



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Poissonprozesse auf allgemeinem Zustandsraum

Verfasser

Roland Fesselhofer, BSc.

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2013

Studienkennzahl:	A 190 406 884
Studienrichtung:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Informatik und Informatikmanagement
Betreuer:	Ass.-Prof. Mag. Dr. Roland Zweimüller, Privatdoz.

Danksagung

Ich möchte meinem Betreuer Roland Zweimüller für seine unermüdliche Unterstützung und seinen Rat bei der Suche nach Lösungswegen danken. Ohne sein Engagement wäre die vorliegende Arbeit sicher nicht rechtzeitig fertig geworden und ich hätte auch meinen mathematischen Horizont nicht so erweitern können.

Weiters möchte ich meinem ehemaligen Lehrer Anton Hartig danken, der in der Mittelschule mein Interesse für die Mathematik geweckt und mir ein sehr gutes Basiswissen für das Studium mitgegeben hat.

Nicht zuletzt gebührt meiner Familie großer Dank, da sie mir das Studium erst ermöglicht und mich dabei in allen Phasen unterstützt hat. Ich möchte insbesondere meiner Freundin Ursula danken, die mir seit Jahren und in der letzten Zeit noch mehr eine große Stütze war.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Die Poissonverteilung	3
1.1 Die Poissonverteilung als Limes der Binomialverteilung	3
1.2 Grundlegende Eigenschaften der Poissonverteilung	4
1.2.1 Additivität von Poissonverteilungen	7
1.2.2 Über Poissonverteilung, Binomialverteilung und Multi- nomialverteilung	10
1.3 Die “Unvermeidbarkeit” der Poissonverteilung	10
2 Definition und einfache Eigenschaften von Poissonprozessen	13
2.1 Maßtheoretische Grundlagen	13
2.2 Definition des Poissonprozesses	16
2.3 Erste Beobachtungen	17
2.4 Über das Intensitätsmaß	19
2.4.1 Lebesguemaß und Maße mit Dichten	20
2.4.2 Intensitätsmaße auf dem Zustandsraum $\mathbb{R}$	21
3 Wichtige Theoreme über Poissonprozesse	23
3.1 Einschränkungssatz	23
3.2 Vereinigungssatz	24
3.3 Abbildungssatz	27
3.4 Existenzsatz	30
4 Summen über Poissonprozesse	33
4.1 Konvergenz und Eigenschaften von Σ_f für Elementarfunktionen	33
4.2 Konvergenz und Eigenschaften von Σ_f für beliebige Funktionen	36
4.3 Der Poissonprozess als zufälliges Maß und Linearität von Σ_f .	42
5 Der Satz von Rényi	45
5.1 Historische Resultate	45
5.2 Vorbereitende Arbeiten	46
5.3 Der Satz von Rényi	48

Literaturverzeichnis	53
Lebenslauf	55
Abstract	57

Einleitung

Der Poissonprozess ist neben dem Wiener-Prozess (auch *Brownian Motion* genannt) vermutlich einer der bekanntesten stochastischen Prozesse. Meist wird er jedoch ausschließlich im eindimensionalen Fall als Zählprozess bzw. Erneuerungsprozess mit unabhängigen, exponentialverteilten Zwischenankunftszeiten definiert oder im homogenen Fall nur recht kurz als Beispiel für eine Markovkette mit kontinuierlicher Zeit behandelt. Oft werden dann “rein zufällig” eintretende Ereignisse, wie die Zeitpunkte der Anrufe bei der Telefonauskunft oder beim radioaktiven Zerfall von Atomen mit Hilfe eines Poissonprozesses modelliert.

In der vorliegenden Arbeit wird der Poissonprozess wesentlich allgemeiner als Punktprozess definiert, wobei wir nur minimale Anforderungen an den Zustandsraum stellen, in dem die Punkte des Poissonprozesses liegen. Damit können auch räumliche Dinge wie die Verteilung von Sternen oder die Verteilung von Bäumen modelliert werden, wo keine klaren Muster erkennbar sind und man “reine” Zufälligkeiten zu wissen glaubt. Es ist aber auch möglich, andere Zustandsräume als die euklidischen Räume zuzulassen, wie zum Beispiel der Sternenhimmel von der Erde betrachtet, der ja eine Kugeloberfläche ist.

Von zentraler Bedeutung für den Poissonprozess ist die stochastische Unabhängigkeit. Um diese zu beschreiben, betrachtet man disjunkte “Ausschnitte der Welt” (d.h. Teilmengen des Zustandsraumes) und analysiert die Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl von Punkten in jedem dieser Ausschnitte, die dann voneinander unabhängig sein müssen.

Es wurde versucht, bei der Notation dem allgemein üblichen Standard zu entsprechen, bei manchen Konstrukten wurden aber natürlich eigene, hoffentlich intuitiv verständliche Bezeichnungen gewählt. Prinzipiell werden Großbuchstaben für Zufallsvariablen und Mengen und Kleinbuchstaben für Zahlen, Punkte, Elemente von Mengen usw. verwendet. Als Integral ist standardmäßig das Lebesgue-Integral mit der üblichen Notation gemeint. Bei Funktionen von Mengen lassen wir der Lesbarkeit wegen die Klammern für die Funktion weg, wenn das Argument ein Intervall ist, d.h. $\mu(0, x]$ steht für $\mu((0, x])$. Mit f^{-1} ist immer das Urbild als Menge gemeint, d.h. für eine Funktion $f : S \rightarrow S'$ und eine Teilmenge $A' \subseteq S'$ ist $f^{-1}(A') = \{x \in S : f(x) \in A'\}$. Die meisten Sätze, die Standardresultate aus der Wahrschein-

lichkeitstheorie bzw. der Maß- und Integrationstheorie darstellen, wie insbesondere der Stetigkeitssatz für Wahrscheinlichkeiten, der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und die Sätze über monotone Konvergenz für Integrale und Erwartungswerte werden als bekannt angesehen.

Die Darstellung der Kapitel 1 und 3 stützt sich auf Abschnitte von [5].

Kapitel 1

Die Poissonverteilung

Da die Poissonverteilung in der Theorie über Poissonprozesse eine zentrale Rolle spielt, widmen wir ihr und ihren wichtigsten Eigenschaften dieses erste Kapitel. Üblicherweise wird in den Standardwerken bzw. Grundvorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie die Poissonverteilung als ein Beispiel von vielen für eine diskrete Verteilung behandelt.

Definition 1.1 (Poissonverteilung). Sei $\mu > 0$. Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $\{0, 1, 2, \dots\}$ und den Wahrscheinlichkeiten

$$P[X = n] = \pi_n(\mu) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}$$

heißt *poissonverteilt mit Parameter μ* oder kurz $\mathcal{P}(\mu)$ -verteilt.

1.1 Die Poissonverteilung als Limes der Binomialverteilung

Die Poissonverteilung kann als Grenzfall der vielleicht bekanntesten diskreten Verteilung, der Binomialverteilung, gesehen werden. Dazu benötigen wir zunächst dessen Definition.

Definition 1.2 (Binomialverteilung). Seien $n \geq 1$ und $0 < p < 1$. Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $\{0, 1, \dots, n\}$ und den Wahrscheinlichkeiten

$$P[X = k] = b_k(n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

heißt *binomialverteilt mit Parametern n und p* oder kurz $\mathcal{B}(n, p)$ -verteilt.

Um den oben genannten Sachverhalt zu zeigen, betrachten wir einen n -maligen Münzwurf, wobei diese Zufallsversuche unabhängig sind und jeweils mit derselben Wahrscheinlichkeit p Kopf auftritt. Das heißt, die Anzahl an

Köpfen ist binomialverteilt mit Parametern n und p . Im Limes hält man nun $\mu = np$ fest und lässt n gegen ∞ und somit p gegen 0 gehen und erhält dann die Poissonverteilung mit Parameter μ .

Satz 1.1. *Die Zufallsvariablen X_n seien $\mathcal{B}(n, p_n)$ -verteilt, sodass $\mu = np_n$ konstant ist. Dann ist die Zufallsvariable $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ poissonverteilt mit Parameter μ .*

Beweis. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit $P[X_n = k]$ für $k \geq 0$.

$$\begin{aligned} P[X_n = k] &= b_k(n, p_n) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\mu^k}{k!} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k}. \end{aligned}$$

Für die einzelnen Faktoren gelten die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} = 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n = e^{-\mu}$ bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k} = 1$. Also folgt für den gesamten Ausdruck der Grenzwert

$$P[X = k] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n = k] = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}.$$

Das ist genau die $\mathcal{P}(\mu)$ -Verteilung. □

1.2 Grundlegende Eigenschaften der Poissonverteilung

In diesem Abschnitt werden wir grundlegende Eigenschaften der Poissonverteilung betrachten. Im Folgenden berechnen wir den Erwartungswert, Varianz und zeigen im Beweis eine Möglichkeit zur Berechnung höherer Momente.

Proposition 1.2 (Momente der Poissonverteilung). *Sei $\mu > 0$. Für eine $\mathcal{P}(\mu)$ -verteilte Zufallsvariable X gilt:*

- (i) $E[X] = \mu$,
- (ii) $\text{Var}[X] = \mu$,
- (iii) $E[X^2] = \mu + \mu^2$,
- (iv) $E[X^3] = \mu + 3\mu^2 + \mu^3$.

Beweis. (i) Der Erwartungswert kann direkt durch Einsetzen in die Definition ausgerechnet werden:

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} = \mu e^{-\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} = \mu e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} = \mu.$$

(ii)-(iv) Die höheren Momente berechnen wir mit Hilfe der erzeugenden Funktion $g_X(t) = E[t^X]$. Die Potenzreihe im Erwartungswert konvergiert für jede reelle Zahl t mit $|t| \leq 1$ bei jeder diskreten Zufallsvariable, weshalb die erzeugende Funktion immer zumindest im Intervall $[-1, 1]$ definiert ist. Die erzeugende Funktion von $\mathcal{P}(\mu)$ ist sogar auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat die Funktionsgleichung

$$g_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \pi_n(\mu) = e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n!} = e^{-\mu(1-t)}. \quad (1.1)$$

Durch Induktion folgt für die k -te Ableitung von $g_X(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$

$$g_X^{(k)}(t) = e^{-\mu(1-t)} \mu^k$$

und durch Einsetzen von $t = 1$ erhalten wir aus dem bekannten Resultat über erzeugende Funktionen¹

$$E[X(X-1) \cdots (X-k+1)] = g_X^{(k)}(1) = \mu^k.$$

Aus den Gleichungen $X^2 = X(X-1) + X$, $\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$ bzw. $X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X$ folgen die Aussagen (ii) bis (iv):

$$E[X^2] = E[X] + E[X(X-1)] = \mu + \mu^2,$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \mu,$$

$$E[X^3] = E[X(X-1)(X-2)] + 3 \cdot E[X(X-1)] + E[X] = \mu^3 + 3\mu^2 + \mu.$$

□

Neben der erzeugenden Funktion, die wir im letzten Beweis verwendet haben, stellen wir hier auch allgemein die momenterzeugende Funktion vor, die wir in Kapitel 4 benötigen werden. Der Name kommt daher, dass die Auswertung im Punkt 0 der k -ten Ableitung der momenterzeugenden Funktion einer Zufallsvariable gleich dem k -ten Moment dieser Zufallsvariablen ist.²

¹Siehe z.B. Satz 7.2 in [7]. Im allgemeinen Resultat ist hier der linksseitige Grenzwert der k -ten Ableitung von t gegen 1 zu nehmen. Aufgrund der Existenz und Stetigkeit der Ableitungen auf ganz $\mathbb{R}$ können wir einfach den Wert 1 einsetzen.

²Siehe z.B. [1], S. 146.

Definition 1.3 (Momenterzeugende Funktion). Für eine Zufallsvariable X sei $D_X \subseteq \mathbb{C}$ die Menge aller komplexen Zahlen θ , für die $E[e^{\theta X}]$ existiert. Die Funktion $m_X : D_X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $m_X(\theta) = E[e^{\theta X}]$ heißt die *momenterzeugende Funktion der Zufallsvariable X* .

Für eine $\mathcal{P}(\mu)$ -verteilte Zufallsvariable X ist dann die momenterzeugende Funktion

$$m_X(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\theta n} \pi_n(\mu) = e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{\theta} \mu)^n}{n!} = e^{-\mu(1-e^{\theta})} = e^{(e^{\theta}-1)\mu} \quad (1.2)$$

mit Definitionsbereich $D_X = \mathbb{C}$.

Bemerkung 1.3 (Ausweitung der Parameter auf die Grenzfälle). Es ist möglich, die Definition der Poissonverteilung $\mathcal{P}(\mu)$ auf die Grenzfälle $\mu = 0$ bzw. $\mu = \infty$ auszuweiten. $\mathcal{P}(0)$ ist dann die Verteilung, die in 0 konzentriert ist, d.h.

$$P[X = 0] = 1 \quad (1.3)$$

und $\mathcal{P}(\infty)$ ist die Verteilung, die in ∞ konzentriert ist, d.h.

$$P[X = \infty] = 1. \quad (1.4)$$

Um diese Ausweitung plausibel zu machen, betrachten wir den Grenzwert der Einzelwahrscheinlichkeiten für μ gegen 0 und erhalten

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \pi_n(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \geq 1 \end{cases} \quad (1.5)$$

Das entspricht genau (1.3). Für den Grenzwert für μ gegen ∞ erhalten wir

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \pi_n(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} = 0 \quad (1.6)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen Proposition 1.2 ist $E[X_\mu] = \mu$ für die $\mathcal{P}(\mu)$ -verteilte Zufallsvariable X_μ . Der Grenzwert ist also $\lim_{\mu \rightarrow \infty} E[X_\mu] = \infty$, was (1.4) rechtfertigt.

Neben dieser mathematischen Erklärung werden wir nach Theorem 1.7 sehen, dass diese Verallgemeinerung der Parameter auch in der Praxis sinnvoll ist und das Rechnen erleichtert, da man dadurch die Grenzfälle nicht ausschließen muss.

Bemerkung 1.4. Obiges Resultat in (1.5) macht die Funktion $\pi_n(\mu)$ zu einer stetigen Funktion von μ auf $[0, \infty)$.

Nun betrachten wir die Änderung der Wahrscheinlichkeit $\pi_n(\mu)$ in Abhängigkeit vom Parameter μ .

Proposition 1.5. *Für die Wahrscheinlichkeit $\pi_n(\mu)$ aufgefasst als Funktion von $\mu \in (0, \infty)$ gilt*

$$(i) \quad \frac{d\pi_n}{d\mu} = \pi_{n-1} - \pi_n,$$

$$(ii) \quad \frac{d}{d\mu} \sum_{k=0}^n \pi_k = -\pi_n,$$

$$(iii) \quad \sum_{k=0}^n \pi_k(\mu) = 1 - \int_0^\mu \pi_n(\lambda) d\lambda,$$

wobei bei (i) per Konvention $\pi_{-1} = 0$ gilt.

Beweis. (i) Der Beweis erfolgt durch einfaches Differenzieren und Kürzen.

$$\frac{d\pi_n}{d\mu} = \frac{n\mu^{n-1}e^{-\mu}}{n!} - \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} = \frac{\mu^{n-1}e^{-\mu}}{(n-1)!} - \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} = \pi_{n-1} - \pi_n.$$

(ii) Durch die Linearität der Ableitung und (i) erhalten wir eine Teleskopsumme

$$\frac{d}{d\mu} \sum_{k=0}^n \pi_k = \sum_{k=0}^n (\pi_{k-1} - \pi_k) = \pi_{-1} - \pi_n = -\pi_n.$$

(iii) Wir integrieren beide Seiten in (ii) von 0 bis μ und erhalten auf der linken Seite³

$$\sum_{k=0}^n \pi_k(\mu) - \sum_{k=0}^n \pi_k(0) = \sum_{k=0}^n \pi_k(\mu) - 1.$$

Die Behauptung folgt somit durch anschließende Addition von 1. $\square$

1.2.1 Additivität von Poissonverteilungen

Die vielleicht wichtigste Eigenschaft der Poissonverteilung ist ihre Additivität. Für zwei unabhängige poissonverteilte Zufallsvariablen X und Y ist die Verteilung ihrer Summe $X + Y$ wieder poissonverteilt und zwar mit der Summe ihrer Parameter.

Lemma 1.6. *Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Poissonverteilung $\mathcal{P}(\mu)$ bzw. $\mathcal{P}(\lambda)$. Dann hat die Zufallsvariable $X + Y$ die $\mathcal{P}(\mu + \lambda)$ -Verteilung.*

Beweis. Da X und Y unabhängig sind, gilt für $k, l \geq 0$ für die gemeinsame Wahrscheinlichkeit

$$P[X = k, Y = l] = P[X = k]P[Y = l] = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!}.$$

³Für die untere Grenze muss man eigentlich den rechtsseitigen Grenzwert gegen 0 verwenden und erhält das Resultat wegen Bemerkung 1.4.

Wir zerlegen das Ereignis $X + Y = n$ in alle möglichen Ereignisse $X = k$ und $Y = n - k$ und erhalten so

$$\begin{aligned} P[X + Y = n] &= \sum_{k=0}^n P[X = k, Y = n - k] \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \frac{\lambda^{n-k} e^{-\lambda}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \mu^k \lambda^{n-k} \\ &= \frac{(\mu + \lambda)^n}{n!} e^{-(\mu+\lambda)}. \end{aligned}$$

Das ist genau die $\mathcal{P}(\mu + \lambda)$ -Verteilung. □

Diese Eigenschaft gilt auch viel allgemeiner nicht nur für endliche Summen von poissonverteilten Zufallsvariablen, was man einfach durch Induktion zeigen kann, sondern auch für unendliche Summen, wobei auch die Bedingungen für Konvergenz geliefert werden.

Theorem 1.7 (Abzählbare Additivität der Poissonverteilung⁴). *Seien X_j für $j = 1, 2, \dots$ unabhängige Zufallsvariable und X_j sei jeweils $\mathcal{P}(\mu_j)$ -verteilt. Wenn die unendliche Summe der Parameter*

$$\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \tag{1.7}$$

konvergiert, dann konvergiert auch

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} X_j$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 und S ist $\mathcal{P}(\sigma)$ -verteilt. Wenn andererseits (1.7) divergiert, dann divergiert auch S mit Wahrscheinlichkeit 1.

Beweis. Durch Induktion nach n folgt aus Lemma 1.6, dass die endliche Summe

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j$$

die Verteilung $\mathcal{P}(\sigma_n)$ hat, wobei

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^n \mu_j.$$

⁴Countable Additivity Theorem in [5], analoger Beweis zu ebendort.

Das heißt, für jedes $l \geq 0$ ist

$$P(S_n \leq l) = \sum_{k=0}^l \pi_k(\sigma_n).$$

Aufgrund der Definition von S_n bilden die Ereignisse $\{S_n \leq l\}$ eine absteigende Folge $\{S_1 \leq l\} \supseteq \{S_2 \leq l\} \supseteq \dots \supseteq \{S_n \leq l\} \supseteq \{S_{n+1} \leq l\} \supseteq \dots$ und ihr Durchschnitt ist $\{S \leq l\}$, d.h.

$$\{S \leq l\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{S_n \leq l\}.$$

Somit gilt wegen des Stetigkeitssatzes für Wahrscheinlichkeiten

$$P[S \leq l] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[S_n \leq l] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^l \pi_k(\sigma_n).$$

Nun behandeln wir den konvergierenden Fall. Das heißt, σ_n konvergiert gegen ein endliches σ . Aus der Stetigkeit von π_k folgt dann

$$P[S \leq l] = \sum_{k=0}^l \pi_k(\sigma)$$

und somit

$$P[S = l] = \pi_l(\sigma).$$

Somit hat S die $\mathcal{P}(\sigma)$ -Verteilung und ist fast sicher endlich.

Jetzt betrachten wir den Fall, dass σ_n divergiert, also $\sigma_n \rightarrow \infty$. Für $l \geq 0$ ist dann

$$P[S \leq l] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[S_n \leq l] = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\sigma_n} \sum_{k=0}^l \frac{\sigma_n^k}{k!} = 0$$

und somit

$$P[S > l] = 1.$$

Da das für alle $l \geq 0$ gilt, divergiert S mit Wahrscheinlichkeit 1.⁵ □

Nun sehen wir erneut, dass die konventionelle Definition von $\mathcal{P}(0)$ bzw. $\mathcal{P}(\infty)$ gewissermaßen natürlich ist. Nach Theorem 1.7 gilt dann allgemein für unabhängige Zufallsvariablen X_j mit Verteilung $\mathcal{P}(\mu_j)$, dass ihre Summe die Verteilung $\mathcal{P}(\sum \mu_j)$ hat, unabhängig davon, ob endlich oder unendlich viele Zufallsvariablen summiert werden oder ob einige der Parameter μ_j gleich 0 oder ∞ sind.

⁵Das ist gleichbedeutend mit dem Argument bei (1.6).

1.2.2 Über Poissonverteilung, Binomialverteilung und Multinomialverteilung

Im Satz 1.1 haben wir gesehen, dass die Poissonverteilung der Grenzfall der Binomialverteilung ist. Es ist jedoch auch möglich, die Wahrscheinlichkeiten von Binomialverteilungen und Multinomialverteilungen durch bedingte Wahrscheinlichkeiten von Poissonverteilungen erhalten.

Definition 1.4 (Multinomialverteilung). Sei $(p_1, \dots, p_n)$ ein vorgegebener Vektor mit nichtnegativen Einträgen und $\sum_{j=1}^n p_j = 1$. Eine vektorwertige Zufallsvariable $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ mit Werten in $\mathbb{N}_0^n$ heißt *multinomialverteilt mit Parametern s und $p_1, \dots, p_n$* , wenn für $r_1 + \dots + r_n = s$ folgende Wahrscheinlichkeiten gelten:

$$P[X_1 = r_1, \dots, X_n = r_n] = \frac{s!}{r_1! \dots r_n!} p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}.$$

Satz 1.8. Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei X_j jeweils $\mathcal{P}(\mu_j)$ -verteilt ist. Sei $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Dann ist die bedingte Verteilung von $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ unter der Bedingung $S = s$ multinomialverteilt mit Parametern s und $p_j = \frac{\mu_j}{\sigma}$, wobei $\sigma = \mu_1 + \dots + \mu_n$.

Beweis. Wir betrachten die bedingte Wahrscheinlichkeit von $(X_1, \dots, X_n)$ mit $r_1 + r_2 + \dots + r_n = s$. Dabei verwenden wir die Unabhängigkeit der X_j und die Additivität der Poissonverteilung.

$$\begin{aligned} P[X_1 = r_1, \dots, X_n = r_n | S = s] &= \\ &= \left(\prod_{j=1}^n \frac{\mu_j^{r_j}}{r_j!} e^{-\mu_j} \right) / \left(\frac{\sigma^s}{s!} e^{-\sigma} \right) \\ &= \frac{s!}{r_1! r_2! \dots r_n!} \left(\frac{\mu_1}{\sigma} \right)^{r_1} \left(\frac{\mu_2}{\sigma} \right)^{r_2} \dots \left(\frac{\mu_n}{\sigma} \right)^{r_n} \end{aligned}$$

Das sind genau die Wahrscheinlichkeiten der Multinomialverteilung mit Parametern s und $p_j = \frac{\mu_j}{\sigma}$. $\square$

Der Spezialfall $n = 2$ führt zur Binomialverteilung. Wenn also X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilung $\mathcal{P}(\mu)$ bzw. $\mathcal{P}(\lambda)$ sind, dann ist die bedingte Verteilung von X unter der Bedingung $X + Y = n$ die $\mathcal{B}(n, p)$ -Verteilung mit

$$p = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{E(X)}{E(X) + E(Y)}.$$

1.3 Die “Unvermeidbarkeit” der Poissonverteilung

In diesem Abschnitt werden wir analog zum entsprechenden Abschnitt in [5] ein anschauliches Beispiel betrachten, bei dem geradezu unvermeidbar die

Poissonverteilung auftritt. Dabei müssen wir natürlich einige vereinfachende Annahmen voraussetzen, die wir jedoch der Übersichtlichkeit wegen nicht alle explizit ausformulieren.

Sei Π eine Zufallsvariable in der Menge der abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Sei $N(A) = \#\{\Pi \cap A\}$ die Anzahl der Elemente von Π in A , was wiederum eine Zufallsvariable mit Werten in $\overline{\mathbb{N}_0} = \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ist. Wir betrachten $N(A_r)$, wobei A_r ein Kreis mit Radius r ist und schreiben für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten von $N(A_r)$

$$\begin{aligned} p_n(r) &= \mathbb{P}[N(A_r) = n], \\ q_n(r) &= \mathbb{P}[N(A_r) \leq n]. \end{aligned}$$

Da $N(A_t)$ mit dem Radius wächst, fällt q_n mit wachsendem r , sodass sowohl q_n als auch p_n nur abzählbar viele Sprungstellen haben und fast überall ableitbar sind. Im Folgenden geben wir eine heuristische Herleitung einer Differentialgleichung für p_n .

Die Zufallsvariable $N(A_t)$ springt genau dann von n auf $n+1$, wenn der begrenzende Kreis einen Punkt der Zufallsvariable Π trifft. Die Wahrscheinlichkeit, dass das zwischen r und $r+h$ auftritt, ist genau die Wahrscheinlichkeit, dass im Ring zwischen A_r und A_{r+h} ein Punkt ist. Da wir h sehr klein annehmen, ignorieren wir die Wahrscheinlichkeiten, dass mehr als ein Punkt in diesem Ring auftritt. Wir definieren

$$\mu(r) = \mathbb{E}[N(A_r)]$$

(unter der Annahme, dass dieser Erwartungswert für alle $r \geq 0$ existiert) und erhalten somit für die Wahrscheinlichkeit, dass N im Ring $A_{r+h} \setminus A_r$ um den Wert 1 springt,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N(A_{r+h} \setminus A_r) = 1] &= \mathbb{P}[N(A_{r+h}) - N(A_r) = 1] \\ &= 0 \cdot \mathbb{P}[N(A_{r+h}) - N(A_r) = 0] \\ &\quad + 1 \cdot \mathbb{P}[N(A_{r+h}) - N(A_r) = 1] \\ &= \mathbb{E}[N(A_{r+h}) - N(A_r)] \\ &= \mu(r+h) - \mu(r). \end{aligned}$$

Wenn dieses Ereignis unabhängig von der Anzahl der Punkte im Kreis A_r ist, dann können wir für kleine h wegen der Zerlegung von $\{N(A_r) \leq n\}$ in $\{N(A_{r+h}) \leq n\}$ und $\{N(A_{r+h} \setminus A_r) = 1\}$ schreiben

$$q_n(r) - q_n(r+h) = p_n(r)(\mu(r+h) - \mu(r)).$$

Nach Division durch h ist dann der Limes für $h \rightarrow 0$:

$$-\frac{dq_n}{dr} = p_n \frac{d\mu}{dr}.$$

Durch die Identitäten $p_n = q_n - q_{n-1}$ und $q_{-1} = 0$ erhalten wir für $n \geq 1$

$$\frac{dp_0}{dr} = -p_0 \frac{d\mu}{dr}, \quad (1.8)$$

$$\frac{dp_n}{dr} = (p_{n-1} - p_n) \frac{d\mu}{dr}. \quad (1.9)$$

Wegen $\frac{d}{dr}(\log p_0) = \frac{1}{p_0} \frac{dp_0}{dr}$ besagt Gleichung (1.8), dass

$$\frac{d}{dr}(\log p_0 + \mu) = 0.$$

Wegen $p_0(0) = 1$ und $\mu(0) = 0$ ist also $\log p_0 + \mu = 0$ und somit

$$p_0(r) = e^{-\mu(r)}. \quad (1.10)$$

Mit Hilfe von Gleichung (1.9) erhalten wir

$$\frac{d}{dr}(p_n e^\mu) = e^\mu \frac{dp_n}{dr} + p_n \frac{de^\mu}{dr} = e^\mu (p_{n-1} - p_n) \frac{d\mu}{dr} + p_n e^\mu \frac{d\mu}{dr} = p_{n-1} e^\mu \frac{d\mu}{dr}.$$

Das ergibt nach Integration von 0 bis r wegen $p_n(0) = 0$ für $n \geq 1$

$$p_n(r) = e^{-\mu(r)} \int_0^r p_{n-1}(s) e^{\mu(s)} \frac{d\mu}{ds} ds. \quad (1.11)$$

Durch Induktion nach n erhält man

$$p_n(r) = \frac{\mu(r)^n}{n!} e^{-\mu(r)}.$$

Die Induktion beginnt bei $n = 0$ mit (1.10). Im Induktionsschritt von $n - 1$ auf n setzen wir in (1.11) ein und erhalten

$$\begin{aligned} p_n(r) &= e^{-\mu(r)} \int_0^r \frac{\mu(s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu(s)} e^{\mu(s)} \frac{d\mu}{ds} ds \\ &= e^{-\mu(r)} \frac{\mu(s)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass $N(A_r)$ genau die $\mathcal{P}(\mu(r))$ -Verteilung hat.

In diesem Beispiel sind die implizit vorausgesetzten Annahmen natürlich wichtig, aber es soll schon an dieser Stelle zeigen, dass die Poissonverteilung gewissermaßen unvermeidlich aus der “reinen Zufälligkeit” und Unabhängigkeit folgt. Genauere Ergebnisse in diesem Sinn werden wir im Kapitel 5 erarbeiten.

Kapitel 2

Definition und einfache Eigenschaften von Poissonprozessen

In den meisten Einführungen in stochastische Prozesse wird der Poissonprozess nur im eindimensionalen Fall behandelt und als Zählprozess mit unabhängigen, exponentialverteilten Zwischenankunftszeiten definiert. Wir werden den Poissonprozess wesentlich allgemeiner als zufällige Wahl von Punkten in einem Raum S definieren. Stochastische Prozesse dieser Art werden oft *Punktprozesse* genannt, wenn nicht die zeitliche Abfolge sondern die räumliche (bzw. höherdimensionale) Anordnung im Vordergrund steht.

Bevor wir den Poissonprozess definieren, müssen wir noch einige maßtheoretische und wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen erarbeiten. Üblicherweise ist der Zustandsraum eines Poissonprozesses der euklidische Raum $\mathbb{R}^d$ in einer gewissen Dimension d oder eine Mannigfaltigkeit, die lokal äquivalent zu $\mathbb{R}^d$ ist. Der Großteil der Theorie benötigt aber nicht die Besonderheiten des euklidischen Raums, daher können wir die Definition bewusst allgemein halten und brauchen einige Konstrukte aus der Maßtheorie, um die Konsistenz zu gewährleisten.

2.1 Maßtheoretische Grundlagen

Um den Poissonprozess in seiner Allgemeinheit zu definieren, benötigen wir eine Zählfunktion wie im Abschnitt 1.3. Insbesondere gilt es also nun, eine Familie von Mengen zu finden, sodass die Zählfunktion eine wohldefinierte Zufallsvariable ist. Dafür benötigen wir eine σ -Algebra, auf der ein Maß definiert werden kann.

Definition 2.1 (σ -Algebra, messbarer Raum). Sei S eine beliebige Menge und $\mathbb{P}(S) = \{A : A \subseteq S\}$ die Potenzmenge von S . Eine Teilmenge $\mathcal{A}$ von

$\mathbb{P}(S)$, heißt σ -Algebra, wenn gilt

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,
- (iii) $A_n \in \mathcal{A}$ für $n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Die Teilmengen von S , die in der σ -Algebra $\mathcal{A}$ enthalten sind, heißen dann *messbar*. Das Paar $(S, \mathcal{A})$ heißt *messbarer Raum*.

Eine σ -Algebra enthält also auch die ganze zugrundeliegende Menge S und ist abgeschlossen unter den Mengenoperationen c , $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\bigcap_{k=1}^{\infty}$ und $\bigcup_{k=1}^{\infty}$.

In unserem Fall ist die zugrundeliegende Menge S der künftige Zustandsraum für den Poissonprozess. Wenn wir als Zustandsraum $S = \mathbb{R}^d$ verwenden, so ist die σ -Algebra immer die Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Das ist die kleinste σ -Algebra, die alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ beinhaltet. Damit sind in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ auch alle offenen, halboffenen und abgeschlossenen d -dimensionalen Rechtecke, alle kompakten Teilmengen und alle abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ enthalten.

Maße sind nun spezielle, auf einer σ -Algebra definierte Funktionen.

Definition 2.2 (Maß, Maßraum). Sei $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra auf S . Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt *Maß* auf $\mathcal{A}$, wenn folgende Eigenschaften gelten:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (ii) sind $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, dann gilt $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Falls auch $\mu(S) = 1$ gilt, dann ist μ ein *Wahrscheinlichkeitsmaß*. Das Tripel $(S, \mathcal{A}, \mu)$ nennt man *Maßraum*.

Bei allgemeinem Zustandsraum S müssen wir sicherstellen, dass unsere σ -Algebra groß genug ist, um einzelne Punkte unterscheiden zu können. Wenn wir fordern, dass die Diagonale $D = \{(x, y) : x = y\}$ im Produktraum $S \times S$ (mit der Produkt- σ -Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$) messbar ist, dann ist auch jedes Atom $\{x\}$ messbar in S .¹ In der Borel- σ -Algebra ist das immer gegeben, da die Diagonale im Produktraum $\mathbb{R}^{2d}$ abgeschlossen und somit (in der Produkt- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d})$) messbar ist. Da es nur eine sehr schwache Bedingung ist, werden wir stets ohne weiteren Kommentar annehmen, dass die Diagonal-Bedingung gegeben ist.

¹Vgl. Satz 5.14 in [4].

Für die formale Definition von Zufallsvariablen benötigen wir noch den Begriff der Messbarkeit einer Funktion. Dazu muss das Urbild jeder messbaren Teilmenge der Zielmenge eine messbare Teilmenge der Definitionsmenge sein.

Definition 2.3 (Messbarkeit von Funktionen). Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ zwei messbare Räume. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ heißt *messbar*, wenn für alle $A' \in \mathcal{A}'$ gilt

$$f^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A'\} \in \mathcal{A}.$$

Zum Abschluss der maßtheoretischen Grundlagen definieren wir noch zwei wichtige Endlichkeitskriterien für Maße, das wir später noch brauchen werden.

Definition 2.4 (σ -Endlichkeit). Sei $(S, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ heißt *σ -endlich*, wenn eine Folge von Mengen $S_1, S_2, \dots$ in $\mathcal{A}$ mit $\mu(S_k) < \infty$ für $k \geq 1$ existiert, deren Vereinigung S ist. Eine Teilmenge A von S heißt *σ -endlich*, wenn sie die abzählbare Vereinigung von Mengen $A_1, A_2, \dots$ in $\mathcal{A}$ mit $\mu(A_k) < \infty$ für $k \geq 1$ ist.

Hat man ein σ -endliches Maß, gibt es also für den Zustandsraum eine abzählbare Zerlegung, deren Elemente alle endliches Maß haben.

Für das zweite Endlichkeitskriterium, das wir hier definieren, fordern wir, dass es für jeden Punkt des Zustandsraumes eine offene Umgebung mit endlichem Maß gibt. Dazu benötigen wir eine Topologie, also die Beschreibung der offenen Menge des Zustandsraumes, und die Hausdorff-Eigenschaft für den topologischen Raum, also dass für je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen.

Definition 2.5 (lokal-endliche Maße). Sei $(S, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum mit Topologie $\mathcal{T}$ und sei $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra, die die Topologie $\mathcal{T}$, also jede offene Teilmenge von S , beinhaltet. Ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ heißt *lokal-endlich*, wenn

$$\forall x \in S \quad \exists \text{ offene Umgebung } U_x \text{ von } x \text{ mit } \mu(U_x) < \infty.$$

Eine messbare Teilmenge $A \subseteq S$ heißt *lokal-endlich*, wenn obige Eigenschaft für alle $x \in A$ gilt.

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$ ist die Hausdorff-Eigenschaft erfüllt. Eine σ -Algebra, die alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ enthält, muss mindestens so fein wie die Borel- σ -Algebra sein, da diese ja die kleinste σ -Algebra ist, die diese Eigenschaft hat. Die meisten Maße, die wir betrachten, sind lokal-endlich. Auf $\mathbb{R}^d$ ist lokale Endlichkeit äquivalent zur Forderung, dass μ auf beschränkten Mengen endlich ist.

2.2 Definition des Poissonprozesses

Für die exakte, schrittweise Definition des Poissonprozesses als zufällige Teilmenge des Zustandsraums brauchen wir noch einige Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Als Grundlage für eine Zufallsvariable dienen ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und ein messbarer Raum $(\Omega', \mathcal{A}')$.

Definition 2.6 (Wahrscheinlichkeitsraum). Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit folgenden Eigenschaften:

- Ω ist eine beliebige nichtleere Menge, die Ereignismenge,
- $\mathcal{A}$ ist eine σ -Algebra auf Ω ,
- P ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$.

Nun definieren wir, was eine Zufallsvariable ist.

Definition 2.7 (Zufallsvariable). Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum. Eine messbare Abbildung $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ heißt dann *Zufallsvariable*.

Durch $P'[A'] = P[\{\omega : X(\omega) \in A'\}] = P[\{\omega \in X^{-1}(A')\}]$ für $A' \in \mathcal{A}'$ wird damit eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P' auf $(\Omega', \mathcal{A}')$ definiert. Wir verwenden dafür üblicherweise eine abgekürzte Variante des mittleren Ausdruck, wobei wir die Formalismen für den Mengenausdruck weglassen. Also schreiben wir $P[X \in A']$ für die Wahrscheinlichkeit, dass $X(\omega)$ in die Menge A' fällt.

Mit diesem Vorwissen können wir zufällige abzählbare Mengen definieren.

Definition 2.8 (zufällige abzählbare Menge). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $(S, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\Omega' = \{M \subseteq S : M \text{ abzählbar}\} \subseteq \mathcal{A}$ die Menge aller abzählbaren Teilmengen von S . Für $A \in \mathcal{A}$ sei $\mathcal{N}_A : \Omega' \rightarrow \overline{\mathbb{N}}_0$ die Zählfunktion mit

$$\mathcal{N}_A(M) = \#\{M \cap A\}.$$

Wir definieren die σ -Algebra $\mathcal{B}$ auf Ω' als die kleinste σ -Algebra auf Ω' , so dass alle $\mathcal{N}_A$ (bezüglich $\mathcal{B}$ und der σ -Algebra $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{N}}_0)$ auf $\overline{\mathbb{N}}_0$) messbar werden. Eine *zufällige abzählbare Teilmenge von S* ist eine Abbildung $\Pi : \Omega \rightarrow \Omega'$, die messbar bezüglich $\mathcal{F}$ und $\mathcal{B}$ ist.

Bemerkung 2.1. Für eine zufällige abzählbare Menge Π wie in obiger Definition ist dann für jedes $A \in \mathcal{A}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} N_A : \Omega & \rightarrow \overline{\mathbb{N}}_0, \\ N_A & = \mathcal{N}_A \circ \Pi = \#\{\Pi \cap A\} \end{aligned}$$

eine $\overline{\mathbb{N}_0}$ -wertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Wir schreiben “by abuse of notation” von nun an

$$N(A) = \#\{\Pi \cap A\} \quad (2.1)$$

für die Zählvariable für eine Testmenge A bezüglich der Zufallsmenge Π .

Der ursprüngliche Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und die σ -Algebra $\mathcal{B}$ auf Ω' sind hier nur für eine formal exakte Definition notwendig, in Wirklichkeit sind sie für uns nicht interessant. Für uns wichtig ist die Abzählbarkeit von Π als Teilmenge von S und dass die Zählvariable für alle Testmengen A aus der σ -Algebra $\mathcal{A}$ auf dem Zustandsraum S wohldefiniert ist.

Der Poissonprozess ist nun eine zufällige abzählbare Teilmenge des Zustandsraums S , für deren Zählvariable $N(A)$ bestimmte Eigenschaften gelten.

Definition 2.9 (Poissonprozess). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $(S, \mathcal{B})$ bzw. $(\Omega', \mathcal{A})$ messbare Räume wie in obiger Definition. Weiters sei $0 \leq \mu(A) \leq \infty$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Eine zufällige abzählbare Teilmenge Π von S heißt *Poissonprozess*, wenn folgende Eigenschaften gelten

- (i) sind $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, dann sind die Zufallsvariablen $N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_n)$ unabhängig,
- (ii) für $A \in \mathcal{A}$ hat $N(A)$ die $\mathcal{P}(\mu(A))$ -Verteilung.

Die Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt *Intensitätsmaß* des Poissonprozesses.

Die zwei grundlegenden Eigenschaften des Poissonprozesses sind also zum einen, dass die $N(A_i)$, die Anzahl der Punkte des Poissonprozesses in A_i , von mehreren “Testmengen” unabhängig sind, solange sich diese nicht überschneiden und zum anderen, dass $N(A)$ die $\mathcal{P}(\mu(A))$ -Verteilung hat.

2.3 Erste Beobachtungen am Poissonprozess

Wir betrachten nun das Intensitätsmaß. Die folgende Proposition zeigt, warum diese Bezeichnung Sinn macht.

Proposition 2.2. *Die in Definition 2.9 vorkommende Funktion $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ist ein Maß.*

Beweis. Nach Proposition 1.2 über die Eigenschaften der Poissonverteilung gilt

$$\mu(A) = E[N(A)]. \quad (2.2)$$

Wegen $N(\emptyset) = 0$ gilt somit $\mu(\emptyset) = 0$. Das ist die erste Eigenschaft eines Maßes.

Für disjunkte Mengen $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ mit Vereinigung $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ gilt

$$N(A) = \sum_{k=1}^{\infty} N(A_k)$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten den Erwartungswert, so gilt wegen (2.2) und dem Satz von der monotonen Konvergenz (oder alternativ Theorem 1.7)

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Das ist die zweite Eigenschaft eines Maßes. □

In Abschnitt 2.4 werden wir das Intensitätsmaß weiter untersuchen und einige Arten von besonderen Maßen betrachten.

Nun sehen wir uns an, wie wir aus den Grundeigenschaften des Poissonprozesses die gemeinsame Verteilung der Zählvariable $N(A)$ für verschiedene Testmengen A berechnen können.²

Seien $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ messbar aber nicht notwendigerweise disjunkt. Wir betrachten alle möglichen Mengen der Form

$$B_i = A_1^* \cap A_2^* \cap \dots \cap A_n^*,$$

wobei die A_j^* entweder A_j oder deren Komplement A_j^c sind. Es gibt insgesamt 2^n Mengen dieser Art, die paarweise disjunkt sind. Wir nummerieren diese Mengen von 1 bis 2^n (die Reihenfolge der Nummerierung ist für die weitere Rechnung irrelevant) und können somit jedes A_j als disjunkte Vereinigung von solchen Mengen schreiben:

$$A_j = \bigcup_{i \in \gamma_j} B_i,$$

wobei γ_j eine Teilmenge von $\{1, 2, \dots, 2^n\}$ ist. Wegen der Disjunktheit der B_i können wir uns nun $N(A_j)$ ausrechnen

$$N(A_j) = \sum_{i \in \gamma_j} N(B_i),$$

da die $N(B_i)$ unabhängig sind und die $\mathcal{P}(\mu(B_i))$ -Verteilung haben. Damit können wir alle (gemeinsamen) Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mit den Zufallsvariablen $N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_n)$ schreiben.

²Die Idee zu dieser Berechnungsmöglichkeit stammt aus [5].

Beispiel 2.1. Im Fall $n = 2$ können wir die B_i folgendermaßen nummerieren:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \cap A_2, & B_2 &= A_1 \cap A_2^c, \\ B_3 &= A_1^c \cap A_2, & B_4 &= A_1^c \cap A_2^c. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende Zerlegungen der Mengen A_1 und A_2 :

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 \cup B_2, \\ A_2 &= B_1 \cup B_3 \end{aligned}$$

und für die Zählvariablen

$$\begin{aligned} N(A_1) &= N(B_1) + N(B_2), \\ N(A_2) &= N(B_1) + N(B_3). \end{aligned}$$

Nun wollen wir die Kovarianz von $N(A_1)$ und $N(A_2)$ berechnen. Wir kennen bereits die einzelnen Erwartungswerte $E[N(A_1)] = \mu(A_1) = \mu(B_1) + \mu(B_2)$ bzw. $E[N(A_2)] = \mu(A_2) = \mu(B_1) + \mu(B_3)$ und brauchen für die Berechnung der Kovarianz nur noch den Erwartungswert des Produkts

$$\begin{aligned} E[N(A_1)N(A_2)] &= E[N(B_1)^2 + N(B_1)N(B_3) \\ &\quad + N(B_2)N(B_1) + N(B_2)N(B_3)] \\ &= \mu(B_1) + \mu(B_1)^2 + \mu(B_1)\mu(B_3) \\ &\quad + \mu(B_2)\mu(B_1) + \mu(B_2)\mu(B_3) \\ &= \mu(B_1) + \mu(A_1)\mu(A_2), \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile Proposition 1.2 (iii), $E[N(B_1)^2] = \mu(B_1) + \mu(B_1)^2$, verwendet haben. Die Kovarianz von $N(A_1)$ und $N(A_2)$ ist also

$$\begin{aligned} \text{Cov}[N(A_1), N(A_2)] &= E[N(A_1)N(A_2)] - E[N(A_1)]E[N(A_2)] \\ &= \mu(B_1) = \mu(A_1 \cap A_2). \end{aligned}$$

2.4 Über das Intensitätsmaß

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Intensitätsmaß und werden eine direkt aus der Definition des Poissonprozesses folgende Voraussetzung an ein Maß finden, damit dieses ein Intensitätsmaß sein kann. In Abschnitt 3.4 werden wir zeigen, dass diese Bedingung schon nahezu hinreichend ist, dass zu einem entsprechenden Maß ein Poissonprozess existiert, der dieses Maß als Intensitätsmaß hat. Es bedarf dann nur noch einer schwachen Endlichkeitsbedingung. Weiters sehen wir uns in diesem Abschnitt einige typische Maße auf dem euklidischen Zustandsraum $S = \mathbb{R}^d$ an.

Betrachten wir nun ein Maß μ auf S , das ein Atom $\{x\}$ hat. Das bedeutet, dass μ dieser einelementigen Menge ein positives Maß $m = \mu(\{x\}) > 0$ zuordnet. Für einen Poissonprozess mit Intensitätsmaß μ würde nun nach dessen Definition für die Menge $A = \{x\}$ folgen

$$\begin{aligned} P(N(\{x\}) \geq 2) &= 1 - P(N(\{x\}) = 0) - P(N(\{x\}) = 1) \\ &= 1 - e^{-m} - me^{-m} > 0, \end{aligned}$$

was ein Widerspruch zu (2.1), der Definition von $N(A)$, ist, da $\{x\} \cap \Pi$ maximal ein Element beinhalten kann. Wir haben also gezeigt, dass ein Intensitätsmaß μ kein Atom im obigen Sinn haben darf und definieren daher:³

Definition 2.10 (atomfreies Maß). Ein Maß μ auf dem messbaren Raum $(S, \mathcal{A})$ heißt *atomfrei*, wenn gilt:

$$\mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in S.$$

Wie oben angekündigt, werden wir in Abschnitt 3.4 sehen, dass es nur einer schwachen Endlichkeitsbedingung bedarf, die der σ -Endlichkeit ähnlich aber noch allgemeiner ist, damit ein atomfreies Maß das Intensitätsmaß eines Poissonprozesses ist. Wir können also durch die Variation des Maßes μ auf S viele verschiedene Poissonprozesse erhalten. Nun betrachten wir einige typische Maße auf dem Zustandsraum $S = \mathbb{R}^d$.

2.4.1 Lebesguemaß und Maße mit Dichten

Das grundlegendste Maß auf dem Zustandsraum $\mathbb{R}^d$ mit der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist das Lebesguemaß. Es ist dadurch (eindeutig) bestimmt, dass es den geometrischen Objekten (Interval, Rechteck, Quader etc.) ihren Inhalt (also Länge, Fläche, Volumen etc.) zuordnet.

In vielen Anwendungen ist das Intensitätsmaß durch eine Dichte λ bezüglich des Lebesguemaßes gegeben. Eine Dichte ist eine nichtnegative messbare Funktion von S nach $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, also $\lambda : S \rightarrow [0, \infty]$. Das durch die Dichte λ gegebene Maß ist dann durch das Integral von λ bezüglich des d -dimensionalen Lebesguemaßes gegeben. Als Riemann-Integral wird es also folgendermaßen geschrieben:

$$\mu(A) = \int_A \lambda(x) dx, \tag{2.3}$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_d)$ gemeint ist. Die Dichte gibt sozusagen an, wie stark gewisse Regionen des Zustandsraums für den Poissonprozess gewichtet werden. In Bereichen mit hoher Dichte erwartet man mehr Punkte von Π

³In der Maßtheorie wird ein *Atom* üblicherweise allgemeiner definiert. Dieser Fall betrifft uns aber hier nicht, da wir immer voraussetzen, dass alle einelementigen Mengen messbar sind.

als in (gleich großen) Bereichen mit niedriger Dichte. Das kann man anschaulich zeigen: Wenn λ im Punkt x stetig ist, dann kann man wegen (2.3) für eine kleine Umgebung A von x das Maß von A durch $\lambda(x)|A|$ approximieren, wobei $|A|$ das Lebesgue-Maß, also das Volumen (bzw. die Länge oder die Fläche), von A angibt. Daher entspricht $\lambda(x)|A|$ ungefähr dem Erwartungswert, wie viele Punkte von Π in die Menge A fallen, was bei gleich großem A natürlich von λ abhängt.

Wenn die Dichte λ konstant ist, also μ nur von der Größe von A abhängt, haben wir einen wichtigen Spezialfall:⁴

Definition 2.11 (Homogener Poissonprozess). Sei μ ein Maß mit konstanter Dichte, also

$$\mu(A) = \lambda|A|.$$

Ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß μ heißt dann *homogener Poissonprozess mit Intensität λ* .

Die stochastischen Eigenschaften eines homogenen Poissonprozesses sind dann stabil unter Verschiebungen und Drehungen des Zustandsraums S . Es kann gezeigt werden, dass der homogene Poissonprozess der einzige auf beschränkten Mengen endliche Poissonprozess mit dieser Eigenschaft ist.

Bemerkung 2.3. Das Integral in (2.3) kann für bestimmte Dichten auch für beschränkte Mengen unendlich sein. In den meisten Problemstellungen hat man es mit Maßen zu tun, die auf beschränkten Mengen endlich sind, aber es gibt auch einige wichtige Ausnahmen, die wir in dieser Arbeit jedoch nicht behandeln werden. Üblicherweise ist also $\mu(A)$ und damit auch $N(A)$ endlich auf beschränkten Mengen. Damit ist auch die Menge Π mit Wahrscheinlichkeit 1 lokal endlich und hat keine (endlichen) Häufungspunkte.

2.4.2 Intensitätsmaße auf dem Zustandsraum $\mathbb{R}$

Um dieses Kapitel abzuschließen, betrachten wir nun Maße auf dem Zustandsraum $\mathbb{R}$. Sei μ ein beliebiges Maß, das endlich auf beschränkten Mengen ist. Dann ist μ durch seine Werte auf den Intervallen $(a, b]$ eindeutig bestimmt. Wir definieren zum Maß μ die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt:

$$F(t) = \begin{cases} \mu(0, t] = & \text{für } t \geq 0 \\ -\mu(t, 0] = & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Damit ist F eine rechtsseitig stetige, monoton wachsende Funktion und für das Maß eines halboffenen Intervalls $(a, b]$ gilt:

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a).$$

⁴Im Moment setzen wir die Existenz eines Poissonprozesses zu einer entsprechenden Dichte voraus, diese wird in Beispiel 3.1 im Abschnitt über den Existenzsatz gezeigt.

Den halboffenen Intervallen werden damit sozusagen gewichtete Längen zugeordnet. Maße dieser Art heißen *Lebesgue-Stieltjes-Maße*. Ein Lebesgue-Stieltjes-Maß ist genau dann atomfrei und kann damit das Intensitätsmaß eines Poissonprozesses sein, wenn dessen Verteilungsfunktion F stetig ist.

Proposition 2.4. *Sei μ ein Lebesgue-Stieltjes-Maß mit Verteilungsfunktion F . Es ist μ genau dann atomfrei, wenn F stetig ist.*

Beweis. Aus der Definition der Verteilungsfunktion (2.4) folgt, dass für die linksseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned}\lim_{t \uparrow x} F(t) &= \mu(0, x) & \forall x > 0, \\ \lim_{t \uparrow x} F(t) &= -\mu[t, 0] & \forall x \leq 0,\end{aligned}$$

gilt. Wegen der Additivität von Maßen ist

$$\begin{aligned}\mu(0, x] &= \mu(0, x) + \mu(\{x\}) & \forall x > 0, \\ \mu[x, 0] &= \mu(\{x\}) + \mu(x, 0] & \forall x \leq 0.\end{aligned}$$

Aufgrund der oben genannten Eigenschaften gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}\mu(\{x\}) &= \mu(0, x] - \mu(0, x) = F(x) - \lim_{t \uparrow x} F(t) & \forall x > 0, \\ \mu(\{x\}) &= -\mu(x, 0] + \mu[x, 0] = F(x) - \lim_{t \uparrow x} F(t) & \forall x \leq 0.\end{aligned}$$

Es ist F genau dann stetig, wenn $F(x) - \lim_{t \uparrow x} F(t) = 0$ für alle x ist und μ ist genau dann atomfrei, wenn $\mu(\{x\}) = 0$ für alle x . Die Behauptung folgt also aus obigen zwei Gleichungen. $\square$

Wenn F als Stammfunktion einer reellen Funktion λ geschrieben werden kann, also wenn

$$F(t) = \int_0^t \lambda(x) \, dx,$$

dann ist μ durch die Dichte λ gegeben. Die Verteilungsfunktion für das Intensitätsmaß eines homogenen Poissonprozesses mit Intensität λ ist somit

$$F(t) = \lambda t,$$

wobei λ konstant ist.

Kapitel 3

Wichtige Theoreme über Poissonprozesse

In diesem Kapitel werden wir die wichtigsten Eigenschaften von Poissonprozessen zeigen, die das Rechnen mit Poissonprozessen oft sehr vereinfachen. Wir versuchen wieder, die Voraussetzungen möglichst gering zu halten, um so allgemeine Resultate wie möglich zu erhalten.

3.1 Der Einschränkungssatz

Wir beginnen mit dem Einschränkungssatz, einer intuitiven und sehr leicht zu zeigenden aber oft verwendeten Eigenschaft von Poissonprozessen. Es besagt, dass die Einschränkung eines Poissonprozesses auf eine Teilmenge des Zustandsraumes wieder ein Poissonprozess mit “vererbtem” Intensitätsmaß ist. Der Beweis besteht aus dem Überprüfen der Definition des Poissonprozesses und wird daher hier nicht näher ausformuliert.

Theorem 3.1 (Einschränkungssatz für Poissonprozesse¹). *Sei Π ein Poissonprozess auf S mit Intensitätsmaß μ und sei S_1 eine messbare Teilmenge von S . Dann kann die zufällige abzählbare Menge*

$$\Pi_1 = \Pi \cap S_1$$

entweder als Poissonprozess auf S mit Intensitätsmaß

$$\mu_1(A) = \mu(A \cap S_1)$$

oder als Poissonprozess auf S_1 gesehen werden, dessen Intensitätsmaß die Einschränkung von μ auf S_1 ist.

Der intuitivere Fall dieses Satzes ist natürlich, wenn man Π_1 als Poissonprozess auf S_1 sieht, da die Eigenschaften von Π auf die Menge S_1 übertragen

¹Restriction Theorem in [5].

werden. Das ist auch kompatibel mit der intuitiven Vorstellung der “reinen Zufälligkeit” der Punkte eines Poissonprozesses: Wenn man nur einen Ausschnitt des Zustandsraumes betrachtet, dann müssen die Punkte in diesem Ausschnitt genauso zufällig verteilt sein.

Bei der anderen Interpretation der Einschränkung eines Poissonprozesses blendet man sozusagen das Komplement von S_1 aus und hat nun einen Poissonprozess, der nur in S_1 Punkte hat. Durch die Definition von Poissonprozessen über das Intensitätsmaß ist das leicht möglich, indem das neue Maß nur für Teilmengen von S_1 positiv ist und somit die Zählvariable des Poissonprozesses nur dort positiven Erwartungswert haben kann.

3.2 Der Vereinigungssatz

In Satz 1.7 haben wir die Additivität der Poissonverteilung gezeigt. Für den Poissonprozess gilt ein analoges Resultat, wenn wir analog zum Summieren von unabhängigen Zufallsvariablen die zufälligen Mengen von unabhängigen Poissonprozessen vereinigen. Der Vereinigungssatz für Poissonprozesse beschreibt eine der wichtigsten Eigenschaften von Poissonprozessen und folgt fast direkt aus dem Additivitätssatz für Poissonverteilungen. Man benötigt allerdings die Eigenschaft, dass zwei unabhängige Poissonprozesse auf endlichen Mengen fast sicher disjunkt sind.

Lemma 3.2 (Disjunktheit von Poissonprozessen²). *Seien Π_1 bzw. Π_2 unabhängige Poissonprozesse auf dem Zustandsraum S mit Intensitätsmaßen μ_1 bzw. μ_2 . Sei $A \subseteq S$ messbar mit endlichem Maß $\mu_1(A)$ bzw. $\mu_2(A)$. Dann sind Π_1 und Π_2 auf der Menge A fast sicher disjunkt, das heißt*

$$P[\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap A = \emptyset] = 1.$$

Beweis. Die Behauptung gilt genau dann, wenn die Gegenwahrscheinlichkeit zum gesuchten Ereignis 0 ist, das heißt, wenn

$$P[\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap A \neq \emptyset] = 0. \quad (3.1)$$

Wir werden zeigen, dass

$$P[\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap A \neq \emptyset] < \varepsilon \quad (3.2)$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt. Daraus folgt dann (3.1) und somit die Behauptung.

Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{\mu_1(A)}{m} < \sqrt{\varepsilon}$, und ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{\mu_2(A)}{n} < \sqrt{\varepsilon}$. Nach Korollar 1.12.10 in [2]³ gibt es für jedes $\alpha \in [0, \mu_1(A)]$ eine messbare Menge $A' \subseteq A$ mit $\mu_1(A') = \alpha$. Daraus folgert man leicht, dass zu $m \in \mathbb{N}$ eine Partition $\{A_1, \dots, A_m\}$ von A , bestehend

²Vgl. *Disjointness Lemma* in [5].

³Dazu analog ist auch Übungsaufgabe 6.3.h in [4].

aus messbaren Mengen, existiert, sodass $\mu_1(A_i) = \frac{\mu_1(A)}{m}$ für $1 \leq i \leq m$. Für $1 \leq i \leq m$ wenden wir dasselbe Argument auf A_i und μ_2 an und finden eine Partition $\{B_{i,1}, \dots, B_{i,n}\}$ von A_i , sodass $\mu_2(B_{i,j}) = \frac{\mu_2(A_i)}{n}$ für $1 \leq j \leq n$. Weil $\{B_{i,j}\}_{i,j}$ eine Zerlegung von A ist, gilt für das Ereignis

$$\begin{aligned} \{\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap A \neq \emptyset\} &= \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \{\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap B_{i,j} \neq \emptyset\} \\ &\subseteq \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \{\Pi_1 \cap B_{i,j} \neq \emptyset \text{ und } \Pi_2 \cap B_{i,j} \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit von Π_1 und Π_2 gilt daher

$$\begin{aligned} P[\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap A \neq \emptyset] &\leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} P[\Pi_1 \cap B_{i,j} \neq \emptyset \text{ und } \Pi_2 \cap B_{i,j} \neq \emptyset] \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} P[\Pi_1 \cap B_{i,j} \neq \emptyset] \cdot P[\Pi_2 \cap B_{i,j} \neq \emptyset] \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} P[N_1(B_{i,j}) \geq 1] \cdot P[N_2(B_{i,j}) \geq 1]. \end{aligned}$$

Wegen $P[N_k(C) \geq 1] = 1 - P[N_k(C) = 0] = 1 - e^{-\mu_k(C)}$ für $k = 1, 2$ und $C \subseteq S$ messbar und der Ungleichung $1 - e^{-\mu} \leq \mu$ für $\mu \geq 0$ folgt daraus

$$\begin{aligned} P[\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap A \neq \emptyset] &\leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (1 - e^{-\mu_1(B_{i,j})}) \cdot (1 - e^{-\mu_2(B_{i,j})}) \\ &\leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \mu_1(B_{i,j}) \cdot \mu_2(B_{i,j}) \\ &= \sum_{i=1}^m \mu_1(A_i) \frac{\mu_2(A_i)}{n} \\ &= \frac{\mu_1(A)}{m} \cdot \frac{\mu_2(A)}{n} < \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei wir $\sum_{j=1}^n \mu_1(B_{i,j}) = \mu_1(A_i)$ verwendet haben. Es ist also (3.2) und damit die Behauptung gezeigt. $\square$

Aus obigem Lemma für Mengen mit endlichem Maß folgt direkt die Variante für abzählbar viele Mengen mit endlichem Maß und damit auch für Mengen, die abzählbare Vereinigungen von Mengen mit endlichem Maß sind, also für σ -endliche Mengen.

Korollar 3.3. *Seien Π_1 und Π_2 wie in Lemma 3.2. Sei $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ für eine Folge von messbaren Mengen $A_1, A_2, \dots$ mit $\mu_1(A_k) < \infty$ und $\mu_2(A_k) < \infty$ für $k = 1, 2, \dots$. Dann gilt:*

$$P[\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap A = \emptyset] = 1.$$

Damit gilt die Disjunktheit von Poissonprozessen für σ -endliche Maße μ_1 und μ_2 sogar auf dem ganzen Zustandsraum S .

Nun können wir den Vereinigungssatz für Poissonprozesse beweisen. Da wir das Additionstheorem für abzählbar viele poissonverteilte Zufallsvariablen verwenden, können wir den Vereinigungssatz auch gleich für abzählbare Vereinigungen zeigen. Die Variante für endliche Vereinigungen folgt dann trivialerweise aus dem allgemeineren Theorem.

Theorem 3.4 (Vereinigungssatz für Poissonprozesse⁴). *Seien Π_j für $j = 1, 2, \dots$ unabhängige Poissonprozesse auf S und sei μ_j das Intensitätsmaß zum Poissonprozess Π_j . Dann ist die Vereinigung der Poissonprozesse*

$$\Pi = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Pi_j$$

ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß

$$\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Zählvariable $N(A)$ von Π die $\mathcal{P}(\mu(A))$ -Verteilung hat. Sei also A eine messbare Teilmenge von S . Für $j = 1, 2, \dots$ sei $N_j(A)$ die Anzahl von Punkten von Π_j in A . Dann sind die $N_j(A)$ jeweils $\mathcal{P}(\mu_j)$ -verteilte, unabhängige Zufallsvariablen. Wenn $\mu_j(A) < \infty$ für alle $j \geq 1$, dann gilt Lemma 3.2 über die Disjunktheit von Poissonprozessen und die zufälligen Mengen Π_j sind auf A disjunkt. Also ist die Anzahl der Punkte von Π in A gegeben durch

$$N(A) = \sum_{j=1}^{\infty} N_j(A).$$

Da die $N_j(A)$ unabhängige poissonverteilte Zufallsvariablen sind, ist wegen Theorem 1.7 die Summe $N(A)$ poissonverteilt mit Parameter $\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(A)$.

Wenn nun $\mu_j(A) = \infty$ für ein oder mehrere j ist, dann ist $N(A) = N_j(A) = \infty$ mit Wahrscheinlichkeit 1 und $N(A)$ hat trivialerweise wieder die (diesmal “degenerierte”) $\mathcal{P}(\mu(A))$ -Verteilung mit $\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(A) = \infty$.

Nun müssen wir noch zeigen, dass die Zählvariablen $N(A_1), \dots, N(A_n)$ für disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n$ unabhängig sind. Für beliebige $j, i \in \mathbb{N}_0$ und $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $k \neq l$ sind die Zufallsvariablen $N_j(A_k)$ und $N_i(A_l)$ unabhängig. Also sind auch $N(A_k) = \sum_{j=1}^{\infty} N_j(A_k)$ und $N(A_l) = \sum_{j=1}^{\infty} N_j(A_l)$ für $k \neq l$ unabhängig. $\square$

⁴Superposition Theorem in [5], Beweisidee adaptiert.

Der Vereinigungssatz hat viele praktische Anwendungen und wird auch in den Beweisen der nächsten beiden wichtigen Sätze, dem Abbildungssatz und dem Existenzsatz, gebraucht.

3.3 Der Abbildungssatz

Die dritte wichtige Eigenschaft von Poissonprozessen ist, dass die Transformation eines Poissonprozesses in einen anderen Zustandsraum für sehr viele Abbildungen wieder ein Poissonprozess ist. Es ist dabei jedoch wichtig, dass durch die Transformation nicht mehrere unterschiedliche Punkte des Poissonprozesses auf denselben Punkt abgebildet werden. Das kann man am transformierten Maß, dem Bildmaß, erkennen.

Theorem 3.5 (Abbildungssatz für Poissonprozesse⁵). *Seien $(S, \mathcal{A})$ und $(S', \mathcal{A}')$ messbare Räume. Sei Π ein Poissonprozess auf dem Zustandsraum S mit σ -endlichem Intensitätsmaß μ . Sei $f : S \rightarrow S'$ eine messbare Funktion, sodass das Bildmaß μ^* auf S' , das durch*

$$\mu^*(A') = \mu(f^{-1}(A')) \quad \forall A' \in \mathcal{A}'$$

definiert ist, atomfrei ist. Dann ist $\Pi' = f(\Pi)$ ein Poissonprozess auf dem Zustandsraum S' mit dem Intensitätsmaß μ^ .*

Beweis. $\Pi' = f(\Pi)$ ist eine zufällige abzählbare Teilmenge von S' . Für alle $A' \in \mathcal{A}'$ ist

$$N'(A') = \#\{\Pi' \cap A'\} = \#\{f(\Pi) \cap A'\}$$

die Zählvariable von Π' . Wenn verschiedenen Punkte $x, y \in \Pi$, $x \neq y$ mit Wahrscheinlichkeit 1 auf verschiedene Punkte $f(x) \neq f(y)$ abgebildet werden, gilt

$$N'(A') = \#\{\Pi \cap f^{-1}(A')\} = N(f^{-1}(A')). \quad (3.3)$$

Dann ist $N'(A')$ poissonverteilt mit Parameter $\mu(f^{-1}(A')) = \mu^*(A')$ und da für disjunkte Mengen $A'_1, \dots, A'_n \in \mathcal{A}'$ die entsprechenden Urbilder disjunkt sind, sind wegen (3.3) auch die $N'(A'_j)$ unabhängig, womit Π' ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß μ^* ist.

Wir zeigen nun für den Fall, wo μ ein endliches Maß ist, dass $f(\Pi)$ “doppelpunktfrei” ist, um obiges Argument anwenden zu können. Daraus folgern dann den allgemeinen σ -endlichen Fall.

Sei also nun μ endlich. Dann gilt $\mu^*(S') = \mu(f^{-1}(S')) = \mu(S) < \infty$, also ist auch μ^* endlich. Wir werden mit einer ähnlichen Technik wie im Beweis zum Lemma über die Disjunktheit von Poissonprozessen zeigen, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 keine verschiedene Punkte $x, y \in \Pi$ auf denselben Punkt $f(x) = f(y)$ abgebildet werden. Dafür betrachten wir zunächst das

⁵Vgl. *Mapping Theorem* in [5], zweiter Teil des Beweises analog zu ebendort.

Gegenereignis dazu, also dass es $x, y \in \Pi$, $x \neq y$ mit $f(x) = f(y)$ gibt. Das ist äquivalent dazu, dass es einen Punkt $s' \in S'$ gibt dessen Urbild unter f mehr als einen Punkt von Π enthält, also

$$\{\exists s' \in S' : N(f^{-1}(s')) > 1\}. \quad (3.4)$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \frac{\mu^*(S')}{-\ln(1-\varepsilon/u)}$. Da μ^* endlich und atomfrei ist, existiert wegen einem analogen Argument wie im Beweis von Lemma 3.2 eine Zerlegung $\{A'_1, \dots, A'_m\}$ von S' mit $\mu^*(A'_i) = \frac{\mu^*(S')}{m}$. Wir können damit (3.4) umschreiben

$$\begin{aligned} \{\exists s' \in S' : N(f^{-1}(s')) > 1\} &= \bigcup_{i=1}^m \{\exists s' \in S' : N(f^{-1}(s')) > 1\} \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^m \{N(f^{-1}(A'_i)) > 1\}. \end{aligned}$$

Damit schätzen wir die Wahrscheinlichkeit ab, dass $f(\Pi)$ einen ‘‘Doppelpunkt’’ hat und schreiben dabei der Lesbarkeit wegen $u = \mu^*(S')$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[f(\Pi) \text{ hat einen ‘‘Doppelpunkt’’}] &\leq \sum_{i=1}^m \mathbb{P}[N(f^{-1}(A'_i)) > 1] \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=2}^{\infty} (\mu^*(A'_i))^k \cdot \frac{e^{-\mu^*(A'_i)}}{k!} \right) \\ &= m \cdot \left(\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{u}{m} \right)^k \frac{e^{-\frac{u}{m}}}{k!} \right) \\ &= u \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{u}{m} \right)^k \frac{e^{-\frac{u}{m}}}{(k+1)!} \right) \\ &\leq u \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{u}{m} \right)^k \frac{e^{-\frac{u}{m}}}{k!} \right) \\ &= u \cdot \left(1 - e^{-\frac{u}{m}} \right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, ist

$$\mathbb{P}[f(\Pi) \text{ hat einen ‘‘Doppelpunkt’’}] = 0.$$

Also werden mit Wahrscheinlichkeit 1 verschiedene Punkte $x, y \in \Pi$ durch f auf verschiedene Punkte abgebildet, womit die Behauptung des Satzes für endliches Maß μ folgt.

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall, dass μ nicht unbedingt endlich sondern σ -endlich ist. Dann gibt es eine Zerlegung $S_1, S_2, \dots$ von S mit $\mu(S_k) < \infty$, also ist $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ und die S_k sind disjunkt. Wir bezeichnen

mit $\Pi_k = \Pi \cap S_k$ die Einschränkung von Π auf S_k . Das ist nach Theorem 3.1 wieder ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß μ_k , welches nun endlich ist und die Π_k sind unabhängig. Damit ist für $k = 1, 2, \dots$ nach dem ersten Fall des Beweises die transformierte zufällige Menge $f(\Pi_k)$ ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $\mu_k^*(A') = \mu_k(f^{-1}(A'))$. Wegen der Unabhängigkeit der $f(\Pi_k)$ können wir Theorem 3.4 anwenden und erhalten, dass die Vereinigung dieser Poissonprozesse

$$\Pi' = f(\Pi) = f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(\Pi_k)$$

ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß

$$\mu^*(A') = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^*(A') = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(f^{-1}(A')) = \mu(f^{-1}(A'))$$

ist. Das ist genau die Aussage des Theorems. $\square$

Die Eindeutigkeitsbedingung, dass von f nicht mehrere Punkte des Poissonprozesses auf denselben Punkt abgebildet werden, ist der Funktion eventuell nicht sofort anzusehen und man muss das Bildmaß auf Atomfreiheit überprüfen. Eine injektive Funktion erfüllt diese Bedingung natürlich, aber es können auch nicht-injektive Abbildungen erlaubt sein, wie z.B. die Projektion von $\mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($d < D$), die ja sehr viele (nämlich unendlich viele) Punkte auf denselben Punkt abbildet.⁶ Das Entscheidende, um nach der Transformation wieder einen Poissonprozess zu erhalten, ist, dass die Menge der Punkte mit demselben Funktionswert verschwindendes Maß hat.

Eine wichtige Anwendung des Abbildungssatzes gibt es für eindimensionale Poissonprozesse. Aus Theorem 3.5 folgt nämlich, dass jeder nichthomogene Poissonprozess auf $\mathbb{R}$ in einen homogenen Poissonprozess transformiert werden kann. Die Eigenschaften der meisten lokal-endlichen Poissonprozesse auf $\mathbb{R}$ können dann von homogenen Poissonprozessen abgeleitet werden.

Korollar 3.6 (Transformation von nichthomogenen Poissonprozessen auf $\mathbb{R}$). *Sei Π ein nichthomogener Poissonprozess auf $\mathbb{R}$ mit Intensitätsmaß μ , das endlich auf beschränkten Mengen ist. Sei F die Verteilungsfunktion von μ , definiert durch*

$$F(t) = \begin{cases} \mu(0, t] = & \text{für } t \geq 0 \\ -\mu(t, 0] = & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Dann ist

$$\Pi' = F(\Pi) = \{F(X) : X \in \Pi\}$$

⁶Dieses Beispiel für die Anwendung des Abbildungssatzes wird in [5] näher ausgeführt.

ein homogener Poissonprozess mit Dichte 1 auf dem Intervall (F_-, F_+) , wobei wir folgende Bezeichnungen verwenden:

$$F_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t),$$

$$F_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t).$$

Beweis. Nach Proposition 2.4 bzw. Abschnitt 2.4.2 ist die Verteilungsfunktion eines Intensitätsmaßes stetig und monoton wachsend. Weiters ist $F(0) = 0$ nach Definition und $F(t)$ endlich für alle $t \in \mathbb{R}$, weil μ auf beschränkten Mengen endlich ist. Also gibt es für jedes $x \in [0, F_+)$ ein $t \geq 0$ mit $F(t) = x$ und für jedes $x \in (F_-, 0)$ ein $t < 0$ mit $F(t) = x$.

Wir betrachten nun das Bildmaß μ^* von μ unter F . Für beliebiges $x \in [0, F_+)$ und $t \geq 0$ mit $x = F(t)$ ist dann

$$\mu^*(0, x] = \mu^*(0, F(t)] = \mu(0, t] = F(t) = x.$$

Für beliebiges $x \in (F_-, 0)$ und $t < 0$ mit $F(t) = x$ ist

$$\mu^*(x, 0] = \mu^*(F(t), 0] = \mu(t, 0] = -F(t) = -x.$$

Also ist für ein beliebiges Intervall $(a, b] \subseteq (F_-, F_+)$ das Bildmaß $\mu^*(a, b] = b - a$. Für alle Teilmengen A von $\mathbb{R} \setminus (F_-, F_+)$ ist $\mu^*(A) = 0$ und somit μ^* das Maß mit konstanter Dichte 1 auf (F_-, F_+) . Als Einschränkung des Lebesguemaßes auf (F_-, F_+) ist das Bildmaß μ^* atomfrei. Damit können wir den Abbildungssatz anwenden und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

3.4 Der Existenzsatz

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Existenz von Poissonprozessen zu gegebenen (Intensitäts-)Maßen. Damit zu einem gegebenen atomfreien Maß μ ein Poissonprozess existiert, der μ als Intensitätsmaß besitzt, muss μ eine schwache Endlichkeitsbedingung erfüllen.

Um den Existenzsatz zu beweisen, benötigen wir ein grundlegendes Resultat aus der Wahrscheinlichkeitstheorie: zu jeder abzählbaren Menge J und Wahrscheinlichkeitsmaßen P_j auf messbaren Räumen $(\Omega_j, \mathcal{A}_j)$ für $j \in J$ gibt es immer eine Familie $(Y_j)_{j \in J}$ von unabhängigen Zufallsvariablen, wo Y_j Verteilung P_j besitzt.⁷

Theorem 3.7 (Existenzsatz für Poissonprozesse⁸). *Sei μ ein atomfreies Maß auf dem messbaren Raum $(S, \mathcal{A})$, das folgendermaßen geschrieben werden kann:*

$$\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \quad \text{mit } \mu_j(S) < \infty \text{ für } j = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

⁷Vgl. Korollar 14.33 in [6].

⁸Existence Theorem in [5], Beweisidee adaptiert.

Dann existiert ein Poissonprozess auf S mit Intensitätsmaß μ .

Beweis. Sei $J = \{j \in \mathbb{N} : \mu_j(S) > 0\}$ die Menge der Indizes, für die μ_j nicht verschwindet. Für alle $j \in J$ seien N_j unabhängige $\mathcal{P}(\mu_j(S))$ -verteilte Zufallsvariablen, d.h. für $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\mathbb{P}[N_j = n] = \frac{\mu_j(S)^n}{n!} e^{-\mu_j(S)} = \pi_n(\mu_j(S)).$$

Für alle $j \in J$ und für $k = 1, 2, \dots$ seien X_{jk} unabhängige Zufallsvariablen auf S mit der Verteilung

$$\mathbb{P}[X_{jk} \in A] = \frac{\mu_j(A)}{\mu_j(S)} = p_j(A)$$

für $A \in \mathcal{A}$. Wir definieren nun für $j \in J$ die (endliche) zufällige Menge

$$\Pi_j = \{X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jN_j}\}$$

und zeigen nun, dass Π_j ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß μ_j ist. Dazu definieren wir die Zählvariable⁹

$$N_j(A) = \#\{\Pi_j \cap A\},$$

für die $N_j(S) = N_j$ aus der Definition der Π_j folgt. Wir betrachten für disjunkte Mengen $A_1, A_2, \dots, A_m$ und für $n \geq n_1 + \dots + n_m$ die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N_j(A_1) = n_1, N_j(A_2) = n_2, \dots, N_j(A_m) = n_m | N_j = n] &= \\ &= \frac{n!}{n_0! n_1! \dots n_m!} p_j(A_0)^{n_0} p_j(A_1)^{n_1} \dots p_j(A_m)^{n_m} \\ &= \frac{n!}{n_0! n_1! \dots n_m!} \frac{\mu_j(A_0)^{n_0} \mu_j(A_1)^{n_1} \dots \mu_j(A_m)^{n_m}}{\mu_j(S)^n}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

wobei wir $A_0 = S \setminus \bigcup_{l=1}^m A_l$ und $n_0 = n - \sum_{l=1}^m n_l$ gesetzt haben. Die zweite Zeile erhält man aus der kombinatorischen Überlegung, dass die n Elemente von Π_j auf die Mengen $A_0, A_1, \dots, A_m$ aufgeteilt sein müssen, da diese eine Zerlegung von S bilden. Für $n < n_1 + \dots + n_m$ ist (3.6) trivialerweise 0. Nach

⁹Vergleiche mit Bemerkung 2.1 über Notation und exakte Definition der Zählvariable.

dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt dann

$$\begin{aligned}
P[N_j(A_1) = n_1, N_j(A_2) = n_2, \dots, N_j(A_m) = n_m] &= \\
&= \sum_{n=n_1+\dots+n_m}^{\infty} \frac{n!}{n_0!n_1!\dots n_m!} \left(\prod_{l=0}^m p_j(A_l)^{n_l} \right) \frac{\mu_j(S)^n}{n!} e^{-\mu_j(S)} \\
&= \sum_{n=n_1+\dots+n_m}^{\infty} \frac{1}{n_0!n_1!\dots n_m!} \left(\prod_{l=0}^m \mu_j(A_l)^{n_l} \right) e^{-\sum_{l=0}^m \mu_j(A_l)} \\
&= \sum_{n=n_1+\dots+n_m}^{\infty} \frac{\mu_j(A_0)^{n_0}}{n_0!} e^{-\mu_j(A_0)} \left(\prod_{l=1}^m \frac{\mu_j(A_l)^{n_l}}{n_l!} e^{-\mu_j(A_l)} \right) \\
&= \prod_{l=1}^m \frac{\mu_j(A_l)^{n_l}}{n_l!} e^{-\mu_j(A_l)},
\end{aligned}$$

wegen

$$\sum_{n=n_1+\dots+n_m}^{\infty} \frac{\mu_j(A_0)^{n_0}}{n_0!} e^{-\mu_j(A_0)} = \sum_{n_0=0}^{\infty} \pi_{n_0}(\mu_j(A_0)) = 1.$$

Also sind die $N_j(A_l)$ unabhängige $\mathcal{P}(\mu_j(A_l))$ -verteilte Zufallsvariablen und Π_j ist für $j \in J$ ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß μ_j . Da die Π_j aufgrund der Konstruktion unabhängig sind, können wir den Vereinigungssatz anwenden und erhalten so, dass die abzählbare Vereinigung

$$\Pi = \bigcup_{j \in J} \Pi_j$$

ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß μ ist, womit die Behauptung gezeigt ist. $\square$

Bemerkung 3.8. Die Endlichkeitsbedingung für das Maß im Existenzsatz ist etwas allgemeiner als σ -Endlichkeit. Jedes σ -endliche Maß μ erfüllt auch (3.5), da wir für μ_j in (3.5) die Einschränkung von μ auf $S_{j+1} \setminus \bigcup_{k=1}^j S_k$ aus der Zerlegung von S wählen können, die Umkehrung gilt aber nicht.

Beispiel 3.1 (Maße mit Dichten). Aus dem Existenzsatzes folgt, dass auf dem Zustandsraum $\mathbb{R}^d$ zu jedem Maß μ mit endlicher Dichte λ ein Poissonprozess existiert: Aus

$$\mu(A) = \int_A \lambda(x) \, dx$$

für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ folgt, dass μ atomfrei ist, weil das Integral über Punktmengen immer 0 ist. Da $\lambda(x) < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$, ist

$$\mu([-k, k]^d) = \int_{[-k, k]^d} \lambda(x) \, dx < \infty$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, also ist μ ein σ -endliches Maß. Nach Bemerkung 3.8 sind also die Voraussetzungen des Existenzsatzes erfüllt.

Insbesondere existiert also für jede konstante Dichte λ ein (homogener) Poissonprozess.

Kapitel 4

Summen über Poissonprozesse

In vielen Anwendungen ist nicht der Poissonprozess an sich von eigentlichem Interesse als vielmehr die Verteilung einer Funktion der Punkte eines Poissonprozesses oder deren Summe, also die Zufallsvariable

$$\Sigma_f = \sum_{X \in \Pi} f(X) \quad (4.1)$$

mit einer deterministischen Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. In diesem Kapitel werden wir Bedingungen für die Konvergenz von solchen Summen finden und die Verteilung von Σ_f untersuchen und Ausdrücke für Erwartungswert, Varianz und die charakteristische Funktion berechnen. Wir werden das zunächst für “einfache” Funktionen f tun und die Resultate wie in der Integrationstheorie auf allgemeinere Funktionen ausweiten.

4.1 Konvergenz und Eigenschaften von Σ_f für Elementarfunktionen

Wir definieren nun, was wir unter “einfachen” Funktionen verstehen:

Definition 4.1 (Elementarfunktion). Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine *Elementarfunktion* ist eine Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, die als

$$f = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{A_j},$$

geschrieben werden kann, wobei $0 < c_j < \infty$ und $A_j \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_j) < \infty$ für $1 \leq j \leq n$ und die A_j disjunkt sind.

Eine Elementarfunktion nimmt somit nur endlich viele positive Werte $c_1, \dots, c_n$ an und die Mengen A_j sind genau die Urbilder der entsprechenden

Funktionswerte c_j , also ist

$$A_j = f^{-1}(\{c_j\}) = \{x : f(x) = c_j\}.$$

Der Träger von f ist $\bigcup_{j=1}^n A_j$, die Funktion ist also außerhalb dieser Vereinigung 0. Wichtig ist hier, dass der Träger einer Elementarfunktion endliches Maß hat, was in den meisten Büchern über Integrationstheorie bei Elementarfunktionen üblicherweise nicht gefordert wird, da es für die Beweisführung dort nicht notwendig ist. Man könnte obige Funktionen daher auch exakter als “Elementarfunktionen mit μ -endlichem Träger” bezeichnen.

Sei nun Π ein Poissonprozess auf S mit Intensitätsmaß μ auf $\mathcal{A}$ und N seine Zählvariable. Wenn wir

$$N_j = N(A_j)$$

schreiben, sind diese Zufallsvariablen jeweils $\mathcal{P}(\mu(A_j))$ -verteilt und unabhängig. Für die Zufallsvariable Σ_f gilt also für eine Elementarfunktion $f = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{A_j}$ die Gleichung

$$\Sigma_f = \sum_{X \in \Pi} f(X) = \sum_{j=1}^n c_j N_j, \quad (4.2)$$

da N_j die Anzahl an Punkten von Π angibt, die auf den Wert c_j abgebildet werden. Diese Summe konvergiert mit Wahrscheinlichkeit 1 und die momenterzeugende Funktion von Σ_f ist auf ganz $\mathbb{C}$ definiert, wie wir im folgenden Lemma zeigen.

Lemma 4.1 (Momenterzeugende Funktion von Σ_f für Elementarfunktionen). *Sei Π ein Poissonprozess auf S mit Intensitätsmaß μ und sei $f = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{A_j}$ eine Elementarfunktion. Dann ist die Summe*

$$\Sigma_f = \sum_{X \in \Pi} f(X)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 absolut konvergent. Weiters ist die momenterzeugende Funktion m_{Σ_f} auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und es gilt:

$$m_{\Sigma_f}(\theta) = \exp \left\{ \int_S (e^{\theta f} - 1) d\mu \right\}$$

Beweis. Die Summe Σ kann für elementare Funktionen auch wie (4.2) geschrieben werden und besteht dann aus endlich vielen Summanden, die mit Wahrscheinlichkeit 1 endlich sind. Also ist auch die Summe mit Wahrscheinlichkeit 1 endlich.

Wir berechnen die momenterzeugende Funktion von Σ_f für beliebiges $\theta \in \mathbb{C}$. Dafür benötigen folgende Identitäten: Wegen der Eigenschaften von f gilt für $1 \leq j \leq n$ für die momenterzeugende Funktion von N_j wegen (1.2)

$$m_{N_j}(\theta c_j) = \mathbb{E} \left[e^{\theta c_j N_j} \right] = \exp \left\{ (e^{\theta c_j} - 1) \mu(A_j) \right\}$$

und wegen der Definition des Lebesgue-Integrals

$$(e^{\theta c_j} - 1) \mu(A_j) = \int_{A_j} (e^{\theta f} - 1) d\mu.$$

Also gilt für die momenterzeugende Funktion von Σ_f für $\theta \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} m_{\Sigma_f}(\theta) &= \mathbb{E} \left[e^{\theta \sum_{j=1}^n c_j N_j} \right] \\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E} \left[e^{\theta c_j N_j} \right] \\ &= \prod_{j=1}^n \exp \left\{ (e^{\theta c_j} - 1) \mu(A_j) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^n (e^{\theta c_j} - 1) \mu(A_j) \right\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \int_{A_j} (e^{\theta f} - 1) d\mu \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_S (e^{\theta f} - 1) d\mu \right\}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei wir in der zweiten Zeile die Unabhängigkeit der N_j und in der letzten Zeile die Eigenschaft, dass f außerhalb von $\bigcup_{j=1}^n A_j$ verschwindet, verwendet haben. $m_{\Sigma}(\theta)$ ist für alle $\theta \in \mathbb{C}$ definiert, wie man an (4.3) ablesen kann. $\square$

Nun können wir Erwartungswert und Varianz von Σ_f bestimmen.

Proposition 4.2 (Erwartungswert und Varianz von Σ_f). *Seien die Voraussetzungen wie in Lemma 4.1. Dann hat Σ_f den Erwartungswert*

$$\mathbb{E}[\Sigma_f] = \int_S f d\mu \tag{4.5}$$

und die Varianz

$$\text{Var}[\Sigma_f] = \int_S f^2 d\mu. \tag{4.6}$$

Beweis. Wir formen die Darstellung (4.3) von m_{Σ_f} um, wobei wir $m = \sum_{j=1}^n \mu(A_j) = \mu \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \right)$ schreiben:

$$m_{\Sigma_f}(\theta) = e^{-m} \exp \left\{ \sum_{j=1}^n e^{\theta c_j} \mu(A_j) \right\}.$$

Nun leiten wir die momenterzeugende Funktion zweimal ab:

$$m_{\Sigma_f}^{(1)}(\theta) = m_{\Sigma_f}(\theta) \cdot \left(\sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j) e^{\theta c_j} \right),$$

$$m_{\Sigma_f}^{(2)}(\theta) = m_{\Sigma_f}(\theta) \cdot \left(\sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j) e^{\theta c_j} \right)^2 + m_{\Sigma_f}(\theta) \cdot \left(\sum_{j=1}^n c_j^2 \mu(A_j) e^{\theta c_j} \right).$$

Wegen $m_{\Sigma_f}(0) = 1$ erhalten wir somit für die ersten beiden Momente von Σ_f :

$$\begin{aligned} E[\Sigma_f] &= m_{\Sigma_f}^{(1)}(0) = \sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j) = \int_S f \, d\mu, \\ E[\Sigma_f^2] &= m_{\Sigma_f}^{(2)}(0) = \left(\sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j) \right)^2 + \sum_{j=1}^n c_j^2 \mu(A_j) = \\ &= \left(\int_S f \, d\mu \right)^2 + \int_S f^2 \, d\mu. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Definition des Lebesgue-Integrals für Elementarfunktionen verwendet. Wegen $\text{Var}[\Sigma_f] = E[\Sigma_f^2] - E[\Sigma_f]^2$ folgt die Behauptung. $\square$

4.2 Konvergenz und Eigenschaften von Σ_f für beliebige Funktionen

Wie in der Integrationstheorie üblich werden wir nun die Resultate auf beliebige messbare Funktionen verallgemeinern. Dafür ist es wichtig zu wissen, dass in Maßräumen mit σ -endlichem Maß zu jeder nichtnegativen, messbaren Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine aufsteigende Folge von Elementarfunktionen $(f_k)_{k \geq 0}$ existiert, deren Grenzwert f ist.

Lemma 4.3. *Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit σ -endlichem Maß μ . Sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in S$. Dann gibt es eine aufsteigende Folge von Elementarfunktionen $f_k : S \rightarrow \mathbb{R}$ ($k \geq 1$) mit*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \sup_{k \geq 1} f_k = f.$$

Beweis. Nach dem bekannten Resultat über nichtnegative messbare Funktionen gibt es zu f eine aufsteigende Folge $(g_k)_{k \geq 1}$ von Treppenfunktionen (Elementarfunktionen mit beliebigem Träger) mit $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \sup_{k \geq 1} g_k = f$.¹ Da μ ein σ -endliches Maß ist, gibt es eine Folge von Mengen $S_n \subseteq S$ mit $\mu(S_n) < \infty$ ($n \geq 1$) und $\bigcup_{n \geq 1} S_n = S$. Wählt man $R_k = \bigcup_{n=1}^k S_n$ für

¹Siehe z.B. [4], Satz III.4.13.

$k \geq 1$, ist $(R_k)_{k \geq 1}$ eine aufsteigende Folge mit $R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3 \subseteq \dots$ und $\bigcup_{k \geq 1} R_k = S$. Wir setzen

$$f_k = \mathbf{1}_{R_k} \cdot g_k$$

und erhalten damit die gesuchte aufsteigende Folge von Elementarfunktionen mit μ -endlichem Träger. $\square$

Die folgenden beiden Sätze und der Beweis des ersten Satzes sind einem Theorem in [5] nachempfunden, das dort die Aussagen von beiden Sätzen zusammenfasst und *Campbell's Theorem* genannt wird, da es auf die Arbeit von N. R. Campbell zurückgeht.

Theorem 4.4 (Konvergenz und momenterzeugende Funktion von Σ_f). *Sei Π ein Poissonprozess auf S mit σ -endlichem Intensitätsmaß μ und sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann ist die Summe*

$$\Sigma_f = \sum_{X \in \Pi} f(X)$$

genau dann mit Wahrscheinlichkeit 1 absolut konvergent, wenn

$$\int_S \min(|f|, 1) d\mu < \infty. \quad (4.7)$$

Wenn (4.7) gilt, erfüllt die momenterzeugende Funktion m_{Σ_f} die Gleichung

$$m_{\Sigma_f}(\theta) = \exp \left\{ \int_S (e^{\theta f} - 1) d\mu \right\} \quad (4.8)$$

für alle $\theta \in \mathbb{C}$, für die das Integral auf der rechten Seite konvergiert, also insbesondere für alle rein imaginären Werte von θ .

Beweis. Wir zeigen zunächst die Aussagen für nichtnegative Funktionen und verallgemeinern das auf beliebige messbare Funktionen.

Sei also zunächst $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ nichtnegativ und messbar. Nach Lemma 4.3 gibt es eine aufsteigende Folge $(f_k)_{k \geq 1}$ von Elementarfunktionen, deren Grenzwert f ist. Wir schreiben

$$\Sigma_k = \sum_{X \in \Pi} f_k(X).$$

Wegen der monotonen Konvergenz von $(f_k)_{k \geq 1}$ ist daher

$$\Sigma_f = \lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma_k$$

Nach Lemma 4.1 kennen wir zu jeder Elementarfunktion f_k die entsprechende momenterzeugende Funktion m_{Σ_k} . Wir berechnen nun die momenterzeu-

gende Funktion von Σ_f für negative reelle Werte $\theta = -t$ ($t > 0$):

$$\begin{aligned}
m_{\Sigma_f}(-t) &= \mathbb{E} \left[e^{-t\Sigma_f} \right] = \mathbb{E} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} e^{-t\Sigma_k} \right] \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[e^{-t\Sigma_k} \right] \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \exp \left\{ - \int_S (1 - e^{-tf_k}) d\mu \right\} \\
&= \exp \left\{ - \int_S (1 - e^{-tf}) d\mu \right\}. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir den Satz über monotone Konvergenz sowohl für den Erwartungswert als auch für das Integral verwendet. Wir zeigen nun, dass das Integral in (4.9) genau dann endlich ist, wenn (4.7) gilt. Dafür definieren wir $S_> = \{x \in S : f(x) > 1\}$ und $S_{\leq} = \{x \in S : 0 \leq f(x) \leq 1\}$. Weil $f \geq 0$ ist, bilden diese zwei Mengen eine Zerlegung von S und wir können das gesuchte Integral aufspalten:

$$\int_S (1 - e^{-tf}) d\mu = \int_{S_>} (1 - e^{-tf}) d\mu + \int_{S_{\leq}} (1 - e^{-tf}) d\mu \tag{4.10}$$

Sei also zunächst

$$\int_S \min(f, 1) d\mu < \infty.$$

Dann ist $\mu(S_>) < \infty$, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\mu(S_>) = \int_{S_>} 1 d\mu = \int_{S_>} \min(f, 1) d\mu \leq \int_S \min(f, 1) d\mu < \infty.$$

Damit gilt für das erste Integral auf der rechten Seite von (4.10):

$$\int_{S_>} (1 - e^{-tf}) d\mu < \int_{S_>} 1 d\mu = \mu(S_>) < \infty.$$

Wir verwenden die Ungleichung $1 - e^{-y} \leq y$ für $y \geq 0$, um das hintere Integral in (4.10) abzuschätzen:

$$\int_{S_{\leq}} (1 - e^{-tf}) d\mu \leq \int_{S_{\leq}} tf d\mu \leq t \cdot \int_{S_{\leq}} \min(f, 1) d\mu < \infty.$$

Damit ist das Integral in (4.9) endlich und geht gegen 0, wenn $t \rightarrow 0$. Also ist Σ_f mit Wahrscheinlichkeit 1 endlich und beide Seiten von (4.8) sind für $\operatorname{Re} \theta \leq 0$ analytische Funktionen von θ . Da wir (4.8) bereits auf der negativen reellen Achse gezeigt haben, folgt die Gültigkeit dieser Gleichung durch analytische Fortsetzung für $\operatorname{Re} \theta \leq 0$.

Wenn nun (4.7) nicht gilt, ist also

$$\int_{S_>} 1 d\mu + \int_{S_{\leq}} f d\mu = \int_S \min(f, 1) d\mu = \infty. \tag{4.11}$$

Wenn $\mu(S_{>}) = \int_{S_{>}} 1 \, d\mu = \infty$, dann gilt

$$\int_{S_{>}} (1 - e^{-tf}) \, d\mu > \int_{S_{>}} (1 - e^{-t}) \, d\mu = (1 - e^{-t})\mu(S_{>}) = \infty$$

für beliebiges $t > 0$ und damit ist auch (4.10) unendlich. Wenn $\mu(S_{>}) < \infty$ ist, dann folgt aus (4.11), dass $\int_{S_{\leq}} f \, d\mu = \infty$. Für beliebiges fixes $t > 0$ gibt es eine Konstante K , sodass $1 - e^{-y} \geq \frac{1}{K} \cdot y$ für alle $0 \leq y \leq t$. Weil $tf \leq t$ auf $S_{\leq}$ ist, folgt daraus

$$\int_{S_{\leq}} (1 - e^{-tf}) \, d\mu \geq \frac{1}{K} \int_{S_{\leq}} tf \, d\mu = \infty$$

und damit ist auch (4.10) unendlich. Insgesamt erhalten wir also, dass das Integral in (4.9) für alle $t > 0$ unendlich ist, wenn (4.7) nicht gilt. Somit ist dann $E[e^{-t\Sigma_f}] = 0$ für alle $t > 0$ und $\Sigma_f = \infty$ mit Wahrscheinlichkeit 1. Damit ist das Theorem für nichtnegative Funktionen f gezeigt.

Sei nun $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige messbare Funktion. Wir definieren für diese Funktion Positivteil bzw. Negativteil

$$\begin{aligned} f^+ &= \max(f, 0) \quad \text{bzw.} \\ f^- &= \max(-f, 0). \end{aligned}$$

Nun können wir das Theorem auf diese beiden nichtnegativen Funktionen anwenden. Wir definieren Π_+ bzw. Π_- als Einschränkungen von Π auf die Mengen

$$\begin{aligned} S_+ &= \{x \in S : f(x) > 0\} \quad \text{bzw.} \\ S_- &= \{x \in S : f(x) < 0\}. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir die entsprechenden Summen

$$\begin{aligned} \Sigma_+ &= \sum_{X \in \Pi} f^+(X) = \sum_{X \in \Pi_+} , \\ \Sigma_- &= \sum_{X \in \Pi} f^-(X) = \sum_{X \in \Pi_-} \end{aligned}$$

und $\Sigma_f = \Sigma_+ - \Sigma_-$ konvergiert genau dann, wenn Σ_+ und Σ_- konvergieren. Damit ist (4.7) die notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung.

Wenn diese erfüllt ist, gilt für rein imaginäre Werte von θ

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[e^{\theta \Sigma_f} \right] &= \mathbb{E} \left[e^{\theta \Sigma_+ - \theta \Sigma_-} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[e^{\theta \Sigma_+} \right] \mathbb{E} \left[e^{-\theta \Sigma_-} \right] \\
&= \exp \left\{ \int_S (e^{\theta f^+} - 1) d\mu \right\} \exp \left\{ \int_S (e^{-\theta f^-} - 1) d\mu \right\} \\
&= \exp \left\{ \int_S (e^{\theta f^+} + e^{-\theta f^-} - 2) d\mu \right\} \\
&= \exp \left\{ \int_S (e^{\theta f} - 1) d\mu \right\},
\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile die Unabhängigkeit von Π_+ und Π_- (und damit jene von Σ_+ und Σ_-) verwendet haben, da sie die Einschränkung von Π auf disjunkte Mengen sind.

Damit gilt (4.9) zumindest für alle rein imaginären Werte von θ . Die Erweiterung auf $\mathbb{C}$ erfolgt durch analytische Fortsetzung, soweit das Integral konvergiert. $\square$

Theorem 4.5 (Erwartungswert und Varianz von Σ_f). *Seien die Voraussetzungen wie in Theorem 4.4. Dann hat Σ_f den Erwartungswert*

$$\mathbb{E}[\Sigma_f] = \int_S f d\mu. \quad (4.12)$$

Wenn der Erwartungswert endlich ist, hat Σ_f die Varianz

$$\text{Var}[\Sigma_f] = \int_S f^2 d\mu. \quad (4.13)$$

Beweis. Wir gehen wie im Beweis von Theorem 4.4 vor und zeigen die Aussagen zunächst für positive Funktionen und dann für beliebige messbare Funktionen.

Sei also $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ nichtnegativ und messbar und $(f_k)_{k \geq 1}$ eine aufsteigende Folge von Elementarfunktionen, deren Grenzwert f ist. Wie im Beweis von Theorem 4.4 ist $\Sigma_f = \lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma_k$ für dieselbe Notation für Σ_k . Dann folgt aus Proposition 4.2, dass

$$\mathbb{E}[\Sigma_f] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\Sigma_k] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\Sigma_k] = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_S f_k d\mu = \int_S f d\mu,$$

wobei wir den Satz über die monotone Konvergenz für den Erwartungswert bzw. für das Integral verwendet haben. Analog gilt

$$\mathbb{E}[\Sigma_f^2] = \left(\int_S f d\mu \right)^2 + \int_S f^2 d\mu.$$

Wenn $\mathbb{E}[\Sigma_f] < \infty$, dann folgt die Aussage für die Varianz aus $\text{Var}[\Sigma_f] = \mathbb{E}[\Sigma_f^2] - \mathbb{E}[\Sigma_f]^2$.

Sei nun $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige messbare Funktion. Mit den Notationen aus dem Beweis von Theorem 4.4 folgt dann

$$\mathbb{E}[\Sigma_f] = \mathbb{E}[\Sigma_+] - \mathbb{E}[\Sigma_-] = \int_S f^+ d\mu - \int_S f^- d\mu = \int_S f d\mu$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Sigma_f^2] &= \mathbb{E}[\Sigma_+^2] + \mathbb{E}[\Sigma_-^2] - 2 \cdot \mathbb{E}[\Sigma_+] \mathbb{E}[\Sigma_-] \\ &= \left(\int_S f^+ d\mu \right)^2 + \int_S (f^+)^2 d\mu + \left(\int_S f^- d\mu \right)^2 + \int_S (f^-)^2 d\mu \\ &\quad - 2 \cdot \int_S f^+ d\mu \int_S f^- d\mu, \end{aligned}$$

wobei wir wieder die Unabhängigkeit von Σ_+ und Σ_- verwendet haben. Wenn der Erwartungswert endlich ist, folgt wegen

$$\mathbb{E}[\Sigma_f]^2 = \left(\int_S f^+ d\mu \right)^2 + \left(\int_S f^- d\mu \right)^2 - 2 \cdot \int_S f^+ d\mu \int_S f^- d\mu$$

und

$$\int_S (f^+)^2 d\mu + \int_S (f^-)^2 d\mu = \int_S f^2 d\mu$$

analog wie zuvor für nichtnegative Funktionen die Aussage über die Varianz. $\square$

Bemerkung 4.6. Erwartungswert und Varianz von Σ_f können auch den Wert ∞ annehmen und tun dies genau dann, wenn die entsprechenden Integrale auf den rechten Seiten von (4.12) bzw. (4.13) unendlich sind. Die Gleichungen gelten also auch in diesem Fall.

Die Aussagen der Theoreme 4.4 und 4.5 können auf mehrere Funktionen verallgemeinert werden.

Korollar 4.7. Seien $f_1, f_2, \dots, f_n$ messbare Funktionen von S nach $\mathbb{R}$, die jeweils die Konvergenzbedingung (4.7) erfüllen, sodass für $1 \leq j \leq n$ jeweils

$$\Sigma_j = \sum_{X \in \Pi} f_j(X)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 konvergiert. Dann ist

$$\mathbb{E} \left[e^{it_1 \Sigma_1 + \dots + it_n \Sigma_n} \right] = \exp \left\{ \int_S (e^{it_1 f_1 + \dots + it_n f_n} - 1) d\mu \right\}.$$

Wenn für $j, k \in \{1, \dots, n\}$ die Erwartungswerte $\mathbb{E}[\Sigma_j]$ bzw. $\mathbb{E}[\Sigma_k]$ und die Varianzen $\text{Var}[\Sigma_j]$ bzw. $\text{Var}[\Sigma_k]$ endlich sind, dann gilt für die Kovarianz

$$\text{Cov}[\Sigma_j, \Sigma_k] = \int_S f_j f_k d\mu.$$

Beweis. Die erste Aussage des Satzes folgt aus Theorem 4.4 durch Setzen von

$$f = t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n$$

und $\theta = i$ in (4.8).

Für die zweite Aussage wenden wir Theorem 4.5 auf Σ_j bzw. Σ_k an und erhalten so deren Varianzen

$$\text{Var}[\Sigma_j] = \int_S f_j^2 d\mu \quad \text{bzw.} \quad \text{Var}[\Sigma_k] = \int_S f_k^2 d\mu,$$

die nach Voraussetzung beide endlich sind. Nun setzen wir $f = f_j + f_k$, sodass $\Sigma = \Sigma_j + \Sigma_k$, und erhalten durch Theorem 4.5

$$\text{Var}[\Sigma_j + \Sigma_k] = \int_S (f_j + f_k)^2 d\mu = \int_S f_j^2 d\mu + \int_S f_k^2 d\mu + 2 \cdot \int_S f_j f_k d\mu.$$

Aus dem bekannten Resultat über die Varianz von Summen von Zufallsvariablen,

$$\text{Var}[\Sigma_j + \Sigma_k] = \text{Var}[\Sigma_j] + \text{Var}[\Sigma_k] + 2 \cdot \text{Cov}[\Sigma_j, \Sigma_k],$$

erhalten wir die zweite Aussage des Satzes. $\square$

4.3 Der Poissonprozess als zufälliges Maß und Linearität von Σ_f

Der Poissonprozess auf allgemeinem Zustandsraum wird oft nicht als zufällige Mengen sondern als zufälliges Maß definiert. Bei dieser Betrachtungsweise wird die Summe über Poissonprozesse zum Integral und manche Eigenschaften etwas anschaulicher. Wir werden hier keine exakte Definition des Poissonprozesses als zufälliges Maß geben - dafür verweisen wir auf Kapitel 24 in [6] - sondern die Analogien der Betrachtungsweisen anführen und dabei die Voraussetzungen wie Integrierbarkeit und Konvergenz der Summen nicht genauer erläutern.

Wir haben wieder einen allgemeinen Zustandsraum S , der mit einer σ -Algebra ausgestattet ist. Eine abzählbare Menge $M \subseteq S$ kann man mit einem diskreten Maß

$$\nu = \sum_{x \in M} \delta_x \tag{4.14}$$

mit Werten in $\mathbb{N}_0$ vergleichen, wobei δ_x das Diracmaß für den Punkt x ist. Das Maß ν gibt damit jedem Punkt $x \in M$ die Masse 1 und definiert so, welche Punkte in M liegen. Für eine Funktion f ist die Summe der Funktionswerte der Punkte in M dann gleich dem Integral der Funktion bezüglich dem Maß ν :

$$\sum_{x \in M} f(x) = \int_S f d\nu.$$

Analog zu (4.14) gibt es zu einer zufälligen abzählbaren Menge Π ein zufälliges diskretes Maß, das wir wieder mit Ψ bezeichnen. Die zufällige Summe Σ_f aus den vorigen Abschnitten wird zum Integral bezüglich des zufälligen Maßes:

$$\Sigma_f = \sum_{X \in \Pi} f(X) = \int_S f \, d\Psi.$$

Bei dieser Sichtweise des Poissonprozesses erkennt man sofort die Linearität von Σ_f als Funktional von f aufgrund der Linearität des Integrals:

$$\Sigma_{f+g} = \int_S (f+g) \, d\Psi = \int_S f \, d\Psi + \int_S g \, d\Psi = \Sigma_f + \Sigma_g.$$

Es gilt aber auch Linearität bezüglich der zugrundeliegenden zufälligen Menge bzw. des zufälligen Maßes: Ist Π die Vereinigung von zwei disjunkten zufälligen abzählbaren Mengen $\Pi^{(1)}$ und $\Pi^{(2)}$, dann gilt

$$\Sigma_f = \sum_{X \in (\Pi^{(1)} \cup \Pi^{(2)})} f(X) = \sum_{X \in \Pi^{(1)}} f(X) + \sum_{X \in \Pi^{(2)}} f(X) = \Sigma_f^{(1)} + \Sigma_f^{(2)}.$$

Für die entsprechenden zufälligen Maße ist dann

$$\Psi = \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)},$$

woraus für das Integral folgt:

$$\int_S f \, d(\Psi^{(1)} + \Psi^{(2)}) = \int_S f \, d\Psi^{(1)} + \int_S f \, d\Psi^{(2)}.$$

Kapitel 5

Der Satz von Rényi

In diesem Kapitel knüpfen wir an Abschnitt 1.3 an und zeigen, dass aus einer relativ schwachen Anforderung an eine zufällige abzählbare Menge folgt, dass diese ein Poissonprozess ist.

5.1 Historische Resultate

Der ungarische Mathematiker Alfred Rényi hat eine beachtenswerte Charakterisierung des homogenen Poissonprozesses im Eindimensionalen gezeigt:¹ Wenn für eine zufällige abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ für jede Menge $A \subset \mathbb{R}$, die die endliche Vereinigung von Intervallen ist, die Zählvariable $N(A)$ poissonverteilt mit Parameter $\lambda|A|$ ist, dann liegt ein homogener Poissonprozess mit Intensität λ vor.

Das beachtliche an diesem Resultat ist, dass keinerlei Anforderungen an die Unabhängigkeit der Zählvariablen für disjunkte Mengen gemacht werden. Es ist jedoch notwendig, die Poissonverteilung auf endlichen Vereinigungen von Intervallen zu fordern, da ein Gegenbeispiel gefunden werden kann, sodass $N(A)$ auf Intervallen $\mathcal{P}(\lambda|A|)$ -verteilt ist, obwohl kein Poissonprozess vorliegt.²

Es gibt viele Möglichkeiten, das ursprüngliche Resultat von Rényi zu verallgemeinern. Wir werden nicht die allgemeinste Variante wählen, sondern uns auf den Zustandsraum $\mathbb{R}^d$ konzentrieren und nur zufällige Mengen beachten, die endlich auf beschränkten Mengen sind. Es stellt sich heraus, dass sehr viel Information über eine zufällige Menge in deren Vermeidungsfunktion enthalten ist.

Definition 5.1 (Vermeidungsfunktion³). Sei $(S, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und Π eine zufällige abzählbare Menge auf S mit der Zählvariable N . Die

¹Vgl. [8].

²Beispiel von P. A. Moran, erwähnt in [5].

³Englisch: *avoidance function*

Vermeidungsfunktion von Π ist eine Funktion $v : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

$$v(A) = P[N(A) = 0] = P[\Pi \cap A = \emptyset]. \quad (5.1)$$

Die Vermeidungsfunktion einer zufälligen abzählbaren Menge Π gibt also zu einer messbaren Menge $A \subseteq S$ die Wahrscheinlichkeit an, dass Π keinen Punkt in A hat. Ist Π ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß μ , dann ist für $A \in \mathcal{A}$ die Vermeidungsfunktion gegeben durch

$$v(A) = e^{-\mu(A)}. \quad (5.2)$$

Wir werden zeigen, dass, wenn für eine zufällige abzählbare Menge und lokal-endliches Maß μ die Bedingung (5.2) für jede endliche Vereinigung von Rechtecken gilt, ein Poissonprozess vorliegt. Dabei ist vor allem beachtlich, dass wir weder die Unabhängigkeit der Zählvariablen für disjunkte Mengen noch Poissonverteilung voraussetzen. Es ist nur wichtig, dass die richtige “Vermeidungs-Wahrscheinlichkeit” gilt.

5.2 Vorbereitende Arbeiten

Um diese Behauptung zu zeigen, benötigen wir eine bestimmte Art von Rechtecken, nämlich die k -Würfel.

Definition 5.2 (Rechtecke und k -Würfel in $\mathbb{R}^d$). Seien $a, b \in \mathbb{R}^d$, sodass $a_j < b_j$ für $j = 1, \dots, d$. Die Menge

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}^d : a_j < x_j \leq b_j \text{ für } j = 1, \dots, d\}$$

bezeichnen wir als d -dimensionales Rechteck.

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Ein k -Würfel sei ein Rechteck $(a, b]$ mit der Eigenschaft, dass

$$\begin{aligned} a_j &= c_j 2^{-k}, \\ b_j &= (c_j + 1) 2^{-k} \end{aligned}$$

mit $c_j \in \mathbb{Z}$ für $j = 1, \dots, d$.

Für ein beliebiges, fixes $k \in \mathbb{N}_0$ ist also die Menge aller k -Würfel eine Zerlegung von $\mathbb{R}^d$ und die Anzahl an k -Würfeln, die vollständig in einer beliebigen beschränkten Menge liegen, endlich.

Eine weitere, für uns sehr wichtige Eigenschaft der k -Würfel ist, dass für die k -Würfel, die in einer beschränkten Menge enthalten sind, das Maß für $k \rightarrow \infty$ (in einem gewissen Sinn gleichmäßig) gegen 0 konvergiert.

Lemma 5.1. Sei μ ein atomfreies Maß auf $\mathbb{R}^d$ und $B \subset \mathbb{R}^d$ eine beschränkte Menge. Dann konvergiert für alle k -Würfel $W \subseteq B$ das Maß $\mu(W)$ gegen 0, also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall k \geq K \forall k\text{-Würfel } W \subseteq B : \mu(W) < \varepsilon. \quad (5.3)$$

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass (5.3) äquivalent zu folgender Aussage ist:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \forall \text{Würfel } W_0 \subseteq B \quad \exists K \in \mathbb{N} \text{ s.d.} \\ \forall k \geq K \quad \forall k\text{-Würfel } W \subseteq W_0 : \mu(W) < \varepsilon, \end{aligned} \quad (5.4)$$

wobei für die Würfel W_0 alle k -Würfel mit beliebigem $k \in \mathbb{N}_0$ in Frage kommen. Man sieht sofort, dass (5.4) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \forall \text{Würfel } W_0 \subseteq B \text{ mit } \mu(W_0) \geq \varepsilon \quad \exists K \in \mathbb{N} \text{ s.d.} \\ \forall k \geq K \quad \forall k\text{-Würfel } W \subseteq W_0 : \mu(W) < \varepsilon \end{aligned} \quad (5.5)$$

ist, da der hintere Teil der Aussage für alle k -Würfel $W_0 \subseteq B$ mit $\mu(W_0) < \varepsilon$ trivial erfüllt ist. Wenn (5.5) gilt, gibt es für beliebiges, aber fixes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Würfel $W_0 \subseteq B$ mit $\mu(W_0) \geq \varepsilon$, weil für beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ nur endliche viele k -Würfel in B liegen und es für jeden Würfel $W_0 \subseteq B$ mit $\mu(W_0) \geq \varepsilon$ nur endlich viele Werte von k gibt, für die k -Würfel $W \subseteq W_0$ mit $\mu(W) \geq \varepsilon$ existieren. Damit können wir für jeden Wert von $\varepsilon > 0$ für K_0 das Maximum der Werte von K (die jeweils von W_0 abhängen) in (5.5) wählen und erhalten so die Aussage von (5.3). Dass (5.4) aus (5.3) folgt, ist leicht zu sehen. Also ist die Äquivalenzbehauptung gezeigt.

Wir beweisen nun (5.4) indirekt. Wenn (5.4) nicht gilt, dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass ein l -Würfel $W_0 \subseteq B$ (für irgendein $l \in \mathbb{N}_0$) existiert, sodass

$$\forall K > l \quad \exists k \geq K \quad \exists k\text{-Würfel } W \subseteq W_0 : \mu(W) \geq \delta. \quad (5.6)$$

Wir bezeichnen einen Würfel W_0 mit der Eigenschaft (5.6) als *schlechten* Würfel. Nun konstruieren wir eine Folge $(W_j)_{j \geq 0}$ von Würfeln mit $W_{j+1} \subset W_j$ von schlechten Würfeln. Dazu wählen wir als W_0 einen der l -Würfel, für die (5.6) gilt. Nach Voraussetzung gibt es für ein $k > l$ einen k -Würfel W mit $\mu(W) \geq \delta$. Da dieser k -Würfel W in einem $(l+1)$ -Würfel W_1 enthalten sein muss, der damit ebenfalls $\mu(W_1) \geq \delta$ erfüllt, können wir diesen Würfel als nächstes Folgenglied wählen. So können wir für alle $j = 1, 2, \dots$ vorgehen und erhalten damit eine Folge mit $W_0 \supset W_1 \supset W_2 \supset \dots$, für die $\mu(W_j) \geq \delta$ für $j = 0, 1, 2, \dots$ gilt. Wegen der monotonen Konvergenz der Folge gilt

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} W_j\right) \geq \delta. \quad (5.7)$$

Da W_j ein $(l+j)$ -Würfel ist und damit Seitenlänge 2^{l+j} hat, ist der Durchschnitt $\bigcap_{j=1}^{\infty} W_j$ nach dem Intervallschachtelungsprinzip entweder ein Punkt oder leer und hat, da μ atomfrei vorausgesetzt wurde, das Maß 0. Das ist ein Widerspruch zu (5.7). $\square$

Wir benötigen noch eine Eigenschaft der erzeugenden Funktion, die ein Standard-Resultat der Wahrscheinlichkeitstheorie ist:

Lemma 5.2 (Multiplikativität der erzeugenden Funktion). *Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige $\mathbb{N}_0$ -wertige Zufallsvariablen und sei $S = X_1 + \dots + X_n$. Dann gilt für $0 \leq t < 1$ für die erzeugenden Funktionen g_S von S und g_{X_j} von X_j die Identität*

$$g_S(t) = \prod_{j=1}^n g_{X_j}(t).$$

Beweis. Siehe z.B. Satz 3.3 in [6]. □

5.3 Der Satz von Rényi

Nun können wir die eingangs gemachte Behauptung beweisen. Der Satz und die grundlegende Beweisidee stammen vom entsprechenden Satz in [5], der Beweis wurde jedoch stark adaptiert.

Theorem 5.3 (Satz von Rényi). *Sei μ ein atomfreies Maß auf $\mathbb{R}^d$, das endlich auf beschränkten Mengen ist. Sei Π eine zufällige abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^d$, sodass deren Vermeidungsfunktion v für alle Teilmengen $A \in \mathbb{R}^d$, die endliche Vereinigungen von Rechtecken sind, folgende Gleichung erfüllt:*

$$v(A) = P[\Pi \cap A = \emptyset] = e^{-\mu(A)}.$$

Dann ist Π ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß μ .

Beweis. Für einen k -Würfel W bezeichnen wir mit

$$L(W) = \{\Pi \cap W = \emptyset\}$$

das Ereignis, dass kein Punkt von Π in W liegt. Sei nun $k \in \mathbb{N}_0$ fest und seien $W_1, \dots, W_n$ verschiedene und damit disjunkte k -Würfel. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass alle k -Würfel keinen Punkt von Π enthalten:

$$\begin{aligned} P\left[\bigcap_{j=1}^n L(W_j)\right] &= P[\Pi \cap W_j = \emptyset \text{ für } j = 1, \dots, n] \\ &= P\left[\Pi \cap \left(\bigcup_{j=1}^n W_j\right) = \emptyset\right] \\ &= v\left(\bigcup_{j=1}^n W_j\right) = \exp\left\{-\mu\left(\bigcup_{j=1}^n W_j\right)\right\} \\ &= \exp\left\{-\sum_{j=1}^n \mu(W_j)\right\} \\ &= \prod_{j=1}^n e^{-\mu(W_j)}. \end{aligned}$$

Also sind die Ereignisse $L(W)$ für disjunkte k -Würfel unabhängig mit der Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[L(W)] = e^{-\mu(W)}.$$

Damit werden wir die Verteilung von

$$N(B) = \#\{\Pi \cap B\}$$

für beschränkte offene Mengen B berechnen. Sei also $B \in \mathbb{R}^d$ eine beschränkte offene Menge. Wir schreiben

$$W_B^{(k)} = \{W \subset B; W \text{ ist ein } k\text{-Würfel}\}$$

für die Menge der k -Würfel, die in B enthalten sind. Dann gibt es für jeden Punkt $x \in B$ ein $k \geq 0$, sodass x in einem k -Würfel $W \in W_B^{(k)}$ liegt. Außerdem gibt für zwei verschiedene Punkte $x, y \in B$ ein $k \geq 0$, sodass x und y in verschiedenen k -Würfeln aus $W_B^{(k)}$ liegen. Wir bezeichnen mit $N_k(B)$ die Anzahl von k -Würfeln $W \subset B$, die mindestens einen Punkt von Π enthalten, also für die $L(W)$ nicht eintritt. $N_k(B)$ ist mit k monoton wachsend und wegen der oben genannten Eigenschaften von beschränkten offenen Mengen ist

$$N(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} N_k(B).$$

Für fixes k können wir die Zufallsvariable $N_k(B)$ umschreiben zu

$$N_k(B) = \sum_{W \in W_B^{(k)}} N_W,$$

wobei N_W jeweils angibt, ob im Würfel W (mindestens) ein Punkt von Π liegt. Damit hat N_W die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N_W = 0] &= \mathbb{P}[L(W)] = e^{-\mu(W)}, \\ \mathbb{P}[N_W = 1] &= 1 - \mathbb{P}[L(W)] = 1 - e^{-\mu(W)} \end{aligned}$$

und die Zufallsvariablen N_W sind unabhängig. Die erzeugende Funktion von N_W ist

$$g_{N_W}(t) = e^{-\mu(W)} + (1 - e^{-\mu(W)})t = t + (1 - t)e^{-\mu(W)}.$$

Mit Hilfe von Lemma 5.2 können wir uns damit die erzeugende Funktion von $N_k(B)$ für $0 \leq t < 1$ ausrechnen:

$$g_{N_k(B)}(t) = \prod_{W \in W_B^{(k)}} \left(t + (1 - t)e^{-\mu(W)} \right).$$

Wegen der monotonen Konvergenz von $N_k(B)$ ist dann

$$\begin{aligned} g_{N(B)}(t) &= \mathbb{E}[t^{N(B)}] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[t^{N_k(B)}] = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{N_k(B)}(t) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{W \in W_B^{(k)}} \left(t + (1-t)e^{-\mu(W)} \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Wir werden $g_{N(B)}(t)$ durch Abschätzung nach unten und oben berechnen. Für $0 \leq t < 1$ und $\mu \geq 0$ gilt die Ungleichung

$$t + (1-t)e^{-\mu} \geq e^{-(1-t)\mu}$$

und damit

$$\begin{aligned} g_{N(B)}(t) &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{W \in W_B^{(k)}} e^{-(1-t)\mu(W)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \exp \left\{ -(1-t) \cdot \sum_{W \in W_B^{(k)}} \mu(W) \right\} \\ &\geq e^{-(1-t)\mu(B)}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$\mu(B) \geq \sum_{W \in W_B^{(k)}} \mu(W)$$

für beliebiges k gilt, da die k -Würfel disjunkt sind und alle in B liegen. Für die Abschätzung von $g_{N(B)}(t)$ nach oben sei $\varepsilon > 0$. Für fixes $t \in [0, 1)$ und beliebiges $\mu \in [0, \varepsilon]$ gilt die Ungleichung

$$t + (1-t)e^{-\mu} \leq e^{-(1-t)\mu\psi(\varepsilon)},$$

wenn wir $\psi(\varepsilon) = \frac{\ln(t+(1-t)e^{-\varepsilon})}{-(1-t)\varepsilon}$ setzen. Dabei ist $0 < \psi(\varepsilon) \leq 1 \ \forall \varepsilon > 0$ und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(\varepsilon) = 1$. Wegen Lemma 5.1 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k \geq 1$, sodass $\mu(W) < \varepsilon$ für alle k -Würfel $W \subset B$ gilt. Für entsprechendes k ist also

$$t + (1-t)e^{-\mu(W)} \leq e^{-(1-t)\mu(W)\psi(\varepsilon)}$$

für alle k -Würfel $W \subset B$. Wenn wir das Produkt über alle diese k -Würfel nehmen, erhalten wir

$$\prod_{W \in W_B^{(k)}} \left(t + (1-t)e^{-\mu(W)} \right) \leq \exp \left\{ -(1-t)\psi(\varepsilon) \sum_{W \in W_B^{(k)}} \mu(W) \right\}.$$

Der Grenzwert $k \rightarrow \infty$ ergibt

$$g_{N(B)}(t) \leq e^{-(1-t)\mu(B)\psi(\varepsilon)},$$

wobei wir (5.8) und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{W \in W_B^{(k)}} \mu(W) = \mu(B)$$

verwendet haben. Mit dem Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ und (5.9) erhalten wir

$$g_{N(B)}(t) = e^{-(1-t)\mu(B)} \quad (5.10)$$

für alle $0 \leq t < 1$. Durch die erzeugende Funktion ist die Verteilung einer Zufallsvariable eindeutig bestimmt und da (5.10) mit (1.1) übereinstimmt, ist $N(B)$ somit poissonverteilt mit Parameter $\mu(B)$.

Für disjunkte beschränkte offene Mengen $B_1, \dots, B_n$ kann kein k -Würfel in mehr als einer dieser Mengen enthalten sein, d.h. für fixes k sind die $W_{B_j}^{(k)}$ disjunkt. Damit sind für fixes k die Zufallsvariablen $N_k(B_j)$ disjunkt. Durch den Grenzwert $k \rightarrow \infty$ erhalten wir, dass die Zufallsvariablen

$$N(B_1), N(B_2), \dots, N(B_n)$$

unabhängig sind. Damit haben wir gezeigt, dass Π die Eigenschaften eines Poissonprozesses für alle beschränkten offenen Teilmengen $B \subseteq \mathbb{R}^d$ erfüllt. Dadurch sind die stochastischen Eigenschaften des Prozesses bereits eindeutig gegeben und die Behauptung ist gezeigt.⁴ $\square$

⁴Um die Eigenschaften eines Poissonprozesses für alle messbaren Teilmengen $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ explizit nachzuweisen, können charakteristische bzw. erzeugende Funktionale, wie in [3] (Theorem 2.3.II.) und [5] (Rényi's Theorem) angedeutet, verwendet werden.

Literaturverzeichnis

- [1] P. Billingsley (1995). *Probability and Measure*. John Wiley & Sons
- [2] V. I. Bogachev (2007). *Measure Theory*. Volume I, Springer-Verlag
- [3] D. J. Daley, D. Vere-Jones (2003). *An Introduction to the Theory of Point Processes*. Volume I: Elementary Theory and Methods, Springer-Verlag
- [4] J. Elstrodt (2011). *Maß- und Integrationstheorie*. Springer-Verlag
- [5] J. F. C. Kingman (1993). *Poisson Processes*. Oxford Studies in Probability 3, Oxford University Press
- [6] A. Klenke (2013). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Spektrum, Springer-Verlag
- [7] U. Krengel (2000). *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Vieweg
- [8] A. Rényi (1967). *Remarks on the Poisson Process*. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **2**, 119-123

Lebenslauf

von Roland Fesselhofer, BSc

Schulbildung

09/1993

bis 06/1997 Volksschule Breitenfurt

09/1997

bis 06/2005 BG/BRG Perchtoldsdorf

24.06.2005 Matura im Realgymnasium mit Darstellender Geometrie mit vertiefender Schwerpunktprüfung aus Mathematik

Akademische Ausbildung

10/2006

bis 07/2013 Lehramtsstudium Mathematik und Informatik an der Universität Wien

10/2007

bis 11/2010 Bachelorstudium Mathematik an der Universität Wien, Schwerpunkt: Vorbereitung auf wissenschaftliche Arbeit

08.11.2010 Abschluss mit Auszeichnung zum “Bachelor of Science”

seit 11/2010

Masterstudium Mathematik an der Universität Wien

08/2011

bis 12/2011 ERASMUS-Aufenthalt an der University of Gothenburg, Schweden

Lehrtätigkeit

WS 2010

bis SS 2013 Tutor für Mathematik-Übungen an der Universität für Bodenkultur Wien

Abstract

Der Poissonprozess wird als zufällige abzählbare Menge auf einem allgemeinen Zustandsraum definiert, sodass die Anzahl der Punkte des Poissonprozesses in einer beliebigen messbaren Menge poissonverteilt ist und diese Anzahlen für disjunkte Mengen unabhängige Zufallsvariablen sind. Der Erwartungswert der Anzahl von Punkten des Poissonprozesses in einer messbaren Menge ist dann ein atomfreies Maß auf dem Zustandsraum, das Intensitätsmaß. In der vorliegenden Diplomarbeit werden folgende wichtige Eigenschaften von Poissonprozessen gezeigt: Sowohl die Einschränkung eines Poissonprozesses auf eine messbare Teilmenge des Zustandsraumes als auch die Vereinigung von abzählbar vielen Poissonprozessen sind wieder Poissonprozesse, jeweils mit kanonisch vererbten Intensitätsmaßen. Weiters bleibt die Transformation eines Poissonprozesses in einen anderen Zustandsraum ein Poissonprozess, solange das Bildmaß des Intensitätsmaßes atomfrei bleibt. Zu jedem atomfreien Maß, das eine schwache Endlichkeitsbedingung erfüllt, existiert ein Poissonprozess, der dieses Maß als Intensitätsmaß hat. In einem Kapitel werden Summen von Funktionswerten eines Poissonprozesses untersucht und eine Konvergenzbedingung für diese Summe gezeigt. Im letzten Kapitel wird gezeigt, dass eine zufällige abzählbare Menge, die für jede endliche Vereinigung von Rechtecken die richtige Wahrscheinlichkeit besitzt, in dieser Vereinigung keinen Punkt zu haben, bereits ein Poissonprozess ist.