universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Beweisende Begründungen – begründetes Beweisen

Erkenntnisgewinn im Geometrieunterricht der Sekundarstufe II

Verfasserin

Michaela Gassner

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 456
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Mathematik, UF Geographie und Wirtschaftskunde
Betreuer:	Ao. Univ.-Prof. Dr. Stefan Götz

Kurzfassung

Auf einem Schiff sind 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän? Schülerinnen und Schüler können durch das unreflektierte Anwenden von Standardalgorithmen punktuell gute Erfolge erzielen. Doch spätestens, wenn auf obige Frage die Antwort „36“ gegeben wird, sollten Vertreterinnen und Vertreter der Bildungseinrichtungen hellhörig werden. Ziel des Mathematikunterrichts ist nicht, die Lernenden mit bedeutungslosen „Rezepten“ auszustatten, die schnell wieder in Vergessenheit geraten, sondern stattdessen den Aufbau langfristiger Kompetenzen zu forcieren.

Die vorliegende Diplomarbeit widmet sich der Fähigkeit zum Beweisen und stellt die Frage, wie sie mithilfe von geometrischen Aufgabenstellungen geschult werden kann. Anhand von Beispielen wird gezeigt, welchen Nutzen das Begründen gleichsam für die Mathematik und den einzelnen Schüler bzw. die einzelne Schülerin haben kann. Beweise können nicht nur zeigen, dass eine Behauptung wahr ist – sie liefern auch eine Erklärung, kommunizieren mathematisches Wissen, tragen zum Entdecken und Erschaffen neuen Wissens bei und ordnen Behauptungen systematisch in ein Netz aus Axiomen, Sätzen und Definitionen ein.

Um sicherzugehen, dass alle Schülerinnen und Schüler von diesen Vorteilen profitieren, sollte an drei Orten angesetzt werden. Zuallererst ist es notwendig, dass die Lernenden die positiven Aspekte von Begründungen wahrnehmen und überhaupt eine Bereitschaft entwickeln, sich mit Beweisaufgaben auseinanderzusetzen. Dafür eignet sich im Besonderen der Weg über die Erklärungsfunktion von Argumentationsketten. Als zweites muss die Problemlösefähigkeit der Lernenden verbessert werden. Dies passiert über die Erziehung zur Selbstständigkeit gleichsam wie über das Lernen typischer Strategien im Beweisprozess, den Heurismen. Den größten Handlungsspielraum haben Lehrpersonen aber bei der Auswahl und Konzeption der Aufgaben. Mithilfe verschiedener methodischer Tricks kann der Komplexitätsgrad von mathematischen Problemen, die eine Begründung einfordern, gesenkt werden. Diese Möglichkeit eröffnet das Justieren von Begründungen entsprechend dem Niveau der Schülerinnen und Schüler und ebnet so den Weg für den schrittweisen Aufbau einer Begründungshaltung.

Abstract

There are 26 sheep and 10 goats on a ship. How old is the captain? By applying mathematical algorithms without reflecting, learners might be successful in some cases. At least when the above question is answered with '36', representatives of education institutes should start worrying. The intention of teaching mathematics is not to provide learners with formulas, which are buried in oblivion very quickly, but to force the set-up of long-term skills.

This diploma thesis examines the ability of proving in a classroom setting and how it can be trained by geometric tasks. Based on examples, the value of proofs towards mathematics in general and the individual learner in specific is shown. Proofs are not only useful to establish the validity of a conjecture – they also give an explanation, transmit mathematical knowledge, help with the discovery or invention of (for the pupils) new results and organize these results into a deductive system of axioms, theorems and definitions.

In order to make sure that all students benefit from the advantages mentioned above, three things should be considered. First of all, it is necessary that learners notice the positive impact of proofs and show willingness to deal with them. For this purpose the explanatory function of proofs should be used. Second, pupils' ability to solve problems has to be improved. Thereto it is essential to stress autonomous work and to teach 'Heurismen' as typical proof strategies. Teachers have their biggest radius of operation in choosing and drafting tasks. Thanks to a wide range of methodological techniques they can reduce the difficulty level of proofs. Therefore, it is possible to construct proofs of different levels and to pave the way for the incremental installation of an approach to reasoning.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz für die ausgesprochen gute Betreuung meiner Diplomarbeit bedanken. Durch sorgfältiges Korrekturlesen und gleichsam konstruktive wie didaktisch wertvolle Verbesserungsvorschläge unterstützte er den Entstehungsprozess der vorliegenden Abschlussarbeit.

Ein besonderer Dank gilt auch meinen Studienkolleginnen, die die letzten Jahre zu einer unvergesslichen Zeit gemacht haben.

Mein Freund Jakob war mir ein wichtiger Rückhalt und bekräftigte mich in meinem Handeln. Auch Elisabeth und Robert sollen aufgrund ihrer fortwährenden Unterstützung hier Nennung finden.

Der wohl größte Dank gebührt aber ohne Zweifel meiner Familie. Meine Eltern ermöglichten mir nicht nur in finanzieller Hinsicht dieses Studium, sondern waren mir als Menschen mit großem Eifer und Fleiß Zeit meines Lebens wichtige Vorbilder. Vielen Dank!

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Auffassung von Mathematik, zu der junge Menschen während ihrer Schulzeit gelangen, wird zu Beginn des Mathematikstudiums in den Grundpfeilern erschüttert. Während an den Schulen ein Hauptaugenmerk auf dem Lösen von Aufgaben und häufig auch auf dem Erlernen von teilweise unreflektierten Techniken zur Behandlung von Standardproblemen liegt, tritt dieser Bereich an den tertiären Bildungseinrichtungen (jedenfalls an den Universitäten) merklich in den Hintergrund. Die Mathematik als Wissenschaft fußt in erster Linie auf abstrakten Strukturen. Möglichst wenige grundlegende *Axiome* werden definiert, aus denen man mittels strenglogischer Schlussfolgerungen eine Fülle von Eigenschaften deduziert ([82], S. 4). Jede mathematische Behauptung muss durch das Entwickeln einer zweifelsfrei richtigen Argumentationskette *bewiesen* werden.

Eine Vielzahl an Autorinnen und Autoren – darunter Fischer und Jahnke – fordern, dass nicht nur im Sinne einer Allgemeinbildung die charakteristischen Denkweisen der mathematischen Wissenschaft im Unterricht transparent werden ([27], S. 559; [52], S. 61). Für Verblüffung sorgt häufig die Tatsache, dass es dazu seit Jahren einen verbindlichen Auftrag für Lehrerinnen und Lehrer gibt. Kritisch-argumentatives Arbeiten wird als Grundtätigkeit bzw. mathematische Kompetenz in der Bildungs- und Lehraufgabe der österreichischen Lehrpläne angeordnet:

> *Argumentieren und exaktes Arbeiten, insbesondere: präzises Beschreiben von Sachverhalten, Eigenschaften und Begriffen (Definieren); Arbeiten unter bewusster Verwendung von Regeln; Begründen (Beweisen); Arbeiten mit logischen Schlussweisen; Rechtfertigen von Entscheidungen (etwa der Wahl eines Lösungsweges oder einer Darstellungsform).*
> *Kritisches Denken, insbesondere: Überprüfen von Vermutungen; Überprüfen von Ergebnissen; Erkennen von Unzulänglichkeiten mathematischer Modelle; Erkennen von Mängeln in Darstellungen oder Begründungen; Überlegen von Bedeutungen mathemati-*

> *scher Methoden und Denkweisen.* (bm:ukk 2000; zit. nach [69], S. 1)
>
> *Kritisch-argumentatives Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, Hinterfragen, Ausloten von Grenzen und Begründen zu tun haben; das Beweisen heuristisch gewonnener Vermutungen ist ein Schwerpunkt dieses Tätigkeitsbereichs* (bm:ukk 2004; zit. nach [68], S. 1)

Auch im Standards-Konzept für die mathematischen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler am Ende der achten Schulstufe sowie im Hinblick auf die standardisierte schriftliche Reifeprüfung (sRP) wird dem Handlungsbereich *Argumentieren, Begründen* eine zentrale Bedeutung zugesprochen ([45], S. 12; [59], S. 16–20; [86], S. 15–16).

Wodurch ist die Forderung nach einer stärkeren Orientierung der Schulmathematik an der zugrunde liegenden Wissenschaft zu legitimieren? Warum soll im Mathematikunterricht begründet bzw. bewiesen werden? Um diese Fragen zu beantworten, wird der Weg über die Fachwissenschaft gewählt. Kapitel 3 beschäftigt sich mit den Funktionen von mathematischen Beweisen und untersucht sie auf ihre Relevanz im Hinblick auf den Schulunterricht. Es wird gezeigt, dass Beweise längst nicht nur eingesetzt werden können, um die Schülerinnen und Schüler vom Wahrheitsgehalt einer Aussage zu überzeugen, sondern insbesondere auch, um Zusammenhänge für die Lernenden verständlich zu machen.

Weil (teilweise) falsche Vorstellungen über die Merkmale mathematischer Begründungen ein adäquates Verständnis der im Rahmen dieser Diplomarbeit dargebrachten Inhalte unmöglich machten, wird dem Kapitel über die Beweisfunktionen eine Begriffsdefinition vorangestellt (s. Kap. 2). Dabei wird herausgearbeitet, dass es über den Terminus „Beweis“ keine einheitlichen Auffassungen gibt. Um die Idee der speziellen mathematischen Begründungen dennoch fassen zu können, werden Beweise in ihre kleinsten Bausteine zerlegt und separat analysiert.

Die Frage nach den Vorteilen der Arbeit mit Beweisen wird in Kapitel 3 ausführlich beantwortet. Was zunächst noch offen bleibt, ist wie man erreichen kann, dass auch die Schülerinnen und Schüler den Mehrwert von Begründungen im Mathematikunterricht (an-)erkennen. Zu Beginn des vierten Kapitels wird erläutert, inwiefern der Unterricht dazu beitragen kann, dass die Lernenden ein Beweisbedürfnis entwickeln (s. Kap. 4.1). Entsprechend der Ankündigung im Titel werden auch andere notwendige und hinreichende Bedingungen für die Arbeit mit Beweisen im Unterricht vorgestellt. Neben dem Erkennen der logischen Struktur von Aussagen wird die Problemlösefähigkeit als Teilaspekt der Begründungskompetenz beleuchtet. Weil man nicht davon ausgehen darf, dass sich dieses mathematisch-strategische Wissen von alleine bei den Schülerinnen und Schülern ausbildet, muss man als Lehrperson entsprechend intervenieren.

Großen Handlungsspielraum haben Lehrerinnen und Lehrer vor allem auch bei der Konzeption der Aufgabenstellungen. In Kapitel 5 wird an konkreten Problemstellungen gezeigt, wie man den Komplexitätsgrad von Begründungsaufgaben senken kann und so erreicht, dass die Schülerinnen und Schüler ihrem Niveau entsprechend im Begründen geschult werden.

Im sechsten und abschließenden Kapitel werden die wichtigsten Erkenntnisse der vorliegenden Diplomarbeit zusammengetragen und miteinander in Beziehung gesetzt.

Die Aufgaben, die zur Illustration der aufgestellten Behauptungen und Thesen zum Beweisen verwendet werden, sind der Geometrie zuzuordnen. Elschenbroich & Seebach sind davon überzeugt, dass sich nur wenige mathematische Inhalte ähnlich gut eignen, um den systematischen Aufbau eines Stoffgebietes zu erleben und ein Beweisbedürfnis zu erfahren ([25], S. 5). Wittmann würdigt den *Doppelaspekt* der Geometrie, der zwei Arten des Begründens nahelegt. Durch seine Verbindung zur Realität über vielfältige Modelle hat der Themenbereich eine empirische Grundlage und ermöglicht konkretes Testen, andererseits kann man geometrische Sachverhalte durch logische Schlüsse herleiten ([92], S. 48). Ulfig schließlich schätzt den einzigartigen Reichtum an geometrischen Problemen aller Schwierigkeitsniveaus ([87], S. 39).

Dass der Themenbereich ein ideales Übungsfeld für das Begründen und Beweisen ist, soll durch die vorliegende Arbeit bestätigt werden. In Anlehnung an Walsch sei im Rahmen dieser einleitenden Worte jedoch davor gewarnt, die Sonderstellung der Geometrie zum Anlass zu nehmen, Begründungsaufgaben ausschließlich in diesem Themenbereich von den Schülerinnen und Schülern einzufordern. Eine derart einseitige Orientierung kann bei Lernenden den Anschein erwecken, dass es bei anderen Inhalten nichts zu begründen gäbe und dass Beweise eine Eigenart der Geometrie seien ([89], S. 392). Daraus resultieren Fehlvorstellungen, die Einsicht in das Wesen der Mathematik sowie in den wissenschaftlichen und individuellen Nutzen von Beweisen bleibt Schülerinnen und Schülern verwehrt.

Um die aufgestellten Thesen mit einer quasiempirischen Grundlage vergleichen zu können, wurde das Schulbuch *Mathematik verstehen* [64–67] herangezogen. Es kann davon ausgegangen werden, dass das genannte Schulbuch zu den absatzstärksten Lehr- und Arbeitsbüchern für den Mathematikunterricht zählt, auch wenn selbiges vom Verleger nicht bestätigt worden ist. Herangezogen wurden ausgewählte (Geometrie-)Themen von der neunten bis zur elften Schulstufe, die achte Klasse (12. Schulstufe) ist von den Analysen ausgeschlossen:

- Trigonometrie (5. Klasse)
- Vektoren und analytische Geometrie der Ebene (5. Klasse)
- Analytische Geometrie des Raumes (6. Klasse)
- Nichtlineare analytische Geometrie (7. Klasse)

Die vorliegende Arbeit will nicht nur die Sinnhaftigkeit von Beweisen aufzeigen, sondern insbesondere auch begründete methodische Anregungen zur Etablierung einer Begründungskultur im Unterricht liefern.

Kapitel 2

Definition des Begriffs „Beweis“

Befragt man Schülerinnen und Schüler zu ihren Assoziationen im Hinblick auf das mathematische Beweisen, so erlebt man eine in weiten Teilen übereinstimmende Reaktion der Ablehnung. Die negative Grundhaltung wird unter anderem durch die Erfahrung, dass das Begreifen von Beweisen nur einer kleinen Elite vorbehalten ist, erklärt ([3], S. 21; [33], S. 96). Geprägt von ihrer individuellen Lernbiographie gehen viele sogar noch einen Schritt weiter und ziehen die subjektive Nachvollziehbarkeit von Beweisen für deren Klassifizierung heran:

> *Ein einsichtiger Argumentationsgang kann schon deshalb kein Beweis sein, weil man ihn verstanden hat.* (Krauthausen 2001; zit. nach [54], S. 99)

Schuld an dieser Besorgnis erregenden Meinung sind Fehlvorstellungen im Zusammenhang mit argumentativen Begründungen. Diese Beobachtung wird im zweiten Kapitel der vorliegenden Arbeit zum Anlass genommen, den Begriff des Beweisens zu definieren und als Grundlage für die weitere Darstellung zu verwenden. Dabei wird zunächst der Blick auf eine Vielzahl an unterschiedlichen Beweisen gerichtet, bevor mathematische Begründungen in ihre kleinsten Bausteine zerlegt und separat untersucht werden.

2.1 Argumentieren – Begründen – Beweisen

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, um die Glaubwürdigkeit einer Aussage zu steigern. Bürger führt neben der Berufung auf eine Autorität zusätzlich auch das induktive, das reduktive und das deduktive Schließen an ([10], S. 103–104). Um der Vielfalt an möglichen Zugangsweisen zum Erklären von mathematischen Zusammenhängen gerecht zu werden, ist man in der fachdidaktischen Literatur zum Teil dazu übergegangen, zwischen den Begriffen *Argumentieren*, *Begründen* und *Beweisen* zu unterscheiden, insbesondere also nur ganz bestimmte Erklärungen als Beweise anzuerkennen. Problematisch ist dabei die Tatsache, dass die Termini in verschiedenen Abhandlungen nicht einheitlich definiert werden. Reiss & Ufer ziehen das akzeptierte logische Regelsystem als zentrales Abgrenzungskriterium für die Begriffe heran. Die Autoren lassen beim mathematischen *Argumentieren* durchaus auch Schlüsse durch Analogie, Metaphern, Induktion oder Abduktion zu, während sie beim *Beweisen* ausschließlich deduktive Ableitungen akzeptieren sowie einen expliziten Bezug auf eine Rahmentheorie verlangen. Das *Begründen* steht in der Hierarchie zwischen dem Argumentieren und dem Beweisen und umfasst unter anderem beispielsweise die Erklärung von induktiv gewonnenen Zusammenhängen ([81], S. 157–158).

Demgegenüber steht die Einteilung der Begriffe auf Basis der Struktur von Erklärungen. Das Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung (bifie) sieht in den *Argumenten* die Grundbausteine, die schließlich zu mehrschrittigen Ketten, den *Begründungen*, zusammengesetzt werden können. Das *Beweisen* wird als charakteristische Tätigkeit des Argumentierens und des Begründens angeführt ([59], S. 20).

Die Liste der unterschiedlichen Klassifikationen ließe sich beliebig lang fortsetzen, an dieser Stelle sei schließlich nur noch auf eine Reihe von Autoren verwiesen, die das *Argumentieren* als übergeordneten Begriff für verschiedene Tätigkeiten des Erklärens verwenden, zwischen *Begründungen* und *Beweisen* aber nicht unterscheiden ([15], S. 2–3; [62], S. 4; [91], S. 35). Malle etwa verweist auf den negativen Beigeschmack des Begriffes *Beweisen* und präferiert nur deshalb nach eigenen Angaben das sanftere *Begründen* ([62], S. 4).

Wegen des fehlenden didaktischen Konsens im Hinblick auf ihre Definition werden die Begriffe *Argumentieren*, *Begründen* und *Beweisen* in der vorliegenden Arbeit synonym verwendet.

2.2 Verschiedenartigkeit von Begründungen

Ebenso verschieden wie ihre Definition sind die Beweise selbst. In Abschnitt 2.2.1 werden zwei konträre Arten des argumentativen Begründens vorgestellt. Anhand einzelner Beispiele wird gezeigt, dass man Beweise nicht nur unterschiedlich aufschreiben, sondern mit ihnen auch ganz verschiedene Ideen verfolgen kann. Um trotz der semantischen Vereinheitlichung in Kapitel 2.1 die Divergenz von Erklärungen anzuerkennen, wird in Abschnitt 2.2.2 der Begriff der Argumentationsbasis aufgegriffen, der eine Spezifizierung des Beweisbegriffes erlaubt.

2.2.1 Formales versus inhaltlich-anschauliches Beweisen

Während ihres Hochschulstudiums werden angehende Lehrerinnen und Lehrer mit einer Fülle von (abstrakten) Beweisen konfrontiert. Viele verinner-

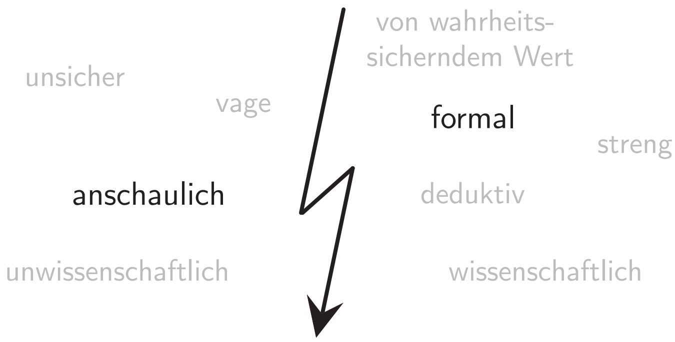


Abbildung 2.1: Typische Assoziationen zu den Begriffen *anschaulich* und *formal* (verändert nach [54], S. 5–6)

lichen die Art und Weise des universitären Begründens als Beweisstandard. Die Palette an Übergangsstadien, die es zwischen den ersten, meist noch sehr holprigen Begründungsversuchen eines Kindes und den streng formalen, eleganten Beweisen der Fachwissenschaft gibt, wird oft (nahezu) zur Gänze ausgeblendet ([36], S. 18; [62], S. 4). In den Köpfen einer Vielzahl von Lehrpersonen verfestigt sich die Vorstellung, wonach es nur einen einzigen Weg von den Prämissen einer Behauptung zu ihrem Resultat geben kann, insbesondere werden etwa inhaltlich-anschauliche Begründungen abgelehnt ([92], S. VII). In Abbildung 2.1 werden typische Assoziationen zu den Begriffen *anschaulich* und *formal* festgehalten ([54], S. 5–6).

Wie gefährlich es sein kann, wenn eine solche Einstellung an die Schülerinnen und Schüler weitergegeben wird, deuten die Untersuchungen von Healy & Hoyles sowie Reiss & Thomas bzw. Reiss & Ufer an. Die Autorinnen und Autoren konfrontierten Lernende mit unterschiedlichen, teilweise fehlerhaften Begründungen und stellten fest, dass vermeintlichen Beweisen eher eine gute Bewertung zugesprochen wurde, wenn diese sich formalsprachlicher Elemente bedienten ([39], zit. nach [78], S. 6; [80], S. 98; [81], S. 166). Die Vermittlung der eingangs beschriebenen Idealvorstellung von mathematischen Begründungen birgt die Gefahr, dass die Schülerinnen und Schüler den Beweisbegriff auf eine formale Symbolmanipulation reduzieren und Begründungen damit zu leeren Ritualen verkommen ([5], S. 907; [54], S. 5). Jahnke warnt davor, dass Beweise von den Lernenden mitunter nur als Kette formaler Verweise angesehen werden, die Unverstandenes auf Unverstandenes zurückführt ([52], S. 61).

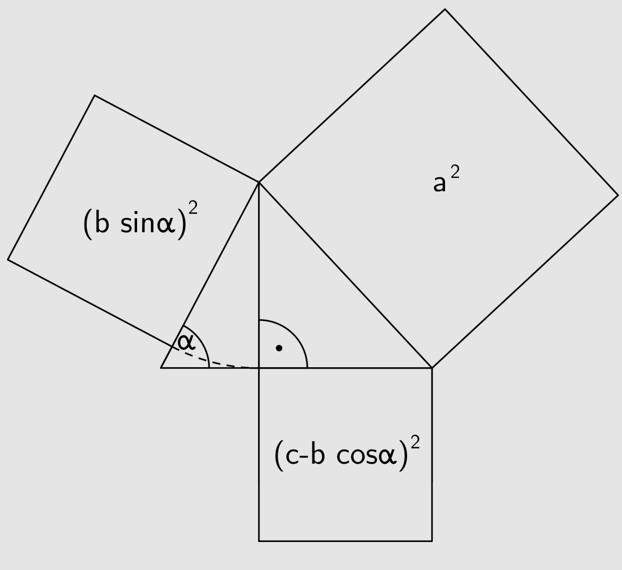
Jede Wissenschaft bedient sich einer eigenen Fachsprache um Ergebnisse festzuhalten und zu kommunizieren. In der Mathematik ist diese eng verknüpft mit einer verkürzten Symbolsprache, die es erlaubt, Zusammenhänge festzuhalten sowie kurz, sauber, kompakt und in Fachkreisen verständlich zu vermitteln ([7], S. 4). Formale Beweise haben damit durchaus ihre Berechtigung. Falsch wäre, von der Wissenschaft auf die Schulmathematik zu schließen und als Lehrperson auf der formalistischen Doktrin zu beharren ([1], S. 215–216; [15], S. 2; [36], S. 21; [78], S. 49; [79], S. 29).

Im Unterricht sollte der Verständnis-Aspekt im Vordergrund stehen ([23], S. 61). Letztlich muss es darum gehen, eine Lösung zu finden, mithilfe derer der Wahrheitsgehalt einer Behauptung offensichtlich wird. Ob es sich dabei um einer gute Formulierung handelt oder eine angemessene Zeichnung, ist nach Ansicht von Reiss & Hammer völlig belanglos ([78], S. 49). Wittmann stellt als Alternative zum formalen Beweisen das inhaltlich-anschauliche Begründen vor ([92], S. 47–51). Beim inhaltlich-anschaulichen Begründen spielen enaktive, also handelnde, oder ikonische, d. h. bildliche, Darstellungen (oft) eine entscheidende Rolle. Der Zerlegungsbeweis zum Satz von Pythagoras, bei dem zwei gleiche Quadrate der Seitenlänge $a+b$ einmal mit zwei Quadraten der Seitenlängen a bzw. b sowie vier rechtwinkeligen Dreiecken mit den Katheten a, b und ein anderes Mal mit einem Quadrat der Seitenlänge c sowie vier rechtwinkeligen Dreiecken wieder mit Katheten a, b ausgelegt werden, wird häufig herangezogen, um das Prinzip inhaltlich-anschaulicher Beweise zu illustrieren ([78], S. 73; [91], S. 50–51).

Doch auch im Geometrieunterricht der Sekundarstufe II gibt es die Möglichkeit, mit paradigmischen Beispielen zu arbeiten, die bereits den allgemeinen Fall veranschaulichen ([91], S. 51). Eine der vielen Anregungen, die Nelson dazu liefert, soll im Folgenden vorgestellt werden ([72], S. 31).

Satz (Cosinussatz) *In einem beliebigen Dreieck mit den üblichen Bezeichnungen gilt* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ *und* $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Beweis.



Nach dem pythagoreischen Lehrsatz gilt

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \cdot \sin\alpha)^2 + (c - b \cdot \cos\alpha)^2 \\ &= b^2 \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

An dieser Stelle sollen zwei Beobachtungen festgehalten werden. Der inhaltlich-anschauliche Beweis zum Cosinussatz verzichtet auf typische Ausdrücke wie „sei“, die für manche Schülerinnen und Schüler als Signal zum Abschalten verstanden werden ([3], S. 27). Damit er von den Lernenden auch noch Wochen nach seiner Behandlung im Unterricht nachvollzogen werden kann, sollten – je nach Niveau – einzelne Anpassungen vorgenommen werden. So kann beispielsweise die Höhe auf die Basisseite (Hypotenuse) durch eine Nebenrechnung ermittelt oder aber ein detaillierter Bericht über den Handlungsverlauf bis hin zum Ergebnis erstellt werden.

Die obige Argumentationskette beruht auf anschaulichen Eigenschaften. Die Skizze stellt einen Spezialfall eines spitzwinkeligen Dreiecks dar und doch gelten die angestellten Überlegungen für beliebige spitzwinkelige Dreiecke.[1] Was bewegt dazu, völlig selbstbewusst zu behaupten, dass eine einzige Figur das Allgemeine illustriert und damit als Repräsentant einer ganzen Klasse fungiert? Wie können anhand einer Skizze unendlich viele Fälle überprüft werden? ELSCHENBROICH weist auf die Deutung von Bildern als *Handlungsprotokolle* hin. Anhand eines konkreten Beispiels wird ein schrittweiser „Plan“ erstellt, der schließlich auf andere Figuren übertragen werden kann ([23], S. 67). Wichtig ist, sich stets die Frage zu stellen, unter welchen Voraussetzungen ein bestimmter Schritt möglich ist.

2.2.2 Die Rolle der Argumentationsbasis

Als Argumentationsbasis bezeichnet man die Gesamtheit aller zulässigen Aussagen und Schlussweisen, mithilfe derer die Richtigkeit einer Behauptung gezeigt werden kann ([10], S. 106). Der Beweis ein und derselben Aussage kann, je nachdem auf welches Fundament man sich bei seiner Begründung stützt, stark variieren, wie im Folgenden anhand des Peripheriewinkelsatzes illustriert werden soll.

Satz (Peripheriewinkelsatz) *Jeder einem Kreisbogen zugeordnete Peripheriewinkel φ ist halb so groß wie der diesem Kreisbogen zugeordnete Zentriwinkel μ.*

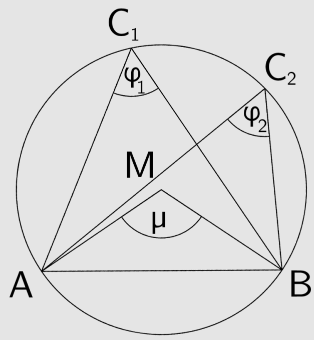
[1] Der Fall des stumpfwinkeligen Dreiecks kann durch Symmetrieüberlegungen am Einheitskreis relativ leicht ergänzt werden.

Erkennt man Messen und induktives Schließen als gültige Vorgehensweisen im Beweisprozess an, so reicht es, wenn die Behauptung von den Schülerinnen und Schülern anhand einiger Beispiele verifiziert wird.

Lösung 1: Empirisches Argument

Beweis. Die Behauptung kann unmittelbar aus der Zeichnung abgeleitet werden. Es gilt

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 56^\circ = \frac{1}{2} \cdot 112^\circ = \frac{1}{2} \cdot \mu$$



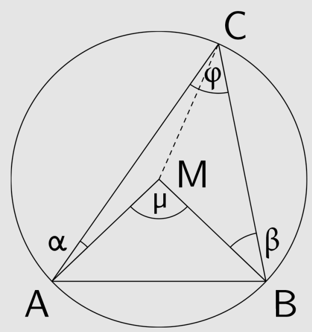
Aus mathematischer Sicht reichen konkrete Beispiele keinesfalls aus, um die allgemeine Gültigkeit eines Satzes anzuerkennen. Vielmehr wird verlangt, die Aussage aus bereits bekannten Sätzen, Lemmata und Propositionen abzuleiten.

Lösung 2: Gleichschenkelige Dreiecke

Beweis. Sei $\gamma_1 = \angle AMC$ und $\gamma_2 = \angle BMC$. Betrachten wir zunächst den Fall, dass M im Dreieck $\triangle ABC$ liegt (oben). Die Dreiecke $\triangle AMC$ und $\triangle BMC$ sind gleichschenkelig. Offensichtlich gilt $\varphi = \alpha + \beta$.

Da die Winkelsumme in jedem der beiden Dreiecke 180° ist, folgt überdies $2\alpha + \gamma_1 = 180^\circ$ und $2\beta + \gamma_2 = 180^\circ$ und somit $\gamma_1 + \gamma_2 = 360^\circ - 2(\alpha + \beta) = 360^\circ - 2\varphi$. Für den Zentriwinkel μ ergibt sich

$$\mu = 360^\circ - (\gamma_1 + \gamma_2) = 2\varphi$$



Der Fall, wo M nicht im Dreieck $\triangle ABC$ liegt (unten), verläuft nahezu analog. Im Unterschied zum ersten Fall beobachten wir den Zusammenhang $\varphi = \beta - \alpha$. Für die Berechnung des Zentriwinkels μ wird die Differenz von γ_1 und γ_2 gebildet. Wegen $2\alpha + \gamma_1 = 180^\circ$ und $2\beta + \gamma_2 = 180^\circ$ bzw. $\gamma_1 - \gamma_2 = 2(\beta - \alpha)$ ist auch in diesem Fall der Peripheriewinkel φ halb so groß wie μ:

$$\mu = \gamma_1 - \gamma_2 = 2(\beta - \alpha) = 2\varphi$$

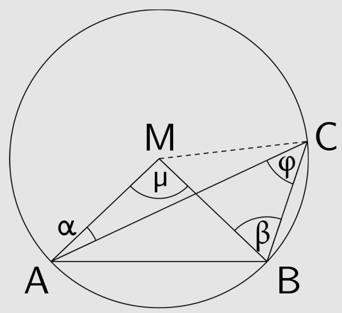


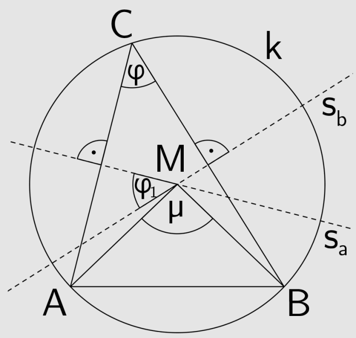
Tabelle 2.1: Mögliche Argumentationsbasen für den Peripheriewinkelsatz

	Lösung 1 Empirisches Argument	Lösung 2 Gleichschenkelige Dreiecke	Lösung 3 Abbildungsgeometrie
zulässige Schlussweisen	induktives Schließen	deduktives Schließen	deduktives Schließen
Sätze, Definitionen		• Def. (gleischenkeliges Dreieck) • Basiswinkelsatz • Satz über die Winkelsumme im Dreieck	• Def. (Streckensymmetrale, Normalwinkel) • Satz über die Verknüpfung zweier Achsenspiegelungen

Lösung 3: Abbildungsgeometrie ([58], S. 236)

Beweis. Sei s_a die Streckensymmetrale von $\overline{AC}$ und sei s_b die Streckensymmetrale von $\overline{BC}$. Weil $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ Sehnen des Kreises k sind, gilt für den Kreismittelpunkt M, dass $M \in s_a$ und $M \in s_b$.

Spiegelt man A an s_a, so gelangt man zu C und spiegelt man C an s_b, so ergibt sich der Bildpunkt B. Das Hintereinanderausführen der beiden Achsenspiegelungen an s_a und s_b, das A in B überführt, kann durch eine Drehung um den Punkt M ersetzt werden, wobei der Drehwinkel μ doppelt so groß ist wie der Winkel φ_1, den die beiden Streckensymmetralen miteinander einschließen. Weil φ_1 und φ gleich große Normalwinkel sind, folgt:



$$\mu = 2\varphi_1 = 2\varphi$$

Wie schon bei Lösung 2 gelten die erhaltenen Winkelbeziehungen für jeden beliebigen Punkt von k, weil bei festen Punkten A, B auf k der Zentriwinkel μ gleich bleibt.

Jede der drei Lösungen basiert auf einem eigenen Fundament aus Definitionen, Sätzen und erlaubten Schlussweisen, das Umfang und Sichtweise der Begründungen bestimmt (s. Tab. 2.1).

Das Beispiel hat gezeigt, dass Begründungen, je nachdem, welche Sätze man als bekannt voraussetzt und welche Schlussweisen man anerkennt, mehr oder weniger stark divergieren können. Ob ein Beweis auch tatsächlich als solcher akzeptiert wird, hängt von den subjektiven Vorstellungen über die Beschaffenheit der Argumentationsbasis ab. Damit ein Beweis von einer anderen Person verstanden werden kann, müssen die Kommunikationspartner bzw. -partnerinnen, neben einem annähernd gleichen Wissensstand, also insbesondere auch ähnliche Ansichten über die Kriterien haben, die an Begründungen gestellt werden ([20], S. 22). Wenn das Fundament stark divergiert, wie es bei Lehrpersonen und ihren Schülerinnen bzw. Schülern aufgrund der unterschiedlichen kognitiven Struktur der Fall sein kann, so empfiehlt Bürger die Orientierung an der Argumentationsbasis der Lernenden ([10], S. 106–107).

Die Argumentationsbasis darf keineswegs als starres Konstrukt angesehen werden und so ist eine fortwährende Anpassung im Laufe des Unterrichts notwendig. Während der Schulzeit kann und soll sich das Fundament durch das Hinzufügen weiterer Sätze und Definitionen erweitern ([33], S. 104). Doch nicht nur eine Vergrößerung, sondern auch andere Veränderungen, etwa durch die Präzisierung bislang unscharf gebliebener Begriffe, die Falsifizierung von fälschlicherweise als richtig angenommener Aussagen oder das Bewusstmachen unzulänglicher Schlussweisen, sind denkbar ([10], S. 107).

2.3 Grundtypen mathematischen Begründens

Die Tatsache, dass mathematische Begründungen sowohl hinsichtlich ihrer Darstellungsweise als auch im Bezug auf die Argumentationsbasis mitunter sehr unterschiedlich sind, erschwert – zumindest auf den ersten Blick – das Ausmachen eines gemeinsamen Kerns. Wenn Beweise zum Gegenstand des Unterrichts gemacht werden sollen, so ist die Frage nach ihren Kennzeichen aber eine wesentliche. Im Folgenden werden die fünf Grundtypen mathematischer Begründungen nach Bruder & Müller vorgestellt, die als Basis für komplexere, mehrschrittige Argumentationen angesehen werden können ([14], S. 887–890). Ziel dieses Abschnittes ist es, den bislang noch eher unscharf gebliebenen Beweisbegriff durch die Analyse der Kennzeichen von argumentativen Begründungen zu konkretisieren.

2.3.1 Grundtyp 1: Bezugnahme auf eine Definition

Die Einführung oder Vergabe eines neuen Namens ist essentiell in der Fachwissenschaft, weil sie eine mathematische Struktur übersichtlich macht und darüber hinaus gegen die Möglichkeit einer falschen Bedeutungsübertragung absichert ([63], S. 13). Formal gesehen sind Definitionen nichts anderes als Abkürzungen ([8], S. 6). Anstelle jedes Mal von einem Viereck, bei dem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, zu sprechen, erweist es sich als praktikabel, der besonderen Figur einen eigenen Namen („Parallelogramm“)

zu geben. Dass Definitionen lediglich (sinnvolle) Bestimmungen sind, muss für Schülerinnen und Schüler transparent gemacht werden. Die (frühe) Unterscheidung von Sätzen und Definitionen ist essentiell, damit die Kinder und Jugendlichen lernen zu erkennen, welche Aussagen jedenfalls einer Begründung bedürfen ([10], S. 111). Dabei darf natürlich nicht außer Acht gelassen werden, dass Namensgebungen zum Teil auf Beweisen fußen. So wird bei der Einführung der Bezeichnung *Umkreismittelpunkt eines Dreiecks* die Existenz und die Eindeutigkeit des Schnittpunkts der Seitensymmetralen vorausgesetzt.

Im Rahmen von Beweisen ist es schließlich oft notwendig, eine „Rückübersetzung“ der vorkommenden Termini vorzunehmen. Die Begriffe müssen durch ihre definierenden Beschreibungen substituiert werden ([82], S. 24). Für eine erfolgreiche Bewältigung der folgenden Aufgabenstellung etwa muss überprüft werden, ob die Figur das ein Parallelogramm charakterisierende Merkmalsystem erfüllt.

Aufgabenstellung (Malle et al. 2010; zit. nach [64], S. 224)
Ein Parallelogramm habe die Eckpunkte $A = (1|1)$, $B = (4|1)$, $C = (6|3)$, $D = (3|3)$. Überzeuge dich durch eine Zeichnung und durch Rechnung, dass es sich tatsächlich um ein Parallelogramm handelt!

Damit Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, Begründungsaufgaben vom vorgestellten Grundtyp 1 zu bearbeiten, müssen sie mit den jeweiligen Definitionen vertraut sein. Franke nennt fünf Lernziele, deren Erreichen als Voraussetzung für ein adäquates Verständnis eines Begriffes und damit auch für die (erfolgreiche) Bewältigung einer Problemstellung, welche diesen Begriff voraussetzt, angesehen werden kann ([28], S. 84):

- Die Lernenden können den Begriff definieren.
- Die Schülerinnen und Schüler finden Beispiele, die den Begriff repräsentieren.
- Die Lernenden können zu einem gegebenen Objekt entscheiden, ob es den Begriff repräsentiert oder nicht.
- Die Lernenden kennen alternative Beschreibungen bzw. äquivalente Definitionen des Begriffes.
- Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, Ober- und Unterbegriffe zu nennen und sind sich der Beziehungen zwischen ihnen bewusst.

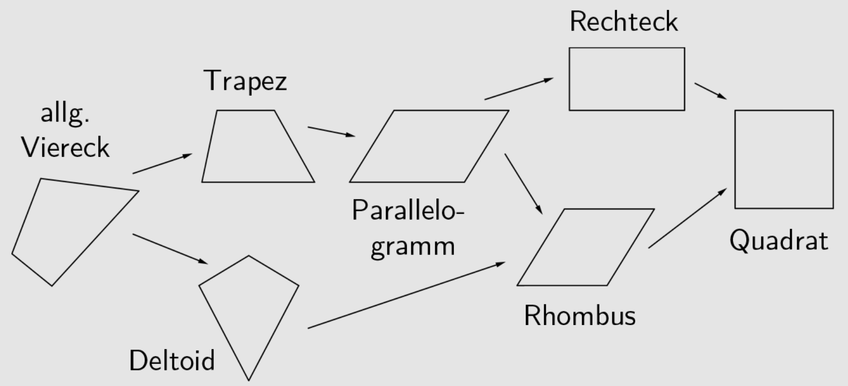
Dass das Wissen um die formale Definition nicht ausreicht, um einen Terminus auch tatsächlich erfasst zu haben, sei an dieser Stelle als wichtige Botschaft für den Mathematikunterricht noch einmal explizit hervorgehoben. Das Begriffsverständnis beinhaltet noch weitere Aspekte, etwa das (korrekte) Operieren mit einer Bezeichnung. Für die Bearbeitung der Aufgabenstellung zum Parallelogramm können die Schülerinnen und Schüler entweder zeigen, dass je zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks parallel sind oder dass je zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind oder dass die Diagonalen einander halbieren. Manchmal ist es deutlich einfacher bzw. in einzelnen Fällen ist es sogar notwendig, eine äquivalente Definition anstelle der ursprünglichen für den Beweis einer Behauptung heranzuziehen.

In der fachdidaktischen Literatur ortet man im Zusammenhang mit der Vergabe von Namen zwei zentrale Probleme. Kritisiert wird einerseits, dass Lehrerinnen und Lehrer dazu neigen, auf exakte Definitionen zugunsten intuitiver oder anschaulicher Begriffseinführungen zu verzichten. Anstelle einer schriftlichen, verbalen Beschreibung werden oft nur einige wenige Skizzen bzw. Zeichnungen herangezogen, die den Terminus beispielhaft veranschaulichen sollen ([5], S. 908; [41], S. 10; [63], S. 13). Die Gefahr solcher „Prototypen“ ist, dass sie ganz konkrete Eigenschaften aufweisen – insbesondere also auch solche, die für den Begriff *nicht* von Bedeutung sind. Schülerinnen und Schülern fällt es im Allgemeinen (zurecht) schwer, zwischen relevanten und überflüssigen Eigenschaften zu unterscheiden und so ist die adäquate Aufnahme des Begriffes in den mathematischen Wortschatz nicht gewährleistet ([41], S. 10).

Ein zweites Problem tritt auf, wenn (umgangssprachlich) gebräuchliche Begriffe mit einer festen Bedeutung in einem anderen Kontext neu definiert werden. Die Spielfiguren aus Mensch-Ärgere-Dich-Nicht sind in der Mathematik keine Kegel mehr ([29], S. 108). Doch nicht nur im Zusammenhang mit der im Alltag üblichen Verwendung von Bezeichnungen treten Unstimmigkeiten auf. Auch innermathematisch kann es bei der Eingliederung neuer Begriffe in das bestehende gedankliche System des Schülers bzw. der Schülerin zu Widersprüchen kommen. Während eine Gerade einen Kreis lediglich berühren darf, um als Tangente angesehen zu werden, ist es durchaus legitim, dass Tangenten an eine Funktion den Graphen schneiden.

Um die Verinnerlichung der Begriffe bei den Schülerinnen und Schülern zu unterstützen, darf die Namensgebung im Unterricht nicht nur salopp erfolgen. Auch wenn man die Begriffsbildung dem Alter bzw. Niveau der Schülerinnen und Schüler anpassen wird (man denke in diesem Zusammenhang etwa an den Kongruenzbegriff), darf zu keinem Zeitpunkt auf eine korrekte Darbringung verzichtet werden ([78], S. 66). Für ein tiefergehendes Verständnis erscheint es unter anderem sinnvoll, verschiedene Definitionen wie beim sogenannten „Haus der Vierecke“ immer wieder zueinander in Beziehung zu setzen ([28], S. 81). Gezielte Fragen wie in der nachgestellten Aufgabe von Dreher et al. sorgen dafür, dass sich die Schülerinnen und Schüler intensiv mit den Begriffen auseinandersetzen ([21], S. 15).

Aufgabenstellung (Dreher et al. 2012; verändert nach [21], S. 15)
Ein Schüler überlegt, welche Vierecke er kennt und fertigt zur Sortierung seiner Gedanken eine Skizze an.



- Was könnte sich der Schüler beim Anfertigen seiner Zeichnung gedacht haben?
- Greife zwei Vierecktypen heraus, die durch einen Pfeil verbunden sind! Welche Eigenschaft kommt vom einen Vierecktyp zum anderen hinzu oder wird weggelassen?
- Zur Hausaufgabe soll der Schüler ein Rechteck, einen Rhombus und ein Trapez zeichnen. Er zeichnet ein einziges Viereck und beschließt, dass er die Aufgabe erledigt hat. Wie kannst du dir das erklären?

Die obige Aufgabenstellung wird sinnvollerweise bereits in der Unterstufe bearbeitet. Diese Empfehlung führt auf eine wichtige Überlegung. Eine Vielzahl der Begriffe, die im Geometrieunterricht der Sekundarstufe II benötigt werden, ist den Schülerinnen und Schülern bereits aus früheren Schuljahren geläufig. Das wiederholte Aufgreifen der Inhalte bereitet der Vermutung den Boden, dass die Lernenden die Definitionen im Sinne von FRANKE auch tatsächlich verstanden haben. Von diesem Standpunkt aus gesehen eignen sich geometrische Begründungsaufgaben, für deren Bearbeitung auf eine Definition zurückgegriffen werden muss, besonders gut, um die Beweisfähigkeit der Schülerinnen und Schüler zu schulen.

In knapp 30 Prozent aller geometrischen Begründungsaufgaben im Schulbuch *Mathematik verstehen* [64–66] müssen die Schülerinnen und Schüler auf eine Definition zurückgreifen, um das Problem bewältigen zu können (s. Abb. 2.2). Die Beweisaufgaben vom Grundtyp 1 nehmen also einen großen Teil ein, was die obige These über ihre besonders gute Eignung zur Schulung der Beweisfähigkeit bei den Schülerinnen und Schülern zumindest nicht widerlegt. Sie werden anteilsmäßig lediglich von einer einzigen Gruppe, den Aufgabenstellungen mit Beweisen vom Grundtyp 2, überragt, die im Folgenden näher beleuchtet werden.

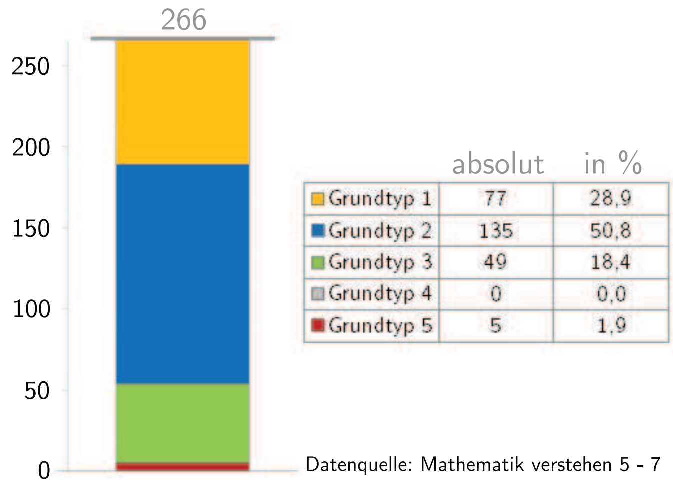


Abbildung 2.2: Verteilung der Begründungsaufgaben im Schulbuch *Mathematik verstehen* nach Grundtypen

2.3.2 Grundtyp 2: Bezugnahme auf einen Satz

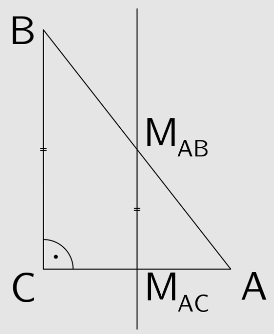
In vielen Fällen wird man in seiner Argumentation Bezug nehmen auf bereits bewiesene Sätze, Lemmata oder Propositionen. Dabei muss sichergestellt werden, dass alle Voraussetzungen des zur Begründung herangezogenen Satzes erfüllt sind. In der Geometrie kommt es häufig vor, dass das Vorliegen der Prämissen nicht von vornherein einsichtig ist, sondern durch das Einführen von Hilfslinien oder -variablen erst erkannt werden muss ([14], S. 888).

Satz (Umkehrung des Satzes von Thales) *Hat das Dreieck $\triangle ABC$ bei C einen rechten Winkel, so liegt C auf einem Kreis mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ als Durchmesser.*

Beweis. Die Streckensymmetrale der Seite $\overline{AC}$ ist, bedingt durch den rechten Winkel bei C, parallel zur Seite $\overline{BC}$. Sei M_{AC} der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ und M_{AB} der Schnittpunkt der Streckensymmetrale von $\overline{AC}$ mit $\overline{AB}$. Nach dem Strahlensatz gilt

$$1 : 2 = \overline{AM_{AC}} : \overline{AC} = \overline{AM_{AB}} : \overline{AB}$$

Das bedeutet aber, dass M_{AB} der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ ist. Der Umkreismittelpunkt fällt mit M_{AB} zusammen und die Behauptung ist bewiesen.



Um die Umkehrung des Thalessatzes zu beweisen, kann, wie in der Argumentationskette illustriert, der Strahlensatz verwendet werden. Dafür wird zunächst eine Hilfsgerade, die Streckensymmetrale der Seite $\overline{AC}$, eingezeichnet. Sie ist zur (Trägergeraden der) Seite $\overline{BC}$ parallel und damit sind die Voraussetzungen für die Anwendung des Strahlensatzes erfüllt.

2.3.3 Grundtyp 3: Begründen durch Anwenden eines Verfahrens

Vor allem in der analytischen Geometrie reicht es oft aus, eine Behauptung durch das Anwenden eines mathematischen Verfahrens zu belegen.

Satz *Die Schwerlinien des Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden einander in einem Punkt, dem Schwerpunkt.*

Beweis. Die Schwerlinie durch den Eckpunkt A ist wegen $M_{BC} = \frac{1}{2} \cdot \binom{b_1+c_1}{b_2+c_2}$ und $\overrightarrow{AM_{BC}} = \frac{1}{2} \cdot \binom{b_1+c_1-2a_1}{b_2+c_2-2a_2}$ gegeben durch $X = \binom{a_1}{a_2} + r \cdot \binom{2a_1-b_1-c_1}{2a_2-b_2-c_2}$. Auf analoge Weise erhält man die Gleichung der Schwerlinie durch den Eckpunkt B: $X = \binom{b_1}{b_2} + s \cdot \binom{2b_1-a_1-c_1}{2b_2-a_2-c_2}$.

$$\begin{aligned} a_1 + r \cdot (2a_1 - b_1 - c_1) &= b_1 + s \cdot (2b_1 - a_1 - c_1) \quad | \cdot (2a_2 - b_2 - c_2) \\ a_2 + r \cdot (2a_2 - b_2 - c_2) &= b_2 + s \cdot (2b_2 - a_2 - c_2) \quad | \cdot (-2a_1 + b_1 + c_1) \end{aligned}$$

Multiplizieren mit den angegebenen Faktoren sowie anschließendes Addieren der beiden Gleichungen führt auf eine Gleichung in s. Wegen

$$\begin{aligned} &(2b_1 - a_1 - c_1)(2a_2 - b_2 - c_2) = \\ &\quad = 4a_2b_1 - 2a_1a_2 - 2a_2c_1 - 2b_1b_2 + a_1b_2 + b_2c_1 - 2b_1c_2 + a_1c_2 + c_1c_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &(2b_2 - a_2 - c_2)(-2a_1 + b_1 + c_1) = \\ &\quad = -4a_1b_2 + 2a_1a_2 + 2a_1c_2 + 2b_1b_2 - a_2b_1 - b_1c_2 + 2b_2c_1 - a_2c_1 - c_1c_2 \end{aligned}$$

gilt nach Vereinfachung die Gleichung:

$$\begin{aligned} &-a_1b_2 - a_1c_2 - 2a_2b_1 + b_1c_2 + a_2b_1 + a_2c_1 + 2a_1b_2 - b_2c_1 = \\ &\qquad = 3s(a_2b_1 - a_2c_1 - a_1b_2 + b_2c_1 - b_1c_2 + a_1c_2) \end{aligned}$$

$$s = \frac{a_1b_2 - a_1c_2 - a_2b_1 + b_1c_2 + a_2c_1 - b_2c_1}{3(-a_1b_2 + a_1c_2 + a_2b_1 - b_1c_2 - a_2c_1 + b_2c_1)} = -\frac{1}{3}$$

Damit ist der Schnittpunkt S der Schwerlinien durch die Eckpunkte A und B gegeben durch $S = \frac{1}{3}(A + B + C)$. S liegt ebenfalls auf der Schwerlinie durch den Eckpunkt C, die durch die Gleichung $X = \binom{c_1}{c_2} + t \cdot \binom{2c_1-a_1-b_1}{2c_2-a_2-b_2}$ beschrieben werden kann.

Um die Behauptung über den gemeinsamen Schnittpunkt der Schwerlinien zu beweisen, muss ein lineares Gleichungssystem in zwei Variablen gelöst werden. Das geometrische Problem wird in eine andere Darstellung übersetzt und mit algebraischen Methoden gelöst, bevor das Ergebnis schließlich wiederum geometrisch gedeutet wird. Kann man zeigen, dass die Lösung des linearen Gleichungssystems existiert und eindeutig ist, so ist bewiesen, dass die Schwerlinien einander in einem Punkt schneiden.

Auf den ersten Blick erscheinen Beweise, in denen man (lediglich) auf ein bestimmtes Verfahren Bezug nimmt, wesentlich leichter zu sein als andere argumentative Begründungen. Vor derartig übereilten Schlüssen sei an dieser Stelle aber gewarnt. Faktum ist, dass sich Beweise wie der obige (weitgehend) losgelöst von jeglicher anschaulicher Interpretation führen lassen ([49], S. 30). Die enge Verbindung, die Geometrie und Algebra in der Vektorrechnung eingehen, wird in den analytisch geführten Beweisen nicht immer sichtbar. Vielmehr erinnern die Begründungen an die Sekundarstufe I, in der die Themenbereiche eher isoliert voneinander betrachtet werden. Was das Finden einer Begründung vereinfacht, muss für das Nachvollziehen nicht ebenso gewinnbringend sein. Im Gegenteil, durch ihre vorwiegend technischen Begründungen erinnern vektorgeometrische Beweise die Schülerinnen und Schüler eher an Rechenübungen als an überzeugende Erklärungen geometrischer Behauptungen. Die Grundidee des Beweises gerät durch das schemenhafte Umformen leicht in Vergessenheit ([49], S. 32). Außerdem fördert ein solcher Beweis oft nicht das Einsehen der Richtigkeit der Behauptung.

Hohenwarter & Lindner schlagen vor, mathematische Begründungen von obiger Gestalt durch den Einsatz sogenannter *Schieberegler* einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) für die Schülerinnen und Schüler leichter verständlich zu machen. Digitale Medien sollen die Rolle des Vermittlers zwischen den algebraischen Beweisen und ihren zugrunde liegenden geometrischen Aussagen einnehmen. So entspricht z. B. das Schneiden zweier Geraden der algebraischen Suche nach passenden Parameterwerten für r und s. Mithilfe von *Cinderella, Euklid, Cabri, GeoProof, GEONExT, Geogebra* oder *DynaGeo* können Schülerinnen und Schüler die Beweisidee unter Verwendung der Schieberegler für die Parameter als Experiment visualisieren ([49], S. 32).

Die Verwendung von digitaler Geometriesoftware ist insofern gewinnbringend, als dass die Lernenden dadurch eine bessere Vorstellung von der Bedeutung der involvierten Parameter und Gleichungen erhalten. Da jedoch nicht jeder Umformungsschritt geometrisch sinnvoll gedeutet werden kann, ist anzuzweifeln, ob Beweise, die sich auf ein Verfahren berufen, überhaupt ähnlich verständnisfördernd sein können wie die Begründungsaufgaben anderer Grundtypen.

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Tabelle 2.2: Wahrheitstafel der $\Rightarrow$-Operation

2.3.4 Grundtyp 4: Begründen in Form eines Widerspruchsbeweises

Alle mathematischen Aussagen haben bei genauerer Betrachtung die Gestalt: Voraussetzungen $\Rightarrow$ Resultat, d. h. aus den Voraussetzungen folgt das Resultat. Will man eine Behauptung beweisen, so gibt die Wahrheitstafel der $\Rightarrow$-Operation (s. Tab. 2.2) dazu zwei Möglichkeiten.

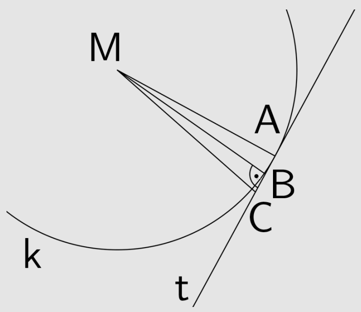
Man kann den Beweis entweder *direkt* führen, indem man zeigt, dass das Resultat q wahr ist, wenn die Aussagen p gelten oder aber man nimmt *indirekt* an, dass das Resultat q falsch ist und folgert daraus, dass die Voraussetzungen p dann nicht zutreffen können bzw. leitet einen Widerspruch zu den Prämissen her. Dieses Beweisprinzip, das mitunter zu einer erheblichen Arbeitserleichterung führt, funktioniert, weil die Aussage $p \Rightarrow q$ bei falschem Resultat q nur dann wahr ist, wenn auch die Voraussetzungen p falsch sind (s. Tab. 2.2) ([82], S. 85). Es gilt also $(p \Rightarrow q) = (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

Was mithilfe von Wahrheitstafeln rasch eingesehen werden kann, ist intuitiv nicht zwingend ebenso leicht nachvollziehbar. Im Alltag ist die Aussage „Wenn die Schularbeit gut ausfällt, gehen wir ins Kino.“ im Allgemeinen nicht gleichbedeutend mit der Aussage „Wenn wir nicht ins Kino gehen, fällt (bzw. fiel) die Schularbeit nicht gut aus.“ ([64], S. 27). Die Schülerinnen und Schüler akzeptieren viel eher die Äußerung „Wenn die Schularbeit nicht gut ausfällt, gehen wir auch nicht ins Kino.“ als gleichwertig, d. h. sie vermuten die Gültigkeit der Gleichung $(p \Rightarrow q) = (\neg p \Rightarrow \neg q)$, die mit $(p \Leftrightarrow q)$ äquivalent ist.

Als Musterbeispiele indirekter Beweise werden in einführenden Lehrbüchern häufig die von Euklid publizierte Begründung der Behauptung über die Existenz unendlich vieler Primzahlen oder der Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ angeführt ([82], S. 25, 86). Doch auch in der Geometrie gibt es Beweise, die mit der Negation der Behauptung starten und eine logische Schlussfolgerungskette bis hin zu einem Widerspruch verfolgen, um so schließlich auf den Wahrheitsgehalt der Behauptung zu schließen.

Satz *Ist eine Gerade t Tangente an einen Kreis k mit Mittelpunkt M und ist A der Berührpunkt, so steht der Radius $\overline{MA}$ normal auf t.*

Beweis. Wir nehmen indirekt an, $\overline{MA}$ und t seien nicht senkrecht zueinander. Sei B der Fußpunkt des Lots von M auf t und sei $C \neq A$ jener Punkt auf t, der von B genauso weit entfernt ist wie A von B, d. h. $\overline{BA} = \overline{BC}$.
Die Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle CBM$ sind nach dem SWS-Satz kongruent. Es gilt daher $\overline{MA} = \overline{MC}$. Neben A ist also auch C ein Punkt, der sowohl dem Kreis k als auch der Geraden t liegt. Dies widerspricht der Voraussetzung, wonach t Tangente an den Kreis k war.



Im analysierten Schulbuch *Mathematik verstehen* [64–66] findet man nicht einen einzigen indirekten geometrischen Beweis (s. Abb. 2.2). Weder wird ein solcher vorgeführt, noch verlangt man von den Schülerinnen und Schülern, einen Widerspruchsbeweis zu führen. Woran liegt es, dass der Grundtyp in diesen Abschnitten mit keinem Wort auch nur erwähnt wird? Antonini & Mariotti vertreten die Ansicht, wonach zum Verstehen dieser besonderen Art zu beweisen eine hohe kognitive Leistung erforderlich ist ([4], S. 402). Tatsächlich scheinen sich Widerspruchsbeweise in ihrem Komplexitätsgrad von direkt geführten argumentativen Begründungen abzuheben, was nicht nur am eingangs beschriebenen mangelnden Verständnis für ihre logische Struktur liegt.

Angenommen, die Schülerinnen und Schüler gelangen im Unterricht induktiv zu der Einsicht, dass eine Kreistangente stets normal auf den Berührradius steht. Beim (indirekten) Begründen muss das eben widerfahrene Aha-Erlebnis ausgeblendet werden bzw. ist man sogar dazu gezwungen, vom Gegenteil der eigenen Überzeugung auszugehen. Für Schülerinnen und Schüler ist diese Notwendigkeit keineswegs trivial, insbesondere auch deshalb, weil man die Annahmen beim Widerspruchsbeweis eigentlich gar nicht illustrieren kann. Der rechte Winkel, der in der Skizze zum Beweis des Satzes über die gegenseitige Lage von Berührradius und Kreistangente angedeutet wird, hat keine 90°. Dennoch so zu tun, als ob $\overline{MB}$ normal auf die Tangente stünde und daraus weitere Schlussfolgerungen abzuleiten, fällt den Schülerinnen und Schülern nachvollziehbar schwer.

Die fehlende Akzeptanz der Beweistechnik wird durch die Tatsache, dass indirekte Beweise einen mathematischen Sachverhalt oft nur mangelhaft erklären bzw. in der Regel nicht zum Entdecken neuer Resultate führen (s. Kap. 3.2 und 3.4), verstärkt ([4], S. 402).

Will man den Schülerinnen und Schülern das indirekte Beweisen näherbringen, so ist es sinnvoll, Brücken zwischen der Alltagssprache und der formalen Struktur der speziellen Begründungen zu bauen ([4], S. 402). Angenommen, eine Schülerin kommt zu spät in den Unterricht mit der Entschuldigung, dass es aufgrund des starken Niederschlags zu einem Verkehrschaos gekommen sei. Mit einem Blick aus dem Fenster deckt die Lehrperson die Lüge auf: „Die Straße ist nicht nass, also kann es auch nicht geregnet haben." Dieses Beispiel illustriert, dass die indirekte Schlussweise auch in der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler vorkommt. Die Herausforderung für die Lehrperson liegt darin, die bei Schülerinnen und Schülern vorhandenen Vorstellungen und Erfahrungen im Unterricht auf eine Art und Weise aufzugreifen, die zu fruchtbaren Lernprozessen führen kann. Geeignete Aufgabenstellungen wie die folgende können dabei helfen, die Struktur indirekter Beweise für Schülerinnen und Schüler fassbar zu machen.

Aufgabenstellung (Antonini & Mariotti 2008; verändert nach [4], S. 408–409)
Seien k und l zwei verschiedene Geraden mit der Eigenschaft, dass jede beliebige Gerade m, die k schneidet, automatisch auch l schneidet. Was kann über die gegenseitige Lage von k und l ausgesagt werden? Vervollständige und begründe indirekt mithilfe mehrerer Gegenbeispiele, warum nur eine der drei Antworten richtig ist!

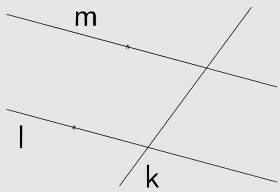
Wenn k und l zwei Geraden mit der obigen Eigenschaft sind, dann können k und l ____________________ (normal aufeinander stehen / schneidend sein / parallel sein).

Zwei normale Geraden schneiden einander in einem Punkt und so könnten die ersten beiden Antwortmöglichkeiten im Lückentext zu einer gemeinsamen zusammengefasst werden. Weil die Orthogonalität aber als Spezialfall angesehen werden kann und die Schülerinnen und Schüler das Testen von Sonderfällen als wichtiges Werkzeug bei der Überprüfung von Vermutungen wahrnehmen sollen, erscheint die Formulierung in der obigen Aufgabenstellung dennoch passend. Wenn die Lernenden zu jedem der drei Fälle eine passende Skizze anfertigen, gelangen sie relativ schnell zu der Einsicht, dass die Geraden k und l parallel sein müssen. Diese Überlegung führt gemeinsam mit der Skizze zu Fall 1 bzw. 2 unmittelbar zu einem (indirekten) Beweis.

Satz *Seien k und l zwei verschiedene Geraden mit der Eigenschaft, dass jede beliebige Gerade m, die k schneidet, automatisch auch l schneidet. Dann sind k und l parallel.*

Beweis. Wir nehmen indirekt an, dass die Geraden k und l nicht parallel sind. Das bedeutet, k und l schneiden einander in einem Punkt. Wähle für m eine Gerade, die parallel zu l ist.

Die Gerade m schneidet k und hat mit l keinen gemeinsamen Punkt, sie schneidet l also nicht, ein Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes.



2.3.5 Grundtyp 5: Widerlegen durch ein Gegenbeispiel

Ein großer Teil der mathematischen Theorien handelt von Strukturen und Regeln, z. B. Rechengesetzen. Rechengesetze gelten *für alle* Objekte einer bestimmten Menge, sie werden demnach als *Allaussagen* bezeichnet ([82], S. 92–93). Dass die Angabe eines einzigen (Gegen-)Beispiels ausreicht, um auf die Ungültigkeit einer Universalaussage schließen zu können, ist für viele Schülerinnen und Schüler nicht trivial ([30], S. 10). Reiss & Thomas beobachten, dass die Lernenden oft versuchen, möglichst viel empirische Evidenz anzuhäufen ([80], S. 101). Werden nur einige wenige Gegenbeispiele gefunden, gehen viele Jugendliche dazu über, diese als Sonderfall zu betrachten und – gemäß der bekannten Redensart, wonach Ausnahmen die Regel bestätigen – den Wahrheitsgehalt der Behauptung den eindeutigen Belegen zum Trotz nicht anzuzweifeln ([16], S. 561).

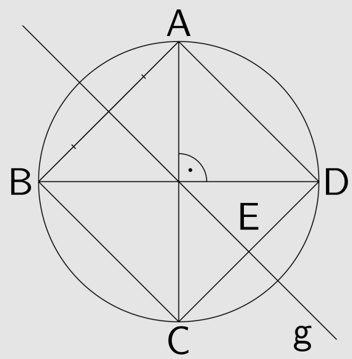
Ein wiederholtes Mal wird deutlich, dass die Alltagserfahrungen von Schülerinnen und Schülern bei der Konzeption von Unterricht nicht unberücksichtigt bleiben dürfen. Wenn jemand zu spät zu einem vereinbarten Treffen kommt, schließt man tatsächlich daraus nicht automatisch, dass die betreffende Person unpünktlich ist – es könnte sich schließlich auch um eine (einmalige) Ausnahme handeln ([15], S. 4).

Diesem Unverständnis aufseiten der Lernenden wird im Schulbuch *Mathematik verstehen* [64–66] so begegnet, dass im Kontext der Begründungsaufgaben immer wieder explizit betont wird, dass *ein* Gegenbeispiel eine Aussage widerlegen kann. Anstelle die Schülerinnen und Schüler lediglich dazu aufzufordern, die lückenhafte Beschaffenheit einer Behauptung aufzuzeigen, werden Aufgabenstellungen vom Grundtyp 5 stets mit dem Zusatz „mithilfe eines Gegenbeispiels“ versehen, wie es auch an der Formulierung des nachgestellten Problems ersichtlich ist.

Aufgabenstellung (Malle et al. 2010; zit. nach [65], S. 164)
Gilt für das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ das Assoziativgesetz $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$? Beweise es oder widerlege es durch ein Gegenbeispiel oder eine geeignete Argumentation!

Ein weiterer Indikator für das fehlende Verständnis des zugrunde liegenden Prinzips von Gegenbeispielen ist die Beobachtung, dass Schülerinnen und Schüler oft gar nicht wissen, welche Bedingungen ein solches Beispiel überhaupt erfüllen muss ([16], S. 1–2).

Aufgabenstellung (Buchbinder & Zaslavsky, 2011; verändert nach [17], S. 270)
Eine Schülerin schreibt dem Kreis k ein Viereck $ABCD$ ein, dessen Diagonalen im rechten Winkel aufeinander stehen. Die Eckpunkte des Vierecks liegen auf k.
Sei g die Gerade durch den Halbierungspunkt der Strecke $\overline{AB}$ und den Mittelpunkt des Kreises und sei E der Schnittpunkt von g mit der (Trägergeraden der) Seite $\overline{CD}$. Die Schülerin misst die Abstände $\overline{CE}$ und $\overline{DE}$ und stellt fest, dass sie gleich sind – Zufall?
Begründe deine Vermutung!



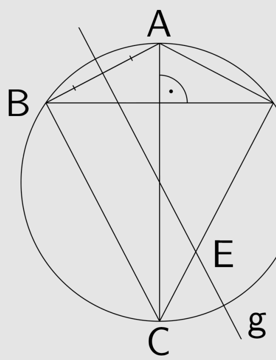
Um die obige Aufgabe mit Erfolg diskutieren zu können, muss zwischen Eigenschaften, die vorausgesetzt werden, und solchen, die man dem Viereck „unterstellt“, unterschieden werden. Eine Umformulierung der Behauptung sorgt für mehr Klarheit und sollte auch von den Schülerinnen und Schülern im Unterricht durchgeführt werden. Das Erkennen der logischen Struktur von Aussagen kann nämlich als wichtiger Teilaspekt der Begründungsfähigkeit angesehen werden ([30], S. 10).

Behauptung Für jedes Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen normal aufeinander stehen und dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen, gilt: Verbindet man den Halbierungspunkt der Seite $\overline{AB}$ mit den Mittelpunkt des Kreises, so erhält man eine Gerade, die die Seite $\overline{CD}$ in ihrem Halbierungspunkt schneidet.

Um die Behauptung zu widerlegen, benötigt man ein Viereck, dessen Diagonalen einen rechten Winkel einschließen, dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen und das die obige Folgerung *nicht* erfüllt, d. h. die Gerade durch den Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und den Kreismittelpunkt darf $\overline{CD}$ *nicht* in ihrem

Halbierungspunkt schneiden. Ist man mit seinen Schülerinnen und Schülern erst einmal bis zu diesem Punkt gelangt, so ist die wichtigste Vorarbeit für das Finden eines Gegenbeispiels bereits geleistet. Im Folgenden können die Lernenden mit gezielten Fragen zur gewünschten Erkenntnis geleitet werden. Welche Vierecke haben die Eigenschaft, dass ihre Diagonalen einen rechten Winkel einschließen? Ist es möglich, eine solche Figur so zu zeichnen, dass ihre Eckpunkte auf einem Kreis liegen? Den Schülerinnen und Schülern wird es leichter fallen, zuerst einen Kreis zu zeichnen und diesem anschließend eine Raute bzw. ein Deltoid einzuschreiben. Das Testen am Deltoid liefert sofort die Erkenntnis, dass es sich bei der Beobachtung der Schülerin aus der Aufgabenstellung um einen Zufall handelt, die Allgemeingültigkeit ist nicht gegeben.

Beweis. (Gegenbeispiel)

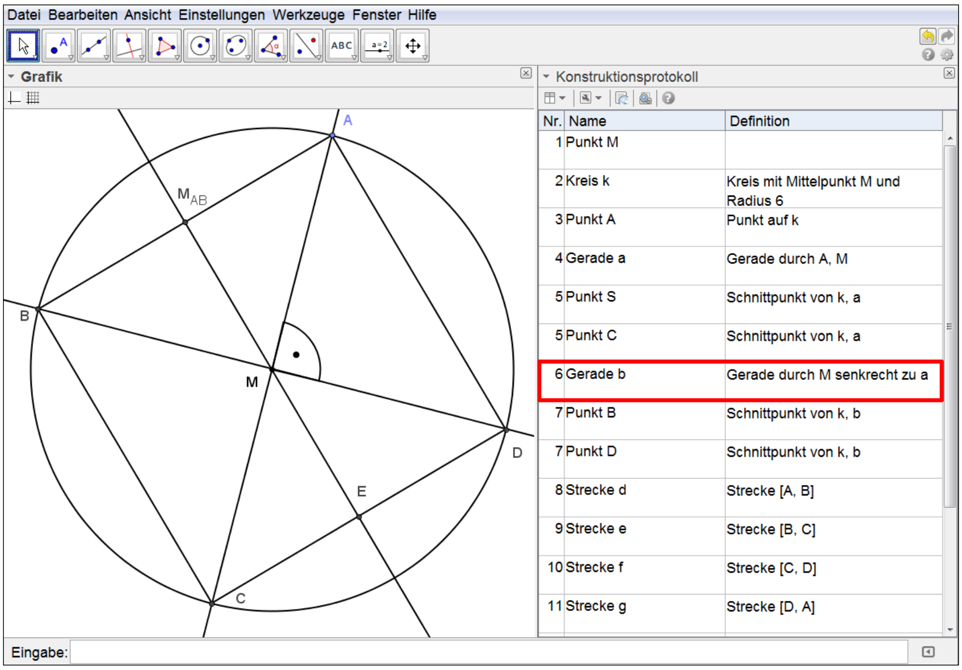


Ein wichtiges Detail, das bislang vollkommen ausgeblendet wurde, ist, dass die Formulierung der Aufgabenstellung keine Rückschlüsse auf den Wahrheitsgehalt der Behauptung zuließ. Die Schülerinnen und Schüler wissen zu Beginn der Beschäftigung mit dem mathematischen Problem im Allgemeinen nicht, dass es sich dabei tatsächlich nur um einen Zufall handelt. Buchbinder & Zaslavsky stellen fest, dass es den Lernenden viel schwerer fällt, ein Gegenbeispiel zu finden, wenn ihre Intuition ihnen sagt, dass die Behauptung wahr ist ([16], S. 3).

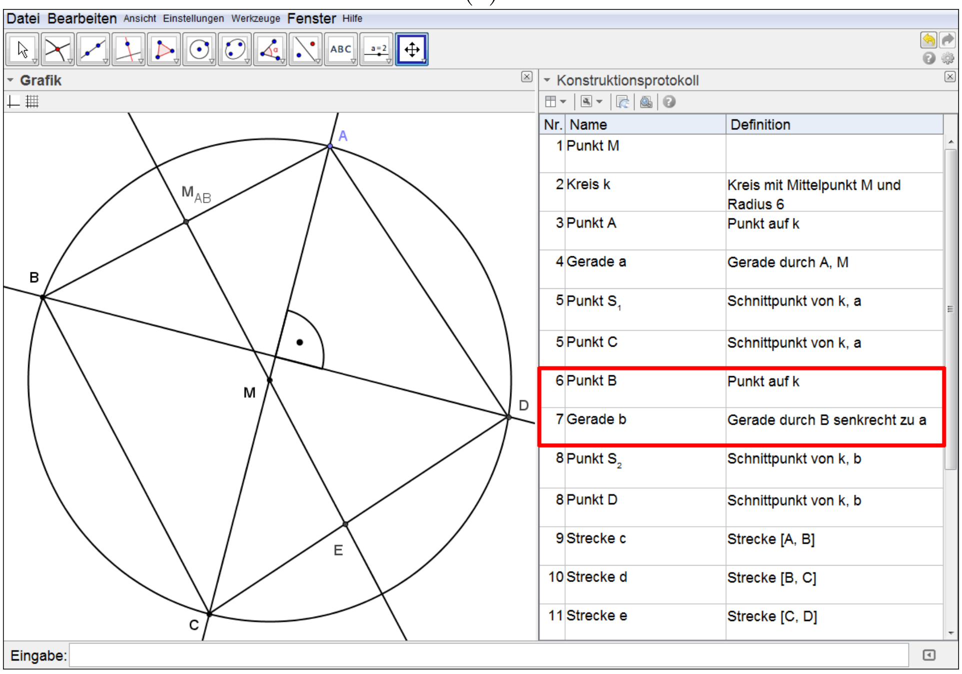
Der Einsatz dynamischer Geometriesoftware drängt sich an dieser Stelle fast auf. Im Allgemeinen sind zwei Zugangsweisen denkbar. Die (gängige) Variante, bei der die Schülerinnen und Schüler selbst alle Konstruktionsschritte durchführen, bevor sie sich schließlich gegen die Möglichkeit einer Verallgemeinerung der obigen Beobachtung entscheiden, hat insofern einen Nachteil, als dass die Lernenden das Ziel leicht aus den Augen verlieren können. Um zu identifizieren, ob es sich bei der Beobachtung in der Aufgabenstellung um einen Zufall handelt, bietet sich daher die Arbeit mit computerbasierten interaktiven Lernumgebungen an. In der sogenannten *Black Boxes*-Variante fertigt die Lehrperson im Vorfeld bereits eine Figur an, die schließlich von den Schülerinnen und Schülern durch das Ziehen an Eckpunkten variiert werden kann ([38], S. 16). Die Lernenden finden auf diese Weise sehr rasch ein Gegenbeispiel – auch dann, wenn das Ergebnis der anfänglichen Intuition zuwiderläuft.

Wie bereits erwähnt, wissen die Lernenden oft nicht, welche Eigenschaften ein solches Beispiel haben muss. Daher muss von den Schülerinnen und Schülern die Frage beantwortet werden: *Warum* widerlegt das Beispiel die Behauptung?

Alternativ zur Arbeit mit einer einzigen interaktiven Lernumgebung kann man die Schülerinnen und Schüler auch mit zwei verschiedenen Black Boxes konfrontieren (s. Abb. 2.3). Im Unterschied zur ersten Methode wird die Bedeutung einer retrospektiven Analyse für die Lernenden beim letztgenannten Vorgehen eher transparent. Die Idee ist, bei einem Arbeitsblatt die Annahmen dahingehend abzuändern, als dass die Abstände $\overline{CE}$ und $\overline{DE}$ auch beim Ziehen an Eckpunkten gleich bleiben (s. Abb. 2.3 (a)). Das zweite Arbeitsblatt bleibt wie gehabt (s. Abb. 2.3 (b)). Die Schülerinnen und Schüler wissen zu Beginn ihrer Arbeit nicht, ob sie ein Beispiel gefunden haben, dass die Hypothese widerlegt und müssen sich mit den Voraussetzungen und Behauptungen auseinandersetzen, um die Begründungsaufgabe entscheiden zu können. Dabei kann natürlich das Studium des Konstruktionsprotokolls helfen: Wie wurden die Figuren konstruiert? Inwieweit unterscheiden sich die Konstruktionen voneinander? Welche Eigenschaften werden den Vierecken unterstellt? Im Unterschied zur zweiten Figur wurde bei der Konstruktion des Vierecks aus Abbildung 2.3 (a) angenommen, dass der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks mit dem Kreismittelpunkt zusammenfällt. Ein Blick auf die Aufgabenstellung genügt, um festzustellen, dass hier eine zusätzlich einschränkende Annahme getroffen wurde.



(a)



(b)

Abbildung 2.3: Zwei verschiedene computerbasierte interaktive Lernumgebungen zur gleichen Aufgabenstellung

Kapitel 3

Was soll ein Beweis bewirken?

Im Jahr 1900 wies David Hilbert seinen Fachkollegen und -kolleginnen mit einer berühmt gewordenen Liste von 23 ungelösten mathematischen Problemen den Weg ins 20. Jahrhundert. 100 Jahre später kursierten ähnliche Aufzählungen, am bekanntesten wurden die sogenannten *Millenium Problems*[1]. Der Geschäftsmann Landon T. Clay hat auf die Lösung von sieben bedeutenden Problemen der Mathematik jeweils eine Million Dollar ausgesetzt. Eine Million Dollar – der Marktwert eines mathematischen Beweises?

Nur eine überschaubare Gruppe an Wissenschaftlerinnen bzw. Wissenschaftlern wäre wohl bereit, eine derartig große Summe für das Belegen einer Behauptung zu bezahlen. Und dennoch – es drängt sich die Vermutung auf, dass die Bedeutung von Beweisen größer ist als im Allgemeinen und insbesondere auch von vielen Mathematiklehrenden (an Schulen) und -lernenden angenommen wird.

Unterschiedliche Autorinnen und Autoren haben sich Gedanken zu den verschiedenen Funktionen von mathematischen Beweisen gemacht. Der Aufbau dieses Kapitels orientiert sich an den von De Villiers proklamierten Aufgaben, namentlich Verifizierung bzw. Überzeugung, Erklärung, Systematisierung, Entdecken von neuen Resultaten und Kommunikation ([20], S. 17–23). Hanna ist davon überzeugt, dass sich alle diese Funktionen auch auf der Ebene der Schulmathematik wiederfinden lassen, wenn auch unterschiedlich stark gewichtet ([37], S. 7).

3.1 Beweisen, um zu überzeugen

Das Formulieren von Vermutungen ist ein fundamentaler Aspekt der Mathematik. Um mögliche Zweifel und anfängliche Skepsis (*„Ist das immer so?“*) zu beseitigen, bedarf es einer Begründung. Alibert & Thomas sprechen mathematischen Beweisen einen *dualen Charakter* zu. Sie haben demnach nicht nur die Aufgabe, andere von einer Idee zu überzeugen, sondern bestätigen

[1] http://www.claymath.org/millennium/ (besucht am 01.06.2013)

insbesondere auch jener Person, die den Beweis führt oder nachvollzieht, ihre Hypothese ([1], S. 215).

Beweise sind aber keine notwendige Vorbedingung für Überzeugung. Oft ist man sich einer Sache bereits sicher, etwa aufgrund einer quasi-empirischen Verifikation oder durch die Existenz einer nachvollziehbaren Beweisidee, und bemüht sich erst im Anschluss um eine Verschriftlichung ([20], S. 18). Die Überzeugung motiviert dazu, sich mit dem Sachverhalt häufig über mehrere Monate oder gar Jahre hinweg auseinanderzusetzen. Nicht in allen Fällen gelingt der Beweis schließlich auch. Man rufe sich in diesem Zusammenhang etwa das prominente Beispiel der Riemann'schen Vermutung in Erinnerung. Obwohl die Behauptung nie bewiesen wurde, geht man in mathematischen Kreisen von ihrem Wahrheitsgehalt aus ([20], S. 18). Ein Beweis müsste hier demnach keine Überzeugungsfunktion erfüllen, sondern hätte eine andere Aufgabe, die im weiteren Verlauf dieses Kapitels noch transparent wird.

Auf der anderen Seite kann es auch vorkommen, dass Mathematiker und Mathematikerinnen trotz der Existenz eines Beweises die Richtigkeit der Aussage nicht anerkennen (können). So schrieb der belgische Mathematiker Pierre Deligne nach seinem sehr formalen Beweis über abgeleitete Funktoren und Kategorien:

> *I would be grateful if anyone who has understood this demonstration would explain it to me.* (Deligne 1973; zit. nach [1], S. 220)

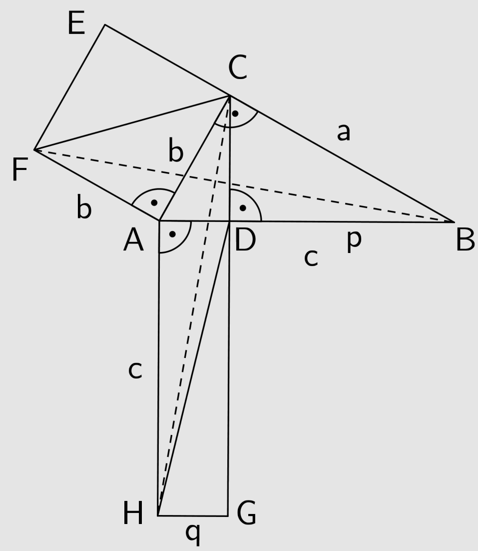
Die bisher gewonnenen Erkenntnisse zur Überzeugungsfunktion von Beweisen lassen sich, so der didaktische Tenor, nicht immer unmittelbar und unverändert von der Fachwissenschaft auf die Schulmathematik übertragen. Gerade in der Geometrie gibt es immer wieder Sachverhalte, die von den Schülerinnen und Schülern nicht angezweifelt werden, weil sie ohnehin klar sind ([55], S. 12). Nach MALLE wird beispielsweise niemand in Frage stellen, dass in einem Dreieck aus der Gleichheit der Schenkellängen die Gleichheit der Basiswinkel folgt ([62], S. 4). Ein Beweis muss in diesem Fall keine Überzeugungsfunktion erfüllen.

Bei schwierigeren, aber auch überraschenden mathematischen Aussagen, deren Gültigkeit man nicht unmittelbar „sieht", kann [sic!] das Arbeiten mit Beweisen zur Einsicht auf Seiten der Lernenden führen.

Satz (Kathetensatz) *Für ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten p und q gilt: $a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$.*

Beweis. Wir zeigen, dass $\#ACF \left(= \frac{1}{2} \cdot b^2\right) = \#ADH \left(= \frac{1}{2} \cdot c \cdot q\right)$. Die Dreiecke $\triangle ACF$ und $\triangle ABF$ stimmen in der Grundlinie $b = \overline{AF}$ und, bedingt durch die Parallelität von BC und AF, auch in der dazugehörigen Höhe b überein. Es gilt also $\#ACF = \#ABF$.

Die Dreiecke $\triangle ABF$ und $\triangle AHC$ sind nach dem SWS-Satz kongruent: Es gilt $\overline{AF} = \overline{AC} = b$ und $\overline{AB} = \overline{AH} = c$, $\angle FAB$ und $\angle CAH$ sind gleich große Normalwinkel.
Wegen der Flächengleichheit der Dreiecke $\triangle ACH$ und $\triangle ADH$ (selbes Argument wie oben) folgt dann auch $\#ACF = \#ADH$.



Mathematik ist keine Wissenschaft, in der man auf das Wohlwollen von Autoritäten hoffen und Meinungen von Expertinnen bzw. Experten schlichtweg akzeptieren muss ([68], S. 2). Götz & Sattlberger begrüßen die Sonderstellung des Unterrichtsfaches im Fächerkanon, die sich dadurch auszeichnet, dass nicht die Macht oder das (faktische) Fachwissen der Lehrperson über richtig oder falsch entscheidet ([33], S. 97). Schülerinnen und Schüler können durch den rationalen Gebrauch der eigenen Vernunft mögliche Widersprüche oder Unstimmigkeiten in den Behauptungen der Lehrperson identifizieren und sogar belegen – zumindest in der Theorie ([78], S. 5). Jahnke kritisiert, dass das dem Schulfach innewohnende Potential als ein den demokratischen Prozess fördernder Gegenstand nicht immer voll ausgeschöpft wird ([52], S. 60). Die Wahrheit einer behandelten Aussage steht im Unterricht (zu) oft gar nicht zur Diskussion, vielmehr wird außerhalb des Klassenzimmers über richtig und falsch entschieden:

> *Der Schulunterricht dient dann allenfalls noch der Festigung des wahren Wissens und nicht dessen Prüfung oder Rekonstruktion.* (Jahnke 2002; zit. nach [52], S. 60)

Häufig wird die Überzeugungsfunktion als zentralste, manchmal – etwa bei Goldberg – sogar als einzig legitime Aufgabe von Beweisen im Unterricht angesehen, vor allem auch in der Unterstufe, also bis zur 8. Schulstufe ([30], S. 9; [62], S. 5). Unumstritten ist in jedem Fall ihre weitgehende Akzeptanz bei Schülerinnen und Schülern, die in erster Linie durch die enge Verbindung mit der Alltagswelt der Lernenden erklärt werden kann ([70], S. 3). Ob es darum geht, seine Unschuld vor Gericht mithilfe glaubwürdiger

Abbildung 3.1: Beweisen vor Gericht ([18], S. 36)

Indizien zu belegen (s. Abb. 3.1) oder aber sein Können in einem Wettbewerb unter Beweis zu stellen – das außermathematische, lebenspraktische Beweisen zielt meist darauf ab, andere von etwas zu überzeugen.

De Villiers warnt eindringlich davor, diesen allgemeinen Zuspruch zum Anlass zu nehmen, das Beweisen im Unterricht mit dem alleinigen Ziel der Überzeugung zu propagieren und widerspricht damit der traditionellen Sichtweise, die – wie schon erwähnt – unter anderem auch von Goldberg vertreten wird. Der Autor begründet seine dringende Empfehlung damit, dass Lehrerinnen und Lehrer zu fragwürdigen Methoden griffen, um die Beweisbedürftigkeit von intuitiv klaren Resultaten zu begründen. Hinweise auf Inkonsistenzen im Denken, beispielsweise optische Täuschungen, sollen bei den Lernenden Zweifel erzeugen und in weiterer Folge ein Verlangen nach exakten, deduktiven Beweisen initiieren ([19], S. 371; [50], S. 51). Dieses künstliche Schaffen von Beweissituationen ist nicht unproblematisch, wie Alibert & Thomas auf Basis ihrer empirischen Untersuchungen feststellen. Schülerinnen und Schüler werden verunsichert, durch den Verweis auf die Möglichkeit geometrischer Illusionen entsteht der Eindruck, dass Visualisierungen im Mathematikunterricht verboten seien ([1], S. 218; [17], S. 275). Wird das Anfertigen von Skizzen in einer späteren Unterrichtseinheit als Hilfsmittel zum

Finden von Beweisen vorgestellt, so ist Verwirrung auf Seiten der Lernenden vorprogrammiert.

Ein weiteres Argument, das der alleinigen Berufung auf die Überzeugungsfunktion von Beweisen im Unterricht widerspricht, ist die empirische Beobachtung, wonach Schülerinnen und Schüler oft mithilfe primitiver Begründungen (z. B. dem Prüfen von Spezialfällen) einem hohen Grad an Überzeugung erlangen und von diesem Standpunkt aus gesehen keinen Beweis fordern ([62], S. 4; [80], S. 103).

Jahnke stellt fest, dass in der fachdidaktischen Literatur eine Tendenz besteht, das kindliche Vertrauen in die Verwendung der induktiven Schlussweise zur Prüfung von Kausalitäten als hinderliche „Fehlvorstellung“ einzuordnen ([51], S. 275). Dabei wird offensichtlich vergessen, dass der Vorgehensweise auch in der mathematischen Wissenschaft eine nicht unwesentliche Bedeutung zukommt. Vor allem zu Beginn eines Beweisprozesses, wenn es darum geht, Vermutungen aufzustellen und Argumente für deren Gültigkeit zu finden, spielen empirisch-induktive Denkschritte eine entscheidende Rolle ([43], S. 52; [80], S. 103). Henn bedauert, dass dem induktiven Schritt, der zum Satz geführt hat, gegenüber dem deduktiven traditionell nicht die nötige Wertschätzung entgegen gebracht wird – insbesondere deshalb, weil es oft der schwierigste Teil mathematischer Forschung ist, unbekannte Zusammenhänge und Eigenschaften überhaupt zu entdecken ([43], S. 52).

Der Schritt zur Einsicht in die Notwendigkeit eines deduktiven Beweises bei den Schülerinnen und Schülern gelingt in weiterer Folge meist am leichtesten über die nach wie vor offen gebliebene Frage nach dem *Warum* ([42], S. 44). Diese führt zu einer weiteren Funktion von Beweisen.

3.2 Beweisen, um zu erklären

Beweise werden nicht nur zur Verifizierung von Behauptungen verwendet, sondern liefern, gewissermaßen frei Haus, auch eine Begründung und fördern damit unter Umständen das Verständnis, die Einsicht ([78], S. 50). Man rufe sich etwa den dritten Beweis des Peripheriewinkelsatzes in Abschnitt 2.2.2 in Erinnerung. Diese Zusatzinformation ist oft wichtiger als die Bestätigung per se, so auch beim Beispiel der Riemann'schen Vermutung. Entscheidend für die Mathematik ist demnach nicht, *ob* ein Beweis gefunden wird, sondern vielmehr *wie* er gegeben wird ([77], S. 5).

Beutelspacher hält die Verfasser bzw. Verfasserinnen dazu an, ihren Beweis so zu gestalten, dass Dritte ihn mit möglichst wenig Mühe und Zeitaufwand nachvollziehen können. Neben einer sauberen Gliederung erweist sich das Einfügen von Kommentaren für das formulierte Ziel als dienlich ([8], S. 58–59). Alibert & Thomas schlagen eine Anlehnung an das *Top-Down-Design* in der Softwaretechnik vor. Man beginnt dabei mit einem Überblick über den gesamten Beweis und erläutert in groben Zügen die Kernidee. Im

Anschluss wird der Beweis in kleinere Abschnitte zerlegt, wobei jedem Teil wiederum eine Erläuterung vorangestellt ist ([1], S. 220). Bei umfangreichen Beweisen sollte darüber nachgedacht werden, einzelne Abschnitte durch die Einführung von Hilfssätzen „auszulagern“, um die Lesbarkeit zu erhöhen ([53], S. 63).

Obwohl es offensichtlich durchaus konvergierende Ansichten zu den (minimalen) Anforderungen an schlüssige Argumentationsketten gibt, nehmen nicht alle Beweise ihre Erklärungsfunktion gleichermaßen wahr ([37], S. 9). In Fachzeitschriften werden beispielsweise häufig nur jene Teile eines neuen Beweises publiziert, die die Verfasser bzw. Verfasserinnen der Überzeugung halber für wichtig erachten. Routinierte Berechnungen und Umformungsschritte werden ausgespart, „triviale“ oder analoge Begründungen ausgelassen ([15], S. 5). Wissenschaftliche mathematische Texte weisen eine hohe Informationsdichte gepaart mit geringen Redundanzen auf, was das Nachvollziehen insbesondere dann erschwert, wenn die Kommunikationspartnerinnen oder -partner ein unterschiedliches Fundament haben, auf das sie sich berufen können ([20], S. 19).

Problematisch ist auch die Tatsache, dass Beweise nur das Ergebnis eines oft langwierigen, mehrphasigen Prozesses der intensiven Auseinandersetzung mit einem Sachverhalt festhalten. Ideen, die in der Explorationsphase entstanden sind, werden im nächsten Schritt geordnet, erste Argumente werden zueinander in Beziehung gesetzt. Die Verschriftlichung zwingt zur gewissenhaften Beschäftigung mit Unklarheiten sowie zur Ergänzung von fehlenden Begründungen ([8], S. 3; [9]). Durch das Abschneiden von Umwegen reduzieren sich Beweise auf ein minimales System von Sätzen und Axiomen ([50], S. 45–46). Oft sind es aber gerade die „Sackgassen“, die wichtige Erkenntnisse liefern können, wie nicht nur Heinze & Ufer anschaulich darlegen ([42], S. 43). Hölzl & Sander illustrieren anhand eines Beispiels, dass die anfängliche Idee, die letztlich den entscheidenden Hinweis zur Lösung des Problems lieferte, im Rahmen der nachträglichen „Glättung“ der eigenen Überlegungen verloren gehen kann ([48], S. 55–56).

Für den Schulunterricht lassen sich auf Basis der bisherigen Erkenntnisse grob drei wesentliche Aussagen über die Erklärungsfunktion von Beweisen tätigen, die zum Teil schon auf die Fragen zur Umsetzung (s. Kap. 4.3.2) vorgreifen.

- *Schüler- bzw. schülerinnenorientiertes Beweisen* Das Beispiel der Publikationen in einschlägigen Fachzeitschriften verdeutlicht, dass die Art und Weise, wie bewiesen wird, je nach Zielgruppe variiert ([20], S. 19). Wie in Kapitel 2.2.1 näher erläutert wurde, gibt es einen Unterschied zwischen Beweisen, die Schülerinnen und Schülern dabei helfen, eine Behauptung nachzuvollziehen und den formalen Beweisen der Mathematik ([1], S. 215). Beweise und das Beweisen müssen so gestaltet sein, dass sie zum altersadäquaten Verständnis der Aussage beitragen.

- *Anerkennung der Bedeutung schriftlicher Auseinandersetzungen mit einem Thema* Schriftliche Argumentationen müssen einen festen Platz im Mathematikunterricht erhalten, weil sie Schülerinnen und Schüler, ebenso wie Mathematikerinnen und Mathematiker, zu einer intensiven Auseinandersetzung mit einem Sachverhalt anregen. Während man sich bei mündlichen Erklärungen über viele Ecken und Kanten „hinwegschwindeln" kann, zwingen konkrete schriftliche Niederlegungen zur Genauigkeit und fordern die Ordnung der eigenen Gedanken ein ([63], S. 15). Das Verständnis für mathematische Vorgänge und Zusammenhänge wird vertieft ([7], S. 6; [26], S. 21).
- *Wahrnehmen von Beweisen als mehrphasiger Prozess* Beweise dürfen im Unterricht nicht ausschließlich in ihrer fertigen Form präsentiert werden. Eine lineare, widerspruchsfreie Darstellung steht im diametralen Gegensatz zur Realität der Beweisfindung und vermittelt Schülerinnen und Schülern ein verzerrtes Bild der Mathematik, was letztlich den Aufbau adäquater Problemlösestrategien für die eigene Beweisführung verhindert ([1], S. 215; [81], S. 170–171). Die Motivation, sich an geeigneten Begründungsaufgaben zu *beweisen*, sinkt aus Angst, dem idealisierten Modell der Beweisführung nicht gerecht zu werden ([7], S. 8).

3.3 Beweisen, um Zusammenhänge herzustellen

Beweise sind in der Mathematik unverzichtbar, um Sätze, Theoreme, Propositionen oder Lemmata deduktiv in einen theoretischen Kontext, d. h. in ein System aus Axiomen und Definitionen, einzuordnen. Einzelne Aussagen werden auf diese Weise zu einem großen Ganzen zusammengefügt.

Healy & Hoyles kamen auf Basis ihrer Befragungen von mehr als 2000 englischen Jugendlichen zu dem Ergebnis, dass die Zusammenhang stiftende Funktion von Beweisen in den Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler kaum präsent ist ([39], zit. nach [70], S. 3). Tatsächlich eröffnet die Vorgehensweise jedoch eine Vielzahl an Möglichkeiten, wie im Folgenden anhand einiger Beispiele demonstriert wird ([20], S. 21).

3.3.1 Identifikation von Zirkelschlüssen

Eine Argumentationskette, in der das zu Beweisende bereits als Voraussetzung enthalten ist, bezeichnet man als Zirkel- oder Kreisschluss. Sie ist bezüglich ihres logischen Gehalts tautologisch, d. h. sie liefert nur redundante Informationen ([80], S. 102). Um einen Satz in ein bestehendes Gerüst einzuordnen, müssen bereits bewiesene Aussagen, auf die man in seiner Argumentation Bezug nimmt, offen gelegt werden. Im Rahmen dieser Tätigkeit werden Zirkelschlüsse leicht identifiziert, wie das Beispiel aus einer Publikation von Reiss zeigt ([76], S. 29).

Satz *Sei C ein Punkt auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$. Dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ gleichschenkelig.*

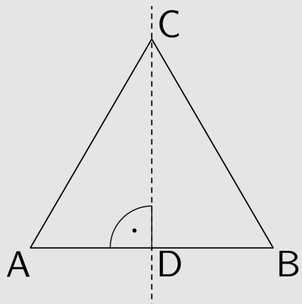
Beweis. (Zirkelschluss) Der Punkt C liegt auf der Streckensymmetrale von $\overline{AB}$. Daher gilt

$$\angle ADC = 90^\circ \quad \angle BDC = 90^\circ$$

Weil die Basiswinkel eines gleichschenkeligen Dreiecks gleich groß sind, ist

$$\angle CAB = \angle CBA$$

Es folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$.

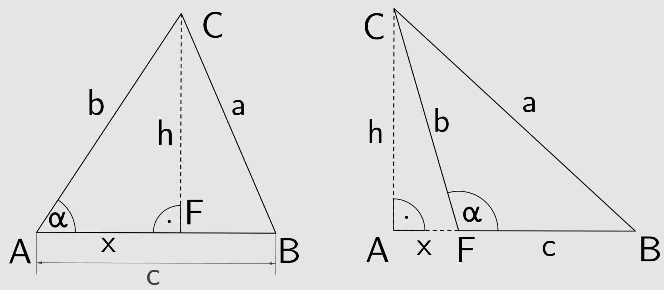


Die Schülerin, die diesen Beweis geführt hat, verwendet im zweiten Schritt eine Eigenschaft von gleichschenkeligen Dreiecken und folgert daraus, dass das Dreieck gleichschenkelig ist, ein Zirkelschluss. Beweisfehler wie der eben dargestellte passieren häufig dann, wenn den Lernenden nicht klar ist, worauf sie sich bei der Beweisführung beziehen dürfen und was bewiesen werden soll ([5], S. 908).

Weniger offensichtlich ist ein Selbstbezug, wenn er über mehrere Stufen geschieht, wie im Folgenden anhand des Cosinussatzes sowie eines Spezialfalls davon erläutert wird.

Satz (Cosinussatz) *In einem beliebigen Dreieck mit den üblichen Bezeichnungen gilt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ und $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.*

Beweis. Betrachten wir zunächst den Fall, dass α ein spitzer Winkel ist (links). Sei F der Fußpunkt der Höhe durch den Eckpunkt C und h deren Länge. Sei x der Abstand von F zu A.



Es gilt $\cos\alpha = \frac{x}{b}$ bzw. äquivalent dazu $x = b\cos\alpha$. Aus dem Satz von

Pythagoras folgt $b^2 = h^2 + x^2$ und $a^2 = h^2 + (c-x)^2$. Subtrahiert man die beiden Gleichungen voreinander und setzt für x ein, so erhält man die Behauptung des Satzes.

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= x^2 - (c-x)^2 \\ &= -c^2 + 2cx \\ &= -c^2 + 2bc\cos\alpha \end{aligned}$$

Ist α stumpf (rechts), versehen wir den Abstand x mit einem negativen Vorzeichen. Aus $\cos(180-\alpha) = \frac{-x}{b}$ folgt wegen der Gültigkeit von $\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$ der Zusammenhang $\cos\alpha = \frac{x}{b}$ und der Beweis verläuft analog zum ersten Fall.
Wir haben gezeigt, dass für beliebige Dreiecke die Gleichheit $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ gilt.

Auf die Beweise der übrigen Behauptungen wird an dieser Stelle verzichtet, da die Argumentationen völlig analog verlaufen.

Satz (Pythagoreischer Lehrsatz) *Sind a und b die (Längen der) Katheten, c die (Länge der) Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, so gilt $c^2 = a^2 + b^2$.*

Beweis. Wir wenden den Cosinussatz im rechtwinkeligen Dreieck ($\gamma = 90°$) an:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(90°) \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

Bei genauerem Hinsehen gelangt man zu der Einsicht, dass hier ein Kreisschluss produziert wurde. Gezeigt wurde lediglich die Äquivalenz der beiden Sätze, über ihren Wahrheitsgehalt kann auf Basis der vorliegenden Beweise keine Aussage gemacht werden. Obwohl der Satz des Pythagoras ein Spezialfall des Cosinussatzes ist (und beide Sätze natürlich richtig sind), darf er nicht aus dem Cosinussatz hergeleitet werden, da für den Beweis des Cosinussatzes der pythagoreische Lehrsatz verwendet worden ist.

3.3.2 Reduktion oder Erweiterung des Satzsystems

Satz *Die Gerade $g: y = k \cdot x + d$ ist genau dann eine Tangente an den Kreis mit Mittelpunkt $M = (x_M|y_M)$ und Radius r im Punkt P, wenn sie mit der Verbindungsstrecke $\overline{MP}$ einen rechten Winkel einschließt und die Berührbedingung $(k \cdot x_M - y_M + d)^2 = r^2 \cdot (k^2+1)$ erfüllt ist.*

Ordnet man den obigen Satz zur Berührbedingung in ein bestehendes System an Aussagen ein, so stellt man fest, dass eine Kreistangente stets normal auf den Berührradius steht (s. Kap. 2.3.4). Die erste Forderung kann aus der zweiten Voraussetzung deduziert werden, da diese aus der Forderung, dass es nur einen Schnittpunkt zwischen Gerade und Kreis gibt, folgt, und wird damit überflüssig. Um zu entscheiden, ob eine gegebene Gerade Tangente an den Kreis ist, müssen nicht beide Bedingungen überprüft werden – eine Zeitersparnis.

Satz *Die Gerade* $g : y = k{\cdot}x{+}d$ *ist genau dann eine Tangente an den Kreis mit Mittelpunkt* $M = (x_M|y_M)$ *und Radius* r*, wenn die Berührbedingung* $(k \cdot x_M - y_M + d)^2 = r^2 \cdot (k^2 + 1)$ *erfüllt ist.*

Auf der anderen Seite kann es aber auch vorkommen, dass durch das offensichtlich Machen der Zusammenhänge zu anderen Sätzen Voraussetzungen sichtbar werden, die zuvor nicht berücksichtigt worden sind. Nimmt man im Beweis beispielsweise Bezug auf den pythagoreischen Lehrsatz oder aber greift auf die Definition der Winkelfunktionen zurück, so muss sichergestellt sein, dass auch tatsächlich ein rechtwinkeliges Dreieck vorliegt. Eine entsprechende Behauptung ist im beschriebenen Fall womöglich nicht – wie zu Beginn vermutet – für beliebige Dreiecke gültig, sondern muss auf rechtwinkelige Dreiecke eingeschränkt werden.

Eine andere Situation wird im Folgenden anhand der Formel für den Schnittpunkt zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$ dargestellt.

Satz *Die Geraden* $g : y = a \cdot x + b$ *und* $h : y = c \cdot x + d$ *schneiden einander im Punkt* $S = \left(\frac{d-b}{a-c} \middle| \frac{ad-bc}{a-c}\right)$.

Beweis. Das Gleichsetzungsverfahren liefert eine lineare Gleichung in x.

$$a \cdot x + b = c \cdot x + d \iff (a - c) \cdot x = d - b \iff x = \frac{d - b}{a - c}$$

Setzt man den errechneten Wert für x in eine der beiden Geradengleichungen ein, so erhält man die y-Koordinate des Schnittpunkts $y = \frac{ad-bc}{a-c}$.

Beim Einordnen des Resultates in ein System aus bereits bewiesenen Aussagen stößt man auf den Satz über die möglichen Lagebeziehungen zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$. Dass die Behauptung nur für den Fall der nicht parallelen Geraden gilt, wird bei genauem Hinsehen auch im Beweis deutlich. Die Rechnung kann nur dann durchgeführt werden, wenn $a - c \neq 0$, d. h. wenn $a \neq c$. Eine entsprechende Auflage muss im Satz vermerkt werden.

Satz *Die Geraden $g : y = a \cdot x + b$ und $h : y = c \cdot x + d$ mit $a \neq c$ schneiden einander im Punkt* $S = \left(\frac{d-b}{a-c} \middle| \frac{ad-bc}{a-c} \right)$.

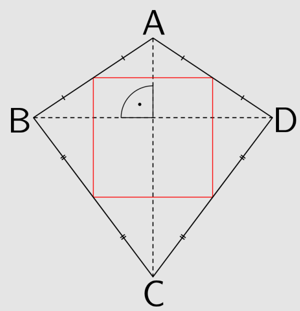
3.4 Beweisen, um neue Resultate zu entdecken

Die Funktion des Entdeckens wird in der Literatur auf unterschiedliche Weise interpretiert. Meyer & Prediger sehen im Auffinden von Ansatzpunkten einer Begründung bereits einen Akt der Entdeckung ([70], S. 3). De Villiers und Holland sprechen davon, dass man im Beweisprozess selbst immer wieder zu neuen, nicht-trivialen Erkenntnissen gelangen kann, wie das folgende Beispiel verdeutlichen soll ([20], S. 21; [50], S. 44).

Satz *Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten eines ebenen Deltoids, so entsteht ein Rechteck.*

Beweis. Der Vektor vom Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ zum Mittelpunkt der Seite $\overline{AD}$ ist wegen $M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$ und $M_{AD} = \frac{1}{2} \cdot (A + D)$ gegeben durch

$$\overrightarrow{M_{AB}M_{AD}} = \frac{1}{2} \cdot (D - B) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD}$$



Da $M_{BC} = \frac{1}{2} \cdot (B + C)$ und $M_{CD} = \frac{1}{2} \cdot (C + D)$ gilt, ergibt sich für die übrigen Seitenvektoren

$$\overrightarrow{M_{BC}M_{CD}} = \frac{1}{2} \cdot (D - B) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \frac{1}{2} \cdot (C - A) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{M_{AD}M_{CD}} = \frac{1}{2} \cdot (C - A) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Wegen $\overrightarrow{M_{AB}M_{AD}} \parallel \overrightarrow{M_{BC}M_{CD}} \parallel \overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} \parallel \overrightarrow{M_{AD}M_{CD}} \parallel \overrightarrow{AC}$ sind die Seiten des Mittelvierecks paarweise parallel. Die Behauptung folgt schließlich aus der Tatsache, dass die Diagonalen in einem Deltoid normal aufeinander stehen, d. h. $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

In der retrospektiven Beweisanalyse werden Resultate sichtbar, die nicht in unmittelbarem Zusammenhang mit der anfänglichen Behauptung stehen. Erst im letzten Schritt der Argumentationskette machte man von einer besonderen Eigenschaft des Deltoids, der Orthogonalität der Diagonalen, Gebrauch. Das bedeutet aber, dass alle anderen Ergebnisse für beliebige Vierecke gelten – eine Tatsache, die man intuitiv nicht vermutet hätte.

Satz (Varignon-Parallelogramm) *Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen ebenen Vierecks, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Seiten parallel zu den Diagonalen sind.*

Die einzige Eigenschaft des Deltoids, die im Beweis herangezogen wird, ist die gegenseitige Lage der Diagonalen. Die anfängliche Vermutung für Deltoide kann daher auf eine sehr viel größere Gruppe von Figuren erweitert werden.

Satz *Für ein beliebiges ebenes Viereck, dessen Diagonalen im rechten Winkel aufeinander stehen, gilt: Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten, so entsteht ein Rechteck.*

Die Seiten des entstandenen Rechtecks sind halb so lang wie die Diagonalen des Deltoids. Das bedeutet aber, dass sich die Flächen von Deltoid und Rechteck im Verhältnis 2 : 1 verhalten. Die Frage, ob selbiges auch für beliebige Vierecke gilt, liegt nahe und kann tatsächlich auch bestätigt werden.

Satz *Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen ebenen Vierecks, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt halb so groß wie der des Vierecks ist.*

Beweis. Der Flächeninhalt des Vierecks A_V ergibt sich nach der Formel, wonach man das Produkt der Diagonalen mit dem Sinuswert des eingeschlossenen Winkels multipliziert und das Ergebnis halbiert ([11], S. 139):

$$A_V = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \sin\left(\angle\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right)\right)$$

Die Fläche A_P des Parallelogramms ergibt sich durch Multiplikation des Produkts der Seitenlängen mit dem Sinuswert des eingeschlossenen Winkels, der gleich dem Winkel zwischen der Diagonalen des Vierecks ist:

$$\angle\left(\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}}, \overrightarrow{M_{AB}M_{AD}}\right) = \angle\left(\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}, \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD}\right) = \angle\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} A_P &= |\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}}| \cdot |\overrightarrow{M_{AB}M_{AD}}| \cdot \sin\left(\angle\left(\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}}, \overrightarrow{M_{AB}M_{AD}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \sin\left(\angle\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot A_V \end{aligned}$$

Lässt man die Gedankengänge noch einmal Revue passieren, so wird deutlich, dass der Beweis der anfänglichen, intuitiv leicht einsehbaren Behauptung unmittelbar zu drei neuen Resultaten geführt hat, die keineswegs trivial sind. Klarerweise wohnt nicht jedem Beweis ein ähnliches Potential als „Hypothesengenerator“ inne – und doch darf diese Funktion, so ist man sich in Fachkreisen einig, nicht unterschätzt werden.

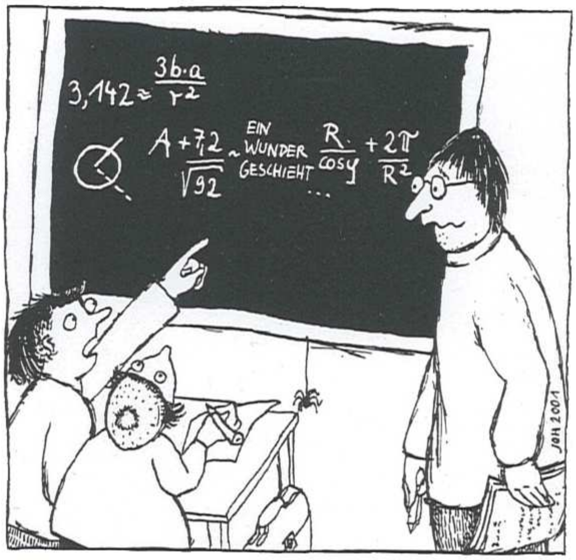
3.5 Beweisen, um zu kommunizieren

Kuntze sieht im Beweisen einen einzigartigen Weg, Wissen in einer weltweit verständlichen Sprache mitteilbar zu machen ([55], S. 13). Beweise haben damit neben den bereits genannten Dimensionen auch eine soziale Komponente ([1], S. 216; [90], S. 351). Wer seine Gedanken zu Papier bringt, übernimmt Verantwortung und öffnet sich der Kritik. Die Publikation einer Argumentationskette markiert häufig den Beginn einer internationalen wissenschaftlichen Debatte zwischen Fachleuten, in der Ansätze diskutiert und Schwachstellen bzw. mögliche Widersprüche in der Vorgehensweise identifiziert werden ([54], S. 8).

Ein solcher Diskurs ist, wie De Villiers betont, nicht nur zwischen Wissenschaftlern bzw. Wissenschaftlerinnen oder zwischen Vortragenden und Studierenden möglich, sondern auch im Unterricht ([20], S. 22). Goldberg teilt diese Ansicht und erläutert ein Beispiel zur praktischen Umsetzung im Klassenzimmer. In Phasen der Einzelarbeit können Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten mit der gestellten Berechnungs- oder Begründungsaufgabe haben, ihre Lösung an der Tafel entwickeln. Anschließend diskutiert die Klasse über den skizzierten Lösungsweg. Fehler werden identifiziert, wobei die Lehrperson sicherstellt, dass stets begründet wird, warum ein bestimmter Schritt falsch ist. Der betreffende Schüler bzw. die betreffende Schülerin kann bei Unklarheiten nachfragen und erhält im Klassenverband Hinweise oder Tipps, wie der Fehler in Zukunft vermieden werden kann ([30], S. 10–11).

Die vorgestellte Methode von Goldberg ist aus mehreren Gründen positiv zu bewerten. Barzel & Ehret verweisen auf die sich dabei ergebende Möglichkeit für Lehrerinnen und Lehrer aus dem Diskurs Rückschlüsse auf die Wirksamkeit ihres Unterrichts sowie den individuellen Wissensstand der Lernenden zu ziehen. Unzureichend thematisierte Inhalte können im anschließenden Regelunterricht noch einmal aufgegriffen werden ([7], S. 6).

Zum anderen fördert die dargelegte Methode nicht nur die Argumentationskompetenz, sondern gibt den Schülerinnen und Schülern indirekt eine wertvolle Einsicht mit auf den Weg, wie Fetzer betont. Der Tafelanschrieb wird als angreifbares Werk erlebt, über das verhandelt und diskutiert werden darf – eine Möglichkeit, die von Lernenden aufgrund der Fachautorität der Lehrperson oft nicht in Betracht gezogen wird ([3], S. 25; [6], S. 218–



"Erklären Sie mir das nochmal!"

Abbildung 3.2: Neue Begründungskultur im Unterricht ([62], S. 7)

221; [26], S. 23). Die neu gewonnene Einstellung ebnet den Weg für kritische Fragen im (Regel-)Unterricht, die von den Schülerinnen und Schülern nicht länger nur als Zeichen der eigenen Unwissenheit angesehen werden und für ein adäquates Verständnis von Beweisen von zentraler Bedeutung sind (s. Abb. 3.2).

Kapitel 4

Notwendig oder hinreichend?

In mathematischen Publikationen tauchen im Zusammenhang mit Implikationen häufig die Termini notwendig bzw. hinreichend auf. Wenn p und q Aussagen sind, für die $p \Rightarrow q$ gilt, so nennt man p *hinreichend* für q und q *notwendig* für p ([8], S. 39–40).

Der vierte Abschnitt der vorliegenden Diplomarbeit beschäftigt sich mit Fähigkeiten (im weiteren Sinne), die in engem Zusammenhang mit dem Erlernen von argumentativem Begründen stehen. Dabei wird versucht, die Frage zu beantworten, ob diese Kenntnisse *notwendig* für die Arbeit mit Beweisen sind, d. h. ob sie durch die Beschäftigung mit Begründungen gewissermaßen von selbst und ohne gesonderte Thematisierung geschult werden, oder aber ob sie als Vorbedingungen *hinreichend* sind und der Auseinandersetzung mit Beweisen im Unterricht vorangestellt werden müssen. Sind die Fertigkeiten dem zuletzt genannten Fall zuzuordnen, so wird darüber hinaus auch thematisiert, inwiefern der Unterricht zu ihrer Ausbildung oder Weiterentwicklung beitragen kann.

4.1 Subjektives Beweisbedürfnis als Grundhaltung

Die Einsicht in die Notwendigkeit eines allgemeinen Beweises aufseiten der Schülerinnen und Schüler bestimmt nicht nur deren Einstellung gegenüber der Beweissituation, sondern beeinflusst letztlich auch den Lernertrag, d. h. jenen Anteil, der bei den Lernenden – wenn man so will – „hängen bleibt" ([88], S. 65). Gelingt eine entsprechende Motivation nicht, so erwerben Schülerinnen und Schüler die Einstellung, dass Beweise auf Basis von persönlich wenig nachvollziehbaren Normen, wie dem individuellen Wunsch der Lehrperson oder eines wissenschaftlichen Erfordernisses, geführt werden müssen ([1], S. 216; [3], S. 26).

Das Aufgreifen einer Vielzahl an Beweisen im Unterricht veranlasst die Schülerinnen und Schüler im Allgemeinen nicht dazu, ihre Meinung zu revidieren. Die Vermutung, dass die Entwicklung eines subjektiven Beweisbedürfnisses bei den Lernenden kein Selbstläufer ist, insbesondere also auch keine (im mathematischen Sinne) notwendige Bedingung für die Arbeit mit Beweisen, liegt auf Basis dieser ersten Erkenntnisse nahe.

Es ist kein einfaches methodisches Problem, Schülerinnen und Schüler zum Begründen zu motivieren ([50], S. 148). Weil eine entsprechende Lerneinstellung aber als Grundstein für erfolgreiches kritisch-argumentatives Arbeiten angesehen werden muss, sind Lehrpersonen dazu aufgefordert, sämtliche Möglichkeiten, die zur Ausbildung eines Beweisbedürfnisses bei den Lernenden beitragen können, zumindest in Betracht zu ziehen. Im Verlauf dieses Abschnittes werden unterschiedliche Ansätze dazu diskutiert mit dem Ziel, ein sinnvolles Langzeitkonzept für die Entwicklung des subjektiven Beweisbedürfnisses bei den Lernenden vorzustellen.

4.1.1 Suche nach Gewissheit

Versetzt man sich in die Lage der Lernenden, so ist das Begründen im Mathematikunterricht oft nicht leicht nachvollziehbar – mehr noch, die entsprechenden Unterrichtssequenzen wirken auf Schülerinnen und Schüler geradezu paradox. In der Regel wählt die Lehrperson eine Aufgabe aus bzw. konfrontiert die Klasse mit einer konkreten Fragestellung. Die Schülerinnen und Schüler finden sich in einer oft vergeblichen Suche nach passenden Argumenten wieder, mit denen sie ihre Lehrerinnen und Lehrer überzeugen können. Angesichts der Tatsache, dass die Pädagoginnen und Pädagogen die richtige Antwort im Allgemeinen aber kennen, insbesondere also gar nicht erst überzeugt werden müssen, erscheint die Tätigkeit des Beweisens aus Schüler- bzw. Schülerinnensicht zutiefst widersprüchlich ([30], S. 10).

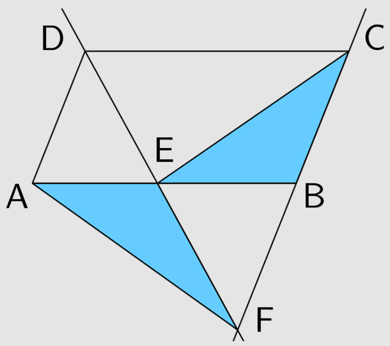
Um diese Verwirrung und Ratlosigkeit zu vermeiden, ist es sinnvoll, als Lehrperson vor allem auch zu Beginn des Beweisprozesses eine vorwiegend passive Rolle einzunehmen. Ziel des Unterrichts muss sein, dass die Lernenden selbst nach einem Beweis verlangen. Ein möglicher Weg, um die Notwendigkeit einer Begründung zu vermitteln, wird unter anderem von Buchbinder & Zaslavsky forciert und führt über Skepsis und Unsicherheit ([1], S. 225; [17], S. 269; [35], S. 132–147). Walsch erachtet eine derartige Vorgehensweise vor allem dann als sinnvoll, wenn Schülerinnen und Schüler noch wenig bis gar nicht mit Beweisen vertraut sind ([88], S. 59).

Aufgabenstellung
Was passiert, wenn man in einem beliebigen Dreieck die Höhen einzeichnet? Formuliere den Satz zur Beschreibung deiner Beobachtung und begründe ihn.

Zweifel und Skepsis entstehen klarerweise nur dann, wenn eine Behauptung nicht von vornherein klar ist. Werden die Schülerinnen und Schüler der

Sekundarstufe II mit evident erscheinenden oder bereits bekannten Behauptungen aus der Unterstufe konfrontiert, so entstehen keine Unsicherheiten. Anhand einer Vielzahl an Zeichnungen hat sich immer wieder bestätigt, dass die Höhenlinien eines Dreiecks einander in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt, schneiden. Die Behauptung aus der obigen Aufgabenstellung ist allenfalls für die Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I und auch dann nur zu Beginn der Arbeit mit Dreiecken überraschend.

Aufgabenstellung (Buchbinder & Zaslavsky 2011; zit. nach [17], S. 271)
Ein Schüler bestimmt zufällig einen Punkt E auf der Seite $\overline{AB}$ eines Parallelogramms $ABCD$. Sei F der Schnittpunkt der Trägergeraden der Seite $\overline{BC}$ mit der Geraden, die durch die Punkte D und E eindeutig festgelegt wird. Der Schüler berechnet die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle AEF$ und $\triangle BCE$ und stellt fest, dass sie gleich sind – Zufall?
Begründe deine Vermutung!



Ganz anders verhält es sich mit der obigen Behauptung über die Gleichheit der markierten Dreiecksflächen. Buchbinder & Zaslavsky haben nicht nur Schülerinnen und Schüler, sondern auch Lehrpersonen mit der Aufgabenstellung konfrontiert. Zu Beginn war man sich darüber einig, dass die Behauptung zu „stark“ sei, als dass sie für jeden beliebigen Punkt auf der Seite $\overline{AB}$ gelten könnte und es sich bei dem Beispiel lediglich um einen Zufall handeln würde. Nach einigen Berechnungen an zufällig gewählten Beispielen sowie der Arbeit mit dynamischer Geometriesoftware verflog schließlich aber die anfängliche Sicherheit über die Unmöglichkeit der Behauptung. Das Bedürfnis nach Gewissheit führte zur (erfolgreichen) Suche nach einem Beweis ([17], S. 275–276).

Beweis. Sei h_a die Höhe auf die Parallelogrammseite $\overline{AB}$, h_b die Höhe auf die Seite $\overline{AD}$ und sei A_P die Fläche des Parallelogramms $ABCD$.
Die Fläche des Dreiecks $\triangle ADF$ ist wegen $\#ADF = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot h_b$ und

$A_P = \overline{AD} \cdot h_b$ halb so groß wie die Fläche des Parallelogramms. Es folgt

$$\#AEF = \#ADF - \#ADE = \frac{1}{2}A_P - \#ADE \qquad (1)$$

Wegen $\#ADE + \#BCE = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot h_a + \frac{1}{2} \cdot \overline{EB} \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_a$ ist auch die Summe der Flächen der Dreiecke $\triangle ADE$ und $\triangle BCE$ halb so groß wie A_P. Es gilt

$$\#BCE = \frac{1}{2}A_P - \#ADE \qquad (2)$$

Die Behauptung folgt aus (1) und (2).

Die Probandinnen und Probanden waren überrascht über die Allgemeingültigkeit der Aussage und zeigten sich erleichtert, als sie im Plenum zu einer zufriedenstellenden Erklärung in Form eines Beweises gelangt waren ([17], S. 275–276). Doch nicht nur die Beobachtung, dass sowohl die Lehrpersonen als auch ihre Schülerinnen und Schüler eine Begründung verlangten, ist bemerkenswert. Hervorgehoben sei an dieser Stelle auch die zentrale Rolle dynamischer Geometriesoftware im Beweisprozess.

Charakteristisch für DGS ist, dass sie – ihrem Namen entsprechend – eine Dynamisierung von Zeichnungen und Konstruktionen erlaubt ([47], S. 52–53). Der *Zugmodus* liefert beim Ziehen an Basispunkten eine kontinuierliche Folge von Abbildern der Konstruktion und erleichtert damit das Entdecken besonderer Eigenschaften ([24], S. 58–59). Eine Aussage wird durch die scheinbar unendliche Anzahl an Beispielen unterschiedlicher Größe, Form oder Position als allgemein verstanden und so war es die Geometrie-Software, die den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Studie verdeutlichte, dass es sich bei der beschriebenen Beobachtung von der Gleichheit der markierten Dreiecksflächen um keinen Zufall handeln konnte ([17], S. 276; [38], S. 26). Durch den Einsatz von DGS tritt die Überzeugungsfunktion von Beweisen offensichtlich in den Hintergrund ([19], S. 374; [35], S. 129). Die Software schaffte es, zu zeigen, dass die Behauptung der Wahrheit entspricht, konnte aber keine Erklärung für ihre allgemeine Gültigkeit liefern. Weil die obige Aussage über die Gleichheit der Dreiecksflächen der Intuition zuwiderlief, reichte den Probandinnen und Probanden die alleinige Verifizierung nicht aus – sie verlangten eine Erklärung in Form eines Beweises.

Ohne die Software hätte man die Behauptung zwar auch an einigen zufällig gewählten Beispielen verifizieren können, der sehr viel kleinere Umfang dieser Stichprobe ließe womöglich aber noch Zweifel offen. Man müsste befürchten, dass es ein Parallelogramm sowie einen dazugehörigen Punkt auf der Strecke $\overline{AB}$ gibt, die noch nicht getestet wurden und die die Behauptung widerlegen.

Das Beispiel von Buchbinder & Zaslavsky legt nahe, dass „neue“ Aufgabenstellungen bzw. überraschende Tatbestände zur Förderung des Beweisbedürfnisses bei den Lernenden etwas beitragen können. Mit Ausnahme des Satzes von Thales werden im analysierten Schulbuch *Mathematik verstehen* [64–66] bereits bekannte Sachverhalte aus der Unterstufe nicht erneut bewiesen, sondern allenfalls – etwa bei der Behandlung der merkwürdigen Punkte im Dreieck – im Rahmen von Beispielen aufgegriffen ([64], S. 260–263). Erwähnenswert erscheint an dieser Stelle außerdem, dass die Schülerinnen und Schüler in knapp über 30 Prozent aller geometrischen Begründungsaufgaben nicht mit einer „fertigen" Behauptung konfrontiert werden, sondern selbst Hypothesen generieren müssen, wie in der nachgestellten Aufgabenstellung exemplarisch dargestellt wird. Die Autorinnen und Autoren nutzen die Sonderstellung der Geometrie innerhalb des curricularen Themenspektrums, die sich dadurch auszeichnet, dass viele Sätze von den Schülerinnen und Schülern erraten werden können.

Aufgabenstellung (Malle et al. 2010; zit. nach [64], S. 110)
Von einem Dreieck sind a und b gegeben. Für welches Winkelmaß γ ist der Flächeninhalt des Dreiecks maximal? Begründe mit der trigonometrischen Flächenformel!

Während man vom Wahrheitsgehalt eines zu beweisenden Satzes im Schulbuch in der Regel ausgeht, können im Zusammenhang mit den eigenen Vermutungen Zweifel auftreten. Die Notwendigkeit einer mathematischen Begründung wird so leichter eingesehen.

4.1.2 Thematisierung und Wertschätzung

Bürger und Kuntze betonen im Zusammenhang mit der Ausbildung eines subjektiven Beweisbedürfnisses bei Schülerinnen und Schülern die Bedeutung der Reflexion über den Sinn des Begründens im Mathematikunterricht ([10], S. 127; [55], S. 12–14).

> *Werden im Unterricht lediglich konkrete Beweise durchgeführt oder Schritt für Schritt erarbeitet, ohne das Beweisen an sich zu thematisieren, müssen sich die Schülerinnen und Schüler den Sinn des Beweisens mühsam selbst erschließen.* (Kuntze 2009; zit. nach [55], S. 12)

Tatsächlich wirkt es auf Schülerinnen und Schüler authentisch, wenn ihre Lehrerinnen und Lehrer nicht nur Begründungen verlangen, sondern selbst Argumente (für das Beweisen) darbringen. Neben der Thematisierung der in Kapitel 3 angeführten Aufgaben von mathematischen Begründungen, kann auch die Gegenüberstellung von Beweismethoden in unterschiedlichen Naturwissenschaften oder außermathematischen Disziplinen positiv auf die Entwicklung eines Beweisbedürfnisses wirken ([10], S. 128). Was unterscheidet den naturwissenschaftlichen Ansatz vom mathematischen im Hinblick auf seine wissenschaftstheoretischen Vorstellungen über die Möglichkeiten der Prüfung von Vermutungen? Was sind jeweils Vorteile der beiden Ansätze, wo ortet man Probleme oder Schwierigkeiten?

Auch historische Bemerkungen oder kurze Anekdoten zur Entwicklung des Begründens in der Mathematik können das Interesse der Schülerinnen und Schüler wecken ([10], S. 128; [71], S. 44).

„Die spinnen, die Griechen!“ (Singh 1988; verändert nach [84], S. 49–50)

Der griechische Philosoph Pythagoras ermittelte einen Beweis, der zeigt, dass der Satz über den außergewöhnlichen Zusammenhang zwischen Katheten und Hypotenuse auf jedes ebene rechtwinkelige Dreieck im Universum zutrifft. Seine Entdeckung war ein Meilenstein der Mathematik und wurde als so wundersam erfahren, dass man den Göttern zum Dank hundert Ochsen opferte.

Zum ersten Mal wurde eine völlig zuverlässige Grundlage geschaffen, auf deren Basis die Naturwissenschaftler ihre mit dem Makel der Ungewissheit behafteten Messungen und Beobachtungen anstellen konnten.

Sämtliche Bemühungen bleiben wirkungslos, wenn über die Bedeutung des Beweisens zwar gesprochen, eine entsprechende Haltung im Unterricht aber nicht auch „gelebt“ wird.

- *Vorbildfunktion der Lehrperson* Dass die Lehrerinnen und Lehrer nicht nur Begründungen von ihren Schülerinnen und Schülern einfordern, sondern ihre eigenen Behauptungen im Unterricht nachvollziehbar belegen, ist klar und sei deswegen an dieser Stelle nur kurz erwähnt. Im Sinne einer emanzipatorischen Bildung sind bloße Verweise auf Schulbuch oder Mitschrift nicht zu befürworten, obwohl sie in vielen Fällen immer noch ausreichen mögen, um sich als Lehrerin oder Lehrer der mehrheitlichen Akzeptanz von ihren gemachten Behauptungen im Klassenzimmer gewiss zu sein ([3], S. 25).
- *Regelmäßigkeit* Wird die Bedeutung des Beweisens im Unterricht als zentral hervorgehoben, so muss das argumentative Begründen auch mit einer gewissen Regelmäßigkeit Einzug in selbigen erhalten. Begründungsaufgaben müssen für Schülerinnen und Schüler zur Gewohnheit werden ([54], S. 7–8; [78], S. 54).
- *Prüfungsrelevanz* Das Begründen muss Einzug in alle Phasen des Unterrichts erhalten. Wenn bei Schularbeiten oder in anderen Situationen der Leistungsfeststellung von den Schülerinnen und Schülern lediglich

das blinde Ausführen von Standardverfahren zur Lösung von Berechnungsaufgaben verlangt wird, messen die Lernenden der Beweisführung automatisch auch einen geringeren Stellenwert bei ([2], S. 50; [33], S. 97; [44], S. 52).

- *Mathematik als Prozess* Empirische Beobachtungen zeigen, dass Schülerinnen und Schüler aller Schulstufen häufig anstelle von Vorüberlegungen sofort eine Reihe zum Teil willkürlicher Berechnungen durchführen, um schließlich zu einem mehr oder weniger plausiblen Ergebnis zu gelangen ([3], S. 22; [85], S. 65). Diese Verhaltensweise spiegelt ein Unterrichtsprinzip wider, wonach nicht der Lösungsweg, sondern nur das Endprodukt eines Prozesses gewürdigt wird. Beweisen bedeutet aber gerade, nicht (nur) das Ziel, beispielsweise die fertige (meist bekannte, vorgegebene) Formel, sondern insbesondere den Weg zum Ziel, etwa die Herleitung, zum Gegenstand des Unterrichts zu machen. Schülerinnen und Schüler müssen die Mathematik hierbei als Prozess wahrnehmen ([81], S. 162).
- *Offenlegen der Beweisfunktionen* Die unterschiedlichen Aufgaben von Beweisen sollen nicht nur in der Theorie, sondern vor allem anhand konkreter Fragestellungen thematisiert werden. MALLE betont, wie wichtig es ist, dass den Schülerinnen und Schülern stets klar ist, welche Funktion ein gerade behandelter Beweis ausüben soll. Wenn die Lernenden einer leicht einsehbaren mathematischen Begründung unausgesprochen eine Überzeugungsfunktion zuordnen, während ihre Lehrperson die Behauptung zu bereits bekannten Sätzen in Beziehung setzen will, ist Verwirrung und Verständnislosigkeit vorprogrammiert, die Motivation zum Führen des Beweises sinkt ([62], S. 4). Insbesondere ist die leider oft gängige Praxis, wonach Schülerinnen und Schüler gezielt verunsichert werden, um die Notwendigkeit eines Beweises zur Verifikation einzusehen, entschieden abzulehnen (s. Kap. 3.1).

4.2 Logische Ausdrücke und Schlussweisen

Wie im einleitenden Kapitel 1 bereits erwähnt wurde, besteht eine Besonderheit der mathematischen Wissenschaft darin, dass ihr Fundament aus einer Reihe von als wahr angenommenen Aussagen, den sogenannten *Axiomen*, besteht. Ausgehend von diesen „Naturgesetzen“ erschaffen die Mathematikerinnen und Mathematiker eine streng logisch aufgebaute Wissenschaft. Die Umformungsschritte, die zu neuen Sätzen, Lemmata oder Propositionen führen können, sind exakt definiert ([56], S. 7; [82], S. 76).

Wenn Schülerinnen und Schüler Einsicht in die mathematische „Welt“ bzw. insbesondere auch in die Tätigkeit des Beweisens erhalten sollen, müssen sie mit dem akzeptierten Regelsystem vertraut gemacht werden. Problematisch gestaltet sich die Tatsache, dass die erlaubten Techniken und logischen Schlussweisen teilweise entweder unbekannt oder zwar (anscheinend) geläufig, aber mit der umgangssprachlich intuitiven Verwendung nicht kompatibel sind ([15], S. 4; [63], S. 14).

Schülerinnen und Schüler haben oft Schwierigkeiten mit der Unterscheidung von Voraussetzungen und Behauptungen. In der folgenden Aufgabenstellung muss eine Implikationsrichtung gezeigt werden: (T teilt die Strecke AB innen im Verhältnis $a : b$) $\Rightarrow T = \frac{1}{1+\frac{a}{b}}\left(A + \frac{a}{b}B\right)$.

Aufgabenstellung (Malle et al. 2010; zit. nach [64], S. 231)
Zeige: Teilt der Punkt T die Strecke AB im Verhältnis $a : b$, so gilt: $T = \frac{1}{1+\frac{a}{b}}\left(A + \frac{a}{b}B\right)$

Die Behauptung ist, so wie sie hier formuliert wurde, nicht gezeigt, wenn man nachweisen kann, dass $|\overrightarrow{AT}| = a$ und $|\overrightarrow{BT}| = b$ gilt. Vielmehr muss man die Formel aus einem allgemeinen Ansatz für Teilungspunkte einer Strecke ableiten. Goldberg empfiehlt, immer wieder mathematische Aussagen von den Schülerinnen und Schülern in eine Wenn-Dann Form bringen zu lassen, um sie für diese Grundstruktur sensibel zu machen ([30], S. 10). Gezielte Übungen erscheinen auch im Hinblick auf die feinen und gleichzeitig aber bedeutenden Unterschiede im Satzbau sinnvoll. So muss zwischen Sätzen der Struktur $p \wedge q \Rightarrow r$ und jenen, in denen p Generalvoraussetzung ist und $q \Rightarrow r$ gezeigt werden soll, unterschieden werden ([56], S. 7).

Die Analyse der sprachlichen Formulierungen von Sätzen führt unter Umständen bereits zu einem weiteren Problem, dem Umgang mit den logischen Verknüpfungen Und ($\wedge$) bzw. Oder ($\vee$). Im Unterschied zur Oder-Verknüpfung ist die Und-Verknüpfung mit der Umgangssprache weitgehend verträglich ([82], S. 77). Einzig die alltägliche Verwendung des Wortes „und" im Sinne einer zeitlichen Abfolge „und dann" birgt insofern eine Gefahr, als dass Schülerinnen und Schüler die Verknüpfung als nicht kommutativ erleben ([63], S. 14). Die (alltägliche) Aussage „Ich schummelte und wurde erwischt." ist nicht gleichbedeutend mit „Ich wurde erwischt und schummelte."

Die Oder-Verknüpfung wird innerhalb der mathematischen Logik als einschließendes Oder verstanden, d. h. die Aussage $p \vee q$ ist wahr, wenn p oder q *oder beide* wahr sind ([82], S. 77). Diese Sichtweise unterscheidet sich von der alltäglichen Auffassung, wonach das Oder im Allgemeinen ausschließend, d. h. im Sinne eines „entweder-oder" verwendet wird ([63], S. 14). Wenn am Schulskikurs Skifahren *oder* Snowboarden angeboten wird, können die Schülerinnen und Schüler eine der beiden Alternativen wählen, sicher aber nicht beide.

Bleiben die logischen Verknüpfungen unverstanden, so passieren in weiterer Folge leicht Fehler – etwa im Zusammenhang mit der Verneinung von Aussagen, wie es bei indirekten Beweisen notwendig ist. Die korrekte Verneinung der Aussage „Mathematik ist interessant und eindeutig." ist nicht etwa

„Mathematik ist nicht interessant und nicht eindeutig.“ sondern „Mathematik ist nicht interessant *oder* nicht eindeutig.“ Auf analoge Weise erhält man die Verneinung einer Oder-Aussage, indem man die Einzelaussagen verneint und das Oder ($\vee$) gegen ein Und ($\wedge$) austauscht ([82], S. 79).

Die in Kapitel 2.3 erläuterten Probleme im Umgang mit indirekten Beweisen und mit der Widerlegung einer Universalaussage durch die Angabe eines Gegenbeispiels sowie die in diesem Abschnitt thematisierten Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der mathematischen Logik werfen die Frage auf, ob nicht mehr Wissensvermittlung in diesem Bereich zu einem besseren Verständnis bei den Schülerinnen und Schülern führen würde ([56], S. 7). Kann das Wissen über sowie der Umgang mit logischen Schlussweisen als hinreichende Bedingung für das Arbeiten mit Beweisen angesehen werden? Goldberg vertritt die Ansicht, wonach die Lernenden nur dann in der Lage sind, argumentativ korrekt vorzugehen, wenn im Unterricht intensiv über die logische Struktur und die logisch-sprachlichen Bestandteile von Beweisen reflektiert wird. Gezielte Aufgaben, unter anderem auch zur Überführung von Allaussagen in Existenzaussagen und umgekehrt, sollen die Schülerinnen und Schüler dazu befähigen, über bloßes intuitives Begründen hinaus zu kommen ([30], S. 10).

Malle widerspricht der aufgestellten These über die dem Beweisen vorangehende Behandlung von logischen Grundlagen insofern, als dass er auf die Fülle an Wörtern und Redewendungen sowie die daraus resultierende Unmöglichkeit der Thematisierung im Unterricht hinweist. Er vertritt die Ansicht, wonach die mathematische Sprache in den meisten Fällen schlicht und einfach durch ihren Gebrauch erlernt werden muss ([63], S. 15).

Im Schulbuch *Mathematik verstehen* ist man (dennoch) dazu übergegangen, die grundlegenden logischen Verknüpfungen und Schlussweisen in einem eigenen Kapitel zu Beginn der 5. Klasse zu behandeln und so die entsprechenden Fähigkeiten bei den Lernenden zu schulen ([64], S. 22–35).

4.3 Problemlösekompetenz

Für die erfolgreiche Bearbeitung einer Begründungsaufgabe bedarf es neben des deklarativen Wissens über grundlegende Begriffe, Definitionen und Sätze sowie eines Überblickswissens über mögliche hilfreiche Beziehungen mathematischer Konzepte insbesondere auch der Kenntnis von Problemlösestrategien ([42], S. 43; [81], S. 176).

> *Material allein genügt nicht, um ein Haus zu bauen, aber wir können ein Haus nicht bauen ohne das nötige Material beisammen zu haben.* (Polya 1995; zit. nach [75], S. 22)

Schülerinnen und Schüler müssen in der Lage sein, ihr Wissen im Beweisprozess zu *mobilisieren*, gewissermaßen also aus ihrem Gedächtnis „hervorzuholen“, und zu *organisieren*, d. h. den angesammelten Stoff zu einem großen Ganzen, einer Begründung, zusammenzufügen ([75], S. 110–111). LOMPSCHER postuliert, dass dazu zumindest fünf *Verlaufsqualitäten* vonnöten sind ([60], zit. nach [73], S. 159):

1. *Planmäßigkeit* bezeichnet die Fähigkeit, ein Problem in Teilkomponenten zu zerlegen und dabei den Gesamtzusammenhang im Blick zu behalten.
2. *Exaktheit* meint die Fähigkeit, die Komponenten einer Aufgabenstellung genau zu erfassen und zu verstehen.
3. *Selbstständigkeit* bezeichnet die Fähigkeit zu eigenständigem Formulieren, Evaluieren und Lösen eines Problems.
4. *Aktivität* meint den Grad der Auseinandersetzung mit einem Problem sowie seiner Lösung.
5. *Beweglichkeit* beinhaltet unter anderem die Fähigkeit, zwischen unterschiedlichen Aspekten der Betrachtung zu wechseln, gleichzeitig mehrere Dinge zu betrachten, Merkmale in einen mathematischen Kontext zu übertragen sowie die Gedankengänge und Problemlöseschritte umzukehren.

Weisen die Schülerinnen und Schüler Defizite in den genannten Bereichen auf, so fällt das Beweisen erwartungsgemäß schwer. Ist die Problemlösefähigkeit also eine notwendige Bedingung für die Arbeit mit argumentativen Begründungen?

Im Allgemeinen wird man diesen – zugegeben eher lückenhaft erschlossenen – Denkansatz wohl verneinen müssen. Die Problemlösefähigkeit wird durch das Nachvollziehen und Konstruieren von Beweisen allenfalls insofern geschult, als dass häufig vorkommende Argumente von den Schülerinnen und Schülern als automatisierte kognitive Programme mit bestimmten Problemmerkmalen verknüpft werden ([81], S. 168). Weil ein konditioniertes Handeln, wonach unreflektiert etwa bei jedem rechtwinkeligen Dreieck sofort und ausschließlich auf den pythagoreischen Lehrsatz zurückgegriffen wird, im Kontrast zu den Zielen des Mathematikunterrichts steht, sehen REISS & UFER in der Frage nach den Möglichkeiten der Unterstützung beim Erwerb des Wissens über Problemlösestrategien einen zentralen Arbeitsbereich für die Fachdidaktik ([81], S. 168).

Im Folgenden werden die drei Verlaufsqualitäten *Exaktheit*, *Selbstständigkeit* und *Beweglichkeit* nach LOMPSCHER aufgegriffen, denen – wenn man so will – nicht nur in „quantitativer Hinsicht“, d. h. im Hinblick auf die Anzahl ihrer Nennungen in der fachdidaktischen Literatur, eine besondere Stellung eingeräumt wird. Es soll gezeigt werden, dass die Berücksichtigung dieser unterschiedlichen Aspekte bei der Behandlung von Beweisen im Unterricht dazu führen kann, dass die Ausbildung oder Verbesserung der Problemlösefähigkeit eine (im mathematischen Sinne) notwendige Bedingung für das Arbeiten mit Beweisen ist.

4.3.1 Verstehen der Aufgabenstellung

Bevor man eine Begründungsaufgabe lösen kann, muss man sie erst einmal verstanden haben, oder:

> *Es ist töricht, eine Frage zu beantworten, die man nicht versteht.*
> (Polya 1995; zit. nach [75], S. 19)

Was völlig klar und folglich auch nicht erwähnenswert erscheint, wird in der Unterrichtspraxis (zu) oft nicht berücksichtigt. Viel zu schnell wird das Stadium des „Vertrautwerdens" mit der Aufgabe, das POLYA als erste von vier Phasen im Problemlöseprozess ansieht, verlassen oder gar nicht erst als Bestandteil des Beweisprozesses verstanden ([75], S. 18–20).

Damit die Lernenden ein mathematisches Problem erfassen können, müssen sie zunächst seinen Wortlaut begreifen. Indem die Lehrperson ihre Schülerinnen und Schüler dazu auffordert, die Aufgabenstellung in ihrer eigenen Sprache zu formulieren, kann sie bis zu einem gewissen Grad überprüfen, inwieweit sprachliche Hindernisse das Verständnis der Aufgabe beeinträchtigen oder sogar verhindern. In einem zweiten Schritt wird man versuchen, die Problemstellung sinngemäß zu begreifen. Dazu ist es hilfreich, die Hauptteile der Beweisaufgabe zu trennen, d. h. zwischen den Annahmen bzw. Voraussetzungen und der Folgerung zu unterscheiden ([75], S. 48). Auf die Analyse der logischen Struktur der Aufgabe wurde auch bereits in Kapitel 4.2 hingewiesen.

Viele Schülerinnen und Schüler sehen die Bedeutung einer (universalen) Aussage erst durch die Veranschaulichung an konkreten Beispielen ein ([53], S. 62; [54], S. 9). Wie bereits in Kapitel 3.1 erläutert, besteht die Tendenz, den Wunsch nach induktivem Testen als unwissenschaftliche Fehlvorstellung abzulehnen. Dem Verlangen der Lernenden nach konkreten Beispielen, anhand derer sie den Wahrheitsgehalt einer Aussage überprüfen können und die die Bedeutung einer Behauptung überhaupt erst illustrieren, wird daher nicht immer nachgegeben. Im analysierten Schulbuch *Mathematik verstehen* wird versucht, das kindliche Bedürfnis nach Beispielen etliche Male zu befriedigen. Wiederholt werden die Schülerinnen und Schüler dazu aufgefordert, sich von der Gültigkeit einer Behauptung, etwa eines Rechengesetzes für Vektoren, durch das Testen an konkreten Zahlenwerten zu überzeugen ([64], S. 98, 213). Vorgeführte Beweise werden in etwa 25 Prozent aller Fälle durch ein Beispiel motiviert. So wird beispielsweise zuerst das Volumen eines Parallelepipeds mithilfe konkreter Werte berechnet, bevor man anhand des Lösungsweges auf eine allgemeine Formel schließt ([65], S. 173).

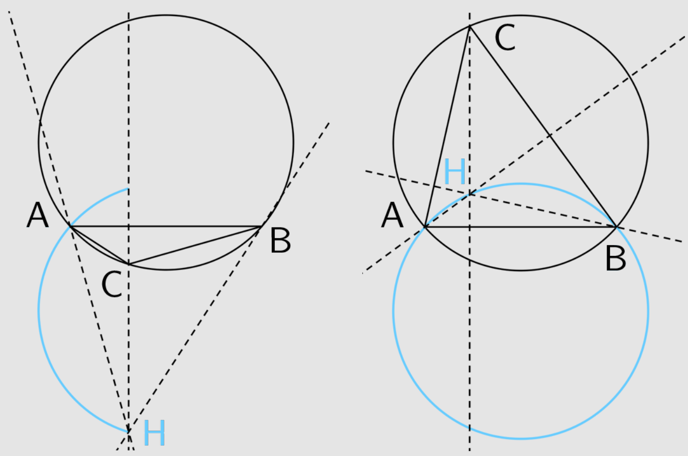
Sämtliche Anstrengungen, die man als Lehrperson im Hinblick auf die Erarbeitung eines besseren Verständnisses der Aufgabenstellung bei den Lernenden aufwenden muss, fallen weg, wenn die Schülerinnen und Schüler nicht mit einem fertigen Satz konfrontiert, sondern auf das Resultat durch gezielte Fragen erst hingeleitet werden. Wie schon in Abschnitt 4.1.1 erwähnt, zeichnet sich die Geometrie gerade dadurch aus, dass die Lernenden relativ leicht eigene (richtige) Vermutungen über mathematische Zusammenhänge generieren können. Anhand der folgenden Probleme soll beispielhaft illustriert werden, dass es grob fahrlässig wäre, von diesem Vorteil nicht auch Gebrauch zu machen.

Satz Wandert der Eckpunkt C entlang des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABC$, so beschreibt die Bahn des Höhenschnittpunkts H einen Kreis, der das Spiegelbild des gegebenen Kreises an der Achse $\overline{AB}$ ist.

Um die Aussage des obigen Satzes zu verstehen, benötigen Schülerinnen und Schüler in der Regel mehrere Anläufe. Die Formulierung in Form einer Aufforderung ist hingegen wesentlich anschaulicher.

Aufgabenstellung
Einem gegebenen Kreis wird das Dreieck $\triangle ABC$ eingeschrieben. Untersuche das Verhalten des Höhenschnittpunktes H für den Fall, dass die Ecke C den Kreis durchläuft! Formuliere deine Beobachtung schriftlich!

Beobachtung: H verläuft auf einer Kreislinie, die das Spiegelbild des gegebenen Kreises an der Achse $\overline{AB}$ ist.

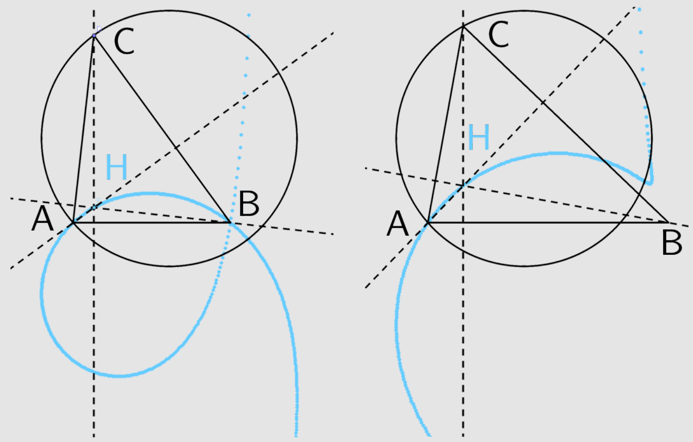


Die Schülerinnen und Schüler gelangen durch den Einsatz des bereits kennengelernten Zugmodus dynamischer Geometriesoftware bei gleichzeitiger Visualisierung der Bahnbewegung des Punktes H mithilfe sogenannter *Ortslinien* („Spur“) sofort zu dem Resultat, dass der Höhenschnittpunkt auf einem Kreis verläuft. Die besondere Lage der entstehenden Figur wird mitunter nicht unmittelbar wahrgenommen, kann aber durch den Hinweis in Form einer Zusatzfrage im Allgemeinen sehr rasch von den Schülerinnen und Schülern entdeckt werden.

Es kann davon ausgegangen werden, dass die Schülerinnen und Schüler die Behauptung durch eine gezielte Lenkung wie in der Aufgabenstellung beschrieben nicht nur eher verstehen, was das Ziel der eigenen Erarbeitung war, sondern auch, dass sie mehr Motivation verspüren, ihre Vermutung im Anschluss zu belegen.

Für die Begründung ist es hilfreich, die Lernenden dazu aufzufordern, den Fall zu betrachten, wenn *nicht* alle Ecken des Dreiecks auf dem gegebenen Kreis liegen. Das verblüffende Ergebnis, das unten dargestellt wird, deutet bereits an, dass der Umkreis im Beweis eine tragende Rolle spielen muss. Der Beweis wird an dieser Stelle nicht ausgeführt und kann bei Schumann nachgelesen werden ([83], S. 23–24).

Beobachtung: Wenn der Eckpunkt B nicht am gegebenen Kreis liegt, so verläuft der Höhenschnittpunkt H *nicht* auf einer Kreislinie.



4.3.2 Eigentätigkeit fördern

Unter Berufung auf die knapp bemessene Unterrichtszeit rechtfertigen viele Lehrerinnen und Lehrer eine gängige Praxis, wonach nur das publikationswürdige Endprodukt des Beweisprozesses zum Gegenstand des Unterrichts gemacht wird. Wie im Abschnitt 3.2 bereits erwähnt wurde, sinkt dadurch die Motivation der Schülerinnen und Schüler, sich mit Begründungen auseinanderzusetzen, selbst wenn die Lehrperson darauf hinweist, dass die eleganten Beweise in der Regel mit groben Ideen und fehlerhaften Versuchen ihren Anfang genommen haben. Mathematische Begründungen sollten demnach nicht präsentiert, sondern vielmehr Schritt für Schritt erarbeitet werden. Die Frage nach dem *Wie* führt unweigerlich auch auf die Frage nach der optimalen Sozialform.

In der Regel korrespondieren Beweise mit einer lehrpersonzentrierten Form des Unterrichts wie dem Lehrer- bzw. Lehrerinnenvortrag oder einem fragend-entwickelnden Gespräch zwischen Pädagoginnen bzw. Pädagogen und Lernenden ([44], S. 52; [61], S. 22). Traditionell bedeutet nicht per se schlecht und so lohnt es sich, diese Sozialformen zum Gegenstand der Diskussion zu machen. Das von KUNTZE identifizierte „Lehrermonopol" beim Beweisen hat insofern einen Vorteil, als dass der Verlauf des Unterrichts bei guter vorangegangener Planung strukturiert ist und damit ein Gerüst bietet, an dem sich die Schülerinnen und Schüler auch noch Wochen nach der Behandlung des Beweises im Unterricht orientieren können ([55], S. 12). Anders als in Phasen der Einzel- oder Gruppenarbeit sind die dargebrachten Erklärungen in der Regel richtig ([46], S. 64).

Und dennoch – ob diese positiven Aspekte die Nachteile bzw. typischen Defizite im Umgang mit argumentativen Begründungen in einem fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch aufwiegen können, ist nicht unumstritten ([44], S. 52–53; [46], S. 64):

- *Unzureichende Lehrererklärungen* Es wäre utopisch zu glauben, dass das im Unterricht Dargebrachte mit dem Lernertrag ident ist ([81], S. 158). Zum einen ist es fraglich, ob Schülerinnen und Schüler bei den Erklärungen der Lehrperson stets aktiv mitdenken und das Gesagte erfolgreich verarbeiten. Zum anderen erscheint es geradezu unmöglich, dass dieselbe Erklärung an das individuelle Vorwissen von beispielsweise 25 verschiedenen Kindern oder Jugendlichen anknüpfen kann ([46], S. 64).
- *Verfrühte Verallgemeinerung* Kritisiert wird auch, dass Lehrerinnen und Lehrer oft für ein singuläres Problem sofort eine allgemein anwendbare Formel finden möchten. Den Lernenden bleibt die Beweisbedürftigkeit der Aussage aufgrund der verfrühten Abstrahierung (zurecht) uneinsichtig ([44], S. 52).
- *Starke Lenkung – geringer Spielraum* Im Allgemeinen kennt nur die Lehrperson vorab bereits *eine* Lösung der Begründungsaufgabe. Das trichterförmig auf diese Lösung zulaufende Gespräch zwischen den Lehrerinnen oder Lehrern und ihren Schülerinnen bzw. Schülern bietet letztgenannten kaum eine Gelegenheit zur eigenständigen Problemlösung – mehr noch, durch die Leitung und Lenkung der Lehrperson verkommt es zu einem moderierten Ratespiel, an dem darüber hinaus auch nur ein kleiner Teil der Klasse partizipiert ([44], S. 53; [57], S. 14). Die Motivation der Schülerinnen und Schüler sinkt, wenn es der Lehrperson nicht gelingt, die Vermutungen und Vorschläge der Lernenden auf eine Art und Weise aufzugreifen, die zu fruchtbaren Lernprozessen führen kann ([81], S. 172).

Es sei an dieser Stelle festgehalten, dass die lehrer- bzw. lehrerinnenzentrierte Form beim Beweisen im Unterricht durchaus Vorteile haben mag, oder wie LORBEER & REISS es formulieren:

> *Wer begibt sich schon gern in die schlechte Planbarkeit offenen Unterrichts bei schwierigen mathematischen Themen?* (Lorbeer & Reiss 2009; zit. nach [61], S. 22)

Auf Basis der dargebrachten Argumente gibt es jedoch zum selbstständigen Arbeiten der Schülerinnen und Schüler keine Alternative. Wenn die Lernenden zum Beweisen befähigt werden sollen, darf sich ihre Rolle im Beweisprozess nicht auf eine „Scheinbeteiligung“ oder etwa auf das Nennen und Wiedergeben von der Lehrperson erfragter Eigenschaften geometrischer Figuren beschränken ([57], S. 20).

In Abschnitt 4.3.1 wurde an einem Beispiel aufgezeigt, dass die Schülerinnen und Schüler vor allem auch zu Beginn, wenn es darum geht, eine Vermutung über mathematische Zusammenhänge zu formulieren, zum eigenständigen Tun aufgefordert werden können. Gelegenheiten zur Förderung der Selbstständigkeit der Lernenden bieten sich aber auch in den anderen Phasen des Beweisprozesses. Vor allem wird es dabei darum gehen, den Komplexitätsgrad von Aufgaben durch unterschiedliche methodische Tricks zu verringern – eine Vorgehensweise, die in Kapitel 5 näher erläutert wird.

Barzel, Büchter & Leuders betonen in ihrem Methodik-Handbuch aber auch das Potential von Lerngruppen. Beim *Ich-Du-Wir* und der *Lawine* diskutieren die Schülerinnen und Schüler ein Problem in immer größer werdenden Runden. Während man zu Beginn auf sich alleine gestellt ist und versucht, eine Lösung zu finden, schließt man sich nach und nach mit immer mehr Schülerinnen und Schüler zusammen und einigt sich jeweils auf Begründungsansätze, die in der nächstgrößeren Gruppe dargestellt und verteidigt werden müssen. Die Lernenden sind dazu angehalten, ihre (überzeugenden) Argumente und Überlegungen zu verbalisieren und zu sortieren, um sie auch für andere verständlich zu machen ([6], S. 118–119, 128–129).

Aufgabenstellung
Zeige, dass die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems leer ist! Wie kannst du die Koeffizienten abändern, so dass die Lösungsmenge nicht mehr leer ist? Wie viele Korrekturen musst du mindestens vornehmen? Welche Anforderungen müssen an die Koeffizienten im allgemeinen Fall gestellt werden, damit die Lösungsmenge nicht leer ist?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 12 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & 11 \\ 2x & + & 3y & - & 5z & = & 8 \end{array}\right.$$

Vergleiche deine Minimalanforderungen für die Lösbarkeit mit deinem Sitznachbarn bzw. deiner Sitznachbarin!

Durch den Austausch mit Schulkolleginnen und -kollegen werden verschiedene Gedankengänge und Perspektiven zusammengetragen. Vor allem für schwächere Schülerinnen und Schüler erschließen sich dabei mitunter Ansätze, auf die sie alleine nicht gekommen wären und die für die weitere Arbeit gegebenenfalls von Nutzen sind.

4.3.3 „Beweglichkeit des Denkens" als bedeutsame Komponente der Problemlösekompetenz

Perels, Schmitz & Bruder postulieren, dass ein Mangel an (geistiger) Beweglichkeit teilweise kompensiert werden kann über größere Methodenbewusstheit und die Aneignung sogenannter *heuristischen Strategien bzw. Prinzipien*, die zu ähnlichen Ergebnissen führen wie unbewusste Denkabläufe bei ausgeprägter Problemlösefähigkeit ([73], S. 160). Erfolgserlebnisse gelingen leichter, wenn man einige Vorgehensweisen kennt, wie man an Begründungsaufgaben herangehen kann. Um Missverständnissen vorzubeugen, sei an dieser Stelle explizit darauf hingewiesen, dass es beim Erwerb von Heurismen nicht darum geht, die Schülerinnen und Schüler mit rezeptartigen Lösungsalgorithmen auszustatten ([12], S. 7). Heuristische Vorgehensweisen dürfen nicht als Gebrauchsanweisung zum Begründen missdeutet werden ([78], S. 47). Vielmehr werden die Lernenden gezielt mit regelhaften Vorgehensweisen konfrontiert, die manche ohnehin intuitiv bereits eingesetzt haben und deren Befolgung für die Lösungsfindung gegebenenfalls nützlich sein kann ([50], S. 99).

Sämtliche Strategien sollen von den Lernenden verinnerlicht und schließlich unaufgefordert und schrittweise unbewusst auf zukünftige Probleme übertragen werden. Ein Vergleich mit dem Erlernen des Autofahrens soll das Konzept der Aneignung von Heurismen verständlich machen. Während man in den ersten Fahrstunden noch hoch konzentriert jeden einzelnen Bewegungsablauf ausführt und mehr oder weniger geschickt an den Hebeln herumhantiert, automatisieren sich mit der Zeit sämtliche Vorgänge. Lediglich in außergewöhnlichen (Problem-)Situationen wird mehr Aufmerksamkeit auf die ablaufenden Prozesse gelegt ([13], S. 20). Der Fahrlehrer bzw. die -lehrerin nimmt nur zu Beginn eine zentrale Rolle ein. Er oder sie bringt die Schülerinnen und Schüler zunächst auf einen „Übungsparkplatz", wo diese langsam an den Umgang mit dem Auto gewöhnt werden. Mithilfe der Zusatzpedale werden einzelne Manöver von der ausbildenden Person zur Nachahmung vorgezeigt.

Der Konnex zum Mathematikunterricht kann nicht nur über die zunehmend automatisierte Anwendung heuristischer Vorgehensweisen durch die Schülerinnen und Schüler hergestellt werden, sondern auch durch die Rolle der Lehrperson, die mit jener des Fahrlehrers bzw. der -lehrerin vergleichbar ist. Bruder forciert den Ansatz, wonach die Pädagoginnen und Pädagogen als Vorbild fungieren sollten, indem sie den Einsatz von Heurismen an konkreten Begründungsaufgaben – etwa in Form von Fragestellungen wie bei Polya – laut denkend vormachen. Ein wiederholtes, ungezwungenes Aufgrei-

Tabelle 4.1: Merkmale der geistigen Beweglichkeit und Zuordnung von heuristischen Strategien bzw. Prinzipien ([73], S. 160)

Merkmale der geistigen Beweglichkeit	Heuristische Vorgehensweisen
Reduktion	Skizze, informative Figur Tabelle
Reversibilität	Rückwärtsarbeiten
Aspektbeachtung	Invarianzprinzip Symmetrieprinzip Extremalprinzip Fallunterscheidung
Aspektwechsel	kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten Transformationsprinzip Ergänzungsprinzip

fen durch die Lehrperson sowie ausreichend viele Gelegenheiten zur Übung und Nachahmung durch die Lernenden lehrt den Schülerinnen und Schülern den rechten Gebrauch heuristischer Prinzipien und Strategien ([12], S. 8; [75], S. 17–18).

Tabelle 4.1 gibt einen Überblick über wichtige Merkmale der geistigen Beweglichkeit, denen spezielle heuristische Vorgehensweisen zugeordnet werden. Im Folgenden werden die einzelnen Komponenten herausgegriffen und anhand konkreter Begründungsaufgaben erläutert.

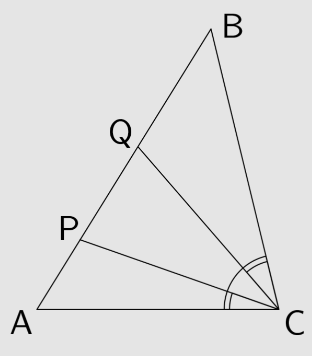
Reduktion

Die Fähigkeit, eine Aufgabenstellung auf das Wesentliche zu reduzieren oder geeignet zu strukturieren wird von Bruder als *Reduktion* bezeichnet. Sie kann durch bewusstes Anfertigen von Skizzen und Tabellen geschult werden ([12], S. 7). Damit Figuren als Hilfe im Beweisprozess angesehen werden können, dürfen sie keine unangebrachte Spezialisierung nahelegen. Verschiedene Teile der Visualisierung sollten demnach möglichst keine Beziehungen aufzeigen, die in der Aufgabe nicht auch gefordert werden. Skizzen, die gleichschenkelige oder rechtwinkelige Dreiecke darstellen obwohl eine Behauptung für allgemeine Dreiecke gezeigt werden soll, können einen falschen Schluss nahelegen – etwa, wenn irrtümlich angenommen wird, dass eine Winkelhalbierende mit der Streckensymmetrale der gegenüberliegenden Seite zusammenfällt oder aber dass die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens direkt als Seitenverhältnisse angewendet werden dürfen ([75], S. 107–108).

Bei Problemstellungen im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist es mangels Alternativen, aber auch aus Gründen der Übersichtlichkeit oft notwendig, erhebliche Abstriche beim Skizzieren zu machen – etwa wenn räumliche Beziehungen zweidimensional dargestellt werden. Für die Weiterarbeit ist wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler wissen, wo welche Vereinfachungen vorgenommen worden sind. Außerdem sollten die Skizzen nach wie vor intuitiv sein. Eine Kugel kann als Kreis dargestellt werden, die zugehörige Tangentialebene als Tangente an den Kreis, d. h. als Gerade und nicht etwa als Wellenlinie ([75], S. 107).

Die Sinnhaftigkeit geometrischer Visualisierungen wird unter anderem bei Betrachtung der folgenden Aufgabenstellung aus dem Bereich der Trigonometrie transparent. Kaum ein Schüler bzw. eine Schülerin würde wohl versuchen, das Problem zu lösen, ohne sich den Sachverhalt zunächst durch das Anfertigen eine Skizze ähnlich der nachgestellten vor Augen zu führen. Weil der Ertrag einer schematischen Darstellung von den Lernenden in der Regel sehr rasch erkannt wird und die Arbeit mit informativen Figuren im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I einen wichtigen Platz einnimmt, scheint das bewusste Einüben der heuristischen Technik in der Oberstufe überflüssig zu sein.

Aufgabenstellung
Zwei in ein und derselben Horizontalebene liegende Punkte A und B sollen durch eine geradlinige Straße verbunden werden, der zwischen A und B liegende Berg soll untertunnelt werden. Zur Bestimmung der Tunnellänge $\overline{PQ}$ wird ein Punkt C gewählt, der sich in der gleichen Horizontalebene wie A, B, P und Q liegt.
Kann $\overline{PQ}$ berechnet werden, wenn wir annehmen, dass $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\angle ACP$, $\angle BCQ$ und $\angle ACB$ gegeben sind? Begründe deine Antwort und erläutere gegebenenfalls die Lösungsstrategie!



Reversibilität

Reversibilität bezeichnet die Fähigkeit, Gedankengänge umzukehren. Angenommen, eine Schülerin kann ihren Wohnungsschlüssel nicht finden. Sie geht gedanklich alle Aktivitäten an diesem Tag in umgekehrter Reihenfolge der wirklichen Verrichtung durch und überlegt intensiv, wann sie ihren Schlüssel zuletzt in Händen hielt. Auch bei Begründungsaufgaben kann es sinnvoll sein, anstelle von gegebenen Bedingungen, Größen, etc. auszugehen, die Aufgabenstellung zuerst „rückwärts" zu analysieren und vom Zielzustand zu starten ([32], S. 117–119; [92], S. 111–113). Für die Bearbeitung der obigen Aufgabenstellung ist es erfolgversprechend sich zuerst zu überlegen, welche Größen für die Berechnung der Tunnellänge benötigt werden. Die Unbekannte $\overline{PQ}$ kann durch Bilden der Differenz aus $\overline{AB}$ und der Summe von $\overline{AP}$ und $\overline{BQ}$ berechnet werden. Im Unterschied zu $\overline{AB}$ lassen sich die beiden Längen $\overline{AP}$ und $\overline{BQ}$ nicht unmittelbar aus den verfügbaren Daten ermitteln und so bedarf es daher einiger Zusatzüberlegungen, die aus Analogiegründen nur für $\overline{AP}$ erläutert werden. $\overline{AP}$ kann mithilfe des Sinussatzes aus den gegebenen Größen $\overline{AC}$ und $\angle ACP$ sowie des noch unbekannten Winkels $\angle CPA$ berechnet werden. $\angle CAP$ $(= 180° - \angle CPA - \angle ACP)$ ergibt sich durch Anwenden des Sinussatzes im Dreieck $\triangle ABC$ unter Zuhilfenahme von $\overline{AB}$, $\angle ACB$ und $\overline{BC}$. Für die in der Aufgabenstellung geforderte Erläuterung der Lösungsstrategie kehrt man die Reihenfolge der soeben betrachteten Schritte einfach um.

Auch bei Begründungsaufgaben, bei denen eine Implikation der Form $p \Rightarrow q$ gezeigt werden soll, kann das *Rückwärtsarbeiten* die Beweisfindung erleichtern. Alternativ zur alleinigen Analyse der Voraussetzungen der Behauptung kann man einen Satz aus dem „Wissensspeicher", der q oder eine zu q äquivalente Bedingung als Resultat (und p' als Voraussetzung) hat, auswählen und versuchen zu zeigen, dass sich die Prämissen p' auch tatsächlich herstellen lassen, d. h. dass $p \Rightarrow p'$ gilt ([50], S. 102; [92], S. 111). Ausführlich erklärte Beispiele zum Prinzip des Rückwärtsarbeitens findet man unter anderem bei Grieser und Holland ([32], S. 121–123; [50], S. 116–118). Letztgenannter illustriert zusätzlich einen Handlungsplan, ein Gerüst, in dem gezielte Fragestellungen zum Rückwärtsarbeiten zusammengefasst werden ([50], S. 118).

Indirekte Beweise wie in Kapitel 2.3.4 thematisiert, werden von Grieser als spezielle Form der heuristischen Strategie des Rückwärtsarbeitens angesehen: Was folgt, wenn die Behauptung falsch ist ([32], S. 120)?

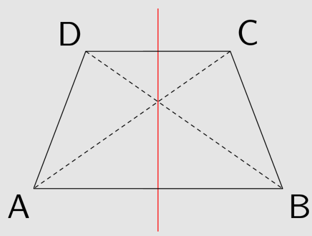
Aspektbeachtung

Aspektbeachtung beschreibt nicht nur die Fähigkeit, sich auf einen Aspekt zu konzentrieren und diesen konsequent zu verfolgen, sondern auch das Vermögen mehrere Dinge gleichzeitig zu betrachten und Abhängigkeiten zu erkennen ([13], S. 20). Ist diese Komponente der Problemlösefähigkeit bei den Lernenden nur mangelhaft ausgeprägt, so kann die Vermittlung des Invarianz-, Extremal- und Symmetrieprinzips sowie der Fallunterscheidung für Abhilfe sorgen ([73], S. 159). Der Reihe nach – bei einer Fülle von Begründungsaufgaben ist es notwendig, Invarianten zu finden. Diese Beobachtung machte bereits der neunjährige Carl Friedrich Gauß, als er im Mathematikunterricht die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 addieren sollte. Eine geschickte Anordnung der Summanden reduzierte das Problem auf $50 \cdot 101$, eine einfache Multiplikation. In Kapitel 2.3.4 wurde der Beweis eines geometrischen Zusammenhangs vorgestellt, bei dem man auf das Invarianzprinzip zurückgriff und in zwei Teildreiecken nach Paaren gleich langer Strecken sowie gleich großer Winkel Ausschau hielt. Oft wird bei derartigen Fragestellungen auch nach gleichen Streckenverhältnissen gesucht (s. Kap. 2.3.2).

Eine Vorgehensweise, die eng mit dem Begriff der Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen und damit auch mit dem Finden von Invarianten zusammenhängt, ist das Erkennen vorhandener Symmetrien bzw. das Erzeugen ebensolcher durch die Einführung von Hilfslinien.

Satz *In einem gleichschenkeligen Trapez sind die beiden Diagonalen gleich lang.*

Beweis. Jedes gleichschenkelige Trapez $ABCD$ besitzt eine Symmetrieachse, die von den Mittelpunkten der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ festgelegt wird.

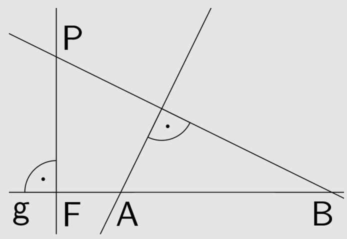


Die Tatsache, dass Teile durch Spiegelung an einer Gerade vertauschbar werden, erleichtert den obigen Beweis der Behauptung.

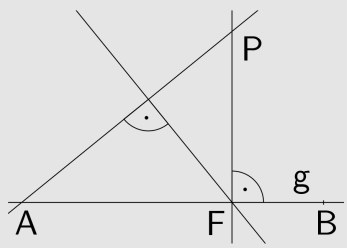
Fehlende Fähigkeiten zur Aspektbeachtung können nicht nur durch das Beobachten unveränderlicher Größen, sondern auch durch ein Bewusstmachen des Extremalprinzips kompensiert werden. Die heuristische Vorgehensweise gehört zum Repertoire einer Problemlöserin bzw. eines Problemlösers, ohne dass ihr oder ihm das auch tatsächlich immer bewusst ist. Die allgemeine Idee dieses Prinzips ist es, im Beweis einer Aussage über eine Menge von Objekten mit denjenigen Elementen zu arbeiten, die durch eine (geeignete) extremale Eigenschaft gekennzeichnet sind ([32], S. 202–205). Was auch in der Literatur nur vage erläutert wird, soll im Folgenden anhand eines Beispiels veranschaulicht und erklärt werden.

Satz *Sei M eine Menge von Punkten mit der Eigenschaft, dass jede Gerade durch zwei Punkte von M einen weiteren Punkt von M enthält. Dann liegen alle Punkte von M auf einer Geraden.*

Beweis. Wir nehmen indirekt an, dass die Punkte nicht kollinear sind. Dann gibt es Geraden durch drei Punkte aus M, deren Abstand zu anderen Punkten aus M echt größer als Null ist. Sei von diesen g die Gerade und $P \notin g$ der Punkt mit der Eigenschaft, dass P und g den kleinstmöglichen Abstand haben. Sei F der Fußpunkt des Lots von P auf g.



Betrachten wir zunächst den Fall, dass $F \notin M$ (oben). Nach Voraussetzung gibt es mindestens drei Punkte aus M auf g, also liegen auf einer Seite von F zumindest zwei Punkte A und B. O. B. d. A. gelte $\overline{FA} < \overline{FB}$. Dann ist der Abstand von A zur Geraden durch B und P kleiner als der Abstand von P zu g. Diese Beobachtung widerspricht der Wahl von P und g.



Sei nun $F \in M$. Es genügt den Fall zu betrachten, bei dem F zwischen zwei Punkten A, $B \in M$ liegt. Die Situation wird in der unteren Zeichnung dargestellt. Da der Abstand von F zur Geraden durch P und A kleiner ist als der Abstand von P zu g, führt auch der zweite Fall auf einen Widerspruch und die Behauptung ist gezeigt.

Im Beweis wird jener Punkt P und jene Gerade g betrachtet, die den *kleinsten* Abstand voneinander haben. Indem man zeigt, dass es einen weiteren Punkt $A \in M$ gibt, dessen Abstand zu einer anderen Geraden kleiner ist als jener von P und g, stößt man auf den Widerspruch, der für indirekte Beweise vonnöten ist.

Als letztes heuristisches Prinzip in der Kategorie Aspektbeachtung sei die Fallunterscheidung angeführt. Wie soeben illustriert, lassen sich Begründungsaufgaben oft in untergeordnete Probleme unterteilen, die man jeweils separat behandeln und lösen kann. Die Methode findet in erster Linie bei universalen Aussagen Anwendung. Soll man eine Behauptung für beliebige Dreiecke zeigen, so kann es sich wie beim Beweis des Cosinussatzes in Kapitel 3.3.1 als hilfreich erweisen, zwischen stumpfwinkeligen und spitzwinkeligen Dreiecken zu unterscheiden. Wichtig ist auf die Vollständigkeit der Fallunterscheidungen zu achten.

Aspektwechsel

Für den *Aspektwechsel* ist es notwendig, unterschiedliche Komponenten des Problems zu betrachten und zwischen den Sichtweisen wechseln zu können, um so ein „Steckenbleiben“ zu vermeiden ([13], S. 20). Sind Schülerinnen und Schüler nicht in der Lage, derartige Strategien von selbst anzuwenden, so eignet sich die Forcierung einer Kombination aus Vorwärts- und dem bereits erläuterten Rückwärtsarbeiten im Unterricht. In Analogie zur zuletzt

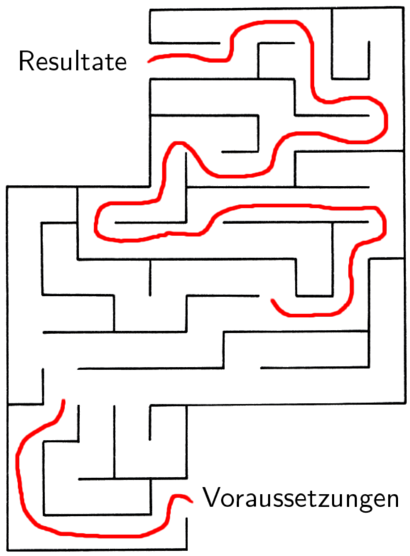


Abbildung 4.1: Symbolische Darstellung der Kombination aus Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten

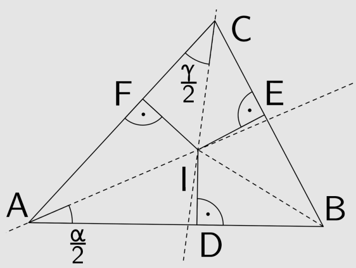
genannten Strategie geht man beim Vorwärtsarbeiten von den Annahmen einen Satzes aus und betrachtet sämtliche Sätze, die diese Annahmen oder Teile davon als Voraussetzung haben. Die Vorgehensweise liefert neue Informationen, auf die man sich im weiteren Verlauf des Beweises stützen kann. Man versucht eine Bewertung der Sätze vorzunehmen und arbeitet mit den vielversprechendsten Ansätzen weiter ([50], S. 99–100; [92], S. 111). Dass die Verknüpfung beider Strategien erfolgreich sein kann, soll mithilfe des Rätsels aus Abbildung 4.1 verdeutlicht werden. Kinder erkennen oft sehr schnell, dass es bei Irrwegen von Vorteil ist, Start *und* Ziel zum Ausgangspunkt der Beobachtungen zu machen. Sobald man auf einem der beiden Wege aufgrund der Vielzahl an Optionen zur Fortführung nicht mehr weiter weiß, wechselt man die Perspektive und geht vom anderen aus. Die stückweise Annäherung der beiden Stränge führt schließlich zur Lösung.

Das *Transformationsprinzip* betont die Bedeutung der Übersetzung der Aufgabenstellungen in andere mathematische Modelle oder Darstellungsweisen und damit der Vernetzung einzelner Inhalte beim Problemlösen ([13], S. 22). An geeigneten Beispielen sollte im Unterricht illustriert werden, dass es unterschiedliche Möglichkeiten gibt, sich einer Begründungsaufgabe zu nähern ([78], S. 73). Im Geometrieunterricht kommt es immer wieder vor, dass Inhalte wie entlang einer Schraubenlinie auf verschiedenen intellektuellen Ebenen und in unterschiedlichen Schuljahren behandelt werden. Gerade dann bietet es sich an, andersartige Zugangsweisen zu wählen und ihre Bezüge herauszuarbeiten. Wichtig ist, dass die gewählten Perspektiven an das

Vorwissen der Schülerinnen und Schüler angepasst werden ([78], S. 31, 66). Zur Veranschaulichung des Transformationsprinzips bei geometrischen Zusammenhängen wird an dieser Stelle der Satz über den gemeinsamen Schnittpunkt der Winkelsymmetralen im Dreieck aufgegriffen.

Satz (Inkreismittelpunkt) *Die drei Winkelsymmetralen eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden einander in einem Punkt I, dem Mittelpunkt des Inkreises.*

Beweis. Sei I der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen durch die Eckpunkte A und C. Sei D der Fußpunkt des Lots von I auf die Seite $\overline{AB}$, sei E der Fußpunkt des Lots von I auf die Seite $\overline{BC}$ und sei F der Fußpunkt des Lots auf die Seite $\overline{AC}$.

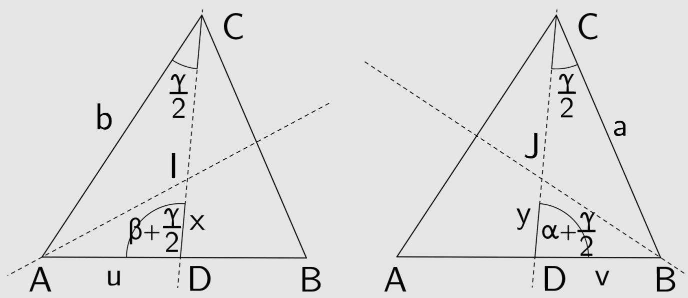


Die Dreiecke $\triangle AID$ und $\triangle AIF$ sind kongruent, da sie beim Eckpunkt A denselben Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und die Seite $\overline{AI}$ gemeinsam haben. Weiters ist $\angle AIF = \angle DIA$, bedingt durch die rechten Winkel an den Fußpunkten D und F. Es folgt $\overline{ID} = \overline{IF}$. Analog zeigt man, dass die Dreiecke $\triangle CIE$ und $\triangle CIF$ kongruent sind. Somit ist $\overline{IE} = \overline{IF}$, insbesondere gilt dann auch $\overline{ID} = \overline{IE}$.
Die rechtwinkeligen Dreiecke $\triangle BIE$ und $\triangle BID$ mit der gemeinsamen Hypotenuse $\overline{IB}$ sind daher ebenfalls kongruent. Sie haben also bei B denselben Winkel, der $\frac{\beta}{2}$ sein muss. Die Gerade durch I und B ist deswegen die Winkelsymmetrale durch B. Damit ist gezeigt, dass die drei Winkelsymmetralen einander im Punkt I schneiden.

Der Satz vom Inkreismittelpunkt ließe sich nicht nur elementargeometrisch, sondern analog zur Vorgehensweise beim Schnittpunkt der Schwerlinien im Dreieck in Kapitel 2.3.3 auch mithilfe der analytischen Geometrie beweisen. Vektorielle Begründungen werden häufig als „Paradebeispiele“ für die Übersetzung von geometrischen Aufgabenstellungen in eine algebraische Umgebung angeführt. Das umfassende Theoriekonstrukt, das dieser Perspektive zugrunde liegt, erlaubt eine sehr technische Herangehensweise, die Segen und Fluch zugleich ist. Als großer Vorteil ist die weitreichenden Einsetzbarkeit der Betrachtungsweise anzuführen. So gibt es Behauptungen bei denen nur der analytische Zugang zum gewünschten Ziel in Form eines Beweises führt, während andere Methoden zu versagen scheinen. Als Beispiel kann der Satz von der zweiten Steiner'schen Geraden angeführt werden, der besagt, dass der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks und die (drei) Punkte, die durch Spiegelung eines Punktes auf dem Umkreis des Dreiecks an den Trägergeraden der Dreiecksseiten entstehen, kollinear sind. Wie schon in Abschnitt

2.3.3 eingewendet wurde, sind vektorielle Begründungen aber oft weniger anschaulich. Für den Unterricht sind aus den genannten Gründen auch andere Zugänge mitzudenken. Im Folgenden wird der Beweis zum Inkreismittelpunkt mithilfe trigonometrischer Überlegungen geführt.

Beweis. Betrachten wir zunächst den Fall, der in der linken Zeichnung dargestellt wird. Sei I der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen durch die Eckpunkte A und C und D der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt C mit der Seite $\overline{AB}$. Sei x der Abstand der Punkte D und I und u der Abstand der Punkte A und D.



Betrachten wir zunächst das Dreieck $\triangle ADC$. Wegen $\angle ACD = \frac{\gamma}{2}$ und $\angle CDA = 180° - \alpha - \frac{\gamma}{2} = \beta + \frac{\gamma}{2}$ folgt mit dem Sinussatz

$$u = b \cdot \frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)}$$

Im Dreieck $\triangle ADI$ ist $\angle DAI = \frac{\alpha}{2}$ und $\angle AID = 180° - \frac{\alpha}{2} - \beta - \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\beta}{2}$. Nach erneuter Anwendung des Sinussatzes erhalten wir

$$\frac{u}{\sin\left(90° - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{x}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

und somit insgesamt

$$x = \frac{b \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) \cdot \sin\left(90° - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{b \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

Sei nun J der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen durch die Eckpunkte B und C und y der Abstand der Punkte D und J (rechte Skizze). Analog zum ersten betrachteten Fall erhält man eine Gleichung für y:

$$y = \frac{a \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Aus dem Sinussatz folgt $b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$. Wir schreiben $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$ bzw. $\beta = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2}$ und wenden das Additionstheorem an:

$$b \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = a \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\frac{b \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{a \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Wegen $\beta + \frac{\gamma}{2} + \alpha + \frac{\gamma}{2} = 180°$ gilt $\sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)$. Damit ist $x = y$ gezeigt, d. h. $I = J$ gilt. Die drei Winkelsymmetralen schneiden einander in einem Punkt.

Das *Ergänzungsprinzip*, das an dieser Stelle als letzte heuristische Strategie zum Aspektwechsel angeführt wird, wird als übergeordnete Bezeichnung für ganz unterschiedliche Tätigkeiten innerhalb des mathematischen Beweisprozesses herangezogen. Ein häufig angewandter „Trick“ beim Begründen ist das Ergänzen von Null, d. h. das Subtrahieren und Addieren derselben Zahl oder desselben Terms. Im Geometrieunterricht begegnet einem oder einer dieses heuristische Prinzip vorrangig in der Sekundarstufe I, etwa wenn es darum geht, die Formel des Flächeninhalts ebener Figuren durch Zerlegen und Ergänzen zu „erraten“.

Kapitel 5

Von unlösbar zu trivial?

In Kapitel 4 wurde erläutert, inwiefern und welche Anpassungen des Unterrichts positiv auf die Entwicklung einer Begründungsfähigkeit wirken. Dabei wurde nicht nur die Auswahl der Aufgaben und die Sensibilisierung der Schülerinnen und Schüler für die Grundlagen der Logik zum Thema gemacht, sondern auch die Sozialform im Beweisprozess und die Idee heuristischer Vorgehensweisen. Obwohl vor allem auch das Bewusstmachen einzelner Strategien dabei helfen kann [sic!], das Beweisen zu erlernen, darf nicht vergessen werden, dass es oft einer Portion Kreativität bedarf, argumentative Begründungen überhaupt erst zu finden.

Im fünften Kapitel der vorliegenden Arbeit wird das Hauptaugenmerk auf die Begründungsaufgaben gelegt. Es sollen methodische Alternativen zum klassischen Beweisen von Vermutungen aufgezeigt werden, die eine Verringerung des Schwierigkeitsgrades von Begründungsaufgaben erlauben und so für Schülerinnen bzw. Schüler gemäß dem Titel des Kapitels nicht länger unlösbar erscheinen.

5.1 Entwicklungsstufen beim Begründen

In der fachdidaktischen Literatur herrscht Einigkeit darüber, dass der Aufbau der Begründungsfähigkeit bei den Schülerinnen und Schülern stufenweise erfolgt, wobei die einzelnen Niveaus bei unterschiedlichen Autorinnen und Autoren mehr oder weniger stark divergieren (s. Abb. 5.1). Bruder & Pinkernell gliedern ihr Modell zum Kompetenzaufbau in eine *intuitive* sowie eine *bewusste* Phase. In der intuitiven Phase werden die Schülerinnen und Schüler schrittweise an sprachlich-logische und inhaltlich korrekte Argumentationen gewöhnt ([15], S. 5). Die Lernenden sollten immer wieder in Gesprächssituationen verwickelt werden, in denen sie argumentieren müssen ([62], S. 5).

> *Begründen sollte für die Schülerinnen und Schüler ein Alltagsgeschäft werden, [...]* (Malle 2002; zit. nach [62], S. 7)

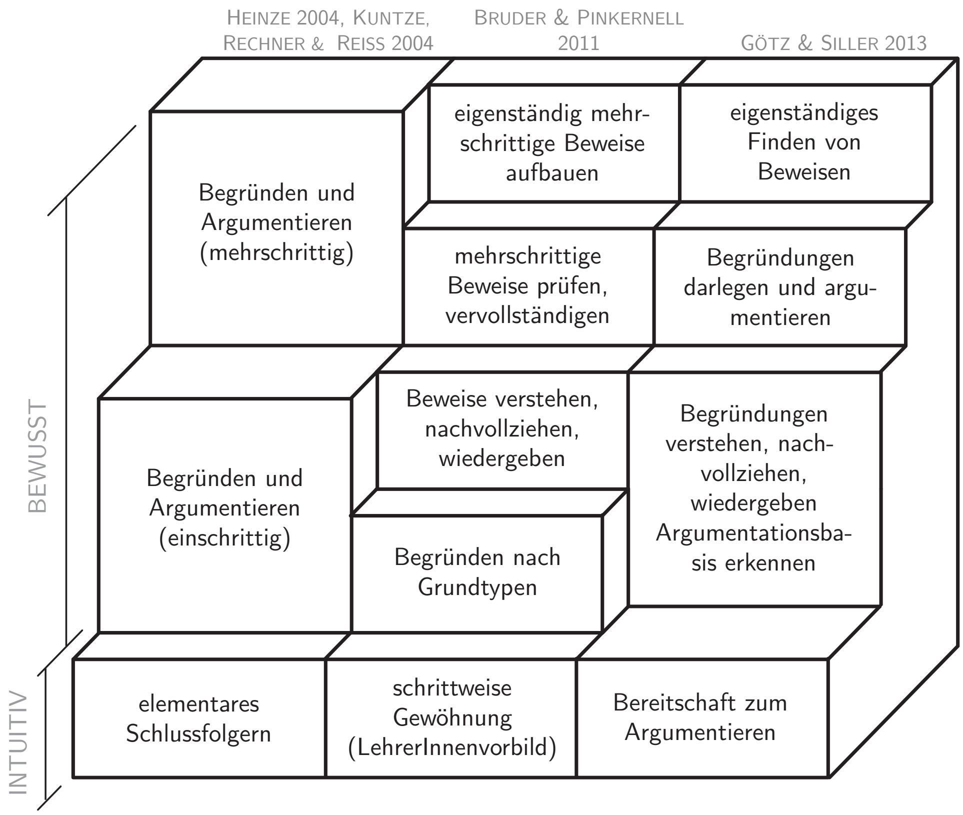


Abbildung 5.1: Drei Stufenmodelle zum Kompetenzaufbau ([15], S. 5; [34], S. 7; [40], S. 151; [57], S. 4)

GÖTZ & SILLER erachten es als wesentliches Ziel ebendieser ersten Stufe, dass die Schülerinnen und Schüler dazu bereit sind, sich auf einfache Begründungsaufgaben einzulassen (s. Abb. 5.1) ([34], S. 7).

Es ist nicht notwendig, eigene Problemstellungen für die intuitive Phase zu entwickeln. Vielmehr können kleine Zusätze bei „herkömmlichen“ Berechnungsaufgaben dafür sorgen, dass die Schülerinnen und Schüler im Argumentieren und Begründen geschult werden ([30], S. 11):

Aufgabenstellung (Malle et al. 2011; verändert nach [66], S. 162)
Ermittle die Schnittpunkte der Geraden $g : 3x - 2y = 24$ mit der Parabel $par : y^2 = 9x$! Erstelle einen Handlungsplan, in dem du kurz erklärst, wie man Berechnungsaufgaben vom vorgestellten Typ lösen kann!

Durch die Aufforderung, die einzelnen Schritte zur Berechnung der gemeinsamen Punkte schriftlich festzuhalten, müssen die Schülerinnen und Schüler über ihren Lösungsweg reflektieren. Dabei geht es nicht um lückenlose, strenge Erklärungen, sondern darum, dass die Lernenden mit der Tätigkeit des Argumentierens vertraut werden ([50], S. 52). Andere mathematisch ergiebige Formulierungen findet man unter anderem bei MURPHY & KUNTZE ([71], S. 43):

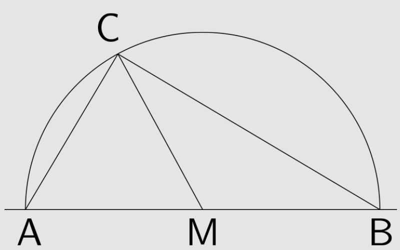
- Ändere etwas an ..., sodass ...
- Erkläre die Zusammenhänge zwischen ... und ...
- Gib mehrere Wege an, auf denen du ... kannst.
- Beschreibe, welche Merkmale von ... es zu einem Beispiel für ... machen.
- Was ist gleich, was ist unterschiedlich bei ...
- Ist ... ein nützliches Verfahren für ...?
- Ist ... das einzige Verfahren für ...?

Die bewusste Phase wird von BRUDER & PINKERNELL in vier Stufen eingeteilt (s. Abb. 5.1). Allmählich sollen die Schülerinnen und Schüler nicht nur Begründungen nach den in Abschnitt 2.3 vorgestellten fünf Grundtypen ausführen können, sondern zusätzlich in der Lage sein, Beweise zu verstehen, nachzuvollziehen und wiederzugeben ([15], S. 5). Wichtig ist dabei, dass die Lernenden „Schlüsselstellen" des Beweises als solche wahrnehmen. So sollten die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass der Peripheriewinkelsatz in seiner Formulierung in Kapitel 2.2.2 und dessen Beweise nur den Fall beleuchten, dass M und C auf derselben Seite der Sehne $\overline{AB}$ liegen. Liegt C auf dem kürzeren Kreisbogen, so beobachtet man den Zusammenhang $\mu = 360° - 2\varphi$ zwischen dem Zentriwinkel $\mu = \angle AMB$ und dem Peripheriewinkel $\varphi = \angle ACB$.

Die Bewertung und Vervollständigung von mehrschrittigen Argumentationsketten wird von BRUDER & PINKERNELL auf der vierten Stufe verortet ([15], S. 5). Im Folgenden wird eine Aufgabenstellung zu diesem Kompetenzniveau vorgestellt.

Aufgabenstellung

Sei C ein Punkt am Halbkreisbogen mit Mittelpunkt M und Durchmesser $d = \overline{AB}$.



Wie kann die Beobachtung, dass der Flächeninhalt der beiden Dreiecke $\triangle ACM$ und $\triangle BCM$ gleich groß ist, begründet werden? Erläutere die Wahl deiner Antwortmöglichkeit und versuche die Begründung so abzuändern, dass sie für andere (leichter) nachvollziehbar wird!

Antwortmöglichkeiten.

1. Nach dem Satz von Thales ist der Winkel $\angle ACB$ ein rechter Winkel. M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
2. Die beiden Dreiecke sind gleichschenkelig.
3. Die beiden Dreiecke haben eine gleich lange Grundlinie und stimmen in der dazugehörigen Höhe überein.

Sowohl bei Bruder & Pinkernell als auch bei Götz & Siller steht das eigenständige Finden von Beweisen an der Spitze der hierarchischen Gliederung der Kompetenzniveaus ([15], S. 5; [34], S. 7). Letztere empfehlen das Führen von Analogiebeweisen oder den Nachweis einzelner Fälle bei Beweisen mit Fallunterscheidung, um so zu verhindern, dass die Lernenden überfordert werden. Im Geometrieunterricht können die Überlegungen zum Finden einer Formel zur Berechnung des Inkreisradius als Grundlage für die Suche nach einer Formel für den Ankreisradius herangezogen werden ([34], S. 7–8). Bedingt durch die vielen Gemeinsamkeiten von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ lassen sich entsprechende gleichartige Beweise finden, die als Grundlage für Begründungsaufgaben herangezogen werden können.

Heinze sowie Kuntze, Rechner & Reiss postulieren ein dreistufiges Modell zum Aufbau der Beweisfähigkeit bei den Schülerinnen und Schülern (s. Abb. 5.1). Dem elementaren Schlussfolgern folgt ein einschrittiges Argumentieren, bevor die Lernenden schließlich auch in der Lage sein sollten, mehrere Begründungen zu einem Ganzen zu verknüpfen ([40], S. 151; [57], S. 4). Die erste Stufe ähnelt der intuitiven Phase bei Bruder & Pinkernell, die bewusste Phase wird von den Autorinnen und Autoren nur einmal unterteilt.

Die Stufen der vorgestellten Modelle zum Aufbau der Beweiskompetenz werden nicht automatisch von jedem Schüler und jeder Schülerin durchlaufen. Vielmehr müssen Lehrpersonen mithilfe gezielter Aufgabenstellungen versuchen, den Lernprozess zu initiieren bzw. voranzutreiben. Im nun folgenden Abschnitt 5.2 werden Möglichkeiten vorgestellt, die es erlauben, den Schwierigkeitsgrad von Begründungsaufgaben zu senken und damit Aufgabenpools für die unterschiedlichen Entwicklungsstufen zu schaffen.

5.2 Kennzeichen zur Bestimmung des Niveaus von Begründungsaufgaben

In keinem anderen Fach ist die *Informationsasymmetrie* zwischen Lehrpersonen und ihren Schülerinnen und Schülern ähnlich groß wie in der Mathematik. Während es etwa im Geographie- und Wirtschaftskundeunterricht relativ leicht vorkommen kann, das einzelne Kinder in bestimmten Bereichen ein Wissen anhäufen, das die Kenntnisse des Lehrers bzw. der Lehrerin übersteigt, werden ähnliche Situationen in der Mathematik nur selten beobachtet. Der Charakter als stufenweise aufeinander aufbauendes Unterrichtsfach verhindert weitgehend, dass ein Schüler bzw. eine Schülerin der Lehrperson überlegen ist.

Was von vielen Mathematiklehrerinnen und -lehrern (teilweise uneingestanden) eher als positiv empfunden wird, kann bei der Konzeption von Unterricht und insbesondere bei der Auswahl der Aufgaben für die Ausbildung der Beweisfähigkeit ein großer Nachteil sein. Weil für die Lehrperson aufgrund ihrer kognitiven Struktur in der Regel alle Aufgaben einfach sind, fällt es ihr schwer, verschiedene Abstufungen im Komplexitätsgrad vorzunehmen. Dieses didaktische Defizit hat weitreichende Konsequenzen für die Ausbildung der mathematischen Begründungskompetenz bei den Schülerinnen und Schülern. Sind die im Unterricht herangezogenen Beispiele aus Sicht der Lernenden zu schwer, so verbinden diese das Beweisen mit dem Empfinden des eigenen Versagens ([3], S. 21). Die Bereitschaft, mathematische Probleme in Zukunft überhaupt noch in Angriff zu nehmen, sinkt auf Basis der negativen Vorerfahrungen. Sind die Aufgaben auf der anderen Seite zu leicht, so interessieren diese motivierte Schülerinnen und Schüler im Allgemeinen nicht. Die anhaltende Unterforderung führt zu Leistungsverweigerung sowie Langeweile und verstärkt in weiterer Folge Störungen des Unterrichts ([12], S. 4).

Wie kann die Lehrperson das Eintreten sowohl des einen wie auch des anderen Szenarios vermeiden? Es hat den Anschein als würden viele Lehrerinnen und Lehrer auf die Erfahrung hoffen. Doch auch eine langjährige Praxis ist kein Garant dafür, den Schwierigkeitsgrad von Beispielen richtig einschätzen und so angemessene Aufgabenstellungen im Unterricht heranziehen zu können. Außerdem ist nicht einsehbar, dass Generationen von Schülerinnen und Schülern als „Versuchskaninchen“ fungieren sollen. Weil auch die Rückbesinnung auf die eigenen Schwierigkeiten im Mathematikunterricht aufgrund einer mangelnden Repräsentativität ungeeignet erscheint, wird die Forderung nach konkreten Merkmalen für die Bestimmung des Anforderungsniveaus von Aufgaben erhoben.

5.2.1 Umfang der erforderlichen Beweismittel

Bruder & Müller führen mit der Anzahl der für die logische Schlusskette benötigten Sätze und Definitionen ein quantitatives Kriterium für die Bestimmung des Komplexitätsgrades einer Begründungsaufgabe an ([14], S. 891). Muss man in seiner Argumentationskette lediglich auf eine einzige bereits bewiesene Aussage oder gar nur auf eine Definition zurückgreifen, so wird der Beweis eher leichter fallen. Die Lösung eines Problems, bei der gleich mehrere Grundbausteine zu einer Argumentationskette zusammengesetzt werden müssen, gestaltet sich hingegen schwieriger. Zur Veranschaulichung werden im Folgenden zwei unterschiedliche Aufgabenstellungen aus dem Schulbuch *Mathematik verstehen* betrachtet, die je einem der beiden Typen zuzuordnen sind.

Aufgabenstellung (Malle et al. 2010; zit. nach [64], S. 98)
Zeige für $0° < \varphi < 90°$: $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$

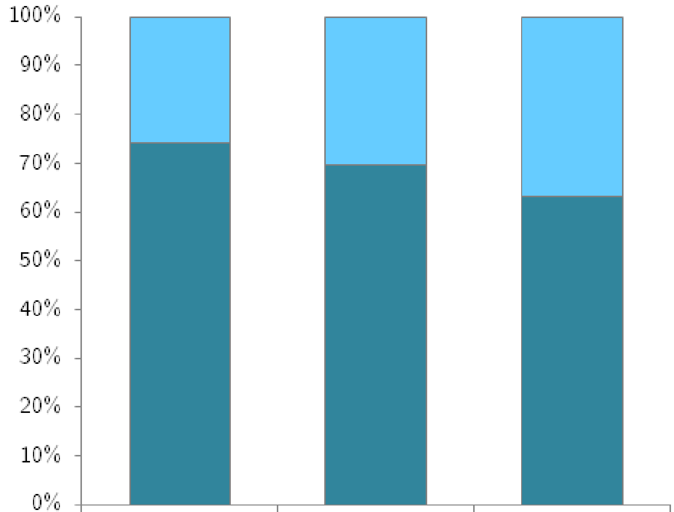
Um diese Begründungsaufgabe zu lösen, müssen die Schülerinnen und Schüler lediglich auf den bereits bekannten Satz $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ verweisen. Anders verhält es sich mit dem nachgestellten Problem.

Aufgabenstellung (Malle et al. 2010; zit. nach [65], S. 161)
Zeige: In einem Tetraeder ist die Verbindungsstrecke der Schwerpunkte zweier Seitendreiecke parallel zu derjenigen Kante, die keinem der beiden Dreiecke angehört.

Die Lösung der Aufgabenstellung über eine Besonderheit des Tetraeders ist für Schülerinnen und Schüler in der Regel zunächst nicht offensichtlich. Vielmehr bedarf es mehrerer Schritte:

0. Noch vor der eigentlichen Beweisfindung muss von den Lernenden entschieden werden, mithilfe welches Zugangs (hier z. B. ein analytischer) das Problem gelöst werden kann oder soll.
1. In einem ersten Schritt müssen die Schülerinnen und Schüler ihr Begriffsbild zum Terminus Tetraeder aktivieren – sie nehmen Bezug auf eine Definition.
2. Um die Schwerpunkte der Seitendreiecke zu bestimmen, greifen die Lernenden auf die Formel für Schwerpunkte in allgemeinen Dreiecken zurück – sie bedienen sich eines Satzes.
3. Um in einem dritten Schritt die eigentliche Aussage der Behauptung zu belegen, müssen die Schülerinnen und Schüler davon in Kenntnis gesetzt sein, dass zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren im $\mathbb{R}^3$ genau dann parallel sind, wenn sie durch Multiplikation mit einem Skalar ineinander übergeführt werden können. Auch dieses Wissen wird im vorangegangenen Unterricht in Form eines Satzes festgehalten worden sein.

Im analysierten Schulbuch *Mathematik verstehen* [64–66] überwiegen Begründungsaufgaben, die nach einer einschrittigen Argumentation verlangen (s. Abb. 5.2). Im Laufe der Schuljahre beobachtet man einen leichten Rückgang der einschrittigen Begründungen bei gleichzeitigem Anstieg jener Aufgaben, die das Zusammensetzen mehrerer Grundbausteine erforderlich machen.



	Mathematik verstehen 5	Mathematik verstehen 6	Mathematik verstehen 7
mehrschrittig	26,0	30,3	36,7
einschrittig	74,0	69,7	63,3

Abbildung 5.2: Quantitative Verteilung der Begründungsaufgaben im Schulbuch *Mathematik verstehen* nach dem Umfang der erforderlichen Beweismittel

5.2.2 Bekanntheitsgrad der Beweismittel

Ausschlaggebend für die Komplexität einer Aufgabe ist neben der Anzahl der zur Begründung notwendigen Schritte auch der Bekanntheitsgrad der Beweismittel ([14], S. 891).

> *[...] wenn man einmal gesehen hat, wie ein Problem zu lösen ist, dann wird man es nie wieder als ein Problem sehen.* (Reiss & Hammer 2012; zit. nach [78], S. 57)

Sind indirekte Beweise den Lernenden bereits von früheren Begründungsaufgaben her geläufig, so hat man als Lehrperson im Klassenzimmer sicherlich mit weniger Widerstand zu kämpfen als beim erstmaligen Führen eines Widerspruchsbeweises. Bruder & Müller beziehen sich in ihrer Argumentation aber nicht nur auf die logischen Schlussweisen, sondern insbesondere auch auf die Elemente der Argumentationsbasis ([14], S. 891). Im analysierten Schulbuch wird vor der zuvor präsentierten Aufgabenstellung zum speziellen Zusammenhang von Sinus- und Cosinuswert eines Winkels die Formel $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ schriftlich erarbeitet und in Form eines Satzes festgehalten ([64], S. 98). Darf man nicht davon ausgehen, dass diese Aussage den

Schülerinnen und Schülern bereits bekannt ist, so ist die Begründungsaufgabe weit komplexer. Die Lernenden müssten auf die Definition von Sinus und Cosinus im rechtwinkeligen Dreieck zurückgreifen, um schließlich nach einigen Umformungsschritten mithilfe des pythagoreischen Lehrsatzes auf den Wahrheitsgehalt der Aussage schließen zu können.

Zusammenfassend sei an dieser Stelle festgehalten, dass das Beweisen im Allgemeinen leichter fällt, wenn die Schülerinnen und Schüler mit den Schlussweisen sowie den zugrunde liegenden Sätzen und Definitionen vertraut sind. Für die Schulung der Begründungsfähigkeit auf einem niedrigeren Niveau kann diese Erkenntnis insofern gewinnbringend genutzt werden, als dass man die Lernenden dazu auffordert, Spezialfälle einer Behauptung zu zeigen. Der Beweis des Cosinussatzes für ein spitzwinkeliges Dreieck im Unterricht kann als Grundlage für den Beweis der Formel $a^2 = b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$ in einem Dreieck mit $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ dienen.

Begründungen, die bereits bekannten Argumentationsketten stark ähneln, können von den Schülerinnen und Schülern leichter in Eigentätigkeit bearbeitet werden als solche, mit denen man sich auf bislang unbekanntes Terrain wagt. Die Herleitung der Hyperbelgleichung in erster Hauptlage kann von den Schülerinnen und Schülern sicher bewerkstelligt werden, wenn im Unterricht selbiges für die Ellipse durchgeführt wurde. Ein positiver Nebeneffekt ist die nachträgliche Auseinandersetzung der Lernenden mit schon dargebrachten Unterrichtsinhalten.

Aufgabenstellung
Leite ausgehend von der Brennpunkteigenschaft die Gleichung der Hyperbel in erster Hauptlage her! Haben wir ähnliche Probleme bereits in einer früheren Unterrichtseinheit gelöst?

5.2.3 Informationsangebot in der Formulierung der Aufgabenstellung

Ein weiterer Aspekt, der von Bruder & Müller angeführt wird, ist das Informationsangebot in der Formulierung des Beweisproblems ([14], S. 891). Gibt man eine (minimale) Argumentationsbasis, mithilfe derer die Schülerinnen und Schüler eine Begründungsaufgabe lösen können, explizit an, so wird das Finden eines Beweises dadurch wesentlich erleichtert. Zur Veranschaulichung sei eine in Abschnitt 4.1.1 vorgestellte Aufgabenstellung an dieser Stelle erneut aufgegriffen. Sie enthält zusätzlich zur Formulierung des Problems im letzten Satz auch einen Hinweis auf eine mögliche Lösung.

Aufgabenstellung (Malle et al. 2010; zit. nach [64], S. 110)
Von einem Dreieck sind a und b gegeben. Für welches Winkelmaß γ ist der

Flächeninhalt des Dreiecks maximal? Begründe mit der trigonometrischen Flächenformel!

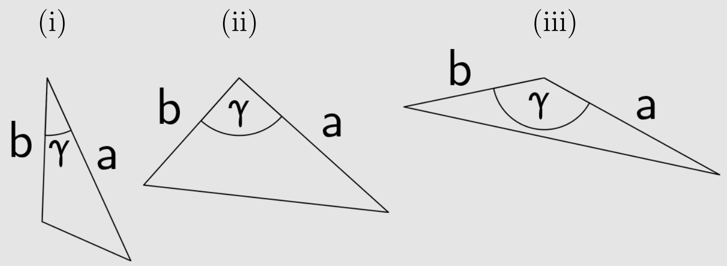
Die Schülerinnen und Schüler müssen nicht erst nach einem geeigneten Werkzeug suchen, sondern werden mit einem zum Ziel führenden Mittel konfrontiert, das (nur) noch richtig eingesetzt werden muss. Soll das Anforderungsniveau noch weiter reduziert werden, so können zusätzlich zum obigen Hinweis auch noch systematisch Fragen gestellt werden, die die Beweisführung in die entscheidende Richtung lenken.

Folgende Überlegungen können dir dabei helfen, die Frage zu beantworten:

- Welche Werte kann der Winkel γ annehmen?
- Für welchen Winkel im erlaubten Intervall erreicht $\sin\gamma$ den größten Wert? In welchen Intervallen wächst, in welchen Intervallen fällt die Sinusfunktion?

Nicht nur mithilfe gezielter Fragen, sondern auch durch geeignete Veranschaulichungen in der Aufgabenstellung lässt sich das Anspruchsniveau einer Begründungsaufgabe im Allgemeinen senken ([14], S. 893). Die nachgestellten Visualisierungen helfen den Schülerinnen und Schülern dabei, zu verstehen, dass der Flächeninhalt des Dreiecks je nach Größe des Winkels γ variiert. Für $\gamma = 0°$ bzw. $\gamma = 180°$ ist die zugehörige Dreiecksfläche Null, so dass es einen maximalen Flächeninhalt geben muss.

Geg.: a, b eines Dreiecks, $\gamma = \angle(a, b)$ variiert
Ges.: maximaler Flächeninhalt



Im Schulbuch *Mathematik verstehen* [64–66] wurde in knapp 20 Prozent der geometrischen Begründungsaufgaben von der Möglichkeit der Veranschaulichung Gebrauch gemacht. Wie bereits in Abschnitt 4.3.3 thematisiert wurde, nehmen Visualisierungen im Problemlöseprozess eine besondere Rolle ein.

5.2.4 Grad der Vollständigkeit der Beweise

Auch das angeleitete Arbeiten mit vorgegebenen (Teilen von) Beweisen kann das Komplexitätsniveau einer Begründungsaufgabe senken – wobei vor dem Schluss, wonach der Grad der Beweisdarstellung verkehrt proportional zum Schwierigkeitslevel der Aufgabe ist, abgeraten wird.

Heuristische Lösungsbeispiele

Reiss & Renkl führen in diesem Kontext die Bedeutung sogenannter *heuristischer Lösungsbeispiele* an. Heuristische Lösungsbeispiele sind Aufgaben, die neben der Aufgabenstellung auch eine schrittweise Darstellung der Lösung enthalten ([46], S. 62; [79], S. 32). Mit dem Ziel der Vertiefung des Verständnisses für mathematische Vorgehensweisen und Zusammenhänge werden die Schülerinnen und Schüler dazu aufgefordert, sich *selbst* den Beweis einer Begründungsaufgabe (schriftlich) zu erklären.

Grundsätzlich unterscheidet man zwischen antizipativen und prinzipienbasierten Selbsterklärungsaufforderungen. Antizipative Selbsterklärungsaufforderungen halten die Schülerinnen und Schüler dazu an, sich den jeweils nächsten Lösungsschritt im Voraus zu überlegen und anschließend mit der im weiteren Verlauf des Beispiels dargestellten zu vergleichen, während prinzipienbasierte Aufgabenstellungen von den Lernenden ihrem Namen entsprechend verlangen, die zugrunde liegenden Prinzipien zu benennen und so auf einer Metaebene über den dargestellten Lösungsprozess zu reflektieren ([93], S. 25).

Im Allgemeinen finden drei Arten von Selbsterklärungen Anwendung ([46], S. 62):

- Durch das *Nennen des Ziels einer Operation* wird bezweckt, dass die Schülerinnen und Schüler einen Überblick über den gesamten Beweis sowie seine zugrundeliegende Idee erhalten und die einzelnen Beweisschritte nicht nur isoliert voneinander betrachten – ein Problem das Alibert & Thomas auf Basis ihrer Analysen identifizieren ([1], S. 224).
- Das *Nennen der Voraussetzungen eines Beweisschrittes* ist insofern gewinnbringend, als dass die Lernenden feststellen können, an welcher Stelle die Prämissen des Satzes eingehen. Die Schülerinnen und Schüler können sich davon überzeugen, dass alle Anforderungen im Beweis auch wirklich berücksichtigt wurden und sehen ein, warum ebendiese Einschränkungen notwendig sind.
- Das *Nennen des Prinzips, des Satzes oder der Regel hinter einem Lösungsschritt* liefert die dem Beweis zugrunde liegende Argumentationsbasis.

Die genannten Komponenten können nicht nur einzeln, sondern auch in Kombination miteinander eingesetzt werden – beispielsweise wenn man die

Schülerinnen und Schüler den Satz zu einem (fertigen) Beweis formulieren lässt.

Die didaktische Absicht der Arbeit mit heuristischen Lösungsbeispielen ist es, das Verstehen der zugrunde liegenden Prinzipien und nicht das Finden eines Beweises in den Vordergrund zu stellen. Schülerinnen und Schüler müssen während eines Problemlöseprozesses gleichzeitig eine ganze Palette von verschiedenen Aspekten im Auge behalten. Neben dem derzeitigen Stand, der Zielsituation und dem Unterschied dieser beiden Zustände muss auch den erlaubten Schlussweisen und Zwischenzielen Aufmerksamkeit gewidmet werden ([79], S. 31). Vor allem leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler sind mit der Fülle der zu bewältigenden Aufgaben oft überfordert ([93], S. 26).

Heuristische Lösungsbeispiele rücken die eigene Performance in den Hintergrund und ermöglichen so die Erzeugung abstrakter und allgemeiner Problemlöseschemata ([79], S. 31). Die Lehrperson kann aus der Qualität der Selbsterklärungen der Schülerinnen und Schüler Rückschlüsse auf das Verständnis ziehen. Außerdem sind Erklärungen von Dritten oft weniger effektiv als jene, die aktiv von den Lernenden selbst entwickelt werden ([46], S. 62–64).

Dass die Arbeit mit heuristischen Lösungsbeispielen nicht zu einem trockenen Selbststudium verkommen muss, belegen Barzel, Büchter & Leuders durch vielfältige Methoden. Im Rahmen eines *Gutachtens* können die Schülerinnen und Schüler dazu angehalten werden, (vorliegende) Beweise zu bewerten und eine Empfehlung abzugeben ([6], S. 104–111):

- Welche Begründung eignet sich besonders gut, um zu verstehen, warum die Behauptung auch tatsächlich der Wahrheit entspricht?
- Welche Argumentationsbasis wird bei den unterschiedlichen Begründungen herangezogen?
- Gibt es einen Beweis, der besonders leicht zu verstehen ist?
- Was sind Vorteile der einzelnen Darstellungen, wo ortet man Nachteile – etwa bei den verschiedenen Beweisen des Cosinussatzes, die in den Abschnitten 2.2.1 und 3.3.1 vorgestellt werden?

Die Methode erlaubt es, auf einer Metaebene über verschiedene Zugangsweisen zum Beweisen zu reflektieren ([78], S. 66). Für die Schülerinnen und Schüler werden auf diese Weise (vertikale) Vernetzungen zwischen den Unterrichtsinhalten transparent.

Um den Komplexitätsgrad zu erhöhen und die Schülerinnen und Schüler für typische Fehler sensibel zu machen, können auch inkorrekte Beweise in die Betrachtung mit aufgenommen werden ([33], S. 107; [30], S. 11).

Beweispuzzle

Die Arbeit mit (fertigen) Beweisen kann aber auch ganz anders aussehen. Bürger schlägt vor, den Schülerinnen und Schülern ungeordnete Teile eines Beweises vorzulegen, die sie in die richtige Reihenfolge bringen müssen ([10], S. 117). Die Methode, die die Lernenden auf den Prozess des Auswählens und Ordnens vorbereitet, wird in der jüngeren didaktischen Literatur häufig als Beweispuzzle bezeichnet ([42], S. 47; [44], S. 54). Zur Erhöhung des Schwierigkeitsgrades können bei der Erstellung von der Lehrperson auch unnötige und typische fehlerhafte Argumente mit berücksichtigt werden.

Im Folgenden wird ein Beweispuzzle vorgestellt. Weitere Beispiele findet man unter anderem bei Pinkernell ([74], S. 9).

Aufgabenstellung
Im Folgenden wird ein Beweis vorgestellt, bei dem die einzelnen Schritte durcheinandergebracht wurden. Schneide die einzelnen Abschnitte aus und bringe sie wieder in die richtige Reihenfolge!

✂- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Asymptoten und Hyperbel haben keinen gemeinsamen Punkt.

✂- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

✂- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\begin{array}{ll} I & \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ II & y = \pm\dfrac{b}{a} \cdot x \end{array}$$

✂- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{b^2} \cdot \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot x^2\right) = 1$$

✂- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Satz *Asymptote und Hyperbel haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt.*

✂- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Die Rechnung führt auf einen Widerspruch. Das heißt:

✂- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$
\begin{aligned}
I \quad & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\
II \quad & y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2
\end{aligned}
$$

Sei $hyp : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ eine Hyperbel in erster Hauptlage und seien $asy : y = \pm\frac{b}{a} \cdot x$ die Gleichungen der beiden Asymptoten.

$$0 = 1$$

Lückenfüller

Es gibt die Möglichkeit, den Schülerinnen und Schülern unvollständige Beweise zur Prüfung vorzulegen und die Begründungslücken auffüllen zu lassen ([2], S. 47; [44], S. 54). Im Folgenden wird ein Beispiel vorgestellt, weitere Anregungen findet man unter anderem bei ALTHOFF ([2], S. 49).

Aufgabenstellung
In einem Rechteck $ABCD$ ist P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ und Q der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$. Sei S der Schnittpunkt der Geraden durch A und P bzw. durch B und Q.
Zeige, dass S die Strecke $\overline{AP}$ im Verhältnis 4 : 1 teilt. Fertige zunächst eine Skizze an!

Sei $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Es ist

$$\overrightarrow{AS} = r \cdot \overrightarrow{AP} = r \cdot (\ldots \vec{u} + \ldots \vec{v})$$

$$\overrightarrow{BS} = s \cdot \overrightarrow{BQ} = s \cdot (\ldots \vec{u} + \ldots \vec{v})$$

für $r, s \in \mathbb{R}$. Der Streckenzug $ASBA$ ist geschlossen, es folgt

$$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} = \ldots$$

$$r \cdot (\ldots \vec{u} + \ldots \vec{v}) - s \cdot (\ldots \vec{u} + \ldots \vec{v}) - \vec{u} = \ldots$$

$$\vec{u} \cdot \left(r + \frac{s}{2} - 1\right) + \vec{v} \cdot (\ldots) = \ldots$$

Weil $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind (d. h. $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{u} = \lambda \vec{v}$) müssen die beiden Klammern 0 sein d. h.

$$\begin{aligned} r + \frac{s}{2} - 1 &= 0 \\ \ldots &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems führt auf folgenden Wert $r = \ldots$ und somit ist die Behauptung gezeigt.

Kapitel 6

Quod erat demonstrandum

Quod erat demonstrandum, kurz: q. e. d. – mit diesen Worten wird häufig der Schluss eines Beweises gekennzeichnet. In Analogie zu dieser Konvention soll Kapitel 6 das Ende der vorliegenden Arbeit markieren. Anhand verschiedener Zitate wird im Folgenden die Problemstellung noch einmal grob umrissen. Zudem sollen die wichtigsten Ergebnisse der vorliegenden Diplomarbeit zusammengefasst werden.

> *Der Beweis ist im Mathematikunterricht für die Schüler kein Wahrheitskriterium. [. . .] Es besteht bei den Schülern keine Korrelation zwischen dem logischen Wert einer Aussage und der Anerkennung der Korrektheit des Beweises.* (Dyrslag 1979; zit. nach [22], S. 171)

Die Beobachtung, wonach Schülerinnen und Schüler die verwendeten Theoreme in einem vorgeführten Beweis verstehen sowie die logische Struktur nachvollziehen können und trotzdem den Wahrheitsgehalt der zu zeigenden Behauptung nicht anerkennen, mag zunächst unglaublich klingen. Tatsächlich belegen aber gleich mehrere Studien das fehlende Verständnis für den Verifizierungsaspekt von mathematischen Argumentationsketten ([1], S. 219; [22], S. 171). Die Suche nach Erklärungen für diesen Befund führt auf zwei verschiedene Begründungsansätze.

In Abschnitt 3.1 wurde thematisiert, dass Kinder und Jugendliche oft mithilfe primitiver Begründungen wie dem Prüfen von Spezialfällen bereits einen hohen Grad an Überzeugung erlangen und keinen Beweis fordern, um den Wahrheitsgehalt einer Aussage einzusehen. Dieses Empfinden wird durch den Einsatz von dynamischer Geometriesoftware verstärkt (s. Kap. 4.1.1). Im Sinne eines schülerinnen- und schülerorientierten Unterrichts müssen diese speziellen wissenschaftstheoretischen Vorstellungen über die Möglichkeiten zur Prüfung von Kausalitäten im Unterricht aufgegriffen und nicht als Fehlvorstellungen abgelehnt werden. Der Weg zur Einsicht in die Notwendigkeit einer Begründung sollte nicht über eine gezielte Verunsicherung der

Lernenden bestritten werden, sondern über die Frage nach dem *Warum*, d. h. über die Erklärungsfunktion von Beweisen (s. Kap. 3.2). In Abschnitt 4.1.1 wurde exemplarisch eine solche Vorgehensweise dargestellt.

Der zweite Versuch einer Begründung führt zur Vermutung, dass viele Schülerinnen und Schüler die Struktur von Argumentationsketten verkennen und Begründungen damit nur als wissenschaftliche Notwendigkeit ohne subjektiven Nutzen wahrnehmen. Neben dem Leisten von Aufklärungsarbeit, wie sie im Abschnitt 4.1.2 thematisiert wurde, sowie dem Vermitteln logischer Grundkenntnisse (s. Kap. 4.2) erscheinen Anpassungen hinsichtlich der Methodik sinnvoll. Beim Nachvollziehen eines Beweises kontrollieren die Lernenden häufig nur die einzelnen Schritte, ohne zu wissen, welchen Sinn diese verfolgen ([1], S. 224). Durch die Arbeit mit heuristischen Lösungsbeispielen bzw. Selbsterklärungen im Speziellen kann dieser Beobachtung gegengesteuert werden (s. Kap. 5.2.4).

> *Beweise sind formal. Beweise kann man als Nicht-Mathematiker nicht verstehen. [...] Ein einsichtiger Argumentationsgang kann schon deshalb kein Beweis sein, weil man ihn verstanden hat.* (Krauthausen 2001; zit. nach [54], S. 99)

Glaubt man den Untersuchungen von Healy & Hoyles sowie Reiss & Thomas bzw. Reiss & Ufer, so haben Schülerinnen und Schüler ganz bestimmte Vorstellungen von der äußeren Form von Begründungen. Beweise, die einen formalen Eindruck machen, werden oft (unabhängig von der tatsächlichen Korrektheit) eher als richtig angesehen ([39], zit. nach [78], S. 6; [80], S. 98; [81], S. 166).

Wie gelangt eine fundamentale Tätigkeit der Mathematik zu obigem Image? Viele Lehrerinnen und Lehrer verinnerlichen während der Ausbildung die Art und Weise, wie an der Universität begründet wird, als Beweisstandard. Die Möglichkeit, Sachverhalte oder Zusammenhänge mithilfe einer Symbolsprache präzise zu beschreiben, kann sicher als große Errungenschaft der Mathematik angesehen werden. Argumente können unmissverständlich formuliert und so kontrollierbar gemacht werden. Falsch wäre aber, von der Fachwissenschaft ohne Umwege auf die Schulmathematik zu schließen und den Wert einer Begründung an ihrer formalen Ausdrucksweise zu messen. Lehrerinnen und Lehrer ziehen diese falschen bzw. zu groben Vorstellungen entweder heran, um zu rechtfertigen, dass Beweise in der Schule nichts verloren hätten, oder aber sie geben ihr Idealbild von mathematischen Begründungen unverändert an die Schülerinnen und Schüler weiter ([62], S. 4). Dass es sinnvolle Alternativen zum formalen Beweisen gibt, wird in Abschnitt 2.2.1 exemplarisch anhand eines inhaltlich-anschaulichen Beweises zum Cosinussatz aufgezeigt. Nicht nur deduktive Argumentationsketten, sondern auch angemessene Zeichnungen können – vor allem auch im Rahmen des Geometrieunterrichts – den Wahrheitsgehalt einer Aussage kommunizieren ([78], S. 49).

> *Das Ideal vieler Schüler scheint zu sein, richtige Ergebnisse ohne „unschöne“ Umwege aufs Papier zu bringen.* (Barzel & Ehret 2009; zit. nach [7], S. 8)

Die Aussage von Barzel & Ehret knüpft unmittelbar an die obigen Überlegungen zu den fragwürdigen Vorstellungen von Beweisen an. Im Unterricht wird oft die Meinung vermittelt, wonach Beweise „Fertigprodukte“ sind. Argumentationsketten werden losgelöst von ihrer Entwicklung betrachtet, obwohl ebendiese im Allgemeinen verständnisfördernd wirkt. Insbesondere zeigt sie, dass mathematische Begründungen meist das Ergebnis eines langwierigen Prozesses sind. Bevor ein Beweis gefunden und aufgeschrieben wird, muss eine Vermutung generiert werden (s. Kap. 3.2 und 3.4). Die Geometrie zeichnet sich dadurch aus, dass die Schülerinnen und Schüler relativ leicht zu (richtigen) Annahmen über mathematische Zusammenhänge gelangen. Von dieser Besonderheit muss im Unterricht Gebrauch gemacht werden.

Beim Finden der Beweisidee sollten – wenn möglich – stets verschiedene Ansätze in die Betrachtung mit aufgenommen werden. Die Schülerinnen und Schüler können so einsehen, dass es nicht *den* Beweis einer Behauptung gibt. Außerdem fördert das Beleuchten unterschiedlicher Zugänge und Perspektiven zum selben Problem die Vernetzung von Unterrichtsinhalten (s. Kap. 4.3.3).

> *[. . .] so scheint beim Beweisen schon von vornherein festzuliegen, wer sich am Unterricht beteiligen wird und kann.* (Aner et al. 1979; zit. nach [3], S. 23)

Beweise werden häufig als Selektionsinstrument benutzt, um die guten von den schlechten Schülerinnen und Schülern zu trennen ([3], S. 23). Im Sinne einer emanzipatorischen Bildung ist das Elitäre, das von vielen mit dem Begriff des Begründens verbunden wird, in Frage zu stellen ([12], S. 5). Der Unterricht sollte das Ziel verfolgen, den Aufbau der Problemlösefähigkeit bei *allen* Schülerinnen und Schülern zu unterstützen. In Kapitel 4.3 wurde erläutert, welche Anpassungen diesen Lernprozess unterstützen können. Einerseits ist es wichtig, die Lernenden zur Selbstständigkeit zu erziehen (s. Kap. 4.3.2). Andererseits kann die Vermittlung sogenannter heuristischer Prinzipien und Strategien den Schülerinnen und Schülern dabei helfen, mit typischen Vorgehensweisen im Beweisprozess vertraut zu werden. Zwar bieten sie keine Lösungsgarantie an, durch das Schöpfen aus einem Arsenal an bewährten Techniken wird die Klärung von Problemen aber zumindest wahrscheinlicher (s. Kap. 4.3.3).

Um Beweisaufgaben für eine breitere Masse zugänglich und verständlich zu machen bzw. zu garantieren, dass für jede Phase im stufenweisen Aufbau der Begründungskompetenz (s. Kap. 5.1) geeignete Aufgaben zur Verfügung stehen, ist es sinnvoll, ihren Komplexitätsgrad zu verringern. In

Abschnitt 5.2 wurde aufgezeigt, inwieweit Veränderungen der Aufgabenstellungen den Schwierigkeitsgrad von mathematischen Problemen herabsetzen können. Durch die Erhöhung des Informationsangebots in der Formulierung der Aufgabenstellung kann erreicht werden, dass die Schülerinnen und Schüler leichter zu einer Lösung in Form eines Beweises gelangen. Neben verbalen Hinweisen spielen, wie in Abschnitt 5.2.3 dargelegt, auch gezielte Fragen sowie Visualisierungen eine große Rolle. Durch die Arbeit mit (teilweise) vollständigen Beweisen können die Schülerinnen und Schüler ihr Augenmerk auf die zugrundeliegenden Prinzipien richten (s. Kap. 5.2.4).

> *[...] Geometrie als Wissenschaft, der man begegnet, um exemplarisch mathematische Darstellungs- und Denkweise kennenzulernen [...]* (Graumann 1994; zit. nach [31], S. 136)

Im einleitenden Kapitel wurde die These formuliert, wonach sich die Geometrie besonders gut eignen würde, um mit der grundlegenden mathematischen Tätigkeit des Argumentierens vertraut zu werden. Die Analyse der Grundbausteine in Kapitel 2.3 hat die Notwendigkeit einer differenzierten Betrachtung aufgezeigt. Geometrische Behauptungen, für deren Beweise man auf Definitionen oder Sätze zurückgreifen muss, erscheinen auf Basis dieser Analysen sinnvoll, um die Beweisfähigkeit bei den Schülerinnen und Schülern daran nachhaltig zu schulen. Begründen lässt sich diese Beobachtung mit der Sonderstellung der Geometrie innerhalb des curricularen Themenspektrums, die sich dadurch auszeichnet, dass dieselben Inhalte in verschiedenen Schulstufen immer wieder aufgegriffen werden. Anders als beispielsweise bei Definitionen rund um den Grenzwertbegriff sind die Lernenden der Sekundarstufe II mit einer Vielzahl der auftretenden Termini durch das wiederholte Thematisieren bereits vertraut. Die Begriffsbilder können dadurch viel leichter aktiviert werden (s. Kap. 2.3.1).

Bei Sätzen ist eine ähnliche Situation gegeben. Eine Besonderheit der Geometrie ist die Möglichkeit der Visualisierung. Die Schülerinnen und Schüler können sich sämtliche Behauptungen aus der Geometrie buchstäblich vor Augen führen. Das Darstellen von Sachverhalten führt zur Einsicht selbiger und erleichtert das Verstehen gleichsam wie das Aufrufen der mathematischen Zusammenhänge in einem späteren Beweis.

Beweise, bei denen die Behauptung durch die Anwendung eines Verfahrens gezeigt wird, sind meist im Bereich der Koordinatengeometrie zu finden. In der fünften Klasse lernen die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit der Übersetzung geometrischer Sachverhalte in eine algebraische Umgebung kennen – ein bedeutsames Werkzeug, das das Führen eleganter und vor allem leistungsfähiger Beweise ermöglicht. Obwohl mit dieser Transformation häufig auch ein Verlust der Anschaulichkeit einhergeht, ist es letztlich gewinnbringend, wenn die Schülerinnen und Schüler Beweise kennenlernen, die mit ganz anderen Mitteln arbeiten ([78], S. 73). Wie in Abschnitt 4.3.3 erläutert wurde, gibt es Beispiele von Behauptungen, die sich nur mithilfe der analytischen Geometrie führen lassen.

Einzig beim Führen von indirekten Beweisen ist Vorsicht geboten. Dass man Behauptungen beweisen kann, indem man zeigt, dass die Verneinung des Resultats auf einen Widerspruch führt, ist vielen Schülerinnen und Schülern nicht ganz geheuer. Die logische Struktur dieser Schlussweise ist nicht unmittelbar zugänglich (s. Kap. 4.2). Das Unverständnis wird erhöht, weil man die (falschen) Annahmen beim Widerspruchsbeweis in der Regel nicht darstellen kann, wie in Abschnitt 2.3.4 anhand eines Beispiels illustriert wurde.

Quellenverzeichnis

Literatur

[1] Daniel Alibert und Michael Thomas. „Research on mathematical proof“. In: *Advanced mathematical thinking.* Hrsg. von David Tall. New York u. a.: Kluwer Academic Publishers, 1991, S. 215–230.

[2] Heinz Althoff. „Prüfungsaufgaben – Analysieren, Interpretieren und Argumentieren. Ziele, Beispiele und Erfahrungen“. In: *mathematik lehren* 107, 2001, S. 47–51.

[3] Barbara Aner u. a. „Beweisen im Mathematikunterricht – nur ein kognitives Problem?“ In: *Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für „Didaktik der Mathematik“ von 26.9. bis 29.9.1978.* (Klagenfurt). Hrsg. von Willibald Dörfler und Roland Fischer. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1979, S. 19–27.

[4] Samuele Antonini und Maria Alessandra Mariotti. „Indirect proof: what is specific to this way of proving?“ In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 40, 2008, S. 401–412.

[5] Deborah Ball u. a. „The teaching of proof“. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM).* Bd. 3. 2002, S. 907–922.

[6] Bärbel Barzel, Andreas Büchter und Timo Leuders. *Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II.* Berlin: Cornelson Verlag Scriptor, 2007.

[7] Bärbel Barzel und Carola Ehret. „Mathematische Sprache entwickeln“. In: *mathematik lehren* 156, 2009, S. 4–9.

[8] Albrecht Beutelspacher. *„Das ist o. B. d. A. trivial!“ Tipps und Tricks zur Formulierung mathematischer Gedanken.* 8. Aufl. Wiesbaden: Vieweg, 2006.

[9] Paolo Boero. „Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education“. In: *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof* 7/8, 1999. URL: http://www.lettredelapreuve.

it/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html (besucht am 01.01. 2013).

[10] Heinrich Bürger. „Beweisen im Mathematikunterricht – Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II“. In: *Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für „Didaktik der Mathematik“ von 26.9. bis 29.9.1978.* (Klagenfurt). Hrsg. von Willibald Dörfler und Roland Fischer. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1979, S. 103–134.

[11] Ilja Bronstein u. a. *Taschenbuch der Mathematik.* 7. Aufl. Frankfurt am Main: Harri Deutsch, 2008.

[12] Regina Bruder. „Lernen, geeignete Fragen zu stellen. Heuristik im Mathematikunterricht“. In: *mathematik lehren* 115, 2002, S. 4–8.

[13] Regina Bruder. *Methoden und Techniken des Problemlösenlernens.* Universität Kiel, 2003. URL: http://nibis.ni.schule.de/~as-lg/Mathe2/Dokumente/probleme%20loesen.pdf (besucht am 01.06.2013).

[14] Regina Bruder und Horst Müller. „Zur Entwicklung des Könnens im Lösen von Begründungs- und Beweisaufgaben“. In: *Mathematik in der Schule* 21, 1983, S. 886–894.

[15] Regina Bruder und Guido Pinkernell. „Die richtigen Argumente finden“. In: *mathematik lehren* 168, 2011, S. 2–7.

[16] Orly Buchbinder und Orit Zaslavsky. „How to decide? Students' ways of determining the validity of mathematical statements“. In: *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* (Larnaca). Hrsg. von Demetra Pitta-Pantazi und George Philippou. University of Cyprus, 2007, S. 561–571.

[17] Orly Buchbinder und Orit Zaslavsky. „Is this a coincidence? The role of examples in fostering a need for proof“. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 43, 2011, S. 269–281.

[18] Kristin Dahl und Sven Nordqvist. *Zahlen, Spiralen und magische Quadrate.* Heidelberg, Berlin und Oxford: Verlag Friedrich Oetinger, 1996.

[19] Michael De Villiers. „An alternative approach to proof in dynamic geometry“. In: *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space.* Hrsg. von Richard Lehrer und Daniel Chazan. Mahwah: Lawrence Erlbaum Publishers, 1998, S. 369–393.

[20] Michael De Villiers. „The role and function of proof in mathematics“. In: *Pythagoras* 24, 1990, S. 17–24.

[21] Anita Dreher u. a. „Viele Themen – eine Idee“. In: *mathematik lehren* 173, 2012, S. 9–15.

[22] Zygfried Dyrslag. „Der logische Sinn des Beweises nach Schülerbefragungen“. In: *Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für „Didaktik der Mathematik“ von 26.9. bis 29.9.1978.* (Klagenfurt). Hrsg. von Willibald Dörfler und Roland Fischer. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1979, S. 163–174.

[23] Hans-Jürgen Elschenbroich. „Anschaulich(er) Beweisen mit dem Computer? Neue Möglichkeiten für visuelle Beweise“. In: *Mathematische Bildung und neue Technologien. Vorträge beim 8. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik vom 28.9. bis 2.10.1998.* (Klagenfurt). Hrsg. von Gert Kadunz u. a. Stuttgart und Leipzig: Teubner, 1999, S. 61–68.

[24] Hans-Jürgen Elschenbroich. „Mit dem Computer anschaulich beweisen. Beweisen mit visuell-dynamischen Puzzles“. In: *mathematik lehren* 144, 2007, S. 4–8.

[25] Hans-Jürgen Elschenbroich und Günter Seebach. „Geometrie erkunden“. In: *mathematik lehren* 155, 2009, S. 58–61.

[26] Marei Fetzer. „Schreib Mathe und sprich darüber. Schreibanlässe als Möglichkeit, Argumentationskompetenzen zu fördern“. In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 30, 2009, S. 21–25.

[27] Roland Fischer. „Höhere Allgemeinbildung und Bewusstsein der Gesellschaft“. In: *Erziehung und Unterricht* 5/6, 2003, S. 559–566.

[28] Marianne Franke. *Didaktik der Geometrie.* Heidelberg und Berlin: Spektrum Akademischer Verlag, 2000.

[29] Ariane Garlichs und Herbert Hagstedt. „Mathematik als erste Fremdsprache?“ In: *Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel.* Hrsg. von Helmut Postel, Arnold Kirsch und Werner Blum. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag, 1991, S. 102–112.

[30] Elke Goldberg. „Streitend das Begründen lernen“. In: *mathematik lehren* 110, 2002, S. 9–11.

[31] Günter Graumann. „Konzeptionen und Ziele des Geometrieunterrichts im 19. und 20. Jahrhundert“. In: *Der Wandel im Lehren und Lernen von Mathematik und Naturwissenschaften.* (Heidelberg). Hrsg. von Lissy Jäkel. Weinheim: Deutscher Studien-Verlag, 1994, S. 130–137.

[32] Daniel Grieser. *Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik.* Wiesbaden: Springer-Verlag, 2013.

[33] Stefan Götz und Eva Sattlberger. „‚Warum?‘ – Einsichten, Argumente und Begründungen im Standards-Modell“. In: *Mathematik im Unterricht* 3, 2009, S. 96–121.

[34] Stefan Götz und Hans-Stefan Siller. „Was heißt Kompetenzorientierung nach acht bzw. zwölf Jahren Mathematikunterricht?“ Unveröffentlichter Artikel. 2013.

[35] Nurit Hadas, Rina Hershkowitz und Baruch Schwarz. „The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments“. In: *Educational Studies in Mathematics* 44, 2000, S. 127–150.

[36] Christoph Hammer. „Vom Argument zum Beweis. Logische Begründungen und präformale Beweise“. In: *mathematik lehren* 155, 2009, S. 18–21.

[37] Gila Hanna. „Proof, Explanation and Exploration: An Overview“. In: *Educational Studies in Mathematics* 44, 2000, S. 5–23.

[38] Reinhold Haug. *Problemlösen lernen mit digitalen Medien.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012.

[39] Lulu Healy und Celia Hoyles. *Justifying and Proving in School Mathematics. Technical Report on the Nationwide Survey.* Techn. Ber. University of London, 1998.

[40] Aiso Heinze. „Schülerprobleme beim Lösen von geometrischen Beweisaufgaben. Eine Interviewstudie“. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 36 (5), 2004, S. 150–161.

[41] Aiso Heinze und Jee Yi Kwak. „Informal prerequisites for informal proofs“. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 34 (1), 2002, S. 9–16.

[42] Aiso Heinze und Stefan Ufer. „. . . mehr als nur die Lösung formulieren. Phasen des geometrischen Beweisprozesses aufzeigen“. In: *mathematik lehren* 155, 2009, S. 43–49.

[43] Hans-Wolfgang Henn. „Strukturiertes Üben mit dem Computer“. In: *mathematik lehren* 115, 2002, S. 50–53.

[44] Henning Heske. „Methodische Überlegungen zum Umgang mit Beweisen“. In: *mathematik lehren* 110, 2002, S. 52–55.

[45] Helmut Heugl und Werner Peschek. *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe. Version 4/07.* Institut für Didaktik der Mathematik – Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik – Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung – Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, 2007.

[46] Tatjana Hilbert, Jörg Wittwer und Alexander Renkl. „Kognitiv aktiv – aber wie? Lernen mit Selbsterklärungen und Lösungsbeispielen“. In: *mathematik lehren* 135, 2006, S. 62–64.

[47] Reinhard Hölzl. „Aspekte des heuristischen Einsatzes von Dynamischer Geometriesoftware“. In: *Der Mathematikunterricht* 45 (1), 1999, S. 52–60.

[48] Reinhard Hölzl und Hans-Joachim Sander. „Ein Problem des Blickwinkels“. In: *mathematik lehren* 115, 2002, S. 54–56.

[49] Markus Hohenwarter und Andreas Lindner. „Beweisen und Visualisieren mit Vektoren“. In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 21, 2008, S. 28–33.

[50] Gerhard Holland. *Geometrie in der Sekundarstufe. Didaktische und methodische Fragen.* 2. Aufl. Heidelberg, Berlin und Oxford: Spektrum Akademischer Verlag, 1996.

[51] Hans Niels Jahnke. „Beweise und Hypothesen“. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 40. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 6.3. bis 10.3. in Osnabrück.* Hildesheim und Berlin: Verlag Franzbecker, 2006, S. 275–278.

[52] Thomas Jahnke. „Optimal (und) begründet. Beweisen im Mathematikunterricht: Eine begründete Unterrichtseinheit zur Einführung in die Analysis“. In: *mathematik lehren* 110, 2002, S. 60–64.

[53] Ulrich Kortenkamp. „Experimental Mathematics and Proofs in the Classroom“. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 36 (2), 2004, S. 61–66.

[54] Günter Krauthausen. „Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat“. In: *Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt.* Hrsg. von Werner Weiser und Bernd Wollring. Hamburg: Verlag Dr. Kovač, 2001, S. 99–113.

[55] Sebastian Kuntze. „Beweisen - was ist das? Gesprächs-‚Rahmen‘ und Reflexionsanlässe schaffen“. In: *mathematik lehren* 155, 2009, S. 12–17.

[56] Sebastian Kuntze. *Beweisen im Geometrieunterricht – wie genau nehmen es unsere Schulbücher damit?* PH Ludwigsburg, 2002.

[57] Sebastian Kuntze, Markus Rechner und Kristina Reiss. „Inhaltliche Elemente und Anforderungsniveau des Unterrichtsgesprächs beim geometrischen Beweisen. Eine Analyse videografierter Unterrichtsstunden“. In: *mathematica didactica* 27, 2004, S. 3–22.

[58] Josef Laub u. a. *Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung. Arbeitsbuch für die 4. Klasse der allgemeinbildenden höheren Schulen und der Hauptschulen.* Wien und Graz: Hölder-Pichler-Tempsky u. a., 1977.

[59] Marlies Liebscher u. a. *Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe. Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 1.* Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung, 2011.

[60] Joachim Lompscher. *Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten.* 2. Aufl. Berlin: Volk und Wissen, Volkseigener Verlag, 1975.

[61] Werner Lorbeer und Kristina Reiss. „Probleme lösen und Begründungen finden. Wie viele Steine hat die 2009-te Pyramide?" In: *mathematik lehren* 155, 2009, S. 22–26.

[62] Günther Malle. „Begründen. Eine vernachlässigte Tätigkeit im Mathematikunterricht". In: *mathematik lehren* 110, 2002, S. 4–8.

[63] Günther Malle. „Mathematiker reden in Metaphern". In: *mathematik lehren* 156, 2009, S. 10–15.

[64] Günther Malle u. a. *Mathematik verstehen 5.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, 2010.

[65] Günther Malle u. a. *Mathematik verstehen 6.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, 2010.

[66] Günther Malle u. a. *Mathematik verstehen 7.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, 2011.

[67] Günther Malle u. a. *Mathematik verstehen 8.* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, 2012.

[68] *Mathematik-Lehrplan der AHS-Oberstufe.* BGBl. II Nr. 277/2004. URL: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf (besucht am 01.06.2013).

[69] *Mathematik-Lehrplan der AHS-Unterstufe.* BGBl. II Nr. 133/2000. URL: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf (besucht am 01.06.2013).

[70] Michael Meyer und Susanne Prediger. „Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen". In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 30, 2009, S. 1–7.

[71] Bernard Murphy und Sebastian Kuntze. „Vernetztes Wissen aufbauen. Unterrichtsmethodische Anregungen". In: *mathematik lehren* 173, 2012, S. 41–45.

[72] Roger Nelson. *Proofs without words. Exercises in visual thinking.* Washington DC: The Mathematical Association of America, 1993.

[73] Franziska Perels, Bernhard Schmitz und Regina Bruder. „Lernstrategien zur Förderung von mathematischer Problemlösekompetenz". In: *Lernstrategien und Metakognition. Implikationen für Forschung und Praxis.* Hrsg. von Barbara Artelt Cordula nad Moschner. Münster u. a.: Waxmann, 2005, S. 155–175.

[74] Guido Pinkernell. „Warum ist das so? Aufgabenideen zum mathematischen Begründen". In: *mathematik lehren* 168, 2011, S. 8–13.

[75] George Polya. *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. 4. Aufl. Tübingen und Basel: Francke Verlag, 1995.

[76] Kristina Reiss. *Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht*. Universität Bayreuth, 2002. URL: http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienDB/53/beweis.pdf (besucht am 01.06. 2013).

[77] Kristina Reiss. „Wege zum Beweisen. Einen „Habit of Mind“ im Mathematikunterricht etablieren“. In: *mathematik lehren* 155, 2009, S. 4–9.

[78] Kristina Reiss und Christoph Hammer. *Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe*. Basel: Birkhäuser, 2013.

[79] Kristina Reiss und Alexander Renkl. „Learning to prove: The idea of heuristic examples“. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 34 (1), 2002, S. 29–35.

[80] Kristina Reiss und Joachim Thomas. „Wissenschaftliches Denken beim Beweisen in der Geometrie. Ergebnisse einer Studie mit Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe“. In: *mathematica didactica* 23, 2000, S. 96–112.

[81] Kristina Reiss und Stefan Ufer. „Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen“. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV)* 111 (4), 2009, S. 155–177.

[82] Hermann Schichl und Roland Steinbauer. *Einführung in das mathematische Arbeiten*. 2. Aufl. Berlin und Heidelberg: Springer-Verlag, 2012.

[83] Heinz Schumann. *Medien im fachlichen und überfachlichen Unterricht. Medienverwendung im Fach Mathematik*. Pädagogische Hochschule Weingarten, 2004. URL: http://thales.cs.upb.de:8080/mksu/mathe/einsatz_von_computerwerkzeugen_geometrie.pdf (besucht am 01.06.2013).

[84] Simon Singh. *Fermats letzter Satz: Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels*. München und Wien: Carl Hanser Verlag, 1988.

[85] Astrid Stengel. „Die Raumvorstellung mathematisch interessierter und begabter Schülerinnen und Schüler“. In: *mathematik lehren* 115, 2002, S. 63–65.

[86] Birgit Strobl. „Begründen im Geometrieunterricht als standardisierte (Grund-)Kompetenz“. Diplomarbeit. Universität Wien, 2010.

[87] Frauke Ulfig. *Geometrische Denkweisen beim Lösen von PISA-Aufgaben. Triangulation quantitativer und qualitativer Zugänge.* Wiesbaden: Springer-Verlag, 2013.

[88] Werner Walsch. *Zum Beweisen im Mathematikunterricht.* Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag, 1972.

[89] Werner Walsch. „Zur Entwicklung von Fähigkeiten im Beweisen im Mathematikunterricht mittlerer Klassen". In: *Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für „Didaktik der Mathematik" von 26.9. bis 29.9.1978.* (Klagenfurt). Hrsg. von Willibald Dörfler und Roland Fischer. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1979, S. 379–395.

[90] Keith Weber. „Problem-solving, proving and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction". In: *Journal of Mathematical Behaviour* 24, 2005, S. 351–360.

[91] Hans-Georg Weigand u. a. *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2009.

[92] Erich Wittmann. *Elementargeometrie und Wirklichkeit. Einführung in geometrisches Denken.* Braunschweig: Vieweg, 1987.

[93] Luzia Zöttl und Kristina Reiss. „Heuristische Lösungsbeispiele. Eine Lerngelegenheit für den anfänglichen Erwerb von Modellierungskompetenz". In: *Der Mathematikunterricht* 56 (4), 2010, S. 20–27.

Curriculum Vitae

Persönliche Daten

Name	Michaela Gassner
Geburtsdatum	15.01.1989
Geburtsort	Sankt Pölten
Staatsbürgerschaft	Österreich

Ausbildung

seit 10/2008	Lehramtsstudium Mathematik, Geographie und Wirtschaftskunde Institut für Mathematik, Institut für Geographie und Regionalforschung, Universität Wien
seit 10/2007 (Unterbrechung 08/2008 – 10/2010)	Bachelorstudium Mathematik Institut für Mathematik, Universität Wien
18.06.2007	Matura mit ausgezeichnetem Erfolg
1999 – 2007	Bundesgymnasium und Bundesrealgymnasium Krems

Berufserfahrung (Auswahl)

seit 10/2011	Studentische Mitarbeiterin (Tutorin) Institut für Geographie und Regionalforschung, Universität Wien
10/2012 – 02/2013	Studentische Mitarbeiterin (Tutorin) Institut für Mathematik, Universität Wien
08/2009 – 03/2011	Nachhilfe-Lehrkraft LernQuadrat Krems