



universität
wien

MASTERARBEIT

Titel der Masterarbeit

Einführung in die VERA-Analyse mit Hilfe
von Monte-Carlo Verfahren

Verfasser

Gregor Manfred Löscher, BSc

angestrebter akademischer Grad

Master of Science (MSc)

Wien, 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 066 614
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Masterstudium Meteorologie
Betreuer:	O. Univ.-Prof. Dr. Reinhold Steinacker

Zusammenfassung

Diese Masterarbeit beschäftigt sich mit dem am Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Wien entwickelten Analyseprogramm VERA (Vienna Enhanced Resolution Analysis).

Dieses Produkt analysiert modellunabhängig eine Vielzahl von meteorologischen Parametern (z.B.: Temperatur, Wind, Bodenluftdruck, etc.) indem die punktuellen und ungleich verteilten Stationswerte auf ein regelmäßiges Gitter interpoliert werden. Die Analyse wird durch Zusatzinformationen (z.B.: Topografie, Bodenbeschaffenheit, etc.), den sogenannten Fingerprints, verfeinert, um speziell im komplexem Gelände die Qualität zu verbessern.

Die VERA-Lösungen werden durch Minimierung einer Kostenfunktion (minimale Steigung und/oder Krümmung) bestimmt, wobei operationell bis dato eine Matrixgleichung aufgestellt und instantan gelöst wird. Dadurch kommt man zwar relativ rasch zur optimalen Lösung, allerdings erlaubt diese Methode nicht das Einbeziehen komplexerer Zusatzinformationen.

In dieser Masterarbeit nimmt man einen Monte-Carlo Ansatz zu Hilfe, bei dem die Gitterpunkts- und Fingerprintgewichte durch einen iterativen Prozess, unter Einbeziehung von Zufallszahlen, modifiziert und in weiterer Folge entweder verworfen oder akzeptiert werden. Dadurch gelangt man schrittweise zur Lösung, wodurch letztlich für jeden Gitterpunkt und alle Fingerprintgewichte eine Wahrscheinlichkeitsverteilung angegeben werden kann. Darin liegt, neben der flexibleren Verwendung von Zusatzwissen, der wesentliche Vorteil dieses Ansatzes.

Abstract

This master thesis is based on VERA (Vienna Enhanced Resolutin Analysis) which is developed at the Department of Meteorology and Geophysics in Vienna. It is a model-independent analysis program for a variety of meteorological parameters (e.g. temperature, wind, pressure, etc.). VERA uses additional predefined information, called fingerprints (e.g. topography, landuse, etc.), to improve the analysis, which is an advantage especially over complex topography.

The solution of VERA is determined by minimizing cost-functions (minimum slope and/or curvature) which is yet realized by solving matrix equations. This method comes to the best result fast but does not allow the use of complex fingerprints.

This master thesis describes a new way to solve the cost-functions. With the help of the so called Monte-Carlo method, the solution comes from an iterative process which allows the use of more complex fingerprints and you can get a probability function of each gridpoint and fingerprint weight.

Inhaltsverzeichnis

1	Inhalt und Ziele	1
I	Grundlagen	3
2	Analyseverfahren	4
3	Fingerprint	6
3.1	Thermischer Fingerprint	6
3.1.1	Fingerprint der Potentiellen Temperatur auf Minimumtopografie	8
3.2	Dynamischer Fingerprint	10
4	Monte-Carlo Methode	12
II	VERA - Vienna Enhanced Resolution Analysis	15
5	Allgemeines	16
6	Analyseverfahren ohne Fingerprint	18
6.1	LAMA	18
6.1.1	1D	18
6.1.2	2D	24
6.2	STAMA	29
6.2.1	1D	29
6.2.2	2D	32
7	Analyseverfahren mit Fingerprint	33
7.1	LAMA	34
7.1.1	1D	34
7.1.2	2D	37

7.2	STAMA	38
7.2.1	1D	38
7.2.2	2D	39
III	VERA-Analyse mit Monte-Carlo Methode	41
8	Einleitung	42
9	Analyseverfahren ohne Fingerprint	43
9.1	LAMA	43
9.1.1	1D	43
9.1.2	2D	50
9.2	STAMA	50
10	Analyseverfahren mit Fingerprint	54
10.1	LAMA	54
10.2	STAMA	59
11	Fallbeispiel	64
12	Fazit und Ausblick	71
IV	Anhang	72

Kapitel 1

Inhalt und Ziele

Ziel dieser Masterarbeit ist es, eine neue Lösungsmethode der Analysen des am Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Wien entwickelten Programmes VERA (Vienna Enhanced Resolution Analysis) darzustellen. Diese Methode soll mit Hilfe des sogenannten Monte-Carlo Verfahrens verwirklicht werden. Die Vorteile jener Herangehensweise sollen das Erstellen einer Wahrscheinlichkeitsfunktion für jeden Gitterpunkt der Analyse und jedes Gewicht der Fingerprints und in weiterer Folge das Einbeziehen komplexerer Fingerprints sein.

Um eine nachvollziehbare Bearbeitung des Themas gewährleisten zu können, gliedert sich diese Masterarbeit in drei Teile:

Zunächst wird in Teil I ein allgemeiner Einblick in Analyseverfahren gegeben. Anschließend werden Fingerprints überblicksmäßig beschrieben, welche für die VERA Analyse - und in weiterer Folge für diese Masterarbeit - entscheidend sind. Der erste Teil schließt mit einer Einführung in die Monte-Carlo Methoden ab.

In Teil II wird das Analyseprogramm VERA behandelt, wobei besonderes Augenmerk auf die derzeit operationelle Berechnung gelegt wird. Im Rahmen dessen wird die Methode des Analyseprogrammes VERA vorgestellt, welche auch für die VERA mit Hilfe des Monte-Carlo Verfahrens Gültigkeit besitzt. Dabei wird die Theorie, sowohl im eindimensionalen, als auch im zweidimensionalen Fall anhand praktischer Beispiele dargestellt.

Im abschließenden Teil III wird zunächst die Monte-Carlo Methode im Zusammenspiel mit der VERA erläutert, anschließend sowohl der eindimensionale, als auch zweidimensionale Fall beschrieben. Des weiteren soll auf ein reales Fallbeispiel eingegangen werden, um einerseits den Bezug zur Wirklichkeit herstellen zu können und andererseits aufzuzeigen, welche Aufgaben noch getätigt werden müssen, um eine umfangreiche Analyse erstellen zu können. Abschließend folgt eine Gegenüberstellung des herkömmlichen Analyseprogrammes und der VERA mit Hilfe des Monte-Carlo Verfahrens, in welcher die Vor- und Nachteile der jeweiligen Verfahren dargelegt werden.

Teil I

Grundlagen

Kapitel 2

Analyseverfahren

Meteorologische Analysen werden zur diagnostischen Betrachtung der Atmosphäre, als Anfangszustand für Prognosemodelle oder für die Modellverifikation verwendet und müssen daher eine hohe Genauigkeit aufweisen. Das Zeichnen von Wetteranalysen bzw. Wetterkarten war jahrzehntelang eine der Hauptaufgaben der MeteorologInnen, in welche sie fachspezifisches Wissen und langjährige Erfahrung über die physikalischen Prozesse in der Atmosphäre miteinfließen lassen mussten. Heutzutage werden die großen Datenmengen des Beobachtungsnetzwerkes per Computern aufbereitet und mittels objektiven Analyseverfahren ausgegeben, welche die Arbeit eines erfahrenen Meteorologen/ einer erfahrenen Meteorologin imitieren soll(Steinacker et al. 2000, 2758). Aufgrund der zunehmenden Auflösung der numerischen Prognosemodelle wird die Anforderung der Analysen dementsprechend höher, allerdings können speziell im komplexen Gelände, in der die zeitlich und räumliche Datendichte gering ist, die notwendige Auflösung nicht sichergestellt werden. Aufgrund dessen bedarf es, insbesondere für die Mesoskala, spezielle Ansätze, um die Modelle mit den Analysen vergleichbar zu machen. Dabei gibt es die Methoden, dass man die Analyse auf Basis eines First-Guess Feldes des Modells erstellt.

Steinacker fasst fünf Gruppen von Analysen zusammen, die Information von ungleichmäßig verteilten Beobachtungsstationen auf ein regelmäßiges Gitter interpoliert, ohne von Modellen abhängig zu sein (Steinacker et al. 2000, 2304f.):

1. Eine der ersten Methoden ist jene von Panofski (1949), der Polynominterpolation dritten Grades bei minimierten Fehlerquadraten verwendet.
2. Gilchrist und Cressman (1954) bedienen sich an einen Polynomansatz, der vorbestimmte und empirische Gewichtungsfunktionen nutzt.
3. Barnes (1964) setzt gewichtete und harmonische Funktionen zur Verbesserung der Analysen ein.

4. Gandin (1965) stellte als Erster die *optimum interpolation* Methode - abgekürzt OI - vor, bei der ein Beobachtungsfeld und ein Feld mit Hintergrundinformation vorhanden sein müssen und diese so mit ihren geschätzten Fehlern gewichtet werden, sodass die Analyse einen minimalen Fehler erhält. Allerdings liegt bei dieser Methode der Nachteil in der ungenauen Fehlerabschätzung.
5. Die Variationsanalyse scheint die effektivste Methode zur Analyse von atmosphärischen Feldern zu sein. Dabei spielt die Spline-Interpolation eine besondere Rolle, da hierbei mathematische und physikalische Nebenbedingung für die Minimierung der Kostenfunktion gebraucht werden (Steinacker et al. 2000; Steinacker et al. 2006).

Die VERA Analyse fällt in den Bereich der Variationsanalyse, da hierbei vordefinierte Felder mit physikalischem Hintergrund und mathematische Glattheitsbedingungen verwendet werden um die Kostenfunktion zu minimieren. Weiters stellt sie die Forderung der Modellunabhängigkeit, um eine objektive Analyse bzw. Modellverifikation gewährleisten zu können¹.

¹Detaillierte Beschreibung der VERA Analyse folgt in Teil II

Kapitel 3

Fingerprint

Als Fingerprint wird ein vordefiniertes Feld bezeichnet, dass das Verhalten der zu betrachteten Größe über einem Gebiet unter idealen Verhältnissen beschreibt. Fingerprints werden zur Verbesserung der Auflösung einer Analyse von meteorologischen Parametern herangezogen, um Strukturen sichtbar zu machen, die aufgrund von variabler Stationsdichte nicht aufgelöst werden können.

Nachfolgend werden zwei verschiedene Arten von Fingerprints nach Steinacker (2006) vorgestellt.

3.1 Thermischer Fingerprint

Der thermische Fingerprint versucht den Einfluss der Topografie auf den Strahlungsgewinn/verlust eines Luftpakets und folglich auf die Temperatur zu quantifizieren. Dabei wird angenommen, dass bei ungestörten Tagesverhältnissen sowohl das reduzierte Luftvolumen eines Tales, als auch das Luftvolumen über einer Ebene den gleichen Strahlungsfluss am Oberrand der Volumina abbekommen. Wenn nun auch die Bodenalbido, der fühlbare und latente Wärmefluss, als auch der Bodenwärmestrom gleich und der Energiegewinn und Verlust gleich verteilt sind, wird das Verhältnis der Gesamtheizung oder Kühlung lediglich durch das Verhältnis der Luftvolumina beschrieben. Der Energiegewinn oder Verlust ist allerdings kaum gleichverteilt und hängt stark von der Stabilität der Luftmasse, als auch der Fläche-Höhe-Beziehung (vgl. Abbildung 3.1) ab (Steinacker 2006, 2762 ff.).

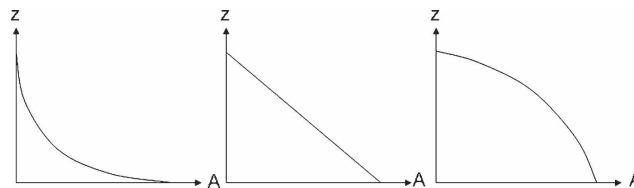


Abbildung 3.1: Fläche-Höhe Verteilungen (Hypsografische Profile): (links) konkav (U-Tal), (Mitte) konstanter Gradient (V-Tal), (rechts) konvex (Y-Tal). (Steinacker 2006, 2762)

Whiteman hat dafür den topografischen Amplifizierungsfaktor(TAF) eingeführt, der das mittlere Verhältnis der Temperaturzunahme über einem Tal im Vergleich zu einer Ebene beschreibt, wobei die Stabilität nicht berücksichtigt wird (Whiteman 1990). Der TAF wird mit Hilfe der Reduktion des Volumens, das einzig durch die Geometrie des Tales erfolgt, angeschrieben (vgl. Abbildung 3.1) (Formel 3.1):

$$TAF = \frac{V}{V_{red}} = \frac{(\Delta x)^2(z_{crest} - z_{valleyfloor})}{(\Delta x)^2(z_{crest} - z_{mean})} \quad (3.1)$$

Für die Talprofile aus Abbildung 3.1 wurde für das rechte Profil der größte TAF-Wert ermittelt, da dieser das geringste Luftvolumen besitzt.

In weiterer Folge kann das Verhältnis eines ganzen Luftpaketes zu jenem teilweise gefüllten, multipliziert mit dem Verhältnis der differentiellen Fläche zur gesamten Fläche als differentieller, massenspezifischer TAF angesehen werden und schreibt sich mit Druckwerten für verschiedene Höhen, folgendermaßen:

$$DTAF_M(h) = \frac{[p(z_{layerbottom}) - p(z_{layertop})]_h}{[p(z_{mean}) - p(z_{layertop})]_h} \frac{A_h}{A} \quad (3.2)$$

Daraus kann unter Verwendung der Standardatmosphäre folgender Fingerprint erzeugt werden:

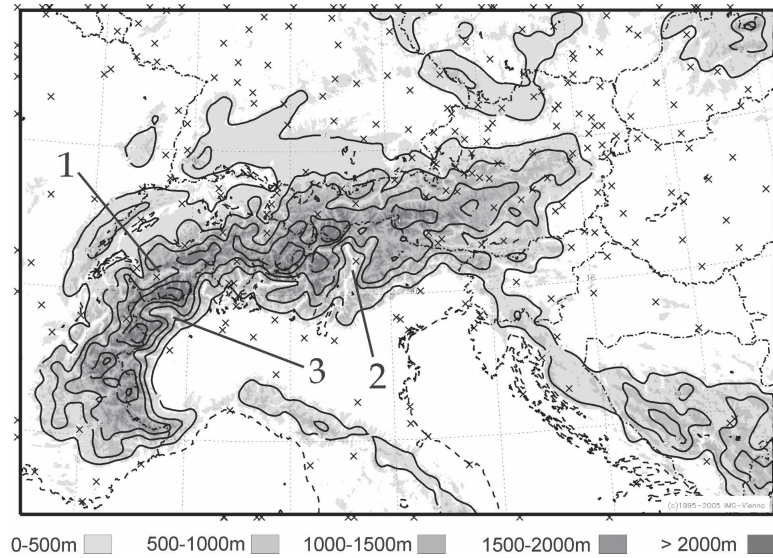


Abbildung 3.2: Idealisierter thermischer Druckfingerprint für die Alpen mit 10km Auflösung. Isothermen sind Unterschiede des Druckes auf Meeresspiegelhöhe (1-hPa Intervall). Graue Schattierung bedeutet Höhe über Meeresspiegel (Steinacker 2006, 2765).

Abbildung 3.2 zeigt den idealisierten thermischen Druckfingerprint für eine 10km Gitterauflösung. Die Größe dieses Gitters bestimmt die Größe der Täler, die aufgelöst werden können und kann beliebig gewählt werden. Der Fingerprint zeigt die Modifizierung des Druckes innerhalb eines Tales

im Vergleich zur Ebene. Breite Täler zeigen einen verminderten Effekt, wie etwa das Etschtal, das mit der Nummer 2 markiert ist. Mit Hilfe dieses Fingerprints können Hitzetiefs oder Kältehochs aufgelöst werden.

3.1.1 Fingerprint der Potentiellen Temperatur auf Minimumtopografie

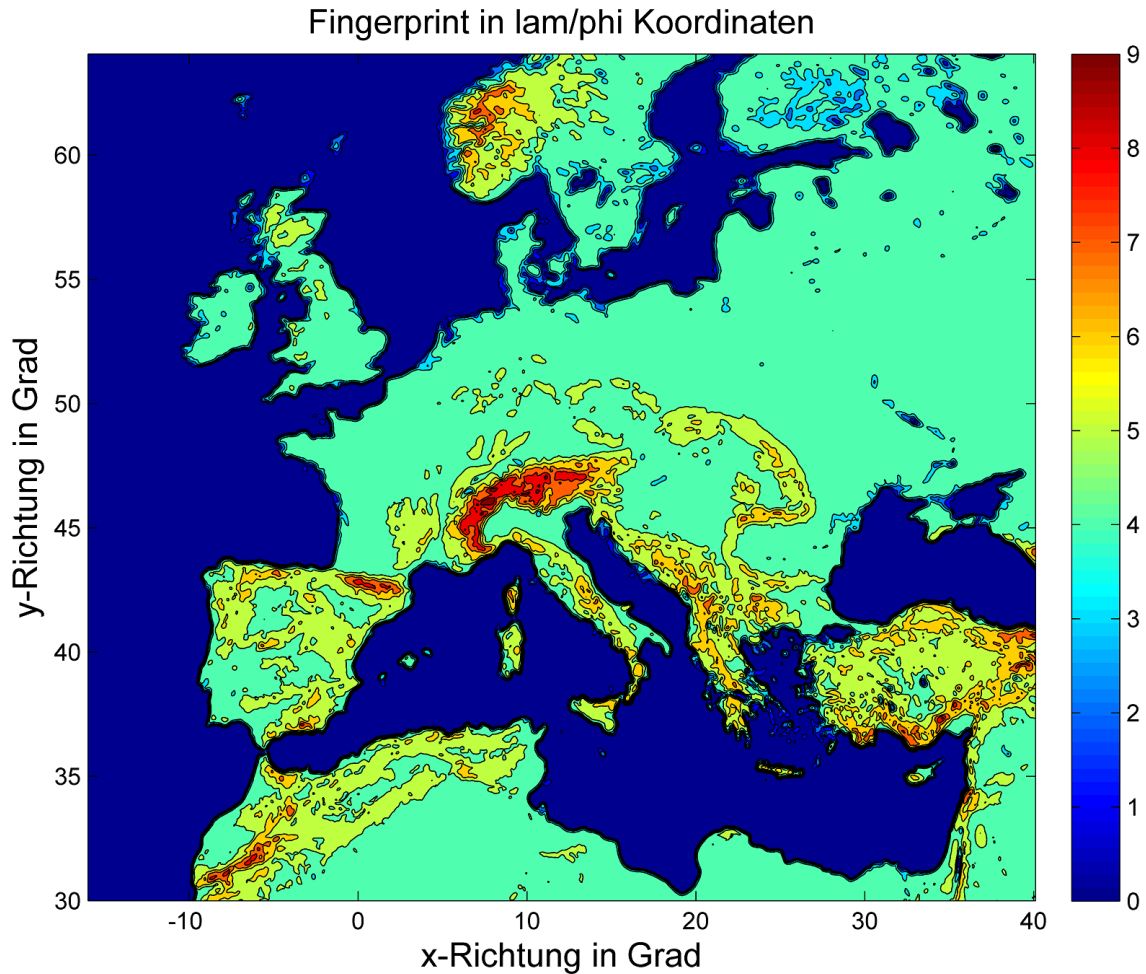


Abbildung 3.3: Fingerprint der der potentiellen Temperatur für die Europadomäne

Für das Fallbeispiel in Teil 3 wird ein Ausschnitt des obigen Fingerprints in Abbildung 3.3 für die potentielle Temperatur verwendet, welcher vom Institut für Meteorologie und Geophysik zur Verfügung gestellt wurde. Nach Reuter, Hantel und Steinacker werden für die Bestimmung der potentiellen Temperatur die Zustandsgrößen Druck und Temperatur isentrop auf den Druck p_0 komprimiert. Dieses Luftpaket hat bei Druck p_0 die Temperatur gleich der potentiellen Temperatur (Reuter, Hantel, Steinacker 2001, 178). Die potentielle Temperatur eignet sich besonders gut zur

Betrachtung der Luftmasse, da alle Temperaturbeobachtungen auf gleiches Druckniveau gebracht werden. Zur Berechnung der potentiellen Temperatur wird folgende Formel verwendet:

$$\Theta = T \left(\frac{p_o}{p} \right)^\kappa \quad (3.3)$$

Dabei ist κ gleich $\frac{R}{c_p}$, wobei R die spezifische Gaskonstante und c_p die spezifische Wärmekapazität beschreibt. Für p_0 wird üblicherweise 1000hPa angenommen.

Bei diesem Fingerprint handelt es sich um einen thermischen Fingerprint. Deutlich erkennbar sind die Meeresoberflächen, die keinen Effekt auf die potentielle Temperatur besitzen. Des weiteren modifizieren erneut die Gebirgsregionen diesen Parameter am Stärksten und die großen Alpentäler, sowie die größeren Binnengewässer (Bodensee, Neusiedlersee, Plattensee,...) mit ihren ausgedehnten horizontalen Oberflächen, sind deutlich sichtbar. Zusätzlich wird die Minimumtopografie verwendet, welche eine modifizierte Topografie mit abgeflachten Bergen darstellt. Zur Erstellung wird das Minimum der Höhendaten innerhalb jeder Zelle eines vordefinierten Gitters bestimmt und die Daten mit dem gefundenen Minimum ersetzt. Ebenen bleiben dadurch erhalten, große Täler werden breiter. Der Grund für die Verwendung der Minimumtopografie liegt darin, dass meteorologische Parameter meist eine Funktion der Höhe und dadurch horizontal schwer vergleichbar sind.

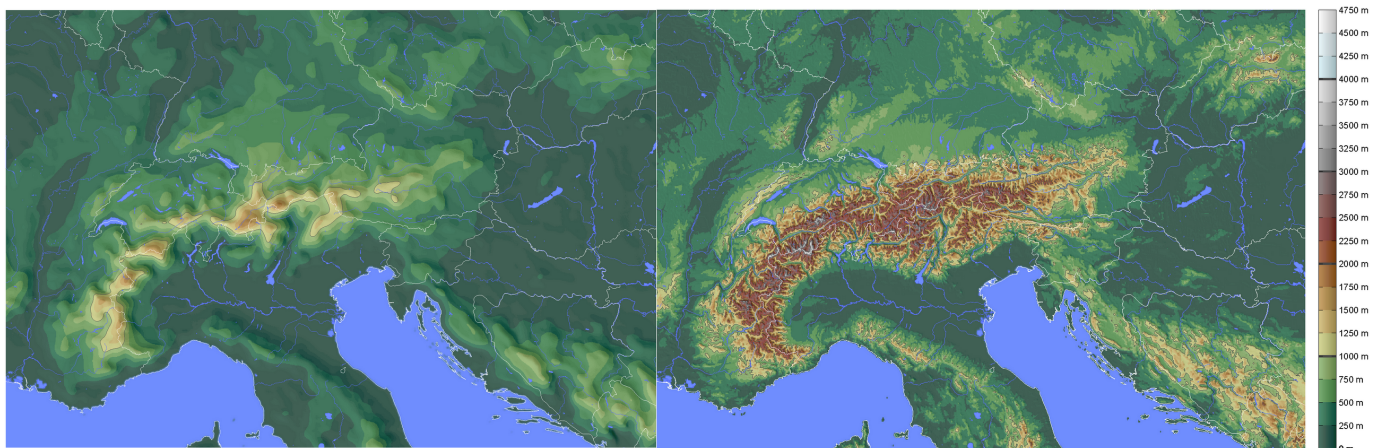


Abbildung 3.4: Vergleich Minimumtopografie (linkst) und reale Topografie (rechts, mit einer Auflösung von etwa einem Kilometer) [<http://www.univie.ac.at/amk/veraflex/test/public/>]

3.2 Dynamischer Fingerprint

Ein Luftpaket, das sich auf ein Hindernis zubewegt, kann dieses teilweise überströmen, teilweise umströmen oder wird teilweise blockiert. Diese Effekte hängen im Allgemeinen von der Größe des Berges, der Stabilität und der Geschwindigkeit des Luftpakets ab und wird mit Hilfe der Froude-Zahl angegeben (Chen, Smith 1987, 2594). Der Effekt der Veränderung der Luftbewegung führt zu einer Druckveränderung, die mit Hilfe der hydrostatischen Beziehung in eine Temperaturänderung umgewandelt werden kann (Steinacker 2006, 2765ff.):

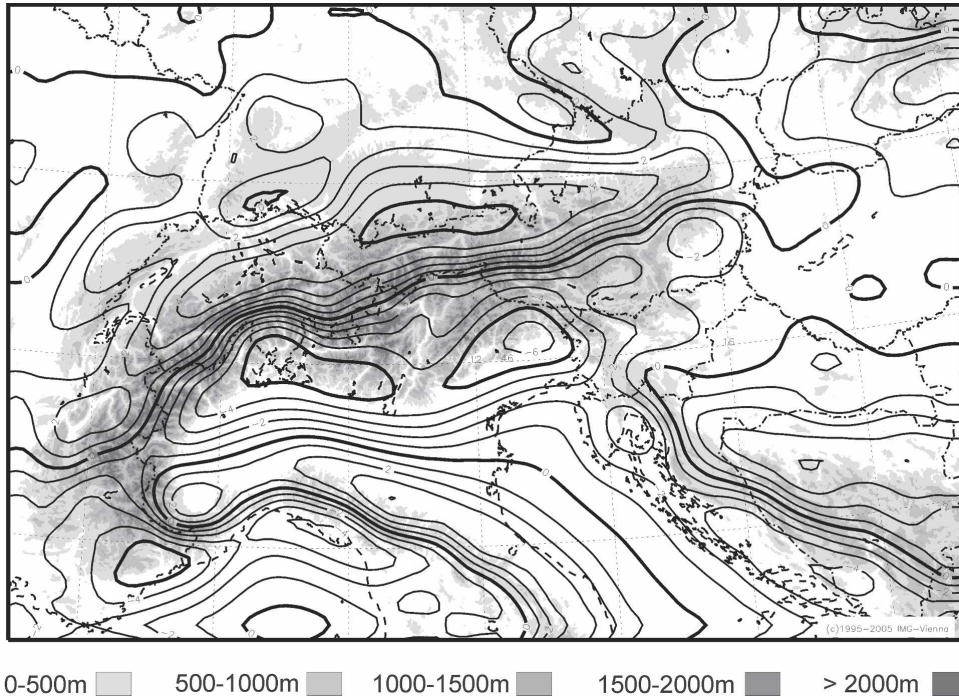


Abbildung 3.5: Idealisierter dynamischer Druckfingerprint für die Alpen mit 10km Auflösung. Isolinien sind Differenzen zwischen Druck auf Meeresniveau und der Ebene (1-hPA Intervall) (Steinacker 2006, 2765).

In Abbildung 3.5 ist der idealisierte dynamische Druckfingerprint für eine Nordströmung auf Meeresniveau dargestellt. Diese dipolige Struktur wird in der Natur nicht beobachtet, da eine Nordströmung einen nach Westen gerichteten Druckgradient voraussetzt. In Abbildung 3.6 ist die Kombination von Druckfingerprint und nach Westen gerichteten Druckgradient dargestellt. Hierbei kommt eine Struktur zustande, die als Föhnase bezeichnet wird, wobei sich bei dieser Wetterlage häufig Föhn in der Alpenregion ausbildet (Steinacker 2006, 2766-2767).

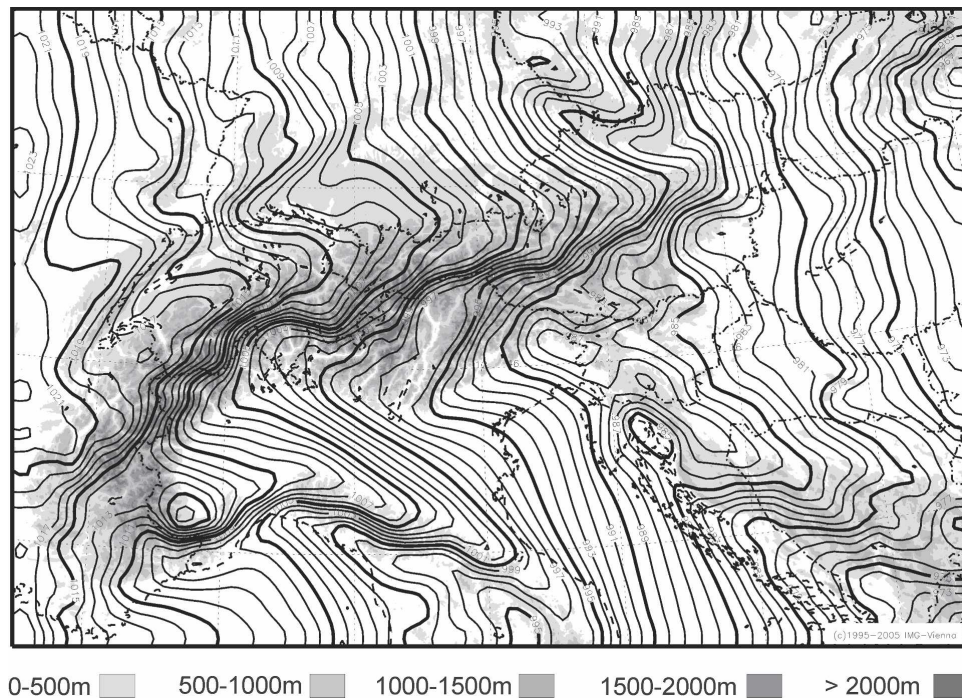


Abbildung 3.6: Idealisierter dynamischer Druckfingerprint kombiniert mit nach West gerichteten Druckgradient. Contourlinien sind alle 1 hPA (Steinacker 2006, 2767).

Im Allgemeinen können Fingerprints mit jedem Zusatzwissen erstellt werden, sofern dieses für den betrachteten Parameter relevant ist. Beispielsweise wird für die Niederschlagsanalyse ein Radar-fingerprint verwendet, der mit Hilfe von Radarbildern die Qualität der Analyse verbessern soll, hinsichtlich der Güte der Beobachtungen, als auch die räumlich Struktur des Niederschlagsgebietes. Weitere verwendete Zusatzinformationen sind zum Beispiel die Bodenbeschaffenheit, Landnutzung oder Schneebedeckung.

Kapitel 4

Monte-Carlo Methode

Der Begriff Monte-Carlo Methode fasst eine Vielzahl verschiedener Algorithmen zur Lösung von mathematischen Problemstellungen zusammen. Diese Verfahren verwenden Wahrscheinlichkeiten und statistische Mittel zur Lösung von naturwissenschaftlichen Aufgaben (Metropolis, Ulam 1949, 335; Anderson 1986, 96) und wurde deshalb von Metropolis, in Anlehnung an den Stadtteil von Monaco mit jenem Namen betitelt.

Enrico Fermi war 1934 einer der ersten, der diese Methode zur Beschreibung von Neutronendiffusionen nützte. Ihm folgend machten sich Teller, von Neumann und nicht zuletzt Metropolis einen Namen mit dem Entwickeln von Monte-Carlo Methoden (Anderson 1984, 96). Nicht zuletzt durch das Aufkommen von Computern in den 40er und 50er Jahren des 20. Jahrhunderts, die den hohen Rechenaufwand bewältigen konnten, setzten sich diese Methoden allmählich durch und spielten beispielsweise für das Manhattan-Projekt eine wichtige Rolle. Einige Monte-Carlo Methoden werden nachfolgend erwähnt (Andrieu 2001, 5ff.):

- Simple Sampling Methode
- Importance Sampling Methode
- Markov Chain - Monte Carlo Methode
- Metropolis-Hasting Algorithmus

Zentraler Punkt bei Monte-Carlo Methoden ist die Erzeugung und Verwendung von Zufallszahlen zur Bestimmung von Integralen, oder der Optimierung höherdimensionaler Problemlösungen (Andrieu 2001, 1). Als anschauliches Beispiel für die Verwendung, das oftmals auch im universitären Lehrbereich als Beispiel vorgestellt wird, kann die annäherungsweise Berechnung der Zahl π angesehen werden. Dabei wird ein Einheitskreis von einem Quadrat umschlossen und Zufallszahlen werden in dieses Quadrat gesetzt. Der Anteil der Punkte, der innerhalb des Kreises liegt, beträgt $\frac{\pi}{4}$. Daraus lässt sich die Zahl π abschätzen, wie in nachfolgender Abbildung 4.1 dargestellt wird:

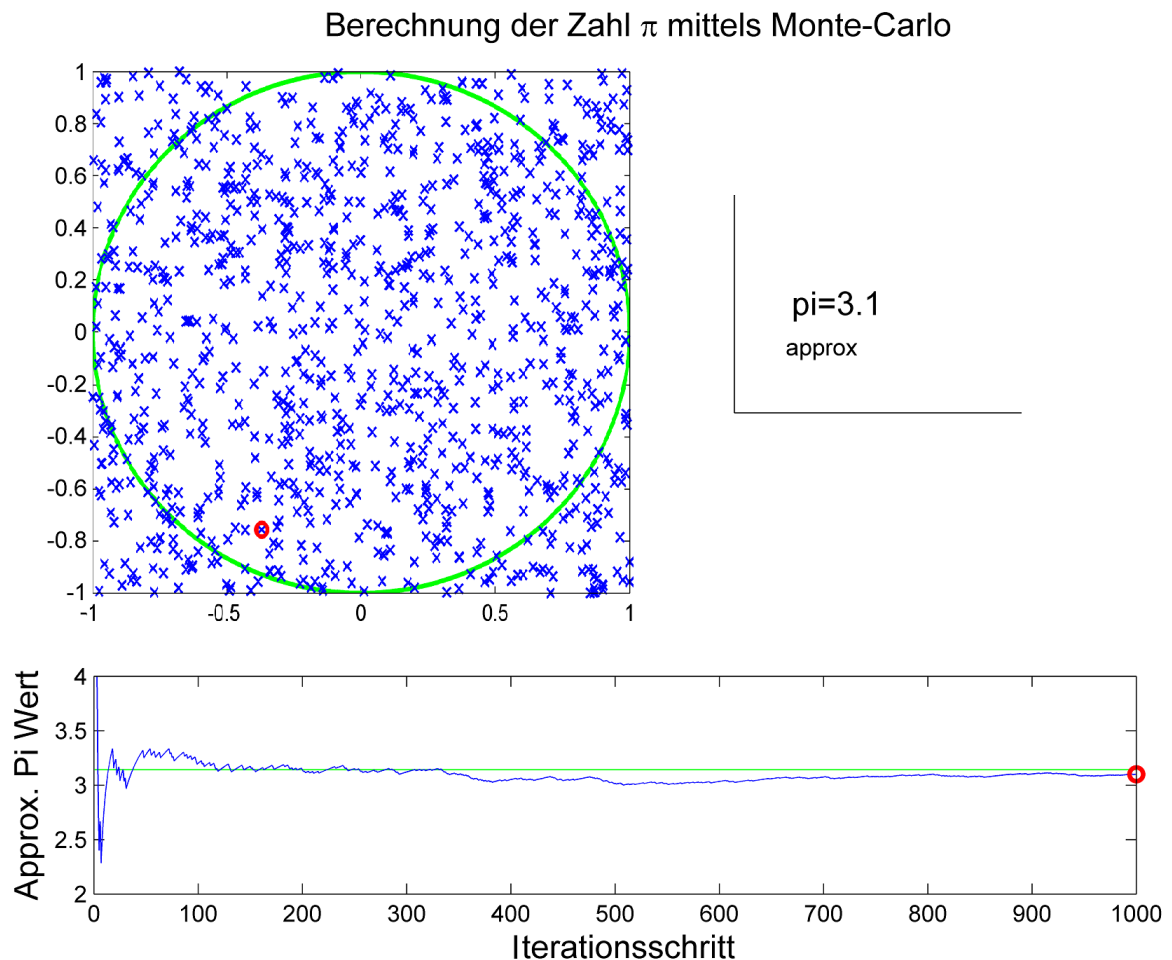


Abbildung 4.1: Näherungsweise Berechnung der Zahl π mit Hilfe eines Monte-Carlo Ansatzes

Abbildung zeigt das Ergebnis der Abschätzung der Zahl π 4.1¹. Der obere Subplot stellt das Quadrat samt Einheitskreis dar und zusätzlich die Werte der erzeugten Zufallszahlen. Im unteren Subplot wird der abgeschätzte π -Wert als Verlauf der Iterationsschritte dargestellt. Pro Iterationsschritt wird eine Zufallszahl mit Wert zwischen $x : -1 \leq x \leq 1$ und $y : -1 \leq y \leq 1$ in das Quadrat eingesetzt. Nach 1000 Iterationsschritten (kann beliebig gewählt werden) ergibt sich ein abgeschätzter π -Wert von 3.1. Dabei zeigt der untere Subplot, dass zu Beginn, als noch wenige Zufallszahlen vorhanden war, der Wert starken Schwankungen ausgesetzt ist und mit zunehmender Anzahl an verwendeten Zahlen sich dem wahren π -Wert von 3.1415... annähert.

¹Matlab-Programm zur Abschätzung der Zahl π siehe beigelegte CD

Teil II

VERA - Vienna Enhanced Resolution Analysis

Kapitel 5

Allgemeines

In diesem Teil der Masterarbeit wird die Methode erklärt, wie die derzeit operationell verwendete VERA zu ihren Lösungen gelangt und hierbei die Fingerprinttechnik Verwendung findet. Dieser Abschnitt wird ausführlichst behandelt, um die Unterschiede der VERA mit Hilfe der Monte-Carlo Methode aufweisen zu können, die im Teil III beschrieben wird.

Vienna Enhanced Resolution Analysis ist ein Produkt des Instituts für Meteorologie und Geophysik in Wien zur Analyse meteorologischer Daten. Es ist seit den frühen Anfängen 1995 ständigen Neuerungen und Weiterentwicklungen unterworfen. Viele Mitarbeiter haben im Laufe der Zeit zum aktuellen Stand von VERA beigetragen¹. Das Grundkonzept blieb dabei immer das Gleiche und wird in den folgenden Abschnitten erläutert.

Das Ziel der VERA-Analyse ist es, unregelmäßig verteilte Stationswerte auf ein regelmäßiges Gitter zu bringen. Dies geschieht durch lineare Interpolation unter Berücksichtigung der Minimierung der 1. Ableitung (Steigung wird minimiert) und der 2. Ableitung (Krümmung wird minimiert) um ein möglichst gradientenschwach und glattes Analysefeld zu bekommen, das ebenso in der Natur angestrebt wird. Die VERA zählt zur Gruppe der Variationsanalysen. Das bedeutet, um feinskaligere Strukturen in der Analyse auflösen zu können, die speziell im komplexen Terrain, wie zum Beispiel den Alpen, besonders stark auftreten, werden Zusatzinformationen, sogenannte Fingerprints einbezogen, die im Kapitel 3 bereits beschrieben wurden. Hierbei ist erwähnenswert, dass die VERA modellunabhängig berechnet wird - es wird kein First-Guess Feld benötigt - um eine objektive Modellverifikation gewährleisten zu können.

Zu Beginn wird das Analyseverfahren ohne Fingerprint (siehe Kapitel 6) beschrieben, damit kann das Grundkonzept der Analyse dargestellt werden und aufbauend darauf werden die Fingerprints

¹<http://www.univie.ac.at/amk/vera/>

einbezogen (siehe Kapitel 7). Die Analyse kann in zwei Teile aufgeteilt werden. Einerseits in die Large-Matrix, kurz LAMA und andererseits in die Stations-Matrix, kurz STAMA. Die erstgenannte Matrix stellt die Verknüpfung zwischen den Gitterpunkten her. Die Zweitgenannte bindet die Stationen, die in der Regel nicht auf Gitterpunkten liegen, ein.

Zur Erstellung der VERA-Analyse wurde die wissenschaftliche Dokumentation der VERA (Mayer, 2007) zu Hilfe genommen, in der die Methode ausführlichst beschrieben wird. Zur Umsetzung dieser Arbeit wurde das Computerprogramm MATLAB (Version R2008b) verwendet, da dieses auch für die operationelle VERA in Verwendung ist.

Kapitel 6

Analyseverfahren ohne Fingerprint

Zu Beginn dieses Kapitels wird die LAMA beschrieben. Dies dient der Verknüpfung der Gitterpunkte untereinander. Um die Funktionsweise der LAMA zu veranschaulichen, liegen im folgenden Abschnitt (6.1) die Stationswerte auf den Gitterpunkten. In Abschnitt 6.2 wird auf die STAMA näher eingegangen, welche die Stationswerte, die nicht auf einem Gitterpunkt liegen, mitberücksichtigt.

6.1 LAMA

Anfangs wird der eindimensionale Fall betrachtet, der am einfachsten zu beschreiben ist und auch uneingeschränkte Gültigkeit der Methode der VERA-Analyse bietet. Somit ist der zweidimensionale Fall nur noch eine Erhöhung der Dimensionalität, ohne erheblich erhöhten Aufwand in der Umsetzung. Der drei- bzw. vierdimensionale Fall wird nicht betrachtet, da die VERA, wie sie derzeit verwendet wird, nur die Ebene analysiert.

6.1.1 1D

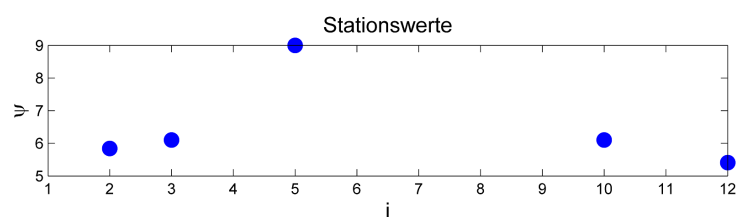


Abbildung 6.1: Stationswerte des 1D Beispiels der LAMA ohne Fingerprints

Abbildung 6.1 zeigt ein 1D-Beispiel mit 5 Stationswerten, die auf 12 Gitterpunkten aufgeteilt sind. Dabei ist i die Zahl des Gitterpunktes und Ψ der Wert an einem Gitterpunkt (Bsp.: Temperatur, Windgeschwindigkeit, Luftdruck). Die Angaben dieses Beispiels wurden aus einem Beispiel der wissenschaftlichen Dokumentation der VERA (Mayer 2007, 92) übernommen und zur Veranschaulichung adaptiert. Für die Gitterpunkte 2, 3, 5, 10, 12 liegen somit Beobachtungen mit den einheitslosen Werten 5.84, 6.1, 9, 6.1, 5.41 vor. Nun muss auf die Gitterpunkte ohne Beobachtungswert interpoliert werden. Dies geschieht bei der VERA durch die Minimierung der Summe der Quadrate aller Steigungen und bzw. oder durch die Summe der Quadrate aller Krümmungen, die wiederum minimal sein soll. Beide Bedingungen können beliebig gewichtet werden. Für die Minimierung bedarf es einer Kostenfunktion.

Für jenen im Beispiel betrachteten Fall bedarf es einer diskretisierten Kostenfunktion der beiden erwähnten Methoden für die Interpolation.

$$J_1 = \int \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 dx \quad (6.1)$$

$$J_2 = \int \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x} \right)^2 dx \quad (6.2)$$

Formel 6.1¹ und 6.2 sind die Kostenfunktionen für den kontinuierlichen Fall. J_1 bezieht sich dabei auf die 1.Ableitung (Steigung) und J_2 auf die 2.Ableitung (Krümmung). Diese müssen nun diskretisiert werden. Für die Diskretisierung der 1.Ableitung bedient sich die VERA an Rückwärts-Differenzen. Beispiel für die Stelle i :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cong \frac{\Psi_i - \Psi_{i-1}}{\Delta x} \quad (6.3)$$

Δx steht dabei für die Gitterweite. Weitere Möglichkeiten zur Diskretisierung bieten die Vorwärts-(6.4) bzw. zentrierten Differenzen(6.5):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cong \frac{\Psi_{i+1} - \Psi_i}{\Delta x} \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cong \frac{\Psi_{i+1} - \Psi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (6.5)$$

Für die 2.Ableitung ist aufgrund der Symmetrie nur eine Diskretisierung vorhanden:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \cong \frac{\Psi_{i+1} - 2\Psi_i + \Psi_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (6.6)$$

¹Formeln 6.1 - 6.14 wurden aus der wissenschaftlichen Dokumentation der VERA übernommen (Mayer 2007)

Setzt man nun 6.3 und 6.6 in die Kostenfunktionen 6.1 und 6.2 ein, erhält man die diskretisierte Form der Kostenfunktion der 1. und 2.Ableitung. Zusätzlich muss man noch die richtigen Summationsgrenzen beachten:

$$J_1 = \sum_{i=2}^I \left(\frac{\Psi_i - \Psi_{i-1}}{\Delta x} \right)^2 \Rightarrow \text{Minimum} \quad (6.7)$$

$$J_2 = \sum_{i=2}^{I-1} \left(\frac{\Psi_{i+1} - 2\Psi_i + \Psi_{i-1}}{(\Delta x)^2} \right)^2 \Rightarrow \text{Minimum} \quad (6.8)$$

Die Variable I steht hier für die Gesamtzahl der Gitterpunkte.

(An dieser Stelle setzt die Monte-Carlo Methode ein, die in Teil III beschrieben wird.)

Die Kostenfunktionen J_1 und J_2 werden nun nach den Variablen Ψ_1 bis Ψ_I abgeleitet und Null gesetzt. Für die Ableitung an der Stelle i muss man all jene Glieder der Kostenfunktionen berücksichtigen, die Ψ_i enthalten:

$$J_1(i) = \left(\frac{\Psi_i - \Psi_{i-1}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{\Psi_{i+1} - \Psi_i}{\Delta x} \right)^2 \quad (6.9)$$

$$J_2(i) = \left(\frac{\Psi_{i+1} - 2\Psi_i + \Psi_{i-1}}{(\Delta x)^2} \right)^2 + \left(\frac{\Psi_i - 2\Psi_{i-1} + \Psi_{i-2}}{(\Delta x)^2} \right)^2 + \left(\frac{\Psi_{i+2} - 2\Psi_{i+1} + \Psi_i}{(\Delta x)^2} \right)^2 \quad (6.10)$$

Durch Ableiten, multiplizieren mit der Gitterweite Δx bzw. deren Potenzen multipliziert und gleichzeitigem Null setzen erhält man nachstehende Formeln:

$$-2\Psi_{i-1} + 4\Psi_i - 2\Psi_{i+1} = 0 \quad (6.11)$$

$$2\Psi_{i-2} - 8\Psi_{i-1} + 12\Psi_i - 8\Psi_{i+1} + 2\Psi_{i+2} = 0 \quad (6.12)$$

Mit Hilfe der Matrixschreibweise und der Division durch Zwei sehen diese Gleichungen wie folgt

aus:

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ \cdots & -1 & 2 & -1 & \cdots \\ \ddots & & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \Psi_{i-1} \\ \Psi_i \\ \Psi_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ \cdots & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \cdots \\ \ddots & & & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \Psi_{i-2} \\ \Psi_{i-1} \\ \Psi_i \\ \Psi_{i+1} \\ \Psi_{i+2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Die Matrizen der Gleichungssysteme 6.13 und 6.14 können als Koeffizientenmatrix für die im Beispiel angenommenen 12 Gitterpunkte dargestellt werden, welche auch als Large-Matrix bezeichnet wird:

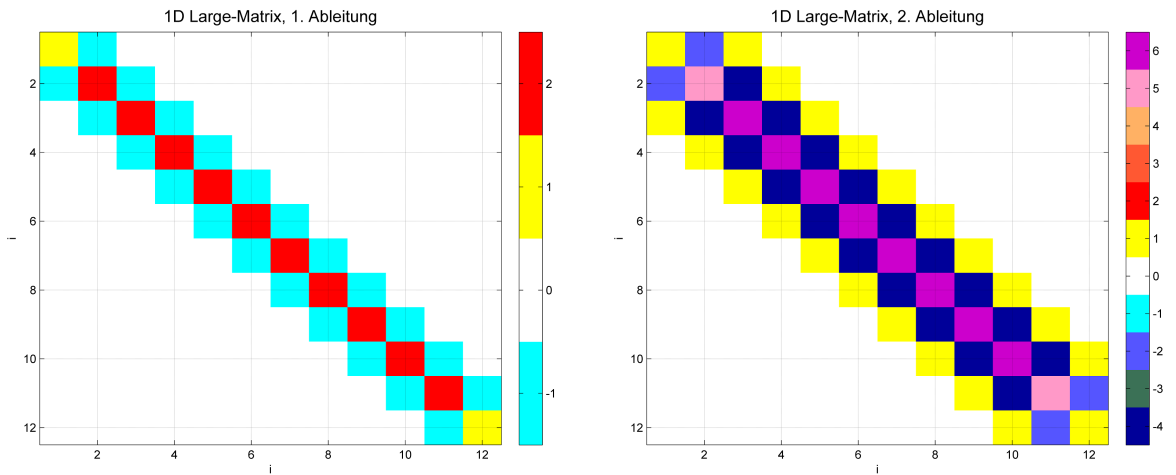


Abbildung 6.2: Bildlich dargestellte Koeffizientenmatrizen des Beispiels aus Abbildung 6.1 mit 12 Gitterpunkten.

In Abbildung 6.2 sind die Einträge der Koeffizientenmatrizen der beiden Ableitungen für das Beispiel mit 12 Gitterpunkten als Image-Plot dargestellt. Dabei kann man auch einen Unterschied der einheitlichen Struktur an den Rändern erkennen, da hier ein bzw. zwei benachbarte Gitterpunkte fehlen und deshalb abweichende Einträge auftreten.

Die Gleichungssysteme 6.13 und 6.14 können nun für das Beispiel aus Abbildung 6.1 angeschrieben und aufgrund der bekannten Ψ Werte an den Stationen (in Grün gehalten) reduziert werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \\ \Psi_6 \\ \Psi_7 \\ \Psi_8 \\ \Psi_9 \\ \Psi_{10} \\ \Psi_{11} \\ \Psi_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \\ \Psi_6 \\ \Psi_7 \\ \Psi_8 \\ \Psi_9 \\ \Psi_{10} \\ \Psi_{11} \\ \Psi_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

Nach Reduzierung aufgrund der bekannten Werte bleiben folgende Gleichungssysteme erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_4 \\ \Psi_6 \\ \Psi_7 \\ \Psi_8 \\ \Psi_9 \\ \Psi_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_2 \\ \Psi_3 + \Psi_5 \\ \Psi_5 \\ 0 \\ 0 \\ \Psi_{10} \\ \Psi_{10} + \Psi_{12} \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_4 \\ \Psi_6 \\ \Psi_7 \\ \Psi_8 \\ \Psi_9 \\ \Psi_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Psi_2 - \Psi_3 \\ -\Psi_2 + 4\Psi_3 + 4\Psi_5 \\ 4\Psi_5 \\ -\Psi_5 \\ -\Psi_{10} \\ 4\Psi_{10} \\ 4\Psi_{10} + 2\Psi_{12} \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

In Matlab können diese Martixgleichungen unkompliziert mit dem Backslash-Operator gelöst werden, um die unbekannten Ψ -Werte zu erhalten.

$$\Psi_{unbekannt} = M \setminus \Psi_{bekannt} \quad (6.19)$$

Die Variable M steht für die reduzierte Koeffizientenmatrix.

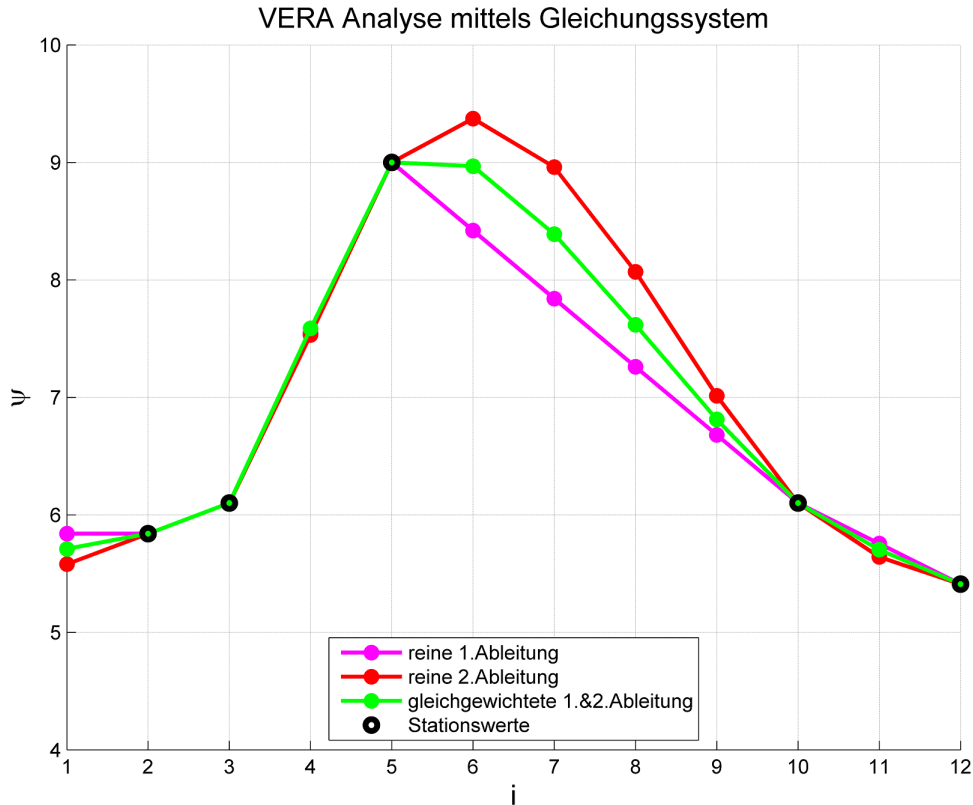


Abbildung 6.3: 1D VERA Analyse des Beispiels aus Abbildung 6.1

Abbildung 6.3 zeigt die Lösung der VERA Analyse des oben genannten Beispiels mittels Lösen des Matrixgleichungssystems. Die reine 1.Ableitung minimiert die Steigung, welche anschaulich am Punkt Ψ_1 ersichtlich ist, welcher eine horizontale Ausrichtung gegenüber Punkt Ψ_2 annimmt und die Steigung daher 0 ergibt. Folglich richten sich die weiteren Punkte in einer linearen Verbindung zu den Stationswerten aus. Die reine 2.Ableitung, die eine Minimierung der Krümmung zur Folge hat, wird erneut am Punkt Ψ_1 ersichtlich, da dieser in einer Geraden zu den Punkten Ψ_2 und Ψ_3 liegt und damit keine Krümmung erzeugt wird. Die weiteren Punkte richten sich nach minimaler Krümmung aus. Eine Kombination der beiden Lösungen ist ebenfalls möglich und für die VERA erwünscht. Man kann auf beide Ableitungen verschiedene oder gleiche Gewichte anbringen, um eine optimale Lösung zu erzeugen. Die VERA verwendet hauptsächlich die gleichgewichtete Form.

6.1.2 2D

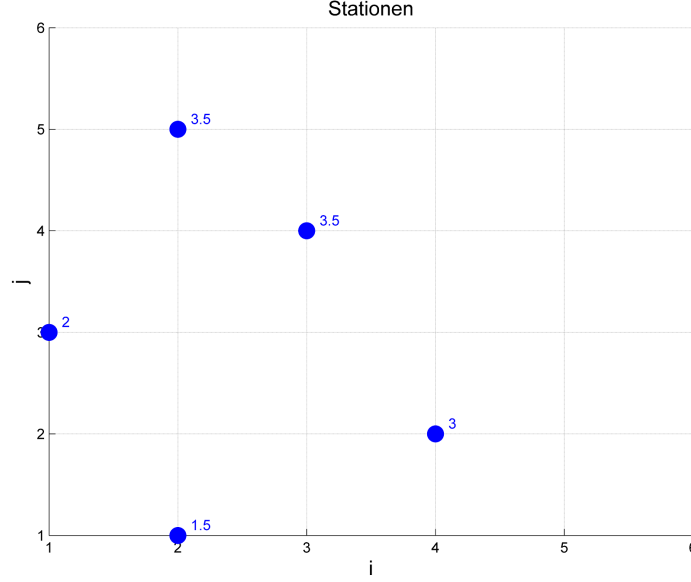


Abbildung 6.4: Stationen des 2D Fallbeispiel der LAMA ohne Fingerprints

Der zweidimensionale Fall ist der einfachste, in der Realität auftretende Fall (Mayer 2007). In Abbildung 6.4 ist ein 6x6 Gitter mit Stationen dargestellt, das als Beispiel dienen soll². i und j sind hier die Nummerierungen der Gitterpunkte in x - und y -Richtung. Auch für den zweidimensionalen Fall wird die Minimierung der 1. und 2. Ableitung durchgeführt, wobei es aufgrund der Erhöhung der Dimension bei der 2. Ableitung neben der reinen auch die gemischten Ableitung in x - und y -Richtung zu berücksichtigen gibt:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \cong \frac{1}{\Delta y} \left[\frac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j}}{\Delta x} - \frac{\Psi_{i,j-1} - \Psi_{i-1,j-1}}{\Delta x} \right] \cong \frac{1}{\Delta x \Delta y} [\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j} - \Psi_{i,j-1} + \Psi_{i-1,j-1}] \quad (6.20)$$

Formel 6.20³ ist eine Variante der diskretisierten Form der gemischten Ableitungen. Alle drei Kostenfunktionen werden im zweidimensionalen Fall wie folgt angeschrieben:

$$J_1 = \sum_{j=1}^J \sum_{i=2}^I \left(\frac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j}}{\Delta x} \right)^2 + \sum_{j=2}^J \sum_{i=1}^I \left(\frac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i,j-1}}{\Delta y} \right)^2 \Rightarrow Minimum \quad (6.21)$$

$$J_2 = \sum_{j=1}^J \sum_{i=2}^{I-1} \left(\frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right)^2 + \sum_{j=2}^{J-1} \sum_{i=1}^I \left(\frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right)^2 \Rightarrow Minimum \quad (6.22)$$

²Beispielangaben aus der Dokumentation der VERA übernommen (Mayer 2007)

³Formeln 6.20 - 6.26 aus der Dokumentation der VERA übernommen (Mayer 2007)

$$J_3 = \sum_{i=2}^J \sum_{i=2}^I \left[\frac{1}{\Delta x \Delta y} (\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j} - \Psi_{i,j-1} + \Psi_{i-1,j-1}) \right]^2 \Rightarrow Minimum \quad (6.23)$$

Die Variable J symbolisiert die Anzahl der Gitterpunkt in y-Richtung. J_3 ist die Kostenfunktion der gemischten Ableitung.

Die Kostenfunktionen müssen nun, wie im eindimensionalen Fall, abgeleitet und Null gesetzt werden, um die Einträge für die Koeffizientenmatrix zu erhalten. Es gilt zu beachten, dass für die gemischte Ableitung neben dem Fall $\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial y}$ auch $\frac{\partial^2 J}{\partial y \partial x}$ möglich ist, allerdings wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen zu einem identischen Ergebnis führt und daher geht diese Kostenfunktion immer mit dem Faktor Zwei einher (Mayer 2007). Bezüglich der Gitterweiten gilt von nun an $\Delta x = \Delta y = \Delta$

$$J_1(i, j) = \frac{1}{(\Delta x)^2} [(\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j})^2 + (\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j})^2] + \frac{1}{(\Delta y)^2} [(\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j})^2 + (\Psi_{i,j} - \Psi_{i,j-1})^2] \quad (6.24)$$

Nach $\Psi_{i,j}$ abgeleitet und Null gesetzt, unter Berücksichtigung der gleichgroßen Gitterweite in x- und y-Richtung erhält man:

$$\frac{2}{\Delta^2} [-\Psi_{i-1,j} + 2\Psi_{i,j} - \Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j-1} + 2\Psi_{i,j} - \Psi_{i,j+1}] = 0 \quad (6.25)$$

Mittels Matrixschreibweise und nach Division durch $\frac{2}{\Delta^2}$ lässt sich das Gleichungssystem um den Punkt $\Psi_{i,j}$ folgendermaßen anschreiben:

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & -1 & \cdots - 1 & 4 & -1 & \cdots & -1 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \Psi_{i-1,j} \\ \vdots \\ \Psi_{i,j-1} \\ \Psi_{i,j} \\ \Psi_{i,j+1} \\ \vdots \\ \Psi_{i+1,j} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

Für die reine 2.Ableitung und die gemischte Ableitung wird analog vorgegangen. In weiterer Folge lassen sich erneut die Koeffizientenmatrizen als Image-Plot darstellen.

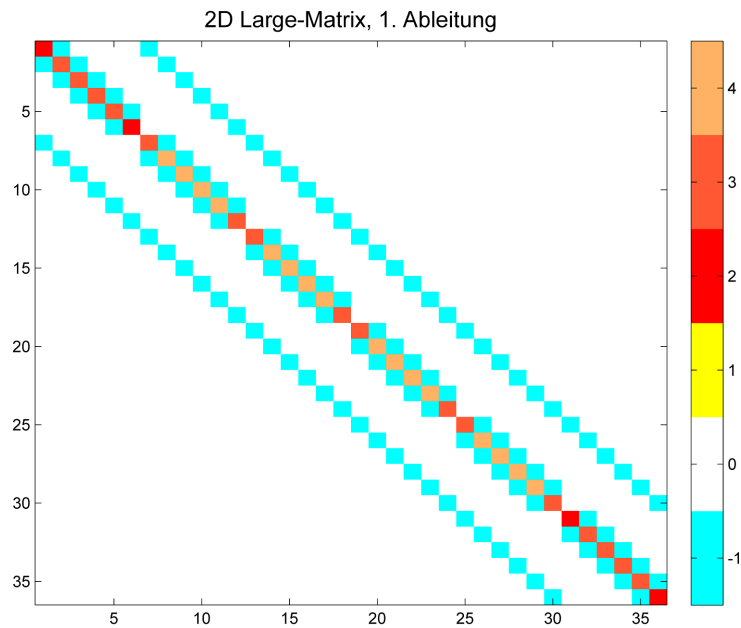


Abbildung 6.5: Bildlich dargestellte Koeffizientenmatrix der 1.Ableitung des Beispiels aus Abbildung 6.4 mit 6x6 Gitterpunkten

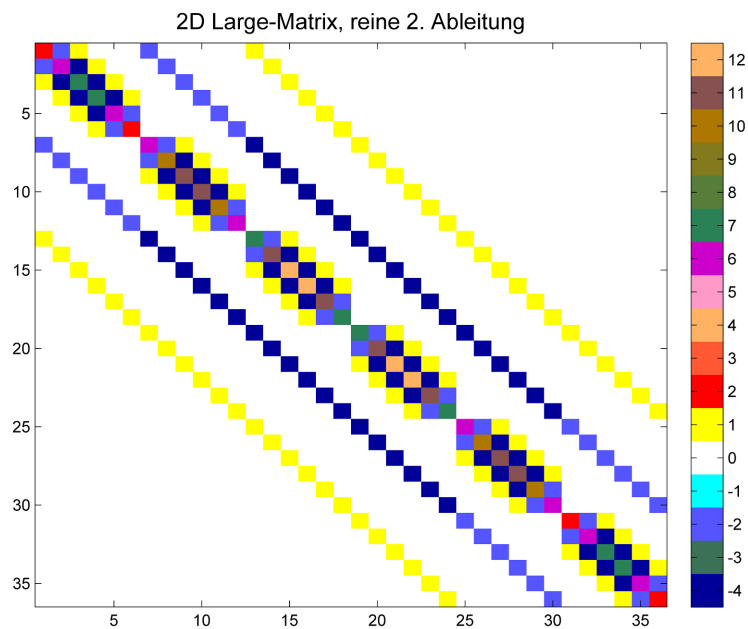


Abbildung 6.6: Bildlich dargestellte Koeffizientenmatrix der reinen 2.Ableitung des Beispiels aus Abbildung 6.4 mit 6x6 Gitterpunkten

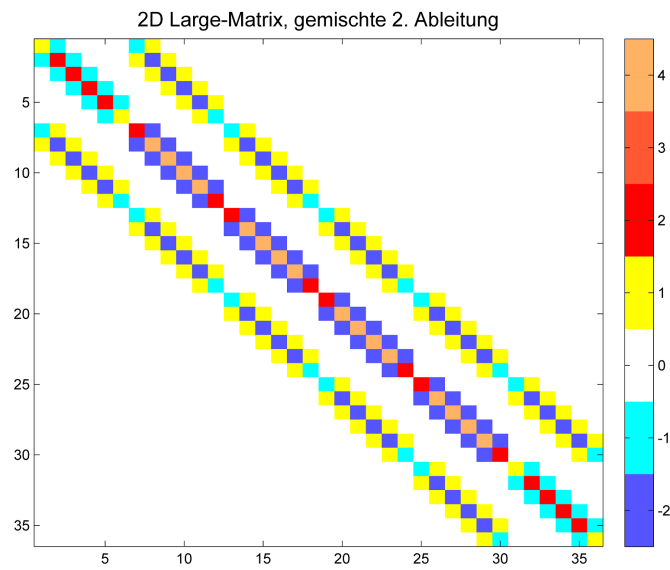


Abbildung 6.7: Bildlich dargestellte Koeffizientenmatrix der gemischten 2.Ableitung des Beispiels aus Abbildung 6.4 mit 6x6 Gitterpunkten

Wie im eindimensionalen Fall werden mit Hilfe der Koeffizientenmatrizen die Matrixgleichungen aufgestellt, aufgrund der bekannten Stationswerte reduziert und nach den unbekannten Gitterpunkten aufgelöst.

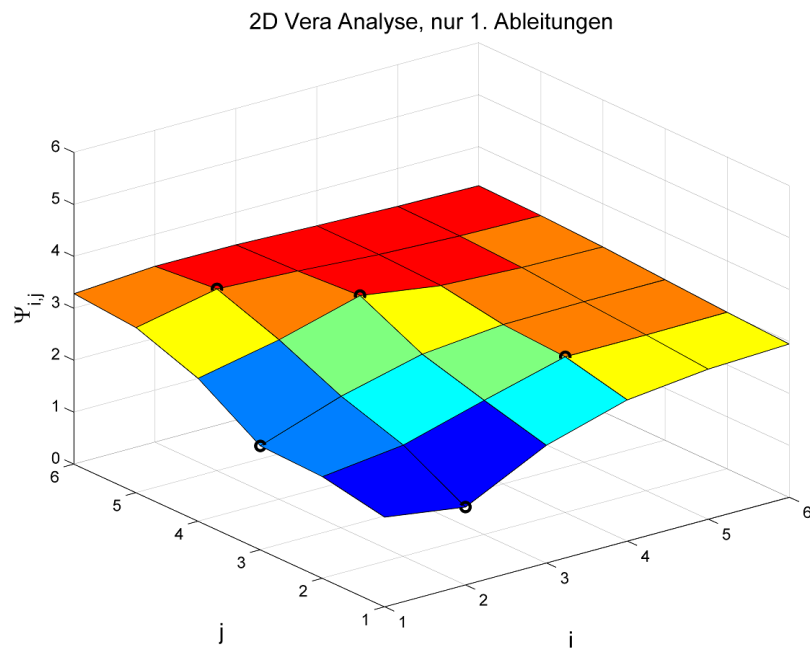


Abbildung 6.8: Zweidimensionale VERA Analyse durch lösen des Gleichungssystemes. Nur die 1.Ableitung wird berücksichtigt.

Die VERA Analyse in Abbildung 6.8 zeigt das Bestreben der Minimierung von Steigungen. Dadurch entsteht für diese Anordnung an Stationswerten (schwarze Kreise) ein gekrümmtes Feld mit Spitzen an den Stationswerten (vgl. Station $\Psi_{3,4}$ und $\Psi_{2,1}$). Das bewirkt die minimale Steigung für dieses Feld. Der Punkt $\Psi_{6,6}$ verdeutlicht den Umstand der minimalen Steigung, da hier die Ausrichtung bereits nahezu horizontal ist.

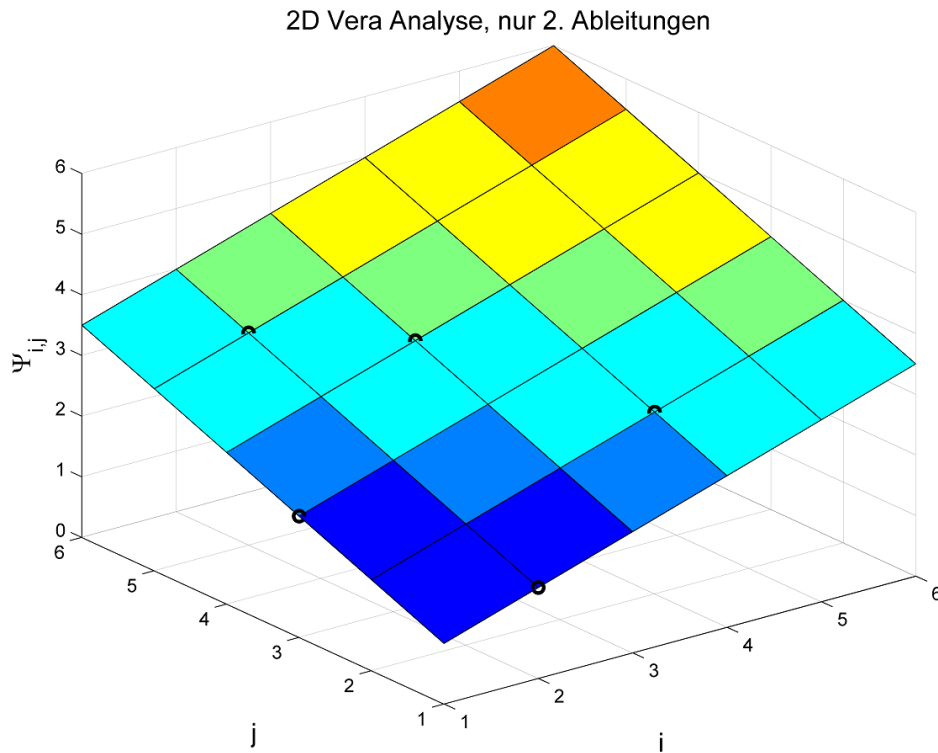


Abbildung 6.9: Zweidimensionale VERA Analyse durch lösen des Gleichungssystemes. Nur die 2.Ableitung wird berücksichtigt.

Die Werte an den Stationen wurden mit der Funktion $\Psi_{i,j} = (i + j)/2$ erzeugt. Diese Vorgehensweise macht sich in Abbildung 6.9 bemerkbar, da durch die Minimierung der Krümmung eine schiefe Ebene produziert wird, bei der die Krümmung gleich Null ist. In Abbildung 6.10 ist die gleichgewichtete Kombination aus 1. und 2.Ableitung dargestellt. Hier wurde der bestmögliche Kompromiss zwischen der Minimierung von Steigung und Krümmung gesucht, um eine möglichst glatte Analyse zu erhalten.

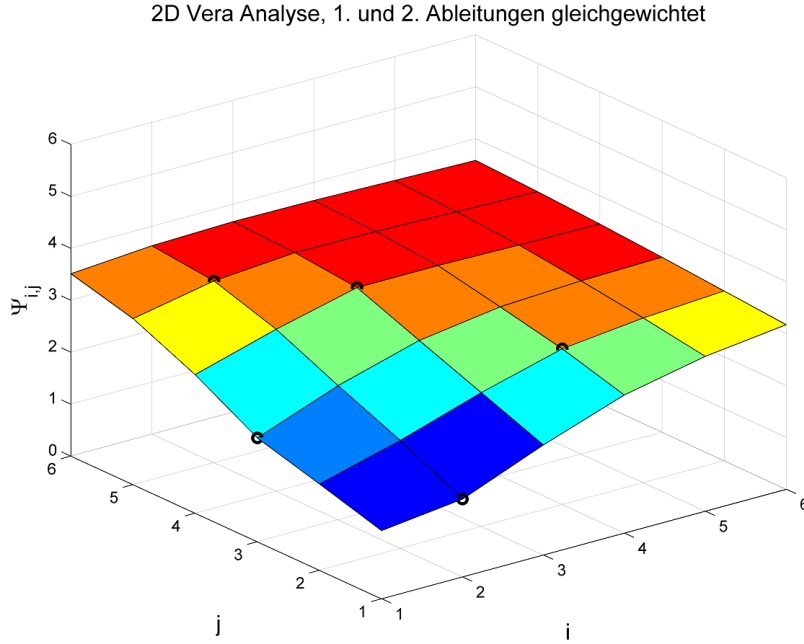


Abbildung 6.10: Zweidimensionale VERA Analyse durch lösen des Gleichungssystems. 1. und 2. Ableitungen sind gleichgewichtet.

6.2 STAMA

Messstationen sind in der Regel nicht gleichmäßig auf Gitterpunkten verteilt. Für die Standortbestimmung sind Faktoren wie etwa Erreichbarkeit, Relevanz oder Vermeidung von Beeinflussung unnatürlicher Quellen vorrangig. Aus diesem Grund muss man diese ungleich verteilten Beobachtungen auf das regelmäßige Gitter interpolieren. Dies geschieht im Fall der VERA mit der sogenannten Stationsmatrix, kurz STAMA.

6.2.1 1D

Inwiefern eine Station A zwei benachbarte Punkte Ψ_i und Ψ_{i+1} des Analysefelds beeinflusst, kann erneut mit einer Kostenfunktion beschrieben werden:

$$J_{STAMA} = \frac{1}{\delta_{i,A}\delta_{i+1,A}} [\delta_{i+1,A}\Psi_i + \delta_{i,A}\Psi_{i+1} - \Psi_A]^2 \Rightarrow \text{Minimum} \quad (6.27)$$

Der Faktor $\frac{1}{\delta_{i,A}\delta_{i+1,A}}$, der im Nenner das Produkt der normierten Distanzen ($\delta_{i,A} + \delta_{i+1,A} = 1$) zwischen den Gitterpunkten und der Station beinhaltet, dient zur stärkeren Gewichtung von Stationen, die näher an einem Gitterpunkt liegen. Der Term in der eckigen Klammer zeigt die lineare Interpolation der Station A auf die Gitterpunkte, die quadriert wird, um Kompensationen zu

vermeiden (Mayer 2007). Nun muss erneut nach den unbekannten Punkten abgeleitet und Null gesetzt werden. Nach Kürzung von Vorfaktoren und Umformung erhält man ein Gleichungssystem, dass für das Beispiel mit einer Station und zwei benachbarten Gitterpunkten, die einfachste mögliche STAMA beinhaltet:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta_{i+1,A}}{\delta_{i,A}} & 1 \\ 1 & \frac{\delta_{i,A}}{\delta_{i+1,A}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_i \\ \Psi_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta_{i,A}} \Psi_A \\ \frac{1}{\delta_{i+1,A}} \Psi_A \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

Eine verallgemeinerte Form der Kostenfunktion 6.27 ⁴, um beliebig viele Stationen zu berücksichtigen, schaut wie folgt aus (Mayer 2007):

$$J_{STAMA} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{\delta_{i(j),S(j)} \delta_{i(j)+1,S(j)}} [\Psi_{S(j)} - \delta_{i(j)+1,S(j)} \Psi_{i(j)} - \delta_{i(j),S(j)} \Psi_{i(j)+1}]^2 \right) \quad (6.29)$$

Für den Fall, dass mehrere Stationen zwischen zwei Gitterpunkten liegen, werden die Einträge, die sich auf den selben Gitterpunkt beziehen, sowohl für die Koeffizientenmatrix als auch für die rechte Seite, die die bekannten Stationswerte und deren Gewichtung aufgrund der Distanz zum Gitterpunkt beinhaltet, summiert. Dadurch erhält man die sogenannte STAMA und die dazugehörige rechte Seite. Diese müssen nun mit den Einträgen der dazugehörigen LAMA der 1. und/oder 2. Ableitung summiert werden, um neben der Verknüpfung der Stationen mit den benachbarten Gitterpunkten auch die Verknüpfung der Gitterpunkte untereinander gewährleisten zu können. Die STAMA und LAMA können ebenfalls mit Gewichtungsfaktoren behaftet werden, um eine der beiden stärker in die Analyse einfließen lassen zu können. In dieser Arbeit werden die Matrizen durchwegs gleichgewichtet. In Abbildung 6.11 ist ein Beispiel für die Verwendung der STAMA dargestellt. Die Stationen befinden sich nicht auf einem Gitterpunkt und müssen daher interpoliert werden. Weiters wird die Nähe der Station zu einem Gitterpunkt berücksichtigt, wie an Punkt Ψ_4 und Ψ_5 ersichtlich ist. Der Stationswert muss nicht mehr zwangsläufig auf der Analyse liegen, wie die Station zwischen Punkt Ψ_2 und Ψ_3 für die reine 1. und gemischte Ableitung beweist.

⁴Formeln 6.27 - 6.29 aus der Dokumentation der VERA übernommen (Mayer 2007)

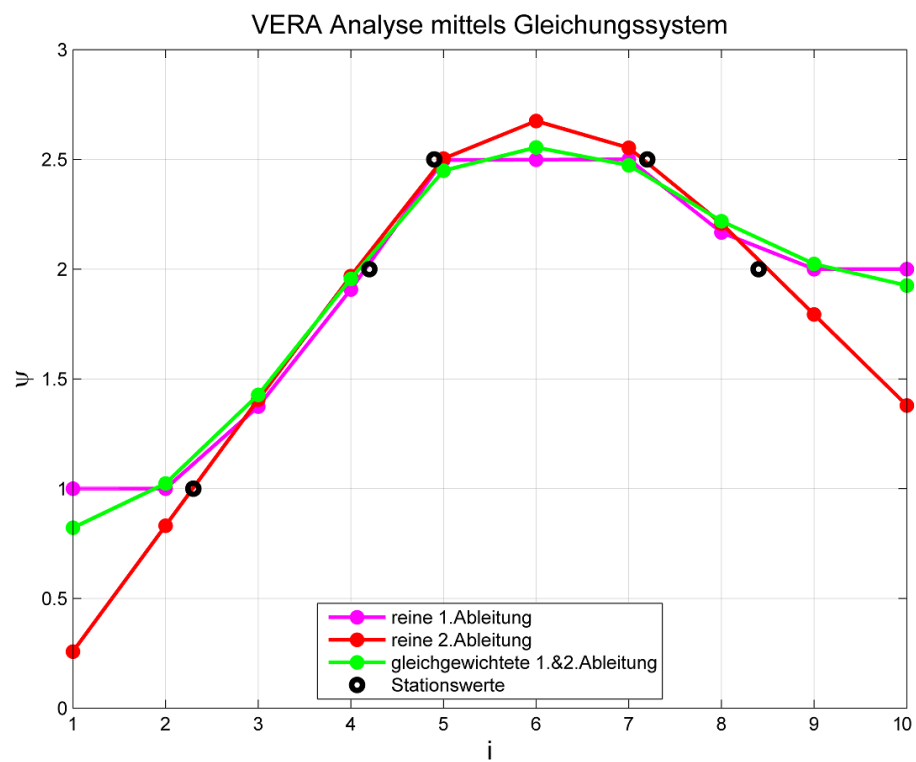


Abbildung 6.11: 1D VERA Analyse mit Hilfe der STAMA.

6.2.2 2D

Im zweidimensionalen Fall wird eine Station von vier Gitterpunkten eingeschlossen. In Abbildung 6.12 ist ein Beispiel dargestellt, indem auch die Nomenklatur ersichtlich ist. Die normierten Distanzen werden von der Station zu den Projektionen dieser an die angrenzenden Gitterlinien gebildet.

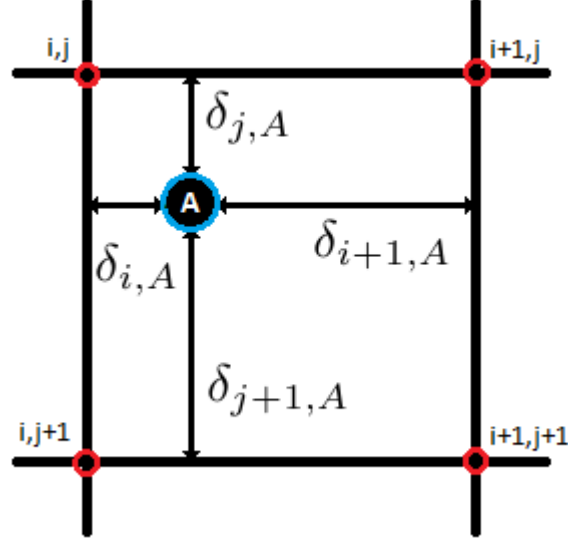


Abbildung 6.12: Beispiel eines zweidimensionalen Gitters mit der Station A (blauer Kreis) und 4 Gitterpunkten (rote Kreise)

Nach Mayer (2007) handelt es sich bei der Kostenfunktion für den zweidimensionalen Fall um eine bilineare Interpolation von der Station auf die benachbarten Gitterpunkte, unter Berücksichtigung der Gewichte der Kehrwerte der normierten Abständen zu den vier Gitterlinien:

$$J_{STAMA} = \frac{[\delta_{i+1,A}\delta_{j+1,A}\Psi_{i,j} + \delta_{i,A}\delta_{j+1,A}\Psi_{i+1,j} + \delta_{i+1,A}\delta_{j,A}\Psi_{i,j+1} + \delta_{i,A}\delta_{j,A}\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_A]^2}{\delta_{i,A}\delta_{i+1,A}\delta_{j,A}\delta_{j+1,A}} \quad (6.30)$$

Die obige Gleichung ist für den Gitterpunkt A angeschrieben und kann für jeden Stationswert gebildet werden. Anschließend muss nach den unbekannten Gitterpunkten abgeleitet und Null gesetzt werden. Somit erhält man, wie im eindimensionalen Fall, die Einträge für die STAMA und die dazugehörige rechte Seite.

Kapitel 7

Analyseverfahren mit Fingerprint

Mit den in Kapitel 3 beschriebenen Fingerprints kann eine Analyse von meteorologischen Größen auf ein feinskaligeres Gitter interpoliert werden. Dadurch werden feinere Strukturen im Analysefeld sichtbar, die vor allem in komplexen Terrain von großer Bedeutung sind. Aufgrund von Beobachtungen wird ein Gewichtungsfaktor berechnet, welcher beschreibt, wie stark der Fingerprint erkannt wird. Dieses Wissen kommt vor allem den datenarmen Gebieten zugute, da hier der gleiche Gewichtungsfaktor für die Analyse angewendet wird und die vom Fingerprint beschriebenen feinskaligeren Strukturen hervorgehoben werden.

Allgemein wird das Analysefeld Ψ in einen synoptisch-skaligen Anteil Ψ_S und mehrere Fingerprintanteile $\Psi_{F,N(F)}$ mit deren Gewichtungsfaktoren $c_{N(F)}$ aufgeteilt (Mayer 2007):

$$\Psi = \Psi_S + \sum_{f=1}^{N(F)} c_f \Psi_{F,f} \quad (7.1)$$

Dabei ist das synoptisch-skalige Feld Ψ_S jener Teil der Analyse, für den die Bedingung der minimalen Steigung und/oder Krümmung gelten soll.

7.1 LAMA

7.1.1 1D

Die diskretisierte Form der Kostenfunktion (vgl. 6.7 und 6.8) kann für die eindimensionale LAMA mit Fingerprint folgendermaßen angeschrieben werden¹:

$$J_1 = \sum_{i=2}^I \left(\frac{\Psi_{S,i} - \Psi_{S,i-1}}{\Delta x} \right)^2 = \sum_{i=2}^I \left(\frac{\Psi_i - \Psi_{i-1} - \left[\sum_{f=1}^{N(F)} c_f (\Psi_{F,f,i} - \Psi_{F,f,i-1}) \right]}{\Delta x} \right)^2 \Rightarrow \text{Minimum} \quad (7.2)$$

$$J_2 = \sum_{i=2}^{I-1} \left(\frac{\Psi_{S,i+1} - 2\Psi_{S,i} + \Psi_{S,i-1}}{(\Delta x)^2} \right)^2 = \sum_{i=2}^{I-1} \left(\frac{\Psi_{i+1} - 2\Psi_i + \Psi_{i-1} - \left[\sum_{f=1}^{N(F)} c_f (\Psi_{F,f,i+1} - 2\Psi_{F,f,i} + \Psi_{F,f,i-1}) \right]}{\Delta x} \right)^2 \Rightarrow \text{Minimum} \quad (7.3)$$

Diese Kostenfunktionen müssen nun nach den unbekannten Gitterpunktwerten Ψ_1 bis Ψ_I , sowie den unbekannten Gewichtungsfaktoren c_1 bis $c_{N(F)}$ abgeleitet und Null gesetzt werden. Dadurch wird die LAMA ohne Fingerprint mit den hinzugekommenen Einträgen der Fingerprints und Gewichtungsfaktoren erweitert. Mayer hat ein Beispiel mit 5 Gitterpunkten und 2 Fingerprints dargestellt (Mayer 2007):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & Z(c_1, 1) & Z(c_2, 1) \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & Z(c_1, 2) & Z(c_2, 2) \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & Z(c_1, 3) & Z(c_2, 3) \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & Z(c_1, 4) & Z(c_2, 4) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & Z(c_1, 5) & Z(c_2, 5) \\ Z(c_1, 1) & Z(c_1, 2) & Z(c_1, 3) & Z(c_1, 4) & Z(c_1, 5) & \sum_{i=1}^4 E(c_1, i)^2 & \sum_{i=1}^4 E(c_1, i)E(c_2, i) \\ Z(c_2, 1) & Z(c_2, 2) & Z(c_2, 3) & Z(c_2, 4) & Z(c_2, 5) & \sum_{i=1}^4 E(c_1, i)E(c_2, i) & \sum_{i=1}^4 E(c_2, i)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

¹Formeln 7.1 - 7.7 aus der Dokumentation der VERA übernommen (Mayer 2007)

$$\begin{pmatrix}
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -V(c_1, 1) & -V(c_2, 1) \\
-2 & 5 & -4 & 1 & 0 & -V(c_1, 2) & -V(c_2, 2) \\
0 & -4 & 6 & -4 & 1 & -V(c_1, 3) & -V(c_2, 3) \\
0 & 1 & -4 & 5 & -2 & -V(c_1, 4) & -V(c_2, 4) \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -V(c_1, 5) & -V(c_2, 5) \\
-V(c_1, 1) & -V(c_1, 2) & -V(c_1, 3) & -V(c_1, 4) & -V(c_1, 5) & \sum_{i=1}^4 Z(c_1, i)^2 & \sum_{i=1}^4 Z(c_1, i)Z(c_2, i) \\
-V(c_2, 1) & -V(c_2, 2) & -V(c_2, 3) & -V(c_2, 4) & -V(c_2, 5) & \sum_{i=1}^4 Z(c_1, i)E(c_2, i) & \sum_{i=1}^4 Z(c_2, i)^2
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Die Matrixgleichungen 7.4 und 7.5 zeigen ein Beispiel für die LAMA mit Fingerprints für die 1. und 2.Ableitung. Die jeweils linke Matrix zeigt einerseits, in schwarz gehalten, die LAMA ohne Fingerprint, wie sie schon in Kapitel 6 beschrieben wurde, und andererseits die erweiterten Zeilen und Spalten aufgrund der Fingerprints, die im Grunde die diskretisierten 1. und 2.Ableitungen der Fingerprints beinhalten:

$$\begin{aligned}
Z(f, i) &= -\Psi_{f,i} + \Psi_{f,i+1} & i = 1 \\
Z(f, i) &= -\Psi_{f,i-1} - 2\Psi_{f,i} + \Psi_{f,i+1} & i > 1 \vee i < I \\
Z(f, i) &= -\Psi_{f,i-1} - \Psi_{f,i+1} & i = I
\end{aligned} \quad (7.6)$$

$$E(f, i) = \Psi_{f,i+1} - \Psi_{f,i}$$

Ebenso die erweiterten Einträge für die 2.Ableitung:

$$\begin{aligned}
-V(f, i) &= -\Psi_{f,i} + 2\Psi_{f,i+1} - \Psi_{f,i+2} & i = 1 \\
-V(f, i) &= 2\Psi_{f,i-1} - 5\Psi_{f,i} + 4\Psi_{f,i+1} - \Psi_{f,i+2} & i = 2 \\
-V(f, i) &= -\Psi_{f,i-2} + 4\Psi_{f,i-1} - 6\Psi_{f,i} + 4\Psi_{f,i+1} - \Psi_{f,i+2} & i > 2 \vee i < I - 1 \\
-V(f, i) &= -\Psi_{f,i-2} + 4\Psi_{f,i-1} - 5\Psi_{f,i} + 2\Psi_{f,i+1} & i = I - 1 \\
-V(f, i) &= -\Psi_{f,i-2} + 2\Psi_{f,i-1} - \Psi_{f,i} & i = I
\end{aligned} \quad (7.7)$$

$$Z(f, i) = \Psi_{f,i-1} - 2\Psi_{f,i} + \Psi_{f,i+1} \quad i > 1 \vee i < I$$

Beispiel

Als anschauliches Beispiel dienen erneut die Angaben aus der wissenschaftlichen Dokumentation der VERA (Mayer 2007), die bereits im Abschnitt 6.1.1 verwendet wurden. Zusätzlich dient eine Sinusfunktion und eine Gaußverteilung als Fingerprint.

Nun müssen die Matrixgleichungen für das Beispiel aufgestellt werden und mit Hilfe des Backslashoperators werden die unbekannten Gitterpunktwerte und Gewichtungsfaktoren im Computerprogramm Matlab berechnet.

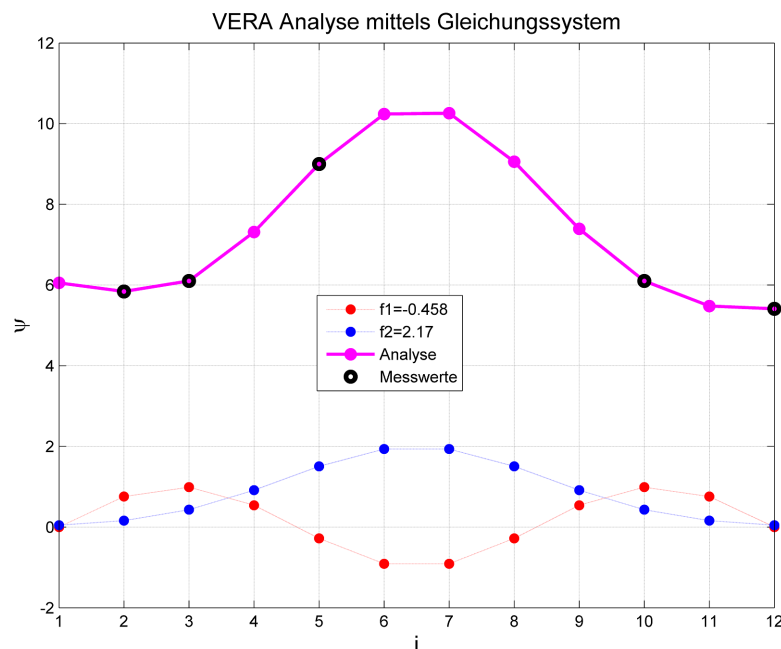


Abbildung 7.1: 1D VERA Analyse mit Fingerprints. 1. und 2.Ableitung gleichgewichtet

In Abbildung 7.1 wird der Effekt der Verwendung von Fingerprints veranschaulicht. Im Vergleich zu Abbildung 6.3, in der keine Fingerprints verwendet wurden, kann man eine Optimierung der Analyse erkennen. In dieser Analyse wurden die vordefinierten Fingerprints mit den Gewichtungsfaktoren -0.458 und 2.17 erkannt und auf die weiteren Punkte angewendet. Dadurch kann man beispielsweise an den Punkten Ψ_6 und Ψ_7 eine deutliche Überhöhung im Vergleich zu jener Analyse ohne Fingerprint erkennen. In der Realität ist es nicht sinnvoll, beliebige Funktionen als Fingerprint zu verwenden. Hier kommen je nach Parameter speziell berechnete Fingerprints zur Anwendung, die bereits im Kapitel 3 beschrieben wurden.

7.1.2 2D

Wie bereits in Abschnitt 6.1.2 gibt es im zweidimensionalen Fall neben der 1. und der reinen 2.Ableitung auch die gemischte 2.Ableitung, die wiederum aufgrund der Vertauschbarkeit von $\partial^2/\partial x\partial y$ und $\partial^2/\partial y\partial x$ mit dem Faktor Zwei angeschrieben wird, zu berücksichtigen.

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=2}^I \left(\frac{\Psi_{S,i,j} - \Psi_{S,i-1,j}}{\Delta x} \right)^2 + \sum_{j=2}^J \sum_{i=1}^I \left(\frac{\Psi_{S,i,j} - \Psi_{S,i,j-1}}{\Delta y} \right)^2 = \\
 &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=2}^I \left(\frac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j} - \left[\sum_{f=1}^{N(F)} c_f(\Psi_{F,f,i,j} - \Psi_{F,f,i-1,j}) \right]}{\Delta x} \right)^2 + \\
 &\quad + \sum_{j=2}^J \sum_{i=1}^I \left(\frac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i,j-1} - \left[\sum_{f=1}^{N(F)} c_f(\Psi_{F,f,i,j} - \Psi_{F,f,i,j-1}) \right]}{\Delta y} \right)^2
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=2}^{I-1} \left(\frac{\Psi_{S,i+1,j} - 2\Psi_{S,i,j} + \Psi_{S,i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right)^2 + \sum_{j=2}^{J-1} \sum_{i=1}^I \left(\frac{\Psi_{S,i,j+1} - 2\Psi_{S,i,j} + \Psi_{S,i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right)^2 = \\
 &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=2}^{I-1} \left(\frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j} - \left[\sum_{f=1}^{N(F)} c_f(\Psi_{F,f,i+1,j} - 2\Psi_{F,f,i,j} + \Psi_{F,f,i-1,j}) \right]}{(\Delta x)^2} \right)^2 + \\
 &\quad + \sum_{j=2}^{J-1} \sum_{i=1}^I \left(\frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1} - \left[\sum_{f=1}^{N(F)} c_f(\Psi_{F,f,i,j+1} - 2\Psi_{F,f,i,j} + \Psi_{F,f,i,j-1}) \right]}{(\Delta y)^2} \right)^2
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned}
 J_3 &= 2 \sum_{j=2}^J \sum_{i=2}^I \left(\frac{\Psi_{S,i,j} - \Psi_{S,i-1,j} - \Psi_{S,i,j-1} + \Psi_{S,i-1,j-1}}{\Delta x \Delta y} \right)^2 = \\
 &= 2 \sum_{j=2}^J \sum_{i=2}^I \left(\frac{\Psi_{i,j} - 2\Psi_{i-1,j} - \Psi_{i,j-1} + \Psi_{i-1,j-1} - \left[\sum_{f=1}^{N(F)} c_f(\Psi_{F,f,i,j} - \Psi_{F,f,i-1,j} - \Psi_{F,f,i,j-1} + \Psi_{F,f,i-1,j-1}) \right]}{\Delta x \Delta y} \right)^2
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

Wie schon oftmals in vorigen Abschnitten gehandhabt, werden diese Kostenfunktionen² nach den unbekannten Variablen abgeleitet und Null gesetzt. Dadurch kann man, ähnlich wie in Abschnitt 7.1.1, die LAMA aufstellen, die zum Einen aus der zweidimensionalen LAMA ohne Fingerprint besteht und zum Anderen mit den Ergänzungen aufgrund der Fingerprints erweitert wird. Durch Lösen der resultierenden Gleichungsmatrizen erhält man die Analyse wird hierzu ein Beispiel beschrieben. Ein Beispiel wird in Teil III veranschaulicht.

7.2 STAMA

Die Fingerprints müssen nicht nur in die LAMA eingebaut werden, sondern auch in die Stationsmatrix STAMA. Für die Verwendung der STAMA dürfen die Messpunkte nicht auf dem Gitter der Analyse liegen. Das bedeutet nun auch, dass sich die Fingerprintwerte nicht zwangsweise auf den Messpunkten befinden. Somit muss auch von den Fingerprints auf die Messpunkte interpoliert werden. Diese Vorgehensweise wird in den kommenden Abschnitten beschrieben.

7.2.1 1D

Die Gleichung 7.1 zeigt bereits für die LAMA eine Aufspaltung des Analyswertes in einen synoptischen Anteil und einen Anteil, der durch die Fingerprints erklärbar ist. Folglich muss auch eine Aufspaltung für die STAMA betrachtet werden. Nachfolgend ein Beispiel der Aufspaltung für die Station A³:

$$\Psi_A = \Psi_{S,A} + \sum_{f=1}^{N(F)} c_f \Psi_{A,F,f} \quad (7.11)$$

Die Variable $\Psi_{A,F,f}$ ist die lineare Interpolation des Fingerprints auf den Stationspunkt. Dabei ist anzumerken, dass das Gitter des Fingerprintfeldes feiner sein kann, als jenes der Analyse (vgl. Abbildung 7.1). Die Kostenfunktion der STAMA mit Fingerprints kann man wie folgt für den Punkt A anschreiben:

$$J_{STAMA} = \frac{1}{\delta_{i,A}\delta_{i+1,A}} \left[\delta_{i+1,A}\Psi_i + \delta_{i,A}\Psi_{i+1} - \Psi_A - \sum_{f=1}^{N(F)} c_f (\delta_{i+1,A}\Psi_{F,f,i} + \delta_{i,A}\Psi_{F,f,i+1} - \Psi_{A,F,f}) \right]^2 \quad (7.12)$$

Im Vergleich zu Gleichung 6.27 ist lediglich der Fingerprintanteil hinzugekommen, der aus der Summe der Gewichtungsfaktoren (rot) multipliziert mit der Differenz zwischen dem interpolierten Wert des Fingerprintfeldes vom Analysegitter auf die Station (blau) und dem interpolierten

²Formeln 7.8 - 7.10 aus der Dokumentation der VERA übernommen (Mayer 2007)

³Formeln 7.11 - 7.12 aus der Dokumentation der VERA übernommen (Mayer 2007)

Wert aus dem feineren Fingerprintgitter auf die Station (grün) besteht. Das weitere Prozedere bleibt erneut gleich. Nach dem Ableiten der Kostenfunktion nach deren Unbekannten und Null setzen, wird erneut eine Gleichungsmatrix aufgestellt. Zusätzlich wird das Gleichungssystem der LAMA der betrachteten Ableitung benötigt, um die Gitterpunkte untereinander ebenfalls verknüpfen zu können. Durch Summieren und Lösen dieser Gleichungen erhält man die Werte an den Gitterpunkten der Analyse.

7.2.2 2D

Im zweidimensionalen Fall sieht die Kostenfunktion für die STAMA der Station A laut Mayer (2007) folgendermaßen aus:

$$J_{STAMA} = \frac{1}{\delta_{i,A}\delta_{i+1,A}\delta_{j,A}\delta_{j+1,A}} \left[\delta_{i+1,A}\delta_{j+1,A}\Psi_{i,j} + \delta_{i,A}\delta_{j+1,A}\Psi_{i+1,j} + \delta_{i+1,A}\delta_{j,A}\Psi_{i,j+1} + \delta_{i,A}\delta_{j,A}\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_A - \sum_{f=1}^{N(F)} \textcolor{red}{c}_f (\delta_{i+1,A}\delta_{j+1,A}\Psi_{F,f,i,j} + \delta_{i,A}\delta_{j+1,A}\Psi_{F,f,i+1,j} + \delta_{i+1,A}\delta_{j,A}\Psi_{F,f,i,j+1} + \delta_{i,A}\delta_{j,A}\Psi_{F,f,i+1,j+1} - \Psi_{A,F,f}) \right]^2 \quad (7.13)$$

Wie im eindimensionalen Fall wird die STAMA ohne Fingerprint mit dem Fingerprintanteil erweitert. Der Minuend entspricht erneut der Interpolation der Fingerprintwerte am Analysegitter auf die Station. Der Subtrahend wird direkt von der Interpolation aus dem feinen Fingerprintgitter auf die Station gebildet. Die weitere Vorgehensweise, um die Analyse zu erhalten, wurde bereits mehrfach in den vorangegangenen Abschnitten behandelt und wird an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt.

Teil III

VERA-Analyse mit Monte-Carlo Methode

Kapitel 8

Einleitung

Dieser Teil der Masterarbeit behandelt die Methode, wie die VERA-Analyse mit Hilfe von Monte-Carlo Verfahren gelöst werden kann. Mit Hilfe von Beispielen wird diese Herangehensweise veranschaulicht. Abschließend wird auf einen realen Fall eingegangen.

In Kapitel 4 wurde die Monte-Carlo Methode allgemein vorgestellt. Dieses Gebiet ist sehr umfassend und man kann auf viele Einzelheiten eingehen, der den Umfang dieser Masterarbeit deutlich übersteigen würde. Daher soll diese Arbeit als ersten Anhaltspunkt, um die VERA-Analyse mit Monte-Carlo Methoden zu lösen, verstanden werden.

Ziel dieser Methode ist es, die VERA-Analyse iterativ zu lösen, um einerseits komplexere Fingerprints (wie beispielsweise zur Auflösung von Temperaturinversionen) verwenden zu können, die mit Lösung der Matrixgleichungen nicht eingebunden werden können und andererseits bietet dieses Verfahren die Möglichkeit, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für jeden Gitterpunkt und alle Fingerprintgewichte zu erhalten.

Grundsätzlich ist die Methode sowohl für die STAMA und LAMA, als auch für den eindimensionalen und zweidimensionalen Fall gleich. Es werden die jeweiligen Kostenfunktionen, wie sie schon in den vorigen Kapiteln angeschrieben wurden, herangezogen. Zu Beginn müssen Startwerte an den Analysegitterpunkten erzeugt werden. Anschließend werden Zufallszahlen generiert, die zur Durchführung der iterativen Annäherung an den minimalen Kostenfunktionswert benötigt werden. Diese Zufallszahlen werden einzeln an einen beliebigen Analysewert addiert und die Kostenfunktion wird neuerlich berechnet. Erfolgt eine Verkleinerung des Kostenfunktionswertes, so soll dieser neue Analysewert beibehalten werden. Eine Vergrößerung soll verworfen werden. Dieser Prozess kann beliebig oft an allen Analysewerten vollzogen werden. So gelangt man schrittweise zum minimalen Kostenfunktionswert, der einer iterativen Lösung der Analyse entspricht.

Kapitel 9

Analyseverfahren ohne Fingerprint

Um besseres Verständnis zu gewährleisten, wird zunächst eine Analyse ohne Fingerprint behandelt.

9.1 LAMA

Wie in Teil II beschrieben, besteht eine Analyse aus einer Kombination der Large-Matrix, kurz LAMA, die die Gitterpunkte untereinander in Verbindung setzt und der Stationsmatrix, kurz STAMA, die die Stationen mit den Gitterpunkten verknüpft. Für die VERA Analyse mit Hilfe von Monte-Carlo Methoden werden allerdings nur mehr die Kostenfunktionen benötigt und es werden keine Matrizen aufgestellt. Die Nomenklatur LAMA und STAMA wird jedoch beibehalten.

Im Idealfall liegen die Stationen auf dem Gitter der Analyse. Somit erspart man sich die Kostenfunktion der STAMA. Dieser Fall wird im folgenden Abschnitt mit Hilfe der Monte-Carlo Methode beschrieben.

9.1.1 1D

Für die eindimensionale Analyse ohne Fingerprint mit Hilfe der Monte-Carlo Methode werden lediglich die Kostenfunktionen 6.7 und 6.8 benötigt, um die Minimierung der Steigung bzw. Krümmung durchführen zu können. Das Aufstellen von Matrizen, wie beispielsweise der Large-Matrix, ist nicht notwendig, was hinsichtlich der Programmierung einen Vorteil bringt. Für die Beschreibung der weiteren Vorgehensweise wird erneut das Beispiel, das bereits in Abschnitt 6.1.1 verwendet wurde, herangezogen.

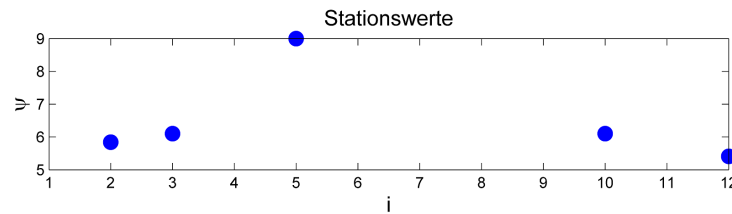


Abbildung 9.1: Stationswerte des 1D Beispiels der LAMA ohne Fingerprints

An 5 von 12 Gitterpunkten befinden sich Beobachtungen. Um die VERA-Analyse mit Hilfe der Monte-Carlo Methode anwenden zu können, benötigt man an den unbekannten Gitterpunkten Anfangswerte. Diese werden durch Interpolation von den Beobachtungen an die Gitterpunkte erzeugt. Für dieses Beispiel wird die im Computerprogramm Matlab bereitgestellte kubische Interpolation verwendet. Im Grunde hat man freie Wahl, welche Interpolation man verwenden möchte. Eine der Analyse nahe kommende ist ratsam, da man sich somit einige Iterationen ersparen kann und dadurch schneller zu einem Ergebnis gelangt.

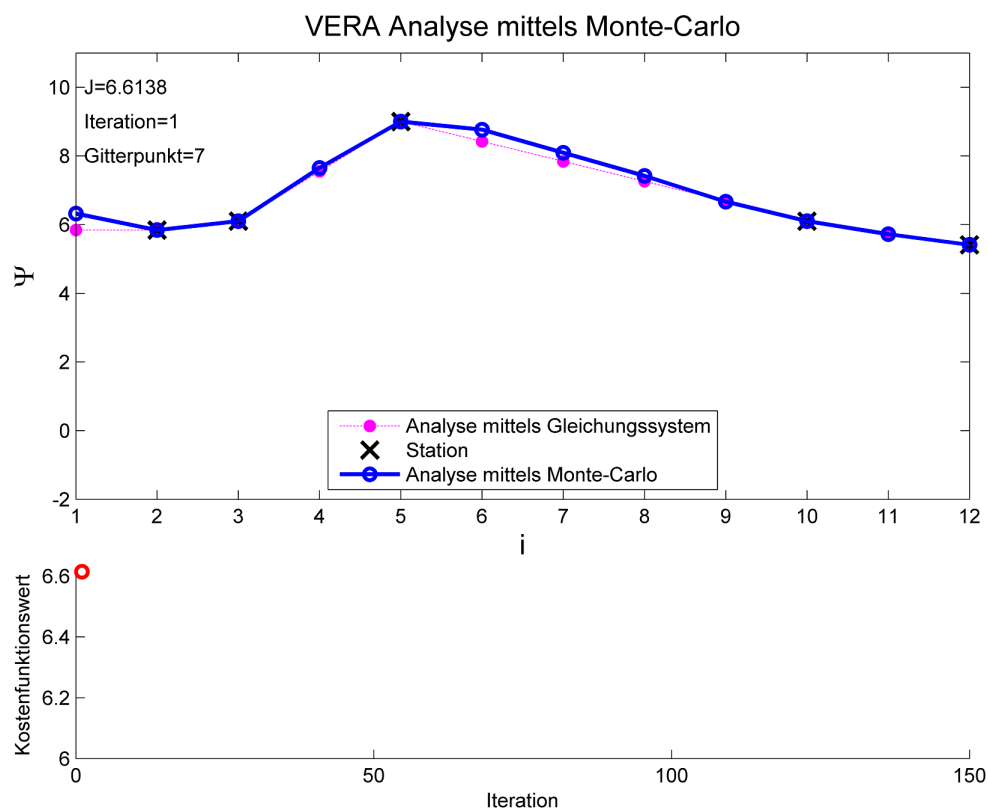


Abbildung 9.2: Anfangswerte des 1D Beispiels der LAMA ohne Fingerprints der 1.Ableitung

In Abbildung 9.2 sind die durch Interpolation erhaltenen Anfangswerte dargestellt. In diesem

Beispiel wird eine Analyse der reinen 1.Ableitung durchgeführt. In Magenta ist dazu das Ergebnis der VERA Analyse mittels Lösung des Gleichungssystems dargestellt. Links oben scheint der derzeitige Kostenfunktionswert J auf, weiters die wievielte Iteration durchgeführt und welcher Gitterpunkt derzeit verändert wird. Im unteren Subplot wird der Kostenfunktionswert gegenüber den Iterationsschritten dargestellt. Die gesamte Darstellung kann man für jeden Iterationsschritt als Animation verfolgen ¹. In der Printversion dieser Arbeit muss auf einzelne Grafiken für bestimmte Iterationsschritte zurückgegriffen werden.

Für dieses Beispiel wird die Kostenfunktion der 1.Ableitung benötigt, um die Iteration durchführen zu können:

$$J_1 = \sum_{i=2}^I \left(\frac{\Psi_i - \Psi_{i-1}}{\Delta x} \right)^2 \Rightarrow Minimum \quad (9.1)$$

Für die in Abbildung 9.2 dargestellten Anfangswerte ergibt die Kostenfunktion J_1 einen Wert von 6.6138. Für eine mögliche Minimierung der 2.Ableitung wird die Formel 6.8 benötigt. Möchte man eine Kombination der beiden Formeln betrachten, werden die einzelnen Kostenfunktionen mit einem Gewichtungsfaktor versehen und addiert, um einen Gesamtkostenfunktionswert zu erhalten, der wiederum minimiert wird, um die Lösung zu erhalten.

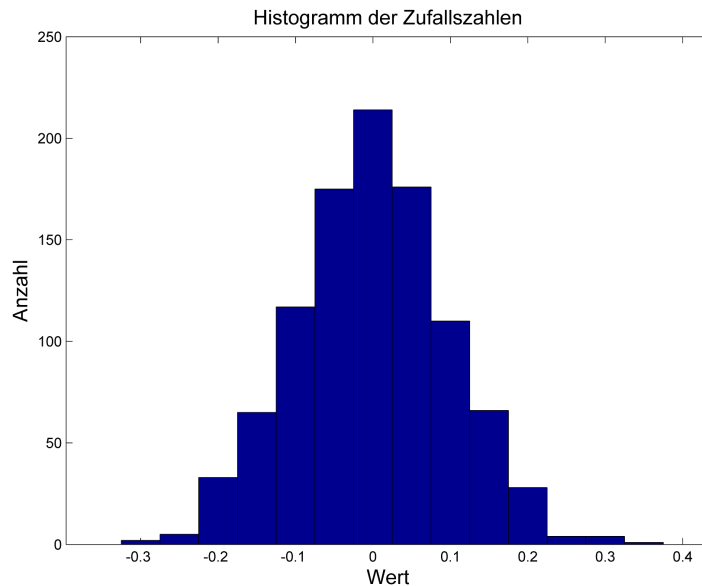


Abbildung 9.3: Histogramm der verwendeten Zufallszahlen

In Abbildung 9.3 sind die Zufallszahlen dargestellt, die für dieses Beispiel verwendet wurden. Insgesamt werden 1000 Zahlen erzeugt, mit dem Mittelwert Null und einer Standardabweichung von 0.1. Diese Einstellungen kann man erneut beliebig gestalten. Eine höhere Anzahl bedeutet

¹für das Beispiel aus Abschnitt 10.1 kann die Animation auf der beigelegten CD betrachtet werden.

allerdings auch einen höheren Rechenaufwand, den es zu berücksichtigen gibt. Für dieses Beispiel spielt die Rechenzeit allerdings noch eine untergeordnete Rolle. Die Standardabweichung ist für die Genauigkeit des Ergebnisses ausschlaggebend. Je kleiner diese ist, desto genauer wird das Ergebnis, bedeutet allerdings gleichzeitig eine gesteigerte Rechenzeit, da die Änderungen des Analysewertes kleiner ausfallen und dadurch mehr Iterationen durchgeführt werden müssen, um zu einem brauchbaren Ergebnis zu kommen. In weiterer Folge wäre es denkbar und auch ratsam, verschieden generierte Gruppen von Zufallszahlen zu verwenden. Zu Beginn der Durchführung der Iteration kann eine Gruppe mit Zufallszahlen mit einer größeren Standardabweichung verwendet werden, da hier der Unterschied der Analyse zum Ergebnis am Größten ist und mit größeren Zahlen eine schnellere Annäherung an das Ergebnis erzielt werden kann. Anschließend, wenn nur mehr geringe bzw. gar keine Änderungen mehr auftreten, könnte man in eine Gruppe mit kleinerer Standardabweichung wechseln, um das Ergebnis zu verfeinern. Diese Methode kommt allerdings in dieser Arbeit nicht zur Anwendung.

Um die Iteration durchzuführen, wird zufällig ein Gitterpunkt, der nicht auf einem Stationspunkt liegt, ausgewählt. In Abbildung 9.2 ist ersichtlich, dass für die erste Iteration des Beispiels der Gitterpunkt Ψ_7 ausgewählt wurde. Dem Gitterpunkt werden nun einzeln die Zufallszahlen hinzugeaddiert und die Kostenfunktion erneut berechnet. Erfolgt eine Verkleinerung des Kostenfunktionswertes, wird der neue Analyswert beibehalten - eine Vergrößerung wird verworfen. Anschließend wird ein neuer Gitterpunkt ausgewählt und das gleiche Prozedere durchgeführt. Dieser Vorgang kann bis zu einer vordefinierten Anzahl an Iterationen durchgeführt werden, oder es ist eine Abbruchsbedingung definiert worden. Eine mögliche Abbruchsbedingung wäre zum Beispiel, dass wenn an keinem Gitterpunkt eine Änderung möglich ist, die den Kostenfunktionswert verkleinert, die Iteration gestoppt werden soll.

Nachfolgend werden Plots des Iterationsschritts 10, 20 und das Endresultat dargestellt. Diese Plots zeigen ein Ergebnis der Iteration. Bei einer neuerlichen Durchführung des Programmes erhält man eine leicht unterschiedliche Gruppe an Zufallszahlen aufgrund der Verwendung eines Zahlengenerators und eine unterschiedliche Auswahl der Reihenfolge der Gitterpunkte, die neu berechnet werden sollen. Somit gelangt man immer zu einem leicht veränderten Ergebnis, das allerdings im Grunde die gleiche Aussagekraft besitzt. In Abbildung 9.8 wird erneut darauf eingegangen.

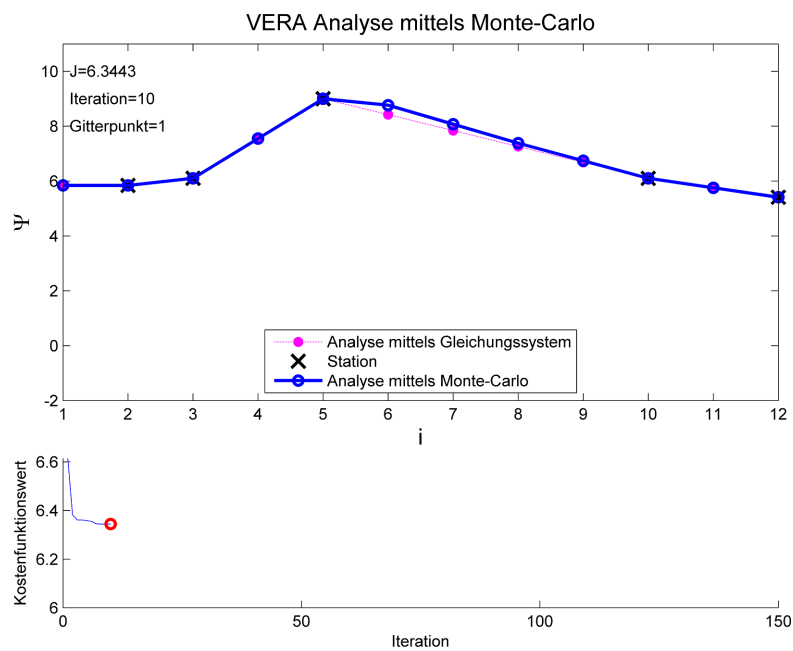


Abbildung 9.4: Iterative Analyse nach 10 Iterationen

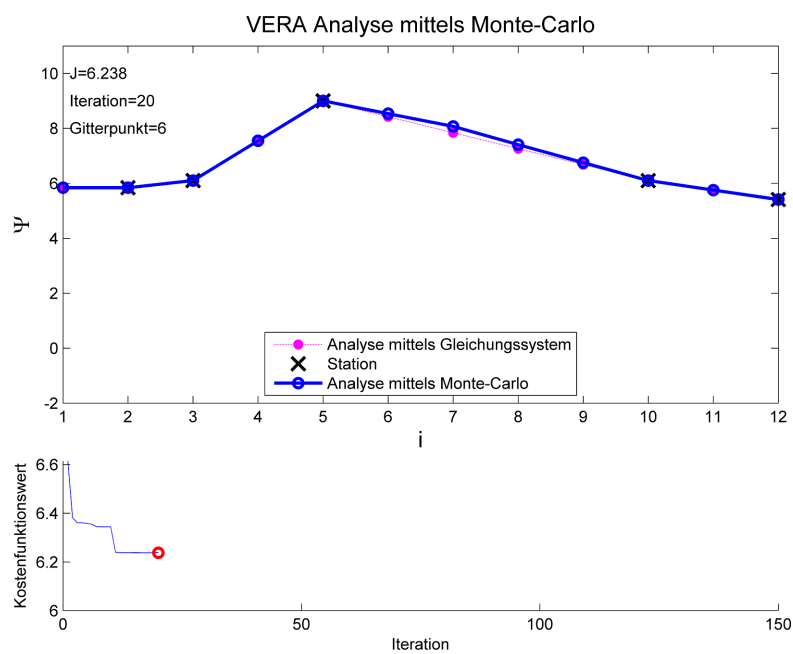


Abbildung 9.5: Iterative Analyse nach 20 Iterationen

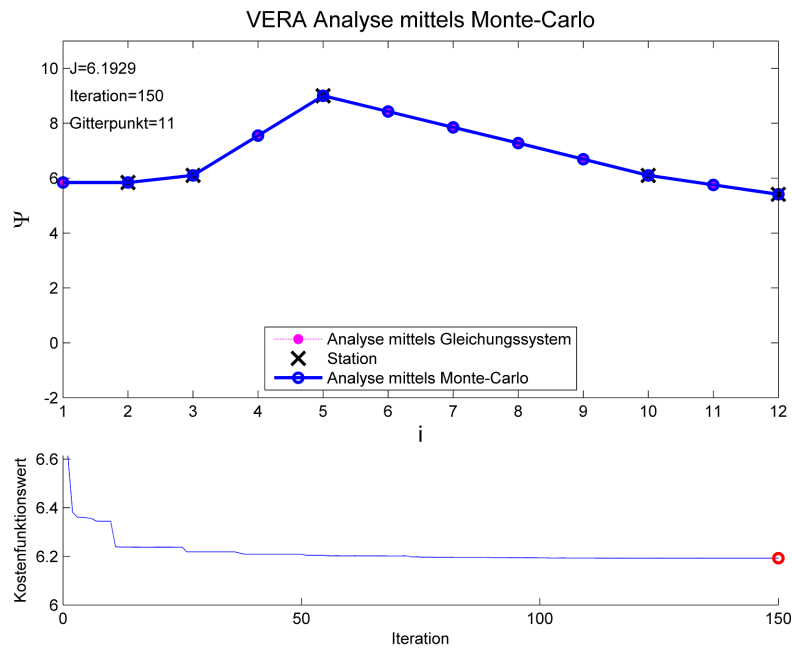


Abbildung 9.6: Endresultat der iterativen Analyse nach 150 Iterationsschritten

Für dieses Beispiel wurden 150 Iterationsschritte definiert. Im Verlauf der Iteration kann man eine Annäherung der iterativen Analyse an die VERA Analyse mittels Lösung eines Gleichungssystem erkennen. Zu Beginn ändert sich der Kostenfunktionswert verhältnismäßig stark, da der Unterschied der Analysewerte zur Lösung am Größten ist. Während der Iteration fallen die Unterschiede allmählich geringer aus, was anhand des unteren Subplots des Verlaufs des Kostenfunktionswertes ersichtlich ist. Ab der 120 Iteration gibt es keine Änderung des Kostenfunktionswertes mehr.

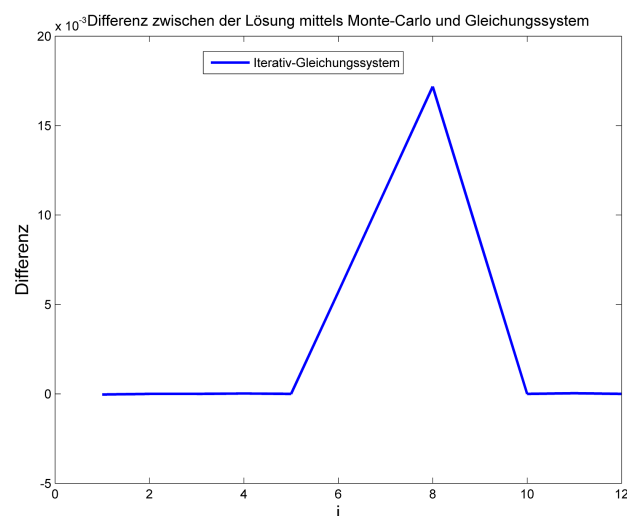


Abbildung 9.7: Differenz zwischen der Lösung der VERA Analyse mit Hilfe des Monte-Carlo Verfahren und mittels Lösung des Gleichungssystems

In Abbildung 9.7 wird die Differenz der beiden Methoden zur Lösung der VERA Analyse für dieses Beispiel dargestellt. Dabei entstehen die maximalen Differenzen an den Punkten, die sich am Weitesten von einem Beobachtungspunkt entfernt befinden. Diese Differenzen liegen lediglich im Hundertstelbereich, das beispielsweise für eine Temperaturanalyse, in dem die Thermometer der Stationen in der Regel eine Zehntelauflösung besitzen, eine durchaus brauchbare Analyse darstellt. Bei neuerlichen Durchführungen der Iteration erhält man leicht unterschiedliche Ergebnisse, allerdings liegen die Unterschiede im Hundertstel- bis Tausendstelbereich, kann daher vernachlässigt werden und auf eine gleiche Interpretation geschlossen werden (vgl. Abbildung 9.8).

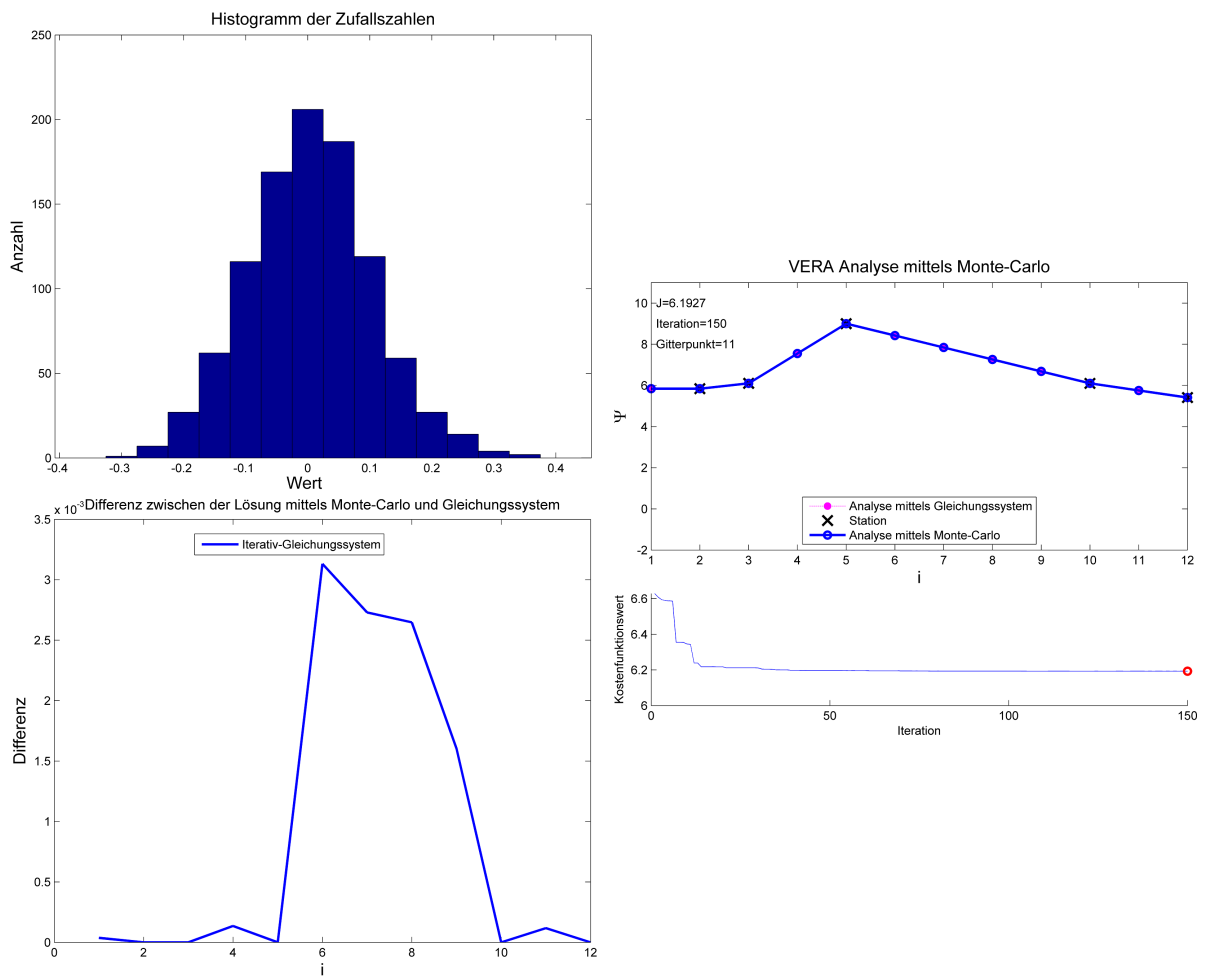


Abbildung 9.8: Weiteres Ergebnis einer neuerlichen Durchführung der Iteration

Abbildung 9.8 zeigt ein zweites Ergebnis für das Beispiel aus Abbildung 9.1. Die Zufallszahlen wurden mit dem gleichen Mittelwert und der gleichen Standardabweichung erzeugt und es wurden gleichviele Iterationsschritte gewählt. Das Ergebnis ist ähnlich, der finale Kostenfunktionswert

beträgt um $2 \cdot 10^{-4}$ weniger als im vorigen Ergebnis. Die maximale Differenz zwischen der Lösung mit Monte-Carlo Methode und mit Gleichungssystem ist um eine Zehnerpotenz gesunken. Anhand der Grafik wird ebenso ersichtlich, dass lediglich an den Stationspunkten die Differenz gleich Null ist.

9.1.2 2D

Im zweidimensionalen Fall werden für die Kostenfunktionen der 1., reinen 2. und gemischten 2.Ableitung die Formeln 6.21, 6.22 und 6.23 verwendet. Das Verfahren wird gleich, wie im Abschnitt 9.1.1 beschrieben, angewendet und wird an dieser Stelle nicht näher erläutert

9.2 STAMA

Bei der Erläuterung der Berechnung der VERA Analyse ohne Fingerprint mit Hilfe der Monte-Carlo Methode, bei der die Stationen außerhalb des Gitters liegen (STAMA), wird nur der zweidimensionale Fall herangezogen. Grund dafür ist einerseits die Ähnlichkeit der Methode für den ein- und zweidimensionalen Fall, da lediglich die Kostenfunktionen unterschiedlich sind, die bereits im Abschnitt 6.2 aufgestellt wurden. Andererseits wurde im erwähnten Abschnitt auf eine Grafik der zweidimensionalen Lösung verzichtet, die nun nachgeholt wird.

Die benötigten Kostenfunktionen sind jene für die 1.Ableitung, die reine 2.Ableitung und die gemischte 2.Ableitung der LAMA, um die Gitterpunkte untereinander zu verknüpfen (Formeln 6.21, 6.22 und 6.23) und jene der STAMA (Formel 6.30). Diese Kostenfunktionen können beliebig gewichtet werden um Schwerpunkte zu setzen. Für das nachfolgende Beispiel wird die gleichgewichtete Variante verwendet.

Zunächst werden die Stationswerte auf ein regelmäßiges Gitter interpoliert. Anschließend werden die Kostenfunktion der STAMA und die gewünschten Kostenfunktionen der betrachteten Ableitungen berechnet, gewichtet und zu einem Gesamtkostenfunktionswert summiert. Dadurch erhält man die Anfangswerte der Iteration. In der nachfolgenden Abbildung sind die interpolierten Anfangswerte dargestellt. Die Stationen (schwarze Kreise) wurden ähnlich dem eindimensionalen Fall angeordnet.

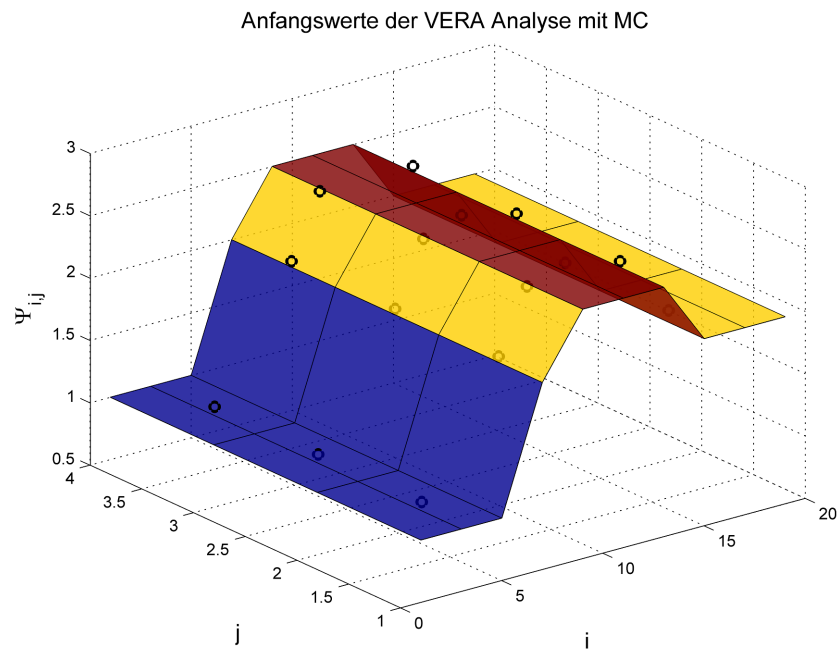


Abbildung 9.9: Anfangswerte des 2D Beispiels der STAMA ohne Fingerprint mit gleichgewichteten Kostenfunktionen

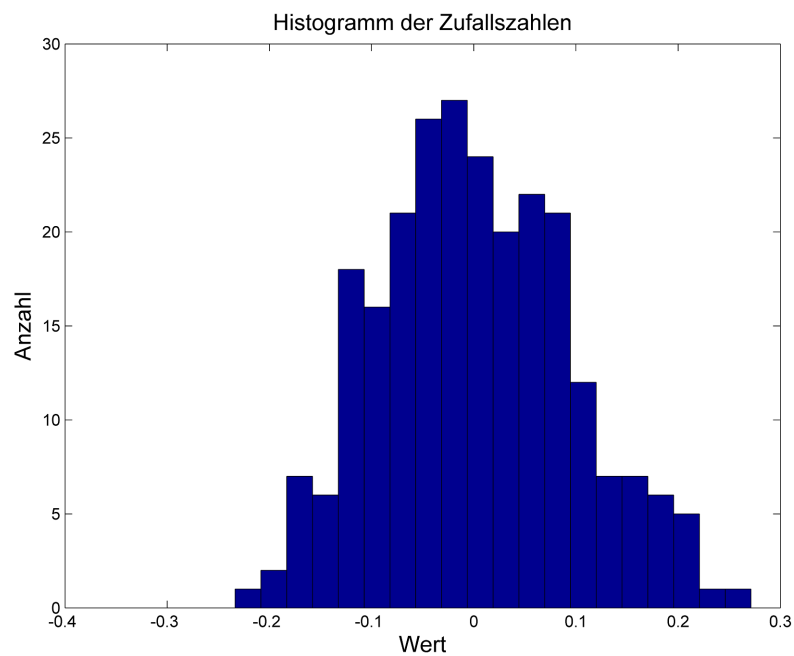


Abbildung 9.10: Histogramm der verwendeten Zufallszahlen

In Abbildung 9.10 sind die Zufallszahlen dargestellt, die für dieses Beispiel verwendet wurden. 250 Zufallszahlen wurden definiert, mit Mittelwert Null und Standardabweichung 0.1, wobei die

Parameter und die Anzahl an Zufallszahlen beliebig gewählt werden können.

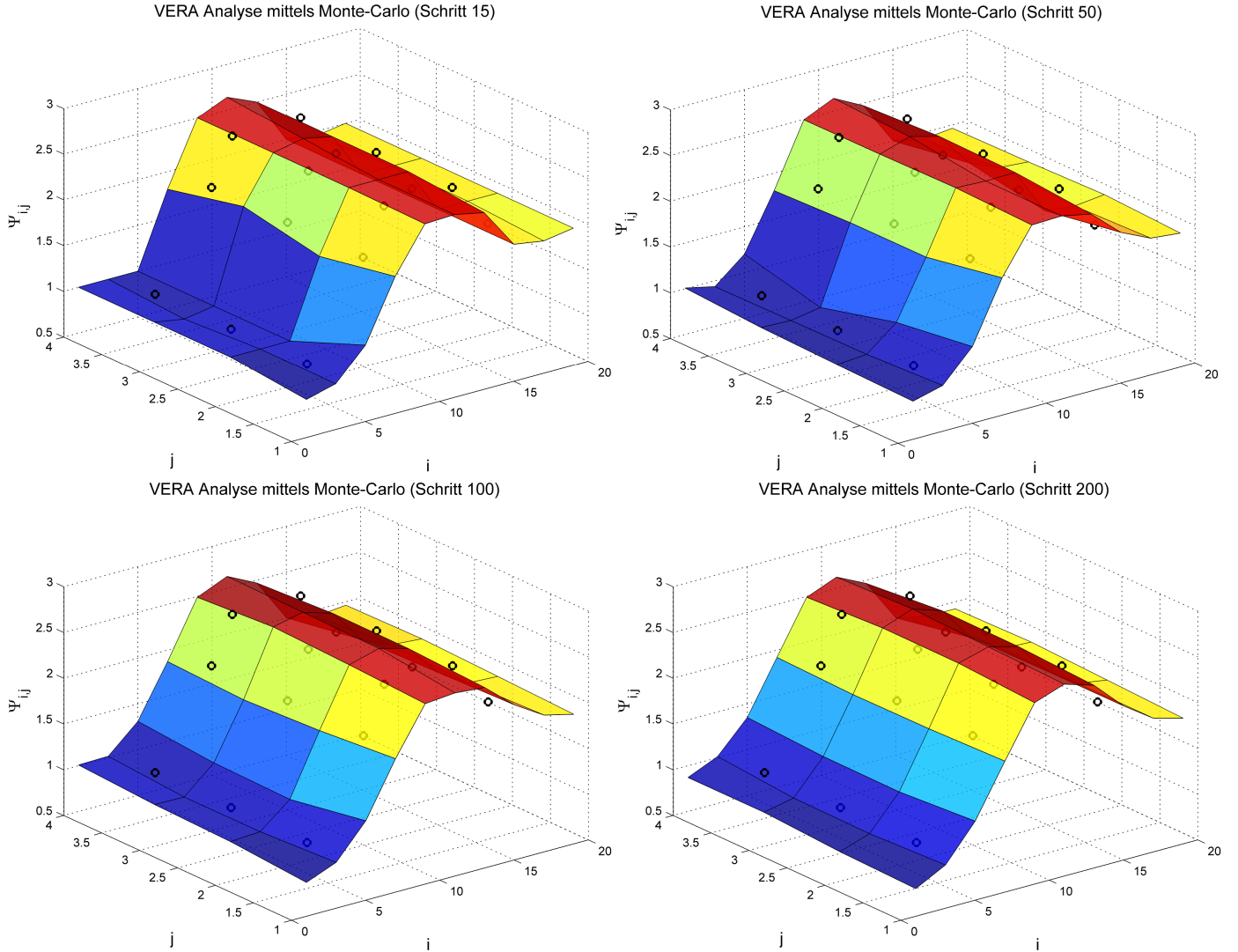


Abbildung 9.11: 2D-Plots verschiedener Iterationsschritte

In der obigen Abbildung wird die schrittweise Annäherung der Analyse an das Ergebnis dargestellt. Dabei kann man eine allmähliche Glättung der Analyse aufgrund der Minimierung der 1. und 2. Ableitung erkennen. Hier sind die Iterationsschritte 15, 50, 100, 200 dargestellt und in nachfolgender Abbildung 9.12 ist das Ergebnis nach 1000 Schritten ersichtlich. Aufgrund der Anwendung der STAMA müssen die Stationen nicht zwangsweise auf dem Analysefeld liegen, sofern ein kleinerer Kostenfunktionswert dadurch erzielt wird. Abbildung 9.13 zeigt den Verlauf des Kostenfunktionswertes als Funktion der Iterationsschritte. Dabei kann man die Bedingung, dass lediglich Verkleinerungen des Kostenfunktionswertes zulässig sind, erkennen. Um den Schritt 500 werden nachfolgend keine Verkleinerungen des Kostenfunktionswertes mehr erzielt. Hier hätte

man bereits die Iteration beenden können.

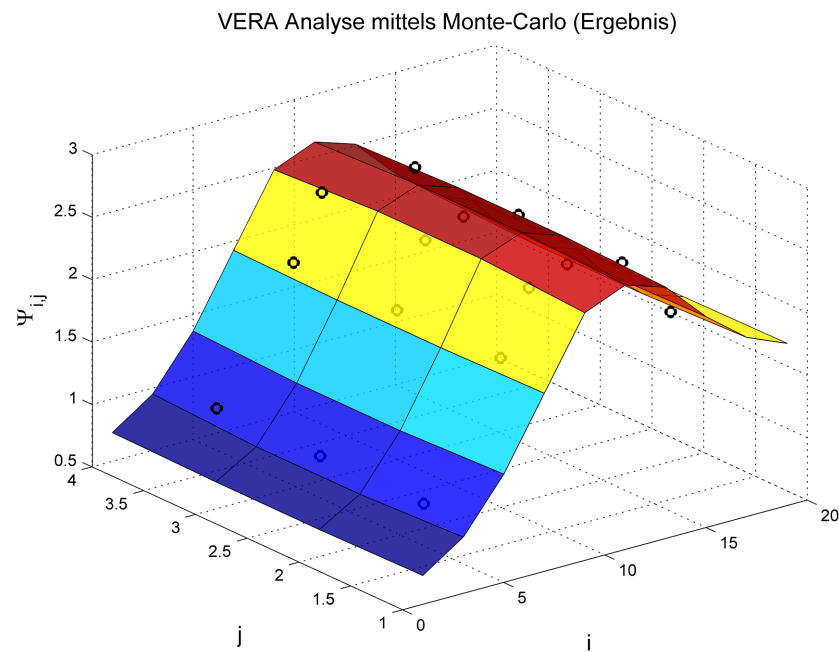


Abbildung 9.12: Endresultat der iterativen Analyse nach 1000 Iterationsschritten

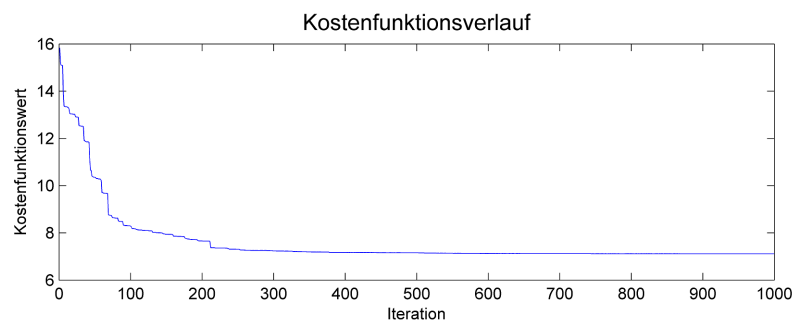


Abbildung 9.13: Verlauf des Kostenfunktionswertes nach den Iterationsschritten

Wiederum kann man die Iteration mit beliebigen Zufallszahlen wiederholen und zu leicht verschiedenen Ergebnissen gelangen, die grundsätzliche Aussage des Resultats bleibt, sofern die Zufallszahlen realistisch gewählt wurden, allerdings gleich.

Kapitel 10

Analyseverfahren mit Fingerprint

Das Hauptmerkmal von VERA ist es, eine Analyse mit Vorwissen zu verfeinern. Die sogenannten Fingerprints müssen somit auch in die VERA mit Hilfe der Monte-Carlo Methode implementiert werden. In den folgenden Abschnitten soll diese Vorgehensweise erläutert werden.

10.1 LAMA

Für die Betrachtung der LAMA mit Fingerprint genügt an dieser Stelle die Beschreibung der eindimensionalen Variante, da hiermit die grundlegenden Vorgehensweisen ausreichend gut beschrieben werden können und die Beschreibung der höheren Dimensionalität keinen entscheidenden Mehrwert liefert. Außerdem wird im nachfolgendem Kapitel die zweidimensionale STAMA beschrieben, in dem die zweidimensionale LAMA Bestandteil ist.

Für die Berechnung der LAMA mit Fingerprint mit Hilfe der Monte-Carlo Methode bedarf es für die Kostenfunktionen der 1. und 2.Ableitung die Formeln 7.2 und 7.3. Die weitere Vorgehensweise bleibt erneut ident. Nach dem Interpolieren der Beobachtungswerte auf die Gitterpunkte, um Anfangswerte zu erhalten, werden Zufallszahlen ermittelt. Diese werden einzeln an die Gitterpunkte addiert und die Kostenfunktionen erneut berechnet. Erfolgt eine Verkleinerung des Gesamtkostenfunktionswertes, wird dieser neue Gitterpunktwert beibehalten, bei einer Vergrößerung wird dieser verworfen. Da die Kostenfunktionen mit den Fingerprintanteilen erweitert wurden, müssen die Fingerprintgewichte dem gleichen Prozedere unterworfen werden. Als Anfangswert dafür wurde die Zahl Eins gewählt, kann allerdings beliebig bestimmt werden.

Für das nachfolgende Beispiel werden dieselben Angaben an Beobachtungswerten und Fingerprints verwendet wie in Abschnitt 7.1.1 und sowohl 1. als auch 2.Ableitung gleichgewichtet minimiert.

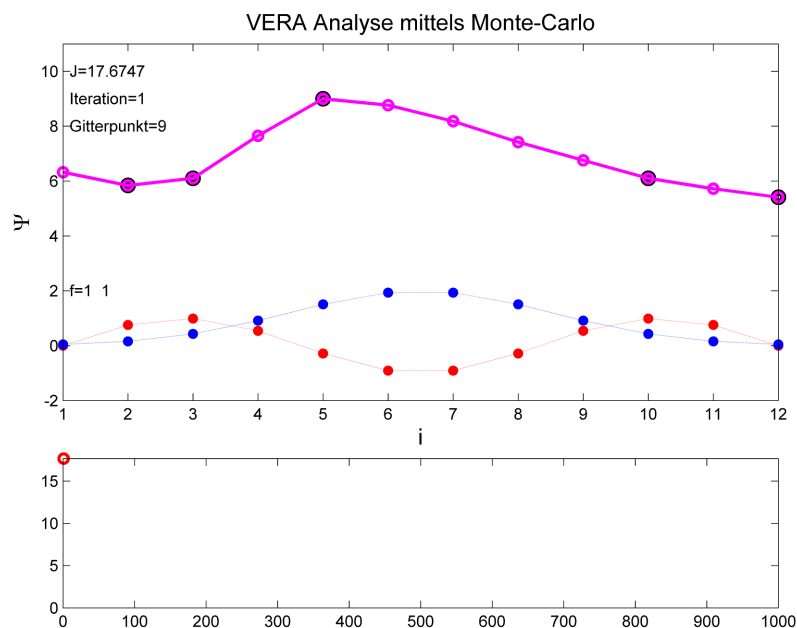


Abbildung 10.1: Anfangswerte des 1D Beispiels der LAMA mit Fingerprints

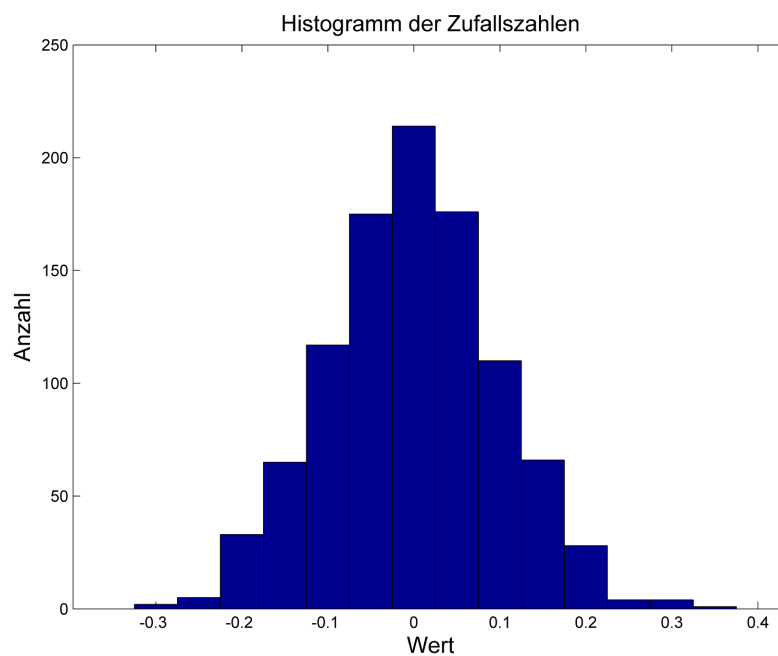


Abbildung 10.2: Histogramm der verwendeten Zufallszahlen

In Abbildung 10.1 sind die aus den Beobachtungswerten auf die unbekannten Gitterpunkte interpolierten Anfangswerte dargestellt. Abbildung 10.2 zeigt die verwendeten Zufallszahlen. 1000 Zahlen

mit Mittelwert 0 und Standardabweichung 0.1 wurden ermittelt um die Iteration durchführen zu können.

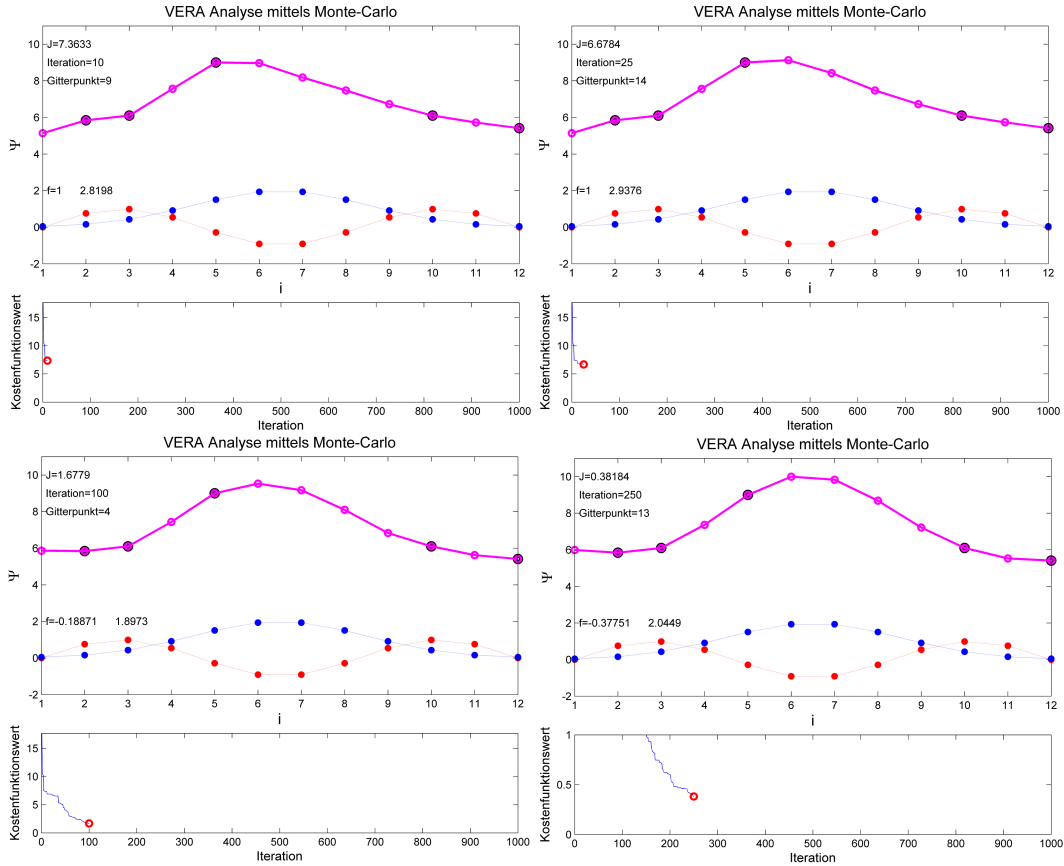


Abbildung 10.3: 1D-Plots verschiedener Iterationsschritte (links, oben: Schritt 10; rechts, oben: Schritt 25; links, unten: Schritt 100; rechts, unten: Schritt 250)

Obige Abbildung zeigt ausgewählte Iterationsschritte, um die Methode der iterativen Annäherung an die Lösung nachvollziehen zu können¹. Dabei kann man eine allmähliche Glättung der Analyse unter Berücksichtigung der Fingerprints erkennen. In den unteren Subplots ist die schrittweise Verminderung des Kostenfunktionswertes ersichtlich. Aktueller Kostenfunktionswert, Iterationsschritt und welcher Gitterpunkt aktuell geändert wird, sind im oberen Subplot dargestellt. Zusätzlich werden die aktuellen Fingerprintgewichte angeschrieben.

Als Endresultat ergibt sich folgende Abbildung 10.4. Im Vergleich mit der herkömmlichen VERA Analyse aus Abschnitt lässt 7.1.1 sich eine hohe Übereinstimmung erkennen, wie Abbildung 10.5 beweist. Mit einer Differenz von maximal 7 Tausendstel an einem Gitterpunkt stellt die VERA Analyse mit Hilfe der Monte-Carlo Methode eine brauchbare Annäherung an den minimalen Kostenfunktionswert dar.

¹Animation der Iteration in beigelegter CD ersichtlich

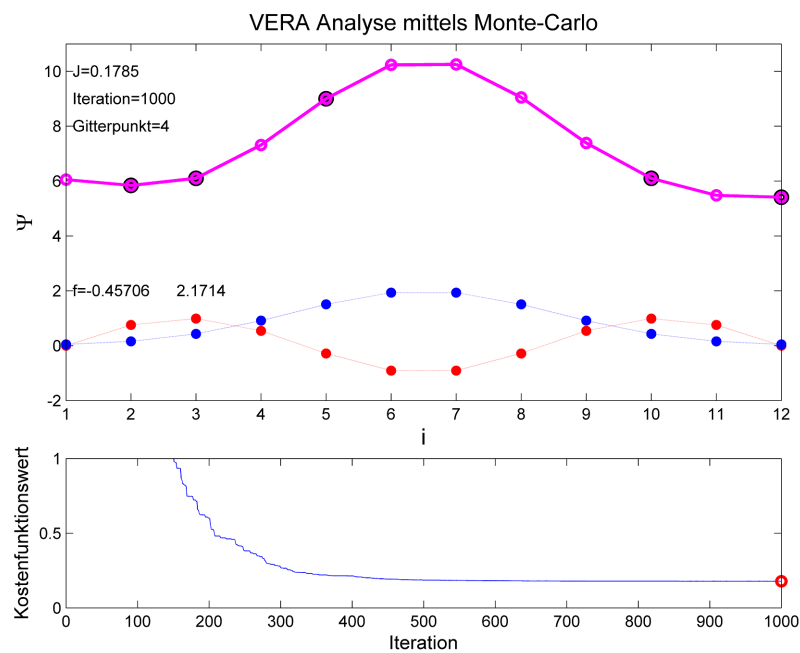


Abbildung 10.4: Endresultat der iterativen Analyse nach 1000 Iterationsschritten

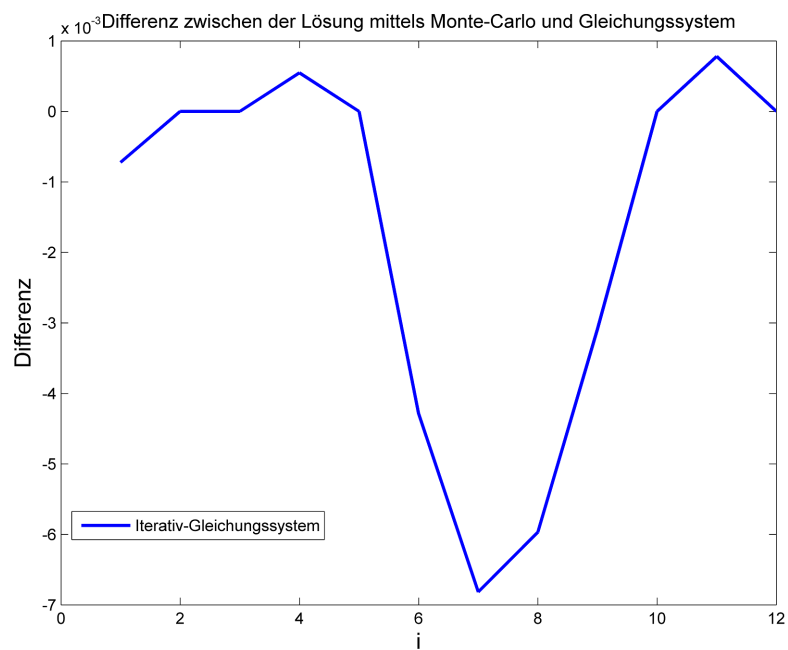


Abbildung 10.5: Differenz zwischen der Lösung der VERA Analyse mit Hilfe des Monte-Carlo Verfahrens und mittels Lösung des Gleichungssystems.

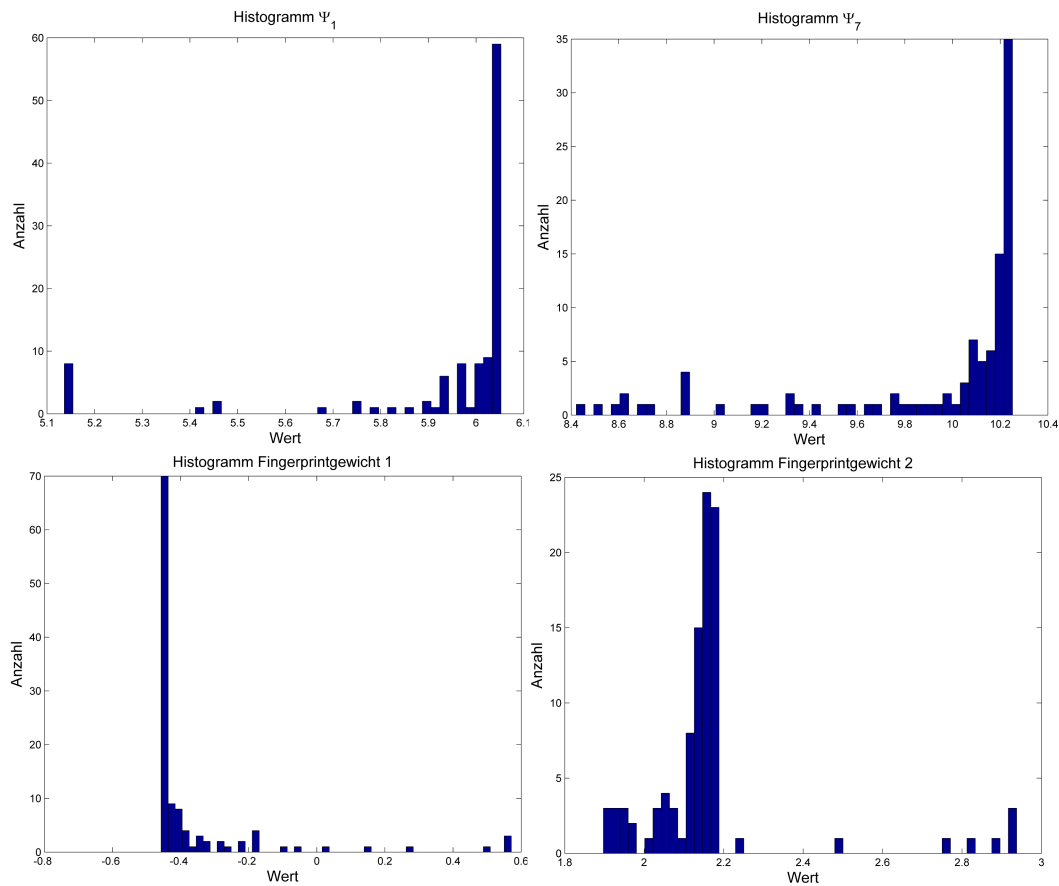


Abbildung 10.6: Histogramm der Anzahl der akzeptierten Werte für ausgeählte Gitterpunkte und die Fingerprintgewichte

Die Abbildung 10.6 zeigt erstmals die resultierenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen von ausgewählten Gitterpunkten und den Fingerprintgewichten. Dabei werden sämtliche akzeptierte Werte in ein Histogramm zusammengefasst. Je öfter ein Wert auftritt, desto wahrscheinlicher ist dieser. Für jene einfache Anordnung des Beispiels werden recht eindeutige Ergebnisse angezeigt. Lediglich für das Fingerprintgewicht Zwei, der den blau dargestellten Fingerprint, eine Gaußverteilung, darstellt, ist die Lösung nicht so eindeutig, wie bei den anderen Grafiken.

10.2 STAMA

Für die Betrachtung der STAMA mit Fingerprint wird der zweidimensionale Fall herangezogen. Jener wird für die operationelle VERA verwendet, da die Werte auf einer Ebene abgebildet werden und die Beobachtungen nicht auf den Gitterpunkten liegen.

Für die Durchführung der VERA mit Hilfe der Monte-Carlo Methode werden einerseits die zweidimensionalen LAMA-Kostenfunktionen (Formeln 7.8-7.10) verwendet, um die Gitterpunkte untereinander zu verknüpfen und andererseits die zweidimensionale STAMA-Kostenfunktion, welche bereits in Abschnitt 7.2.2 angeschrieben wurde, um die Beobachtungswerte auf die Gitterpunkte zu interpolieren.

Für dieses Beispiel wurden die Angaben aus Abbildung 10.7 verwendet. Die Verteilung der Beobachtungen dient der Übersichtlichkeit und das beobachtungslose Gebiet ab Gitterpunkt $i=12$ soll in der Analyse die Vorzüge der VERA mit den Effekten der Fingerprinttechnik aufzeigen. Als Fingerprint wurde eine Sinuswelle bestimmt, die in Abbildung 10.8 in blau dargestellt wird. Ähnlich wie schon häufig in bereits genannten Beispielen verwendet, wird im oberen Subplot die iterative Analyse visualisiert und im unteren Subplot kann man den Kostenfunktionsverlauf nach den Iterationsschritten erkennen. Zusätzlich werden der aktuelle Kostenfunktionswert, der Iterationschritt, das Fingerprintgewicht, sowie welcher Gitterpunkt aktuell verändert wird, angegeben.

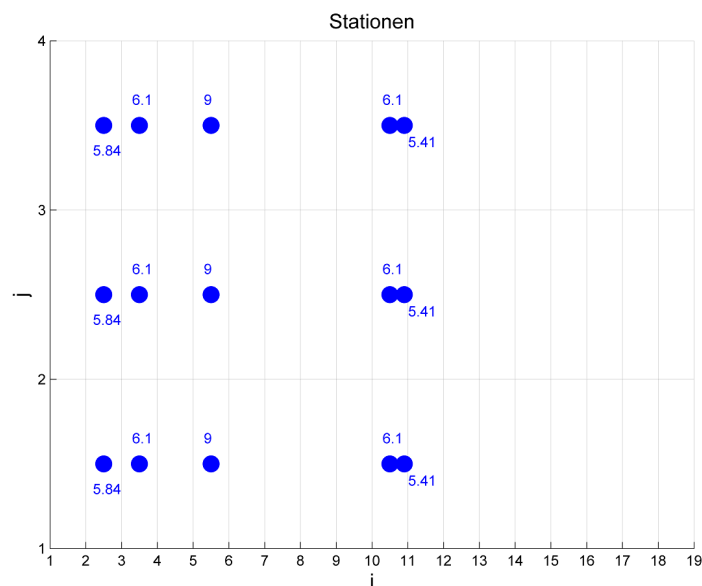


Abbildung 10.7: Stationswerte des 2D Beispiels der STAMA mit Fingerprints

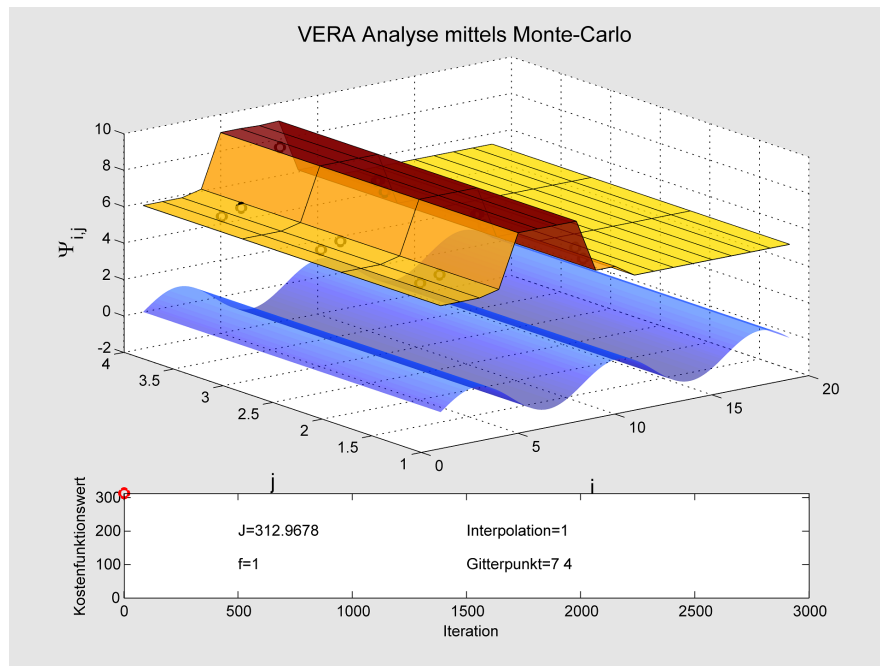


Abbildung 10.8: Interpolierte Anfangswerte des 2D Beispiels der STAMA mit Fingerprints

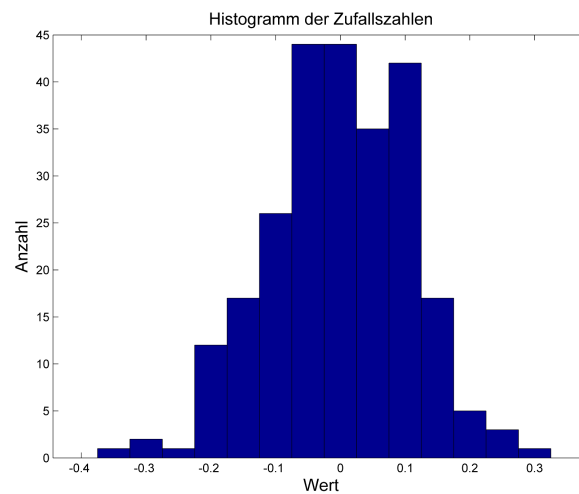


Abbildung 10.9: Histogramm der verwendeten Zufallszahlen

Abbildung 10.9 zeigt die 250 verwendeten Zufallszahlen mit Mittelwert Null und Standardabweichung 0.1. An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass im zweidimensionalen Fall eine erhöhte Anzahl an Zufallszahlen und Gitterpunkten die Rechengeschwindigkeit deutlich verlangsamen, welches für die Berechnung eines realen Fallbeispiels zu berücksichtigen gilt, da die Rechenleistung eines Computers im meteorologischen Bereich schon immer einschränkend war.

Die Durchführung der Iteration wird mit Hilfe von ausgewählten Plots in Abbildung 10.10 dar-

gestellt ². Dabei kann man die schrittweise Veränderung der Analyse beobachten, die allmählich geglättet wird. Der Fingerprint gewinnt mit fortlaufender Iterationsschritte an Bedeutung und das datenarme Gebiet wird zunehmend modifiziert. Hierbei muss erwähnt werden, dass die Veränderungen des Fingerprintgewichts alle 25 Iterationsschritte vollzogen werden, da ansonsten, aufgrund der erhöhten Gitterpunktsanzahl, die Fingerprintgewichte zu selten modifiziert werden und öfters Leerläufe entstehen, an denen kein Gitterpunkt mehr verändert werden kann, sehr wohl aber das Fingerprintgewicht, welches dadurch zu neuen Gitterpunktswerten führt.

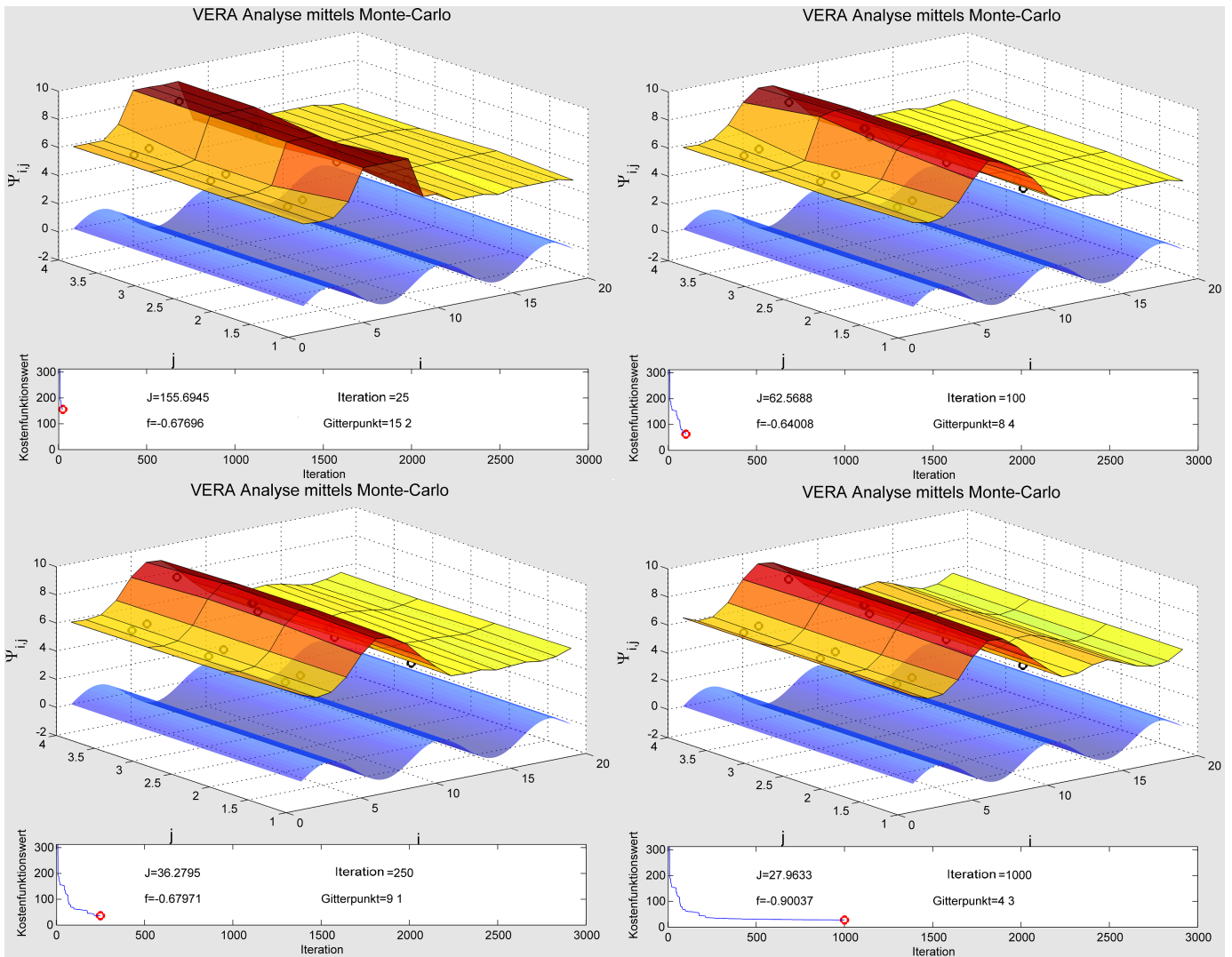


Abbildung 10.10: 2D-Plots verschiedener Iterationsschritte. (links, oben: Schritt 25; rechts, oben: Schritt 100; links, unten: Schritt 250; rechts, unten: Schritt 1000)

²Animation der Iteration auf beigelegter CD ersichtlich

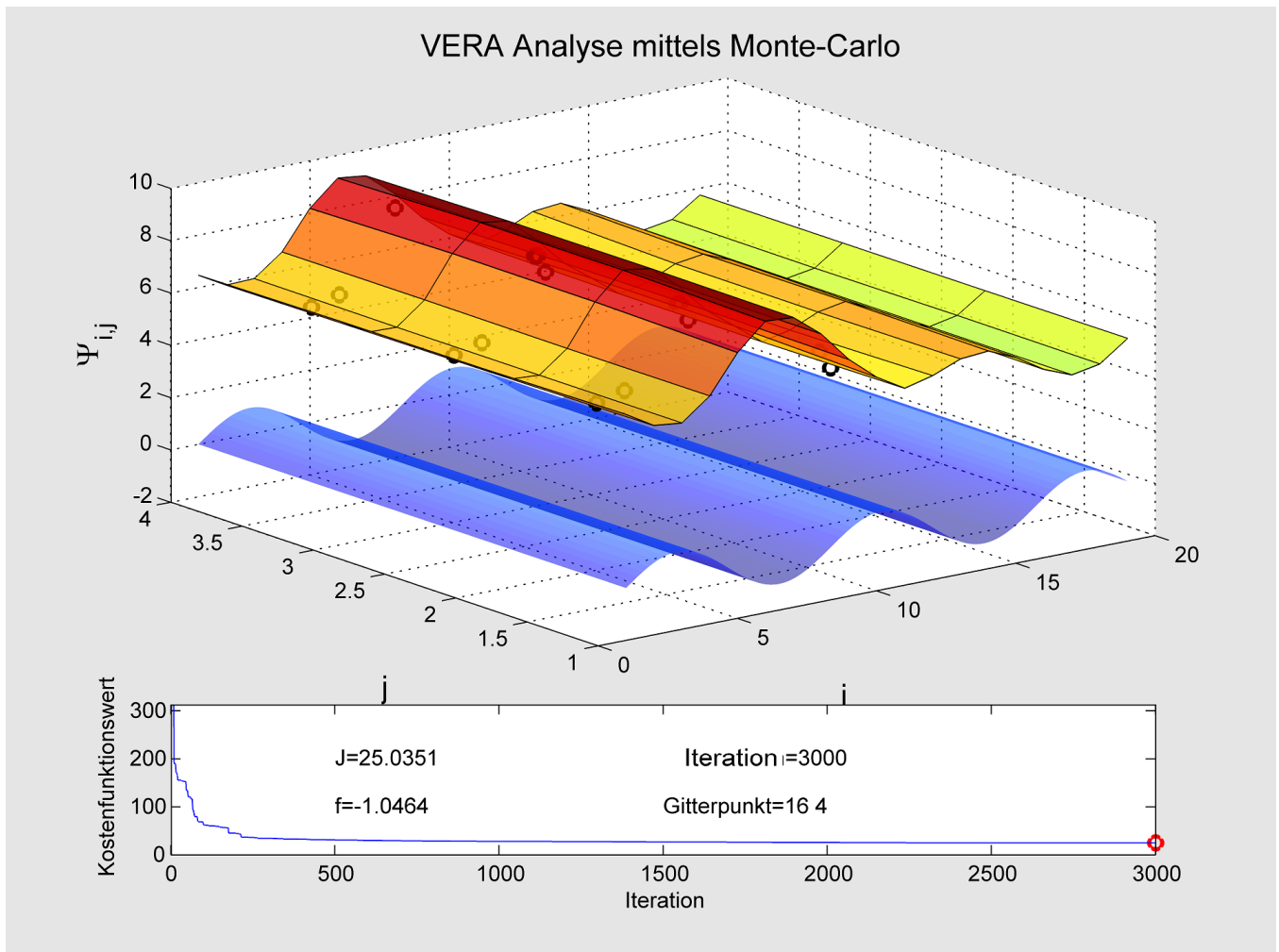


Abbildung 10.11: Endresultat der iterativen Analyse nach 3000 Iterationsschritten

Obige Abbildung zeigt das Endergebnis der Berechnung nach 3000 Iterationsschritten. Es wurde ein negatives Fingerprintgewicht ermittelt, da die Stationswerte gegenüber den Fingerprintfeld gespiegelt angeordnet sind. Hier kann man den Vorteil der VERA Analyse gut erkennen. Aufgrund der Erkennung des Fingerprintmusters durch die Stationen, wird nun das gleiche Gewicht an den datenarmen Bereich übermittle. Somit kann man hier ebenfalls einen Sinusverlauf in der Analyse beobachten.

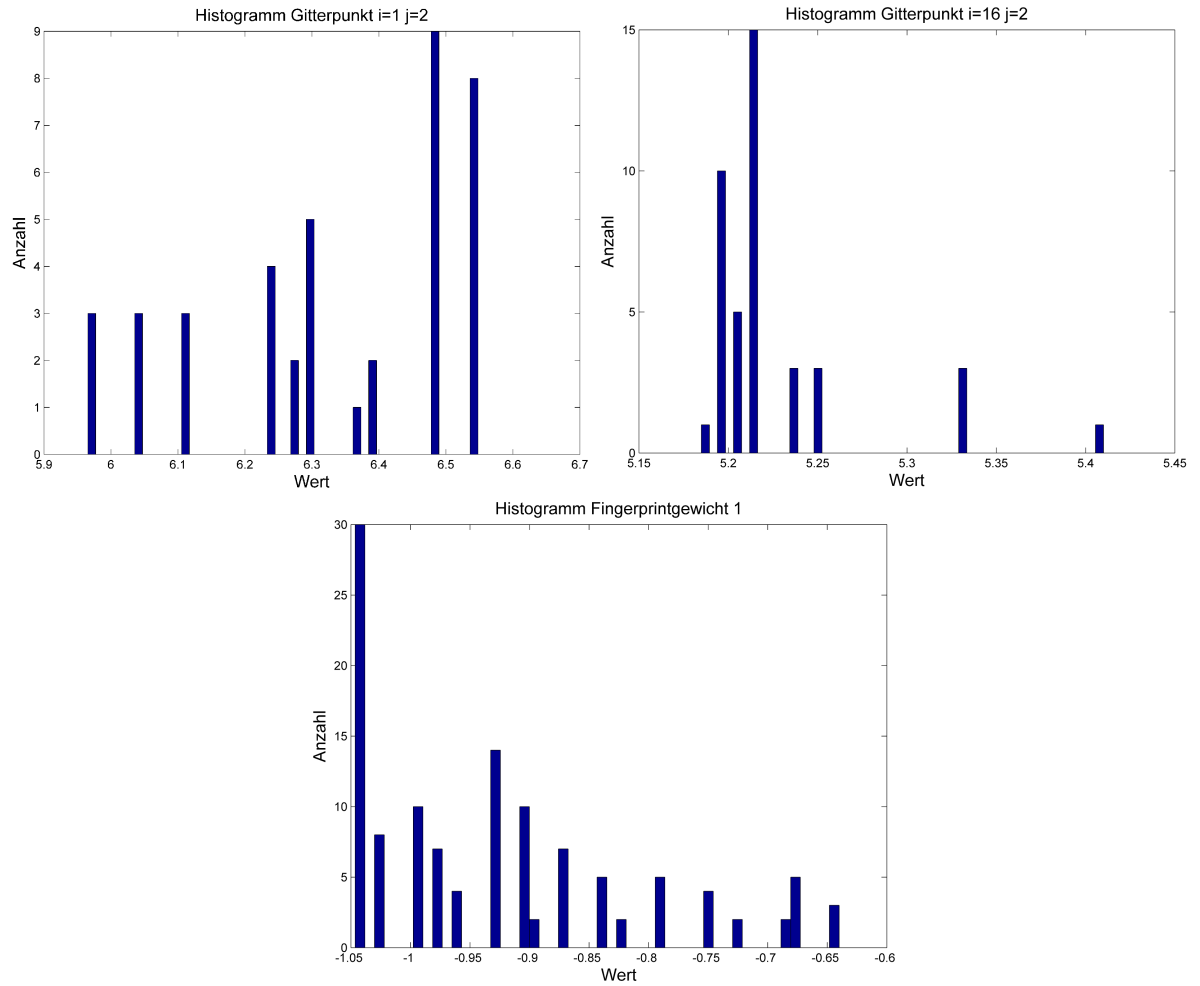


Abbildung 10.12: Histogramm der Anzahl der akzeptierten Werte für ausgewählte Gitterpunkte und die Fingerprintgewichte

In Abbildung 10.12 werden die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für ausgewählte Gitterpunkte und dem Fingerprintgewicht dargestellt. Im Vergleich zum eindimensionalen Fall aus Abschnitt 10.1 fällt das Ergebnis nicht mehr so eindeutig aus. Aufgrund der Komplexität im zweidimensionalen Fall gibt es mehrere Lösungen mit höherer Wahrscheinlichkeit, wie die Nebenmaxima in der Verteilung sowohl beim Gitterpunkt $i=1, j=2$ und beim Fingerprintgewicht andeuten. Solche weiteren Lösungen aufzeigen ist ein Vorteil der VERA mit Hilfe der Monte-Carlo Methode gegenüber dem herkömmlich berechnetem Analyseprogramm.

Kapitel 11

Fallbeispiel

Das ausgewählte Fallbeispiel datiert am 20.06.2013 um 12 UTC. Dieser Tag geht als der bislang heißeste Juni-Tag Österreichs seit Beginn der meteorologischen Messungen in die Statistik ein. In Waidhofen an der Ybbs in Niederösterreich wurde ein Rekordwert von 38.6°C gemessen. Wie die Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik berichtete, meldeten 60 weitere Stationen einen Stationsrekord¹. Warum es zu diesen Rekorden gekommen ist, kann die nachfolgende Abbildung der Großwetterlage erklären. Zwei Höhentiefs, eines über Westeuropa und das zweite über Westrussland, werden von einem Keil ausgehend von Nordafrika bis nach Skandinavien getrennt. Diese stabile omegaartige Lage blieb über mehrere Tage bestehen und advehierte mit einer Südwestströmung heiße Luftmassen aus Afrika in die Alpenregion. In der 850 hPa Temperaturanalyse kann man ein Temperaturmaximum über Österreich feststellen. Diese Voraussetzungen sind optimal für solche Temperaturrekorde.

¹<http://www.zamg.ac.at/cms/de/klima/news/hitze-in-vielen-regionen-neue-juni-rekorde>

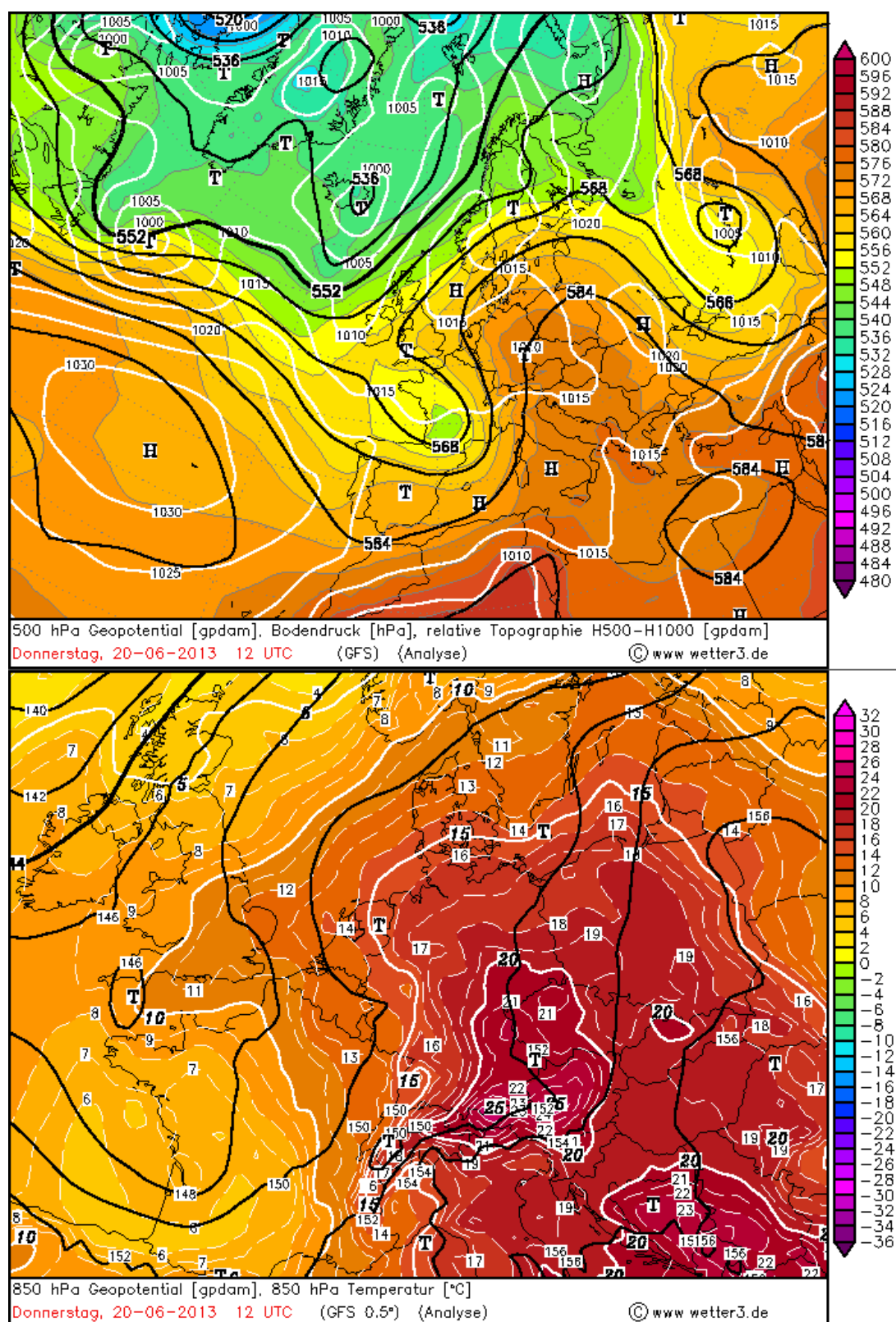


Abbildung 11.1: Großwetterlage am 20.6.2013. Obere Grafik zeigt das 500 hPa Geopotential [gpdam], den Bodendruck [hPa] und die relative Topographie H500-1000 [gpdam] im europäisch-atlantischen Bereich. Untere Grafik zeigt das 850 hPa Geopotential [gpdam] und die 850 hPa Temperatur [°C] über Mitteleuropa [<http://www.wetter3.de/Archiv/>].

Nun soll eine potentielle Temperaturanalyse erstellt werden. Dazu werden die potentiellen Temperaturen, die aus der Temperaturmessung gewonnen wurden, hergenommen und auf ein vordefiniertes Gitter interpoliert. Die herkömmliche VERA verfügt über ein 4km Gitter und wird auf kartesischen Koordinaten berechnet - für dieses Beispiel wurde ein 8km Gitter verwendet. Des weiteren wurde ein Niederösterreichausschnitt gewählt, wo an diesem Tag das Temperaturmaximum erreicht wurde. Das interpolierte Analysefeld ² vom 20.06.2013 um 12 UTC, das als Anfangswert dient, sieht wie folgt aus:

VERA Analyse der pot. Temperatur [°C] mittels Monte-Carlo (Anfangswerte)

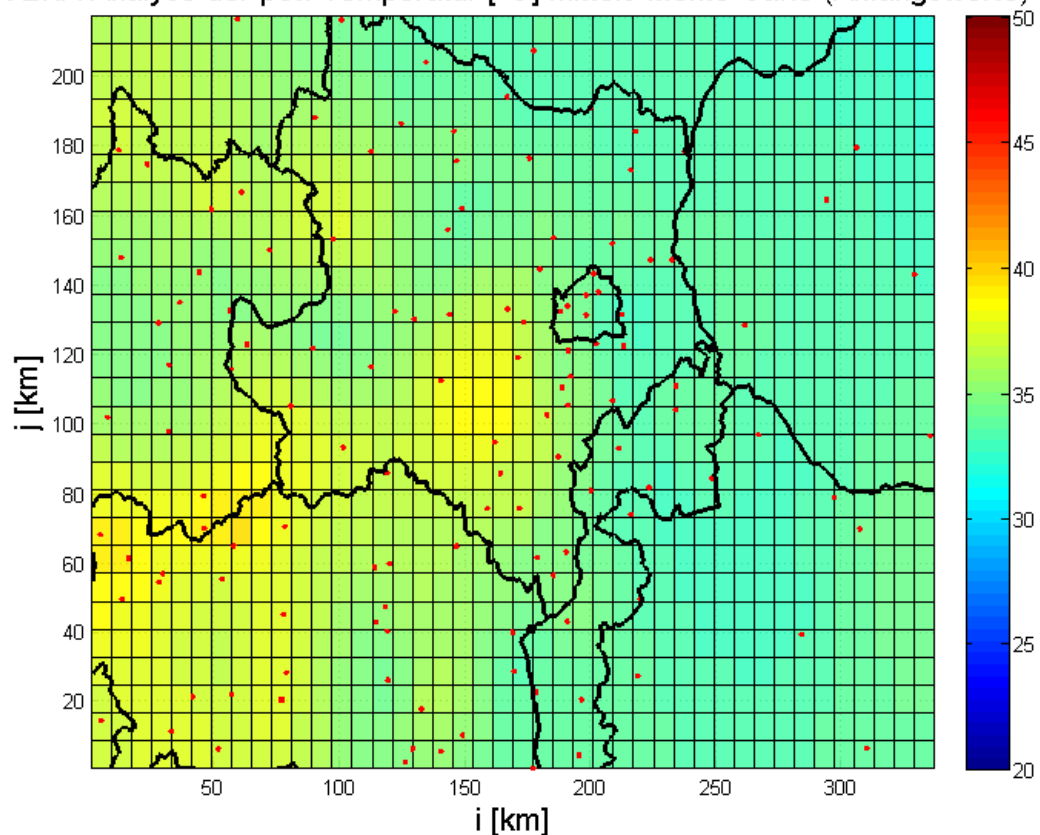


Abbildung 11.2: Interpolierte Beobachtungswerte auf 8km Gitter

Aufgrund des Strahlungstages am 20.6.2013 kann der Fingerprint aus Abbildung 3.3 verwendet werden, der allgemein für ein 0.0167 ° Gitter erzeugt wurde. Dieser muss auf ein kartesisches Koordinatensystem umgewandelt werden. Für die Berechnung der Analyse bedarf es neben dem feinen Fingerprint auch die Werte des Fingerprints auf dem Gitter. Abbildung 11.3 zeigt den Fingerprint an den zu berechneten Gitterpunkten.

²wurde mit einer Matlab-Interpolationsmethode namens v4 erstellt (Sandwell 1987)

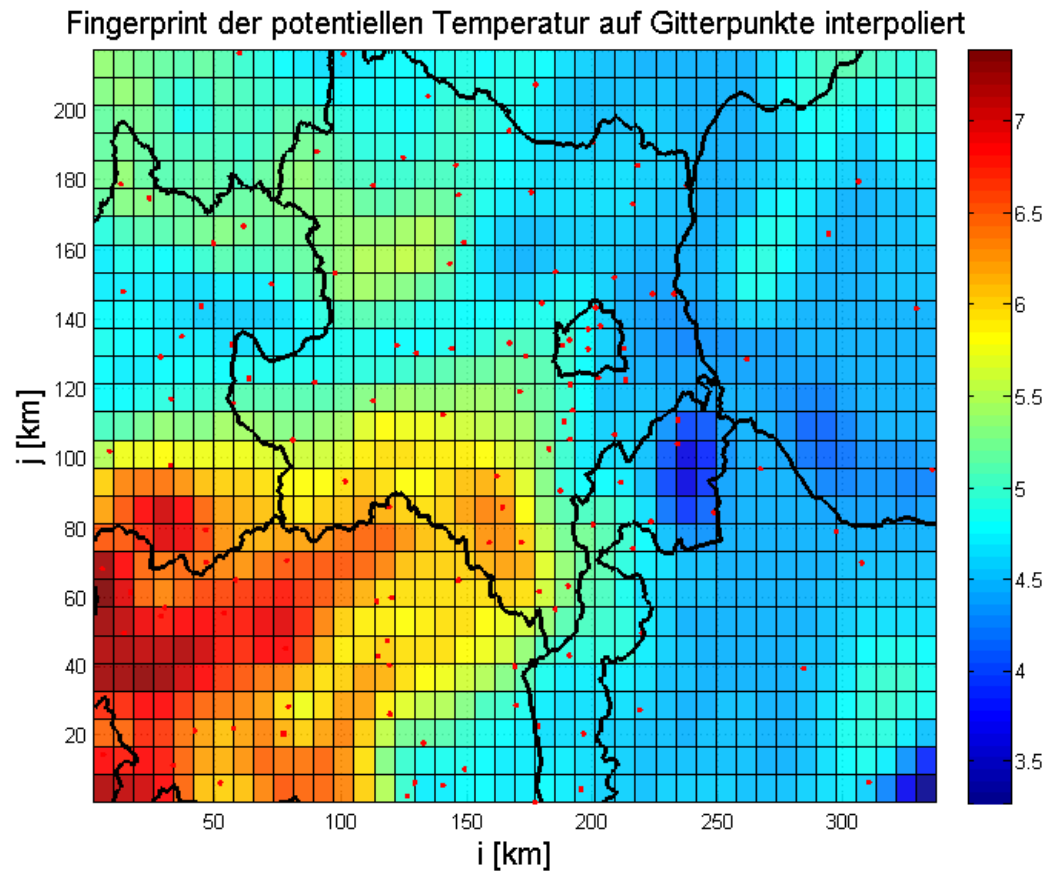


Abbildung 11.3: Interpoliertes Fingerprintfeld auf ein 8km Gitter

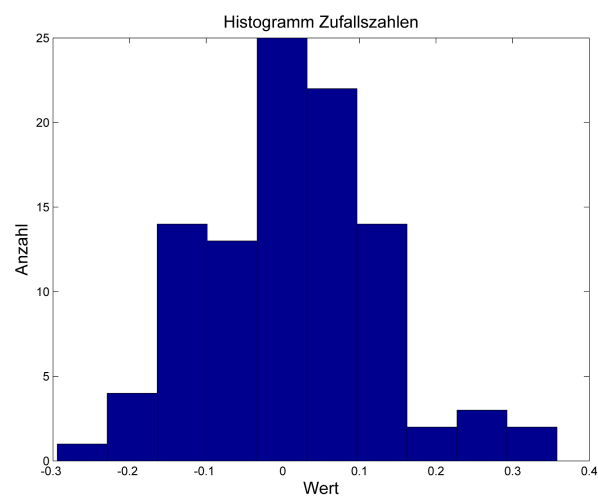


Abbildung 11.4: Histogramm der verwendeten Zufallszahlen für die Iteration des Fallbeispiels

Für die Durchführung der Iteration wurden 100 Zufallszahlen mit Mittelwert Null und Standardabweichung 0.1 definiert (siehe 11.4). Dabei gilt wieder, dass eine erhöhte Anzahl zwar sinnvoller wäre, die Berechnungsdauer allerdings markant steigen würde. Es wurden 150 000 Iterationen durchgeführt, um auf das Ergebnis aus Abbildung 11.5 zu gelangen. Dabei wurde bei jeder hundertsten Iteration das Fingerprintgewicht neu bestimmt.

In der Analyse kann man deutlich die Struktur des Fingerprintfeldes erkennen. Der Grund liegt darin, dass der wahrscheinlichste Fingerprintgewichtswert mit größer 6.5 (vgl. Abbildung 11.8) aus den Beobachtungswerten ermittelt wurde - das bedeutet eine hohe Übereinstimmung des Musters aus dem Fingerprint mit jenem aus den Beobachtungen. Durch die Hinzunahme des Fingerprints mit den festgestellten Gewicht in die Analyse erhält man beispielsweise Werte von über 45°C in der westlichen Obersteiermark bzw. unter 27 °C beim Neusiedlersee im Nordburgenland.

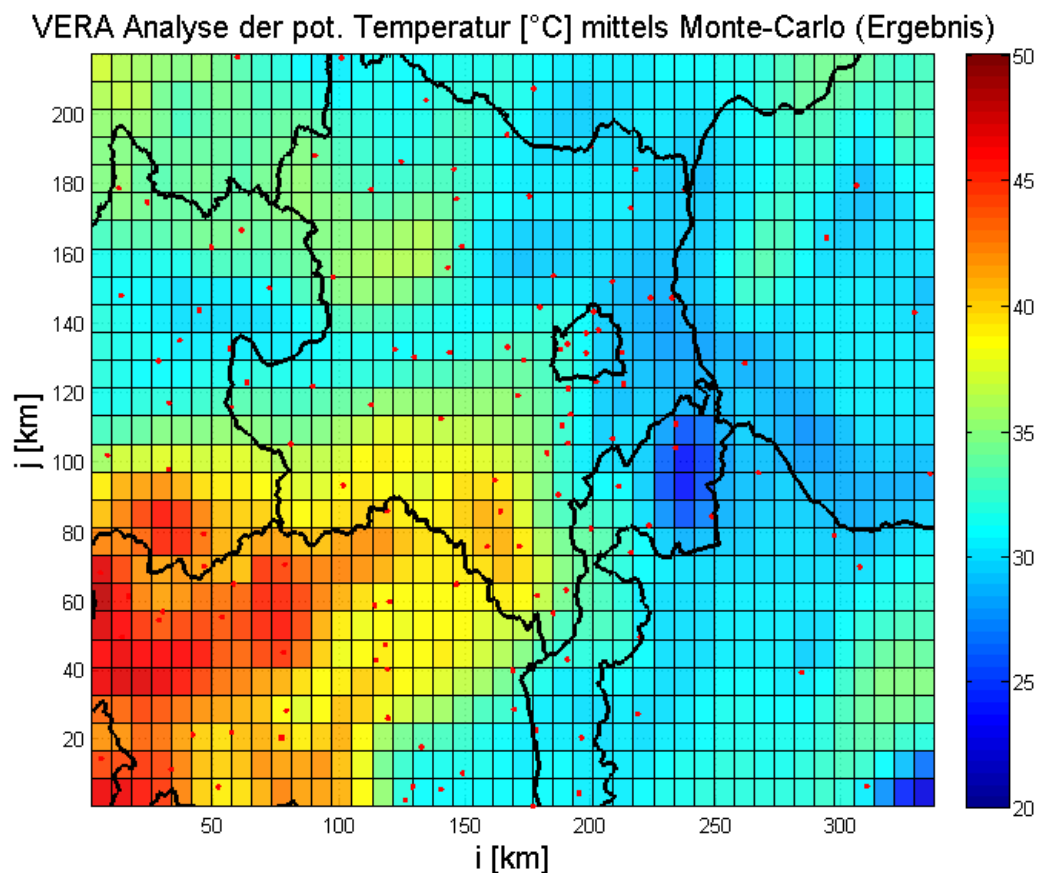


Abbildung 11.5: Endergebnis der potentiellen Temperaturanalyse mit Hilfe der Monte-Carlo Verfahren für den 20.06.2013 um 12 UTC

Abbildung 11.6 zeigt den Kostenfunktionsverlauf in Abhängigkeit der Iterationsschritte. Hierbei musste aufgrund der großen Werte zu Beginn der Iteration auf eine logarithmische Darstellung zurückgegriffen werden. An dieser Abbildung zeigt sich, dass nach der 150 000. Iteration mit hoher Wahrscheinlichkeit eine weitere Verkleinerung der Kostenfunktion möglich wäre, allerdings nicht mehr in entscheidendem Ausmaß für das Ergebnis der Analyse. Abbildung 11.7 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Punkt $i=8$ und $j=7$ mit einem eindeutigen Maximum der Wahrscheinlichkeit für eine potentielle Temperatur nahe 44°C .

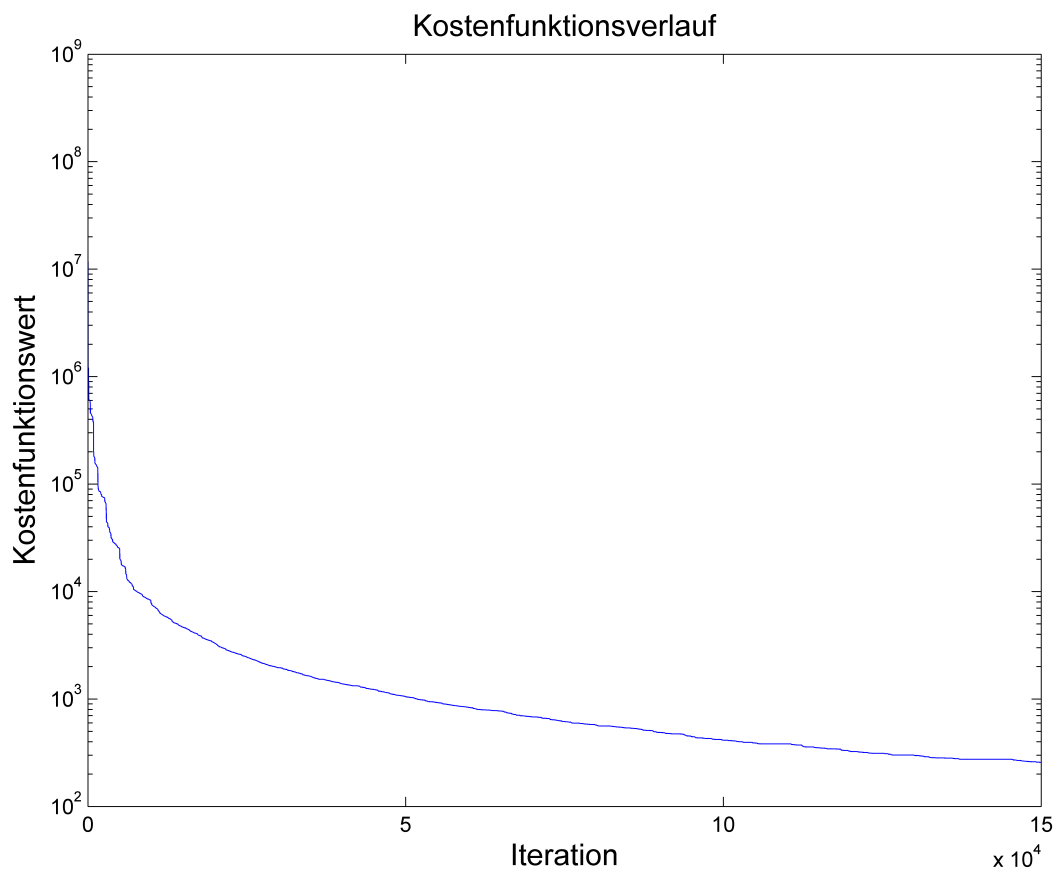


Abbildung 11.6: Verlauf des Kostenfunktionswertes nach den Iterationsschritten

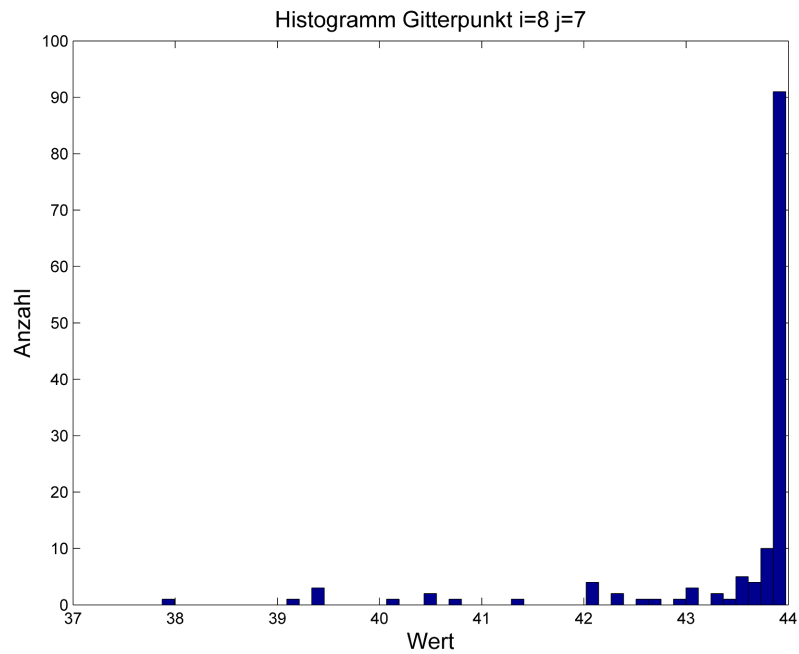


Abbildung 11.7: Histogramm der Anzahl der akzeptierten Werte für den Gitterpunkt $i=8$ und $j=7$

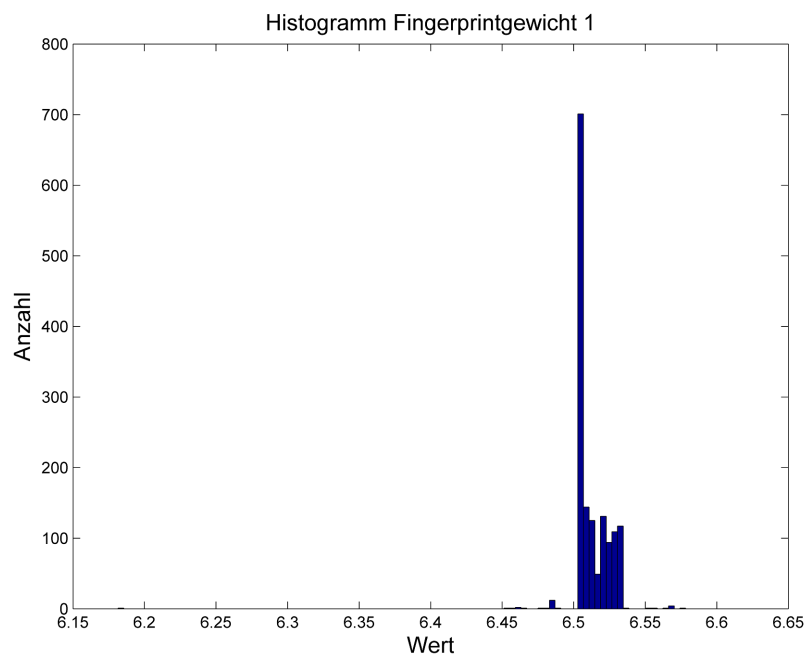


Abbildung 11.8: Histogramm der Anzahl der akzeptierten Werte für das Fingerprintgewicht

Kapitel 12

Fazit und Ausblick

Diese Masterarbeit zeigt die Komplexität einer objektiven Analyse und stellt den ersten Schritt zu einer Erweiterung der VERA-Analyse durch Hinzunahme von Monte-Carlo Methoden dar. Dabei wurde ausführlichst auf die Methode der Lösung der herkömmlichen VERA, sowohl im eindimensionalen, als auch im zweidimensionalen Fall, eingegangen. Somit konnten die grundlegenden Unterschiede zu der neuen Herangehensweise aufgezeigt und vergleichend beschrieben werden. Der markanteste Unterschied liegt wohl an der Rechendauer, da die herkömmliche VERA ihre Lösung instantan wiedergibt, während jene mit Hilfe der Monte-Carlo Methode eine erhöhte Berechnungsdauer aufweist - stark abhängig von der Anzahl an Zufallszahlen und den zu berechnenden Gitterpunkten. Dabei soll erwähnt werden, dass bei einer Erhöhung der Anzahl an Gitterpunkten der Rechenaufwand der Matrixinvertierung der herkömmlich gerechneten VERA stärker steigt, als jener mit Monte-Carlo Methoden. Die herkömmliche VERA wird in Echtzeit betrieben, welches mit der Monte-Carlo Methode derzeit schwer realisierbar ist. Hierzu bedarf es noch weitere Entwicklungen dieses Verfahrens in Zusammenhang mit der VERA, um die große Anzahl an Gitterpunkten effizienter berechnen zu können. Eine Verbesserung wäre beispielsweise das Benutzen verschieden großer Gruppen an Zufallszahlen, wie schon in Abschnitt 9.1.1 erwähnt, oder das Modifizieren benachbarter Gitterpunkte anhand einer Gaußverteilung. Beide Varianten würden zu einem schnelleren Ergebnis führen.

Ein weiterer Unterschied liegt im Aufwand der Programmierung. Während die VERA mit Hilfe von Monte-Carlo Methoden lediglich die reinen Kostenfunktionen benötigt, müssen für die operationelle Variante aus den Kostenfunktionen komplexe Matrixgleichungen erzeugt werden. Diese Methode verhindert allerdings das Einbeziehen komplexerer Fingerprints, wie zum Beispiel jene für Inversionslagen, da die Monte-Carlo Methode eine schrittweise Veränderung der Temperatur ermöglicht und somit Inversionen besser auflösen kann.

Abschließend muss erwähnt werden, dass für eine aussagekräftige Analyse mit Hilfe von Monte-Carlo Methoden Weiterentwicklungen, aufbauend auf diese Arbeit, vorgenommen werden müssen, wie zum Beispiel die Veränderung mehrerer Gitterpunkte gleichzeitig.

Teil IV

Anhang

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Gregor Manfred Löscher
Staatsbürgerschaft: Österreich
Geburtstag: 18. Juni 1989
Geburtsort: Wien
Familienstand: Ledig

Ausbildung

09/1995-06/1999: Volksschule, Prießnitzgasse 2, 1210 Wien
09/1999-10/2007: Bundesgymnasium und Bundesrealgymnasium 21, Franklinstraße 21, 1210 Wien
10/2008-09/2011: Bachelorstudium der Meteorologie, Universität Wien

Berufserfahrung

seit 3/2013: Meteorologe bei MeteoServe Wetterdienst GmbH
3/2013-07/2013: Tutorium Grundpraktikum II, Universität Wien
3/2013-07/2013: Tutorium Meteorologische Exkursion, Universität Wien
3/2012-02/2013: Tutorium Wetterbesprechung, Universität Wien

Danksagung

An dieser Stelle gebührt all jenen Personen Dank, die beim Verwirklichen dieser Masterarbeit mitgeholfen haben. Allen voran möchte ich mich bei O. Univ.-Prof. Dr. Reinhold Steinacker bedanken, der mich mit seinem Fachwissen nicht nur unterstützend beraten, sondern das Thema kritisch hinterfragt hat.

Desweiteren möchte ich Mag. DI Dr. Dieter Mayer Dank aussprechen, sowohl für die programmiertechnische, als auch fachspezifische Hilfestellungen, die entscheidend für das Erstellen dieser Arbeit waren.

Nicht unerwähnt sollen jene Personen bleiben, die mich in meiner Ausbildung, speziell im Studium, unterstützt haben: allen voran meine Freundin Carina und meine Eltern Simone und Rainald.

Vielen Dank!

Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und nur die ausgewiesenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Ort, Datum

Unterschrift

Literaturverzeichnis

- Anderson, H. L. (1986): Metropolis, Monte Carlo and the MANIAC. In: Los Alamos Science (Heft 14), 96-108
- Andrieu, C. et al. (2003): An Introduction to MCMC for Machine Learning. In: machine Learning (Heft 50), 5-43
- Barnes, S. (1964): A Technique for Maximizing Details in Numerical Weather Map Analysis. In: Journal of Applied Meteorology (Heft 3), 396-409
- Bica, B. et al. (2007): Thermally and Dynamically Induced Pressure Features over Complex Terrain from High-Resolution Analyses. In: Journal of Applied Meteorology and Climatology (Heft 46), 50-65
- Chen, W., Smith, R. (1987): Blocking and Deflection of Airflow by the Alps. In: Monthly Weather Review 115 (Heft 11), 2578-2597
- Gandin, L. (1965): Objective analysis of meteorological Fields. Israeli Program for Scientific Translations: Jerusalem
- Gilchrist, B., Cressman, G. P. (1954): An Experiment in Objective Analysis. In: Tellus, 6 (Heft 4), 309-318
- Holzmann, A. (2012): Mehrdimensionale VERA-Analysen. Wien: Diplomarbeit
- Lu, C., Browning, G. (1998): The Impact of Observational and Model Errors on Four-Dimensional Variational Data Assimilation. In: Journal of the Atmospheric Sciences (Heft 55), 995-1011
- Mayer, D. (2005): Statistische Methoden zur Bestimmung optischer Parameter von Mehrschicht-

systemen. Graz: Dissertation

Mayer, D. (2007): VeraXX 2.0. Wien: Wissenschaftliche Dokumentation

Metropolis, N., Ulam, S. (1949): The Monte Carlo Method. In: Journal of the American Statistical Association 44 (Heft 247), 335-341

Panofsky, H. A. (1949): Objective Weather Map Analysis. In: Journal of Meteorology 6, 386-392

Reuter, H., Hantel, M., Steinacker, R. (2001): Meteorologie. In: Raith, W. (Hrsg.): Bergmann Schäfer. Lehrbuch der Experimentalphysik. Erde und Planeten (Band 7). Walter de Gruyter: Berlin, 2.Auflage

Sandwell, D. T. (1987): Biharmonic Spline Interpolation of GEOS-3 and SEASAT Altimeter Data. In: Geophysical Research Letters, 14, 2, 139-142

Steinacker, R. et al. (2000): A Transparent Method for the Analysis and Quality Evaluation of Irregularly Distributed and Noisy Observational Data. In: Monthly Weather Review 128 (Heft 7), 2303-2316

Steinacker, R. et al. (2006): A Mesoscale Data Analysis and Downscaling Method over Complex Terrain. In: Monthly Weather Review 134 (Heft 10), 2758-2771

Whiteman, C. D. (1990): Observations of thermally developed wind systems in mountainous terrain. In: MMeteorological Monographs 23 (Heft 45), 5-42

<http://www.univie.ac.at/amk/vera/> [Stand 28.7.2013]

<http://www.zamg.ac.at/cms/de/klima/news/hitze-in-vielen-regionen-neue-juni-rekorde> [Stand 28.10.2013]

<http://www.univie.ac.at/amk/veraflex/test/public/> [Stand 28.10.2013]

<http://www.wetter3.de/Archiv/> [Stand 28.10.2013]