



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Fehlvorstellungen zur Bruchrechnung als
Ausgangspunkte für substanzielle Unterrichtsgespräche
- eine qualitative Studie

Verfasserin

Cornelia Eggharter

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

Wien, 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt:

A 190347406

Studienrichtung lt. Studienblatt:

Lehramt: Französisch und Mathematik

Betreuerin / Betreuer:

Dr. MMag. Christoph Ableitinger

Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei allen Menschen bedanken, die mich während des Studiums unterstützt haben.

Ein besonderer Dank gilt dabei meinem Betreuer Dr. MMag. Christoph Ableitinger. Er war jederzeit bereit Fragen meinerseits zu beantworten, und vor allem motivierte er mich durch sein großes Interesse an der Mathematikdidaktik.

Außerdem möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die es mir sowohl durch persönliche wie auch finanzielle Unterstützung ermöglichten, mein Studium zu absolvieren.

Ich danke auch meinem Freund Martin Stöger, der mich mental beim Verfassen dieser Arbeit unterstützte und mich immer wieder motivierte.

Zum Schluss möchte ich mich noch bei meiner Studienkollegin, Michaela Sageder, die inzwischen eine Freundin fürs Leben geworden ist, bedanken. Sie konnte ich jederzeit um Rat fragen, außerdem spielte sie bei der Überarbeitung des Analyseteils eine wichtige Rolle.

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich diese Arbeit eigenständig verfasst habe. Dazu habe ich ausschließlich die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen verwendet. Bei indirekten, sowie direkten Zitaten - diese werden unter Anführungszeichen angeführt - wird im Text unmittelbar auf deren Quelle verwiesen. Bei Quellen aus dem Internet wird zusätzlich zu dem Link der Internetseite noch das Zugriffsdatum angeführt.

Ich versichere hiermit außerdem, dass ich diese Arbeit noch nicht andernorts zur Beurteilung eingereicht habe.

Inhalt

1. Einleitung.....	7
2. Grundvorstellungen für Bruchzahlen und für das Rechnen mit Brüchen.....	9
2.1 Was sind Grundvorstellungen und wieso sind sie so wichtig?.....	9
2.1.1 Normativer Aspekt von Grundvorstellungen	10
2.1.2 Grundvorstellungen zum Beschreiben von Lösungsprozessen	10
2.2 Wie werden Grundvorstellungen aufgebaut?	11
2.3 Konzepte um Bruchzahlen in der Schule einzuführen.....	12
2.4 Die wichtigsten Grundvorstellungen, die SchülerInnen im Unterricht entwickeln sollten	15
2.4.1 Bruchzahl als Teil eines Ganzen.....	15
2.4.2 Bruchzahl als Teil mehrerer Ganzer	15
2.4.3 Bruchzahl als relativer Anteil $\frac{a}{b}$ von c.....	16
2.4.4 Bruchzahl als absoluter Anteil.....	16
2.4.5 Quasikardinalzahlaspekt.....	17
2.4.6 Bruchzahl als Verhältnis $\frac{a}{b} = \mathbf{a : b}$	17
2.4.7 Mehrere Darstellungen für eine Bruchzahl.....	17
2.4.8 Erweitern als Verfeinern und Kürzen als Vergrößern	18
2.4.9 Addition als Hinzu- beziehungsweise Zusammenfügen und als Vorwärtsschreiten am Zahlenstrahl	19
2.4.10 Subtraktion als Wegnehmen und als Rückwärtsschreiten am Zahlenstrahl.....	19
2.4.11 Multiplizieren als wiederholte Addition	20
2.4.12 Multiplizieren mithilfe der Von-Vorstellung und über den Flächeninhalt.....	20
2.4.13 Division als wiederholte Subtraktion	22
2.4.14 Dividieren zweier Bruchzahlen als Messen	22
2.4.15 Dividieren als Umkehroperation.....	23

3.	Irritationen im Mathematikunterricht als Bildungschance nutzen	24
3.1	Wie kommt es zu Fehlvorstellungen im Bereich der Bruchzahlen	24
3.2	Problemlösen und epistemologische Denkhürden als Unterrichtsprinzip	26
3.3	Wie geht man als Lehrperson mit Irritationen um?	28
3.4	Fehlvorstellungen im Bereich der Bruchzahlen	29
3.4.1	Eindeutigkeit der Notation	30
3.4.2	Ordnung und Dichtheit	31
3.4.3	Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen	32
3.4.4	Erweitern und Kürzen	32
3.4.5	Addition	32
3.4.6	Subtraktion	33
3.4.7	Multiplikation	33
3.4.8	Division	35
3.5	Thematisierung von Schwierigkeiten im Mathematikunterricht	36
3.5.1	Eindeutigkeit (inklusive Erweitern und Kürzen), Größenvergleich und Dichtheit	37
3.5.2	Addition und Subtraktion	42
3.5.3	Multiplikation	46
3.5.4	Division	48
4.	Lehrplan, Bildungsstandards und Schulbücher	52
4.1	Lehrplan	52
4.2	Bildungsstandards	53
4.3	Aufgreifen von Fehlvorstellungen in Schulbüchern	55
4.3.1	Das ist Mathematik	56
4.3.2	Expedition Mathematik	58
4.3.3	Mach mit Mathematik	60
5.	Methodik	62
5.1	Warum eine qualitative Studie	62

5.2	Herangehensweise an das Interview	64
5.3	Kriterien für ein gutes Gespräch	64
5.4	Vorbereitung auf das Interview	65
5.5	Die Durchführung des Interviews	65
5.6	Analyse des Videomaterials	66
5.7	Transkriptionsrichtlinien	67
5.8	Rahmenbedingungen der Untersuchung	68
5.9	Auswahl der Interviewaufgaben	69
5.9.1	Erster Teil	73
5.9.2	Zweiter Teil	74
5.9.3	Dritter Teil	75
5.9.4	Vierter Teil	76
6.	Ergebnisse der Studie	78
6.1	Analysen der einzelnen Aufgaben	78
6.1.1	Erster Teil, erste Aufgabe	78
6.1.2	Erster Teil, zweite Aufgabe	89
6.1.3	Erster Teil, dritte Aufgabe	96
6.1.4	Zweiter Teil, Multiplikation, 1. Aufgabe	100
6.1.5	Zweiter Teil, Multiplikation, 2. Aufgabe	108
6.1.6	Dritter Teil, Division	113
6.1.7	Vierter Teil, Addition und Subtraktion	120
6.2	Wahl der Beispiele Darstellungsformen	124
6.2.1	Alltagsbedeutungen der SchülerInnen für Bruchzahlen	124
6.2.2	Die graphische Darstellung von Bruchzahlen	125
6.2.3	Schwierigkeiten beim Treffen der richtigen Einteilung	126
6.2.4	Probleme beim Darstellen von Rechenoperationen	128
6.3	Syntax – Semantik	130
6.3.1	Häufiges Agieren auf syntaktischer Ebene	130

6.3.2 Verbinden beider Ebenen	131
7. Conclusio.....	133
8. Literaturverzeichnis	136
Anhang	138
Materialien zum Theorieteil	138
Transkripte	141
Lebenslauf	201
Abstract	203

1. Einleitung

Wie der Titel schon besagt, handelt die Arbeit von Fehlvorstellungen, die SchülerInnen zu Bruchzahlen und Operationen mit Bruchzahlen besitzen. Die Wahl des Themas fiel mir sehr leicht, denn durch das Abhalten zahlreicher Nachhilfestunden, wurde mir schnell klar, dass ich in meiner Diplomarbeit die Schwierigkeiten, die SchülerInnen mit Bruchzahlen haben, behandeln wollte. In den Nachhilfestunden merkte ich schnell, dass SchülerInnen entweder keine Vorstellungen zu Bruchzahlen hatten oder falsche Vorstellungen, die sie zum Teil aus den natürlichen Zahlen übernommen haben. Zahlreiche SchülerInnen, sowohl der Unterstufe als auch der Oberstufe, schaffen es also nicht, Brüche gewinnbringend in ihren Aufgaben einzusetzen und vermeiden sie deswegen. Da Bruchzahlen das Rechnen in vielen Fällen erleichtert, finde ich es sehr wichtig, dass SchülerInnen mit Bruchzahlen umgehen können. Außerdem ist die Darstellung einer rationalen Zahl in der Bruchschreibweise stets exakt, im Gegensatz zur Dezimalschreibweise, in der die Zahlen oft auf wenige Nachkommastellen gerundet werden, und somit nicht mehr die exakte Zahl wiedergeben.

Am Beginn der Arbeit steht ein Theorieteil (Kapitel 2 bis 4), der Grundvorstellungen – wie sie entstehen, und welche es im Bereich der Bruchrechnung gibt – und Fehlvorstellungen behandelt. Im Kapitel der Fehlvorstellungen geht es ebenfalls um deren Entstehung, welche typischerweise vorkommen und wie man als Lehrperson damit umgeht. Außerdem werden Unterrichtsvorschläge angeführt, um gewisse Fehlvorstellungen bei Lernenden zu provozieren und sie im Unterricht zu thematisieren. Der Fokus des Theorieteils liegt auf dem Ansatz, Fehlvorstellungen als Denkhürden anzusehen. Indem Lernende diese Denkhürden durch gewisse Strategien und vor allem durch ausreichend aufgebaute Grundvorstellungen überwinden, kann ein effizienter Lernprozess stattfinden. Als Abschluss wird im Theorieteil beschrieben, inwiefern der Lehrplan, die Bildungsstandards und ausgewählte österreichische Schulbücher darauf eingehen.

Der zweite Teil der Arbeit umfasst eine empirische Studie, wobei in der Methodik (Kapitel 5) die Rahmenbedingungen, die Auswahl der Interviewaufgaben sowie die Art der Auswertung beschrieben wird. In den Interviews mit den SchülerInnen ging es darum, bei den Lernenden Fehlvorstellungen zur Bruchrechnung zu provozieren.

Wenn es bei den SchülerInnen zu den erwarteten Fehlvorstellungen, oder zu anderen Schwierigkeiten kam, so wurde durch die Interviewerin interveniert. Interventionen waren Erklärungen, passende Fragestellungen oder Material, wie sie auch in der Schule oder in Nachhilfestunden öfter verwendet werden, wenn Lehrpersonen den SchülerInnen etwas erneut erklären, aufgrund falscher Antworten von SchülerInnen oder wenn sie etwas nicht verstanden haben. Es soll nun untersucht werden, ob SchülerInnen auf Interventionen dieser Art ansprechen, und in welchem Maße sie hilfreich sind. Außerdem soll erforscht werden, ob nur die erwarteten Fehlvorstellungen auftauchen, oder ob Lernende auch vor völlig unerwarteten, der Literatur unbekannten, Schwierigkeiten stehen. Die Ergebnisse dazu werden im Kapitel 6 präsentiert.

2. Grundvorstellungen für Bruchzahlen und für das Rechnen mit Brüchen

2.1 Was sind Grundvorstellungen und wieso sind sie so wichtig?

Eine einheitliche Definition von dem Begriff „Grundvorstellungen“ ist in der Literatur der Mathematikdidaktik schwer zu finden. Viele Didaktiker behandeln dieses Thema und arbeiten mit diesem Begriff, deutlich definiert wird er jedoch nur selten. Die folgende Definition stammt von Malle:

„Viele Vorstellungen, die hinter mathematischen Inhalten stehen, sind so wichtig und für die Allgemeinbildung unverzichtbar, dass man sie als Grundvorstellungen bezeichnet.“

(aus Malle 2003/2004, Grundvorstellungen im Mathematikunterricht: S.1)

Auch Malle gibt also keine wissenschaftliche Definition für den Begriff „Grundvorstellungen“, jedoch wird in diesem Zitat deren Wichtigkeit sehr gut betont. Für ein tieferes mathematisches Verständnis und für einen effektiven Umgang mit mathematischen Problemen ist es wichtig, dass SchülerInnen gewisse Grundvorstellungen, also ein tieferes Verständnis und ein Gefühl für mathematische Inhalte aufbauen. Diese ermöglichen das Übersetzen mathematischer Inhalte in unterschiedliche Darstellungen. Über diesen Wechsel von Darstellungen kann leicht festgestellt werden, ob ein Schüler/eine Schülerin das mathematische Problem wirklich versteht und Lösungen dafür entwickeln kann. Als Lehrkraft ist es dabei wichtig zu wissen, dass Grundvorstellungen keineswegs angeboren sind, sondern dass SchülerInnen durch einen passenden Unterricht dabei geholfen werden muss, gewisse Grundvorstellungen aufzubauen. Grundvorstellungen haben zwei Funktionen: Sie sind einerseits eine „normative Kategorie, die eine effektive Planung von Unterricht und die (Sach-) Analyse von Lerninhalten, Aufgaben und Lernumgebungen ermöglichen“ und andererseits „können Grundvorstellungen als deskriptive Werkzeuge genutzt werden, die gelingende und misslingende Lösungsprozesse beschreiben können“ (aus Wartha 2011, Aufbau von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen: S.15).

2.1.1 Normativer Aspekt von Grundvorstellungen

Dieser Aspekt meint, dass Lerninhalte bestimmter Themenbereiche durch, für notwendig befundene Grundvorstellungen definiert werden. Er beinhaltet sowohl die Übersetzung einer innermathematischen Situation in einen außermathematischen Kontext und umgekehrt, als auch den Wechsel zwischen verschiedenen mathematischen Darstellungen. Grundvorstellungen dienen dabei als hilfreiches Werkzeug. Bei vielen mathematischen Problemen erscheint den meisten Menschen die Aktivierung der Grundvorstellungen als zusätzlicher Aufwand, und viel lieber würden sie bestimmte Aufgaben nur durch die Verwendung auswendig gelernter Rechenregeln lösen. Das Aktivieren der Grundvorstellung ermöglicht aber flexibel zu operieren, und das mathematische Wissen auf verschiedenste Problemstellungen anzuwenden und anzupassen. Die Aktivierung der Grundvorstellungen ist nur zielbringend, wenn Grundvorstellungen zu drei Bereichen ausgeprägt werden, nämlich zu Zahlen, zu Strategien und zu Operationen. Die Grundvorstellungen zu den Bruchzahlen selbst werden im Kapitel 2.4.1 bis 2.4.7 näher erläutert. Unter Grundvorstellungen zu Strategien versteht man im Bereich der Bruchaddition etwa das Auffinden einer gemeinsamen Unterteilung (siehe Kapitel 2.4.8). Die Grundvorstellungen zu Zahlen und zu Strategien sind die Voraussetzung um Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen entwickeln zu können, welche in den Kapiteln 2.4.9 bis 2.4.15 detaillierter ausgeführt werden. Wenn SchülerInnen es schaffen, zwischen diesen drei verschiedenen Arten von Grundvorstellungen eine Verknüpfung herzustellen, so haben sie das Thema Bruchzahlen und Rechnen mit Brüchen gut verstanden, und sind dazu fähig, über inner- und außermathematische Aufgaben und Problemstellungen in den verschiedensten Darstellungen zu reflektieren und sie zu lösen. Ein großer Vorteil dieses Konzepts von Grundvorstellungen besteht darin, „dass durch die Identifikation von Grundvorstellungen die zentralen Inhalte eines Lerngebietes beschrieben werden können, die für ein Verständnis unverzichtbar sind.“(aus Wartha 2011, Aufbau von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen: S.19). Die Inhalte des Mathematikunterrichts können dadurch also normiert werden.

2.1.2 Grundvorstellungen zum Beschreiben von Lösungsprozessen

Bei dieser Funktion von Grundvorstellungen geht es darum, Denk- und Lösungsprozesse zu analysieren mithilfe von Grundvorstellungen, die beim erfolgreichen Lösen der Aufgabe aktiviert werden und beim Scheitern sehr oft nicht

aktiviert werden. Außerdem handelt der Abschnitt von Fehlvorstellungen woraus zahlreiche falsche Strategien resultieren. Die verschiedenen Fehlvorstellungen werden im Kapitel 3.4 genauer thematisiert.

2.2 Wie werden Grundvorstellungen aufgebaut?

Bei den meisten SchülerInnen entstehen Grundvorstellungen nicht von selbst, deswegen ist es Aufgabe der Lehrperson durch geeignete Unterrichtsgestaltung die Entwicklung verschiedenster Grundvorstellungen zu fördern und zu unterstützen. Sebastian Wartha beschreibt in seinem Artikel „Aufbau von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen“ ein Vierphasenmodell, um Grundvorstellungen themenunabhängig aufzubauen.

In Phase eins arbeitet der/die Lernende mit einem konkreten Modell, wobei ein Modell hier verstanden wird, als anschauliche Darstellung, oder als Materialien zum Anfassen, wodurch mathematische Gegebenheiten entdeckt werden können. Ein Beispiel für das Arbeiten mit einem konkreten Modell wäre, dass SchülerInnen ein Blatt Papier falten, um die Gleichwertigkeit der verschiedenen Darstellungen für Bruchzahlen zu erkennen. Es wird dabei die mathematische Bedeutung der Handlung/des Modells beschrieben, wobei die Versprachlichung des Modells und der mathematischen Symbole im Mittelpunkt steht. In der zweiten Phase beschreibt der Schüler/die Schülerin einem Partner/einer Partnerin das Modell mit Sicht darauf. Die dritte Phase besteht darin das Modell ohne Sicht darauf zu beschreiben, wodurch der/die Lernende dazu gezwungen ist, sich das Modell vorzustellen. In der vierten und letzten Phase arbeitet er/sie nur noch auf symbolischer Ebene und kann sich das Modell dazu vorstellen. Wartha hat dieses Modell in seinem Artikel auch auf die konkrete Aufgabe „Welche Zahl ist größer: $\frac{5}{12}$ oder $\frac{2}{3}$?“ angewandt. Hierbei wird in der ersten Phase mit einem Blatt Papier gearbeitet, und die SchülerInnen dürfen falten und malen, und so herausfinden, welche der beiden Bruchzahlen größer ist. In der zweiten Phase soll der/die Lernende seinem Nachbarn/seiner Nachbarin erklären, wie dieser/diese das Papier falten und anmalen soll. Anschließend soll er/sie auch noch begründen, welche Zahl größer ist. In der dritten Phase soll der Schüler/die Schülerin dem Lehrer/der Lehrerin hinter der aufgeklappten Tafel erklären, wie er die beiden Bruchzahlen herstellen kann und wiederum erklären und begründen, welche Bruchzahl größer ist. Die letzte Phase besteht darin, dass der/die Lernende nur noch

die Aufgabe präsentiert bekommt, und sie mithilfe der Vorstellung des Modells lösen soll.

Bei fehlerhaften Handlungen von SchülerInnen, ist es wichtig zu analysieren in welcher Phase der Fehler passiert, um feststellen zu können, wo im Denkprozess die Fehlvorstellung liegt, um als Lehrperson gezielt dagegenwirken zu können. Ein abschließender Hinweis zu diesem Vierphasenmodell ist, dass es keineswegs als Stufenmodell verstanden werden soll. Es ist zum Beispiel möglich, dass SchülerInnen sofort der Abstrahierungsschritt von Phase zwei auf Phase vier gelingt. Wenn solche Sprünge passieren, zeugt dies sogar von einem guten Verständnis der SchülerInnen.

2.3 Konzepte um Bruchzahlen in der Schule einzuführen

Für die Einführung der Bruchzahlen im Unterricht gibt es vier verschiedene Konzepte, die jeweils wichtige Grundvorstellungen aufbauen sollen, nämlich das Größenkonzept, das Operatorkonzept, das Gleichungskonzept und das Äquivalenzklassenkonzept (siehe Padberg 2009, Didaktik der Bruchrechnung: S. 13).

Wie der Name Größenkonzept schon verrät, verläuft hier der Zugang zu Bruchzahlen über bekannte Größen. Es wird immer eine Einheit benötigt, wie zum Beispiel $\frac{1}{2}$ kg Äpfel, $\frac{1}{4}$ l Milch, etc. Nachdem die SchülerInnen mit diesen Bruchzahlen vertraut sind, werden die Einheiten kg, l, etc. weggelassen, und die neue Einheit ist ein Ganzes, was aber unbedingt thematisiert werden muss. Es geschieht also eine Abstrahierung des Bruchzahlbegriffes. Dieser Zugang, Bruchzahlen im Unterricht einzuführen ist sehr kindgerecht, da dieses Konzept auf die Erfahrungen der Kinder mit Bruchzahlen im täglichen Leben zurückgreift. Somit sind Bruchzahlen also etwas, das sie schon kennen, und nichts völlig Neues, vor dem sie Angst haben müssen. Der Konsens der Mathematikdidaktik der letzten Jahre ist auch, dass Bruchzahlen in der Schule über den Größenaspekt eingeführt werden sollten. Für ein tieferes Verständnis über fundierte Grundvorstellungen, wird darauf verzichtet, den Aufbau der Bruchzahlen und der Bruchrechnung in der Schule methodenrein durchzuführen. Das Größenkonzept ist nämlich sehr geeignet die Addition einzuführen, denn Rechnungen wie $\frac{1}{2} \text{ Pizza} + \frac{1}{4} \text{ Pizza}$ erscheinen den Kindern sinnvoll und die

SchülerInnen sind motiviert diese Additionen zu lösen. Bei der Subtraktion lassen sich ähnliche sinnvolle Beispiele aus dem Alltag finden. Bei der Multiplikation hingegen ergibt das Größenkonzept keinen Sinn mehr, denn man kann $\frac{1}{2}$ Pizza $\cdot$ $\frac{1}{4}$ Pizza keine realistische Bedeutung zumessen. Dasselbe Problem haben wir bei der Division. Zwar kann die Rechnung $\frac{1}{2}$ Pizza : $\frac{1}{4}$ Pizza als Bedeutung haben: „Wie oft passt ein Viertel Pizza in eine Halbe?“. Schwierig wird es allerdings, wenn die Rechnung umgekehrt lautet, nämlich $\frac{1}{4}$ Pizza : $\frac{1}{2}$ Pizza, also wenn der Divisor größer ist als der Dividend, denn es kann von den SchülerInnen keine sinnvolle Alltagsbedeutung mehr für die Rechnung gefunden werden.

Um also die Multiplikation und die Division zweier Bruchzahlen im Unterricht einzuführen, ist das Operatorkonzept sehr nützlich. Dieser Aspekt meint, Bruchzahlen als Funktionen aufzufassen. Die im Alltag verwendete Sprechweise „ $\frac{3}{4}$ von 8 Liter sind 6 Liter“ kann man als Funktion deuten, indem man die Bruchzahl $\frac{3}{4}$ als Abbildungsvorschrift versteht, die dem Wert 8 l den Wert 6 l zuordnet. Der Wert 6 l wird ermittelt, indem man den Wert 8 l durch 4 dividiert und anschließend mit 3 multipliziert. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle, was die SchülerInnen unbedingt, am besten selbst, durch geeignete Übungen erkennen sollen. Auf dem Operatorkonzept basierend kann auch die Division, als Umkehroperation der Multiplikation eingeführt werden. Die Division $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ kann also gelöst werden, indem man die Zahl x sucht, die mit $\frac{4}{5}$ multipliziert $\frac{2}{3}$ ergibt. An dem folgenden Diagramm erkennt man, dass gelten muss $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$.

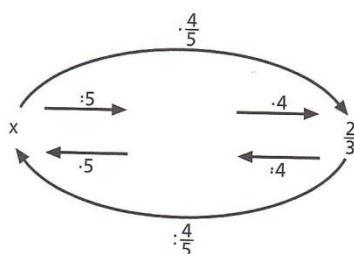


Abbildung: Die Division als Umkehroperation der Multiplikation (siehe Padberg 2009, Didaktik der Bruchrechnung: S.18)

Die SchülerInnen haben so die Möglichkeit, die sonst oft vom Himmel fallende Divisionsregel für Bruchzahlen zu verstehen und sie auch selbst wieder herzuleiten. Theoretisch wäre es möglich, auch die Addition und die Subtraktion mithilfe des Operatorkonzeptes einzuführen, um einen methodenreinen Aufbau zu erhalten. Jedoch würden SchülerInnen wichtige Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und zum Rechnen mit Brüchen vorenthalten bleiben, die sie mithilfe des Größenkonzeptes selbst, durch Reflektieren über ihre eigenen Erfahrungen mit Brüchen, aufbauen können. Der Umgang mit Brüchen würde nur auf formaler, operativer Ebene stattfinden, ohne jeglichen Bezug zu außermathematischen Kontexten.

Ein weiteres Konzept um Bruchzahlen einzuführen, ist das Gleichungskonzept, in dem die Bruchzahl $x = \frac{m}{n}$ die Lösung der linearen Gleichung $n \cdot x = m$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ ist. Nützlich ist dieser Ansatz zum Beispiel, um das Kürzen und Erweitern einzuführen: Die Lösung der Gleichung $4 \cdot x = 3$ ist $x = \frac{3}{4}$. Wenn man nun diese Gleichung auf beiden Seiten mit 2 multipliziert, erhält man die neue Gleichung $8 \cdot x = 6$ mit der Lösung $x = \frac{6}{8}$, welche ja gleich der Lösung der ersten Gleichung sein muss. Über diesen Zugang sollen die Kinder also den Zugang zum Kürzen und Erweitern kennenlernen. Auch die Addition, Subtraktion und die Multiplikation können mit diesem Konzept eingeführt werden, jedoch ist dieser sehr formale Weg völlig ungeeignet für die fünfte und sechste Schulstufe. Ein weiterer Nachteil besteht darin, dass die später folgende Gleichungslehre belastet wird, in dem Sinn, dass SchülerInnen davon ausgehen, dass es immer genau eine Lösung für eine Gleichung gibt, wohingegen sich die Lehrkräfte in der Gleichungslehre besonders bemühen sollten, den SchülerInnen klarzumachen, dass es bei einer Gleichung entweder keine, eine oder unendlich viele Lösungen gibt.

Das letzte Konzept zur Einführung der Bruchzahlen ist das Äquivalenzklassenkonzept, welches darauf beruht, Brüche mithilfe einer Äquivalenzrelation zu definieren. Für die Bruchzahl $\frac{m}{n}$ gilt: $\frac{m}{n} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N} \text{ und } m \cdot b = n \cdot a\}$, was wiederum bedeutet, dass es für die Bruchzahl $\frac{m}{n}$ beliebig viele verschiedene Darstellungsarten oder Repräsentanten gibt (siehe Padberg 2009: S. 20-21). In der Äquivalenzklasse $\frac{2}{5}$ liegen zum Beispiel noch (4,10), (6,15) oder (8,20). Dieser Ansatz ist zwar wissenschaftlich korrekt und vollständig, jedoch für die Schule nicht zu verwenden, da die Definition als Äquivalenzklasse für SchülerInnen

unmotiviert und rein formal erfolgt. Die Lernenden können mit dieser Definition keine anschauliche Vorstellung zu Bruchzahlen entwickeln.

2.4 Die wichtigsten Grundvorstellungen, die SchülerInnen im Unterricht entwickeln sollten

In diesem Abschnitt werden sowohl die Grundvorstellungen erläutert, die SchülerInnen für die Bruchzahl an sich entwickeln sollten, als auch solche, die für das Verfeinern und Vergrößern von Brüchen und für ein fundiertes Verständnis der vier Grundrechnungsarten im Bereich der Bruchzahlen notwendig sind. Bevor in der Schule mit dem Rechnen begonnen wird, ist es wichtig, dass zuerst die Grundvorstellungen zu den Bruchzahlen selbst ausgeprägt sind, denn erst dann sind SchülerInnen dazu in der Lage, Grundvorstellungen zu den vier Grundrechnungsarten zu entwickeln. Um ein fundiertes Verständnis bei SchülerInnen zu erlangen, ist es wichtig, zu Beginn über einen langen Zeitraum hinweg, Rechnungen nur mithilfe von Grundvorstellungen zu lösen, und erst später die Rechenregeln einzuführen. Dem zu frühen Kennenlernen der Rechenregeln folgt oft ein Verständnisproblem, da SchülerInnen aus Bequemlichkeit und auch aus Sicherheit fast immer auf die Rechenregel zurückgreifen. Somit die Vorstellungen zu dem, was sie eigentlich tun, in den Hintergrund gerückt.

2.4.1 Bruchzahl als Teil eines Ganzen

Diese Grundvorstellung meint, dass man beispielsweise für den Bruch $\frac{2}{3}$ m folgende Vorstellung besitzt: Man nehme einen Meter, teile ihn durch 3 und nehme diesen Teil zweimal. Um diese Vorstellung bei SchülerInnen auszuprägen, eignen sich enaktive Tätigkeiten wie zum Beispiel das Falten beziehungsweise Teilen eines A4-Blattes oder von Papierstreifen. Um gutes Verständnis bei den SchülerInnen zu erzielen, ist es wichtig, zwischen den Darstellungsarten zu wechseln, also auch Rechtecke, Kreise und Streifen zu verwenden.

2.4.2 Bruchzahl als Teil mehrerer Ganzer

Das obige Beispiel $\frac{2}{3}$ m ist in dieser Grundvorstellung wie folgt zu verstehen: Man teile das neue Ganze, 2 m, durch 3 und nehme dann nur einen Teil davon. Diese Vorstellung ist für die SchülerInnen schon schwieriger, da sie erkennen müssen, was

das neue Ganze bezeichnet. Der Unterschied zur Vorstellung als Teil eines Ganzen besteht nur in der Reihenfolge des Teilens und Vervielfachens, was im Mathematikunterricht unbedingt thematisiert werden sollte. Die Gleichwertigkeit dieser beiden Grundvorstellungen kann auf mehreren Wegen gezeigt werden. Ein sehr anschaulicher Weg ist die ikonische Darstellung der Gleichwertigkeit.

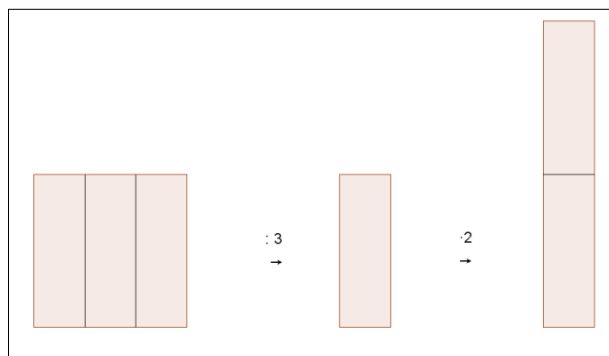


Abbildung: Teil eines Ganzen

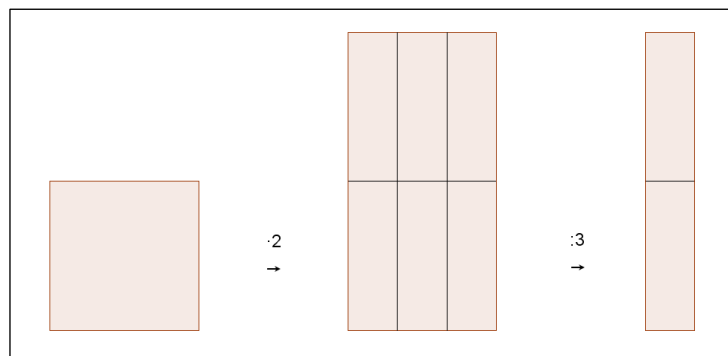


Abbildung: Teil mehrerer Ganzer

Eine weitere sehr anschauliche Erklärung führt über den Quasikardinalzahlaspekt (siehe 2.4.5): 2 Pizzen : 3 = 6 Drittel Pizzen : 3 = 2 Drittel Pizzen = $\frac{2}{3}$ Pizzen.

2.4.3 Bruchzahl als relativer Anteil $\frac{a}{b}$ von c

Diese Vorstellung ist am einfachsten mit einem Beispiel zu erklären: Anna erbt $\frac{2}{5}$ von 100000 € und Berta erbt die restlichen $\frac{3}{5}$. (siehe Malle 2004, Grundvorstellungen zu Bruchzahlen: S.4). Diese Grundvorstellung knüpft, aufgrund der Nähe zum Alltag, sehr gut an das Vorwissen der SchülerInnen an.

2.4.4 Bruchzahl als absoluter Anteil

Diese Grundvorstellung deutet $\frac{2}{3}$ als 2 von 3. Ähnlich wie die vorige Grundvorstellung sollte diese nicht zu früh eingeführt werden, denn auch sie begünstigt, den in der Bruchrechnung sehr häufigen Additionsfehler, da zum Beispiel drei von vier plus zwei von drei, fünf von sieben ergibt. Es würde also gelten: $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{5}{7}$ (siehe Malle 2004, Grundvorstellungen zu Bruchzahlen: S.5). Sowohl bei der Vorstellung von Bruchzahlen als absoluter als auch als relativer Anteil, wird die Bruchzahl nicht als eine selbstständige Zahl betrachtet, sondern als Paar zweier natürlicher Zahlen, wodurch SchülerInnen dazu verleitet werden, die beiden Zahlen getrennt voneinander zu addieren.

2.4.5 Quasikardinalzahlaspekt

Diese Grundvorstellung bedeutet, dass der Zähler eines Bruches die Anzahl der Teile zählt, deren Größe durch den Nenner bestimmt wird. Um diese Grundvorstellung bei den SchülerInnen hervorzurufen, empfiehlt es sich, zu Beginn der Bruchrechnung als Lehrperson auch öfter „2 Fünftel“ statt „ $\frac{2}{5}$ “ an die Tafel zu schreiben, damit die SchülerInnen das Gefühl bekommen, Bruchteile zählen zu können. Bei gleichwertigen Brüchen, kann auch die Addition mithilfe dieser Vorstellung durchgeführt werden: $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = 3 \text{ Achtel} + 2 \text{ Achtel} = 5 \text{ Achtel} = \frac{5}{8}$ (siehe Malle 2004, Grundvorstellungen zu Bruchzahlen: S.5).

2.4.6 Bruchzahl als Verhältnis $\frac{a}{b} = a : b$

Verhältnisse kommen im täglichen Leben oft vor, wie zum Beispiel bei einem Fußballmatch, bei dem die Torchancen zum Beispiel im Verhältnis 7 zu 5 waren, das heißt die Torchancen der Mannschaft A verhalten sich zu denen der Mannschaft B, wie 7 zu 5. Es gilt also $A:B = 7:5$ oder in der Bruchschreibweise $\frac{A}{B} = \frac{7}{5}$. Bei dieser Grundvorstellung ist es wichtig, dass SchülerInnen nicht zu früh damit konfrontiert werden. Sie sollten zumindest zuerst in der Addition fundierte Vorstellungen besitzen, bevor sie diese kennenlernen, da auch dadurch der häufige Additionsfehler $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ gerechtfertigt wird, da im Bereich der Proportionalität, diese Form der Addition einen Sinn hat.

2.4.7 Mehrere Darstellungen für eine Bruchzahl

Diese Vorstellung ist der wichtigste Teil des Äquivalenzklassenkonzeptes, und meint, dass mehrere Brüche ein und dieselbe Zahl darstellen. Diese Vorstellung sollte bei den Lernenden zuerst über Beispiele aus dem Alltag hervorgerufen werden, zum Beispiel, dass in eine $\frac{1}{2}$ – Literflasche auch $\frac{2}{4}$ Liter Wasser hineinpassen, oder dass ein Kilogramm Brot aus zwei Brothälften zu jeweils einem halben Kilogramm besteht. Danach sollte diese Vorstellung aber vom Größenkonzept abstrahiert werden, wofür ein Zahlenstrahl sehr gut geeignet ist. Die SchülerInnen sollen verschiedene Brüche

am Zahlenstrahl einzeichnen und werden so erkennen, dass mehrere Brüche eine Bruchzahl repräsentieren können. Durch das Arbeiten am Zahlenstrahl bekommen SchülerInnen auch gleich ein erstes Gefühl dafür wie Brüche größenmäßig angeordnet sind.

2.4.8 Erweitern als Verfeinern und Kürzen als Vergrößern

Damit Lernende diese Grundvorstellung entwickeln können, ist die letzte Grundvorstellung unabkömmlich, denn um Brüche zu erweitern beziehungsweise zu kürzen, müssen die SchülerInnen bereits erkannt haben, dass es für eine Bruchzahl immer mehrere Darstellungen gibt. Erweitern als Verfeinern meint, dass man eine Bruchzahl anders darstellt, indem man die Einteilung verkleinert, also den Nenner vergrößert, und dementsprechend auch den Zähler anpasst. Eine geeignete Tätigkeit dafür sind Blattfaltungen. An der folgenden Abbildung wird die Übung genauer erläutert.

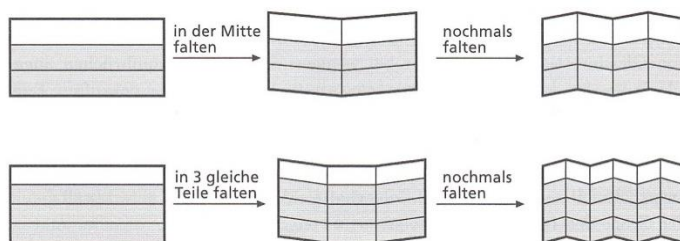


Abbildung: Mehrere Darstellungen für eine Bruchzahl (siehe Padberg, Didaktik der Bruchrechnung 2009: S.48)

Hier wird das Blatt zuerst in drei gleiche Teile gefaltet und anschließend zwei dieser Teile, also $\frac{2}{3}$ eingefärbt. Im Anschluss wird das Blatt in der Mitte, in die andere Faltrichtung gefaltet, und es ergeben sich nun Sechstel. Der eingefärbte Teil sind nun $\frac{4}{6}$. Wenn man nun noch einmal die Einteilung verkleinert, kommt man auf Zwölftel. Die SchülerInnen können auch selbst experimentieren, und eigene Einteilungen treffen. Durch Rückgängigmachen des Faltens kann man auch gleich das Kürzen als Vorstellung des Vergrößerns der Einteilung einführen.

2.4.9 Addition als Hinzu- beziehungsweise Zusammenfügen und als Vorwärtsschreiten am Zahlenstrahl

Wie auch schon in der Menge der natürlichen und der ganzen Zahlen, ist die Vorstellung der Addition als Hinzufügen beziehungsweise Zusammenfügen sehr wichtig. Diese Vorstellung kann durch die Erfahrungen der Kinder, mit einfachen Beispielen aus dem Alltag entwickelt werden. Ein Beispiel dafür wäre $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, also zum Beispiel ein Viertel Torte plus ein Viertel Torte ergibt zwei Viertel Torten und das ist eine halbe Torte. Wichtig für einen geeigneten Aufbau von Vorstellungen bei den Kindern ist es, die Aufgaben auch immer graphisch zu unterstützen, also zum Beispiel durch das Aufmalen einer Torte oder einer $\frac{1}{2}$ - Literflasche. Später kann dies dann abstrahiert werden, und statt Torten werden dann Kreise, Rechtecke, Längenabschnitte usw. aufgezeichnet. Eine weitere wichtige Vorstellung ist die Addition als Voranschreiten, oder nach rechts gehen auf dem Zahlenstrahl (siehe Malle 2004, Grundvorstellungen zu Bruchzahlen: S.6), wie in diesem Beispiel:

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

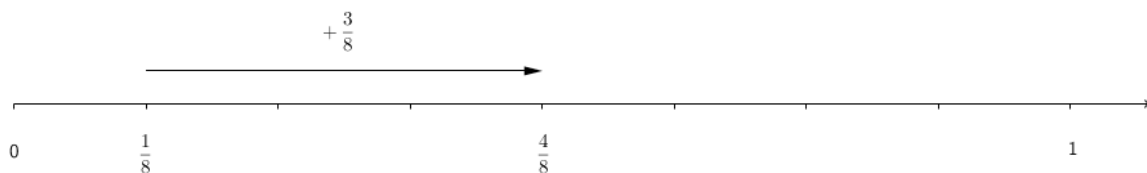


Abbildung: Bruchaddition als Voranschreiten auf der Zahlengerade

2.4.10 Subtraktion als Wegnehmen und als Rückwärtsschreiten am Zahlenstrahl

Analog zur Addition sind die Grundvorstellungen zur Subtraktion. Die Subtraktion soll als Wegnehmen gedeutet werden, wobei wieder mit einfachen Beispielen aus dem Alltag gearbeitet werden kann, also zum Beispiel: „Von einer Literflasche Mineralwasser fehlt ein Viertel. Wie viel ist noch in der Flasche?“. Wie bei der Addition sollte auch die Subtraktion durch Bilder unterstützt werden, am besten zuerst wieder mit konkreten Bildern, wie in diesem Fall mit einer Wasserflasche, welche später durch abstraktere Darstellungen, wie Kreise und Rechtecke ersetzt werden. Auf dem Zahlenstrahl kann man sich die Subtraktion als ein

Rückwärtsgehen oder Nach-Links-Gehen vorstellen. Ein Beispiel dafür ist folgende Abbildung:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$



Abbildung: Bruchsubtraktion als Rückwärtsgehen auf der Zahlengerade

2.4.11 Multiplizieren als wiederholte Addition

In den Spezialfällen der Multiplikation „natürliche Zahl mal Bruchzahl“ und „Bruchzahl mal natürliche Zahl“, wenn man davon ausgeht, dass das Kommutativgesetz gilt, kann die Multiplikation, wie schon im Bereich der natürlichen Zahlen als wiederholte Addition gedeutet werden, wie in folgendem Beispiel ersichtlich ist: $5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Wenn es nun darum geht zwei Bruchzahlen, die keine natürlichen Zahlen sind, miteinander zu multiplizieren, greift die Vorstellung der wiederholten Addition nicht mehr, denn es wäre zum Beispiel nicht möglich und vor allem nicht sinnvoll, $\frac{2}{3}$ mal die Zahl $\frac{1}{2}$ zu addieren. Um also bei den SchülerInnen ein tiefgehendes Verständnis der Multiplikation zweier Bruchzahlen zu erreichen, bedarf es einer neuen Grundvorstellung, nämlich dem Von- Ansatz.

2.4.12 Multiplizieren mithilfe der Von-Vorstellung und über den Flächeninhalt

Der Von-Ansatz meint, dass zum Beispiel die Multiplikation $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ als $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{2}$ beziehungsweise umgekehrt $\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{3}$ gedeutet wird. Um diese Grundvorstellung wirklich bei den Kindern hervorzurufen ist es natürlich notwendig, dass die Kinder erkennen, warum „mal“ plötzlich „von“ bedeutet. Dafür muss sich die Lehrperson

unbedingt mit einer klaren, verständlichen Erklärung rechtfertigen, am besten auf ikonischer oder sogar enaktiver Ebene. Wir bleiben bei unserem Beispiel und teilen ein Einheitsquadrat, also ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 in zwei Hälften, wobei wir eine Hälfte anmalen, um den Bruch $\frac{1}{2}$ darzustellen. Nun teilen wir das Blatt in Drittel, wobei die Einteilung quer zur vorhergehenden Einteilung getroffen werden muss, und malen zwei Drittel mit einer anderen Farbe an. Die Bruchteile, die doppelt eingefärbt sind, repräsentieren also unsere Lösung $\frac{2}{6}$ (siehe Abbildung). Aus der Abbildung kann man sehr gut ablesen, dass $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{3}$ gleich $\frac{2}{6}$ sein muss. Um nun zu erklären, wieso „von“ in „mal“ übersetzt wird, benötigen wir die Flächeninhaltsformel für Rechtecke, denn unser Ergebnis $\frac{2}{6}$ repräsentiert gleichzeitig den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$. Da der Flächeninhalt durch das Produkt der beiden Seitenlängen bestimmt wird, ist klar, dass gelten muss $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$.

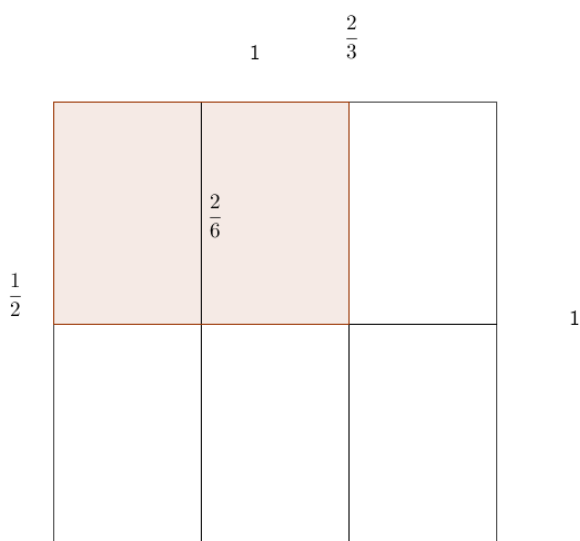


Abbildung: Multiplikation zweier Bruchzahlen über den Flächeninhalt

Ein ähnlicher Zugang zur Multiplikation ist der Zugang, rein über Flächeninhalte von Rechtecken. Grundidee dieser Vorstellung ist, dass die Flächeninhaltsformel $A = a \cdot b$ für Rechtecke, mit den Seitenlängen a und b , auch für Seitenlängen mit Bruchzahlen gilt. Diese Idee wird nun an unserer Aufgabe $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ und mithilfe obiger Skizze erklärt. Um diese Rechnung zu lösen, muss man ein Einheitsquadrat, wie

oben erklärt, zuerst in drei Teile teilen und dann nochmal in die andere Richtung in zwei Teile, sodass insgesamt $2 \cdot 3 = 6$ flächeninhaltsgleiche Rechtecke entstehen. Von diesen Rechtecken werden nun $2 \cdot 1 = 2$ genommen. Wir haben also 2 von 6 Rechtecksflächen als Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2}$. Beim Erweitern von Zahlenbereichen spielt das Permanenzprinzip eine große Rolle, dessen wichtigster Punkt es ist, bei Zahlenbereichserweiterungen so viele Gegebenheiten und Regelwerke wie möglich aus dem alten Zahlenbereichen in den neuen Zahlenbereich zu übernehmen. Um das Permanenzprinzip also zu erfüllen, wird verlangt, dass die Flächeninhaltsformeln für Rechtecke auch für Seitenlängen mit Brüchen als Maßzahl gelten müssen. Es muss also gelten $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$. Dieser Zugang zur Multiplikation von Bruchzahlen gehört nicht unbedingt zum Grundstock der Grundvorstellungen, jedoch ist er eine interessante Möglichkeit zur Vertiefung, welche die SchülerInnen auch selbst erarbeiten können. Außerdem bietet er eine interessante und verständliche Herleitung der Multiplikationsregeln von Bruchzahlen.

2.4.13 Division als wiederholte Subtraktion

Analog zur Multiplikation ist die Vorstellung der Division als wiederholte Subtraktion nur in dem Spezialfall „natürliche Zahl durch Bruchzahl“ sinnvoll, und da auch nur, wenn dies ohne Rest durchführbar ist.

2.4.14 Dividieren zweier Bruchzahlen als Messen

Die zwei grundlegendsten Vorstellungen der Division, die im Mathematikunterricht inzwischen unverzichtbar geworden sind, sind das Dividieren als Teilen und als Messen. Ein Beispiel für das Dividieren als Teilen ist folgendes: „Wir haben ein Seil mit 30 cm Länge und brauchen Seilstücke zu je 6 cm Länge. Wieviele Stücke zu 6 cm erhält man aus diesem Seil?“ Ein Beispiel für das Messen ist „Ein Seil mit einer Länge von 30 cm wird in 5 Stücke geteilt. Wie lang ist ein Stück?“ Im Gegensatz zu der Grundvorstellung Teilen, die nur in den natürlichen Zahlen funktioniert, ist die Vorstellung der Division als Messen auch im Bereich der Bruchzahlen tragfähig. Bei einer Division von zwei Bruchzahlen sollen die Lernenden sich vorstellen, wie oft der Divisor in den Dividenten passt. Besonders leicht ist dies, wenn der Divident eine natürliche Zahl ist, oder wenn es sich um gleichnamige Brüche handelt. Es ist auch wichtig, dass SchülerInnen lernen, dass im Bereich der Bruchzahlen, jede Division restlos lösbar ist.

2.4.15 Dividieren als Umkehroperation

Ein weiterer sehr interessanter Zugang zur Division ist die Einführung über die Umkehroperation der Multiplikation. Bei der Division $\frac{2}{3} : \frac{2}{5}$ wird die Zahl x gesucht, die mit $\frac{2}{5}$ multipliziert $\frac{2}{3}$ ergibt, man schreibt also folgende Gleichung an: $x \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{3}$ und multipliziert anschließend auf beiden Seiten mit $\frac{5}{2}$, wodurch sich folgende Gleichung ergibt: $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}$ und man hat somit schon die Rechenregel für die Bruchdivision hergeleitet, denn es gilt $\frac{2}{3} : \frac{2}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}$. Die Herleitung dieser Rechenregel sollte man im Anschluss auch mit allgemeinen Brüchen behandeln, und man erhält $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. Während das Dividieren als Messen eine konkrete Vorstellung der Handlung beim Dividieren von Brüchen vermittelt, gibt der Weg über die Umkehroperation eine mathematisch inhaltliche Herleitung der Rechenregel, die aber nur innermathematisch motiviert ist.

3. Irritationen im Mathematikunterricht als Bildungschance nutzen

Das Kapitel der Bruchrechnung sorgt bei SchülerInnen und auch bei LehrerInnen, trotz jahrelanger fachdidaktischer Auseinandersetzung, bei denen immer wieder neue Zugänge, neue Veranschaulichungen und neue Übungsformen entwickelt wurden, für große Probleme. Im folgenden Abschnitt wird versucht zu erklären, wie es generell zu Fehlvorstellungen kommt, wozu sie gut sind, welche Fehlvorstellungen in der Bruchrechnung präsent sind, und wie man Unterricht gestalten kann, um diese Irritationen vorteilhaft zu nutzen.

3.1 Wie kommt es zu Fehlvorstellungen im Bereich der Bruchzahlen

Da die Bruchzahlen und vor allem das Rechnen mit Bruchzahlen sehr anspruchsvolle Themen der Unterstufe sind, sollte die semantische Seite stärker betont werden als die syntaktische. Aufgaben sollten also durch die Verwendung verschiedenster Grundvorstellungen gelöst werden, und nicht nur durch auswendig gelernte Regeln, die für Verwechslungen sehr anfällig sind. Soll zum Beispiel die Division $30:\frac{1}{4}$ gelöst werden, so ist es für SchülerInnen oft sinnvoller dies über Grundvorstellungen zu tun, zum Beispiel: „Ein Viertel passt 4-mal in 1, also 120-mal in 30“ (siehe Winter 1999, Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht: S.2). Viele SchülerInnen jedoch lösen solche Aufgaben lieber mit der Rechenregel, die sie auswendig gelernt haben, weil sie darin mehr vertrauen als in ihre Grundvorstellungen, was einerseits die Formelsucht widerspiegelt und andererseits zeigt, dass Grundvorstellungen zu Bruchzahlen zu wenig ausgeprägt sind. Die größte Schwierigkeit bei der Einführung der Bruchzahlen in der Schule besteht darin, dass für SchülerInnen der Übergang zwischen den natürlichen Zahlen, die für sie jahrelang die einzig existenten Zahlen waren, und den neuen Zahlen, den Bruchzahlen sehr schwierig ist. Bei diesem Übergang entstehen Sprünge, wodurch sie tiefliegende Überzeugungen anzweifeln müssen, die sich

jahrelang als richtig erwiesen haben, und nun plötzlich nicht mehr gelten sollen. Ein Beispiel dafür stellt die Multiplikation dar. Im Bereich der natürlichen Zahlen ist klar, dass das Produkt immer größer oder zumindest gleich groß sein muss wie die beiden Faktoren, da es bei der Multiplikation darum geht eine Zahl zu vervielfachen. Im Bereich der Bruchzahlen bekommt die Multiplikation eine ganz neue Bedeutung, denn es geht nun darum Anteile zu bestimmen. Wenn Kinder diese Vorstellung nicht verstehen, so scheint es für sie unverständlich, dass das Ergebnis einer Multiplikation im Allgemeinen kleiner ist als die beiden Faktoren. Diese Umbrüche der Grundvorstellungen müssen unbedingt thematisiert werden. Wie Winter beschreibt, ist die Zahlenbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen doppelter Natur. Sie besteht einerseits aus der Assimilation, das heißt das alte Wissen gilt in dem Zahlenbereich weiterhin, und der Akkommodation, was bedeutet, dass das Wissen entweder angepasst, oder verworfen und ein neues Wissen gebildet werden muss. Da bei Zahlenbereichserweiterungen das Permanenzprinzip eine wichtige Rolle spielt, ist es unbedingt notwendig, Altbekanntes für die neuen Zahlen anzupassen. Gleichzeitig muss man die Grenzen des Permanenzprinzips erkennen und das Kreieren neuen Wissens und neuer Vorstellungen zulassen und fördern. Laut Piaget, der die Begriffe „Assimilation“ und „Akkommodation“ geprägt hat, sind dies zwei Schritte, die für jegliches Lernen bereits vom Säuglingsalter an, unentbehrlich sind. Ein Beispiel für eine Assimilation eines Kleinkindes, ist folgendes: Das Kind sieht ein Tier, und die Mutter erklärt, dass es sich um einen Hund handle. Dieses Wissen legt das Kind nun auf andere Tiere um, und bezeichnet jedes Tier mit Fell und vier Beinen als Hund. Ein Beispiel für eine gelungene Akkommodation ist, wenn das Kind nun erkennt, dass dieses Schema, nicht auf alle Tiere anzuwenden ist. Das Kind lernt also, dass zum Beispiel eine Katze kein Hund sein kann, da Katzen viel kleiner sind als Hunde. Besonders bei Kleinkindern, die täglich so viel Neues dazulernen, finden die Prozesse der Assimilation und der Akkommodation sehr häufig statt. Es ist deswegen naheliegend, dass Assimilation und Akkommodation auch beim Lernen in komplexeren Bereichen, wie der Mathematik, eine wichtige Rolle spielen.

Eine für SchülerInnen wichtige Erkenntnis ist auch, dass natürliche Zahlen auch zu den Bruchzahlen gehören, denn sie sind spezielle Bruchzahlen. Welche Grundvorstellungen durch die Zahlenbereichserweiterung angegriffen werden und welche Fehlvorstellungen daraus resultieren können wird im Abschnitt 3.4 genauer

ausgeführt. Im nächsten Abschnitt wird erklärt, dass solche Umbrüche der Grundvorstellungen bei SchülerInnen einen Lernprozess auslösen, und dass solche Irritationen beziehungsweise Denkhürden unerlässlich für einen effizienten Mathematikunterricht sind.

3.2 Problemlösen und epistemologische Denkhürden als Unterrichtsprinzip

Der Mathematikunterricht ist geprägt von einer langen Tradition des Problemlösens. Die SchülerInnen bekommen üblicherweise Aufgaben gestellt, in denen Probleme zu dem gerade behandelten Thema gelöst werden müssen. Beim Lösen von Aufgaben stehen SchülerInnen immer wieder vor Schwierigkeiten. Schülerfehler sind, wie früher von empirischen und behavioristischen Theorien behauptet, weder die Folge von Ignoranz und Desinteresse des/der Lernenden, noch handelt es sich dabei immer um Flüchtigkeitsfehler. Vielmehr resultieren die Fehler oft aus einem Konzeptwechsel, der fehlerhaft verläuft, das heißt aus früherem Wissen, das nun nicht mehr funktioniert. Dieses Wissen war für den Lernenden bisher erfolgreich anwendbar, plötzlich aber stellt es sich als falsch oder einfach als unangepasst heraus. Ein Beispiel dafür ist die Eindeutigkeit der Darstellung von Zahlen. Bis jetzt war es für SchülerInnen klar, dass es für eine Zahl nur genau eine Darstellung gibt. Wenn SchülerInnen versuchen dieses Konzept auf den Bereich der Bruchzahlen umzulegen, werden sie vor Schwierigkeiten stehen. Es wird ihnen schwer fallen zu verstehen, dass es nun für eine Bruchzahl unendlich viele Darstellungen gibt. Diese Irritationen, oder „obstacles épistémologiques“ wie Brousseau sie in seinem Artikel „Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques“ nennt, repräsentieren einen grundlegenden Schritt für Lernprozesse. Lernprozesse verlaufen nicht kumulativ, was bedeutet, dass neues Wissen nicht additiv hinzugefügt wird, sondern, dass Lernen eine Reorganisation von Wissen erfordert. Für einen erfolgreichen Lernprozess ist es also notwendig, dass SchülerInnen permanent mit Problemen konfrontiert werden, wodurch ihr tief verwurzeltes Wissen angegriffen wird. Sie werden gefordert, ihr früheres Wissen zu aktivieren, dieses die Situation betreffend zu prüfen, es entsprechend anzupassen oder zu verwerfen, um neue Erkenntnisse und Auffassungen zu gewinnen. Fehler, die SchülerInnen dabei

passieren, sind die Folge des Nichtüberwindens von Diskontinuitäten zwischen dem bereits bestehenden Wissen und dem neuen Wissen. Sie sind sehr hartnäckig und kommen immer wieder vor, besonders wenn der/die Lernende unter Stress steht, denn in Stresssituationen wird oft wider besseren Wissens auf altbekanntes Wissen zurückgegriffen. Um den SchülerInnen dabei zu helfen diese Hürden zu überwinden, ist es wichtig, dass sie bei Behandlung eines Problems in ständiger Interaktion mit ihrer Umgebung stehen und dass sie selbst auch motiviert sind dieses Problem zu lösen. Denn nur wenn die Lernenden sich auf die Aufgaben einlassen und bestrebt sind, die darin gestellten Probleme zu lösen, kann das Überwinden der Denkhürden funktionieren und zielführend sein.

Bedingungen, die einen Konzeptwechsel, also das Überwinden einer epistemologischen Denkhürde fördern, sind folgende:

- Unzufriedenheit mit dem bereits vorhandenen Konzept.
- Das neue Konzept muss zugänglich erscheinen, das heißt die Lernenden müssen es verstehen.
- Das neue Konzept muss plausibel erscheinen, das heißt SchülerInnen müssen das Gefühl haben, dass dieses Konzept besser sei als das alte.
- Das neue Konzept muss fruchtbar erscheinen, das heißt es muss vielseitig angewendet werden können.

(siehe Prediger 2007, Konzeptwechsel in der Bruchrechnung: S. 205).

Das alte Wissen kann dabei so etwas wie eine Sichtbeschränkung darstellen, die den Schüler/die Schülerin daran hindern neue Probleme zu lösen. Diese Sichtbeschränkungen müssen nun durch Erweiterung der Grundvorstellungen reduziert werden, was nur funktionieren kann, wenn die Lernenden verstehen, wozu sie neue oder veränderte Grundvorstellungen brauchen. Prediger meint in ihrem Artikel „Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen?“, dass das Konzept der epistemologischen Denkhürden nicht nur als deskriptive Kategorie zu sehen ist, wie es momentan der Fall ist, sondern auch als normative Kategorie. Dies würde bedeuten, dass epistemologische Denkhürden nicht nur Bestandteile des Lernprozesses sind, sondern als Bestandteil des mathematischen Wissens an sich verstanden und als Bildungsinhalte ernstgenommen werden. Das Aufgreifen solcher Hürden wird also als Bildungsanlass gesehen. Aufgabe der Fachdidaktik ist es nun, Aufgaben zu entwickeln, die SchülerInnen vor Hürden zu stellen, die sie durch eben

beschriebene Vorgänge überwinden müssen. Das dazu notwendige Reflektieren über bereits erworbenes Wissen und das Einsehen, dass gewisse Konzepte in bestimmten Bereichen nicht zielführend sind, ist ein unentbehrlicher Teil eines effektiven Lernprozesses. Es ist dabei wichtig Aufgaben mit realistischen Problemstellungen zu finden um SchülerInnen zu motivieren, und die in Schulbüchern so oft vorkommenden, schlecht eingekleideten Aufgaben zu vermeiden.

3.3 Wie geht man als Lehrperson mit Irritationen um?

Winter beschreibt Fehlvorstellungen als eine „unhintergehbare und nicht einfach hinwegmethodisierbare Schwierigkeit der Bruchrechnung“ (siehe Winter 1999, Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht: S.18). Er meint also, dass man diese Fehlvorstellungen nicht einfach ignorieren oder im Unterricht umschiffen kann, sondern dass sie, wie im vorigen Abschnitt beschrieben wurde, sogar notwendig sind um zu lernen. Diese Erkenntnis, Umbrüche der Grundvorstellungen als wertvolle Lernchance anzusehen, war ein Wandel in der Perspektive der Didaktiker. Während Fehlvorstellungen früher als störend angesehen wurden, und eine Beschäftigung mit ihnen im Unterricht vermieden wurden, so repräsentieren sie heute eine Voraussetzung für effizientes Lernen. Es ist also Aufgabe der MathematiklehrerInnen solche Umbrüche bei den SchülerInnen zu provozieren und dann selbstverständlich darauf einzugehen. Die Voraussetzung für Lernende, damit sie überhaupt die Chance haben, eine solche Hürde überwinden zu können, sind vielfältige Grundvorstellungen. Ohne vielfältige und tragfähige Grundvorstellungen sind viele mathematische Probleme unlösbar. Mithilfe der Grundvorstellungen sollen SchülerInnen zwar durch eigene Überlegungen zu einer Problemlösung kommen, jedoch dürfen sie nicht das Gefühl haben, bei den so wichtigen Bruchstellen, wo ihr altes Wissen nicht mehr funktioniert, von der Lehrperson alleine gelassen zu werden. Die Lehrperson soll das Überwinden dieser Hürden unterstützen, indem sie Fehlvorstellungen an geeigneten Stellen im Unterricht thematisiert. Wichtig ist dabei, zwar auf schon Bekanntes zurückzugreifen, jedoch den SchülerInnen klar zu machen, wieso altbewährte Methoden plötzlich nicht mehr funktionieren, und wie man zu neuen Methoden gelangt. Dies heißt aber auf

keinen Fall, dass der Lehrer/die Lehrerin den SchülerInnen sofort die neuen Erkenntnisse und Auffassungen präsentieren soll. Die Lernenden müssen zuerst mit dem Problem konfrontiert werden, sich damit beschäftigen und dann erst soll die Lehrkraft bei Bedarf unterstützend eingreifen. Wenn SchülerInnen Problemlösungen sofort präsentiert bekommen, so geben sie selbst zu schnell auf, und das Überwinden der Hürde kann nicht geschehen, ja oft erkennen sie die Hürde gar nicht. Sie lernen das neue Wissen dann, einfach auswendig ohne es zu verstehen, wodurch sie in der Anwendung beim Lösen von Aufgaben natürlich fehleranfällig werden.

In den meisten Schulbüchern hat sich der Ansatz, Irritationen zu thematisieren, nicht wirklich durchgesetzt (mehr dazu im Kapitel 4). Es liegt also an der Lehrperson den Unterricht so zu gestalten, dass SchülerInnen mit Denkhürden konfrontiert werden. Vorschläge für die Thematisierung einiger Fehlvorstellungen sind im Kapitel 3.5 zu finden, doch zuerst werden konkrete Fehlvorstellungen im Bereich der Bruchzahlen angeführt, die bei SchülerInnen sehr häufig zu beobachten sind.

3.4 Fehlvorstellungen im Bereich der Bruchzahlen

Die Vorstellungen, die SchülerInnen zu Zahlen haben, bevor die Bruchzahlen eingeführt werden, beschränken sich auf die natürlichen Zahlen. Jahrelang waren die natürlichen Zahlen, die für sie einzig existenten Zahlen, und natürlich haben die Lernenden dazu zahlreiche Vorstellungen aufgebaut, die teilweise fest verankert sind. Folgende Zahlaspekte von den natürlichen Zahlen sind in den meisten Vorstellungen zu Zahlen bei den Kindern enthalten:

- Kardinalzahlaspekt: Natürliche Zahlen dienen zur Beschreibung von Anzahlen.
- Ordinalzahlaspekt: Natürliche Zahlen kennzeichnen eine Reihenfolge.
- Maßzahlaspekt: Natürliche Zahlen dienen zum Beschreiben von Größen (Wie lang?).
- Operatoraspekt: Natürliche Zahlen beschreiben die Vielfachheit eines Handelns oder eines Vorgangs (Wie oft?).
- Rechenzahlaspekt: Natürliche Zahlen werden zum Rechnen benutzt.

- Codierungsaspekt: Natürliche Zahlen kennzeichnen zum Beispiel Telefonnummern.

(siehe Padberg 2009, Didaktik der Bruchrechnung: S.45)

Übertragen auf die Bruchzahlen sind viele dieser Aspekte plötzlich nicht mehr gültig beziehungsweise müssen angepasst werden. Während zum Beispiel der Rechenzahlaspekt unverändert bleibt, muss der Operatoraspekt modifiziert werden und der Kardinal- und Ordinalzahlaspekt ergeben in den meisten Fällen gar keinen Sinn mehr. Das erste Mal im Mathematikunterricht müssen die Kinder nun einsehen, dass ihre alten Auffassungen, ihr altes Wissen nicht mehr zielführend sind, und sie müssen ihr Wissen anpassen beziehungsweise neues kreieren. Zwischen den Bruchzahlen und den natürlichen Zahlen gibt es wichtige Unterschiede, wobei das Nichtbegreifen dieser Unterschiede, also das Nichtüberwinden dieser Hürden, die Ursache zahlreicher Schülerfehler ist. In den folgenden Unterkapiteln werden die häufigsten Probleme beziehungsweise Fehler der SchülerInnen aufgelistet (zum Großteil aus „Didaktik der Bruchrechnung“, von Padberg übernommen), deren Ursache zum Großteil in den Unterschieden zwischen den natürlichen Zahlen und den Bruchzahlen liegen. Die Zahlen zu den Fehlern, die angegeben werden, stammen ebenfalls aus „Didaktik der Bruchrechnung“ wobei Padberg die Ergebnisse aus folgenden Studien entnommen hat: die Studie ERaB (Entwicklung von Rechenanwendungen in der Bruchrechnung) von Martin Hennecke und Kathrin Winter von der Universität Hildesheim; das PALMA-Projekt, Untersuchung größtenteils von Sebastian Wartha von der Universität Bielefeld und umfangreiche, von den Autoren von „Didaktik der Bruchrechnung“ durchgeführte Studien an der Universität Bielefeld.

3.4.1 Eindeutigkeit der Notation

Im Bereich der natürlichen Zahlen gibt es genau eine Darstellung für eine Zahl, die aus nur einem Wort besteht. Bei den Bruchzahlen, besteht eine Zahl erstens aus zwei oder drei Wörtern (zum Beispiel „Zwei Siebentel“ oder „Zwei durch Sieben“) und zweitens gibt es für eine Zahl unendlich viele Darstellungen (zum Beispiel $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \dots$), was für SchülerInnen zu Beginn sehr verwirrend sein kann. Außerdem muss diese Eigenschaft sogar beim Rechnen, also beim gleichnamig Machen für die Addition oder Subtraktion verwendet werden.

3.4.2 Ordnung und Dichtheit

So wie natürliche Zahlen lassen sich auch Bruchzahlen der Größe nach auf einem Zahlenstrahl ordnen, jedoch mit einem schwerwiegenden Unterschied zu den natürlichen Zahlen, was einen Grundvorstellungsumbruch hervorruft. Im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen, die man sich als eine nicht endende Perlenkette vorstellen kann, mit einem ersten Glied und mit eindeutig bestimmten Vorgängern (außer beim ersten Glied) und Nachfolgern, funktioniert diese Veranschaulichung mit Bruchzahlen nicht. Grund dafür ist, dass es in der Menge der positiven Bruchzahlen erstens kein kleinstes Element gibt, also kein Anfangsglied und zweitens besitzen Bruchzahlen keine direkten Vorgänger oder Nachfolger, was daran liegt, dass die Bruchzahlen dicht liegen, nicht so wie die natürlichen Zahlen, die diskret liegen. Das bedeutet, dass man zwischen zwei Bruchzahlen immer eine weitere Bruchzahl finden kann, egal wie klein ihre Differenz ist, und das wiederum heißt, dass zwischen zwei Bruchzahlen immer unendlich viele weitere Bruchzahlen liegen.

Das Ordnen von Bruchzahlen fällt SchülerInnen bedeutend schwerer als das Ordnen von natürlichen Zahlen, wobei folgende Fehler des Öfteren beobachtet wurden:

- Kleinerer Nenner bedeutet größere Zahl, unabhängig vom Zähler: Hier wird der Blick nur auf die Größe der Teile geworfen und nicht auf die Anzahl der Teile. Zum Beispiel: $\frac{1}{3} > \frac{4}{7}$ weil $3 < 7$.
- Größerer Nenner bedeutet größere Bruchzahl: Ein Beispiel dafür ist $\frac{1}{3} < \frac{1}{4}$ weil $3 < 4$. Die Ordnung der natürlichen Zahlen wird also fälschlicherweise auf die entsprechenden Stammbrüche übertragen.
- Größerer Zähler bedeutet größere Bruchzahl: Es wird nur die Anzahl der Teile und nicht deren Größe berücksichtigt. Ein Beispiel dafür: $\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$ weil $4 < 5$.
- Zähler und Nenner werden getrennt betrachtet, zum Beispiel: $\frac{3}{5} < \frac{5}{12}$ weil $3 < 5$ und $5 < 12$. Der Bruch wird also nicht als eine Zahl aufgefasst, sondern als Paar zweier natürlicher Zahlen, wie es das Äquivalenzklassenkonzept vorsieht. Um Bruchzahlen zu vergleichen, ist dieses Konzept jedoch völlig ungeeignet, da man sich unter einem Zahlenpaar, also unter einem Vertreter einer Äquivalenzklasse, keine Größen vorstellen kann.

Dazu ist das Größenkonzept hilfreich, denn so wird eine Bruchzahl auch als eine selbstständige Zahl angesehen.

(siehe Padberg 2009, Didaktik der Bruchrechnung: S.66)

3.4.3 Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen

Diesen Punkt betreffend, ist es sehr wichtig, dass SchülerInnen klar wird, dass natürliche Zahlen einfach spezielle Bruchzahlen sind, und sie somit auch zu den Bruchzahlen zählen. Sie müssen verstehen, dass die Zahl n und die Zahl $\frac{n}{1}$ auf dem Zahlenstrahl dieselbe Position haben. Sehr viele SchülerInnen machen folgenden Fehler systematisch: $n = \frac{n}{n}$. Dieser Fehler geschieht, wenn die Lernenden versuchen, auf rein syntaktischer Ebene eine natürliche Zahl als Bruchzahl anzuschreiben, denn würden sie inhaltliche Überlegungen anstellen, müssten sie bemerken, dass $\frac{n}{n}$ immer gleich 1 ist und somit $\frac{n}{n} = n$ nur für $n = 1$ gilt. Bei den Problemen, die im Punkt 3.4.4 bis 3.4.8 angeführt sind, tritt die falsche Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen immer wieder als Ursache auf.

3.4.4 Erweitern und Kürzen

Eine wichtige Vorstellung dieser beiden Vorgänge ist, dass die Bruchzahl dabei unverändert bleibt, und nicht wie fälschlicherweise oft geglaubt wird, dass beim Erweitern vergrößert und beim Kürzen verkleinert wird. In diesem Bereich gibt es allerdings selten Schwierigkeiten bei den SchülerInnen, außer wenn es darum geht, natürliche Zahlen in die Bruchzahlen einzubetten, wie im vorigen Abschnitt erklärt wurde. Unsicherheiten treten bei den SchülerInnen also bei Aufgaben folgender Art auf: $5 = \frac{\quad}{3}$ (siehe Padberg 2009, Didaktik der Bruchrechnung: S. 56).

3.4.5 Addition

Bei der Addition gibt es zwischen den natürlichen Zahlen und den Bruchzahlen keine wesentlichen Grundvorstellungsumbrüche, dennoch geschehen dabei Fehler. Die Prozentangaben stammen aus einer von Padberg durchgeführten Studie. Am wenigsten Fehler geschehen bei der Addition zweier gleichnamiger Brüche (85% richtige Lösungen), etwas mehr Fehler bereits bei der Addition zweier ungleichnamiger Brüche (70% richtige Lösungen). Nur etwas mehr als die Hälfte der SchülerInnen lösen Aufgaben richtig, in denen man eine natürliche Zahl zu einer Bruchzahl addieren muss oder umgekehrt. Der häufigste Fehler beim Addieren

zweier ungleichnamiger Brüche ist folgender: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Viele SchülerInnen machen diesen Fehler systematisch, und sogar 10 % von den SchülerInnen, die Brüche auf diese Art addieren, definieren die Additionsregel für Brüche auf diese Weise. Ursache dafür ist ein unzureichendes Bruchzahlenverständnis, denn viele SchülerInnen, die diesen Fehler machen, sehen einen Bruch nicht als eine Zahl sondern als zwei voneinander unabhängige Zahlen, die sie getrennt voneinander addieren können. Eine weitere Ursache ist das Verwechseln der Bruchaddition mit der Addition von Verhältnissen, die sie aus dem täglichen Leben kennen. Außerdem ist das Verwechseln mit der Multiplikationsregel ein Grund für diesen Fehler. Wenn es nun darum geht, eine natürliche Zahl mit einer Bruchzahl zu addieren oder umgekehrt, so ist folgender Fehler unter den SchülerInnen federführend: $n + \frac{a}{b} = \frac{n+a}{b}$ oder $\frac{a}{b} + n = \frac{a+n}{b}$. Ursache für diesen Fehler ist ein zu starkes Agieren auf der syntaktischen Ebene. Während dieser Aufgabentyp auf rein semantischer Ebene nicht schwer zu lösen ist, so geschieht auf der syntaktischen Ebene eine falsche Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen. Es wird also die natürliche Zahl n in die Bruchzahlen eingebettet, indem im Zuge der Addition angenommen wird, dass gilt $n = \frac{n}{b}$, was natürlich falsch ist. Ein weiterer Grund für das Auftreten dieses Fehlers ist wiederum die Verwechslung mit der Multiplikation: $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}$. Das so zahlreiche Auftreten von Fehlern bei der Addition, wo es, wie bereits erwähnt, keine oder nur wenige Umbrüche der Grundvorstellungen gibt, ist darauf zurückzuführen, dass die Grundvorstellungen der Addition von Brüchen bei SchülerInnen viel zu wenig ausgeprägt sind. Es schaffen zum Beispiel nur sehr wenige SchülerInnen eine Addition graphisch sinnvoll darzustellen.

3.4.6 Subtraktion

Die Probleme bei der Subtraktion sind in etwa analog wie die der Addition zu verstehen, außer dass der Fehler $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$ nur auftritt, wenn gleichsinniges Subtrahieren möglich ist - das bedeutet nur, wenn a und b beide größer oder kleiner sind als c und d .

3.4.7 Multiplikation

Bei der Multiplikation gibt es einen radikalen Grundvorstellungsumbruch, und zwar, dass das Ergebnis einer Multiplikation, also das Produkt, plötzlich kleiner sein kann,

als einer oder beide der Faktoren. Nicht selten hört man Sätze von SchülerInnen wie zum Beispiel „Das Ergebnis von $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$ ist $\frac{1}{4}$. Aber das kann doch nicht stimmen oder? Weil das Ergebnis darf doch nicht kleiner sein als $\frac{1}{3}$ beziehungsweise $\frac{3}{4}$!“ Um dies zu verstehen sind tiefgreifende Grundvorstellungen zur Multiplikation (siehe Kapitel 2.4.11 und 2.4.12) unentbehrlich. Untersuchungen haben ergeben, dass nur ein sehr geringer Prozentsatz der SchülerInnen etwas mit der Von-Vorstellung der Multiplikation anfangen kann, wodurch klar wird, warum viele SchülerInnen Probleme mit der Vorstellung haben, dass das Ergebnis einer Multiplikation kleiner sein kann, als die jeweiligen Faktoren. Um den SchülerInnen zu helfen diese Hürde zu überwinden, muss die Lehrperson die Lernenden unterstützen tiefgreifende Grundvorstellungen zur Multiplikation von Brüchen aufzubauen (siehe Kapitel 3.5.3).

Ein häufiger Fehler bei der Multiplikation zweier Brüche ist folgender: $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{14}$ oder allgemein $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b+b}$. Der Grund wieso SchülerInnen diesen Fehler machen ist die Verwechslung von b^2 und $2b$. Diese Verwechslung kommt auch in anderen Themenbereichen der Mathematik oft vor, geschieht aber nicht systematisch, das heißt dass diese Fehler meist nur Flüchtigkeitsfehler sind. Bei der Multiplikation zweier Brüche passieren so gut wie keine systematischen Fehler ganz im Gegensatz zur Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl, wo dieser Fehler systematisch gemacht wird: $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$ oder $\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$. Für diesen Fehler gibt es zwei Gründe, erstens wieder die falsche Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen ($n = \frac{n}{1}$) und zweitens eine Übergeneralisierung von der Regel „Zähler mal Zähler durch Nenner mal Nenner“.

Ein Fehler, der doch auch immer wieder geschieht, ist die Invertierung einer der beiden Faktoren, wobei die Multiplikationsregel mit der Divisionsregel verwechselt wird.

Ein Bereich, in dem sehr häufig Fehler auftreten, ist die Multiplikation gemischter Zahlen, wobei wir drei Fehler unterscheiden:

- Gemischte Zahl mal Bruchzahl: Hier wird die natürliche Zahl einfach beibehalten und nur die Brüche werden multipliziert, zum Beispiel: $5\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = 5\frac{3}{8}$.
- Gemischte Zahl mal natürliche Zahl: Hier werden nur die natürlichen Zahlen multipliziert und der Bruch bleibt erhalten, zum Beispiel: $2\frac{1}{2} \cdot 6 = 12\frac{1}{2}$.

- Gemischte Zahl mal gemischte Zahl: Hier werden die natürlichen Zahlen und die Bruchzahlen getrennt voneinander multipliziert, zum Beispiel: $2\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2} = 8\frac{1}{4}$.

(siehe Padberg 2009, Didaktik der Bruchrechnung: S. 117-118)

Hinter allen drei Fehlern steckt dasselbe psychologische Konzept, nämlich: „Verknüpfe Gleichartiges!“, wobei der dritte Fehler dominiert. Die großen Schwierigkeiten der Multiplikation mit gemischten Zahlen, weisen wieder auf die starke Betonung der syntaktischen Ebene im Unterricht hin. Wenn man diese Aufgaben semantisch betrachtet, sind sie nicht schwerer als Aufgaben ohne gemischte Zahlen. Um diese Fehler zu vermeiden, werden die gemischten Zahlen oft vor dem Rechnen in Brüche umgewandelt, was zwar vielleicht kurzfristig für eine geringere Fehlerquote sorgt, jedoch nicht für tieferes langfristiges Verständnis.

3.4.8 Division

Zur Division im Bereich der natürlichen Zahlen sollten aus der Volksschule zwei Grundvorstellungen existieren, nämlich die des Teilens und Messens. Außerdem war die Division nur sehr eingeschränkt möglich, nämlich nur die Fälle, wenn kein Rest bleibt und solche bei denen eine größere durch eine kleinere Zahl dividiert wird. Es finden hier also extreme Grundvorstellungsumbrüche statt: Im Bereich der Bruchzahlen ist jede Division ohne Rest durchführbar, ob der Dividend oder der Divisor größer ist, spielt keine Rolle mehr. Analog zur Multiplikation, ist das Ergebnis einer Division, also der Quotient, im Allgemeinen weder kleiner als der Dividend noch als der Divisor. Um diese Umbrüche zu verstehen, ist es wichtig an den Grundvorstellungen der Division zu arbeiten, zum Beispiel müssen die SchülerInnen verstehen, dass im Bereich der Bruchdivision die Vorstellung des Teilens keinen Sinn mehr macht, die Vorstellung des Messens aber schon.

Bei der Division zweier gleichnamiger Bruchzahlen passiert zirka 20% der SchülerInnen folgender Fehler, wobei er nur bei 4% der SchülerInnen systematisch passiert: $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a:c}{b}$. Auch bei der Division agieren SchülerInnen zu sehr auf der syntaktischen Ebene, Aufgaben, wie $\frac{4}{5} : \frac{2}{5}$, die auf semantischer Ebene leicht zu lösen sind, konnten sie mit Rechenregeln nicht lösen. Mit der inhaltlichen Vorstellung des Dividierens als Messen wäre diese Aufgabe extrem leicht zu lösen. Der kombinierte Fall, also Bruchzahl durch natürliche Zahl oder natürliche Zahl durch Bruchzahl ist auch bei der Division fehleranfälliger als der reine Fall. Dass die Fehlerquote bei

„Bruchzahl durch natürliche Zahl“ und „Natürliche Zahl durch Bruchzahl“ in etwa gleich ist, liegt nahe, dass SchülerInnen auch hier nur auf syntaktischer Ebene handeln, da die beiden Fälle vom semantischen Gesichtspunkt her komplett unterschiedliche Bedeutungen haben. Beim Lösen dieser Aufgaben multiplizierten 10% der SchülerInnen statt zu dividieren, 6% hatten wieder Schwierigkeiten mit der Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen und rechneten $\frac{a}{b} : n = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$, und ein geringer Prozentsatz bildete den Kehrwert des ersten Bruches, was wiederum auf das Verwenden einer nicht ganz richtig auswendig gelernten Rechenregel hindeutet. Auch die Division zweier natürlicher Zahlen bereitete den SchülerInnen Schwierigkeiten, so ließen zum Beispiel viele SchülerInnen die Aufgabe 4:5 einfach aus oder sind auf die ihnen durchführbar erscheinende Aufgabe 5:4 ausgewichen. Ursache dafür ist das Verhaften an einer Grundvorstellung aus den natürlichen Zahlen, dass man eine Zahl nicht durch eine größere dividieren darf. Andere wiederum führten die Rechnung auf syntaktischer Ebene durch und scheiterten an der Einbettung der natürlichen Zahlen in den Bruchzahlen und rechneten: $4:5 = \frac{4}{4} : \frac{5}{5} = \frac{4 \cdot 5}{4 \cdot 5}$. Das Hinzufügen einer Einheit erhöhte die Lösungsquote, da sich die SchülerInnen zu so einer Rechnung wieder etwas vorstellen konnten. Sie rechneten nun richtig, durch Rückgriff auf kleinere Maßeinheiten: $2m : 5 = 200cm : 5 = 40cm$ (siehe Padberg 2009, Didaktik der Bruchrechnung: S. 144-145).

3.5 Thematisierung von Schwierigkeiten im Mathematikunterricht

Um die Bruchzahlen in der Schule einzuführen und um mit Bruchzahlen operieren zu können, ist es notwendig, eben aufgelistete Probleme im Mathematikunterricht zu thematisieren, um die leider sehr häufige Ablehnung und Angst vor den Bruchzahlen von Seiten der SchülerInnen zu vermeiden. Durch das Thematisieren von Schwierigkeiten in einem Unterricht, in dem die Lernenden gewisse Gegebenheiten selbst entdecken und erarbeiten können und auf abwechslungsreiche Arten geübt wird, soll den SchülerInnen die Angst vor der Bruchrechnung genommen werden und eine positive Einstellung geschaffen werden. Ein Grundsatz, der besonders in der Bruchrechnung eine wichtige Rolle spielt, ist, dass das Agieren der SchülerInnen auf

der syntaktischen Ebene unbedingt reduziert, und dafür auf der semantischen Ebene gefordert und gefördert werden muss. Der momentane Mathematikunterricht konzentriert sich, vielleicht aus Zeitgründen, vielleicht aber auch aus Bequemlichkeit der LehrerInnen, eher auf die syntaktische Ebene. Das heißt Rechenregeln werden eingeführt, vielleicht kurz erklärt, und dann sollen sie in Rechenaufgaben angewandt werden, ohne über die inhaltlichen Gesichtspunkte der Aufgabe nachzudenken. Wenn SchülerInnen die Chance hätten, Rechenoperationen aufgrund ihrer inhaltlichen Bedeutung zu verstehen, und sie mithilfe dieser Bedeutung zu lösen, so würden vielleicht weniger Fehler passieren. Beim Rechnen mit auswendiggelernten Regeln passieren viele Fehler aufgrund von Verwechslungen. Außerdem vergessen SchülerInnen die Regeln nach einiger Zeit wieder, es gibt also keinen langfristigen Lernerfolg. In diesem Unterkapitel werden Beispiele und Ideen für Aktivitäten eines auf die Semantik fokussierten Bruchrechnenunterrichts angeführt. Um neue Impulse zu geben, werden dabei absichtlich keine Aufgaben aus den gängigen Schulbüchern genommen, sondern aus dem Bereich der Fachliteratur der Mathematikdidaktik. Folgende Aktivitäten sollen nur als Vorschläge dienen, es ist natürlich klar, dass es in der Schule zeitlich nicht möglich ist, jeden der Problempunkte so detailliert zu behandeln.

3.5.1 Eindeutigkeit (inklusive Erweitern und Kürzen), Größenvergleich und Dichtheit

Um die Grundvorstellung aufbauen zu können, dass es für eine Bruchzahl mehrere, ja sogar unendlich viele Darstellungen gibt, ist es wichtig, einen geeigneten Einstieg für dieses Thema zu finden. Sehr günstig für das Aufbauen dieser Vorstellung ist ein enaktiver Zugang über das Falten eines A4-Blattes, wie Padberg (siehe Padberg 2009, Didaktik der Bruchrechnung: S.49) vorschlägt. Aus diesem Ansatz kann man eine Gruppenarbeit machen. Die Arbeitsanweisung für die Gruppen lautet wie folgt:

Faltet das Blatt Papier in der Hälfte, und malt eine Hälfte bunt an. Anschließend faltet das Papier noch einmal in der Hälfte. Was fällt euch auf? Probiert das Papier auch auf andere Arten zu falten. Was fällt euch dabei auf?

Falls manchen Gruppen die Aufgabenstellung noch nicht konkret genug ist, können in den einzelnen Gruppen noch zusätzliche Hinweise geben werden, also zum Beispiel „Wie groß ist nun der farbige Teil?“ oder „Wie heißt so ein Teil?“. Auf keinen Fall aber sollte man den Kindern von Anfang an zu viele Vorgaben und Hinweise

geben, um ihnen die Möglichkeit zu lassen, die Gleichwertigkeit von Brüchen selbst zu erkennen und sie in ihrer Fantasie, also zum Beispiel ob sie quer oder diagonal falten, nicht einzuschränken. Im Anschluss an die Gruppenarbeit sollten die Erkenntnisse der SchülerInnen besprochen und entweder in Form eines Arbeitsblattes oder als Mitschrift im Schulübungsheft festgehalten werden. Wenn es die Lernenden nicht von selbst entdecken, so soll der Lehrer/die Lehrerin noch auf die Einteilung, also auf das Vergrößern und Verfeinern eingehen. Im Anschluss daran sollen die SchülerInnen eigene Kontexte finden, in denen die Gleichwertigkeit von Brüchen gut zu erkennen ist, wie zum Beispiel, dass ein halber Liter Wasser genauso viel ist wie zwei Viertel Liter Wasser. Die Aufgabenstellung lautet wie folgt:

Wo erkennt man im Alltag die Gleichwertigkeit von Brüchen? Denkt dabei an ganz alltägliche Dinge wie zum Beispiel Wasser, Torten und so weiter.

Nun sollen die SchülerInnen selbst gleichwertige Brüche kreieren, das heißt, mit der Grundvorstellung des Vergrößerns und Verfeinerns der Einteilung, sollen sie das Erweitern und Kürzen von Brüchen üben. Dazu kann man folgende Aufgaben stellen:

Ergänzt die fehlenden Nenner beziehungsweise Zähler, und begründet eure Lösung mit einer Zeichnung oder einem Beispiel aus dem Alltag:

- $\frac{2}{3} = \frac{4}{\quad}$
- $\frac{4}{8} = \frac{\quad}{4} = \frac{\quad}{2}$
- $\frac{3}{7} = \frac{\quad}{14}$
- $\frac{2}{5} = \frac{6}{\quad}$

Was passiert mit dem Bruchstück $\frac{2}{3}$, wenn man die Zahl zu $\frac{4}{6}$ erweitert?

Was passiert mit dem Bruchstück $\frac{8}{10}$, wenn man die Zahl zu $\frac{4}{5}$ kürzt?

(Die letzten beiden Aufgaben entnommen aus Besuden 2004, Bruchbegriff und Bruchrechnen: S.18)

Um das Erweitern und Kürzen von Brüchen zu üben, kann man im Unterricht das Spiel „Zähler ... Nenner ... Go!“ (siehe Puscher, Vernay 2009, Brüche zum Anfassen: S.52-54) spielen. Es handelt sich dabei um ein, das Regelwerk betreffend, sehr einfaches Spiel, wobei das Üben im Zentrum steht. Trotz der Einfachheit des

Spiels sprechen die Lernenden sehr gut darauf an. Es geht in dem Spiel darum, Brüche bei gegebenen Nennern oder Zählern richtig zu erweitern und zu kürzen. Außerdem müssen die Lernenden auch erkennen können, wann das Erweitern beziehungsweise das Kürzen eines Bruches bei gegebenem Nenner oder Zähler nicht möglich ist. Bei einer richtig gelösten Aufgabe darf der Spieler/die Spielerin auf dem Spielplan voranrücken, bei einer falschen Lösung muss er/sie auf seinem/ihrem Feld stehen bleiben und auf die nächste Runde warten. Um eine Idee davon zu bekommen, wird die Spielanleitung im Anhang angeführt.

Im nächsten Schritt soll die Schwierigkeit des Vergleichens von Brüchen thematisiert werden, wobei dabei nur auf inhaltlicher Ebene gearbeitet werden sollte, da auf der syntaktischen Ebene, wie bereits erwähnt, zahlreiche Fehler passieren können. Ein verständlicher Zugang zum Größenvergleich ist der Zugang über konkrete Verteilungssituationen. Folgende Aufgabe, wobei die Idee aus der Vorlesung „Schulmathematik 1 - Arithmetik und Algebra“ von Humenberger übernommen wurde, kann man SchülerInnen geben, um sie zum Beispiel in Partnerarbeit zu lösen:

Welche Zahl ist größer: $\frac{4}{7}$ oder $\frac{5}{8}$? Um diese Aufgabe zu lösen, stellt euch zuerst vor, dass sich vier Kinder sieben Pizzen teilen und dann, dass sich fünf Kinder acht Pizzen teilen. Bei welcher Vorstellung bekommt jedes Kind mehr Pizza, unter der Voraussetzung, dass die Pizzen alle gleich groß sind, und dass sie gerecht auf die Kinder aufgeteilt werden? Weißt du nun welche Bruchzahl größer ist?

Nun lässt man den Lernenden Zeit diese Kopfnuss zu knacken. Wünschenswert wären Antworten wie folgende: „Wenn sich sieben Kinder vier Pizzen teilen, bekommt jedes Kind $\frac{4}{7}$ Stück Pizza. Kommt nun noch ein Kind (insgesamt haben wir jetzt also 8 Kinder) mit einer Pizza dazu (insgesamt 5 Pizzen), so hat dieses Kind ja eine ganze Pizza, also mehr als die anderen. Damit alle gleich viel haben, müsste es noch etwas hergeben, also $\frac{4}{7} < \frac{5}{8}$.“ Falls wirklich niemand in der Klasse ähnliche Antworten findet, so muss diese Aufgabe gemeinsam mit der Lehrperson erarbeitet werden. Im Anschluss soll mithilfe dieser konkreten Verteilungssituation noch der allgemeine Fall erläutert werden, nämlich dass für $m < n$ gilt: $\frac{m}{n} < \frac{m+1}{n+1}$ und $\frac{m}{n} < \frac{m+k}{n+k}$. Außerdem soll noch der umgekehrte Fall $n < m$ durchgegangen werden.

Wenn man mit der konkreten Verteilungssituation gearbeitet hat, kann und sollte man noch andere Strategien zum Größenvergleich durchführen, zum Beispiel das

Vergleichen von Bruchzahlen durch Rückgriff auf alltägliche Brüche ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$) oder durch den Vergleich des Anteils, der noch auf ein Ganzes fehlt. Geeignete Unterstützungen dafür sind entweder die Darstellung am Zahlenstrahl oder das Verwenden von Bruchstreifen (siehe Jannack, Koepsell, Vernay 2008, Brüche herstellen: S.16). Für die Bruchstreifen werden gleich lange Streifen jeweils in Halbe, Drittel, Viertel, und so weiter unterteilt, und durch einfaches Übereinanderhalten kann man ablesen, welcher Bruch größer ist.

Um die Dichtheit im Mathematikunterricht zu thematisieren, sollte man die SchülerInnen einfach direkt damit konfrontieren. Ein geeignetes Material dafür ist die unten angeführte Fantasiegeschichte „Das Märchen von dem bösen Drachen und dem klugen Bruch“ von Paulitsch, den Prediger in dem Artikel „Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen?“ anführt. Um die SchülerInnen über die Dichtheit wundern zu lassen und sie selbst zu entdecken, erscheint es als sinnvoll, den Lernenden die Geschichte nur bis zu der Stelle lesen zu lassen, an der der Drache die dritte Aufgabe, nämlich „Nenne mir den Bruch, der größer ist als ich [$\frac{1}{2}$] und auf dem Zahlenstrahl mein nächster Nachbar ist.“ gestellt bekommt. Die SchülerInnen sollen dann selbst überlegen, wie die Geschichte weitergehen könnte, und was die richtige Lösung sein kann. Nachdem die Gruppen beraten haben, sollten die Ergebnisse in der Klasse gesammelt werden, und als Auflösung sollen die SchülerInnen das Ende der Geschichte lesen.

Das Märchen von dem bösen Drachen und dem klugen Bruch

Vor langer, langer Zeit wütete im Land der Bruchzahlen ein fürchterlicher Drache. Er war aus dem Land der geometrischen Figuren ausgebrochen und versetzte seitdem die Brüche in Angst und Schrecken.

Täglich fraß er zehn von ihnen, wobei er Quadratzahlen im Zähler oder Nenner als besondere Leckerbissen bevorzugte. Flehten die Brüche um Gnade, lachte er hämisch und weidete sich an ihrer Angst.

Eines Tages hatte er sich etwas besonders grausames ausgedacht; er machte ihnen falsche Hoffnungen auf eine Rettung. „Meine lieben Brüche“, brüllte er so laut, dass man es in jedem Winkel des Landes hören konnte, „ich gebe euch eine Chance! Ihr könnt mich loswerden! – Ich werde auf der Stelle verschwinden, wenn einer von euch mir eine Aufgabe stellt, die ich nicht lösen kann. Ihr habt genau drei Tage Zeit und dürft höchstens drei Aufgaben stellen.“

Der erste Tag verstrich. Die Brüche waren entweder vor Anspannung wie gelähmt oder in tiefes Nachdenken versunken. Am Morgen des zweiten Tages trat 49/81 mutig vor den Drachen. „Nenne mir“, sprach er, „einen Bruch, der zwischen 71/1000 und 72/1000 liegt!“ 49/81 war überzeugt, dass der Drache diese Aufgabe nicht würde lösen können; denn er selbst hatte die ganze Nacht über vergeblich nach einem Bruch zwischen 71/1000 und 72/1000 gesucht.

Aber, oh Schreck, es kam anders als erwartet: „143/2000“, schrie der Drache. Und noch lauter brüllte er:

„Die erste Chance ist vertan. Bruch gegen Drachen – welch ein Wahn!“

Die Brüche waren entsetzt, aber auch sauer auf 49/81. „Das hättest du doch wissen müssen“, warfen sie ihm vor, „dass 71/1000 und 72/1000 durch Erweitern mit 2 in 142/2000 und 144/2000 verwandelt werden können. Und schon passt 143/2000 dazwischen!“ 49/81 sah das ein und schlich beschämt von dannen.

Die Zeit verging. Da, endlich, am Abend des zweiten Tages, wagte sich 121/36 hervor, nicht ganz so sicher wie vorher 49/81. „Nenne mir“, sprach er zu dem Drachen, „zwei Brüche, für die folgendes gilt: Sie haben gleiche Zähler und verschiedene Nenner und sind trotzdem gleich groß.“

Leider überlegte der Drache auch jetzt nicht lange. „0/11 und 0/12“, schrie er. „Beide haben den gleich Platz auf dem Zahlenstrahl, nämlich genau auf der 0.“ – Er grinste hämisch, holte tief Luft und brüllte: „Die zweite Chance ist vertan. Bruch gegen Drachen – welch ein Wahn!“

Der zweite Tag hatte keine Rettung gebracht. Der dritte Tag begann. Die Zeit schien zu rasen; noch fünf Stunden, noch vier Stunden,... noch zehn Minuten! Da trat 1/2 vor den Drachen.

„Nenne mir“, sprach er, „den Bruch, der größer ist als ich und auf dem Zahlenstrahl mein nächster Nachbar ist.“

Diesmal dauerte es länger. Der Drache schien angestrengt zu überlegen. Mehrmals sah es aus, als wollte er etwas sagen. Die Brüche zitterten jedes Mal vor Aufregung. Doch immer wieder schien der Drache zu merken, dass seine geplante Antwort falsch sein würde. Und er schwieg.

1/2 wurde immer aufgeregter. Er würde gewinnen! Wie sie ihm alle dankbar sein würden! Da wurde er jäh aus seinen Träumen gerissen. Der Drache gab sich noch nicht geschlagen. „Ich nehme mir einen Tag Bedenkzeit“, ließ er die Brüche wissen. „Morgen um die gleiche Zeit komme ich wieder und nenne euch den nächsten rechten Nachbarn von 1/2!“ Sprach's und verschwand.

„Die Bedenkzeit wird ihm nichts nützen“, rief 1/2 fröhlich. „Er kann es nicht schaffen. Wenn ihr wollt“, wandte er sich an seine Freunde, „erkläre ich euch, warum ich keinen nächsten rechten Nachbarn habe. Ihr übrigens auch nicht.“ Natürlich wollten sie; und 1/2 begann: „Nehmen wir einen Bruch, der größer ist als ich, etwa 13/25. Jetzt bringen wir 13/25 und mich durch Erweitern auf den Hauptnenner 50: $13/25 = 26/50$ und $1/2 = 25/50$. Nun sieht es zunächst so aus, als ob es keinen Bruch zwischen 26/50 und 25/50 gäbe. Aber Erweitern mit 2 ergibt die Brüche 52/100 und 50/100. Und dazwischen liegt z.B. 51/100. Aber auch 51/100 ist nicht mein nächster Nachbar; 101/200 steht mir noch näher. Doch auch er ist nicht mein nächster rechter Nachbar. Ich kann mit der vorhin beschriebenen Methode einen näheren finden. Das Verfahren klappt immer. Probiert es einmal für euch und eure Nachbarn aus.“ Da taten sie; und alle merkten erfreut, dass 1/2 recht hatte. So sahen sie gelassen dem nächsten Tag entgegen. Aber der Drache kam nicht. Er kam nie mehr. Er konnte die Aufgabe nicht lösen“

Jahrhunderte später wurde er entdeckt. Er saß auf einem Felsen und murmelte vor sich hin, ohne Pause, immer dasselbe. Wer nahe genug heranging, konnte folgendes hören: „1/2 hat keinen nächsten rechten Nachbarn, kein Bruch hat einen nächsten rechten Nachbarn, es gibt immer einen noch näheren: „1/2 hat keinen nächsten Nachbarn, kein ...“ Und wenn der Drache nicht gestorben ist, dann murmelt er noch heute.



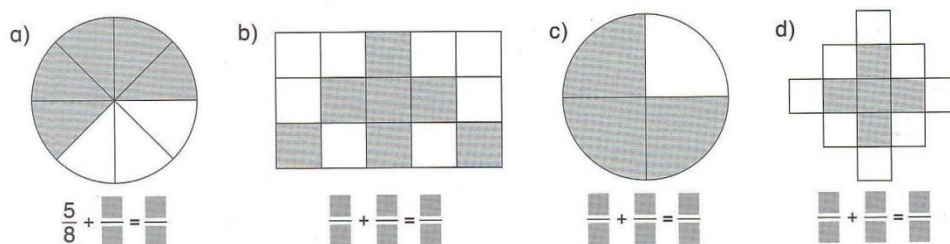
(Paulitsch 1993, S. 37-40)

(aus Prediger 2004, Brüche bei den Brüchen – Aufgreifen oder umschiffen?: S.10-13)

3.5.2 Addition und Subtraktion

Auch bei der Addition und der Subtraktion ist es sehr wichtig, sie vorerst nur auf semantischer Ebene einzuführen, um ein tiefgehendes Verständnis dafür zu schaffen. Als erstes sollte das Addieren und auch Subtrahieren gleichnamiger Brüche im Zentrum stehen, wobei der quasikardinale Zahlaspekt sehr hilfreich sein kann. Es ist also sinnvoll, als Lehrkraft zu Beginn nicht nur die Bruchschreibweise zu verwenden, sondern auch öfters „1 Fünftel + 2 Fünftel = 3 Fünftel“ zu schreiben. Wichtig ist, dass die SchülerInnen dabei auch Aufgaben gestellt bekommen, in denen sie die Anzahl der Bruchteile finden sollen, die noch auf ein Ganzes fehlt. Dazu gibt es ein geeignetes Arbeitsblatt aus der Zeitschrift „Mathematik Kompakt, Brüche zum Anfassen“, von dem im Folgenden ein Ausschnitt präsentiert wird.

Welcher Bruchteil ist grau gefärbt? Ergänze diesen Bruch zu Eins und bestimme das Ergebnis.



(aus Mathematik Kompakt, Brüche zum Anfassen, S.91)

Nachdem die SchülerInnen das Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Brüche beherrschen, wird zum Addieren und Subtrahieren von ungleichnamigen Brüchen übergegangen, wobei die Kinder zuerst nur mit sehr einfachen, intuitiv lösbaren Aufgaben konfrontiert werden sollen. Ein Beispiel dafür ist: $\frac{1}{2}$ Pizza + $\frac{1}{4}$ Pizza = $\frac{3}{4}$ Pizza. Die SchülerInnen sollen auch selbst Beispiele für Additionen und Subtraktionen von Brüchen finden, die sie aufgrund ihrer Alltagserfahrung lösen können. Danach sollte die Lehrerin darauf hinweisen, dass es auch Aufgaben gibt, die nicht so einfach lösbar sind, wie zum Beispiel $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$. Dazu sollen die SchülerInnen die Methode mit den Rechtecken kennenlernen, nämlich, dass man, um zum Beispiel unsere Addition lösen zu können, ein Rechteck in drei Teile unterteilt, und dann in die andere Richtung in fünf Teile, wobei jeweils benötigte Bruchteile angemalt werden (siehe Abbildung unten). Um die Aufgabe lösen zu können, brauchen die

SchülerInnen also nur noch abzuzählen, wie viele Rechtecke das ganze Rechteck insgesamt enthält und wie viele davon angemalt wurden.

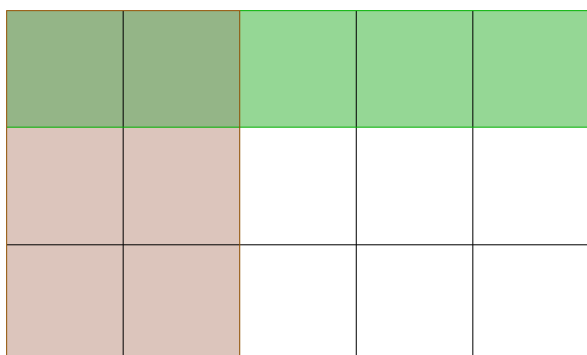
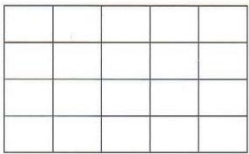
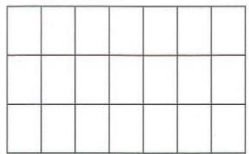


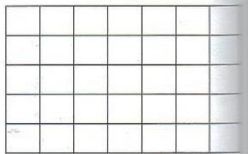
Abbildung: Bruchaddition

Den Fehler, den einige SchülerInnen zu Beginn sicherlich machen werden, doppelt angemalte Kästchen nur einmal zu zählen, sollten sie nach Möglichkeit selbst entdecken. Zuerst kann man den SchülerInnen Aufgaben zusammen mit den Rechtecken und der richtigen Einteilung geben, sodass die SchülerInnen nur noch richtig anmalen müssen, später jedoch sollten die SchülerInnen die Einteilung selbst machen können. Dazu werden an dieser Stelle wieder Ausschnitte zweier passender Arbeitsblätter präsentiert.

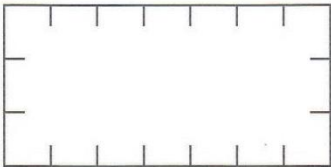
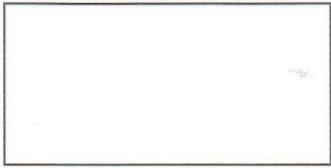
Zeichne jede Aufgabe in ein Rechteck. Färbe den ersten Bruch rot, den zweiten blau. Bestimme das Ergebnis.

a) 
 $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{\square}{\square}$

b) 
 $\frac{2}{7} + \frac{1}{3} = \frac{\square}{\square}$

c) 
 $\frac{3}{5} + \frac{1}{7} = \frac{\square}{\square}$

Unterteile das Rechteck so, dass du beide Brüche einzeichnen kannst. Zeichne die Brüche farbig ein. Schreibe die Rechnung und das Ergebnis auf.

Aufgabe	Zeichnung	Rechnung
a) $\frac{2}{3} + \frac{2}{7} =$		$\frac{2}{3} + \frac{2}{7} = \frac{\square}{21} + \frac{\square}{21} =$
b) $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} =$		$\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} =$

(aus „Mathematik Kompakt, Brüche zum Anfassen, S.92, 94)

Nachdem diese Methode länger geübt wurde, kann man dazu übergehen, die Bruchaddition beziehungsweise -subtraktion auf syntaktischer Ebene zu behandeln. Dazu sollte man die SchülerInnen darauf hinweisen, von den bisherigen Aufgaben jeweils die Nenner der Summanden und des Ergebnisses zu betrachten, und darauf schließen, dass dieser Nenner das Produkt aus den beiden Nennern der Summanden ist. Die SchülerInnen sollen so erkennen, dass es notwendig ist, die Brüche auf gleichen Nenner zu bringen, um sie zu addieren und zu subtrahieren. Die Methode, die Brüche vorher auf gleichen Nenner zu bringen muss natürlich auch wieder ausgiebig geübt werden, wobei immer wieder auf die Darstellung im Rechteck zurückgegriffen werden soll.

Tritt beim Addieren auf der syntaktischen Ebene nun der typische Schülerfehler $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ auf, so sollte man diesen als Lehrperson unbedingt thematisieren im Unterricht. Zuerst sollte man klarstellen, dass dies nicht der richtige Weg ist, um Brüche zu addieren, indem man sowohl auf semantischer, als auch auf syntaktischer Ebene zeigt, dass das Ergebnis nicht richtig ist. Man sollte allerdings zeigen, dass die Bruchzahl $\frac{a+c}{b+d}$ auch eine eigene, sinnvolle Bedeutung hat, nämlich, dass man auf diese Art und Weise eine Bruchzahl berechnen kann, die zwischen den beiden Summanden liegt. In der Mathematik wird $\frac{a+c}{b+d}$ das Chuquet-Mittel genannt. Im Mathematikunterricht kann man das Chuquet-Mittel zum Beispiel mithilfe von Himbeersaftkonzentrationen durchführen. Dazu ist es wieder sinnvoll, die SchülerInnen in Kleingruppen arbeiten zu lassen. Eine mögliche Aufgabenstellung - die Idee stammt wiederum aus der Vorlesung „Schulmathematik 1 - Arithmetik und Algebra“ von Humenberger – ist folgende:

In einer großen Saftmaschine hat man 3 Liter Himbeersirup und ein Gesamtvolumen von 10 Litern. In einer zweiten Maschine hat man 4 Liter Himbeersirup bei einem Gesamtvolumen von 9 Litern. Welche Konzentration erhält man, wenn man den Inhalt der beiden Maschinen zusammenleert? Kannst du mithilfe dieser Angaben erklären, was die der Bruch $\frac{a+c}{b+d}$ hier bedeutet?

Auf diese Art und Weise sollen die SchülerInnen, das falsche Ergebnis der Bruchaddition in einem positiven und sinnvollen Kontext kennenlernen. Verbinden die SchülerInnen etwas Positives mit diesem Bruch, so wird dieser Fehler bei der

Addition von Brüchen weniger häufig passieren, da die SchülerInnen wissen, dass sie damit eine Zwischenzahl berechnen können.

Ein weiterer wichtiger Punkt bei der Addition und Subtraktion ist das Operieren mit gemischten Brüchen, wobei die gemischten Brüche unbedingt beibehalten werden sollten, da Additionen und Subtraktionen auf semantischer Ebene mit gemischten Bruchzahlen leichter zu lösen sind, als wenn die gemischten Zahlen alle in reine Brüche umgewandelt werden. Bei der Addition werden einfach die ganzen Zahlen addiert und auch die Brüche auf herkömmliche Art addiert. Bei der Subtraktion funktioniert dies genauso, unter der Voraussetzung, dass die Bruchzahl im Minuend größer ist als die Bruchzahl im Subtrahend. Subtraktionen, bei denen also die Bruchzahl im Minuend kleiner ist als die Bruchzahl im Subtrahend, müssen unbedingt thematisiert werden, da dies bei SchülerInnen oft große Schwierigkeiten macht. Man kann entweder die SchülerInnen in Gruppen versuchen lassen, selbst Methoden zu finden, wie man solche Rechnungen löst, oder man geht dies gemeinsam mit den SchülerInnen durch. Folgende Abbildung ist ein Beispiel für ein mögliches Tafelbild:

$$3\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3} =$$

Die Bruchzahl der ersten Zahl ist kleiner
als die Bruchzahl der Zahl, die abgezogen wird.
Deswegen muss die Bruchzahl bei der ersten Zahl
größer gemacht werden, indem man
ein Ganzes davon wegnimmt und in Brüche umwandelt:

$$3\frac{1}{2} = 2\frac{3}{2}.$$

Nun haben wir die Rechnung $2\frac{3}{2} - 1\frac{2}{3}$.
Diese Rechnung können wir nun ganz normal durchführen,

$$\text{da gilt: } \frac{3}{2} > \frac{2}{3}.$$

Man rechnet nun

$$2 - 1 = 1$$

und

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Wir erhalten also } 3\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3} = 1\frac{5}{6}.$$

Zusätzlich zu dieser Aufgabe kann man noch ein weiteres Beispiel mit größeren Zahlen rechnen, damit SchülerInnen sehen, dass der Rechenaufwand mit reinen Brüchen mehr ist als mit gemischten Zahlen. Ein geeignetes Beispiel dafür wäre $33\frac{2}{7} + 12\frac{3}{8}$. Auch SchülerInnen, die gemischte Zahlen gerne in unechte Brüche umrechnen, werden zugeben, dass der Rechenaufwand mit gemischten Zahlen weit geringer ist.

3.5.3 Multiplikation

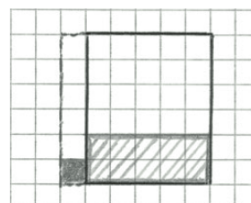
Da bei verschiedenen empirischen Untersuchungen gezeigt wurde, dass die Von-Vorstellung bei den Lernenden quasi nicht vorhanden ist, konzentriert sich dieser Paragraph darauf, Ideen und Impulse zu geben, den Von-Ansatz im Unterricht einzuführen, und zwar so, dass die Kinder auch wissen, wieso „mal“ plötzlich „von“ bedeutet. Es wird nicht auf die im vorigen Kapitel angeführten Fehler eingegangen, da diese alle ein zu starkes Agieren auf der syntaktischen Ebene als Ursache haben. Um diese Fehler von Beginn an zu vermeiden, sollen die SchülerInnen die Rechenregel selbst entdecken, jedoch erst nach zahlreichen Aufgaben, in denen sie Anteile auf rein semantischer Ebene bestimmen müssen. Folgende Ideen für ein effizientes Einführen der Bruchmultiplikation stammen aus dem Artikel „Vom Anteile Bestimmen zur Multiplikation von Brüchen“ von Matthias Glade und Andrea Schink in Mathematik Lehren 164 und wurden leicht adaptiert. Die Grundidee dieses Artikels ist, die SchülerInnen mit individuellen Herangehensweisen die Rechenregel selbst entwickeln zu lassen, wobei die SchülerInnen dabei verschiedene Schritte der Schematisierung durchlaufen. Der erste Schritt ist das inhaltliche Erkunden von passendem Material, in unserem Fall das Arbeitsblatt „Kinder dieser Welt“ (siehe Anhang), von dem hier ein Ausschnitt präsentiert wird:

Kinder dieser Welt

Weltbevölkerung

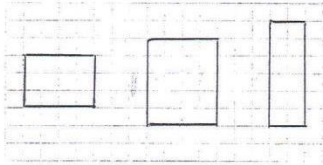
Maren hat zum folgenden Text ein Quadrat für alle Menschen der Welt gezeichnet.

Im Jahr 2010 lebten fast 7 Milliarden Menschen auf der Welt. Davon lebten $\frac{1}{6}$ in Industrieländern. Davon wiederum waren $\frac{1}{6}$ Kinder unter 15 Jahren. $\frac{5}{6}$ aller Menschen lebten in Entwicklungsländern, davon waren $\frac{1}{3}$ Kinder.



(Download zu Glade, Schink 2011: Vom Anteile bestimmen, zur Multiplikation von Brüchen)

Zu dieser Angabe folgen auf dem Arbeitsblatt Fragen, wodurch sich die Lernenden intensiv mit dem Text und dem Diagramm in Form eines Rechtecks auseinandersetzen müssen. Also zum Beispiel, wofür das dick umrandete Rechteck steht und wofür das graue beziehungsweise grau schraffierte Rechteck steht. Der zweite Schritt umfasst nun das Beantworten dieser Fragen durch Austausch unter den Lernenden. Im zweiten Teil des Arbeitsblattes geht es darum, dass SchülerInnen selbst Anteile von Anteilen zeichnen. Haben die SchülerInnen nun verstanden, wie sie auf semantischer Ebene Anteile von Anteilen bestimmen können, so werden sie sich bald fragen, ob man dies nicht einfacher machen könnte. Zu diesem Zeitpunkt durchlaufen sie bereits den dritten Schritt, nämlich den Versuch des Formulierens einer Regel. Bei diesem Schritt soll nun das nächste Arbeitsblatt helfen, wobei dafür besonders die zweite Hälfte wichtig ist:

2. a) In welches der drei Rechtecke könntest du am besten $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{4}$ einzeichnen?
Begründe deine Wahl.
b) Übertrage das passende Rechteck in dein Heft und zeichne $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{4}$ ein.
c) Wie groß ist dann $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{4}$ bezogen auf das ganze Rechteck?
- 
3. Kannst du aus dem Beispiel in Aufgabe 2 eine allgemeine Regel aufschreiben, wie man Anteile vom Anteil bestimmt?
Überlege dazu: Was hat das Ergebnis mit der Zahl der Kästchen zu tun?
Was hat das Ergebnis mit der Zahl der Zeilen und Spalten im Rechteck zu tun?
 4. Zeichne das gleiche Rechteck wie in Aufgabe 2 noch einmal und markiere $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$.
Wie viele Kästchen hat dein Rechteck? Wie viele Kästchen sind nun markiert?
Wie groß ist also der gesuchte Anteil am gesamten Rechteck?
Formuliere auch hier eine allgemeine Regel.
 5. Mit den Überlegungen aus Aufgabe 4 hast du eine Regel gefunden, wie man ohne Bild auch zum Beispiel $\frac{2}{7}$ von $\frac{4}{5}$ bestimmen kann.
Folgende Fragen helfen dir bei der Begründung der Regel:
Wie viele Spalten und Zeilen kann das Rechteck haben?
Wie viele Kästchen hat es dann insgesamt?
Wie viele davon sind markiert?
Wie groß ist also der Anteil vom Rechteck?

(aus Glade, Schink 2011: Vom Anteile bestimmen, zur Multiplikation von Brüchen)

Nachdem SchülerInnen die allgemeine Regel formuliert haben, ist es wichtig, dass sie diese auch anschaulich, also durch Rückgriff auf die Rechtecksmodele begründen können (Schritt Vier). Dies kann man üben, indem sich die SchülerInnen die Regel gegenseitig erklären. Im fünften Schritt geht es darum, Alternativen zu dieser Regel zu finden. Dieser Schritt ist jedoch nicht so wichtig, da die Alternative

den SchülerInnen ja bereits bekannt ist, nämlich das Bestimmen von Anteilen auf anschaulicher Ebene mithilfe von Rechtecken. Im sechsten Schritt sollen die Lernenden üben, die gefundene Rechenregel anzuwenden, wobei es auch wichtig ist, dabei regelmäßig auf die anschauliche Ebene zurückzukehren, um das Ergebnis auf semantischer Ebene zu überprüfen.

3.5.4 Division

Auch bei der Division ist es wichtig, die inhaltlichen Gesichtspunkte zu betonen, damit SchülerInnen dazu in der Lage sind, einfache Rechnungen ohne Rechenregeln zu lösen. Dafür ist die Grundvorstellung vom Dividieren als Messen notwendig und sie erklärt auch, dass Divisionen im Bereich der Bruchzahlen immer durchführbar und auch sinnvoll sind, im Gegensatz zu Divisionen in den natürlichen Zahlen, die nur Sinn haben, wenn der Dividend größer ist als der Divisor. Die Vorstellung des Messens, bei der Division sollte bereits aus der Volksschule vorhanden sein.

Zu Beginn dividieren wir Bruchzahlen durch natürliche Zahlen, wobei dies der Sonderfall ist, in dem die Grundvorstellung des Teilens noch eine wichtige Rolle spielt. Ein Beispiel für eine geeignete Einführungsaufgabe aus dem „Brüche-Heft“ von Jannak und Koepsel gibt Padberg in „Didaktik der Bruchrechnung“ an:

Ein Saftgefäß enthält $\frac{4}{5}$ Liter Himbeersaft. Der Saft wird restlos an 2 Kinder verteilt. Wie viel erhält jedes? Kann man den Saft auch entsprechend an 4 (8) Kinder verteilen? Wie lautet jeweils die Divisionsaufgabe?

(siehe Padberg 2009, Didaktik der Bruchrechnung: S. 124)

Nachdem man Aufgaben dieser Art geübt hat, kann man übergehen zur Division einer natürlichen Zahl durch eine Bruchzahl. Hier ist die Grundvorstellung des Messens notwendig, um auf der Verständnisebene Aufgaben zu lösen. Aufgaben dazu wären: „Wie oft ist $\frac{1}{4}$ Liter Milch in 1 Liter Milch enthalten?“ oder „Wie oft ist $\frac{3}{5} kg$ in $2kg$ enthalten?“ Mithilfe von anschaulichen Zeichnungen und inhaltlichen Überlegungen sind auch diese Aufgaben noch ohne Rechenregel lösbar. Wenn man nun dazu übergeht, zwei Bruchzahlen zu dividieren, so kann man Aufgaben stellen wie „Wie oft ist $\frac{1}{4}m$ in $\frac{1}{2}m$ enthalten?“. Wenn die Zahlen nun komplizierter werden, das heißt, wenn das Ergebnis nicht mehr auf einen Blick ersichtlich ist, schaffen SchülerInnen, die das Dividieren wirklich verstanden haben, auch schwierigere Aufgaben zu lösen, indem sie die verschiedensten Strategien anwenden. Im

Anschluss werden eine Aufgabe und dazu fünf verschiedene Lösungsstrategien auf rein inhaltlicher Ebene, aus „Didaktik der Bruchrechnung“ zitiert:

„ $5\frac{3}{4} kg$ Bonbons sollen in Tüten mit je einem halben Kilogramm abgepackt werden.

Wie viele Tüten erhalte ich?

- Weg 1 (Schätzen/Überschlag)

Das Ergebnis muss zwischen 10 und 12 liegen; denn mit $6 kg$ Bonbons kann ich 12 Tüten, mit $5 kg$ Bonbons 10 Tüten füllen.

- Weg 2

$5 kg$ Bonbons ergeben 10 Tüten. Von den restlichen $\frac{3}{4} kg$ kann ich eine weitere Tüte füllen, also insgesamt 11 Tüten. Es bleibt noch $\frac{1}{4} kg$ übrig. Hiermit kann ich eine halbe Tüte füllen, also insgesamt $11\frac{1}{2}$ Tüten.

- Weg 3

$6 kg$ Bonbons ergeben 12 Tüten. Da aber nur $5\frac{3}{4} kg$ Bonbons vorhanden sind, muss ich von den $6 kg$ $\frac{1}{4} kg$ wegnehmen. Dieses $\frac{1}{4} kg$ ergibt eine halbe Tüte. Also fülle ich mit den $5\frac{3}{4} kg$ Bonbons $11\frac{1}{2}$ Tüten.

- Weg 4

Ich verdopple $5\frac{3}{4}$ und erhalte $11\frac{1}{2}$. Bei Verdoppelung von $\frac{1}{2}$ erhalte ich 1. Wie beim Verdoppeln von 10 und 5 in 10:5 auf 20:10 das Ergebnis unverändert bleibt, so gilt dies auch hier. Ich erhalte also $11\frac{1}{2}$ Tüten Bonbons.

- Weg 5

Abpacken in Tüten mit je einem halben Kilogramm bedeutet, schrittweise von den $5\frac{3}{4} kg$ jeweils $\frac{1}{2} kg$ wegzunehmen, bis keine Bonbons mehr übrig bleiben. Durch schrittweise Subtraktion erhalte ich, dass ich 11 mal $\frac{1}{2} kg$ von $5\frac{3}{4} kg$ abziehen kann. Es bleibt dann noch $\frac{1}{4} kg$ übrig. Also erhalte ich $11\frac{1}{2}$ Tüten.“

(aus Padberg 2009, Didaktik der Bruchrechnung: S. 128)

Es ist wünschenswert, den SchülerInnen ein so tiefes Verständnis der Bruchdivision zu vermitteln, dass sie auch dazu in der Lage sind, Aufgaben mit solchen oder ähnlichen Strategien zu lösen.

Diese Strategien sind zwar sehr sinnvoll, jedoch manchmal zu zeitaufwändig, weswegen es notwendig ist, die Bruchrechenregel, also „Nimm den ersten Bruch und multipliziere ihn mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs“, einzuführen. Ein geeigneter Weg, die Rechenregel zwar auf syntaktischer, aber trotzdem für die SchülerInnen verständlicher Ebene einzuführen, ist der Weg über die Umkehroperation. Am meisten Verständnis wird erreicht, wenn die SchülerInnen die Regel selbst, gegebenenfalls mithilfe einiger Hinweise, herausfinden und definieren können. Eine passende Aufgabenstellung könnte sein:

Versucht folgende Aufgabe auf rein rechnerischer Ebene zu lösen. $\frac{4}{5} : \frac{2}{7} =$

Hinweis: Bedenkt dabei, dass jene Zahl gesucht ist, die mit $\frac{2}{7}$ multipliziert $\frac{4}{5}$ ergibt. Versucht im Anschluss eine allgemeine Regel für die Division zweier Brüche zu definieren.

Wünschenswert ist nun, dass die SchülerInnen eine Gleichung aufstellen, und so die Rechnung lösen. Es folgt ein Beispiel für einen wünschenswerten Lösungsweg:

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{7} = x \cdot \frac{2}{7}$$

$$\frac{4}{5} = x \cdot \frac{2}{7} \cdot 7$$

$$\frac{4 \cdot 7}{5} = x \cdot 2 \cdot 7$$

$$\frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 2} = x$$

$$x = \frac{28}{10} = \frac{14}{5} = 2 \frac{4}{5}$$

Die Herleitung der allgemeinen Regel kann je nach Klassenniveau gemeinsam mit der Lehrperson, oder auch in Gruppen erarbeitet werden:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x \cdot \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = x \cdot \frac{c}{d} \cdot d$$

$$\frac{a \cdot d}{b} = x \cdot c \cdot d$$

$$\frac{a \cdot d}{b \cdot c} = x$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = x$$

4. Lehrplan, Bildungsstandards und Schulbücher

In diesem Kapitel wird beschrieben, welche Lehrinhalte im Bereich der Bruchrechnung laut Unterstufenlehrplan und Bildungsstandards in der Unterstufe vorkommen müssen, und ob oder wie sie auf Grundvorstellungen und Fehlvorstellungen eingehen. Außerdem wird analysiert, ob Fehlvorstellungen in den gängigen Schulbüchern aufgegriffen werden.

4.1 Lehrplan

Nach dem AHS-Lehrplan für die Unterstufe werden die SchülerInnen zum ersten Mal bereits in der ersten Klasse mit dem Thema Bruchrechnung konfrontiert. Im Lehrplan heißt es, die SchülerInnen sollen „mit der Darstellung in Dezimal- und Bruchschreibweise vertraut sein“ und es soll das „Rechnen mit Brüchen, nur in einfachen Fällen, die anschaulich deutbar sind“ behandelt werden. In der zweiten Klasse soll bereits mit einfachen Brüchen gerechnet werden, damit „die Rechenregeln im Hinblick auf die Algebra sicher beherrscht werden“ und die Lernenden sollen die Rechenregeln begründen können. Außerdem sollen Brüche in Dezimaldarstellungen übergeführt werden können und umgekehrt. Im Lehrplan der dritten Klasse werden Bruchzahlen nicht explizit erwähnt, sondern die SchülerInnen sollen „Rationale Zahlen in verschiedenen Formen deuten können“. In der vierten Klasse sollen SchülerInnen bereits mit einfachen Bruchtermen umgehen können (siehe <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf> am 23.5.2013).

Der Lehrplan fordert also, SchülerInnen zuerst mit Bruchzahlen vertraut zu machen, und erst danach auf Rechenregeln und deren Gesetzmäßigkeiten einzugehen. Den Ausdruck „vertraut sein“ kann man so interpretieren, dass SchülerInnen beim Einstieg in das Thema zuerst Grundvorstellungen zu den, für sie neuen Zahlen aufbauen müssen, bevor sie damit operieren können. Sonst gibt es im Lehrplan keine weiteren Hinweise auf Grund- beziehungsweise Fehlvorstellungen zur Bruchrechnung. Die Verantwortung, die Lernenden beim Aufbau von Grundvorstellungen zu unterstützen und auf etwaige Fehlvorstellungen einzugehen, liegt also bei der Lehrperson.

4.2 Bildungsstandards

Den Bildungsstandards M8 für Mathematik liegt ein Kompetenzmodell zugrunde, welches festlegt, was SchülerInnen nach der achten Schulstufe, also in Österreich nach der vierten Klasse AHS, Hauptschule oder Neue Mittelschule können sollen. Mathematische Kompetenzen haben eine Handlungsdimension (was getan wird), eine Inhaltsdimension (womit gearbeitet wird) und eine Komplexitätsdimension (betrifft den Grad der Vernetzung), man spricht also von einem dreidimensionalen Kompetenzmodell. Jeder Aufgabe wird je eine Ausprägung in jeder der Dimensionen zugeordnet. Die Bruchrechnung fällt in diesem Modell in den Inhaltsbereich I1 Zahlen und Maße. Die Punkte zur Bruchrechnung, die in diesem Inhaltsbereich erwähnt werden, sind „Bruch- und Dezimaldarstellung rationaler Zahlen“, „Rechenoperationen, Rechengesetze und –regeln“ und „Anteile, Prozente, Zinsen“. Genauer wird der Inhalt nicht festgelegt. Zusätzlich zu den Inhaltsbereichen gibt es vier Handlungsbereiche und drei Komplexitätsbereiche. Der erste Handlungsbereich umfasst Darstellen und Modellbilden, der zweite Rechnen und Operieren, der dritte Interpretieren und der vierte Argumentieren und Begründen. Aufgaben des ersten Komplexitätsbereiches lassen sich durch das Einsetzen von Grundkenntnissen und –fertigkeiten lösen, bei Aufgaben des zweiten Komplexitätsbereiches ist es bereits notwendig Verbindungen zwischen Sätzen, Begriffen und verschiedenen Darstellungsformen herzustellen. Aufgaben des dritten Komplexitätsbereiches verlangen das Einsetzen von Reflexionswissen, also das Nachdenken über Zusammenhänge, die in der mathematischen Problemstellung nicht klar ersichtlich sind (siehe <http://aufgabenpool.bifie.at/m7/index.php?action=3&pg=14#kap2> am 9.9.2013).

Das Kompetenzmodell geht nicht explizit auf Grundvorstellungen oder Fehlvorstellungen zur Bruchrechnung ein, jedoch unterstützen Aufgaben mit verschiedenen Handlungsbereichen das Aufbauen geeigneter Grundvorstellungen. Durch Aufgaben zur Bruchrechnung im Handlungsbereich 1, lernen die SchülerInnen viele verschiedene Darstellungsarten für Bruchzahlen kennen und lernen auch zu entscheiden, welche in bestimmten Situationen sinnvoll sind. Im Handlungsbereich 2 lernen die SchülerInnen das Rechnen mit Brüchen. Mithilfe von Aufgaben im Handlungsbereich 3 lernen die SchülerInnen Bruchzahlen zu interpretieren. Aufgaben zur Bruchrechnung im Handlungsbereich 4 helfen den SchülerInnen mithilfe mathematischer Eigenschaften/Beziehungen, mathematischer Regeln und

der mathematischen Fachsprache bestimmte Entscheidungen zu begründen und dafür oder dagegen zu argumentieren.

Für diese Arbeit wurden die Aufgaben zur Bruchrechnung, also aus dem Inhaltsbereich 1 (Zahlen und Maße) des Aufgabenpools des Bifies auf Grundvorstellungen und auf Fehlvorstellungen untersucht.

Aufgefallen ist dabei, dass nur zwei Aufgaben zu Bruchzahlen an sich, enthalten sind. Ein Beispiel dafür ist eine Aufgabe, in der die SchülerInnen $\frac{3}{4}$ auf einer Skala eines Messbechers mit Milligramm als Einheiten, einzeichnen müssen. Durch Rückgriff auf kleinere Maßeinheiten, sollen die SchülerInnen also die gegebene Bruchzahl einzeichnen. Der Messbecher ist eine sehr gute Alternative zu den so häufig verwendeten Kreisdarstellungen.

Die restlichen Aufgaben, die im Inhaltsbereich 1 zur Bruchrechnung gefunden wurden, behandeln nicht nur Bruchzahlen, sondern auch Dezimalzahlen, Prozentrechnung und Verhältnisse. Der Fokus dieser Aufgaben liegt darin, zu testen, ob die SchülerInnen die Mehrdeutigkeit der Darstellung erkennen und ob sie damit umgehen können. Es ist dabei unumgänglich die verschiedenen Deutungsmöglichkeiten für Bruchzahlen zu kennen. Im Anschluss folgt ein Beispiel für eine derartige Aufgabe:

Bildungsstand der Österreicherinnen und Österreicher (I1, H3, K3)

In einer Tageszeitung findet man folgende Schlagzeile:

„3/4 aller Österreicher(innen) haben keine Matura“

Welche der folgenden Aussagen gibt die Bedeutung der Aussage der Schlagzeile sinngemäß richtig wieder, welche nicht?

Kreuze in jeder Zeile das Zutreffende an.

		richtig	nicht richtig
A	Jede(r) dritte Österreicher(in) hat keine Matura.		
B	25% aller Österreicher(innen) haben Matura.		
C	Das Verhältnis der Österreicher(innen) mit Matura zu jenen ohne Matura ist 3:4		
D	Im Durchschnitt hat eine(r) von vier Österreicher(inne)n Matura.		

(aus <http://aufgabenpool.bifie.at/m7/index.php?action=14&cmd> am 23.5.2013)

Die SchülerInnen müssen entscheiden, ob die für die Aussage gegebenen Interpretationen korrekt sind. Zum Lösen der Aufgabe ist es notwendig, dass Grundvorstellungen von Bruchzahlen als relativer Anteil und von Bruchzahlen als Verhältnis bei den SchülerInnen vorhanden sind.

4.3 Aufgreifen von Fehlvorstellungen in Schulbüchern

In diesem Kapitel wird untersucht, ob und wie mit Fehlvorstellungen in den gängigsten österreichischen Schulbüchern umgegangen wird. Da es sich in den meisten Schulbüchern bereits durchgesetzt hat, mit Grundvorstellungen zu Bruchzahlen zu arbeiten, und da es den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, alle

in den Schulbüchern aufgegriffenen Grundvorstellungen anzugeben, beschränkt sich dieses Kapitel nur auf die Fehlvorstellungen. Von folgenden Schulbüchern wurde jeweils der erste und zweite Band untersucht:

- Das ist Mathematik (beide Bände 2011)
- Expedition Mathematik (Band 1 – 2007, Band 2 – 2008)
- Mach mit Mathematik (Beide Bände 2012)

Außerdem wurden noch die Bücher „Mathe Buch“ (beide Bände 2006) und „Blickpunkt Mathematik“ (Band 1 – 2002, Band 3 – 2003) untersucht. Diese beiden Schulbücher sind zwar sehr bemüht, das Aufbauen von Grundvorstellungen zu fördern, jedoch gehen sie fast gar nicht auf Fehlvorstellungen ein, weswegen sie in diesem Kapitel nicht näher beschrieben werden. Die einzige Schwierigkeit, die beide Bücher sehr umfangreich behandeln, ist das Rechnen mit gemischten Zahlen.

4.3.1 Das ist Mathematik

Was bei diesem Schulbuch sehr positiv auffällt ist, dass sowohl im ersten als auch im zweiten Band großer Wert auf Grundvorstellungen gelegt wird. In den Büchern werden fast alle Grundvorstellungen aus Kapitel 1.5 aufgegriffen, außerdem wird mit vielen verschiedenen Darstellungen für Bruchzahlen gearbeitet. Irritationen werden auch in beiden Büchern thematisiert, wobei im zweiten Band stärker auf Probleme und Irritationen eingegangen wird.

Im ersten Band wird darauf eingegangen, dass es für eine Bruchzahl mehrere Darstellungen gibt, nämlich einerseits durch Umrechnungsaufgaben in denen SchülerInnen Brüche in Dezimalzahlen oder in Brüche mit vorgegebenen Nennern oder Zählern umrechnen müssen, und andererseits kommt eine Aufgabe vor, in der SchülerInnen verschiedene Brüche angeben sollen, die den Wert 1 haben. Diese Aufgabe behandelt gleichzeitig auch das Problem der Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen. Weiters wird die Ordnung von Bruchzahlen thematisiert. Die SchülerInnen sollen zuerst gleichnamige Brüche mit verschiedenen Zählern, danach Stammbrüche der Größe nach ordnen und dabei die Gesetzmäßigkeiten selbst erkennen. Das Ordnen von allgemeinen Brüchen, wird jedoch nur auf syntaktischer Ebene geübt. Beim Dividieren werden umfangreich die Vorstellungen des Teilens und des Messens angeführt, wodurch die Fehlvorstellung, dass der Quotient einer Division immer kleiner sein muss als der Dividend und der Divisor, vermieden werden kann. Im zweiten Band geht es wieder um den Größenvergleich,

jedoch wieder nur auf syntaktischer Ebene, und um die Dichtheit der Bruchzahlen. In einer Aufgabe sollen die SchülerInnen allgemein erklären, wie man Bruchzahlen der Größe nach ordnet, und außerdem wird gefragt, ob es direkte Vorgänger und Nachfolger von Bruchzahlen gibt. In einer anderen Aufgabe wird danach gefragt, wie viele Bruchzahlen es zwischen $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$ gibt und ob es eine kleinste Bruchzahl gibt. Die SchülerInnen sind also angehalten, selbst die Dichtheit der natürlichen Zahlen zu entdecken.

Im zweiten Band wird außerdem die Grundvorstellung von Bruchzahlen als relative Häufigkeiten vorgestellt. In dem Einführungsbeispiel, welches unten angeführt wird, in dem Parkplätze verschiedener Größen und die Anzahl der parkenden Autos verglichen werden, geht hervor, dass es keinen Sinn hat, nur die Anzahl der Autos (also die Zähler) oder die Kapazitäten der Parkplätze (also die Nenner) zu vergleichen. Die Diskussion zwischen Jan und Mario ist sehr realistisch und so mancher Schüler/manche Schülerin hat vielleicht schon eine ähnliche Unterhaltung in einem anderen Zusammenhang geführt.

Dieses Einführungsbeispiel soll dabei helfen, dass SchülerInnen Bruchzahlen als eigenständige Zahlen ansehen und nicht als Paare natürlicher Zahlen. Ein Bruch als relativer Anteil wird auch formal, mithilfe der Zahlen des Einführungsbeispiels erklärt.

9 Brüche zur Angabe von relativen Anteilen und Häufigkeiten

Relativer Anteil



Der große Parkplatz vor dem Einkaufszentrum bietet 800 Autos Platz und der kleine 500 Autos. Jan und Mario zählen die geparkten Autos auf dem großen Parkplatz und stellen fest, dass es genau 200 sind. Auf dem kleinen Parkplatz stehen 100 Autos. Welcher Parkplatz ist „voller“? Jan meint: „Der große Parkplatz ist voller, weil 200 mehr als 100 ist.“ Mario sagt: „Aber auch 800 ist mehr als 500. Nur die Autozahlen zu vergleichen, ist nicht sinnvoll.“

Sie berechnen jeweils den **relativen Anteil** der parkenden Autos an der Gesamtheit der möglichen Parkplätze: $200 : 800 = \frac{200}{800} = \frac{1}{4} = 0,25$ bzw. $100 : 500 = \frac{100}{500} = \frac{1}{5} = 0,20$

Der große Parkplatz ist zu **25 Hundertstel**, der kleine Parkplatz zu **20 Hundertstel** ausgelastet. Der große Parkplatz ist also tatsächlich „voller“.

Statt „ein Hundertstel einer Gesamtheit“ kann man auch **1 Prozent (1 %)** sagen.

Es gilt also: $1\% = \frac{1}{100} = 0,01$. Daraus folgt: $\frac{25}{100} = 0,25 = 25\%$ bzw. $\frac{20}{100} = 0,20 = 20\%$

Das Ganze wird mit **100 %** angegeben. Es gilt: $100\% = \frac{100}{100} = 1$ (das Ganze).

Relativer Anteil

Man erhält den **relativen Anteil**, indem man **die Anzahl der Personen (Dinge, Objekte ...)** mit einer bestimmten Eigenschaft **durch deren Gesamtanzahl dividiert**.

Relative Anteile kann man mit Hilfe von **Brüchen** (zB $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$), als **Dezimalzahlen** (zB 0,20) oder in **Prozenten** (zB 20 %) angeben.

(aus „Das ist Mathematik 2“: S.52)

Ein anderer häufiger Schülerfehler, der aufgegriffen wird, ist das Verwechseln von Erweitern und Multiplizieren beziehungsweise von Kürzen und Dividieren. Die SchülerInnen sollen eine Bruchzahl mit einer bestimmten Zahl erweitern und multiplizieren beziehungsweise kürzen und dividieren, und dann selbst den Unterschied erklären. Eine sehr häufige Fehlvorstellung, dass Multiplizieren immer vergrößern muss und analog dazu, dass Dividieren immer verkleinern muss, wird im zweiten Band mit einigen Aufgaben behandelt. Im Anschluss wird ein Beispiel angeführt, dass der Fehlvorstellung, dass die Multiplikation stets vergrößert, entgegenwirken soll. Zur Division gibt es im Buch eine analoge Aufgabe.

„Multipliziere eine beliebige Zahl 1) mit 5, 2) mit 1, 3) mit $\frac{2}{3}$!

- a) Ist das Ergebnis kleiner als, größer als oder gleich groß wie der Multiplikand?
- b) Welche Werte kann der Multiplikator annehmen, wenn das Ergebnis kleiner als der Multiplikand sein soll?“

(aus „Das ist Mathematik 2“: S.70)

Zum Schluss des Kapitels „Rechnen mit Brüchen“ wird noch in einer Aufgabe die falsche Bruchaddition, als Methode zum Finden einer Zwischenzahl behandelt. Zusammenfassend kann man sagen, dass „Das ist Mathematik“ zwar auf Fehlvorstellungen der SchülerInnen eingeht. Die Thematisierung dieser Fehlvorstellung findet zwar statt, jedoch nur implizit.

4.3.2 Expedition Mathematik

Wie auch schon in „Das ist Mathematik“ wird in „Expedition Mathematik“ großer Wert auf Grundvorstellungen zu Bruchzahlen gelegt. Eine Vorstellung, die in beiden Bänden immer wieder auftaucht in den beiden Büchern, ist die Vorstellung von einer Bruchzahl als Teil eines Ganzen und als Teil mehrerer Ganzer. Was Irritationen angeht, so wird im ersten Teil nur auf die Tatsache eingegangen, dass es für Bruchzahlen keine eindeutige Darstellung gibt, und auf die Einbettung der natürlichen Zahlen in den Bruchzahlen. Mit einer Aufgabe, in der SchülerInnen angeben sollten, wie viele Halbe, Viertel, Achtel gleich 2,4,5,7,11 Ganze sind, werden gleich beide Problembereiche behandelt. Im ersten Band fällt sehr positiv auf, dass das Vergleichen von Brüchen nicht sofort mit der Strategie des gleichnamig Machens gelernt wird, sondern dass die SchülerInnen selbst in Gruppen verschiedene Strategien finden sollen Bruchzahlen zu vergleichen. Im zweiten Band

werden häufiger Fehlvorstellungen thematisiert. Es wird zum Beispiel gleich zu Beginn des Kapitels auf die Fehlvorstellung eingegangen, dass man kleinere Zahlen nicht durch größere Zahlen dividieren könne. Folgende Aufgabe erscheint für diese Problematik sehr passend:

Partner 269 Veronika und Daniel versuchen, Brüche als Dezimalzahlen darzustellen. Dabei tritt ein Problem auf.

a) Wodurch unterscheiden sich die Divisionsaufgaben $1 : 4$ und $5 : 6$?
Was „klappt“ nicht?

b) Untersucht auch folgende Brüche. Welche Typen findet ihr?
Beschreibt ihre Eigenschaften.

(1) $\frac{3}{4} = 3 : 4 =$	(3) $\frac{7}{10} = 7 : 10 =$	(5) $\frac{10}{3} = 10 : 3 =$
(2) $\frac{1}{2} = 1 : 2 =$	(4) $\frac{13}{100} = 13 : 100 =$	(6) $\frac{10}{22} = 10 : 22 =$

(aus Expedition Mathematik 2, S. 79)

In Form dieses Comics wird eine Situation dargestellt, die sich ohne weiteres auch in der Klasse abspielen könnte. Auch mit der Frage, ob man kleinere Zahlen durch größere dividieren kann, werden schon mehrere Lernende konfrontiert gewesen sein.

Die Grundvorstellung einer Bruchzahl als relativer Anteil, wird auch in diesem Buch behandelt, und festigt bei den SchülerInnen die Vorstellung, dass Bruchzahlen eigenständige Zahlen sind. Weiters wird in diesem Buch mit Variablen gerechnet, es wird zum Beispiel gefragt, welchen Zähler man in einen der beiden Faktoren einer Bruchmultiplikation einsetzen muss, um ein gegebenes Ergebnis zu erhalten. Zu Beginn werden Variablen den SchülerInnen vielleicht zusätzliche Schwierigkeiten bereiten. Wenn SchülerInnen aber damit umgehen können, so entwickeln sie einen sicheren Umgang mit der Bruchrechnung.

Die typischen Schülerfehler bei der Addition, also die falsche Bruchaddition (siehe Kapitel 3.4.5), und die Fehler bei der Multiplikation (siehe Kapitel 3.4.7) und der Division (siehe Kapitel 3.4.8) werden in diesem Schulbuch thematisiert. Die Aufgaben sind immer in dem Format, dass die SchülerInnen im Buch abgedruckte Hausaufgaben von Kindern verbessern sollen, in denen genau diese typischen

Fehler gemacht werden. Es liegt also an den Kindern oder am Lehrer diese Fehler auch zu thematisieren und darüber im Unterricht zu sprechen. Es wird im Schulbuch also nur darauf verwiesen, dass es diese Fehler gibt, jedoch werden sie nicht wie in „Das ist Mathematik“ positiv thematisiert, das heißt die Bedeutung der Zahl $\frac{a+c}{b+d}$ bleibt den SchülerInnen vorenthalten. Die Fehler bei der Multiplikation gemischter Zahlen werden auch aufgegriffen, und es werden im Anschluss die vier Grundrechnungsarten mit gemischten Zahlen geübt. Dabei wird extra darauf hingewiesen, dass es meistens einfacher ist, in gemischten Zahlen zu rechnen.

4.3.3 Mach mit Mathematik

In diesem Schulbuch fällt im ersten Band auf, dass der Teil zur Bruchrechnung sehr kurz gehalten wird. Obwohl sich das Buch sowohl im ersten als auch im zweiten Band durch ein sehr kinderfreundliches Format um Verständnis bemüht, werden nur sehr wenige Grundvorstellungen zu den Bruchzahlen selbst behandelt. Kinderfreundlich bedeutet hier, dass sehr lange mit dem Größenkonzept gearbeitet wird und dass das Layout sehr übersichtlich und bunt gestaltet wurde. Im Buch der ersten Klasse werden rein syntaktische Aufgabenstellungen gänzlich vermieden und das Lösen von Rechnungen wird auf rein anschauliche Weise, also meistens über Kreise und Rechtecke durchgeführt, wodurch nur die einfachen Fälle von Rechnen mit Brüchen, also die Addition und die Subtraktion gleichnamiger Brüche und die Multiplikation und die Division mit einer natürlichen Zahl behandelt werden. Die Rechenregeln werden erst am Ende des Kapitels angeführt. Ein weiterer interessanter Fakt ist, dass im Buch der ersten Klasse die Bruchzahlen vor den Dezimalzahlen behandelt werden, und die Dezimalzahlen mithilfe der Bruchzahlen eingeführt werden. Im Erste-Klasse-Buch wird das Thematisieren von Irritationen oder typischen Schülerfehlern vermieden. Im zweiten Band wird zu Beginn des Kapitels bereits das Problem der Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen behandelt. In dem Schulbuch wird dies allerdings nicht als häufiger Fehler oder als Schwierigkeit thematisiert, sondern die SchülerInnen bekommen Aufgaben gestellt, in denen sie „uneigentliche Brüche“ - wie sie das Schulbuch nennt- in natürliche Zahlen umwandeln sollen. Diese Einbettung wird auch später bei den Rechnungen geübt. Bis auf die Schwierigkeit der Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen, werden aber auch im Band der zweiten Klasse keine weiteren Fehlvorstellungen thematisiert, jedoch wird im zweiten Buch beim Rechnen

mit Brüchen größerer Wert auf Grundvorstellungen gelegt. Die Multiplikation wird mithilfe der Grundvorstellung, dass die Flächeninhaltsformel für Rechtecke auch mit Bruchzahlen als Seitenlängen funktionieren muss, und mit der Von-Vorstellung eingeführt. Die Division wird mit der Vorstellung des Messens behandelt, wobei dies nur in Aufgaben vorkommt und nicht explizit thematisiert wird.

5. Methodik

In diesem Kapitel werden zuerst Gründe für die Entscheidung, eine qualitative Erhebung durchzuführen angegeben, im Anschluss wird erläutert, wie Interviews am besten durchzuführen sind, und wie diese dann, mithilfe von Transkripten zu analysieren sind. Außerdem werden die Rahmenbedingungen der qualitativen Studie erklärt, die Interviewaufgaben präsentiert, sowie deren Auswahl gerechtfertigt.

5.1 Warum eine qualitative Studie

Ziel dieser Arbeit ist es herauszufinden, ob SchülerInnen in den zu erwartenden Teilbereichen der Bruchrechnung Probleme haben und dort besonders fehleranfällig sind. Der Fokus wird dabei darauf gelegt, ob SchülerInnen durch Interventionen, wie zum Beispiel hilfeleistende Fragen, Erklärungen oder passende Übungen ihre Fehler in den Aufgaben erkennen, diese richtig stellen können und somit zu besserem Verständnis gelangen. Nachdem die Ziele der Arbeit nun definiert sind, stellt sich die Frage, ob man eine quantitative Studie in Form von Fragebögen oder eine qualitative Studie in Form von direktem Kontakt mit SchülerInnen, die mit dem Thema Bruchrechnung konfrontiert werden, durchführen soll. Für den ersten Teil der Forschungsfrage, also in welchen Bereichen der Bruchrechnung SchülerInnen Probleme haben, wäre eine quantitative Erhebung sinnvoll und auch repräsentativer als eine qualitative Studie. Für den zentralen Punkt dieser Arbeit jedoch, nämlich inwiefern Interventionen den SchülerInnen hilfreich sind, erscheint eine qualitative Erhebung als interessanter und aussagekräftiger, da man so direkt und flexibel auf die Fehler der SchülerInnen eingehen kann, und die Chance hat festzustellen, auf welche Interventionen sie ansprechen und welche sie nicht annehmen, beziehungsweise sogar abwehren.

Diese Art der qualitativen Untersuchung ist angelehnt an die interpretative Unterrichtsforschung, die sich als Reaktion auf die unzufriedenstellenden Ergebnisse der Unterrichtsreformen in den Sechziger- und Siebzigerjahren entwickelte. Zu dieser Zeit wurde die mikroethnographische Forschungspraxis entwickelt, welche es als Ziel

hat, das alltägliche Unterrichtsgeschehen zu verstehen. Wichtiger als die Frage „Was wird gelehrt?“, die früher dominierend in der Mathematikdidaktik war, ist nun die Frage, wie die „unterrichtsmethodische Umsetzung eines inhaltlich bestimmten Unterrichtsziels“ (aus Krummheuer 2004, Wie kann man Mathematikunterricht verändern?: S.113), den Lerneffekt der Lernenden betrachtend, funktioniert. Die Ergebnisse solcher Untersuchungen hatten bis zu einem gewissen Grad Einfluss in die LehrerInnenbildung und –fortbildung.

Für diese Arbeit steht nun fest, dass qualitativ geforscht werden soll. Offen bleibt noch die Frage, ob man bestimmte Unterrichtsphasen beobachtet, oder ob man Gruppen- oder Einzelinterviews durchführt. Für die Untersuchung ist es notwendig, direkt und möglichst flexibel auf Fehler der SchülerInnen, die sie bei Bruchrechenaufgaben machen, einzugehen und dagegenzuwirken. Somit scheidet die Möglichkeit gewisse Gruppen während des Unterrichtes zu beobachten aus, und es kommen nur noch Interviews in Frage. Ob das Interview in der Gruppe oder alleine stattfindet, ist eine sehr schwierige Entscheidung. Ein wichtiger Vorteil von Gruppeninterviews ist es, dass SchülerInnen sich bestimmte Ideen gegenseitig erklären müssen, wodurch gut festgestellt werden kann, wie tiefgehend das mathematische Verständnis der Testpersonen ist. Die Schritte des gemeinsamen Lösungsprozesses können genau analysiert werden. Ein großer Nachteil aber ist, dass sich SchülerInnen an einem Gruppeninterview fast nie in gleichem Ausmaß beteiligen, was nicht nur an dem im Interview erfragten Sachwissen liegt, sondern auch an der Persönlichkeit und an der Beziehung, in der die Versuchspersonen zueinander stehen. Es wird befürchtet, dass ein Teilnehmer/eine Teilnehmerin der Gruppe, aus eben genannten Gründen, das Interview dominiert, und die anderen nur noch dem dominanten Teilnehmer/der dominanten Teilnehmerin zustimmen, und nicht dazu in der Lage sind ihre Meinung, beziehungsweise in diesem Fall, ihre Lösungen oder Lösungsideen zu präsentieren. Um dies zu vermeiden und um wirklich von jedem Schüler/jeder Schülerin, der/die getestet wird, Lösungsprozesse und Schwierigkeiten bei den Aufgaben zu beobachten und gegebenenfalls intervenieren zu können, fällt die Entscheidung Einzelinterviews durchzuführen. Da es die Ressourcen und Möglichkeiten einer Diplomarbeit nicht zulassen würden, eine, von der Studie unabhängige Person zu engagieren, um die Interviews durchzuführen, werden die Interviews von mir selbst abgehalten. Zwar ist es für die

Objektivität der Studie nicht optimal, als Forscherin auch die Interviews durchzuführen, ich habe mich jedoch stets um Professionalität und Objektivität bemüht.

5.2 Herangehensweise an das Interview

Um ein Interview möglichst professionell durchzuführen, und um ein Maximum an Informationen daraus zu erhalten, müssen vor und während dem Gespräch einige Aspekte beachtet werden. Es muss zuerst klar sein, was man eigentlich von einem guten Interview erwartet, und welche Rahmenbedingungen man für das Gespräch vorfindet beziehungsweise selbst schaffen kann. Das „Um und Auf“ eines guten Interviews ist eine gründliche Vorbereitung, sowie die Durchführung des Interviews selbst durch das Kennen und Anwenden geeigneter Gesprächstechniken. Eben erwähnte Punkte, werden in Folge genauer behandelt, wobei die meisten Informationen aus dem Werk „‘Sag mir mal...‘ Gesprächsführung mit Kindern“ von Martine F. Delfos stammen. Da die Verfasserin eine Psychologin ist, ist der Kern des Werkes die Gesprächsführung mit Kindern in Fürsorgegesprächen, jedoch betont sie immer wieder, dass viele Aspekte auch auf Gesprächsführung im täglichen Leben oder auf die Durchführung von Interviews zutreffen. Wichtige Punkte, die bei Interviews unbedingt zu berücksichtigen sind, werden im Buch auch immer wieder explizit erwähnt.

5.3 Kriterien für ein gutes Gespräch

Wie bei jedem anderen Gespräch, ist es beim Interview wichtig, dass sich beide Gesprächspartner wohl fühlen. Voraussetzung dafür ist, dass die GesprächsteilnehmerInnen einander respektierend gegenüber treten müssen. Bei einem Interview mit einem Kind, kann es sein, dass das Kind vom Erwachsenen eingeschüchtert ist und sich ihm unterlegen fühlt. Um dem entgegenzuwirken, sollte die Interviewerin -es wird hier immer die weibliche Form verwendet, da es sich bei der Interviewerin um mich selbst handelt- Wärme ausstrahlen und Interesse für das Kind zeigen. Damit wirklich ein offenes Gespräch entsteht, sollte der Erwachsene das Reden zum Großteil dem Kind überlassen und das Kind auf keinen Fall, zum Beispiel durch Suggestivfragen (worauf später noch genauer eingegangen wird), in die von der Interviewerin gewünschte Richtung lenken (siehe Delfos 2012, „‘Sag mir mal...‘ Gesprächsführung mit Kindern: S. 72-73).

5.4 Vorbereitung auf das Interview

Bevor ein Interview durchgeführt wird, ist es wichtig, dass die Interviewerin ein genaues Ziel des Gesprächs definiert. Das Ziel meiner Interviews wäre also zu erfahren, in welchen Bereichen der Bruchrechnung SchülerInnen Fehler machen, ob diese aufgrund von Fehlvorstellungen passieren, und ob durch passende Interventionen besseres Verständnis bei SchülerInnen erreicht werden kann. Vor dem Interview sollte man noch öfters die Interviewfragen durchgehen mit folgenden Fragen im Hinterkopf: Erhalte ich mit dieser Frage die Informationen, die ich will? Ist die Frage klar verständlich? Wie könnte sie von SchülerInnen aufgefasst werden? Könnte man die Frage klarer formulieren? Mithilfe der Beantwortung dieser Fragen sollen die Interviewaufgaben optimiert werden. Weiters sollte sich die Interviewerin bereits im Vorfeld Gedanken über einen möglichen Verlauf der Interviews machen, um sich bereits Möglichkeiten für weitere Fragen zu überlegen.

5.5 Die Durchführung des Interviews

Zu Beginn des Interviews ist es wichtig, sich selbst vorzustellen und den Namen des Schülers/der Schülerin zu erfragen, was diesen/ diese wiederum auf Interesse der Interviewerin an seiner/ihrer Person schließen lässt. Weiters sollte man dem Kind erklären, warum man dieses Interview durchführt und erfragen, ob es in Ordnung sei, es dabei zu filmen, wobei natürlich klargestellt werden muss, wofür die Aufnahmen verwendet werden. Im Falle dieser Untersuchung also, dass die Aufnahmen nur dazu dienen, die Antworten genauer zu analysieren, und dass die Aufnahmen nicht veröffentlicht werden. Die Dauer des Gesprächs ist eine weitere wichtige Information, die dem/der Interviewten nicht vorenthalten werden sollte. Bevor nun richtig mit dem Interview begonnen werden kann, muss verdeutlicht werden, dass es nicht schlimm ist, wenn die SchülerInnen bei den Aufgaben zur Bruchrechnung Fehler machten. Im Gegenteil: Es geht genau darum, zu analysieren welche Fehler passieren, und warum sie passieren. Die SchülerInnen dürfen also auf keinen Fall unter dem Druck stehen, alle Aufgaben richtig lösen zu müssen. Während des Gespräches ist es einerseits wichtig, eine abwartende Haltung einzunehmen und dem Kind genügend Zeit zum Nachdenken zu lassen, andererseits ist es auch wichtig, sich spezieller Gesprächstechniken zu bedienen, auf die nun genauer eingegangen wird. Ein wichtiger Punkt sind dabei die verschiedenen Arten von Fragestellungen. Die Interviewerin kann entweder offene Fragen stellen, „auf die es eine unbegrenzte

Anzahl an möglichen Antworten gibt“ oder geschlossene Fragen, „auf die es eine begrenzte Anzahl möglicher Antworten gibt.“ (siehe Delfos 2012, „Sag mir mal...‘ Gesprächsführung mit Kindern: S. 155). Wenn der Schüler/die Schülerin antwortet, kann die Interviewerin auch nachfragen, um zum Beispiel detailliertere Antworten zu erhalten oder das Gesagte noch einmal wiederholen. Dies dient einerseits dazu klarzustellen, ob die Antwort richtig verstanden wurde und andererseits, um die Antwort noch einmal in geordneter Ausdrucksweise wiederzugeben. Die SchülerInnen sollen dadurch angeregt werden weiterzureden. Durch Suggestivfragen werden Kinder unbewusst manipuliert und man erhält unter Umständen verfälschte Antworten. Diese Fragetechnik sollte bei einem Interview unbedingt vermieden werden, da man ja an den Antworten der Kinder selbst interessiert ist, und nicht nur das hören möchte, was man sich vom Interview erwartet. Ein Faktor, der bei einem Gespräch nicht unterschätzt werden darf, ist die Körpersprache. Eine dem Befragten zugewandte Haltung, ein zustimmendes Nicken, oder Augenkontakt in passenden Momenten vermittelt dem/der Befragten das Gefühl, dass die Interviewerin an seinen/ihren Antworten interessiert ist wodurch dieser/diese motiviert ist, weiterhin aktiv an dem Interview teilzunehmen.

5.6 Analyse des Videomaterials

Um die Interviews genau zu analysieren und zu interpretieren, werden während einer ersten Durchsicht Inhaltsangaben zu den einzelnen Interviews geschrieben. Aufgrund des zeitlichen Aufwands werden nur die, für das Forschungsinteresse interessanten und aussagekräftigen Teile der Interviews transkribiert. Bei dieser Auswahl der Transkriptionseinheiten findet bereits eine erste Interpretation statt, da entschieden wird, welche Inhalte für die Studie wichtig sind, und welche weniger. Dann werden die Interviews noch einmal nacheinander begleitend mit den Notizen, welche die Testpersonen machten, angesehen. Um die Anonymisierung zu garantieren, werden die Namen der SchülerInnen geändert. Nun werden die für relevant gehaltenen Passagen nach Regeln transkribiert, die im letzten Abschnitt des Kapitels behandelt werden. Um das Transkript wertfrei zu halten, ist es wichtig, Interpretationen während des Transkribierens zu vermeiden. Wenn die Transkripte erstellt sind, geht es darum, diese zu analysieren und zu interpretieren, wofür zwei

Schritte notwendig sind. Die wichtigsten Etappen dieser Forschungsmethode werden aus dem Buch „Grundlagen und Beispiele interpretativer Unterrichtsforschung“ von Krummheuer und Naujok entnommen und für dieses Forschungsinteresse adaptiert. Die für diese Untersuchung relevante Methode, um Teile der Interviews zu analysieren, ist die Interaktionsanalyse. Dabei wird als erster Schritt das Interview in Interaktionseinheiten eingeteilt, wobei in dieser Arbeit eine Einheit das Lösen einer Aufgabe darstellt. Diese Einheiten werden im Anschluss allgemein beschrieben, und erst dann finden tiefgreifendere Interpretationen statt. Krummheuer erwähnt drei wichtige Kriterien, die unbedingt beachtet werden müssen:

„1. Die Äußerungen werden eine nach der anderen in der Reihenfolge ihres Vorkommens interpretiert, womit die Interpretationen nach vorne offen bleiben.

2. Plausibilisierungen dürfen und können nur rückwärts gewandt erfolgen.

3. Interpretationen müssen sich im Verlauf der Interaktion bewähren.“

(aus Krummheuer, Naujok 1999, Grundlagen und Beispiele interpretativer Unterrichtsforschung: S. 69)

Zusätzlich zu diesen Grundsätzen ist es wichtig, sich von zu schnellen Alltagsinterpretationen, von scheinbar eindeutigen Aussagen zu lösen und Interpretationsalternativen dafür zu finden, wodurch die Entdeckung interessanter Aspekte möglich wird. Bei schwierig zu interpretierenden Stellen schlägt Krummheuer vor, in Gruppen zu interpretieren, was im Rahmen dieser Arbeit mit StudienkollegInnen geschieht und sich als sehr hilfreich erweist. Weiters wird die Turn-by-Turn Analyse erwähnt, in der es darum geht, Reaktionen zwischen den Interaktanten zu analysieren. Die Interaktion zwischen den TeilnehmerInnen und mir, wird vor allem, in Bezug auf das Annehmen, beziehungsweise Ablehnen der Interventionen analysiert. Zum Schluss wurden die Interpretationen zusammengefasst. Diese Zusammenfassung ist der einzige Teil der Analyse, der in dieser Arbeit (siehe Kapitel 6) veröffentlicht wird.

5.7 Transkriptionsrichtlinien

In diesem Abschnitt werden die Richtlinien für die im Text teilweise vorkommenden Transkripte der Interviews vorgestellt.

Das Transkript ist in drei Spalten geteilt, wobei in der ersten Spalte von links eine fortlaufende Zeilennummerierung angeführt wird. Während des Transkribierens werden immer wieder Ergänzungen vorgenommen. Das heißt beim mehrmaligen Anhören wird Vergessenes im Nachhinein eingefügt, wobei die Zeilennummerierung nicht automatisch geändert werden soll, sondern die Nummerierung erweitern soll. Zum Beispiel trägt eine Ergänzung zwischen der Zeile 14 und 15 die Nummer 14.1. In der zweiten Spalte werden die geänderten Namen der Interaktanten angegeben. In der dritten Spalte stehen einerseits verbale Äußerungen und andererseits auch nonverbale Aktivitäten. Verbale Äußerungen werden normal ohne Zeichensetzung geschrieben, wobei es bestimmte Normen gibt (Paralinguistische Sonderzeichen), die in folgender Tabelle angeführt werden:

.	Pause (max. 1 sec.)
..	Pause (max. 2 sec.)
...	Pause (max. 3 sec.)
\	Senken der Stimme
-	Stimme bleibt in der Schwebe
/	Heben der Stimme
denn	fett für starke Betonung
j a a	gesperrt für gedehnte Aussprache

(siehe Krummheuer 2004, Wie kann man Mathematikunterricht verändern?: S.128-129)

5.8 Rahmenbedingungen der Untersuchung

Die Testpersonen für die Studie wurden, auf mein Ansuchen hin, vom Bundesrealgymnasium auf der Ringstraße in Krems zur Verfügung gestellt. Zwei Mathematiklehrerinnen einer zweiten und einer dritten Klasse, haben mir geholfen, SchülerInnen aus ihren Klassen zu motivieren, an meiner Studie teilzunehmen. Insgesamt wurden sechzehn SchülerInnen (leistungsstarke, durchschnittliche und leistungsschwache) ausgewählt, wobei neun aus der zweiten und sieben aus der dritten Klasse waren. Von den sechzehn SchülerInnen waren acht weiblich und acht männlich. Die Interviews wurden an zwei Vormittagen im März und an einem Vormittag im April 2013 in einem Gruppenraum im Dachgeschoss des

Schulgebäudes durchgeführt. Die SchülerInnen wurden nacheinander zu mir geschickt und die Interviews wurden mit einer Kamera gefilmt. Die Dauer der Interviews belief sich ungefähr auf zwanzig Minuten.

5.9 Auswahl der Interviewaufgaben

Es werden nun die Aufgaben präsentiert, die den SchülerInnen während des Interviews gestellt wurden. Die Aufgaben wurden den SchülerInnen einzeln vorgelegt. Sie haben also nicht den ganzen Test bekommen, sondern wurden Aufgabe für Aufgabe mündlich gefragt, wobei sie auf einem Zettel Rechnungen und Veranschaulichungen aufschreiben konnten, beziehungsweise sogar sollten. Dass die SchülerInnen nicht gleich den ganzen Testbogen bekommen haben, hatte den Sinn, dass die Interviewerin die Reaktionen und die spontanen Überlegungen zu den jeweiligen Aufgaben mitbekommt. Der Fokus dieses Interviews liegt weniger bei der Lösung, die die SchülerInnen angeben, sondern darauf, mit welchen Vorstellungen und Strategien sie zu diesen Lösungen gelangen. Auch was die Interventionen angeht, ist es einfacher, wenn die SchülerInnen immer nur mit einer Aufgabe konfrontiert sind. Es war klar, dass in einem zwanzigminütigen Interview nicht alle Aufgaben behandelt werden konnten, weswegen die Reihenfolge der Aufgaben variierte, um zu jeder Frage, zumindest von einigen SchülerInnen Ergebnisse zu erhalten.

Nach der Präsentation der Testaufgaben folgt eine Rechtfertigung für die Auswahl der einzelnen Aufgaben, welche Erwartungen dahinter standen und welche Interventionen bei möglichen Fehlern günstig sind.

Testaufgaben zum Rechnen mit Brüchen Erster Teil (Ordnung, Eindeutigkeit der Darstellung, Dichtheit)	
Aufgabe 1	Ordne die gegebenen Brüche der Größe nach, beginnend mit dem kleinsten. Versuche anschließend zu erklären, wie du zu deinem Ergebnis gekommen bist. $\frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{8}, \frac{2}{5}$

Aufgabe 2	Ergänze den fehlenden Nenner beziehungsweise Zähler. Versuche deine Antworten zu begründen. $\frac{2}{8} = \frac{\quad}{16}$ $\frac{1}{6} = \frac{3}{\quad}$
Aufgabe 3	Was ist die nächstgrößere Bruchzahl nach $\frac{2}{5}$?

Testaufgaben zum Rechnen mit Brüchen Zweiter Teil (Multiplikation)	
Aufgabe 1	Welche Bedeutungen könnten folgende Multiplikationen im Alltag haben? $12 \cdot \frac{2}{3} =$ $\frac{1}{2} \cdot 3 =$ $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} =$

Aufgabe 2	Anna macht ihre Mathematikhausübung und rechnet $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Annas Schwester behauptet, dass sie falsch gerechnet habe. Sie meint: „Das Ergebnis kann gar nicht richtig sein, weil $\frac{1}{3}$ ist kleiner als $\frac{2}{3}$ und auch kleiner als $\frac{1}{2}$ und das kann nicht sein, weil das Ergebnis bei einer Multiplikation ja immer größer sein muss als die beiden Faktoren!“ Hat Anna richtig gerechnet? Und was sagst du zu dem Argument von Annas Schwester?
-----------	---

Testaufgaben zum Rechnen mit Brüchen Dritter Teil (Division)	
Aufgabe 1	Welche Bedeutungen könnten folgende Divisionen im Alltag haben? Versuche das Ergebnis zu ermitteln ohne die Rechenregel für die Bruchdivision zu verwenden. $3 : \frac{1}{2} =$ $9 : \frac{3}{4} =$ $\frac{15}{8} : 3 =$ $\frac{4}{5} : \frac{2}{5} =$

Aufgabe 2	Stimmt die folgende Aussage? Das Ergebnis einer Division zweier Bruchzahlen kann nie größer sein als der Dividend (=Zahl, durch die dividiert wird) oder der Divisor (=Zahl durch die man dividiert). Begründe deine Antwort mit einem Beispiel beziehungsweise mit einem Gegenbeispiel. Versuche deine Antwort auch allgemein zu begründen.
-----------	--

Testaufgaben zum Rechnen mit Brüchen Vierter Teil (Addition)	
Aufgabe 1	Löse folgende Additionen und Subtraktionen und versuche diese graphisch darzustellen. $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} =$ $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$ $\frac{3}{4} + \frac{2}{7} =$ $2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4} =$ $3\frac{2}{3} + 1\frac{2}{3} =$ $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} =$ $3\frac{1}{4} - 1\frac{3}{5} =$

5.9.1 Erster Teil

Die Ordnung von Bruchzahlen, die Dichtheit der rationalen Zahlen auf der Zahlengerade und die Tatsache, dass eine Bruchzahl durch mehrere Brüche dargestellt werden kann, sorgt bei vielen SchülerInnen immer wieder für Probleme, da es hier eben sehr viele Grundvorstellungsumbrüche zu den natürlichen Zahlen gibt, woraus zahlreiche Fehlvorstellungen resultieren können. Die drei Aufgaben zu diesem Bereich wurden ausgewählt, um zu untersuchen, inwieweit SchülerInnen den Konzeptwechsel geschafft haben, und wo sie noch Probleme haben.

5.9.1.1 Erste Aufgabe

Diese Aufgabe wurde ausgewählt um zu untersuchen, mit welchen Strategien SchülerInnen Bruchzahlen ordnen. Also ob sie auf syntaktischer Ebene vorgehen oder die Brüche mithilfe von Grundvorstellungen ordnen. Schwierigkeiten werden dabei besonders bei den Bruchzahlen $\frac{3}{7}$ und $\frac{2}{5}$ erwartet, weil sie eng beieinander liegen und der Bezug auf eine bekannte Bruchzahl sehr schwierig wird. Wenn SchülerInnen dabei Probleme haben, werden ihnen als Hilfestellung entweder Bruchstreifen gegeben, oder sie werden zu der Methode hingeführt, Brüche auf gleichen Nenner zu bringen und anschließend zu vergleichen. Schwierigkeiten werden außerdem erwartet bei $\frac{7}{8}$ und $\frac{8}{9}$, da sie beide sehr nahe beieinander liegen. Falls SchülerInnen dabei Fehler machen, wird ihnen als Intervention die Frage gestellt, wie viel noch auf ein Ganzes fehlt.

5.9.1.2 Zweite Aufgabe

Bei dieser Aufgabe geht es darum, zu überprüfen, ob SchülerInnen es verstanden haben, dass es für eine Bruchzahl mehrere Bruchdarstellungen gibt. Es wird davon ausgegangen, dass der Großteil der SchülerInnen diese Aufgabe richtig löst, da das Erweitern und Kürzen in der Schule im Allgemeinen sehr ausführlich geübt wird. Das Augenmerk liegt darauf, ob die Lernenden ihre Lösung auch begründen können. Wünschenswert wäre es, wenn SchülerInnen dies anhand von Kreisen oder Rechtecken, oder auch mit Mengenangaben aus dem Alltag tun. Wenn SchülerInnen nicht wissen, wie sie ihre Lösung begründen sollen, bekommen sie ein Blatt Papier, mit der Aufforderung es so zu falten, dass man die Gleichwertigkeit der beiden Brüche erkennen kann. Im Anschluss werden die SchülerInnen noch gefragt, ob sie wissen, was sie bei den Aufgaben mathematisch gemacht haben, also ob sie hier

den Vorgang des Erweiterns erkennen, und ob sie erklären können, was man im Allgemeinen dabei tut. Diese Frage wurde auch deswegen ausgewählt, um zu erforschen, ob bei den SchülerInnen die Fehlvorstellung des Vergrößerns und Verkleinerns vorhanden ist.

5.9.1.3 Dritte Aufgabe

Diese Aufgabe wurde ausgewählt, weil die Dichtigkeit der Bruchzahlen für die SchülerInnen etwas völlig Neues ist und untersucht werden soll, inwieweit diese Vorstellung bei den SchülerInnen bekannt beziehungsweise ob sie bereits verankert ist. Es wird damit gerechnet, dass $\frac{3}{5}$ die am häufigsten falsch genannte Antwort ist, da dies die naheliegendste Antwort wäre, wenn man, wie bei den natürlichen Zahlen davon ausgeht, dass Bruchzahlen diskret am Zahlenstrahl lägen. Wenn die SchülerInnen $\frac{3}{5}$ als Antwort angeben, so soll zum Beispiel folgendermaßen interveniert werden: „Aber der Bruch $\frac{5}{10}$ liegt doch noch zwischen $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{5}$.“ Dies soll die SchülerInnen zum Nachdenken anregen. Falls sie nun meinen $\frac{5}{10}$ sei der Nachfolger, so nennt die Interviewerin eine weitere dazwischen liegende Bruchzahl. Dieses Spiel kann man einige Male durchführen um die SchülerInnen so zur Einsicht zu führen.

5.9.2 Zweiter Teil

Die Aufgaben im zweiten Teil behandeln Grund- und Fehlvorstellungen zur Multiplikation.

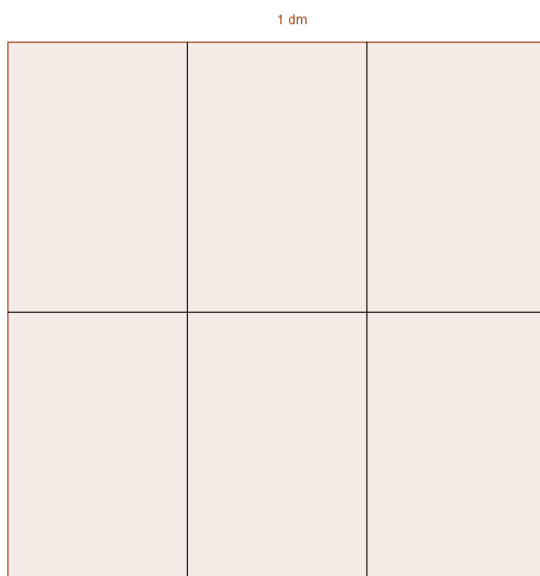
5.9.2.1 Aufgabe 1

Mit dieser Aufgabe soll untersucht werden, ob SchülerInnen einfache Multiplikationen auch ohne Rechenregel lösen können, und ob sie inhaltliche Vorstellungen dazu haben. Die Erwartung zu dieser Aufgabe ist, dass die SchülerInnen wenige Vorstellungen zu den Rechenaufgaben haben, und dass es ihnen schwer fallen wird, sie ohne Rechenregeln, also auf rein inhaltlicher Ebene, zu lösen. Falls den SchülerInnen selbst keine Vorstellungen zu den Rechnungen einfallen, so bekommen sie von der Interviewerin Impulse. Bei der Rechnung $12 \cdot \frac{2}{3}$ bekommen die SchülerInnen zwölf Spielfiguren, in der Hoffnung, dass sie mithilfe der Figuren und der Von-Vorstellung, also „Zwei Drittel von zwölf sind acht“ das richtige Ergebnis finden. Bei $\frac{1}{2} \cdot 3$ sollen die SchülerInnen an eine Halb-Liter-Flasche denken. Bei $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

bekommen die SchülerInnen wieder ein Blatt Papier, und sie sollen das Ergebnis nun über den Flächeninhalt das Ergebnis finden.

5.9.2.2 Aufgabe 2

Diese Aufgabe spricht gezielt die Fehlvorstellung an, wonach ein Produkt immer größer sein müsse als die beiden Faktoren. Es soll erforscht werden, ob die SchülerInnen dieser Meinung sind, oder ob sie verstanden haben, dass das Produkt zweier Bruchzahlen im Allgemeinen nicht größer ist als die beiden Faktoren. Erwartet wird, dass die SchülerInnen zwar erkennen, dass richtig gerechnet wurde, dass sie jedoch nicht mit Sicherheit sagen können, dass das Argument falsch ist. Wenn dies der Fall ist, so soll unten abgebildetes Quadrat dabei helfen, über den Flächeninhalt zu erkennen, dass das Produkt zweier Bruchzahlen im Allgemeinen kleiner ist als die beiden Faktoren. Die Seitenlänge des Quadrats beträgt 1 dm. Durch die Einteilung der Seitenlängen in Drittel und Halbe soll erkannt werden, dass $\frac{2}{3} dm \cdot \frac{1}{2} dm = \frac{2}{6} dm^2$. Somit wird klar, dass das Ergebnis kleiner als ein Ganzes und auch kleiner als die beiden Faktoren sein muss.



5.9.3 Dritter Teil

In diesem Teil werden Aufgaben gestellt, um zu erfahren ob bei den SchülerInnen Grundvorstellungen zur Bruchdivision vorhanden sind und ob sie mithilfe dieser die Divisionen durchführen können.

5.9.3.1 Erste Aufgabe

Mit den Aufgaben in diesem Teil, soll erforscht werden, ob SchülerInnen die Bruchdivision, was die inhaltliche Ebene betrifft, verstanden haben. Wenn SchülerInnen selbst keine Ideen haben, so bekommen sie Denkanstöße, wie zum Beispiel bei der ersten Aufgabe: „Denk an eine $\frac{1}{2}$ - Liter Flasche und an 3 Liter Wasser. Wenn SchülerInnen die zweite Aufgabe nicht ohne Rechenregel lösen können, so bekommen sie Material als Hilfe, nämlich neun Kreise auf einem Blatt Papier, beliebig viele $\frac{3}{4}$ - Kreisstücke und eine Schere. Es wird davon ausgegangen, dass die Mehrheit der SchülerInnen nur mithilfe dieser Materialien und ohne weitere Hinweise dazu in der Lage ist, zu einem Ergebnis zu gelangen. Auch bei den nächsten Divisionen werden ähnliche Hinweise gegeben, nämlich dass sie an ein Achtel Wein denken sollten und dass sie überlegen sollten, wie oft $\frac{2}{5}$ in $\frac{4}{5}$ passt.

5.9.3.2 Zweite Aufgabe

Ähnlich wie schon bei der Multiplikation geht diese Aufgabe direkt auf die Fehlvorstellung ein, dass eine Division immer verkleinern müsse. Es wird davon ausgegangen, dass sich SchülerInnen sehr schwer dabei tun werden, die Aussage zu widerlegen. Wenn SchülerInnen dies nicht können, werden einige Aufgaben als Beispiel durchgerechnet, um die SchülerInnen entdecken zu lassen, dass das Ergebnis im Allgemeinen auch größer sein kann. Gemeinsam soll versucht werden diese Tatsache zu begründen.

5.9.4 Vierter Teil

5.9.4.1 Erste Aufgabe

Dieser Teil umfasst nur eine Aufgabe, die untersuchen soll, wie gut SchülerInnen die Bruchaddition beherrschen. Besonders interessant ist dabei, ob der typische Additionsfehler, wonach Zähler und Nenner einzeln addiert werden, wirklich so häufig passiert, wie in der derzeitigen Didaktikliteratur angeführt wird. Wenn SchülerInnen addieren und subtrahieren, indem sie die Brüche auf gleichen Nenner bringen, so müssen sie auch begründen, wieso sie das tun. Wünschenswert wären Antworten, wie „nur gleich große Stücke können zusammengezählt beziehungsweise voneinander abgezogen werden.“ Außerdem sollen die SchülerInnen eine einfache Addition oder Subtraktion graphisch darstellen, und zwar so, dass die Lösung aus der Graphik abgelesen werden kann. Es wird erwartet, dass die SchülerInnen bei der

graphischen Darstellung Probleme haben, in der Form, dass aus der Darstellung der Prozess des Addierens oder Subtrahierens nicht wirklich ablesbar sein wird. Des Weiteren wird mit dieser Aufgabe untersucht, wie SchülerInnen mit gemischten Zahlen umgehen, wobei davon ausgegangen wird, dass SchülerInnen vorwiegend darauf ausweichen die gemischten Zahlen vor dem Rechnen in reine Brüche umzuwandeln.

6. Ergebnisse der Studie

In den folgenden Abschnitten werden die Ergebnisse der einzelnen Aufgaben präsentiert, sowie gegebenenfalls detaillierte Analysen ausgewählter Interviewausschnitte. Für eine bessere Lesbarkeit und für ein klares Verständnis, werden die Aufgaben zu Beginn jedes Abschnitts noch einmal angeführt. Am Schluss der Analyse folgen noch zwei allgemeine Kapitel über die Wahl der Darstellungsformen von Bruchzahlen und über den Wechsel beziehungsweise die Verbindung von semantischer und syntaktischer Ebene. Diese Kapitel entstanden, weil dies Aspekte waren, die bei der Auswertung vieler Aufgabee auftraten, und es somit wichtig erschien, diese gesondert zu behandeln.

6.1 Analysen der einzelnen Aufgaben

6.1.1 Erster Teil, erste Aufgabe

Ordne die gegebenen Brüche der Größe nach, beginnend mit dem kleinsten. Versuche anschließend zu erklären, wie du zu deinem Ergebnis gekommen bist.

$$\frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{8}, \frac{2}{5}$$

Bevor die Ergebnisse dieser Aufgabe präsentiert werden können, muss noch ein Missverständnis dieser Aufgabe klargestellt werden, welches für die Auswertung zwar unproblematisch war, aber für den Leser/die Leserin verwirrend sein kann. Eines der zu ordnenden Bruchkärtchen war $\frac{8}{9}$. Da keine Markierung vorhanden war, hielten manche SchülerInnen das Kärtchen verkehrt und hatten somit den Bruch $\frac{6}{8}$. Von den insgesamt acht SchülerInneninterviews, die zur Analyse dieser Aufgabe

herangezogen wurden, haben also fünf SchülerInnen die Aufgabe mit $\frac{8}{9}$, und drei SchülerInnen mit $\frac{6}{8}$ gelöst.

Die getesteten SchülerInnen haben alle die Kärtchen geordnet, manche richtig, manche falsch. Wenn es jedoch darum ging ihre Ordnung zu begründen, so hatten manche SchülerInnen Schwierigkeiten dabei. Es half ihnen jedoch, wenn ich nach den Strategien fragte, also danach, wie sie ihre Ordnung getroffen haben.

6.1.1.1 Strategien und Grundvorstellungen beziehungsweise Fehlvorstellungen

Bei den Begründungen der SchülerInnen fiel auf, dass zwei Grundvorstellungen zu Bruchzahlen bei den SchülerInnen sehr präsent sind, nämlich die Vorstellung einer Bruchzahl als Teil eines Ganzen und der quasikardinale Zahlaspekt von Bruchzahlen. Die Vorstellung einer Bruchzahl als Teil eines Ganzen war beim Vergleichen der Bruchzahlen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{7}$ von großer Bedeutung. Jasmin begründete ihre Entscheidung für $\frac{1}{8} < \frac{1}{7}$ folgendermaßen: „Also ein Achtel ist weniger als ein Siebentel weil ein Ganzes, also durch acht geteilt wird, und da nur durch sieben eben.“ Durch die Vorstellung, dass die Bruchzahlen Teile eines Ganzen sind, wusste sie, welche größer war. Der quasikardinale Zahlaspekt war in allen Gesprächen, die zu dieser Aufgabe geführt wurden, vorhanden, und zwar immer dann, wenn es darum ging, Brüche mit gleichen Nennern zu vergleichen. Ein Beispiel dafür ist folgende Begründung von Lena für $\frac{1}{8} < \frac{7}{8}$: „Na weils sieben sind.“

Die Strategien der SchülerInnen um diese Aufgabe zu lösen, waren sehr vielfältig. Die am häufigsten genutzte Strategie - sechs von acht SchülerInnen nutzten sie - ist das gleichnamig Machen der Brüche. Sehr oft konnte man beobachten, dass manche Lernende, sobald sie Brüche auf denselben Nenner brachten, nur noch auf syntaktischer Ebene agierten und keine Überlegungen mehr auf inhaltlicher Ebene stattfanden. Die SchülerInnen wollten also die Bruchzahlen ordnen, indem sie jeweils zwei auf den gleichen Nenner brachten und miteinander verglichen. Dabei brachten sie aber auch Bruchzahlen auf gleichen Nenner, von denen auf inhaltlicher Ebene völlig klar ist, welche größer ist, wie zum Beispiel Dietmar, der $\frac{3}{7}$ und $\frac{8}{9}$ auf den gleichen Nenner bringen wollte (detaillierte Analyse von Dietmars Interview siehe Kapitel 6.1.1.4). Weiters war auffällig, dass zwei SchülerInnen versuchten, alle

Brüche auf denselben Nenner zu bringen um sie zu ordnen. Aufgrund der großen Zahlen, die dabei entstehen würden, verwarf Richard diese Idee wieder und verwendete andere Strategien. Lara brachte alle Bruchzahlen auf Sechshundfünfzigstel, außer $\frac{2}{5}$, die brachte sie auf Fünfundfünfzigstel (siehe Abbildung unten).

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{8} = \frac{7}{56} & \frac{7}{8} = \frac{49}{56} \\ \frac{1}{7} = \frac{8}{56} & \frac{2}{5} = \frac{22}{55} \\ \frac{5}{4} = \frac{70}{56} & \frac{3}{7} = \frac{24}{56} \\ \frac{6}{8} = \frac{42}{56} & \end{array}$$

Abbildung: Laras Notizen

Sie erweiterte also alle Brüche, ohne inhaltlich mitzudenken, und ordnete sie dann. Jedoch wusste sie nicht, wo sie das $\frac{2}{5}$ -Kärtchen hinlegen sollte, da sie wusste, dass man Sechshundfünfzigstel und Fünfundfünfzigstel nicht vergleichen kann. Lara konnte also ohne Hilfe keine weitere Strategie finden um $\frac{2}{5}$ richtig einzuordnen.

Eine Fehlvorstellung, die bei einer Schülerin beim gleichnamig Machen von Brüchen zum Vorschein kam, war, dass das Erweitern von Brüchen als Vergrößern bezeichnet wurde. Aus Jasmins Aussage „Weil man kann auf Fünfunddreißigstel ahm vergrößern eben“, geht jedoch nicht klar hervor, ob Jasmin dabei wirklich die Vorstellung des Vergrößerns hat, oder ob ihr dafür das richtige Wort „erweitern“ nicht eingefallen ist. Auffällig ist jedoch, dass „vergrößern“ das erste Wort ist, das Jasmin für diesen Vorgang einfiel, das heißt, dass wahrscheinlich eine gewisse Assoziation zu „vergrößern“ in ihrer Vorstellung vorhanden ist.

Einen sehr interessanten Aspekt zum gleichnamig Machen von Brüchen lieferte Dietmar. Bevor er davon sprach, zwei Brüche auf denselben Nenner zu bringen, sagte er immer „wenn man das zusammenzählen will, wäre der Nenner...“. Er

assoziierte den Vorgang des gleichnamig Machens also mit der Addition (siehe Kapitel 6.1.1.4).

Die zweite sehr wichtige Strategie der SchülerInnen, diese Aufgabe zu lösen, war die Überlegung, wieviel bei den Bruchzahlen noch auf ein Ganzes fehlt. Auf semantischer Ebene, war dies die am häufigsten genutzte Strategie. Diese Überlegung war eigentlich als Intervention für die Aufgabe geplant, wenn SchülerInnen nicht weiter wussten, jedoch stellten fast alle Testpersonen diese Überlegung selbst an. Diese Strategie wurde beim Vergleichen der Bruchzahlen $\frac{7}{8}$ und $\frac{8}{9}$ am häufigsten angewandt. In Einzelfällen wurden auch andere Bruchzahlen so verglichen, worauf später in der Analyse von Dietmars Interview genauer eingegangen wird.

Eine andere Möglichkeit Bruchzahlen der Größe nach zu ordnen, die wieder auf syntaktischer Ebene anzusiedeln ist, ist das Umrechnen der Brüche in Dezimalzahlen. Zwei SchülerInnen haben diese Methode verwendet um die Aufgabe zu lösen. Richard zum Beispiel, wandelte $\frac{1}{8}$ in eine Dezimalzahl um, und kam nach langem Rechnen auf das Ergebnis 0,8. Da das Umrechnen aller Bruchzahlen wahrscheinlich die volle Länge des Interviews in Anspruch genommen hätte, wurde Richard darum ersucht, die Aufgabe mit anderen Methoden zu lösen. Die zweite Schülerin, Evelyn, verwendete diese Möglichkeit um die Bruchzahlen $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{7}$ zu vergleichen, sie rechnete also 2:5 und 3:7. Auch Evelyn brauchte sehr lange um diese Divisionen durchzuführen, und war sich dabei sehr unsicher. Jedoch war die Methode bei ihr gewinnbringend und sie konnte so die beiden Kärtchen in die richtige Reihenfolge bringen. Diese Strategie mag in Einzelfällen, also für das Vergleichen von zwei Brüchen, sinnvoll sein, jedoch ist dazu ein aufwändiges Agieren auf syntaktischer Ebene notwendig, denn die schriftliche Division war für die SchülerInnen schwierig durchzuführen. Effizienter wäre es wahrscheinlich in den meisten Fällen, diese Methode zu vernachlässigen und sich eher auf Strategien inhaltlicher Ebene, wie zum Beispiel, die im nächsten Abschnitt beschriebene, zu konzentrieren.

Eine sehr wichtige Möglichkeit, um Bruchzahlen zu vergleichen, ist die Bezugnahme zu bekannten Größen aus dem Alltag, wie zum Beispiel $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ usw. Den einzigen Bezug zu einer bekannten Größe, den sechs der InterviewteilnehmerInnen herstellten, war,

dass $\frac{5}{4}$ größer ist als ein Ganzes und deswegen die größte Bruchzahl ist, da alle anderen kleiner sind als ein Ganzes. Zwei SchülerInnen begründeten diesen Sachverhalt anders. Lena begründete dies mithilfe der Bruchstreifen, denn sie meinte, dass $\frac{5}{4}$ am größten sei, „weils da noch weiter geht?“, also weil $\frac{5}{4}$ nicht mehr auf dem Bruchstreifen abgebildet sind. Man könnte auch sagen, dass Lena unbewusst auch Bezug zum Ganzen genommen hat, da ein Bruchstreifen ja ein Ganzes repräsentiert. Sie sagte mit ihrer Aussage also implizit, dass sich $\frac{5}{4}$ in dem Ganzen nicht mehr ausgingen. Dietmar begründete seine Entscheidung damit, dass der Zähler bereits größer sei als der Nenner und deswegen $\frac{5}{4}$ die größte Bruchzahl sei. Andere der gegebenen Bruchzahlen, setzten nur zwei SchülerInnen in Bezug mit bekannten Größen. Sabrina erklärte: „Sieben Achtel sind schon fast ein Ganzes, sechs Achtel sind so viel wie drei Viertel und Zwei Fünftel sind weniger, und zwei Fünftel, ich weiß ich jetzt nicht genau wie groß das ist.“ Indem sie Bezug zu zwei bekannten Zahlen nahm, nämlich 1 und $\frac{3}{4}$, schaffte sie es drei Bruchzahlen zu ordnen. Ähnliche Überlegungen stellte Evelyn an, die meinte: „Weil das ist mehr als ein Ganzes, und sieben Achtel das ist, also sechs Achtel sind drei Viertel u n d sieben Achtel ist größer als sechs Achtel, und dann zwei Fünftel d a s i s t ein bisschen weniger als die Hälfte.“ An den gedehnten Worten merkt man, dass sie angestrengt nachdachte, um die Bruchzahlen richtig in Verbindung zu setzten, und sie schaffte es mit dieser Überlegung gleich vier Bruchzahlen zu ordnen.

6.1.1.2 Erwartete Schwierigkeiten

Schwierigkeiten tauchten bei dieser Aufgabe an den erwarteten Stellen auf, also beim Vergleichen von $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{7}$, deswegen, weil diese beiden Zahlen eng beieinander liegen und weil SchülerInnen nicht viel mit Fünftel und Siebentel anfangen können. Dies konnte man daran beobachten, dass sie sich sehr schwer taten diese Bruchteile graphisch darzustellen und aus dieser Grafik brauchbare Informationen abzulesen. Häufige Fehlerquelle war auch noch das falsche Ordnen von $\frac{7}{8}$ und $\frac{8}{9}$. Dieser Fehler wurde aber meistens von den SchülerInnen selbst, durch die Überlegung, wieviel noch auf ein Ganzes fehlt, korrigiert. Das Vergleichen von $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{8}$ wurde auch noch als Fehlerquelle erwartet, jedoch hatte dabei nur ein Schüler ein Problem, der aber durch Einzeichnen in einem Kreis auch auf die richtige Lösung kam.

6.1.1.3 Interventionen

Eine der geplanten Interventionen bei dieser Aufgabe waren Bruchstreifen als Hilfe zum Vergleichen der Brüche. Das System, wie Bruchstreifen aufgebaut sind, erscheint MathematikerInnen sehr simpel. Um eine Vorstellung davon zu bekommen, folgt ein Bild der Bruchstreifen, die die Lernenden als Hilfe bekamen:

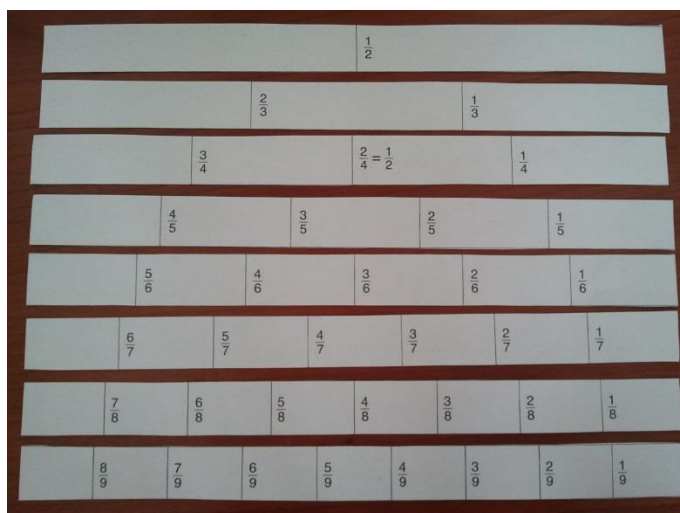


Abbildung: Bruchstreifen

Aus den Interviews ist hervorgegangen, dass Bruchstreifen keineswegs selbsterklärend sind, und dass SchülerInnen eine kurze Einführung benötigen um damit umgehen zu können. Man sollte ihnen also zuerst erklären, dass es sich bei den Streifen jeweils um ein Ganzes handelt, und dass dieses Ganze in die jeweilige Anzahl an Teilen unterteilt ist. Als die InterviewteilnehmerInnen ohne jegliche Erklärung die Streifen erhielten, tauchten Fragen auf wie „Muss man das dann so dran legen?“ oder „Passt es eh so wie ichs halte?“. Auch wenn die Lernenden nach einer kurzen Erklärung verstanden haben, wie sie mit den Bruchstreifen umgehen müssen, und es schafften Bruchzahlen damit zu vergleichen, so blieb unklar, ob sie wirklich das System dahinter verstanden haben- also ob sie wirklich bemerkten, dass ein Streifen für ein Ganzes steht, das in die jeweiligen Bruchteile unterteilt ist. Diese Intervention war in Summe wohl eher eine zusätzliche Hürde für die SchülerInnen, da sie erst lernen mussten mit den Streifen umzugehen, bevor sie sie anwenden konnten.

Die zweite Intervention, die bei dieser Aufgabe geplant war, war der Hinweis, wieviel bei den jeweiligen Bruchzahlen noch auf ein Ganzes fehlt. Die meisten SchülerInnen stellten diese Überlegung selbstständig an, und gewannen daraus auch die gewünschte Erkenntnis. Richard kam nicht von alleine auf die Idee, jedoch mit der

Anweisung, dass er $\frac{7}{8}$ und $\frac{8}{9}$ graphisch darstellen sollte, entwickelte er diese Überlegung, wie aus folgendem Interviewausschnitt, und aus seiner Zeichnung, klar hervorgeht:

- 47 R (zählt) acht, neun, ok. Also davon von dem habe ich acht Neuntel.
 48 I Ok, markiere die acht Neuntel mal irgendwie. Irgendwie anmalen oder so.
 49 R (zeichnet ein und zählt dabei) eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben und acht.
 50 Und jetzt da die sieben Achtel, eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben.
 51 I Ok, und wie können wir die jetzt vergleichen?
 52 R Na also wo halt mehr übrig bleibt, oder?
 53 I Ja, aber du hast jetzt nicht so genau gezeichnet, da müssen wir schon überlegen auch.
 54 R Mhm .. Hm.
 55 I Was bleibt denn immer übrig jeweils in den beiden Kreisen?
 56 R Also ein Feld.
 57 I Mhm./ Und was ist das eine Feld immer?
 58 R Ein Neuntel, oder ein Achtel, und ein Neuntel.
 59 I Ok, was ist größer, ein Achtel oder ein Neuntel?
 60 R Ahm . ein Achtel.
 61 I Mhm. / Dann versuch einmal anhand von der Überlegung jetzt . ahm . zu entscheiden,
 62 welche von den beiden größer ist.
 63 R Aso. Dann gehörts dann so (legt $\frac{7}{8}$ links von $\frac{8}{9}$).

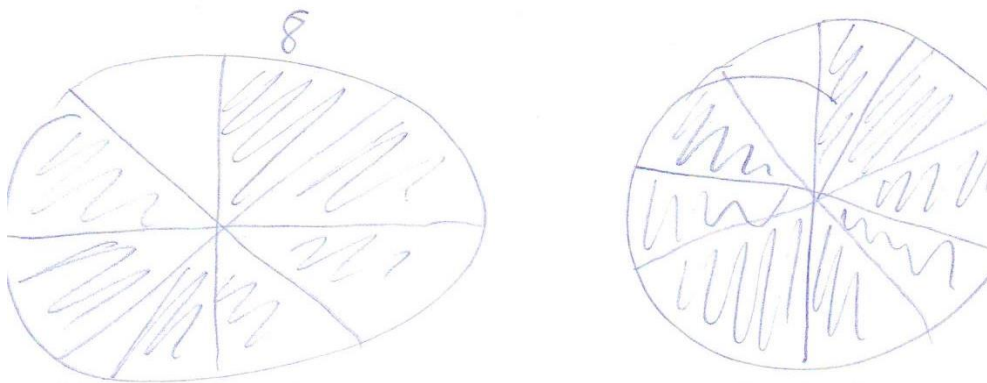


Abbildung: Richards Zeichnung

An der Aussage „Na also wo halt mehr übrig bleibt, oder?“ erkennt man, dass die Idee dieser Überlegung bei Richard vorhanden ist, dass er jedoch nicht alleine dazu in der Lage war, diese zu entwickeln und richtig anzuwenden. Deswegen benötigte er immer wieder Hinweise, wie zum Beispiel „Was bleibt denn immer übrig jeweils in den beiden Kreisen?“ oder „Ok, was ist größer, ein Achtel oder ein Neuntel?“. Für Richard war diese Intervention also sehr hilfreich, da er so, zwar mit gewisser

Führung, aber trotzdem selbst, diese Strategie Bruchzahlen zu vergleichen entdecken konnte.

6.1.1.4 Genaue Analyse eines ausgewählten Interviewausschnittes

In diesem Abschnitt wird das Gespräch zu dieser Aufgabe mit Dietmar analysiert, weil es auf viele interessante Aspekte hinweist. Dietmar war sich seiner Sache stets sicher und handelte sehr schnell und bestimmt. Bis auf den Versuch, Dietmars Denken auf syntaktischer Ebene mehr in Richtung inhaltliches Denken zu leiten, wurden bei ihm keine weiteren Interventionen angewendet. Das Transkript zu dieser Aufgabe wird sinngemäß in zwei Einheiten unterteilt.

- 1 I Kannst du diese Bruchzahlen der Größe nach ordnen?
- 2 D Von klein auf groß, oder?
- 3 I Genau, ja.
- 4 D (stapelt der Reihen nach Bruchzahlen, beginnend beim kleinsten, bis er fertig ist)
- 5 I Ok, legst du mir mal auf, der Reihe nach?
- 6 D Ja. (er legt $\frac{1}{8} \frac{1}{7} \frac{3}{7} \frac{2}{5} \frac{8}{9} \frac{7}{8} \frac{5}{4}$)
- 7 I Ok, dann erklär mir mal, wie du zu deinen Entscheidungen gekommen bist.
- 8 D Also, ein Siebentel wenn man das zusammenzählen will, wärs Sechsendfünfzig, wär der gleiche
- 9 Nenner und da wär das da (zeigt auf $\frac{1}{7}$) acht und das da (zeigt auf $\frac{1}{8}$) sieben, darum
- 10 ist das (zeigt auf $\frac{1}{7}$) größer. Da ist eh schon auf gleichen Nenner, da ist drei, darum ist das
- 10.1 größer.
- 11 I Mhm /
- 12 D Das (zeigt auf $\frac{3}{7}$ und $\frac{2}{5}$) hab ich zusammengezählt, das wär gleich fünfunddreißig, und . äh . das
- 12.1 (zeigt auf $\frac{2}{5}$) wär dann vierzehn und das (zeigt auf $\frac{3}{7}$) wär dann 15 .. **Aso** . ja (vertauscht die
- 12.2 beiden Kärtchen) So gehört es.
- 13 I Mhm /

Als Dietmar die Kärtchen erhielt, legte er sie kurz auf, und danach stapelte er sie gleich der Reihe nach in seiner Hand, wobei er mit dem kleinsten begann. Er war der Einzige, der die Kärtchen stapelte, und nicht nebeneinander auflegte, was wiederum bedeutet, dass er der Reihe nach die kleinsten Bruchzahlen heraussuchte, und somit den Vergleich mit den anderen Zahlen nicht mehr benötigte. Die Kärtchen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{7}$ nahm er relativ schnell, was darauf hindeutet, dass er sich sicher war, dass sie die kleinsten sind. Danach überlegte er etwas länger und angestrengter, was man an

seiner nonverbalen Gestik gut erkennen konnte. Er legte zum Beispiel den Kopf schief, blickte mit den Augen nach oben und spielte mit seiner Hand im Gesicht herum. Danach nahm er die Kärtchen $\frac{3}{7}$ und $\frac{2}{5}$ unmittelbar hintereinander, was darauf hindeutet, dass er sich zwischen den beiden Zahlen nicht ganz sicher war. Den Rest der Kärtchen nahm er auch wieder sehr schnell auf seine Hand, was darauf hindeutet, dass er sich da wieder sicherer war. Im Anschluss legte er die Kärtchen der Reihe nach auf.

Die genaue Analyse des Transkriptes beginnt in Zeile acht, als Dietmar auf die Frage nach einer Begründung für seine Entscheidung antwortete. Zu Beginn begründete er, wieso $\frac{1}{8}$ kleiner ist als $\frac{1}{7}$, indem er sie auf gleichen Nenner brachte. Wie bereits im vorigen Abschnitt erwähnt, begann er seine Begründung mit „Also, ein Siebentel wenn man das zusammenzählen will, wärs Sechsfundfünfzig.“ An dieser Stelle lässt sich die Vermutung aufstellen, dass für Dietmar hauptsächlich dann Brüche gleichnamig gemacht werden, wenn es darum geht sie zu addieren. Wahrscheinlich fehlt ihm der Begriff des gleichnamig Machens, weswegen er auf Begriffe der Addition, wie zum Beispiel „zusammenzählen“ zurückgriff. Dass er die Addition für die Lösung dieser Aufgabe nicht benötigte, war ihm wahrscheinlich klar, da er nie eine durchführte. Die Annahme, dass Dietmar den Vorgang des gleichnamig Machens automatisch mit der Addition von Brüchen in Verbindung bringt, bestätigte sich im Laufe des Interviews immer wieder. Er sprach öfter von „zusammenzählen“ obwohl er eigentlich nur auf gleichen Nenner brachte. In Zeile zwölf meinte er sogar schon „Das habe ich zusammengezählt“, obwohl er nichts addierte, sondern nur den gemeinsamen Nenner suchte.

Mit seiner Aussage in Zeile acht bis neun, nahm er Bezug auf den quasikardinalen Zahlaspekt, denn er erklärte, dass von den beiden Brüchen, die er gerade auf den gleichen Nenner gebracht hatte, der Bruch mit dem größeren Zähler größer sei als der mit dem kleineren. In der nächsten Zeile nannte er nochmals dieselbe Strategie, um $\frac{1}{7}$ und $\frac{3}{7}$ zu vergleichen.

Während er die Brüche $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{7}$ auf gleichen Nenner brachte, merkte er sofort, dass er sie falsch angeordnet hatte, und korrigierte deren Ordnung. Die starke Betonung des Wortes „Aso“, und die Tatsache, dass er seinen Fehler so schnell korrigieren konnte, deutet entweder darauf hin, dass er sich während des Ordnen verrechnet

hatte, oder dass er gar nicht gerechnet hatte, und nach Gefühl entschied, welche der beiden Zahlen größer sei.

- 14 D Auf jeden Fall da, da muss man wieder auf gleichen Nenner bringen aber, das ist dann, wär
14.1 gleich, zweiundsiebzig, das wär sechsfünfzig, und das wär sechsdreißig, nein
14.2 siebenundzwanzig.
- 15 I Ist es da wirklich notwendig, dass ich bei denen zweien ($\frac{3}{7}$ und $\frac{8}{9}$) auf gleichen Nenner bringe?
- 16 D Nein, nicht wirklich.
- 17 I Wieso nicht?
- 18 D Weil da schon fast ein Ganzes ist und da viel fehlt, fast noch $\frac{1}{2}$.
- 19 I Mhm.
- 20 D Auf jeden Fall da ist dann, äh . , wenn man das wieder zusammenrechnen würde, würde
20.1 zweiund. Nein. Zweiundsiebzig rauskommen.
- 21 I Wo jetzt?
- 22 D Da bei diesen zweien (zeigt auf $\frac{8}{9}$ und $\frac{7}{8}$).
- 23 I Achso.
- 24 D Da wär gleich das (zeigt auf $\frac{7}{8}$) wär dann dreiundsechzig und das (zeigt auf $\frac{8}{9}$) ist
25 vierundsechzig. Dann ist das aber größer. (Tauscht die Kärtchen um). So und das da
26 wieder zusammengezählt, das wär dann sechsdreißig, das wär dann fünfundvierzig
27 da (zeigt auf $\frac{5}{4}$) und da (zeigt auf $\frac{8}{9}$) wärs dann zweiunddreißig. Darum ist das (zeigt
28 auf $\frac{5}{4}$) größer als das (zeigt auf $\frac{8}{9}$).
- 29 I Mhm, und ist es wirklich notwendig, dass wir da wieder auf denselben Nenner
30 bringen?
- 31 D Nein, nein, weil das ist da (zeigt auf den Zähler von $\frac{5}{4}$) sogar schon größer als der Nenner
32 und da ist er ja noch kleiner (zeigt auf $\frac{8}{9}$).

Im Anschluss verglich Dietmar die Bruchzahlen $\frac{3}{7}$ und $\frac{8}{9}$, indem er auf denselben Nenner brachte. Sehr auffällig ist hier, dass Dietmar zum ersten Mal den Begriff „auf gleichen Nenner bringen“ nannte, ohne ihn dabei in Verbindung mit der Addition zu bringen. Die Tatsache, dass er um die Bruchzahlen $\frac{3}{7}$ und $\frac{8}{9}$ zu vergleichen, diese auf denselben Nenner brachte, lässt darauf schließen, dass er es nicht schaffte, zwischen der syntaktischen und der inhaltlichen Ebene zu wechseln, was die Antwort auf meine Frage bestätigte, ob es denn wirklich notwendig sei, auf gleichen Nenner zu bringen. Dietmar verneinte nämlich sofort und sehr bestimmt, und begründete die Größerrelation mit dem Gedanken, wieviel noch auf ein Ganzes fehle. Seine genaue

Antwort war: „Weil da schon fast ein Ganzes ist und da viel fehlt, fast noch $\frac{1}{2}$.“ Er war also einer der Wenigen, die auch bei kleineren Bruchzahlen die Überlegung anstellten, wieviel noch auf ein Ganzes fehlt. Durch seine schnelle Antwort merkte man, dass Dietmar auf der syntaktischen Ebene wie gefangen war, als er die gemeinsamen Nenner und die dazugehörigen Zähler ausrechnete. Nur ein kleiner Hinweis genügte, um ihn auf die inhaltliche Ebene zurückzuholen, auf welcher es ihm sehr leicht fiel Begründungen zu finden.

Dass er, um $\frac{7}{8}$ und $\frac{8}{9}$ zu vergleichen, die Brüche wieder gleichnamig machte, kann entweder bedeuten, dass er sofort wieder, ohne inhaltliche Überlegungen anzustellen auf der syntaktischen Ebene arbeitete, oder dass er bereits inhaltliche Überlegungen anstellte, die ihm nicht weiterhalfen, und deswegen wieder auf die syntaktische Ebene zurückgriff. Um $\frac{8}{9}$ und $\frac{5}{4}$ zu vergleichen machte er die beiden Brüche erneut gleichnamig. Die Vermutung, dass ihm die Verbindung zwischen semantischer und syntaktischer Ebene sehr schwer fiel, bestätigte sich an dieser Stelle also erneut, da sich das Phänomen unnötigen Verharrens auf der syntaktischen Ebene hier wiederholte. Auf die Frage, ob es hier wirklich notwendig sei auf gleichen Nenner zu bringen, antwortete er wieder: „Nein, nein, weil das ist da (zeigt auf den Zähler von $\frac{5}{4}$) sogar schon größer als der Nenner und da ist er ja noch kleiner (zeigt auf $\frac{8}{9}$).“ (Zeile 31-32). Also obwohl er sogar über das Wissen verfügte, dass Bruchzahlen, deren Zähler größer ist als der Nenner, größer als ein Ganzes sind, blieb er bei seiner Strategie die Brüche auf gleichen Nenner zu bringen.

Dietmar ist kein Einzelfall, denn viele der InterviewteilnehmerInnen schafften es nicht, die syntaktische Ebene zu verlassen und Bruchzahlen, bei denen es sich anbietet, auf inhaltlicher Ebene zu vergleichen, obwohl ihnen Strategien auf semantischer Ebene sehrwohl bekannt waren und sie diese auch anwenden konnten. Dies ist vielleicht ein Hinweis darauf, dass es SchülerInnen generell Schwierigkeiten bereitet, diese beiden Ebenen zu verbinden. Bei dem Interview sieht man sehr gut, dass Dietmar entweder auf syntaktischer oder auf semantischer Ebene agiert, diese allerdings nie selbstständig verbindet oder zwischen ihnen wechselt, was aber für die Lösung der Aufgabe der effizienteste Weg wäre. Dazu mehr im Kapitel **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden..**

6.1.2 Erster Teil, zweite Aufgabe

Ergänze den fehlenden Nenner beziehungsweise Zähler. Versuche deine Antworten zu begründen.

$$\frac{2}{8} = \frac{\quad}{16}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{3}{\quad}$$

Diese Aufgabe wurde mit sieben SchülerInnen durchgeführt, und es wurden alle Interviews für die Analyse verwendet. Wie erwartet, war das Lösen dieser Aufgabe kein Problem, und bis auf eine Schülerin, die bei der zweiten Aufgabe etwas länger nachdachte, kamen alle Antworten sehr schnell. Die SchülerInnen erweckten den Eindruck, dass das Erweitern von Brüchen ausführlich geübt wurde. Die Begründungen für ihre Antworten betreffend, sah es schon ganz anders aus, dazu mehr im nächsten Abschnitt.

6.1.2.1 Die Schwierigkeit des Begründens an sich

Sehr auffällig bei dieser Aufgabe war, dass viele SchülerInnen, wenn sie nach einer Begründung für ihre Lösung gefragt wurden, nicht verstanden, was und wozu sie begründen und vor allem wie sie ihre Entscheidungen rechtfertigen sollten. Eine Reaktion auf die Aufforderung ihre Entscheidungen zu begründen, indem sie zum Beispiel etwas aufzeichnen sollten, wodurch die Lösung der Aufgabe anschaulich dargestellt wird, war die Frage: „Also wie aufzeichnen?“. Ein sehr aussagekräftiger Interviewausschnitt aus dem Gespräch mit Markus, indem man sehr gut die Unfähigkeit zu begründen erkennen kann, ist folgender:

- | | | |
|---|---|--|
| 5 | I | Ok, kannst du mir das irgendwie mit zeichnen, falten, basteln, was auch immer erklären, dass |
| 6 | | das so ist? Dass gilt, ... |
| 7 | M | Also ein Achtel ist das Gleiche wie zwei Sechzehntel. |
| 8 | I | Ok, wieso? |
| 9 | M | Weil das das Doppelte ist von beiden. |

- 10 I Und wieso?
- 11 M Weil es beides das Gleiche ist.
- 12 I Kannst du mir das irgendwie aufzeichnen, dass man das versteht.
- 13 M Also (schreibt die Bruchzahl auf) also ist das gleiche wie zwei Sechzehntel.
- 14 I Also es war zwei Achtel ist gleich vier Sechzehntel. Haben wir gehabt.
- 15 M Ist gleich vier Sechzehntel?
- 16 I Zwei Achtel ist gleich vier Sechzehntel.
- 17 M (schreibt die Angabe auf)
- 18 I Zwei Achtel.
- 19 M Achso. Zwei.
- 20 I Ok, und jetzt irgendwie aufzeichnen, dass das gleich ist.
- 21 M Also zwei Achtel mal zwei / ist vier.
- 22 I Genau, das gerechnete glaube ich dir schon, aber ob du es mir irgendwie beweisen kannst,
- 23 wenn ich jetzt nicht rechnen könnte zum Beispiel.
- 24 M Das . ahm . ahm . zwei Achtel wär auch ein Viertel und vier Sechzehntel ist auch wieder ein
- 25 Viertel.
- 26 I Mhm./ Ok. Kannst du mir das irgendwie aufzeichnen, weil wenn ich nicht rechnen kann, weiß
- 27 ich vielleicht auch nicht, dass vier Sechzehntel ein Viertel sind.
- 28 M Mhm . ahm ... (schreibt wieder Zahlen auf)
- 29 I Irgendwie zeichnen, nicht rechnen, ich will keine Zahlen mehr. Nur zeichnen.

Als Markus nach einer Begründung, durch zeichnen, falten oder basteln, gefragt wurde, antwortete er immer wieder mit Sätzen wie „Also ein Achtel ist das gleiche wie zwei Sechzehntel.“, „Weil es das doppelte ist von beiden.“ und „Weil es beides das Gleiche ist.“ Obwohl Markus ausdrücklich gebeten wurde, seine Entscheidung anschaulich zu begründen, kam er gar nicht auf die Idee etwas aufzuzeichnen oder zu falten. Er schaffte es also nicht seine Lösung zu begründen, sondern wiederholte die Lösung der Aufgabe einfach immer wieder mit anderen Worten, deutlicher und langsamer gesprochen. Entweder dachte Markus also, eine andere Formulierung würde seine Entscheidung schon begründen, oder er wusste, dass er die Lösung nicht begründen konnte, und versuchte sich mit Antworten dieser Art durchzuschummeln. Auch nach weiterem Nachfragen, rechnete er wieder, und während des ganzen Interviewausschnitts kann man erkennen, dass Markus sich nicht von den Zahlen und vom Rechnen losreißen konnte. Markus war keineswegs der einzige, woraus man vielleicht schließen kann, dass, wie schon bei der ersten Aufgabe bemerkt wurde, viele SchülerInnen nur Zahlen und konkrete Rechnungen,

also Handlungen auf der syntaktischen Ebene als Begründung ansehen. Nur selten kamen SchülerInnen eigenständig auf die Idee, zu zeichnen und zu falten, also ihre Lösungen, durch Handlungen auf inhaltlicher Ebene zu begründen. Auf die Aufforderung, eine Begründung aufzuzeichnen, begann Evelyn sogar Pfeile und „ $\cdot 2$ “ unter die Brüche zu schreiben, das heißt sie blieb sogar beim Zeichnen auf der syntaktischen Ebene.

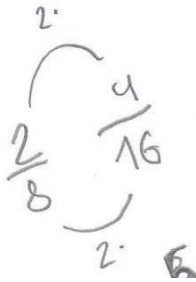


Abbildung: Evelyns Begründung für die Gleichwertigkeit der Bruchzahlen

6.1.2.2 Begründungen der SchülerInnen und Schwierigkeiten, die dabei entstanden

Die Begründung, welche wohl am häufigsten vorkam, war die rechnerische Erklärung des Vorgangs des Erweiterns. Die SchülerInnen erklärten auf die verschiedensten Arten, dass man die Zähler und die Nenner mit derselben Zahl multiplizieren müsse, also zum Beispiel „weil acht mal zwei sechzehn ist und zwei mal zwei vier“ von Lena, „beides mal zwei“ von Markus, oder „weil ich es mal drei gerechnet habe, jedes“ von Sabrina. Wie bereits erklärt, wurden diese Begründungen in den verschiedensten Formulierungen immer wiederholt. Interessant war, dass einige SchülerInnen, die Multiplikation von Zähler und Nenner als wiederholte Addition aufgefasst haben. Sabrina zum Beispiel sagte: „Acht und acht sind sechzehn und zwei mal zwei sind .. also, einfach nur, das ist das Doppelte, und das ist auch das Doppelte.“ Man merkt, dass die wiederholte Addition ihre Strategie war, um auf die richtige Lösung zu kommen. Sie begann auch ihre Rechnung anhand der wiederholten Addition zu erklären, jedoch, brach sie dies kurz vor Ende ihrer Ausführung ab, und entschloss sich die Rechnung mithilfe der Multiplikation zu erklären. Evelyn erklärte ihre Strategie wie folgt: „..., wie oft muss ich acht nehmen, um zu sechzehn zu kommen / Ähm . mal zwei und deswegen auch zwei mal zwei.“ Sie verwendete die wiederholte Addition und die Multiplikation also in Kombination. Um den richtigen Multiplikator für

den Zähler zu finden, arbeitete sie mit der Vorstellung der wiederholten Addition und um den Zähler dann wirklich zu berechnen, verwendete sie die Multiplikation. Interessant war auch Viktorias Antwort: „... , also ich habe so lange sechs, sechs mal, also ich habe sechs mal drei gerechnet,...“ Hier kann interpretiert werden, dass Viktoria zwar mit der Methode der wiederholten Addition gearbeitet hat, dass sie sich in ihrer Ausführung jedoch sehr unsicher war, ob ihre Strategie als richtig angesehen wurde. Sie entschied sich also spontan für die Multiplikation, die sie für die sicherere Variante hielt. Eine andere Erklärung dafür wäre, dass Viktoria den Zusammenhang zwischen Addition und Multiplikation nicht richtig verstanden hat, und somit plötzlich verwirrt war, wieso sie nun addiere. Sie dachte vielleicht, dass dies falsch sei, und ihr fiel ein, dass sie, um auf die richtige Lösung zu kommen, eigentlich multipliziert hatte. Auf die Aufforderung die Begründung anschaulich darzustellen, taten dies von acht SchülerInnen vier mithilfe eines Kreises. Bis auf kleine Ungenauigkeiten, schafften es diese vier SchülerInnen, die Gleichheit der Bruchzahlen $\frac{2}{8}$ und $\frac{4}{16}$ im Kreis darzustellen. Die zweite Aufgabe, nämlich zu zeigen, dass $\frac{1}{6} = \frac{3}{18}$, war für die SchülerInnen merklich schwieriger, da sie Probleme dabei hatten, Sechstel und Achtzehntel im Kreis einzuzichnen, doch genauere Ausführungen zu dieser Problematik, folgen im Kapitel 6.2. Nur eine Schülerin, zeichnete ein Rechteck um zu zeigen, dass $\frac{2}{8} = \frac{4}{16}$.

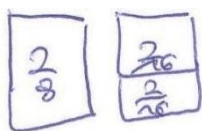


Abbildung: Lenas Begründung für die Gleichwertigkeit der beiden Bruchzahlen.

Interessant dabei ist, dass das Rechteck bei Lena nicht ein Ganzes darstellt, sondern gleich $\frac{2}{8}$. Das Rechteck daneben, das sie genauso groß zeichnete, teilte sie in zwei Hälften und beschriftete jede mit $\frac{2}{16}$, und erklärte, dass man nun $\frac{4}{16}$ habe. Sie war also die einzige Schülerin, die den Bezug zu einem Ganzen nicht benötigte, sondern gleich von $\frac{2}{8}$ ausging.

Eine sehr einfache, aus dem Alltag gegriffene, aber durchaus auch sehr gute Erklärung, gab Sabrina. Sie meinte, dass wenn man von einer Torte zwei Achtel

nehme, und diese dann wieder teilen würde, dann hätte man vier Sechzehntel. Die anderen SchülerInnen tätigten keinerlei Verbindungen zum Alltag, um ihre Lösungen zu begründen.

Zwei SchülerInnen nahmen, um ihre Lösungen der ersten Aufgabe zu rechtfertigen, Bezug zu einem Viertel. Evelyn, zum Beispiel, erklärte, nachdem sie zwei Kreise gezeichnet hatte, und die jeweiligen Bruchteile markierte: „Das ist beides ein Viertel.“ Diese beiden SchülerInnen erkannten also nicht nur die Gleichheit der beiden Zahlen, sondern nutzen die Tatsache, dass Bruchzahlen nicht eindeutig darstellbar sind, zu ihrem Vorteil aus, und halfen sich mit der einfacheren Bezugszahl $\frac{1}{4}$.

Eine sehr spannende Begründung, an die ich selbst gar nicht gedacht habe, war der Bezug zur Division. Jasmin erklärte: „Weil wenn man durch sechs dividiert, dann, und also wenn man dann, bei der ersten Rechnung ist eins also d i e Ausgangszahl sag ich mal, und wenn es bei der zweiten Rechnung das Dreifache ist, müsste man glaube ich auch durch das Dreifache dividieren.“ Sie erklärte die Begründung durch die Division zwar sehr unsicher, jedoch war der Einfall, mithilfe der Division die Gleichheit von $\frac{1}{6}$ und $\frac{3}{18}$ zu erklären, für eine Schülerin der zweiten Klasse sehr bemerkenswert. Eine mögliche Erklärung, wie sie auf diesen Einfall kam, ist die Division durch Dezimalzahlen, denn um solche Rechenaufgaben zu lösen, wird in der Schule sehr häufig folgende Methode gelehrt: Bei einer Division durch eine Dezimalzahl, wird der Divisor so oft mit zehn multipliziert, bis man eine ganze Zahl erhält und im Anschluss wird der mit der gleichen Zehnerpotenz multipliziert, um den Quotienten nicht zu verändern. So kann man eine Division durch eine Dezimalzahl auf eine Division zweier natürlicher Zahlen zurückführen.

Diese Methode adaptierte Jasmin für die, ihr vorliegende Aufgabe. Diese Adaption ist sehr bemerkenswert, denn erstens wurde in unserer Aufgabe der Dividend zuerst multipliziert, und danach multiplizierte sie erst den Divisor, und zweitens handelte es sich dabei nicht um einfaches Kommaverschieben, also um das Multiplizieren mit der Zahl zehn, sondern mit drei. Indem Jasmin diese aufwändige Adaption gelang, zeigte sich, dass sie wirklich verstand, dass sich der Quotient einer Division nicht veränderte, wenn Dividend und Divisor um die gleiche Zahl vervielfacht wurden. Wenn sie dieses Wissen nicht bereits verinnerlicht hätte, und sie, als sie diese Regel in der Schule durchgenommen hatten, nur die Methode auswendig gelernt hätte,

wäre es ihr wahrscheinlich nicht möglich gewesen, das Gelernte hier so gewinnbringend anzuwenden.

6.1.2.3 Interventionen

Die Intervention bei dieser Aufgabe bestand nur aus einem Blatt Papier und der Aufforderung, mithilfe dieses Blattes zu zeigen, dass die beiden Brüche die gleiche Zahl darstellten. Wenn SchülerInnen hier nicht weiter wussten, wurde noch ergänzt, dass sie die Gleichheit durch Falten zeigen sollten. Die Reaktionen auf diese Intervention waren des Öfteren ungläubige Blicke, was sie nun mit dem Blatt Papier anfangen sollten, nach wenigen Momenten aber, begannen die SchülerInnen zu falten. Zwei SchülerInnen wurde die Wahl gelassen, ob sie falten oder zeichnen wollen, und es entschieden sich beide für zeichnen. Man kann also sagen, dass die Intervention ein Blatt Papier zu falten, von einigen SchülerInnen nicht besonders gerne angenommen wurde.

Zwei SchülerInnen mussten die erste Aufgabe mittels falten anschaulich darstellen. Sabrina verstand dies sehr schnell, und wusste gleich wie sie falten musste, um Achtel und Sechzehntel zu erhalten. Anders ging es dabei Markus, der zwar Achtel falten konnte und diese markierte, danach aber immer nur davon redete, dass es das Doppelte wäre, wenn er auch Sechzehntel hätte. Man kann also sagen, dass Markus das Grundprinzip dieser Intervention nicht verstand, nämlich, dass man, wenn man das gefaltete Papier ansieht, auf einen Blick erkennen sollte, dass gilt $\frac{2}{8} = \frac{4}{16}$. Mithilfe von Hinweisen, wie zum Beispiel ob man nicht auch mit falten auf Sechzehntel kommen könne, schaffte er es schlussendlich auch Sechzehntel zu falten und die Gleichheit zu zeigen.

Bei der zweiten Aufgabe bekamen ebenfalls zwei SchülerInnen die Aufgabe ihre Lösung mithilfe von falten zu erklären. Lena hatte zuerst große Probleme damit Achtzehntel zu falten. Sie faltete das Papier in der Mitte, und anschließend faltete sie die zweite Hälfte noch einmal in der Mitte, und behauptete sie habe nun Achtzehntel. Lena bekam sogar den Hinweis zuerst Sechstel zu falten, jedoch schaffte sie es auch beim zweiten Versuch wieder nur Achtel zu falten. Daraufhin durfte sie die erste Aufgabe zeigen. Sie faltete, und zum Schluss meinte sie „Und das i s t. Das sind da vier Sechzehntel.“ Aus dem gedehnten „ist“, kann man folgern, dass es für Lena selbst noch nicht völlig klar war, dass sie nun Sechzehntel gefaltet hatte, sondern, dass sie dies erst überprüfen musste, und dann bestätigen konnte. Man kann also

sagen, dass für Lena die Intervention bei der zweiten Aufgabe eine zusätzliche Hürde darstellte, nämlich das Falten von Sechstel und Achtzehntel, die für sie nicht zu überwinden war. Die Intervention bei dieser Aufgabe war für Lena nicht gewinnbringend, ja sogar eine zusätzliche Verwirrung. Bei der ersten Aufgabe half Lena die Intervention, denn sie schaffte es tatsächlich die Gleichheit darzustellen. Durch die gedehnten Worte zum Schluss, merkte man, dass Lena in diesem Moment selbst erst verstand, was sie eigentlich tat. Das bedeutet also, dass bei Lena während des Interviews ein Lernprozess stattfand. Auch Jasmin wurde vor die Aufgabe gestellt, mithilfe von falten zu zeigen, dass $\frac{1}{6} = \frac{3}{18}$. Sie bat zuerst darum, es aufzeichnen zu dürfen, da sie dies für einfacher hielt. Als sie dies aber nicht schaffte, wurde sie wieder aufgefordert zu falten. Jasmin überlegte, und es gelang ihr auch gleich, Sechstel zu falten. Um weiterzumachen, brauchte sie den Hinweis nun Achtzehntel zu falten. Sie faltete also noch dreimal, um Achtzehntel zu erhalten, und sie konnte somit die Gleichheit zeigen. Interessant dabei ist, dass sie die Achtzehntel in dieselbe Richtung faltete wie sie bereits die Sechstel gefaltet hatte, und nicht in die entgegengesetzte, wie es vielleicht für viele Menschen einfacher und logischer wäre. Hier fehlt es der Schülerin, möglicherweise aufgrund ihres Alters, noch an dem notwendigen metakognitiven Wissen, dass man durch dreimal falten, egal in welche Richtung, die Unterteilung verdreifacht.

6.1.2.4 Zusatzfrage

Die Zusatzfrage, wie der Prozess hieße, um die richtige Lösung zu finden, wurde vier SchülerInnen gestellt. Entgegen der Erwartung, dass viele der SchülerInnen diese Frage richtig beantworten könnten, wurde die richtige Antwort, nämlich „Erweitern“, kein einziges Mal genannt.

Zwei Schülerinnen meinten sofort, dass sie das nicht wüssten.

Markus antwortete multiplizieren, obwohl man zugeben muss, dass die Frage von mir, mit „Ok, weißt du wie das mathematisch heißt, was wir da tun? Wie das heißt wenn man mal rechnet?“ sehr ungeschickt gestellt wurde. Da in der Frage ja schon die Bezeichnung „mal rechnen“ vorkam, lenkte dies den Schüler möglicherweise in die falsche Richtung. Doch auch auf die Frage, wie das bei Brüchen hieße, wenn man im Zähler und im Nenner multipliziere, wusste er keine Antwort. Die Frage was denn das Gegenteil von dem sei, was wir machten, antwortete er „dividieren“. Um ihm zu helfen, auf den Begriff „kürzen“ zu kommen, wurde ihm eine Beispielaufgabe

gestellt, nämlich wie man $\frac{6}{12}$ noch anschreiben könnte. Er schrieb zuerst $\frac{3}{6}$ und dann $\frac{1}{2}$ und auf die Frage, was er nun gemacht habe, antwortete er „Also verkleinert, also beides dividiert.“ Bei Markus ist also die Fehlvorstellung des Verkleinerns vorhanden, wobei die Fehlvorstellung des Vergrößerns nicht vorkam.

Als Sabrina nach der mathematischen Bezeichnung gefragt wurde, antwortete sie „Mm..Kürzen/ oder vergrößern./“. Das Heben der Stimme, zeigt die starke Unsicherheit von Sabrina. Sie antwortete „Kürzen“, als ihr aber einfiel, dass sie eigentlich das Gegenteil machte, antwortete sie „vergrößern“. Im Gegensatz zu Markus, ist bei Sabrina die Fehlvorstellung des Vergrößerns sehr wohl vorhanden. Sie unterstrich dies noch mit der Äußerung „Anders angeschrieben den Bruch./“ und „Mi, also größ e r e n Zahlen./“. Durch das Heben der Stimme, und die Tatsache, dass das Wort „größeren“ gedehnt ausgesprochen wurde, merkt man jedoch, dass Sabrina vermutete, dass ihre Antworten nicht ganz richtig sein konnten. Die Schülerin kannte und verwendete zwar den Ausdruck „kürzen“, woraus man aber nicht schließen kann, ob die Fehlvorstellung des Verkleinerns bei ihr vorhanden ist. Eine mögliche Erklärung, wieso sie den Begriff „kürzen“ kannte, ist, dass dieser in den Aufgaben im Mathematikunterricht öfter vorkommt, wie zum Beispiel „Kürze dein Ergebnis!“ oder „Kürze bevor du multiplizierst!“. Der Begriff des Erweiterns kommt wahrscheinlich seltener vor, denn zum Beispiel bei der Bruchaddition spricht man selten von „erweitern“, sondern meistens von „auf den gleichen Nenner bringen“.

6.1.3 Erster Teil, dritte Aufgabe

Was ist die nächstgrößere Bruchzahl nach $\frac{2}{5}$?

Diese Aufgabe wurde mit sechs SchülerInnen durchgeführt, wobei wieder alle Interviews dazu, zur Analyse herangezogen wurden. Diese Aufgabe diente zur Feststellung, inwieweit Vorstellungen zur Dichtheit der Bruchzahlen auf der Zahlengerade und zur Unendlichkeit vorhanden sind. Wie erwartet, antworteten vier von sechs SchülerInnen spontan mit $\frac{3}{5}$.

6.1.3.1 Intervention

Von den vier SchülerInnen, die mit $\frac{3}{5}$ antworteten, kam es bei zwei sofort zu einer Intervention. Die Intervention bei dieser Aufgabe war folgende Frage „Ich behaupte nun $\frac{5}{10}$ liegt noch zwischen $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{5}$, stimmt das?“ Die anderen beiden SchülerInnen, bei denen ich nicht intervenierte, taten dies in gewissermaßen selbst, wie zum Beispiel Andreas, der nach seiner ersten Antwort, gleich ein zweites Mal antwortete, mit „Dann kommt fünf Zehntel./“. Diese SchülerInnen provozierten also selbst in ihnen einen Konflikt, während bei den beiden anderen, ich diejenige war, die sie vor diesen Konflikt stellte. Erfolg dieser Intervention, egal ob durch mich oder durch die Lernenden selbst, war, dass keiner der SchülerInnen mehr dachte, dass $\frac{3}{5}$ die direkt darauffolgende Bruchzahl war, sondern sich zumindest bewusst war, dass es da noch eine Bruchzahl dazwischen geben müsse.

Bei Lena zum Beispiel, hatte die Intervention jedoch keinen weiteren Erfolg. Hier intervenierte ich mehrmals, indem ich ihr immer wieder auftrug den Bruch auf einen noch größeren Nenner zu bringen. Jedes Mal antwortete sie dann, dass die eben gefundene Bruchzahl, die direkt darauffolgende sei. Sie wandelte also auf syntaktischer Ebene die Brüche um, ohne inhaltliche Überlegungen anzustellen. Erst nachdem ich sie ausdrücklich danach fragte, was nun passieren würde, wenn wir die Nenner immer größer machten, meinte sie, dass die Zahl dann immer noch kleiner werde. Ganz ähnlich wie bei Lena, zeigte die Intervention auch bei Evelyn keinen weiteren Effekt.

Markus, entdeckte relativ rasch, dass es so eine Zahl nicht geben kann. Nach seiner ersten Antwort $\frac{3}{5}$, intervenierte er sofort selbst, und verbesserte seine Antwort in $\frac{7}{20}$. In der Folge des Interviews wird klar, dass er eigentlich $\frac{5}{20}$ meinte, und sich verrechnet hatte, weil er versehentlich von $\frac{3}{5}$ ausgegangen ist. Als ich dann, als nächste Intervention, behauptete, dass $\frac{9}{20}$ die nächstgrößere Bruchzahl sei, verneinte er dies, und meinte, es gibt „noch immer viel, viel größere“. Andreas erkannte fast noch schneller, dass es keinen direkten Nachfolger geben kann. Er antwortete nämlich: „Äh, eigentlich man kann es immer weiter, man es immer größer umformen, und somit kommen immer kleinere Zahlen.“

6.1.3.2 Vorstellungen von Dichtheit und Unendlichkeit

Was bei der Analyse dieser Aufgabe schnell auffiel, war, dass die Vorstellungen zur Unendlichkeit bei den SchülerInnen sehr unterschiedlich ausgeprägt waren. Zwei Schülerinnen ahnten gleich zu Beginn, dass es bei dieser Aufgabe um die Dichtheit der Bruchzahlen ging, auch wenn sie sich dessen selbst nicht bewusst waren und dies auch nicht fachlich korrekt ausdrücken konnten. Die beiden Schülerinnen, waren die einzigen, welche die Angabe hinterfragten. Jasmin fragte „Jetzt nur von Fünftel oder insgesamt?“ und Viktoria „Wie, direkt nachfolgend?“ Sie hatten also ein gewisses Gefühl, dass hinter der Aufgabe mehr stecken würde, als einfach nur $\frac{3}{5}$ zu nennen.

Aus einigen Interviews ging hervor, dass die Vorstellung des Unendlichen bei SchülerInnen zwar existiert, jedoch sehr wenig ausgeprägt ist. Die endgültige Lösung von Lena „eine unendliche Zahl“, zeigt, dass sie wusste, dass man dieses Spiel unendlich fortsetzen könne, sie glaubte aber auch, dass man dies wirklich noch in einer Zahl darstellen kann. Ähnlich antwortete Viktoria, die behauptete, es gebe einen direkten Nachfolger von $\frac{2}{5}$ und dass diese Zahl einen „ziemlich großen Nenner“ habe. Man hat den Eindruck, dass die SchülerInnen meinten, dass es so eine Zahl gebe, dass sie jedoch nicht in der Lage seien, diese zu berechnen, weil ihre mathematischen Kompetenzen dafür noch nicht ausreichen würden. Unter der Unendlichkeit beziehungsweise Dichtheit stellten sie sich wahrscheinlich vor, dass eine Zahl sehr lange weiter geht, aber trotzdem zu irgendeinem Zeitpunkt, den sie sich jedoch nicht vorstellen konnten, aufhört.

Bei Jasmins Interview merkt man, dass ihr die Interventionen weiterhalfen. Auf die Frage, ob $\frac{5}{10}$ nun die direkt nachfolgende Zahl sei, entgegnete sie: „Naja aber drei Sechstel ist ja das Gleiche wie fünf Zehntel, das können wir jetzt auch sagen, oder?“ Jasmin war also die einzige, die die Gleichwertigkeit der verschiedenen Darstellungen für Bruchzahlen bei dieser Aufgabe ins Spiel brachte, und die als Argument dafür nannte, dass $\frac{5}{10}$ nicht die nächstgrößere Zahl nach $\frac{2}{5}$ sein konnte. Sie meinte außerdem, dass man nicht wirklich sagen könne, ob es einen direkten Nachfolger gebe, denn das käme darauf an, wie weit man weiter rechnet. Das bedeutet also, dass Jasmin zu diesem Moment über eine ähnliche Vorstellung von Dichtheit und Unendlichkeit der Bruchzahlen verfügte, wie Lena und Viktoria. Da

Jasmin nicht zu einer klaren Antwort kam, stellte ich ihr eine zweite intervenierende Frage. Ich nannte ihr zuerst ein Beispiel, eines direkten Nachfolgers in den natürlichen Zahlen und fragte anschließend, ob das im Bereich der Bruchzahlen auch möglich sei. Jasmin antwortete sehr rasch und sicher. „Nein. Weil es unendlich weiter geht.“ Aus dieser spontanen jedoch sicheren Antwort kann man schließen, dass Jasmin erst in diesem Moment die Idee der Dichtheit der Bruchzahlen entdeckte.

Andreas, einer derjenigen, die spontan mit $\frac{3}{5}$ antworteten und sich anschließend selbst intervenierte, schaffte es fast alleine zur richtigen Antwort zu kommen. Er schrieb auf $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{8}{20}$, und leitete daraus ab, dass es immer so weiter gehen müsse. Ohne jegliche Interventionen meinerseits, kam Andreas zu dem Entschluss, dass es so eine Zahl nicht geben könne.

6.1.3.3 *Effizienz der Interventionen*

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Interventionen, immer wieder eine Bruchzahl zu nennen, die zwischen $\frac{2}{5}$ und der vom Schüler/von der Schülerin als direkten Nachfolger bezeichneten Bruchzahl, liegt, sehr hilfreich war. Durch sie, erkannten die SchülerInnen, dass es noch Zahlen dazwischen geben müsse. Die Tatsache, dass manche SchülerInnen die Intervention selbst vornahmen, zeigte, dass auch SchülerInnen selbst dazu in der Lage sind, sich mit Konflikten zu konfrontieren, und dadurch einen Lernerfolg verzeichnen zu können. Woran manche SchülerInnen schlussendlich scheiterten, war die unzureichende Vorstellung des Unendlichkeits- und Dichtheitsbegriffes. Um hier entgegenzuwirken, erschien die Intervention, ein Beispiel für einen Nachfolger in den natürlichen Zahlen zu nennen, und zu fragen, wie dies bei den Brüchen sei, als sehr geeignet. Leider wurde diese Intervention nur einmal durchgeführt, da sie sich spontan während des Interviews entwickelte, und im Vorfeld nicht damit gerechnet wurde, dass die Dichtheit beziehungsweise die Unendlichkeit solche Probleme bereitete.

6.1.4 Zweiter Teil, Multiplikation, 1. Aufgabe

Welche Bedeutungen könnten folgende Multiplikationen im Alltag haben?

$$12 \cdot \frac{2}{3} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 3 =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} =$$

Diese Aufgabe, bestehend aus drei Multiplikationen, wurde mit zwölf InterviewpartnerInnen durchgenommen, wobei für die Analyse acht davon herangezogen wurden. Aus Zeitmangel wurde bei Jasmin die zweite Multiplikation ausgelassen, sonst wurden immer alle drei durchgeführt.

6.1.4.1 Vorstellungen zu $12 \cdot \frac{2}{3}$

Diese Rechnung wurde von allen TeilnehmerInnen auf Anhieb richtig gerechnet, wobei es nur einen Schüler gab, der die Rechnung aufschreiben musste, um diese durchführen zu können. Die meisten SchülerInnen multiplizierten einfach den Zähler mit zwölf. Manche jedoch wandelten die zwölf Ganzen zuerst in zwölf „Eintel“ um, um die Bruchrechenregel für die Multiplikation anwenden zu können. Was die Vorstellungen zu der Rechnung angeht, so haben sieben SchülerInnen Vorstellungen aus unterschiedlichen Bereichen genannt, hier eine Aufzählung: Tomatensauce, Torten, backen, einkaufen, Zeit, Blätter, Weinglas und Bausteine, und nur eine Schülerin hatte keine Vorstellung dazu.

Bei den ersten Vorstellungen geht es immer um zwei Drittel eines bestimmten Lebensmittels, die man dann eben zwölf Mal nimmt. Erklärungen dieser Art sind sehr anschaulich und lebensnah. Besonders interessant ist die Erklärung von Jasmin, die die Zeit als Mittel zur Erklärung verwendete. Sie sagte: „Ok, also sagen

wir einmal, ich tu immer zwei Drittel von .. einer Stunde irgendetwas fernsehen, sagen wir einmal./ [...] Und, ich mache das zwölf Mal hintereinander, dann brauche ich dazu acht Stunden.“ Dieser Zugang unterscheidet sich von den anderen, jedoch ist er sehr klar und einfach verständlich. Rudi verwendete zur Erklärung der Rechnung ein Zwei-Drittel-Liter Weinglas und zwölf ganze Bausteine. An dieser Stelle ist es fraglich, ob Rudi verstanden hat, dass er die Rechnung anschaulich erklären sollte, und nicht nur Beispiele für zwei Drittel beziehungsweise acht Ganze zu finden. Um nur Beispiele für die Zahlen an sich zu nennen, wären seine Vergleiche zulässig. Falls er aber verstanden hat, was zu tun ist, so kann man aus seiner Antwort folgern, dass er die Multiplikation nicht verstanden hat, denn es macht keinen Sinn Weingläser mit Bausteinen zu multiplizieren.

6.1.4.2 Intervention

Die für diese Aufgabe geplante Intervention, war das zur Verfügung Stellen von zwölf Spielfiguren. Damit diese Intervention für die SchülerInnen hilfreich sein kann, müssen die SchülerInnen über die Von-Vorstellung der Bruchmultiplikation verfügen, das heißt die Rechnung $12 \cdot \frac{2}{3}$ muss interpretiert werden als $\frac{2}{3}$ von 12. Das wiederum bedeutet, dass die SchülerInnen $\frac{2}{3}$ als Multiplikator ansehen müssen. Wenn man die Alltagsbedeutungen der Lernenden betrachtet, so merkt man, dass diese, und zwar alle, die natürliche Zahl 12 als Multiplikator verwendeten. Es handelte sich stets um zwei Drittel einer bestimmten Einheit multipliziert mit 12. Wenn man die Rechnung so auffasst, dann wäre sie auch als wiederholte Addition zu lösen. Man bemerkt also, dass bei den Beispielen der SchülerInnen der Von-Ansatz nicht vorhanden ist, wodurch die Intervention, die ja auf diesen Ansatz aufbaut, bereits zum Scheitern verurteilt ist.

Diese Intervention wurde bei drei SchülerInnen durchgeführt. Jasmin hatte eine sehr interessante Art die Figuren anzuordnen, denn sie ordnete sie in vier Gruppen, mit jeweils drei Spielfiguren, wobei immer zwei gleichfarbig waren. Man kann also erkennen, dass Jasmin die Bruchzahlen hier als relativen Anteil auffasste. Sie erklärt: „Das sind jeweils drei Drittel.“ und „also die andersfärbigen gehören nicht dazu, sind das jetzt zwei Drittel, und ahm ...aso ... genau, das geht glaube ich jetzt nicht.“ Sie erkannte also sehr schnell, dass sie mit dieser Methode die Rechnung nicht lösen konnte. Als sie nicht weiterkam, fragte ich sie, wieviel ein Drittel von zwölf sei. Besser wäre es gewesen eine andere Frage zu stellen, denn diese Frage induzierte ja

bereits die richtige Antwort. Jasmin sagte dann auch noch „Na ich habe mir zuerst gedacht, von zwölf zwei Drittel, sind acht ...“. Mit diesem Satz formulierte sie eigentlich schon die richtige Antwort, ohne es selbst zu wissen, woraus man schließen kann, dass sie den Von-Ansatz, zumindest in dieser Multiplikation mit einer natürlichen Zahl und einer Bruchzahl nicht verstanden hat.

Die Situation bei Sabrina war anders. Als sie die Spielfiguren erhielt, sortierte sie sie gleich in drei Vierergruppen. Sie erklärte auch gleich, dass acht Spielfiguren zwei Drittel von zwölf seien, jedoch schaffte sie es nicht den Bogen zur Multiplikation zu spannen. Sie erkannte erst, dass acht das richtige Ergebnis ist, als sie die $\frac{24}{3}$ umrechnete.

Als Rudi die Spielfiguren erhielt, nahm er von den zwölf Spielfiguren gleich vier weg und meinte, dass man dann acht hätte. Was aus dem Interviewausschnitt nicht hervorgeht ist, ob Rudi die Spielfiguren dabei hilfreich waren die Lösung zu finden, oder ob er die Lösung schon vorher im Kopf ausrechnete, und dann einfach vier Figuren weg nahm, damit er die Lösung darstellen konnte. Die Tatsache, dass er das Wort „von“ und auch „ $\frac{2}{3}$ “ in seinen Ausführungen nie erwähnte, lässt eher auf die zweite Vermutung schließen.

6.1.4.3 Vorstellungen zu $\frac{1}{2} \cdot 3$

Diese Rechnung wurde von fast allen SchülerInnen im Kopf richtig gelöst und wieder gab jeder Schüler/jede Schülerin unterschiedliche Bedeutungen für die Multiplikation an. Es folgt nun wieder eine Aufzählung der genannten Alltagsbedeutungen für diese Rechnung: Torten, Kuchen, backen, Milch, Mehl, Zuckerl, Geld zählen, Gläser.

Wie bei der vorigen Aufgabe, wird auch diese Multiplikation mit dem Backen assoziiert, besonders geeignet war die Erklärung, einen Kuchen mit eineinhalbfacher Masse backen zu wollen. Als Bedeutung für die Multiplikation Zuckerl zu wählen, erscheint nicht besonders geeignet aber es ist möglich. Dieser Schüler, Markus, hatte dann jedoch große Probleme die Aufgabe zu lösen. Er meinte „... ein halbes Zuckerl mal drei sind sechs Zuckerl, also sechs halbe Stück Zuckerl, und das sind dann zwei Ganze ... Zuckerl insgesamt, achso, **drei** Ganze.“ Wie er auf die sechs Stück Zuckerl kommt, ist sehr fraglich. Man könnte meinen, dass er statt mal $\frac{1}{2}$ einfach mal 2 gerechnet hat, jedoch passt es nicht damit zusammen, dass er dann sechs halbe Stück Zuckerl hat. Hier kann man also keine Vermutungen über seine

Gedankengänge aufstellen. Vielleicht war er einfach nur unkonzentriert und verwechselte die Zahlen. Die Assoziation dieser Multiplikation mit der Aktivität Geld zu zählen, ist besonders spannend, weil hier, zur verständlicheren Vorstellung dieser Multiplikation, ein Rückgriff auf kleinere Maßeinheiten stattfand. Statt also drei mal ein Halb zu rechnen, erklärte Franz, dass man drei Fünzig-Cent Münzen hat, und diese Mal drei rechnet, wofür man dann einen Euro und fünfzig Cent herausbekommt. Rudi verwendete für seine Erklärung wieder Gläser. Wiederholt wollte er das Produkt zweier Dinge, nämlich ein Halb-Liter Glas und ein Drei-Liter Glas, bilden, welche zu multiplizieren es absolut keinen Sinn macht. Da dies nun schon zum zweiten Mal vorkam, kann man schlussfolgern, dass Rudi die Bruchmultiplikation nicht verstanden hat.

Interventionen fanden bei dieser Aufgabe nicht statt, weil die SchülerInnen, bis auf einen, richtig rechneten und auch Vorstellungen zu dieser Multiplikation hatten.

6.1.4.4 Vorstellungen zu $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

Die Vorstellungen, welche die SchülerInnen zu dieser Multiplikation hatten, beschränkten sich auf Pizzen, Kreise und rechteckige Metallstücke, sowie Bälle und Trinkgläser. Einige Lernende, auch jene, die dann später doch noch eine Bedeutung nannten, meinten entweder keine Bedeutung dafür zu kennen oder manche sogar, dass es für diese Rechnung im Alltag keine Notwendigkeit gab.

Die Vorstellung einer Pizza, oder allgemeiner eines Kreises, erscheint hier als sehr geeignet. Franz schaffte es, die Rechnung wirklich mit der Von-Bedeutung zu erklären. Das heißt, sein Ergebnis zum Schluss einer längeren Ausführung war, dass ein Viertel Pizza wieder in Viertel geteilt werde, und dass man dann Sechzehntel erhalte. Dietmar begann seine Erklärung folgendermaßen: „Zum Beispiel, man hat vier Bälle und einer davon gehört einem,...“ Dietmar versuchte also die Bruchzahl $\frac{1}{4}$ als relativen Anteil aufzufassen, er schaffte es jedoch nicht seine Ausführung richtig weiter zu entwickeln, er scheiterte also daran, ein anschauliches Beispiel für diese Multiplikation zu geben. Es wäre möglich, diese Multiplikation mit der Vorstellung von relativen Anteilen zu erklären. Leichter ist es jedoch die Bruchzahl dabei als Teil eines Ganzen anzusehen.

Die Tatsache, dass es auch Lernende gab, die dieser Multiplikation keine, im Alltag relevanten, Bedeutung zumessen konnten, verweist darauf, dass diese

SchülerInnen die Von-Vorstellung nicht besitzen. Franz meinte zum Beispiel: „Ok, **da** fällt mir jetzt nichts ein.“ Durch die starke Betonung des Wortes „da“ kann man erkennen, dass die vorigen Multiplikationen für ihn noch sinnvoll waren, dass diese Aufgabe jedoch, für Franz völlig aus dem Leben gegriffen ist, und keinerlei Bezug zur Realität hat.

6.1.4.5 Fehler und Schwierigkeiten beim Lösen dieser Rechnung

Diese Rechnung lösten nur die Hälfte der SchülerInnen auf Anhieb richtig. Als falsche Antwort wurde zweimal die Zahl $\frac{1}{4}$ genannt, wobei ein Schüler seine Antwort sofort richtig stellte. Man kann also davon ausgehen, dass es sich bei ihm nicht um einen systematischen Fehler handelte. Der zweite Schüler, Markus, blieb bei seinem Ergebnis, und korrigierte es erst nachdem er die Rechnung nachgerechnet hatte. Seine Erklärungen waren sehr konfus, hier ein Beispiel: „Weil es das gleiche ist, durch das man es multipliziert, und dadurch kommt das, ah, halt das wieder raus.“ Man kann die Vermutung aufstellen, dass er die Multiplikation mit der Division verwechselte, und dabei den häufigen Schülerfehler $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ beging.

Das falsche Ergebnis $\frac{2}{16}$ wurde ebenfalls zweimal genannt, von Jasmin und Rudi. Durch Jasmins Erklärung: „Ok, zwei Viertel sind ein halbes...“ kann man erkennen, dass Jasmin die Rechnung $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ mit $\frac{1}{4} \cdot 2$ verwechselte, was wie im Theorieteil beschrieben, bei SchülerInnen öfters vorkommt. Erst als ich sie darauf verwies, dass es sich bei der Rechnung um $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ handle, nannte sie das richtige Ergebnis. Auch Rudi dachte dabei an die Rechnung $\frac{1}{4} \cdot 2$, denn er versuchte sein Ergebnis mit zwei Viertelgläsern zu erklären, woran er aber scheiterte. Was jedoch auffällt, ist dass er während seiner Erklärung nicht mehr von $\frac{2}{16}$ sprach, sondern von $\frac{1}{16}$. Trotzdem verharnte er in seiner Vorstellung von zwei Viertelgläsern.

6.1.4.6 Interventionen und ihre Wirkung

Bei dieser Aufgabe wurde fünf Mal nennenswert interveniert. Zweimal kam es zu der Intervention, dass die Schülerinnen Romana und Christiane ein A4-Blatt falten sollten. Ziel dieser Intervention war es, bei den Schülerinnen die Von-Vorstellung hervorzurufen, damit sie diese Multiplikation inhaltlich erklären konnten. Es wurde klar von den Schülerinnen verlangt, durch das Falten, wirklich die Multiplikation

darzustellen. Beide Schülerinnen wussten nicht wie sie das Papier falten sollten. Romana faltete das Papier zuerst so oft es ging, da sie dachte, sie müsse es sechzehn Mal falten. Beim zweiten Versuch, faltete sie, auf meinen Hinweis, zuerst Viertel. Als Romana dann weiter machte, meinte sie: „Also zwei, ein Viertel und noch ein Viertel“ Das heißt es fand hier erneut die Verwechslung mit $\frac{1}{4} \cdot 2$ statt. Cristina hingegen, faltete zuerst Viertel, dann Achtzehntel, und die Sechzehntel schaffte sie nicht mehr zu falten. Außerdem erkannte man aus ihrer Erklärung, dass sie glaubte, dass es genüge Sechzehntel zu falten, und dass sie damit das Ergebnis gezeigt hätte, obwohl sie die klare Anweisung erhielt die Multiplikation an sich zu erklären. Über diese Intervention kann man sagen, dass sie für SchülerInnen, die nicht über die Von-Vorstellung verfügen, keinerlei Hilfe darstellte, ganz im Gegenteil. Für Romana und Christiane stellte sie sogar eine zusätzliche Hürde dar, da es für die Mädchen sehr schwierig, beziehungsweise unmöglich, war, Sechzehntel zu falten.

Eine weitere Intervention, fand beim Interview mit Sabrina statt. Als sie meinte, diese Rechnung würde für sie keine Bedeutung haben, zumindest würde sie so eine Rechnung nicht brauchen, zeichnete ich ihr ein Quadrat auf, mit Seitenlänge 1 (siehe Abbildung). Auf einer Seite, zeichnete ich eine Skala und beschriftete den Wert $\frac{1}{4}$, und erklärte auch noch, wo $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ liegen. Dies wiederholte ich an einer anliegenden Seite. Hier nun die eingescannte Zeichnung, sowie ein kurzer Ausschnitt des Transkripts, um Sabrinas Ausführungen, besser zu verstehen.

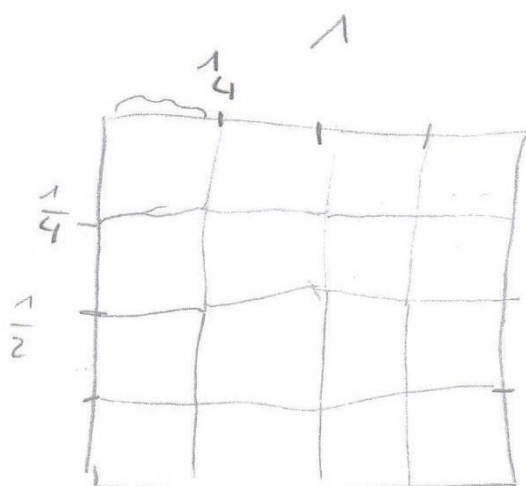


Abbildung: Intervention

- 88 S Kann ich so Kasterl machen?
 89 I Mhm./

- 90 S Also wenn man das Viertel von der Seite, mal das Viertel nimmt, dann hat man das und
 91 das ist ein Sechzehntel, von dem Ganzen./
- 92 I Und wieso, wieso soll ich dir das jetzt glauben, dass das genau ein Sechzehntel ist, das Kasterl,
 93 das du da gemalt hast?
- 94 S (zeichnet die Einteilung im Quadrat) Man kann es noch teilen. Das sind acht und dann kann
 94.1 man noch einmal acht machen.
- 95 I Mhm./
- 96 S Und jetzt sind es sechzehn, und das ist ein Sechzehntel, da haben wir Sechzehn Teile.

Sabrina zeichnete also zuerst in der Hälfte, lauter Quadrate ein, mit der Seitenlänge $\frac{1}{4}$. In Zeile 90-91 erklärte sie, dass so ein Quadrat, also das Viertel einer Seite, mal dem Viertel der anderen Seite, ein Sechzehntel des Ganzen sei. Auf meine Frage, wieso man wisse, dass ein Quadrat nun wirklich ein Sechzehntel sei, zeichnete sie auch in der anderen Hälfte des Quadrates, die kleineren Quadrate ein, und meinte dann in Zeile 96, dass sie nun sechzehn Teile habe, und das ein Teil deswegen ein Sechzehntel sei. Sabrina, die, wie wir bei der ersten Multiplikation bereits merkten, zumindest ansatzweise über Von-Vorstellung der Bruchmultiplikation verfügt, half diese Intervention weiter und sie konnte somit die Rechnung anschaulich erklären.

Rudi erklärte die Rechnung $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ mit zwei Viertelgläsern, und meinte dann, dass diese beiden Gläser zusammen, ein Sechzehntel enthalten würden. Hier intervenierte ich, indem ich seine Erklärung auf eine Alltagssituation umlegte. Ich fragte ihn, wieviel Almdudler er und ein Freund gemeinsam haben würden, wenn jeder von ihnen ein Viertel bestellt hat. Rudi nannte zuerst wieder ein Sechzehntel. Bevor ich die Frage, ob dies mehr oder weniger sei als ein Viertel, zu Ende stellen konnte, meinte Rudi bereits „weniger“, und merkte, dass seine Ausführung nicht stimmen konnte. Diese Intervention half Markus zwar nicht dieser Rechnung eine Bedeutung zuzumessen, jedoch erkannte er zumindest klar, dass seine Erklärung nicht richtig war.

Die Intervention, die bei Jasmin angewendet wurde, hatte den Sinn, Jasmin wieder auf die inhaltliche Ebene zurückzuführen. Als sie sich selbst fragte, ob das Ergebnis kleiner werde oder nicht (siehe nächster Abschnitt), fragte ich sie, was denn nun mit der Torte geschehe, wenn wir ein $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ rechnen. Sie antwortete dann: „Ahm .. ich tu das Viertel durch vier, ahm, dividieren.“ Durch diese Intervention gelangte Sabrina zu der Erkenntnis, dass das Viertel noch einmal in vier Teile geteilt wird.

6.1.4.7 Selbstständiges Thematisieren beziehungsweise Vorbeugen von Fehlvorstellungen

Besonders interessant ist, dass drei SchülerInnen selbstständig Fehlvorstellungen ansprachen, auch wenn sie sie natürlich nicht als solche klassifizieren können. Dietmar zum Beispiel stellte selbst fest, dass das Ergebnis nun kleiner geworden war. Meine Frage, ob es klar wäre, dass das Ergebnis bei dieser Multiplikation kleiner werde, bejahte er und begründete dies damit, dass er die Nenner und Zähler „zusammenzählte“, wobei er wahrscheinlich multiplizieren meinte. Außerdem erklärte er: „Also eigentlich, bei mal ist es ja nicht so, dass es kleiner wird, aber ... bei Brüchen .. kann es halt kleiner werden.“ Man sieht hier sehr schön, dass Dietmar die Assoziation der Multiplikation mit Vergrößerung besitzt, dass er jedoch weiß, dass es sich dabei nicht um Vergrößerung handelt. Aus dieser Erklärung kann man folgern, dass diese Vorstellung wahrscheinlich schon einmal im Unterricht thematisiert wurde. Er erklärte weiter, dass das Ergebnis deswegen kleiner sei, weil die Bruchzahl so etwas wie eine Minuszahl sei. Er meinte auch: „Ein Viertel wäre nur Nullkommafünfundzwanzig.“ Dietmar weiß also, dass das Produkt aus Zahlen kleiner eins, kleiner werde.

Auch Jasmin thematisierte diese Fehlvorstellung selbstständig. Da Jasmin in derselben Klasse ist wie Dietmar, verstärkt sich die Vermutung, dass diese Fehlvorstellung bereits im Unterricht thematisiert wurde. Jasmin war sich der Sache weniger sicher als Dietmar, was man an ihren langen Pausen erkennen kann. Auf die Frage, was mit der Torte geschieht, wenn man $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ rechnet, antwortete sie: „Äh (denkt, murmelt) muss weniger werden, oder doch nicht? Warte einmal (lacht). Hmm (denkt), ja ich glaube sie sind weniger, weil wenn man mit Nullkommafünfundzwanzig multipliziert wird es ja weniger.“ Jasmin schwankte also anfangs noch, entschied sich dann aber dafür, dass das Ergebnis kleiner werden müsse, weil mit einer Dezimalzahl kleiner eins multipliziert wurde.

Sabrina, die aber in eine andere Klasse geht, erklärte: „Hm, also ein Viertel ist kleiner als ein Ganzes, und wenn man das dann miteinander multipliziert, wird es kleiner.“ Das heißt, auch wie die anderen zuvor, begründet sie die Tatsache, dass das Ergebnis kleiner werde damit, dass mit Zahlen kleiner eins multipliziert werde. Die Von-Vorstellung wurde dabei von keinem/keiner dieser SchülerInnen angesprochen.

6.1.5 Zweiter Teil, Multiplikation, 2. Aufgabe

Anna macht ihre Mathematikhausübung und rechnet $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Annas Schwester behauptet, dass sie falsch gerechnet habe. Sie meint: „Das Ergebnis kann gar nicht richtig sein, weil $\frac{1}{3}$ ist kleiner als $\frac{2}{3}$ und auch kleiner als $\frac{1}{2}$ und das kann nicht sein, weil das Ergebnis bei einer Multiplikation ja immer größer sein muss als die beiden Faktoren!“ Hat Anna richtig gerechnet? Und was sagst du zu dem Argument von Annas Schwester?

Diese Aufgabe wurde mit sechs SchülerInnen durchgeführt, von denen wurden fünf für die Analyse herangezogen wurden.

6.1.5.1 Fehlvorstellung zur Bruchmultiplikation und Intervention

Nachdem sie die Angabe gelesen hatten, antworteten Franz und Romana intuitiv, dass die Schwester recht habe, denn eine Multiplikation vergrößere immer. Eine detaillierte Analyse zu Franz's Interview folgt im nächsten Abschnitt. Durch Nachrechnen merkte Romana dann, dass die Rechnung doch richtig gerechnet war. Um zu dem Argument Stellung zu nehmen, intervenierte ich, indem ich ihr das vorbereitete Quadrat gab. Romana nahm die Intervention nicht an. Sie sah sich das Quadrat zwar kurz an, versuchte dann aber eine Erklärung durch Kürzen der Brüche zu finden.

Die erste Antwort von zwei Schülerinnen, Lara und Christiane war, dass das Ergebnis nicht immer größer sein müsse, weil es in diesem Beispiel auch nicht der Fall ist. Für diese beiden Schülerinnen wäre die Erklärung ausreichend gewesen, es wurde jedoch nachgehakt, um allgemeinere Erklärungen von ihnen zu erhalten. Christiane gab als Begründung dafür, dass die Schwester unrecht habe, die Tatsache, dass man mit einer Zahl multiplizierte, die kleiner als ein Ganzes ist, also könne es gar nicht größer werden. Sie bekam in Folge das Quadrat als Hilfestellung. Ähnlich wie Romana, ging auch sie nicht auf das Quadrat ein, und blieb bei ihren Erklärungen auf der syntaktischen Ebene. Lara fragte ich, wieso sich das Ergebnis

einer Multiplikation nicht vergrößern müsse, denn bei den natürlichen Zahlen sei es ja auch so. Sie antwortete darauf: „Ja das ist bei normalen Multiplikationen aber bei Bruchrechnungen- i s t, muss es glaube ich nicht so sein.“ Lara vermutete also, dass das Ergebnis einer Bruchmultiplikation im Allgemeinen kleiner ist, als die beiden Faktoren, jedoch war sie sich sehr unsicher. Ich intervenierte also mit dem Quadrat, und Lara sprach sofort auf die Intervention an. Bald nach dem Überreichen des Quadrates, schaffte sie es, die Multiplikation mit dem Von-Ansatz zu erklären: „..., also wenn das Drittel sind, also ich habe zwei davon, und dann nehme ich da die Hälfte-“ Sie zeigte während des Sprechens immer auf die entsprechenden Teile und nannte dann auch noch das richtige Ergebnis. Es gelang ihr sehr gut, den Prozess der Multiplikation darzustellen. Diese Intervention war bei Lara also sehr fruchtbar, weil sie bereits Ideen des Von-Ansatzes hatte, welche sie mithilfe des Quadrates weiter entwickeln konnte.

Viktoria sprach generell nicht auf die Aufgabe an. Um die Rechnung nachzurechnen, brachte sie zuerst auf gleichen Nenner. Sie sagte dann zwar, dass das Argument der Schwester falsch sei, wieso wusste sie jedoch nicht. Zu der Intervention durch das Quadrat meinte sie ebenfalls, dass ihr dazu nichts einfiel.

Die geplante Intervention, den Lernenden ein Quadrat zu geben, auf dem bereits eine Drittel- und eine Halbeeinteilung eingezeichnet war, war also nur für eine der vier Schülerinnen eine wirkliche Hilfe. Von den andern drei wurde die Intervention erst gar nicht angenommen. Grund dafür ist wahrscheinlich das Nicht-Vorhandensein der Von-Vorstellung. Ähnlich wie bei der Intervention mit den Spielfiguren, bei der vorigen Aufgabe, hilft auch diese Intervention nur SchülerInnen, die bereits eine Idee der Von-Vorstellung besitzen.

6.1.5.2 Genaue Analyse eines ausgewählten Interviewausschnittes

Der Interviewausschnitt von Franz wurde ausgewählt, weil er zuerst die klassische Fehlvorstellung zeigte, es während des Interviews aber schaffte, diese zu beseitigen. Hier die erste Hälfte des Transkripts:

- | | | |
|-----|---|---|
| 6 | F | Ok, die Schwester hat recht, denn es muss immer größer sein, weil man rechnet mal, das heißt |
| 7 | | der eine Faktor- vergrößert sich. |
| 8 | I | Ok./ Wie ist das dann bei deiner Rechnung? Ist ein Sechzehntel größer? Als ein Viertel. / |
| 8.1 | | (ich verweise auf das eben gerechnete Beispiel $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$) |

- 9 F (überlegt) Nein, kleiner. (überlegt angestrengt)
- 10 I Ist das richtig gerechnet von dir? Ein Viertel mal ein Viertel.
- 11 F Ja, ich, also das Argument von der Schwester ist falsch, weil wenn man das hier k ü r z t, darf ich
- 12 das hier am Zettel gleich machen?
- 13 I Mhm.
- 14 F Dann wird das eins und das eins, ein mal eins ist eins und ein mal drei ist drei, also hat die Anna
- 15 richtig gerechnet, und die Schwester hat es falsch, weil es **muss** nicht immer größer sein.
- 16 I Mhm./ Und wann muss es nicht größer sein?
- 17 F Wenn die F a k t o r e n, da wären sie jetzt gleich. Das glaube ich ist nicht immer (denkt).
- 18 I Wieso wird es denn bei dem Beispiel kleiner, das Ergebnis?
- 19 F Weil man, das zwei Drittel und das ein Halbes kürzt, kommt überall eins, also wenn man ein mal
- 20 drei ist ...
- 21 I Ja.\ Das hast du jetzt gerechnet, aber vom logischen her.
- 22 F Das ist für mich logisch-.
- 23 I Aber vorher hast du noch gesagt, bei der Multiplikation muss es immer größer werden.
- 24 F Stimmt **nicht**.

Die intuitive Antwort von Franz auf die Frage war, dass die Schwester recht hatte (Zeile 6-7). Franz assoziierte also die Multiplikation mit einer Vergrößerung. Auch die Aussage, dass sich ein Faktor vergrößere, zeigt eindeutig die Vorstellung der Multiplikation als Vervielfachen. Da er seine Antwort so selbstverständlich in den Raum stellte, verwies ich ihn auf die vorher gerechnete Aufgabe $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$, und fragte, ob da das Ergebnis größer sei als die beiden Faktoren. Er beantwortete die Frage mit „Nein, kleiner.“ (Zeile 9). Im Video ist es sehr deutlich zu erkennen - er zupfte an seinem Pullover und griff sich mit der Hand auf die Stirn - dass in ihm bereits ein innerer Konflikt stattfand, denn seine Auffassung zur Multiplikation, passte plötzlich nicht mehr mit den Ergebnissen zusammen. Offenbar erkannte er, dass sein altes Wissen hier nicht mehr funktionierte. Die Frage, ob er denn die Rechnung $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ richtig gerechnet hätte, bejahte er sofort und folgerte daraus, dass das Argument der Schwester falsch sein müsse (Zeile 11-15). Er vertraute also in seine, mithilfe von einer Rechenregel gelösten Rechnung, mehr, als in seine inhaltliche Überlegung. Als Begründung dafür, dass das Argument falsch sei, rechnete er die von Anna gerechnete Rechnung vor, und erklärte mithilfe der Kürzungsregel, dass die Rechnung richtig sei. Seine Begründung fand also rein auf der syntaktischen Ebene statt. Die Betonung des Wortes „muss“ (Zeile 15) deutet darauf hin, dass er bei dieser Rechnung verstanden hatte, dass das Ergebnis kleiner werde, dass er es jedoch im allgemeinen Fall noch nicht von der Richtigkeit des Argumentes überzeugt war.

Im Anschluss erklärte er die Richtigkeit der Rechnung erneut durch Kürzen, und durch die Rechenregel für die Bruchmultiplikation. Als ich ihn nach einer „logischen“, also einer inhaltlichen Erklärung, dafür dass das Ergebnis kleiner werde, fragte, und er meinte es sei für ihn logisch, konfrontierte ich ihn mit seiner ersten Antwort (Zeile 6-7). Er räumte daraufhin ein, dass seine Antwort nicht stimmte. An seiner Tonlage war wieder der, in ihm ablaufende Konflikt zu erkennen.

- 25 I Wieso kommt denn da was Kleineres raus, beim vorigen Beispiel?
- 26 F Weil man da vier mal vier rechnet, und wenn man eins und vier, zu kürzen versucht, das passt
- 27 ja rein, dann kommt trotzdem vier raus.
- 28 I Ja, aber versuch es einmal mit unserem Beispiel, mit dem Pizzabeispiel, das wir da dabei gehabt
- 29 haben. Ist das da logisch, dass wir was Kleineres bekommen, oder hätten wir was, oder wäre
- 30 etwas Größeres logischer?
- 31 F Nein da kommt das gleiche raus, also wenn man ein, wenn man jetzt zum Beispiel dieses eine
- 32 Viertel der Pizza nimmt (zeichnet einen Kreis) und das dann mal dem, m a l, dann hat man acht,
- 33 dann hat man zum Beispiel jetzt ... ein ... ein Viertel und das wär dann ein Sechzehntel, also
- 33.1 dann, das heißt,
- 34 verändert sich nicht, das bleibt trotzdem immer ein Viertel, nur ist eben ein anderer Nenner.
- 35 I Ein Viertel ist gleich ein Sechzehntel, willst du sagen?
- 36 F Nein.
- 37 I Nein, oder?
- 38 F Aber in dem sind genauso viele Stücke enthalten, als wie bei einem Viertel.
- 39 I Ok, wieviele Sechzehntel sind in einem Viertel?
- 40 F Vier.
- 41 I Ok. Und ist es jetzt logischer, dass es kleiner wird, oder nicht.
- 42 F Doch.
- 43 I Ja./
- 44 F Weil es ist logisch, w e i l man das Viertel hat, und wenn man das dann mal rechnet, kommt ein
- 45 anderer Nenner raus, und eine andere Zahl, ein Zähler. Und jetzt kommt, weil beim Nenner
- 46 wär es dann sechzehn, und jetzt kommt es auf den Zähler an, was da rauskommt.
- 47 I Mhm./
- 48 F Also wenn da jetzt ein mal eins rauskommt wär eins, das heißt das wär dann zum Beispiel dieses
- 49 eine Sechzehntel.

Als er auch die Rechnung $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ nur auf der syntaktischen Ebene erklärte, intervenierte ich, um ihn auf die inhaltliche Ebene zurückzuholen, indem ich ihn fragte, wie es denn bei unserem Pizzabeispiel der vorigen Aufgabe war. Er erklärte die Rechnung nämlich vorher mithilfe einer Pizza. Folgende Antwort (Zeile 31-34) wirkt auf den ersten Blick sehr wirr, und war während des Interviews auch nicht völlig verständlich. Sie zeigt aber, dass Franz wahrscheinlich gerade in diesem Moment seine Fehlvorstellung überwand. An der Aussage in Zeile 33-34, also dass sich bei der Rechnung nichts verändere, sondern dass man nur einen anderen Nenner habe, merkt man, dass Franz seine Bezugsgröße änderte. Er bezog sich also nicht mehr

auf ein Ganzes, sondern auf ein Viertel. Bei seinen Ausführungen zeichnete er immer wieder ein Sechzehntelstück heraus.

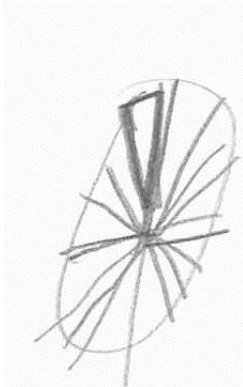


Abbildung: Franz's unterstützende Zeichnung

Anhand der Zeichnung erklärte er, dass es sich bei dem Ergebnis wieder um ein Viertel handle, nur eben von einem Viertel genommen. Da der Inhalt dieser Aussage für mich während des Interviews unverständlich war, fragte ich nach, ob er sagen wollte, dass ein Viertel gleich ein Sechzehntel ist. Seine Antwort in Zeile 38 bestätigt, dass er seine Bezugsgröße änderte. Zum Schluss wollte ich noch eine geordnete Erklärung von Franz hören, weswegen ich ihn fragte, ob es nun klarer sei, dass das Ergebnis kleiner wird. Auch in dieser Antwort (Zeile 44-49) erkennt man seine neue Bezugsgröße. Es spielt hier auch der quasikardinale Zahlaspekt eine Rolle, denn er meinte in Zeile 46, „... und jetzt kommt es auf den Zähler an, was da rauskommt.“ Es ist also für ihn wichtig die Anzahl der Bruchteile zu kennen, um sagen zu können, wie groß die Zahl ist.

Zusammenfassend kann man sagen, dass Franz über die Von-Vorstellung verfügt, und dass er sie eigentlich auch sehr gut erklärte. Auffällig war bei ihm das starke Verharren auf der syntaktischen Ebene. Erst durch meine Intervention gelang es ihm inhaltliche Überlegungen anzustellen, wodurch er dann seine Fehlvorstellung überwand.

6.1.6 Dritter Teil, Division

Welche Bedeutungen könnten folgende Divisionen im Alltag haben? Versuche das Ergebnis zu ermitteln ohne die Rechenregel für die Bruchdivision zu verwenden.

$$3:\frac{1}{2} =$$

$$9:\frac{3}{4} =$$

$$\frac{15}{8}:3 =$$

$$\frac{4}{5}:\frac{2}{5} =$$

Bevor damit begonnen wird, diesen Teil der qualitativen Untersuchung zu analysieren, muss angegeben werden, dass die zweite Aufgabe zur Division (siehe Kapitel 4.9) den TeilnehmerInnen nicht gestellt wurde. Aus den ersten Interviews ging sehr bald hervor, dass diese für die SchülerInnen zu schwierig gewesen wäre, da die Aufgabenstellung sehr fachmathematisch formuliert war. Um diese Aufgabe zu behandeln, hätten die SchülerInnen von Beginn an auf der Metaebene arbeiten müssen, was sie wahrscheinlich überfordert hätte. Außerdem thematisierten einige SchülerInnen die Fehlvorstellung, die durch diese Aufgabe angesprochen werden sollte, bereits in ihren Ausführungen der ersten Aufgabe zur Division. Dieser Teil zur Division konnte also, ohne Erkenntnisse über Fehlvorstellungen der SchülerInnen zu verlieren, ausgelassen werden.

Die erste Aufgabe, also die Divisionen, wurden mit sieben SchülerInnen durchgeführt, aber nur sechs davon wurden für die Auswertung verwendet. Aus Zeitgründen wurde mit den SchülerInnen nicht immer jede Division durchgenommen. Die erste Division wurde sechs SchülerInnen gestellt, die zweite fünf, und die dritte und vierte drei jeweils drei Mal.

Die Division war der Teil des Tests, welcher den SchülerInnen zweifellos am meisten Schwierigkeiten bereitete. Grund dafür könnte sein, dass auch die Division mit

natürlichen Zahlen für SchülerInnen schon sehr schwierig ist. Wird es nun zusätzlich in der Volksschule versäumt, die beiden Grundvorstellungen, nämlich die des Teilens und des Messens aufzubauen, so haben die SchülerInnen wenig Chance die Bruchdivision wirklich zu verstehen. Im Folgenden werden nur die auffälligsten Schwierigkeiten mit der Bruchdivision angeführt, da es sehr schwierig und umfassend wäre alle anzugeben. Weiters wären manche Fehler von SchülerInnen nicht nachvollziehbar.

6.1.6.1 Schwierigkeiten mit der Rechnung $3:\frac{1}{2}$ und Interventionen

Ein Fehler, den die Hälfte der SchülerInnen machte, der jedoch in der Fachliteratur nicht angeführt wurde, war die Rechnung $3:\frac{1}{2}$ zu verwechseln mit $3:2$. Alle drei SchülerInnen kamen dadurch auf das Ergebnis 1,5 oder $1\frac{1}{2}$. Niemand von ihnen wurde selbst auf den Fehler aufmerksam, sondern sie mussten von mir darauf hingewiesen werden, dass es sich in diesem Fall um eine andere Rechnung handelte.

Als ich Paul darauf aufmerksam machte, dass wir eigentlich $3:\frac{1}{2}$ rechnen, entstand in ihm ein innerer Konflikt, denn er meinte plötzlich: „Da kommt sogar mehr raus.“ Er thematisierte also selbstständig die Fehlvorstellung, dass die Division stets verkleinert, schaffte es aber nicht, diese Denkhürde zu überwinden. Die Intervention, er solle sich eine Halb-Liter Flasche Wasser und drei Liter Wasser vorstellen, half ihm dabei nicht. Seine Erklärungen waren sehr konfus und gaben auch nach genauerer Analyse nur wenig Sinn. Man konnte jedoch erkennen, dass er mithilfe des Wassers, die Rechenregel erklären wollte, denn er sagte zum Beispiel: „...dass man drei Liter Wasser hat, und dann das da jetzt durch .. also mal zwei...“. Er wollte also erklären, wieso man mal dem Kehrwert rechnet, dies ist ihm jedoch nicht gelungen.

Auch Pascal machte denselben Fehler, denn er nannte als Beispiel für die Rechnung, dass man drei Zuckerl auf zwei Kinder aufteilen müsse. Nachdem ihm erklärt wurde, dass er $3:\frac{1}{2}$ rechnen sollte, meinte er: „Ich habe drei Zuckerl aber ein Kind will .. nur die Hälfte eines Zuckerls...“ Man kann also erkennen, dass die Grundidee der Division des Messens zwar vorhanden ist, aber noch nicht genug gefestigt, um seine Überlegungen weiterzuentwickeln. Auf meine Intervention mit der Halb-Liter Flasche reagierte er, indem er plötzlich mit Dezimalzahlen rechnete. Er

nannte das richtige Ergebnis und begründete es folgendermaßen: „...weil Nullkommafünf passt dreimal in drei Literflaschen hinein, ah, sechs mal.“ Im Bereich der Dezimalzahlen schaffte er es auch, die Vorstellung des Messens richtig anzuwenden.

Sabrina versuchte das Ergebnis zuerst im Kopf mit der Bruchrechenregel für die Division auszurechnen, worauf sie das Ergebnis $\frac{1}{6}$ nannte. Auf die Aufforderung, dies mit einem Beispiel aus dem Alltag zu begründen, erklärte und zeichnete sie, dass man von drei ganzen Brote die Hälfte nehme, und dann hätte man eineinhalb Brote. Sie malte dabei jeweils eine Hälfte der Brote an (siehe Abbildung), mit der Begründung, dass die anderen Hälften „wegdividiert“ werden.

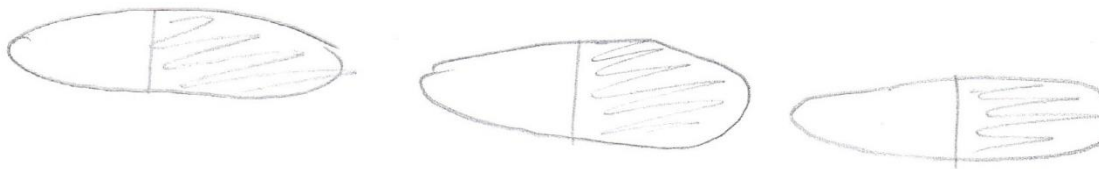


Abbildung: Sabrinas Zeichnung zu $3:\frac{1}{2}$

Bei Sabrina ist also die Vorstellung der Division als wiederholte Subtraktion vorhanden. Sabrina wurde von mir nicht direkt darauf aufmerksam gemacht, dass sie eine falsche Rechnung gerechnet habe, sondern ich intervenierte, indem ich ihr die Vorstellung des Messens erklärte. Sie schaffte dies dann auf ihr Beispiel mit den Broten umzulegen und meinte: „Achso, wie oft ein Halbes in drei reinpasst.“ Sie nannte dann zwar sechs Mal, als richtige Antwort, bei der nächsten Aufgabe $9:\frac{3}{4}$ konnte sie die Vorstellung des Messens jedoch wieder nicht anwenden, was darauf hindeutet, dass sie sie wahrscheinlich nicht verstanden hatte, und die Antworten bei dieser Aufgabe unabsichtlich von mir induziert wurden.

Spannend ist, dass die Verwechslung, also $3:2$ statt $3:\frac{1}{2}$ zu rechnen, bei dieser Aufgabe dreimal auftrat, bei der nächsten jedoch nur einmal, obwohl es sich bei der zweiten Aufgabe um denselben Typus handelt, also natürliche Zahl durch Bruchzahl. Der wahrscheinlichste Grund dafür ist, dass es sich bei der ersten Aufgabe um einen Stammbruch handelte. $\frac{1}{2}$ wurde mit einer Hälfte assoziiert, wodurch die SchülerInnen

schnell auf die Rechenoperation : 2 kamen. Grund dafür, dass dieser Fehler bei $9:\frac{3}{4}$ nur einmal passierte, ist, dass bei der Bruchzahl $\frac{3}{4}$ keine naheliegende Assoziation zu einer natürlichen Zahl besteht.

Die Intervention, die SchülerInnen auf die semantische Ebene zurückzuholen, indem sie an eine Halb-Literflasche und an drei Liter Wasser denken sollten, wurde insgesamt viermal angewandt. Der einzige, für den diese Vorstellung ein Denkanstoß war, war Pascal (siehe oben). Bei den anderen dreien war die Intervention nicht hilfreich. Grund dafür ist wahrscheinlich, wie bei der Multiplikation, ein Mangel an Grundvorstellungen. Kennen SchülerInnen die Vorstellung des Messens nicht, so ist es klar, dass sie auf diese Intervention nicht ansprachen.

Eine sehr interessante Begründung, wieso $3:\frac{1}{2} = 6$ gilt, ist jene von Christiane. Auf die Intervention sprach sie vorerst gar nicht an, sie meinte jedoch: „Weil wenn man drei durch ein Ganzes dividiert, kommt wieder drei heraus, und da das Halbe, also, ein Halbes von dem Ganzen ist, noch mal zwei, und dann kommt sechs heraus.“ Sie nutzte für ihre Begründung also die Regel, dass das Ergebnis einer Division gleich bleibt, wenn man Divisor und Dividend mit derselben Zahl multipliziert. Nachdem sie auf diese Art das Ergebnis gefunden hat, konnte sie dem Ergebnis im Zusammenhang mit den Flaschen die richtige Bedeutung zuordnet, was vermuten lässt, dass die Vorstellung des Messens bei Christiane ansatzweise vorhanden ist, und sie diese auf konkrete Beispiele auch anwenden kann.

6.1.6.2 Die Intervention zu $9:\frac{3}{4}$

Die Aufgabe $9:\frac{3}{4}$ konnte eigentlich keine der SchülerInnen auf Anhieb ohne Rechenregel lösen, weswegen vier von fünf Mal interveniert wurde, mithilfe eines A4-Blattes, auf dem neun Kreise aufgezeichnet waren und ausgeschnittenen Dreiviertelstücken von Kreisen. Diese Intervention half keinem einzigen/keiner einzigen die Aufgabe zu lösen, was wiederum daran liegt, dass die SchülerInnen entweder gar nicht über die Vorstellung des Messens verfügten oder sie nicht in der Lage waren, diese anzuwenden. Um die Schwierigkeiten der SchülerInnen zu verstehen, wird an dieser Stelle exemplarisch der Interviewausschnitt aus Pauls Gespräch zu dieser Aufgabe detailliert analysiert. Es werden dabei immer wieder Parallelen zu den Problemen der anderen SchülerInnen aufgezeigt. Vor der Analyse, hier noch der Ausschnitt des Transkripts:

41 P (sieht sich Material an, nimmt ein Dreiviertelstück, legt es wieder zurück)

42 I Was stellst du dir denn vor unter der Rechnung?

43 P D a s s, hm (denkt), hm..

44 I Also beim Vorigen hätten wir uns zum Beispiel vorstellen können, dass wir drei Liter Wasser

45 haben, und die wollen wie auf Halb-Liter Flaschen verteilen. Wieviel Halb-Liter Flaschen

46 brauchen wir da dazu?

47 P Sechs.

48 I Genau.\

49 P Und das auf, zum Beispie, die neun Liter Wasser auf Dreiviertel-Flaschen.

50 I Ok./

51 P (denkt) Also neun durch vier ist auf jeden Fall einmal zweikommafünfundzwanzig-

52 I Mhm./ Aber wir rechnen ja durch drei Viertel, wir rechnen ja nicht durch vier, oder? Hilft dir

53 das (Material) irgendetwas bei deiner Rechnung?

54 P Hm (lacht)... irgendwie kann ich mir darunter **gar nichts** vorstellen.

55 I Ok, ahm ... Stell dir mal vor, das sind neun Ganze Torten, und das sind Dreiviertel-Torten.

56 Kannst du dir da etwas vorstellen unter der Rechnung? Was bedeutet denn da die Rechnung?

57 P Also, dass man zum Beispiel die Torte, also die neun ganzen Torten in Dreiviertel-Torten

58 aufteilt.

59 I Mhm./ Und was ist dann das Ergebnis? Also, du brauchst noch keine Zahl sagen, sondern

60 was ist dann, was verrät uns das Ergebnis dann?

61 P Also .. dass dann ... dass dann Dreiviertel Torten ... dass es dann Dreiviertel-Torten sind./

62 I Ok, das verrät uns ja eigentlich schon die Division oder?

63 P Ja.

64 I Wenn wir sagen, wir teilen es in Dreiviertel-Torten.

65 P Ahm, wie komme ich da jetzt zu einem Ergebnis?

66 I Ahm, was war denn das sechs (zeigt auf das Ergebnis der vorigen Rechnung), was war denn

67 das für ein Ergebnis.

68 P Da habe ich das gerechnet./

69 I Na, jetzt das mit den Wasserflaschen.

70 P Sechs, das waren dann sechs Halbe-Liter Wasserflaschen.

71 I Genau. Das heißt sechs Wasserflaschen brauche ich ... und was sagt uns das Ergebnis von der

72 unteren Rechnung?

73 P (denkt) Das sind dann ... sechsunddreißig, nein.

74 Rechnest du es gerade mit der Rechenregel? (lacht) Dann kannst du es aufschreiben auch.

75 P (schreibt) Das sind dann zwölf Tortenstücke.

Der Ausschnitt beginnt damit, dass Paul das Material überreicht bekam, und es sich zuerst einmal ansah. Als er es nicht schaffte, der Rechnung eine Bedeutung zuzumessen, wurde auf das vorige Beispiel mit den Halb-Liter Flaschen und den drei Litern Wasser verwiesen. Paul legte das von mir erklärte sofort eins zu eins auf diese Aufgabe um und meinte: „Und das auf, zum Beispiel die neun Liter Wasser auf Dreiviertel-Flaschen.“ (Zeile 51) Ohne auf das Material, oder auf das vorige Beispiel einzugehen, rechnet er weiter, dass $9:4 = 2,25$ sei. Paul war also jener Schüler, der auch hier die Rechnung verwechselte. Nachdem er darauf aufmerksam gemacht

wurde, dass unsere Rechenoperation $:\frac{3}{4}$ lautete, und der Frage, ob ihm das Material denn nicht weiterhelfe, gab er die ehrliche Antwort: „...irgendwie kann ich mir da **gar nichts** vorstellen.“ (Zeile 54) Ganz ähnlich reagierte Christiane, die das Material erst gar nicht annahm, und meinte „Das verstehe ich jetzt nicht. [...] Was ich da jetzt machen soll mit dem.“ Es ist also ganz eindeutig, dass diese Intervention für die SchülerInnen eine zusätzliche Hürde darstellte, und dass sie nicht wussten, was sie damit machen sollten.

In weiterer Folge wurde Paul erklärt, dass er sich unter den Kreisen ja Torten vorstellen könne. Auf die Frage, was das Ergebnis dieser Rechnung im Zusammenhang mit den Torten aussagen würde, antwortete er, dass man nun wüsste dass es Dreivierteltorten sind (Zeile 61). Ähnlich wie Pascal, schaffte er es also nicht, dem Ergebnis dieser Division die richtige Bedeutung, nämlich, dass das Ergebnis die Anzahl der Dreiviertel-Tortenstücke sei, zuzuordnen. Dies ist wieder ein Indiz dafür, dass die Vorstellung des Messens nicht vorhanden ist.

Um ihn schließlich doch zur richtigen Antwort zu führen, wurde immer wieder auf das erste Beispiel verwiesen, und er sollte nun das vorige Ergebnis, nämlich sechs, in einen Zusammenhang bringen, was ihm auch gelang. Als er nun das Ergebnis dieser Rechnung in Zusammenhang setzte, rechnete er die Division mit der Rechenregel, und gelang schließlich zu zwölf. Er antwortete dann auch: „Das sind dann zwölf Tortenstücke.“ Ob er dies nun wirklich verstanden hatte, oder ob er es einfach genauso machte, wie beim vorigen Beispiel, geht aus diesem Ausschnitt nicht hervor.

Sabrina und Pascal hingegen, kamen durch die Intervention beide auf dasselbe falsche Ergebnis, Sabrina schrieb $6\frac{3}{4}$ und Pascal 6,75, nachdem er seine erste Antwort, nämlich 7 korrigierte. Nach genauerer Analyse, konnte man feststellen, dass der Grund dafür darin lag, dass diese beiden SchülerInnen neun Dreiviertelstücke nahmen und auf die Kreise aufteilten, und schauten wieviele sie so füllen konnten. Sie rechneten also nichts anderes als $9 \cdot \frac{3}{4}$. Dieser Fehler wäre ohne Intervention wahrscheinlich nicht aufgetreten, die Intervention stellte also auch bei ihnen eine zusätzliche Hürde dar, die, wenn die Vorstellung des Messens nicht genügend ausgeprägt ist, dazu verleitet, Fehler zu machen.

Sabrina benötigte, um die Aufgabe richtig zu lösen noch zwei weitere Interventionen, nämlich die erste Frage, ob das Ergebnis denn kleiner oder größer als neun sein müsse, welche sie sofort mit „größer“ beantwortete und auch begründen konnte. Die zweite Intervention war der Hinweis darauf, dass man bei der Division in den natürlichen Zahlen schaue, wie oft zum Beispiel drei in sechs passt. Sie konnte dies dann umlegen auf „... wie oft ein Dreiviertel, achso, das heißt man braucht neun so Kreise, so viele wie da reingehen.“ An dieser Stelle hatte Sabrina also die Denkhürde überwunden, und kam zum richtigen Ergebnis.

6.1.6.3 Die Vorstellung des Teilens bei der Division $\frac{15}{8} : 3$

Bei dieser Rechnung hatten alle drei Schüler eine tragfähige Vorstellung, nämlich dass man fünfzehn Achtel von einer gewissen Menge hat, und diese auf drei Personen aufteilen möchte. Die Vorstellung des Teilens ist bei den SchülerInnen also besser ausgeprägt wie die des Messens. Sobald der Divisor eine natürliche Zahl ist, wurde bei ihnen die Vorstellung des Teilens hervorgerufen, was vermuten lässt, dass die SchülerInnen im Bereich der natürlichen Zahlen sehr viele Verteilungsaufgaben durchgenommen haben. Paul und Pascal nannten sofort die richtige Antwort, sie hatten die Vorstellung von $\frac{15}{8}$ Wasser und $\frac{15}{8}$ Zuckerl, die sie auf drei Personen verteilen mussten. Markus nannte zuerst die Antwort $\frac{6}{8}$, welche auf einen einfachen Rechenfehler hindeutet. Sein Beispiel für die Division waren $\frac{15}{8}$ von Stiften die man auf drei Personen aufteilen muss. Mit dieser etwas unglücklich gewählten Darstellungsart für den Bruch $\frac{15}{8}$ schaffte er es nicht die Aufgabe zu lösen. Als ich ihn fragte, ob ihm denn nicht etwas Geeigneteres für den Bruch einfel, antwortete er „Pizza“, und meinte sofort: „Ja dann bekommt jeder fünf Stück.“ In diesem Kontext war ihm die Division also völlig klar.

6.1.6.4 Schwierigkeiten bei $\frac{4}{5} : \frac{2}{5}$

Die drei SchülerInnen, die diese Aufgabe lösten, nannten alle relativ bald das richtige Ergebnis, wobei Markus zuerst $\frac{20}{10}$ nannte, wodurch man sehr gut sieht, dass er diese Aufgabe im Kopf mit der Rechenregel rechnete. Auf die Frage hin, ob das Ergebnis für sie klar sei, antwortete Pascal, dass es ihm klar sein, denn eine Division mit einer kleineren Zahl vergrößere. Markus war anfangs verwundert, dass das Ergebnis größer wurde, er verfügte also über die klassische Fehlvorstellung, dass die Division

stets verkleinere. Die Frage, ob das dann immer so sei, verneinte er und begründete damit, dass eine Division mit Zahlen kleiner null vergrößere. Auf den Hinweis, dass unsere Zahlen nicht kleiner null seien, korrigierte er seine Antwort sofort auf kleiner eins. Die schnelle und betonte Korrektur deutet darauf hin, dass er dies eigentlich wusste, bei der Erklärung nur verwechselt hatte. Als Christiane gefragt wurde, ob diese Rechnung auch ohne Rechenregel gelöst werden könnte, antwortete sie „Ja.“ und „Wenn man einfach die vier durch die zwei dividiert, weil die Fünftel...“. Sie reduzierte diese Bruchdivision also einfach auf eine Division in den natürlichen Zahlen, nämlich 2: 5.

6.1.7 Vierter Teil, Addition und Subtraktion

Löse folgende Additionen und Subtraktionen und versuche diese graphisch darzustellen.

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$$

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{7} =$$

$$2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4} =$$

$$3\frac{2}{3} + 1\frac{2}{3} =$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} =$$

$$3\frac{1}{4} - 1\frac{3}{5} =$$

Der vierte Teil zur Addition wurde insgesamt mit zehn SchülerInnen durchgenommen, wobei acht Interviews für die Analyse verwendet wurden. Aus Zeitgründen wurden nicht allen der acht SchülerInnen alle Aufgaben gestellt. Hier sei eine genaue Auflistung angegeben, welche Aufgaben wie oft behandelt wurden: Die

erste und zweite Aufgabe wurden acht SchülerInnen gestellt, die dritte sechs, die fünfte und sechste jeweils fünf, und die vierte und siebente jeweils vier SchülerInnen.

Dieser Teil der qualitativen Untersuchung wird nun nicht Rechnung für Rechnung analysiert, sondern nach inhaltlichen Aspekten, die schon bei der ersten Durchsicht des Videomaterials aufgefallen sind und sich in weiterer Analyse als interessant herausstellten.

Im Großen und Ganzen wurden die Aufgaben richtig gerechnet. Selbstverständlich passierten Rechenfehler, wie zum Beispiel $21 + 8 = 28$, bei denen man jedoch nicht von Problemen im Bereich der Bruchaddition sprechen kann.

Alle SchülerInnen haben, um die Ergebnisse zu berechnen, die Bruchzahlen zuerst auf gleichen Nenner gebracht. Wenn sie darauf hingewiesen wurden dies nicht zu tun, so taten die meisten es im Kopf. Interessant war nun, ob die SchülerInnen auch wissen, wieso sie beim Addieren auf gleichen Nenner bringen müssen, oder ob sie diese Rechenregel nur auswendig gelernt hatten.

6.1.7.1 Wissen SchülerInnen, wieso sie Brüche vor der Addition gleichnamig machen?

Um dies herauszufinden, wurde den SchülerInnen bei den Rechnungen $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ beziehungsweise $\frac{3}{4} + \frac{2}{7}$ die Frage gestellt, ob sie wüssten, warum sie beim Rechnen die Brüche gleichnamig machten und ob das überhaupt notwendig sei. Über die Notwendigkeit dieser Methode waren sich alle SchülerInnen einig. Sie meinten, man müsse auf gleichen Nenner bringen, weil man das sonst „nicht gescheit ausrechnen“ kann oder „weil das sonst nicht gehen würde.“ Die Begründungen waren schon vielseitiger. Nur eine der befragten SchülerInnen hatte für diese Methode keine Erklärung, jedoch war auch sie sich sicher, dass man Brüche unbedingt gleichnamig machen müsse, um sie zu addieren. Das Argument, dass Viertel und Siebentel, beziehungsweise Viertel und Halbe nicht gleich groß seien, fiel insgesamt drei Mal. Ein Beispiel dafür ist Jasmin, die meinte „weil ich sonst das schwer miteinander vergleichen könnte“. Andreas gab eine rein syntaktische Begründung, denn er meinte, bei der Addition müsste der Nenner gleich bleiben, und wenn die beiden Nenner unterschiedlich seien, dann würde das nicht funktionieren. Inhaltliche Überlegungen stellte er dazu nicht an. Franz und Lara erklärten die Methode, indem sie auf den typischen Additionsfehler hinwiesen. Auf die Frage, wieso man Siebentel

und Viertel nicht zusammenzählen könne, antwortete er: „Weil dann .. fünf Elftel herauskommen würde (lacht), wenn man sich das was jetzt dort steht halt zusammenzählt.“ Diese Antwort führt uns zum nächsten Unterkapitel.

6.1.7.2 *Das Ausbleiben des typischen Additionsfehlers*

Obwohl in der Literatur immer wieder auf den Additionsfehler in der Bruchrechnung, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, hingewiesen wird, und man durch das Lesen von Artikeln zu diesem Thema den Eindruck gewinnt, als ob der Großteil der SchülerInnen diesen Fehler machen würde, trat er in dieser Untersuchung kein einziges Mal auf. Grund dafür könnte sein, dass dieser Fehler bereits so intensiv thematisiert wird, auch in der Ausbildung der MathematiklehrerInnen, dass er schlussendlich auch im Unterricht behandelt wurde. Auch bei den von mir untersuchten SchülerInnen ist es sehr wahrscheinlich, dass dieser Fehler in der Klasse durchgenommen wurde. Sie machten den Fehler zwar nicht, kannten ihn jedoch. Lara und Franz waren sich so sicher, dass diese Art zu rechnen falsch sei, dass sie diesen Fehler sogar als Begründung für die Methode des gleichnamig Machens verwendeten.

6.1.7.3 *Rechnen mit gemischten Zahlen*

Eines der Ziele dieser Aufgabe bestand darin, zu erforschen, ob SchülerInnen vorzugsweise mit gemischten Zahlen rechnen, oder ob sie sie vorher in unechte Brüche umrechnen. Bei den Aufgaben mit den gemischten Zahlen rechneten nur zwei von sechs SchülerInnen (die anderen haben nur die Aufgabe mit den echten Brüchen gerechnet) gleich mit den gemischten Zahlen. Die anderen vier SchülerInnen wandelten die gemischten Zahlen sofort in unechte Brüche um, und rechneten damit.

Auf die Frage, ob es notwendig sei, die gemischten Zahlen umzurechnen, antworteten Paul und Richard, dass es nicht notwendig sei. Paul rechnete sogar unaufgefordert die folgenden Aufgaben mit gemischten Zahlen. Richard wurde dazu aufgefordert jene Aufgabe, die er gerade mit unechten Brüchen gerechnet hatte, auch mit den gemischten Zahlen zu rechnen. Als er mit der zweiten Methode viel schneller fertig war, lachte er und meinte: „Das geht anscheinend sogar leichter.“ Richard gewann daraus also die Erkenntnis, dass das Rechnen mit gemischten Zahlen, unter Umständen viel einfacher sei, als mit unechten Brüchen. Bei den folgenden Aufgaben rechnete er gleich mit den gemischten Zahlen und man konnte seine Freude darüber erkennen, dass er nun eine neue Methode gelernt hatte, mit

der er schneller rechnen konnte. Die Tatsache, dass die beiden Schüler das Rechnen mit gemischten Zahlen sofort angenommen haben, und auch gekonnt anwenden konnten, weist vielleicht darauf hin, dass sie im Unterricht meistens die gemischten Zahlen auf unechte Brüche umrechnen. Nur eine kurze Erinnerung, dass dies nicht notwendig sei, reichte, um ihnen diese Art zu rechnen schmackhafter zu machen.

Andreas hingegen meinte, dass es notwendig sei, mit unechten Brüchen zu rechnen, denn wenn man mit gemischten Zahlen rechnen würde, käme man nicht auf das richtige Ergebnis. Er sagte: „Weil wenn man das auf gleichen Nenner bringen will./ [...] Und dann weiß und dann lässt man halt die zwei Ganzen und die ein Ganzen so stehen, dann kommt man nicht auf das richtige Ergebnis.“ Man kann aus dieser Erklärung schließen, dass Andreas irritiert davon war, dass man die Ganzen nicht auf den gleichen Nenner bringt, und dass man deswegen nicht so rechnen könne. Als ich ihn aufforderte, es trotzdem auszuprobieren, staunte er, als er das gleiche Ergebnis erhielt wie bei seiner Rechnung mit den unechten Brüchen. Man konnte jedoch gut erkennen, dass er sich nicht sicher war, ob dies nur Zufall sei bei diesen Zahlen oder ob man doch mit gemischten Zahlen rechnen durfte. Daraufhin war seine Neugier geweckt und er wollte dies selbst herausfinden, denn die nächste Addition rechnete er unaufgefordert auf beide Arten. Er meinte dann, dass die Ergebnisse wieder gleich seien. Vorsichtig bejahte er also meine Frage, ob man nun allgemein sagen könnte, dass man mit gemischten Zahlen auch rechnen durfte.

6.1.7.4 *Anschauliches Darstellen einer Addition und einer Subtraktion*

Mit dieser Testaufgabe sollte auch in Erfahrung gebracht werden, ob SchülerInnen dazu im Stande sind, einfache Rechenoperationen im Bereich der Bruchrechnung graphisch darzustellen. Die Antworten und Darstellungsversuche der SchülerInnen waren sehr unterschiedlich und vielseitig. Die genaue Analyse wird aber in das nächste Unterkapitel verschoben, da es eben gerade von der Wahl der Darstellung für Bruchzahlen und Rechenoperationen handelt. Soviel vorweggenommen: Eine anschauliche Darstellung für eine einfache Rechenoperation zu finden, unterstützt die Lernenden oft nicht bei der Ergebnisfindung, sondern erschwert diese sogar. Viele SchülerInnen sehen das graphische Darstellen der Addition oder der

Subtraktion als eine neue Aufgabe, also als zusätzliche Hürde an, die es zu überwinden gilt.

6.2 Wahl der Beispiele Darstellungsformen

In den Testfragen, die die SchülerInnen beantworten sollten, ging es immer wieder darum, dass SchülerInnen geeignete Darstellungsformen für Bruchzahlen finden. Sie sollten außerdem die Rechenaufgaben mit Beispielen aus dem Alltag verbinden und sie auch graphisch darstellen können, zum Beispiel durch Kreise oder Rechtecke. Um sowohl für die Alltagsbedeutung, als auch für die graphische Darstellung der Rechenaufgaben ein geeignetes Beispiel, beziehungsweise eine geeignete Darstellungsform zu finden, ist es notwendig, dass die Lernenden über ein gewisses metakognitives Wissen zu den Darstellungsformen verfügen. Sie müssen dazu wissen, welche Dinge oder Formen besonders geeignet sind, um sie sinnvoll zu unterteilen und wie man diese dann am besten in die gewünschte Anzahl an Bruchteile teilt. In den folgenden Unterpunkten soll nun anhand verschiedener Aspekte analysiert werden, inwiefern das metakognitive Wissen zu Beispielen und Darstellungen in Bezug auf Bruchzahlen, bei den getesteten SchülerInnen ausgeprägt ist.

6.2.1 Alltagsbedeutungen der SchülerInnen für Bruchzahlen

In einigen Aufgaben sollten die SchülerInnen Beispiele aus dem Alltag für gewisse Bruchzahlen oder sogar für Rechenoperationen mit Brüchen angeben. Erwartete Kontexte waren unter anderem: Torten, Pizzas, Gläser, Rezeptangaben. Es wurde also erwartet, dass SchülerInnen ganz alltägliche Dinge nennen, die sich eignen, um sie zum Beispiel zu achtern oder zu sechsteln. In den Interviews wurden die erwarteten Antworten auch einige Male genannt, wie zum Beispiel von Jasmin, die die Rechnung $3 \cdot \frac{1}{2}$ damit assoziierte, dass sie einen Kuchen mit eineinhalbfacher Masse backen möchte. Auch die Torte wurde von vielen SchülerInnen angeführt, wie zum Beispiel von Sabrina, die die Rechnung $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ damit erklärte.

Erfreulicherweise wurden auch sehr originelle Beispiele gefunden, wie von Franz, der die Aufgabe $3 \cdot \frac{1}{2}$ mit Geldzählen, also mit Fünfzig-Cent-Stücken, verband oder von Jasmin, die die Aufgabe $12 \cdot \frac{2}{3}$ mit Zeit in Verbindung brachte. Sie meinte, dass man

immer zwei Drittel einer Stunde eine gewisse Tätigkeit ausführt und man dafür insgesamt acht Stunden brauchen würde.

Einige Male wurden auch Alltagsbedeutungen für Bruchzahlen oder für Rechenoperationen mit Bruchzahlen genannt, die absolut ungeeignet waren. Markus nannte zum Beispiel für die Aufgabe $12 \cdot \frac{2}{3}$, dass er zwei Drittel Blätter nehme, oder bei $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ ein Viertel Metall, wobei er dabei nicht die Form angab. Erst im weiteren Verlauf des Interviews stellte sich heraus, dass er von einem rechteckigen oder quadratischen Stück - die genaue Form geht aus der Zeichnung nicht hervor - ausgegangen war. Des Weiteren wurden öfter „Zuckerl“ in Hälften, oder von Pascal sogar in Achtel geteilt. Er erklärte bei der Rechnung $\frac{15}{8} : 3$, dass er fünfzehn Achtel „Zuckerl“ auf drei Personen aufteile. Bei derselben Rechnung nannte Markus als Beispiel fünfzehn Achtel Stifte. Dieser Bezug half ihm nicht, die Rechnung ohne Rechenregel zu lösen. Auf meinen Hinweis, dass er an etwas denken solle, das sinnvoller in acht Teile zu teilen ist, nannte er „Pizza“ und konnte die Aufgabe sofort lösen. Man sieht hier sehr gut, dass Markus nicht nur eine unpassende Darstellung wählte, sondern dass diese für ihn sogar hinderlich beim Lösen der Aufgabe war.

6.2.2 Die graphische Darstellung von Bruchzahlen

Um Bruchzahlen an sich darzustellen, wurde in den meisten Fällen die Kreisdarstellung gewählt, die sich oft auch als nützlich erwies. Kreise lassen sich problemlos in Halbe, Viertel, Achtel und Sechzehntel unterteilen. Als Begründung für die häufige Auswahl der Kreisdarstellung gibt es zwei Möglichkeiten: Erstens, SchülerInnen besitzen das metakognitive Wissen, dass Kreise sehr geeignet sind, um Bruchzahlen darzustellen, oder zweitens, die SchülerInnen sind durch den Mathematikunterricht und durch die Schulbücher bereits an Kreisdarstellungen gewohnt. In dem, von den diesen SchülerInnen verwendeten Schulbuch werden Brüche zwar häufig in Kreisen dargestellt, jedoch auch sehr oft in anderen Formen, wie zum Beispiel in Quadraten, Rechtecken oder anderen Vielecken. Was die Schulbücher betrifft, kann man also nicht sagen, dass SchülerInnen dadurch beeinflusst werden, fast ausschließlich die Kreisdarstellung auszuwählen. Welche Darstellungen in ihrem Mathematikunterricht häufig verwendet werden, ist unbekannt. Die Tatsache, dass SchülerInnen von sich aus so selten Quadrate oder Rechtecke als Darstellungsform wählten, welche ja nicht schwieriger handzuhaben

sind als Kreise, deutet jedoch eher darauf hin, dass die SchülerInnen an Kreisdarstellungen gewohnt sind. Außerdem bestätigte sich die zweite Begründung durch die Analyse der Interviews, denn die TeilnehmerInnen wählten auch Kreise aus um Brüche darzustellen, die dafür eher weniger geeignet waren. Sie versuchten zum Beispiel Siebentel, Neuntel oder Brüche mit großen Nennern in Kreisen darzustellen, wobei sie aber Probleme mit der richtigen Einteilung hatten. Die Thematik, in Darstellungen die richtige Einteilung zu finden, wird im Folgenden genauer betrachtet.

6.2.3 Schwierigkeiten beim Treffen der richtigen Einteilung

Wie bereits oben erwähnt, hatten die SchülerInnen Schwierigkeiten dabei für Brüche, deren Nenner keine Zweierpotenz waren, in einem Kreis eine passende Einteilung zu treffen. War der Nenner eine Zweierpotenz, so konnten viele SchülerInnen die Bruchzahl problemlos darstellen, indem sie den Kreis einfach so lange halbierten, bis sie die gewünschte Anzahl an Teilen erhielten. Nur ein Schüler hatte Probleme dabei, Sechzehntel in einem Kreis darzustellen:

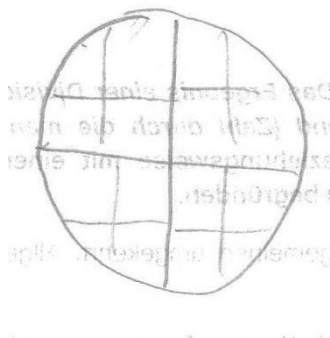


Abbildung: Richards Einteilung in Sechzehntel

Er teilte jedes Viertel noch einmal genauso, wie er bereits den ganzen Kreis geteilt hatte. Ob er wusste, dass diese Teile nun nicht gleich groß waren, ging aus dem Interview nicht hervor.

Bei den Brüchen, die im Nenner keine Zweierpotenz hatten, hatte zum Beispiel Franz Probleme, als er Fünftel in einem Kreis einzeichnen wollte. Wie aus der Abbildung unten gut erkenntlich, teilte er den Kreis zuerst in Viertel, und unterteilte ein Viertel dann einfach noch einmal. Franz war bewusst, dass er nun fünf Teile hatte, die nicht gleich groß waren, er wusste jedoch nicht, wie er es besser zeichnen konnte. Man kann also schlussfolgern, dass Franz entweder das Wissen fehlt, dass ein Fünftel ein

bisschen kleiner ist als ein Viertel, oder dass er dies zwar wusste, es jedoch in seiner Zeichnung nicht umsetzen konnte.



Abbildung: Franz's Einteilung in Fünftel

Schwierigkeiten, die richtige Einteilung zu treffen, kamen nicht nur bei Kreisdarstellungen vor. Lena, zum Beispiel, hatte Probleme damit, Siebentel in ein Rechteck einzuzeichnen. Ihre Versuche werden im Folgenden angeführt:

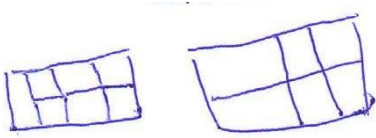


Abbildung: Lenas Versuche, ein Rechteck in Siebentel zu teilen

Auf den Hinweis, sie solle die Siebentel doch mit Streifen einzeichnen, wusste sie zuerst nicht, was sie machen sollte. Nachdem sie allerdings etwas überlegte, schaffte sie es, Siebentel mithilfe von Streifen einzuzeichnen.

Auch beim Falten traten ähnliche Probleme auf. Halbe, Viertel, Achtel und Sechzehntel zu falten, gelang den meisten, auch wenn manche dafür mehrere Versuche brauchten. Auffällig war, dass einige SchülerInnen nicht wussten, wie oft sie das Papier falten mussten, um eine gewisse Einteilung zu erhalten. Viele verfügen also zum Beispiel nicht über das Wissen, dass sich die Anzahl der Teile immer verdoppelt, wenn man das Blatt immer wieder in der Mitte faltet. Die SchülerInnen kamen eher durch Probieren auf die richtige Einteilung. Bei der zweiten Aufgabe im ersten Teil, in der es darum ging Sechstel und Achtzehntel zu falten, scheiterten die SchülerInnen. Bei dieser Aufgabe war besonders auffällig, dass die SchülerInnen meistens nur in eine Richtung falteten, also dass sie das Blatt sozusagen in Streifen unterteilten. Die Strategie bei Achtzehntel, zuerst drei Teile in eine Richtung zu falten, und dann sechs Teile quer, also in die andere Richtung zu falten, war den SchülerInnen nicht bekannt, zumindest verwendeten sie diese nicht.

6.2.4 Probleme beim Darstellen von Rechenoperationen

Eine Schwierigkeit, die vor allem beim letzten Aufgabenteil beobachtet wurde, ist das graphische Darstellen von Rechenprozessen. Auf die Aufforderung, eine bestimmte Addition oder Subtraktion graphisch darzustellen, wurden sehr oft nur die Summanden und das Ergebnis als Bruchzahl dargestellt, der Rechenprozess selbst war jedoch aus der Zeichnung nicht ersichtlich. Einige SchülerInnen wählten wiederum die Kreisdarstellung, was hier bei der Addition auch in den meisten Fällen sehr anschaulich war. Im Anschluss folgt ein Beispiel:

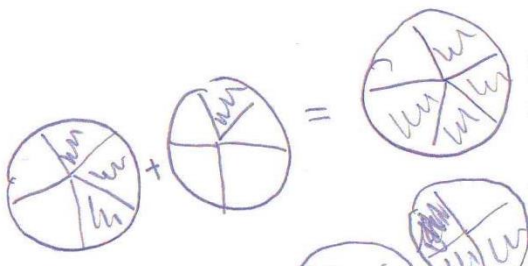


Abbildung: Christianes Darstellung der Rechnung $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

SchülerInnen, die nicht wussten, wie sie eine Addition beziehungsweise Subtraktion darstellen sollten, wurden darum gebeten, dies an einem Zahlenstrahl zu tun. Hier war das eben erwähnte Phänomen, dass SchülerInnen es nicht schafften einen Prozess darzustellen, besonders häufig zu beobachten - hier ein Beispiel.

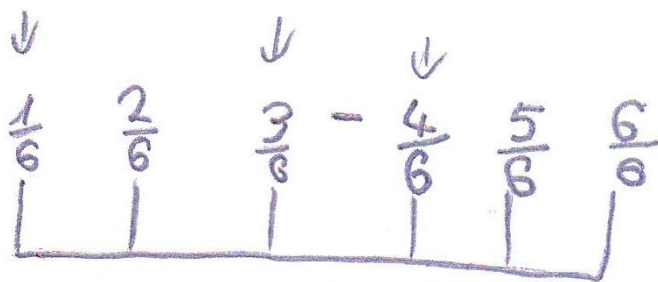


Abbildung: Andreas Versuch, die Subtraktion $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$ darzustellen

Andreas, der die Rechnung $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$ auf der Zahlengerade darstellen sollte, markierte nur die in der Rechnung vorkommenden Brüche, auf Sechstel umgewandelt, also $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{6}$ und $\frac{1}{6}$. Wenn man die Zahlengerade ansieht, ist es nicht ersichtlich, dass dadurch eine Subtraktion dargestellt werden sollte. Die Tatsache, dass er zwischen $\frac{4}{6}$ und $\frac{3}{6}$

ein Minus setzte, deutet jedoch darauf hin, dass er die Aufgabe sehr wohl verstanden hat, und wusste, dass er die Rechnung darstellen sollte, und nicht nur die darin vorkommenden Bruchzahlen. Dieses Phänomen war noch einige Male zu beobachten.

Richard, war der einzige Schüler, dem es gelang, auf der Zahlengerade die Addition wirklich als Prozess darzustellen, wie man an folgender Zeichnung erkennen kann.

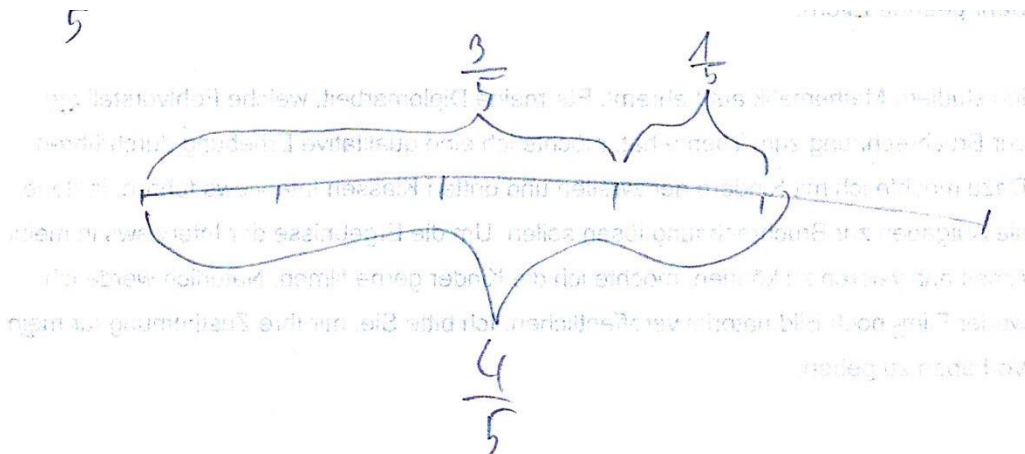


Abbildung: Richards Darstellung der Addition $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Er markierte nicht die Bruchzahlen auf der Skala, sondern nahm die Summanden als Längen, die er dann einfach zusammenzählte. Darunter zeichnete er die Gesamtlänge, das heißt die Summe der beiden Längen, ein.

Bis auf Richard, hatten also alle SchülerInnen Schwierigkeiten damit, eine Rechenoperation auf der Zahlengerade einzuzeichnen. Diese Intervention, die wieder als Hilfestellung gedacht war, damit SchülerInnen lernen Additionen und Subtraktionen anschaulich darzustellen, stellte also für die SchülerInnen eine zusätzliche Hürde dar. Sie markierten nur die Brüche, und wussten oft nicht, was von ihnen nun erwartet wurde. Erhofft hatte man sich von einer graphischen Darstellung, dass SchülerInnen einen gewissen Lernerfolg verzeichnen können und durch das Darstellen am Zahlenstrahl ein tieferes Verständnis für diese Rechenoperationen erlangen. Der Effekt war genau umgekehrt: Die Zahlengerade stellte für die SchülerInnen eine zusätzliche Hürde dar, die für die meisten unüberwindbar war. Die Darstellung unterstützte den Lernprozess also nicht, sondern hemmte ihn eher, da sich die Lernenden überfordert fühlten.

6.3 Syntax – Semantik

In diesem Kapitel wird die, in der bisherigen Analyse bereits öfters angeschnittene Problematik behandelt, dass SchülerInnen zu sehr auf syntaktische Weise arbeiten. Außerdem wird die Tatsache behandelt, dass sie die Rechenregeln, also die Syntax nicht mit inhaltlichen Überlegungen verbinden können, um zwischen den zwei Ebenen zu wechseln.

6.3.1 Häufiges Agieren auf syntaktischer Ebene

Ein Phänomen, welches bereits während der Ausführung der Interviews sehr stark auffiel, war, dass die meisten SchülerInnen es bevorzugten auf der syntaktischen Ebene zu arbeiten. Wenn sie eine Aufgabe gestellt bekamen, so bemerkte man bei vielen den Drang, die Rechnung sofort mithilfe passender Rechenregeln zu lösen. Auf die Aufforderung die Aufgaben inhaltlich zu lösen, reagierten manche TeilnehmerInnen sehr verwundert. Sie waren teilweise überrascht, dass man diese Aufgaben auch ohne Rechenregeln lösen konnte, und manche waren überfordert, da ihnen ad hoc keine anderen Strategien, sprich Strategien basierend auf der inhaltlichen Ebene, einfielen.

Besonders bei der Multiplikation und bei der Addition haben manche SchülerInnen auf die Aufforderung, die Aufgaben inhaltlich zu lösen, die Rechenregel einfach im Kopf angewandt. Das heißt, sie haben im Kopf Zähler und Nenner multipliziert, beziehungsweise die Brüche auf gleichen Nenner gebracht. Manche von ihnen dachten jedoch, dass sie die Rechenregel nicht angewandt hatten, weil sie sie eben nicht aufgeschrieben haben. Manche hingegen waren sich sehr wohl darüber bewusst, dass sie die Rechenregel verwendeten. Die Hilflosigkeit der SchülerInnen, wenn sie Aufgaben rein inhaltlich lösen sollten, kann man sehr schön an folgenden Beispielen erkennen:

Als Sabrina darum gebeten wurde die Aufgabe $9:\frac{3}{4}$ ohne Rechenregel zu rechnen lachte sie und antwortete: „Ich rechne die ganze Zeit mit der Rechenregel.“ Anhand dieser Antwort lässt sich die Vermutung aufstellen, dass es Sabrina im Unterricht gewohnt war, solche Aufgaben rein syntaktisch zu lösen, und nie oder selten dazu „angehalten“ wurde, Aufgaben nur durch inhaltliche Überlegungen zu lösen. Auch Christiane antwortete Ähnliches auf die Aufforderung die Aufgabe $3:\frac{1}{2}$ ohne Rechenregel, also ohne den Kehrwert zu bilden, zu lösen. Sie meinte ungläubig:

„Sollte man nicht den Kehrwert dabei bilden?“ Das heißt, Christiane wusste nicht einmal, was von ihr verlangt wurde. Vielleicht hatte sie sich gefragt, ob es noch eine andere Rechenregel gab, die man bei dieser Aufgabe anwenden konnte, oder ob sie die Methode, den Kehrwert zu bilden, um Brüche zu dividieren, vielleicht falsch in Erinnerung hatte.

Dass SchülerInnen selbstständig inhaltliche Überlegungen anstellten, bevor sie noch mit Rechenregeln arbeiteten, war sehr selten. Sehr wenige SchülerInnen versuchten allerdings im Verlauf des Interviews immer wieder Aufgaben selbstständig auf inhaltlicher Ebene zu lösen. Dies ist wahrscheinlich nicht darauf zurückzuführen, dass die SchülerInnen das von sich aus machen wollten, sondern dass sie während des Tests meine Erwartungshaltung erkannten, und inhaltliche Beispiele und Überlegungen nannten, um diesen Erwartungen zu entsprechen.

6.3.2 Verbinden beider Ebenen

Ein weiterer Aspekt, der bei der Auswertung der Interviews sehr stark zum Vorschein kam, war, dass SchülerInnen sehr selten ein effizienter Wechsel zwischen syntaktischer und semantischer Ebene gelang, sondern dass sie entweder inhaltliche Überlegungen anstellten, oder mit Rechenregeln arbeiteten, aber selten beides zugleich. Einem Mathematiker/einer Mathematikerin erscheint es wahrscheinlich am einfachsten, bei Aufgaben dieser Art, sowohl inhaltlich zu überlegen, als auch mit Rechenregeln zu rechnen. Die aus beiden Ebenen gewonnenen Erkenntnisse gilt es dann miteinander zu verbinden, um eine Aufgabe zu lösen und auch deren Lösungsweg anschaulich zu erklären. Wenigen SchülerInnen gelang dieser Wechsel bei den „leichten“ Aufgaben, wie zum Beispiel $3 \cdot \frac{1}{2}$. Sabrinas Erklärung dazu, lautete folgendermaßen: „Hm, wenn man eine Torte backt und man will dann die Masse, also man will eineinhalb Torten haben, dass sie größer wird, dann muss man sich die Masse so ausrechnen, das Ganze und dann in Halbe teilen, also die Masse einmal teilen in der Mitte, und dann mal drei nehmen.“ Es ist hier also sehr gut zu erkennen, dass Sabrina zuerst im Kopf, wahrscheinlich mithilfe der Rechenregel, das Ergebnis berechnete, und dieses dann sofort in den Alltag einbetten konnte. Dieser Bezug zum Alltag war sehr anschaulich, und sie hatte auch nie den Bezug zur Rechnung verloren.

Um zu analysieren, wieso es die meisten SchülerInnen bei den meisten Aufgaben nicht schafften, sich sowohl der Semantik als auch der Syntax zu bedienen, müsste

man dies auch in anderen Kapiteln der Mathematik untersuchen. Es wäre sehr interessant, ob in anderen Bereichen ähnliche Probleme auftreten, oder ob dies vorwiegend in der Bruchrechnung, einem bei SchülerInnen eher unbeliebten Kapitel, passiert. Gründe für die Unfähigkeit beide Ebenen zu verbinden, könnte ein Mangel an tiefgehendem Verständnis sein, oder ein Mangel an der notwendigen Routine. Werden im Unterricht nicht alle vier Handlungsbereiche gefördert, so kann es sein, dass SchülerInnen Probleme dabei haben, diese zu verbinden. Wahrscheinlich müsste das Begründen und Interpretieren auf inhaltlicher Ebene stärker gefördert werden, damit SchülerInnen kreativer werden beim Lösen von Aufgaben, und nicht immer nur auf die gelernten Rechenregeln zurückgreifen.

Beispiele für die Schwierigkeit zwischen den beiden Ebenen zu wechseln wurden bereits im Kapitel 6.1.1.4 mit dem Interviewausschnitt von Dietmar angegeben. Dietmar brachte bei der ersten Aufgabe, in der es darum ging, Bruchzahlen der Größe nach zu ordnen, die meisten Brüche auf gleichen Nenner, auch wenn bei manchen Brüchen, wie zum Beispiel bei $\frac{8}{9}$ und $\frac{5}{4}$ durch kurzes Überlegen völlig klar war, welche der beiden größer ist. Auf Nachfrage konnte Dietmar auch sehr schnell inhaltliche Erklärungen dafür abgeben, was darauf hindeutet, dass er die Aufgabe zwar sowohl auf der syntaktischen als auch auf der semantischen Ebene lösen konnte, dass er die beiden Ebenen jedoch nicht verbinden konnte. Er war also nicht dazu in der Lage, spontan zu entscheiden, ob es sinnvoller wäre auf der semantischen Ebene zu arbeiten, oder doch wieder auf die Syntax zurückzugreifen.

7. Conclusio

Zum Schluss der Arbeit sollen nun die Ergebnisse der Analyse zusammengefasst werden. Es soll außerdem reflektiert werden, inwiefern angewandte Interventionen sinnvoll und hilfreich oder gar hinderlich für die SchülerInnen waren.

Viele der Fehlvorstellungen in der Bruchrechnung, die im Theorieteil beschrieben wurden, kamen auch bei den InterviewteilnehmerInnen zum Vorschein. Am auffälligsten waren die Fehlvorstellungen, dass eine Multiplikation stets vergrößere beziehungsweise analog dazu, dass eine Division stets verkleinere. Einige SchülerInnen zeigten diese Fehlvorstellung, andere hingegen wussten über diese Fehlvorstellungen Bescheid und thematisierten sie sogar selbstständig. Sehr oft wirkte es so, als ob SchülerInnen eigentlich selbst auch an eine dieser beiden Fehlvorstellungen glaubten, sie aber wussten, dass diese falsch sind. Man kann also davon ausgehen, dass Fehlvorstellungen solcher Art bereits im Mathematikunterricht thematisiert wurden.

Eine weitere Fehlvorstellung, die zwar vorhanden war, jedoch nicht zu Problemen beim Lösen der Aufgaben führte, war die Assoziation des Erweiterns beziehungsweise des Kürzens mit Vergrößern beziehungsweise Verkleinern. Die Mehrdeutigkeit der Darstellungen von Bruchzahlen schien den SchülerInnen keine Probleme zu bereiten. Womit hingegen einige TeilnehmerInnen Probleme hatten, war die Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen, genau wie im Abschnitt 3.4.3 erklärt wurde.

Bei der Addition kam der in der Literatur so oft beschriebene, typische Additionsfehler, die Nenner und die Zähler einzeln zu addieren, nicht vor. Der Grund dafür kann sein, dass dieser Fehler in der Literatur der Fachdidaktik und in den Lehrveranstaltungen zur Fachdidaktik an der Universität so oft behandelt wird, dass dieser von den LehrerInnen im Unterricht thematisiert wird. Es wird vermutet, dass ein bewusstes Thematisieren dieses Fehlers dazu führt, dass er den Lernenden weniger häufig passiert.

Das Rechnen mit gemischten Zahlen wurde sehr häufig vermieden. Auf die Anweisung mit gemischten Zahlen zu rechnen, schafften dies jedoch fast alle SchülerInnen problemlos und die im Theorieteil beschriebenen Schwierigkeiten blieben ebenfalls aus.

Die Interventionen hatten das Ziel, den SchülerInnen durch wenig Aufwand zu helfen, eine gewisse Denkhürde zu überwinden, und ihnen so zu tieferem Verständnis zu verhelfen, genauso, wie man es als Lehrperson in der Schule oder als Nachhilfelehrer/Nachhilfelehrerin machen würde. In der Vorbereitung wurde also davon ausgegangen, dass die Interventionen klar und verständlich sind, und den SchülerInnen in jedem Fall helfen würden. Während der Interviews und besonders während der Analyse fiel auf, dass einige SchülerInnen mit gewissen Interventionen nichts anfangen konnten oder, dass diese sogar hinderlich beim Lösen der Aufgaben waren. Es wurde klar, dass manche Interventionen nur eine Hilfe sein konnten, wenn gewisse Grundvorstellungen vorhanden und ausreichend ausgeprägt sind. Ein Beispiel dafür ist die Intervention mit den Spielfiguren im zweiten Teil des Interviews, der die Multiplikation behandelt. Wenn SchülerInnen über die Von-Vorstellung verfügen, dann kann diese Intervention hilfreich sein, wenn sie diese jedoch nicht besitzen, so stellt die Intervention für sie eine zusätzliche Hürde oder ein zusätzliches Problem dar. Es ist eine der grundlegendsten Erkenntnisse, dieser Studie, dass Interventionen keinesfalls uneingeschränkt hilfreich sind. Die Lehrperson sollte sich bewusst darüber sein, dass für manche Erklärungen und Hilfestellungen, bereits bestimmtes Wissen, beziehungsweise bestimmte Grundvorstellungen vorhanden sein müssen. Ohne diese, würde es auch bei anderen Themen der Mathematik sehr schwierig sein, im Unterricht hilfreich zu intervenieren. Wenn man als Lehrperson interveniert, so ist man stets bemüht darum, abwechslungsreiche, originelle und besonders anschauliche Erklärungen zu finden. Tatsache ist, dass diese neuen Kontexte, in die ein bestimmtes Wissen eingebettet werden soll, die SchülerInnen oft mehr verwirren, als sie ihnen nutzen. Ein Beispiel dafür ist das Quadrat bei der zweiten Aufgabe des zweiten Teils. Nur für eine der vier SchülerInnen war die Intervention mit den Spielfiguren hilfreich, die andern schafften es nicht, die Bruchmultiplikation mit einem Rechteck in Verbindung zu bringen, da ihnen die dazu notwendigen Grundvorstellungen fehlten.

Fazit ist also, dass man als Lehrperson den SchülerInnen einen gewissen Inhalt nicht immer so erklären kann, wie es einem selbst am Einfachsten erscheint, da dies für die Lernenden oft unverständlich sein kann. Auch mit besonders originellen Erklärungen sollte man vorsichtig umgehen, um die Lernenden nicht zusätzlich zu verwirren. Um eine passende Erklärung für die SchülerInnen auszuwählen, sollte man sich als Lehrkraft dabei genau überlegen, welche Grundvorstellungen bei den

SchülerInnen vorhanden sind, und welche Kontexte für SchülerInnen hilfreich sind beziehungsweise welche sie eher irritieren.

8. Literaturverzeichnis

Bücher:

- Delos, Martine F (2012). „Sag mir mal...“ Gesprächsführung mit Kindern. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.
- Krummheuer, Götz; Naujok, Natalie (1999). Grundlagen und Beispiele interpretativer Unterrichtsforschung. Hemsbach: Druck Partner Rübelmann.
- Padberg, Friedhelm (2009). Didaktik der Bruchrechnung.4. Auflage. Heidelberg: Spektrum.

Artikel aus Zeitschriften:

- Besuden, Heinrich (2004). Bruchbegriff und Bruchrechnen. *Mathematik Lehren* 122. S. 15-19.
- Brousseau, Guy (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques.
- Glade, Matthias; Schink, Andrea (2011). Vom Anteile bestimmen zur Multiplikation von Brüchen. *Mathematik Lehren* 164. S. 43-47.
- Jannack, Wilfried; Koepsell, Andreas; Vernay, Rüdiger (2008). Brüche herstellen. *Mathematik Kompakt. Brüche zum Anfassen*. S. 10-17.
- Krummheuer, Götz (2004). Wie kann man Mathematikunterricht verändern? Innovation von Unterricht aus Sicht eines Ansatzes der Interpretativen Unterrichtsforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik* 25(2). S.112-129.
- Malle, Günther (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik Lehren* 123, S.4-8.
- Prediger, Susanne (2004). Brüche bei den Brüchen - Aufgreifen oder umschiffen? *Mathematik Lehren* 123, S.10 – 13.
- Prediger, Susanne (2007). Konzeptwechsel in der Bruchrechnung – Analyse individueller Denkweisen aus konstruktivistischer Sicht. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*, S. 203-206.
- Puscher, Regina; Vernay, Rüdiger (2009). Brüche – Spielend leicht. *Mathematik Kompakt*.
- Wartha, Sebastian (2011). Aufbau von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Der Mathematikunterricht, Heft 3, Mai 2011*, S.15-24.
- Winter, Heinrich (1999). Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung. Aachen.
- Winter Heinrich (2004). Ganze und zugleich gebrochene Zahlen. *Mathematik Lehren* 123. S.14-18.

Vorlesungsskripte:

- Humenberger, Johann. Mitschrift der Vorlesung „Schulmathematik 1 - Arithmetik und Algebra“ Wintersemester 2012/2013.

Schulbücher (zur besseren Übersicht werden nur die Nachnamen der Autoren zitiert):

- Dorfmayr, Mistelbacher, Nussbaumer (2006). 1. Klasse Mathe Buch. Salzburg: Verlag Neues Schulbuch.
- Dorfmayr, Mistelbacher, Nussbaumer (2006). 2. Klasse Mathe Buch. Salzburg: Verlag Neues Schulbuch
- Floderer (2012). Mach mit Mathematik 1. 1. Auflage. Wien: ÖBV.
- Floderer (2012). Mach mit Mathematik 2. 1. Auflage. Wien: ÖBV.
- Humenberger, Reichel (2011). Das ist Mathematik 1. 1. Auflage. Wien: ÖBV.
- Humenberger, Reichel (2011). Das ist Mathematik 2. 1. Auflage. Wien: ÖBV.
- Keller-Ressel, Sidlo, Wintner (2002). Blickpunkt Mathematik 1, Schwerpunkt AHS. 1. Auflage. Wien: ÖBV.
- Keller-Ressel, Sidlo, Wintner (2003). Blickpunkt Mathematik 2, Schwerpunkt AHS. 1. Auflage. Wien: ÖBV.
- Kraker, Plattner, Preis, Schliegel (2007). Expedition Mathematik. 1. Auflage. Wien: Dornier Verlag.
- Kraker, Plattner, Preis (2008). Expedition Mathematik. 2. Auflage. Wien: Dornier Verlag.

Artikel aus Internetseiten:

- Malle, Günther (2003/2004). Grundvorstellungen im Mathematikunterricht. (https://www.imst.ac.at/imst-wiki/images/8/83/Langfassung_Grundbildung_Malle.pdf am 23. 05. 2013)

Sonstige verwendete Internetseiten:

- Kompetenzmodell (Bifie):
<http://aufgabenpool.bifie.at/m7/index.php?action=3&pg=14#kap2> am 9.9.2013
- Aufgabenpool Bildungsstandards (Bifie):
<http://aufgabenpool.bifie.at/m7/index.php?action=14&cmd> am 23.5.2013
- Lehrplan (BMUKK): <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf> am 23.5.2013
- <https://www.friedrich-verlag.de/data/8AFB1A1C8659496EB97C1401021EEFB0.0.pdf> am 25.05.2013)

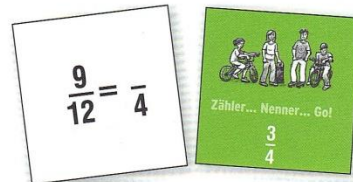
Anhang

Materialien zum Theorieteil

Spielbeschreibung für Zähler ... Nenner ... Go!

Zähler ... Nenner ... Go!

Ein Spiel für zwei bis fünf Personen



► **Spielmaterial:**

- ein Spielplan
- eine Spielfigur pro Person (Halma-Kegel, o. Ä., nicht enthalten)
- zwei Sätze Aufgabenkarten (Nenner 4 und Nenner 9)

Ziel des Spiel: Wer zuerst ins Ziel kommt, gewinnt.

► **Spielregeln:**

1. Zu Beginn

Die Aufgabenkarten werden gemischt und mit den Aufgaben nach oben auf einen Stapel gelegt. Die Spielfiguren werden auf das Startfeld gestellt. Es wird vereinbart, wer beginnt.

2. Wie wird gezogen?

Wer an der Reihe ist, nimmt die oberste Aufgabenkarte auf und versucht, den Bruch auf den vorgegebenen Nenner zu erweitern oder zu kürzen. Manche Brüche lassen sich nur in zwei Schritten (zuerst kürzen und anschließend erweitern) auf den gewünschten Nenner bringen! Der so berechnete Zähler gibt an, wie viele Felder du vorrücken darfst. (Die anderen achten natürlich darauf, dass du richtig erweitert und gekürzt hast! Zur Kontrolle findest du die Lösung auf der Rückseite der Karte.) Kann ein Bruch nicht auf vorgegebenen Nenner gebracht werden, darf nicht gezogen werden. Wenn du den Bruch falsch erweiterst und kürzt, darfst du auch nicht ziehen.

3. Rote Felder

Auf roten Feldern darfst du nicht stehen. Sollte dein Zug auf einem roten Feld enden, darfst du nicht ziehen und musst an deinem Ausgangspunkt stehen bleiben.

4. Was geschieht mit der Aufgabenkarte?

Die Aufgabenkarte wird zur Seite gelegt. Die oder der Nächste ist jetzt an der Reihe. (Sollten vor dem Spielende alle Aufgabenkarten benutzt worden sein, werden sie neu gemischt und, wie oben beschrieben, hingelegt.)

Name _____

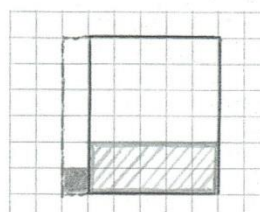
Datum _____

Kinder dieser Welt

Weltbevölkerung

Maren hat zum folgenden Text ein Quadrat für alle Menschen der Welt gezeichnet.

Im Jahr 2010 lebten fast 7 Milliarden Menschen auf der Welt. Davon lebten $\frac{1}{6}$ in Industrieländern. Davon wiederum waren $\frac{1}{6}$ Kinder unter 15 Jahren. $\frac{5}{6}$ aller Menschen lebten in Entwicklungsländern, davon waren $\frac{1}{3}$ Kinder.



1. Für welche Gruppen von Menschen steht das dick umrandete Rechteck?
Für welche Gruppen stehen das graue und das grau schraffierte Rechteck?
2. Maren sagt über ihre Zeichnung: „Die beiden Sechstel haben aber unterschiedliche Ganze.“
Erkläre, was sie mit den beiden Sechsteln meint.
3. Zeichne zu folgenden Aussagen Bilder. Was ist der Teil, was ist das Ganze?
Prüfe, ob die Anteile stimmen. Du kannst dafür zum Beispiel Kästchen zählen.
Korrigiere die Aussagen, wenn nötig.
 - a) Kinder in Industrieländern sind ein Sechstel aller Menschen.
 - b) $\frac{1}{6}$ aller Menschen lebten in Industrieländern, davon sind $\frac{5}{6}$ älter als 15 Jahre.
 - c) $\frac{1}{3}$ aller Kinder leben in Entwicklungsländern.

Im Blick: Schulbesuch in afrikanischen Ländern

In Somalia geht nur ein Drittel der Kinder zur Grundschule – die anderen müssen arbeiten.
Nach der Grundschule geht die Hälfte der Grundschulkinder auf die weiterführende Schule.

4. a) Zeichne ein Bild, das die Anteile aus dem Text darstellt.
Das ganze Rechteck sollen alle Kinder sein.
- b) Wie groß ist der Anteil der Kinder, die auf die weiterführende Schule gehen?
- c) Wie viele Kinder gehen in Burkina Faso auf die weiterführende Schule?
Wie viele in Ghana?

	Burkina Faso	Ghana
Die gehen zur Grundschule:	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Die gehen danach auch zur weiterführenden Schule:	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$

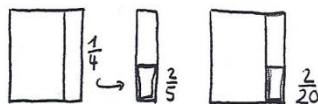
Name _____

Datum _____

Anteile ineinander schachteln

Anteile kann man ineinander schachteln und auf das alte Ganze beziehen.

1. Erkläre die Bilder von links nach rechts.
Schreibe für jedes Bild auf, was das Ganze ist.



2. Wie kann man die Lösung $\frac{2}{20}$ aus dem rechten Bild ablesen?
3. Suche dir zwei Lernpartner. Vergleiche eure Erklärungen aus Aufgabe 2 und formuliert einen Eintrag für euer Heft.

Noch mehr Anteile bestimmen

1. a) Erwürfle dir mit zwei oder vier Würfeln selbst weitere Aufgaben zum Üben.

Beispiel 1:  bedeutet: Bestimme $\frac{1}{3}$ und davon $\frac{1}{2}$.

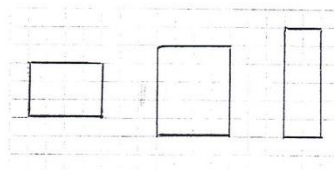
Beispiel 2:  und  bedeutet: $\frac{5}{6}$ und davon $\frac{2}{3}$.

- b) Kannst du die Aufgaben auch ohne zu zeichnen lösen?

2. a) In welches der drei Rechtecke könntest du am besten $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{4}$ einzeichnen?
Begründe deine Wahl.

- b) Übertrage das passende Rechteck in dein Heft und zeichne $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{4}$ ein.

- c) Wie groß ist dann $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{4}$ bezogen auf das ganze Rechteck?



3. Kannst du aus dem Beispiel in Aufgabe 2 eine allgemeine Regel aufschreiben, wie man Anteile vom Anteil bestimmt?

Überlege dazu: Was hat das Ergebnis mit der Zahl der Kästchen zu tun?

Was hat das Ergebnis mit der Zahl der Zeilen und Spalten im Rechteck zu tun?

4. Zeichne das gleiche Rechteck wie in Aufgabe 2 noch einmal und markiere $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$.
Wie viele Kästchen hat dein Rechteck? Wie viele Kästchen sind nun markiert?
Wie groß ist also der gesuchte Anteil am gesamten Rechteck?
Formuliere auch hier eine allgemeine Regel.

5. Mit den Überlegungen aus Aufgabe 4 hast du eine Regel gefunden, wie man ohne Bild auch zum Beispiel $\frac{2}{7}$ von $\frac{4}{5}$ bestimmen kann.

Folgende Fragen helfen dir bei der Begründung der Regel:

Wie viele Spalten und Zeilen kann das Rechteck haben?

Wie viele Kästchen hat es dann insgesamt?

Wie viele davon sind markiert?

Wie groß ist also der Anteil vom Rechteck?

(aus Glade, Schink 2011: Vom Anteile bestimmen, zur Multiplikation von Brüchen)

Transkripte

Erster Teil

Erste Aufgabe

Lena 2. Klasse (3:17-14:30)

- 1 I Kannst du mir diese Bruchzahlen der Größe nach ordnen?
- 2 L (ordnet still)
- 3 I Fertig?
- 4 L Ja.
- 5 I Ok, dann erklär mir mal, wie du auf deine Ordnung gekommen bist.
- 6 L Also ein Achtel i s t kleiner als ein, als sieben Achtel /
- 7 I Mhm, wieso?
- 8 L .. Na weils sieben sind.
- 9 I Ok.
- 10 L U n d acht Neuntel s i n d ... (lange Pause) hm ...
- 11 I Wie könnten wir denn schauen, welche die Größere ist von denen zweien.
- 12 L I n . Zweiundsiebzigstel bringen?
- 13 I Ok /, kannst du machen/.
- 14 L (rechnet und erhält für $\frac{7}{8} \frac{73}{72}$ und für $\frac{8}{9} \frac{64}{72}$) (ordnet um)
- 15 I Hast du da richtig gerechnet?
- 16 L (bessert die $\frac{73}{72}$ auf $\frac{63}{72}$ um)
- 17 I Ok.
- 18 L Ok. (rechnet wieder)
- 19 I Was machst du jetzt?
- 20 L Die zwei (zeigt auf $\frac{1}{7}$ und $\frac{8}{9}$)
- 21 I Mhm /
- 22 L (rechnet weiter)
- 23 I Ist es da wirklich notwendig, dass man die auf denselben Nenner bringt?
- 24 L Ja /
- 25 I Ja?
- 26 L (denkt)
- 27 I Kann man sich das anders nicht irgendwie vorstellen, welche größer ist?
- 28 L (denkt)
- 29 I Wie groß ist denn ein Siebentel ungefähr in einem Kreis oder in einem Rechteck oder
- 30 .. einfach einmal einzeichnen.
- 31 L (zeichnet einen Kreis)
- 32 I Wie groß ist da ein Siebentel?
- 33 Mmm ... zeichne mal die anderen sechs Siebentel ein.
- 34 L (zeichnet)
- 35 I Kannst du auch irgendwie so einzeichnen, dass ich dir das auch wirklich glaube, dass
- 36 die gleich groß sind?
- 37 L (zeichnet den Kreis nochmal, funktioniert nicht, lacht)
- 38 I Bleiben wir beim Rechteck, ich glaube das ist leichter.
- 39 L (zeichnet Rechteck und zeichnet Kästchen ein)
- 40 I Versuchs mal in Streifen zu unterteilen.
- 41 L Wie \
- 42 I Mit Streifen.
- 43 L (zeichnet wieder)
- 44 I Mhm \. Jetzt haben wir aber wieviele?

45 L Vier.
 46 I Genau und was wollen wir schauen?
 47 L Sieben.
 48 I Mhm/
 49 L (zeichnet wieder)
 50 I Ok. Wie groß sind jetzt – was brauchen wir? Ein Siebentel.
 51 L (malt ein Siebentel an)
 52 I Ok, und jetzt kannst du gleich mit Bleistift dazu malen wie groß acht Neuntel sind.
 53 Da musst du jetzt eine neue Einteilung treffen.
 54 L (zeichnet die Einteilung in dasselbe Rechteck)
 55 I Oder du kannst auch drüber, wenn du dir leichter tust, ein Rechteck zeichnen, dass
 56 fast gleich groß ist, und kannst es da einzeichnen.
 57 L (zeichnet ein Rechteck darüber, und dann noch eines weil das erste nicht gelingt,
 58 sie markiert die acht Neuntel)
 59 I Mhm, also was ist jetzt größer? Acht Neuntel oder ..
 60 L **Acht Neuntel!**
 61 I Ok, ganz eindeutig ist das größer, oder?
 62 L Ja. (ordnet weiter, ist fertig)
 63 I Ok, jetzt schaust du dir alles nochmal an, und schaust obs passt.
 64 L (überlegt)
 65 I Oder machen wirs so. Ich gebe dir diese Bruchstreifen, da sind immer die Brüche
 66 dargestellt, ja? Immer in derselben Länge. Und du kannst mithilfe von den Streifen
 67 kontrollieren, ob dein Ergebnis stimmt.
 68 Suchst dir mal die Streifen raus, die du brauchst. /
 69 L (sortiert die Streifen, gibt mir welche zurück)
 70 I Ok, die brauchst du nicht?
 71 L Nein. (schaut die restlichen Streifen an)
 72 I Ok, schauen wir mal, ist ein Achtel kleiner als sieben Achtel?
 73 L Ja.
 74 I Ja? Ok.
 75 Ist sieben Achtel kleiner als ein Siebentel?
 76 L (schaut auf die Streifen) Nein? /
 77 I Nein. / Wieso nicht?
 78 L Muss man das dann so dran legen?
 79 I Nein immer gleich .. so .. und dann von rechts nach links lesen.
 80 L Aso, ist größer.
 81 I Ok. Wo tun wir weiter? Bei welchen zwei?
 82 L Drei Siebentel und sieben Achtel.
 83 I Mhm /
 84 L Ist auch noch größer / (legt $\frac{3}{7}$ vor $\frac{7}{8}$) (arbeitet weiter mit Bruchstreifen) Ist kleiner?
 85 I Was ist kleiner?
 86 L Zwei Fünftel.
 87 I Mhm/
 97 L Und das ($\frac{5}{4}$) ist größer.
 98 I Warum ist das größer?
 99 L Weils da noch weiter geht? /

Dietmar 2. Klasse (17:00-20:00)

1 I Kannst du diese Bruchzahlen der Größe nach ordnen?

- 2 D Von klein auf groß, oder?
- 3 I Genau, ja.
- 4 D (stapelt der Reihen nach Bruchzahlen, beginnend beim kleinsten, bis er fertig ist)
- 5 I Ok, legst du mir mal auf, der Reihe nach?
- 6 D Ja. (er legt $\frac{1}{8} \frac{1}{7} \frac{3}{7} \frac{2}{5} \frac{8}{9} \frac{7}{8} \frac{5}{4}$)
- 7 I Ok, dann erklär mir mal, wie du zu deinen Entscheidungen gekommen bist.
- 8 D Also, ein Siebentel wenn man das zusammenzählen will, wärs Sechsfünftel, wär der gleiche
- 9 Nenner und da wär das da (zeigt auf $\frac{1}{7}$) acht und das da (zeigt auf $\frac{1}{8}$) sieben, darum
- 10 ist das (zeigt auf $\frac{1}{7}$) größer. Da ist eh schon auf gleichen Nenner, da ist drei, darum ist das
- 10.1 größer.
- 11 I Mhm /
- 12 D Das (zeigt auf $\frac{3}{7}$ und $\frac{2}{5}$) hab ich zusammengezählt, das wär gleich fünfunddreißig, und . äh . das
- 12.1 (zeigt auf $\frac{2}{5}$) wär dann vierzehn und das (zeigt auf $\frac{3}{7}$) wär dann 15 .. **Aso** . ja (vertauscht die
- 12.2 beiden Kärtchen) So gehört es.
- 13 I Mhm /
- 14 D Auf jeden Fall da, da muss man wieder auf gleichen Nenner bringen aber, das ist dann, wär
- 14.1 gleich, zweiundsiebzig, das wär sechsfünftel, und das wär sechsfünftel, nein
- 14.2 siebenundzwanzig.
- 15 I Ist es da wirklich notwendig, dass ich bei denen zweien ($\frac{3}{7}$ und $\frac{8}{9}$) auf gleichen Nenner bringe?
- 16 D Nein, nicht wirklich.
- 17 I Wieso nicht?
- 18 D Weil da schon fast ein Ganzes ist und da viel fehlt, fast noch $\frac{1}{2}$.
- 19 I Mhm.
- 20 D Auf jeden Fall da ist dann, äh . , wenn man das wieder zusammenrechnen würde, würde
- 20.1 zweiund. Nein. Zweiundsiebzig rauskommen.
- 21 I Wo jetzt?
- 22 D Da bei diesen zweien (zeigt auf $\frac{8}{9}$ und $\frac{7}{8}$).
- 23 I Achso.
- 24 D Da wär gleich das (zeigt auf $\frac{7}{8}$) wär dann dreiundsechzig und das (zeigt auf $\frac{8}{9}$) ist
- 25 vierundsechzig. Dann ist das aber größer. (Tauscht die Kärtchen um). So und das da
- 26 wieder zusammengezählt, das wär dann sechsfünftel, das wär dann fünfundvierzig
- 27 da (zeigt auf $\frac{5}{4}$) und da (zeigt auf $\frac{8}{9}$) wärs dann zweiunddreißig. Darum ist das (zeigt
- 28 auf $\frac{5}{4}$) größer als das (zeigt auf $\frac{8}{9}$).
- 29 I Mhm, und ist es wirklich notwendig, dass wir da wieder auf denselben Nenner
- 30 bringen?
- 31 D Nein, nein, weil das ist da (zeigt auf den Zähler von $\frac{5}{4}$) sogar schon größer als der Nenner
- 32 und da ist er ja noch kleiner (zeigt auf $\frac{8}{9}$).

Markus 2. Klasse (0:00 – 2:55)

- 1 I Kannst du mir bitte diese Brüche der Reihe nach sortieren? Also der Größe nach.
- 2 M Mit groß oder klein anfangen?
- 3 I Mit klein.
- 4 M (er legt $\frac{1}{8} \frac{1}{7} \frac{3}{7} \frac{2}{5} \frac{7}{8} \frac{8}{9} \frac{5}{4}$)
- 5 I Erklärst du mir mal deine Ordnung?
- 6 M Also ein Achtel, Sieben, also ein Achtel ist kleiner als sieben Achtel.

- 7 I Warum?
- 8 M Weil . äh . weil sieben Achtel größer ist, weil es von eins nach acht, also nach unten
- 9 immer kleiner wird, also nach oben.
- 10 I Noch einmal kurz erklären, das hab ich jetzt nicht ganz verstanden.
- 11 M Von eins bis . also bei den Nenner von ein bis äh halt die höheren Zahlen wirds
- 12 immer kleiner die Zahl.
- 13 I Mhm.
- 14 M Ein Siebentel, dann drei Siebentel, zwei Fünftel.
- 15 I Wieso ist drei Siebentel kleiner als zwei Fünftel?
- 16 M Ahm . weil drei Siebentel . ahm . kleiner ist (lacht).
- 17 I Wie bist du auf das gekommen?
- 18 M Hmmm, ich habe geschätzt dass es kleiner ist.
- 19 I Ok, kannst du auch irgendwie durch zeichnen, rechnen, aufschreiben, kannst du
- 20 irgendwie erklären.
- 21 M Ja. (denkt) Ja . das . so (tauscht die beiden Kärtchen)
- 22 I Warum?
- 23 M Weil das (zeigt auf $\frac{3}{7}$) fünfzehn Fünfunddreißstel sind und das (zeigt auf $\frac{2}{5}$) sind
- 23.1 vierzehn Fünfunddreißstel.
- 24 I Ok.
- 25 M Dann sieben Achtel und acht Neuntel.
- 26 I Mhm.
- 27 M Und dann fünf Viertel.
- 28 I Ok, wieso ist sieben Achtel größer als drei Siebentel?
- 29 M Ah, weil das ah, weil drei Sie, weil sieben Achtel fehlt nur eins, auf ein Ganzes und,
- 30 also ein Achtel auf ein Ganzes und drei Siebentel, da fehlen noch vier Siebentel.
- 31 I Ok, und wieso ist sieben Achtel kleiner als acht Neuntel?
- 32 M Weils, ah, weil acht Neuntel .. halt größer ist, weil das mit neun ist und eins. Also
- 33 weil eins kleiner ist und weil neun größer ist, ist acht Neuntel größer.
- 34 I Mhm./ Ok, und fünf Viertel?
- 35 M Das ist mehr als ein Ganzes, darum ist es das meiste.

Jasmin 2. Klasse (0:00-2:25)

- 1 I Als erste Aufgabe, versuch mal bitte diese Brüche der Größe nach zu ordnen.
- 2 J Ok ... Von klein nach groß?
- 3 I Ja, wie du magst.
- 4 J (legt die Ordnung $\frac{1}{8} \frac{1}{7} \frac{3}{7} \frac{7}{8} \frac{8}{9} \frac{5}{4}$, sie behält $\frac{2}{5}$ noch in der Hand) Da bin ich mir nicht ganz
- 5 sicher (geflüstert, lacht, legt $\frac{2}{5}$ zwischen $\frac{3}{7}$ und $\frac{7}{8}$).
- 6 I Dann erklär mir mal, wie du zu deiner Ordnung gekommen bist.
- 7 J Also ein Achtel ist weniger als ein Siebentel weil ein Ganzes, also durch acht geteilt
- 8 wird, und da nur durch sieben eben.
- 9 I Ok /
- 10 J Dann drei Siebentel ist eben mehr als ein Siebentel.
- 11 I Mhm /
- 12 J Das ist eh logisch. Und zwei Fünftel . ahm ... da war ich mir nicht so ganz sicher. Wart
- 13 einmal. Ah nein, das gehört glaube ich umgedreht noch.
- 13.1 (vertauscht die Kärtchen $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{7}$)
- 14 I Wieso?
- 15 J Weil man kann das auf Fünfunddreißstel . ahm . vergrößern eben, und wenn man dann
- 16 das zwei mal sieben rechnet, ist das vierzehn und wenn man drei mal fünf, sind

17 fünfzehn.
 18 I Mhm /. Ok. Ja.
 19 J Dann sieben Achtel . ahm, w e i l drei Siebentel ist viel weniger als ein Ganzes und
 20 sieben Achtel ist schon eher ein Ganzes.
 21 I Mhm /
 22 J (lacht) Ahm ... bei Neuntel, also ein Neuntel ist ja weniger als ein Achtel und ..
 23 wenns schon... also wenn ein Neuntel fehlt, fehlt ja weniger auf ein Ganzes
 23.1 wie wenn ein Achtel fehlt,
 24 und fünf Viertel ist mehr als ein Ganzes.

Richard 3. Klasse (11:50 – 22:40)

1 I Kannst du die Brüche der Größe nach ordnen?
 2 R Der Größe nach...
 3 I Du kannst dir gerne etwas aufzeichnen oder aufschreiben.
 4 R Also von klein auf größer.
 5 I Genau ja.
 6 R Also das ist einmal ganz klar (legt $\frac{1}{8}$ ganz nach links). Da muss ich schauen. Gut wär,
 7 wenn ich da alles auf einen Nenner bringen könnte, da muss ich halt schauen was optimal
 8 ist.
 9 I Mhm./
 10 Hm.. Das wären aber dann riesige Zahlen ... hm (denkt nach)
 11 I Fällt dir irgendeine andere Strategie ein, außer auf denselben Nenner bringen?
 12 R Ja, es geht eh nicht gescheit . ahm .. ich könnte die kleineren halt aussuchen, ich könnte
 13 zwei vergleichen . zum Beispiel oder ich kanns in Dezimalzahlen anschreiben.
 14 I Ja, kannst du auch.
 15 R Ja . ahm . schauen wir gleich mal... Probier ich das einmal mit den Dezimalzahlen (er
 16 dividiert schriftlich, murmelt dabei vor sich hin) acht periodisch, also nullkommaacht
 17 periodisch/ ... dann ein Achtel schauen wir mal (er dividiert wieder) dann ist das
 18 (zeigt auf $\frac{1}{8}$) also das Kleinste ... Dann rechne ich das ($\frac{1}{7}$) auch noch aus.
 19 I Probiers mal ohne Dezimalzahlen.
 20 R Ok. Also nur jetzt mit ausprobieren, oder ?/
 21 I Ahm . Ja einfach was du glaubst, dass größer ist.
 22 R Ok.
 23 I Ein Siebentel, ist das jetzt größer oder kleiner als ein Achtel?
 24 R Ein Siebentel ist kl ah größer.
 25 I Mhm. Warum?
 26 R Weil der Nenner kleiner ist.
 27 I Genau, dann kannst du schon mal rechts davon hinlegen.
 28 R Ok. Das da (nimmt $\frac{5}{4}$) ist das größte, weil das ist dann schon ein Ganzes.
 29 I Mhm. /
 30 R Zwei Fünftel ... a h m ...
 31 I Versuch einmal, dass d u zu bekannten Bruchzahlen Bezug nimmst, also ob jetzt die
 32 größer oder kleiner als ein Halb sind oder als ein Viertel.
 33 R Ok . ahm . Das ($\frac{2}{5}$) ist halt kleiner als ein Halbes, das ($\frac{8}{9}$) ist größer. Kann man da
 34 eigentlich gleich hinlegen. Kleiner als Halbes, kleiner (legt alle Brüche, die kleiner sind
 35 als $\frac{1}{2}$ neben $\frac{1}{8}$). Ja die anderen sind dann größer (sagt noch etwas unverständliches).
 36 Sieben Achtel ist, glaube ich, auch größer als acht Neuntel.
 37 I Sieben Achtel ist größer als acht Neuntel .. Dann schau dir mal diese zwei

38 Kreisscheiben an, und erklär mir das anhand von denen, warum das so ist.

39 R Ok . ahm. Das ist die mit neun oder? (zählt) acht

40 I Achso da hab ich die Falsche.

41 R Das sind sieben.

42 I Nein das bringt nichts. Ok, dann zeichne es selbst. Kannst eine neue Seite anfangen,

43 damit du nicht so klein zeichnen musst.

44 R Ok, ja. (zeichnet und murmelt vor sich hin) Da mach ich einen Kreis mit acht ... u n d ..

45 hm (murmelt vor sich hin) nein dann hätt ich zu viel. Ist ja egal eigentlich.

46 I Ok./

47 R (zählt) acht, neun, ok. Also davon von dem habe ich acht Neuntel.

48 I Ok, markiere die acht Neuntel mal irgendwie. Irgendwie anmalen oder so.

49 R (zeichnet ein und zählt dabei) eins, zwei , drei, vier, fünf, sechs, sieben und acht.

50 Und jetzt da die sieben Achtel, eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben.

51 I Ok, und wie können wir die jetzt vergleichen?

52 R Na also wo halt mehr übrig bleibt, oder?

53 I Ja, aber du hast jetzt nicht so genau gezeichnet, da müssen wir schon überlegen auch.

54 R Mhm .. Hm.

55 I Was bleibt denn immer übrig jeweils in den beiden Kreisen?

56 R Also ein Feld.

57 I Mhm./ Und was ist das eine Feld immer?

58 R Ein Neuntel, oder ein Achtel, und ein Neuntel.

59 I Ok, was ist größer, ein Achtel oder ein Neuntel?

60 R Ahm . ein Achtel.

61 I Mhm. / Dann versuch einmal anhand von der Überlegung jetzt . ahm . zu entscheiden,

62 welche von den beiden größer ist.

63 R Aso. Dann gehörs dann so (legt $\frac{7}{8}$ links von $\frac{8}{9}$).

64 I Ok, wie bist du jetzt zu dem gekommen?

65 R Eigentlich muss ich halt dann von dem ($\frac{8}{9}$) weniger abrechnen als von dem ($\frac{8}{9}$) hier.

66 I Mhm./ Und mit abrechnen meinst du-

67 R Also und dann, von der Größe halt des Kreises hier, muss ich dann weniger

68 wegnehmen als hier.

69 I Mhm./ Ok.

70 R Ja.

71 I Gut, dann schauen wir uns die unteren Bruchzahlen an.

72 R Ok, als das ($\frac{1}{8}$) ist einmal ziemlich sicher das kleinste /

73 I Ja.\

74 R Dann würd ich sagen das ($\frac{1}{7}$), dieses hier und das da ($\frac{3}{7}$ und $\frac{2}{5}$).

75 I Mhm. / Wie bist du zu dem gekommen?

76 R Ja, also, Siebentel ist ja kleiner als Fünftel, also ja ...

77 I Was meinst du jetzt mit kleiner?

78 R Also braucht halt, man braucht in einem Kreis da halt mehr Felder,

78.1 und bei Fünftel halt weniger.

79 I Mhm./

80 R Und ich hab mir halt gedacht, weil drei Siebentel wird sicher weniger sein als zwei Fünftel

81 halt.

82 I Und wieso?

83 R Das hab ich mir halt einfach so vorgestellt, war jetzt nicht eine echte Überlegung.

84 I Ok, schau mal, ..

85 R Ich habs mir halt einfach gedacht, dass es so passen würde.

86 I Ok, dann schau dir mal die Bruchstreifen an. Da sind immer am selben Streifen
87 sind einfach Bruchteile dargestellt, ja? Also Achtel, Neuntel, alles hast du da. Und
88 schau mal, ob dir das irgendwas hilft.
88.1 Ob du damit bestätigen kannst, dass deine Antwort stimmt.
89 R Ok, Passt das eh so wie ichs halte?
90 I Ja.
91 R Ok, und das da (zeigt auf die linke Seite des Bruchstreifens) ist die kleinste und das da
92 ist die größte?
93 I (Beginne von rechts zu zeigen) Das ist ein Neuntel, zwei Neuntel, ..
94 R Ok, also acht Neuntel wäre dann hier./
95 I Na schauen wir nur noch die zwei Zahlen ($\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{7}$) an, bei den anderen wissen wir es eh
96 schon, oder?
97 R Mhm.
98 I Die haben wir ja schon. Hilft dir da der Neuntel-Streifen was?
99 R Nein, eigentlich nicht.
100 I Dann schau mal, ob du was findest, was dir hilft.
101 R Elftel, brauch ich auch nicht, Siebentel eigentlich auch nicht.
102 I Mhm, naja.
103 R Die müssten ja eigentlich auf demselben Nenner sein. Ich kann mir den ja aufheben
104 und nachher den Fünftel-Streifen suchen, und jetzt kann ichs übereinanderlegen
105 und jetzt schauen wir also. Da hab ich die zwei Fünftel, da hab ich die drei Siebentel,
106 aja, die drei Siebentel sind eigentlich mehr.
107 I Mhm./
108 R Die brauchen mehr Platz (legt die Kärtchen richtig hin) . und ja
108.1 deswegen muss ichs so hinglegen.
109 I Stimmts jetzt unsere Ordnung?
110 R Eigentlich, ja/, ja\ eh.

Sabrina 3. Klasse (0:00-3:35)

1 I Kannst du mir diese Brüche der Größe nach ordnen?
2 S Ups (legt sich die Kärtchen auf) , wo soll das große sein?
3 I Rechts das große, links das kleine.
4 S (legt die Kärtchen um und murmelt dabei leise vor sich hin) Größer, ich glaub das ist auch
5 größer, ich glaube das gehört da.
5.1 wie gehört das? (dreht das $\frac{6}{8}$ – Kärtchen)
5.2 I So ($\frac{6}{8}$).
5.3 (murmelt wieder vor sich hin) Ja, ich glaube das stimmt halbwegs.
6 ($\frac{1}{8} \frac{1}{7} \frac{3}{7} \frac{2}{5} \frac{6}{8} \frac{7}{8} \frac{5}{4}$)
7 I Magst du mir mal erklären, wie du zu der Ordnung gekommen bist?
8 S Ähm ja, fünf Viertel ist mehr als ein Ganzes und sonst ist nichts größer als ein Ganzes.
9 I Ja, ok./
10 S Sieben Achtel sind schon fast ein Ganzes, sechs Achtel sind so viel wie drei Viertel und
11 zwei Fünftel sind weniger, und zwei Fünftel, ich weiß ich jetzt nicht genau
11.1 wie groß das ist.
12 Das kann ich mir jetzt nicht so gut vorstellen. Ähm, .
13 I Du kannst auch gerne irgendetwas aufzeichnen, wenn dir das hilft, oder rechnen,
14 Irgendwie, wie du willst.
15 S Ja ich weiß nicht, bei denen zweien (zeigt auf $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{7}$) bin ich mir wieder sicher, das

- 16 sind die kleinsten, aber,...
- 17 I Erklär mir mal, warum du dir bei denen sicher bist.
- 18 S Ja, weil ein Achtel ist kleiner als ein Siebentel und die zwei ($\frac{3}{7}$ und $\frac{2}{5}$) sind auch wieder
- 19 größer.
- 20 I Mhm./
- 21 S Aber drei Siebentel und zwei Fünftel, drei Siebentel, drei Siebentel sind trotzdem
- 22 kleiner, weil da sind es sieben Teile und da sind es zwei, ja ich glaube das passt.
- 23 I Mhm, ja. Ok, dann gebe ich dir mal diese Bruchstreifen. Da sind immer Zehntel
- 24 dargestellt, Zwölftel, immer in derselben Länge vom Streifen. Schau mal, ob du
- 25 mithilfe von denen herausfindest, ob das jetzt stimmt deine Antwort, dass drei
- 26 Siebentel kleiner sind als zwei Fünftel.
- 27 S (legt sich die Streifen auf) Da sind Siebentel, Zehntel brauchen wir nicht. So, naja,
- 28 obwohl, (lacht) das ist jetzt fast größer (vertauscht die Kärtchen).
- 29 I Ok, wie hast du das jetzt gesehen?
- 30 S (zeigt auf dem Streifen) naja ein Fünftel ist so, und das ist dann größer.

Lara 3. Klasse (0:00-10:45)

- 1 I Kannst du bitte diese Brüche der Größe nach ordnen beginnend mit dem kleinsten, ok?
- 2 L Mhm. (legt sich die Kärtchen auf). Soll ich es da rauf schreiben?
- 3 I Wie du willst, du kannst sie auch nur so ordnen.
- 4 L Ok (denkt sehr lange, lacht und nimmt die Kärtchen). Es ist so gescheiter glaube ich.
- 5 I Mhm.
- 6 L Also mit dem kleinsten anfangen?
- 7 I Genau, ja.
- 8 L (sortiert die Kärtchen, lacht wieder, sie legt zuerst $\frac{1}{8}$ dann $\frac{1}{7}$ und zeichnet dann)
- 9 I Was hast du jetzt nachgeschaut in den Kreisen?
- 10 L Na wenn es acht Teile sind, dann ist ja ein Teil kleiner, als wie wenn es sieben sind.
- 11 I Ok, ja.
- 12 L Also wir haben es halt immer in der Schule am gleichen Nenner gebracht und-..
- 13 I Kannst du auch machen, wie du willst.
- 14 L Ja, nur acht, sieben (murmelt vor sich hin) das ist glaub ich gescheiter. (rechnet, bringt
- 15 alle Brüche auf Vierundfünfzigstel, im Anschluss ordnet sie die Kärtchen
- 16 $\frac{1}{8} \frac{1}{7} \frac{3}{8} \frac{6}{8} \frac{7}{8} \frac{5}{4}$)
- 17 I Hast du eine Idee was mir mit den zwei Fünftel machen könnten?
- 18 L (lacht, überlegt sehr lange)
- 19 I Hast schon eine Idee, wie du es machen könntest?
- 20 L Ich überlege gerade, weil Siebentel sind kleiner als Fünftel, dann also dann sind da drei
- 21 Siebentel und da zwei Fünftel. (zeichnet einen Kreis)
- 22 I Sind das jetzt wirklich Fünftel in dem Kreis was du eingezeichnet hast?
- 23 L Nein, weil sie nicht gleich groß sind, das war aber bei den Siebenteln vorher auch
- 24 schon so. Weiß ich nicht, wie ich das sonst einzeichnen soll.
- 25 I Achso.
- 26 L (überlegt sehr lange, bringt die $\frac{2}{5}$ auf Fünfundfünfzigstel und zeichnet, sie legt die $\frac{2}{5}$ vor die $\frac{3}{7}$)
- 27 I Ist das jetzt deine Antwort?
- 28 L Ja.

Evelyn 3. Klasse (0:00 – 4:40)

- 1 I Versuch einmal diese Brüche da, der Größe nach zu ordnen, ok?
- 2 E Ok. (legt die Kärtchen auf und sortiert sie, zuerst nur die Achtel, dann den Rest,

2.1 $\frac{1}{7} \frac{1}{8} \frac{3}{7} \frac{2}{5} \frac{6}{8} \frac{7}{8} \frac{5}{4}$)

3 I Ok, fertig?

4 E Ja.

5 I Ok, dann erklär mir mal deine Ordnung.

6 E Also, das ist größer, und da, also von klein nach groß.

7 I Ok, wieso ist fünf Viertel die größte Zahl?

8 E Weil das ist mehr als ein Ganzes, und sieben Achtel das ist, also sechs Achtel sind drei

9 Viertel u n d sieben Achtel ist größer als sechs Achtel, und dann zwei Fünftel, d a s i s t

10 ein bisschen weniger als die Hälfte.

11 I Mhm./

12 E Und drei Siebentel auch, ich bin nicht sicher welche größer ist./

13 I Mhm. / Wie könnten wir uns da ganz sicher werden?

14 E Wenn man es ausrechnet. Also drei durch sieben und zwei durch fünf.

15 I Ok./ Das kannst du mal machen.

16 E (rechnet, vertauscht dann die Kärtchen)

17 I So, ok./ Ok.\ Und die letzten zwei Teile?

18 E Also sind größer als Siebentel – **nein**, Siebentel ist größer.

19 I Und wieso?

20 E Weil je kleiner, je kleiner der Zähler ist/, desto größer ist auch die Zahl.

21 I Ok, ja.

Zweite Aufgabe

Lena 2. Klasse (0:00-3:15)

- 1 I Das kannst du aufschreiben bitte, zwei Achtel ... ist gleich wieviel Sechzehntel?
- 2 L (schreibt sofort die richtige Lösung hin)
- 3 I Ok, wow, das ist schnell gegangen.
- 4 L (lacht)
- 5 I Ok, wieso ist das so?
- 6 L Ahm.. weil acht mal zwei sechzehn ist, und zwei mal zwei vier.
- 7 I Mhm. Ok, kannst du mir das irgendwie aufzeichnen oder irgendwie erklären, warum das gleich
- 8 ist?
- 9 L Ahm (zeichnet ein Rechteck) Also das i s t, sind zwei Achtel, und das s i n d zwei Sechzehntel,
- 10 und das sind auch zwei Sechzehntel.
- 11 I Ok. Ein Sechstel ist gleich wieviel, ist gleich drei durch wieviel?
- 12 L (Lena schreibt)
- 13 I Ahm, du kannst es auch als Bruch aufschreiben.
- 14 L Achso, ja (schreibt die richtige Lösung hin).
- 15 I Mhm. / Kannst du mir das auch irgendwie .. beweisen, dass das so ist, oder...
- 16 L Ahm ...
- 17 I Oder kannst du es mir vielleicht mithilfe, mmh, kannst du mir irgendwie, indem du das Papier
- 18 faltest, zeigen, dass das so ist?
- 19 L Ahm (faltet das Blatt zweimal in der Mitte, macht es auf). O k.\ (lacht, faltet weiter) Gut, also
- 20 das ist ein Achtzehntel und nochmal ein Achtzehntel und dann so nochmal ein Achtzehntel.
- 21 I Falte einmal auf. /
- 22 L (faltet auf)
- 23 I Und haben wir da jetzt achtzehn Teile? Ist das ein Achtzehntel?
- 24 L Nein. (lacht, faltet weiter)
- 25 I Ok, probiers, fangen wir vielleicht nochmal an mit einem neuen Zettel. Probier mal Sechstel zu
- 26 falten. Wie kann man denn Sechstel falten?
- 27 L (beginnt wieder gleich zu falten, öffnet das Papier wieder) Achtel.\
- 28 I Ok, dann zeig mir halt die erste Aufgabe.
- 29 L Also das sind zwei Achtel (zeigt auf zwei Teile des Papiers) und das i s t (faltet weiter)...
- 29.1 I Mhm./
- 30 Und das i s t (faltet weiter und öffnet wieder). Das sind da vier Sechzehntel.

Markus 2. Klasse (3:00-8:50)

- 1 I Zwei Achtel ist gleich wieviel Sechzehntel. Du kannst es dir gerne aufschreiben, wenn du willst.
- 2 M Vier Sechzehntel.
- 3 I Mhm. Und wie bist du auf das gekommen?
- 4 M Ahm . alle, beides mal zwei.
- 5 I Ok, kannst du mir das irgendwie mit zeichnen, falten, basteln, was auch immer erklären, dass
- 6 das so ist? Dass gilt, ...
- 7 M Also ein Achtel ist das Gleiche wie zwei Sechzehntel.
- 8 I Ok, wieso?
- 9 M Weil das das Doppelte ist von beiden.
- 10 I Und wieso?
- 11 M Weil es beides das Gleiche ist.
- 12 I Kannst du mir das irgendwie aufzeichnen, dass man das versteht.
- 13 M Also (schreibt die Bruchzahl auf) also ist das gleiche wie zwei Sechzehntel.
- 14 I Also es war zwei Achtel ist gleich vier Sechzehntel. Haben wir gehabt.
- 15 M Ist gleich vier Sechzehntel?

16 I Zwei Achtel ist gleich vier Sechzehntel.

17 M (schreibt die Angabe auf)

18 I Zwei Achtel.

19 M Achso. Zwei.

20 I Ok, und jetzt irgendwie aufzeichnen, dass das gleich ist.

21 M Also zwei Achtel mal zwei / ist vier.

22 I Genau, das gerechnete glaube ich dir schon, aber ob du es mir irgendwie beweisen kannst,

23 wenn ich jetzt nicht rechnen könnte zum Beispiel.

24 M Das . ahm . ahm . zwei Achtel wär auch ein Viertel und vier Sechzehntel ist auch wieder ein

25 Viertel.

26 I Mhm./ Ok. Kannst du mir das irgendwie aufzeichnen, weil wenn ich nicht rechnen kann, weiß

27 ich vielleicht auch nicht, dass vier Sechzehntel ein Viertel sind.

28 M Mhm . ahm ... (schreibt wieder Zahlen auf)

29 I Irgendwie zeichnen, nicht rechnen, ich will keine Zahlen mehr. Nur zeichnen.

30 M Hmm (denkt sehr lange nach)

31 I Oder probier es mithilfe von einem Zettel und zeig mir durch Falten, dass zwei Achtel gleich

32 vier Sechzehntel ist.

33 M Also (faltet und öffnet das Papier wieder). Das sind acht, und zwei Achtel ist das Gleiche wie

34 äh, das doppelte, wenn das jetzt Sechzehntel wär.

35 I Wie? Noch einmal.

36 M Das sind zwei Achtel/

37 I Ok, kannst du ja mal anmalen, zwei Achtel.

38 M (markiert die zwei Achtel)

39 I Ok. Woher, wo sehe ich da jetzt an dem Zettel, dass das gleich .. vier Sechzehntel ist.

40 M Ahm . Weil wenn man es verdoppelt, dann sind es vier Sechzehntel.

41 I Ja, aber wenn ich nicht rechnen kann, weiß ich das ja nicht. Kann man das mit dem auch

42 Irgendwie? Kannst du es mit falten auch irgendwie verdoppeln?

43 M Ja (faltet und klappt es wieder auf). Da sind das jetzt vier Sechzehntel.

44 I Genau, ok. Gut, d a n – ein Sechstel ist gleich drei durch wieviel?

45 M Ahm ... drei durch, also einen Bruch durch drei, oder..

46 I Ein Sechstel ist gleich drei durch wieviel. Du kannst es gerne aufschreiben.

47 M (schreibt)

48 I In einem Bruch.

49 M Achso, **achso!**

50 I Drei und einen Bruchstrich.

51 M Ist gleich drei Achtzehntel.

52 I Mhm. / Wie bist du auf das gekommen?

53 M Ahm . weil ich es mal drei gerechnet habe, jedes.

54 I Ok, weißt du wie das mathematisch heißt, was wir da tun? Wie das heißt, wenn man mal

55 rechnet?

56 M Multiplizieren?

57 I O k , multiplizieren. Aber wenn ich .. wir haben ja oben und unten mal gerechnet, oder?

58 M Ja/

59 I Wie heißt das dann? Bei einem Bruch?

60 M Hm..

61 I Oder wie heißt denn das Gegenteil von dem was wir hier machen.

62 M Ahm . dividieren?

63 I Mh. Ja bei einem Bruch? Was wär zum Beispiel .. ahm zwölf, ahm sechs Zwölftel.

64 M Ahm, sechs Zwölftel sind..

65 I Schreib es dir auf./

- 66 M Ist gleich drei Sechstel
 67 I Mhm./
 68 M Oder ist gleich (schreibt $\frac{1}{2}$ auf).
 69 I Ok, und was hast du da jetzt gemacht?
 70 M Also, verkleinert, also beides dividiert.

Jasmin 2. Klasse (2:30-9:35)

- 1 I Zwei Achtel ist gleich wieviel Sechzehntel?
 2 J Ahm . Zwei Ach t e l sind vier Sechzehntel.
 3 I Ok, wie bist du darauf gekommen?
 4 J Ahm, weil ein Achtel sind zwei Sechzehntel und zwei Achtel sind vier Sechzehntel, vier
 5 **Sech z e h n t e l.**
 6 I Ok, kannst du mir das irgendwie aufzeichnen oder falten, oder irgendwie zeigen, dass das ganz
 7 logisch ist, dass zwei Achtel gleich vier Sechzehntel ist.
 8 J Ok (zeichnet Kreise). Ok, das ist jetzt blöd. Ok, zwei Achtel, sind da ein Viertel, u n d- ahm
 8.1 genau,
 9 da habe ich schief gemalt, aber falls man da wirklich sehen, sehen kann, dass das ein Viertel ist
 10 sind das da vier Sechzehntel.
 11 I Genau, ja. Ok.
 12 J So ungefähr.
 13 I Und eins durch sechs ist gleich drei durch wieviel?
 14 J (Überlegt)
 15 I Du kannst es auch aufschreiben, wenn du willst.
 16 J Ich glaube, durch achtzehn.
 17 I Ok, wie bist du auf das gekommen?
 18 J Weil wenn man eins durch sechs dividiert, dann, und also wenn man dann, bei der ersten
 19 Rechnung ist eins also d i e Ausgangszahl sag ich mal, und wenn es bei der zweiten Rechnung
 19.1 das Dreifache
 20 ist, müsste man glaube ich auch durch das Dreifache dividieren.
 21 I Ok, u n d kannst du mir das vielleicht mithilfe von .. vielleicht wenn du ein so ein Blatt mal
 22 faltest, kannst du mir da das irgendwie zeigen, dass ein Sechstel gleich drei Achtzehntel ist?
 23 J Ahm .. (faltet) Wie bitte nochmal? Ich hab jetzt ..
 24 I Ein Sechstel ist gleich drei Achtzehntel.
 25 J Ok, nein, nochmal.
 26 I Du kannst dir auch ein neues Papier nehmen.
 27 J (überlegt) Kann ich es auch wieder aufzeichnen, ich glaube das ist leichter.
 28 I Ok, ja.
 29 J Ok, ahm (zeichnet einen Kreis, hat Probleme mit der Einteilung). Also da ist drei Sechstel das
 30 ist...
 31 I Ein Sechstel.
 32 J Achso, ein Sechstel (zeichnet wieder) naja eigentlich das, wart mal ... das ist eigentlich gleich,
 33 oder?
 34 I Hm?
 35 J Na weil, wart einmal. (überlegt wieder)
 36 I Vielleicht probierst du es doch mit Falten, im Kreis ist es doch ziemlich schwierig. Probier mal,
 37 dass du Sechstel faltest.
 38 J O k - (überlegt, faltet, murmelt vor sich hin, öffnet das Papier wieder). Jetzt haben wir Sechstel.
 39 I Ok, ja./
 40 J U n d -
 41 I Wieviel ist jetzt ein Sechstel? Mal es mal an mit Bleistift.

42 J Ok, (malt) ganz schnell.
 43 I Genau ja. Ok, und wie können wir jetzt sehen, dass ein Sechstel genauso viel ist wie drei
 44 Achtzehntel.
 45 J Ahm, (überlegt). Also ich wüsste jetzt wie man es ausrechnen könnte, aber .. direkt zeigen -
 46 I Na, ausrechnen hast du es eh können.
 47 J Ja. (überlegt) Ja wenn man Achtzehntel faltet.
 48 I Ok, / wie faltet man Achtzehntel?
 49 J (faltet, murmelt dabei vor sich hin) Wenn ich das jetzt auch noch einmal dreimal falte, glaube
 50 ich (lacht und faltet).
 51 I Genau, noch fest zusammendrücken, damit man die Kanten sieht.
 52 J (faltet das Papier wieder auseinander)
 53 I Ok/ haben wir jetzt Achtzehntel?
 54 J Ja.
 55 I Mhm./
 56 J Und da sind es dann drei.
 57 I Genau, ja. Ok, super. Ahm, weißt du wie das mathematisch heißt, was wir da jetzt gemacht
 58 haben? Also wenn man sagt, ein Sechstel ist gleich drei Achtzehntel./
 59 J Ahm.-
 60 I Was man da tut, mit dem Bruch?
 61 J N n n e i n. (lacht)
 62 I Ok, gut.

Sabrina 3. Klasse (4:30-7:40)

1 I Zwei Achtel ist gleich wieviele Sechzehntel?
 2 S (schreibt vier Sechzehntel)
 3 I Mhm./ Wie bist du jetzt auf das gekommen?
 4 S Ah. Acht und acht sind sechzehn und zwei und zwei sind .. also, einfach nur das ist das
 5 Doppelte, und das ist auch das Doppelte.
 6 I Ok, kannst du mir das irgendwie anschaulich erklären? Mit irgendeiner, entweder Zeichnung
 7 oder irgendein einfaches Beispiel.
 8 S Hm, (lacht) wenn man eine Torte in zwei Achtel teilt und die dann also ein Achtel nochmal in
 9 der Mitte durchteilt, dann sind es vier.
 10 I Mhm./ Ok, ja. Gut, kannst du auch mithilfe von falten das erklären? Nimmst dir da einen
 11 Zettel, und dass du jetzt irgendwie mithilfe von falten das erklärst.
 12 S (faltet) Das sind Halbes, das sind Viertel, jetzt sind es Achtel, Sechzehntel brauche ich. So jetzt
 13 müssen wir es wieder aufmachen./ Und da, **das** sind zwei Achtel und das sind vier Sechzehntel.
 13.1 (zeigt dabei aber jedes Mal auf Achtel-Teile)
 14 I Und ist das dasselbe? Das ist ja kleiner.
 15 S Aja stimmt.
 16 I Als das, oder?
 17 S **Aja, das ist so**, das ist ein Achtel und das ist das zweite, und dann vier Sechzehntel (zeigt auf
 18 die Sechzehntel-Teile).
 19 I Mhm./ Woher weiß ich das genau, dass das Achtel sind?
 20 S Weil ich es acht Mal, also weil ich es so oft gefaltet habe.
 21 I Ok, gut. Ahm, machen wir das nächste. Ein Sechstel ist gleich drei durch wieviel?
 22 S Ein Sechstel .. Wie? Drei durch .. irgendetwas.
 23 I Drei durch, genau.
 24 S Drei, hm, ..
 25 I Also auch einen Bruch.
 26 S Achso. (überlegt) Drei Achzehntel./

27 I Mhm./ Wie bist du auf das gekommen?
 28 S Auch wieder so, weil ein mal drei, und das dann auch mal drei, und sechs mal drei sind
 29 achtzehn.
 30 I Mhm./ Weißt du was das mathematisch, wie das mathematisch heißt, was wir gerade gemacht
 31 haben, da jetzt?
 32 S Mm.. Kürzen/ oder vergrößern./
 33 I Mmh.. was haben wir gemacht?
 34 S Anders angeschrieben den Bruch./
 35 I Mhm./ Und wie?
 36 S Mit, also größ e r e n Zahlen./

Andreas 2. Klasse (3:20-8:28)

1 I Zwei Achtel ist gleich wieviel Sechzehntel?
 2 A (schreibt die richtige Lösung hin)
 3 I Wie bist du jetzt auf das gekommen?
 4 A Also zwei mal acht ist sechzehn.
 5 I Mhm./
 6 A Und zwei mal zwei ist vier.
 7 I Ok, und kannst du mir das irgendwie ... also warum ist das gleich? Kannst du mir das irgendwie
 8 aufzeichnen, warum das die gleiche Bruchzahl ist?
 9 A (überlegt) Aufzeichnen./ Also wie aufzeichnen?
 10 I Irgendetwas. Irgendetwas, was dir einfällt, damit du mir zeigen kannst, dass das stimmt, das
 11 Istgleich.
 12 A (zeichnet einen Kreis) Also das sind da jetzt zwei Achtel.
 13 I Mhm./
 14 A U n d, das dann ... (zeichnet weiter) und jetzt ist das, also das waren zwei Achtel./
 15 I Mhm./
 16 A Und so haben wir es jetzt in sechzehn Teile, und vier Sechzehntel sind das, und das waren zwei
 17 Achtel, wenn man die Stricherl da weg tut.
 18 I Mhm./ Ok, gut, dann haben wir noch, ein Sechstel ist gleich drei durch wieviel?
 19 A (schreibt)
 20 I Also in einem Bruch aufschreiben. Genau.
 21 A (überlegt, und notiert dann die richtige Lösung)
 22 I Und, wie bist du jetzt auf das gekommen?
 23 A Also, ahm auch wie vorher, weil mal drei sind, also ein mal drei ist drei, und sechs mal drei ist
 24 achtzehn.
 25 I Ok, gut. Kannst du mir das auch irgendwie zeigen?
 26 A (lacht, zögerlich) J a – aber. (zeichnet wieder einen Kreis)
 27 I Oder fällt dir vielleicht etwas anderes ein als ein Kreis, ... womit man es zeigen könnte?
 28 A (schüttelt den Kopf)
 29 I Ok, dann zeichne es mit dem Kreis.
 30 A (zeichnet) Die sind zwar jetzt nicht ganz groß aber...
 31 I Ok (lacht).
 32 A Und das sind jetzt ein, also das ist ein Sechstel..
 33 I Mhm./
 34 A (zeichnet wieder, überlegt sehr lange)
 35 I Was hast du jetzt gezeichnet?
 36 A Äh .. das sind (zählt) oh, fehlt noch \ (überlegt wieder) Irgendwie das geht da mit dem Kreis
 37 nicht.
 38 I Na dann lassen wir es.

Evelyn 3. Klasse (4:40-7:30)

- 1 I Versuch einmal den fehlenden Zähler zu ergänzen, ja? Zwei Achtel ist gleich wieviel
2 Sechzehntel. Du kannst gerne schreiben, wenn du willst.
3 E Ok (schreibt die richtige Lösung auf). Vier Sechzehntel.
4 I Und wie bist du auf das gekommen?
5 E Ähm . ich habe . ähm geschaut, wie oft muss ich acht nehmen um zu sechzehn zu kommen /
6 ähm . mal zwei, und deswegen auch zwei mal zwei.
7 I Mhm. Kannst du mir das irgendwie anschaulich erklären? Wie das funktioniert, dass man das
8 irgendwie gleich sieht, dass das gilt, dass zwei Achtel genauso groß ist wie vier Sechzehntel. /
9 E Mmm...
10 I Die können wir mal weg tun (Kärtchen von der vorigen Aufgabe).
11 E Also wir haben, zwei Achtel ist angegeben und Sechzehntel./
12 I Mhm.
13 E Und wir suchen das, und da müssen wir schauen wie oft sechzehn durch acht geht, also wie oft
14 man das multiplizieren muss, bis man zu sechzehn kommt./ Und das ist zweimal./
15 I Mhm./
16 E Und dann muss man das auch zweimal multiplizieren./
17 I Ok./
18 E Und dann kommt man zu vier.
19 I Mhm./ Aber was ist, wenn du jetzt die Rechenregel nicht kennst, wie man Brüche erweitert.
20 E (überlegt)
21 I Kannst du es so auch irgendwie mit einer Zeichnung, oder du kannst auch ein Blatt Papier
22 falten, wenn du willst-
23 E (zeichnet Kreise) Und das ist ein Viertel. Das ist beides ein Viertel.
24 I Mhm./
25 E (zeichnet weiter)
26 I Ok, kannst du mir mal erklären, was man da sieht?
27 E Ja also das sind, das ist in Achtel geteilt./
28 I Mhm./
29 E Und da habe ich zwei Achtel . ähm . angemalt, und das habe ich in Sechzehntel geteilt und
30 das habe, und das ist genauso groß wie das.

Viktoria 3. Klasse (4:15-7:25)

- 1 I Zwei Achtel ist gleich wieviel Sechzehntel?
2 V (denkt, schreibt) Vier Sechzehntel./
3 I Mhm./ Wie bist du auf das gekommen?
4 V Ähm, weil wenn man zwei mal acht rechnet kommt Sechzehntel, jetzt muss man auch den
5 Zähler zwei mal ..
6 I Ok, kannst du mir das auch anhand von einer Zeichnung, oder von einem Blatt Papier, dass du
7 faltest, irgendwie wirklich zeigen, dass zwei Achtel wirklich ganz genau gleich ist wie vier
8 Sechzehntel?
9 V (denkt) Man könnte einen Kreis zeichnen und dann die Abschnitte einzeichnen.
10 I Ok, dann machen wir das mal.
11 V (zeichnet) Muss ich es genau machen?
12 I Nein, ungefähr halt.
13 V Ok, (zeichnet die Einteilung) Viertel, Sechstel. Das ist jetzt ein bisschen ungenau, sehr.
14 I Macht nichts.
15 V Dann, zwei Achtel und wenn man das Ganze jetzt noch einmal teilt, dann – (zeichnet die
16 Einteilung, murmelt dabei immer vor sich hin) Ja das geht da halt immer weiter.

17 I Mhm./
 18 V Soll ich es noch weiter machen?
 19 I Ja mach es noch weiter.
 20 V (zählt und zeichnet weitere Einteilungen) Sechzehn. Das sind jetzt vier und das sind noch . ahm.
 21 Ja zwölf.
 22 I Mhm./
 23 V (zählt) Ja.
 24 I Ok. Ahm . Ein Sechstel ist gleich drei durch wieviel?
 25 V (schreibt) Ein Sechstel ist gleich?
 26 I Drei durch, ..
 27 V (überlegt) Das weiß ich nicht.
 28 I Na probier es noch einmal.
 29 V Drei durch achtzehn?
 30 I Mhm./ Ok, und wie bist du da jetzt drauf gekommen?
 31 V Den, kleinst, also ich habe so lange sechs, sechs mal, also ich habe sechs mal drei gerechnet,
 32 weil da im Zähler drei ist, und dann das . ahm . sechs auch mal drei, das ist dann achtzehn.
 33 I Mhm./ Ok, weißt du wie das mathematisch heißt? Was das für eine Tätigkeit ist, was wir da
 34 machen? Wie das heißt?
 35 V Nein.

Dritte Aufgabe

Lena 2. Klasse (14:30-17:25)

- 1 I Kannst du mir sagen, welche Bruchzahl direkt nach zwei Fünftel kommt?
- 2 L Drei Fünftel.
- 3 I Drei Fünftel. \ Ahm ... wandle es einmal auf Zehntel um, und dann sagst du mir, ob dein
- 4 Ergebnis stimmt. Ob du glaubst, dass das stimmt.
- 5 L (rechnet) Sind fünf Zehntel, kommt nach zwei Fünftel.
- 6 I Ok. Dann wandle es auf Zwanzigstel um.
- 7 L (rechnet)
- 8 I Was wär es, wenn es nach Zwanzigstel, oder bei den Zwanzigstel, ..
- 9 L Sieben .. Also sieben Zwanzigstel.
- 10 I Sieben Zwanzigstel, ok.
- 11 L Also **neun**, neun Zwanzigstel.
- 12 I Ok, neun Zwanzigstel./ Ist neun? Und vorher hast du gesagt fünf Zehntel.
- 13 L Ja.
- 14 I Ist neun Zwanzigstel dasselbe wie fünf Zehntel?
- 15 L (schreibt etwas auf) Nein. (rechnet) F ü n f Zehntel ist kleiner als neun Zwanzigstel.
- 16 I Mhm./ ... Bist du dir da sicher? Wie viel sind denn...
- 17 L Nein, größer. (rechnet) Größer.
- 18 I Ok./ Das heißt welche Zahl kommt direkt nach zwei Fünftel?
- 19 L Neun Zwanzigstel.
- 20 I Neun Zwanzigstel. Ok, dann sag ich jetzt, wir wandeln auf Vierzigstel um.
- 21 L (rechnet) Achtzehn Vierzigstel.
- 22 I Mhm./ Wandeln wir auch Achtzigstel um.
- 23 L (rechnet) Achtunddreißig Achtzigstel.
- 24 I Mhm./ Also was ist jetzt die dir, die Bruchzahl, die direkt nach zwei Fünftel kommt?
- 25 L Achtunddreißig Achtzigstel.
- 26 I Mhm./ Was wär jetzt wenn ich sagen würde auch Hundertsechzigstel, ..
- 27 L (rechnet)
- 28 I Nicht mehr weiter rechnen, das wären zu große Zahlen. Auf Dreihundertzwanzigstel auf
- 29 Vierhundertsechzigstel, ...
- 30 L Also da wird die Zahl immer noch kleiner.
- 31 I Mhm./ Und sag ich irgendwann ok, jetzt ist es die Zahl?
- 32 L Nein.
- 33 I Nein./
- 34 L Nein.
- 35 I Ok, was heißt das jetzt?
- 36 L Dass es eine unendliche Zahl ist./
- 37 I Mhm./ Also ... es gibt keine direkte Bruchzahl.

Markus 2. Klasse (8:50 – 10:45)

- 1 I Was ist denn die nächstgrößere Bruchzahl nach zwei Fünftel?
- 2 M Ahm . Drei Fünftel./ Aso. \ (denkt) Sieben Zehntel./
- 3 I Sieben Zehntel, wie bist du auf das gekommen?
- 4 M Ahm, beides mal zwei und dann noch ein Größeres.
- 5 I Kannst du mir das aufschreiben?
- 6 M (schreibt) Also, ähm ... Drei Fünftel?
- 7 I Eine größere Bruchzahl, also zwei Fünftel.
- 8 M Achso. (rechnet) Also beides mal zwei ist gleich dann, vier Zehntel, und weil es in Zehntel feiner
- 9 angegeben ist, plus eins sind fünf Zehntel. Also wären fünf Zehntel.

- 10 I Ok.\ Ahm .. was ist wenn ich jetzt behaupte, mm ... dass neun Zwanzigstel die nächste Zahl ist,
 11 glaubst du mir das?
 12 M (denkt) Mmmhh, nein.
 13 I Wieso nicht?
 14 M Weil, .. **oja**.
 15 I Wieso?
 16 M Weil, ahm, das beides mal zwei sind acht Zwanzigstel und eins sind neun Zwanzigstel.
 17 I Mhm./ Und ist das jetzt die Antwort? Ist das jetzt die nächstgrößere Bruchzahl ...
 18 M Nein es wird, gibt noch immer viel, viel größere.
 19 I Mhm./ Das heißt was ist dann die ... die Nächstgrößere?
 20 M Also die Nächstgrößere gleich?
 21 I Mhm, die nächstgrößere Bruchzahl, die, die **direkt** nach zwei Fünftel kommt. Sodass keine
 22 andere dazwischen ist.
 23 M Also ... Irgendwas mit unendlich.
 24 I Ok, also gibt es so eine Zahl dann überhaupt?
 25 M Nein.

Jasmin 2. Klasse (9:35 - 11:23)

- 1 I Was ist denn die nächstgrößere, oder die direkt nachfolgende Bruchzahl nach zwei Fünftel?
 2 J Ahm (denkt) Also jetzt nur von Fünftel oder insgesamt?
 3 I Nein, überhaupt.
 4 J Ok. Ahm, vier Sechstel./ (kneift dabei die Augen zusammen)
 5 I Vier Sechstel./
 6 J Ich bin mir jetzt nicht ganz sicher.
 7 I Ok, dann behaupte ich, es liegt, fünf Zehntel liegt da noch dazwischen.
 8 J (denkt) Ja stimmt, weil fünf Zehntel ist ein Halbes und ahm, vier Sechstel ist mehr als ein
 9 Halbes.
 10 I Mhm./
 11 J Stimmt.
 12 I Ist dann fünf Zehntel die darauf folgende Zahl?
 13 J Ah (denkt) Naja aber drei Sechstel ist ja das gleiche wie fünf Zehntel, das könnten wir jetzt auch
 14 sagen, oder?
 15 I Ok, ja./ Gibt es dann so eine Zahl?
 16 J Eine direkt darauffolgende?
 17 I Mhm.
 18 J Naja, das kommt darauf an wie weit man weiter rechnet.
 19 I Naja bei den natürlichen Zahlen gibt es ja eine. Da sagt man einfach, die direkt nachfolgende
 20 Zahl von zwei ist drei.
 21 J Ja.
 22 I Kann man das bei den Bruchzahlen auch so machen?
 23 J Nein. Weil es unendlich weiter geht.

Andreas 2. Klasse (8:28 – 10:15)

- 1 I Was ist denn die nächstgrößere Bruchzahl nach zwei Fünftel?
 2 A Drei Fünftel./
 3 I Und das ist wirklich die, die Bruchzahl, die direkt darauf folgt?
 4 A (denkt) Dann kommt fünf Zehntel./
 5 I Mhm. Du kannst dir ruhig etwas aufschreiben, wenn du willst.
 6 A (schreibt $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{8}{20}$)

- 7 I Mhm. Und ist die Bruchzahl (zeigt auf $\frac{8}{20}$) jetzt größer als die (zeigt auf $\frac{2}{5}$)?
- 8 A Nein, die sind gleich.
- 9 I Ok.
- 10 A Geht aber dann immer so weiter. Die wird dann immer ... hm.
- 11 I Was ist dann deine Antwort auf die Frage?
- 12 A Äh, eigentlich man kann es immer weiter, man es immer größer umformen, und somit
- 13 kommen immer kleinere Zahlen.
- 14 I Mhm./ Genau. Das heißt gibt es so eine Zahl?
- 15 A Die, die .. nein.

Viktoria 3. Klasse (7:27 -9:35)

- 1 I Gibt es eine direkt nachfolgende Bruchzahl nach zwei Fünftel? Wenn ja, wie heißt sie?
- 2 V Wie, direkt nachfolgend?
- 3 I Eine, die direkt danach kommt, zum Beispiel bei den natürlichen Zahlen können wir sagen, drei
- 4 kommt direkt nach zwei.
- 5 V (denkt nach, murmelt) Ich glaube aber ich ... (murmelt etwas unverständliches)
- 6 I Hm?
- 7 V Ich glaube, aber ich weiß nicht wie sie heißt (murmelt). Fällt mir jetzt nicht ein, nein.
- 8 I Ok, kann drei Fünftel die Nächstgrößere sein?
- 9 V Ich glaube, da gibt es noch etwas dazwischen.
- 10 I Ok, sag mir mal irgendetwas, das dazwischen liegt.
- 11 V Ahm ... Fünf Zehntel. / Oder./ Nein warte.
- 12 I Fünf Zehntel ist genau zwei Fünftel. Ach, nein, passt eh. Ja genau passt. Ist jetzt fünf Zehntel,
- 13 die wirklich darauffolgende Zahl? Nach zwei Fünftel?
- 14 V Ich glaube, es gibt da noch kleinere.
- 15 I Ok, gibt es noch kleinere. Machen wir elf Zwanzigstel.
- 16 V (denkt nach)
- 17 I Ist das die direkt darauffolgende?
- 18 V Kann sein ja. Aber ich weiß nicht, ob das dann noch kleiner wird. Gibt es noch kleinere?
- 19 I Ja, was ist wenn ich es in Vierzigstel teile, oder in Achtzigstel.
- 20 V Ja, dann ist es noch kleiner.
- 21 I Ok, gibt es dann so eine Zahl?
- 22 V Ja.
- 23 I Ja./ Und wie groß ist die ungefähr? Was hat die ungefähr für einen Nenner?
- 24 V Ahm ... einen ziemlich großen Nenner./

Evelyn 3. Klasse (7:25 – 11:40)

- 1 I Was ist denn die nächstgrößere Bruchzahl nach zwei Fünftel?
- 2 E Drei Fünftel./
- 3 I Ja?
- 4 E Drei Viertel./ Nein. (denkt nach) Zwei Fünftel, drei Fünftel.
- 5 I Du sagst also, drei Fünftel ist die nächstgrößere Bruchzahl, dann sage ich .. nein das stimmt,
- 6 sondern, ahm .. fünf Zehntel ist die nächstgrößere Bruchzahl.
- 7 E Fünf Zehntel ist ein Halbes, ja, **ja** es ist die größere Bruchzahl.
- 8 I Ok, dann sage ich elf Zwanzigstel ist die nächstgrößere Bruchzahl.
- 9 E Ja, es ist eines mehr als die Hälfte.
- 10 I Und ist jetzt genau elf Zwanzigstel die nächstgrößere Bruchzahl?
- 11 E (denkt)
- 12 I Die, eine die direkt darauf folgt.
- 13 E Ja./

14 I Ja./

15 E Ja.

16 I Ok, dann sage ich dreiundzwanzig Vierzigstel ist die größere Bruchzahl, die Nächstgrößere.

17 E Ja, es ist um eines mehr./

18 I Stimmt das?

19 E Nein./ (lacht) Ich weiß es nicht.

20 I Denk einmal, versuch einmal es aufzuzeichnen.

21 E Ok, zwei Fünftel./

22 I Mhm./

23 E (zeichnet einen Kreis)

24 I Jetzt haben wir aber erst Viertel, oder?

25 E Oh. (zeichnet weiter).

25.1 I Schau mal, ich gebe dir da so Streifen, vielleicht kannst du es mithilfe von

26 denen herausfinden. Die sind alle gleich lang und jeweils in die Bruchteile eingeteilt.

27 E (sortiert die Streifen) Ein Halbes ist die nächste Größere.

28 I Ein Halbes ist die nächste größere?

29 E Ja.

30 I Wie sieht man das jetzt?

31 E Also ich habe sie nach der Größe geordnet, u n d, u n d, ja, die kommt dann als nächst größere.

32 I Woran sieht man das jetzt?

33 E Also da bei dieser Darstellung sieht man, dass das da länger ist, der Streifen.

34 I Aha. Ok.

Zweiter Teil: Multiplikation

Erste Aufgabe

Franz 2. Klasse (11:0-15:30)

- 1 I Zwölf mal zwei Drittel.
- 2 F Zwölf mal zwei Drittel (schreibt die Rechnung auf).
- 3 I Was stellst du dir vor unter dieser Rechnung? Irgendwas, was dir im täglichen Leben begegnet.
- 4 F (will rechnen)
- 5 I Noch nicht rechnen.
- 6 F Oh (denkt). Der Mathematikunterricht (lacht).
- 7 I (lacht) Nein, im täglichen Leben, jetzt nicht in der Schule.
- 8 F Oh (lacht).
- 9 I Braucht man das sonst nirgends?
- 10 F Doch, beim Einkaufen.
- 11 I Mhm./ Sagst du mir ein Beispiel?
- 12 F Wenn ich zum Beispiel zwölf mal zwei D r i t t e l Tomatensauce kaufe.
- 13 I Ok./ Dann erhält man wieviel Tomatensauce zum Schluss?
- 14 F Vierundzwanzig Drittel.
- 15 I Genau, wie hast du das gemacht?
- 16 F Ich habe einfach zwei mal zwölf gerechnet.
- 17 I Ok.
- 18 F Und der Nenner bleibt gleich.
- 19 I Mhm./ Ähm, ein Halb mal drei.
- 20 F (fällt Interviewerin ins Wort) Gleich acht Ganze.
- 21 I Genau. Also haben wir dann wieviel Tomatensauce?
- 22 F Acht Liter.
- 23 I Genau.
- 24 F Ok, und was war die nächste?
- 25 I Ein Halb mal drei.
- 26 F Ein Halbes mal drei (schreibt die Rechnung auf) wären gleich drei halbe, ein Ganzes ein Halbes.
- 27 I Mhm./ Ok, ja ... was hast du da für eine Bedeutung vom täglichen Leben? Gibt es da eine?
- 28 F (denkt) Beim Geld Zählen, falls du kleine Münzen hast, da hast du da vielleicht einen Euro und
- 29 einen Halb, und fünfzig Cent, also ein Euro...
- 30 I Was habe ich da für Münzen bei der Multiplikation?
- 31 F Cent-Münzen.
- 32 I Welche genau?
- 33 F Zehn-Cent-Münzen.
- 34 I Zehn Cent./
- 35 F Nein, Fünfzig-Cent-Münzen.
- 36 I Und was macht man mit den Fünfzig-Cent-Münzen? Oder wieviele hast du davon?
- 37 F Drei.
- 38 I Mhm./
- 39 F Und eines ist ein Halbes, und wenn ich das dann mal drei rechne, wären es drei Halbe, wenn
- 40 ich das dann kürze, wär ein Ganzes ein Halbes, also ein Euro fünfzig (schreibt das auf).
- 41 I Ok, ja./ Gut, ein Viertel mal ein Viertel.
- 42 F (schreibt und murmelt vor sich hin) Das wär dann gleich ein Viertel.
- 43 I Ein Viertel mal ein Viertel, ist ein Viertel?
- 44 F Nein (denkt). Nein, weil ein **Sechzentel**.
- 45 I Ok, wie bist du auf das gekommen?
- 46 F Ich habe die Zähler multipliziert und die Nenner multipliziert.
- 47 I Ok, gibt es da auch irgendeine Bedeutung aus dem Alltag, die dir einfällt?

- 48 F Ok, **da** fällt mir jetzt nichts ein.
- 49 I Da fällt dir nichts ein? Denk einmal nach ein bisschen, du hast noch gar nicht nachgedacht.
- 50 F (denkt) Wenn ich jetzt zum Beispiel mit ein Viertel Pizza .. aufteile-, und jetzt zum Beispiel ein
- 51 Viertel mal ein Viertel, das ist gleich ein Sechzehntel, weil ich das dann wieder rechne.
- 52 I Wie teilst du das Viertel Pizza dann auf? Du kannst es auch gerne aufzeichnen wenn du willst.
- 53 F (zeichnet einen Kreis) Pizza (murmelt). Dann wären hier, wär das hier noch einmal
- 54 I Jetzt haben wir?
- 55 F Sechzehn Stück.
- 56 I Mm.\ Zwölf Stück haben wir erst.
- 57 F Vier, nein drei, so jetzt aber vier.
- 58 I Mhm./ Also was haben wir jetzt gemacht mit der Pizza?
- 59 F Jetzt haben wir es noch einmal geteilt, jetzt haben wir es geteilt.
- 60 I In wieviel?
- 61 F In Sechzehntel.
- 62 I Also wir haben ein Viertel Pizza in wieviele Teile noch geteilt?
- 63 F In vier.

Dietmar 2. Klasse (20:00-23:32)

- 1 I Zwölf mal zwei Drittel, was stellst du dir denn da vor darunter?
- 2 D Also .. zum, ein Drittel?
- 3 I Zwölf mal zwei Drittel, was stellst du dir unter der Rechnung vor?
- 4 D A l s o, zwei Drittel einer Torte./ Und das dann mal zwölf.
- 5 I Mhm./ Was kommt da raus?
- 6 D Pfff (denkt angestrengt nach) Zwei Drittel mal zwölf, kann ich es aufschreiben?
- 7 I Mhm./
- 8 D (schreibt) Ist gleich vierundzwanzig Drittel... Das wären dann, äh .. wieviele Torten ... Wären
- 9 gleich acht Torten.
- 10 I Genau. Was stellst du dir vor, unter ein Halb mal drei.
- 11 D Kann ich es auch wieder aufschreiben?
- 12 I Jaja.
- 13 D (schreibt) Also zum Beispiel ein halb Torten mal drei wären dann drei Halbe, ... und das wären
- 14 gleich eine Torte und eine halbe.
- 15 I Mhm./ Ein Viertel mal ein Viertel.
- 16 D (schreibt)
- 17 I Was stellst du dir da vor darunter.
- 18 D Äh ... pfff ... eine Viertel Torte mal eine Viertel Torte./
- 19 I Mhm. Und was ist das? Was kommt da raus?
- 20 D Ein Sechzehntel.
- 21 I Mhm. Und ist das jetzt im..
- 22 D Nein das ist eher kleiner geworden.
- 23 I Mhm./ Ist das logisch, dass das kleiner geworden ist?
- 24 D Ja, weil der Nenner da grö-ßer als, das zusammenzählen (zeigt auf die Nenner) und das
- 25 zusammenzählen (zeigt auf die Zähler).
- 26 I Mhm./
- 27 D Also eigentlich, bei mal ist es ja nicht so, dass es kleiner wird, aber ... bei Brüchen .. kann es halt
- 28 kleiner werden.
- 29 I Wieso kann es bei Brüchen kleiner werden?
- 30 D Weil da das, da so etwas wie eine Minuszahl ist. Ein Viertel wäre nur
- 31 nullkommafünfundzwanzig. Und das nullkommafünfundzwanzig mal
- 32 nullkommafünfundzwanzig, das kann mal halt nur mit Brüche anschreiben.

33 I Ok, kannst du mir da auch irgendwie mit der Torte vielleicht ein Beispiel, also kannst du mir
 34 die Rechnung vielleicht auch mit der Torte erklären?
 35 D Pfff (denkt)
 36 I Oder auch mit etwas anderem, wenn dir etwas anderes einfällt.
 37 D (denkt) Zum Beispiel man hat vier Bälle und einer davon gehört einem, und dann sind das
 38 ach, das ist, nein. Das ist schwer zum Erklären. (zeichnet zwei Kreise, in dem er jeweils ein
 39 Viertel einzeichnet) Da vorne gehört das eine, dann kommen, äh, noch ... ein Viertel dazu, das
 40 wären gleich dann, dann gehört wieder einer dir, das wären dann, und da halt ...

Markus (16:50-18:29)

1 I Zwölf mal zwei Drittel. Was bedeutet das für dich? Du kannst es eh aufschreiben.
 2 M (schreibt die Rechnung auf) Also zwölf Ganze mal zwei Drittel ist, also ..
 3 I Sag mir irgendein ganz konkretes Beispiel.
 4 M (denkt) Zwölf mal (denkt) zwei Drittel Blätter.
 5 I Ok, wieviele habe ich dann zum Schluss? Wenn ich es rechne?
 6 M Ahm ..Vierundzwanzig Stü, vierundzwanzig Drittel Blätter.
 7 I Mhm./ Wieviele sind das dann?
 8 M Das sind acht Blätter
 9 I Ok, ahm, ein Halb mal drei.
 10 M (schreibt)
 11 I Was stellst du dir da vor darunter?
 12 M Also etwas Halbes mal drei.
 13 I Sag irgendetwas ganz konkretes.
 14 M Also.. ein halbes ... ein halbes Zuckerl mal drei sind dann sechs Zuckerl, also sechs
 15 halbe Stück Zuckerl, und das sind dann zwei Ganze .. Zuckerl insgesamt, achso, **drei** Ganze.
 16 I Ok ... wie, ahm, überleg noch einmal, wenn du ein Zuckerl in zwei teilst, hast du ein halbes, also
 17 hast du zwei halbe Zuckerl.
 18 M Ja.
 19 I Wieviel hast du jetzt, wenn du das eine halbe Zuckerl mal drei nimmst?
 20 M Drei Halbe.
 21 I Mhm./ Wieviele sind das dann?
 22 M Eineinhalb Zuckerl.
 23 I Ok.\ Ähm .. ein Drittel mal vier.
 24 M (schreibt)
 25 I Was stellst du dir da vor, darunter?
 26 M Also, .. ein Drittel .. von .. einem Sackerl./
 27 I Ok./
 28 M Das mal vier, sind dann halt ein Drittel mal vier sind, dann vier Drittel.
 29 I Mhm./
 30 M Das sind ein Ganzes und ein Drittel.
 31 I Ok. Ein Viertel mal ein Viertel.
 32 M (schreibt)
 33 I Fällt dir da irgendetwas ein? Wo man das braucht?
 34 M (denkt) Also da kommt wieder ein Viertel raus.
 35 I Wieso kommt da wieder ein Viertel raus?
 36 M Weil es das gleiche ist, durch das man es multipliziert, und dadurch kommt das, ah, halt das
 37 wieder raus.
 38 I Was kommt denn bei drei mal drei raus?
 39 M Neun.

40 I Ist das das gleiche wie drei?

41 M Nein. Weil ein mal eins und vier mal vier, und das ist dann ein Viertel wieder (wird immer
42 leiser).

43 I Ein mal eins ist wieviel?

44 M Eins.

45 I Und vier mal vier ist?

46 M Achso, sechzehn, also ein Sechzehntel.

47 I Ok. Und ergibt das für dich irgendeinen Sinn? Fällt dir da irgendein Beispiel aus dem Alltag ein,
48 wo man das schon einmal gebraucht hat, vielleicht?

49 M (denkt)

50 I Oder irgendetwas mit aufzeichnen, oder so.

51 M Ein Viertel **Metall** jetzt.

52 I Mhm./

53 M Und das mal ein Viertel, sind ein Sechzehntel von dem.

54 I Ja, aber kannst du das irgendwie noch erklären, warum das so ist?

55 M Weil ein Viertel kleiner ist als eins, und darum kommt da etwas raus, was weniger ist.

56 I Ok. Und wieso kommt gerade Sechzehntel raus?

57 M Weil vier mal vier sechzehn ist.

58 I Ok, wenn wir das ohne Rechenregel machen.

59 M Ahm..

60 I Kannst du mir das aufzeichnen? Du kannst mir ja einmal Metall hinzeichnen, ich weiß nicht
61 was du dir da für eine Form vorgestellt hast.

62 M Naja, .. (zeichnet ein Quadrat)

63 I Mach sie ruhig groß genug. Ok, wieviel ist jetzt ein Viertel davon?

64 M (zeichnet ein Viertel ein) So viel.

65 I Ok, und was tut man jetzt, wenn man mal, wenn man das eine Viertel mal dem einen Viertel
66 rechnet?

67 M Dann tut man das, mal noch so eines rechnen./

68 I Mhm./

69 M Das wird dann- kleiner, und, so groß halt dann (zeichnet ein kleines Eck ein).

70 I Genau zeichne es mal ein, wieso ist das dann so groß nur?

71 M Ahm.. Weil das dann von einem Viertel, weil das dann, ..

72 I Zeig es noch einmal.

73 M Weil das dann von dem Viertel... ein Viertel ist.

Jasmin 2. Klasse (21:45-29:55)

1 I Zwölf mal zwei Drittel, wieviel ist das? Ohne aufschreiben.

2 J (denkt) Vierundzwanzig Drittel.

3 I Ok, wieviel ist das?

4 J Ahm .. acht Ganze.

5 I Ok, hast du da irgendeine Vorstellung? Verbindest du da irgendeine Vorstellung aus dem Alltag
6 damit? Mit zwölf mal zwei Drittel, mit der Rechnung.

7 J (denkt) Ok, also , sagen wir einmal, ich tu immer zwei Drittel von .. einer Stunde irgendetwas
8 fernsehen, sagen wir einmal./

9 I Ok./

10 J U n d, ich mache das zwölf Mal hintereinander, dann brauche ich dazu acht Stunden.

11 I Ok, ja. Dann hast du acht Stunden ferngesehen. Kannst du mit den Spielsteinen da auch
12 irgendetwas anfangen? Kann man da irgendwie, mithilfe von denen die Multiplikation zeigen,
13 zwölf mal zwei Drittel.

14 J (denkt, gruppiert jeweils drei Spielfiguren, wobei immer zwei dieselbe Farbe haben) Also das

15 sind jetzt jeweils drei Drittel, und wenn man immer nur die gleich...

16 I Das sind drei Drittel?

17 J Also jeweils ein Drittel sozusagen.

18 I Ein Drittel von drei.

19 J Ja genau, von drei ein Drittel. Also sozusagen ein Drittel.

20 I Achso, immer die andersfärbige...

21 J Ja genau.

22 I Ok./

23 J Wenn ich jetzt nur die blau, also die andersfärbigen gehören nicht dazu, sind das jetzt zwei

24 Drittel, u n d, ahm ... aso ... genau, das geht glaube ich jetzt nicht. (denkt) Ok, (ordnet die

25 Figuren wieder anders an) also jeder von denen sind zwei von drei sozusagen, also zwei Drittel,

26 ok nein, da brauche ich den dritten auch ... (denkt)

27 I Unsere Rechnung war, zwölf mal zwei Drittel. Wieviel ist denn ein Drittel von zwölf?

28 J Ahm ... (denkt)

29 I Ein Drittel von zwölf. Schau dir einfach die Spielfiguren an. Das sind zwölf Spielfiguren,

30 wieviele Spielfiguren sind ein Drittel davon?

31 J Also, vier.

32 I Mhm./ Ok. Und unsere Rechnung war jetzt zwölf mal zwei Drittel.

33 J (denkt) Also zwei Drittel von dem ... das geht doch nicht.

34 I Wieso geht das nicht?

35 J Na ich habe mir zuerst gedacht, von zwölf zwei Drittel, sind acht und zwölf plus, also

35.1 zwölf mal acht

36 wäre dann...

37 I Aber was ist denn rausgekommen, bei unserer Multiplikation?

38 J Ähh-...

39 I Weißt du es noch? Zwölf mal zwei Drittel? Na dann rechne es dir noch einmal aus.

40 J (denkt)

41 I Kannst es aufschreiben auch.

42 J (schreibt) Also acht Ganze.

43 I Mhm./ Funktioniert dann das, was zu zum Schluss gesagt hast?

44 J (denkt) Nein./

45 I Nein, wieso nicht?

46 J Weil, wenn ich das miteinander multiplizieren würde, dann- (denkt) Keine Ahnung (geflüstert).

47 I Ok, macht nichts, gehen wir weiter. Was ist denn ein Viertel mal ein Viertel.

48 J Mal viertel. Ahm ... Zwei Sechzehntel./

49 I Zwei Sechzehntel./

50 J Ja.

51 I Ok, zeichne mir das einmal auf. Irgendwie mit irgendeiner Darstellung.

52 J Dann mache ich einen Kreis (zeichnet, denkt). Ok, zwei Viertel sind ein Halbes, und da eben

53 auch wieder./

54 I Ein Viertel mal ein Viertel haben wir.

55 J Achso, **ein** Viertel. Ok, dann das, ahm ... und zwei mal ein Viertel sind dann zwei Viertel, also

56 ein Halbes.

57 I Aber wir rechnen ja nicht zwei mal ein Viertel, sondern ein Viertel mal ein Viertel.

58 J Was tut man denn, wenn man sich zum Beispiel eine Torte vorstellt. Was tut man denn, wenn

59 man rechnet, ein Viertel mal ein Viertel. Was geschieht dann mit der Torte?

60 J Äh (denkt, murmelt), muss weniger werden, oder doch nicht? Warte einmal (lacht). Hmm

61 (denkt), ja ich glaube sie sind weniger, weil wenn man mit nullkommafünfundzwanzig

62 multipliziert, wird es ja weniger.

63 I Mhm./ Und was kommt dann raus?

- 64 J Ein Sechzehntel.
- 65 I Ok. Ein Viertel mal ein Viertel ist ein Sechzehntel. Was geschieht dann mit der Torte? Wenn ich
- 66 rechne ein Viertel mal ein Viertel ist gleich ein Sechzehntel.
- 67 J Ahm .. ich tu das Viertel durch vier, ahm, dividieren.

Sabrina 3. Klasse (7:45-15:30)

- 1 I Zwölf mal zwei Drittel, probier das einmal ohne Rechenregel zu berechnen. Du kannst es gerne
- 2 aufschreiben, aber nicht diese, diese Bruchrechenregel verwenden für die Multiplikation.
- 3 S (schreibt)
- 4 I Mal zwei Drittel.
- 5 S Hm.. vierundzwanzig Drittel./
- 6 I Mhm./ Wie bist du auf das gekommen?
- 7 S Äh, (lacht) es sind zwölf Eintel, und da muss man zwölf mal zwei und eins mal drei...
- 8 I (lacht) Ok, also hast du es mit der Rechenregel gerechnet.
- 9 S Ja.
- 10 I Hast du irgendwie eine Alltagsbedeutung für so eine Rechnung?
- 11 S Mmm... wenn man zum Beispiel beim Heurigen arbeitet, und man muss Achtel einschenken,
- 12 dann kann man das verwenden.
- 13 I Mhm./ Aber jetzt speziell für diese.
- 14 S Achso für das (denkt). Ich brauche fast nie Drittel. (lacht, denkt) Ahm, nein eigentlich nicht.
- 14.1 Ich weiß es nicht.
- 15 I Ok, ich gebe dir da zwölf Spielfiguren ... kommst du da irgendwie auf das Ergebnis? Oder du
- 16 kannst das Ergebnis mal aufschreiben.
- 17 S (schreibt, sortiert die Spielfiguren) Auch jetzt im Alltag, oder einfach auf das Ergebnis, wie man
- 18 es herausfindet.
- 19 I Einfach nur wie man mithilfe von den Spielfiguren das...
- 20 S Sind das zwölf?
- 21 I Mhm.
- 22 S Hm... (denkt, gruppiert jeweils vier)
- 23 I Was hast du jetzt gemacht?
- 24 S Ich habe es in Drittel geteilt. Also das sind zwei Drittel (nimmt acht der Spielfiguren).
- 25 I Mhm./ Und wieviele sind das jetzt die zwei Drittel?
- 26 S Acht.
- 27 I Mhm./ Was ist dein Ergebnis?
- 28 S Zwei Drittel sind acht Zwölftel?
- 29 I Nein dein Ergebnis.
- 30 S Achso.
- 31 I Bei der Rechnung.
- 32 S Vierundzwanzig Drittel.
- 33 I Mhm./ Wieviel sind vierundzwanzig Drittel?
- 34 S (denkt) Acht so, acht Eintel./
- 35 I Mhm, was ist acht Eintel?
- 36 S Acht Ganze.
- 37 I Mhm./
- 38 S Oh, das ist das, acht Ganze kommt eh raus.
- 39 I Mhm, versuch es noch einmal zu erklären mit den Spielfiguren.
- 40 S Also es sind acht ganze Spielfiguren, wenn man also vierundzwanzig drittelt, wenn man dann,
- 41 hm ... hat man achtundzwanzig Spielfiguren (lacht). Ich weiß es nicht.
- 42 I Ok mit der Multiplikation vielleicht einmal, also nicht mit dem Ergebnis sondern mit der
- 43 Rechnung.

44 S (denkt) Hm.. naja wenn man zwölf so Maxerl hat, und äh, und die zwölf, zwei Drittel
45 und die nimmt man dann öfters, also wenn man jedes drittelt, und dann nimmt man es öfters,
46 und dann ...
47 I Genau, und wie oft hast es du genommen?
48 S Acht mal./
49 I Acht mal./
50 S Achso, da (zeigt auf ihre Rechnung), zwölf Mal.
51 I Nein da (zeigt auf die Spielfiguren).
52 S Achso, da habe ich zwei Mal zwei Drittel genommen.
53 I Mhm./
54 S Und dann sind es ...
55 I Ok, gut, dann machen wir ein Halb mal drei.
56 S (schreibt)
57 I Ohne Bruchrechenregel.
58 S (hört auf zu schreiben)
59 I Oder sag mir zuerst ein Beispiel aus dem Alltag. Irgendetwas, das dir dazu einfällt.
60 S Hm, wenn man eine Torte backt, und man will dann die Masse, also man will eineinhalb Torten
61 haben, dass sie größer wird, dann muss man sich die Masse so ausrechnen, das Ganze und
62 dann in Halbe teilen, also die Masse einmal teilen in der Mitte, und dann mal drei nehmen./
63 I Mhm./ Und dann hat man wieviel?
64 S Eineinhalb.
65 I Genau, ok. Dann, ein Viertel mal ein Viertel.
66 S (rechnet) Ein Sechzehntel./
67 I Mhm. Was fällt dir da für eine Bedeutung ein?
68 S Hm, also ein Viertel ist kleiner als ein Ganzes, und wenn man das dann miteinander
69 multipliziert wird es kleiner./
70 I Mhm./
71 S Und, ... das gleiche wär es mit Dezimalzahlen vielleicht und nicht nur mit Brüchen.
72 I Mhm, ja kann man mit Brüchen genauso.
73 S Achso, hm (denkt). Hm ... Nein ich glaube das brauche ich fast nie, ich weiß es nicht.
74 I Brauchst du nicht?
75 S Nein, ich weiß es nicht. (denkt) Hm...ich glaube ich denke irgendwie falsch (lacht) hm ... mir
76 fällt es irgendwie nicht ein.
77 I Ok, denk einmal, du hast da ein Quadrat (zeichnet Quadrat), so ungefähr zeichne ich es jetzt,
78 mit Seitenlänge eins. Und da haben wir ein Viertel, ja? Seitenlänge, ja?
79 S Ja.
80 I Hilft dir das irgendetwas weiter?
81 S (denkt) Das Ganze ist, ist das Ganze gemeint, oder nur das, die Länge.?
82 I Was meinst du das Ganze?
83 S Na ist das ganze Quadrat gemeint?
84 I Genau, das ganze Quadrat mit Seitenlänge eins.
85 S Also das Viertel, wenn man das nimmt?
86 I Da ist dann natürlich auch ein Halb ... (zeichnet Einteilung), drei Viertel. Du kannst gerne
87 herumzeichnen drinnen.
88 S Kann ich so Kasterl machen?
89 I Mhm./
90 S Also wenn man das Viertel von der Seite, mal das Viertel nimmt, dann hat man das und
91 das ist ein Sechzehntel, von dem Ganzen./
92 I Und wieso, wieso soll ich dir das jetzt glauben, dass das genau ein Sechzehntel ist, das Kasterl,
93 das du da gemalt hast?

- 94 S (zeichnet die Einteilung im Quadrat) Man kann es noch teilen. Das sind acht und dann kann
 94.1 man noch einmal acht machen.
 95 I Mhm./
 96 S Und jetzt sind es sechzehn, und das ist ein Sechzehntel, da haben wir Sechzehn Teile.

Rudi 2. Klasse (0:00-9:50)

- 1 I Zwölf Ganze mal zwei Drittel.
 2 R Mal was?
 3 I Zwei Drittel. Und jetzt mal noch nicht rechnen, sondern kennst du irgendeine Alltagsbedeutung
 4 dazu?
 5 R Hm... zum Beispiel bei einem Weinglas zwei Drittel, oder bei ...
 6 I Irgendwas noch mit dem zwölf brauchen wir auch noch, dass wir es mal zwölf rechnen müssen.
 7 R Ähm, zwölf Ganze Bausteine, zum Beispiel.
 8 I Mhm./ Nehmen wir gleich die da. Kannst du mit denen irgendetwas anfangen? Oder kannst du
 9 mir schon das Ergebnis hinlegen?
 10 R Soll ich jetzt zwölf Ganze, oder?
 11 I Zwölf Ganze mal zwei Drittel.
 12 R Ausrechnen.
 13 I Mmm... ob dir das mit den Spielfiguren irgendetwas hilft.
 14 R (stellt die Figuren auf) Zwölf Ganze und (denkt, schreibt) kommen dann die weg (nimmt vier
 15 Figuren weg), also vier kommen weg, und dann hat man acht.
 16 I Mhm./ Und was macht das jetzt für einen Sinn?
 17 R Ahm...
 18 I Wenn du zwölf mal zwei Drittel rechnest, dass da acht rauskommt.
 19 R Ja./?
 20 I Macht das dann einen Sinn für dich?
 21 R Ahm (denkt).
 21.1 I Also, dass wir da jetzt acht Spielfiguren stehen haben.
 22 I Also das Ergebnis stimmt einmal.
 23 R Ja, ahm (denkt).
 24 I Sollen wir weiter gehen zur nächsten Rechnung?
 25 R Ja.
 26 I Ok, ja. Ahm, ein Halb mal ein Drittel.
 27 R (schreibt)
 28 I Vor dem rechnen wieder.. ah, ein Halb mal drei, entschuldigung.
 29 R Mhm (schreibt).
 30 I Vor dem Rechnen wieder überlegen, was für eine Bedeutung die Rechnung im Alltag haben
 30.1 könnte, wo man
 31 das brauchen könnte.
 32 R Ein Halb ist wieder zum Beispiel ein Gespritzter oder so, ein Gespritzterglas, und drei Ganze
 33 sind zum Beispiel jetzt, drei volle Gläser also,...
 34 I Du meinst jetzt ein Halb-Liter-Glas mal drei Liter Gespritzter rechnen.
 35 R Ja.\ Oder drei ganze Bausteine, oder ja, so...
 36 I Drei ganze Bausteine mal ein Halb.
 37 R (denkt)
 38 I Rechne es einmal aus, das Beispiel.
 39 R (rechnet) Ein Ganzes ein Halb.
 40 I Fällt dir da jetzt irgendetwas ein? Jetzt wo du das Ergebnis hast?
 41 R Ähm, ja, ein ganzes Glas und ein halbes Glas.
 42 I Ok, und jetzt mit der Rechnung in Verbindung?

43 R Ahm (denkt).

44 I Oder muss nicht mit Gläser sein, du kannst auch mit Mehl, Torten, Pizzas, was auch immer.

45 R Ja, also drei ganze Mehlbeutel und ein halbes Mehlbeutel, ist ein ganzes und ein halb

46 Mehlbeutel, also ist ein ganzes Mehlbeutel und ein halber Mehlbeutel.

47 I Du hast gesagt drei ganze Mehlbeutel, und ein halber Mehlbeutel.

48 R Ja, ist eineinhalb Mehlbeutel.

49 I Bist du dir da sicher? Wenn du jetzt im Supermarkt stehst, und du klaubst drei Beutel Mehl ein

50 und dann noch einen halben, wieviel hast du dann im Wagerl?

51 R Viereinhalb? Also vier halt.

52 I Ein Mehl, zwei, Mehl, drei Mehl, und ein Halbes (legt dafür Spielfiguren und Radiergummi hin).

53 R Ja.

54 I Wieviel hast du dann?

55 R Dreieinhalb.

56 I Ok, und ist das das, was bei unserer Rechnung rauskommt?

57 R Nein. Ok, also ist es dreieinhalb.

58 I Nein das Ergebnis stimmt, du hast richtig gerechnet.

59 R Achso, ahm (denkt).

60 I Fällt dir noch irgendeine Bedeutung ein?

61 R Nein.

62 I Ok, dann gehen wir zum nächsten. Ein Viertel mal ein Viertel.

63 R (schreibt es auf) Ja.

64 I Du kannst es zuerst mal ausrechnen wenn du willst, oder wenn du eine Bedeutung weißt,

65 kannst du es auch schon sagen.

66 R (rechnet, murmelt dabei) Zwei Achtel, nein, zwei Sechzehntel, und zum Beispiel ...

67 I Wie hast du das jetzt gerechnet?

68 R Ein mal eins und vier mal vier.

69 I Mhm./ Wieviel ist ein mal eins?

70 R Eins (korrigiert sein Ergebnis).

71 I Genau.

72 R Ähm, ja (denkt).

73 I Ist das eine Rechnung, die man im Alltag einmal brauchen könnte?

74 R Nein, eigentlich nicht.

75 I Glaubst du nicht? Hast du noch nie gebraucht und wirst du sie auch nie brauchen, glaubst du?

76 R Ja wenn man zwei, ein Viertel Gläser, also zwei Viertel, ein zwei mal ein Viertel Gläser braucht

77 dann ist das ...

78 I Du kannst auch irgendetwas aufzeichnen, wenn du willst.

79 R Ja, also (zeichnet) das ist jetzt das ein Viertel und das ist noch einmal ein Viertel.

80 I Mhm./

81 R Und das sind dann ein Ganzes und, also ein Sechzehntel.

82 I Wenn man diese beiden Gläser nimmt./

83 R Was da drinnen ist.

84 I In jedem Glas, oder in einem Glas, oder in beiden Gläsern?

85 R In beiden Gläsern miteinander.

86 I Ok, was ist, wenn du dir jetzt beim Heurigen ein Viertel Almdudler bestellst, und irgendwer

87 bestellt sich noch ein Viertel Almdudler, wie viel habt ihr dann miteinander?

88 R Ein Sechzehntel.

89 I Und ist ein Sechzehntel mehr oder weniger als ein ...

90 R Weniger.

91 I Weniger, wenn euch ihr zwei Getränke bestellt, könnt ihr dann weniger haben?

92 R Nein mehr eigentlich, ahm ... ja, also (denkt).

Romana 3. Klasse (00:00-5:10)

- 1 I Was hast du für eine Vorstellung von zwölf mal zwei Drittel? Irgendetwas aus dem Alltag.
2 R (denkt) Ahm, backen vielleicht?
3 I Ok, sag es mir ganz konkret.
4 R Ahm, man braucht zum Beispiel zwei Drittel Milch und das zwölf Mal
5 I Ok, und wieviel braucht man dann insgesamt?
6 R Vierundzwanzig Drittel./
7 I Ok, wieviel sind das?
8 R Ähm, sieben Ganze./
9 I (kritischer Blick)
10 R Also zwölf Drittel.
11 I Vierundzwanzig Drittel.
12 R Achso .. Acht.
13 I Ok, ein Halb mal drei, was stellst du dir da vor darunter.
14 R Also eineinhalb mal.
15 I Na also ein .. achso, was hast du gesagt?
16 R Eineinhalb.
17 I Genau, ein Ganzes ein Halbes. Irgendein Beispiel?
18 R Ein ganzes Stück Kuchen und ein halbes?
19 I Ok, ja. Ein Viertel mal ein Viertel... Was fällt dir da ein dazu?
20 R (denkt) ist ein Sechzehntel.
21 I Und wie hast du das ausgerechnet?
22 R Also vier mal vier und...
23 I Ok, und gibt es da irgendeine logische Erklärung dafür, wieso ein Viertel mal ein Viertel ein
24 Sechzehntel ist.
25 R (denkt) Mir fällt jetzt nichts ein.
26 I Ok, vielleicht wenn du da ein Blatt Papier nimmst und du faltest. Fällt dir da irgendetwas ein?
27 R Einfach sechzehn Mal falten?
28 I Na probier einmal was du meinst, schauen wir was rauskommt dabei.
29 R Also einfach mal falten?
30 I Einfach mal falten.
31 R (faltet sechs Mal) Oder man könnte das vier Mal falten und das vier Mal./
32 I Ja, kannst es auch noch einmal probieren.
33 R (faltet wieder) und das dann vier Mal.
34 I Mm .. und wie, hast du da ein Sechzehntel? Wir haben ja ein Viertel mal ein Viertel.
35 R Ähm, hm.
36 I Probier mal Viertel zu falten, mit einem neuen Zettel, sonst hast du zu viele Falten.
37 R (überlegt wie sie falten soll, faltet Viertel) So?
38 I Ok, machen wir es einmal auf, und schauen ob es ein Viertel ist.
39 R Vier Viertel.
40 I Mhm./ Ok, ja, also können wir sagen, das ist ein Viertel.
41 R Ja.
42 I Ok, wie machen wir jetzt, ein Viertel mal ein Viertel.
43 R Also einfach zwei, ein Viertel und noch ein Viertel.
44 I Dann haben wir zwei Viertel, das ist ein Halb.
45 R Dann sechzehn.
46 I Was sechzehn?
47 R Sechzehn Viertel./
48 I Sechzehn Viertel sind vier Ganze. Na macht nichts, machen wir weiter mit der nächsten

Christiane 3. Klasse (00:00-5:30)

- 1 I Hast du irgendeine Vorstellung von zwölf mal zwei Drittel? Irgendetwas, wo du das im Alltag
- 2 brauchen könntest, die Rechnung.
- 3 C Beim Einkaufen./
- 4 I Beim Einkaufen ja, ganz ein konkretes Beispiel.
- 5 C Wenn man Milch einkauft oder so etwas.
- 6 I Mhm./
- 7 C In Packerl, wenn man das umrechnen müsste.
- 8 I Ok, ja. Kannst du mir das ausrechnen, zwölf mal zwei Drittel?
- 9 C (rechnet, ihr Ergebnis $\frac{8}{1}$)
- 10 I Mhm./ Also was kommt raus?
- 11 C Ein Achtel, also acht...
- 12 I Ein Achtel?
- 13 C Also acht Eintel.
- 14 I Und das ist?
- 15 C Acht.
- 16 I Ok, ja. Was ist denn ein Halb mal drei, ohne, dass du jetzt die Bruchrechenregel verwendest.
- 17 C Ein Ganzes ein Halbes.
- 18 I Mhm./ Wie hast du, wie bist du jetzt auf das gekommen?
- 19 C Ich habe einfach .. also ein Halbes und ein Halbes ist ein Ganzes und noch einmal ein Halbes
- 19.1 ist, eineinhalbes.
- 20 I Ok ja. Was gibt es denn da für eine Vorstellung dazu?
- 21 C (schüttelt den Kopf) Keine Ahnung wieder Milchpackerl in Halb-Liter.
- 22 I Ok, und wenn wir jetzt drei mal ein Halb?
- 23 C Dann kaufe ich drei Milchpackerl.
- 24 I Ok. Ein Viertel mal ein Viertel.
- 25 C (rechnet) Ein Sechzehntel.
- 26 I Mhm./ Was gibt es da für eine Bedeutung dazu?
- 27 C Kuchenstücke./
- 28 I Kuchenstücke, ok. Erklär es mir ganz genau bitte.
- 29 C Also wenn man die Kuchen, wenn man einen Kuchen in sechzehn Teile teilt.
- 30 I Mhm./ Aber ich sehe jetzt die, also irgendwie wirklich genau die Multiplikation. Ein Viertel mal
- 31 ein Viertel, was mache ich mit dem Kuchen, damit ich die Rechnung brauche.
- 32 C Man teilt es zuerst in vier Viertel und dann noch einmal in vier Viertel.
- 33 I Mhm./ Dann habe ich aber sechzehn Viertel, oder? Sechzehn Sechzehntel. Kannst es gerne
- 34 aufzeichnen.
- 35 C Naja, und dann nimmt man ein Stück weg.
- 36 I Aber wenn ich ein Viertel mal ein Viertel rechne, dann nehme ich ja nicht ein Stück von der Torte
- 37 weg, oder?
- 38 C Nein-.
- 39 I Ok. Probier es einmal mit aufzeichnen. Ganz genau, was du meinst.
- 40 C (zeichnet einen Kreis mit Sechzehnteileinteilung) Wenn man da jetzt eines rausnimmt, oder
- 41 fünfzehn wegzählt, hat man ein Sechzehntel.
- 42 I Ok, aber da haben wir ja jetzt nicht ein Viertel mal ein Viertel gerechnet, oder?
- 43 C Nein./
- 44 I Kannst du irgendetwas aufzeichnen, wo ich konkret sehe, dass wenn ich ein Viertel mal ein
- 45 Viertel rechne, dass dann ein Sechzehntel rauskommt?
- 46 C Fällt mir jetzt nichts ein.

47 I Ok.\ Ähm, dann probieren wir-, nimm einmal einen Zettel, und probier einmal, vielleicht fällt
48 es dir mit falten ein.
49 C (faltet)
50 I Irgendwie falten, sodass man die Multiplikation ein Viertel mal ein Viertel sieht.
51 C Da und- (hat Viertel gefalten) also wenn ich das jetzt noch einmal falte (faltet weiter), wenn man
52 da faltet...
53 I Mhm./ Zeig es mir.
54 C Ah, es wird jetzt nicht gleich groß werden.
55 I Wie könnte man es denn falten, damit es gleich groß wird?
56 C Naja, müsste funktionierten (faltet schräg), nein (murmelt vor sich hin, faltet es auf) wenn man
57 das auffaltet, haben wir sechzehn Teile.
58 I Sechzehn Teile?
59 C Ah, acht.
60 I Mhm./
61 C Das Ganze noch einmal. (faltet) Das wird jetzt schwer gehen aber...
62 I Ok, lassen wir das, egal.

Zweite Aufgabe

Franz (15:30-20:00)

- 1 I Machen wir jetzt diese Aufgabe.
- 2 F (liest sich die Angabe durch, denkt nach) Muss ich das aufschreiben?
- 3 I Was willst du aufschreiben?
- 4 F Na die Lösungen.
- 5 I Nein, die kannst du mir sagen einfach.
- 6 F Ok, die Schwester hat recht, denn es muss immer größer sein, weil man rechnet mal, das heißt
- 7 der eine Faktor- **vergrößert** sich.
- 8 I Ok./ Wie ist das dann bei deiner Rechnung? Ist ein Sechzehntel größer? Als ein Viertel. /
- 8.1 (ich verweise auf das eben gerechnete Beispiel $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$)
- 9 F (überlegt) Nein, kleiner. (überlegt angestrengt)
- 10 I Ist das richtig gerechnet von dir? Ein Viertel mal ein Viertel.
- 11 F Ja, ich, also das Argument von der Schwester ist falsch, weil wenn man das hier k ü r z t, darf ich
- 12 das hier am Zettel gleich machen?
- 13 I Mhm.
- 14 F Dann wird das eins und das eins, ein mal eins ist eins und ein mal drei ist drei, also hat die Anna
- 15 richtig gerechnet, und die Schwester hat es falsch, weil es **muss** nicht immer größer sein.
- 16 I Mhm./ Und wann muss es nicht größer sein?
- 17 F Wenn die F a k t o r e n, da wären sie jetzt gleich. Das glaube ich ist nicht immer (denkt).
- 18 I Wieso wird es denn bei dem Beispiel kleiner, das Ergebnis?
- 19 F Weil man, das zwei Drittel und das ein Halbes kürzt, kommt überall eins, also wenn man ein mal
- 20 drei ist ...
- 21 I Ja.\ Das hast du jetzt gerechnet, aber vom logischen her.
- 22 F Das ist für mich logisch-.
- 23 I Aber vorher hast du noch gesagt, bei der Multiplikation muss es immer größer werden.
- 24 F Stimmt **nicht**.
- 25 I Wieso kommt denn da was Kleineres raus, beim vorigen Beispiel?
- 26 F Weil man da vier mal vier rechnet, und wenn man eins und vier, zu kürzen versucht, das passt
- 27 ja rein, dann kommt trotzdem vier raus.
- 28 I Ja, aber versuch es einmal mit unserem Beispiel, mit dem Pizzabeispiel, das wir da dabei gehabt
- 29 haben. Ist das da logisch, dass wir was Kleineres bekommen, oder hätten wir was, oder wäre
- 30 etwas Größeres logischer?
- 31 F Nein da kommt das gleiche raus, also wenn man ein, wenn man jetzt zum Beispiel dieses eine
- 32 Viertel der Pizza nimmt (zeichnet einen Kreis) und das dann mal dem, m a l, dann hat man acht,
- 33 dann hat man zum Beispiel jetzt ... ein ... ein Viertel und das wär dann ein Sechzehntel, also
- 33.1 dann, das heißt,
- 34 verändert sich nicht, das bleibt trotzdem immer ein Viertel, nur ist eben ein anderer Nenner.
- 35 I Ein Viertel ist gleich ein Sechzehntel, willst du sagen?
- 36 F Nein.
- 37 I Nein, oder?
- 38 F Aber in dem sind genauso viele Stücke enthalten, als wie bei einem Viertel.
- 39 I Ok, wieviele Sechzehntel sind in einem Viertel?
- 40 F Vier.
- 41 I Ok. Und ist es jetzt logischer, dass es kleiner wird, oder nicht.
- 42 F Doch.
- 43 I Ja./
- 44 F Weil es ist logisch, w e i l man das Viertel hat, und wenn man das dann mal rechnet, kommt ein
- 45 anderer Nenner raus, und eine andere Zahl, ein Zähler. Und jetzt kommt, weil beim Nenner
- 46 wär es dann sechzehn, und jetzt kommt es auf den Zähler an, was da rauskommt.

- 47 I Mhm./
- 48 F Also wenn da jetzt ein mal eins rauskommt wär eins, das heißt das wär dann zum Beispiel dieses
- 49 eine Sechzehntel.
- 50 I Mhm./
- 51 F Was jetzt .. ähm . gemeint ist sagen wir es mal so.
- 52 I Ok.

Viktoria 3. Klasse (17:28-21:15)

- 1 V Kann ich das auch so ...
- 2 I Wie du magst.
- 3 V Ok (schreibt, denkt, sie schreibt $\frac{8}{12} \cdot \frac{6}{12} = \frac{4}{12}$)
- 4 I Was hast du jetzt gemacht?
- 5 V Ich habe das auf einen gemeinsamen Nenner gebracht./
- 6 I Mhm./
- 7 V U n d ...
- 8 I Wie bist du auf die vier gekommen oben?
- 9 V Auf die?
- 10 I Mhm./
- 11 V Ahm, ich habe drei mal vier ist ja zwölf, und.. hm.
- 12 I Muss man beim Multiplizieren eigentlich auf gleichen Nenner bringen?
- 13 V Nein muss man nicht.
- 14 I Wo muss man denn das?
- 15 V Beim Dividieren./
- 16 I Mm, nein brauchen wir auch nicht.
- 17 V Beim Abziehen und Zusammenrechnen./
- 18 I (nickt)
- 19 V Ok, (rechnet erneut) Zwei Drittel, ist ein Drittel, ist richtig, und das Kommentar, also das
- 20 Argument ... beim Multiplizieren muss es nicht immer größer werden.
- 21 I Und wieso nicht?
- 22 V (denkt) Ich weiß es nicht.
- 23 I Ok, kannst du es anhand von diesem Quadrat (überreicht das Quadrat) erklären, wieso es nicht
- 24 immer größer sein muss? Bei dieser Multiplikation.
- 25 V (denkt) Nein.
- 26 I Fällt dir nichts ein?
- 27 V Nein.

Romana 3. Klasse (5:10-7:50)

- 1 R Also ahm, die Schwester hat recht, weil zwei Drittel ist größer als ein Drittel und das muss dann
- 2 schon mehr sein.
- 3 I Ok, und wieso muss das mehr sein?
- 4 R Weil, ahm, multiplizieren immer größer ist, und da sind schon zwei Drittel also kann es gar nicht
- 5 kleiner sein.
- 6 I Ok./ Ok ja.
- 7 R Doch das stimmt, doch das stimmt doch.
- 8 I Ok, wieso stimmt das jetzt doch?
- 9 R Weil, wenn man nämlich, also es würde dann zwei Sechstel rauskommen, und wenn man das
- 10 dann kürzt, dann wäre das ein Drittel.
- 11 I Ok, also haben wir einmal richtig gerechnet.
- 12 R Ja.
- 13 I Aber was sagen wir jetzt zu dem Argument?

- 14 R (denkt)
 15 I Vielleicht wird es dir mithilfe von dem Quadrat klar, wieso das kleiner ist als ein Halb oder zwei
 16 Drittel (überreicht Quadrat).
 17 R (denkt) Weil man vielleicht gekürzt hat?
 18 I Ja das schon, aber jetzt einmal, das sind ja alles nur Rechenregeln, wenn man kürzt oder wenn
 19 man multipliziert. Aber so, dass man das logisch sieht, dass das kleiner werden muss.
 20 R (denkt) Weil das Ergebnis vielleicht dann... kleiner ist als die Faktoren./
 21 I Das ist aber keine Begründung dafür, warum das so ist.
 22 R (denkt)
 23 I Ok, macht nichts, machen wir weiter.

Lara 3. Klasse (16:30-19:20)

- 1 L (liest die Angabe) Also das Ergebnis muss nicht größer sein, weil da zum Beispiel ist es auch nicht
 2 größer gewesen.
 3 I Mhm./
 4 L Und ... (murmelt, denkt) also richtig gerechnet ist es, und .. und es muss nicht größer sein,
 5 werden.
 6 I Kannst du mir das irgendwie erklären, wieso es nicht größer sein muss? Weil wenn ich jetzt zwei
 7 mal drei rechne, dann ist das sechs, und das ist schon größer als zwei und als drei.
 8 L (denkt) Ja das ist bei normalen Multiplikationen, aber bei Bruchrechnungen- i s t, muss es glaube
 9 ich nicht so sein, also w...
 10 I Mhm./
 11 L Da kann es kleiner werden das Ergebnis.
 12 I Mhm./ Und wieso?
 13 L (denkt)
 14 I Ich gebe dir da eine kleine Hilfe, kannst du mir das mithilfe von dem Rechteck, anhand von dem
 15 Quadrat vielleicht erklären?
 16 L (denkt)
 17 I Mit diesem Beispiel gleich.
 18 L Mit den zwei Dritteln und ein Halbes.
 19 I Genau.
 20 L Also eh da zwei, also wenn das Drittel jetzt sind, also habe ich zwei davon, und dann nehme ich
 20.1 da die Hälfte-
 21 I Mhm./
 22 L Und das dann mal rechne, dann- ...
 23 I Was rechnest du da überhaupt aus, wenn du da mal rechnest?
 24 L Eigentlich ja nur die Hälfte von dem zwei Drittel, oder?
 25 I Mhm./
 26 L Also wenn ich zwei Drittel mal, diese Hälfte von dem rechne, dann rechne ich mir die Hälfte von
 27 dem aus, und dann kommt ein Drittel raus.
 28 I Mhm./ Und wieviel kriegen wir dann? Wieviel ist das dann da? In dem ...
 29 L Ein so ein Drittel.
 30 I Wieviel ist ein Drittel? Du kannst es mir zeigen.
 31 L Dieses (zeigt zuerst auf ein Sechstel, dann auf ein Drittel), und im Ganzen ist das dann so viel.
 32 I Mhm./ Ok.

Christiane 3. Klasse (5:35-8:23)

- 1 C (liest die Angabe, rechnet die Rechnung nach) Also es ist richtig./
 2 I Mhm./
 3 C Weil man ja die Brüche auch kürzt.

4 I Ok./ Und was sagst du zu dem Argument von der Schwester?

5 C Es muss nicht immer größer sein.

6 I Was muss nicht immer größer sein?

7 C Also das Ergebnis.

8 I Ok, und wieso nicht, oder wann muss das Ergebnis nicht größer sein?

9 C Also weil im Moment, wird es ja auch nicht ... immer größer.

10 I Und wann wird es nicht größer?

11 C (denkt) Weil es ja kein Ganzes ist, also kann nicht das, wenn man, ding, es kann halt nicht größer

12 werden, wenn es kein Ganzes ist.

13 I Ok, mhm./

14 C Wenn man nicht eins mit einem Ganzen multipliziert.

15 I Ok, ahm kannst du mir diese Rechnung jetzt irgendwie erklären, warum da jetzt ein Drittel

16 rauskommt, also warum was rauskommt, was kleiner als eins ist./ Du kannst das (überreicht

17 ihr Quadrat) als Hilfe verwenden, wenn dir das was hilft./

18 C Naja, weil man die beiden ja kürzt.

19 I Nein irgendwie ganz anschaulich, mit einer Zeichnung, oder mithilfe von dem Quadrat da.

20 Einfach, dass wir gleich sehen, ja das ist klar, da kommt was raus was kleiner ist als die beiden

21 Faktoren.

22 C (denkt) Weil das, wenn man das in Sechstel umwandelt geht das ja auch.

23 I Mhm./

24 C U n d (denkt) mir fällt nichts ein wo ich das anschaulich erklären könnte.

Dritter Teil: Division

Paul 2. Klasse (00:00-9:00)

- 1 I Drei Ganze durch ein Halb. Du kannst dir da irgendeinen Stift nehmen.
- 2 P (schreibt)
- 3 I Drei Ganze./
- 4 P Also als Bruch, oder?
- 5 I Nein, einmal drei Ganze aufschreiben, dividiert durch ein Halb, genau.
- 6 P Ausrechnen?
- 7 I Kannst du das jetzt irgendwie ausrechnen ohne, dass du die Bruchrechenregel verwendest?
- 8 P (denkt, schüttelt den Kopf) Mir fällt gerade nichts dazu ein.
- 9 I Ok, denkt einmal an eine Halb-Liter Flasche Wasser.
- 10 P Mhm.
- 11 I Fällt dir da irgendetwas ein dazu?
- 12 P (denkt) Jjjj- (lacht)
- 13 I Irgendetwas, wo man die Division braucht dazu, mit einer Halb-Liter Flasche Wasser.
- 14 P Einfach durch zwei rechnen./ (sehr unsicher) Schon durch zwei rechnen.
- 15 I Ahm .. na rechne es einmal aus mit der Bruchrechenregel.
- 16 P (rechnet, schreibt 1,5 hin)
- 17 I Wie bist du jetzt auf das gekommen?
- 18 P Ich hab das drei einfach durch zwei gerechnet.
- 19 I Wie, wie geht denn die Rechenregel? Weil wir dividieren ja durch ein Halb und nicht durch
- 19.1 zwei.
- 20 P Hm/
- 21 I Wir rechnen ja drei dividiert durch ein Halb, das was du gerechnet hast, ist drei dividiert durch
- 22 zwei, oder?
- 23 P (denkt) Da kommt sogar mehr raus.
- 24 I Mhm./ Wieso kommt da mehr heraus?
- 25 P Weil das, das wird .. hm . (denkt) hm...
- 26 I Was stellst du dir denn vor unter der Rechnung, wenn du die siehst. Kannst du dir da
- 27 irgendetwas Praktisches vorstellen darunter?
- 28 P Also da stell ich mir vor, dass ... zum Beispiel ... dass man drei Liter Wasser hat, und dann das
- 29 da jetzt durch .. also mal zwei, also dann noch mal zwei was dazu gibt .. stell ich mir da vor,
- 30 weil das ist ein Halbes, ein Halbes.
- 31 I Ok, und mit der Halb-Liter Flasche, kannst du dir da irgendetwas vorstellen? Mit den drei
- 32 Litern und mit der Halb-Liter Flasche?
- 33 P Nicht recht.
- 34 I Ok, dann probieren wir das nächste Beispiel./ Richtig gerechnet hast du eh. Ahm, neun Ganze
- 35 durch drei Viertel./
- 36 P (schreibt)
- 37 I Und ich gebe dir gleich eine Hilfe, damit wir es ohne Rechenregel lösen können, ok?
- 38 P Mhm.
- 39 I Also, da (überreicht ihm Material) haben wir neun Kreise, und das kannst du auch dazu
- 40 verwenden. Du kannst es auch zerschneiden, wenn du willst.
- 41 P (sieht sich Material an, nimmt ein Dreiviertelstück, legt es wieder zurück)
- 42 I Was stellst du dir denn vor unter der Rechnung?
- 43 P D a s s, hm (denkt), hm..
- 44 I Also beim Vorigen hätten wir uns zum Beispiel vorstellen können, dass wir drei Liter Wasser
- 45 haben, und die wollen wie auf Halb-Liter Flaschen verteilen. Wieviel Halb-Liter Flaschen
- 46 brauchen wir da dazu?
- 47 P Sechs.

48 I Genau.\

49 P Und das auf, zum Beispi, die neun Liter Wasser auf Dreiviertel-Flaschen.

50 I Ok./

51 P (denkt) Also neun durch vier ist auf jeden Fall einmal zweikommafünfundzwanzig-

52 I Mhm./ Aber wir rechnen ja durch drei Viertel, wir rechnen ja nicht durch vier, oder? Hilft dir

53 das (Material) irgendetwas bei deiner Rechnung?

54 P Hm (lacht)... irgendwie kann ich mir darunter **gar nichts** vorstellen.

55 I Ok, ahm ... Stell dir mal vor, das sind neun Ganze Torten, und das sind Dreiviertel-Torten.

56 Kannst du dir da etwas vorstellen unter der Rechnung? Was bedeutet denn da die Rechnung?

57 P Also, dass man zum Beispiel die Torte, also die neun ganzen Torten in Dreiviertel-Torten

58 aufteilt.

59 I Mhm./ Und was ist dann das Ergebnis? Also, du brauchst noch keine Zahl sagen, sondern

60 was ist dann, was verrät uns das Ergebnis dann?

61 P Also .. dass dann ... dass dann Dreiviertel Torten ... dass es dann Dreiviertel-Torten sind./

62 I Ok, das verrät uns ja eigentlich schon die Division oder?

63 P Ja.

64 I Wenn wir sagen, wir teilen es in Dreiviertel-Torten.

65 P Ahm, wie komme ich da jetzt zu einem Ergebnis?

66 I Ahm, was war denn das sechs (zeigt auf das Ergebnis der vorigen Rechnung), was war denn

67 das für ein Ergebnis.

68 P Da habe ich das gerechnet./

69 I Na, jetzt das mit den Wasserflaschen.

70 P Sechs, das waren dann sechs Halbe-Liter Wasserflaschen.

71 I Genau. Das heißt sechs Wasserflaschen brauche ich ... und was sagt uns das Ergebnis von der

72 unteren Rechnung?

73 P (denkt) Das sind dann ... sechsenddreißig, nein.

74 Rechnest du es gerade mit der Rechenregel? (lacht) Dann kannst du es aufschreiben auch.

75 P (schreibt) Das sind dann zwölf Tortenstücke.

76 I Genau./ Ok, gut, dann .. fünfzehn Achtel durch drei.

77 P (schreibt)

78 I Fünfzehn Achtel./

79 P Ja-

80 I Kannst du dir da irgendetwas vorstellen? Irgendetwas wo man die Rechnung im Alltag einmal

81 brauchen könnte?

82 P Hm (denkt) Wenn man jetzt fünfzehn Achtel Liter Wasser haben will, und eine Gruppe von drei

83 Leuten, soll ich es auch gleich aufschreiben?

84 I Mhm./ Was sagt uns da das Ergebnis?

85 P D a s s, also da kommt schon mal fünf Achtel für jeden.

86 I Mhm./ Du kannst es schon einmal hinschreiben. Das heißt fünf Achtel kriegt jeder.

Markus 2. Klasse (10:50 – 16:50)

1 I Drei dividiert durch ein Halb. Was stellst du dir da vor darunter?

2 M Also drei Ganze dividiert durch einskommafünf.

3 I Drei durch ein Halb.

4 M Durch .. ein..

5 I Du kannst es ja aufschreiben, wenn du es dir da besser vorstellen kannst.

6 M (schreibt)

7 I Ok, was stellst du dir da vor darunter?

8 M Also das ist, drei Eintel dividiert durch ein Halbes./

9 I Ist das eine Vorstellung? Drei Eintel? Irgendetwas aus dem Alltag, was dir einfällt. Irgendwo,

10 wo du zu Hause, oder irgendwo wo du die Rechnung brauchen könntest.

11 M (denkt) Wenn man drei Ganze Sachen so verteilt, dass jeder ein Halbes kriegt. Also das ein Halb

12 ist...

13 I Ok, und auf wieviele Leute verteile ich es dann?

14 M Auf sechs.

15 I Ok, genau. Ahm .. neun durch drei Viertel.

16 M (schreibt) Da..

17 I Was hast du da für eine Vorstellung dazu?

18 M Also wenn man jetzt was mit neun auf zwölf Leute aufteilt.

19 I Mhm, ok. Wie bist du auf das gekommen so schnell?

20 M Weil, drei mal drei ist neun und vier mal drei ist zwölf.

21 I (denkt) Mhm./ Ok. Vier Fünftel durch zwei Fünftel.

22 M (schreibt)

23 I Was kommt da heraus?

24 M Mm ... zwei Fünf ... tel./ (denkt) Zwanzig Zehntel.

25 I Zwanzig Zehntel kommt heraus, wie bist du auf das gekommen?

26 M Ich habe es, ahm, also ausgerechnet.

27 I Ok, wieviel sind zwanzig Zehntel?

28 M Zwanzig Zehntel sind, ahm, zwei Ganze.

29 I Ist das irgendwie logisch für dich, dass da zwei Ganze herauskommt?

30 M Nein.

31 I Wieso nicht?

32 M Weil dividiert normalerweise immer kleiner wird.

33 I Ok, ist es immer so, dass dividiert verkleinert?

34 M Nein.

35 I Wann ist es nicht so?

36 M Wenn die Zahl kleiner ist als null .. dann wird es vergrößert.

37 I Wenn die Zahl kleiner ist als was?

38 M Als null.

39 I Als null./ Und sind unsere Zahlen kleiner als null?

40 M Achso, zwei Fünftel ist, nein.\ .. Kleiner ist als **eins**!

41 I Mhm. Ok, wieso wird es dann vergrößert?

42 M Ahm .. weil wenn es kleiner ist als eins, wenn man es multipliziert, ahm, also wenn man es

43 dividiert wird es größer weil es ... weil was unter eins, wenn man das mit ah, eins dividiert,

44 wird es größer, weil eins, ahm ...

45 I Ok./ Kannst du mir das irgendwie aufzeichnen, dass vier Fünftel durch zwei Fünftel zwei ergibt.

46 M Zeichnen./

47 I Irgendeine Zeichnung, entweder einen Kreis, Rechteck, Zahlenstrahl, Torten, Pizzas, Flaschen,

48 was dir einfällt.

49 M (denkt) Also ich kann es ausrechnen, aber ich kann es irgendwie nicht erklären.

50 I Was stellst du dir denn vor unter der Rechnung?

51 M Hm... (denkt) Weiß ich nicht.

52 I Ok, ahm .. fünfzehn Achtel durch drei, was stellst du dir da vor darunter?

53 M (denkt) Wenn man jetzt fünfzehn Achtel auf drei aufteilt. Fünfzehn Achtel ist mehr als ein

54 Ganzes.

55 I Mhm./ Was kommt dann heraus? Wenn man fünfzehn Achtel auf drei aufteilt?

56 M Da kommt ... sechs Achtel heraus, also **sechs** ... Ach t e l.\

57 I Stell dir einmal irgendetwas Konkretes vor. Fünfzehn Achtel von was?

58 M Ahm, Stiften./

59 I Ok, fünfzehn Achtel Stifte, müssen wir Stifte zersägen, macht auch nichts./

60 M Ok.
 61 I Fünfzehn Achtel von Stiften, wenn dir die auch drei Leute aufteilen, wieviel bekommt jeder?
 62 M (denkt) Also ...
 63 I Fällt dir statt den Stiften noch irgendetwas anderes ein, was ein bisschen logischer wäre,
 64 wenn man es achtelt.
 65 M Eine Pizza.
 66 I Ok, machen wir fünfzehn Achtel Pizza.
 67 M (denkt) Ja dann bekommt jeder fünf Stück.
 68 I Genau ja.

Pascal 2. Klasse (17:25-25:30)

1 I Drei durch ein Halb, drei dividiert durch ein Halb. Du kannst eine neue Seite anfangen.
 2 P (schreibt)
 3 I Bevor du es ausrechnest, ähm .. Gibt es irgendeine Situation im Alltag, wo man diese Rechnung
 4 vielleicht brauchen könnte.
 5 P Du hast drei Zuckerl und willst sie auf zwei Kinder aufteilen.
 6 I Mhm./ Was würdest du dann rechnen? Ohne, dass du jetzt die Rechnung anschaust. Drei
 7 Zuckerl, zwei Kinder./
 8 P Ich würde jedem Kind einmal ein Zuckerl geben und dann das dritte Zuckerl in der Mitte
 9 zerschneiden.
 10 I Mhm./ Also hättest du dann eineinhalb Zuckerl, oder?
 11 P Ja.
 12 I Was kommt raus, wenn man drei durch zwei rechnet?
 13 P Ahm, einskommafünf./
 14 I Ok, also eineinhalb Zuckerl. Wir rechnen aber drei durch ein **Halb**.
 15 P (denkt) Ich habe drei Zuckerl aber ein Kind will .. nur die Hälfte eines Zuckerls . oder die Hälfte
 16 des Zuckerls, hm...
 17 I Oder denkt vielleicht einmal an Wasserflaschen, an Halb-Liter-Wasserflaschen.
 18 P Also ich habe drei Liter und will sie durch zwei teilen./ Oder durch ein Halbes teilen .. das wäre
 19 dann sechs.
 20 I Ok, das wäre dann sechs, wie hast du das ausgerechnet?
 21 P Weil nullkommafünf und drei das passt, weil nullkommafünf passt dreimal in drei Literflaschen
 22 hinein, ah, sechs Mal.
 23 I Ok, ja. Neun durch drei Viertel.
 24 P (schreibt)
 25 I Das probieren wir jetzt wieder ohne Bruchrechenregel. Hast du da irgendeine Vorstellung dazu
 26 im Alltag, zu der Rechnung?
 27 P (denkt) Ich habe neun Euro und gebe drei Viertel davon aus- (denkt)
 28 I Du kriegst eine kleine Hilfe (überreicht ihm Material), hier haben wir neun Kreise, und da
 29 haben wir Dreiviertelstücke. Du kannst auch schneiden, wenn du willst. Hilft dir das
 30 irgendetwas bei deiner Rechnung?
 31 P Hm ... J a./ (legt die Stücke auf die Kreise und zerschneidet auch welche in Viertel) Hmm... gut,
 32 da kommt, glaube ich sieben heraus.
 33 I Sieben, wie kommst du auf sieben?
 34 P Weil ich habe, also zwei von den Kreisen bedeckt, und den dreiviertel .. (lacht)
 35 Sechskommafünfsiebzig kommt heraus.
 36 I Wieso kommt Sechskommafünfsiebzig heraus?
 37 P Weil ich die drei Viertel, also schon auf zwei Kreise aufgeteilt habe, und dann ist noch
 38 ein Viertel übrig geblieben... (denkt).
 39 I Wieviele Kreise sollen wir denn insgesamt verwenden?

40 P (denkt) Hach, ich bin so blöd. Dreiviertel ist ein Viertel ein, also es bleibt ein Viertel eines
41 Kreises übrig.

42 I Das verstehe ich nicht.

43 P Ich auch nicht. Es ist, also drei Viertelstücke, also so ein Viertel...

44 I Was bedeutet denn neun dividiert durch drei Viertel, im Zusammenhang mit den
45 Dreiviertelstücken und dem. Du kannst dir auch denken, das sind Torten, wenn du dir leichter
46 tust.

47 P (denkt) Ahm, ich habe neun Torten und will ein .. ein Dreiviertelstück davon haben./

48 I Ok, und was sagt uns dann das Ergebnis aus?

49 P Wieviel ein Dreiviertelstück ist?

50 I Nein, das wissen wir ja wieviel ein Dreiviertel Stück ist, oder?

51 P Ja (denkt).

52 I Was hat uns denn das Ergebnis bei der vorigen Rechnung ausgesagt? Da haben wir gesagt
53 Drei Liter aufgeteilt auf Halb-Liter-Flaschen ergibt sechs. Was war das dann?

54 P Wieviel, ahm .. also wieviel null, also wieviel dann, also durch wieviele Teile ich es dann teilen
55 kann.

56 I Wir haben es durch ein Halb geteilt, oder?

57 P Ja.

58 I Und was sagt uns das Ergebnis jetzt aus? In dem Zusammenhang mit den Flaschen?

59 P (denkt) Dass ich dann weiß, wieviel ein Halbes von einer Flasche ist./ Hm.. ach...

60 I Wie bist du denn auf das Ergebnis sechs gekommen, weil du hast es ja nicht gerechnet mit der,
61 mit der Rechenregel.

62 P Weil ein Halbes ist, also nullkommafünf, und nullkommafünf von drei ist, wenn man drei durch
63 Nullkommafünf rechnet, das ist sechs.

64 I Ok, und was ist jetzt mit dem Sechs? Sind das sechs Liter, oder sind das...

65 P Nein sechs halbe Liter...

66 I Flaschen. Genau. Und was haben wir jetzt in unserem Fall, wenn wir davon ausgehen, dass
67 das neun Torten sind, und ich teile es durch drei Viertel.

68 P (denkt) Dass ich wissen kann wieviele Dreiviertelstücke in den neun Torten drinnen sind./

69 I Ok, ja.

70 P Hm...

71 I Dann probieren wir das noch einmal.

72 P (arbeitet mit Material) Vier, acht, zwölf.

73 I Mhm./ Ok, also deine Antwort ist jetzt?

74 P Zwölf.

75 I Mhm./ Und mit den Torten jetzt?

76 P Äh . man kann die Torte in zwölf Dreiviertelstücke teilen.

77 I Genau ja. Ahm .. fünfzehn Achtel durch drei.

78 P (schreibt)

79 I Was hast du da für eine Vorstellung dazu?

80 P (denkt) Dass ich fünfzehn Achtel Zuckerl habe und drei Kinder wollen sie haben.

81 I Mhm./ Wieviele bekommt dann jedes Kind?

82 P Fünf.

83 I Mhm, ok./

84 P Achtel.

85 I Fünf Achtel, genau. Ahm .. vier Fünftel durch zwei Fünftel.

86 P (schreibt, denkt) Zwei Fünftel./ (rechnet) Zwei Ganze./

87 I Mhm, und ist das jetzt logisch, kommt dir die logisch vor, die Antwort?

88 P Ja, weil ich es durch etwas Kleineres teile, als eins.

89 I Ok./ Mhm. Und kannst du mir das irgendwie aufzeichnen wieso wir da genau zwei Fünftel,

90 wieso das genau zweimal reinpasst?
91 P (denkt) Nein glaube ich nicht.

Sabrina 3. Klasse (15:40-22:45)

1 I Wieviel ist drei durch ein Halb?
2 S (schreibt)
3 I Und zwar wieder ohne Rechenregel.
4 S (denkt) Das ist ein Sechstel, oder? Ein Sechstel./
5 I Denk einmal wieder an irgendein Beispiel aus dem Alltag.
6 S (denkt) Man hat von irgendetwas drei Ganze, man hat drei g a n z e Brote,- und man nimmt die
7 Hälfte von den drei Ganzen, und das ist dann ein Ganzes und ein Halbes./ (denkt)
8 I Du kannst es auch aufzeichnen wenn du willst, das mit den Broten.
9 S Ok, irgendwie so etwas (zeichnet, murmelt dabei vor sich hin). So, das kommt weg, das kommt
10 weg, und das, bleibt ein Halbes und eins übrig.
11 I Wieso kommt das weg?
12 S Weil es wegdividiert wird./ (lacht)
13 I Wegdividiert?
14 S Ja, ich weiß es nicht.
14.1 I Was stellst du dir denn vor, wenn du rechnest sechs durch drei.
15 Wenn du das rechnest wie ein Volksschüler, wie denkt man da?
16 S Naja man hat sechs Ganze und durch drei, bleibt nur mehr die Hälfte übrig.
17 I Ja./ Also, du hast ... ahm .. du hast geschaut wie oft drei in sechs reinpasst, oder?
18 S Mhm.
19 I Ok, und jetzt versuchen wir das umzulegen auf unser Beispiel.
20 S Achso, wie oft ein Halbes in drei reinpasst. (denkt) Sechs mal.
21 I Ok,/Stimmt das laut deinen Broten?
22 S Ja. Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs (zählt die Hälften).
23 I Ok, passt. Gut, dann machen wir neun Ganze durch drei Viertel.
24 S (schreibt)
25 I Wieder ohne Rechenregel, irgendwie.
26 S (schreibt) Durch drei Viertel?
27 I Mhm./
28 S (lacht) Ich rechne die ganze Zeit mit der Rechenregel. Ähm ... soll ich das jetzt auch wieder
29 irgendwie aufzeichnen, oder?
30 I Ja, wenn dir etwas einfällt zum Aufzeichnen?
31 S (denkt) Drei Viertel .. Ich mache einen Kreis.
32 I Schau, ich gebe dir eine kleine Hilfe, damit du nicht so viel zeichnen musst (übergibt Material).
33 Da hast du Kreise und da hast du immer Dreiviertelstücke, vielleicht kannst du mithilfe von
34 dem die Lösung herausfinden. Du kannst auch gerne die Stücke zerschneiden, wenn du willst.
35 S (legt die Stücke auf die Kreise) Hm ... so. Und dann, das muss ich weggeben (nimmt ein Stück
36 weg), das gehört eben da rein, da eines, da eines und da eines (zeigt auf die noch leeren Viertel
37 der Kreise in der ersten Reihe).
38 I Mhm./ Du kannst die Stücke gerne zerschneiden, wenn du willst.
39 S (schneidet, legt die Stücke dort hin, wo sie hingezigt hatte, wiederholt diesen Vorgang in der
40 Zweiten Reihe.) So dann sind es sechs Ganze und drei Viertel./
41 I Mhm./ Sind wir jetzt schon fertig?
42 S Hm?
43 I Sind wir jetzt schon fertig mit der Rechnung?
44 S Nein./ Ich weiß ... hm ... sollen wir es jetzt noch in drei Viertel teilen?
45 I Nein das ist egal, wieso sind diese frei, die Kreise? (zeigt auf zwei leere Kreise in der letzten

46 Reihe)
 47 S Stimmt, die passen da nicht mehr her, die bleiben übrig.
 48 I Die bleiben übrig?
 49 S (lacht) Ja. Ich weiß es nicht (denkt). Es kommt irgendwie das ... nein.
 50 I Also bei dir würde jetzt rauskommen sechs Ganze und drei Viertel.
 51 S Ja.\ Weil ich, achso ich hab es, ich muss da dividieren (denkt).
 52 I Wird das Ergebnis größer oder kleiner als neun?
 53 S Das soll größer werden.
 54 I Ok, wieso?
 55 S Weil drei Viertel weniger als ein Ganzes ist.
 56 I Mhm./
 57 S Hm ... es soll eigentlich zwölf rauskommen.
 58 I Ok./ Wie bist du jetzt auf das gekommen?
 59 S (lacht) Das habe ich jetzt mit der Rechenregel gemacht.
 60 I (lacht) Ok.
 61 S Ich weiß nur, dass das rauskommen soll, aber ich weiß nicht...
 62 I Ok, also wir haben da neun Ganze, ja?
 63 S Mhm./
 64 I Und wir haben immer Dreiviertelstücke. Vorher haben wir ja gesagt, wenn wir sechs durch
 65 drei dividieren, schauen wir was?
 66 S Wie oft drei in das reingeht, in sechs.
 67 I Ok, und jetzt schauen wir was?
 68 S Wie oft drei Viertel in ...wie oft ein Dreiviertel, achso, das heißt jetzt man braucht neun so
 68.1 Kreise, so
 69 viele wie da reingehen (schneidet, legt alle Kreise voll). So jetzt sind es zwölf. Weil ich habe
 70 jetzt neun Dreiviertel und dann habe ich für da noch ein Dreiviertel (zeigt auf die
 71 erste Reihe) genommen, da noch eines und da (zeigt auf die zweite und dritte Reihe).
 71.1 Dann sind es zwölf.

Rudi 2. Klasse (17:25-22:05)

1 I Drei Ganze durch ein Halb.
 2 R (schreibt)
 3 I Rechnen wir das nicht gleich aus mit der, mit der Rechenregel, sondern wir versuchen, dass
 4 wir das irgendwie ohne Rechenregel .. entweder einfach durch nachdenken, zeichnen oder
 5 irgendwie ...
 6 R Mhm, ok. Ahm ... also man hat (denkt) ...
 7 I Denk einmal an eine Halb-Liter-Flasche.
 8 R Ja, ahm ... man hat drei Drittel, also das ist die ganze Flasche drei Drittel, und wenn man dann
 9 dividiert durch ein Halb, dann sind es .. mehr.
 10 I Wie kommst du auf drei Drittel?
 11 R Ahm, das ist das Ganze, also drei Ganze sind drei Drittel auch.
 12 I Stimmt das?
 13 R (denkt)
 14 I Schreib das einmal auf, vielleicht siehst du es dann./
 15 R Drei Drittel.
 16 I Drei Ganze schreib einmal auf, und das jetzt auf Drittel bringen.
 17 R Nein, nein, das stimmt nicht, nein. Ahm, also (denkt) drei ganze Wasserflaschen dividiert durch
 18 ein Halb, und dann wird es ja weniger.
 19 I Mhm./ Was rechnen wir uns denn aus, wenn wir rechnen drei ganze Wasserflaschen durch ein
 20 Halb?

21 R Das größere, also es wird größer, weil drei Ganze, u n d, da muss man eigentlich mal, und ...
 22 I Na probieren wir es ohne Rechenregel.
 23 R Also (denkt, Schulglocke läutet).
 24 I Machen wir das noch fertig, ok?
 ?25 R Ja ok. Man rechnet das aus, was von der Flasche dann überbleibt, also ein Halb eigentlich weg,
 26 und dann bleibt das über, was man . ja.\

27 I Und was kommt dann raus?
 28 R Mehr.
 29 I Mhm./

30 R Also das .. das (denkt) ...
 31 I Du kannst es ja ...
 32 R Ein Halb also, da bleibt ein Halb noch, kommt raus.
 33 I Rechne es einmal mit der Rechenregel.
 34 R (rechnet) Ein Sechstel.
 35 I Wie hast du das jetzt gerechnet? Wie funktioniert die Rechenregel?
 36 R Das ist eigentlich jetzt drei Eintel, aber man muss es das umkehren, also umdrehen, Eintel, und
 37 dann statt dem dividiert mal ein Halb, und da kommt ein Sechstel raus.
 38 I Mhm./ Muss man beim Dividieren wirklich beide umdrehen?
 39 R Nein. Nur die da (zeigt auf die erste).
 40 I Nur die Erste? Bist du dir sicher?
 41 R Mhm.
 42 I Die Zweite muss man umdrehen.
 43 R Ah.
 44 I Die Erste muss man lassen.
 45 R Achso, ja.
 46 I Was kommt dann raus?
 47 R (rechnet) Sechs Ganze.
 48 I Genau ja, und ergibt das jetzt irgendeinen Sinn, dass da Sechs rauskommt? So eine große Zahl./
 49 R Ahm (denkt).
 50 I Ok, ich erlöse dich.

Christiane 3. Klasse (8:30-14:50)

1 I Drei durch ein Halb. Was hat das für dich denn für eine Bedeutung?
 2 C Dass man drei durch ein Halbes dividiert.
 3 I Hast du da irgendeine Bedeutung im Alltag? Wo es einem passiert, dass man das rechnen
 4 muss.
 5 C (denkt, schüttelt den Kopf) Keine Ahnung.
 6 I Ok, dann stell dir einmal eine Halb-Liter-Flasche vor. Hilft dir das etwas? Drei durch ein Halb,
 7 ist unsere Rechnung.
 8 C (denkt, schüttelt den Kopf)
 9 I Ok, dann stell dir drei Liter Wasser dazu vor.
 10 C Wenn man schaut, wieviel man braucht, also (denkt), dass man es halt aufteilen müsste?
 11 I Dass man es aufteilen müsste? Ok erklär es mir ganz genau mit den drei und dem ein Halb. Du
 12 kannst es auch aufzeichnen, wenn du magst. Oder was ist denn das Ergebnis von der
 12.1 Rechnung?
 13 C (greift zum Stift)
 14 I Ohne, dass du jetzt die Rechenregel verwendest für die Bruchrechnung. Also ohne, dass du
 15 jetzt den Kehrwert bildest.
 16 C Sollte man nicht Kehrwert dabei bilden?
 17 I Das schon, aber ich will einmal, dass du es ohne Rechenregel machst.

18 C Geht das überhaupt?

19 I Mhm./

20 C (denkt) Sechs./

21 I Wie bist du darauf gekommen?

22 C Weil, wenn man drei durch ein Ganzes dividiert, kommt wieder drei heraus, und da das Halbe,

23 also, ein Halbes von dem Ganzen ist, noch mal zwei, und dann kommt sechs heraus.

24 I Ok, ja. Ahm, das heißt mit unseren Flaschen, was würde das jetzt heißen, das Ergebnis?

25 C Dass man sechs halbe Liter hat./

26 I Mhm.

27 C Also sechs Halb-Liter-Flaschen.

28 I Genau, ja. Ähm .. was bedeutet neun durch drei Viertel für dich?

29 C (denkt, schüttelt den Kopf) Wie jetzt genau?

30 I Irgendetwas im Alltag, wo man das rechnen müsste. Oder hast du irgendeine Idee, wie man

31 das ohne Rechenregel rechnet?

32 C (denkt) Man könnte es zuerst wieder durch eins multi, also dividieren, da kommt neun heraus,

33 und dann...

34 I Mhm./ Da kommt uns aber nicht das richtige Ergebnis heraus. Ich gebe dir da etwas, vielleicht

35 Hilft dir das, das sind neun Kreise und da haben wir lauter Dreiviertelstücke (überreicht ihr

36 Material). Du kannst auch gerne schneiden, wenn du das brauchst.

37 C (denkt, sieht nur ganz kurz auf das Material) Müssten es siebenundzwanzig Viertel dann sein.

38 I Mm.

39 C (nimmt Material, und legt die Dreiviertelstücke auf die Kreise) Wie war die Rechnung noch

40 einmal?

41 I Ähm .. Zwölf durch, nein, neun durch drei Viertel.

42 C Also das verstehe ich jetzt nicht.

43 I Was verstehst du nicht?

44 C Was ich da jetzt machen soll mit dem.

45 I Ok, was bedeutet denn zwölf durch neun Viertel, durch drei Viertel, **neun** durch drei Viertel.

46 C Das ist eine Rechnung, ein Bruch./

47 I Mhm./

48 C Und eine Division.

49 I Aber was tue ich denn dabei, wenn ich dividiere.

49.1 C (denkt)

50 I Wie rechnest du denn in der Volksschule sechs durch drei?

51 C Einfach mit anschreiben, und oder im Kopf.

52 I Mhm./ Mit irgendeiner Vorstellung dazu?

53 C (schüttelt den Kopf)

54 I Ok. Wieviel ist denn vier Fünftel durch zwei Fünftel.

55 C (schreibt) Sind zwei Ganze.

56 I Mhm./ Ok, und wäre das jetzt auch irgendwie ohne Rechenregel gegangen?

57 C Ja./

58 I Mhm./ Wie?

59 C Wenn man einfach die vier durch die zwei dividiert, weil die Fünftel ...

60 I Ok.

61 C Also das bleibt ja dann, weil es dasselbe ist.

62 I Mhm./ Ok. Genau ja.

Vierter Teil: Addition/Subtraktion

Paul 2. Klasse (9:05-20:46)

- 1 I Drei Fünftel plus ein Fünftel.
2 P (schreibt, richtiges Ergebnis)
3 I Ok, wie hast du das gerechnet?
4 P Drei Fünftel einfach plus ein Fünftel, also da habe ich mir jetzt zum Beispiel vorgestellt, dass
5 man .. von einer Torte drei Fünftel runter schneidet, weil man die dann essen will, dann will
6 man aber doch noch mehr, dass man dann noch ein Fünftel herunterschneidet.
7 I Mhm./ Und dann hat man insgesamt-
8 P Vier Fünftel.
9 I Genau. Ahm, ein Halb plus ein Viertel.
10 P (schreibt)
11 I Und kannst du es irgendwie rechnen, ohne dass du es gleich auf den gleichen Nenner bringst?
12 P (denkt)
13 I Ist das irgendwie möglich? Oder mithilfe von zeichnen, das Ergebnis ermitteln.
14 P Also ich kann das gleich einfach im Kopf rechnen.
15 I Wie machst du das?
16 P Also äh, drei Viertel, da (denkt). Hm, also ein Halbes ist auf jeden Fall eine Hälfte und die drei
17 Viertel ist jetzt, das zum Beispiel (nimmt die Dreiviertelstücke von der Divisionsaufgabe) und
18 dann tu ich noch ein Halbes dazu-
19 I Mhm./
20 P Das sind dann fünf Viertel.
21 I Mhm./ Ok, passt. Gut dann machen wir drei Viertel plus zwei Siebentel.
22 P (schreibt, denkt)
23 I Du kannst es normal rechnen auch, wenn du willst.
24 P Ok (bringt auf gleichen Nenner, schreibt das richtige Ergebnis hin).
25 I Mhm./ Ok .. Warum hast du denn da jetzt auf gleichen Nenner gebracht?
26 P Weil sonst kann ich das nicht gescheit ausrechnen.
27 I Und wieso nicht?
28 P (denkt) Weil es zwei unterschiedliche Zahlen sind und das, ja.
29 I Und wieso kann ich nicht Viertel und Siebentel zusammenzählen?
30 P Weil da ist eine unterschiedliche Menge, also .. weil Viertel, Viertel sind mehr als Siebentel.
31 I Mhm./ Ok ... Machen wir zwei Ganze ein Drittel plus ein Ganzes ein Viertel.
32 P (schreibt) Auch wieder normal? Kann ich es auch wieder...
33 I Mhm, so, wie du es rechnen würdest.
34 P (rechnet, wandelt die gemischten Zahlen in Brüche um)
35 I Was heißt das jetzt? Dreiundvierzig Zwölftel, kann man das noch irgendwie schöner
36 anschreiben?
37 P Ja (schreibt $3\frac{7}{12}$).
38 I Mhm./ Ok, erklär mir einmal was du gemacht hast.
39 P Also ich habe es erst mal, ich habe erst mal die Ganzen, also die natürlichen Zahlen zu, also
40 zum Bruch dazugezählt, zu den Brüchen, dann habe ich es auf gleichen Nenner gebracht,
41 und einfach ausgerechnet.
42 I Und muss man das? Dass man die natürlichen Zahlen in Brüche umwandelt?
43 P Nicht unbedingt.
44 I Nicht unbedingt, geht es anders auch?
45 P Mhm.
46 I Ok, kannst du es mir irgendwie auf einem, kannst du es mir irgendwie graphisch darstellen die
47 Addition?
48 P (denkt)

49 I Irgendetwas aufzeichnen, damit es vielleicht auch schon irgendjemand aus der Volksschule
50 schon verstehen könnte.

51 P (denkt) Mm. .

52 I Kannst du es mir auf einen Zahlenstrahl aufzeichnen?

53 P Wie auf einem ... ahm . kann ich das Lineal dazu?

54 I Ja, sicher.

55 P (zeichnet einen Zahlenstrahl) Also ich würde es einfach so machen.

56 I Mhm./ Erklärst du es mir geschwind?

57 P Also das ist das zwei eins Drittel, und das ist das eins eins Viertel, zusammen ergeben sie dann
58 das Ganze.

59 I Mhm./ Ok, ja. Dann machen wir, drei Ganze zwei Drittel plus ein Ganzes zwei Drittel.

60 P (schreibt sofort $5\frac{1}{3}$ hin)

61 I Mhm, ja. Machen wir, zwei Drittel minus ein Halb.

61.1 P (rechnet, kommt auf das richtige Ergebnis)

61.2 I Mhm./ Kannst du mir das irgendwie aufzeichnen?

62 P (denkt, rechnet) Auch wieder mit so einem Zahlenstrahl, oder?

63 I Ja, wenn dir etwas anderes einfällt, kannst du das andere auch nehmen, aber du kannst einen
64 Zahlenstrahl auch nehmen. Aber diesmal bitte ganz genau, ok? Also nicht nur hin schätzen,
65 sondern ganz genau einzeichnen, wie groß sind Drittel, wie oft sind Halbe.

66 P (zeichnet) Das streich ich gleich mal wieder weg. Mach ich da...

67 I Wie groß ist denn ein, ein Ganzes bei dir? Das kannst du dir aussuchen.

68 P Ein Ganzes ist bei mir, sag ich einmal, zehn Zentimeter.

69 I Ok, dann kannst du das ja mal machen.

70 P Zwei Drittel, hm.

71 I Vielleicht suchst du dir eine Zahl für ein Ganzes, die gut durch zwei und durch drei teilbar ist.

72 P Dann nehme ich gleich zwölf.

73 I Mhm./

74 P Zwei Drittel ist dann vier Zentimeter .. ah acht Zentimeter. Und ein Halbes ist dann sechs
75 Zentimeter (zeichnet, murmelt). Ja das Ganze ist schon mal zwei Drittel und dann muss ich das
76 dann weg streichen, und dann ist es, dann ist es nur mehr ein Sechstel.

77 I Da haben wir jetzt aber noch zwei Drittel oder?

78 P Ja das gilt für das Ganze.

79 I Wie für das Ganze. Kannst du es irgendwie so aufzeichnen, dass ich zum Schluss wirklich nur
80 mehr einen Teil sehe, der genau ein Sechstel ist?

81 P (denkt) Das müssten dann zwei Zentimeter sein. (zeichnet das ein). Da müsste ich noch etwas
82 weg streichen, aber wie komme ich dahin.

83 I Mhm./ Wieviel ist das, was du da noch wegstreichen musst?

84 P Das ist .. das ist ein Halbes.

85 I Mhm./ Und ergibt das Sinn mit der Rechnung?

86 P Irgendwie nicht.

87 I Wieso nicht?

88 P Weil das ist schon das Halbe, da müsste das da weg.

89 I Aber das, was du da gerechnet hast, ist ja schon zwei Drittel plus ein Halb, oder? Dann sind wir
90 da.

91 P Ja./ Das gehört da glaube ich gar nicht dazu.

92 I Mhm, wieso nicht?

93 P Weil von zwölf sind zwei Drittel acht und nicht plus ein Halb (murmelt), also das da drinnen ist
94 ein Sechstel.

Franz 2. Klasse (0:00-11:05)

- 1 I Wieviel ist drei Fünftel plus ein Fünftel.
- 2 F Vier Fünftel.
- 3 I Ok, wie bist du darauf gekommen?
- 4 F Drei Fünftel plus ein Fünftel ist vier Fünftel.
- 5 I Ok. Ahm, kannst du mir das irgendwie aufzeichnen auch, dass das so ist?
- 6 F (schreibt die Rechnung auf)
- 7 I Irgendwie aufzeichnen.
- 8 F (zeichnet einen Kreis in dem er Sechstel markiert) Drei Fünftel plus ein Fünftel ist gleich
- 9 vier Fünftel.
- 10 I Mm./ Ok. Haben wir da nicht eigentlich Sechstel?
- 11 F Ah (zeichnet neuen Kreis, lacht). Jetzt sind es Fünftel.
- 12 I Ok. Dann nochmal die Erklärung bitte.
- 13 F Drei Fünftel plus ein Fünftel (markiert dabei die entsprechenden Teile)...
- 14 I Ok, passt. Ahm, ein Halb plus drei Viertel.
- 15 F Gleich ein Ganzes ein Viertel.
- 16 I Mhm./ Wie bist du auf das gekommen?
- 17 F Ein Halbes einmal auf gleichen Nenner bringen, das wären dann zwei Viertel, plus drei Viertel,
- 18 ist gleich ein Ganzes ein Viertel.
- 19 I Ok, kannst du mir das auch irgendwie aufzeichnen?
- 20 F (zeichnet Kreise) Das wäre einmal ein Halbes-
- 21 I Mhm./
- 22 F Das wären jetzt drei Viertel, wenn man das dann plus rechnet, hat man gleich ein Ganzes und
- 23 ein Viertel.
- 24 I Mhm./ Ok. Wieviel ist drei Viertel plus zwei Siebentel?
- 25 F (denkt, schreibt) Zwei Siebentel.
- 26 I Genau ja.
- 27 F (denkt, rechnet) Fünfundzwanzig Sechsunddreißigstel.
- 28 I Und wie bist du auf das gekommen?
- 29 F Ich habe wieder mal gleicher Nenner, und dann ...
- 30 I Was ist der gleiche Nenner von vier und sieben?
- 31 F Sechsunddreißig.
- 32 I Wie bist du auf das gekommen?
- 33 F Ich habe vier mal eins, sieben mal eins wäre gleich vier, wär gleich sieben, dann mal zwei, bis
- 34 irgendwann der Nenner gleich ist.
- 35 I Mhm./ Zeig mir das einmal.
- 36 F (schreibt)
- 37 I Stimmt das, das vier mal sieben gleich sechsunddreißig ist?
- 38 F Nein (denkt). Achtundzwanzig (korrigiert seine Rechnung).
- 39 I Wie bist du jetzt auf das gekommen?
- 40 F (rechnet weiter bis er fertig ist)
- 41 I Ok, und wie bist du auf die Zähler gekommen?
- 42 F Da hab ich das einfach dann drei mal sechs, zum Beispiel.
- 43 I Drei mal sieben. Wieviel ist drei mal sieben?
- 44 F Einundzwanzig.
- 45 I Genau. Was hast du geschrieben?
- 46 F (korrigiert den Zähler)
- 47 I Genau, beim Zweiten?
- 48 F (korrigiert) Neunundzwanzig.
- 49 I Neunundzwanzig ist das Ergebnis?

50 F (korrigiert) Achtundzwanzigstel (sagt etwas Unverständliches).

51 I Ok, mhm./ Wieso muss man denn auf denselben Nenner bringen?

52 F Weil man sonst nicht rechnen kann.

53 I Und wieso nicht?

54 F Weil Siebentel und Viertel sonst ähm, ganz ein anderer Nenner sind, weil man das sonst

55 einfach nicht rechnen kann, weil .. es einfach nicht geht.

56 I Wieso kann ich Siebentel und Viertel nicht zusammenzählen?

57 F Weil dann .. fünf Elftel rauskommen würde (lacht), wenn man sich das was jetzt dort steht halt

58 zusammenzählt.

59 I Ok, ja. Und das ist nicht richtig.

60 F Das ist nicht richtig, weil das eben mehr ist und das weniger.

61 I Mhm./ Ok. Ahm. Zwei Ganze ein Drittel plus ein Ganzes ein Viertel.

62 F (rechnet mit gemischten Zahlen) Drei ganze und sieben Zwölftel.

63 I Mhm./Ok, genau. Wieviel ist zwei Drittel minus ein Halb?

64 F (rechnet)

65 I Mhm./

66 F Gleich ein Sechstel.

67 I Genau. Kannst du mir das irgendwie aufzeichnen, dass das vielleicht auch jemand versteht, der

68 noch nicht Bruchrechnen gelernt hat?

69 F (zeichnet einen Kreis, murmelt) Ist gleich Sechstel, eins, zwei, drei, da, eins zwei drei.

70 I Sind die jetzt gleich groß ungefähr?

71 F Nein.

72 I Nicht einmal ungefähr. Probieren wir es noch einmal. Fang einfach einen neuen Kreis an.

73 F (zeichnet) Ja ok, das müsste jetzt passen.

74 I Wieviele Felder haben wir jetzt?

75 F Eins, zwei, drei, passt.

76 I Ok, dann erklär mir einmal die Rechnung, mithilfe von deinem Kreis.

77 F Das sind jetzt zum Beispiel drei Sechstel, das sind jetzt vier Sechstel.

78 I Wozu brauche ich vier Sechstel? Das kommt ja in meiner Rechnung gar nicht vor.

79 F Na, zwei Drittel.

80 I Mhm./

81 F Und das wär jetzt zum Beispiel ein Halbes, wenn man das alles auf gleichen Nenner bringt?

82 I Nein, ich will, ohne dass man es auf gleichen Nenner bringt. Nur mit der Zeichnung.

83 F (zeichnet)

84 I Mach noch einmal einen Kreis, **langsam**. Einen schönen Kreis, ok./

85 F Jetzt passt es. Das wär jetzt ein Halbes, und das wären drei, das wären eineinhalb Drittel plus

86 dieses Stück hier.

87 I Zwei Drittel brauche ich.

88 F Zwei Drittel, das (murmelt, zeichnet einen neuen Kreis).

89 I Zwei Drittel geht sich in einem Kreis aus, oder? Wir tun ja minus rechnen, wir tun ja nicht plus

90 rechnen.

91 F (flüstert) Wie jetzt-. Dann wären das einmal zwei **Drittel**, minus ein **Halbes**, wär gleich ein

92 Sechstel.

93 I Mhm./ Und wie sieht man das in dem Kreis?

94 F Das haben wir mal die Drittel, das ist das Halbe und jetzt einfach das Stück gibt man von den

95 Dritteln weg, und die rechnet man auch dazu von denen, da hat man gleich ein Sechstel.

96 I Ok. Wieviel ist drei Ganze ein Viertel minus ein Ganzes drei Fünftel?

97 F (schreibt, rechnet mit gemischten Zahlen) Ist gleich ein Ganzes dreizehn Zwanzigstel.

98 I Mhm./ Wie bist du jetzt darauf gekommen?

99 F Ich habe als erstes einmal auf gleichen Nenner gebracht von denen da und dann habe ich

100 die minus gerechnet.
 101 I Mhm./
 102 F Als erstes die Brüche./
 103 I Mhm./
 104 F Da kommt man dann auf null und da bleiben noch sieben übrig, die rechnet man dann wieder
 105 weg und das wären dann dreizehn, und dann rechnet man das zwei Ganze dreizehn
 106 Zwanzigstel, und dann rechnet man da noch den Einser weg, wären es ein Ganzes dreizehn
 107 Zwanzigstel.

Jasmin 2. Klasse (11:25-21:50)

1 I Wieviel ist denn drei Fünftel plus ein Fünftel?
 2 J Vier Fünftel.
 3 I Ok. Wie bist du auf das gekommen?
 4 J Ahm, weil man einfach die .. Zähler zusammenzählt.
 5 I Ok, kannst du mir das irgendwie graphisch zeigen. Vielleicht einmal eine andere Darstellung
 6 als ein Kreis.
 7 J (zeichnet Rechtecke) Da haben wir ein Ganzes, da ist jeder davon ein Fünftel und die vier hier
 8 sind dann vier Fünftel plus eines sind dann fünf Fünftel.
 9 I Ok, ein, drei Fünftel plus vier Fünftel haben wir gehabt, aber egal.
 10 J Ok, dann sind es vier Fünftel.
 11 I Ok, wieviel ist ein Halb plus drei Viertel?
 12 J Ein Ganzes und ein Viertel.
 13 I Ok, wie bist du jetzt auf das gekommen?
 14 J Ahm (denkt), also ein Halbes sind zwei Viertel plus drei Viertel sind fünf Viertel und fünf Viertel
 15 ist ein Ganzes und ein Viertel.
 16 I Ok, kannst du mir das auch graphisch darstellen? Die Addition, vielleicht mithilfe von einem
 17 Zahlenstrahl.
 18 J Ok (zeichnet). Ok, das sind zirka dreizehn.
 19 I Du kannst auch leichtere Zahlen wählen, wenn du willst.
 20 J Ja ok, dann nehme ich zwölf (zeichnet). Ahm, wenn das hier ein Ganzes ist, sind das drei
 20.1 Viertel.
 21 I Was sind drei Viertel?
 22 J Ahm, das, das und das.
 23 I Ok, du kannst ja beschriften wo drei Viertel ist.
 24 J (beschriftet) Äh, so, ein Drittel...
 25 I Beim Strich immer genau, oder?
 26 J Ja, bei Strich.
 27 I Ok, ja./
 28 J Ahm, ein Halbes sind zwei Viertel, und wenn ich das da (zeichnet) plus zwei Viertel eben-
 29 Genau, kannst du ja irgendwie dazu zeichnen.
 30 J (zeichnet) Wenn das noch ein Halbes ist haben wir ein Ganzes und ein Viertel.
 31 I Genau ja. Wieviel ist denn drei Viertel plus zwei Siebentel?
 32 J (denkt, schreibt) Plus wieviel Siebentel?
 33 I Ähm, zwei Siebentel.
 34 J Das ist ein Ganzes und ein Siebenundzwanzigstel, glaube ich. /
 35 I M h m./
 36 J Achso Achtundzwanzigstel.
 37 I Genau, aber gerechnet hast du eh richtig.
 38 J Ein Ganzes ein Achtundzwanzigstel.
 39 I Ok, wie bist du jetzt darauf gekommen?

40 J Ja, also ich hab eben auf Achtundzwanzigstel ... ahm, ausgedruckt, ahm..
 41 I Gleichen Nenner, auf gleichen Nenner gebracht./
 42 J Ja genau, und die .. ja nachher, unten habe ich bei den Vierteln habe ich mal sieben gerechnet
 43 jetzt, weil ich oben die drei auch mal sieben gerechnet, und das ist dann gleich mal vier.
 44 I Ok, wieso bringen wir überhaupt auf denselben Nenner?
 45 J Ahm, damit ich (denkt), ja weil ich sonst das schwer miteinander vergleichen könnte, weil,
 46 nein.
 47 I Kann ich Viertel und Siebentel nicht zusammenrechnen?
 48 J Achso ahm ... nein.
 49 I Ok, warum nicht?
 50 J Weil (denkt) ich multiplizieren muss.
 51 I Was meinst du jetzt? Wieso kann ich Viertel und Siebentel nicht zusammenrechnen?
 52 J (denkt) Keine Ahnung.
 53 I Ok, dann gebe ich dir mal einen Tipp, ein Viertel ist so groß (zeichnet einen Kreis), hoppla,
 53.1 und ein Siebentel ist ... ein Siebentel ist so groß.
 54 Warum kann man jetzt Viertel und Siebentel nicht zusammenzählen?
 55 J Also da muss ich ja Siebentel, also den Kreis sozusagen einzeichnen, aber das kann ich jetzt...
 56 das geht eben nicht.
 57 I Ok, und warum geht es nicht?
 58 J Ahm (denkt) Weil ich da einfach kein Wirkliches ... nein.
 59 I Na egal, machen wir weiter. Wieviel ist ... drei Ganze zwei Drittel plus ein Ganzes zwei Drittel.
 60 J Drei Ganze zwei Drittel?
 61 I Mhm./ Plus ein Ganzes zwei Drittel.
 62 J (schreibt) Drei Ganze vier Drittel, also vier Ganze ein Drittel.
 63 I (denkt)
 64 J Ja vier ganze und ein Drittel.
 65 I Ok, dann zeichne mir das einmal irgendwie auf die Addition.
 66 J Ahm (denkt, zeichnet), also das ist jeweils ein Ganzes jetzt./
 67 I Mhm./
 68 J (zeichnet) Das soll jetzt jeweils ein Drittel sein, u n d ... wenn ich jetzt die da zusammenzähle
 69 erst einmal, sind das vier . so Ganze./
 70 I Mhm./
 71 J Und plus die zwei sind dann .. vier Drittel.
 72 I Mhm./
 73 J Und weil drei Ganze, also drei, **drei** Drittel ein Ganzes ist, sind das dann ... fünf Ganze (lacht), ja
 74 und eben, ein Drittel bleibt übrig.
 75 I Ja, ok. Wieviel ist drei Ganze ein Viertel minus ein Ganzes drei Fünftel?
 76 J (rechnet mit gemischten Zahlen)
 77 I Mhm./ also was kommt raus? Ein Ganzes dreizehn Zwanzigstel. \ Ok, ja.

Richard 3.Klasse (00:00-11:50)

1 I Wieviel ist drei Fünftel plus ein Fünftel, du kannst auch gerne schreiben.
 2 R Ahm, ein Fünftel plus drei Fünftel ist vier Fünftel.
 3 I Mhm./ Wie bist du auf das gekommen
 4 R Ja also ich muss Zähler mit Zähler, also miteinander addieren, weil Nenner sind ja gleich, da
 5 brauche ich nichts verändern.
 6 I Ok, kannst du mir das irgendwie aufzeichnen, die Addition, dass man das gleich sieht.
 7 R Also jetzt mit einem Zahlenstrahl./
 8 I Wo du willst.
 9 R Eh gleich da her?

10 I Mhm./

11 R Ja also, jetzt da, puh, also die Rechnung wäre halt drei Fünftel und ein Fünftel, und ja, keine

12 Ahnung,...

13 I Irgendwie aufzeichnen, du hast zum Beispiel gesagt, am Zahlenstrahl.

14 R Ok (zeichnet), wenn man da jetzt drei Fünftel hätte, also da, und, dann muss ich Fünftel

15 einzeichnen, zwei, drei, vier, fünf, ungefähr halt./

16 I Ja./

17 R Dann hat man halt der erste Teil sind einmal drei Fünftel, das da, nachher der nächste Teil ist

18 ein Fünftel, und nachher halt einfach, ahm, von da also von da bis dort rechnen, vier Fünftel.

19 I Ja genau. Mhm./ Dann haben wir ein Halb plus drei Viertel.

20 R Ein Halbes plus drei Viertel, ahm, sind fünf Viertel.

21 I Mhm./ Wie bist du jetzt auf das gekommen?

22 R Also ein Halbes, da muss ich Nenner und Nenner auf den gleichen Wert bringen, und da habe

23 ich einfach die Halbe, also den Nenner mal zwei multipliziert, mit zwei multipliziert./

24 I Mhm./

25 R Zähler und Nenner halt, und dann waren es halt zwei Viertel./

26 I Mhm./

27 R Und zwei Viertel plus drei Viertel sind fünf Viertel.

28 I Mhm./ Ok. Kannst du mir das auch irgendwie aufzeichnen?

29 R Mhm./ Also wieder auf einem Zahlenstrahl (zeichnet), ok. Also das da ist einmal ein Halbes,

30 und dann habe ich halt eingezeichnet jeweils ein Viertel, und das sind dann halt zwei Viertel,

31 u n d der Rest war dann noch, glaube ich drei Viertel.

32 I Mhm./

33 R Und dann habe ich einfach noch einmal die drei Viertel dazu genommen. Da, ja, und dann

34 kommt man halt auf, also weil das da sind ja zwei Viertel, und wenn man die halt beide

35 miteinander addiert, wie da zum Beispiel, das ergibt dann fünf Viertel.

36 I Ok.\ Und wieso muss ich überhaupt auf den gleichen Nenner bringen?

37 R Ja weil die, weil das sonst nicht gehen würde.

38 I Mhm./ Wieso nicht?

39 R Naja, weil (denkt), ja w e i l der Nenner und der Nenner halt nicht gleich sind und deshalb sind

40 die, hat dieses eine Halbe dann einen anderen Wert als eigentlich die drei Viertel.

41 I Ok, ja. Ok, dann machen wir, zwei Ganze ein, zwei Ganze ein Drittel, vielleicht schreibst du es

42 auf, zwei Ganze ein Drittel...

43 R (schreibt) Achso. Ok.

44 I Mhm./ Plus ein Ganzes ein Viertel.

45 R (schreibt) Plus ein Ganzes ein Viertel, ok. Ja also da wäre es halt jetzt gescheit, das kann man

46 halt machen, wenn man die zwei Ganze halt, also da in Drittel und da in Viertel umrechnet./

47 I Ok./

48 R Das mache ich gleich einmal, also zwei, mhh, das sind dann ... ja sechs Drittel, die zwei Ganze

49 sind sechs Drittel.

50 I Mhm./

51 R Sechs Drittel plus ein Drittel sind sieben Drittel, und nachher dasselbe mit einem Viertel halt.

52 Ahm vier Viertel plus ein Viertel sind fünf Viertel, da muss ich wieder auf denselben Nenner

53 bringen, da ist es gescheit wenn man drei mal vier multipliziert, weil da muss man nicht so

54 viel rechnen und probieren.

55 I Ok, ja. Kannst es eh gleich machen.

56 R Da kommt Zwölftel.

57 I Ok, ja./

58 R Ahm, ist gleich dann eben mal vier, ahm zwanzig Zwölftel plus fünfzehn Viertel .. ah Zwölftel.

59 I Mhm./

60 R Wart einmal, ist gleich, ahm ausrechnen, drei, dreiunddreißig würde ich sagen./ Ja
61 dreiunddreißig Zwölftel, dann muss ich schauen, ob man noch kürzen kann./
62 I Achtundzwanzig plus fünfzehn ist-.
63 R Achso ja, dreiundvierzig.
64 I Genau, ja.
65 R Ahm, und jetzt muss ich halt schauen, ob man noch kürzen kann, aber das geht in dem Fall
66 glaube ich nicht.
67 I Mhm./
68 R Irgendwie ausprobieren.
69 I Und können wir es trotzdem irgendwie schöner hinschreiben?
70 R Ahm, ja, man kann in ein Ganzes und so halt schreiben.
71 I Genau, machen wir das einmal.
72 R Dreiundvierzig durch zwölf muss man da rechnen./ Ich mache eine Nebenrechnung..
73 I Mhm./
74 R (murmelt) Ja drei mal.
75 I Mhm./
76 R Ja drei mal zwei ist sechs .. sechs, sieben, nein .. sieben ist dreizehn, drei mal vier dreizehn
77 eins, was soll da raus kommen? Achso, jetzt muss ich nur noch schauen, was übrig bleibt.
78 I Mhm.
79 R Also das da wäre jetzt dann, wenn ich drei mal zwölf rechne, dann sechs.. sechsunddreißig,
80 nachher tun wir noch dreiundvierzig minus sechsunddreißig, dann weiß man halt was übrig
81 bleibt, und das wäre in dem Fall siebzehn ... Achso nein, sieben.
82 I Genau ja.
83 R Sieben. Also ist gleich drei Ganze sieben Zwölftel.
84 I Ok, und ist es wirklich notwendig, dass man es, dass man alles auf Brüche bringt?
85 R Ahm...
86 I Oder würde es anders auch gehen?
87 R Ja man kann es als Dezimalzahlen auch anschreiben.
88 I Ok, in Dezimalzahlen./ Und ist es notwendig, dass ich die Ganzen, dass ich die auf Brüche
89 bringe?
90 R Nein, muss man auch nicht machen.
91 I Ok, probier es einmal ohne.
92 R Ok, also, dann kannst gleich einmal die zwei auf denselben Nenner bringen, da schau ich von
93 unten ab, achso das geht ja nicht, muss ich vier Zwölftel, also zwei Ganze vier Zwölftel./
94 I Mhm./
95 R Plus, ahm .. drei .. also ein Ganzes drei Zwölftel, das würde halt ergeben halt die ganzen
96 Zahlen, das ist drei und nachher die zwei anderen Zahlen das ist sieben.
97 I Ok.\

98 R Das geht anscheinend sogar leichter (lacht).
99 I (lacht) Ja ... Ok, dann machen wir drei Ganze zwei Drittel, plus ein Ganzes zwei Drittel.
100 R (schreibt) Ja also da kann ich jetzt wieder gleich die zwei Arten nehmen./
101 I Mhm./
102 R Ist gleich vier Ganze vier Drittel, also ich habe jetzt die ganzen Zahlen addiert und nachher
103 noch die Brüche./
104 I Ok, ja./
105 R Ich kann halt wieder die ganzen Zahlen halt in Brüche umwandeln, soll ich das machen?
106 I Nein brauchst du nicht.
107 R Ok.
108 I Aber ist das Ergebnis schon, ist das schon, ist das schon so schön wie möglich, wie wir es
109 anschreiben könnten? Vier Ganze vier Drittel?

110 R Achso, nein. Ist gleich . fünf Ganze ein Drittel.
 111 I Ok, dann machen wir kurz noch Sub, Subtrahieren.
 112 R (lacht) Subtraktion.
 113 I (lacht) Genau ja. Zwei Drittel minus ein Halb.
 114 R (schreibt) Zwei Drittel minus ein Halbes-. Also muss ich wieder auf denselben Nenner bringen,
 115 das wäre in dem Fall halt sechs, vier Sechstel minus drei Sechstel ist gleich ein Sechstel.
 116 I Mhm. Und kannst du mir die Rechnung irgendwie aufzeichnen? Vielleicht nicht auf einem
 117 Zahlenstrahl, sondern irgendwie anders?
 118 R Mhm. Puh.
 119 I Irgendetwas, was dir einfällt.
 120 R (denkt) In einem Kreis halt vielleicht?
 121 I Ok.
 122 R Kreisdiagramm (zeichnet) also da habe ich jetzt da Sechstel also sechs Stücke, passt.
 123 Ahm, und da habe ich jetzt halt angegeben, die vier Stücke halt./
 124 I Mhm./
 125 R Von, eigentlich von hier, bis hier (zeichnet), nachher muss ich halt drei Stücke davon entfernen,
 126 das wäre halt von hier, also von hier./
 127 I Ja./
 128 R Bis dort, da bleibt mir eigentlich nur mehr dieser Teil übrig, und das wäre halt dann das
 129 Ergebnis, das ein Sechstel.
 130 I Ja. Dann eine Rechnung noch. Drei Ganze ein Viertel minus ein Ganzes drei Fünftel.
 131 R (schreibt, murmelt) Ok. Also da gibt es jetzt wieder die zwei Arten.
 132 I Mhm.
 133 R Ich mache es jetzt halt, ahm, ich bringe die ganzen Zahlen halt nicht auf Brüche jetzt einmal.
 134 I Ja, ok, wie du willst.
 135 R Da wäre halt wieder derselbe Nenner zwanzig.
 136 I Mhm./
 137 R Ahm ... drei Ganze fünf Zwanzigstel, minus ein Ganzes zwölf Zwanzigstel ... ahm, ja .. jetzt
 138 halt ausrechnen, da kann man jetzt da, zwei, vier, achso das geht ja nicht, da muss ich dann
 139 eigentlich von hier dann einen, eine ganze Zahl muss ich hier wegnehmen, und da dazu geben.
 140 I Ok./
 141 R Das wäre dann zwei Ganze fünfundzwanzig Zwanzigstel-.
 142 I Mhm./
 143 R Minus ein Ganzes zwölf Zwanzigstel, ist gleich (denkt), ahm, ja, das würde dann ergeben, ahm,
 144 ein Ganzes dreizehn Zwanzigstel./
 145 I Mhm./
 146 R Ja, und ja, sonst auch, kürzen kann man nichts eigentlich.

Andreas 2. Klasse (10:20-23:05)

1 I Drei Fünftel plus ein Fünftel.
 2 A (schreibt) Ausrechnen?
 3 I Mhm.
 4 A (schreibt das richtige Ergebnis hin)
 5 I Ok, wie hast du das jetzt ausgerechnet?
 6 A Also drei plus eins ist vier und die unteren zwei bleiben.
 7 I Mhm, warum bleiben die?
 8 A Hm, weil es ist der gleiche Nenner, und wenn man, bei der Addition bleiben die halt gleich.
 9 I Ok, kannst du mir das irgendwie aufzeichnen ganz anschaulich, sodass ich gleich das
 10 Ergebnis sehe, wenn ich die Zeichnung anschau?
 11 A (denkt, schüttelt den Kopf)

12 I Probier es einmal auf dem Zahlenstrahl.

13 A (zeichnet) Das ist ein Ganzes, wenn man es auf Fünftel nimmt.

14 I Das ist ein Ganzes?

15 A Wenn man Fünftel hat.

16 I Ok, dann schreib gleich die Fünftel dazu, oder? Du hast es ja beschriftet mit eins, zwei, der ...

17 A (beschriftet) und dann halt drei Fünftel./ (markiert die Zahl am Zahlenstrahl)

18 I Mhm./

19 A Und das, und wenn man die zwei zusammen nimmt, also einen, dann kommt man auf die vier

20 Fünftel.

21 I Ok, dann machen wir ein Halb plus drei Viertel. Jetzt versuch es einmal zu rechnen, ohne,

22 dass du gleich auf gleichen Nenner bringst, ob das auch funktioniert.

23 A (denkt, schreibt das Ergebnis hin)

24 I Mhm, wie bist du jetzt darauf gekommen?

25 A Also, da, wenn man das mit zwei .. ah multipliziert, kommen das zwei Viertel raus, und wenn

26 man die zu drei Viertel dazu gibt, erhält man fünf Viertel, und das ist ein Ganzes ein Viertel.

27 I Ok, das heißt du hast wieder auf gleichen Nenner gebracht.

28 A (nickt)

29 I Ok, kannst du mir das auch irgendwie aufzeichnen? Muss nicht auf dem Zahlenstrahl sein, aber

30 kann auf dem Zahlenstrahl sein.

31 A Also mit den Einheiten?

32 I Genau.

33 A (zeichnet) Mhh, das ist die Hälfte, also zwei Viertel von einem Ganzen und ein Halbes ist halt

34 auch die Hälfte, also ist halt das, gleich das da, also gehört dieses eine Halbe da...

35 I Ok, und jetzt noch plus drei Viertel rechnen, oder?

36 A Ja, also wenn man das plus dem rechnet, kommt dann ein Ganzes ein Viertel heraus.

37 I Mhm./ Ok ... gut dann machen wir drei Viertel plus zwei Siebentel.

38 A (schreibt) Also der erste gemeinsame Nenner ist achtundzwanzig./

39 I Mhm./

40 A (rechnet, schreibt das richtige Ergebnis hin)

41 I Mhm, und wieso muss ich da jetzt auf ganzen Nenner bringen? Ah, auf gleichen Nenner.

42 A Äh, weil sonst kommt kein, sonst kann man es nicht ausrechnen, weil ...

43 I Wieso nicht?

44 A (denkt) Weil das unten bleibt, die Nenner bleiben immer gleich .. und wenn man

45 unterschiedliche Nenner hat, geht es halt dann nicht, dass sie gleich bleiben.

46 I Mhm./ Ok. Ahm, zwei Ganze ein Drittel ... plus ein Ganzes ein Viertel, plus ein Ganzes ein

46.1 Viertel.

47 A (schreibt) Achso.

48 I Genau.

49 A Also zuerst die zwei Brüche in unechte Brüche umwandeln, das sind dann da sieben Drittel,

50 und das sind fünf Viertel, dann kann man die da wieder auf gleichen Nenner bringen./

51 I Mhm./

52 A Also der erste ist zwölf-.

53 I Mhm./

54 A Da mal vier, also achtundzwanzig./

55 I Mhm./

56 A Und, also mal drei sind fünfzehn.

57 I Mhm./

58 A (denkt, schreibt)

59 I Ok, ist es wirklich notwendig, dass man die Brüche zuerst auf .. auf, unechte Brüche bringt?

60 Also die gemischten Zahlen?

61 A Ja.
62 I Ja./ Wieso?
63 A Weil wenn man das dann auf gleichen Nenner bringen will./
64 I Mhm./
65 A Und dann weiß und dann lässt man halt die zwei Ganzen und die ein Ganzen so stehen, dann
66 kommt man nicht auf das richtige Ergebnis.
67 I Mhm./ Sollen wir es einmal ausprobieren?
68 A (nickt)
69 I Ok, probieren wir es einmal.
70 A (rechnet)
71 I Genau, und die Ganzen nicht vergessen.
72 A (rechnet, erhält dasselbe Ergebnis)
73 I Und ist das jetzt Zufall, dass es jetzt stimmt bei diesen Zahlen?
74 A (denkt) Nein./ (denkt)
75 I Was sagst du dazu, dass das jetzt, dass das auch funktioniert hat?
76 A (denkt)
77 I Sollen wir das nächste Beispiel machen?
78 A (nickt)
79 I Ja, ok. Gut, dann haben wir drei Ganze zwei Drittel plus ein Ganzes, ah, zwei Drittel.
80 A (rechnet mit gemischten Zahlen) Jetzt habe ich es mal so gelassen, und jetzt probier ich es so
81 noch einmal.
82 I Mhm, ok.
83 A (rechnet nur mit Brüchen) Das ist wieder gleich.
84 I Mhm, und kann man das jetzt allgemein sagen, dass man es immer so lassen kann?
85 A (nickt)
86 I Ja?
87 A (nickt)
88 I Ja, ok. Hast du da irgendein, kannst du das begründen auch, oder schließt du das aus den
89 zwei Beispielen?
90 A Aus den Beispielen.
91 I Ok, dann machen wir zwei Drittel minus ein Halb.
92 A (rechnet, kommt auf das richtige Ergebnis)
93 I Genau, kannst du das aufzeichnen auch irgendwie?
94 A (zeichnet Zahlenstrahl) Also wir haben jetzt die Sechstel, die drei Sechstel, wenn man das
95 minus rechnet, kommt man auf die Sechstel da.
96 I Mhm, wieso?
97 A Weil, wenn man drei, das sind vier Stricherl, wenn man da hier wegchnet drei, dann kommt
98 man nur mehr auf ein Stricherl.
99 I Ok.\ Dann haben wir drei Ganze ein Viertel, minus ein Ganzes drei Fünftel.
100 A (rechnet mit gemischten Zahlen, kommt auf das richtige Ergebnis)
101 I Wie bist du jetzt auf das gekommen?
102 A Also, also, zw, zwölf Zwanzigstel sind größer wie fünf Zwanzigstel, und wenn man da also ein
103 Ganzes und da drei Ganze hat, sieht man also das das eine Ganze geht da rüber, hat man zwei,
104 und dann zieht man diese, die zwölf halt von dem fünf, mal ab, dann kommt man auf null
105 dann hat man noch sieben übrig, und die zieht man dann von dem zwei dann ab und dann hat
106 man dreizehn.

Lara 3.Klasse (19:25-29:05)

1 I Drei Fünftel plus ein Fünftel.
2 L (rechnet)

3 I Mhm./ Kannst du mir das irgendwie graphisch darstellen? ... Oder irgendwie anschaulich
4 darstellen oder erklären.
5 L (zeichnet einen Kreis) Das geht nicht mit einem Kreis, wenn es so ungerade ist, dann geht es so
6 blöd zum Einzeichnen. Das ist jetzt ein bisschen-.
7 I Mhm, macht nichts.
8 L (zeichnet weiter)
9 I Mhm./ Genau, also erklär mir noch einmal, was du gezeichnet hast.
10 L Ahm, von einem, keine Ahnung, wenn von einer Torte drei Stück nimmt, und dann noch eines,
11 dann hat man vier.
12 I Mhm, ok, passt. Dann haben wir ein Halb plus drei Viertel, du kannst eine neue Seite anfangen.
13 L Geht eh da auch noch (rechnet).
14 I Ok, wie hast du das Ergebnis jetzt berechnet?
15 L Man muss die Brüche auf den gleichen Nenner bringen./
16 I Mhm./
17 L Und dann einfach nur die Zähler zusammenzählen.
18 I Ok, und wieso muss man die auf einen gleichen Nenner bringen?
19 L (denkt) Weil ein Halbes ist ja eigentlich, also Halbe sind größer als Viertel.
20 I Mhm./
21 L Und wenn man das da zusammenzählt, also wenn man die . Nenner .. auch, auch
22 zusammenzählt, dann kommt etwas ganz anderes heraus, dann kommt vier Sechstel heraus ..
23 und das stimmt ja eigentlich nicht, weil da ist dann...
24 I Aber hast du da Nenner und Zähler zusammengezählt, bei deiner Rechnung?
25 L **Nein**, nur die Zähler.
26 I Mhm./ Und wieso zählen wir nur die Zähler zusammen?
27 L Weil der Nenner ja gleich bleibt.
28 I Mhm./ Kannst du mir das irgendwie aufzeichnen noch?
29 L (zeichnet Addition mit Kreisen) Also das ist dann ein Halbes ... plus drei .. Viertel.
30 I Mhm, genau ja ... Ok, dann machen wir zwei, ah drei Viertel plus zwei Siebentel.
31 L (rechnet, kommt auf das richtige Ergebnis)
32 I Mhm, ok. Kannst du mir das einmal, oder machen wir es beim Nächsten. Machen wir zwei
33 Ganze ein Drittel plus ein Ganzes ein Viertel.
34 L (rechnet mit unechten Brüchen, kommt zum richtigen Ergebnis)
35 I Ok, was hast du gemacht?
36 L Also zuerst die auf unechte Brüche gebracht, und dann wieder auf den gleichen Nenner.
37 I Mhm./
38 L Und dann wieder die Zähler zusammengezählt.
39 I Ok, ist es wirklich **notwendig**, dass du die auf unechte Brüche bringst, oder wäre das anderes
40 auch irgendwie gegangen?
41 L Eigentlich, es geht eigentlich anders auch, man kann nur das da, also diese echten Brüche da
42 auf den gleichen Nenner bringen, und dann sind das sowieso drei Ganze und das da
43 zusammen, also drei Ganze und sieben Zwölftel.
44 I Mhm./ Ok. Kannst du mir das vielleicht auf dem Zahlenstrahl einzeichnen?
45 L Die Rechnung?
46 I Die, ja, die Addition, genau.
47 L (zeichnet) Also nur die Zahlen, weil, und das Ergebnis dann?
48 I Ahm, irgendwie diese Addition auf dem Zahlenstrahl darstellen.
49 L (denkt)
50 I Oder stelle einmal nur die erste Zahl dar.
51 L (denkt) Also soll ich...
52 I Einfach einzeichnen, wo die ist. Du wählst die, du sagst wo null ist, wo eins ist....

- 53 L (zeichnet eine Einteilung, beschriftet diese)
- 54 I Mhm, und kannst du da jetzt irgendwie die Addition darstellen?
- 55 L (denkt) Ja man könnte halt ein Ganzes ein Viertel dann da einzeichnen und das dann einfach
- 55.1 zusammen zählen,
- 56 nur dann ist es halt umgedreht. Also man darf ja beim Addieren vertauschen.
- 57 I Ja, das stimmt, ja. Aber kannst du es irgendwie so einzeichnen, dass es ganz anschaulich ist,
- 58 dass ich da nur mehr hinschauen muss, brauche, und das Ergebnis weiß, ablesen kann vom
- 59 Zahlenstrahl.
- 60 L (denkt)
- 61 I Oder du kannst einmal das Ergebnis einzeichnen, und schauen wie wir da hinkommen, wenn
- 62 du willst.
- 63 L (zeichnet das Ergebnis ein) Also das kann ich nur zirka einzeichnen.
- 64 I Ja.
- 65 L (denkt)
- 66 I Fällt dir noch etwas ein dazu?
- 67 L Nein, ich weiß es nicht.

Christiane (14:45-17:45)

- 1 I Wieviel ist denn drei Fünftel plus ein Fünftel?
- 2 C Vier Fünftel./
- 3 I Ok, kannst du mir das vielleicht irgendwie aufzeichnen, sodass das auch ein Volksschüler
- 4 verstehen kann, der noch nichts von Bruchrechnung gehört hat?
- 5 C J a./ (zeichnet Addition mit Kreisen)
- 6 I Mhm./ Genau, ja. Wieviel ist denn ein Halb plus drei Viertel?
- 7 C Sieben Viertel.
- 8 I Mhm, zeig mir das einmal./
- 9 C Wieder aufzeichnen?
- 10 I Ja mit irgendeiner Zeichnung, müssen nicht immer Kreise sein, wie du willst.
- 10.1 C (zeichnet Kreise, wobei sie im Ergebnis sieben Viertel anmalt)
- 11 Weil das ist ja, ein Halbes sind im Prinzip zwei Viertel./ (die Schulglocke läutet)
- 12 I Erklär mir das bitte noch geschwind.
- 13 C Ja ein Halbes sind ja zwei Viertel, wenn du das umwandelst./
- 14 I Ok, das heißt was hast du dann angemalt im Ergebnis?
- 15 C Ahm ... ja, das.
- 16 I Weil da habe ich ja jetzt, da habe ich eins, zwei, drei, vier, fünf Viertel, und da habe ich eins,
- 17 zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben Viertel.
- 18 C Achso, aja. (zeichnet) Ein halbes plus drei Viertel.
- 19 I Mhm.
- 20 C Da habe ich mich vertan.
- 21 I Ok, was kommt raus?
- 22 C Ahm, fünf Viertel.

Evelyn (11:50-24:45)

- 1 I Wieviel ist denn drei Fünftel plus ein Fünftel?
- 2 E Kann ich auch aufschreiben?
- 3 I Ja, wenn du willst.
- 4 E Achso, drei , ah vier Fünftel.
- 5 I Ähm, kannst du mir das irgendwie in einer Zeichnung, ganz, also wenn ich jetzt keine
- 6 Bruchrechenregeln kann, dass ich sehe, dass das wirklich so ist?
- 7 E Ja (zeichnet Kreis, markiert die Fünftel). Also ein Fünftel plus drei Fünftel sind vier Fünftel.

8 I Ok, ja. Wieviel ist ein Halb plus drei Viertel?

9 E (rechnet) Fünf Viertel.

10 I Mhm./ Ok, wie bist du jetzt auf das gekommen?

11 E Ja ich habe zuerst auf gleichen Nenner gebracht, also ein Halbes, da schauen wir, das ist zwei

12 Mal./

13 I Mhm./

14 E Und, da auch zwei Mal./

15 I Mhm, und wieso bringt man da überhaupt auf gleichen Nenner?

16 E Ähm, weil man sonst nicht, ähm, eben addieren kann.

17 I Ok, und warum nicht?

18 E Weil es nicht die gleichen Zähler sind.

19 I Nicht die gleichen Zähler?

20 E Die gleichen **Nenner**.

21 I Ok. Ahm, wieso kann ich nicht mit ungleichen Nennern addieren?

22 E Weil es falsch wäre...

23 I Wäre falsch.

24 E Ja.

25 I Ok, wieviel ist drei Viertel plus zwei Siebentel?

26 E (rechnet) Ein Ganzes.

27 I Ein Ganzes, hm...ok./ Da hast du dich ein bisschen verrechnet.

28 E (denkt)

29 I Wieviel ist einundzwanzig plus acht?

30 E Oh (lacht), neunundzwanzig, ein Ganzes ein Achtundzwanzigstel.

31 I Ok, wieviel ist denn zwei Ganze, nein drei Ganze zwei Drittel plus ein Ganzes zwei Drittel?

32 E (schreibt)

33 I Ein Ganzes, zwei Drittel.

34 E (rechnet mit unechten Brüchen)

35 I Mhm./ Ok. Was hast du da jetzt gemacht?

36 E Also ich habe zuerst einmal, drei Ganze sind neun Drittel, und ein Ganzes sind sechs Drittel,

36.1 ah, drei Drittel,

37 und dann habe ich die dazu gezählt, also die Zähler, und dann habe ich elf Drittel und acht

38 Drittel, und das sind dann halt neunzehn Drittel, und dann habe ich noch gekürzt, auf...

39 I Ok, und ist es wirklich notwendig, dass man den Dreier zum Beispiel auf Drittel bringt?

40 E Nein also eigentlich nicht.

41 I Kannst du es anders auch machen?

42 E Ah, mh.

43 I Nein?

44 E Nein es ist schon notwendig.

45 I Schon notwendig?

46 E Ja.

47 I Ok, kannst du mir irgendwie, kannst du mir die Rechnung irgendwie zeichnerisch erklären?

48 Vielleicht nicht in einem Kreis, das wird ein bisschen zu schwierig.

49 E (denkt)

50 I Aber wenn dir nichts anderes einfällt, kannst du es mir mit einem Kreis auch erklären.

51 E Ok, ähm ... ich mach es einmal mit einem Kreis (zeichnet) wah, das sind viele Kreise (lacht).

52 I Nur einmal die Rechnung, ohne dass du schon auf das Ergebnis...

53 E Achso, also drei Ganze sind drei Kreise ... und dann zwei Drittel ... und ein Ganzes zwei Drittel,

54 sind ein ganzer Kreis und auch zwei .. (zeichnet die Drittelstücke im Kreis an).

55 I Ok, und was können wir da für ein Ergebnis ablesen?

56 E Also eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn, elf, zwölf, dreizehn ...

57 I Der gehört noch dazu (zeigt auf einen Kreis).

58 E Achso, vierzehn, fünfzehn, sechzehn (denkt).

59 I Ok, jetzt haben wir da sechzehn Drittel.

60 E Ja, jetzt haben wir alles.

61 I Vorher haben wir neunzehn Drittel gehabt, was ist denn richtig, welches von den zweien.

62 E Der, also die **Rechnung** ist richtig.

63 I Wo haben wir uns dann vertan bei den Kreisen?

64 E Einen Kreis zu wenig./

65 I Na wir haben da eins, zwei, drei ganze Kreise gezeichnet, und zwei Drittel, und da hast du

66 einen ganzen Kreis gezeichnet und zwei Drittel. Also ist eigentlich alles da.

67 E (denkt, korrigiert ihre Rechnung)

68 I Ok, passt noch immer nicht ganz genau.

69 E (denkt)

70 I Wieviele Drittel sind ein Ganzes?

71 E Drei, **oh**, fünf.

72 I Genau, ja. Ok, also war in unserem Fall die Zeichnung richtig.

73 E Ja.

74 I Wieviel ist denn zwei Drittel minus ein Halb?

75 E (schreibt) Null.

76 I Null, wenn das null ist, müssten zwei Drittel und ein Halb gleich groß sein, oder?

77 E Ja.

78 I Ist das so?

79 E Nein.

80 I Ok, dann tu es noch einmal nachrechnen.

81 E (denkt, korrigiert ihre Lösung)

82 I Genau, können wir die Rechnung irgendwie zeichnerisch lösen?

83 E Ja.

84 I Du kannst gerne einen neuen Zettel anfangen, wenn du magst.

85 E Also das sind zwei Drittel .. und minus ein Halbes .. sind, also ich rechne das Umgerechnete...

86 I Nein, mach es gleich so.

87 E Achso.

88 I Oder du kannst auch zusätzlich die Sechsteileinteilung machen, wenn du willst.

89 E (zeichnet, schafft es nicht Sechstel im Kreis einzuzeichnen)

90 I Vielleicht ist es im Rechteck leichter, Sechstel einzuzeichnen.

91 E Ja, schon. (zeichnet ein Rechteck) Also vier Sechstel, ähm, minus drei Sechstel .. ist ein Sechstel.

92 I Mhm./ Ok, und kannst du mir das jetzt auch mit zwei Drittel und ein Halb erklären, mit unserer

93 Angabe?

94 E Nein, weil es nicht die gleiche, weil es nicht der gleiche Nenner ist.

95 I Ok, aber es sind ja die gleichen Zahlen oder?

96 E Ja, es sind schon die gleichen Zahlen, aber man wandelt sie um, damit man mit ihnen rechnen

97 kann.

98 I Mhm, dann noch eine Aufgabe, drei Ganze ein Viertel minus .. minus ein Ganzes drei Fünftel.

99 E (schreibt sofort in unechten Brüchen, rechnet, kommt auf das richtige Ergebnis)

Lebenslauf

Angaben zur Person

Name **Eggharter Cornelia**
Adresse 3601 Dürnstein 110
Telefon 06509496194
E-Mail cornelia.eggharter@gmail.com



Staatsangehörigkeit Österreich

Geburtsdatum 19.03.1990

Ausbildung

Februar 2013 Ausbildung zur Wintersportwochenbegleitlehrerin (Schi)
Wintersemester 2011/2012 Erasmus in Frankreich (Angers)
Seit 2009 Lehramtsstudium Mathematik und Französisch an der Universität Wien
Juni 2008 Matura mit gutem Erfolg
2007 Cambridge Certificate
2000 - 2008 Bundesrealgymnasium Krems, Ringstraße
1996 - 2000 Volksschule Dürnstein

Berufserfahrung

Seit September 2013 Unterricht im BG/BRG Josefstraße, Sankt Pölten
Seit März 2013 Einzel- und Gruppenunterricht im Lernquadrat Krems in Mathematik und Französisch
Sommersemester 2012 Einzel- und Gruppenunterricht im Lernquadrat Wien (4. Bezirk) in Mathematik und Französisch
Seit 2010 Mitarbeit im Schwimmverein Krems (Schwimmkurse und Training mit Kindern)
2006 - 2011 Gästekinderbetreuung im Loibnerhof

**Sprachliche
Kompetenzen**

Muttersprache: Deutsch
Englisch (B2)
Französisch (C1)
Latein

Hobbys

Schwimmen
Laufen
Schifahren
Aktives Mitglied der Wasserrettung Krems
Tennispielen

Abstract

Das zentrale Thema dieser Diplomarbeit sind Fehlvorstellungen in der Bruchrechnung. In meiner Arbeit wird erklärt, was Fehlvorstellungen sind, wie sie zu Stande kommen und welche es im Bereich der Bruchrechnung gibt. Für die meisten Erwachsenen, welche die Bruchrechnung in der Schule vielleicht selbst nie so gern mochten, mag es nun wenig überraschend sein, dass es im Bereich der Bruchrechnung viele Probleme gibt, und es hier auch verstärkt zu Fehlvorstellungen kommt.

Die nun wirklich neue Erkenntnis dieser Arbeit betrifft Interventionen, die Lehrpersonen oft verwenden, mit dem Ziel SchülerInnen eine Aufgabe verständlicher zu erklären und Fehlvorstellungen zu reduzieren. Motivierte Lehrkräfte lassen sich dazu die kreativsten und abwechslungsreichsten Erklärungen und Veranschaulichungen einfallen, in der Hoffnung den SchülerInnen zu maximalem Verständnis zu verhelfen.

In kurzen Einzelinterviews mit SchülerInnen der zweiten und dritten Klassen Unterstufe, wurde anhand von Aufgaben, die Fehlvorstellungen provozieren sollen, untersucht, inwiefern SchülerInnen auf solche Interventionen ansprechen und inwieweit diese für sie auch hilfreich sind. Hier gab es die große Überraschung: Wider Erwarten, wurden von den SchülerInnen nur sehr wenige der Interventionen angenommen. Die Analyse der Fehlvorstellungen der Testpersonen, und mögliche Ursachen für das Funktionieren beziehungsweise Nichtfunktionieren bestimmter Interventionen werden in dieser Diplomarbeit detailliert präsentiert.

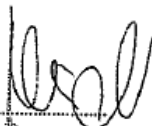
SACHERSCHLIESSUNG der Fachbereichsbibliothek Mathematik, Statistik, Informatik der Universität Wien
--

Klassifikation	
Aufstellungsort:	☐ HoA ☒ HoD
MSC2000:	00435
BK:	

Schlagwortketten nach RSWK
<i>Bruchrechnung - Schüler - Füller</i>

Kontrollvermerk der Fachbibliothek:

1.10.2014
Datum


Unterschrift