



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Musik und Mathematik im Unterricht Vernetzungsmöglichkeiten, Beispiele und fachdidaktische Analyse

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Verfasserin: Brigitte Posch
Studienkennzahl: A 190 406 593 T
Studienrichtung: Lehramtsstudium UF Mathematik, UF Musikerziehung
Betreuer: Univ.-Prof. Mag. Dr. Hans Humenberger

Wien, im Juni 2013

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung	1
1. Musikalische Akustik, Logarithmus und die Sinusfunktion	3
1.1. Schwingungen als physikalische Grundlage	3
1.2. Ton, Klang, Geräusch, Knall	4
1.3. Unterschiede im Klang	7
1.3.1. Tonhöhe	7
1.3.2. Lautstärke	8
1.3.3. Klangfarbe	10
1.4. Harmonische Schwingungen und die allgemeine Sinusfunktion	13
1.5. Überlagerung von Schwingungen	15
1.6. Gedämpfte harmonische Schwingungen	20
1.7. Anwendungen in der Praxis	20
1.8. Fachdidaktische Überlegungen	23
1.8.1. Aufgaben	23
1.8.2. Lösungen	31
1.8.3. Fachdidaktische Analyse	37
2. Musikalische Stimmungen	41
2.1. Stimmungssysteme	41
2.1.1. Reine Stimmung	41
2.1.2. Pythagoreische Stimmung	44
2.1.3. Mitteltönige Stimmung	46
2.1.4. Gleichschwebend temperierte Stimmung	47
2.1.5. Vergleich dieser vier Stimmungen mit Hilfe der Cent-Skala	49
2.2. Näherungslösungen mit Hilfe von Kettenbruchentwicklung	50
2.3. Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel in der Musik	52
2.4. Das Verfahren von Strähle – eine Anwendung aus dem Instrumentenbau	53
2.5. Fachdidaktische Überlegungen	55
2.5.1. Aufgaben und Unterrichtsideen	55
2.5.2. Lösungen	60
2.5.3. Lehrplanbezug	62
3. Mathematische Strukturen in Musikwerken	63
3.1. Musikalische Koordinaten - Möglichkeiten und Grenzen des Fünfliniensystems	63
3.2. Musikalische Bruchrechnung	65
3.3. Symmetrie in der Musik	66
3.3.1. Mathematische Grundlagen	66
3.3.2. Musikalische Transformationen vs. Abbildungsgeometrie	69
3.3.3. Bandornamente	72
3.3.4. Weitere Symmetrien in der Musik	74
3.4. Goldener Schnitt und Fibonacci-Zahlen	75
3.4.1. Mathematische Grundlagen	75

3.4.2. Goldener Schnitt und Fibonacci-Zahlen in der Musik	76
3.5. Fachdidaktische Überlegungen	78
3.5.1. Musikalische Bruchrechnung	78
3.5.2. Symmetrie in der Musik	86
3.5.3. Goldener Schnitt und Fibonacci-Zahlen	87
4. Umsetzung in der Schule anhand eines ausgewählten Unterrichtsbeispiels	91
4.1. Rahmenbedingungen und Zielsetzung	91
4.2. Stundenplanungen	93
4.3. Musikstunde	96
4.3.1. Durchführung	96
4.3.2. Reflexion und Analyse	97
4.4. Mathematikstunden: Begriffsklärung und Parametervariation der Sinusfunktion	98
4.4.1. Durchführung	98
4.4.2. Reflexion und Analyse	100
4.5. Mathematikstunden: Stationenbetrieb	101
4.5.1. Durchführung	101
4.5.2. Reflexion und Analyse	102
4.5.3. Bildeindrücke vom Stationenbetrieb	104
4.6. Feedback	105
4.7. Allgemeine Gedanken zur Unterrichtsreihe und zu fächerübergreifendem Unterricht	107
5. Überblick und Ausblick	109
A. Anhang: Material zum Stationenbetrieb	113
A.1. Überblick	113
A.2. Arbeitsblätter	114
A.3. Overheadfolien und PowerPoint-Präsentation	125
A.4. Video	129
A.5. Tafelbild	129
A.6. Geogebra-Arbeitsblätter	129
A.7. Audacity-Dokumente	131
Quellenverzeichnis	133
Abbildungsverzeichnis	139
Tabellenverzeichnis	142
Zusammenfassung	145
Abstract	147
Lebenslauf	149

0. Einleitung

Die Frage nach Gemeinsamkeiten von Musik und Mathematik beschäftigt die Menschheit schon seit tausenden Jahren. Eine Legende erzählt, dass sich Chinesen bereits im dritten Jahrtausend vor Christus auf die Suche nach geeigneten Proportionen zum Stimmen einer Bambusflöte begaben.¹ In Europa gilt Pythagoras von Samos als Vorreiter auf diesem Gebiet. Die alten Griechen zählten Musik zu den „Septem artes liberales“, die in ein „Trivium“ und ein „Quadrivium“ eingeteilt wurden. Letzteres enthielt neben Arithmetik, Geometrie und Astronomie auch die Musik.² Euler, Kepler, Bach, Schönberg und viele andere Mathematiker und Musiker erkannten Verbindungen zwischen Musik und Mathematik. Und doch werden die beiden Gebiete häufig als sehr unterschiedlich, ja sogar gegensätzlich wahrgenommen.

Die folgende Arbeit soll Gemeinsamkeiten von Musik und Mathematik aufzeigen und geht der Frage nach, wie diese Verknüpfungspunkte im Unterricht in den Sekundarstufen I und II genutzt werden können. Als Grundlage für diese Untersuchungen dient der Lehrplan für allgemeinbildende höhere Schulen. Es gibt eine Fülle an möglichen Themengebieten, die in diesem Zusammenhang behandelt werden können. In dieser Arbeit werden drei davon näher untersucht.

Im ersten Kapitel werden Inhalte aus der „Musikalischen Akustik“ behandelt. Bei jedem Klangereignis treffen Schwingungen, die von einer Schallquelle, z.B. einem Musikinstrument oder der menschlichen Stimme, erzeugt werden, auf unser Ohr. Sie bilden so eine Grundlage von Musik und können mathematisch beschrieben und untersucht werden. Erkenntnisse auf diesem Gebiet fanden unter anderem Einzug in die Entwicklung von Radio und Tonaufnahme und werden auch von zeitgenössischen Komponisten als Inspirationsquelle genutzt.

Zum gemeinsamen Musizieren müssen sich Künstler auf dasselbe Stimmungssystem einigen. Die heutige Praxis in der abendländischen Kunstmusik ist ein Kompromiss – das Ergebnis jahrhundertelanger Entwicklungen. Musikalische Stimmungen und ihre Anwendung im Instrumentenbau sind Thema des zweiten Kapitels dieser Arbeit.

Das dritte Themengebiet geht noch einen Schritt weiter. Nachdem die Beschaffenheit von Klängen beleuchtet und auch die Frage nach der Stimmung von Musikinstrumenten besprochen wurde, beschäftigt sich das dritte Kapitel mit den Musikwerken, die mit diesen

¹vgl. Armbrust 1999, S.76f

²vgl. Amon 2011, S.559

Instrumenten zum Klingen gebracht werden. Welche mathematischen Strukturen finden sich in Musikstücken? Bereits an unserem heutigen Notensystem sind Einflüsse aus der Mathematik erkennbar. Werke werden in Takte unterteilt, diese wiederum in Notenwerte. Die elementare Bruchrechnung, die hier zum Einsatz kommt, kann in der Sekundarstufe I thematisiert werden. Auch komplexere Strukturen, wie z.B. Symmetrien, der goldene Schnitt und Fibonacci-Zahlen sind häufig in Musikwerken zu finden.

Jedes dieser drei Kapitel beginnt mit der theoretischen Behandlung des Themas. Anschließend werden Aufgaben zu den Inhalten vorgestellt und ein Bezug zum österreichischen Lehrplan sowie weitere Unterrichtsideen angeführt. Da die vorliegende Arbeit im Rahmen des Unterrichtsfaches Mathematik verfasst wurde, liegt der Schwerpunkt auf den Umsetzungsmöglichkeiten im Mathematikunterricht. Als Impuls für fächerübergreifenden Unterricht werden jedoch auch Möglichkeiten für den Musikunterricht aufgezeigt.

Aus den Themenbereichen des Theorieteils wurde exemplarisch eine vierstündige Unterrichtsreihe geplant, durchgeführt und analysiert. Diese ist Inhalt des vierten Kapitels.

Die theoretischen Teile wurden mit Hilfe ausführlicher Literaturrecherche erstellt, wobei zahlreiche Bücher, Fachzeitschriften und Internetseiten als Quellen dienten. Für die Aufgabenteile bildete eine Auswahl an österreichischen Schulbüchern eine wichtige Grundlage. Der praktische Teil der Arbeit wurde experimentell an einer Schule durchgeführt und ausgewertet.

Ich möchte mich bei Herrn Univ.-Prof. Mag. Dr. Hans Humenberger bedanken, der mich bei der Erstellung dieser Arbeit mit seinen raschen und genauen Rückmeldungen stets unterstützte. Außerdem danke ich den Lehrern der AHS Friesgasse, Herrn Mag. Herwig Födermayr und Herrn Mag. Martin Nowak, die es mir ermöglichten, die Unterrichtsreihe in ihrer Klasse durchzuführen.

1. Musikalische Akustik, Logarithmus und die Sinusfunktion

1.1. Schwingungen als physikalische Grundlage

Wenn wir Musik hören, nimmt unser Ohr periodische Luftdruckschwankungen (Schall) wahr. Die Schwingungen, die durch die regelmäßige Zu- und Abnahme des Luftdrucks um einen Mittelwert („normaler Luftdruck“) entstehen, bilden somit eine physikalische Grundlage von Musik. Diese Zustandsänderungen können bei reinen Tönen mathematisch mit Sinusfunktionen beschrieben werden.¹ Die folgende Grafik zeigt die Luftdruckschwankungen an einem bestimmten Ort bei Erklängen eines reinen „a“¹.

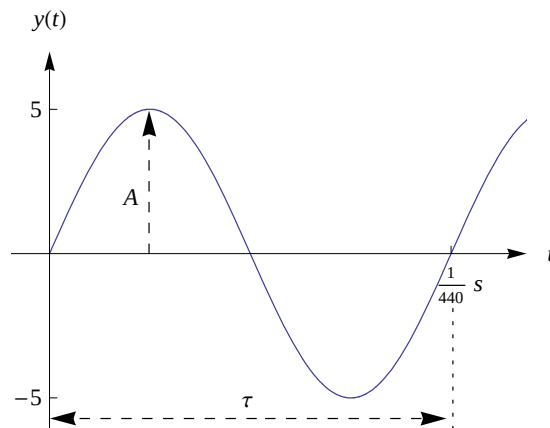


Abbildung 1.1.: Reines „a“¹

Die Schwingung wird hier als Funktion der Zeit dargestellt. Diese beschreibt die Änderung des Luftdrucks zu den Zeitpunkten $t \in \mathbb{R}$ (Einheit: Sekunde). Im Gegensatz zum Begriff der Welle spielt hier die räumliche Ausbreitung keine Rolle. Von einer Welle spricht man, „wenn die Fortpflanzung einer zeitlichen, in der Regel periodischen Zustandsänderung (Schwingung) in Materie und Raum gemeint ist.“². In der Physik werden verschiedene Arten von Wellen unterschieden. Bei Transversalwellen erfolgt die Schwingungsrichtung normal zur Richtung der Ausbreitung, bei Longitudinalwellen schwingen die Teilchen in Ausbreitungsrichtung. Schallwellen sind Longitudinalwellen.³ Als Beispiele für Transversalwellen werden häufig Wasserwellen genannt. Longitudinalwellen kann man mit den Wellen vergleichen, die man aus der Vogelperspektive sehen kann, wenn Wind über Kornfelder streift.⁴

¹vgl. Widholm 2004, S.2

²Gobrecht 1974, S.443

³vgl. Michels 1984, S.15

⁴vgl. Helmholtz 1913, S.16f

Mehrere Parameter charakterisieren einen Ton. Die y -Achse im obigen Graphen gibt die Elongation, d.h. die Auslenkung der schwingenden Teilchen aus der Ruhelage, an. Die maximale Auslenkung wird Amplitude (A) genannt. Sie gibt die Stärke der Schwingung an und entspricht der Lautstärke. Die Einheit, in der Amplituden gemessen werden, hängt vom Kontext ab. Im Zusammenhang mit Schallwellen sind z.B. Luftdruckschwankungen (gemessen in Pascal) oder auch die Schallintensität (gemessen in W/m^2 , vgl. dazu Seite 9) interessant. Aus diesem Grund werden in der obigen Abbildung und in den Aufgaben bewusst keine Einheiten angegeben. Schwingungen spielen auch in außermusikalischen Bereichen eine wichtige Rolle. Elektrische Schwingungen werden z.B. in Volt gemessen. Als Frequenz (f) wird die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde bezeichnet. Sie wird in Hertz (Abkürzung: Hz) gemessen und entspricht der Tonhöhe. Die Zeit, die für eine volle Schwingung benötigt wird, ist durch die Periode τ gegeben. Sie wird in Sekunden gemessen und ist umgekehrt proportional zur Frequenz, d.h. $f = \frac{1}{\tau}$.⁵ In Abbildung 1.1 ist die Auslenkung der harmonischen Schwingung zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich Null. Sie kann aber auch von Null verschieden sein und wird durch den Nullphasenwinkel φ_0 ausgedrückt.⁶ (vgl. dazu Abbildung 1.14 in Abschnitt 1.4)

Beispiel 1.1 (Reines „a¹“). Für das reine „a¹“ in Abbildung 1.1 gilt daher:

$$f = 440 \text{ Hz}; A = 5; \tau = 0,0022\overline{7} s = 2,2\overline{7} ms; \varphi_0 = 0$$

1.2. Ton, Klang, Geräusch, Knall

Nur reine Töne, wie z.B. das „a¹“ im obigen Beispiel, werden durch einzelne Sinusschwingungen dargestellt. Sie kommen in der Natur so gut wie nicht vor. Bei „natürlichen Tönen“ (auch: „musikalische Töne“) spricht man bereits von *Klang*. Diese bestehen aus einer Summe von Sinustönen, deren Frequenzen meist im ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen. Die Überlagerungsschwingung, die durch Verschmelzen der einzelnen Teiltöne entsteht, ist i.A. keine Sinusschwingung, aber in der Grundfrequenz periodisch. Welche Partialtöne dabei auftreten ist naturbedingt.⁷ Sie tragen wesentlich zur Klangfarbe bei und stehen so in engem Zusammenhang mit dem Instrumentenklang (vgl. dazu Abschnitt 1.3.3 Klangfarbe). Abbildung 1.2 zeigt eine einfache Darstellung eines Klanges.

In der Grafik sind der Grundton (durchgezeichnet) sowie die ersten zwei Obertöne (strichliert und punktiert) eingezeichnet. Außerdem ist die Überlagerungskurve der drei Einzelschwingungen zu sehen (dick). Es ist leicht zu erkennen, dass der erste Oberton die doppelte Frequenz des Grundtones hat, der zweite Oberton die dreifache. Musikalisch entsprechen diese Töne der Oktav und dem Quintton (oktavversetzt). Intervalle und ihre Proportionen bilden die Grundlage für musikalische Stimmungen und werden in Kapitel 2 näher behandelt. Der

⁵vgl. Michels 1984, S.15 und Widholm 2004, S.5

⁶vgl. Preiner, www.geogebra.org/de/examples/fourier/sachanalyse/phase.htm

⁷vgl. Michels 1984, S.17 und Gobrecht 1974, S.488f

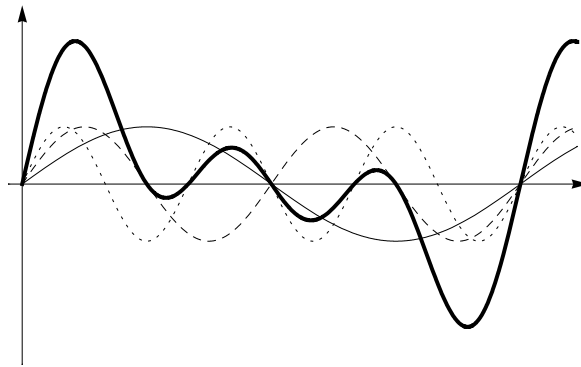


Abbildung 1.2.: Klang

oben dargestellte Klang wird kaum in der Natur in dieser Weise auftreten, vor allem weil die Amplituden der Obertöne und des Grundtones nicht konstant gleich groß bleiben.

Im Gegensatz zum Klang stehen die Frequenzen eines *Geräusches* zueinander in keinem ganzzahligen Verhältnis. Die Summe der Teilschwingungen ist unperiodisch, ihre Frequenzen und Amplituden wechseln statistisch.⁸ Um unperiodische, zudem kurze Schwingungsimpulse handelt es sich auch beim *Knall*.⁹ Er enthält für kurze Zeit alle Frequenzen eines großen Bereiches. Dabei klingen die Amplituden schnell wieder ab, es werden meist nur wenige Perioden durchlaufen.¹⁰

Die folgenden Abbildungen wurden mit dem Programm Audacity¹¹ erstellt. Hier werden Unterschiede aber auch Grenzen des Modells sichtbar.

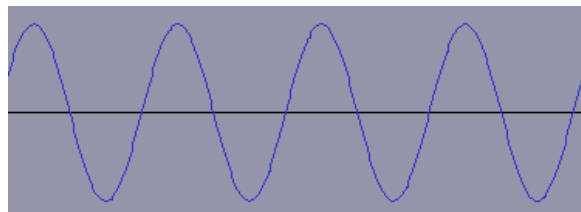


Abbildung 1.3.: Sinuston

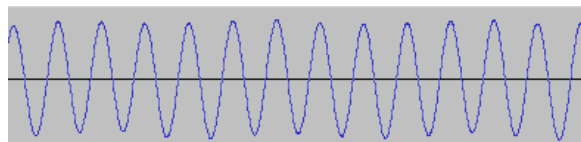


Abbildung 1.4.: Ton einer Stimmgabel

⁸vgl. Gobrecht 1974, S.489

⁹vgl. Michels 1984, S.17

¹⁰vgl. Gobrecht 1974, S.489

¹¹www.audacity.sourceforge.net

Abbildung 1.3 wurde elektronisch mit Audacity erzeugt. Als Vergleich dazu zeigt die Abbildung 1.4 die Schwingungen einer Stimmgabel. Sie kommen nahe an Sinusschwingungen heran. Helmholtz, dem noch keine Computer für seine Experimente zur Verfügung standen, führte zahlreiche Versuche mit Stimmgabeln durch.¹²

Im Gegensatz dazu kann ein gesungener Ton wie in den Abbildungen 1.5 und 1.6 bereits als Klang beschrieben werden. Die Kurven sind Ergebnis der Überlagerung von Sinusschwingungen. Durch unterschiedliche Anzahl und Stärke der Obertöne können sehr verschiedene Überlagerungskurven entstehen, wie in den Abbildungen deutlich wird.

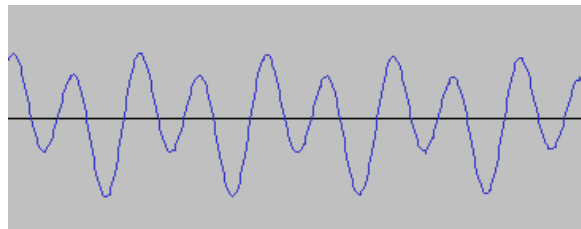


Abbildung 1.5.: Stimme - Variante 1

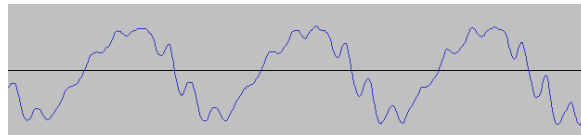


Abbildung 1.6.: Stimme - Variante 2

Die folgenden zwei Bilder zeigen unperiodische Schwingungen. Das erste wurde durch Händereiben (Geräusch) erzeugt. Das zweite, Händeklatschen, soll als Beispiel für einen Knall dienen. Die spitzen Zacken weisen auf ein dichtes, obertonreiches Klangereignis hin, das nur von kurzer Dauer ist.

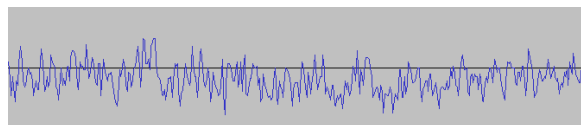


Abbildung 1.7.: Händereiben

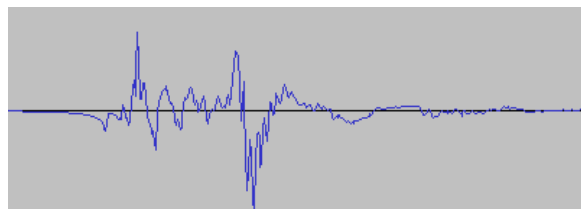


Abbildung 1.8.: Händeklatschen

¹²vgl. Helmholtz 1913, z.B. S.68 oder S.138

Hier zeigen sich auch Grenzen dieser Definition. Ist oftmaliges Händeklatschen hintereinander ein Geräusch? Schlägt man innerhalb einer Oktav alle Tasten am Klavier an, ist das noch ein Klang, oder schon ein Geräusch?¹³ Betrachtet man die obigen Abbildungen genau, so ist leicht zu erkennen, dass Klänge, die durch die Singstimme erzeugt wurden, nicht exakt periodisch sind. Es mischen sich auch Geräusche darunter. Ähnlich ist es beim Spiel der Violine, wo der Bogen Geräusche verursacht oder beim Klavierspiel, wo auch die Mechanik der Hämmer zu hören ist. Die Übergänge zwischen den Kategorien verlaufen fließend. Dennoch ist diese Einteilung ein guter Anhaltspunkt, um Gehörtes näher zu beschreiben.

Klänge haben in der Musik eine besondere Bedeutung. Sie werden nach den drei Kriterien Tonhöhe, Lautstärke und Klangfarbe unterschieden. (Bei reinen Tönen lässt sich die Klangfarbe nicht von der Tonhöhe trennen, Geräusch und Knall haben keine eindeutige Tonhöhe.)

1.3. Unterschiede im Klang

1.3.1. Tonhöhe

Das menschliche Ohr kann Töne wahrnehmen, wenn deren Frequenzen ungefähr zwischen 16 und 20 000 Hz liegen. Der genaue Umfang ist von Mensch zu Mensch verschieden und nimmt im Alter ab. Trotz dieser Spanne werden in der musikalischen Praxis meist nur Grundfrequenzen zwischen 16 und 4500 Hz verwendet. Höhere Töne sind wegen ihres obertonarmen Klanges (vgl. dazu Abschnitt 1.3.3 Klangfarbe) musikalisch wenig interessant.¹⁴ (Das c^5 , der höchste Ton eines Klaviers hat zum Beispiel nach der heute gebräuchlichen Stimmung eine Frequenz von ca. 4186 Hz!¹⁵) Um das Stimmen von Instrumenten zu regeln, wurde auf der 2. internationalen Stimmungskonferenz in London 1939 der Kammerton a^1 auf 440 Hz bei 20°C als Referenzton festgelegt.¹⁶ Vor dieser Entscheidung gab es eine Vielzahl an unterschiedlichen Regelungen und Gebräuchen. In der musikalischen Praxis weichen Künstlerinnen und Künstler auch heute immer wieder von dieser Norm ab, gerne wird z.B. das a^1 auf 443 Hertz gestimmt.

Im Zusammenhang mit dem Thema Tonhöhe spielt der Zehnerlogarithmus eine wichtige Rolle. Auf der Basilarmembran im menschlichen Ohr, die Informationen zur zeitlichen Abfolge von Schwingungen (Tonhöhe) verschlüsselt, gibt es für jede Frequenz einen Bereich maximaler Empfindlichkeit. Ein (reiner) Sinuston verursacht nur an einer bestimmten Stelle der Membran maximale Amplituden. Verdoppelt man die Frequenz dieses Tones, so verschiebt sich dieser Bereich auf der Membran um ca. 3,5-4 mm, unabhängig von der Grundfrequenz. Allgemein kann dieses Phänomen folgendermaßen beschrieben werden: Wird eine Ausgangs-

¹³vgl. Helmholtz 1913, S.14

¹⁴vgl. Schubert 1954, S.24

¹⁵vgl. Pierce 1989, S.19

¹⁶vgl. Michels 1984, S.17

frequenz mit einem bestimmten Wert multipliziert, so verschiebt sich der Bereich maximaler Empfindlichkeit abhängig von diesem Faktor um einen konstanten Wert. Dieser Zusammenhang ist annähernd logarithmisch!¹⁷

Am Klavier (es eignet sich besonders gut zur Erklärung von Musiktheorie) können ähnliche Beziehungen gefunden werden. Er klingt ein Ton eine Oktav höher, so verdoppelt sich seine Frequenz (Näheres dazu in Kapitel 2). Werden am Klavier mehrere Oktaven hintereinander gespielt, erklingen daher Töne mit der doppelten, vierfachen, achtfachen,... Frequenz (geometrische Folge!). Unser Gehör nimmt jedoch jeweils den gleichen Tonabstand (arithmetische Folge) wahr!¹⁸

Diese Verhältnisse werden mit dem Weber-Fechner-Gesetz beschrieben, das für Sinnesempfindungen wie Helligkeit, Gewichtsempfindung oder Tonhöhe gilt. Im Zusammenhang mit Tonhöhe formuliert Meyer: „Gleiche Frequenzquotienten werden als gleiche Empfindungsdifferenz wahrgenommen.“¹⁹

1.3.2. Lautstärke

Das Weber-Fechner-Gesetz und der Logarithmus sind auch bei der Lautstärkemessung von erheblicher Bedeutung. Da das menschliche Ohr einen enormen Umfang an Intensitäten wahrnehmen kann, ist eine Skala mit „linearer“ Einteilung für die Messung der Lautstärke sehr unübersichtlich. So eine Skala würde Millionen Einheiten benötigen! Daher wird ein logarithmischer Maßstab verwendet, der auch sehr gut unserem Lautstärkeempfinden entspricht. Denn bei leisen Tönen nehmen wir Luftdruckunterschiede viel eher wahr als bei lauten Tönen.



Abbildung 1.9.: „Lineare“ Skala und logarithmische Skala ohne und mit Zehnerpotenzschreibweise²⁰

Obwohl die Abstände auf der y -Achse gleich groß sind, kann der unterste Abschnitt in der zweiten und dritten Darstellung in neun „lineare“ Einheiten geteilt werden, der oberste dagegen in neunhunderttausend! Die dritte Skala in der Abbildung zeigt eine logarithmische Skala, notiert mit Hilfe von Zehnerpotenzen. Denkt man sich die Basis 10 weg, so erhält

¹⁷vgl. Roederer 2000, S.30

¹⁸Meyer 2002, S.20

¹⁹Meyer 2002, S.20

²⁰vgl. Widholm 2004, S.9

man die Maßeinheiten in „Bel“, d.h. 10^1 entspricht 1 Bel, 10^2 entspricht 2 Bel usw. Diese Einheiten werden wiederum in 10 „lineare“ Einheiten unterteilt, den „Dezibel“. Das Dezibel (dB) ist also ein Verhältnismaß, das auf einen bestimmten Referenzpegel bezogen ist. Für den Schallintensitätspegel ist dieses Verhältnis die Hörschwelle, d.h. die untere Grenze unserer Hörwahrnehmung.²¹

Nun stellt sich die Frage, warum gerade Dezibel und nicht etwa Zentibel (1 Bel = 100 Zentibel) oder Millibel (1 Bel = 1000 Millibel) verwendet werden. Laut Meyer setzte sich ein Dezibel als der „kleinste hörbare Lautstärkeunterschied“²² in der Praxis durch.

Lautstärkenphänomene werden in der Akustik mit vielen verschiedenen Begriffen beschrieben. Im Folgenden werden die Begriffe Schallintensitätspegel und Schalldruckpegel definiert, da sie im Aufgabenteil dieses Kapitels vorkommen. Die Schallintensität ist eine Energiegröße und bezeichnet „die durch eine zur Fortschreitungsrichtung senkrechte Flächeneinheit in der Sekunde hindurchgehende Energie“.²³ Sie kann in W/m^2 angegeben werden. Der Schalldruck wird wie der Druck in Pascal (Pa) gemessen. Da es im Mathematikunterricht vor allem auf Verhältnisse ankommt, kann auf genaue Unterscheidungen dieser Begriffe verzichtet werden. Meyer bezieht sich überhaupt nur allgemein auf das Verhältnis zweier Schallenergien.²⁴

Betrachtet man das Verhältnis einer Energie E_0 und des zehnmal so großen Energiebetrags E_1 , so gilt wegen der oben beschriebenen logarithmischen Beziehungen für x Bel: $\frac{E_1}{E_0} = 10^x$. Ein Verstärker mit 17 Dezibel hat daher einen Energiequotienten von $\frac{E_1}{E_0} = 10^{1,7} \approx 50$. Die ankommende Energie wird durch den Verstärker um den Faktor 50 erhöht (unter Verwendung von Stromenergie).²⁵

Da die subjektiv empfundene Lautstärke nicht nur von der Energie, sondern auch von der Frequenz abhängt, werden die Verhältnisse an der Frequenz 1000 Hz ausgerichtet. In diesem Bereich stimmt die Stärke, die mit der Dezibel-Skala gemessen wird, mit der empfundenen Lautstärke (gemessen in Phon) überein.²⁶

Definition 1.1 (Schallintensitätspegel). *Setzt man die Hörschwelle bei einer Frequenz von 1000 Hz mit 10^{-12} Watt/ m^2 als Bezugsintensität I_0 fest und sei I die Schallintensität, dann heißt $L = 10 \cdot \log(\frac{I}{I_0})$ (gemessen in Dezibel) Schallintensitätspegel.*²⁷

²¹vgl. Widholm 2004, S. 9f

²²Meyer 2002, S.22

²³Gobrecht 1974, S.543

²⁴vgl. Meyer 2002, S.20

²⁵vgl. Meyer 2002, S.20f

²⁶Meyer 2002, S.21

²⁷vgl. Roederer 2000, S.106

Die Größe L kann wegen $\log(\frac{I}{10^{-12}}) = \log(I) - \log(10^{-12}) = \log(I) + 12$ auch durch $L = 10 \cdot (\log(I) + 12)$ ausgedrückt werden.²⁸

Folgende Tabelle zeigt einen Zusammenhang zwischen Schallintensitäten und musikalischer Lautstärkeempfindung. Die Werte können als Näherung verstanden werden, die tatsächliche Lautstärke beim Musizieren hängt sehr stark vom Kontext ab. Dennoch werden auch hier die enormen Intensitätsunterschiede sichtbar.

Intensität (W/m^2)	Lautstärke
1	Schmerzgrenze
10^{-3}	<i>fff</i>
10^{-4}	<i>ff</i>
10^{-5}	<i>f</i>
10^{-6}	<i>mf</i>
10^{-7}	<i>p</i>
10^{-8}	<i>pp</i>
10^{-9}	<i>ppp</i>
10^{-12}	Hörschwelle

Tabelle 1.1.: Schallintensitäten und musikalische Lautstärkeempfindung²⁹

Definition 1.2 (Schalldruckpegel).

Der Schalldruckpegel ist durch die Formel $L_p = 20 \cdot \log(\frac{p}{p_0})$ dB gegeben. Der Wert p gibt den Schalldruck in μPa an, der Schalldruck der Hörschwelle wird mit $p_0 = 20 \mu Pa$ angenommen.³⁰

Ähnlich wie bei der Tonhöhe ist der Lautstärkeumfang in der Musik meist geringer als der Schallumfang, den das menschliche Ohr wahrnehmen kann. Wann wir einen leisen Ton gerade noch hören, hängt von der Frequenz des Tones ab und ist von Mensch zu Mensch verschieden. Beträgt diese z.B. 2000 Hz, so liegt die Hörschwelle etwa bei 0 dB. Sowohl bei tieferen als auch bei höheren Tönen ist sie höher. Die obere Grenze, die Schmerzschwelle liegt ungefähr zwischen 120 und 140 dB.³¹ Beim Musizieren wird zum Großteil ein Umfang zwischen 50 und 100 dB verwendet.³²

1.3.3. Klangfarbe

Wenn wir einen „natürlichen“ Ton (z.B. erzeugt mit einem Musikinstrument) hören, nehmen wir die Grundfrequenz, d.h. die tiefste Frequenz, als Tonhöhe wahr, die Obertöne dagegen tragen wesentlich zur Klangfarbe bei. Helmholtz definiert diese als „diejenige Eigentümlichkeit,

²⁸vgl. Roederer 2000, S.106

²⁹vgl. Roederer 2000, S.104, Tabelle 3.1

³⁰vgl. Pauer u.a. 2012, S.93

³¹<http://de.wikipedia.org/wiki/Hörschwelle>

³²vgl. Hall 1997, S.94

wodurch sich der Klang einer Violine von dem einer Flöte, oder einer Klarinette, oder einer menschlichen Stimme unterscheidet, wenn alle dieselbe Note in derselben Tonhöhe hervorbringen.“³³ Bereits in dieser Erklärung wird deutlich, dass dieser Parameter schwieriger in Worte zu fassen ist als die anderen beiden. Im Vergleich zu den eindimensionalen, kontinuierlichen Größen Tonhöhe und Lautstärke, die sich nur in eine Richtung (hoch-tief, laut-leise) ändern, ist die Klangfarbe komplex und mehrdimensional.³⁴

Die im Klang enthaltenen Teiltöne können durch die Obertonreihe geordnet werden:

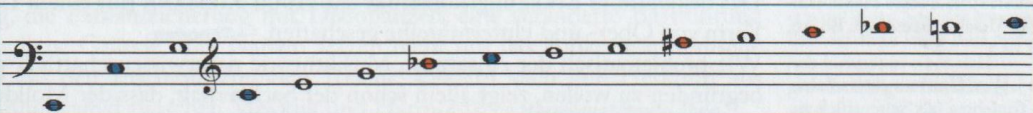
Noten																
Proportion	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Partialtöne	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Obertöne	Gt.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Saiten-verhältnis	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{16}$
Frequenz	f	2f	3f	4f	5f	6f	7f	8f	9f	10f	11f	12f	13f	14f	15f	16f

Abbildung 1.10.: Obertonreihe auf C³⁵

Diese von Reinhard Amon erstellte Tabelle zeigt die ersten 16 Obertöne über dem angenommenen Grundton C und einige mathematische Beziehungen zwischen diesen Tönen. Mehrere Begriffe werden für diese Reihe verwendet, mit dem einzigen Unterschied, dass das c als erster „Oberton“ gezählt wird, während die Begriffe Teilton-, Partialton-, Naturton- oder auch Harmonische Reihe das C beinhalten. Diese Tatsache wird in der Tabelle in den Zeilen drei und vier dargestellt. Physikalisch lassen sich Teiltöne bis zum 43. Ton nachweisen und sind theoretisch nach oben unbegrenzt. Jedoch können diese ab dem 17. Ton nicht mehr in unserem Notensystem dargestellt werden, da die Abstände zwischen den Tönen kleiner als Halbtonschritte sind. Für die Klangfarbe sind sie dennoch von erheblicher Bedeutung: „Je mehr Obertöne, desto heller wird der Klang, erklingen primär geradzahlige Obertöne, wirkt der Klang leer,...“³⁶ Allgemein lässt sich sagen, dass Unterschiede in der Klangfarbe einerseits durch verschiedene Amplituden der Teiltöne entstehen. Andererseits wird sie von der Anzahl und Verteilung der im Klang enthaltenen Obertöne beeinflusst. Diese hängt vor allem von der Dynamik (d.h. Lautstärke) des Gesamtklanges ab, wobei laute bzw. tiefe Klänge teiltonreicher sind als leise bzw. hohe Klänge.³⁷ Diese Erklärung alleine genügt jedoch nicht, Klangfarbe vollständig zu beschreiben. Da beim Musizieren auch der Resonanzkörper bei der Schallerzeugung maßgeblich mitwirkt, hängt die Klangfarbe auch vom Instrument ab.

³³Helmholtz 1913, S.20

³⁴vgl. Hall 1997, S.114

³⁵Amon 2005, S.209

³⁶Amon 2005, S.209

³⁷vgl. Widholm 2004, S.13f

Das erklärt die mitunter großen Unterschiede zwischen Instrumenten verschiedener Bauer.³⁸

Mathematisch ist das Saitenverhältnis der Partialtöne bemerkenswert. Der erste Teilton (= Grundton) schwingt in der vollen Saitenlänge, der zweite in der halben etc. Dies hatte wesentlichen Einfluss auf die Stimmung von Musikinstrumenten (vgl. Kapitel 2). Amon kennzeichnet in der Tabelle den Grundton sowie die Oktaven blau. So ist leicht zu erkennen, dass sich die Frequenz von Oktav zu Oktav verdoppelt (vgl. dazu auch Abbildung 1.2). Die orange gekennzeichneten Töne sind etwas zu hoch notiert und können in unserem Notensystem nicht korrekt dargestellt werden. Sie werden auch ekmelische Töne genannt. Aus der letzten Zeile der Tabelle geht hervor, dass die Frequenzen der Teiltöne in ganzzahligem Verhältnis zueinander stehen.³⁹

Die Partialtöne eines Klanges können mathematisch mit Hilfe der Fast Fourier Transformation in einem Klangspektrum sichtbar gemacht werden. Auf der x -Achse wird die Frequenz aufgetragen, die y -Achse gibt die Größe der Amplitude an. In den Abbildungen 1.11 und 1.12 ist leicht zu erkennen, dass die Frequenzen der Obertöne in ganzzahligem Verhältnis zur Grundfrequenz stehen, da die Abstände auf der x -Achse gleich groß sind. Außerdem ist zu sehen, dass bestimmte Teiltöne bei verschiedenen Instrumenten unterschiedlich stark auftreten, was den charakteristischen Klang eines Instruments ausmacht. Die oben erwähnte Tatsache, dass lautere Töne teiltonreicher sind als leise wird beim Vergleich des Tones in *pp* bzw. *p* und in *ff* bzw. *f* deutlich.

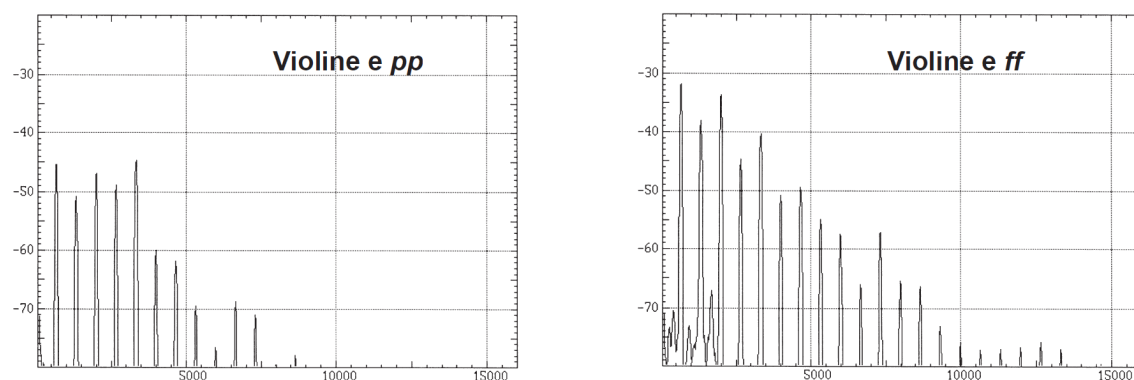


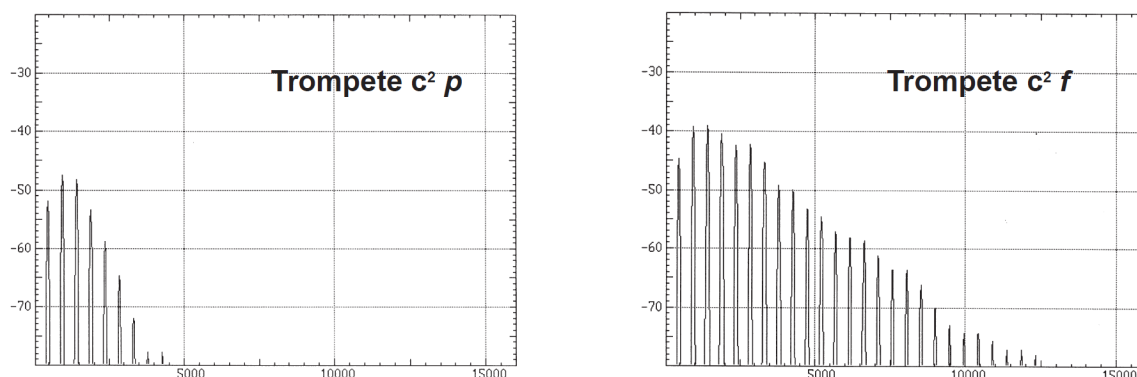
Abbildung 1.11.: Klangspektrum einer Violine⁴⁰

³⁸vgl. Surber/Walder 1992, S.35f

³⁹vgl. Amon 2005, S.209f

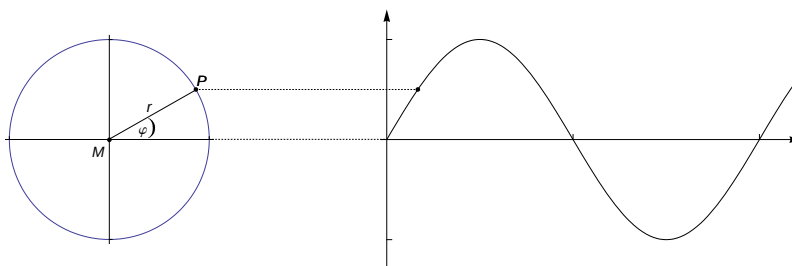
⁴⁰Widholm 2004, S.14

⁴¹Widholm 2004, S.15


Abbildung 1.12.: Klangspektrum einer Trompete⁴¹

1.4. Harmonische Schwingungen und die allgemeine Sinusfunktion

Sinusschwingungen, die „Grundbausteine“ von Klängen, können allgemein als Projektion einer gleichmäßigen Kreisbewegung auf einen Durchmesser des Kreises interpretiert werden.⁴²


Abbildung 1.13.: Sinusfunktion⁴³

Wandert z.B. ein punktförmiger Körper mit konstanter Geschwindigkeit den Kreis entlang, so legt er in jeder Zeiteinheit das gleiche Bogenmaß zurück. Das Bogenmaß des pro Sekunde zurückgelegten Winkels wird auch als Winkelgeschwindigkeit ω bezeichnet. Ist $a(t)$ das Bogenmaß des Winkels zum Zeitpunkt t , so gilt für seine Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{a(t)}{t}.$$

Die Periode τ der Sinusfunktion entspricht einem vollen Umlauf auf dem Kreis. Daher gilt für die Winkelgeschwindigkeit ω nach einem Umlauf $\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi f$. Der Wert von ω unterscheidet sich von der Frequenz f nur um den Faktor 2π und wird daher auch als Kreisfrequenz bezeichnet.⁴⁴

Mit Hilfe dieser Interpretation lässt sich nun auch der Begriff des Nullphasenwinkels (φ_0)

⁴²vgl. Roederer 2000, S.24

⁴³vgl. www.geogebra.org/de/examples/fourier/sachanalyse/sinus_grafisch.htm

⁴⁴vgl. Malle u.a. 2010 (6. Klasse), S.92

veranschaulichen. Er gibt die Anfangslage der Schwingung zum Zeitpunkt $t = 0$ an.⁴⁵

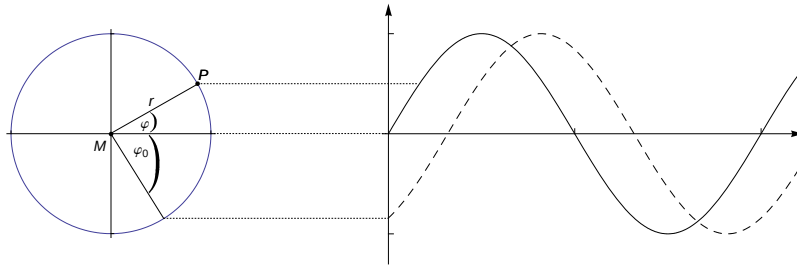


Abbildung 1.14.: Nullphasenwinkel⁴⁶

Eine andere Interpretation der Sinusschwingung ist die Kurve, die durch die Bewegung eines Federpendels (ein „an einer Feder befestigter Körper, der Schwingungen um eine Ruhelage ausführen kann“⁴⁷) entsteht.

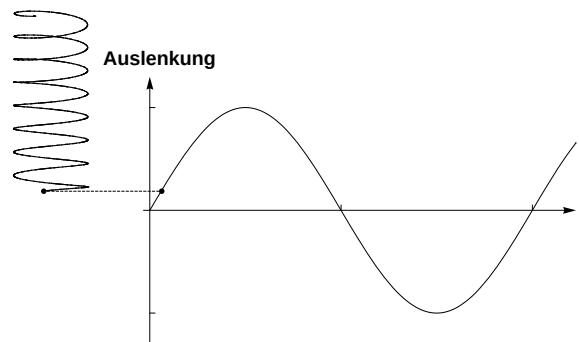


Abbildung 1.15.: Federschwingung

Sinusschwingungen können mit der Formel für die allgemeine Sinusfunktion beschrieben werden:

Definition 1.3 (Allgemeine Sinusfunktion, harmonische Schwingung). *Sei f eine Funktion, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $A, \omega, \varphi_0 \in \mathbb{R}, \omega \neq 0$, sodass gilt:*

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

*Dann heißt f allgemeine Sinusfunktion. Ein Vorgang, der durch diese Funktion beschrieben werden kann, wird harmonische Schwingung genannt.*⁴⁸

⁴⁵vgl. Schaurhofer 2009, S.26

⁴⁶vgl. www.geogebra.org/de/examples/fourier/sachanalyse/phase.htm

⁴⁷Malle u.a. 2010 (6.Klasse), S.91

⁴⁸vgl. Pauer u.a. 2012, S.208

Harmonische Schwingungen sind für die Musik von wesentlicher Bedeutung, da sich alle weiteren Schwingungen als Summe dieser Schwingungen darstellen lassen.⁴⁹

Geht man vom Graphen der Funktion $t \mapsto \sin(t)$ aus, so können Parametervariationen der Funktion $t \mapsto A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ mit Hilfe einfacher Regeln skizziert werden:

- Vergrößerung von A bewirkt eine Streckung entlang der y -Achse, Verkleinerung bewirkt eine Stauchung.
- Vergrößerung von ω bewirkt eine Stauchung entlang der x -Achse, Verkleinerung bewirkt eine Streckung.
- Der Parameter φ_0 bewirkt, dass die Sinuskurve um den Wert $\frac{\varphi_0}{\omega}$ entlang der x -Achse verschoben wird. Eine Vergrößerung von φ_0 eine Verschiebung nach links, Verkleinerung von φ_0 bewirkt eine Verschiebung nach rechts.⁵⁰

1.5. Überlagerung von Schwingungen

In den vorangegangenen Abschnitten wurde bereits deutlich, dass Klänge durch Überlagerung (auch: Interferenz) von Schwingungen entstehen. Im Folgenden werden nun Überlagerungsvorgänge beschrieben, in denen sich Wellen gegenseitig nicht beeinflussen. Diese beruhen auf dem Prinzip der ungestörten Superposition:

Definition 1.4 (Prinzip der ungestörten Superposition).⁵¹ *Bei Überlagerung von Schwingungen ist die resultierende Schwingung die Summe der Einzelschwingungen, d.h.:*

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $y_1, y_2, \dots, y_n$ harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, den Amplituden $A_1, A_2, \dots, A_n$ und den Nullphasenwinkeln $\varphi_{01}, \varphi_{02}, \dots, \varphi_{0n}$, so dass für jede Einzelschwingung gilt:

$$y_i(t) = A_i \cdot \sin(\omega_i \cdot t + \varphi_{0i}), 1 \leq i \leq n, t \in \mathbb{R}_0^+$$

Dann beträgt die Elongation der resultierenden Schwingung

$$\tilde{y}(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_n(t).$$

Wir wollen nun anhand von Fallbeispielen untersuchen, wie sich die Werte der Frequenz, Amplitude, Elongation zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ und des Nullphasenwinkels auf die resultierende Schwingung auswirken. Die Notation aus Definition 1.4 wird im Folgenden übernommen. Wir beschränken uns vorerst auf die Überlagerung zweier Schwingungen und nehmen an, dass diese die gleiche Richtung haben.

⁴⁹vgl. Roederer 2000, S.25

⁵⁰vgl. z.B. Malle u.a.2010 (6. Klasse), S.93

⁵¹www.geogebra.org/de/examples/fourier/sachanalyse/superposition_def.htm

Beispiel 1.2 ($f_1 = f_2, \varphi_{01} = \varphi_{02}$). In diesem Spezialfall stimmen die Schwingungen U und V in Abbildung 1.16 in Frequenz und Phase überein. Nach dem Prinzip der ungestörten Superposition addieren sich die Werte der Elongation zu jedem Zeitpunkt, insbesondere addieren sich in diesem Fall auch die Amplituden. Frequenz und Nullphasenwinkel der Einzelschwingungen entsprechen den Werten der Überlagerungsschwingung, d.h.:

$$\tilde{f} = f_1 = f_2,$$

$$\tilde{\varphi}_0 = \varphi_{01} = \varphi_{02},$$

$$\tilde{y}(t) = y_1(t) + y_2(t), \text{ insbesondere gilt: } \tilde{A} = A_1 + A_2.$$

Die resultierende Schwingung ist wieder eine harmonische Schwingung.

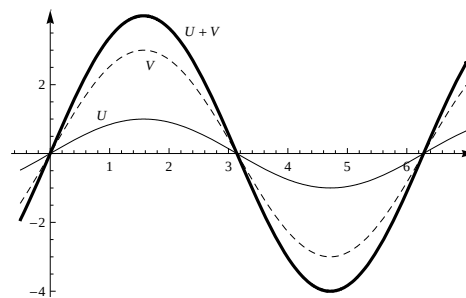


Abbildung 1.16.: Frequenz- und Phasengleichheit

Da das Prinzip der ungestörten Superposition auch für alle folgenden Fallbeispiele gilt, wird die Elongation ab nun nicht mehr gesondert erwähnt. Aus diesem Gesetz folgt jedoch im Allgemeinen nicht, dass die Amplitude der resultierenden Schwingung der Summe der Amplituden der Einzelschwingungen entspricht! Dies ist nur dann der Fall, wenn wie oben die beiden einander überlagernden Schwingungen in Frequenz und Phase übereinstimmen. Ein Sonderfall des Beispiels 1.2 ist das Phänomen der konstruktiven Interferenz.

Beispiel 1.3 („Konstruktive Interferenz“: $f_1 = f_2, \varphi_{01} = \varphi_{02}, A_1 = A_2$). Sind Frequenz, Phase und Amplitude beider Schwingungen gleich, so wird die Amplitude der resultierenden Schwingung maximal verstärkt und ist genau doppelt so groß wie die Amplituden der Einzelschwingungen, d.h.: $\tilde{A} = 2 \cdot A_1 = 2 \cdot A_2$. Man spricht von konstruktiver Interferenz.⁵²

Im Gegenteil dazu kann es auch zur vollkommenen Auslöschung der Schwingungen kommen:

Beispiel 1.4 („Destruktive Interferenz“: $f_1 = f_2, A_1 = A_2, \varphi_{02} = \varphi_{01} + 180^\circ$). Sind die Phasen zweier gleichfrequenter Wellen mit gleicher Amplitude genau um 180° verschieden, so löschen sich die Schwingungen gegenseitig aus. Dieses Phänomen wird auch als destruktive Interferenz bezeichnet.⁵³

Diese beiden Phänomene spielen in der Raumakustik eine Rolle. Allerdings sind dies idealisierte Fälle, da meist Reflexionen von den Wänden die Schallverteilung verändern.

⁵²vgl. Hall 1997, S.84

⁵³vgl. Roederer 2000, S.36

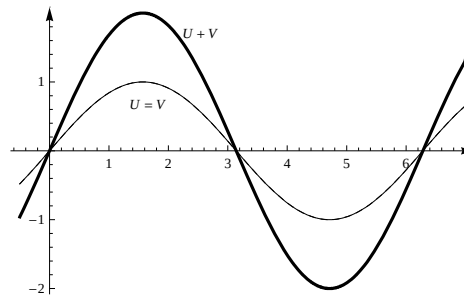


Abbildung 1.17.: Konstruktive Interferenz

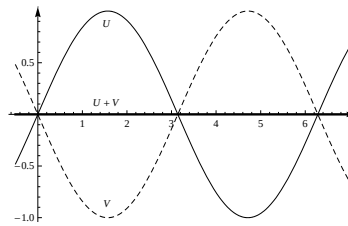


Abbildung 1.18.: Destruktive Interferenz

Ist die Phasendifferenz weder 0° noch 180° , oder sind die Amplituden verschieden, so kommt es zu keinem Zeitpunkt zu maximaler Verstärkung oder Auslöschung.⁵⁴ Die resultierende Schwingung ist weiterhin eine harmonische Schwingung.

Sind die Frequenzen der beiden Einzelschwingungen verschieden, so ist für Musiker der Sonderfall der Schwebung bedeutend. Schwebungen entstehen, wenn zwei einander überlagernde Frequenzen nur gering voneinander abweichen. Es kommt in relativ kurzer Zeit zu Punkten maximaler Verstärkung und Auslöschung. Dieses Phänomen wird unter anderem zum Stimmen von Instrumenten benutzt.

Beispiel 1.5 („Schwebung“: $\Delta f = |f_2 - f_1|$). Überlagern sich zwei Schwingungen mit geringem Frequenzunterschied Δf , dann nehmen wir einen Ton wahr, dessen Lautstärke schwankt („schwebt“). Dies wird durch die langsam variierende Amplitude der Überlagerungsschwingung verursacht, da sich die Phasenverschiebung ständig verändert (vgl. Abbildung 1.19). Die neue Frequenz ist gleich dem arithmetischen Mittel der ursprünglichen Frequenzen, d.h. $\tilde{f} = \frac{f_1 + f_2}{2} = f_1 + \frac{\Delta f}{2}$. Die Schwebungsfrequenz (f_B), d.h. die Anzahl der Änderungen der Amplituden pro Sekunde ist gleich der Differenz der beiden Einzelfrequenzen, d.h. $f_B = |f_2 - f_1| = \Delta f$.⁵⁵

Die obige Formel für die Überlagerungsfrequenz lässt sich für Schwingungen gleicher Amplitude leicht mit Hilfe der Additionstheoreme herleiten. Seien $y_1(t) = A \cdot \sin(2\pi f_1 t)$ und

⁵⁴vgl. Hall 1997, S.84

⁵⁵vgl. Roederer 2000, S.37f

$y_2(t) = A \cdot \sin(2\pi f_2 t)$. Aus den Additionstheoremen folgt:

$$y_1(t) + y_2(t) = 2A \cdot \sin\left(\frac{f_1 + f_2}{2} \cdot 2\pi t\right) \cdot \cos\left(\frac{f_1 - f_2}{2} \cdot 2\pi t\right).$$

Wegen $\Delta f = |f_2 - f_1|$ gilt für kleine Δf näherungsweise $\cos\left(\frac{f_1 - f_2}{2} \cdot 2\pi t\right) \approx \cos(0) = 1$ und man erhält die Frequenz der Überlagerungsschwingung $\tilde{f} = \frac{f_1 + f_2}{2} = f_1 + \frac{\Delta f}{2}$.⁵⁶

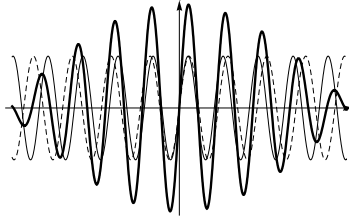


Abbildung 1.19.: Schwebung

Stimmen die Amplituden der Einzelschwingungen wie im obigen Fall überein, so löschen einander die Schwingungen immer wieder vollständig aus. Man spricht von vollkommener Schwebung (Abbildung 1.20). Sind sie verschieden, so entstehen unvollkommene Schwebungen (Abbildung 1.21).⁵⁷

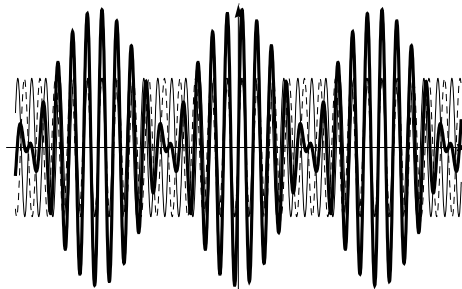


Abbildung 1.20.: Vollkommene Schwebung

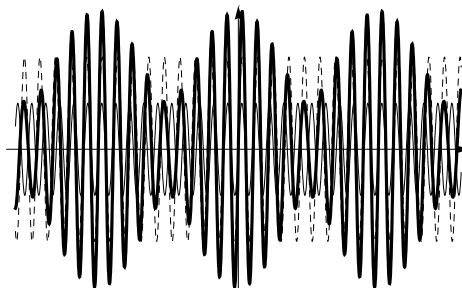


Abbildung 1.21.: Unvollkommene Schwebung

⁵⁶vgl. Hering/Martin/Stohrer 2012, S.452

⁵⁷vgl. www.geogebra.org/de/examples/fourier/sachanalyse/schwebung.htm

Beispiel 1.6 (Vollkommene Schwebung). Seien $f_1 = 440\text{Hz}$ und $f_2 = 447\text{Hz}$. Dann ist $\tilde{f} = \frac{887}{2} = 443,5\text{Hz}$. Im Fall der vollkommenen Schwebung löschen einander die Schwingungen in der Sekunde 7 mal aus.

Überlagerungskurven zweier Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen sind i.A. keine harmonischen Schwingungen. Fourier zeigte, dass sie dann periodisch sind, wenn ihre Frequenzen zueinander in einem ganzzahligen Verhältnis stehen.

Dass solche Phänomene Einfluss auf die Musikpraxis haben, zeigt folgendes Beispiel: Wird Δf vergrößert, so geht eine Schwebung in Rauigkeit über. Die beiden Töne werden nun getrennt wahrgenommen und klingen „unschön“ und unangenehm. Erst wenn der Frequenzunterschied noch größer wird, verschwindet dieses Gefühl und der Klang wird als angenehm empfunden. Ab welchem Abstand dies der Fall ist, hängt von der Tonhöhe ab. Deshalb werden z.B. tiefe Terzen in Kompositionen seit Jahrhunderten vermieden.⁵⁸

Diese Beispiele sollten einen Eindruck geben, wie sich eine Änderung der unterschiedlichen Parameter auf die resultierende Schwingung auswirken kann. Selbstverständlich gibt es noch zahlreiche weitere Fälle, die durch Interferenz verursacht werden können. Lissajouskurven entstehen etwa, wenn zwei Schwingungen nicht wie in den obigen Beispielen die gleiche Richtung haben, sondern senkrecht zueinander stehen. Sie finden bei der Überprüfung von Frequenzverhältnissen in der Technik Anwendung.⁵⁹ Roederer zählt sie wie die obigen Fälle zu Effekten „erster Ordnung“, da sie in unserem Hörorgan auf mechanische Art (z.B. in der Flüssigkeit in der Schnecke, auf der Basilarmembran,...) verarbeitet werden.

Ein anderes Phänomen sind Kombinationstöne, die bei Überlagerung zweier Töne unter bestimmten Voraussetzungen gehört werden, obwohl sie gar nicht wirklich vorhanden sind. Sie werden unter anderem beim Orgelbau aktiv genutzt und zählen zu Effekten „zweiter Ordnung“, da sie durch neuronale Verarbeitung entstehen.⁶⁰

Überlagerungseffekte treten selbstverständlich auch bei Interferenz mehrerer Schwingungen auf. In der Orchestermusik ist z.B. der Chorus-Effekt bekannt. Auch wenn acht Geiger gleichzeitig dieselbe Stimme spielen, verstärken sich die Amplituden nicht auf das Achtfache. Durch minimale Frequenzunterschiede löschen sich einzelne Geigenstimmen immer wieder aus oder verstärken sich. Dadurch entsteht ein angenehmer, warmer Klang.⁶¹

⁵⁸vgl. Roederer 2000, S.38-44

⁵⁹vgl. Surber/Walder 1992, S.18

⁶⁰vgl. Roederer 2000, S.34f

⁶¹vgl. Hall 1997, S.102

1.6. Gedämpfte harmonische Schwingungen

Bislang wurde die Tatsache ausgeklammert, dass sich Schwingungen in der Praxis nicht unendlich lange fortsetzen. Durch Reibung und Abstrahlung von Energie kommt die Schwingung irgendwann zur Ruhe. Abschließend soll nun die exponentielle Abnahme als einfache Form der Dämpfung besprochen werden. Sie tritt auf, wenn der Betrag des Energieverlustes direkt proportional zur vorhandenen Energie ist⁶².

Ein solcher Schwingungsvorgang kann mathematisch mit der Formel $y = b \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t)$ beschrieben werden. Der Wert δ wird als Abklingkonstante bezeichnet.⁶³ Je größer δ ist, umso schneller wird die Schwingung gedämpft.

Mathematisch gesehen nähert sich die Schwingung dem Wert Null an, hört aber nie völlig auf. Musikalisch ist es sinnvoll, die „Dämpfungszeit“ zu definieren, die vergeht, bis die Amplitude nur mehr $\frac{1}{1000}$ der Ausgangsamplitude beträgt. Dies entspricht in etwa der Zeit, in der die Schwingung für das menschliche Ohr hörbar ist.⁶⁴

Die folgende Abbildung zeigt die gedämpfte Schwingung der Form $s(t) = \sin(10t) \cdot e^{-0,3t}$. Die eingezeichneten Graphen g und h besitzen die Gleichungen $g(t) = e^{-0,3t}$ und $h(t) = -e^{-0,3t}$.

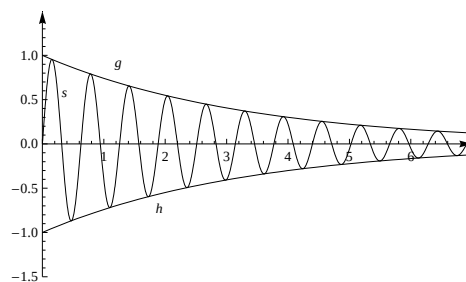


Abbildung 1.22.: Gedämpfte Schwingung

1.7. Anwendungen in der Praxis

Akustische Grundlagen und ihre mathematische Behandlung finden in der Praxis zahlreiche Anwendungen. Radiowellen werden auch heute noch mittels Frequenzmodulation gesendet, Amplitudenmodulation hatte wesentliche Bedeutung für die Entwicklung von Mittelwellenradios. Diese beiden Effekte sollen hier beispielhaft für Anwendungen der oben beschriebenen Inhalte in der Technik angeführt werden.

Um eine drahtlose Übertragung von Nachrichten zu ermöglichen, werden Schallwellen (durch Mikrofone) in elektromagnetische Wellen umgewandelt. Sowohl bei der Amplituden- als auch

⁶²vgl. Hall 1997, S.185

⁶³vgl. Gobrecht 1974, S.189

⁶⁴vgl. Hall 1997, S.186

bei der Frequenzmodulation wird eine hochfrequente Trägerwelle durch ein niederfrequentes Signal moduliert. Die Frequenzen (f_0) der Trägerwelle liegen bei Amplitudenmodulation (AM) bei rund 1 MHz (sprich: “Megahertz”; 1 MHz = 1 000 000 Hz!), bei Frequenzmodulation (FM) bei rund 100 MHz. Um niedrigere Frequenzen empfangen zu können, würden sehr große Antennen benötigt. Die Trägerwelle hat die Form $s(t) = a \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ und transportiert die Information, die durch das niederfrequente Modulationssignal verschlüsselt wird.

Bei einer *Amplitudenmodulation* wird die Amplitude der Trägerwelle durch die zu übertragende Nachricht beeinflusst. So entstehen – ähnlich wie bei der Schwebung – Schwingungen, deren Amplituden wiederholt zu- und abnehmen.⁶⁵ Die Abbildung 1.23 zeigt z.B. die Schwingung der Form $s(t) = (0,5 \cdot \sin(t) + 1) \cdot \sin(30t)$. In diesem Fall wird die Amplitude der Sinusfunktion $s_0(t) = \sin(30t)$ durch die Funktion $s_1(t) = 0,5 \cdot \sin(x) + 1$ verändert.

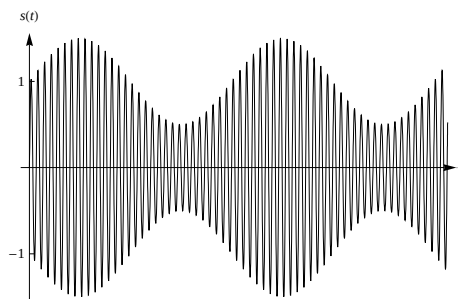


Abbildung 1.23.: Amplitudenmodulation

Bei der *Frequenzmodulation* wird analog dazu die Frequenz einer hochfrequenten Trägerwelle durch ein niederfrequentes Signal variiert.⁶⁶ Der Graph in Abbildung 1.24 ist von der Form $s(t) = \sin(150t + 200 \cdot 2\pi(0,04 \sin(10t) + 0.5x))$. (Der Faktor 200 dient dazu, die Frequenzveränderungen sichtbar zu machen.)⁶⁷

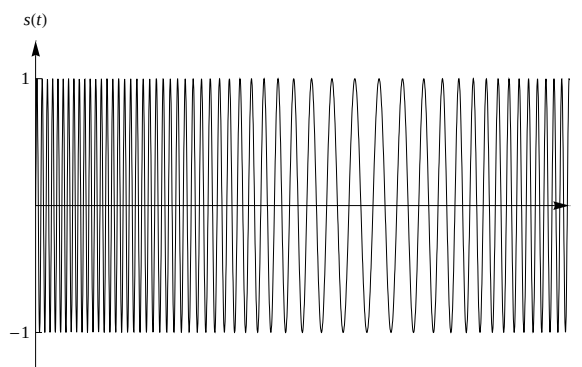


Abbildung 1.24.: Frequenzmodulation

⁶⁵vgl. Beuth u.a. 2009, S.213

⁶⁶vgl. www.thema-mathematik.at, Thema Frequenzmodulation

⁶⁷vgl. Guillaume 2006, S.172f

Nicht nur in außermusikalischen Bereichen, sondern auch in der Musik selbst findet das Wissen aus der musikalischen Akustik Anwendung. Komponisten beschäftigen sich heute auf dem Gebiet der Elektroakustik mit dem Thema. Karlheinz Stockhausen experimentierte schon in den Fünfzigerjahren des vergangenen Jahrhunderts mit Sinusschwingungen. Sie wurden als Grundbausteine aufgefasst und dienten als wesentliches Mittel, um Klangfarben zu konstruieren. Stockhausen selbst schrieb zu dieser Zeit über seine Arbeit: „Es wurde uns klar, dass dem Streben nach einer wirklichen Synthese von Klangstrukturen eine unüberwindliche Grenze gesetzt ist, solange man mit Instrumentaltönen komponiert. [...] Ein letzter Schritt wurde notwendig. Wir gingen auf das Element zurück, das aller klanglichen Vielfalt zugrunde liegt; auf die reine Schwingung, die man elektrisch erzeugen kann, und die man Sinuston nennt [...]. Und so war zum ersten mal die Möglichkeit gegeben, in einer Musik die Klangfarben im wirklichen Sinne des Wortes zu komponieren [...]“⁶⁸ Auch wenn er diesen Weg später nicht weiterführte, schlug sich dieser Zugang dennoch in seinen Werken „Studie I“ und „Studie II“ nieder.⁶⁹

⁶⁸Stockhausen 1963, S.39-42, zitiert nach Auhagen 1998, S.18

⁶⁹vgl. de.wikipedia.org/wiki/Karlheinz_Stockhausen

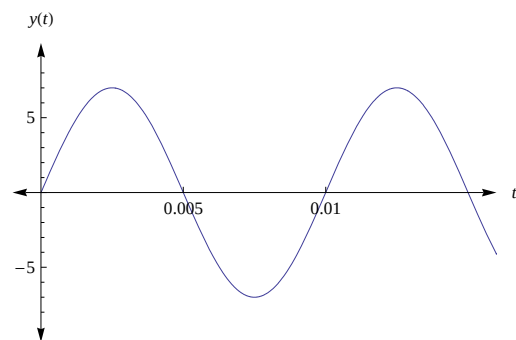
1.8. Fachdidaktische Überlegungen

1.8.1. Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sollen aufzeigen, wie Anwendungen aus der musikalischen Akustik, insbesondere die Bereiche harmonische Schwingungen und die allgemeine Sinusfunktion sowie Lautstärke und Logarithmus im Mathematikunterricht thematisiert werden können. Zu den oben beschriebenen theoretischen Inhalten finden sich bereits Beispiele in österreichischen Schulbüchern. Die Aufgabensammlung wurde einerseits aus solchen Beispielen, andererseits aus eigenen Ideen, die bei der Arbeit am Theorieteil entstanden, zusammengestellt. Am Ende jedes Unterabschnitts steht ein Verweis auf weitere Schulbuchbeispiele zum Thema.

Begriffsbildung

Aufgabe 1.1. Beschrifte am Graphen die Größen Amplitude und Periode und gib die Werte für Amplitude, Frequenz, Kreisfrequenz und Periode an!



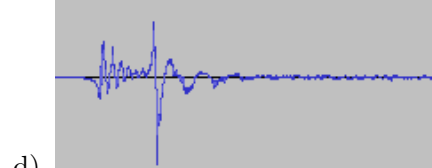
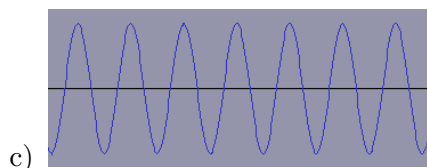
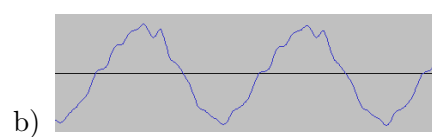
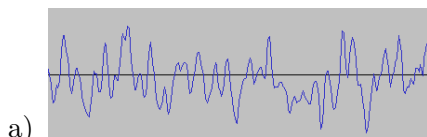
Aufgabe 1.2. Die Frequenz des Tones c^1 eines Klaviers beträgt 261 Hz. Berechne die Periodendauer!

Aufgabe 1.3. Skizziere die Sinusschwingung des Tones A (220 Hz) mit Nullphasenwinkel 0 und Amplitude 3! Trage die Begriffe Amplitude (A) und Periode (τ) in die Abbildung ein und berechne Kreisfrequenz und Periode!

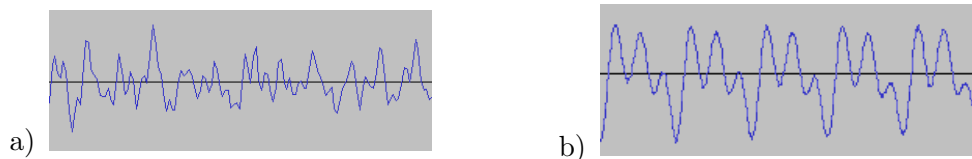
Weitere Aufgaben: Malle u.a. 2010 (6. Klasse): 5.25

Ton, Klang, Geräusch, Knall

Aufgabe 1.4. Ordne den Abbildungen die Begriffe Ton, Klang, Geräusch und Knall zu! Begründe!



Aufgabe 1.5. *Stellt die folgende Abbildung einen Klang dar? Begründe!*



Lautstärke

Da der Schallintensitätspegel bzw. der Schalldruckpegel in der logarithmischen Einheit Dezibel angegeben werden, kann das Thema Lautstärke ab der sechsten Klasse AHS behandelt werden. Hier fällt es leicht, einen unmittelbaren Bezug zum Alltag der Schülerinnen und Schüler herzustellen. Es können sowohl Möglichkeiten und Grenzen der Hörwahrnehmung aufgezeigt und mögliche Gefahren (etwa durch zu hohen Lärmpegel) besprochen werden.

Als Einstieg in das Thema eignet sich folgendes Beispiel aus dem Schulbuch „Mathematik verstehen 5“, das keine Kenntnis des Logarithmus voraussetzt und schon in der fünften Klasse behandelt werden kann:

Aufgabe 1.6. ⁷⁰ *Damit ein Ton wahrgenommen wird, muss die Lautstärke einen gewissen Wert erreichen (Hörschwelle). Die Tabelle gibt für verschiedene Lebensalter die Abhängigkeit der Hörschwelle von der Frequenz ($\hat{=}$ Tonhöhe) an. Dabei wird die Frequenz in Hertz gemessen (1 Hz = 1 Schwingung pro Sekunde) und die Lautstärke in Dezibel (20 dB entsprechen ungefähr dem Ticken einer Armbanduhr, 40 dB einer leisen Musik, 60 dB einem Gruppengespräch und 80 dB einem Presslufthammer). Stelle die der Tabelle entsprechenden Punkte in ein und demselben Koordinatensystem dar und zeichne drei Funktionsgraphen für die drei angegebenen Lebensalter! Interpretiere die Graphen! (Beachte dabei, dass die Graphen nur den ungefähren Verlauf wiedergeben!)*

Frequenz (in Hz)	1 000	2 000	5 000	10 000	20 000
Hörschwelle eines 20-Jährigen (in dB)	13	9	10	18	32
Hörschwelle eines 40-Jährigen (in dB)	13	10	18	30	55
Hörschwelle eines 60-Jährigen (in dB)	13	12	24	40	70

Mit der Schallintensität und der Frage, wie diese mit der Entfernung von einem Lautsprecher abnimmt, beschäftigt sich folgende Aufgabe aus dem Buch „Mathematik verstehen 8“. Es ist in diesem Schulbuch unter der Kategorie „Maturavorbereitung“ geführt und ist eigentlich Stoff der 10. Schulstufe.

⁷⁰Malle u.a. 2010 (5. Klasse), 7.11

Aufgabe 1.7. ⁷¹ Zwischen der empfundenen Lautstärke L (in dB, d.h. Dezibel) und der vorhandenen Schallintensität I (in W/m^2 , d.h. Watt pro Quadratmeter) besteht der Zusammenhang $L(I) = 10 \cdot (\log I + 12)$.

- Welcher Schallintensität entspricht die Lautstärke 0 dB (Hörschwelle), welcher 140 dB (Schmerzgrenze)?
- Um wie viel nimmt die Lautstärke bei einer Verdopplung der Schallintensität zu? Auf das Wievielfache muss die Schallintensität vergrößert werden, damit die Lautstärke um 1 dB zunimmt?
- Die Schallintensität I nimmt mit dem Quadrat der Entfernung r von der Schallquelle ab, d.h. es gilt $I(r) = \frac{c}{r^2}$, wobei c eine positive Konstante ist. Auf den wievielten Teil sinkt die Schallintensität bei einer Verdopplung bzw. Verzehnfachung der Entfernung von der Schallquelle?
- In einer Disco wird Techno-Musik gespielt. In 1 m Entfernung vom Lautsprecher misst man 120 dB. Eine derartige Lautstärke kann schon bei kurzer Einwirkung Hörschäden hervorrufen. In welcher Entfernung vom Lautsprecher müsste man sich mindestens aufhalten, um die Lautstärke üblicher Disco-Musik (ca. 100 dB) nicht zu überschreiten?

Unter dem Thema „Logarithmierte Größenverhältnisse in Dezibel“ sind die nächsten zwei Aufgaben im Schulbuch „Ingenieur-Mathematik 2“ zu finden:

Aufgabe 1.8. ⁷² Durch den Bau einer Lärmschutzwand konnte der Schallintensitätspegel um 10 dB verringert werden. Dies entspricht etwa einer Halbierung der Lautstärke. In welchem Maß verringert sich dabei die Schallintensität?

Aufgabe 1.9. ⁷³ Eine Maschine verursacht einen Schallintensitätspegel von 100 dB, eine weitere Maschine im gleichen Abstand

- 90 dB,
- 100 dB.

Welchen Schallintensitätspegel verursachen sie gemeinsam? Hinweis: Die von den beiden Maschinen verursachten Schallintensitäten addieren sich zur Gesamtintensität.

Aufgabe 1.10. ⁷⁴ Der Schalldruckpegel L_p wird in Dezibel (dB) angegeben. Es ist $L_p = 20 \cdot \lg(\frac{p}{p_0})$ dB, dabei ist p der Schalldruck in μPa und $p_0 = 20 \mu Pa$ der Schalldruck der Hörschwelle.

⁷¹Malle u.a. 2007 (8. Klasse), 15.12

⁷²Timischl/Kaiser 2012, 4.87

⁷³Timischl/Kaiser 2012, 4.88

⁷⁴Pauer u.a. 2012, 384

- a) Ein Presslufthammer erzeugt einen Schalldruck von 2 Pa. Berechne den Schalldruckpegel.
- b) Eine menschliche Stimme erzeugt beim Sprechen einen Schalldruckpegel von 50 dB. Gib an, wie groß dabei der Schalldruck ist.
- c) Wenn 10 Menschen gleichzeitig sprechen, so verzehnfacht sich dadurch der Schalldruck. Ermittle, auf wie viel Dezibel der Schalldruckpegel steigt, wenn 10 Personen gleichzeitig (jeweils mit 50 dB) sprechen.

Weitere Aufgaben: Timischl/Kaiser 2012: 4.62, 4.84, 4.85, 4.86, Götz u.a. 2010 (6. Klasse): 930, Pauer u.a. 2012: 386, 387, 397

Harmonische Schwingungen und die allgemeine Sinusfunktion:

Die Funktionsgleichung kennenlernen

Aufgabe 1.11. ⁷⁵ Eine harmonische Schwingung habe die Elongation $s(t) = r \cdot \sin(\omega t)$, die Schwingungsdauer T und die Frequenz f . Gib eine Termdarstellung der Funktion s an, wenn gilt:

- a) $r=3, f=20$ b) $r=7, T=0,2$ c) $f=0,5, s(0,5)=3$ d) $T=3, s(0,75)=6$

Die folgende Aufgabe aus dem Schulbuch „Mathematik verstehen 6“ eignet sich dazu, zu thematisieren, dass harmonische Schwingungen auch in anderen, außermusikalischen Gebieten Anwendung finden:

Aufgabe 1.12. ⁷⁶ Die Elongation der folgenden harmonischen Schwingung wird durch $s(t) = \sin(\omega t)$ beschrieben. Berechne die Kreisfrequenz sowie die Schwingungsdauer und gib eine Formel für die Elongation $s(t)$ an!

- a) Technischer Wechselstrom: Frequenz 50 Hz b) Kammerton a: Frequenz 440 Hz
c) UKW-Sender: Frequenz 108 MHz

Aufgabe 1.13. ⁷⁷ Gib den Wertebereich der Funktion an.

- a) $y = 3 \cdot \sin(x)$ b) $y = -2 \cdot \sin(x)$ c) $y = 0,5 \cdot \sin(x) + 2$ d) $y = -\sin(x) + 1$

Weitere Aufgaben: Sidlo u.a. 2010: 5.101

Funktionsgleichungen interpretieren und grafisch darstellen

Zur Erarbeitung der Transformationsregeln für die allgemeine Sinusfunktion bietet sich die Erstellung von Wertetabellen an. Ein Beispiel nach diesem Muster findet sich im Schulbuch „MatheMaster 6“:

⁷⁵Malle u.a. 2010 (6. Klasse), 5.46

⁷⁶Malle u.a. 2010 (6. Klasse), 5.47

⁷⁷Sidlo u.a. 2010, 5.97

Aufgabe 1.14. ⁷⁸ Man zeichne im Intervall $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ in dasselbe Koordinatensystem die Graphen folgender Funktionen: $y_1 = \sin x$, $y_2 = 2 \sin x$, $y_3 = \frac{1}{2} \sin x$ und vergleiche ihre Eigenschaften.

In der obigen Aufgabe wird die Funktion $y_1 = \sin x$ mit Funktionen der Form $y = a \cdot \sin x$ verglichen. Analog dazu können auch die Formen $y = \sin bx$ und $y = \sin(x + c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, erarbeitet werden. Sind Zusammenhänge, die durch diese Transformationen entstehen, erkannt, kann auf die Verwendung einer Wertetabelle verzichtet werden. Die folgenden Beispiele aus dem Buch von „Mathematik verstehen 6“ behandeln diese Regeln schrittweise ohne Wertetabelle:

Aufgabe 1.15. ⁷⁹ Erläutere, wie der Graph von s aus dem Graphen von s_0 hervorgeht! Was bedeutet dies für die Schwingungen? Skizziere die beiden Graphen!

- a) Zwei Schwingungen werden durch $s_0(t) = \sin t$ und $s(t) = 3 \cdot \sin t$ beschrieben.
- b) Zwei Schwingungen werden durch $s_0(t) = \sin t$ und $s(t) = \sin(2t)$ beschrieben.
- c) Zwei Schwingungen werden durch $s_0(t) = \sin t$ und $s(t) = 2 \cdot \sin(3t)$ beschrieben.
- d) Zwei Schwingungen werden durch $s_0(t) = \sin t$ und $s(t) = \sin(t + \frac{\pi}{2})$ beschrieben.

Aufgabe 1.16. Zwei Schwingungen werden durch $s_0(t) = \sin t$ und $s(t) = 3 \cdot \sin(2t + \frac{\pi}{2})$ beschrieben.

- a) Erläutere, wie der Graph von s aus dem Graphen von s_0 hervorgeht! Was bedeutet dies für die Schwingungen?⁸⁰
- b) Skizziere die beiden Graphen in drei Schritten!

Aufgabe 1.17. ⁸¹ Ermittle die Amplitude, die Kreisfrequenz, die Nullstelle zur Bestimmung der Verschiebung, sowie die erste positive Maximum- und Minimumstelle folgender Funktionen und überprüfe die Ergebnisse grafisch:

- a) $y = \sin(t + \frac{\pi}{4})$
- b) $y = -\sin(t + \frac{\pi}{4})$
- c) $y = 2 \cdot \sin(3t - 1)$
- d) $y = 2 \cdot \cos(2t - 0,4)$

(Hinweis: Schreibe mit Hilfe von $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ in eine Sinusfunktion um.)

⁷⁸Steiner/Novak 2005, S.53

⁷⁹vgl. Malle u.a. 2010 (6. Klasse), 5.22,5.23,5.24,5.29

⁸⁰Malle u.a. 2010 (6. Klasse), S.93: Bsp. 5.30

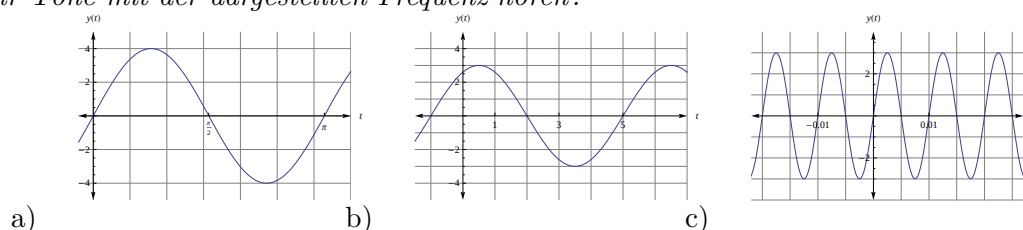
⁸¹Timischl/Kaiser 2012: Bsp. 5.86 a,b,d,h

Weitere Aufgaben: Malle u.a. 2010 (6. Klasse): 5.26, 5.27, 5.28, 5.37, 5.44, Malle u.a. 2007 (8. Klasse): 15.13, Götz u.a. 2010 (6. Klasse): 1036, Timischl/Kaiser 2012: 5.81, 5.82, 5.86 c, e, f, g, i, 5.87, Brand u.a. 2012: 796, Pauer u.a. 2012: 899, 900, Geretschläger u.a. 2008: 3.205, 3.206, 3.207, 3.211, 3.212, 3.213, 3.217, 3.218, 3.221, 3.223, 3.225, Kronfellner/Peschek 1996: 3614, 3615, Steiner/Novak 2005: 161-166, Sidlo u.a. 2010: 5.95, 5.103-5.108

Funktionsgraphen interpretieren und Funktionsgleichungen aufstellen

In den folgenden Aufgaben sollen Funktionsgraphen in Gleichungen „übersetzt“ werden. Für leichteres Erfassen der Zahlenwerte werden häufig einfache Zahlen und ganzzahlige Proportionen gewählt. Um die Mathematikaufgaben trotzdem mit den Inhalten aus der Akustik zu vernetzen, sollte zusätzlich besprochen werden, ob die dargestellten Töne für den Menschen hörbar sind oder nicht.

Aufgabe 1.18. Beschreibe Amplitude, Frequenz und Schwingungsdauer der dargestellten Schwingung. Wie lautet die Gleichung der zugehörigen allgemeinen Sinusfunktion? Können wir Töne mit der dargestellten Frequenz hören?



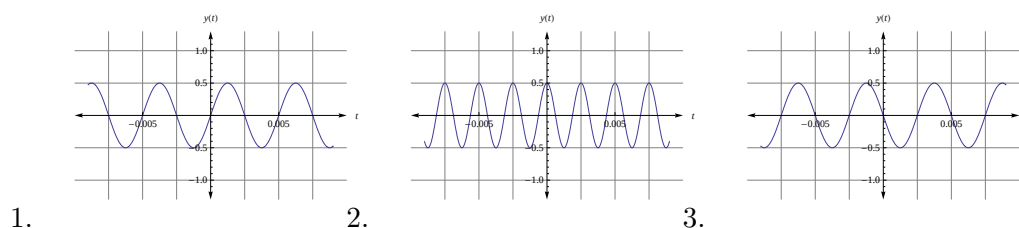
Weitere Aufgaben: Malle u.a. 2010 (6. Klasse): 5.45, Pauer u.a. 2012: 906, Sidlo u.a. 2010: 5.94, 5.109-5.113, Timischl/Kaiser 2012: 5.83, 5.90, Steiner/Novak 2005: 167-169, Geretschläger u.a. 2008: 3.208, 3.214, 3.220, 3.226

Zuordnungsaufgaben

Ähnlich sind Aufgaben, in denen ein Funktionsgraph gegeben ist und entsprechende Parameterwerte oder die zugehörige Funktionsgleichung zugeordnet werden sollen.

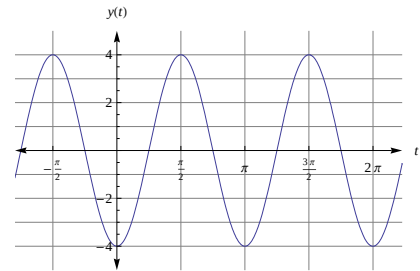
Aufgabe 1.19. ⁸² Ordne die Funktionsgleichungen den Abbildungen zu! Begründe!

a) $y(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin(800\pi \cdot t + \frac{\pi}{2})$ b) $y(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin(400\pi \cdot t)$ c) $y(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin(400\pi \cdot t + \pi)$



Aufgabe 1.20. ⁸³ Welche Parameterwerte entsprechen der in der Abbildung dargestellten harmonischen Schwingung? Kreuze die passenden Werte an!

Amplitude: ☐ 4 ☐ -4 ☐ $\frac{1}{4}$
 Kreisfrequenz: ☐ 2 ☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$
 Nullphasenwinkel: ☐ $\frac{\pi}{4}$ ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☐ $-\frac{\pi}{2}$



Weitere Aufgaben: Malle u.a. 2010 (6. Klasse): S.276 Nr.3, Timischl/Kaiser 2012: 5.89, Pauer u.a. 2012: 901, 903

Theoretische Fragen zur allgemeinen Sinusfunktion

Zusätzlich zu den Zahlenbeispielen finden sich zahlreiche theoretische Fragen zur allgemeinen Sinusfunktion in österreichischen Schulbüchern. Die Antworten sollen durch Ankreuzen, durch Ausfüllen von Lückentexten, mit Hilfe von Tabellen usw. gegeben werden.

Aufgabe 1.21. ⁸⁴ Gib die entstehende Funktionsgleichung an.

- a) Die Funktionswerte sind gegenüber $y = \sin(x)$ vervierfacht.
- b) Stauchung der Sinuskurve in x -Richtung auf ein Drittel.
- c) Verschiebung der Sinuskurve um 3 nach links.
- d) Verschiebung der Sinuskurve um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts.
- e) Streckung der Sinuskurve in y -Richtung auf das Doppelte und Verschiebung um 3 nach rechts.
- f) Stauchung der Sinuskurve in y -Richtung auf ein Viertel und Verschiebung um π nach links.
- g) Streckung der Sinuskurve in x -Richtung auf das Dreifache und Streckung der Sinuskurve in y -Richtung um das Vierfache.

Weitere Aufgaben: Götz u.a. 2010 (6. Klasse): 1037, Malle u.a. 2010 (6. Klasse): 5.49, Steiner/Novak 2005: 157, 159, 160, Sidlo u.a. 2010: 5.99, 5.102, Götz u.a. 2010 (6. Klasse): S.255f, Ingenieur: 5.88

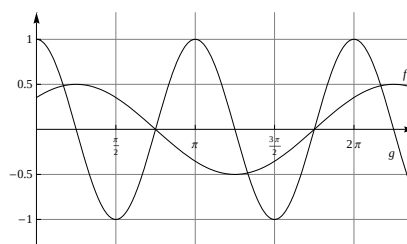
⁸²vgl. Malle u.a. 2010 (6. Klasse), 5.48

⁸³vgl. Malle u.a. 2010 (6. Klasse), 5.31

⁸⁴vgl. Sidlo u.a. 2010, 5.99, 5.100

⁸⁵vgl. Malle u.a. 2010 (6. Klasse), 5.49

Aufgabe 1.22. ⁸⁵ Wie müssen die Parameter der Funktion f des Typs $t \mapsto A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ verändert werden, damit der Graph von f in den Graphen von g übergeht?



	vergrößern	verkleinern	beibehalten
Man muss A			
Man muss ω			

Anwendungen der Differentialrechnung

In der siebten Klasse können mit Hilfe der Differentialrechnung auch Geschwindigkeit und Beschleunigung einer schwingenden Feder berechnet werden.

Aufgabe 1.23. ⁸⁶ Die Elongation einer harmonischen Schwingung zum Zeitpunkt t sei gegeben durch: $s(t) = 3 \cdot \sin(2t)$ ($s(t)$ in Meter, t in Sekunden).

- Wie groß ist die Amplitude der Schwingung?
- Wie groß ist die Frequenz der Schwingung?
- Wie groß ist die Schwingungsdauer der Schwingung?
- Stelle eine Formel für die Geschwindigkeit des schwingenden Körpers zum Zeitpunkt t auf! Wie groß ist diese Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ bzw. $t = \frac{\pi}{2}$?
- Stelle eine Formel für die Beschleunigung des schwingenden Körpers zum Zeitpunkt t auf! Wie groß ist diese Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 0$ bzw. $t = \frac{\pi}{2}$?

Weitere Aufgaben: Malle u.a. 2011 (7. Klasse): 4.45

Anwendungen der Integralrechnung

Ist statt der Formel für die Elongation die der Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt gegeben, so wird zur Berechnung der Auslenkung der Schwingung Integralrechnung benötigt. Ein Beispiel dazu finden sich im Buch „Mathematik verstehen 8“:

Aufgabe 1.24. ⁸⁷ Die Spitze einer Feder führt eine Schwingung um eine Ruhelage aus, beginnend in der Ruhelage. Ihre Geschwindigkeit t Sekunden nach Beginn der Schwingung beträgt $v(t)$. Ermittle die Elongation der Spitze zum Zeitpunkt t . (Elongation ist der vorzeichenbehaftete Abstand von der Ruhelage.)

- $v(t) = \cos t$
- $v(t) = -2 \cdot \cos t$
- $v(t) = -a \cdot \cos t$ (mit $a > 0$)

⁸⁶Malle u.a. 2011 (7. Klasse), Bsp. 4.104

⁸⁷Malle u.a. 2007 (8. Klasse), 2.40

Überlagerung von Schwingungen

Dieses Themengebiet eignet sich besonders gut für den Einsatz von Computerprogrammen. In Abschnitt 1.8.3 werden u.a. Unterrichtsideen angeführt, die mit Geogebra⁸⁸ verwirklicht werden können. Das folgende Beispiel kann auch ohne Computerunterstützung gelöst werden.

Aufgabe 1.25. Die beiden Schwingungen s_1 und s_2 werden überlagert. Berechne die Auslenkung der resultierenden Schwingung zu den Zeitpunkten $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, 2 und π ! Was fällt dir auf? Skizziere die drei Graphen!

a) $s_1(t) = \sin(2t)$ und $s_2(t) = \sin(2t)$

b) $s_1(t) = 2 \cdot \sin(t)$ und $s_2(t) = 3 \cdot \sin(t)$

c) $s_1(t) = \sin(2t)$ und $s_2(t) = \sin(2t + \pi)$

Weitere Aufgaben: Pauer u.a. 2012: 907

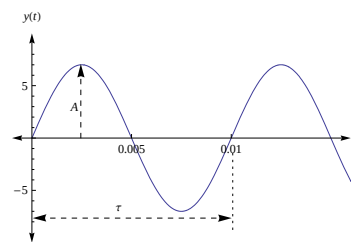
1.8.2. Lösungen

Lösung 1.1.

$$A = 7$$

$$\tau = 0,01s \Rightarrow f = 100Hz$$

$$\varphi_0 = 0$$



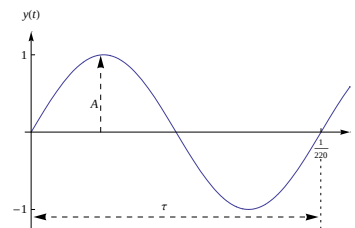
Lösung 1.2. $\tau = \frac{1}{f} = \frac{1}{261} \approx 0,0038s \approx 3,8ms$

Lösung 1.3.

$$A = 3$$

$$f = 220Hz \Rightarrow \tau = \frac{1}{220}s = 0,0045s = 4,54ms$$

$$\varphi_0 = 0$$



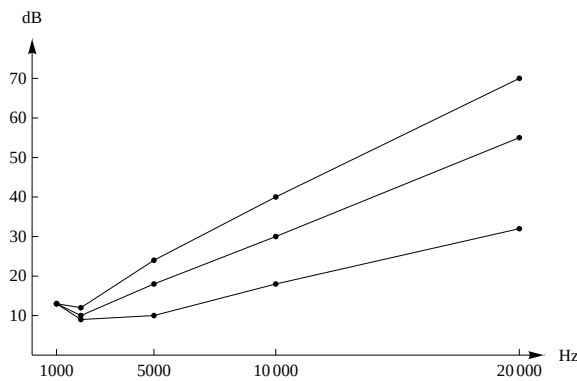
Lösung 1.4.

- a) Geräusch (Die abgebildete Schwingung ist unperiodisch.)
- b) Klang (Die abgebildete Schwingung ist periodisch, aber nicht sinusförmig.)
- c) Ton (Die abgebildete Schwingung ist sinusförmig.)
- d) Knall (Die abgebildete Schwingung ist unperiodisch und von kurzer Dauer.)

Lösung 1.5. a) Nein (unperiodisch) b) Ja (periodisch)

⁸⁸www.geogebra.org

Lösung 1.6.



Lösung 1.7.

a) **0 dB:** $10 \cdot (\log I + 12) = 0 \Leftrightarrow 10 \cdot \log I + 120 = 0 \Leftrightarrow 10 \cdot \log I = -120 \Leftrightarrow \log I = -12 \Leftrightarrow I = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

140 dB: $10 \cdot (\log I + 12) = 140 \Leftrightarrow 10 \cdot \log I + 120 = 140 \Leftrightarrow 10 \cdot \log I = 20 \Leftrightarrow \log I = 2 \Leftrightarrow I = 100 \text{ W/m}^2$

b) **Verdoppelung:** $L(2I) = 10 \cdot (\log(2I) + 12) = 10 \cdot \log(2) + 10 \cdot \log(I) + 120 = 10 \cdot \log(2) + L(I) \approx L(I) + 3,01$.

Eine Verdoppelung der Schallintensität bewirkt, dass die Lautstärke um ca. 3 dB zunimmt.

+1 dB: Sei $L(\tilde{I}) = L(I) + 1$. Dann ist $10 \cdot \log(I) + 120 + 1 = 10 \cdot (\tilde{I}) + 120 \Leftrightarrow \log(I) + \frac{1}{10} = \log(\tilde{I}) \Leftrightarrow I \cdot 10^{\frac{1}{10}} = \tilde{I}$.

Die Schallintensität muss um den Faktor $\sqrt[10]{10} (\approx 1,26)$ vergrößert werden, damit die Lautstärke um 1 dB zunimmt.

c) **Verdoppelung:** $I(2r) = \frac{c}{4r^2}$. Die Intensität sinkt auf den vierten Teil.

Verzehnfachung: $I(10r) = \frac{c}{100r^2}$. Die Intensität sinkt auf den hundertsten Teil.

d) $r = 1\text{m} \Rightarrow L(c) = 10 \cdot (\log(c) + 12) = 120 \Leftrightarrow \log(c) = 0 \Leftrightarrow c = 1$

$L(\frac{1}{\tilde{r}^2}) = 10 \cdot (\log(\frac{1}{\tilde{r}^2}) + 12) = 10 \cdot \log(1) - 10 \cdot \log(\tilde{r}^2) + 120 = 100 \Leftrightarrow \log(\tilde{r}^2) = 2 \Leftrightarrow 10^2 = \tilde{r}^2 \Rightarrow \tilde{r} = 10\text{m}$

Lösung 1.8. Sei $\tilde{I}$ die Intensität nach dem Bau der Lärmschutzwand. Dann ist $L(\tilde{I}) = L(I) - 10 \text{ dB}$. Daher gilt $10 \cdot (\log(\tilde{I}) + 12) = 10 \cdot (\log(I) + 12) - 10 \Leftrightarrow 10 \cdot \log(\tilde{I}) + 120 = 10 \cdot \log(I) + 120 - 10 \Leftrightarrow 10 \cdot (\log(\tilde{I}) - \log(I)) = -10 \Leftrightarrow \log(\frac{\tilde{I}}{I}) = -1 \Leftrightarrow \frac{\tilde{I}}{I} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \tilde{I} = \frac{1}{10} \cdot I$

Lösung 1.9.

I_1 : $10 \cdot (\log(I_1) + 12) = 100 \Leftrightarrow \log(I_1) = -2 \Leftrightarrow I_1 = 10^{-2}$

I_2 : $10 \cdot (\log(I_2) + 12) = 90 \Leftrightarrow \log(I_2) = -3 \Leftrightarrow I_2 = 10^{-3}$

a) $\tilde{I} = I_1 + I_2 = 0,011 \Rightarrow L(\tilde{I}) = 10 \cdot (\log(0,011) + 12) \approx 100,41$

b) $\tilde{I} = I_1 + I_1 = 0,02 \Rightarrow L(\tilde{I}) = 10 \cdot (\log(0,02) + 12) = 103,0103$

Lösung 1.10.

a) $p = 2Pa = 2 \cdot 10^6 \mu Pa$

$$L_p = 20 \cdot \log\left(\frac{2 \cdot 10^6}{20}\right) = 20 \cdot \log(10^5) = 100 \text{ dB}$$

b) $50 = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{20}\right) \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \log\left(\frac{p}{20}\right) \Leftrightarrow 10^{\frac{5}{2}} = \frac{p}{20} \Leftrightarrow p = 2 \cdot 10^{\frac{7}{2}} \approx 6324,56 \mu Pa \approx 6,32 mPa$

c) $L(\tilde{p}) = 20 \cdot \log\left(\frac{10p}{20}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{2}\right) = 20 \cdot \log(p) - 20 \cdot \log(2) + 20 \cdot \log(20) - 20 \cdot \log(20) = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{20}\right) + 20 \cdot (\log(20) - \log(2)) = 50 + 20 = 70 \text{ dB}$

Lösung 1.11.

a) $\omega = 2\pi f = 40\pi; s(t) = r \cdot \sin(\omega t) = 3 \cdot \sin(40\pi t)$

b) $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,2} = 5; \omega = 10\pi \Rightarrow s(t) = 7 \cdot \sin(10\pi t)$

c) $\omega = \pi; 3 = s(0,5) = r \cdot \sin(\pi \cdot 0,5) = r \Rightarrow s(t) = 3 \cdot \sin(\pi t)$

d) $f = \frac{1}{3}; \omega = \frac{2\pi}{3}; 6 = s(0,75) = r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = r \Rightarrow s(t) = 6 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$

Lösung 1.12.

a) $f = 50 \text{ Hz} \Rightarrow \omega = 100\pi; \tau = 0,02s; s(t) = \sin(100\pi t)$

b) $f = 440 \text{ Hz} \Rightarrow \omega = 880\pi; \tau = \frac{1}{440}s = 0,00227s; s(t) = \sin(880\pi t)$

c) $f = 108 \text{ MHz} \Rightarrow \omega = 2,16 \cdot 10^8 \cdot \pi; \tau = \frac{1}{1,08 \cdot 10^8}s = 9,25 \cdot 10^{-9}s; s(t) = \sin(2,16 \cdot 10^8 \pi t)$

Lösung 1.13.

a) $W = [-3,3]$

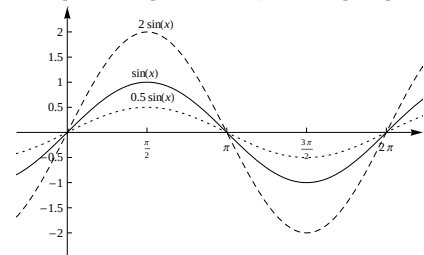
b) $W = [-2,2]$

c) $W = [1,5,2,5]$

d) $W = [0,2]$

Lösung 1.14.

	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$\sin(2x)$	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0
$\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0



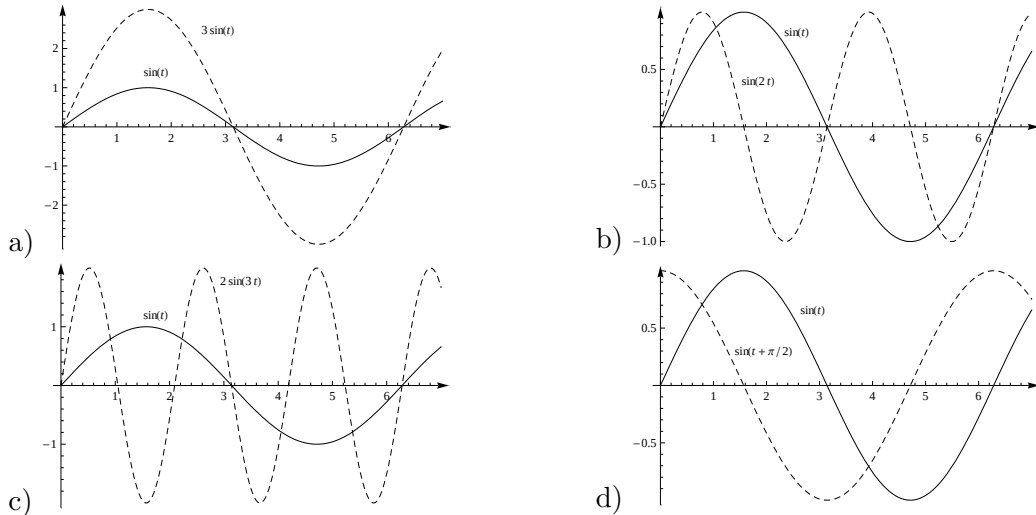
Lösung 1.15.

a) Der Graph s entsteht durch Streckung von s_0 um den Faktor 3 in Richtung der y -Achse. Die Amplitude wird dadurch verdreifacht, Frequenz, Schwingungsdauer und Phase bleiben unverändert.

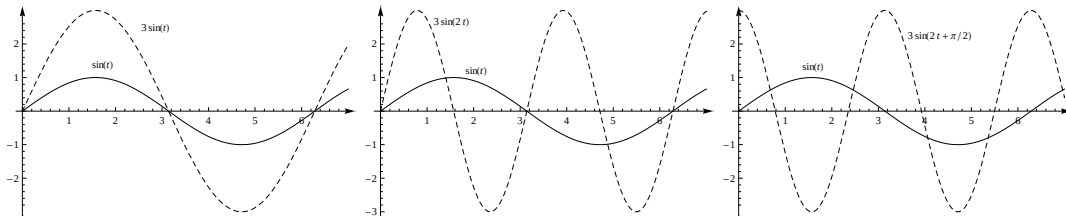
b) Der Graph s entsteht durch Stauchung von s_0 um den Faktor $\frac{1}{2}$ in Richtung der x -Achse. Die Frequenz wird verdoppelt, die Schwingungsdauer halbiert. Amplitude und Phase bleiben unverändert.

c) Der Graph s entsteht durch Streckung von s_0 um den Faktor 2 in Richtung der y -Achse und durch Stauchung um den Faktor $\frac{1}{3}$ in Richtung der x -Achse. Die Amplitude wird verdoppelt und die Frequenz verdreifacht. Die Schwingungsdauer von s beträgt ein Drittel der Schwingungsdauer von s_0 . Die Phase bleibt unverändert.

- d) Der Graph s entsteht durch Verschiebung von s_0 entlang der x -Achse um $\frac{\pi}{2}$ nach links (Phasenverschiebung!). Amplitude, Frequenz und Schwingungsdauer bleiben unverändert.



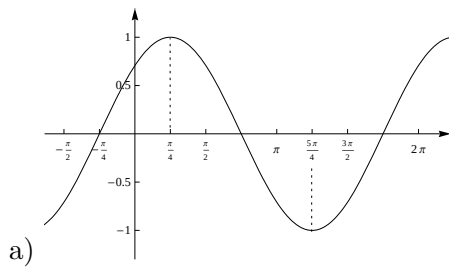
Lösung 1.16. Der Graph s entsteht durch Streckung von s_0 um den Faktor 3 in Richtung der y -Achse, durch Stauchung um den Faktor $\frac{1}{2}$ in Richtung der x -Achse und durch Verschiebung entlang der x -Achse um $\frac{\pi}{2}$ nach links. Die Amplitude wird verdreifacht, die Frequenz verdoppelt und die Schwingungsdauer halbiert. Der Nullphasenwinkel beträgt $-\frac{\pi}{2}$.



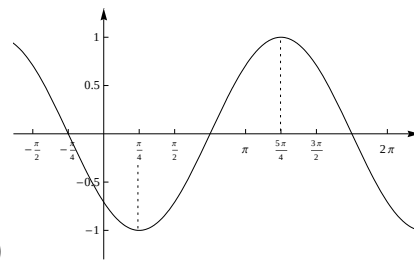
Lösung 1.17.

- a) $A = 1; \omega = 1; \varphi_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t_0 = -\frac{\varphi_0}{\omega} = -\frac{\pi}{4}; \tau = 2\pi$
 $t_{\max} = t_0 + \frac{\tau}{4} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0; t_{\min} = t_{\max} + \frac{\tau}{2} = 0 + \pi = \pi$
- b) $A = 1; \omega = 1; \varphi_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t_0 = -\frac{\varphi_0}{\omega} = -\frac{\pi}{4}$
 $t_{\min} = t_0 + \frac{\tau}{4} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0; t_{\max} = t_{\min} + \frac{\tau}{2} = 0 + \pi = \pi$
- c) $A = 2; \omega = 3; \varphi_0 = -1 \Rightarrow t_0 = -\frac{\varphi_0}{\omega} = \frac{1}{3}; f = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \tau = \frac{2}{3}\pi$
 $t_{\max} = \frac{1}{3} + \frac{\tau}{6} \approx 0,86; t_{\min} = \frac{1}{3} + \frac{\tau}{6} + \frac{\tau}{3} = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} \approx 1,90$
- d) $y = 2 \cos(2t - 0,4) = 2 \sin(2t - 0,4 + \frac{\pi}{2}); A = 2; \omega = 2; \varphi_0 = -0,4 + \frac{\pi}{2} \approx 1,17 \Rightarrow t_0 = \frac{0,4 - \frac{\pi}{2}}{2} = 0,2 - \frac{\pi}{4} \approx -0,59; f = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \tau = \pi$
 $t_{\max} = 0,2 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0,2; t_{\min} = 0,2 + \frac{\pi}{2} \approx 1,77$

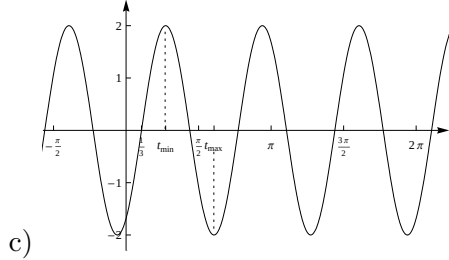
Hinweis: Die Werte auf der t -Achse geben *Zeiten* an!



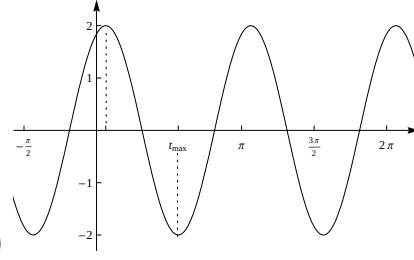
a)



b)



c)



d)

Lösung 1.18.

a) $A = 4$; $\tau = \pi s$; $f = \frac{1}{\pi} \approx 0.32 \text{ Hz}$; $\omega = 2$, $\varphi_0 = 0$; $y(t) = 4 \cdot \sin(2t)$; Nein

b) $A = 3$; $\tau = 6s$; $f = \frac{1}{6} = 0.1\bar{6} \text{ Hz}$; $\omega = \frac{1}{3}\pi$, $t_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = -t_0 \cdot \omega = \frac{1}{3}\pi$; $y(t) = 3 \cdot \sin(\frac{1}{3}\pi(t + 1))$; Nein

c) $A = 3$; $\tau = 0,01s$; $f = 100 \text{ Hz}$; $\omega = 200\pi$, $\varphi_0 = 0$; $y(t) = 3 \cdot \sin(200\pi t)$; Ja

Lösung 1.19. 1b, 2a, 3c

Lösung 1.20. $A = 4$; $\omega = 2$; $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$

Lösung 1.21.

a) $y = 4 \sin(x)$

b) $y = \sin(3x)$

c) $y = \sin(x + 3)$

d) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

e) $y = 2 \sin(x - 3)$

f) $y = \frac{1}{4} \sin(x + \pi)$

g) $y = 4 \sin(\frac{1}{3}x)$

Lösung 1.22.

	vergrößern	verkleinern	beibehalten
Man muss A	x		
Man muss ω	x		

Lösung 1.23.

a) $A = 3$

b) $\omega = 2 \Rightarrow f = \frac{1}{\pi} \approx 0,32 \text{ Hz}$

c) $\tau = \pi \approx 3,14 \text{ s.}$

d) $s'(t) = 3 \cdot 2 \cdot \cos(2t) = 6 \cos(2t); s'(0) = 6 \text{ m/s}; s'(\frac{\pi}{2}) = -6 \text{ m/s}$

e) $s''(t) = -12 \sin(2t); s''(0) = 0 \text{ m/s}^2, s''(\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ m/s}^2$

Lösung 1.24.

a) $s(t) = \sin(t)$

b) $s(t) = -2 \cdot \sin(t)$

c) $s(t) = -a \cdot \sin(t), a > 0$

Lösung 1.25.

Beispiel	Elongation	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	2	π
a)	$\sin(2t) + \sin(2t)$	2	0	$\approx -0,76$	0
b)	$2 \sin(t) + 3 \sin(t)$	$\approx 3,54$	5	$\approx 4,55$	0
c)	$\sin(2t) + \sin(2t + \pi)$	0	0	0	0

Die Auslenkung in a) ist doppelt so groß wie die Auslenkung der Einzelschwingungen (Konstruktive Interferenz). Die beiden Schwingungen in c) löschen sich aus (Destruktive Interferenz).

1.8.3. Fachdidaktische Analyse

Lehrplanbezug

Die obige Aufgabensammlung zeigt, dass es eine Fülle an Beispielen gibt, die im Mathematikunterricht zum Thema musikalische Akustik, Logarithmus und die allgemeine Sinusfunktion besprochen werden können. Wie die Tatsache, dass harmonische Schwingungen in zahlreichen Schulbüchern behandelt werden, erwarten lässt, entsprechen diese Inhalte auch dem österreichischen Lehrplan für die AHS-Oberstufe.

Aus der Sicht der Mathematik eignet sich die Thematik besonders für die sechste Klasse AHS, da für diesen Zeitpunkt die Arbeit mit der allgemeinen Sinusfunktion vorgesehen ist. In der siebten Klasse können zusätzlich Geschwindigkeit und Beschleunigung eines schwingenden Körpers mit Hilfe der Differentialrechnung berechnet werden, in der achten Klasse die „Umkehrung“ mit Hilfe der Integralrechnung. Ein zweiter großer Themenbereich ist die Lautstärke und die damit zusammenhängenden logarithmischen Verhältnisse. Dies ist ebenfalls Stoff der sechsten Klasse.

Auszüge aus dem Lehrplan für die sechste Klasse⁸⁹:

- Formulieren und Beweisen von Rechengesetzen für Potenzen, Wurzeln und Logarithmen; Umformen entsprechender Terme
- Definieren, Darstellen und Untersuchen von Potenzfunktionen, von Exponential- und Logarithmusfunktionen sowie von Winkelfunktionen (Bogenmaß)
- Untersuchen von Eigenschaften reeller Funktionen (Monotonie, globale und lokale Extremstellen, Symmetrie, Periodizität) und von Beziehungen zwischen Funktionen (Umkehrfunktionen)
- Kennenlernen von Verallgemeinerungen des Funktionsbegriffs
- Verkettungen von Funktionen

Auszüge aus dem Lehrplan für die siebte Klasse⁹⁰:

- Definieren des Differentialquotienten (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate), Deuten dieser Begriffe als Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung, *weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen*
- Kennen des Begriffes Ableitungsfunktion, *Berechnen von Ableitungen elementarer Funktionen*

⁸⁹www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf

⁹⁰ebd.

- Deuten der zweiten Ableitung in inner- und außermathematischen Bereichen

Auszug aus dem Lehrplan für die achte Klasse⁹¹:

- Ermitteln von Stammfunktionen

Anwendungsorientierung und Vernetzung werden in den didaktischen Grundsätzen explizit gefordert: „Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. Vernetzungen der Inhalte innerhalb der Mathematik und durch geeignete fächerübergreifende Unterrichtssequenzen sind anzustreben. Die minimale Realisierung besteht in der Thematisierung mathematischer Anwendungen bei ausgewählten Inhalten, die maximale Realisierung in der ständigen Einbeziehung anwendungsorientierter Aufgaben- und Problemstellungen zusammen mit einer Reflexion des jeweiligen Modellbildungsprozesses hinsichtlich seiner Vorteile und seiner Grenzen.“⁹²

Im Fach Musikerziehung sieht der Lehrplan die Unterrichtsinhalte „stimmphysiologische und akustische Grundlagen“ sowie „Zusammenwirken musikalischer Parameter und verschiedene Möglichkeiten ihrer grafischen Darstellung“ für die fünfte und sechste Klasse AHS vor. Unter dem Punkt „Didaktische Grundsätze“ findet man zum Lehrplanbereich Musikkunde außerdem: „Der Transfer vom Tun zum Wissen hat in musikpraktischer, multimedialer, fächerübergreifender Form sowie über Aktionen zu erfolgen.“⁹³ Vernetzung zwischen den Fächern ist also auch im Fach Musikerziehung ausdrücklich erwünscht. Dass das Erkennen von Verbindungen verschiedener Bereiche für die Schülerinnen und Schüler erstrebenswert ist, zeigt auch ein weiterer Absatz des Lehrplans: „Die drei Lehrplanbereiche [d.h. Musikpraxis, Musikkunde und Musikrezeption] sind immer im Zusammenhang zu sehen und sind, dem jeweiligen Lernziel entsprechend, zu vernetzen. Dabei sind fächerverbindende, interdisziplinäre und interkulturelle Aspekte zu berücksichtigen.“⁹⁴

Akustik ist auch Teil des Physiklehrplans. In diesem Fall ist sogar ein fächerverbindender Unterricht in den drei Fächern Musik, Mathematik und Physik möglich. Da dies nicht Thema dieser Arbeit ist, werden spezielle Zusammenhänge zur Physik und Lehrplanbezüge hier nicht näher erwähnt.

⁹¹www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf

⁹²ebd.

⁹³www.bmukk.gv.at/medienpool/11867/lp_neu_ahs_15.pdf

⁹⁴ebd.

Weitere Unterrichtsideen

Im *Mathematikunterricht* kann der Einsatz von Computerprogrammen die Anschauung vertiefen und Zusammenhänge erkennbar machen. Für die kostenlose Mathematik-Software Geogebra⁹⁵ wurden bereits einige dynamische Arbeitsblätter zum Thema verfasst. Die von Judith Preiner entwickelte Unterrichtseinheit zum Thema „Schwingungen in Mathematik, Musik und Physik“ wurde auf der Internetplattform „Lehrer-Online“⁹⁶ veröffentlicht. Hier finden sich neben den Arbeitsblättern⁹⁷ für die Schülerinnen und Schüler auch ausführliche Hintergrundinformationen und Stundenbilder für Lehrerinnen und Lehrer. Die sieben dynamischen Arbeitsblätter behandeln Parameter einer Sinusschwingung, Schwebung und andere Überlagerungsformen. Fragen sollen experimentell mit Hilfe der Geogebra-Applets beantwortet werden. Hörbeispiele schaffen eine Verbindung zur Akustik.

Die Online-Ergänzung zum Lehrbuch „Thema Mathematik“⁹⁸ bietet unter den Materialien für die sechste Klasse einen Abschnitt zu „Schwingungen in der Musik“ an. Interaktive Geogebra-Beispiele behandeln Amplitude, Frequenz, Periode und Phasenverschiebung einer Sinusschwingung, harmonische Wellen, die Sägezahn- und Rechteckkurve, sowie Amplituden- und Frequenzmodulation. Auch hier sollen Aufgaben zu den Applets das Verständnis vertiefen.

Agathe Schaurhofer erstellte im Rahmen ihrer Diplomarbeit⁹⁹ ein Modul „Musikalische Akustik mit Geogebra“, in dem Themen wie Parametervariation, Überlagerung von Schwingungen, insbesondere konstruktive und destruktive Interferenz und Fouriersynthese behandelt werden. Das Konzept sieht vor, dass Inhalte abwechselnd durch Lehrervortrag und praktischer Erprobung durch Arbeitsblätter vermittelt werden.

Das Programm Mathematica¹⁰⁰ beinhaltet ein eigenes Musikpaket. Ist es in der Schule vorhanden, so können Schwingungen sowohl grafisch sichtbar als auch hörbar gemacht werden. Dies bietet eine besonders gute Verbindung zwischen mathematischen Theorien und dem hörbaren Resultat.

Zum Hören von Klängen eignet sich das Freewareprogramm Audacity¹⁰¹. Damit können Töne generiert und überlagert werden. Mathematische Theorien können praktisch überprüft und neue Töne erzeugt werden. Auch aufgenommene Klänge können in Audacity (z.B. mit der Lupenfunktion oder einer Frequenzanalyse) untersucht werden (vgl. Abbildungen im

⁹⁵www.geogebra.org

⁹⁶www.lehrer-online.de/464343.php?sid=26765184180784169036377247724890

⁹⁷www.geogebra.org/de/examples/fourier/Arbeitsblaetter/uebersicht.htm

⁹⁸www.thema-mathematik.at

⁹⁹Schaurhofer 2009, S.108-113

¹⁰⁰www.wolfram.com/mathematica/

¹⁰¹www.audacity.sourceforge.net/

Kapitel 1.3.3 Klangfarbe).

Inhalte zu den akustischen Grundlagen, wie sie im Lehrplan vorgesehen sind, können im *Musikunterricht* durch Experimente verdeutlicht werden. Ein praktischer Versuch am Klavier macht mitschwingende Obertöne hörbar. Dazu wird eine Taste (z.B. c^1) lautlos niedergedrückt und eine weitere Taste eine Oktav tiefer (z.B. C) angeschlagen. Da der Hammer des Oktavtons abgehoben ist, wird die Saite durch den ersten Oberton des angeschlagenen Tones zum Klingen gebracht.¹⁰² Dieser Versuch funktioniert auch mit anderen Intervallen, diese sind aber aufgrund ihrer Stellung in der Obertonreihe unterschiedlich stark hörbar.

Schwebungen können ebenfalls durch Versuche an Instrumenten verdeutlicht werden. Greift man etwa die tiefe E-Saite einer Gitarre am V. Bund (a) und schlägt diese Saite gemeinsam mit der A-Saite an, so kann man eine Schwebung hören, sobald die Frequenzen nicht exakt gleich sind. Eine andere Möglichkeit ist, dass zwei Schülerinnen gleichzeitig den gleichen Ton auf zwei verschiedenen Blockflöten spielen.¹⁰³

Schaurhofer entwickelte in ihrer Diplomarbeit eine Modul „Klangspektrenanalyse“, in dem Schülerinnen und Schüler mit Hilfe des freien Programms Overtone¹⁰⁴ Experimente durchführen. Klänge sollen aufgenommen und analysiert und das Wissen aus der musikalischen Akustik praktisch überprüft werden.¹⁰⁵

Ausgehend von theoretischen Informationen zum Thema Akustik kann die Bedeutung von Sinustönen in der Musik von Karlheinz Stockhausen oder in zeitgenössischer Musik besprochen werden. Hier eignen sich z.B. Hörbeispiele von Stockhausens Kompositionen, Hintergrundinformationen können eine Verbindung zur Mathematik herstellen. Es wäre denkbar, dass die Schülerinnen und Schüler selbst mit Sinustönen experimentieren und eigene einfache „Kompositionen“ erstellen. Durch die praktische Arbeit mit Sinustönen kann das Verständnis für diese vertieft werden. Die Beschäftigung mit „Neuer Musik“ lädt auch dazu ein, Komponisten bzw. Komponistinnen zu besuchen oder an die Schule zu holen, die selbst mit Sinusschwingungen und verschiedenen Formen der Synthese arbeiten.

¹⁰²vgl. www.lehrer-online.de/464343.php?sid=41973073087056513336377597759530

¹⁰³ebd.

¹⁰⁴www.aplu.ch/overtone/

¹⁰⁵vgl. Schaurhofer 2009, S.114-117

2. Musikalische Stimmungen

2.1. Stimmungssysteme

2.1.1. Reine Stimmung

„Soviel auch bereits über die Wahrnehmung nur eines einzelnen Tons zu sagen ist, stellt dies doch nur den ersten winzigen Schritt zur Musik hin dar. Die künstlerische Botschaft ist erst in der Abfolge vieler melodiebildender Töne und im gleichzeitigen Erklängen harmoniebildender Töne artikuliert.“¹ Es drängt sich daher die Frage nach der Stimmung von Musikinstrumenten auf, um Melodien und Harmonien zum Klingen zu bringen. Ein wesentlicher Begriff in diesem Zusammenhang ist das Intervall, d.h. der Abstand zwischen zwei Tönen. Er kann durch das Verhältnis der Frequenzen der beiden Töne angegeben werden. Im Laufe der Geschichte wurden unzählige Möglichkeiten entwickelt, Frequenzverhältnisse für eine Skala zu berechnen. Jedes dieser Systeme hat sowohl Vor- als auch Nachteile. Dunne und McConnell beschreiben dies mit den Worten: „You can’t tune a piano perfectly. In some way, the instrument must always be out of tune with itself. The origin of the problem, naturally, is in physics. Once the problem is translated into mathematics, only a small amount of effort reveals that the difficulty is unavoidable. However, mathematics does offer some compromises, many of which music already knew about.“² Im Folgenden werden vier Lösungsmöglichkeiten – vier Stimmungsprinzipien – vorgestellt. Die Berechnungen beziehen sich auf Töne einer Skala, in diesem Fall der Dur-Tonleiter. Eine mögliche Stimmung kann aus der Obertonreihe (vgl. Abschnitt 1.3.3, Seite 10) abgeleitet werden:

Sei f die Frequenz des Grundtones. Dann entspricht das Intervall zwischen den Tönen mit den Frequenzen $1 \cdot f$ und $2 \cdot f$ einer Oktav. Das zugehörige Frequenzverhältnis ist daher $2 : 1$. Das Intervall zwischen den Frequenzen $2 \cdot f$ und $3 \cdot f$ ist eine Quint mit der Proportion $3 : 2$. Die Quart erhält man als Verhältnis der Frequenzen $3 \cdot f$ und $4 \cdot f$ ($4 : 3$), die große Terz liegt zwischen $4 \cdot f$ und $5 \cdot f$ ($5 : 4$) und die kleine Terz zwischen $5 \cdot f$ und $6 \cdot f$ ($6 : 5$).

Diese Proportionen bilden den Ausgangspunkt für weitere Berechnungen. Um neue Intervalle zu erhalten, werden zwei bereits bekannte hintereinander ausgeführt. Mathematisch entspricht das der Multiplikation der Verhältniszahlen.³ Da die Septim eine große Terz über

¹Hall 1997, S.406

²Dunne/McConnell 1999, S.104

³vgl. Schröder 1985, S.49

dem Quintton liegt, kann sie durch folgende Verhältnisse berechnet werden:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$$

Analog erhält man die Sext aus Quart und großer Terz:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$$

Die Sekund wird durch Aneinanderreihen zweiter Quinten aufwärts und einer Oktav abwärts erreicht:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

Sie kann auch aus Quart und Quint berechnet werden:

$$\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$$

Durch analoge Rechnung erhält man die kleine Sext:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$$

und die kleine Septim:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$$

Diese Verhältnisse entstehen beim Musizieren durch unterschiedliche Längen von Saiten, Luftsäulen etc. Wird z.B. die Saitenlänge halbiert, so klingt ein Ton eine Oktav höher. Saitenlängen und Längen von Luftsäulen verhalten sich somit umgekehrt proportional zu den Frequenzverhältnissen.⁴ Falls nicht anders erwähnt, sind mit den Verhältniszahlen in diesem Abschnitt Frequenzverhältnisse gemeint.

Das eben beschriebene Prinzip wird *reine Stimmung* (auch: diatonische Stimmung) genannt. Ein Vorteil dieses Systems ist, dass Intervallproportionen durch möglichst einfache Zahlenverhältnisse beschrieben werden. Man ging davon aus, dass dadurch besonders wohlklingende Intervalle entstehen. Dieses Stimmungsprinzip bringt aber auch Probleme mit sich:

Geht man vom Sekundton einen Ganzton ($\hat{=}$ große Sekund) aufwärts, so erhält man eine große Terz. Das Intervallverhältnis zwischen Sekund und großer Terz ($\frac{5}{4} : \frac{9}{8} = \frac{10}{9}$) ist aber kleiner als der Ganzton zwischen Grundton und Sekundton ($\frac{9}{8}$). Durch dieses Stimmungsprinzip entstehen zwei verschieden große Ganztöne! Außerdem ergeben zwei Halbtöne (Berechnung z.B. durch $\frac{4}{3} : \frac{5}{4} = \frac{16}{15}$; Halbton $\hat{=}$ kleine Sekund) hintereinander ausgeführt

⁴vgl. Amon 2005, S.253

mehr als einen Ganzton:

$$\frac{16}{15} \cdot \frac{16}{15} = \frac{256}{225} \approx 1,1378 > \frac{9}{8} = 1,125 \text{ bzw. } \frac{256}{225} > \frac{10}{9} \approx 1,1111$$

Die beiden Ganztöne unterscheiden sich um das *syntonische Komma*, das aus deren Verhältnis berechnet wird:

$$\frac{9}{8} : \frac{10}{9} = \frac{81}{80} = 1,0125$$

Diese Tatsache erschwert einerseits das Transponieren von Musikstücken in andere Tonarten. Andererseits ergeben sich Probleme in der mehrstimmigen Musik, da manche Harmonien weniger gut klingen als andere. Bevor diese angesprochen werden können, muss noch eine Frage der Terminologie geklärt werden. Wenn bisher von Intervallen wie Terz, Quart, etc. die Rede war, war stets das Intervall zwischen dem Grundton einer Skala und einem weiteren Ton dieser Skala gemeint. Eine Quart ist in diesem Zusammenhang das Intervall zwischen dem Grundton und dem vierten Ton (z.B. einer Dur-Tonleiter). Untersucht man Frequenzverhältnisse von Dreiklängen, so werden diese Begriffe in einem anderen Zusammenhang verwendet. Eine Terz bezeichnet in diesem Fall das Intervall zwischen dem Grundton eines Dreiklangs und dem Ton, der genau eine Terz über diesem Grundton liegt. Im Falle eines Durdreiklangs ist das die große Terz, bei einem Molldreiklang die kleine Terz. Neuwirth nennt Terzen (bzw. Quinten) von Dreiklängen zur leichteren Unterscheidung „innere Terzen“ (bzw. „innere Quinten“). Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird diese Konvention im Folgenden übernommen.⁵

Jeder Ton einer Skala kann Grundton eines Dreiklangs sein. Werden zur Bildung dieses Dreiklangs nur Töne der Skala verwendet, so heißt der Dreiklang „leitereigen“. Ist der zweite Ton einer Skala (also der Sekundton) Grundton eines solchen Akkords, so spricht man vom Dreiklang auf der „zweiten Stufe“. Die Dreiklänge auf der ersten, vierten (Quart als Grundton) und fünften (Quint als Grundton) Stufe nehmen in der westeuropäischen Musik eine wichtige Stellung ein.

Wird über dem Grundton ein Durdreiklang gebildet, so betragen die Frequenzverhältnisse der inneren Terz $\frac{5}{4}$ und der inneren Quint $\frac{3}{2}$. Nun soll ein Dreiklang auf der vierten Stufe gebildet werden. Die Töne dieses Akkordes sind in diesem Fall die Quart ($\frac{4}{3}$), große Sext ($\frac{5}{3}$) und Oktave ($\frac{2}{1}$) der Skala (in C-Dur wären das die Töne f-a-c). Der Abstand zwischen Quart und Sext ($\frac{5}{3} : \frac{4}{3} = \frac{5}{4}$) entspricht der inneren Terz des Dreiklangs auf der vierten Stufe. Die innere Quint erhält man durch $\frac{2}{1} : \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$. Diese Frequenzverhältnisse stimmen also mit jenen des Dreiklangs auf der ersten Stufe überein. Durch ähnliche Rechnung erhält man auch die „inneren“ Intervalle des Dreiklangs auf der fünften Stufe. Molldreiklänge mit den Frequenzverhältnissen der $\frac{6}{5}$ der inneren Terz und $\frac{3}{2}$ der inneren Quint erhält man auf der

⁵vgl. Neuwirth 1997, S.14

dritten und sechsten Stufe. Auch dieses Ergebnis ist optimal. (Diese Frequenzverhältnisse sind nach den obigen Erklärungen zur reinen Stimmung zu erwarten). Ein Problem ergibt sich jedoch, wenn ein Dreiklang auf der zweiten Stufe aufgebaut wird. Dieser Akkord wird aus der Sekund ($\frac{9}{8}$), der Quart ($\frac{4}{3}$) und der großen Sext ($\frac{5}{3}$) der Skala gebildet. Die Rechnung lautet (unter Verwendung dieser Frequenzverhältnisse) in diesem Fall:

$$\frac{4}{3} : \frac{9}{8} = \frac{32}{27} \approx 1,1852 < 1,2 = \frac{6}{5} \text{ bzw. } \frac{5}{3} : \frac{9}{8} = \frac{40}{27} \approx 1,4815 < 1,5 = \frac{3}{2}.$$

Innere Terz und innere Quint des Dreiklangs sind hier um das syntonische Komma zu klein ($\frac{6}{5} : \frac{32}{27} = \frac{81}{80}$ bzw. $\frac{3}{2} : \frac{40}{27} = \frac{81}{80}$). Dadurch klingt der Mollakkord auf der zweiten Stufe sehr unsauber.⁶

Spielt man am heutigen Klavier drei große Terzen hintereinander aufwärts, so erreicht man genau eine Oktav. In der reinen Stimmung dagegen entsteht ein Intervall, das etwas kleiner ist als eine Oktav:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} \approx 1,9531 < 2$$

Dieses Phänomen wird auch „kleine Diesis“ genannt. Die „große Diesis“ entsteht durch Aneinanderreihen vier kleiner Terzen. In diesem Fall wird die Oktav überschritten:

$$\left(\frac{6}{5}\right)^4 = \frac{1296}{625} = 2,0736 > 2$$

Diese Probleme der reinen Stimmung können nicht zufriedenstellend gelöst werden. Wird z.B. die Sekund um das syntonische Komma versetzt, werden automatisch auch andere Intervallproportionen verändert, was zu neuen Unstimmigkeiten führt. Dennoch hört unser Ohr im Sinne dieses Stimmungssystems.⁷

2.1.2. Pythagoreische Stimmung

Die Frage nach der Stimmung spielt seit jeher eine wesentliche Rolle in Musiktheorie und Instrumentenbau. Didymos von Alexandria beschäftigte sich bereits ca. 30 v.Chr. mit dem reinen Stimmungsprinzip. Davor waren es die Pythagöer (ca. 500 v.Chr.), die Intervallproportionen untersuchten. Eine Legende erzählt, dass Pythagoras eines Tages an einer Schmiede vorbeiging und hörte, dass mehrere Eisenhämmer, die auf den Amboss geschlagen wurden, bis auf eine Ausnahme konsonante Töne ergaben. Wieder zuhause hängte er vier Saiten gleicher Länge und Beschaffenheit an einen Nagel und versah jede von ihnen mit einem Gewicht. Er erkannte, dass die Saiten mit den Gewichten 6 und 12 genau um eine Oktav verschieden klangen und leitete daraus das Oktavverhältnis 2 : 1 ab. So fand er nach und nach die In-

⁶vgl. Neuwirth 1997, S.5-23

⁷vgl. Amon 2005, S.257

tervallproportionen der pythagoreischen Stimmung.⁸

Ob sich die Geschichte wirklich so zutrug, lässt sich heute nicht mehr beurteilen. Für die Pythagoreer, einem politisch-religiösen Geheimbund, hatten die Zahlen 1, 2, 3 und 4 – die Tetraktýs (d.h. „Vierheit“) – eine besondere Bedeutung. Die Summe dieser ersten vier natürlichen Zahlen ergibt zehn, der Zahl für Vollkommenheit. Deshalb stand die Tetraktýs für vollkommene Gleichheit und universelle Harmonie. Die Pythagoreer ordneten sie in einem gleichseitigen Dreieck aus zehn Kreisen an, wobei jede Seite aus genau vier Kreisen besteht. Das gleichseitige Dreieck ist ebenfalls ein Symbol für Vollkommenheit.⁹

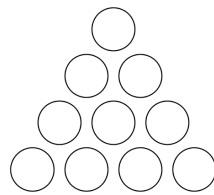


Abbildung 2.1.: Tetraktýs¹⁰

Die Pythagoreer erkannten die Zahlen der Tetraktýs in den Verhältniszahlen der konsonanten Intervalle Oktav, Quart und Quint, da sich die Intervallproportionen aus diesen Zahlen zusammensetzen. Amon beschreibt die pythagoreische Stimmung als den „Versuch, mit den ersten vier Zahlen alle Intervalle zu berechnen“.¹¹ Die Pythagoreer experimentierten mit einem Monochord, einem einsaitigen Instrument. Wird die Saitenlänge mit Hilfe eines eingeschobenen Stegs halbiert, so entsteht – wie oben beschrieben – die Oktav (2 : 1). Schwingen zwei Drittel der Saitenlänge, so erklingt die Quint. (Um später die Proportionen besser vergleichen zu können, werden hier dennoch die Frequenzverhältnisse statt der Saitenverhältnisse beschrieben). Aus der Proportion der Quint (3 : 2) berechneten sie alle weiteren Intervalle. Die Quart und die Sekund wurden auch im vorangegangenen Abschnitt über die reine Stimmung mit Hilfe der Quint hergeleitet und entsprechen jenen der pythagoreischen Stimmung. Die Terz erhielten die Pythagoreer durch Übereinanderschichten zweier Sekunden (die ja mit Hilfe der Quint hergeleitet wurden):

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{64}$$

Die große Terz ist daher in der pythagoreischen Stimmung um das syntonische Komma größer als in der reinen Stimmung (vgl. $\frac{5}{4} = \frac{80}{64}$). Auch die große Sext und die große Septim werden um das syntonische Komma vergrößert:

⁸vgl. Amon 2005, S. 254

⁹vgl. Amon 2011, S. 532

¹⁰vgl. Amon 2011, S. 532

¹¹Amon 2005, S. 255

Sext („Sekund+Quint“):

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16} > \frac{5}{3}$$

Septim („Terz+Quint“):

$$\frac{81}{64} \cdot \frac{3}{2} = \frac{243}{128} > \frac{15}{8}$$

Ein Vorteil der pythagoreischen Stimmung ist, dass durch diese Korrekturen alle Ganztöne durch die Proportion $\frac{9}{8}$ dargestellt werden können und es in diesem System daher nur eine Art von Ganztönen gibt.¹² Ein gravierender Nachteil ist jedoch, dass die Dreiklänge auf der ersten, vierten und fünften Stufe, die in der abendländischen Musik eine besondere Bedeutung haben, wegen der unreinen pythagoreischen Terz sehr rau klingen. Dieses Stimmungsprinzip eignet sich daher eher für einstimmige Musik, wie sie bis ins Mittelalter ausgeübt wurde. Durch die Verbreitung der mehrstimmigen Musik wurde eine andere Lösung notwendig.¹³

2.1.3. Mitteltönige Stimmung

Anstelle der vergrößerten Terz der pythagoreischen Stimmung tritt in der mitteltönigen Stimmung (aufgestellt 1511 von Arnold Schlick, 1523/29 von Pietro Aron und 1577 von Francisco Salinas¹⁴) eine verkleinerte Quint. Die Intervallproportionen werden mit Hilfe der reinen Terz konstruiert. Führt man vier Quinten hintereinander aus, so müssen diese – zwei Oktaven hinunterversetzt – eine Terz ergeben. Wegen der Rechnung $\frac{5}{4} \cdot 2 \cdot 2 = 5$ erfüllt die Quint $5^{\frac{1}{4}} = 1,4953$ diese Bedingung. Ausgehend von diesem Wert und der reinen Terz können die übrigen Verhältnisse berechnet werden:

Sekund („2 Quinten – Oktav“)

$$5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} : 2 \approx 1,1180$$

Quart („Oktav – Quint“)

$$2 : 5^{\frac{1}{4}} \approx 1,3375$$

Sext („Quint + Sekund“)

$$5^{\frac{1}{4}} \cdot (5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} : 2) \approx 1,6719$$

Septim („Quint + Terz“)

$$5^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{5}{4} \approx 1,8692$$

Diese Unterschiede sind durchaus hörbar. Werden z.B. reine und mitteltönige Sekunden gleichzeitig angeschlagen, so sind ca. 2 Schwebungen pro Sekunde zu hören.¹⁵

¹²vgl. Neuwirth 1997, S.24-34

¹³vgl. Gläser 2008, S.419

¹⁴vgl. Amon 2005, S.258

¹⁵vgl. Neuwirth 1997, S.35-43

Alternativ kann der Ganzton der mitteltönigen Stimmung aus dem Mittelwert der beiden reinen Ganztöne berechnet werden (vgl. dazu Abschnitt 2.3). Diese Tatsache war namensgebend für das Stimmungsprinzip.¹⁶

Auch die mitteltönige Stimmung hat den Vorteil, dass es nur einen Typ von Ganztönen gibt. Außerdem klingen die Dreiklänge auf der ersten, vierten und fünften Stufe sauberer als in pythagoreischer Stimmung. Sogar der Dreiklang auf der zweiten Stufe klingt gut! Dennoch entstanden durch mitteltönige Stimmung einige unsaubere Intervalle. Bekannt ist die „Wolfsquint“ die nach der damaligen Stimmpraxis zwischen den Tönen gis-es entstand und sehr unrein klang. In der Musikpraxis versuchte man solche Unstimmigkeiten durch Vermeiden bestimmter Tonarten, gebrochene Tasten (um verschiedene Töne zu erzeugen), Umstimmen der Instrumente vor einem Stück etc. zu umgehen. Kritische Zusammenhänge wurden außerdem von Komponisten (z.B. durch Verzierungen) verschleiert. Historische Stimmungen hatten so einen Einfluss auf Kompositionen, die heute noch gespielt werden.¹⁷

In diesem Zusammenhang ist auch die Tonartencharakteristik bemerkenswert, die durch die mitteltönige Stimmung aufkam. Die oben beschriebenen Intervallproportionen gehen von einem bestimmten Grundton aus. Ist dieser Grundton c, so stimmen die Verhältnisse für die Tonart C-Dur, z.B. jedoch nicht für A-Dur! Bei Instrumenten mit fixer Stimmung (z.B. Orgel) ergaben sich daraus für jede Tonart unterschiedliche Verhältnisse, die den Charakter dieser Tonart bedingten. Diese Tatsache beeinflusste Komponisten zu jener Zeit (die mitteltönige Stimmung war bis ins 19. Jahrhundert in Gebrauch) und heute, da diese Charaktere überliefert wurden (auch wenn nach der heutigen Stimmung alle Tonarten gleich intoniert werden).¹⁸

2.1.4. Gleichschwebend temperierte Stimmung

Ein Problem aller bisher erwähnten Stimmungen ist, dass zwölf aneinandergereihte Quinten nicht sieben Oktaven ($2^7 = 128$) ergeben und sich so der Quintenzirkel, der vor allem für Modulationen und Transpositionen in der Musik von Bedeutung ist, nicht ganz schließt. Im Fall der reinen und pythagoreischen Stimmung erhält man für zwölf Quinten den Wert $(\frac{3}{2})^{12} \approx 129,7463$. Das Verhältnis dieser beiden Beträge ist $(\frac{3}{2})^{12} : 2^7 \approx 1,0136$ und wird *pythagoreisches Komma* genannt. Die reine Quint ist also etwas zu groß um die geforderte Bedingung zu erfüllen. Die mitteltönige Quint dagegen ist zu klein, denn es gilt: $(5^{\frac{1}{4}})^{12} = 5^3 = 125 < 128$. Dieses Problem wurde mit der gleichschwebend temperierten Stimmung gelöst, die heute in Gebrauch ist. Dafür wird der Wert $128^{\frac{1}{12}} \approx 1,4983$ als neue Quint berechnet. Das pythagoreische Komma wird sozusagen gleichmäßig auf alle

¹⁶vgl. Amon 2005, S.258

¹⁷vgl. Amon 2005, S.259

¹⁸vgl. Amon 2005, S.288

zwölf Quinten aufgeteilt. Denselben Betrag erhält man, wenn man die Oktav in exakt zwölf gleiche Teile teilt. In diesem Fall beträgt die Proportion der Sekund $2^{\frac{1}{12}}$ und der Quint: $(2^{\frac{1}{12}})^7 = 2^{\frac{7}{12}} = 128^{\frac{1}{12}}$.¹⁹

Abgesehen von der Oktav ist in dieser Stimmung kein Intervall rein. Die Unterschiede sind jedoch gering und können vom Ohr „zurechtgehört“ werden. Das Prinzip der gleichschwebend temperierten Stimmung ist daher ein Kompriss. Die Intervallproportionen dieses Systems ermöglichen das Transponieren in alle Tonarten, das Prinzip wird durch nur zwölf Plätze (keine gebrochenen Tasten, etc.) sehr übersichtlich. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass sich trotz des anfänglichen Ideals der einfachen Intervallverhältnisse eine Stimmung als besonders praxistauglich herausstellte, die durch irrationale Zahlen charakterisiert wird. Ein Einwand der Zeitgenossen gegen die Einführung der Temperierung war, dass die Möglichkeit der Tonartencharakteristik wegfiel. Durch die zunehmende Bedeutung des Klaviers setzte sich dieses Stimmungsprinzip dennoch durch. Beim Singen und beim Spielen von Streichinstrumenten werden die Intervalle häufig spontan an die reine Stimmung angepasst.²⁰ Amon beschreibt das gleichschwebend temperierte Stimmungssystem mit den Worten: „Die sich letztlich durchgesetzt habende gleichstufige Temperatur ist trotz der verlorenen Tonartencharakteristik ein System, das bei einer relativ geringen Anzahl fester Tonhöhen eine für den Hörer befriedigende und verständliche Aufführungspraxis bietet.“²¹

Die vier vorgestellten Stimmungssysteme sollen einen Einblick in die Stimmungsproblematik geben, die vor allem die westeuropäische Kunstmusik stark beeinflusste. Außer den erwähnten Prinzipien wurden in der Vergangenheit noch viele weitere Lösungsvorschläge gemacht, z.B. ungleichschwebend temperierte Stimmungen, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll. Auch das in diesem Zusammenhang häufig zitierte „Wohltemperierte Klavier“ von Johann Sebastian Bach bezieht sich auf eine temperierte Stimmung, jedoch nach der gängigen Forschungsmeinung nicht auf die heute gebräuchliche gleichschwebend temperierte Stimmung.²² Außerdem gibt es noch eine Vielzahl weiterer Stimmungssysteme, die sich in unterschiedlichen Kulturen – zum Teil unabhängig voneinander – entwickelten und teilweise auch heute noch in Gebrauch sind. Eine genaue Betrachtung von Stimmungsprinzipien der Weltmusik wäre zwar im Sinne eines interkulturellen Unterrichts interessant, würde aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Im Folgenden sollen nun die vier vorgestellten Stimmungssysteme gegenübergestellt werden.

¹⁹vgl. Neuwirth 1997, S.44-59

²⁰vgl. Amon 2005, S.260f

²¹Amon 2005, S.262

²²vgl. Amon 2005, S.260

2.1.5. Vergleich dieser vier Stimmungen mit Hilfe der Cent-Skala

Zum Vergleich verschiedener Tonsysteme führte A. J. Ellis 1884 die Cent-Skala ein, die eine Oktav in 1200 gleiche Teile teilt. In der gleichschwebend temperierten Stimmung hat demnach jeder Halbton genau hundert Cent. Da eine Oktav mit dem Verhältnis $2 : 1$ gemessen wird, entspricht einem Cent der Wert $^{1200}\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{1200}}$. Dieses Maß ist logarithmisch. Ist I ein Tonintervall, so ist $1200 \log_2(I)$ der zugehörige Centwert.²³ Für das syntonische Komma gilt daher:

$$1200 \log_2 \left(\frac{81}{80} \right) \approx 21,5 \text{ Cent.}$$

Für das pythagoreische Komma gilt:

$$1200 \log_2 \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{12} : 2^7 \right) \approx 23,5 \text{ Cent.}$$

Abweichungen um das pythagoreische Komma betragen daher rund 23,5% eines Halbtons, Abweichungen um das syntonische Komma machen 21,5% eines Halbtons aus.²⁴

In der Tabelle 2.1 werden nun die vier vorgestellten Stimmungen verglichen. Die jeweils erste Spalte (blau) der jeweiligen Stimmung gibt die Intervallproportionen an. Die zweite (grün) gibt die Ganzton- und Halbtonschritte an, jeweils bezogen auf den vorigen Ton. In der dritten Spalte (gelb) sind die zugehörigen Centwerte zu sehen. Bis auf die Werte in temperierter Stimmung sind alle angegebenen Centwerte gerundet. Die dargestellten Dezimalzahlen wurden auf die vierte Nachkommastelle gerundet.

	Rein			Pythagoreisch			Mitteltönig			Temperiert		
	Prop.	GT HT	Cent	Prop.	GT HT	Cent	Prop.	GT HT	Cent	Prop.	GT HT	Cent
1	1		0	1		0	1		0	1		0
2	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	204	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	204	1,1180	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	193	$(\sqrt[12]{2})^2$	$(\sqrt[12]{2})^2$	200
3	$\frac{5}{4}$	$\frac{10}{9}$	386	$\frac{81}{64}$	$\frac{9}{8}$	408	$\frac{5}{4}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	386	$(\sqrt[12]{2})^4$	$(\sqrt[12]{2})^2$	400
4	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{15}$	498	$\frac{4}{3}$	$\frac{256}{243}$	498	1,3375	$\frac{8}{5\sqrt[4]{5}}$	503	$(\sqrt[12]{2})^5$	$\sqrt[12]{2}$	500
5	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	702	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	702	1,4953	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	696,5	$(\sqrt[12]{2})^7$	$(\sqrt[12]{2})^2$	700
6	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{9}$	884	$\frac{27}{16}$	$\frac{9}{8}$	906	1,6719	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	890	$(\sqrt[12]{2})^9$	$(\sqrt[12]{2})^2$	900
7	$\frac{15}{8}$	$\frac{9}{8}$	1088	$\frac{243}{128}$	$\frac{9}{8}$	1110	1,8692	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	1083	$(\sqrt[12]{2})^{11}$	$(\sqrt[12]{2})^2$	1100
8	$\frac{2}{1}$	$\frac{16}{15}$	1200	$\frac{2}{1}$	$\frac{256}{243}$	1200	$\frac{2}{1}$	$\frac{8}{5\sqrt[4]{5}}$	1200	$(\sqrt[12]{2})^{12}$	$\sqrt[12]{2}$	1200

Tabelle 2.1.: Vergleich der vorgestellten Stimmungssysteme

Es ist leicht zu erkennen, dass Prim und Oktav in allen Stimmungen konstant sind. Vergleicht man z.B. reine und pythagoreische Stimmung, so erkennt man, dass die pythago-

²³vgl. Amon 2005, S.256

²⁴vgl. Dunne/McConnell 1999, S.110f

reische Terz um rund 22 Cent von der reinen Terz abweicht. Dies entspricht fast einen Achtelton und erklärt, warum die pythagoreische Terz als besonders unsauber empfunden wird. Die temperierte Terz bildet mit 400 Cent einen Kompromiss zwischen diesen beiden Stimmungssystemen.²⁵ Der folgende Abschnitt zeigt mit mathematischen Methoden, warum das gleichschwebend temperierte Stimmungssystem eine sehr gute Lösung ist.

2.2. Näherungslösungen mit Hilfe von Kettenbruchentwicklung

Oben wurde bereits erwähnt, dass in reiner, pythagoreischer und mitteltöniger Stimmung zwölf Quintsprünge niemals sieben Oktavsprünge ergeben. Allgemein formuliert kann mit m Quinten aufwärts und n Oktaven abwärts niemals den Grundton erreicht werden. Betrachtet man die Frequenzverhältnisse von Quinten und Oktaven, so liegt das Problem darin begründet, dass Potenzen der Zahl Drei niemals gerade sind. Die folgende Gleichung besitzt daher keine exakte Lösung:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3^m \cdot 1^n}{2^m \cdot 2^n} = \frac{3^m}{2^{m+n}} = 1.$$

Eine Näherungslösung dieser Gleichung erhält man mit Hilfe von Kettenbrüchen.²⁶

Definition 2.1 (Kettenbruch). ²⁷ Seien $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ reelle Zahlen. Ein Ausdruck der Form

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

heißt unendlicher Kettenbruch und wird durch $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ abgekürzt dargestellt.

Bricht die Kettenbruchentwicklung nach der n -ten Zahl ab, so heißt der Bruch endlicher Kettenbruch mit der Darstellung $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Durch Betrachtung der obigen Formel ergibt sich:

$$\frac{3^m}{2^{m+n}} = 1 \Leftrightarrow 3^m = 2^{m+n} \Leftrightarrow m \cdot \log(3) = (m+n) \cdot \log(2) \Leftrightarrow \frac{m+n}{m} = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx \frac{0,4771}{0,3010} = \frac{4771}{3010}.$$

²⁵vgl. Freudenthal 1983, S.48

²⁶ebd.

²⁷vgl. Müller-Stach/Piontkowski 2011, S.66

Eine Kettenbruchentwicklung lautet daher:

$$\begin{aligned}
 \frac{4771}{3010} &= 1 + \frac{1761}{3010} = 1 + \frac{1}{\frac{3010}{1761}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1249}{1761}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1761}{1249}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{512}{1249}}} = \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1249}{512}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{225}{512}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{512}{225}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{62}{225}}}}}} = \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{39}{62}}}}}}} = \dots
 \end{aligned}$$

Auf diese Weise können Näherungslösungen der obigen Formel berechnet werden:²⁸

Erste Näherung: 1	Vierte Näherung: $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{8}{5}$
Zweite Näherung: $1 + \frac{1}{1} = 2$	Fünfte Näherung: $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{19}{12}$
Dritte Näherung: $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}$	Sechste Näherung: $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}} = \frac{65}{41}$

Betrachtet man nun den fünften Näherungswert, so erhält man:

$$1 = \frac{3^m}{2^{m+n}} \approx \frac{3^{12}}{2^{19}} \Leftrightarrow 3 \approx 2^{\frac{19}{12}} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \approx 2^{\frac{7}{12}}$$

Sieben Oktaven ($n + m = 19 \Rightarrow n = 7$) können somit durch 12 Quinten ($m = 12$) der Proportion $2^{\frac{7}{12}} : 1$ erreicht werden. Dieser Näherungswert entspricht dem Frequenzverhältnis der gleichschwebend temperierten Quint. Die obige Kettenbruchentwicklung zeigt, dass auch andere Teilungen möglich sind. Ein Näherungswert für die Quint kann so gewählt werden, dass 41 Quinten 24 Oktaven ergeben. In diesem Fall würde die Oktave in 41 Töne geteilt!²⁹ Brüning erwähnt in diesem Zusammenhang, dass in Schönbergs „Harmonielehre“ die 53-Ton-Musik als gute Alternative zur 12-Ton-Musik beschrieben wird.³⁰ Obwohl sich Musiker immer wieder mit anderen Systemen beschäftigten, setzte sich in der westeuropäischen Kunstmusik – vermutlich aus praktischen Gründen – letztlich der Wert der gleichschwebend temperierten Stimmung durch.

²⁸vgl. Freudenthal 1983, S.48f

²⁹vgl. Dunne/McConnell 1999, S. 113f

³⁰vgl. Brüning 2003, S. 103

2.3. Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel in der Musik

Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel werden immer wieder in Zusammenhang mit musikalischen Stimmungen gebracht.

Definition 2.2 (Arithmetisches Mittel). *Eine reelle Zahl m heißt arithmetisches Mittel zweier reeller Zahlen a und b , falls gilt: $m = \frac{a+b}{2}$.*³¹

Definition 2.3 (Geometrisches Mittel). *Eine reelle Zahl m heißt geometrisches Mittel zweier reeller Zahlen a und b , falls gilt: $m = \sqrt{a \cdot b}$.*³²

Definition 2.4 (Harmonisches Mittel). *Eine reelle Zahl m heißt harmonisches Mittel zweier reeller Zahlen a und b , falls gilt: $m = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$.*³³

Bereits die Pythagoreer beschäftigten sich – im Zusammenhang mit der Theorie der Tetraktys – mit diesen Werten. Betrachtet man die Proportionen der konsonanten Intervalle Oktav ($\frac{2}{1} = \frac{12}{6}$), Quint ($\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$) und Quart ($\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$), so ist eine Verbindung zu den Zahlen 6, 8, 9 und 12 zu erkennen, die ebenfalls Tetraktys genannt wurden.³⁴ Die Zahl 9 ist arithmetisches Mittel der Zahlen 6 und 12, die Zahl 8 harmonischer Mittelwert dieser Zahlen. Die Proportion $\frac{12}{9} = \frac{8}{6}$ wurde im Zusammenhang von arithmetischem und harmonischem Mittel „vollkommenste Proportion“ genannt.³⁵

Das arithmetische Mittel ist bei reiner Stimmung in vielen Beziehungen zu finden. Die reine (und pythagoreische) Quint bildet das arithmetische Mittel zwischen den Proportionen $\frac{1}{1}$ und $\frac{2}{1}$ von Prim und Oktav:

$$\frac{\frac{2}{1} + \frac{1}{1}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Die Quart entspricht dem harmonischen Mittel dieser beiden Verhältnisse:

$$\frac{2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{1}}{\frac{2}{1} + \frac{1}{1}} = \frac{4}{3}.$$

Diese Rechnungen lassen sich auch auf andere Intervallproportionen übertragen. In der reinen Stimmung (als Grundlage dienen wiederum die Verhältnisse) ist die Terz arithmetisches Mittel von Prim und Quint, die Sekund arithmetisches Mittel von Prim und Terz, die Quart arithmetisches Mittel von Prim und Sext und die Septim arithmetisches Mittel von Quint und Non. Es lassen sich in dieser Stimmung also alle Töne als Mittelwerte zweier Intervall-

³¹vgl. Brüning 2003, S.111f

³²ebd.

³³ebd.

³⁴vgl. de.wikipedia.org/wiki/Tetraktys

³⁵vgl. Hartfeldt/Eid/Henning: www.math.uni-magdeburg.de/reports/2002/musik.pdf, S.3

proportionen darstellen.³⁶

Das geometrische Mittel ist vor allem in der mitteltönigen Stimmung von Bedeutung, da – wie oben erwähnt – die Sekund als Mittelwert der beiden Ganztöne der reinen Stimmung berechnet wird:

$$\sqrt{\frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Die Terz wird in diesem Fall in zwei gleich große Intervalle geteilt.³⁷

Der Tritonus ($\sqrt{2} : 1$) teilt in temperierter Stimmung die Oktav in zwei Teile gleicher Größe und entspricht dem geometrischen Mittel zwischen Prim und Oktav (wieder bezogen auf die Intervallproportionen):

$$\sqrt{\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1}} = \sqrt{2}.$$

Darüber hinaus ist der Tritonus auch das geometrische Mittel aus dem arithmetischen und harmonischen Mittel von Prim und Oktav.³⁸ Das arithmetische Mittel beträgt nach den obigen Berechnungen $\frac{3}{2}$, das harmonische Mittel ist $\frac{4}{3}$. Das daraus errechnete geometrische Mittel beträgt daher:

$$\sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt{2}.$$

Eine Aufgabe, die in vielen Schulbüchern zu finden ist, beschäftigt sich mit der geometrischen Folge der Frequenzverhältnisse in temperierter Stimmung. Dazu sei hier auf den fachdidaktischen Teil verwiesen (vgl. Abschnitt 2.5.1, Seite 55). Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die Intervallproportionen in gleichschwebend temperierter Stimmung zwar eine geometrische Folge bilden, wir aber gleichsam eine arithmetische Folge hören! Denn dem Gehör nach haben die Tonabstände zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tasten eines Klaviers konstanten Abstand zueinander.³⁹

2.4. Das Verfahren von Strähle – eine Anwendung aus dem Instrumentenbau

Fragen zu musikalischen Stimmungen haben – wie eingangs erwähnt – eine große Bedeutung für den Instrumentenbau. In diesem Zusammenhang sollen hier nun die Berechnungen von Daniel Strähle zur Konstruktion der Bundabstände einer Gitarre erklärt werden. Weitere Anwendungen für den Schulunterricht werden im fachdidaktischen Teil dieses Kapitels (ab Seite 59) aufgezeigt.

³⁶vgl. Surber/Walder 1992, S.13

³⁷vgl. Armbrust 1999, S.80

³⁸vgl. Brüning 2003, S.113

³⁹vgl. Meyer 2002, S.20

Wird eine Gitarre nach dem gleichschwebend temperierten System gestimmt, so nehmen die Bundabstände in Richtung des Stegs exponentiell ab. Dies ist algebraisch leicht mit Hilfe der irrationalen Zahlen zu zeigen. Als der schwedische Handwerker Daniel Stråhle 1743 einen „Konstruktionsvorschlag zur Anbringung der Bünde bei Zupfinstrumenten“⁴⁰ entwarf, waren derartige Berechnungen nicht so leicht möglich wie heute. Dennoch lieferte Stråhle ein verblüffend genaues Verfahren.⁴¹

Konstruktion nach Stråhle: Eine Strecke $\overline{AB}$ werde in zwölf gleich lange Teile der Länge x mit den Teilungspunkten $X_1, \dots, X_{11}$ geteilt. Diese Strecke sei die Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks ABC , wobei $|BC| = |AC| = 2 \cdot |AB|$ gelte. Nun werde vom Punkt A aus mit einem Zirkel die Länge $7x$ auf der Seite $\overline{AC}$ abgeschlagen. Der entstehende Schnittpunkt S teilt die Strecke $\overline{AC}$ im Verhältnis $7 : 17$. Nun werden die Punkte B und S verbunden und die Strecke $\overline{BS}$ sowie deren Verlängerung $\overline{MB}$ eingezeichnet, wobei $|MB| = 2 \cdot |SB|$ gilt. Die Länge $|MB|$ entspricht der Saitenlänge der Gitarrensaiten. Die Positionen der Bünde in gleichschwebend temperierter Stimmung entsprechen den Schnittpunkten der Strecken $\overline{X_iC}$ ($1 \leq i \leq 11$) mit der Strecke $\overline{BS}$ (vgl. dazu Abbildung 2.2).⁴²



Abbildung 2.2.: Stråhle-Verfahren

Die Geschichte des Stråhle-Verfahrens zeigt, dass ein einziger Rechenfehler große Auswirkungen haben kann. Wegen eines Fehlers des schwedischen Mathematikers Faggot, der die Methode überprüfte und sich bei einer Winkelberechnung irrte, wurde es unberechtigtweise als zu ungenau verworfen und erst 1957 wiederentdeckt. Ein Schreibfehler führte dazu, dass das Verfahren auch unter dem Namen „Stråhle-Verfahren“ bekannt ist.⁴³

⁴⁰Christmann 2011, S.35

⁴¹vgl. Christmann 2011, S.36

⁴²vgl. Schüffler 2012, S.183

⁴³vgl. Christmann 2011, S.36

2.5. Fachdidaktische Überlegungen

2.5.1. Aufgaben und Unterrichtsideen

Exkurse zum Thema in Schulbüchern

Die Thematik der musikalischen Stimmungen wird von Mathematikbüchern immer wieder aufgegriffen. Einige Schulbücher bieten Exkurse zum Thema an. Das Buch „Das ist Mathematik 2“ enthält zwei Seiten mit dem Titel „Brüche und Bruchzahlen“. Ausgehend von Pythagoras, seinem Leben und dem damit verbundenen Ideal der Tetraktýs werden die Verhältnisse von Prim, Oktav, Quint und Quart in pythagoreischer Stimmung mit Hilfe von Saitenlängen erklärt. Anschließend werden die Saitenlängen von Geige und Cello verglichen. Durch einfache Rechnungen wird deutlich, dass die Saiten beim Cello zwar länger sind, die Proportion einer Oktav aber sowohl bei der Geige als auch beim Cello $\frac{2}{1}$ beträgt.⁴⁴

Im Schulbuch für die dritte Klasse („Das ist Mathematik 3“) ist ein Exkurs unter dem Titel „Verhältnisse und Proportionen“ zu finden, in dem das Thema „Sphärenharmonie“ vorgestellt wird. Die Pythagoreer glaubten, dass die Himmelskörper – wie auch die Intervalle – in Verhältnissen kleiner ganzer Zahlen voneinander entfernt seien und so den Gesetzen der Harmonie gehorchten. Durch diese Proportionen erklinge eine göttliche Musik – die Sphärenmusik. Diese Inhalte können in der siebten Schulstufe unter dem Themengebiet „Verhältnisse und Proportionen“ angesprochen werden. Im zitierten Buch wird in diesem Kapitel auch der Abstraktionsprozess von der Wirklichkeit zum mathematischen Denken erklärt.⁴⁵

Im Schulbuch „Thema Mathematik 5“ werden im Kapitel „Zahlen in der Musik“ musikalische Stimmungen angesprochen. Auch hier bildet die pythagoreische Stimmung einen Ausgangspunkt. Dieses Stimmungsprinzip, das pythagoreische Komma und damit verbundene Probleme (vgl. Abschnitt 2.2) werden beschrieben. Anschließend wird die gleichschwebend temperierte Stimmung vorgestellt und in einer Tabelle mit dem pythagoreischen Stimmungssystem verglichen.⁴⁶

Stimmungssysteme

Das Heft „Tonleitern der Weltkulturen für Auge und Ohr“ der Reihe „Impulse für das interkulturelle Lernen“ beinhaltet Aufgaben zu verschiedenen Stimmungssystemen. Einige der folgenden Aufgaben wurden durch diese inspiriert:

⁴⁴vgl. Humenberger (Hrsg.) 2008, S.32f

⁴⁵vgl. Humenberger (Hrsg.) 2009, S. 112f

⁴⁶vgl. Brand u.a. 2012 (5. Klasse), S.42f

Aufgabe 2.1. ⁴⁷ Geht man vom Kammerton a^1 ($\hat{=}$ 440 Hz) vier Oktaven nach unten, kommt man zum tiefsten Ton des Klaviers.

- a) Gib die Frequenz dieses Tones an!
- b) Wie lang müsste eine Monochordsaite zur Erzeugung dieses Tones sein, wenn ein 20 cm langes Teilstück mit 440 Hz schwingt?

Aufgabe 2.2. Berechne für die Töne einer Dur-Tonleiter in reiner Stimmung jeweils die Abstände (d.h. Frequenzverhältnisse) zu den Nachbartönen (Ganz- und Halbtonschritte). Was fällt dir auf?

Aufgabe 2.3. ⁴⁸ Welches Intervall erhältst du (in reiner Stimmung), wenn du zuerst den Grundton einer Monochordsaite von 120 cm Länge spielst und die Saite anschließend auf 80 cm verkürzt? Gib das Frequenzverhältnis und den Namen des Intervalls an!

Aufgabe 2.4. ⁴⁹ Im Mittelalter war das Intervall $f - h$ in der pythagoreischen Tonleiter verboten und hieß „Teufel in der Musik“.

- a) Durch welches Frequenzverhältnis kann dieses Intervall dargestellt werden?
- b) Berechne die Frequenzen der Töne f und h , wenn die Frequenz des Tones a 220 Hz beträgt!

Aufgabe 2.5. ⁵⁰ Vergleiche große Terzen in reiner, pythagoreischer und gleichschwebend temperierter Stimmung durch Berechnung der Centwerte! Welcher Wert liegt in der Mitte?

Weiterführend kann das syntonische Komma angesprochen werden:

Aufgabe 2.6. Zeige: Die große Terz ist in pythagoreischer Stimmung um das syntonische Komma größer als in reiner Stimmung!

Die folgende Aufgabe bezieht sich auf arabische Stimmung. Sie ist auch ohne Vorwissen über dieses Stimmungssystem lösbar.

Aufgabe 2.7. ⁵¹ Das Intervall $\frac{11}{9}$ teilt in der arabischen Musik die Quint in ungefähr zwei gleiche Teile.

- a) Zeige, dass Aneinanderreihen zweier solcher Intervalle annähernd eine Quint ($\frac{3}{2}$) ergibt!
- b) Teile eine Quint mit Hilfe von Centwerten in zwei exakt gleiche Teile!

Aufgabe 2.8. ⁵² Welches Frequenzverhältnis gehört zum Centwert 300?

⁴⁷vgl. Delle u.a. 1995, S.26, Aufgabe 2

⁴⁸vgl. Delle u.a. 1995, S.26, Aufgabe 9

⁴⁹vgl. Delle u.a. 1995, S.26, Aufgabe 3

⁵⁰vgl. Delle u.a. 1995, S.26, Aufgabe 8

⁵¹vgl. Delle u.a. 1995, S.26, Aufgabe 3

⁵²vgl. Delle u.a. 1995, S.26, Aufgabe 7

Mittelwerte und geometrische Folgen

Zum Thema Mittelwerte können folgende Aufgaben gestellt werden:

Aufgabe 2.9. *Zeige: In reiner Stimmung ist (jeweils bezogen auf die Frequenzverhältnisse)*

- a) *die große Terz arithmetisches Mittel von Prim und Quint.*
- b) *die Quart arithmetisches Mittel von Prim und Sext.*

Aufgabe 2.10. *In gleichschwebend temperierter Stimmung ist das Frequenzverhältnis des Tritonus gleich dem geometrischen Mittel aus den Proportionen von Prim und Oktave. Wie lautet das Tritonusverhältnis?*

Eine Aufgabe, die in ähnlicher Form in vielen Schulbüchern zu finden ist, ist folgende (hier in der Version von Malle u.a.)⁵³:

Aufgabe 2.11. *Bei der „gleichstufig temperierten Stimmung“ von Musikinstrumenten wird jede Oktav in zwölf gleiche Halbtonintervalle unterteilt. In der so entstehenden chromatischen C-Dur-Tonleiter bilden die Frequenzen der Töne c^1 , cis^1 , d^1 , dis^1 , e^1 , f^1 , fis^1 , g^1 , gis^1 , a^1 , ais^1 , h^1 , c^2 die geometrische Folge $(f_0, f_1, \dots, f_{12})$, wobei für c^2 und c^1 das Frequenzverhältnis $f_{12} : f_0 = 2 : 1$ beträgt und der Kammerton a^1 die Frequenz $f_9 = 440$ Hz hat.*

- a) *Zeige: Der Quotient q der geometrischen Folge $(f_0, f_1, \dots, f_{12})$ lautet $\sqrt[12]{2} \approx 1,0595!$*
- b) *Gib die Frequenzen $f_0, f_1, \dots, f_{12}$ aller Töne der chromatischen C-Dur-Tonleiter an!*⁵⁴
- c) *Eine Quint setzt sich aus 7 Halbtonintervallen zusammen. Berechne das Frequenzverhältnis einer wohltemperierten Quint und vergleiche mit dem Verhältnis 3:2 einer reinen Quint.*
- d) *Der so genannte Quintenzirkel umfasst zwölf aufeinanderfolgende reine Quinten. Dies ergibt fast genau sieben reine Oktaven. Ermittle das Frequenzverhältnis eines 12 reine Quinten umfassenden Intervalls sowie eines 7 reine Oktaven umfassenden Intervalls. Der geringfügige Unterschied macht etwa einen Achtelton aus und wird als pythagoreisches Komma bezeichnet. Gib das Frequenzverhältnis des pythagoreischen Kommas an.*⁵⁵

⁵³vgl. dazu auch Götz u.a. 2010, Aufgabe 928, Brand u.a. 2012, Aufgabe 457, Timischl/Kaiser 2012, Aufgabe 9.44

⁵⁴Malle u.a. 2010 (6), 7.67

⁵⁵Malle u.a. 2007 (8), 15.05

Anwendungen aus dem Instrumentenbau

Gitarre

Im Theorieteil dieses Kapitels wurde das Verfahren von Strähle zur Berechnung der Bundabstände einer Gitarre beschrieben. Dieses kann im Rahmen des Geometrieunterrichts angesprochen und konstruiert werden. Norbert Roth entwickelte ein Konzept zum Thema „Gitarre und Exponentialfunktion“, in dem er einen anderen Zugang aufzeigt. Er schlägt zwei verschiedene Wege vor – einen empirisch-induktiven und einen theoretisch-deduktiven Weg (z.B. als Möglichkeit zur Vertiefung). In beiden Ansätzen werden Gesetzmäßigkeiten von Bundabständen einer Gitarre untersucht und folgende Fragen behandelt: „Unterliegen die Bundabstände einer Gesetzmäßigkeit? Wie würden sich die Bundabstände weiter verändern, wenn man das Griffbrett über das Schalloch hinaus bis zum Steg hin verlängern würde? Wie viele Bünde könnte es dann theoretisch geben, wie viele Töne könnte man spielen?“⁵⁶

Roth schlägt als ersten Weg vor, Bundabstände ($a(x)$), sowie Abstände von den Bünden zum Steg ($l(x)$) und zum Sattel ($k(x)$) der Gitarre zu messen und auf Gesetzmäßigkeiten hin zu untersuchen. Experimente ergeben, dass vor allem die Werte $l(x)$ von Bedeutung sind, um die oben gestellten Fragen zu beantworten. Die Variable x gibt die Nummer des Bunds an. Der Sattel ist in diesem Fall der 0-te Bund. Die Länge der Saite wird mit l_0 bezeichnet. Bei einer klassischen Gitarre beträgt dieser Wert in der Regel $l_0 = 65$ cm. Für die Abstände von den Bünden zum Steg erhält man ungefähr die Werte: 65,0 cm; 61,3 cm; 57,8 cm; 54,6cm; 51,5cm, usw.⁵⁷

Nun können aufeinanderfolgende Werte auf Gesetzmäßigkeiten hin untersucht werden. Betrachtet man die Abstände von den Bünden zum Steg, so erkennt man, dass je zwei aufeinanderfolgende Werte quotientengleich sind, d.h. $\frac{l(x+1)}{l(x)} \approx 0,94$. Die Abstandsfunktion „Bund-Steg“ beträgt daher $l(x) = 650 \cdot 0,94^x$ und gibt die Länge der schwingenden Saite an. Nun kann die anfangs gestellte Frage beantwortet werden: Der fünfzigste Bund würde rund 36 mm vom Steg entfernt liegen, der fünfundsiebzigste Bund nur rund 9 mm, der hundertste Bund nur mehr rund 2 mm! Die Abstände zum Steg werden demnach immer kleiner. Da die Abstandsfunktion streng monoton fallend ist, gehen die Abstände (für $x \rightarrow \infty$) gegen Null. Roth folgert daher: „Theoretisch gibt es also unendlich viel Bünde, die sich in der Nähe des Sattels unendlich dicht drängen.“⁵⁸ Diese Aussage ist für die Praxis zwar nicht relevant, sie kann jedoch als Veranschaulichung des asymptotischen Verhaltens der Exponentialfunktion gesehen werden.

Der zweite, theoretische Weg stützt sich im Wesentlichen auf Informationen aus Physik und

⁵⁶www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/magazin/allerlei/magaufg3.pdf

⁵⁷Diese Werte ergaben sich durch eigene Messungen an einer Gitarre.

⁵⁸ebd.

Musik, wie sie im ersten und zweiten Kapitel dieser Arbeit beschrieben wurden. Zuerst wird erklärt, dass eine Oktav in zwölf Halbtonschritte geteilt werden kann und diese zwölf Bündel einer Gitarre entsprechen. Aus dem Wissen, dass eine Oktav die doppelte Frequenz eines Grundtons besitzt, wird für n Oktaven gefolgert: $f(n) = f_0 \cdot 2^n$, wobei $f(n)$ die Frequenz der n -ten Oktav ist und f_0 die Frequenz des Ausgangstons. Nun wird erklärt, dass die Oktav in zwölf „gleichmäßige“ Abstände geteilt wird, indem aufeinanderfolgenden Frequenzen derselbe Wachstumsfaktor „ q “ zugeordnet wird. Da der Wachstumsfaktor einer Oktav wie in der obigen Formel 2 beträgt, gilt: $q^{12} = 2 \Leftrightarrow q = \sqrt[12]{2}$. Da Verhältnisse von Saitenlängen umgekehrt proportional zu Frequenzverhältnissen sind, gilt: $l(x) = l_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\right)^x \approx l_0 \cdot 0,94^x$. Die Lösung im ersten Zugang lieferte also eine sehr gute Näherung!⁵⁹

Blasinstrumente

Häufig werden musikalische Stimmungen an den Verhältnissen von Saitenlängen erklärt. Die folgende Aufgabe wurde durch eine Aufgabenstellung zum Thema „Luftsäulen bei Blasinstrumenten“ im Buch „Der mathematische Werkzeugkasten“ von Georg Glaeser inspiriert:

Aufgabe 2.12. ⁶⁰ *Im gleichschwebend temperierten Stimmungssystem werden Töne erzeugt, indem die Saitenlänge bzw. Länge der Luftsäule des jeweils vorangegangenen Tons im Verhältnis $\lambda = 1 : \sqrt[12]{2}$ verkürzt wird. Wie sieht die Anordnung der „Pfeifen“ aus, wenn der Durchmesser aller Röhren konstant ist?*

Eine Aufgabe im Probewettbewerb „Mathematik ohne Grenzen“ 2000/2001 beinhaltet die Stimmung einer Panflöte:

Aufgabe 2.13. ⁶¹ *Aurelie möchte eine Panflöte aus 10 Röhren herstellen. Sie soll die 10 aufeinanderfolgenden Töne c, d, e, f, g, a, h, c¹, d¹, e¹ umfassen. Die Röhre mit dem tiefsten Ton ist 16 cm lang.*

Wenn sie die Länge einer beliebigen Röhre halbiert, so ergibt sich ein Ton, der eine Oktav höher klingt. Verkürzt sie die Röhre auf $\frac{2}{3}$ der ursprünglichen Länge, so ergibt sich ein Ton, der eine Quint höher klingt, aus c wird zum Beispiel g und aus d wird a.

Berechne die Längen der Röhren, ohne bei der Rechnung den angegebenen Tonbereich zu verlassen. Ordne sie nach der Tonleiter.

Stelle die Panflöte auf dem Antwortblatt im Maßstab 1:1 dar. Wähle als Rohrdurchmesser 1 cm.

Bau von Instrumenten

Eine besondere Motivation liegt darin, die gelernten Inhalte zum Thema Stimmungen anzuwenden, indem Schülerinnen und Schüler Instrumente selbst bauen. Das Heft „Tonlei-

⁵⁹ebd.

⁶⁰vgl. Glaeser 2008, S.427f

⁶¹www.lehrer.uni-karlsruhe.de/~za363/MoG/mog00-01p.pdf

tern der Weltkulturen für Auge und Ohr“ beinhaltet eine ausführliche Anleitung zum Bau von Xylophonen in Stimmungen der Weltmusik. Panflöten können mit einfachen Mitteln (z.B. Plastikrohren) gebaut werden. Wurden zuvor im Unterricht musikalische Stimmungen behandelt, kann eine Bauanleitung ohne Längenmaße der Röhren verfasst werden, damit die Schülerinnen und Schüler diese selbst berechnen.⁶² Diese Instrumente können z.B. fächerübergreifend im Werkunterricht hergestellt werden.

Werden Instrumente im Unterricht selbst gebaut, so können Schülerinnen und Schüler nicht nur Kenntnisse aus Akustik und Instrumentenkunde anwenden, sondern auch selbst mit diesen Instrumenten musizieren. Dies eröffnet eine Fülle von Möglichkeiten für den Musikunterricht.

2.5.2. Lösungen

Lösung 2.1.

a) $440 : 2^4 = 27,5 \text{ Hz}$

b) $20 \cdot 2^4 = 320 \text{ cm} = 3,2 \text{ m}$

Lösung 2.2. Vgl. Tabelle 2.1 auf Seite 49! Die mittlere Spalte der reinen Stimmung zeigt, dass es in diesem System zwei verschiedene Ganztöne gibt.

Lösung 2.3. $\frac{120}{80} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{Quint}$

Lösung 2.4.

a) Der Ton f ist die Quarte der C-Dur-Tonleiter ($\frac{4}{3}$), der Ton h ist die große Septim ($\frac{243}{128}$).
Daher gilt: $\frac{243}{128} : \frac{4}{3} = \frac{729}{512} \approx 1,4238$.

Eine alternative Rechnung kann vom Ganzton der pythagoreischen Stimmung ausgehen:

$$\left(\frac{9}{8}\right)^3 = \frac{729}{512}$$

b) f: $220 \cdot \frac{64}{81} \approx 173,8 \text{ Hz}$; h: $220 \cdot \frac{9}{8} = 247,5 \text{ Hz}$

Lösung 2.5. Pythagoreische Terz: $\frac{81}{64} \Rightarrow 1200 \cdot \log_2 \left(\frac{81}{64}\right) \approx 408 \text{ Cent}$

Reine Terz: $\frac{5}{4} \Rightarrow 1200 \cdot \log_2 \left(\frac{5}{4}\right) \approx 386 \text{ Cent}$

Gleichschwebend temperierte Terz: $\frac{(\sqrt[12]{2})^4}{1} \Rightarrow 1200 \cdot \log_2 ((\sqrt[12]{2})^4) = 400 \text{ Cent}$

Lösung 2.6. Pythagoreische Terz: $\frac{81}{64}$; reine Terz: $\frac{5}{4}$

Daher gilt: $\frac{81}{64} : \frac{5}{4} = \frac{81}{80}$.

⁶²Einfache Bauanleitungen finden sich z.B. unter

<http://schultopia.blogspot.co.at/2011/09/anleitungen-panflote-stockeinsaiter-und.html> oder
www.br-online.de/kinder/spielen-werkeln/basteln/2005/00976/

Lösung 2.7.

a) $\left(\frac{11}{9}\right)^2 = \frac{121}{81} \approx 1,4938 \approx 1,5 = \frac{3}{2}$

b) $1200 \cdot \log_2\left(\frac{3}{2}\right) : 2 \approx 351 \text{ Cent}$

Lösung 2.8. $1200 \cdot \log_2(I) = 300 \Leftrightarrow \log_2(I) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I = 2^{\frac{1}{4}} \approx 1,1892$

Lösung 2.9.

a) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$

b) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}}{2} = \frac{4}{3}$

Lösung 2.10. $\sqrt{\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1}} = \sqrt{2}$

Da der Tritonus vom Grundton aus in sechs Halbtonschritten erreicht wird, stimmt dieses Ergebnis ($(\sqrt[12]{2})^6 = \sqrt{2}$).

Lösung 2.11.

a) Die Folge ist geometrisch, d.h. $f_n = f_0 \cdot q^n$. Aus dem Frequenzverhältnis der Oktav folgt: $\frac{2}{1} = \frac{f_{12}}{f_0} = \frac{f_0 \cdot q^{12}}{f_0} = q^{12} \Leftrightarrow q = \sqrt[12]{2}$.

b) Aus der obigen Formel ergeben sich (gerundet auf Hz) die folgenden Frequenzen:

c^1	c^{is^1}	d^1	d^{is^1}	e^1	f^1	f^{is^1}	g^1	g^{is^1}	a^1	a^{is^1}	h^1	c^2
262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	494	523

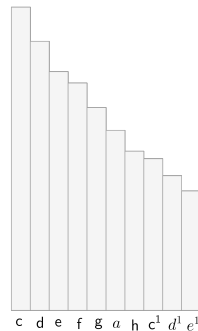
c) $q^7 = (\sqrt[12]{2})^7 \approx 1,4983 < 1,5 = \frac{3}{2}$

d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 2^7 \approx 1,0136$

Lösung 2.12. Die Länge der Röhren schrumpft exponentiell: Seien $l_0, l_1, l_2, \dots$ die Längen der Pfeifen (in Halbtonschritten angeordnet, wobei l_0 die längste Pfeife ist.) Dann ist $l_i = \lambda^i \cdot l_0$.

Lösung 2.13. $l_c = 16 \text{ cm}$; $l_{c^1} = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8 \text{ cm}$; $l_g = l_c \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,7 \text{ cm}$; $l_{d^1} = l_g \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{9} \approx 7,1 \text{ cm}$;
 $l_d = l_{d^1} \cdot 2 = \frac{128}{9} \approx 14,2 \text{ cm}$; $l_a = l_d \cdot \frac{2}{3} = \frac{256}{27} \approx 9,5 \text{ cm}$; $l_{e^1} = l_a \cdot \frac{2}{3} = \frac{512}{81} \approx 6,3 \text{ cm}$;
 $l_e = l_{e^1} \cdot 2 = \frac{1024}{81} \approx 12,6 \text{ cm}$; $l_h = l_e \cdot \frac{2}{3} = \frac{2048}{243} \approx 8,4 \text{ cm}$; $l_f = l_{c^1} \cdot \frac{3}{2} = 12 \text{ cm}$

Tonleiter: c (16 cm), d (14,2 cm), e (12,6 cm), f (12 cm), g (10,7 cm), a (9,5 cm), h (8,4 cm), c^1 (8 cm), d^1 (7,1 cm), e^1 (6,3 cm)



2.5.3. Lehrplanbezug

Im Mathematikunterricht können musikalische Stimmungen und die zugehörigen Frequenzverhältnisse im Rahmen der Bruchrechnung in der zweiten und dritten Klasse besprochen werden. Der Lehrplan der zweiten Klasse sieht Rechnen mit Bruchzahlen vor, in der dritten Klasse soll die Fähigkeit „Rationale Zahlen in verschiedenen Formen deuten können“ erworben werden.⁶³ In der sechsten Klasse kann die Cent-Skala im Zusammenhang mit dem Logarithmus („Definieren, Darstellen und Untersuchen von Potenzfunktionen, von Exponential- und Logarithmusfunktionen [...]“) und die gleichschwebend temperierte Stimmung bei der Behandlung von geometrischen Folgen bzw. der Exponentialfunktion thematisiert werden.⁶⁴

Der Musiklehrplan sieht explizit keine Thematisierung musikalischer Stimmungen vor. Allerdings können die oben erwähnten Auswirkungen verschiedener Stimmungssysteme auf Musikpraxis und Komposition im Bereich der Werkkunde z.B. in der fünften und sechsten Klasse („Klang und Funktion von Instrumenten und Ensembles in verschiedenen Epochen und Kulturkreisen, Werkkunde im kulturhistorischen Kontext“) oder in der siebten und achten Klasse („Vergleich musikalischer Gestaltungsprinzipien und Erkennen zeitbedingter Schwerpunkte und typischer stilistischer Merkmale in verschiedenen Epochen“) angesprochen werden.⁶⁵ Der Bau von Instrumenten ist im Lehrplan der ersten und zweiten Klasse zu finden: „Musizieren mit herkömmlichen, selbstgebauten, elektronischen und Körperinstrumenten“.⁶⁶

⁶³vgl. www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf

⁶⁴vgl. www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf

⁶⁵vgl. www.bmukk.gv.at/medienpool/11867/lp_neu_ahs_15.pdf

⁶⁶vgl. www.bmukk.gv.at/medienpool/790/ahs15.pdf

Komponisten stießen immer wieder auf Grenzen der Notation. Charles Ives stand vor dem Problem, nicht weniger als einen Halbton komponieren zu können, um die Nähe Gottes zum Menschen auszudrücken. Hodges beschreibt, dass Ives am Ende offensichtlich aufgab und dem Sänger bzw. der Sängerin die Entscheidung überließ:⁴



Abbildung 3.2.: aus: Charles Ives, Duty⁵

Die Notenlinien lassen eine Notation von Halbtönen zu (chromatische Notation). Bleibt das Stück innerhalb einer Tonart und werden keine Vorzeichen verwendet, so ist es diatonisch, d.h. Abstände von Halbtönen und Ganztönen wechseln sich ab. Verlässt man die Grenzen der westeuropäischen Kunstmusik, so findet man schnell eine Erweiterung dieses Tonraumes, z.B. durch Vierteltöne der Makam-Musik.

Andererseits beschäftigten sich Komponisten auch mit der Frage, Unendlichkeit in der Musik auszudrücken. Richard Wagner löste dies in Parsifal, indem er die Tondauer auf dem Wort „Ewigkeit“ besonders lange komponierte:⁶



Abbildung 3.3.: aus: Richard Wagner, Parsifal, 2.Akt⁷

Komponisten „Neuer Musik“ gingen noch einen Schritt weiter. John Cage schuf mit seinem berühmten Werk „4'33“ auskomponierter Stille sozusagen ein „unendlich“ leises Stück. Ein fast „unendlich langsames“ Stück schrieb er für Orgel. Die Aufführung seines Werkes im Halberstadter Orgelprojekt wird noch bis 2640 dauern! György Ligety schrieb ein Stück für 100 Metronome. Bei dieser Anzahl fällt es nicht auf, wenn ein Metronom dazukommt oder wegfällt. Der Hörer nimmt eine Überlagerung „unendlich“ vieler Rhythmen wahr.⁸

Die Liste der Versuche, Unendlichkeit in der Musik auszudrücken, ließe sich noch lange fortsetzen. Im Folgenden werden nun Strukturen beschrieben, die mit dem Fünfliniensystem notiert werden können. Betrachtet man dieses System, so findet man bereits in der Notation des Rhythmus einfache mathematische Strukturen. Diese können im Rahmen der Bruchrechnung bereits in der Sekundarstufe I angesprochen werden und werden im folgenden Abschnitt näher beschrieben.

⁴vgl. Hodges 2003, S.95⁵ ebd.⁶ebd.⁷ebd.

⁸vgl. Christmann 2011, S.19f

3.2. Musikalische Bruchrechnung

Um Bruchrechnung in musikalischem Zusammenhang behandeln zu können, sind Grundkenntnisse der Notenschrift erforderlich. Tondauern werden im Fünfliniensystem durch die Notenform angegeben. Hälse, Fähnchen, usw. bestimmen den jeweiligen *Notenwert*. Zu jedem Notenwert existiert eine Pause derselben Länge (vgl. Tabelle 3.1). Die einzelnen Töne werden in der westeuropäischen Kunstmusik, aber auch in vielen anderen Musiksprachen, meist in Takten angeordnet. Es werden verschiedene Taktarten unterschieden, die am Beginn eines Werkes als Bruchzahl oder durch Sonderzeichen angegeben werden. Die Benennung der Taktart orientiert sich am Grundschatz des Stücks, dieser steht im Nenner dieser Bruchzahl. Der Zähler gibt an, wie viele Grundsätze pro Takt zusammengefasst werden. Der erste Schlag jedes Taktes erhält musikalisch stets ein besonderes Gewicht.⁹

Beispiel 3.1 (Dreivierteltakt). *Als Grundsatz eines Dreivierteltaktes gilt die Viertelnote. Drei Viertelnoten werden zu je einem Takt zusammengefasst.*

Wert	Note	Pause
Ganze		
Halbe		
Viertel		
Achtel		
Sechzehntel		
Zweiunddreißigstel		

Tabelle 3.1.: Noten- und Pausenwerte

Die Abbildung zeigt, dass in der Musik vor allem Potenzen des Wertes $\frac{1}{2}$ von Bedeutung sind. Neben dieser Zweiteilung der Noten sind auch andere Teilungen möglich. Wird eine ganze Note in drei gleiche Teile geteilt, so wird dies mit einer Halbetriole notiert. Eine Viertelnote teilt den Wert einer Halben Note in drei gleich große Teile etc. Auf diese Weise sind noch weitere Teilungen (Duolen, Quartolen, Quintolen, etc.) möglich. Diese Notenwerte werden mit einer Zahl (z.B. „3“ bei einer Triole) zusammengefasst. Die Abbildung 3.4 soll Dreiteilungen durch Triolen veranschaulichen:

⁹vgl. Michels 1977, S.67

¹⁰vgl. Neumann 2010, S.20

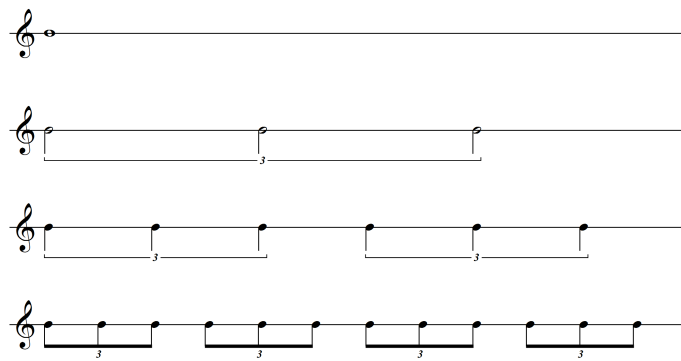


Abbildung 3.4.: Triolen¹⁰

Ein Punkt nach einem Notenwert verlängert die Note um die Hälfte ihres Wertes. Eine punktierte Viertelnote hat daher die Länge $\frac{3}{8}$.¹¹

Unterrichtsideen, die mit Hilfe dieser Grundlagen umgesetzt werden können, werden der Übersichtlichkeit halber im fachdidaktischen Teil dieses Kapitels (Abschnitt 3.5.1) näher beschrieben. Der folgende Abschnitt widmet sich dem Thema Symmetrie in der Musik.

3.3. Symmetrie in der Musik

3.3.1. Mathematische Grundlagen

Symmetrie ist in der Musik – wie auch in Natur und Technik – eine wesentliche Erscheinungsform. Das Wort kommt aus dem Griechischen und bedeutet Gleichmaß, Gleichmäßigkeit.¹² Symmetrie steht der Unordnung, dem Chaos gegenüber und wird häufig in Zusammenhang mit Schönheit und Ordnung gebracht.¹³ Geometrisch wird eine Transformation auf ein Objekt angewandt, wobei eine oder mehrere Eigenschaften des Objekts unverändert bleiben.¹⁴ Darvas verallgemeinert diese Definition noch weiter: „We can speak of symmetry, if in the course of any kind of (not necessarily geometrical) transformation (operation) at least one (not necessarily geometrical) characteristic of the affected (arbitrary and not necessarily geometrical) object remains invariant (unchanged).“¹⁵ Solche Transformationen werden in der Abbildungsgeometrie beschrieben:

Definition 3.1 (Kongruenzabbildung). *Wird eine Figur in der Ebene so abgebildet, dass Längen und Winkel von Bild und Urbild dieser Figur übereinstimmen, sie sich also nur durch ihre Lage in der Ebene unterscheiden, so heißen die beiden Figuren kongruent oder deckungsgleich. Eine solche Abbildung wird auch Kongruenzabbildung genannt.*¹⁶

¹¹vgl. Michels 1977, S.67

¹²vgl. Amon 2011, S.533

¹³vgl. Tarassow 1993, S. 17

¹⁴vgl. Darvas 2007, S.20

¹⁵Darvas 2007, S.20

¹⁶vgl. Kirsche 2006, S.72

Spiegelung, Drehung, Translation und Schubspiegelung sind Kongruenzabbildungen:

Definition 3.2 (Spiegelung). *Kann jedem Punkt P einer Figur in der Ebene ein Bildpunkt P' so zugeordnet werden, dass die Verbindungsstrecke $\overline{PP'}$ auf eine vorgegebene Gerade normal steht und von ihr halbiert wird, so liegt eine (Achsen-)Spiegelung vor.*¹⁷

Definition 3.3 (Drehung). *Kann jedem Punkt P einer Figur in der Ebene ein Bildpunkt P' so zugeordnet werden, dass beide Punkte gleich weit von einem festen Punkt X entfernt sind und der Winkel PXP' konstant ist, so liegt eine Drehung vor.*¹⁸

Definition 3.4 (Translation). *Kann jedem Punkt P einer Figur in der Ebene ein Bildpunkt P' so zugeordnet werden, dass dieser von P aus in konstanter Richtung konstante Entfernung hat, so liegt eine Translation vor.*¹⁹

Definition 3.5 (Schubspiegelung). *Kann jeder Punkt P einer Figur in der Ebene um einen bestimmten Vektor v verschoben und anschließend an einer zu diesem Vektor parallelen Geraden g gespiegelt werden, so liegt eine Schubspiegelung vor.*²⁰

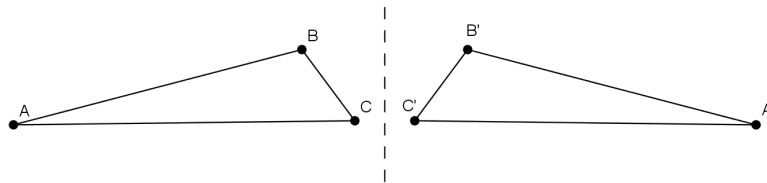


Abbildung 3.5.: Achsenspiegelung

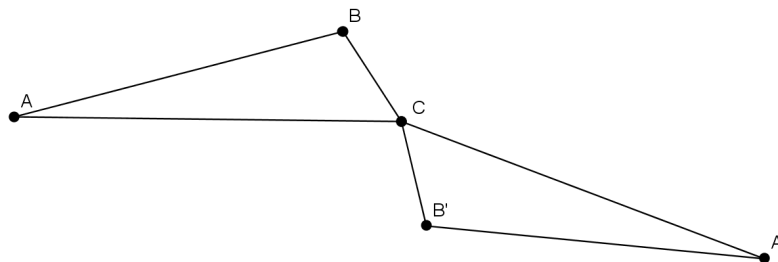


Abbildung 3.6.: Drehung um 160° , Drehachse = C

Eine weitere Gruppe symmetrischer Transformationen bilden Ähnlichkeitsabbildungen. In diesem Fall sind Bild und Urbild nicht kongruent. Ein neuer Begriff, die zentrische Streckung, wird benötigt, um Ähnlichkeitsabbildungen zu definieren.

¹⁷vgl. Schupp 1968, S.5

¹⁸vgl. Schupp 1968, S.7

¹⁹vgl. Schupp 1968, S.5

²⁰vgl. Schupp 1968, S.21

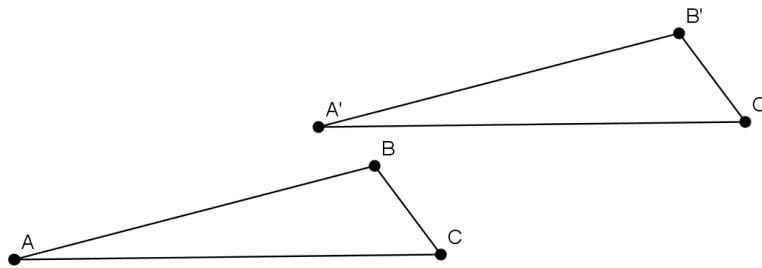


Abbildung 3.7.: Translation

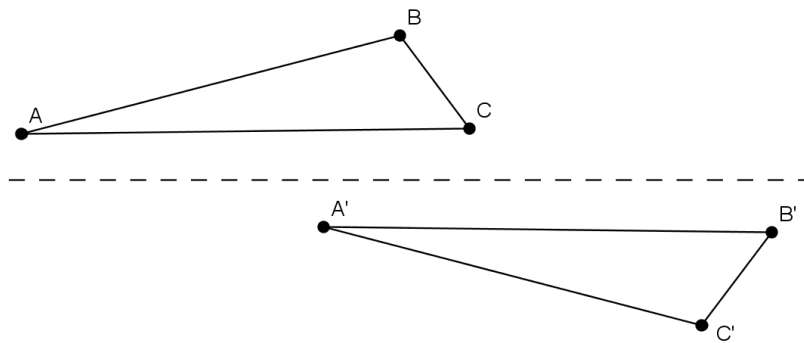


Abbildung 3.8.: Schubspiegelung

Definition 3.6 (Zentrische Streckung). *Existiert ein Fixpunkt S in der Ebene ($S = S'$) und erhält jeder Punkt $P \neq S$ einen Bildpunkt P' , sodass P' auf der Strecke $\overline{PS}$ liegt und $P'S = k \cdot PS$, $k > 0, k \in \mathbb{R}$ gilt, dann liegt eine zentrische Streckung vor.²¹*

Mit Hilfe dieses Begriffs und des Kongruenzbegriffs können nun Ähnlichkeitsabbildungen definiert werden.

Definition 3.7 (Ähnlichkeitsabbildung). *Kann eine Figur durch Kongruenzabbildung und zentrische Streckung in eine andere übergeführt werden, so heißen die zwei Figuren ähnlich. Transformationen, bei denen Bild und Urbild ähnlich sind, heißen Ähnlichkeitsabbildungen.²²*

Durch Ähnlichkeitsabbildungen werden Figuren daher vergrößert oder verkleinert.²³

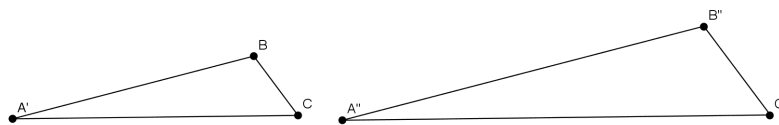


Abbildung 3.9.: Ähnlichkeitsabbildung - Vergrößerung um den Faktor 1,5

²¹vgl. Schupp 1968, S.32

²²vgl. Schupp 1968, S.40f

²³vgl. Kirsche 2006, S.98

3.3.2. Musikalische Transformationen vs. Abbildungsgeometrie

Nun stellt sich die Frage, welche Transformationen für die Musik von Bedeutung sind. Für Komponisten spielt die Arbeit mit Motiven, der kleinsten musikalisch-melodischen Sinn-einheit²⁴, eine große Rolle. Bachs Werke sind reich an musikalischen Transformationen, Schönberg und seine Schüler gestalteten mit Zwölftonreihen und ihren Transformationen ganze Stücke. Einen Höhepunkt erlangte das Prinzip des Motivs als Keimzelle von Werken durch die „motivisch-thematische Arbeit“, wie sie z.B. von Josef Haydn angewandt wurde. Im Folgenden sollen nun wesentliche Möglichkeiten dieser Arbeit mit Motiven, wie sie Amon in seinem Lexikon der Harmonielehre zusammenfasst, beschrieben und Verbindungen zur Mathematik aufgezeigt werden.²⁵

Im Gegensatz zur euklidischen Ebene können in der Musik Operationen nur in horizontaler oder vertikaler Richtung ausgeführt werden (vgl. Abschnitt 3.1), da die beiden Dimensionen Tonhöhe und Lautstärke nicht miteinander vergleichbar sind.²⁶ Zum leichteren Verständnis werden die unten angeführten Transformationen am Beispiel des folgenden Motivs gezeigt.



Abbildung 3.10.: Motiv²⁷

Musikalisch gibt es immer zwei Arten des Umgangs mit Transformationen. Entweder werden die Intervallgrößen exakt beibehalten (real) oder an die jeweilige Tonart angepasst (tonal). Bei den folgenden Notenbeispielen handelt es sich immer um eine reale Beantwortung. Das einfachste und auch häufigste Verfahren ist die *Wiederholung* eines Motivs. Geometrisch entspricht dies einer horizontalen *Translation*.



Abbildung 3.11.: Wiederholung

Wiederholungen sind unter anderem deshalb bedeutend, weil Musik in der Zeit abläuft und wiederholte Motive und Phrasen dem Hörer bzw. der Hörerin einen leichteren Zugang ermöglichen.²⁸

²⁴vgl. Amon 2005, S.193

²⁵vgl. Amon 2005, S.193-196

²⁶vgl. www.brightschooll.com/downloads/MusicalSymmetry.pdf

²⁷Notenbeispiele geschrieben mit Finale, das Bild der Schildkröte wurde übernommen von www.kindergarten-kitzingen.de/grafik/schildkroete.gif

²⁸vgl. Amon 2005, S.194

Eine *Imitation* ist eine „Wiederholung eines Motivs in einer anderen Stimme“²⁹. Anschaulich ist dies vergleichbar mit einer Translation, in der sich auch die Farbe des Objekts verändert. Musikalisch kann dadurch die Klangfarbe variiert werden.



Abbildung 3.12.: Imitation

Ähnlich verhält es sich auch mit einer *Sequenz*, d.h. der „Wiederholung des Motivs auf einer anderen Stufe der Skala“³⁰. Sie tritt aus ähnlichen Gründen wie die Wiederholung häufig auf und ermöglicht ein Ausbrechen aus der Tonart.³¹ Geometrisch ist dies eine horizontale und vertikale Translation.



Abbildung 3.13.: Sequenz

Neben Translation gibt es auch die Möglichkeit, ein Motiv zu spiegeln. Eine Spiegelung bezogen auf eine horizontale Achse (betrachtet mit unserem Notensystem) heißt auch *Umkehrung*.

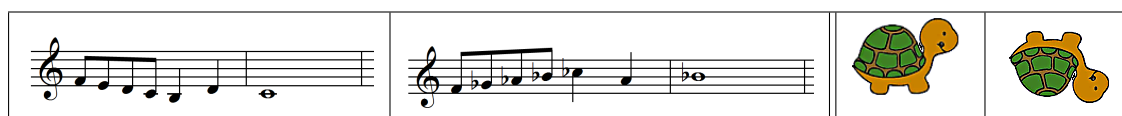


Abbildung 3.14.: Umkehrung

Eine Spiegelung bezogen auf eine vertikale Achse wird in der Musik *Krebs* genannt.



Abbildung 3.15.: Krebs

²⁹ Amon 2005, S.194

³⁰ Amon 2005, S.194

³¹ ebd.

Werden diese beiden Operationen hintereinander ausgeführt, so heißt dies Spiegelkrebs oder auch *Krebsumkehrung*. Mathematisch kann dies durch eine Drehung um 180° erreicht werden.



Abbildung 3.16.: Krebsumkehrung

Die drei letztgenannten Gestaltungsprinzipien gewannen in der Zwölftonmusik an Bedeutung. Da es in dieser Musik kein tonales Zentrum geben durfte, stand die Zwölftonreihe mit ihren Transformationen im Mittelpunkt.³²

Werden die Notenwerte oder Intervalle eines Motivs vergrößert, so spricht man von *Augmentation*. Mathematisch kann dies mit einer Ähnlichkeitsabbildung verglichen werden. Deshalb ist auch diese Form der Veränderung irgendwie symmetrisch. Analog dazu werden bei der *Diminution* Notenwerte oder Intervalle eines Motivs verkleinert.



Abbildung 3.17.: Augmentation und Diminution

Die vier übrigen Möglichkeiten „motivisch-thematischer Arbeit“, die Amon nennt, sind keine Symmetrieabbildungen. Der Vollständigkeit halber werden sie hier trotzdem erwähnt: In der *Abspaltung* werden Töne weggenommen, durch *Erweiterung* oder Entwicklung kommen Noten zum Motiv dazu.



Abbildung 3.18.: Abspaltung und Erweiterung

Schließlich gibt es auch noch die Option der „Variation“, z.B. durch Triller oder andere Verzierungen. Da es sehr viele verschiedene Möglichkeiten gibt, ein Motiv zu variieren, lässt sich diese Transformation nicht einfach mathematisch beschreiben.

³²Hogdes/Wilson 2002, S.86



Abbildung 3.19.: Variation

Als letzten Punkt nennt Amon in seinem Buch den Begriff der „*Entwickelnden Variation*“. Dies ist eine Kompositionsweise, in der aus einem motivischen Kern jeder Ton eines Stücks abgeleitet wird, indem das Motiv laufend variiert und entwickelt wird. Diese Technik wurde u.a. von Brahms, Mahler oder Schönberg angewandt. Auch sie ist nicht eindeutig mathematisch beschreibbar, jedoch ist dies eine Form konstruktiv-struktureller Arbeit.³³

3.3.3. Bandornamente

Etwas größere Strukturen, die aus den oben erwähnten Elementen bestehen, lassen sich mit der Theorie von Bandornamenten beschreiben. Ein Bandornament ist ein „sich periodisch wiederholendes Muster auf einem langen Band“³⁴. Solche Muster entstehen durch geometrische Transformation eines Elements. Sie wurden zu allen Zeiten für dekorative Zwecke erstellt und sind auf Bordüren, Gartenzäunen etc. zu finden.³⁵ Bandornamente lassen sich in eine Richtung unendlich lange weiterführen, während sie in der anderen Richtung i.A. beschränkt sind. Da die Zeitachse der Musik (zumindest theoretisch) unendlich ist, während die Tonhöhe nach oben und unten beschränkt ist, lässt sich die Theorie der Bandornamente gut auf musikalische Strukturen übertragen. Insgesamt können sieben Gruppen von Bandornamenten unterschieden werden.³⁶ Die Tabelle 3.2 auf Seite 73 zeigt je ein Beispiel aus Kunst und Musik aus jeder dieser Gruppen. Die Muster in der linken Spalte wurden aus dem Buch von Darvas³⁷ übernommen. Diesen werden in der rechten Spalte Auszüge aus Debussys „Trois Nocturnes“ gegenübergestellt, die Hart³⁸ in ihrem Artikel veröffentlichte und mit Fußspuren illustrierte.

Bei allen Bandornamenten liegt eine Translationssymmetrie vor. Im ersten Fall ist dies die einzig angewandte Transformation. In der zweiten Gruppe werden die Objekte (die nicht notwendigerweise symmetrisch sind) zusätzlich an der Geraden, die das Band längs halbiert, gespiegelt. Drittens kann das Element durch Schubspiegelung transformiert werden. Die vierte Gruppe entsteht durch wiederholte Spiegelung bezüglich einer vertikalen Achse, die fünfte durch Drehung um 180°. Im sechsten Fall kommt zu dieser Drehung noch eine Spiegelung an einer vertikalen Achse hinzu. Schließlich gibt es siebtens auch noch die

³³vgl. Amon 2005, S.194-196

³⁴Tarassow 1993, S.39

³⁵vgl. Amon 2011, S.535

³⁶vgl. www.brightschool.com/downloads/MusicalSymmetry.pdf

³⁷vgl. Darvas 2007, S.77-83

³⁸vgl. www.brightschool.com/downloads/MusicalSymmetry.pdf

Möglichkeit, horizontale und vertikale Spiegelungen zu kombinieren.³⁹

	Muster	Musik
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Tabelle 3.2.: Bandornamente⁴⁰

Zusätzlich zu den sieben Gruppen von Bandornamenten können auch 17 „wesentlich verschiedene Symmetriearten ebener Flächenornamente“⁴¹ beschrieben werden, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll. Sie besitzen im Gegensatz zu Bandornamenten zwei Trans-

³⁹vgl. Tarassow 1993, S. 39-41

⁴⁰vgl. Darvas 2007, S.77-83 und www.brightschoool.com/downloads/MusicalSymmetry.pdf

⁴¹Tarassow 1993, S. 43

lationsrichtungen. Hart zeigt in ihrem Artikel 14 Notenbeispiele zu Gruppen von Flächennormanten in der Musik. Diese Theorie lässt sich auch auf dreidimensionale Strukturen fortsetzen. Außerdem entstehen neue Variationen, indem z.B. weitere Parameter wie die Farbe der Ornamente (Musik: Klangfarbe) betrachtet werden.⁴²

3.3.4. Weitere Symmetrien in der Musik

Auch Musikformen sind häufig symmetrisch. Zur genaueren Untersuchung muss der Zeitfaktor in der Musik berücksichtigt werden: „Klingende Musik ist dem Zeitablauf unterworfen. Damit ist sie der optischen Realisation der Symmetrie und dem darauf beruhenden vergleichenden Messen nicht direkt zugänglich. Denn nicht nur der Vorgang des Hörens besteht in der Zeit, auch die Musik selbst, als Gehörtes, vergeht mit der Zeit. Symmetrien sind aber dennoch auch in der Musik als zeitliche, räumliche, klangliche und auch systematische Strukturen allgegenwärtig.“⁴³

Ein Beispiel einer symmetrischen Form in der Musik ist die ABA-Form (bei Liedern: dreiteilige Liedform), die sehr häufig auftritt. Sie beginnt mit einem Teil A, auf den ein kontrastierender Mittelteil (B) folgt. Anschließend wird der erste Teil nochmals wiederholt. Ähnlich ist das Prinzip der Reprise, wie es z.B. in der Sonatensatzform vorkommt. In dieser speziellen Art, nach der Sonaten aufgebaut sind, wird der Anfang (Exposition) nach einem Mittelteil (Durchführung) in der Reprise wieder aufgenommen. Die Kunst erlaubt natürlich Variation dieser Teile, weshalb Wiederholungen oft leicht verändert werden.

Im Bogenrondo werden die Teile ebenfalls symmetrisch angeordnet, z.B. in der Form ABACABA. Wegen der oben beschriebenen Zeitkomponente werden die wiederholten Teile stets „von vorne nach hinten“ gespielt. So ist ein Wiedererkennungswert gewährleistet. Es sind jedoch auch Palindrome, d.h. Formen, die in beide Richtungen gelesen dasselbe ergeben (vgl. „OTTO“), in der Musik zu finden. In der Arbeit mit Motiven ermöglicht der Krebs das Bilden von Palindromen. Haydn komponierte für seine 47. Sinfonie ein Menuett, das als Ganzes als Palindrom angelegt ist (vgl. dazu Seite 97 und Abbildung A.7, Seite 127)

Symmetrische Strukturen sind außerdem in der Dauer der Teile, der Taktanzahl, Tonarten, Besetzung der Stimmen etc. zu finden. Beispiele für symmetrische Akkorde sind der verminderte und übermäßige Dreiklang, die aus jeweils zwei gleichen Intervallen bestehen (verminderter Dreiklang: zwei kleine Terzen, übermäßiger Dreiklang: zwei große Terzen). Schönberg und seine Schüler nutzten das Prinzip der Symmetrie auch zur Konstruktion von Zwölftonreihen.⁴⁴

⁴²vgl. Darvas 2007, S.74

⁴³Amon 2011, S.538

⁴⁴vgl. Amon 2011, S.538-541

Im folgenden Abschnitt wird ein Verhältnis vorgestellt, das in der Literatur immer wieder im Zusammenhang mit Musik erwähnt wird: der goldene Schnitt. Er ist asymmetrisch, stellt aber unter allen Asymmetrien eine Sonderform dar.⁴⁵

3.4. Goldener Schnitt und Fibonacci-Zahlen

3.4.1. Mathematische Grundlagen

Goldener Schnitt

Definition 3.8 (Goldener Schnitt). *Ein Punkt P teilt eine Strecke $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt, falls das Verhältnis der größeren Teilstrecke zur kleineren gleich dem Verhältnis der ganzen Strecke zum größeren Teil ist.*⁴⁶

Für jede Strecke gibt es zwei Punkte, die diese Eigenschaft erfüllen:

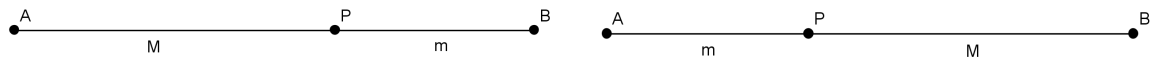


Abbildung 3.20.: Goldener Schnitt

Die größere Teilstrecke werde nun wie in Abbildung 3.20 mit M bezeichnet und die kleinere werde m genannt. Außerdem sei $\overline{AB} = a$. Dann ist $a = M + m$ und es gilt: $\frac{a}{M} = \frac{M}{m}$.

Behauptung 3.1. *Der Punkt P teilt die Strecke a genau dann im goldenen Schnitt, wenn $\frac{M}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ gilt.*⁴⁷

Beweis. Der Punkt P teilt die Strecke a im goldenen Schnitt $\Leftrightarrow \frac{a}{M} = \frac{M}{m} \Leftrightarrow am = M^2 \Leftrightarrow (M + m) \cdot m = M^2 \Leftrightarrow \frac{M}{m} + 1 = (\frac{M}{m})^2 \Leftrightarrow (\frac{M}{m})^2 - \frac{M}{m} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{M}{m} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \Leftrightarrow \frac{M}{m} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Da M und m Streckenlängen sind, ist $\frac{M}{m} > 0$ und daher ist $\frac{M}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ die einzige Lösung. $\square$

Dieser Ausdruck wird häufig auch mit dem griechischen Buchstaben Φ bezeichnet. Beutelspacher begründet dies mit dem Anfangsbuchstaben des Namens des griechischen Bildhauers Phidias, in dessen Werken dieses Verhältnis häufig zu finden ist. Mit dem Begriff „goldener Schnitt“ wird sowohl der Vorgang der Teilung, der Teilungspunkt P als auch die Zahl Φ bezeichnet. In der Praxis wird oft $\Phi \approx 1,618$ als Näherungswert verwendet.⁴⁸

⁴⁵vgl. Amon 2011, S. 488

⁴⁶vgl. Beutelspacher 1989, S.15

⁴⁷vgl. Beutelspacher 1989, S.16f

⁴⁸vgl. Beutelspacher 1989, S.18

Fibonacci-Zahlen

Im Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt werden häufig die Fibonacci-Zahlen erwähnt. Sie werden durch eine Folge in rekursiver Darstellung beschrieben:

Definition 3.9 (Fibonacci-Zahlen). *Sei $[f_0, f_1, f_2, \dots]$ eine Folge mit den Startwerten $f_0 = 1$ und $f_1 = 1$ und es gelte $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Glieder dieser Folge heißen Fibonacci-Zahlen.⁴⁹*

Diese Zahlen wurden nach dem italienischen Mathematiker Leonardo von Pisa, auch Fibonacci („Sohn des Bonacci“), benannt. Er erklärte die Folge am Beispiel der Fortpflanzung von Kaninchen. Seither wurden Fibonacci-Zahlen von zahlreichen Forschern in Natur, Kunst und auch in der Musik gesucht und entdeckt.

Bildet man das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen, so nähern sich diese Zahlen dem goldenen Schnitt an (o.B.):

$$\begin{array}{ccccc} \frac{f_1}{f_0} = 1 & \frac{f_3}{f_2} = 1,5 & \frac{f_5}{f_4} = 1,6 & \frac{f_7}{f_6} \approx 1,615 & \frac{f_9}{f_8} \approx 1,618 \\ \frac{f_2}{f_1} = 2 & \frac{f_4}{f_3} \approx 1,667 & \frac{f_6}{f_5} = 1,625 & \frac{f_8}{f_7} \approx 1,619 & \frac{f_{10}}{f_9} \approx 1,618 \end{array}$$

Aus diesem Grund werden in Kunst und Architektur häufig die Werte $\frac{5}{3}$ und $\frac{8}{5}$ als Näherung für den goldenen Schnitt verwendet. Ein Beispiel aus der Baukunst, das in diesem Zusammenhang immer wieder genannt wird, ist der Parthenontempel in Athen, dessen Höhe und Breite im goldenen Verhältnis zueinander stehen. Auch die Raumproportionen von Konzertsälen mit guter Akustik sind in etwa nach diesem Prinzip gebaut.⁵⁰

3.4.2. Goldener Schnitt und Fibonacci-Zahlen in der Musik

Es gibt im Wesentlichen zwei Arten, den goldenen Schnitt in der Musik umzusetzen. Erstens können Zahlen und Zeitstrecken einzelner Teile (wie die Anzahl von Takten, Tönen, Motiven, Notenwerten – z.B. Achtelnoten eines Werkes) zueinander im goldenen Schnitt stehen. Auch die oben erwähnten Formschemata (ABA-Form, Rondo, Sonate) lassen sich nach diesem Prinzip konstruieren.

Zweitens wird der goldene Schnitt bzw. seine Näherung durch die Fibonaccizahlen immer wieder durch Intervallproportionen dargestellt. Dazu eignen sich besonders die Intervalle reine Quint (2 : 3), große Sext (3 : 5) und kleine Sext (5 : 8), die in der Musik unter anderem bei Dreiklängen eine zentrale Rolle spielen.

Der goldene Schnitt wurde auch im Musikinstrumentenbau angewandt. Der berühmte Geigenbauer Stradivari soll dieses Verhältnis verwendet haben, um die ideale Position der

⁴⁹vgl. Beutelspacher 1989, S.85

⁵⁰vgl. Amon 2011, S. 488

F-Löcher der Violinen zu bestimmen.

Durch den Dom von Florenz wurde im Zusammenhang mit den Fibonacci-Zahlen eine Verbindung zwischen Musik und Architektur geschaffen. Die Proportionen des Doms wurden nach diesen Zahlen bestimmt. Guillaume Dufay schrieb 1436 anlässlich der Kirchenweihe ein Musikstück, in dem er die Maßzahlen des Doms im Verhältnis der Teile, der Anzahl der Takte und Melodietöne in den einzelnen Stimmen hörbar machte⁵¹.

Es wird vermutet, dass viele Komponisten das goldene Verhältnis intuitiv verwendeten. Beutelspacher warnt davor, Komponisten voreilig zu unterstellen, diese Proportion bewusst eingesetzt zu haben.⁵² In Mozarts Klaviersonate KV 333 wurde im Verhältnis von Exposition zu Durchführung und Reprise der goldene Schnitt nachgewiesen.⁵³ Lendvai untersuchte das Werk von Bartók sehr gründlich und fand den goldenen Schnitt in zahlreichen Stücken dieses Komponisten. Beutelspacher fasst beispielhaft Zahlenwerte zur Sonate für zwei Klaviere und Schlagzeug von Bartók zusammen: „Die gesamte Sonate ist in vier Sätze [...] eingeteilt. Sie dauert genau 6432 Achtelnoten lang; der zweite langsame Satz [...] beginnt nach 3975 Achtelnoten. Dieser Einschnitt entspricht genau dem goldenen Schnitt ($6432 \cdot 0,618 \approx 3974,9$). Auch der Anfang der Reprise im ersten Satz teilt die Satzlänge genau im goldenen Schnitt. Wer mag da noch an Zufall glauben?“⁵⁴ Amon beschreibt in seinem Formenlehrexikon einen Zugang Bartóks zum goldenen Schnitt. Demnach ordnete der Komponist Intervalle nach Halbtönen an und wählte diejenigen aus, deren Positionen den Fibonaccizahlen entsprachen (vgl. Abbildung 3.21 – als Ausgangston wird hier c gewählt). Aus den Skalen, die mit diesen Tönen gebildet werden, kann Tonmaterial abgeleitet werden, mit dem Bartók komponierte.⁵⁵

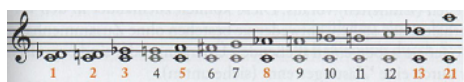


Abbildung 3.21.: Fibonacci-Zahlen bei Bartók⁵⁶

Von einigen Komponisten des 20. Jahrhunderts ist überliefert, dass sie sich in ihren Werken bewusst auf die Fibonacci-Zahlen bezogen. In den Stücken „Fibonacci-Mobile für Streichquartett, Klavier und Koordinator“ (1964) von Ernst Krenek und „Fibonacci“ (Konzert für Flöte und Orchester, 1969) von Christóbal Halffter ist der Name dieser Zahlen bereits im Titel enthalten. Christmann beschreibt in seinem Artikel auch das „Klavierstück IX“ (1962) von Karlheinz Stockhausen, in dem die Fibonacci-Folge den zeitlichen Proportionen des Werks zugrunde liegt.⁵⁷

⁵¹ vgl. Amon 2011, S.489-491

⁵² Beutelspacher 1989, S. 164f

⁵³ vgl. Schaurhofer 2009, S.58

⁵⁴ Beutelspacher 1989, S.166

⁵⁵ vgl. Amon 2011, S.491

⁵⁶ Amon 2011, S.491

⁵⁷ Christmann 2011, S.21f

Letztlich haftet dem goldenen Schnitt und den damit zusammenhängenden Fibonacci-Zahlen – bewusst oder unbewusst verwendet – ein besonderer Reiz an, der nicht nur im klingenden Namen deutlich wird. Beutelspacher schließt sein Buch mit den Worten: „Die Suche nach dem goldenen Schnitt bzw. das Nachvollziehen des Aufscheinens des goldenen Schnitts in der Kunst ist ein Vergnügen hoher Art. Wenn Sie sich auf die Suche nach goldenen Schnitten machen, werden Sie nicht nur schöne Kunstwerke betrachten, sondern diese auch in neuem Lichte, vielleicht sogar in neuem Glanze sehen.“⁵⁸

3.5. Fachdidaktische Überlegungen

3.5.1. Musikalische Bruchrechnung

Aufgaben und Unterrichtsideen

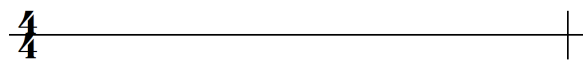
Zahlreiche österreichische Schulbücher beschäftigen sich mit dem Thema der „musikalischen Bruchrechnung“. Aufgaben dieser Bücher, Vorschläge aus der Literatur, sowie eigene Ideen, die durch die Beschäftigung mit dieser Thematik entstanden, werden in diesem Abschnitt zusammengefasst.

Als Einstieg in das Thema bietet sich ein praktisch-musikalischer Zugang an. Eid schlägt in seinem Artikel vor, am Beginn mit einer ersten Klasse ein Lied im Viervierteltakt zu singen. Die Schülerinnen und Schüler sollen dazu klatschen und so den Grundschlag des Liedes herausfinden.⁵⁹ Ausgehend davon formuliert Eid folgenden Arbeitsauftrag:

Aufgabe 3.1. ⁶⁰ *Wir wollen untersuchen, wie man einen 4/4-Takt gleichmäßig aufteilen kann. Ein solcher Takt besteht aus vier Zählzeiten (Schlägen).*

Über die Dauer jeder der Zählzeiten soll je eine Note klingen.

- a) *Wieviele Noten füllen den Takt aus?*
- b) *In folgender Abbildung steht die dargestellte Strecke für die Dauer des gesamten Taktes. Wieviel „Platz“ hat jede Note innerhalb des Taktes? [...] Trage die Noten mit ihren Notenwerten ein.*



⁵⁸Beutelspacher 1989, S.168

⁵⁹Eid 2000, S.21

⁶⁰ebd.

Aufgabe 3.2. ⁶¹ Zeichne drei weitere Strecken mit einer Länge von jeweils 4 cm und veranschauliche deine Antworten zu den folgenden Fragen:

- a) Es sollen zwei Noten gleichmäßig auf den Takt aufgeteilt werden, so dass jede der beiden Noten über zwei Schläge klingt. Wieviel „Platz“ hat jede Note?
- b) Wieviele Noten passen in den Takt, wenn jede von ihnen nur einen halben Schlag klingt? Wieviel „Platz“ hat jede Note?
- c) Eine Note soll über alle vier Schläge klingen. Wieviel „Platz“ hat die Note?

Erkennst du Beziehungen zwischen den beschriebenen Beispielen?

Auf ähnliche Weise schlägt Eid vor, die Form eines Kanons in Zusammenhang mit Bruchrechnung zu bringen. Die Schülerinnen und Schüler sollen ausrechnen, nach welchem Bruchteil der Gesamtlänge des Kanons (z.B. 12 Takte) die erste Stimme einsetzt, wann die zweite Stimme usw. und ihre Ergebnisse ebenfalls mit Strecken veranschaulichen.⁶²

Einen praktischen Zugang zum Thema zeigt auch das Schulbuch „Expedition Mathematik 2“ auf. Die Schülerinnen und Schüler sollen in Gruppen ein Klatschstück komponieren und notieren, das danach im Klassenverband aufgeführt wird. Die Zuhörenden kontrollieren, ob alles korrekt komponiert wurde.⁶³

Im selben Buch ist auch das Lied „Der Zähler und der Nenner“ enthalten (Melodie: Der Kuckuck und der Esel). Im Text streiten sich Nenner und Zähler, wer der Wichtigere sei. Die Strophen setzen sich mit Begriffen wie Nenner, Zähler, Kehrwert usw. spielerisch auseinander und müssen in die richtige Reihenfolge gebracht werden. Das Lied bietet eine Möglichkeit zur Auflockerung des Unterrichts. Zusätzlich werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, selbst ein Lied zur Bruchrechnung zu schreiben.⁶⁴

Mathematisch können die Grundrechnungsarten mit Hilfe von Notenbeispielen behandelt werden. In vielen Schulbüchern sind Aufgaben wie die folgende zu finden⁶⁵:

Aufgabe 3.3. Unten siehst du einen Ausschnitt eines Liedes. Zeige, dass die Summe der Noten- und Pausenwerte in jedem Takt $\frac{3}{4}$ ergibt! Was ist die größte Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Notenwerten dieses Liedes? Was ist die größte Differenz zwischen zwei beliebigen Notenwerten des Stücks?⁶⁶ Erkennst du das Lied?

⁶¹Eid 2000, S.22

⁶²vgl. Eid 2000, S.22

⁶³vgl. Kraker u.a. 2008, 483

⁶⁴vgl. Kraker u.a. 2008; 484

⁶⁵vgl. Kraker u.a. 2008, 482; Wiltsche u.a. 2006, 639; Dorfmayr u.a. 2006, 1483; Humenberger (Hrsg.) 2008, 280; Humenberger (Hrsg.) 2007, 902-903, Hanisch u.a. 2009, S.101

⁶⁶vgl. Kraker u.a. 2008, S.123f



⁶⁸ebd.



In der Online-Ergänzung zum Schulbuch „Thema Mathematik“ sind auch komplexere Aufgaben zu finden, die in der fünften Klasse AHS bearbeitet werden können.⁷³ Sind Triolen, Quartolen usw. musiktheoretisch bekannt, kann folgende Aufgabe formuliert werden:

Aufgabe 3.10.

- a) Eine Achteltriole teilt den Wert einer Viertelnote in drei gleich große Teile. Welchen Wert besitzen daher die einzelnen Noten der Triole?
- b) Wie viele Achteltriolen muss ein Komponist schreiben, um den Wert einer halben Note zu erreichen?
- c) Immer wieder werden in der Musik Achteltriolen und Achtelnoten gleichzeitig gespielt. Wenn beide Rhythmuslinien mit dem ersten Schlag eines Taktes beginnen, wann erklingen diese wieder gleichzeitig? Skizziere dieses Phänomen in der Notenzeile!



Diese Aufgabe gibt einen Einblick in Fragen, die Musikern und Musikerinnen immer wieder begegnen und die mit mathematischen Mitteln gelöst werden können. Selbstverständlich können solche Aufgaben mit anderen Notenwerten (z.B. Quintolen, Sextolen usw.) fortgesetzt werden. Allerdings ist fraglich, ob Schülerinnen und Schüler davon mathematisch besonders profitieren können. Musikalisch bilden diese Fälle Ausnahmen und sind nur dann interessant, wenn sie zum Musizieren benötigt werden.

Im Zuge des Themas „musikalische Bruchrechnung“ können auch Kettenbrüche im Zusammenhang mit musikalischen Stimmungen behandelt werden (vgl. dazu Kapitel 2).

Lösungen

Lösung 3.1.

- a) Vier Noten füllen hier einen Takt aus.
- b) Jeder Note steht ein Viertel des Taktes zur Verfügung:



⁷³vgl. www.thema-mathematik.at

Lösung 3.8.



Lösung 3.9.

1. $\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \text{Viervierteltakt}$
2. $\frac{3}{16} + \frac{1}{16} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{Dreivierteltakt}$

Lösung 3.10.

- a) $\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12}$
- b) $\frac{1}{12} \cdot x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 6$
- c) Die beiden Rhythmuslinien klingen auf jedem Viertelschlag wieder gleichzeitig:



Vor- und Nachteile musikalischer Bruchrechnung

Die oben genannten Unterrichtsideen lassen jedenfalls eine Vertiefung des Themas „Brüche und Bruchzahlen“ zu. Gegen die Verwendung von musikalischer Bruchrechnung als Einführung in das Thema sprechen mehrere Punkte. Diese und weitere Vor- und Nachteile des Einsatzes von „musikalischen“ Brüchen im Unterricht werden im Folgenden zusammengefasst:

Vorteile:

- Mathematisch-abstrakte Überlegungen werden mit einer musisch-emotionalen Komponente verbunden.⁷⁴
- Musikalische Zusammenhänge werden mit mathematischen Mitteln beschrieben.⁷⁵ Die Schülerinnen und Schüler lernen Einflüsse der Mathematik auf die Musik kennen. (Große Werke der westeuropäischen Kunstmusik konnten nur entstehen und überliefert werden, weil eine geeignete Notation vorhanden war!)
- Musikalische Bruchrechnung bietet eine Abwechslung zu anderen üblichen Aufgaben (vgl. Pizza- oder Tortenbeispiele), die in diesem Zusammenhang behandelt werden können.
- Kenntnisse im Notenlesen können durch Mathematikaufgaben gefestigt werden.

⁷⁴vgl. Eid 2000, S.26

⁷⁵vgl. Eid 2000, S.27

Nachteile:

- Die Musik verwendet nur eine eingeschränkte Anzahl „sinnvoller“ Bruchteile (z.B. Halbe, Viertel, Achtel, usw.).⁷⁶
- Bruchteile können wieder als Ganze auftreten (z.B. wird ein Dreivierteltakt als Ganzes wahrgenommen).⁷⁷
- Die Lehrperson muss sowohl das mathematische Wissen als auch Kenntnisse der Musiktheorie besitzen.⁷⁸
- Die Schülerinnen und Schüler müssen Grundlagen der Notenschrift beherrschen.
- Ist die Notation im Fünfliniensystem für manche Schülerinnen und Schüler schwierig zu verstehen, so kann dies im Mathematikunterricht zu zusätzlichen Verwirrungen führen.

Lehrplanbezug

Bezüge zum Thema sind auch in den AHS-Lehrplänen zu finden. Der Mathematiklehrplan für die AHS-Unterstufe verlangt für die erste Klasse: „Mit der Darstellung in Dezimal- und Bruchschreibweise vertraut sein“ sowie „Rechnen mit Brüchen, nur in einfachen Fällen, die anschaulich deutbar sind.“⁷⁹ In der zweiten Klasse sollen diese Kenntnisse weiter ausgebaut werden: „Rechnen mit Brüchen (mit kleinen Zählern und Nennern), damit die Rechenregeln im Hinblick auf die Algebra sicher beherrscht werden; diese Rechenregeln für das Bruchrechnen begründen können“⁸⁰.

Im Musikunterricht lernen die Schülerinnen und Schüler in den ersten beiden Schuljahren (der AHS) oben verwendete Begriffe, wie z.B. das Metrum, kennen und erwerben Grundkenntnisse im Notenlesen. Die beschriebenen Aufgaben können so zur Festigung und Vertiefung dieser Kenntnisse dienen. Im Lehrplan heißt es dazu: „Grafische und traditionelle Notation als Hör-, Musizier- und Singhilfe; Metrum, Takt, Rhythmus“⁸¹. In der fünften und sechsten Klasse sollen diese Kenntnisse nochmals vertieft werden: „Notenlesen im Violin- und Bassschlüssel im für die Musikpraxis erforderlichen Ausmaß.“⁸²

⁷⁶vgl. Eid 2000, S.20

⁷⁷ebd.

⁷⁸ebd.

⁷⁹www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf

⁸⁰ebd.

⁸¹www.bmukk.gv.at/medienpool/790/ahs15.pdf

⁸²www.bmukk.gv.at/medienpool/11867/lp_neu_ahs_15.pdf

3.5.2. Symmetrie in der Musik

Lehrplanbezug

Auch zum Thema „Symmetrie in der Musik“ finden sich Lehrplanbezüge. In der ersten Klasse AHS heißt es im Lehrplanbereich „Arbeiten mit Figuren und Körpern“ für Mathematik: „Einfache symmetrische Figuren erkennen und herstellen können“⁸³. Der Ähnlichkeitsbegriff wird im Mathematikunterricht in der dritten Klasse AHS unterrichtet: „Vergrößern und Verkleinern von Figuren, ähnliche Figuren erkennen und beschreiben“⁸⁴. Im Oberstufenlehrplan für Mathematik wird der Begriff Symmetrie im Zusammenhang mit reellen Funktionen genannt.⁸⁵ Geometrische Transformationen sind Thema der Fächer Geometrisches Zeichnen und Darstellende Geometrie. Wird das Thema im Zusammenhang mit Musik (vgl. Lehrplanbezüge zu Musikerziehung unten) im Unterricht angesprochen, können Schülerinnen und Schüler jedenfalls im Mathematiklehrplan erwähnte Kompetenzen erlangen und trainieren: „Darstellend-interpretierendes Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit der Übersetzung von Situationen, Zuständen und Prozessen aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik und zurück zu tun haben; auch der innermathematische Wechsel von Darstellungsformen gehört zu diesen Aktivitäten“⁸⁶.

Im Musikunterricht können symmetrische Musikformen im Zusammenhang mit den für die erste und zweite Klasse im Lehrplan erwähnten Bereichen zwei- und dreiteilige Liedform und Rondo besprochen werden.⁸⁷ Motivisch-thematische Arbeit ist Stoff der fünften und sechsten Klasse: „Erfassen motivisch-thematischer Strukturen in kleineren musikalischen Einheiten und in größeren Zusammenhängen“⁸⁸. Wird der Begriff Symmetrie auch nicht explizit erwähnt, so ist dieser dennoch von zentraler Bedeutung im Zusammenhang mit musikalischer Form: „Hören und Erkennen einfacher musikalischer Formen mit Hilfe von Klavierauszügen, Partituren und interaktiven Medien“ bzw. „vokale und instrumentale Formen und Gattungen an exemplarischen Beispielen“⁸⁹. Dieses Wissen soll in der siebten und achten Klasse weiter vertieft werden: „Hören und Erfassen komplexer motivisch-thematischer Strukturen sowie musikalischer Formen mit Hilfe von Klavierauszügen, Partituren und interaktiven Medien“⁹⁰. Zu Musikformen ist außerdem zu lesen: „Instrumentale und vokale Formen und Gattungen in Verbindung mit Werkkunde in ihrer historischen Entwicklung.“⁹¹

⁸³www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf

⁸⁴ebd.

⁸⁵vgl. www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf

⁸⁶ebd.

⁸⁷vgl. www.bmukk.gv.at/medienpool/790/ahs15.pdf

⁸⁸www.bmukk.gv.at/medienpool/11867/lp_neu_ahs_15.pdf

⁸⁹ebd.

⁹⁰ebd.

⁹¹ebd.

Aufgaben und Unterrichtsideen

Zum Thema „Transformationen in der Musik“ wurde im Rahmen dieser Diplomarbeit eine Musikstunde geplant, durchgeführt und ausgewertet. Diese wird in Kapitel 4 näher beschrieben.

Im Schulbuch „Mach mit Mathematik 1“ ist eine Aufgabe zur Spiegelung in der Musik ($\hat{=}$ Umkehrung) zu finden, die bereits in der 1. Klasse bearbeitet werden kann. Nach einer kurzen Erklärung, dass Spiegelungen auch in der Musik vorkommen, ist folgende Angabe zu lesen:

Aufgabe 3.11. ⁹² *Komponiere eine Spiegelung an der dritten Notenlinie.*



3.5.3. Goldener Schnitt und Fibonacci-Zahlen

Aufgaben und Unterrichtsideen

Das Schulbuch „Blickpunkt Mathematik 3“ widmet dem goldenen Schnitt zwei Seiten im Kapitel „Figuren und Ähnlichkeit“ (bezogen auf Seitenverhältnisse). Sechs Aufgaben geben einen Einblick in das Thema.⁹³ Die erste beschäftigt sich mit dem goldenen Schnitt als Teilung einer Strecke, die zweite zeigt einen Zusammenhang zwischen goldenem Schnitt und Architektur. Die Schülerinnen und Schüler sollen Länge und Breite des skizzierten Parthenontempels abmessen und überprüfen, ob das Verhältnis dem goldenen Schnitt entspricht. Eine weitere Aufgabe spielt auf menschliche Proportionen an:

Aufgabe 3.12. ⁹⁴ *Bist du nach dem goldenen Schnitt „gebaut“? Miss den Abstand n deines Nabels vom Fußboden, wenn du aufrecht stehst, sowie deine Körpergröße h ! Daraus kannst du die Höhe s vom Scheitel bis zum Nabel berechnen ($s = h - n$). Berechne die Quotienten $h : n$ und $n : s$! Vergleiche mit dem goldenen Schnitt!*

Weitere Aufgaben sprechen ein „goldenes Rechteck“, das mit einer Hand gebildet werden kann, eine „goldene Spirale“ der Nautilusmuschel und den goldenen Schnitt im regelmäßigen Fünfeck an. Die letzte Aufgabe auf dieser Seite erwähnt sogar die Fibonacci-Zahlen:

⁹²Floderer u.a. 2012, 956

⁹³vgl. Keller-Ressel u.a. 2005, S.76-77

⁹⁴Keller-Ressel u.a. 2005, 276

Aufgabe 3.13. ⁹⁵1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...

Diese Zahlen spielen in der Natur eine wichtige Rolle. Sie wurden nach dem italienischen Mathematiker Fibonacci benannt, der sie „entdeckt“ hat.

- a) Wie lauten die nächsten fünf Zahlen?
- b) Berechne für je zwei aufeinander folgende dieser Zahlen das Verhältnis der größeren zur kleineren Zahl! Je höher die Zahlen werden, umso mehr nähert sich dieses Verhältnis dem goldenen Schnitt.

Die Fibonnacci-Zahlen werden in Oberstufenbüchern für die sechste Klasse im Zusammenhang mit Folgen und Reihen erwähnt, z.B. mit der bekannten Kaninchenaufgabe von Fibonacci.⁹⁶

Diese Aufgaben erwähnen zwar keinen Zusammenhang mit der Musik, jedoch kann ausgehend davon auch auf Vernetzungen hingewiesen werden. Die folgenden Aufgaben stellen einen Zusammenhang zur Musik her:

Aufgabe 3.14. Betrachte Intervallproportionen in reiner Stimmung (große Sekund: $\frac{9}{8}$, kleine Terz: $\frac{6}{5}$, große Terz: $\frac{5}{4}$, Quart: $\frac{4}{3}$, Quint: $\frac{3}{2}$, kleine Sext: $\frac{8}{5}$, große Sext: $\frac{5}{3}$, kleine Septime: $\frac{9}{5}$, große Septime: $\frac{15}{8}$). Bei welchen Intervallen kannst du einen Zusammenhang zu Fibonacci-Zahlen erkennen? Welche Intervallproportionen können als Annäherung an den goldenen Schnitt interpretiert werden?

Aufgabe 3.15. Der goldene Schnitt kann in Musikwerken im Verhältnis der einzelnen Teile zueinander, der Anzahl der Takte, Töne usw. enthalten sein. Die Suche nach solchen Proportionen ging sogar so weit, dass Forscher die Achtelnoten eines Stückes zählten! Die (viersätzige) Sonate für zwei Klavier und Schlagzeug von Bartók ist 6432 Achtelnoten lang. Der zweite Satz beginnt nach 3975 Achtelnoten. Erkläre, wie hier der goldene Schnitt versteckt ist!

Lösungen

Lösung 3.12. Z.B.: $n = 96\text{cm}$, $h = 162\text{cm}$, $s = 66\text{cm}$. In diesem Fall ist $h : n = 1,6875$ und $n : s = 1,45$. Die Proportionen entsprechen hier nicht dem goldenen Schnitt.

Lösung 3.13.

- a) 144, 233, 377, 610, 987
- b) vgl. Seite 76

Lösung 3.14. In beiden Fällen: Quint ($\frac{3}{2} = 1,5$), kleine Sext ($\frac{8}{5} = 1,6$), große Sext ($\frac{5}{3} = 1,\bar{6}$)

⁹⁵Keller-Ressel u.a. 2005, 280

⁹⁶vgl. Malle u.a. 2010 (6. Klasse) 2010, S.129f; Götz u.a. 2010 (6. Klasse), 525

Lösung 3.15. Das Verhältnis der Anzahl der Achtelnoten im gesamten Stück zur Anzahl der Achtelnoten in den Sätzen zwei bis vier entspricht dem goldenen Schnitt: $\frac{6432}{3975} \approx 1,618$.

Lehrplanbezug

Der goldene Schnitt wird im Mathematiklehrplan für die AHS-Unterstufe nicht explizit erwähnt. In der Oberstufe ist das Thema „Folgen und Reihen“ im Lehrplan verankert⁹⁷:

- Rekursives und explizites Darstellen von Folgen
- Untersuchen von Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz, intuitives Erfassen und Definieren des Begriffes Grenzwert [...]
- Verwenden von Folgen zur Beschreibung diskreter Prozesse in anwendungsorientierten Bereichen (insbesondere Geldwesen)

Im Musikunterricht können goldener Schnitt und Fibonacci-Zahlen wie das Thema Symmetrie an Musikformen behandelt werden.⁹⁸

Da goldener Schnitt und Fibonacci-Zahlen – wie oben erwähnt – auch in Natur und Kunst zu finden sind, eignen sich diese Themen gut zu fächerübergreifendem Unterricht mit den Fächern Bildnerische Erziehung und Biologie.

⁹⁷ www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf

⁹⁸ vgl. dazu Abschnitt 3.5.2

4. Umsetzung in der Schule anhand eines ausgewählten Unterrichtsbeispiels

4.1. Rahmenbedingungen und Zielsetzung

Wie die vorderen Teile dieser Arbeit zeigen, gibt es viele Möglichkeiten, das Thema „Musik und Mathematik“ im Unterricht umzusetzen. Dies wird nun im Folgenden an einer Unterrichtsreihe konkretisiert, die im Rahmen dieser Diplomarbeit geplant, durchgeführt und ausgewertet wurde.

Thema der Unterrichtsreihe: Musik und Mathematik

Ziel der Unterrichtsreihe: Die Schülerinnen und Schüler sollen Verbindungen zwischen Musik und Mathematik sowohl im Kleinen (Schwingungen) als auch in größeren Zusammenhängen (Musikwerke) erkennen.

Um dieses Ziel zu erreichen, sollen im Mathematikunterricht Schwingungen und ihr Zusammenhang mit der Sinusfunktion thematisiert werden, die Musikstunde handelt von mathematischen Strukturen, die in Musikwerken zu finden sind. Die Ziele der einzelnen Unterrichtsstunden werden in Abschnitt 4.2 (Stundenplanungen) näher beschrieben.

Voraussetzungen:

Mathematik: Definition der Sinusfunktion im Einheitskreis, Graph der Sinusfunktion in $\mathbb{R}$, Begriff der Periodizität, Bogenmaß, Grundkenntnisse in Geogebra (Funktionen zeichnen), Symmetriebegriff aus der Unterstufe

Musikerziehung: Einen Melodieverlauf in der Notenschrift erkennen können (genaues Notenlesen ist nicht erforderlich)

Dauer und Umfang: Die Unterrichtsreihe erstreckt sich über insgesamt vier Unterrichtsstunden (je 50 min), davon drei Mathematikstunden und eine Musikstunde.

Schule: Die vier Unterrichtsstunden fanden in der AHS Friesgasse¹ innerhalb einer Woche (15.–19. April 2013) statt. Die Schülerinnen und Schüler dieser Wiener Privatschule können ab der dritten Klasse zwischen den Schulzweigen Gymnasium und Realgymnasium wählen.

¹www.schulefriesgasse.ac.at/ahs/ahs_frame.html

Klasse: Die Unterrichtsreihe wurde in der 6B (Realgymnasium) durchgeführt. Diese Klasse besuchen 27 Schülerinnen und Schüler, davon 14 Schülerinnen und 13 Schüler.

Räumlichkeiten und Ausstattung: Die Unterrichtsstunden fanden im Klassenraum der 6B (erste Mathematikstunde), im EDV-Saal (zweite und dritte Mathematikstunde) und im Musiksaal (Musikstunde) statt. Alle Räume sind mit Computer, Beamer und Lautsprechern ausgestattet. Die Programme Geogebra und Audacity sind auf allen Computern installiert.

4.2. Stundenplanungen

Erste Unterrichtsstunde (Musikerziehung): Mathematische Strukturen in Musikwerken

Ziele: Die Schülerinnen und Schüler sollen...

- ... erkennen, dass mathematische Strukturen in Musikwerken zu finden sind,
- ... Möglichkeiten zur Arbeit mit Motiven kennenlernen und Verbindungen zu geometrischen Transformationen ziehen können,
- ... Symmetrie als wesentliches Gestaltungsmerkmal in der Musik erkennen.

Zeit	Inhalt	Anmerkungen
ca. 5 min	Vorstellung und Überblick über die kommenden vier Unterrichtsstunden (3 Mathematikstunden, 1 Musikstunde)	L-Vortrag
ca. 20 min	<i>Einstieg:</i> Singen des Liedes „I got rhythm“ (George Gershwin)	Singen <i>Liederbücher</i> (<i>Rock&Pop</i>)
	<i>Noten des Liedes auf Overheadfolie:</i> Motiv, Wiederholung, Sequenz und Krebs einzeichnen	L-S-Gespräch <i>Overheadfolie, Overheadprojektor, Stifte</i>
	<i>PowerPoint-Präsentation:</i> Motiv, Wiederholung, Sequenz, Krebs, Umkehrung und Krebsumkehrung inklusive (einfacher) Noten- und Hörbeispiele (am Klavier vorspielen)	L-Vortrag <i>PowerPoint-Präsentation, Computer und Beamer</i>
ca. 20 min	<i>Partnerarbeit:</i> S&S lesen Artikel zum Thema Symmetrie und ordnen geometrische Transformationen den musikalischen zu: Wiederholung: horizontale Translation Sequenz: horizontale und vertikale Translation Umkehrung: Spiegelung an einer horizontalen Achse Krebs: Spiegelung an einer vertikalen Achse Krebsumkehrung: Drehung um 180°	Partnerarbeit <i>Arbeitsblätter</i>
	„Auflösung“ im Plenum, besprechen: Wo gibt es noch Symmetrien in der Musik?	L-S-Gespräch <i>Overheadfolie</i>
ca. 5 min	<i>Hörbeispiele:</i> Krebskanon von Bach, Menuett aus 47. Sinfonie von Haydn, 1. Satz von Beethovens 5. Sinfonie	L-Vortrag <i>Hörbeispiele, Overheadfolien</i>

Zweite Unterrichtsstunde (Mathematik): Schwingungen als Grundlage von Musik

Ziele: Die Schülerinnen und Schüler sollen...

- ... Schwingungen als akustische Grundlage von Musik verstehen und mathematisch beschreiben können.
- ... erkennen, wie sich die Änderung der Parameter $a, b \in \mathbb{R}^+$ auf den Graphen der Sinusfunktion $f(x) = a \cdot \sin(bx)$ bzw. auf einen Ton auswirkt und so einen Zusammenhang zu musikalischen Parametern (Tonhöhe, Lautstärke,...) herstellen können.

Zeit	Inhalt	Anmerkungen
ca. 5 min	<i>Einstieg:</i> Video: Musikstück (als Überlagerung von Sinusschwingungen) und reine Sinusschwingungen am Oszillographen, Schall als periodische Luftdruckschwankung	L-S-Gespräch <i>Video, Laptop, Beamer</i>
ca. 10 min	Die <i>Begriffe</i> Amplitude, Schwingungsdauer, Frequenz, Kreisfrequenz und Elongation am Graphen einer Sinusfunktion auf $\mathbb{R}$ erklären (an einem Bsp.)	L-Vortrag <i>Tafel</i>
ca. 10 min	<i>Beispiele</i> (vgl. Arbeitsblatt): Bsp.1 und 2 alleine rechnen und vergleichen	Einzelarbeit, L-S-Gespräch <i>Arbeitsblätter, Tafel</i>
ca. 15 min	<i>Wie ändert sich der Graph, wenn man an der Funktion $y = a \cdot \sin(bx)$ die Parameter a und b verändert? Wie wirken sich diese Änderungen hörbar aus?</i> Hörbare Ergebnisse: Erarbeitung mit Hilfe des Programms Audacity (Beamer) Graph: Erarbeitung mit Hilfe eines dynamischen Geogebra-Arbeitsblatts (Beamer) (zuerst beide Zugänge für a und dann für b) Festhalten der Ergebnisse am Arbeitsblatt der S&S	L-S-Gespräch <i>Arbeitsblätter, Audacity- und Geogebra-Materialien</i>
ca. 10 min	<i>Beispiele</i> (vgl. Arbeitsblatt): 4a-c) Parametervariation, 6a) Graph gegeben, Funktionsgleichung aufstellen	L-S-Gespräch, Einzelarbeit, <i>Arbeitsblätter, Tafel</i> HÜ: 3, 4d, 6b

Dritte und vierte Unterrichtsstunde (Mathematik): Schwingungen als Grundlage von Musik (Fortsetzung)

Ziele: Die Schülerinnen und Schüler sollen...

- ... am Vortag gelernte Unterrichtsinhalte wiederholen und vertiefen,
- ... einfache Überlagerungseffekte aus der musikalischen Akustik und deren grafische Darstellung kennenlernen,
- ... Einblick in Anwendungen in Rundfunk und Komposition bekommen.

Zeit	Inhalt	Anmerkungen
ca. 10 min	Vergleichen der HÜ	L-S-Gespräch <i>Tafel</i>
ca. 20 min	<i>Wie ändert sich der Graph, wenn man an der Funktion $y = a \cdot \sin(bx + c)$ den Parameter c verändert?</i> Selbständige Erarbeitung mit Geogebra (auch: selbständiges Ausprobieren der Variation von a und b) Vergleich mit Audacity	Partnerarbeit, L-S-Gespräch <i>Geogebra, Audacity (Beamer)</i>
ca. 5 min	Erklärung des Stationenbetriebs	L-Vortrag
ca. 50 min	<i>Stationenbetrieb:</i> Überlagerung von Schwingungen 4 Stationen: • Ton, Klang, Geräusch, Knall • Konstruktive und Destruktive Interferenz • Schwebung • Amplituden-und Frequenzmodulation (Bonus)	Einzel- oder Partnerarbeit <i>Materialien für den Stationenbetrieb, Kopfhörer, Geogebra, Audacity</i>
ca. 15 min	<i>Auswertung und Nachbesprechung</i> des Stationenbetriebs, Absammeln der Arbeitsblätter, Hörbeispiel von Stockhausen als Anwendung in elektronischer Musik	L-S-Gespräch <i>Hörbeispiel, Lautsprecher</i>

4.3. Musikstunde

4.3.1. Durchführung

Die *Musikstunde* begann wie geplant mit dem Singen des Liedes „I got rhythm“. Obwohl ich dies nicht erwartet hatte, kannten die Schülerinnen und Schüler dieses Stück nicht. Trotzdem lernten sie das Lied schnell und konnten es bald gut genug, um musikalische Transformationen innerhalb des Stückes zu besprechen. Dazu bat ich die Schülerinnen und Schüler, Wiederholungen des Anfangsmotivs zu suchen, fragte, wo das Motiv „von hinten nach vorne“ gespielt werde und ließ sie das sequenzierte Motiv im Mittelteil suchen. (Der Begriff der Sequenz war bekannt.) Ich bekam rasch richtige Antworten und markierte die Transformationen auf einer Overheadfolie (vgl. Abbildung A.5, Seite 125). Anschließend fasste ich diese und zwei weitere Transformationen in einer PowerPoint-Präsentation (vgl. Abbildung A.8, Seite 128) zusammen und spielte die Notenbeispiele am Klavier vor. Die Schülerinnen und Schüler stellten dazu keine Fragen und nickten, dass sie verstanden hätten.

Da sie nun die Grundlagen der in dieser Stunde behandelten musikalischen Transformationen kennengelernt hatten, bekamen sie paarweise einen Artikel zum Thema „Symmetrie“ von „Focus Schule online“, in dem geometrische Transformationen übersichtlich dargestellt werden. (Dieses Thema wurde in der Klasse laut Schülerinnen und Schülern zuvor noch nicht besprochen.) Sie sollten diesen in Zweiergruppen lesen und das Arbeitsblatt zum Thema „Musikalische und geometrische Transformationen“ bearbeiten. Hier fiel mir auf, dass manche Teams zuerst dieses Blatt ausfüllten und erst danach den Artikel lasen. Eine Schülerfrage in diesem Zusammenhang lautete: „Was sollen wir mit dem Artikel? Nur lesen?“. Dieses Verhalten konnte ich in den vier Stunden immer wieder beobachten. Sobald die Schülerinnen und Schüler etwas ausfüllen sollten, machten sie es sofort. Aus Gesprächen mit ihnen erkannte ich, dass sie nicht immer alle Texte genau lasen.

Eine häufig gestellte Frage während der Partnerarbeit war, was die Begriffe „horizontal“ und „vertikal“ bedeuteten. Sie kannten diese zwar, konnten sie aber nicht richtig zuordnen. Ich konnte beobachten, dass manche Teams sehr schnell fertig waren, während andere sehr lange überlegten und diskutierten.

Anschließend ließ ich zuerst die geometrischen Transformationen, die im Artikel dargestellt wurden, von Schülerinnen und Schülern erklären und ich skizzierte diese an der Tafel. Danach zeichnete ein Schüler auf einer Overheadfolie, auf der das Arbeitsblatt abgebildet war, die Verbindungslinien zwischen den musikalischen und geometrischen Transformationen ein. Die Schülerinnen und Schüler stellten zu diesem Zeitpunkt keine weiteren Fragen mehr.

Ich sprach in dieser Besprechung kurz weitere Symmetrien in der Musik (z.B. in der Form von Musikwerken) an, entschied mich aber dafür, die restliche Zeit zu nutzen, um

Hörbeispiele vorzustellen. Zuerst spielte ich eine Aufnahme eines Krebskanons von Johann Sebastian Bach aus „Musikalisches Opfer“ vor, die Schülerinnen und Schüler konnten die Noten auf Overheadfolie (vgl. Abbildung A.6, Seite 126) sehen. Ich erklärte dazu die Struktur des Stücks, allerdings bekam ich die Rückmeldung, dass sie nicht hören konnten, dass die Stimme einmal von „vorne nach hinten“ und gleichzeitig von „hinten nach vorne“ gespielt wurde. Das nächste Beispiel wurde viel besser aufgenommen. Das Menuett aus der 47. Sinfonie von Joseph Haydn (vgl. Abbildung A.7, Seite 127) gliedert sich in zwei zehntaktige Teile (die jeweils wiederholt werden). Die ersten zehn Takte werden im zweiten Teil an einer vertikalen Achse gespiegelt, es erklingt sozusagen der gesamte erste Abschnitt „von hinten nach vorne“. Die Schülerinnen und Schüler erklärten mir, dass dies viel leichter für sie zu hören sei. Das klingt einleuchtend, da die gespiegelte Stelle hier *nach* dem ersten Abschnitt erklingt, während im Krebskanon von Bach die Spiegelung *gleichzeitig* mit der ursprünglichen Stimme zu hören ist.

Abschließend spielte ich der Klasse einen Ausschnitt aus dem ersten Satz von Beethovens fünfter Sinfonie als Beispiel für motivisch-thematische Arbeit vor.

Als Abrundung sangen wir am Ende der Stunde nochmals das Lied „I got rhythm“ mit dem Auftrag, besonders an die nun kennengelernten Transformationen zu denken.

4.3.2. Reflexion und Analyse

Insgesamt hatte ich den Eindruck, dass die Schülerinnen und Schüler die vorgestellten musikalischen und mathematischen Transformationen verstanden und Zusammenhänge erkannten. Ich denke, dass die Klasse durch die Nachbesprechung des Artikels und die Skizzen an der Tafel einen Überblick über die Transformationen bekam, allerdings glaube ich nicht, dass alle den Artikel gründlich lasen. Es zeigte sich, dass dieser nicht unbedingt notwendig ist, um das Arbeitsblatt ausfüllen zu können, da dieses sehr anschaulich gestaltet ist. Trotzdem finde ich es wichtig, vor dem Ausfüllen des Blatts geometrische Transformationen anzusprechen und zu skizzieren. Wenn ich diese Stunde in einer anderen Klasse nochmals durchführe, werde ich daher den Artikel zuerst austeilten und einige Fragen dazu stellen, die die Schülerinnen und Schüler anschließend (mündlich oder schriftlich) beantworten müssen. Es ist ratsam, erst danach die Arbeitsblätter auszuteilen.

Die Hörspiele würde ich auch in einer anderen Klasse wieder vorspielen, allerdings ist wegen der oben angesprochenen Schwierigkeiten eine Änderung der Reihenfolge sinnvoll. Ich würde daher zuerst die Sinfonie von Haydn und danach den Krebskanon von Bach zeigen.

Im Feedbackbogen, den die Schülerinnen und Schüler am Ende der vier Unterrichtsstunden ausfüllten (vgl. Abschnitt 4.6), gaben 24 Personen an, dass das Unterrichtstempo genau richtig gewesen wäre. Drei gaben an, dass es zu schnell war. Zu Dauer und Umfang der Mu-

sikstunde meinten 24 Schülerinnen und Schüler, dass es gerade richtig war, für eine Person war es zu kurz, für zwei zu lang. 20 Personen teilten mir mit, dass der Schwierigkeitsgrad gerade richtig gewählt war, für eine Person war es zu schwierig, fünf gaben an, dass die Inhalte sehr leicht waren.

Ich lernte die Klasse in dieser Stunde kennen. Dieses Ergebnis bestätigt mein Gefühl, dass die Inhalte das Niveau der Schülerinnen und Schüler gut trafen und für sie eher leichter als zu schwierig waren. Unter den Anregungen zu den frei gestellten Fragen am Feedbackbogen bezog sich nur eine Antwort auf die Musikstunde: „Musik: bissi anspruchsvoller“. Ich kann mir vorstellen, diese Stunde als Grundlage zu nehmen, um im Musikunterricht danach noch intensiver zum Thema „motivisch–thematische Arbeit“ weiterzuarbeiten. Eine andere Möglichkeit ist, mit den Erkenntnissen über die Arbeit mit Motiven oder mit Sinusschwingungen (vgl. Mathematikstunden) eigene Stücke zu komponieren. Eine Person gab dazu im Feedback einen Impuls: „Wenn man selbst Musik durch mathematische Erkenntnisse erzeugen kann“. Dies bedarf allerdings einer gründlichen Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler und benötigt viel Zeit im Unterricht. Der Schwierigkeitsgrad hängt natürlich auch sehr stark vom Vorwissen der Schülerinnen und Schüler ab und ist von Klasse zu Klasse verschieden.

Mein Eindruck, dass die Klasse die Inhalte der Musikstunde verstanden hat, wurde durch die Selbsteinschätzung der Schülerinnen und Schüler im Feedbackbogen bestätigt. Neun Personen kreuzten an, dass dies ganz zutreffe, die restlichen 17 Schülerinnen und Schüler gaben an, dass dies „eher“ zutreffe (vgl. Abschnitt 4.6).

4.4. Mathematikstunden: Begriffsklärung und Parametervariation der Sinusfunktion

4.4.1. Durchführung

Die *erste Mathematikstunde* fand zwei Tage nach der Musikstunde im Klassenraum der 6B statt. Als Einstieg spielte ich wie geplant ein kurzes Video vor (vgl. Abschnitt A.4), in dem Schwingungen am Oszillographen sichtbar wurden. Anschließend erarbeiteten wir im L-S-Gespräch Unterschiede zwischen den Schwingungen, die beim Abspielen eines Stücks von Rihanna gezeigt werden und reinen Sinusschwingungen. Die Klasse erkannte sofort, dass Letztere die Form des Graphen der Sinusfunktion haben.

Um grundlegende Begriffe zu erklären, zeichnete ich den Graphen der Funktion $s(t) = \sin(t)$ im Intervall $[0; 2\pi]$ an die Tafel und schrieb Bezeichnungen und Werte für dieses spezielle Beispiel übersichtlich in einer Tabelle an (vgl. Abbildung A.10, , Seite 129). Die Schülerinnen und Schüler notierten dies in ihr Schulübungsheft. Nullstellen und Wertebe-

reich der Sinusfunktion, sowie der Begriff der Periodizität wurden von der Klasse sofort richtig genannt bzw. erklärt. Die Ausdrücke Amplitude und Frequenz waren bereits aus dem Physikunterricht bekannt. Nun lernten die Schülerinnen und Schüler diese in einem mathematischen Zusammenhang kennen.

Nach der Erklärung bekam die Klasse das Arbeitsblatt „Schwingungen in Musik und Mathematik“ und das zugehörige Aufgabenblatt (vgl. Seite 117f) und löste die Aufgaben 1 und 2 selbständig. Nach jedem Beispiel verglichen wir die Ergebnisse gemeinsam an der Tafel. Im zweiten Beispiel war das Intervall, das ich angegeben hatte, um den Bereich zu zeigen, in dem der Graph gezeichnet werden soll, für einige Schülerinnen und Schüler verwirrend. Sie verwechselten den Wert 0,005 mit dem Wert der Periode (vgl. Seite 118).

Nach dem Lösen dieser zwei Aufgaben gingen wir einen Schritt weiter und betrachteten die Sinusfunktion $s(t) = a \cdot \sin(bt)$. Nachdem ein Schüler den Text oberhalb der ersten Tabelle am Arbeitsblatt vorgelesen hatte und somit die Aufgabenstellung klar war, zeigte ich mit dem Beamer in Geogebra die Veränderungen des Graphen dieser Sinusfunktion mit Hilfe der Schieberegler für die Parameterwerte a und b . Die Schülerinnen und Schüler erklärten, was passierte. Es fiel mir auf, dass einigen die richtigen Worte fehlten, um das Verhalten des Graphen zu beschreiben. Ich fragte so lange nach, bis die Begriffe „stauchen“ und „strecken“ fielen und diktierte dann eine Formulierung, die die Schülerinnen und Schüler in der Tabelle notierten. Parallel dazu spielte ich das Audacity-Dokument „Parametervariation“ (vgl. Abbildung A.13) vor. Der Unterschied in der Tonhöhe wurde schneller erkannt als in der Lautstärke. Außerdem meinte der Schüler, der den Tonhöhenunterschied zuerst wahrnahm, dass der höhere Ton auch leiser sei. Dies stimmt insofern, als unser Gehirn verschiedene Tonhöhen unterschiedlich laut wahrnimmt.

Nachdem diese Tabelle fertig ausgefüllt war, bearbeitete die Klasse die Aufgaben 4a und 4b alleine und jeweils ein Schüler bzw. eine Schülerin präsentierte das Ergebnis an der Tafel. Da dann die Stunde aus war, gab ich ihnen die Aufgaben 3, 4c und 6a als Hausübung auf.

Diese wurde am Beginn der *zweiten Mathematikstunde* verglichen. Ich hatte mich bewusst entschieden, die Hausübung nicht abzusammeln und stattdessen die Aufgaben nochmals gemeinsam in der Klasse anzusprechen. Die Stunde fand am nächsten Tag im EDV-Saal statt. Es gab keine speziellen Fragen zur Hausübung. Schülerinnen und Schüler diktierten mir (teilweise freiwillig und teilweise nachdem sie aufgerufen worden waren) ihre Ergebnisse bzw. zeichneten die Graphen an die Tafel. Danach las ein Schüler den Lückentext am Arbeitsblatt „Schwingungen in Musik und Mathematik“, wir wiederholten, wie die Parameterwerte mit Lautstärke und Höhe eines Tones zusammenhängen und sie trugen die fehlenden Worte ein. Anschließend erarbeitete die Klasse in Zweiertteams die zweite Tabelle zum Parameter-

wert c am Blatt. (Es saßen immer zwei Personen an einem Computer. Der EDV-Saal ist mit 16 Computern ausgestattet.) Wir verglichen gemeinsam die Ergebnisse und stellten mit Hilfe von Audacity fest, dass Phasenverschiebung eines Sinustones keinen hörbaren Unterschied macht (vgl. Abbildung A.14). Diese Punkte nahmen in etwa die Hälfte der Stunde in Anspruch. Danach begann der Stationenbetrieb, der in Abschnitt 4.5 näher beschrieben wird.

4.4.2. Reflexion und Analyse

Da ich den Eindruck hatte, dass das Video bei der Klasse sehr gut ankam, würde ich es wieder als Einstieg in das Thema einsetzen. Es stellte rasch eine Verbindung zwischen akustischen Reizen (Lied von Rihanna und Sinustöne unterschiedlicher Frequenz) und optischer Darstellung her. Außerdem wurde so schnell klar, warum in diesem Zusammenhang die Sinusfunktion behandelt wurde.

Die Erklärung der grundlegenden Begriffe würde ich ebenfalls genauso wiederholen. Es gab dazu wenige Fragen und die Schülerinnen und Schüler konnten danach die Aufgaben 1 und 2 lösen. Da das angegebene Intervall in der zweiten Aufgabe am Arbeitsblatt verwirrend war, würde ich es in Zukunft weglassen. Das Intervall sollte eigentlich den Bereich angeben, in dem der Graph gezeichnet werden soll und so als Unterstützung dienen, was aber in dieser Klasse nicht der Fall war (ebenso in Aufgabe 3).

Ich kann sowohl in der gemeinsamen Erarbeitung der Tabelle für die Parameterwerte a und b in der ersten Mathematikstunde als auch im selbständigen Experimentieren mit Geogebra zum Ausfüllen der zweiten Tabelle in der zweiten Mathematikstunde Vor- und Nachteile erkennen. Da das Verändern der Schieberegler keine sehr anspruchsvolle Aufgabe ist, störte es meiner Ansicht nach nicht, dass ich dies in der ersten Stunde am Beamer vorführte. Dies sparte Zeit, vor allem aber wäre es die einzige Aufgabe in dieser Stunde gewesen, für welche die Schülerinnen und Schüler einen Computer gebraucht hätten. Es bot sich daher an, diese Einführungsstunde im Klassenraum zu verbringen.

Andererseits bekommen die Schülerinnen und Schüler einen unmittelbaren Zugang, wenn sie selbst mit Geogebra experimentieren. Dies konnten sie in der zweiten Mathematikstunde tun. Wenn diese Unterrichtsreihe nochmals durchgeführt wird, gibt es auch die Möglichkeit, für die Parametervariation eine ganze Stunde im EDV-Saal vorzusehen.

Wenn ich die Variation am Beamer zeige, könnte ich mir vorstellen, dass die Schülerinnen und Schüler zuerst paarweise eine Formulierung finden und notieren und diese danach im Plenum verglichen wird. So machen sich wahrscheinlich mehr Personen Gedanken dazu. Es ist wichtig, dass die eingetragenen Formulierungen nicht falsch sind, allerdings gibt es mehrere Möglichkeiten und die Schülerinnen und Schüler haben wahrscheinlich ein besseres Verständnis durch ihre individuellen Fassungen.

4.5. Mathematikstunden: Stationenbetrieb

4.5.1. Durchführung

Zur Erklärung des Stationenbetriebs teilte ich den Arbeitsplan (vgl. Abbildung A.1) aus, erläuterte, dass das Thema der verbleibenden eineinhalb Unterrichtsstunden „Überlagerung von Schwingungen“ sei (die Klasse war damit ganz am Anfang im Video schon einmal konfrontiert worden) und besprach die vier Stationen. Wichtige Punkte, die ich erwähnte, waren der Unterschied zwischen den Pflichtstationen (die sie in beliebiger Reihenfolge bearbeiten konnten) und dem Bonus, die Verwendung des Infoblatts und der Einsatz von Audacity. Sie bekamen Mappen für alle Arbeitsblätter und Ausdrücke, die sie am Ende des Stationenbetriebs abgeben sollten.

Anschließend arbeiteten die Schülerinnen und Schüler selbständig. Ich konnte beobachten, dass sich die meisten gleich alle Zettel auf einmal nahmen, diese waren in kurzer Zeit weg. Die Teams begannen mit unterschiedlichen Stationen. Ich sah, dass viele das Blatt „Ton, Klang, Geräusch, Knall“ eifrig ausfüllten. Ein paar Schüler schrieben statt eigenen Stichworten nur die Lösungen der ersten Aufgabe am Zettel oben in die Kästchen (d.h. sie ordneten nur die Buchstaben a-d zu).

Nicht alle erkannten, dass sie bei den Aufgaben zur konstruktiven und destruktiven Interferenz und auch bei der Geogebra-Aufgabe zur Schwebung die Summe der Funktionen bilden mussten, deshalb erklärte ich es ihnen. Immer wieder wurde gefragt, wie die Zahl π in Geogebra eingegeben werden könne. Ab und zu gab es Probleme bei der Funktionseingabe, z.B. weil eine Variable zu viel oder zu wenig eingegeben wurde. Prinzipiell konnte ich aber beobachten, dass die Schülerinnen und Schüler wussten, wie Funktionsgraphen mit Geogebra gezeichnet werden. Einige ereiferten sich darin, die verschiedenen Graphen bunt einzufärben, obwohl der Drucker diese Farben nicht wiedergeben konnte. Zum Drucken gab es einige technische Fragen, z.B. weil das Verhältnis nicht richtig eingestellt war oder nur die Algebra-Ansicht gezeigt wurde. Diese konnten aber schnell gelöst werden.

Beim Arbeitsblatt „Schwebung“ übersahen einige die Fußnote zur Skalierung der Achsen und fragten nach.

Ich konnte beobachten, dass sich nicht alle das Audacity-Dokument zum Thema Schwebung anhörten bzw. mit der Gitarre experimentierten. Letzteres war außerdem durch den Arbeitslärm (es war nicht sehr laut, aber die Schülerinnen und Schüler besprachen die Stationen miteinander) schwer hörbar. Diese Beobachtung bestätigt meine obige Vermutung, dass sich die Klasse vor allem auf das Ausfüllen von Aufgabenstellungen und nicht auf zusätzliche Informationen konzentrierte.

Am Ende der zweiten Mathematikstunde gaben fast alle Schülerinnen und Schüler an, eine Station fertig bearbeitet zu haben. Ein Schüler behauptete sogar, zwei Stationen beendet zu haben.

In der *dritten Mathematikstunde* am nächsten Tag hatten die Schülerinnen und Schüler ca. 30 Minuten Zeit, den Stationenbetrieb zu beenden. Einige machten auch die Bonusstation, andere wurden nur ganz knapp fertig. Anschließend besprachen wir die Pflichtstationen im Plenum. So fragte ich z.B.: „Wenn ich eine Saite der Gitarre anschlage, höre ich dann einen Ton, Klang, Knall oder ein Geräusch?“ bzw. „Was ist charakteristisch an einem Geräusch?“ usw. Zum Thema „Konstruktive und destruktive Interferenz“ spielte ich Audacity-Dokumente vor und stellte so einen Zusammenhang zur Akustik her. Außerdem besprachen wir den Begriff der Schwebung und ich erzählte vom Nutzen dieses Phänomens zum Stimmen von Musikinstrumenten.

Als Abschluss der Unterrichtsreihe spielte ich einen Teil des Stücks „Studie I“ von Karlheinz Stockhausen vor, der zur Komposition Sinustöne verwendete. Es blieb genug Zeit, um die Feedbackbögen auszufüllen und die Schülerinnen und Schüler gaben mir diese (anonym) und auch die Mappen ab (zur Kontrolle, sie bekamen diese in der folgenden Woche zurück).

4.5.2. Reflexion und Analyse

Der Stationenbetrieb kam bei dieser Klasse sehr gut an. Einerseits hatte ich den Eindruck, dass sie gerne selbständig arbeiteten, andererseits zeigen dies auch Rückmeldungen auf dem Feedbackbogen. So schrieb eine Person: „Das mit den Stationen war gut!“ oder allgemein zu den Stunden im Computerraum: „EDV Geogebra genau so“, „Arbeitsblätter war gut & nett“, „Gruppenarbeit war gut“, bzw. „Die Arbeitsaufträge in Mathematik sollten bleiben; diese habe ich sehr gut gefunden. Änderung: Versuchen Sie, zwei volle Stunden für die Arbeitsaufträge im EDV-Saal einzubringen.“ Dies spricht einen Punkt an, der im Feedback immer wieder erwähnt wurde: mehr Zeit. So ist z.B. zu lesen: „Ein bisschen langsamer und mehr Zeit für die Arbeitsaufträge“, „Das Programm kann so bleiben, aber es braucht mehr Zeit!“, „Experimente sollen verringert werden. Die Zeit ist dafür zu wenig“ bzw. „Arbeitstempo verlangsamen“. Zehn Personen gaben an, dass das Unterrichtstempo in den Mathematikstunden zu schnell gewesen sei. 16 Schülerinnen und Schüler meinten, dass es gerade richtig war, eine Person gab an, es sei zu langsam gewesen. Das zeigt, dass es schwierig oder sogar unmöglich ist, ein richtiges Tempo für alle zu finden. Bezüglich Dauer und Umfang der Mathematikstunden meinten 22 Personen, dass es gerade richtig war, je drei gaben an, dass es zu kurz bzw. zu lang gewesen sei. 23 Schülerinnen und Schüler kreuzten an, dass der Schwierigkeitsgrad gerade richtig war, eine Person empfand die Inhalte als sehr schwierig, zwei Personen als sehr leicht. Zur Behauptung „Ich habe die Inhalte zum

Thema „Schwingungen“ (Mathematikstunden) verstanden“ antworteten 15 Personen mit „trifft ganz zu“, 10 Personen mit „trifft eher zu“ und zwei Personen mit „trifft eher nicht zu“. Dies entspricht meinem subjektiven Eindruck, dass auch die Mathematikstunden dem Niveau der Klasse entsprachen.

Aus meinen Beobachtungen während des Stationenbetriebs und der Korrektur der Mappen zog ich folgende Schlüsse:

Beim Ausfüllen des Blatts „Ton, Klang, Geräusch, Knall“ orientierten sich die meisten Schülerinnen und Schüler sehr stark an den Formulierungen am Infoblatt. Außer einem Schüler notierten sich letztlich alle Stichworte in die dafür vorgesehenen Kästchen. Ab und zu lässt die Wortwahl vermuten, dass die Person den Text nicht ganz verstanden hat. (So ist z.B. statt „Amplituden klingen schnell wieder ab“ nur „Amplituden klingen schnell“ zu lesen.) Einige verwechselten den Ausdruck „Sinusschwingungen“ mit „Sinusfunktion“, hier liegt wahrscheinlich noch ein Verständnisproblem vor. Aus Antworten geht hervor, dass ein paar Personen zwar einen Klang als Summe von Sinustönen sahen, ein Geräusch jedoch nicht! Einmal lautete die Antwort: „Summe von Sinusströmen“. Die zwei Aufgaben am Blatt wurden durchwegs richtig gelöst. Meist fanden die Schülerinnen und Schüler auch die richtige Begründung und schrieben sie dazu. Erklärungen wie „Klang, ganzzahliges Verhältnis der Frequenzen“ würde ich in der Klasse nochmals ansprechen, da das nicht aus der Abbildung ersichtlich ist! Eine einfache Begründung lautet: „Klang, weil die Gesamtschwingung periodisch ist.“ Insgesamt schien das Arbeitsblatt klar formuliert zu sein und dem Niveau der Schülerinnen und Schüler zu entsprechen. Dass nicht alle die Inhalte ganz verstanden, ist nicht weiter verwunderlich. Deshalb wurden sie nach dem Stationenbetrieb nochmals im Plenum zusammengefasst. Ich könnte mir vorstellen, noch mehr Personen zu erreichen, wenn ich während des Stationenbetriebs bereits die Blätter kontrollierte und den Teams gegebenenfalls Inhalte nochmals mündlich erklärte bzw. Fragen dazu stellte.

Die Aufgaben zum Thema „Konstruktive und destruktive Interferenz“ lösten alle Schülerinnen und Schüler mit Geogebra. Die meisten druckten die Graphen aus, einige skizzierten diese auf ihrem Arbeitsblatt. Beide Lösungen waren laut Angabe möglich. Jeder Lösungsweg bringt Vor- und Nachteile. Der Vorteil der händischen Skizzen ist, dass sich die Schülerinnen und Schüler nochmals auf andere Weise mit den Graphen beschäftigen. Die Ausdrücke von Geogebra sind dagegen exakter und generell schöner. Wenn ich den Stationenbetrieb nochmals durchführe, werde ich wieder beide Möglichkeiten anbieten.

Auffällig ist, dass fast niemand schriftlich notierte, was ihm bzw. ihr an den Zeichnungen auffiel und auch fast niemand die Frage unten am Zettel beantwortete. Die meisten legten nur Skizzen oder Ausdrücke der Graphen bei. Obwohl diese Fragen nachher nochmals im Plenum besprochen wurden, kann ich mir vorstellen, die Fragen weiter oben am Arbeitsblatt

zu stellen und erst danach Raum für die Skizzen zu lassen. Eventuell hilft auch eine weitere Aufforderung, wie z.B.: „Was fällt dir auf? Notiere deine Vermutungen!“.

Etwa die Hälfte aller Schülerinnen und Schüler beschriftete die Graphen. Ein Hinweis darauf am Arbeitsblatt könnte auch die restlichen Personen auffordern, die Zeichnungen zu beschriften. Außerdem fragten mich einige, wie dies in Geogebra möglich sei. Vielleicht hilft in diesem Fall eine allgemeine Erklärung in der Klasse.

Drei Schülerinnen zogen die Überlagerungskurve im Beispiel c bunt nach. Dies macht den Graphen übersichtlich. Eine Idee wäre daher, dass die Schülerinnen und Schüler dies für alle Überlagerungskurven machen!

Sieben Personen skizzierten nur die zwei Einzelschwingungen und addierten diese nicht! Ein Team löste nur Beispiel a, alle anderen Mappen waren vollständig.

Bei der Station „Schwebung“ fanden die meisten ohne Probleme heraus, welche Funktionen sie eingeben mussten. Es erwies sich als sinnvoll, dass sie die Funktionsgleichungen auf den Ausdrucken angaben (einige machten das). So konnte ich kontrollieren, ob sie wirklich die richtigen Funktionen eingegeben hatten. Wenn ich diese Station in einer anderen Klasse wiederhole, werde ich dies am Arbeitsblatt einfordern. Da die ausgedruckten Graphen größer waren als der dafür vorgesehene Platz am Arbeitsblatt, legten alle den Ausdruck bei, was nicht weiter störte.

Die Bonusstation war als zusätzliche Information gedacht. Auch hier fiel mir auf, dass die Schülerinnen und Schüler nach Möglichkeiten suchten, Antworten aufzuschreiben. Zweimal wurde die Frage gestellt, wie eine „schön modulierte“ Welle (vgl. Aufgabenstellung unter www.thema-mathematik.at) aussehe.

Insgesamt habe ich den Eindruck, dass die Schülerinnen und Schüler durch das eigenständige Arbeiten mit Geogebra veranlasst waren, sich Gedanken zum Thema zu machen. Der Stationenbetrieb bot eine gute Abwechslung zum Frontalunterricht, ich würde ihn daher in einer anderen Klasse wieder so anbieten.

4.5.3. Bildeindrücke vom Stationenbetrieb



Abbildung 4.1.: Arbeit mit dem Infoblatt



Abbildung 4.2.: Hörbeispiel



Abbildung 4.3.: Arbeit mit Geogebra

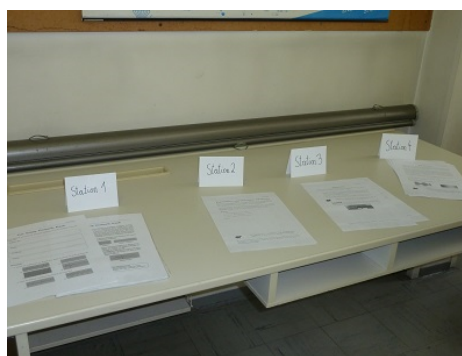


Abbildung 4.4.: Material

4.6. Feedback

Am Ende der vier Unterrichtsstunden konnten die Schülerinnen und Schüler mit einem Feedbackbogen schriftlich Rückmeldung geben. Einige Ergebnisse wurden bereits oben erwähnt. Da an diesem Tag niemand fehlte, füllten 27 Schülerinnen und Schüler den Bogen aus. Sollte die Summe der Kreuze pro Zeile trotzdem nur 26 ergeben, so enthielt sich eine Person der Meinung. Abbildung 4.5 zeigt den Feedbackbogen und eine Auswertung der geschlossenen Fragen (zum Ankreuzen).

Neben den bereits oben erwähnten Antworten auf die offenen Fragen bezogen sich einige Bemerkungen allgemein auf die vier Unterrichtsstunden, z.B.: „Es war ein netter und abwechslungsreicher Unterricht, danke.“, „Es waren gute Hörbeispiele dabei, die das Ganze recht abwechslungsreich gemacht haben, Verzicht auf das letzte Musikstück.“, „Alle Dinge nie höher weiterführen, vielleicht sollte man ein bisschen genauer erklären“. Dieselbe Person antwortete auf die zweite Frage: „Wie dies in der wirklich modernen Musik aussehen würde“. Weitere Rückmeldungen: „Lauter reden!“, „Mehr lachen“, „War super interessant“, „Genau so“, „Es war alles genau richtig“, „Alles kann so bleiben“, „Es war sehr nett und lustig. Danke!“, „Gut erklärt, abwechslungsreicher Unterricht“, „Interessanter gestalten und keine Hausübung aufgeben!“, „Interessanter“, „Es war eigentlich alles richtig! Ich fand den Unterricht interessant und ich habe auch alles verstanden.“, „Mehr als vier Stunden“. Außer der oben erwähnten Antwort auf die zweite freie Frage bekam ich nur eine weitere (abgesehen von „Nein“): „Nicht wirklich, ich möchte Medizin studieren.“

4. Umsetzung in der Schule anhand eines ausgewählten Unterrichtsbeispiels

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Mich interessiert, wie ihr die vergangenen vier Stunden zum Thema „Musik und Mathematik“ seht und was ich verbessern kann, wenn ich dieses Thema in einer anderen Klasse unterrichte. Bitte füllt diesen Feedbackbogen gewissenhaft aus!

Vielen Dank!

Kreuze die für dich zutreffenden Kriterien bitte an!	Trifft ganz zu	Trifft eher zu	Trifft eher nicht zu	Trifft gar nicht zu
Ich habe die Inhalte zum Thema „Transformationen in der Musik“ (Musikstunde) verstanden.	9	17	0	0
Ich habe die Inhalte zum Thema „Schwingungen“ (Mathematikstunden) verstanden.	15	10	2	0
Im Unterricht war genug Platz für meine Anliegen und Fragen.	13	11	3	0
Ich konnte mich selbst aktiv in den Unterricht einbringen (durch Lösen von Aufgaben, Experimente mit Geogebra,...).	12	11	3	1
Das Thema „Musik und Mathematik“ interessiert mich.	3	9	11	4
Ich kann das, was ich hier gelernt habe, auch außerhalb der Schule brauchen.	2	6	14	4
Ich finde fächerübergreifenden Unterricht interessant.	12	10	4	1
Vernetzendes Denken ist in unserer Gesellschaft wichtig.	16	10	1	0

Musikstunde (Montag):

Das Unterrichtstempo war ...	zu schnell	3	gerade richtig	24	zu langsam	0
Dauer und Umfang:	zu kurz	1	gerade richtig	24	zu lange	2
Schwierigkeitsgrad:	sehr schwierig	1	gerade richtig	20	sehr leicht	5

Mathematikstunden (Mittwoch bis Freitag):

Das Unterrichtstempo war ...	zu schnell	10	gerade richtig	16	zu langsam	1
Dauer und Umfang:	zu kurz	3	gerade richtig	22	zu lange	2
Schwierigkeitsgrad:	sehr schwierig	1	gerade richtig	23	sehr leicht	2

Beantworte folgende Fragen, bringe bitte Vorschläge:

Wenn diese Stunden in einer anderen Klasse durchgeführt werden, was sollte genauso gemacht werden? Was sollte geändert werden?

Fällt dir etwas ein, was dich zum Thema „Musik und Mathematik“ noch interessieren würde?

Platz für alles, was du sonst noch sagen möchtest:

Abbildung 4.5.: Feedbackbogen–Auswertung

4.7. Allgemeine Gedanken zur Unterrichtsreihe und zu fächerübergreifendem Unterricht

Es ist bemerkenswert, dass 22 Schülerinnen und Schüler die Behauptung „Ich finde fächerübergreifenden Unterricht interessant“ als zutreffend oder zumindest „eher“ zutreffend empfinden. Sogar 26 Personen meinen, dass vernetzendes Denken in unserer Gesellschaft (eher) wichtig sei. In der Literatur werden häufig verschiedene Begriffe in diesem Zusammenhang unterschieden. Nach Brinkmüller-Becker kann fächerübergreifender Unterricht in die Kategorien „fächerüberschreitender“, „fächerverknüpfender“, „fächerkoordinierender“, „fächerergänzender“ und „fächeraussetzender“ Unterricht eingeteilt werden.² Diese Formulierungen lassen bereits die Weite des Feldes erahnen. Eine genaue Unterscheidung und Definition dieser und weiterer Begriffe soll nicht Thema dieser Arbeit sein. Im vorliegenden Text wird zu fächerübergreifendem Unterricht nach der Konvention von Brüning „jede Art von Kooperation zwischen zwei oder mehr Fächern, die sich zum Ziel setzt, die einseitige und somit reduzierte Fachperspektive zu erweitern und zu ergänzen“³ gezählt. Fachunterricht steht nach Brüning in einer wechselseitigen Beziehung mit fächerübergreifendem Unterricht und hat ebenfalls seine Berechtigung.⁴ Ähnlich schreiben auch Kremer und Stäudel: „Im fächerübergreifenden Lernen geht es darum, die gewohnte Ordnung eines Schulfaches vorübergehend außer Kraft zu setzen und stattdessen neue Verbindungs- und Trennlinien zu schaffen. Gewohnte Sichtweisen werden aufgebrochen und erweitert, der hypothetische Charakter von Ordnungen sichtbar gemacht.“⁵ Dass Vernetzungen zwischen den Fächern auch im Lehrplan ausdrücklich erwünscht sind, wurde bereits in Abschnitt 1.8.3 erörtert.

Während der Planung und Durchführung der Unterrichtsreihe sowie durch Literaturrecherche⁶ konnte ich folgende Vor- und Nachteile von fächerübergreifendem Unterricht erkennen:

Vorteile:

- Fächerübergreifender Unterricht bringt die Möglichkeit, das „Schubladendenken“ des Fachunterrichts zu verlassen und größere Zusammenhänge kennenzulernen.
- Im Mathematikunterricht können auf diese Weise Anwendungen aufgezeigt und so die Bedeutung der Mathematik unterstrichen werden.
- Vernetzungen mit Mathematik ermöglichen es, Musik aus einer völlig neuen Perspektive zu betrachten (und umgekehrt).

²vgl. Brinkmüller-Becker 2000, S.12f; zitiert nach Brüning 2003, S.50f

³Brüning 2003, S.51

⁴vgl. Brüning 2003, S.53

⁵Kremer/Stäudel 1997, S.57

⁶vgl. dazu Brüning 2003, S.52f und web.math.uni-potsdam.de/prof/o_didaktik/af/kr_0909_einf/musik.pdf

- Das weniger beliebtere Fach kann durch Vernetzung mit einem beliebteren Fach für die Schülerinnen und Schüler aufgewertet und neu gesehen werden.
- Fächerübergreifender Unterricht bietet die Chance, die Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler stärker zu berücksichtigen.
- Durch diese Art von Unterricht kann vernetzendes Denken gefördert werden.

Nachteile bzw. Herausforderungen für die Lehrkräfte:

- Um die inhaltliche Nähe der beiden Fächer zu unterstreichen, ist eine zeitliche Nähe sinnvoll, d.h. es ist wünschenswert (aber nicht zwingend notwendig!), dass die fächerübergreifenden Inhalte zu einem ähnlichen Zeitpunkt unterrichtet werden. Dies erfordert besondere Planung und Koordination zwischen den Lehrkräften der Fächer.
- Abhängig davon, wie die Fächer zusammenwirken sollen, kann eine intensive fachliche Koordination zwischen den Lehrkräften hilfreich sein.
- Um fächerübergreifende Inhalte unterrichten zu können, benötigen die Lehrpersonen auch Kenntnisse und Kompetenzen im anderen Unterrichtsfach bzw. in den anderen Unterrichtsfächern.
- Die Schülergruppen der einzelnen Fächer sind nicht immer ident. So gibt es z.B. in den Sprachen häufig eine Teilung, Musik muss ab der siebten Klasse nicht mehr gewählt werden, usw., was die Zusammenarbeit erschwert.
- Das beliebtere Fach kann durch Vernetzung mit einem unbeliebten Fach für die Schülerinnen und Schüler weniger interessant werden.
- Es ist schwierig, beiden Fächern im gleichen Maß gerecht zu werden.

Die beschriebene Unterrichtsreihe soll eine Möglichkeit für fächerübergreifenden Unterricht bieten und so einen Beitrag zur Förderung vernetzenden Denkens im Unterricht leisten, der nach der Überwindung einiger oben beschriebener organisatorischer Herausforderungen auch die erwähnten Vorteile mit sich bringen kann.

5. Überblick und Ausblick

Die vorangegangenen Seiten zeigen eine Fülle an Verbindungen zwischen Musik und Mathematik auf. Betrachtet man diese Gemeinsamkeiten, so eröffnen sich weitere Möglichkeiten zur Vertiefung dieses Themas. Auf einige Anknüpfungspunkte wurde bereits in den einzelnen Kapiteln hingewiesen. Hier sollen noch weitere Themengebiete in diesem Zusammenhang erwähnt werden, auf die ich im Laufe der Arbeit gestoßen bin.

Es gibt zahlreiche Kompositionen, die (zumindest teilweise) mathematisch konstruiert wurden. Einige Möglichkeiten wurden im dritten Kapitel (Mathematische Strukturen in Musikwerken) betrachtet, dennoch gibt es vor allem in der „Neuen Musik“ viele Werke, die bewusst mathematische Konstruktionen beinhalten.¹ Im Bereich der stochastischen Musik können musikalische Würfelspiele, Komponieren mit Markovketten und vieles mehr beschrieben werden.² Es wäre sicherlich interessant, „mathematische“ Kompositionen näher zu untersuchen und einige Stücke zu analysieren. Dies würde allerdings den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Zu den Inhalten des ersten Kapitels kann die Fourier-Analyse als Vertiefung dienen. Im Bereich „Computer und Musik“ können Anwendungen (MIDI-Files, mp3, etc.) besprochen werden, auch hier bildet die Mathematik eine wichtige Grundlage.³ Außerdem gibt es im Rahmen der Akustik zahlreiche weitere interessante Effekte, wie z.B. die oben erwähnten Lissajouskurven.

Wird der Bereich „Musik und Mathematik“ historisch betrachtet, so sind neben den Pythagoreern auch Johannes Kepler und Leonard Euler zu erwähnen. Kepler griff die Idee der Sphärenharmonie der Pythagoreer (vgl. Seite 55) auf und wies jedem Planeten einen Ton zu. So konnten „Intervalle“ zwischen den Planeten berechnet werden. (Dem Abstand Erde – Venus entspricht demnach z.B. das Verhältnis $3 : 5$ und somit die große Sext.)⁴ Auch Euler beschäftigte sich mit dem Bereich Mathematik und Musik. Er untersuchte den Zusammenklang von Tönen und entwickelte eine Funktion zur Bestimmung der Stufe des Wohlklangs.⁵

¹vgl. Bauer 2010

²Die Diplomarbeit „Musik und ihre mathematische Saite“ von Agathe Schaurhofer (2009) widmet ein Kapitel diesem Thema.

³vgl. Kupper 1994

⁴vgl. Armbrust 1999, S.78

⁵vgl. Schaurhofer 2009, S.18

Schließlich gibt es auch noch das Gebiet der mathematischen Musiktheorie, wie sie u.a. von Mazzola⁶ betrieben wird. Viele dieser Inhalte gehen jedoch weit über den Schulstoff hinaus.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Inhalte können auf vielerlei Weise im Unterricht eingesetzt werden. Einerseits kann projektartig zu diesem Thema gearbeitet werden. Andererseits können die Bereiche in unterschiedlichen Schulstufen immer wieder aufgegriffen werden. Zusammenfassend soll die Tabelle 5.1 auf der nächsten Seite einen Überblick über die beschriebenen Unterrichtsinhalte geben. Die grün eingefärbten Zellen zeigen Bezüge zum Mathematiklehrplan der AHS auf, die gelben Zellen beziehen sich auf den Musikerziehungslehrplan. Die braune Farbe symbolisiert eine Kombination beider Fächer. Es ist leicht zu erkennen, dass sich der Lehrstoff der sechsten Klasse AHS (acht farbige Kästchen) besonders gut zur Verknüpfung der beiden Fächer eignet – nicht zuletzt deshalb wurde der praktische Teil dieser Arbeit in einer sechsten Klasse durchgeführt. Im Rahmen dieser Arbeit ergab sich dagegen kein Bezug zur vierten Klasse. Selbstverständlich stellen diese Unterrichtsinhalte nur eine Auswahl an Verknüpfungsmöglichkeiten dar – ohne Anspruch auf Vollständigkeit. Dennoch sollen sie einen Anstoß für Vernetzungen zwischen den beiden Fächern Musikerziehung und Mathematik geben. Die vorgestellten Inhalte können ein Ansatzpunkt dafür sein, sich dem Thema Mathematik und Musik zu widmen und so einen Beitrag zu fächerübergreifendem Unterricht zu leisten.

⁶vgl. Mazzola 1990

Kapitel	Themengebiete für den Unterricht	1	2	3	4	5	6	7	8
Musikalische Akustik, Logarithmus und die Sinusfunktion	Harmonische Schwingungen und die Sinusfunktion								
	Lautstärke und Logarithmus								
	Geschwindigkeit und Beschleunigung eines schwingenden Körpers, gedämpfte Schwingungen								
	Schwingungen und Integralrechnung								
	Akustische Grundlagen								
Musikalische Stimmungen	Stimmungssysteme – Bruchrechnung, Verhältnisse und Proportionen								
	Geometrische und arithmetische Folgen und exponentielle Zusammenhänge								
	Logarithmus und die Cent-Skala								
	Verknüpfungen im Bereich der Werkkunde								
	Bau von Instrumenten								
Mathematische Strukturen in Musikwerken	Musikalische Bruchrechnung								
	Symmetrie								
	Goldener Schnitt und Fibonacci-Zahlen								

Tabelle 5.1.: Musik und Mathematik im Unterricht – ein Überblick

A. Anhang: Material zum Stationenbetrieb

A.1. Überblick

Die folgenden Materialien wurden für die Unterrichtsreihe verwendet:

Arbeitsblätter:

1. Artikel zum Thema Symmetrie¹
2. Arbeitsblatt „Musikalische und geometrische Transformationen“²
3. Arbeitsblatt „Schwingungen in Musik und Mathematik“ (zweiseitig, inklusive Aufgabenblatt)
4. Arbeitsplan zum Stationenbetrieb
5. Arbeitsblatt „Ton, Klang, Geräusch, Knall“
6. Arbeitsblatt „Konstruktive und destruktive Interferenz“
7. Arbeitsblatt „Schwebung“
8. Arbeitsblatt „AM & FM“³

Overheadfolien:

- Noten des Liedes „I got rhythm“⁴
- Arbeitsblatt „Musikalische und geometrische Transformationen“
- Noten eines Krebskanons von Bach⁵
- Auszug der Noten des Menuetts von Haydns 47. Sinfonie⁶

PowerPoint-Präsentation:

- Präsentation „Transformationen in der Musik“⁷

¹Quelle: www.focus.de/schule/lernen/lernatlas/mathematik/symmetrie.aid_234643.html; Der Absatz zum Spezialfall der Punktspiegelung wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit und Platzgründen weggelassen.

²Dieses Arbeitsblatt wurde mit Hilfe der Inhalte des Abschnitts 3.3 Symmetrie in der Musik, S.66-89 erstellt.

³Die Arbeitsblätter 3-8 wurden mit Hilfe der Inhalte des Kapitels 1, S.3-40 erstellt.

⁴vgl. Maierhofer 1999, S.22

⁵vgl. Landshoff 1966, S.8 und www.lehrklaenge.de/HTML/bewegungsrichtung_und_wertgros.html

⁶vgl. Robbins Landon 1967, S.219

⁷selbst erstellt mit PowerPoint

Hörbeispiele:⁸

- Krebskanon von Bach
- 47. Sinfonie von Joseph Haydn, 3. Satz
- 5. Sinfonie von Ludwig van Beethoven, 1. Satz
- Studie I von Karlheinz Stockhausen
- Hörbeispiele erstellt mit Audacity

Weitere Materialien, Medien und Instrumente:

- Klavier
- Gitarre
- Computer, Beamer und Lautsprecher
- Kopfhörer
- Video „Schwingungen“⁹
- 2 Geogebra-Arbeitsblätter zur Parametervariation¹⁰
- Liederbücher Rock & Pop¹¹
- Tafel und Kreide
- Overheadstifte
- Kärtchen zur Kennzeichnung der Stationen

A.2. Arbeitsblätter

Auf den folgenden Seiten sind die Arbeitsblätter eingefügt, die für die Unterrichtsreihe erstellt und eingesetzt wurden.

⁸Genaue Angaben zu den Hörbeispielen finden sich im Quellenverzeichnis.

⁹selbst erstellt mit Windows Live Movie Maker

¹⁰selbst erstellt mit Geogebra

¹¹Maierhofer 1999

Symmetrie

Mathe ohne Zahlen



Nein, Mathe ist nicht trocken und langweilig, will das Jahr der Mathematik beweisen. Dass sie sehr bunt und spaßig sein kann, zeigt sich bei der Suche nach Symmetrien im Alltag. In der Malerei findet man sie. Im Vogelgesang auch. Auf der Wiese, wenn man genau hinschaut, im Weltall, wenn man ein Fernrohr hat, in der Philosophie, Biologie, Mathematik – überall stößt man auf Symmetrien. Die Suche nach Ähnlichkeiten und Regelmäßigkeiten ist ein wichtiger Bestandteil mathematischen Denkens. Wer die Prinzipien von Spiegelung, Drehung und Verschiebung einmal verstanden hat, der hat auch bei schwierigeren Aufgaben entscheidende Vorteile.

Symmetrien sind die Grundlage für viele Berechnungen in der Geometrie – ohne den richtigen „Mathe-Blick“ bleiben die Zahlen abstrakt und unverständlich. Auch Funktionen sind oft punkt- oder achsensymmetrisch. Und sogar beim Vereinfachen von Gleichungen – einer der wichtigsten Fehlerquellen im Mathematikunterricht – hilft der Blick für Symmetrie: Je schneller und sicherer man identische Terme, Nenner und Faktoren auf beiden Seiten der Gleichungen erkennt, umso leichter fällt das Umformen. Frühes Training ist daher angesagt. Dafür braucht es weder Taschenrechner noch Mathelehrer: Ein wacher Blick in die Umgebung genügt, um Symmetrien zu suchen, zu finden und zu diskutieren.

Auf Symmetriesuche

- Die Spiegelung eines Musters an einer Geraden führt zur häufigsten Symmetrieform: der **Achsen-** oder **Spiegelsymmetrie**. In der Natur finden sich unzählige Beispiele dafür. Allerdings sind diese Symmetrien meist nicht perfekt, und die Spiegelbilder zeigen kleine Unterschiede. Solche so genannten „Symmetriebrechungen“ machen viele Bilder für uns erst interessant: Zum Beispiel wirken vollkommen symmetrische Gesichter eher langweilig.
- Verschiebungen erkennt man, wenn gleiche Muster sich an verschiedenen Stellen wiederholen. **Translationssymmetrien** finden sich daher beispielsweise auf einer Tapete oder in einem Blumenbeet. In der Musik ist ein Kanon – zeitlich statt räumlich – translationssymmetrisch.
- Die Drehung ist neben der Spiegelung und der Verschiebung die dritte wichtige geometrische Operation in der Symmetrie. Sie ergibt eine **Rotationssymmetrie**, bei der die betreffenden Formen um einen bestimmten Winkel gedreht mehrfach auftauchen. Drehungen von Mustern findet man unter anderem auf einer Autofelge und dem Zifferblatt vieler Uhren.
- Die **Gleitspiegelung** ist eine Kombination aus Verschiebung und Spiegelung. Diese Symmetrie findet man zum Beispiel im Reifenabdruck eines Traktors.

Musikalische und geometrische Transformationen

Motiv	Figur
	

Lies den Artikel zum Thema Symmetrie genau durch und ordne die folgenden musikalischen Transformationen den geometrischen Transformationen zu!

Wiederholung: Das Motiv wird unverändert wiederholt.



Spiegelung an einer horizontalen Achse



Sequenz: Das Motiv beginnt mit einem anderen Ton, die Intervalle bleiben gleich.



Translation (horizontal)



Umkehrung: Die Intervalle verlaufen genau entgegengesetzt zu den Intervallrichtungen des Motivs.



Drehung um 180°



Krebs: Das Motiv erklingt „von hinten nach vorne“.



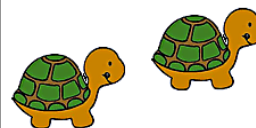
Spiegelung an einer vertikalen Achse



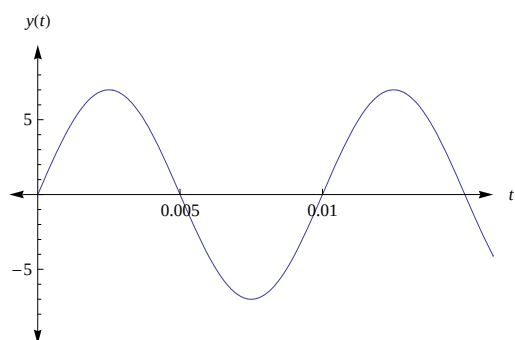
Krebsumkehrung: Kombination aus Krebs und Umkehrung



Translation (horizontal und vertikal)



Schwingungen in Musik und Mathematik



Die Gleichung einer Sinusfunktion lautet $y = a \cdot \sin(bx)$, $a, b \in \mathbb{R}^+$. Wie wirkt sich eine **Änderung der Parameter a und b** auf den Funktionsgraphen aus? Wie nimmt unser Gehör diese Änderungen wahr?

Änderungen	sichtbar (am Graphen)	hörbar (als Ton)
Vergrößerung von a bewirkt...		
Verkleinerung von a bewirkt...		
Vergrößerung von b bewirkt...		
Verkleinerung von b bewirkt...		

Der Parameter a wird auch Amplitude genannt und entspricht musikalisch der _____. Die Kreisfrequenz wird durch den Parameter b beschrieben. Daraus kann die Frequenz f eines Tones mit der Formel $b = 2\pi f$ berechnet werden. Sie entspricht musikalisch der _____. Die Schwingungsdauer oder Periode einer Schwingung bezeichnet man mit $\tau = \frac{1}{f}$.

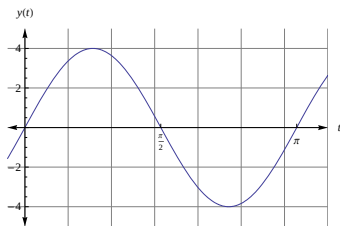
Das menschliche Ohr kann in etwa Tonhöhen zwischen 16 und 20 000 Hz wahrnehmen!

Die Gleichung einer Sinusfunktion lautet $y = a \cdot \sin(bx + c)$, $c \in \mathbb{R}$. Wie wirkt sich eine **Änderung des Parameters c** auf den Funktionsgraphen aus? Wie nimmt unser Gehör diese Änderungen wahr? (Der Parameter c heißt auch **Nullphasenwinkel!**)

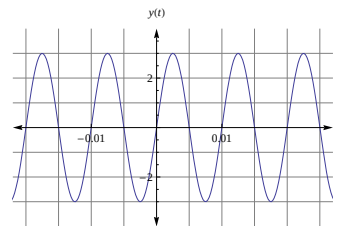
Änderungen	sichtbar (am Graphen)	hörbar (als Ton)
Vergrößerung von c bewirkt...		
Verkleinerung von c bewirkt...		

Aufgaben

1. Beschrifte am Graphen (oben) die Größen Amplitude und Periode und gib die Werte für Amplitude, Frequenz, Kreisfrequenz und Periode an!
2. Skizziere die Sinusschwingung des Tones A (220 Hz) mit Amplitude 3 im Intervall $[0;0,005]$! Trage die Begriffe Amplitude (a) und Periode (τ) in die Abbildung ein und berechne Kreisfrequenz und Periode!
3. Skizziere die Sinusschwingung mit Frequenz 0,5 Hz mit Amplitude 5 im Intervall $[0;3]$! Trage die Begriffe Amplitude (a) und Periode (τ) in die Abbildung ein und berechne Kreisfrequenz und Periode!
4. Erläutere, wie der Graph von s aus dem Graphen von s_0 hervorgeht! Was bedeutet dies für die Schwingungen? Skizziere die beiden Graphen!
 - a) Zwei Schwingungen werden durch $s_0(t) = \sin t$ und $s(t) = 3 \cdot \sin t$ beschrieben.
 - b) Zwei Schwingungen werden durch $s_0(t) = \sin t$ und $s(t) = \sin(2t)$ beschrieben.
 - c) Zwei Schwingungen werden durch $s_0(t) = \sin t$ und $s(t) = 2 \cdot \sin(3t)$ beschrieben.
 - d) Zwei Schwingungen werden durch $s_0(t) = \sin t$ und $s(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin(4t)$ beschrieben.
 - e) Zwei Schwingungen werden durch $s_0(t) = \sin t$ und $s(t) = \sin(t + \frac{\pi}{2})$ beschrieben.
5. Zwei Schwingungen werden durch $s_0(t) = \sin t$ und $s(t) = 3 \cdot \sin(2t + \frac{\pi}{2})$ beschrieben. Erläutere, wie der Graph von s aus dem Graphen von s_0 hervorgeht! Was bedeutet dies für die Schwingungen? Skizziere die beiden Graphen in drei Schritten!
6. Beschreibe Amplitude, Frequenz und Schwingungsdauer der dargestellten Schwingung. Wie lautet die Gleichung der zugehörigen Sinusfunktion? Können wir Töne mit der dargestellten Frequenz hören?



a)



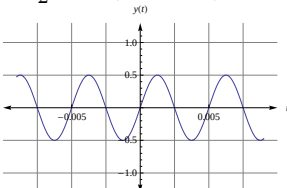
b)

7. Ordne die Funktionsgleichungen den Abbildungen zu! Begründe!

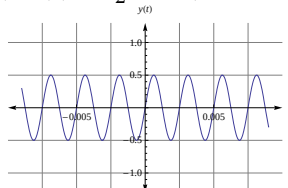
a) $y(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin(800\pi \cdot t)$

b) $y(t) = \frac{1}{2} \cdot \sin(400\pi \cdot t)$

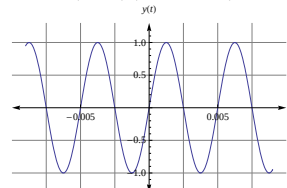
c) $y(t) = \sin(400\pi \cdot t)$



1)



2)



3)

Die nächsten Arbeitsblätter bekamen die Schülerinnen und Schüler im Rahmen des Stationenbetriebs. Der Arbeitsplan wurde im Format DIN A5 ausgeteilt, alle anderen Zettel wie gewohnt im Format DIN A4. Neun folierte Infoblätter standen den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung.

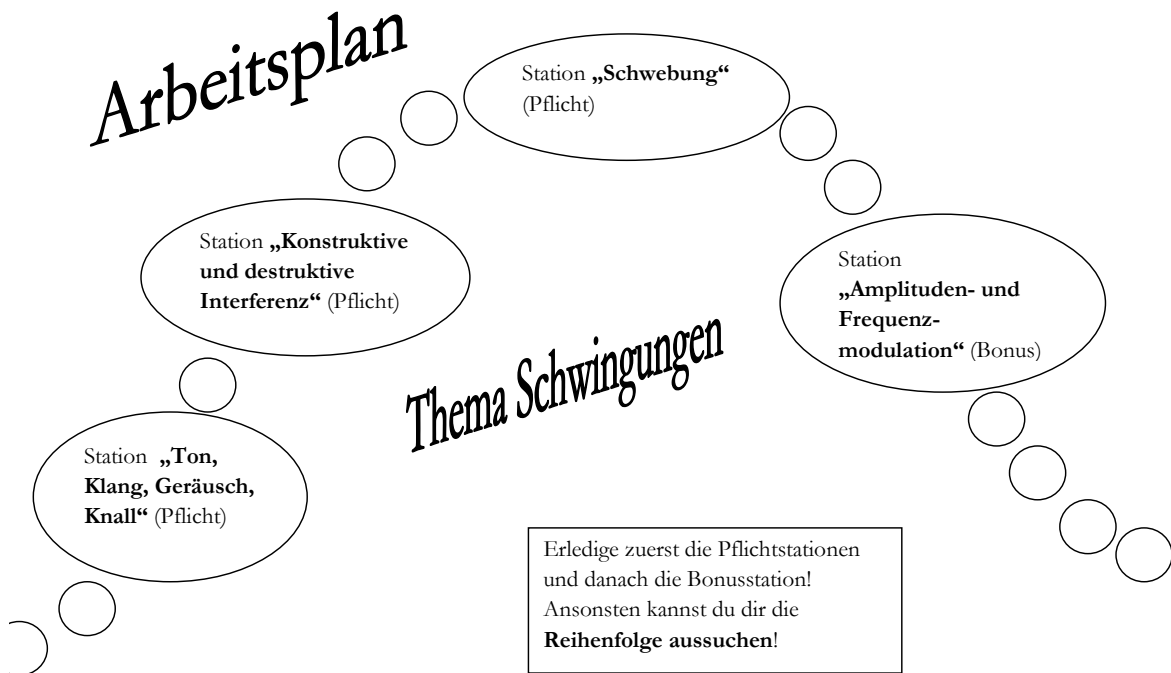


Abbildung A.1.: Arbeitsplan

Ton, Klang, Geräusch, Knall

Lies das Infoblatt und notiere dir wesentliche Merkmale von Tönen, Klängen, Geräuschen und Knallen!

Reiner Ton

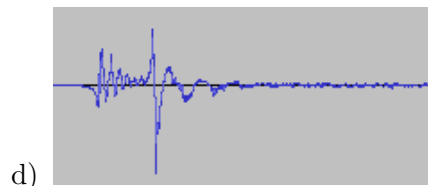
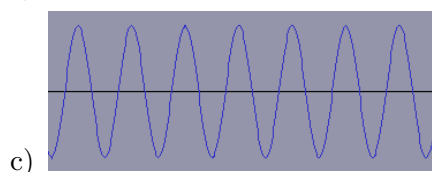
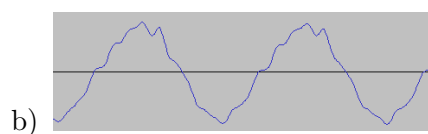
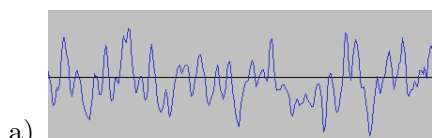
Klang

Geräusch

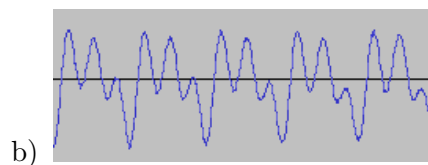
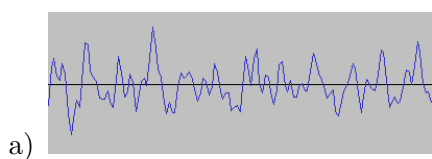
Knall

Aufgaben

1. Ordne den Abbildungen die Begriffe Ton, Klang, Geräusch und Knall zu! Begründe!



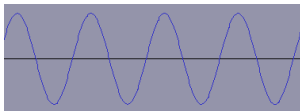
2. Stellt die folgende Abbildung einen Klang dar? Begründe!



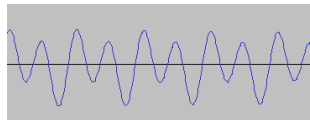
Ton, Klang, Geräusch, Knall

Nur **reine Töne** werden durch einzelne **Sinusschwingungen** dargestellt. Sie kommen in der Natur so gut wie nicht vor. Bei „natürlichen Tönen“ spricht man bereits von **Klang**. Diese bestehen aus einer Summe von Sinustönen, deren Frequenzen meist im ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen (d.h. die Frequenz des zweiten Sinustones ist doppelt so groß wie die erste, die dritte drei Mal so groß usw.). Wir hören die Überlagerungsschwingung, die durch Verschmelzen der einzelnen Teiltöne entsteht. Sie ist im Allgemeinen keine Sinusschwingung, aber in der Grundfrequenz **periodisch**.

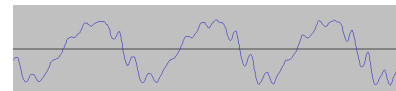
Die folgenden zwei Abbildungen zeigen die Schwingungen eines Sinustons bzw. zweier unterschiedlicher Stimmklänge (aufgenommen mit Audacity):



Sinuston



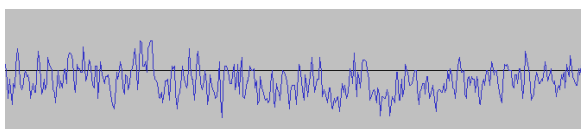
Stimme - Variante 1



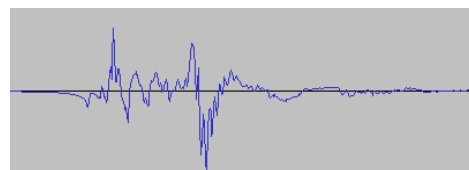
Stimme - Variante 2

Im Gegensatz zum Klang stehen die Frequenzen eines **Geräusches** (z.B. Händereiben) zueinander in keinem ganzzahligen Verhältnis. Die Summe der Teilschwingungen ist **unperiodisch**, ihre Frequenzen und Amplituden wechseln ständig.

Um **unperiodische**, zudem **kurze Schwingungsimpulse** handelt es sich auch beim **Knall** (z.B. Händeklatschen). Er enthält für kurze Zeit alle Frequenzen eines großen Bereiches. Dabei klingen die Amplituden schnell wieder ab.



Händereiben



Händeklatschen



Füllt jetzt das Arbeitsblatt aus!
Wenn ihr am Ende des Stationenbetriebs noch Zeit habt,
könnt ihr selbst Klänge, Geräusche usw. mit Audacity aufnehmen!

Konstruktive und Destruktive Interferenz

Wenn zwei Schwingungen einander überlagern, addieren sich die Elongationen der beiden Einzelschwingungen und es entsteht eine neue Schwingung (Überlagerungsschwingung). Man nennt dies das Prinzip der ungestörten Superposition.

Zeichne mit Geogebra jeweils die beiden Einzelschwingungen s_1 und s_2 und die Überlagerungsschwingung s (= *Summe* der Einzelschwingungen) in ein Koordinatensystem. **Was fällt dir auf?** Skizziere die drei Zeichnungen oder drucke sie aus!

Beispiel:

- a) $s_1(t) = \sin(2t)$ und $s_2(t) = \sin(2t)$
- b) $s_1(t) = 2 \cdot \sin(t)$ und $s_2(t) = 3 \cdot \sin(t)$
- c) $s_1(t) = \sin(2t)$ und $s_2(t) = \sin(2t + \pi)$

Skizzen:



Das Phänomen, das in a) zu erkennen ist, heißt auch **konstruktive Interferenz**, c) ist ein Beispiel für **destruktive Interferenz**.

Wie verändert sich bei diesen beiden Phänomenen die **Lautstärke** des hörbaren Tones (vorausgesetzt, die Frequenzen liegen im hörbaren Bereich)? (Tipp: Wir hören die Überlagerungsschwingung!)

Schwebung

Überlagern sich zwei Schwingungen mit geringem Frequenzunterschied, dann nehmen wir einen Ton wahr, dessen Lautstärke schwankt („schwebt“).

1. Überprüfe dies graphisch in Geogebra am Beispiel der Frequenzen 440 Hz und 445 Hz! Addiere dazu die beiden Schwingungen mit den angegebenen Frequenzen. (Tipp: Verwende die Sinusfunktion $s(x) = \sin(2\pi fx)$!) Drucke das Ergebnis aus und klebe es unten auf dieses Arbeitsblatt!¹²
2. Höre dir mit den Audacity-Dokumenten im Ordner „Schwebung“ die Töne an, die durch die Einzelschwingungen und als Überlagerung erzeugt werden!



Das Phänomen der Schwebung wird von Musikerinnen und Musikern oft zum Stimmen von Instrumenten benutzt!

Experiment:

Greife eine Gitarre auf der tiefen E-Saite am V. Bund und schlage diese Saite und die A-Saite an! (Bild!) Wenn beide Saiten nicht exakt gestimmt sind, kannst du eine Schwebung hören!



¹²So änderst du die Skalierung der Achsen: Rechtsklick auf die Achsen – Grafik – Grundeinstellungen – $x_{\min} = -0,3$, $x_{\max} = 0,3$, $y_{\min} = -7$, $y_{\max} = 7$

AM und FM

Wenn wir sprechen oder musizieren, liegen die Frequenzen zwischen 16 und 20 000 Hz. Diese Schwingungen der Luft kann man mit Mikrofonen in elektrische Schwingungen umwandeln. Würden diese Signale direkt als elektromagnetische Wellen übertragen, bräuchten wir riesige Antennen zum Empfangen der großen Wellenlängen.

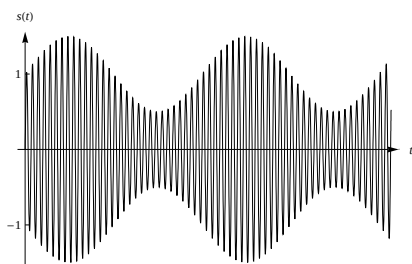
Deshalb werden im Rundfunk Modulationsverfahren verwendet. Zwei davon wirst du jetzt kennenlernen: die Amplituden- und die Frequenzmodulation. In beiden Fällen wird eine hochfrequente Trägerwelle durch ein niederfrequentes Signal moduliert. Die Frequenzen (f_0) der Trägerwelle liegen bei Amplitudenmodulation (AM) bei rund 1 MHz (sprich: "Megahertz"; 1 MHz = 1 000 000 Hz!), bei Frequenzmodulation (FM) bei rund 100 MHz (Denke an die Frequenzen der Radiosender, die du einstellen musst, wenn du sie hören willst!) Die Trägerwelle hat die Form $s(t) = a \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ und transportiert die Information, die durch das niederfrequente Modulationssignal verschlüsselt wird.

Durch *Amplitudenmodulation* entsteht eine Schwingung, deren Amplitude wiederholt zu- und abnimmt. Die Abbildung unten zeigt z.B. die Schwingung der Form

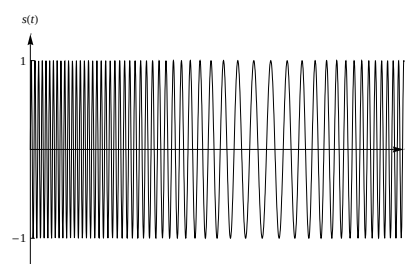
$$s(t) = (0,5 \cdot \sin(t) + 1) \cdot \sin(30t).$$

Du siehst, die Amplitude der Sinusfunktion $s_0(t) = \sin(30t)$ wird hier durch die Funktion $s_1(t) = 0,5 \cdot \sin(x) + 1$ verändert!

Bei der *Frequenzmodulation* wird analog dazu die Frequenz einer hochfrequenten Trägerwelle durch ein niederfrequentes Signal moduliert.



Amplitudenmodulation



Frequenzmodulation



Experimentiere nun auf der Homepage www.thema-mathematik.at (Thema Mathematik Wiki – 6.Klasse – Geogebra-Beispiele – Amplitudenmodulation und Frequenzmodulation) mit den Geogebra-Applets zum Thema!

A.3. Overheadfolien und PowerPoint-Präsentation

Auf den folgenden Seiten sind verwendete Overheadfolien eingefügt. Die Folie „I got rhythm“ wurde – wie oben erwähnt – aus dem Liederbuch Rock & Pop übernommen. Unten ist die Lösung, wie sie im Unterricht erstellt wurde, abgebildet. Die Overheadfolie „Musikalische und geometrische Transformationen“ wurde hier nicht extra angefügt, da sie ident mit dem Arbeitsblatt ist. Die PowerPoint-Präsentation setzt sich aus sieben animierten Folien zusammen. Die Nummerierung der Folien wurde hier zum leichteren Erkennen der Reihenfolge eingefügt. Die achte Folie zeigt einen Schritt in der Animation, in dem nur der Verlauf der Melodie ohne Notenschrift sichtbar gemacht wurde. Dies sollte vor allem für jene Schülerinnen und Schüler zur Veranschaulichung dienen, die gar nicht Noten lesen konnten.

22

I Got Rhythm

Interpret: Robert Palmer
Text: Ira Gershwin
Musik: George Gershwin

1/6 1/4

Motiv

Krebs

Sequenz

Chords: G, Am7, D7, G/B, Bb, Am7, D7, G, Am7, D7, Cm6, G/D, D7, G, Am7, D7, Cm6, G/B, Bb, Am7, D7, G, B7, E, (B+), E9, E7, A7, E7-5, D7, G, Am7, D7, G/B, Bb, Am7, D7, G, Am7, D7, Cm6, G, Dm/F, E7, A7, D7, 1. G, 2. G.

Lyrics: I got rhy - thm, I got mu - sic, I got my man, who could ask for an - y - thing more? I got dais - ies in green pas - tures, I got my man, who could ask for an - y - thing more? Old man troub - le, I don't mind him, you won't find him 'round my door I got star - light, I got sweet dreams, I got my man, who could ask for an - y - thing more? Who could ask for an - y - thing more? more?

Abbildung A.5.: I got rhythm – Lösung¹³

¹³vgl. Maierhofer 1999, S.22

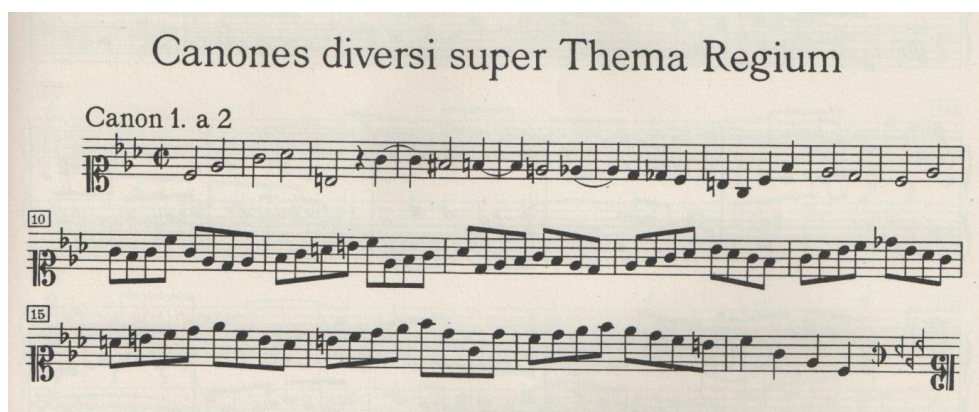


Abbildung A.6.: Bach – Krebskanon¹⁴

¹⁴Landshoff 1966, S.8 und www.lehrklaenge.de/HTML/bewegungsrichtung_und_wertgros.html

MOTIVE UND MÖGLICHE TRANSFORMATIONEN

1

MOTIV

- Bsp.: 
- Kleinste musikalische Sinneinheit

2

WIEDERHOLUNG

Motiv	Wiederholung
◦ Bsp.: 	◦ Bsp.: 

- Das Motiv wird unverändert wiederholt.

3

SEQUENZ

Motiv	Sequenz
◦ Bsp.: 	◦ Bsp.: 

- Das Motiv beginnt mit einem anderen Ton, die Intervalle bleiben gleich.

4

UMKEHRUNG

Motiv	Umkehrung
◦ Bsp.: 	◦ Bsp.: 

- Die Intervalle verlaufen genau entgegengesetzt zu den Intervallrichtungen des Motivs.

5

KREBS

Motiv	Krebs
◦ Bsp.: 	◦ Bsp.: 

- Das Motiv erklingt „von hinten nach vorne“.

6

KREBSUMKEHRUNG

Motiv	Krebsumkehrung
◦ Bsp.: 	◦ Bsp.: 

- Kombination aus Krebs und Umkehrung

7

UMKEHRUNG

Motiv	Umkehrung
◦ Bsp.: 	◦ Bsp.: 

- Die Intervalle verlaufen genau entgegengesetzt zu den Intervallrichtungen des Motivs.

8

Abbildung A.8.: PowerPoint-Präsentation

A.4. Video

Das Video, das als Einstieg ins Thema Schwingungen dient, besteht aus zwei Teilen. Zuerst werden Schwingungen des Liedes „Don’t stop the music“¹⁶ von Rihanna am Oszillographen sichtbar und gleichzeitig mit einer Audio-Anlage hörbar gemacht. Im zweiten Teil sind reine Sinusschwingungen im Frequenzbereich 300-500 Hz (beginnend mit dem höheren Ton) zu sehen und zu hören, die mit einem Tongenerator erzeugt wurden. Dazwischen wird der Text „Mathematisch kann man zeigen, dass sich Musik aus einzelnen Sinusschwingungen zusammensetzt!“ eingeblendet. Die folgende Abbildung soll einen Einblick in das Video geben.

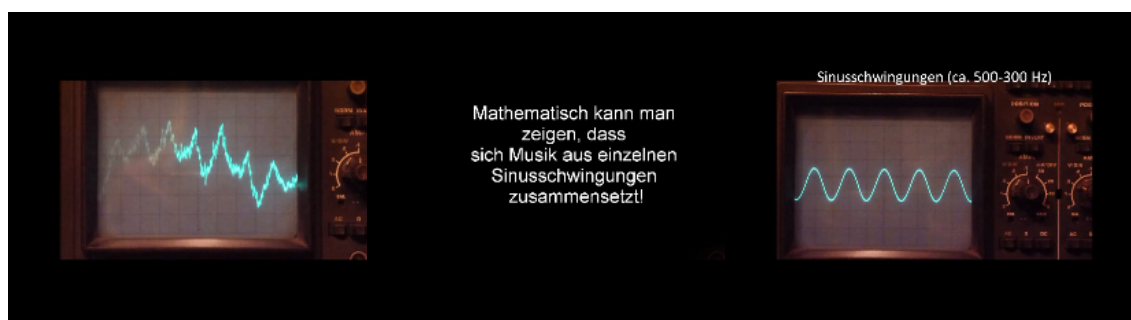


Abbildung A.9.: Video „Schwingungen“

A.5. Tafelbild

Dieses Tafelbild wurde zur Erklärung grundlegender Begriffe erstellt:

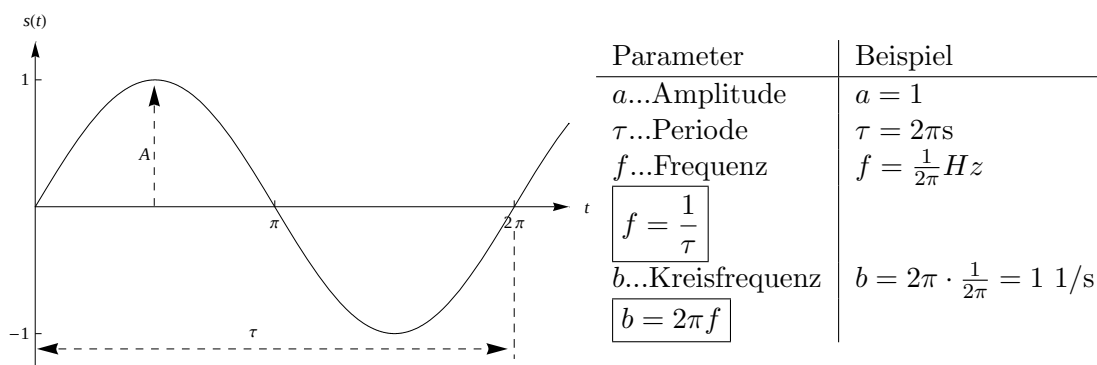


Abbildung A.10.: Tafelbild

A.6. Geogebra-Arbeitsblätter

Zur Erarbeitung der Regel für die Parametervariation der Sinusfunktion wurden zwei Geogebra-Arbeitsblätter entworfen:

¹⁶Rihanna 2007

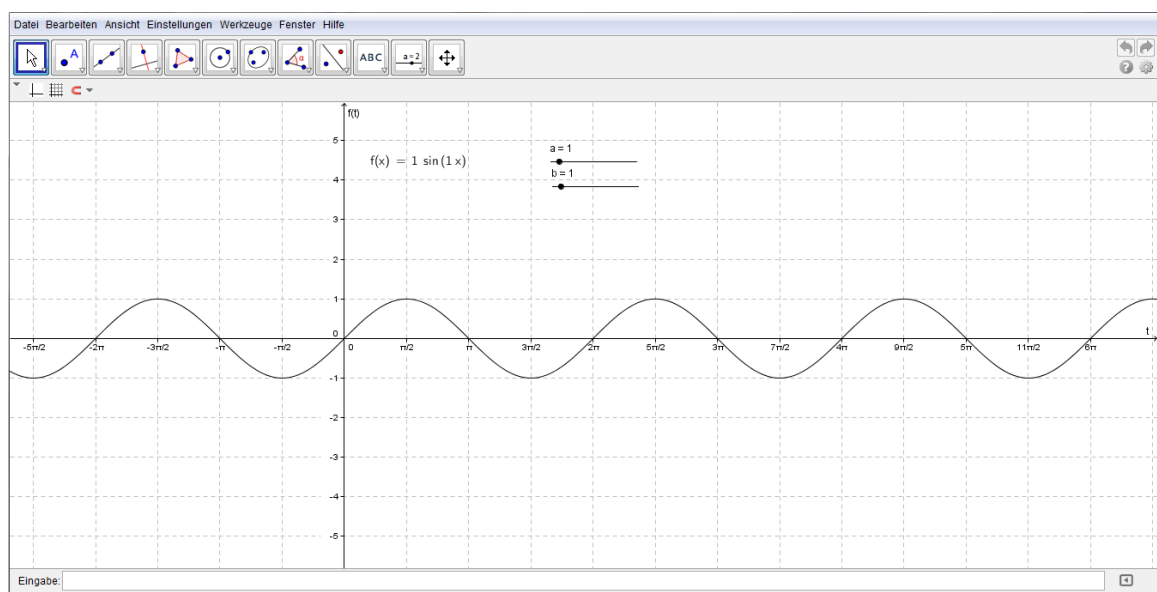


Abbildung A.11.: Geogebra-Arbeitsblatt 1

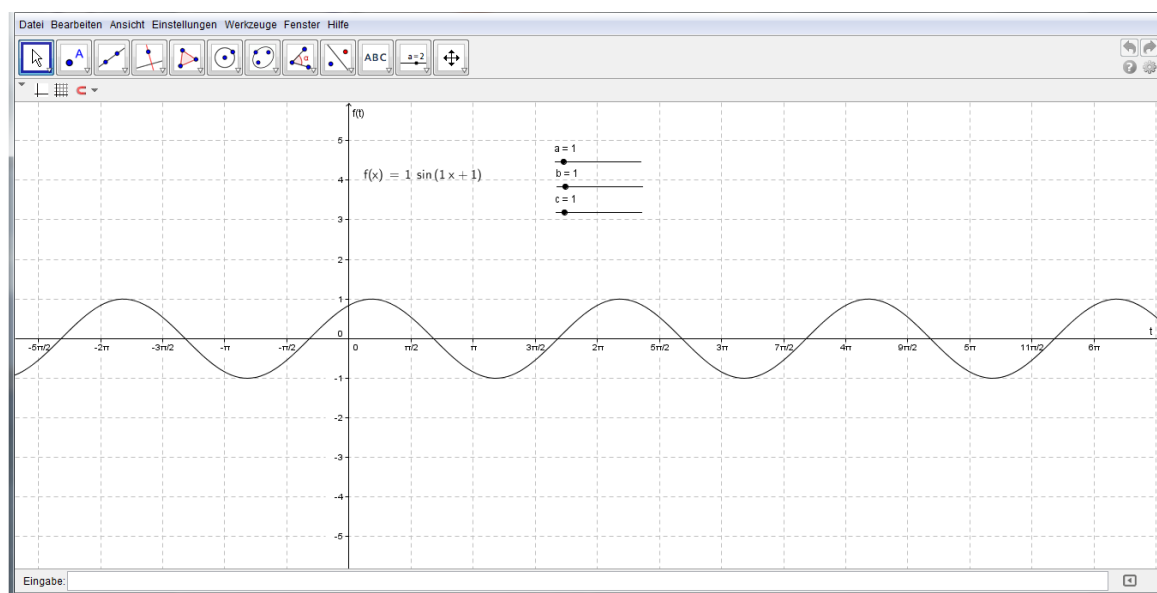


Abbildung A.12.: Geogebra-Arbeitsblatt 2

A.7. Audacity-Dokumente

Das Programm Audacity hat den Vorteil, dass Töne sowohl gehört als auch in Wellenform angezeigt werden können. Zur Erklärung der Parametervariation in der ersten Mathematikstunde wurden drei Sinustöne mit den Frequenzen 440 Hz (Amplitude 1), 220 Hz (Amplitude 1) und 220 Hz (Amplitude 0,5) generiert. Im Dokument zur Phasenverschiebung wurden zwei Schwingungen mit der Frequenz 440 Hz verglichen, wobei die zweite Schwingung mit dem Verschiebewerkzeug verschoben wurde.

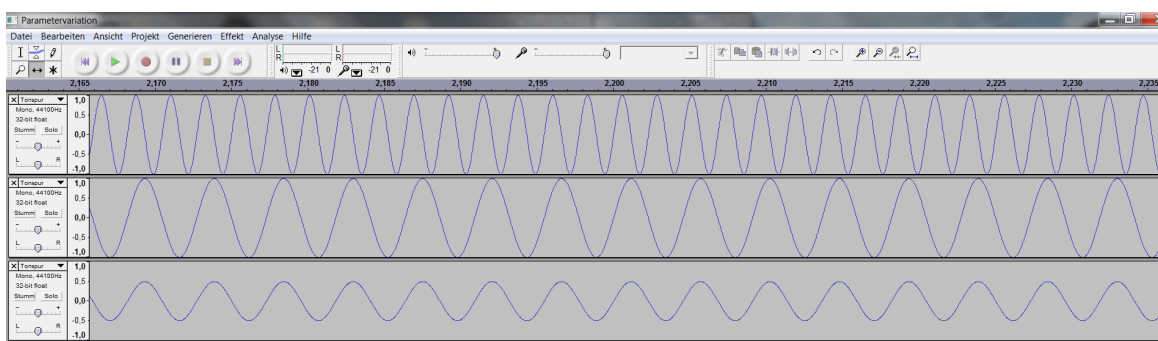


Abbildung A.13.: Audacity-Dokument zur Parametervariation

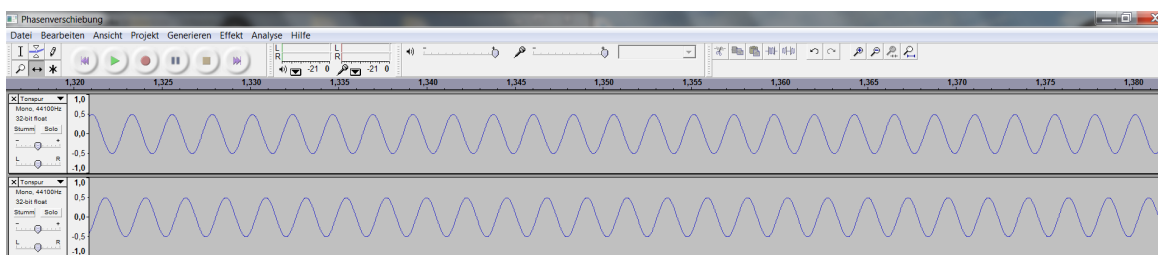


Abbildung A.14.: Audacity-Dokument zur Phasenverschiebung

Während des Stationenbetriebs konnten die Schülerinnen und Schüler das folgende Dokument zum Thema „Schwebung“ anhören (vgl. Abbildung A.15). Dazu wurden zwei Schwingungen mit gleicher Amplitude 0,5 generiert, der erste Ton mit 440 Hz und der zweite mit 445 Hz. Diese beiden Spuren wurden exportiert und als eine Monospur wieder importiert. So werden die für die Schwebung charakteristischen Schwankungen der Amplituden sichtbar.

Nach dem Stationenbetrieb spielte ich die Dokumente zur konstruktiven und destruktiven Interferenz vor (vgl. Abbildungen A.16 und A.17). Dazu wurden jeweils zwei Schwingungen mit Frequenz 440 Hz und Amplitude 0,5 erstellt. Im Fall der konstruktiven Interferenz wurden diese exportiert und als Monospur importiert. Um das Phänomen der destruktiven Interferenz zu erreichen, wurde die zweite Spur zusätzlich invertiert (Audacity-Effekte).

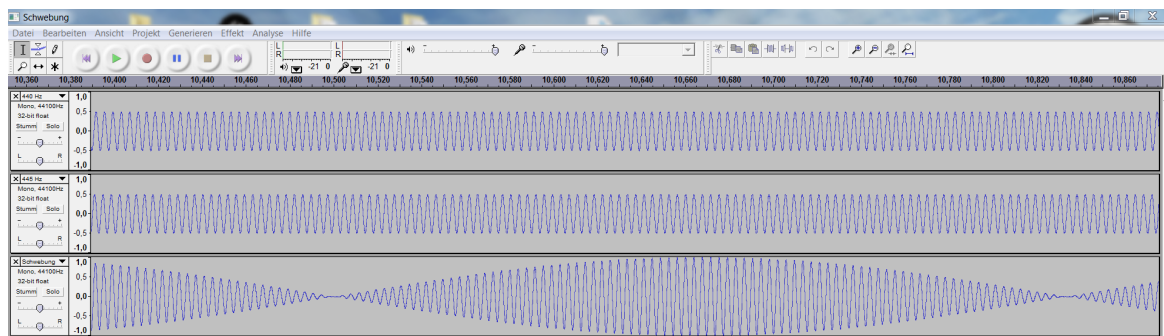


Abbildung A.15.: Audacity-Dokument zur Schwebung

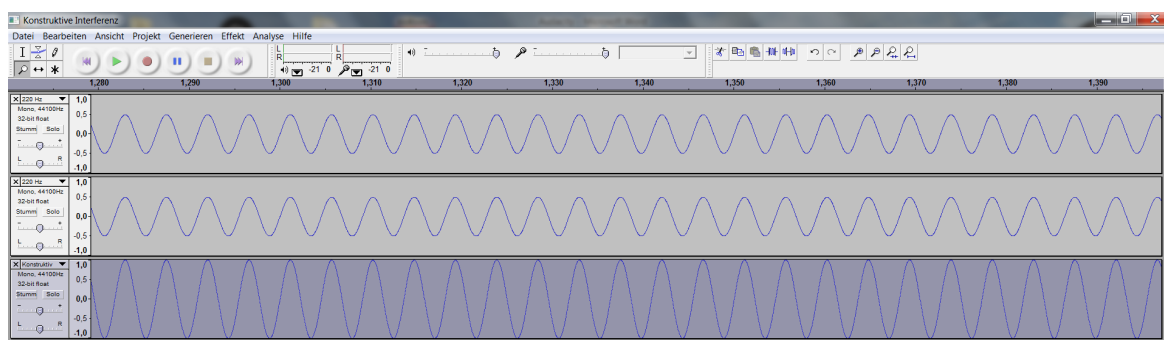


Abbildung A.16.: Audacity-Dokument zur konstruktiven Interferenz

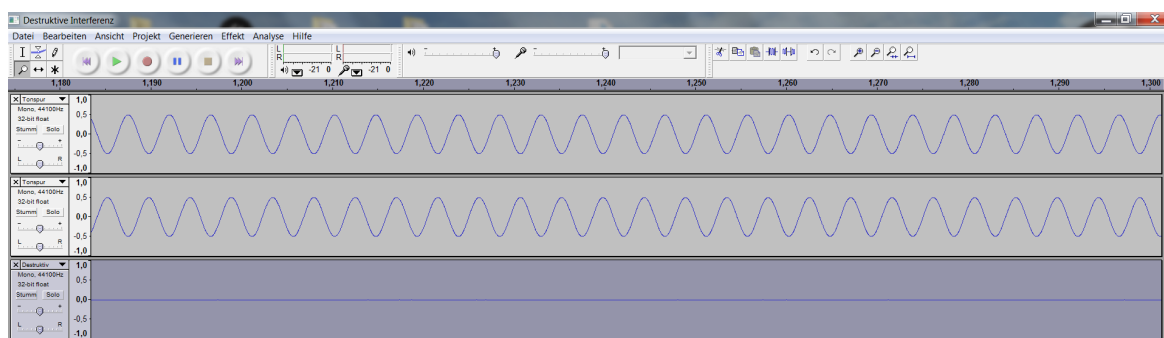


Abbildung A.17.: Audacity-Dokument zur destruktiven Interferenz

Quellenverzeichnis

Artikel und Bücher

AMON, Reinhard: Lexikon der Harmonielehre. Nachschlagewerk zur durmolltonalen Harmonik mit Analysechiffren für Funktionen, Stufen und Jazzakkorde.-Wien, München: Doblinger/Metzler 2005

AMON, Reinhard: Lexikon der musikalischen Form. Nachschlagewerk und Fachbuch zur musikalischen Form und Formung vom Mittelalter bis zur Gegenwart.-Wien: Doblinger/Metzler 2011

ARMBRUST, Ansgar: Vom Bambusrohr zur Orgelpfeife. In: MNU 52/2 1999, S.76-82

AUHAGEN, Wolfgang: Zur Klangästhetik des Sinustons.-In: De la Motte-Haber H./Kopiez R. (Hrsg.): Musikwissenschaft zwischen Kunst, Ästhetik und Experiment.-Würzburg: Königshausen und Neumann 1998

BAUER, Julian Georg: Theorie, Komposition und Analyse – Der Einfluss der Mathematik auf die Musik im 20. Jahrhundert.-Frankfurt am Main: Peter Lang 2010

BEUTELSPACHER, Albrecht/PETRI, Bernhard: Der goldene Schnitt.-Zürich: BI-Wissenschaftsverlag 1989

BEUTH, Klaus u.a.: Nachrichtentechnik.-Würzburg: Vogel Buchverlag 2009

BRAND, Clemens u.a.: Thema Mathematik 5.-Linz: Veritas 2012

BRAND, Clemens u.a.: Thema Mathematik 6.-Linz: Veritas 2012

BRÜNING, Sabine: Musik verstehen durch Mathematik. Überlegungen zu Theorie und Praxis eines fächerübergreifenden Ansatzes in der Musikpädagogik.-Essen: Die blaue Eule 2003

CHRISTMANN, Norbert: Mathematik gestaltet (mit) Musik.-In: Der Mathematikunterricht 57/2011, S.13-23

CHRISTMANN, Norbert: Mathematik hinter dem Griffbrett der Gitarre.-In: Der Mathematikunterricht 57/2011, S.35-43

DARVAS, György: Symmetry. Cultural-historical and ontological aspects of science-arts relations.-Basel: Birkhäuser 2007

DELLE, Ernst/Krieger, Georg/SPIES, Heinz-Werner: Tonleitern der Weltkulturen für Auge und Ohr. Berechnung und optische Darstellung von Tonleiterstrukturen.-In Impulse für das interkulturelle Lernen, Heft 3 1995

DORFMAYR, Anita u.a.: Mathe Buch 1.-Wien: Verlag Neues Schulbuch 2006

DUNNE, Edward/McConnell Mark: Planos and continued fractions.-In: Mathematics Magazine 72/2 1999

EID, Wolfram: Musik und Mathematik – Unterricht am Beispiel der Bruchrechnung MUP II. Quartal 2000

FLODERER, Manfred u.a.: Mach mit Mathematik 1.-Wien: ÖBV 2012

FREUDENTHAL, Hans: Warum hat die Tonleiter nur zwölf Töne?.-In: Mathematik lehrern 1/Nov. 1983

GERETSCHLÄGER, Robert u.a.: Elemente der Mathematik 6.-Wien: E.Dorner 2008

GLAESER, Georg: Der mathematische Werkzeugkasten.-Anwendungen in Natur und Technik.-Heidelberg: Spektrum 2008

GOBRECHT, Heinrich: Mechanik, Akustik, Wärme.-In: Bergmann-Schaefer (Hrsg.): Lehrbuch der Experimentalphysik (Band 1).-Berlin, New York: De Gruyter 1974

GÖTZ, Stefan u.a. (Hrsg.): Mathematik 6.-Wien: ÖBV 2010

GÖTZ, Stefan u.a. (Hrsg.): Mathematik 7.-Wien: ÖBV 2011

GÖTZ, Stefan u.a. (Hrsg.): Mathematik 8.-Wien: ÖBV 2007

GUILLAUME, Philippe: Music and acoustics. From instrument to computer.-Newport Beach: Iste 2006

HALL, Donald E.: Musikalische Akustik. Ein Handbuch.-Mainz: Schott 1997

HANISCH, Günther u.a.: Mathe Fit 2 (Lehrer/innenausgabe).-Wien: Verlag Besseres Schulbuch 2009

HELMHOLTZ, Hermann von: Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik.-Braunschweig: Vieweg 1913

HERING, Ekbert/MARTIN, Rolf/STOHRER, Martin: Physik für Ingenieure.-Berlin, Heidelberg: Springer 2012

HODGES, Wilfrid: The geometry of music.-In:FAUVEL, John/FLOOD, Raymond/WILSON, Robin (Hrsg.): Music and mathematics. From Pythagoras to fractals.-New York: Oxford University Press 2003

HODGES, Wilfrid/WILSON, Robin: Musical Patterns.-In: Assayag, Gerald u.a. (Hrsg.): Mathematics and music. A diderot mathematical forum.-Berlin, Heidelberg: Springer 2002

HUMENBERGER, Hans u.a. (Hrsg.): Das ist Mathematik 1.-Wien: ÖBV 2007

HUMENBERGER, Hans u.a. (Hrsg.): Das ist Mathematik 2.-Wien: ÖBV 2008

HUMENBERGER, Hans u.a. (Hrsg.): Das ist Mathematik 3.-Wien: ÖBV 2009

KELLER-RESSEL, Marianne u.a.: Blickpunkt Mathematik 3. Schwerpunkt allgemein bildende höhere Schulen.-Wien: ÖBV 2005

KIRSCHKE, Peter: Einführung in die Abbildungsgeometrie. Kongruenzabbildungen, Ähnlichkeiten und Affinitäten.-Wiesbaden: Teubner 2006

KRAKER, Michaela u.a.: Expedition Mathematik 2.-Wien: E. Dorner 2008

KRONFELLNER, Manfred/PESCHEK, Werner: Angewandte Mathematik 2.-Wien: Hölder-Pichler-Tempsky 1996

KUPPER, Hubert: Computer und Musik.-Mannheim: BI Wissenschaftsverlag 1994

MALLE, Günther u.a.: Mathematik verstehen 5.-Wien: ÖBV 2010

- MALLE, Günther u.a.: Mathematik verstehen 6.-Wien: ÖBV 2010
- MALLE, Günther u.a.: Mathematik verstehen 7.-Wien: ÖBV 2011
- MALLE, Günther u.a.: Mathematik verstehen 8.-Wien: ÖBV 2007
- MAZZOLA, Guerino: Geometrie der Töne. Elemente der mathematischen Musiktheorie.-Basel: Birkhäuser 1990
- MEYER, Jörg: Was sind eigentlich Dezibel?-In: Mathematik Lehren Heft 113/2002, S.19-22
- MICHELS, Ulrich: dtv-Atlas Musik (Band1).-München: Bärenreither 1984
- MÜLLER-STACH, Stefan/PIONTKOWSKI, Jens: Elementare und algebraische Zahlentheorie: Ein moderner Zugang zu klassischen Themen.-Wiesbaden: Vieweg und Teubner 2011
- NEUMANN, Paul: Die Vier-Elemente-Lehre für Schlagzeuger und andere Rhythmiker.-Hamburg: Diplomica-Verlag 2010
- NEUWIRTH, Erich: Musikalische Stimmungen.-Wien, New York: Springer 1997
- PAUER, Franz u.a.: Mathematik 2 HTL.-Wien: ÖBV 2012
- PIERCE, John R.: Klang. Musik mit den Ohren der Physik.-Spektrum: Heidelberg: Spektrum 1989
- ROEDERER, Juan G.: Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik.-Berlin, Heidelberg: Springer 2000
- SCHAURHOFER, Agathe: Musik und ihre mathematische Saite.-Dipl.Arb. Universität Wien 2009
- SCHROEDER, Eberhard: Mathematik im Reich der Töne.-Thun: B.G.Teubner 1985
- SCHUBERTH, Horst (Red.): Akustik. Musikalische Akustik. Architektonische Akustik. Atmosphärische Akustik.-Leipzig: B.G.Teubner 1954
- SCHUPP, Hans: Abbildungsgeometrie. Eine elementare Einführung.-Weinheim, Berlin: Beltz 1968

SCHÜFFLER, Karlheinz: Pythagoras, der Quintenwolf und das Komma. Mathematische Temperierungstheorie in der Musik.-Wiesbaden: Vieweg und Teubner 2012

SIDLO, Eva-Maria u.a.: Mathematik 2 mit technischen Anwendungen.-Wien: Hölder-Pichler-Tempsky 2010

STEINER, Gerald F./NOVAK, Johann: MatheMaster für die 6. Schulstufe.-Wien: Reniets Verlag 2005

SURBER, Heinz/WALDER, Paul: Ein Beitrag zur Akustik. Zusammenhänge zwischen Physik, Musik und Mathematik.-St. Gallen 1992

TARASSOW, Lew: Symmetrie, Symmetrie!. Strukturprinzipien in Natur und Technik.-Heidelber, Berlin, Oxford: Spektrum 1993

TIMISCHL, Wolfgang/KAISER, Gerald: Ingenieur-Mathematik 2: Wien: E.Dorner 2012

WIDHOLM, Gregor: Musikalische Akustik 1.-Skriptum zur Vorlesung an der Universität für Musik und darstellende Kunst Wien 2004

WILTSCHE, Herwig u.a.: Lebendige Mathematik 2.-Wien: ÖBV 2006

Internetquellen

(Letzte Überprüfung aller Internetquellen am 2.6.2013)

schultopia.blogspot.co.at/2011/09/anleitungen-panflote-stockeinsaiter-und.html

web.math.uni-potsdam.de/prof/o_didaktik/af/kr_0909_einf/musik.pdf

www.aplu.ch/overtone/

www.audacity.sourceforge.net

www.bmukk.gv.at/medienpool/11867/lp_neu_ahs_15.pdf,

www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf,

www.bmukk.gv.at/medienpool/790/ahs15.pdf,

www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf (AHS-Lehrpläne)

www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/magazin/allerlei/magaufg3.pdf

www.brightschool.com/downloads/MusicalSymmetry.pdf

www.br-online.de/kinder/spielen-werkeln/basteln/2005/00976/

www.focus.de/schule/lernen/lernatlas/mathematik/symmetrie_aid_234643.html

www.geogebra.org

www.geogebra.org/de/examples/fourier/index.htm

www.kindergarten-kitzingen.de/grafik/schildkroete.gif

www.lehrer-online.de/schwingungen.php

www.lehrer.uni-karlsruhe.de/ za363/MoG/mog00-01p.pdf

www.lehrklaenge.de/HTML/bewegungsrichtung_und_wertgros.html

www.math.uni-magdeburg.de/reports/2002/musik.pdf

www.schulefriesgasse.ac.at

www.thema-mathematik.at

www.wikipedia.org

www.wolfram.com/mathematica

Verwendete Hörbeispiele

BACH, Johann Sebastian: Musikalisches Opfer Nr.3.-In: Harnoncourt, Nikolaus/Concentus Musicus Wien: Bach 2000, Volume 11, CD 12: Bach The Chamber Music. Musical Offering.-Teldec 2000

BEETHOVEN, Ludwig van: Symphonie Nr. 5.-In: Herbert von Karajan/Berliner Philharmoniker: 9 Symphonien, CD.-Polydor International 1963

HAYDN, Josef: Symphonie Nr. 47.-In: Adam Fischer/Austro-Hungarian Haydn Orchestra: Haydn Symphonies Complete, CD 13: Haydn Symphonies 46-48.-Brilliant Classics 1995

RIHANNA: Don't stop the music.-In: Rihanna: Good girl gone bad, CD.- The Island Def Jam Music Group 2007

STOCKHAUSEN, Karlheinz: Studie I.-In: Forbidden Planets: Music from the pioneers of electronic sound, CD.-Chrome Dreams 2010

Notenausgaben

BACH, Johann Sebastian: Musikalisches Opfer.-In: Landshoff, Ludwig (Hrsg.): Musikalisches Opfer. Im Urtext und in einer Einrichtung für den praktischen Gebrauch.-Leipzig: Edition Peters 1966 und www.lehrklaenge.de/HTML/bewegungsrichtung_und_wertgros.html, 2.6.2013

GERSHWIN, George: I got rhythm.-In: Maierhofer, Lorenz (Hrsg.): Rock & Pop. The special song collection. Das Sing- und Musizierbuch für den Musikunterricht.-Rum/Innsbruck, Esslingen: Helbling 1999

HAYDN, Josef: Symphonie Nr. 47.- In: Robbins Landon: Howard Chandler (Hrsg.): Joseph Haydn. Kritische Ausgabe sämtlicher Symphonien (Band 4).-Wien: Universal Edition 1967

Abbildungsverzeichnis

1.1. Reines „a ¹ “	3
1.2. Klang	5
1.3. Sinuston	5
1.4. Ton einer Stimmgabel	5
1.5. Stimme - Variante 1	6
1.6. Stimme - Variante 2	6
1.7. Händereiben	6
1.8. Händeklatschen	6
1.9. „Lineare“ Skala und logarithmische Skala ohne und mit Zehnerpotenzschreibweise ²⁰	8
1.10. Obertonreihe auf C ³⁵	11
1.11. Klangspektrum einer Violine ⁴⁰	12
1.12. Klangspektrum einer Trompete ⁴¹	13
1.13. Sinusfunktion ⁴³	13
1.14. Nullphasenwinkel ⁴⁶	14
1.15. Federschwingung	14
1.16. Frequenz- und Phasengleichheit	16
1.17. Konstruktive Interferenz	17
1.18. Destruktive Interferenz	17
1.19. Schwebung	18
1.20. Vollkommene Schwebung	18
1.21. Unvollkommene Schwebung	18
1.22. Gedämpfte Schwingung	20
1.23. Amplitudenmodulation	21
1.24. Frequenzmodulation	21
2.1. Tetraktýs ¹⁰	45
2.2. Strähle-Verfahren	54
3.1. aus: Josquin Desprez, Huc me sydereo ³	63
3.2. aus: Charles Ives, Duty ⁵	64
3.3. aus: Richard Wagner, Parsifal, 2.Akt ⁷	64
3.4. Triolen ¹⁰	66
3.5. Achsenspiegelung	67
3.6. Drehung um 160°, Drehachse = C	67

3.7. Translation	68
3.8. Schubspiegelung	68
3.9. Ähnlichkeitsabbildung - Vergrößerung um den Faktor 1,5	68
3.10. Motiv ²⁷	69
3.11. Wiederholung	69
3.12. Imitation	70
3.13. Sequenz	70
3.14. Umkehrung	70
3.15. Krebs	70
3.16. Krebsumkehrung	71
3.17. Augmentation und Diminution	71
3.18. Abspaltung und Erweiterung	71
3.19. Variation	72
3.20. Goldener Schnitt	75
3.21. Fibonacci-Zahlen bei Bartók ⁵⁶	77
4.1. Arbeit mit dem Infoblatt	104
4.2. Hörbeispiel	104
4.3. Arbeit mit Geogebra	105
4.4. Material	105
4.5. Feedbackbogen–Auswertung	106
A.1. Arbeitsplan	119
A.5. I got rhythm – Lösung ¹³	125
A.6. Bach – Krebskanon ¹⁴	126
A.7. Haydn – Menuett ¹⁵	127
A.8. PowerPoint-Präsentation	128
A.9. Video „Schwingungen“	129
A.10. Tafelbild	129
A.11. Geogebra-Arbeitsblatt 1	130
A.12. Geogebra-Arbeitsblatt 2	130
A.13. Audacity-Dokument zur Parametervariation	131
A.14. Audacity-Dokument zur Phasenverschiebung	131
A.15. Audacity-Dokument zur Schwebung	132
A.16. Audacity-Dokument zur konstruktiven Interferenz	132
A.17. Audacity-Dokument zur destruktiven Interferenz	132

Tabellenverzeichnis

1.1. Schallintensitäten und musikalische Lautstärkeempfindung ²⁹	10
2.1. Vergleich der vorgestellten Stimmungssysteme	49
3.1. Noten- und Pausenwerte	65
3.2. Bandornamente ⁴⁰	73
5.1. Musik und Mathematik im Unterricht – ein Überblick	111

Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder und Notenzitate in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.

Zusammenfassung

Ausgehend von der Frage nach Gemeinsamkeiten der Bereiche Musik und Mathematik zeigt die vorliegende Arbeit Verknüpfungspunkte zwischen diesen beiden Gebieten auf. In den fachdidaktischen Teilen der Arbeit werden Aufgaben und Unterrichtsideen vorgestellt, die in der Schule zu diesem Thema umgesetzt werden können. Ausgangspunkt dieser Vorschläge ist das Unterrichtsfach Mathematik, es werden jedoch auch Ideen für den Musikunterricht aufgezeigt.

Der Theorieteil der Arbeit gliedert sich in drei große Teile. Im ersten Kapitel werden Sinusschwingungen als akustische Grundlage von Musik sowie Überlagerungseffekte und gedämpfte harmonische Schwingungen erklärt und das Dezibelmaß als logarithmische Einheit zur Messung von Lautstärke beschrieben.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit musikalischen Stimmungen. Es werden Vor- und Nachteile von vier ausgewählten Stimmungsprinzipien besprochen, das Verfahren von Strähle stellt einen Bezug zum Instrumentenbau her. Im fachdidaktischen Teil dieses Kapitels werden weitere Anwendungen auf diesem Gebiet vorgestellt.

Im dritten großen Abschnitt der Arbeit werden ausgehend von der Notation im Fünfliniensystem mathematische Strukturen in Musikwerken gesucht. Goldener Schnitt, Fibonacci-Zahlen und Symmetrie sind wesentliche Begriffe, die in diesem Zusammenhang beschrieben werden.

Für den Praxisteil wurden konkrete Materialien und Stundenplanungen entwickelt, die im Rahmen dieser Arbeit in einer sechsten Klasse AHS erprobt wurden. In einer Musikstunde und drei Mathematikstunden wurden einerseits musikalische und geometrische Transformationen besprochen und andererseits akustische Grundlagen von Musik kennengelernt. Im Rahmen eines Stationenbetriebs konnten die Schülerinnen und Schüler Überlagerungseffekte (z.B. Schwebung) selbstständig mit der dynamischen Geometriesoftware Geogebra und dem Audio-Programm Audacity untersuchen. Hörbeispiele zeigten Anwendungen im Bereich der Komposition.

Abstract

When asking for connections between music and mathematics, this paper shows links between those two topics. The didactical parts of this paper present mathematical problems and ideas for teaching. Although those concepts are based on teaching mathematics, the author points out some options for music as well.

The theoretical part of this diploma thesis is organized into three chapters. First sine waves are discussed and presented as an acoustic foundation of music. Superposition of waves, damped harmonic motion and relations between loudness and logarithm are explained.

Musical tunings are subject of the second chapter. Pros and cons of four selected principles are discussed; Strähle's construction shows connections to instrument-making. More applications are presented in the didactical part of this chapter.

Based on the common notation system, the third chapter looks for mathematical structures in music. The golden section, Fibonacci numbers and symmetry are important concepts concerning this topic.

The practical part of this work presents lesson plans and materials for teaching, which were tested in a Viennese „AHS“ in tenth grade. In one music lesson and three mathematics lessons students heard symmetric transformations and sine waves in combination with musical parameters. In four different stations they learned about superposition of waves using the dynamic geometry software, Geogebra, and the audio software, Audacity. Audio examples showed applications of these theories in composition.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Brigitte Posch

Geburtsdatum: 16.12.1987

Geburtsort: Wien

Staatsangehörigkeit: Österreich

Ausbildung

1994-1998: Volksschule St. Franziskus
Apostelgasse 7, 1030 Wien

1998-2006: AHS Friesgasse 4, 1150 Wien

2006-2007: Diplomstudium zum Lehramt an Volksschulen
an der Pädagogischen Akademie
Ettenreichgasse 45a, 1100 Wien

seit SS2007: Lehramtsstudium UF Mathematik
an der Universität Wien

seit WS2008: Lehramtsstudium UF Musikerziehung
an der Universität für Musik
und darstellende Kunst Wien