



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Mathematische Spezifika im HAK-Unterricht – Besonderheiten im Fach Mathematik in der HAK im Vergleich zur AHS-Oberstufe

Angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Verfasserin:	Theresa Paar
Matrikelnummer:	0606282
Studienrichtung (lt. Studienblatt):	Lehramtsstudium UF Mathematik, UF Musikerziehung
Betreuer:	Univ.-Prof. Dr. Hans Humenberger

Wien, 30. 5. 2013

Danksagungen

Zunächst möchte ich meinen Diplomarbeitsbetreuer Herrn Univ.-Prof. Dr. Hans Humenberger erwähnen, der mir im Rahmen unseres ersten Gesprächs neben anderen auch mein Diplomarbeitssthema vorgeschlagen hat, welches mir gleich zugesagt hat. Für diesen Vorschlag und seine Unterstützung beim Schreiben meiner Arbeit möchte ich ihm herzlich danken.

Ganz besonders möchte ich auch meiner Familie danken, im Speziellen meinen Eltern, die mir diese Ausbildung erst ermöglicht haben. Danke für die Worte, die mir immer wieder Motivation zum Schreiben gegeben haben. Insbesondere danke ich meinem Vater, der mir bei wirtschaftlichen Fragen geholfen hat.

Außerdem bedanke ich mich bei jedem, der mir zu Kontakten zu Mathematik-lehrerinnen und Mathematiklehrern an Handelsakademien verholfen hat bzw. all jenen Lehrerinnen und Lehrern, die die HAK-spezifischen Fragen für mich beantwortet haben.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und in der Bearbeitung und Abfassung keine anderen als die angegebenen Quellen oder Hilfsmittel benutzt, sowie wörtliche und sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet habe. Die vorliegende Diplomarbeit wurde noch nicht anderweitig für Prüfungszwecke vorgelegt.

Ort, Datum

Unterschrift

Anmerkung

Ich bitte im Sinne einer besseren Lesbarkeit um Verständnis, dass in meiner Diplomarbeit auf die geschlechterspezifischen Formulierungen verzichtet wurde. Frauen und Männer werden selbstverständlich gleichermaßen angesprochen.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	3
2. Das österreichische Schulsystem	4
3. Lehrplan	7
3.1 <i>Allgemeiner Teil: AHS – HAK</i>	7
3.1.1 Allgemeines Bildungsziel: Gesetzlicher Auftrag	7
3.1.2 Allgemeines Bildungsziel: Leitziele	8
3.1.3 Allgemeine didaktische Grundsätze	8
3.1.4 Stundentafel	8
3.2 <i>Lehrstoff</i>	10
3.2.1 Überschneidende Themengebiete	12
3.2.2 Zusätzliche Themengebiete	12
4. Schulbücher	15
4.1 <i>Gemeinsame Themengebiete und deren Besonderheiten in der HAK</i>	16
4.1.1 Aussagen, Mengen und Zahlen	16
4.1.2 Gleichungen, Gleichungssysteme, Ungleichungen	18
4.1.3 Funktionen	20
4.1.4 Potenzrechnung	22
4.1.5 Trigonometrie und Winkelfunktionen	22
4.1.6 Exponential-/Logarithmus-Funktion und Wachstums-/Abnahmeprozesse	23
4.1.7 Vektoren	23
4.1.8 Folgen und Reihen	24
4.1.9 Differentialrechnung	24
4.1.10 Differenzengleichungen – Simulation dynamischer Systeme	27
4.1.11 Integralrechnung	27
4.1.12 Stochastik (Statistik und Wahrscheinlichkeit)	31
4.1.13 IT-Bezug	34
4.1.14 Sonstiges	34
4.2 <i>Themengebiete der Mathematik in der HAK</i>	35
4.2.1 IT-Bezug	35
4.2.2 Matrizen	37
4.2.3 Zinsen und Zinseszinsen	48
4.2.4 Rentenrechnung	54
4.2.5 Schuldtilgung	62
4.2.6 Kosten- und Preistheorie	66

4.2.7 Investitionsrechnung	79
4.2.8 Kurs- und Rentabilitätsrechnung	89
4.2.9 Regressionsrechnung, Korrelation	95
4.2.10 Kontingenz	102
4.2.11 Kryptografie, Codierungstheorie	105
4.2.12 Aktienanalyse	112
4.2.13 Simulation wirtschaftlicher Probleme	117
4.2.14 Ungleichungssysteme – Lineare Optimierung	121
4.3 Reflexion über die Schulbücher	130
5. Befragung von Mathematiklehrern an Handelsakademien	133
5.1 Einzelne Fragen	133
5.1.1 Lehrbücher und Unterrichtsmaterial	133
5.1.2 Lehrplan	133
5.1.3 Brauchbarkeit für kaufmännischen bzw. wirtschaftlichen Alltag	134
5.1.4 Fächerübergreifender Unterricht	134
5.1.5 Spezifika im HAK-Unterricht im Vergleich zur AHS	135
5.1.6 Erwerb der HAK-spezifischen Themen	135
5.2 Zusammenfassung	136
6. Schlusswort	137
7. Anhang	138
8. Literaturverzeichnis	145
8.1 Internetquellen	147
9. Lebenslauf	149

1. Einleitung

In meiner Diplomarbeit werde ich mich mit der Mathematik beschäftigen, die nicht in der Allgemeinbildenden Höheren Schule (AHS), dafür aber in der Handelsakademie (HAK) behandelt wird. Dazu beschreibe ich zunächst diese beiden unterschiedlichen Schultypen.

Im Anschluss möchte ich einen Vergleich der Lehrpläne anstellen, indem ich die allgemeinen Bildungsziele, didaktischen Grundsätze und auch den vorgeschriebenen Lehrstoff der Lehrpläne der jeweiligen Schulform gegenüberstelle.

Sobald feststeht, welche Themengebiete sich in AHS und HAK überschneiden, werde ich anhand von zwei Schulbüchern pro Schultyp zuerst den Aufbau der überschneidenden Themen in den Büchern in Vergleich setzen, und danach die HAK-spezifischen Themen aufbereiten bzw. besondere Anwendungen zeigen.

Anschließend fasse ich zusammen, was aus den Antworten eines kurzen Fragebogens an eine kleine Anzahl von HAK-Mathematiklehrern interessant zu erfahren war. Bei der Befragung wollte ich einen Eindruck davon erhalten, worin Mathematiklehrer an Handelsakademien selbst die HAK-spezifischen Anwendungen sehen bzw. wie sie mit den existierenden Schulbüchern oder dem Lehrplan zurechtkommen.

Ich selbst habe das Bundesoberstufenrealgymnasium (BORG) in Mistelbach besucht, das eine von mehreren Bildungseinrichtungen innerhalb eines großen Schulzentrums ist. Neben dem BORG gab es noch die Möglichkeit, die Handelsschule/Handelsakademie (HAS/HAK), die Bildungsanstalt für Kindergartenpädagogik (BAKIP), die Höhere Lehranstalt für wirtschaftliche Berufe (HLW) oder die Fachschule für wirtschaftliche Berufe (FW) zu besuchen. Ich habe nie HAK-spezifischen Mathematikunterricht erhalten und sehe somit die Beschäftigung mit diesem Thema als eine Erweiterung meines mathematischen Horizontes. Ich habe somit bei Bedarf die Chance auf einen mühelosen Wechsel zum Unterrichten an einer HAK.

2. Das österreichische Schulsystem

Für österreichische Kinder gilt die Schulpflicht, ebenso für alle Kinder, die sich dauernd in Österreich aufhalten, unabhängig von ihrer Staatsbürgerschaft. Mit dauerndem Aufenthalt ist der Aufenthalt von mindestens einer Beurteilungsperiode – also einem Semester – gemeint.¹

Die Schulpflicht dauert neun Jahre. Um diese neun Schulpflichtjahre bzw. Schulstufen zu absolvieren, hat ein Kind nun mehrere Möglichkeiten. Zur Veranschaulichung des Aufbaus des österreichischen Schulsystems und zum Überblick soll die folgende Grafik dienen:

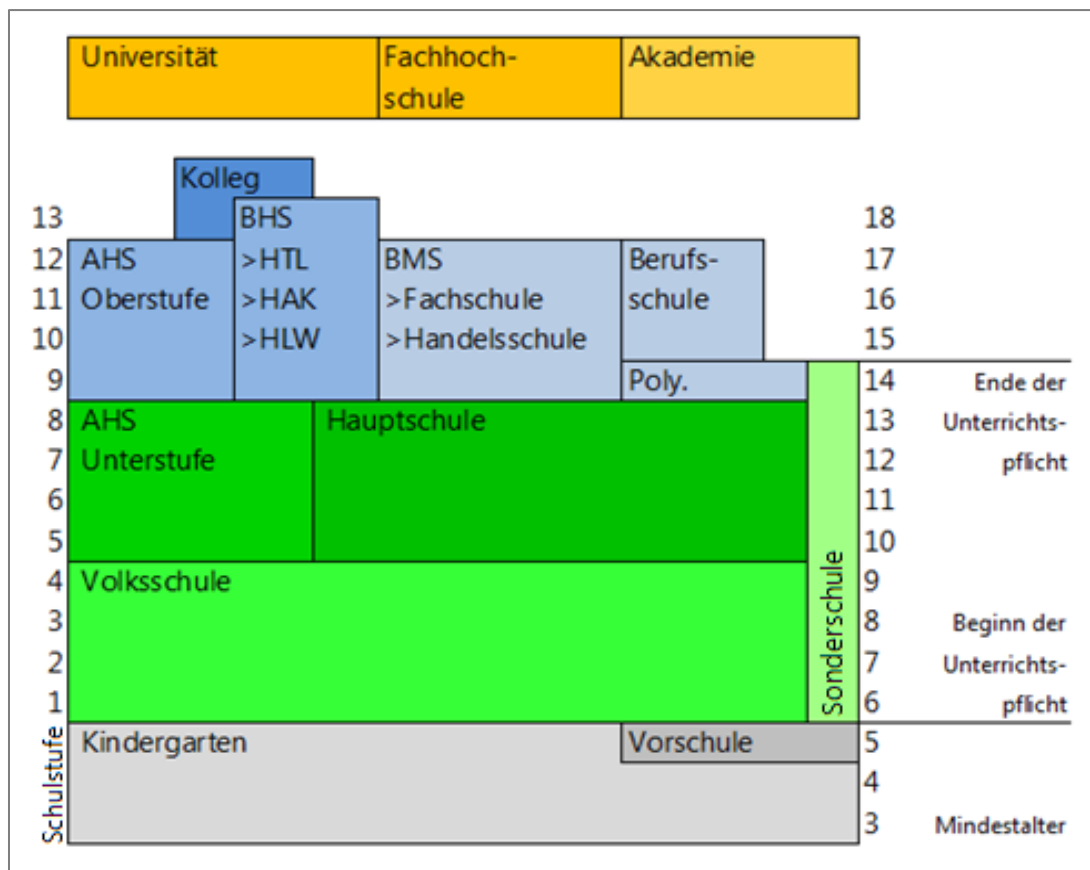


Abbildung 1: Das österreichische Schulsystem

Die allgemeinbildende höhere Schule (AHS) ist ein achtjähriger Schultyp von der 1. bis zur 8. Klasse. Sie beginnt in der fünften und endet in der zwölften Schulstufe. Weiters gliedert sie sich in die Unterstufe (vier Schulstufen Sekundarstufe I) und die Oberstufe

¹ http://www.bmukk.gv.at/medienpool/5820/schulrecht_info_1.pdf

(vier Schulstufen Sekundarstufe II). Es gibt die Möglichkeit, ein Gymnasium durchgehend von der 1. bis zur 8. Klasse zu besuchen. Man kann aber auch nach Abschluss der Hauptschule in ein Gymnasium oder Oberstufengymnasium wechseln bzw. nach Absolvierung der Unterstufe im Gymnasium in eine andere – beispielsweise berufsbildende höhere – Schule wechseln. Dasselbe gilt für Realgymnasien sowie die anderen möglichen Zweige oder Sonderformen eines Gymnasiums. Um in Folge einen sinnvollen Vergleich von AHS und HAK anstellen zu können, wird aber ohnehin nur die Oberstufe der AHS (5. bis 8. Klasse) in Betracht gezogen.

Die Handelsakademie (HAK) hingegen ist eine fünfjährige Schule von der neunten bis zur dreizehnten Schulstufe und gehört zu den berufsbildenden höheren Schulen (BHS) in Österreich. Hier wird im Gegensatz zur AHS meist von 1. bis 5. Klasse gesprochen, was aufgrund der verschobenen Bezifferung in der AHS nicht zu Verwirrungen führen soll. Um eine HAK besuchen zu können, muss man die achte Schulstufe bereits in einer Hauptschule oder AHS Unterstufe positiv abgeschlossen haben.

Wie schon der Name sagt, bietet die AHS eine umfassende und vertiefende Allgemeinbildung. Der Schüler schließt die Schule mit der Matura bzw. Reifeprüfung ab. Hierbei wird auf folgende Aspekte besonders viel Wert gelegt:

- Realitätsbezogenes Lernen
- Selbstständiges Arbeiten
- Erkennen von Zusammenhängen zwischen den einzelnen Wissensgebieten
- Fremdsprachenkenntnisse

Neben der Möglichkeit, die Maturafächer relativ frei auszuwählen, hat der Schüler außerdem die Wahl, entweder eine Fachbereichsarbeit zu schreiben, oder eine Schwerpunktprüfung abzulegen. Die Matura berechtigt zum Studium an Universitäten, (Fach-)Hochschulen, Akademien und zum Besuch von berufsorientierten Lehrgängen und Kollegs.²

Auch die BHS vermittelt eine fundierte Allgemeinbildung, zusätzlich aber eine höhere berufliche Ausbildung mit dem Abschluss einer Reife- und Diplomprüfung. Die Diplomprüfung ist das Besondere an den BHS – sie ermöglicht den Zugang zu gesetzlich geregelten Berufen.

² <http://www.bmukk.gv.at/schulen/bw/abs/ahs.xml>

Die wichtigsten berufsbildenden höheren Schulen³: (laut bm:ukk)

- Höhere technische und gewerbliche Lehranstalt
- Höhere Lehranstalt für Mode, für künstlerische Gestaltung, für Produktmanagement und Präsentation, Modedesign und Produktgestaltung
- Höhere Lehranstalt für Tourismus
- Handelsakademie
- Höhere Lehranstalt für wirtschaftliche Berufe
- Höhere Lehranstalt für Land- und Forstwirtschaft
- Bildungsanstalt für Kindergartenpädagogik
- Bildungsanstalt für Sozialpädagogik

³ http://www.bmukk.gv.at/schulen/bw/ueberblick/bildungswege_bhs.xml

3. Lehrplan

Für diesen Abschnitt der Arbeit habe ich den Lehrplan der AHS aus dem Jahr 2007 und den Lehrplan der HAK aus dem Jahr 2004 verwendet, welche zur Zeit des Verfassens meiner Diplomarbeit die aktuellsten sind.

3.1 Allgemeiner Teil: AHS – HAK

3.1.1 Allgemeines Bildungsziel: Gesetzlicher Auftrag

AHS

„Die allgemein bildende höhere Schule hat die Aufgabe, den Schülerinnen und Schülern eine umfassende und vertiefte Allgemeinbildung zu vermitteln und sie zugleich zur Hochschulreife zu führen (§ 34 des Schulorganisationsgesetzes).

Die allgemein bildende höhere Schule hat im Sinne des § 2 des Schulorganisationsgesetzes an der Heranbildung der jungen Menschen mitzuwirken, nämlich beim Erwerb von Wissen, bei der Entwicklung von Kompetenzen und bei der Vermittlung von Werten. Dabei ist die Bereitschaft zum selbstständigen Denken und zur kritischen Reflexion besonders zu fördern. Die Schülerinnen und Schüler sind in ihrem Entwicklungsprozess zu einer sozial orientierten und positiven Lebensgestaltung zu unterstützen.“⁴

HAK

„Die Handelsakademie vermittelt in integrierter Form Allgemeinbildung und kaufmännische Bildung, die zur Berufsausübung in allen Zweigen der Wirtschaft und Verwaltung qualifizieren. Die Ausbildung an der Handelsakademie wird durch die Reife- und Diplomprüfung beendet.

Die Handelsakademie hat im Sinne des § 2 des Schulorganisationsgesetzes in umfassender Weise an der Entwicklung junger Menschen mitzuwirken.“⁵

Schon im gesetzlichen Auftrag der Schulen ist erkennbar, dass die HAK einen ergänzenden Aspekt im Vergleich zur AHS hat, nämlich den der kaufmännischen Bildung, welche nach Abschluss der Schule zur Ausübung eines Berufs berechtigt.

⁴ <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11668/11668.pdf>, S. 1

⁵ http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/upload/598_HAK%20LP%202004%20-%20Anlage%201.pdf, S. 3

3.1.2 Allgemeines Bildungsziel: Leitziele

In den Leitzielen der HAK – in der AHS ist von Leitvorstellungen die Rede – sind mir einige Begriffe wie zum Beispiel der der Europäischen Union aufgefallen, die im AHS-Lehrplan gar nicht erwähnt werden. Zu den Leitzielen gehört unter anderem, dass die Absolventen die Europäische Union und ihre Mitgliedstaaten in ihren historischen, kulturellen, wirtschaftlichen und sozialen Aspekten kennen, die Zusammenarbeit der Staaten der Europäischen Union mit anderen Staaten Europas und der übrigen Welt erkennen, oder die Wirtschaft als Teil der Gesellschaft und Kultur verstehen sollen. Außerdem sollen die Absolventen der HAK auf ihre Rolle als Arbeitnehmer, Unternehmer und Konsument vorbereitet sein.⁶ Dieser ausgeprägte Wirtschaftsbezug ist im AHS-Lehrplan in keiner Weise vorzufinden.

3.1.3 Allgemeine didaktische Grundsätze

Auffallend beim Lehrplan der HAK ist die mehrmalige Erwähnung eines bestimmten Unterrichtsprinzips, nämlich das Prinzip der *Entrepreneurship Education* – Unterricht in unternehmerischem Denken und Handeln. Der Ausdruck, der sich aus dem französischen Begriff „entrepreneur“ und der englischen Endung „-ship“ zusammensetzt, bedeutet wörtlich übersetzt „Unternehmergeist“.⁷ Fachwissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten, die für eine erfolgreiche Unternehmensgründung und -führung erforderlich sind, sollen hierbei vermittelt werden.⁸ Die Auswahl des Lehrstoffes soll unter anderem nach Kriterien wie z.B. der Aktualität und der Anwendbarkeit in der beruflichen Praxis erfolgen, soll aber auch ihren Beitrag zur Ausbildung zu künftigen Arbeitnehmern bzw. Unternehmern leisten.

3.1.4 Stundentafel

Sowohl in der AHS als auch in der HAK gehört die Mathematik zum Kernbereich der Pflichtgegenstände, wobei das Fach an der HAK die Bezeichnung „Mathematik und angewandte Mathematik“ trägt, an der AHS hingegen nur „Mathematik“.

Der Lehrplan der AHS beschreibt, dass in jeder Schulstufe von drei Wochenstunden ausgegangen wird. Bei mehr als drei Wochenstunden sei eine vertiefte und aspekt-

⁶ http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/upload/598_HAK%20LP%202004%20-%20Anlage%201.pdf, S. 3f.

⁷ <http://www.dict.cc>

⁸ <http://www.bmukk.gv.at/schulen/bw/bbs/entrepreneurship.xml>

reichere Behandlung der Lerninhalte anzustreben. Im Lehrplan der HAK gibt es eine übersichtliche Stundentafel, an der gut zu erkennen ist, dass in der 1. Klasse HAK kein Mathematikunterricht vorgesehen ist. Im 2. und 4. Jahrgang sind es jeweils drei, und im 3. und 5. Jahrgang jeweils zwei Wochenstunden.

Insgesamt entspricht das in Summe mindestens 12 Wochenstunden Mathematik in der AHS und 10 Wochenstunden Mathematik in der HAK.

Um den kaufmännischen Schwerpunkt in der HAK deutlich zu machen, möchte ich kurz auf die im Vergleich zur AHS zum Teil sehr unterschiedlichen Unterrichtsfächer eingehen, allerdings ohne Beachtung der Möglichkeit der schulautonomen Bestimmungen von Schwerpunktsetzungen. Es gibt eine kleine Anzahl von Gegenständen, die in der AHS und der HAK genau den gleichen Titel tragen, manche Titel werden in der HAK um teilweise in Klammern gesetzte Begriffe ergänzt, und im HAK-Lehrplan ist dann eine Fülle an Unterrichtsfächern angeführt, die in einer AHS nicht zu unterrichten vorgesehen sind. Die jeweiligen Gleichheiten und Unterschiede sind in der folgenden Übersicht erkennbar:

Gemeinsame Unterrichtsfächer (selber Titel):

Religion, Deutsch, Chemie, Physik, Leibesübungen

Gemeinsame oder ähnliche Unterrichtsfächer (erweiterte oder unterschiedliche Titel):

AHS	HAK
Erste lebende Fremdsprache	Englisch einschließlich Wirtschaftssprache
Zweite lebende Fremdsprache/Latein	Lebende Fremdsprache
Geschichte und Sozialkunde/ Politische Bildung	Geschichte (Wirtschafts- und Sozialgeschichte) Politische Bildung und Recht
Geographie und Wirtschaftskunde	Geografie (Wirtschaftsgeografie)
Mathematik	Mathematik und angewandte Mathematik
Informatik	Wirtschaftsinformatik
Biologie und Umweltkunde	Biologie, Ökologie und Warenlehre

Zusätzliche Unterrichtsfächer:

AHS

Latein
Psychologie und Philosophie
Musikerziehung
Bildnerische Erziehung

HAK

Betriebswirtschaft
Internationale Wirtschafts- und Kulturräume
Betriebswirtschaftliche Übungen und
Projektmanagement:
- Persönlichkeitsbildung und soziale Kompetenz
- Businessstraining, Projekt- und Qualitäts-Management, Übungsfirma und Case Studies
Rechnungswesen und Controlling
Informations- und Officemanagement
Volkswirtschaft

3.2 Lehrstoff

Die folgende Tabelle soll einen Einblick verschaffen, wie unterschiedlich umfangreich der Lehrstoff im Lehrplan beschrieben wird. Dies passiert im AHS-Lehrplan (erstes Kästchen) weit ausführlicher als im HAK-Lehrplan (zweites Kästchen).

Anmerkung: Kursiv gesetzte Inhalte im AHS-Ausschnitt sind obligatorisch für alle Schulstufen mit mehr als drei Wochenstunden.

7. Klasse: Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen - Abspalten reeller Linearfaktoren von Polynomen - Reflektieren über die Zweckmäßigkeit des Erweiterns der reellen Zahlen - Rechnen mit komplexen Zahlen - <i>Kennenlernen des Fundamentalsatzes der Algebra</i> Differentialrechnung - Definieren des Differentialquotienten (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate), Deuten dieser Begriffe als Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung, weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen - Kennen des Begriffes Ableitungsfunktion, Berechnen von Ableitungen elementarer Funktionen - Deuten der zweiten Ableitung in inner- und außermathematischen Bereichen - Herleiten von Differentiationsregeln zur Ableitung von Polynomfunktionen, Kennen weiterer Differentiationsregeln (sofern sie für Funktionsuntersuchungen verwendet werden) - Untersuchen einfacher und im Hinblick auf Anwendungen sinnvoller Funktionen bezüglich Monotonie und Krümmungsverhalten, Ermitteln von Extrem- und Wendestellen - Lösen von Extremwertaufgaben - Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit - <i>Kennenlernen weiterer Anwendungen der Differentialrechnung</i> Nichtlineare analytische Geometrie - Beschreiben von Kreisen, Kugeln und Kegelschnittslinien durch Gleichungen - Schneiden von Kreisen bzw. Kegelschnittslinien mit Geraden, Ermitteln von Tangenten - Beschreiben von ebenen Kurven durch Parameterdarstellungen - <i>Beschreiben von Raumkurven und Flächen durch Parameterdarstellungen</i> Stochastik - Kennen der Begriffe diskrete Zufallsvariable und diskrete Verteilung - Kennen der Zusammenhänge von relativen Häufigkeitsverteilungen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen; von Mittelwert und Erwartungswert sowie von empirischer Varianz und Varianz - Arbeiten mit diskreten Verteilungen (insbesondere mit der Binomialverteilung) in anwendungsorientierten Bereichen	
---	--

III. Jahrgang:

Basislehrstoff:

Trigonometrische Funktionen, Anwendungen.
Wachstums- und Abnahmeprozesse.
Rekursive Darstellung von Folgen, Differenzengleichungen.
Zinseszinsrechnung, Rentenrechnung, Schuldtilgung.
Komplexe Aufgabenstellungen.

Erweiterungslehrstoff:

Simulation dynamischer Systeme. Kryptografie, Codierungstheorie.

IT-Bezug:

Computereinsatz mit entsprechender Software (Computer Algebra Systeme und/oder Tabellenkalkulation bzw. grafikfähige Taschenrechner).

Übungsfirmen-Konnex:

Finanzmathematik.

Vergleich der Lehrstoffbeschreibung, AHS (oben)⁹ – HAK (unten)¹⁰

Aufgrund des großen Unterschiedes der Ausführlichkeit beim Beschreiben des Lehrstoffs lässt sich im HAK-Lehrplan nicht immer klar erkennen, welche Unterkapitel bei einem Thema vorhanden sind. Wo im AHS-Lehrplan beispielsweise genau beschrieben wird, wann Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen in zwei Variablen, oder Gleichungssysteme mit drei Gleichungen in drei Variablen vorgesehen sind (nämlich nicht in derselben Klasse), liest man im HAK-Lehrplan nur: Gleichungssysteme. Dennoch versuche ich, einen Vergleich anzustellen. Den Erweiterungslehrstoff ziehe ich hierbei nur bedingt in Betracht. Möglicherweise lässt sich der Unterschied bei der Ausführlichkeit darauf zurückführen, dass der AHS-Lehrplan aktueller ist und zu dieser Zeit schon mehr Wert auf genauere Formulierung bzw. Beschreibung gelegt wurde.

In Folge wird bis zum Ende des Kapitels 3 statt den Bezeichnungen 5. bis 8. Klasse für AHS und II. bis V. Jahrgang (2. bis 5. Klasse) für HAK – wie dies auch im Lehrplan und in der obigen Tabelle erkennbar ist – für beide Schultypen die Bezeichnung 1. bis 4. Jahr verwendet, um die Gegenüberstellung leichter erkennbar zu machen.

Nach sorgfältigem Vergleich der im Lehrplan angegebenen Lehrstoff-Beschreibungen ergeben sich für AHS und HAK sowohl Gemeinsamkeiten als auch Unterschiede. Überschneidende Kapitel sind nicht immer im selben Jahr vorgesehen, und manche Themengebiete kommen in der jeweils anderen Schulform nur im Erweiterungsbereich

⁹ http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf, S. 5

¹⁰ http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/upload/598_HAK%20LP%202004%20-%20Anlage%201.pdf, S. 31

oder gar nicht vor. Das gemeinsame und unterschiedliche Vorkommen der Großkapitel in der Mathematik möchte ich nun anführen bzw. einander gegenüberstellen.

3.2.1 Überschneidende Themengebiete

Nun werden Klasse für Klasse die gemeinsamen Themengebiete aufgelistet, die der AHS- und HAK-Lehrplan im selben Jahrgang vorsehen.

1. Jahr:	Zahlenmengen, Zahlensysteme Terme Gleichungen und Gleichungssysteme
2. Jahr:	Folgen, rekursive Darstellung
3. Jahr:	Differentialrechnung
4. Jahr:	Stochastik

In der folgenden Liste sind die Themenkapitel angeführt, die zwar überschneidend, aber nicht derselben Klasse zugeordnet sind.

<u>AHS</u>	<u>Thema</u>	<u>HAK</u>
2. Jahr	Umkehrfunktionen	1. Jahr
2. Jahr	Potenzen	1. Jahr
1. Jahr	Trigonometrie	2. Jahr
2. Jahr	Ungleichungen	1. Jahr
2., 3. und 4. Jahr	Stochastik	1. und 4. Jahr
4. Jahr	Differenzengleichungen	2. Jahr
4. Jahr	Integralrechnung	3. Jahr

3.2.2 Zusätzliche Themengebiete

Nun gibt es auch Themengebiete, die nur in dem einen oder anderen Lehrplan vorzufinden sind. Zunächst werden wieder im aufzählenden Verfahren die entsprechenden Themen aufgelistet und im Anschluss werden Anmerkungen dazu angestellt.

AHS:

1. Jahr:	Vektoren und analytische Geometrie der Ebene
2. Jahr:	Wurzeln, Logarithmen Explizite Darstellung von Folgen

- Analytische Geometrie des Raumes
3. Jahr: Komplexe Zahlen
Extremwertaufgaben
Nichtlineare analytische Geometrie (Kreis und Kugel, Kegelschnitte)

HAK:

1. Jahr Numerische Lösungen (zu Gleichungssystemen)
Matrizen
Ungleichungssysteme*
Boolesche Algebra*
2. Jahr: Zinseszinsrechnung, Rentenrechnung, Schuldtilgung
Kryptografie*, Codierungstheorie*
3. Jahr: Kosten- und Preistheorie
Investitionsrechnung
Kurs- und Rentabilitätsrechnung
Aktienanalyse*
4. Jahr: Regressionsrechnung, Korrelation
Kontingenz
Simulation wirtschaftlicher Modelle*
Lineare Optimierung*

*Erweiterungslehrstoff

Während Vektoren und analytische Geometrie der Ebene im Mathematikunterricht in der AHS zu unterrichten sind, werden sie im HAK-Lehrplan nur im Erweiterungslehrstoff knapp als Vektoren erwähnt.

Von Wurzeln und Logarithmen ist anzunehmen, dass sie auch im HAK-Lehrplan miteinbezogen sind, was dort allerdings nicht extra angeführt ist. Nachdem im HAK-Lehrplan ausschließlich von der rekursiven Darstellung von Folgen die Rede ist, kann nicht vorausgesetzt werden, dass auch die explizite Darstellung vorgesehen ist. Die analytische Geometrie des Raumes ist ein Erweiterungskapitel der analytischen Geometrie der Ebene und fehlt aus diesem Grund auch im HAK-Lehrplan.

Die Extremwertaufgaben sind im Lehrplan der HAK nicht angeführt, können aber theoretisch den weiteren Anwendungen der Differentialrechnung im Erweiterungslehrstoff des 3. Jahres zugeordnet werden. Komplexe Zahlen und nichtlineare analytische Geometrie sind ausschließlich im AHS-Lehrplan vorzufinden.

Dass numerische Lösungsmöglichkeiten auch in der AHS genutzt werden, kann man nicht ausschließen, jedoch sind sie in der HAK dezidiert im Mathematik-Lehrplan festgehalten. Matrizen sind allerdings nur im HAK-Lehrplan zu lesen.

Im AHS-Lehrplan wird beim Kapitel „Folgen“ angeführt, dass diese im anwendungsorientierten Bereich insbesondere in Bezug auf Geldwesen verwendet werden sollen. Hierbei wird vermutlich etwas Zinsrechnung vorgesehen. Alle weiteren Themenkapitel, die ich für die HAK als zusätzliche aufgelistet habe (Rentenrechnung, Schuldtilgung; Kosten- und Preistheorie; Kurs- und Rentabilitätsrechnung, Investitionsrechnung; Regressionsrechnung, Korrelation; Kontingenz), sind im AHS-Lehrplan nicht vorzufinden. Die mit Sternchen (*) versehenen Inhalte Ungleichungssysteme, Boolesche Algebra, Kryptografie, Codierungstheorie, Aktienanalyse, Simulation wirtschaftlicher Modelle und Lineare Optimierung gehören nur dem Erweiterungslehrstoff der HAK-Mathematik an.

Was im Lehrplan der HAK außerdem hinzukommt, sind der für jedes Jahr angegebene IT-Bezug und der Übungsfirmen-Konnex für das 2. und 3. Jahr. Die Beschreibung des IT-Bezugs lautet hier jedes Jahr wie folgt: „Computereinsatz mit entsprechender Software (CAS¹¹ und/oder Tabellenkalkulation bzw. grafikfähiger Taschenrechner).“¹²

„Übungsfirma“ ist ein Unterrichtsfach in der HAK. Dort wird ein Unternehmen simuliert, wobei die Schüler ihre erlernten kaufmännischen Fähigkeiten üben können. Außerdem ermöglicht dieses Fach Vernetzungen zu den anderen Unterrichtsfächern. Der Übungsfirmen-Konnex lautet für das 2. Jahr „Finanzmathematik“ und für das 3. Jahr „Investitionsrechnung“.

¹¹ CAS steht für Computeralgebrasystem

¹² http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/upload/598_HAK%20LP%202004%20-%20Anlage%201.pdf, S. 31

4. Schulbücher

In diesem Kapitel werde ich anhand von Schulbüchern untersuchen, ob Themenkapitel aus dem überschneidenden Lehrstoff unterschiedlich eingeführt oder aufgebaut sind, oder ob sie unterschiedlich umfangreich behandelt werden. Möglicherweise lässt sich dafür auch eine Begründung feststellen. Vielleicht finden sich auch AHS- oder HAK-spezifische Anwendungen. Auf die Gebiete, die ausschließlich in der AHS unterrichtet werden, werde ich nicht näher eingehen. Von vordergründigem Interesse sind die Abschnitte, die nur in HAK-Lehrbüchern zu finden sind. Diese sind mir größtenteils selbst noch unbekannt, somit kann ich mich in die Lage des Schülers versetzen und beobachten, wie die von mir ausgewählten Lehrbücher der HAK die entsprechenden Themen aufbereiten, und versuchen zu beurteilen, ob dies fachdidaktisch betrachtet positiv zu beurteilen ist.

Für diese Arbeit wurden folgende Lehrbücher ausgewählt, von denen an dieser Stelle jeweils das erste Buch der Reihe abgebildet ist:

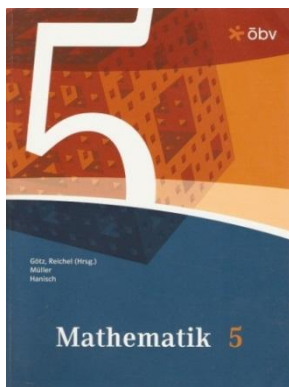


Abbildung 2: Mathematik 5

Mathematik Lehrbuch 5-8

Götz, Reichel, Müller, Hanisch

AHS

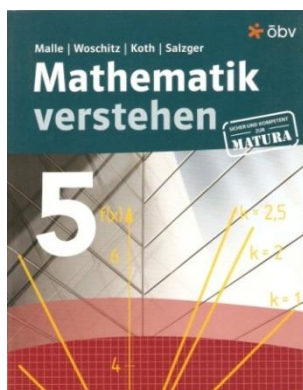


Abbildung 3: Mathematik verstehen 5

Mathematik verstehen 5-8

Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl

AHS

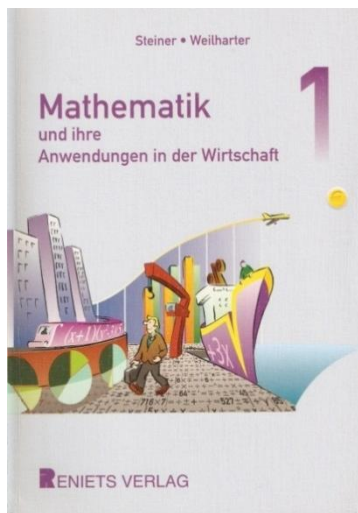


Abbildung 4: Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 1

Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 1-4

Steiner, Weilharter

HAK

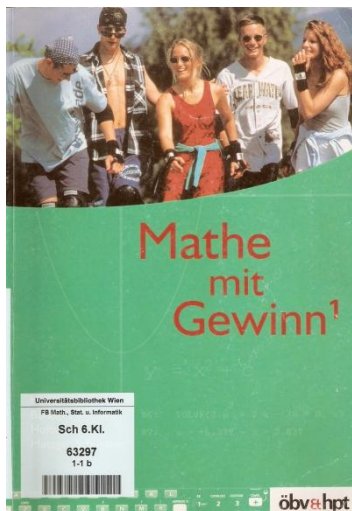


Abbildung 5: Mathe mit Gewinn 1

Mathe mit Gewinn 1-4

Hinkelmann, Böhm, Hofbauer, Metzger-Schuhäker

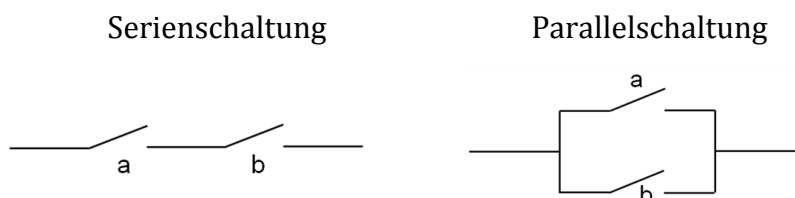
HAK

4.1 Gemeinsame Themengebiete und deren Besonderheiten in der HAK

4.1.1 Aussagen, Mengen und Zahlen

Bei den Aussagen und Mengen kann man feststellen, dass die beiden AHS-Bücher jeweils ein recht kompaktes Kapitel dazu enthalten, das sich außerdem im Vergleich zum anderen Buch im Aufbau kaum unterscheidet, bloß dass der Abschnitt bei Götz et al. zehn Seiten mehr umfasst als bei Malle et al., sodass man bei ersterem eventuell auf höhere Ausführlichkeit schließen kann. Hier lernt man Aussagen und Mengen und deren Beziehungen und Verknüpfungen kennen bzw. die Gesetze in der Mengen- und Aussagenalgebra. In den HAK-Büchern liest man auch von Aussagen und Mengen, aber

sogar im Lehrplan werden diese beiden Ausdrücke mit dem Begriff „Boolesche Algebra“ beschrieben. Die Boolesche Algebra fasst die Analogie zwischen Aussagenlogik (mit den Operatoren UND $\wedge$, ODER $\vee$, NICHT $\neg$) und Mengenalgebra (mit den Verknüpfungen Durchschnitt $\cap$, Vereinigung $\cup$, Komplement $\setminus$) zusammen. In den HAK-Büchern gibt es jeweils im ersten Kapitel des Buches (bei Steiner et al. in einem Wiederholungs- und Vertiefungskapitel, bei Hinkelmann et al. in einem Kapitel mit dem Titel „Mengenlehre“) einen kurzen Abschnitt über die Operatoren der Aussagenlogik und zu einem späteren Zeitpunkt einen Abschnitt zur Booleschen Algebra. Was hier im Vergleich zur AHS hinzukommt, ist in *Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 1* die „Produktmenge“ (geordnete Paare), die z. B. bei Götz et al. erst im Rahmen des Kapitels über Funktionen erwähnt wird. *Mathe mit Gewinn 1* beschäftigt sich außerdem mit der **Schaltalgebra** als wertvolle Anwendung (in *Mathematik 5* von Götz et al. wird diese kurz erwähnt), mit der elektronische Schaltungen entworfen werden können. Bezeichnet man die Serienschaltung als UND-Schaltung und die Parallelschaltung als ODER-Schaltung, können die Wahrheitswerte aller Aussagenverknüpfungen mit UND, ODER und der NEGATION durch Kombinationen aus Serien- und Parallelschaltungen von Schaltern und Negationsschaltern realisiert werden.¹³



Für zwei Schalter a und b gilt daher folgende Verknüpfungstafel:

(1 ... Schalter geschlossen, 0 ... Schalter offen)

Schalter a	Schalter b	Serienschaltung	Parallelschaltung
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

entspricht jeweils:

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$
---	---	--------------	------------

¹³ Hinkelmann, 2005 (Mathe mit Gewinn 1), S. 58

Beim Abschnitt zu „Zahlen“ war auffällig, dass sich das Buch *Mathe mit Gewinn 1* auch mit dem kardinalen Aspekt von Zahlenmengen beschäftigt, wo man erfährt, dass es durchaus Unterschiede zwischen „Unendlichkeiten“ gibt. So sind die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ abzählbar, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ebenfalls abzählbar aber eine sogenannte „dichte“ Menge auf der Zahlengeraden, hingegen sind die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ überabzählbar.

4.1.2 Gleichungen, Gleichungssysteme, Ungleichungen

Zunächst ist zu erwähnen, dass schon im Lehrplan festgelegt ist, dass diese Inhalte in der HAK innerhalb eines Jahrgangs – nämlich im II. Jahrgang – vorgesehen sind, hingegen in der AHS sowohl in der 5. als auch in der 6. Klasse behandelt werden sollen. Dementsprechend findet man auch die Aufteilung in den Schulbuchbänden vor. In den beiden AHS-Büchern werden in der 5. Klasse lineare und quadratische Gleichungen mit einer Variablen und lineare Gleichungen und Gleichungssysteme mit zwei Variablen durchgenommen. In der 6. Klasse folgen Ungleichungen und lineare Gleichungen und Gleichungssysteme mit drei Variablen. Folgende Tatsache erscheint als markantes AHS-Merkmal: Die linearen Gleichungen und Gleichungssysteme mit drei Variablen werden anhand der analytischen Geometrie des Raumes eingeführt, welche schließlich im Lehrplan für die 6. Klasse vorgesehen ist. Die Parameterdarstellung einer Ebene

$$\varepsilon: X = P + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$$

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$s, t \in \mathbb{R}; P \text{ Punkt, } \vec{a}, \vec{b} \text{ Vektoren im } \mathbb{R}^3$$

entspricht hier einer linearen Gleichung in drei Variablen. Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Variablen dient zur Untersuchung der Lagebeziehung zweier Ebenen, eines mit drei Gleichungen und drei Variablen untersucht die Lagebeziehung dreier Ebenen.

Doch auch in den HAK-Büchern gibt es Auffälligkeiten. Beide ausgewählten Lehrbücher führen im Rahmen dieses umfangreichen Themengebietes (Gleichungen, II. Jahrgang) die Menge der komplexen Zahlen ein. Um mit Wurzeln aus negativen Zahlen umgehen zu

können, die sich beim Lösen quadratischer Gleichungen ergeben, wird der bekannte Zahlenbereich um die komplexen Zahlen erweitert. Dies geschieht im Lehrplan und in den Büchern der AHS erst in der 7. Klasse.

Was die eindeutige Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems betrifft, wird bei Hinkelmann et al. der Begriff „Rang einer Matrix“ eingeführt. Nachdem Matrizen in der HAK behandelt werden, darf auf diese Bezug genommen werden. Hat man ein lineares Gleichungssystem mit n Unbekannten, sind n Gleichungen nötig, die voneinander linear unabhängig sind, um eine eindeutige Lösung zu erhalten, d. h. eine Gleichung darf nicht aus Kombination anderer Gleichungen (oder einem Vielfachen davon) entstanden sein. Die Berechnung des Rangs wird aber ausschließlich mittels technischer Hilfsmittel erklärt. Ist der Rang der Koeffizientenmatrix gleich der Anzahl der Variablen, besitzt das lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung.

In *Mathe mit Gewinn 1* findet man außerdem ein eigenes Unterkapitel mit dem Titel „Quadratische Gleichungen in der Wirtschaft“, in dem unter anderem die Begriffe der Kostenfunktion K , der Nachfragefunktion p und der Erlösfunktion E gebracht werden und bereits Zusammenhänge zwischen diesen Funktionen erklärt werden, wie z. B. durch die Gewinnfunktion G ($G = E - K$). So werden hier die Teile der quadratischen Gleichung nicht wie folgt beschrieben:

$$\begin{array}{c} \text{Lineares Glied} \\ \underbrace{a \cdot x^2}_{\text{Quadrat. Glied}} + \underbrace{b \cdot x}_{\text{Lineares Glied}} + \underbrace{c}_{\text{konstantes Glied}} = 0 \end{array}$$

sondern zusätzlich mittels Kostenfunktionausdrücken erklärt:

$$\begin{array}{c} \text{Gesamtkosten} \qquad \qquad \text{Fixkosten} \\ \overbrace{K(x)}^{\text{Gesamtkosten}} = \underbrace{a \cdot x^2 + b \cdot x}_{\text{Produktionskosten}} + \underbrace{c}_{\text{Fixkosten}} \end{array}$$

Auch bei den Textaufgaben im Abschnitt zu Ungleichungen erhalten Anwendungsbeispiele zur Kosten- und Preistheorie eine deutlich höhere Gewichtung, welche im IV. Jahrgang bei der Differentialrechnung im Detail behandelt wird. „Und im Wirtschafts-

leben sind Begriffe wie Mindestumsatz, Höchstpreis, Minimallohn usw. alltäglich“¹⁴ heißt es unter anderem, um das Ersetzen des Gleichheitszeichens durch die Relationszeichen $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ oder auch $\neq$ rechtfertigen.

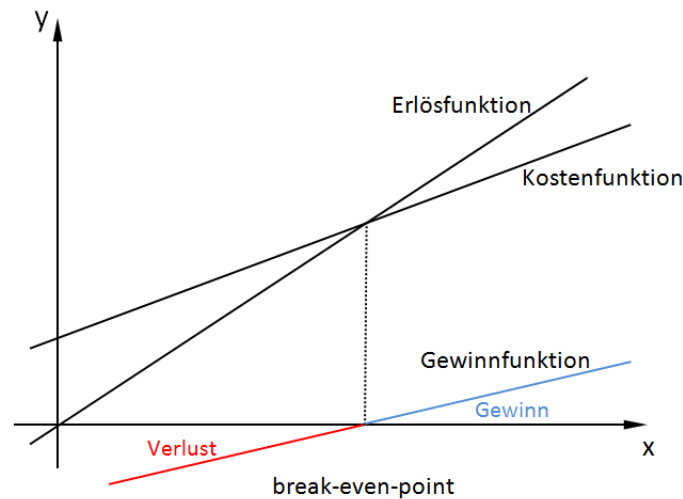
Im Lehrplan der HAK sind zusätzlich zu den Gleichungssystemen innerhalb des Erweiterungslehrstoffs noch Ungleichungssysteme mit der Anwendung der linearen Optimierung angeführt, dazu mehr im Abschnitt 4.2.14.

4.1.3 Funktionen

Auch bei den Funktionen ist die Aufteilung des Stoffes in den einzelnen Jahrgängen bzw. Klassen in AHS und HAK nicht gleich, wie es auch schon im Lehrplan erkennbar ist. Während in den HAK-Büchern des II. Jahrgangs im Prinzip „alle“ Funktionen bis auf die Exponential- und die Logarithmusfunktion und die trigonometrischen Funktionen bearbeitet wurden (diese werden im III. Jahrgang behandelt), kommen in der AHS auch die Potenz- und Wurfelfunktionen erst im Buch der 6. Klasse vor, ebenso die genauere Beschäftigung mit der Umkehrfunktion, der Monotonie etc. Polynomfunktionen höheren Grades finden erst im Buch der 7. Klasse ihren Platz.

In *Mathe mit Gewinn 1* bietet der Abschnitt mit dem Titel „Lineare Funktionen in der Wirtschaft“ einen guten Einblick in die HAK-spezifischen Anwendungen dieses Funktionstyps. Der Begriff der Kostenfunktion erscheint erstmals im Zusammenhang mit der linearen Funktion bzw. allgemeinen Geradengleichung $y = k \cdot x + d$. Hat man einmal die Bedeutung von k und d begriffen, lässt sich d einfach als Fixkosten umdeuten und k als Kostenzuwachs pro Einheit x verstehen. Auch die Erlös- und die Gewinnfunktion kommen zum Einsatz, ebenso der Begriff des „break-even-points“, der auch als „Gewinnschwelle“ bezeichnet wird. Grafisch kann man sich den Zusammenhang zwischen Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion wie in der folgenden Abbildung vorstellen:

¹⁴ Hinkelmann, 2005 (Mathe mit Gewinn 1), S. 122



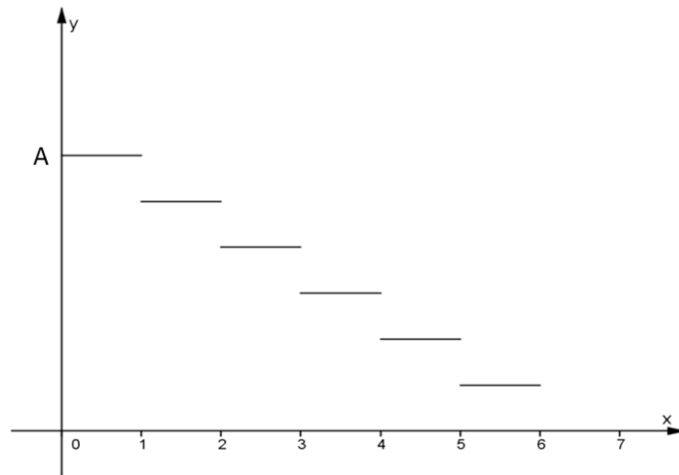
In dem Moment, wo die Erlös- die Kostenfunktion übersteigt, ist auf der x -Achse die Gewinnschwelle bzw. der sogenannte break-even-point abzulesen, dementsprechend ragt die Gewinnfunktion an dieser Stelle auch in den positiven Wertebereich.

Neben der Kostenfunktion findet auch die lineare Abschreibungsfunktion hier ihre Anwendung. Nachdem abnutzbare Anlagegüter einer ständigen Wertminderung ausgesetzt sind, muss die jährliche Wertminderung durch Abschreibungsbeträge berücksichtigt werden. Dazu werden die Anschaffungskosten gleichmäßig auf die betriebliche Nutzungsdauer verteilt. Der Restwert oder Buchwert B kann durch folgende lineare Funktion beschrieben werden:

$$B_x = A - \frac{A}{n} \cdot x$$

B_x ... Buchwert nach x Jahren, A ... Anschaffungspreis, n ... Nutzungsdauer in Jahren

Da die Abschreibung am Jahresende durchgeführt wird, ist die Darstellung durch eine Gerade nicht realistisch. Richtig darstellen kann man den Restwert durch eine Treppenfunktion, womit jetzt sogar eine wirtschaftliche Anwendung einer stückweise definierten Funktion gegeben ist.



Der Wert der Anlage startet beim Anschaffungspreis A und behält diese Höhe auch im ersten Jahr. Jedes Jahr zu Jahresende sinkt der Wert aufgrund der durchgeführten Abschreibung, bis die Anlage – hier nach dem sechsten Jahr – einen Buchwert von Null ausweist.

Hinzuzufügen ist noch, dass man auch im AHS-Buch von Malle et al. feststellen konnte, dass als Beispiel für die lineare Funktion die Kostenfunktion Thema ist.

4.1.4 Potenzrechnung

Die Potenzrechnung ist im Lehrplan der HAK schon im II. Jahrgang vorgesehen, in der AHS erst in der 6. Klasse, dementsprechend ist dieses Kapitel auch im jeweiligen Buch zu finden. Dadurch lässt sich aber erklären, wieso beim Abschnitt zum Rechnen mit Termen – welches in beiden Schultypen im ersten Jahr vorgesehen ist – in der HAK bereits die Potenzrechnung einfließen darf. Dies ist nur möglich, weil im selben Buch bereits vorher die Rechenregeln für Potenzen geklärt wurden.

4.1.5 Trigonometrie und Winkelfunktionen

Die Schulbücher der AHS behandeln – wie auch im Lehrplan vorgesehen – die Kapitel Trigonometrie und Winkelfunktionen in den Büchern der 5. Klasse (Trigonometrie) und 6. Klasse (Winkelfunktionen). In der HAK sind die Themen jeweils nur im Buch des III. Jahrgangs vorzufinden. Bei Steiner et al. bleibt zumindest die Reihenfolge aufrecht, da der Abschnitt zu Winkelfunktionen am Ende des Trigonometrie-Kapitels angebracht ist. In *Mathe mit Gewinn 2* ist dies allerdings ziemlich früh der Fall. Auffällig ist außerdem, dass die Anwendung auf Dreiecke erst sehr spät erfolgt, nämlich etwa ab dem letzten

Drittel des gesamten Abschnitts, die anderen Schulbücher beginnen das Kapitel hingegen mit Bezug auf das Dreieck.

4.1.6 Exponential-/Logarithmus-Funktion und Wachstums-/Abnahmeprozesse

Wachstums- und Abnahmeprozesse sind nicht direkt im Lehrplan der AHS zu lesen, dennoch werden sie in den AHS-Schulbüchern behandelt, da diese auch eine besonders naheliegende Anwendung der Exponentialfunktion sind. In den Büchern der HAK gibt es jeweils ein eigenes Kapitel zu Wachstums- und Abnahmeprozessen, weil diese Begriffe im Lehrplan wörtlich angeführt sind. Es wird zu Beginn des Kapitels sogar jeweils speziell auf die Anwendungen hingewiesen, die vor allem in der Naturwissenschaft und der Wirtschaft zu finden seien, wie z. B. bei Zinseszinsen, Bevölkerungs- und Pflanzenwachstum, bei radioaktivem Zerfall von Atomkernen usw. Der Einstieg zur Exponentialfunktion erfolgt in *Mathe mit Gewinn 2* mit der Altersbestimmung Ötzis. Ein Vergleich von linearem und exponentiellem Wachstum (den Grundformen des Wachstums) wird neben den beiden HAK-Schulbüchern auch in *Mathematik verstehen 6* vorgenommen, woraufhin in *Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 2* ein Vorgriff auf die Kapitel Kosten- und Preistheorie und Zinseszinsrechnung erfolgt, indem die Grenzkosten als Wachstumsrate (Steigung) der Kostenfunktion berechnet werden. Ist die Steigung konstant, liegt ein lineares Wachstum vor. Im Anschluss folgt eine Rechenaufgabe zur Zinseszinsrechnung als Beispiel für exponentielles Wachstum. Der Bezug zum Kapital bzw. zu Kosten ist somit von Anfang an gegeben.

4.1.7 Vektoren

Der erste grundlegende Unterschied findet sich bereits im Lehrplan. Das Themengebiet der Vektoren und der analytischen Geometrie der Ebene (5. Klasse) und der analytischen Geometrie des Raumes (6. Klasse) gehört in der AHS zum verpflichtenden Lehrstoff, hingegen hält sich der Umfang zu diesem Gebiet im HAK-Lehrplan recht knapp. Hier liest man bloß „Vektoren“, und das nicht als Basislehrstoff, sondern im Rahmen des Erweiterungslehrstoffes des II. Jahrgangs. Die unterschiedliche Wichtigkeit der analytischen Geometrie in den Schultypen AHS und HAK ist also schon im Lehrplan deutlich erkennbar und auch in den entsprechenden Schulbüchern ersichtlich. In den HAK-Lehrbüchern werden diesem Thema jeweils zwölf (Steiner et al.) bzw. elf Seiten (Hinkelmann et al.) gewidmet, bei Götz et al. hingegen schon im Buch der 5. Klasse 40

Seiten und in der 6. Klasse noch 64 Seiten, bei Malle et al. 56 und 48 Seiten – das ist in Summe beinahe der zehnfache Umfang in der AHS im Vergleich zur HAK.

4.1.8 Folgen und Reihen

Die Folgen und Reihen sind im Lehrplan jeweils in der 6. Klasse (AHS) bzw. im III. Jahrgang (HAK) vorgesehen. Dennoch wird dieses Themengebiet in beiden HAK-Schulbüchern sowohl im Buch des III. als auch des IV. Jahrgangs behandelt. Zunächst lernt man die Begriffe Folge und Reihe kennen sowie die Summenformeln, die man im selben Buch noch für das Rechnen mit Zinseszinsen und für die Rentenrechnung benötigen wird. Erst im Buch des IV. Jahrgangs werden Monotonie, Schranken, Grenzwerte etc. von Folgen in Betracht gezogen. Dies führt wiederum auf die Stetigkeit von Funktionen hin, die im Anschluss für die Differentialrechnung benötigt wird. Das Kapitel Folgen und Reihen wird in den HAK-Büchern allerdings recht theoretisch ohne viele Anwendungen durchgezogen, weshalb die benötigte Seitenanzahl auch gering ist. Besonders bei Hinkelmann et al. fällt auf, wie kurz das Thema behandelt wird. Vor dem Abschnitt zur Finanzmathematik (siehe Kapitel 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5), bei dem die Folgen und Reihen reichlich Anwendung finden, wird dort nur zwei Seiten auf die Summenformel für geometrische Reihen hingeführt und anschließend an die Zinseszinsrechnung angeknüpft. Aber auch in den Büchern der AHS konnte ich Anwendungen der Folgen und Reihen im Geldwesen feststellen. Im Buch von Malle et al. existiert sogar ein eigenes Kapitel mit dem Titel „Sparen, Rente, Kredite“, das 14 Seiten umfasst.

4.1.9 Differentialrechnung

Die Differentialrechnung ist ein umfangreiches Themengebiet, das man in den AHS-Büchern der 7. Klasse bzw. in den HAK-Büchern des IV. Jahrgangs findet, in denen es jeweils ein Drittel bis zur Hälfte des gesamten Buches umfasst. Es waren Unterschiede in der Einführung oder im Aufbau der Teilgebiete der Differentialrechnung zu erkennen, allerdings in allen vier Büchern und meistens nicht speziell die AHS oder die HAK betreffend. Zum Beispiel werden die Begriffe des Grenzwerts und der Stetigkeit, die man für die Berechnung der Tangentensteigung im Rahmen des „Tangentenproblems“ verwendet, in *Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 3* in einem vorangehenden eigenen Kapitel vor dem Abschnitt der Differentialrechnung behandelt, in *Mathe mit Gewinn 3* und *Mathematik 7* zu Beginn des Abschnitts und in *Mathematik*

verstehen 7 in einem Unterkapitel „Exaktifizierung der Differentialrechnung“, das am Ende des gesamten Themengebietes angeführt ist.

Ob das NEWTON'sche Näherungsverfahren im HAK-Unterricht als obligatorischer oder optionaler Lehrstoff zu betrachten ist, kann anhand des Lehrplans nicht festgestellt werden, aber dieses wird in beiden HAK-Büchern noch vor der Kurvendiskussion behandelt, hingegen bei Götz et al. als vertiefender Inhalt bei mehr als drei Wochenstunden Unterricht gekennzeichnet.

Die Kosten- und Preistheorie erhält in den HAK-Büchern ein eigenes Kapitel und gehört zu den Anwendungen der Differentialrechnung. Bei Steiner et al. ist die Kosten- und Preistheorie ein eigener Abschnitt, bei Hinkelmann et al. ein Unterkapitel zur Differentialrechnung. Die Kosten- und Preistheorie wird später behandelt (siehe Abschnitt 4.2.6).

Ich konnte allerdings schon bemerken, dass die HAK-Lehrbücher in Relation mehr finanzbezogene Aufgaben bringen. Als Beispiel dafür wird eine Extremwertaufgabe aus *Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 3* angeführt:

Beispiel:

In einer Schule soll ein Getränkeautomat aufgestellt werden. Eine Umfrage ergibt, dass bei einem Verkaufspreis von € 1,60 pro Dose bei „Die neue laue Brühe“ ein täglicher Verkauf von 200 Stück erwartet werden kann. Weiters resultiert aus der Befragung, dass sich der Absatz pro € 0,20 Preisänderung um 50 Stück linear verändern würde, also bei einem Preis von € 1,40 würden 250 Stück abgesetzt, bei einem Preis von € 1,80 nur 150 Stück, ...

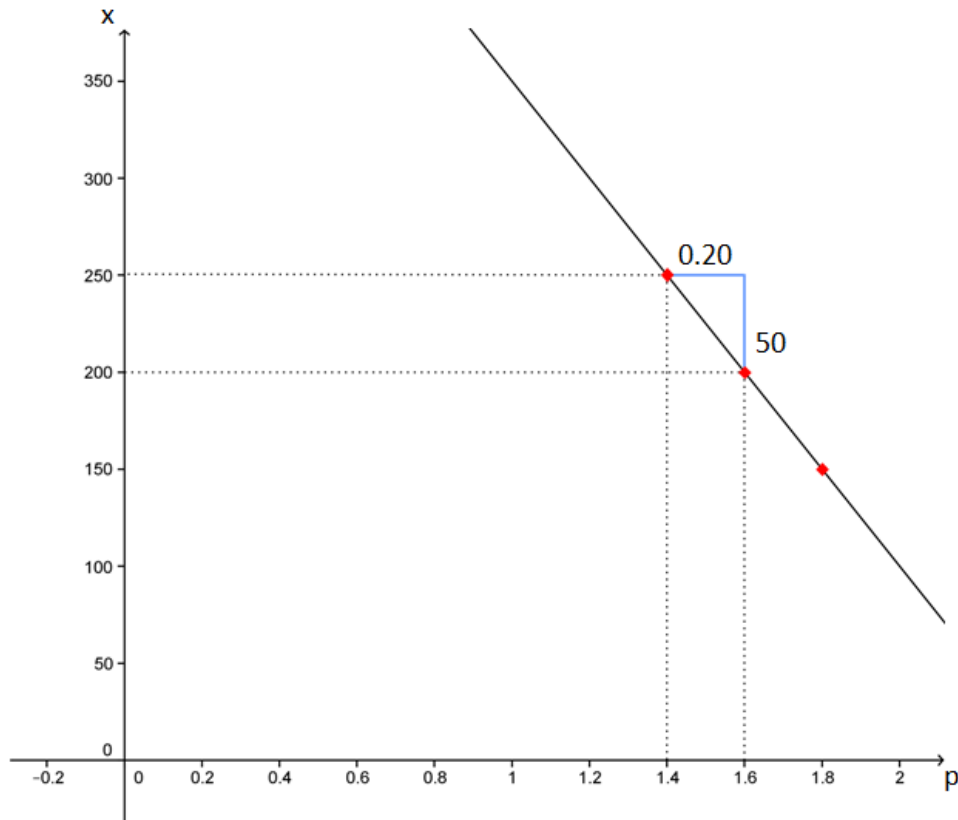
Bei welchem Verkaufspreis wären die Einnahmen aus dem Automaten maximal? Wie groß sind diese?¹⁵

Den linearen Zusammenhang versucht man am besten anhand einer Zeichnung darzustellen:

p ... Verkaufspreis in €

x ... Verkaufszahl

¹⁵ Steiner, 2007 (Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 3), S. 67



Die Punkte $(1,40|250)$, $(1,60|200)$ und $(1,80|150)$ sind rot eingezeichnet. Man berechnet die Steigung k der Geraden mit $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-50}{0,2} = -250$. Mit $x = k \cdot p + d$ ergibt sich $d = 600$ und somit folgender linearer Zusammenhang zwischen dem Verkaufspreis p und der Anzahl x der verkauften Dosen: $x = -250p + 600$

Die Einnahmen E sollen maximal werden, diese bilden also die Hauptbedingung (HB). Der Zusammenhang zwischen p und x wird zur Nebenbedingung (NB).

$$\text{HB: } E(p, x) = p \cdot x$$

$$\text{NB: } x = -250p + 600$$

Einsetzen der NB in die HB (die Einnahmen E hängen dann nur mehr vom Verkaufspreis p ab): $E(p) = p \cdot (-250p + 600) = -250p^2 + 600p$

$$\text{Berechnen der 1. Ableitung: } E'(p) = -500p + 600$$

$$\text{1. Ableitung gleich Null setzen: } E'(p) = 0$$

$$-500p + 600 = 0 \Rightarrow p = \frac{6}{5} = 1,20$$

Überprüfen des lokalen Maximums mittels 2. Ableitung:

$$E''(p) = -500 < 0 \Rightarrow p = 1,20 \text{ ist Maximum}$$

Berechnen von x : $x = -250 \cdot 1,20 + 600 = 300$

Berechnen der Einnahmen beim Verkaufspreis p : $E(1,20) = 1,20 \cdot 300 = 360$

Bei einem Verkaufspreis von € 1,20 wären die Einnahmen aus dem Automaten am höchsten. Sie betragen € 360,-.

Eine weitere Besonderheit in einem der HAK-Bücher: Bei Steiner et al. wird die sogenannte „Methode der kleinsten Quadrate“ erklärt und hergeleitet. Dies kann man mit den partiellen Ableitungen machen, weshalb man von einer Anwendung der Differentialrechnung sprechen kann. Diese Methode wird zu einem späteren Zeitpunkt bei der Regressionsrechnung (siehe Abschnitt 4.2.9) verwendet.

4.1.10 Differenzengleichungen – Simulation dynamischer Systeme

Beim Abschnitt zu Differenzengleichungen mit der Simulation dynamischer Systeme als Anwendung konnten keine HAK-spezifischen Unterschiede erkannt werden, bis auf den verstärkten IT-Bezug in den HAK-Büchern. Bei Steiner et al. wird dieses Kapitel nur sehr kurz behandelt (nämlich ausschließlich lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung), aber im Lehrplan der HAK ist für den V. Jahrgang im Rahmen des Erweiterungslehrestoffes ohnehin noch das Kapitel der Simulation wirtschaftlicher Probleme vorgesehen (siehe Abschnitt 4.2.13), bei dem Differenzengleichungen wieder eine Rolle spielen werden. Die anderen Schulbücher – in der AHS die der 8. Klasse und in der HAK die des II. Jahrgangs – befassen sich allerdings relativ ausführlich beispielsweise mit den verschiedenen Darstellungsformen von dynamischen Systemen bzw. Prozessen.

4.1.11 Integralrechnung

In der HAK sind die Differential- und die Integralrechnung im selben Jahrgang (IV. Jg.) vorgesehen, der Lehrplan der AHS hingegen schreibt die Differentialrechnung für die 7. Klasse und die Integralrechnung für die 8. Klasse vor. Die Integralrechnung an sich wird im HAK-Lehrplan außerdem als Erweiterungslehrestoff angeführt, im Basislehrestoff liest man hier bloß vom Integralbegriff.

Im Buch für den IV. Jahrgang von Hinkelmann et al. findet man zwei wirtschaftliche Anwendungen der Integralrechnung:

Konsumenten- und Produzentenrente:¹⁶

Sei $p(x)$ die Nachfragefunktion. Wird ein Marktpreis $\bar{p}$ festgesetzt, entsteht die Nachfrage $\bar{x}$ mit $p(\bar{x}) = \bar{p}$. Nun ist die Frage nach der Ersparnis der Konsumenten, die auch einen höheren Preis als $\bar{p}$ zu zahlen bereit gewesen wären. Zur Abschätzung dieser Ersparnis wird die Mengenachse $0 \leq x \leq \bar{x}$ in n gleich große Intervalle der Breite Δx geteilt, x_k soll jeweils die Mitte des Intervalls sein und $p_k = p(x_k)$ der dafür mögliche bzw. noch zumutbare Preis. Der Erlös wäre hier $p(x_k) \cdot \Delta x$ und die Ersparnis daher $p(x_k) \cdot \Delta x - \bar{p} \cdot \Delta x$. Die Summe aller Ersparnisse ist dann $\sum_{k=1}^n (p(x_k) \cdot \Delta x - \bar{p} \cdot \Delta x) = \sum_{k=1}^n (p(x_k) - \bar{p}) \cdot \Delta x$. Eine Verfeinerung der Intervalle ($\Delta x \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$) führt zum bestimmten Integral

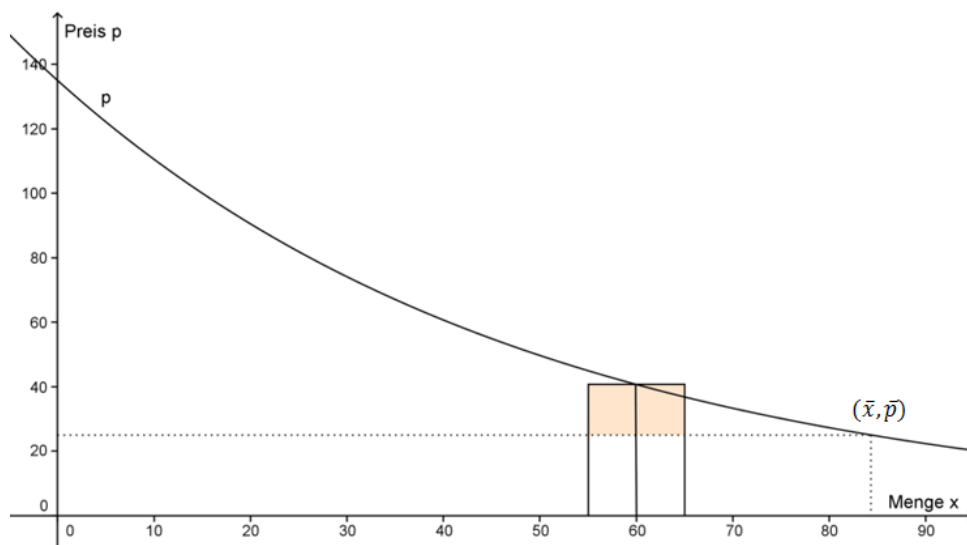
$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n (p(x_k) - \bar{p}) \cdot \Delta x = \int_0^{\bar{x}} (p(x) - p(\bar{x})) dx$$

und stellt die sogenannte Konsumentenrente dar.

Beispiel:

Sei $p(x) = 135 \cdot e^{-0,02x}$ die monatliche Nachfragefunktion für ein Computerspiel und der Marktpreis hätte sich auf € 25,- eingependelt. Wie hoch ist die monatliche Konsumentenrente?

Die zum Preis $\bar{p} = 25$ gehörige Menge $\bar{x}$ ist $\bar{x} \approx 84,32$. Die oben erklärte Unterteilung in die Intervalle kann man sich folgendermaßen vorstellen:



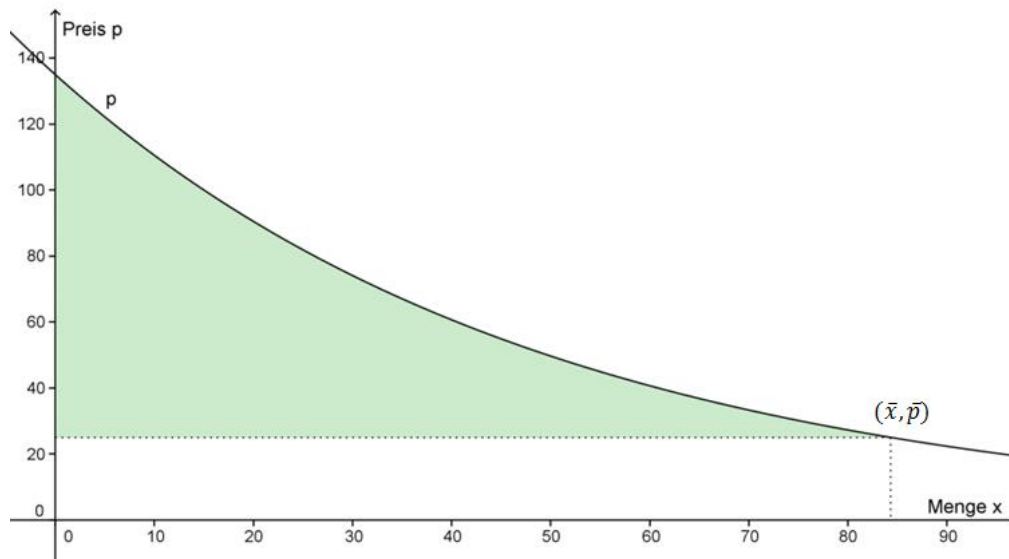
¹⁶ Hinkelmann, 2007 (Mathe mit Gewinn 3), S. 151 f.

Hier wurde um die Menge $x = 60$ ein Intervall der Breite 10 gebildet und die Ersparnis für dieses Intervall dargestellt (orange hinterlegte Fläche).

Die Summe der Flächeninhalte aller Intervalleinteilungen nähert sich dem bestimmten Integral

$$\int_0^{84,32} (135 \cdot e^{-0,02x} - 25) dx$$

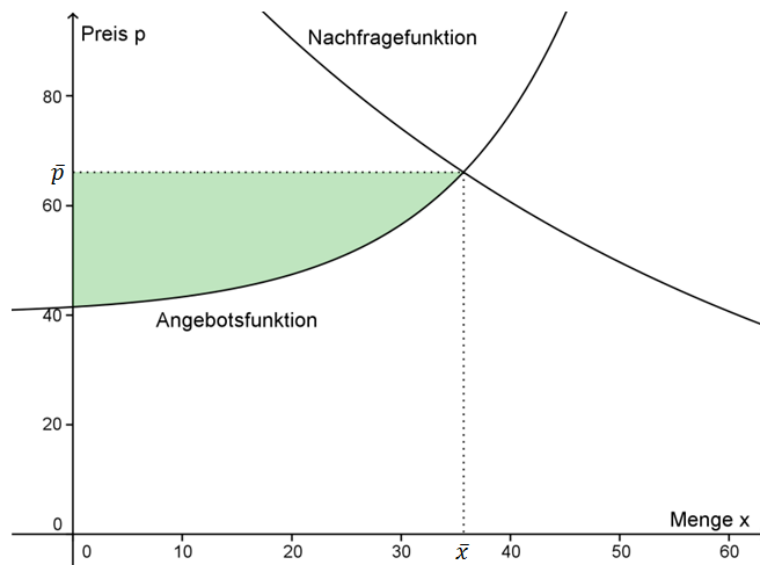
an, welches eine Konsumentenrente von ca. € 3392,- ergibt und sich grafisch wie folgt darstellen lässt (grün hinterlegte Fläche):



Aus der Sicht des Produzenten stellt sich die Frage, ob auch er profitieren kann, wenn er zu einem besseren Preis als ursprünglich gedacht verkaufen kann. Dieses Marktverhalten des Produzenten wird durch die Angebotsfunktion $a(x)$ beschrieben. Durch ähnliche Überlegungen wie vorher erhält man die sogenannte Produzentenrente:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n (\bar{p} - a(x_k)) \cdot \Delta x = \int_0^{\bar{x}} (p(\bar{x}) - a(x)) dx$$

Die zugehörige grafische Darstellung sieht folgendermaßen aus:



Kapitalströme und stetige Verzinsung:¹⁷

Hinkelmann et al. erzählen von Dagobert Duck, der ein Vermögen zum Jahreszinssatz $i = 6\%$ anlegt und dabei möglichst kurze Verzinsungsperioden möchte. Zum Zeitpunkt der Integralrechnung weiß man schon aus den Kapiteln der Finanzmathematik wie z. B. der Zinseszinsrechnung, dass unterschiedliche Zinsperioden nicht dieselben Zinsen liefern (je kürzer die Zinsperiode, desto höher das Endkapital), es sei denn man verwendet äquivalente (konforme) Zinssätze. Ist der Jahreszinssatz $i = 6\%$, so ist der Halbjahreszinssatz für gleich hohe Zinsen nicht $\frac{6}{2} = 3\%$, sondern man erhält aus $(1+i_2)^2 = 1+i$ den äquivalenten Halbjahreszinssatz $i_2 = 2,9563\%$. Oft wird hier $j_2 = 2 \cdot i_2 = 5,9126\%$ angegeben mit der Beziehung $(1 + \frac{j_2}{2})^2 = 1 + i$. Dasselbe gilt analog für Quartals- ($j_4 = 5,8695\%$), Monatszinssätze ($j_{12} = 5,8302\%$) usw. und allgemeint gilt: $(1 + \frac{j_m}{m})^m = 1 + i$. Versucht man nun, die Zinsperiode auf einen Tag, eine Stunde etc. oder sogar auf eine „unendlich“ kurze Zeit zu beschränken, nähert sich der Zinssatz j_m einem Grenzwert j_∞ (hier: $j_\infty = 5,8269\%$). Man nennt diesen den stetigen Zinssatz und er ergibt sich aus

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{j_\infty}{m}\right)^m = e^{j_\infty}$$

$$e^{j_\infty} = 1 + i \quad | \ln$$

$$j_\infty = \ln(1 + i)$$

¹⁷ Hinkelmann, 2007 (Mathe mit Gewinn 3), S. 159 ff.

Die zur Jahresverzinsung mit dem Jahreszinssatz i äquivalente sogenannte stetige Aufzinsungsformel lautet: $E_t = K_0 \cdot e^{j_{\infty} \cdot t}$ (Endwert nach t Zinsperioden)

Mittels stetiger Verzinsung kann man unter anderem Aufgaben wie die folgende lösen:

Beispiel:

Aus einer Beteiligung an einem Unternehmen fließen für die nächsten t Jahre voraussichtliche Erträge von $2000 \cdot 1,018^t$ pro Jahr. Wie groß ist die voraussichtliche Summe aller Erträge, wenn man an eine Beteiligungsdauer von acht Jahren denkt?

Diese Aufgabe ist etwas missverständlich formuliert, denn genau genommen müsste man von der momentanen Änderungsrate der Erträge sprechen, statt von voraussichtlichen Erträgen pro Jahr. Man könnte die Aufgabenstellung nämlich auch so interpretieren, dass bei einer Beteiligungsdauer von acht Jahren ($t = 8$) die Erträge pro Jahr um $2000 \cdot 1,018^8$ anwachsen, was eine Summe aller Erträge von $2000 \cdot 1,018^8 \cdot 8 \approx 18454,50$ ergäbe.

Ähnlich wie schon bei der Konsumenten- oder Produzentenrente erhält man die Gesamtsumme mittels näherungsweisen Rechtecken, die in das bestimmte Integral $\int_0^8 2000 \cdot 1,018^t dt = 17198,07$ überführen. Die voraussichtliche Summe aller Erträge beträgt daher etwa € 17.198,07.

4.1.12 Stochastik (Statistik und Wahrscheinlichkeit)

Die ersten Unterschiede zwischen AHS und HAK finden sich bereits im Lehrplan, aus dem hier die wichtigsten Begriffe des Lehrstoffs angeführt sind:

AHS	HAK
<u>6. Klasse:</u> Beschreibende Statistik, Darstellungsformen, Zufallsversuch; Wahrscheinlichkeitsbegriff, bedingte Wahrscheinlichkeit	<u>II. Jahrgang:</u> Beschreibende Statistik (Einführung und Trendlinie), deren grafische Darstellungsformen
<u>7. Klasse:</u> Zufallsvariable und diskrete Verteilung (insbesondere Binomialverteilung); Mittelwert, Erwartungswert, empirische Varianz	<u>V. Jahrgang:</u> Beurteilende Statistik; Wahrscheinlichkeits- und

8. Klasse:

Stetige Zufallsvariable und stetige Verteilung,
Normalverteilung, statistische Hypothesentests,
Konfidenzintervalle

Verteilungsfunktion,
Regressionsrechnung,
Korrelation; Kontingenz

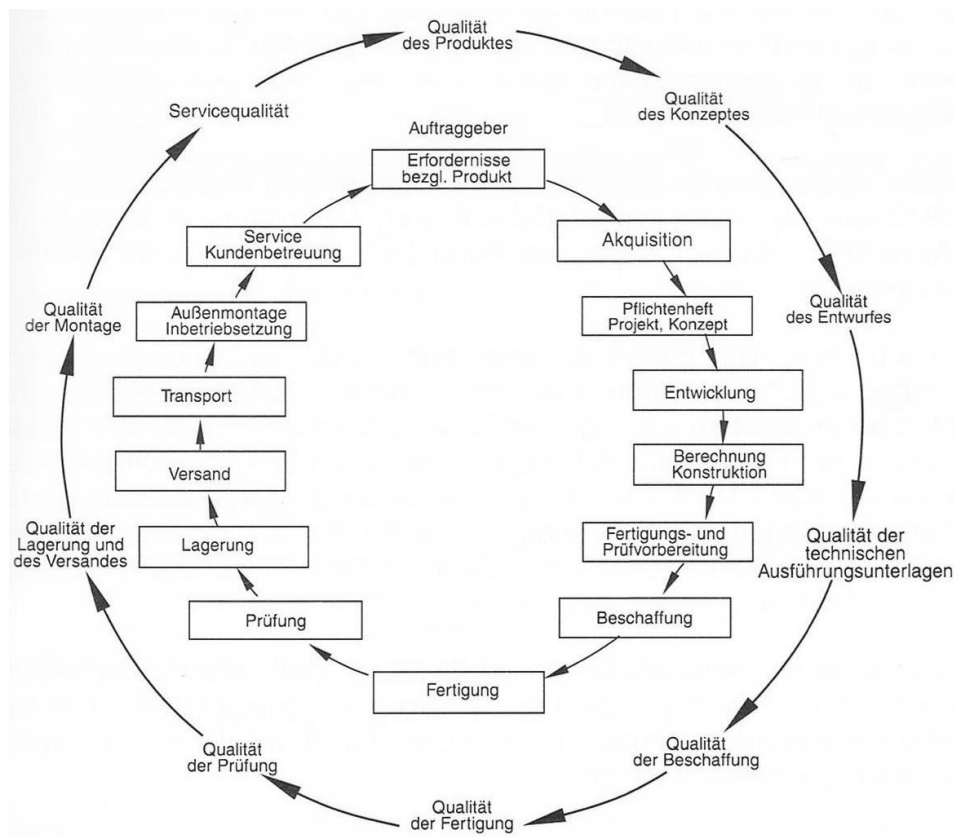
Das Großkapitel der Stochastik wird in der AHS in der 6., 7. und 8. Klasse vorgeschrieben. Dabei beschäftigt man sich in der 6. Klasse mit der Statistik und hört auch erstmals vom Wahrscheinlichkeitsbegriff. Die Zufallsvariable und die diskrete Verteilung folgen in der 7. Klasse, die stetige Zufallsvariable und stetige Verteilung in der 8. Klasse. In der HAK beschränkt man sich im II. Jahrgang auf die (zunächst nur beschreibende) Statistik und führt den Begriff der Wahrscheinlichkeit erst im V. Jahrgang ein. Der Abschnitt zur beurteilenden Statistik in der HAK führt über in das Kapitel der Regressionsrechnung und Korrelation, das aber erst im Abschnitt 4.2.9 genauer behandelt wird. In den Schulbüchern der HAK werden außerdem zu Beginn des Statistik-Kapitels die Begriffe bzw. Unterschiede der beschreibenden und der beurteilenden Statistik geklärt:

Beschreibende Statistik: Die beschreibende Statistik erfasst Daten und beschreibt diese möglichst übersichtlich durch Tabellen, Grafiken und Kennzahlen.

Beurteilende Statistik: Die beurteilende Statistik prognostiziert und vergleicht auf Basis der beschreibenden Statistik.

Der Begriff der Trendlinie findet zwar auch im Buch von Malle et al. Gebrauch, allerdings erfolgt in den HAK-Büchern eine umfangreichere Behandlung davon. Die Trendlinie im II. Jahrgang ist schon ein Vorgriff auf die Regressionsrechnung im V. Jahrgang, bei der der Zusammenhang zweier Variablen untersucht wird. Zeitliche Entwicklungen sollen häufig nachgezeichnet werden, wodurch sogenannte Zeitreihen entstehen, bei denen sich zeitlich verändernde Werte einer Untersuchungsvariablen Zeiträumen oder Zeitpunkten zugeordnet werden. Der gesuchte mathematische Zusammenhang wird durch eine Trendlinie beschrieben. Beispiele für einen derartigen zweidimensionalen Zusammenhang sind z. B. die Kursentwicklung einer Aktie im Verlauf eines Jahres oder das Bruttoinlandsprodukt (BIP) in Österreich von 1988 bis heute. Anstatt der Zeit gibt es auch andere Parameter, man kann beispielsweise das Gewicht eines Menschen in Abhängigkeit von seiner Körpergröße untersuchen.

Es lassen sich mit Hilfe der beurteilenden Statistik Prognosen treffen und aus einer Stichprobe Rückschlüsse auf die Grundgesamtheit ziehen. Ein Anwendungsgebiet der beurteilenden Statistik, das bei Steiner et al. erklärt wird, ist die industrielle Qualitätssicherung. Für ein Qualitätsprodukt muss ein Unternehmen Produkte anbieten, deren Preis, Liefertermin und Qualität den Anforderungen der Kunden entsprechen. Dann kann das Unternehmen am Markt bestehen und die Arbeitsplätze der Mitarbeiter sind besser gesichert. Hinter der Entstehung eines Qualitätsproduktes steckt ein geplantes und systematisches Vorgehen. Steiner et al. zeigen eine modellhafte Veranschaulichung des Zusammenhangs der Unternehmensfunktionen mittels Qualitätskreis:¹⁸



Der äußere Kreis zeigt qualitätsbestimmende Tätigkeiten in der Reihenfolge ihrer Einwirkung auf die Entstehung des Produktes. Im inneren Kreis sind die Unternehmensfunktionen dargestellt, die diese Tätigkeiten verantwortlich auszuführen haben. Die Qualitätssicherung befasst sich mit den Maßnahmen zur Erzielung der geforderten Qualität, sodass diese den Anforderungen des Kunden genügt. Die Methoden zur Unterstützung der Qualitätssicherung sind hauptsächlich statistische Verfahren.

¹⁸ Steiner, 2008 (Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 4), S. 1

4.1.13 IT-Bezug

Die vom Lehrplan der HAK für Mathematik geforderte Technologieunterstützung ist durchaus in den Schulbüchern vorzufinden, aber auch die AHS-Bücher von Götz und Malle bieten diese an und verweisen auf den Verlagsserver, auf dem ergänzende Online-Inhalte zu finden sind. Götz et al. behaupten, man könne der Vielfalt von Gestaltungs- und Verwendungsmöglichkeiten allein im Buch ohnehin nicht nachkommen, weshalb sie nur wenige Bildschirmkopien darstellen, dafür aber Online-Inhalte zur Verfügung stellen.

Direkt in den Schulbüchern ist durch zahlreichere Abbildungen von Screenshots mit Erläuterungen dazu allerdings doch ein verstärkter IT-Bezug in der HAK festzustellen. Außerdem findet man bei Steiner et al. jeweils ein eigenes Anhangkapitel, bei Hinkelmann et al. und einem weiteren HAK-Schulbuch (Schodl et al.) ebenfalls ergänzende Online-Inhalte für begleitende Unterstützung durch Material zum Technologieeinsatz oder für medienübergreifendes Lernen. Das HAK-Buch von Tinhof et al. hat stattdessen eine Übungs-CD-Rom mit ergänzenden Inhalten und Beispielen beiliegen.

4.1.14 Sonstiges

Es gibt einen weiteren Unterschied, der zwischen AHS- und HAK-Büchern auffällt. Beim Durchblättern von zwei AHS- und vier HAK-Buchbänden von verschiedenen Verlagen stellte ich verschiedene Arten der Anrede des Schülers fest. Beide AHS-Bücher gebrauchen die Anrede „du“, weshalb die Aufgaben die Formulierungen „Löse ...“, „Begründe ...“, „Ermittle ...“ lauten. Zwei der HAK-Bücher verwenden Aufforderungen wie „Berechnen Sie ...“ oder „Stellen Sie ... dar“, gebrauchen also die „Sie“-Anrede. Steiner et al. enthalten sich der du-/Sie-Anrede und formulieren Ihre Aufgaben neutral mittels Ausdrücken wie „Man berechne/zeige ...“ oder „... ist zu ermitteln/zu vereinfachen“. Hinkelmann et al. verwenden wie die AHS-Bücher die du-Anrede, formulieren allerdings in der Einleitung eine eigene Rechtfertigung dafür: Die Begründung sei ein moderner schülerzentrierter Unterricht, bei dem die Partnerschaft zwischen Lernenden, Lehrenden und den Autoren unterstrichen werden soll, allerdings nicht als Vorgabe für den Unterricht zu verstehen sei.

4.2 Themengebiete der Mathematik in der HAK

In diesem Kapitel möchte ich einen Überblick über die jeweiligen Themengebiete geben, die im AHS-Lehrplan bzw. in den AHS-Lehrbüchern nicht vorkommen. Um die Themen aufzubereiten, orientiere ich mich an den oben angeführten HAK-Schulbüchern. Man soll dabei einen Eindruck davon erhalten, was sich ein AHS-Lehrer noch aneignen müsste, um an einer HAK Mathematik unterrichten zu können.

4.2.1 IT-Bezug

Der IT-Bezug wird vom Lehrplan der HAK gefordert. Dabei sollen die Schüler den Einsatz des Computers mit entsprechender Software lernen, beispielsweise mit Computeralgebrasystemen (CAS), Tabellenkalkulation bzw. grafikfähigem Taschenrechner.

Bei beiden Büchern aus der HAK ist die Gewichtung des IT-Bezugs im Vergleich zu den AHS-Büchern stärker. In *Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft* (Steiner et al.) gibt es in jedem Band am Ende ein eigenes Kapitel mit dem Titel "Der grafikfähige Taschenrechner Voyage 200", in dem es zu den Themen, die das jeweilige Buch behandelt, Beschreibungen gibt, um diverse themenspezifische Aufgaben und Problemstellungen mit Hilfe des grafikfähigen Taschenrechners – Texas Instruments Voyage 200 – zu lösen. Hier wird mittels zahlreicher Screenshots und Beschreibungen die richtige und sinnvolle Verwendung des Rechners gezeigt. Das bedeutet allerdings, dass in den Hauptkapiteln auf den IT-Bezug hauptsächlich verzichtet wird, vereinzelt gibt es jedoch einen Verweis auf das Anhangkapitel für das Arbeiten mit dem Voyage 200.

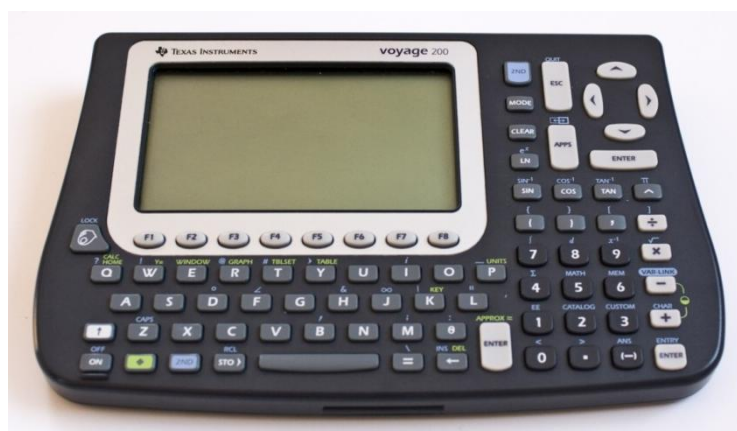


Abbildung 6: Texas Instruments Voyage 200 (<http://bepixelung.org/img/3/7/6/5376.jpg>)

Wie man auch in der Abbildung erkennen kann, besitzt dieser Taschenrechner neben einem Ziffernblock auch eine QWERTY-Tastatur. Neben einem meist üblichen Taschenrechner, mit dem man ausschließlich mit Zahlen rechnen kann, ist man mit diesem somit auch dazu fähig, mit symbolischen Ausdrücken wie z.B. Variablen oder Funktionen zu arbeiten, er verfügt über ein Computeralgebrasystem (CAS).

In Band 2 existiert zusätzlich ein Kapitel mit dem Titel "Tabellenkalkulation im Mathematikunterricht", in dem gezeigt wird, wie das Microsoft-Tabellenkalkulationsprogramm Excel zur Simulation dynamischer Prozesse verwendet werden kann.

Im Buch *Mathe mit Gewinn* (Hinkelmann et al.) ist der Aufbau im Gegensatz zum vorigen Buch jedoch anders, dennoch sehr IT-bezogen, vielleicht sogar noch stärker. Auf der Rückseite des Bucheinbandes liest man sogar von der Technologieunterstützung als grundlegendem Bestandteil der Buchreihe. Es gibt hier kein explizites Kapitel zur technologieunterstützten Arbeit, sondern diese ist in den Themenkapiteln laufend eingebaut. Hier werden mehrere technische Hilfsmittel gezeigt. Dazu gehören, gleich wie auch im vorigen Buch, der grafikfähige Taschenrechner Voyage 200 (in diesem Buch immer als CAS-Rechner bezeichnet) und das Tabellenkalkulationsprogramm Excel, außerdem die Mathematik-Software *Derive*, sowie ein weiterer grafikfähiger Taschenrechner (dafür wird die Abkürzung GTR gewählt), bei dem nicht von einem integrierten Computeralgebrasystem ausgegangen wird, dessen Display aber höher aufgelöst ist und dadurch beispielsweise Funktionsgraphen oder Diagramme anzeigen kann. Beinahe jeder Rechengang bei Hinkelmann et al. wird mit mindestens einem dieser vier technischen Hilfsmittel unterstützt, beschrieben und erklärt. An manchen Stellen wird auf die Erklärung der händischen Berechnung der Ergebnisse verzichtet. Auch hier werden viele Screenshots der einzelnen Mittel dargestellt. Als Beispiel dazu wird ein Scan aus dem Buch (hier aus dem Kapitel Trigonometrie) gezeigt:

Beispiel: Finde die Winkel in Grad und im Bogenmaß!

a) $\sin \alpha = 0,49$

b) $\cos \alpha = 0,49$

Lösung: Unsere technischen Hilfsmittel geben dafür folgende Lösungen an:

#1:	ASIN(0.49)	#1:	ACOS(0.49)
#2:	0.5120897529	#2:	1.058706573
#3:	$\frac{\text{ASIN}(0.49)}{1^\circ}$	#3:	$\frac{\text{ACOS}(0.49)}{1^\circ}$
#4:	29.34058157	#4:	60.65941842

Derive

sin ⁻¹ (0.49)	sin ⁻¹ (0.49)
29.34058158	.5120897529
cos ⁻¹ (0.49)	cos ⁻¹ (0.49)
60.65941842	1.058706574

GTR

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean	Up
sin ⁻¹ (.49) 29.3406					
cos ⁻¹ (.49) 60.6594					
sin ⁻¹ (.49) .51209					
cos ⁻¹ (.49) 1.05871					

CAS-Rechner

Abbildung 7: Abbilden von Screenshots der verschiedenen technischen Hilfsmittel in *Mathe mit Gewinn 2*, S. 18

In der Abbildung ist eine Aufgabe zu sehen, in der bei gegebenem $\sin \alpha$ -Wert bzw. $\cos \alpha$ -Wert die Berechnung des Winkels α in Grad und in Bogenmaß gefordert wird. Da im Buch ständig technologieunterstützt gearbeitet wird, wird klarerweise nicht bei jedem Beispiel erklärt, was der Schüler in das Gerät einzugeben hat, um zu einem Ergebnis zu gelangen. Daher wird auch hier die Handhabung des Hilfsmittels vorausgesetzt – z. B. wie man den Arcussinus eines Wertes berechnet oder die Einstellung von Grad zu Bogenmaß ändert – und nur ein Screenshot der Anzeige mit den Ergebnissen abgebildet.

4.2.2 Matrizen

In der Mathematik wird ein rechteckig angeordnetes Zahlenschema als **Matrix** bezeichnet. Der Begriff wurde vom englischen Kaufmannssohn Arthur Cayley (1821 – 1895) geprägt.¹⁹ Die Matrizenrechnung ist ein großartiges Werkzeug, um mit großen Mengen von Zahlen zu arbeiten, die sich in Tabellen anordnen lassen. Zusammenhänge, die z. B. auch in der Wirtschaftsmathematik häufig auftreten, lassen sich in Matrizen gut darstellen.

Beispiel: Die Außenhandelsbeziehungen von Ländern während eines bestimmten Zeitraumes lassen sich darstellen

¹⁹ Hinkelmann, 2005 (Mathe mit Gewinn 1), S. 184

in einer Tabelle:

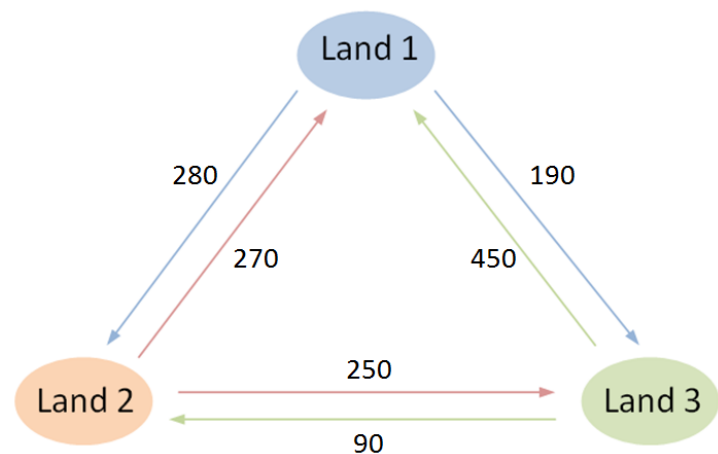
	Land 1	Land 2	Land 3
Land 1	0	280	190
Land 2	270	0	250
Land 3	450	90	0

als Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 280 & 190 \\ 270 & 0 & 250 \\ 450 & 90 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Werte in der Tabelle bzw. Matrix geben die Höhe der Exporte in Millionen US-Dollar an, weshalb die Werte in der Diagonale natürlich 0 betragen. (Zeilen $\triangleq$ Export, Spalten $\triangleq$ Import; Beispiel: Land 2 exportiert Waren im Wert von 270 Mio. US-Dollar ins Land 1)

Das Beispiel lässt sich grafisch auch gut mittels sogenanntem **Gozintograf** darstellen:



Der Name dieser Darstellungsform von Leistungsverflechtungen kommt vom englischen „it goes into“.²⁰

²⁰ Steiner, 2005 (Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 1), S. 162

Allgemein hat eine Matrix folgende Form:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & & a_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{m1} & & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die erste Indexziffer der **Elemente** a_{ij} der Matrix gibt die Zeile, die zweite die Spalte an. Die Matrix kann beliebig viele Zeilen und Spalten haben, man spricht dann je nach Anzahl von einer $(m \times n)$ -Matrix (m Zeilen, n Spalten). Die sogenannte **Dimension** einer Matrix ist $(m \times n)$.

Matrizen, die nur aus einer einzigen Zeile oder Spalte bestehen, nennt man **Vektoren**. Diese werden mit einem durch einen Pfeil gekennzeichneten Kleinbuchstaben abgekürzt.

$$\text{Zeilenvektor: } \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{Spaltenvektor: } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$\triangleq (1 \times n)$ -Matrix

$\triangleq (n \times 1)$ -Matrix

(Bei Steiner et al. wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass im Abschnitt „Matrizen“ auf die Bedeutung von Vektoren in der analytischen Geometrie nicht eingegangen wird, da dies an Handelsakademien nicht Bestandteil des Basislehrstoffs ist. In einem eigenen Abschnitt des Buches würde dieses Gebiet allerdings behandelt werden.)

Eigenschaften von Matrizen:

- Für eine **quadratische Matrix** gilt: Zeilenanzahl = Spaltenanzahl
- Bei einer sogenannten **Nullmatrix** sind alle Elemente 0.
- **Gleichartige** Matrizen stimmen in Zeilen- und Spaltenanzahl überein.
- Vertauscht man bei einer Matrix A die Zeilen und Spalten miteinander, entsteht die dazu **transponierte** oder **gespiegelte** Matrix A^T .

$$\text{z. B. } A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Eine $(n \times m)$ -Matrix ergibt transponiert daher eine $(m \times n)$ -Matrix.

- Eine quadratische Matrix, bei der die Hauptdiagonale nur aus Einsen besteht und alle restlichen Elemente 0 sind, heißt **Einheitsmatrix** E .

$$\text{z. B. } E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es sind verschiedene Rechenoperationen für Matrizen definiert. Wenn zwei Matrizen **gleichwertig** sind bzw. gleiche Dimension haben, d. h. in Zeilen- und Spaltenanzahl übereinstimmen, kann man sie addieren bzw. subtrahieren, indem man die einzelnen an der gleichen Stelle stehenden Elemente addiert bzw. subtrahiert.

$$\text{z. B. } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Außerdem gelten hier: das Kommutativgesetz: $A + B = B + A$

und das Assoziativgesetz: $(A + B) + C = A + (B + C)$

Das Distributivgesetz gilt nicht.

Mit der **Matrizenaddition** kann man somit schnell die Export- bzw. Importbeträge von mehreren Zeitabschnitten zusammenfassen, indem man die obige Matrix und eine andere, die die Beträge für einen anderen bestimmten Zeitraum beschreibt, addiert.

Möchte man beispielsweise die angegebenen US-Dollar-Beträge in Euro umrechnen, funktioniert dies mittels als Rechenoperation definierter **Multiplikation** einer Matrix **mit einem Skalar**, indem man jedes Element der Matrix mit dem Skalar multipliziert.

Aktueller Umrechnungskurs²¹ USD → EUR: $\approx 0,75$

$$\begin{pmatrix} 0 & 280 & 190 \\ 270 & 0 & 250 \\ 450 & 90 & 0 \end{pmatrix} \cdot 0,75 = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0,75 & 280 \cdot 0,75 & 190 \cdot 0,75 \\ 270 \cdot 0,75 & 0 \cdot 0,75 & 250 \cdot 0,75 \\ 450 \cdot 0,75 & 90 \cdot 0,75 & 0 \cdot 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 210 & 142,5 \\ 202,5 & 0 & 187,5 \\ 337,5 & 67,5 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation:

Beispiel:

Ein Fastfood-Restaurant bietet unter anderem eine Menüzusammenstellung mit Getränk, Chicken nuggets und Pommes frites, wovon es ein Menü „Normal“ und ein

²¹ <http://www.umrechnung.org/waehrungen-umrechnen/waehrungs-kurs-umrechner.htm>

kleineres Menü „Small“ mit geringeren Mengen pro Menüspeise gibt. Die folgenden Tabellen und Matrizen geben die entsprechenden Mengen für die Menüzusammensetzung bzw. den Verkauf für ein Wochenende an.

Menü	Normal	Small
Getränk	0,4 l	0,25 l
Chicken nuggets	10 Stk.	6 Stk.
Pommes frites	150 g	100 g

Verkauf	Samstag	Sonntag
„Normal“	41	35
„Small“	19	22

$$Z = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,25 \\ 10 & 6 \\ 150 & 100 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 41 & 35 \\ 19 & 22 \end{pmatrix}$$

Wie viel wurde am Samstag verkauft?

Getränk: $0,4 \cdot 41 + 0,25 \cdot 19 = 21,15$ l

Chicken nuggets: $10 \cdot 41 + 6 \cdot 19 = 524$ Stk.

Pommes frites: $150 \cdot 41 + 100 \cdot 19 = 8050$ g

Das Ergebnis $\begin{pmatrix} 21,15 \\ 524 \\ 8050 \end{pmatrix}$ ist wieder ein Vektor, den man als Produkt der Matrix Z mit dem

Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 41 \\ 19 \end{pmatrix}$ (Verkaufszahlen von Samstag) anschreiben kann:

$$Z \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,25 \\ 10 & 6 \\ 150 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 41 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21,15 \\ 524 \\ 8050 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor ist nur dann möglich, wenn die Matrix so viele Spalten hat wie der Vektor Zeilen bzw. Elemente hat.

Analog kann man die verkauften Mengen für das ganze Wochenende berechnen, indem man die Matrix Z mit der Matrix V multipliziert. Die Vorgangsweise für die Berechnung soll durch die farbigen Pfeile veranschaulicht werden.

$$Z \cdot V = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,25 \\ 10 & 6 \\ 150 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 41 & 35 \\ 19 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 41 + 0,25 \cdot 19 & 0,4 \cdot 35 + 0,25 \cdot 22 \\ 10 \cdot 41 + 6 \cdot 19 & 10 \cdot 35 + 6 \cdot 22 \\ 150 \cdot 41 + 100 \cdot 19 & 150 \cdot 35 + 100 \cdot 22 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 21,15 & 14 \\ 524 & 482 \\ 8050 & 7450 \end{pmatrix}$$

Hierbei wird jede Zeile der ersten Matrix mit jeder Spalte der zweiten Matrix elementweise multipliziert und die Produkte addiert.

Eine Methode zur praktischen händischen Berechnung ist das „Falksche Schema“²², bei dem man die zu multiplizierenden Matrizen diagonal zueinander anschreibt. Dabei ist deutlicher zu sehen, welche Elemente mit welchen multipliziert und addiert werden sollen, und wohin dieses Ergebnis dann gehört.

$$Z = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,25 \\ 10 & 6 \\ 150 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 & 35 \\ 19 & 22 \end{pmatrix} = V$$

$$\begin{pmatrix} 21,15 & 14 \\ 524 & 482 \\ 8050 & 7450 \end{pmatrix} = Z \cdot V$$

Die Multiplikation zweier Matrizen (einer Matrix mit einem Vektor) funktioniert nur, wenn die erste Matrix so viele Spalten hat wie die zweite Matrix (der Vektor) Zeilen hat. Es gilt: $(r \times s)$ -Matrix $\cdot$ $(s \times t)$ -Matrix = $r \times t$ -Matrix

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation:

- Das Kommutativgesetz gilt nicht: $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Das Assoziativgesetz gilt: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- Das Distributivgesetz gilt: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
 $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- Das **Nullelement** existiert. Multipliziert man eine Matrix A mit einer Nullmatrix O , erhält man eine Nullmatrix: $A \cdot O = O$
- Das **neutrale Element** existiert. Multipliziert man eine Matrix A mit einer Einheitsmatrix E geeigneter Ordnung, bleibt die Matrix A unverändert:

²² Bückner, 1993 (Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler), S. 236 f.

$$A \cdot E = A \text{ bzw. } E \cdot A = A$$

$$\text{Beispiel: } \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 6 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Für eine quadratische Matrix A gilt hier auch das Kommutativgesetz:

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

Außerdem existiert für quadratische Matrizen, deren Determinante (siehe unten) ungleich Null ist, das **inverse Element**. Durch Multiplikation einer Matrix mit ihrer inversen Matrix ergibt sich die Einheitsmatrix: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Die inverse Matrix erhält man z. B. durch Lösen des Gleichungssystems, das sich aus (hier für $\mathbb{R}^2$) $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt:

$$(1) a \cdot x_{11} + b \cdot x_{21} = 1$$

$$(2) a \cdot x_{12} + b \cdot x_{22} = 0$$

$$(3) c \cdot x_{11} + d \cdot x_{21} = 0$$

$$(4) c \cdot x_{12} + d \cdot x_{22} = 1$$

Das Gleichungssystem hat folgende Lösungen:

$$x_{11} = \frac{d}{ad - bc}, x_{12} = \frac{-b}{ad - bc}, x_{21} = \frac{-c}{ad - bc}, x_{22} = \frac{a}{ad - bc}$$

Hier sieht man bereits, dass $ad - bc \neq 0$ sein muss. Der Ausdruck $ad - bc$ heißt **Determinante** der Matrix A ($\det A$) im $\mathbb{R}^2$. Für die Existenz der Inversen muss also gelten: $\det A \neq 0$

Die inverse Matrix für quadratische Matrizen im $\mathbb{R}^2$ lautet daher allgemein:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Natürlich existieren Determinanten auch für größere quadratische Matrizen. Für eine

Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ würde man schreiben:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Diese Zusammenstellung der Summanden kann man sich durch folgende Darstellung leichter merken:

Die blauen Pfeile kennzeichnen die addierten, die roten die subtrahierten Glieder.

Eine Berechnung der Determinanten von (3x3)- oder größeren Matrizen erfolgt wohl einfacher und schneller mit technischen Hilfsmitteln.

Die Matrizenrechnung ist allgemein ein wichtiges Instrument zur Behandlung von linearen Gleichungssystemen. Jedes Gleichungssystem, das aus m Gleichungen mit n Unbekannten besteht, lässt sich in Matrizenform darstellen:

Dabei wird A Systemmatrix, $\vec{x}$ Variablenvektor und $\vec{b}$ Konstantenvektor genannt.

Allgemein gilt: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

(m×n)-Matrix · (n×1)-Matrix = (m×1)-Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

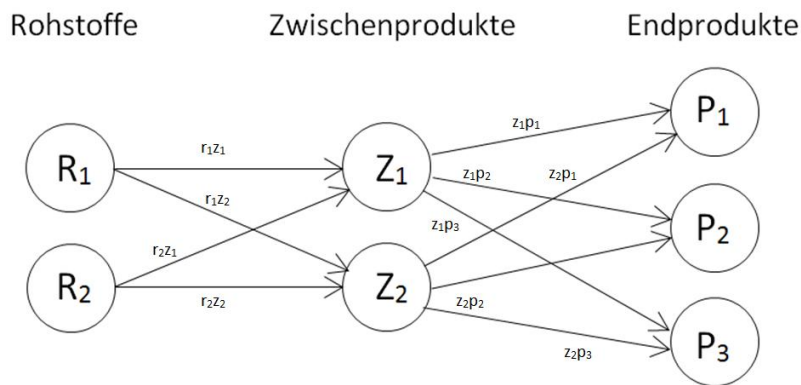
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Wenn $m = n$ und $\det A \neq 0$ gilt, kann man dieses Gleichungssystem mit der Inversen lösen, indem man beide Seiten von links mit der Inversen A^{-1} multipliziert:

$$\begin{aligned}
 A \cdot x &= b & | \cdot A^{-1} \text{ (auf beiden Seiten von links)} \\
 A^{-1} \cdot A \cdot x &= A^{-1} \cdot b & A^{-1} \cdot A = E \text{ (Einheitsmatrix) und } E \cdot x = x \\
 x &= A^{-1} \cdot b
 \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist daher $x = A^{-1} \cdot b$.

Eine häufige Anwendung der Matrizenrechnung ist in der Materialverflechtung zu finden. Beispielsweise werden zwei Vorprodukte oder Rohstoffe R_1 und R_2 zu Zwischenprodukten Z_1 und Z_2 verarbeitet, daraus wiederum werden Endprodukte E_1 , E_2 und E_3 hergestellt. Diese Beziehung lässt sich wieder sehr gut mittels Gozintograf darstellen.



Eine Tabelle, die die Verflechtungen der Rohstoffe, Zwischenprodukte und Endprodukte deutlich macht, könnte wie die folgende aussehen.

		ZP	P ₁	P ₂	P ₃
		Z ₁	z_1p_1	z_1p_2	z_1p_3
		Z ₂	z_2p_1	z_2p_2	z_2p_3
RZ	Z ₁	Z ₂	r_1z_1	r_1z_2	
R ₁	r_1z_1	r_1z_2	$r_1z_1 \cdot z_1p_1 + r_1z_2 \cdot z_2p_1$	$r_1z_1 \cdot z_1p_2 + r_1z_2 \cdot z_2p_2$	$r_1z_1 \cdot z_1p_3 + r_1z_2 \cdot z_2p_3$
R ₂	r_2z_1	r_2z_2	$r_2z_1 \cdot z_1p_1 + r_2z_2 \cdot z_2p_1$	$r_2z_1 \cdot z_1p_2 + r_2z_2 \cdot z_2p_2$	$r_2z_1 \cdot z_1p_3 + r_2z_2 \cdot z_2p_3$

RP

Aus der Matrix $RZ = \begin{pmatrix} r_1z_1 & r_1z_2 \\ r_2z_1 & r_2z_2 \end{pmatrix}$ kann man ablesen, wie viele Mengeneinheiten (ME) von den Rohstoffen R_1 und R_2 für je ein Zwischenprodukt Z_1 oder Z_2 benötigt werden. Analog zeigt die Matrix $ZP = \begin{pmatrix} z_1p_1 & z_1p_2 & z_1p_3 \\ z_2p_1 & z_2p_2 & z_2p_3 \end{pmatrix}$, wie viele ME der Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 für jeweils ein Endprodukt P_1 , P_2 oder P_3 nötig sind. Gesucht ist nun die Matrix

RP , die direkt den Rohstoffbedarf für die Produktion einer ME von P_1 , P_2 oder P_3 angibt. Diese ergibt sich aus der Multiplikation der Matrizen RZ und ZP , die sich bei obiger Tabellenschreibweise einfach durch das Falksche Schema durchführen lässt.

Anhand eines weiteren Beispiels soll deutlich gemacht werden, wieso die Produktmatrix die Matrix mit den gesuchten Werten ergibt.

Beispiel²³: Produktionskosten in einem Schichtbetrieb:

In den Hallen H_1 und H_2 werden in zwei Schichten S_1 und S_2 die Produkte A , B und C erzeugt. Der ersten Tabelle sind die Produktionskosten in den zwei Schichten zu entnehmen.

Kosten in beiden Schichten je ME in Geldeinheiten (GE):

Kostenmatrix K	A	B	C
S_1	3	4	5
S_2	2	3	6

In der zweiten Tabelle ist die Produktionshöhe in beiden Hallen je Schicht in ME abzulesen.

Produktionsmatrix P	H_1	H_2
A	4	5
B	2	3
C	3	6

In Halle H_1 werden 4 ME des Produkts A , 2 ME des Produkts B und 3 ME des Produkts C produziert. $\Rightarrow H_1 = 4A + 2B + 3C$

Die Produktion des Produkts A verursacht Kosten von 3 GE in der Schicht S_1 und Kosten von 2 GE in Schicht S_2 . $\Rightarrow A = 3S_1 + 2S_2$. Analog folgt $B = 4S_1 + 3S_2$ und $C = 5S_1 + 6S_2$.

Die Kosten in Halle H_1 in Schicht S_1 bzw. S_2 setzen sich zusammen aus den jeweiligen Produktionskosten für die Produkte A , B und C . Analog für Halle H_2 .

$$\Rightarrow H_1 = 4 \cdot (3S_1 + 2S_2) + 2 \cdot (4S_1 + 3S_2) + 3 \cdot (5S_1 + 6S_2) = 35S_1 + 32S_2$$

$$\Rightarrow H_2 = 5 \cdot (3S_1 + 2S_2) + 3 \cdot (4S_1 + 3S_2) + 6 \cdot (5S_1 + 6S_2) = 57S_1 + 55S_2$$

²³ entnommen aus Tinhof, 2012 (Mathematik II HAK/LW), S. 231

In Vektorschreibweise:

$$H_1 = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 \\ 55 \end{pmatrix}$$

Die beiden Vektoren H_1 und H_2 nebeneinander ergeben die gesuchte Produktmatrix $\begin{pmatrix} 35 & 57 \\ 32 & 55 \end{pmatrix}$, die die Produktionskosten je Schicht für die beiden Hallen angibt, und die man auch durch Multiplikation der Kostenmatrix K mit der Produktionsmatrix P erhalten würde. Hierzu eine Übersicht in einer großen Tabelle:

			P	H_1	H_2
			A	4	5
			B	2	3
K	A	B	C	3	6
S_1	3	4	5	$3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 35$	57
S_2	2	3	6	32	55

Interpretation der Produktmatrix:

Die Produktionskosten betragen in Halle H_1 in der Schicht S_1 35 GE und in der Schicht S_2 32 GE. Die Produktionskosten betragen in der Halle H_2 in der Schicht S_1 57 GE und in der Schicht S_2 55 GE.

Finanzmathematik 1

Anwendungen im Alltag sind bei der Finanzmathematik naheliegend. Jeder wird schon einmal ein Konto angelegt haben, der eine oder andere möchte vielleicht eine Lebensversicherung abschließen, hoffentlich eher wenige müssen möglicherweise einen Kredit aufnehmen, um ihre Schulden zu tilgen. Bei den folgenden drei Themengebieten – Zinsen und Zinseszinsen, Rentenrechnung und Schuldtilgung – soll erklärt werden, wie in der Finanzmathematik mit Geldbeträgen gerechnet wird.

Peggy Daume schreibt, die Verantwortung für die Altersvorsorge würde verstärkt auf den Einzelnen übertragen werden, da die Rentenversorgung nach dem bisherigen Umlageverfahren nicht mehr aufrecht zu erhalten sei. Aufgrund dieser zunehmenden

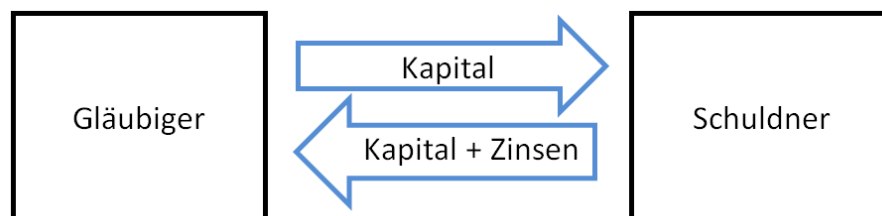
Individualisierung werden die Anforderungen in persönlichen finanziellen Entscheidungsprozessen höher.²⁴

„Finanzielle Allgemeinbildung ist die Vermittlung von Verständnis, Wissen und sozialer Handlungskompetenz beim Umgang mit den Finanzdienstleistungen in Kredit, Anlage, Zahlungsverkehr und Versicherungen, die vor allem Banken und Versicherungen anbieten.“²⁵

Die gesetzlichen Grundlagen für Banken und Kreditinstitute sind in Österreich im Bankwesengesetz (BWG) geregelt. In *Mathe mit Gewinn 2* wird darauf auch hingewiesen und ein Internetlink angegeben, unter dem die wesentlichen Auszüge aus dem BWG zu finden sind.

4.2.3 Zinsen und Zinseszinsen

Die **Zinsen** sind jener Anteil des zur Verfügung gestellten Geldes (**Kapitals**), der vom Schuldner an den Gläubiger nach einer bestimmten Zeit als sogenanntes Nutzungsentgelt zu zahlen ist. Wie hoch dieses Entgelt ist, hängt von der Höhe des Kapitals, der Dauer der Nutzung durch den Schuldner und dem vereinbarten **Zinssatz** pro Zinsperiode (in %) ab.²⁶



Die **Zinsperiode** ist jeweils ein bestimmter Zeitraum, auf den sich der Zinssatz bezieht. Nach dessen Ablauf werden die Zinsen in Rechnung gestellt bzw. gutgeschrieben. Zinssatz und -periode sind immer im Zusammenhang angegeben, z.B. 4 % p. a. (pro Jahr), 3 % p. s. (pro Semester), 2 % p. q. (pro Quartal) oder 1 % p. m. (pro Monat). Der Jahreszinssatz wird in Folge mit i bezeichnet (z. B. $i = 4 \% = \frac{4}{100}$), der Zinssatz für die

²⁴ Daume, 2009 (Finanzmathematik im Unterricht), S. 61

²⁵ Daume, 2009 (Finanzmathematik im Unterricht), S. 66 zitiert nach Reifner, 2004 (Finanzielle Allgemeinbildung in Schulbüchern), S. V

²⁶ Martin, 2003 (Finanzmathematik), S. 24

Zinsperiode von einem Semester mit i_2 , analog steht i_4 für den Quartalszinssatz und i_{12} für den Monatszinssatz.

Seit dem 1. Jänner 1993 existiert die Kapitalertragsteuer (**KESt**), die automatisch durch die Bank von den Zinsen abgezogen wird. Hierbei werden (Spar-)Einlagezinsen und Wertpapierzinsen mit 25 % besteuert.²⁷ Bei einem Jahreszinssatz von 2 % stehen einem in Wahrheit also nur $\frac{3}{4}$ davon (1,5 %) zu und der Rest (0,5 %) geht an das Finanzamt. Die KESt wird in beiden Büchern erwähnt, jedoch bei den Berechnungen vernachlässigt.

Es sind verschiedene Arten der Verzinsung zu unterscheiden. Bei der **einfachen Verzinsung** wird nach jeder Zinsperiode wieder vom Anfangswert ausgegangen, d.h. die Berechnungsbasis bleibt gleich. Die Zinsen sind immer gleich hoch und für die nächste Verzinsungsperiode nicht von Bedeutung. Diese Kapitalisierung entspricht einem linearen Wachstum des Kapitals. Bei den **Zinseszinsen** hingegen werden die Zinsen dem Kapital hinzugerechnet und bei der nächsten Zinsperiode mitverzinst, d.h. die Berechnungsbasis ändert sich. Dies entspricht einem exponentiellen Wachstum des Kapitals.

Die Zinsen werden – je nach Vereinbarung – am Ende oder am Beginn jeder Zinsperiode bezahlt bzw. gutgeschrieben. Ersteres nennt man **dekursive** oder **nachschüssige** Verzinsung (wie z.B. beim Sparbuch) und zweiteres **antizipative** oder **vorschüssige** Verzinsung.

Die antizipative (vorschüssige) Verzinsung gibt es laut Steiner et al. in der Praxis eher selten, daher werden im Schulbuch alle Aufgaben mit dekursiver Verzinsung gerechnet. Auch bei Hinkelmann et al. wird die antizipative Verzinsung weitaus kürzer behandelt als die dekursive. Aus diesem Grund werde ich mich hier auch auf die dekursive Verzinsung beschränken.

Weil Geld oft nicht eine ganze Zinsperiode lang veranlagt wird, ist auch die **Tageberechnung** bzw. Angabe eines Teils einer Zinsperiode relevant. Üblicherweise rechnet eine Bank bei Sparguthaben mit 360 Tagen pro Jahr und einheitlichen 30 Tagen pro Monat.

²⁷ Hinkelmann, 2006 (Mathe mit Gewinn 2), S. 111

Der einfache Zins ist in der Praxis nur dort von Bedeutung, wo der Zeitraum der Verzinsung kürzer als die Zinsperiode ist, weil sonst (nach BWG) mit Zinseszinsen kapitalisiert wird. Nachdem die Zinsen beim einfachen Zins am Ende der Zinsperiode anfallen, handelt es sich hierbei immer um dekursive Verzinsung.

Bei **ganzjähriger** Verzinsung ist die Zinsperiode ein Jahr lang, bei **unterjährlicher** Verzinsung ist sie kürzer als ein Jahr. Als wichtigstes Werkzeug der Zinsrechnung gilt das Aufzinsen bzw. das Abzinsen²⁸, Näheres dazu folgt in Kürze.

Formeln zur Berechnung des Endkapitals bei dekursivem einfachen Zins und dekursiven Zinseszinsen

K_0 ... Anfangskapital, Barwert

K_n ... Endkapital, Endwert nach n Zinsperioden

i ... Zinssatz pro Jahr

n ... Anzahl der Jahre

Einfacher Zins: $K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$

Zinseszinsen: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$

Wird ein Kapital von € 500,- zu 3 % p. a. angelegt, berechnet man das Guthaben nach ein, zwei, ... Monaten mit einfacher Verzinsung, die einem linearen Wachstum des Kapitals entspricht. Die Zinsen betragen für das ganze Jahr 3 % von € 500,- (= € 15,-) bzw. für einen Monat $\frac{1}{12}$ von € 15,- (= € 1,25). Das Guthaben nach einem Monat beträgt daher $500 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{100}\right) = 501,25$ €, nach zwei Monaten € 502,50, ... und nach zwölf Monaten € 515,-. Möchte man das Guthaben nach beispielsweise drei Jahren angeben, benötigt man die Berechnung mittels Zinseszinsen, hierbei werden die Zinsen des Vorjahres dem Kapital hinzugerechnet und mitverzinst. Das Guthaben nach drei Jahren beträgt daher $K_3 = 500 \cdot 1,03^3 \approx 546,36$ €.

Im Allgemeinen wird die Berechnung des Endwerts eines Kapitals als **Aufzinsen** bezeichnet, das Berechnen des Barwerts hingegen heißt **Abzinsen**.

Durch Umformen erhält man Formeln zur Berechnung des Barwerts, des Zinssatzes und des Verzinsungszeitraums:

²⁸ Adelmeyer, Warmuth (Finanzmathematik für Einsteiger), 2005, S. 2

Einfache Zinsen: $K_0 = \frac{K_n}{(1+n \cdot i)}$

$$i = \frac{K_n - K_0}{n \cdot K_0}$$

$$n = \frac{K_n - K_0}{i \cdot K_0}$$

Zinseszinsen: $K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

$$n = \frac{\log K_n - \log K_0}{\log(1+i)}$$

(durch Logarithmieren der sich ergebenden Exponentialgleichung)

Um eine exakte Berechnung nach BWG zu erzielen, muss man die beiden Verzinsungsformen – einfacher Zins und Zinseszins – kombinieren. Dies wird **gemischte** (praktische) **Verzinsung** genannt. Dabei werden volle Zinsperioden mit Zinseszinsen und Zinsperiodenbruchteile mit einfachem Zins kapitalisiert. Die entsprechende Formel zur Berechnung des Endwerts lautet:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^{n_v} \cdot (1+n_r \cdot i)$$

(n_v ... Anzahl der vollen Zinsperioden, n_r ... restliche Zeit in Anteilen einer Zinsperiode)

Werden z. B. zu Jahresbeginn € 600,- auf ein mit 3,5 % p. a. verzinstes Sparbuch gelegt, wird das Guthaben nach 55 Monaten wie folgt berechnet:

55 Monate sind 4 Jahre und 7 Monate $\Rightarrow n_v = 4, n_r = \frac{7}{12}$

$$K_n = 600 \cdot \left(1 + \frac{3,5}{100}\right)^4 \cdot \left(1 + \frac{7}{12} \cdot \frac{3,5}{100}\right) \approx 702,57 \text{ €}$$

Neben der gemischten Verzinsung gibt es auch die **theoretische Verzinsung**. Diese liegt vor, wenn man auch für eine nicht ganzzahlige Anzahl von Zinsperioden das Endkapital nach den Formeln der Zinseszinsrechnung ermittelt. Das Endkapital des obigen Beispiels lässt sich mit theoretischer Verzinsung folgendermaßen berechnen:

$$K_n = 600 \cdot \left(1 + \frac{3,5}{100}\right)^{4+\frac{7}{12}} \approx 702,47 \text{ €}$$

Man sieht, dass die gemischte Verzinsung zu einem etwas höheren Endwert führt. Dennoch verwendet man als gute Näherung häufig die theoretische Verzinsung aufgrund der einfacheren Berechnung.

Das **Äquivalenzprinzip** der Finanzmathematik: Oft müssen zwei oder mehrere Angebote bzw. Zahlungen verglichen werden, diese sind aber nicht immer zum gleichen Zeitpunkt fällig. Um die Zahlungen miteinander vergleichen zu können, sind die Werte der Zahlungen zu demselben Zeitpunkt zu bestimmen, wobei der Zeitpunkt an sich aber unbedeutend ist bzw. frei gewählt werden kann. Die Beträge müssen also dementsprechend auf- oder abgezinst werden.

Unterjährige Verzinsung

Man spricht von unterjähriger Verzinsung, wenn m -mal pro Jahr verzinst wird, d. h. wenn die Zinsperiode kürzer als ein Jahr ist. Den **unterjährigen (relativen) Zinssatz** bezeichnet man mit i_m .

- $m = 2$: halbjährliche Verzinsung
- $m = 4$: vierteljährliche Verzinsung
- $m = 12$: monatliche Verzinsung

Der Zinssatz $i = m \cdot i_m$ heißt **Nominalzinssatz** (nomineller Jahreszinssatz).²⁹

Die Endwertformel sowie deren Umformungen lauten bei unterjähriger Kapitalisierung (bei dekursiver Verzinsung) analog zur ganzjährigen Kapitalisierung, bloß gilt der Zinssatz nicht mehr pro Jahr sondern pro Zinsperiode.

n Jahre haben $n \cdot m$ Zinsperioden

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_m)^{n \cdot m}$$

Waren € 500,- sieben Jahre lang zu einem Nominalzinssatz von 6 % angelegt, beträgt das Guthaben bei

²⁹ Tinhof, 2012 (Mathematik III HAK/LW), S. 65 f.

ganzjähriger Kapitalisierung $K_n = 500 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^7 = 500 \cdot 1,06^7 \approx 751,82 \text{ €}$.

halbjährlicher Kapitalisierung $K_n = 500 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^{2 \cdot 7} = 500 \cdot 1,03^{14} \approx 756,29 \text{ €}$.

vierteljährlichen Kapitalisierung $K_n = 500 \cdot \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^{4 \cdot 7} = 500 \cdot 1,015^{28} \approx 758,61 \text{ €}$.

monatlicher Kapitalisierung $K_n = 500 \cdot \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{12 \cdot 7} = 500 \cdot 1,005^{84} \approx 760,18 \text{ €}$.

Vergleich von Zinssätzen

Wie man beim obigen Beispiel schon erkennen kann, ist der Endbetrag bei gleichem Jahreszinssatz umso höher, je kürzer die Verzinsungsperiode ist. Es stellt sich daher folgende Frage: Wie hoch ist ein Halbjahres-/Quartals-/Monatszinsatz zu wählen, um gegenüber einem gegebenen Jahreszinssatz einen gleich hohen Endbetrag K_n zu erhalten?

$$K_0 \cdot (1 + i)^n = K_0 \cdot (1 + i_m)^{n \cdot m} \quad | : K_0$$

$$(1 + i)^n = (1 + i_m)^{n \cdot m} \quad | \sqrt[n]{}$$

$$1 + i = (1 + i_m)^m$$

Für Zinssätze, die bei gleichem Barwert und gleicher Verzinsungsdauer denselben Endwert liefern, muss also gelten:

$$1 + i = (1 + i_2)^2 = (1 + i_4)^4 = (1 + i_{12})^{12}$$

Diese Zinssätze nennt man dann **äquivalent (konform)**.

Beispiel: Bei einem Nominalzinssatz von 6 % für Bauspardarlehen erhält man bei Quartalsverzinsung für € 1,- nach einem Jahr den Endwert $K_n = 1 \cdot 1,015^4 \approx 1,06136$. Das Kapital hat sich also effektiv um den Jahreszinssatz $i \approx 6,136 \text{ %}$ verzinst. Man sagt, $i \approx 6,136 \text{ %}$ ist der zu $i_4 = 1,5 \text{ %}$ äquivalente (konforme) Zinssatz, da beide Zinssätze zum selben Endwert führen.

Allgemein: Der zum Zinssatz i_m äquivalente Jahreszinssatz heißt **effektiver Jahreszinssatz**.³⁰

Beispiel:

$i_4 = 1,5 \text{ %}$	↗ nomineller Jahreszinssatz 6 %
	↘ effektiver Jahreszinssatz 6,136 %

³⁰ Tinhof, 2012 (Mathematik III HAK/LW), S. 67

Auch zwischen dekursiver und antizipativer Verzinsung lassen sich Vergleiche anstellen, wodurch eigene Formeln für antizipative Verzinsung gar nicht mehr unbedingt notwendig sind.

4.2.4 Rentenrechnung

Als **Rente** bezeichnet man Ein- oder Auszahlungen in regelmäßigen Zeitabständen mit meist gleichbleibenden Geldbeträgen. Den Zahlungsbetrag nennt man (Renten-) **Rate** und den Zeitraum zwischen zwei aufeinander folgenden Zahlungen bezeichnet man als **Rentenperiode**.

Je nach Zeitpunkt der Zahlung, welche so wie die Zinsfälligkeit im vorigen Kapitel am Beginn oder am Ende einer Rentenperiode erfolgen kann, spricht man von einer **vorschüssigen Rente** (z. B. bei Kapitallebensversicherungen oder Bausparverträgen) oder einer **nachschüssigen Rente** (z. B. bei Krediten oder Gehaltszahlungen).

Als **Ansparung** gelten Rentenzahlungen, mit denen man nach einer gewissen Zeit einen Endwert zur Verfügung haben möchte. Um nach einer bestimmten Zeit einen Barwert (z. B. einen Kreditbetrag) ausgleichen zu können oder einen vorhandenen Betrag zu verbrauchen, müssen Zahlungen erfolgen, die man als **Abzahlung** bezeichnet.

Zeitrenten sind Renten mit einer zu Beginn festgelegten Laufzeit, dazu gehört z. B. das Abzahlen eines Kredits. Eine Lebensversicherung hingegen ist der **Leibrente** zuzuschreiben. Diese endet erst beim Ableben des Rentenbeziehers.

In der Rentenrechnung geht es nun darum, den Wert der gesamten Rente zu unterschiedlichen Zeitpunkten bestimmen zu können, oder einen fixen Betrag auf mehrere Ratenzahlungen aufzuteilen.

Für Berechnungen dieser Art sind Wissen und Formeln aus dem Kapitel Folgen und Reihen notwendig. Bei Steiner et al. wird dieses im Buch zu einem früheren Zeitpunkt ausführlich durchgenommen. Im Gegensatz dazu werden Folgen und Reihen in *Mathe mit Gewinn 2* erst im Kapitel der Rentenrechnung gebracht, und das erfolgt kompakt auf weniger als zwei Seiten. Hier ist also deutlich die Anwendung der Folgen und Reihen auf die Rentenrechnung erkennbar, weil nur kurz die nötigen Formeln erklärt werden, um sich dann gleich wieder den Renten widmen zu können.

An dieser Stelle werden auch kurz die wichtigsten Begriffe der Folgen und Reihen angeführt.

Folge: geordnete Anordnung von Zahlen, die alle demselben Bildungsgesetz gehorchen

z. B. a) $\langle 2, 5, 8, 11, 14, \dots \rangle$

b) $\langle 1, -2, 4, -8, 16, \dots \rangle$

c) $\langle 8, 4, 2, 1, 0.5, \dots \rangle$

Zwischen den sogenannten Folgengliedern besteht offensichtlich immer eine gewisse Abhängigkeit. In Bsp. a) ist jede Zahl um 3 größer als sein Vorgänger, in Bsp. b) ist jedes Glied das (-2)-fache seines Vorgängers und in Bsp. c) ist jede Zahl halb so groß wie sein Vorgänger.

Arithmetische Folge: Die Differenz d zweier benachbarter Glieder ist konstant.

a_1 ... Anfangsglied

a_n ... n-tes Glied ($n \in \mathbb{N}$)

d ... Differenz ($d \in \mathbb{R}$)

rekursive Darstellung: $a_{n+1} = a_n + d$

explizite Darstellung: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$\langle a_n \rangle = \langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$

Geometrische Folge: Der Quotient q zweier benachbarter Glieder ist konstant.

b_1 ... Anfangsglied

b_n ... n-tes Glied ($n \in \mathbb{N}$)

q ... Quotient ($q \in \mathbb{R}$)

rekursive Darstellung: $b_n = b_{n-1} \cdot q$

explizite Darstellung: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$\langle b_n \rangle = \langle b_1, b_2, b_3, \dots \rangle$

Reihe: Die Folge $\langle s_n \rangle$ der Teilsummen s_n der Folge $\langle a_n \rangle$.

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Analoges gilt für $\langle b_n \rangle$.

Summenformel für arithmetische Reihen (ohne Herleitung):

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \text{ bzw. } s_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d)$$

Summenformel für geometrische Reihen:

$$s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad q \neq 1$$

In Folge von großer Bedeutung wird die Summenformel für geometrische Reihen sein, weshalb ich dessen Herleitung auch zeigen möchte:

Man bildet die Summe von n Folgengliedern,

$$s_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$$

$$s_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1}$$

multipliziert diese Gleichung mit q und erhält:

$$s_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \dots + b_1 \cdot q^n$$

Nun subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten:

$$s_n - s_n \cdot q = b_1 - b_1 \cdot q^n$$

Durch Herausheben und Dividieren

$$s_n \cdot (1 - q) = b_1 \cdot (1 - q^n)$$

$$s_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad q \neq 1$$

ergibt sich die Summenformel für geometrische Reihen.

Nun möchte ich die gebräuchlichen Formeln für die Endwertberechnung von vor- und nachschüssigen Renten herleiten.

Renten mit übereinstimmender Renten- und Zinsperiode:

R ... Rate

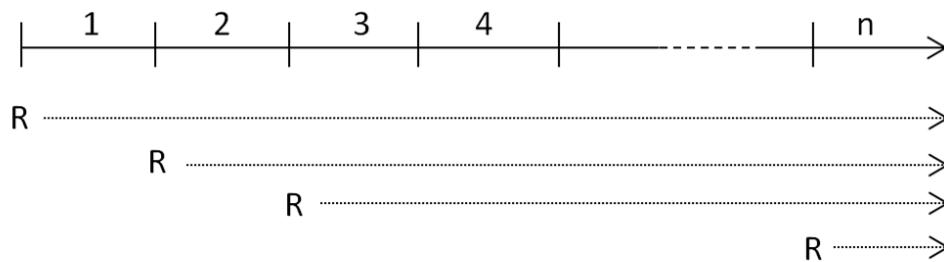
n ... Laufzeit der Rente in Zinsperioden (Anzahl an Zahlungen)

$E_{(n)}$... Endwert der Rente (nach n Zinsperioden)

i_m ... Zinssatz pro Zinsperiode

Aufgaben zur Rentenrechnung lassen sich mittels Zeitlinie gut grafisch darstellen und erleichtern das Verständnis.

Endwertformel für vorschüssige Renten



Die fein strichlierten Pfeile bedeuten eine Aufzinsung bis zum Ende des Pfeils. Die erste Rate wird also n Rentenperioden lang verzinst: $E_1 = R \cdot (1 + i_m)^n$

Analog: 2. Rate: $E_2 = R \cdot (1 + i_m)^{n-1}$

⋮

$(n-1)$. Rate: $E_{n-1} = R \cdot (1 + i_m)^2$

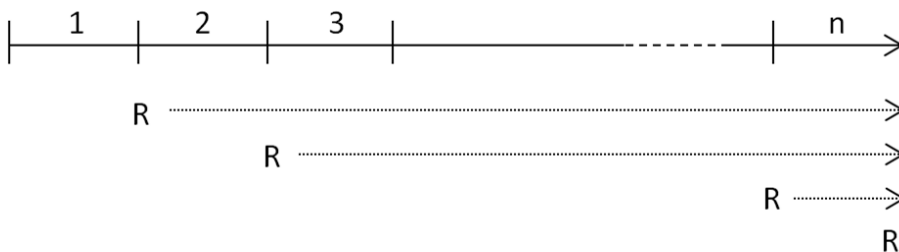
n . Rate: $E_n = R \cdot (1 + i_m)$

$$E = E_n + E_{n-1} + \dots + E_2 + E_1 = R \cdot (1 + i_m) \cdot [1 + (1 + i_m) + \dots + (1 + i_m)^{n-2} + (1 + i_m)^{n-1}]$$

Der Endwert E der gesamten Rente lässt sich somit mittels Summenformel für geometrische Reihen berechnen, wenn E_n das Anfangsglied und $(1 + i_m)$ der Faktor ist.

$$E = \sum_{k=1}^n E_k = R \cdot (1 + i_m) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (1 + i_m)^k = R \cdot (1 + i_m) \cdot \frac{(1 + i_m)^n - 1}{i_m}$$

Endwertformel für nachschüssige Renten

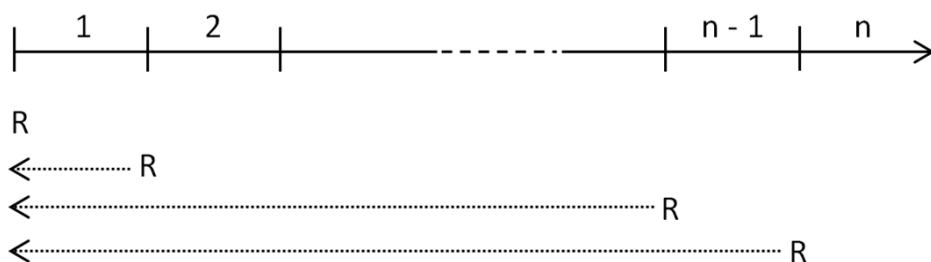


Die Herleitung der Formel für nachschüssige Renten erfolgt ganz analog. Hier wird die erste Rate nur $(n-1)$ Zinsperioden verzinst, die vorletzte Rate eine Zinsperiode lang und die letzte Rate wird gar nicht mehr verzinst.

$$E = \sum_{k=1}^n E_k = R \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (1 + i_m)^k = R \cdot \frac{(1 + i_m)^n - 1}{i_m}$$

Die Endwertformel sagt uns, wie hoch das Kapital am Ende einer Renteneinzahlung oder Rentenauszahlung ist. Eine andere Frage ist allerdings auch: Über welchen Barwert muss man verfügen, um jeweils am Beginn/Ende einer Zinsperiode einen gewissen Geldbetrag beheben zu können? Auch die Barwertformel lässt sich mit Hilfe einer Zeitlinie und Gebrauch der Summenformel für geometrische Reihen einfach erklären:

Barwertformel für vorschüssige Renten



Die fein strichlierten Pfeile kennzeichnen dieses Mal die Dauer, für welche die Ratenbeträge abgezinst werden müssen. Statt dem Aufzinsungsfaktor $(1 + i_m)$ verwenden wir hier daher den Abzinsungsfaktor $\frac{1}{1+i_m}$.

$$B = R + R \cdot \frac{1}{1+i_m} + \dots + R \cdot \frac{1}{(1+i_m)^{n-1}} = R \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+i_m)^k} = R \cdot \frac{1 - (\frac{1}{1+i_m})^n}{1 - \frac{1}{1+i_m}}$$

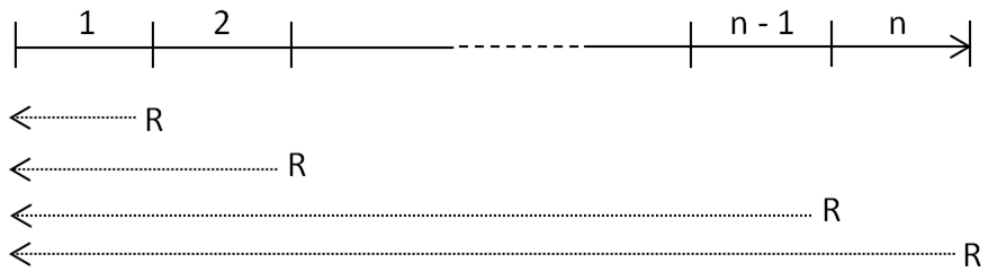
Diese große Formel mit Doppelbrüchen – die dennoch in *Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 2* angeführt wird – ist in Wahrheit gar nicht notwendig. Durch Umformen ist festzustellen, dass sich dieselbe Formel ergibt, würde man den Endwert durch $(1+i_m)^n$ dividieren (n Jahre abzinsen). Eine weitaus praktischere Formel ergibt sich also aus

$$B = \frac{E}{(1+i_m)^n} = \frac{R \cdot (1+i_m) \cdot \frac{(1+i_m)^n - 1}{i_m}}{(1+i_m)^n}$$

und lautet nach Vereinfachung:

$$B = \frac{R}{(1+i_m)^{n-1}} \cdot \frac{(1+i_m)^n - 1}{i_m}$$

Barwertformel für nachschüssige Renten



Die Formel bei nachschüssigen Renten lässt sich ebenso einfach erklären:

$$B = \frac{E}{(1 + i_m)^n} = \frac{R \cdot \frac{(1 + i_m)^n - 1}{i_m}}{(1 + i_m)^n} = \frac{R}{(1 + i_m)^n} \cdot \frac{(1 + i_m)^n - 1}{i_m}$$

Als Zusammenfassung der letzten vier Formeln wird hier noch einmal eine Tabelle angeführt, in der diese angegeben sind. Es sei $r := 1 + i_m$.

	vorschüssige Rente	nachschüssige Rente
Endwert E	$R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$	$R \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$
Barwert B	$\frac{R}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$	$\frac{R}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$

Neben der Berechnung des Barwerts oder des Endwerts ist es in der Praxis meistens interessanter zu wissen, wie man die Höhe der Raten berechnet, um bei vorgegebener Laufzeit einen bestimmten Bar- oder Endwert zu erreichen. Für die Berechnung des Ratenbetrags lassen sich die oben angeführten Formeln einfach umformen. Auch die Laufzeit bzw. Rentendauer bei gegebenem Bar- oder Endwert und gegebenem Zinssatz lässt sich durch Umformen mittels Logarithmieren relativ einfach berechnen.

Um den Zinssatz i_m zu bestimmen, um innerhalb einer bestimmten Zeit einen gewissen Bar- oder Endwert zu erreichen, reicht die händische Berechnung nicht mehr aus, diese Gleichungen lassen sich im Allgemeinen nicht mehr algebraisch lösen. Laut Hinkelmann et al. könne man mit einem CAS versuchen, eine numerische Lösung zu finden. Helfen könnte es, wenn man die Suche nach der Lösung auf den Bereich $0 < i_m < 1$ einschränkt.

In der Praxis ist das Ansparen von Guthaben (Kapitalaufbau) bzw. das Abbezahlen von Schulden (Kapitalabbau) sehr häufig. Hinkelmann et al. erwähnen hier die im Finanzwesen bekannte (nachsüssige) Sparkassenformel, die meistens wie folgt angegeben wird:

$$E_n = K_0 \cdot r^n \pm R \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \text{ mit } r = 1 + i_m$$

K_0 ... Anfangskapital bzw. Anfangsschuld

n ... Zahlungsperioden bzw. Anzahl der Zahlungen

E_n ... Guthaben bzw. Schuld nach n Zahlungen/Zinsperioden

R ... Rate

Diese Formel ist in vielen Aufgaben und auch in spezielleren Situationen wie den folgenden brauchbar.

Rentenumwandlung:

Wenn man beispielsweise einen Kredit aufnimmt, aber erst später mit der Rückzahlung beginnen kann, weil man in den ersten Jahren dringend Geld benötigt, wächst die Schuld inzwischen wegen der Verzinsung ungebrems an. Dieser angestiegene Betrag wird dann der neue Barwert, von dem aus die Ratenhöhe berechnet werden kann. Solch eine Rente nennt man **aufgeschobene Rente**. Die Dauer bis zur ersten Zahlung bezeichnet man hierbei als Karenzzeit.

Natürlich kann es passieren, dass es notwendig ist, bei einer Rentenzahlung zwischenzeitlich auszusetzen. Auch hier muss man beachten, dass während der Zeit, in der keine Zahlungen getätigt werden, die Schulden ansteigen. Nachdem solch eine Pause meistens nicht geplant ist, muss danach die Rate erhöht oder die Laufzeit verlängert werden, um dennoch den vollen Betrag inklusive Zinsen abbezahlen zu können. Diese Rente nennt man eine **unterbrochene Rente**, welche in der Praxis zum Beispiel bei Krediten während des Präsenz- oder Zivildienstes zugelassen ist.

Man spricht von einer **abgebrochenen Rente**, wenn jemand vorzeitig aus der Rente aussteigt und die Ratenzahlungen bereits vor Ablauf der Laufzeit enden. Dafür ist es nötig, die Restschuld zur Zeit des Abbruchs zu berechnen. Angenommen man beendet eine nachsüssige Rente zum Tilgen einer Schuld schon nach k Jahren, muss vom

Betrag der (für eine Laufzeit von k Zinsperioden aufgezinsten) Anfangsschuld der Endwert der Rente (nach der k -ten Zinsperiode) abgezogen werden. Was übrig bleibt, ist die Restschuld.

Eine spezielle Form der Renten ist die **ewige Rente**. Dessen Laufzeit ist unbegrenzt, weil nur von dem Geldbetrag, der durch die Zinsen hinzukommt, Kapital entnommen wird. Daher bleibt die Höhe des angelegten Kapitals erhalten. Als wichtiges Beispiel dazu sei der Nobelpreis genannt. Alfred Nobel (1833 – 1896) hielt in seinem Testament fest, man möge einen Fonds mit dem größten Teil seines Vermögens gründen, dessen jährliche Zinsen jenen als Preise zuerteilt werden sollen, die im vergangenen Jahr den größten Nutzen in den Bereichen Chemie, Frieden, Literatur, Medizin/Physiologie und Physik gebracht haben.³¹

Um sich selbst eine ewige Rente zuzulegen, kann man eine Rentenzahlung planen, mit der man nach einer gewissen Zeit einen bestimmten Geldbetrag zur Verfügung hat. Der Endwert dieser Rente dient dann als Barwert der ausgezahlten Rente, dessen Zinsertrag pro Zinsperiode die ewig auszahlende Rate pro selber Zinsperiode betragen soll. Es gilt also: Der Endwert der angesparten Beträge zum Zeitpunkt des Auszahlungsbeginns entspricht dem Barwert der ausgezahlten Rente.

Bis jetzt wurde davon ausgegangen, dass Renten- und Zinsperiode übereinstimmen. Nun möchte ich noch kurz auf den Fall eingehen, wenn diese nicht gleich sind.

Renten mit unterschiedlicher Renten- und Zinsperiode:

Oft zahlt man monatlich einen bestimmten Betrag beispielsweise auf ein Fixzinssparbuch, das aber jährlich verzinst wird. Um trotzdem das Guthaben am Ende der Ansparphase möglichst exakt berechnen zu können, muss man konforme Zinssätze verwenden. In diesem Fall braucht man den zum Jahreszinssatz i konformen Monatszinssatz i_{12} . Somit hat man die Situation auf eine Rentenrechnung mit gleicher Renten- und Zinsperiode (nämlich der eines Monats) zurückgeführt.

³¹ Hinkelmann, 2006 (Mathe mit Gewinn 2), S. 136

4.2.5 Schuldtilgung

Bei der Schuldtilgung geht es um die in gleichen Zeitabständen erfolgenden Zahlungen zum Ausgleichen/Rückzahlen/Tilgen einer Schuld mit Berücksichtigung der Zinsen. Die zu zahlenden jährlichen Teilbeträge nennt man **Annuitäten**. Aufgrund der anfallenden Zinsen dient nur ein Teil der Annuitäten zur Tilgung der Schuld, daher setzen sich die Annuitäten aus zwei Bestandteilen zusammen, nämlich aus dem **Tilgungsanteil** und dem **Zinsenanteil**. Das Berechnen dieser verschiedenen Zahlungsbeträge ist eine Anwendung der Rentenrechnung.

Zur Veranschaulichung der Rückzahlung einer Schuld werden auch in der Praxis sogenannte **Tilgungspläne** für die Kunden aufgestellt. Bei diesen ist die Aufteilung der Annuitäten in Zinsen- und Tilgungsanteile gut ersichtlich. Es gibt mehrere Formen der Schuldtilgung. Die wichtigsten werde ich in diesem Kapitel anhand von Beispielen erklären. Dabei wird immer von einem Kredit in der Höhe von € 100.000,00 ausgegangen, der innerhalb von vier Jahren mit $i = 5\%$ p. a. zurückbezahlt werden soll.

Die gestundete Schuld

Hierbei werden erst am Ende der Laufzeit die Schulden samt Zinseszinsen auf einmal zurückgezahlt. Die Berechnung ist wohl bei dieser Schuldtilgung die einfachste, jedoch die mit den höchsten Kosten, da der komplette Schuldbetrag die ganze Laufzeit hinweg verzinst wird, ohne zwischendurch durch Teilzahlungen verringert zu werden. Der am Ende zu bezahlende Betrag ergibt sich schnell aus der Aufzinsung des Schuldbetrages über die vier Jahre hinweg: $100.000 \cdot 1,05^4 = 121.550,63$ €. Der Tilgungsplan für die gestundete Schuld ist dementsprechend einfach und liefert nicht viel Information. Zwecks Vergleich zu den anderen Arten der Schuldtilgung möchte ich ihn dennoch erstellen:

Tilgungsplan:

Jahr	(Rest-)Schuld	Zinsenanteil	Tilgungsanteil	Annuität (Zahlung)
1	€ 100.000,00	€ 5.000,00	€ - 5.000,00	-
2	€ 105.000,00	€ 5.250,00	€ - 5.250,00	-
3	€ 110.250,00	€ 5.512,50	€ - 5.512,50	-
4	€ 115.762,50	€ 5.788,13	€ 115.762,50	€ 121.550,63

Die Zinsschuld:

Bei der Zinsschuld werden zum Rückzahlungstermin nur die Zinsen abbezahlt, die Restschuld bleibt somit konstant. Die ganze Laufzeit lang erfolgt keine Tilgung, erst am Ende wird die Schuld mit den Zinsen der letzten Zinsperiode gemeinsam beglichen.

Jahr	(Rest-)Schuld	Zinsenanteil	Tilgungsanteil	Annuität (Zahlung)
1	€ 100.000,00	€ 5.000,00	-	€ 5.000,00
2	€ 100.000,00	€ 5.000,00	-	€ 5.000,00
3	€ 100.000,00	€ 5.000,00	-	€ 5.000,00
4	€ 100.000,00	€ 5.000,00	€ 100.000,00	€ 105.000,00

Die Annuitätenschuld:

Hier kommt die Rentenrechnung ins Spiel. Bei der Annuitätenschuld/-tilgung soll die Schuld über einen bestimmten Zeitraum hinweg in gleich bleibenden Raten zurückgezahlt werden. Es ist der Endwert der Rente nach n Zinsperioden mit dem Endwert der Anfangsschuld nach n Jahren gleichzusetzen, wodurch man die gesuchte Höhe der Rate R erhält. (Analog funktioniert dies auch mit Bezug auf den Ausgangszeitpunkt, d. h. mittels Berechnung des Barwerts.)

$$R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S \cdot (1+i)^n$$

S ... Schuld; Berechnung bei nachschüssiger Rente

$$R \cdot \frac{1,05^4 - 1}{0,05} = 100000 \cdot 1,05^4$$

Die Rechnung liefert: $R = 28.201,18$ Euro

Tilgungsplan:

Jahr	(Rest-)Schuld	Zinsenanteil	Tilgungsanteil	Annuität (Zahlung)
1	€ 100.000,00	€ 5.000,00	€ 23.201,18	€ 28.201,18
2	€ 76.798,82	€ 3.839,94	€ 24.361,24	€ 28.201,18
3	€ 52.437,57	€ 2.621,88	€ 25.579,30	€ 28.201,18
4	€ 26.858,27	€ 1.342,91	€ 26.858,27	€ 28.201,18

Ratenschuld:

Bei der Ratenschuld oder auch Ratentilgung bleibt der Tilgungsanteil während der gesamten Laufzeit gleich hoch. Die entsprechende Rate setzt sich dabei aus dem konstanten Tilgungsbetrag und den in der vergangenen Zinsperiode angefallenen Zinsen zusammen.

Tilgungsplan:

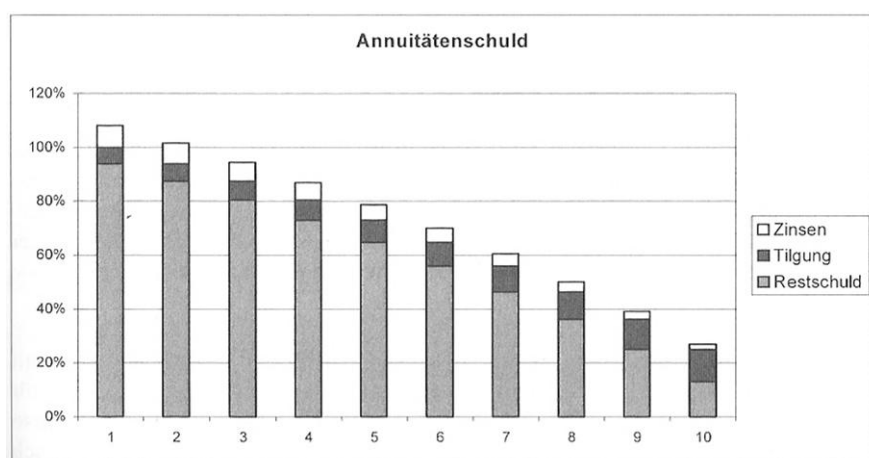
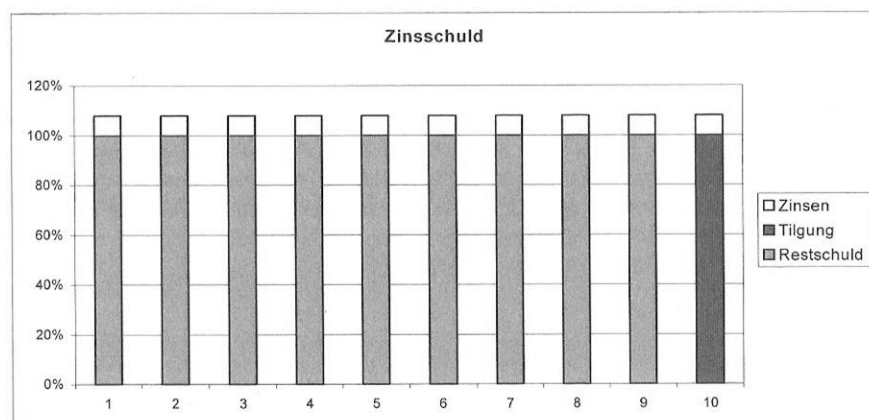
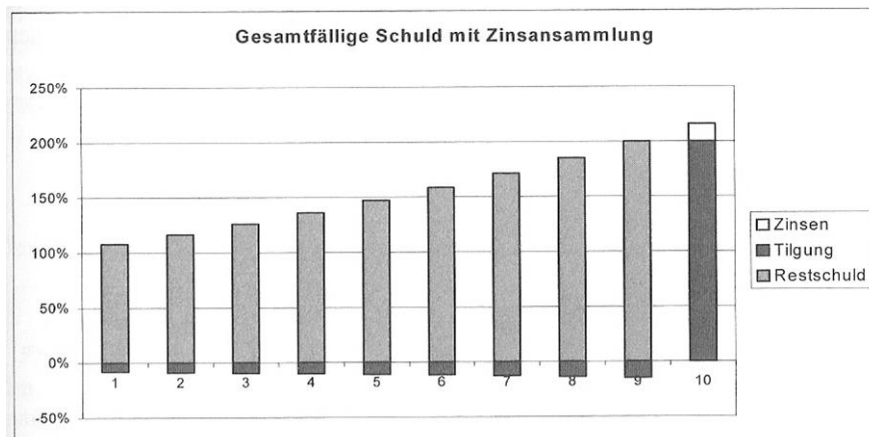
Jahr	(Rest-)Schuld	Zinsenanteil	Tilgungsanteil	Annuität (Zahlung)
1	€ 100.000,00	€ 5.000,00	€ 25.000,00	€ 30.000,00
2	€ 75.000,00	€ 3.750,00	€ 25.000,00	€ 28.750,00
3	€ 50.000,00	€ 2.500,00	€ 25.000,00	€ 27.500,00
4	€ 25.000,00	€ 1.250,00	€ 25.000,00	€ 26.250,00

Man sieht, dass sich die Annuitäten verringern, da die Restschuld Jahr für Jahr geringer wird und daher weniger Zinsen anfallen.

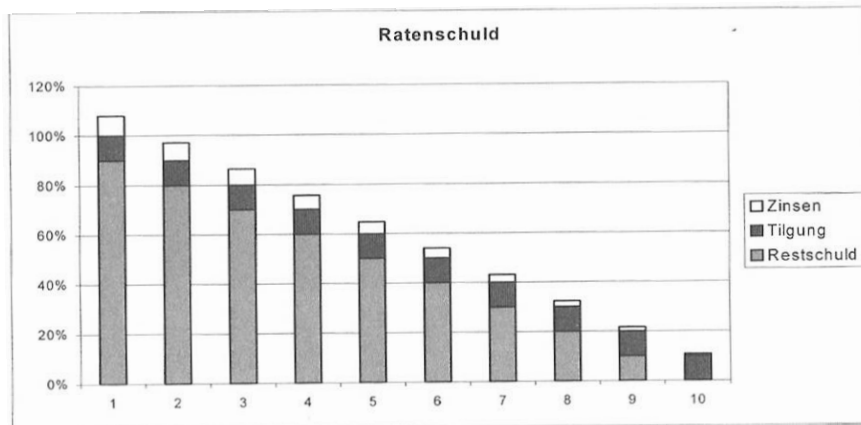
Bei einer Laufzeit von vier Jahren könnte man sich noch die Arbeit machen, die nötigen Ergebnisse für den Tilgungsplan einzeln zu berechnen. Für eine höhere Anzahl an Rückzahlungsterminen empfiehlt sich allerdings eine Berechnung mittels elektronischer Hilfsmittel wie z. B. einem Tabellenkalkulationsprogramm wie Excel, welches bei Hinkelmann et al. in diesem Kapitel auch verwendet wird.

Wenn sich während einer Schuldtilgung die Bedingung für die Tilgung ändert, nennt man das eine **Schuldkonversion**.

Aus dem Buch *Finanzmathematik* von Tobias Martin³² möchte ich Grafiken übernehmen, die sehr schön die unterschiedlichen Verläufe von Restschuld, Zins- und Tilgungsanteilen (bezogen auf die Anfangsschuld K_0) bei den vier besprochenen Tilgungsprozessen darstellen. Der hier als gesamtfällige Schuld mit Zinsansammlung bezeichnete Tilgungsprozess entspricht der obigen gestundeten Schuld.



³² Martin, 2003 (Finanzmathematik), S. 116 ff.



4.2.6 Kosten- und Preistheorie

In der Wirtschaft (Wirtschaftswissenschaften, Wirtschaftspraxis) werden in sehr vielen Bereichen Funktionen als mathematische Modelle eingesetzt, um Sachverhalte zu beschreiben. Meistens ist eine exakt definierte Funktion nicht möglich, dennoch kann man mit möglichst einfachen Funktionsgleichungen den Sachverhalt gut approximieren.

In weiterer Folge handelt es sich vermehrt um produzierte Mengen (z. B. Stück, Karton, Palette, ...) und den dafür zu zahlenden oder aufzuwendenden Geldbetrag. Um den Modellcharakter zu bewahren, soll allgemein die Mengeneinheit mit ME und die Geldeinheit mit GE abgekürzt werden.

Man spricht von den **Fixkosten**, wenn die Höhe der Kosten unabhängig von der erzeugten Menge ist. Wenn die Anzahl der produzierten Mengeneinheiten aber Einfluss auf die Kosten hat, nennt man dies die **variablen Kosten**.

Beispiele für Fixkosten	Beispiele für variable Kosten
Miete, Grundgebühr, Personalkosten	Materialverbrauch, Energiekosten

Die **Gesamtkosten** ergeben sich dann aus der Summe der produktionsunabhängigen fixen Kosten (F) und der variablen Kosten (K_v). Die zugehörige Gesamtkostenfunktion lautet

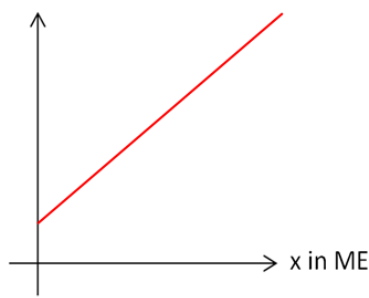
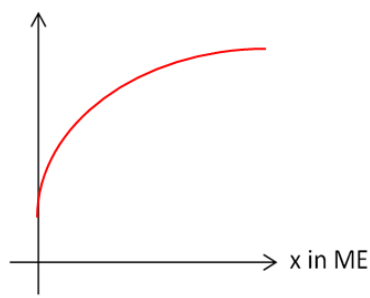
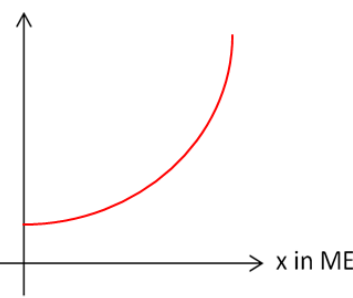
$$K(x) = K_v(x) + F.$$

Negative Produktionsmengen sind nicht möglich, daher beginnt die Definitionsmenge für x beim Wert 0:

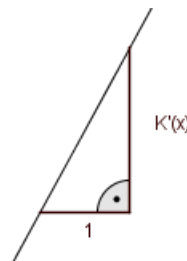
$$D = [0; x_{max}]$$

Streng gesehen müsste $x \in \mathbb{N}$ sein, da im Allgemeinen nur ganze ME erzeugt werden können. Dennoch sollen alle reellen Zahlen innerhalb eines Intervalls zugelassen werden (man sagt auch: man lässt die Variablen stetig variieren), weil stetige Funktionen ein einfaches mathematisches Modell darstellen, das auch den Einsatz der Differentialrechnung möglich macht. Für die Lösung muss das Ergebnis aber – abhängig von der Fragestellung – auf ein ganzzahliges Ergebnis auf- bzw. abgerundet werden.

Mit der Anzahl der Produktionsmenge steigen gleichzeitig die variablen Kosten. Dies kann aber proportional, unterproportional oder überproportional verlaufen.

Lineare Kosten (proportionaler Kostenverlauf)	Degressive Kosten (unterproportional)	Progressive Kosten (überproportional)
$K(x)$ in GE 	$K(x)$ in GE 	$K(x)$ in GE 

Um von einer gegebenen Kostenfunktion bestimmen zu können, ob der **Kostenverlauf linear, degressiv** oder **progressiv** ist, ohne den dazugehörigen Grafen zu kennen, bildet man die erste Ableitung $K'(x)$ der Kostenfunktion $K(x)$. Da die erste Ableitung als Steigung zu interpretieren ist,



gibt die Funktion $K'(x)$ (die sogenannten **Grenzkosten**) den Kostenzuwachs für *eine* zusätzlich produzierte Mengeneinheit an. Für $x > 0$ muss $K'(x)$ durchwegs positiv sein. Die zweite Ableitung $K''(x)$ gibt die Veränderungstendenz der Grenzkosten $K'(x)$ an.

Daher gilt für

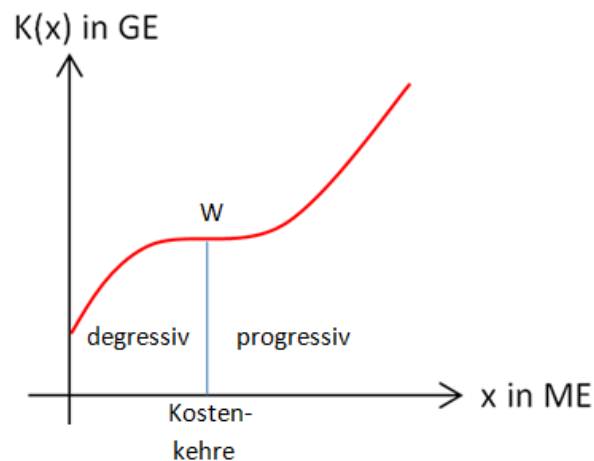
$K'(x) > 0, K''(x) > 0$: $K(x)$ steigt überproportional mit steigenden Zuwächsen (progressiv)

$K'(x) > 0, K''(x) = 0$: $K(x)$ steigt proportional (linear)

$K'(x) > 0, K''(x) < 0$: $K(x)$ steigt unterproportional mit sinkenden Zuwächsen (degressiv)

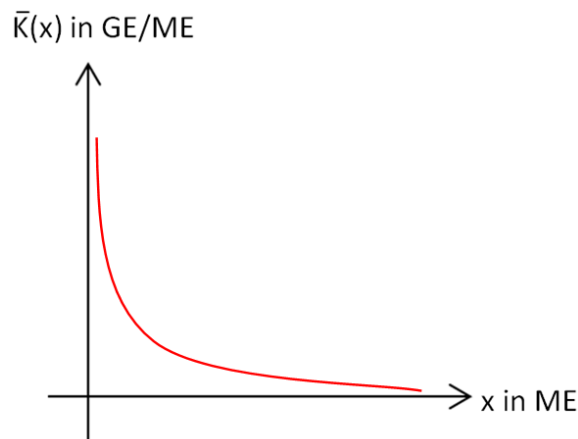
Kostenfunktionen können aber auch durch Polynome dritten Grades beschrieben werden, wodurch die zugehörige Kurve einen Wendepunkt erhält. In diesem Fall spricht man von der sogenannten **Kostenkehre** – dem Übergang von degressivem zu progressivem Kostenverlauf. Der Grund für derartige s-förmige Kurven (siehe unten) kann z. B. die Erzielung eines günstigeren Beschaffungspreises (bei Mengenrabatt beim Kauf von Rohstoffen) sein. Bei weiterer Produktionserhöhung können die Kosten aber z. B. wegen Überstunden wieder hochschnellen. Diese Art von Kostenverlauf nennt man auch **ertragsgesetzlichen Kostenverlauf**.

Um zu bestimmen, bei welcher Produktionsmenge x die Kostenkehre liegt, ist $K''(x)$ gleich Null zu setzen und x zu bestimmen. Sofern $K'''(x) \neq 0$ ist, liegt beim errechneten x -Wert die Kostenkehre.



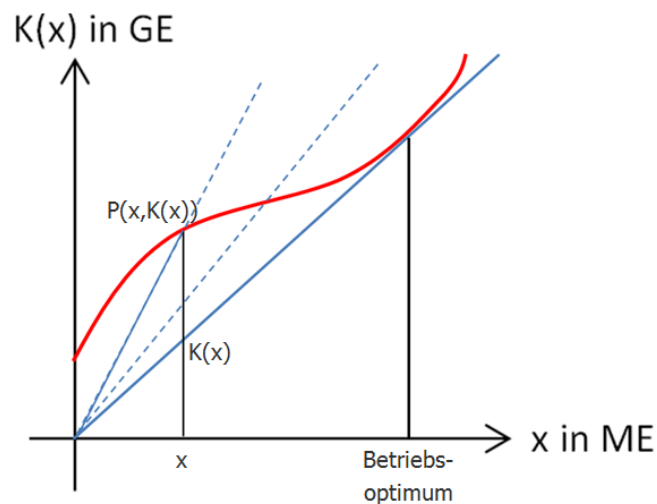
Die Kostenfunktion ist im Allgemeinen in der betrieblichen Praxis nicht vorgegeben. Es sind nur für ein paar bestimmte Produktionsmengen die dazugehörigen Gesamtkosten bekannt. Um eine Funktion zu bestimmen, die den Kostenverlauf möglichst genau darstellt, kann man sich z. B. mit der Methode der kleinsten Quadrate helfen. (Herleitung: siehe Abschnitt 4.2.9)

Die Frage nach den durchschnittlichen Kosten einer Mengeneinheit ist eine wichtige, die man sich vor Festlegung des Produktionsplans stellen soll. Dafür dividiert man die Gesamtkosten durch die Anzahl der erzeugten Mengeneinheiten und erhält die **Stückkostenfunktion** $\bar{K}(x) = \frac{K}{x}$, die bei linearem und degressivem Kostenverlauf eine ähnliche Kurve wie die folgende aufweist.



Anhand der Kurve erkennt man auch, dass die Durchschnittskosten kleiner werden, je größer die Produktionsmenge ist. Dies kann man bei progressivem Kostenverlauf allerdings nicht behaupten, weil dort die Gesamtkosten überproportional steigen.

Die Produktionsmenge x , bei der gilt: Grenzkosten = Durchschnittskosten, wird als **Betriebsoptimum** (x_{opt}) bezeichnet. Dieses gibt an, bei welcher Produktionsmenge die durchschnittlichen Kosten pro Mengeneinheit ihr Minimum erreichen ($\bar{K}$ wird minimal). (Man spricht hier auch vom **kostendeckenden** Preis.) Anhand folgender Kurve lässt sich das auch gut zeigen:



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{K(x)}{x} = \bar{K}(x)$ entspricht der Steigung der blauen Geraden und ist dann am kleinsten, wenn die Verbindung vom Punkt $P(x, K(x))$ zum Koordinatenursprung Tangente in P ist.

Für die Berechnung der Produktionsmenge x mit den kleinsten durchschnittlichen Stückkosten setzt man $\bar{K}'(x)$ gleich Null ($\bar{K}$ soll minimal werden):

$$\bar{K}'(x) = 0$$

$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow K'(x) = \frac{K(x)}{x} = \bar{K}(x)$$

Das bedeutet, dass an der Stelle x , wo $K'(x) = \bar{K}(x)$ gilt, das Betriebsoptimum x_{opt} liegt. Ob x tatsächlich ein Minimum beschreibt, muss anhand $\bar{K}''(x)$ überprüft werden (Es muss gelten: $\bar{K}''(x) > 0$). Die zugehörigen (durchschnittlichen) Stückkosten erhält man, indem man das errechnete x (das Betriebsoptimum) in $\bar{K}(x)$ einsetzt.

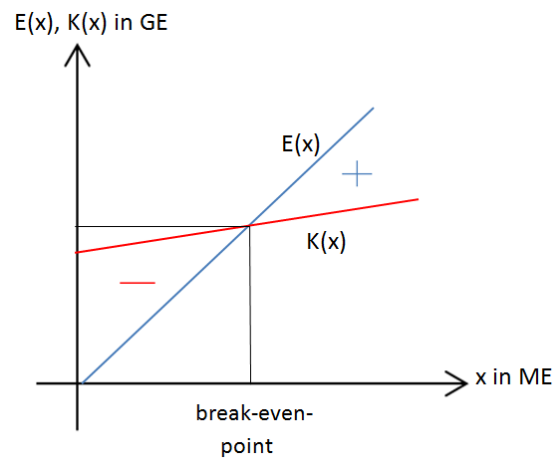
Erlös und Gewinn

Welche Überlegung bis jetzt außer Acht gelassen wurde, ist jene, wozu man denn überhaupt berechnet, welche Produktionsmenge am kostengünstigsten produziert werden kann – der Sinn dessen ist es, einen Gewinn zu erzielen.

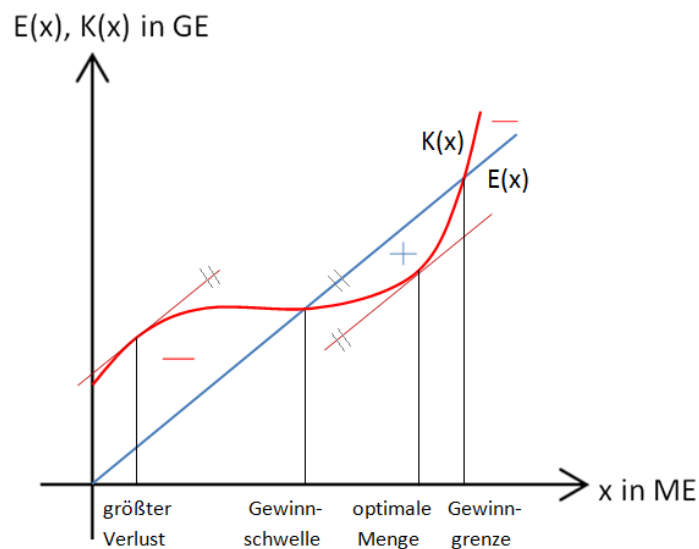
Der **Erlös** erfasst die Geldeinheiten, die bei einem Verkauf um p GE pro ME eingenommen werden, und kann durch die Funktion $E(x) = p \cdot x$ dargestellt werden. Ein **Gewinn** wird dann erreicht, wenn der Erlös größer als die Gesamtkosten ist. Wenn zu wenige ME verkauft werden, entsteht ein Verlust, weil der Erlös nicht die Gesamtkosten abdecken kann. Wenn der Erlös genau die Gesamtkosten abdeckt – also gerade kein Verlust mehr entsteht –, nennt man die entsprechende Menge **Gewinnschwelle** oder **break-even-point**.

Im break-even-point gilt: $E(x) = K(x)$

Bei linearem Kostenverlauf erhält man folgende Situation:



Ab dem Zeitpunkt des break-even-points wächst also der Gewinn mit zunehmender Menge. Dies gilt bei ertragsgesetzlichem Kostenverlauf (s-förmige Kurve) nicht. Dazu soll als Veranschaulichung die folgende Grafik dienen.



Wie schon beim linearen Kostenverlauf gibt es auch hier eine Gewinnschwelle, ab der ein Gewinn zu erkennen ist, allerdings nur begrenzt. Denn ab der sogenannten **Gewinngrenze**, bei der Kosten und Erlös wieder gleich hoch sind, wird ein Verlust erzielt. Ab einer gewissen Produktionsmenge steigen die Kosten also wieder an und lassen sich durch den Erlös nicht mehr abdecken.

Den maximalen Gewinn bzw. die optimale Produktionsmenge kann man einfach mittels Differentialrechnung bestimmen. $G(x)$ soll maximal werden:

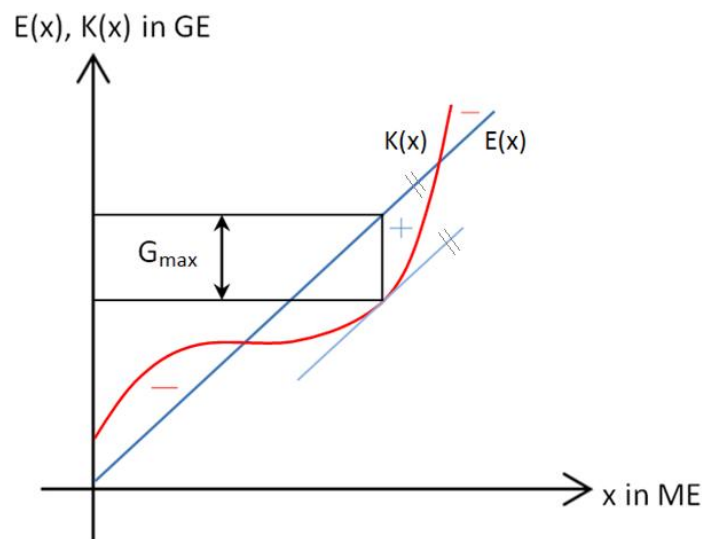
$$G(x) = p \cdot x - K(x)$$

$$G'(x) = p - K'(x) = 0 \Leftrightarrow p = K'(x)$$

$$G''(x) = -K''(x) < 0 \Leftrightarrow K''(x) > 0$$

Die optimale Menge muss also im progressiv verlaufenden Bereich der Gesamtkostenkurve liegen, und durch $p = K'(x)$ lässt sich außerdem die gekennzeichnete Parallelität in der vorigen und der nächsten Grafik erklären.

Den maximalen Gewinn $G_{\max}$ eines Betriebs berechnet man mittels Lösen der Gleichung $G'(x) = 0$. ($G(x)$ soll maximal werden.)



Bei einer Aufgabe, in der nach den Grenzen des Gewinnbereichs gefragt wird, ist die Lösung der Gleichung $G(x) = 0$ zu berechnen. So erhält man Gewinnschwelle und Gewinngrenze. Da die Funktionsgleichung der Gesamtkosten bei s-förmiger Kurve ein Polynom dritten Grades ist, muss man sich hier möglicherweise mit dem NEWTON'schen Näherungsverfahren helfen, bei dem man durch Probieren einen Wert x_0 sucht, der der Nullstelle nahe ist. Den nächstgenaueren Wert nahe der Nullstelle erhält man mit $x_1 = x_0 - \frac{G(x_0)}{G'(x_0)}$, analog den Wert x_2 usw.

Allgemein gilt: $x_n = x_{n-1} - \frac{G(x_{n-1})}{G'(x_{n-1})}$ (ohne Herleitung)

Die Ergebnisse, die im Allgemeinen nicht ganzzahlig sind – aber sein sollten, weil es schließlich um die Produktionsmenge geht –, müssen für die Gewinnschwelle auf- und für die Gewinngrenze abgerundet werden, damit sie immer noch innerhalb des Gewinnbereichs liegen.

Nachfrage und Elastizität

Wie wählt nun ein Unternehmer den Preis für seine Ware? Selbstverständlich muss er sich – sofern er nicht der einzige Anbieter des Produkts ist – nach der Konkurrenz richten. Er muss sich also am aktuellen Marktpreis orientieren. Ist sein gebotener Preis zu hoch, verliert er die Kundschaft an andere. Andererseits wird er den Preis auch senken, wenn dies die allgemeine Konkurrenz tut. In dieser Situation spricht man von der **vollständigen Konkurrenz (Polypol)** – es gibt viele Anbieter und Nachfrager, und der Marktpreis p ist aus Sicht jedes einzelnen Anbieters als Konstante zu betrachten, da einer von vielen Anbietern schließlich keinen Einfluss auf diesen nehmen kann, sondern bloß unter gegebenen Umständen die gewinnmaximierende Variante finden muss.

Gibt es aber tatsächlich nur einen einzigen Anbieter, nennt man dies **Angebotsmonopol (Monopol)**. Die Konkurrenz ist hier kein Thema, dennoch ist der Spielraum für den Verkaufspreis nach oben hin beschränkt, da Kunden nicht bereit sein werden, jeden beliebigen Preis für ein Produkt zu zahlen.

Den Zusammenhang zwischen dem Preis und der nachgefragten Menge stellt man durch die sogenannte **Nachfragefunktion** dar, die die Zuordnung

$$\text{nachgefragte Menge } x \mapsto \text{Preis } p(x)$$

beschreibt. Das bedeutet, dass sich der Preis in Abhängigkeit von der nachgefragten Menge ändert. Die **Preiselastizität der Nachfrage**, kurz: **Elastizität** (in Folge mit ε bezeichnet), beschreibt, wie sich bei relativer Preissenkung/-erhöhung die relative Nachfrage erhöht/verringert. Hierbei setzt man diese beiden Veränderungen ins Verhältnis.

Beispiel:³³

Nach einer Preissteigerung von Benzin um 30% $\left(= \frac{\Delta p}{p}\right)$ ändert sich die Absatzmenge um -6% $\left(= \frac{\Delta x}{x}\right)$. Der Quotient

$$\varepsilon = \frac{\text{relative Mengenänderung}}{\text{relative Preisänderung}} = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{-6\%}{30\%} = \frac{-0,2\%}{1\%} = -0,2$$

gibt an, dass pro 1% Preisanstieg die Absatzmenge um durchschnittlich 0,2% fällt.

Das Verhältnis $\varepsilon = \frac{\text{relative Mengenänderung}}{\text{relative Preisänderung}} = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}$ nennt man (Bogen-)Elastizität von f bezüglich x im Intervall $[x_0; x_0 + \Delta x]$ und ist ein Maß für die Abhängigkeit der prozentuellen Mengenänderung $\frac{\Delta x}{x}$ von der prozentuellen Preisänderung $\frac{\Delta p}{p}$.

Das Ergebnis der Berechnung der Elastizität ist wie folgt zu interpretieren:

- ε positiv $\Rightarrow$ relative Zunahme/Abnahme von x bewirkt relative Zunahme/Abnahme von f
Das würde z. B. bedeuten, dass bei einer Preiserhöhung auch die Nachfrage steigt, was im Allgemeinen nicht der Fall ist, aber dennoch möglich ist, falls beispielsweise der Preis aufgrund einer bevorstehenden Knappheit des Produkts erhöht wird.
- ε negativ $\Rightarrow$ relative Zunahme/Abnahme von x bewirkt eine relative Abnahme/Zunahme von f

Die Elastizität der Nachfrage erhält in den Wirtschaftswissenschaften folgende Bezeichnungen:

- $|\varepsilon| > 1 \Rightarrow$ Die Nachfrage ist **elastisch**.
Hier hat eine Preissenkung eine große Nachfrageerhöhung zur Folge, wie dies eventuell bei einer Preissenkung bei Laptops der Fall sein könnte, bzw. eine Preiserhöhung einen großen Nachfragerückgang.

³³ Tinhof, 2012 (Mathematik IV HAK/LW), S. 161

- $|\varepsilon| < 1 \Rightarrow$ Die Nachfrage ist **unelastisch**.

Durch die Preissenkung ist nur eine geringe Nachfrageerhöhung zu erkennen. Hier könnte man beispielsweise Salz nennen, weil durch eine Verbilligung wohl kaum jemand seine Suppe plötzlich mehr salzen würde. Analoges gilt für eine Preiserhöhung.

- $|\varepsilon| = 1 \Rightarrow$ Die Nachfrage ist **proportional elastisch**.

Hier bedeutet eine Preisänderung von 1 % auch eine Nachfrageerhöhung/-senkung von 1 %.

- $|\varepsilon| \gg 1 \Rightarrow$ Die Nachfrage ist **vollkommen elastisch**.

Bereits eine sehr kleine Preisänderung hat eine große Nachfrageänderung zur Folge.

- $|\varepsilon| \approx 0 \Rightarrow$ Die Nachfrage ist **vollkommen unelastisch**.

Nachfrager zeigen hier keine Reaktion auf Preisänderungen (z. B. bei Medikamenten).

Es entspricht jeder Menge x ein bestimmter Elastizitätswert $\varepsilon(x)$. Wird nun die Preisänderung Δp sehr klein gewählt, wird auch Δx sehr klein, und für die Elastizität folgt:

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p(x)}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta p} \cdot \frac{p(x)}{x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta p}{\Delta x}} \cdot \frac{p(x)}{x} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta x}} \cdot \frac{p(x)}{x} = \frac{1}{\frac{dp}{dx}(x)} \cdot \frac{p(x)}{x} \\ &= \frac{p(x)}{x} \cdot \frac{1}{p'(x)}\end{aligned}$$

$\varepsilon(x) = \frac{p(x)}{x} \cdot \frac{1}{p'(x)}$ ist die (Punkt-)Elastizität ε der Nachfrage an der Stelle x , mit der zu einer gegebenen Nachfragefunktion $p(x)$ die zugehörige Elastizitätsfunktion ε berechnet werden kann.

Einige weitere Begriffe, die in den beiden Schulbüchern vorkommen:

Der sogenannte **COURNOTsche Punkt** ist jener mit den Koordinaten (gewinnmaximierende Menge|zugehöriger Preis).

Von einer Nachfragefunktion $p(x)$ sei die nachgefragte Menge bei $p(x) = 0$ zu berechnen. Diese Menge x wird als **Sättigungsmenge** bezeichnet, bei der kein weiterer Bedarf nach dem Produkt besteht. Beispiel: Auch wenn Zucker beinahe „verschenkt“ werden würde, wird keine unendlich große Menge davon konsumiert werden. Die Nachfrage ist also ab einem bestimmten Zeitpunkt gesättigt und es besteht kein Bedürfnis mehr, noch mehr Zucker zu erhalten.

Der **durchschnittliche Gesamtgewinn** (Stückgewinn) $\bar{G}(x)$ ist jener Gewinn, den eine Mengeneinheit der Produktionsmenge liefert. $\bar{G}(x) = \frac{G(x)}{x} = \frac{E(x) - K(x)}{x} = p(x) - \bar{K}(x)$. Aus vorheriger Umformung zeigt sich, dass sich der Stückgewinn aus der Differenz zwischen Preis und Stückkosten ergibt. Wenn man dabei nur den variablen Anteil der Kosten berücksichtigt, nennt man $\bar{G}_D(x) = p(x) - \bar{K}_v(x)$ den **Deckungsbeitrag**.

Als Abschluss des Abschnitts der Kosten- und Preistheorie möchte ich ein etwas umfangreicheres Beispiel anführen:

Die Grenzkosten für einen bestimmten Artikel lassen sich durch eine Polynomfunktion zweiten Grades beschreiben. Dabei ergeben sich bei einer Produktion von 2 ME Grenzkosten von $\frac{4}{3}$ GE, werden 10 ME produziert, betragen die Grenzkosten $\frac{28}{3}$ GE. Bei einer Produktion von 4 ME besitzt die Grenzkostenfunktion einen Extremwert. Werden 2 ME produziert, so betragen die Gesamtkosten $\frac{40}{3}$ GE.

a) Man bestimme die Gleichung der Grenzkostenfunktion und der Kostenfunktion.

Um die gesuchten Funktionen zu erhalten, muss eine umgekehrte Kurvendiskussions-Aufgabe durchgeführt werden. Die Grenzkosten entsprechen der ersten Ableitung $K'(x)$ der Kostenfunktion $K(x)$. Somit gilt: $K'(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow K''(x) = 2ax + b$. Aus der Angabe ist außerdem Folgendes herauszulesen, woraus man die Gleichungen für das zu lösende Gleichungssystem erhält:

$$\begin{array}{ll} K'(2) = \frac{4}{3} : & \text{I: } \frac{4}{3} = 4a + 2b + c \\ K'(10) = \frac{28}{3} : & \text{II: } \frac{28}{3} = 100a + 10b + c \\ K''(4) = 0 : & \text{III: } 0 = 8a + b \end{array}$$

Daraus ergeben sich die Lösungen $a = \frac{1}{4}$, $b = -2$, $c = \frac{13}{3}$ und daher

$$K'(x) = \frac{x^2}{4} - 2x + \frac{13}{3}.$$

Um die Kostenfunktion $K(x)$ zu erhalten, integrieren wir $K'(x)$ und verwenden die Information $K(2) = \frac{40}{3}$.

$$K(x) = \int \left(\frac{x^2}{4} - 2x + \frac{13}{3} \right) dx = \frac{x^3}{12} - x^2 + \frac{13}{3}x + c$$

$$\frac{40}{3} = \frac{8}{12} - 4 + \frac{26}{3} + c \Rightarrow c = 8$$

Für $K(x)$ ergibt sich: $K(x) = \frac{x^3}{12} - x^2 + \frac{13}{3}x + 8$

b) Berechnen Sie die Produktionsmenge für das Betriebsoptimum. Wie hoch sind die minimalen Stückkosten?

Wir berechnen die Stückkostenfunktion $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{x^2}{12} - x + \frac{13}{3} + \frac{8}{x}$ und mittels $\bar{K}'(x) = 0$ das Betriebsoptimum x_{opt} .

$$\bar{K}(x) = \frac{2x}{12} - 1 - \frac{8}{x^2}$$

$$0 = x^3 - 6x^2 - 48$$

$$x_{opt} = 6,98 \text{ ME}$$

Die minimalen Stückkosten erhält man, indem man x_{opt} in $\bar{K}'(x)$ einsetzt:

$$\bar{K}'(6,98) = 2,56 \text{ GE}$$

c) Die Nachfragefunktion für diesen Artikel lautet $p(x) = 5 - \frac{x}{3}$. Ermitteln Sie Erlös- und Gewinnfunktion.

Die Erlösfunktion ist $E(x) = p \cdot x$ und lautet daher $E(x) = 5x - \frac{x^2}{3}$.

$$G(x) = E(x) - K(x) = 5x - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{12} + x^2 - \frac{13}{3}x - 8 = -\frac{x^3}{12} + \frac{2x^2}{3} + \frac{2x}{3} - 8$$

d) Bei welcher Produktionsmenge wird der maximale Erlös erzielt? Wie groß ist der maximale Erlös? Man stelle rechnerisch fest, ob bei dieser Menge der größte Gewinn erzielt wird.

Den maximalen Erlös und den größten Gewinn erhält man wieder durch Lösen der Gleichungen $E'(x) = 0$ und $G'(x) = 0$.

$$E'(x) = 5 - \frac{2x}{3}$$

$$0 = 15 - 2x$$

$$x = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ ME}$$

Der maximale Erlös beträgt daher $E\left(\frac{15}{2}\right) = 18,75 \text{ GE}$.

$$G'(x) = -\frac{3x^2}{12} + \frac{4x}{3} + \frac{2}{3}$$

$$0 = -\frac{x^2}{4} + \frac{4x}{3} + \frac{2}{3}$$

$$x_1 = -0,46 \text{ (diese Lösung wird vernachlässigt)}$$

$$x_2 = 5,79 \text{ ME}$$

Bei der Menge mit dem größten Erlös ist also nicht der maximale Gewinn zu erreichen.

e) Berechnen Sie die Gewinnschwellen und den dazugehörigen Preis. In welchem Bereich arbeitet der Betrieb mit Gewinn, in welchem mit Verlust?

Mit den Gewinnschwellen sind die oben besprochene Gewinnschwelle und Gewinn-grenze gemeint. An diesen Stellen beträgt der Gewinn genau Null.

$$G(x) = 0$$

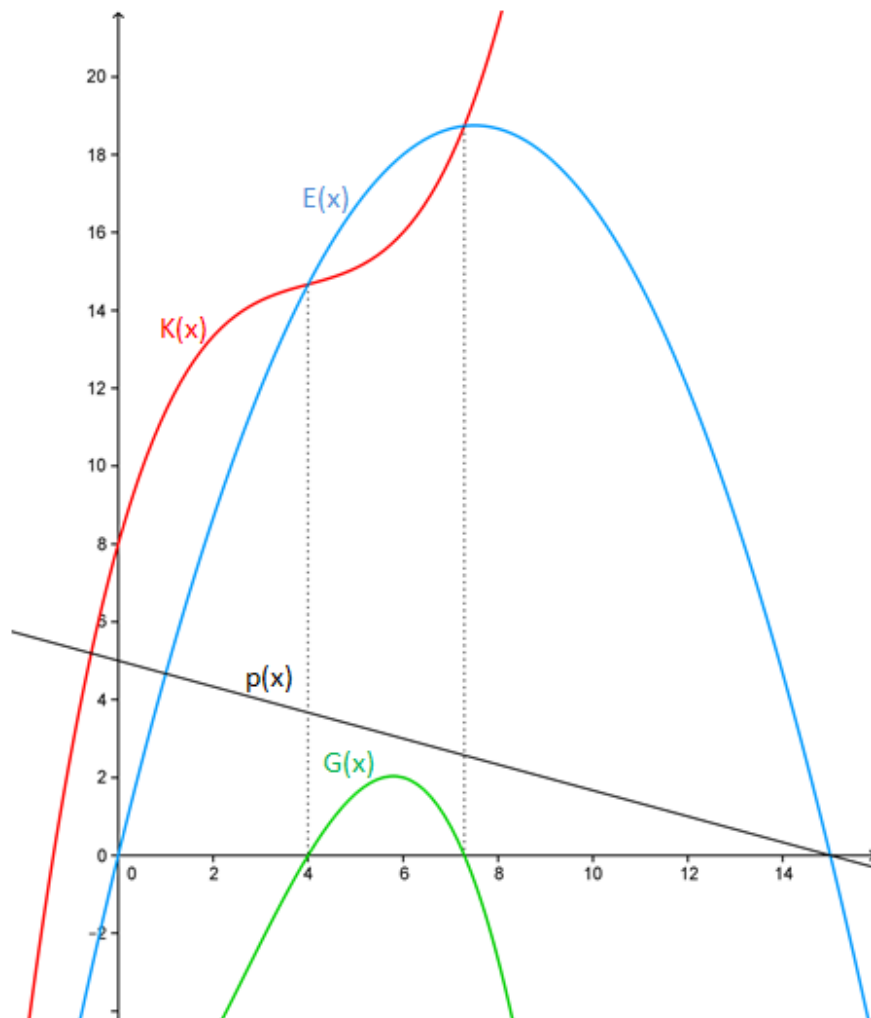
$$0 = -\frac{x^3}{12} + \frac{2x^2}{3} + \frac{2x}{3} - 8$$

$$x_1 = 7,29 \approx 8 \text{ ME} \Rightarrow p(8) = 2,33 \text{ GE}$$

$$x_2 = 4 \text{ ME} \Rightarrow p(4) = 3,67 \text{ GE}$$

Bei einem Verkauf zwischen 4 und 8 ME kann man von einem Gewinn sprechen, bei weniger als 4 oder mehr als 8 ME findet ein Verlust statt.

Abschließend zu diesem Beispiel noch eine Grafik, an der man gut erkennen kann, dass genau in dem Intervall, in dem die Erlösfunktion $E(x)$ über der Kostenfunktion $K(x)$ liegt, die Gewinnfunktion $G(x)$ in den positiven Bereich ragt:



Finanzmathematik 2

Die Schulbücher zählen zur Finanzmathematik 2 im IV. Jahrgang die Kapitel Investitionsrechnung und Kurs- und Rentabilitätsrechnung.

4.2.7 Investitionsrechnung

Unter einer Investition versteht man die Beschaffung von Anlagen zum wirtschaftlichen Nutzen. Die Investitionsrechnung beurteilt hierbei die Vorteilhaftigkeit geplanter Investitionsprojekte. Sie gibt Entscheidungshilfen bei mehreren Möglichkeiten der Investition (Anschaffung – Ja oder Nein? Wenn ja – welche?) und stellt Hilfsmittel bereit, um Vor- bzw. Nachteile beurteilen zu können. Die Investitionsrechnung bietet also Methoden, um den Erfolg einer Investition bewerten oder vorhersagen zu können.

Zu Beginn einer Investition gibt es den Kapitaleinsatz (KE), vergleichbar mit dem Kaufpreis. Ziel der Investition ist es, auch wieder Einnahmen zu machen, die die Kosten für den Kapitaleinsatz und diverse laufende Ausgaben wie den Betrieb oder die Erhal-

tung ausgleichen bzw. im Idealfall übersteigen. Diese Einnahmeüberschüsse können im Voraus aber nur abgeschätzt werden. Somit ist die Investitionsrechnung nur so verlässlich wie die herangezogenen Daten, die meist nicht genau bestimmt werden können. Als Beispiel bringe ich kurz die Anschaffung einer Waschmaschine, die bei Hinkelmann et al. im Kapitel der Investitionsrechnung immer wieder auftaucht. Für eine sinnvolle Investitionsrechnung braucht man hier beispielsweise die Informationen über die Anschaffungskosten, die erwartete Nutzdauer, die Fixkosten und die variablen Kosten (pro Waschgang) oder auch den Restwert am Ende der Nutzung (für den Fall, dass man die Waschmaschine im Anschluss verkaufen möchte) bzw. den erwarteten Erlös.

Da auch der Zinssatz nicht genau bestimmt werden kann, weil es um zukünftige Einnahmen oder Ausgaben geht, sondern man auf Erfahrungswerte angewiesen ist, rechnet man mit dem sogenannten **Kalkulationszinssatz**. Diesbezüglich kann man aber zumindest ein paar Überlegungen anstellen, um die Wahl des Kalkulationszinssatzes etwas einzugrenzen. Wenn der Kaufpreis aus Eigenmitteln aufgebracht werden kann, ist mit dem Zinssatz einer möglichen Veranlagung zu rechnen. Ist allerdings eine Fremdfinanzierung nötig, indem man z. B. einen Kredit aufnehmen muss, wird als Kalkulationszinssatz jener herangezogen, mit dem das geborgte Kapital verzinst wird. Eine möglichst exakte Wahl des Kalkulationszinssatzes beruht aber eher auf betriebswirtschaftlichen Überlegungen, die über den Rahmen des Mathematikunterrichts hinausgehen.³⁴

Man unterscheidet bei der Investitionsrechnung zwischen den statischen Verfahren und den dynamischen Verfahren. Bei den **statischen Verfahren** der Investitionsrechnung werden während der gesamten Nutzungsdauer gleich bleibende Erträge und Kosten angenommen und dem Kapitaleinsatz gegenübergestellt. Die Bewertung erfolgt auf Basis von Durchschnittswerten. Die **dynamischen Verfahren** hingegen berücksichtigen den Zeitfaktor und die Verzinsung, da der Anschaffungspreis im Allgemeinen sofort zu bezahlen ist und die Einnahmeüberschüsse erst während der Nutzung der Investition verfügbar werden.

Auf die unterschiedlichen statischen Verfahren wird ausschließlich bei *Mathe mit Gewinn* eingegangen, die dynamischen Verfahren werden in beiden Büchern behandelt.

³⁴ Steiner, 2007 (Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 3), S. 136

Statische Verfahren der Investitionsrechnung

Kostenvergleichsrechnung

Bei der Kostenvergleichsrechnung erfolgt ein Vergleich der Kosten pro Periode (meistens ein Jahr). Dafür müssen Betriebs- und Kapitalkosten betrachtet werden. Die Betriebskosten setzen sich aus den Fixkosten und den variablen Kosten zusammen. Für die Kapitalkosten benötigt man neben dem kalkulatorischen Zins den Wert der sogenannten kalkulatorischen Abschreibung (jährliche Wertminderung eines Investitionsprojekts). Hierfür wird der durchschnittliche Wert des Geräts nach folgendem Vorgang bestimmt:

$$\text{kalkulatorische Abschreibung} = \frac{\text{Anschaffungskosten} - \text{Restwert}}{\text{Nutzungsdauer}}$$

Der kalkulatorische Zins beschreibt die Zinsen, die einem entgehen, weil das Geld aufgrund der Anschaffung nicht weiter auf dem Sparsbuch o. ä. liegen kann und wird nach folgender Formel berechnet:

$$\text{kalkulatorischer Zins} = \frac{\text{Anschaffungskosten} + \text{Restwert}}{2} \cdot \text{Kalkulationszinssatz}$$

Den Wert $\frac{\text{Anschaffungskosten} + \text{Restwert}}{2}$ bezeichnet man als das durchschnittlich gebundene Kapital.

Die für die Kostenvergleichsrechnung interessante Funktion für die Jahreskosten lautet:

$$\begin{aligned} \text{Jahreskosten} &= \text{Betriebskosten} && + \text{Kapitalkosten} \\ &= \text{Fixkosten} + \text{var. Kosten} && + \text{kalkulator. Abschreibung} + \text{kalkulator. Zins} \end{aligned}$$

Im Sinne der Kostenvergleichsrechnung ist jene Investition mit den geringsten Jahreskosten zu wählen.

Offen bleibt bei diesem Modell allerdings, ob die Investition überhaupt sinnvoll ist. Es dient nur zum Vergleich und nicht zur Feststellung, ob die Investition rentabel ist oder nicht.

Gewinnvergleichsrechnung

Bei der Gewinnvergleichsrechnung werden als Ergänzung zur Kostenvergleichsrechnung zusätzlich die erzielbaren Gewinne miteinbezogen.

Gewinn = Erlös – Gesamtkosten (jeweils auf eine Periode bezogen)

Im Sinne der Gewinnvergleichsrechnung ist jene Investition mit dem höchsten Gewinn vorzuziehen. Aus dem Gewinn des einen Geräts soll möglichst die Anschaffung des nächsten Geräts möglich gemacht werden.

Dieses Modell bietet teilweise eine Überprüfung der Rentabilität, da eine Investition nur bei positivem Gewinn zu befürworten ist.

Rentabilitätsrechnung (ROI – Return On Investment)

Bei der Rentabilitätsrechnung wird beim Vergleich neben dem Gewinn auch das eingesetzte Kapital in Betracht gezogen. Hier erfolgt ein Vergleich des erzielbaren Gewinns pro Periode mit dem durchschnittlich gebundenen Kapital. Der Wert, der sich dabei ergibt, wird meist in Prozent angegeben und bezeichnet die **Rentabilität** der Investition.

Im Sinne der Rentabilitätsrechnung ist jene Investition mit der höheren Rentabilität zu empfehlen. Wenn es nicht um den Vergleich von Investitionen geht, sondern um die Sinnhaftigkeit an sich, ist eine Investition frühestens dann zu befürworten, wenn die Rentabilität höher als der am Kapitalmarkt erzielbare Zinssatz ist.

Statische Amortisationsrechnung (pay-back- / pay-off-Rechnung)

Bei der statischen Amortisationsrechnung wird der Zeitraum betrachtet, der nötig ist, um die Anschaffungskosten mit dem erzielten Gewinn aus der Anschaffung eines Geräts wieder zu erwirtschaften. Diesen Zeitraum bezeichnet man als Amortisationsdauer.

Diese ergibt sich aus
$$\frac{\text{Auszahlungen}}{\text{durchschnittlicher jährlicher Einzahlungsüberschuss}}$$
³⁵

Unter den Auszahlungen versteht man die Anschaffungskosten, bzw. Anschaffungskosten abzüglich Restwert, falls die Investition am Ende der Nutzungsdauer noch einen Restwert hat. Zum durchschnittlichen jährlichen Einzahlungsüberschuss pro Jahr zählt man sowohl den durchschnittlichen jährlichen Gewinn, als auch die kalkulatorischen Abschreibungen.

³⁵ http://imihome.imi.uni-karlsruhe.de/namortisationsrechnung_b.html

rische Abschreibung (pro Jahr), da man als Benutzer schließlich einen Nutzen von der Investition hat. Daher gilt:

$$\text{Amortisationsdauer} = \frac{\text{Anschaffungskosten} - \text{Restwert}}{\text{durchschnittlicher jährlicher Gewinn} + \text{kalkulatorische Abschreibung}}$$

Wenn die sich aus dieser Rechnung ergebende Dauer innerhalb der Nutzungsdauer liegt, darf man eine Wiedergewinnung des eingesetzten Kapitals zumindest als möglich betrachten.

Im Sinne der Amortisationsrechnung ist die Investition zu bevorzugen, die eine kürzere Amortisationsdauer aufweist. Voraussetzung ist allerdings, dass diese im Rahmen der Nutzungsdauer liegt. Auch dieses Modell dient nicht als Entscheidungshilfe bezüglich Sinnhaftigkeit der Investition, sondern ist eher als Maß für das Investitionsrisiko zu betrachten.

Beispiel:³⁶

Ein Unternehmen beabsichtigt, einen Kopierer anzuschaffen. Es liegen 2 Alternativen vor:

	Kopierer 1	Kopierer 2
Anschaffung	€ 10.000,-	€ 12.000,-
Nutzungsdauer	5 Jahre	5 Jahre
Durchschnittlicher Gewinn	€ 5.200,- / Jahr	€ 7.240,- / Jahr

Der durchschnittliche Gewinn ergibt sich aus dem Erlös (durch Einnahme der Kosten pro Kopie vom Kunden) abzüglich anfallender Kosten wie z. B. Betriebskosten. Geht man von einem linearen Abschreibungsverlauf aus, beträgt die kalkulatorische Abschreibung (am Beispiel von Kopierer 1) $\frac{€ 10.000}{5} = € 2.000$ pro Jahr:

Abschreibung	€ 2.000,- / Jahr	€ 2.400,- / Jahr
--------------	------------------	------------------

³⁶ <http://www.welt-der-bwl.de/Amortisationsrechnung>

Die Amortisationsdauer errechnet sich bei Kopierer 1 wie folgt:

$$\frac{\frac{€ 10.000 \text{ (Kapitaleinsatz)}}{\frac{€ 5.200}{\text{Jahr}} \text{ (durchschn. Gewinn)} + \frac{€ 2.000}{\text{Jahr}} \text{ (Abschreibung)}}}{= \frac{€ 10.000}{\frac{€ 7.200}{\text{Jahr}} \text{ (durchschnittlicher Mittelrückfluss)}}}$$

= 1,39 Jahre

Bei Kopierer 1 dauert es also 1,39 Jahre bzw. in etwa ein Jahr und fünf Monate, bis die Anschaffungskosten abgedeckt sind. Bei Kopierer 2 beträgt die Amortisationsdauer 1,24 Jahre. Beide Ergebnisse liegen innerhalb der Nutzungsdauer von fünf Jahren und die Investition beider Kopierer wäre daher zu befürworten, allerdings ist Kopierer 2 wegen seiner kürzeren Amortisationsdauer die vorteilhaftere Alternative.

Dynamische Verfahren der Investitionsrechnung

Bis jetzt wurde vorausgesetzt, dass die betrachteten Kosten bzw. Erlöse über die gesamte Nutzungsdauer hinweg unverändert bleiben, wodurch Durchschnittswerte verwendet werden konnten. Der Zeitpunkt, an dem Kosten anfallen oder Erlöse erzielt werden, wurde nicht berücksichtigt, obwohl es einen Unterschied darstellt, ob ein Geldbetrag heute oder in vielen Jahren fällig ist. Diese Mängel der statischen Verfahren sollen mit den dynamischen behoben werden, indem Werte mithilfe der Zinseszinsrechnung zu einem bestimmten Bezugszeitpunkt ermittelt werden. In den Schulbüchern wird dabei allerdings zur Vereinfachung von folgenden Bedingungen ausgegangen:

- Alle Zahlungen erfolgen am Ende einer Periode.
- Es gilt immer derselbe Zinssatz (Kalkulationszinssatz).
- Es gilt die Wiederanlageprämisse. (Jedes verfügbare Geld wird sofort wieder zum angenommenen Kalkulationszinssatz angelegt.)

Bei den dynamischen Verfahren der Investitionsrechnung kommen auch die Zinseszinsen und die Methoden der Rentenrechnung – die Berechnung eines Barwerts – wieder zum Zug.

Kapitalwertmethode (NPV – Net Present Value)

Bei der Kapitalwertmethode werden die Einnahmeüberschüsse berechnet (die jeweiligen Einnahmen werden die entsprechende Zeit abgezinst) und mit dem Kaufpreis verglichen. Ist der damit berechnete Kapitalwert größer als der Kaufpreis, ist die Investition zu befürworten. Die Differenz aus Kapitalwert und Kaufpreis wird auch als

Goodwill (Steiner et al.) oder NPV (Hinkelmann et al.) bezeichnet und muss somit positiv sein, um für eine sinnvolle Investition zu sprechen.

In der Praxis wird man selten Investitionsobjekte mit gleicher Nutzungsdauer und gleichem Kaufpreis vergleichen, wo es reichen würde, die Kapitalwerte der Einnahmeüberschüsse zu berechnen. Ist die Nutzungsdauer gleich und der Kaufpreis nicht, ist wie zuvor der Goodwill zu berechnen und die Investition mit dem höheren Goodwill zu favorisieren. Falls sowohl Kaufpreis als auch Nutzungsdauer bei den Investitionsobjekten verschieden sind, ist auf die Annuitätenmethode zurückzugreifen, die der unterschiedlichen Nutzungsdauer Rechnung trägt.

Annuitätenmethode

Der Goodwill wird gleich wie schon bei der Kapitalwertmethode berechnet. Dann stellt sich bei der Annuitätenmethode allerdings folgende Frage: Welchen gleich bleibenden (jeweils am Jahresende fälligen) Beträgen/Annuitäten entspricht der Goodwill? Um dies zu beantworten, ist folgende Gleichung zu lösen. Die Anzahl der Summanden ist von der Nutzungsdauer des Gerätes abhängig.

$$G = \frac{A}{1+i} + \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3} + \dots$$

G ... Goodwill

A ... Annuität

i ... Kalkulationszinssatz

Im Sinne der Annuitätenmethode ist jene Investition mit der höchsten Annuität zu bevorzugen. Die Annuitätenmethode baut auf die Kapitalwertmethode auf und ist somit eine Weiterentwicklung dieses Verfahrens, daher führen beide Modelle zum selben Ergebnis.

Neben der Frage, ob eine Investition sinnvoll ist, stellt sich auch jene, *wie* rentabel eine Investition ist. Man könnte auch sagen: Welche Verzinsung des Kapitaleinsatzes ist gleichwertig mit den zu erwartenden Einnahmeüberschüssen? Dazu gibt es folgendes Modell:

Die Methode des internen Zinssatzes (Interne Zinsfußmethode)

Der interne Zinssatz i^* ist jener, bei dem der Goodwill gleich 0 ist. Rentabel ist eine Investition nur dann, wenn der interne Zinssatz größer als der am Kapitalmarkt erzielbare Zinssatz ist. Bei Fremdfinanzierung gilt dasselbe: Der interne Zinssatz muss für eine sinnvolle Investition größer sein als der Kreditzinssatz für das Fremdkapital. Bei einer Auswahl von mehreren Investitionsobjekten ist jener mit dem größten internen Zinssatz zu bevorzugen.

Um den internen Zinssatz zu bestimmen, werden die Einnahmeüberschüsse einer Investition bis zum Ende der Nutzungsdauer aufgezinst (mit dem gegebenen Wiederanlagungszinssatz i). Dann wird der interne Zinssatz i^* bestimmt, mit dem man den Kapitaleinsatz verzinsen müsste, um auf den eben berechneten Wert zu kommen. Somit ergibt sich folgende nach i^* aufzulösende Gleichung:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i^*)^n$$

$$(K_n = E_1 \cdot (1 + i)^{n-1} + E_2 \cdot (1 + i)^{n-2} + \dots + E_n)$$

K_0 ... Kapitaleinsatz/Kaufpreis

E_n ... Einnahmeüberschuss im n-ten Jahr

K_n ... Summe der bis zum Ende des n-ten Jahres aufgezinsten Einnahmeüberschüsse E_n

Alle bisherigen Methoden der Investitionsrechnung hatten ihren Bezug auf den Barwert, waren sogenannte Barwertverfahren. Genauso gut ist es allerdings möglich, den Vergleichszeitpunkt an einen beliebigen anderen Zeitpunkt zu legen, bzw. speziell an das Ende der Nutzungsdauer zu setzen – diese Methoden nennt man Endwertverfahren. Da diese ausschließlich in *Mathe mit Gewinn* behandelt werden, möchte ich derartige Methoden nun vernachlässigen.

Abschließend zur Investitionsrechnung wird noch ein Beispiel gezeigt, bei dem aber auch die Rentenrechnung wieder eine Rolle spielen wird:

- a) *Ein Hotelier klagt über die mangelnde Auslastung seiner Zimmer. Er plant ein Tagungszentrum, das ihm mehr Gäste bringen soll. Die Investition würde € 1.000.000,- kosten. Nach fünf Jahren rechnet man mit einem Restwert des zusätzlichen Baues von € 800.000,-. Außerdem erwartet man folgende Einnahmen bzw. Ausgaben in den nächsten fünf Jahren:*

<i>Jahr</i>	<i>Einnahmen in €</i>	<i>Ausgaben in €</i>
1	120.000,-	120.000,-
2	180.000,-	130.000,-
3	240.000,-	140.000,-
4	350.000,-	150.000,-
5	520.000,-	170.000,-

Man ermittle den Kapitalwert der Investition ($i = 7\%$) und interpretiere das Ergebnis.

$K = € 1.000.000,-$. Zunächst berechnet man sowohl den Barwert E_1 der Einnahmen, als auch den Barwert K_1 der Ausgaben aus den nächsten fünf Jahren, um danach alle anfallenden Einnahmen und Ausgaben zum selben Zeitpunkt gegenüberstellen zu können:

$$E_1 = \frac{120.000}{1,07} + \frac{180.000}{1,07^2} + \frac{240.000}{1,07^3} + \frac{350.000}{1,07^4} + \frac{520.000}{1,07^5} \approx 1.103.046,13$$

$$K_1 = \frac{120.000}{1,07} + \frac{130.000}{1,07^2} + \frac{140.000}{1,07^3} + \frac{150.000}{1,07^4} + \frac{170.000}{1,07^5} \approx 575.620,20$$

Auch der Restwert von € 800.000,- nach fünf Jahren zählt zu den Einnahmen und wird abgezinst:

$$E_2 = \frac{800.000}{1,07^5} \approx 570.388,94$$

Nun kann man alle Einnahmen und Ausgaben zum selben Zeitpunkt vergleichen. Die Differenz der Einnahmen ($E_1 + E_2$) und der Ausgaben ($K + K_1$) ergibt

$$(1.103.046,13 + 570.388,94) - (1.000.000 + 575.620,20) \approx 97.814,87.$$

Das Ergebnis ist positiv und die Investition daher zu befürworten.

b) Zurzeit sind auch die letzten Raten für einen laufenden Kredit zu begleichen. Die Kredithöhe betrug € 80.000,- und die vorgesehene Laufzeit 10 Jahre. Die Rückzahlung erfolgte durch nachschüssige Monatsraten bei $i_2 = 3,5\%$.

b₁) Wie hoch waren die ursprünglichen Raten?

$$n = 10 \text{ Jahre} = 120 \text{ Monate}, i_2 = 3,5\%$$

Zunächst benötigt man den zu i_2 äquivalenten Monatszinssatz:

$$(1 + i_2)^2 = (1 + i_{12})^{12} \Rightarrow i_{12} = 0,00570039$$

Mit der Barwertformel für nachschüssige Renten (der Barwert von € 80.000,- ist gegeben, die Rate ist gesucht; in 10 Jahren erfolgen 120 monatliche Ratenzahlungen) erhält man:

$$80.000 = \frac{R}{(1+i_{12})^{120}} \cdot \frac{(1+i_{12})^{120} - 1}{i_{12}} \Rightarrow R \approx 924,75$$

Die ursprünglichen Raten betrugen € 924,75.

b₂) Nach drei Jahren Rückzahlung setzte der Hotelier für ein halbes Jahr mit den Zahlungen aus. Wie viele Vollraten waren danach noch fällig?

Nach drei Jahren erfolgen sechs Monate Zahlungspause. Wir interessieren uns daher für den Wert des Kredits am Ende der Pause, um die Anzahl der danach noch ausstehenden Raten zu ermitteln. Einerseits benötigt man den Endwert W_1 der sechs nicht eingehenden Monatsraten, andererseits den Barwert W_2 der ursprünglich noch fehlenden Monatsraten (6 ½ Jahre = 78 Monate):

$$W_1 = 924,75 \cdot \frac{(1+i_{12})^6 - 1}{i_{12}} \approx 5.628,87$$

$$W_2 = \frac{924,75}{(1+i_{12})^{78}} \cdot \frac{(1+i_{12})^{78} - 1}{i_{12}} \approx 57.992,82$$

$$W = W_1 + W_2 \approx 63.621,69$$

Von diesem neuen Barwert W ausgehend berechnet man nun die Anzahl m der noch fälligen Vollraten mittels Barwertformel für nachschüssige Monatsraten:

$$63.621,69 = \frac{924,75}{(1+i_{12})^m} \cdot \frac{(1+i_{12})^m - 1}{i_{12}}$$

$$0,3955958 = \frac{(1+i_{12})^m - 1}{(1+i_{12})^m} \Rightarrow m = 87$$

⇒ Nach der halbjährigen Pause sind noch 87 Monatsraten fällig.

4.2.8 Kurs- und Rentabilitätsrechnung

Die Kurs- und Rentabilitätsrechnung ist ein Themengebiet, das sich sehr stark auf das Unterrichtsfach BWL (Betriebswirtschaftslehre) der HAK bezieht und auch viele Begriffe aus diesem Gebiet verwendet oder voraussetzt. Dementsprechend musste ich mich erst etwas in die Materie einlesen und nahm dazu ein Schulbuch zu diesem Unterrichtsgegenstand für den IV. Jahrgang HAK (Betriebswirtschaft HAK IV, Wilfried Schneider et al.) zur Hilfe. Wichtige notwendige Begriffe möchte ich daher zunächst erklären.

Eine Möglichkeit des Sparens ist neben Konten und Sparbüchern beispielsweise die Anlage in **Wertpapiere**. Hierbei werden Kredite an Großschuldner oder Anteile an Gesellschaften verbrieft. Vor allem die **Rendite** (Gewinnchance) und das **Risiko** (Verlustgefahr) sind für den Anleger von großer Bedeutung. Je höher die Renditeaussichten eines Wertpapiers sind, desto höher ist auch das Risiko. Die Mathematikbücher der HAK beschäftigen sich viel mit Anleihen, die eine relativ risikoarme und festverzinsliche Wertpapierform darstellen. Bei Aktien oder Derivaten z. B. ist das Risiko schon weit größer.

Wichtige Merkmale von Wertpapieren aus Anlegersicht:

- Der **Ertrag** und die **Rendite** hängen davon ab, ob eine feste Verzinsung vorliegt (wie z. B. bei einer Fixzinsanleihe), ob die Erträge variabel sind (z. B. Aktie), oder ob ein Wertzuwachs möglich ist (z. B. Zertifikat).
- Der **Emittent** ist jener, der das Wertpapier ausgegeben hat und für das Kapital des Anlegers haftet. Dies kann die öffentliche Hand sein, können Banken und Versicherungsunternehmen oder sonstige Unternehmen (z. B. bei Aktie) sein.
- Die Rückzahlung erfolgt z. B. bei Anleihen nach einer begrenzten Laufzeit. Die Laufzeit kann aber wie bei Aktien auch unbegrenzt sein.

Eine **Anleihe** (Schuldverschreibung, Rente, Bonds) ist ein Darlehen von Großschuldnern, das in Teilschuldverschreibungen („Stückelungen“) zerlegt wird. Bei derartigen Verträgen wird genau geregelt, dass dem Ausgeber (Emittenten) für eine vereinbarte Laufzeit und zu einer vereinbarten Verzinsung von mehreren Anlegern (Zeichnern) ein bestimmtes Kapital überlassen wird. Als Anleger ist man hierbei Gläubiger des

Emittenten und hat das Recht auf Rückzahlung des eingesetzten Kapitals. Die Anleihe ist das wichtigste solcher Gläubigerpapiere.³⁷

Bei einer Anleihe erhält der Anleger im Normalfall am Ende jedes Jahres die Zinsen für seinen Anteil/das Nominale/den Nennwert. Man spricht in diesem Fall von Jahreskupons, möglich sind auch Halb- oder Vierteljahreskupons. Die Zinsen dabei können fix oder variabel sein.

Der Kurs, zu dem die Anleihe gezeichnet bzw. erstmals erworben werden kann, heißt **Emissionskurs** und wird in Prozent des Nominales angegeben. Eine Anleihe kann – je nach Veränderung des Zinssatzes am Kapitalmarkt bis zum Kauf – genau zum Nennwert (also zu 100 %), unter dem Nennwert („unter pari“) oder über dem Nennwert („über pari“) ausgegeben werden. Der Kaufpreis hängt also vom momentanen Kurs ab.

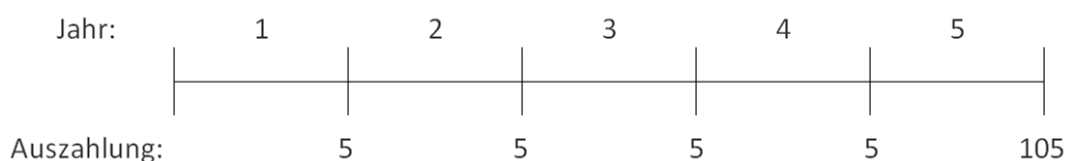
Der Zinssatz, der in den Anleihebedingungen angegeben ist, wird als **Nominalzinssatz** bezeichnet und gibt an, wie viel Prozent vom Nennwert jährlich an Zinsen ausbezahlt werden. Emittenten können bei Anleihen der Bund, Länder und Gemeinden oder Großunternehmen wie z. B. Banken sein, die mit ihrem gesamten Vermögen haften.

Gleichbedeutend für Rendite werden auch die Begriffe **Rentabilität** und **Effektivverzinsung** (effektiver Zinssatz) verwendet, wovon alle drei in den Schulbüchern vorkommen. Die Rendite einer Anleihe beschreibt jenen Zinssatz, für den die Leistungen des Anlegers und die Gegenleistungen des Emittenten äquivalent sind.³⁸ Das ist also jener Zinssatz, mit dem man alle zukünftigen Zahlungen abzinsen muss, damit deren Summe gerade gleich dem heutigen Kurswert der Anleihe ist.³⁹

Berechnung des Ausgabekurses bei endfälliger Anleihe

Nominalzinssatz 5 % p. a., Laufzeit 5 Jahre, Nominale € 100,- , Auszahlung jährlich im Nachhinein, Gesamtnominale wird gemeinsam mit letzter Zinszahlung zurückgezahlt

Die Auszahlungen erfolgen daher der folgenden Zeitlinie entsprechend:



³⁷ Schneider, 2011 (Betriebswirtschaft IV), S. 98 ff.

³⁸ Tinhof, 2012 (Mathematik IV HAK/LW), S. 10

³⁹ Adelmayer, 2005 (Finanzmathematik für Einsteiger), S. 9

Gesucht: Ausgabekurs C bei Rentabilität von (a) 4,8 % p. a. (b) 5,2 % p. a.

Hierfür wird der Barwert der für € 100,- Nominale künftig erfolgenden Zahlungen berechnet, als Zinssatz für die Abzinsung wird die Rentabilität herangezogen:

$$(a) C = \frac{5}{1,048} + \frac{5}{1,048^2} + \frac{5}{1,048^3} + \frac{5}{1,048^4} + \frac{105}{1,048^5} \Rightarrow C \approx 100,87$$

$$(b) C = \frac{5}{1,052} + \frac{5}{1,052^2} + \frac{5}{1,052^3} + \frac{5}{1,052^4} + \frac{105}{1,052^5} \Rightarrow C \approx 99,14$$

Daraus erkennt man:

Rentabilität kleiner als Nominalverzinsung $\Rightarrow$ Kurs > 100 („über pari“)

Rentabilität größer als Nominalverzinsung $\Rightarrow$ Kurs < 100 („unter pari“)

Wie schon bei den verschiedenen Arten der Schuldtilgung gibt es auch bei Anleihen die Möglichkeit, über die ganze Laufzeit verteilt in gleich hohen Teilbeträgen zu tilgen, statt zur Gänze am Laufzeitende wie bei endfälliger Anleihe:

Berechnung des Ausgabekurses bei gleich hohen Tilgungsbeträgen ($\triangleq$ Ratenschuld)

Nominalzinssatz 6 % p. a., Laufzeit 5 Jahre, Nominale € 100,- , Auszahlung jeweils am Jahresende (gemeinsam mit fälligen Zinsenzahlungen), Tilgung in gleich hohen Teilen

Jahr:	1	2	3	4	5
Auszahlung:	26	24,80	23,60	22,40	21,20

Bemerkung: Die Tilgungsbeträge sind zwar gleich hoch, allerdings wird der Zinsanteil der Auszahlungsbeträge aufgrund des immer kleiner werdenden Gesamtbetrags von Jahr zu Jahr auch immer kleiner.

Gesucht: Ausgabekurs bei Rentabilität von (a) 5,8 % p. a. (b) 6,1 % p. a.

$$(a) C = \frac{26}{1,058} + \frac{24,8}{1,058^2} + \frac{23,6}{1,058^3} + \frac{22,4}{1,058^4} + \frac{21,2}{1,058^5} \Rightarrow C \approx 100,53$$

$$(b) C = \frac{26}{1,061} + \frac{24,8}{1,061^2} + \frac{23,6}{1,061^3} + \frac{22,4}{1,061^4} + \frac{21,2}{1,061^5} \Rightarrow C \approx 99,74$$

Es kommt auch vor, dass nach einigen tilgungsfreien Jahren eine jährliche Kapitalrückzahlung in gleich hohen Teilen erfolgt. In diesem Fall möge man sich mit Hilfe der Methoden der Rentenrechnung die auszahlenden Beträge berechnen, der Vorgang für die Berechnung des Kurses ist derselbe.

Die Geldanlage in Wertpapiere ist auch eine Form der Investition, daher kann man nun die Überlegungen der Investitionsrechnung auf die Berechnung des Anleihekurses übertragen. In diesem Sinn bilden die ausbezahlten Beträge (Zinsen und Kapitalrückzahlung) die Einnahmenüberschüsse und der Kurs entspricht dem Kapitalwert der Einnahmenüberschüsse, vorausgesetzt man zieht die Rentabilität als Kalkulationszinssatz heran.

Nun ist in der Praxis aber die umgekehrte Fragestellung interessant: Wie hoch ist die Rentabilität der Anleihe bei gegebenem Ausgabekurs?

Berechnung der Rentabilität bei gegebenem Ausgabekurs

Endfällige Anleihe, Nominalzinssatz 4 % p. a., Laufzeit 5 Jahre, Ausgabekurs $C = 99,20$

Jahr:	1	2	3	4	5
Auszahlung:	4	4	4	4	104

Gesucht ist ein Zinssatz i_0 , für den der Barwert der zukünftigen Zahlungseingänge dem Ausgabekurs C entspricht. Dafür muss folgender Zusammenhang gelten:

$$99,20 = \frac{4}{1+i_0} + \frac{4}{(1+i_0)^2} + \frac{4}{(1+i_0)^3} + \frac{4}{(1+i_0)^4} + \frac{104}{(1+i_0)^5}$$

Für das Lösen dieser Gleichung reicht händisches Rechnen nicht mehr aus. Stattdessen kann man numerische Näherungsverfahren anwenden oder einen Computer bzw. algebraischen Taschenrechner einsetzen. Hier erhält man näherungsweise für $i_0 = 4,181\%$.

Aufgrund der mühsamen Berechnung der Rentabilität geben Hinkelmann et al. eine Formel an, die sich zur Abschätzung des Effektivzinssatzes eingebürgert hat:

Bankenformel:

$$\text{Effektivzinssatz} = \frac{\text{Nominalzinssatz}}{\text{Emissionskurs}} \cdot 100 + \frac{\text{Rückzahlungskurs} - \text{Emissionskurs}}{\text{Laufzeit}}$$

Die Qualität dieser Formel möchte ich anhand des obigen Beispiels kurz überprüfen:

$$\frac{4}{99,20} \cdot 100 + \frac{100 - 99,2}{5} \approx 4,192$$

Für eine vereinfachte Berechnung der Rendite eignet sich diese Formel – getestet an diesem einen Beispiel – also ziemlich gut.

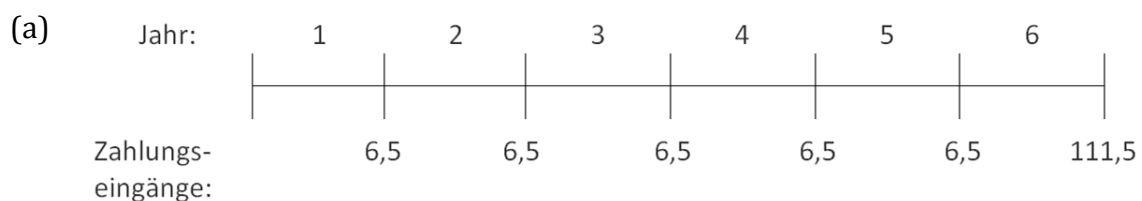
Die Berechnungen bisher waren für neu ausgegebene Anleihen. Es besteht aber auch die Möglichkeit, bereits ausgegebene Anleihen zu kaufen. In diesem Zusammenhang spricht man vom **Sekundärmarkt**. Erklärungen und Berechnungen hierzu möchte ich in Folge anstellen.

In Zeiten fallender (steigender) Zinsen steigt (sinkt) auf dem Sekundärmarkt die Nachfrage nach Anleihen, die noch eine höhere (niedrigere) Verzinsung aufweisen, was in der Regel zu Kurserhöhungen (Kurssenkungen) führt.⁴⁰

Erwerb einer Anleihe am Sekundärmarkt

Endfällige Anleihe, Nominalzinssatz 6,5 % p. a., Laufzeit 10 Jahre, Ausgabekurs $C = 99$; Verkauf nach 6 Jahren zum Kurs $C = 105$

Gesucht sind (a) die erzielte Rentabilität des Verkäufers in den ersten 6 Jahren und (b) die des Käufers in den restlichen 4 Jahren.

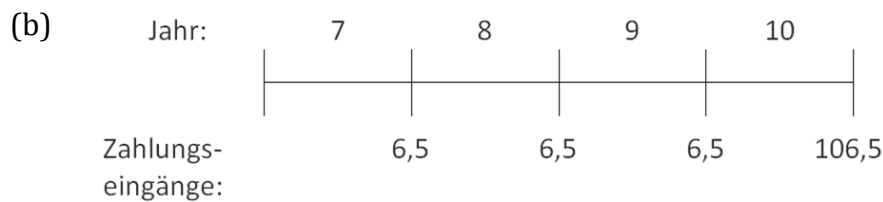


Der Betrag € 111,50 setzt sich aus den Zinsen und dem Verkaufserlös beim Kurs 105 zusammen.

$$99 = \frac{6,5}{1+i_0} + \frac{6,5}{(1+i_0)^2} + \frac{6,5}{(1+i_0)^3} + \frac{6,5}{(1+i_0)^4} + \frac{6,5}{(1+i_0)^5} + \frac{111,5}{(1+i_0)^6}$$

⁴⁰ Steiner, 2007 (Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 3), S. 151

Aus obiger Gleichung ergibt sich näherungsweise für die vom Verkäufer erzielte Rentabilität $i_0 = 7,0404 \% \text{ p. a.}$



Der Betrag € 106,50 setzt sich aus den Zinsen und der Kapitalrückzahlung zum Nominale € 100,- zusammen.

$$99 = \frac{6,5}{1+i_0} + \frac{6,5}{(1+i_0)^2} + \frac{6,5}{(1+i_0)^3} + \frac{106,5}{(1+i_0)^4}$$

Aus obiger Gleichung ergibt sich näherungsweise für die vom Käufer erzielte Rentabilität $i_0 = 5,087 \% \text{ p. a.}$

Bei einem während der Laufzeit erfolgenden Verkauf zu einem Kurs über 100 ist die Rentabilität für den Verkäufer größer als für den Käufer. Analog kommt man zu dem Ergebnis, dass die Rentabilität für den Verkäufer kleiner ist als für den Käufer, falls der Verkauf während der Laufzeit zu einem unter 100 liegenden Kurs erfolgt.

Wenn man mittels Kauf von Anleihen Geld anlegen möchte, steht man in der Praxis oft vor der Wahl zwischen einer neu ausgegebenen Anleihe oder einer Anleihe, die am Sekundärmarkt angeboten wird. Als Überlegung hierzu könnte man für die verschiedenen Varianten die Rentabilität berechnen und diese vergleichen. Was dabei allerdings vorausgesetzt wird, ist, dass die jeweiligen Zahlungseingänge genau zum selben Zinssatz wie der Rentabilität veranlagt werden können. Analog zur Investitionsrechnung kann man aber auch hier einen **internen Zinssatz** bestimmen, der einen Wiederveranlagungszinssatz – unterschiedlich zur Rentabilität – berücksichtigt.

Berechnung des internen Zinssatzes

Endfällige Anleihe, Nominalzinssatz i , Laufzeit n Jahre, Ausgabekurs C

Gesucht: interner Zinssatz i^* für Wiederveranlagungszinssatz i'

Für die Anleihe ist die Summe der bis zum Ende der Laufzeit mit i' aufgezinsten Zahlungseingänge zu berechnen. In die Formel $K_n = K_0 \cdot (1 + i^*)^n$ setzt man nun für K_0

den Ausgabekurs, für K_n den oben ermittelten Wert und für n die Anlagedauer ein und kann i^* – den internen Zinssatz – berechnen.

4.2.9 Regressionsrechnung, Korrelation

Bei der Statistik, die man vor diesem Kapitel schon durchgenommen hat, wird nur ein Merkmal von Merkmalsträgern untersucht. Oft interessiert man sich aber für den Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen, wodurch dann bei einer durch Stichproben untersuchten Grundgesamtheit eine sogenannte zweidimensionale Verteilung von Merkmalwerten vorliegt. Man erhält hierbei einen Zusammenhang, der aus Wertepaaren $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$ besteht. Diese kann man z. B. in Tabellenform, aber auch als Punkte in einem Koordinatensystem grafisch veranschaulichen, wobei man dann von einem sogenannten „Streudiagramm“ spricht. Besteht tatsächlich ein linearer Zusammenhang zwischen den untersuchten Merkmalen, kann man im Koordinatensystem erkennen, dass die Punkte annähernd auf einer Geraden liegen. Beispiele für eine derartige, sogenannte **lineare Regression** wären: Alkoholkonsum – Alkoholgehalt im Blut; Körpergröße – Körpermasse; Zigarettenkonsum – Lungenkrebsrisiko. Jene Gerade, die eine möglichst gute Anpassung an die Wertepaare darstellt, nennt man **Regressionsgerade**.

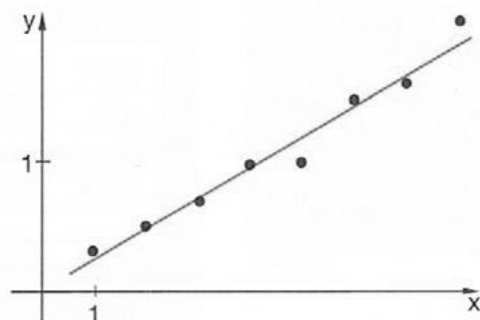
Die Regressionsrechnung dient vor allem dazu, Zusammenhänge zu beschreiben und Prognosen zu erstellen, wofür die ermittelten Funktionen der Regressionslinien dienen sollen.

Beispiel für lineare Regression⁴¹:

Tabelle:

Anzahl x der konsumierten Flaschen Bier	1	2	3	4	5	6	7	8
Blutalkoholgehalt y in ‰	0,3	0,5	0,7	1,0	1,0	1,5	1,6	2,1

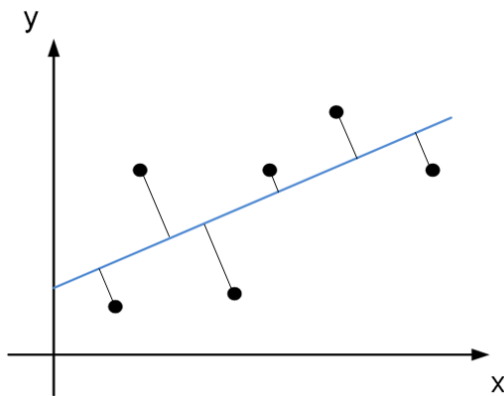
Grafik:



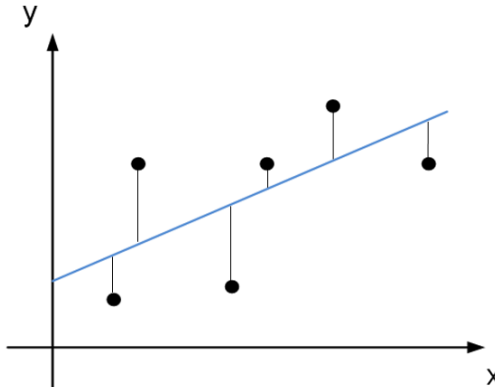
⁴¹ übernommen aus *Mathematik und ihre Anwendungen 4*

Wie findet man nun die Regressionsgerade bzw. deren Funktionsgleichung, die die Tendenz der „Punktwolke“ möglichst treffend beschreibt? Man könnte zum Beispiel die senkrechten oder die vertikalen Abstände der Punkte von der möglichen Regressionsgerade in Betracht ziehen:

Senkrechter Abstand:



Vertikaler Abstand:



Es hat sich aber herausgestellt, dass die sogenannte **Methode der kleinsten Quadrate** ein ausgezeichnetes Verfahren ist, um die Regressionsgerade am besten an die einzelnen Punkte anzunähern. Hier soll die Summe der Quadrate aller vertikalen Abstände der Punkte von der Geraden möglichst klein werden. Die Formel für die Berechnung der Koeffizienten a und b der Regressionsgeraden $y = ax + b$ lautet:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$\bar{x}, \bar{y}$... arithmetische Mittel

Regressionsgerade: $y = ax + b$

Herleitung der Formel für die Koeffizienten a und b der Regressionsgeraden $y = ax + b$
(übernommen aus *Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 3*, S. 83)

Ausgegangen wird von insgesamt n Punkten P_i mit den Koordinaten (x_i, y_i) . P_i^* seien die zu den Punkten P_i gehörigen Punkte, die auf der Regressionsgeraden $y = ax + b$ liegen, und haben die Koordinaten $(x_i, ax_i + b)$. Das Quadrat der Abstände $\overline{P_i P_i^*}$ beträgt jeweils $(ax_i + b - y_i)^2$.

Die Funktion F bildet die Summe der Quadrate dieser Abstände:

$$F(a, b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2$$

Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2 \cdot (ax_1 + b - y_1) \cdot x_1 + 2 \cdot (ax_2 + b - y_2) \cdot x_2 + \dots + 2 \cdot (ax_{n-1} + b - y_{n-1}) \cdot x_{n-1} + 2 \cdot (ax_n + b - y_n) \cdot x_n$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2 \cdot (ax_1 + b - y_1) \cdot 1 + 2 \cdot (ax_2 + b - y_2) \cdot 1 + \dots + 2 \cdot (ax_{n-1} + b - y_{n-1}) \cdot 1 + 2 \cdot (ax_n + b - y_n) \cdot 1$$

Durch Umformen erhält man:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2 \cdot [a \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2) + b \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n)]$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2 \cdot [a \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n) + b \cdot n - (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n)]$$

Zur Berechnung der Extremwerte der Funktion setzt man beide partiellen Ableitungen gleich Null:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= 2 \cdot \left[a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i - \sum x_i y_i \right] = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} &= 2 \cdot \left[a \cdot \sum x_i + b \cdot n - \sum y_i \right] = 0 \end{aligned}$$

Folgendes Gleichungssystem ist daher zu lösen:

$$(1) \quad a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$(2) \quad a \cdot \sum x_i + b \cdot n = \sum y_i$$

Weil für das arithmetische Mittel $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i$ bzw. $\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum y_i$ gilt, kann man schreiben:

$$\begin{array}{l} (1) \quad a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot n \cdot \bar{x} = \sum x_i y_i \\ (2) \quad a \cdot n \cdot \bar{x} + b \cdot n = n \cdot \bar{y} \quad | \cdot (-\bar{x}) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}} \right\} +$$

$$\Rightarrow a \cdot [\sum x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2] = \sum x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Somit erhält man zunächst:

$$a = \frac{\sum x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}$$

Aufgrund des *Verschiebungssatzes*⁴²

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2$$

kann man die Lösung für den Regressionskoeffizienten a dann auch wie folgt angeben:

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ b &= \bar{y} - a\bar{x} \end{aligned}}$$

Die händische Berechnung der Koeffizienten a und b ist sehr rechenintensiv, aber mit Technologieunterstützung erhält man die Lösungen in wenigen Schritten.

Neben der linearen Regression gibt es noch die quadratische, die Potenz-, die Exponential- und eine Form der logistischen Regression, die allerdings nur bei Hinkelmann et al. behandelt werden. In einem weiteren HAK-Lehrbuch (Tinhof et al., *Mathematik V HAK/LW*, 2012), wird in erster Linie die lineare Regression behandelt, aber auch die quadratische und kubische sowie die exponentielle und logistische Regression angeführt, allerdings nur im Rahmen der Erklärung von technischen Hilfsmitteln. Im allgemeinen Fall sagt man zur entsprechenden Näherungskurve **Regressionskurve**, die wichtigste Regressionslinie ist allerdings die Gerade.

Wie stark ist denn nun der lineare Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen x und y ? Die Antwort auf diese Frage gibt die sogenannte **Korrelation**. Hierzu gibt es eine Kennzahl, die den linearen Zusammenhang misst – den **Korrelationskoeffizienten r** . Dessen Berechnung erfolgt nach folgender Formel (auf die Herleitung wird verzichtet):

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

⁴² <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/verschiebungssatz.html>

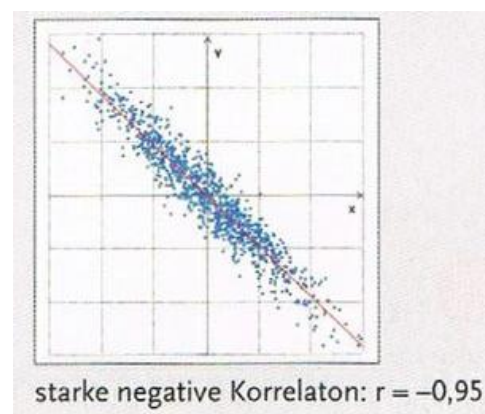
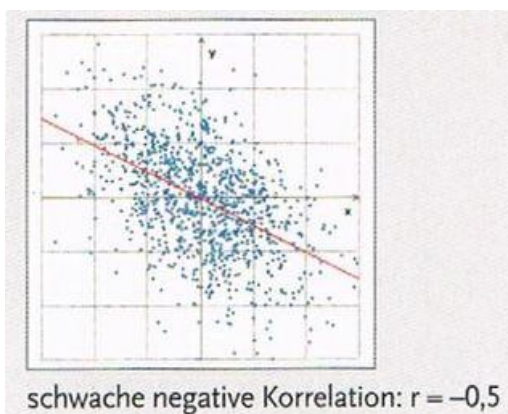
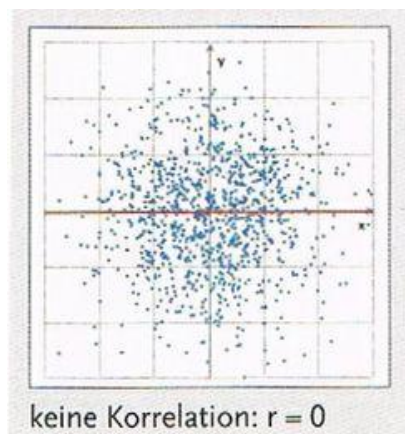
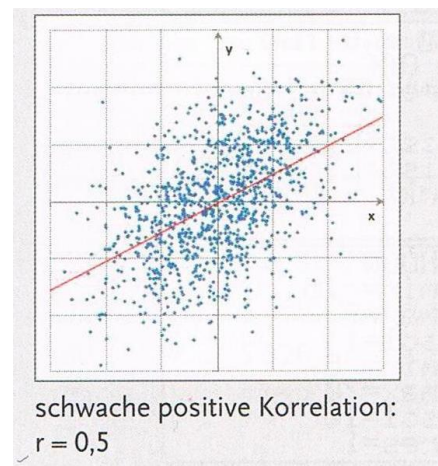
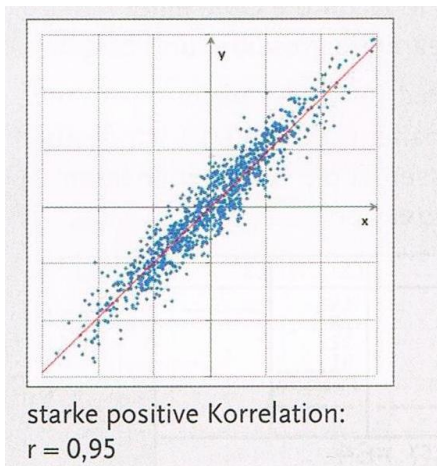
Für den Korrelationskoeffizienten r gilt: $-1 \leq r \leq 1$

$r = +1$... vollkommene positive Korrelation (Regressionsgerade ist steigend)

$r = 0$... keine Korrelation

$r = -1$... vollkommene negative Korrelation (Regressionsgerade ist fallend)

Das bedeutet also, je näher $|r|$ bei 1 ist, desto stärker ist die Korrelation, je näher r bei 0 liegt, desto loser ist der Zusammenhang. Die folgenden Grafiken sollen eine Veranschaulichung dessen geben.



Tinhof, 2012 (Mathematik V HAK/LW), S. 17 f.)

Oft liest man folgende verkürzte Formel für den Korrelationskoeffizienten r :

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

Hier bezeichnet s_{xy} die sogenannte Kovarianz der Merkmale x und y , und s_x und s_y sind die Standardabweichungen. Die Stichprobenkovarianz misst bei einer Stichprobe die gemeinsame Streuung der Beobachtungsdaten⁴³, die Standardabweichung die Abweichungen eines Merkmals zum Mittelwert.

Auch das **Bestimmtheitsmaß** r^2 wird manchmal angegeben, welches ebenfalls ein Maß für die Güte des linearen Zusammenhangs ist. Es gilt $0 \leq r^2 \leq 1$, und je näher r^2 dem Wert 1 ist, desto besser ist der lineare Zusammenhang zweier Merkmale.

In *Mathe mit Gewinn 4* wird auch die partielle Korrelation durchgenommen, bei der mehrere Parameter betrachtet werden, auf die ich aber hier nicht näher eingehen möchte. Durch die mittlerweile schon stark vereinfachte Berechnung dank vieler Hilfsmittel liegt es am Ende jedoch am Benutzer, die Ergebnisse richtig zu interpretieren und zu bewerten.

Im Zusammenhang mit Zeitreihen ist für den Begriff Regression auch die Bezeichnung **Trend** gebräuchlich. Unter einer Zeitreihe versteht man in der Statistik und in den Wirtschaftswissenschaften eine Folge von Beobachtungsereignissen, die in Abhängigkeit von der Zeit erstellt wurden, bei denen man grundsätzlich von einem regelmäßigen Verlauf ausgeht. Für etwaige Unregelmäßigkeiten, die man auf zufällig auftretende Einflüsse zurückführt, bedient man sich der obigen Methode der kleinsten Quadrate. Dementsprechend spricht man dann statt von einer Regressionsgeraden/-kurve auch von einer **Trendgeraden/-kurve**.⁴⁴

Zum Abschluss der Regressions- und Korrelationsrechnung noch ein kurzes Beispiel, das ich aus dem Schulbuch von Tinhof et al.⁴⁵ übernommen habe:

⁴³ <http://de.wikipedia.org/wiki/Stichprobenkovarianz>

⁴⁴ Steiner, 2008 (Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 4), S. 54

⁴⁵ Tinhof, 2012 (Mathematik V HAK/LW), S. 25

- 1.019 Der Kosteneinsatz für die Werbung für ein Produkt (Werbungskosten X in € 1.000,00) und dem Jahresumsatz Y für dieses Produkt (in Mio. €) wurde über einige Jahre beobachtet:

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8
X	30	35	35	40	50	50	55	60
Y	6	6	8	9	12	13	14	14

Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten und die Gleichung der Regressionsgeraden. Zeichnen Sie ein Streudiagramm mit der Regressionsgeraden.

Schätzen Sie den Jahresumsatz bei einem Werbeaufwand von € 45.000,00. Ist das lineare Modell geeignet, um den Zusammenhang zwischen Werbungskosten und Umsatz zu beschreiben?

Der Korrelationskoeffizient r und die Gleichung der Regressionsgeraden ergeben sich sehr schnell mittels Einsatz von Technologieunterstützung:

Korrelationskoeffizient: $r \approx 0,9708$

Regressionsgerade: $y = 0,3057 \cdot x - 3,3157$ (gerundete Werte)

Der Korrelationskoeffizient liegt nahe 1, es herrscht also eine starke positive Korrelation vor.

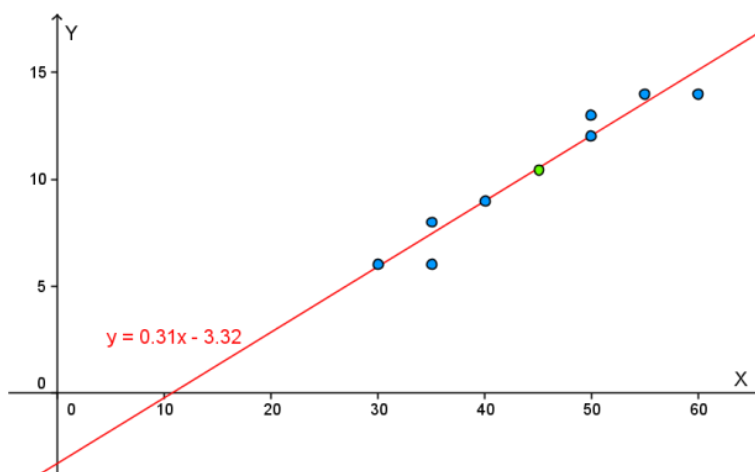
Um den Jahresumsatz bei einem Werbeaufwand von € 45.000,- angeben zu können, ist der Wert 45 in die Regressionsgerade anstelle von x einzusetzen:

$$y = 0,3057 \cdot 45 - 3,3157$$

$$y \approx 10,4409$$

Der Jahresumsatz beträgt bei einem Werbeaufwand von € 45.000,- daher ungefähr € 10.440.900,-.

Nun noch eine Darstellung des Streudiagramms mit der Regressionsgeraden:



Der mittlere grüne Punkt stellt das Zahlenpaar des gegebenen Werbeaufwandes mit dem eben berechneten Wert dar.

4.2.10 Kontingenz

Der Begriff der Kontingenz ist dem Kapitel der Statistik zuzuordnen, er gehört wie schon die Regression und die Korrelation zur Statistik mit zwei Variablen, die den Zusammenhang dieser beiden untersucht. Es gibt verschiedene Verfahren für statistische Tests, bei denen man Hypothesen überprüft. Dabei wird entschieden, ob die Annahme über eine Grundgesamtheit (die **Hypothese**) bestätigt werden kann (aufgrund einer Stichprobe) oder zu verwerfen ist, also ob sie zutrifft oder nicht.⁴⁶

Man kann diese statistischen Testverfahren nach der Art der aufgestellten Hypothesen klassifizieren:

- Parametertests: Hypothesen werden über Parameter einer Grundgesamtheit überprüft.
- Verteilungs- bzw. Anpassungstests: Annahmen über Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden getestet.
- Unabhängigkeitstests: Die Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Merkmalen wird überprüft.

Die Regressions- und Korrelationsanalyse setzen metrisch skalierte Merkmale voraus, mit der Kontingenz kann hingegen auch die Stärke des Zusammenhangs von **nominal** skalierten Merkmalen gemessen werden.

Skalenniveaus für Merkmale ⁴⁷ :	metrisch:	messbare Abstände; quantitativ
	ordinal:	Ordnung größer/kleiner
	nominal:	gleich/ungleich; qualitativ

Mit Hilfe des **χ^2 -Unabhängigkeitstests** (Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstests) lässt sich nun feststellen, ob zwei nominalskalierte Merkmale voneinander unabhängig sind oder nicht. Der sogenannte **Kontingenzkoeffizient C** ist dabei die Maßzahl für den Zusammenhang der beiden Merkmale.

⁴⁶ Tinhof, 2012 (Mathematik V HAK/LW), S. 127

⁴⁷ Tinhof, 2012 (Mathematik V HAK/LW), S. 23

Wie ein derartiger Test durchgeführt wird, möchte ich anhand eines Beispiels zeigen:

Folgende **Kontingenztafel** zeigt die Schüleranzahl im Schuljahr 2011/12 für AHS und HAK in Wien.⁴⁸

Schultyp	männlich	weiblich	Summe
AHS	11.475	14.236	25.711
HAK	2.630	4.700	7.330
Summe	14.105	18.936	33.041

Gibt es einen starken Zusammenhang zwischen dem Geschlecht und den beiden Schultypen?

Von den 33.041 Schülern waren 14.105 männlich, also $\frac{14.105}{33.041} \approx 42,69\%$. Wäre die Wahl des Schultyps unabhängig vom Geschlecht, würde man daher ca. 42,69 % männliche Schüler in beiden Schultypen erwarten, also $25.711 \cdot 0,4269 \approx 10.979$ Schüler in der AHS und $7.330 \cdot 0,4269 \approx 3.130$ Schüler in der HAK. Nach analoger Rechnung ($\frac{18.936}{33.041} \approx 57,31\%$) würde man 14.732 Schülerinnen in der AHS und 4.200 Schülerinnen in der HAK erwarten.

Die sogenannten erwarteten Häufigkeiten berechnet man also kurz durch:

$$\frac{\text{Zeilensumme} \cdot \text{Spaltensumme}}{\text{Gesamtsumme}}$$

Die Tabelle mit den zu erwartenden Häufigkeiten sieht wie folgt aus:

Schultyp	männlich	weiblich	Summe
AHS	10.976	14.735	25.711
HAK	3.129	4.201	7.330
Summe	14.105	18.936	33.041

Je größer die Differenz zwischen den erwarteten und den beobachteten Häufigkeiten ist, desto stärker ist der Zusammenhang zwischen Geschlecht und Schultyp. Genau diesen Zusammenhang soll der Kontingenzkoeffizient nun messen.

⁴⁸

http://www.statistik.at/web_de/statistiken/bildung_und_kultur/formales_bildungswesen/schulen_schul_besuch/index.html

Zunächst berechnet man den Chi-Quadrat-Wert, indem man die Quadrate der Differenzen durch die erwarteten Häufigkeiten dividiert, und diese Werte dann addiert:

$$\chi^2 = \frac{(11.475 - 10.976)^2}{10.976} + \frac{(14.236 - 14.735)^2}{14.735} + \frac{(2.630 - 3.129)^2}{3.129} + \frac{(4.700 - 4.201)^2}{4.201} \\ \approx 178,43$$

Dieser Wert ist vom Stichprobenumfang abhängig und daher als Maßzahl für die Stärke des Zusammenhangs nicht geeignet. Der Kontingenzkoeffizient C wird nach folgender Formel berechnet (ohne Beweis):

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$$

n ... Gesamtsumme

$$\Rightarrow C = \sqrt{\frac{178,43}{33.041 + 178,43}} \approx 0,0733$$

C kann nur im Intervall $[0, 1[$ liegen, der maximal mögliche Wert C_{max} hängt aber von der Zeilen- und Spaltenanzahl ab und kann höchstens den Wert $C_{max} = \sqrt{\frac{m-1}{m}}$ ($m = \min(\text{Zeilenanzahl}, \text{Spaltenanzahl})$) annehmen. Die Herleitung der Berechnung des maximalen Kontingenzkoeffizienten ist in mathematischen Fachbüchern nachzulesen, die Schulbücher geben neben anderen Formeln nämlich auch diese nur „rezeptartig“ vor, da der Beweis über den Rahmen des Schulstoffs hinausgeht. Im obigen Beispiel erhält man für $C_{max} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,707$. Der sogenannte **korrigierte Kontingenzkoeffizient**⁴⁹

$C_{korr} = \frac{C}{C_{max}}$ ist nun normiert auf das Intervall $[0, 1]$ ($0 \leq C_{korr} \leq 1$) und als Prozentwert vom Grundwert C_{max} zu interpretieren. Ein korrigierter Kontingenzkoeffizient C_{korr} nahe 0 verweist auf unabhängige Merkmale, ein Wert nahe 1 bedeutet hingegen ein hohes Maß an Abhängigkeit. Für das Beispiel von vorhin ergibt sich $C_{korr} \approx \frac{0,0733}{0,707} \approx 0,104$ und mit 10,4 % demnach einen nicht besonders starken aber doch vorhandenen Zusammenhang.

⁴⁹ Tinhof, 2012 (Mathematik V HAK/LW), S. 24

4.2.11 Kryptografie, Codierungstheorie

Die Kryptografie ist die Wissenschaft vom Verschlüsseln von Daten, Nachrichten, Texten etc., mit dessen Entschlüsselung sich wiederum die Kryptoanalyse befasst. Mit dem Begriff der Kryptologie existiert ein Überbegriff für diese beiden Gebiete. Die Codierungstheorie liefert dabei die Grundlagen für die Erzeugung von Codes zur Datenübermittlung.

Eine wichtige Grundlage für die Überlegungen zu Kryptologie und Codierung bildet die modulare Arithmetik – das Arbeiten mit **Restklassen**, weshalb ich diese auch kurz erklären möchte. Überlegt man sich dazu zunächst die Gemeinsamkeit z. B. der Zahlen 12, 26 und 33 im Hinblick auf die Division durch 7, erkennt man, dass man bei jeder dieser drei Divisionen denselben Rest (5) erhält. Der Quotient selbst ist hierfür irrelevant. Man sagt daher, dass 12, 26 und 33 bezüglich der Division durch 7 derselben Restklasse angehören.

Man schreibt $5 \equiv 12 \bmod 7$
 $5 \equiv 26 \bmod 7$
 $5 \equiv 33 \bmod 7$ und sagt "5 kongruent 33 modulo 7".

Außerdem gilt für das modulare Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren (ohne Beweis):

- 1) $a \bmod m + b \bmod m \equiv (a + b) \bmod m$
- 2) $a \bmod m - b \bmod m \equiv (a - b) \bmod m$
- 3) $a \bmod m \cdot b \bmod m \equiv (a \cdot b) \bmod m$

Beispiel: $a = 49, b = 31, m = 5$:

$$\begin{aligned} 48 \bmod 5 + 31 \bmod 5 &\equiv 3 + 1 = 4 \\ (48 + 31) \bmod 5 &\equiv 79 \bmod 5 \equiv 4 \\ \Rightarrow 48 \bmod 5 + 31 \bmod 5 &\equiv (48 + 31) \bmod 5 \end{aligned}$$

Beim modularen Potenzieren geht man wie im folgenden Beispiel vor:

$$31^3 \bmod 4 \equiv ? \quad 31 \bmod 4 \equiv 3 \rightarrow 3^3 \bmod 4 = 27 \bmod 4 \equiv 3 \quad \Rightarrow 31^3 \bmod 4 \equiv 3$$

$a^n \bmod m \equiv ?$ Die Basis a wird auf $a \bmod m$ reduziert. Dieses Ergebnis (die neue Basis) wird potenziert und das Ergebnis wieder $\bmod m$ reduziert.

Bei der Übermittlung von Informationen werden zur Sicherstellung der Datenrichtigkeit sogenannte **Prüfziffern** mitgeschickt, die dazu dienen sollen, mögliche Fehler bei der Eingabe oder bei der technischen Übertragung zu erkennen. Man spricht hier auch von einer Plausibilitätskontrolle. So geschieht dies auch bei der Sozialversicherungsnummer. Die **SV-Nr.** besteht in Österreich aus 10 Ziffern. Die ersten drei Ziffern zeigen eine dreistellige fortlaufende Nummer, danach folgt eine einstellige Prüfziffer, und die letzten sechs Ziffern stellen das Geburtsdatum der Person im Format TT MM JJ dar:



Diese Ziffern (p ausgenommen) werden von links nach rechts mit 3, 7, 9, 5, 8, 4, 2, 1 und 6 multipliziert und die Produkte addiert. Die Prüfziffer p ergibt sich aus dieser sogenannten „gewichteten“ Summe modulo 11. (Beim Rest 10 wird eine andere laufende Nummer gewählt.)

Beispiel: Ist der Code 1913110188 eine gültige SV-Nummer?

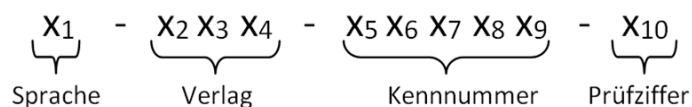
Man überprüft, ob die dritte Ziffer der SV-Nummer (hier: 3) korrekt ist.

$$1 \cdot 3 + 9 \cdot 7 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 8 \cdot 6 = 146$$

$$146 \bmod 11 \equiv 3 = p$$

Es ergibt sich tatsächlich die Prüfnummer $p = 3$, die SV-Nummer ist daher gültig.

Auch der **ISBN-Code** („Internationale Standard-Buchnummer“) zur Erfassung von Büchern enthält eine Prüfziffer. Die Ziffern-Abschnitte des ISBN-Codes beziehen sich auf folgende Kategorien:



Die Ermittlung der Prüfziffer verläuft ein wenig anders als bei der SV-Nr. Die ersten neun Ziffern werden der Reihe nach mit den Zahlen 10, 9, 8, ... 2 multipliziert und diese Produkte addiert. p ist jene Zahl, die diese Summe auf eine durch 11 teilbare Zahl ergänzt, d.h. $11 - \text{Summe} \bmod 11 = p$.

Aufgrund der fortschreitenden Globalisierung wurde es nötig, die weltweit hergestellten Produkte identifizieren zu können, weswegen der EAN entwickelt wurde. Und auch der 13-stellige **EAN-Code** (EAN = European Article Number) besitzt ebenfalls eine Prüfziffer. Die ersten zwei oder drei Ziffern bilden die Länderkennzahl, es folgen die Zifferngruppe für den Hersteller, die Kennnummer des Produkts und am Ende die Prüfziffer. Hierfür werden die ersten 12 Ziffern abwechselnd mit 1 und 3 multipliziert und die Produkte wieder addiert. Für p gilt: $10 - \text{Summe} \bmod 10 = p$

In der nebenstehenden Abbildung sind sowohl ISBN- als auch EAN-Code abzulesen, deren Gültigkeit sich anhand der Prüfziffer kontrollieren lassen.



Übersetzt man eine Information in eine für die Maschine (Computer) lesbare Form, spricht man von einem sogenannten **Quellencode**. Dabei werden aus einem Zeichenvorrat (dem Alphabet) Codewörter gebildet. Der "Code" bezeichnet die Menge aller möglichen Codewörter. Bei der binären Darstellung, die sich hierfür gut eignet, besteht das Alphabet bloß aus $\{0, 1\}$ und der Code aus achtstelligen binären Wörtern. Anwendungsgebiete: z. B. gezippte Dateien (verlustfreie Komprimierung auf deutlich kleinere Datenmengen)⁵⁰

Der gebräuchlichste Code ist der **ASCII-Code** (ASCII = American Standard Code for Information Interchange). Er verwendet für die Codierung eines Zeichens (Buchstaben, Zahlen, Satz- und Sonderzeichen) jeweils 8 Bit ($\cong 1$ Byte).

Verschlüsseln und Entschlüsseln

Die drei grundlegenden Forderungen an die Kryptografie sind laut Steiner et al.⁵¹:

- **Geheimhaltung:** Ein Kryptoanalytiker soll mit den verschlüsselten Daten nichts anfangen können.

⁵⁰ Hinkelmann, 2006 (Mathe mit Gewinn 2), S. 151 f.

⁵¹ Steiner, 2006 (Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 2), S. 105

- Integrität: Die Daten sollen beim Empfänger so ankommen, wie sie vom Absender abgeschickt wurden.
- Authentizität: Es muss überprüfbar sein, ob die Nachricht wirklich vom angegebenen Absender stammt.

Schon vor über 2000 Jahren soll Julius Cäsar seine Nachrichten verschlüsselt haben, indem er jeden Buchstaben im Alphabet um drei Stellen verschob. Aus A wird also D, aus B wird E usw. Diese Methode ist in der Kryptologie als Cäsar-Methode bekannt und gehört zu den Verschiebungs-Algorithmen.

Hier wird das Wort MATHEMATIK zu PDWKHPDWLN. Umgekehrt soll das mit der Cäsar-Methode verschlüsselte Wort WKHUHVD meinen Vornamen darstellen.

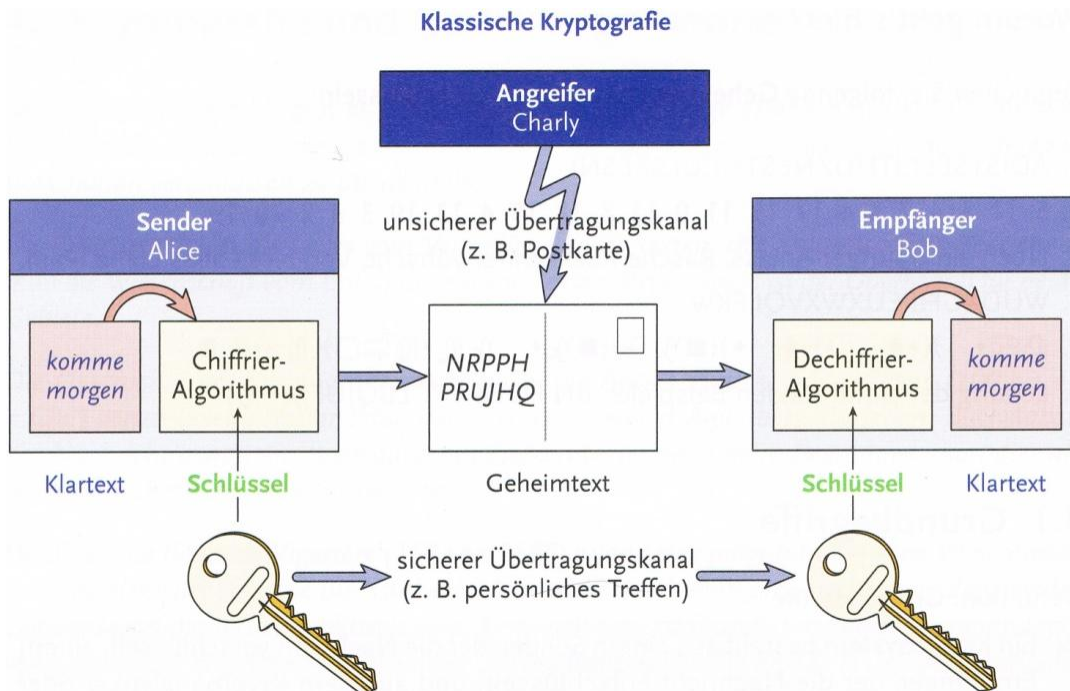
Buchstabe	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Verschlüsselung	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Diese und ähnliche Verfahren haben allerdings den Nachteil, dass man sie relativ leicht durchschauen kann. Deutlich schwieriger wird es schon, wenn man die Buchstaben nach einem zufällig erstellten Muster ersetzt. Dennoch kann man die Verschlüsselung knacken, indem man eine **Häufigkeitsanalyse** durchführt. Buchstaben treten in jeder Sprache mit bestimmten Häufigkeiten auf, welche bekannt sind. Untersucht man daher im Verschlüsselungstext die relative Häufigkeit des Auftretens der Buchstaben, lassen sich diese mit den relativen Häufigkeiten der Buchstaben in der entsprechenden Sprache vergleichen und somit relativ einfach den Originalbuchstaben zuordnen.

Kerckhoff formulierte im 19. Jahrhundert, die Sicherheit eines kryptografischen Verfahrens gründe sich nicht auf die Geheimhaltung des Verschlüsselungsalgorithmus, sondern nur auf die Geheimhaltung des verwendeten Schlüssels.⁵² Der Schlüssel beinhaltet also die geheim zu haltende Information, wohingegen der Algorithmus öffentlich bekannt sein darf.

⁵² Tinhof, 2012 (Mathematik III HAK/LW), S. 165 ff.

Zur Veranschaulichung eine Grafik aus *Mathematik III HAK/LW*, S. 166:



Vigenère-Verschlüsselung: Diese Verschlüsselungsmethode entwickelte sich im 16. Jahrhundert. Die Ver- und Entschlüsselung sind leicht durchzuführen, indem man jeden Buchstaben einer eigenen Cäsar-Verschiebung unterwirft. Nach welchem System diese Verschiebungen erfolgen, wird in einem Schlüsselwort definiert, das nur dem Sender und dem Empfänger bekannt sein darf. Je länger das Schlüsselwort, desto schwieriger ist die Vigenère-Codierung zu knacken.

Beispiel: Nachricht: **GEHEIM**, Schlüsselwort: **MATHE**

Der erste Buchstabe **G** wird um 12 Stellen verschoben, weil **M** 12 Stellen nach dem ersten Buchstaben A im Alphabet kommt ($G \rightarrow S$). Das **E** wird aufgrund der Position des **A** im Alphabet nicht verschoben ($E \rightarrow E$). Das **T** des Schlüsselworts steht 19 Stellen nach dem A, daher wird das **H** um 19 Stellen verschoben ($H \rightarrow A$), usw. (**GEHEIM** $\rightarrow$ **SEALMY**)

Vernam-Verschlüsselung: Bei dieser Schlüsselwortmethode, die in den 1920er Jahren veröffentlicht wurde, werden alle Daten in eine Folge von Bits umgewandelt, wodurch ein langer Text entsteht, der nur aus 0en und 1en besteht. Das Schlüsselwort wird mittels Zufallsgenerator erzeugt und ist eine Bitfolge von gleicher Länge wie der Originaltext. Dann werden die Bits (Original- und Schlüsselbits) Stelle für Stelle modulo 2 addiert.

Beispiel:

(Die Zeichen werden über ihren ASCII-Code in Bytes umgewandelt.)

Nachricht:	h	u	r	r	a
Nachricht (in Bytes):	01001000	01110101	01110010	01110010	01100001
Schlüssel:	00001110	01110101	01101111	01000110	01001111
Verschlüsselter Text:	01000110	00000000	00011101	00110100	00101110
Schlüssel:	00001110	01110101	01101111	01000110	01001111
Originaltext:	01001000	01110101	01110010	01110010	01100001

Die Entschlüsselung erfolgt auf dieselbe Weise. Der Schlüssel wird im allgemeinen Fall nur einmal eingesetzt, weshalb er auch den Namen One-Time-Pad-Schlüssel trägt. Nachteil dieser Methode: Information und Schlüssel sind sehr lang, und müssen außerdem übertragen werden.

Die bisher genannten Verschlüsselungen waren Beispiele für Methoden, die heute nicht mehr sicher sind. In den 1970er Jahren tauchten neue Methoden auf, die alle die Gemeinsamkeit haben, dass der Verschlüsselungsalgorithmus nicht mehr geheim zu bleiben braucht, Nachrichten werden also mit einem **öffentlichen Schlüssel** verschlüsselt. Aber nur Besitzer des geheimen Schlüssels sind in der Lage, die Nachricht wieder zu entschlüsseln und somit zu lesen. Tinhof et al. beschreiben diese sogenannten **Public-Key-Verschlüsselungen** als Übertragung des Prinzips des Briefkastens in die digitale Welt: Jeder könne einen Brief einwerfen, aber nur der Briefkastenbesitzer könne ihn herausnehmen. Möglich wurde dies durch den Einsatz von Einwegfunktionen⁵³. Das sind umkehrbare Funktionen, deren Funktionswerte leicht zu ermitteln sind, deren Umkehrung aber nicht bzw. nur sehr schwer herausgefunden werden kann.

Beispiele für Einwegfunktionen:

1. Das Primzahlprodukt: $(p, q) \mapsto p \cdot q$ ($p, q \dots$ Primzahlen)
Zwei Primzahlen p und q kann man ganz einfach multiplizieren, umgekehrt ist es aber schwieriger, das Produkt zu faktorisieren.
2. Die diskrete Exponentialfunktion: $x \mapsto m^x \bmod n$ ($n, m, x \in \mathbb{N}$)

Ein Beispiel für die Public-Key-Verschlüsselungen ist die RSA-Methode.

⁵³ Tinhof, 2012 (Mathematik III HAK/LW), S. 175

RSA-Methode:

Dem Forscherteam Rivest, Shamir und Adleman gelang 1977 mithilfe des Primzahlprodukts und der diskreten Exponentialfunktion der Durchbruch für eine Verschlüsselung mit öffentlichem und geheimem Schlüssel. Von den Initialen der Erfinder erhielt die Methode ihren Namen.

Verschlüsselung:

Der Nachrichtenempfänger wählt zwei geheim bleibende Primzahlen p und q (in der Praxis haben p und q ca. 100 Stellen) und bildet das Produkt $n = p \cdot q$. Eine zu $m = (p - 1)(q - 1)$ teilerfremde Zahl e (d. h. $\text{ggT}(m, e) = 1$) wird bestimmt. Die Zahlen n und e bilden den öffentlichen Schlüssel und werden bekannt gegeben. Der Absender verschlüsselt dann seine Nachricht x zum Geheimtext y nach dem Algorithmus $y = x^e \bmod n$.

Entschlüsselung:

Für die Gleichung $e \cdot d = 1 + k \cdot (p - 1)(q - 1)$ wird eine Entschlüsselungszahl $d \in \mathbb{N}$ berechnet. Die verschlüsselte Nachricht kann nun mit dem Algorithmus $x = y^d \bmod n$ wieder entschlüsselt werden.

Öffentlicher Schlüssel: Zahlenpaar (n, e)

Geheimer Schlüssel: Zahlenpaar (n, d)

Beispiel:

$$p = 11, q = 13 \Rightarrow n = 11 \cdot 13 = 143$$

$$(p - 1) \cdot (q - 1) = (11 - 1) \cdot (13 - 1) = 10 \cdot 12 = 120$$

e kann jede zu 120 teilerfremde Zahl sein, z. B. $e = 23$

→ öffentlicher Schlüssel: $(143, 23)$

$$\text{Nachricht } x = 17 \rightarrow y = x^e \bmod n = 17^{23} \bmod 143 = 62$$

Geheimnachricht $y = 62$

$$e \cdot d = 1 + k \cdot (p - 1)(q - 1) \rightarrow 23 \cdot d = 1 + k \cdot 120$$

$$d = \frac{1 + 120k}{23}$$

$d \in \mathbb{N}$ erstmals für $k = 9 \Rightarrow d = 47$

→ geheimer Schlüssel: $(143, 47)$

Entschlüsselung nach $x = y^d \bmod n = 62^{47} \bmod 143 = 17$

4.2.12 Aktienanalyse

Die Aktienanalyse gehört im Lehrplan der HAK dem Erweiterungslehrstoff des IV. und V. Jahrgangs an. Im IV. Jahrgang schließt sie an die Kurs- und Rentabilitätsrechnung an und im V. Jahrgang verlangt die Aktienanalyse ein paar Begriffe aus der Statistik, die im selben Jahrgang Teil des verpflichtenden Lehrstoffs sind.

Aktien sind neben Anleihen eine weitere Form von Wertpapieren. Beim Kauf von Aktien beteiligt man sich am Grundkapital einer Aktiengesellschaft und erhält nicht – wie das bei Anleihen der Fall ist – die Verzinsung des eingesetzten Kapitals, sondern ist am Gewinn des Unternehmens beteiligt. Dabei wird ein Teil des Gewinns (**Dividende**) an die Aktionäre ausgezahlt. Der Kurs der Aktie (der aktuelle Preis einer börsengehandelten Aktie in der entsprechenden Landeswährung) hängt von der wirtschaftlichen Situation der Aktiengesellschaft ab, aber auch sehr viel von subjektiven Erwartungen der wirtschaftlichen Entwicklung und der daraus resultierenden Marktsituation (Angebot und Nachfrage), weshalb der Kurs von Aktien in der Regel stärker schwankt als der Kurs von Anleihen.

Aufgabe der Aktienanalysten ist es, sich mit der Frage nach dem richtigen An- und Verkaufszeitpunkt von Aktien zu befassen, bzw. mit der Frage, welche Aktien trotz Risikos interessant sind. Die Analyse von Aktien ist im Allgemeinen ein spekulatives Gebiet, weil die Kursentwicklung von Aktien von zahlreichen Einflüssen abhängt. Grundsätzlich unterscheidet man bei der Aktienanalyse zwischen der Fundamentalanalyse und der technischen Analyse (Chartanalyse).

Bei der **Fundamentalanalyse** geht man davon aus, dass die künftige Kursentwicklung von der wirtschaftlichen Situation des Unternehmens abhängt. Dabei versucht man, durch die Kenntnis unternehmensbezogener Daten oder aus dem Umfeld des Unternehmens die künftige Kursentwicklung zu prognostizieren. Im Gegensatz dazu nimmt man bei der **technischen Analyse** an, dass die zukünftige Kursentwicklung dem bisherigen Kursverlauf ähneln wird, weshalb man durch das Auffinden von Trendbewegungen Tendenzen vorhersagen und Schlüsse auf den zukünftigen Kursverlauf ziehen könne. Man verwendet dafür verschiedene statistische Merkmale (Indikatoren), allerdings ist zwischen Trendfolge-Indikatoren und Oszillatoren zu unterscheiden.

Trendfolge-Indikatoren zeigen die Richtung bzw. den Trend eines Kurses an, **Oszillatoren** messen die Stärke und Geschwindigkeit der Kursschwankungen.

Ein Beispiel für Trendfolge-Indikatoren ist der sogenannte gleitende Durchschnitt (*GD*). Hier wird die Summe der Kurse der letzten n Börsenstage ($C_i, C_{i-1}, \dots$) gebildet und durch n dividiert.

Gleitender Durchschnitt n -ter Ordnung:

$$GD_i = \frac{(C_i + C_{i-1} + \dots + C_{i-(n-1)})}{n}$$

Beispiel⁵⁴:

Für die Kurse einer Aktie, welche aus der folgenden Tabelle zu entnehmen sind, sollen die gleitenden Durchschnitte der Ordnung 5 für den Zeitraum von 29. 5. bis 30. 8. berechnet werden.

$$GD \text{ 5 für den 2. 6.: } \frac{47,09+47,45+45,41+45,75+46,80}{5} = 46,5$$

$$GD \text{ 5 für den 6. 6.: } \frac{45,20+47,09+47,45+45,41+45,75}{5} = 46,18 \quad \text{usw.}$$

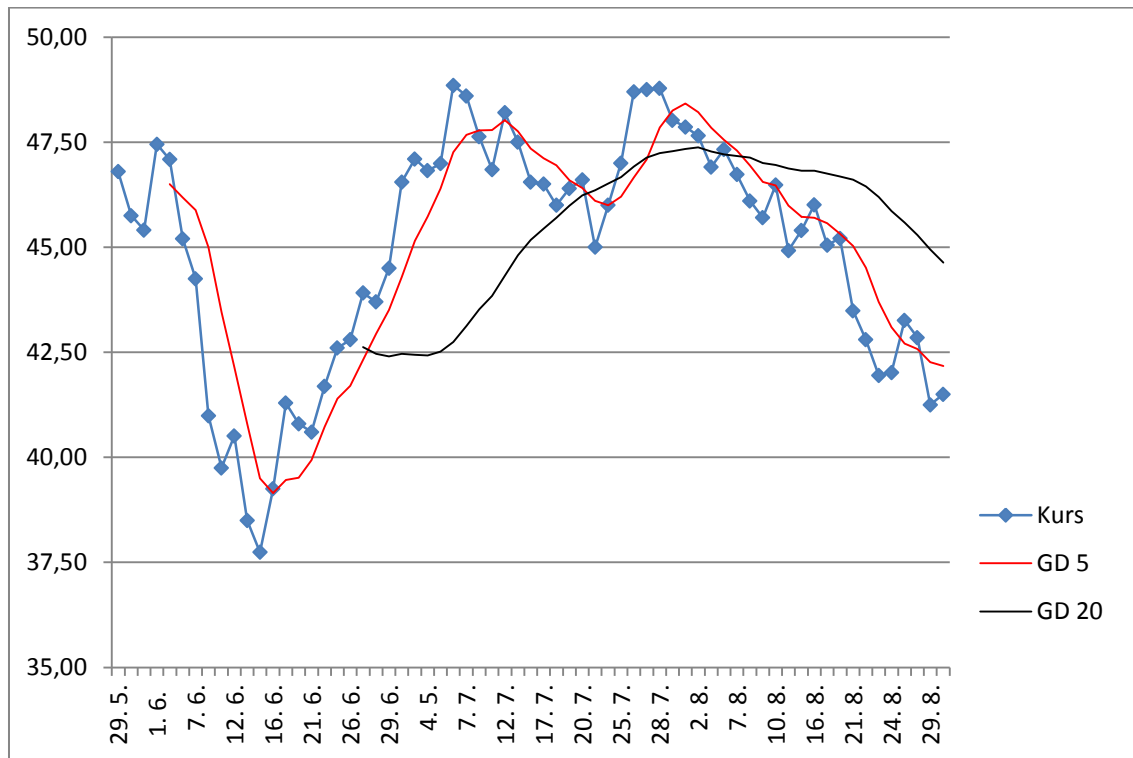
Börsen- tag i	Kurs C_i	GD _i 5
29. 5.	46,80	
30. 5.	45,75	
31. 5.	45,41	
1. 6.	47,45	
2. 6.	47,09	46,500
6. 6.	45,20	46,180
7. 6.	44,25	45,880
8. 6.	40,99	44,996
9. 6.	39,75	43,456
12. 6.	40,51	42,140
13. 6.	38,50	40,800
14. 6.	37,74	39,498
16. 6.	39,25	39,150
19. 6.	41,29	39,458
20. 6.	40,80	39,516
21. 6.	40,60	39,936
22. 6.	41,69	40,726
23. 6.	42,60	41,396
26. 6.	42,80	41,698
27. 6.	43,91	42,320
28. 6.	43,70	42,940
29. 6.	44,50	43,502

Börsen- tag i	Kurs C_i	GD _i 5
30. 6.	46,55	44,292
3. 7.	47,10	45,152
4. 5.	46,82	45,734
5. 7.	46,99	46,392
6. 7.	48,85	47,262
7. 7.	48,60	47,672
10. 7.	47,63	47,778
11. 7.	46,85	47,784
12. 7.	48,20	48,026
13. 7.	47,50	47,756
14. 7.	46,55	47,346
17. 7.	46,50	47,120
18. 7.	46,00	46,950
19. 7.	46,40	46,590
20. 7.	46,60	46,410
21. 7.	45,00	46,100
24. 7.	46,00	46,000
25. 7.	47,00	46,200
26. 7.	48,70	46,660
27. 7.	48,75	47,090
28. 7.	48,78	47,846
31. 7.	48,02	48,250

Börsen- tag i	Kurs C_i	GD _i 5
1. 8.	47,86	48,422
2. 8.	47,65	48,212
3. 8.	46,91	47,844
4. 8.	47,33	47,554
7. 8.	46,73	47,296
8. 8.	46,10	46,944
9. 8.	45,70	46,554
10. 8.	46,48	46,468
11. 8.	44,92	45,986
14. 8.	45,40	45,720
16. 8.	46,01	45,702
17. 8.	45,05	45,572
18. 8.	45,21	45,318
21. 8.	43,49	45,032
22. 8.	42,80	44,512
23. 8.	41,95	43,700
24. 8.	42,02	43,094
25. 8.	43,26	42,704
28. 8.	42,85	42,576
29. 8.	41,25	42,266
30. 8.	41,50	42,176

⁵⁴ Zahlen übernommen aus Tinhof, 2012 (Mathematik V HAK/LW), S. 164 f.

In der folgenden Grafik sind sowohl die Kurslinie (blau) als auch die Durchschnittslinie der Ordnung 5 (rot) und der Ordnung 20 (schwarz) eingezeichnet. Je höher die Ordnung, desto stärker die Glättung des Kursverlaufs.



Ein bekannter Oszillator ist das sogenannte Momentum (M). Dabei wird vom aktuellen Kurs (C_i) der Kurs vor n Börsetagen (C_{i-n}) subtrahiert.

n-Tage-Momentum:

$$M_i = C_i - C_{i-n}$$

Beispiel:

Man berechne für die im vorigen Beispiel gegebene Aktienkursentwicklung das 10-Tage-Momentum.

Das 10-Tage-Momentum kann man ab dem 11. Tag (13. 6.) berechnen, ich beginne hier mit der Berechnung ab dem 21. 6.: $M_{16} = C_{16} - C_6 = 40,60 - 45,20 = -4,60$

für den 22. 6.: $M_{17} = C_{17} - C_7 = 41,69 - 44,25 = -2,56$

für den 23. 6.: $M_{18} = C_{18} - C_8 = 42,60 - 40,99 = 1,61$

für den 26. 6.: $M_{19} = C_{19} - C_9 = 42,80 - 39,75 = 3,05$

usw.

Einen Wechsel beim Momentum von negativen zu positiven Werten deuten Aktienanalysten als Kaufsignal, ein umgekehrter Vorzeichenwechsel hingegen wird als Verkaufssignal gewertet.⁵⁵ Dies lässt sich einfach begründen, da das Momentum die absolute Preisdifferenz zwischen zwei Zeitpunkten darstellt und somit dem Differenzenquotienten entspricht. Ein negatives Momentum deutet somit auf einen Abwärtstrend hin, ein positives hingegen auf einen Aufwärtstrend.

Eine wichtige Kennzahl in der Fundamentalanalyse ist das **Kurs-Gewinn-Verhältnis** (*KGV*):

$$KGV = \frac{\text{Kurs der Aktie}}{\text{Gewinn pro Aktie}}$$

Der Wert des *KGV* ist allein noch nicht aussagekräftig. Aber einerseits können steigende *KGVs* als Kaufempfehlung gesehen werden, andererseits lässt sich das *KGV* mit anderen Firmen vergleichen.

Neben der Fundamentalanalyse und der technischen Analyse gibt es noch die **Random-Walk-Analyse**, bei der die Ansicht gilt, dass sich der gesamte Aktienmarkt wahrscheinlichkeits-theoretischen Überlegungen unterwirft und Analysen somit nicht nötig wären. Im Gegensatz zu komplizierten Analysen des Aktienmarktes könnten durch systematisch zufälliges Handeln gleichwertige Gewinne erzielt werden.⁵⁶ Auf diesen Ansatz wird allerdings in den Schulbüchern nicht weiter Bezug genommen.

Die **Rendite** einer Aktienkursentwicklung bezeichnet die relative Wertänderung des Aktienkurses während einer bestimmten Periode. Abhängig von der Dauer der Periode gibt es Jahres-, Halbjahres-, Quartals-, Monats-, Wochen- oder Tagesrenditen. Berechnet wird die entsprechende Rendite mittels folgender Formel:

$$r_n = \frac{C_n - C_{n-1}}{C_{n-1}}$$

r_n ... Rendite in Periode n

C_n ... Schlusskurs in Periode n , C_{n-1} ... Schlusskurs in vorhergehender Periode

Meist berechnet man aus den einzelnen Renditen die **durchschnittliche Rendite** $\bar{r}$ mittels arithmetischem Mittel:

⁵⁵ Steiner, 2007 (Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 3), S. 159

⁵⁶ Hinkelmann, 2007 (Mathe mit Gewinn 3), S. 212

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n r_k$$

Das Ausmaß der Kursschwankungen innerhalb des Beobachtungszeitraums lässt die Ermittlung der durchschnittlichen Rendite allerdings unberücksichtigt. Daher berechnet man die Standardabweichung s , die die Streuung der Renditen der einzelnen Perioden von der durchschnittlichen Rendite des gesamten Beobachtungszeitraums beschreibt. Diese Kennzahl (Standardabweichung) wird im Rahmen der Aktienanalyse als **Volatilität** bezeichnet und ist ein Maß für das Gesamtrisiko einer Aktie. Für den Vergleich verschiedener Aktienkursentwicklungen gilt: Je größer die Volatilität, desto größer das Risiko:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n (r_k - \bar{r})^2}$$

Beispiel: Die Schlusskurse einer Aktie jeweils am Ende des Monats waren folgende:

März 2012	April 2012	Mai 2012	Juni 2012	Juli 2012
24,28	25,63	27,19	26,21	26,93

Monatsrenditen:

$$r_{April} = \frac{25,63 - 24,28}{24,28} = 0,0556 = 5,56 \%$$

$$r_{Mai} = 6,09 \%$$

$$r_{Juni} = -3,60 \%$$

$$r_{Juli} = 2,75 \%$$

Durchschnittliche Monatsrendite:

$$\bar{r} = \frac{5,56 + 6,09 + (-3,60) + 2,75}{4} = 2,7 \%$$

Volatilität:

$$s^2 = \frac{(5,56 - 2,7)^2 + (6,09 - 2,7)^2 + (-3,6 - 2,7)^2 + (2,75 - 2,7)^2}{3} = 19,788$$

$$s = \sqrt{19,788} = 4,448 \approx 4,45 \%$$

Es gibt zwei weitere wichtige Kennzahlen, die zu den Risikomaßen für Aktien zählen: Beta-Faktor und Korrelation. Der **Beta-Faktor** gibt den Zusammenhang zwischen dem Renditeverlauf einer Aktie und dem Renditeverlauf eines den Gesamtmarkt repräsentierenden Referenzindex an. Der Austrian Traded Index (**ATX**) ist der wichtigste Aktienindex der Wiener Börse. Die Renditen der einzelnen Aktie (x) und die Gesamtmarktrenditen (y) für einen gewissen Zeitraum werden hier gegenübergestellt – man berechnet also den Korrelationskoeffizienten der Merkmale x und y und die Regressionsgerade (Berechnung: siehe Abschnitt 4.2.9). Der Beta-Faktor, der auch als Anstieg der Regressionsgeraden zu deuten ist, gibt an, wie stark sich die Aktienrendite ändert, wenn sich der Referenzindex um einen Prozentpunkt ändert, und ist somit ein Maß für die Anfälligkeit des einzelnen Aktienkurses gegenüber Marktveränderungen.

Für den Beta-Faktor β gilt: $\beta > 1$: Aktie ist riskanter als Marktindex

$\beta < 1$: Aktie ist weniger riskant als Marktindex

Die **Korrelation** bewertet den linearen Zusammenhang von Aktie und Referenzindex und daher die Qualität und Aussagekraft des Beta-Faktors.

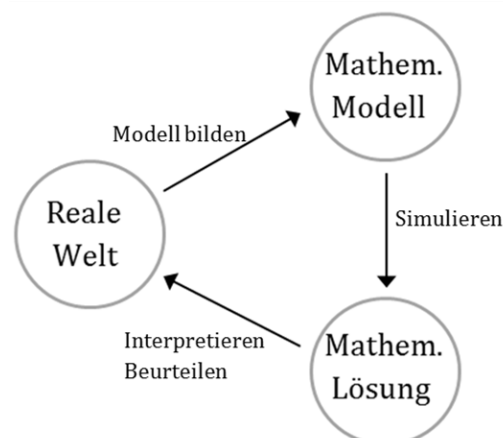
Für die Korrelation ρ gilt: $\rho \sim 1$: Aktie und Marktindex sind stark gleich gerichtet.

$\rho \sim 0$: unabhängig

$\rho \sim -1$: stark entgegen gerichtet

4.2.13 Simulation wirtschaftlicher Probleme

In der Mathematik versteht man unter Simulation das Experiment mit einem mathematischen Modell. Dabei wird ein Problem der realen Welt in ein mathematisches Modell umgewandelt, bei dem eine mathematische Lösung gefunden wird, die wiederum interpretiert und auf die reale Welt umgelegt wird:



Die obige Grafik, die ich an die bei Hinkelmann et al. abgebildete angelehnt habe, beschreibt den Modellbildungskreislauf, bei dem die Simulation nur einen Teil darstellt. Die Schulbücher beschäftigen sich trotz des hauptsächlich auf die Simulation bezogenen Titels zu einem Großteil mit der Modellbildung an sich. Zudem gibt es außerdem andere Ansichten bezüglich des Begriffs „Simulation“. Die Simulation wie hier in den Schulbüchern wird mehr als reines Modellbilden gesehen, und von einer tatsächlichen Simulation wird das Experimentieren von Modellen bzw. „so tun als ob“ (mit oder ohne Computer) von Prozessen verlangt. In meiner Diplomarbeit werden allerdings die Ansichten der Schulbücher mitgeteilt.

In einem Modell werden mathematische Gleichungen, Grafiken oder Strukturen gesammelt, die einem anderen Gebilde (aus der Physik, Biologie, ...) entsprechen sollen.

Als Beispiele für einfache mathematische Modelle sind zu nennen

- die Grenzkosten: $K' = \lim_{x_1 \rightarrow x_2} \frac{K_2 - K_1}{x_2 - x_1}$ oder auch
- der freie Fall: $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$

Simulationen seien sinnvoll, wenn komplizierte Zusammenhänge gegeben sind, bei denen echten Experimenten Grenzen gesetzt sind.

Als Beispiele für Simulationen in den Wirtschaftswissenschaften nennen Steiner et al. die Lagerhaltung, Konjunkturmodelle oder Angebot und Nachfrage.

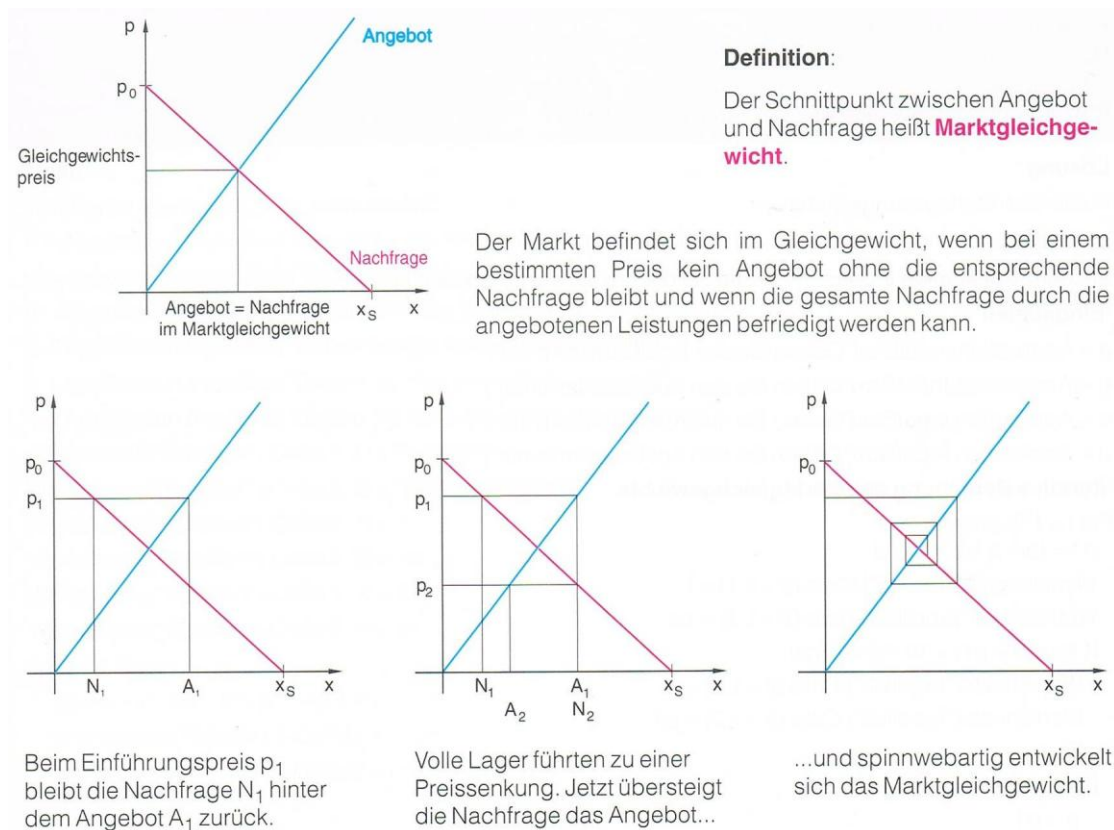
Modelle lassen sich in folgende Kategorien einteilen⁵⁷:

- Kommt im Modell eine Zufallsvariable vor, spricht man von **stochastischen** Modellen, ansonsten von **deterministischen** Modellen.
- Tritt als Variable eine „Veränderliche“ auf (wie z. B. Zeit, Temperatur, ...), spricht man von **dynamischen** Modellen, ansonsten von **statischen** Modellen.
- Verursachen Änderungen in einer Variablen nur proportionale Änderungen in anderen Variablen, spricht man von **linearen** Modellen, ansonsten von **nicht-linearen** Modellen.

⁵⁷ Steiner, 2008 (Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 4), S. 70

In den beiden Schulbüchern werden zahlreiche Beispiele für Simulationen wirtschaftlicher Probleme angeführt, ich werde hier nur kleine Auszüge zeigen bzw. diverse Modelle nur kurz erwähnen. Man soll bloß einen Eindruck davon erhalten, wo mit mathematischen Modellen gearbeitet werden kann, die Durchführung bedarf ohnehin umfangreicherer Beschäftigung damit.

Ein Modell aus *Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 4* ist die Simulation der Entwicklung des **Marktgleichgewichts**:



Der Idealzustand des Marktgleichgewichts herrscht selbstverständlich nicht automatisch vor, dieser muss sich immer wieder neu bilden. Man nennt dieses mathematische Modell aufgrund der spinnwebartigen Grafik auch häufig „Spinnweb-Modell“.

Ein Modell, das in beiden HAK-Büchern behandelt wird, ist beispielsweise das **Konjunkturmodell** nach Paul Anthony **Samuelson** (1915 in Amerika geboren, 1970 Wirtschaftsnobelpreis). Sein Modell versucht unter möglichst einfachen Annahmen, die Wirklichkeit wiederzugeben.⁵⁸

⁵⁸ Hinkelmann, 2008 (Mathe mit Gewinn 4), S. 134

Annahmen:

- Das Volkseinkommen der t -ten Periode (Y_t) entspricht der Gesamtheit der getätigten Ausgaben in der gleichen Periode.
- Die Gesamtausgaben setzen sich aus den Konsumausgaben (C_t), den Investitionsausgaben (I_t) und den autonomen Ausgaben (A_t) zusammen:

$$Y_t = C_t + I_t + A_t$$
- Zwischen Konsumausgaben und Volkseinkommen der Vorperiode herrscht Proportionalität vor: $C_t = a \cdot Y_{t-1}$ (a ... Konsumneigung)
- Die Investitionsausgaben sind proportional zur Konsumsteigerung im Vergleich zur Vorperiode: $I_t = b \cdot (C_t - C_{t-1})$ (b ... Investitionsfaktor)
- Die autonomen Ausgaben werden als konstant angenommen: $A_t = c$

Setzt man nun alle Annahmen in $Y_t = C_t + I_t + A_t$ ein, ergibt sich durch Umformen folgende inhomogene Differenzengleichung 2. Ordnung:

$$Y_t = a \cdot Y_{t-1} + a \cdot b \cdot (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + c$$

Für die jeweiligen Angaben erhält man die entsprechende Grafik:

$$a = 0,5$$

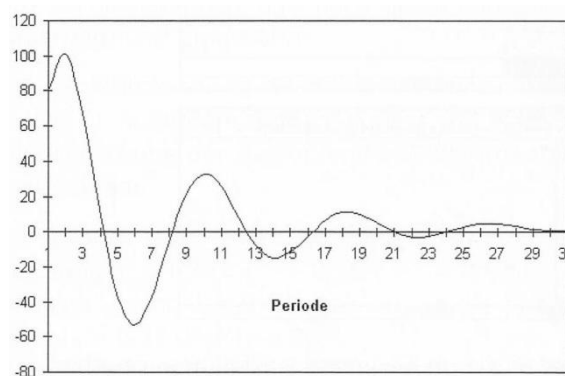
$$b = 1,5$$

$$C_0 = 0$$

$$I_0 = 0$$

$$Y_0 = 80$$

(gedämpfte Schwingung)



$$a = 0,7$$

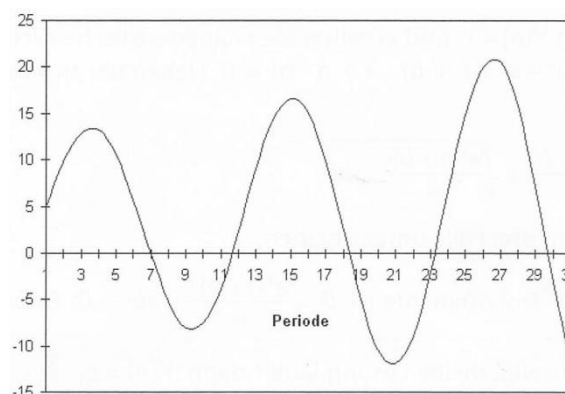
$$b = 1,5$$

$$C_0 = 0$$

$$I_0 = 0$$

$$Y_0 = 5$$

(explosive Schwingung)



Die Berechnung der Lösungen derartiger Gleichungen ist meist sehr mühsam und nur numerisch möglich.

Zu den Simulationen von Differentialgleichungen werden bei Hinkelmann et al. noch das Zusammenspiel zwischen Angebot und Nachfrage behandelt, aber auch die Verbreitung von Tierseuchen, die eine große ökologische und auch volkswirtschaftliche Bedeutung hat (Ernährung, Tourismus, ...). Außerdem findet der Produktlebenszyklus hier seine Anwendung. Nach der Einführung eines Produkts wird die Verbreitung bis zur Sättigung des Marktes beobachtet.

Die sogenannten Markov-Ketten spielen bei stochastischen Prozessen eine Rolle. Hier arbeitet man viel mit Matrizen, deren Einträge Wahrscheinlichkeiten sind.

4.2.14 Ungleichungssysteme – Lineare Optimierung

Ungleichungssysteme gehören zum Erweiterungslehrstoff des II. Jahrgangs der HAK, wo bereits die lineare Optimierung vorgestellt wird, welche dann in den Schulbüchern des V. Jahrgangs noch ausführlicher behandelt wird.

Eine lineare Ungleichung in zwei Variablen ist eine Ungleichung der Form

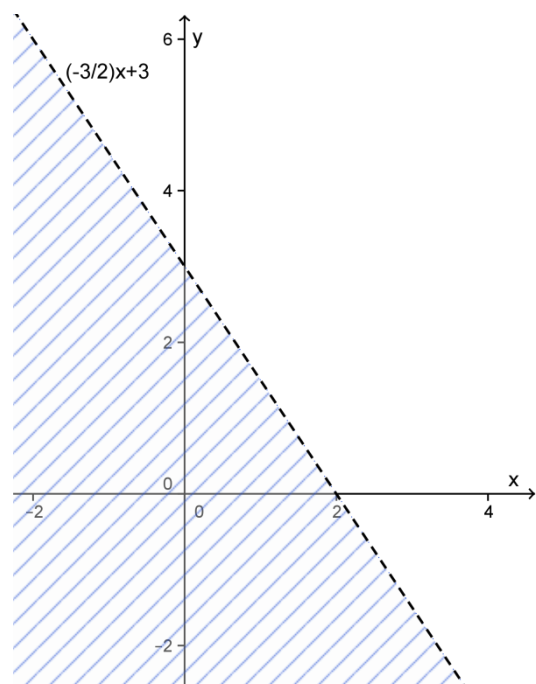
$$\begin{aligned} ax + by < c \quad \text{oder} \quad ax + by \leq c \quad \text{oder} \\ ax + by > c \quad \text{oder} \quad ax + by \geq c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0), \end{aligned}$$

deren Lösungsmenge jeweils durch eine Halbebene dargestellt werden kann.

Beispiel: $y < -\frac{3}{2}x + 3$

Zunächst wird die Gerade $y = -\frac{3}{2}x + 3$ gezeichnet. Die richtige Halbebene wird bestimmt, indem man einen beliebigen Punkt P in die Ungleichung $y < -\frac{3}{2}x + 3$ einsetzt. Erhält man eine wahre Aussage, ist jene Halbebene, in der der Punkt P liegt, die Lösungsmenge (blau schraffiert).

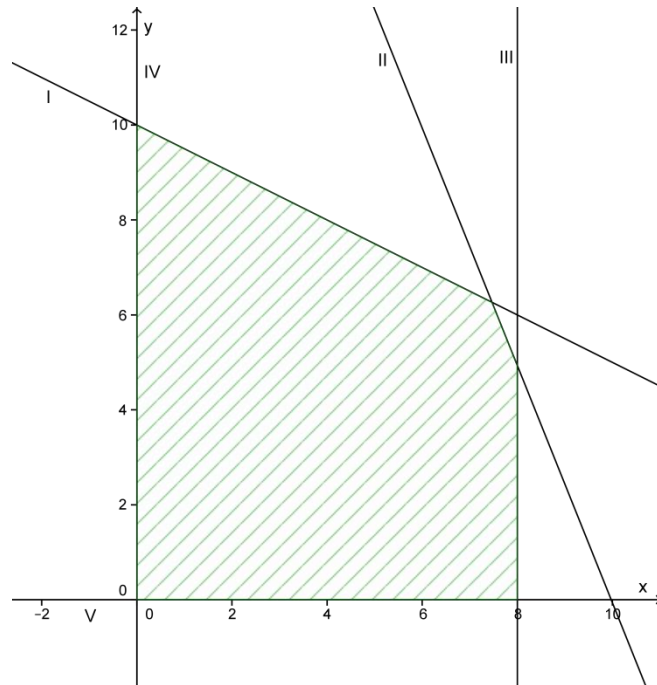
Wegen der "<-Relation gehört die Gerade nicht mehr zur Lösung und ist deshalb strichliert dargestellt.



Sollen nun mehrere lineare Ungleichungen gleichzeitig erfüllt werden, liegt ein **lineares Ungleichungssystem** vor. Die Lösungsmenge ist dann die Menge aller geordneten Paare (x, y) , die jede Ungleichung erfüllen. Dem entspricht der Durchschnitt aller Halbebenen.

Beispiel: I: $4x + 8y \leq 80$
 II: $10x + 4y \leq 100$
 III: $8x \leq 64$
 IV: $x \geq 0$
 V: $y \geq 0$

Die grün schraffierte Fläche entspricht der Lösungsmenge des Ungleichungssystems.



Die **lineare Optimierung** wird in den Schulbüchern als wirtschaftliche Anwendung von Ungleichungssystemen präsentiert und beispielsweise bei Entscheidungen im Bereich der Produktionsplanung, der Lebensmittelindustrie oder der Landwirtschaft herangezogen. Allgemein geht es dabei um die Maximierung oder Minimierung bestimmter Zielgrößen unter Beachtung der vorhandenen Möglichkeiten (Nebenbedingungen)⁵⁹. Anhand eines Beispiels (übernommen aus *Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 1*) wird nun die lineare Optimierung erläutert.

Beispiel:

Zur Erzeugung der Produkte P_1 und P_2 werden in einem Betrieb die Maschinen A , B und C eingesetzt. Die Tabelle zeigt die für die Fertigstellung nötigen Maschinenzeiten und die höchstmögliche wöchentliche Ausnützung der Maschinen.

⁵⁹ Bucker, 1993 (*Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*), S. 273

Maschine	Zeit in Stunden für 1 kg von		Größtmögliche Nutzung in Stunden
	P_1	P_2	
A	4	8	80
B	10	4	100
C	8	0	64

Produkt P_1 liefert als Gewinn € 38,- und Produkt P_2 € 20,- pro kg. Welche Menge eines Produkts soll jeweils erzeugt werden, um den größtmöglichen Gewinn zu erzielen?

1. Schritt: Festlegung der Variablen für die gesuchten Größen:

x ... pro Woche erzeugt Menge von P_1 in kg

y ... pro Woche erzeugt Menge von P_2 in kg

2. Schritt: Formulierung der eingeschränkten Bedingungen (Nebenbedingungen/
Restriktionen) in Form von Ungleichungen:

Die gesuchten Ungleichungen wurden bereits im obigen Beispiel für ein lineares Ungleichungssystem vorgestellt. Die Ungleichungen $x \geq 0$ und $y \geq 0$ sind die sogenannten Nichtnegativitätsbedingungen, da keine negative Anzahl von Produkten erzeugt werden kann. Die Lösungsmenge des Ungleichungssystems ist das **Planungsfeld** bzw. der Zulässigkeitsbereich.

3. Schritt: Erstellung der **Zielfunktion**:

Die Funktion $Z = 38x + 20y$ macht eine Aussage über den Erlös, der von der Anzahl x bzw. y der produzierten Menge von P_1 bzw. P_2 abhängig ist. In der Zielfunktion wird die Variable y explizit dargestellt. $\Rightarrow y = -1,9x + \frac{Z}{20}$

4. Schritt: Bestimmung des optimalen (bestmöglichen) Werts aus den
möglichen Lösungen

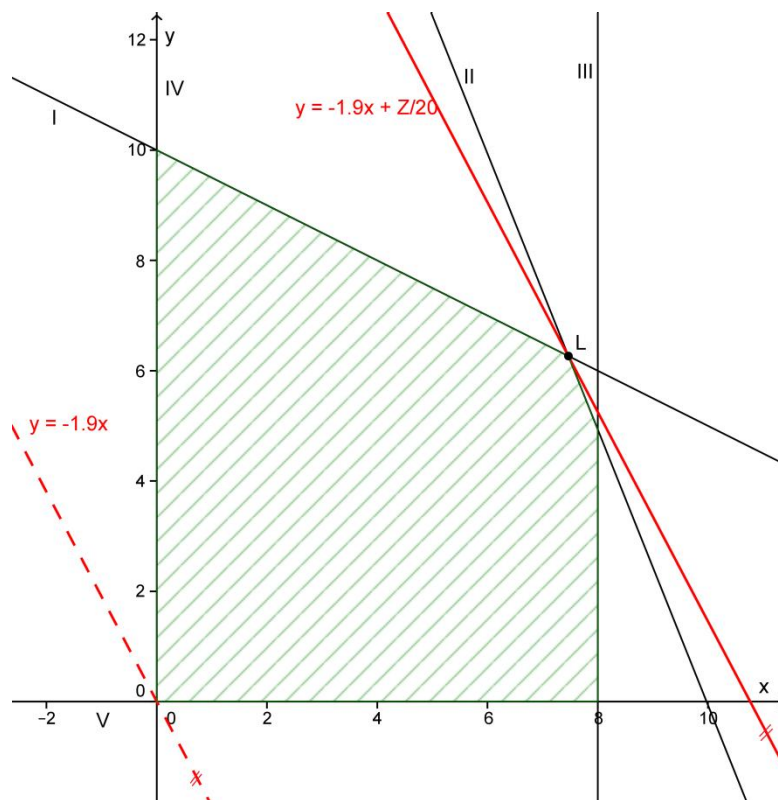
Die möglichen Lösungen sind alle Punkte, die innerhalb des Planungsfeldes liegen, aber nur ein Punkt gibt jene Kombination von x Produkten P_1 und y Produkten P_2 an, bei der ein möglichst hoher Erlös erreicht wird (sofern der optimale Wert eindeutig bestimmbar ist).

Z soll ein Maximum werden, die Lösung muss aber noch innerhalb des Planungsfeldes liegen, daher ist die zur Gleichung der Zielfunktion parallele Gerade gesucht, die gerade noch im Planungsfeld liegt und den größtmöglichen y -Abschnitt hat.

Hier: Steigung $k_Z = -1,9$ und y -Abschnitt $d = \frac{Z}{20}$

Die Lösung findet man also, indem man zunächst die Gerade $y = -1,9x$ zeichnet und diese parallel im Planungsfeld verschiebt, sodass man den größtmöglichen y -Abschnitt erhält.

In der folgenden Grafik ist die Gerade durch den Ursprung strichliert und die gesuchte Gerade als durchgehende Linie eingezeichnet:



Die genauen Koordinaten des Lösungspunktes für das Maximum lassen sich nun berechnen, indem man den Schnittpunkt L der entsprechenden Geraden (hier: Gleichungen I und II) durch Lösung des Gleichungssystems bestimmt:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } 4x + 8y = 80 & \\ \text{II. } 10x + 4y = 100 & \Rightarrow \quad x = 7,5 \\ & y = 6,25 \\ & L = (7,5 | 6,25) \end{array}$$

Der größtmögliche Gewinn beträgt € 410,- und kommt zustande, wenn man wöchentlich 7,5 kg des Produktes P_1 und 6,25 kg des Produktes P_2 erzeugt.

Dieses Beispiel war eine Maximumaufgabe, Minimumaufgaben (z. B. möglichst kleiner Aufwand oder kleine Kosten) funktionieren analog. Beides sind zwei Aufgabentypen der linearen Optimierung, die in den Schulbüchern des II. Jahrgangs vorgestellt werden und durch grafische Verfahren lösbar sind (weil nur zwei unabhängige Variablen vorkommen).

Bei linearen Optimierungsaufgaben mit mehreren bzw. oft sogar sehr vielen Variablen ist die grafische Ermittlung des Optimums nicht mehr möglich, daher wurden Verfahren zur numerischen Lösung entwickelt. Das wichtigste Verfahren zum Lösen eines Optimierungsproblems ist das sogenannte **Simplex-Verfahren**, das auf den amerikanischen Mathematiker George Bernard Dantzig zurückgeht, der dieses Mitte des 20. Jahrhunderts entwickelte. Demnach reicht es, nur bei den Eckpunkten des Zulässigkeitsbereichs nach der Lösung des Optimierungsproblems zu suchen. Die Idee des Verfahrens ist es daher, von einem Startpunkt ausgehend eine Folge von Eckpunkten mit wachsenden Zielfunktionswerten zu erzeugen, bis man am Ende bei der optimalen Ecke (sofern diese existiert) ankommt.⁶⁰

Die theoretische Aufarbeitung des Verfahrens wäre zu umfangreich, um sie in meiner Diplomarbeit detailliert darzustellen, und außerdem auch nicht für den Unterricht geeignet, dennoch werde ich anhand des obigen Beispiels demonstrieren, wie das Simplex-Verfahren funktioniert.

Die Nebenbedingungen zum Produktionsplanungsproblem in Ungleichungsform lauteten folgendermaßen:

$$4x + 8y \leq 80$$

$$10x + 4y \leq 100$$

$$8x \leq 64$$

$$x, y \geq 0$$

und werden durch Einführung sogenannter **Schlupfvariablen** in Gleichungsform umgewandelt:

$$4x + 8y + u = 80$$

$$10x + 4y + v = 100$$

$$8x + w = 64$$

$$x, y, u, v, w \geq 0$$

Die Zielfunktion lautet außerdem $Z = 38x + 20y$.

⁶⁰ Koop, 2008 (Lineare Optimierung), S. 56

Man benötigt zum Ausführen des Simplex-Verfahrens in Folge die Matrixschreibweise dieses Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 64 \end{pmatrix}$$

Die Variablen, die jeweils nur mit den Werten 0 oder 1 multipliziert werden (d. h. die entsprechende Spalte besteht nur aus den Einträgen 0 oder 1) – das sind hier u , v und w – nennt man Basisvariablen (BV).

Das sogenannte **Simplex-Tableau** dient nun zur Veranschaulichung und Rechnung des Verfahrens und besitzt folgende Form:

BV	x	y	u	v	w	Kapazitäten	Quotient
u	4	8	1	0	0	80	$\frac{80}{4} = 20$
v	10	4	0	1	0	100	$\frac{100}{10} = 10$
w	8	0	0	0	1	64	$\frac{64}{8} = 8$
Z	-38	-20	0	0	0	0	

In der linken Spalte werden die Basisvariablen angezeigt, und in die letzte Zeile werden die Koeffizienten der Zielfunktion mit umgekehrten Vorzeichen eingetragen.

Es gilt: Solange in der Zielfunktions- bzw. Ergebniszeile (das ist die unterste Zeile) noch negative Werte enthalten sind, gibt es die Möglichkeit, den Wert der Zielfunktion weiter zu verbessern. Dieser ist in der Tabelle rechts unten abzulesen und wird zu Beginn als 0 angenommen.

Nun zum (primalen Simplex-)Algorithmus:

Man wählt die Spalte mit dem absolut größten negativen Wert in der Ergebniszeile (hier: -38 in Spalte x) und nennt diese **Pivotspalte**. Anschließend berechnet man die **Quotienten** der Kapazitäten und dem entsprechenden x -Wert der Zeile (siehe blaue Spalte). Jene Zeile mit dem kleinsten Quotient (hier: $\min(20, 10, 8) = 8$ in Zeile w) wird zur **Pivotzeile** und das Element im Kreuzungspunkt das **Pivotelement** (hier: 8).

Der nächste Schritt ist es, die Pivotzeile durch das Pivotelement zu dividieren, und diese modifizierte Pivotzeile dann zu den anderen Zeilen zu addieren, sodass die Pivotspalte (bis auf das Pivotelement 1) nur mehr aus 0 besteht.

Die modifizierte Pivotzeile lautet:

	$\frac{8}{8}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{64}{8}$
bzw.	1	0	0	0	0,125	8

und die restlichen Werte des Simplex-Tableaus werden folgendermaßen berechnet

BV	x	y	u	v	w	Kapazitäten
u	$4-4 \cdot 1$	$8-4 \cdot 0$	$1-4 \cdot 0$	$0-4 \cdot 0$	$0-4 \cdot 0,125$	$80-4 \cdot 8$
v	$10-10 \cdot 1$	$4-10 \cdot 0$	$0-10 \cdot 0$	$1-10 \cdot 0$	$0-10 \cdot 0,125$	$100-10 \cdot 8$
x	1	0	0	0	0,125	8
Z	$-38+38 \cdot 1$	$-20+38 \cdot 0$	$0+38 \cdot 0$	$0+38 \cdot 0$	$0+38 \cdot 0,125$	$0+38 \cdot 8$

und es ergibt sich das zweite Simplex-Tableau:

BV	x	y	u	v	w	Kapazitäten
u	0	8	1	0	-0,5	48
v	0	4	0	1	-1,25	20
x	1	0	0	0	0,125	8
Z	0	-20	0	0	4,75	304

Die Variable x wird zu einer Basisvariable und ersetzt die Variable w von vorhin. Der Wert der Zielfunktion hat sich außerdem auf 304 gesteigert, ist aber wegen der noch vorhandenen negativen Werte in der Ergebniszeile noch verbesserungsfähig.

Nun beginnt der Algorithmus von vorne. Die Pivotspalte (kleinster Wert: -20 $\rightarrow$ Spalte y) und -zeile ($\min\left(\frac{48}{8}, \frac{20}{4}, \frac{8}{0}\right) = 5 \rightarrow$ Zeile v) wird bestimmt und somit das Pivotelement (hier: 4). Die Pivotzeile wird durch den Wert des Pivotelements dividiert und zu den anderen Zeilen entsprechend addiert. Dieses Verfahren ist so oft anzuwenden, bis in der

Ergebniszeile keine negativen Werte mehr vorkommen. Dann ist die optimale Lösung gefunden.

Drittes Simplex-Tableau:

BV	x	y	u	v	w	Kapazitäten
u	0	0	1	-2	2	8
y	0	1	0	0,25	-0,3125	5
x	1	0	0	0	0,125	8
Z	0	0	0	5	-1,5	404

Die Variable y wird zur BV, der Wert der Zielfunktion ist auf 404 gestiegen. Der Wert ist aber noch nicht optimal, da in der Ergebniszeile noch ein negativer Koeffizient vorkommt $\Rightarrow$ nochmaliges Anwenden des primalen Simplex-Algorithmus.

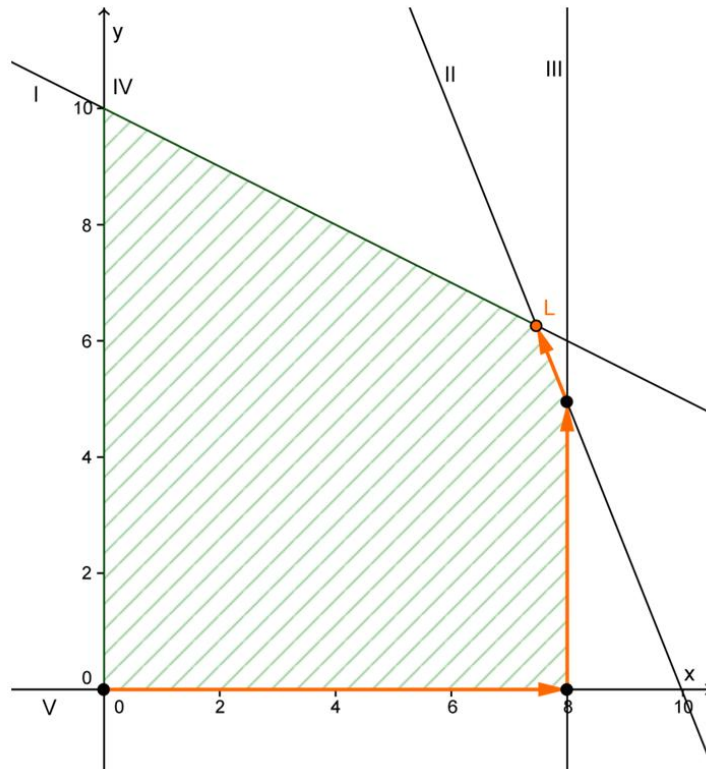
Endgültiges Simplex-Tableau (optimal):

BV	x	y	u	v	w	Kapazitäten
w	0	0	0,5	-1	1	4
y	0	1	0,15625	-0,0625	0	6,25
x	1	0	-0,0625	0,125	0	7,5
Z	0	0	0,75	3,5	0	410

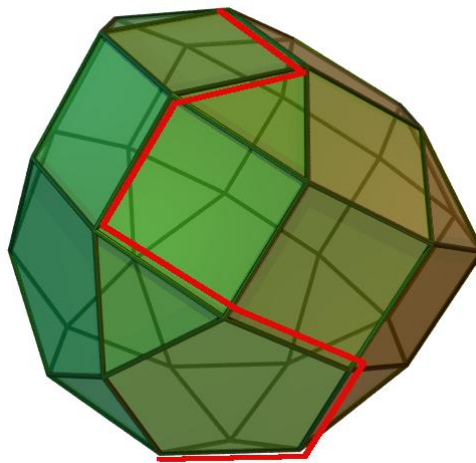
Nun ist die optimale Lösung des Optimierungsproblems gefunden, da in der Ergebniszeile keine negativen Koeffizienten mehr auftreten. Das bedeutet auch, dass der Zielfunktionswert nicht weiter verbessert werden kann. Der maximale Wert der Zielfunktion beträgt also 410, wie es sich auch schon bei der grafischen Lösung ergeben hat.

Grafisch kann man dieses Verfahren nun folgendermaßen interpretieren:

Die erste Lösung entspricht der Ecke $(0, 0)$ des Zulässigkeitsbereichs. Das zweite Simplex-Tableau entspricht der Ecke $(8, 0)$, das dritte der Ecke $(8, 5)$, bis mit dem letzten Simplex-Tableau schließlich die optimale Ecke $(7,5; 6,25)$ des Zulässigkeitsbereichs erreicht wird. Der Algorithmus startet also in $(0, 0)$ und läuft zur optimalen Ecke $(7,5; 6,25)$:



Das Simplexverfahren kann man sich im dreidimensionalen Raum auch so vorstellen, als würde man sich von einem Eck zu einem jeweils noch besseren bis zum optimalen Eck hanteln, wie es die folgende Grafik⁶¹ veranschaulichen soll:



In den Schulbüchern wird das Simplex-Verfahren im Rahmen des Erweiterungslehstoffes des V. Jahrgangs nähergebracht, und es wird auch durch technologische Hilfsmittel wie z. B. dem Solver von Excel unterstützt, da die Berechnung im Mehrdimensionalen ansonsten in eine sehr lange Beschäftigung ausartet.

⁶¹ <http://www.furtherfield.org/features/algorithms-and-control>

4.3 Reflexion über die Schulbücher

Nachdem ich mit den beiden verwendeten Schulbuchbänden nun lange gearbeitet habe, möchte ich kurz meinen Eindruck von diesen schildern. Als ideales Schulbuch für den Mathematikunterricht würde ich keines von ihnen bezeichnen, aber diverse positive und negative Aspekte bzw. mögliche Begründungen dafür sollen beschrieben werden.

Farbliche Gestaltung

Die Buchreihe *Mathe mit Gewinn 1-4* (in Folge als MmG bezeichnet) von Hinkelmann et al. ist ausschließlich in den Farben Schwarz, Grau und Türkis gedruckt, weshalb man zum Hervorheben wichtiger Informationen zusätzliche Kästchen, Markierungen oder Ähnliches verwenden könnte, was meiner Meinung nach allerdings nicht ausreichend bzw. nicht einheitlich der Fall ist, wodurch es etwas an der Übersicht mangelt. Daher fällt es eher schwer, Theorieteile, Formeln, Musterbeispiele etc. beim schnellen Nachschlagen voneinander zu unterscheiden. In den Büchern *Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 1-4* (in Folge als MAW bezeichnet) von Steiner et al. ist hingegen eine einheitliche unterschiedliche Färbung der einzelnen Abschnitte erkennbar. Wichtige Begriffe, die erstmals auftauchen, sind in Rosa und außerdem fettgedruckt gehalten, ebenso sind Formeln in rosa Kästchen zu finden. Die Angaben zu den Musterbeispielen sind blau hinterlegt und die Seiten mit der Aufgabensammlung am Ende jedes Kapitels sind gänzlich gelb hinterlegt. Die systematische Verwendung mehrerer Farben kommt der Übersicht auf jeden Fall zugute.

Abbildungen

Die Abbildungen in MmG sind demnach auch ausschließlich in Schwarz-weiß dargestellt und bestehen hauptsächlich aus Graphen oder Screenshots von Geräten. MAW zeigt auch farbige Bilder wie zum Beispiel Porträts von Mathematikern, Comics oder Spielkarten (im Kapitel der Wahrscheinlichkeitsrechnung) und verwendet für Graphen Farben, um Wichtiges hervorzuheben. Auf die Nummerierung der Abbildungen wird in beiden Buchbänden verzichtet. Sofern nicht ohnehin aus dem Text hervorgeht, welche Abbildung gemeint ist, sind sie jedoch beschriftet.

Einleitung

In MAW erfolgt der Einstieg in die Materie zum Großteil sehr theoretisch. In MmG gibt es im Gegensatz dazu zu Beginn jedes Kapitels einen einleitenden Absatz, bei dem die Autoren versuchen, möglichst eine Situation aus dem Alltag darzustellen bzw. an Bekanntes anzuschließen. Dabei stößt man auf ein Problem, für das es einen mathematischen Lösungsweg gibt, der im Anschluss aufbereitet wird.

Beispiele und Aufgaben

In MAW werden im Theorieblock zahlreiche Musterbeispiele gezeigt (jeweils mit blauer Umrandung und blau hinterlegter Aufgabenstellung). Erst in der eigenen Aufgabensammlung am Ende des Kapitels gibt es für die Schüler die Chance, ihr Wissen zu testen, das sie aus dem Kapitel mitgenommen haben. MmG zeigt schon während der Aufbereitung eines Themas zwischendurch immer wieder Aufgaben, die oft auf Dinge bezogen sind, die gerade – eventuell mittels Musterbeispiel – erklärt wurden. Die Nummerierung der Aufgaben erfolgt in MAW von „1“ fortlaufend bis zur letzten Aufgabe im Buch. Den Aufgaben in MmG ist jeweils die Kapitelnummer mit Punkt vorangestellt, danach werden sie bis zum Ende des Kapitels fortlaufend nummeriert, z. B. „4.01“ bis „4.52“. Im nächsten Kapitel erhält die erste Aufgabe die Nummer „5.01“. Bis auf die vorangestellte Nummer ist der Text der Aufgabenstellung allerdings nicht vom durchgehenden Text im Buch zu unterscheiden.

Zusammenfassung

Eine Zusammenfassung am Ende des Kapitels gibt es nur in MmG, welche aus einem türkisfarbenen Kästchen besteht, in dem die wichtigsten Begriffe noch einmal fettgedruckt angeführt und beschrieben werden.

IT-Bezug

Wie der IT-Bezug in den jeweiligen Schulbüchern gehandhabt wird, wurde bereits im Abschnitt 4.2.1 genauer erklärt. Zur Buchreihe MmG, die eine Vielzahl an Screenshots von mehreren technologieunterstützenden Hilfsmitteln zeigt, sei jedoch noch zusätzlich zu erwähnen, dass man daraus nur einen Nutzen ziehen kann, wenn man im Unterricht konsequent mit mehr als einem dieser Geräte arbeitet, was in der Praxis wohl nicht gut umzusetzen ist.

Sonstiges

Das Buch MAW behandelt die Themen im Gegensatz zur anderen Buchreihe knapper. MmG bietet sehr viele Aspekte zu den einzelnen Themengebieten, wodurch ich auf der Suche nach spezifischen Anwendungen für meine Diplomarbeit oft fündig wurde. Für Schüler finde ich allerdings den Schwierigkeitsgrad speziell bei der Aufbereitung von erweiternden Themen zu hoch angesetzt, weshalb man diese Teile aus dem Buch im Unterricht kaum verwenden kann, sofern man sich nicht selbst noch ausführlich damit auseinandersetzt und sich Unterrichtsmaterialien beschafft.

5. Befragung von Mathematiklehrern an Handelsakademien

Momentan ist für Handelsakademien (sowie für andere Bildungseinrichtungen) ein neuer Lehrplan in Arbeit, der voraussichtlich im Schuljahr 2014/15 in Kraft treten soll. Daher haben einige Lehrer bei ihren Antworten auf meine Fragen schon Bezug auf bereits bekannte Änderungen genommen, die im Großen und Ganzen auf kompetenzorientierten Unterricht mit neuer Reifeprüfung bzw. Zentralmatura hinzielen.

Der vollständige Fragebogen, den ich mehreren Mathematiklehrern an Handelsakademien per E-Mail zukommen ließ, ist im Anhang nachzulesen, ebenso die 13 beantworteten Fragebögen.

5.1 Einzelne Fragen

Der Fragebogen umfasst sechs Teilfragen, die ich zunächst mit den entsprechenden Antworten vorstellen werde. Im Anschluss wird zusammengefasst, was aus den Befragungen hervorgeht.

5.1.1 Lehrbücher und Unterrichtsmaterial

In der ersten Frage interessierte ich mich dafür, welche Lehrbücher die Lehrer an ihrer Schule verwenden und ob sie damit zufrieden sind, bzw. woher sie das Material für ihren Unterricht primär nehmen. Zwei Lehrer gaben an, gar keine Lehrbücher zu verwenden. Sowohl Lehrer, die mit ihren Lehrbüchern zufrieden sind, als auch jene, die das nicht sind, verwenden häufig zusätzliches Unterrichtsmaterial, das sie selbst zusammenstellen bzw. sich ausdenken oder aus verschiedenen Büchern (auch AHS-Büchern) kombinieren.

5.1.2 Lehrplan

Die zweite Frage beschäftigt sich mit der Umsetzung des Lehrplans. Wie gut ist die Umsetzung möglich? Welche Themengebiete werden am ehesten weggelassen?

Ob die Umsetzung des Lehrplans gut möglich ist, beantworteten nur zwei der Lehrer mit „Ja“, die anderen gaben Bedingungen an, wann dies nur möglich sei. Hauptproblem wäre die geringe Wochenstundenanzahl (derzeit insgesamt zehn), des Weiteren wurden auch die Disziplin und das fehlende Vorwissen genannt.

Ich fragte auch nach den Themengebieten, bei denen die Lehrer am ehesten kürzen würden, sofern zu wenig Zeit für den gesamten Lehrstoff vorhanden wäre. Auffällig war, dass hier immerhin fünf von 13 Lehrern die Matrizenrechnung weglassen (oder kürzen), für die neue Zentralmatura würden die Matrizen aber an Bedeutung gewinnen und müssten dann durchgenommen werden.

Bei der Frage nach der Behandlung des Erweiterungslehrstoffs gaben drei Lehrer an, diesen kaum oder gar nicht durchzunehmen. Am häufigsten werden weitere Anwendungen der Differential- und Integralrechnung behandelt.

5.1.3 Brauchbarkeit für kaufmännischen bzw. wirtschaftlichen Alltag

Als nächstes fragte ich, in welchen Themengebieten des Mathematikunterrichts die Lehrer die größte Brauchbarkeit für den kaufmännischen und wirtschaftlichen Alltag sehen. Neun Lehrer nannten hier die Finanzmathematik, drei davon speziell auf die Zinsen- und Rentenrechnung bezogen (auch als „einfacher Konsument“ solle man darüber Bescheid wissen). Auch die Kosten- und Preistheorie fand häufige Erwähnung: Fünf Lehrer empfinden dieses Kapitel im Hinblick auf ein wirtschaftliches Studium für wichtig, außerdem kommen viele Begriffe auch im Unterrichtsfach Rechnungswesen vor. Des Weiteren wurde oft die Stochastik genannt, die z. B. hilfreich ist, um in einem Kreditinstitut neue Produkte zu entwickeln. Interessant fand ich auch die Erwähnung der Prozentrechnung, die im Grunde zum Basiswissen gehört, aber dennoch Schülern immer wieder Schwierigkeiten bereitet, obwohl sie im Alltag ständig Verwendung findet.

5.1.4 Fächerübergreifender Unterricht

Bei den Antworten zum vierten Teil des Fragebogens stellte sich heraus, dass an den Schulen von neun Lehrern kaum bis gar kein fächerübergreifender Unterricht stattfindet. Wo aber fächerübergreifender Unterricht geschieht, sei dies mit den Fächern Betriebswirtschaft (Kapitel Finanzmathematik) oder Wirtschaftsinformatik (z. B. Verständnis für Formeln) gut machbar. Auch bei diesem Teil des Fragebogens stieß ich wieder auf die Prozentrechnung, die als relevant für viele andere Fächer bezeichnet wurde. Die Gewichtung bzw. Relevanz des Fachs Mathematik in der HAK wurde recht ausgewogen sowohl als hoch als auch als gering bezeichnet. Zwei Lehrer formulierten

speziell einen geringeren Stellenwert der Mathematik in der HAK als an der AHS. Einen Auszug aus dem Fragebogen des Lehrers D möchte ich hierzu gerne zeigen:

„Für AbsolventInnen, die unmittelbar nach der HAK einen Beruf eintreten, reicht das Gebotene, denke ich. Für AbsolventInnen, die ein Studium in Angriff nehmen (bei dem Mathematik eine Rolle spielt), ist das Fach eher unterdotiert. Derzeit wird Mathematik an den FH und WU – nach Berichten unserer AbsolventInnen – als Abschreckungsmaßnahme eingesetzt (hohe Durchfallquoten bei den ersten M-Prüfungen).“

Die hohe Bedeutung des Fachs Mathematik an der HAK wurde beispielsweise damit begründet, dass es grundlegende Kenntnisse zum wirtschaftlichen Rechnen vermittelt und das logische Denken fördert.

5.1.5 Spezifika im HAK-Unterricht im Vergleich zur AHS

In diesem Teil des Fragebogens fragte ich nach Besonderheiten des Mathematikunterrichts in der HAK im Vergleich zur AHS, die die Lehrer aus ihrer Sicht nennen können. Beinahe jeder Lehrer (11 von 13) gab an, die Mathematik in der HAK sei viel anwendungsorientierter (vor allem im wirtschaftlichen Bereich) und zeige überwiegend Aufgaben, die näher an der Praxis sind, im Gegensatz zu der theoriebildenden Mathematik in der AHS. Durch die Kompetenzorientierung im neuen Lehrplan könne der Praxisbezug außerdem noch mehr gefördert werden.

5.1.6 Erwerb der HAK-spezifischen Themen

Bei der sechsten Frage wollte ich von den Lehrern wissen, ob diese ihre Kenntnis über die HAK-spezifischen Themen bereits im Studium kennenlernten, oder ob sie sich diese selbst erwerben mussten. Die Lehrer antworteten ausnahmslos, dass sie sich die Themen eigenständig aneignen mussten. Besonders die Kapitel Kosten- und Preistheorie und Finanzmathematik (z. B. Rentenrechnung, Schuldtilgung, Investitionsrechnung) wurden hier als Themen genannt, die im Eigenstudium erworben wurden.

5.2 Zusammenfassung

Die geringe Wochenstundenanzahl für das Fach Mathematik in der HAK (sofern schulautonome nicht mehr Stunden zur Verfügung sind) dürfte für mehrere Lehrer ein Problem darstellen, um mit dem Basislehrstoff durchzukommen, da in den Antworten immer wieder darauf hingewiesen wurde. Dass der Nutzen für den wirtschaftlichen Alltag in den Themen wie z. B. Finanzmathematik oder Kosten- und Preistheorie zu finden ist, deutet auch darauf hin, dass es ein Spezifikum der HAK ist, dass im Fach Mathematik anwendungs- und praxisorientierter gearbeitet wird, nachdem gerade diese Kapitel welche sind, die nicht in der AHS, aber dafür in der HAK unterrichtet werden. Der Erwerb dieser Themengebiete muss allerdings eigenständig passieren, da die befragten Lehrer dieses Fachwissen im Studium nicht erlernt haben, was ich zum Großteil auch von meinem eigenen Mathematik-Studium behaupten kann, doch in einer Schulmathematik-Vorlesung zur Angewandten Mathematik lernte ich immerhin bereits die Rentenrechnung und Schuldtilgung kennen. Möglicherweise ist die rare bis nicht vorhandene Behandlung der HAK-spezifischen Themen im Studium auch der Grund dafür, dass aus dem Erweiterungslehrstoff hauptsächlich die Differential- und die Integralrechnung unterrichtet wird, die ja ohnehin im AHS-Lehrplan umfangreich beschrieben und auch im Studium ausführlich behandelt wird.

6. Schlusswort

Meine Erfahrung aus dem Schreiben dieser Arbeit ist die, dass ich mich zum Großteil mit einer ganz neuen Materie auseinandersetzen musste, allerdings nicht mathematisch betrachtet, sondern ich wandte bekannte mathematische Strukturen auf mir bisher unbekannte Gebiete an, was durchaus spannend war zu erleben. Insofern ist der Titel des Unterrichtsfaches „Mathematik und angewandte Mathematik“ aus meiner Sicht gerechtfertigt. Selbstverständlich hängt die tatsächliche Praxisorientierung noch von der didaktischen Aufbereitung und Gestaltung des Unterrichts ab, die jedoch in dieser Arbeit außer Acht gelassen wurden. Diese Diplomarbeit dient nicht als Richtlinie für den Unterricht, dafür bedarf es einer weitaus umfangreicheren Beschäftigung mit den entsprechenden Themengebieten oder auch dem Integrieren von technischen Hilfsmitteln in den Unterricht. Dennoch hoffe ich, dass den Lesern vermittelt wurde, dass zwischen dem Mathematikunterricht in der HAK und in der AHS durchaus Unterschiede bestehen, und dass ich einen Eindruck geben konnte, wo die Spezifika der HAK zu finden sind. Für Lehramtsstudenten, die AHS-Absolventen sind, muss – soweit ich das beurteilen kann – der Erwerb des Großteils des HAK-spezifischen Lehrstoffs leider im Selbststudium erfolgen. Vor allem auch die Beschäftigung einer didaktisch wertvollen Aufbereitung des Stoffs für die Schüler, die in den Lehrbüchern nicht immer im gewünschten Ausmaß gegeben ist, muss eigenständig stattfinden.

Für mich selbst war der Erwerb der HAK-spezifischen Themen, den ich durch die Beschäftigung damit beim Schreiben dieser Diplomarbeit erhalten habe, auch sehr wertvoll, und ich freue mich darauf, dieses Wissen bei Bedarf auch wieder an Schüler weiterzugeben.

7. Anhang

Lehrer A

Spezifika im HAK-Unterricht

1	Welche Lehrbücher haben Sie an Ihrer Schule im Fach Mathematik? Sind Sie damit zufrieden? Warum (nicht)? keine lehrbücher, wir verwenden selbst verfasste skripten Falls Sie nicht zufrieden sind, verwenden Sie die Bücher für Ihren konkreten Unterricht trotzdem? Woher nehmen Sie primär Ihr Unterrichtsmaterial? s. o.
2	Ist eine Umsetzung des Lehrplans für das Unterrichtsfach Mathematik (Übersicht siehe nächste Seite) gut möglich? basislehrstoff geht gerade noch, wenn nicht viele stunden ausfallen Behandeln Sie alle im Lehrplan vorgesehenen Themengebiete? Falls nein, welche lassen Sie am ehesten weg? s.o.
3	In welchem Ausmaß behandeln Sie im Unterricht auch den Erweiterungslehrstoff des Lehrplans? (Welche Themen?) ausagenlogik (kurz)
4	In welchen Themengebieten des Mathematikunterrichts in der HAK sehen Sie die größte Brauchbarkeit für den kaufmännischen bzw. wirtschaftlichen Alltag? Wieso? finanzmathematik
5	Wie stark wird von KollegInnen anderer Unterrichtsfächer gefordert, Ihrem Fach zuzuarbeiten? kaum, wenn ja dann investitionsrechnung Findet an Ihrer Schule gezielt fächerübergreifender Unterricht mit Mathematik statt? kaum
6	Wie schätzen Sie insgesamt die Gewichtung/Relevanz des Fachs Mathematik in der HAK ein? hoch
7	Können Sie aus Ihrer Sicht Besonderheiten des Mathematikunterrichts an der HAK im Vergleich zur AHS formulieren? sehr anwendungsorientiert, kaum allgemeinmathematische themen
8	Haben Sie Ihre Kenntnis über die HAK-spezifische Mathematik bereits in Ihrem Studium kennengelernt, oder mussten Sie sich diese selbst erwerben? Welche HAK-spezifischen Themen mussten Sie sich selbst aneignen? selbst erworben

Sonstige Anmerkungen:

Lehrer B

Spezifika im HAK-Unterricht

1	Welche Lehrbücher haben Sie an Ihrer Schule im Fach Mathematik? Sind Sie damit zufrieden? Warum (nicht)? Wir haben derzeit keine MAM- Bücher an der Schule Falls Sie nicht zufrieden sind, verwenden Sie die Bücher für Ihren konkreten Unterricht trotzdem? Woher nehmen Sie primär Ihr Unterrichtsmaterial?
2	Ist eine Umsetzung des Lehrplans für das Unterrichtsfach Mathematik (Übersicht siehe nächste Seite) gut möglich? Der Stundenumfang ist relativ knapp bemessen, trotzdem habe ich mich an den Lehrplan zu halten und diesen vollinhaltlich zu erfüllen. Behandeln Sie alle im Lehrplan vorgesehenen Themengebiete? Falls nein, welche lassen Sie am ehesten weg? Siehe oben; In welchem Ausmaß behandeln Sie im Unterricht auch den Erweiterungslehrstoff des Lehrplans? (Welche Themen?) Erweiterungsstoff kann nötigenfalls eingeschränkt werden (Aktienanalyse)
3	In welchen Themengebieten des Mathematikunterrichts in der HAK sehen Sie die größte Brauchbarkeit für den kaufmännischen bzw. wirtschaftlichen Alltag? Wieso? Brauchbarkeit für den kaufmännischen bzw. wirtschaftlichen Alltag?
4	Wie stark wird von KollegInnen anderer Unterrichtsfächer gefordert, Ihrem Fach zuzuarbeiten? Tw von Kollegen aus Rechnungswesen bzw Betriebswirtschaft Findet an Ihrer Schule gezielt fächerübergreifender Unterricht mit Mathematik statt? Nicht gezielt, aber in den unterschiedlichsten Kombinationen immer wieder Wie schätzen Sie insgesamt die Gewichtung/Relevanz des Fachs Mathematik in der HAK ein? Mathematik hat neben den typenbildenden Gegenständen eine durchaus hohe Relevanz, habe aber die Erfahrung gemacht (selbst die ersten Unterrichtsjahre an der AHS), dass der Stellenwert von Mathematik an der HAK nicht derselbe wie am Gymnasium ist.
5	Können Sie aus Ihrer Sicht Besonderheiten des Mathematikunterrichts an der HAK im Vergleich zur AHS formulieren? Mehr Anwendungsorientiertheit, Vektoren und v.a. das Schneiden von drei Ebenen und all ihren möglichen Ausfällen gibt es in der HAK nicht
6	Haben Sie Ihre Kenntnis über die HAK-spezifische Mathematik bereits in Ihrem Studium kennengelernt, oder mussten Sie sich diese selbst erwerben? Welche HAK-spezifischen Themen mussten Sie sich selbst aneignen? HAK-spezifische Themen wurden nicht mal erwähnt: v.a. Finanzmathematik war nur Eigenstudium

Sonstige Anmerkungen: Ich möchte nicht namentlich in Ihrer Diplomarbeit erwähnt werden

Spezifika im HAK-Unterricht

1	Welche Lehrbücher haben Sie an Ihrer Schule im Fach Mathematik? Sind Sie damit zufrieden? Warum (nicht)? Ich verwende die Lehrbücher von Timhof, Girtlinger, Paul, Fischer und Schneider „MATHEMATIK II“ bis „MATHEMATIK V“ vom Trauner Verlag. Ich bin mit der momentanen Auflage zufrieden, weil der Stoff des aktuellen Lehrplans dadurch gut abgedeckt wird. Falls Sie nicht zufrieden sind, verwenden Sie die Bücher für Ihren konkreten Unterricht trotzdem? Woher nehmen Sie primär Ihr Unterrichtsmaterial?
2	Ist eine Umsetzung des Lehrplans für das Unterrichtsfach Mathematik (Übersicht siehe nächste Seite) gut möglich? Mit sehr viel Disziplin und wenig ausgefallenen Stunden ist es möglich den Basislehrstoff umzusetzen. Behandeln Sie alle im Lehrplan vorgesehenen Themengebiete? Falls nein, welche lassen Sie am ehesten weg? Falls es zeitlich nicht möglich ist, kürze ich Matrizen im 2. Jahrgang und Wahrscheinlichkeitsrechnung im 5. Jahrgang. In welchem Ausmaß behandeln Sie im Unterricht auch den Erweiterungslehrstoff des Lehrplans? (Welche Themen?) Weitere Anwendungen der Differenzialrechnung und Integralrechnung.
3	In welchen Themengebieten des Mathematikunterrichts in der HAK sehen Sie die größte Brauchbarkeit für den kaufmännischen bzw. wirtschaftlichen Alltag? Wieso? Prozentrechnung, auch im Kopf ausführen, das braucht jeder Kaufmann im Alltag.
4	Wie stark wird von Kolleginnen anderer Unterrichtsfächer gefordert, Ihrem Fach zuzuarbeiten? Nicht besonders stark. Die Wirtschaftsinformatiker wünschen sich ein Verständnis für Formeln. Prozentrechnung wünschen sich alle. Findet an Ihrer Schule gezielt fächerübergreifender Unterricht mit Mathematik statt? Fächerübergreifender Unterricht findet im Kapitel Finanzmathematik mit dem Fach Betriebswirtschaft statt. Wie schätzen Sie insgesamt die Gewichtung/Relevanz des Fachs Mathematik in der HAK ein? Nicht so hoch wie in der AHS oder HTL. Wird aber durch die neue zentrale RDP aufgewertet.
5	Können Sie aus Ihrer Sicht Besonderheiten des Mathematikunterrichts an der HAK im Vergleich zur AHS formulieren? Der Mathematikunterricht der HAK ist nicht so theoretisch wie in der AHS. Weniger Herleitungen und dafür mehr praktische Beispiele. Mehr Einsatz von Technologie im Unterricht.
6	Haben Sie Ihre Kenntnis über die HAK-spezifische Mathematik bereits in Ihrem Studium kennengelernt, oder mussten Sie sich diese selbst erwerben? Welche HAK-spezifischen Themen mussten Sie sich selbst aneignen? Die Kenntnis über die HAK-spezifische Mathematik wie z.B. Rentenrechnung, Schuldtilgung, Aktienanalyse,... musste ich mir selbst erwerben.

Sonstige Anmerkungen:

Spezifika im HAK-Unterricht

1	Welche Lehrbücher haben Sie an Ihrer Schule im Fach Mathematik? Sind Sie damit zufrieden? Warum (nicht)? Hauptsächlich das Buch aus dem Trauner-Verlag. Im 11. Jahrgang (fällt unter die Zentralmatura) haben wir das Buch von Schodi u. a. aus dem Manz-Verlag. Wir probieren immer wieder auch andere Bücher aus. Zufrieden sind wir mit keinem – manche (Manz) enthalten zu wenig Übungsaufgaben, andere (Trauner) enthalten viel Überflüssiges (zumindest meiner Meinung nach). Falls Sie nicht zufrieden sind, verwenden Sie die Bücher für Ihren konkreten Unterricht trotzdem? Woher nehmen Sie primär Ihr Unterrichtsmaterial? Ich verwende es trotzdem, halt nur teilweise. Das fehlende Unterrichtsmaterial muss man sich selbst zusammen suchen oder auch selbst zusammenstellen.
2	Ist eine Umsetzung des Lehrplans für das Unterrichtsfach Mathematik (Übersicht siehe nächste Seite) gut möglich? NEIN – nicht mit den Eingangsvoraussetzungen, welche die Schülerinnen mitbringen und nicht mit der vorhandenen Stundenzahl (derzeit 10, im neuen Lehrplan sollen es immerhin 11 werden). Behandeln Sie alle im Lehrplan vorgesehenen Themengebiete? Falls nein, welche lassen Sie am ehesten weg? Ab jetzt MUSS man alles behandeln; es kann ja eine Aufgabe bei der zentralen RDP daraus gestellt werden. Und für die mündliche gibt es die Themen, aus denen die Schülerinnen ziehen sollen. Bisher sind des öfteren die Matrizen unter den Tisch gefallen oder es wurde die Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr gekürzt. In welchem Ausmaß behandeln Sie im Unterricht auch den Erweiterungslehrstoff des Lehrplans? (Welche Themen?) Ich bin froh, wenn ich mit dem Kernstoff halbwegs zu Rande komme, also gar nicht.
3	In welchen Themengebieten des Mathematikunterrichts in der HAK sehen Sie die größte Brauchbarkeit für den kaufmännischen bzw. wirtschaftlichen Alltag? Wieso? Zinsen- und Rentenrechnung (darüber sollte man auch als „einfacher Konsument“ Bescheid wissen), Kosten- und Preistheorie (im Hinblick auf wirtschaftliches Studium oder FH), Statistik
4	Wie stark wird von Kolleginnen anderer Unterrichtsfächer gefordert, Ihrem Fach zuzuarbeiten? Sehr wenig Findet an Ihrer Schule gezielt fächerübergreifender Unterricht mit Mathematik statt? Sehr wenig (außer wenn ich selbst in der Klasse noch Physik oder Wirtschaftsinformatik unterrichte, also fächerübergreifender Unterricht mit mir selber sozusagen) – hängt sehr stark von den Kolleginnen ab Wie schätzen Sie insgesamt die Gewichtung/Relevanz des Fachs Mathematik in der HAK ein? Für Absolventinnen, die unmittelbar nach der HAK in einen Beruf eintreten, reicht das Gebotene, denke ich. Für Absolventinnen, die ein Studium in Angriff nehmen (bei dem Mathematik eine Rolle spielt), ist das Fach eher unterdotiert. Derzeit wird Mathematik an den FH und WU – nach Berichten unserer Absolventinnen – als Abschreckungsmaßnahme eingesetzt (hohe Durchfallquoten bei den ersten M-Prüfungen)
5	Können Sie aus Ihrer Sicht Besonderheiten des Mathematikunterrichts an der HAK im Vergleich zur AHS formulieren? Die Mathematik ist weniger theoretisch sondern viel anwendungsorientierter.
6	Haben Sie Ihre Kenntnis über die HAK-spezifische Mathematik bereits in Ihrem Studium kennengelernt, oder mussten Sie sich diese selbst erwerben? Welche HAK-spezifischen Themen mussten Sie sich selbst aneignen? Selbst „beigebracht“ habe ich mir die gesamte Finanzmathematik sowie die Kosten- und Preistheorie. Da ich AHS-Absolvent bin, habe ich vorher nie davon gehört (im Studium auch nicht).

Sonstige Anmerkungen:

Spezifika im HAK-Unterricht

1	Welche Lehrbücher haben Sie an Ihrer Schule im Fach Mathematik? Sind Sie damit zufrieden? Warum (nicht)? Bin nicht zufrieden, weil sie nicht dem neuen kompetenzorientierten Unterricht entsprechen. Falls Sie nicht zufrieden sind, verwenden Sie die Bücher für Ihren konkreten Unterricht trotzdem? Woher nehmen Sie primär Ihr Unterrichtsmaterial? Natürlich verwende ich ein Lehrbuch in der Klasse, ergänze meinen Unterricht aber mit anderen Beispielen aus anderen Büchern Ist eine Umsetzung des Lehrplans für das Unterrichtsfach Mathematik (Übersicht siehe nächste Seite) gut möglich? Nein. Das Vorwissen der Schüler ist gering, daher muss ich erst Basiswissen üben. Außerdem sind meine Schüler nicht sehr fleißig. Behandeln Sie alle im Lehrplan vorgesehenen Themengebiete? Falls nein, welche lassen Sie am ehesten weg? Nein. Bisher Matrizen weggelassen, wird aber in Zukunft nicht mehr sein, da für die neue SRP dieses Kapitel wichtig ist. In welchem Ausmaß behandeln Sie im Unterricht auch den Erweiterungsinhalt des Lehrplans? (Welche Themen?) Integralrechnung In welchen Themengebieten des Mathematikunterrichts in der HAK sehen Sie die größte Brauchbarkeit für den kaufmännischen bzw. wirtschaftlichen Alltag? Wieso? Finanzmathematik, Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung. z.B. in einem Kreditinstitut um neue Produkte zu entwickeln Wie stark wird von KollegInnen anderer Unterrichtsfächer gefordert, Ihrem Fach zuzuarbeiten? wenig Findet an Ihrer Schule gezielt fächerübergreifender Unterricht mit Mathematik statt? nein Wie schätzen Sie insgesamt die Gewichtung/Relevanz des Fachs Mathematik in der HAK ein? gering Können Sie aus Ihrer Sicht Besonderheiten des Mathematikunterrichts an der HAK im Vergleich zur AHS formulieren? Der überwiegende Teil der Beispiele sollte angewandt sein. Haben Sie Ihre Kenntnis über die HAK-spezifische Mathematik bereits in Ihrem Studium kennengelernt, oder mussten Sie sich diese selbst aneignen? Weiche HAK-spezifischen Themen mussten Sie sich selbst aneignen? Nein. Musste mir alle Themen selbst erarbeiten. Alle
2	
3	
4	
5	
6	

Sonstige Anmerkungen:

Spezifika im HAK-Unterricht

1	Welche Lehrbücher haben Sie an Ihrer Schule im Fach Mathematik? Sind Sie damit zufrieden? Warum (nicht)? Mathematik HAK öbv-Verlag, sehr zufrieden Falls Sie nicht zufrieden sind, verwenden Sie die Bücher für Ihren konkreten Unterricht trotzdem? Woher nehmen Sie primär Ihr Unterrichtsmaterial? Was fehlt, denke ich mir selbst aus. Ist eine Umsetzung des Lehrplans für das Unterrichtsfach Mathematik (Übersicht siehe nächste Seite) gut möglich? das größte Problem ist die zu geringe Anzahl an Wochenstunden Behandeln Sie alle im Lehrplan vorgesehenen Themengebiete? Falls nein, welche lassen Sie am ehesten weg? Aus Zeitmangel bleibt im 3. Jahrgang die Trigonometrie in manchen Klassen auf der Strecke, im 5. Jahrgang die beurteilende Statistik. Kurs und Rentabilitätsrechnung sowie Aktienanalyse lasse ich bislang aus, weil mich das persönlich nicht interessiert. In welchem Ausmaß behandeln Sie im Unterricht auch den Erweiterungsinhalt des Lehrplans? (Welche Themen?) Weitere Anwendungen der Differenzialrechnung, Kombinatorische Hilfsmittel, Wahrscheinlichkeitsrechnung In welchen Themengebieten des Mathematikunterrichts in der HAK sehen Sie die größte Brauchbarkeit für den kaufmännischen bzw. wirtschaftlichen Alltag? Wieso? Im 2. Jahrgang das Modellieren mit linearen Funktionen, speziell der Vergleich unterschiedlicher Tarifmodelle. Prozentrechnung und Finanzmathematik. Differenzialrechnung für das Studium Wie stark wird von KollegInnen anderer Unterrichtsfächer gefordert, Ihrem Fach zuzuarbeiten? gar nicht – oder sie sind vielleicht ohnehin mit meiner Arbeit zufrieden? Findet an Ihrer Schule gezielt fächerübergreifender Unterricht mit Mathematik statt? nein Wie schätzen Sie insgesamt die Gewichtung/Relevanz des Fachs Mathematik in der HAK ein? Die Grundlagen wie z.B. das Umgehen mit Prozenten sind für die anderen Fächer auch relevant, der Rest nicht so sehr. Können Sie aus Ihrer Sicht Besonderheiten des Mathematikunterrichts an der HAK im Vergleich zur AHS formulieren? Die Aufgaben sind näher an der Praxis, als an der Theorie. Es gibt bloß eine Schularbeit pro Semester Haben Sie Ihre Kenntnis über die HAK-spezifische Mathematik bereits in Ihrem Studium kennengelernt, oder mussten Sie sich diese selbst erwerben? Welche HAK-spezifischen Themen mussten Sie sich selbst aneignen? Alles selbst erworben: speziell Finanzmathematik und Kostenfunktionen
2	
3	
4	
5	
6	

Sonstige Anmerkungen:

Aufgrund der Vorgaben für die Zentrale Reife und Diplomprüfung wird die unspezifische Formulierung des HAK-Lehrplans und die geringe Wochenstunden-Zahl natürlich immer mehr zum Problem. Ich orientiere mich daher bei den Inhalten mehr am Lehrplanentwurf für das Jahr 2014, obwohl sich dabei natürlich noch einiges ändern könnte.

Spezifika im HAK-Unterricht

1	Welche Lehrbücher haben Sie an Ihrer Schule im Fach Mathematik? Sind Sie damit zufrieden? Warum (nicht)? Trauner Verlag: Mathematik Öbv: Mathematik Manz Verlag: angewandte Mathematik Falls Sie nicht zufrieden sind, verwenden Sie die Bücher für Ihren konkreten Unterricht trotzdem? Woher nehmen Sie primär Ihr Unterrichtsmaterial? Ist eine Umsetzung des Lehrplans für das Unterrichtsfach Mathematik (Übersicht siehe nächste Seite) gut möglich? Ja, wenn man schulautonom genügend Wochenstunden hat (10+) Behandeln Sie alle im Lehrplan vorgesehenen Themengebiete? Falls nein, welche lassen Sie am ehesten weg? Ich behandle alle mit unterschiedlichem Intensitäts- und Vertiefungsgrad In welchem Ausmaß behandeln Sie im Unterricht auch den Erweiterungslehrestoff des Lehrplans? (Welche Themen?) Ich behandle alle mit unterschiedlichem Intensitäts- und Vertiefungsgrad In welchen Themengebieten des Mathematikunterrichts in der HAK sehen Sie die größte Brauchbarkeit für den kaufmännischen bzw. wirtschaftlichen Alltag? Wieso? Gesamter Bereich der Finanzmathematik, Stochastik Wie stark wird von Kolleginnen anderer Unterrichtsfächer gefordert, Ihrem Fach zuzuarbeiten? Nur eingeschränkt! Findet an Ihrer Schule gezielt fächerübergreifender Unterricht mit Mathematik statt? Nur eingeschränkt! Wie schätzen Sie insgesamt die Gewichtung/relevanz des Fachs Mathematik in der HAK ein? Sehr hoch, insbesondere in Hinblick des neuen LP 2014 und der Zentralmatura! Können Sie aus Ihrer Sicht Besonderheiten des Mathematikunterrichts an der HAK im Vergleich zur AHS formulieren? Anwendung steht im HAK-Bereich im Mittelpunkt! Haben Sie Ihre Kenntnis über die HAK-spezifische Mathematik bereits in Ihrem Studium kennengelernt, oder mussten Sie sich diese selbst erwerben? Welche HAK-spezifischen Themen mussten Sie sich selbst aneignen? Alle HAK-relevanten Themen musste ich mir selbst aneignen!
2	Sonstige Anmerkungen:
3	Eine kleine Rückmeldung aus der Schule:
4	Zurzeit befassen wir uns intensiv mit dem neuen LP 2014, Oberstufe neu und standardisierte, teilzentrale Reife- und Diplomprüfung!
5	Der alte LP 204 ist schon im auslaufen!

Spezifika im HAK-Unterricht

1	Welche Lehrbücher haben Sie an Ihrer Schule im Fach Mathematik? Sind Sie damit zufrieden? Warum (nicht)? Von der 2. Bis zur 5. Klasse: Mathematik, von Tinhof, Fischer, Grlinger, Paul, Schneider; Trauner Verlag. Bin damit großteils zufrieden. Problematisch ist eher nur in Hinsicht auf die Zentralmatura, dass die Fragestellungen nicht wie bei Musteraufgaben für die Zentralmatura verfasst sind, aber das trifft leider auf alle Bücher zu. Falls Sie nicht zufrieden sind, verwenden Sie die Bücher für Ihren konkreten Unterricht trotzdem? Woher nehmen Sie primär Ihr Unterrichtsmaterial? Ich verwende Bücher aller Verlage zu Beschaffen von Unterrichtsmaterial, auch Bücher, die für das Gymnasium vorgesehen sind. Ist eine Umsetzung des Lehrplans für das Unterrichtsfach Mathematik (Übersicht siehe nächste Seite) gut möglich? Eine Umsetzung des gesamten Lehrplans ist für mich unmöglich, weil die Zeit dafür einfach nicht ausreicht. Behandeln Sie alle im Lehrplan vorgesehenen Themengebiete? Falls nein, welche lassen Sie am ehesten weg? Trigonometrie verschiebe ich von der 3. auf die 4. Klasse, weil es sich da zeitlich besser ausgeht. In der 3. Klasse lasse ich Differenzgleichungen weg (mache ich erst in der 4. Klasse) und die rekursive Darstellung von Folgen und Reihen. In der 4. Klasse lasse ich die Kurs- und Rentabilitätsrechnung weg. In welchem Ausmaß behandeln Sie im Unterricht auch den Erweiterungslehrestoff des Lehrplans? (Welche Themen?) Vom Erweiterungslehrestoff mache ich nur die Integralrechnung intensiver durch. In welchen Themengebieten des Mathematikunterrichts in der HAK sehen Sie die größte Brauchbarkeit für den kaufmännischen bzw. wirtschaftlichen Alltag? Wieso? Ich sehe in keinem Bereich große Brauchbarkeit, weil mir die Aufgaben alle eher sehr „konstruiert“ erscheinen. Wie stark wird von Kolleginnen anderer Unterrichtsfächer gefordert, Ihrem Fach zuzuarbeiten? Überhaupt nicht. Findet an Ihrer Schule gezielt fächerübergreifender Unterricht mit Mathematik statt? Nein. Wie schätzen Sie insgesamt die Gewichtung/Relevanz des Fachs Mathematik in der HAK ein? Leider als sehr gering. Können Sie aus Ihrer Sicht Besonderheiten des Mathematikunterrichts an der HAK im Vergleich zur AHS formulieren? Ich sehe keine große Besonderheit, bis auf die nur im HAK- Stoff vorkommenden Themenbereiche. Darüber hinaus bleibt allerdings wenig Zeit, weitere Kapitel ähnlich intensiv wie z.B. in einem Gymnasium zu behandeln, da in Summe nur 10 Wochenstunden zur Verfügung stehen. Haben Sie Ihre Kenntnis über die HAK-spezifische Mathematik bereits in Ihrem Studium kennengelernt, oder mussten Sie sich diese selbst erwerben? Welche HAK-spezifischen Themen mussten Sie sich selbst aneignen? Wurde alles selbst erlernt. (Rentenrechnung, Investitionsrechnung, große Teile der Kosten- und Preistheorie, Regressionsrechnung)
2	Sonstige Anmerkungen:
3	Sonstige Anmerkungen:
4	Sonstige Anmerkungen:
5	Sonstige Anmerkungen:
6	Sonstige Anmerkungen:

Spezifika im HAK-Unterricht

1	Welche Lehrbücher haben Sie an Ihrer Schule im Fach Mathematik? Sind Sie damit zufrieden? Warum (nicht)? Die Mathematikbücher des Trauner Verlages. Ich bin sehr zufrieden mit diesen Büchern, weil diese sehr anschaulich aufgebaut sind und viele Übungsbeispiele vorhanden sind. Falls Sie nicht zufrieden sind, verwenden Sie die Bücher für Ihren konkreten Unterricht trotzdem? Woher nehmen Sie primär Ihr Unterrichtsmaterial? -
2	Ist eine Umsetzung des Lehrplans für das Unterrichtsfach Mathematik (Übersicht siehe nächste Seite) gut möglich? Ja. Behandeln Sie alle im Lehrplan vorgesehenen Themengebiete? Falls nein, welche lassen Sie am ehesten weg? Es wird versucht alle Themengebiete im Unterricht zu besprechen. In welchem Ausmaß behandeln Sie im Unterricht auch den Erweiterungslehstoff des Lehrplans? (Welche Themen?) Es wird vor allem ein Einblick in die Vektorrechnung gegeben.
3	In welchen Themengebieten des Mathematikunterrichts in der HAK sehen Sie die größte Brauchbarkeit für den kaufmännischen bzw. wirtschaftlichen Alltag? Wieso? Zinsen- und Rentenrechnung, Preis- und Kostentheorie
4	Wie stark wird von Kolleginnen anderer Unterrichtsfächer gefordert, Ihrem Fach zuzuarbeiten? ??? Findet an Ihrer Schule gezielt fächerübergreifender Unterricht mit Mathematik statt? Ja. Wie schätzen Sie insgesamt die Gewichtung/Relevanz des Fachs Mathematik in der HAK ein? Das Fach Mathematik ist von besonderer Bedeutung an der HAK, weil es z.B. grundlegende Kenntnisse zum wirtschaftlichen Rechnen vermittelt und das logische Denken fördert.
5	Können Sie aus Ihrer Sicht Besonderheiten des Mathematikunterrichts an der HAK im Vergleich zur AHS formulieren? Der Mathematikunterricht an der HAK ist praxisorientierter und angewandter als an der AHS.
6	Haben Sie Ihre Kenntnis über die HAK-spezifische Mathematik bereits in Ihrem Studium kennengelernt, oder mussten Sie sich diese selbst erwerben? Welche HAK-spezifischen Themen mussten Sie sich selbst aneignen? Folgende Themen musste ich mir selber aneignen, weil diese im Studium nicht besprochen wurden: Rentenrechnung, Preis- und Kostentheorie, Schuldtilgung, Kurs- und Rentabilitätsrechnung; Investitionsrechnung.

Sonstige Anmerkungen:

Spezifika im HAK-Unterricht

1	Welche Lehrbücher haben Sie an Ihrer Schule im Fach Mathematik? Sind Sie damit zufrieden? Warum (nicht)? Schödl, ja Falls Sie nicht zufrieden sind, verwenden Sie die Bücher für Ihren konkreten Unterricht trotzdem? Woher nehmen Sie primär Ihr Unterrichtsmaterial?
2	Ist eine Umsetzung des Lehrplans für das Unterrichtsfach Mathematik (Übersicht siehe nächste Seite) gut möglich? Ja Behandeln Sie alle im Lehrplan vorgesehenen Themengebiete? Falls nein, welche lassen Sie am ehesten weg? Erweiterungslehstoff In welchem Ausmaß behandeln Sie im Unterricht auch den Erweiterungslehstoff des Lehrplans? (Welche Themen?) ----- In welchen Themengebieten des Mathematikunterrichts in der HAK sehen Sie die größte Brauchbarkeit für den kaufmännischen bzw. wirtschaftlichen Alltag? Wieso? Differenzialrechnung, Finanzmathematik Wie stark wird von Kolleginnen anderer Unterrichtsfächer gefordert, Ihrem Fach zuzuarbeiten? Wir unterrichten Fächerübergreifend Findet an Ihrer Schule gezielt fächerübergreifender Unterricht mit Mathematik statt? Ja Wie schätzen Sie insgesamt die Gewichtung/Relevanz des Fachs Mathematik in der HAK ein? ist gut gewichtet
5	Können Sie aus Ihrer Sicht Besonderheiten des Mathematikunterrichts an der HAK im Vergleich zur AHS formulieren? -----
6	Haben Sie Ihre Kenntnis über die HAK-spezifische Mathematik bereits in Ihrem Studium kennengelernt, oder mussten Sie sich diese selbst erwerben? Welche HAK-spezifischen Themen mussten Sie sich selbst aneignen? nein

Sonstige Anmerkungen:

Spezifika im HAK-Unterricht

1	Welche Lehrbücher haben Sie an Ihrer Schule im Fach Mathematik? Sind Sie damit zufrieden? Warum (nicht)? Trauner/Tinhof – zufrieden Öbv/Pauer – weniger zufrieden Falls Sie nicht zufrieden sind, verwenden Sie die Bücher für Ihren konkreten Unterricht trotzdem? Woher nehmen Sie primär Ihr Unterrichtsmaterial? Mischung aus Buch und eigenen Unterlagen. Ist eine Umsetzung des Lehrplans für das Unterrichtsfach Mathematik (Übersicht siehe nächste Seite) gut möglich? Nein, da es an Zeit mangelte und an den Wissens-Voraussetzungen der Schüler aus der kooperativen Mittelschule. Behandeln Sie alle im Lehrplan vorgesehenen Themengebiete? Falls nein, welche lassen Sie am ehesten weg? Matrizen, Statistik in der zweiten, Testen von Hypothesen; Lineare Optimierung, Aktienanalyse, Kryptographie In welchem Ausmaß behandeln Sie im Unterricht auch den Erweiterungslehrstoff des Lehrplans? (Welche Themen?) Gar nicht
3	In welchen Themengebieten des Mathematikunterrichts in der HAK sehen Sie die größte Brauchbarkeit für den kaufmännischen bzw. wirtschaftlichen Alltag? Wieso? Rente, Preis- und Kostentheorie, Matrizen, Statistik
4	Wie stark wird von KollegInnen anderer Unterrichtsfächer gefordert, Ihrem Fach zuzuarbeiten? Gar nicht Findet an Ihrer Schule gezielt fächerübergreifender Unterricht mit Mathematik statt? nein
5	Wie schätzen Sie insgesamt die Gewichtung/Relevanz des Fachs Mathematik in der HAK ein? Mittel Können Sie aus Ihrer Sicht Besonderheiten des Mathematikunterrichts an der HAK im Vergleich zur AHS formulieren? Weniger theoriebildend; mehr Praxisbezug und Anwendung
6	Haben Sie Ihre Kenntnis über die HAK-spezifische Mathematik bereits in Ihrem Studium kennengelernt, oder mussten Sie sich selbst aneignen? Rente, Preis- und Kostentheorie

Sonstige Anmerkungen:

Spezifika im HAK-Unterricht

1	Welche Lehrbücher haben Sie an Ihrer Schule im Fach Mathematik? Sind Sie damit zufrieden? Warum (nicht)? Hanisch, Schödl, Tinhof. Bin damit zufrieden Falls Sie nicht zufrieden sind, verwenden Sie die Bücher für Ihren konkreten Unterricht trotzdem? Woher nehmen Sie primär Ihr Unterrichtsmaterial? Ist eine Umsetzung des Lehrplans für das Unterrichtsfach Mathematik (Übersicht siehe nächste Seite) gut möglich? Daher, ja, später aufgrund des kompetenzorientierten Unterrichts fragwürdig Behandeln Sie alle im Lehrplan vorgesehenen Themengebiete? Falls nein, welche lassen Sie am ehesten weg? ja In welchem Ausmaß behandeln Sie im Unterricht auch den Erweiterungslehrstoff des Lehrplans? (Welche Themen?) Je nach Klasse und Unterrichtszeit verschieden. In welchen Themengebieten des Mathematikunterrichts in der HAK sehen Sie die größte Brauchbarkeit für den kaufmännischen bzw. wirtschaftlichen Alltag? Wieso? Finanzmathematik, kosten- und Preistheorie. Fast jeder wird irgendwann mit Krediten (beruflich oder privat) zu tun haben, daher Finanzmathematik. Kosten- und Preistheorie: viele Begriffe kommen auch in Rechnungsweisen vor.
4	Wie stark wird von KollegInnen anderer Unterrichtsfächer gefordert, Ihrem Fach zuzuarbeiten? Gar nicht Findet an Ihrer Schule gezielt fächerübergreifender Unterricht mit Mathematik statt? Kaum Wie schätzen Sie insgesamt die Gewichtung/Relevanz des Fachs Mathematik in der HAK ein? Stundenkürzungen der letzten Jahre bei gleicher Stofffülle führten dazu, dass einerseits viele Schüler überfordert sind, andererseits das Fach im Stundenplan zu wenig Gewicht hat. Können Sie aus Ihrer Sicht Besonderheiten des Mathematikunterrichts an der HAK im Vergleich zur AHS formulieren? Die AHS legt mehr Wert auf Verständnisfragen, die HAK mehr auf Anwendungen, vor allem im wirtschaftlichen Bereich.
6	Haben Sie Ihre Kenntnis über die HAK-spezifische Mathematik bereits in Ihrem Studium kennengelernt, oder mussten Sie sich diese selbst erwerben? Welche HAK-spezifischen Themen mussten Sie sich selbst aneignen? Musste mir vieles selbst erwerben. Zur Gänze: die Finanzmathematik und die kosten- und Preistheorie.

Sonstige Anmerkungen:

Ich denke, die HAK will mathematisch an die AHS herankommen, ohne jedoch das geeignete Stundenausmaß bieten zu können. Daher bleiben die mathematischen Kenntnisse vieler HAK-SchülerInnen an der Oberfläche.

1	Welche Lehrbücher haben Sie an Ihrer Schule im Fach Mathematik? Sind Sie damit zufrieden? Warum (nicht)? LP 2004: Timisch, Prugger: Mathematik & Wirtschaft. Diese Bücher waren bei uns sehr bewährt, aber durch den Umstieg in Richtung Zentralmatura beginnen wir jetzt mit dem Lehrbuch School, Gut Karajan,... Angewandte Mathematik Dazu gibt es noch wenig Erfahrung. Falls Sie nicht zufrieden sind, verwenden Sie die Bücher für Ihren konkreten Unterricht trotzdem? Woher nehmen Sie primär Ihr Unterrichtsmaterial?
2	Ist eine Umsetzung des Lehrplans für das Unterrichtsfach Mathematik (Übersicht siehe nächste Seite) gut möglich? Nein, es wurden immer wieder Kapitel weggelassen. Allerdings mit der Zentralmatura wird sich da einiges ändern. Behandeln Sie alle im Lehrplan vorgesehenen Themengebiete? Falls nein, welche lassen Sie am ehesten weg? Bisher am ehesten weggelassen: 2. JG: Umkehrfunktionen, Matrizen 3. JG: Trigonometrische Funktionen, Rekursive Darstellung von Folgen Sowie der Erweiterungsinhalt In welchem Ausmaß behandeln Sie im Unterricht auch den Erweiterungsinhalt des Lehrplans? (Welche Themen?) Kaum
3	In welchen Themengebieten des Mathematikunterrichts in der HAK sehen Sie die größte Brauchbarkeit für den kaufmännischen bzw. wirtschaftlichen Alltag? Wieso? Finanzmathematik: kann jeder brauchen Kosten-Preistheorie für Wirtschaftsstudium und VWL Statistik: bei diversen Studien
4	Wie stark wird von Kolleginnen anderer Unterrichtsfächer gefordert, Ihrem Fach zuzuarbeiten? wenig Findet an Ihrer Schule gezielt fächerübergreifender Unterricht mit Mathematik statt? kaum
5	Wie schätzen Sie insgesamt die Gewichtung/Relevanz des Fachs Mathematik in der HAK ein? Wichtig, weil Grundlage für viele Wirtschaftsbereiche Können Sie aus Ihrer Sicht Besonderheiten des Mathematikunterrichts an der HAK im Vergleich zur AHS formulieren? Weniger Theorie, dafür umso mehr Praxisbezug, der durch die Kompetenzorientierung sicher noch mehr gefördert wird.
6	Haben Sie Ihre Kenntnis über die HAK-spezifische Mathematik bereits in Ihrem Studium kennengelernt, oder mussten Sie sich diese selbst erwerben? Welche HAK-spezifischen Themen mussten Sie sich selbst aneignen? Im Studium wurden leider keine HAK-spezifischen Kenntnisse vermittelt. Finanzmathematik war für mich am schwierigsten. Der Rest ging eher nebenbei.

Sonstige Anmerkungen:

8. Literaturverzeichnis

ADELMEYER, Moritz; WARMUTH, Elke: *Finanzmathematik für Einsteiger. Von Anleihen über Aktien zu Optionen*, Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlag/GWV Fachverlage GmbH, 2. Auflage 2005

BÜCKER, Rüdiger: *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, München Wien: Oldenbourg, 3. Auflage 1993

DAUME, Peggy: *Finanzmathematik im Unterricht. Aktien und Optionen: Mathematische und didaktische Grundlagen mit Unterrichtsmaterialien*, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009

GÖTZ, Stefan; REICHEL, Hans-Christian; MÜLLER, Robert; HANISCH, Günter: *Mathematik 5*, Wien, öbv, 2010

GÖTZ, Stefan; REICHEL, Hans-Christian; MÜLLER, Robert; HANISCH, Günter: *Mathematik 6*, Wien, öbv, 2010

GÖTZ, Stefan; REICHEL, Hans-Christian; MÜLLER, Robert; HANISCH, Günter: *Mathematik 7*, Wien, öbv, 2011

GÖTZ, Stefan; REICHEL, Hans-Christian; MÜLLER, Robert; HANISCH, Günter: *Mathematik-Lehrbuch 8*, Wien, öbv&hpt, 2007

HINKELMANN, Heinz-Dieter; BÖHM, Josef; HOFBAUER, Peter; METZGER-SCHUHÄKER, Heidi: *Mathe mit Gewinn 1*, Wien: öbv&hpt, 2005

HINKELMANN, Heinz-Dieter; BÖHM, Josef; HOFBAUER, Peter; METZGER-SCHUHÄKER, Heidi: *Mathe mit Gewinn 2*, Wien: öbv&hpt, 2006

HINKELMANN, Heinz-Dieter; BÖHM, Josef; HOFBAUER, Peter; METZGER-SCHUHÄKER, Heidi: *Mathe mit Gewinn 3*, Wien: öbv&hpt, 2007

HINKELMANN, Heinz-Dieter; BÖHM, Josef; HOFBAUER, Peter; METZGER-SCHUHÄKER, Heidi: *Mathe mit Gewinn 4*, Wien: Verlag Holder-Pichler-Tempsky, 2008

KOOP, Andreas; MOOCK, Hardy: *Lineare Optimierung. Eine anwendungsorientierte Einführung in Operations Research*, Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2008

MALLE, Günther; KOTH, Maria; WOSCHITZ, Helge; MALLE, Sonja; SALZGER, Bernhard; ULOVEC, Andreas: *Mathematik verstehen 5*, Wien: öbv, 2010

MALLE, Günther; KOTH, Maria; WOSCHITZ, Helge; MALLE, Sonja; SALZGER, Bernhard; ULOVEC, Andreas: *Mathematik verstehen 6*, Wien: öbv, 2010

MALLE, Günther; KOTH, Maria; WOSCHITZ, Helge; MALLE, Sonja; SALZGER, Bernhard; ULOVEC, Andreas: *Mathematik verstehen 7*, Wien: öbv, 2011

MALLE, Günther; RAMHARTER, Esther; ULOVEC, Andreas; KANDL, Susanne: *Mathematik verstehen 8*, Wien: öbvht, 2007

MARTIN, Tobias: *Finanzmathematik. Grundlagen – Prinzipien – Beispiele*, Leipzig: Carl Hanser, 2003

REIFNER, Udo; DEDERT, Anke; LÜBKE, Volkmar: *Finanzielle Allgemeinbildung in Schulbüchern. Eine exemplarische inhaltliche und didaktische Analyse und Bewertung von zwanzig ausgewählten Schulbüchern der 8. und 9. Stufe in Mathematik, Wirtschafts- und Gesellschaftslehre*, Institut für Finanzdienstleistungen: Hamburg, 2004

SCHNEIDER, Wilfried; GREIMEL-FUHRMANN, Bettina; SCHEICHER-GÁLFFY, Elisabeth; WIRTH, Helga; ANDRE, Gabriele; GEISSLER, Gerhard; GRBENIC, Stefan: *Betriebswirtschaft. Handel, Internationale Geschäftstätigkeit. Kreditinstitute und Kapitalmarkt. Produktions- und Dienstleistungsbetriebe. HAK IV*, Wien: Manz Verlag, 2011

SCHODL, Martin; GUT, Jutta; KARAJAN, Sabine; TURNER, Marianne; BLANCKENSTEIN, Ulrike: *Angewandte Mathematik 1*, Wien: Manz Verlag, 2012

SCHREINER, Christian: *Von der linearen Gleichung bzw. Ungleichung zur linearen Optimierung im Mathematikunterricht unter Einsatz des Computers*, Diplomarbeit der Universität Wien, 2009

STEINER, Gerald F.; WEILHARTER, Johann: *Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 1*, Wien: Reniets Verlag, 4. Auflage 2005

STEINER, Gerald F.; WEILHARTER, Johann: *Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 2*, Wien: Reniets Verlag, 4. Auflage 2006

STEINER, Gerald F.; WEILHARTER, Johann: *Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 3*, Wien: Reniets Verlag, 4. Auflage 2007

STEINER, Gerald F.; WEILHARTER, Johann: *Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 4*, Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 3. Auflage 2008

TINHOF, Friedrich; FISCHER, Wolfgang; GIRLINGER, Helmut; PAUL, Markus; SCHNEIDER, Gerold: *Mathematik III HAK/LW*, Linz: Trauner Verlag, 4. Auflage 2012

TINHOF, Friedrich; FISCHER, Wolfgang; GIRLINGER, Helmut; PAUL, Markus; SCHNEIDER, Gerold: *Mathematik IV HAK/LW*, Linz: Trauner Verlag, 2. Auflage 2012

TINHOF, Friedrich; FISCHER, Wolfgang; GIRLINGER, Helmut; PAUL, Markus; SCHNEIDER, Gerold: *Mathematik V HAK/LW*, Linz: Trauner Verlag, 1. Auflage 2012

8.1 Internetquellen

Lehrpläne: <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11668/11668.pdf> (AHS allgemein)

http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf
(AHS Mathematik)

http://www.abc.berufsbildendeschulen.at/upload/598_HAK%20LP%202004%20-%20Anlage%201.pdf (HAK)

<http://bepixelung.org/img/3/7/6/5376.jpg> abgerufen am 28.12.2012

<http://de.wikipedia.org/wiki/Stichprobenkovarianz> abgerufen am 19.02.2013

http://imihome.imi.uni-karlsruhe.de/namortisationsrechnung_b.html abgerufen am 26.04.2013

<http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/verschiebungssatz.html> abgerufen am 16.04.2013

http://www.bmukk.gv.at/medienpool/5820/schulrecht_info_1.pdf abgerufen am 21.01.2013

(Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur: Informationsblätter zum Schulrecht Teil 1: *Schulpflicht. Aufnahmebedingungen. Übertrittsmöglichkeiten*, Wien: Verlag Jugend & Volk, 2007)

<http://www.bmukk.gv.at/schulen/bw/abs/ahs.xml> 19.11.2012 abgerufen am 19.11.2012

<http://www.bmukk.gv.at/schulen/bw/bbs/entrepreneurship.xml> abgerufen am 13.08.2012

http://www.bmukk.gv.at/schulen/bw/ueberblick/bildungswege_bhs.xml abgerufen am 19.11.2012

<http://www.dict.cc> abgerufen am 13.08.2012

<http://www.furtherfield.org/features/algorithms-and-control> abgerufen am 01.05.2013

http://www.statistik.at/web_de/statistiken/bildung_und_kultur/formales_bildungswesen/schulen_schulbesuch/index.html abgerufen am 19.02.2013

<http://www.umrechnung.org/waehrungen-umrechnen/waehrungs-kurs-umrechner.htm> abgerufen am 23.02.2013

<http://www.welt-der-bwl.de/Amortisationsrechnung> abgerufen am 26.04.2013

9. Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Theresa Paar
Geburtsdatum:	11. Jänner 1988
Geburtsort:	Mistelbach/NÖ
Staatsangehörigkeit:	Österreich



Studium

Seit WS 2006/07	Studium an der Universität für Musik und darstellende Kunst Wien und Universität Wien
	Studienrichtung: Lehramtsstudium UF Musikerziehung, UF Mathematik

Schulbildung

2002 - 2006	BORG Mistelbach
1998 - 2002	Hauptschule I Poysdorf
1994 - 1998	Volksschule Poysdorf

Zusammenfassung

In dieser Diplomarbeit wird auf die Besonderheiten des Mathematikunterrichts an Handelsakademien (HAK) im Vergleich zu Allgemeinbildenden Höheren Schulen (AHS) eingegangen. Dazu werden zunächst die beiden Schultypen genauer vorgestellt und anhand des Lehrplans verglichen. Dies erfolgt in Bezug auf die allgemeinen Bestimmungen des Lehrplans (wie zum Beispiel die unterschiedlichen Unterrichtsfächer), als auch speziell bezüglich des Lehrstoffs für das Unterrichtsfach Mathematik. Dabei konnten sehr wohl Themengebiete festgestellt werden, die nur im Lehrplan der HAK enthalten sind. Als Lehramtsstudent für das Unterrichtsfach Mathematik muss der Erwerb der HAK-spezifischen Themen zum Großteil im Selbststudium erfolgen, da im Lehramtsstudium auf diese nicht eingegangen wird.

Für beide Schultypen soll die Arbeit mit je zwei Schulbuchbänden einen Eindruck davon geben, wie die verschiedenen Themengebiete im Unterricht behandelt werden. Zunächst werden die gemeinsamen Themengebiete von AHS und HAK anhand der Bücher verglichen und Besonderheiten der HAK aufgezeigt. Einerseits werden HAK-spezifische Anwendungen gezeigt, die in wirtschaftliche bzw. kaufmännische Richtung gehen, andererseits betrifft das die unterschiedlichen Zeitpunkte, zu denen überschneidende Themen vorgesehen sind. Ein umfangreicher Abschnitt der Diplomarbeit entspricht danach der Aufbereitung der HAK-spezifischen Themengebiete. Diese sind der HAK entsprechend kaufmännische Kapitel wie zum Beispiel Zinseszinsen, Rentenrechnung oder Kosten- und Preistheorie. Im Anschluss an die intensive Auseinandersetzung mit den Schulbüchern wird über die HAK-Bücher in Bezug auf die Brauchbarkeit für den Mathematikunterricht reflektiert.

Am Ende der Arbeit werden noch Ergebnisse gezeigt, die aus der Befragung einiger Mathematiklehrer an Handelsakademien gewonnen wurden. Unter anderem konnte man den Antworten entnehmen, dass die Lehrer der Meinung sind, dass die Mathematik in der HAK vor allem im wirtschaftlichen Bereich viel anwendungsorientierter sei und dies für ein wirtschaftliches Studium im Anschluss an die Matura wichtig sei.

Die Diplomarbeit könnte als Richtlinie dafür verstanden werden, was sich ein ausgebildeter AHS-Mathematiklehrer noch zusätzlich aneignen müsste, um auch an einer HAK problemlos Mathematik unterrichten zu können.

Abstract

This thesis compares the peculiarities of mathematics taught at commercial academies (HAK) to the mathematics taught at grammar schools (AHS) in Austria. For this purpose both types of schools are described and their respective curricula are compared. This is done concerning the curriculum terms in general (e.g., the different subjects) as well as the subject mathematics' syllabus in particular. Thereby a range of subjects which are solely present in the HAK curriculum are identified. Teacher trainees for the subject mathematics have to acquire the HAK-specific topics predominately in self-study, as these topics are not covered in their course of studies.

This thesis tries to give insights on how the different ranges of subjects are imparted in class. This is accomplished with the help of two schoolbooks for each of the two types of schools respectively. First, the topics present in both AHS and HAK, according to the books, are compared and the peculiarities of the HAK curriculum are shown. On the one hand this concerns HAK-specific business and commercial applications, on the other hand this pertains the different scheduling of coinciding topics. A large part of this thesis discusses the presentation of the HAK-specific topics. These are, corresponding to this type of school's focus, commercial chapters such as e.g., compound interest, annuity computation and cost- and pricing theory. Subsequent to the intensive review of the schoolbooks, the author deliberates on the usability of the HAK-schoolbooks for the teaching of mathematics.

In the final stages of this thesis, the author presents the results of a survey among mathematics teachers at commercial academies. The tenor of the survey responses is that mathematics at HAKs is, especially in commercial and business topics, much more application-oriented. Furthermore this orientation is deemed of high importance if the chosen field of studies after A-levels lies in the business and economics domain.

This thesis can be seen as a guideline to what knowledge a trained AHS mathematics teacher has to acquire to teach mathematics at a commercial academy with ease.