch nicht aufgetreten?

391 B2: Nein.

392 I: Wirklich nicht?

393 B2: Also, (liest) veranschauliche durch eine Skizze, A ist gleich, B ist gleich, dass da jemand den  
394 Vektor hinzeichnet, nein. Obwohl es ja eigentlich/ so falsch ist es ja gar nicht. Es ist ja der  
395 richtige Vektor an und für sich.

396 I: Richtig, aber/

397 B2: (Nickt) Er sollte halt von A weg gehen.

398 I: Ich denke mir zum Beispiel, wenn man das schnell ausrechnet, AB-Pfeil, habe ich ja gleich zwei,  
399 zwei und dann zeichne ich zwei, zwei halt schnell als Ortsvektor ein und vergesse darauf, dass ich  
400 eigentlich einen Anfangs- und Endpunkt habe.

401 B2: Na, wie gesagt, habe ich eigentlich/ also kann ich mich nicht erinnern, dass ich das schon jemals  
402 gehabt hätte.

403 I: Würde jetzt so etwas im Unterricht kommen, wie würden Sie darauf reagieren?

404 B2: Ja, indem ich so eine Skizze mache. Also so eine, indem ich ein Koordinatensystem, den Punkt A,  
405 den Punkt B und den Pfeil einzeichne.

406 I: Können Sie mir das vielleicht aufzeichnen?

407 B2: Also (zeichnet), dann zeichne ich den Punkt A ein und den Punkt B. Und dann sage ich von A  
408 nach B ist der Pfeil.

409 I: Ok. Woher weiß man dann, dass man B minus A rechnen muss?

410 B2: Das sollte ja schon vorher klar sein, weil das haben sie ja schon ausgerechnet, B minus A. Aber  
411 das würde ich auch/ das kann man hier auch wieder erklären, allerdings würde ich es nicht an so  
412 einem komischen Beispiel machen, weil die Vektoren da sehr ungut liegen. Also das B minus A  
413 muss man schon so machen, dass man das sehr schön sieht/ die Koordinaten besser sieht. Die x-  
414 Koordinate geht ja mit 7 minus 5, gut, naja, geht eigentlich auch, aber trotzdem. Mit einfacheren  
415 und kleineren Zahlen, so wie ich es im Unterricht gemacht habe. Noch was dazu?

416 I: Nein, das passt eigentlich. Dann die Dritte, die Gleichheit von Vektoren. Wenn die Schüler und  
417 Schülerinnen jetzt zwei solche Pfeile sehen und die Frage gestellt bekommen „Sind die gleich?“. Eine  
418 Fehlvorstellung ist zum Beispiel, ja sie sind parallel zueinander, sie sind aber nicht identisch  
419 und die andere ist, sie haben nicht denselben Anfangspunkt.

420 B2: Naja, also selbst ich würde sagen, AB-Pfeil und CD-Pfeil, ist wenn es so steht/ der Vektor ist  
421 gleich, die Pfeile aber nicht. Also ich versuche da zu unterscheiden zwischen einem Pfeil, der also  
422 von einem Punkt zum anderen geht, und ein Repräsentant des Vektors ist und zwischen dem  
423 Vektor selber. Also in dem Fall würde ich sagen, die Vektoren sind gleich, also ich würde sagen,  
424 das ist jeweils der Vektor v-Pfeil und das ist auch der Vektor v-Pfeil, die Vektoren sind gleich,  
425 aber sie sind durch zwei unterschiedliche Pfeile repräsentiert. Das heißt, die erste Fehlvorstellung,  
426 muss man genau unterscheiden, ist es jetzt der Pfeil oder ist es jetzt der Vektor. Ist es der Pfeil als  
427 Repräsentant oder ist es ein Vektor. Das müsste man dann halt noch einmal genauer erklären, also  
428 die Vektoren sind gleich, aber es sind unterschiedliche Repräsentanten.

429 I: Das heißt, eher auf die Definition zurückführen.

430 B2: Ja. Ein Vektor ist halt/ sind halt alle Pfeile die gleich lang, parallel und die gleiche Orientierung  
 431 haben. Das heißt, das (zeigt auf Zettel) sind gleiche Vektoren, aber unterschiedliche Pfeile, als  
 432 unterschiedliche Repräsentanten.

433 I: Würde es da vielleicht irgendein Beispiel geben, was Ihnen einfällt, dass die Schüler und  
 434 Schülerinnen von alleine darauf kommen, dass die Vektoren gleich sind. Oder (.) wie würden Sie  
 435 reagieren?

436 B2: Ja, ich glaube, dass die Schüler da alleine darauf kommen, geht da in dem Fall nicht. Das muss  
 437 man ihnen ganz einfach sagen. Ich glaube, der Begriff Vektor ist ja sehr komplex und ich kann  
 438 nicht sagen/ ich glaube, ich habe das eh in der Schule recht gut gemacht, finde ich. Dass man da  
 439 schon genau unterscheidet was ist ein Pfeil, was ist ein Vektor. Oder was ist ein Repräsentant und  
 440 was ist ein Vektor. Beispiele/ ich glaube das muss man vorführen, ganz einfach.

441 I: Und was ist jetzt, wenn man zum Beispiel ein Parallelogramm hat. Man hat nur drei Eckpunkte  
 442 gegeben und rechnet sich den vierten aus. Könnte man vielleicht so die Schüler dann unbewusst  
 443 darauf hinweisen, wenn man den einen daran hängt an den anderen Anfangspunkt, dass das  
 444 derselbe Vektor ist?

445 B2: Ja, an und für sich schon, ja.

446 I: Oder ist das nicht optimal?

447 B2: Ja, das würde ich später als Anwendungsbeispiel machen und das sollte eigentlich schon intuitiv  
 448 klar sein, dass die beiden parallelen Vektoren, also sozusagen der gleiche Vektor sind. Deswegen  
 449 kann man sie auch anhängen.

450 I: Richtig, aber wenn das jetzt die Schüler nicht wissen und bekommen dann so ein Beispiel mit  
 451 dem Parallelogramm. Glauben Sie, dass da dann das Licht aufgehen könnte und sie sagen: „Ah ja,  
 452 das sind ja wirklich dieselben Vektoren.“ ?

453 B2: Ja, könnte durchaus sein.

454 I: Oder wissen Sie ein besseres Beispiel?

455 B2: Nein, das ist schon ok das Beispiel. Ja, an das habe ich jetzt gar nicht gedacht, dass man das dann  
 456 eigentlich dauernd verwendet. Und heute haben wir es mit dem Normalvektor genauso gemacht.  
 457 Da anhängen (zeigt auf die Zeichnung) oder da anhängen/ ist derselbe Vektor. Ja, kann man  
 458 machen.

459 I: Und auf die Aussage „Sie haben nicht denselben Anfangspunkt.“, wie würden Sie da reagieren?

460 B2: Ja, für die Pfeile stimmt es ja, aber für die Vektoren ist es egal. Noch eines?

461 I: Ja, eines gibt es noch. Und zwar den Mittelpunkt einer Strecke. In der Literatur ist zu finden, dass  
 462 eigentlich die Formel an sich viele Schülerinnen und Schüler sofort hinschreiben können, nur wie  
 463 man auf diese Formel kommt, wie man sie begründen kann/

464 B2: Ist falsch.

465 I: Genau, weil oft Formeln auswendig gelernt werden und man sie dann nicht mehr nachvollziehen  
 466 kann.

467 B2: (Liest) Wenn ich die Punkt A, B addiere, erhalte ich die ganze Strecke. Um den Mittelpunkt zu  
 468 erhalten, muss ich die ganze Strecke durch zwei dividieren.

469 I: Was sagt man da? Oder kann man ein Gegenbeispiel bringen, dass man sieht, dass das nicht so  
 470 ist?

471 B2: Naja, sie verwechseln da die Strecke natürlich mit den Punkten, dass die ja Koordinaten haben.  
 472 Andererseits ist es natürlich so, wenn man zwei Zahlen hat, und zum Beispiel nur die x-  
 473 Koordinaten hernimmt, dann passiert ja eigentlich nichts anderes, als man nimmt den Mittelwert  
 474 der x-Koordinaten und man nimmt den Mittelwert der y-Koordinaten. Das heißt, diese  
 475 Begründung ist ja gar nicht so falsch. Man müsste es nur koordinatenweise machen. Also ich  
 476 nehme sozusagen den Mittelwert der x-Koordinate und nehme den Mittelwert von der y-  
 477 Koordinate und dadurch bekomme ich diese Formel.

478 I: Aber das ist glaube ich nicht das, was die Schüler mit dieser Aussage meinen.

479 B2: Wahrscheinlich nicht, ja. Das ist richtig. Also, wenn das kommt, würde ich ihnen das sagen, was  
 480 ich jetzt gesagt habe, nämlich mit den x- und y-Koordinaten würde das stimmen. Ansonsten  
 481 würde ich ihnen noch einmal sagen, wie wir auf die Formel gekommen sind.

482 I: Und wie war das?

483 B2: Das was/ man geht vom Punkt A aus und nimmt die Hälfte des Vektors AB-Pfeil. A plus ein halb  
 484 AB-Pfeil. Oder von mir aus auch von der anderen Seite, aber das ändert dann ja nichts. Und das  
 485 ist da (zeigt auf Fehlvorstellung 2) genau dasselbe.

486 I: Ich meine, da ist es jetzt so, dass die Formel falsch ist. Das heißt, sie haben keinen Anfangspunkt  
 487 von dem sie weggehen.

488 B2: Ja, da muss man halt wieder eine Skizze zeichnen und korrigieren.

489 I: Irgendein Beispiel, wo sie selbst darauf kommen können ohne ihnen zu sagen, was sie  
 490 richtigerweise zu tun haben?

491 B2: Man könnte sagen, schau einmal her da ist A (zeichnet), da ist B, da ist AB-Pfeil und was ist jetzt  
 492 ein halb AB-Pfeil? Das ist ja ein Pfeil, der halt irgendwo liegt und der Vektor ein halb AB-Pfeil  
 493 kann jetzt irgendwo sein. Nur wenn ich von A weggehe, komme ich zum richtigen Punkt.

494 I: Das heißt, darauf hinweisen, dass dieser Vektor irgendwo sein kann.

495 B2: Und dass man, wenn man zu einem Punkt hinkommen will mit einem Vektor, immer auch von  
 496 irgendwo weggehen muss.

497 I: Gut. Haben Sie sonst noch irgendwelche Ideen dazu oder Therapieansätze?

498 B2: Das war es. Ein Therapieansatz ist immer, eine Skizze zu machen und zu schauen, so geht es  
 499 richtig.

500 I: Das heißt, Sie würden Therapieansätze immer auf das Geometrische zurückführen?

501 B2: Ja, freilich. Ich finde, die Skizzen sind immer ganz wichtig und das ist dann sehr anschaulich  
 502 bzw. dann mit Geogebra. In Geogebra nutzt es in dem Sinn natürlich nicht so viel, weil Geogebra  
 503 den Befehl „Mittelpunkt“ hat, natürlich kann man es auch so eingeben. Also Geogebra würde ich

504 sehr empfehlen, das ist wirklich ein super Hilfsmittel, weil sie verstehen es sehr schnell. Es ist  
505 überhaupt kein Bedienungsproblem. Sie können sofort Punkte und Vektoren eingeben und man  
506 hat es innerhalb kürzester Zeit gezeichnet. Das nimmt ganz wenig Zeit weg und man hat es recht  
507 anschaulich.

508 I: Das heißt, wann immer Sie Vektoren behandeln, nehmen sie Geogebra zu Hilfe.

509 B2: Ja, immer als zusätzliches Anschauungsmaterial sozusagen. Direkt von Anfang an nehme ich es  
510 aber nicht.

511 I: Und erfahrungsgemäß verstehen die Schülerinnen und Schüler die Vektorrechnung besser  
512 seitdem Sie Geogebra verwenden oder ist das schwierig zu sagen?

513 B2: Das ist schwierig zu sagen. Gerade diese Anfangsdinge sind meistens für die Schüler eh kein  
514 Problem, also mir ist es zumindest noch nie untergekommen, dass jemand bei diesen ganz  
515 einfachen Sachen wirklich große Probleme hat.

### 3. Interview

---

|                |                                |
|----------------|--------------------------------|
| Termin:        | Montag, 06.05.2013             |
| Ort:           | BG/BRG Stockerau, Sprechzimmer |
| Dauer:         | 21 Minuten                     |
| Interviewerin: | Christina Gahler               |

---

- 516 I: Wenn Sie die Vektoren einführen, führen Sie die her auf einem arithmetischen oder auf einem  
517 geometrischen Weg ein?
- 518 B3: Meistens auf dem geometrischen Weg, weil der für die Schüler anschaulicher und verständlicher  
519 ist, meiner Meinung nach. Also einfach im Koordinatensystem, als Punkt, als Pfeil/ einfach diese  
520 verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten.
- 521 I: Also weil es anschaulich ist. Gibt es andere Vorteile auch noch?
- 522 B3: Weil sie das im Prinzip seit der zweiten Klasse gewohnt sind ein Koordinatensystem zu machen  
523 und das ist einfach für die Schüler schon eine Grundlage, die da ist, wo man nichts Neues  
524 erfinden muss. Und die Textbeispiel/ also wenn man es arithmetisch mit den verschiedenen  
525 Anwendungsbeispielen aus der Wirtschaft, oder so, irgendwo nimmt, dann schauen sie im ersten  
526 Moment eher skeptisch und (.)
- 527 I: Ok, also Zwecks Verständnis. Und was sind aber jetzt Nachteile der geometrischen Einführung?  
528 Gibt es überhaupt Nachteile?
- 529 B3: Ja, sicher die, dass sie es einfach wirklich nur mit diesen Pfeilen verbinden und diese  
530 Anwendungsbeispiele in Wirtschaft oder Physik oder da irgendwo eher weniger verstehen und  
531 wirklich dann immer auf eine grafische Auslegung (..)
- 532 I: Das heißt jetzt zum Beispiel, wenn ein Vektor angegeben ist mit verschiedenen Einträgen, dass  
533 sie das nicht unbedingt deuten können, was er in einem Wirtschaftsbeispiel aussagt?
- 534 B3: Genau. Also das Interpretieren in Anwendungsfällen außerhalb der Geometrie fällt dann  
535 wahrscheinlich schwerer.
- 536 I: Und würden Sie das als typische Fehlvorstellung titulieren?
- 537 B3: Nein, weil man es sehr wohl dann im Nachhinein üben kann. Also man muss ja dann auch einfach  
538 nur erklären, das ist die eine Möglichkeit, die geometrische Darstellung, man kann aber das in  
539 diesen und diesen Zusammenhängen/ man muss es halt extra üben. Aber eine Fehlvorstellung ist  
540 es in dem Fall nicht.
- 541 I: Gibt es typische Fehlvorstellungen?

542 B3: (..) Die Fehlvorstellungen, dass sie sehr oft, eben in der Geometrie, Punkt und Vektor  
543 verwechseln. Und dann eben Punkte kürzen, also parallele Punkte oder so etwas aufstellen. Das  
544 kommt schon vor. Also die Falschinterpretierung.

545 I: Ok, und wenn jetzt so eine Fehlvorstellung kommt, eben wie zum Beispiel das mit den Punkten,  
546 wie reagieren Sie darauf oder wie intervenieren Sie?

547 B3: Indem ich ihnen eben versuche ihnen das dann auch wieder im Koordinatensystem darzustellen,  
548 schaut, das ist ein Punkt. Den kann ich/ wenn ich den verschiebe, dann ist das ganz woanders und  
549 ich habe eine ganz andere Ausgangssituation als bei einem Pfeil. Wenn ich den jetzt verschiebe,  
550 der ändert sich nicht. Also, dass sie das auch wieder optisch sehen und da ist für mich wieder der  
551 Vorteil, wenn ich es als geometrische Darstellung einführe.

552 I: Gut. Ich habe jetzt ein paar Schüler- und Schülerinnenfehlvorstellungen mitgebracht und zwar  
553 würde mich interessieren, wie Sie darauf reagieren. Zum Beispiel bei der Addition von Vektoren.  
554 Kann man AB-Pfeil und CD-Pfeil addieren. Begründe deine Antwort. Die erste Fehlvorstellung  
555 wäre jetzt, dass sie Pfeile in gleicher Richtung aneinanderhängen. Und die zweite Fehlvorstellung  
556 wäre dann, es geht gar nicht. Wie würden Sie darauf reagieren? Haben Sie dafür  
557 Therapievorschlüsse?

558 B3: Also ich würde grundsätzlich wieder darauf hinweisen, das bespreche ich auch immer in der  
559 ersten Stunde, dass jeder Vektor drei Eigenschaften hat, eben Länge, Orientierung und Richtung  
560 und ich das nicht einfach ändern kann, sondern das ist fix und das muss beibehalten werden. Und  
561 damit kann ich nicht einfach die Richtung ändern.

562 I: Das heißt, Sie verweisen auf die Definition // eines Vektors //

563 B3: // Richtig //

564 I: Würde Ihnen auch irgendein Beispiel einfallen bei dem die Kinder von alleine darauf kommen,  
565 dass das so falsch ist, wie es in der ersten Fehlvorstellung skizziert ist?

566 B3: Ja, indem man sie in irgendeiner/ so eine Art Schatzkarte, wo sie Richtungen und Wege gehen  
567 müssen, also da gibt es ein Beispiel, wo sie einen Schatz suchen müssen und dann eben die  
568 Vektoren addieren müssen, damit sie zum richtigen Punkt kommen und zu dem kommen sie aber  
569 nicht, wenn sie die Vektoren alle in dieselbe Richtung schauen lassen, also das geht nicht.

570 I: Also da würden Sie quasi selber darauf kommen, ich bin nicht beim Schatz, ich habe etwas falsch  
571 gemacht.

572 B3: Genau, sie kommen nicht dorthin, wo sie hin sollen.

573 I: Wie sie jetzt Vektoren richtig addieren, wie kommen sie darauf? Ich meine, sie wissen jetzt ich  
574 habe etwas falsch gemacht, aber wie es richtig geht, wie merken sie das?

575 B3: Von alleine sollen sie das merken. Also sie sollen am besten von alleine einen Weg finden?

576 I: Ja. Oder ist da einfach nur die Möglichkeit gegeben, dass man auf die Definition hinweist?

577 B3: Sie kommen sicher von alleine auch darauf, wenn man (...)

578 I: Oder ich habe mir zum Beispiel überlegt, was ist, wenn man es auf das Arithmetische  
579 zurückführt? Das heißt, zum Beispiel die Kinder schätzen lassen, was haben die Pfeile für  
580 Koordinaten und wenn sie das mit den Koordinaten angeben, wieder fragen, kann man die jetzt  
581 addieren.

582 B3: Das heißt zuerst einmal arithmetisch addieren lassen und dann, wie kommt das geometrisch  
583 heraus.

584 I: Genau, dass zumindest die Fehlvorstellung nicht auftritt, das geht gar nicht.

585 B3: Ja. Gut das ist meistens eh im Vorhinein/ das macht man vorher, das Addieren. Von dem her, ja,  
586 so kann man sicher auf die Lösung kommen und sagen, wo ist jetzt dieser Vektor, der diese  
587 Koordinaten aufweist. Ist sicher eine gute Möglichkeit, ja.

588 I: Gut, dann gleich zur nächsten Fehlvorstellung. Insgesamt habe ich vier mitgebracht. Der  
589 Verbindungsvektor. Berechne den Vektor AB-Pfeil und veranschauliche dies an einer Skizze. Die  
590 beiden Punkte A und B sind gegeben. Jetzt ist zum Beispiel die erste Fehlvorstellung die, das  
591 zwar der Vektor AB richtig ausgerechnet wird, mit den Koordinaten zwei, zwei, wird aber dann  
592 als Ortsvektor eingezeichnet. Wie würden Sie darauf reagieren?

593 B3: Ich würde ihnen grundsätzlich sagen, dass sie den Vektor zwar richtig aufgestellt haben, den  
594 Vektor an sich, aber die Lage des Vektors natürlich verkehrt ist oder falsch ist, weil/ naja falsch,  
595 es ist der Ortsvektor und nicht an der Stelle von A nach B, der Verbindungsvektor AB ist. Dass  
596 sie zwar den richtigen Vektor, den ich natürlich auch als Ortsvektor darstellen kann, aufgestellt  
597 haben, aber wir wollten ja den Verbindungsvektor, das heißt, der muss auch immer von Punkt zu  
598 Punkt verlaufen. Aber im Endeffekt, der Vektor selber ist richtig.

599 I: Ja. Ohne sie jetzt wieder explizit darauf hinzuweisen, es ist zwar der Vektor richtig, aber er geht  
600 eben nicht vom Punkt A weg. Gibt es da auch irgendein Beispiel, um ihnen anschaulich zu  
601 machen, dass das nicht ganz richtig ist?

602 B3: Ja schon. Da gibt es natürlich Beispiele wo ich sage, ich habe einen/ ich will zu einem  
603 bestimmten Ziel kommen, bei einem Wanderweg wieder, ich komme wieder darauf zurück. Wo  
604 sie eben einen bestimmten Ausgangspunkt haben, man kann das zum Beispiel auch auf einer  
605 Karte wirklich schön veranschaulichen, auf einer Wanderkarte, man zeichnet ein  
606 Koordinatensystem ein, zeichnet die Punkte A und B ein und sagt jetzt, schaut, wenn ihr da beim  
607 Koordinatenursprung startet, dann kommt ihr nie beim Ziel heraus, sondern ihr sollt ja bei B  
608 herauskommen, da muss ich aber auch den richtigen Startpunkt eingeben.

609 I: Das heißt, Sie würden schon die Punkte A und B vorgeben, dass diese dort liegen oder müssten  
610 die Schüler und Schülerinnen das selbst einzeichnen?

611 B3: Das sollten sie schon selbst einzeichnen.

612 I: Alles klar. Weil das ist ja hier im Prinzip auch der Fehler, dass die Punkte A und B eigentlich  
613 nicht eingezeichnet worden sind.

614 B3: Richtig, aber in dem Fall ist ja ein konkretes Ziel vorgegeben, wo sie hinkommen sollen.

615 I: Bei der zweiten Fehlvorstellung ist die Auffassung da, dass/  
616 B3: Sie addieren die Punkte eigentlich, die Ortsvektoren der Punkte.  
617 I: Der Punkt A wird als Pfeil aufgefasst, ebenso wie der Punkt B und diese werden addiert. Was  
618 sagt man da? (...) Ich muss zugeben, das kommt nicht sehr oft vor. Ich habe in der Literatur  
619 recherchiert. Das war ein Ausnahmefall. Trotzdem jetzt meine Frage, wie würde man reagieren?  
620 B3: Was erkläre ich da (...) na grundsätzlich würde ich darauf hinweisen, dass eben schon ein  
621 Unterschied ist zwischen Punkt und Vektor, das heißt, ob ich jetzt die Koordinaten des Punktes  
622 gegeben habe oder die Koordinaten des Vektors, des Ortsvektors zum Punkt. Und wenn man  
623 wiederum das Beispiel mit dem Wanderweg nimmt, ist auch da dann wieder klar, egal wo sie  
624 dieses Beispiel so ansetzen, sie werden nie beim Punkt B herauskommen. Sie werden nie den  
625 Punkt B erreichen, der ja vorgegeben ist.  
626 I: Das heißt, so eine Wanderkarte oder Schatzsuche ist für solche Fehler eigentlich ideal, dass sie  
627 das selber merken.  
628 B3: Ist eine Möglichkeit. Es gibt sicher dann auch, wenn man die andere Art bevorzugt mit den  
629 arithmetischen Darstellungen, Möglichkeiten aus der Wirtschaft genauso, wenn ich jetzt  
630 verschiedene Produkte habe, drei Produkte habe die verkauft werden, und die Anzahl zum  
631 Beispiel. Oder zwei in dem Fall.  
632 I: Wobei ich auch dazu sagen muss, AB-Pfeil zu berechnen ist eigentlich nicht so schwierig für die  
633 Schüler und Schülerinnen. Das Schwierige ist dann erst das Veranschaulichen anhand einer  
634 Skizze. Also da kommen dann die Probleme.  
635 B3: Ja und damit/ wenn sie es berechnet haben, können sie ja sofort feststellen, dass das Ergebnis  
636 nicht das richtige ist. Weil das C (Anmerkung: gemeint ist C-Pfeil) ja ganz andere Koordinaten  
637 hat, wenn sie es richtig berechnen können, sobald sie das arithmetische Mittel haben, also die  
638 arithmetische Lösung haben, haben sie auch schon die Lösung. Und wenn sie dann immer noch  
639 nicht erkennen, dass C nicht die richtigen Koordinaten hat, dann (..) passt etwas nicht.  
640 I: Gut, also wäre das bei der zweiten Fehlvorstellung eine Option, dass man es arithmetisch  
641 berechnet und dann quasi // die Probe macht //  
642 B3: // Kontrolliert // Gut, das ist immer/ das geht fast bei allen Beispielen, wobei beim ersten nicht,  
643 richtig.  
644 I: Und wenn jetzt jemand sagt, das kann ich mir gar nicht vorstellen, wie kann man da weiterhelfen?  
645 B3: Naja, indem ich ihm erkläre, er soll diese beiden Punkte in ein Koordinatensystem einzeichnen.  
646 Und Verbindungsvektor/ also Punkte einzeichnen, das können sie seit der zweiten Klasse. Und  
647 Verbindungsvektor, indem ich jetzt sage, jetzt verbinde die beiden Punkte von A nach B mit  
648 einem Vektor. Dann müsste eigentlich kein Problem mehr bestehen.  
649 I: Wenn jetzt aber das Überschnenken dazu nicht funktioniert, dass der Verbindungsvektor dann B  
650 minus A ist, also dass man zwar die Formel weiß, aber dass die Verbindung nicht gesehen wird.

651 B3: Dann würde ich ihnen zusätzlich noch die Koordinaten einzeichnen lassen, also von dem Vektor,  
652 also nicht die Koordinaten zum Ursprung, sondern den x- und y-Wert noch zusätzlich, dieses  
653 Dreieck konkret einzeichnen lassen, dass sie es wirklich bewusst auch sehen und vergleichen  
654 können.

655 I: Alles klar. Dann die Gleichheit von Vektoren. Gilt AB-Pfeil ist gleich CD-Pfeil? Jetzt gibt es da  
656 zwei Fehlvorstellungen, zum einen wird behauptet sie sind parallel aber sie sind nicht identisch,  
657 zum anderen, sie haben nicht denselben Anfangspunkt, deshalb sind sie nicht gleich.

658 B3: Gut, da kann ich grundsätzlich auch wieder zurückführen auf die Definition, dass eben Länge,  
659 Orientierung und Richtung sind gleich und damit sind sie ident. Und nicht denselben  
660 Anfangspunkt erklärt man eigentlich auch damit, weil sie ja nicht durch ihren Anfangspunkt  
661 festgelegt sind, sondern nur durch Länge, Richtung und Orientierung.

662 I: Was halten sie davon, wenn man es auf das Arithmetische zurückführt? Die Kinder wieder  
663 schätzen lässt, was haben die Vektoren für Koordinaten.

664 B3: Mhm, sehen sie auch sofort, dass das dieselben Koordinaten sind und ident sind.

665 I: Also das wäre auch eine Möglichkeit // ihnen das deutlich zu machen //

666 B3: // Ja, auf jeden Fall //

667 I: Gut. Und die letzte, da haben wir den Mittelpunkt einer Strecke. Grundsätzlich ist zu sagen, dass  
668 eigentlich die Formel für die Schüler eigentlich bekannt ist, das heißt, sie können die Formel  
669 richtig hinschreiben, meistens, in der zweiten Fehlvorstellung haben wir dann etwas anderes, aber  
670 sie sagen jetzt zum Beispiel „Wenn ich die Punkte A und B addiere, dann erhalte ich die ganze  
671 Strecke. Um den Mittelpunkt zu erhalten, muss ich die ganze Strecke durch zwei dividieren. Das  
672 kommt in der Literatur oft vor. Wie hilft man ihnen hier weiter?

673 B3: Also grundsätzlich führe ich diese Formel immer/ also ich leite diese Formel immer her. Von dem  
674 her wissen sie/ also mit einer Skizze dabei, beide Punkte einzeichnen und dann wirklich Schritt  
675 für Schritt wirklich herleiten. Und dann im Endeffekt haben wir diese Formel, aber viele, gerade  
676 bei den Schularbeiten, bei den ersten Schularbeiten, wenn das ganz kurz ist, verwenden viele gar  
677 nicht diese Formel, sondern rechnen sich es aus.

678 I: Wird dann bei Beispielen auch eher die Form verwendet, dass man vom Punkt A weggeht und ein  
679 halb mal den AB-Pfeil weitergeht, oder wird doch diese Schreibweise (Anmerkung: gemeint ist  
680 die Formel für den Mittelpunkt einer Strecke) im Unterricht verwendet?

681 B3: Dann, nachdem wir sie hergeleitet haben, verwende ich schon immer diese Formel und ich kann  
682 mir schon vorstellen, dass viele dann auch das nicht mehr interpretieren können, richtig, aber am  
683 Anfang leiten wir sie immer Schritt für Schritt her.

684 I: Wenn jetzt so eine Aussage kommen würde, würden Sie auf die Herleitung verweisen.

685 B3: Ja.

686 I: Ok. Bei der zweiten Fehlvorstellung stimmt die Formel nicht. Da steht, wenn ich die Punkte A  
687 und B habe und diese verbinde, dann habe ich auch gleichzeitig den Vektor AB-Pfeil. Wenn ich  
688 vom Vektor AB-Pfeil die Hälfte nehme, komme ich zum Mittelpunkt.

689 B3: Ja und da ist ganz wichtig, dass sie ja vom Ausgangspunkt/ dass man ihnen immer klar machen  
690 muss, das ist zwar der Vektor den du gehen musst, aber du hast keinen Ausgangspunkt  
691 vorgegeben. Das heißt, man muss ihnen ja klar machen, dass das im Prinzip vom Ursprung weg  
692 geht und nicht vom Ausgangspunkt A. Die Strecke AB muss ich ja beachten.

693 I: Wie kann ich ihnen das deutlich machen, dass ich immer einen Anfangspunkte brauche um zu  
694 einem bestimmten anderen Punkt zu gelangen?

695 B3: Indem ich es geometrisch darstelle und ihnen zeige, den Vektor, so wie ihr es berechnet, bin ich  
696 jetzt im Ursprung, gehe vom Ursprung weg, das heißt ich lande in dem Punkt (zeigt auf Zettel)  
697 und wir wollen aber zu dem Punkt, wo eben B gegeben ist. Also wieder mit Veranschaulichen im  
698 Koordinatensystem.

#### 4. Interview

---

|                |                                |
|----------------|--------------------------------|
| Termin:        | Montag, 06.05.2013             |
| Ort:           | BG/BRG Stockerau, Sprechzimmer |
| Dauer:         | 24 Minuten                     |
| Interviewerin: | Christina Gahler               |

---

- 699 I: Wie führen Sie die Vektorrechnung in der Schule ein? Führen Sie die eher arithmetisch oder eher  
700 geometrisch ein?
- 701 B4: Beides gleichzeitig. Wobei ich sehr schlampig unterscheide zwischen Punkten und Pfeilen.
- 702 I: Warum?
- 703 B4: Weil es dasselbe ist. Es sind Vektoren und sobald man mit einem CAS rechnet, ist das dasselbe.  
704 Es ist kein Unterschied da, es ist nur bei/ ja, wenn man die genaue Vektordefinition haben  
705 möchte, dann macht es einen Unterschied, aber früher in der Schule hat man ja oft das eine mit  
706 Schrägstrich geschrieben, den Punkt, und den Vektor mit Beistrichen. Es ist vollkommen egal.
- 707 I: Das heißt, Sie unterscheiden auch nicht unbedingt, dass ein Großbuchstabe einen Punkt und ein  
708 Kleinbuchstabe einen Pfeil angibt?
- 709 B4: Das kann eine Hilfe sein in manchen Beispielen, aber eigentlich nicht. Ortsvektoren zum Beispiel  
710 sind ja auch explizit ausgenommen aus dem neuen Maturastoff, die gibt es nicht mehr.
- 711 I: Also Sie machen das gemischt, Sie unterscheiden nicht wirklich zwischen Punkten und Pfeilen.  
712 Jetzt würde mich interessieren, ob Ihnen typische Fehlvorstellungen bei der Vektorrechnung  
713 einfallen. Gibt es irgendwas was Schülerinnen und Schüler immer wieder falsch verstehen, falsch  
714 machen?
- 715 B4: Ja, dass der Vektor in die falsche Richtung zeigt, weil sie Schaft minus Spitze rechnen, falsch.  
716 Schon, dass sie manchmal Punkte und Vektoren, jetzt sind wir dort, verwechseln, merkt man am  
717 deutlichsten, wenn man den Mittelpunkt einer Strecke berechnet, wo sie oft etwas Seltsames  
718 ausrechnen. Und nicht/ den Schritt oft nicht schaffen von der Vorstellung vom Punkt aus den  
719 halben Richtungsvektor weiterzugehen, oder die Formel gleich zu haben, Punkt plus Punkt halbe.  
720 Die weiteren Probleme kommen dann eher beim Weiterführenden, wo braucht man einen  
721 Einheitsvektor oder sonstiges.
- 722 I: Wenn jetzt solche Fehlvorstellungen vorkommen, wie reagieren Sie darauf, wie intervenieren Sie?
- 723 B4: Ich glaube es gibt einige Grundvorstellungen, die müssen automatisiert sein. Spitze minus Schaft  
724 muss automatisch sein. Das haben die Schüler üblicherweise auch, nur irren sie sich. Sobald man  
725 das Ganze veranschaulicht, und am einfachsten geht das mit einem CAS und dynamischer  
726 Geometrie, kommen sie drauf.

727 I: Das heißt, ein wichtiges Hilfsmittel ist CAS.

728 B4: Ja.

729 I: Was verwenden Sie? Geogebra?

730 B4: In der Zukunft Geogebra, bis jetzt Derive.

731 I: Ok. Weil Sie jetzt sagen, Sie führen die Vektorrechnung gemischt ein, geometrisch und  
732 arithmetisch, welche Schwierigkeiten will man damit im Vorhinein vermeiden?

733 B4: Vor allem/ die bisherigen Beispiele waren vor allem geometrische Beispiele, es gibt ein bisschen  
734 eine Schwerpunktverschiebung jetzt, nur das was jetzt rein arithmetisch mit Vektoren gemacht  
735 wird, ist immer noch auf sehr niedrigem Niveau. Das heißt (..) man muss ihnen von Vornherein  
736 zeigen, wie schaut das aus, die ganze Sache, weil nur dann sehen sie, dass das was sie rechnen  
737 einen geometrischen Sinn ergibt. Ich schweife ab, kurzes Beispiel, Einführung WU, da gibt es  
738 diese Prüfung, bei der 80 Prozent durchfallen sollen. Gegeben sind zwei lineare Gleichungen mit  
739 drei Variablen, ermitteln sie die zweidimensionale Lösungsmenge. Schüler die keine  
740 Vektorrechnung geometrisch hatten, haben überhaupt keine Vorstellung, dass das der Schnitt  
741 zweier Ebenen ist, was natürlich eine Gerade als Lösungsmenge ergibt, das sind die Schüler, die  
742 aus der HAK kommen.

743 I: HTL vielleicht auch?

744 B4: Da bin ich mir nicht sicher, das weiß ich nicht.

745 I: Gut. Ich habe nun einige Fehlvorstellungen mitgebracht. Das erste ist zum Beispiel bei der  
746 Addition von Vektoren. Es ist jetzt das Beispiel gegeben, kann man AB-Pfeil und CD-Pfeil  
747 addieren. Begründe deine Antwort. Wir sehen hier die Pfeile. Die erste Fehlvorstellung ist, dass  
748 sie die Vektoren in selber Richtung aneinanderhängen. Wie würden Sie darauf reagieren?

749 B4: (...) Ehrlich gesagt, ist mir das noch nie untergekommen. Kräfteparallelogramm zeigen, einfach  
750 auch physikalisch klar machen, wenn man in die eine Richtung zieht und dann in die andere, wo  
751 ist der Punkt, wo führt die Kraft hin.

752 I: Wenn die Schüler und Schülerinnen gar nicht verstehen, dass sie den Vektor verschieben können,  
753 wie macht man ihnen das klar, dass man den Vektor nicht einfach verdrehen kann?

754 B4: Zeichnen lassen.

755 I: Also geometrisch?

756 B4: Ja, Vektor als Bewegungsvorschrift. Ich gehe null hinauf und eines nach rechts.

757 I: Also auch arithmetisch.

758 B4: Das ist für mich eigentlich geometrisch. Es ist die Rechenvorschrift, der Vektor drei vier ist drei  
759 hinüber, vier hinauf. Und danach rechnerisch addieren.

760 I: Und dann steht da noch begründe deine Antwort.

761 B4: Kann man sie addieren. Wenn er es gemacht hat, hat er es gekonnt. Das ist die Begründung. Die  
762 genauere Begründung wäre natürlich die, dass man sagt, ja, Vektoren sind die Menge aller Pfeile,  
763 das heißt ich kann mir den aussuchen, der da genau dran passt.

764 I: Das heißt, Sie würden es parallel verschieben lassen.

765 B4: Ja.

766 I: Wenn aber konkret die erste Fehlvorstellung vorkommt/

767 B4: Da ist das interessante, was bedeutet das, dass zwei Kräfte genau in die gleiche Richtung wirken?

768 I: Also diese Frage würden Sie auch den Schülern und Schülerinnen stellen?

769 B4: Ja. Das heißt, ein Beispiel, das ich sehr gerne mache, ein Flugzeug fliegt mit so und so viel KMH

770 Richtung Nordosten, weil das (zeigt auf das Beispiel) ist Nordosten, und gleichzeitig haben wir

771 einen Wind aus Westen. Was ist die tatsächliche Richtung und die tatsächliche Geschwindigkeit

772 des Flugzeugs? Wobei bei der Geschwindigkeit müssen sie dann den Betrag ausrechnen. Und

773 dann ist die Interpretation klar (zeigt auf Fehlvorstellung 1), das Flugzeug hat Rückenwind.

774 I: Und wenn jetzt Schülerinnen und Schüler sagen, das geht gar nicht, wie argumentieren Sie da?

775 B4: Geht nicht, gibt es nicht (grinst).

776 I: Wäre es eine Möglichkeit, wenn man die Schüler und Schülerinnen schätzen lässt, was für

777 Koordinaten haben die Vektoren und kann ich sie dann addieren? Sodass sie von selbst darauf

778 kommen, aja, wenn es so da steht, kann ich sie addieren.

779 B4: Schätzen gefällt mir nicht. Also ich glaube das Problem ist das, dass in einer ganzen Klasse alle

780 sagen „Das geht nicht!“ ist nicht mir noch nicht untergekommen.

781 I: Nicht, dass die ganze Klasse das sagt, aber wenn man/

782 B4: Ja, das heißt sobald einer glaubt es geht nicht und er sieht bei einem anderen es geht, ist

783 zumindest diese Vorstellung, dass es nicht geht, weg. Er weiß noch nicht wie es geht. Aber damit

784 sucht er einmal nach der Lösung, dann kann man ansetzen. Einfach zu sagen „Aber das geht ja

785 nicht!“ so stur sind sie nicht.

786 I: Also das kommt nicht vor, meinen sie.

787 B4: Ja. Vielleicht bin ich dazu zu autoritär (lacht).

788 I: Dann zur nächsten Fehlvorstellung. Wir haben den Verbindungvektor. Berechne den Vektor AB-

789 Pfeil und veranschauliche dies an einer Skizze, gegeben sind die Koordinaten vom Punkt A und

790 B. Die erste Fehlvorstellung ist die, die in der Literatur am häufigsten auftritt, nämlich dass das

791 Ergebnis stimmt, das Ausrechnen selbst ist laut Literatur nicht so schwierig, der Vektor ist dann

792 zwei zwei, nur wird der jetzt als Ortsvektor eingezeichnet und nicht vom Punkt A aus zum Punkt

793 B.

794 B4: Also erstens habe ich den Begriff Verbindungsvektor noch nie gehört, aber jetzt ist es mir klar.

795 Das heißt, man soll das Verbinden der Punkte veranschaulichen, damit ist es klar, dass die Punkte

796 da sein müssen. In dem Fall sind die Punkte nicht da. Wenn nur verlangt wäre, veranschauliche

797 den Vektor AB, könnte ich dagegen eigentlich nichts einwenden auch wenn es mir nicht gefällt.

798 Also im Prinzip Fehlvorstellung/ ich halte es nicht einmal für eine Fehlvorstellung sondern für

799 eine unvollständige. Frage wäre, wo ist der Punkt A, wo ist der Punkt B und was hat dieser

800 Vektor damit zu tun.

801 I: Ok. Da haben wir jetzt die Auffassung der Punkte als Pfeile.

802 B4: Da wurden die beiden Punkte addiert.

803 I: Wie hilft man da einer Schülerin, einem Schüler weiter?

804 B4: Wo sind die Punkte? Ein Punkt ist irgendwo im Koordinatensystem situiert. Wenn ich jetzt nicht  
805 geometrisch arbeite/ naja, aber es wird verlangt, also/ und ohne Koordinatensystem geht das  
806 Beispiel nicht mit Veranschaulichung, oder?

807 I: Ausrechnen kann man sich den Vektor AB-Pfeil natürlich schon, aber veranschaulichen muss ich  
808 es dann anhand eines Koordinatensystems.

809 B4: Ja, genau.

810 I: Die letzte Fehlvorstellung „Ich kann mir das nicht vorstellen.“

811 B4: Dann ist die Frage einfach das/ es wird ja gar nicht verlangt, dass man sich das vorstellt. Es sind  
812 zuerst einmal zwei Punkte gegeben und die soll er sich zeichnen.

813 I: Das heißt Sie würden so weiterhelfen, dass//

814 B4: Wenn der Schüler mir nur sagt „Ich kann mir das nicht vorstellen.“, ist das erste, zeichne die  
815 Punkte.

816 I: Und danach? Wenn er nicht weiter weiß?

817 B4: Wo ist jetzt dieser Verbindungsvektor?

818 I: Gut. Dann ist hier das dritte Beispiel zur Gleichheit von Vektoren. Gilt AB-Pfeil ist CD-Pfeil?  
819 Jetzt gibt es hier zwei typische Fehlvorstellungen, nämlich dass Schülerinnen und Schüler sagen,  
820 sie sind zwar parallel zueinander, aber nicht identisch, oder sie haben nicht denselben  
821 Anfangspunkt. Was wäre hier ein Therapievorschlagn?

822 B4: Ja, da muss er, sie, eben wissen, dass das nicht/ dass das Repräsentanten eines Vektors sind. Das  
823 heißt, dass der Vektor eigentlich die Menge von unendlich vielen Pfeilen ist und dass ich diese  
824 hin und her schieben kann. Einfachster Therapievorschlagn mit einer dynamischen Geometrie kann  
825 man beliebig viele zeichnen beziehungsweise einen Vektor nehmen und hin und her schieben und  
826 sie übereinander schieben. Dann sieht man, sie sind gleich. Ich kann beide nebeneinander  
827 zeichnen. Den einen nehme ich mit der Maus und schiebe ihn darüber. Der passt genau darüber,  
828 er zeigt auch in die gleiche Richtung, wobei die Richtung da überhaupt nicht vorkommt in den  
829 Fehlvorstellungen. Und nicht derselbe Anfangspunkt, das ist dasselbe Problem.

830 I: Ok, also würden Sie hier mit Geogebra arbeiten?

831 B4: Ist sicher eine Möglichkeit. Ich weiß nicht, ob es immer notwendig ist. Aber wenn Probleme  
832 auftreten, dann ja.

833 I: Gut. Und zur letzten Fehlvorstellung noch, die sie zuvor schon angesprochen haben, nämlich der  
834 Mittelpunkt einer Strecke. Gefragt ist jetzt die Formel und diese dann zu begründen. Laut  
835 Literatur ist es ein geringes Problem die Formel richtig aufzustellen, diese wissen viele  
836 Schülerinnen und Schüler. Das Problem ist dann diese zu begründen.

837 B4: Gut, also erstens einmal/ auch wenn hier eine exakte Begründung steht, würde ich mir eine Skizze  
 838 erwarten (zeichnet), so ungefähr. (...) Erstens einmal kann man zwei Punkte nicht addieren. Das  
 839 heißt, natürlich merken sie sich die Formel, A plus B, und ich nehme die Hälfte, aber das  
 840 funktioniert nicht als Begründung. Das ist jetzt genau der Unterschied, ich kann an einen Punkt  
 841 einen Vektor anhängen, aber nur zwei Punkte, das funktioniert nicht. Ja und das ist eigentlich der  
 842 ausschlaggebende Punkt.

843 I: Haben Sie einen Therapievorschlag anhand dessen die Schülerinnen und Schüler sehen, dass  
 844 diese Argumentation nicht richtig ist?

845 B4: Also wie gesagt, die Skizze müsste dabei sein, egal wie. Und bei dem jetzt/ wir sind wieder beim  
 846 Algebraischen, wenn ich den Punkt als Zahlenpaar habe, kann ich es addieren, nur wenn ich  
 847 darüber nachdenke, was sie geometrisch bedeuten, ist es sinnlos Punkte zu addieren.

848 I: Sie würden also auf diesen Aspekt hinweisen. Ok. Und bei der zweiten Fehlvorstellung?

849 B4: Ja, das ist das Typische, da fehlt der Ausgangspunkt. Also erstens, wenn ich zwei Punkte  
 850 verbinde, habe ich keinen Vektor sondern eine Strecke. Also ich brauche den Vektor von A nach  
 851 B, das ist Spitze minus Schaft, und dann ist es einfach die halbe Strecke, die zurückgelegt wird.  
 852 Das heißt, ich brauche noch den Punkt von dem aus ich ausgehe.

853 I: Wie mache ich den Schülerinnen und Schüler das deutlich, dass ich immer einen Punkt brauche,  
 854 wenn ich zu einem anderen hin will?

855 B4: Zunächst einmal ausrechnen lassen und zeichnen lassen, ruhig mit CAS. Zwei Punkte, jeder sieht,  
 856 wo muss der Halbierungspunkt ungefähr liegen, also aufpassen, dass nicht zufällig gerade  
 857 dasselbe herauskommt, dann den hier zeichnen lassen und dann merken sie, hoppla, der liegt ja  
 858 gar nicht dort.

859 I: Hier würden Sie also für A und B auch Koordinaten angeben.

860 B4: In einer Einführungsphase sicher. Irgendwann muss man es ja rechnen mit Zahlenwerten. Und  
 861 später einmal, ist das einmal vorbei und es ist dann nur mehr rein symbolisch, aber dieser Schritt  
 862 muss geschafft werden.

## 5. Interview

---

|                |                        |
|----------------|------------------------|
| Termin:        | Donnerstag, 09.05.2013 |
| Ort:           | Spillern               |
| Dauer:         | 35 Minuten             |
| Interviewerin: | Christina Gahler       |

---

863 I: Wenn Du die Vektorrechnung in der Schule einführest, wie machst Du das? Wählst Du eher einen  
864 arithmetischen oder einen geometrischen Zugang?

865 B5: Sicher einen geometrischen Zugang.

866 I: Ok, und warum?

867 B5: Weil ich glaube, dass das Vorstellungsvermögen die Basis ist, dafür das man damit im Bereich  
868 der Vektorrechnung weiter vorgehen kann. Und speziell meine ich, dass es zwei wichtige Sachen  
869 gibt. Das ist die Unterscheidung zwischen Punkt und Vektor. Wenn die einmal sitzen, dann  
870 glaube ich, dass man gut weiterarbeiten kann.

871 I: Das heißt, Du wählst den geometrischen Zugang auf Grund des besseren Vorstellungsvermögens.

872 B5: Ja, genau. Und damit wird auch die Bewegung automatisch berücksichtigt, weil Punkt plus  
873 Vektor ist Punkt und so weiter. Und die ganzen Bereiche, die da natürlich ihre algebraische  
874 Entsprechung haben oder die rechnerische Entsprechung haben.

875 I: Wo siehst Du Vor- und Nachteile des geometrischen Zugangs?

876 B5: Die (..), also ein Nachteil, den ich persönlich kenne und oft erlebt habe ist der, dass das  
877 Vorstellungsvermögen von Schülerinnen und Schülern im Bereich der/ nicht so sehr im Bereich  
878 der Ebene, aber im Bereich der Raumvorstellung unterstützt werden muss. Weil dort, also meiner  
879 Erfahrung nach, größere Probleme auftreten. (.) Zum Beispiel gibt es junge Menschen, die sich  
880 nicht vorstellen können, zwei Geraden, die windschief im Raum liegen. Die sich einfach nicht  
881 vorstellen können, wie das aussieht, was da vor sich geht, dass man das auch sieht vor dem  
882 geistigen Auge.

883 I: Und Vorteile.

884 B5: Ein Vorteil ist der, dass man die Chance hat, es sich besser vorstellen zu können. Die rein  
885 algebraische Struktur, oder ich sage jetzt einmal die rechnerische in dem Fall, weil meistens ist es  
886 ja nur ein Rechnen von/ die allgemein Situation kommt ja dann erst viel später mit n-Tupel und  
887 so, das ist ja nicht etwas, was am Anfang vorrangig ist, sondern am Anfang ist ja eher die  
888 konkrete Berechnung in einer Ebene oder in einem Raum im Vordergrund. Die hat den Vorteil,  
889 dass man/ dass natürlich rechentechnisch nichts gefordert wird. Das heißt, das ist eine Situation

890 die, so wie bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung am Anfang, dazu führt, dass man eigentlich  
 891 keine wirklichen Herausforderungen hat, das ist leicht.

892 I: Und wenn Du es geometrisch einführest, mit welchen typischen Fehlvorstellungen rechnest Du  
 893 trotzdem von Seiten der Schüler und Schülerinnen?

894 B5: Ich rechne genau damit, dass sie einfach/ es gibt ein paar Probleme, die darin stecken. Also die  
 895 Situation Punkt und Vektor zu unterscheiden, dauert seine Zeit. Das ist einfach nicht leicht zu  
 896 verstehen, dass ein Vektor nur ein Repräsentant von unendlich vielen Pfeilen ist mit selber Länge  
 897 und mit selber Orientierung und selber Richtung, wobei das Problem der Orientierung schon ein  
 898 echtes Problem ist. Die Richtung geht noch, aber die Orientierung ist schon eine schwierige/ von  
 899 der Vorstellung her. Aber das Hauptproblem ist, dass die/ zum Beispiel die Addition zweier  
 900 Vektoren, die häufig wieder als Punkt interpretiert wird und so weiter. Und das ist schwierig,  
 901 nämlich weil sich dahinter auch noch ein Gedanke versteckt, der Ortsvektor, der zum Punkt führt  
 902 vom Ursprung. Und irgendwann einmal wird man über die Situation sprechen müssen, dass  
 903 eigentlich der Punkt selber auch durch einen Vektor darstellbar ist. Nur, das kann zu totalen  
 904 Begriffsverwirrungen führen und dann hat man wieder die Situation, dass man etwa in  
 905 irgendeinem geometrischen Gebilde zwei Vektoren addiert und glaubt, man ist an einer  
 906 bestimmten Stelle.

907 I: Gibt es sonst noch Fehlvorstellungen, die typisch sind?

908 B5: Ja, Fehlvorstellungen gibt es jede Menge. Zum Beispiel die Bedeutung eines Parameters. Aber  
 909 das ist schon weiter, das ist nicht am Anfang. Sozusagen die Vorstellung, was/ welche Bedeutung  
 910 so ein Parameter hat und welche Auswirkungen es hat, wenn man dafür Zahlen einsetzt,  
 911 beziehungsweise wenn man ganz allgemein denkt. Da gibt es sehr viele Fehlvorstellungen,  
 912 beziehungsweise manchmal sogar gar keine Vorstellungen.

913 I: Wenn Du die Vektorrechnung geometrisch einführest, welche Schwierigkeiten möchtest Du damit  
 914 im Vorhinein vermeiden?

915 B5: Die, dass die Grund/ schön wäre, wenn man es schaffen würde als Lehrerin oder als Lehrer (.),  
 916 dass die Grundbegriffe möglichst stabil und nachhaltig zu Grunde gelegt werden. Und das scheint  
 917 mir in dem Bereich so günstig zu sein. Wenn ich das über n-Tupel einführe, oder über  
 918 irgendwelche Sachen von Zahlenaneinanderreihung oder über Listen, wie man es in der  
 919 Informatik nimmt, dann hat man das Problem, dass es sehr abstrakt wird und nicht sehr konkret.  
 920 Ich vermute, dass die konkrete Situation die ist, die den Menschen eher dazu motiviert, Begriffe  
 921 zu festigen.

922 I: Und wenn jetzt Fehlvorstellungen/ typische Fehlvorstellungen auftreten, wie reagierst Du darauf,  
 923 wie intervenierst Du?

924 B5: Es gibt eine ganze Serie von Strategien, die man versuchen kann, aber eigentlich schon während  
 925 des Unterrichtsgeschehens, anzuwenden. Eines davon ist/ ich mein ein Lehrer ist gefordert im  
 926 Bereich der Vektorrechnung möglichst viel geometrisch zu interpretieren, wie zum Beispiel, ich

927 schaue wirklich, dass Schüler sogar aufstehen und der Kopf zum Beispiel der Punkt im Raum ist,  
 928 dass man da Dreiecke sieht, dass man sich anschaut, wie schauen die Ebenen aus, die da drinnen  
 929 sind. Also wirklich ganz konkret mit dem eigenen Körper das zu erleben oder zu basteln, damit  
 930 sie ja die Möglichkeit haben, sich das irgendwie vorzustellen. Da „zerkugeln“ sie sich natürlich  
 931 darüber (lacht). Das heißt man muss/ also um was geht es eigentlich, eine Verbindung zwischen  
 932 den Inhalten und irgendwelchen Tätigkeiten, die man selber durchführen kann, zu schaffen, um  
 933 einfach mehr Verständnis für das zu bekommen worum es eigentlich geht.

934 I: Das heißt, anwendungsorientiert.

935 B5: Ja, oder was ist eine Ebene. Ja, die wird durch drei Punkte festgelegt, aber die muss ich mir ja  
 936 vorstellen können. Man muss sich auch vorstellen können, warum brauche ich zwei  
 937 Richtungsvektoren und nicht nur einen, warum muss ich überhaupt von einem Punkt weggehen,  
 938 damit ich das überhaupt aufspannen kann, oder die Normalvektorform einer Ebene. Kann ich mir  
 939 das überhaupt vorstellen, wo steht der Normalvektor, in welche Beziehung steht der zu den  
 940 Punkten der Ebene. Und ich habe das Gefühl, das geht nur wirklich gut bei der Mehrheit/ es gibt  
 941 manche die tun sich sehr leicht, die Vektorrechnung ist an sich ein Thema, das im Schnitt nicht so  
 942 sehr weh tut, außer in den höheren Ansprüchen, wo es schon um räumliches  
 943 Vorstellungsvermögen geht, aber sonst eher nicht. Und was wollte ich eigentlich sagen?

944 I: Strategien, wie man auf Fehlvorstellungen reagieren kann.

945 B5: Aja. Die andere ist die, dass man versucht durch grundlegende Rechentechnik es einfach  
 946 festzulegen. Dass es einfach klar ist, dass ich zu einem Punkt nicht kommen kann, wenn ich nicht  
 947 von einem Punkt weggehe.

948 I: Wie verdeutlichst Du ihnen das genau?

949 B5: Das geht ja nur indem man die/ also in der Realität ist es so, dass Punkte einfach Großbuchstaben  
 950 sind und Vektoren sind mit Pfeilen versehen und damit habe ich schon eine wichtige Situation,  
 951 nämlich die, dass ich die Unterscheidung wieder festige.

952 I: Gut. Ich habe jetzt typische Fehlvorstellungen von Schülern und Schülerinnen mitgebracht.

953 B5: Hast du die selber entwickelt?

954 I: Die habe ich aus der Literatur entnommen, also die gibt es wirklich. Und mich würde  
 955 interessieren, welche Therapievorschlüsse Du dazu hättest, wie Du den Schülerinnen und Schülern  
 956 helfen könntest, dass sie das besser verstehen. Also zum Beispiel bei der Addition von Vektoren.  
 957 Da ist zum einen die Fehlvorstellung, dass sie die Vektoren aneinander anreihen und zum  
 958 anderen, dass sie Überhaupt sagen, man kann das nicht addieren.

959 B5: Also ich muss sagen, diese Fehlvorstellung habe ich noch nie erlebt im Unterricht (zeigt auf  
 960 Fehlvorstellung 1). Und weil die/ zumindest die Richtung ist den meisten Schülerinnen und  
 961 Schülern recht gut bekannt. Also dass die sich verändert während der Tätigkeit des  
 962 Denkprozesses ist sehr unwahrscheinlich. Das heißt, dass man so einen Vektor so anhängt, halte  
 963 ich für sehr unrealistisch und ist mir noch nie, ich glaube zumindest, ich sehe natürlich nicht alles,

964 aber ist mir noch nie passiert. Die Addition von Vektoren liefert wieder einen Vektor und ist eine  
 965 Grundvorstellung, die man sich vorstellen kann und was könnte ich dagegen tun, wenn jemand  
 966 das so machen würde. Ich würde ihn daran erinnern, was/ wie ein Vektor definiert ist, was ihn  
 967 ausmacht. Dann ist völlig klar, dass das nicht der Vektor sein kann. Da gehe ich gar nicht darauf  
 968 ein, dass die Addition/ da ist ja nicht die Addition das Problem, sondern da ist das Problem, dass  
 969 sich die Richtung verändert von einem Vektor während des Prozesses. Das erscheint mir, dass das  
 970 eher selten ist.

971 I: Das heißt, Du gehst auf die Definition zurück.

972 B5: Also ich vermute, dass ich versuchen würde ihm klar zu machen was einen Vektor ausmacht,  
 973 seine Länge, seine Orientierung und seine Richtung und dass ich, erst dann, wenn ich das geklärt  
 974 habe, kann ich darüber reden, dass man so nicht addieren kann. Aber das Problem ist ja nicht das  
 975 Addieren, das Addieren wäre ja richtig, es fehlt nur der Summenvektor.

976 I: Und wenn jetzt jemand da hinschaut und sagt, das kann man nicht addieren.

977 B5: Dann würde ich ihm die Frage stellen, warum man zwei Vektoren nicht addieren können sollte.  
 978 Ich meine, es ist etwas zweidimensionales, es sind zweidimensionale Vektoren. Die  
 979 Grundsituation ist die, dass ich einfach die Koordinate addiere und dann einfach einen  
 980 Summenvektor bekomme. Vektor plus Vektor ist Vektor.

981 I: Das heißt, Du würdest es arithmetisch veranschaulichen?

982 B5: Nein, glaube ich nicht. Ich glaube, dass man es eher so macht wie da, geometrisch und einfach  
 983 nur den Summenvektor dann einzeichnet.

984 I: Aber wenn die Schülerin oder der Schüler nicht dahinter kommt, dass man das eigentlich nur  
 985 verschieben und anhängen sollte/

986 B5: Ich kenne so Strategien, die ich aber selber nicht anwende, mit Addieren heißt an die Spitze des  
 987 ersten Vektors den Anfang des zweiten Vektors anhängen und so weiter. Das mache ich nicht. An  
 988 sich reicht gefühlsmäßig die geometrische Vorstellung. Es bereitet auch wenige Probleme. Ich  
 989 kenne wenige Schüler, die beim Addieren von zwei Vektoren ein Problem haben und speziell  
 990 dieses (zeigt auf Fehlvorstellung 1) habe ich überhaupt noch nicht erlebt.

991 I: Du sagst jetzt geometrisch. Was genau würdest Du da machen?

992 B5: Ich würde den Vektor hin verschieben und anhängen.

993 I: Machst Du das Geogebraunterstützt?

994 B5: Ja schon. In Geogebra ist es sehr leicht, weil man den Vektor sofort verschieben kann.

995 I: Ok. Also das wäre eine Strategie, gut. Dann können wir gleich zum nächsten gehen. Beim  
 996 Verbindungsvektor. Berechne den Vektor AB-Pfeil und veranschauliche dies an einer Skizze. Die  
 997 Punkte A und B sind gegeben. Jetzt ist zum Beispiel die erste Fehlvorstellung, die laut Literatur  
 998 am häufigsten auftritt, die dass der Vektor AB-Pfeil als Ortsvektor eingezeichnet wird. (.) Siehst  
 999 Du das überhaupt als Fehlvorstellung?

1000 B5: Ich sehe das nicht als Fehlvorstellung, weil es ist ja ein Repräsentant des Vektors AB-Pfeil.

1001 I: Wenn aber genau die Punkte angegeben sind?

1002 B5: Dann ändert das nichts daran, dass der Vektor die Menge aller Pfeile ist, die dieselbe Richtung,  
 1003 selbe Orientierung und selbe Länge haben. Und das ist ein Repräsentant davon. Ich verstehe  
 1004 schon, dass der Begriff des Ortsvektors immer wieder Probleme bereiten kann, nur ist er halt ein  
 1005 Repräsentant des Vektors AB. Das stimmt noch dazu, ich habe ihn mir gerade ausgerechnet. Das  
 1006 ist auch ein Beispiel für diesen Vektor AB.

1007 I: Dann haben wir hier die zweite Fehlvorstellung. Das heißt, da sind die Punkte als Pfeile  
 1008 aufgefasst worden.

1009 B5: Na gut, der Vektor B ist ja nicht der Punkt B, sondern der ist auf einmal ein Vektor geworden, der  
 1010 noch dazu nicht mal mehr ein Ortsvektor wäre. Wenn er ein Ortsvektor wäre, hätten wir noch  
 1011 eine Chance mit einem Dreieck oder irgendwie zu erkennen, was da vielleicht der Vektor AB sein  
 1012 könnte. Aber da ist es so, dass ja/ da gibt es/

1013 I: Und überhaupt ist hier noch Vektor A plus Vektor B gerechnet worden.

1014 B5: Richtig.

1015 I: Was würdest Du da machen, wenn das im Unterricht vorkommen würde?

1016 B5: Ich würde/ also grundlegend würde ich meinen, dass man einmal die beiden Punkte in einem  
 1017 Koordinatensystem einzeichnet und sich dann überlegt, wie liegt der Vektor, wohin ist er  
 1018 orientiert und welche Richtung hat er und das ist im Normalfall relativ leicht erkennbar, übrigens  
 1019 schon in der Unterstufe. Dieses Beispiel ist ja nicht ein Beispiel, das in der Oberstufe erst ist,  
 1020 sondern das passiert ja schon in der zweiten Klasse beim Koordinatensystem. Und es ist im  
 1021 Normalfall, auch für Zweitklässler, kein Problem hier die Differenzen zu berechnen und  
 1022 mathematisch zu erkennen, was dabei los sein sollte, wobei es in der Unterstufe noch keine  
 1023 Vektoren gibt. Aber sie wissen genau wie man da vorgehen würde.

1024 I: Wie würdest Du intervenieren?

1025 B5: Ich würde wieder versuchen über die Unterscheidung zwischen Punkt und Vektor zu reden. Da  
 1026 gibt es ein Mismatch zwischen der Vorstellung von Punkten und Vektoren. Und Punkte sind  
 1027 eindeutig, eindeutig festgelegt im Koordinatensystem. Und dieser Vektor B entspricht nicht dem  
 1028 Punkt B.

1029 I: Ok, Du weist auf das hin und du hast zuvor gesagt, Du würdest die Punkte A und B im  
 1030 Koordinatensystem einzeichnen lassen.

1031 B5: Genau und den Vektor auch gleich einzeichnen lassen.

1032 I: Wenn jemand sagt, ich kann mir das gar nicht vorstellen, wie das funktioniert. Wie reagierst Du  
 1033 darauf?

1034 B5: Also ich würde wieder versuchen den geometrischen Weg zu gehen.

1035 I: Was würdest Du da genau machen?

1036 B5: (Zeichnet) Differenzen berechnen von den Koordinaten, dadurch die Orientierung. In  
1037 Wirklichkeit könnte man/ irgendwann haben sie hergeleitet warum der Vektor AB genau zu  
1038 berechnen ist mit B minus A.

1039 I: Richtig. Laut Literatur ist die Berechnung an sich kein Problem. Das Problem ist das skizzieren.

1040 B5: Ich würde die Ortsvektoren gar nicht einzeichnen. Ich würde sie nicht verwenden. Weil wenn ich  
1041 da noch Pfeile einzeichne, dann komme ich vom Thema weg.

1042 I: Du würdest ihnen also deutlich machen komponentenweise zu subtrahieren.

1043 B5: Ja. Das liefert aber einen Vektor und das ist entscheidend. Das ist auch wieder das nächste  
1044 Problem, dass die Differenz zweier Punkte und da brauche ich jetzt wieder die Interpretation von  
1045 Ortsvektoren, einen Vektor liefert. Weil sonst habe ich wieder die Situation, was ist ein Punkt.

1046 I: Da weist Du also immer stark darauf hin.

1047 B5: Ja, ich verwende den Begriff der Ortsvektoren als Repräsentanten für/ also für mich ist das keine  
1048 Fehlvorstellung. Das ist eine richtig mögliche Vorstellung, wenn sich der Mensch bewusst ist,  
1049 dass das nur ein Repräsentant ist und nicht der Vektor. Das ist entscheidend.

1050 I: Ja, das ist dann immer so die Sache. Dann zum Nächsten. Da haben wir die Gleichheit von  
1051 Vektoren. Die Frage ist, gilt AB-Pfeil //ist gleich CD-Pfeil.//

1052 B5: //Mir gefallen die Beispiele gut.//

1053 I: Die erste Fehlvorstellung wäre, sie sind zwar zueinander parallel, aber nicht identisch.

1054 B5: Da würde ich mich zuerst einmal fragen, wann sind zwei Vektoren identisch. Wie ist das mit den  
1055 unendlich vielen Repräsentanten, sind die alle identisch? Oder sind sie alle Repräsentanten  
1056 desselben Vektors? Was identisch sein kann, ist die Länge, was identisch sein kann, ist die  
1057 Orientierung, aber wann sind zwei Vektoren identisch? Die Frage würde ich ihm einmal stellen.  
1058 Das heißt, der Begriff scheint mir ein bisschen/ oder zumindest hinterfragbar. Dass die Vektoren  
1059 gleich sind, gleiche Repräsentanten desselben Vektors, damit habe ich überhaupt kein Problem,  
1060 aber ich denke das Wort identisch kommt mir sehr komisch vor, weil ich nicht weiß was, erstens  
1061 einmal, ich damit verbinde und was Schülerinnen und Schüler damit verbinden weiß ich  
1062 überhaupt nicht. Weil sie verbinden hauptsächlich/ sie sehen Längen, Orientierung und Richtung,  
1063 hoffe ich. Das ist das was ich versuche/ oder was sinnvoll ist, scheint mir, klar zu machen, wenn  
1064 ich einen Vektor anschau. Und in dem Augenblick wo sie alle drei Bedingungen gleich haben,  
1065 dann sind sie gleich.

1066 I: Das heißt, Du würdest überhaupt einmal mit den Schülerinnen und Schülern klären, was gleich  
1067 bedeutet?

1068 B5: Naja, was ein Vektor ist. Und dann schaue ich warum sind sie gleich, weil alles übereinstimmt,  
1069 Länge, Richtung und Orientierung. Nur dann sind sie gleich. Das Wort identisch passt für mich  
1070 nicht. Wenn es die Bedeutung von am selben Ort hat, dann hat es überhaupt keine Bedeutung.  
1071 Das Wort hat für Vektoren, für mich, keine Bedeutung. Das ist ein Wort, das nicht zu Vektoren  
1072 gehört. Bei Punkten schon, weil Punkte sind eindeutig festgelegt.

1073 I: Stimmt. Und wenn jemand sagt, sie haben nicht denselben Anfangspunkt, daher sind sie nicht  
1074 gleich.

1075 B5: Ja, das ist realistischer, dass sie das so meinen. Wieder besteht, glaube ich, nur eine Chance,  
1076 nämlich dass man sich auf das bezieht, was ist ein Vektor. Und es ist nicht wichtig der  
1077 Anfangspunkt eines Vektors. Ja, um zu einem bestimmten Punkt zu kommen, brauche ich den  
1078 Anfangspunkt, aber nicht um den Vektor selbst zu bestimmen. Das heißt, da geht es mir eher  
1079 wieder um die Grundvorstellung, was ein Vektor ist. Und ich habe das Gefühl, wenn die drei  
1080 Bedingungen im Kopf sind, die erfüllt sein müssen, damit ein Vektor festgelegt ist, dann ist auch  
1081 das zu hinterfragen.

1082 I: Was würdest Du dazu sagen, wenn man die Schüler und Schülerinnen schätzen lässt, was für  
1083 Koordinaten die Vektoren haben? Und anhand dessen sie dann sehen, oh, das sind ja doch die  
1084 gleichen.

1085 B5: Ja. Gut, zuerst würde ich einmal parallel verschieben und schauen, ob die wirklich parallel sind.  
1086 Das schaffen die meisten, machen sie auch. Nur wenn man nur so hinschaut, man weiß das nicht.  
1087 Und dann vermute ich, dass sie die Koordinaten hinschreiben.

1088 I: Wäre das auch für Dich eine praktische Vorgehensweise.

1089 B5: Ja sicher.

1090 I: Oder, wenn Du sagst, du verwendest Geogebra, würdest Du das //in Geogebra//

1091 B5: //Ja, da// kann man sie übereinander legen lassen. Wobei Geogebra hat schon ein paar Probleme.  
1092 Geogebra macht ja, wenn man nur einen Vektor eingibt, immer einen Ortsvektor. Und das ist  
1093 natürlich schon/ das müsste man dann wegziehen, durch mögliche Punkte, die man vielleicht  
1094 vorgegeben hat, besser wäre man hätte die Punkte vorgegeben und schaut dann, ob die beiden  
1095 übereinander sind. Nehmen wir an der Vektor wäre eins Komma zwei und eins Komma zwei, ich  
1096 sage jetzt einmal irgendwas, dann bekommt man jedes Mal einen Ortsvektor. Und aus denen sich  
1097 die irgendwo hin verschieben und dann wieder übereinander legen, ist schon kompliziert.  
1098 Geogebra hat natürlich auch eine bestimmte Philosophie, die dahinter sich versteckt und gerade in  
1099 der Vektorrechnung ist die Philosophie eine gut praktische. Zum Beispiel, was man irrsinnig gut  
1100 in Geogebra machen kann, ist, wenn man von Punkten weggeht und einen Vektor dazu zählt,  
1101 dann wieder zu einem Punkt zu kommen und so weiter. Das wird sehr gut veranschaulicht. Auch  
1102 bei Geraden. Da braucht man nur den Parameter verändern und man sieht genau, was da passiert.  
1103 Also insofern ist Geogebra/ schult sehr gut die Vorstellung. Aber im Bereich der/ bei der Frage  
1104 hilft es am Anfang nicht. Wenn man beide eingibt, sind beide am selben Platz sozusagen, was ja  
1105 absurd ist, weil der Vektor ja nicht vom Platz abhängig ist.

1106 I: Und wenn man im Vorfeld dieses Beispiel, so wie es da zu sehen ist, in Geogebra vorbereitet und  
1107 dann die Vektoren verschiebt/

1108 B5: Ja, gar kein Problem. Also ein Applet kann man sofort machen, wo man das sieht. Im Internet  
1109 gibt es auch schon einige dazu.

1110 I: Gut, dann zum letzten Thema, der Mittelpunkt einer Strecke. Stelle eine Formel für den  
 1111 Mittelpunkt M einer Strecke AB auf und begründe. Das Aufstellen der Formel ist laut Literatur  
 1112 nicht das große Problem. Das/

1113 B5: In dem Augenblick wo die Punkte gegeben sind und wo eines festgelegt ist, das ist nämlich der  
 1114 grundlegende Begriff zwischen Punkt und Vektoren, Punkt plus Vektor ist Punkt, ist es relativ  
 1115 klar und ich glaube, dass über achtzig Prozent der Schüler es schaffen eine Formel zu entwickeln  
 1116 für den Halbierungspunkt. Nämlich, was muss ich machen, dass ich von einem Punkt weggehe  
 1117 um zu M zu kommen. Das ist Voraussetzung und das wird oft übersehen. Plus einhalb mal,  
 1118 warum einhalb mal, weil es einfach die Hälfte ist eines Vektors. Und wenn ich zu einem Punkt  
 1119 einen Vektor zähle, bekomme ich wieder einen Punkt. Und die Formel folgt dann.

1120 I: Also Du würdest die Formel herleiten?

1121 B5: Ja.

1122 I: Wenn aber jetzt die Fehlvorstellung da ist, wenn ich die Punkte A und B addiere, erhalte ich die  
 1123 ganze Strecke. Um den Mittelpunkt zu erhalten, muss ich diese ganze Strecke durch zwei  
 1124 dividieren. Was sagst Du dazu? Wie würdest Du reagieren?

1125 B5: Wenn ich zwei Punkte addiere bekomme ich einen Vektor, gut. Wenn ich einen Vektor halbiere  
 1126 bekomme ich einen Vektor und keinen Punkt. Das ist einmal das, was die Grunddefinitionen  
 1127 betrifft. Gut, das ist ein bisschen blöd. Die Formate passen nicht zusammen. Andererseits wenn  
 1128 ich mein Ortsvektormodell nehme (zeichnet), wenn ich zu dem Vektor, den dazu nehme,  
 1129 bekomme ich einen neuen Ortsvektor, oder einen Vektor. Aber was ist die Strecke? Mit der  
 1130 Strecke ist die Länge von dem gemeint. Die Strecke ist ja kein Begriff der Vektorrechnung. Also  
 1131 in Wirklichkeit, was könnte ich halbieren? Halbieren könnte ich da nur den Ortsvektor. Dann  
 1132 komme ich genau da her. Das ist irgendwie schwierig. Also die Strecke ist ein Problem. Wenn da  
 1133 Ortsvektor stehen würde oder so irgendwas, könnte man sich das vorstellen. In Wirklichkeit gehe  
 1134 ich vom Ursprung weg und zähle den Vektor dazu und bekomme genau denselben Mittelpunkt.  
 1135 Also die Grundidee ist nicht schlecht, nur die Beschreibung ist mathematisch problematisch.

1136 I: Wie würdest Du da weiterhelfen?

1137 B5: Die Skizze würde gut dazu passen. Und die Grundidee ist ja nicht schlecht. Es müsste nur erklärt  
 1138 werden, was das eigentlich bedeutet. Und ich sehe das Problem eher bei den Ortsvektoren,  
 1139 nämlich zu sehen, was da passiert, wenn ich zwei Ortsvektoren addiere, wenn ich dann einen  
 1140 neuen Ortsvektor halbiere, bekomme ich dann einen Vektor. Aber dann muss ich am Schluss sehr  
 1141 wohl mir bewusst sein, dass ich wieder vom Ursprung weggehe, dass ich wieder einen Punkt  
 1142 bekomme. Das ist sehr schwierig. Aber es fehlt nicht viel.

1143 I: Wie würdest Du das verdeutlichen?

1144 B5: Ja, eine Möglichkeit habe ich schon angeboten, aber entscheidend ist, dass man dann vom  
 1145 Ursprung weggeht. Ob die Skizze dem Schüler was nutzt, ist die andere Frage. Das Problem ist,  
 1146 dass ich da einen Vektor bekomme, der nicht ortsgebunden ist. Das ist eines der größeren

1147 Probleme. Also ich würde den geometrischen Weg bevorzugen. Das Problem ist, wie erkläre ich  
1148 einem Schüler, dass er hier vom Ursprung weggehen muss.

1149 I: Und wie würdest Du das erklären?

1150 B5: Ich würde immer den Weg gehen, Punkt plus Vektor ist Punkt. Und nicht die Situation Punkt  
1151 plus Punkt und damit argumentieren. Ich würde versuchen den Weg anders zu gehen, direkter.

1152 I: Gut. Bei der zweiten Fehlvorstellung haben wir jetzt eine falsche Formel, nämlich AB-Pfeil halbe  
1153 und die Aussage, wenn ich die Punkte A und B habe und diese verbinde, dann habe ich auch  
1154 gleichzeitig den Vektor AB-Pfeil. Wenn ich vom Vektor AB-Pfeil die Hälfte nehme, komme ich  
1155 zum Mittelpunkt.

1156 B5: Nicht, wenn wir nicht von einem Punkt weggehen.

1157 I: Richtig, also es fehlt der Anfangspunkt.

1158 B5: Das ist ein logisches Problem. Und geometrisch kann man sich das relativ schnell aufzeichnen,  
1159 dass das nicht stimmen kann.

1160 I: Wie?

1161 B5: Wir haben da den Vektor (zeichnet) und wenn ich den halben Vektor nehme, dann ist der da, da  
1162 und da, da.

1163 I: Gut, also Du würdest geometrisch zeigen, dass der irgendwo liegen kann.

1164 B5: Ja.

## SchülerInneninterviews

---

|                |                             |
|----------------|-----------------------------|
| Termin:        | Freitag, 24.05.2013         |
| Ort:           | BG/BRG Stockerau, Schulgang |
| Dauer:         | 32 Minuten                  |
| Interviewerin: | Christina Gahler            |

---

1165 I: Ihr bekommt vier Beispiele von mir. Bei dem ersten seht ihr schon, es geht um die  
1166 Addition von Vektoren. Wie würdet ihr das machen

1167 Lukas: Also ich glaube, das kann man schon addieren.

1168 Georg: Ich glaube auch

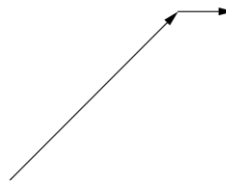
1169 I: Gut, und warum

1170 Lukas: Weil beide positiv sind, weil

1171 Georg: Naja, man kann den da ja anhängen, oder

1172 I: Zeichne einmal so wie du glaubst, dass es richtig ist.

1173 Georg: (zeichnet Kräfteparallelogramm)



1174 Lukas: So gehört das doch, oder? (zeichnet: )

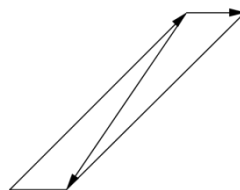
1175 I: Wo wäre dann bei dir der Additionsvektor?



1176 Lukas: Da. (zeichnet: )

1177 Georg: Du brauchst doch ein Kräfteparallelogramm.

1178 Lukas: Ja, das will ich ja eh haben. Ok, das ist schlecht gezeichnet. (Fertigt eine neue Skizze mit



1179 einem Kräfteparallelogramm an )

1180 I: Ok, ihr habt jetzt beide ein Kräfteparallelogramm gezeichnet. Es ist jetzt nur nicht klar,  
1181 darf ich den zweiten Vektor nur oben oder nur unten anhängen, oder ist es egal wo ich  
1182 das mache.

1183 Georg: Nein, weil bei irgendeinem ist es minus, glaube ich. (Gemeint ist die Subtraktion).

1184 Lukas: Nein, da müsste es einfach in die andere Richtung zeigen, dann ist es minus.

1185 I: Also, ich habe euch dasselbe Beispiel hier am Laptop mit Geogebra. Georg, sei so nett

1186 und zieh einmal an dem zweiten Vektor. Den kann man ja irgendwo hinschieben, oder?

1187 Lukas: Ja.

1188 I: So und wenn wir den unten dran hängen, hätten wir genau das Kräfteparallelogramm, das

1189 auch der Georg gezeichnet hat. Und wenn wir ihn oben anhängen (Georg hängt den

1190 Vektor an der Spitze des anderen Vektors an), dann hätten wir Lukas sein

1191 Kräfteparallelogramm.

1192 Lukas: Aber unsere Resultierende ist anders.

1193 I: Genau auf das wollte ich hinaus. Das heißt, wir müssen uns jetzt die Frage stellen wohin

1194 die Resultierende zeigen muss. Lukas, wenn ich mir dein Kräfteparallelogramm

1195 anschau, könnte ich die Addition mit AB-Pfeil plus BD-Pfeil durchführen.

1196 Lukas: Ja, das ist klar.

1197 I: Genau. Schreib das einmal auf (..)

1198 (Lukas schreibt  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ .)

1199 I: Und was kann ich jetzt statt AB-Pfeil und BD-Pfeil hinschreiben?

1200 Georg: B minus A und D minus B.

1201 Lukas: (Ersetzt die Ausdrücke:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = B - A + D - B$ ) Ah und da fällt das B weg und

1202 dann bleibt nur mehr D minus A übrig.

1203 I: Und was ist D minus A?

1204 Lukas: AD-Pfeil, also, dann habe ich das falsch gemacht.

1205 I: Genau, das heißt im Prinzip ist es ganz egal, ob ich den Vektor oben oder unten anhänge,

1206 aufpassen muss ich nur auf die Resultierende. Dann kommen wir zum nächsten Beispiel.

1207 Da haben wir den Verbindungsvektor. (.) Was würdet ihr hier machen?

1208 Lukas: Ich würde mir/

1209 Georg: (Zeichnet) Naja, A ist da und B ist da, also ist das AB-Pfeil.

1210 Lukas: Wir sollten uns zuerst die Strecke ausrechnen.

1211 I: Die Strecke?

1212 Lukas: Naja, den Vektor. Also rechnen wir B minus A.

1213 I: Ja, das Ergebnis stimmt bei euch beiden. Jetzt würde mich aber interessieren, warum

1214 rechne ich B minus A?

1215 Lukas: Das haben wir so gelernt.

1216 I: Ja, aber warum rechne ich das so?

1217 Lukas: Wenn man A minus B rechnen würde, dann wäre das Vorzeichen vertauscht. Ich habe

1218 mir einfach die Formel gemerkt.

1219 I: Ok, trotzdem lautet meine Frage immer noch, wieso rechne ich B minus A?

1220 Lukas: Na ich gehe ja zwei rüber und zwei rauf.

1221 I: Ja das stimmt, dennoch hätte ich gerne noch eine bessere Begründung.

1222 (Lukas und Georg schweigen)

1223 I: Ich habe euch hier eine Skizze mitgebracht, so habt ihr es in der Schule auch gelernt. Auf

1224 den ersten zweier komme ich, wenn ich mir die x-Koordinaten anschau und hier sieben

1225 minus 5 rechne. Bei den y-Koordinaten geht das genauso. Und dann komme ich auch

1226 wieder auf zwei, das ist eh blau gekennzeichnet.

1227 Georg: Aso, eh ganz einfach.

1228 I: Ja, genau. Ok, nächstes Beispiel. (...) Sind AB-Pfeil und CD-Pfeil gleich?

1229 Lukas: Ja.

1230 I: Warum?

1231 Georg: Weil sie die gleiche Orientierung haben und gleich lang sind.

1232 Lukas: Ja und sie sind parallel zueinander. Also wir könnten sagen, beide sind zwei, zwei.

1233 I: Ok. Das heißt, welche Eigenschaften hat ein Vektor? Wie wird er definiert?

1234 Georg: Orientierung.

1235 Lukas: Länge.

1236 I: Ja, was fehlt da noch?

1237 (Schweigen)

1238 I: Länge, Orientierung und Richtung.

1239 Lukas: Ja, das habe ich mit der Orientierung eh gemeint.

1240 I: Aha, das ist aber nicht dasselbe. Ist dir das klar?

1241 Lukas: Ja, Orientierung ist, jetzt grob gesagt, in welche Richtung er schaut und Richtung/

1242 Georg: Ob er jetzt da liegt oder da.

1243 I: Genau, das stimmt. Lukas, kann man jetzt bei unserem Beispiel sagen, dass die Vektoren

1244 gleich gerichtet sind?

1245 Lukas: Ja, sind sie.

1246 I: Richtung. Gut, dann zum nächsten Beispiel. Es geht um den Mittelpunkt einer Strecke.

1247 (...) Ok, Georg, du sagst, der Mittelpunkt einer Strecke ist einhalb mal AB-Pfeil.

1248 Nehmen wir einfach den Vektor zwei, zwei vom vorherigen Beispiel und gib den mal in

1249 Geogebra ein und gib gleich den halben Vektor ein.

1250 (Georg operiert am Laptop)

1251 I: Genau, da kommt jetzt der Vektor eins, eins heraus. Nimm mal den Vektor und verschieb

1252 ihn. (..) Was hat der Vektor jetzt für Koordinaten?

1253 Georg: Immer noch eins, eins.

1254 I: Richtig, du sagst aber, dass hier der Mittelpunkt liegt. Der könnte dann aber auch hier,

1255 hier oder hier liegen. Aber der Mittelpunkt ist doch ein ganz bestimmter Punkt, oder?

1256 Georg: Ja, da stimmt was nicht.

1257 Lukas: Wir brauchen doch immer einen Anfangs- und einen Endpunkt.

1258 Georg: Ach **ja**, ich muss noch schreiben A plus.

1259 I: Genau, das ist ganz wichtig, weil sonst, das haben wir ja gerade gesehen, könnte der

1260 Mittelpunkt irgendwo liegen. So Lukas, was hast du geschrieben?

1261 Lukas: Ich habe eine andere Formel. Ich habe B minus A durch zwei.

1262 I: Im Prinzip steht bei dir genau dasselbe wie bei Georg, denn B minus A ist ja wieder AB-

1263 Pfeil.

1264 Lukas: Ja, stimmt. Ich habe auch den Anfangspunkt vergessen.

1265 I: Ganz genau. Der ist aber sehr wichtig, das habe ich eh gerade erklärt.

1266 Lukas: Ja, ja, ich weiß es eh schon.

1267 I: Gut, jetzt haben wir zur Überprüfung noch vier Beispiele. Schaut euch mal das erste an.

1268 Lukas: Also ich würde ein Kräfteparallelogramm zeichnen.

1269 I: Ok, was würdest du machen Georg?

1270 Georg: Ja, ich würde das genauso machen.

1271 (Lukas und Georg skizzieren.)

1272 I: Super. Also wenn ihr an das Beispiel zuvor denkt, habt ihr das jetzt beide richtig

1273 gemacht. Sehr gut. Dann schaut euch mal das zweite Beispiel an.

1274 Lukas: Ja, der Vektor AB.

1275 Georg: Das ist B minus A. Bei mir kommt sieben und minus drei heraus.

1276 I: Kannst du mir das auch begründen?

1277 Georg: Naja, ich gehe sieben rüber und drei hinunter.

1278 I: Stimmt, aber warum rechne ich B minus A?

1279 Lukas: Das ist zuvor alles so schön da gestanden, weil das alles in dem Viertel war (zeigt auf den

1280 ersten Quadranten).

1281 Georg: Man muss da/ (Beschriftet die Koordinaten der Punkte A und B.)

1282 Georg: Also ich muss da auf die x-Koordinaten schauen. Da muss ich vier minus minus drei

1283 rechnen und dann komme ich auf sieben. Und genauso mache ich das bei der y-

1284 Koordinate.

1285 Lukas: Aja, so ist das gegangen.

1286 I: Genau, ganz wichtig ist es, dass wir und jeweils die x- und y-Koordinaten anschauen, ok.

1287 Gut, dann das dritte Beispiel.

1288 Georg: Man kann sich BC ausrechnen (gemeint ist der Vektor BC). Und D ist dann gleich A plus

1289 BC-Pfeil, weil BC hat dieselbe Richtung wie AD, es ist parallel, also man kann es

1290 verschieben, ja und so kommt man dann auf D.

1291 I: Ja, Lukas was schreibst du? Du sagst/

1292 Lukas: Also ich habe D ist gleich A plus C minus B (schreibt  $D = A + (C - B)$  ).

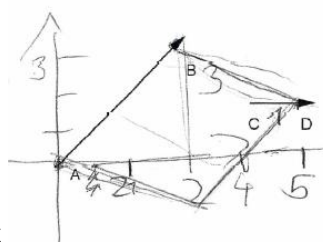
1293 Georg: Oder man kann sich auch ausrechnen BA (gemeint ist der Vektor BA) und dann plus C.  
 1294 Das ist dann dasselbe.  
 1295 I: So wie ihr das aufgeschrieben habt, würdet ihr sagen, dass der Vektor BC gleich dem  
 1296 Vektor AD ist?  
 1297 Lukas: Ja, weil sie die gleiche Richtung, Orientierung und Länge haben.  
 1298 Georg: Ja, genau.  
 1299 I: Richtig. Dann gleich zum letzten Beispiel. Ich zeige euch das auch am Laptop.  
 1300 Lukas: Also das Krankenhaus haben wir gegeben und da oben ist dann die Gabelung.  
 1301 Georg: Ja, man muss sich den Mittelpunkt ausrechnen.  
 1302 Lukas: Genau.  
 1303 I: Wie rechnet man sich den Mittelpunkt aus?  
 1304 Georg: Also M ist gleich K plus einhalb mal KG-Pfeil.  
 1305 Lukas: (Überlegt) Ich habe M ist gleich K plus einhalb mal G minus K. ich gehe also vom  
 1306 Krankenhaus weg in Richtung KG-Pfeil, weil das ist ja G minus K, und davon gehe ich  
 1307 halt nur die Hälfte.

---

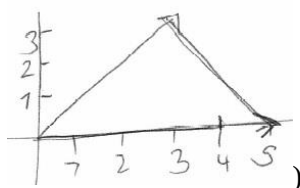
|                |                             |
|----------------|-----------------------------|
| Termin:        | Freitag, 24.05.2013         |
| Ort:           | BG/BRG Stockerau, Schulgang |
| Dauer:         | 63 Minuten                  |
| Interviewerin: | Christina Gahler            |

---

1308 I: Wir kommen zum ersten Beispiel, Addition von Vektoren. Kann man AB-Pfeil und CD-  
 1309 Pfeil addieren?  
 1310 Manuel: Ja.  
 1311 Thomas: Ja.  
 1312 I: Also kann man jeden Vektor mit einem anderen addieren?  
 1313 Manuel: Ja, wieso nicht?  
 1314 I: Ja, gute Antwort. Und wie macht man das?  
 1315 Manuel: Ich kann das entweder grafisch oder rechnerisch machen.  
 1316 Thomas: Ja, genau.  
 1317 I: Wie würdet ihr das grafisch machen?



- 1318 Thomas: So. (skizziert )
- 1319 I: Wo wäre bei dir das Addierte? Was addierst du?
- 1320 Thomas: Die Punkte. Aber ich habe keine Punkte, das ist das Problem.
- 1321 I: In der Angabe steht, kann man AB-Pfeil und CD-Pfeil addieren. Das sind ja Pfeile und
- 1322 keine Punkte. Also kann man die Pfeile miteinander addieren?
- 1323 Manuel: Ja, schon. Rechnerisch ist es eh ganz einfach. Wenn ich sage AB-Pfeil ist zwei und drei
- 1324 und CD-Pfeil ist eins und null, dann kann ich das ja leicht zusammenzählen.
- 1325 I: Ok, also du würdest dir die Koordinaten aufschreiben und dann addieren.
- 1326 Manuel: Ja, genau, weil das meiner Meinung nach einfacher ist, weil beim Grafischen kann man
- 1327 sich irgendwie leicht vertun.
- 1328 I: Gut, kannst du dir trotzdem einmal überlegen, wie es grafisch gehen würde?
- 1329 Manuel: Ja, also parallel verschieben und den einen an den anderen anhängen. Also ich hab dann
- 1330 ein Parallelogramm und da (zeigt auf die Resultierende) liegt dann das Addierte.
- 1331 I: Ok. Thomas, wie würdest du jetzt vorgehen?
- 1332 (Thomas schweigt)
- 1333 I: Also für dich ist es jetzt ein Problem, dass du die Koordinaten der Pfeile nicht gegeben
- 1334 hast?
- 1335 Thomas: Genau.
- 1336 I: Brauchen wir die Koordinaten überhaupt, dass wir die Pfeile addieren können?
- 1337 Thomas: Nein.
- 1338 I: Ok, die Frage ist jetzt nur noch, was ich dann mit den Pfeilen machen muss, um sie zu
- 1339 addieren.
- 1340 Thomas: (Überlegt) Das kann man grafisch nicht lösen.
- 1341 Manuel: **Doch.**
- 1342 I: Ok, Thomas, schau einmal auf den Laptop. Hilft es dir etwas, wenn der CD-Pfeil auf der
- 1343 x-Achse liegt?
- 1344 Thomas: Ja dann ist es ja ganz anders, weil dann kann ich ja quasi ein Dreieck machen (zeichnet



- 1345 )
- 1346 I: Also du verlängerst den CD-Pfeil und machst dann noch eine Verbindung zwischen den
- 1347 beiden Pfeilen. Warum machst du das?

1348 Thomas: Weil (...)

1349 I: Noch einmal die Frage, kann man sie überhaupt addieren?

1350 Thomas: Man kann sie nicht addieren. Das geht nicht. Ohne Zahlen kann man das nicht.

1351 I: Wenn wir uns an das erinnern, was der Manuel zu Beginn gemacht hat, nämlich die

1352 Koordinaten der Pfeile schätzen. Dann ist doch der Manuel zu dem Entschluss

1353 gekommen, man kann sie addieren und man kann sogar alle Pfeile addieren.

1354 Thomas: Ja, ok, das geht schon.

1355 I: Also gibst du mir Recht, dass ich rechnerisch zwei Pfeile immer addieren kann?

1356 Thomas: Ja.

1357 I: Wenn ich sie also rechnerisch addieren kann, muss ich sie logischerweise auch grafisch

1358 addieren können.

1359 Thomas: Eigentlich schon.

1360 Manuel: Parallel verschieben und anhängen.

1361 Thomas: Ach ja, stimmt.

1362 I: Genau. Mach das einmal in Geogebra. Nimm den CD-Pfeil und häng den an den anderen

1363 dran. Und jetzt schau, die Koordinaten von dem Vektor haben sich nicht verändert. Und

1364 jetzt schau einmal auf die Skizze vom Manuel. Er hat die Pfeile aneinandergehängt, so

1365 wie du es auch gerade gemacht hast, und dabei nicht die Pfeile verändert. Und daraus hat

1366 er dann ein Parallelogramm gemacht. Und wenn du dich an den Physikunterricht

1367 erinnerst, ist die Resultierende des Kräfteparallelogramms die Addition der beiden

1368 Vektoren.

1369 Thomas: **Ja**, stimmt.

1370 I: So, dann schauen wir uns das nächste Beispiel an. Da geht es um den Verbindungsvektor.

1371 Manuel: Zwei zwei ist der Vektor.

1372 Thomas: Ja, das hab ich auch.

1373 I: Gut, jetzt steht da aber noch, dass man eine Skizze zeichnen soll und eine Begründung

1374 wie man auf den Vektor zwei zwei kommt, hätte ich auch noch gerne.

1375 (Manuel und Thomas zeichnen)

1376 Manuel: Ich rechne  $B$  minus  $A$  und komme dann auf zwei zwei.

1377 I: Warum rechnen wir  $B$  minus  $A$ ?

1378 Manuel: Weil wenn wir  $A$  minus  $B$  rechnen, gehen wir in die falsche Richtung.

1379 I: Das ist richtig, aber warum rechnen wir überhaupt minus?

1380 Manuel: Weil wir den Abstand brauchen.

1381 I: Was meinst du mit Abstand?

1382 Manuel: Also ich stelle mir das so vor. Wenn ich von  $A$  in Richtung  $AB$ -Pfeil gehe, komme ich

1383 zum Punkt  $B$ . Und wenn ich das umforme, erhalte ich für  $AB$ -Pfeil gleich  $B$  minus  $A$ .

1384 I: Ja, das ist eine gute Begründung. Thomas, was sagst du dazu? Wie würdest du das  
1385 begründen?

1386 Thomas: Also ich würde die Koordinaten einfach ablesen.

1387 I: Ja und warum rechnest du B minus A?

1388 Thomas: Das ist halt die Formel.

1389 I: Ich habe da eine Skizze mitgebracht, so habt ihr das in der Schule auch gelernt. Auf den  
1390 ersten zweier komme ich, wenn ich mir die x-Koordinaten anschau und hier sieben  
1391 minus 5 rechne. Bei den y-Koordinaten geht das genauso. Und dann komme ich auch  
1392 wieder auf zwei, das ist eh blau gekennzeichnet. Ok, nächstes Beispiel. (...) Sind die  
1393 beiden Vektoren gleich?

1394 Thomas: Das kann ich gar nicht.

1395 Manuel: Die Frage ist, was ist mit Gleichheit gemeint? Länge, Orientierung und Richtung?

1396 I: Ja, genau.

1397 Thomas: Und wenn das gleich ist, würde ich einmal sagen, sind die Vektoren gleich.

1398 I: Ja, trifft das jetzt bei denen zu?

1399 Manuel: Ja, schon.

1400 I: Thomas, was sagst du dazu? Ah, ich sehe schon, du zeichnest ein Koordinatensystem  
1401 dazu.

1402 Thomas: Ohne Zahlen das zu lösen ist ein Wahnsinn.

1403 I: Also du tust dir schwer überhaupt Aufgaben ohne Zahlen zu lösen?

1404 Thomas: Ja.

1405 I: Verstehe. Naja, jetzt wo du das Koordinatensystem gezeichnet hast, kannst du ja auch die  
1406 Koordinaten bestimmen.

1407 Thomas: Eins, eins würde ich sagen.

1408 I: Ok und sind die jetzt gleich?

1409 Thomas: Ja, sie können gleich sein. In dem Fall sind sie gleich.

1410 I: Wann sind zwei Vektoren immer gleich? Welche Eigenschaften müssen gleich sein?

1411 Thomas: Länge, Richtung und Orientierung.

1412 I: Stimmt. Dann gleich zum nächsten Beispiel. Der Mittelpunkt.

1413 Manuel: Also M ist A plus B minus A mal null Komma fünf.

1414 I: Kannst du mir sagen, wie du darauf kommst?

1415 Manuel: Also, ich gehe vom Punkt A weg und gehe den Vektor AB entlang, aber halt nur bis zur  
1416 Hälfte und dann bin ich beim Mittelpunkt.

1417 I: Ok, was sagst du dazu Thomas?

1418 Thomas: A plus B durch zwei.

1419 I: Gut, was bedeuten die Formeln bei euch beiden? Es steht ja da, begründe. (...) Thomas,  
1420 du streichst deine Formel wieder durch. Warum?

1421 Thomas: Naja, ich weiß nicht ob das wirklich stimmt.

1422 I: Was hast du dir dabei gedacht, als du die Formel aufgeschrieben hast?

1423 Thomas: Naja, ich will die Strecke, also rechne ich  $A$  plus  $B$  und wegen dem Mittelpunkt rechne

1424 ich noch durch zwei.

1425 I: Ich kann dir sagen, deine Formel stimmt. Allerdings gefällt mir die Interpretation nicht.

1426 Was meinst du mit der Strecke?

1427 Thomas: Na das von  $A$  nach  $B$ .

1428 I: Du meinst also den Vektor.

1429 Thomas: Ja, den meine ich.

1430 I: Aber wir haben ja zuvor gesagt, dass man sich den Vektor zwischen zwei Punkten mit der

1431 Differenz ausrechnet, also  $B$  minus  $A$ .

1432 Thomas: Das habe ich mir ja dann auch gedacht und deshalb hab ich es durchgestrichen.

1433 I: Am einfachsten ist es so, wenn du hinschaust was der Manuel geschrieben hat. Das kann

1434 man jetzt nämlich umformen. Mach das mal bitte, Manuel!

1435 (Manuel formt um)

1436 I: Also kommen wir genau auf die Formel, die du eh schon aufgeschrieben hast. Das steckt

1437 also dahinter. Ok, jetzt habe ich noch vier kurze Beispiele und dann sind wir fertig.

1438 Manuel: Also wir müssen addieren.

1439 Thomas: Ja, das denke ich auch.

1440 (Beide zeichnen und rechnen.)

1441 I: Wie kommt ihr jetzt auf das Ergebnis?

1442 Manuel: Im Prinzip haben wir nur rechte Winkel also bekommen wir ein Rechteck.

1443 Thomas: Ja, mit dem Kräfteparallelogramm.

1444 I: Stimmt genau, weil ein Rechteck ist ja eine spezielle Form eines Parallelogramms.

1445 Thomas, wo wäre dann bei dir der Gesamtvektor?

1446 Thomas: Ja da wo die Resultierende ist.

1447 I: Super. Dann gleich das nächste Beispiel.

1448 (Beide rechnen und zeichnen.)

1449 Thomas: Ich kann nur die Formel. Das ist immer so in Mathe. Ich kann nie etwas beweisen.

1450 Manuel: Das ist jetzt nur blöd, weil das da drüben liegt. (Rechnet) Also ich würde das wieder so

1451 wie vorher machen, nämlich  $B$  ist der Punkt  $A$  plus  $AB$ -Pfeil.

1452 Thomas: Ja, ich muss wieder  $B$  minus  $A$  rechnen, weil wenn ich  $A$  minus  $B$  rechnen würde, dann

1453 wär die Orientierung anders.

1454 I: Ja, das stimmt, aber warum rechne ich überhaupt minus? Wie komme ich auf sieben und

1455 minus drei?

1456 Thomas: Ich finde das blöd, dass das jetzt da drüben liegt und nicht so wie vorher (Gemeint ist,

1457 dass der Vektor quadrantenübergreifend liegt.)

1458 Manuel: Ah, ich weiß es schon. Das war das mit dem Steigungsdreieck. Also ich muss auf die x-  
 1459 und die y-Koordinaten schauen und die einzeln subtrahieren. Dann kann ich den Vektor  
 1460 ablesen. (Erklärt anhand seiner Skizze sein Vorgehen.)

1461 Thomas: Ach, ja. So ist das gegangen.

1462 I: Ok, dann zum vorletzten Beispiel.

1463 Manuel: Also ich rechne mir den Vektor AB aus und rechne den dann von C weg.

1464 Thomas: Ich würde das so machen, BC kann ich mir ja ausrechnen. Und dann verschiebe ich das  
 1465 parallel und komme dann zu D (schreibt  $A + \overrightarrow{BC} = D$ ).

1466 (Während Thomas rechnet, wird Manuel separat befragt.)

1467 I: Manuel, ist jetzt AB-Pfeil gleich dem DC-Pfeil?

1468 Manuel: Ja, exakt, weil sie stimmen in allen Eigenschaften überein.

1469 I: Die da wären?

1470 Manuel: Orientierung, Richtung und Länge.

1471 I: Ok, Thomas, jetzt an dich die Frage. Sind in deinem Fall BC-Pfeil und AD-Pfeil gleich?

1472 Thomas: Ja, schon.

1473 I: Und warum?

1474 Thomas: Wegen der Richtung, der Länge, Betrag/

1475 I: Mit dem Betrag meinst du die Länge?

1476 Thomas: Ja. Und die Orientierung ist auch gleich.

1477 I: Gut, und jetzt noch das letzte Beispiel.

1478 Manuel: Also das soll genau dazwischen liegen. Ich nenne das BG und das ist dann K, also das  
 1479 Krankenaus und ich gehe Richtung der Gabelung, also muss ich da G minus K rechnen  
 1480 und weil ich ja nur bis zu Mitte gehe, muss ich das noch mal einhalb rechnen.

1481 I: Gut, was sagt der Thomas?

1482 Thomas: Ja, ich hätte das jetzt auch so gemacht, nur dass ich halt meine Formel verwenden würde.  
 1483 Also G plus K durch zwei. Aber das haben wir ja vorher eh besprochen, dass Manuel  
 1484 seine Formel, dasselbe wie meine ist. Also ich würde auch vom Krankenhaus weggehen  
 1485 und in die Richtung halt.

---

|                |                             |
|----------------|-----------------------------|
| Termin:        | Freitag, 24.05.2013         |
| Ort:           | BG/BRG Stockerau, Schulgang |
| Dauer:         | 39 Minuten                  |
| Interviewerin: | Christina Gahler            |

---

1486 I: Kann man AB-Pfeil und CD-Pfeil addieren?

1487 Peter: Ja.

1488 Armin: Ja.

1489 I: Warum kann ich die beiden Vektoren addieren?

1490 Peter: Weil wenn ich den Betrag der beiden Vektoren habe, kann ich sie addieren.

1491 I: Kannst du sie auch ohne den Betrag addieren?

1492 Peter: Nein.

1493 I: Warum nicht?

1494 Peter: Oja (.) keine Ahnung.

1495 I: Meinst du mit dem Betrag, dass du die Koordinaten der Vektoren kennen musst?

1496 Peter: Ja, genau. Wenn ich die habe, kann ich sie addieren. Wobei (..) man kann das auch ohne

1497 dem, also einfach AB-Pfeil und CD-Pfeil addieren.

1498 I: Ok, wie macht man das grafisch?

1499 Peter: Ohne den Längen?

1500 I: Meinst du damit die Koordinaten der Vektoren?

1501 Peter: Ja, das meine ich eh. Aber ohne denen kann ich das ja nicht.

1502 Armin: Also ich würde sie anhängen.

1503 I: Ok, wie würdest du das machen?

1504 Armin: Ich überlege noch, ob ich den Normalvektor davon nehmen soll.

1505 I: Wäre das dann noch derselbe Vektor?

1506 Armin: Nein.

1507 (Armin und Peter schweigen)

1508 I: Stellen wir uns einmal vor, dass der CD-Pfeil die Koordinaten eins und null hat. Was darf

1509 ich mit dem Vektor machen?

1510 Peter: Ich darf ihn irgendwo hin verschieben.

1511 I: Genau, ich darf den Vektor irgendwo hin verschieben, wobei sich der Vektor nicht

1512 ändert. Wo dürfte ich ihn noch hinschieben?

1513 Peter: Da dran (zeigt an den Anfangspunkt des AB-Pfeils).

1514 Armin: Aja, den Vektor darf ich nicht ändern, weil dann wäre ja die Richtung eine ganz andere.

1515 I: **Richtig.** Ok, nehmen wir an, wir haben das jetzt so gemacht, wie es der Peter

1516 vorgeschlagen hat und haben den CD-Pfeil da unten angehängt. Wo ist dann der AB-Pfeil

1517 plus CD-Pfeil? Wie addiert man die Vektoren?

1518 Peter: Erste Koordinate plus erste Koordinate und zweite plus zweite.

1519 I: Genau, das stimmt, wenn wir sie rechnerisch addieren. Mich würde jetzt aber

1520 interessieren, wie ich diese zwei Pfeile geometrisch addieren kann.

1521 (Armin und Peter schweigen.)

1522 I: Schaut einmal her. Was ist, wenn die Vektoren so liegen (CD-Pfeil liegt nun auf der x-

1523 Achse)?

1524 Armin: Man könnte den CD an den B Punkt anhängen. Und dann habe ich hier die Addition.

1525 I: Ja, woher weißt du jetzt, dass genau hier der addierte Vektor liegt?

1526 (Armin schweigt)

1527 I: Oder schau noch einmal auf die Zeichnung vom Peter. Der hat den CD-Pfeil unten an A

1528 angehängt, du an B. Ist das egal?

1529 Armin: Achso, wenn ich den auch unten anhänge, bekomme ich ein Parallelogramm.

1530 I: Genau, und wie sagt man bei Vektoren zu diesem Parallelogramm?

1531 (Armin und Peter schweigen.)

1532 I: Habt ihr im Physikunterricht schon gelernt, Kräfteparallelogramm.

1533 Peter: **Aja.**

1534 I: Das heißt, wenn ich mal dieses Parallelogramm habe, kann ich die Addition auch

1535 geometrisch darstellen. Also stimmt Armin seine Skizze. Gut, nächstes Beispiel.

1536 (Beide rechnen den Vektor mit der Formel  $B$  minus  $A$  richtig aus.)

1537 Armin: Also  $B$  minus  $A$  ist die Strecke da.

1538 I: Die Strecke?

1539 Armin: Ah, der Vektor.

1540 I: Genau. Warum rechnet man da jetzt  $B$  minus  $A$ ?

1541 Armin: Naja,  $A$  minus  $B$  würde in die andere Richtung zeigen.

1542 I: Das ist richtig, aber warum rechne ich überhaupt minus? Wie komme ich auf diese

1543 Formel  $B$  minus  $A$ ?

1544 Armin: Ja, man muss minus rechnen, weil  $B$  größer ist als  $A$ .

1545 (Interviewerin zeigt anhand eines Gegenbeispiels, dass diese Annahme nicht stimmt.)

1546 Armin: Aja, das geht nicht.

1547 (Armin und Peter schweigen.)

1548 I: Schaut mal auf meine Skizze. Das heißt wir haben die Punkte  $A$  und  $B$  und dazu können

1549 wir uns auch die Koordinaten einzeichnen. Die Koordinaten von  $AB$ -Pfeil kann ich mir

1550 dann ganz einfach ausrechnen, wie man das schon auf der Skizze sieht. Das heißt sieben

1551 minus fünf und dann komm ich auf den blau eingezeichneten zweier. Deshalb rechne ich

1552 minus. Und genauso funktioniert das mit den  $y$ -Koordinaten. Das heißt, wenn ihr auch die

1553 Koordinaten der Punkte einzeichnet und auch die Koordinaten des  $AB$ -Pfeils, dann kann

1554 man da leicht argumentieren, warum man minus rechnet. Alles klar?

1555 Peter: Ja.

1556 I: Gut, dann zum nächsten Beispiel.

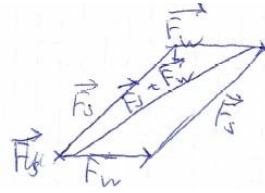
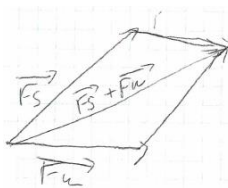
1557 Armin: Die Vektoren sind gleich, weil sie parallel sind, gleiche Größe haben/

1558 I: Was meinst du mit gleicher Größe?

1559 Peter: Na gleich lang.

1560 I: Ok, also wann sind zwei Vektoren gleich? Wenn sie die gleiche/

- 1561 Peter: Länge.
- 1562 Armin: Orientierung und Richtung haben.
- 1563 I: Super, dann gleich weiter zum Mittelpunkt einer Strecke.
- 1564 (Armin schreibt  $\frac{1}{2}(B - A)$  )
- 1565 Armin: Ah, da fehlt noch was. Das ist erst die Strecke.
- 1566 I: Die Strecke?
- 1567 Armin: Ja, also das ist der Vektor und man muss ihn an A noch dranhängen.
- 1568 I: Warum muss man ihn an A dranhängen?
- 1569 Peter: Das ist ja nur der halbe Vektor vom Ganzen. Und der könnte sonst irgendwo sein.
- 1570 I: **Stimmt.** Gut, ich habe da jetzt noch vier Beispiele und die schauen wir uns noch an.



- 1571 (Peter zeichnet , Armin zeichnet )
- 1572 I: Ihr habt das beide richtig gemacht, ihr habt beide ein Kräfteparallelogramm gezeichnet,
- 1573 wenn ihr aber jetzt an die Sinnhaftigkeit der Aufgabe denkt/ ein Körper fällt nach unten,
- 1574 also ein fallender Körper, das kann bei euch beiden nicht stimmen.
- 1575 (Beide bessern ihre Skizze aus.)
- 1576 I: Ja, genau, jetzt passt es. Gut, dann schaut euch gleich das nächste Beispiel an.
- 1577 Armin: Das ist wieder B minus A.
- 1578 (Beide berechnen den Verbindungsvektor richtig.)
- 1579 I: Ihr habt beide richtig gerechnet. Allerdings würde mich wieder interessieren, warum ich
- 1580 mit dieser Formel rechne.
- 1581 (Beide schweigen.)
- 1582 I: Wisst ihr es noch? (...) Ok, dann schaut noch einmal auf diese Skizze. (Die
- 1583 Vorgehensweise wird noch einmal erklärt.) Gut, dann das nächste Beispiel. (...) Ok, ich
- 1584 fängt beide mit einer Skizze an.
- 1585 (Peter rechnet  $D = C - \overrightarrow{AB}$ , Armin rechnet  $D = A + \overrightarrow{BC}$ )
- 1586 I: Jetzt frage ich euch, ist der Vektor BC derselbe Vektor wie der Vektor AD?
- 1587 Peter: Ja, das ist derselbe.
- 1588 Armin: Ja.
- 1589 I: Ok, und warum ist es derselbe?
- 1590 Peter: Richtung, Länge und Orientierung.
- 1591 I: Genau. Und dann das letzte Beispiel noch.
- 1592 Peter: Ich würde K plus ein halbes mal KG-Pfeil rechnen, also ich gehe vom Krankenhaus weg.
- 1593 I: Gut, Armin, wie gehst du vor?

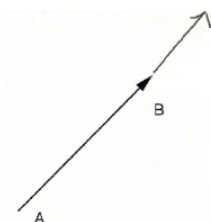
- 1594 (Armin schreibt zuerst  $M = \frac{1}{2}(A + B)$ , streicht diese Formel anschließend durch und schreibt dann
- 1595  $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}) + A$ )
- 1596 I: Wieso hast du die erste Formel durchgestrichen?
- 1597 Armin: Weil das andere für mich logischer ist.
- 1598 I: Ok, was ist bei dir A? von wo gehst du weg?
- 1599 Armin: Ich würde von der Gabelung, von G, weggehen.

---

|                |                             |
|----------------|-----------------------------|
| Termin:        | Mittwoch, 29.05.2013        |
| Ort:           | BG/BRG Stockerau, Schulgang |
| Dauer:         | 42 Minuten                  |
| Interviewerin: | Christina Gahler            |

---

- 1600 I: Kann man AB-Pfeil und CD-Pfeil addieren?
- 1601 Erich: Ja, man kann sie addieren, wenn man weiß wie lang sie sind.
- 1602 I: Das heißt, du bräuchtest unbedingt Koordinaten, um die Pfeile zu addieren?
- 1603 Erich: Ja.
- 1604 I: Könntest du sie grafisch auch addieren?
- 1605 Erich: Ja, schon.
- 1606 I: Clemens, was glaubst du?
- 1607 Clemens: Ja, ich glaube auch. Weil man kann sie bestimmt irgendwie setzten, dass sie dann eine
- 1608 Größe ergeben.
- 1609 I: Wie meinst du das genau?
- 1610 Clemens: Ich würde den Pfeil einfach so raufsetzen, damit sich dann eine Strecke ergibt.



- 1611
- 1612 Erich: Ich würde das auch so machen, weil wenn man die Länge (gemeint sind die Koordinaten)
- 1613 nicht weiß, kann man es nicht anders machen.
- 1614 Clemens: Und das Addierte ist dann das Ganze.
- 1615 I: Ok. Wie wird ein Vektor überhaupt definiert? Welche Eigenschaften hat ein Vektor?
- 1616 Erich: Durch die Koordinaten.
- 1617 I: Und was geben die Koordinaten an?
- 1618 Erich: Die Richtung.

1619 I: Ja, und was sonst noch?

1620 (Erich und Clemens schweigen.)

1621 I: Der Vektor ist durch die Richtung, die **Länge** und die **Orientierung** definiert. Und was

1622 stimmt bei eurem Vektor mit dem Vektor zuvor nicht mehr überein?

1623 Erich: Die Richtung.

1624 I: Ja, genau, ihr habt die Richtung verändert. Darf man das machen?

1625 Clemens: Wahrscheinlich nicht.

1626 I: Genau. Schaut euch nochmal die Pfeile an und schreibt auf, welche Koordinaten die

1627 Pfeile in etwa haben.

1628 (Beide schreiben.)

1629 I: Jetzt seht ihr, dass der CD andere Koordinaten hat, als der Vektor, den ihr angehängt

1630 habt.

1631 Erich: Das stimmt allerdings.

1632 I: Und ihr habt ja am Anfang gesagt, wenn ihr Koordinaten habt, dann könnt ihr die

1633 Vektoren auch addieren. Clemens, was würde da bei dir rauskommen.

1634 Clemens: Fünf und vier.

1635 I: Ok, und was kommt heraus, wenn du die beiden Vektoren addierst, die du eingezeichnet

1636 hast?

1637 Clemens: Fünf und Fünf.

1638 I: Genau, also kann da was nicht stimmen.

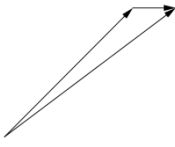
1639 Erich: Also dürfen wir auf keinen Fall die Richtung verändern.

1640 I: Richtig. Wie schaffe ich das jetzt, dass die Richtung gleich bleibt?

1641 Clemens: Ich kann ihn einfach da oben dran hängen und dann bleibt die Richtung gleich. Also habe

1642 ich noch denselben Vektor.

1643 I: Super, genau. Und was passiert dann, wenn ich die beiden Vektoren grafisch addiere?

1644 Erich: Dann schaut das so aus (zeichnet  ).

1645 I: Ja, warum ist der genau hier?

1646 Erich: Weil da ein Knick drinnen ist.

1647 I: Das ist aber leider keine Begründung. Sagt euch der Begriff Kräfteparallelogramm etwas?

1648 Clemens: Habe ich schon einmal gehört, ich weiß aber nicht, was das ist.

1649 I: Ok, dürfte man den Pfeil unten auch anhängen?

1650 Clemens: Nein, weil dann ändert man ja die Richtung (.) oja, das müsste doch gehen.

1651 Erich: Ich bin mir nicht so sicher.

1652 I: Würde sich der Vektor ändern, wenn ich ihn unten anhänge?

1653 Erich: Naja (..) eigentlich nicht.

1654 Clemens: Es ist egal, ob oben oder unten.

1655 I: Genau, es ist egal. Und wenn man das mit dem anderen Pfeil auch macht, was ergibt das  
1656 dann?

1657 Erich: (Zeichnet) Ah, das bildet dann ein Parallelogramm oder so.

1658 I: Ja, genau. Und dieses Parallelogramm ist dann auch die Begründung dafür, dass die  
1659 Resultierende, also diese Diagonale, die Addition der beiden Pfeile ist. Gut, dann zum  
1660 nächsten Beispiel, zum Verbindungsvektor.

1661 Clemens: Also einmal alles ausrechnen mit B minus A.  
1662 (Beide berechnen den Vektor richtig.)

1663 I: Warum rechnet man B minus A?

1664 Erich: Weil der Vektor in die Richtung geht, glaube ich (Zeigt am Vektor entlang). Naja (..) ich  
1665 muss B minus A, weil B höher ist.  
1666 (Interviewerin zeigt anhand eines Gegenbeispiels, dass diese Annahme nicht stimmt.)

1667 Clemens: Ich habe mir einfach die Formel so gemerkt.

1668 I: Ok, habt ihr keine Begründung dafür, warum man B minus A rechnet?

1669 Erich: Nein.  
1670 (Anhand der mitgebrachten Skizze wird das Vorgehen erklärt.)

1671 I: Zur Gleichheit von Vektoren. Gilt AB-Pfeil ist gleich CD-Pfeil?

1672 Erich: Ja.

1673 I: Warum?

1674 Erich: Weil es genau der gleiche Vektor ist mit genau der gleichen Richtung //Orientierung und  
1675 Länge.//

1676 Clemens: //Orientierung, Richtung und Länge.//

1677 I: Sehr gut. Nächstes Beispiel.

1678 Erich: Die Formel weiß ich, A plus B mal null Komma fünf.

1679 Clemens: Ich würde das auch so schreiben.

1680 I: Warum?

1681 Clemens: Ja, weil sich das dann gut ausgeht und weil das Halbe/

1682 Erich: Ja, weil das ist jetzt zum Beispiel der Vektor (Zeigt in seiner Skizze auf den Vektor AB.)  
1683 und dann ist da der Mittelpunkt.

1684 I: Aber warum rechnest du dann A plus B, wenn du den Vektor AB damit meinst?

1685 Erich: Aja, dann B minus A mal null Komma fünf.

1686 I: Das heißt du nimmst den ganzen Vektor und davon dann die Hälfte.

1687 Erich: Ja.

1688 I: Wenn du das so machst, dann/

1689 Erich: Ah, ich weiß es schon. Da haben wir irgendwas hergeleitet und herausgekommen ist dann  
1690 A plus B mal null Komma fünf.

1691 I: Deine Formel ist auch richtig. Mich würde aber interessieren, wie man auf diese Formel  
1692 kommt? Was steckt dahinter?

1693 (Schweigen.)

1694 I: Dein Ansatz war ja gar nicht schlecht. Aber was brauche ich unbedingt, um zu einem  
1695 Punkt zu kommen?

1696 (Schweigen.)

1697 I: Also einerseits einen Vektor, den hast du ja eh schon aufgeschrieben und andererseits ein  
1698 Punkt von dem ich weggehe.

1699 Clemens: Einen Startpunkt.

1700 Erich: Also  $B$  minus  $B$  minus  $A$  mal null Komma fünf (Erich schreibt  $M = B - (B - A) * 0.5$ )

1701 I: Ja, so kann man es auch machen, ist aber meiner Meinung nach kompliziert. Was wäre,  
1702 wenn du von  $A$  weggehen würdest?

1703 Erich: Aso, dann hätte ich  $A$  plus den Rest halt.

1704 I: Genau, das stimmt. Jetzt würde ich aber noch gerne wissen, wie man auf die Formel  
1705 kommt, die ihr am Anfang aufgeschrieben habt, weil die war ja richtig. Was steckt  
1706 dahinter?

1707 Clemens: Die Hälfte, null Komma fünf von einer Strecke und außerdem noch  $A$  und  $B$  damit man  
1708 die Länge hat vom Vektor.

1709 I: Naja, nicht wirklich. Schaut einmal auf meiner Herleitung. (Vorgehensweise wird  
1710 erklärt.) Ok, wir sind mit diesen Beispielen fertig. Jetzt kommen noch vier zur  
1711 Überprüfung. Liest euch die mal durch.

1712 Erich: Ich würde einmal ein Koordinatensystem zeichnen. Und der Körper fliegt runter, aber  
1713 auch in die Richtung (Zeigt nach Westen.), also habe ich wieder ein Parallelogramm.

1714 I: Das stimmt. Das heißt, du hast das jetzt sofort grafisch gelöst und nicht rechnerisch.  
1715 Eigentlich so, wie du es zuerst gar nicht wolltest.

1716 Erich: Ja, genau.

1717 I: Clemens, was sagst du dazu. Hättest du das genauso gemacht?

1718 Clemens: Ja, ich hätte das auch so gemacht.

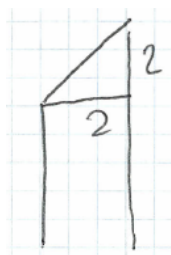
1719 I: Ok, dann gleich zum zweiten Beispiel.

1720 Clemens: Ausrechnen.

1721 (Beide berechnen den Vektor richtig.)

1722 I: Richtig. Meine Frage lautet wieder, wie komme ich auf diese Formel? Warum rechnet  
1723 man  $B$  minus  $A$ ?

1724



1725 Clemens: Das war das mit zwei zwei (Zeichnet ).

1726 I: Ich hätte aber gerne eine Begründung für dieses Beispiel.

1727 (Clemens schweigt.)

1728 I: Erich, hast du eine Idee dazu?

1729 (Erich zeichnet ein Koordinatensystem, bei dem die Koordinaten von A und B eingezeichnet sind. Er  
1730 schweigt allerdings, bei der Frage nach der Begründung, wie er auf den Ergebnisvektor gekommen  
1731 sei. Anschließend wird die Vorgehensweise noch einmal erklärt.)

1732 I: Drittes Beispiel, es geht um ein Parallelogramm.

1733 (Erich zeichnet während Clemens unkonzentriert wirkt.)

1734 I: Wie bekomme ich den fehlenden Eckpunkt?

1735 Clemens: Man muss irgendwas zwei Mal rechnen.

1736 I: Wie kommst du darauf?

1737 Clemens: Ich weiß es nicht.

1738 Erich: Ich würde das (Gemeint ist der Vektor BC.) parallel verschieben.

1739 Clemens: Genau, parallel verschieben, so ist das gegangen.

1740 I: Würdet ihr das rechnerisch lösen oder nur grafisch?

1741 Erich: Grafisch, so ist das leichter. Da muss man das einfach nur ablesen.

1742 I: Das geht bei diesem Beispiel, weil wir das gut zeichnen können, allerdings steht in der  
1743 Angabe **berechne**.

1744 Erich: Es kommt raus sechs und minus zwei.

1745 I: Das ist richtig, aber ich möchte auch wissen, wie man das rechnerisch löst. Was hast du  
1746 im Prinzip gerade gemacht?

1747 (Schweigen.)

1748 I: Wenn ihr euch an den Mittelpunkt von vorhin erinnert. Was brauche ich, um zu einem  
1749 Punkt zu gelangen?

1750 Clemens: Einen Startpunkt.

1751 Erich: Ich würde von A weggehen.

1752 I: Richtig, ich muss unbedingt von wo weggehen. Und was mach ich dann?

1753 (Schweigen.)

1754 I: Ihr habt zuvor gesagt, dass ihr parallel verschiebt. Das heißt, was muss man noch dazu  
1755 zählen?

1756 (Schweigen.)

1757 I: Also wenn ihr von A weggeht, müsst ihr noch den Vektor BC dazu zählen, um zu D zu  
 1758 gelangen. Könnt ihr das nachvollziehen?

1759 Erich: Ja.

1760 I: Ok, und jetzt noch eine andere Frage. Wenn ich den Vektor BC habe, ist das derselbe wie  
 1761 der AD?

1762 Erich: Von der Richtung und der Orientierung, ja. Er ist halt weiter drüben. Aber von der Länge  
 1763 auch.

1764 I: Heißt das jetzt, dass die Vektoren gleich sind?

1765 Erich: Ja.

1766 Clemens: Ja, die sind gleich.

1767 I: Gut, dann zum letzten Beispiel für heute.

1768 Erich: Da muss ich K plus G mal ein Halbes (Schreibt  $(K + G) * 0.5$  ).

1769 Clemens: Ich würde auch die Formel nehmen (Vergisst allerdings anfangs die Klammern und  
 1770 schreibt  $K + G * 0.5$ )

1771 I: Wie kommt man auf die Formel?

1772 Erich: Bei dem Beispiel braucht man das ja nicht, da muss man einfach nur rechnen.

1773 I: Das stimmt, ich frage aber trotzdem nach und will dadurch wissen, ob ihr das verstanden  
 1774 habt.

1775 Erich: Also ich muss G minus K.

1776 I: Dann erhalte ich was?

1777 Erich: Die Strecke KG.

1778 I: **Naja**, den Vektor KG.

1779 Erich: Ja, ok. Dann muss ich KG durch zwei, oder mal null Komma fünf. Dann ist der  
 1780 Mittelpunkt KG mal null Komma fünf.

1781 I: Wenn du diesen Vektor hast, kannst du den aber irgendwo hingeben (Dies wird mit einer  
 1782 Skizze veranschaulicht.). Woher soll ich dann wissen, dass ich gerade bei der Schule  
 1783 herauskomme?

1784 Erich: Ich muss noch das K dazu rechnen.

1785 I: Ja, genau.

---

|                |                             |
|----------------|-----------------------------|
| Termin:        | Freitag, 29.05.2013         |
| Ort:           | BG/BRG Stockerau, Schulgang |
| Dauer:         | 39 Minuten                  |
| Interviewerin: | Christina Gahler            |

---

1786 I: Kann man die zwei Vektoren addieren?

1787 Dominik: Nein.

1788 Markus: Ich glaube auch nicht.

1789 I: Warum glaubt ihr das?

1790 Dominik: Weil der eine ist waagrecht und der andere geht so schräg hinauf.

1791 I: Hilft es euch weiter, wenn der eine Vektor auf der x-Achse liegt? (Zeigt Therapiebeispiel  
1792 am Laptop.) Kann man dann die beiden Vektoren addieren?

1793 (Schweigen.)

1794 I: Oder ist es genau dasselbe?

1795 Dominik: Ja, ist dasselbe.

1796 I: Warum sollte man zwei Vektoren nicht miteinander addieren können?

1797 Dominik: Wenn sie eine andere Richtung haben, so wie da.

1798 Markus: Ich glaube, man kann sie subtrahieren.

1799 I: Also du sagst, man kann sie subtrahieren, aber nicht addieren.

1800 Markus: Naja, dann wird man sie addieren auch können.

1801 I: Gut, Dominik ist noch immer nicht überzeugt. Dann bitte ich dich, dass du einmal  
1802 schätzt, welche Koordinaten die Vektoren ungefähr haben.

1803 Dominik: Naja, der eine wird sein drei drei und der andere eins null.

1804 I: Ok, wenn du das jetzt so aufschreibst, kannst du die Vektoren dann addieren?

1805 Dominik: Ja. Dann würde vier und drei herauskommen.

1806 I: Also, wenn du konkrete Zahlenwerte dabei stehen hast, kannst du sie addieren?

1807 Dominik: Ja, genau.

1808 Markus: Ich glaube das auch, wenn das so da steht.

1809 I: Gebt ihr mir recht, wenn ich sage, dass die Vektoren, die ihr gerade geschätzt habt, genau  
1810 dasselbe sind, wie die Pfeile, die ihr hier seht?

1811 Markus: Ja, schon.

1812 I: Dann komme ich noch mal auf meine Frage zurück. Warum sollte man die nicht addieren  
1813 können?

1814 Markus: Weil es irgendwie verwirrend aussieht.

1815 I: Gut, für dich ist das verwirrend. Wir haben aber jetzt herausgefunden, dass man die  
1816 Vektoren addieren kann. Jetzt bleibt nur mehr die Frage, wie man sie grafisch addiert.

1817 Dominik: Kann man das nicht mit einem Parallelogramm machen?

1818 I: Ja, genau. Wie funktioniert das dann?

1819 Dominik: Ich nehme den einen Pfeil und hänge ihn an den anderen dran. Dann spiegelt man das und  
1820 die Diagonale ist dann das Addierte.

1821 Markus: Ach ja, da muss man parallel verschieben.

1822 I: Super. Und ist es egal, ob ich den Pfeil unten oder oben an den anderen anhänge?

1823 Markus: Ja, ich glaube schon, dass das egal ist.

1824 I: Ja, stimmt. Dann zum nächsten Beispiel.

1825 Dominik: Da muss ich B minus A rechnen.

1826 (Beide berechnen das Ergebnis richtig.)

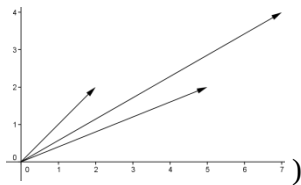
1827 I: So, jetzt frage ich mich allerdings, warum rechne ich B minus A?

1828 Dominik: Wegen der Orientierung.

1829 I: Macht zuerst mal eine Skizze, die ist ja sowieso auch verlangt.

1830 (Während Dominik die Punkte und den dazugehörigen Verbindungsvektor einzeichnet, zeichnet

1831 Markus nicht nur die Punkte, sondern auch den Verbindungsvektor als Ortsvektoren ein:



1832

1833 I: Markus, du würdest also den Vektor zwei zwei als Ortsvektor einzeichnen.

1834 Markus: Ja.

1835 I: Wenn wir uns vorstellen würden, das folgendes Beispiel gegeben wäre (Zeigt

1836 vorbereitetes Beispiel Markus.), wie würdest du dann vorgehen?

1837 Markus: Naja, ich müsste mir den Punkt einzeichnen und dann zwei nach Osten und zwei nach

1838 Norden gehen, dass ich zum Schatz komme.

1839 I: Ja, genau. Was ist jetzt der Unterschied zu deiner vorherigen Version?

1840 Markus: Dass ich jetzt keinen Ortsvektor mehr habe.

1841 I: Richtig, das heißt, sobald du Punkte gegeben hast, solltest du den Verbindungsvektor

1842 nicht als Ortsvektor einzeichnen. Gut, meine Frage ist jetzt noch, warum rechne ich

1843 überhaupt B minus A?

1844 Dominik: Das weiß ich nicht.

1845 Markus: Also **warum** man das so rechnet, weiß ich auch nicht.

1846 (Die Begründung wird anhand des vorbereiteten Beispiels erklärt.)

1847 I: Dann zum nächsten Beispiel. Gilt AB-Pfeil ist gleich CD-Pfeil?

1848 Dominik: Ja.

1849 Markus: Ja.

1850 I: Warum?

1851 Markus: Weil sie beide gleich lang sind und die gleiche Orientierung haben.

1852 I: Was fehlt da noch?

1853 Markus: Na, dass sie gleich liegen (...) die Richtung.

1854 I: Dominik, was sagst du dazu?

1855 Dominik: Sie sind gleich, weil sie halt gleich ausschauen.

1856 I: Was macht einen Vektor aus? Welche Eigenschaften hat ein Vektor?

1857 (Schweigen.)

1858 I: Ein Vektor hat immer eine Länge, eine Orientierung und eine Richtung und wenn das bei  
1859 beiden Vektoren übereinstimmt, dann sind sie gleich. Gut, nächstes Beispiel, der  
1860 Mittelpunkt einer Strecke.

1861 (Beide schreiben die Formel  $M = \frac{1}{2} * (A + B)$  auf.)

1862 I: Was steckt hinter der Formel? Wie komme ich auf die Formel?

1863 Dominik: Der Mittelpunkt liegt ja in der Hälfte.

1864 I: Ja, das stimmt, deshalb begründest du das ein Halb. Was bedeutet das A plus B?

1865 Dominik: Ich weiß es nicht.

1866 I: Warum rechne ich plus?

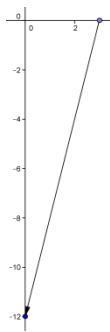
1867 Markus: Da rechnet man sich nicht den Vektor aus, sondern die Koordinaten (..) also man will ja  
1868 den Punkt.

1869 I: Wir wollen keinen Pfeil, das ist richtig, aber so kann man das trotzdem nicht sagen.  
1870 Überlegt noch ein Mal, was bedeutet diese Formel?

1871 (Schweigen.)

1872 I: Was wir machen könnten, wäre, dass wir vom Punkt A weggehen und zwar in Richtung  
1873 AB-Pfeil. Wir wollen aber nur bis zur Mitte, also brauchen wir nur den halben Pfeil. Das  
1874 heißt, ich bekomme dann A plus AB-Pfeil halbe und bin beim Mittelpunkt. Aus dem kann  
1875 ich mir dann eure Formel herleiten. Schaut mal da her, da seht ihr das (Die Herleitung  
1876 wird erklärt.) So, dann kommen wir noch zu den Überprüfungsbeispielen. Ihr könnt schon  
1877 mit dem ersten beginnen.

1878 (Der Gesamtvektor wird von beiden richtig berechnet, allerdings falsch gezeichnet, nämlich



1879 folgendermaßen: )

1880 I: Schaut euch noch einmal die Koordinaten von eurem Vektor an. Stimmen die mit der  
1881 Skizze überein?

1882 Dominik: Ah, das ist verkehrt.

1883 I: Genau. Leichter hättet ihr euch vielleicht auch getan, wenn ihr das Parallelogramm vom  
1884 ersten Beispiel eingezeichnet hättet. Dann zum Nächsten.

1885 Markus: Also wieder B minus A.

1886 I: Ja, ihr habt das beide richtig berechnet. Warum rechne ich minus?

1887 Markus: Wegen dem Steigungsdreieck. Also wenn ich da A und da B habe/

1888 Dominik: Dann habe ich da oben sieben, weil ich ja vier minus minus drei rechnen muss und da  
1889 habe ich minus drei, da gehe ich ja drei runter, wegen eins minus vier.  
1890 I: Genau, das stimmt. Dann zum dritten Beispiel.  
1891 Dominik: Ich würde den Vektor BC parallel verschieben, ja, und dann AB auch.  
1892 I: Stimmt. Das heißt, du würdest das jetzt grafisch machen, bevor du es rechnerisch löst.  
1893 Dominik: Ja.  
1894 I: Markus, wie gehst du vor?  
1895 Markus: Ich würde das eher rechnerisch machen.  
1896 Dominik: Man kann sich den Vektor BC ausrechnen und bei A anhängen.  
1897 (Somit kommen beide auf die Formel  $D = A + \overrightarrow{BC}$ )  
1898 I: Ok, ihr verwendet also den Vektor BC. Ist dann der Vektor BC derselbe wie der Vektor  
1899 AD?  
1900 Dominik: Ja, glaube ich schon.  
1901 Markus: Ja, weil es wieder die gleiche Orientierung, Richtung und Länge ist.  
1902 I: Stimmt genau. So, jetzt noch das letzte Beispiel. Wie würdet ihr das machen?  
1903 (Beide verwenden die Formel für den Mittelpunkt einer Strecke.)  
1904 Dominik: Die Lisa ist beim Krankenhaus und muss zur Gabelung gehen, aber bei der Hälfte stehen  
1905 bleiben. (Dominik schreibt  $M = \frac{1}{2}(K + G)$ .)  
1906 Markus: Ja und ich würde es umgekehrt machen, also von der Gabelung weggehen. (Markus  
1907 schreibt  $M = \frac{1}{2}(G + K)$ .)

---

|                |                             |
|----------------|-----------------------------|
| Termin:        | Freitag, 29.05.2013         |
| Ort:           | BG/BRG Stockerau, Schulgang |
| Dauer:         | 30 Minuten                  |
| Interviewerin: | Christina Gahler            |

---

1908 I: Die Frage zu Beginn ist, kann ich AB-Pfeil und CD-Pfeil addieren.  
1909 Lara: Ja.  
1910 Veronika: (Zögert.) Ja.  
1911 I: Wie kann man sie addieren?  
1912 Lara: Man legt das CD an den A Punkt an und dann zeichnet man so Parallele und dann ist die  
1913 Diagonale das Ergebnis von der Addition. Oder man schreibt die Koordinaten auf und  
1914 dann muss man die zwei ersten Koordinaten addieren und die zweiten Koordinaten.

1915 I: OK, das hört sich schon gut an. Andere Frage, darf ich den CD-Pfeil nur oben oder nur  
 1916 unten anhängen, oder ist es egal, wo ich ihn anhänge?

1917 Lara: Ich glaube, nur unten.

1918 I: Veronika, was meinst du?

1919 Veronika: Ich weiß es nicht.

1920 I: Was vermutest du?

1921 Veronika: Ich glaube, auch nur unten.

1922 Lara: Sonst wäre es keine Addition mehr, sondern eine Subtraktion.

1923 I: Zeichnet einmal dieses Parallelogramm auf, von dem ihr gesprochen habt.

1924 Veronika: Achso, das ist eh egal wo ich den dranhänge.

1925 Lara: Aja, stimmt, dann geht beides.

1926 I: Genau, es ist ganz egal und das seht ihr, sobald ihr das Kräfteparallelogramm zeichnet.  
 1927 So, dann zum zweiten Beispiel. (..) Jetzt ist der Verbindungsvektor gesucht.

1928 (Beide rechnen. Lara schreibt folgendes auf:  $B - A = (7|4) - (5|2) = (2|2)$  )

1929 I: Lara, rechnest du immer so, dass du das in zeilenschreibweise aufschreibst?

1930 Lara: Ja, ich habe das immer so gemacht. Das ist für mich leichter.

1931 I: Ok, Veronika bekommt auch dasselbe Ergebnis heraus, das stimmt auch. Warum rechnet  
 1932 man aber überhaupt B minus A?

1933 Lara: Ich habe den Punkt A und den Punkt B und ich will die Strecke.

1934 I: Unter Strecke verstehst du den Vektor?

1935 Lara: Ja. Also und wenn ich die zwei Punkte habe, dann/ das ist schwer das in Worten  
 1936 auszudrücken.

1937 I: Vielleicht versuchst du es einfach zu zeichnen. Oder Veronika, hast du eine Idee?

1938 (Veronika schweigt.)

1939 Lara: Naja, ich habe B minus A deswegen, weil ich habe so das Dreieck. Und da gehe ich zwei  
 1940 rüber und zwei rauf. Also ich muss bei A, also von den sieben, fünf abziehen, um zu dem  
 1941 ersten zweier zu kommen (Zeigt dies anhand ihrer Skizze.). Und bei der zweiten  
 1942 Koordinate mache ich das ja dann auch so.

1943 I: Ok, Veronika, was sagst du dazu?

1944 Veronika: Ja, schaut richtig aus.

1945 I: Genau, es ist auch richtig. Dann zum nächsten Beispiel. Gilt AB-Pfeil ist gleich CD-  
 1946 Pfeil?

1947 Lara: Naja, sie haben dieselbe Richtung und dieselbe Länge, aber die Punkte heißen halt  
 1948 anders.

1949 I: Ja, wobei Punkte sind da ja gar nicht eingezeichnet.

1950 Lara: Achso, naja, wenn sie den gleichen Betrag haben, dieselbe Richtung und die gleiche  
 1951 Orientierung/

1952 I: Was sagt uns das jetzt?

1953 Veronika: Dass sie gleich sind.

1954 I: Lara, was glaubst du?

1955 Lara: Ja, also es kommt darauf an, ob sie genau identisch sind.

1956 I: Was heißt für dich identisch?

1957 Lara: Wenn sie übereinander liegen würden, wären sie gleich.

1958 I: Ok, schau einmal auf das Beispiel am Laptop. Da siehst du zwei Vektoren, die jeweils die

1959 Koordinaten zwei und zwei haben. Lara, zieh mal bitte den einen Vektor über den

1960 anderen. (...) Hat sich jetzt was verändert?

1961 Lara: Nein, es ist immer noch derselbe Vektor. Also sind sie gleich, ok.

1962 I: Genau, es sind halt verschiedene Repräsentanten des Vektors, aber der Vektor an sich ist

1963 der gleiche. Gut, dann kommen wir zum Mittelpunkt.

1964 (Beide schreiben eine Formel auf. Lara:  $A + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} = A + \frac{B-A}{2} = A + (B - A) * \frac{1}{2}$ , Veronika:  $M = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ )

1965 I: Ok, schauen wir uns zuerst die Formel von Veronika an. Du schreibst M ist gleich AB-

1966 Pfeil halbe.

1967 Veronika: Ja, ich würde zuerst den AB-Pfeil ausrechnen und dann muss ich ja nur halb so weit

1968 gehen bis ich beim Mittelpunkt bin.

1969 I: Ok, schau einmal auf meine Zeichnung. Du halbieerst also deinen Pfeil, der schaut dann

1970 zirka so aus, und erhältst dadurch auch wieder einen **Pfeil** und keinen Punkt, das ist ganz

1971 wichtig. Und dieser Pfeil könnte irgendwo liegen. Weil wie wir vorher gesagt haben, sind

1972 dies alle gleich. Also der könnte da, da oder da liegen. Was muss ich machen, dass ich

1973 wirklich zum Mittelpunkt hinkomme?

1974 Lara: Also ich würde mir auch AB-Pfeil ausrechnen, damit ich weiß, in welche Richtung ich

1975 gehen muss. Und dann nehme ich davon die Hälfte und gehe vom Punkt A weg.

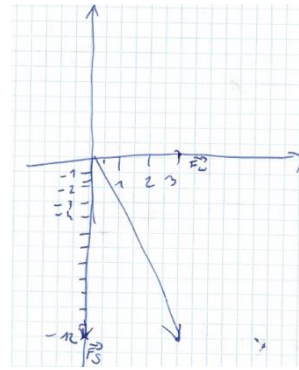
1976 I: Genau, das ist ganz entscheidend, dass du vom Punkt A weggehen musst, Veronika. Das

1977 heißt, um zu einem Punkt zu gelangen, musst du auch von einem Punkt weggehen.

1978 Veronika: Also da noch A plus (Ergänzt ihre Formel.).

1979 I: Ganz genau. So, dann kommen wir zu den letzten vier Beispielen. Ihr könnt schon

1980 beginnen.



1981 (Beide fertigen eine Skizze an. Veronika: , Lara:



1982 )

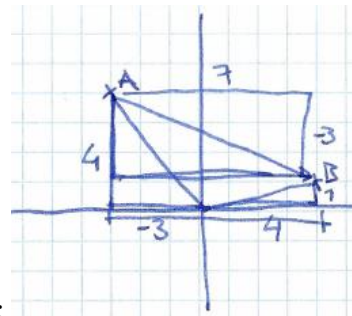
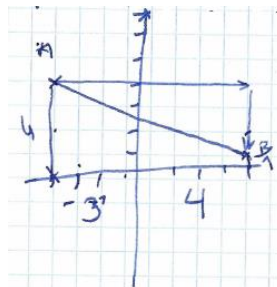
1983 I: Wie kommt ihr beiden jetzt auf die Addition?

1984 Veronika: Also wieder mit dem Kräfteparallelogramm. Ich habe das zwar nicht eingezeichnet, aber  
1985 das hat eh alles einen rechten Winkel.

1986 Lara: Ja, ich habe es mir auch nur dazu gedacht.

1987 I: Gut, dann gleich das zweite Beispiel.

1988 (Die Vektoren werden von beiden richtig berechnet. Durch ihre Zeichnungen begründen sie ihr



1989 Vorgehen. Veronika: , Lara: )

1990 Lara: Also ich habe hier die Koordinaten von den Punkten eingezeichnet und dass ich dann auf  
1991 den Vektor AB komme, muss ich zuerst vier minus minus drei rechnen und dann eins  
1992 minus vier.

1993 Veronika: Ja, ich habe das auch so, weil beim Vektor AB muss ich ja dann sieben hinüber und drei  
1994 hinunter und deswegen habe ich da minus drei, weil ich hinunter muss.

1995 I: Ja, ok. Dann könnt ihr euch schon das dritte Beispiel anschauen.

1996 (Beide skizzieren und rechnen.)

1997 I: Also wie kommt man auf den Eckpunkt D?

1998 Lara: Ich kann entweder die Parallele AB zu C dazu geben, oder AC zum Punkt B dazu.

1999 I: Ja, ok, du schlägst zwei verschiedene Varianten vor. Veronika, wie gehst du vor?

2000 Veronika: Bei C muss ich minus AB-Pfeil rechnen, dass ich zu D komme.

2001 I: Ja, das stimmt auch. Ist AB-Pfeil gleich CD-Pfeil?

2002 Veronika: Ja, schon.

2003 Lara: Ja, weil eben Länge, Orientierung und Richtung gleich sind.

2004 I: Stimmt genau. Dann zum letzten Beispiel.

2005 Veronika: Also den Mittelpunkt ausrechnen.

2006 (Lara schreibt  $M = \frac{K+G}{2}$ , während Veronika  $M = K + \frac{\overrightarrow{KG}}{2}$  aufschreibt.)

2007 Lara: Also im Prinzip ist das eh so wie zuvor, nur habe ich jetzt gleich die Formel

2008 aufgeschrieben. Aber begründen würde ich es so wie vorher, das ist ja dasselbe.

2009 I: Ja, gut, Veronika, wie würdest du deine Formel begründen?

2010 Veronika: Ich gehe vom Krankenhaus weg, also das ist mein Start, und dann gehe ich in Richtung

2011 der Gabelung, aber nur bis zur Hälfte.

---

|                |                             |
|----------------|-----------------------------|
| Termin:        | Dienstag, 04.06.2013        |
| Ort:           | BG/BRG Stockerau, Schulgang |
| Dauer:         | 30 Minuten                  |
| Interviewerin: | Christina Gahler            |

---

2012 I: Kann man AB-Pfeil und CD-Pfeil addieren? Was glaubt ihr?

2013 Ben: Ja.

2014 Max: Schon.

2015 I: Wie würdet ihr das machen?

2016 Ben: Den Betrag vom Vektor.

2017 I: Wenn du zwei Vektoren addierst, kommt was heraus?

2018 Max: Wieder ein Vektor.

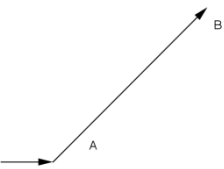
2019 I: Genau.

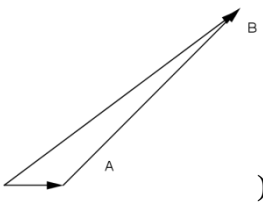
2020 Max: Man muss den einen anhängen und dann ist da die Addition.

2021 I: Ja, das stimmt. Darf man den Vektor auch unten anhängen? (Gemeint ist der

2022 Anfangspunkt von AB-Pfeil.)

2023 Ben: Nein, das glaube ich nicht.

2024 Max: Naja, man kann ihn so schon anhängen. (Zeichnet ) Und dann ist **da**

2025 die Addition. (Vervollständigt )

2026 I: Ist da jetzt ein Unterschied zu deiner ersten Variante?

2027 Max: Nein, eigentlich nicht. Also kann man ihn unten auch anhängen.

2028 I: Ganz genau. Ben, wenn wir die Zeichnung jetzt noch auf ein Parallelogramm ergänzen, sieht man das dann noch besser. (Wird ergänzt.) Und dieses Kräfteparallelogramm bekommt man dadurch, indem man einen der beiden Vektoren parallel verschiebt und an den anderen anhängt, genauso wie der Max das hier gezeichnet hat. Ok, dann zum nächsten Beispiel.

2033 (Beide berechnen den Verbindungsvektor richtig und skizzieren ihr Ergebnis.)

2034 I: Gut, warum rechnet ihr überhaupt B minus A?

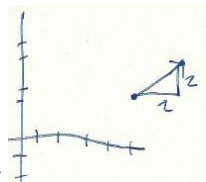
2035 Max: Endpunkt minus //Anfangspunkt//.

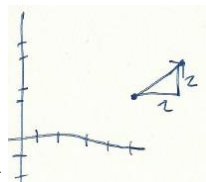
2036 Ben: //Weil wir// das so gelernt haben.

2037 I: Könnt ihr mir das noch etwas genauer begründen?

2038 (Schweigen.)

2039 Max: Na weil es zwei nach rechts und zwei nach oben geht. Also hab ich dann so ein Dreieck.



2040 (Zeichnet )

2041 I: Genau. Das Steigungsdreieck. Wir können uns das jetzt auch noch auf meiner Zeichnung anschauen. (Anhand der Zeichnung wird das Vorgehen erläutert.) Gut, dann könnt ihr schon zum nächsten Beispiel blättern. Die Gleichheit von Vektoren. Gilt AB-Pfeil ist gleich CD-Pfeil?

2045 Max: Ja.

2046 Ben: Ja, hier schon. Da ist alles gleich, also Orientierung und alles.

2047 I: Was ist das alles?

2048 Ben: Ja, sie sind parallel und gleich lang.

2049 I: Super, das stimmt ganz genau. Nächstes Beispiel. Jetzt geht es um den Mittelpunkt einer Strecke.

2051 (Beide schreiben die Formel  $M = \frac{1}{2} * (A + B)$  auf.)

2052 I: Was bedeutet diese Formel?

2053 Ben: Also der Mittelpunkt ist die Hälfte von A plus B. Und A plus B ist die Strecke.

2054 I: Die Strecke ist also A plus B.

2055 Max: Eigentlich ist das ja B minus A.

2056 Ben: Aber die Formel stimmt doch. Das haben wir ja so gelernt.

2057 I: Ja, die Formel stimmt auch, du hast schon recht. Aber warum rechne ich da jetzt plötzlich

2058 A plus B. Was bedeutet das? Oder kann ich den Mittelpunkt auch irgendwie anders

2059 beschreiben?

2060 Max: Man könnte auch noch den Vektor ausrechnen, also B minus A, und davon die Hälfte

2061 nehmen und dann zu A dazu geben. Oder dasselbe kann man von B aus auch machen.

2062 I: Ben, was sagst du zu der Idee?

2063 Ben: Ja (...) ich denke mal schon. Eigentlich ist es ja logisch.

2064 I: Ja, das stimmt. Wenn wir diese Formel hernehmen und die etwas umformen, kommen wir

2065 dann auch auf die erste Formel für den Mittelpunkt. Das steckt also dahinter. Super, dann

2066 haben wir noch die letzten vier Beispiele.

2067 Ben: Also wir müssen die zwei addieren.

2068 Max: Genau, mit dem Parallelogramm.

2069 (Beide fertigen die Skizze richtig an.)

2070 I: Ausgezeichnet. Dann zum zweiten Beispiel.

2071 Ben: B minus A.

2072 I: Genau. Bitte mit Skizze und Erklärung.

2073 Max: (Zeichnet das Steigungsdreieck ein.) Also ich muss sieben nach rechts und minus drei

2074 hinunter.

2075 I: Genau. Ihr könnt euch schon das nächste Beispiel anschauen.

2076 Ben: Das geht mit parallel verschieben. Man könnte das so machen, dass man von B weggeht

2077 und BC und BA anstückelt. (Schreibt  $D = B + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ .) Also weil man ja ein

2078 Parallelogramm hat.

2079 I: Das ist sehr interessant (..) aber du hast recht, das stimmt. Max, wie gehst du vor?

2080 Max: Ich habe D ist gleich A plus die Strecke BC aufgeschrieben.

2081 I: Was ist bei dir die Strecke?

2082 Max: Naja, der Vektor.

2083 I: Ja, genau, das ist der Vektor. Würdet ihr jetzt sagen, dass der Vektor BC gleich dem

2084 Vektor AD ist?

2085 Ben: Ja.

2086 Max: Ja, sicher. Sonst wäre es ja auch kein Parallelogramm. Die zwei stimmen überein.

2087 I: Genau, das ist richtig. So, das letzte Beispiel noch.

2088 Ben: Naja, das ist ganz einfach. Da kennt man die Punkte und man kann sie einzeichnen. Und  
 2089 dann kann ich mir die Strecke ausrechnen mit KG-Pfeil und durch zwei dividieren.  
 2090 I: Naja, das stimmt nicht ganz. Du rechnest dir nur einen Vektor aus und der Vektor kann  
 2091 **irgendwo** liegen.  
 2092 Ben: Also dann muss ich noch K plus schreiben.  
 2093 I: Genau, das ist ganz wichtig, dass man immer von wo weggeht, um zu einem anderen  
 2094 Punkt zu gelangen.

---

|                |                             |
|----------------|-----------------------------|
| Termin:        | Freitag, 07.06.2013         |
| Ort:           | BG/BRG Stockerau, Schulgang |
| Dauer:         | 31 Minuten                  |
| Interviewerin: | Christina Gahler            |

---

2095 I: Kann man AB-Pfeil und CD-Pfeil addieren?  
 2096 Tobias: //Ja//.  
 2097 Rene: //Ja//.  
 2098 I: Und wie?  
 2099 Rene: Mit einem Kräfteparallelogramm. Also den Vektor hier dran zeichnen und auch hier  
 2100 oben, dann ist das ein Parallelogramm und hier ist dann die Addition. (Rene zeichnet ein  
 2101 entsprechendes Parallelogramm ein.)  
 2102 I: Tobias, was sagst du dazu? Hast du eine andere Idee?  
 2103 Tobias: Ich hätte das auch so gemacht. (Wirkt sehr unsicher.)  
 2104 I: Wenn wir auf die Zeichnung von Rene schauen, dürfte man den Vektor BC auch hinter  
 2105 dem Vektor AB anhängen oder darf man das nicht?  
 2106 Rene: Ja (...) oja, das geht auch. Das ist ja dann dasselbe.  
 2107 I: Ja, das stimmt. Dann gehen wir gleich zum nächsten Beispiel, nämlich zum  
 2108 Verbindungsvektor.  
 2109 Tobias: A minus B.  
 2110 (Beide berechnen das richtige Ergebnis.)  
 2111 I: Ja, das stimmt. Mich würde jetzt noch interessieren, warum rechnet man B minus A.  
 2112 Rene: Weil es Anfangspunkt minus Endpunkt ist.  
 2113 I: Ja, schon, aber ich würde gerne wissen **warum** man das so macht.  
 2114 Rene: Also wenn man B haben will rechnet man A plus den Vektor. (Schreibt  $B = A + \vec{a}$ ,  
 2115 wobei  $\vec{a} = B - A$ .) Und wenn man das hat, zählt man einfach die Komponenten  
 2116 zusammen.

2117 I: Ja, ok. Tobias, wie würdest du das begründen?

2118 (Tobias schweigt.)

2119 I: Tobias, kannst du dich noch an diese Skizze erinnern? So habt ihr das im Unterricht

2120 gelernt. (Skizze wird erklärt.) Dann schaut euch das nächste Beispiel an. Gilt AB-Pfeil ist

2121 gleich CD-Pfeil.

2122 Rene: Ja, ich würde schon sagen. Sie sind gleich groß, also gleich lang.

2123 Tobias: Gleiche Orientierung.

2124 Rene: Und sie sind parallel.

2125 I: Genau. Da sagt man, dass sie dieselbe Richtung haben. Gut, das stimmt. Dann das

2126 nächste Beispiel.

2127 (Tobias schreibt die Formel  $M = \frac{1}{2} * (A + B)$  auf während Rene zuerst  $B - A = \vec{a}$  berechnet und

2128 danach  $M = A + \frac{\vec{a}}{2}$  aufschreibt.)

2129 I: Tobias, wie kommst du auf die Formel?

2130 Tobias: Also wir haben zwei Vektoren, also A und B, und die Strecke AB wollen wir halbieren.

2131 I: Warum addiert man da jetzt die Punkte und subtrahiert sie nicht?

2132 Tobias: Also (...)

2133 I: Rene, du darfst ihm gerne helfen.

2134 Rene: Ja, aber ich mag die Formel nicht. Ich mache das immer so, wie ich es aufgeschrieben

2135 habe. Weil bei mir habe ich den Vektor a-Pfeil und wenn ich davon die Hälfte nehme ist

2136 er ja nur mehr halb so lang. Wenn ich den dann zum Punkt A dazuzähle, komme ich zum

2137 Mittelpunkt.

2138 I: Ja, das ist eine gute Begründung. Kommen wir zurück zur Formel vom Tobias. Warum

2139 rechne ich da die zwei Punkte zusammen?

2140 Rene: Ich kann ja auch die Punkte als Vektoren auffassen.

2141 I: Genau, als Ortsvektoren.

2142 Tobias: Aso, und wenn ich die Ortsvektoren dann addiere, bekomme ich den Vektor zwischen A

2143 und B. Und den halbiere ich dann und bin beim Mittelpunkt.

2144 I: Gut, das ist auch eine Begründung. Allerdings muss man aufpassen, da der Mittelpunkt

2145 dann auch wieder ein Ortsvektor ist. Aber sonst stimmt das. Gut, dann habe ich noch vier

2146 weitere Beispiele zur Überprüfung. Ihr könnt schon anfangen.

2147 (Beide fertigen ein richtiges Kräfteparallelogramm an.)

2148 Tobias: Also der Körper liegt im Nullpunkt und da gehen auch die anderen Kräfte weg und die

2149 muss man addieren. Das macht man halt mit dem Kräfteparallelogramm.

2150 I: Super, das ist richtig. Dann könnt ihr schon das nächste Beispiel machen.

2151 (Der Verbindungsvektor wird von beiden richtig berechnet.)

2152 I: Tobias, warum ist das jetzt so?

2153 Tobias: Wegen dem Steigungsdreieck. Also auf der x-Achse/ man muss die x-Koordinaten  
 2154 anschauen, also bekomme ich die eine Seite von dem Dreieck, wenn ich die x-Koordinate  
 2155 von B minus der x-Koordinate von A rechne. Und bei der anderen Seite geht es genauso.

2156 I: Sehr gut, das stimmt. Dann das dritte Beispiel.

2157 (Rene berechnet den Punkt D mit  $D = C + \vec{a}$ , wobei  $\vec{a} = A - B$ . Tobias schreibt  $D = C + (-\vec{AB})$   
 2158 auf.)

2159 I: Ist der Vektor AB derselbe Vektor wie der Vektor DC in eurer Skizze?

2160 Tobias: Ja, weil sie dieselbe Länge und Orientierung haben.

2161 I: Was fehlt da noch?

2162 Rene: Dieselbe Richtung.

2163 I: Ja, genau. So, dann noch das letzte Beispiel.

2164 (Rene schreibt  $S = \frac{\overrightarrow{KG}}{2} + K$  während Tobias  $M = \frac{1}{2} * (K + G)$  aufschreibt.)

2165 I: Tobias, was bedeutet deine Formel?

2166 Tobias: Also, es sind Ortsvektoren und wenn ich die addiere, dann habe ich den Vektor  
 2167 dazwischen und das rechne ich dann durch zwei und hab den Mittelpunkt.

2168 I: Auf was muss man dabei aufpassen?

2169 Tobias: Dass der Mittelpunkt auch ein Ortsvektor ist.

## 9. Lebenslauf

### Persönliche Daten

Name: Christina Gahler  
Staatsbürgerschaft: Österreich  
Eltern: Andreas und Andrea Gahler  
Geschwister: Michael Gahler

### Ausbildung

September 1996 – Juni 2000: **Volksschule Josef Wondrak Stockerau**  
September 2000 – Juni 2008: **BG/BRG Stockerau**  
Oktober 2008 – Jänner 2014: **Lehramtsstudium UF Bewegung und Sport und UF Mathematik, Universität Wien**

## SACHERSCHLIESSUNG

der

Fachbereichsbibliothek Mathematik, Statistik, Informatik der Universität Wien

### Klassifikation

Aufstellungsort:

☐ HoA

☒ HoD

MSC2000:

BK:

### Schlagwortketten nach RSWK

Lehrer - Didaktik - Vorbereitung - Fällvorstellung

Kontrollvermerk der Fachbibliothek:

19.12.2013

Datum

Unterschrift

